



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

André Luiz Cordeiro dos Santos

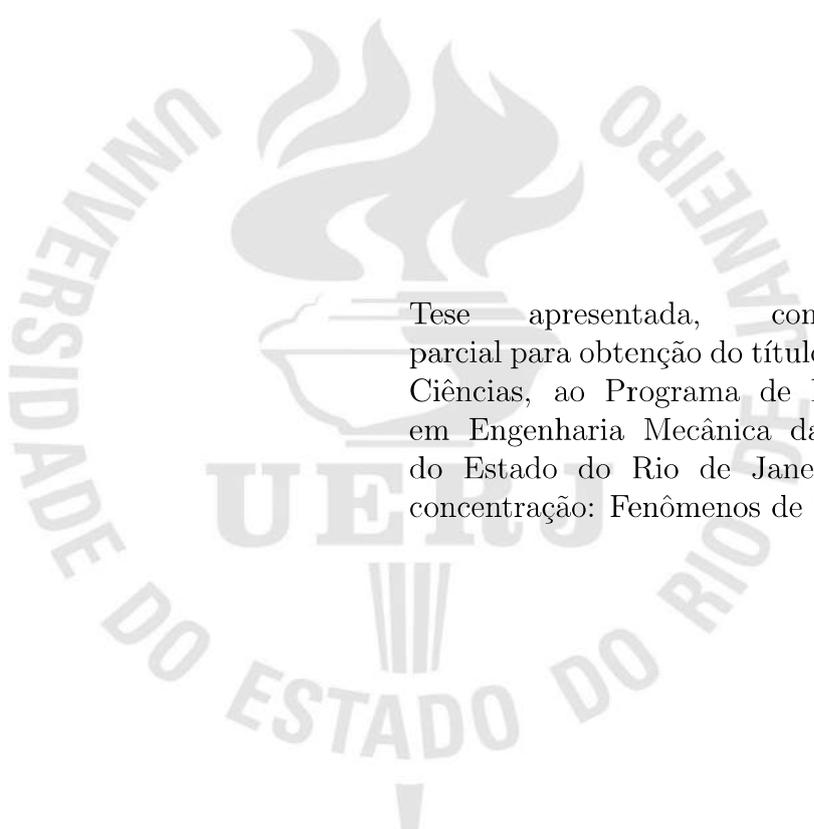
Recuperação do espectro direcional de ondas oceânicas com o
uso de radar de abertura sintética transportado por satélites

Rio de Janeiro

2015

André Luiz Cordeiro dos Santos

**Recuperação do espectro direcional de ondas oceânicas com o uso do SAR
transportado por satélite**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Orientadores: Prof. Dr. Luiz Mariano de Paes Carvalho Filho

Prof. Dr. Nelson Violante de Carvalho

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S237 Santos, André Luiz Cordeiro dos.
Recuperação do espectro direcional de ondas oceânicas com o uso do SAR transportado por satélite / André Luiz Cordeiro dos Santos. – 2015.
128f.

Orientadores: Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho, Nelson Violante de Carvalho.

Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Sensoriamento remoto - Teses. 3. Radar - Teses. 4. Ondas oceânicas - Teses. 5. Simulação (Computadores) - Teses. I. Carvalho Filho, Luiz Mariano Paes de. II. Carvalho, Nelson Violante de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 621:528.8

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

André Luiz Cordeiro dos Santos

**Recuperação do espectro direcional de ondas oceânicas com o uso do SAR
transportado por satélites**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Aprovado em: 29 de outubro de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama
Faculdade de Engenharia Mecânica - UERJ

Prof. Dr. Nelson Violante de Carvalho
Programa de Engenharia Oceânica - UFRJ

Prof. Dr. Wilton Zumpichiatti Arruda
Instituto de Matemática - UFRJ

Prof. Dr. Afonso de Moraes Paiva
Programa de Engenharia Oceânica - UFRJ

Prof. Dr. Luiz Gallisa Guimarães
Programa de Engenharia Oceânica - UFRJ

Rio de Janeiro

2015

DEDICATÓRIA

A minha esposa Fernanda, pelo amor, pela sua importante presença e pelo grande estímulo que recebi em todos os momentos.

AGRADECIMENTO

Esta tese não é resultado apenas de um esforço individual. Ele nasce de valiosas contribuições que recebi durante minha vida acadêmica através dos diversos professores das instituições em que tive o prazer de estudar.

Tenho a certeza de que citar nominalmente todas as pessoas a quem devo expressar meu agradecimento é missão quase impossível. Ainda assim, eu o farei sem a pretensão de atingir uma lista completa e justa.

Primeiramente, ao meu orientador, professor Luiz Mariano Carvalho por ter conduzido este trabalho de forma sábia e paciente, quero, enfaticamente, expressar minha gratidão: muito obrigado! Sua confiança e perspicácia abriram novos horizontes para mim!

Ao professor Nelson Violante, meu coorientador, também manifesto meu sincero agradecimento pela colaboração técnica, paciência e compreensão demonstradas ao longo desta jornada. Muito obrigado pelas inúmeras tardes de quartas-feiras disponibilizadas para o crescimento deste trabalho.

Aos professores Norberto Mangiavacchi e Rogério Saldanha da Gama, ambos do programa de pós-graduação em engenharia mecânica, obrigado pelas inúmeras conversas ao longo deste período, além da grande consideração demonstrada. Vocês, sem dúvidas, foram importantes para mim na construção desta tese.

Ao companheiro de doutorado, Felipe Marques dos Santos, a quem devo todos os experimentos computacionais presentes nesta tese, muito obrigado! Obrigado pelas incontáveis trocas de informação científica ao longo destes últimos anos! Muito obrigado pelo apoio nos momentos pessoais mais difíceis, obrigado pela amizade!

À Patrícia Nunes da Silva, agradeço pelo incentivo incondicional na obtenção deste título. Muito obrigado pela generosidade demonstrada comigo ao longo desta caminhada e, acima de tudo, pela amizade de sempre!

Aos professores e amigos, Antônio Roberto da Silva e Helvécio Rubens Crippa, agradeço-lhes pelo apoio incondicional e confiança. Vocês, certamente, são corresponsáveis por esta realização minha.

Ao companheiro Alexandre de Souza Soares, agradeço pelas inúmeras conversas,

quase diárias, sobre a vida, o mundo e a matemática. Sua amizade, certamente, suaviza dificuldades, diverte a alma.

Agradeço ao companheiro Heitor Achilles que, mesmo um pouco afastado devido às imposições que a vida de um trabalhador requer, sempre acompanhou e torceu por meu sucesso ao longo desta caminhada.

Ao camarada Márcio Violante, agradeço pela grande amizade, incentivo ao longo dos anos e pela confiança em mim depositada.

Aos meus ídolos do rock n roll: Jimmy Page, Eric Clapton, Mark Knopfler, Carlos Santana e Slash, agradeço-lhes por me energizarem com seus contagiantes solos de guitarra, por suas canções libertadoras.

Ao meu ídolo do esporte, Roger Federer, agradeço por me alegrar com suas jogadas mágicas, por mostrar que é possível realizar o que parece impossível para alguns. Obrigado por me fazer acreditar!

Finalmente, agradeço à Fernanda Gabriela, minha esposa, minha “dandinha”, meu amor. Agradeço-lhe pela paciência e compreensão ao longo destes últimos anos! Seu amor me faz mais forte! Obrigado!

Obrigado DEUS!

RESUMO

SANTOS, André Luiz Cordeiro. *Recuperação do espectro direcional de ondas oceânicas com o uso do SAR transportado por satélite*. 128 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2015.

Hasselmann e Hasselmann (1991) mostraram que a recuperação do espectro direcional de ondas com o uso do SAR (*Synthetic Aperture Radar* ou Radar de Abertura Sintética) transportado por satélite pode ser baseada numa transformação analítica que mapeia o espectro direcional de ondas sobre o espectro de imagem SAR correspondente e sua inversão. Com a assunção de uma hipótese de limitação da energia espectral, uma nova e detalhada dedução da transformação de Hasselmann é apresentada e utilizada no desenvolvimento de um modelo computacional para simular a recuperação do espectro de ondas com o uso do SAR. Além disto, um estudo sobre os impactos provocados pela variação da direção principal do espectro de ondas inicial, utilizado como informação a priori no mecanismo de inversão, é realizado utilizando-se o modelo computacional proposto.

Palavras-chave: Espectro direcional de ondas, Radar de abertura sintética, Transformação de Hasselmann, Sensibilidade.

ABSTRACT

SANTOS, André Luiz Cordeiro, *Recovery of directional ocean wave spectrum using synthetic aperture radar carried by satellite*. 128 p. Thesis (Doctorate in Mechanical Engineering) - Faculty of Engineering, Rio de Janeiro State University (UERJ), Rio de Janeiro, 2015.

Hasselmann and Hasselmann (1991) showed that the recovery of directional wave spectrum using SAR (Synthetic Aperture Radar) carried by satellite can be based on an analytical transformation that maps the directional wave spectrum onto the corresponding SAR image spectrum and its inversion. With the assumption of spectral energy limitation, a new and detailed derivation of Hasselmann transformation is presented and used in the development of a computational model to simulate the recovery of the wave spectrum using SAR. In addition, a study on the impacts caused by varying the main direction of the initial wave spectrum, used as a priori information in the inversion mechanism, is performed using the proposed computational model.

Keywords: Directional wave spectrum, Synthetic aperture radar, Hasselmann transformation, Sensitivity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplo de Swell. Nota-se um perfil praticamente senoidal, podendo ser considerado uma onda harmônica.....	26
Figura 2	A superfície oceânica das ondas geradas pelo vento é uma coleção irregular de ondas de pequenas cristas.	32
Figura 3	Função de densidade de probabilidade da elevação da superficial do oceanos (linha sólida) e medições (pontos) de acordo com Kanevsky (2009)	35
Figura 4	(a) Mapa de contorno de um espectro direcional de ondas com direção principal de 110° em relação ao norte; Os ciclos correspondem a, aproximadamente, comprimentos de ondas de 60 m, 15 m, 7 m e 4 m respectivamente; (b) Perspectiva meridional do espectro direcional de ondas. Convenção: Norte = 0° , Leste = 90° , Sul = 180° , Oeste = 270°	43
Figura 5	Forma típica de um espectro de frequências para mar em desenvolvimento (Kahma <i>et al.</i> , 2005).	44
Figura 6	Duas configurações de estados de mar (esquerda) acompanhadas de seus respectivos espectros direcionais de ondas (direita). Ambos os espectros direcionais possuem a mesma direção principal, no entanto, possuem espalhamentos direcionais distintos. (Kahma <i>et al.</i> , 2005).....	46
Figura 7	Distribuição direcional do tipo \cos^{2s} . A ilustração mostra como a energia correspondente a uma certa frequência se distribui em torno da direção dominante (indicada no eixo horizontal por 0°). Quando $s = 10$, praticamente 85% da energia está concentrada numa faixa angular de $\pm 30^\circ$ em torno da direção dominante (Goda, 2000).	48
Figura 8	Elementos fundamentais sobre radares de abertura sintética	51
Figura 9	A seção transversal do radar depende do ângulo de incidência do campo eletromagnético do radar (\mathbf{E}) e a normal (\mathbf{n}) a uma faceta retroespalhadora	53
Figura 10	Modulação hidrodinâmica: zonas de convergência e divergência	54

Figura 11 Efeito bunching: o impacto do movimento orbital das ondas sobre a posição de uma faceta retroespalhadora do campo de ondas no plano da imagem SAR. O eixo vertical refere-se ao crescimento médio da esbeltez das ondas. Para uma dada esbeltez, a posição de uma faceta retroespalhadora da superfície do oceano no plano da imagem é obtida pela interseção do raio associado a reta horizontal correspondente a esbeltez dada. As letras <i>p</i> e <i>n</i> indicam o movimento orbital das partículas que, respectivamente, aproximam-se e afastam-se da plataforma do SAR	54
Figura 12 Variação da densidade das facetas retroespalhadoras no plano da imagem SAR conforme as ondas aproximam-se ou afastam-se da plataforma do SAR	55
Figura 13 Imagem SAR (autêntica) do estreito de Gibraltar.....	58
Figura 14 O SAR possui diversos modos de operação, dentre os quais o chamado “wave mode”. Neste modo de operação o SAR produz imagens correspondentes a áreas de 5 Km (range) × 10 Km (azimute), chamadas imagetes (fonte: CSA, 1996).	61
Figura 15 Diagrama do modelo computacional proposto para recuperação do espectro de ondas com o uso do SAR. As flechas tem origem no dado de entrada requerido pela correspondente célula do mecanismo.....	79
Figura 16 Esquerda: foto real de um campo de ondas ao largo da costa de Noruega; direita: mar simulado com espectro JONSWAP e uma distribuição \cos^{2s} com parâmetros característicos para geração de ondas (Kahma <i>et al.</i> , 2005)	80
Figura 17 Representação da variação do desvio da direção média (adimensional) do espectro de ondas recuperado em função da direção principal do espectro de ondas inicial conforme a direção principal do espectro de referência relativamente à direção do voo do satélite.	87
Figura 18 Representação da variação do desvio da direção principal do espectro de ondas recuperado em função da direção principal do espectro de ondas inicial conforme a direção principal do espectro de referência relativamente à direção do voo do satélite.....	88
Figura 19 Representação da variação do desvio da altura significativa (adimensional) do espectro de ondas recuperado em função da direção principal do espectro de ondas inicial conforme a direção principal do espectro de referência relativamente à direção do voo do satélite.	89
Figura 20 Os gráficos representam da densidade média de energia correspondente ao espectro de ondas recuperado obtido de espectro de imagem SAR simulados, gerados a partir de espectros de ondas de referência com direções principais de 0° , 45° e 90° respectivamente.	90

Figura 21	Representação da variação do desvio do período de pico do espectro de ondas recuperado em função da direção principal do espectro de ondas inicial conforme a direção principal do espectro de referência relativamente à direção do voo do satélite.	91
Figura 22	Representação da variação do coeficiente de correlação entre o espectro de ondas recuperado e o espectro de ondas de referência em função da direção principal do espectro de ondas inicial conforme a direção principal do espectro de referência relativamente à direção do voo do satélite.	92
Figura 23	Espectro direcional de ondas ($JONSWAP \times \cos^{2s}$) com direção principal de 45° , utilizado como espectro de ondas de referência numa das simulações. Os círculos concêntricos indicam a variação da frequência (Hz), enquanto a direção é indicada (graus) no círculo maior.	93
Figura 24	Espectro de imagem SAR com direções 45° e 225° (ambiguidade) gerado a partir do espectro de ondas referência da Figura 23.	94
Figura 25	Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = -30^\circ$	95
Figura 26	Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = 0^\circ$	95
Figura 27	Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = 45^\circ$	96
Figura 28	Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = -90^\circ$	97
Figura 29	Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = -105^\circ$	97
Figura 30	Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = 150^\circ$	98
Figura 31	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	106
Figura 32	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	107
Figura 33	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	108
Figura 34	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	109

Figura 35	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	110
Figura 36	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	111
Figura 37	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	112
Figura 38	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	113
Figura 39	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	114
Figura 40	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	115
Figura 41	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	116
Figura 42	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	117
Figura 43	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	118
Figura 44	Análise visual da influência da mudança de direção do <i>first-guess</i> sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.	119
Figura 45	Configuração de uma onda harmônica bidimensional de comprimento λ e vetor número de onda \mathbf{k}	120

Figura 46 Perfil de uma onda harmônica.	121
--	-----

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	17
1	PANORAMA GERAL	20
1.1	Motivação e Objetivos	22
1.2	Contribuição Científica	23
1.3	Estrutura do Trabalho	24
2	REPRESENTAÇÃO DE ONDAS OCEÂNICAS: FORMALISMO MATEMÁTICO	25
2.1	Ondas: breve introdução	25
2.2	Modelo determinístico	26
2.2.1	As equações básicas de movimento	26
2.2.2	Linearização	28
2.2.3	Solução do modelo linear	29
2.2.4	Representação canônica	31
2.3	Modelo estocástico	32
2.3.1	Randomização do modelo linear de ondas	32
2.3.2	Teoria Gaussiana linear de ondas	34
2.3.3	Estacionareidade e homogeneidade	35
2.4	Formalismo de Komen	36
2.4.1	Representação canônica randomizada	37
2.4.2	Filtros lineares e funções de transferência	37
2.4.3	A identidade de Komen	38
2.4.3.1	Condição de Komen	38
3	TEORIA ESPECTRAL DE ONDAS	40
3.1	Energia das ondas	40
3.2	Espectro de ondas generalizado	41
3.3	Espectro de ondas	41
3.4	Estado de mar	43
3.4.1	Espectro direcional de ondas	43

3.5	Parâmetros Espectrais	45
3.5.1	Altura significativa.....	45
3.5.2	Período de pico.....	45
3.5.3	Período médio	45
3.5.4	Direção média	46
3.5.5	Espalhamento direcional.....	46
3.5.6	Direção principal	47
3.5.7	Parametrização espectral	47
3.6	Espectro de ondas congelado.....	49
4	DETECÇÃO DE ONDAS ATRAVÉS DO SAR	50
4.1	Descrição geral	50
4.2	Princípio básico: ressonância de Bragg.....	51
4.3	Mecanismos de modulação: detecção de ondas	52
4.3.1	Modulação tilt.....	53
4.3.2	Modulação hidrodinâmica	53
4.3.3	Velocidade bunching	54
4.4	Teoria linear de modulação.....	55
4.4.1	A função de transferência de modulação tilt	56
4.4.2	A função de transferência de modulação hidrodinâmica	56
4.4.3	A função de transferência de modulação <i>velocity bunching</i>	57
4.5	Formação de uma imagem SAR.....	57
4.5.1	Imagem congelada	58
4.5.2	Espectro de imagem RAR.....	59
4.5.3	Efeitos de Movimento.....	60
4.6	A imagem SAR.....	60
4.6.1	Espectro de imagem SAR	61
4.6.2	Uma aproximação da transformação de Hasselmann	62
5	A TRANSFORMAÇÃO DE HASSELMANN: UMA ALTER-	
	NATIVA COM HIPÓTESE ADICIONAL	64
5.1	O núcleo de Krogstad.....	65
5.1.1	Teorema de Representação	65
5.2	Funções de covariância.....	68

5.2.1	Autovariância da imagem RAR	68
5.2.2	Covariância da imagem RAR e da velocidade orbital	69
5.2.3	Autovariância da velocidade orbital	69
5.3	Cálculo do núcleo de Krogstad.....	69
5.3.1	O argumento	69
5.3.2	Funções auxiliares.....	71
5.3.3	Relação entre as funções de covariância e auxiliares.....	72
5.3.4	Forma computacional da transformação de Hasselmann	74
6	UM MODELO TEÓRICO-COMPUTACIONAL: PROPOSTA PARA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE.....	77
6.1	Modelo teórico	78
6.2	Conceituação	81
6.2.1	Correlação espectral	81
6.2.2	Impactos sobre os parâmetros espectrais	82
6.2.3	Esquema numérico	83
6.3	Simulações numéricas	84
6.4	Resultados	86
6.4.1	Direção média	87
6.4.2	Direção principal	88
6.4.3	Altura significativa e densidade média de energia	89
6.4.4	Período de pico.....	92
6.4.5	Correlação espectral	92
6.4.6	Correlação espectral × Percepção visual	93
	CONCLUSÃO	99
	REFERÊNCIAS.....	102
7	APÊNDICE A	106
7.1	Resultados dos experimentos com direção principal da referência 0°	106
7.2	Experimentos - direção principal da referência: 45°	111
7.3	Experimentos - direção principal da referência: 90°	115

8	APÊNDICE B	120
8.1	Ondas harmônicas planas	120
8.2	Elementos básicos	121
9	APÊNDICE C	122
9.1	Impluso unitário (função de Dirac)	122
9.2	Transformada de Fourier	122
10	APÊNDICE D	124
10.1	Variáveis aleatórias	124
10.2	Campos randômicos no espaço-tempo	124
10.3	Correlação e covariância	125
10.4	Campos randômicos estacionários e homogêneos	126
10.5	Campos randômicos Gaussianos	126

INTRODUÇÃO

O conhecimento das propriedades direcionais das ondas é de grande interesse em oceanografia e em engenharia costeira. Há inúmeras ocasiões em que a direcionalidade das ondas tem influência direta (Chakrabarti, 1987): a estabilidade de estruturas costeiras, a agitação marítima em portos, a evolução morfodinâmica do litoral, a construção de estruturas off-shore, entre outros, são alguns exemplos em que conhecer o espectro direcional de ondas é fundamental.

O SEASAT, satélite lançado em 1978 e equipado com um radar de abertura sintética (SAR, da sigla em inglês), tinha como missão principal fazer o sensoriamento remoto de oceanos. Com os dados adquiridos nesta missão, constatou-se que uma vasta quantidade de informações sobre fenômenos oceanográficos estaria disponível a partir das imagens feitas pelo satélite, inclusive o espectro direcional de ondas.

As pesquisas desenvolvidas na década de 1980 (Alpers, 1983; Bruning *et al.*, 1988; Hasselmann, Raney e Plant, 1985) foram decisivas para uma maior compreensão de como as ondas geradas pelo vento podem ser detectadas através do SAR. Talvez, o ápice deste avanço tenha sido o desenvolvimento de um mecanismo para recuperação do espectro direcional de ondas oceânicas com o uso de uma imagem SAR. Este mecanismo pode ser introduzido a partir de duas questões essenciais:

- (1) o desenvolvimento de uma teoria que permitisse obter um mapeamento que levasse o espectro de ondas oceânicas sobre do espectro de imagem SAR;
- (2) a elaboração de um método de inversão deste mapeamento, estimando, assim, o espectro de ondas oceânicas a partir de uma imagem SAR obtida.

Ambas as questões foram resolvidas por Hasselmann e Hasselmann (1991), porém, somente a questão (2) recebeu atenção sistemática da comunidade científica. De fato, foram desenvolvidos diversos esquemas numéricos (Krogstad, Samset e Vachon, 1994; Hasselmann *et al.*, 1996; Mastenbroek e Valk, 2000; Schulz-Stellenfleth *et al.*, 2005; Collard, Ardhuin e Chapron, 2005) para estimativas do espectro de ondas oceânicas.

O método de inversão, originalmente proposto por Hasselmann para responder (2), foi baseado na verossimilhança máxima entre o chamado espectro de ondas inicial (*first-guess*) e os dados obtidos pelo SAR. No trabalho de Heimbach, Hasselmann e Hasselmann

(1996), há uma discussão sobre experimentos qualitativos que foram conduzidos com modificações na energia, frequência e direção do *first-guess* para aferir a dependência do espectro direcional de ondas recuperado em relação ao *first-guess*.

A abordagem de Hasselmann dada à questão (1) apoia-se fortemente na hipótese de que a modulação SAR pode ser considerada um processo linear. Através de uma representação discreta do campo estocástico da elevação da superfície oceânica e com o uso de todas as suas propriedades estatísticas (estacionariedade, homogeneidade, Gaussianidade, dentre outras), eles calcularam, usando um algebrismo um tanto complicado e pouco compreensível, o espectro de imagem SAR como função do espectro de ondas.

Vale ressaltar que não há na literatura referência que clarifique esta abordagem proposta por Hasselmann. Sobre a questão (1), apenas Krogstad (1992) a revisitou. Sua contribuição foi muito mais no sentido de apresentar uma dedução mais elegante e concisa para o referido mapeamento oceano-SAR obtido por Hasselmann e Hasselmann (1991).

Entretanto, o trabalho de Krogstad requer matemática mais sofisticada, a saber, medidas espectrais ortogonais (Kahma *et al.*, 2005). Ao contrário de Hasselmann e Hasselmann (1991), sua dedução não depende da hipótese de que a modulação SAR seja considerada um processo linear. Além disto, a Gaussianidade do campo estocástico das elevações oceânicas é fortemente utilizada, pois campos estocásticos que gozam desta propriedade podem ser caracterizados apenas por seus momentos de até segunda ordem.

Apesar dos significativos avanços atingidos na recuperação do espectro de ondas com o uso do SAR, demonstrados em artigos posteriores ao pioneiro trabalho de Hasselmann, uma boa parte destes (Engen e Johnsen, 1995; Mastenbroek e Valk, 2000; Schulz-Stellenfleth, J.; Lehner, S.; Hoja, D., 2005) baseia-se no mapeamento oceano-SAR obtido por Hasselmann e Hasselmann (1991).

Com isto, na primeira parte desta tese, propõe-se uma revisita à transformação de Hasselmann. De fato, uma nova dedução é apresentada. A abordagem aqui proposta diferencia-se das duas mencionadas anteriormente, devido aos seguintes pontos:

- (a) admite-se a hipótese de Komen (Komen *et al.*, 1994)
- (b) aperfeiçoa-se o argumento usado no artigo de Krogstad (1992)

A hipótese de Komen permite que seja usado no lugar de integrais de Fourier-Stieltjes (medidas espectrais ortogonais), como feito em Krogstad (1992), integrais de

Riemann estocásticas, as quais são mais simples do ponto de vista técnico. Além disto, esta hipótese não é restritiva, sendo, portanto, uma boa aproximação para a realidade observada em oceanos (Komen *et al.*, 1994).

O aperfeiçoamento do argumento de Krogstad permite diminuir consideravelmente o algebrismo envolvido na dedução feita por Krogstad (1992). Em particular, há uma redução na ordem da matriz de covariância que contém informações sobre todas as funções de transferência de modulação envolvidas no imageamento SAR.

A segunda parte desta tese trata de problemas ligados à questão (2). Nesta etapa, propõe-se um estudo numérico da influência do *first-guess* sobre o mecanismo de inversão original de Hasselmann a partir de um modelo teórico-computacional aqui idealizado.

Este modelo teórico-computacional baseia-se na geração sintética de espectros de imagens SAR a partir de parametrizações do espectro direcional de ondas. Especificamente, aplica-se a versão computacional da transformação de Hasselmann a espectros de ondas empíricos para produzir espectros de imagens SAR sintéticos, criando, assim, um cenário artificial de imageamento SAR do oceano. Com isto é possível simular inúmeras situações de interesse e com grande controle sobre todos os parâmetros envolvidos neste complexo mecanismo de recuperação de espectros de ondas oceânicas.

No estudo numérico realizado são definidos alguns indicadores, dentre os quais o principal, a correlação (similaridade) espectral. Estes indicadores cumprem o papel de tentar avaliar o quão confiáveis são os resultados fornecidos pelo mecanismo de inversão.

Em particular, a ideia de propor a correlação espectral foi inspirada no artigo de Cartwright (1990), onde são analisados os impactos da variação da altura do satélite na recuperação do espectro de ondas com o uso do SAR. Utilizando-se o produto interno de Frobenius entre o espectro de ondas de referência (empírico) e o espectro de ondas recuperado (pela inversão), define-se a correlação entre estes espectros de ondas, isto é, a similaridade espectral.

Resultados sugerem que o indicador assim definido é sensível às distorções do espectro de onda recuperado pelo SAR provocadas pela variação direcional do *first-guess*.

1 PANORAMA GERAL

O estado de mar pode ser completamente caracterizado pelo espectro bidimensional de ondas, o qual descreve a distribuição da energia do oceano com respeito à direção de propagação das ondas. Com o advento do SAR na década de 1950, uma quantidade considerável de dados acerca dos oceanos tornou-se disponível para cientistas.

Para detectar ondas oceânicas, basicamente, o SAR mede a modulação das ondas oceânicas de pequeno comprimento provocada pelas ondas de grande comprimento (Kharif, Slunyaev e Pelinovsky, 2009). Para estados de mar de calmo a moderado, estas modulações são provenientes da inclinação da superfície oceânica e dos movimentos hidrodinâmicos dos elementos retrospalhadores, ambos provocados pelas ondas de grande comprimento.

Existe também uma terceira modulação, denominada *velocity bunching*, a qual está relacionada ao deslocamento da posição de um elemento retrospalhador da superfície oceânica no plano da imagem SAR.

Estes três mecanismos, por assim dizer, determinam uma imagem SAR, que é, simplesmente, a distribuição espacial da energia retrospalhada pela superfície do mar e recebida pelo radar.

Até antes da década de 1990, era mais comum que estimativas do espectro de ondas fossem feitas a partir de espectros unidimensionais de frequências. Em geral, para estas estimativas usavam-se medições de boias ou outros instrumentos *in situ* que, em comparação com o SAR, possuem severas limitações quanto à cobertura espacial.

Bruning, Alpers e Hasselmann (1990) desenvolveram uma técnica que passou a utilizar as imagens obtidas pelo SAR para recuperar o espectro de ondas. Esta técnica baseia-se em simulação de Monte Carlo, porém, possui custo computacional altíssimo, o que a tornou pouco atrativa.

Neste sentido, Hasselmann e Hasselmann (1991) alcançaram um notório avanço ao proporem um método computacionalmente eficiente para recuperação do espectro de ondas a partir de imagens SAR.

Fundamentalmente, esta proposta pode ser dividida em três passos: o primeiro deles é a definição de um procedimento numérico para recuperação do espectro de ondas a partir de uma imagem SAR é determinar uma relação entre a variância da intensidade

da imagem SAR e a variância da elevação das ondas do mar. Partindo de princípios fundamentais, eles estabeleceram que estas variâncias estão relacionadas através de uma complexa transformação \mathcal{H} que satisfaz

$$\mathcal{H}(\Psi(\mathbf{k})) = P_{sar}(\mathbf{k}), \quad (1.1)$$

em que $\Psi(\mathbf{k})$ é a variância da elevação das ondas do mar (espectro de ondas) e $P_{sar}(\mathbf{k})$ é a variância da intensidade da imagem SAR (espectro de imagem SAR), ambos funções do vetor de ondas \mathbf{k} .

Uma hipótese essencial assumida em Hasselmann e Hasselmann (1991) para obtenção de (1.1) é o chamado modelo de duas escalas (Hasselmann, Raney e Plant, 1985). Sendo assim, é possível supor que os mecanismos de modulação SAR estão linearmente relacionados com a elevação do oceano através de filtros lineares, representados por suas respectivas funções de transferência.

Entretanto, a obtenção do espectro de ondas a partir de uma imagem SAR consiste em um problema inverso e mal posto. De fato, a transformação de Hasselmann \mathcal{H} é tal que

$$\mathcal{H}(\Psi(\mathbf{k})) = \mathcal{H}(\Psi(-\mathbf{k})), \quad (1.2)$$

e isto revela, portanto, que há uma ambiguidade direcional de 180° envolvida nesta formulação.

O segundo passo requerido para obtenção do espectro de ondas a partir de uma imagem SAR, consiste na regularização do problema (1.1). Isto leva a minimização de um funcional não linear J (Hasselmann e Hasselmann, 1991), cujo seu valor mínimo é atingido para o espectro de ondas correspondente a imagem SAR observada. Explicitamente, este funcional J é dado por

$$J(\Psi(\mathbf{k})) = \int |\mathcal{H}(\Psi(\mathbf{k})) - P_{obs}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} + \epsilon \int \frac{|\Psi(\mathbf{k}) - \Psi_0(\mathbf{k})|^2}{|B + \Psi(\mathbf{k})|^2} d\mathbf{k}, \quad (1.3)$$

em que $P_{obs}(\mathbf{k})$ representa o espectro de imagem SAR observado, extraído a partir da imagem SAR, enquanto que $\Psi_0(\mathbf{k})$ representa o chamado espectro de ondas inicial (*first-guess*).

A constante positiva ϵ é relativa a confiabilidade do *first-guess* usado na inversão,

enquanto que a constante positiva B é usada para evitar inconsistências matemáticas na minimização do funcional (Komen *et al.*, 1994).

O espectro de ondas inicial é responsável por resolver a ambiguidade direcional inerente à imagem SAR, de acordo com o que é mostrado em (1.2). Além disto, estende o espectro de ondas recuperado à região dos pequenos comprimentos de onda (altas frequências), já que há uma perda da informação na direção paralela ao voo da plataforma do satélite, conhecida como *cut-off* azimutal (Robinson, 2004).

Observando-se a expressão (1.3), nota-se, claramente, que o mecanismo de inversão proposto é sensível a escolha de um espectro de ondas inicial, em geral, é obtido de um modelo de ondas. De fato, quanto maior for a confiabilidade do espectro de ondas inicial em relação a imagem SAR observada, espera-se um melhor resultado do processo de inversão (Hasselmann e Hasselmann, 1991).

Finalmente, o terceiro passo do método de obtenção de espectros de ondas: o desenvolvimento de um algoritmo para minimização do funcional J e sua implementação computacional. Tal algoritmo numérico, ainda hoje amplamente utilizado por vários centros de previsão operacional de ondas, é o chamado algoritmo MPI, desenvolvido na instituição que lhe dá o nome, o Instituto Max Plank (Hasselmann e Hasselmann, 1991).

Os três passos apresentados descrevem, sucintamente, o mecanismo de recuperação do espectros de ondas a partir de uma imagem SAR, terreno sobre qual se desenvolverá esta tese.

1.1 Motivação e Objetivos

O problema de estimar o espectro de ondas a partir de imagens SAR representa um problema desafiador, principalmente, devido ao comportamento aleatório da superfície oceânica ao longo do tempo. Apesar deste problema ter sido satisfatoriamente resolvido por Hasselmann e Hasselmann (1991), o desenvolvimento matemático por eles apresentado é complicado, até mesmo para especialistas no assunto.

Dentre inúmeras razões para o desenvolvimento desta tese, as seguintes colocações são centrais:

(I) Excetuando-se o trabalho do matemático norueguês Krogstad (1992), não há nenhum trabalho que clarifique a transformação de Hasselmann. Krogstad conseguiu obter uma

dedução aparentemente mais simples da transformação de Hasselmann. No entanto, ele fez uso de ferramentas matemáticas bastante sofisticadas (medidas espectrais ortogonais), o que tornou seu trabalho bastante intrincado e difícil de ser assimilado. Além disto, seu desenvolvimento não foi completo e os longuíssimos e complicados cálculos persistiram em seu trabalho. *Será possível uma abordagem mais simples que as de Hasselmann e Hasselmann (1991) e Krogstad (1992)?*

(II) A inversão do mecanismo de Hasselmann é dependente de informação *a priori* dada pelo *first-guess*. *É possível desenvolver um modelo computacional que simule a recuperação do espectro de ondas com o uso do SAR para análise desta dependência sem empregar um simulador de imagens SAR? Como?*

(III) Na literatura, não há praticamente estudos sobre a influência do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado pelo SAR. Até onde se sabe, existe apenas um estudo qualitativo acerca desta influência (Heimbach, Hasselmann e Hasselmann, 1996). Portanto, nunca foi proposto um estudo quantitativo acerca desta questão. *Como medir numericamente esta influência? Quão sensível é o mecanismo de inversão às variações do first-guess? Como interpretar os resultados obtidos?*

Estas questões, inteiramente entrelaçadas, fornecem o combustível para este trabalho.

