



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Allan Moraes de Lira

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROCESSO DE TRANSFERÊNCIA
DE CALOR EM REGIME PERMANENTE, COM CONDIÇÕES DE
CONTORNO NÃO LINEARES, A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA DE
PROBLEMAS LINEARES**

Rio de Janeiro

2022

Allan Moraes de Lira

Simulação Computacional do Processo de Transferência de Calor em Regime Permanente, com Condições de Contorno Não Lineares, a Partir de uma Sequência de Problemas Lineares



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transportes.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

L768 Lira, Allan Moraes de.
Simulação computacional do processo de transferência de calor em regime permanente, com condições de contorno não lineares, a partir de uma sequência de problemas lineares / Allan Moraes de Lira. – 2022.
168f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.
Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Transmissão - Teses. 3. Calor - Radiação e absorção - Teses. 4. Modelos matemáticos - Teses. 5. Simulação (Computadores) - Teses. I. Gama, Rogério Martins Saldanha da. II. Pedrosa Filho, José Júlio. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 536.24:519.6

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Allan Moraes de Lira

Simulação Computacional do Processo de Transferência de Calor em Regime Permanente, com Condições de Contorno Não Lineares, a Partir de uma Sequência de Problemas Lineares

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: fenômenos de transportes.

Aprovado em 18 de janeiro de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Prof. Dra. Maria Laura Martins Costa (Coorientadora)
Universidade Federal Fluminense – UFF

Prof. Dr. Nide Geraldo do Couto Ramos Fico Júnior
Escola Naval – EN

Prof. Dr. Felipe Bastos de Freitas Rachid
Universidade Federal Fluminense – UFF

Prof. Dr. Manoel Antônio Fonseca Costa Filho
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Prof. Dr. Carlos Antônio de Moura
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Prof. Dr. José Júlio Pedrosa Filho
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Rio de Janeiro

2022

DEDICATÓRIA

Aos meus queridos pais: Ramirez Rodrigues de Lira e Neuzi Moraes da Silva de Lira. E aos meus irmãos: Wesley Moraes de Lira e Ramirez Moraes de Lira. Em meio a uma vida com poucas oportunidades e possibilidades materiais, meus pais me proporcionaram uma criação pautada em virtudes, e, deste modo, conseguiram desenvolver em mim a força, a coragem e a determinação para que eu pudesse conquistar a realização, por meio de trabalho duro, dos meus sonhos. Meus pais foram – e ainda são – os meus melhores Professores. Espero honrá-los até meu último instante.

AGRADECIMENTOS

Em um mundo afogado pela produtividade e eficácia, onde até mesmo os afetos são instrumentalizados pela sociedade de mercado, quase não é possível experimentar o significado do trabalho desenvolvido diariamente, e em um determinado momento do doutorado senti os efeitos da falta de sentido e de significado em trabalhar nesta tese. Talvez a falta de significado tivera fonte no cansaço, pois esta tese foi escrita sempre após os expedientes, nos feriados, nos finais de semana e nas férias do trabalho, incluindo até mesmo a defesa desta tese a qual foi realizada durante as minhas férias. Sei. A escolha foi minha, mas o drama continua sendo real, e todo drama real deve ser encarado com reverência. Sempre estava só, sem participar dos encontros com amigos e nos encontros da família. Minha resposta aos convites era sempre esta: “Não posso. Preciso adiantar as coisas do doutorado”. Foi assim por cinco anos. Só me restou o silêncio da solidão, pois a solidão se instalou em mim. Já não me sobrava ânimo, força e não via mais significado no doutorado. Mas, certa vez, ouvi uma reflexão a respeito da vida de São José, e ao me atentar no silêncio da vida desse homem justo que se fez grande ao cumprir, silenciosamente, suas tarefas diárias, em assumir seu lugar discreto ao lado da virgem santíssima na criação do menino Deus, eu pude perceber que qualquer tarefa, por menor que seja, quando dedicada a Deus, ganha todo o significado necessário. E foi exatamente isto que São José fez: silenciosamente, dedicou todo o seu trabalho a Deus, na criação de seu Filho.

Caro leitor, estás lendo a ação da misericórdia de Deus na vida de um homem, isto é, a misericórdia do Eterno na minha vida. Esta tese é fruto da Graça do Altíssimo. Acima, afirmei que já não tinha ânimo, mas tudo ganhou novo sabor quando percebi que o significado do meu trabalho diário e desta tese é este: “Santificar o trabalho próprio não é uma fantasia, mas missão de todo o cristão. Aí onde estão as nossas aspirações, o nosso trabalho, os nossos amores, aí está o lugar do nosso encontro cotidiano com Cristo. É no meio das coisas mais materiais da terra que nos devemos santificar, servindo a Deus e a todos os homens. Na linha do horizonte parecem unir-se o céu e a terra. Mas não: onde de verdade se juntam é no coração, quando se vive santamente a vida diária”. Consequentemente, passei a oferecer esta tese e o meu trabalho a Deus.

Agradeço grandemente ao meu orientador, Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama pela paciência, generosidade e amizade. Sem o apoio do professor Rogério eu, certamente, não conseguiria concluir esta tese.

Agradeço ao Prof. Dr. Guilherme Machado de Freitas, do Instituto Militar de Engenharia (IME), pela valiosa e determinante contribuição na programação computacional desta tese. O professor Guilherme possui um talento desconcertante na matemática.

Agradeço ao meu amigo professor Diego Ribeiro Ferreira Serpa, do IME, pelas correções ortográficas. O professor Serpa possui a virtude da caridade. Sou um homem de sorte por ter sua amizade, Serpa.

Agradeço à professora Juniellen de Oliveira Seipel, do IME, pela valiosa ajuda no abstract.

Caro leitor, não experimenta significado em seu trabalho, ou na graduação, ou na pós-graduação? “Tens de permanecer vigilantes, para que os teus êxitos profissionais ou os teus fracassos – que virão! – não te façam esquecer, nem por um instante, qual é o verdadeiro fim do teu trabalho: a glória de Deus.”

RESUMO

LIRA, Allan Moraes. *Simulação computacional do processo de transferência de calor em regime permanente, com condições de contorno não lineares, a partir de uma sequência de problemas lineares*. 2022. 168f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

A finalidade deste trabalho consiste em realizar a simulação computacional de um novo método de resolução de problemas de engenharia modelados por equações diferenciais parciais com condição de contorno não linear, considerando um corpo não convexo. O destaque do novo método está no fato de que ele permite a utilização de técnicas muito simples para a realização da simulação computacional, como, por exemplo, a técnica das diferenças finitas, utilizada nesta tese. O problema abordado para a concretização da finalidade supracitada foi a transferência de calor, em regime permanente, em um corpo negro, rígido, opaco, não convexo e que possui geração interna de energia. Esse problema é matematicamente caracterizado por uma equação diferencial parcial elíptica de Poisson, com condição de contorno inerentemente não linear. Os resultados das simulações computacionais mostram que o novo método é eficaz e fisicamente consistente.

Palavras-chave: Transferência de Calor. Radiação Térmica. Condução Térmica. Fator de Forma. Corpo não Convexo. Linearização. Simulação Computacional.

ABSTRACT

LIRA, Allan Moraes. *Computer simulation of the steady state heat transfer process, with non-linear boundary conditions, from a sequence of linear problems*. 2021. 168f. Thesis (Doctorate in Mechanical Engineering) – Faculty of Engineering, State University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

The purpose of this work is to perform a computer simulation of a new method for solving engineering problems characterized by partial differential equations with non-linear boundary condition, considering a non-convex body. The highlight of the new method is the fact that it allows the use of very simple techniques for computer simulation, such as, for example, the finite difference technique, used in this thesis. The problem addressed to achieve the aforementioned purpose was the heat transfer, in steady state, in a black, rigid, opaque, non-convex body that has internal generation energy. This problem is mathematically characterized by an elliptic Poisson partial differential equation, with an inherently non-linear boundary condition. The results of computer simulations show that the new method is effective and physically consistent.

Keywords: Heat transfer. Thermal Radiation. Thermal conduction. Form Factor. Non-convex body. Linearization. Computer simulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Corpo contínuo e convexo que ocupa uma região arbitrária Ω , com fronteiras $\partial\Omega$	24
Figura 2 – Corpo contínuo e convexo que ocupa uma região arbitrária Ω , com fronteiras $\partial\Omega$	24
Figura 3 – Corpo Negro contínuo e não convexo que ocupa uma região arbitrária Ω e fronteiras $\partial\Omega$, com uma conhecida geração de energia interna constante \dot{q}	25
Figura 4 – Corpo Negro contínuo e não convexo que ocupa uma região arbitrária Ω e fronteiras $\partial\Omega$. Os pontos das fronteiras x e y são ligados por uma reta que não passa pelo corpo rígido.....	25
Figura 5 – Placa rígida homogênea, não convexa, considerada um corpo negro que ocupa uma região plana Ω e fronteiras $\partial\Omega$. A região horizontal em vermelho representa a geração de energia interna \dot{q}	32
Figura 6 – Esquema genérico para obtenção do fator de forma relativo à troca de radiação de partes de um mesmo corpo não convexo	33
Figura 7 – Placa rígida não convexa, infinita na direção ortogonal à figura	34
Figura 8 – Sistema bidimensional com dimensões $M \times N$ com contornos de valores especificados.....	35
Figura 9 – Domínio de solução discretizado.....	36
Figura 10 a 217 – Gráficos resultantes das simulações computacionais	40 a 146
Figura 218 – Ilustração dos pontos nos quais foram obtidos os valores numéricos para diferentes valores de α , com e sem os efeitos da não convexidade da placa.....	149
Figura 219 – Ilustração dos pontos nos quais foram obtidos os valores numéricos para $\alpha=500$, com e sem os efeitos da não convexidade da placa.....	151

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de convergência dos somatórios dos campos de temperaturas das três malhas implementadas.....	73
Tabela 2 – Valores de convergência ponto médio do lado vertical da placa das três malhas implementadas.....	73
Tabela 3 – Valores de convergência temperatura máxima do lado vertical da placa das três malhas implementadas.....	73
Tabela 4 – Valores de convergência temperatura máxima do lado vertical da placa das três malhas implementadas.....	109
Tabela 5 – Valores de convergência temperatura máxima do lado vertical da placa das três malhas implementadas.....	109
Tabela 6 – Valores de convergência temperatura máxima do lado vertical da placa das três malhas implementadas.....	109
Tabela 7 – Valores de convergência temperatura máxima do lado vertical da placa das três malhas implementadas.....	148
Tabela 8 – Valores de convergência temperatura máxima do lado vertical da placa das três malhas implementadas.....	148
Tabela 9 – Valores de convergência temperatura máxima do lado vertical da placa das três malhas implementadas.....	148
Tabela 10 – Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90) e (1.0,0.90) da placa para $\alpha=4000$, sem os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.....	149
Tabela 11 – Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90) e (1.0,0.90) da placa para $\alpha=4000$, com os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.....	150
Tabela 12 – Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90) e (1.0,0.90) da placa para $\alpha=600$, sem os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.....	150
Tabela 13 – Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90) e (1.0,0.90) da placa para $\alpha=600$, com os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.....	150
Tabela 14 – Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90), (1.0,0.90) e (1.0,0.5) da placa para $\alpha=500$, sem os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.....	151
Tabela 15 – Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90), (1.0,0.90) e (1.0,0.5) da placa para $\alpha=500$, com os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.....	151

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFF	Universidade Federal Fluminense
EN	Escola Naval

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Conjunto aberto e limitado pertencente ao \mathbb{R}^M ($M = 1, 2$ ou 3)
$\partial\Omega$	Fronteira de um corpo
\mathbf{n}	Vetor unitário normal a uma superfície
D/Dt	Derivada material
div	Divergente
ρ	Densidade
u	Energia interna específica
\mathbf{V}	Velocidade
\mathbf{q}	Fluxo de calor por unidade de tempo e área
\mathbf{T}	Tensor de Cauchy
\mathbf{g}	Força de corpo externa por unidade de massa
\dot{q}	Fornecimento de calor interno por unidade de tempo e volume
$grad$	Gradiente
$\partial/\partial t$	Derivada parcial em relação ao tempo
c	Calor específico
T	Temperatura
k	Condutividade térmica
$\hat{F}(x)$	Função genérica
h	Coefficiente de transferência de calor por convecção
∞	Infinito
q_{RAD}	Fluxo de calor por radiação
σ	Constante de Stefan-Boltzmann

$\hat{K}(x, y)$	Função dependente da geometria de um corpo
H	Energia radiante térmica incidente por unidade de tempo e área
dA	Elemento infinitesimal de área
m	Constante positiva
k_0	Constante de referência positiva
λ	Constante de escolha conveniente
L	Lado da placa quadrada
ξ	Variável genérica
ψ	Função genérica
β	Variável genérica
u_i	Elemento de uma sequência
α	Fator de convergência

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
Capítulo 1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
Capítulo 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1 A primeira lei da termodinâmica (equação da energia)	20
2.2 A equação do calor	22
2.3 A lei de Fourier	23
2.4 Condições de Contorno e a lei de Stefan-Boltzman	24
2.5 Transferência de energia em um corpo não convexo.....	25
Capítulo 3. A DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DA TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA EM UM CORPO NEGRO NÃO CONVEXO, COM GERAÇÃO DE ENERGIA INTERNA	26
Capítulo 4. A PROVA MATEMÁTICA DO NOVO MÉTODO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA EM UM CORPO NÃO CONVEXO	29
Capítulo 5. A SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO NOVO MÉTODO DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UM CORPO NÃO CONVEXO	33
5.1 Formulação numérica.....	36
5.2 Apresentação e análise dos resultados.....	39
5.3 Primeiro ciclo de simulações: 40 X 40.....	41
5.4 Segundo ciclo de simulações: 80 X 80.....	75
5.5 Terceiro ciclo de simulações: 160 X 160.....	111
Capítulo 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	153
REFERÊNCIAS	154
APÊNDICE A	158

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo apresentar a simulação computacional de um novo método de resolução de problemas de engenharia que são caracterizados por equações diferenciais parciais com condição de contorno não linear. O novo método opera linearizando a condição de contorno não linear, e, deste modo, permite a utilização de técnicas básicas de obtenção de simulações computacionais como, por exemplo, a técnica das diferenças finitas, empregada neste trabalho.

Para verificar se o novo método oferece resultados fisicamente consistentes, foi abordado o problema da transferência de calor, em regime permanente, em um corpo negro considerado rígido, plano, contínuo, não convexo, opaco, em repouso, com fronteira a alta temperatura, com condutividade térmica constante e que possui uma conhecida geração interna de energia. O meio no qual esse corpo se encontra é considerado não participante, e, portanto, os efeitos da convecção são desprezados. Esse problema é matematicamente caracterizado por uma equação diferencial parcial elíptica com condição de contorno não linear, por representar o acoplamento da transferência de energia por condução, que ocorre dentro do corpo, com a transferência de energia por radiação térmica a qual ocorre nas fronteiras do corpo, além do fato de ser o corpo não convexo. Os processos de transferência de energia em corpos a altas temperaturas, nos quais é necessário considerar o acoplamento da condução com a radiação, estão presentes em vários campos da ciência e da indústria, como, por exemplo, o estudo da transferência de calor em satélites artificiais.

O corpo negro é empregado como boa aproximação em muitos problemas de engenharia e possibilita a obtenção de resultados satisfatórios. A maior parte dos problemas que envolvem transferência de energia encontrados na literatura abordam situações com descrições lineares [17], isto é, os fenômenos físicos são modulados com estrutura matemática linear. No entanto, em muitos casos da engenharia não é permitido negligenciar a não linearidade das estruturas matemáticas dos fenômenos, pois a realidade é não linear. Assim, o problema abordado neste trabalho é mais realístico, quando comparado com a maioria dos problemas encontrados na literatura, por se tratar de um corpo não convexo, o que torna a condição de contorno muito mais complexa [17]. Um corpo é considerado não convexo quando possui a propriedade de ser fonte de radiação térmica de si mesmo [36]. A condição de contorno para um corpo não convexo contém o fator de forma do corpo, dependente somente da sua geometria, e representa a fração da radiação que deixa uma parte da superfície do corpo que incide em uma outra parte desse mesmo corpo [36].

Em relação à não convexidade de um corpo rígido, as simulações computacionais apresentadas neste trabalho mostram que quando os efeitos da não convexidade são desprezados os níveis das temperaturas são significativamente inferiores quando comparados às temperaturas considerando os efeitos da não convexidade. Um exemplo de aplicação dos efeitos da não convexidade de um corpo consiste em melhorar a eficiência de coletores solares. O coletor solar de

ranhura em V é mais vantajoso por causa da não convexidade das partes da sua superfície [26].

Este trabalho está organizado em seis capítulos. O primeiro capítulo consiste em uma revisão bibliográfica onde é realizado um apanhado histórico dos artigos que foram publicados na mesma área de interesse desta tese, bem como as sínteses dos artigos mais relevantes que foram encontrados por este autor. O segundo capítulo apresenta os fundamentos teóricos do fenômeno da transferência de energia que são necessários para a abordagem dos problemas propostos neste trabalho, bem como a definição de corpo convexo e de corpo não convexo. O terceiro capítulo, com base no segundo, descreve matematicamente o fenômeno da transferência de calor em um corpo negro, não convexo e com geração de energia interna. Ademais, mostra como a condição de contorno se torna ainda mais complexa quando são considerados os efeitos da não convexidade do corpo. Assim, o terceiro capítulo apresenta a estrutura matemática do problema a ser resolvido utilizando o novo método de resolução proposto nesta tese, possibilitando a realização da simulação computacional. O quarto capítulo apresenta o novo método de resolução do problema descrito no capítulo três, juntamente com a sua prova matemática formal, e aborda o problema da transferência de calor em uma placa não convexa, considerada um corpo negro e com geração interna de energia, com o intuito de aplicar o novo método e realizar as simulações computacionais. O quinto capítulo apresenta os aspectos fundamentais das técnicas utilizadas para a realização das simulações computacionais, terminando com a apresentação e a análise dos resultados obtidos. O sexto capítulo apresenta as considerações finais, indicando as vantagens da simulação computacional com o emprego do novo método e propõe trabalhos futuros.

1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para a análise realística da transferência de energia em um corpo que está com a fronteira a alta temperatura é necessário considerar o fato de que existe transferência de energia radiativa do corpo para a sua vizinhança [13]. Se o meio no qual o corpo está inserido for considerado não participante, o processo de transferência de energia no corpo é caracterizado pelo acoplamento da condução térmica e radiação térmica. O acoplamento desses dois modos de transferência de energia dá origem a problemas matemáticos elegantes, complexos e que não possuem soluções normalizadas. Como mencionado na introdução deste trabalho, para o caso de um corpo opaco, o acoplamento entre a transferência de energia por condução, que ocorre no interior do corpo, com a transferência de energia por radiação, a qual ocorre nas fronteiras, é matematicamente caracterizado por uma equação diferencial parcial com condição de contorno inerentemente não linear.

Há uma extensa literatura que proporciona o estudo das propriedades físicas de problemas complexos acerca da transferência de calor devido ao acoplamento da condução com a radiação. Os primeiros resultados matemáticos para esse tipo de problema foram obtidos no final da década de 1930 [38]; todavia, os estudos com o objetivo de obter teorias matemáticas consistentes que possibilitassem a descrição da transferência de energia devido ao acoplamento da condução com a radiação levou mais de quarenta anos para ser desenvolvido. No início da década de 1990 alguns artigos foram publicados apresentando resultados consistentes com novas técnicas para a obtenção de soluções/simulações do problema da transferência de energia devido ao acoplamento da condução com a radiação térmica. A seguir, são apresentadas as sínteses dos artigos mais relevantes que foram encontrados por este autor.

No ano de 1990, um artigo de cujo título “*A new mathematical model for energy transfer problems with radiative boundary conditions* [7]”, inaugura um novo modelo matemático para a descrição da transferência de calor por condução com condições de contorno radiativas, ou seja, a transferência de calor caracterizada pelo acoplamento da condução com a radiação. A novidade do artigo é devido a um modelo matemático que muda a clássica lei de Stefan-Boltzmann e, quando comparado com o modelo clássico, apresenta vantagens físicas com nenhuma desvantagem matemática. O artigo mostra que o novo modelo é termodinamicamente equivalente ao clássico, permitindo a construção do princípio de um mínimo, empregado para demonstrar a existência e unicidade da solução, fornecendo, assim, uma maneira de simular o fenômeno considerado de transferência de energia não linear. O artigo considera o fenômeno da transferência de calor em uma esfera rígida, admitida como um corpo negro, cercada por vácuo e que é aquecida por uma fonte de energia interna, e com a temperatura prescrita na superfície externa para comparar os resultados obtidos utilizando o modelo clássico da lei de Stefan-Boltzmann com o novo modelo fornecido pelo artigo. Assim, o artigo apresenta uma nova abordagem que dá origem a uma

mudança significativa na modelagem matemática de fenômenos de transferência de energia que envolvem o acoplamento da condução com a radiação. No entanto, o artigo não apresenta a simulação computacional do fenômeno.

Também no ano de 1990, um artigo intitulado *“On the solution of the energy transfer problem in a non-convex black body with convective/radiative boundary conditions”* [17], foi publicado com o objetivo de apresentar um procedimento para a construção da solução de problemas do fenômeno da transferência de energia em um corpo negro não convexo que troca energia com sua vizinhança por convecção e por radiação térmica por estar em níveis elevados de temperatura. Nesse artigo, o procedimento utilizado para a construção da solução consiste em obter o limite de uma sequência não linear cujos elementos são obtidos a partir da minimização de um funcional, onde a minimização foi realizada com um método de direções conjugadas. O artigo toma como exemplo de aplicação o fenômeno da transferência de energia em uma casca esférica, não apresentando a simulação computacional do campo de temperaturas.

Em 1992, o artigo de título *“On the physical Solution to the heat equation subjected to nonlinear boundary conditions”* [14], apresentou uma abordagem mais realística, quando comparado com a literatura básica, do problema da transferência de calor com condição de contorno não linear, isto é, forneceu um procedimento pelo qual é possível realizar simulações com resultados fisicamente consistentes. O procedimento apresentado no artigo consiste na minimização de um funcional que fornece uma única solução fisicamente consistente para uma grande classe de problemas de transferência de calor com condições de contorno não lineares, representando, por exemplo, a emissão de radiação juntamente com a convecção do corpo para a sua vizinhança. Porém, o artigo não aplica o procedimento a nenhum corpo específico. Mas, ainda no ano de 1992, o autor do artigo [14] utiliza seu procedimento para solucionar o fenômeno de transferência de energia em um corpo cilíndrico rígido e opaco, com condição de contorno convectiva e radiativa em outro artigo publicado cujo título é: *“Simulation of the Steady-State Energy Transfer in Rigid Bodies, with Convective/Radiative Boundary Conditions, Employing a Minimum Principle”* [18]. Esse artigo realizou a construção de um princípio mínimo que possibilitou a simulação computacional do problema utilizando elementos finitos.

Em 1993, o artigo *“On a class of elliptic problems and its application to heat transfer in nonconvex bodies”* [13], apresentou um procedimento semelhante aos dois últimos artigos citados, mas empregando a minimização de um funcional diferente. O artigo constrói o procedimento utilizando um caso genérico do fenômeno da transferência de calor em um corpo negro não convexo, com condições de contorno devido ao acoplamento condução/convecção/radiação. Esse artigo mostra que a solução é obtida a partir de uma sequência cujos elementos podem ser obtidos utilizando um princípio de mínimo.

Em 1995, um artigo intitulado “*An alternative mathematical modelling for coupled conduction/radiation energy transfer phenomenon in a system of N gray bodies surrounded by a vacuum*” [39], trouxe uma alternativa para a descrição matemática do fenômeno da transferência de energia em estado estacionário em um sistema composto por N corpos rígidos, opacos e cinzentos circundados por um meio não participante (vácuo). Esse artigo apresenta uma descrição termodinamicamente equivalente à clássica do fenômeno em questão, mostrando ser matematicamente mais conveniente pelo fato de permitir a construção da solução a partir de uma sequência de problemas desacoplados, mas não lineares, sendo cada elemento da sequência obtido pela minimização de um funcional. Esse procedimento é fisicamente explicado considerando a energia térmica radiante incidente em um determinado corpo, proveniente dos outros corpos do sistema, em uma iteração anterior $m - 1$ para obter os campos de temperatura e a radiosidade na iteração m , isto é, a ideia física consiste em obter os campos de temperatura na iteração m considerando a energia térmica radiante incidente avaliada com os campos de temperatura e radiosidade na iteração $m - 1$. Além disso, esse artigo fornece provas de existência e unicidade do procedimento apresentado, mas não faz a simulação computacional do procedimento proposto.

No ano de 1996 houve a publicação de um artigo de título: “*Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations*” [40], com o objetivo de provar a existência e a singularidade de sistemas não lineares que expressam o fenômeno da transferência de energia devido ao acoplamento da condução e radiação. O artigo aborda o problema da transferência de energia considerando apenas o espalhamento isotrópico, meios homogêneos e condições de contorno de Dirichlet e, além disso, o artigo formula o sistema como um problema de ponto fixo compacto. Esse artigo não se ocupa em garantir a consistência física dos resultados.

Em 1997 um artigo intitulado “*A linear scheme for simulating conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions*” [4], apresentou um esquema para a construção da solução de problemas da transferência de calor por condução com condições de contorno não lineares a partir da solução de problemas com condições de contorno lineares. O artigo ilustrou o procedimento por meio da simulação utilizando um esquema de diferenças finitas. No entanto, o exemplo utilizado não tratou de corpo não convexo e não houve apresentação de gráficos com perfis de temperaturas.

No ano de 2004 foi publicado o seguinte artigo: “*Preconditioned conjugate gradient method for three-dimensional non-convex enclosure geometries with diffuse and grey surfaces*” [41]. Esse artigo realizou um estudo para obter a simulação numérica da transferência de energia em uma geometria não convexa, considerando que a geometria é caracterizada por uma superfície difusa e cinzenta. Para tanto, o método dos elementos de contorno, baseado no esquema de Galerkin-Bubnov, foi utilizado para a discretização da equação integral devido às condições de contorno não

lineares, bem como o método do gradiente conjugado para a solução do sistema de equações lineares. O artigo, no entanto, não apresenta as simulações nem faz menção à consistência física dos procedimentos apresentados.

No ano de 2006 foi publicado um artigo cujo título é “*Analysis of the Heat Equation with Non-Local Radiation Terms in a Non-Convex Diffuse and Grey Surfaces*” [42], realizando o estudo da transferência de calor em um sistema genérico não convexo composto por corpos opacos separados, no vácuo. O artigo discutiu a capacidade de resolução do problema provando a existência de uma solução fraca, bem como alguns casos de obtenção de coercividade. No entanto, o artigo não realizou simulações computacionais relacionadas aos procedimentos apresentados.

No ano de 2019 um artigo de título: “*The Heat Transfer Problem in a Rigid and Nonconvex Gray Body with Temperature Dependent Thermal Conductivity*” [36], abordou o problema da transferência de calor devido ao acoplamento da condução térmica com a radiação térmica, em um corpo cinzento não convexo, em regime permanente. A solução desse problema foi construída por um procedimento iterativo, empregando sequências não lineares. O artigo não aborda o problema em um corpo específico e não realiza a simulação computacional do procedimento apresentado.

Da análise dos artigos acima mencionados pode-se constatar que embora o problema abordado neste trabalho – a transferência de calor devido ao acoplamento da condução com a radiação térmica em um corpo não convexo – já ter sido objeto de estudo, em nenhum dos artigos se observa o método apresentado nesta tese, isto é, a obtenção do campo de temperaturas a partir da linearização das condições de contorno não lineares. Além disso, em nenhum dos artigos supracitados há a apresentação da simulação computacional do processo de transferência de calor devido ao acoplamento da condução com a radiação térmica em uma placa não convexa.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A primeira lei da termodinâmica (equação da energia)

Para resolver os problemas de engenharia relacionados a transferências de energia é fundamental estabelecer as equações que modelam corretamente os fenômenos físicos envolvidos. A primeira lei da termodinâmica oferece o modo pelo qual é possível estabelecer a equação da energia em um corpo contínuo, e se sustenta neste axioma: a variação temporal da energia total de um corpo, ou seja, energia cinética mais a energia interna, é igual a variação temporal do trabalho realizado sobre o corpo mais a variação temporal da energia que é transmitida na forma de calor em seu interior [28]. A variação energética no interior do corpo se deve às transmissões de energia através de suas fronteiras (convecção e radiação térmica) e a algum processo interno de geração de energia. Considerando um corpo contínuo ocupando uma região arbitrária Ω_t , em um determinado instante t , com fronteiras $\partial\Omega_t$, pode-se escrever a equação da energia (primeira lei da termodinâmica) da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left[u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} ds + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} (-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (1)$$

Onde,

$\int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} ds$ → trabalho realizado pelas forças de contato na superfície do corpo;

$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV$ → trabalho realizado das forças de corpo;

$\int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$ → fluxo de calor cruzando a fronteira do corpo;

$\int_{\Omega_t} \dot{q} dV$ → taxa de geração de energia interna;

ρ → densidade;

u → energia interna específica;

\mathbf{v} → campo de velocidades;

\mathbf{T} → tensor tensão de Cauchy;

\mathbf{q} → vetor fluxo de calor (por unidade de tempo e área); e

\dot{q} → taxa de geração interna de calor (por unidade de tempo e volume).

Utilizando o teorema do transporte [28] na equação (1), tem-se que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{D}{Dt} \left[\rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \text{div } \mathbf{v} \right\} dV = \\ & = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} ds + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} (-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \end{aligned} \quad (2)$$

A parcela entre chaves, à esquerda da equação (2), pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{D}{Dt} \left[\rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} = \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \quad (3)$$

Sabe-se que a equação da continuidade é dada por [28]

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4)$$

Logo, a equação (2) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right\} dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} \, ds + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial\Omega_t} (-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} \, dV \quad (5)$$

Levando em consideração o teorema da divergência e que o tensor tensão de Cauchy é simétrico [28], a primeira e a terceira integrais à direita da equação (5) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tv}) \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{Tv}) \, dV - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dV \quad (6)$$

Logo, a equação (5) fica da seguinte forma

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right\} dV = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{Tv}) \, dV + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dV - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dV + \int_{\Omega_t} \dot{q} \, dV \quad (7)$$

Pode-se concluir que a forma local da equação da energia para um corpo contínuo é dada por

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \operatorname{div}(\mathbf{Tv}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (8)$$

Levando em consideração as seguintes propriedades [28]

$$\operatorname{div}(\mathbf{Tv}) = (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \quad (9)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} \quad (10)$$

a equação (8) pode ser reescrita como

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} = (\text{div}\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \text{grad}\mathbf{v} + \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \text{div}\mathbf{q} + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (11)$$

Sabe-se que a equação da quantidade de movimento linear é dada por [28]

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \text{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{g} \quad (12)$$

Aplicando a equação (12) na equação (11), temos o seguinte

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \mathbf{T} \cdot \text{grad}\mathbf{v} - \text{div}\mathbf{q} + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (13)$$

A definição da derivada material permite reescrever a equação (11), primeira lei da termodinâmica na forma local, da seguinte maneira

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad} u \cdot \mathbf{v} \right) = \mathbf{T} \cdot \text{grad}\mathbf{v} - \text{div}\mathbf{q} + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (14)$$

2.2 A equação do calor

Qualquer corpo fora do equilíbrio térmico experimenta um processo interno de transmissão de calor. Para os objetivos deste trabalho, será considerado um corpo rígido, opaco, isotrópico e em repouso. A transferência de calor no interior desse corpo se processa por condução pura, em função dos gradientes internos de temperatura [21]. A equação (14) aplicada a um corpo rígido, opaco e em repouso é dada por

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div}\mathbf{q} + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (15)$$

Por se tratar de corpo rígido, o calor específico só depende da temperatura [28]. Logo, a equação (15) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}\mathbf{q} + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (16)$$

Onde c é o calor específico, considerado constante, e T representa o campo de temperaturas do corpo rígido.

2.3 A lei de Fourier

O fluxo de calor \mathbf{q} , presente na equação (16), é modelado pela lei de Fourier. Essa lei é uma generalização fundamentada em um grande número de experiências, e, portanto, trata-se de uma lei empírica, e se aplica nos estados sólido, líquido e gasoso [21]. Os experimentos mostraram que o fluxo de calor por condução é um fenômeno que ocorre obedecendo, expressa em coordenadas cartesianas retangulares, a seguinte equação

$$\mathbf{q} = -k(\text{grad}T) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \right) \quad \text{em } \Omega \quad (17)$$

onde k é uma propriedade térmica de transporte denominada condutividade térmica, e depende da estrutura física da matéria, atômica e molecular.

O sinal negativo na equação (17) indica que o calor sempre é transferido na direção decrescente da temperatura. Além disso, o fluxo de calor é uma grandeza vetorial. A direção desse fluxo será sempre normal a uma superfície de temperatura constante. Logo, a lei de Fourier afirma que a transferência de calor é mantida por um gradiente de temperaturas ao longo da direção perpendicular a uma isoterma.

Aplicando a lei de Fourier na equação (16), tem-se que

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(k \text{grad} T) + \dot{q} \quad \text{em } \Omega \quad (18)$$

A equação (18) é chamada de equação da difusão do calor em corpos rígidos, e requer condições iniciais e condições de contorno. A solução dessa equação fornece a distribuição de temperaturas do sistema considerado.

Para o caso de a condução de calor ocorrer em regime permanente e da condutividade térmica ser constante, tem-se que

$$\text{div}(\text{grad} T) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (19)$$

A equação (19) modela a condução de calor em um corpo rígido, isotrópico, opaco, em repouso e em regime permanente, e requer condições de contorno.

2.4 Condições de Contorno e a Lei de Stefan-Boltzman

Para resolver a equação (19) é necessário definir as condições físicas que existem nas fronteiras do sistema analisado. Há duas condições de contorno comuns em problemas de transferência de calor: a condição de Dirichlet e a condição de Neumann [21]. A primeira corresponde a uma situação na qual a fronteira possui temperatura prescrita. A segunda corresponde à existência de um fluxo de calor na fronteira, e está relacionada à lei de Fourier, devido ao gradiente de temperatura na fronteira. Essas duas condições de contorno são apresentadas, respectivamente, por

$$T = \hat{F}(X) \text{ sobre } \partial\Omega_1 \quad e \quad \mathbf{q} = -k \text{grad } T \cdot \mathbf{n} \text{ sobre } \partial\Omega_2 \quad (20)$$

onde $\hat{F}(X)$ é uma função conhecida sobre $\partial\Omega_1$, e $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega$ representa a fronteira de Ω e \mathbf{n} representa o vetor unitário exterior.

Para os interesses deste trabalho, será considerado o caso da transferência de energia em um corpo negro, rígido, opaco e isotrópico contido em um meio não participante (sem convecção), que possui geração interna de energia constante. Esse caso implica em um processo de transferência de energia por condução que ocorre simultaneamente com a transferência de energia por radiação térmica na fronteira do corpo, isto é, há um acoplamento da condução térmica com a radiação térmica. As condições de contorno apropriadas para o acoplamento da condução térmica com a radiação térmica são aquelas que surgem a partir das condições de salto no fluxo normal de energia através das fronteiras $\partial\Omega$ [26]. Em outras palavras, deve-se impor que o fluxo normal de calor por unidade de tempo e área chegando por condução à fronteira do corpo (proveniente do seu interior) seja igual ao fluxo normal de calor por unidade de tempo e área deixando a fronteira em direção à vizinhança. Logo, o acoplamento entre a condução e a radiação ocorre nos limites (fronteiras) do corpo e, como mencionado acima, representa a continuidade do fluxo de energia normal em qualquer ponto da fronteira, e é representado pela condição de Neumann, isto é, implica em uma condição de contorno não linear [26], expressa por

$$-k \text{grad } T \cdot \mathbf{n} = \sigma T^4 \text{ sobre } \partial\Omega \quad (21)$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e T representa a temperatura absoluta.

O lado direito da equação (21) é a lei de Stefan-Boltzman. Essa lei é matematicamente mais conveniente e fisicamente equivalente quando expressa por [26]

$$-k \text{grad } T \cdot \mathbf{n} = \sigma |T|^3 T \text{ sobre } \partial\Omega \quad (22)$$

2.5 Transferência de energia em um corpo não convexo

Diz-se que um subconjunto \mathbf{C} de um dado espaço euclidiano é convexo se, escolhidos dois pontos arbitrários de \mathbf{C} , o (único) segmento de reta que tem esses dois pontos como seus extremos está necessariamente contido em \mathbf{C} .

No contexto dos processos de transferência de calor na engenharia, um corpo é dito convexo quando não possui a propriedade de emitir radiação térmica para si próprio, ou seja, quando não é fonte de radiação térmica de si mesmo. A figura 1 ilustra um corpo convexo e contínuo que é representado pelo conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, com fronteira $\partial\Omega$.

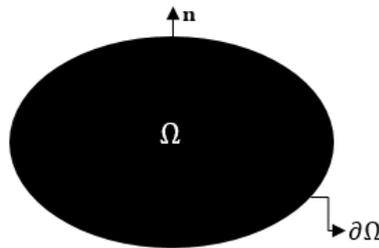


Figura 1. Corpo contínuo e convexo que ocupa uma região arbitrária Ω , com fronteiras $\partial\Omega$.

Um corpo é considerado não convexo quando possui a propriedade de ser fonte de radiação térmica de si mesmo, isto é, quando há partes de um mesmo corpo que se “enxergam” ou se “comunicam”, conforme ilustrado na figura 2.

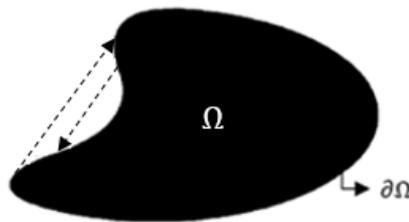


Figura 2. Corpo contínuo e não convexo que ocupa uma região arbitrária Ω , com fronteiras $\partial\Omega$.

3. A DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UM CORPO NEGRO NÃO CONVEXO COM GERAÇÃO INTERNA DE ENERGIA

Para os objetivos deste trabalho é suficiente abordar o problema da transferência de calor, em regime permanente, em um corpo rígido, negro¹, plano, contínuo, não convexo, opaco, em repouso e com condutividade térmica constante, e que ocupa uma região arbitrária Ω e fronteiras $\partial\Omega$, contido em um meio não participante e que possui uma conhecida geração interna de energia considerada constante. Esse problema é ilustrado na figura 3.

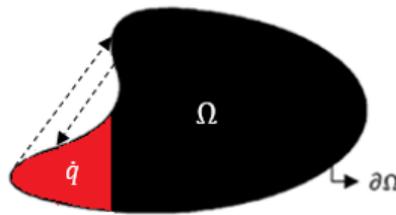


Figura 3. Corpo negro contínuo e não convexo que ocupa uma região arbitrária Ω e fronteira $\partial\Omega$, com uma conhecida geração interna de energia constante \dot{q} .

Portanto, como discutido na seção 2.4 do capítulo precedente, o problema descrito neste capítulo trata do acoplamento entre a condução e a radiação que ocorre nos limites do corpo e representa a continuidade do fluxo de energia normal em qualquer ponto da fronteira. No entanto, a condição de contorno descrita pela equação (22) não é suficiente por causa da não convexidade do corpo aqui considerado.

Considere dois pontos da fronteira do corpo, $x \in \partial\Omega$ e $y \in \partial\Omega$, que se “enxergam”, ou seja, que podem ser ligados por uma linha reta que não passa pelo conjunto Ω , ilustrado na figura 4.

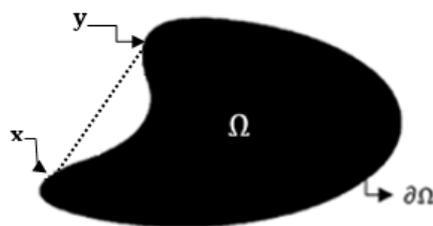


Figura 4. Corpo negro contínuo e não convexo que ocupa uma região arbitrária Ω e fronteiras $\partial\Omega$. Os pontos da fronteira x e y são ligados por uma reta que não passa pelo corpo rígido.

¹ Um corpo negro é uma idealização que possui a propriedade de absorver toda a radiação incidente, independentemente do comprimento de onda e da direção [23].

A radiação térmica incidente (por unidade de tempo e por unidade de área) no ponto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, oriunda do ponto $\mathbf{y} \in \partial\Omega$, é dada por [26]

$$H = \hat{H}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \sigma |\hat{T}(\mathbf{y})|^3 \hat{T}(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \quad \text{para } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (23)$$

onde $T = \hat{T}(\mathbf{y})$ representa a temperatura absoluta no ponto $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ e $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é chamado de fator de forma. O fator de forma depende somente da geometria do corpo, e representa a fração da radiação que deixa uma parte da superfície do corpo que incide em uma outra parte desse mesmo corpo [26]. Em outras palavras, é a fração da energia que deixa o corpo na forma de ondas eletromagnéticas que incide nele mesmo, isto é, a fração da energia radiante que sai do ponto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ que incide no ponto $\mathbf{y} \in \partial\Omega$, bem como o inverso. O fator de forma é definido por [26]

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{[(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_x][(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_y]}{\pi[(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]^2}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ e } \mathbf{y} \in \partial\Omega \quad (24)$$

onde \mathbf{n}_x e \mathbf{n}_y são, respectivamente, os vetores unitários normais à superfície nos pontos $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ e $\mathbf{y} \in \partial\Omega$. Como há transferência de energia entre os pontos da fronteira do corpo com sua vizinhança por radiação térmica, tem-se que existe uma constante positiva μ de tal modo que [26]

$$0 \leq \int_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS = \hat{\eta}(\mathbf{x}) \leq \mu < 1, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (25)$$

O fluxo líquido de calor através das fronteiras do corpo, representado por q_{rad} , é dado pela diferença da radiação que deixa a superfície (emitida) do corpo pela radiação que chega (incidente) ao corpo [26]. Essa ideia é expressa matematicamente de acordo com a seguinte equação

$$q_{rad} = \sigma |T|^3 T - H \quad \text{em } \partial\Omega \quad (26)$$

Portanto, a condição de contorno apropriada para o problema descrito neste capítulo é dada por

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = \sigma |T|^3 T - \int_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \sigma |\hat{T}(\mathbf{y})|^3 \hat{T}(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (27)$$

Verifica-se que para o caso de o corpo ser convexo, $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0$ e a equação (27) se reduz à equação (22).

Como discutido no capítulo anterior, a equação (27) indica que a energia trocada na fronteira do corpo com a sua vizinhança, pela radiação térmica, dá origem a uma transferência de energia por condução no interior do corpo. Ou seja, o acoplamento entre a transferência de calor por condução e a transferência de calor por radiação térmica ocorre no limite do corpo e representa a continuidade do fluxo normal de calor em qualquer ponto no limite. Essa condição de contorno é inerentemente não linear [26].

Portanto, a descrição matemática para o processo de transferência de energia do problema descrito neste capítulo é dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= \sigma |T|^3 T - \int_{y \in \partial\Omega} \sigma |\hat{T}(\mathbf{y})|^3 \hat{T}(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (28)$$

sendo a incógnita o campo de temperatura absoluta T .

O problema (28) é inerentemente não linear, conforme enfatizado. Alguns métodos de solução desse tipo de problema não linear, e que possibilitam uma simulação numérica, são encontrados na literatura, como, por exemplo, o método de Galerkin, Minimização de Funcionais e o Teorema de Ponto Fixo [30,31,32,33,34,35].

4. A PROVA MATEMÁTICA DO NOVO MÉTODO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA COM CONDIÇÃO DE CONTORNO NÃO LINEAR, CONSIDERANDO UM CORPO NÃO CONVEXO

Este capítulo tem por objetivo apresentar a prova matemática do novo método de solução dos problemas de engenharia que são caracterizados por uma equação diferencial parcial com condição de contorno não linear, devido ao processo da transferência de energia em um corpo não convexo.

4.1 Construção da sequência de funções

A seguinte sequência será considerada $[\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots]$, cujos elementos são obtidos da solução do seguinte problema

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \psi^{i+1}) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} \psi^{i+1} \cdot \mathbf{n} &= \alpha(\psi^{i+1} - \psi^i) + \sigma |\psi^i|^3 \psi^i - \int_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \sigma |\psi^i(\mathbf{y})|^3 \psi^i(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (29)$$

O problema (29) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi^{i+1}) + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} \psi^{i+1} \cdot \mathbf{n} &= \alpha \psi^{i+1} - \beta^i \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \beta^i &= \alpha \psi^i - \sigma |\psi^i|^3 \psi^i + \int_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \sigma |\psi^i(\mathbf{y})|^3 \psi^i(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (30)$$

Com

$$T \equiv \psi^\infty \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} \psi^i \quad \text{em } \Omega \quad (31)$$

4.2 A prova de que ψ^1 não é negativo

Uma vez que $\dot{q} \geq 0$, a equação diferencial parcial, dada pela equação (29), nos permite escrever

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \psi^{i+1}) \leq 0 \quad \text{em } \Omega \quad (32)$$

e, portanto, podemos definir o subconjunto não vazio Ω^* da seguinte forma

$$\partial\Omega^* \equiv \{\mathbf{x} \in \partial\Omega, \text{ de tal modo que } k \operatorname{grad} \psi^1 \cdot \mathbf{n} \leq 0\} \quad (33)$$

Assim, fica garantido que

$$\inf \psi^1_{\partial\Omega^*} = \inf \psi^1_{\partial\Omega} = \inf \psi^1_{\Omega} \quad (34)$$

Portanto, levando em consideração que $\psi^0 \equiv 0$,

$$-k \text{ grad } \psi^1 \cdot \mathbf{n} = \alpha \psi^1 \text{ sobre } \partial\Omega \Rightarrow \alpha \psi^1 \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega^* \quad (35)$$

Uma vez que $\alpha > 0$, concluímos que $\psi^1 \geq 0$ em todos os casos.

4.3 A prova de que a sequência não é decrescente, desde que α seja suficientemente grande

Levando em consideração que k e \dot{q} não dependem da incógnita do problema, tem-se

$$\begin{aligned} \text{div}[k \text{ grad}(\psi^{i+1} - \psi^i)] &= 0 \text{ em } \Omega \\ -k \text{ grad}(\psi^{i+1} - \psi^i) \cdot \mathbf{n} &= \alpha(\psi^{i+1} - \psi^i) - (\beta^i - \beta^{i-1}) \text{ sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (36)$$

O subconjunto $\partial\Omega_{i+1}^-$ é definido por

$$\partial\Omega_{i+1}^- \equiv \{\mathbf{x} \in \partial\Omega, \text{ de tal modo que } k \text{ grad}(\psi^{i+1} - \psi^i) \cdot \mathbf{n} \leq 0\} \quad (37)$$

É permitido concluir que

$$\inf_{\partial\Omega_{i+1}^-} (\psi^{i+1} - \psi^i) = \inf_{\partial\Omega} (\psi^{i+1} - \psi^i) = \inf_{\Omega} (\psi^{i+1} - \psi^i) \quad (38)$$

A partir da condição de contorno, em $\partial\Omega_{i+1}^-$, tem-se

$$\alpha(\psi^{i+1} - \psi^i) \geq (\beta^i - \beta^{i-1}) \text{ sobre } \partial\Omega_{i+1}^- \quad (39)$$

Permitindo concluir o seguinte

$$\begin{aligned} \alpha(\psi^{i+1} - \psi^i) &\geq \alpha(\psi^i - \psi^{i-1}) - \sigma \left(|\psi^i|^3 \psi^i - |\psi^{i-1}|^3 \psi^{i-1} \right) \\ &+ \int_{y \in \partial\Omega} \sigma \left[|\psi^i(y)|^3 \psi^i(y) - |\psi^{i-1}(y)|^3 \psi^{i-1}(y) \right] K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS \quad \text{sobre } \partial\Omega_{i+1}^- \end{aligned} \quad (40)$$

Levando em consideração que $\psi^i \geq 0$ em todos os casos e que $\psi^0 \equiv 0$, tem-se o seguinte

$$\alpha(\psi^2 - \psi^1) \geq \alpha\psi^i - \sigma|\psi^1|^3\psi^1 + \int_{y \in \partial\Omega} \sigma|\psi^1|^3\psi^1 K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS \quad \text{sobre } \partial\Omega_2^- \quad (41)$$

Portanto, como o segundo membro é não negativo em $\partial\Omega$, fica garantido que $\psi^2 \geq \psi^1$ em todos os casos. Para garantir essa não negatividade, basta escolher α de tal modo que

$$\alpha \geq \sup_{\partial\Omega} \sigma|\psi^1|^3 \quad (42)$$

Repetindo o procedimento acima, conclui-se o seguinte

$$\dots \geq \psi^{i+1} \geq \psi^i \geq \dots \geq \psi^2 \geq \psi^1 \geq \psi^0 \equiv 0 \quad \text{sobre } \Omega \quad (43)$$

Fornecendo, para qualquer $i \geq 0$, o seguinte

$$\begin{aligned} \alpha(\psi^{i+1} - \psi^i) &\geq \alpha(\psi^i - \psi^{i-1}) - \sigma(|\psi^i|^3\psi^i - |\psi^{i-1}|^3\psi^{i-1}) \\ &+ \int_{y \in \partial\Omega} \sigma(|\psi^i(\mathbf{y})|^3\psi^i(\mathbf{y}) - |\psi^{i-1}(\mathbf{y})|^3\psi^{i-1}(\mathbf{y})) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS \quad \text{sobre } \partial\Omega_{i+1}^- \end{aligned} \quad (44)$$

Uma condição suficiente para garantir a desigualdade acima é

$$\alpha(\psi^{i+1} - \psi^i) \geq \alpha(\psi^i - \psi^{i-1}) - \sigma(|\psi^i|^3\psi^i - |\psi^{i-1}|^3\psi^{i-1}) \quad \text{sobre } \partial\Omega_{i+1}^- \quad (45)$$

Então, qualquer constante positiva tal que

$$\alpha(\psi^i - \psi^{i-1}) \geq \sigma(|\psi^i|^3\psi^i - |\psi^{i-1}|^3\psi^{i-1}) \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (46)$$

garante uma sequência não decrescente, desde que

$$\left[\frac{d}{du} (|u|^3 u) \right]_{u=u_{i+1}} \geq \frac{|u_{i+1}|^3 u_{i+1} - |u_i|^3 u_i}{u_{i+1} - u_i}, \quad \text{para } \partial\Omega, \quad u_{i+1} > u_i \quad (47)$$

basta ter

$$\alpha \geq 4 \sup_{\Omega} |u_{i+1}|^3 \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \dots \quad (48)$$

Com o intuito de estabelecer um valor suficientemente grande para α , deve-se obter um limite superior para a sequência $[\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots]$.

É possível realizar o cálculo da estimativa do valor do α a partir do qual se observa a convergência da sequência analisando a estimativa da temperatura máxima do problema a ser resolvido. O cálculo da estimativa da temperatura máxima de um dado problema de transferência de calor pode ser verificado na referência [8]. Logo, o valor estimado do α a partir do qual se observa a convergência depende das características do problema a ser resolvido, bem como os parâmetros utilizados como, por exemplo, a condutividade térmica e a geração interna de energia. É importante ressaltar que é possível obter convergência com o valor do α menor do que o calculado a partir da estimativa da temperatura máxima do problema a ser resolvido.

O processo matemático para obter o valor estimado do α supracitado pode ser muito custoso. Uma vez que, a princípio, o método apresentado neste capítulo resolve problemas no âmbito da engenharia mecânica, a temperatura máxima possui um limite conhecido. Pode ser mais vantajoso realizar as simulações computacionais buscando o valor do α no qual se observa a convergência pela tentativa e erro.

A ideia física que parece estar presente no método representado pelo sistema (30) consiste em obter o campo de temperatura na iteração atual i considerando a energia térmica radiante incidente avaliada com o campo de temperatura na iteração anterior $i - 1$.

Portanto, ficou provado que o novo método (30) lineariza a condição de contorno do problema (29) de modo a permitir uma formulação numérica empregando, por exemplo, a técnica das diferenças finitas e métodos iterativos para a resolução do sistema de equações.

5. A SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO NOVO MÉTODO DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UM CORPO NÃO CONVEXO

Este capítulo tem por objetivo apresentar os resultados das simulações computacionais obtidas utilizando o novo método (30), desenvolvido nesta tese, para resolver o problema (28). Para isso, considera-se o problema da transferência de calor, em regime permanente, em uma placa, homogênea, considerada um corpo negro, não convexo, opaca, em repouso e com condutividade térmica constante. Considera-se que o meio no qual a placa está contida é não participante, portanto, não há convecção. Além disso, é admitido que a placa possui uma conhecida geração interna de energia constante \dot{q} correspondendo, por exemplo, a um microchip onde ocorre dissipação de calor devido à passagem de uma corrente elétrica. A região ocupada pela placa é representada por Ω , e sua fronteira é representada por $\partial\Omega$. Esse problema é ilustrado na figura 5, abaixo.

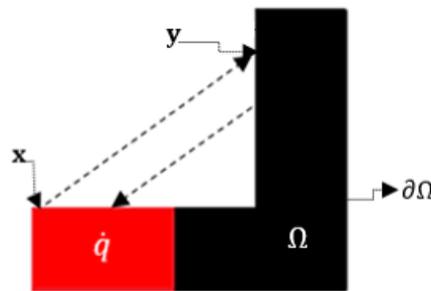


Figura 5. Placa rígida homogênea, não convexa, considerada um corpo negro que ocupa uma região plana Ω e fronteiras $\partial\Omega$. A região horizontal em vermelho representa a geração interna de energia \dot{q} .

Esse problema é descrito matematicamente pela equação (28), repetida a seguir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= \sigma |T|^3 T - \int_{y \in \partial\Omega} \sigma |\hat{T}(\mathbf{y})|^3 \hat{T}(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (49)$$

Foi provado no capítulo anterior que o problema (49) pode ser resolvido empregando o método (30), considerando (31), repetidas a seguir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi^{i+1}) + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} \psi^{i+1} \cdot \mathbf{n} &= \alpha \psi^{i+1} - \beta^i \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \beta^i &= \alpha \psi^i - \sigma |\psi^i|^3 \psi^i + \int_{y \in \partial\Omega} \sigma |\psi^i(\mathbf{y})|^3 \psi^i(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (50)$$

Com

$$T \equiv \psi^\infty \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} \psi^i \quad \text{em } \Omega \quad (51)$$

onde é admitido que $\beta^0 \equiv 0$ sobre $\partial\Omega_i$ para todos os i . A existência e a unicidade do problema (49) podem ser verificadas na referência [11].

O fator de forma $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, presente na condição de contorno do problema (49) e no seu método de solução representado pelo sistema (50), foi definido no capítulo 3 desta tese. Assim, considerando o exposto no capítulo 3 deste trabalho, o fator de forma do corpo mostrado na figura 5, que será utilizado para resolver o problema (49), é obtido admitindo o esquema mostrado na figura 6 e os passos matemáticos a seguir

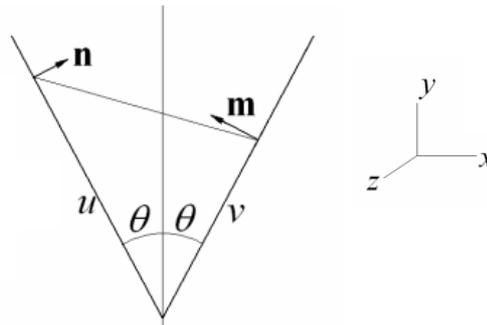


Figura 6. Esquema genérico para obtenção do fator de forma relativo à troca de radiação de partes de um mesmo corpo não convexo.

Pode-se escrever o seguinte

$$\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad (52)$$

e

$$\mathbf{m} = -\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad (53)$$

Tem-se que

$$\mathbf{X} = u(-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) + z_1 \mathbf{k} \quad (54)$$

e

$$\mathbf{Y} = v(\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) + z_2 \mathbf{k} \quad (55)$$

Logo, pode-se escrever o seguinte

$$K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{m}}{\pi \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^4} = -\frac{(\mathbf{X} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{X} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{m})}{\pi \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^4} \quad (56)$$

Aplicando as equações (52), (53), (54) e (55) na equação (56), tem-se que

$$K(u, v) = \frac{uv \sin^2(2\theta)}{\pi[(\sin^2 \theta (u + v)^2 + \cos^2 \theta (u - v)^2 + (z_1 - z_2)^2)^2]} \quad (57)$$

Após algumas manipulações matemáticas, tem-se o seguinte

$$K(u, v) = \frac{uv \sin^2(2\theta)}{\pi[(u - v)^2 + 4uv \sin^2 \theta + (z_1 - z_2)^2]^2} \quad (58)$$

Note que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{uv \sin^2(2\theta)}{\pi[(u - v)^2 + 4uv \sin^2 \theta + (z_1 - z_2)^2]^2} d(z_1 - z_2) = \frac{uv \sin^2(2\theta)}{2[(u - v)^2 + 4uv \sin^2 \theta]^{3/2}} \quad (59)$$

Considere o corpo rígido não convexo mostrado na figura 7, abaixo.

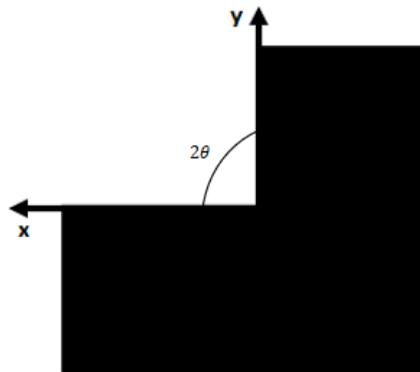


Figura 7. Placa rígida não-convexa, infinita na direção ortogonal à figura.

Para $\theta = \pi/4$, e tomando $u = x$ e $v = y$, tem-se que

$$K(x, y) = \frac{xy}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (60)$$

O fator de forma, mostrado na equação (60), é substituído nas equações (49) e (50).

5.1 Formulação numérica

Para resolver o problema (49) basta utilizar o método descrito no sistema (50), considerando (51). Para a obtenção, como boa aproximação, do campo de temperaturas foi aplicada a técnica numérica das diferenças finitas ao método (50), e posteriormente foi utilizado o método iterativo de Gauss-Seidel para a solução do sistema de equações lineares oriundo da discretização do domínio de solução.

Para ilustrar o funcionamento do método das diferenças finitas, será utilizada uma equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem do tipo estacionária. Essa equação é denominada equação de Poisson, que corresponde ao problema (49) e ao seu método de solução representado pelo sistema (50).

O método numérico das diferenças finitas é uma opção para obter a aproximação da solução de uma equação diferencial parcial [27]. A ideia central desse método é modificar a resolução de uma equação diferencial, transformando-a em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças. O método opera discretizando o domínio e trocando as derivadas presentes na equação diferencial por aproximações usando os valores numéricos da função.

Considere a equação de Poisson, dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) \quad \text{em } \Omega \quad (61)$$

$$u(0, y) = 0; u(N, y) = 0; u(x, 0) = 0; u(x, M) = 1 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

As condições de contorno apresentadas no problema (61) são chamadas de condições de Dirichlet [27]. Esse problema é ilustrado na figura 8, abaixo.

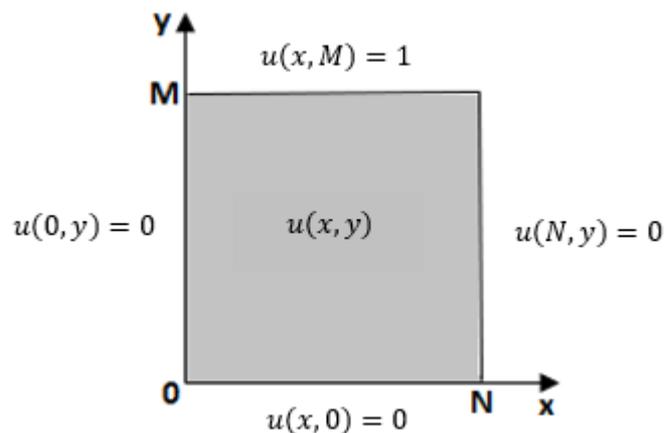


Figura 8. Sistema bidimensional com dimensões M x N com contornos de valores especificados.

Para a aplicação do método das diferenças finitas é necessário dividir o domínio de solução em um conjunto de pontos. O domínio de solução é dividido em N_i elementos com tamanho Δx na direção x e em M_j elementos com tamanho Δy na direção y , como indicado na figura 9 a seguir.

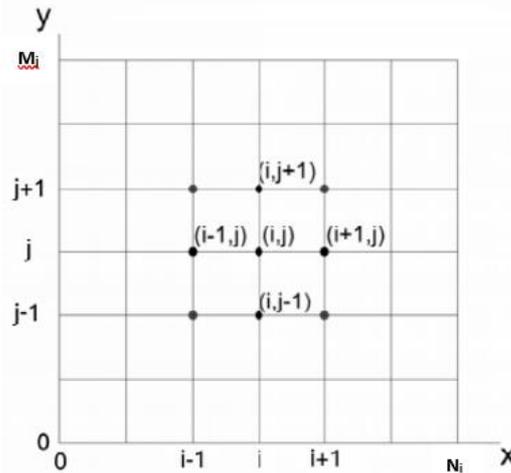


Figura 9. Domínio de solução discretizado.

A divisão do domínio, conforme a figura 9, define a malha numérica, de modo que a solução é indicada por $u[i, j]$, sendo o índice i referente ao eixo x e o índice j referente ao eixo y . Assim, o domínio de solução é discretizado, ou seja, transforma-se uma função contínua em pontos discretos. A discretização de uma equação diferencial parcial do tipo estacionária fornece um sistema de equações que pode ser resolvido por meio de métodos iterativos.

Considerando a definição da derivada de segunda ordem e utilizando um esquema central para a aproximação nas duas direções i e j , as derivadas parciais da equação (61) podem ser escritas, de forma aproximada, da seguinte maneira

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{u[i-1, j] - 2u[i, j] + u[i+1, j]}{\Delta x^2} \quad (62)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cong \frac{u[i, j-1] - 2u[i, j] + u[i, j+1]}{\Delta y^2} \quad (63)$$

Substituindo as equações (62) e (63) na equação (61), obtém-se

$$\frac{u[i-1, j] - 2u[i, j] + u[i+1, j]}{\Delta x^2} + \frac{u[i, j-1] - 2u[i, j] + u[i, j+1]}{\Delta y^2} \cong -f(x_i, y_j) \quad (64)$$

Ou, para fins de praticidade, a equação (64) pode ser representada com a seguinte notação

$$\frac{u_{i-1, j} - 2u_{i, j} + u_{i+1, j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i, j-1} - 2u_{i, j} + u_{i, j+1}}{\Delta y^2} \cong -f_{i, j} \quad (65)$$

A equação (65) pode ser utilizada para determinar a solução em um dado ponto (interno) do domínio com base nos valores dos pontos vizinhos. Além disso, não é possível utilizar a equação (65) nas fronteiras, onde algum dos pontos vizinhos não é definido. Logo, a equação (65) é útil para os valores i diferente de 0 ou N_i e para qualquer valor de j diferente de 0 ou M_j .

Para a solução do sistema de equações lineares, cada ponto da malha deve ter uma equação linearmente independente associada. A equação (65) pode ser utilizada para resolver os pontos internos da malha. Para resolver as equações associadas aos pontos da fronteira é permitido utilizar as condições de contorno, definidas no problema (61). A utilização de índices partindo de 0 e indo até N_i ou M_j causa problema nos vértices da malha por causa da sobreposição de condições de contorno. Esse problema é contornado se for considerado que a malha numérica possui um número de elementos suficientemente grande para a escolha não ter uma importância tão significativa. Uma maneira de contornar o problema da sobreposição de condições de contorno nos vértices é adotar o procedimento a seguir

$$u(0, y) = 0 \rightarrow u[0, j] = 0 \text{ onde } j = 0 \text{ até } N_{j-1} \quad (66)$$

$$u(N, y) = 0 \rightarrow u[N_i, j] = 0 \text{ onde } j = 0 \text{ até } N_{j-1} \quad (67)$$

$$u(x, 0) = 0 \rightarrow u[i, 0] = 0 \text{ onde } i = 1 \text{ até } N_{i-1} \quad (68)$$

Na equação (67), foram especificados valores a partir de $i = 1$ até $i = N_i - 1$, pois os vértices já haviam sido definidos nas demais condições. Assim, a malha como um todo, isto é, todos os pontos da malha ficam com uma equação associada.

