



Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Faculdade de Engenharia

Michele Cunha da Silva

Uma nova relação constitutiva para o escoamento com transição  
saturado/insaturado através de um meio poroso

Rio de Janeiro

2020

Michele Cunha da Silva

**Uma nova relação constitutiva para o escoamento com transição saturado/insaturado através de um meio poroso**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama  
Coorientador: Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Maria Laura Martins-Costa

Rio de Janeiro  
2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S586 Silva, Michele Cunha da.  
Uma nova relação constitutiva para o escoamento com  
transição saturado/insaturado através de um meio poroso /  
Michele Cunha da Silva. – 2020.  
89f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.  
Coorientadora: Maria Laura Martins-Costa.  
Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de  
Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Mecânica dos fluidos -  
Teses. 3. Escoamento - Teses. 4. Materiais porosos - Teses. 5.  
Riemann-Hilbert, Problemas de. I. Gama, Rogério Martins  
Saldanha da. II. Martins-Costa, Maria Laura. III. Universidade do  
Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 531.72

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou  
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Michele Cunha da Silva

**Uma nova relação constitutiva para o escoamento com transição saturado / insaturado  
através de um meio poroso**

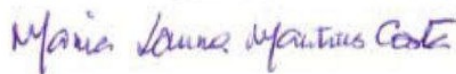
Tese apresentada, como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor, ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em 04 de setembro de 2020.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)  
Faculdade de Engenharia – UERJ



Prof. Dra. Maria Laura Martins-Costa (Coorientadora)  
Departamento de Engenharia Mecânica – UFF



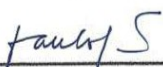
Prof. Dr. Heraldo da Silva Costa Mattos  
Escola de Engenharia - UFF



Prof. Dr. Felipe Bastos de Freitas Rachid  
Departamento de Engenharia Mecânica – UFF



Prof. Dr. José Júlio Pedrosa Filho  
Faculdade de Engenharia – UERJ



Prof. Dr. Paulo Guilherme S. C. Castro  
Escola Naval

Rio de Janeiro

2020

*Para Maria Luiza.*

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Rogério Martins Saldanha da Gama, os agradecimentos de estilo.

Aos meus pais Manuel e Nelcy, pelo apoio incondicional e compreensão.

Aos amigos, em especial Humberto, Lívia, Paulo e Romulo, pela amizade e incentivo.

À Lili (*in memoriam*), pelos muitos anos de fiel companheirismo.

Ao Prof. Reginaldo Demarque da Rocha pela inestimável ajuda com o pacote gráfico de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

À UERJ e seus funcionários, por me acolherem novamente em um ambiente cordial e colaborativo.

À Escola Naval, que me forneceu licença e apoio à conclusão desta tese.

## EL PALACIO

El Palacio no es infinito.

Los muros, los terraplenes, los jardines, los laberintos, las gradas, las terrazas, los antepechos, las puertas, las galerías, los patios circulares o rectangulares, los claustros, las encrucijadas, los aljibes, las antecámaras, las cámaras, las alcobas, las bibliotecas, los desvanes, las cárceles, las celdas sin salida y los hipogeos, no son menos cuantiosos que los granos de arena del Ganges, pero su cifra tiene un fin. Desde las azoteas, hacia el poniente, no falta quien divise las herrerías, las carpinterías, las caballerizas, los astilleros y las chozas de los esclavos.

A nadie le está dado recorrer más que una parte infinitesimal del palacio. Alguno no conoce sino los sótanos. Podemos percibir unas caras, unas voces, unas palabras, pero lo que percibimos es ínfimo. Ínfimo y precioso a la vez. La fecha que el acero graba en la lápida y que los libros parroquiales registran es posterior a nuestra muerte; ya estamos muertos cuando nada nos toca, ni una palabra, ni un anhelo, ni una memoria. Yo sé que no estoy muerto.

*Jorge Luis Borges*



A Física é o campo de batalha pela derradeira verdade.

*Lise Meitner*

Truth is ever to be found in simplicity, and not in the multiplicity and confusion of things.

*Isaac Newton*

## RESUMO

SILVA, Michele Cunha da. **Uma nova relação constitutiva para o escoamento com transição saturado/insaturado através de um meio poroso.** 89f. 2020. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

O presente trabalho propõe uma relação constitutiva adequada para tratar o processo de preenchimento de um meio poroso por um fluido. Esta relação assegura que o problema permaneça hiperbólico mesmo quando o meio poroso é saturado pelo fluido. Quando a fração de fluido atinge a porosidade, a relação constitutiva proposta aumenta a resistência da matriz porosa a uma maior entrada de fluido devido a uma característica importante: ser uma função contínua e diferenciável, com sua primeira derivada também uma função crescente. Isso permite assegurar que a fração de fluido possa exceder a porosidade apenas por um valor muito pequeno, tornando a relação constitutiva mais realista. Esta relação permite tratar tanto o preenchimento de um meio poroso insaturado, quanto o esvaziamento de um meio poroso saturado. Alguns exemplos comparam essa nova relação constitutiva com outras anteriormente propostas, destacando suas vantagens.

**Palavras-chave:** Escoamento através de meio poroso insaturado; transição insaturada-saturada em matriz porosa quase rígida; descrição hiperbólica; problema de Riemann associado.



## ABSTRACT

SILVA, Michele Cunha da. **A new constitutive relation for a flow through a porous medium with unsaturated–saturated transition.** 89f. 2020. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

The present work proposes a suitable constitutive relation to treat the process of filling of a porous medium with a fluid. This relation assures the problem to remain hyperbolic even when the porous medium is saturated by the fluid. When the fluid fraction reaches porosity, the proposed constitutive relation increases the porous matrix resistance to more fluid inlet due to an important feature: it is a continuous and differentiable function with its first derivative also being an increasing function. This ensures that the fluid fraction may exceed the porosity only by a very small value, making the constitutive relation realistic. This relation allows modelling both the filling up of an unsaturated porous media and the emptying of a saturated one. Some examples compare this new constitutive relation with some previously proposed ones, highlighting its advantages.

**Keywords:** Flow through unsaturated porous media; transition unsaturated–saturated in almost rigid porous matrix; hyperbolic description; associated Riemann problem.

## KURZFASSUNG

SILVA, Michele Cunha da. **Eine neue konstitutive Beziehung für die Strömung durch poröse Medien mit ungesättigt–sättigt Überleitung.** 89f. 2020. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Die vorliegende Arbeit schlägt eine angemessene konstitutive Beziehung vor, um den Prozess des Füllens eines porösen Mediums mit einer Flüssigkeit zu behandeln. Diese Beziehung stellt sicher, daß das Problem hyperbolisch bleibt, auch wenn das poröse Medium von der Flüssigkeit gesättigt ist. Wenn die Flüssigkeitsfraktion die Porosität erreicht, die vorgeschlagene konstitutive Beziehung erhöht den Widerstand der porösen Matrix gegen einen größeren Flüssigkeitseintritt aufgrund eines wichtigen Merkmals: sie ist eine stetige und differenzierbare Funktion, deren erste Ableitung auch eine wachsende Funktion ist. Dies stellt sicher, dass die Fluidfraktion die Porosität nur um einen sehr kleinen Wert überschreiten kann, wodurch die konstitutive Beziehung realistischer wird. Die Beziehung erlaubt die Behandlung sowohl des Füllens eines ungesättigten porösen Mediums als auch des Entleerens eines gesättigten porösen Mediums. Einige Beispiele vergleichen diese neue Beziehung mit einigen zuvor vorgeschlagenen Beziehungen, und heben ihre Vorteile hervor.

**Schlüsselwörter:** Strömung durch ungesättigte poröse Medien; ungesättigt–sättigt Überleitung in einer fast starren porösen Matrix; hyperbolische Beschreibung; verwandtes Riemann–Problem.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ponto $\mathbf{x}$ da mistura descrito a partir das configurações de referência $\mathbf{X}^\alpha$ de cada constituinte da mistura. . . . .	24
Figura 2 – Ilustração do problema descrito acima, inspirada em Smoller (1983). . . . .	48
Figura 3 – Solução do problema de Riemann linear retratada no plano $x - t$ . . . . .	51
Figura 4 – Solução do problema de Riemann linear no plano de fase. Estado intermediário. <i>Loci</i> de Hugoniot. . . . .	53
Figura 5 – A $a$ -onda $\mathcal{O}_a(s; \mathbf{u}_-)$ representada no plano de fase. . . . .	64
Figura 6 – Dados Iniciais . . . . .	76
Figura 7 – Comportamento da fração de fluido ao longo do eixo $x$ para valores escolhidos de $c_1$ e $c_2$ em $t = 0.25$ . . . . .	77
Figura 8 – Comportamento da fração de fluido ao longo do eixo $x$ para valores escolhidos de $c_1$ e $c_2$ em $t = 0.50$ . . . . .	77
Figura 9 – Comportamento da fração de fluido ao longo do eixo $x$ para valores escolhidos de $c_1$ e $c_2$ em $t = 0.75$ . . . . .	78
Figura 10 – Comportamento da fração de fluido ao longo do eixo $x$ para valores escolhidos de $c_1$ e $c_2$ em $t = 1.00$ . . . . .	78
Figura 11 – Comportamento da velocidade ao longo do eixo $x$ para valores escolhidos de $c_1$ e $c_2$ em $t = 0.25$ . . . . .	79
Figura 12 – Comportamento da velocidade ao longo do eixo $x$ para valores escolhidos de $c_1$ e $c_2$ em $t = 0.50$ . . . . .	80
Figura 13 – Comportamento da velocidade ao longo do eixo $x$ para valores escolhidos de $c_1$ e $c_2$ em $t = 0.75$ . . . . .	80
Figura 14 – Comportamento da velocidade ao longo do eixo $x$ para valores escolhidos de $c_1$ e $c_2$ em $t = 1.00$ . . . . .	81

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Possíveis soluções para o Problema de Riemann . . . . .	66
Tabela 2 – Tipos de Soluções para o Problema de Riemann associado a este trabalho e atributos de suas frações de fluido e as velocidades do fluido. . . . .	75

## CONVENÇÕES

O espaço é o euclideoano<sup>1</sup> tridimensional,  $\mathbb{R}^3$ .

O tempo é o tempo<sup>2</sup> newtoniano<sup>3</sup>  $t$ .

Vetores são representados em negrito, como  $\mathbf{v}$ .

Índices latinos  $i, j, \dots$  representam as coordenadas espaciais cartesianas, e vão de 1 a 3, correspondendo a  $x, y, z$ . A métrica de  $\mathbb{R}^3$  é a delta de Kronecker<sup>4</sup>  $\delta_{ij}$ , de modo que a distinção entre índices covariantes e contravariantes é imaterial.

Lembramos que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Tensores são representados por letras sem serifa, e.g.,  $C$ . Chamamos de  $I$  o tensor identidade. Um tensor de segunda ordem pode ser transposto, operação denotada pelo sobrescrito  $T$ :  $(C^T)_{ij} = C_{ji}$ .

O produto diádico de dois vetores, gerando um tensor de segunda ordem, é indicado pela simples justaposição (abrimos mão, aqui, do símbolo  $\otimes$ ). Assim,  $C = \mathbf{a}\mathbf{b}$  significa, em componentes,  $C_{ij} = a_i b_j$ .

Índices gregos como  $\alpha, \beta$  etc. apostos a uma grandeza indicam que ela se refere ao  $\alpha$ -ésimo,  $\beta$ -ésimo etc. componente de uma mistura. Numa mistura de  $n$  componentes, índices gregos vão de 1 a  $n$ .

Assim,  $v_i^\alpha$  é a componente cartesiana  $i$  do vetor  $\mathbf{v}$  do  $\alpha$ -ésimo componente da mistura.

Índices latinos do início do alfabeto  $a, b, \dots$  serão usados para discriminar autovalores e autovetores num sistema  $N \times N$  de equações diferenciais parciais. No nosso caso,  $N = 2$ , logo  $a, b, \dots = 1, 2$ .

*Convenção de Einstein*<sup>5</sup>: índices latinos  $i, j, \dots$  repetidos indicam um somatório

<sup>1</sup> Εὐκλείδης (Euclides) de Alexandria, matemático e geômetra grego, *circa* 300 a.C.

<sup>2</sup> *Tempus absolutum, verum, & mathematicum, in se & natura sua sine relatione ad externum quodvis, aequabiliter fluit, alioque nomine dicitur duratio: Relativum, apparens, & vulgare est sensibilis & externa quævis durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut hora, dies, mensis, annus.* (Newton, 1687)

<sup>3</sup> Isaac Newton, físico e matemático inglês, 1642-1727.

<sup>4</sup> Leopold Kronecker, matemático alemão, 1823-1891.

<sup>5</sup> Albert Einstein, físico alemão, 1879-1955.

subentendido, p. ex.,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} v_i \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} v_i = \nabla \cdot \mathbf{v},$$

exceto onde explicitamente assinalado.

Para melhor legibilidade, usaremos o símbolo de produto interno  $(\cdot)$  para a contração de um índice de um vetor com um tensor, convencioando que os índices adjacentes são contraídos,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} &= n_i \mathbf{C}_{ij}, \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{C}_{ij} n_j. \end{aligned}$$

Esta operação não é, em geral, comutativa, a menos que o tensor seja de segunda ordem e simétrico.

Definimos o duplo produto interno  $(\cdot \cdot)$  entre dois tensores de segunda ordem como

$$\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{D} = \mathbf{C}_{ij} \mathbf{D}_{ji},$$

produzindo um escalar.