1.2 Contribuição Científica

- Uma nova, completa e relativamente curta dedução da transformação de Hasselmann é obtida com o uso de uma hipótese adicional;

- Geração sintética de espectros de imagem, com o uso do processador espectral (implementação computacional da transformação de Hasselmann), a partir de modelos paramétricos de espectros de ondas;

- Modelo teórico-computacional para simulação de sensoriamento remoto de oceanos com o uso do SAR;

- Proposição e análise de alguns indicadores numéricos correspondentes às perturbações provocadas pela variação do *first-guess* sobre o mecanismo de inversão de Hasselmann.

1.3 Estrutura do Trabalho

Opta-se por um desenvolvimento construtivo, de modo que são introduzidos praticamente todos os elementos fundamentais para a compreensão do trabalho. Esta tese está, portanto, assim estruturada: no capítulo 1 são apresentados alguns aspectos históricos do SAR, o problema de recuperação de espectros de ondas via SAR, além dos objetivos e contribuições desta tese; no capítulo 2 é apresentado um modelo determinístico simplificado para ondas e suas limitações, além da modelagem estocástica para oceanos; os conceitos de espectros de ondas e estado de mar, fundamentais no contexto do estudo realizado, são apresentados no capítulo 3; no capítulo 4 são tratados, sucintamente, alguns aspectos do SAR. Os capítulos 2, 3 e 4 são, de fato, suporte para os capítulos posteriores, muito embora, tratamento diferenciado ao encontrado na literatura corrente seja, por vezes, apresentado neles. No capítulo 5 uma nova dedução da transformada integral de Hasselmann é apresentada. Finalmente, no capítulo 6, através de experimentos numéricos, um primeiro estudo sobre a sensibilidade do mecanismo de recuperação de imagens em relação a dependência da direção principal do espectro inicial de ondas é desenvolvido. Há um apêndice na parte final desta tese que, basicamente, introduz rudimentos teóricos sobre ondas (harmônicas) e campos estocásticos. Além disto, nele são apresentados todas as simulações realizadas.

2 REPRESENTAÇÃO DE ONDAS OCEÂNICAS: FORMALISMO MATEMÁTICO

Um dos objetivos deste capítulo é estabelecer uma representação matemática adequada para elevação da superfície oceânica observada em águas profundas. Isto é feito a partir das soluções harmônicas do modelo determinístico oceano-atmosfera, introduzidas na seção 2.2, e de sua randomização, vista na subseção 2.3.1. Deste modo, será possível, na subseção 2.4.1, considerar uma representação do campo de elevações da superfície do oceano através de uma integral de Riemann estocástica (Lutes e Sarkani, 2003; Hsu, 1997). Isto dispensa a necessidade do uso de medidas espectrais (Krogstad, 1992) deixando, sem dúvidas, a abordagem matemática menos técnica.

Além disto, é necessário estabelecer o formalismo algébrico introduzido por Komen *et al.* (1994), adequando-o a representação do campo de ondas aqui utilizada. Isto será feito na seção 2.4. Entretanto, relativamente à teoria de sensoriamento remoto através do SAR, o ponto mais relevante deste capítulo é a possibilidade de relacionar qualquer quantidade conectada ao campo das elevações oceânicas, em particular os mecanismos de modulação (sob hipóteses a serem clarificadas), através das chamadas funções de transferência vistas na subseção 2.4.2.

As referências clássicas que tratam, parcialmente, dos temas deste capítulo são Komen *et al.* (1994) e Janssen (2004).

2.1 Ondas: breve introdução

Basicamente, as ondas são uma reação dos oceanos em resposta ao vento e variações de pressão na interface oceano-atmosfera. Embora, por vezes rítmica e monotonamente repetitiva, as superfícies oceanicas são um tanto imprevisíveis em seus detalhes. As ondas de superfície são estudadas ativamente por matemáticos e físicos desde os primórdios da ciência moderna, mas, ainda assim, este fenômeno não pode ser explicado ou previsto rigorosamente pelas teorias existentes. Interações não lineares entre vento, ondas e correntes provocam problemas teóricos muito difíceis, assim como tornam difícil a compreensão e obtenção de dados.

Ondas harmônicas¹ de pequena amplitude, que representam uma abstração pura-

¹ver 8.1

mente matemática, fornecem informações básicas sobre a dinâmica das ondas reais. O termo “onda harmônica” é usado em oposição ao termo “onda irregular”. Ondas irregulares são ondas reais, observadas na natureza em geral. Um swell (Figura 1), isto é, ondas geradas pelos ventos e que afastaram-se de suas regiões de formação (portanto, não recebendo mais energia do vento), assemelha-se muito mais as ondas regulares que as ondas irregulares, formadas por vento local e ainda próximas desta região de geração.

Ondas irregulares tem natureza estocástica e devem ser pensadas, em teoria, como a superposição de ondas de diferentes frequências, diferentes direções de propagação e diferentes amplitudes.

2.2 Modelo determinístico

O sistema oceano-atmosfera é, idealmente, governado pelas equações de Navier-Stokes para fluidos de duas camadas. Este problema é muito complicado para ser resolvido em toda a sua generalidade e, portanto, faz-se necessário reduzir a complexidade destas equações. Para isto, na subseção 2.2.2 será considerada a forma linear das equações de Navier-Stokes para um fluido de uma camada sob a ação do campo gravitacional.



Figura 1 Exemplo de Swell. Nota-se um perfil praticamente senoidal, podendo ser considerado uma onda harmônica.

2.2.1 As equações básicas de movimento

De acordo com Batchelor (1967), enquanto a dinâmica da física clássica é governada pelas Leis de Newton, para fluidos esta lei toma a forma das equações de Navier-Stokes. O sistema atmosfera-oceano consiste em um fluido de duas densidades, ar e água. Então, a fim de determinar sua evolução no tempo, deve-se resolver as equações de Navier-Stokes

para um fluido de duas camadas.

Considere-se, então, o sistema atmosfera-oceano um fluido incompressível com densidade ρ que escoar com campo de velocidades \mathbf{u} . Em geral, densidade e velocidade dependem do tempo t e da posição (x, y, z) num sistema cartesiano de coordenadas escolhido de modo que a força da gravitacional \mathbf{g} aponte na direção negativa de z . A taxa de variação da velocidade é provocada pela força de Coriolis cujo parâmetro é \mathbf{f} , pelo gradiente da pressão p , pela aceleração da gravidade \mathbf{g} e pelo divergente do tensor tensão de Cauchy τ .

Se $\eta(x, y, t)$ denota interface atmosfera-água, então a formulação matemática do problema (Janssen, 2004) é dada por,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nabla \cdot \tau \quad (2.2)$$

em que

$$\rho = \begin{cases} \rho_{ar}, & z > \eta \\ \rho_{ag}, & z < \eta \end{cases} \quad (2.3)$$

De acordo com Komen *et al.* (1994), alguns efeitos não desempenham papel relevante na modelagem de ondas de gravidade e podem, portanto, ser negligenciados. Estes efeitos são:

- (a) a aceleração de Coriolis pode ser desprezada;
- (b) a viscosidade e tensões podem ser desprezadas;
- (c) $\rho_{ar} \ll \rho_{ag}$;
- (d) campo de velocidades da água é irrotacional, isto é, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

A condição de vorticidade zero é automaticamente satisfeita para campos de velocidade que são derivados de um potencial de velocidade ϕ . Com isto, o modelo matemático (não linear) simplificado para ondas de gravidade puras é dado por:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (2.4)$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0, \quad z < \eta(x, y, t) \quad (2.5)$$

Sujeito a condição de contorno na superfície livre $z = \eta(x, y, t)$:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla\eta \cdot \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial z} + g\eta = 0 \quad (2.7)$$

e a condição de contorno no fundo do oceano $z = -D$:

$$\nabla\phi = 0 \quad (2.8)$$

O sistema de equações diferenciais parciais (2.4) - (2.8) determina a evolução das ondas de gravidade.

2.2.2 Linearização

Ainda que simplificadas, as equações do movimento (2.4) - (2.8) são muito complicadas e gerais para serem resolvidas, mesmo numericamente. O fato de desprezar-se a densidade do ar, resulta que a linearização das equações de Navier-Stokes para um fluido de uma camada sob a ação da gravidade, serve como boa aproximação para descrever as ondas de gravidade (Komen *et al.*, 1994).

A linearização do modelo de ondas de gravidade pode ser feita expandindo-se termos que dependem de η e retendo-se somente termos lineares que dependem da esbelteza² da onda, que é considerada pequena ($\ll 1$). Deste modo, as equações do movimento de ondas de gravidade são reduzidas a sua forma linear (Kraus e Businger, 1994):

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.9)$$

Sujeito as condições de fronteira na superfície do mar, isto é, em $z = 0$:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.10)$$

²ver(8.2)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta g = 0 \quad (2.11)$$

E a condição de fronteira no fundo $z = -D$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

2.2.3 Solução do modelo linear

A partir deste momento, com a notação $\mathbf{x} = (x, y)$ e $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, suponha soluções da forma (Janssen, 2004)

$$\eta(\mathbf{x}, t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.13)$$

e

$$\phi = Z(z) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (2.14)$$

em que Z é uma função a ser determinada. Da equação de Laplace (2.5) e da escolha da solução ϕ , a função Z deve satisfazer a seguinte equação diferencial ordinária

$$Z'' - kZ = 0 \quad (2.15)$$

Impondo-se a condição de fronteira (2.12), segue-se que $Z \sim \cosh k(z + D)$. Da igualdade,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = (-i\omega Z + g)e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.16)$$

decorre, usando-se a condição de fronteira (2.11), que

$$\phi = -i\eta \frac{g \cosh k(z + D)}{\omega \cosh kD} \quad (2.17)$$

Entretanto, a equação (2.10) precisa ser satisfeita. Isto só é possível quando a frequência angular obedecer a relação de dispersão linear:

$$\omega^2 = gk \tanh kD \quad (2.18)$$

Em geral, para um dado número de onda³, a equação (2.18) tem duas soluções que representam, respectivamente, ondas viajando para direita e ondas viajando para esquerda. Deve ser notado que as soluções físicas (observáveis) do problema são dadas por

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (2.19)$$

e

$$\phi = \frac{g \cosh k(z + D)}{\omega \cosh kD} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (2.20)$$

No caso da presença de uma corrente \mathbf{U}_0 , a frequência ω é substituída pela frequência deslocada (Doppler) $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0$. Quando esta situação ocorre, define-se

$$\sigma_{int} = \sqrt{gk \tanh kD} \quad (2.21)$$

como sendo a frequência intrínseca, isto é, a frequência percebida por um observador que se desloca junto com a corrente, e escreve-se

$$\omega_{\pm} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0 \pm \sigma_{int} \quad (2.22)$$

para a frequência para um observador fixo. Do ponto de vista matemático, a presença de uma corrente \mathbf{U}_0 é nada mais que uma mudança de variáveis (ou, fisicamente, uma mudança de referencial):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + t\mathbf{U}_0 \\ t' &= t \end{aligned} \quad (2.23)$$

Assim, a solução harmônica plana (2.14) quando representada neste novo referencial, tem a seguinte forma:

$$\eta(\mathbf{x}, t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\pm} t)} \quad (2.24)$$

Pelo princípio da superposição, a solução mais geral possível pode ser expressa por

³definição 8.2

$$\eta_g(\mathbf{x}, t) = \int \hat{\eta}_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_+ t)} d\mathbf{k} + \int \hat{\eta}_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_- t)} d\mathbf{k} \quad (2.25)$$

que leva em conta a contribuição de ondas em todas as direções. A solução (2.25) é a representação (formal) de Fourier da superfície do oceano nas condições consideradas.

2.2.4 Representação canônica

A forma integral (2.25) admite a seguinte representação canônica:

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \hat{\eta}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} + c.c. \quad (2.26)$$

em que $\hat{\eta}(\mathbf{k}) = \hat{\eta}_+(\mathbf{k})$, $\omega = \omega^+$ e “c.c.” representa o conjugado complexo.

Para constatar isto, basta observar que⁴:

$$\hat{\eta}_-(\mathbf{k}) = \hat{\eta}_+(-\mathbf{k})^* \quad (2.27)$$

De fato, tomando-se o conjugado de (2.25), resulta que,

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int \hat{\eta}_+(\mathbf{k})^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_+ t)} d\mathbf{k} + \int \hat{\eta}_-(\mathbf{k})^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_- t)} d\mathbf{k} \quad (2.28)$$

Com a mudança de variável $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$ em (2.28), uma vez que $\omega_+(-\mathbf{k}) = -\omega_-(-\mathbf{k})$, vem que

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int \hat{\eta}_+(-\mathbf{p})^* e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_- t)} d\mathbf{p} + \int \hat{\eta}_-(-\mathbf{p})^* e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_+ t)} d\mathbf{p} \quad (2.29)$$

Reescrevendo-se a expressão em (2.29), em termos de \mathbf{k} , tem-se

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int \hat{\eta}_+(-\mathbf{k})^* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_- t)} d\mathbf{k} + \int \hat{\eta}_-(-\mathbf{k})^* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_+ t)} d\mathbf{k} \quad (2.30)$$

Comparando-se (2.25) e (2.30), segue-se (2.27). Com isto pode-se escrever,

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int \hat{\eta}_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_+ t)} d\mathbf{k} + \left(\int \hat{\eta}_+(-\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_- t)} d\mathbf{k} \right)^* \quad (2.31)$$

Na segunda parcela de (2.31), procedendo-se com a mudança de variável, como anteriormente realizada e, a seguir, retornado-se a variável \mathbf{k} , conclui-se que

⁴* denota o conjugado harmônico

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int \widehat{\eta}_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_+ t)} d\mathbf{k} + \left(\int \widehat{\eta}_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_+ t)} d\mathbf{k} \right)^*, \quad (2.32)$$

que é exatamente (2.26).

O problema de determinar a configuração da superfície do oceano num instante qualquer, uma vez conhecidas uma configuração inicial $\eta(\mathbf{x}, 0)$ e sua velocidade $\eta_t(\mathbf{x}, 0)$, é conhecido como problema de Cauchy-Poisson. Tecnicamente é possível determinar as amplitudes $\widehat{\eta}(\mathbf{k})$ através de

$$\widehat{\eta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^2} \int e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} \left[\eta(\mathbf{x}, 0) + \frac{i}{\omega(k)} \eta_t(\mathbf{x}, 0) \right] d\mathbf{x}, \quad (2.33)$$

e, conseqüentemente, usando-se (2.26), achar $\eta(\mathbf{x}, t)$ num instante qualquer. Entretanto, esta abordagem não é viável na prática pois os dados iniciais requeridos são parte do que se deseja conhecer.

2.3 Modelo estocástico

Nesta seção, o modelo determinístico linearizado será substituído por um modelo adequado ao tratamento do campo de ondas oceânicas irregulares.



Figura 2 A superfície oceânica das ondas geradas pelo vento é uma coleção irregular de ondas de pequenas cristas.

2.3.1 Randomização do modelo linear de ondas

O modelo linear foi utilizado até meados do século passado, apesar de suas incontestáveis limitações. As soluções ordinárias do modelo linearizado tem aplicações restritas a swells, que são ondas com perfil bastante regular (Figura 1). A flutuação aleatória da

superfície do mar é geralmente atribuída a energia transferida dos ventos à água. Por isso, atualmente, um tratamento estocástico aos oceanos é a melhor alternativa.

Uma descrição do oceano pode ser feita utilizando-se o que é conhecido por teoria estocástica linear de ondas, que é, essencialmente, a randomização do modelo linear. Foi mostrado na subseção 2.2.3 que a função

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n - \omega_n t + \varphi_n) \quad (2.34)$$

é solução do modelo linear de ondas dado pelas equações (2.9) - (2.12).

De acordo com Kahma *et al.* (2005), o primeiro passo para a definição de um modelo randômico para superfície do mar é assumir que os ângulos de fase $\{\varphi_n\}$ são variáveis aleatórias independentes e com distribuição uniforme no intervalo $[0, 2\pi]$.

Neste sentido, seja φ uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0, 2\pi]$ e considere

$$\xi(\mathbf{x}, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varphi) \quad (2.35)$$

É importante observar que as fases definem a elevação num ponto e tempo fixados, mas não afetam qualquer outra propriedade física da onda. Assim, o valor esperado da variável aleatória (2.35) é

$$\langle \xi(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varphi) d\varphi = 0, \quad (2.36)$$

de modo que sua variância é

$$\langle \xi^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varphi)]^2 d\varphi = \frac{A^2}{2} \quad (2.37)$$

Disto resulta que $\eta(\mathbf{x}, t)$ tem valor esperado

$$\langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0 \quad (2.38)$$

e variância

$$\langle \eta^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{2} \quad (2.39)$$

Neste processo de randomização do modelo linear considera-se que o vetor de onda \mathbf{k} e a frequência ω estão conectados através da relação de dispersão linear (2.18).

2.3.2 Teoria Gaussiana linear de ondas

O teorema do limite central afirma que a soma de variáveis randômicas independentes tende a ser Gaussiana⁵ (Veerarajan, 2003). Então, como supõe-se a elevação da superfície oceânica ser uma soma de várias ondas randômicas, é razoável assumir que esta soma seja Gaussiana, em conformidade também com dados medidos (Figura 3) apresentados em Kanevsky (2009). Isto define o que usualmente é chamado de teoria gaussiana linear de ondas.

Portanto, a elevação da superfície oceânica será formalmente considerada um campo randômico⁶ espaço-temporal gaussiano, ou seja, uma família

$$\{\eta(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in B \text{ e } t \in \mathbb{R}\} \quad (2.40)$$

de variáveis aleatórias, indexadas no espaço e no tempo e que, além disto, são normalmente distribuídas em torno da média (zero). Deste modo, apenas medidas estatísticas dos movimentos das ondas podem ser consideradas previsíveis.

⁵ou normal

⁶ver definição em (10.5)

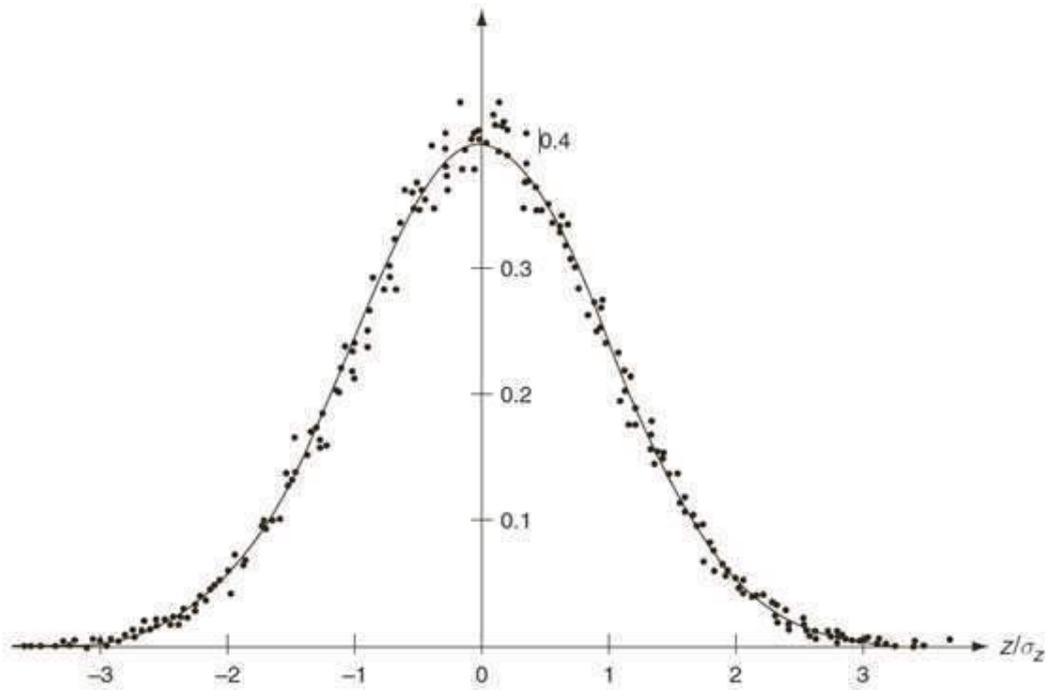


Figura 3 Função de densidade de probabilidade da elevação da superficial do oceanos (linha sólida) e medições (pontos) de acordo com Kanevsky (2009)

2.3.3 Estacionareidade e homogeneidade

De um modo geral, superfícies oceânicas variam em diversas escalas. Desta forma, as menores escalas são aquelas associadas ao movimento detalhado da superfície, ou seja, ondas individuais. Nesta escala, as variações são muito rápidas e, espacialmente, muito próximas.

Segundo Kanevsky (2009), para uma escala espaço-temporal de aproximadamente 50×50 quilômetros quadrados e 1 hora, é possível, em águas profundas, supor que o oceano é um campo estocástico que, além de Gaussiano, é também fracamente homogêneo e estacionário ⁷. Para processos gaussianos uma boa descrição de campos randômicos homogêneos e estacionários é dada pela da função de correlação $C(\mathbf{x}, t)$, a qual é caracterizada por ⁸

$$C(\mathbf{x}, t) = \langle \eta(\mathbf{r} + \mathbf{x}, s + t) \eta(\mathbf{r}, s) \rangle \quad (2.41)$$

para qualquer par (\mathbf{r}, s) do espaço-tempo. Isto significa que campos de ondas homogêneos

⁷ver (10.4)

⁸ver(10.4.3)

e estacionários são tais que suas funções de densidade de probabilidade conjunta são invariantes tanto para iguais deslocamentos em todos os pontos espaciais como para iguais deslocamentos em todos os pontos temporais. Em particular, para campos nestas condições, a variância da elevação η da superfície oceânica não depende da posição e do tempo. De fato,

$$\langle \eta^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \eta(\mathbf{0}, 0) \eta(\mathbf{0}, 0) \rangle = \sigma^2 \quad (2.42)$$

que corresponde, em teoria, a um comportamento aproximadamente uniforme quanto as elevações na região considerada. Isto permite omitir a dependência espaço-temporal nesta região.

2.4 Formalismo de Komen

O campo das elevações do oceano $\eta(\mathbf{x}, t)$ no contexto da teoria linear gaussiana de ondas é suposto homogêneo, estacionário e com média zero. De acordo com Kaham *et al.* (2005), nestas condições tem-se

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} dZ(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.43)$$

isto é, a expressão em (2.43) é a representação integral do campo randômico $\eta(\mathbf{x}, t)$ contra uma medida estocástica ortogonal Z .

Intuitivamente, deve-se pensar a representação (2.43) como uma superposição exótica de ondas no espaço (\mathbf{k}, ω) , em que a relação de dispersão linear em águas profundas $\omega^2 = kg$ é válida. De fato, esta representação é o modo preciso de escrever (2.34) quando $N \rightarrow \infty$ e $A_n \rightarrow 0$ (Phillips, 1977).

A representação (2.43) não é, entretanto, intuitiva e mostra-se mais complicada para realizar o algebrismo que será necessário em breve. Neste sentido, Komen *et al.* (1994) apresentam (sem detalhes) uma alternativa eficiente e mais intuitiva para representar o campo de ondas oceânicas, admitindo, simplesmente, que as amplitudes $\hat{\eta}(\mathbf{k})$ da representação canônica (2.26) são variáveis aleatórias.

De fato, tal representação do campo randômico (2.44) é, simplesmente, uma integral estocástica de Riemann (Lutes e Sarkani, 2003). De modo geral, esta representação não é válida em regiões (de integração) ilimitadas, porém, sob certas condições (apresentadas

adiante), pode-se garantir a convergência desta integral.

2.4.1 Representação canônica randomizada

A partir deste momento, considera-se a representação do campo de elevações oceânicas em águas profundas como sendo

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \hat{\eta}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} + c.c., \quad (2.44)$$

em que $\hat{\eta}(\mathbf{k}) = |\hat{\eta}(\mathbf{k})| e^{i\mu_{\mathbf{k}}}$, sendo $\mu_{\mathbf{k}}$ a fase randômica da componente da onda que se propaga na direção \mathbf{k} .

De acordo com o processo de randomização (subseção 2.3.1), sobre o qual supõe-se a independência entre as fases, deve-se ter

$$\langle \hat{\eta}(\mathbf{k}_1) \hat{\eta}(\mathbf{k}_2) \rangle = \langle \mu_{\mathbf{k}_1} \mu_{\mathbf{k}_2} \rangle = 0 \quad (2.45)$$

para vetores de onda \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 distintos.

2.4.2 Filtros lineares e funções de transferência

Na teoria linear Gaussiana de ondas, quantidades físicas como inclinação da superfície, velocidade da superfície, pressão, etc ... estão conectadas à elevação da superfície oceânica através de filtros lineares.

Em geral, filtros invariantes no espaço-tempo são representados por funções de transferência (Koopmans, 1995). No presente caso, se $\chi(\mathbf{x}, t)$ é um campo estocástico associado ao campo de ondas (2.44), então pode-se escrever que

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \int \hat{\chi}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} + c.c. \quad (2.46)$$

em que $\hat{\chi}(\mathbf{k}) = T_{\chi}(\mathbf{k}) \hat{\eta}(\mathbf{k})$, sendo $T_{\chi}(\mathbf{k})$ a função de transferência relacionada a variável $\chi(\mathbf{x}, t)$.

Neste momento, é relevante destacar a grande importância das funções de transferência neste contexto: assumindo-se o modelo de duas escalas⁹ será possível estabelecer-se uma relação entre a elevação da superfície oceânica numa certa região e a imagem SAR

⁹ver 4.3

associada a esta região.

2.4.3 A identidade de Komen

Para os propósitos desta tese é fundamental conhecer o formalismo algébrico básico da representação randômica (2.44). Neste sentido, considere-se o campo randômico

$$\chi_m(\mathbf{x}, t) = \int T_m(\mathbf{k}) \hat{\eta}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} + c.c., \quad (2.47)$$

associado ao campo de ondas (2.44) com $j = 1, 2$. A função $T_m(\mathbf{k})$ representa uma função de transferência.

2.4.3.1 Condição de Komen

Assumindo-se que as amplitudes $\hat{\eta}(\mathbf{k})$ do campo de ondas (2.44) satisfizem, para certos $\mathbf{b}, \epsilon_0 > 0$, a condição

$$\mathbf{b} - \epsilon_0 \leq |\hat{\eta}(\mathbf{k})|^2 \leq \mathbf{b} + \epsilon_0 \quad (2.48)$$

então a representação (2.44) converge (em média) a um limite bem definido.

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \chi_l(\mathbf{x}, t) \chi_j(\mathbf{x}', t') \rangle &= \\ &= \left\{ \int \int T_1(\mathbf{k}_1) T_2(\mathbf{k}_2) \langle \hat{\eta}(\mathbf{k}_1) \hat{\eta}(\mathbf{k}_2) \rangle e^{i[\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}' - \omega_1 t - \omega_2 t']} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + \right. \\ &\quad \left. + \int \int T_1(\mathbf{k}_1) T_2^*(\mathbf{k}_2) \langle \hat{\eta}(\mathbf{k}_1) \hat{\eta}^*(\mathbf{k}_2) \rangle e^{i[-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}' + \omega_1 t - \omega_2 t']} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \right\} + c.c., \end{aligned} \quad (2.49)$$

em que as frequências angulares ω_1 e ω_2 são obtidas da relação de dispersão linear (2.18).

Levando-se em conta (2.45), resulta que

$$\begin{aligned}
\langle \chi_i(\mathbf{x}, t) \chi_j(\mathbf{x}', t') \rangle &= \\
&= \int \int T_1(\mathbf{k}_1) T_2^*(\mathbf{k}_2) \langle \widehat{\eta}(\mathbf{k}_1) \widehat{\eta}^*(\mathbf{k}_2) \rangle e^{i[-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}' + \omega_1 t - \omega_2 t']} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + c.c.,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Sob a hipótese (2.48), as integrais que figuram no cálculo do momento de segunda ordem (2.50) são integrais de Riemann convergentes. Ressalta-se, também, que a condição (2.48) não é considerada restritiva, sendo bastante razoável em vista da realidade encontrada em oceanos (Komen *et al.*, 1994).

3 TEORIA ESPECTRAL DE ONDAS

Uma vez que o oceano é considerado um campo estocástico, o conceito de espectro de ondas é certamente o mais importante na teoria estocástica linear de ondas. Neste capítulo, o objetivo é definir matematicamente os fundamentos teóricos usados ao longo da tese, dentre eles, o conceito de espectro de ondas. O espectro de ondas estima a distribuição de energia do oceano, descrevendo o complexo e caótico fenômeno de ondas geradas pelo vento em termos das contribuições das ondas que se propagam em várias direções e com diversos comprimentos de ondas.

A estrutura do capítulo é a seguinte: na seção 3.3, a definição do espectro de ondas apelando-se ao conceito de espectro de ondas generalizado, visto na seção 3.2. A partir daí, mostra-se a relação matemática entre estes espectros e a energia das ondas, definida na seção 3.1.

O conceito de “estado de mar”, importante em análises futuras, é definido na seção 3.4. Na seção 3.5 são formalizadas as noções de parâmetros espectrais. O capítulo é encerrado pela seção 3.6, onde define-se o chamado espectro de ondas congelado, importante no contexto de imageamento de oceanos com uso do SAR.

É importante ressaltar que a conceituação proposta a seguir não usa medidas espectrais tal qual Phillips (1977) e Kahma *et al.* (2005). De fato, propõe-se uma versão para as definições apresentadas por ambos, tecnicamente mais simples, porém equivalentes. Referências básicas são: Ochi (2005) e Komen *et al.* (1994), além das supracitadas.

3.1 Energia das ondas

Supondo-se que o campo randômico das elevações da superfície oceânica $\eta(\mathbf{x}, t)$ dado em (2.44) é estacionário e homogêneo, a densidade média de energia (J/m^2), denotada por $\langle \mathcal{E} \rangle$, é definida através da relação (Komen *et al.*, 1994)

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \rho g \langle \eta^2 \rangle, \quad (3.1)$$

em que g é aceleração da gravidade e ρ a densidade da água. A equação (3.1) mostra que a energia de um campo de ondas está intimamente ligada ao afastamento da elevação da superfície oceânica do seu valor médio. De fato, a energia das ondas está associada

à severidade do oceano, que é essencialmente a variância da elevação superficial (Ochi, 2005).

3.2 Espectro de ondas generalizado

O espectro de ondas generalizado associado ao campo estocástico das elevações da superfície oceânica $\eta(\mathbf{x}, t)$ dado em (2.44), denotado por $X(\mathbf{k}, \omega)$, é definido por

$$X(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x}, t} C(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{x} dt \quad (3.2)$$

Isto é, o espectro de ondas generalizado é a transformada de Fourier da função de correlação (2.41).

Assim, a função de correlação é a transformada inversa do espectro de ondas generalizado:

$$C(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}, \omega} X(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \quad (3.3)$$

Em particular,

$$C(\mathbf{0}, 0) = \langle \eta^2 \rangle = \int_{\mathbf{k}, \omega} X(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega \quad (3.4)$$

o que implica que o espectro de ondas generalizado é uma função não negativa (Papoulis, 1991) sobre todo o espaço das frequências generalizadas.

A equação (3.1) fornece uma interpretação imediata do espectro de ondas generalizado, isto é, a densidade espectral de energia por unidade de volume no espaço (\mathbf{k}, ω) (Phillips, 1977).

3.3 Espectro de ondas

Apesar da interpretação dada para o espectro de ondas generalizado, não é comum usá-lo. Deste modo, define-se o espectro de ondas associado ao campo estocástico da elevações da superfície oceânica $\eta(\mathbf{x}, t)$ dado em (2.44) por (Kahma *et al.*, 2005)

$$\Psi(\mathbf{k}) = 2 \int_{\omega > 0} X(\mathbf{k}, \omega) d\omega \quad (3.5)$$

O espectro de ondas é uma função não negativa do vetor número de onda¹⁰, a qual define direção de propagação, comprimento de onda e frequência angular através da relação de dispersão. Em particular, a simetria da função de correlação para campos homogêneos e estacionários, isto é,

$$C(\mathbf{x}, t) = C(-\mathbf{x}, -t), \quad (3.6)$$

acarreta a simetria do espectro de ondas generalizado $X(\mathbf{k}, \omega)$, de forma que é lícito escrever que

$$C(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}, \omega > 0} X(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\omega d\mathbf{k} + \int_{\mathbf{k}, \omega > 0} X(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\omega d\mathbf{k} \quad (3.7)$$

Da equação (3.7) vem que

$$\langle \eta^2 \rangle = C(\mathbf{0}, 0) = 2 \int_{\mathbf{k}, \omega > 0} X(\mathbf{k}, \omega) d\omega d\mathbf{k} = \int_{\mathbf{k}} \Psi(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (3.8)$$

A equação (3.8) mostra, por sua vez, que o espectro de ondas é a densidade de variância da elevação superficial η . Apelando-se a equação (3.1), conclui-se que, a menos de um fator, o espectro de ondas é a densidade espectral de energia do campo de ondas (2.44).

A homogeneidade e estacionariedade do campo randômico de ondas (2.44), implicam na importante igualdade (Komen *et al.*, 1994)

$$\langle \widehat{\eta}(\mathbf{k}_1) \widehat{\eta}(\mathbf{k}_2)^* \rangle = \frac{1}{2} \Psi(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^{11}, \quad (3.9)$$

cuja consequência automática é que

$$\Psi(\mathbf{k}) = 2|\widehat{\eta}(\mathbf{k})|^2, \quad (3.10)$$

Estabelece-se, assim, uma relação entre o espectro de ondas e as amplitudes da representação canônica. A relação (3.9) é, por vezes, usada diretamente como definição para o espectro de ondas (Hasselmann e Hasselmann, 1991). Em particular, a desigualdade (2.48) e a igualdade (3.10) asseguram que a densidade espectral da energia das ondas é

¹⁰devido a não-negatividade do espectro de ondas generalizado

¹¹impulso unitário - ver 9.1

uniformemente limitada.

3.4 Estado de mar

Classicamente, o estado de mar é uma escala para a altura média das ondas, semelhante à escala de Beaufort que distingue ventos de acordo com sua intensidade. Modernamente, o estado de mar é a condição da superfície oceânica considerada como um campo estocástico caracterizado pelo seu espectro direcional de ondas.

3.4.1 Espectro direcional de ondas

Utilizando-se a relação de dispersão (2.18), o espectro de ondas pode ser interpretado como densidade de energia ao longo das diferentes frequências e direções.

