



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Miguel Alfredo Vera Moreno

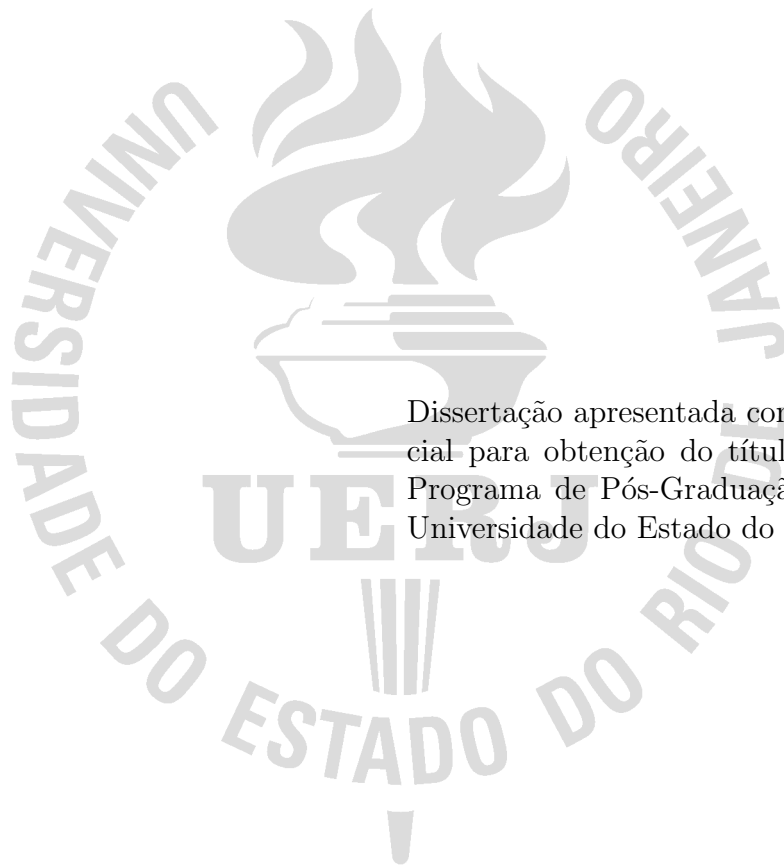
**Formalismo da integral funcional para dinâmica estocástica
multidimensional**

Rio de Janeiro

2014

Miguel Alfredo Vera Moreno

Formalismo da integral funcional para dinâmica estocástica multidimensional



Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci

Rio de Janeiro

2014

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

V473

Vera Moreno, Miguel Alfredo.

Formalismo da integral funcional para dinâmica estocástica multidimensional / Miguel Alfredo Vera Moreno .- Rio de Janeiro, 2014. 47 f.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Processos estocásticos.. 2. Equação de Langevin.. 3. Integral funcional.. I. Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Instituto de Física Armando Dias Tavares. IV. Título

CDU 519.216

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Miguel Alfredo Vera Moreno

Formalismo da integral funcional para dinâmica estocástica multidimensional

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 08 de outubro de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães
Instituto de Física Armando Dias Tavares -UERJ

Prof. Dr. Luis Esteban Oxman
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Marcelo Chiapparini
Instituto de Física Armando Dias Tavares -UERJ

Prof. Dr. Daniel Lorenzo Reyes López
Instituto Militar de Engenharia

Rio de Janeiro

2014

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Maria Soledad e Alfredo quem
ainda na distancia sempre têm estado comigo
À minha avó Claudina com muito carinho
À minha noiva Laysa por seu
apoio incondicional

AGRADECIMENTOS

Sinceramente gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que me ofereceram a sua colaboração, seu conhecimento, seu apoio incondicional e, acima de tudo sua amizade durante o curso deste trabalho. Obrigado.

A Deus, que me forneceu os meios para ingressar no mestrado; me deu a fortaleza espiritual e física e sobre tudo me deu o entendimento para realizar cada desafio da vida.

Agradeço, portanto, a minha mãe, Maria Soledad Moreno Casana quem sempre esta pendente de confiar suas orações e de pedir por mim, para que cada dia seja melhor, não só no que faço como trabalho, mas também de ser uma pessoa melhor, a ela por me ajudar e compreender em querer estar aqui sem os meus para poder supera-me, a ela a quem tanto amo de novo obrigado. A meu pai Alfredo Vera Castro por ensinar os valores da vida e ajudar sempre em minha formação eu estou muito agradecido com você "chopá". A minhas irmãs, Esther vera, Karina vera e minha sobrinha Ariana, que foi o motivo de eu amadurecer e seguir com seriedade uma carreira, que eu lhe sirva de bom exemplo para seu futuro.

Não obstante, agradeço, muito especialmente, ao meu orientador, Prof. Daniel Barci, pela orientação e paciência, ele me mostrou os verdadeiros valores da pesquisa e me ensinou a ver a física de um jeito diferente. Também a Zochil González pela colaboração nesta dissertação.

À CAPES pelo apoio financeiro direto ou indireto.

Não posso deixar de citar aos professores que foram importantes em minha formação, como os professores, José Roldán, Néelson Aragonês, Daniel Gustavo Barci, Ivan Costa da Cunha Lima, Marcio Capri, Silvio Sorella.

Agradeço ainda ao *Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade do Estado do Rio de Janeiro-UERJ*. A Rogério, sempre atencioso e eficiente.

Aos grandes amigos (não vou citar nenhum pois sei que esquecerei alguém) e colegas.

E finalmente, a todos aqueles que por um motivo ou outro não estão nestos agradecimentos. Muito obrigado a todos!

Oh Deus de meus pais, a Ti dou graças e louvor
porque me deste sabedoria e força; e agora
me fizeste saber o que Te pedimos; pois
nos fizeste saber este assunto do rei.

Daniel 2:23

RESUMO

VERA MORENO, M. A. *Formalismo da integral funcional para dinâmica estocástica multidimensional*. 2014. 47 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Apresentamos um estudo sobre os processos estocásticos, descritos por uma equação fenomenológica de tipo newtoniano chamada equação de Langevin. Esta equação contém duas forças características, uma de atrito e outra aleatória chamado ruído. Com este tipo de equações estocásticas com ruído multiplicativo aparecem diferentes prescrições para integrar o ruído (ou para discretizar a equação diferencial), sendo que cada uma delas produz uma evolução estocástica diferente e é associada a regras de cálculo particulares. Estas prescrições estão associadas ao chamado processo de Wiener. A variedade de prescrições possíveis para definir matematicamente estes processos oferece um obstáculo ao desenvolvimento de ferramentas gerais para seu tratamento. Por esse motivo fazemos uso de uma ferramenta chamada formulação da integral funcional. Esta formulação foi desenvolvida em detalhe para uma variável aleatória na ref.(13). O principal propósito desta dissertação é estender este formalismo para o caso multidimensional de um sistema de equações de Langevin com ruído multiplicativo. Para isso deduzimos uma integral de caminho sobre um conjunto de variáveis fermiônicas e bosônicas sem realizar nenhuma discretização. As prescrições habituais para definir a integral de Wiener aparecem no formalismo nas definições das funções de Green no sector das variáveis de Grassmann na teoria de campos. Finalmente chegamos a ter um funcional gerador dinâmico o qual é uma ferramenta de estudo importante para descrever fenômenos físico como por exemplo transições de fase por ruído induzido.

Palavras-chave: Processos estocásticos. Equação de Langevin. Integral funcional.
Funções de Grassmann.

ABSTRACT

VERA MORENO, M. A. *Functional integral formalism for stochastic dynamic multidimensional*. 2014. 47 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

We present a study of stochastic processes that describe a variety of physical phenomena such as Brownian motion, described by a stochastic phenomenological equation, called the Langevin equation. This equation contains two characteristic forces: a frictional and a random force called noise. With this type of stochastic equations, with multiplicative noise, arise different prescriptions to integrate the noise (or to discretize of the differential equation). Each of them produces a different stochastic evolution associated to particular calculation rules. These prescriptions are related to the so called Wiener process. The multiplicity of possible prescriptions to define mathematically these processes is an obstacle to the development of general tools for their treatment. For this reason we used a tool called formulation of functional integral. This formulation was developed in detail for a random variable in Ref.(13). The main purpose of this dissertation is to extend this formalism to the case of a multidimensional system of Langevin equations with multiplicative noise. We deduced an path integral on a set of fermionic and bosonic variables without performing any discretization. The usual prescriptions to define the Wiener integral arise in the formalism by the definitions of Green functions in the sector of Grassmann variables in the field theory. Finally we obtain a dynamic generator functional which is an important tool to describe physical phenomena such as phase transitions induced by noise.

Keywords: Stochastic processes. Langevin equation. Functional integral. Functions of Grassmann.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	FORMALISMO DE LANGEVIN	12
1.1	Introdução aos processos estocásticos	13
1.2	Processos Markovianos	15
1.3	Movimento Browniano	16
1.4	Equação de Langevin	17
1.5	O Modelo	19
2	DINÂMICA ESTOCÁSTICA	21
2.1	Processos de Wiener e o ruído branco	21
3	FORMALISMO DA INTEGRAL FUNCIONAL	27
3.1	Funcional Gerador e as Funções de Correlação	28
3.2	Representação integral funcional para $Z[J]$	30
3.3	Representações dependentes da prescrição	33
	CONCLUSÃO	41
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICE A – Representação do determinante em termos das variáveis de Grassmann	46

INTRODUÇÃO

O tema geral desta dissertação é o estudo de processos estocásticos (1), os quais tem sido de grande interesse na comunidade científica desde muito tempo atrás.

As aplicações podem-se encontrar ao longo de um amplo campo da pesquisa científica, desde a física e a química (2, 3), passando por outros ramos da ciência como a biologia e a ecologia (4, 5), até nas ciências econômicas e sociais (6, 7). Estes processos estocásticos estão associados a sistemas com ruído, o qual é um sinal aleatório, (processo estocástico) que se caracteriza pelo fato de que seus valores em dois tempos diferentes não guardam correlação estatística. Em este tipo de sistemas com ruído podemos encontrar uma grande riqueza fenomenológica (8), é por isso que estudaremos desde o ponto de vista físico este fenômeno, no qual se assume que o ruído é uma força aleatória estocástica com distribuição de probabilidade gaussiana de média nula e tempo de correlação pequeno.

Os formalismos mais conhecidos para tratar este tipo de problemas são os de Langevin e Fokker-Plank (2, 3). A descrição de Langevin baseia-se em um conjunto de equações diferenciais estocásticas. Em princípio uma equação diferencial estocástica é aquela que contém algum parâmetro definido por uma função de distribuição probabilística, enquanto que a de Fokker-Plank é formulada através de uma equação diferencial parcial determinista que descreve a evolução temporal de uma distribuição de probabilidade. O primeiro formalismo (Langevin) surgiu como uma formulação do movimento browniano, o qual é descrito por uma equação fenomenológica estocástica de tipo newtoniano que contém duas forças características, uma de atrito e outra aleatória (9, 10), fornecendo uma visão muito clara sobre as propriedades microscópicas do sistema.

Particularmente nos estamos interessados no estudo de sistemas que exibem um comportamento ruidoso de maneira multiplicativa, o que significa que a intensidade das flutuações estocásticas dependem do estado do sistema. Assim existem muitos sistemas que se comportam de esta maneira, como por exemplo, difusão na presença de uma parede, dinâmica de momentos magnéticos em sistemas ferromagnéticos, etc (38).

Embora existam muitas características conhecidas destes processos, não existem ferramentas matemáticas gerais para tratá-las. Por isso, nosso objetivo é encontrar uma ferramenta que seja simples e fácil de trabalhar. Neste contexto vamos desenvolver uma descrição de integrais de caminho para os processos estocásticos. Concretamente, estamos interessados na formulação de integrais de caminho de processos estocásticos, modelado pela equação de Langevin com ruído multiplicativo. Isto é um tema interessante desde que o formalismo da integral de caminho fornece uma técnica útil para o cálculo de correlações e funções resposta (39).

Nosso trabalho é construir um funcional gerador para as funções de correlação o qual nos permitiria estudar um sistema estocástico com as ferramentas usuais desenvol-

vidas na teoria de campos, tanto perturbativas como não-perturbativas.

Um detalhe técnico, porém muito importante no caso de ruído multiplicativo branco, é a correta definição matemática da integral de Wiener. O problema básico é que, devido à distribuição de ruído gaussiano branco, o limite ao contínuo da evolução temporal discretizada não é único. De fato, existem diferentes prescrições para realizar este limite, sendo as prescrições de Itô (36) e Stratonovich (19) as mais populares, cada uma produzindo uma evolução estocástica diferente e forçando diferentes regras de cálculo. Existem prescrições mais gerais que vamos discutir em detalhe neste trabalho como a chamada convenção generalizada de Stratonovich (20) (também conhecida como *convenção- α* (21) na literatura de teoria de campos). Neste esquema, se define um parâmetro contínuo $0 \leq \alpha \leq 1$ de tal modo que cada valor do parâmetro corresponde com uma regra de discretização diferente da equação diferencial estocástica. Os valores particulares $\alpha = 0$ e $\alpha = 1/2$ se correspondem com as prescrições de Itô e Stratonovich respectivamente.