Com a definição da malha, ou seja, uma vez estabelecida a discretização do domínio que se deseja obter a solução, e, deste modo, definir uma equação para cada nó da malha, a distribuição de temperaturas pode ser determinada. O problema se reduz à resolução de um sistema de equações algébricas lineares. A solução desse sistema de equações oferece uma aproximação da solução da equação diferencial parcial. O método iterativo de Gauss-Seidel é satisfatório para resolver o sistema de equações lineares obtido por meio da discretização do domínio de solução desejado.

Pode-se escrever o sistema de equações lineares $Ax = b$ na seguinte forma [27]

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j = b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j = b_n \end{cases} \quad (69)$$

se $a_{ii} \neq 0$ para todo i , cada x_i pode ser isolado na i -ésima equação e escrito na forma

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right) \quad (70)$$

Isso sugere definir um método iterativo (Gauss-Seidel) da seguinte forma [27]

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right) \quad (71)$$

O índice k , na equação (71), refere-se ao nível de iteração.

Considerando a forma discretizada do problema (61), apresentada na equação (65), e fixando $\Delta x = \Delta y = h$, portanto, admitindo o domínio de solução um quadrado, a equação para cada ponto da malha é dada por

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} (u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k + h^2 f_{i,j}) \quad (72)$$

5.2 Apresentação e análise dos resultados

O método descrito pelo sistema (50) que resolve o problema (49), a técnica das diferenças finitas e o método iterativo de Gauss-Seidel foram implementados no software *Sagemath* para a realização das simulações computacionais. Os parâmetros utilizados, as tolerâncias impostas e o código implementado no software podem ser verificados no apêndice **A** deste trabalho.

Com o intuito de verificar se o método descrito pelo sistema (50) oferece resultados fisicamente consistentes, foram realizadas simulações considerando os efeitos da não convexidade da placa e, portanto, considerando que a placa se comporta como fonte de radiação térmica de si mesma, e também foram realizadas simulações desprezando tais efeitos. Assim, torna-se possível comparar o campo de temperaturas considerando os efeitos da não convexidade da placa com o campo de temperaturas sem tais efeitos. O comportamento físico esperado do campo de temperaturas considerando a não convexidade da placa é que seja maior, em média, em relação ao campo de temperaturas desprezando os efeitos da não convexidade da placa [26].

As simulações considerando a não convexidade e as simulações desprezando a não convexidade da placa foram realizadas com valores decrescentes de α , contido no método de resolução (50), até que a simulação apresentasse resultados fisicamente inconsistentes, isto é, até a verificação da divergência dos cálculos.

As simulações previstas foram realizadas em três ciclos. No primeiro ciclo as simulações foram realizadas com malha 40×40 . No segundo ciclo de simulações a malha implementada foi de 80×80 . No terceiro ciclo de simulações a malha implementada foi de 120×120 . Em cada ciclo foram obtidos o campo de temperaturas da placa completa, tal como ilustra a figura 5, bem como o campo de temperaturas somente do lado vertical da placa, onde não há geração de energia interna, com o intuito de melhor visualizar os efeitos da não convexidade da placa.

As seções 5.3, 5.4 e 5.5 apresentam os perfis dos campos de temperaturas do lado vertical da placa, onde não há geração de energia interna e os campos de temperaturas da placa inteira. Além disso, essas seções apresentam os gráficos das temperaturas, todas em função dos ψ^i , do ponto médio do lado vertical da placa e do somatório do campo de temperaturas para cada ψ^i . Essas simulações foram realizadas com e sem os efeitos da não convexidade da placa. Ao final de cada ciclo de simulações há comentários sobre os resultados obtidos.

5.3 Primeiro ciclo de simulações: malha 40 x 40.

As figuras de 10 a 23 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 4000$.

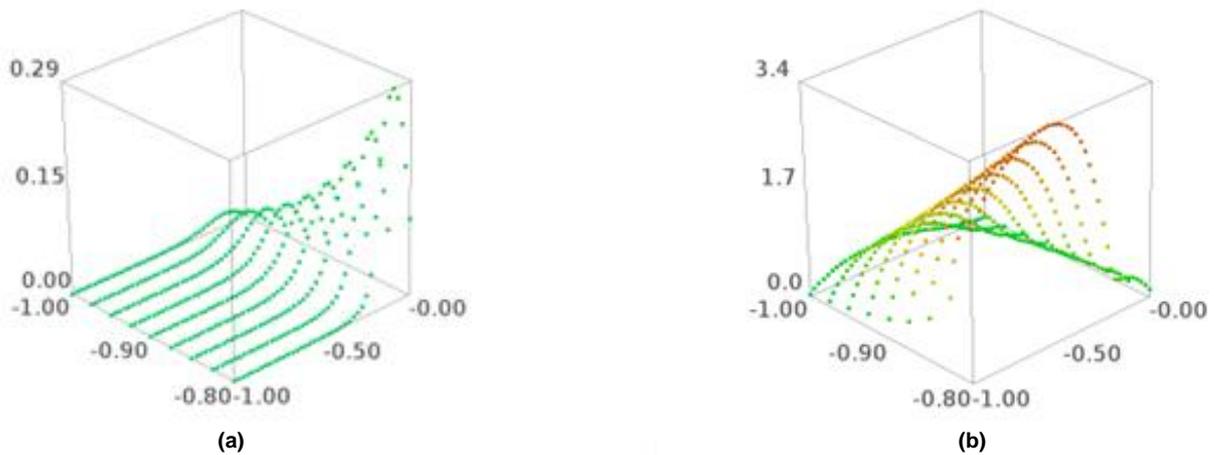


Figura 10. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

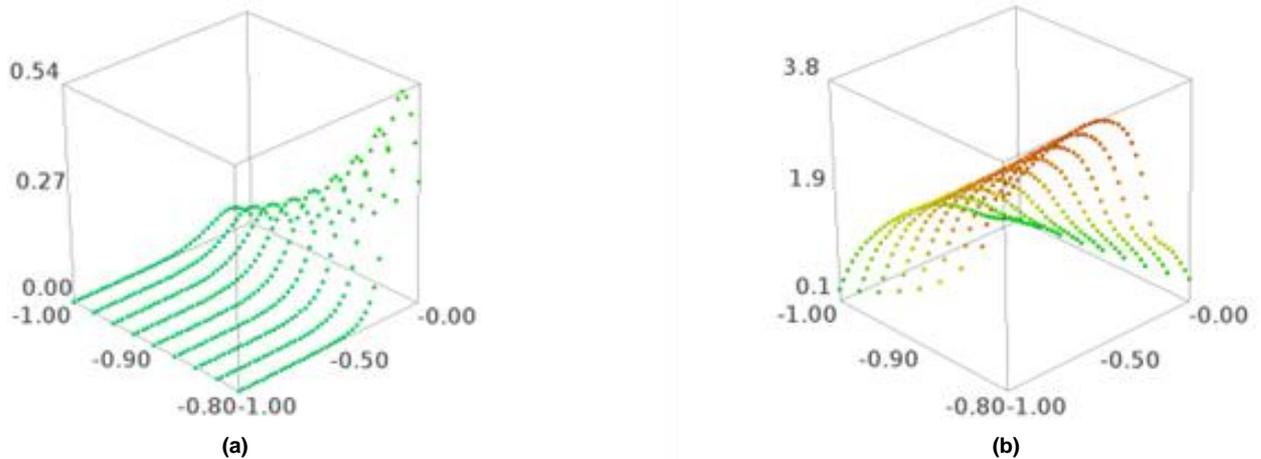


Figura 11. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

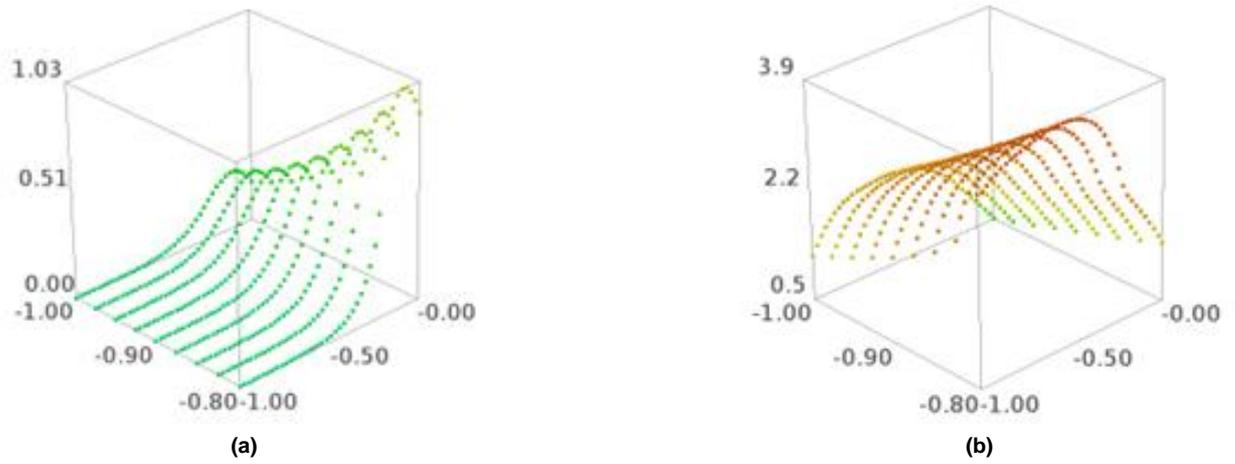


Figura 12. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

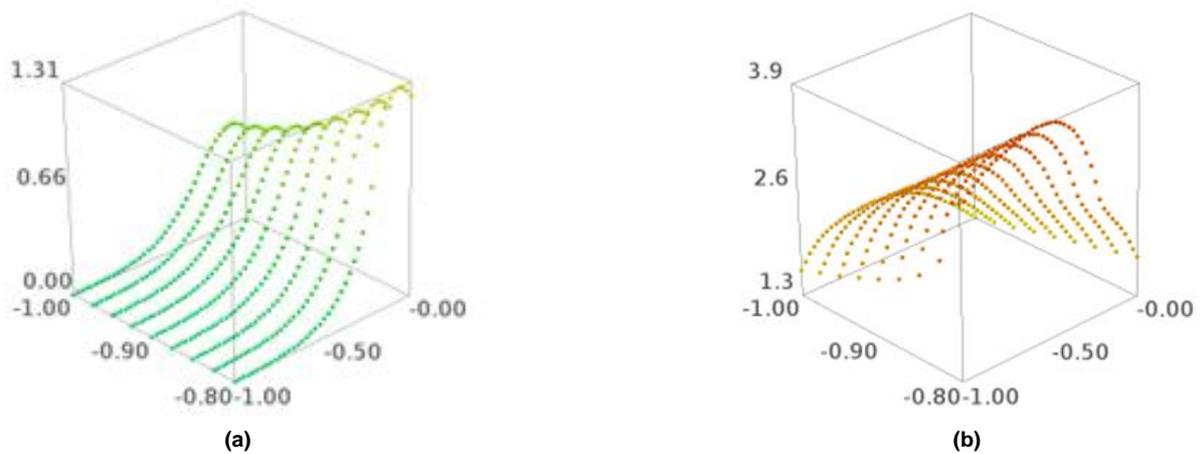


Figura 13. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

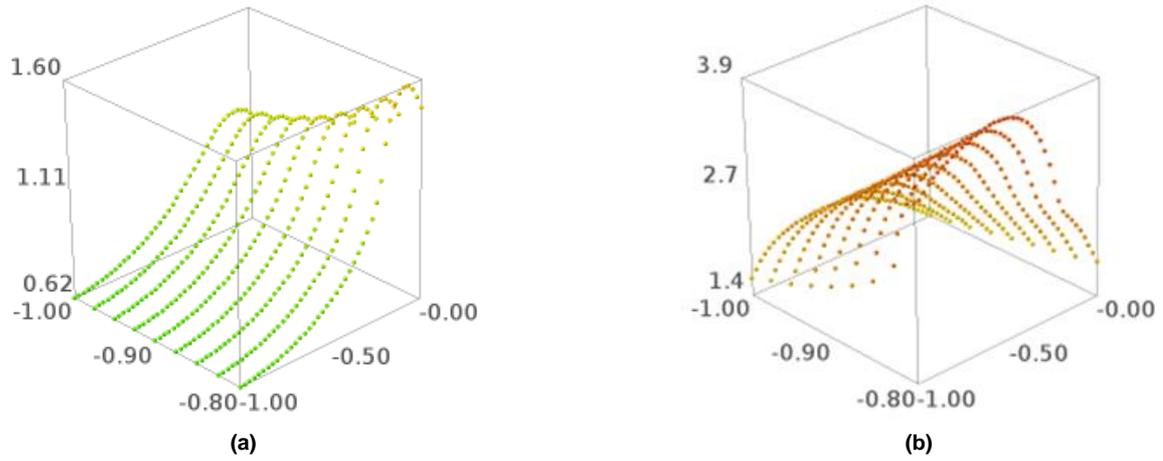


Figura 14. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{12000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2000} , com os efeitos da não convexidade.

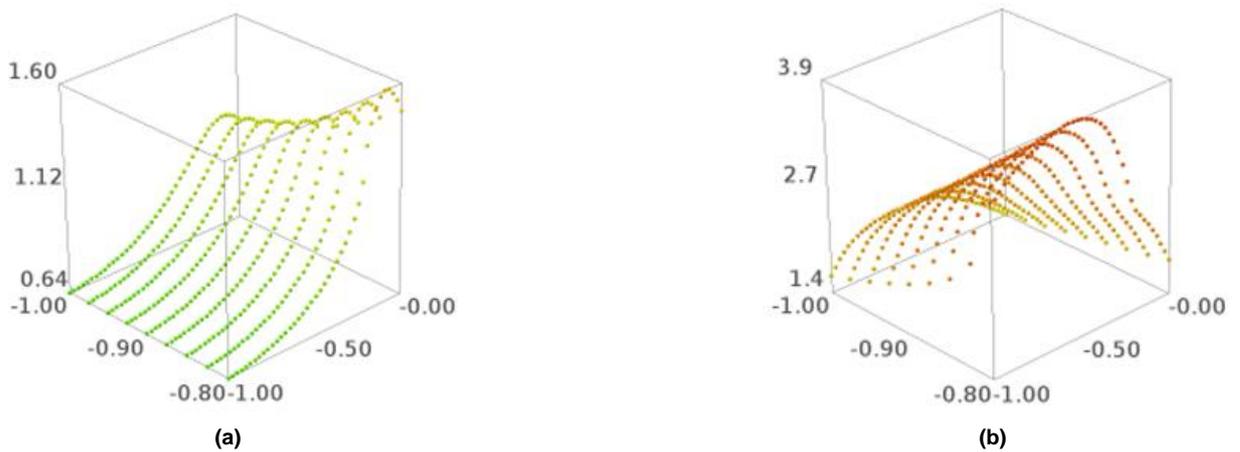


Figura 15. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{18076} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2378} , com os efeitos da não convexidade.

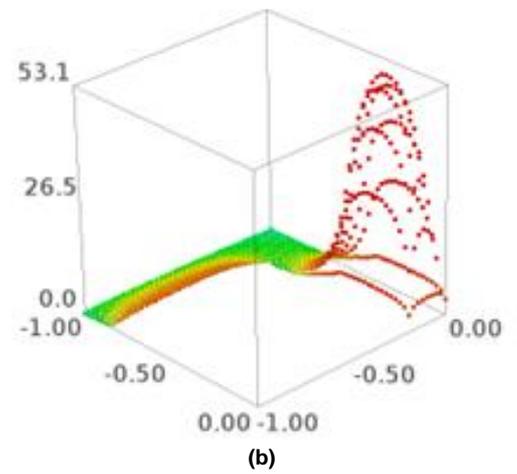
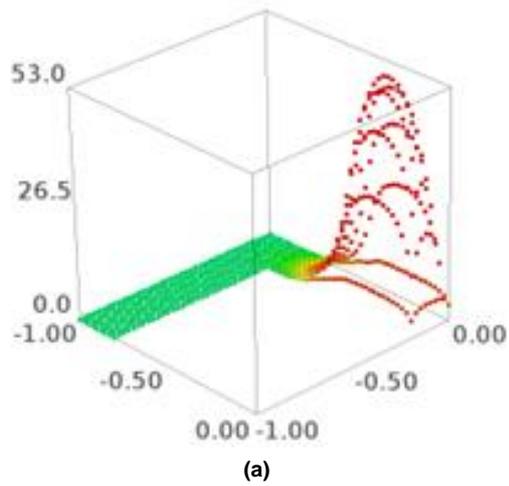


Figura 16. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

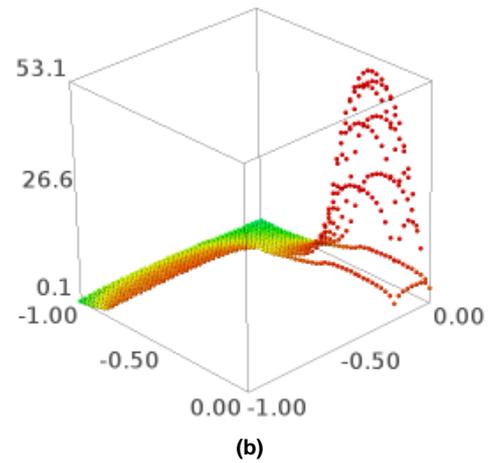
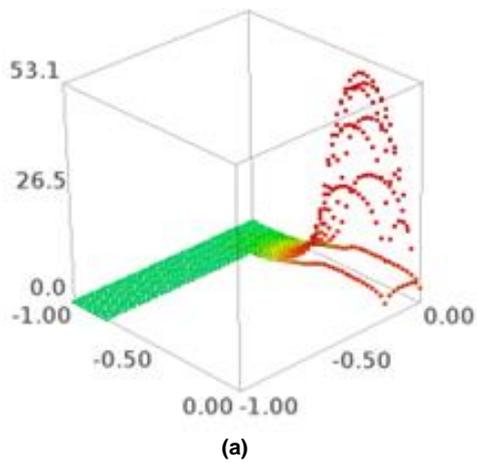


Figura 17. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

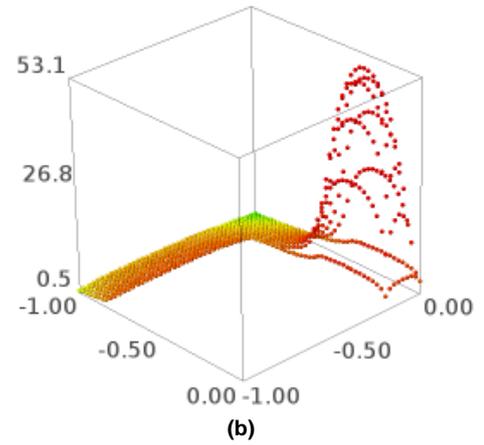
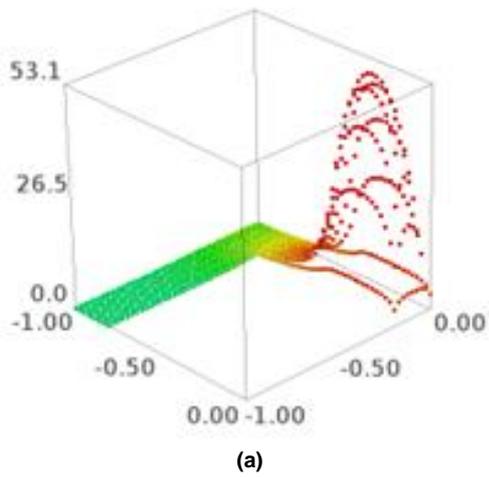


Figura 18. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

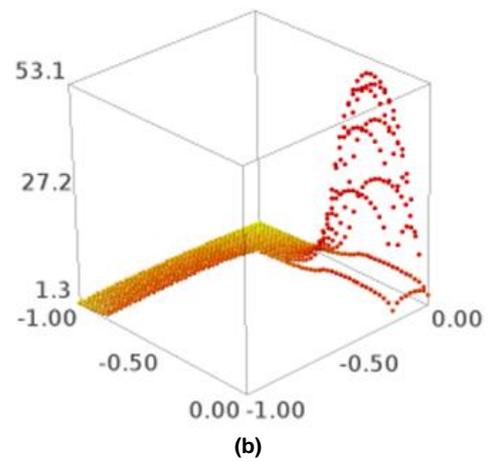
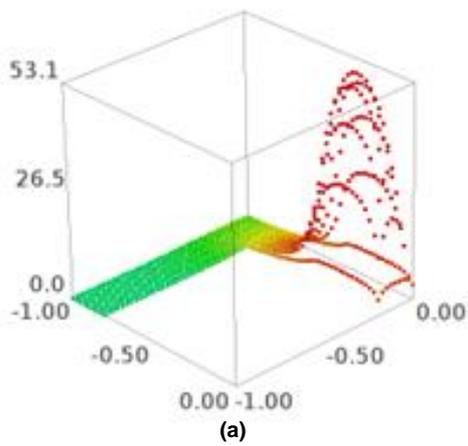


Figura 19. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .

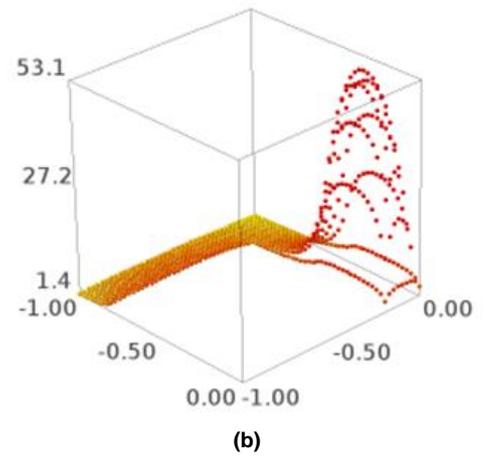
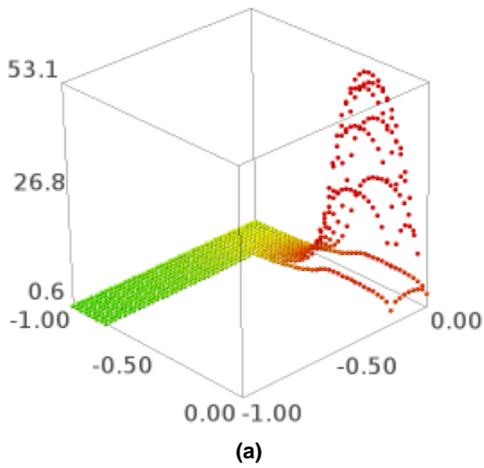


Figura 20. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{12000} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{2000} .

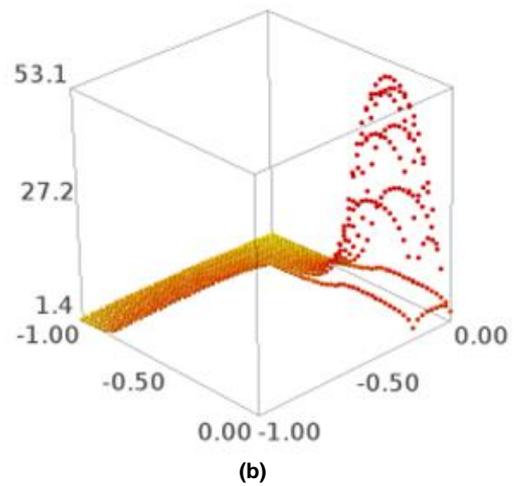
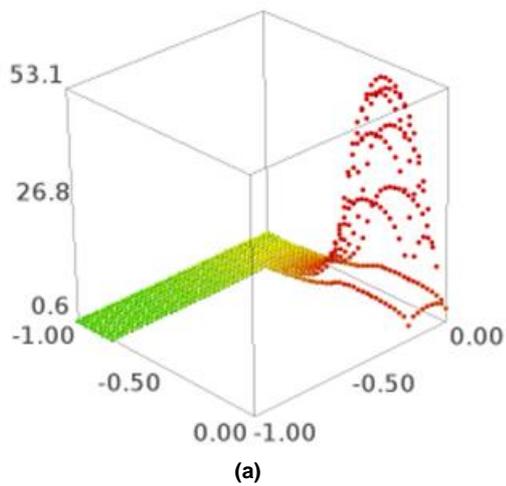


Figura 21. (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{18076} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{2378} .

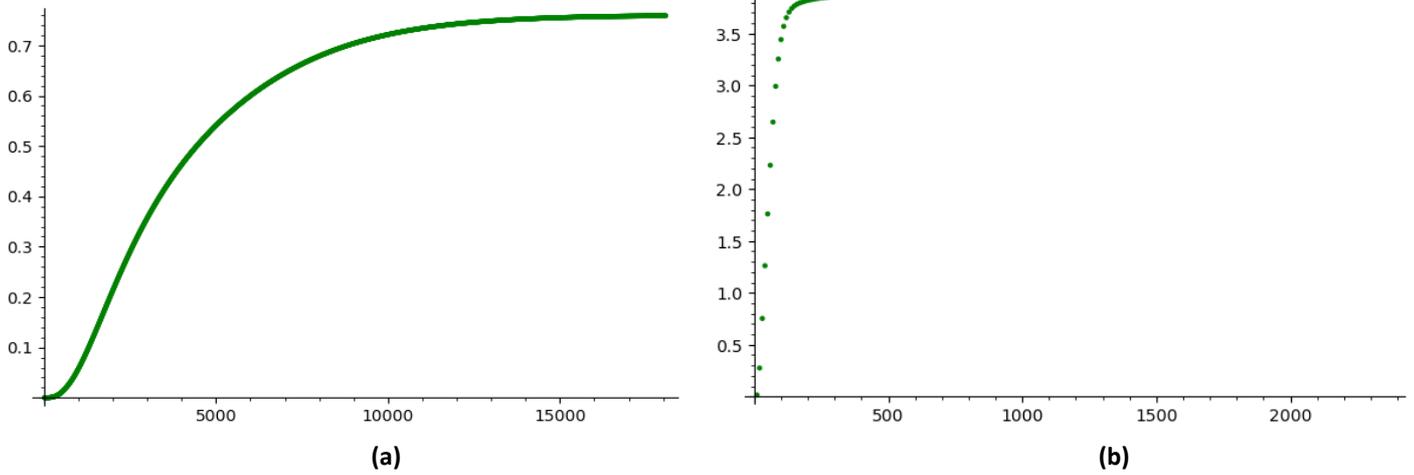


Figura 22. (a) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

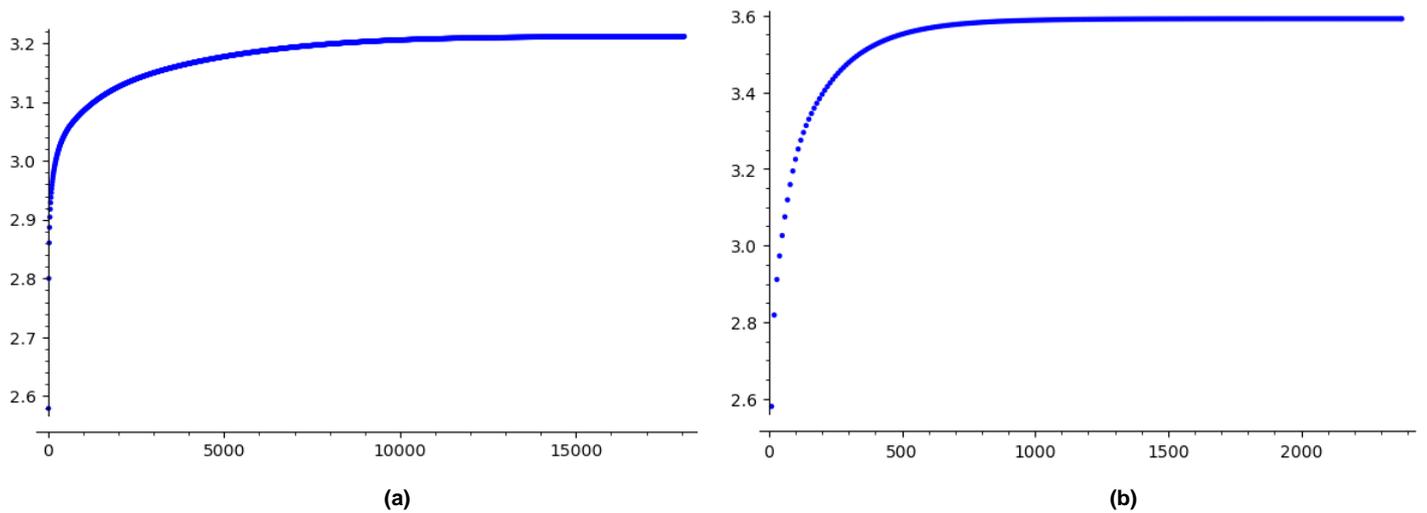


Figura 23. (a) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 24 a 35 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 3000$.

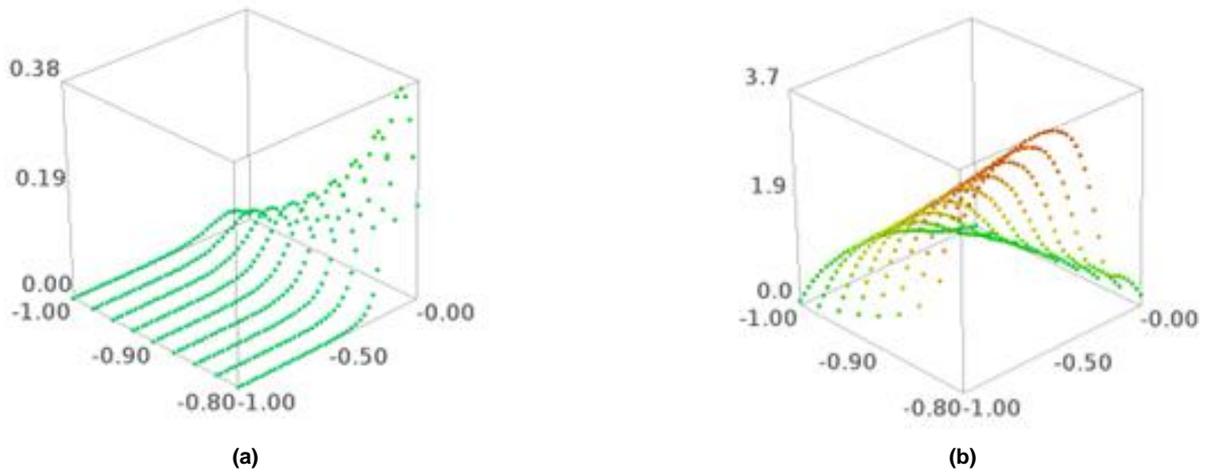


Figura 24 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

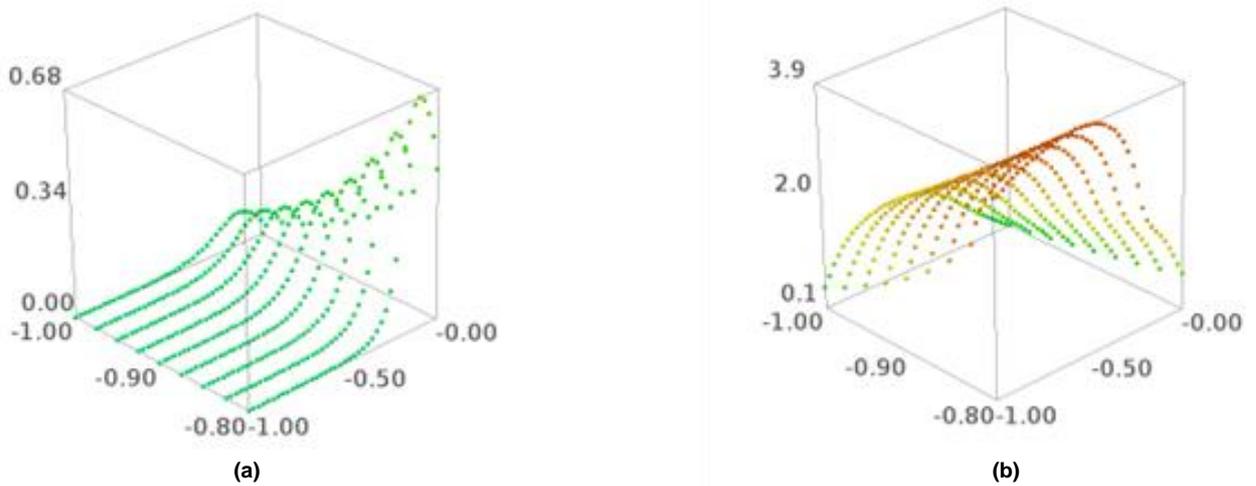


Figura 25 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

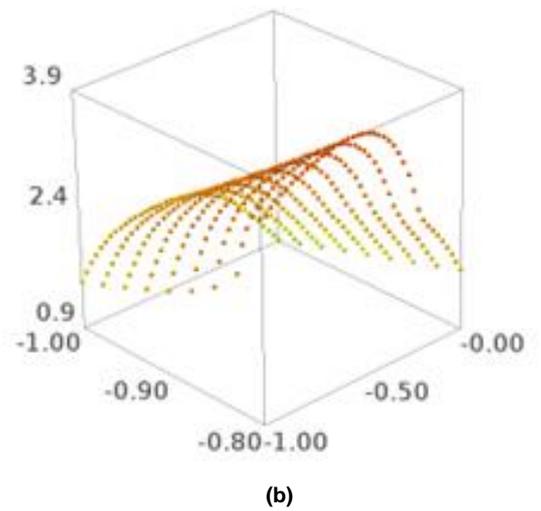
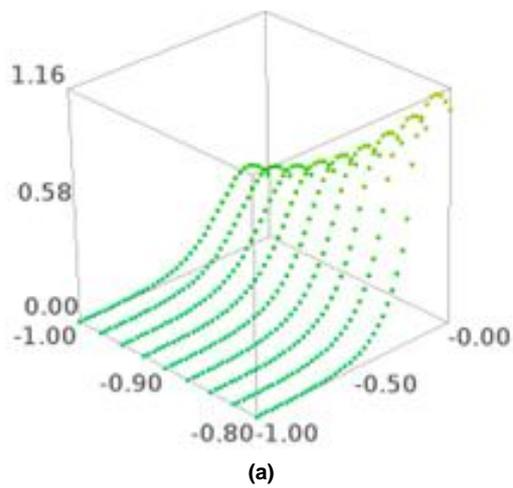


Figura 26 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

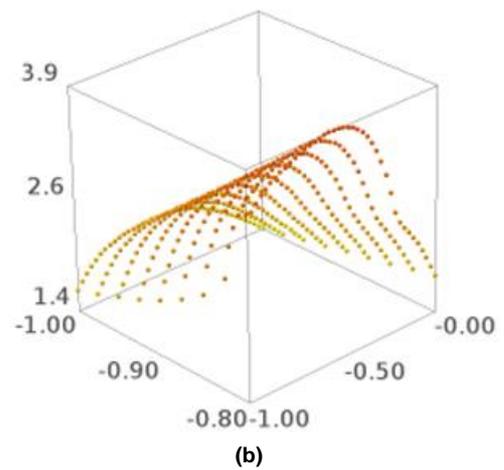
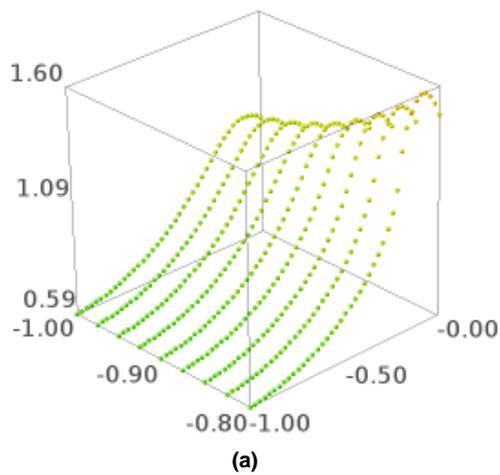
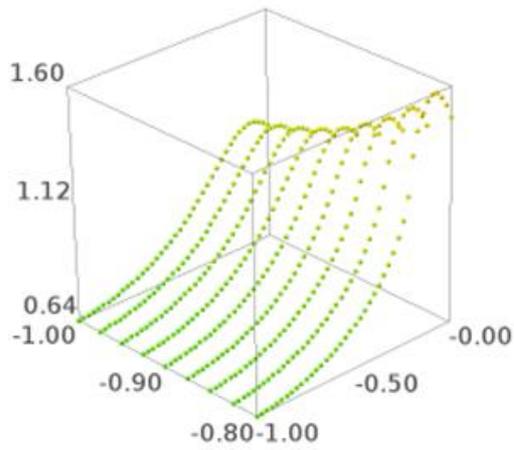
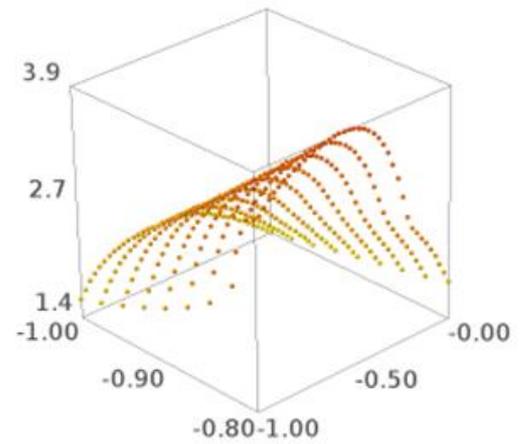


Figura 27 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{8000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

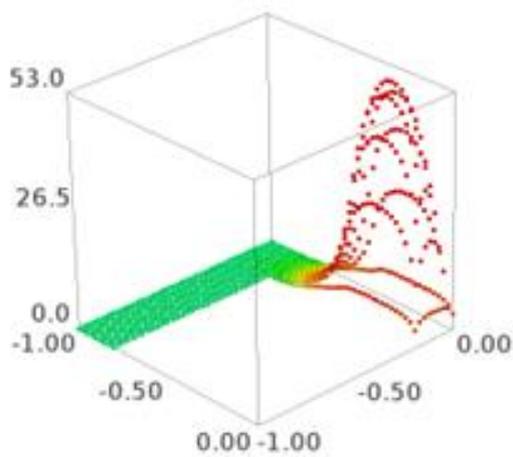


(a)

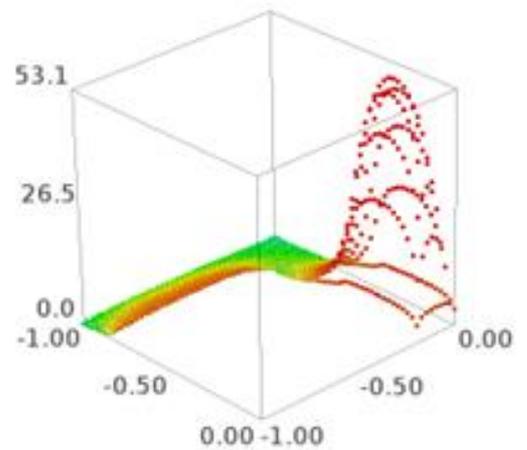


(b)

Figura 28 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{14494} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1851} , com os efeitos da não convexidade.



(a)



(b)

Figura 29 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

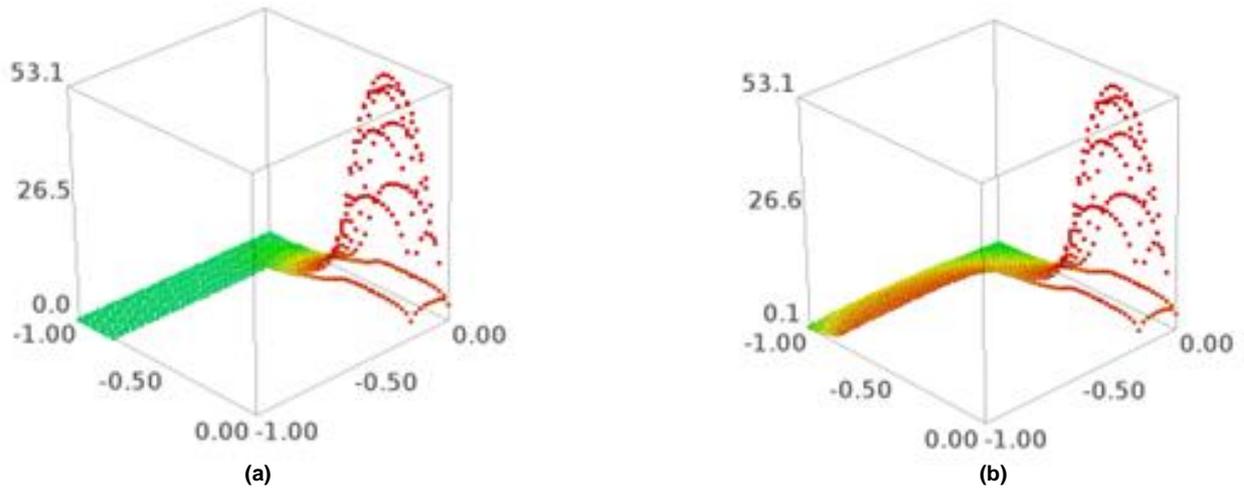


Figura 30 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

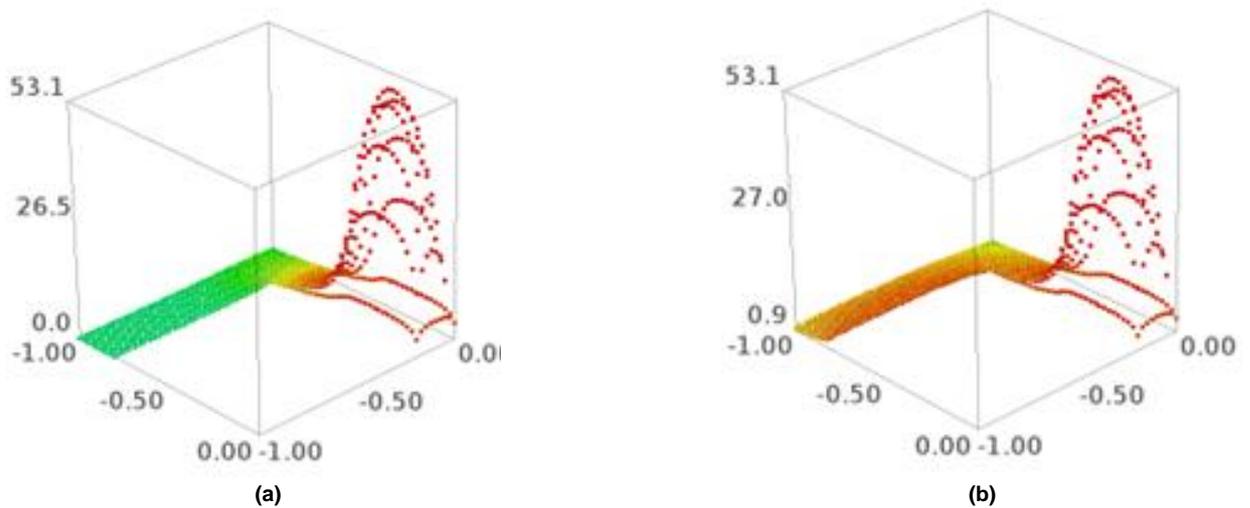


Figura 31 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

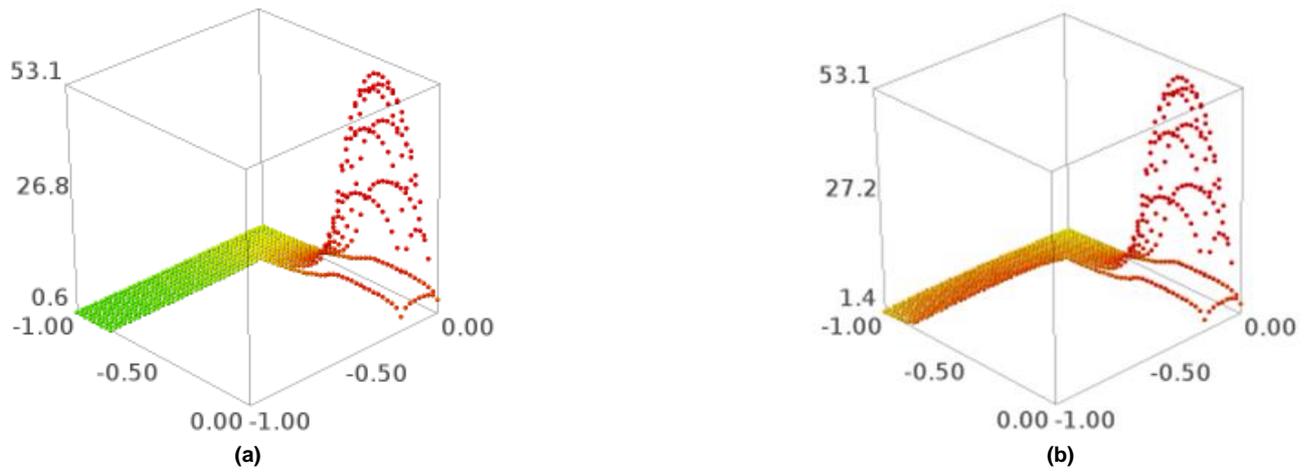


Figura 32 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{8000} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .

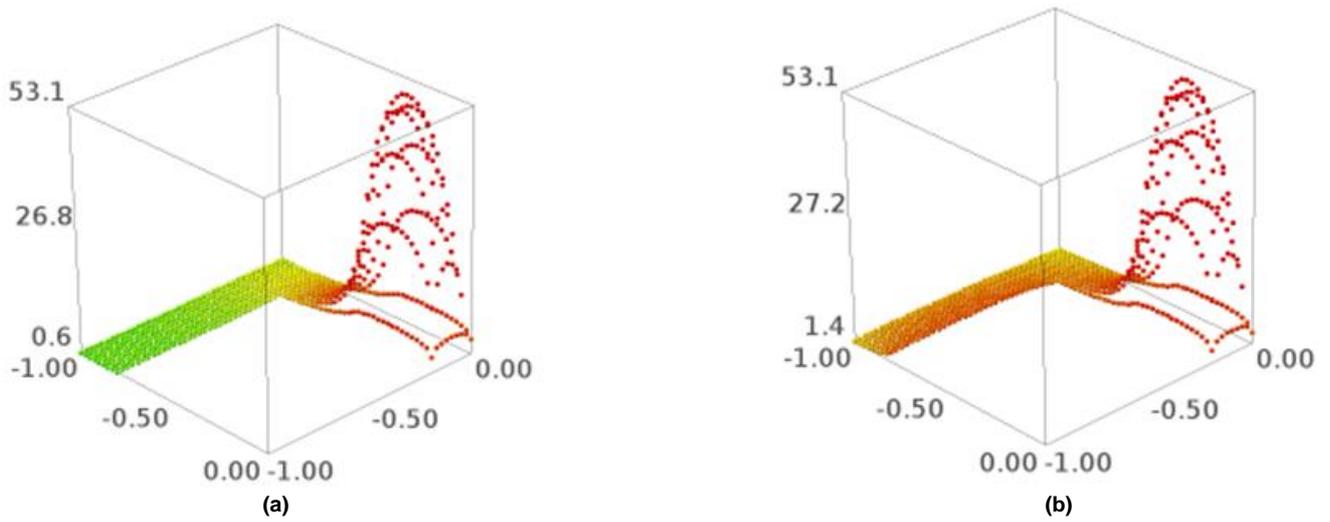


Figura 33 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{14494} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1851} .

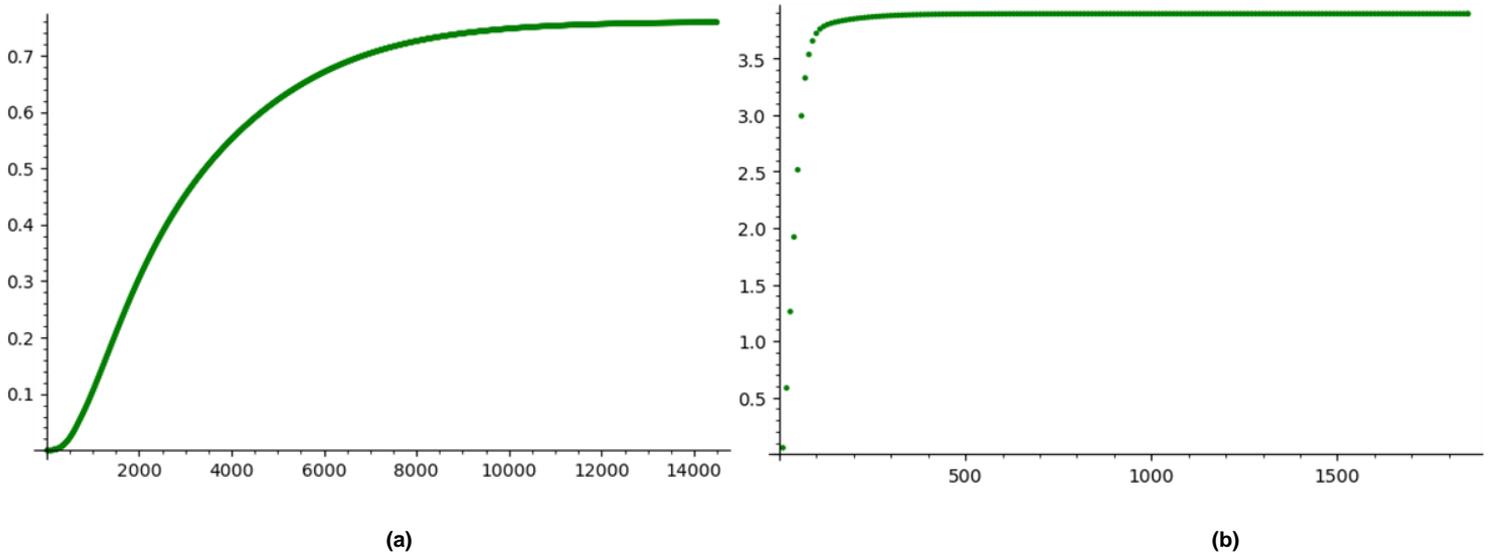


Figura 34 (a) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

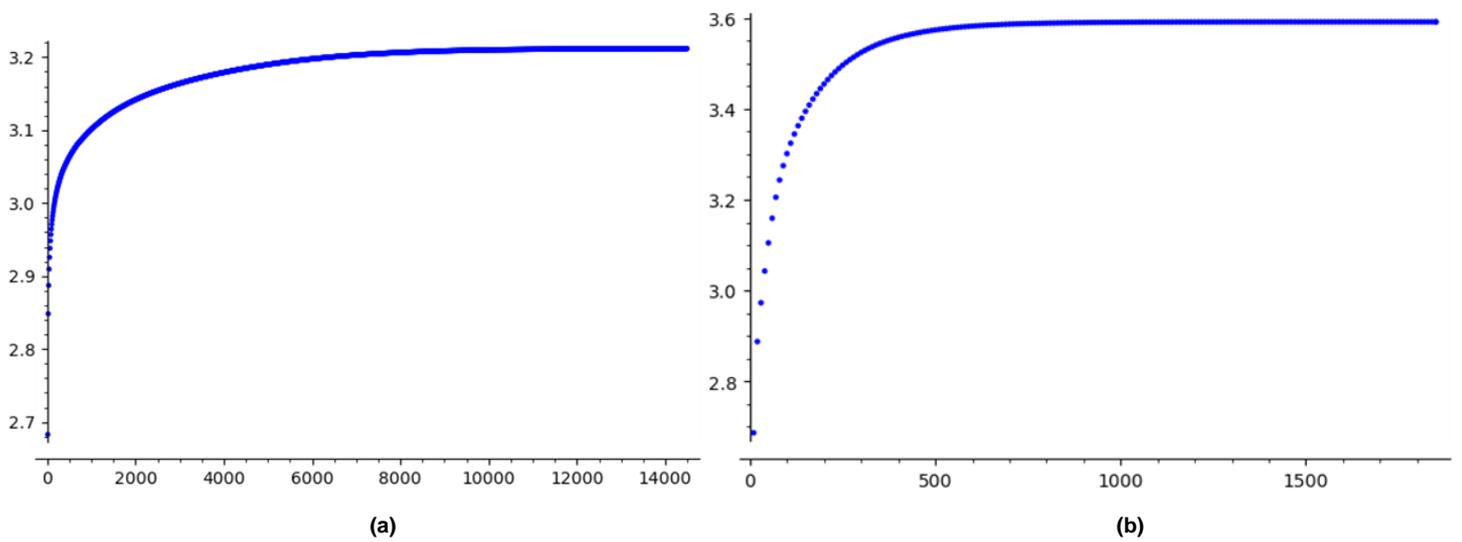


Figura 35 (a) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 36 a 47 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 2000$.

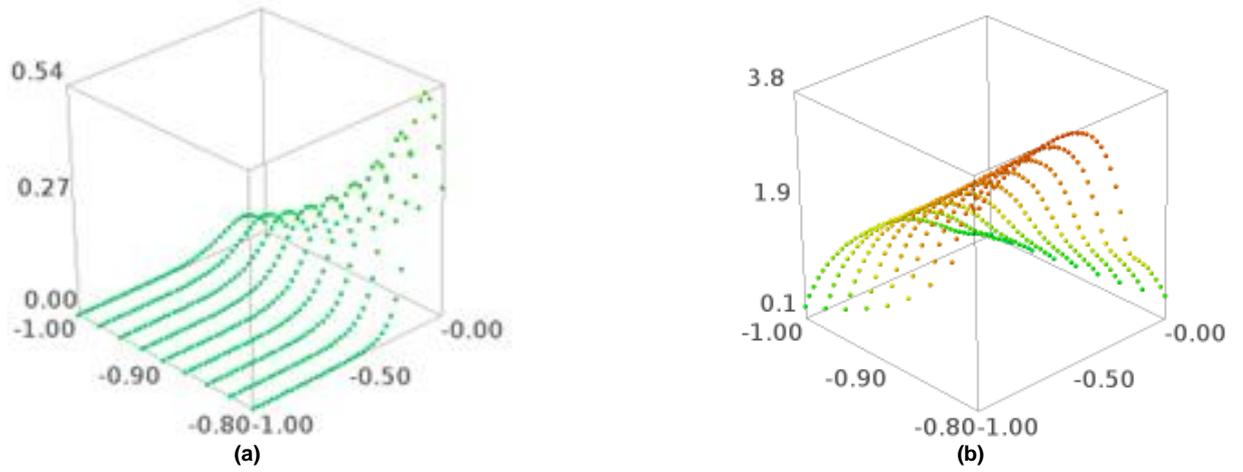


Figura 36 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

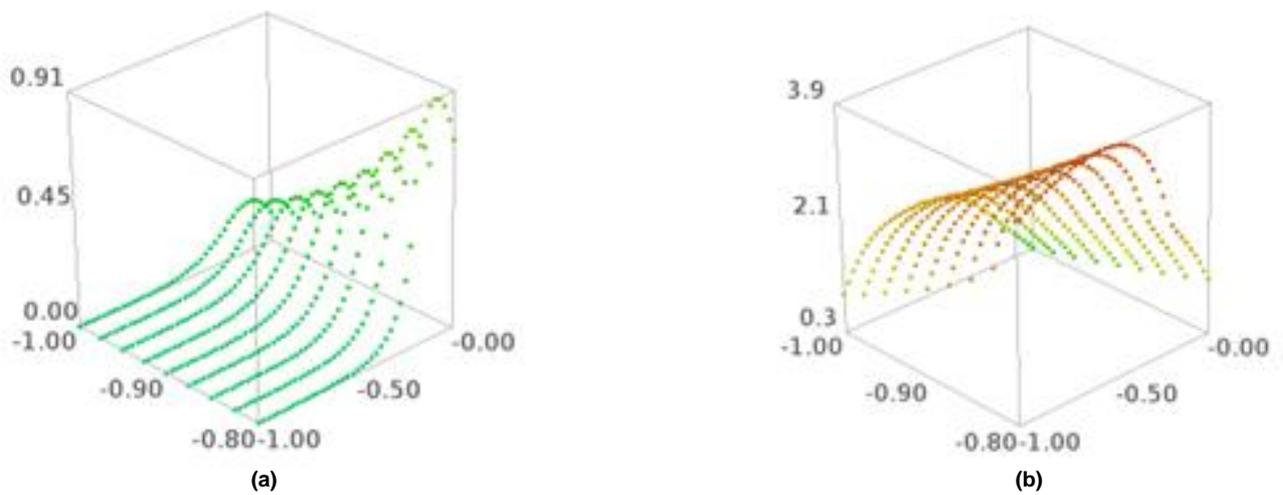


Figura 37 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

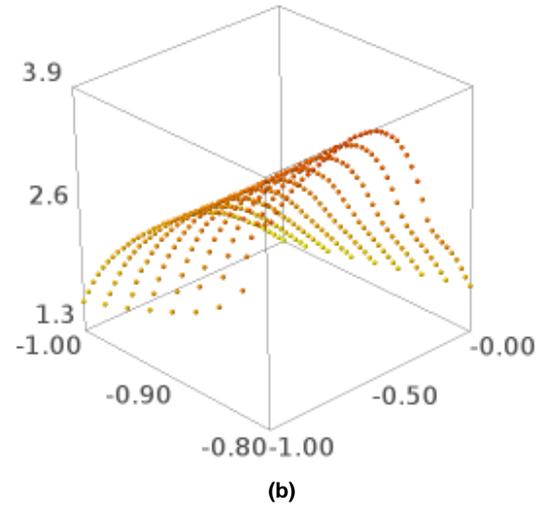
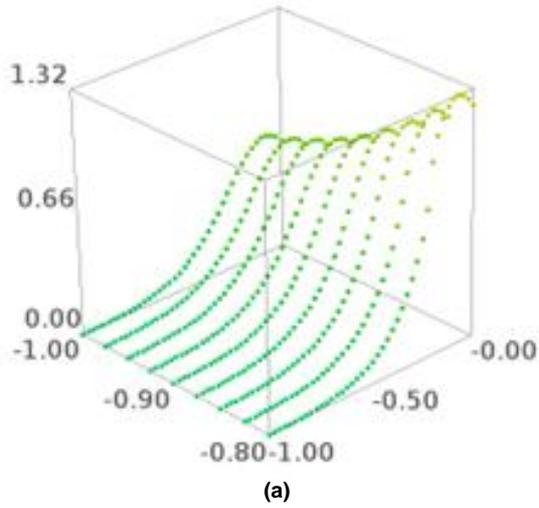


Figura 38 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

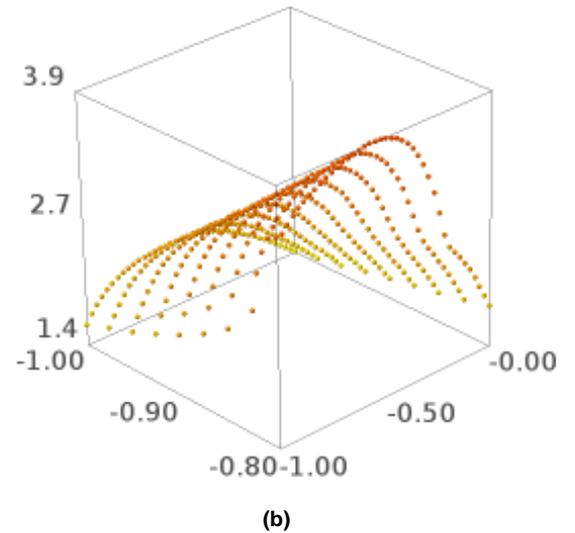
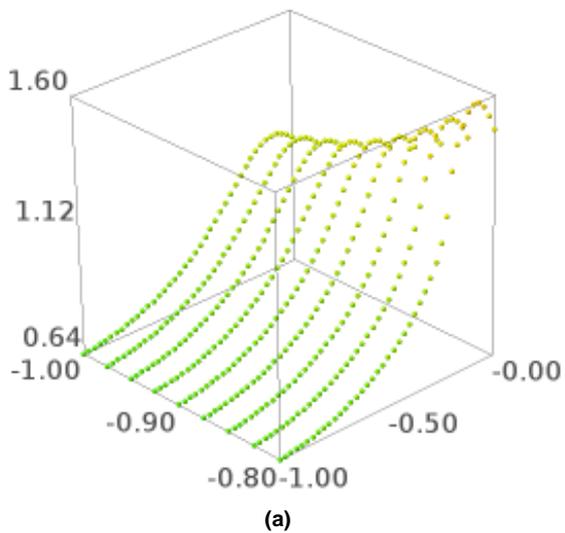


Figura 39 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{8000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

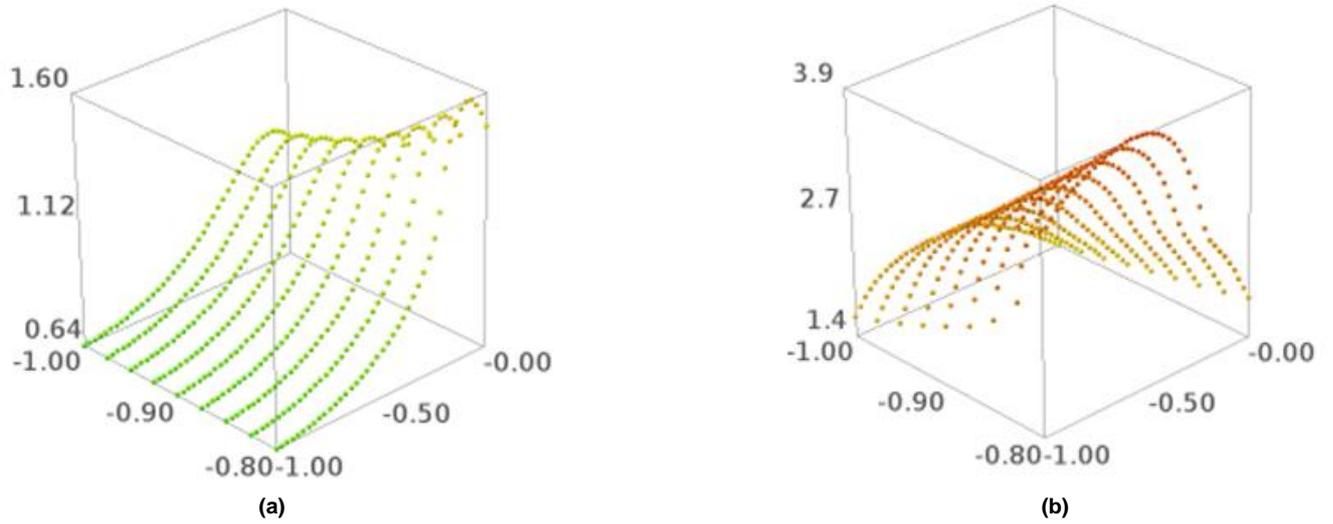


Figura 40 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{10745} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1308} , com os efeitos da não convexidade.