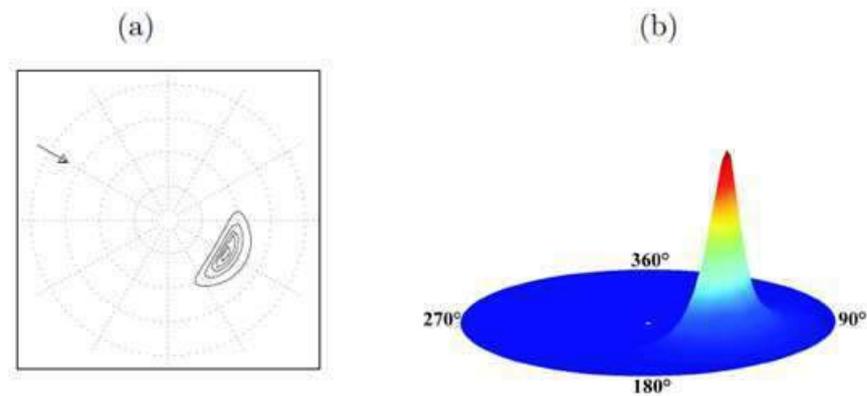


Figura 4 (a) Mapa de contorno de um espectro direcional de ondas com direção principal de 110° em relação ao norte; Os ciclos correspondem a, aproximadamente, comprimentos de ondas de 60 m, 15 m, 7 m e 4 m respectivamente; (b) Perspectiva meridional do espectro direcional de ondas. Convenção: Norte = 0° , Leste = 90° , Sul = 180° , Oeste = 270° .

De fato, o espectro direcional de ondas $E(\omega, \theta)$ é tal que

$$\langle \eta^2 \rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(\omega, \theta) d\omega d\theta, \quad (3.11)$$

em que

$$E(\omega, \theta) = \psi(\omega, \theta) k(\omega) \frac{d\omega}{dk}, \quad (3.12)$$

sendo

$$\psi(\omega, \theta) = \Psi(k \cos \theta, k \sin \theta), \quad (3.13)$$

considerando-se a relação linear de dispersão (2.18) válida.

Normalmente, admite-se a fatoração para o espectro direcional de ondas (Massel, 2007)

$$E(\omega, \theta) = S(\omega) D(\omega, \theta), \quad (3.14)$$

em que $S(\omega)$ é o espectro de frequências e $D(\omega, \theta)$ é a distribuição direcional. Além disto, a condição de normalização da distribuição direcional

$$\int_0^{2\pi} D(\omega, \theta) d\theta = 1 \quad (3.15)$$

é exigida para todo $\omega \geq 0$, de modo que

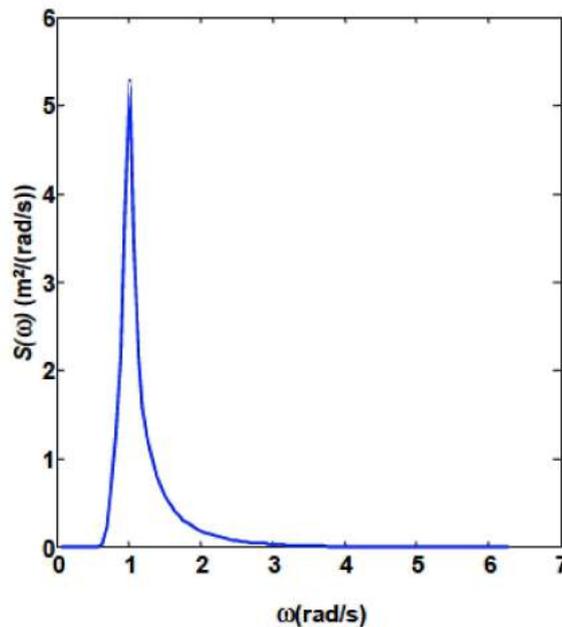


Figura 5 Forma típica de um espectro de frequências para mar em desenvolvimento (Kahma *et al.*, 2005).

$$\langle \eta^2 \rangle = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (3.16)$$

donde advém, automaticamente, que o espectro de frequências representa a densidade de

energia ao longo das frequências.

3.5 Parâmetros Espectrais

Associados ao espectro direcional de ondas, são definidos os momentos espectrais

$$m_k = \int_0^{\infty} \omega^k S(\omega) d\omega \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (3.17)$$

os quais estão intimamente conectados aos parâmetros (espectrais) do oceano, a saber: altura significativa, período de pico, período médio, direção de pico e espalhamento direcional.

3.5.1 Altura significativa

A altura significativa de onda, denotada por H_s e comumente usada para avaliar a severidade do mar, é definida por

$$H_s = 4m_0^{1/2} \quad (3.18)$$

é o mais importante parâmetro associado ao estado de mar.

3.5.2 Período de pico

A frequência de pico, denotada por ω_p , ocorre quando é detectado um pico de energia das ondas (Figura 5). Esta frequência é, portanto, caracterizada por

$$\frac{dS}{d\omega}(\omega_p) = 0 \quad (3.19)$$

e está associada ao período de pico, definido por $T_p = \frac{1}{\omega_p}$.

3.5.3 Período médio

O período médio das ondas, denotado por T_z , é definido por

$$T_z = \left(\frac{m_0}{m_2} \right)^{1/2} \quad (3.20)$$

3.5.4 Direção média

Quando a distribuição direcional $D(\omega, \theta)$ é vista como a função de distribuição de probabilidade da variável aleatória angular, seu valor esperado θ_1 , segundo a frequência considerada, é chamado de direção média das ondas (Kahma *et al.*, 2005). Este valor é expresso por,

$$\theta_1(\omega) = \arg \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta D(\omega, \theta) d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin \theta D(\omega, \theta) d\theta \right) \quad (3.21)$$

3.5.5 Espalhamento direcional

A variância da variável aleatória angular, chamada de espalhamento direcional, é definido por

$$\sigma_1^2(\omega) = 2[1 - r_1(\omega)] \quad (3.22)$$

em que

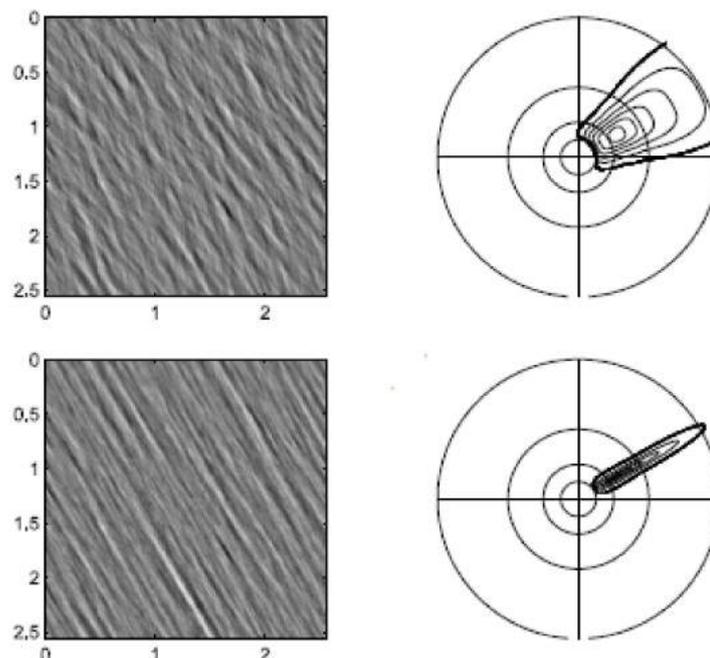


Figura 6 Duas configurações de estados de mar (esquerda) acompanhadas de seus respectivos espectros direcionais de ondas (direita). Ambos os espectros direcionais possuem a mesma direção principal, no entanto, possuem espalhamentos direcionais distintos. (Kahma *et al.*, 2005)

$$r_1(\omega) = \left[\left(\int_0^{2\pi} \cos \theta D(\omega, \theta) d\theta \right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} \text{sen } \theta D(\omega, \theta) d\theta \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.23)$$

3.5.6 Direção principal

A direção principal das ondas é, por definição,

$$\mathbf{k}_p = (k_p \cos \theta_1(\omega_p), k_p \text{sen } \theta_1(\omega_p)) \quad (3.24)$$

em que k_p pode ser calculado através da relação de dispersão. O comprimento de onda dominante, neste caso, é dado por $\lambda_p = \frac{2\pi}{k_p}$ e a direção média dada por $\theta_1(\omega_p)$.

O estado de mar pode ser, simplesmente, pensado como o conjunto de parâmetros espectrais

$$\{H_s, T_p, T_z, \theta_1, \sigma_1\} \quad (3.25)$$

os quais caracterizam uma configuração da superfície do oceano. Uma profunda discussão sobre estes parâmetros pode ser vista em, por exemplo, Goda (2000).

3.5.7 Parametrização espectral

Existem, na literatura, diversos modelos paramétricos do espectro direcional de ondas, isto é, expressões obtidas empiricamente para a fatoração (3.14). Com parâmetros previamente escolhidos, estes modelos permitem realizar simulações de configurações do estado de mar associado ao espectro direcional de ondas considerado (Fréchet, 2007).

Nos experimentos a serem apresentados nesta tese, considera-se a parametrização

$$E(\omega, \theta) = S_J(\omega) D_c(\theta, s), \quad (3.26)$$

em que:

- (1) $S_J(\omega)$ é um espectro de frequências é do tipo JONSWAP (Massel, 2007; Ochi, 2005), isto é,

$$S_J(\omega) = \bar{\alpha} H_s^2 \frac{\omega_p^4}{\omega^5} \exp \left[-1.25 \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right] \gamma^{\exp[-(\omega-\omega_p)^2(2\tau^2\omega_p^2)]} \quad (3.27)$$

em que

$$\bar{\alpha} = \frac{0.0624}{0.230 + 0.0336\gamma - 0.185(1.9 + \gamma)^{-1}} \quad (3.28)$$

sendo γ o fator responsável pela intensificação do pico de energia, normalmente igual a 3.3.

(2) $D_c(\theta, s)$ é uma distribuição direcional é do tipo \cos^{2s} (Massel, 2007), isto é,¹²

$$D_c(\omega, \theta) = \frac{2^{2s-1}}{\pi} \frac{\Gamma_0^2(s+1)}{\Gamma_0(2s+1)} \cos^{2s} \left(\frac{\theta - \theta_p}{2} \right) \quad (3.29)$$

em que $\Gamma_0(\cdot)$ denota a função gama¹³ e

$$s(\omega) = \begin{cases} s_{max} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^5 & \text{se } \omega \leq \omega_p \\ s_{max} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-2.5} & \text{se } \omega \geq \omega_p \end{cases} \quad (3.30)$$

sendo

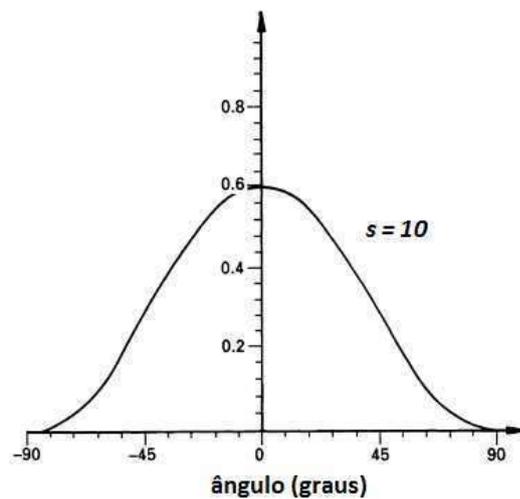


Figura 7 Distribuição direcional do tipo \cos^{2s} . A ilustração mostra como a energia correspondente a uma certa frequência se distribui em torno da direção dominante (indicada no eixo horizontal por 0°). Quando $s = 10$, praticamente 85% da energia está concentrada numa faixa angular de $\pm 30^\circ$ em torno da direção dominante (Goda, 2000).

¹² $\theta_p = \theta_1(\omega_p)$

¹³Rudin (1987)

$$s_{max} = 11.5 \left(\frac{\omega_p U_w}{g} \right)^{-2.5}, \quad (3.31)$$

onde U_w representa a velocidade do vento.

3.6 Espectro de ondas congelado

O espectro de ondas congelado, definido a seguir, apesar de não descrever completamente o estado de mar, desempenha importante papel no contexto de formação de imagens SAR (seção 4.5).

Formalmente, o espectro de ondas congelado associado ao campo das elevações superficiais do oceano $\eta(\mathbf{x}, t)$ dado em (2.44), denotado por $\Psi_0(\mathbf{k})$, é definido por (Kahma *et al.*, 2005)

$$\Psi_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{C}(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (3.32)$$

em que $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, 0)$. Fazendo-se $t = 0$ na equação (3.7), obtém-se

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}, \omega > 0} X(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\omega d\mathbf{k} + \int_{\mathbf{k}, \omega > 0} X(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\omega d\mathbf{k} \quad (3.33)$$

Perfazendo-se a integração sobre a frequência, resulta que

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}} \frac{[\Psi(\mathbf{k}) + \Psi(-\mathbf{k})]}{2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (3.34)$$

Agora, levando-se em conta(3.5), vem que

$$\Psi_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}[\Psi(\mathbf{k}) + \Psi(-\mathbf{k})] \quad (3.35)$$

O espectro de ondas congelado $\Psi_0(\mathbf{k})$ é, portanto, a média do espectro de ondas $\Psi(\mathbf{k})$ em duas direções de propagação: $-\mathbf{k}$ e $+\mathbf{k}$. Enquanto o espectro de ondas $\Psi(\mathbf{k})$ fornece uma descrição completa da superfície gaussiana do mar, o espectro congelado $\Psi_0(\mathbf{k})$ não descreve completamente a superfície oceânica devido à ambiguidade na direção de propagação medida na direção da componente \mathbf{k} . De fato, tem-se $\Psi_0(\mathbf{k}) = \Psi_0(-\mathbf{k})$, o que significa dizer que ao espectro congelado $\Psi_0(\mathbf{k})$ estão associados dois espectro de ondas, a saber: $\Psi(\mathbf{k})$ e $\Psi(-\mathbf{k})$.

4 DETECÇÃO DE ONDAS ATRAVÉS DO SAR

Em linhas gerais, este capítulo tem por objetivo descrever brevemente o princípio básico de funcionamento do SAR. Uma rápida discussão acerca dos principais mecanismos de modulação do SAR, responsáveis pela formação de uma imagem SAR é feita na seção 4.3. A seguir, apresenta-se o processo de formação de uma imagem SAR na seção 4.5.

Finalmente, na seção 4.6, define-se o espectro de imagem SAR e deduz-se uma aproximação linear da transformação de Hasselmann (típica para swells).

Assim como na literatura clássica: Komen *et al.* (1994), Maitre (2001), Robinson (2004), Cheney (2001), dentre outros, todas as hipóteses de diferenciabilidade para funções envolvidas, quando necessárias, são assumidas sem menção explícita ao longo deste capítulo. A integrabilidade dos campos estocásticos é garantida pela condição de Komen (2.48).

4.1 Descrição geral

O SAR é um radar coerente e de visada perpendicular a trajetória de vôo, iluminando, normalmente, uma faixa aproximada de 100 quilômetros de largura por 250 quilômetros de comprimento na direção azimutal¹⁴. Para este sistema fazer imagens de ondas com alguma precisão, ele deve ter uma resolução significativamente menor que os comprimentos típicos de onda do mar. Na direção azimutal, a alta resolução é obtida pois o sistema de imageamento do radar simula uma longa antena.

Para dar uma ideia da vantagem do uso do SAR, um radar de abertura real (RAR) transportado num satélite a uma altitude de 800 quilômetros, por exemplo, necessitaria de uma antena de comprimento 4 quilômetros para conseguir uma resolução azimutal de 25 metros. Isto é absolutamente inviável! O SAR, no entanto, leva em consideração o fato de que a plataforma do radar está em movimento. Deste modo, o radar transmite múltiplos pulsos de microondas e mantém um registro da fase do sinal recebido, criando, portanto, uma abertura sintética muito maior do que a abertura real.

Na direção de range, ortogonal à direção azimutal, a resolução é obtida através da transmissão de pulsos curtos, aproveitando o fato de que o satélite observa uma faixa paralela à trajetória do voo. Satélites, em geral, levam meio segundo para voar 4 quilômetros

¹⁴direção paralela ao deslocamento do satélite

e, portanto, criar a requerida abertura sintética. Isso é um intervalo de tempo suficientemente longo para que a superfície do mar tenha se movido significativamente. Esse movimento degrada a resolução do radar ao longo da direção azimutal. Portanto, quando se obtém o espectro de ondas do oceano com o SAR, existe uma perda de informação na direção azimutal para frequências altas, chamada de *cut-off*, onde é muito difícil obter informação. Ondas viajando na direção de range não são, entretanto, afetadas.

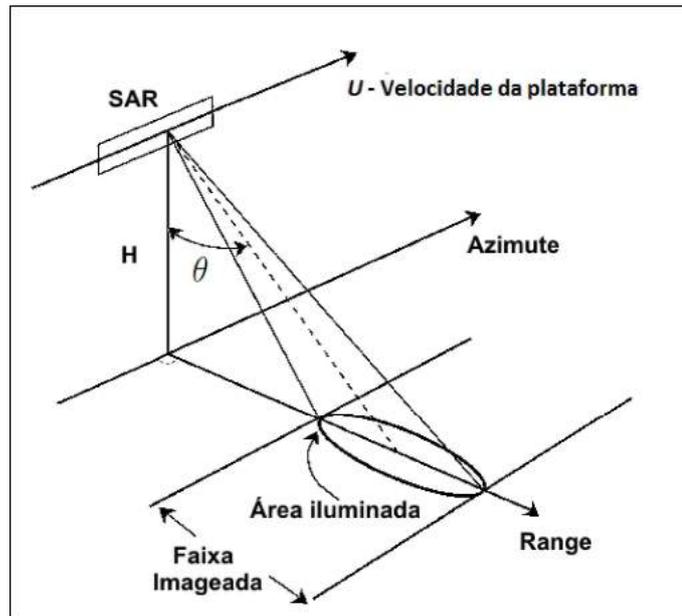


Figura 8 Elementos fundamentais sobre radares de abertura sintética.

4.2 Princípio básico: ressonância de Bragg

O complicado mecanismo de obtenção de imagens de ondas via SAR recebe o sinal retroespalhado da superfície da água através do que é conhecido por espalhamento de Bragg: a interação ressonante das microondas eletromagnéticas com as ondas oceânicas centimétricas, ditas ondas de Bragg, satisfaz a condição de ressonância de Bragg, isto é, o vetor de onda de Bragg

$$\mathbf{k}_B = (0, 2k_r \sin \alpha), \quad (4.1)$$

no qual a primeira e segunda coordenadas relacionadas às direções azimutal e range respectivamente, é tal que k_r é o número de onda das microondas do radar e α é o ângulo de incidência do feixe do radar.

A seção transversal do radar¹⁵, denotada por σ , é proporcional a energia espectral $\Lambda_r(\mathbf{k}_B)$ do espalhamento das ondas de Bragg, de comprimentos típicos entre 5 e 30 centímetros, é dada por

$$\sigma = \gamma_0[\Lambda_r(\mathbf{k}_B) + \Lambda_r(-\mathbf{k}_B)], \quad (4.2)$$

em que o parâmetro positivo γ_0 depende da polarização do campo eletromagnético, do ângulo de incidência e da frequência do radar.

A energia espectral proveniente das ondas ressonantes de Bragg depende da velocidade do vento, do ângulo direção azimutal entre e a direção do vento, além das interações com ondas longas.

4.3 Mecanismos de modulação: detecção de ondas

A detecção de ondas oceânicas pelo SAR torna-se possível pela modulação¹⁶ da seção transversal do radar σ pelas ondulações do oceano. O modelo capaz de descrever essa modulação é conhecida como modelo de duas escalas (“*two-scale model*”).

Essencialmente, neste modelo assume-se que as ondas mais longas tem escalas muito maiores que as ondas de Bragg. Num cenário real, esta condição é satisfatoriamente atendida, de forma que uma faceta retroespalhadora é considerada grande se comparada com as ondas de Bragg, mas pequena se comparada com a escala das ondas longas. Assim, uma faceta retroespalhadora pode ser considerada um elemento do plano tangente à superfície das ondas longas. A direção normal e a velocidade local da faceta são determinados pela inclinação local da superfície oceânica e pela velocidade orbital¹⁷ das ondas longas.

Com isto, a teoria de Bragg é aplicada a cada faceta num sistema de coordenadas orientado a partir da normal à faceta, movendo-se com a velocidade local de advecção da faceta. Logo, mudanças no campo de ondas de Bragg são detectadas pelo SAR, uma vez que estas manifestações na superfície do oceano alteraram a modulação da seção transversal do radar.

Os três principais mecanismos responsáveis pela modulação do sinal retroespalhado

¹⁵energia retroespalhada por unidade de área da superfície oceânica e por unidade de radiação incidente

¹⁶modificação de um sinal eletromagnético inicialmente gerado

¹⁷as partículas de água movem-se em órbitas circulares quando uma onda passa

são: a modulação tilt, a modulação hidrodinâmica, atribuídas as ondas longas, além da velocidade bunching. Uma discussão detalhada sobre estes mecanismos de modulação pode ser vista no artigo de Hasselmann, Raney e Plant (1985). A seguir, faz-se apenas uma breve apresentação destes mecanismos com base em Young (1999).

4.3.1 Modulação tilt

A superfície da água, sobre a qual os espalhadores de Bragg¹⁸ se localizam, é periodicamente inclinada pelas ondas mais longas. Portanto, conforme a superfície da água se inclina, os comprimentos das ondas de Bragg se alteram, fazendo com que a energia dos espalhadores de Bragg se altere. Isto modula a seção transversal do radar, o que faz com que a intensidade do sinal de retorno ao radar também se altere.

A modulação tilt é, por conseguinte, devida ao efeito puramente geométrico do espalhamento das ondas de Bragg que são vistas pelo radar por diferentes ângulos de inclinação, ou seja, dependem da inclinação relativa às ondas mais longas (Young, 1999).

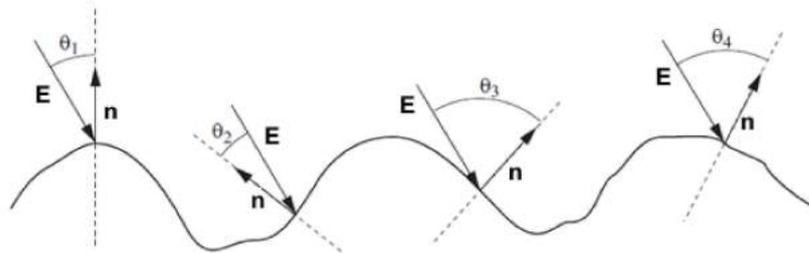


Figura 9 A seção transversal do radar depende do ângulo de incidência do campo eletromagnético do radar (E) e a normal (n) a uma faceta retroespalhadora

4.3.2 Modulação hidrodinâmica

A deformação periódica da superfície da água faz com que os espalhadores de Bragg situados nas cristas das ondas longas sejam comprimidos (zonas de convergência) e aqueles situados num cavado sejam expandidos (zonas de divergência). Isto ocorre, fundamentalmente, pela distribuição não uniforme das ondas curtas com respeito ao campo de ondas longas. Como resultado, há uma modulação periódica das amplitudes dos espalhadores

¹⁸ondas de Bragg

de Bragg (Hasselmann, Raney e Plant, 1985), o que acarreta na modulação da energia que retorna ao radar.

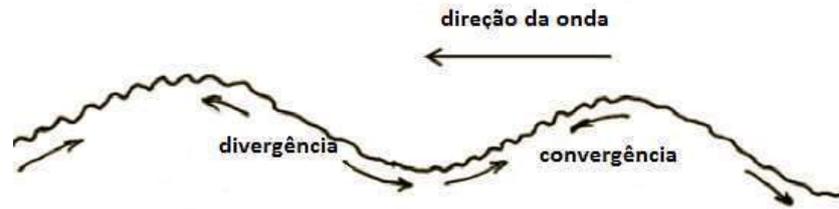


Figura 10 Modulação hidrodinâmica: zonas de convergência e divergência

4.3.3 Velocidade bunching

Este efeito é oriundo do mecanismo de abertura sintética empregada pela técnica SAR. Para simular uma antena de maior abertura e, conseqüentemente, aumentar a resolução espacial, o desvio Doppler do sinal de um mesmo alvo mapeado em momentos distintos do deslocamento do satélite é empregado para determinar sua posição no plano da imagem.

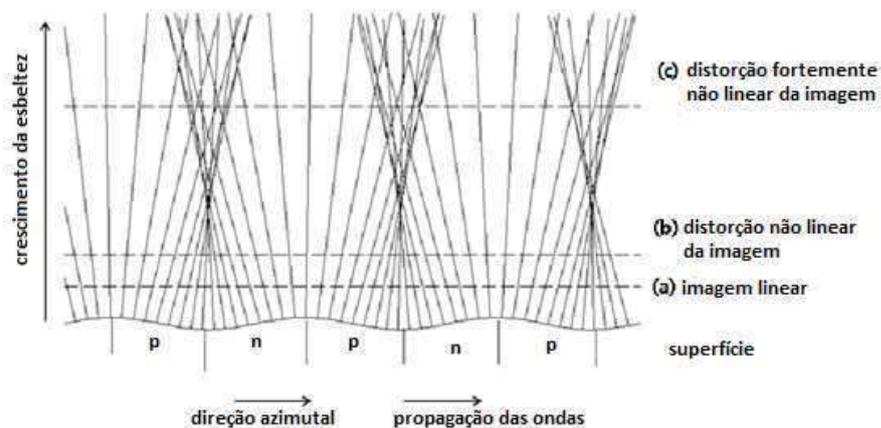


Figura 11 Efeito bunching: o impacto do movimento orbital das ondas sobre a posição de uma faceta retroespalhadora do campo de ondas no plano da imagem SAR. O eixo vertical refere-se ao crescimento médio da esbeltez das ondas. Para uma dada esbeltez, a posição de uma faceta retroespalhadora da superfície do oceano no plano da imagem é obtida pela interseção do raio associado a reta horizontal correspondente a esbeltez dada. As letras p e n indicam o movimento orbital das partículas que, respectivamente, aproximam-se e afastam-se da plataforma do SAR

Como a superfície do oceano é um alvo não estático devido ao movimento orbital induzido pela presença das ondas de maior comprimento, este movimento induz uma alteração na frequência do sinal retroespalhado. Dependendo da esbeltez das ondas, esta alteração se torna altamente não linear, impossibilitando a correção da posição do alvo no plano da imagem, conforme ilustrado na Figura 11.

Uma outra consequência do efeito *velocity bunching* são as variações nas densidades das facetas no plano da imagem SAR ilustradas na Figura 12 (Kahma *et al.*, 2005).

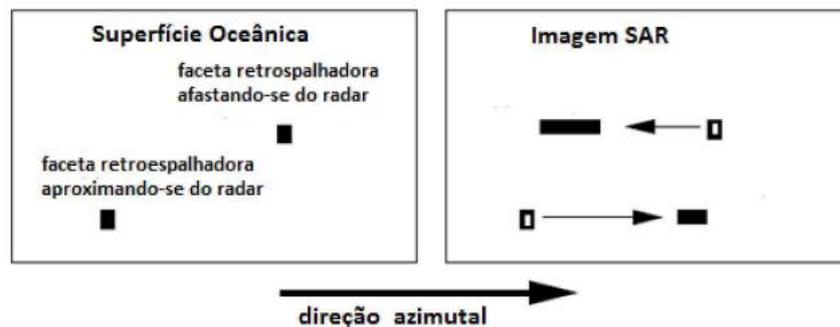


Figura 12 Variação da densidade das facetas retroespalhadoras no plano da imagem SAR conforme as ondas aproximam-se ou afastam-se da plataforma do SAR

A modulação tilt e a modulação hidrodinâmica são responsáveis pela detecção das ondas se propagando em uma direção ortogonal ao deslocamento do satélite (direção de range), enquanto que o *velocity bunching* é responsável pela detecção de ondas se propagando paralelamente à direção de deslocamento do satélite (direção azimutal).

4.4 Teoria linear de modulação

O processo de imageamento SAR é caracteristicamente não linear. Normalmente, as modulações hidrodinâmica e tilt podem ser consideradas processos lineares. Matematicamente, isto significa que estes mecanismos de modulação podem ser representados por suas respectivas funções de transferência¹⁹ de modulação.

Por outro lado, o mecanismo de modulação *velocity bunching* é, em geral, um processo altamente não linear. Isto ocorre, particularmente, para ondas de pequenos comprimentos, isto é, com menos de 100 metros de comprimento.

¹⁹ver subseção 2.4.2

Entretanto, no âmbito da teoria linear de modulação, o deslocamento das facetas é pequeno quando comparado ao comprimento das ondas de interesse, de modo que o mecanismo de *velocity bunching* pode ser tratado como um processo linear, sendo então caracterizado por sua função de transferência de modulação.

Para deslocamentos das facetas retroespalhadoras que sejam comparáveis ou que excedem as ondas de grande comprimento, o padrão das imagem SAR torna-se severamente distorcido e pode ser completamente manchado, limitando bastante a resolução da imagem na direção azimutal (Hasselmann e Hasselmann, 1991).

A seguir, são apresentadas as funções de transferência de modulação correspondentes a estes mecanismos de modulação.

4.4.1 A função de transferência de modulação tilt

A função de transferência de modulação tilt é calculada a partir de considerações puramente geométricas. Esta função depende basicamente do ângulo de incidência do feixe do radar sobre uma faceta retroespalhadora e do comprimento de onda se propagando na direção de range.

Para um espectro de ondas com decaimento proporcional a k^{-4} nas altas frequências²⁰, a função de transferência de modulação tilt é dada por (Alpers e Hasselmann, 1978)

$$T_t(\mathbf{k}) = \begin{cases} 4ik_y \cot \alpha (1 \pm \sin^2 \alpha)^{-1}, & \alpha \geq 30^\circ \\ 8ik_y (\sin 2\alpha)^{-1}, & \alpha < 30^\circ \end{cases} \quad (4.3)$$

em que k_y é a componente de onda na direção de range e α é o ângulo de incidência do feixe do radar sobre uma faceta retroespalhadora. Os sinais \pm referem-se, respectivamente, as polarizações VV e HH do campo eletromagnético emitido pelo radar.

4.4.2 A função de transferência de modulação hidrodinâmica

A função de transferência hidrodinâmica é a menos conhecida. A função utilizada em Hasselmann e Hasselmann (1991), é expressa por

$$T_h(\mathbf{k}) = \frac{\omega - i\zeta}{\omega^2 + \zeta^2} k \omega \left(\frac{k_y^2}{k^2} + Y_r + iY_i \right), \quad (4.4)$$

²⁰ $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ e $k = |\mathbf{k}|$

em que k_y é a componente de onda na direção de range, ς é um fator de amortecimento e Y_r e Y_i são coeficientes relacionados à modulação das ondas mais curtas imposta pelas ondas mais longas (Komen *et al.*, 1994).

4.4.3 A função de transferência de modulação *velocity bunching*

A função de transferência de modulação *velocity bunching* pode é representada por (Alpers *et al.*, 1981)

$$T_{vb}(\mathbf{k}) = -i\beta k_x T^v(\mathbf{k}), \quad (4.5)$$

em que

$$T_v(\mathbf{k}) = -\omega \left(\frac{k_y}{k} \text{sen } \alpha + i \cos \alpha \right), \quad (4.6)$$

denota a função de transferência da componente da velocidade orbital na direção range, k_x a componente de ondas na direção azimutal e β a razão dada por

$$\beta = \frac{d}{U}, \quad (4.7)$$

em que d é a distância range do radar (Figura 8) e U a velocidade de deslocamento da plataforma do radar.

4.5 Formação de uma imagem SAR

Devido aos diferentes pontos de vistas sobre a compreensão de imagens obtidas pelo SAR, uma teoria consistente que permitisse compreender a superfície do mar através destas imagens levou muito tempo para ser estabelecida. O artigo de Hasselmann, Raney e Plant (1985) sobre o experimento MARSEN pode ser considerado o primeiro passo no sentido de desenvolver uma teoria unificada e aceita pela comunidade da época.

Uma imagem SAR das ondas oceânicas, de acordo com Hasselmann e Hasselmann (1991), é produzida através de dois processos consecutivos de imageamento: a formação de uma imagem congelada (RAR), devida às modulações tilt e hidrodinâmica, e os efeitos adicionais do movimento, específicos do SAR, os quais não afetam a imagem congelada. As descrições destes processos são apresentadas nas subseções que se seguem.

4.5.1 Imagem congelada

No contexto da teoria de modulação linear, a elevação da superfície $\eta(\mathbf{x}, t)$ dada por (2.44) e a seção transversal do radar $\sigma(\mathbf{x}, t)$ podem ser representadas pela superposição de ondas de gravidade. Isto significa que se

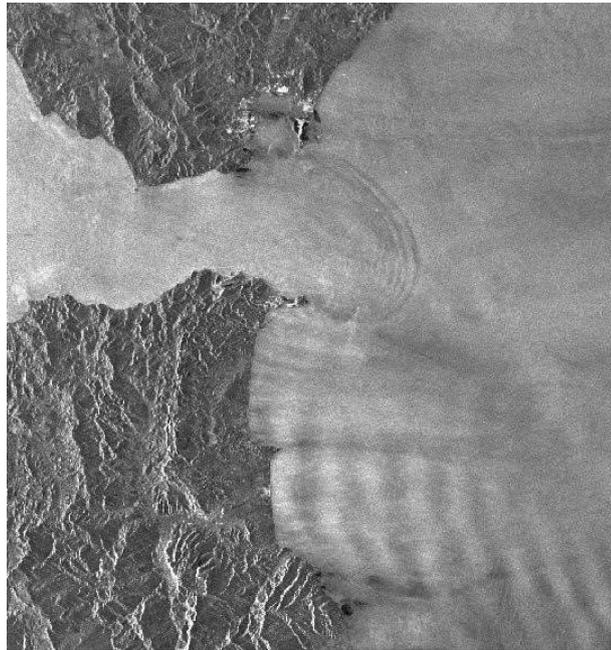


Figura 13 Imagem SAR (autêntica) do estreito de Gibraltar.

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \bar{\sigma} \left[1 + \int_{\mathbf{k}} \hat{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} + c.c. \right]^{21}, \quad (4.8)$$

sendo $\bar{\sigma}$ a seção transversal média do radar, então as amplitudes $\hat{\sigma}(\mathbf{k})$ da seção transversal de modulação do radar e as amplitudes $\hat{\eta}(\mathbf{k})$ do campo de ondas $\eta(\mathbf{x}, t)$ estão linearmente conectadas através da relação

$$\hat{\sigma}(\mathbf{k}) = T_R(\mathbf{k}) \hat{\eta}(\mathbf{k}), \quad (4.9)$$

em que $T_R(\mathbf{k})$ a função de transferência de modulação RAR. Isto é,

$$T_R(\mathbf{k}) = T_T(\mathbf{k}) + T_H(\mathbf{k}), \quad (4.10)$$

em que $T_T(\mathbf{k})$ e $T_H(\mathbf{k})$ são dadas em (4.3) e (4.4) respectivamente.