É interessante notar que, o formalismo da integral de trajetória para descrever processos estocásticos pode ser formulado por métodos funcionais sem necessidade de recorrer a nenhuma discretização particular da equação de Langevin. Desta forma, as diferentes prescrições podem ser tratadas de forma unificada, simplificado assim o tratamento. A formulação da integral funcional para apenas uma variável aleatória foi desenvolvida em detalhe na ref.(13). O principal objetivo deste trabalho é estender o formalismo para o caso multidimensional de um sistema de equações de Langevin com ruído multiplicativo.

A essência do método, originalmente proposto por Martin-Siggia-Rose, consiste em impor a equação diferencial estocástica como um vínculo, implementado na integral funcional a través de uma delta de Dirac. Logo após, representando a distribuição delta de Dirac com variáveis auxiliares, é possível realizar a integração sobre o ruído, obtendo um funcional gerador que não depende mais do ruído, porém, sua ação "clássica" já contém a informação das médias estocásticas. Para realizar este processo é necessário introduzir um sistema de variáveis auxiliares tanto comutativas como não-comutativas, ou de Grassmann. Neste sentido, o processo estocástico é representado de forma similar a uma teoria quântica de campos com conteúdo "bosônico" e "fermiônico".

Esta integral de caminho é uma ferramenta importante no qual nos permite estudar diversos fenômenos físicos aplicando a teoria de campos. Um exemplo de fenômeno físico que nosso funcional gerador poderia descrever é a transições de fase por ruído induzido que é um área muito estudadas na atualidade (16, 17, 37).

A dissertação tem a estrutura seguinte. No Capítulo 1 introduzimos os conceitos básicos com os quais vamos trabalhar na dissertação como são os processos de Markov e a descrição da equação de Langevin o qual é nosso modelo que vamos trabalhar. No Capítulo 2 explicamos a dinâmica estocástica, detalhando o processo de Wiener que é de grande utilidades para nosso cálculo, identificando as diferentes prescrições discretização entre as

mais conhecidas são as de Itô e Stratonovich. No Capítulo 3 deduzimos o funcional gerador de funções de correlação, usando um formalismo funcional e chegando na expressão de uma integral de caminho o qual contem a contribuição original da dissertação. Finalmente apresentamos as conclusões.

1 FORMALISMO DE LANGEVIN

O formalismo de Langevin surgiu como uma formulação do movimento browniano(9, 10) e fornece uma visão muito clara sobre as propriedades microscópicas do sistema. No caso das partículas brownianas elas sofrem sucessivas colisões com outras partículas em um fluido (líquido ou gás) e como consequência das colisões entre todas as moléculas ou átomos presentes no fluido elas descrevem uma trajetória errática. O primeiro em observar cientificamente o movimento foi o biólogo escocês Robert Brown, que descobriu esse fenômeno em 1827 constatando que pequenas partículas de pólen tinham movimento aleatório sem razão aparente e suspeitou que elas fossem algum organismo vivo. Após fazer a mesma experiência com outras substâncias, inclusive inorgânicas, ele se convenceu que aquele movimento não tinha um origem orgânica(11). Alguns cientistas tentaram descrever este fenômeno, mas sem êxito até que em 1905 Einstein, em um de seus trabalhos explica de forma correta este fenômeno e demonstra a existência de átomos. Introduzindo os conceitos fundamentais que deram lugar à moderna teoria dos processos estocásticos e seu enorme impacto na física e outras ciência.

Nestes trabalhos Einstein percebe que no caso do movimento browniano, a grandeza que deveria ser medida é distância (deslocamento), ao invés de velocidade(12), e deduz uma relação entre o coeficiente de difusão e a mobilidade da partícula, conhecida como relação de Einstein (também relação de Einstein-Smoluchowski). Depois dos trabalhos de Einstein e Smoluchowski, foi desenvolvido por Langevin, em 1908, um tratamento alternativo do movimento browniano. Langevin escreveu uma equação diferencial para o movimento browniano, na qual recupera a relação de Einstein, que contém uma força, irregular e imprevisível, que pode ser tratada como um processo estocástico. A equação de Langevin é o protótipo de equação diferencial estocástica e constitui o modelo mais simples para estudar a dinâmica de sistemas nos quais as flutuações jogam um papel relevante. Estas flutuações são introduzidas adicionando termos aleatórios nas equações de movimento, que são chamados de *fontes de ruído*.(13)

O objetivo deste capítulo é apresentar a teoria matemática necessária para trabalhar o movimento browniano. Vamos definir também o modelo com o qual vamos trabalhar assim como a notação que usaremos. Para um estudo mais detalhado sobre processos estocásticos e o formalismo de Langevin pode-se consultar os livros(1, 2, 3).

1.1 Introdução aos processos estocásticos

A teoria dos processos estocásticos centra-se no estudo e modelagem de sistemas que evoluem ao longo do tempo, o do espaço, estes processos são vistos como fenômenos aleatórios. A maneira usual de descrever a evolução do sistema é mediante uma sucessão de variáveis aleatórias, A ideia básica é identificar um processo estocástico com uma variável aleatória. $\mathbf{X}(t)$ que evolui de uma maneira probabilística no tempo. Uma outra definição usual é a do processo estocástico ser uma função aleatória (função de uma variável aleatória) dependente também do tempo. Dentre os processos estocásticos mais estudados encontra-se o processo de difusão.

Vamos considerar, em geral, que $\mathbf{X}(t)$ seja o conjunto de variáveis aleatórias $x_1, x_2, x_3 \dots$ nos tempos $t_1, t_2, t_3 \dots$ e assumir que existem as densidades de probabilidade conjunta(13).

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) \quad (1)$$

as quais descrevem completamente o sistema. No momento em que se fixa um valor para cada uma das variáveis aleatórias, se diz que se tem uma realização do processo.

Dada uma variável aleatória $x(t)$ que admite a função de densidade de probabilidade p_x , então a *média ou valor esperado* de $x(t)$ pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x dx \quad (2)$$

De igual forma, para uma função $Y = f(x)$ da variável aleatória $x(t)$

$$\langle Y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_x dx \quad (3)$$

A *variância* de $x(t)$, σ^2 se define como

$$\sigma^2 \equiv \langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle = \langle x(t)^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \quad (4)$$

Ao longo de nosso trabalho vamos só a tratar com variáveis que seguem uma *distribuição de probabilidade normal ou gaussiana*. Esta fica definida através da densidade

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (5)$$

onde σ e μ são a média e a variância da variável aleatória x .

Em termos das densidades conjuntas podem ser definidas as densidades de probabilidade condicional:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3 \dots \mid y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; y_3, \tau_3; \dots) = \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots; y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; y_3, \tau_3; \dots)}{p(y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; y_3, \tau_3; \dots)} \quad (6)$$

Mesmo que estas definições sejam válidas para qualquer ordenamento no tempo, consideraremos a ordem

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 \geq \dots \quad (7)$$

Olhando para a definição (6) como uma equação de evolução, podemos considerar as probabilidades condicionais como predições dos valores futuros do processo $\mathbf{X}(t)$ (x_1, x_2, \dots nos tempos t_1, t_2, \dots) dado o conhecimento do passado (os valores y_1, y_2, \dots nos tempos τ_1, τ_2, \dots)

O processo estocástico mais simples que podemos imaginar é aquele da independência total

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3, \dots) = \prod_i p(x_i, t_i) \quad (8)$$

o que significa que o valor de $\mathbf{X}(t)$ no tempo t é completamente independente dos seus valores no passado (ou no futuro)(13).

1.2 Processos Markovianos

A característica principal de os processos estocásticos marcovianos é que a distribuição X_{n+1} só depende da distribuição de X_n e não das anteriores (X_{n-1}, X_{n-2}, \dots).

Se pode resumir dizendo que o estado *futuro* do processo, só depende do estado *presente* e não do resto de estados anteriores (É um processo que não guarda memória dos estados anteriores do sistema). Escolhendo a ordem temporal (7), a hipótese de Markov se formula em termos das probabilidades condicionais como segue:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3 \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; y_3, \tau_3; \dots) = p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots | y_1, \tau_1) \quad (9)$$

Esta é uma propriedade importante, pois determina que qualquer probabilidade pode ser escrita em termos de probabilidades condicionais simples. Em geral, é possível mostrar que para esses processos, uma probabilidade conjunta arbitrária pode ser expressa como:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots; x_n, t_n) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_3, t_3) p(x_3, t_3 | x_4, t_4) \dots p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) \quad (10)$$

sempre que

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq t_{n-1} \geq t_n \dots \quad (11)$$

Então, ao carecer de memória, interpretamos o processo de Markov $X(t)$ como a função de estado de algum sistema, cujo valor no instante $t + dt$ é predito de maneira probabilística conhecendo o valor do estado no momento anterior t . Porém, não vai ser possível melhorar a predição tomando em conta valores de estados em momentos anteriores a t . Em geral, um exemplo de processos sem memória pode ser escrito como:

$$x(t + dt) = x(t) + F(x, t)dt \quad (12)$$

onde $F(x, t)$ é uma função genérica. Aplicando a propriedade de limite na equação (12) temos como equivalência à equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (13)$$

sujeita a alguma condição inicial $x(t_0) = x_0$. Ao longo de nosso trabalho só vamos tratar com processos de Markov. Na seguinte seção, estudaremos brevemente o processos estocásticos que são de muita importância em nosso trabalho.

1.3 Movimento Browniano

O fenômeno natural conhecido agora como o movimento Browniano tem uma interessante história. O primeiro registro ou primeira observação do fenômeno, data de 1828 (40) quando o botânico Robert Brown relatado em uma revista científica que os grãos de pólen suspenso em uma certa substância e visualizado por meio de um microscópio, realizando um movimento irregular e inexplicável. Este movimento estranho foi objeto de muitas discussões e várias hipóteses foram formuladas na época com a intenção de dar uma explicação para os fenômenos observados.

Hoje em dia este movimento é estendido e explicado através das múltiplas colisões aleatórias das moléculas do líquido com os grãos de pólen. Chegar a tal afirmação levou muitos anos pois devio aceitar-se primeiro a teoria cinética molecular. Com o trabalho de Einstein de 1905 sobre o movimento Browniano (41) contribuiu decisivamente para tal tarefa. As observações reais e direitas do movimento dos grãos de pólen ou outras partículas sugere que o fenômeno satisfaz as seguintes propriedades:

- a) O movimento é contínuo
- b) Parecem ter deslocamentos independentes em intervalos de tempos disjuntos
- c) Devido ao grande número de colisões do grãos de pólen com as moléculas circundantes em comprimentos de tempo não pequenos, estes aumentos podem ser modelados como variáveis aleatórias gaussianas.

A estrutura matemática de um processo estocástico, é dizer a coleção de variáveis aleatórias $\{B_t : t \geq 0\}$, tem sido bem sucedida para o modelagem de este tipo de fenômenos. A variável B_t pode ser interpretado como a posição da partícula Browniana ao tempo t

Porém em 1923 o matemático norte-americano Norbert Wiener demonstrou a existência de tais processos condicionais. É por essa razão que a este processo é chamado de *processo de Wiener* e se denota também $\{W_t : t \geq 0\}$. No sentido estrito o movimento Browniano é o fenômeno físico enquanto no modelo matemático é o processo de Wiener, embora é comum chamar a ambas coisas com o mesmo nome : *movimento browniano*. Este movimento tem muitas propriedades e conexões com outras ramas da matemática, por exemplo é um processo de Markov. É interessante também mencionar que quase todas as trajetórias são não diferenciáveis em nenhum ponto.

1.4 Equação de Langevin

Uma forma de estudar o movimento browniano foi realizado por Langevin em 1908 por efeito de introduzir o conceito de equação de movimento de uma variável aleatória (neste caso, a posição de uma partícula browniana) para citar a Nelson (14) ”iniciando uma nova linha de pensamento que culmina em uma teoria verdadeiramente dinâmica para o movimento browniano”.

Langevin começou a escrever a equação de movimento de uma partícula browniana de acordo com as leis de Newton sob os pressupostos de que a partícula Browniana experimenta duas forças, ou seja:

- i) Uma força de amortecimento $-\gamma v$, linear, que representa um atrito dinâmico. v é a velocidade da partícula com coeficiente de atrito constante γ (inverso da movibilidade);
- ii) Uma força rápida flutuante $\eta(t)$ que é novamente devido à colisões das moléculas do líquido sobre a partícula chamada agora ruído branco. Esta é a força residual exercida pelo ambiente, ou banho de calor, quando a força de atrito foi subtraído.