Esta operação pode ser generalizada para tensores de ordem  $m$  e  $n$ , resultando num tensor de ordem  $m + n - 4$ . Os dois últimos índices do primeiro tensor são contraídos com os dois primeiros do segundo, na forma acima.

Escrevemos a divergência (pela esquerda) de um tensor como

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{C}_{ij}.$$

A operação de divergência só é única no caso de um vetor ou de um tensor simétrico de segunda ordem. Para tensores de ordem maior ou sem simetria definida, a contração de um índice de derivada com qualquer índice do tensor é igualmente chamada uma divergência, sendo necessário especificar qual índice está sendo contraído. Várias divergências podem, portanto, ser definidas. Neste caso, torna-se compulsória a utilização da notação de índices. No caso de um tensor de segunda ordem, pode-se definir também a divergência *pela direita* como  $\frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{C}_{ij}$ , esgotando as possibilidades.

## SUMÁRIO

	<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b>	<b>11</b>
	<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>12</b>
	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS</b>	<b>16</b>
1.1	Revisão Bibliográfica	16
1.2	Motivação	21
1.3	Organização do Trabalho	21
<b>2</b>	<b>TEORIA DE MISTURAS</b>	<b>23</b>
2.1	Cinemática	25
2.2	Equações de Balanço	27
2.2.1	Equação de balanço da massa	27
2.2.2	Equação de balanço do momentum linear	28
2.2.2.1	Balanço do momentum linear por componente	29
2.2.2.2	Balanço do momentum linear para a mistura	30
2.2.3	Equação de balanço da energia	33
<b>3</b>	<b>MODELAGEM MECÂNICA</b>	<b>35</b>
3.1	Forma Explícita do Modelo	36
<b>4</b>	<b>RELAÇÃO CONSTITUTIVA PROPOSTA</b>	<b>39</b>
4.1	Trabalhos anteriores	39
4.2	Relação Constitutiva Proposta	40
<b>5</b>	<b>O PROBLEMA DE RIEMANN</b>	<b>42</b>
5.1	Sistema hiperbólico de equações de conservação	42
5.1.1	Soluções Fracas	43
5.1.2	Entropia	45
5.2	O Problema de Riemann	48
5.2.1	Caso Linear	49
5.2.2	Caso Não Linear	54
5.2.2.1	Invariantes de Riemann	55
5.2.2.2	Choques	56

5.2.2.3	Rarefações . . . . .	60
5.2.2.4	Ondas . . . . .	63
<b>6</b>	<b>SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE RIEMANN ASSOCIADO À RELAÇÃO CONSTITUTIVA PROPOSTA . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>6.1</b>	<b>1-rarefação → 2-rarefação . . . . .</b>	<b>67</b>
6.1.1	Cálculo do estado intermediário . . . . .	69
<b>6.2</b>	<b>1-choque → 2-choque . . . . .</b>	<b>70</b>
6.2.1	Cálculo do estado intermediário . . . . .	72
<b>6.3</b>	<b>Casos “mistos” . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>6.4</b>	<b>1-rarefação → 2-choque . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>6.5</b>	<b>1-choque → 2-rarefação . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>6.6</b>	<b>Recapitulação e Síntese Final . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>7</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>82</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>83</b>



# Introdução

O tema desta Tese de doutoramento é o escoamento em meios porosos, em particular na transição insaturado/saturado, obviamente nos dois sentidos.

É proposta uma nova relação constitutiva para a pressão como função da fração de fluido, representada por uma função contínua e diferenciável, cuja primeira derivada com respeito à fração de fluido é uma função crescente. Além disso, esta relação constitutiva apresenta uma estrutura matemática apropriada para o cálculo dos autovalores e invariantes do problema de Riemann<sup>6</sup> associado. O problema é estritamente convexo.

O ambiente teórico desta obra será a Teoria de Misturas, considerando a matriz porosa como levemente deformável, conduzindo a um modelo matemático constituído por um sistema hiperbólico não linear de equações diferenciais parciais para a velocidade e a fração de fluido. Os resultados ilustram a solução completa do problema de Riemann associado a algumas condições iniciais.

---

<sup>6</sup> Bernhard Riemann, matemático alemão, 1826-1866.

# 1 Considerações Iniciais

## 1.1 Revisão Bibliográfica

Fenômenos de transporte em meios porosos justificam o interesse em seu estudo por diversos problemas de engenharia, além de problemas com impacto na autossuficiência energética e no estado do meio ambiente. No caso de solos, por exemplo, tem-se indiscutível aplicação na extração de petróleo e, principalmente, a recuperação de poços de petróleo existentes (Martins-Costa et al., 2017a; Da Costa Mattos et al., 2015; Martins-Costa e Saldanha da Gama, 2005 e Martins-Costa e Saldanha da Gama, 2001).

Ao longo do tempo, diversos trabalhos tiveram origem no esforço para descrever adequadamente o preenchimento de um meio poroso por um fluido. Pode-se, por exemplo, estudar a infiltração de meios porosos deformáveis inicialmente secos (Preziosi, Joseph e Beavers, 1996). Mais especificamente, pode-se considerar também a transição de escoamento insaturado para saturado.

Saldanha da Gama (1986) propôs uma relação constitutiva levando em conta um limite geométrico, que surge a partir da rigidez da matriz porosa e da incompressibilidade do fluido, a fim de evitar soluções sem significado físico. Essas soluções corresponderiam a um valor tendendo a infinito para a pressão nos escoamentos saturados – quando a fração de fluido tende à porosidade. A equação proposta por Saldanha da Gama (1986) impõe um comportamento físico para o fluido que o impede de saturar a matriz porosa. Já tanto em Saldanha da Gama et al. (2012) quanto nesta tese o meio poroso pode realmente ser saturado pelo fluido.

A fim de aprimorar o trabalho de Saldanha da Gama (1986), Martins-Costa e Saldanha da Gama (2011) propuseram uma melhoria na relação constitutiva para a pressão parcial na qual a restrição geométrica unilateral para a fração de fluido, em vez de ser assumida em todo o domínio, é considerada somente em uma vizinhança à esquerda conveniente da porosidade, o que assegura continuidade para a pressão e para sua primeira derivada, permitindo assim a computação analítica dos invariantes de Riemann associados ao problema.

Em Saldanha da Gama et al. (2012), uma restrição fisicamente realista para a pressão, que nunca permite que a fração de fluido seja maior que a porosidade, foi proposta. Essa relação constitutiva, que é, na verdade, um limite superior, assegura

que o problema permaneça hiperbólico enquanto o escoamento for insaturado. No entanto, quando a saturação é alcançada, o problema perde sua hiperbolicidade e, portanto, técnicas numéricas como o Esquema de Glimm não podem ser aplicadas para aproximá-lo.

Um trabalho posterior (Martins-Costa et al., 2017) propõe uma relação constitutiva para a pressão que permite uma pequena supersaturação. Sua vantagem em relação ao trabalho anterior (Saldanha da Gama et al., 2012) é que a hiperbolicidade do problema nunca é perdida, mesmo quando a saturação é alcançada. Embora esses dois trabalhos mencionados anteriormente descrevam adequadamente a transição do escoamento insaturado para o saturado, o segundo assegura que a hiperbolicidade seja sempre mantida. Observa-se, porém, que em Martins-Costa et al. (2017) a primeira derivada da relação constitutiva é uma função descontínua. Sua segunda parte é na verdade uma linha reta, de modo que não é possível aumentar a resistência da matriz porosa à entrada de mais fluido quando a fração de fluido atinge a porosidade.

A nova relação constitutiva para a pressão proposta neste trabalho para descrever o preenchimento de uma matriz porosa por um fluido é uma função contínua e diferenciável e sua primeira derivada é uma função crescente. Além de manter a boa característica de garantir a hiperbolicidade do problema, independentemente do valor da fração de fluido, essa relação é mais realista que a anterior (Martins-Costa et al. 2017). Sua vantagem é permitir aumentar a resistência do meio poroso a uma maior entrada de fluido quando a fração de fluido atingir o valor da porosidade, impedindo que a fração de fluido seja significativamente maior que a porosidade. Em outras palavras, essa relação permite controlar a quantidade (muito pequena) de fração de fluido que pode exceder a porosidade.

Escoamentos através de meios porosos insaturados são causados principalmente por uma força dependente do gradiente de saturação. Alazmy e Vafai (2000) apresentam e comparam modelos distintos para fenômenos de transporte em meios porosos. Segundo eles, a maioria dos problemas é tratada por meio de uma técnica de densidades volumétricas de quantidades, o que permite empregar uma abordagem de Mecânica do Contínuo para lidar com problemas de interesse, como mudança de fase em meios porosos (Vafai e Whitaker, 1986).

Quando a deformação do meio poroso é considerada, principalmente em aplicações em solos, deve ser levado em conta o trabalho seminal de Biot (1941) e seus seguidores na teoria de consolidação (na verdade uma redução de volume dependente do tempo do esqueleto do solo causada por uma carga, gerando velocidades distintas de partículas do solo e do líquido nos poros).

Uma outra abordagem para lidar com a deformação de meios porosos é considerar uma hierarquia de escalas de comprimento, os denominados modelos multiescala, nos quais um *upscaling* do modelo microscópico é empregado para originar o modelo macroscópico. Um exemplo interessante é a teoria híbrida desenvolvida por Hassanizadeh e Gray (1990) para explicar os efeitos interfaciais no escoamento bifásico em meios porosos.

No presente trabalho emprega-se uma abordagem distinta: uma abordagem da Teoria de Misturas, que tem como hipótese básica o fato de a mistura ser composta por constituintes contínuos superpostos, cada um deles ocupando simultaneamente todo o volume da mistura. Além disso, cada constituinte é dotado de uma cinemática e deve satisfazer as leis de balanço e a mistura como um todo deve satisfazer as leis de balanço e a Segunda Lei da Termodinâmica (Atkin e Craine, 1976; Bowen, 1980; Rajagopal e Tao, 1995).

No trabalho de Martins-Costa e Saldanha da Gama (2001) a descrição unidimensional da matriz porosa parcialmente saturada origina um sistema não linear de equações hiperbólicas. Considera-se uma placa porosa semi-infinita com condições distintas, a fim de representar a maioria dos problemas unidimensionais de interesse. Segundo Dias (2015), após a solução do problema de Riemann associado, o sistema é aproximado combinando uma técnica de fatoração do operador (na qual ele é separado em uma parte hiperbólica homogênea e outra evolutiva no tempo) e um esquema de Glimm. Com efeito, a solução do problema de Riemann associado ocupa posto de importância nos sistemas hiperbólicos. É importante ressaltar que a relação constitutiva proposta no presente trabalho permite que os invariantes de Riemann sejam representados por fórmulas explícitas fechadas.

Escoamentos não isotérmicos de fluidos através de meios porosos insaturados (que não são o caso desta tese) foram tratados por Saldanha da Gama e Martins-Costa (1997). Nestes problemas, a aproximação da parte hiperbólica (representando as equações de continuidade e momentum linear para o constituinte fluido) é usada como entrada para o problema elíptico (representando as equações de conservação de energia para os constituintes sólido e fluido). Dias (2015) afirma ainda que o problema hidrodinâmico é resolvido pela combinação de uma técnica de fatoração do operador e o esquema de Glimm, que, por sua vez, emprega a solução de um número previamente definido de problemas de Riemann associados.

Outros exemplos relevantes envolvendo o esquema de Glimm são propagação de onda em tubulações elasto-visco-plásticas (Rachid et al, 1994), escoamentos de gases em tubulações (Marchesin e Paes Leme, 1983), propagação de ondas em fluidos

(Sod, 1977), escoamentos em meios porosos insaturados (Martins-Costa e Saldanha da Gama, 2001; 2005), e os estudos das equações de águas rasas do problema de quebra de barragem (Gupta e Singh, 2015).

Dias (2015) nos informa que a solução completa do problema de Riemann associado a um escoamento compressível de um gás de Chaplygin generalizado foi apresentada por Pang et al. (2018), levando em conta uma onda de choque delta. Abbassi e Namah (2005) descrevem a interface óleo-água do deslocamento de óleo provocado pela injeção de água em meio poroso (representando um reservatório de óleo). Um problema auxiliar de Riemann é resolvido para obter a expressão explícita da velocidade de óleo-água. É interessante observar que Abbassi e Namah (2005) empregam uma abordagem de Teoria de Misturas.

O problema de rompimento de barragens apresenta uma clara analogia com o problema clássico de Riemann, uma vez que os escoamentos provocados por rupturas de barragens apresentam descontinuidade inicial em ambos os lados da parede da barragem provocada por dois estados distintos. Gupta e Singh (2015) resolveram o problema associado de Riemann a fim de implementar o método de Glimm para aproximar as equações unidimensionais de águas rasas do problema de rompimento de barragens. Na sequência, eles usam uma técnica de fatoração do operador para se estender o estudo a um caso bidimensional. Martins et al. (2016) resolveram as equações inerciais locais para a modelagem hidrodinâmica de inundações obtida desprezando os termos convectivos nas equações de Saint-Venant. Segundo os autores, desprezar esses termos não afeta a precisão do problema. Eles calculam os invariantes de Riemann para usar o Método das Características, derivado para equações diferenciais quase-lineares.

Sistemas hiperbólicos com restrições têm aplicações distintas como escoamentos bifásicos, plasticidade compressível com choques. Bouchut et al. (2000) modelam escoamentos bifásicos gás-líquido, considerando líquidos incompressíveis. Objetivando modelar a dinâmica de oclusões gasosas em tubulações o modelo proposto, de ordem zero, consiste de um sistema de duas leis de conservação (um sistema de dinâmica de gases sem pressão) ao qual é imposta uma restrição na fração volumétrica – que tem que ser menor que a unidade. Este modelo é capaz de capturar as grandes diferenças entre a dinâmica das regiões congestionadas e daquelas livres, além de determinar a transição entre as referidas regiões. A restrição empregada em Bouchut et al. (2000) é análoga à restrição de Saldanha da Gama et al. (2012), entretanto este último artigo apresenta a solução exata para um problema de Riemann não linear com restrição.