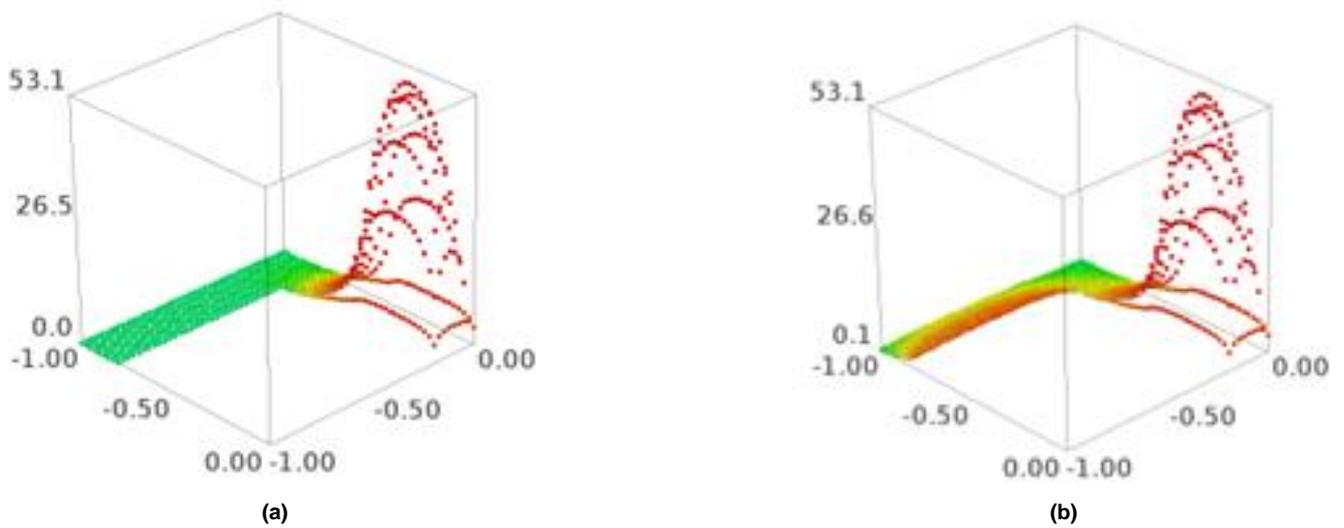
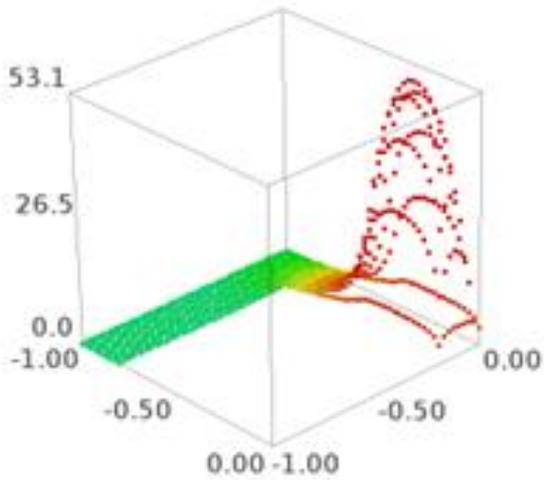
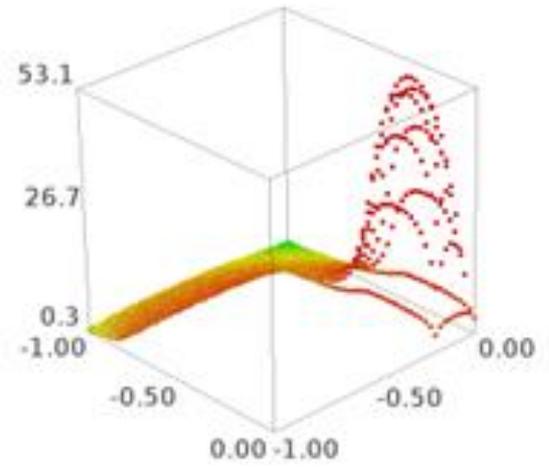


Figura 41 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

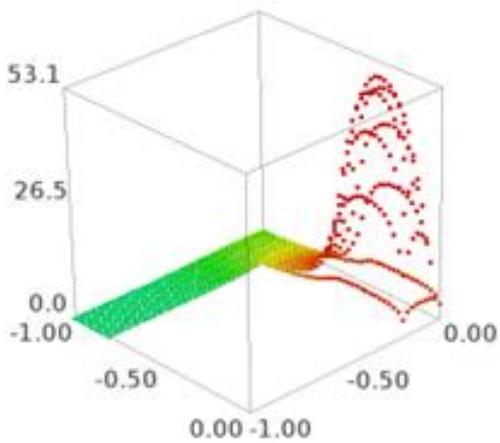


(a)

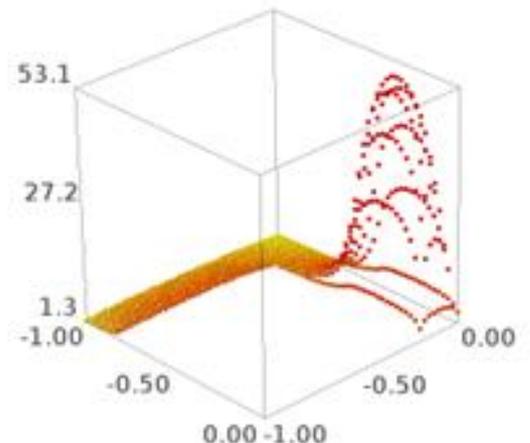


(b)

Figura 42 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .



(a)



(b)

Figura 43 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

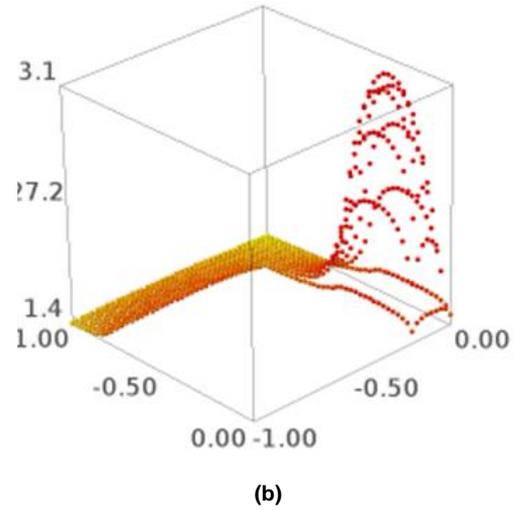
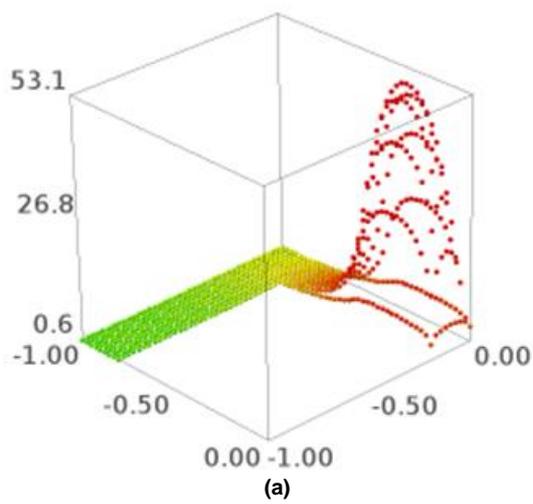


Figura 44 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{8000} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .

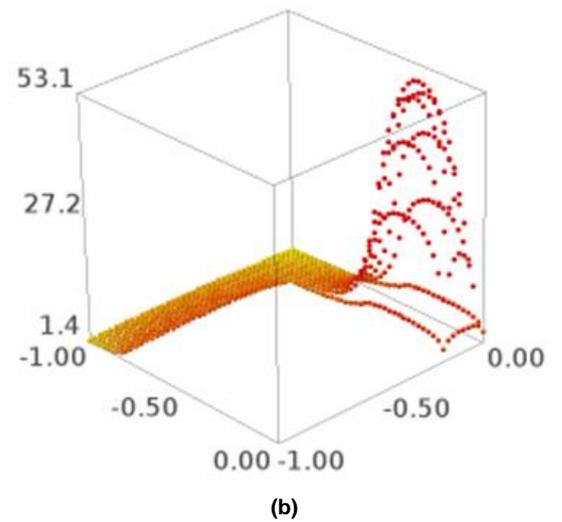
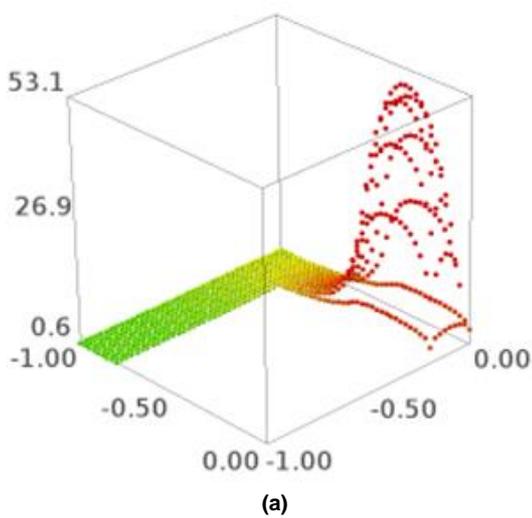


Figura 45 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{10745} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1308} .

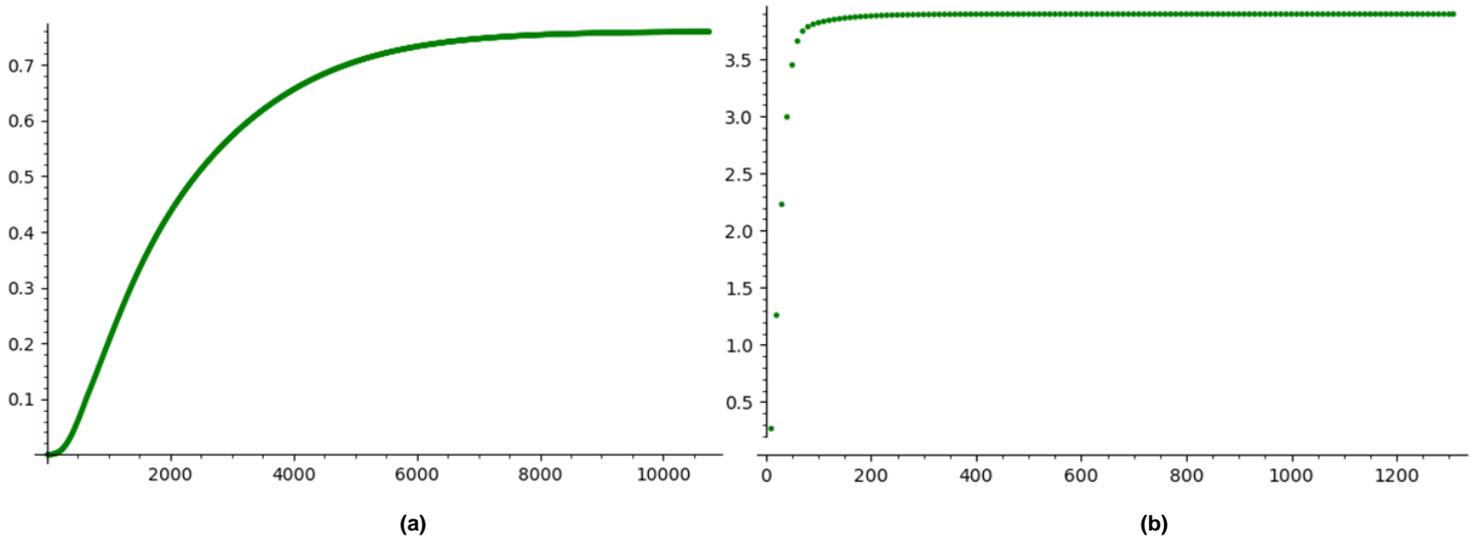


Figura 46 (a) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

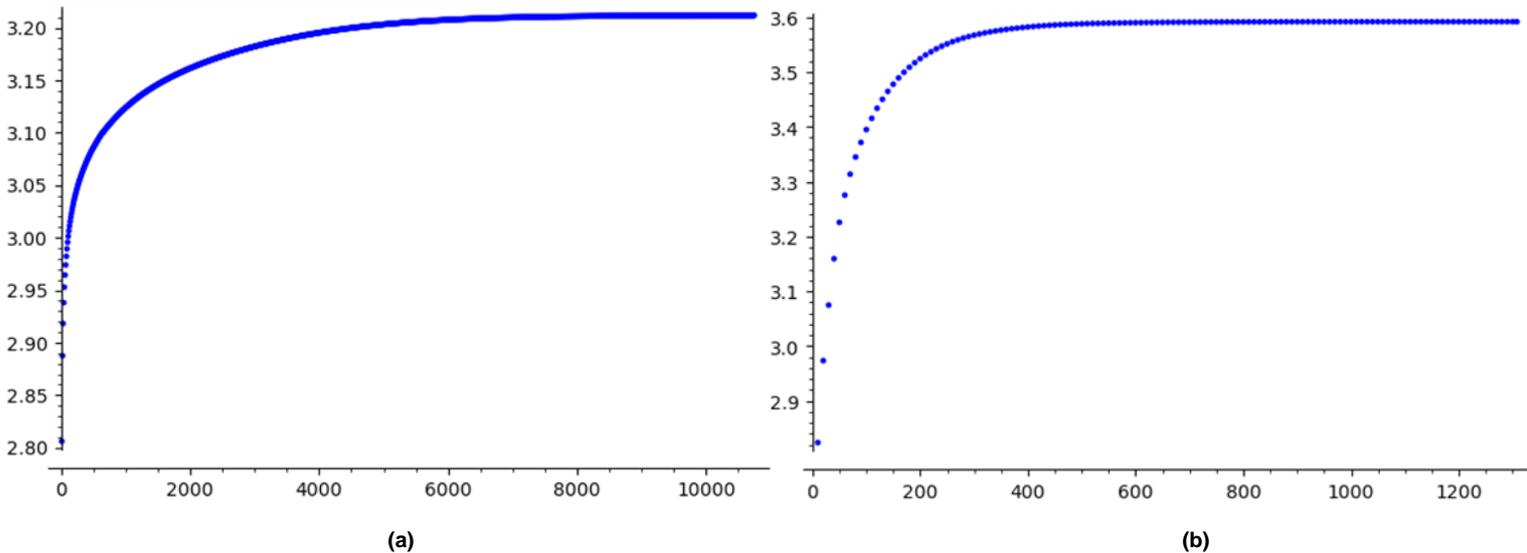
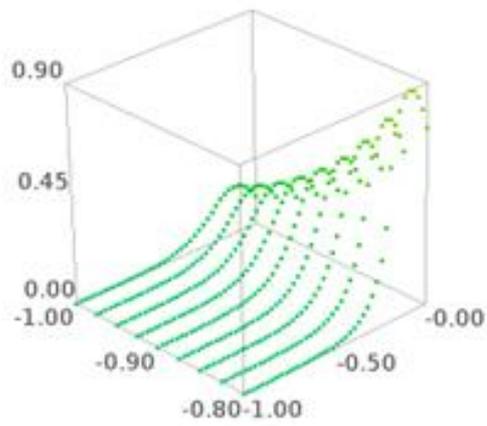
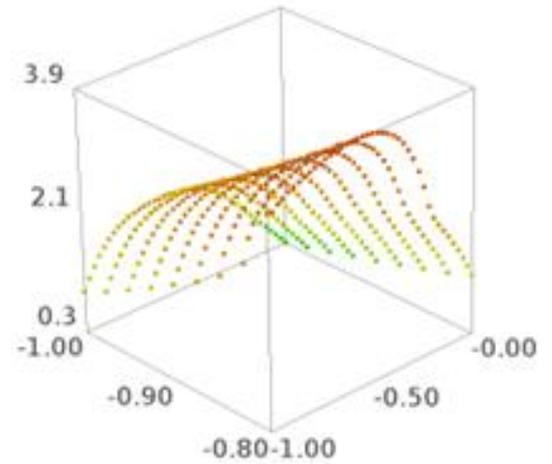


Figura 47 (a) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 48 a 57 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 1000$.

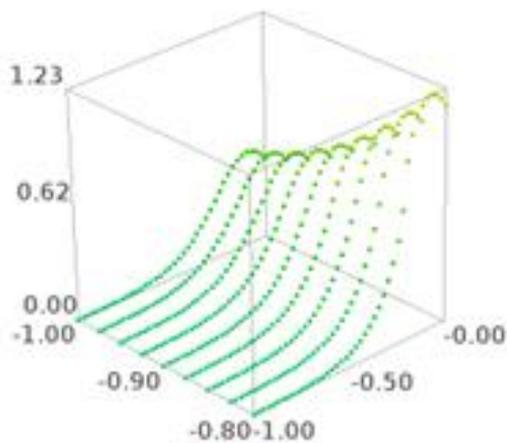


(a)

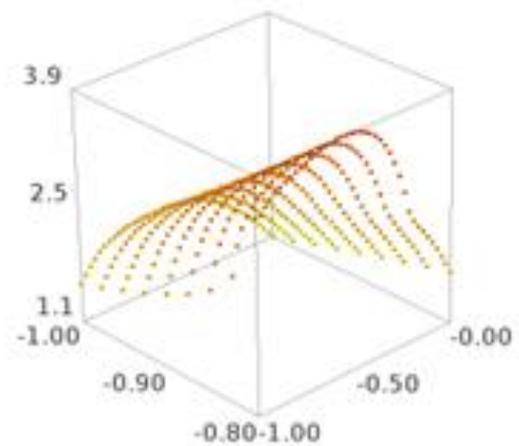


(b)

Figura 48 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.



(a)



(b)

Figura 49 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

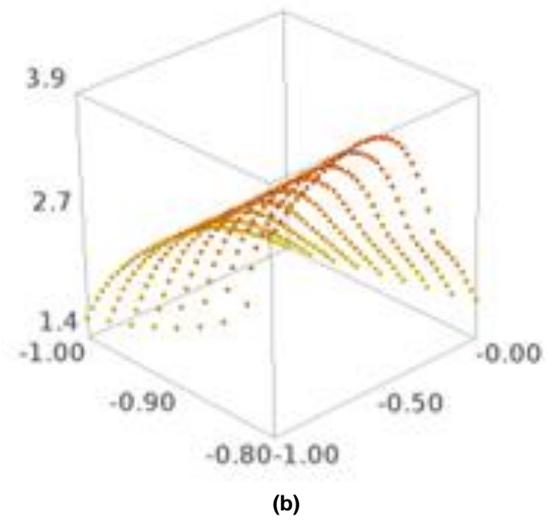
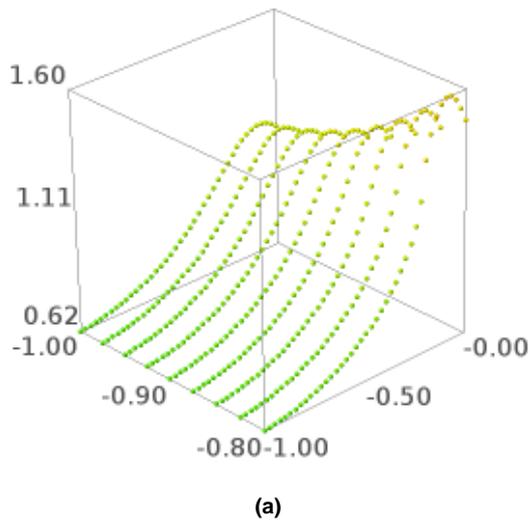


Figura 50 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{4000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

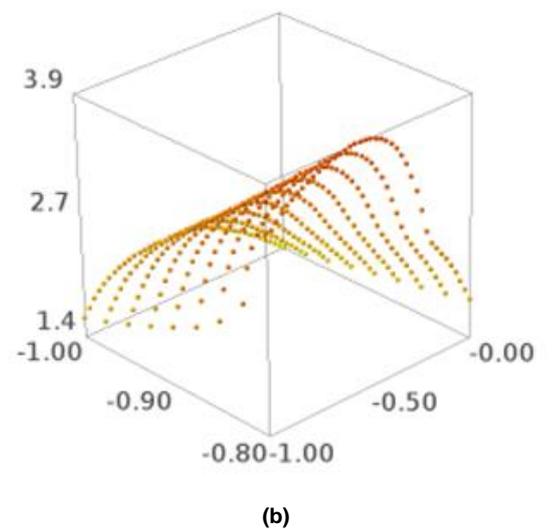
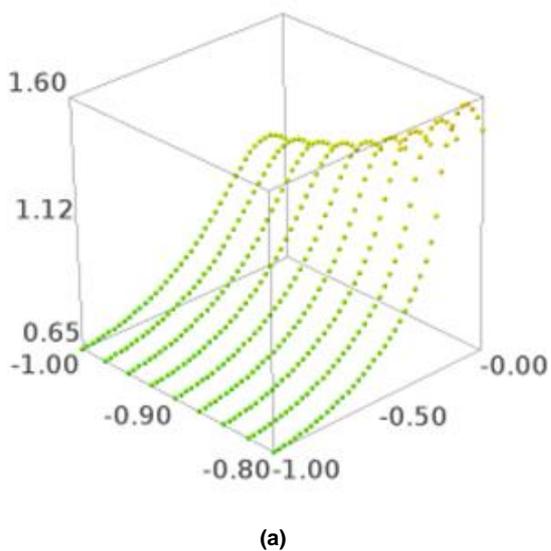
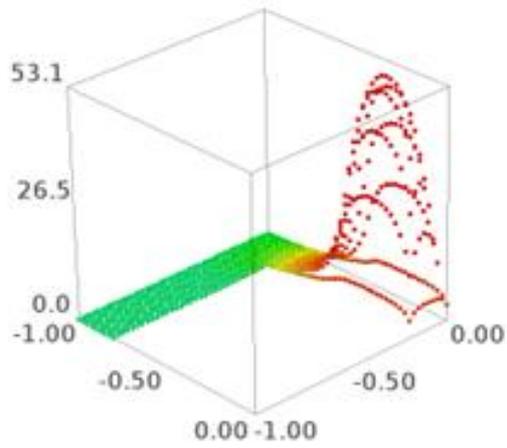
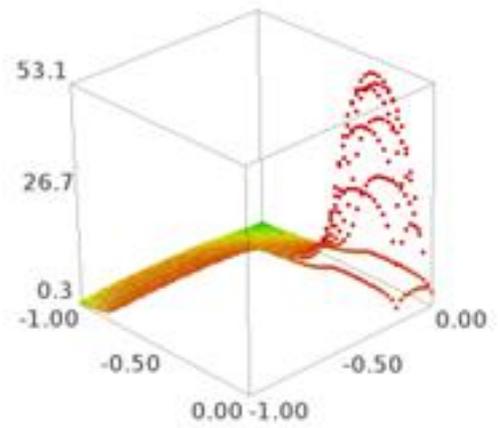


Figura 51 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{6774} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{744} , com os efeitos da não convexidade.

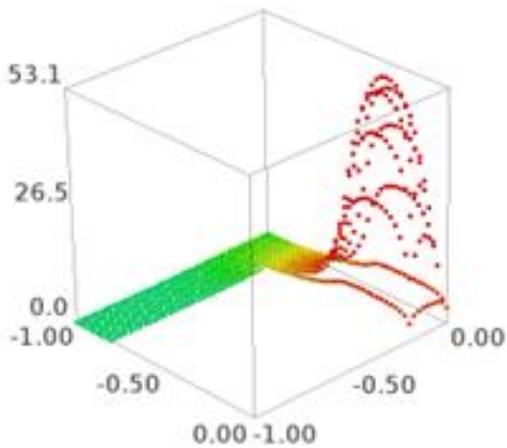


(a)

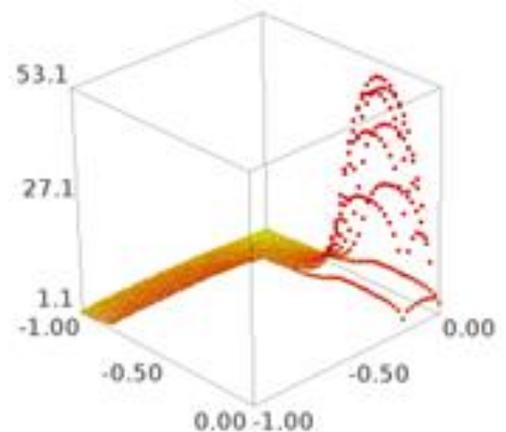


(b)

Figura 52 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .



(a)



(b)

Figura 53 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

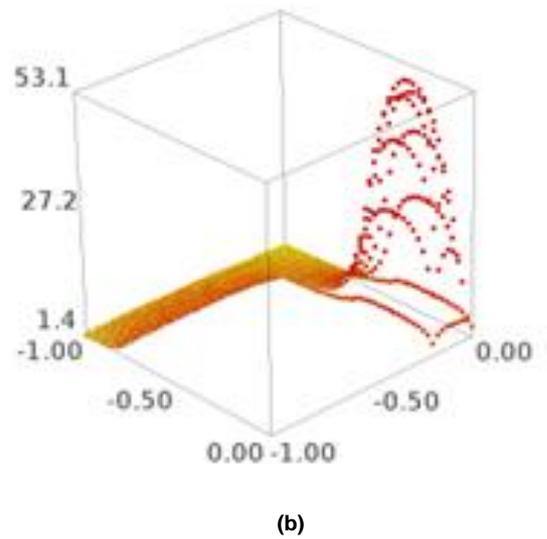
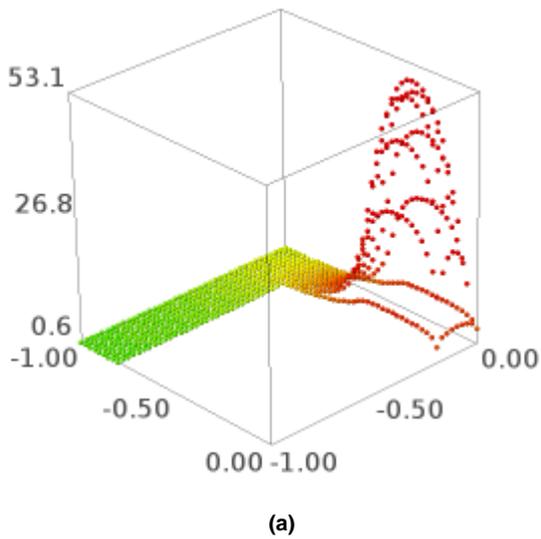


Figura 54 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{4000} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

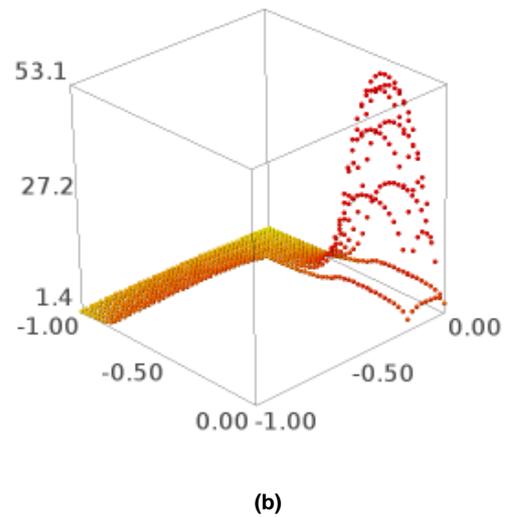
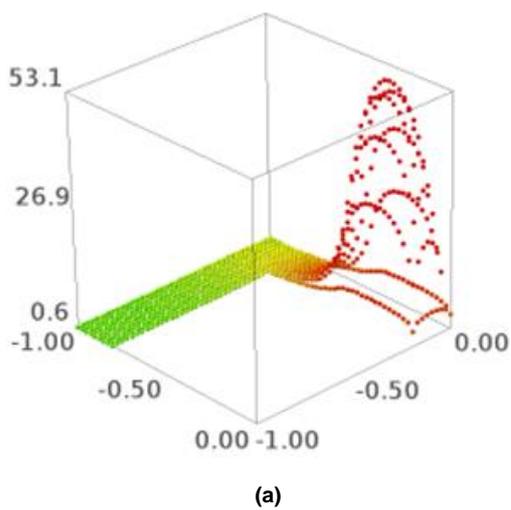


Figura 55 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{6774} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{744} .

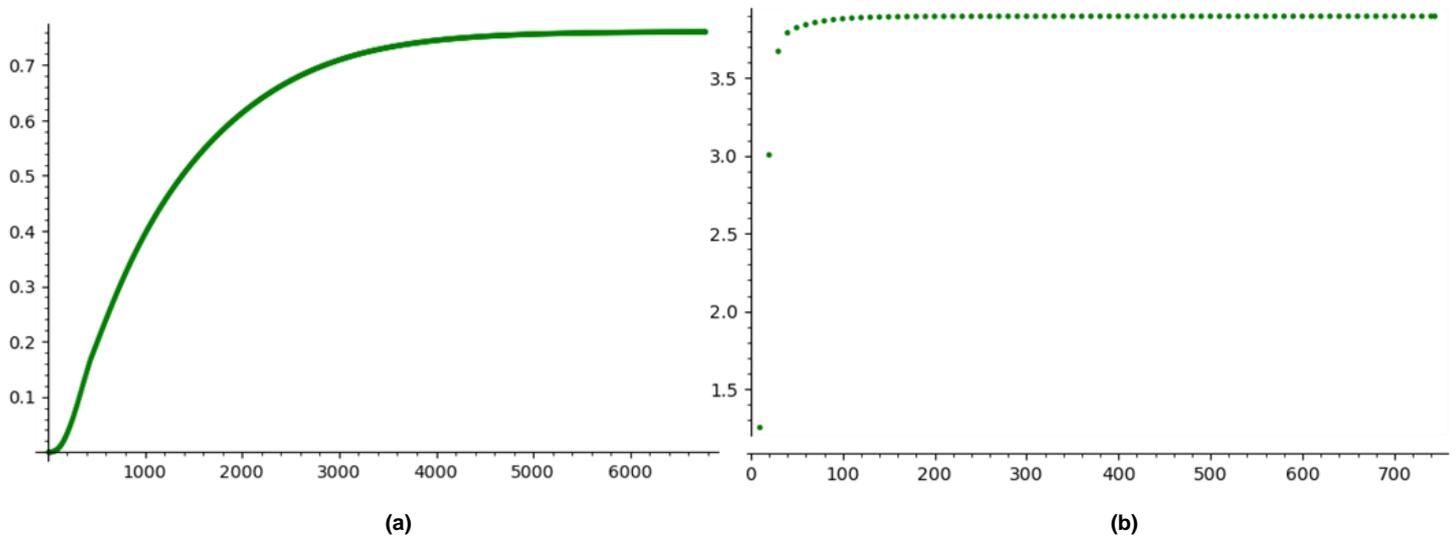


Figura 56 (a) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

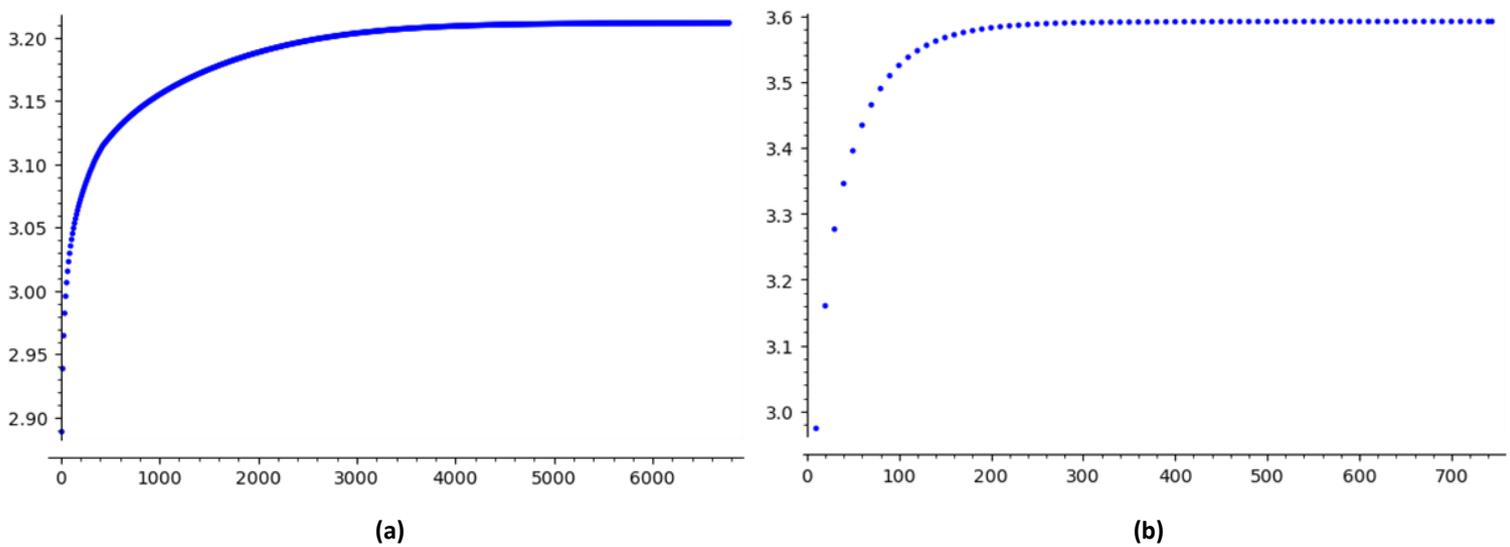
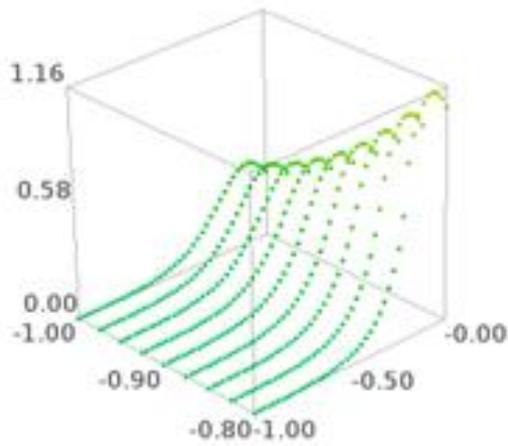
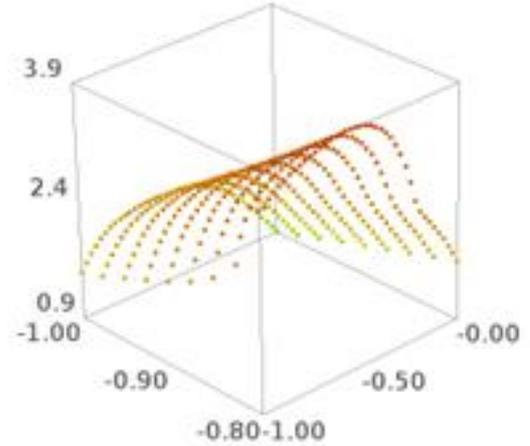


Figura 57 (a) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 58 a 65 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 600$.

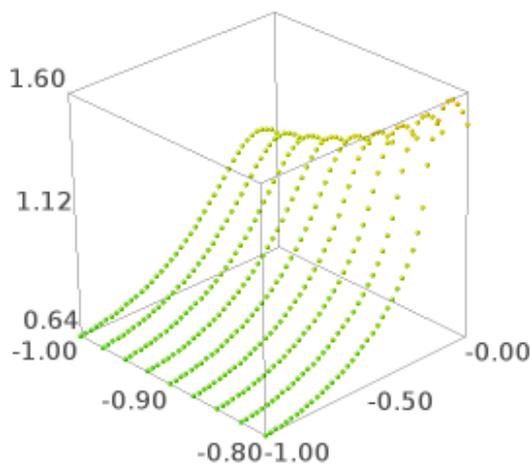


(a)

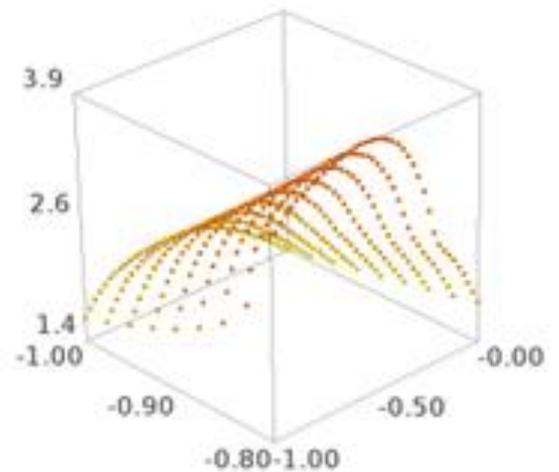


(b)

Figura 58 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

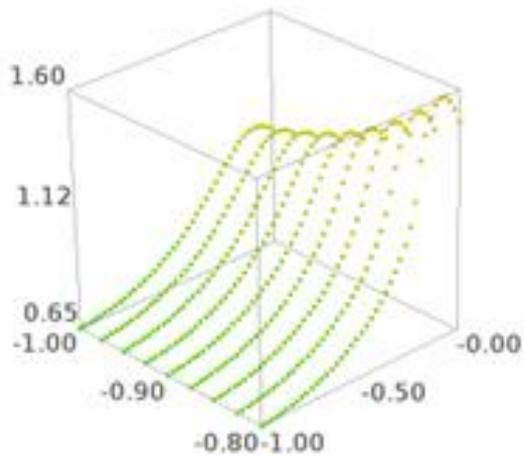


(a)

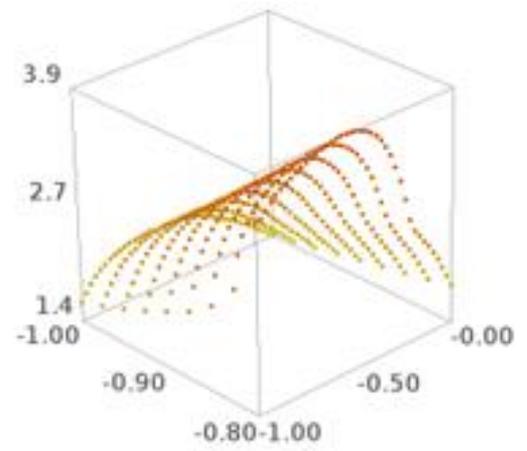


(b)

Figura 59 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{400} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

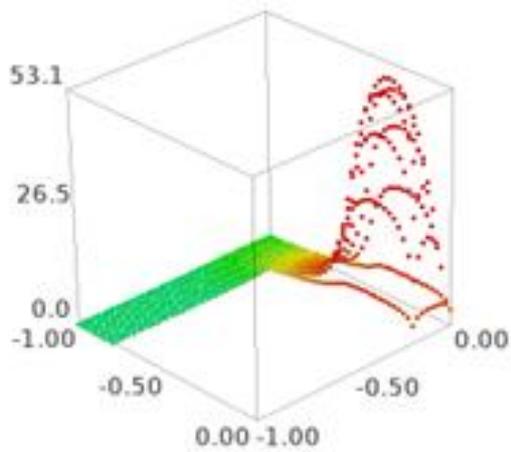


(a)

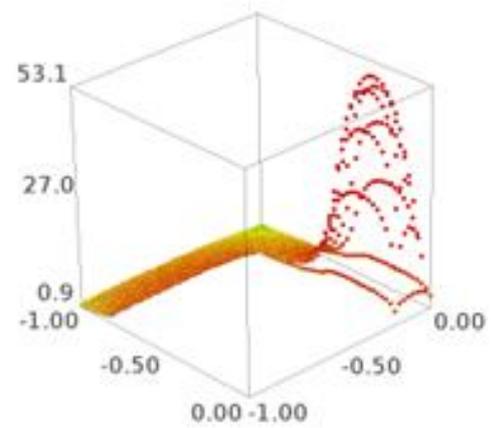


(b)

Figura 60 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{5088} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{512} , com os efeitos da não convexidade.

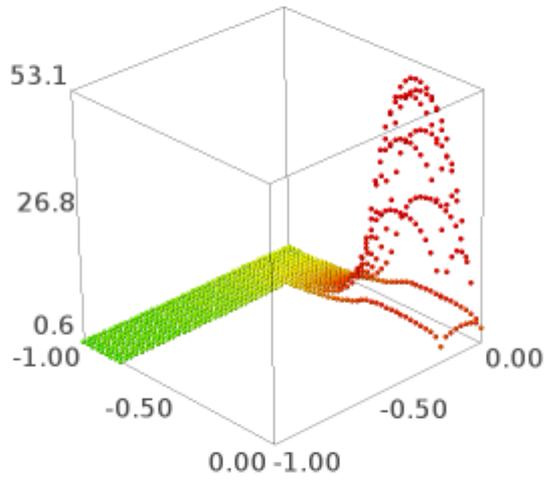


(a)

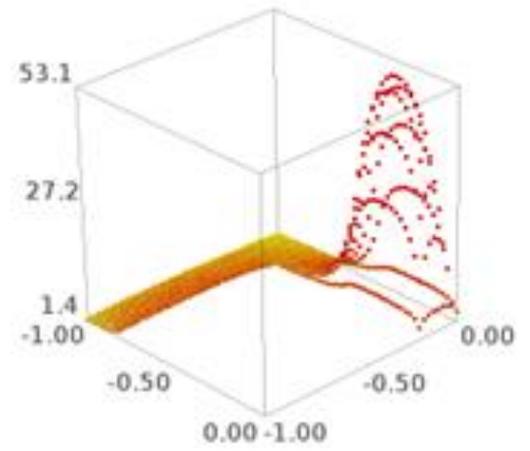


(b)

Figura 61 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

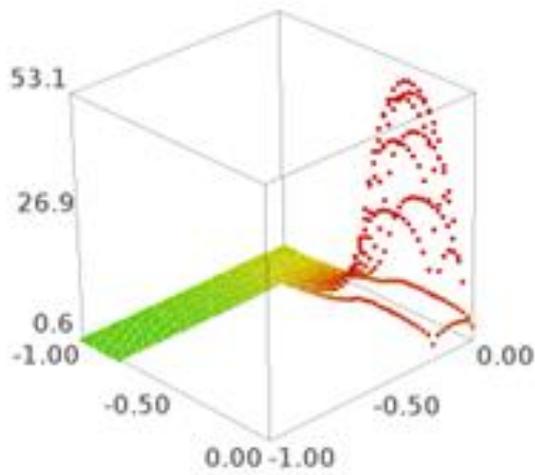


(a)

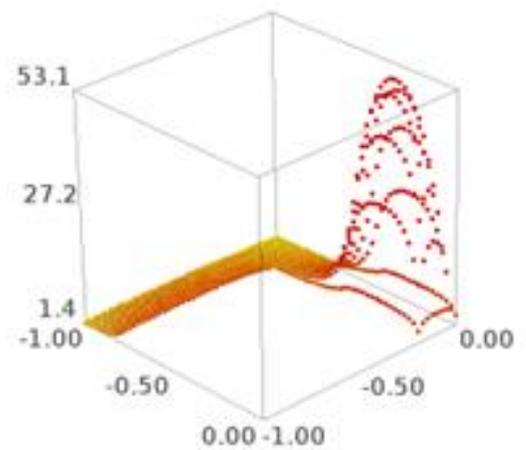


(b)

Figura 62 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{4000} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .



(a)



(b)

Figura 63 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{5088} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{512} .

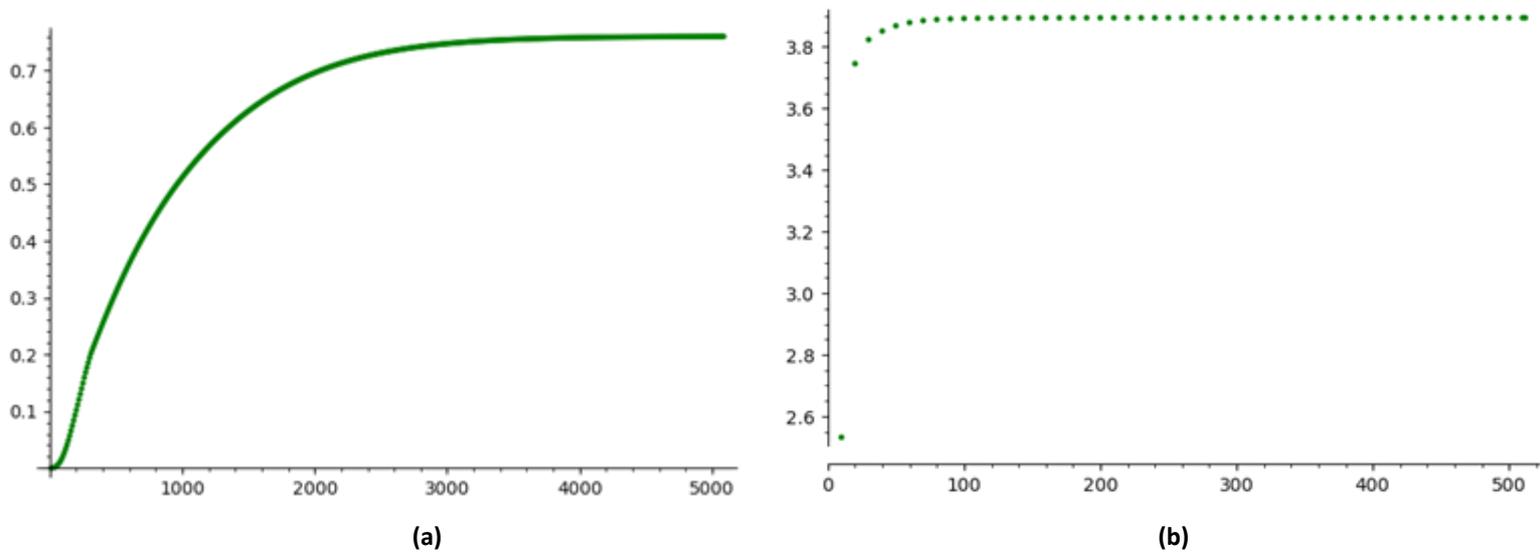


Figura 64 (a) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

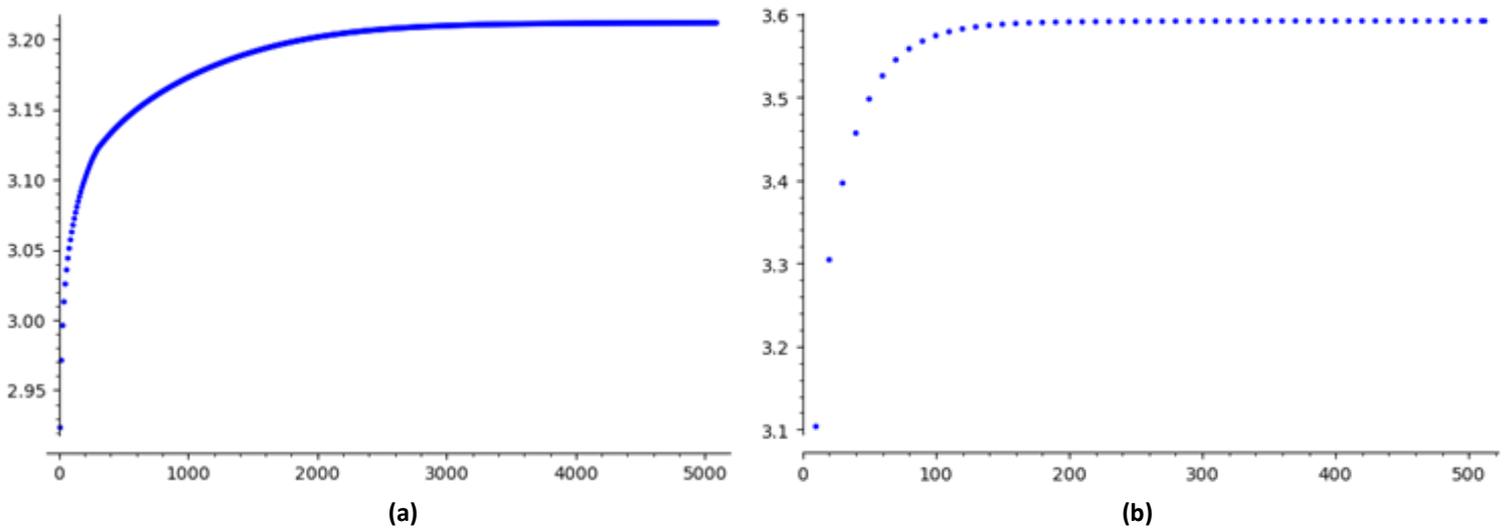


Figura 65 (a) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 66 a 73 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 500$.

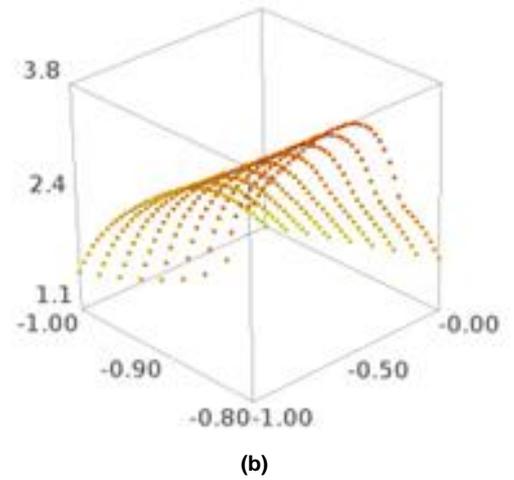
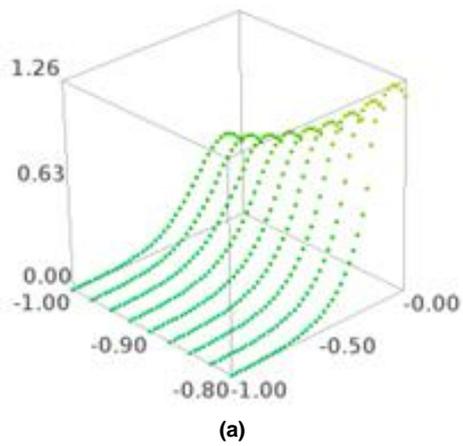


Figura 66 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

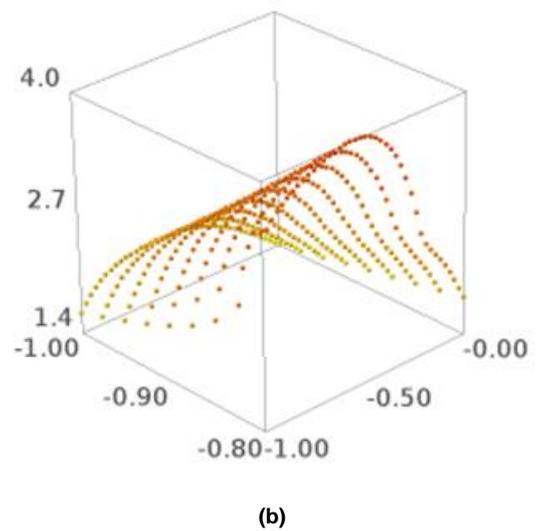
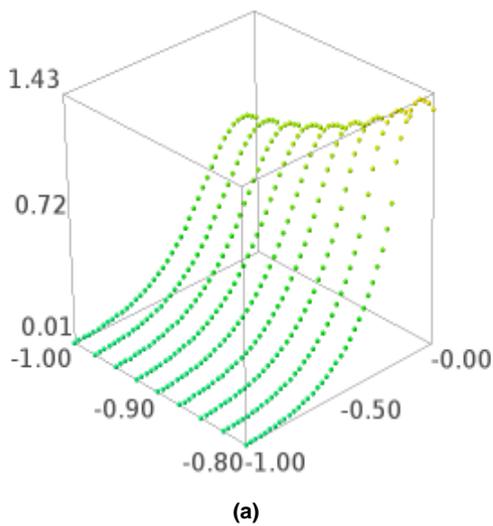


Figura 67 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{165} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{162} , com os efeitos da não convexidade.

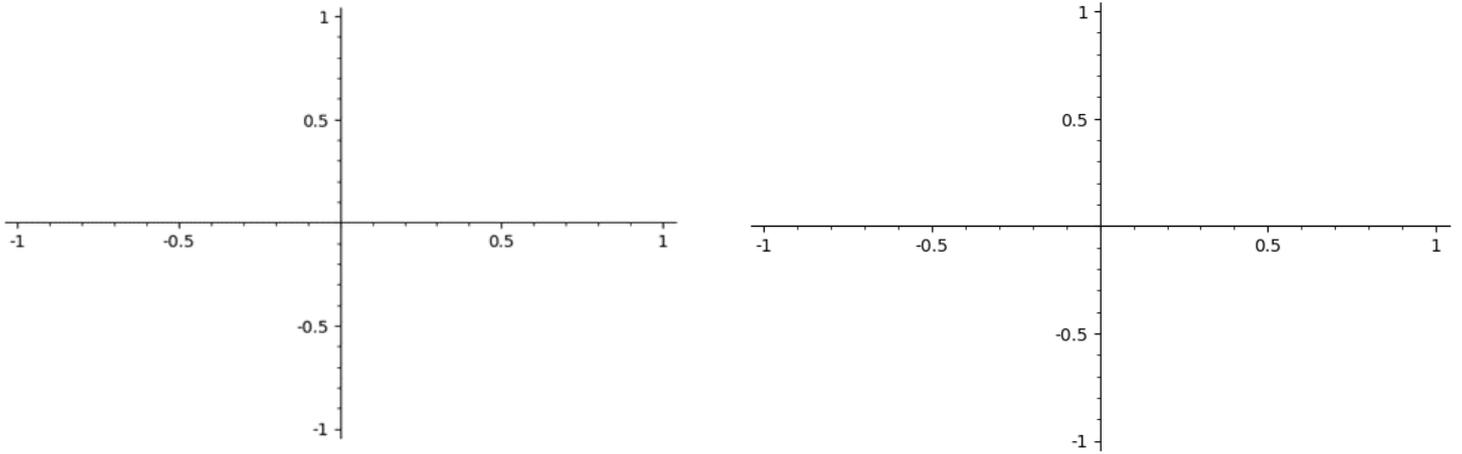


Figura 68 (a) Malha 40 x 40. Divergência. A simulação apresentou divergência para o último ψ . (b) Malha 40 x 40. Divergência. A simulação apresentou divergência para o último ψ .

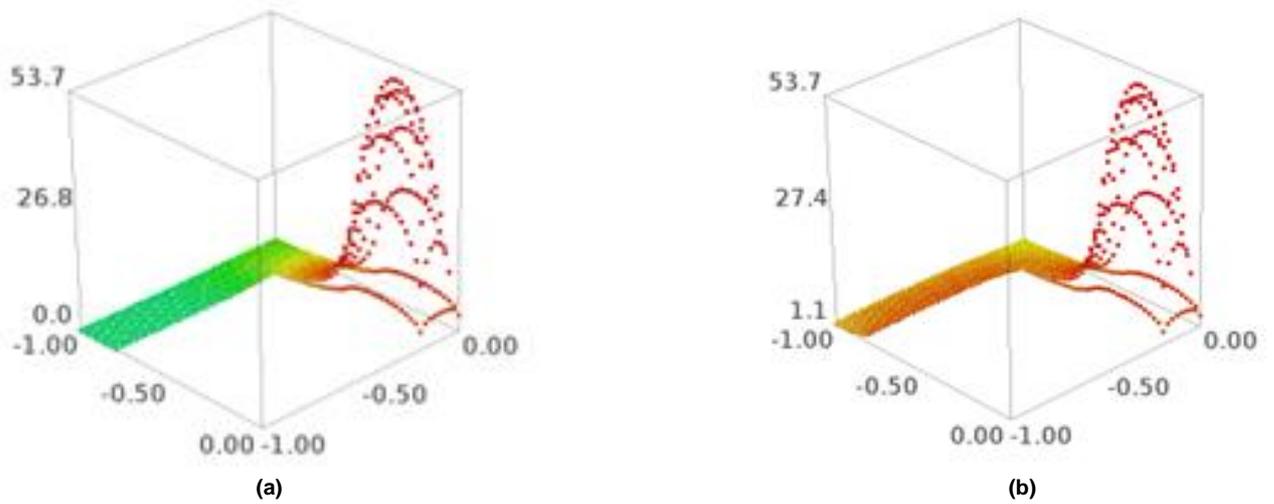
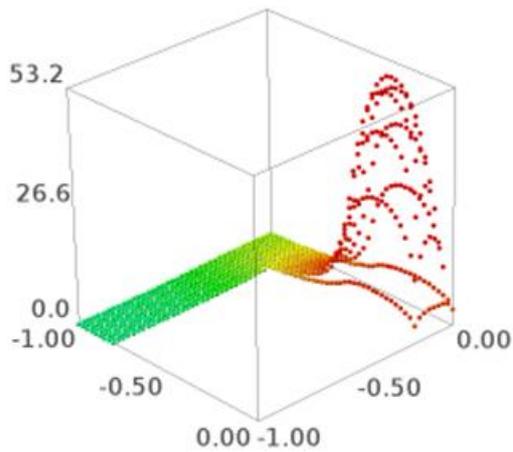
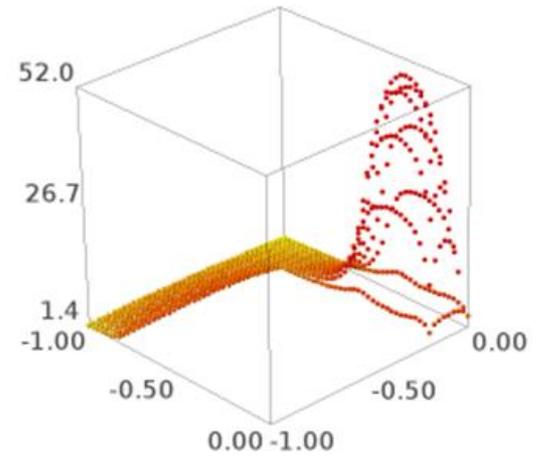


Figura 69 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

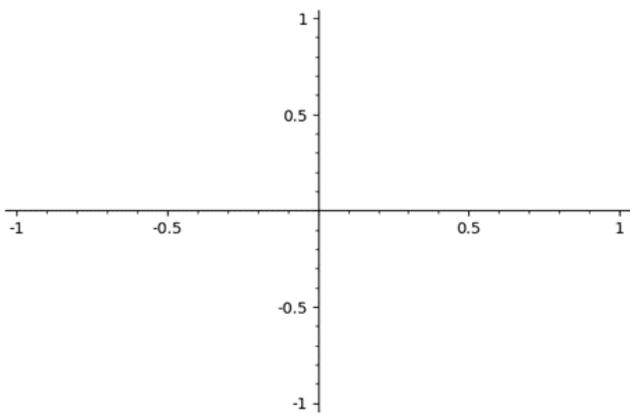


(a)

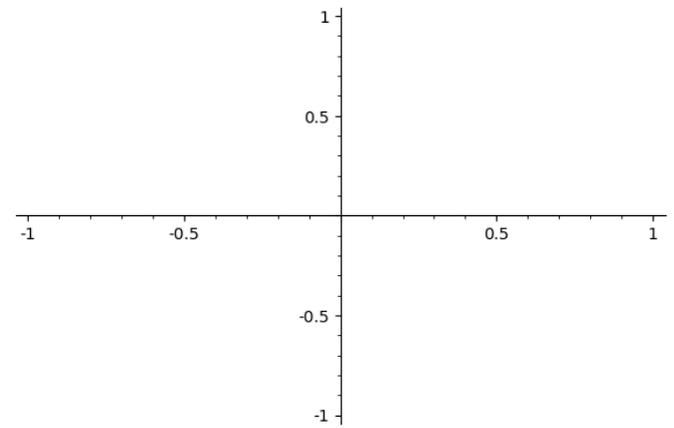


(b)

Figura 70 (a) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{165} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{512} .



(a)



(b)

Figura 71 (a) Malha 40 x 40. Divergência. A simulação apresentou divergência para o último ψ . (b) Malha 40 x 40. Divergência. A simulação apresentou divergência para o último ψ .

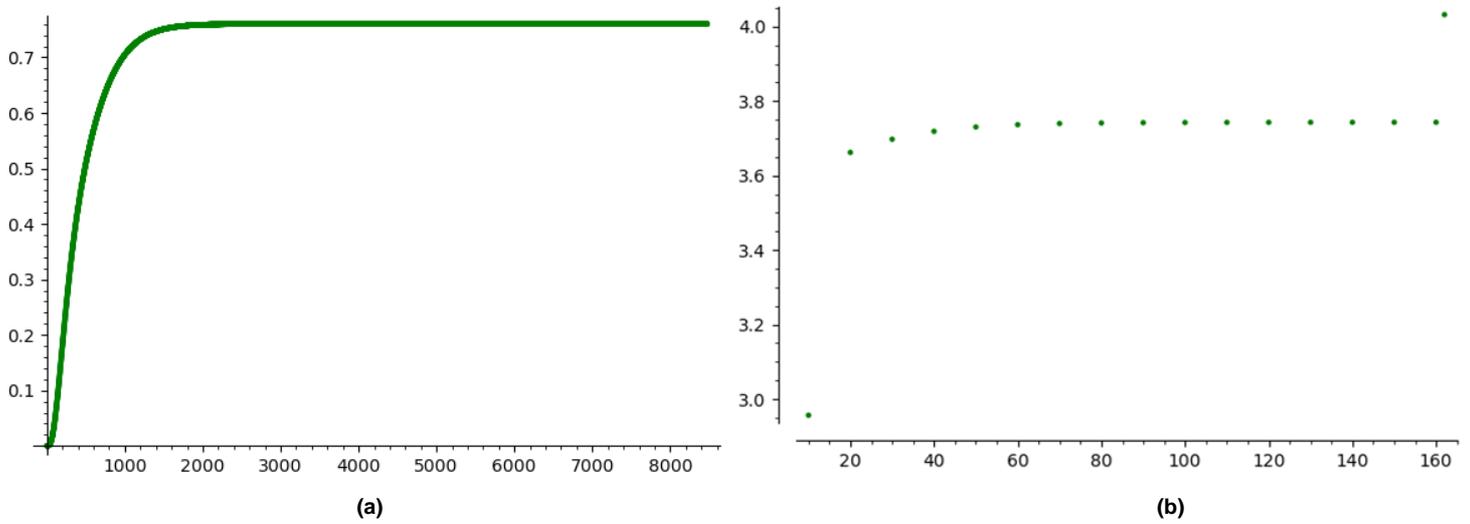


Figura 72 (a) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

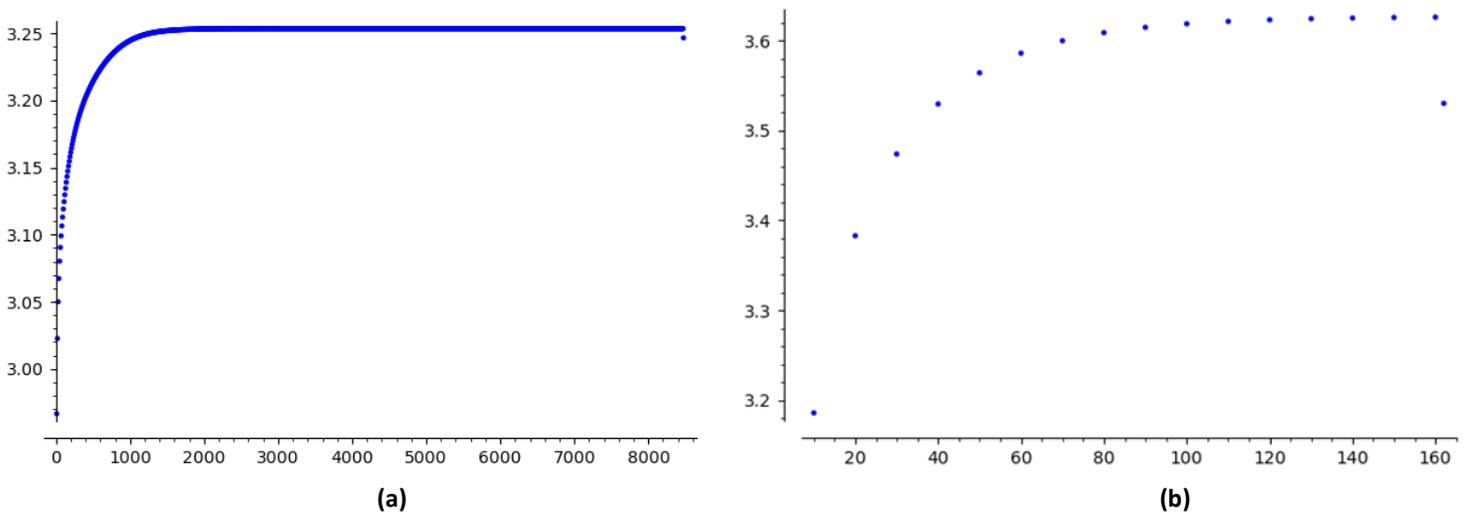


Figura 73 (a) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 40 x 40. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

O sinal negativo nos eixos horizontais nos gráficos que apresentam os perfis dos campos de temperaturas é devido à escolha da perspectiva de observação dos lados da placa. O software mantém os eixos fixos e plota os pontos nos eixos negativos para fornecer a perspectiva apresentada acima. Além disso, nos gráficos bidimensionais, o eixo das ordenadas representa a temperatura e o eixo das abcissas representa ψ^i . Essas informações são válidas para todos os resultados apresentados nesta tese.