Assim, a equação de movimento, de acordo com a segunda lei de Newton de uma partícula de massa m em um meio é:

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v + \eta(t) \quad (14)$$

Estas características fazem com que η seja tratada como uma força estocástica com as propriedades fundamentais:

- 1) A força média devida as colisões é nula:

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \quad (15)$$

A média é realizada sobre um conjunto de muitos sistemas. Isto equivale a promediar sobre muitas partículas browniana no mesmo fluido.

- 2) As colisões sucessivas são independentes, estão descorrelacionadas

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t') \quad (16)$$

Γ é uma constante que mede a intensidade do ruído. A $\delta(t - t')$ assegura que a partícula não guarda memória das sucessivas colisões.

A equação (14) é conhecida como *equação de Langevin*, que é um exemplo de equação diferencial estocástica. Como exemplo consideremos um sistema de equilíbrio de um gás, cada amostragem consistindo em uma cópia da partícula browniana com velocidade $v(0) = v_0$. Podemos resolver a equação (14) para cada realização do ruído $t > 0$ obtendo:

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \eta(t') dt' \quad (17)$$

O processo estocástico pode ser interpretado como um ensemble de partículas brownianas, cada uma das quais está descrita pela equação (14), para uma realização particular do ruído. Considerando que tratamos com processos estocásticos, vamos interpretar este resultado em forma probabilística. Tomando a média sobre o ensemble de partículas brownianas, todas com a mesma condição inicial v_0 , e usando as propriedades do ruído (15) e (16), obtemos que a velocidade média é:

$$\langle v \rangle = v_0 e^{-\gamma t} \quad (18)$$

Vemos que a velocidade média das partículas decai a zero exponencialmente rápido. Elevando ao quadrado a equação (17) e fazendo a média temos:

$$\begin{aligned} \langle [v(t)]^2 \rangle &= v_0^2 e^{-2\gamma t} + \Gamma e^{-2\gamma t} \int_0^t \int_0^t e^{\gamma(t'+t'')} \delta(t' - t'') dt' dt'' \\ &= v_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{\Gamma}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \end{aligned} \quad (19)$$

Como é possível ver neste resultado, embora a velocidade média decai a zero para tempos longos, a sua variância é:

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{\Gamma}{2\gamma} \quad (20)$$

Da teoria cinética dos gases sabemos que, para um sistema clássico em equilíbrio, vale o princípio de equipartição de energia, que para cada grau de liberdade equivale a:

$$\frac{1}{2} \langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{k_B T}{m} \quad (21)$$

Onde k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta. Comparando os dois últimos resultados obtemos:

$$\Gamma = \frac{2\gamma k_B T}{m} \quad (22)$$

Que é conhecida como a *relação de Einstein* ou *relação de flutuação-dissipação* já que prediz uma relação entre a intensidade das flutuações contidas em Γ com a intensidade da

dissipação, contida em γ quando o sistema se encontra em equilíbrio com o banho térmico à temperatura T .

1.5 O Modelo

Para nosso trabalho vamos a considerar um sistema formado por um numero grande de graus de liberdade, como por exemplo o conjunto de variáveis microscópicas de um sistema de muitos corpos, a dinâmica pode ser descrita pelo conjunto de equações de Langevin:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_i(t), \dots, x_n(t)) + g_{ij}(x_i(t), \dots, x_n(t)) \eta_j(t) \quad (23)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots$ e as variáveis do ruído branco obedecendo as propriedades:

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \Gamma \delta_{ij} \delta(t - t') \quad (24)$$

$f_i(x)$ representa a força externa ao sistema chamada geralmente de força de arrasto (drift). $\eta_i(t)$ representa a força estocástica com distribuição gaussiana dadas por (24). $g_{ij}(x)$ é chamada de matriz de difusão e depende do estado do sistema. A única condição restritiva é que ela seja inversível $\det(g) \neq 0$

No caso simplificado de uma partícula o sistema se reduz a:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t)) \eta \quad (25)$$

Nesta ultima equação (25) é uma forma de considerar à equação (23) no caso unidimensional. Ao considerarmos o limite superamortecido, vamos desprezar o termo de inercia dv/dt na equação (14) (13).

Ao longo desta seção vamos a falar sob as propriedades do caso unidimensional já que elas podem ser estendida para o caso multidimensional já que se baseia no mesmo fenômeno físico (movimento browniano).

Estas equações fenomenológicas que tem parâmetros externos ao sistema que flutuam. Os ruídos aditivos (16) ($g(x) = cte$) só introduzem flutuações em torno da trajetória determinista, enquanto os ruídos multiplicativos podem produzir efeitos inesperados no análise determinista (17).

Do ponto de vista físico, é frequentemente assumido que $\eta(t)$ é uma força estocástica gaussiana de média nula e tempo de correlação pequena. O limite de tempo de correlação nulo leva a um ruído branco que é o normalmente utilizados devido à simplificações. Em particular, neste caso (25) (23) definem um processo de Markov (18).

O ruído apresentado se chama de branco porque no seu espectro de frequências

contêm todas as frequências possíveis com a mesma potência, o mesmo fenômeno que ocorre com a luz branca. Ao ser descorrelacionado, o termo de ruído varia de maneira descontínua com o tempo, fazendo com que a posição ou a velocidade da partícula browniana não seja suave. Em geral, trabalha-se então com funções que não são diferenciáveis, de modo que para tratar com estas equações precisa-se de um cálculo especial. No seguinte capítulo vamos tratar aspectos importantes que envolvem este formalismo descrevendo as ferramentas necessárias para nosso cálculo.

2 DINÂMICA ESTOCÁSTICA

O estudo de sistemas fora do equilíbrio representa um dos ramos mais interessantes da física moderna. Evidentemente, tem sido neste tipo de sistemas onde foi encontrada uma rica fenomenologia que tem inter-relação com outras áreas da ciência física.

Porém, ao contrário do que é encontrado na física do equilíbrio, estes problemas não tem uma formulação geral e unificada para seu tratamento. Para cada sistema desenvolveu-se somente aspectos parciais adotando em cada caso a metodologia que parece mais apropriada. Basicamente a origem desta carência é a complexidade dos sistemas fora do equilíbrio envolvidos. É por isso que neste capítulo vamos estudar as propriedades necessárias nos quais basearemos para nosso cálculo seguinte. Estas propriedades são fundamentais para estudar a dinâmica estocástica.

A formulação que utilizaremos possivelmente mais intuitiva é a equação de Langevin. Esta equação recebe o nome de *equação diferencial estocástica*, e tem a forma da equação (25). No caso da Eq(25) as funções $f(x(t))$ e $\eta(t)$ são as forças deterministas e estocásticas respectivamente. A função $g(x)$ contém o acoplamento entre as flutuações e o sistema. A terminologia usual qualifica ao ruído como aditivo quando $g(x(t)) = cte$ e quando $g(x(t)) \neq cte$ como multiplicativo. Para sistemas com várias variáveis a equação pode-se entender como uma equação matricial.

Na equação (25) tanto $\eta(t)$ como $x(t)$ são conjuntos de variáveis aleatórias marcado com parâmetro t , o qual é chamado *Processo Estocástico*. A virtude da abordagem da equação diferencial estocástica é que ele nos permite relacionar as estatísticas de $\eta(t)$ e de $x(t)$ (que, representa a dinâmica do sistema). Portanto, as propriedades estatísticas do ruído definem completamente o sistema através da equação diferencial estocástica. A justificação da equação diferencial estocástica a partir das equações microscópicas do sistema tem sido realizada em alguns casos particulares e baixo certas aproximações(26). Comumente, as flutuações são introduzidos de maneira mais fenomenológica, adicionando simplesmente o ruído a uma equação determinista e verificação que o modelo descreve corretamente o sistema físico estudado. Para nosso caso estudaremos o processo de Wiener que é uno dos pontos de nosso estudo.

2.1 Processos de Wiener e o ruído branco

Nesta seção apresentaremos alguns aspectos importantes sobre processos de Wiener, o suficiente para tratar a integral estocástica em relação a este processo. Istos processos são o exemplo mais simples e mais bem estudado de um processo de difusão.

Vamos agora considerar o tipo especial de processo estocástico conhecido como

o processo de Wiener que é um processo estocástico gaussiano¹ e markoviano (14) introduzido por Wiener em 1923 (15) para fornecer uma descrição matemática rigorosa das propriedades estatísticas da trajetória de uma partícula Browniano, as propriedades fundamentais do processo de Wiener são estabelecidos nesta seção. Este processo está relacionado ao ruído $\eta(t)$ de acordo com

$$\eta(t) = \frac{dW(t)}{dt} \quad (26)$$

ou

$$W(t) = \int_0^t \eta(t') dt' \quad (27)$$

Algumas das suas propriedades são:

- 1) $\langle W(t) \rangle = 0$ para todo t
- 2) $\langle W(t)W(t') \rangle = \Gamma \min(t, t')$
- 3) de onde segue que a variância é $\sigma_W^2 = \langle W^2(t) \rangle = \Gamma t$
- 4) as diferenças, ou incrementos, do processo de Wiener, $W(t_2) - W(t_1)$ para $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \infty$ são independentes e formam um processo gaussiano e markoviano,
- 5) definindo $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$, a variância $\sigma_{\Delta W}^2 \langle [\Delta W^2(t)] \rangle = \Gamma \Delta t$

Estas propriedades fazem com que o processo de Wiener tenha características matemáticas singulares. Por exemplo, da propriedade (5) se nota que $\langle (\Delta W)^2 \rangle \sim \Delta t$, o que implica $dW \sim (dt)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \approx \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} \rightarrow \infty \quad (28)$$

Então, a expressão (26) assim escrita é um paradoxo, considerando que $W(t)$ não é uma função diferenciável. Em um senso matemático rigoroso, a equação (25) não existe. Porém, a equação integral correspondente.

$$x(t) - x(0) = \int_0^t f(x) dt' + \int_0^t g(x) \eta(t') dt' \quad (29)$$

pode ser interpretada consistentemente. A integral $\int g(x(t)) \eta(t) dt$ pode ser escrita como $\int g(x(t)) dW(t)$, onde definimos o processo de Wiener $W(t)$ como $\eta(t) = dW(t)/dt$, ob-

¹ Isto significa que o estado do sistema em um tempo $t \geq s$ não depende do anterior $t < s$ sendo s o instante atual

tendo, de esta forma, um tipo de integral estocástica de Stieltjes em $W(t)$. Suponhamos $G(t)$ uma função arbitrária no tempo e $W(t)$ um processo de Wiener. Para definirmos a integral estocástica $\int_0^t G(t')dW(t')$ como uma integral de Riemann- Stieltjes fazemos uma partição em n subintervalos do intervalo $[t_0, t]$, $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = t$ e definimos pontos intermediários τ_j tais que $\tau_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$. A integral de Riemann-Stieltjes é dada por:

$$\int_0^t G(x(t'))dW(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n G(\tau_j)(W(t_j) - W(t_{j-1})) \quad (30)$$

onde o limite é definido no sentido da média quadrática (3). Para uma função $W(t)$ suave, o limite converge a um único valor, sem importar o valor de τ_j . Porém, neste caso, $W(t)$ não é suave, de fato, não é diferenciável. O valor da integral estocástica (30) *depende da escolha particular do ponto intermediário* τ_j . Existem, portanto, diferentes convenções para definir esta integral, sendo que qualquer valor para τ_j no intervalo $[t_j, t_{j+1}]$, é plausível. A escolha de um valor qualquer (3) pode ser parametrizada na expressão $\tau_j = \tilde{\alpha}t_j + (1 - \tilde{\alpha})t_{j-1}$, com $0 \leq \tilde{\alpha} \leq 1$. Se define a *integral estocástica de Itô* ao fazer a escolha $\tilde{\alpha} = 0$, i.e., tomando $\tau_j = t_{j-1}$.

Vamos definir agora o caso em que o integrando é função de $x(t)$, sem dependência explícita em t . A integral estocástica de Itô, ao fazer a escolha de $\tau_j = t_{j-1}$. é dada:

$$\int_0^t g(x(t'))dW(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n g(x(t_{j-1}))(W(t_j) - W(t_{j-1})) \quad (31)$$

Uma definição alternativa foi dada por Stratonovich (19) usando apenas a média em $x(t)$,

$$\int_0^t g(x(t'))dW(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n g\left(\frac{x(t_j) + x(t_{j-1})}{2}\right)(W(t_j) - W(t_{j-1})) \quad (32)$$

Esta definição dada por Stratonovich não tem relação a priori com a definição dada por Itô; apenas no caso em que a função $g(x)$ provenha de uma equação diferencial estocástica, pode-se escrever uma relação entre as duas, como veremos mais na frente.