²¹c.c. denota o complexo conjugado

A imagem congelada, denotada por $I_R(\mathbf{x})$, tem intensidade diretamente proporcional a seção transversal do radar σ num dado instante, por exemplo, $t = 0$ (Kahma *et al.*, 2005). Portanto,

$$I_R(\mathbf{x}) = \kappa\sigma(\mathbf{x}, 0), \quad (4.11)$$

para algum $\kappa > 0$. Para simplificar a notação, escolhe-se, sem perda de generalidade, $\kappa = 1$. Da decomposição de Fourier de $I_R(\mathbf{x})$,

$$I_R(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}} \widehat{I}_R(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (4.12)$$

tem-se que $\widehat{I}_R(\mathbf{k}) = \widehat{I}_R^*(-\mathbf{k})$, pois $I_R(\mathbf{x}) = I_R^*(\mathbf{x})$. Combinando-se as equações (2.44), (4.8) e (4.12), verifica-se que $\widehat{I}_R(\mathbf{k})$ é expresso como

$$\widehat{I}_R(\mathbf{k}) = T_R(\mathbf{k})\widehat{\eta}(\mathbf{k}) + [T_R(-\mathbf{k})\widehat{\eta}(-\mathbf{k})]^* \quad (4.13)$$

A equação (4.13) relaciona, por meio da função de transferência de modulação RAR, as amplitudes da imagem congelada $I_R(\mathbf{x})$ e as amplitudes da elevação oceânica $\eta(\mathbf{x}, t)$ num instante de tempo fixo ($t = 0$).

4.5.2 Espectro de imagem RAR

O espectro de imagem RAR, denotado por $P_R(\mathbf{k})$, é definido por (Hasselmann e Hasselmann, 1991)

$$P_R(\mathbf{k}) = \langle \widehat{I}_R(\mathbf{k}) \widehat{I}_R^*(\mathbf{k}) \rangle \quad (4.14)$$

A equação (4.14) mostra que o espectro de imagem RAR representa a densidade da variância da intensidade da imagem congelada. Isto significa que²²,

$$\langle I_R^2 \rangle = \int P_R(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (4.15)$$

Devido à relação de independência entre amplitudes, apontada em (2.45), utilizando-se a relação (4.13) na equação (4.14), resulta que

²²ver subseção 4.6.1

$$P_R(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} [|T_R(\mathbf{k})|^2 \Psi(\mathbf{k}) + |T_R(-\mathbf{k})|^2 \Psi(-\mathbf{k})] \quad (4.16)$$

A equação (4.16) explicita que o espectro de imagem congelada é uma ponderação do espectro congelado (3.35) pela função de transferência de modulação RAR definida em (4.10). Isto justifica a denominação imagem congelada.

4.5.3 Efeitos de Movimento

A imagem SAR sofre consideráveis modificações em relação a imagem congelada devido aos efeitos de movimento. De fato, a modulação bunching provoca um deslocamento azimutal da posição aparente de uma faceta no plano da imagem (subseção 4.3.3).

O deslocamento azimutal da faceta retroespalhadora, segundo Hasselmann e Hasselmann (1991), é proporcional a v , a componente de range da velocidade orbital das ondas (positiva na direção do radar) pelas quais esta faceta é transportada. Assim, eles definem o deslocamento azimutal $\boldsymbol{\xi}$ numa localização \mathbf{x} por

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \beta v(\mathbf{x}) \mathbf{i}, \quad (4.17)$$

sendo \mathbf{i} o vetor unitário na direção azimutal e β a razão definida por (4.7).

Devido a transferência linear de modulação, a componente range da velocidade orbital está relacionada a elevação da superfície de modo que tem-se (Lamb, 1932),

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}} \hat{v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} + c.c., \quad (4.18)$$

em que

$$\hat{v}(\mathbf{k}) = T_v(\mathbf{k}) \hat{\eta}(\mathbf{k}), \quad (4.19)$$

sendo $T_v(\mathbf{k})$ a função de transferência de velocidade range dada em (4.6).

4.6 A imagem SAR

²³ A relação entre a imagem SAR e a imagem congelada, utilizando-se o modelo *velocity bunching*, é obtida mapeando-se a faceta na posição \mathbf{x}' em sua correspondente

²³todas as funções são suficientemente deriváveis na modelagem apresentada

posição $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}')$ no plano da imagem.

Matematicamente, a intensidade da imagem SAR satisfaz (Krogstad, 1992)

$$I_S(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}'} I_R(\mathbf{x}') \left| \frac{d\mathbf{x}'}{d\mathbf{x}} \right| \quad \text{em que} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}') \quad (4.20)$$

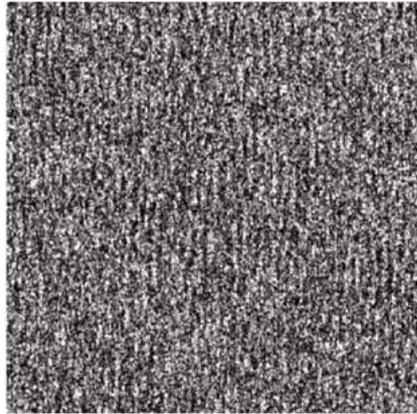


Figura 14 O SAR possui diversos modos de operação, dentre os quais o chamado “wave mode”. Neste modo de operação o SAR produz imagens correspondentes a áreas de 5 Km (range) \times 10 Km (azimute), chamadas imágetes (fonte: CSA, 1996).

A equação (4.20) afirma que um pixel da imagem SAR é resultado da soma de todos correspondentes pixels da imagem RAR deslocados de suas coordenadas originais. A Figura 11, com muita clareza, ilustra esta situação. O fator $\left| \frac{d\mathbf{x}'}{d\mathbf{x}} \right|$ em (4.20) representa a variação da densidade de um elemento retroespalhador no plano da imagem devido à compressão (menor que 1) ou à expansão (maior que 1) da distribuição inicial das facetas, conforme o que é visto na Figura 12.

4.6.1 Espectro de imagem SAR

O espectro de imagem SAR, denotado por $P_S(\mathbf{k})$, é definido por (Hasselmann e Hasselmann, 1991)

$$P_S(\mathbf{k}) = \langle \widehat{I}_S(\mathbf{k}) \widehat{I}_S^*(\mathbf{k}) \rangle, \quad (4.21)$$

sendo $\widehat{I}_S(\mathbf{k})$ a amplitude da decomposição de Fourier da imagem SAR na direção \mathbf{k} , a saber,

$$I_S(\mathbf{x}) = \int \widehat{I}_S(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (4.22)$$

com

$$\widehat{I}_S(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int I_S(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.23)$$

O espectro de imagem SAR representa a densidade da variância da imagem SAR. De fato, considerando-se a igualdade²⁴

$$\langle \widehat{I}_S(\mathbf{k}_1) \widehat{I}_S(\mathbf{k}_2)^* \rangle = P_S(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (4.24)$$

obtida mais adiante, resulta de (4.23) que

$$\begin{aligned} \langle I_S^2 \rangle &= \int \int \langle \widehat{I}_S(\mathbf{k}_1) \widehat{I}_S(\mathbf{k}_2)^* \rangle e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 = \\ &= \int P_S(\mathbf{k}_1) \left[\int \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}_2 \right] d\mathbf{k}_1 = \int P_S(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

confirmando a afirmação feita.

4.6.2 Uma aproximação da transformação de Hasselmann

Para configurações regulares do oceano (swells - Figura 1), é possível obter-se uma versão bastante simplificada da transformação de Hasselmann. Neste caso, em geral, a desigualdade (Hasselmann e Hasselmann, 1991)

$$\left| \frac{d\xi}{d\mathbf{x}} \right| \ll 1 \quad (4.26)$$

é satisfeita, de forma que a aproximação linear (Cheney e Kinkaid, 2002)

$$\left| \frac{d\mathbf{x}'}{d\mathbf{x}} \right| = \left| I + \frac{d\xi}{d\mathbf{x}} \right|^{-1} \approx 1 - \left| \frac{d\xi}{d\mathbf{x}} \right| \quad (4.27)$$

é válida.

Assim, a equação $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \xi(\mathbf{x}')$ possui apenas uma solução (Figura 11), de forma que as equações (4.17), (4.18) e (4.20) levam a

²⁴ver equação (5.9)

$$I_S(\mathbf{x}) = I_R(\mathbf{x}) - i\beta k_x v(\mathbf{x}) \quad (4.28)$$

Segue-se, considerando-se a equação (4.5), que²⁵

$$\widehat{I}_S(\mathbf{k}) = \widehat{I}_R(\mathbf{k}) + [T_{vb}(\mathbf{k})\widehat{\eta}(\mathbf{k}) + (T_{vb}(-\mathbf{k})\widehat{\eta}(-\mathbf{k}))^*] \quad (4.29)$$

Combinando-se (4.29) com (4.13), decorre que

$$\widehat{I}_S(\mathbf{k}) = [T_S(\mathbf{k})\widehat{\eta}(\mathbf{k}) + (T_S(-\mathbf{k})\widehat{\eta}(-\mathbf{k}))^*] \quad (4.30)$$

sendo

$$T_S(\mathbf{k}) = T_R(\mathbf{k}) + T_{vb}(\mathbf{k}) \quad (4.31)$$

a função de transferência SAR.

Finalmente, partindo-se da definição (4.21), escreve-se \mathcal{H}_l , a seguinte aproximação linear da transformação de Hasselmann:

$$\mathcal{H}_l(\Psi(\mathbf{k})) = P_S(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} [|T_S(\mathbf{k})|^2 \Psi(\mathbf{k}) + |T_S(-\mathbf{k})|^2 \Psi(-\mathbf{k})] \quad (4.32)$$

válida para swells.

É importante notar que o espectro de imagem SAR obtido em (4.32) está, assim como o espectro de imagem RAR (4.16), intimamente ligado ao espectro de imagem congelado (4.13).

²⁵deve-se considerar a normalização em torno da média da imagem congelada: ver (5.12)

5 A TRANSFORMAÇÃO DE HASSELMANN: UMA ALTERNATIVA COM HIPÓTESE ADICIONAL

No artigo de Hasselmann e Hasselmann (1991) foi proposta uma técnica para estimar o espectro direcional de ondas através de uma imagem SAR. Esta técnica é, sobretudo, baseada em processos lineares, exceto pelo fato de que o efeito *velocity bunching* é altamente não linear. Considerando-se o modelo de duas escalas, felizmente, esta dificuldade pode ser tratada adequadamente. Nesta situação o efeito bunching é considerado um processo linear (Alpers e Bruning, 1986).

Naquela ocasião, Hasselmann e Hasselmann obtiveram uma forma fechada para a transformação não linear que mapeia o espectro de ondas sobre o espectro de imagem SAR, conhecida, atualmente, como transformação de Hasselmann. O caminho traçado por eles para obter esta transformação é um tanto complicado, pois suas manipulações algébricas são praticamente taquigrafadas.

Em 1992, porém, Krogstad propôs um novo método para obtenção desta transformação. Em última instância, sua técnica consiste em calcular um momento de segunda ordem intimamente ligado à função característica de um vetor Gaussiano de quatro componentes, astutamente definido. Este vetor incorpora propriedades locais da superfície do oceano, governando, portanto, a correspondente imagem SAR da superfície do oceano em movimento. Inegavelmente, viu-se um avanço no que diz respeito ao encurtamento da dedução conhecida, sem no entanto, dar autorização a chamar seu trabalho de simples, como sugere o título do trabalho (Krogstad, 1992).

Neste capítulo será apresentada uma nova dedução da transformação de Hasselmann baseada num argumento que simplifica significativamente a dedução de Krogstad.

Há, essencialmente, duas razões que explicam a simplificação obtida. A primeira delas provém do fato de considerar-se, aqui, a representação do campo de ondas oceânicas por meio de integrais de Riemann estocásticas (discutidas no capítulo 2) sob a hipótese de Komen (2.48). Esta hipótese garante a convergência de todas as integrais que se seguem, além de tornar mais naturais as manipulações algébricas necessárias para obtenção do resultado desejado.

A segunda destas razões é o argumento utilizado na dedução. Especificamente falando, a ideia central é definir um vetor Gaussiano com apenas três componentes e cujo

seu valor médio é zero. Deste modo, é possível reduzir a ordem da matriz de covariância do vetor Gaussiano definido, facilitando bastante os cálculos envolvidos na dedução.

A inspiração para esta ideia provém do argumento utilizado por Engen e Johnsen (1995) ao tratarem da recuperação do espectro de ondas com o uso do espectro cruzado de imagem.

Este capítulo está assim estruturado: Na seção 5.1 é definido o núcleo de Krogstad, cuja transformada de Fourier fornece o espectro de imagem SAR. Na seção 5.2 são definidas as funções de covariância, as quais contém as informações das funções de transferência de modulação. A seguir, na seção 5.3 calcula-se explicitamente o núcleo de Krogstad em termos de expressões que dependem das funções de covariância, para, finalmente, expressar o núcleo de Krogstad apenas em termos das funções de covariância. O capítulo é encerrado na subseção 5.3.4 com a forma mais útil da transformação de Hasselmann, isto é, a forma computacional.

5.1 O núcleo de Krogstad

O ponto de partida para atingir o objetivo proposto é expressar convenientemente o espectro de imagem SAR. De fato, o teorema seguinte mostra que é possível obter o espectro de imagem SAR calculando-se a “transformada de Fourier”²⁶ daquilo que - aqui - será denominado núcleo de Krogstad.

Ressalta-se, entretanto, que a influência direta para obtenção deste teorema foi a representação do espectro cruzado de imagem SAR utilizada no artigo de Engen e Johnsen (1995).

5.1.1 Teorema de Representação

O espectro de imagem SAR admite a representação

$$P_S(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (5.1)$$

em que o chamado núcleo de Krogstad, isto é,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \langle I_R(\mathbf{x} + \mathbf{r}) I_R(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}[\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}+\mathbf{r})-\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})]} \rangle, \quad (5.2)$$

²⁶mnemônico

²⁷o símbolo $\langle . \rangle$ representa a média estatística

independe de \mathbf{x} . Em outras palavras, o espectro de imagem SAR resulta da ação do operador de Fourier sobre o núcleo de Krogstad.

Prova: Com efeito, Krogstad (1992) mostra que o coeficiente de Fourier da imagem SAR dado em (4.23) é, alternativamente, expresso por

$$\widehat{I}_S(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int I_R(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}[\mathbf{x}' + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}')] } d\mathbf{x}' \quad (5.3)$$

Considerando-se a identidade (2.50) para $t = t' = 0$, através de uma manipulação algébrica direta de (5.3), resulta que

$$\langle \widehat{I}_S(\mathbf{k}_1) \widehat{I}_S^*(\mathbf{k}_2) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int \widetilde{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{-i(\mathbf{k}_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{k}_2 \mathbf{x}_2)} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (5.4)$$

onde

$$\widetilde{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \langle I_R(\mathbf{x}_1) I_R(\mathbf{x}_2) e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \boldsymbol{\xi}_2)} \rangle \quad (5.5)$$

sendo $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_i)$ para $i = 1, 2$.

A hipótese da homogeneidade espacial do campo de elevações oceânicas (2.44) permite assumir que os campos randômicos $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ e $I_R(\mathbf{x})$ são também homogêneos (Krogstad, 1992). Deste modo, a função em (5.5) depende apenas da diferença $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Assim, realizando-se a mudança de variável definida por

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{s} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

na integral (5.4), vem que

$$\begin{aligned} \langle \widehat{I}_S(\mathbf{k}_1) \widehat{I}_S^*(\mathbf{k}_2) \rangle = & \\ & \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int \frac{1}{4} \widetilde{G} \left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{s}}{2}, \frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{2}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \right) \exp \left[\frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{s}}{2} \right] \exp \left[\frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{r}}{2} \right] d\mathbf{s} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Com leve abuso de notação, integrando-se (5.7) sobre a variável \mathbf{s} , vem que²⁸

²⁸ver (9.2.3)

$$\begin{aligned}
& \langle \widehat{I}_S(\mathbf{k}_1) \widehat{I}_S^*(\mathbf{k}_2) \rangle = \\
& = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \widetilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \exp \left[\frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{r}}{2} \right] d\mathbf{r} = \\
& = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \int G(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) e^{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r},
\end{aligned} \tag{5.8}$$

em que $G(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) = \widetilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1)$. Tomando-se $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$, resulta o teorema.

Uma consequência imediata deste teorema é que,

$$\langle \widehat{I}_S(\mathbf{k}_1) \widehat{I}_S^*(\mathbf{k}_2) \rangle = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) P_S(\mathbf{k}_1), \tag{5.9}$$

por vezes, utilizada como definição para o espectro de imagem SAR (Kanevsky, 2009).

Convém, entretanto, ressaltar que o núcleo de Krogstad depende apenas da componente azimutal do vetor de onda. Portanto, a partir de agora, escreve-se $G(\mathbf{r}, k_x)$ no lugar de $G(\mathbf{r}, \mathbf{k})$. Assim, devido à independência de $G(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ em relação a \mathbf{x} , é mais adequado avaliar a função $G(\mathbf{r}, k_x)$ em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Isto é:

$$G(\mathbf{r}, k_x) = I_0^2 \langle [1 + I(\mathbf{r})] [1 + I(\mathbf{0})] e^{-ik_x \Delta \xi} \rangle, \tag{5.10}$$

em que

$$\Delta \xi = [\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{0})] \cdot \mathbf{i} \tag{5.11}$$

e $I(\mathbf{x})$ é a flutuação em torno da intensidade média I_0 da variável aleatória $I_R(\mathbf{x})$, isto é,

$$I_R(\mathbf{x}) = I_0 [1 + I(\mathbf{x})], \tag{5.12}$$

com $\langle I(\mathbf{x}) \rangle = 0$ para \mathbf{x} arbitrário. Isto tornará a notação mais simples.

5.2 Funções de covariância

Uma vez que o espectro de imagem SAR é expresso através de (5.1), o próximo passo será escrever o núcleo de Krogstad em termos das chamadas funções de covariância (Hasselmann e Hasselmann, 1991) como originalmente foi feito. Esta é a ideia central do trabalho de Krogstad (1992) e que será adaptada a nova dedução aqui proposta.

É oportuno observar que a comparação entre as expressões (4.8) e (5.12) leva a

$$I(\mathbf{x}) = \int \hat{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} + c.c., \quad (5.13)$$

expressão que será útil ao longo desta seção. As funções de covariância definidas a seguir surgiram a primeira vez em Hasselmann e Hasselmann (1991).

5.2.1 Autovariância da imagem RAR

A função de autocovariância da imagem RAR é dada por

$$f^R(\mathbf{x}) = \langle I(\mathbf{x} + \mathbf{r})I(\mathbf{r}) \rangle \quad (5.14)$$

Considerando-se a representação (5.13) e a identidade algébrica (2.50), tem-se

$$f^R(\mathbf{x}) = \left\{ \int \langle \hat{\sigma}(\mathbf{k}_1)\hat{\sigma}(\mathbf{k}_2) \rangle e^{i[(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}]} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + \int \langle \hat{\sigma}(\mathbf{k}_1)\hat{\sigma}^*(\mathbf{k}_2) \rangle e^{i[(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}]} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \right\} + c.c. \quad (5.15)$$

Através de (2.45), (3.10) e (4.9) pode-se escrever que

$$f^R(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int |T_R(\mathbf{k})|^2 \Psi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} + c.c., \quad (5.16)$$

e, após uma mudança de variável na integral conjugada, finalmente, tem-se

$$f^R(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int [|T_R(\mathbf{k})|^2 \Psi(\mathbf{k}) + |T_R(-\mathbf{k})|^2 \Psi(-\mathbf{k})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (5.17)$$

As duas funções de variância que se seguem podem ser calculadas seguindo-se os mesmos

passos usados na obtenção de (5.17).

5.2.2 Covariância da imagem RAR e da velocidade orbital

A função de covariância da imagem RAR e da velocidade orbital é definida por

$$f^{Rv}(\mathbf{x}) = \langle I(\mathbf{x} + \mathbf{r})v(\mathbf{r}) \rangle, \quad (5.18)$$

e calculada através da expressão

$$f^{Rv}(\mathbf{x}) = \int \frac{1}{2} \{ \Psi(\mathbf{k})T_R(\mathbf{k})(T_v(\mathbf{k}))^* + \Psi(-\mathbf{k})(T_R(-\mathbf{k}))^*(T_v(-\mathbf{k})) \} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (5.19)$$

5.2.3 Autovariância da velocidade orbital

A função de autocovariância da velocidade orbital é definida por

$$f^v(\mathbf{x}) = \langle v(\mathbf{x} + \mathbf{r})v(\mathbf{r}) \rangle \quad (5.20)$$

e calculada através da expressão

$$f^v(\mathbf{x}) = \int \Psi(\mathbf{k})|T_v(\mathbf{k})|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (5.21)$$

5.3 Cálculo do núcleo de Krogstad

Agora, todos os elementos necessários para escrever o núcleo de Krogstad (5.2) foram apresentados. A nova dedução da transformação da transformação de Hasselmann será desenvolvida em três partes.

5.3.1 O argumento

Sejam \mathbf{x} e \mathbf{r} arbitrários (no plano) e considere a diferença de deslocamento azimutal entre duas facetas retroespalhadoras, isto é,

$$\Delta\xi(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x} - \mathbf{r}), \quad (5.22)$$

em que $\xi(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{i}$. Seja, também, o vetor Gaussiano

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = [I(\mathbf{r}), I(\mathbf{0}), \Delta\xi(\mathbf{r})], \quad (5.23)$$

o qual carrega informações da imagem congelada e dos efeitos do movimento da plataforma que transporta o satélite. Finalmente, considere a função característica²⁹ de $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, isto é,

$$K(\mathbf{t}) = \langle \exp(i\mathbf{t} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r})) \rangle, \quad (5.24)$$

definida para cada $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$.

O argumento utilizado consiste em expressar o núcleo de Krogstad em termos da função característica (5.24). Para isto, inspirado por Krogstad (1992), escreve-se o núcleo (5.10) como combinação linear das derivadas parciais da função característica (5.24) de até segunda ordem, de tal sorte que é possível determinar escalares complexos a_1, a_2, a_3, a_4 que satisfazem

$$G(\mathbf{r}, k_x) = I_0^2 \left[a_1 K(\mathbf{t}) + a_2 \frac{\partial K}{\partial t_1}(\mathbf{t}) + a_3 \frac{\partial K}{\partial t_2}(\mathbf{t}) + a_4 \frac{\partial^2 K}{\partial t_1 \partial t_2}(\mathbf{t}) \right] \quad (5.25)$$

para $\mathbf{t}_0 = (0, 0, -k_x)$.

De fato, observando-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} K(\mathbf{t}_0) = \langle e^{-ik_x \Delta\xi} \rangle \\ \frac{\partial K}{\partial t_1}(\mathbf{t}_0) = i \langle I(\mathbf{r}) e^{-ik_x \Delta\xi} \rangle \\ \frac{\partial K}{\partial t_2}(\mathbf{t}_0) = i \langle I(\mathbf{0}) e^{-ik_x \Delta\xi} \rangle \\ \frac{\partial^2 K}{\partial t_1 \partial t_2}(\mathbf{t}_0) = - \langle I(\mathbf{r}) I(\mathbf{0}) e^{-ik_x \Delta\xi} \rangle \end{array} \right. \quad (5.26)$$

resulta que a escolha $a_1 = 1, a_2 = -i, a_3 = -i, a_4 = -1$ torna (5.25) verdadeira. Por outro lado³⁰, a função característica do vetor Gaussiano $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ é expressa por

²⁹ver(10.1.1)

³⁰ver (10.1.2)

$$K(\mathbf{t}) = \exp \left[i \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot \Sigma(\mathbf{r}) \mathbf{t} \right], \quad (5.27)$$

em que $\Sigma(\mathbf{r})$ é a matriz de covariância³¹ do vetor $\mathbf{V}(\mathbf{r})$. Como $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{0}$, resulta simplesmente que

$$K(\mathbf{t}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot \Sigma(\mathbf{r}) \mathbf{t} \right], \quad (5.28)$$

onde a matriz de covariância $\Sigma(\mathbf{r})$ é dada, explicitamente, por

$$\Sigma(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \langle I(\mathbf{r})I(\mathbf{r}) \rangle & \langle I(\mathbf{r})I(\mathbf{0}) \rangle & \langle I(\mathbf{r})\Delta\xi(\mathbf{r}) \rangle \\ \langle I(\mathbf{0})I(\mathbf{r}) \rangle & \langle I(\mathbf{0})I(\mathbf{0}) \rangle & \langle I(\mathbf{0})\Delta\xi(\mathbf{r}) \rangle \\ \langle \Delta\xi(\mathbf{r})I(\mathbf{r}) \rangle & \langle \Delta\xi(\mathbf{r})I(\mathbf{0}) \rangle & \langle \Delta\xi(\mathbf{r})\Delta\xi(\mathbf{r}) \rangle \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Resta, portanto, calcular as derivadas parciais que figuram em (5.25). Isto será feito a seguir.

5.3.2 Funções auxiliares

As funções

$$\begin{cases} \Gamma(\mathbf{x}) = \langle I(\mathbf{x} + \mathbf{r})I(\mathbf{r}) \rangle, \\ \Theta(\mathbf{x}) = \langle I(\mathbf{x} + \mathbf{r})\Delta\xi(\mathbf{r}) \rangle, \\ \Upsilon(\mathbf{x}) = \langle \Delta\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})\Delta\xi(\mathbf{r}) \rangle, \\ s(\mathbf{t}) = \mathbf{t} \cdot \Sigma(\mathbf{r}) \mathbf{t} \end{cases} \quad (5.30)$$

auxiliarão as manipulações algébricas que surgirão. Em consequência da própria definição das funções (5.30) e/ou da homogeneidade espacial do campo de ondas (2.44), as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$\begin{cases} \Gamma(\mathbf{0}) = \langle I(\mathbf{r})I(\mathbf{r}) \rangle = \langle I(\mathbf{0})I(\mathbf{0}) \rangle, \\ \Gamma(\mathbf{r}) = \Gamma(-\mathbf{r}) = \langle I(\mathbf{r})I(\mathbf{0}) \rangle, \\ \Theta(\mathbf{0}) = \langle I(\mathbf{r})\Delta\xi(\mathbf{r}) \rangle, \\ \Theta(-\mathbf{r}) = \langle I(\mathbf{0})\Delta\xi(\mathbf{r}) \rangle, \\ \Upsilon(\mathbf{0}) = \langle \Delta\xi(\mathbf{r})\Delta\xi(\mathbf{r}) \rangle \end{cases} \quad (5.31)$$

³¹ver (10.1.4)

Uma multiplicação matricial direta, fornece que

$$s(\mathbf{t}) = \Gamma(\mathbf{0})t_1^2 + \Gamma(\mathbf{0})t_2^2 + \Upsilon(\mathbf{0})t_3^2 + 2\Gamma(\mathbf{r})t_1t_2 + 2\Theta(\mathbf{0})t_1t_3 + 2\Theta(-\mathbf{r})t_2t_3 \quad (5.32)$$

Após alguns cálculos, verifica-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} K(\mathbf{t}) = e^{-\frac{1}{2}s(\mathbf{t})} \\ \frac{\partial K}{\partial t_1}(\mathbf{t}) = -\frac{K(\mathbf{t})}{2} [2\Gamma(\mathbf{0})t_1 + 2\Gamma(\mathbf{r})t_2 + 2\Theta(\mathbf{0})t_3] \\ \frac{\partial K}{\partial t_2}(\mathbf{t}) = -\frac{K(\mathbf{t})}{2} [2\Gamma(\mathbf{0})t_2 + 2\Gamma(\mathbf{r})t_1 + 2\Theta(-\mathbf{r})t_3] \\ \frac{\partial^2 K}{\partial t_1 \partial t_2}(\mathbf{t}) = \frac{1}{K(\mathbf{t})} \frac{\partial K}{\partial t_1}(\mathbf{t}) \frac{\partial K}{\partial t_2}(\mathbf{t}) \end{array} \right. \quad (5.33)$$

Avaliando-se as funções em (5.33) no ponto $\mathbf{t}_0 = (0, 0, -k_x)$ e substituindo-as em (5.25), chega-se que o núcleo de Krogstad dado em (5.2) pode ser expresso por

$$G(\mathbf{r}, k_x) = I_0^2 e^{-\frac{1}{2}k_x^2 \Upsilon(\mathbf{0})} \{1 + \Gamma(\mathbf{r}) + ik_x [\Theta(\mathbf{0}) + \Theta(-\mathbf{r})] - k_x^2 \Theta(\mathbf{0})\Theta(-\mathbf{r})\} \quad (5.34)$$

5.3.3 Relação entre as funções de covariância e auxiliares

Para finalizar, deve-se escrever a expressão do núcleo de Krogstad obtida em (5.34) em termos das funções de covariância apresentadas na seção 5.2. Porém, é necessário buscar relações entre estas funções e as funções auxiliares definidas na subseção 5.3.2.

Com (5.22) em mente, pode-se escrever que

$$\Theta(\mathbf{x}) = \langle I(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \Delta \xi(\mathbf{r}) \rangle = \beta [\langle I(\mathbf{x} + \mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \rangle - \langle I(\mathbf{x} + \mathbf{r}) v(\mathbf{0}) \rangle], \quad (5.35)$$

donde, tem-se

$$\Theta(\mathbf{0}) = \beta [f^{Rv}(\mathbf{0}) - f^{Rv}(\mathbf{r})], \quad (5.36)$$

e

$$\Theta(-\mathbf{r}) = \beta [f^{Rv}(-\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0})]. \quad (5.37)$$

Como

$$\Upsilon(\mathbf{x}) = \langle (\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \xi(\mathbf{r}))(\xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{0})) \rangle, \quad (5.38)$$

e levando-se em conta que $\langle v(\mathbf{r})v(\mathbf{r}) \rangle = \langle v(\mathbf{0})v(\mathbf{0}) \rangle$, resulta

$$\Upsilon(\mathbf{0}) = \langle [\xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{0})][\xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{0})] \rangle = 2\beta^2 [\langle v(\mathbf{r})v(\mathbf{r}) \rangle - \langle v(\mathbf{r})v(\mathbf{0}) \rangle], \quad (5.39)$$

isto é,

$$\Upsilon(\mathbf{0}) = 2\beta^2 [f^v(\mathbf{0}) - f^v(\mathbf{r})], \quad (5.40)$$

Introduzindo-se a média quadrática do deslocamento azimutal de uma faceta retroespalhadora (Hasselmann e Hasselmann, 1991), isto é,

$$\xi'^2 = \langle \xi^2 \rangle = \beta^2 \langle v^2 \rangle \quad (5.41)$$

segue, após simples manipulação algébrica de (5.40), que

$$\Upsilon(\mathbf{0}) = 2[\xi'^2 - \xi'^2 \langle v^2 \rangle^{-1} f^v(\mathbf{r})] \quad (5.42)$$

Substituindo-se (5.36), (5.37) e (5.42) em (5.34) tem-se,

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, k_x) = & \\ = I_0^2 e^{-k_x^2 \xi'^2} \cdot e^{-k_x^2 \xi'^2 \langle v^2 \rangle^{-1} f^v(\mathbf{r})} \cdot \{ & 1 + f^R(\mathbf{r}) + ik_x \beta [f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(-\mathbf{r})] + \\ & + (k_x \beta)^2 [f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0})][f^{Rv}(-\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0})] \} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Inserindo-se (5.43) em (5.1), chega-se, enfim, a transformação de Hasselmann:

$$\begin{aligned}
P_S(\mathbf{k}) &= \\
&= (2\pi)^{-2} I_0^2 e^{-k_x^2 \xi'^2} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \cdot e^{-k_x^2 \xi'^2 \langle v^2 \rangle^{-1} f^v(\mathbf{r})} \cdot \{1 + f^R(\mathbf{r}) + \\
&\quad + ik_x \beta [f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(-\mathbf{r})] + (k_x \beta)^2 [f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0})][f^{Rv}(-\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0})]\} d\mathbf{r}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

A forma integral (5.43) é idêntica a expressão obtida por Hasselmann e Hasselmann (1991), exceto pela normalização do valor médio da imagem congelada ($I_0 = 1$) admitida por eles. Observando-se, atentamente, as funções de variância vistas em (5.17), (5.19) e (5.21) pode-se concluir o fundamental fato acerca da transformação de Hasselmann,

$$P_S(\mathbf{k}) = \mathcal{H}(\Psi(\mathbf{k})) = \mathcal{H}(\Psi(-\mathbf{k})) = P_S(-\mathbf{k}), \tag{5.45}$$

isto é, a ambiguidade característica do espectro de imagem SAR.

5.3.4 Forma computacional da transformação de Hasselmann

A transformação integral de Hasselmann tem a forma de uma transformada de Fourier, exceto pelo termo exponencial contendo a velocidade orbital que figura em (5.44). Entretanto, expandindo-se este termo em série de potências, pode-se escrever uma forma mais adequada da transformação para propósitos computacionais.

Neste sentido, com a convenção de que $(-1)! = 0! = 1$ e levando-se em conta a identidade,

$$e^{pt}(1 + a + bt + ct^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=2n-2}^{2n} G_{nm}(\mathbf{t}) \right] \tag{5.46}$$

em que,

$$G_{nm}(\mathbf{t}) = \frac{p^n}{n!} \mathbf{t}^{2n} + \frac{bp^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{t}^{2n-1} + \left[\frac{ap^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{cp^{n-2}}{(n-2)!} \right] \mathbf{t}^{2n-2} \tag{5.47}$$

e considerando-se

$$\begin{cases} t = k_x \beta \\ p = f^v(\mathbf{r}) \\ a = f^R(\mathbf{r}) \\ b = i[f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(-\mathbf{r})] \\ c = [f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(-\mathbf{0})][f^{Rv}(-\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0})] \end{cases} \quad (5.48)$$

a expressão (5.44), é reescrita como

$$\begin{aligned} P_S(\mathbf{k}) = & (2\pi)^{-2} I_0^2 e^{-k_x^2 \xi'^2} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} + \\ & + e^{-k_x^2 \xi'^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=2n-2}^{2n} \left((2\pi)^{-2} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} G_{nm}(k_x \beta) d\mathbf{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.49)$$

A primeira parcela em (5.49) representa uma irrelevante contribuição da função δ na direção $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, associada à intensidade média da imagem. Desprezando-a (Hasselmann; Hasselmann, 1991), tem-se

$$P_S(\mathbf{k}) = e^{-k_x^2 \xi'^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2n-2}^{2n} (k_x \beta)^m P_{nm}(\mathbf{k}), \quad (5.50)$$

em que

$$P_{n,2n}(\mathbf{k}) = \mathfrak{L} \left[\frac{[f^v(\mathbf{r})]^n}{n!} \right], \quad (5.51)$$

$$P_{n,2n-1}(\mathbf{k}) = \mathfrak{L} \left[\frac{i[f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(-\mathbf{r})][f^v(\mathbf{r})]^{n-1}}{(n-1)!} \right], \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} P_{n,2n-2}(\mathbf{k}) = & \mathfrak{L} \left[\frac{f^R(\mathbf{r})[f^v(\mathbf{r})]^{n-1}}{(n-1)!} + \right. \\ & \left. + \frac{[f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0})][f^{Rv}(-\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0})][f^R(\mathbf{r})]^{n-2}}{(n-2)!} \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

sendo \mathfrak{L} o operador integral (de Fourier) definido por,

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{h}) = (2\pi)^{-2} I_0^2 \int \mathfrak{h}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (5.54)$$

para cada função $\mathfrak{h}(\mathbf{r})$.