Pela análise dos resultados, com e sem os efeitos da não convexidade da placa, nota-se que os gráficos são congruentes para os diferentes valores de α , ou seja, os elementos da sequência se apresentam de forma harmônica com e sem os efeitos da não convexidade da placa, do $\alpha = 4000$ ao $\alpha = 600$, sendo os mesmos valores obtidos para a temperatura máxima da placa como um todo, para a temperatura máxima do lado vertical da placa, para a temperatura do ponto médio do lado vertical da placa e para o somatório das temperaturas do campo de temperaturas, que é proporcional à sua média. A partir do $\alpha = 500$ os gráficos apresentam inconsistência física, pois os elementos da sequência não são crescentes, isto é, acusam divergência nos cálculos, como observado nas figuras 72 e 73.

Além disso, observa-se que o campo de temperaturas da placa sofre significativa mudança quando os efeitos da não convexidade são considerados, isto é, quando a integral da equação (49) é considerada nos cálculos para obter os elementos da sequência. Essa integral contém o fator de forma da placa na qual representa a fração da radiação que deixa a superfície da placa que é interceptada por ela mesma.

Outrossim, constata-se que há um aumento de aproximadamente 143,75% na temperatura máxima do lado vertical da placa quando os efeitos da não convexidade são considerados nos cálculos. Ademais, a partir da análise dos gráficos que registram a temperatura no ponto médio do lado vertical da placa, constata-se um aumento de aproximadamente 413,15% na temperatura nesse ponto quando os efeitos da não convexidade são levados em consideração nos cálculos. E comparando os gráficos do somatório das temperaturas do campo de temperaturas com e sem os efeitos da não convexidade da placa, nota-se que a média dos campos de temperaturas sofre um aumento de aproximadamente 12,5% quando os efeitos da não convexidade da placa são considerados.

Ademais, observa-se que ocorre a diminuição da quantidade de elementos para a convergência da sequência ψ^i à medida que o valor do α diminui. Por exemplo, na figura 64, que registra a temperatura no ponto médio do lado vertical da placa com $\alpha = 600$, a convergência é estabelecida nas proximidades do elemento ψ^{3000} (sem os efeitos da não convexidade) e do elemento ψ^{80} (com os efeitos da não convexidade), ao passo que na figura 22, onde também registra a temperatura no ponto médio do lado vertical da placa, mas com $\alpha = 4000$, a convergência é estabelecida para ψ^i bem mais elevados, próximo do elemento ψ^{15000} (sem os efeitos da não convexidade) e do elemento ψ^{120} (com os efeitos da não convexidade).

As tabelas 1,2 e 3 resumem os resultados obtidos no primeiro ciclo de simulações.

SOMATÓRIO DO CAMPO DE TEMPERATURAS		
Malha 40x40		
$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α
3,2	3,6	4000
3,2	3,6	3000
3,2	3,6	2000
3,2	3,6	1000
3,2	3,6	600
Divergência		500

Tabela 1. Valores de convergência dos somatórios dos campos de temperaturas para a malha 40 x 40.

PONTO MÉDIO DO LADO VERTICAL DA PLACA		
Malha 40x40		
$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α
0,76	3,9	4000
0,76	3,9	3000
0,76	3,9	2000
0,76	3,9	1000
0,76	3,9	600
Divergência		500

Tabela 2. Valores de convergência do ponto médio do lado vertical da placa para a malha 40 x 40.

TEMPERATURA MÁXIMA DO LADO VERTICAL DA PLACA		
Malha 40x40		
$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α
1,6	3,9	4000
1,6	3,9	3000
1,6	3,9	2000
1,6	3,9	1000
1,6	3,9	600
Divergência		500

Tabela 3. Valores de convergência da temperatura máxima do lado vertical para a malha 40 x 40.

5.4 Segundo ciclo de simulações: malha 80 x 80.

Neste segundo ciclo de simulações a malha implementada é mais refinada em relação ao primeiro ciclo, com o número de pontos aumentado em quatro vezes.

As figuras de 74 a 87 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 4000$.

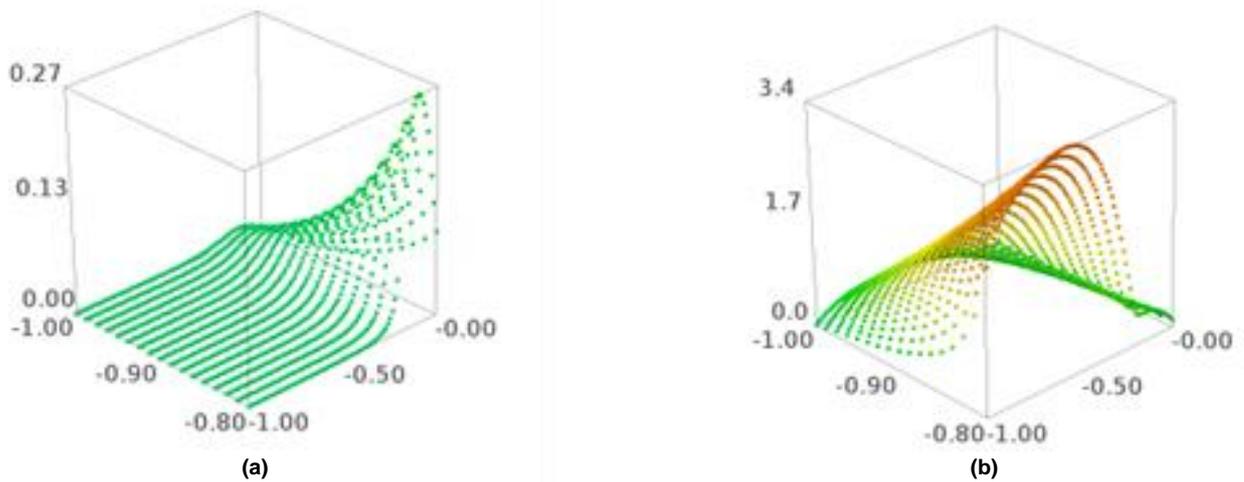


Figura 74. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

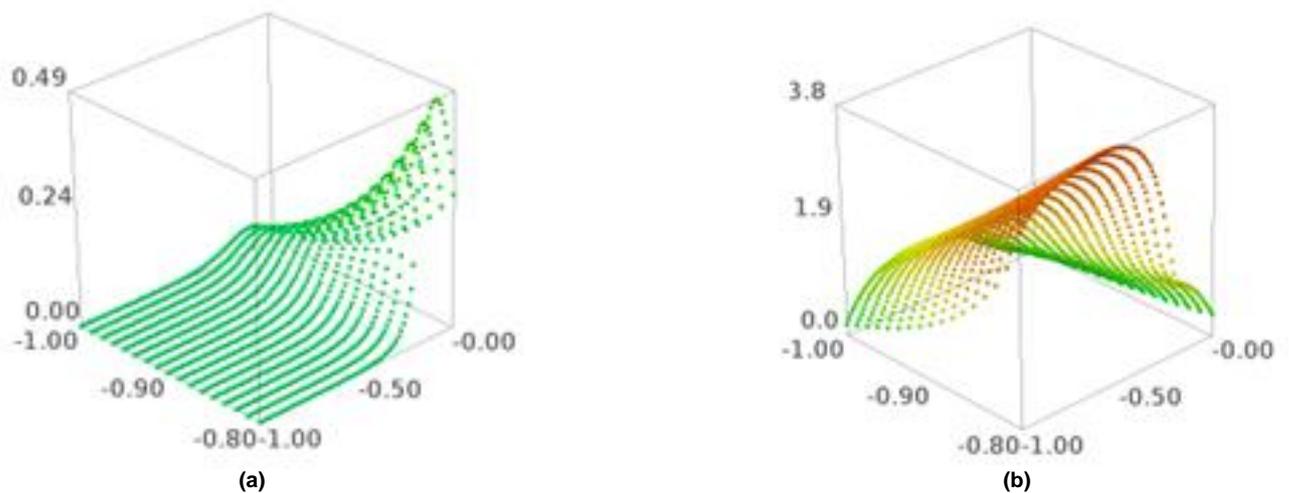


Figura 75. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

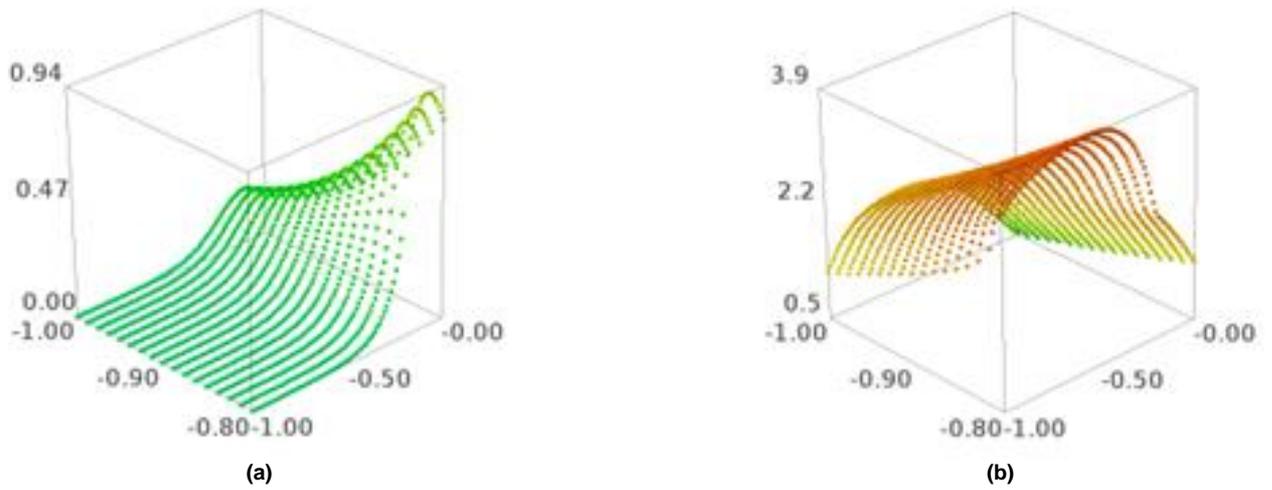


Figura 76. Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

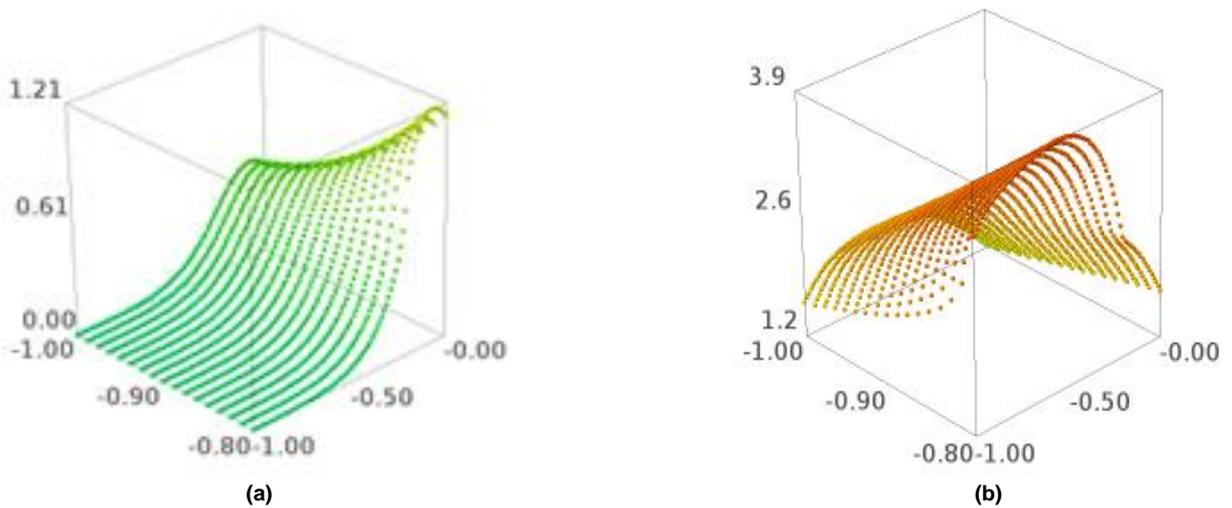
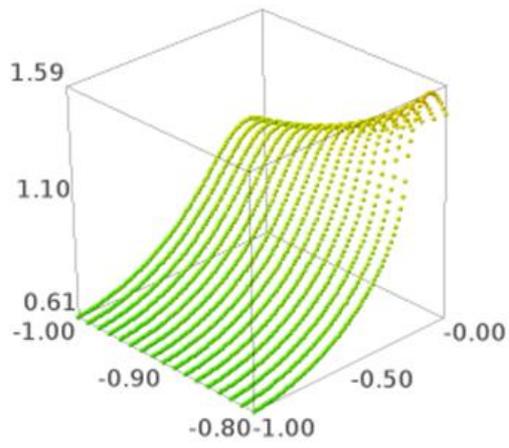
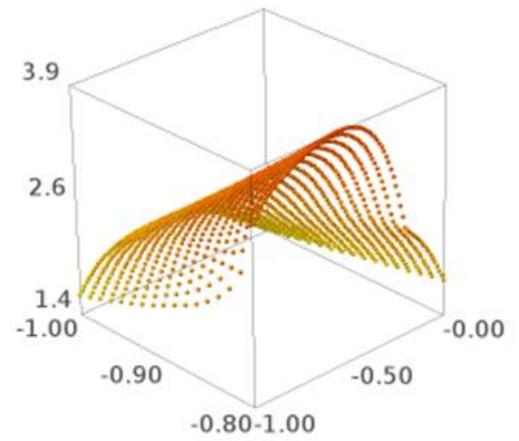


Figura 77. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

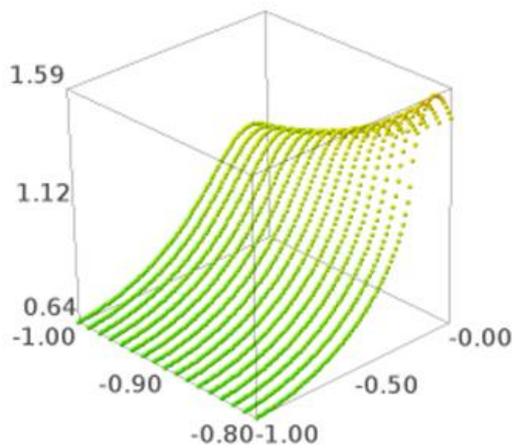


(a)

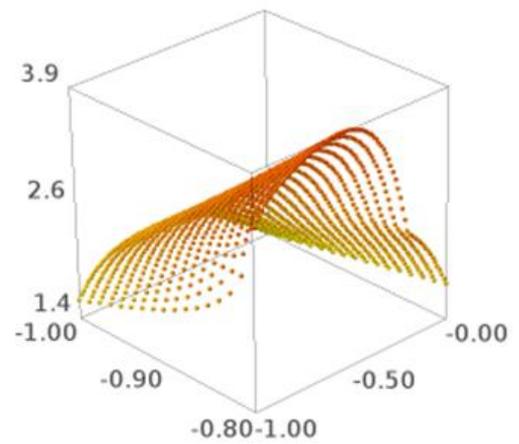


(b)

Figura 78. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{16000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2000} , com os efeitos da não convexidade.



(a)



(b)

Figura 79. Malha 80 x 80. (a) Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{23344} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2795} , com os efeitos da não convexidade.

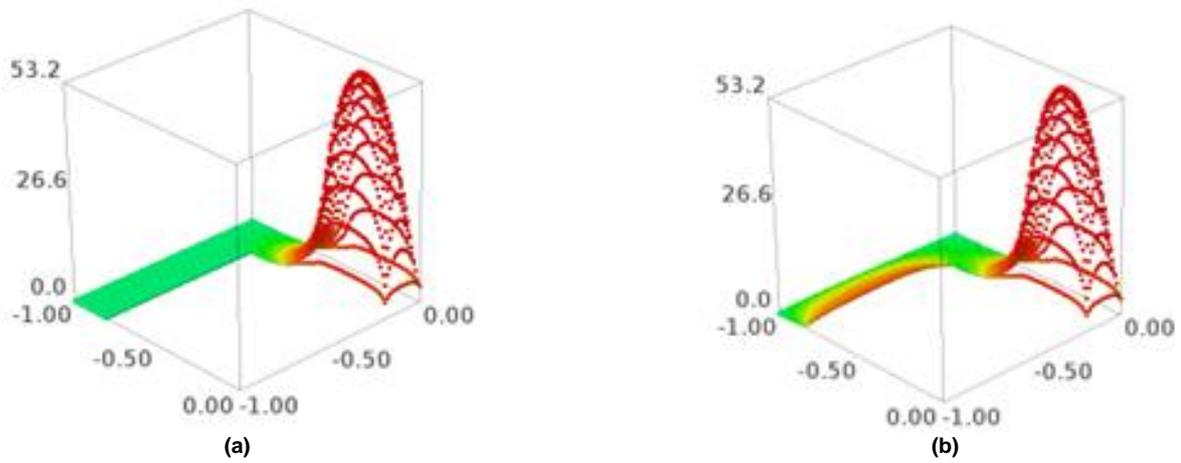


Figura 80. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

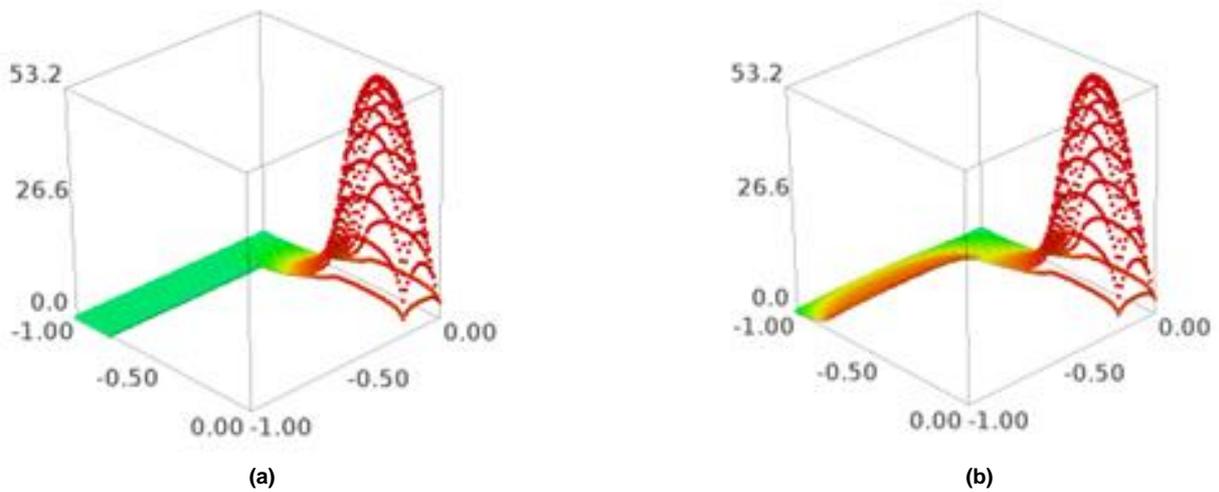


Figura 81. Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

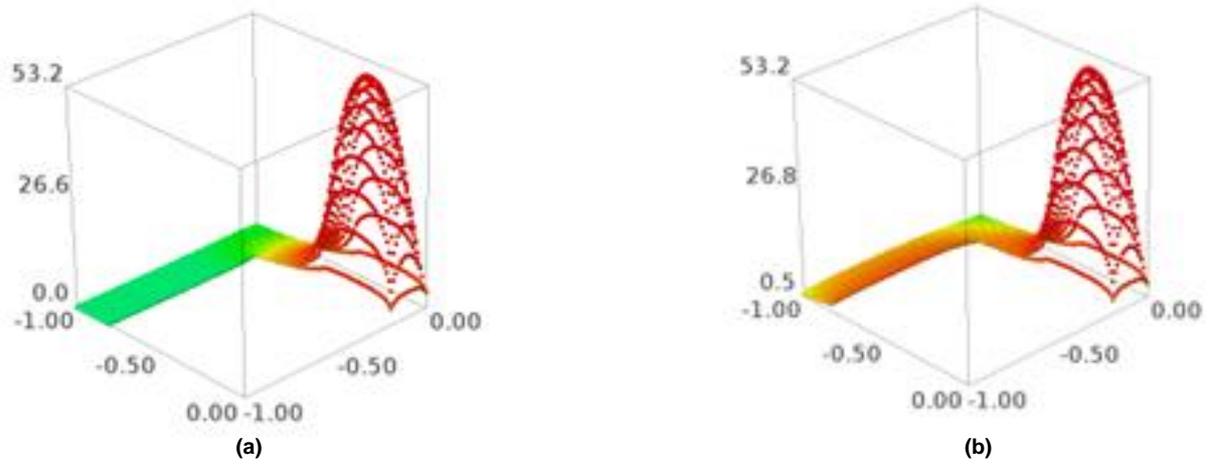


Figura 82. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

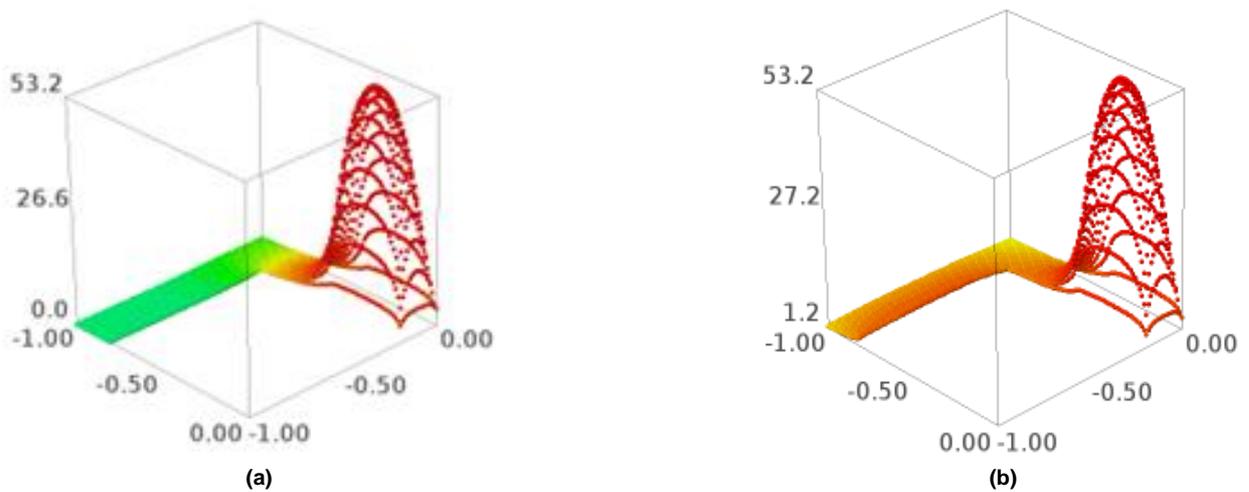


Figura 83. Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .

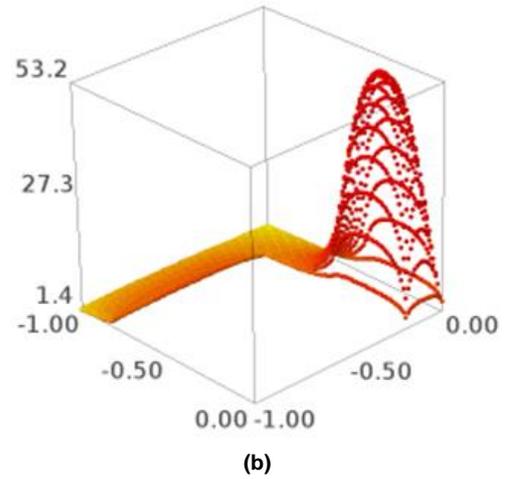
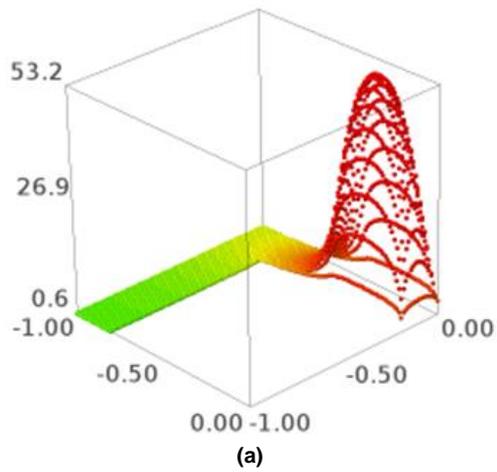


Figura 84. Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{16000} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{2000} .

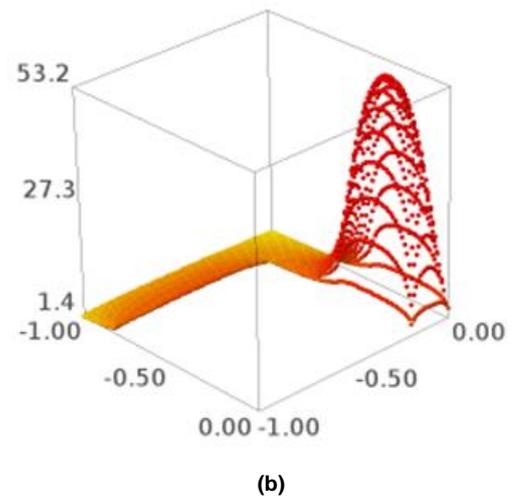
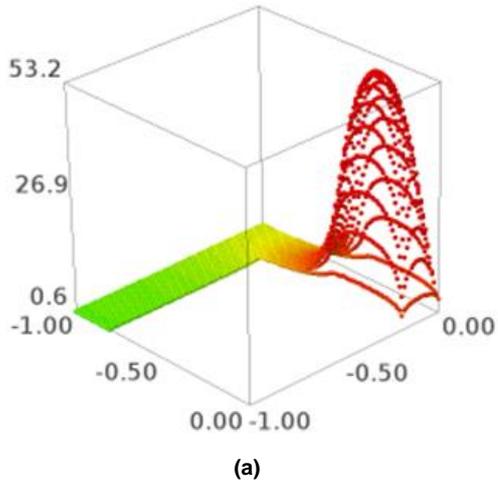


Figura 85. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{23344} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{2795} .

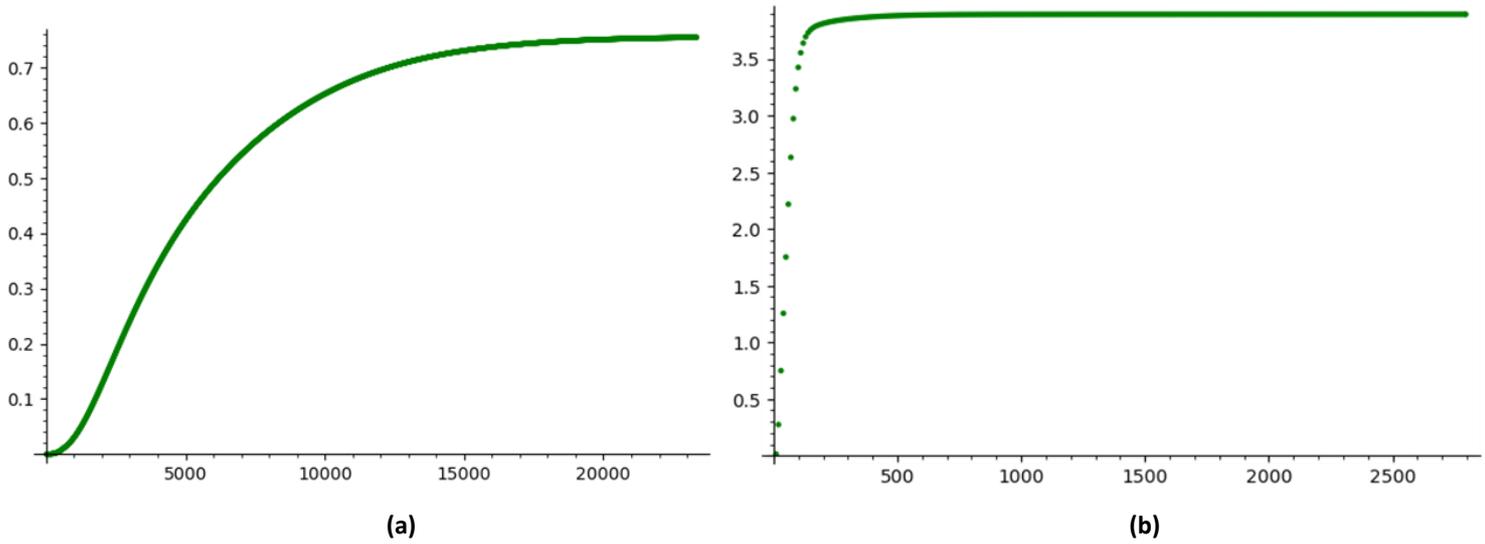


Figura 86. (a) Malha 80 x 80. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

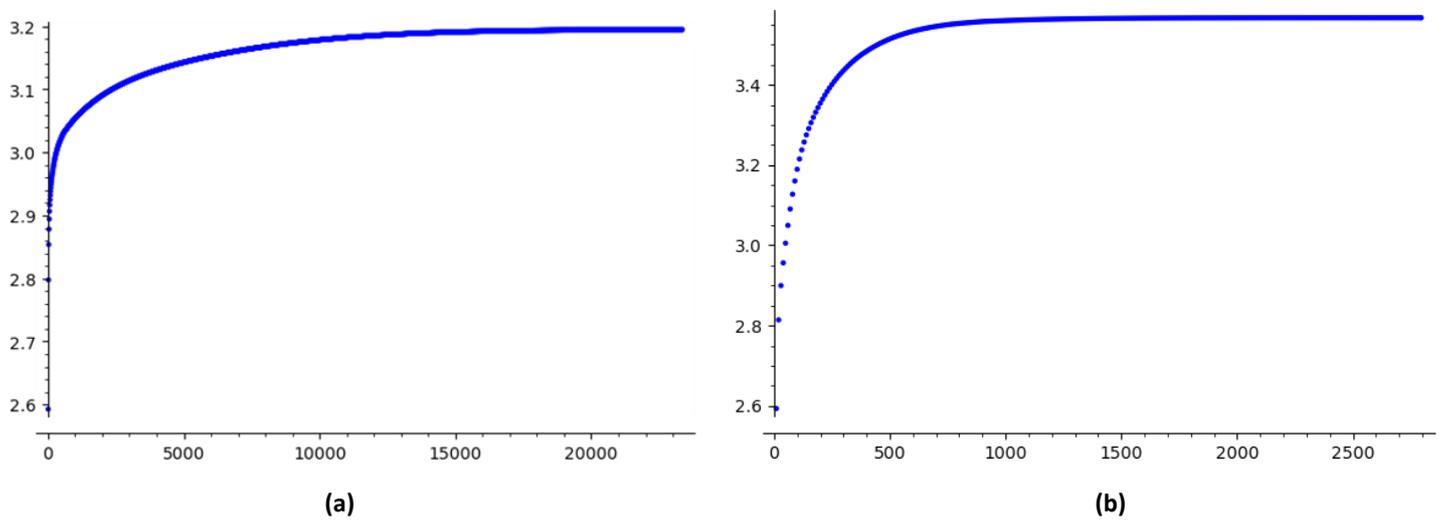
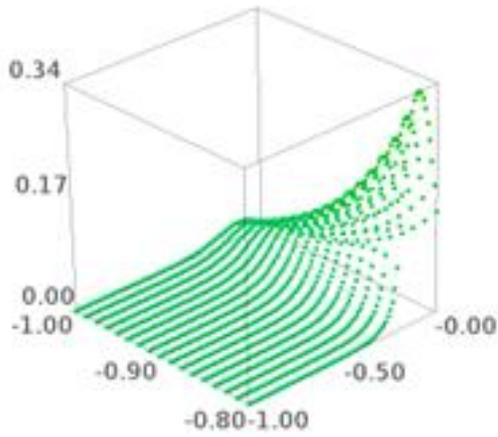
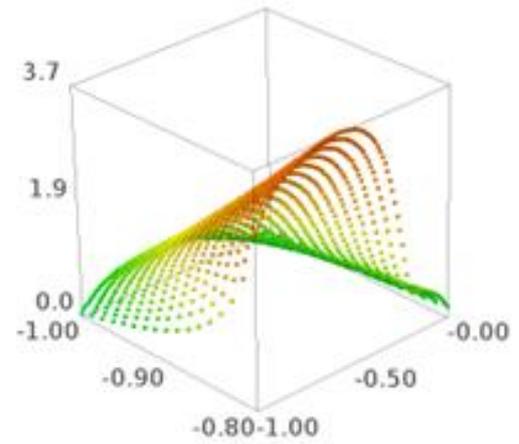


Figura 87. (a) Malha 80 x 80. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 88 a 101 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 3000$.

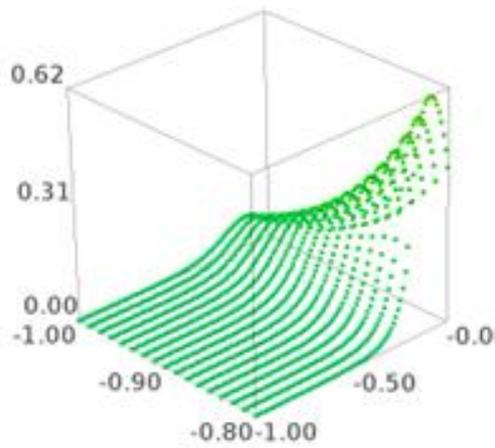


(a)

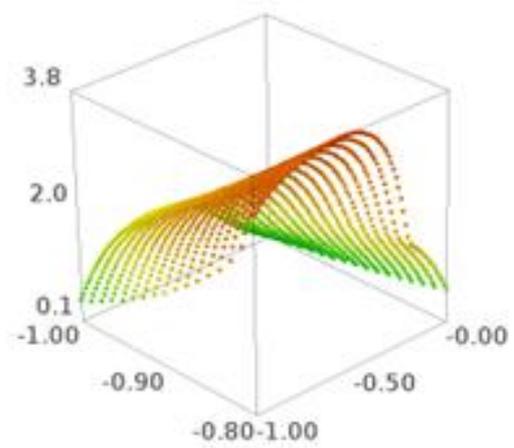


(b)

Figura 88. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

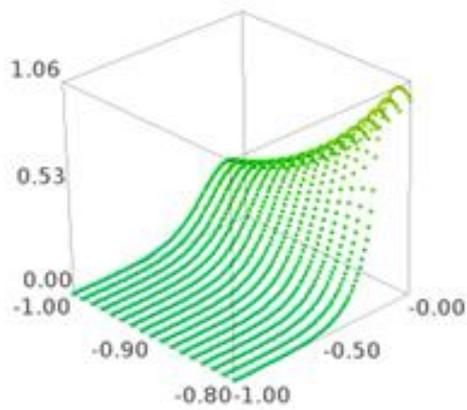


(a)

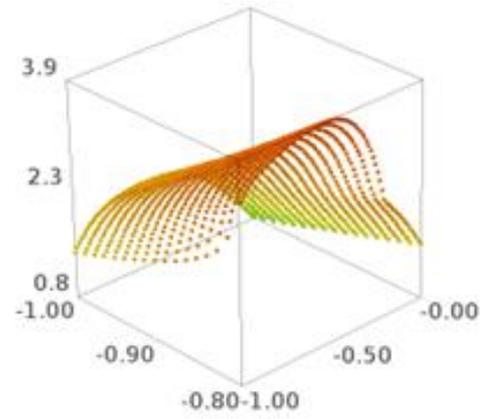


(b)

Figura 89. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

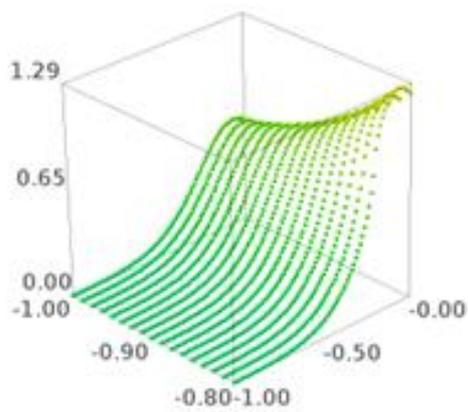


(a)

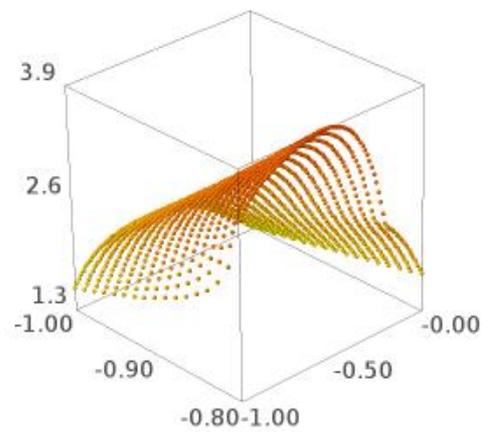


(b)

Figura 90. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

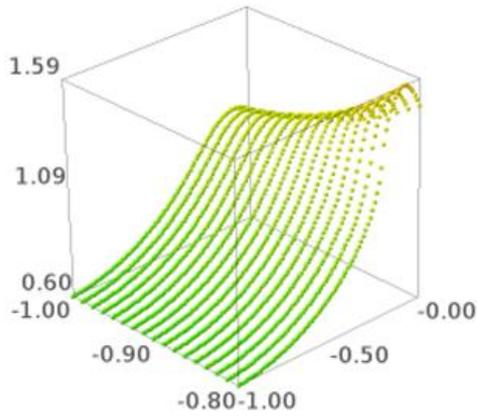


(a)

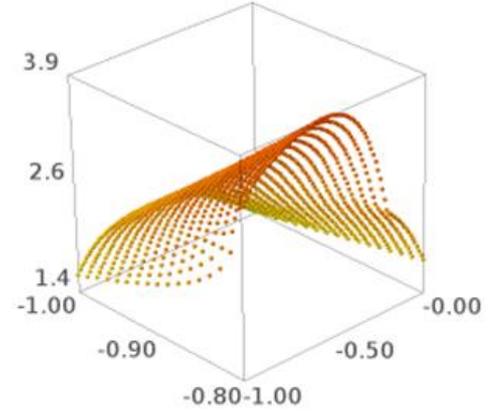


(b)

Figura 91. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

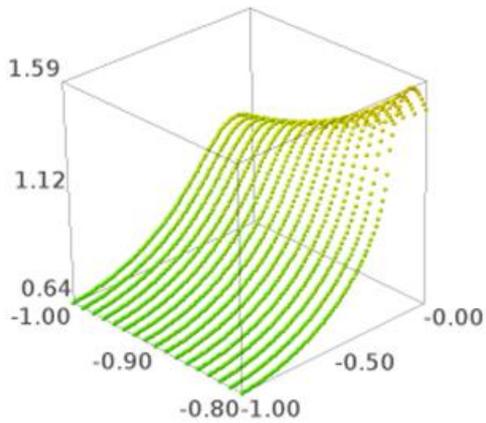


(a)

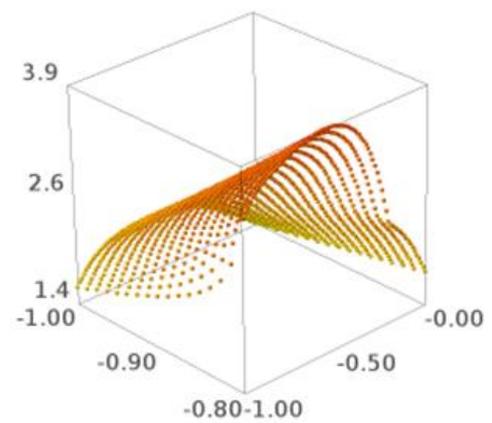


(b)

Figura 92. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{12000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2000} , com os efeitos da não convexidade.

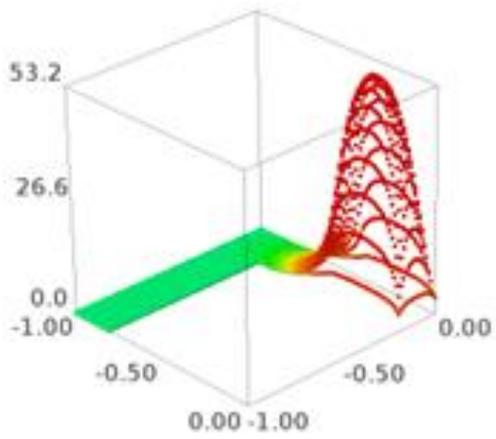


(a)

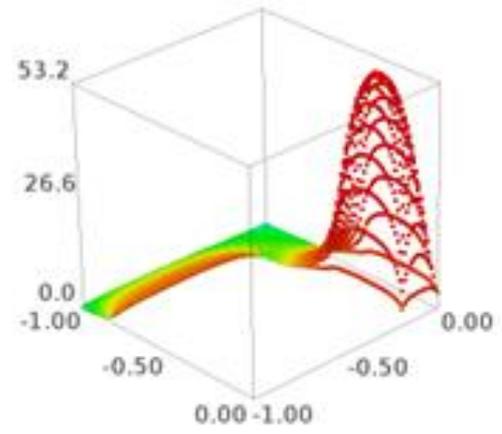


(b)

Figura 93. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{19915} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2275} , com os efeitos da não convexidade.

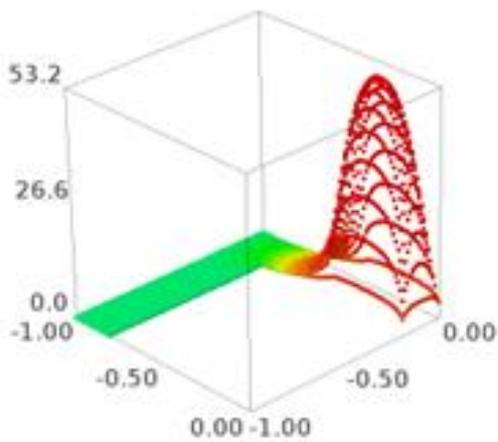


(a)

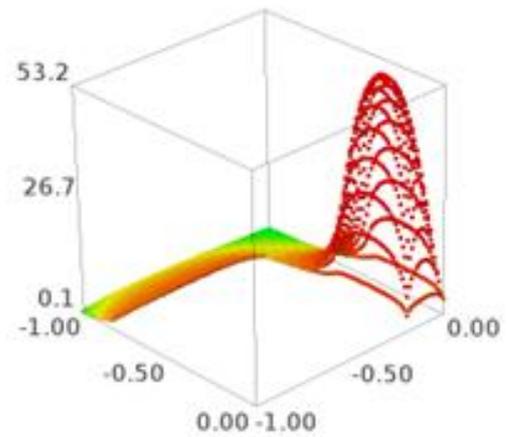


(b)

Figura 94. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .



(a)



(b)

Figura 95. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

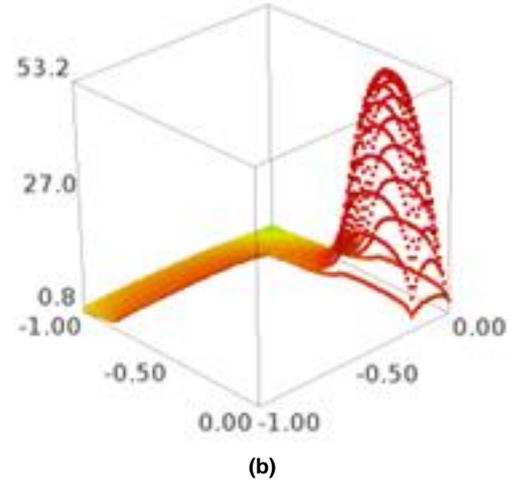
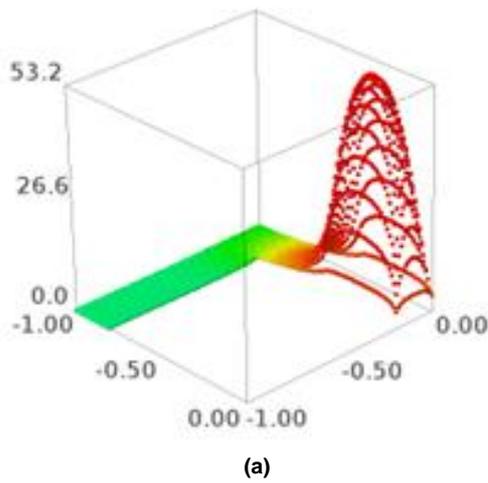


Figura 96. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

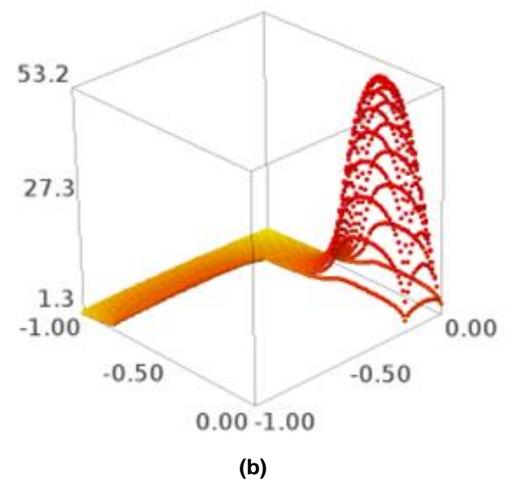
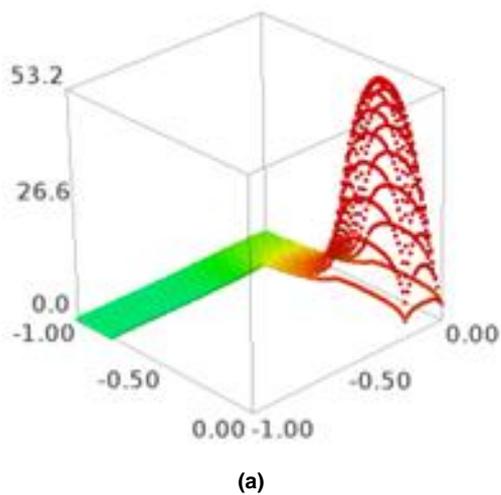


Figura 97. Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .

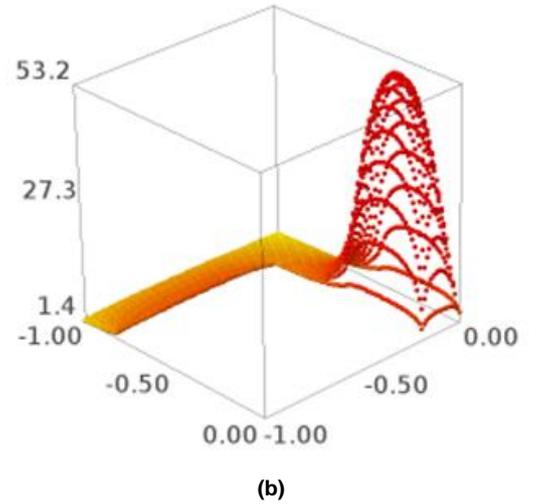
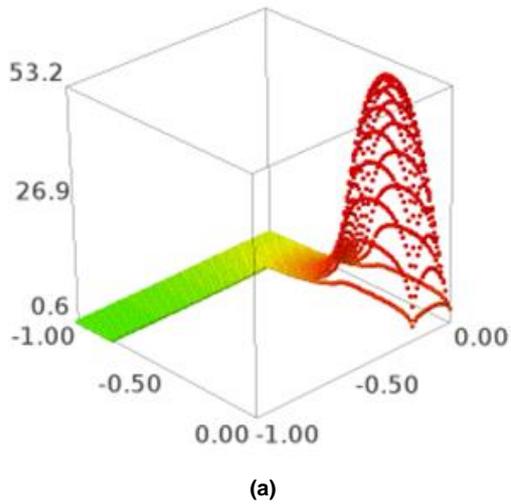


Figura 98. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{12000} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{2000} .

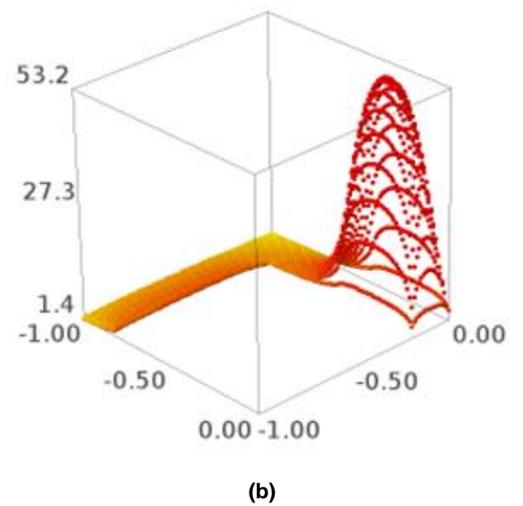
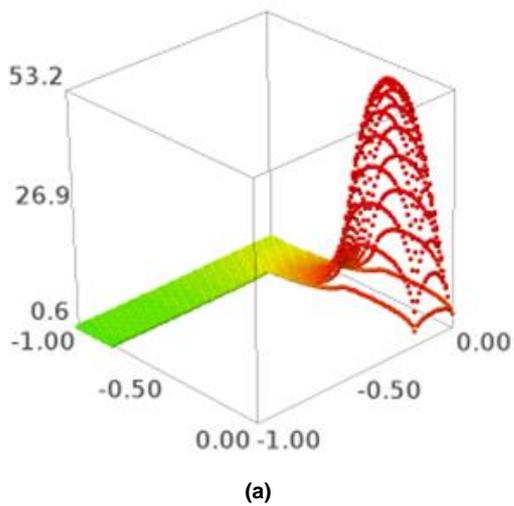


Figura 99. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{19915} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{2275} .

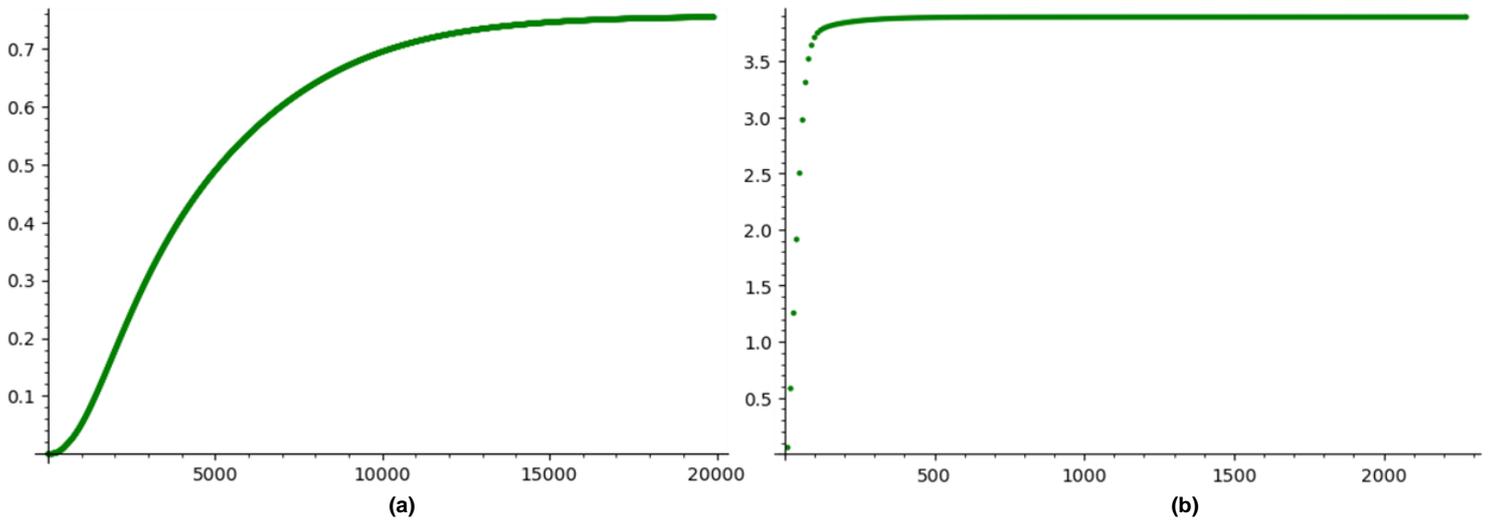


Figura 100. (a) Malha 80 x 80. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

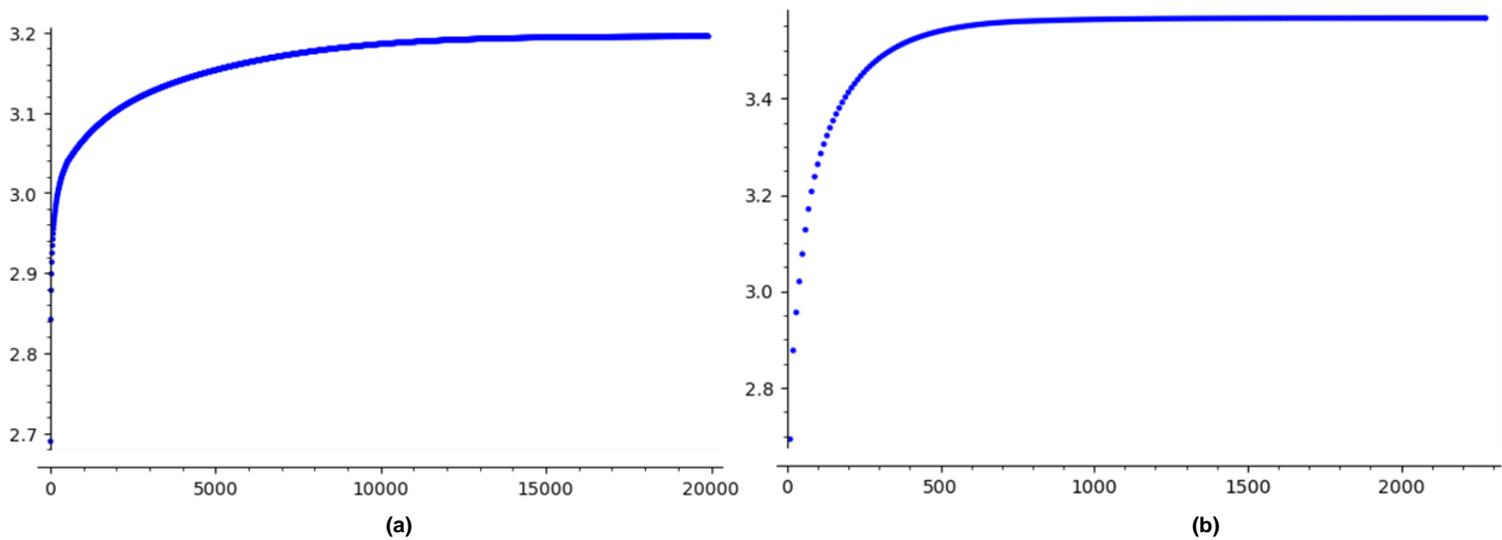


Figura 101. (a) Malha 80 x 80. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 101 a 113 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 2000$.

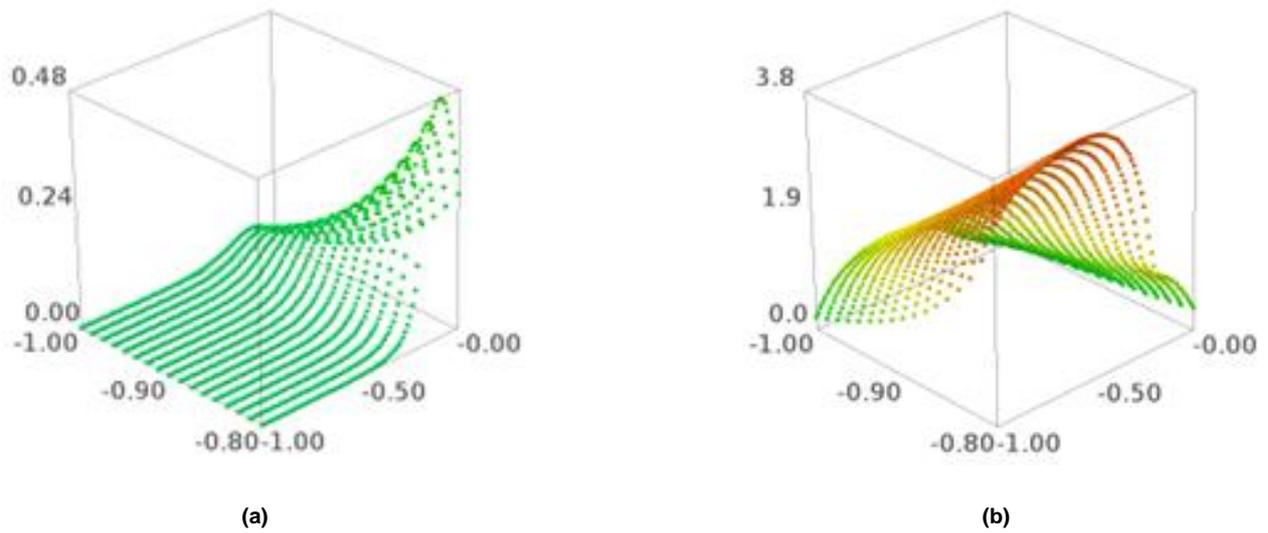


Figura 102. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

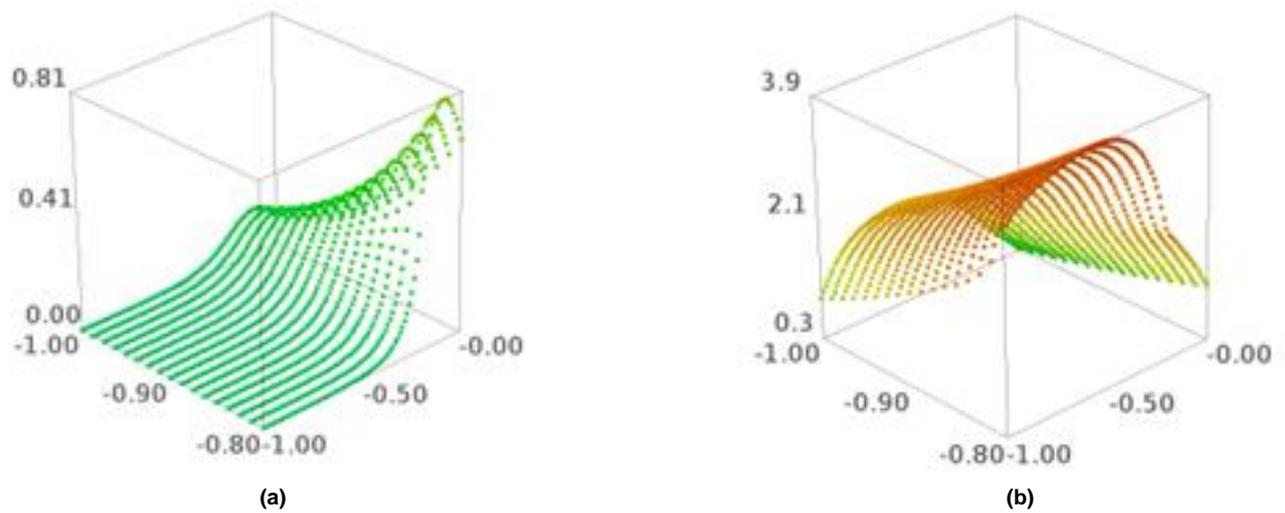
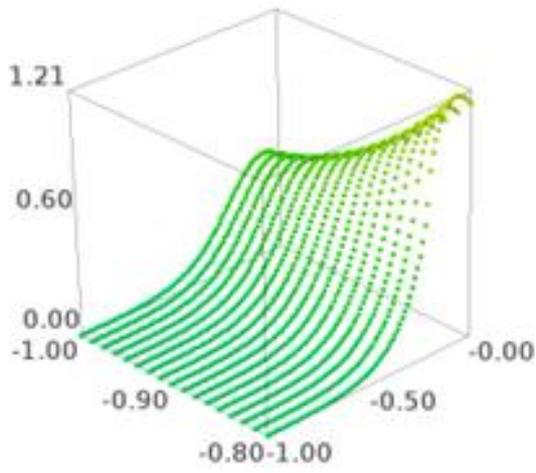
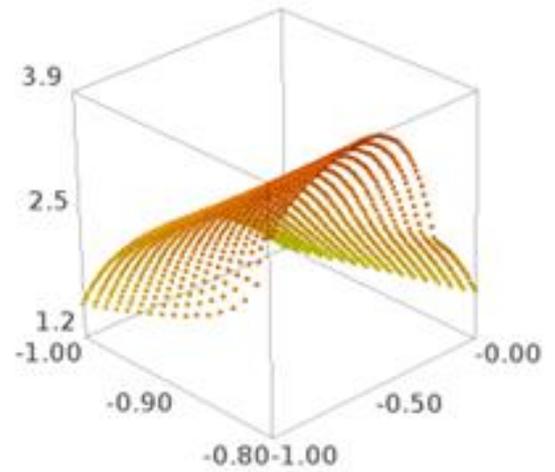


Figura 103. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

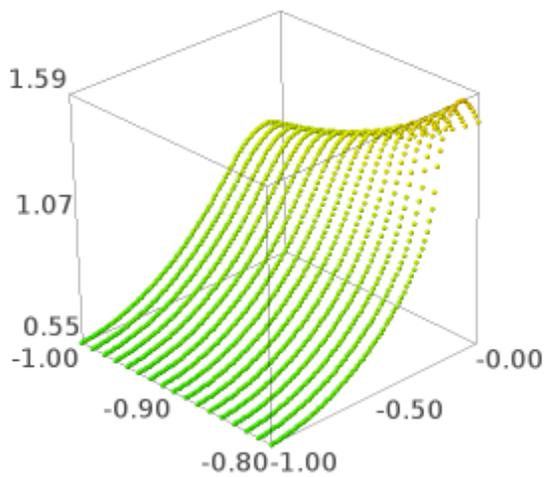


(a)

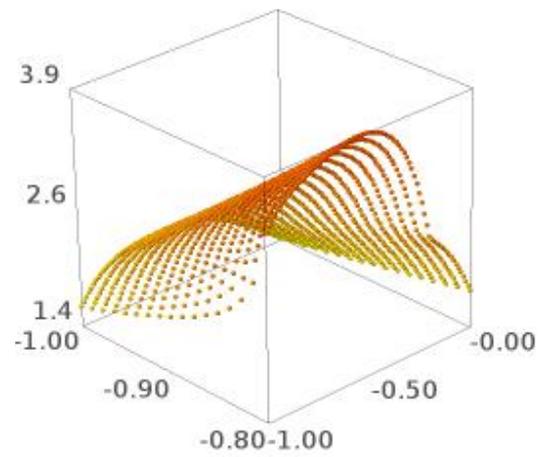


(b)

Figura 104. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.