Essencialmente, esta tese propõe uma relação constitutiva muito conveniente

para a pressão, capaz de descrever o preenchimento de uma matriz porosa por um fluido, considerando uma abordagem de Teoria de Misturas (Atkin e Craine, 1976; Rajagopal e Tao, 1995). Essa relação não só garante que a hiperbolicidade do sistema seja mantida mesmo quando a saturação é alcançada, como em Martins-Costa et al. (2017), mas também consiste em uma função contínua e diferenciável, tendo como sua primeira derivada uma função crescente. Esta característica importante permite controlar a quantidade (muito baixa) de fração de fluido que pode superar a porosidade. A solução completa do problema de Riemann associado é apresentada, e algumas comparações significativas são feitas com as relações constitutivas empregadas em trabalhos anteriores (Martins-Costa et al., 2017; Saldanha da Gama et al., 2012) para mostrar a vantagem desta nova relação constitutiva.

Apesar de a maioria dos problemas em fenômenos de transporte originar modelos mecânicos que podem ser representados por sistemas de equações diferenciais parciais elípticas ou parabólicas, cujas simulações muitas vezes podem ser realizadas por métodos bem estabelecidos como diferenças finitas ou volumes finitos, os sistemas hiperbólicos têm a vantagem de levar em conta o fato de que a propagação de qualquer quantidade ou informação pode ser caracterizada por uma velocidade finita. Desta forma, eles permitem uma descrição mais realista. Sua desvantagem é que nem sempre admitem soluções regulares, requerendo, muitas vezes, um alargamento do espaço de soluções admissíveis, a fim de permitir soluções descontínuas: as soluções generalizadas, envolvendo ondas de choque. A aproximação numérica dos sistemas hiperbólicos requer metodologias numéricas tais como os métodos de Godunov (1959) ou de Glimm (1965), capazes de lidar com sua descontinuidade.

É importante ressaltar a principal motivação para a proposição da nova relação constitutiva para a pressão foi assegurar que o modelo matemático para o escoamento permanecesse hiperbólico, mesmo na presença de uma pequena supersaturação. Portanto o esquema de Glimm poderia ser empregado para a simulação numérica do problema tratado nesta tese.

O método de Glimm (1965), um esquema de escolha aleatória, especialmente desenvolvido para tratar de problemas envolvendo propagação de descontinuidades e ondas de choque, requer, para sua utilização, o conhecimento *a priori* da solução do problema de Riemann associado ao sistema hiperbólico correspondente ao modelo mecânico.

O problema físico estudado nesta tese é um escoamento unidimensional transitente de um fluido através de uma matriz porosa, com transição insaturado/saturado, descrito via Teoria Contínua de Misturas. A matriz porosa é fracamente deformável e

o constituinte gasoso têm densidade muito pequena, então as equações de movimento para o constituinte fluido originam um sistema de equações hiperbólico não linear, que tem como incógnitas a velocidade e a saturação do constituinte fluido. Isto permite apresentar a solução completa para o problema de Riemann correspondente a esse sistema.

## 1.2 Motivação

O presente trabalho foi motivado em Martins-Costa et al. (2017), no qual a transição entre escoamentos insaturados e saturados foi identificada e uma restrição, que permite descrever uma relação constitutiva para a pressão permitindo uma pequena supersaturação, foi considerada. Isto garante que a hiperbolicidade do sistema seja mantida, mesmo quando a saturação for atingida.

Porém, como em Martins-Costa et al. (2017) a primeira derivada da relação constitutiva para a pressão é uma função constante por partes, não é possível aumentar a resistência da matriz porosa à entrada de mais fluido quando a fração de fluido atinge a porosidade.

A principal motivação para propor a relação constitutiva desta tese (uma função contínua e diferenciável, cuja primeira derivada é uma função crescente) é garantir o crescimento da velocidade de propagação à medida que o meio poroso tende à saturação.

## 1.3 Organização do Trabalho

No capítulo 2 apresentam-se as ferramentas teóricas de Teoria de Misturas que serão necessárias ao desenvolvimento do restante do texto.

No capítulo 3 apresenta-se o modelo mecânico para o escoamento unidimensional de um fluido através de uma matriz porosa, considerando a transição insaturado/saturado, à luz da Teoria Contínua de Misturas, utilizando hipóteses constitutivas termodinamicamente consistentes.

No capítulo 4 a relação constitutiva proposta nesta tese é discutida.

No capítulo 5 discutimos generalidades sobre o chamado Problema de Riemann e construímos as ferramentas teóricas necessárias à solução do problema central desta tese.

No capítulo 6 apresenta-se e discute-se a solução completa para o problema

de Riemann associado, enfatizando a relevância da relação constitutiva proposta nesta tese.

No capítulo 7 apresentam-se os resultados.

Finalmente, no capítulo 8, são apresentados comentários finais sobre o trabalho.



## 2 Teoria de Misturas

Embora para certas finalidades o ar possa ser tratado como um único contínuo, em muitos casos é necessário tratá-lo como uma mistura de gases. Líquidos podem ser soluções compostas de soluto(s) e solvente. Misturas como estas retêm muitas características de um fluido, mas não é possível ignorar que possuem diferentes quantidades de componentes distintos cujas propriedades podem ser medidas separadamente ponto a ponto. É o caso de ligas metálicas, suspensões, meios porosos preenchidos por fluidos (tema deste trabalho) e outros.

Para dar conta da descrição destes materiais, admitimos explicitamente que são formados de mais de um constituinte, e apresentaremos uma breve introdução à **teoria contínua de misturas**.

O domínio da mecânica do contínuo é um pressuposto para este capítulo. Nossa referência principal no assunto será “*Fundamentos de Mecânica dos Fluidos*” (Saldanha da Gama, 2012a). Quando nos referirmos a alguma equação necessária ao desenvolvimento deste texto contida no referido livro empregaremos a notação [SG, p.  $n$ ], onde  $n$  é o número da página que a contém. Quando transcrevermos alguma equação da obra mencionada, pode haver ligeiras diferenças de notação, mas o leitor atento certamente não terá problemas.

Outras referências são Altenbach e Eremeyev (2013), Chorin e Marsden (2000), Currie (2003), Fang (2019), Fay (1994), Flügge (1960), Fung (1994), Landau e Lifschitz (1987), Malvern (1969), Spurk e Aksel (2019) e Whitaker (1968).

Devemos muito neste capítulo às referências seguintes: ainda uma vez ao majestoso volume editado por Flügge (1960), Atkin e Craine (1976), Bowen (1976), Bedford e Drumheller (1983) e Hansen (1989). Especificamente para misturas entre fluidos e sólidos, referimos o leitor a Rajagopal, Massoudi e Ekmann (1990).

O primeiro a considerar o problema de uma mistura binária de gases foi Maxwell<sup>1</sup> (1860), porém no escopo da teoria cinética dos gases.

Stefan<sup>2</sup>, em seu artigo basilar sobre difusão (Stefan, 1871), considerou o problema da mistura binária de gases no âmbito da mecânica do contínuo, e, tanto quanto sabemos, foi o primeiro a considerar a difusão de um gás através de uma matriz porosa, modelando o esqueleto sólido da matriz como um gás em repouso e

<sup>1</sup> James Clerk Maxwell, físico e matemático britânico, 1831-1879.

<sup>2</sup> Jožef Stefan, físico e matemático austro-esloveno, 1835-1893.

introduzindo coeficientes de “resistência” nas equações do segundo gás (o que está fluindo). Com isso, obteve êxito em recuperar a equação de Darcy para o escoamento.

Definimos uma mistura contínua como composta de  $n \geq 2$  materiais, cada um dos quais é tratado como um meio contínuo com cinemática independente. Cada constituinte da mistura é chamado  $\mathcal{C}^\alpha$ , com  $\alpha = 1, \dots, n$ .

A hipótese básica que usaremos é que cada ponto  $\mathbf{x}$  (em coordenadas eulerianas<sup>3</sup>) da região de interesse pode estar ocupado simultaneamente pelos  $n$  componentes da mistura.

Assim sendo, cada ponto  $\mathbf{x}$  da mistura pode ser descrito a partir das configurações de referência  $\mathbf{X}^\alpha$  de cada constituinte da mistura, como mostra a Figura 1.

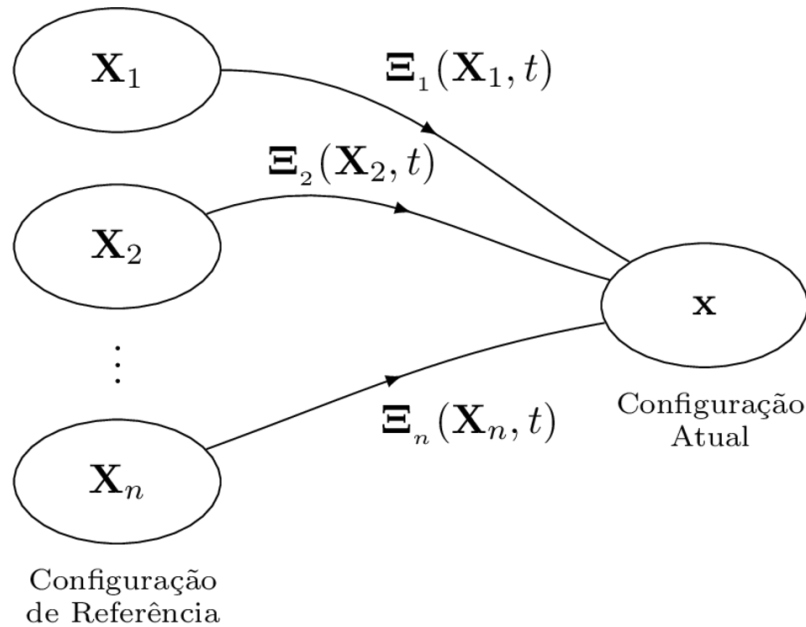


Figura 1 – Ponto  $\mathbf{x}$  da mistura descrito a partir das configurações de referência  $\mathbf{X}^\alpha$  de cada constituinte da mistura.

Isto leva a  $n$  equações da forma

$$\mathbf{x} = \Xi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t), \tag{2.1}$$

sendo os  $\Xi^\alpha$  admitidos como suaves e inversíveis, o que permite, por exemplo, escrever

$$\mathbf{X}^\alpha = (\Xi^\alpha)^{-1}(\mathbf{x}, t). \tag{2.2}$$

<sup>3</sup> Leonhard Euler, matemático suíço, 1707-1783.

## 2.1 Cinemática

Com isso podemos definir a velocidade do ponto material que ocupa a posição  $\mathbf{X}^\alpha$ , no ponto de vista lagrangiano, como a seguinte função temporal:

$$\dot{\mathbf{x}}^\alpha = \left. \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Xi}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) \right|_{\mathbf{X}^\alpha = \text{constante}}. \quad (2.3)$$

Trata-se, evidentemente, de uma derivada material. Utilizaremos o ponto sobrescrito ( $\dot{\phantom{x}}$ ) para denotá-la. A derivada parcial comum em relação ao tempo será denotada por  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

Temos aqui um *punctum saliens* referente à questão da notação da derivada material de uma grandeza que acompanha o movimento de uma componente  $\mathcal{C}^\alpha$  da mistura. Denotaremos esta derivada apondo um índice  $\acute{\alpha}$  à grandeza em questão. Assim, e.g.,  $\Phi^{\acute{\beta}}$  é a derivada lagrangiana da grandeza  $\Phi$  acompanhando o movimento do constituinte  $\mathcal{C}^\beta$  da mistura. Não há que confundir-se com os índices gregos sem ponto, cujo significado já estabelecemos. Não é impossível, nesta notação, o surgimento de um duplo índice. O ponto sobrescrito à grandeza será reservado para indicar a derivada material acompanhando o movimento da mistura, como em (2.6). A exceção são as velocidades em que mantivemos o ponto sobre  $\mathbf{x}$  por não haver ambiguidade.

Seja  $G$  uma função diferenciável de  $(\mathbf{x}, t)$  que represente alguma quantidade física de interesse. Assim como em (2.3), sua derivada do ponto de vista lagrangiano, acompanhando o movimento da  $\alpha$ -ésima componente da mistura,  $\mathcal{C}^\alpha$ , é

$$G^{\acute{\alpha}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} G[\boldsymbol{\Xi}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t), t] \right|_{\mathbf{X}^\alpha = \text{constante}}. \quad (2.4)$$

Aplicando-se a regra da cadeia para derivadas parciais, lembrando que  $\Xi_i^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = x_i$  e utilizando (2.3), a expressão (2.4) escreve-se em coordenadas eulerianas como

$$G^{\acute{\alpha}} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \Xi_i^\alpha} \frac{\partial \Xi_i^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} + \nabla G \cdot \mathbf{x}^\alpha. \quad (2.5)$$

Se agora calcularmos a derivada de  $G(\mathbf{x}, t)$  acompanhando o movimento da mistura, temos, pela regra da cadeia, que

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla G(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \quad (2.6)$$

onde  $\dot{\mathbf{x}}$  será definido propriamente em (2.15).

Tomamos a oportunidade para relacionar as derivadas lagrangianas com as derivadas eulerianas de forma genérica. Em [SG, p. 68] vemos que a derivada material de um campo escalar ou vetorial é o operador diferencial

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (2.7)$$

aplicado ao dito campo.