O índice m denota a ordem de não-linearidade com respeito ao parâmetro β associado ao *velocity bunching*, enquanto que o índice n indica a ordem de não-linearidade com respeito ao espectro de ondas (input). As funções $P_{n,m}(\mathbf{k})$ consistem dos produtos de ordem n das funções de covariância.

Um fato notável sobre a transformação de Hasselmann é que ela revela a natureza do processo de imageamento SAR de ondas oceânicas: um filtro passa baixa na direção azimutal do espectro de imagem SAR. De fato, o termo exponencial em (5.50) evidencia este fato. Significa, portanto, que para grandes números de onda na direção azimutal (k_x grande) há perda da informação devido à severa diminuição da intensidade da imagem, dando origem ao cutoff azimutal. Além disto, torna-se claro, também, as limitações desta transformação em casos de grandes deslocamentos das facetas retroespalhadoras.

A aproximação quase-linear da transformação de Hasselmann é simplesmente

$$\mathcal{H}_{ql}(\Psi(\mathbf{k})) = P_S(\mathbf{k}) = \frac{e^{-k_x^2 \xi'^2}}{2} [|T_S(\mathbf{k})|^2 \Psi(\mathbf{k}) + |T_S(-\mathbf{k})|^2 \Psi(-\mathbf{k})] \quad (5.55)$$

ou, mais compactamente,

$$\mathcal{H}_{ql}(\Psi(\mathbf{k})) = e^{-k_x^2 \xi'^2} \mathcal{H}_l(\Psi(\mathbf{k})) \quad (5.56)$$

A expressão (5.55) fornece uma boa aproximação para a transformação de Hasselmann (Komen *et al.*, 1994). De um modo geral, o truncamento de ordem 12 da série (5.50) fornece excelentes resultados do espectro de imagem SAR como um todo (Kahma *et al.*, 2005).

6 UM MODELO TEÓRICO-COMPUTACIONAL: PROPOSTA PARA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

No capítulo 1 foi apontado que a técnica de inversão de Hasselmann recupera um espectro de ondas associado à imagem SAR que é dependente da escolha do espectro de ondas inicial (*first-guess*) usado como dado de entrada do mecanismo de inversão. Neste capítulo, apresenta-se um modelo teórico-computacional para estudar numericamente a influência do espectro de ondas inicial sobre o mecanismo de inversão de Hasselmann. Para isto, aplica-se o procedimento de inversão a um espectro de imagem SAR simulado, obtido da parametrização de um espectro de ondas unimodal, aqui denominado espectro de ondas de referência.

O papel do espectro de ondas de referência é representar um estado de mar idealizado. Este espectro de ondas será usado para comparar resultados obtidos pelo algoritmo de inversão quando rotações do espectro de ondas de referência são utilizadas como dado de entrada (espectro de ondas inicial) do mecanismo de inversão. Deste modo, é possível determinar o grau de correlação entre o espectro de ondas de referência e o espectro de ondas recuperado em função da direção associada ao período de pico, aqui sendo chamada de direção principal do espectro.

A correlação fornece um indicativo sobre a distorção que é imposta ao espectro de ondas recuperado, que é dependente do espectro de ondas inicial usado como dado de entrada do mecanismo de inversão. Um espectro de ondas recuperado é considerado muito bom se o grau de correlação com o espectro de ondas de referência é alto (≈ 1). Desta forma, o espectro de ondas recuperado é bastante similar ao espectro de ondas de referência, que é, em teoria, a melhor resposta possível esperada do mecanismo de inversão. Paralelamente a isto, são avaliados os impactos sobre os parâmetros de ondas associados ao espectro de ondas recuperado, de modo a refinar ainda mais a análise.

É importante salientar que, para a execução desta proposta, foi necessário implementar computacionalmente a transformação de Hasselmann, sendo então denominada de processador espectral. Este processador transforma um espectro de ondas oceânicas no correspondente espectro de imagem SAR e, portanto, não faz uso de uma imagem SAR obtida de um satélite ou de um simulador de imagens. Acoplado ao processador espectral, é utilizado o algoritmo MPI responsável pela inversão. Há outras rotinas menores, porém

importantes, envolvidas neste procedimento as quais serão destacadas oportunamente.

O capítulo está subdividido do seguinte modo: A seção 6.1 descreve, em detalhes, o modelo teórico-computacional proposto; a seção 6.2 trata dos conceitos introduzidos para análise do modelo, bem como as equações que governam o experimento realizado. Após isto, na seção 6.3 o algoritmo utilizado para simulação é descrito brevemente para, enfim, na seção 6.4 os resultados obtidos serem discutidos.

Ressalta-se que os resultados a seguir foram publicados e podem ser encontrados no artigo de Santos *et al.* (2015).

6.1 Modelo teórico

Num cenário operacional, o SAR faz a aquisição de imagens do oceano e, após adequado processamento de dados, o espectro de imagem SAR é obtido. Este espectro de imagem, junto com a informação prévia fornecida pelo espectro de ondas inicial, constituem os dados de entrada requeridos para a execução do algoritmo MPI. Este algoritmo fornecerá como resposta o espectro direcional de ondas associado à cena observada pelo satélite (isto é, o espectro de ondas recuperado). Devido ao processador espectral desenvolvido (e implementado), um dos avanços obtidos neste trabalho é a possibilidade de produzir artificialmente espectros de imagens SAR a partir de parâmetros de onda escolhidos previamente. Isto abre caminhos para a realização de experimentos com grande controle sobre todos os parâmetros envolvidos neste complexo mecanismo de recuperação de espectros direcionais de onda.

Neste estudo, a execução teórica do procedimento considera os três dados de entrada enumerados abaixo e definidos a seguir:

- (i1) o espectro direcional de ondas de referência: $E(\theta, \omega)$
- (i2) o espectro direcional de ondas inicial: $E^0(\theta, \omega)$
- (i3) o espectro de imagem simulado: $S_{sim}(\theta, \omega)$

O espectro de ondas de referência $E(\theta, \omega)$, gerado sinteticamente, caracteriza um estado de mar idealizado. Seria este o estado de mar, em teoria, observado pelo satélite. É a partir deste espectro de ondas de referência que se obtém $S_{sim}(\theta, \omega)$, o espectro de imagem SAR simulado, que desempenha o papel do espectro de imagem observado

extraído de uma imagem SAR. O espectro de ondas inicial $E^0(\theta, \omega)$ também será obtido do espectro de ondas de referência $E(\theta, \omega)$, conforme descrição feita adiante.

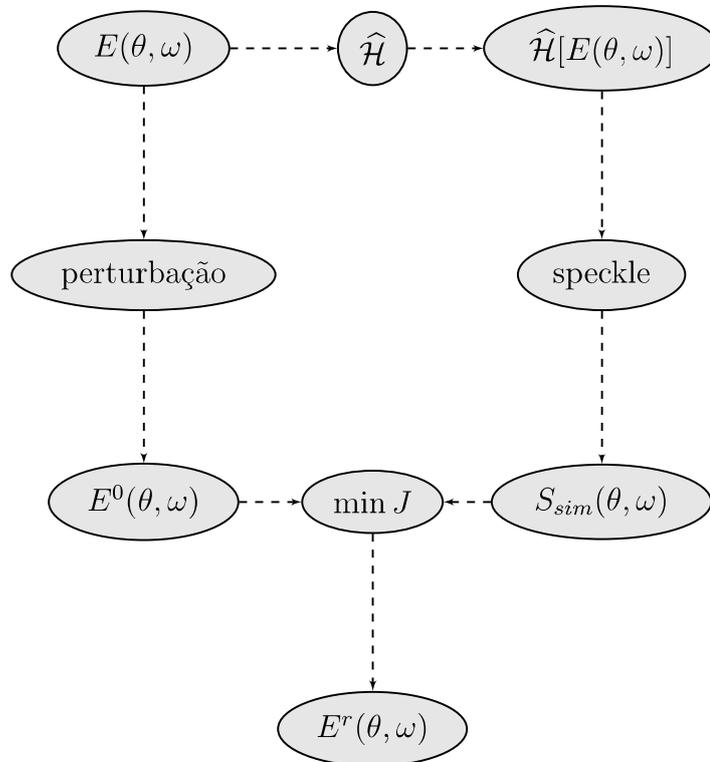


Figura 15 Diagrama do modelo computacional proposto para recuperação do espectro de ondas com o uso do SAR. As flechas tem origem no dado de entrada requerido pela correspondente célula do mecanismo.

Inicialmente, define-se o dado de entrada (i1). Para isto, combina-se um espectro de energia do tipo³² JONSWAP com uma distribuição direcional do tipo \cos^{2s} (Massel, 2007). Computacionalmente, isto é feito utilizando-se o pacote de rotinas WAFO (sigla do inglês: Wave Analysis for Fatigue and Oceanography. WAFO-group, 2000), desenvolvido para análise e simulação de dados de onda. Essas rotinas requerem três parâmetros de onda como entrada: altura significativa H_s , período de pico T_p , direção principal θ_p , além da escolha do tipo de distribuição direcional $D(\theta, \omega)$, todos definidos na subseção 3.4.

³²ver subseção (3.5.7)

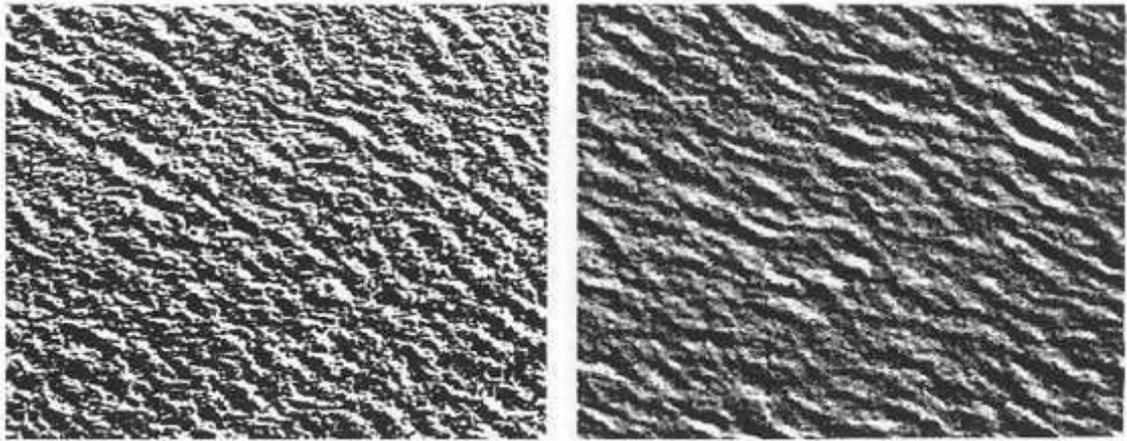


Figura 16 Esquerda: foto real de um campo de ondas ao largo da costa de Noruega; direita: mar simulado com espectro JONSWAP e uma distribuição \cos^{2s} com parâmetros característicos para geração de ondas (Kahma *et al.*, 2005)

Em seguida, o dado de entrada (i2) pode ser definido através do espectro direcional de ondas de referência $E(\theta, \omega)$, obtido em (i1), bastando para isto efetuar adequadas perturbações dos parâmetros de ondas exigidos pelo pacote WAFO e usando-se a mesma distribuição direcional de $E(\theta, \omega)$. Finalmente, define-se o dado de entrada (i3). Em tese, esta informação é obtida através de uma aplicação direta da transformação de Hasselmann sobre (i1), o espectro de ondas de referência. A obtenção do espectro de imagem SAR simulado utiliza o processador espectral, citado anteriormente. Esta complexa ferramenta foi implementada em Matlab e desempenha papel destacado neste estudo, pois é responsável por gerar um espectro de imagem SAR sintético a partir de um estado de mar plenamente conhecido, dispensando o uso de uma imagem SAR para realização de experimentos.

É fundamental observar que, de acordo com o procedimento descrito, os dados de entrada (i2) e (i3) são obtidos de forma que as condições de similaridade entre os espectros referência e inicial possam ser controladas, assim como a confiabilidade do espectro de imagem SAR relativamente ao espectro de ondas inicial. De acordo com Robinson (2004), num processo operacional de aquisição de dados pelo SAR, o sinal que retorna ao radar é contaminado por ruído (speckle). O algoritmo MPI foi, por isso, concebido para receber um espectro de imagem SAR ruidoso, de modo que deve-se levar este fato em consideração. Desta forma, o espectro de imagem SAR simulado, produzido sinteticamente, será dado por

$$\tilde{S}_{sim}(\theta, \omega) = \hat{\mathcal{H}}[E(\theta, \omega)] + \mathcal{N}(\theta, \omega), \quad (6.1)$$

em que $\hat{\mathcal{H}}$ denota a transformação de Hasselmann no espaço (θ, ω) e \mathcal{N} simula o efeito de speckle. Maiores detalhes sobre a introdução deste ruído gerado randomicamente serão apresentados mais adiante.

6.2 Conceituação

É importante definir quantidades que permitam medir a influência do espectro de ondas inicial - usado como dado de entrada pelo algoritmo MPI - sobre o espectro direcional recuperado. Neste sentido, considera-se o espectro de ondas de referência $E(\theta, \omega)$ associado a um estado de mar idealizado, o espectro de imagem SAR simulado $\tilde{S}_{sim}(\theta, \omega)$ correspondente à cena descrita por $E(\theta, \omega)$ e um espectro de ondas inicial $E^0(\theta, \omega)$, todos obtidos conforme (i1), (i2) e (i3). A partir de agora, supõe-se, sem menção explícita, que $E^r(\theta, \omega)$ é o espectro de ondas recuperado pelo algoritmo MPI quando utilizados o espectro de imagem $\tilde{S}_{sim}(\theta, \omega)$ e o espectro de ondas inicial $E^0(\theta, \omega)$ como dados de entrada

6.2.1 Correlação espectral

Um conceito importante e amplamente utilizado na comparação de imagens é o conceito de correlação. Intuitivamente, duas imagens são correlacionadas se elas são semelhantes entre si, e não são correlacionadas se elas são bastante diferentes. Por exemplo, duas cópias idênticas da mesma imagem são totalmente correlacionadas, mas adicionando-se gradualmente um ruído aleatório a uma delas, a correlação irá reduzir, até que, finalmente, tornem-se não correlacionadas. Assim, o grau de correlação fornece uma indicação para a semelhança entre as imagens.

Esta ideia pode ser adaptada ao presente contexto, usando-a para medir o grau de similaridade (correlação) entre o espectro de ondas referência e o espectro de ondas recuperado pelo SAR. Com base em Cartwright (1990), define-se o grau de similaridade - devido ao espectro de ondas inicial $E^0(\theta, \omega)$ - entre o espectro de ondas de referência $E(\theta, \omega)$ e o espectro de ondas recuperado $E^r(\theta, \omega)$, como sendo

$$c(E^0) = \frac{E}{\|E\|} \circ \frac{E^r}{\|E^r\|} \quad (6.2)$$

Em (6.2), o símbolo \circ denota o produto interno de Frobenius entre as matrizes que representam os espectros de ondas de referência e recuperado, enquanto que o símbolo $\|\cdot\|$ denota a norma matricial induzida por este produto interno (Stewart, 2011). Isto é, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes, então

$$A \circ B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} \quad (6.3)$$

e

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \quad (6.4)$$

O grau de similaridade (coeficiente de correlação) entre o espectro de ondas de referência e o espectro de ondas recuperado será máximo quando for igual a 1 (correlação total) e mínimo se for igual 0 ³³(não há correlação).

6.2.2 Impactos sobre os parâmetros espectrais

A fim de atingir uma compreensão maior acerca do espectro de ondas recuperado, é importante distinguir o impacto do espectro de ondas inicial sobre cada um dos parâmetros de onda recuperados. Assim, considerando $E(\theta, \omega)$, o espectro de ondas de referência, com parâmetros espectrais

$$\{H_s, T_p, \theta_p, \theta_m\} \quad (6.5)$$

altura significativa, período de pico, direção principal e direção média respectivamente, e $E^r(\theta, \omega)$, o espectro de ondas recuperado, com parâmetros espectrais (ordenados como acima)

$$\{H_s^r, T_p^r, \theta_p^r, \theta_m^r\} \quad (6.6)$$

definem-se os desvios associados aos parâmetros espectrais do seguinte modo:

³³espectro de ondas é uma função não-negativa

(1) Desvio da altura significativa:

$$D_H(E^0) = \frac{|H_s - H_s^r|}{H_s} \quad (6.7)$$

(2) Desvio do período de pico:

$$D_T(E^0) = \frac{|T_p - T_p^r|}{T_p} \quad (6.8)$$

(3) Desvio da direção principal:

$$D_{\theta_p}(E^0) = \min\{o_p, 2 - o_p\}, \text{ em que } o_p = \frac{|\theta_p - \theta_p^r|}{180} \quad (6.9)$$

(4) Desvio da direção média:

$$D_{\theta_m}(E^0) = \min\{o_m, 2 - o_m\}, \text{ em que } o_m = \frac{|\theta_m - \theta_m^r|}{180} \quad (6.10)$$

6.2.3 Esquema numérico

A meta fundamental é estudar o espectro direcional de ondas recuperado de um espectro de imagem SAR (simulado) quando utilizados espectros de ondas iniciais obtidos de rotações do espectro de ondas de referência, como dados de entrada do algoritmo MPI (de fato, uma mudança da direção principal do espectro de ondas de referência corresponde a uma rotação do mesmo). Neste sentido, considere o espectro de ondas de referência $E(\theta, \omega)$ caracterizado pelos parâmetros em (6.6), e seja $\tilde{S}_{sim}(\theta, \omega)$, o espectro de imagem SAR (simulado) associado à cena teórica descrita por $E(\theta, \omega)$.

A sequência

$$\{E_j^0(\theta, \omega) : -12 \leq j \leq 12\} \quad (6.11)$$

de espectros direcionais de ondas cujos parâmetros: altura significativa, período de pico e direção principal indicados, respectivamente, por

$$\{H_s^{0,j}, T_p^{0,j}, \theta_p^{0,j}\} \quad (6.12)$$

são numericamente definidos pelas equações,

$$\begin{cases} H_s^{0,j} = H_s \\ T_p^{0,j} = T_p \\ \theta_p^{0,j} = \theta_p + 15j \end{cases} \quad (6.13)$$

é formada apenas de rotações do espectro de ondas de referência. É importante destacar que para valores de j para os quais $\theta_p^{0,j}$ é negativo, deve-se considerar a menor determinação positiva deste ângulo, isto é, $\theta_p^{0,j} + 360^\circ$. Em particular, $E_0^0(\theta, \omega)$ é o próprio espectro de ondas de referência $E(\theta, \omega)$.

Assim, após todas as rotações do espectro de ondas de referência $E(\theta, \omega)$ serem utilizadas como dados de entrada do algoritmo de inversão, o mecanismo terá produzido uma sequência de espectros direcionais recuperados

$$\{E_j^r(\theta, \omega) : -12 \leq j \leq 12\} \quad (6.14)$$

que, juntamente com seus parâmetros espectrais, denotados por,

$$\{H_s^{r,j}, T_p^{r,j}, \theta_p^{r,j}, \theta_m^{r,j}\} \quad (6.15)$$

serão avaliados através dos indicadores (correlação e desvios) estabelecidos previamente.

6.3 Simulações numéricas

A partir de um espectro de imagem SAR, define-se que um experimento consiste na obtenção do espectro de ondas recuperado (e seus parâmetros) através do processo de inversão, uma vez que uma rotação do espectro de ondas de referência tenha sido utilizada como dado de entrada para iniciar o processo. Uma simulação é um conjunto de 25 experimentos, sendo cada um deles determinado em função da rotação imposta ao espectro de ondas de referência, conforme descrito pelas equações em (6.13).

Neste trabalho foram realizadas 3 simulações, perfazendo-se um total de 75 experimentos. Utilizou-se uma máquina com processador Intel Core i5-3210M 2.50GHz, 4GB de memória RAM com o sistema operacional Ubuntu 12.04.5 LTS (Precise Pangolin) 64 bits na execução das rotinas. O processador espectral está implementado em Matlab, enquanto que o algoritmo MPI está implementado em Fortran. Os parâmetros de entrada utilizados no WAFO são:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_s = 4,8 \text{ m (altura significativa)} \\ T_p = 13 \text{ seg (período de pico)} \\ s = 15 \text{ (coeficiente no espalhamento direcional } \cos^{2s}) \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Para simular o efeito speckle (ruído), foi criada uma matriz com entradas aleatórias e uniformemente distribuídas variando no intervalo $[0, 10]$. Esta matriz é adicionada à matriz correspondente ao espectro de imagem SAR. Os parâmetros de satélite utilizados correspondem aos do ERS-1 (European Remote Sensing), que esteve em atividade até 2011.

Uma descrição detalhada do algoritmo utilizado nas simulações realizadas é apresentada a seguir:

1. Definição dos parâmetros para geração de um espectro direcional de ondas: altura significativa, H_s , período de pico T_p , e direção principal θ_p .
2. Geração de um espectro direcional de ondas utilizando rotinas do WAFO adaptadas (espectro de ondas de referência).
3. Execução do processador espectral.
 - 3.1 Geração de um espectro da imagem SAR associado ao espectro direcional de ondas gerado no item 2, utilizando a transformação não linear de Hasselmann oceano-SAR.
 - 3.2 Adição de ruído ao espectro da imagem SAR.
 - 3.3 Conversão do espectro da imagem para o padrão UWA da ESA.
4. Roda 25 experimentos baseados no arquivo gerado no item 3.3.
 - 4.1 Para $\theta_p = 0^\circ$ até 345° com incrementos de 15° . Aqui há um loop entre os passos (4.1) e (4.2) onde o valor de $\theta_p = 0^\circ$ é alterado, a partir de 0° até chegar em 345° .
 - 4.1.1 Utiliza os mesmos valores dos parâmetros H_s e T_p utilizados no item 1.

4.1.2 Geração de um espectro direcional de ondas utilizando rotinas do WAFO adaptadas (espectro de ondas inicial).

4.1.3 Roda o MPI

4.1.4 Armazena os resultados de forma conveniente (espectro de ondas recuperado + parâmetros de onda)

4.2 Fim para.

6.4 Resultados

Todos os resultados dos experimentos realizados encontram-se no apêndice A. Os gráficos ao longo desta seção devem ser entendidos a partir das seguintes instruções:

- (I) Cada unidade no eixo horizontal corresponde à direção principal do espectro de ondas inicial utilizado como dado de entrada do algoritmo de inversão (MPI);
- (II) A direção principal do espectro de ondas de referência é representada em 0° . Os espectros de ondas de referência considerados possuem as direções: range - (90° , isto é, ortogonal em relação ao deslocamento do satélite), azimuthal (0° , isto é, paralela ao deslocamento do satélite) e intermediária às anteriores (45°) em relação ao deslocamento do satélite;
- (III) A direção do espectro de imagem SAR está representada no eixo horizontal por 0° (que coincide com a direção principal do espectro de ondas de referência) e $\pm 180^\circ$ (ambiguidade);
- (IV) A variação angular da direção principal de um espectro de ondas inicial em relação à direção principal do espectro de ondas de referência será denotada por Δ^0 . A seguir, alguns exemplos ilustrarão como determinar a direção principal de um espectro de ondas inicial. Se a direção principal do espectro de ondas de referência for, por exemplo, 15° e variação angular $\Delta^0 = 75^\circ$, então a direção principal do espectro de ondas inicial é $90^\circ = 15^\circ + 75^\circ$. Se a variação for $\Delta^0 = -120^\circ$, então a direção principal do espectro de ondas inicial é $15^\circ - 120^\circ = -105^\circ$. A menor determinação positiva deste arco é $360^\circ - 105^\circ$.

A fim de sistematizar a análise dos resultados, esta tarefa será dividida em partes.

6.4.1 Direção média

Na figura Figura 17, cada curva corresponde ao desvio da direção média do espectro de ondas recuperado relativamente ao espectro de ondas de referência - definido em (6.10) - em função da direção principal do espectro de ondas inicial.

Nota-se que todas as curvas estão sobrepostas e possuem um aspecto comum: a forma de sino invertido. Isto significa que a direção média é um parâmetro do espectro de ondas recuperado que é bastante sensível à variação da direção principal do espectro de ondas inicial, e este comportamento é observado em todas as direções dos espectros de ondas de referência considerados nas simulações.

De fato, o desvio da direção média aumenta à medida que a variação angular Δ^0 também aumenta. Por exemplo, para variações angulares $|\Delta^0| \leq 45^\circ$, o desvio da direção média é menor que 20%. Em particular, o desvio da direção média é máximo (igual a 100%) quando a direção principal do espectro de ondas inicial é oposta à direção principal do espectro de ondas de referência ($|\Delta^0| = 180^\circ$). Conclui-se, portanto, que a direção média do espectro de ondas recuperado acompanha as rotações imprimidas ao espectro de ondas de referência.

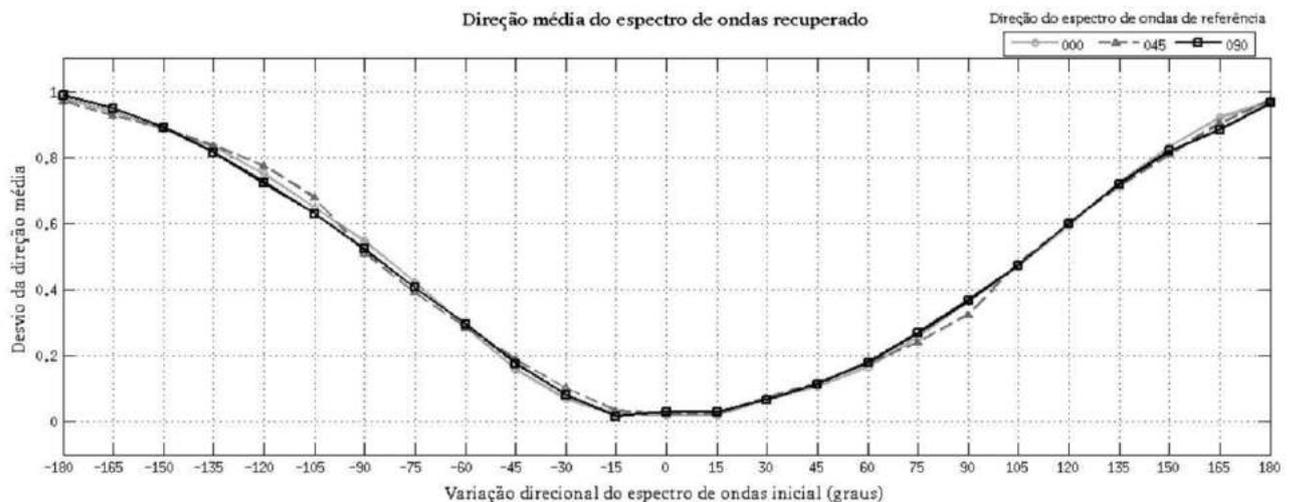


Figura 17 Representação da variação do desvio da direção média (adimensional) do espectro de ondas recuperado em função da direção principal do espectro de ondas inicial conforme a direção principal do espectro de referência relativamente à direção do voo do satélite.

6.4.2 Direção principal

Na figura Figura 18, cada curva corresponde ao desvio da direção principal do espectro de ondas recuperado relativamente ao espectro de ondas de referência - definido em (6.9) - em função da direção principal do espectro de ondas inicial. Todas as curvas possuem um aspecto comum: a forma aproximada da função degrau. Isto caracteriza que a direção principal do espectro de ondas recuperado é pouco sensível às variações angulares da direção principal do espectro de ondas inicial. De fato, vê-se que se $|\Delta^0| \leq 60^\circ$, o desvio da direção principal do espectro de ondas recuperado é menor que 10%.

Por outro lado, para variações angulares tais que $|\Delta^0| \geq 75^\circ$, de um modo geral, o mecanismo de inversão fornece espectros recuperados com direções principais considerável ou absolutamente discrepantes da direção principal do espectro de ondas de referência. Isto é caracterizado pelo salto súbito evidenciado pelas curvas na faixa angular de $|\Delta^0| \approx 75^\circ$, pois verifica-se que a direção do espectro de ondas recuperado possui um desvio em torno 80% ou mais.

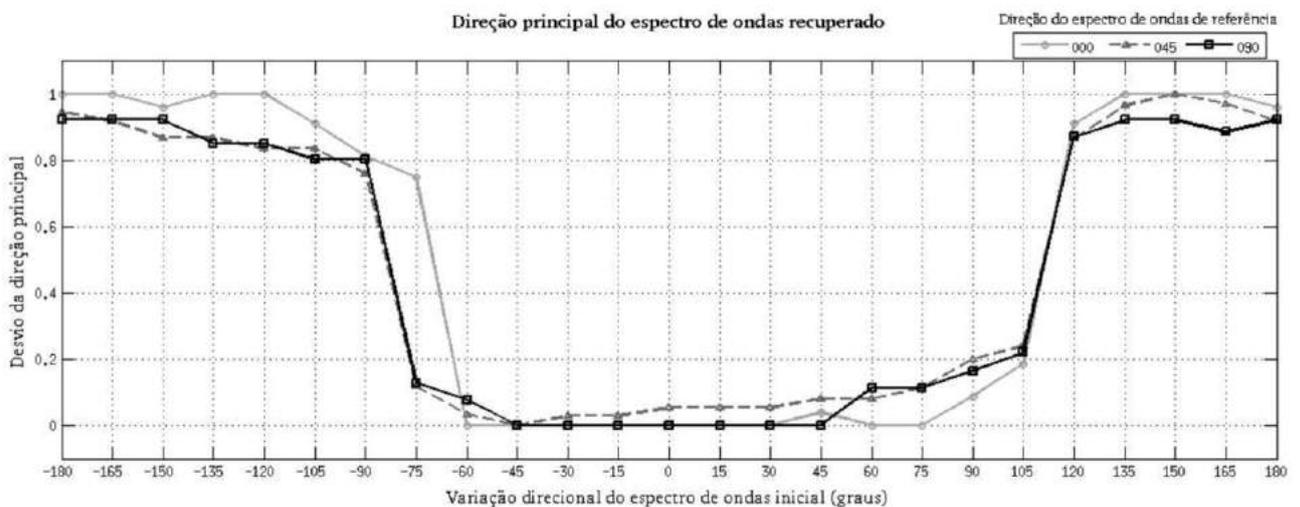


Figura 18 Representação da variação do desvio da direção principal do espectro de ondas recuperado em função da direção principal do espectro de ondas inicial conforme a direção principal do espectro de referência relativamente à direção do voo do satélite.

Esta discussão sugere que as repostas do algoritmo MPI, em relação à direção principal de propagação das ondas, são pouco sensíveis à direção do espectro de ondas inicial sendo determinadas principalmente pela direção do espectro de imagem SAR.

De fato, considerando-se que a direção do espectro de imagem simulado está re-

presentada nos gráficos por $\Delta^0 = 0^\circ$ e $\Delta^0 = \pm 180^\circ$, verifica-se que as curvas são estáveis nestas vizinhanças. Como contraponto, é bom lembrar que a direção média do espectro de ondas recuperado acompanha a variação da direção do espectro de ondas inicial, isto é, não há, como neste caso, estabilidade em relação às variações da direção principal do espectro de ondas inicial.

6.4.3 Altura significativa e densidade média de energia

Na Figura 19, cada curva corresponde ao desvio da altura significativa do espectro de ondas recuperado relativamente ao espectro de ondas de referência - definido por (6.7) - em função da direção principal do espectro de ondas inicial. Diferentemente do que acontece com os casos analisados anteriormente, não há, num primeiro momento, um evidente padrão comum a todas as curvas.

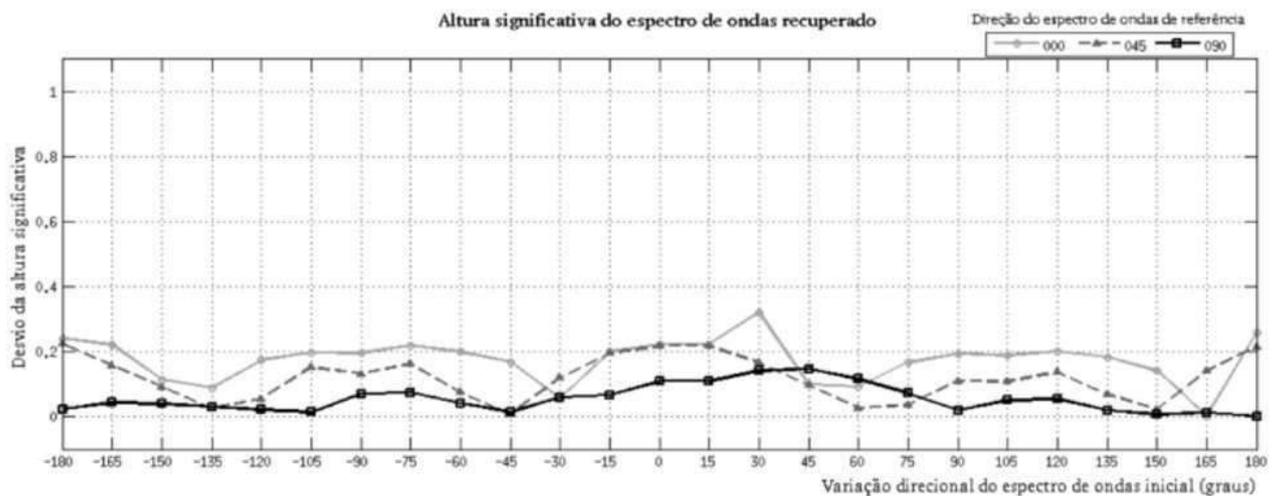


Figura 19 Representação da variação do desvio da altura significativa (adimensional) do espectro de ondas recuperado em função da direção principal do espectro de ondas inicial conforme a direção principal do espectro de referência relativamente à direção do voo do satélite.