(a)



(b)

Figura 105. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{8000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

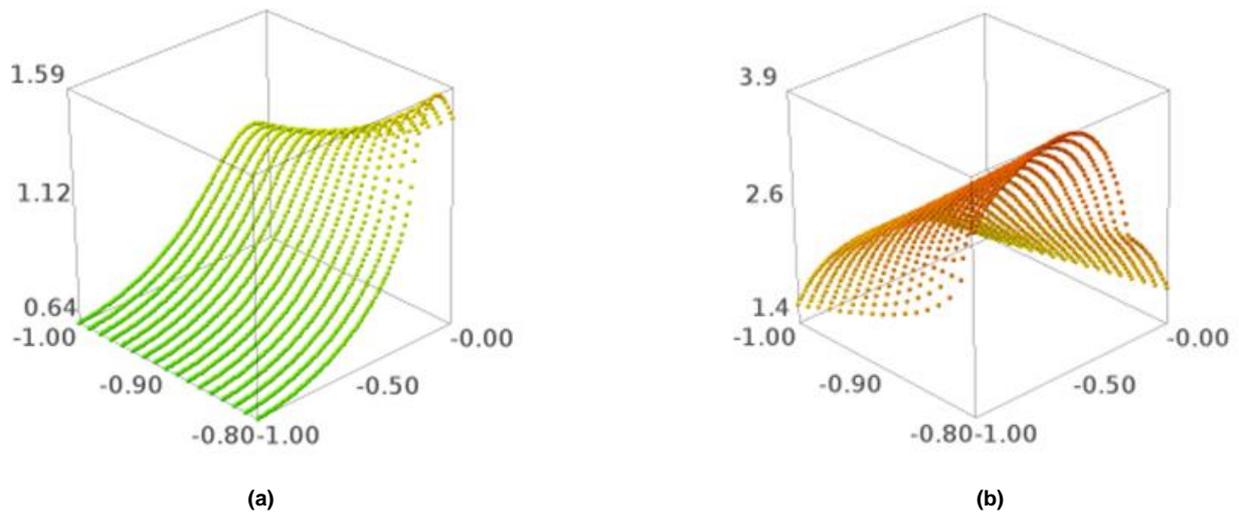


Figura 106. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{16300} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1746} , com os efeitos da não convexidade.

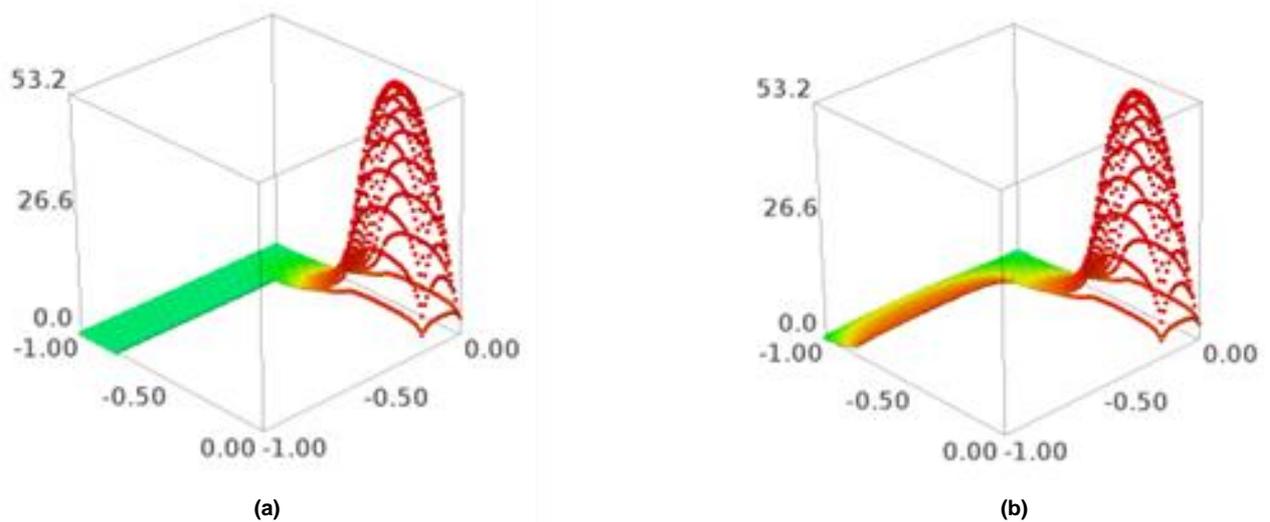
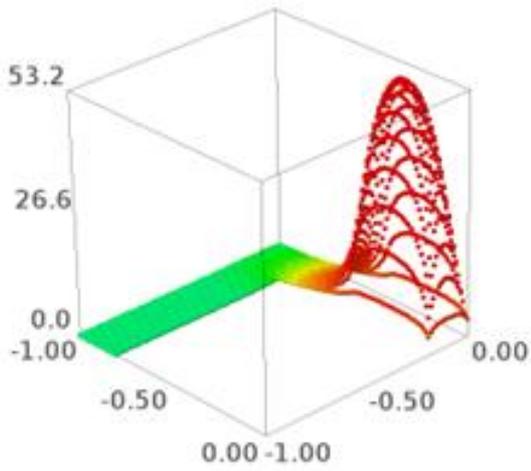
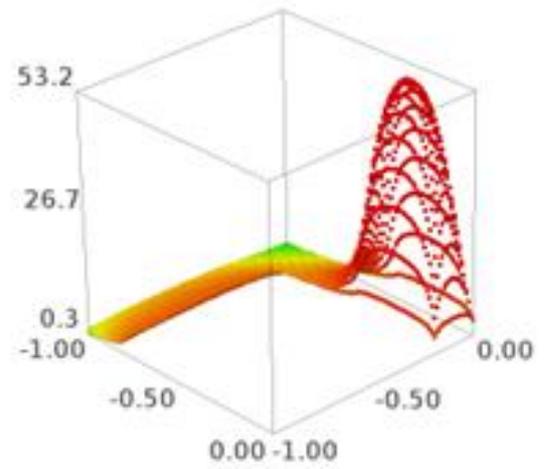


Figura 107. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

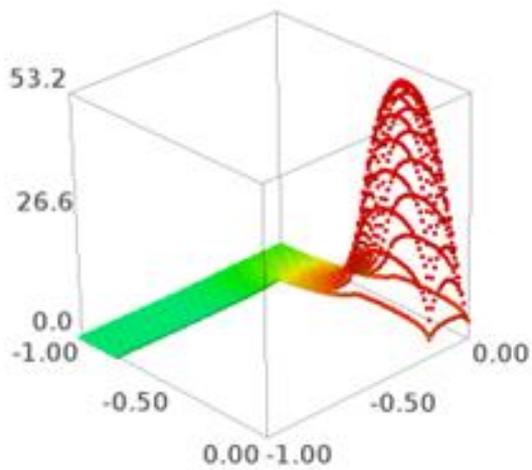


(a)

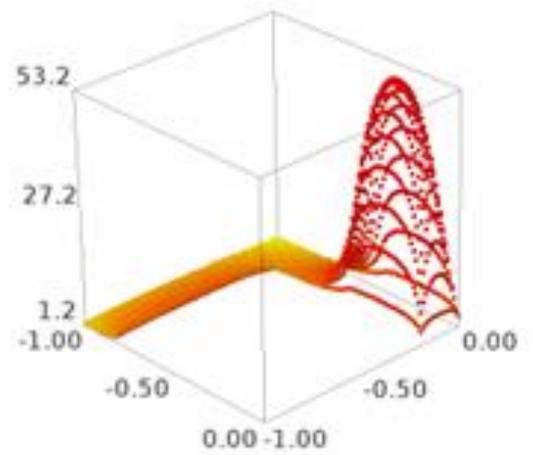


(b)

Figura 108. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

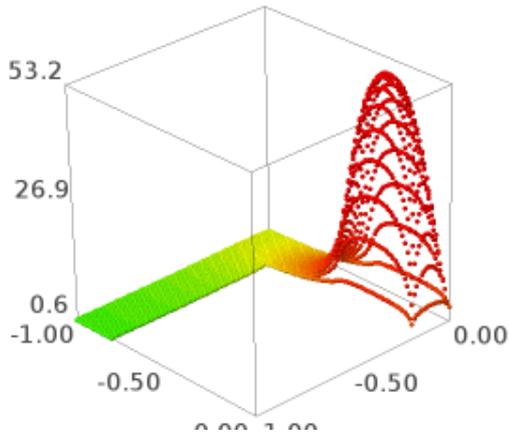


(a)

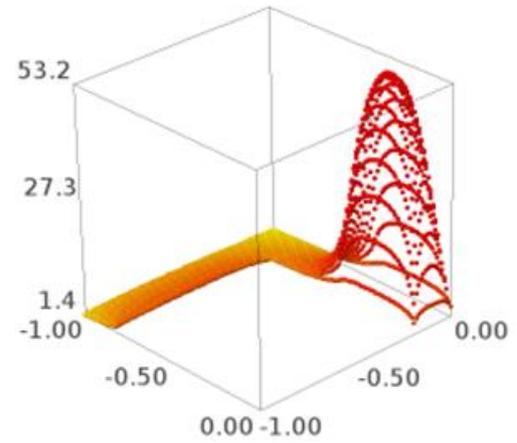


(b)

Figura 109. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

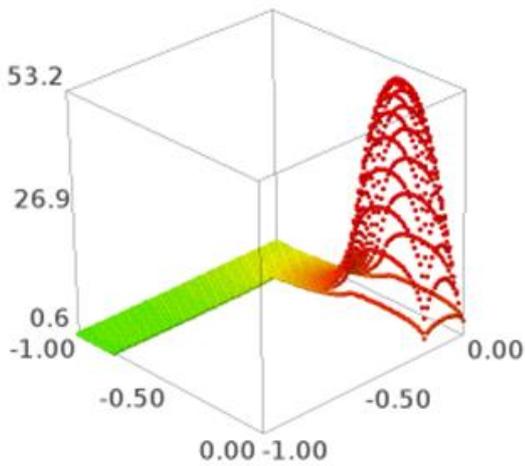


(a)

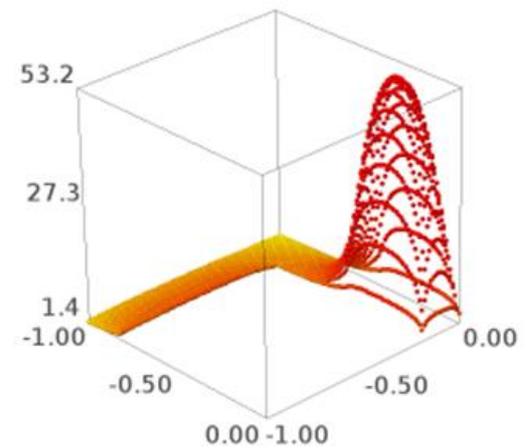


(b)

Figura 110. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{8000} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .



(a)



(b)

Figura 111. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{16300} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1746} .

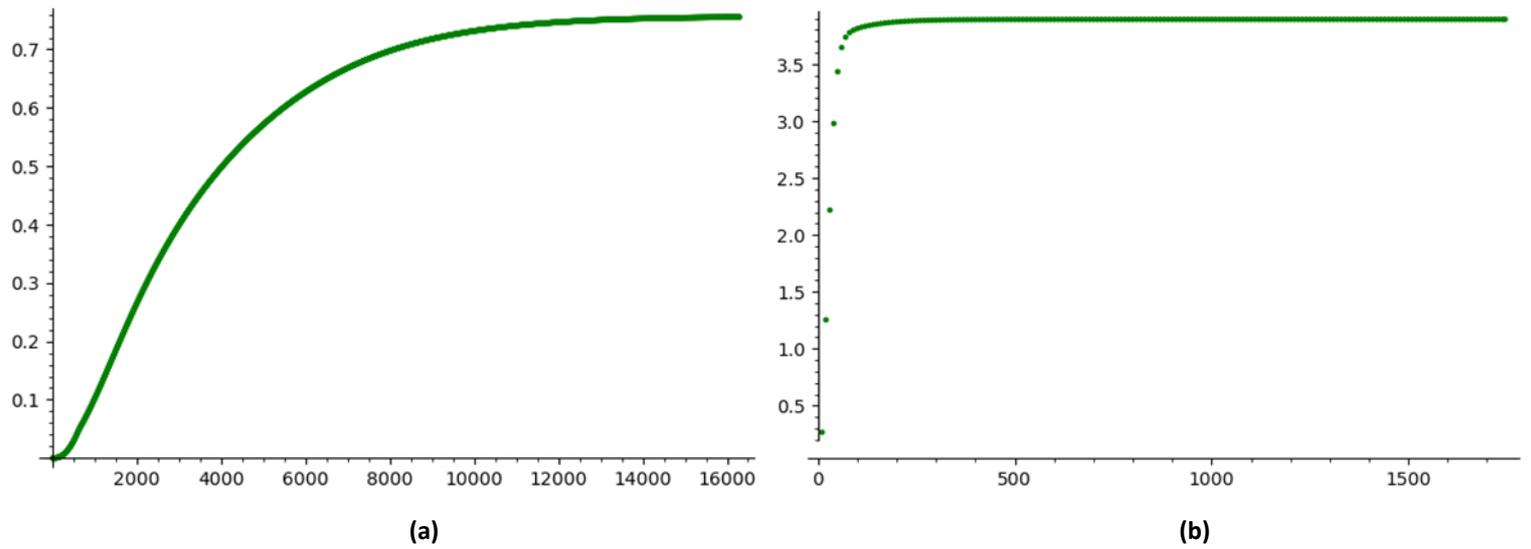


Figura 112. (a) Malha 80 x 80. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

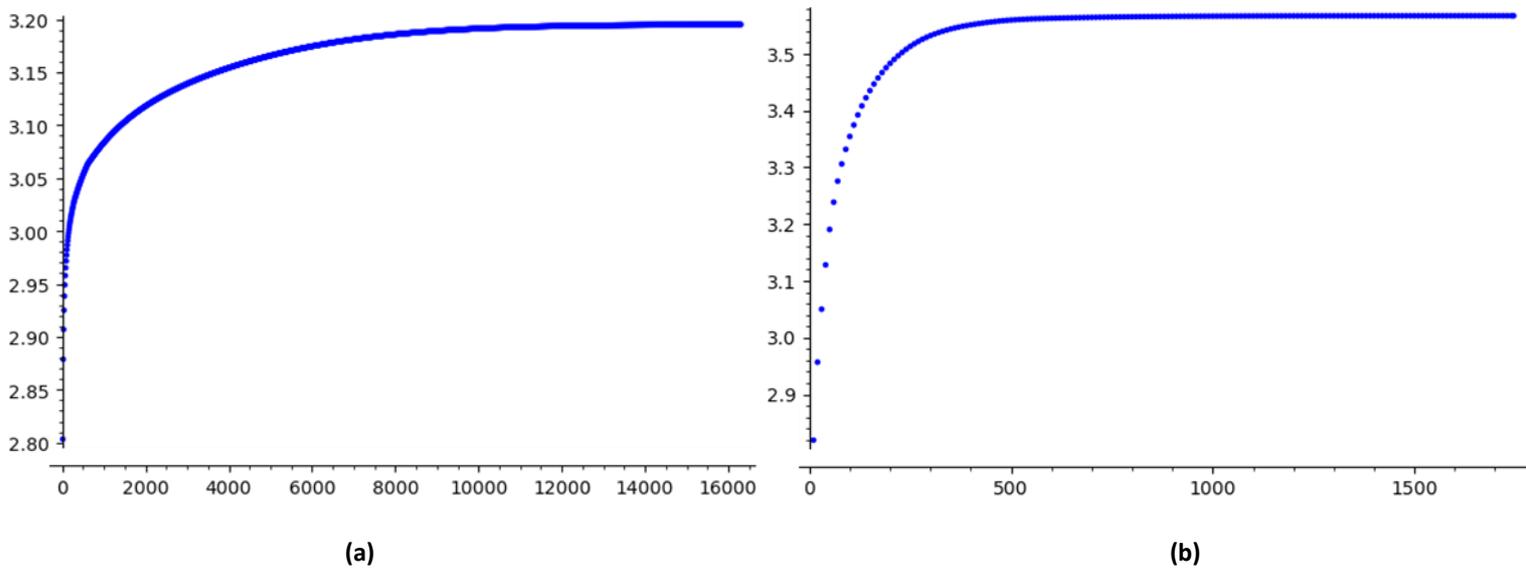


Figura 113. (a) Malha 80 x 80. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 114 a 125 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 1000$.

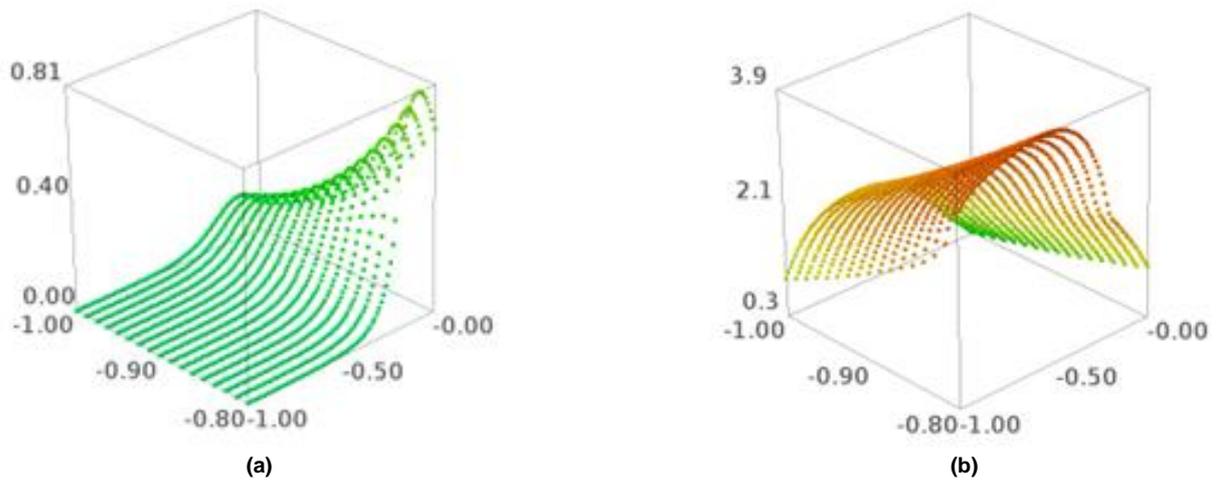


Figura 114. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

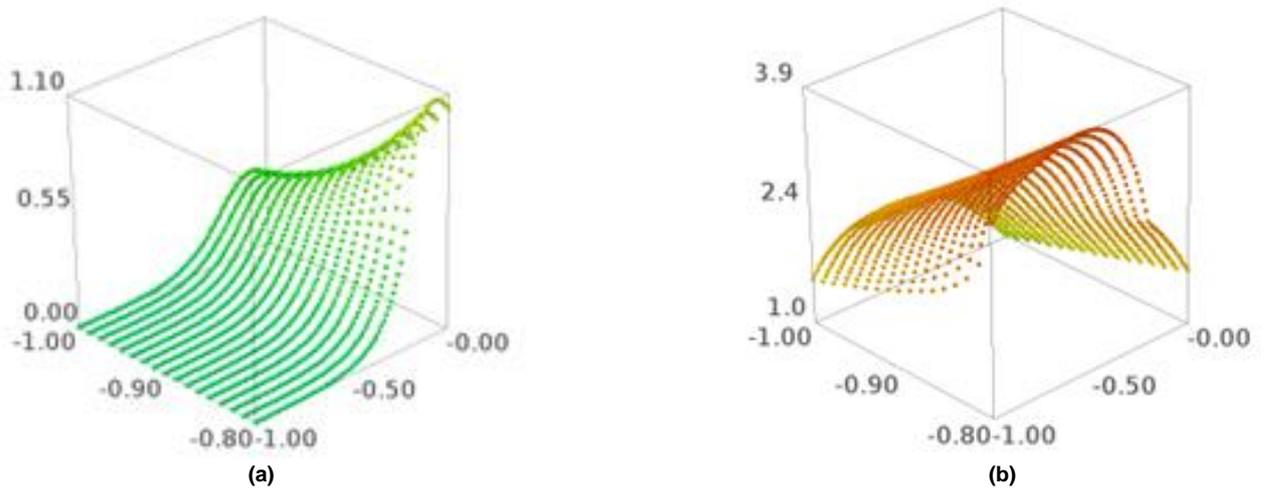


Figura 115. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

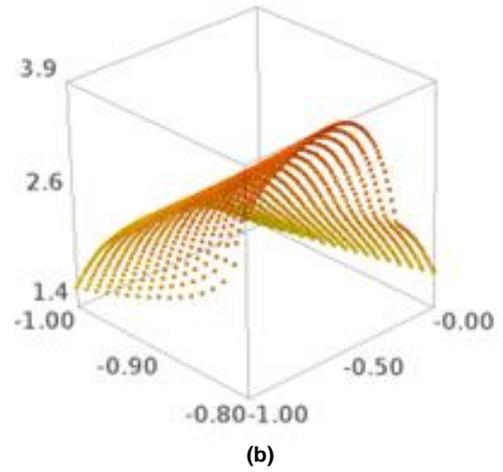
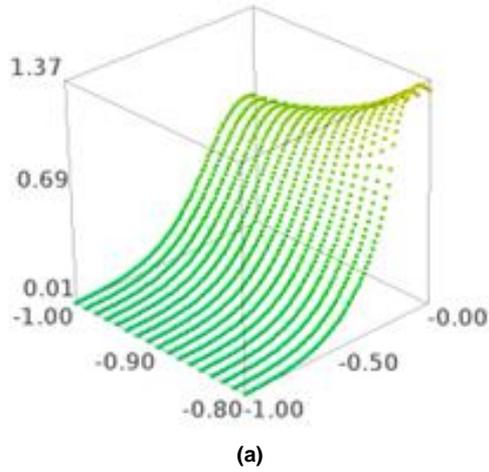


Figura 116. Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

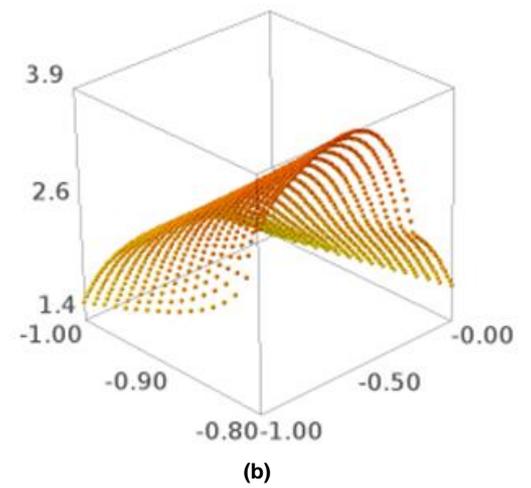
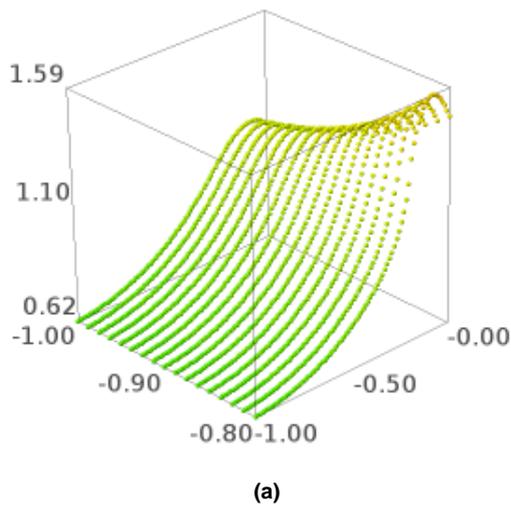


Figura 117. Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{8000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

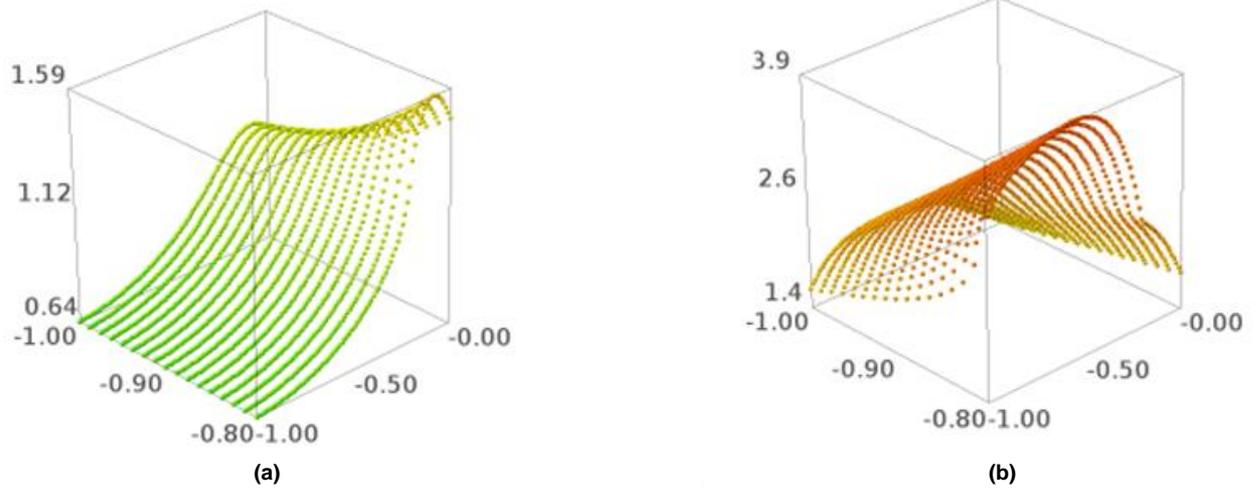


Figura 118. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{12557} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1251} , com os efeitos da não convexidade.

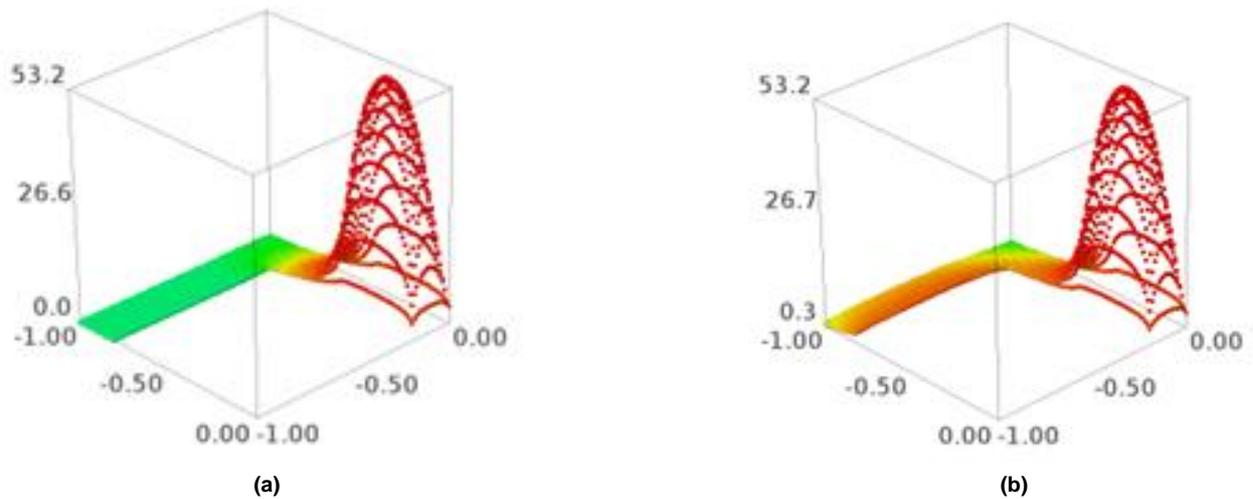
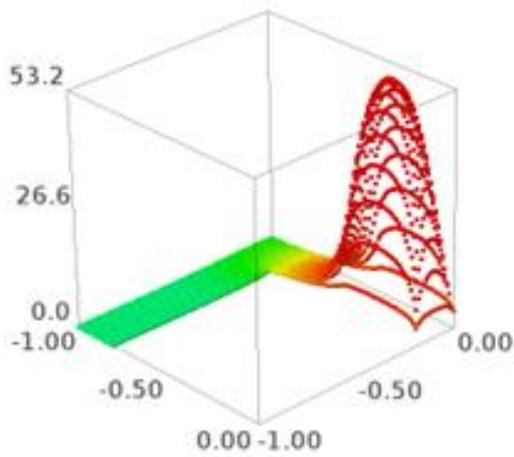
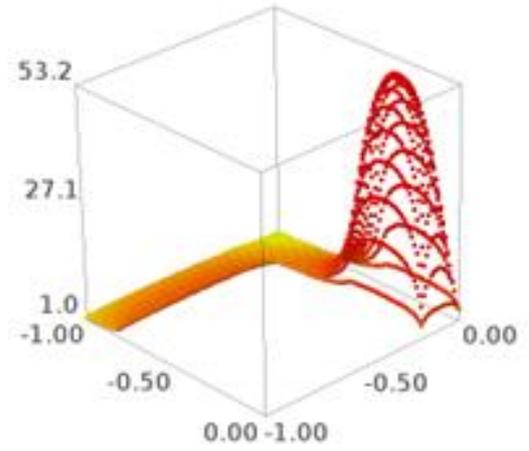


Figura 119. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

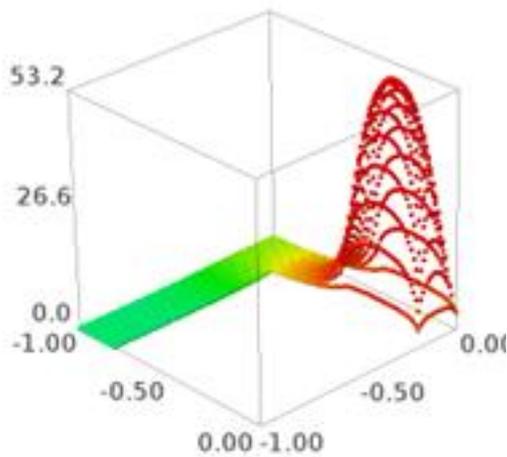


(a)

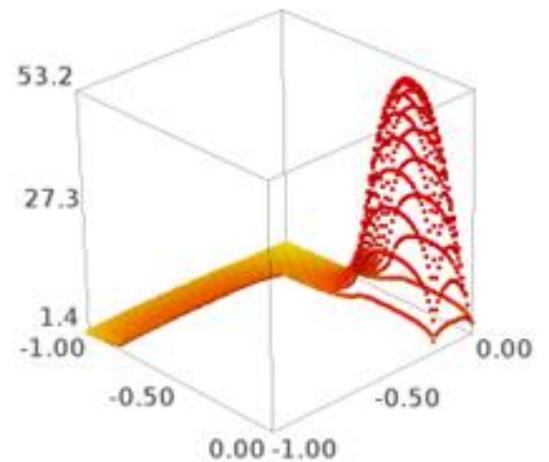


(b)

Figura 120. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

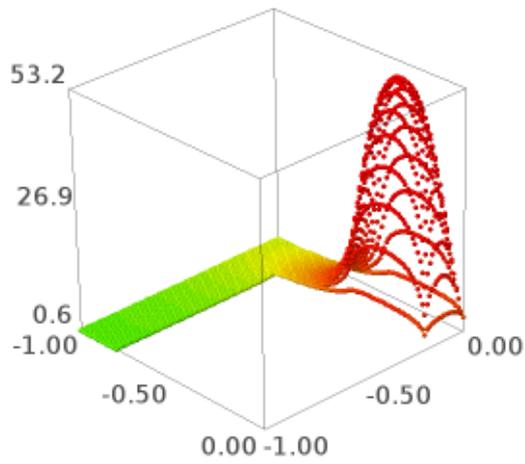


(a)

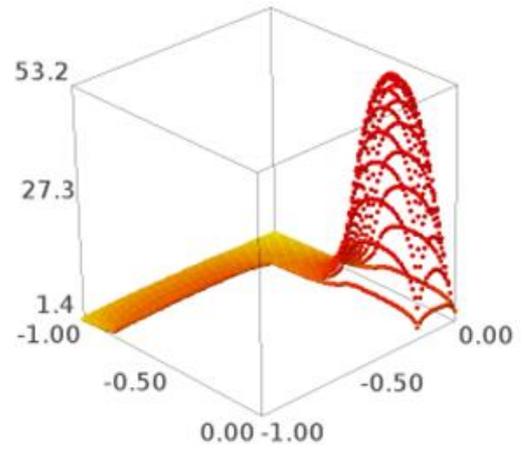


(b)

Figura 121. Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

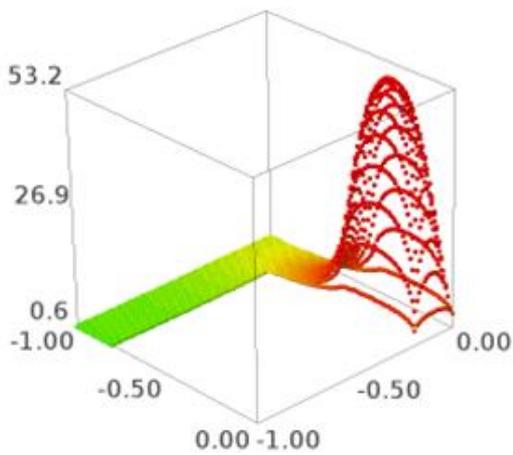


(a)

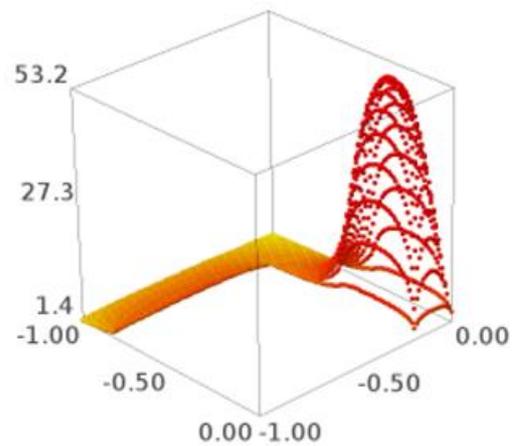


(b)

Figura 122. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{8000} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .



(a)



(b)

Figura 123. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{12557} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1251} .

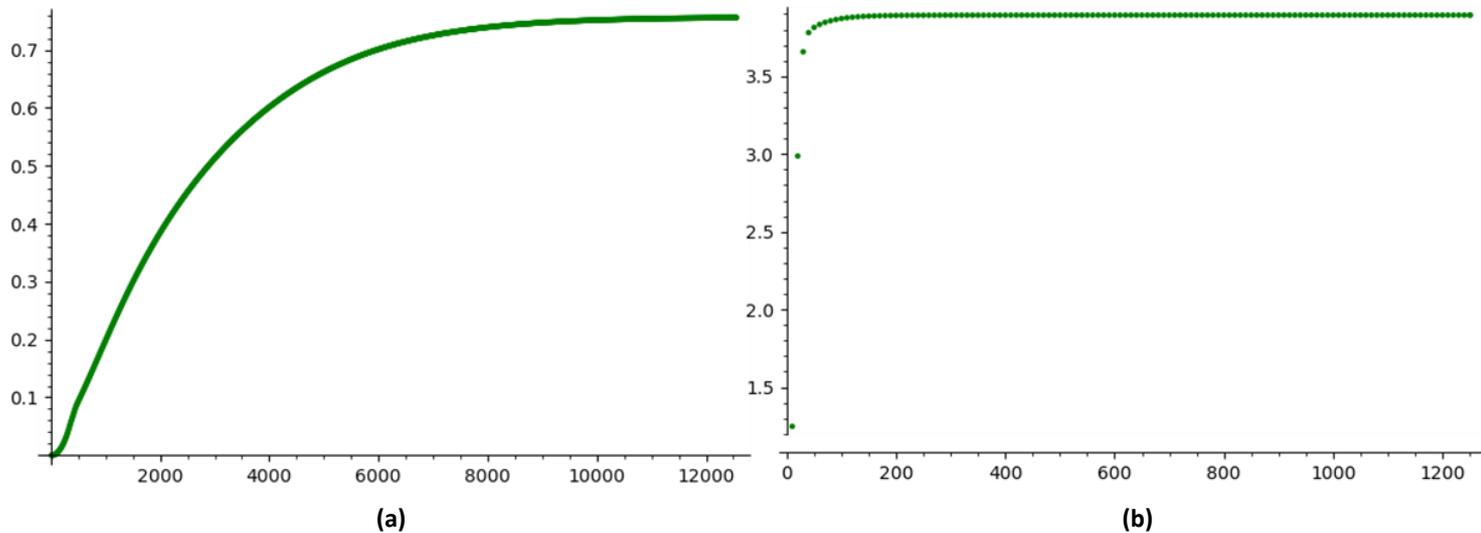


Figura 124. (a) Malha 80 x 80. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

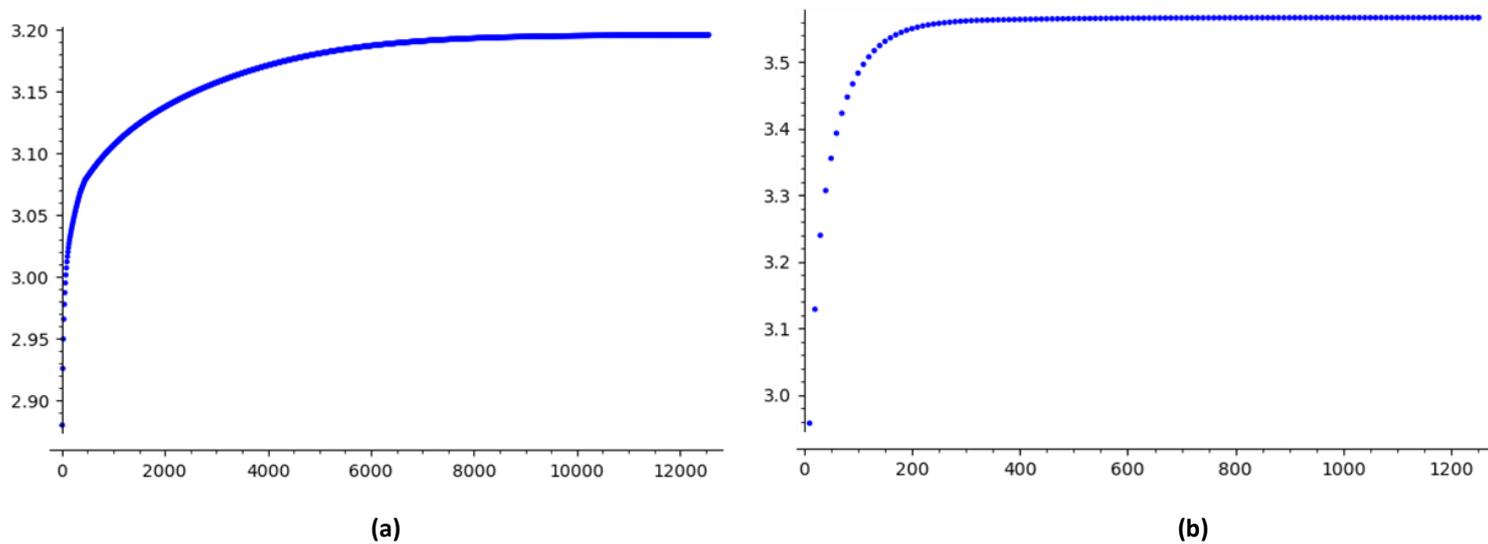
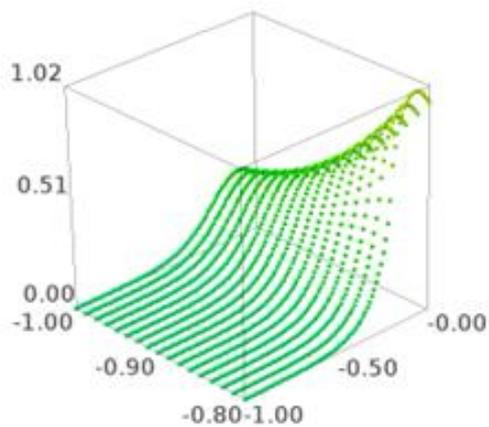
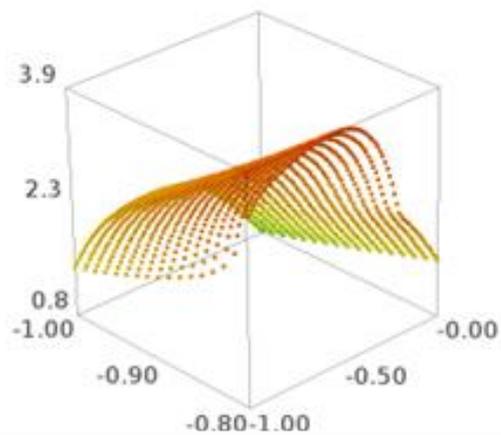


Figura 125. Malha 80 x 80. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 126 a 137 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 600$.

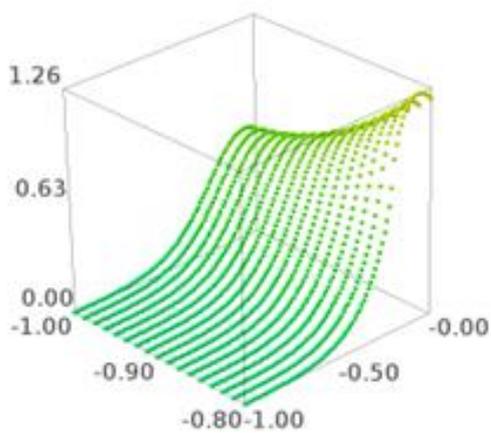


(a)

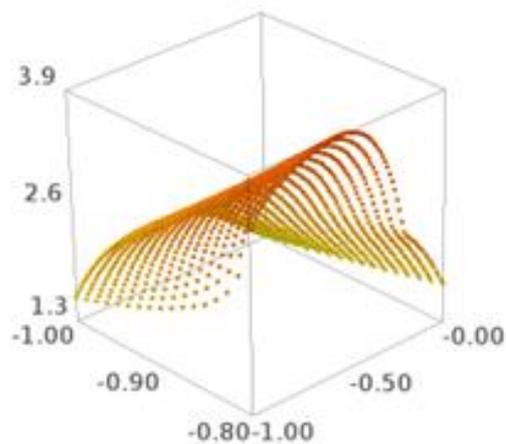


(b)

Figura 126. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

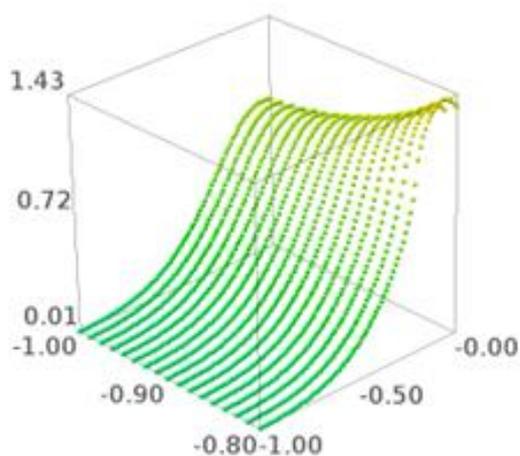


(a)

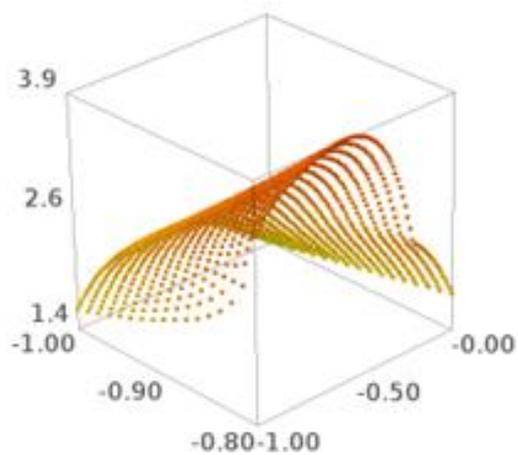


(b)

Figura 127. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

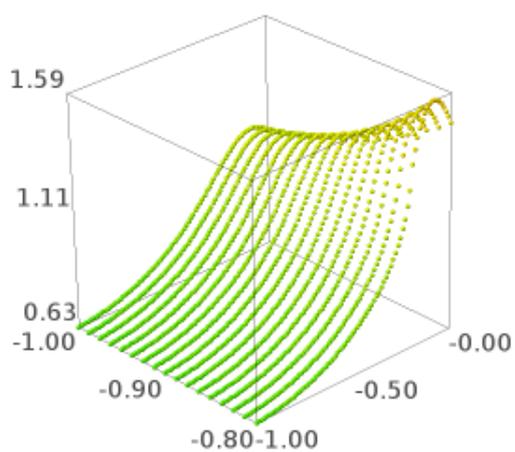


(a)

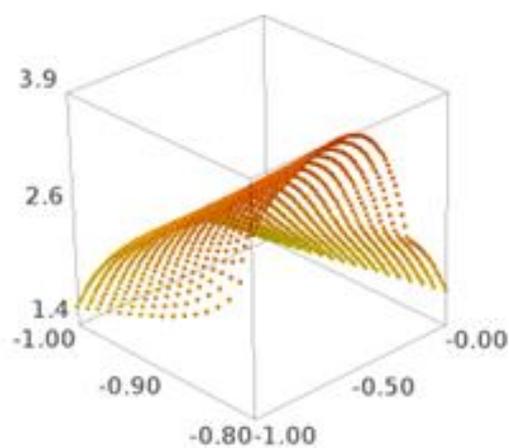


(b)

Figura 128. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.



(a)



(b)

Figura 129. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{8000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

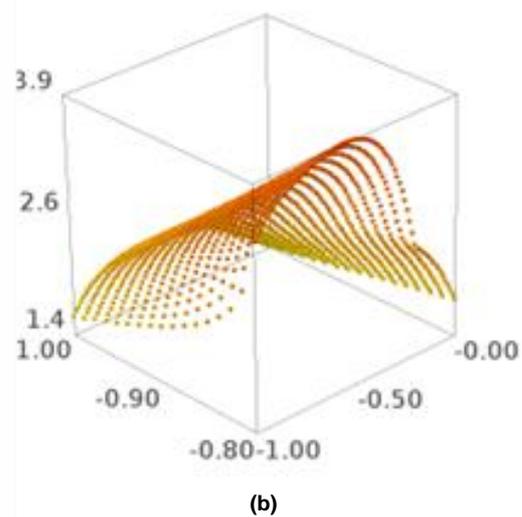
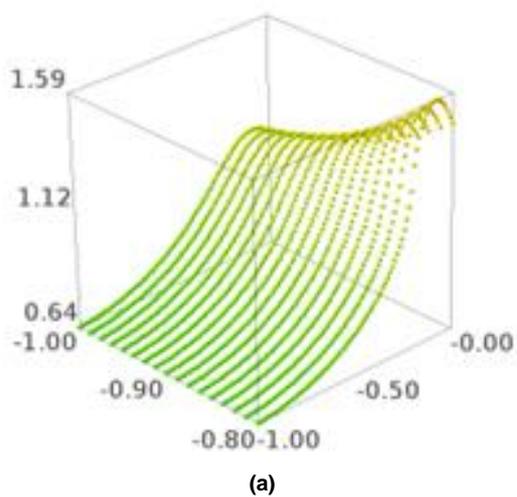


Figura 130. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{11024} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1061} , com os efeitos da não convexidade.

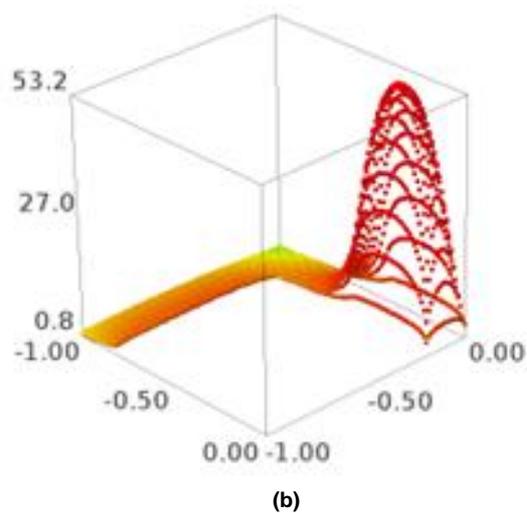
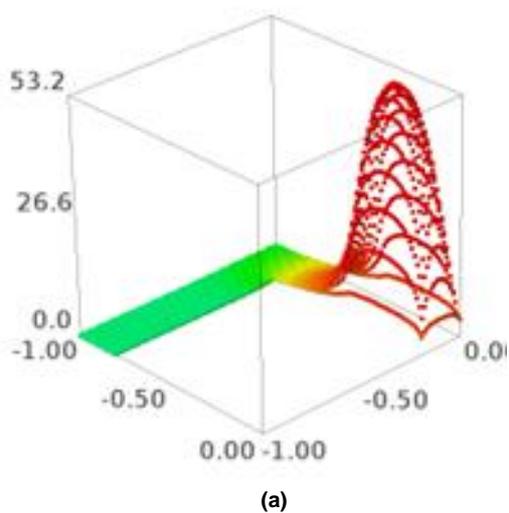


Figura 131. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

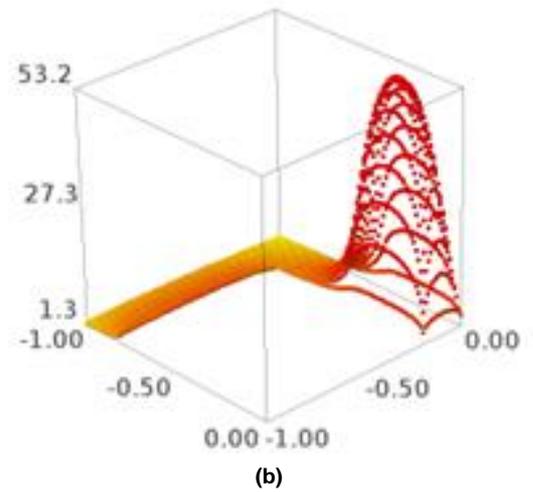
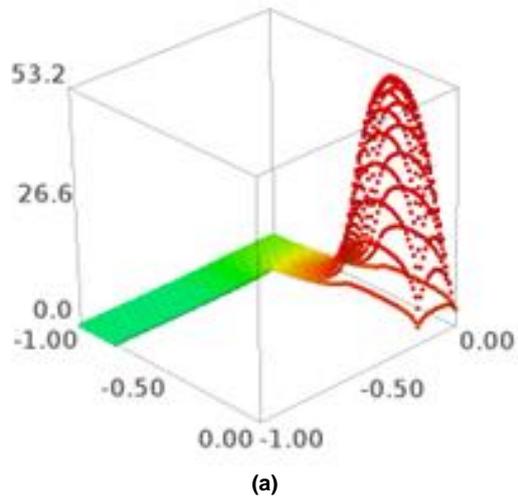


Figura 132. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

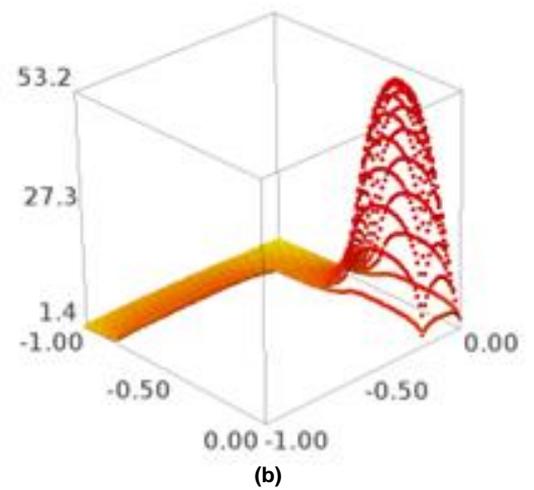
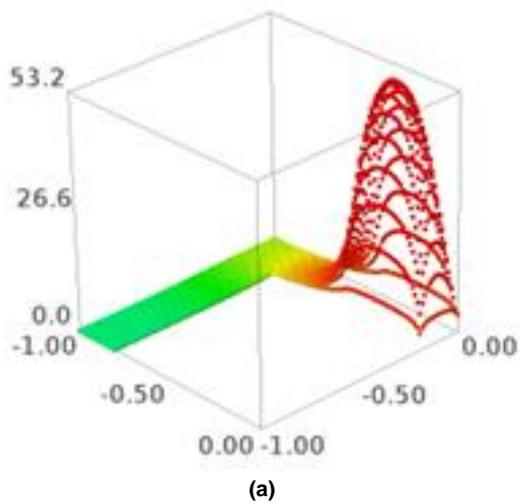
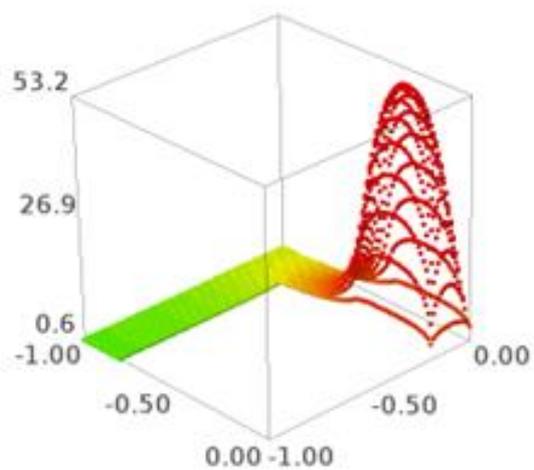
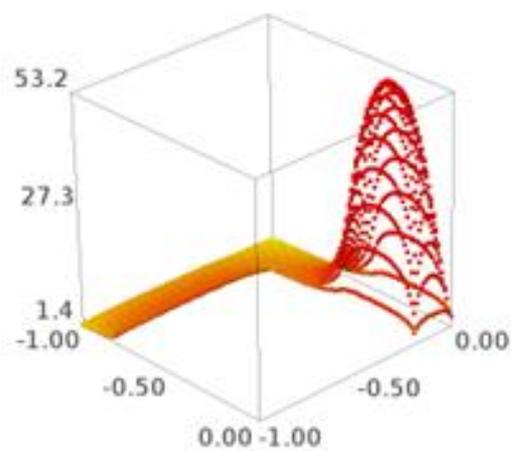


Figura 133. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

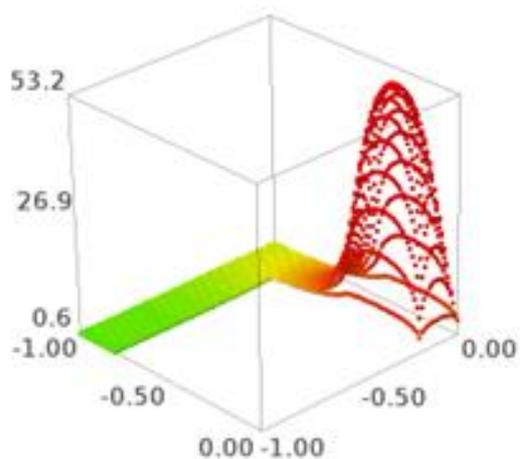


(a)

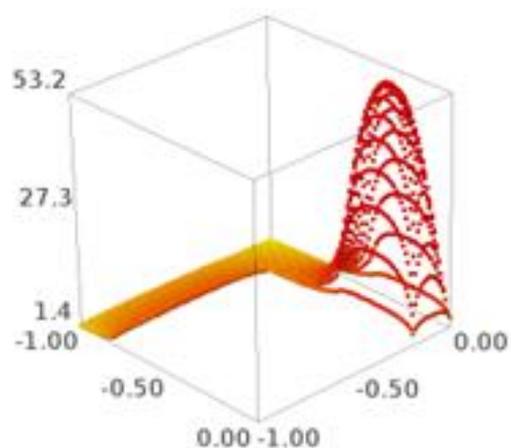


(b)

Figura 134. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{8000} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .



(a)



(b)

Figura 135. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{11024} . (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1061} .

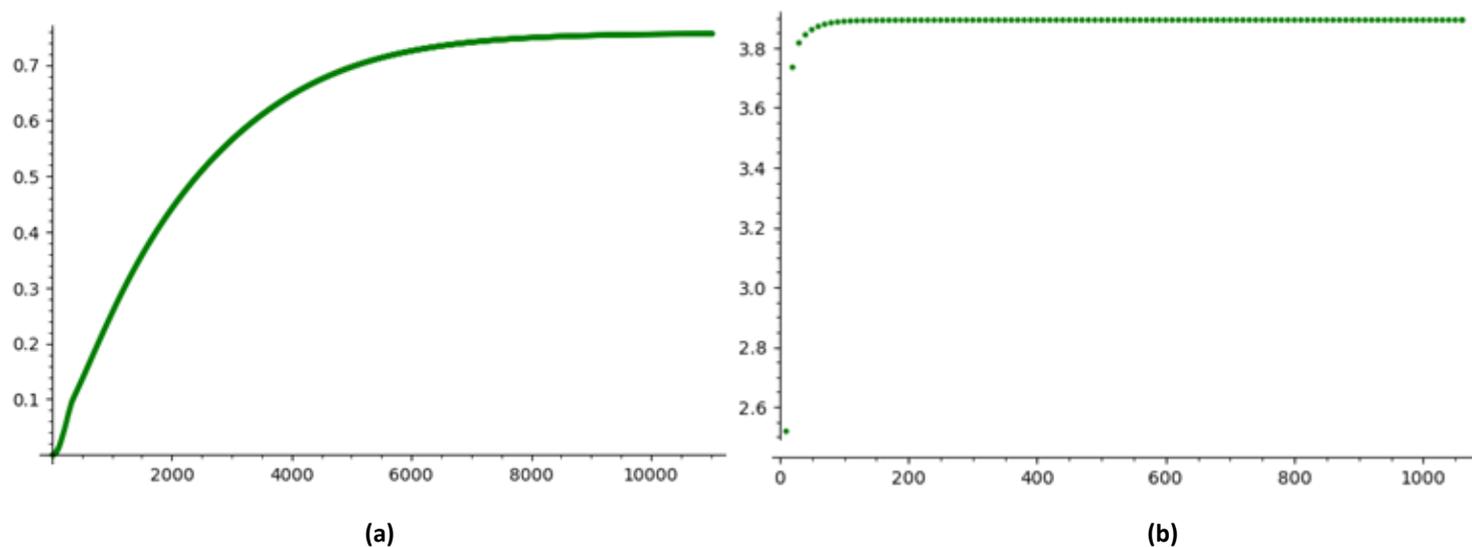


Figura 136. (a) Malha 80×80 . Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80×80 . Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

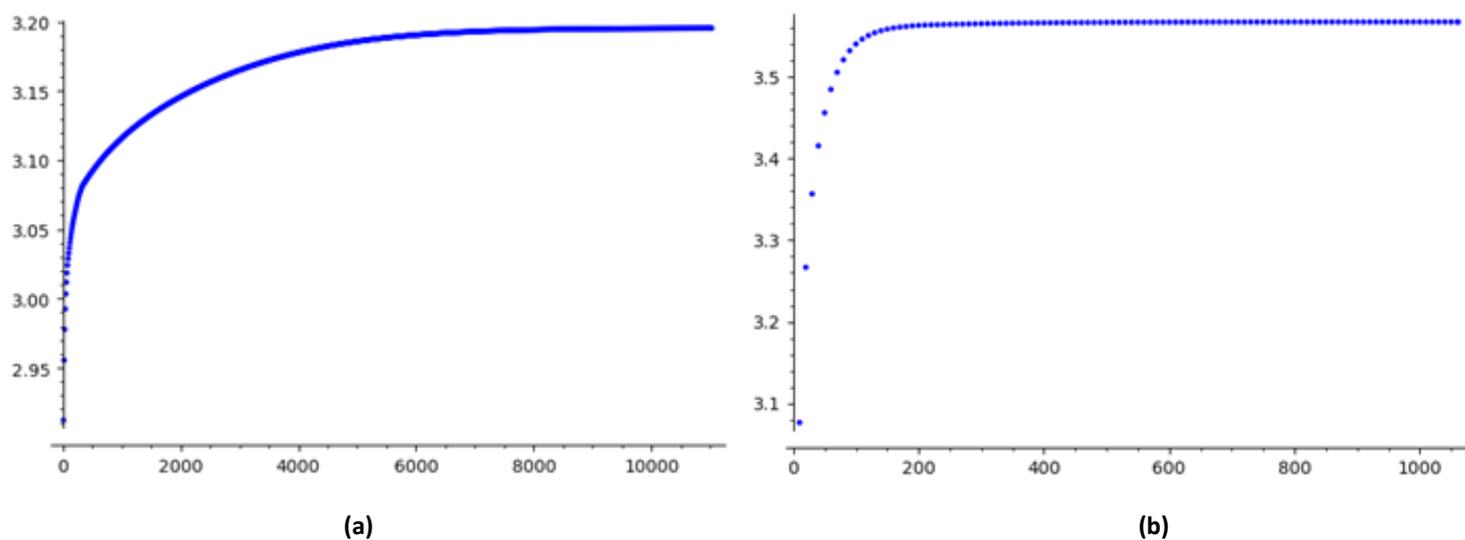


Figura 137. (a) Malha 80×80 . Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80×80 . Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 138 a 142 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 500$.

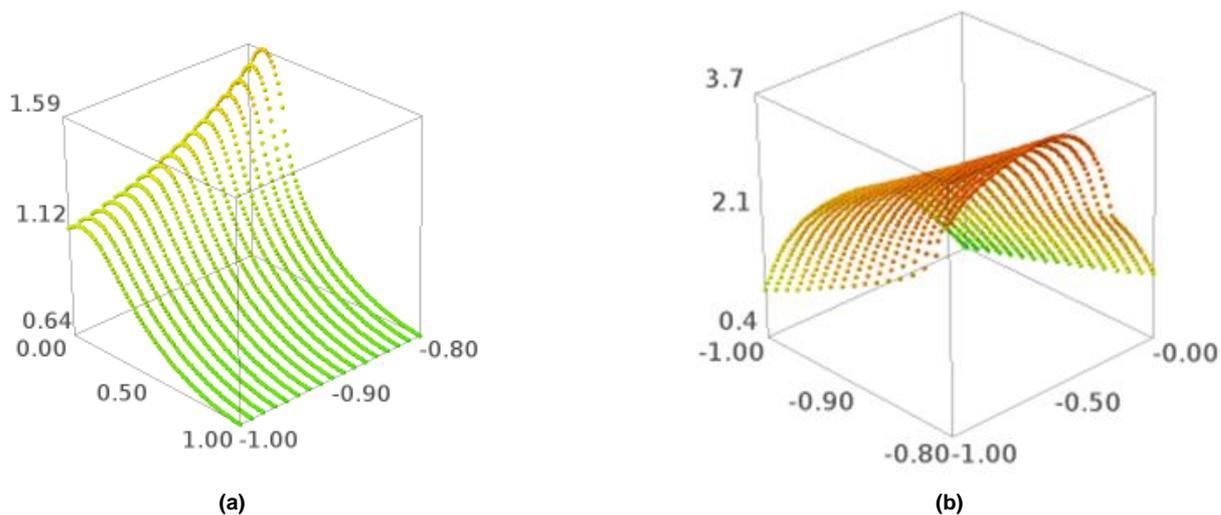


Figura 138. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2445} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

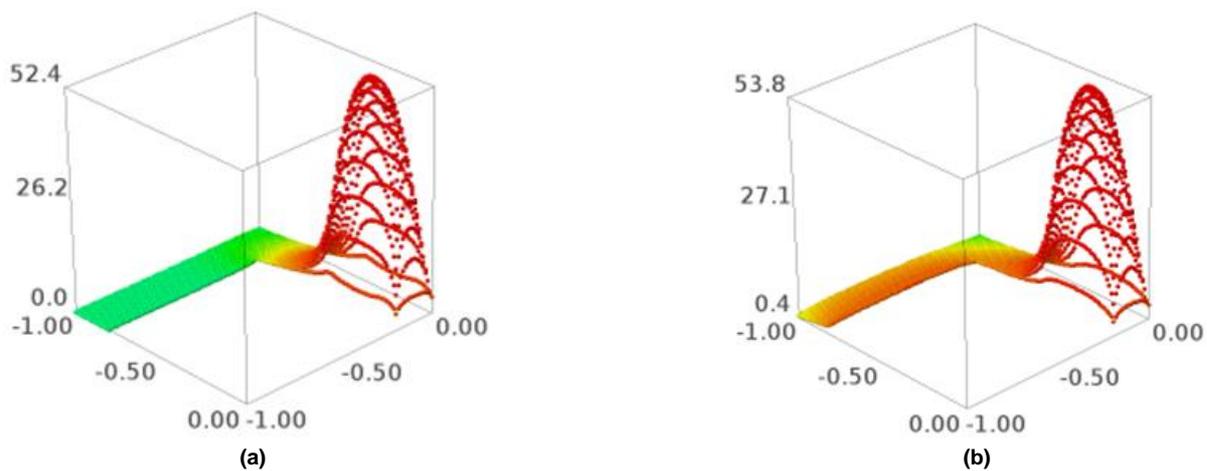


Figura 139. (a) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{165} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{162} , com os efeitos da não convexidade.