Introduzimos por analogia, em consonância com (2.5-2.6), para cada componente  $\mathcal{C}^\alpha$  sua derivada material:

$$\frac{D^\alpha}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}}^\alpha \cdot \nabla, \quad (2.8)$$

e, para a mistura completa,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla. \quad (2.9)$$

Estas expressões, como se vê, são operadores diferenciais livres, podendo ser aplicadas a quaisquer funções escalares ou vetoriais que se queira.

Fica clara aqui a necessidade da aplicação da notação (2.4) ou qualquer outra que promova a desambiguação entre a aplicação de (2.8) a uma quantidade desprovida de índice, como  $\Pi$ , e a aplicação de (2.9) à mesma quantidade provida do índice  $\alpha$ ,  $\Pi^\alpha$ . Nossa opção aqui foi usar

$$\frac{D^\alpha \Pi}{Dt} = \dot{\Pi}^\alpha, \quad (2.10a)$$

$$\frac{D \Pi^\alpha}{Dt} = \dot{\Pi}^\alpha. \quad (2.10b)$$

Numa mistura, os  $n$  componentes podem ocupar o mesmo lugar do espaço físico. Para cada constituinte, designamos a densidade de massa do constituinte  $\mathcal{C}^\alpha$  como  $\rho^\alpha$ , dada como função de  $\mathbf{x}$  e  $t$ :

$$\rho^\alpha = \rho^\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (2.11)$$

Para a mistura, a densidade é

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (2.12)$$

e usando (2.15) concluimos que (2.7) é

$$\frac{D}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \frac{D^\alpha}{Dt}. \quad (2.13)$$

Podemos definir também a concentração do constituinte  $\mathcal{C}^\alpha$  como

$$c^\alpha = \frac{\rho^\alpha}{\rho}, \quad (2.14)$$

o que nos leva a  $\sum_{\alpha=1}^n c^\alpha = 1$ .

Outras quantidades como *densidade molar*, *concentração molar* etc. também podem ser definidas mas não são de nosso particular interesse neste trabalho.

A *velocidade média* ou *velocidade da mistura*, em  $(\mathbf{x}, t)$ , é definida como a média ponderada<sup>4</sup> das velocidades dos  $n$  constituintes:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (2.15)$$

Introduzimos uma diferença de velocidades que será chamada a *velocidade de difusão* ou *velocidade peculiar* da componente  $\mathcal{C}^\alpha$  em  $(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}^\alpha(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.16)$$

Juntando as equações (2.12), (2.15) e (2.16), vem que

$$\sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

Por fim, subtraindo (2.6) de (2.5) e utilizando (2.16) introduzimos uma importante identidade em Teoria de Misturas que é

$$G^\alpha - \dot{G} = \nabla G \cdot \mathbf{u}^\alpha. \quad (2.18)$$

## 2.2 Equações de Balanço

### 2.2.1 Equação de balanço da massa

A equação de balanço da massa será composta de duas partes: uma equação por componente da mistura, e uma equação para a mistura completa.

A massa não se conserva necessariamente para uma componente individual da mistura, pois pode haver reações químicas consumindo massa de uma certa componente e aumentando a massa de outra. Porém a criação de massa na mistura é proibida.

<sup>4</sup> Aqui, ponderada pelas densidades de massa. Em outros problemas, pode ser interessante efetuar a ponderação pelas densidades molares.

Temos, para uma componente  $\mathcal{C}^\alpha$  e uma região arbitrária do espaço  $\mathcal{V}$  uma equação análoga à contida em [SG, p. 121], que é

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = \int_{\Omega_t} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0, \quad (2.19)$$

porém rearranjada e acrescida do termo provindo das reações químicas entre as componentes:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha) \right] dV = \int_{\mathcal{V}} \hat{c}^\alpha dV. \quad (2.20)$$

O termo  $\hat{c}^\alpha$  é chamado *fonte de massa* e provém como dissemos de reações químicas entre constituintes.

Para a mistura, temos

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \dot{\mathbf{x}}) \right] dV = 0, \quad (2.21)$$

e por conseguinte

$$\sum_{\alpha=1}^n \int_{\mathcal{V}} \hat{c}^\alpha dV = 0, \quad (2.22)$$

pois não pode haver produção líquida de massa na mistura (exceto em materiais nucleares, o que não é o nosso caso).

Passar estas equações para a forma local não causa maiores dificuldades, envolvendo a aplicação do teorema de transporte de Reynolds [SG, p. 101].

Obtemos, para a componente  $\mathcal{C}^\alpha$ ,

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha) = \hat{c}^\alpha, \quad (2.23)$$

e para a mistura

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad (2.24)$$

implicando que

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{c}^\alpha = 0. \quad (2.25)$$

Adiantamos que os constituintes da mistura neste trabalho são quimicamente inertes, e assim não vale iniciar aqui considerações, de outro modo interessantíssimas, sobre estequiometria.

## 2.2.2 Equação de balanço do momentum linear

Desejamos deduzir as equações de balanço para o momentum linear, e novamente para dois casos: para um constituinte  $\mathcal{C}^\alpha$  da mistura e para a mistura completa.

## 2.2.2.1 Balanço do momentum linear por componente

Tomemos o primeiro axioma de Euler em [SG, p. 151]:

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_{\Omega_t} \nabla \cdot \mathbb{T} dV + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV \quad (2.26)$$

e adaptemos esta expressão para o caso de uma componente  $\mathcal{C}^\alpha$  da mistura numa região do espaço arbitrário  $\mathcal{V}$ . Faz-se necessário acrescentar um termo de criação de momentum linear do constituinte  $\mathcal{C}^\alpha$  devida à interação com os demais componentes da mistura.

Os três primeiros termos da equação abaixo nos são familiares. O tensor  $\mathbb{T}^\alpha$  é chamado o tensor parcial de tensões, e apreende toda a força de contato sobre o constituinte  $\mathcal{C}^\alpha$  devido à matéria no exterior de  $\mathcal{V}$ . O termo  $\mathbf{b}^\alpha$  corresponde à densidade de força de corpo atuante sobre o referido constituinte. Desenvolvendo a derivada material à esquerda de (2.26), temos

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial(\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha) \right] dV = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbb{T}^\alpha dV + \int_{\mathcal{V}} \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha dV + \int_{\mathcal{V}} (\hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{c}^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha) dV. \quad (2.27)$$

O quarto termo

$$\int_{\mathcal{V}} (\hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{c}^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha) dV \quad (2.28)$$

representa o momentum linear gerado em  $\mathcal{C}^\alpha$  devido à presença de todos os outros componentes  $\mathcal{C}^\beta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , dentro de  $\mathcal{V}$ .

Notemos que ele é composto de uma soma. O termo  $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$  é chamado de *fonte de momentum linear* e origina-se das forças *internas* da mistura. O termo  $\hat{c}^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha$  tem sua gênese na produção, por meio de reações químicas, de massa de  $\mathcal{C}^\alpha$  com uma certa velocidade, portando, pois, momentum linear.

A forma local de (2.27) é análoga à vista em [SG, p. 152], acrescida dos termos de criação de momentum linear para a componente  $\mathcal{C}^\alpha$ . Sem nenhuma surpresa, temos que

$$\frac{\partial(\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha) = \nabla \cdot \mathbb{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{c}^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha. \quad (2.29)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de (2.29), obtemos

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} \dot{\mathbf{x}}^\alpha + \rho^\alpha \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}^\alpha}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}}^\alpha [\nabla \cdot (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha)] + \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha \cdot \nabla \dot{\mathbf{x}}^\alpha = \nabla \cdot \mathbb{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{c}^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha. \quad (2.30)$$

Por (2.23), sabemos que ao somar o primeiro e terceiro termos da equação acima, temos

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} \dot{\mathbf{x}}^\alpha + \dot{\mathbf{x}}^\alpha [\nabla \cdot (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha)] = \hat{c}^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha, \quad (2.31)$$

o que reduz a expressão (2.29) a

$$\rho^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{x}}^\alpha + \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha \cdot \nabla \dot{\mathbf{x}}^\alpha = \nabla \cdot \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha. \quad (2.32)$$

Por (2.8),

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}^\alpha}{\partial t} = \frac{D^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha}{Dt} - \dot{\mathbf{x}}^\alpha \cdot \nabla \dot{\mathbf{x}}^\alpha. \quad (2.33)$$

Multiplicamos a expressão (2.33) por  $\rho^\alpha$  e com isso, a equação do balanço do momentum linear para a componente  $\mathcal{C}^\alpha$  da mistura pode ser escrita em sua forma mais conveniente possível:

$$\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}^\alpha = \nabla \cdot \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha. \quad (2.34)$$

### 2.2.2.2 Balanço do momentum linear para a mistura

Passemos a calcular o balanço de momentum linear para a mistura total.

A densidade de força de corpo para a mistura é dada por

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha. \quad (2.35)$$

Em analogia com (2.27), lembrando que para a mistura não há fontes *internas* líquidas de momentum linear (desde que válida a Terceira Lei de Newton), a equação de balanço de momentum linear para a mistura fica

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.36)$$

Este resultado é importantíssimo e é conhecido como a **primeira lei do movimento de Cauchy**<sup>5</sup> (Cauchy, 1828).

Os passos para sua dedução, além de encontrarem-se expostos com pungente beleza no trabalho do grande mestre citado justo acima, são similares ao que foi feito para chegarmos a (2.27), e seria tedioso repeti-los.

A partir daí, assim como para as Leis de Newton (Newton, 1687) devemos prescrever a forma matemática das forças envolvidas num dado sistema físico, aqui devemos elaborar a prescrição matemática do tensor de tensões que modela um sistema de interesse.

A relação entre os tensores de tensões parciais  $\mathbf{T}^\alpha$  e o tensor de tensões da mistura  $\mathbf{T}$  é um tanto mais complicada.

<sup>5</sup> Augustin-Louis Cauchy, matemático francês, 1789-1857.



Toupin (1960) argumenta que o tensor de tensões da mistura é a soma dos tensores parciais de tensões com as tensões efetivas oriundas das transferências de momentum, assumindo a forma

$$\mathbb{T} = \sum_{\alpha=1}^n (\mathbb{T}^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}^\alpha). \quad (2.37)$$

O primeiro termo de  $\mathbb{T}$  costuma ser chamado de *parte interna ou interior* do tensor de tensões da mistura. É bastante usual que, em primeira aproximação, o termo em segunda ordem na velocidade de difusão seja desprezado (Bowen, 1976), adotando-se, para a mistura,

$$\mathbb{T} \simeq \mathbb{T}_1 = \sum_{\alpha=1}^n \mathbb{T}^\alpha.$$

Um fato interessante é que não há obrigatoriedade da simetria de cada tensor  $\mathbb{T}^\alpha$ , porém pode demonstrar-se que ainda assim  $\mathbb{T}_1$  é um tensor simétrico.

O segundo termo de  $\mathbb{T}$ , relacionado às velocidades de difusão,

$$- \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}^\alpha,$$

é o tensor de tensões aparentes devidas às transferências de momentum.

Acrescentá-lo é uma forma simples e natural, proposta por Lorentz (1907), para que a primeira lei do movimento de Cauchy (2.36) seja satisfeita em sistemas que exibem transferência de momentum linear entre suas componentes em virtude da difusão.

Para terminar, desejamos demonstrar que o somatório das fontes de momentum linear no interior da mistura se anula, em analogia a (2.25), isto é, que

$$\sum_{\alpha=1}^n (\hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{c}^\alpha \mathbf{u}^\alpha) = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

*Demonstração.* Tomemos a equação de balanço da massa (2.23)

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha) = \hat{c}^\alpha \quad (2.39)$$

e apliquemos a conhecida identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\gamma \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \gamma + \gamma \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (2.40)$$

obtendo

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \nabla \rho^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha + \rho^\alpha \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha = \hat{c}^\alpha. \quad (2.41)$$

Da identidade (2.5), tomando-se  $G = \rho^\alpha$ , segue:

$$\rho^{\alpha\dot{\alpha}} + \rho^\alpha \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha = \hat{c}^\alpha. \quad (2.42)$$

Por outro lado, (2.6) nos dá que

$$\dot{\rho}^\alpha = \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \nabla \rho^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (2.43)$$

Subtraindo (2.43) de (2.42), temos, pela identidade (2.18),

$$\nabla \rho^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha + \rho^\alpha \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha = \hat{c}^\alpha - \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} - \nabla \rho^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.44)$$

Não é difícil ver de (2.16) que  $\rho^\alpha \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha = \rho^\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}^\alpha + \rho^\alpha \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}$ , e aplicando a identidade (2.40) organizamos o lado esquerdo; no lado direito vemos que os dois últimos termos são simplesmente  $-\dot{\rho}^\alpha$ . Finalizamos, portanto, com

$$\dot{\rho}^\alpha + \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha) + \rho^\alpha \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}} = \hat{c}^\alpha. \quad (2.45)$$

Não nos esqueçamos que uma expressão análoga a (2.43) também vale para a densidade total  $\rho$ , e a utilizaremos para eliminar o termo com  $\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}$  na equação anterior. Assim,

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.46)$$

Aplicando (2.24) e (2.40), ficamos com

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad (2.47)$$

que, substituído em (2.45), dá

$$\dot{\rho}^\alpha - \frac{\rho^\alpha \dot{\rho}}{\rho} = \hat{c}^\alpha - \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha) \quad (2.48)$$

Recordemos a já remota definição de concentração  $c^\alpha$  (2.14). Se calcularmos

$$\dot{c}^\alpha = \frac{\dot{\left(\frac{\rho^\alpha}{\rho}\right)}}{\left(\frac{\rho^\alpha}{\rho}\right)} = \frac{\rho \dot{\rho}^\alpha - \dot{\rho} \rho^\alpha}{\rho^2}, \quad (2.49)$$

vemos que (2.48) torna-se

$$\rho \dot{c}^\alpha = \hat{c}^\alpha - \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha) \quad (2.50)$$

Proseguimos a demonstração introduzindo uma grandeza que é a média ponderada de  $\mathbf{u}^\alpha$ :

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^n \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^n c^\alpha \mathbf{u}^\alpha. \quad (2.51)$$

Desejamos calcular  $\dot{\mathbf{Y}}$ , multiplicando por  $\rho$  já por conveniência futura, lembrando que ele não possui índice  $\alpha$  e pode penetrar no somatório. Temos

$$\rho \dot{\mathbf{Y}} = \rho \sum_{\alpha=1}^n (c^\alpha \dot{\mathbf{u}}^\alpha + \hat{c}^\alpha \mathbf{u}^\alpha) = \sum_{\alpha=1}^n [\rho^\alpha \dot{\mathbf{u}}^\alpha - \rho^\alpha (\nabla \mathbf{u}^\alpha) \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}^\alpha \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha) + \hat{c}^\alpha \mathbf{u}^\alpha]. \quad (2.52)$$

Com o uso de (2.40), ficamos com a forma final

$$\rho \dot{\mathbf{Y}} = \sum_{\alpha=1}^n [\rho^\alpha \dot{\mathbf{u}}^\alpha - \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}^\alpha) + \hat{c}^\alpha \mathbf{u}^\alpha]. \quad (2.53)$$

Já sabemos, no entanto, que o termo  $\rho \dot{\mathbf{Y}}$  é zero, já que o próprio  $\mathbf{Y}$  é nulo por (2.17).