Na linha anterior de raciocínio, as diferentes prescrições permitidas para definir a integral estocástica podem ser concentradas na “prescrição generalizada de Stratonovich” (20) ou “prescrição α ” (21), na qual:

$$\int_{t_0}^t g(x(t'))dW(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n g(\alpha x(t_j) + (1 - \alpha)x(t_{j-1}))(W(t_j) - W(t_{j-1})) \quad (33)$$

com $0 \leq \alpha \leq 1$. Nesta definição, $\alpha = 0$ corresponde com a interpretação de Itô (31),

$\alpha = 1/2$ coincide com a de Stratonovich (32) e $\alpha = 1$ é conhecida como a prescrição cinética ou interpretação de Hänggi-Klimontovich (20, 22, 23, 24). Embora os casos anteriores sejam os mais conhecidos e usados, qualquer valor de $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$ pode ser usado para definir a integral estocástica.

Cada prescrição escolhida para definir a integral estocástica determina uma equação diferencial estocástica particular e, conseqüentemente, uma evolução temporal diferente do processo $x(t)$. Porém, entre as diferentes equações diferenciais estocásticas que aparecem ao definirmos uma integral estocástica específica pode-se estabelecer uma equivalência. Por exemplo, se definirmos a equação diferencial segundo Itô

$$dx = f(x)dt + g(x)dW(t) \quad (34)$$

a equação equivalente (3), definida no sentido de Stratonovich, se corresponde com

$$dx = \left[f(x) - \frac{1}{2}g(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x} \right] dt + g(x)dW(t) \quad (35)$$

Uma forma de entender isto é que a equação (34) define um processo estocástico de Itô e a equação (35) também define o mesmo processo estocástico só que no sentido de Stratonovich (3). De maneira alternativa, se inicialmente definíssemos a equação diferencial estocástica no sentido de Stratonovich,

$$dx = f_s(x)dt + g_s(x)dW(t) \quad (36)$$

esta seria a mesma que a equação

$$dx = \left[f_s(x) + \frac{1}{2}g_s(x)\frac{\partial g_s(x)}{\partial x} \right] dt + g_s(x)dW(t) \quad (37)$$

com a integral estocástica definida segundo a prescrição de Itô. Para um α qualquer, tomando como ponto inicial a definição de equação diferencial estocástica de Itô (34), definimos uma expressão geral para esta equivalência através de

$$dx = \left[f(x) - \alpha g(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x} \right] dt + g(x)dW(t) \quad ; 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (38)$$

Como se pode perceber, uma mudança na prescrição para o cálculo da integral estocástica, implica, ao nível da equação diferencial, uma variação no termo de arrasto, adicionando uma “força” que depende da flutuação, $g(x)$.

Um aspecto importante nesta teoria são as regras de diferenciação. Para formar diferenciais de funções dependentes de processos de Wiener, todos os termos até segunda ordem em $dW(t)$ têm de ser mantidos, conforme explicamos na seção anterior. Vamos ver como se comporta a regra da cadeia quando aplicada em uma função $Y[x(t)]$, para

$x(t)$ obedecendo a equação de Langevin (25) na prescrição de Itô, escrita como $dx = f(x)dt + g(x)dW$. Expandindo o diferencial $dY(x)$ até segunda ordem em $dW(t)$,

$$\begin{aligned} dY(x) &= Y(x + dx) - Y(x) = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dx^2 + \dots \\ &= \frac{\partial Y}{\partial x} [f(x)dt + g(x)dW(t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} [f(x)dt + g(x)dW(t)]^2 + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

Desenvolvendo a expressão quadrática, desprezando os termos de ordem superior a dt , e usando que $[dW]^2 = dt$ (3), chegamos na *fórmula de Itô*:

$$dY(x) = \left[f(x) \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(x) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right] dt + g(x) \frac{\partial Y}{\partial x} dW(t) \quad (40)$$

Por conveniência na notação, vamos escrever a fórmula de Itô do seguinte modo,

$$\frac{dY[x(t)]}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} g^2(x) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (41)$$

Note-se que esta regra de diferenciação não coincide com a regra da cadeia usual, aparecendo um termo a mais, associado à condição $dW(t) \sim \sqrt{dt}$.

Quando definirmos a equação diferencial estocástica na prescrição de Stratonovich, as regras de diferenciação correspondem-se com as regras usuais do cálculo; isto pode ser comprovado usando a fórmula de Itô, Eq. (40), e as relações anteriores, (Eqs. 34–37). Temos então, que a regra da cadeia no cálculo de Stratonovich, para uma função $Y[x(t)]$, com $x(t)$ obedecendo a equação (36), é dada por:

$$dY(x) = f_s(x) \frac{\partial Y}{\partial x} dt + g_s(x) \frac{\partial Y}{\partial x} dW(t) \quad (42)$$

Escrevendo-a no mesmo modo da equação (41), temos a regra da cadeia do cálculo usual,

$$\frac{dY[x(t)]}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (43)$$

Para qualquer função diferenciável $Y(x(t))$ da variável aleatória $x(t)$, vamos definir a regra da cadeia generalizada através de

$$\frac{dY[x(t)]}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{(1 - 2\alpha)}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} g^2 \quad (44)$$

É claro que para $\alpha = 1/2$, a equação (44) é a regra da cadeia usual, ao tempo que para $\alpha = 0$, esta expressão coincide com a fórmula de Itô. Para a convenção de Hänggi-Klimontovich, $\alpha = 1$, esta regra de diferenciação se distingue da fórmula de Itô apenas pelo

sinal do último termo. Em princípio, segundo temos visto, a escolha de um α particular fixa uma evolução estocástica diferente. Em muitas ocasiões, na modelagem de um sistema se considera um ruído gaussiano colorido, com variância finita (25). Nesse caso, a equação (25) não tem problemas na sua interpretação e, ao final dos cálculos, se faz o limite de variância infinita. Esse procedimento de regularização é equivalente à interpretação de Stratonovich, $\alpha = 1/2$ (2, 26). Porém, em outras aplicações do formalismo, como equações químicas de Langevin (2) ou problemas econométricos (6, 7), o ruído tem de ser considerado principalmente branco, podendo vir de um processo de Poisson, por exemplo. Em tais situações, a interpretação de Itô, $\alpha = 0$, pode ser mais adequada.

Por conseguinte, a interpretação da equação (25) depende do interesse por trás da sua aplicação. Uma vez a interpretação seja determinada, a dinâmica estocástica fica definida sem ambiguidade. Resumindo, para definir completamente o processo estocástico descrito pela equação (25), precisamos fixar um par de funções (f, g) e o parâmetro $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$.

Para este tipo de problemas existem sofisticadas técnicas que incluem os formalismos operacionais (27) e de integrais de caminho (28) no qual vamos a tratar no próximo capítulo.

3 FORMALISMO DA INTEGRAL FUNCIONAL

O formalismo da integral funcional pode ser utilizado no tratamento de sistemas fora do equilíbrio como, por exemplo, ao estudar dinâmica crítica (29). A ideia de usar este formalismo é transformar o problema de modo que fique similar ao da mecânica estatística do equilíbrio, com dimensões a mais.

Essa lógica se usa para estudar o comportamento crítico quântico, mas o formalismo é fartamente utilizado em outras áreas, por exemplo, na procura de funções de correlação e resposta. Inicialmente, o esquema foi aplicado ao estudo do comportamento crítico de fluidos, por Martin, Siggia e Rose (30). Janssen (31) e De Dominicis (32) obtiveram um formalismo eficiente de resposta funcional para a construção de uma teoria de campos dinâmica. Em particular, o formalismo oferece uma possibilidade alternativa para estudar processos estocásticos através da transformação de uma equação diferencial em uma teoria de campos.

Nosso trabalho usaremos este formalismo de forma geral utilizando a equação (23) que é a equação de Langevin para um sistema de equações acoplados. Com este formalismo se obtém funcionais geradores dinâmicos generalizados, Z , com uma "ação efetiva" generalizada S , que são um bom ponto de partida para aplicar técnicas de cálculo da teoria de campos no estudo da dinâmica de modelos clássicos e quânticos acoplados com o entorno. Estas técnicas vão desde teoria perturbativa até o grupo de renormalização funcional.

Para sistemas clássicos, que é o interesse deste trabalho, o sistema inicial é uma equação diferencial estocástica. O nome de funcional gerador vem da sua capacidade para gerar todas as funções de correlação dos parâmetros observáveis do sistema, as quais possuem uma grande quantidade de informação. Além do mais, estas funções de correlação podem ser medidas até certo detalhe usando um experimento apropriado. Isso as converte em quantidades muito importantes a serem obtidas. A média de qualquer observável poderá ser calculada mediante a variação do funcional gerador Z em relação a uma fonte dependente do tempo, J , da forma a seguir(39).

$$\langle \bar{x}_{i_1[\eta]}(t_1) \dots \bar{x}_{i_2[\eta]}(t_n) \rangle_{\eta} = \left. \frac{\delta^n Z[\mathbf{J}]}{\delta J(t_n) \dots \delta J(t_1)} \right|_{\mathbf{J}=0} \quad (45)$$

Este formalismo funcional tem sido muito aplicado para sistemas com ruído aditivo. Na maioria das aplicações, uma discretização do sistema é feita em algum ponto. No caso do ruído multiplicativo, algumas ambiguidades na passagem ao contínuo têm sido reportadas na literatura (29, 33, 34). Neste capítulo, apresentamos a dedução do funcional gerador usando um formalismo funcional, chegando à expressão de uma integral de caminho sobre

um conjunto de variáveis fermiônicas e bosônicas, sem realizar nenhuma discretização no tempo. Em geral, o termo de variáveis bosônicas ou fermiônicas usado na dissertação não é referido ao caráter quântico e sem à álgebra comutativa ou anticomutativa, respectivamente, destas variáveis. Os resultados deste cálculo são uma generalização da referência(35)

3.1 Funcional Gerador e as Funções de Correlação

Nos estamos interessados em calcular funções de correlação de n -pontos

$$\langle x_{i_1}(t_1) \dots x_{i_n}(t_n) \rangle, \quad \text{onde} \quad i_k \in [1, \dots, n]. \quad (46)$$

onde $x_i(t)$ são funções estocásticas descritas pela equação (23).

O formalismo que vamos desenvolver nesta seção não é baseado em uma discretização explícita da equação de Langevin (Eq.23). Vamos trabalhar independentemente de qualquer prescrição para definir a integral estocástica. De fato, nosso principal resultado,(funcional gerador), não depende da definição da integral de Wiener. É de se esperar, no entanto, que as ambiguidades relativas à possibilidade de diferentes dinâmicas estocásticas apareçam de alguma outra forma.

Para calcularmos o valor médio precisaríamos conhecer a probabilidade conjunta de n -ésima ordem da variável aleatória $x(t)$. Um procedimento alternativo equivalente consiste em resolver a equação de Langevin (Eq. (23))

$$\langle x_{i_1}(t_1), \dots, x_{i_n}(t_n) \rangle \equiv \langle \bar{x}_{i_1[\eta]}(t_1), \dots, \bar{x}_{i_n[\eta]}(t_n) \rangle_\eta \quad (47)$$

onde $\bar{x}_{[\eta]}(t)$ é uma solução da equação (23) para uma realização particular do ruído e certas condições iniciais $X(t_0) = X_0$. O valor médio estocástico, calculado na variável η pode ser representado com uma distribuição de probabilidade Gaussiana (Eq.5)

$$\langle \dots \rangle_\eta = \int D\eta_1 D\eta_2 \dots D\eta_n \dots e^{-\int dt \eta \cdot \eta} \quad (48)$$

Caso se tivesse uma distribuição de probabilidades $P(x_0)$ para as condições iniciais, o valor esperado teria de ser calculado também nessa variável.