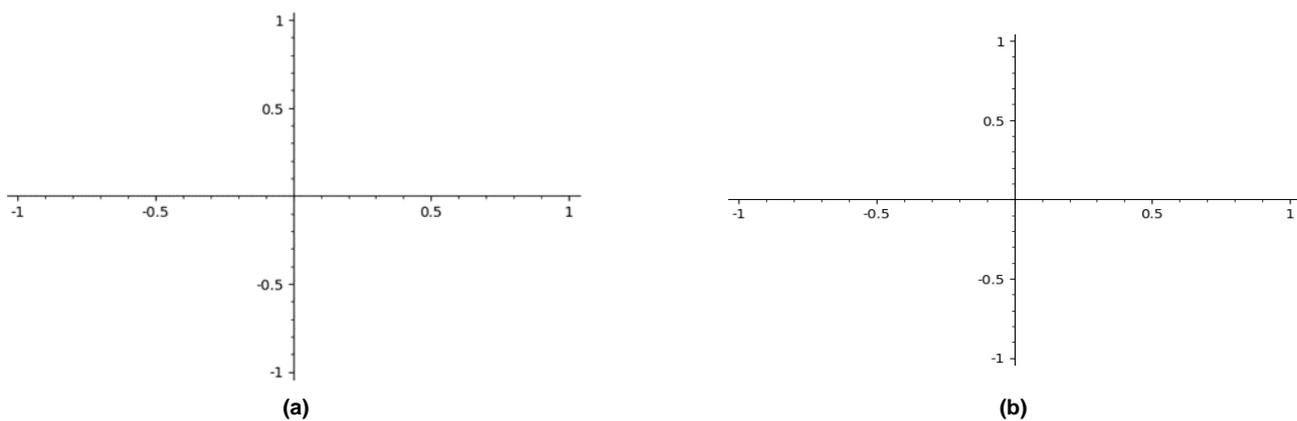


Figura 140. (a) Malha 80 x 80. Divergência. A simulação apresentou divergência para o último ψ . (b) Malha 80 x 80. Divergência. A simulação apresentou divergência para o último ψ

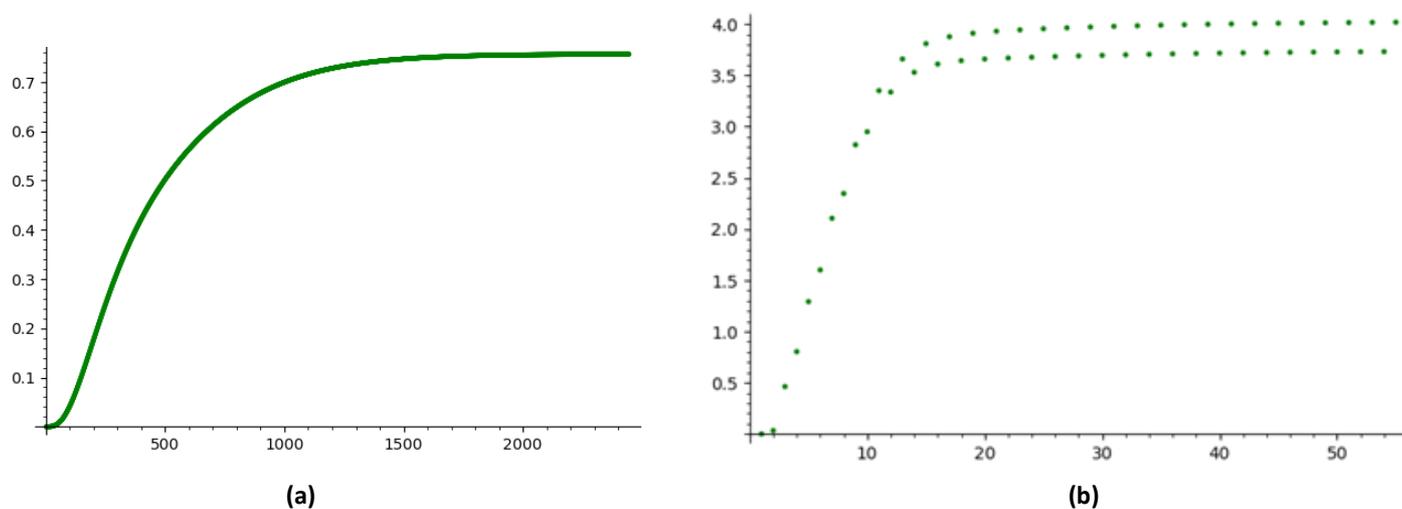


Figura 141. (a) Malha 80 x 80. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

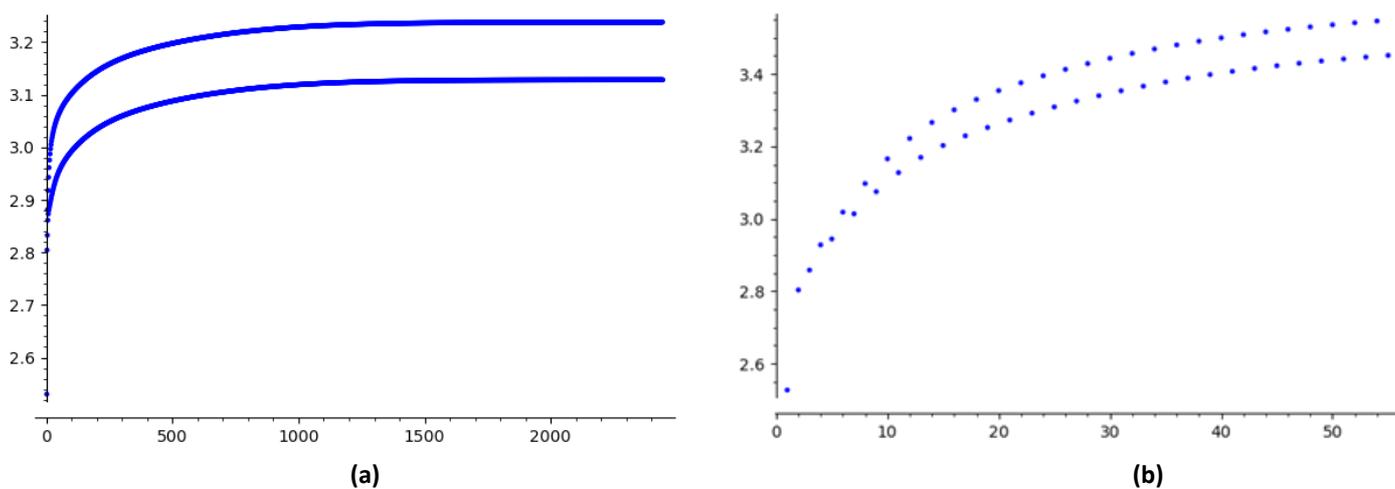


Figura 142. (a) Malha 80 x 80. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 80 x 80. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

Os resultados obtidos no segundo ciclo de simulações são coerentes com os resultados obtidos no primeiro ciclo, tanto em termos dos valores das temperaturas como na forma em que ocorreram as mudanças do campo de temperaturas quando o fator de forma é considerado nos cálculos dos elementos da sequência. Em outras palavras, como ocorreu no primeiro ciclo de simulações, no segundo ciclo os elementos da sequência se apresentaram de forma harmônica com e sem os efeitos da não convexidade da placa, do $\alpha = 4000$ ao $\alpha = 600$, com os mesmos valores para a temperatura máxima da placa como um todo, para a temperatura máxima do lado vertical da placa, para a temperatura do ponto médio do lado vertical da placa e para o somatório das temperaturas do campo de temperaturas, que é proporcional à sua média. Mais uma vez, a partir do $\alpha = 500$ os gráficos obtidos são fisicamente inconsistentes, pois os elementos da sequência não são crescentes e, assim sendo, acusam divergência nos cálculos, conforme os exemplos constantes nas figuras 141 e 142.

Além disso, constata-se um aumento de aproximadamente 145,28% na temperatura máxima do lado vertical da placa quando os efeitos da não convexidade são considerados nos cálculos. Ademais, verifica-se um aumento de aproximadamente 413,15% da temperatura no ponto médio do lado vertical da placa quando os efeitos da não convexidade são considerados nos cálculos, e, portanto, resulta no mesmo aumento encontrado no primeiro ciclo de simulações para esse mesmo ponto. Os gráficos que registram o somatório das temperaturas do campo de temperaturas com e sem os efeitos da não convexidade da placa indicam um aumento de aproximadamente 10,93% na média do campo de temperaturas quando os efeitos da não convexidade da placa são considerados.

Outrossim, como foi constatado no primeiro ciclo de simulações, no segundo ciclo, também, ocorre a diminuição da quantidade de elementos para a convergência da sequência ψ^i à medida que o valor do α diminui. Por exemplo, na figura 136, que registra a temperatura no ponto médio do lado vertical da placa para $\alpha = 600$, a convergência é estabelecida nas proximidades do elemento ψ^{8000} (sem os efeitos da não convexidade) e do elemento ψ^{100} (com os efeitos da não convexidade), ao passo que na figura 86, onde também registra a temperatura no ponto médio do lado vertical da placa, mas com $\alpha = 4000$, a convergência é estabelecida para ψ^i bem mais elevados, próximo do elemento ψ^{20000} (sem os efeitos da não convexidade) e do elemento ψ^{250} (com os efeitos da não convexidade). Além disso, nota-se que, com o refinamento da malha, mais elementos da sequência são necessários para a convergência, em todos os valores de α implementados.

As tabelas a seguir resumem os resultados obtidos no primeiro ciclo de simulações.

SOMATÓRIO DO CAMPO DE TEMPERATURAS		
Malha 80x80		
$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α
3,2	3,55	4000
3,2	3,55	3000
3,2	3,58	2000
3,2	3,56	1000
3,2	3,56	600
Divergência		500

Tabela 4. Valores de convergência dos somatórios dos campos de temperaturas para a malha 80 x 80.

PONTO MÉDIO DO LADO VERTICAL DA PLACA		
Malha 80x80		
$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α
0,76	3,9	4000
0,76	3,9	3000
0,76	3,9	2000
0,76	3,9	1000
0,76	3,9	600
Divergência		500

Tabela 5. Valores de convergência do ponto médio do lado vertical da placa para a malha 80 x 80.

TEMPERATURA MÁXIMA DO LADO VERTICAL DA PLACA		
Malha 80x80		
$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α
1,59	3,9	4000
1,59	3,9	3000
1,59	3,9	2000
1,59	3,9	1000
1,59	3,9	600
Divergência		500

Tabela 6. Valores de convergência da temperatura máxima do lado vertical da placa para a malha 80 x 80.

5.5 Terceiro ciclo de simulações: malha 160 x 160.

Neste terceiro ciclo de simulações a malha implementada é ainda mais refinada, com o número de pontos aumentado em dezesseis vezes em relação ao primeiro ciclo de simulações.

As figuras de 143 a 156 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 4000$.

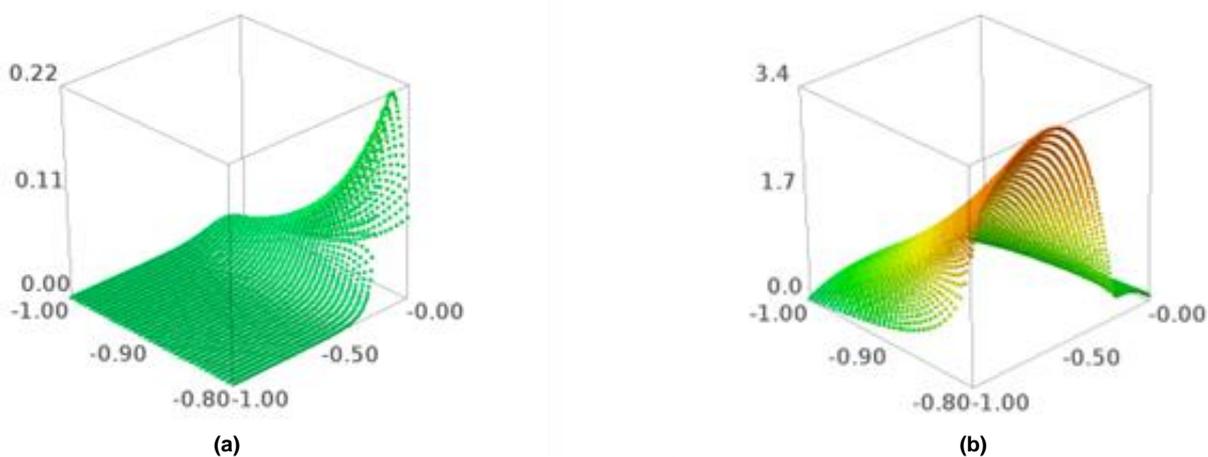


Figura 143. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

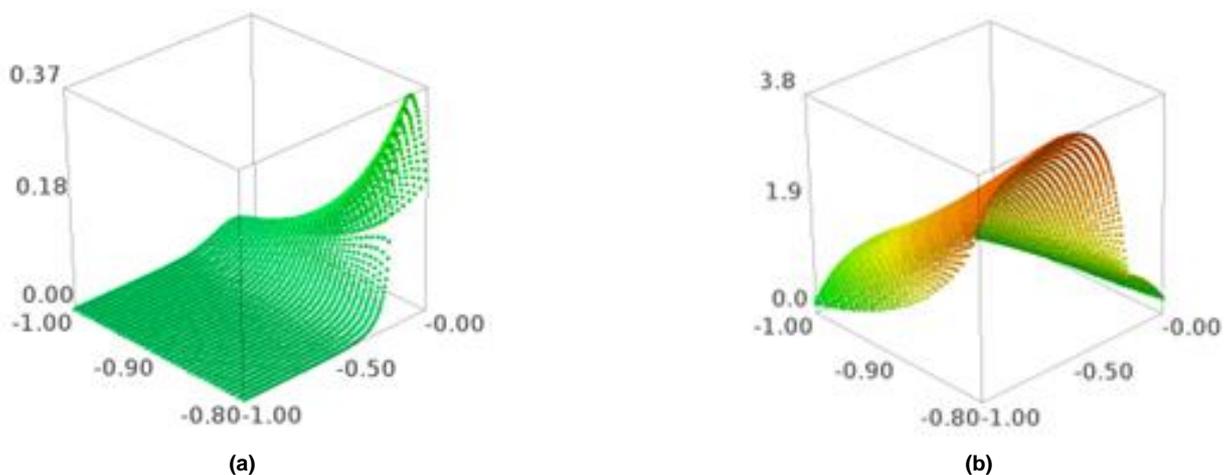


Figura 144. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

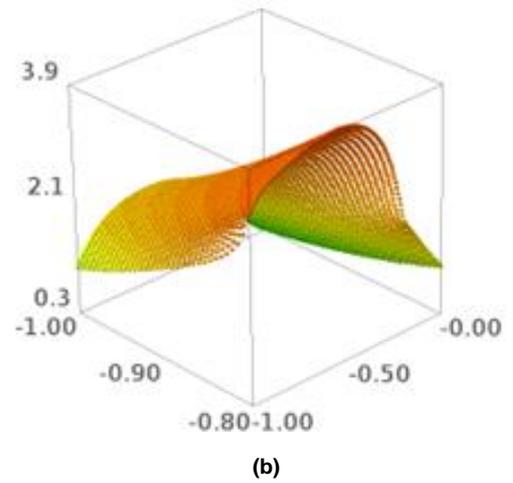
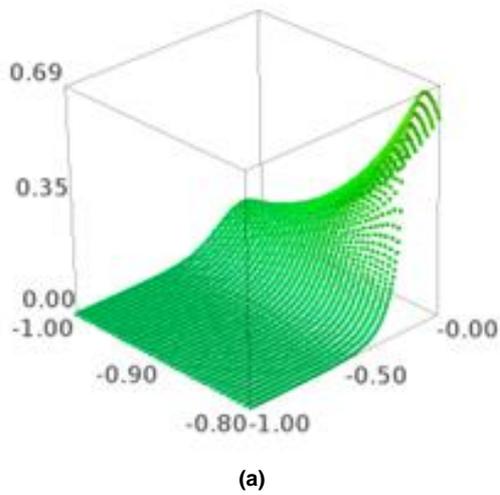


Figura 145. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

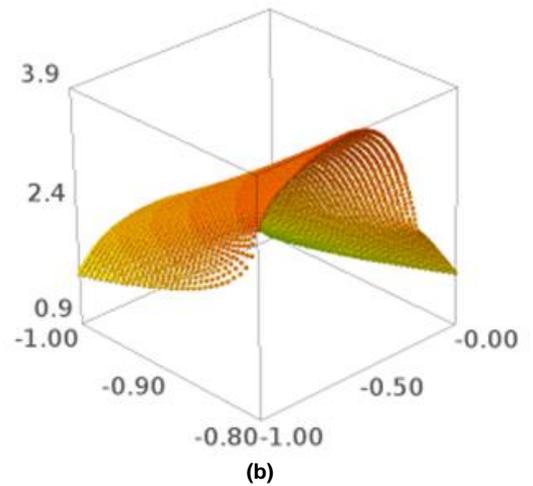
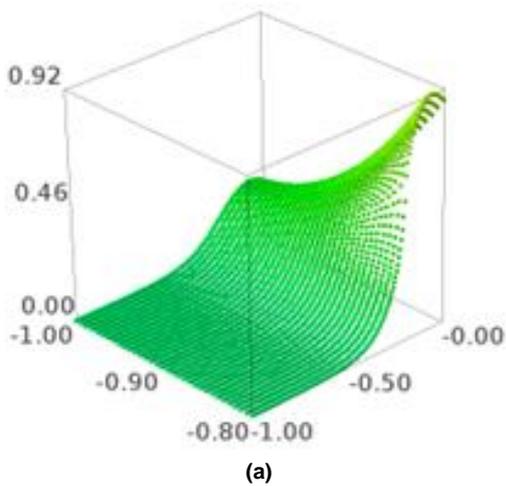


Figura 146. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

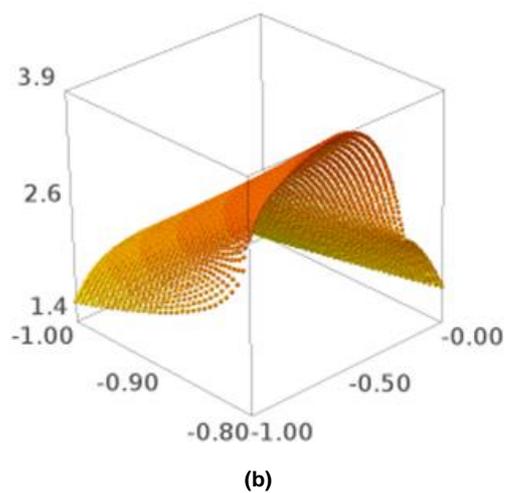
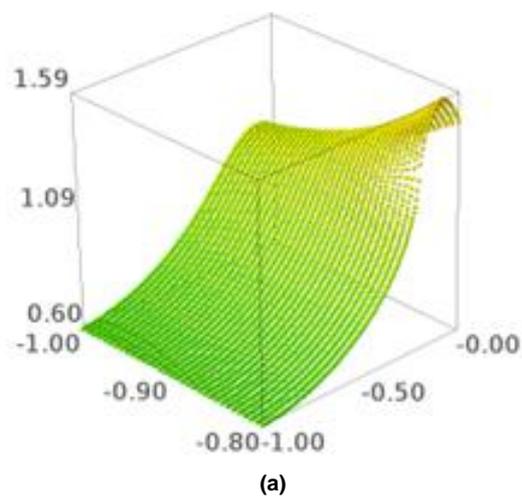


Figura 147. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{30000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{3000} , com os efeitos da não convexidade.

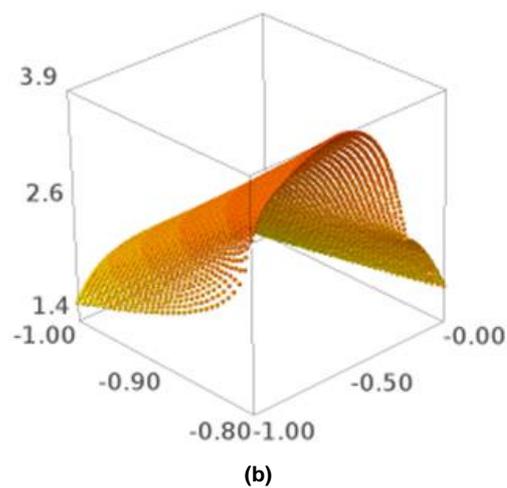
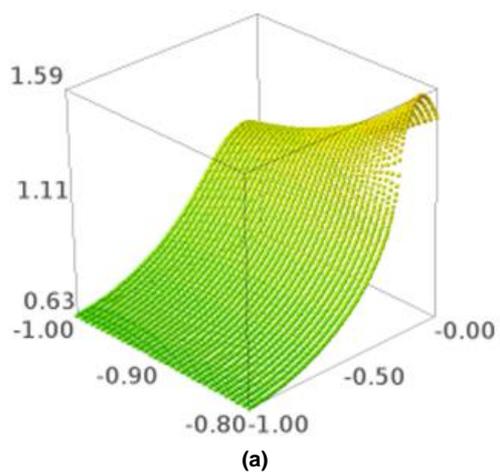


Figura 148. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{40000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{5175} , com os efeitos da não convexidade.

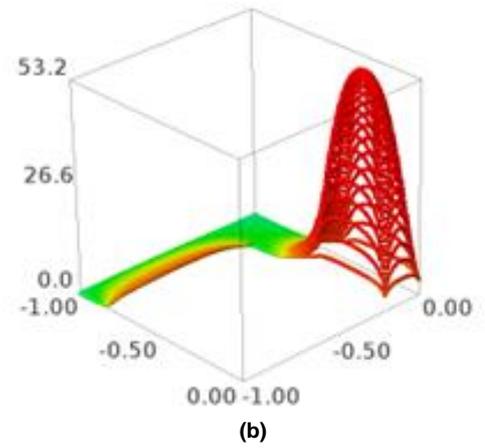
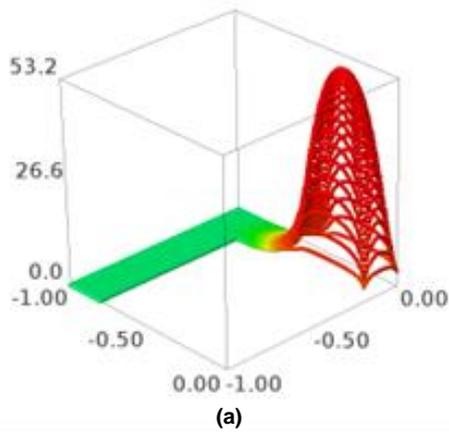


Figura 149. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

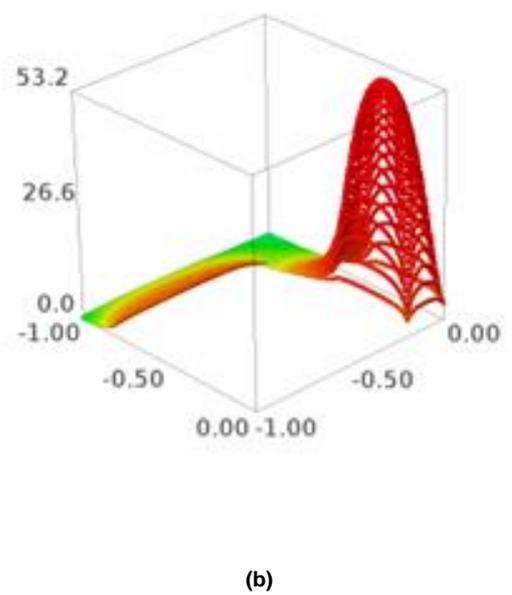
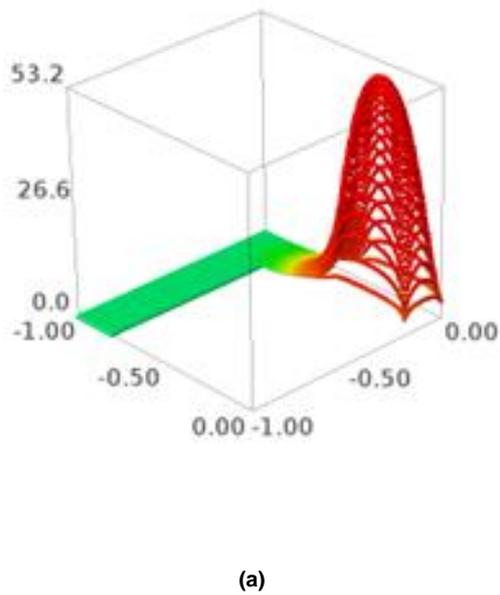


Figura 150. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

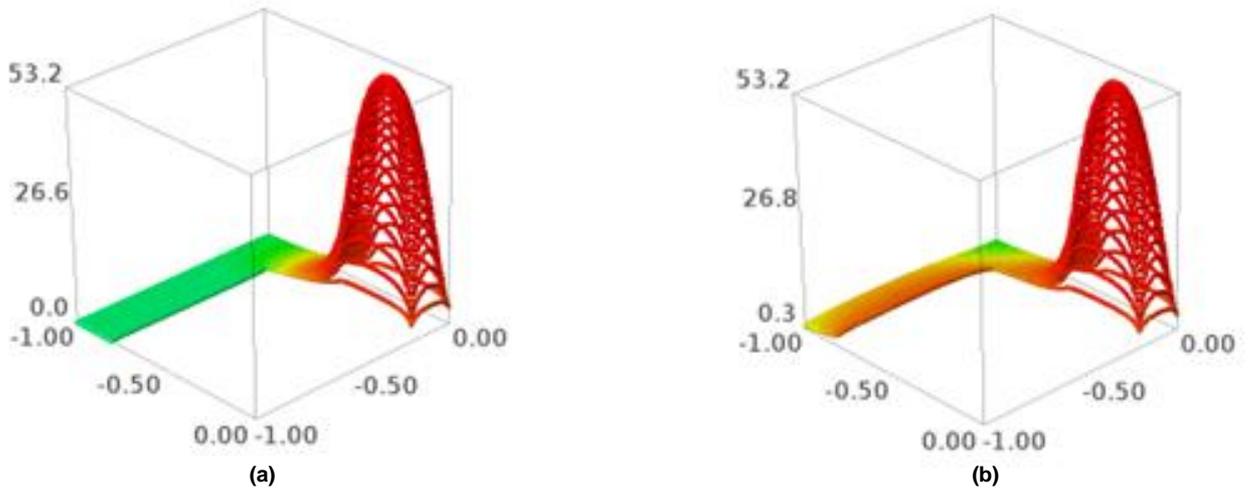


Figura 151. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

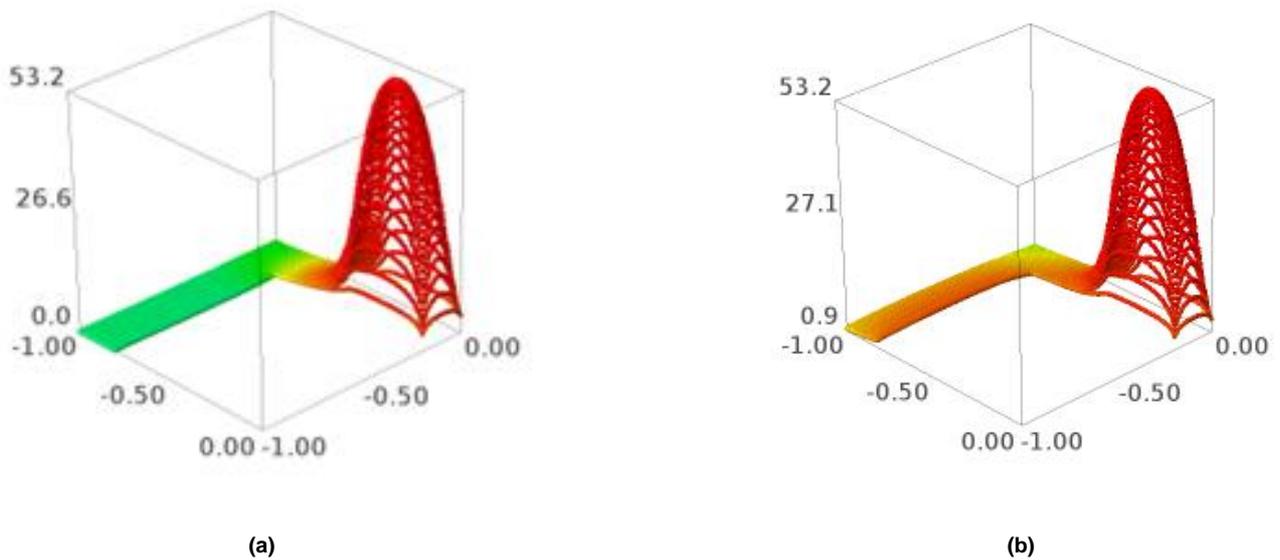


Figura 152. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .

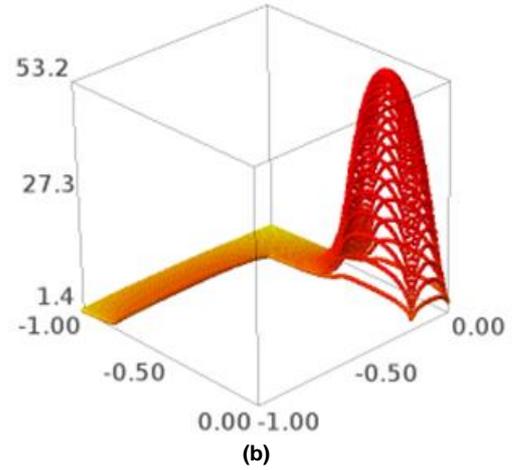
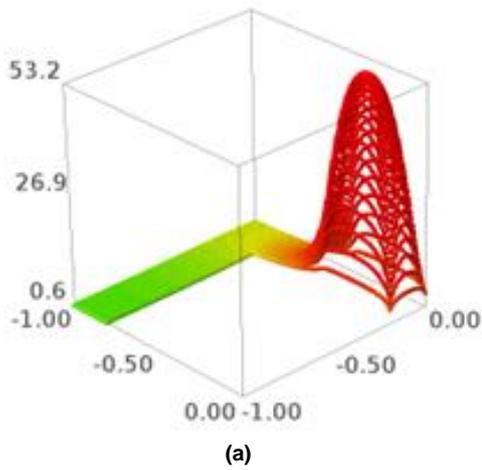


Figura 153. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{30000} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{30000} .

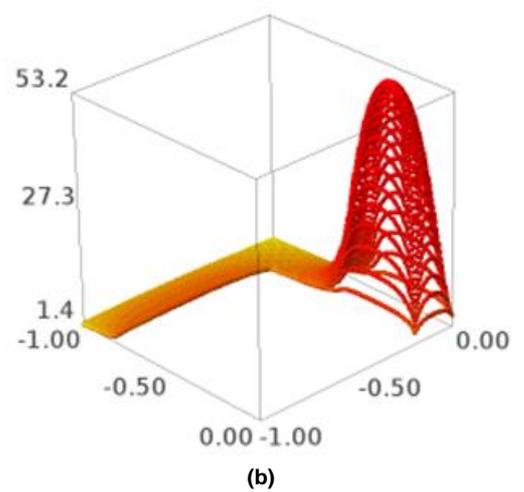
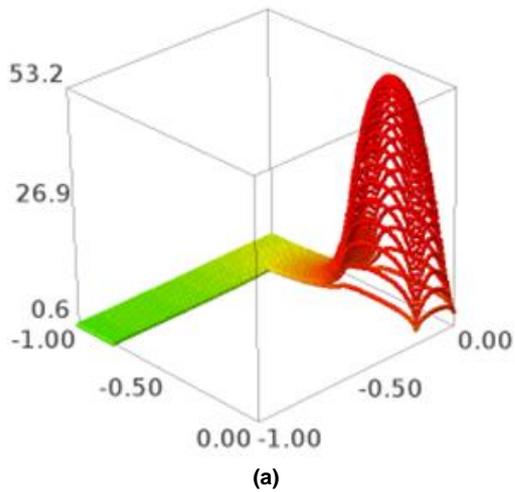


Figura 154. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{40000} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{5175} .

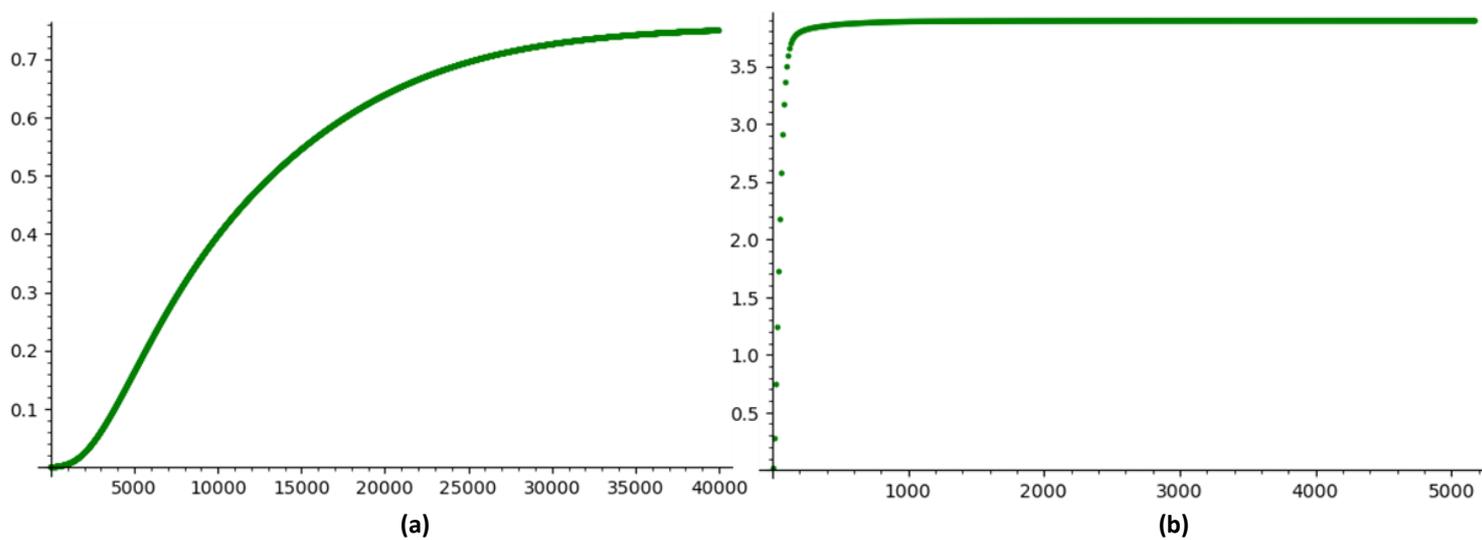


Figura 155. (a) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

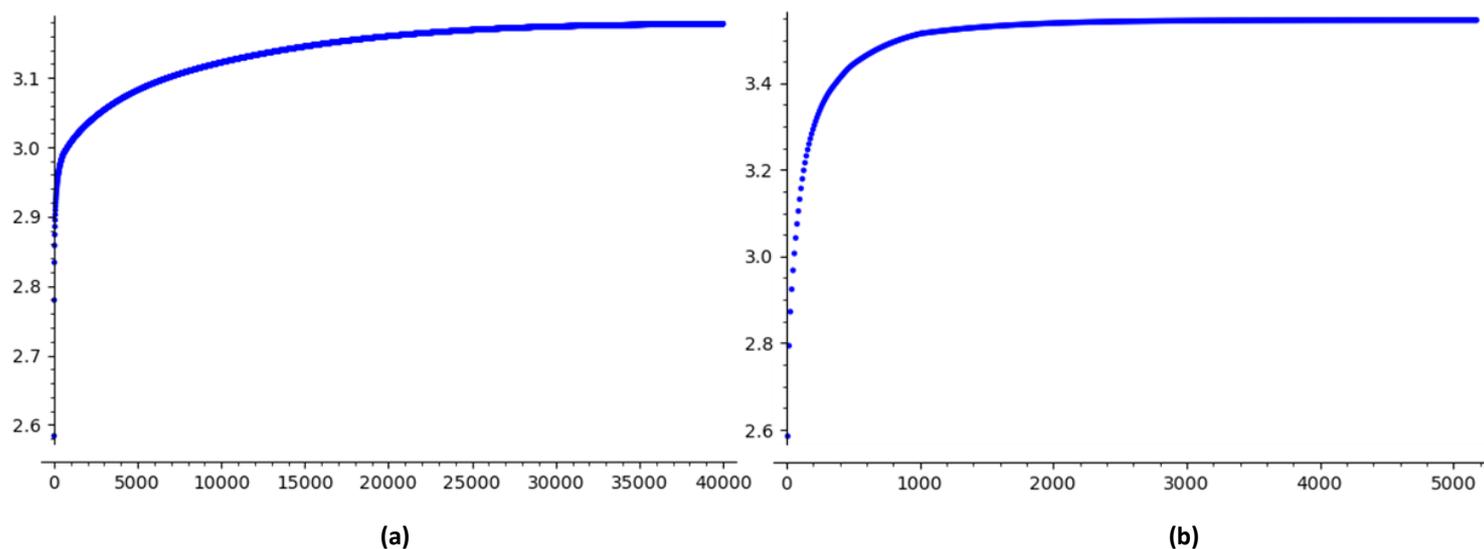


Figura 156. (a) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 157 a 170 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 3000$.

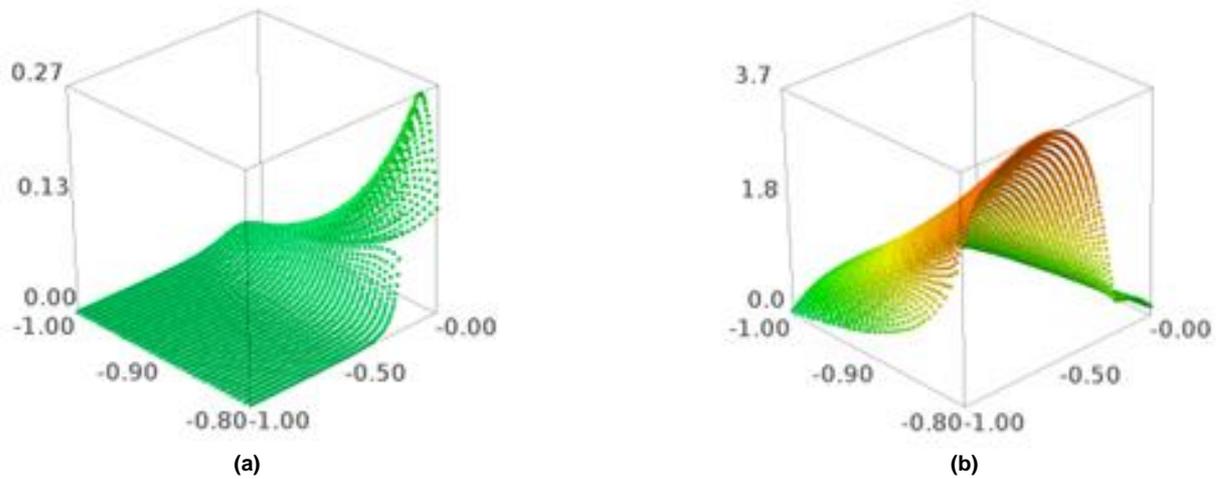


Figura 157. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

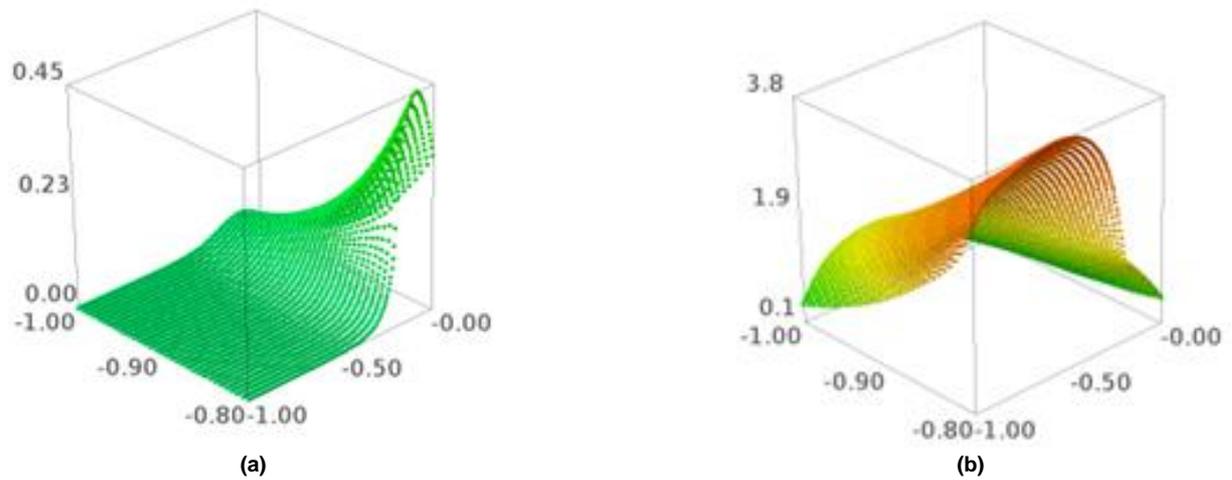
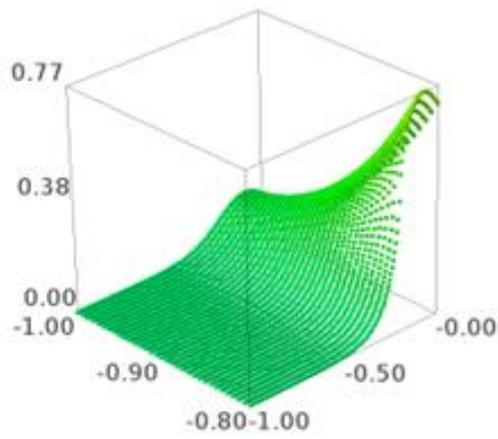
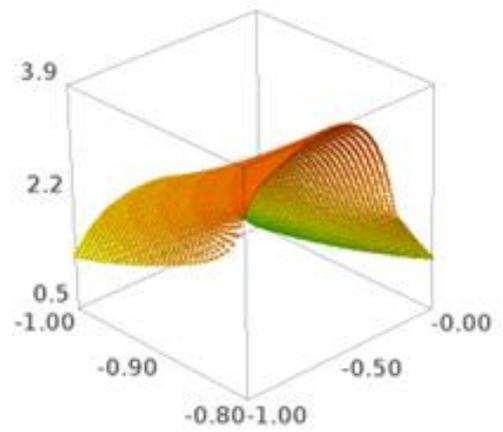


Figura 158. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

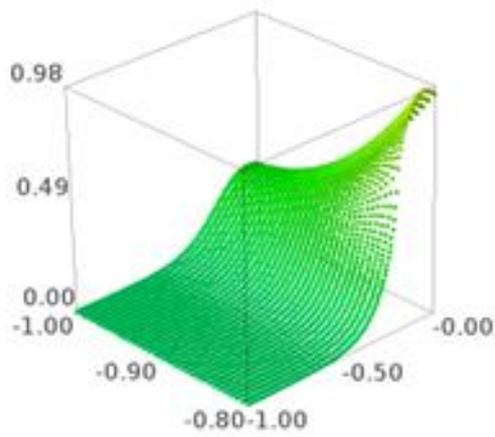


(a)

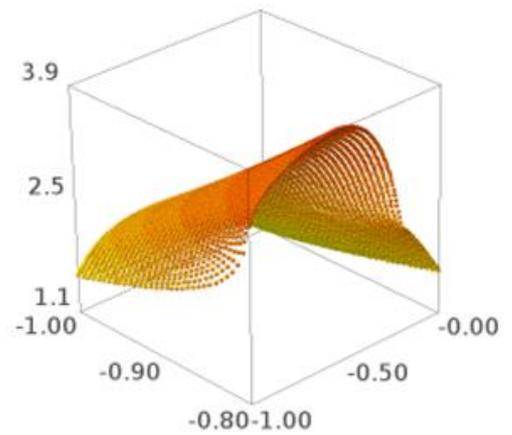


(b)

Figura 159. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.



(a)



(b)

Figura 160. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

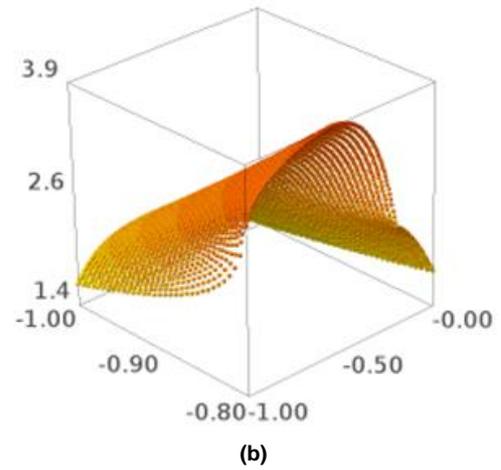
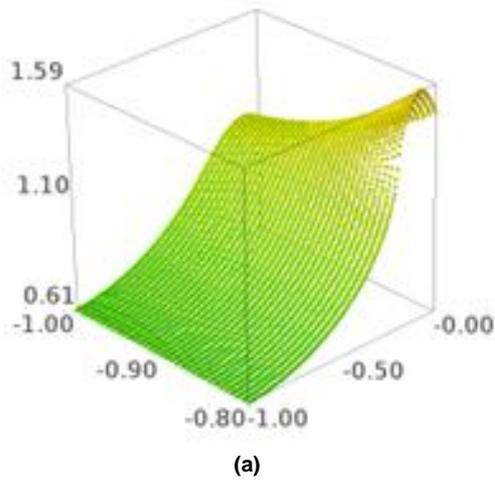


Figura 161. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{30000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2000} , com os efeitos da não convexidade.

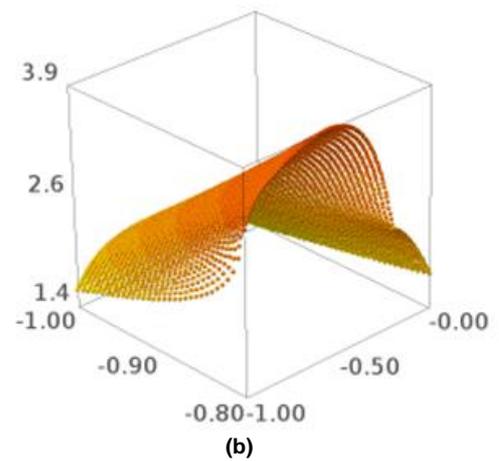
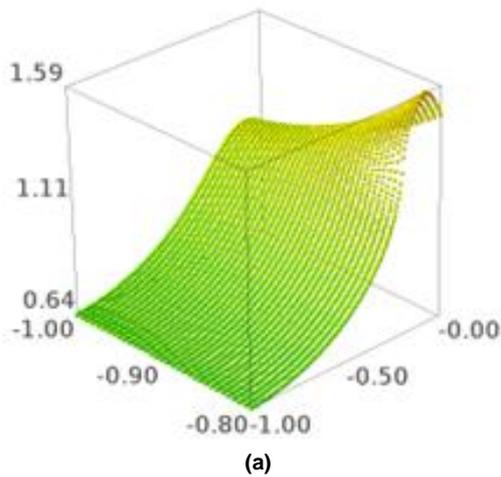


Figura 162. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{39839} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{4645} , com os efeitos da não convexidade.

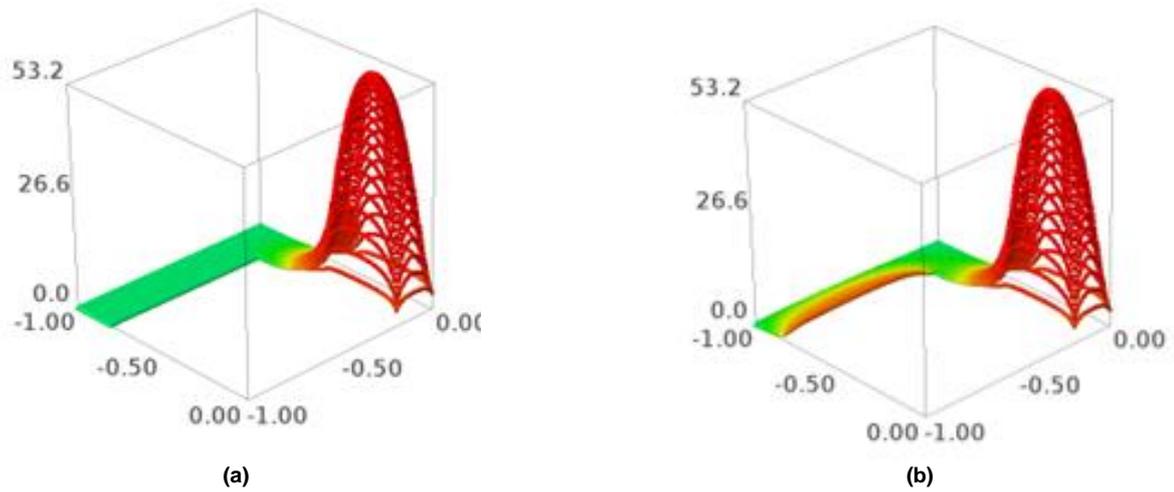


Figura 163. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

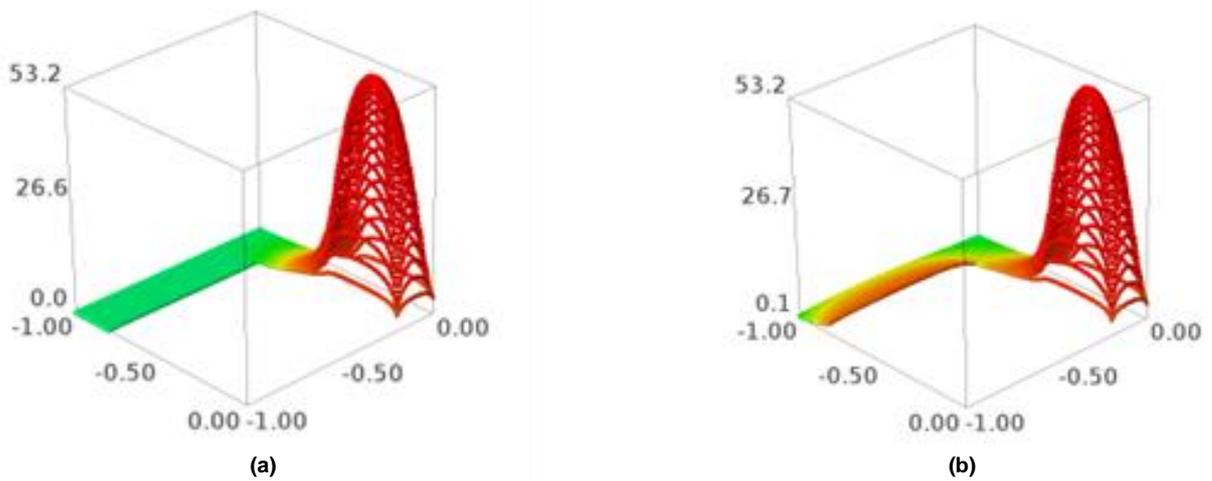


Figura 164. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

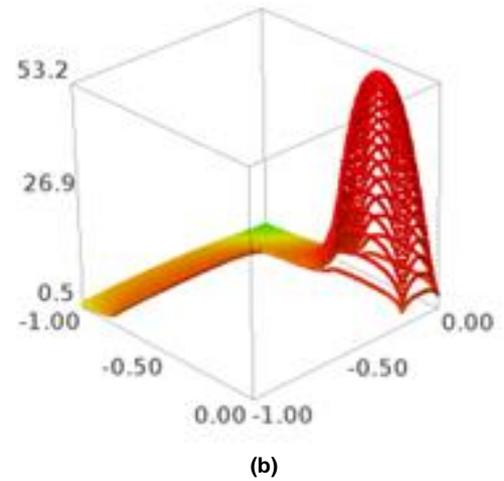
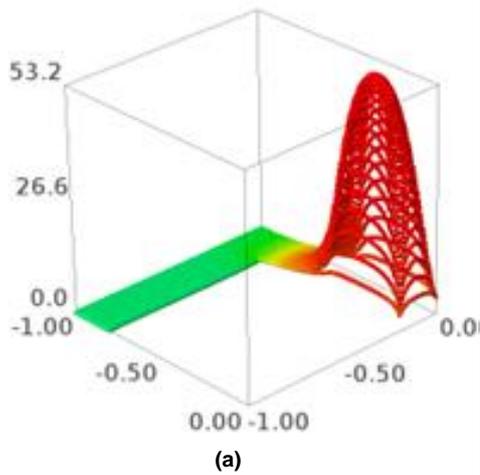


Figura 165. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

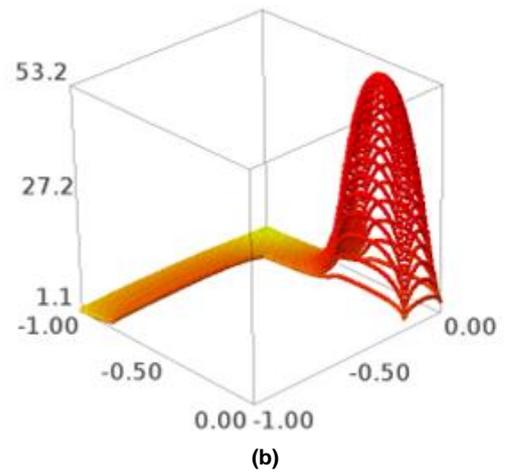
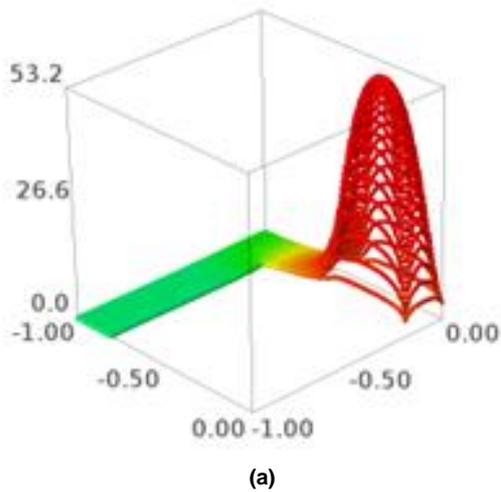


Figura 166. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} , (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .

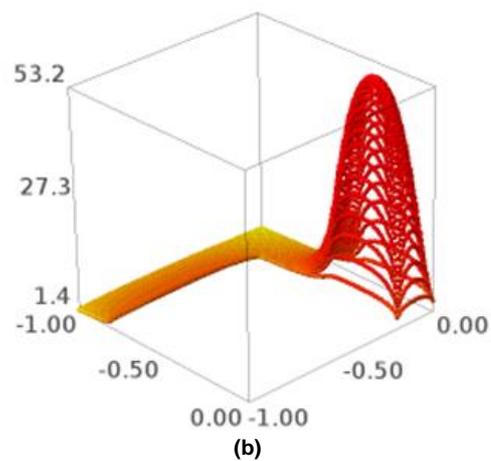
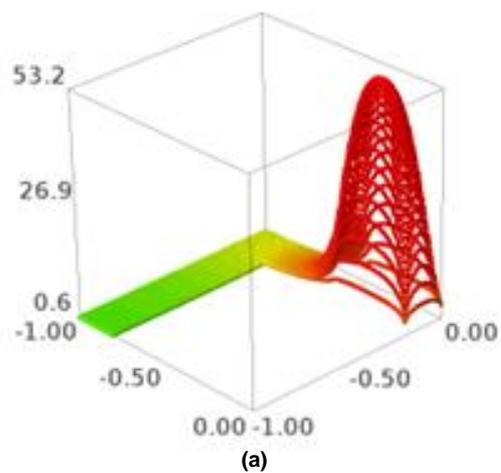


Figura 167. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{30000} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{2000} .

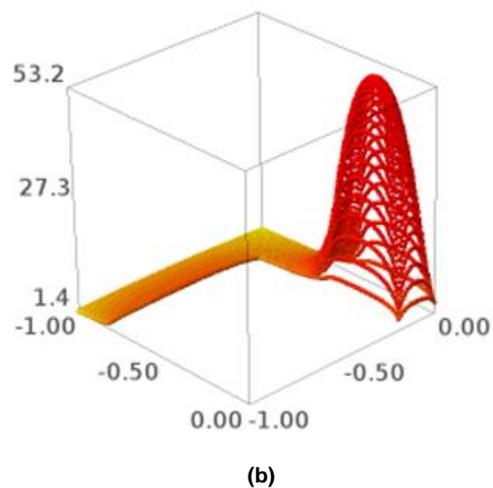
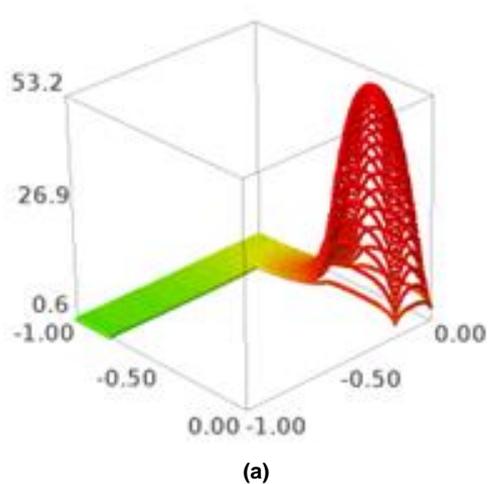


Figura 168. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{39839} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{4645} .

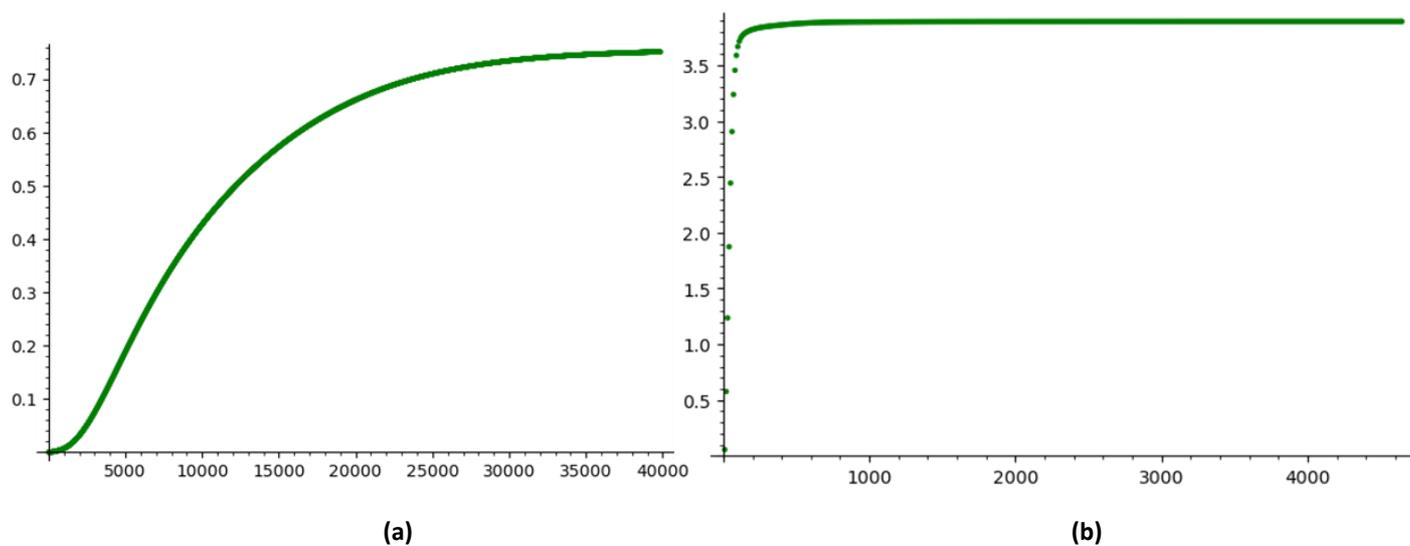


Figura 169. (a) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

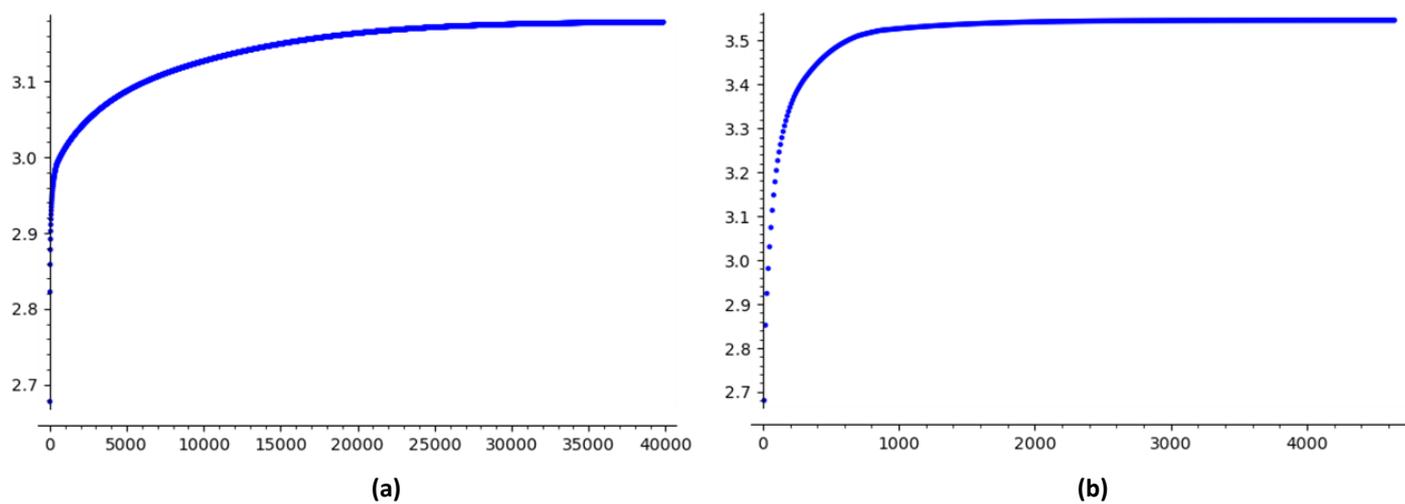
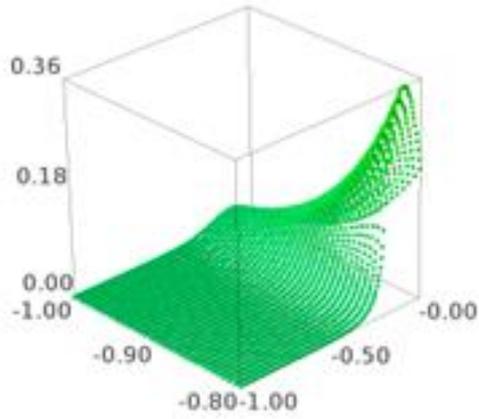
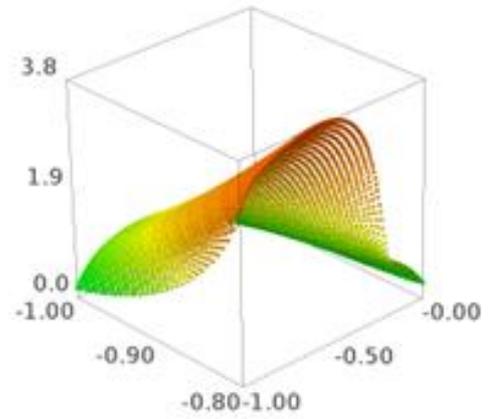


Figura 170. (a) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 171 a 184 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 2000$.