Isto nos traz de volta ao que desejamos provar. Lembremos que  $\dot{\mathbf{u}}^\alpha = \ddot{\mathbf{x}}^\alpha - \ddot{\mathbf{x}}$ . Assim,

$$\sum_{\alpha=1}^n [\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}^\alpha - \rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}} - \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}^\alpha) + \hat{c}^\alpha \mathbf{u}^\alpha] = \mathbf{0}, \quad (2.54)$$

ou seja,

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \sum_{\alpha=1}^n [\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}^\alpha - \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}^\alpha) + \hat{c}^\alpha \mathbf{u}^\alpha] \quad (2.55)$$

Substituindo  $\rho^\alpha \ddot{\mathbf{x}}^\alpha$  de (2.34), vem:

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \sum_{\alpha=1}^n [\nabla \cdot \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha - \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}^\alpha) + \hat{c}^\alpha \mathbf{u}^\alpha] \quad (2.56)$$

Mas sabemos que a primeira lei do movimento de Cauchy (2.36) nos diz que

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.57)$$

Basta então lembrar que  $\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^n (\mathbf{T}^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}^\alpha)$  (2.37) e  $\rho \mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^n (\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha)$  (2.35), que a comparação de (2.56) com (2.57) nos leva diretamente a

$$\sum_{\alpha=1}^n (\hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{c}^\alpha \mathbf{u}^\alpha) = \mathbf{0}. \quad (2.58)$$

□

### 2.2.3 Equação de balanço da energia

Queremos escrever aqui a equação de balanço para o  $\alpha$ -ésimo constituinte da mistura, apenas por completude [ver Truesdell e Toupin (1960)]<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho^\alpha \left( \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha \right) + \nabla \cdot \left[ \rho^\alpha \left( \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha \right) \dot{\mathbf{x}}^\alpha \right] = \\ & \nabla \cdot (\mathbf{T}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha - \mathbf{q}^\alpha) + \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha \cdot \mathbf{b}^\alpha + \rho^\alpha h^\alpha + \hat{\varepsilon}^\alpha + \dot{\mathbf{x}}^\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{c}^\alpha \left( \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha \right), \end{aligned} \quad (2.59)$$

<sup>6</sup> Seção 243

onde, em adição às quantidades já definidas anteriormente,  $h^\alpha$  é a fonte externa de calor para o constituinte  $\mathcal{C}^\alpha$ ,  $\mathbf{q}^\alpha$  é o vetor densidade de fluxo de calor por unidade de tempo *deixando* a componente  $\mathcal{C}^\alpha$  através da superfície  $\partial\mathcal{V}$  e  $\hat{\varepsilon}^\alpha$  é a fonte de energia interna para  $\mathcal{C}^\alpha$  devido às interações com os demais constituintes da mistura, em analogia com  $\hat{c}^\alpha$  e  $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$  para a massa e momentum linear respectivamente.

Assim, na linha inferior de (2.59), vemos que os três últimos termos são fontes de energia internas da mistura, oriunda de todos os constituintes  $\mathcal{C}^\beta$  com  $\alpha \neq \beta$ , enquanto os três primeiros termos são fontes de energia com origem no exterior da mistura.

Não iremos, no momento, elaborar mais sobre o assunto, já que neste trabalho não ocorre a conservação da energia e esta equação não será utilizada. Porém, em analogia com (2.25) e (2.58), exibiremos a condição de consistência necessária relacionando as fontes internas de massa, momentum linear e energia interna para a componente  $\mathcal{C}^\alpha$  da mistura (Bowen, 1976),<sup>7</sup> que é

$$\sum_{\alpha=1}^n \left[ \hat{\varepsilon}^\alpha + \mathbf{u}^\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{c}^\alpha \left( \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha \right) \right] = 0. \quad (2.60)$$

---

<sup>7</sup> Equação 1.5.46

### 3 Modelagem Mecânica

Construir um modelo (neste caso, mecânico) significa descrever matematicamente um fenômeno de interesse. Em nosso caso, o referencial teórico necessário é o de Teoria de Misturas, e em especial as equações de balanço das variáveis relevantes terão protagonismo nesta modelagem. Não se pode, porém, negligenciar a compatibilidade com as leis da termodinâmica.

Este trabalho trata de um sistema que será modelado, como dissemos, no âmbito físico-matemático da teoria de misturas contínuas desenvolvida no capítulo anterior. O sistema conterà três constituintes:

- I. uma matriz porosa insaturada fracamente deformável em repouso;
- II. um gás de inércia e pressão supostas extremamente pequenas;
- III. e um fluido newtoniano incompressível.

O sistema é considerado quimicamente inerte.

As características impostas sobre os constituintes (I) e (II) tornam supérfluo considerar qualquer equação de balanço para eles. Assim, o modelo requer apenas a satisfação as equações de balanço de massa e momentum linear para o constituinte fluido (III).

Por uma questão de compatibilidade com o restante da literatura, especialmente dentro do grupo de pesquisa a que esta autora tem a honra de pertencer, conectaremos as notações dos dois capítulos fazendo  $\alpha = F$  para este constituinte, chamando-o  $\mathcal{C}^F$ . Pela mesma razão, doravante chamaremos  $\mathbf{v}_F$ , em lugar de  $\dot{\mathbf{x}}^F$ , a velocidade do componente  $\mathcal{C}^F$  na mistura e utilizaremos o índice  $F$  para qualquer quantidade atinente ao fluido newtoniano cujo escoamento é modelado.

Nesta esteira, devem valer

$$\frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_F \mathbf{v}_F) = 0 \quad (3.1a)$$

$$\rho_F \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_F}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}_F) \cdot \mathbf{v}_F \right] = \nabla \cdot \mathbf{T}_F + \hat{\mathbf{p}}_F + \rho_F \mathbf{b}_F, \quad (3.1b)$$

que são simplesmente as equações de balanço (2.23) e (2.29) aplicadas à componente (III), já levando-se em conta a ausência de reações químicas ( $\hat{c}_F = 0$ ).

Uma sucinta explicação sobre o tensor parcial de tensões  $\mathbb{T}_F$  encontra-se logo acima de (2.27), embora a teoria tenha sido desenvolvida muito além do necessário para este trabalho [ver (2.37), por exemplo, para compreender as simplificações empreendidas neste modelo].

Introduzamos a quantidade *fração de fluido*  $\phi$  definida como a razão entre a densidade mássica local de fluido na mistura  $\rho_F$  e a densidade mássica real do fluido  $\rho_f$  medida de acordo com a mecânica do contínuo:

$$\phi = \frac{\rho_F}{\rho_f}. \quad (3.2)$$

Adotaremos, daqui em diante, a convenção de que o índice  $F$  indica as quantidades relativas ao fluido no âmbito da mistura, enquanto o índice  $f$  indica as quantidades “reais” do fluido, isto é, quando medidas numa bancada de laboratório tendo o fluido como constituinte único do ponto de vista da mecânica do contínuo.

Sendo  $\epsilon$  é a porosidade da matriz sólida, a *saturação*  $\psi = \frac{\phi}{\epsilon}$  emerge com naturalidade como grandeza útil.

Eis que a matriz porosa é apenas fracamente deformável, descortina-se a possibilidade de relaxar a restrição  $\psi \leq 1$  que seria obrigatória para a matriz rígida, permitindo-se que a saturação ultrapasse em pouco a unidade, isto é,  $\psi < 1 + \delta$ , com  $\delta \ll 1$ .

### 3.1 Forma Explícita do Modelo

A abordagem que utilizaremos aqui, na linha de Williams (1978), será propor a forma mais simples possível para  $\mathbb{T}_F$  e  $\hat{\mathbf{p}}_F$  capaz de descrever forças de capilaridade, forças de arrasto e tensões de cisalhamento num problema de escoamento de um fluido incompressível viscoso através de um sólido rígido.

O tensor parcial de tensões  $\mathbb{T}_F$  utilizado no presente modelo tem sua forma motivada pelo próprio Williams. Considerando as equações do balanço de forças<sup>1</sup>, embora não despreze a presença do sólido, ele conclui que se o fluido sofre uma pressão real interna  $\bar{p}$  e que se  $\phi$  mede a fração da área contactada pelo fluido, o tensor parcial de tensões do fluido é dado por

$$\mathbb{T}_F = -\bar{p}\phi\mathbf{I}, \quad (3.3)$$

sendo  $\bar{p}$  suposta constante enquanto o escoamento for insaturado.

<sup>1</sup> Equação 4, p. 256.

Allen (1986) advoga que o terceiro elemento que mencionamos dois parágrafos acima (as tensões de cisalhamento) pode ser desprezado no tensor parcial de tensões pois a tensão normal do fluido predomina. Esta discussão em torno do desmembramento da força de superfície remonta à época de Cauchy.

Simplifiquemos o problema e admitamos que a densidade de força de corpo  $\mathbf{b}_F$  sobre o fluido é identicamente nula.

Vejamos agora como encontrar a forma de  $\hat{\mathbf{p}}_F$ , a fonte de momentum linear, e teremos todos os elementos do lado direito de (3.1b).

Ela conterà dois termos somente. Um deles é proporcional à velocidade do fluido, e em determinados casos permite recuperar a equação clássica de difusão (Fick, 1855). O outro termo em circunstâncias particulares reduz-se à equação de Darcy (1856).

Executando-se as duas particularizações das equações de movimento sugeridas no parágrafo anterior para recuperar respectivamente a equação de Darcy e a lei de Fick, e impondo as leis da termodinâmica, obtém-se o termo  $\hat{\mathbf{p}}_F$  neste modelo como

$$\hat{\mathbf{p}}_F = -\frac{\eta_f}{K}\phi^2\mathbf{v}_F - \frac{\eta_f\mathfrak{D}}{K}\nabla\phi, \quad (3.4)$$

onde  $\eta_f$  é a viscosidade dinâmica do fluido,  $K$  representa a permeabilidade específica da matriz porosa e  $\mathfrak{D}$  é um coeficiente de difusão. Estas três quantidades devem ser determinadas experimentalmente, variando de acordo com os materiais envolvidos.

O primeiro termo, habitualmente chamado *darciiano*, origina-se da velocidade relativa entre os constituintes de uma mistura (Srinivasan e Rajagopal, 2014), e o segundo, relacionado com o gradiente da fração de fluido, procura representar as forças de capilaridade.<sup>2</sup>

Obtém-se o modelo mecânico combinando-se as equações (3.1a–3.1b), (3.3) e (3.4).

Fazemos aqui a opção de tratar o caso unidimensional, em que todas as quantidades dependem apenas da posição  $x$  e do tempo  $t$ , e a velocidade tem sua componente  $x$  como a única componente não nula ( $\mathbf{v}_F = v\hat{\mathbf{i}}$ ).

Assim, o problema pode ser representado pelo sistema de equações

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi v) = 0 \quad (3.5a)$$

$$\rho_f \left[ \phi \frac{\partial v}{\partial t} + \phi v \frac{\partial v}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial x}(\phi \bar{p}) - \frac{\rho_f^2 \eta_f \mathfrak{D}}{K} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\eta_f}{K} \phi^2 v. \quad (3.5b)$$

<sup>2</sup> Equação 6, p. 257.

Despreza-se o termo darciano em (3.5b) e redefine-se a pressão como  $p$  tal que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi \bar{p}) + \frac{\rho_f^2 \eta_f \mathfrak{D}}{K} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Num sistema natural de unidades em que  $\rho_f = 1$ , as equações (3.5) podem ser reescritas como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi v) = 0, \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi v) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \phi v^2) = 0, \quad (3.7b)$$

recaindo na forma usual.