Considerando que não conhecemos a distribuição de probabilidade de $x(t)$ e que temos interesse em fazer um estudo analítico, não numérico, do comportamento assintótico desta quantidade, as funções de correlação podem ser também obtidas a partir do funcional

gerador:

$$Z[\mathbf{J}(t)] = \left\langle e^{\int dt J_i(t) \bar{x}_{i[\eta]}(t)} \right\rangle_{\boldsymbol{\eta}} = \left\langle e^{\int dt \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{x}}_{[\eta]}(t)} \right\rangle_{\boldsymbol{\eta}} \quad (49)$$

diferenciando em relação à fonte $J(t)$, de modo que,

$$\left\langle \bar{x}_{i_1[\eta]}(t_1) \dots \bar{x}_{i_n[\eta]}(t_n) \right\rangle_{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\delta^n Z[\mathbf{J}]}{\delta J(t_n) \dots \delta J(t_1)} \Bigg|_{\mathbf{J}=0} \quad (50)$$

Note-se que $Z[0] = 1$ por definição, $Z[0] = \langle 1 \rangle_{\boldsymbol{\eta}} = 1$

Nosso objetivo é, então, encontrar uma representação funcional para $Z[J]$ evadindo o problema do cálculo explícito das soluções da equação de Langevin. Para este propósito nós introduzimos uma integral funcional sobre a variável $x(t)$ reescrevendo a equação (49) temos:

$$Z[\mathbf{J}(t)] = \left\langle \int Dx_i(t) \delta[x_i(t) - \bar{x}_{i[\eta]}(t)] e^{\int dt J_i(t) x_i(t)} \right\rangle_{\boldsymbol{\eta}} \quad (51)$$

Aqui vemos que a variável $\bar{x}_{[\eta]}(t)$ aleatória já não está no exponencial ela agora fica na delta de Dirac e a integração é feita sobre a variável $x(t)$ então a expressão fica:

$$Z[\mathbf{J}(t)] = \int Dx_i(t) e^{\int dt J_i(t) x_i(t)} \left\langle \delta[x_i(t) - \bar{x}_{i[\eta]}(t)] \right\rangle_{\boldsymbol{\eta}} \quad (52)$$

Uma vez obtida a expressão anterior (Eq.52) vamos usar a propriedade da delta funcional a fim de eliminar a variável aleatória $\bar{x}_{[\eta]}(t)$, então temos:

$$\delta[x_i(t) - \bar{x}_{i[\eta]}(t)] = \delta[\hat{O}_i(\mathbf{x})] \det \left(\frac{\delta \hat{O}_i}{\delta x_k} \right), \quad k = 1, \dots, n, \quad (53)$$

Onde $\bar{x}_{i[\eta]}(t)$ é uma raiz de $\hat{O}_i(x)$, *i.e.*, $\hat{O}_i(\bar{x}_{i[\eta]}(t)) = 0$. Esta é uma extensão funcional da conhecida propriedade $\delta(f(x)) = \frac{1}{f'(a)} \delta(x-a)$ se $f(a) = 0$ e $f'(a) \neq 0$. Então o funcional gerador ficaria da forma:

$$Z[\mathbf{J}(t)] = \int Dx_i(t) e^{\int dt J_i(t) x_i(t)} \left\langle \delta[\hat{O}_i(x)] \det \left(\frac{\delta \hat{O}_i}{\delta x_k} \right) \right\rangle_{\boldsymbol{\eta}} \quad (54)$$

A expressão (54) não tem mais de forma explícita a variável aleatória. Isso é um passo importante. Nosso próximo passo será eliminar a expressão da media aleatória. A escolha natural para $\hat{O}_i(\mathbf{x}) = 0$ é

$$\hat{O}_i(\mathbf{x}) = \frac{dx_i(t)}{dt} - f_i(x_i) - g_{ij}(x_i) \eta_j(t) \quad (55)$$

Realizar agora a diferenciação do operador (55) $\delta\hat{O}_i/\delta x_k$ obtendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\hat{O}_i(\mathbf{x}(t))}{\delta x_k(t')} &= \frac{\delta}{\delta x_k(t')} \left[\frac{dx_i(t)}{dt} - f_i(x_i) - g_{ij}(x_i)\eta_j(t) \right] \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_k(t')} - \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_k(t')} \partial_k f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_k(t')} \partial_k g_{ij}(\mathbf{x}) \eta_j(t) \\
&= \delta_{ik} \frac{d}{dt} \delta(t-t') - \delta_{ik} \delta(t-t') \partial_k f_i(\mathbf{x}) - \delta_{ik} \delta(t-t') \partial_k g_{ij}(\mathbf{x}) \eta_j(t) \\
&= \left[\frac{d}{dt} - \partial_k f_i(\mathbf{x}) - \partial_k g_{ij}(\mathbf{x}) \eta_j(t) \right] \delta_{ik} \delta(t-t'), \tag{56}
\end{aligned}$$

onde ∂_k significa a diferenciação com relação x_k

definindo a matriz \mathbf{T} tal que $T_{ik} = \frac{\delta\hat{O}_i(\mathbf{x}(t))}{\delta x_k(t')}$ podemos escrever:

$$Z[\mathbf{J}(t)] = \int D x_i(t) e^{\int dt J_i(t) x_i(t)} \left\langle \delta[\hat{O}_i(x)] \det \mathbf{T} \right\rangle_{\eta} \tag{57}$$

A diferença do caso aditivo, o $\det(\mathbf{T})$ depende do ruído η .

3.2 Representação integral funcional para $Z[J]$

Nesta outra parte vamos trabalhar o funcional tentando eliminar o termo de ruído na equação (57). Para isto introduziremos um par de funções de Grassmann os quais obedecem à álgebra anticomutativa que leva seu nome.

$$\{\xi_i(t), \xi_j(t')\} = \{\bar{\xi}_i(t), \bar{\xi}_j(t')\} = \{\xi_i(t), \bar{\xi}_j(t')\} = 0, \tag{58}$$

Onde $\xi_i^2(t) = \bar{\xi}_i^2(t) = 0$ com $\{, \}$ representando anticomutadores. Em termos destas novas variáveis, o determinante pode ser representado como(29) (para mais detalhes veja Apêndice A)

$$\det \left(\frac{\delta\hat{O}_i(\mathbf{x}(t))}{\delta x_k(t')} \right) = \int D^n \xi D^n \bar{\xi} e^{\int dt dt' \bar{\xi}_i(t) \left(\frac{\delta\hat{O}_i(\mathbf{x}(t))}{\delta x_k(t')} \right) \xi_k(t')} \tag{59}$$

Continuando com nosso cálculo vamos a trabalhar com o determinante da equação anterior e substituindo a equação (56) temos:

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{T} &= \int D^n \xi D^n \bar{\xi} e^{\int dt dt' \bar{\xi}_i(t) T_{ik} \xi_k(t')} \\
&= \int D^n \xi D^n \bar{\xi} e^{\int dt dt' \bar{\xi}_i(t) \frac{\delta \hat{O}_i(\mathbf{x}(t))}{\delta x_k(t')} \xi_k(t')} \\
&= \int D^n \xi D^n \bar{\xi} e^{\int dt dt' \bar{\xi}_i(t) [\delta_{ik} \frac{d}{dt} - \partial_k f_i(\mathbf{x}) - \partial_k g_{ij}(\mathbf{x}) \eta_j(t)] \delta(t-t') \xi_k(t)} \\
&= \int D^n \xi D^n \bar{\xi} e^{\int dt \bar{\xi}_i(t) [\delta_{ik} \frac{d}{dt} - \partial_k f_i(\mathbf{x}) - \partial_k g_{ij}(\mathbf{x}) \eta_j(t)] \xi_k(t)} \\
&= \int D^n \xi D^n \bar{\xi} e^{\int dt \bar{\xi}_i(t) \dot{\xi}_i(t)} e^{-\int dt \bar{\xi}_i(t) [\partial_k f_i(\mathbf{x}) + \partial_k g_{ij}(\mathbf{x}) \eta_j(t)] \xi_k(t)} \tag{60}
\end{aligned}$$

Observe-se que o ruído fica acoplado com as variáveis de Grassmann.

Vamos agora a trabalhar a segunda parte que é $\delta [\hat{O}_i(x)]$. Para isso fazemos uma transformação, (transformada de Fourier) com o objetivo de escrever a delta funcional na sua forma integral. Introduzimos um conjunto de variável auxiliar, $\varphi_1(t) \dots \varphi_i(t)$, e obtemos:

$$\delta [\hat{O}_i(x)] = \int D^n \varphi e^{-i \int dt \varphi_i(t) [\dot{x}_i(t) - f_i(\mathbf{x}) - g_{ij}(\mathbf{x}) \eta_j(t)]}. \tag{61}$$

Substituindo os resultados (60) e (61) na equação (53) temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \delta [x_i(t) - \bar{x}_{i[n]}(t)] \right\rangle_{\eta} &= \left\langle \delta [\hat{O}_i(x)] \det \mathbf{T} \right\rangle_{\eta} \\
&= \int D^n \xi D^n \bar{\xi} D^n \varphi \times \\
&\quad \times e^{\int dt \{ \bar{\xi}_i(t) \dot{\xi}_i(t) - \bar{\xi}_i(t) \partial_k f_i(x) \xi_k(t) - i \varphi_i(t) [\dot{x}_i(t) - f_i(x)] \}} \\
&\quad \times \left\langle e^{-\int dt [\bar{\xi}_i(t) \partial_k g_{ij} \xi_k(t) - i \varphi_i(t) g_{ij}(x)] \eta_j(t)} \right\rangle_{\eta} \tag{62}
\end{aligned}$$

Ordenando os termos, colocamos fora da média aqueles que não têm o fator $\eta_j(t)$. Agora pode ser calculado facilmente o valor esperado sobre o ruído, levando em conta que o ruído tem uma densidade de probabilidade Gaussiana e aparece linearmente na exponencial, como pode ser visto no último termo em (62). Calculando esta expressão

separadamente obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{-\int dt [\bar{\xi}_i \partial_k g_{ij} \eta_j \xi_k - i\varphi_i g_{ij} \eta_j]} \right\rangle_\eta &= \int D^n \eta(t) e^{-\frac{1}{2} \int dt \eta_j \eta_j} e^{-\int dt [\bar{\xi}_i \partial_k g_{ij} \eta_j \xi_k - i\varphi_i g_{ij} \eta_j]} \\
&= \int D^n \eta(t) e^{-\frac{1}{2} \int dt \eta_j^2 + 2(\bar{\xi}_i \partial_k g_{ij} \xi_k - i\varphi_i g_{ij}) \eta_j} \\
&= \int D^n \eta(t) e^{-\frac{1}{2} \int dt \left\{ [\eta_j + (\bar{\xi}_i \partial_k g_{ij} \xi_k - i\varphi_i g_{ij})]^2 - (\bar{\xi}_i \partial_k g_{ij} \xi_k - i\varphi_i g_{ij})^2 \right\}} \\
&= e^{\frac{1}{2} \int dt (\bar{\xi}_i \partial_k g_{ij} \xi_k - i\varphi_i g_{ij})^2} \int D^n \eta(t) e^{-\frac{1}{2} \int dt [\eta_j - (\bar{\xi}_i \partial_k g_{ij} \xi_k - i\varphi_i g_{ij})]^2} \\
&= e^{\frac{1}{2} \int dt (\partial_m g_{lj} \partial_k g_{ij} \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k - 2i\varphi_l g_{lj} \partial_k g_{ij} \bar{\xi}_i \xi_k - \varphi_i g_{ij} \varphi_l g_{lj})} \quad (63)
\end{aligned}$$

onde o valor da integral corresponde à integração sobre a probabilidade $\int d\eta(t) P(\eta) = 1$. Introduzindo a equação (62) na expressão (57) e usando (63), chegamos finalmente à representação desejada para o funcional gerador das funções de correlação então temos:

$$\begin{aligned}
Z[\mathbf{J}(t)] &= \int D^n x D^n \xi D^n \bar{\xi} D^n \varphi \times \\
&\quad \times e^{\int dt \left\{ J_i(t) x_i(t) + \bar{\xi}_i(t) \dot{\xi}_i(t) - \bar{\xi}_i(t) \partial_k f_i(x) \xi_k(t) - i\varphi_i(t) [\dot{x}_i(t) - f_i(x)] \right\}} \\
&\quad \times e^{\frac{1}{2} \int dt (\partial_m g_{lj} \partial_k g_{ij} \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k - 2i\varphi_l g_{lj} \partial_k g_{ij} \bar{\xi}_i \xi_k - \varphi_i g_{ij} \varphi_l g_{lj})} \quad (64)
\end{aligned}$$

escrevendo:

$$Z[\mathbf{J}(t)] = \int D^n x D^n \varphi D^n \xi D^n \bar{\xi} e^{-S[x, \varphi, \xi, \bar{\xi}] + \int dt J_i(t) x_i(t)} \quad (65)$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
S &= \int dt \left\{ -\bar{\xi}_i(t) \dot{\xi}_i(t) + \partial_k f_i(x) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) + \frac{1}{2} \varphi_i(t) \varphi_l(t) g_{ij}(x) g_{lj}(x) + \right. \\
&\quad \left. + i\varphi_l(t) [\dot{x}_l(t) - f_l(x) + g_{lj}(x) \partial_k g_{ij}(x) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t)] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \partial_m g_{lj}(x) \partial_k g_{ij}(x) \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \right\} \quad (66)
\end{aligned}$$

Este resultado é de muito grande interesse em nosso trabalho porque representa uma ferramenta de cálculo importante. Cabe destacar que nossa ação depende das variáveis $x(t)$, $\varphi(t)$, $\bar{\xi}(t)$, $\xi(t)$ que são variáveis dinâmicas e como tal podemos sempre procurar suas equações de movimento. Em posse de uma ação clássica é possível aplicar as ferramentas usuais de teoria de campos para estudar diferentes sistemas porém, gostaríamos ainda retomar a difusão das diferentes prescrições estocásticas.