Analisando-se as curvas, observa-se que o desvio médio da altura significativa é influenciado pela direção principal do espectro de ondas de referência. Considerando a curva referente à direção azimutal (0°), o desvio médio da altura significativa é aproximadamente de 17,4%. No caso da curva referente à direção intermediária (45°), verifica-se um desvio médio da altura significativa de aproximadamente 12%. E, por fim, no caso da curva referente à direção de range (90°), o desvio médio da altura significativa é de aproximadamente 5%.

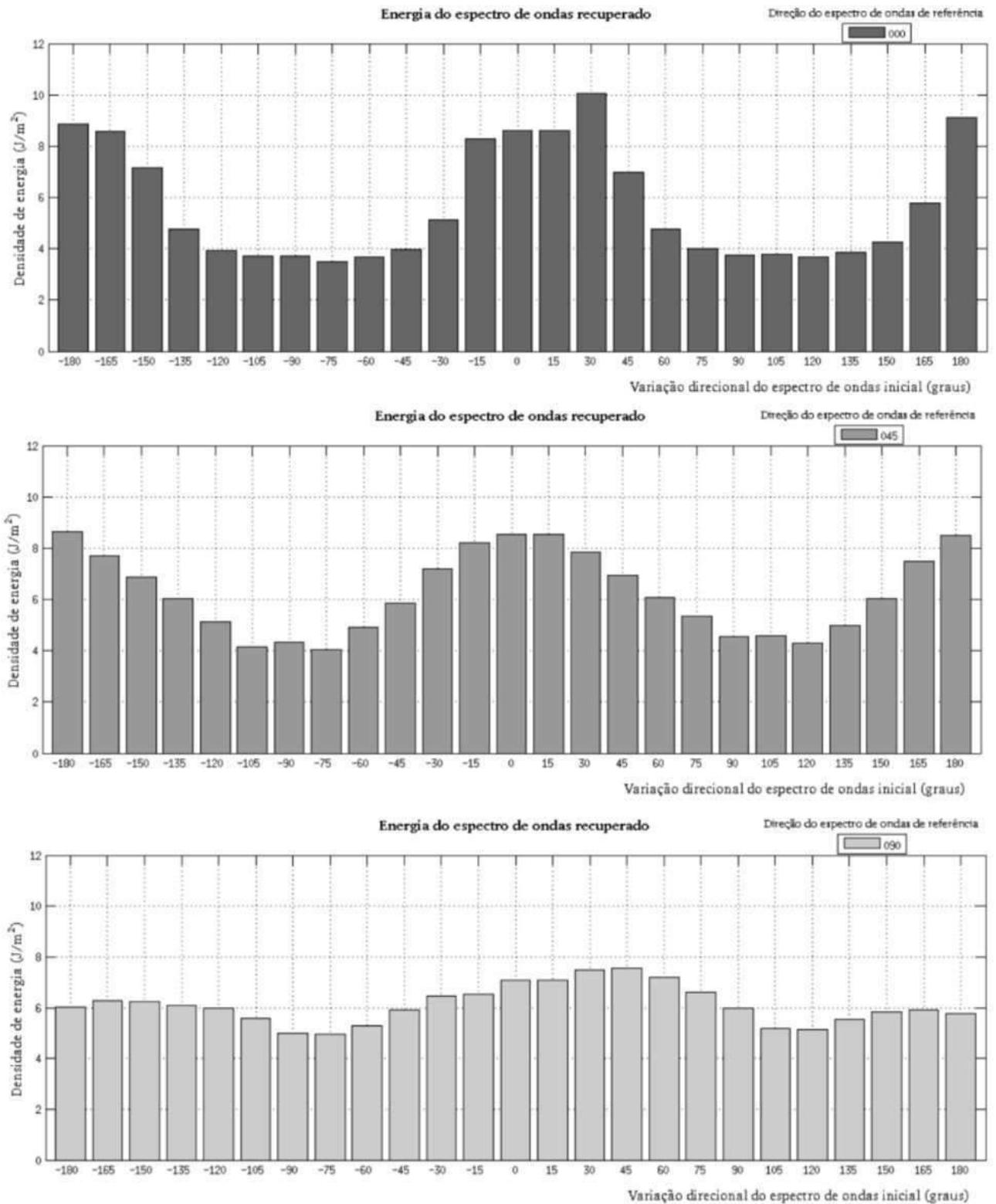


Figura 20 Os gráficos representam da densidade média de energia correspondente ao espectro de ondas recuperado obtido de espectro de imagem SAR simulados, gerados a partir de espectros de ondas de referência com direções principais de 0°, 45° e 90° respectivamente.

Isto revela que o desvio da altura significativa torna-se menor à medida que a direção principal das ondas se aproxima da direção de range (ortogonal ao deslocamento do satélite).

Na Figura 20, observa-se como varia a densidade média de energia (J/m^2) corresponde aos espectros de ondas recuperados de acordo com a direção principal do espectro de ondas inicial para ondas se propagando, respectivamente, nas direções azimutal, intermediária e de range. É possível notar um comportamento comum entre estes gráficos: de modo geral, os maiores valores da densidade média de energia são percebidos à medida que a direção principal do espectro de ondas inicial tende a alinhar-se à direção do espectro de imagem SAR. Isto ocorre quando a variação angular Δ^0 estiver na vizinhança de 0° ou $\pm 180^\circ$.

Além disto, nota-se que, nestas vizinhanças, os valores da densidade média de energia aumentam quanto menor for o desvio angular entre a direção de propagação das ondas e a direção azimutal.

Devido à relação (3.18) entre a densidade média de energia das ondas e a altura significativa das ondas, esta análise mostra que a altura significativa é sensível à variação da direção principal do espectro de ondas inicial e tem um comportamento muito bem determinado nas condições consideradas.

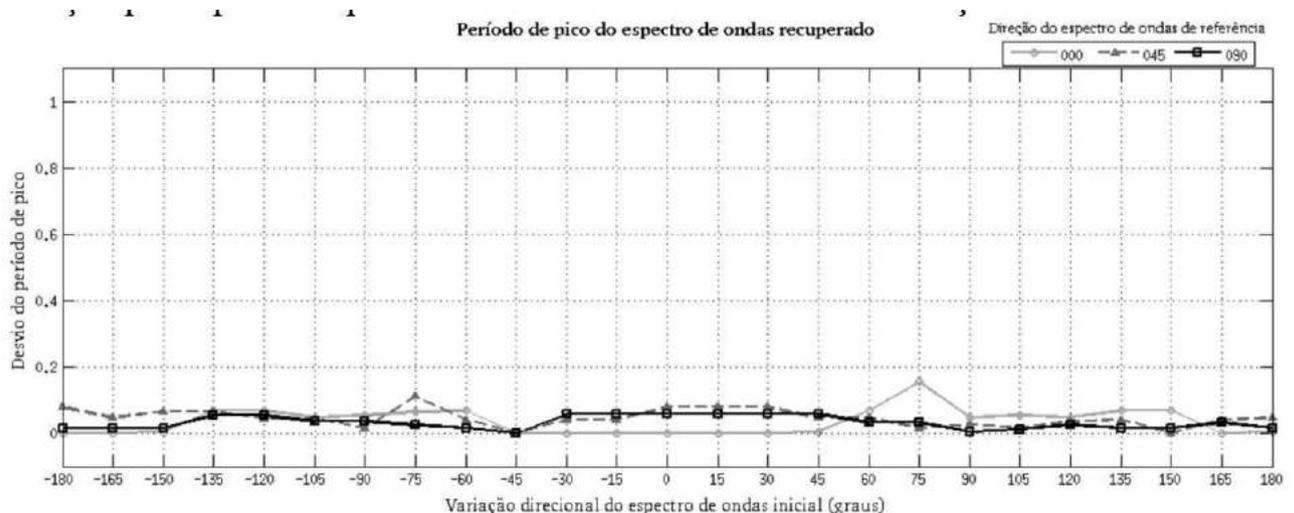


Figura 21 Representação da variação do desvio do período de pico do espectro de ondas recuperado em função da direção principal do espectro de ondas inicial conforme a direção principal do espectro de referência relativamente à direção do voo do satélite.

6.4.4 Período de pico

Na Figura 21, cada curva corresponde ao desvio do período de pico do espectro de ondas recuperado relativamente ao espectro de ondas de referência - definido por (6.8) - em função da direção principal do espectro de ondas inicial.

As curvas estão inteiramente entrelaçadas, não configurando nenhum comportamento bem definido. Nota-se, porém, que o desvio do período de pico não é, de um modo geral, maior que 8%, seja qual for a direção principal do espectro de ondas de referência considerado na simulação. Isto quer dizer, de acordo com (6.16), que os períodos de pico dos espectros de ondas recuperados afastam-se, em média, de 1 segundo do valor do período de pico do espectro de ondas de referência.

Conclui-se, portanto, que o período não é influenciado pela variação de direção principal do espectro de ondas inicial

6.4.5 Correlação espectral

Na Figura 22, cada curva corresponde ao coeficiente de correlação entre o espectro de ondas de referência e o espectro de ondas recuperado, definido por (6.2), em função da direção principal do espectro de ondas inicial.

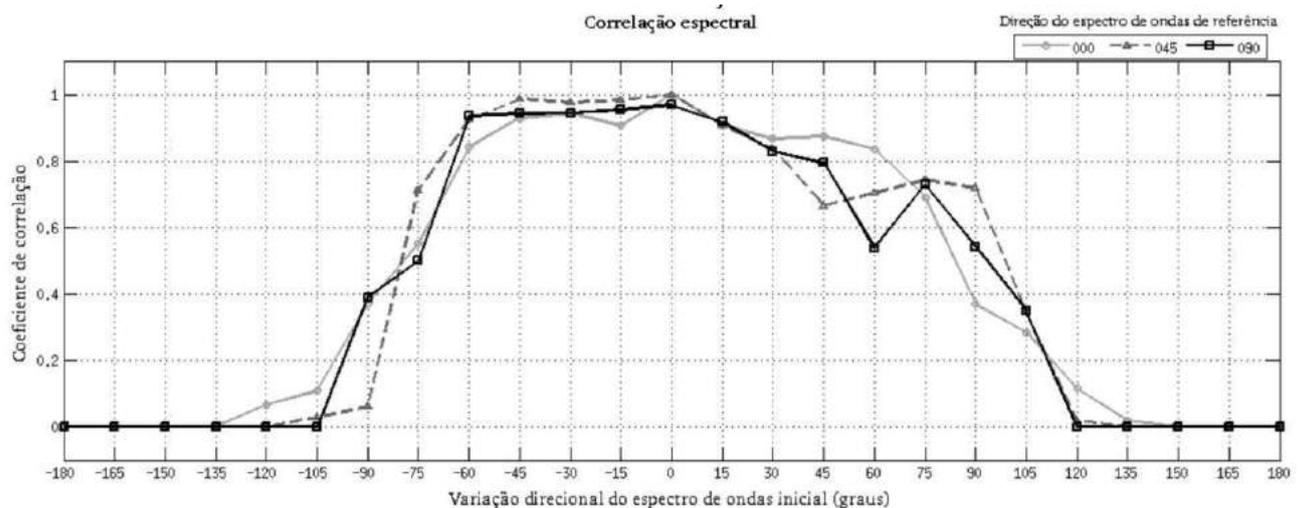


Figura 22 Representação da variação do coeficiente de correlação entre o espectro de ondas recuperado e o espectro de ondas de referência em função da direção principal do espectro de ondas inicial conforme a direção principal do espectro de referência relativamente à direção do voo do satélite.

Todas as curvas possuem um aspecto comum: os maiores valores do coeficiente de cor-

relação ($\geq 80\%$) correspondem às menores variações angulares ($|\Delta^0| \leq 35^\circ$). Isto quer dizer que o espectro de ondas de referência e o espectro de ondas recuperado possuem alto grau de similaridade.

À medida que $|\Delta^0|$ aumenta, fica evidente que o grau de similaridade decresce drasticamente, acarretando que os espectros de ondas recuperados sejam muito diferentes do espectro de ondas de referência. Neste sentido, esta análise é conclusiva: o espectro de ondas recuperado depende fortemente da variação angular Δ^0 .

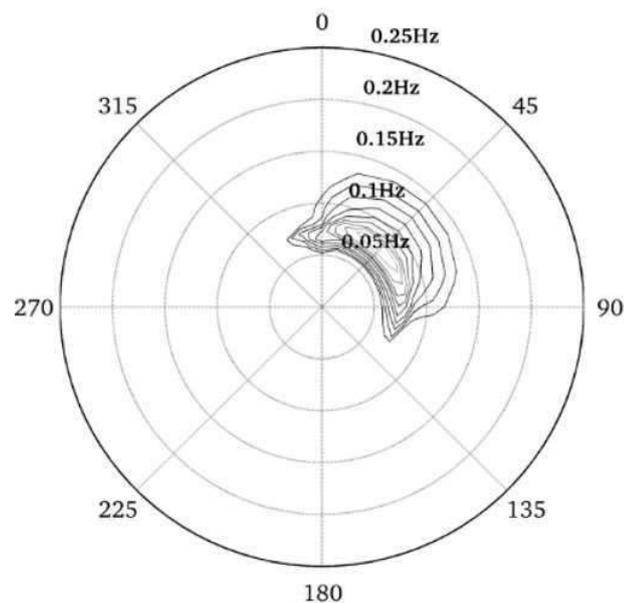


Figura 23 Espectro direcional de ondas (JONSWAP $\times \cos^{2s}$) com direção principal de 45° , utilizado como espectro de ondas de referência numa das simulações. Os círculos concêntricos indicam a variação da frequência (Hz), enquanto a direção é indicada (graus) no círculo maior.

6.4.6 Correlação espectral \times Percepção visual

Na análise feita a seguir, tenta-se estabelecer uma relação (percepção visual) do espectro de ondas recuperado e o seu grau de correlação com o espectro de ondas de referência.

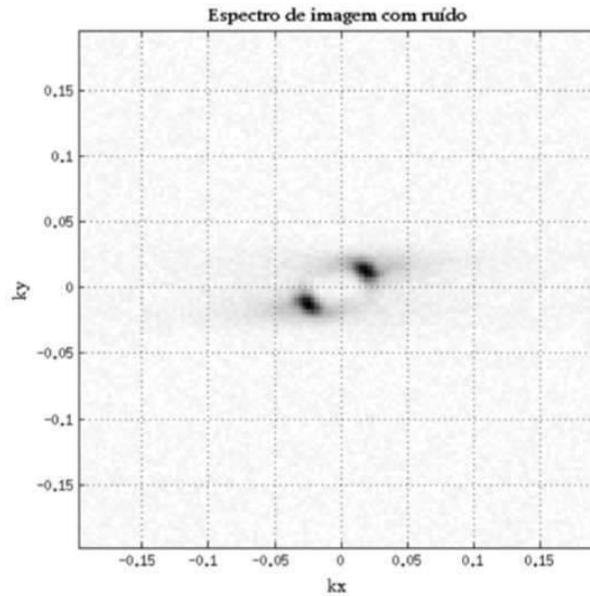


Figura 24 Espectro de imagem SAR com direções 45° e 225° (ambiguidade) gerado a partir do espectro de ondas referência da Figura 23

Partindo-se do espectro de ondas de referência com direção principal 45° , visto na Figura 23, gera-se o espectro de imagem SAR apresentado na Figura 24, levando-se em conta a adição de um ruído aleatoriamente produzido. Este espectro de imagem SAR, correspondente à cena descrita pelo espectro de ondas de referência da Figura 23, será utilizado para recuperação de espectros direcionais.

Os resultados obtidos pelo algoritmo MPI serão analisados quando as seguintes rotações do espectro de ondas de referência forem usadas como espectro de ondas inicial: $\Delta^0 =$: (i) -30° ; (ii) 0° ; (iii) 45° ; (iv) -90° ; (v) -105° e (vi) 150°

(i) Neste caso o espectro de ondas inicial possui direção principal de 15° . O coeficiente de correlação entre o espectro de ondas recuperado e o espectro de ondas de referência é alto, aproximadamente 0.98. Isto garante grande similaridade entre estes espectros direcionais. Este fato é constatado rapidamente com uma inspeção visual entre os itens a e c da Figura 25.

É importante observar que a direção principal do espectro de ondas recuperado é preservada, isto é, persiste muito proximamente a 45° , enquanto que a direção média sofre influência grande da direção principal do espectro de ondas inicial. Isto é percebido pela leve rotação (que é uma distorção) imprimida ao espectro de ondas recuperado se comparado ao espectro de ondas de referência.

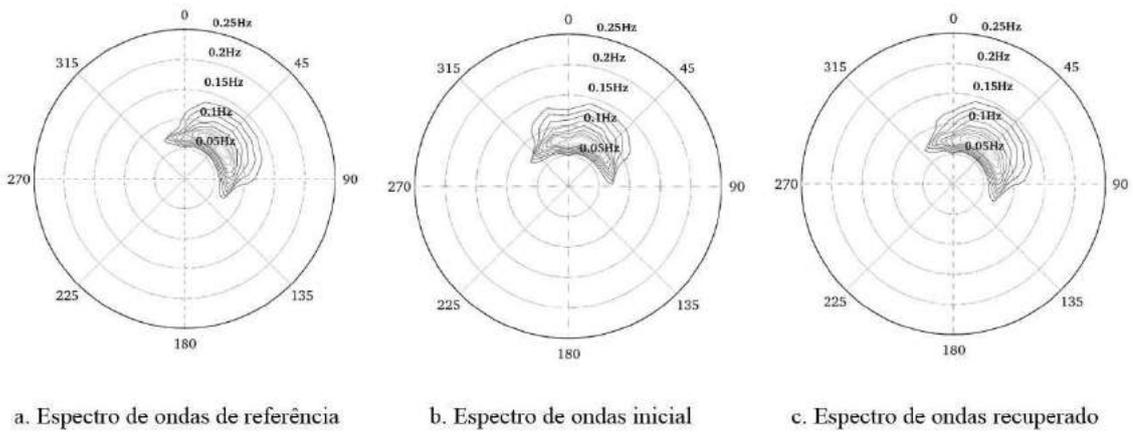


Figura 25 Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = -30^\circ$

(ii) Neste caso, o espectro de ondas inicial é o próprio espectro de ondas de referência. O coeficiente de correlação entre o espectro de ondas recuperado e o espectro de ondas de referência é igual a 1. Isto garante que o espectro de ondas recuperado e o espectro de ondas de referência estão totalmente correlacionados. A comparação entre os itens a e c da Figura 26 não deixa dúvida quanto a esta conclusão.

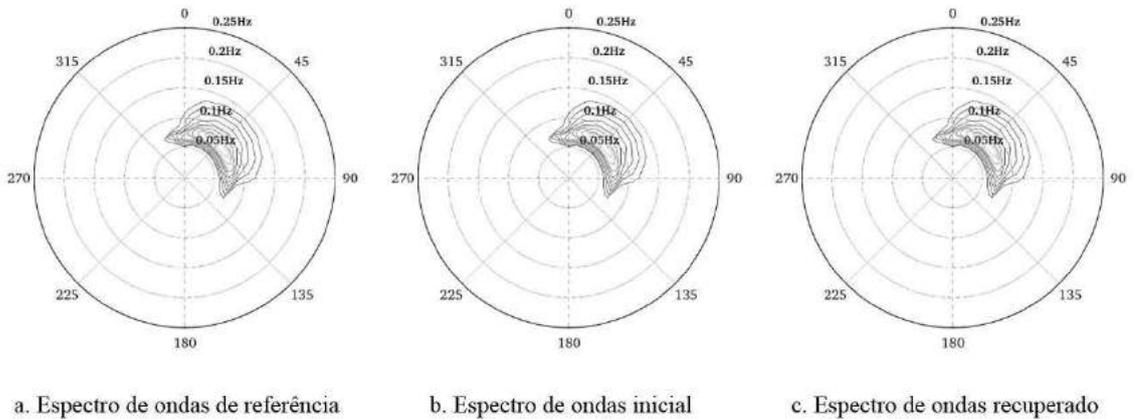


Figura 26 Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = 0^\circ$

(iii) Neste caso, o espectro de ondas inicial possui direção principal de 90° . O coeficiente de correlação entre o espectro de ondas recuperado e o espectro de ondas de referência é igual a 0.68. Uma inspeção visual constata que, de fato, a similaridade entre o espectro de ondas de referência e o espectro de ondas recuperado é bem menor.

Como já observado, o espectro de ondas inicial impacta significativamente a direção média. Este fato pode ser reconfirmado comparando-se o espectro de ondas recuperado (Figura 27-c) com o espectro de ondas de referência (Figura 27-a): a direção média do

espectro de ondas recuperado tende a acompanhar a direção principal do espectro de ondas inicial 90° .

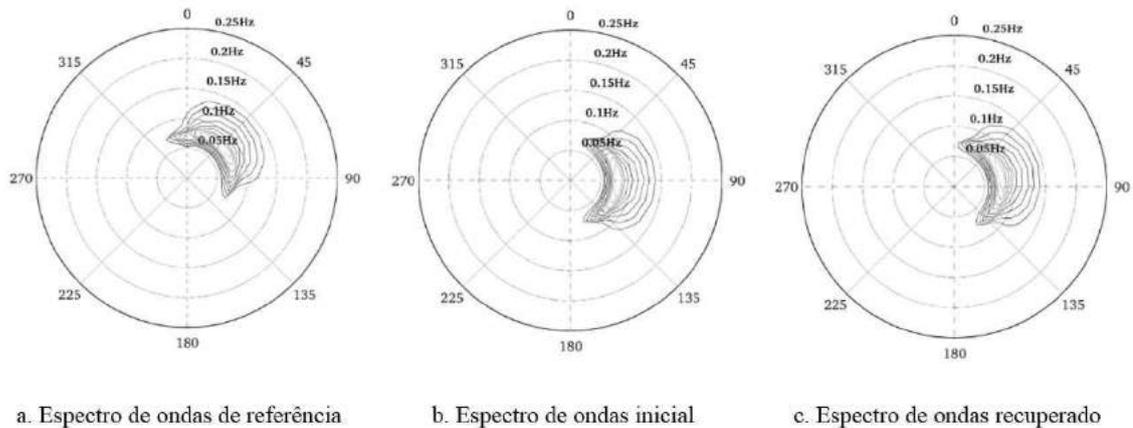


Figura 27 Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = 45^\circ$

(iv) Neste caso, o espectro de ondas inicial possui direção principal de 315° . O coeficiente de correlação entre o espectro de ondas recuperado e o espectro de ondas de referência decresce bastante e vale algo em torno de 0.06. A comparação visual entre os itens a e c da Figura 28 explica esta baixa correlação: a distorção é muito grande. Isto mostra em que medida uma escolha muito equivocada da direção principal do espectro de ondas inicial impacta os resultados obtidos.

No presente caso e em outros não apresentados aqui, em que o espectro de ondas inicial possui direção principal aproximadamente ortogonal à direção do espectro de ondas de referência, a resposta exibida pelo mecanismo de inversão foi, invariavelmente, um espectro direcional particionado, o que corresponde a um sistema bimodal de ondas. Isto ocorre devido à baixa confiabilidade do espectro de ondas inicial em relação ao espectro de imagem, não sendo o mecanismo, portanto, capaz de decidir sobre a ambiguidade direcional com clareza.

Por fim, cabe destacar que apesar da grande distorção entre os espectros em questão, o coeficiente de correlação entre eles só não é nulo devido ao sistema de ondas com direção principal próxima a 0° , que ainda preserva alguma característica do espectro de ondas de referência.

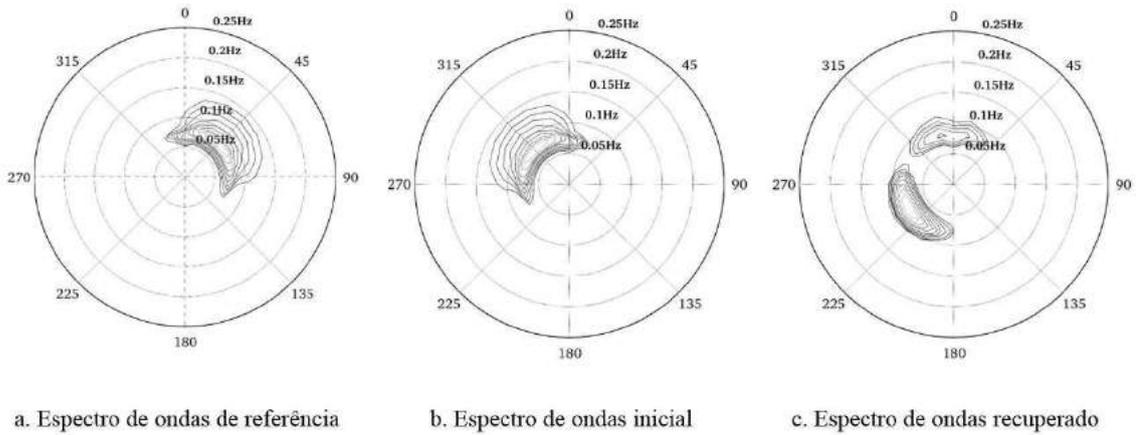


Figura 28 Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = -90^\circ$

(v) Neste caso, o espectro de ondas inicial possui direção principal de 300° . O coeficiente de correlação entre o espectro de ondas recuperado e o espectro de ondas de referência é ainda menor: vale algo em torno de 0.028. A comparação visual entre os itens a e c da Figura 29 dá uma boa ideia sobre o baixo grau de similaridade entre os espectros direcionais em questão.



Figura 29 Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = -105^\circ$

Note-se que, como no caso (iv), há uma partição do espectro de ondas recuperado, pois a direção do espectro de ondas inicial é aproximadamente ortogonal à direção do espectro de imagem. O espectro de ondas recuperado neste caso guarda ainda menos características do espectro de ondas de referência, por isso seu grau de similaridade com o espectro de ondas de referência é ainda menor que o observado no caso (iv).

É ilustrativo comparar os espectros de ondas recuperados nos casos (iv) e (v) tendo em mente a densidade média de energia associada a cada um dos sistemas de ondas com

direção principal próxima a 0° . Eles permitem compreender o decréscimo do coeficiente de correlação que ocorre nestes casos.

(vi) Neste caso, o espectro de ondas inicial possui direção principal de 195° . O coeficiente de correlação entre o espectro de ondas recuperado e o espectro de ondas de referência é zero, ou seja, não há correlação entre os espectros direcionais. A comparação visual entre os itens a e c da Figura 30 deixa muito claro que o espectro de ondas recuperado não guarda característica alguma do espectro de ondas de referência. Este resultado decorre da escolha de um espectro de ondas inicial com direção principal praticamente oposta à direção principal da direção do espectro de ondas de referência, levando o algoritmo de inversão basear-se nesta informação equivocada. O espectro de ondas de referência é o espelhamento deste espectro de ondas recuperado no primeiro quadrante.

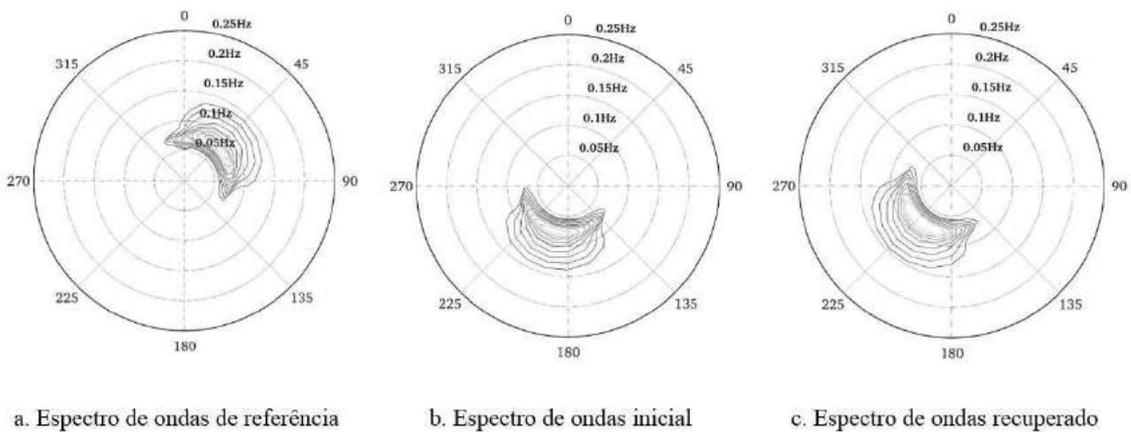


Figura 30 Espectros de ondas referentes ao caso $\Delta^0 = 150^\circ$

CONCLUSÃO

Nesta tese, uma nova e mais simples abordagem para a transformação de Hasselmann é desenvolvida. A abordagem proposta diferencia-se das (duas) existentes, devido, essencialmente, a dois pontos: (1) a hipótese de Komen e (2) aperfeiçoamento do argumento de Krogstad.

A hipótese de Komen, que limita a densidade de energia do espectro, permite que o campo estocástico de elevações da superfície do oceano possa ser representado através de integrais de Riemann estocásticas, as quais são mais simples do ponto de vista técnico em comparação com integrais de Fourier-Stieltjes (medidas espectrais ortogonais).

O aperfeiçoamento do argumento de Krogstad, associado à simplicidade (operacional) derivada da hipótese de Komen, permite diminuir consideravelmente o algebrismo envolvido na dedução feita por Krogstad. Em particular, há uma redução na ordem da matriz de covariância que contém informações sobre todas as funções de transferência de modulação envolvidas no imageamento SAR.

Devido ao referencial teórico desenvolvido nesta dedução da transformação de Hasselmann, foi possível, em parceria com o grupo de pesquisa SARSEA, desenvolver um modelo computacional para o recuperar o espectro direcional de ondas com uso do SAR. Este modelo baseia-se, essencialmente, na aplicação da transformação de Hasselmann para gerar sinteticamente espectros de imagem SAR a partir de espectros direcionais de ondas parametrizados e na inversão (clássica) desta transformação com o uso do algoritmo MPI. Assim, foi proposta uma nova metodologia para avaliar os impactos sofridos pelo espectro de ondas recuperado pelo SAR decorrentes da mudança da direção principal do espectro de ondas inicial.

Numa primeira análise, os resultados obtidos para variações da direção principal do espectro de ondas inicial em relação à direção principal do espectro de ondas de referência de até 60° indicam uma boa concordância com os reais valores dos parâmetros de onda utilizados como referência, além de alto grau de similaridade com o espectro de ondas de referência.

Para os estados de mar considerados, constata-se que a direção média do espectro de ondas recuperado é muito influenciada pela direção principal do espectro de ondas inicial. Diferentemente, a direção principal do espectro de ondas recuperado mostra-se

bastante estável, desde que a direção do espectro de ondas inicial seja escolhida em uma das vizinhanças da direção do espectro de imagem SAR. Observa-se grande instabilidade deste parâmetro se a direção principal do espectro de ondas inicial é aproximadamente ortogonal à direção do espectro de imagem SAR. Isto não chega, entretanto, a ser uma surpresa, uma vez que um espectro de ondas inicial nestas condições não resolve a ambiguidade direcional.

O período de pico não apresenta um comportamento bem definido nas simulações realizadas. Isto é, as curvas correspondentes a este desvio não se mostram padronizadas como no caso da direção média (ou principal). Entretanto, este desvio mostrou-se limitado a, no máximo, (8%).

Isto corresponde a, aproximadamente, 1 segundo de defasagem em relação período do espectro de ondas de referência. Os resultados sobre os desvios da altura significativa não revelam, a princípio, um comportamento padronizado entre as direções simuladas do espectro de imagem. Indicam, porém, que o desvio médio deste parâmetro é maior para ondas que se propagam na direção azimutal (17,4%), decrescendo gradativamente à medida as ondas se propagam na direção de range (5%).

O mais importante resultado experimental deste trabalho diz respeito à energia média espectral. A energia do espectro de ondas recuperado correspondente a determinado estado de mar varia em função da direção principal do espectro de ondas inicial e da direção de propagação das ondas do sistema de ondas considerado.

Especificamente, constatou-se que os maiores valores da densidade de energia do espectro de ondas recuperado são detectados quando a direção principal do espectro de ondas inicial tende a alinhar-se à direção do espectro de imagem SAR observado. De fato, os maiores valores da densidade de energia são verificados para sistemas de ondas que se deslocam paralelamente à direção de voo do satélite (azimutal), enquanto que para ondas que se propagam nas outras direções consideradas, estes valores são menos intensos. Isto indica como propor modificações acerca da energia do espectro de ondas inicial de forma a recuperar espectros de ondas com parâmetros de onda mais acurados e com maior correlação com o espectro de ondas de referência. Esta discussão sobre a energia espectral revela que a altura significativa é bastante sensível à variação da direção principal do espectro de ondas inicial e mais ainda: há um comportamento (aproximadamente) padrão das alturas significativas (em valor absoluto).

Apesar destes resultados não serem conclusivos, esta metodologia mostra-se muito promissora, pois com as devidas adaptações, ela pode ser utilizada na análise de sensibilidade do espectro de ondas recuperado às variações isoladas ou simultâneas de parâmetros de onda. Além disto, sua aplicabilidade pode ser facilmente estendida a situações reais, bastando para isto uma devida adequação. Sendo assim, parece ser possível estimar erros na obtenção de parâmetros de ondas através do SAR e detectar como e quais fatores envolvidos neste processo afetam o resultado obtido.

REFERÊNCIAS

- [1] ALPERS, W.; HASSELMANN, K. The low-frequency microwave technique for measuring ocean-wave spectra from airplane and satellite. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 13, n. 215-230, 1978.
- [2] ALPERS, W. Monte carlo simulations for studying the relationship between ocean wave and synthetic aperture radar image spectra. *Journal of Geophysical Research*, v. 88, p. 1745–1759, 1983.
- [3] ALPERS, W.; C. BRUNING. On the relative importance of motion-related contributions to the sar imaging mechanism of ocean surface waves. *IEEE Transactions of Geoscience Remote Sensing, GE-24*, v. 873, 1986.
- [4] BATCHELOR, K. *An introduction to fluid dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1967.
- [5] BRUNING, C.; ALPERS, W.; ZAMBREVSKY, F.; TILLEY, G. Validation of synthetic aperture radar ocean wave imaging theory by the shuttle imaging radar-b experiment over the north sea. *Journal of Geophysical Research*, p. 403–415, 1988.
- [6] BRUNING, C.; ALPERS, W.; HASSELMANN, K. Monte-carlo simulation studies of the nonlinear imaging of a two dimensional surface wave field by a synthetic aperture radar. *International Journal of Remote Sensing*, v. 11, n. 10, p. 1695–1727, 1990.
- [7] CARTWRIGHT, M. *Fourier Methods for Mathematicians, Scientists and Engineers*. [S.l.]: United Kingdom, Ellis Horwood, p. 179-180, 1990.
- [8] CHAKRABARTI, S.K. *Hydrodynamics of Offshore Structures*. [S.l.]: WTI press, 1987.
- [9] CHENEY, M. A mathematical tutorial on synthetic aperture radar. *SIAM*, v. 43, p. 301–312, 2001.
- [10] CHENEY, W.; KINKAID, D.R. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. 3. ed. [S.l.]: Brooks Cole, 2002.