Tanto foi feito e tantas hipóteses foram impostas à mão, de forma *ad hoc*, ao modelo, que olvidou-se que (3.7a) e (3.7b) são as simples e franciscanas equação da continuidade e equação de Euler, respectivamente equações (1.2) e (2.3), pp. 2–3, de Landau e Lifschitz (1987):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (3.8b)$$

particularizadas para uma dimensão espacial e  $\rho = 1$ .

As equações da continuidade e de Euler (3.8a-3.8b) têm abrangência incomparavelmente mais ampla que (3.7a-3.7b) tal como deduzidas; ou, por outra, embora resultem idênticas, pesam sobre elas muito menos hipóteses, de sorte que o caminho reverso teria sido muito mais expedito.

O clímax deste trabalho não está distante, pois logo será fixada a relação constitutiva inédita  $p = p(\phi)$ . Antes, porém, serão apresentadas duas tentativas anteriores de imposição de alguma forma de relação constitutiva.



## 4 Relação Constitutiva Proposta

### 4.1 Trabalhos anteriores

Em Saldanha da Gama et al. (2012), o sistema (3.7a-3.7b) é tratado para a relação constitutiva  $p(\phi)$  dada por

$$p(\phi) = c^2\phi, \quad (4.1)$$

para  $\phi < \epsilon$ , e onde  $c > 0$  é uma constante,  $\phi$  representa a fração de fluido,  $v$  é a velocidade do constituinte fluido,  $p$  representa a pressão e  $\phi v$  costuma chamar-se a velocidade de encharcamento.

Este trabalho apresenta alguns pontos problemáticos. Os próprios autores salientam alguns deles, como

- ( $\alpha$ ) A relação  $p(\phi)$  é constitutiva apenas enquanto o escoamento é insaturado, *id est*,  $\phi < \epsilon$ .
- ( $\beta$ ) Quando  $\phi = \epsilon$ ,  $p(\phi)$  deixa de ser constitutiva e  $p$  pode assumir qualquer valor em  $[c^2\epsilon, +\infty)$ , mesmo com  $\phi$  constante.<sup>1</sup>
- ( $\gamma$ ) Os autores afirmam que o caso  $\phi > \epsilon$  não tem significado físico<sup>2</sup>, e reiteram que qualquer relação constitutiva só faz sentido no intervalo aberto  $(0, \epsilon)$ .<sup>3</sup>
- ( $\delta$ ) Além disso, se para a fração de fluido do estado intermediário  $\phi_*$  verificar-se  $\phi_* > \epsilon$ , o sentido físico do problema é perdido, seja quando os autores resolvem o problema com o vínculo  $\phi \leq \epsilon$ , seja para o problema sem vínculo.<sup>4</sup>
- ( $\epsilon$ ) Os autores concluem que se o vínculo  $\phi \leq \epsilon$  não for imposto, podem ocorrer soluções não físicas, dependendo das condições iniciais escolhidas.<sup>5</sup>
- ( $\zeta$ ) O problema sem vínculo também é incapaz de prever o instante em que ocorre a saturação.<sup>6</sup>

---

<sup>1</sup> Equação 9, p. 5

<sup>2</sup> p. 4, abaixo da equação (6)

<sup>3</sup> p. 5, abaixo da equação (8)

<sup>4</sup> p. 8

<sup>5</sup> p. 16

<sup>6</sup> p. 11

De todo modo, seguiu-se na busca de uma relação constitutiva  $p(\phi)$  que apresentasse propriedades satisfatórias e comportamento adequado em simulações, podendo de fato modelar situações reais.

Com vistas a mitigar as limitações do trabalho mencionado acima, Martins Costa et al. (2017) aventaram a relação constitutiva  $p(\phi)$

$$p(\phi) = \begin{cases} c^2\phi, & \text{para } \phi < \epsilon \\ c^2\phi + c_{\square}^2(\phi - \epsilon), & \text{para } \phi \geq \epsilon \end{cases}, \text{ com } c_{\square} > c > 0. \quad (4.2)$$

Neste trabalho, a ideia dos autores é relaxar (pouco) a condição de saturação, permitindo valores de  $\phi$  superiores a  $\epsilon$ . Quanto mais alto o valor da constante  $c_{\square}$  escolhida, menor a tolerância à supersaturação do modelo.

Manipulando-se, porém, a segunda linha de (4.2) vemos que a fração de fluido é

$$\phi = \frac{p - c^2\epsilon}{c_{\square}^2} + \epsilon, \quad (4.3)$$

o que nos mostra que não há cota superior para  $\phi$  neste modelo.

Deste modo, durante uma simulação, se a pressão se tornar muito elevada, há o risco da obtenção de valores fisicamente irreais para  $\phi$ , ilimitados mesmo, refletindo o fato de que  $\lim_{p \rightarrow \infty} \phi = +\infty$ .

Uma das formas de implementar-se a pequena supersaturação é utilizando-se a teoria de pequenas deformações, em que as configurações de referência e deformada são praticamente coincidentes. Maiores supersaturações demandariam abrir mão da condição de (quase) indeformabilidade da matriz sólida.

Supersaturações pequenas têm a vantagem de preservar a hiperbolicidade do sistema de EDPs do problema, porém neste modelo perde-se o controle dos valores que a velocidade pode atingir numa simulação, podendo tornar-se extremamente elevados à medida que a fração de fluido ultrapassa a saturação da matriz porosa.

A relação a ser proposta no presente trabalho contornará os problemas elencados até aqui.

## 4.2 Relação Constitutiva Proposta

O presente trabalho propõe uma nova relação entre a pressão e a fração de fluido que permite estabelecer, *a frente*, uma cota superior para a fração de fluido, propiciando uma simulação física confiável e sempre consistente. Além disso, a relação constitutiva proposta nesta tese origina um problema de Riemann conveniente, no

qual os autovalores dão origem a invariantes de Riemann que podem ser representados por fórmulas explícitas escritas apenas com funções elementares.

A relação constitutiva proposta relacionando a pressão à fração de fluido e à porosidade é dada por

$$p(\phi) = c_1^2 \phi + c_2^2 \frac{\phi}{\bar{\epsilon} - \phi} - 2c_1 c_2 \sqrt{\bar{\epsilon}} \ln \left( \frac{\bar{\epsilon} - \phi}{\bar{\epsilon}} \right), \quad (4.4)$$

sendo  $\bar{\epsilon} = \epsilon + \delta$ , com  $\delta > 0$  uma constante que pode ser tomada tão pequena quanto se queira, e  $c_1$  e  $c_2$  constantes positivas.

A partir da equação (4.4) verifica-se facilmente que

$$p > c_2^2 \frac{\phi}{\bar{\epsilon} - \phi} \implies \left( \frac{p}{c_2^2 + p} \right) \bar{\epsilon} > \phi, \quad (4.5)$$

o que implica que sempre vale

$$\phi < \epsilon + \delta. \quad (4.6)$$

Se vale (4.6), *a fortiori* temos um limite para a supersaturação, mesmo no caso de pressões muito elevadas, uma vez que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \phi < \epsilon + \delta < +\infty. \quad (4.7)$$

Esta relação constitutiva foi construída de maneira a aproximar-se da expressão linear sem restrição quando a fração de fluido for pequena frente a  $\bar{\epsilon}$ , e de forma a ter autovalores ilimitados quando a fração de fluido se torna grande.

O escoamento será considerado supersaturado nas regiões em que a fração de fluido seja tal que  $\epsilon < \phi < \epsilon + \delta$ . Quando  $\phi > \epsilon$ , à medida que a fração de fluido cresce, tanto as velocidades de propagação quanto a pressão aumentam rapidamente. Isto garante uma resposta fisicamente realista, além da preservação do comportamento hiperbólico do sistema de equações diferenciais parciais.

## 5 O Problema de Riemann

Antes de proceder à enunciação formal e à resolução do problema de Riemann associado à nova relação constitutiva proposta, cabe desenvolver brevemente a teoria geral relativa a este assunto, a fim de que os resultados originais deste trabalho possam ser inteiramente compreendidos pelo leitor.

Após iniciar com generalidades sobre sistemas hiperbólicos de equações diferenciais parciais de conservação e introduzir considerações sobre soluções fracas e entropia, apresentaremos o que se conhece por problema de Riemann.

Estudaremos, então, a teoria relativa a ele. Principiaremos pelo caso linear, que não é o do presente trabalho mas apresenta aspectos altamente instrutivos sobre soluções do tipo *choque*, e a seguir trataremos do caso genuinamente não linear, em que aparecem naturalmente também as soluções do tipo *rarefação*.

Lamentavelmente, por brevidade, não discutiremos as soluções do tipo *descontinuidade de contato*, associadas a campos degeneradamente lineares.

Com isso, deteremos todas as ferramentas matemáticas para expor a solução do problema de Riemann associado à relação (4.4) proposta de modo inédito neste trabalho.

Particularizaremos nossa exposição para o caso do sistema  $N = 2$  equações diferenciais parciais, porém a generalização para o caso com  $N \geq 3$  ou a restrição para o caso  $N = 1$  não apresentam extremas dificuldades. O caso  $N = 2$  apresenta, porém, algumas particularidades que lhe são exclusivas, como a existência dos *invariantes de Riemann*.<sup>1</sup>

### 5.1 Sistema hiperbólico de equações de conservação

Sejam  $\mathbf{u}(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função vetorial que seja no mínimo<sup>2</sup>  $C^2$  em algum conjunto aberto  $\mathcal{U}$ , dita a *função de fluxo* do problema.

<sup>1</sup> Para  $N \neq 2$ , os “invariantes” de Riemann existem mas não são invariantes ao longo das características. O nome pode permanecer por abuso de linguagem.

<sup>2</sup> Isto garante que  $\lambda_a$ ,  $\mathbf{r}_a$  e  $\mathbf{l}_a$  definidos mais adiante sejam ao menos  $C^1$ .

Queremos estudar o sistema de equações diferenciais parciais da forma<sup>3</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad (5.1)$$

onde as condições iniciais dadas são por

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \quad (5.2)$$

Sistemas como (5.1) são chamados de *sistemas de equações de conservação* pois as leis de conservação de quantidades físicas (e.g. massa, momentum angular, momentum linear, energia, etc.) assumem exatamente esta forma (Smoller, 1983).

A expressão (5.1) pode ser reescrita como

$$\mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathcal{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x, \quad (5.3)$$

onde a matriz  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é a matriz jacobiana da função  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ :

$$\mathcal{A}_{ij} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1,2} \quad (5.4)$$

Dizemos que o sistema de EDPs (5.1) é *estritamente hiperbólico* se  $\mathcal{A}$  possui dois autovalores reais e distintos,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , e convencionaremos  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

### 5.1.1 Soluções Fracas

Para um sistema de equações de conservação sujeito a condições iniciais contendo descontinuidades espaciais, como o problema de Riemann, é conveniente relaxarmos a exigência de que as soluções  $\mathbf{u}(x, t)$  sejam contínuas, e admitirmos que elas possam ser soluções num sentido *fraco*, ou seja, soluções que satisfaçam à forma integral das equações de conservação.

Tecnicamente, estamos estendendo o espaço de soluções para o espaço de funções  $\mathbf{u}$  Lebesgue<sup>4</sup> mensuráveis  $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathcal{U})$ . A norma deve ser entendida daqui por diante como  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^\infty}$ .

Como se verá na próxima seção, soluções fracas são realizáveis como um limite de uma família de soluções de uma extensão do sistema de EDPs considerado. No limite tomado, naturalmente, o sistema de EDPs estendido regressa ao sistema original.

<sup>3</sup> Também denotamos esta equação como  $\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0$ , onde o subscrito indica a variável em relação à qual tomamos a derivada parcial.

<sup>4</sup> Henri Lebesgue, matemático francês, 1875-1941.

Em particular, interessa-nos a classe de soluções fracas correspondente a exigir que  $\mathbf{u}(x, t)$ , ainda que descontínua em algum ponto (ou, rigorosamente, num conjunto de pontos com medida nula), satisfaça, para todos  $x_1$  e  $x_2$ , a

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{u}(x, t) dx = \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_1, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_2, t)), \quad (5.5)$$

que é a forma integral de (5.1).

Estas soluções são descontinuidades propagando-se, mas só serão soluções fracas de (5.1) se se propagarem com uma determinada velocidade  $s$ , dita a *velocidade de choque*, que calcularemos a seguir.

Estudemos uma descontinuidade candidata a uma solução deste tipo e verifiquemos as condições necessárias para que se trate, de fato, de uma solução fraca de (5.1):

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_-, & x < 0 \\ \mathbf{u}_+, & x > 0 \end{cases}, \quad (5.6)$$

com  $\mathbf{u}_-$  e  $\mathbf{u}_+$  constantes.

Considere o instante  $t = 0$ . Neste instante a descontinuidade (5.6) está localizada em  $x = 0$ . Deixemos decorrer um tempo  $t$ . Dado que a descontinuidade se propaga com velocidade  $s$ , ela estará agora situada em  $x = st$ :

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_-, & x < st \\ \mathbf{u}_+, & x > st \end{cases}. \quad (5.7)$$

Supondo  $x_1 < 0$  e  $x_2 > st$  na expressão (5.5), o que não implica perda de generalidade pois  $x_1$  e  $x_2$  são quaisquer, notamos que a integral contida na dita expressão foi acrescida de  $st(\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_+)$ .