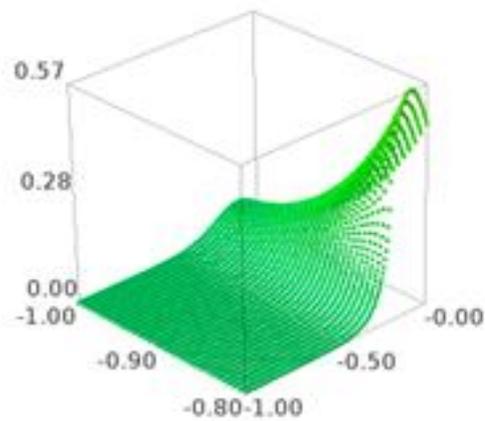


(a)

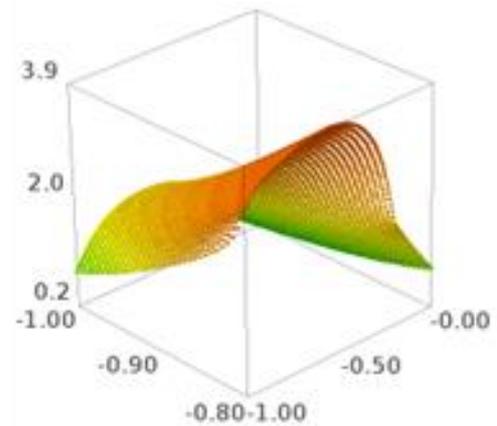


(b)

Figura 171. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

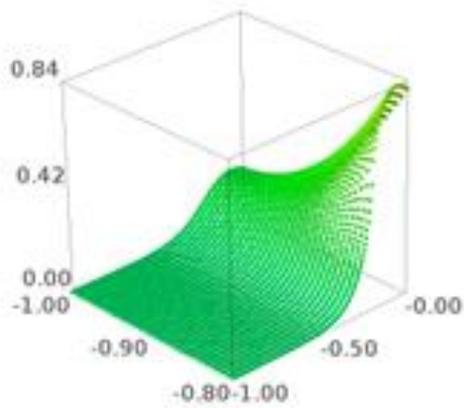


(a)

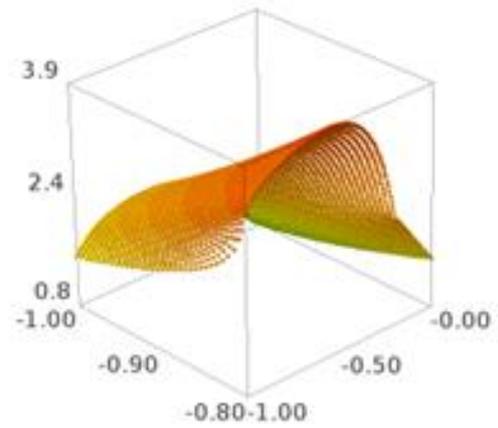


(b)

Figura 172. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

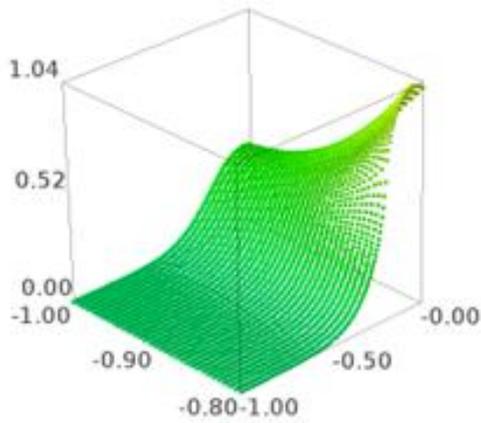


(a)

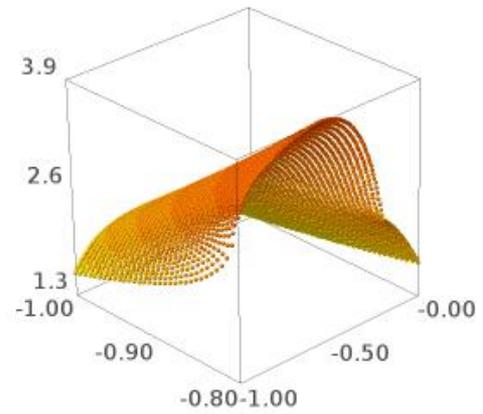


(b)

Figura 173. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

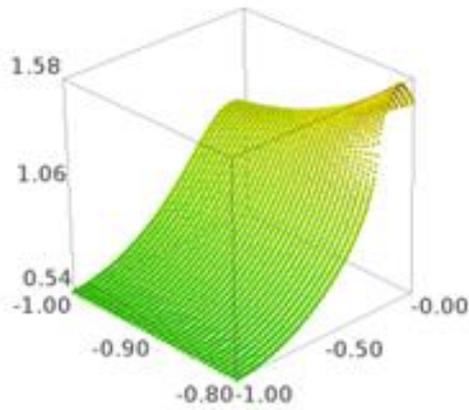


(a)

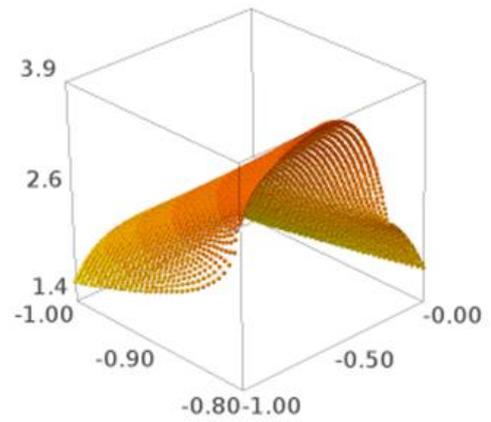


(b)

Figura 174. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

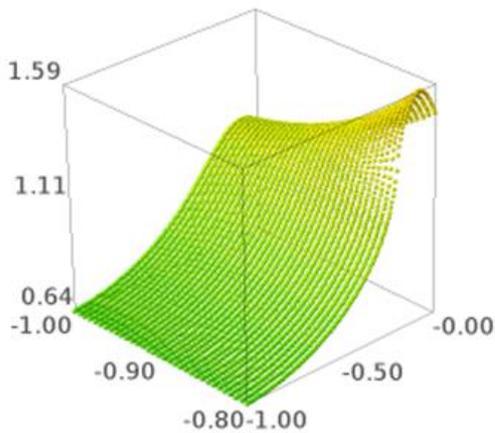


(a)

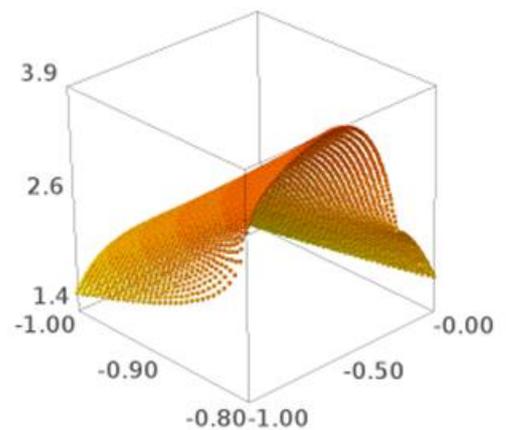


(b)

Figura 175. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{20000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2000} , com os efeitos da não convexidade.



(a)



(b)

Figura 176. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{36807} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{4237} , com os efeitos da não convexidade.

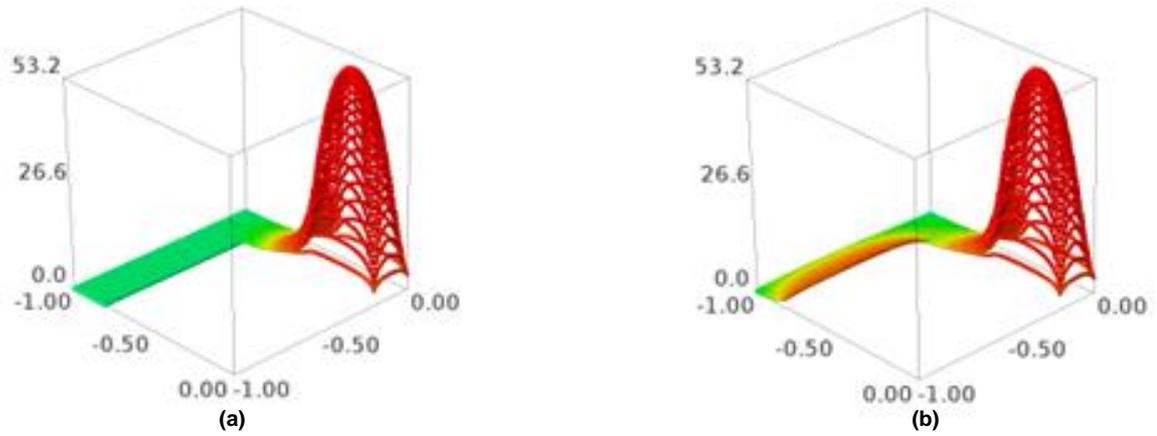


Figura 177. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

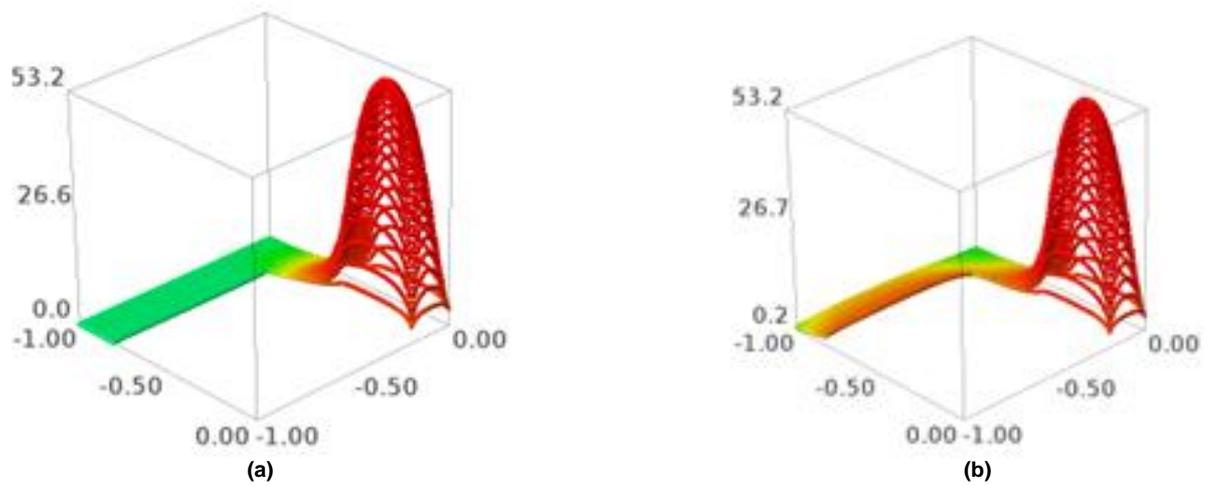
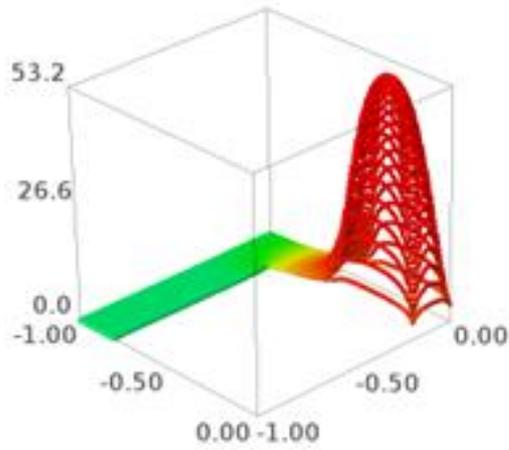
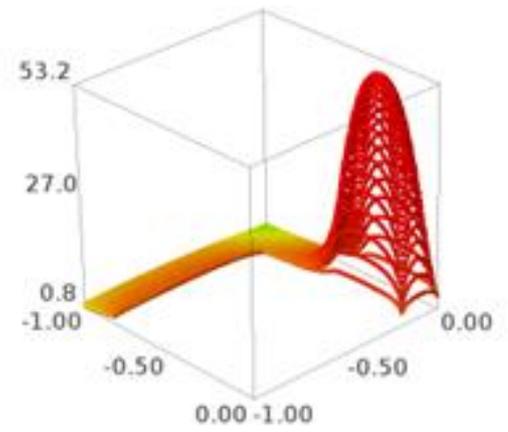


Figura 178. Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

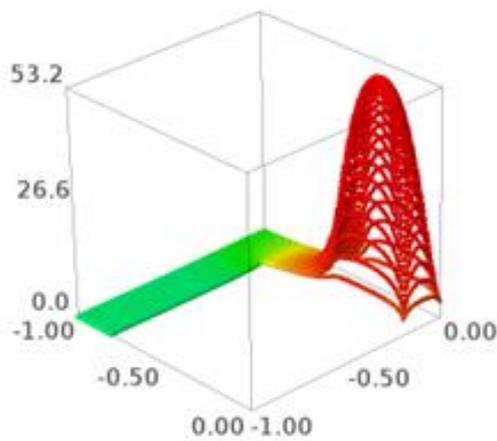


(a)

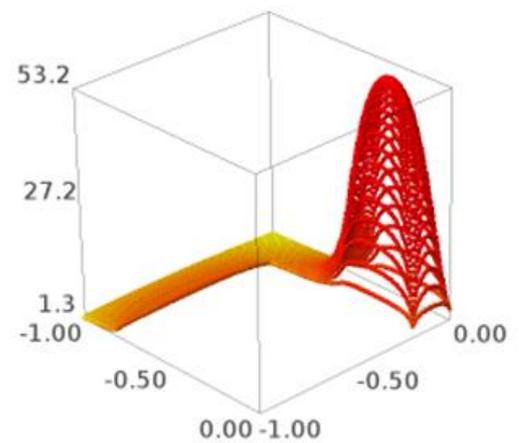


(b)

Figura 179. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

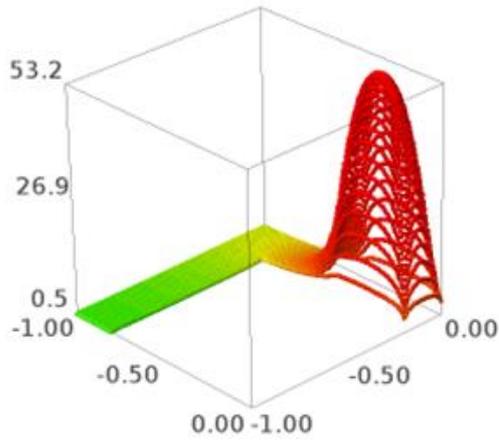


(a)

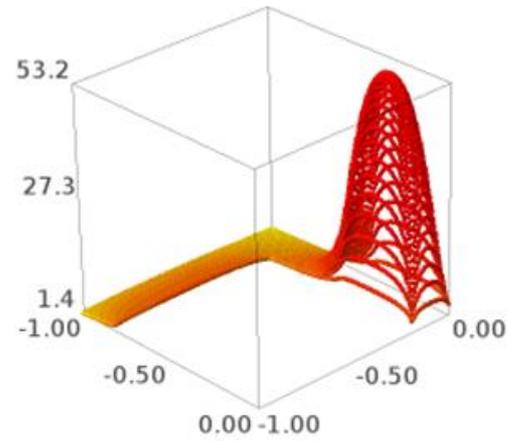


(b)

Figura 180. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .

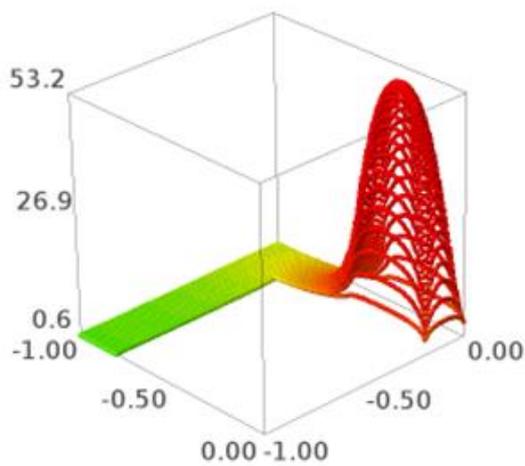


(a)

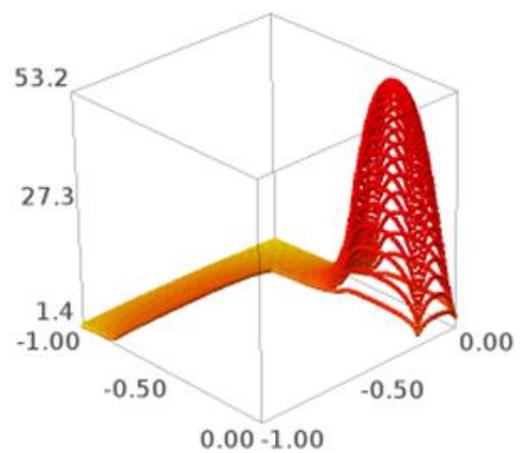


(b)

Figura 181. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{20000} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{2000} .



(a)



(b)

Figura 182. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{36807} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{4237} .

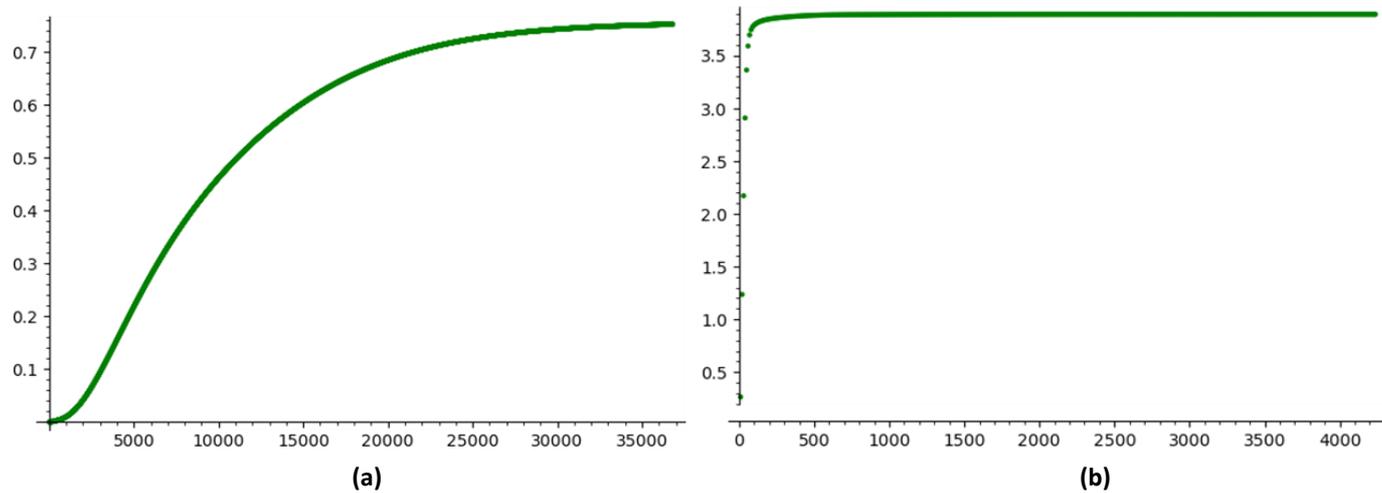


Figura 183. (a) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

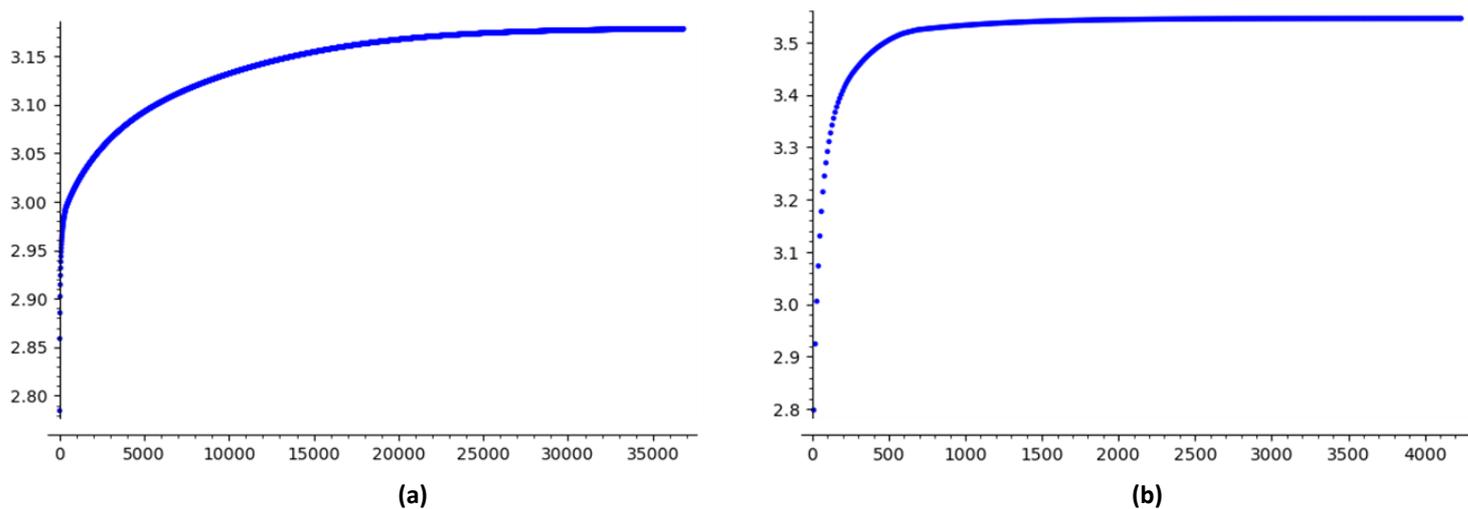


Figura 184. (a) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 185 a 198 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 1000$.

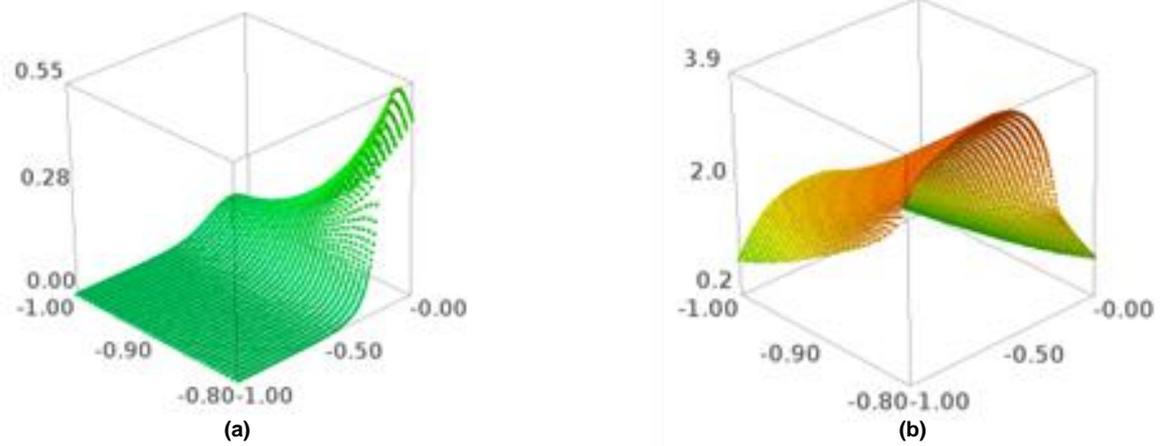


Figura 185. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

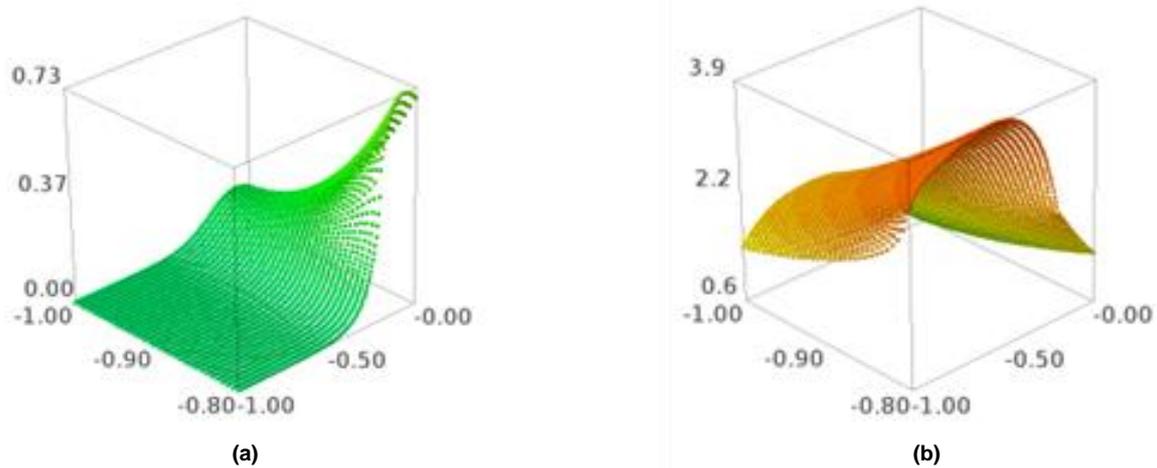


Figura 186. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

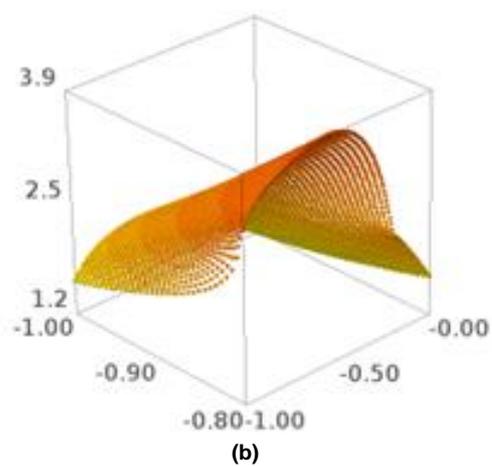
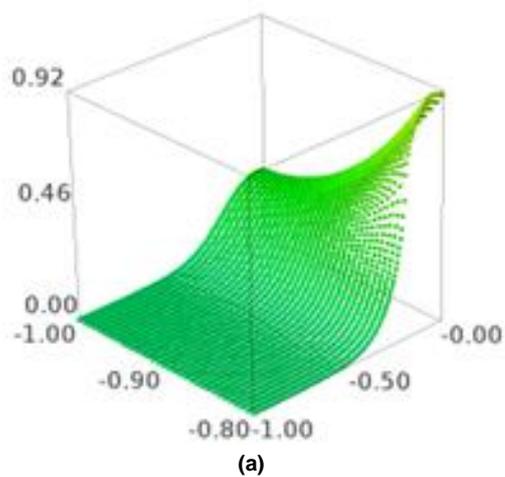


Figura 187. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

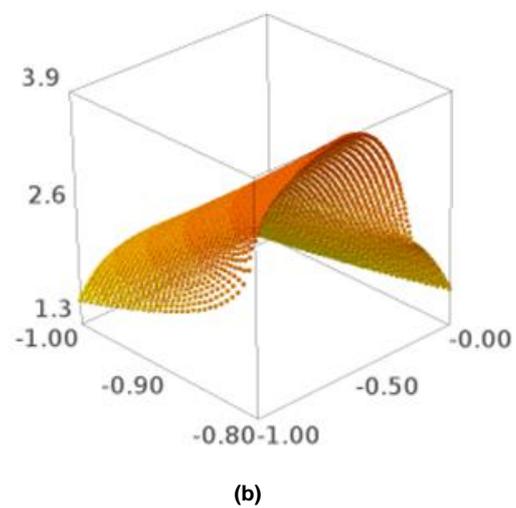
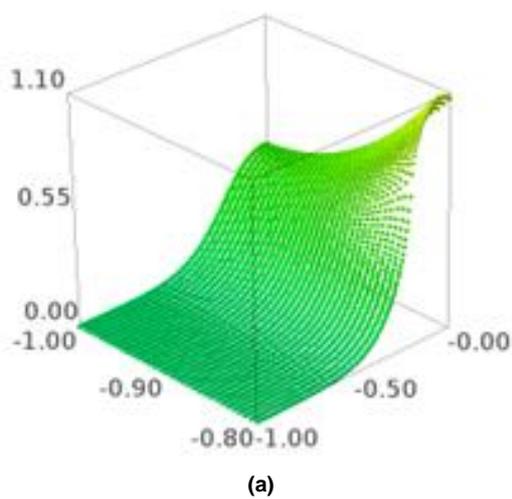


Figura 188. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

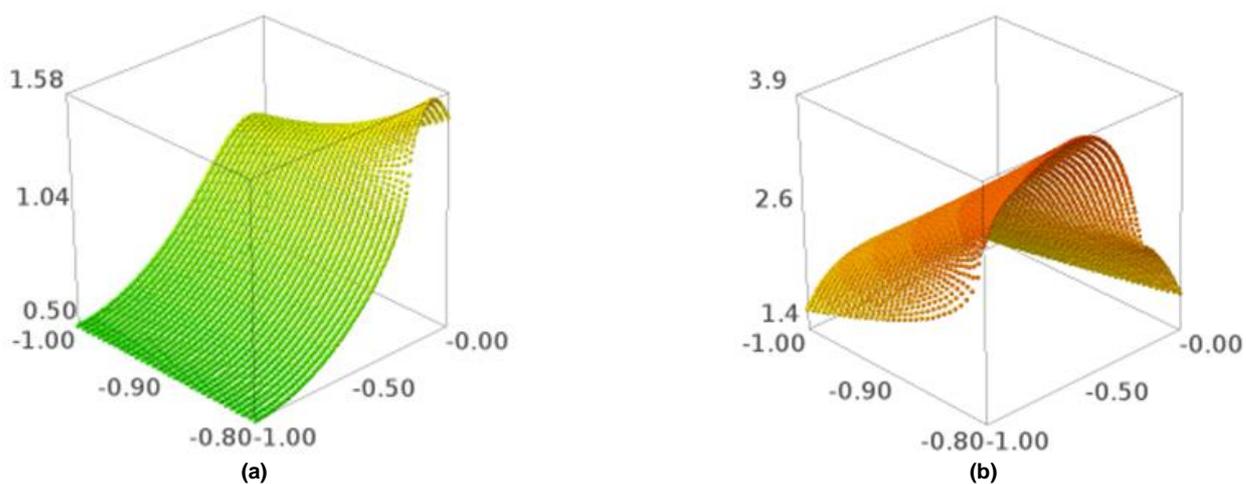


Figura 189. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{16000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2000} , com os efeitos da não convexidade.

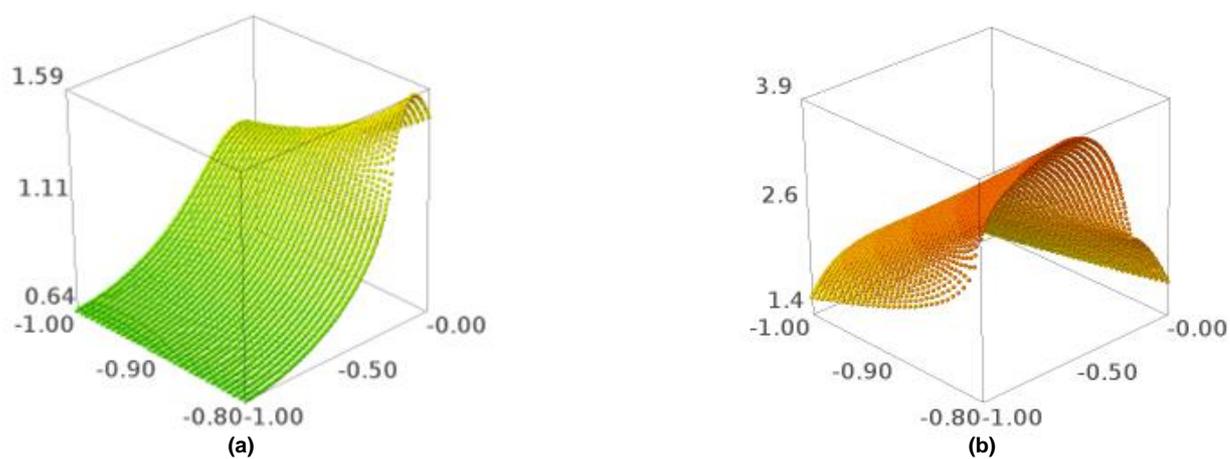


Figura 190. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{33739} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{3835} , com os efeitos da não convexidade.

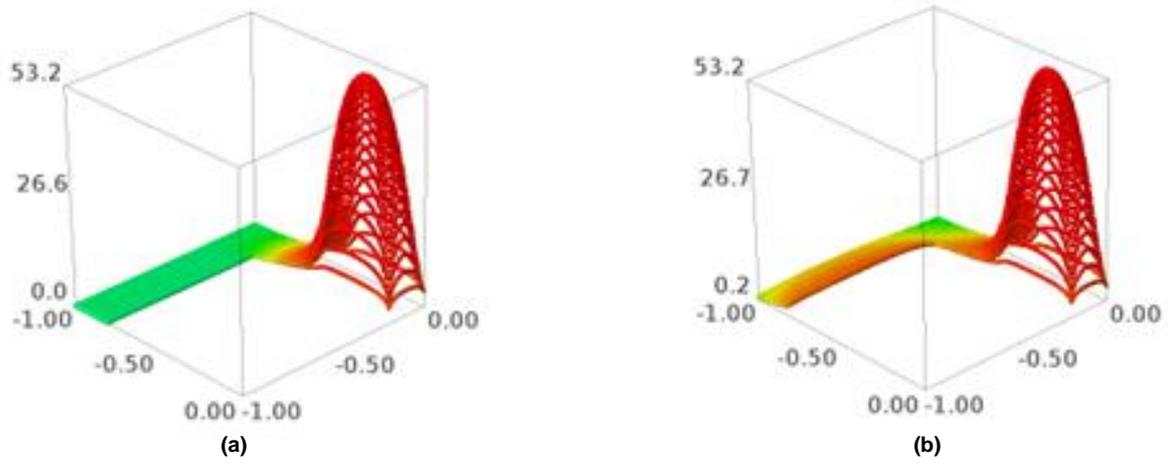


Figura 191. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

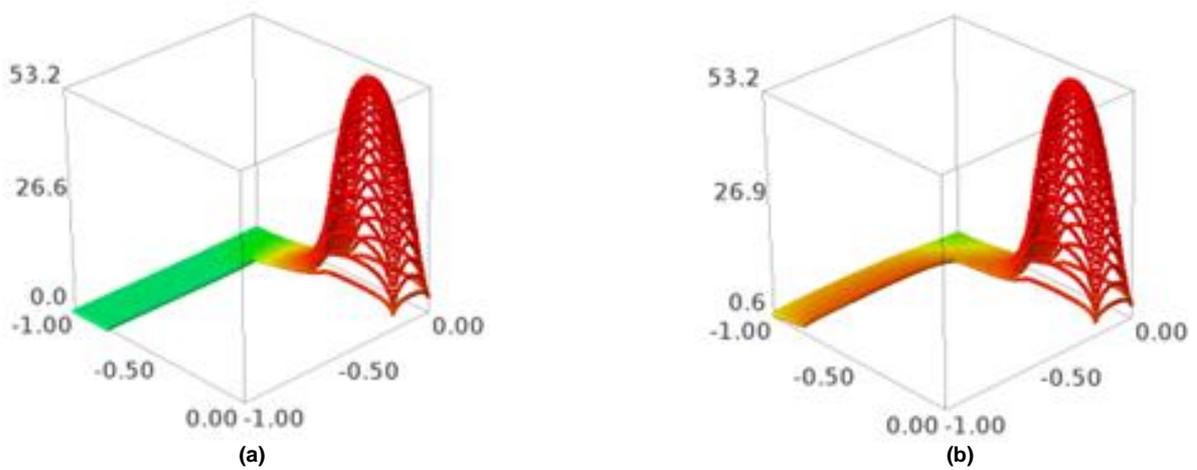
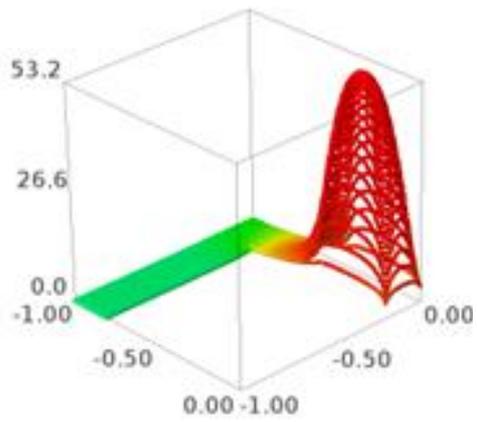
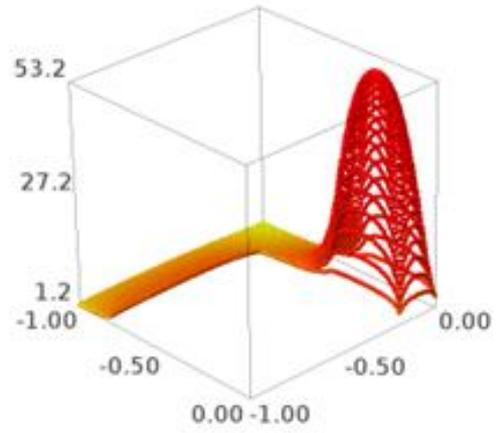


Figura 192. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

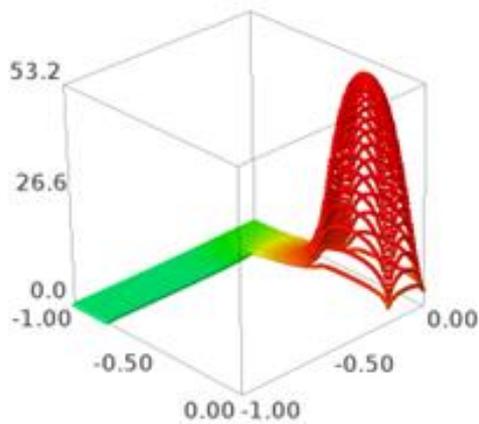


(a)

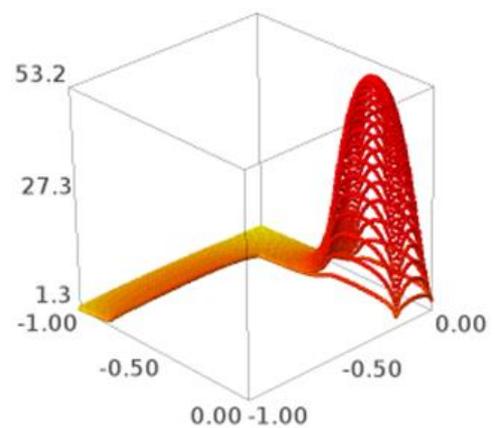


(b)

Figura 193. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .



(a)



(b)

Figura 194. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .

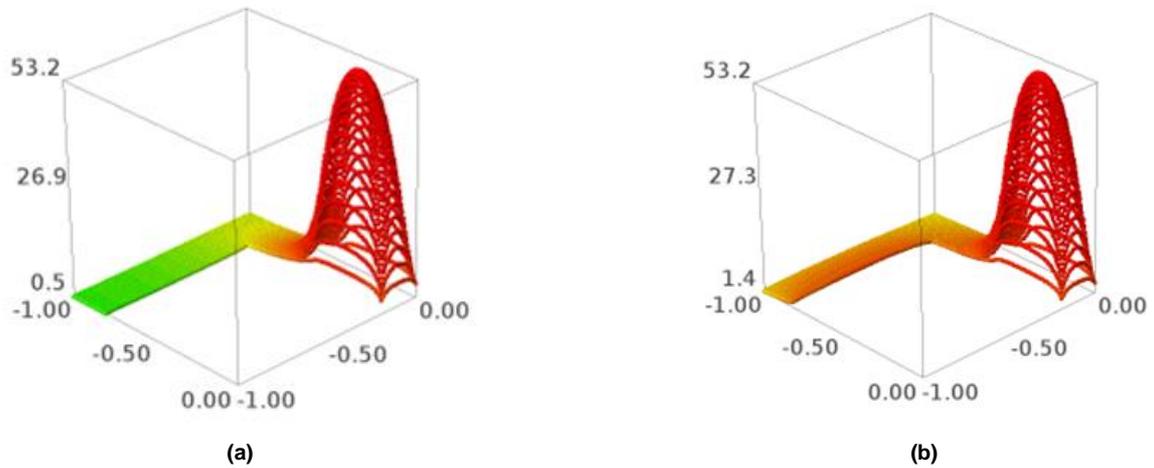


Figura 195. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{16000} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{2000} .

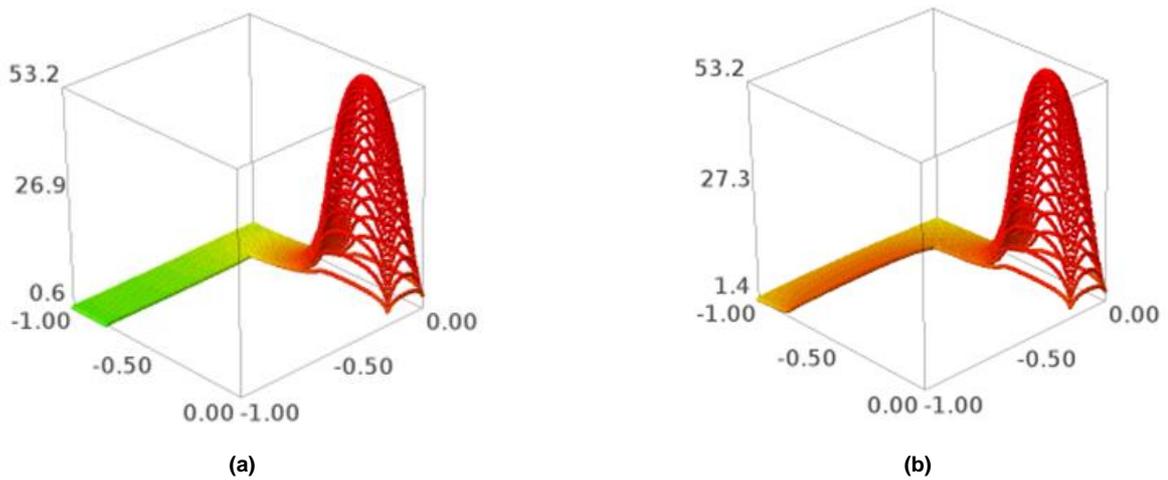


Figura 196. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{33739} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{3835} .

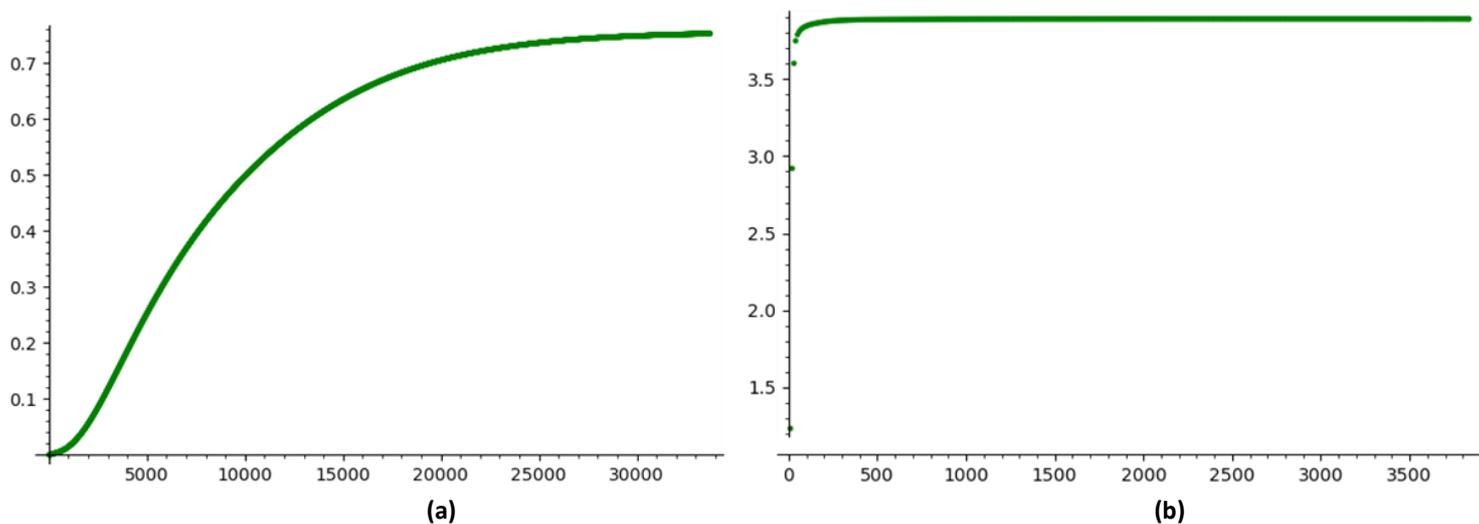


Figura 197. (a) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

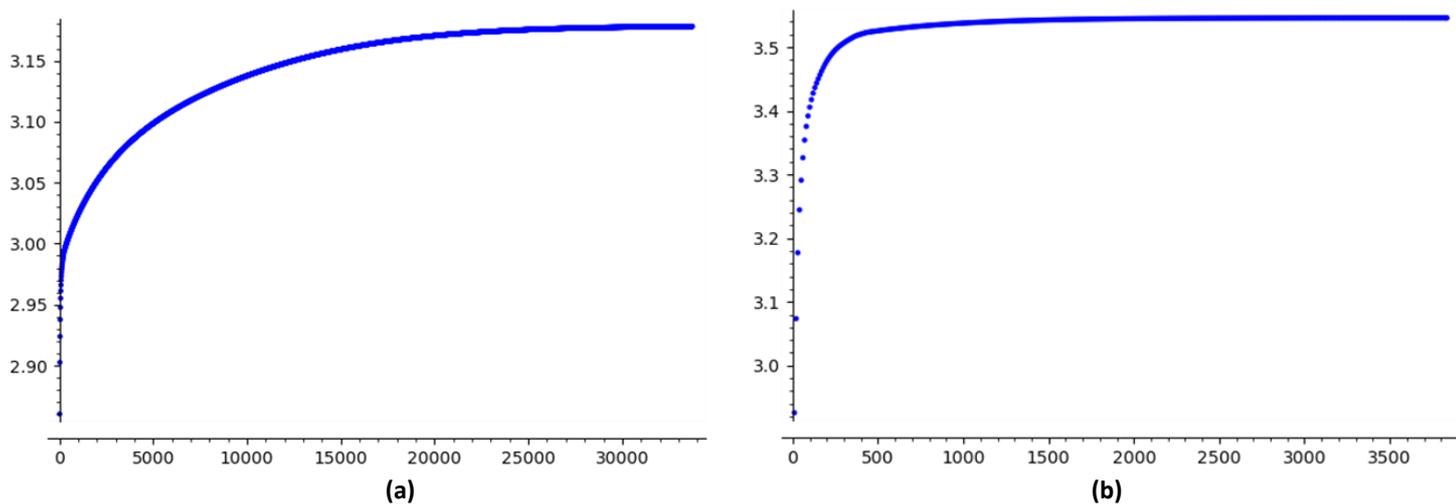


Figura 198. (a) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 199 a 212 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 600$.

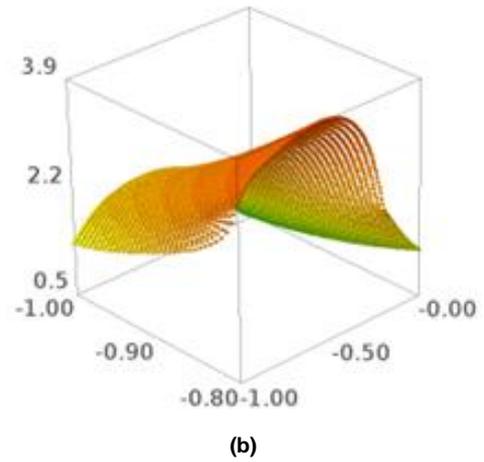
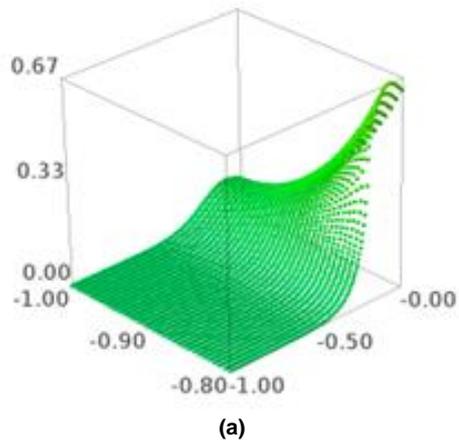


Figura 199. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{100} , com os efeitos da não convexidade.

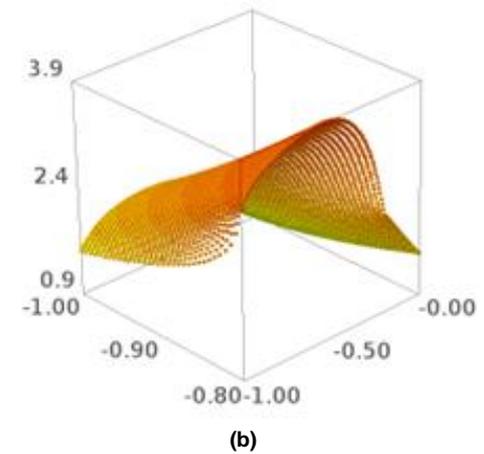
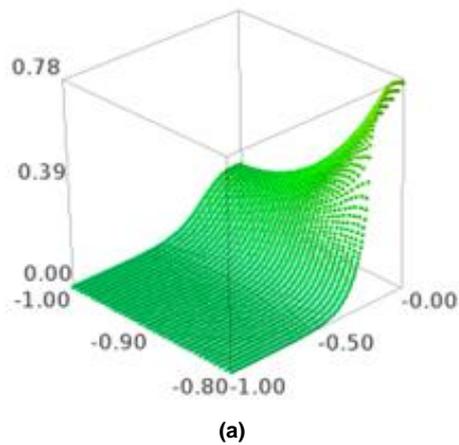


Figura 200. Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{200} , com os efeitos da não convexidade.

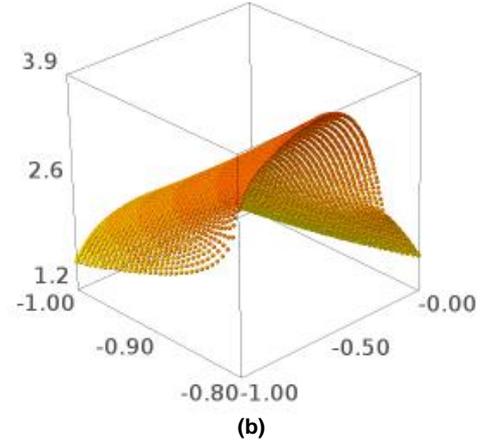
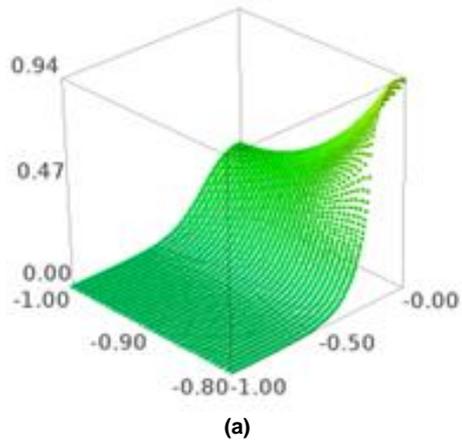


Figura 201. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{500} , com os efeitos da não convexidade.

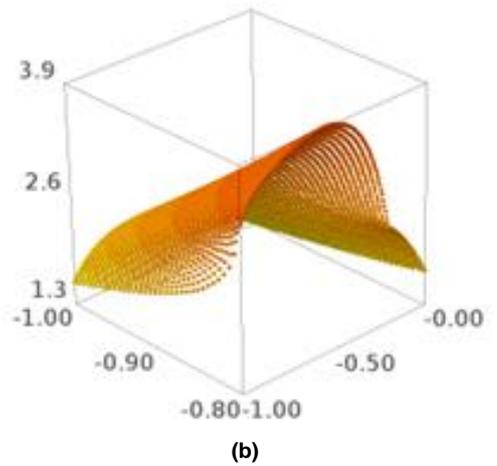
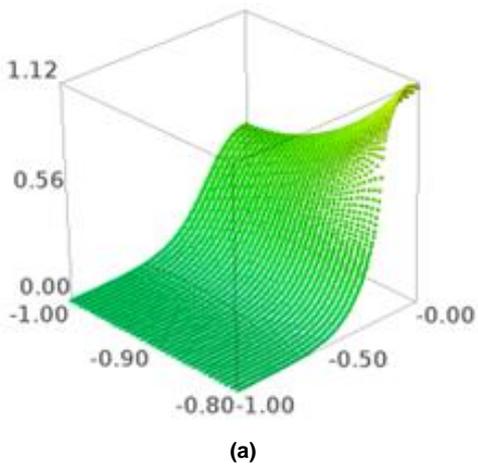


Figura 202. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{1000} , com os efeitos da não convexidade.

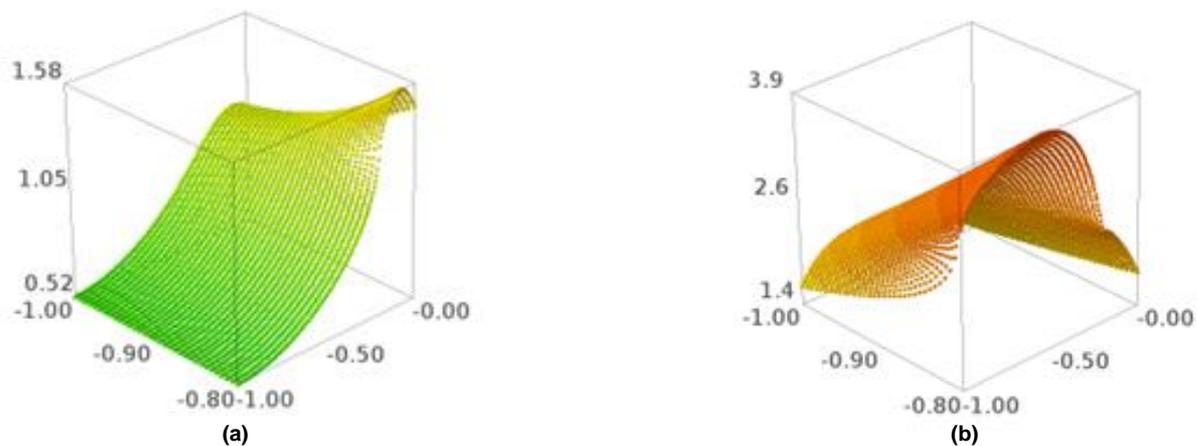


Figura 203. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{16000} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{2000} , com os efeitos da não convexidade.

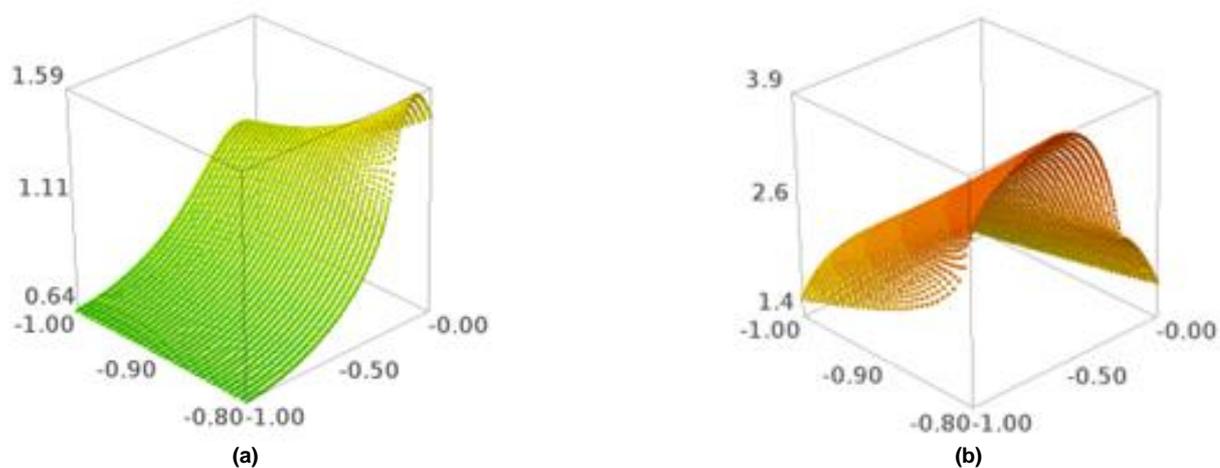


Figura 204. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{32508} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{3685} , com os efeitos da não convexidade.

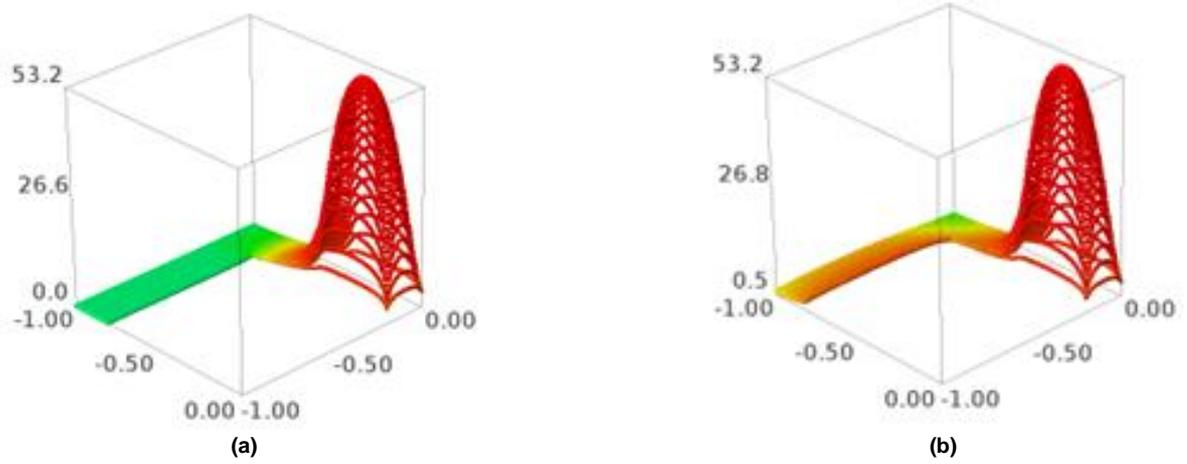


Figura 205. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{100} .

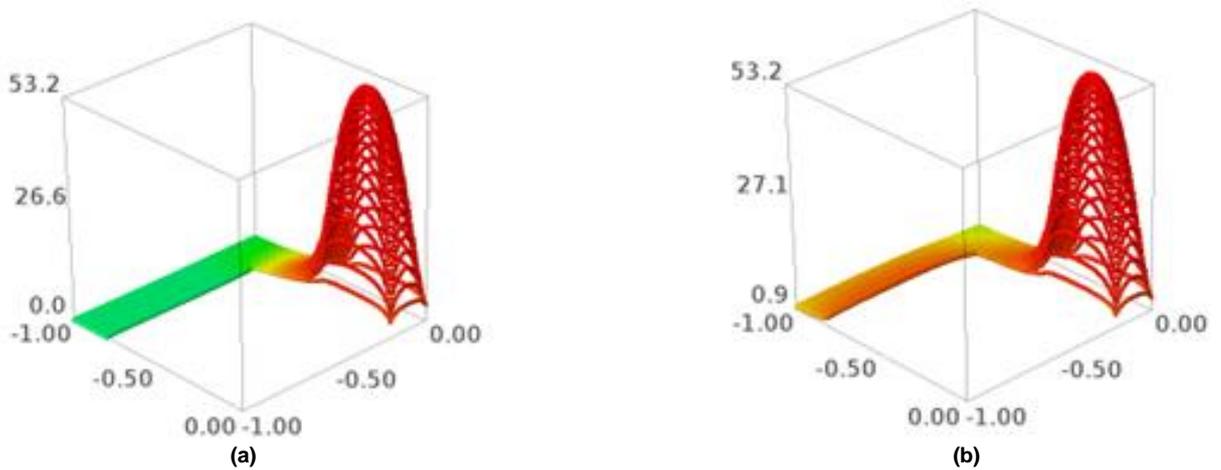


Figura 206. Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{200} .

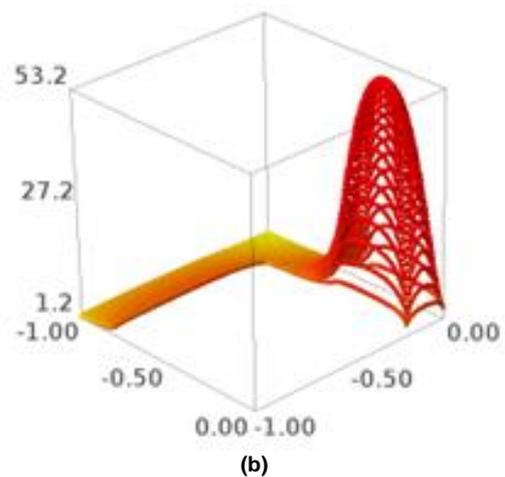
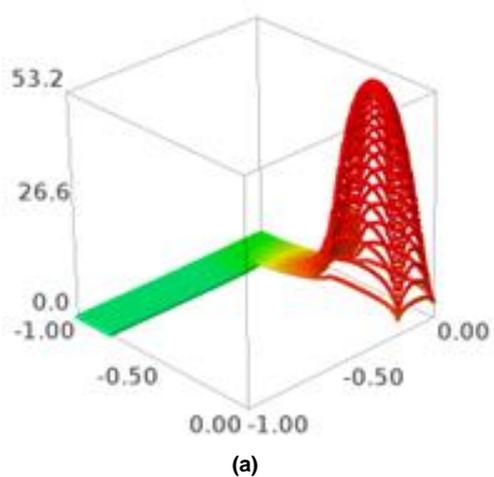


Figura 207. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa com os efeitos da não convexidade, para ψ^{500} .

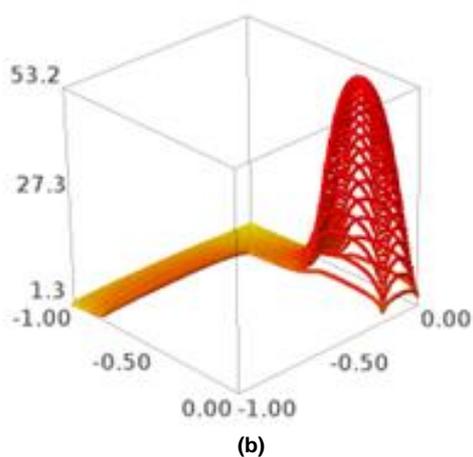
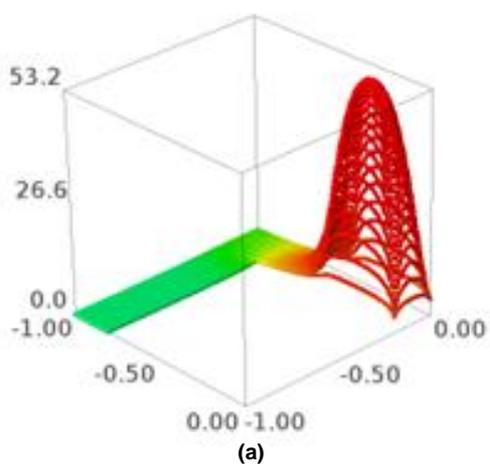


Figura 208. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{1000} .