- [11] ENGEN, G.; JOHNSEN, H. Sar-ocean wave using image cross spectra. *Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 33, n. 4, 1995.
- [12] FOLLAND, G. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 1999.
- [13] FRÉCHOT, J. Realistic simulation of ocean surface using wave spectra. *Journal of Virtual Reality and Broadcasting*, v. 4, n. 11, 2007.
- [14] GODA, Y. *Random Seas And Design Of Maritime Structures, Advanced Series On Ocean Engineering*. [S.l.]: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2000.
- [15] HASSELMANN, K.; RANEY, R.K.; PLANT, J. Theory of synthetic aperture radar ocean imaging: A marsen view. *J. Geophys. Res.*, v. 90, p. 4659–4686, 1985.
- [16] HASSELMANN, K.; HASSELMANN, S. On the nonlinear mapping of an ocean wave spectrum into a synthetic aperture radar image spectrum and its inversion. *Journal of Geophysical Research*, v. 96, p. 713–729, 1991.
- [17] HASSELMANN, K.; HASSELMANN, S.; BRUNING, C.; HEIMBACH, P. An improved algorithm for the retrieval of ocean wave spectra from synthetic aperture radar image spectra. *Journal of Geophysical Research*, v. 101, n. C7, p. 16615–16629, July 15 1996.
- [18] HEIMBACH, P.; HASSELMANN, K.; HASSELMANN, S. Statistical analysis and intercomparison of wam model data with global ers-1 sar mode wave spectral retrievals over three years. *Journal of Geophysical Research*, n. C103, p. 7931–7978, 1996.
- [19] HSU, H. *Theory and Problems of Probability, Random Variables and Random Processes*. [S.l.]: McGRAW Hill, 1997.
- [20] JANSSEN, P. *The Interaction Of Ocean Waves And Wind*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- [21] JOHN, F. *Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer, 1991.
- [22] KAHMA, K.; HAUSER, D.; KROGSTAD, H.; LEHNER, S.; MONBALIU, J.; WYATT, L. Measuring and analyzing the directional spectra of ocean waves. *EUR COST Action 174, EUR 21367*, p. 19–20, 2005.

- [23] KANEVSKY, M. *Radar Imaging of the Ocean Waves*. [S.l.]: Elsevier, 2009.
- [24] KHARIF C.; SLUNYAEV, A. P. E. (Ed.). *Rogue Waves in the Ocean*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [25] KOMEN, G. J.; CAVALERI, L.; DONELAN, M.; HASSELMANN, K.; HASSELMANN, S.; JANSSEN, P. *Dynamics and modelling of ocean waves*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.
- [26] KOOPMANS, L. *The spectral analysis of time series*. [S.l.]: Academic Press, 1995.
- [27] KRAUS, E.; BUSINGER, J. *Atmosphere-Ocean Interaction*. [S.l.]: Oxford University Press, 1994.
- [28] KROGSTAD, H. A simple derivation on hasselmann's nonlinear ocean-synthetic aperture radar transformation. *Journal of Geophysical Research*, v. 97, n. 7, p. 2421–2425, 1992.
- [29] KROGSTAD, H. E.; SAMSET, O.; VACHON, P.W. Generalizations of the non-linear ocean-sar transform and a simplified sar inversion algorithm. *Atmos. Ocean*, v. 32, n. 1, p. 61–82, 1994.
- [30] LAMB, H. *Hydrodynamics*. 6th. ed. [S.l.: s.n.], 1932.
- [31] LUTES, L.; SARKANI, S. *Random Vibrations: Analysis of Structural and Mechanical Systems*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2003.
- [32] MAÎTRE, H. (Ed.). *Processing of Synthetic Aperture Radar Images*. [S.l.]: Hermes Science, 2001.
- [33] MASSEL, S. *Ocean Waves Breaking And Marine Aerosol Fluxes, Atmospheric And Oceanographic Sciences Library*. [S.l.]: Springer, 2007.
- [34] MASTENBROEK, C; VALK, C. F. A semiparametric algorithm to retrieve ocean wave spectra from synthetic aperture radar. *J. Geophys. Res.*, v. 105., n. C 2, p. 3497–3516, 2000.
- [35] OCHI, M. *Ocean Waves: The Stochastic Approach, Cambridge Ocean Technology Series*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.

- [36] PAPOULIS, A.;PILLAI, S. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. [S.l.]: Mcgraw-hill, 2002.
- [37] PHILLIPS, O. M. *The Dynamics of the Upper Ocean*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1977.
- [38] ROBINSON, I. S. *Measuring the Oceans from Space*. [S.l.]: Great Britain, Springer-Praxis Books, 2004.
- [39] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. [S.l.]: Mcgraw-hill, 1987.
- [40] SANTOS, A. L. C.; SANTOS, F. M.; CARVALHO, L. M.; VIOLANTE-CARVALHO, N. Sensibilidade de espectros de ondas oceânicas recuperados por radar de abertura sintética. *Boletim de Ciências Geodésicas*, v. 21, n. 2, p. 251–272, 2015.
- [41] SCHULZ-STELLENFLETH, J.; LEHNER, S.; HOJA, D. A parametric scheme for the retrieval of two-dimensional ocean wave spectra from synthetic aperture radar look cross spectra. *Journal of Geophysical Research*, v. 110, n. C05004, 2005.
- [42] SRIVASTA, M.; BHATNAGAR, S. *Control System*. [S.l.]: Mc, 2009.
- [43] STEWART, D. E. *Dynamics with Inequalities*. [S.l.]: Philadelphia, SIAM, 2011.
- [44] VEERARAJAN, T. *Probability, Statistics and Random Processes*. [S.l.]: Mcgraw-hill, 2003.
- [45] WAFO-group. *WAFO - A Matlab Toolbox for Analysis of Random Waves and Loads - A Tutorial*. Disponível em: <<http://www.maths.lth.se/matstat/wafo>>.
- [46] YOUNG, I. *Wind Generated Ocean Waves*. [S.l.]: Elsevier Ocean Engineering Book Series, 1999.