3.3 Representações dependentes da prescrição

Na seção anterior obtivemos o funcional gerador e a sua ação correspondente, equações (66) e (65), usando um método absolutamente funcional, sem fazer referência a nenhuma discretização da equação de Langevin (23). Porém, como foi introduzido na seção 1.3, ao fazer discretizações diferentes da equação de Langevin e, portanto, definir maneiras diferentes do limite ao contínuo, obtém-se evoluções estocásticas diferentes. A razão para este comportamento é dada pelo ruído delta-correlacionado, pelo fato da indefinição intrínseca da integração no ruído branco (27). Na seção 1.3 definimos a forma geral da integração estocástica para dar sentido à equação de Langevin e mostramos como o valor da integral depende da prescrição usada para escolher τ_j . Na “prescrição- α ” (Eq. (33)), cada valor de α define uma convenção precisa para calcular a integral estocástica, a qual leva, em princípio, a uma dinâmica estocástica particular, diferente de uma outra escolha de α . Aliás, a escolha da convenção não significa uma simples decisão inicial, ela permeia o cálculo tudo, sendo que cada convenção tem suas próprias regras de cálculo. Só na prescrição de Stratonovich (Eq.(32)) as regras de cálculo são aquelas do cálculo usual.

Nesta parte da dissertação vamos a demonstrar que nosso funcional gerador obtido na subseção anterior (Eq. (66)) pode ter uma dependência da prescrição visto no capítulo 2. O problema vem associado à definição do determinante na equação (59). Para calcular formalmente esta expressão é preciso definir a função de Green do operador d/dt , de fato, este é um problema comum na integração sobre variáveis de Grassmann, não está relacionado com a presença do ruído multiplicativo. Continuando com nosso cálculo vamos a realizar uma integração funcional das funções de Grassmann. Separando em (64) os termos que contem variáveis de Grassmann

$$\begin{aligned}
 I_G &= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \{ \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i - [\partial_k f_i + i\varphi_l g_{lj} \partial_k g_{ij}] \bar{\xi}_i \xi_k + \frac{1}{2} \partial_m g_{lj} \partial_k g_{ij} \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k \}} \\
 &= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{-\int dt [\partial_k f_i + i\varphi_l g_{lj} \partial_k g_{ij}] \bar{\xi}_i \xi_k} e^{\int dt \frac{1}{2} \partial_m g_{lj} \partial_k g_{ij} \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k}
 \end{aligned} \tag{67}$$

Vamos analisar em uma primeira aproximação os dois primeiros termos exponenciais da equação (67), através de uma expansão em serie de Taylor:

$$\begin{aligned}
I &= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{-\int dt [\partial_k f_i - i\varphi_l g_{lj} \partial_k g_{ij}] \bar{\xi}_i \xi_k} \\
&= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{-\int dt F_1 \bar{\xi}_i \xi_k} \\
&= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} \left\{ 1 - \int dt F_1(t) \bar{\xi}_i \xi_k \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int dt dt' F_1(t) F_1(t') \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t') - \dots \right\} \\
&= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} - \int dt \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} F_1(t) \bar{\xi}_i \xi_k \\
&\quad + \frac{1}{2} \int dt dt' \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} F_1(t) F_1(t') \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t') - \dots
\end{aligned} \tag{68}$$

onde $F_1(x(t)) = \partial_k f_i(x(t)) - i\varphi_l(t) g_{lj}(x(t)) \partial_k g_{ij}(x(t))$

Multiplicando e dividindo a expressão anterior termo a termo por $\int d\xi d\bar{\xi} e^{\int dt \bar{\xi}(t) \hat{T} \xi(t)}$ onde $T = \frac{d}{dt}$ sabendo que $\det T = \int d\xi d\bar{\xi} e^{\int dt \bar{\xi}(t) \hat{T} \xi(t)}$ obtemos uma média nas variáveis de Grassmann,

$$\begin{aligned}
I &= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} \frac{\det T}{\det T} - \int dt \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} F_1(t) \bar{\xi}_i \xi_k \frac{\det T}{\det T} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int dt dt' \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} F_1(t) F_1(t') \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t') \frac{\det T}{\det T} - \dots \\
&= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} \left\{ 1 - \int dt F_1(t) \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int dt dt' F_1(t) F_1(t') \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t') \rangle - \dots \right\}
\end{aligned} \tag{69}$$

Sendo que a distribuição nas variáveis de Grassmann é gaussiana podemos usar o teorema de Wick para separar as correlações de n-pontos em somas de produtos de correlações de apenas dois pontos. Desenvolvendo um exemplo para quatro pontos pode-se ver que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t') \rangle &= \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \rangle \langle \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t') \rangle + \overbrace{\langle \bar{\xi}_i(t) \bar{\xi}_i(t') \rangle}^0 \overbrace{\langle \xi_k(t) \xi_k(t') \rangle}^0 + \\
&\quad + \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t') \rangle \langle \xi_k(t) \bar{\xi}_i(t') \rangle
\end{aligned} \tag{70}$$

Considerando que $\langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t') \rangle = \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i(t) \dot{\xi}_i(t)} \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t')$, nos poderíamos escrever correlações de dois pontos introduzindo as variáveis de Grassmann θ e $\bar{\theta}$, usadas como fontes externas, e definir a funcional

$$Z[\bar{\theta}, \theta] = \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \{ \bar{\xi}_i(t) \dot{\xi}_i(t) + \bar{\theta}_i(t) \xi_i(t) + \bar{\xi}_i(t') \theta_i(t') \}} \tag{71}$$

Desta forma, as correlações de dois pontos podem ser escritas como

$$\langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t') \rangle = - \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[\bar{\theta}, \theta]}{\delta \theta_i(t) \delta \theta_k(t')} \Bigg|_{\theta = \bar{\theta} = 0} \quad (72)$$

Agora vamos fazer uma troca de variáveis com a intenção de resolver a integral (71) dado que é gaussiana

$$M = \bar{\xi}_i(t) T \xi_i(t) + \bar{\theta}_i(t) \xi_i(t) + \bar{\xi}_i(t') \theta_i(t') \quad (73)$$

onde $T = \frac{d}{dt}$ fazendo uma translação equivalente temos:

$$M = (\bar{\xi}_k(t) + \bar{c}) T (\xi_k(t) + c) + B \quad (74)$$

onde B é qualquer constante, fazendo os cálculos temos:

$$M = \bar{\xi}_k T \xi_k(t) + \bar{c} T \xi_i + \bar{\xi}_i T c + \bar{c} T c + B \quad (75)$$

Fazendo as comparações das equações (73) e (75) temos as relações seguintes:

$$\bar{\theta}_i = \bar{c} T \quad \theta_i = c T \quad \bar{c} T c + B = 0 \quad (76)$$

Vamos encontrar agora os valores para \bar{c} , c e B multiplicando cada termo por T^{-1} então podemos chegar as relações:

$$\bar{c} = \bar{\theta}_i T^{-1} \quad c = T^{-1} \theta_i \quad B = - \bar{c} T c \quad (77)$$

É simples agora calcular $Z[\bar{\theta}, \theta]$

$$\begin{aligned} Z[\bar{\theta}, \theta] &= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \{ \bar{\xi}_i(t) \dot{\xi}_i(t) + \bar{\theta}_i(t) \xi_i(t) + \bar{\xi}_i(t') \theta_i(t') \}} \\ &= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \{ (\bar{\xi}_k(t) + \bar{c}) T (\xi_k(t) + c) + B \}} \\ &= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \{ (\bar{\xi}_k(t) + \bar{c}) T (\xi_k(t) + c) - \bar{\theta}_i T^{-1} \theta_i \}} \\ &= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{- \int dt \bar{\theta}_i(t) T^{-1} (t-t') \theta_i(t')} \end{aligned} \quad (78)$$

onde T^{-1} é o inverso do operador \hat{T} e $B = \bar{\theta}_i T^{-1} \theta_i$ obtendo finalmente de forma geral:

$$Z[\bar{\theta}, \theta] = \det(T) e^{- \int dt \bar{\theta}_i(t_2) T^{-1} (t_1 - t_2) \theta_i(t_1)} \quad (79)$$

onde

$$\det(T) = \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} = cte \quad (80)$$

Para efetuarmos a derivação funcional em relação a θ e $\bar{\theta}$ desconsiderando a constante, vamos escrever $Z[\theta, \bar{\theta}]$ em detalhe, como

$$Z[\bar{\theta}, \theta] = e^{-\int dt_1 dt_2 \bar{\theta}_i(t_2) T^{-1}(t_1 - t_2) \theta_i(t_1)} \quad (81)$$

derivando a equação (79) duas vezes sabendo que $\hat{T} = \frac{d}{dt}$ então temos:

$$\frac{\delta Z[\bar{\theta}, \theta]}{\delta \bar{\theta}_k(t')} = - \int dt_1 T^{-1}(t_1 - t') \theta_k(t_1) e^{-\int dt_1 dt_2 \bar{\theta}_k(t_2) T^{-1}(t_1 - t_2) \theta_k(t_1)} \quad (82)$$

logo fazendo a segunda derivada temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z}{\delta \theta_i(t) \delta \bar{\theta}_k(t')} &= \int dt_2 \bar{\theta}_k(t_2) T^{-1}(t - t_2) \int dt_1 T^{-1}(t - t') \theta_k(t_1) e^{-\int dt \bar{\theta}_k(t_2) T^{-1}(t_1 - t_2) \theta_k(t_1)} \\ &\quad - e^{-\int dt \bar{\theta}_k(t_1) T^{-1}(t_1 - t_2) \theta_k(t_2)} \int dt_1 T^{-1}(t - t') \delta_{ik} \delta(t - t') \end{aligned} \quad (83)$$

Ao avaliar o resultado (83) na equação (72) temos:

$$\left. \frac{\delta^2 Z[\bar{\theta}, \theta]}{\delta \theta_i(t) \delta \bar{\theta}_k(t')} \right|_{\bar{\theta}=0} = -T^{-1}(t - t') \delta_{ik} \quad (84)$$

substituindo a equação (84) na equação (72) temos:

$$\langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t') \rangle = T^{-1}(t - t') \delta_{ik} \quad (85)$$

substituindo as equações (70) e (85) na equação (69) temos que:

$$\begin{aligned} I &= \det(T) \left\{ 1 - \int dt F_1(t) \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \rangle + \frac{1}{2} \int dt dt' F_1(t) F_1(t') \{ \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \rangle \langle \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t') \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \bar{\xi}_i(t) \bar{\xi}_i(t') \rangle \langle \xi_k(t') \xi_k(t) \rangle - \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t') \rangle \langle \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t) \rangle \} - \dots \right\} \\ &= \det(T) \left\{ 1 - \int dt F_1(t) T^{-1}(0) \delta_{ik} + \frac{1}{2} \int dt dt' F_1(t) F_1(t') \{ [T^{-1}(0)]^2 [\delta_{ik}]^2 \right. \\ &\quad \left. + T^{-1}(t - t') T^{-1}(t' - t) \} - \dots \right\} \end{aligned} \quad (86)$$

Agora é necessário definir estritamente a função de Green $\hat{T}^{-1}(t-t')$. Note-se que sempre é possível acrescentar uma solução da equação homogênea para ajustar as condições iniciais. Escolhemos uma prescrição causal ao considerarmos a função de Green retardada, de tal

forma que:

$$T_R^{-1}(t - t')T_R^{-1}(t' - t) = 0 \quad (87)$$

exceto, possivelmente, no conjunto de medida nula $t = t'$.

Analiseemos cuidadosamente a função $F_1(t)$. Se esta função fosse delta correlacionada, então a segunda linha da equação (86) e todos os termos seguintes seriam identicamente nulos. Essa é uma consequência natural do caráter anticomutativo das variáveis de Grassmann. Nesse caso, o resultado é linear em $F_1(t)$. Porém, se $F_1(t)$ fosse uma função suave no tempo, poderíamos colocar $T^{-1}(t - t')T^{-1}(t' - t) = 0$ com total confiança na equação (86)

$$I = \det(T) \left\{ 1 - \int dt F_1(t) T^{-1}(0) \delta_{ik} + \frac{1}{2} \int dt dt' F_1(t) F_1(t') [T^{-1}(0)]^2 [\delta_{ik}]^2 \right\} \quad (88)$$

No caso que F_1 combinasse termos suaves com outros delta correlacionados, cada integral teria de ser analisada separadamente. Portanto, o resultado anterior, Eq. (88), é válido sempre que se faça a escolha da prescrição causal para a função de Green do operador \hat{T} e considerando funções F_1 suaves. Ainda nesta situação persiste uma ambiguidade, dada por $T_R^{-1}(0)$ que não é definida.