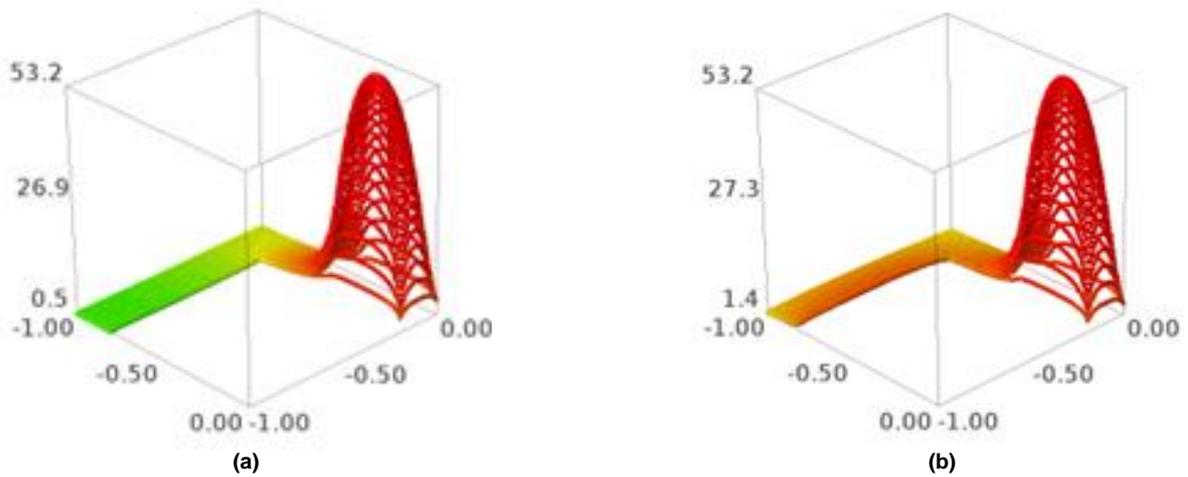


Figura 209. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{16000} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{2000} .

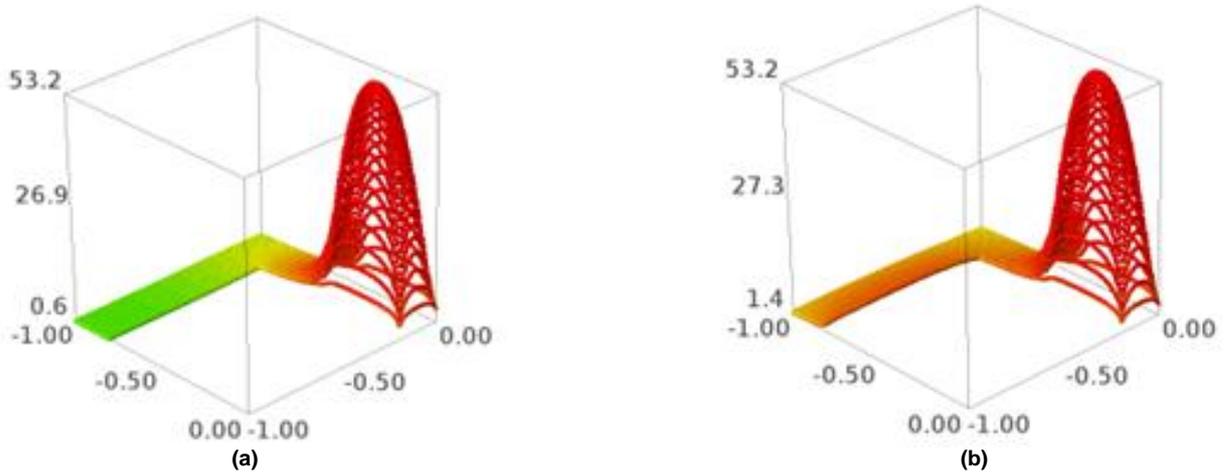


Figura 210. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade, para ψ^{32508} . (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade, para ψ^{3685} .

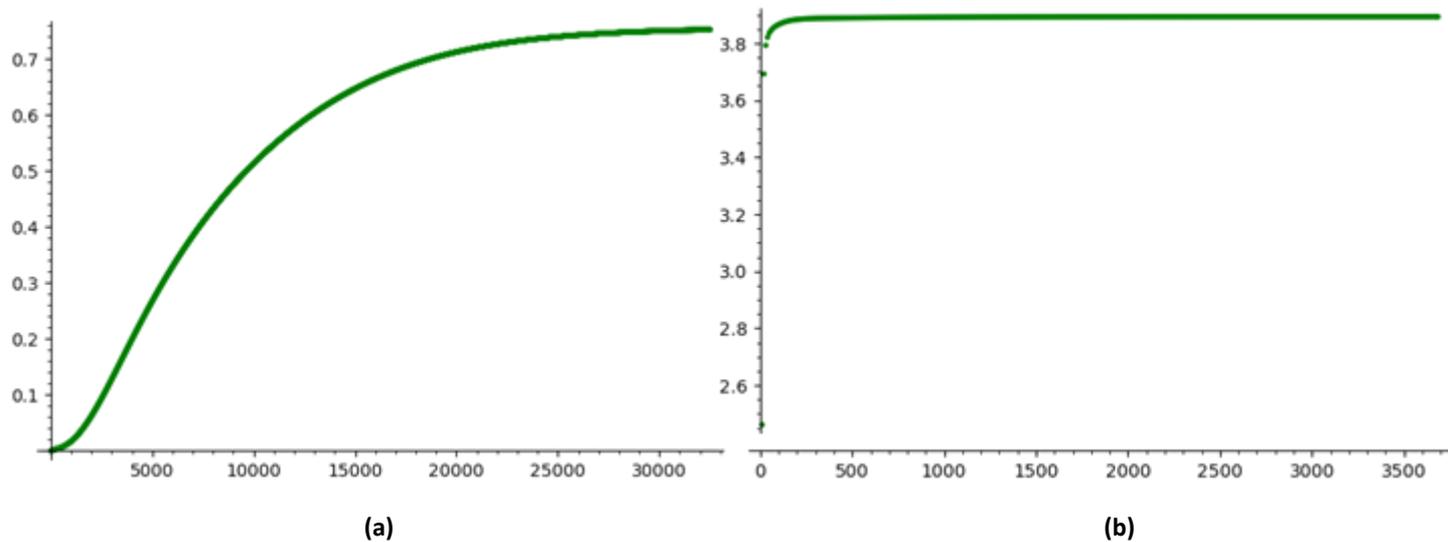


Figura 211. (a) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

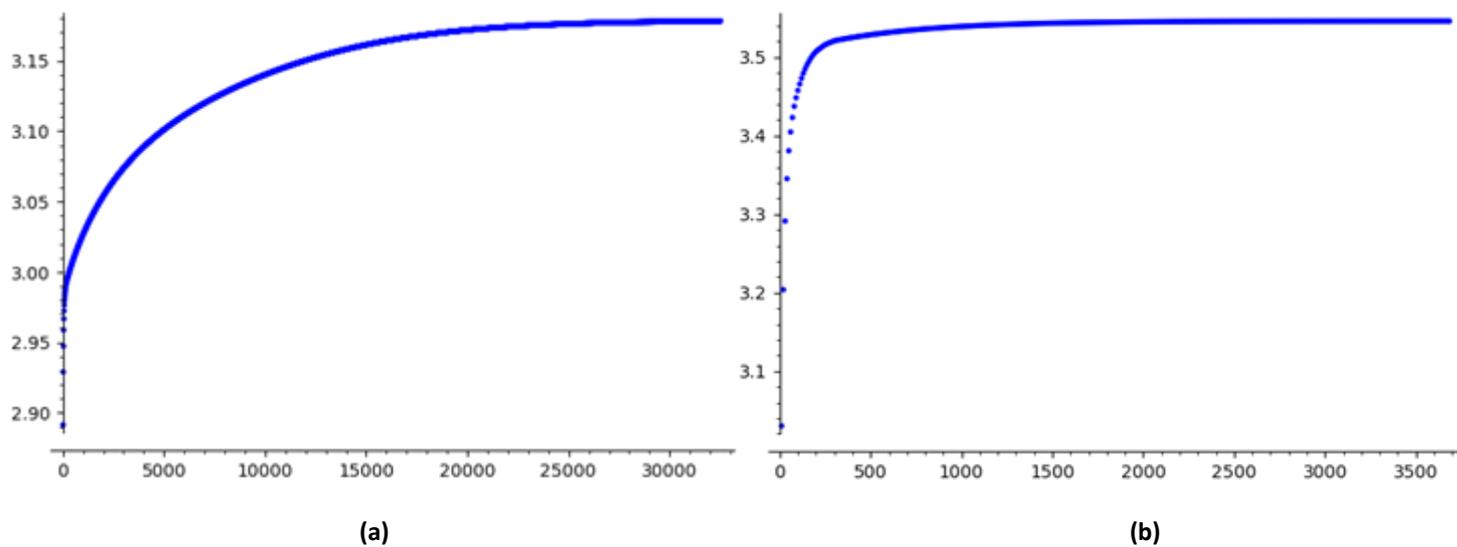


Figura 212. (a) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

As figuras de 213 a 217 mostram as simulações realizadas com $\alpha = 500$.

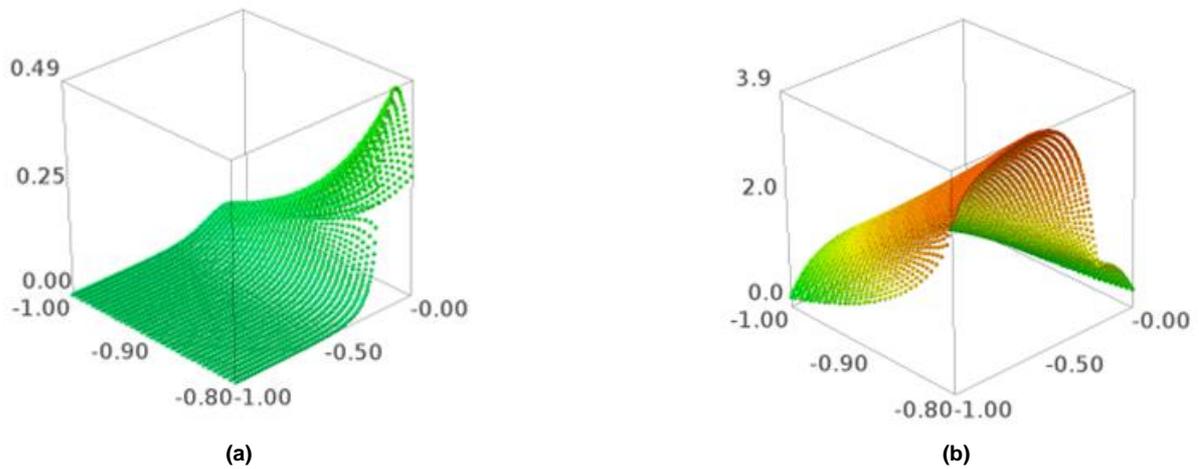


Figura 213. (a) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{23} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{22} , com os efeitos da não convexidade.

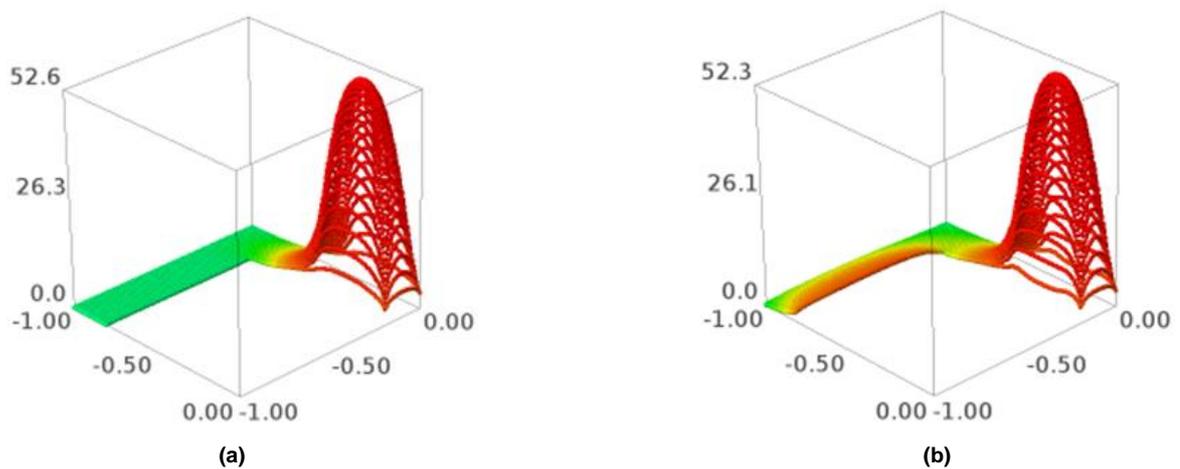


Figura 214. (a) Malha 160 x 160 Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{23} , sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Campo de temperaturas do lado vertical da placa para ψ^{22} , com os efeitos da não convexidade.

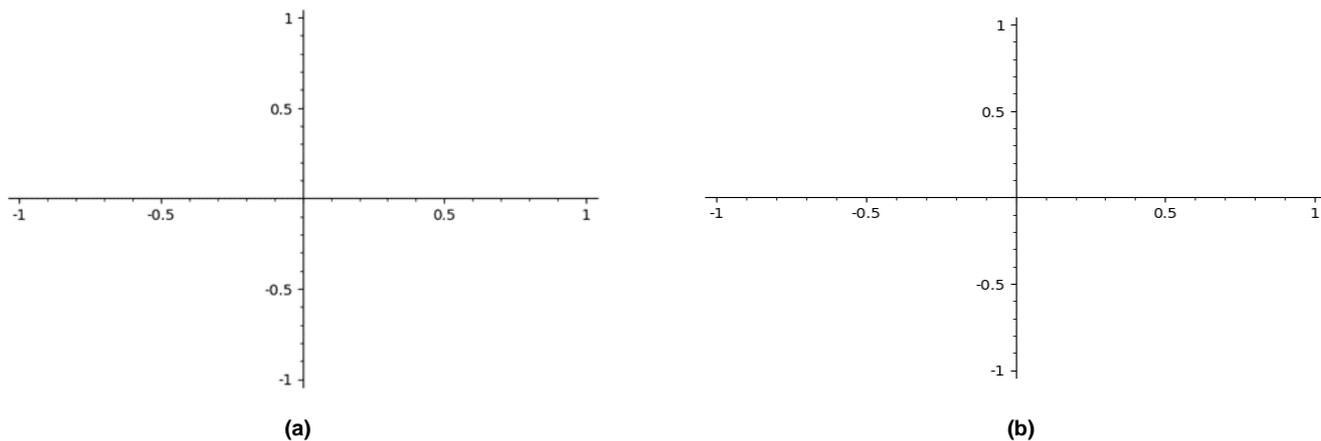


Figura 215. (a) Malha 160 x 160. Divergência. A simulação apresentou divergência para o último ψ . (b) Malha 160 x 160. Divergência. A simulação apresentou divergência para o último ψ

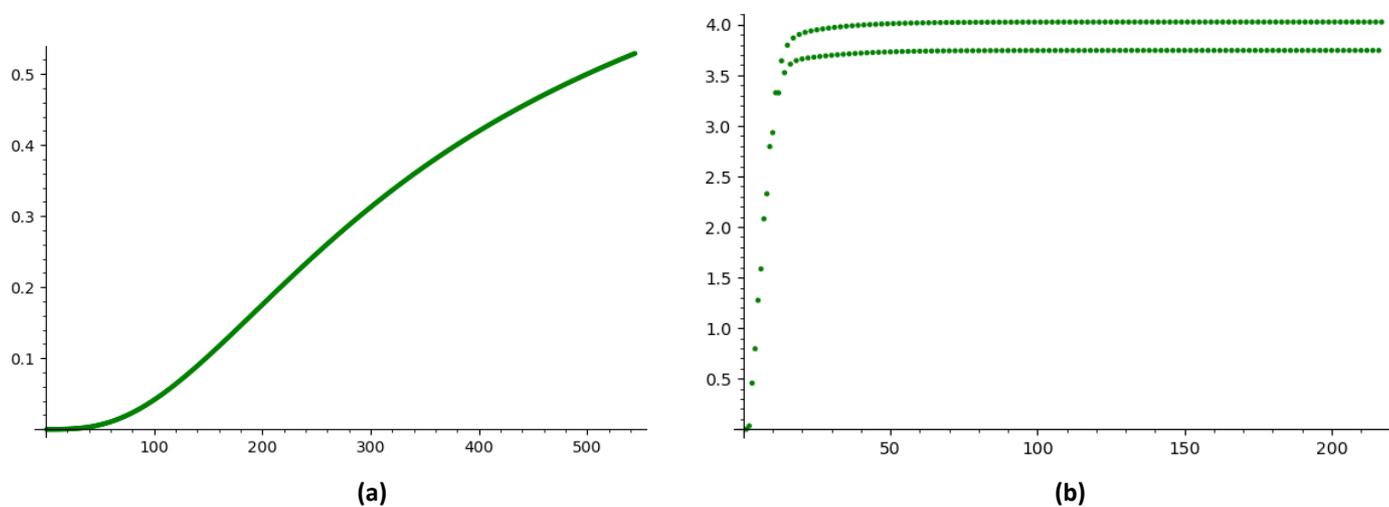


Figura 216. (a) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Temperatura do ponto médio do lado vertical da placa que se comunica com seu lado horizontal, com os efeitos da não convexidade.

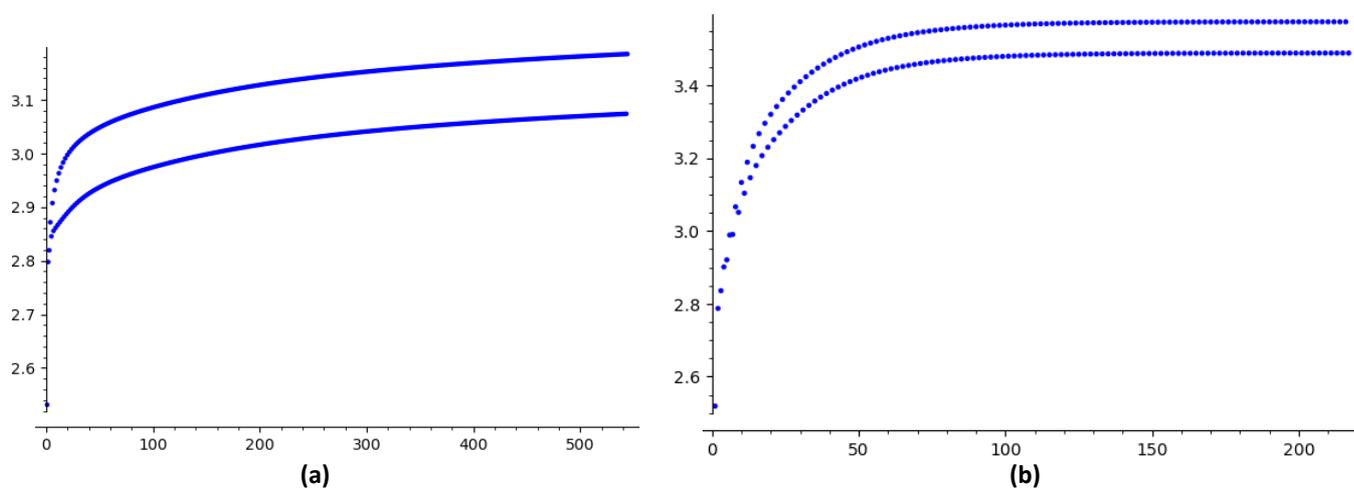


Figura 217. (a) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, sem os efeitos da não convexidade. (b) Malha 160 x 160. Somatório do campo de temperaturas da placa, com os efeitos da não convexidade.

O terceiro ciclo de simulações confirma a coerência e a concordância entre todos os resultados obtidos nos três ciclos de simulações, ou seja, entre as três malhas implementadas. Em comparação com os dois primeiros ciclos, a maneira como o campo de temperaturas muda quando a não convexidade da placa é considerada nos cálculos se mantém, aproximadamente, constante à medida que o valor do α é alterado, inclusive no valor de α para o qual é constatada a divergência nos cálculos. Em todos os ciclos de simulações a divergência ocorre quando $\alpha = 500$. Em outras palavras, o terceiro ciclo de simulações evidencia que os elementos da sequência são obtidos de forma harmônica com e sem os efeitos da não convexidade da placa, do $\alpha = 4000$ ao $\alpha = 600$, com os mesmos valores obtidos para a temperatura máxima da placa como um todo, para a temperatura máxima do lado vertical da placa, para a temperatura do ponto médio do lado vertical da placa e para o somatório das temperaturas do campo de temperaturas, que é proporcional à sua média. Mais uma vez, a partir do $\alpha = 500$ os resultados obtidos são fisicamente inconsistentes, pois os elementos da sequência não são crescentes, isto é, acusam divergência nos cálculos, conforme os exemplos constantes nas figuras 216 e 217.

No terceiro ciclo de simulações, constata-se um aumento de aproximadamente 145,28% na temperatura máxima do lado vertical da placa quando os efeitos da não convexidade são considerados nos cálculos, resultando no mesmo aumento verificado no segundo ciclo de simulações. Além disso, verifica-se um aumento de aproximadamente 413,15% na temperatura do ponto médio do lado vertical da placa quando os efeitos da não convexidade são considerados nos cálculos, e, assim sendo, resultando no mesmo aumento encontrado nos dois primeiros ciclos de simulações para esse mesmo ponto. Os gráficos que registram o somatório das temperaturas do campo de temperaturas com e sem os efeitos da não convexidade da placa indicam um aumento de aproximadamente 11,63% na média do campo de temperatura quando os efeitos da não convexidade da placa são considerados.

Assim como foi constatado nos dois primeiros ciclos de simulações, no terceiro ciclo ocorreu a diminuição da quantidade de elementos para a convergência da sequência ψ^i à medida que o valor do α diminui. Por exemplo, na figura 211, que registra a temperatura no ponto médio do lado vertical da placa para $\alpha = 600$, a convergência é estabelecida nas proximidades do elemento ψ^{30000} (sem os efeitos da não convexidade) e do elemento ψ^{100} (com os efeitos da não convexidade), ao passo que na figura 155, onde também registra a temperatura no ponto médio do lado vertical da placa, mas com $\alpha = 4000$, a convergência é estabelecida para ψ^i bem mais elevados, próximo do elemento ψ^{40000} (sem os efeitos da não convexidade) e do elemento ψ^{200} (com os efeitos da não convexidade). Além disso, no terceiro ciclo, como já esperado, nota-se que com o refinamento da malha, mais elementos da sequência são necessários para a convergência, em todos os valores de α implementados.

As tabelas 7,8 e 9 resumem os resultados obtidos nos três ciclos de simulações.

SOMATÓRIO DO CAMPO DE TEMPERATURAS								
Malha 40x40			Malha 80x80			Malha 160x160		
$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α	$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α	$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α
3,2	3,6	4000	3,2	3,55	4000	3,18	3,56	4000
3,2	3,6	3000	3,2	3,55	3000	3,18	3,56	3000
3,2	3,6	2000	3,2	3,58	2000	3,18	3,56	2000
3,2	3,6	1000	3,2	3,56	1000	3,18	3,54	1000
3,2	3,6	600	3,2	3,56	600	3,18	3,54	600
Divergência		500	Divergência		500	Divergência		500

Tabela 7. Valores de convergência dos somatórios dos campos de temperaturas das três malhas implementadas.

PONTO MÉDIO DO LADO VERTICAL DA PLACA								
Malha 40x40			Malha 80x80			Malha 160x160		
$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α	$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α	$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α
0,76	3,9	4000	0,76	3,9	4000	0,76	3,9	4000
0,76	3,9	3000	0,76	3,9	3000	0,76	3,9	3000
0,76	3,9	2000	0,76	3,9	2000	0,76	3,9	2000
0,76	3,9	1000	0,76	3,9	1000	0,76	3,9	1000
0,76	3,9	600	0,76	3,9	600	0,76	3,9	600
Divergência		500	Divergência		500	Divergência		500

Tabela 8. Valores de convergência do ponto médio do lado vertical da placa das três malhas implementadas.

TEMPERATURA MÁXIMA DO LADO VERTICAL DA PLACA								
Malha 40x40			Malha 80x80			Malha 160x160		
$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α	$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α	$T \equiv \psi^\infty$ (sem fator de forma)	$T \equiv \psi^\infty$ (com fator de forma)	α
1,6	3,9	4000	1,59	3,9	4000	1,59	3,9	4000
1,6	3,9	3000	1,59	3,9	3000	1,59	3,9	3000
1,6	3,9	2000	1,59	3,9	2000	1,59	3,9	2000
1,6	3,9	1000	1,59	3,9	1000	1,59	3,9	1000
1,6	3,9	600	1,59	3,9	600	1,59	3,9	600
Divergência		500	Divergência		500	Divergência		500

Tabela 9. Valores de convergência da temperatura máxima do lado vertical da placa das três malhas implementadas.

As tabelas 10,11,12 e 13 apresentam os valores numéricos de alguns pontos da placa, conforme ilustrado na figura 218. Os valores numéricos foram obtidos por meio das simulações com $\alpha = 4000$ e $\alpha = 600$, com e sem os efeitos do fator de forma da placa, isto é, com e sem os efeitos da não convexidade.

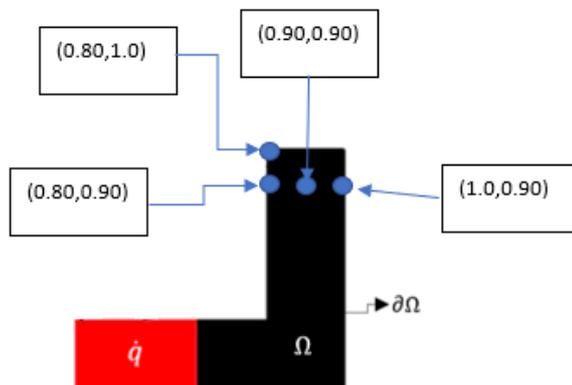


Figura 218. Ilustração dos pontos nos quais foram obtidos os valores numéricos para diferentes valores de α , com e sem os efeitos da não convexidade da placa.

ψ'	(0.80, 1.0)	(0.80, 0.90)	(0.90, 0.90)	(1.0, 0.90)
500.000000000000	0.00043087	0.00011383	0.00078588	0.00043615
1000.000000000000	0.0051614	0.0021959	0.0070799	0.0052275
1500.000000000000	0.020090	0.011064	0.024516	0.020253
2000.000000000000	0.047433	0.030892	0.054281	0.047692
2500.000000000000	0.085345	0.062125	0.093992	0.085676
3000.000000000000	0.13040	0.10245	0.14012	0.13078
3500.000000000000	0.17921	0.14861	0.18938	0.17960
4000.000000000000	0.22902	0.19750	0.23921	0.22942
4500.000000000000	0.27790	0.24667	0.28782	0.27828
5000.000000000000	0.32452	0.29439	0.33401	0.32488
5500.000000000000	0.36805	0.33945	0.37703	0.36839
6000.000000000000	0.40800	0.38113	0.41645	0.40830
6500.000000000000	0.44412	0.41901	0.45206	0.44439
7000.000000000000	0.47634	0.45292	0.48380	0.47658
7500.000000000000	0.50473	0.48287	0.51177	0.50494
8000.000000000000	0.52948	0.50901	0.53614	0.52966
8500.000000000000	0.55083	0.53158	0.55717	0.55098
9000.000000000000	0.56908	0.55089	0.57515	0.56922
9500.000000000000	0.58457	0.56726	0.59040	0.58468
10000.000000000000	0.59760	0.58105	0.60324	0.59770
10500.000000000000	0.60852	0.59258	0.61399	0.60859
11000.000000000000	0.61760	0.60219	0.62294	0.61766
11500.000000000000	0.62513	0.61014	0.63037	0.62518
12000.000000000000	0.63135	0.61671	0.63649	0.63139
12500.000000000000	0.63647	0.62212	0.64154	0.63650
13000.000000000000	0.64067	0.62656	0.64568	0.64070
13500.000000000000	0.64411	0.63019	0.64907	0.64413
14000.000000000000	0.64693	0.63316	0.65185	0.64694
14500.000000000000	0.64922	0.63559	0.65411	0.64924
15000.000000000000	0.65110	0.63757	0.65596	0.65111
15500.000000000000	0.65263	0.63918	0.65747	0.65264
16000.000000000000	0.65387	0.64049	0.65870	0.65388
16500.000000000000	0.65488	0.64156	0.65969	0.65489
17000.000000000000	0.65571	0.64243	0.66051	0.65571
17500.000000000000	0.65638	0.64313	0.66117	0.65638
18000.000000000000	0.65692	0.64371	0.66170	0.65692

Tabela 10. Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90) e (1.0,0.90) da placa para $\alpha = 4000$, sem os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.

ψ^f	(0.80, 1.0)	(0.80, 0.90)	(0.90, 0.90)	(1.0, 0.90)
100.000000000000	2.8817	2.4310	1.2791	0.22621
200.000000000000	3.4876	3.2876	1.8764	0.72600
300.000000000000	3.5435	3.3789	2.1675	1.1600
400.000000000000	3.5676	3.3992	2.3486	1.4708
500.000000000000	3.5806	3.4075	2.4561	1.6612
600.000000000000	3.5875	3.4116	2.5144	1.7649
700.000000000000	3.5910	3.4137	2.5442	1.8174
800.000000000000	3.5927	3.4148	2.5586	1.8429
900.000000000000	3.5936	3.4154	2.5655	1.8551
1000.000000000000	3.5940	3.4156	2.5689	1.8608
1100.000000000000	3.5942	3.4158	2.5707	1.8636
1200.000000000000	3.5943	3.4159	2.5716	1.8650
1300.000000000000	3.5944	3.4159	2.5720	1.8657
1400.000000000000	3.5944	3.4159	2.5722	1.8661
1500.000000000000	3.5944	3.4159	2.5723	1.8662
1600.000000000000	3.5944	3.4160	2.5724	1.8663
1700.000000000000	3.5944	3.4160	2.5724	1.8664
1800.000000000000	3.5944	3.4160	2.5724	1.8664
1900.000000000000	3.5945	3.4160	2.5724	1.8664
2000.000000000000	3.5945	3.4160	2.5724	1.8664
2100.000000000000	3.5945	3.4160	2.5724	1.8664
2200.000000000000	3.5945	3.4160	2.5724	1.8664
2300.000000000000	3.5945	3.4160	2.5724	1.8664

Tabela 11. Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90) e (1.0,0.90) da placa para $\alpha = 4000$, com os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.

ψ^f	(0.80, 1.0)	(0.80, 0.90)	(0.90, 0.90)	(1.0, 0.90)
500.000000000000	0.10107	0.080459	0.10711	0.10247
1000.000000000000	0.29666	0.27183	0.30334	0.29818
1500.000000000000	0.45997	0.43996	0.46559	0.46103
2000.000000000000	0.56158	0.54535	0.56660	0.56217
2500.000000000000	0.61469	0.60028	0.61950	0.61497
3000.000000000000	0.63967	0.62603	0.64443	0.63979
3500.000000000000	0.65080	0.63748	0.65555	0.65085
4000.000000000000	0.65563	0.64245	0.66039	0.65566
4500.000000000000	0.65771	0.64459	0.66246	0.65772
5000.000000000000	0.65860	0.64550	0.66335	0.65860

Tabela 12. Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90) e (1.0,0.90) da placa para $\alpha = 600$, sem os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.

ψ^f	(0.80, 1.0)	(0.80, 0.90)	(0.90, 0.90)	(1.0, 0.90)
50.0000000000000	3.5557	3.3905	2.2468	1.2893
100.0000000000000	3.5902	3.4134	2.5370	1.8065
150.0000000000000	3.5940	3.4156	2.5689	1.8611
200.0000000000000	3.5944	3.4159	2.5719	1.8658
250.0000000000000	3.5944	3.4159	2.5723	1.8663
300.0000000000000	3.5944	3.4160	2.5724	1.8664
350.0000000000000	3.5944	3.4160	2.5724	1.8664
400.0000000000000	3.5945	3.4160	2.5724	1.8664
450.0000000000000	3.5945	3.4160	2.5724	1.8664
500.0000000000000	3.5945	3.4160	2.5724	1.8664

Tabela 13. Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90) e (1.0,0.90) da placa para $\alpha = 600$, com os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.

As tabelas 14 e 15 apresentam os valores numéricos dos pontos indicados na figura 219 para o valor de α que apresenta divergência ($\alpha = 500$). Os valores são apresentados com e sem os efeitos da não convexidade da placa.

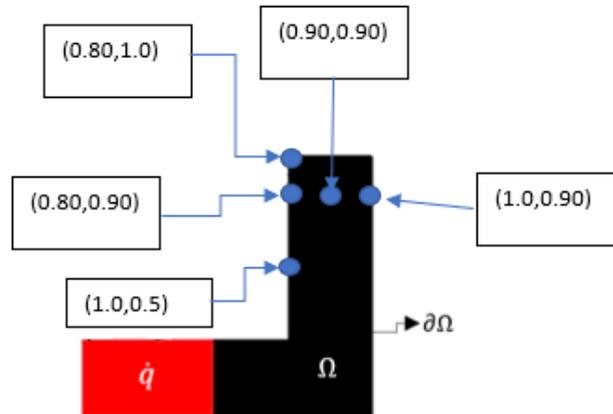


Figura 219. Ilustração dos pontos nos quais foram obtidos os valores numéricos para $\alpha = 500$, com e sem os efeitos da não convexidade da placa.

Ψ^t	(0.80, 1.0)	(0.80, 0.90)	(0.90, 0.90)	(1.0, 0.90)	(1.0, 0.50)
1000.000000000000	0.56968	0.55080	0.57607	0.77886	0.56967
2000.000000000000	0.65688	0.64365	0.66167	0.81983	0.65688
3000.000000000000	0.65917	0.64608	0.66392	0.82092	0.65916
4000.000000000000	0.65922	0.64614	0.66397	0.82095	0.65922
5000.000000000000	0.65922	0.64614	0.66397	0.82095	0.65922
6000.000000000000	0.65922	0.64614	0.66397	0.82095	0.65922
7000.000000000000	0.65922	0.64614	0.66397	0.82095	0.65922
8000.000000000000	0.65922	0.64614	0.66397	0.82095	0.65922

Tabela 14. Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90), (1.0,0.90) e (1.0,0.5) da placa para $\alpha = 500$, sem os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.

Ψ^t	(0.80, 1.0)	(0.80, 0.90)	(0.90, 0.90)	(1.0, 0.90)	(1.0, 0.50)
15.00000000000000	3.3046	2.8714	1.5345	0.51614	0.34496
30.00000000000000	3.4170	3.2641	1.9896	1.2657	0.93422
45.00000000000000	3.6668	3.4839	2.3450	1.7267	1.3826
60.00000000000000	3.4700	3.3150	2.4085	1.9244	1.6452
75.00000000000000	3.6926	3.5005	2.5609	1.9969	1.7740
90.00000000000000	3.4806	3.3215	2.5078	2.0176	1.8273
105.00000000000000	3.6976	3.5035	2.6036	2.0280	1.8513
120.00000000000000	3.4825	3.3227	2.5253	2.0285	1.8588
135.00000000000000	3.6984	3.5041	2.6107	2.0323	1.8639
150.00000000000000	3.4829	3.3229	2.5281	2.0304	1.8638

Tabela 15. Valores numéricos dos pontos (0.8,0.90), (0.8,1.0), (0.90,0.90), (1.0,0.90) e (1.0,0.5) da placa para $\alpha = 500$, com os efeitos da não convexidade da placa. Malha utilizada 40 x 40.

Não foram encontrados na literatura resultados numéricos ou analíticos de problemas de transferência de calor com a estrutura matemática apresentada neste trabalho para comparar com os resultados obtidos nesta tese.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou a simulação computacional de um novo método de resolução de problemas de engenharia que são descritos por equações diferenciais parciais com condição de contorno não linear, considerando um corpo não convexo. O novo método funciona linearizando a condição de contorno não linear. O fenômeno físico escolhido para realizar a simulação computacional foi a transferência de calor do tipo estacionário em um corpo negro, rígido e não convexo com geração interna de energia e condutividade térmica constante. O meio no qual o corpo rígido está inserido foi admitido não participante, e, portanto, os efeitos da convecção foram desprezados. Esse problema é modelado por uma equação diferencial parcial elíptica de Poisson, com condição de contorno caracterizada pelo acoplamento da condução térmica com a radiação térmica, considerando os efeitos da não convexidade do corpo.

A prova matemática do novo método foi formalmente apresentada neste trabalho e a sua consistência física foi verificada por meio de simulações computacionais utilizando a técnica das diferenças finitas e o método iterativo de Gauss-Seidel. Os resultados das simulações do novo método, principais contribuições deste trabalho, se mostraram fisicamente consistentes, o que evidencia que o novo método parece ser seguro e pode ser utilizado na resolução de diversos problemas de engenharia possuidores de estrutura matemática semelhante ao problema (49). É importante destacar que o método também pode ser aplicado a problemas de transferência de calor com condutividade térmica dependente da temperatura e quando o corpo está sujeito aos efeitos da convecção.

O destaque do novo método é a possibilidade da utilização de um ferramental matemático demasiadamente simples no que diz respeito às simulações computacionais. Desta maneira, um aluno de graduação é capaz de utilizar o método para resolver problemas de transferência de calor caracterizados por equações diferenciais parciais com condição de contorno não linear, considerando um corpo não convexo. Sabe-se que, sem a utilização do método apresentado neste trabalho, a solução de tal problema exige um alto grau de sofisticação matemática que, em geral, é estudado por alunos de pós-graduação em área muito específica da matemática [30,31,32,33,34,35].

O problema abordado neste trabalho para a simulação computacional do novo método é mais realista do que os abordados na literatura básica por utilizar um corpo negro não convexo. O pressuposto de corpo negro pode ser uma boa aproximação para fins de engenharia, no entanto, o fato de o corpo negro não refletir radiação térmica pode ser uma desvantagem em algumas situações de engenharia nas quais a energia refletida no corpo precisa ser levada em conta para uma boa descrição matemática do problema. Por isso, em trabalhos futuros, o novo método apresentado nesta tese pode ser aplicado a problemas ainda mais realistas, como, por exemplo, utilizar um corpo cinzento não convexo, com uma forma geométrica mais elaborada no que diz respeito a não convexidade do corpo. Um corpo cinzento leva em conta a reflexão da radiação térmica, ou seja, uma parte da radiação térmica incidente não é absorvida [36]. Logo, o problema da transferência de calor em um corpo cinzento não convexo gera uma condição de contorno mais complexa quando comparado à condição de contorno gerada por um corpo negro não convexo. O método de resolução apresentado neste trabalho parece ser eficaz na solução de problemas de transferência de calor em corpos cinzentos não convexos.

REFERÊNCIAS

- [1] Arpaci, V.S. *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts, 1966.
- [2] Alvarez-Quintana, J. Martínez, E., Pérez-Tijerina, E., Pérez-García, S. A. e Rodríguez-Viejo, J, 2010, "Temperature dependent thermal conductivity of polycrystalline ZnO films", *J. Appl. Phys.*, vol. 107, pp. 063713.1-063713.4.
- [3] Carslaw, H.S e Jaeger, J.C. *Conduction Heat Transfer in Solids*, Oxford University Press, 1959.
- [4] Gama, R.M.S. A linear scheme for simulating conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, vol.21, pp.447-454, Julho, 1997.
- [5] Gama, R.M.S. Análise da troca de calor por radiação térmica difusa em uma cavidade cinzenta trapezoidal. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, vol.VIII, no.1, pp.31-43, 1986.
- [6] Gama, R.M.S. An a priori upper bound estimate for the steady-state temperature distribution in a body subjected to linear boundary conditions. *Mechanics Research Communications*, vol.27, no.2, pp.229-234, 2000.
- [7] Gama, R.M.S. A new mathematical model for energy transfer problems with radiative boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, no.2, vol.14, pp.96-103, 1990.
- [8] Gama, R.M.S. An a priori upper bound estimate for conduction heat transfer problems with temperature-dependent thermal conductivity. *Mechanics Research Communications*. 92. 10.1016/j.mechrescom.2018.08.002.
- [9] Gama, R.M.S. An upper bound estimate for a class of conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, vol.27, no.7, pp.955- 964, 2000.

- [10] Gama, R.M.S. Aplicação do método das cordas cruzadas na solução local de problemas simétricos de radiação pura. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, vol.VI, no.3, pp.199-210, 1984.
- [11] Gama, R.M.S. Existence, uniqueness and construction of the solution of the energy transfer problem in a rigid and non-convex blackbody. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, vol.42, pp.334-347, 1991.
- [12] Gama, R.M.S. Numerical simulation of the (nonlinear) conduction/radiation heat transfer process in a nonconvex and black cylindrical body. *Journal of Computational Physics*, vol.128, pp.341-350, 1996.
- [13] Gama, R.M.S. On a class of elliptic problems and its application to heat transfer in nonconvex bodies. *Journal of Computational Mathematics*, vol.11, no.4, pp.301-312, 1993.
- [14] Gama, R.M.S. On the physical solutions to the heat equation subjected to nonlinear boundary conditions. *Journal of Computational Mathematics*, vol.10, Suppl. Iss., pp.15-21, 1992.
- [17] Gama, R.M.S. On the solutions of the energy transfer problem in a nonconvex black body with convective/radiative boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol.26, no.5, pp.641-653, 1991.
- [18] Gama, R.M.S. Simulation of the steady-state energy transfer in rigid bodies, with convective/radiative boundary conditions, employing a minimum principle. *Journal of Computational Physics*, vol.99, no.2, pp.310-320, 1992.
- [19] Gama, R.M.S. The nonlinear conduction/radiation heat transfer phenomenon represented as the limit of a sequence of linear problems. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol.24, no.1, pp.119-128, 1997.
- [20] Gama, R.M.S. Uma formulação variacional geral para problemas de troca de calor por radiação difusa. *Revista Brasileira de Ciência Mecânica*, vol.VII, no.2, pp.163-179, 1985.

- [21] Incropera, F; Dewiy P.D., Introduction to Heat Transfer, 3rd edition, John Wiley&Sons, Inc., 1996.
- [22] Kreyszig, E. Introductory to Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [23] Slattery, J.C. Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua, McGraw – Hill Kogakusha, Tokyo, 1972.
- [24] Sparrow, E.M.; CESS, R.D. Radiation Heat Transfer, McGraw-Hill, Washington, 1978.
- [25] Taylor, A.E. Introduction to functional analysis, Wiley Toppan, Tokyo, 1958.
- [26] Gama, R.M.S. Existence, uniqueness and construction of the solution of the energy transfer problem in a rigid and non-convex blackbody with temperature-dependent thermal conductivity. Z. Angew. Math. Phys. 66, 2921–2939 (2015).
- [27] Berlandi, L.B.B & Brandi, A.C.B. Método multi-malhas aplicados à equação de Poisson bidimensional. Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia. UFPR, 2017.
- [28] Gama, RMS.; Fundamentos de mecânica dos fluidos, ed UERJ, Rio de Janeiro, 2012.
- [29] Gama, R.M.S. Mathematical modelling, variational formulation and numerical simulation of the energy transfer process in a gray plate in the presence of a thermal radiant source. Latin American Applied Research, 1994.
- [30] John, F., Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1981
- [31] Gilbarg, D., Trudinger, N., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, New York, 1998
- [32] Duvaut, G., Lions, J. L., Les Inequations in Mecanique et en Physique, Dunod. Paris, 1972.

- [33] An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations. M. Grossinho, S. Tersian
- [34] J -L Lions Editora Paris, Dunod. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, 1969.
- [35] Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations - Haim Brezis.
- [36] Gama, R.M.S. The Heat Transfer Problem in a Rigid and Nonconvex Gray Body with temperature dependente termal conductivity, 2019.
- [37] Gama, R.M.S. A Linear scheme for constructing the solution of a steady-state nonlinear heat transfer problem in a nonconvex body. Artigo Submetido ao Mathematical Problems in Engineering, 2021.
- [38] Amosov, A. Nonstationary Radiative-Conductive Transfer Problem in a Semitransparent Body with Absolutely Black Inclusions. 2021.
- [39] Gama, R.M.S. An alternative mathematical modelling for coupled conduction/radiation energy transfer phenomenon in a system of N gray bodies surrounded by a vacuum, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 30, 1995, Pages 433-447.
- [40] C. T. Kelley. Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations, Transport Theory and Statistical Physics, 1996.
- [41] Naji Qatanani, Monika Schulz, Preconditioned conjugate gradient method for three-dimensional non-convex enclosure geometries with diffuse and grey surfaces, Applied Mathematics and Computation, Volume 159, Issue 3, 2004, Pages 797-807.
- [42] Qatanani, Naji. Analysis of the Heat Equation with Non-Local Radiation Terms in a Non-Convex Diffuse and Grey Surfaces. European Journal of Scientific, 2006.

APÊNDICE A
Código implementado no software *Sagemath*.

```
#INPUT

# endpoints
a=0.
b=1.
c=0.
d=1.

# integers
n=160 # horizontal
m=160 # vertical

# tamanho do retângulo removido do retângulo maior
piece=0.8
ns=floor(piece*n) # horizontal square
ms=floor(piece*m) # vertical square

mp=0.5 # boundary point # (ponto médio lado vertical)

# tolerance

TOL=10^-6 # gauss seidel (tolerância imposta para as iterações do Gauss Seidel)
TOLi=10^-6 #phi_i [tolerância imposta para a iteração do método representado pelo sistema (50)]

# maximum number of iterations
Nmax=10000000 # gauss seidel
imax=40000000 # phi_i

# parameters
K=2. # k
AA=500. # alpha
```

```
s=1. # sigma
# coefficients
A=RR(-AA/K) # RR transforma de computação simbólica para numérica

# colors
C=70 #quantidade de cores

# perspective
axis=(0,0,1) # rotation axis
angle=pi/2 # rotation angle

# angle factor
var('xx yy i2 j2')
F(xx,yy)=xx*yy/(xx^2+yy^2)^(3/2)/2 # angle factor
tf=False # com ou sem fator de forma
wb=False # placa inteira ou só pedaço
animON=False # animação ou não

# number of phi_i
Nphi=50 # registra phi_50, phi_100, phi_150, etc.

# number of guara points
Ngu=1

# OUTPUT

# Step 0 # inicializa os gráficos que depois serão populados com os pontos
Pmax=plot([]) # max plot
Pint=plot([]) # int plot
Pmaxb=plot([]) # max boundary
Ppb=plot([]) # boundary point plot
P=plot([]) # plots
plots=[]
```

```

# Step 1 # define os incrementos horizontal e vertical
h=RR((b-a)/n) # length
k=RR((d-c)/m) # width

# Step 2 construct mesh points #Pontos da malha
x=[RR(a+i*h) for i in range(n+1)] # range pega até o valor anterior, não pega o último (n+1)
y=[RR(c+j*k) for j in range(m+1)]

sm=0.
sx=9999.
sy=0.9999
cm=20000.
cx=0.5
cy=1.
q(xx,yy)=cm*(1+sgn(cx*x[ns]-xx))/2*(1+sgn(yy-(1-cy)*y[m-ms]))/2 # q ponto constante
#q2(xx,yy)=sm*(1+sgn(sx*x[ns]-xx))/2*(1+sgn(yy-(1-sy)*y[m-ms]))/2
q2(xx,yy)=sm*(1+sgn(sx*x[ns]-xx))/2*(1-sgn(yy-(1-sy)*y[m-ms]))/2

f(xx,yy)=-q(xx,yy)/K # o que aparece do lado direito da EDP
fc=matrix([[RR(f(x[i],y[j])) for j in range(m+1)] for i in range(n+1)]) # matriz de discretização do f das diferenças finitas
(f é coeficiente da EDP)
Fc=matrix([[RR(F(-x[i]+x[ns],y[j])-y[m-ms])) if (i!=ns) & (j!=m-ms) else 0. for j in range(m+1)] for i in range(n+1)]) #
usada pra discretizar a integral que aparece na condição de contorno
q2c=matrix([[RR(q2(x[i],y[j])) for j in range(m+1)] for i in range(n+1)]) # para fonte externa

# Step 3 # inicialização das matrizes de discretização
w=matrix([[0. for j in range(m+1)] for i in range(n+1)]) # Phi_i (solução discretizada)
w0=matrix([[0. for j in range(m+1)] for i in range(n+1)]) # Phi_(i-1) (solução da etapa anterior)
B=matrix([[0. for j in range(m+1)] for i in range(n+1)]) # beta_i
g=matrix([[0. for j in range(m+1)] for i in range(n+1)]) # o que aparece à esquerda da condição de contorno
discretizado
wmax=0. # max phi
wint=0. # int phi

```

```

wmaxb=0. # max boundary phi
wmaxbo=0. # max outside boundary phi
wpb=0. # boundary point phi

# table
points=[[ns,m),(ns,ms+(m-ms)/2),(ns+(n-ns)/2,ms+(m-ms)/2),(n,ms+(m-ms)/2),(n,m/2]] # coordenadas dos pontos a serem plotados
step=50.
digits_=5.
dg_=1.

coordpoints=[[numerical_approx(x[pt[0]],digits=dg_),numerical_approx(y[pt[1]],digits=dg_)] for pt in points] # converte coordenadas inteiras da malha em coordenadas cartesianas levando em conta os incrementos horizontal e vertical
table_=[] # inicializa a tabela que será populada com os pontos

# Step 4
L=RR(h^2/k^2) # L e M são variáveis convenientes que aparecem com frequência nas fórmulas de diferenças finitas
M=RR(2*(1+L))
l=1 # contador no loop do gauss seidel (sistema linear)
ll=1 # contador no loop das phi_i

# Step 5 perform Gauss-Seidel iterations #Solução do sistema de equações (da esquerda pra direita, de cima pra baixo)
while ll<=imax: # checa número máximo de iterações das phi_i
    while l<=Nmax: # checa o número máximo de iterações do gauss seidel
        z=RR((-h^2*fc[ns,m]+2*(h+L*k)*g[ns,m]+2*w[ns+1,m]+2*L*w[ns,m-1])/(M-2*(h+L*k)*A)) # encontra os valores das phi_i
        NORM=abs(z-w[ns,m]) # calculando a distância entre as aproximações sucessivas
        w[ns,m]=z # recicla o w
        for i in range(ns+1,n): # percorre bordo horizontal superior
            z=RR((-h^2*fc[i,m]+2*L*k*g[i,m]+w[i+1,m]+w[i-1,m]+2*L*w[i,m-1])/(M-2*L*k*A))
            if abs(w[i,m]-z)>NORM:
                NORM=abs(w[i,m]-z)
            w[i,m]=z
        z=RR((-h^2*fc[n,m]+2*(h+L*k)*g[n,m]+2*w[n-1,m]+2*L*w[n,m-1])/(M-2*(h+L*k)*A))
        if abs(w[n,m]-z)>NORM:

```

```

NORM=abs(w[n,m]-z)
w[n,m]=z #canto superior direito
# tudo que ele fez até aqui foi calcular o phi_i no bordo horizontal superior
for j in range(m-1,m-ms,-1): # nesse loop calcula a phi_i nos pontos do retângulo adjacente ao que foi removido
    z=RR((-h^2*fc[ns,j]+2*h*g[ns,j]+2*w[ns+1,j]+L*w[ns,j+1]+L*w[ns,j-1])/(M-2*h*A))
    if abs(w[ns,j]-z)>NORM:
        NORM=abs(w[ns,j]-z)
    w[ns,j]=z
    for i in range(ns+1,n):
        z=RR((-h^2*fc[i,j]+w[i-1,j]+L*w[i,j+1]+w[i+1,j]+L*w[i,j-1])/M)
        if abs(w[i,j]-z)>NORM:
            NORM=abs(w[i,j]-z)
        w[i,j]=z
    z=RR((-h^2*fc[n,j]+2*h*g[n,j]+2*w[n-1,j]+L*w[n,j+1]+L*w[n,j-1])/(M-2*h*A))
    if abs(w[n,j]-z)>NORM:
        NORM=abs(w[n,j]-z)
    w[n,j]=z
# tudo que ele fez até aqui foi calcular phi_i no retângulo adjacente ao que foi removido
z=RR((-h^2*fc[0,m-ms]+2*(h+L*k)*g[0,m-ms]+2*w[1,m-ms]+2*L*w[0,m-ms-1])/(M-2*(h+L*k)*A))
NORM=abs(z-w[0,m-ms])
w[0,m-ms]=z
for i in range(1,ns): # calcula phi_i no bordo horizontal do L
    z=RR((-h^2*fc[i,m-ms]+2*L*k*g[i,m-ms]+w[i+1,m-ms]+w[i-1,m-ms]+2*L*w[i,m-ms-1])/(M-2*L*k*A))
    if abs(w[i,m-ms]-z)>NORM:
        NORM=abs(w[i,m-ms]-z)
    w[i,m-ms]=z
for i in range(ns,n):
    z=RR((-h^2*fc[i,m-ms]+w[i-1,m-ms]+L*w[i,m-ms+1]+w[i+1,m-ms]+L*w[i,m-ms-1])/M)
    if abs(w[i,m-ms]-z)>NORM:
        NORM=abs(w[i,m-ms]-z)
    w[i,m-ms]=z
z=RR((-h^2*fc[n,m-ms]+2*h*g[n,m-ms]+2*w[n-1,m-ms]+L*w[n,m-ms+1]+L*w[n,m-ms-1])/(M-2*h*A))
if abs(w[n,m-ms]-z)>NORM:
    NORM=abs(w[n,m-ms]-z)
w[n,m-ms]=z

```

for j in range(m-ms-1,0,-1): # aqui sim ele vai finalizar os cálculos encontrando phi_i no porção maior da figura, que é o retângulo de baixo

```
z=RR((-h^2*fc[0,j]+2*h*g[0,j]+2*w[1,j]+L*w[0,j+1]+L*w[0,j-1])/(M-2*h*A))
```

```
if abs(w[0,j]-z)>NORM:
```

```
    NORM=abs(w[0,j]-z)
```

```
w[0,j]=z # bordo vertical esquerdo de retângulo de baixo
```

```
for i in range(1,n):
```

```
    z=RR((-h^2*fc[i,j]+w[i-1,j]+L*w[i,j+1]+w[i+1,j]+L*w[i,j-1])/M)
```

```
    if abs(w[i,j]-z)>NORM:
```

```
        NORM=abs(w[i,j]-z)
```

```
    w[i,j]=z # interior do retângulo de baixo
```

```
z=RR((-h^2*fc[n,j]+2*h*g[n,j]+2*w[n-1,j]+L*w[n,j+1]+L*w[n,j-1])/(M-2*h*A))
```

```
if abs(w[n,j]-z)>NORM:
```

```
    NORM=abs(w[n,j]-z)
```

```
w[n,j]=z # bordo vertical direito do retângulo de baixo
```

```
z=RR((-h^2*fc[0,0]+2*(h+L*k)*g[0,0]+2*w[1,0]+2*L*w[0,1])/(M-2*(h+L*k)*A))
```

```
if abs(w[0,0]-z)>NORM:
```

```
    NORM=abs(w[0,0]-z)
```

```
w[0,0]=z
```

```
for i in range(1,n):
```

```
    z=RR((-h^2*fc[i,0]+2*L*k*g[i,0]+w[i+1,0]+w[i-1,0]+2*L*w[i,1])/(M-2*L*k*A))
```

```
    if abs(w[i,0]-z)>NORM:
```

```
        NORM=abs(w[i,0]-z)
```

```
    w[i,0]=z # bordo horizontal de baixo
```

```
z=RR((-h^2*fc[n,0]+2*(h+L*k)*g[n,0]+2*w[n-1,0]+2*L*w[n,1])/(M-2*(h+L*k)*A))
```

```
if abs(w[n,0]-z)>NORM:
```

```
    NORM=abs(w[n,0]-z)
```

```
w[n,0]=z
```

```
if NORM<=TOL: # checa se bateu tolerância do gauss-seidel
```

```
    if floor(ll/Nphi)==ll/Nphi:
```

```
        P=plot([])
```

```
        for i in range(0,n+1):
```

```
            for j in range(0,m+1):
```

```
                if (i>=ns) | ((j<=m-ms)&wb):
```

```
                    P+=point((x[i],y[j],w[i,j]),color=rainbow(C)[floor(6/7*C*(-arctan(w[i,j])/pi+1/2))]) # adiciona os pontos
```

```
que serão plotados nos gráficos
```

```

# table
if ((i,j) in points) and (floor(l/step)==l/step):
    table_.append((l,w[i,j]))

plot(P.rotate(axis,angle)).save(filename = 'plot-%s.png' %(l)) # salva os gráficos
if animON:
    plots.append(plot(P.rotate(axis,angle))) # constroi animação
break
l+=1
if l>Nmax: # checa se estourou o número máximo de iterações do gauss seidel
    print('Maximum number of iterations exceeded')
    break
NORMi=0.
for i in range(n+1):
    for j in range(m+1):
        if abs(w[i,j]-w0[i,j])>NORMi:
            NORMi=abs(w[i,j]-w0[i,j])
if floor(l/Ngua)==l/Ngua: # plota os gráficos bidimensionais
    wmax=max(w.list())
    Pmax+=point((l,wmax))
    wint=RR(h*k*sum(w[i,j] for i in range(n) for j in range(m) if (i>=ns) |(j<=m-ms)))
    Pint+=point((l,wint))
    wmaxb=max(max(w[ns,j] for j in range(m-ms+1,m+1)),max(w[i,m-ms] for i in range(ns)))
    wmaxbo=max(max(w[n,j] for j in range(m+1)),max(w[i,0] for i in range(n+1)))
    wpb=w[ns,floor(m-mp*ms)]
    Pmaxb+=point((l,wmaxb),color='red')
    Pmaxbo+=point((l,wmaxbo),color='blue')
    Pmaxb+=point((l,wpb),color='green')
    Ppb+=point((l,wpb),color='green')
if NORMi<=TOLi: # checa se bateu tolerância dos phi_i
    if floor(l/Nphi)!=l/Nphi:
        P=plot([])
        for i in range(0,n+1):

```

```

for j in range(0,m+1):
    if (i>=ns) | ((j<=m-ms)&wb):
        P+=point((x[i],y[j],w[i,j]),color=rainbow(C)[floor(6/7*C*(-arctan(w[i,j])/pi+1/2))])
# table
    if ((i,j) in points) and (floor(l/step)==l/step):
        table_.append((l,w[i,j]))

plot(P.rotate(axis,angle)).save(filename = 'plot-%s.png' %(l))
if animON:
    plots.append(plot(P.rotate(axis,angle)))
if floor(l/Ngua)!=l/Ngua: # parte repetida do código devido a divisão em casos
    wmax=max(w.list())
    Pmax+=point((l,wmax))
    wint=RR(h*k*sum(w[i,j] for i in range(n) for j in range(m) if (i>=ns) | (j<=m-ms)))
    Pint+=point((l,wint))
    wmaxb=max(max(w[ns,j] for j in range(m-ms+1,m+1)),max(w[i,m-ms] for i in range(ns)))
    wmaxbo=max(max(w[n,j] for j in range(m+1)),max(w[i,0] for i in range(n+1)))
    wpb=w[ns,floor(m-mp*ms)]
    Pmaxb+=point((l,wmaxb),color='red')
    Pmaxbo+=point((l,wmaxbo),color='blue')
    Pmaxpb+=point((l,wpb),color='green')
    Ppb+=point((l,wpb),color='green')
break
if tf: #AQUI!!!! #Condição de contorno, cálculo do beta com fator de forma
    for i in range(n+1):
        for j in range(m+1):
            if (i==ns) & (j>m-ms):
                B[i,j]=RR(AA*w[i,j]-s*abs(w[i,j])^3*w[i,j]+s*h*sum(abs(w[i2,m-ms])^3*w[i2,m-ms]*Fc[i2,j] for i2 in
range(0,ns)))
            elif (j==m-ms) & (i<ns):
                B[i,j]=RR(AA*w[i,j]-s*abs(w[i,j])^3*w[i,j]+s*k*sum(abs(w[ns,j2])^3*w[ns,j2]*Fc[i,j2] for j2 in range(m,m-
ms,-1)))
            else:
                B[i,j]=RR(AA*w[i,j]-s*abs(w[i,j])^3*w[i,j])
            g[i,j]=RR((B[i,j]+q2c[i,j])/K) # o que tá do lado direito da condição de contorno
            w0[i,j]=w[i,j] # atualizando os valores de phi_i

```

```

else: # beta sem fator de forma
    for i in range(n+1):
        for j in range(m+1):
            B[i,j]=RR(AA*w[i,j]-s*abs(w[i,j])^3*w[i,j])
            g[i,j]=RR((B[i,j]+q2c[i,j])/K)
            w0[i,j]=w[i,j]
    ll+=1
if ll>imax: # checa se estourou o número máximo de iterações de phi_i
    print('Maximum number of phi-iterations exceeded')
    if floor((ll-1)/Nphi)!=((ll-1)/Nphi):
        P=plot([])
        for i in range(0,n+1):
            for j in range(0,m+1):
                if (i>=ns) | ((j<=m-ms)&wb):
                    P+=point((x[i],y[j],w[i,j]),color=rainbow(C)[floor(6/7*C*(-arctan(w[i,j])/pi+1/2))])

        # table
        if ((i,j) in points) and (floor(ll/step)==ll/step):
            table_.append((ll,w[i,j]))

    plot(P.rotate(axis,angle)).save(filename = 'plot-%s.png' %(ll-1))
    if animON:
        plots.append(plot(P.rotate(axis,angle)))
if floor((ll-1)/Ngua)!=((ll-1)/Ngua):
    wmax=max(w.list())
    Pmax+=point((ll-1,wmax))
    wint=RR(h*k*sum(w[i,j] for i in range(n) for j in range(m) if (i>=ns) | (j<=m-ms)))
    Pint+=point((ll-1,wint))
    wmaxb=max(max(w[ns,j] for j in range(m-ms+1,m+1)),max(w[i,m-ms] for i in range(ns)))
    wmaxbo=max(max(w[n,j] for j in range(m+1)),max(w[i,0] for i in range(n+1)))
    wpb=w[ns,floor(m-mp*ms)]
    Pmaxb+=point((ll-1,wmaxb),color='red')
    Pmaxbo+=point((ll-1,wmaxbo),color='blue')
    Pmaxb+=point((ll-1,wpb),color='green')
    Ppb+=point((ll-1,wpb),color='green')
else:

```

```

# Step 6 plots
if l>Nmax:
    if floor((ll-1)/Nphi)!= (ll-1)/Nphi:
        P=plot([])
        for i in range(0,n+1):
            for j in range(0,m+1):
                if (i>=ns) | ((j<=m-ms)&wb):
                    P+=point((x[i],y[j],w[i,j]),color=rainbow(C)[floor(6/7*C*(-arctan(w[i,j])/pi+1/2))])

        # table
        if ((i,j) in points) and (floor(ll/step)==ll/step):
            table_.append((ll,w[i,j]))

    plot(P.rotate(axis,angle)).save(filename = 'plot-%s.png' %(ll-1))
    if animON:
        plots.append(plot(P.rotate(axis,angle)))
if floor((ll-1)/Ngua)!= (ll-1)/Ngua:
    wmax=max(w.list())
    Pmax+=point((ll-1,wmax))
    wint=RR(h*k*sum(w[i,j] for i in range(n) for j in range(m) if (i>=ns) | (j<=m-ms)))
    Pint+=point((ll-1,wint))
    wmaxb=max(max(w[ns,j] for j in range(m-ms+1,m+1)),max(w[i,m-ms] for i in range(ns)))
    wmaxbo=max(max(w[n,j] for j in range(m+1)),max(w[i,0] for i in range(n+1)))
    wpb=w[ns,floor(m-mp*ms)]
    Pmaxb+=point((ll-1,wmaxb),color='red')
    Pmaxbo+=point((ll-1,wmaxbo),color='blue')
    Pmaxb+=point((ll-1,wpb),color='green')
    Ppb+=point((ll-1,wpb),color='green')

# salva os gráficos 2d
plot(Pmax).save(filename = 'Fator de forma tese.png')
plot(Pint).save(filename = 'Fator de forma tese-energia.png')
plot(Pmaxb).save(filename = 'bordas.png')
plot(Ppb).save(filename = 'pontoguara.png')
if animON:
    anim=animate(plots)
    anim.show()

```

```
anim.save('animate')
else: P

true_table=[[index*step] for index in range(int(l/step)+1)]
true_table[0][0]="
for index in range(len(points)):
    true_table[0].append(coordpoints[index])
for pt in table_:
    true_table[int(pt[0]/step)].append(numerical_approx(pt[1],digits=digits_))

my_table=table(true_table,header_row=True,header_column=True)

from sage.misc.latex import png
png(my_table,'table.png')
```