Portanto, tomando sua derivada total em relação ao tempo, vem

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{u}(x, t) dx = s(\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_+). \quad (5.8)$$

Pela suposição acima, sabemos que  $\mathbf{u}(x_2, t) = \mathbf{u}_+$  e  $\mathbf{u}(x_1, t) = \mathbf{u}_-$ . Juntando com (5.5), vem que

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_-) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_+) = s(\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_+) \quad (5.9)$$

é a condição para que uma descontinuidade propagando-se com velocidade  $s$  seja uma solução fraca de (5.1). Em outras palavras,  $s$  é a velocidade permitida para este choque propagar-se. Denotando por  $[\cdot]$  o salto ou descontinuidade em uma quantidade, reescrevemos (5.9) como

$$[\mathbf{f}] = s[\mathbf{u}]. \quad (5.10)$$

Esta é a chamada **condição de Rankine-Hugoniot**<sup>5</sup> para que uma descontinuidade seja uma solução (fraca) do sistema de EDPs (5.1), que é chamada um **choque**.

### 5.1.2 Entropia

As soluções fracas que apresentamos na seção anterior não são, em geral, soluções unívocas do problema (5.1). O exemplo mais popular e citado deste fato é a equação de Burgers, que apresenta mais de uma solução fraca. Não entraremos neste detalhe por brevidade, mas fato é que, a ocorrer um impasse deste jaez, é necessário que possamos selecionar a solução apropriada do problema.

A entropia é uma quantidade física frequentemente mal interpretada, confundida com *desordem*, *caos* e um sem número de absurdos. Para uma visão física da entropia, tanto em sua dimensão estatística quanto em sua dimensão termodinâmica, bem como uma explanação da Segunda Lei da Termodinâmica, referimos o leitor, por exemplo, a Salinas (2005), com o fito de prestigiar um admirável cientista brasileiro ainda em atividade, embora não faltem excelentes textos de Termodinâmica e Mecânica Estatística que possam suprir este tema.

Interessamo-nos aqui, entretanto, pela entropia matemática, cuja definição e em seguida variantes equivalentes, porém mais simples e trabalháveis apresentaremos.

Lembremos que estamos tratando do problema de Cauchy (5.1-5.2). Passemos às definições.

Uma função suave  $(U, F) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita um **par de entropia** se toda solução contínua e diferenciável  $\mathbf{u}$ , isto é, solução **forte**, de (5.1) também satisfizer a

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x} F(\mathbf{u}) = 0. \quad (5.11)$$

Chama-se  $U$  *entropia* e  $F$  *fluxo de entropia*. Diz-se que um par de entropia é *estritamente convexo* se  $D^2U(\mathbf{u}) > 0 \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , isto é, for uma matriz positiva definida.

Como vimos de dizer, as soluções fracas de (5.1) não são univocamente definidas pelas condições iniciais (5.2). A entropia será o seletor da solução apropriada, como mostraremos logo a seguir. Trata-se, aqui, do *método da entropia evanescente*.

Sejam  $\mathbf{u}^\epsilon$  uma família de soluções fracas de um sistema de EDPs aumentado

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}^\epsilon + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}^\epsilon) = \mathbf{\Psi}^\epsilon, \quad (5.12)$$

<sup>5</sup> William Rankine, físico escocês, 1820-1872;

Pierre-Henri Hugoniot, físico e matemático francês, 1851-1887.

admitindo que o sistema possui um par de entropia estritamente convexo  $(U, F)$  e  $\epsilon > 0$  é um parâmetro pequeno tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{u}. \quad (5.13)$$

Por *pequeno* entendemos que exista uma constante  $\mathcal{B} > 0$  tal que  $\|\mathbf{u}^\epsilon\|_{L^\infty} \leq \mathcal{B}$ . Naturalmente esta bola fechada deve estar contida em  $\mathcal{U}$ .

$\Psi^\epsilon$  pode ser encarado como uma pequena correção ao modelo mecânico, como a adição de uma pequena viscosidade.

Iremos agora definir em que sentido o limite (5.13) deve ser compreendido, i.e., como  $\mathbf{u}$  é uma solução fraca de (5.1). Para toda função  $\Theta \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ , encontramos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left( \mathbf{u} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Theta}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \right) dx dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left( \mathbf{u}^\epsilon \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Theta}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}^\epsilon) \right) dx dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \Psi^\epsilon \Theta dx dt. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dizemos que  $\Psi^\epsilon$  é *conservativo* se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \Psi^\epsilon \Theta dx dt = 0, \quad (5.15)$$

com  $\Theta$  em  $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .

Adicionalmente, dizemos que  $\Psi^\epsilon$  *dissipa entropia* se

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \nabla U(\mathbf{u}^\epsilon) \cdot \Psi^\epsilon \Theta dx dt \leq 0, \quad (5.16)$$

com  $\Theta$  em  $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  e  $\Theta \geq 0$ .

Às equações (5.15-5.16) dá-se o nome de *regularização* de  $\Psi^\epsilon$ .

Chegamos, por fim, à **desigualdade de entropia**:

Seja  $\mathbf{u}^\epsilon$  uma família de aproximações de  $\mathbf{u}$  nos termos de (5.13), em que  $\mathbf{u}^\epsilon$  é sempre finito na norma  $L^\infty$  e converge para o limite  $\mathbf{u}$ . Suponha que  $\Psi^\epsilon$  é conservativo (5.15) e dissipa entropia (5.16) para algum par de entropia  $(U, F)$ . Então,  $\mathbf{u}$  é uma solução fraca de (5.1-5.2) e satisfaz à desigualdade

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left[ U(\mathbf{u}) \frac{\partial \Theta}{\partial t} + F(\mathbf{u}) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right] dx dt \geq 0, \quad (5.17)$$

com  $\Theta$  em  $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  e  $\Theta \geq 0$ , o que nos leva diretamente a

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x} F(\mathbf{u}) \leq 0. \quad (5.18)$$



A prova mais detalhada pode ser encontrada em Godlewski e Raviart (1996).<sup>6</sup>

Para sistemas que possuem apenas campos genuinamente não lineares (que definiremos adiante, e é o nosso caso de interesse), a desigualdade de entropia (5.18) é suficiente para discriminar a solução correta e única<sup>7</sup> para o sistema de Cauchy (5.1-5.2).

Como consequência direta de (5.18), temos que atravessando-se uma descontinuidade vale

$$s[U_- - U_+] - [F_- - F_+] \leq 0, \quad (5.19)$$

onde os subscritos  $-$  e  $+$  indicam a quantidade à esquerda e à direita da descontinuidade, respectivamente. Trata-se de outra formulação das condições (5.10).

Chamaremos (5.18) e (5.19) doravante *condições de entropia* (Lax, 1972).

As condições de entropia podem ser escritas de forma mais simples e utilizável, conforme o propósito desejado. Apresentaremos aqui algumas delas, seguindo LeVeque (1999). Todas são equivalentes entre si.

A primeira delas, devida a Lax, nos diz

$$\lambda(\mathbf{u}_-) > s > \lambda(\mathbf{u}_+), \quad (5.20)$$

sendo  $s$  a velocidade do choque e  $\lambda$  o autovalor.

A segunda, devida a Oleřnik<sup>8</sup> (Oleřnik, 1959), reza

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_-) \geq s(\mathbf{u} - \mathbf{u}_-) \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_+) \leq s(\mathbf{u} - \mathbf{u}_+) \end{cases}, \text{ para todo } \mathbf{u} \text{ entre } \mathbf{u}_- \text{ e } \mathbf{u}_+, \quad (5.21)$$

naturalmente ao longo do choque considerado.

A terceira, devida à mesma matemática (Oleřnik, 1957), é particularmente útil para métodos numéricos. Ao discretizar o problema, naturalmente teremos saltos, digamos de  $U_j$  para  $U_{j+1}$ , com tamanho  $\Delta x$ .

Como validar o método e certificar-se de que o salto de  $U_j$  para  $U_{j+1}$  não viola as condições de entropia? Esta condição nos dá a resposta:

É preciso que exista uma constante  $E > 0$  tal que

$$U_{j+1}(t) - U_j(t) < \left(\frac{E}{t}\right) \Delta x \quad (5.22)$$

<sup>6</sup> Teorema 3.3

<sup>7</sup> A unicidade é um tanto mais complicada de demonstrar; ao leitor interessado recomendamos o capítulo X de LeFloch (2002).

<sup>8</sup> Olga Arsenievna Oleřnik, matemática soviética, 1925-2001.

para todo  $t > 0$ .

A demonstração pode ser encontrada em Smoller (1983).<sup>9</sup>

## 5.2 O Problema de Riemann

Considere um tubo infinito contendo gás ao longo de um eixo  $x$ .

Existe uma parede em  $x = 0$  e as quantidades físicas relevantes (densidade, pressão) são constantes e distintas de cada lado desta parede.

Em  $t = 0$ , a parede é subitamente removida, e deseja-se estudar a evolução do sistema a partir daí.

Este é o problema original proposto em Riemann (1860), que citamos, em suas próprias palavras:<sup>10</sup>

Para esclarecer por meio de um exemplo simples o exposto até aqui, em que o movimento pode ser determinado pelos meios até agora obtidos, desejamos admitir que a pressão e a densidade dependem uma da outra segundo a lei de Boyle e que, no início, a densidade e a velocidade sofrem uma mudança abrupta em  $x = 0$ , porém são constantes de cada lado deste ponto.

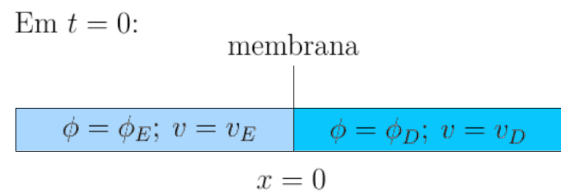


Figura 2 – Ilustração do problema descrito acima, inspirada em Smoller (1983).

Por extensão, chamamos **problema de Riemann** a todo sistema de equações da forma (5.1) em que as condições iniciais sejam dadas por uma constante em todo o semieixo negativo e uma constante distinta em todo o semieixo positivo, isto é, (5.2) têm a forma

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_E, & x < 0 \\ \mathbf{u}_D, & x > 0 \end{cases}, \quad (5.23)$$

<sup>9</sup> Teorema 16.1

<sup>10</sup> Riemann (1860), §7, p. 157, trad. do original para o vernáculo pela autora.

sendo  $\mathbf{u}_D$  e  $\mathbf{u}_E$  constantes.

Esta descontinuidade nas condições iniciais leva-nos a intuir que não poderemos fazer grandes exigências quanto à continuidade e diferenciabilidade das soluções, daí a razão de termos devotado as seções precedentes à noção de “*soluções fracas*”.

Trataremos, inicialmente, do caso  $\mathcal{A}$  constante, que é o sistema linear de equações de conservação, em virtude de seu caráter instrutivo; depois passaremos ao caso não linear  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{u})$ , que é o que de fato nos interessa.

### 5.2.1 Caso Linear

O caso em que a matriz  $\mathcal{A}$  de (5.3) é constante merece ser tratado por algumas razões. Em primeiro lugar, ele possui solução exata, o que é sempre esclarecedor. Ele também representa sistemas físicos relevantes como a equação de onda e também a forma linearizada (aproximação de primeira ordem) de sistemas não lineares. Não se pode tampouco negar seu caráter didático, que nos permitirá apreender conceitos imprescindíveis ao estudo do caso não linear que desejamos.

Se a matriz  $\mathcal{A}$  de (5.3) é constante, e já nos decidimos pela restrição ao caso dos autovalores reais distintos  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ela pode ser diagonalizada (Hoffman e Kunze, 1971) pela expressão

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}\mathcal{D}\mathcal{R}^{-1}, \quad (5.24)$$

com

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

$$\mathcal{R} = (\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2), \quad (5.26)$$

e  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

$$\mathcal{A}\mathbf{r}_1 = \lambda_1\mathbf{r}_1 \quad (5.27a)$$

$$\mathcal{A}\mathbf{r}_2 = \lambda_2\mathbf{r}_2 \quad (5.27b)$$

Passemos à resolução do sistema (5.1). Multiplicando esta expressão por  $\mathcal{R}^{-1}$  e fazendo uso de (5.24), temos

$$\mathcal{R}^{-1}\mathbf{u}_t + \mathcal{D}\mathcal{R}^{-1}\mathbf{u}_x = 0. \quad (5.28)$$

Invocando uma nova variável  $\mathbf{w} = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{u}$ , o sistema fica

$$\mathbf{w}_t + \mathcal{D}\mathbf{w}_x = 0. \quad (5.29)$$

Como  $\mathcal{D}$  é diagonal, o sistema de EDPs foi completamente desacoplado na variável  $\mathbf{w}$ , podendo ser escrito como

$$\begin{cases} (w_1)_t + \lambda_1(w_1)_x = 0 \\ (w_2)_t + \lambda_2(w_2)_x = 0 \end{cases}. \quad (5.30)$$

Cada uma destas equações desacopladas é uma equação de advecção a coeficientes constantes, com solução dada (Dafermos, 2016) por

$$\begin{cases} w_1(x, t) = w_1(x - \lambda_1 t, 0) \\ w_2(x, t) = w_2(x - \lambda_2 t, 0) \end{cases}. \quad (5.31)$$

Retornando ao sistema original por meio da relação  $\mathbf{u} = \mathcal{R}\mathbf{w}$ , temos que

$$\mathbf{u}(x, t) = w_1(x, t)\mathbf{r}_1 + w_2(x, t)\mathbf{r}_2. \quad (5.32)$$

Resta agora impor as condições iniciais (5.23) para termos nossa primeira solução do problema de Riemann: a do caso linear.