Para completar a definição do determinante é preciso fixar este valor. Em consequência, a função de Green retardada é $T_R^{-1} = \Theta(t - t')$ onde $\Theta(t)$ é a distribuição de Heaviside. Para definirmos a integração precisamos estabelecer que $\Theta(0) = \alpha$, portanto, o resultado anterior, Eq. (85) resulta:

$$\langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t') \rangle = \theta(t - t') \delta_{ik} \quad (89)$$

Onde a função de Green é o inverso do operador de diferenciação.

Re-exponenciando a equação (88) obtemos:

$$I = \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{-\int dt F_1(t) T^{-1}(0) \delta_{ik}} \quad (90)$$

fazendo uma comparação com a segunda linha da equação (68) temos que:

$$I = \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{-\int dt F_1(t) T^{-1}(0) \delta_{ik}} = \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{-\int dt F_1(t) \bar{\xi}_i \xi_k} \quad (91)$$

Este resultado é muito importante porque as variáveis de Grassmann não se misturam mais com F_1 ou seja, que $-\int dt F_1(t) T^{-1}(0) \delta_{ik} = -\int dt F_1(t) \bar{\xi}_i \xi_k$ se comporta igual só quando esta dentro da integral de Grassmann.

A integral de Grassmann ficaria desta forma substituída a equação (91)

$$\begin{aligned}
I_G &= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \{ \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i - F_1 \bar{\xi}_i \xi_k + \frac{1}{2} \partial_m g_{lj} \partial_k g_{ij} \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k \}} \\
&= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{-\int dt F_1(t) T^{-1}(0) \delta_{ik}} e^{\frac{1}{2} \int dt \partial_m g_{lj} \partial_k g_{ij} \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k} \\
&= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{-\int dt F_1(t) T^{-1}(0) \delta_{ik}} e^{\int dt F_2 \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k} \\
&= e^{-\int dt F_1(t) T^{-1}(0) \delta_{ik}} \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{\int dt F_2 \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k} \\
&= e^{-\int dt F_1(t) \theta(0) \delta_{ik}} \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{\int dt F_2 \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k} \tag{92}
\end{aligned}$$

Onde $F_2 = \partial_m g_{lj} \partial_k g_{ij} / 2$

Vamos agora a avaliar a segunda parte da integral de Grassmann considerando da representação da serie da função exponencial e seguindo o esquema do cálculo desenvolvido sobre a primeira parte e tomando em conta as propriedades anticomutativa para ξ e $\bar{\xi}$ temos que:

$$I_1 = \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} e^{\int dt F_2 \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k} \tag{93}$$

Fazendo a expansão em serie de Taylor:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} \left\{ 1 + \int dt F_2(t) \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int dt dt' F_2(t) F_2(t') \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \bar{\xi}_l(t') \xi_m(t') \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t') + \dots \right\} \\
&= \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} + \int dt \int D^n \bar{\xi} D^n \xi F_2(t) e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} \bar{\xi}_l \xi_m \bar{\xi}_i \xi_k \\
&\quad + \frac{1}{2} \int dt dt' \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i} F_2(t) F_2(t') \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \bar{\xi}_l(t') \xi_m(t') \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t') + \dots \tag{94}
\end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo a expressão anterior por $\det(\widehat{T}) = \int D^n \bar{\xi} D^n \xi e^{\int dt \bar{\xi}_i \dot{\xi}_i}$, fazemos aparecer os valores médios nas variáveis de Grassmann, usando a sua própria definição (Eq.(3))

$$\begin{aligned}
I_1 &= \det(\widehat{T}) \left\{ 1 + \int dt F_2(t) \langle \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int dt dt' F_2(t) F_2(t') \langle \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \bar{\xi}_l(t') \xi_m(t') \bar{\xi}_i(t') \xi_k(t') \rangle + \dots \right\} \\
&= \det(\widehat{T}) \left\{ 1 + \int dt F_2(t) \langle \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2!} \left[\int dt dt' F_2(t) \langle \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \rangle \right]^2 + \dots \right\} \tag{95}
\end{aligned}$$

Pela propriedade do álgebra de Grassmann utilizadas na equação (88), os termos quadráticos são nulos e a equação anterior fica análoga (Eq.(88)):

$$I_1 = \det(\widehat{T}) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int dt F_2(t) \langle \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \rangle \right\} \quad (96)$$

Aplicando o teorema de Wick para separar as correlações de $n - pontos$ utilizamos a equação (70) então temos:

$$I_1 = \det(\widehat{T}) \left\{ 1 + \int dt F_2 [\langle \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \rangle \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \rangle - \langle \bar{\xi}_l(t) \xi_k(t) \rangle \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_m(t) \rangle + \overbrace{\langle \bar{\xi}_i(t) \xi_i(t') \rangle}^0 \overbrace{\langle \xi_k(t) \xi_k(t') \rangle}^0] \right\} \quad (97)$$

re-exponenciando todo novamente e aplicando a equação (89) temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \det(\widehat{T}) e^{\int dt F_2(t) [\langle \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \rangle \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \rangle - \langle \bar{\xi}_l(t) \xi_k(t) \rangle \langle \bar{\xi}_i(t) \xi_m(t) \rangle]} \\ &= \det(\widehat{T}) e^{\int dt F_2(t) [\delta_{lm} \theta(0) \delta_{ik} \theta(0) - \delta_{lk} \theta(0) \delta_{im} \theta(0)]} \\ &= \det(\widehat{T}) e^{\int dt F_2(t) [\delta_{lm} \delta_{ik} - \delta_{lk} \delta_{im}] [\theta(0)]^2} \\ &= \det(\widehat{T}) e^{\frac{1}{2} \int dt \partial_m g_{lj}(x) \partial_k g_{ij}(x) [\delta_{lm} \delta_{ik} - \delta_{lk} \delta_{im}] [\theta(0)]^2} \end{aligned} \quad (98)$$

Substituindo na equação (92) temos:

$$\begin{aligned} I_G &= \det(\widehat{T}) e^{-\int dt F_1(t) \theta(0) \delta_{ik}} e^{\frac{1}{2} \int dt \partial_m g_{lj}(x) \partial_k g_{ij}(x) [\delta_{lm} \delta_{ik} - \delta_{lk} \delta_{im}] [\theta(0)]^2} \\ &= \det(\widehat{T}) e^{-\int dt F_1(t) \theta(0) \delta_{ik}} e^{\frac{1}{2} \int dt [\partial_m g_{lj}(x) \partial_k g_{ij}(x) \delta_{lm} \delta_{ik} - \partial_m g_{lj}(x) \partial_k g_{ij}(x) \delta_{lk} \delta_{im}] [\theta(0)]^2} \\ &= \det(\widehat{T}) e^{-\int dt F_1(t) \theta(0) \delta_{ik}} e^{\frac{1}{2} \int dt [\partial_m g_{mj}(x) \partial_k g_{kj}(x) - \partial_m g_{kj}(x) \partial_k g_{mj}(x)] [\theta(0)]^2} \end{aligned} \quad (99)$$

Substituindo $\theta(0) = \alpha$. Ao eleger o valor, a integração nas variáveis $\bar{\xi}_i \xi_i$, fica:

$$I_G = (const) e^{-\int dt F_1(t) \alpha \delta_{ik} + \frac{1}{2} \int dt [\partial_m g_{mj}(x) \partial_k g_{kj}(x) - \partial_m g_{kj}(x) \partial_k g_{mj}(x)] \alpha^2} \quad (100)$$

Vamos utilizar este resultado na integração das variáveis no funcional gerador, da equação (66). Escrevendo convenientemente este funcional, para entender melhor o cálculo então temos:

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{J}(t)] &= \int D^n x D^n \varphi e^{-S_1[x, \varphi] + \int dt J_i(t) x_i(t)} \int D^n \xi D^n \bar{\xi} e^{S_2} \\ &= \int D^n x D^n \varphi e^{-S_1[x, \varphi] + \int dt J_i(t) x_i(t)} I_G \end{aligned} \quad (101)$$

Onde

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int dt \left\{ \frac{1}{2} \varphi_i(t) \varphi_l(t) g_{ij}(x) g_{lj}(x) + i \varphi_l(t) [\dot{x}_l(t) - f_l(x)] \right\} \\
S_2 &= \int dt \left\{ -\bar{\xi}_i(t) \dot{\xi}_i(t) + \partial_k f_i(x) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) + i \varphi_l(t) g_{lj}(x) \partial_k g_{ij}(x) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \partial_m g_{lj}(x) \partial_k g_{ij}(x) \bar{\xi}_l(t) \xi_m(t) \bar{\xi}_i(t) \xi_k(t) \right\} \tag{102}
\end{aligned}$$

Uma vez integrada as variáveis de grassmann em I_G da equação (101) então I_G fica da forma da equação (100) no qual S_2 fica:

$$\begin{aligned}
S'_2 &= - \int dt F_1(t) \alpha \delta_{ik} + \frac{1}{2} [\partial_m g_{mj}(x) \partial_k g_{kj}(x) - \partial_m g_{kj}(x) \partial_k g_{mj}(x)] \alpha^2 \\
&= - \int dt \left\{ [\partial_k f_i(x(t)) - i \varphi_l(t) g_{lj}(x(t)) \partial_k g_{ij}(x(t))] \alpha \delta_{ik} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} [\partial_m g_{mj}(x) \partial_k g_{kj}(x) - \partial_m g_{kj}(x) \partial_k g_{mj}(x)] \alpha^2 \right\} \\
&= - \int dt \left\{ [\partial_k f_k(x(t)) - i \varphi_l(t) g_{lj}(x(t)) \partial_k g_{kj}(x(t))] \alpha \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} [\partial_m g_{mj}(x) \partial_k g_{kj}(x) - \partial_m g_{kj}(x) \partial_k g_{mj}(x)] \alpha^2 \right\} \tag{103}
\end{aligned}$$

Somando $S = S_1 + S'_2$ obtemos:

$$\begin{aligned}
S &= \int dt \left\{ \alpha \partial_k f_k(x) + \frac{1}{2} \varphi_i(t) \varphi_l(t) g_{ij}(x) g_{lj}(x) + i \varphi_l(t) [\dot{x}_l(t) - f_l(x) + \alpha g_{lj}(x) \partial_i g_{ij}(x)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \alpha^2 [\partial_m g_{kj}(x) \partial_k g_{mj}(x) - \partial_m g_{mj}(x) \partial_k g_{ij}(x)] \right\} \tag{104}
\end{aligned}$$

A equação (104) coincide com a ação proposta na referência (33), onde o parâmetro α foi introduzido na discretização da equação diferencial. Diferentes valores de α correspondem a prescrições diferentes para tratar o processo estocástico. Por exemplo, $\alpha = 0$ e $\alpha = 1/2$ identificam as convenções de Itô e Stratonovich, respectivamente

CONCLUSÃO

Nesta dissertação estudamos o comportamento de processos estocástico markovianos com ruído branco multiplicativo descritos por uma equação de Langevin (Eq.(23)). Esta equação é um tipo de equação diferencial estocástica e representa o modelo mais simples para o estudo da dinâmica de sistemas no qual as flutuações têm um papel importante. As flutuações foram introduzidas em forma de termos aleatórios nas equações de movimento e são chamados fonte de ruído.

Na definição e no tratamento de equações estocásticas com ruído multiplicativo aparecem diferentes prescrições para integrar o ruído (ou para discretizar a equação diferencial), sendo que cada uma delas produz uma evolução estocástica diferente e é associada a regras de cálculo particulares. Neste sentido, o limite ao contínuo de uma evolução estocástica discretizada não está bem definido ou, em outras palavras, ele não é único, dependendo da prescrição de discretização. As prescrições mais utilizadas historicamente tem sido as de Itô e Stratonovich. Na dissertação, discutimos em detalhe uma prescrição geral, a convenção generalizada de Stratonovich ou convenção- α , a qual contém todas as prescrições plausíveis de serem definidas.