7 APÊNDICE A

7.1 Resultados dos experimentos com direção principal da referência 0°

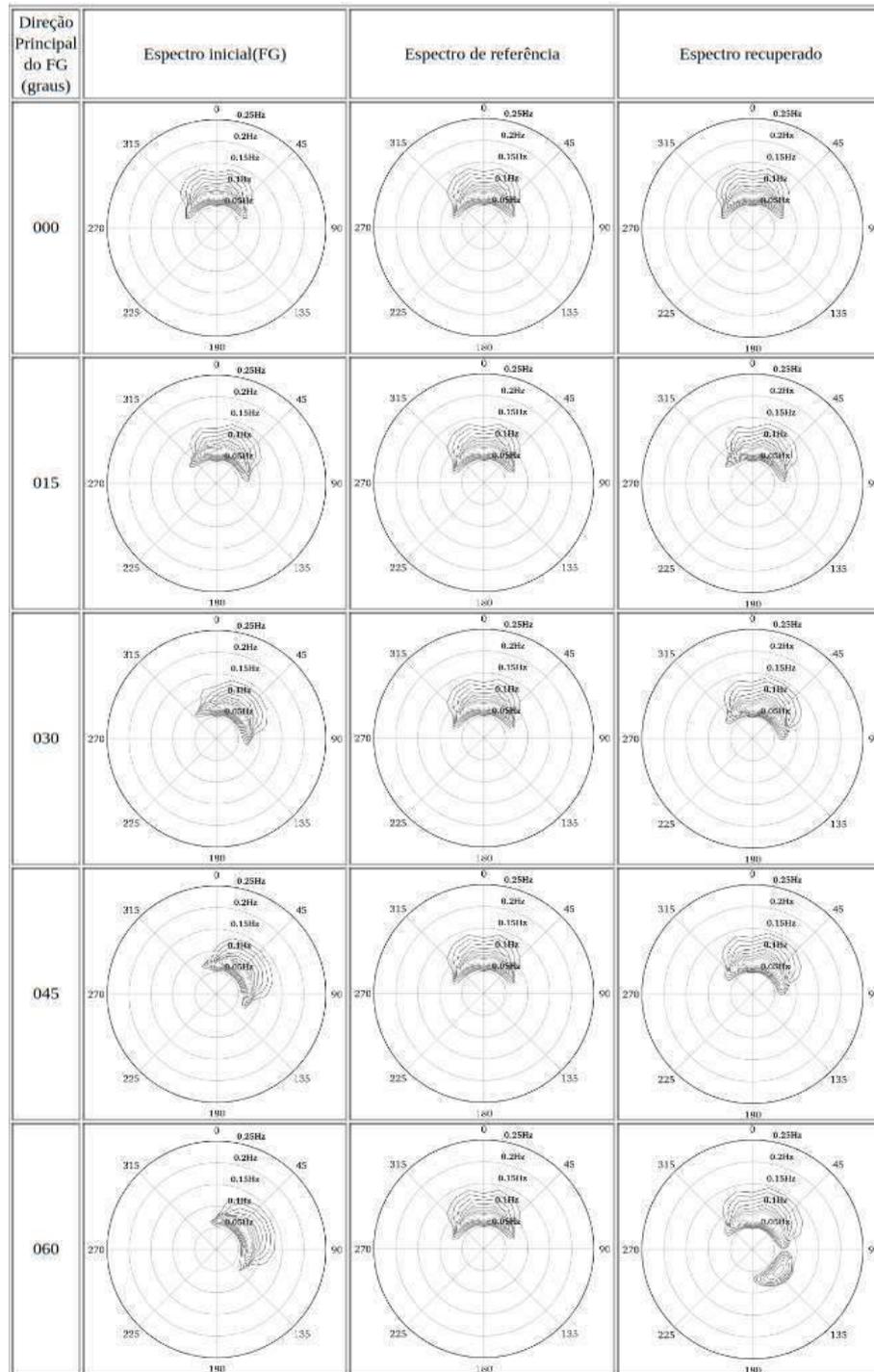


Figura 31 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

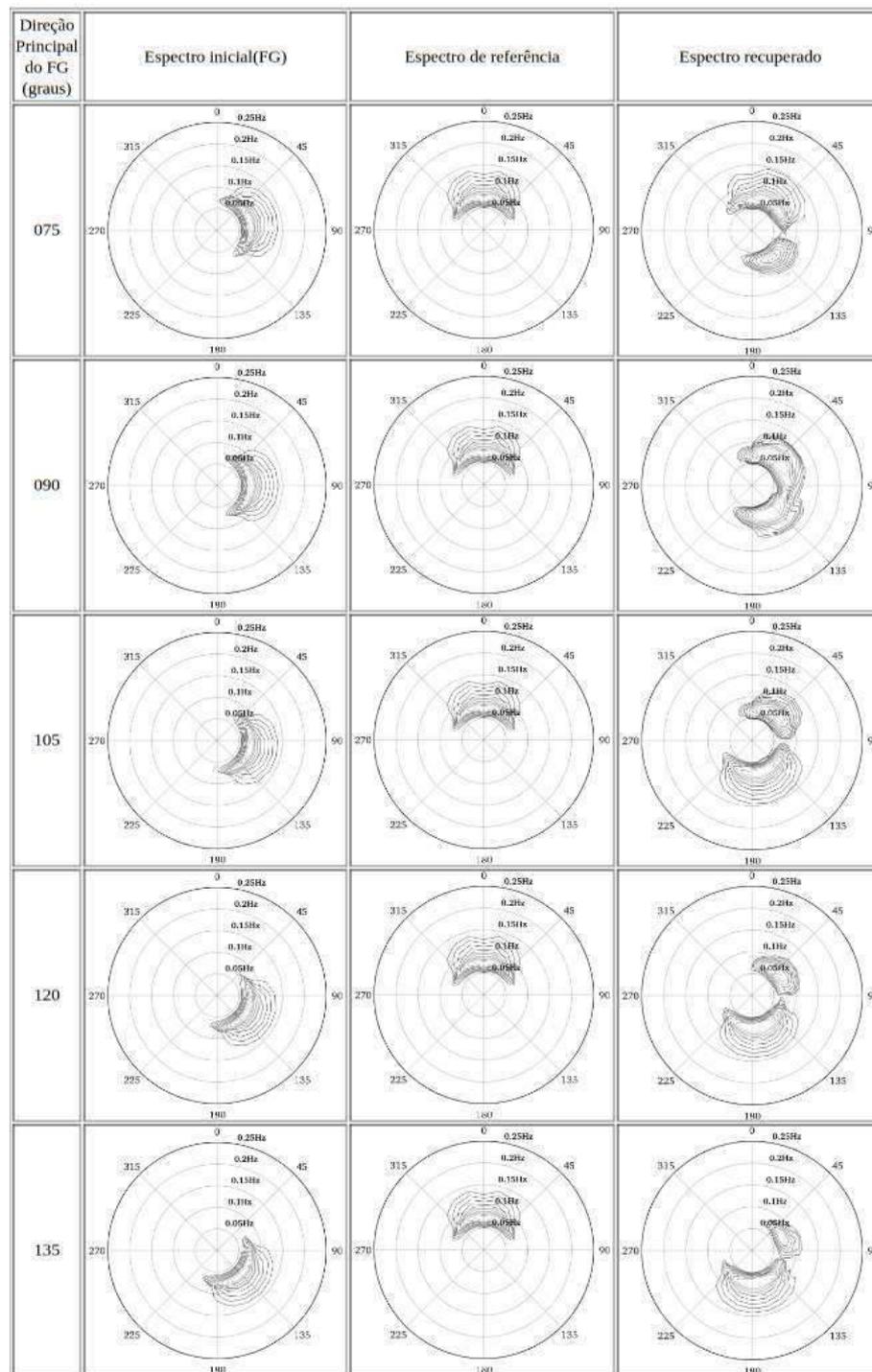


Figura 32 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

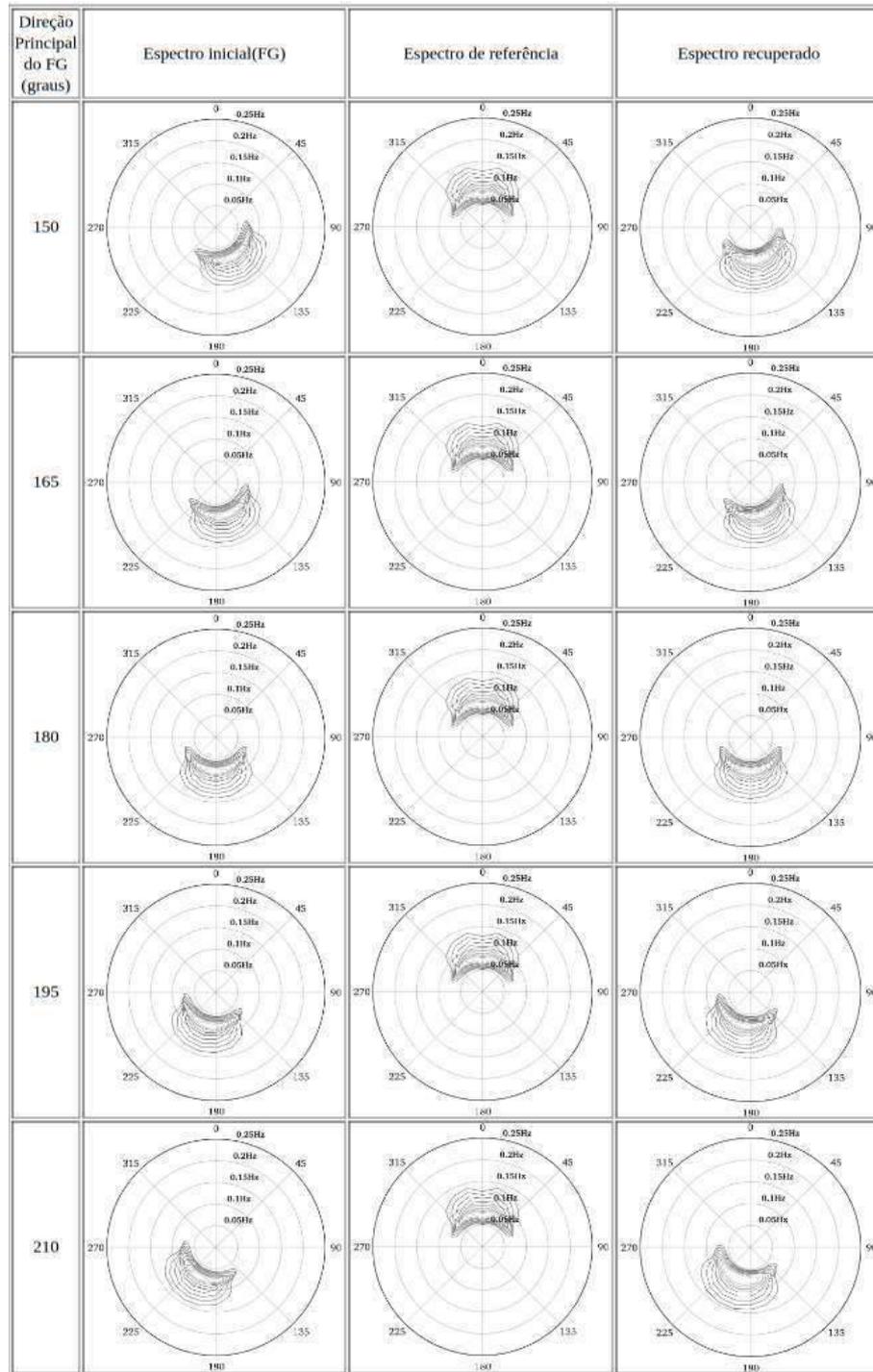


Figura 33 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

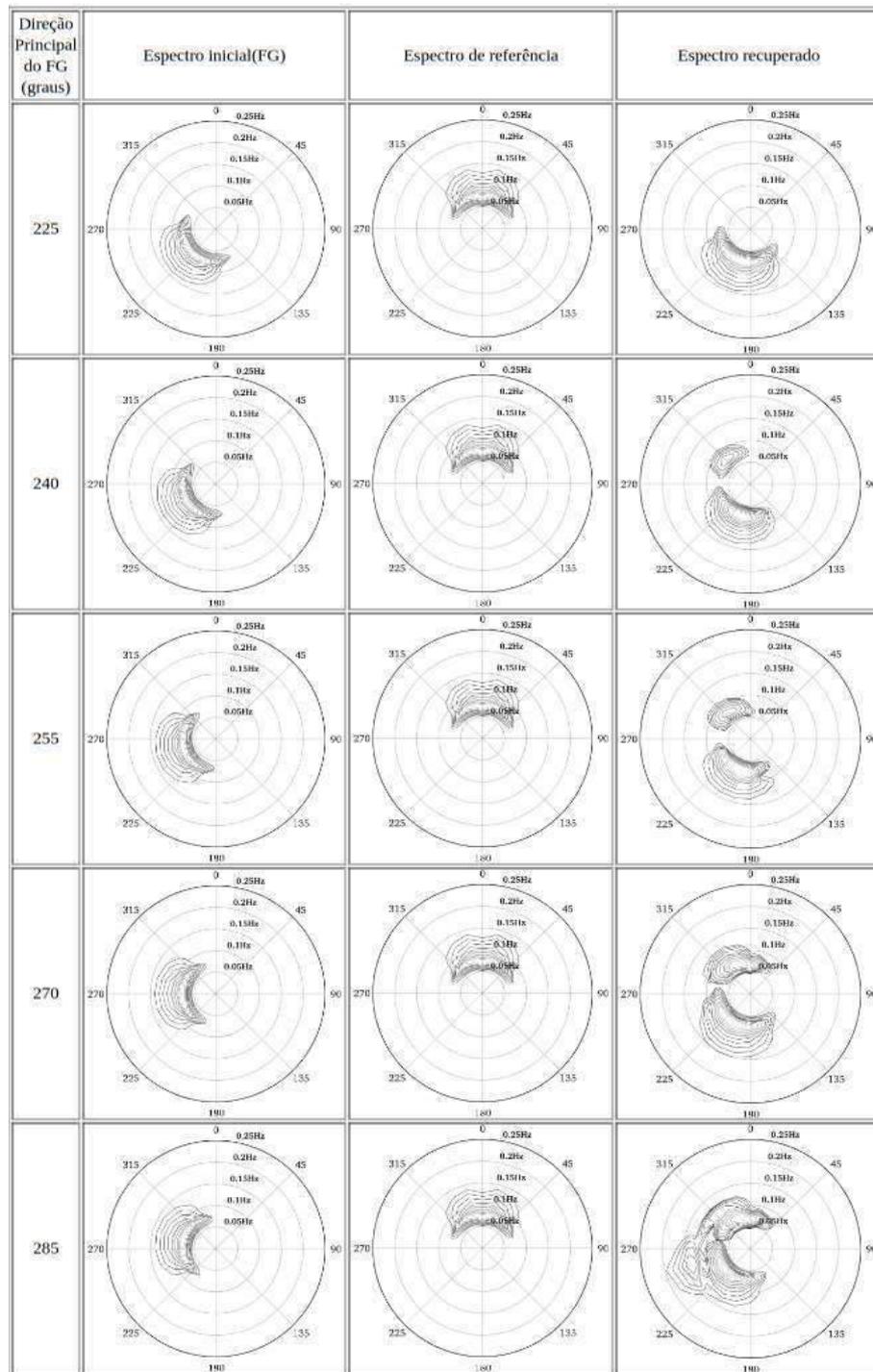


Figura 34 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

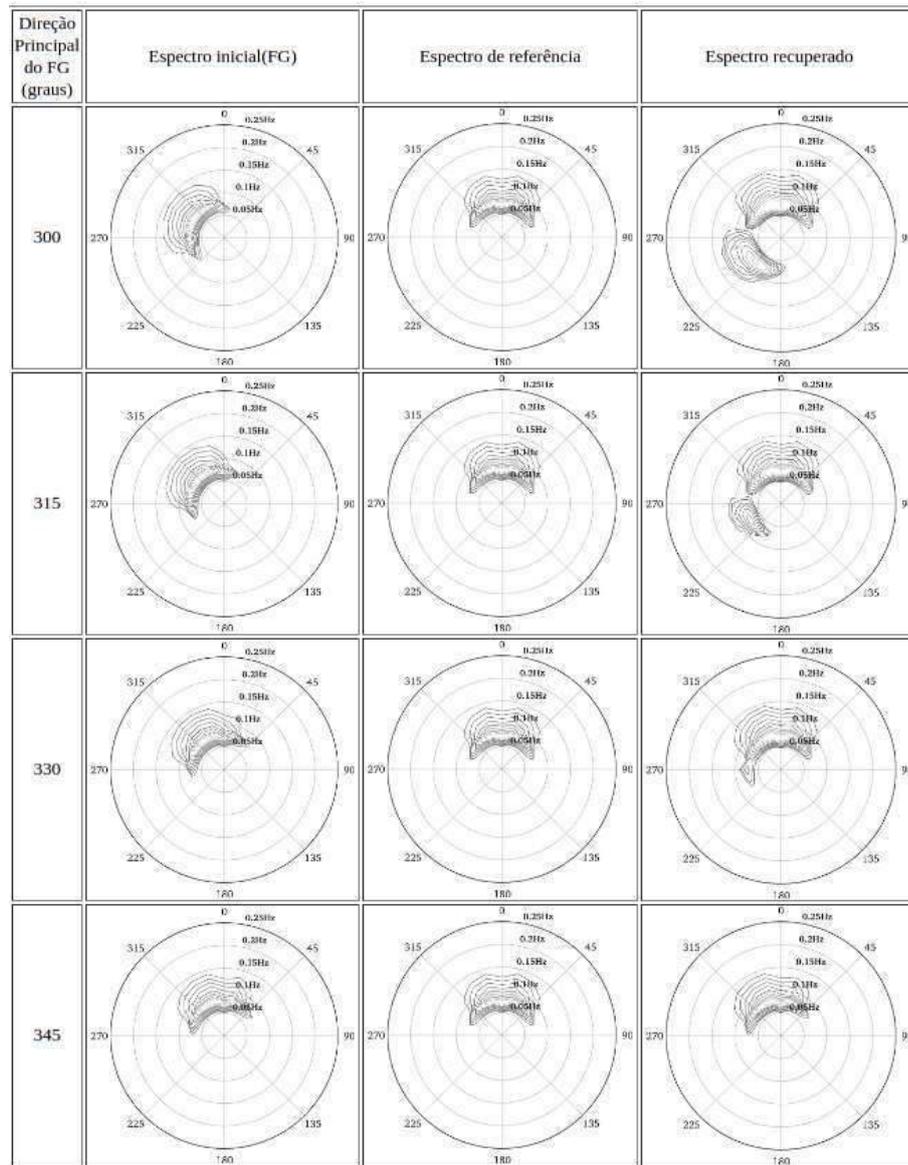


Figura 35 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

7.2 Experimentos - direção principal da referência: 45°

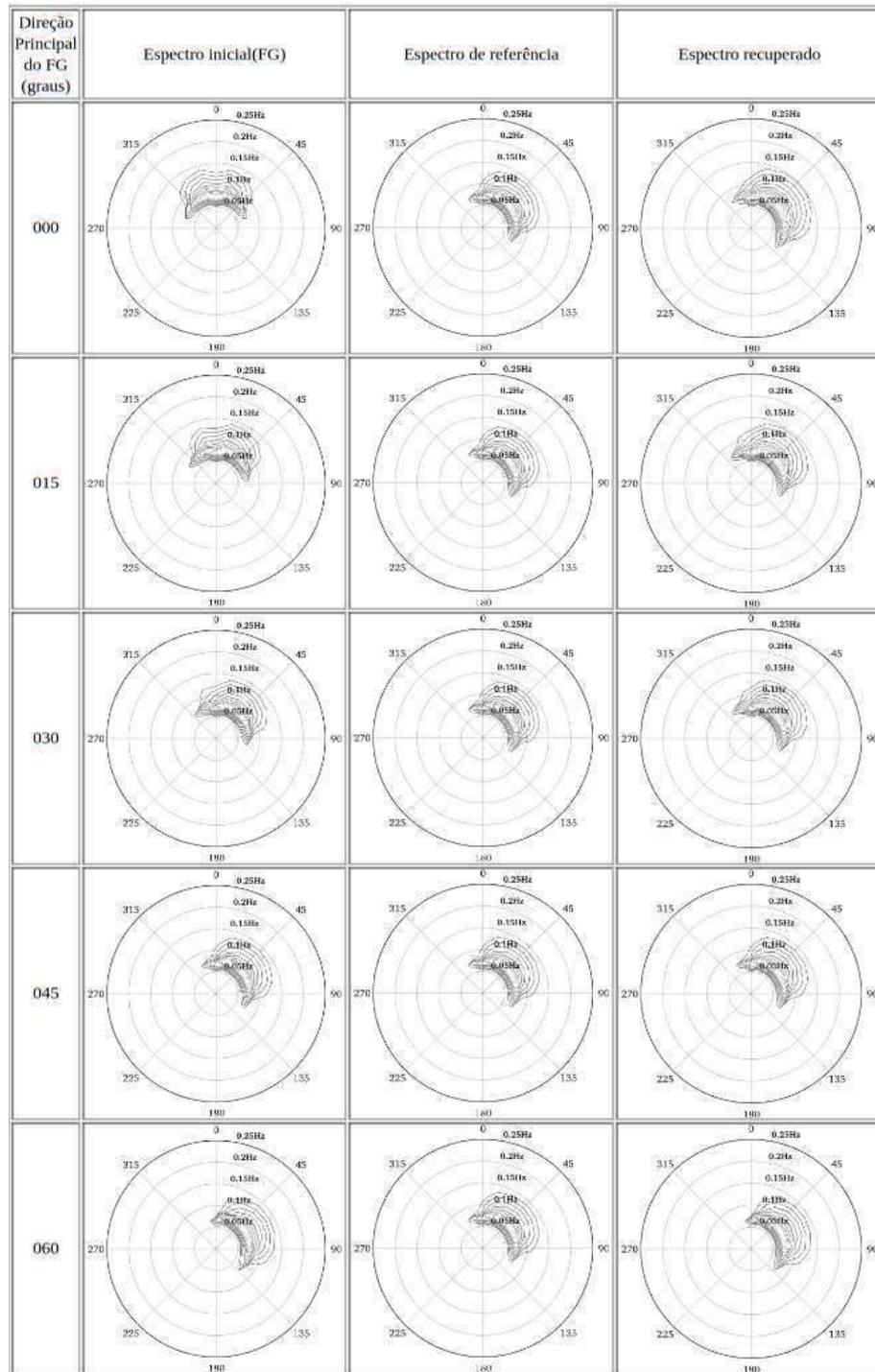


Figura 36 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

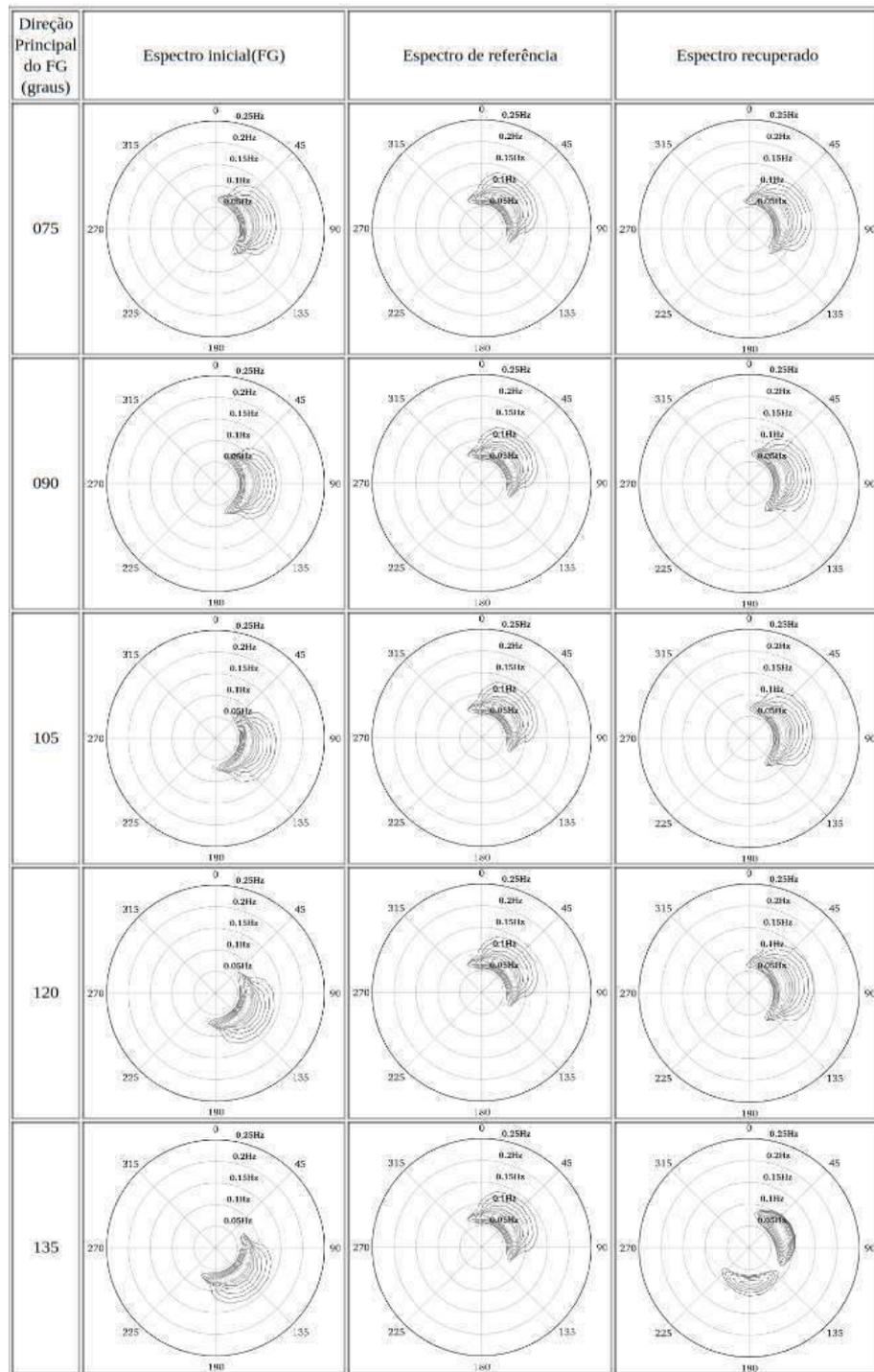


Figura 37 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

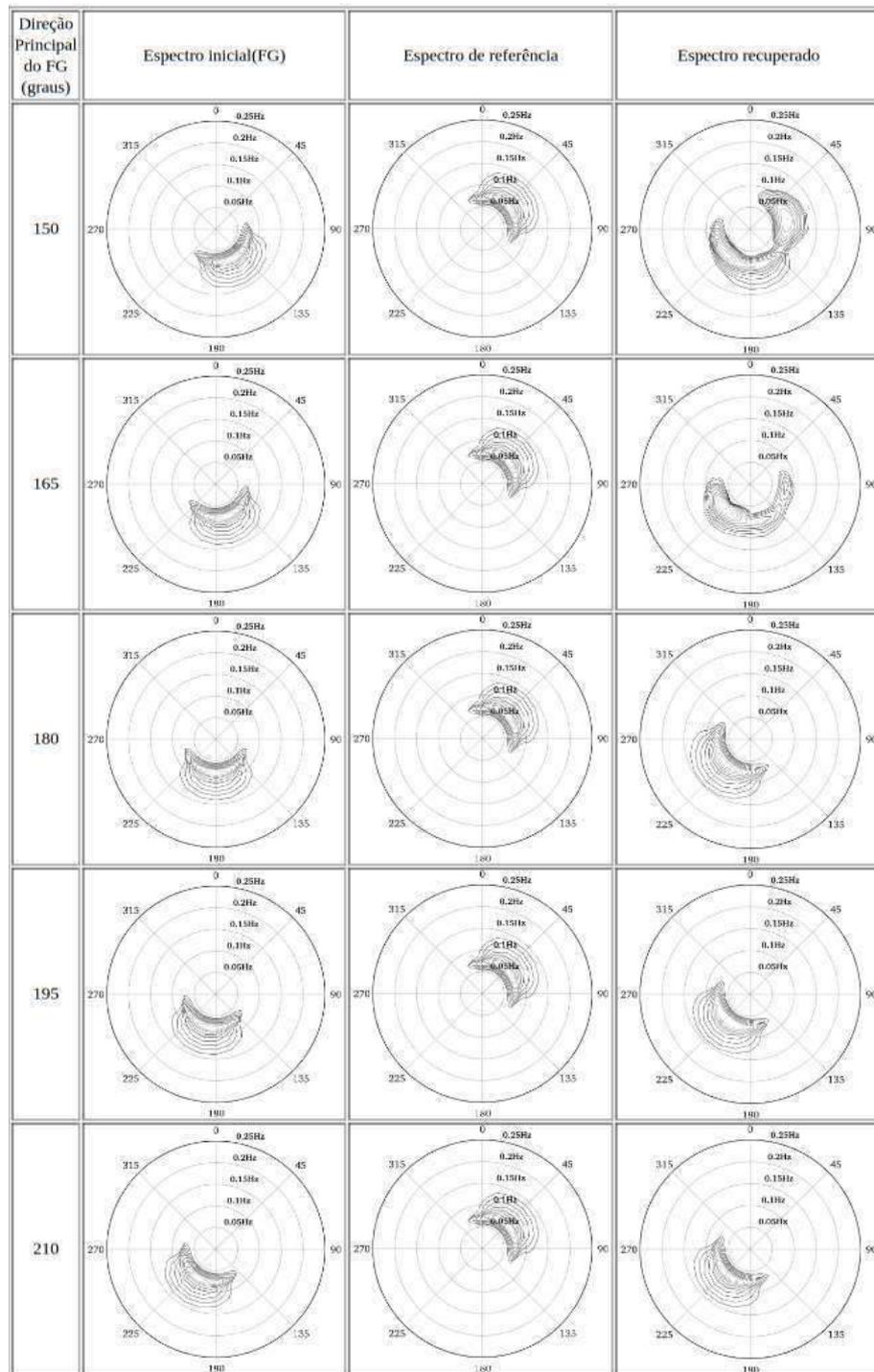


Figura 38 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

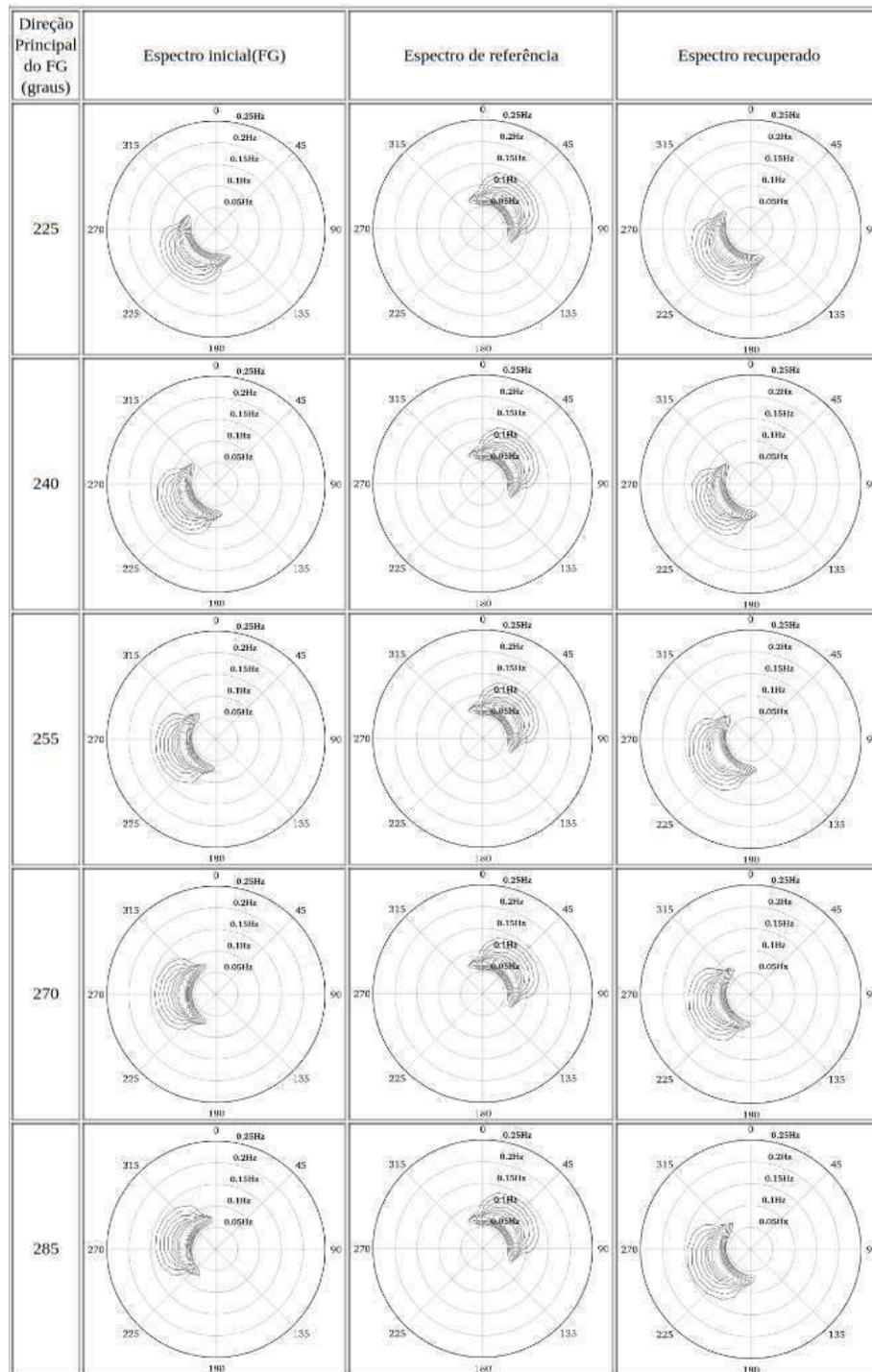


Figura 39 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

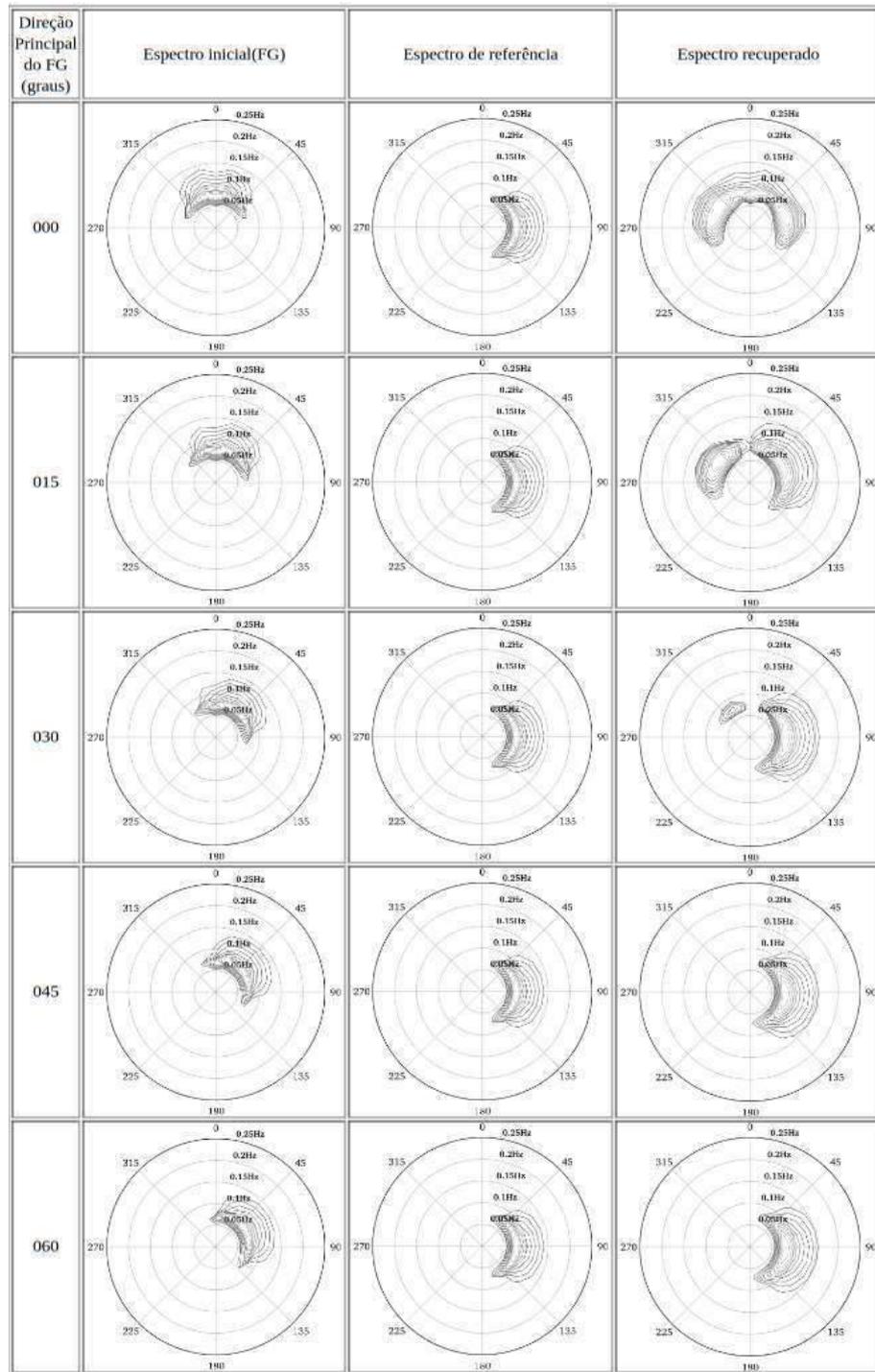
7.3 Experimentos - direção principal da referência: 90° 

Figura 40 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

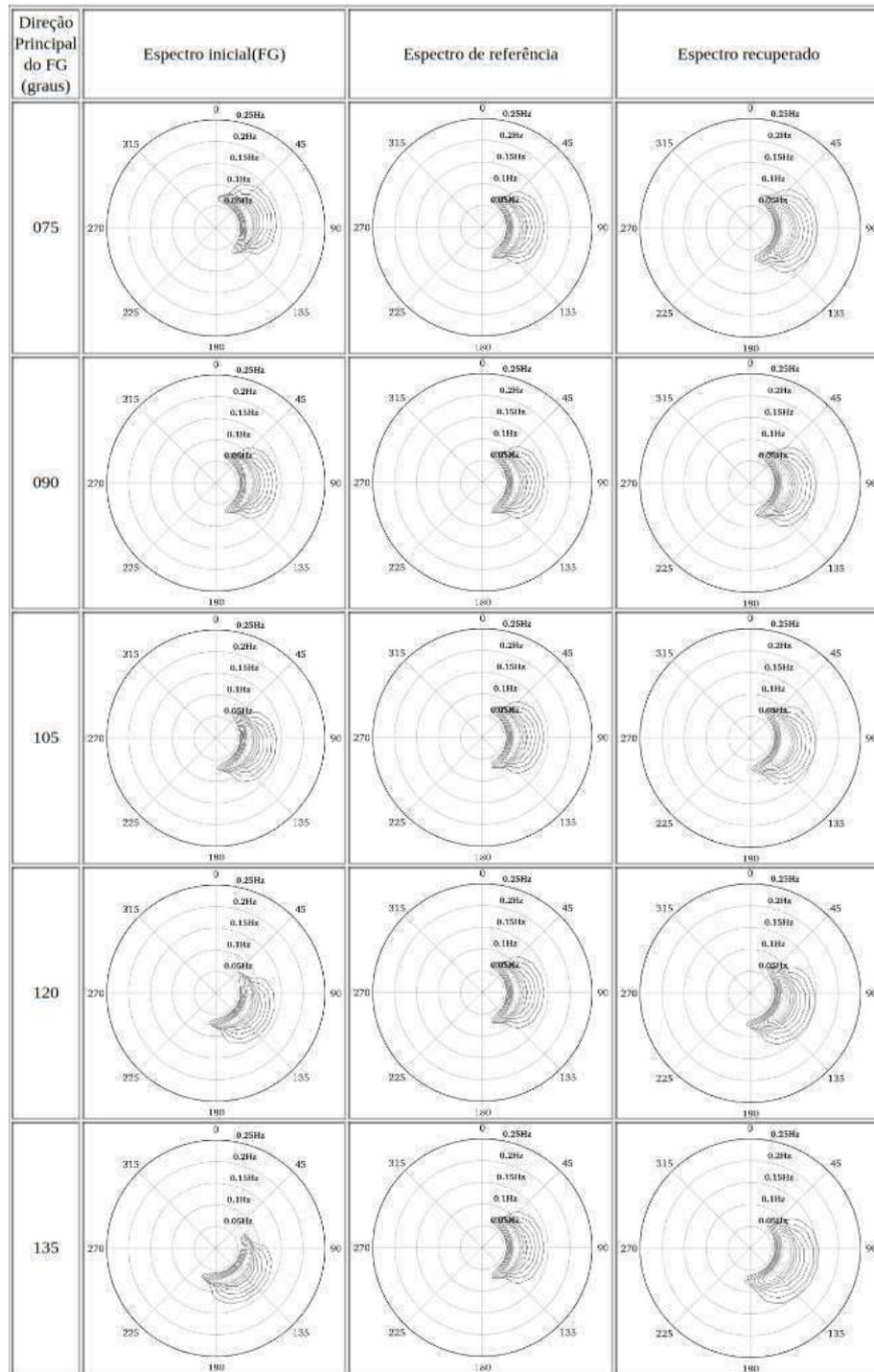


Figura 41 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

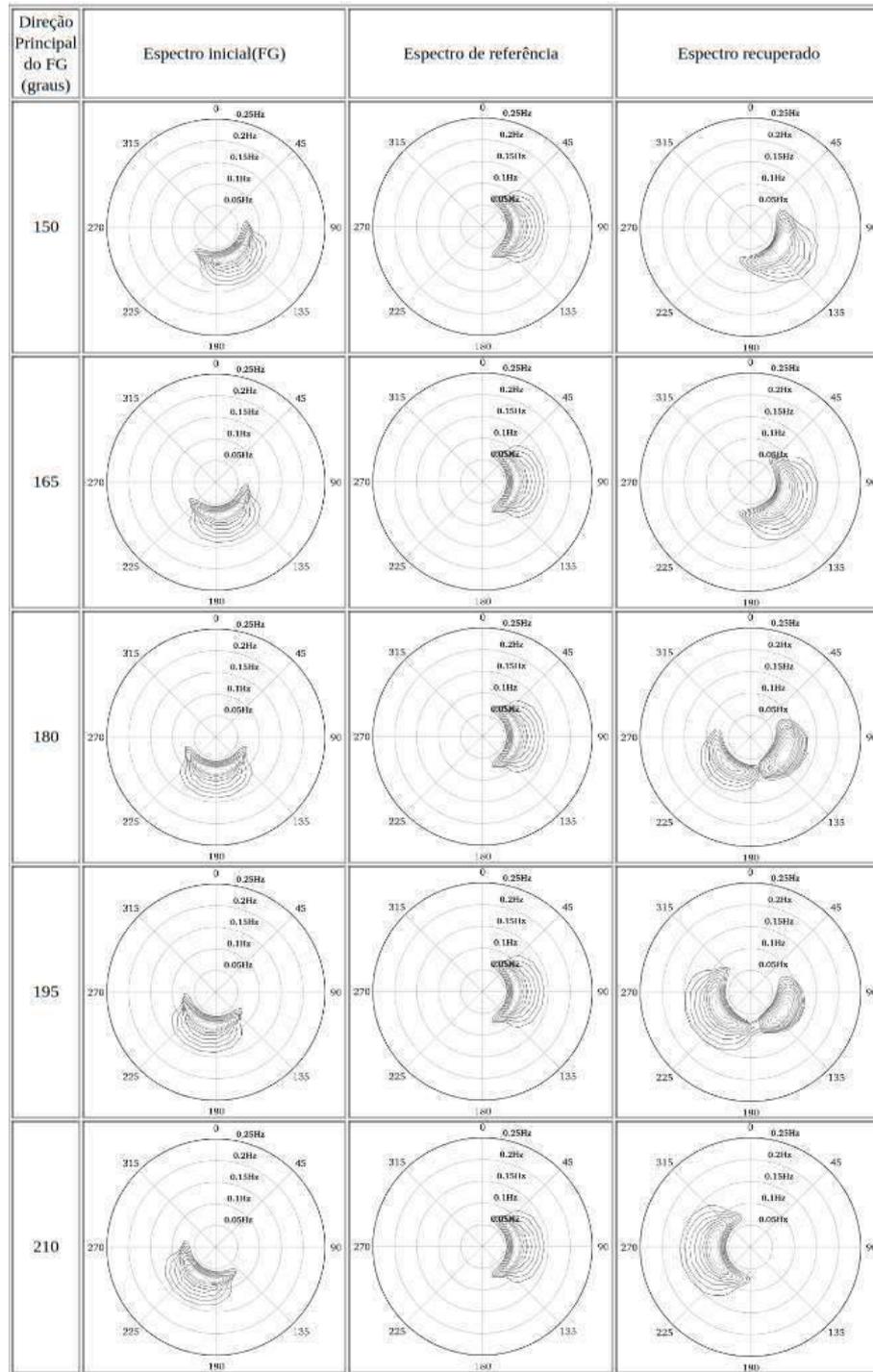


Figura 42 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

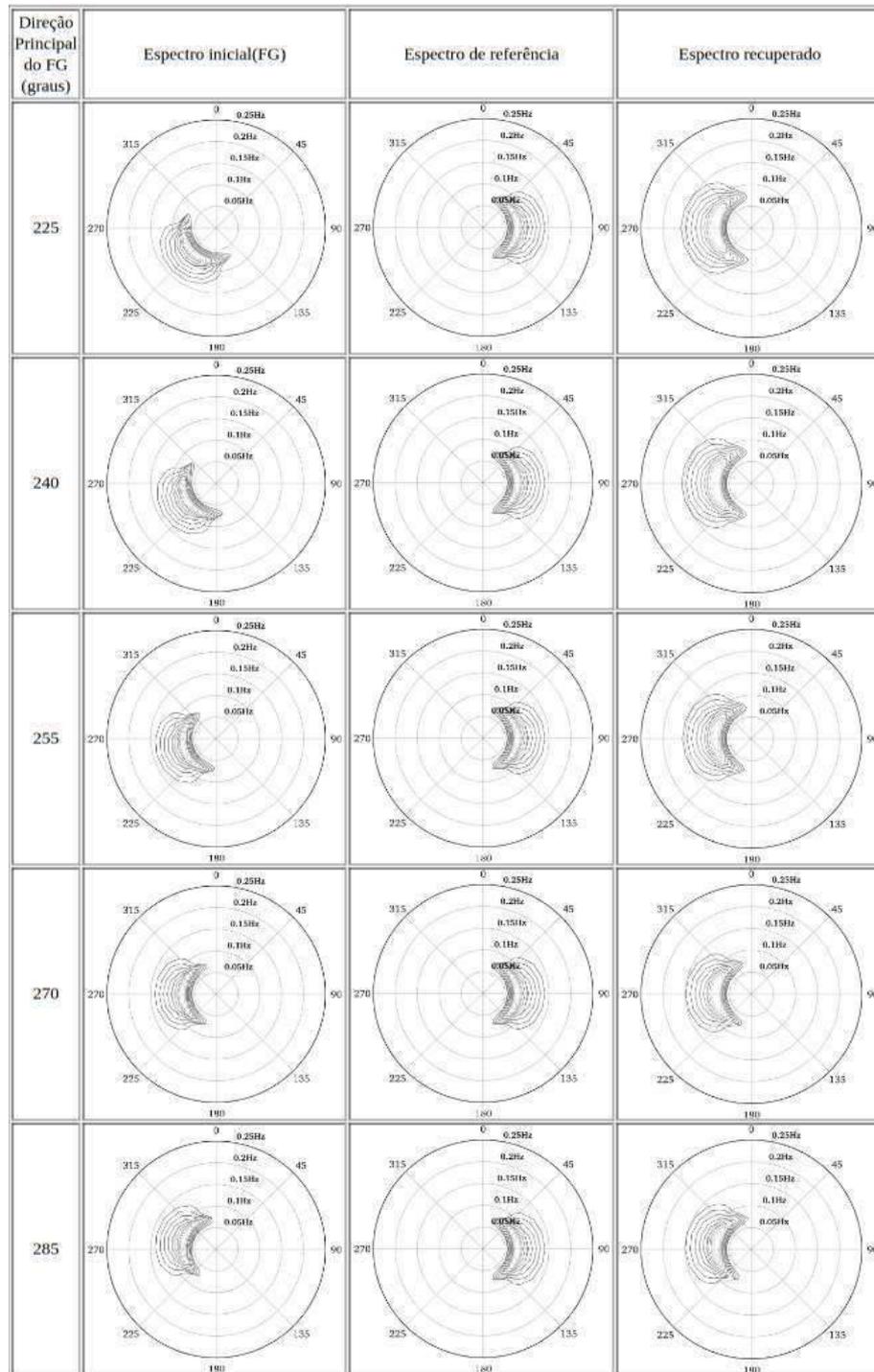


Figura 43 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

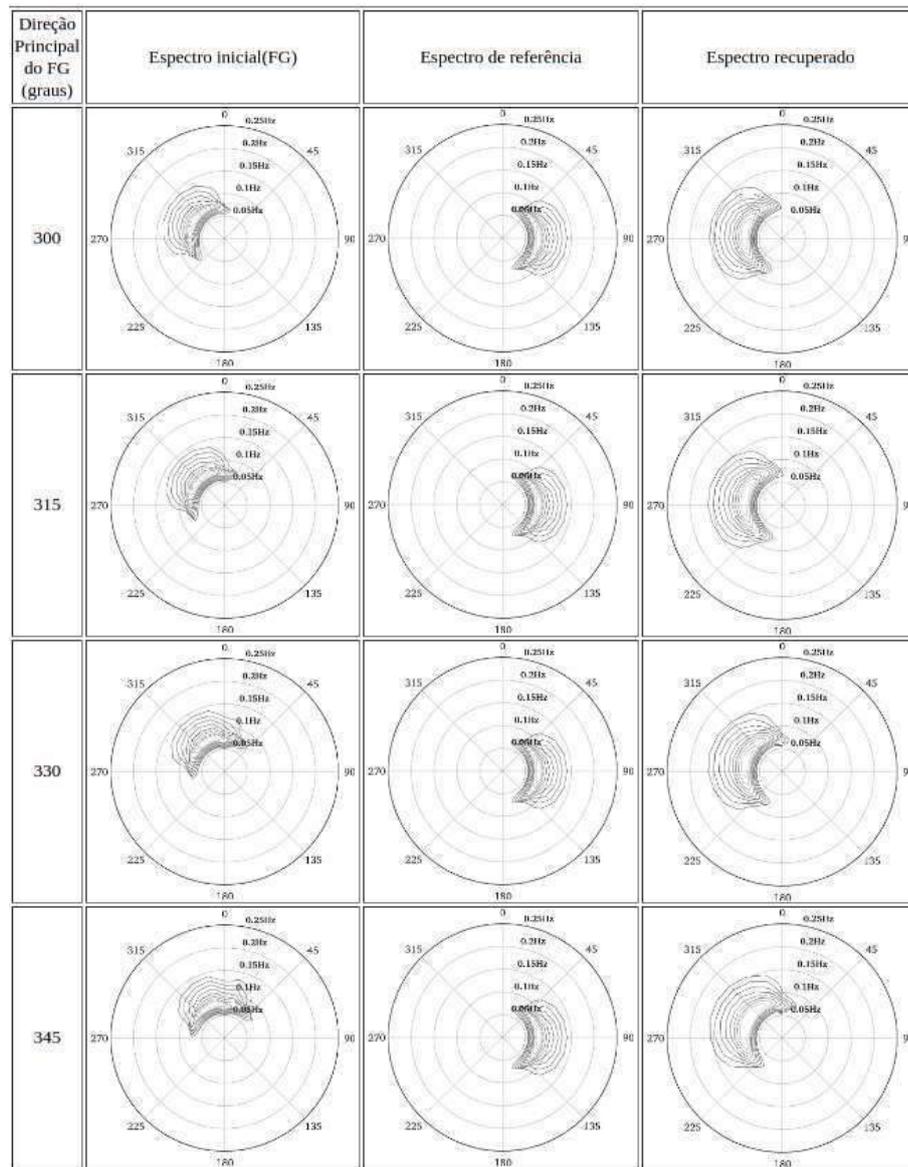


Figura 44 Análise visual da influência da mudança de direção do *first-guess* sobre o espectro de ondas recuperado. Os círculos concêntricos indicam a frequência (Hz), enquanto a direção (graus) é indicada no círculo maior.

8 APÊNDICE B

Neste apêndice são apresentados resumidamente conceitos e resultados matemáticos essenciais para o desenvolvimento desta tese.

8.1 Ondas harmônicas planas

Uma onda harmônica no plano (John, 1991) é uma função da forma

$$U(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varphi)}, \quad (8.1.1)$$

em que \mathbf{x} é um vetor posição no plano e t um instante no tempo. Aqui, $A > 0$ denota a amplitude da onda, \mathbf{k} o vetor número de onda (ou frequência espacial), ω a frequência angular e φ a fase angular. Denomina-se o par (\mathbf{k}, ω) de frequência generalizada.

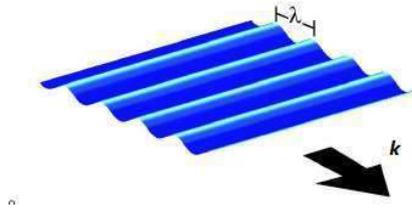


Figura 45 Configuração de uma onda harmônica bidimensional de comprimento λ e vetor número de onda \mathbf{k}

Ondas harmônicas são uma idealização matemática e constituem uma boa ferramenta matemática para representar ondas mais gerais (realistas). É bom salientar que a onda (8.1.1) não pode ser observada em uma realidade física.

A solução observada em idealizações é vista na Figura 45 e, de fato, é dada pela parte real de (8.1.1):

$$\Re \{U(\mathbf{x}, t)\} = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varphi) \quad (8.1.2)$$

A escolha da representação na forma complexa é usada frequentemente por ser de simples manipulação. Devido a periodicidade da exponencial complexa, para certos valores positivos de λ vale que:

$$U(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x} + \lambda \hat{\mathbf{k}}, t), \quad (8.1.3)$$

em que $\hat{\mathbf{k}} = k^{-1}\mathbf{k}$ com $k = |\mathbf{k}|$. Analogamente,

$$U(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x}, t + T), \quad (8.1.4)$$

para certos valores positivos de T .

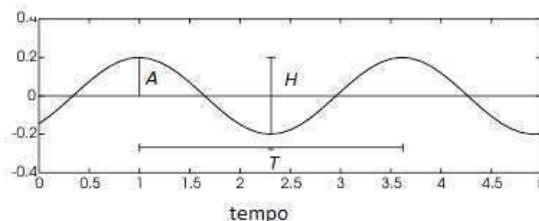


Figura 46 Perfil de uma onda harmônica.

8.2 Elementos básicos

Em relação à onda plana dada por (8.1.1), define-se:

- (a) O número de onda é $k = |\mathbf{k}|$.
- (b) O comprimento de onda é o menor $\lambda > 0$ para o qual (8.1.3) é válido, isto é, $\lambda = 2\pi k^{-1}$.
- (c) O período é o menor $T > 0$ para o qual (8.1.4) é válido, isto é, $T = 2\pi\omega^{-1}$.
- (d) A velocidade de fase é $u = \omega k^{-1}$.
- (e) A frequência linear é $\nu = T^{-1}$.
- (f) A esbeltez é $e = H\lambda^{-1}$.

9 APÊNDICE C

9.1 Impluso unitário (função de Dirac)

O delta de Dirac, denotado por $\delta(\mathbf{x})$, é uma função generalizada tal que para qualquer função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, tem-se

$$\int f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0). \quad (9.1.1)$$

Mais geralmente, se $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável que possui apenas zeros de multiplicidade igual a 1, então tem-se

$$\int f(\mathbf{x})\delta(g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in Z} \frac{f(\boldsymbol{\alpha})}{\|g'(\boldsymbol{\alpha})\|} \quad (9.1.2)$$

em que $Z = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n : g(\boldsymbol{\alpha}) = 0\}$. Uma abordagem sólida sobre a função de Dirac pode ser vista em Gel'fand e Shilov (1964).

Em análise de sinais, o delta de Dirac é comumente chamado de impulso unitário. Neste contexto, considera-se, além da propriedade destacada em (9.1.1), que (Srivastava, 2009):

$$\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 1, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (9.1.3)$$

9.2 Transformada de Fourier

Para uma função $f(\mathbf{x})$ suficientemente regular, o símbolo $\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})$ representa a transformada de Fourier de f , isto é,

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int f(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (9.2.1)$$

A transformada inversa recupera a função f . Isto significa que f possui a representação integral:

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\xi} \quad (9.2.2)$$

A função de Dirac possui a útil representação,

$$\frac{1}{|\alpha|^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\alpha \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} d\boldsymbol{\xi} \quad (9.2.3)$$

em que $\alpha \neq 0$ é um escalar. Uma abordagem sólida sobre a transformada de Fourier pode ser vista em Folland (1999).

10 APÊNDICE D

10.1 Variáveis aleatórias

A esperança matemática (valor esperado ou média) de uma variável aleatória Y é denotada por $\langle Y \rangle$ e sua variância por $\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2$. Se Y_1 e Y_2 são variáveis aleatórias, vale que $\langle aY_1 + bY_2 \rangle = a\langle Y_1 \rangle + b\langle Y_2 \rangle$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

A função característica do vetor randômico $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, denotada por $\varphi = \varphi_{\mathbf{Y}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é definida por

$$\varphi(\mathbf{w}) = \langle \exp(i \mathbf{w} \cdot \mathbf{Y}) \rangle \quad (10.1.1)$$

em que $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. O vetor randômico \mathbf{Y} é dito ser Gaussiano se, e somente se, sua função característica é expressa por

$$\varphi(\mathbf{w}) = \exp\left(i \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{w}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}\right), \quad (10.1.2)$$

em que $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ são, respectivamente, o valor esperado de \mathbf{Y} e sua matriz de covariância. Isto é,

$$\boldsymbol{\mu} = (\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle, \dots, \langle Y_n \rangle) \quad (10.1.3)$$

e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \langle Y_1 Y_1 \rangle & \langle Y_1 Y_2 \rangle & \dots & \langle Y_1 Y_n \rangle \\ \langle Y_2 Y_1 \rangle & \langle Y_2 Y_2 \rangle & \dots & \langle Y_2 Y_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_n Y_1 \rangle & \langle Y_n Y_2 \rangle & \dots & \langle Y_n Y_n \rangle \end{pmatrix} \quad (10.1.4)$$

A referência básica para esta seção é, por exemplo, Veerarajan (2003).

10.2 Campos randômicos no espaço-tempo

Um processo randômico no espaço-tempo sobre um espaço de probabilidade $(S, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ é uma família de variáveis aleatórias

$$\{X(\mathbf{x}, t) : t \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\} \quad (10.2.1)$$

que satisfaz,

- (i) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ fixado, a família $\{X(\mathbf{x}, t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um processo estocástico sobre $(S, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$
- (ii) Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, a família $\{X(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ é um processo estocástico sobre $(S, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$

Para cada $s \in S$ fixado, a função definida por $X(\mathbf{x}, t, s)$ para $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ é chamada de realização do processo estocástico. O campo randômico (10.2.1) é denotado simplesmente por $X(\mathbf{x}, t)$ quando não houver risco de confusão.

10.3 Correlação e covariância

Relativamente ao campo randômico (10.2.1), denota-se por

$$R[X(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1), X(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2)] = \langle X(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1) X(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2) \rangle, \quad (10.3.1)$$

sua função de correlação e por,

$$K[X(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1), X(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2)] = R[X_1, X_2] + \langle X(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1) \rangle \langle X(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2) \rangle \quad (10.3.2)$$

sua função de covariância. Estas funções representam medidas de dependência entre as variáveis aleatórias de um campo randômico no espaço-tempo. Num campo randômico cuja a esperança matemática das variáveis aleatórias é nula, as função de correlação e de covariância são indênticas.

No que se segue, usa-se a notação: $X_j = X(\mathbf{x}_j, t_j)$ e $X'_j = X(\mathbf{x}'_j, t'_j)$.

Uma função de distribuição de probabilidade conjunta $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de n -ésima ordem ($n \in \mathbb{N}$) é tal que

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbb{P}[X_1 \leq u_1, X_2 \leq u_2, \dots, X_n \leq u_n] \quad (10.3.3)$$

para quaisquer $(\mathbf{x}_1, t_1), \dots, (\mathbf{x}_n, t_n)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

10.4 Campos randômicos estacionários e homogêneos

O campo randômico (10.2.1) é dito homogêneo (no espaço) e estacionário (no tempo) se para todo $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $(\mathbf{x}_j, t_j), (\mathbf{x}'_j, t'_j)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, tais que

$$(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}'_j, t_j - t'_j) = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i, t_i - t'_i) \quad (10.4.1)$$

para $i, j = 1, \dots, n$, tem-se

$$\mathbb{P}[X_1 \leq u_1, X_2 \leq u_2, \dots, X_n \leq u_n] = \mathbb{P}[X'_1 \leq u_1, X'_2 \leq u_2, \dots, X'_n \leq u_n] \quad (10.4.2)$$

Em particular, um campo randômico homogêneo e estacionário satisfaz

- (i) $\langle X(\mathbf{x}, t) \rangle = \mu$ (constante)
- (ii) $\langle |X(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle < \infty$
- (ii) Existe uma função $C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$R[X(\mathbf{x}_1, t_1), X(\mathbf{x}_2, t_2)] = C(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) \quad (10.4.3)$$

para quaisquer $(\mathbf{x}_1, t_1), (\mathbf{x}_2, t_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Processos randômicos com estruturas probabilísticas especiais podem ser especificados com menos informação que o usual. Alguns campos randômicos podem ser completamente caracterizados por suas funções de distribuições de primeira e segunda ordem. Este é o caso dos processos Gaussianos.

10.5 Campos randômicos Gaussianos

O campo randômico (10.2.1) é dito ser Gaussiano se para cada $n \in \mathbb{N}$ e para quaisquer $(\mathbf{x}_1, t_1), (\mathbf{x}_2, t_2), \dots, (\mathbf{x}_n, t_n)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ a função característica do vetor

$$(X(\mathbf{x}_1, t_1), X(\mathbf{x}_2, t_2), \dots, X(\mathbf{x}_n, t_n)) \quad (10.5.1)$$

satisfaz a condição (10.1.2).