O principal objetivo da dissertação foi, desenvolver um formalismo de integral de caminho que transforma um processo estocástico descrito por um sistema de equações de Langevin, em uma teoria de campos efetiva usando apenas métodos funcionais, sem realizarmos nenhuma discretização da equação original. Desta forma, generalizamos os desenvolvimentos das referências (13, 35, 33) onde esta análise é feita para apenas uma variáveis estocástica. Obtivemos o funcional gerador das funções de correlação em um espaço de variáveis auxiliares estendido, contendo variáveis comutativas e anticomutativas (variáveis de Grassmann). O funcional gerador expresso nas equações (64) e (101), é o resultado original importante apresentado nesta dissertação. Este formalismo apresenta varias vantagens. Por um lado, ele é independente da prescrição usada para definir a integração sobre o ruído, o qual permite o uso das regras de cálculo usuais. Por outro, as complicações introduzidas pelo cálculo estocástico generalizado de Itô ficam codificadas na álgebra das variáveis de Grassmann. Assim, desde que a integração nas variáveis de Grassmann não seja realizada explicitamente, é possível desenvolver qualquer cálculo sem especificar uma prescrição particular. Se, por qualquer motivo, esta integração fosse feita, o valor de α reaparece na teoria, ao ter que definir as funções de Green das variáveis de Grassmann na origem como foi mostrado nas (Eqs(88,89))

Para identificar esta ambiguidade nas funções de Green fermiônicas com as prescrições estocásticas, integramos a (Eq(66)) nas variáveis de Grassmann utilizando a função de Green retardada, compatível com causalidade da função resposta. Nesse momento aparece o termo de ambiguidade (Eq.(88)) como uma distribuição de Heaviside Θ , a qual

definimos na origem como o parâmetro α que varia entre $0 \leq \alpha \leq 1$. Desta forma, obtivemos um novo funcional gerador dinâmico com sua ação correspondente. Esta nova ação, que depende apenas de dois conjunto de variáveis comutativas e o parâmetro α coincide com a ação proposta na referência (33) onde o parâmetro α foi introduzido na discretização da equação diferencial. Desta forma, conseguimos identificar o parâmetro que aparece na definição das funções de Green no formalismo funcional, com as prescrições estocásticas utilizadas nas diferentes discretizações. Diferentes valores de α correspondem à prescrições diferentes para tratar o processo estocástico. Por exemplo, $\alpha = 0$ e $\alpha = 1/2$ identificam as convenções de Itô e Stratonovich, respectivamente.

Nosso novo funcional gerador é uma ferramenta fundamental para as aplicações das técnicas da teoria de campos, pois, podemos estudar uma variedade de fenômenos físicos interessantes. Um tipo de fenômeno físico desafiador na área de processos estocásticos fora do equilíbrio é o estudo de transições de fase dinâmicas. Recentemente (16, 17, 37) foi proposto que o ruído multiplicativo induz transições de fase dinâmicas que tem características peculiares como reentrâncias. Isto é, o sistema tende a ordenar-se com o aumento do ruído. Cálculos numéricos em modelos simples de osciladores mostram que poderia se tratar de uma transição dinâmica continua na classe de universalidade de Ising. Porém, os resultados numéricos demandam muito esforço computacional, e não são suficientes para estabelecer sem dúvidas estes resultados. Com nosso funcional gerador dinâmico (Eq.(104)) podemos estudar este tipo de fenômeno fazendo um cálculo de potencial efectivo a um loop com o intuito de calcular analiticamente os expoentes críticos. Trabalhos nesta direção estão sendo realizados e serão importantes para o desenvolvimento dos estudos de doutorado.

REFERÊNCIAS

- 1 ØKSENDAL, B .K. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. 6th ed. Berlin: Springer, 2003.
- 2 VAN KAMPEN, N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. 3rd ed. North Holland: Elsevier, 2007.
- 3 GARDINER, C. W. *Handbook of stochastic methods: for physics, for physics, chemistry and the natural sciences*. 2nd ed. Berlin: Springer, 1996.
- 4 FREUND, J. A.; PÖSCHEL, T. (Eds.), LNP 557 - *Stochastic Processes in Physics, Chemistry and Biology*. Berlin: Springer, 2000.
- 5 MURRAY, J. D. *Mathematical Biology I. An introduction*. 3rd ed. Berlin: Springer, 2002.
- 6 MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E *An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 7 BOUCHAD, J. P. ; POTTERS, M. *Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- 8 GITTERMAN, M. *The noisy oscillator: The first hundred years, from Einstein until now*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005.
- 9 CHAIKIN, P. M ; LUBENSKY, T. C. *Principles of Condensed Matter Physics* Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 10 HÄNGGI P.; MARCHESONI, F. 100 Years of Brownian Motion. *Chaos, USA*, v. 15, p.026101, Jun. 2005.
- 11 STARIOLO, A. *Introdução aos Processos Estocásticos e Aplicações*. Porto Alegre. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.
- 12 SALINAS, S.R.A. *Einstein e a teoria do movimento browniano*. revista Brasileira de Ensino de Física, Brasil, v. 27, p. 263-269, 2005. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/v1/>> Acesso em: 12 Jul 2014.
- 13 GONZÁLEZ ARENAS, Z. *Formulação supersimétrica de processos estocásticos com ruído multiplicativo* 2012. Dissertação (doutorado em física). Instituto de Física Armando Dias Tavares. Universidade do Estado do Rio de Janeiro 2012.

- 14 NELSON, E. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. 2nd ed. Princeton :Princeton University Press, 1967.
- 15 DOOB, J. L. *Stochastic Processes* New York: Wiley. 1953.
- 16 HAKEN, H. *Synergetics, An Introduction*. Springer Verlag 1977.
- 17 HORSTHEMKE, W.; MANSOUR, M. Observation of a noise-induced phase transition in a parametric oscillator. *Z. Phys.* B24,307 1976.
- 18 ARNOLD.L. *Stochastic differential equation*. Wiley and Sons 1974.
- 19 STRATONOVICH, R. L. *Introduction to the Theory of Random Noise*. New York: Gordon and Breach, 1963.
- 20 HÄNGGI, P. Stochastic Processes I: Asymptotic Behaviour and Symmetries. *Helv. Phys. Acta*, Zwitterland, v. 51, p. 183–201, 1978.
- 21 JANSSEN, H. K. *On the renormalized field theory of nonlinear critical relaxation* In: (Eds.) GYÖRGYI. G. ; KONDOR. I; SASVÁRI, L, ; TÉL.T. From phase transitions to chaos: Topics in Modern Statistical Physics. Singapore: World Scientific, 1992. p. 68–91.
- 22 HÄNGGI, P. Connection between Deterministic and Stochastic Descriptions of Nonlinear Sys- tems. *Helv. Phys. Acta, Zwitterland*, v. 53, p. 491–496, 1980.
- 23 HÄNGGI, P.; THOMAS, H. Stochastic Processes: Time-Evolution, Symmetries and Linear Response. *Phys. Rep.*, North Holland, v. 88, p. 207–319, 1982.
- 24 KLIMONTOVICH YU, L. Nonlinear Brownian motion. *Physics-Uspekhi* Cambridge, v. 37, n. 8, p.737, 1994.
- 25 HÄNGGI, P. Path Integral Solutions for non-Markovian Processes. *Z. Phys.* B Cond. Mat.Germany, v. 75, p. 275–281, 1989.
- 26 ZWANZIG, R. Memory effects in irreversible thermodynamics *Phys. Rev.* 124, 983 1961.
- 27 GARRIDO, L.; SAN MIGUEL. M. Stochastic quantization and path integral formulation of Fokker-Planck equation *Progr. theor. phys.* 59, 40, 55 1978.
- 28 GARRIDO, L.; LURIEÍ, D.; SAN MIGUEL, M.; STAT J. Equações diferenciais estocásticas ruído branco e de color. Apresentado no segundo congresso de equações diferenciais de física teórica. Universidade de Barcelona Espanha *Phys* Maio 1979.
- 29 ZINN-JUSTIN, J. *Quantum field theory and critical phenomena*. Oxford University Press, USA 2002.

- 30 MARTIN, P. C.; SIGGIA, E.D.; ROSE, H.A. Statistical Dynamics of Classical Systems. *Phys. Rev.A*, USA, v. 8, p. 423, 1973.
- 31 JANSSEN, H.K. Lagrangean for Classical Field Dynamics and Renormalization Group Calculations of Dynamical Critical Properties. *Z. Phys. B: Cond. Mat.*, Germany, v. 23, p. 377, 1976.
- 32 De DOMINICIS, C. Dynamics as a substitute for replicas in systems with quenched random impurities. *Phys. Rev. B*, USA, v. 18, p. 4913–4919, Nov. 1978.
- 33 LAU, A.W.C.; LUBENSKY, T. C. State-dependent diffusion: Thermodynamic consistency and its path integral formulation. *Phys. Rev. E*, USA, v. 76, p. 011123, Jul. 2007.
- 34 ARNOLD, P. Symmetric path integrals for stochastic equations with multiplicative noise. *Phys.Rev. E*, USA, v. 61, n. 6, p. 6099–6102, Jun. 2000.
- 35 GONZÁLEZ ARENAS, Z.; BARCI, D. Functional integral approach for multiplicative stochastic processes. *Phys. Rev. E*, USA, v. 81, p. 051113, Mai 2010.
- 36 ITÔ, K. *Multiple Wiener integral*. *J. Math. Soc. Japan*, v. 3, n. 1, p. 157–169, 1951.
- 37 ARNOLD,L.; HORSTHEMKE,W.; LEFEVER, R. White and coloured external noise and transition phenomena in nonlinear systems *Phys. B29*, 367 1978.
- 38 CAMILLE. A.; BARCI. D.; LETICIA F.; CUGLIANDOLO.; GONZÁLEZ ARENAS, Z.; GUSTAVO LOZANO. Magnetization dynamics: path-integral formalism for the stochastic Landau-Lifshitz-Gilbert equation. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1402.1200v1.pdf>> Acesso em: 27 Jul 2014.
- 39 DAS ASHOK . *Fiel theory A path integral*. 2nd ed. Singapore: World Scientific 2006.
- 40 BROWN R. A brief account of Microscopical Observations made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles contained in the Pollen of Plants; and on the general Existence of active Molecules in Organic and Inorganic Bodies. *Philosophical Magazine N. S.* v.4, p.161-173. 1828.
- 41 EINSTEIN A. *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Dover. 1956.

APÊNDICE A – Representação do determinante em termos das variáveis de Grassmann

Neste apêndice se apresenta uma revisão breve dos detalhes do cálculo com variáveis de Grassmann que tem sido usado ao longo do trabalho. Para um estudo mais aprofundado do tema, tanto na mecânica estatística quanto na teoria quântica de campos, recomendamos a referência (29).

Vamos definir um conjunto de n variáveis de Grassmann ξ_i e suas conjugadas $\bar{\xi}_i$

$$\{\xi_i(t), \xi_j(t')\} = \{\bar{\xi}_i(t), \bar{\xi}_j(t')\} = \{\xi_i(t), \bar{\xi}_j(t')\} = 0, \quad (105)$$

onde $\{\}$ vem da propriedade anticomutativas.

Consideramos uma integral de gaussiana. A ideia é mostrar a seguinte equivalência:

$$I_{Gauss}(A) = \int \left(\prod_{i=1}^N d\eta d\bar{\eta} \right) e^{\bar{\eta} A \eta} = \det(A) \quad (106)$$

vamos considerar $A = U^\dagger D U$ onde D é uma matriz diagonal

$$I_{Gauss}(A) = \int \left(\prod_{i=1}^N d\eta d\bar{\eta} \right) e^{\bar{\eta} U^\dagger D U \eta} \quad (107)$$

fazendo agora uma mudança de variável

$$\bar{\xi} = \bar{\eta} U^\dagger \quad \xi = U \eta \quad (108)$$

onde

$$\bar{\xi} U = \bar{\eta} U^\dagger U \quad U^\dagger \xi = U^\dagger U \eta \quad (109)$$

então η fica

$$\bar{\xi} U = \bar{\eta} U^\dagger U \quad U^\dagger \xi = U^\dagger U \eta \quad (110)$$

substituindo na equação (107) temos:

$$\begin{aligned}
I_{Gauss}(A) &= \int \left(\prod_{i=1}^N d\eta d\bar{\eta} \right) e^{\bar{\xi} D \xi} \\
&= \int \left(\prod_{i=1}^N d\xi d\bar{\xi} \right) e^{\bar{\xi}_i D \xi} \\
&= \int \left(\prod_{i=1}^N d\xi d\bar{\xi} \right) e^{\sum_i \lambda_i \bar{\xi} \xi}
\end{aligned} \tag{111}$$

onde λ são os auto valores da matriz A

fazendo uma expansão em serie de Taylor e aplicando as propriedades a álgebra de Grassmann temos:

$$I_{Gauss}(A) = \int \left(\prod_{i=1}^N d\eta d\bar{\eta} \right) (1 + \lambda \bar{\xi} \xi) \tag{112}$$

Também convencionalmente usamos as propriedades:

$$\int d\bar{\eta} d\eta \eta \bar{\eta} = 1 \qquad \int d\eta = 0 \tag{113}$$

aplicando as propriedades anteriores temos:

$$\begin{aligned}
I_{Gauss}(A) &= \prod_{i=1}^N \overbrace{\int d\xi_i d\bar{\xi}_i}^0 + \prod_{i=1}^N \lambda_i \overbrace{\int d\xi d\bar{\xi} \xi \bar{\xi}}^1 \\
&= \prod_{i=1}^N \lambda
\end{aligned} \tag{114}$$

Este resultado é o produto do valores próprios que é igual ao determinante da matriz A

$$I_{Gauss}(A) = \det \mathbf{A} \tag{115}$$

Temos então que:

$$\det \mathbf{A} = \int d\bar{\xi} d\xi e^{\int d\bar{\xi} A d\xi} \tag{116}$$