Podemos escrever  $\mathbf{u}_E$  e  $\mathbf{u}_D$  na base dos autovetores  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_E = \alpha_1\mathbf{r}_1 + \alpha_2\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{u}_D = \beta_1\mathbf{r}_1 + \beta_2\mathbf{r}_2 \end{cases}. \quad (5.33)$$

Comparando com (5.32), vem que

$$w_1(x, 0) = \begin{cases} \alpha_1, & x < 0 \\ \beta_1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad w_2(x, 0) = \begin{cases} \alpha_2, & x < 0 \\ \beta_2, & x > 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

e, por força de (5.31),

$$w_1(x, t) = \begin{cases} \alpha_1, & x - \lambda_1 t < 0 \\ \beta_1, & x - \lambda_1 t > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad w_2(x, t) = \begin{cases} \alpha_2, & x - \lambda_2 t < 0 \\ \beta_2, & x - \lambda_2 t > 0 \end{cases}. \quad (5.35)$$

A solução do problema de Riemann linear está, portanto, concluída, sendo dada por (5.32) e (5.35), podendo ser didaticamente representada no plano  $x - t$  como mostra a figura 3.

Discutiremos, agora, propriedades importantes desta solução, introduzindo conceitos que serão cruciais no entendimento do caso não linear.

As famílias de curvas satisfazendo  $x'(t) = \lambda_a$  são chamadas no caso geral de  $a$ -ésimas características. No caso em que a matriz  $\mathcal{A}$  é constante, a 1ª e a 2ª

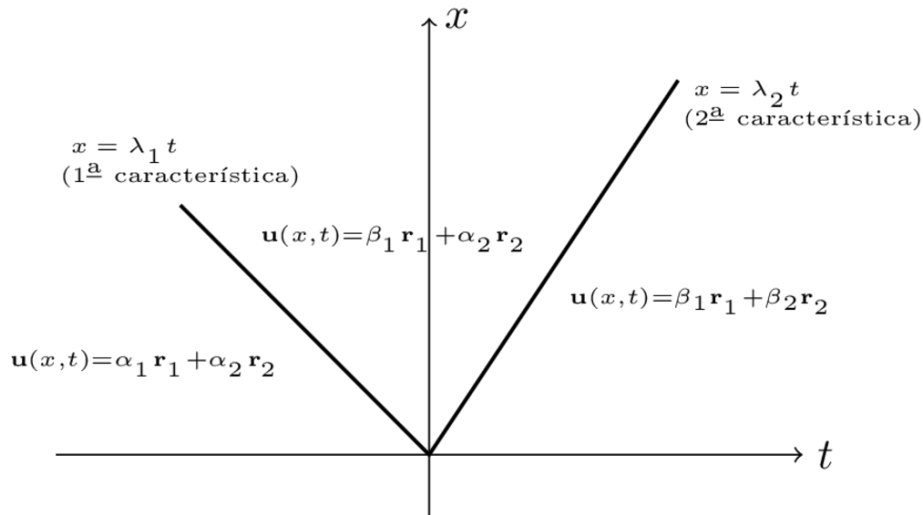


Figura 3 – Solução do problema de Riemann linear retratada no plano  $x - t$

características são as famílias de retas com inclinações respectivamente  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , das quais retratamos na figura as que passam pela origem.<sup>11</sup>

Nota-se que a solução do problema de Riemann é constante em cada região entre características, porém sofre um salto, uma descontinuidade, ao passar por uma característica.

Ao passar pela 1ª característica, a solução  $\mathbf{u}(x, t)$  sofre um salto dado por

$$[\mathbf{u}]_1 = (\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{r}_1, \quad (5.36)$$

enquanto ao passar pela 2ª característica o salto é dado por

$$[\mathbf{u}]_2 = (\beta_2 - \alpha_2)\mathbf{r}_2. \quad (5.37)$$

No caso linear, é trivial demonstrar que a descontinuidade  $[\mathbf{u}]_1$  se propaga com velocidade constante  $\lambda_1$  pois  $\mathcal{A}$  é constante e portanto a condição de Rankine-Hugoniot lê-se

$$[\mathbf{f}] = \mathcal{A}[\mathbf{u}]_1 = \lambda_1[\mathbf{u}]_1, \quad (5.38)$$

e analogamente a descontinuidade  $[\mathbf{u}]_2$  propaga-se com velocidade constante  $\lambda_2$ . Dizemos que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as *velocidades características* do sistema.

Não é surpreendente que a solução de um sistema de EDPs que tem em suas condições iniciais justamente um salto seja composta ela mesma de saltos. Mais ainda, devemos interpretar a resolução do problema de Riemann como uma tentativa

<sup>11</sup> Por cada ponto do plano  $x - t$  passa exatamente uma curva característica de cada família.

de escrever o salto original  $\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_E$  como uma combinação dos saltos que ocorrem ao passar pelas características.

Há, porém, restrições físicas para isto. As velocidades características do sistema são as únicas velocidades com que uma descontinuidade pode propagar-se.

Assim, estamos diante de dois casos possíveis.

No caso mais simples, a descontinuidade presente nas condições iniciais  $\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_E$  pode já ser um autovetor de  $\mathcal{A}$ , digamos,  $\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_E = \kappa[\mathbf{u}]_1$ .<sup>12</sup> Neste caso, esta descontinuidade inicial simplesmente propaga-se com a velocidade permitida  $\lambda_1$  e esta é a solução do problema.

Num caso mais geral, porém, a descontinuidade original  $\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_E$  pode não ser igual a um múltiplo escalar de  $[\mathbf{u}]_1$  nem  $[\mathbf{u}]_2$ . Lembremos que não é fisicamente permitido que ela propague-se com qualquer velocidade. Neste caso, a solução tem que ser construída como uma sucessão de descontinuidades propagando-se com velocidades permitidas.

Há, ainda, uma restrição adicional. É fisicamente inviável que a primeira descontinuidade propague-se com velocidade maior que a segunda descontinuidade. Como estamos tratando do caso  $N = 2$ , e convencionamos  $\lambda_1 < \lambda_2$ , temos apenas uma opção. Devemos partir de  $\mathbf{u}_E$  com a descontinuidade  $[\mathbf{u}]_1$  propagando-se com velocidade  $\lambda_1$  até um determinado estado intermediário  $\mathbf{u}^*$ , a partir do qual a descontinuidade  $[\mathbf{u}]_2$  seja capaz de atingir  $\mathbf{u}_D$  com velocidade  $\lambda_2$ .

Não é difícil ver que este estado intermediário é dado por

$$\mathbf{u}^* = \beta_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2. \quad (5.39)$$

Pode ser particularmente esclarecedor no caso  $N = 2$  fazer uso do plano de fase, que é como chamamos o plano  $u_1 - u_2$ . Nele, cada vetor  $\mathbf{u}$  é um ponto, e representa um estado do sistema. Curvas passando por um estado genérico  $\mathbf{u}_-$  representam as evoluções possíveis governadas pelo sistema de EDPs a partir deste estado. Para  $N > 2$ , perdemos a comodidade de ter o “plano” de fase como um plano *stricto sensu*, é dizer, bidimensional, e esta representação fica bem menos esclarecedora.

A figura 4 retrata, neste plano, exatamente o caso em que a descontinuidade inicial não é um autovetor de  $\mathcal{A}$ , ou seja, o segmento de reta ligando  $\mathbf{u}_E$  a  $\mathbf{u}_D$  não é paralelo a nenhum dos autovetores de  $\mathcal{A}$ . Faz-se necessário, portanto, progredir de  $\mathbf{u}_E$  ao estado intermediário  $\mathbf{u}^*$  e, deste, até  $\mathbf{u}_D$ , como narrado acima.

<sup>12</sup> O argumento seria idêntico para  $[\mathbf{u}]_2$ .

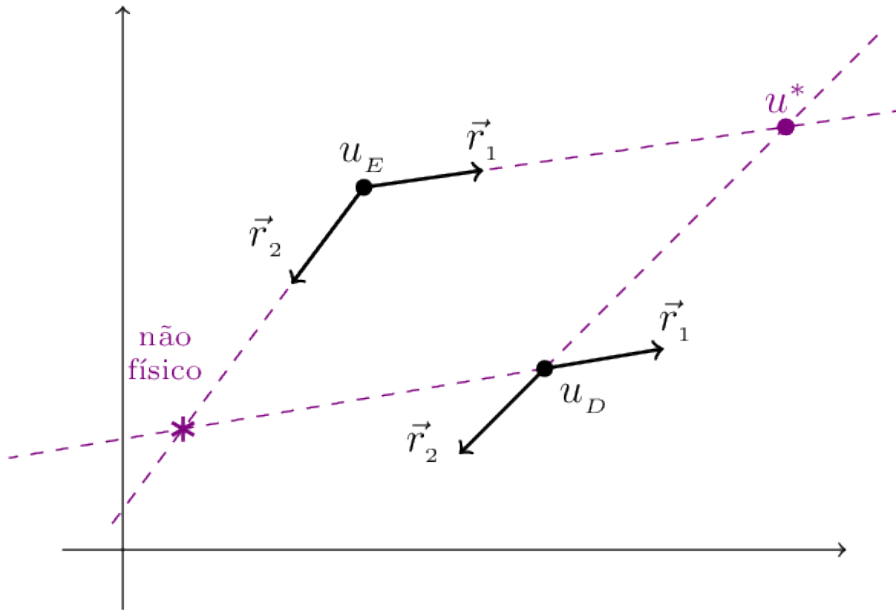


Figura 4 – Solução do problema de Riemann linear no plano de fase. Estado intermediário. *Loci* de Hugoniot.

Note que um estado  $\mathbf{u}_-$  qualquer só pode evoluir ao longo de uma reta determinadas pelas direções dos autovetores de  $\mathcal{A}$  que passe por  $\mathbf{u}_-$ . Isso é equivalente a afirmar que as velocidades características são as únicas permitidas para a propagação. Cada uma dessas retas é chamada uma *curva* ou um *locus* de Hugoniot.

Dizemos que todos os pontos do plano de fase sobre o *locus* de Hugoniot contendo  $\mathbf{u}_-$  correspondente ao autovetor  $\mathbf{r}_1$  estão ligados a  $\mathbf{u}_-$  por um **1-choque**, e todos os pontos sobre o *locus* de Hugoniot contendo  $\mathbf{u}_-$  correspondente ao autovetor  $\mathbf{r}_2$  estão ligados a  $\mathbf{u}_-$  por um **2-choque**.

A solução do problema de Riemann linear consiste, portanto, em encontrar o estado intermediário  $\mathbf{u}^*$  localizado na interseção do *locus* de Hugoniot correspondente a  $\mathbf{r}_1$  contendo  $\mathbf{u}_E$  com o *locus* de Hugoniot correspondente a  $\mathbf{r}_2$  contendo  $\mathbf{u}_D$ . Temos, esquematicamente, portanto:

$$\mathbf{u}_E \xrightarrow{\text{1-choque}} \mathbf{u}^* \xrightarrow{\text{2-choque}} \mathbf{u}_D \tag{5.40}$$

A figura mostra também um eventual segundo estado intermediário possível. Ele corresponde, porém, à situação já aventada em que a velocidade de propagação da primeira descontinuidade é maior que a da segunda descontinuidade. Esta situação é fisicamente inviável e não daria origem a soluções unívocas para o sistema que se está tentando resolver.

No caso não linear, a generalização do conceito de *loci* de Hugoniot é direta, mas eles não serão mais retas e mostraremos como calculá-los. Continuará valendo o fato de que um estado  $\mathbf{u}_-$  qualquer pode evoluir ao longo de um *locus* de Hugoniot<sup>13</sup> que o contenha.

Esta não será, porém, a única possibilidade, já que também introduziremos uma classe de soluções que não são descontinuidades propagando-se, ou seja, soluções contínuas, a que chamaremos *rarefações*. As rarefações não são possíveis no caso linear (nem para uma componente degeneradamente linear no caso não linear) por razões relacionadas à entropia.

### 5.2.2 Caso Não Linear

Trataremos agora do problema de Riemann em que o sistema de EDPs a ser resolvido é não linear. Faremos analogias com a dedução do caso anterior, percorrendo, *mutatis mutandis*, os mesmos passos, e obteremos os *loci* de Hugoniot e as soluções do tipo choque. Mostraremos, em seguida, como seremos levados naturalmente à classe de soluções do tipo rarefação. Por fim, implantaremos as condições de entropia. Excelentes referências para esta discussão são Lax (1972) e LeVeque (1999).

Estamos tratando ainda do caso estritamente hiperbólico, com  $N = 2$ .

O sistema de EDPs pode ser escrito na forma

$$\mathbf{u}_t + \mathcal{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = 0, \quad (5.41)$$

onde fizemos questão de explicitar a dependência em  $\mathbf{u}$  da matriz  $\mathcal{A}$ , que é o jacobiano de  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ .

O problema é estritamente hiperbólico, de modo que  $\mathcal{A}(\mathbf{u})$  possui autovalores reais e distintos  $\lambda_1(\mathbf{u}) < \lambda_2(\mathbf{u})$ , aos quais correspondem os autovetores  $\mathbf{r}_1(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{r}_2(\mathbf{u})$ . É por vezes conveniente utilizar também os autovetores em sua forma de vetor linha (autovetores à esquerda),  $\mathbf{l}_1(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{l}_2(\mathbf{u})$ , normalizados de modo que

$$\mathbf{l}_a \mathbf{r}_b = \delta_{ab}. \quad (5.42)$$

Mais adiante escolheremos a normalização desejável de  $\mathbf{r}_a$ , que fixará também a de  $\mathbf{l}_a$ .

O par  $[\mathbf{r}_a, \lambda_a]$  costuma ser chamado de  $a$ -ésimo **campo característico** do problema.

<sup>13</sup> Há aqui uma dissidência semântica na literatura. Alguns autores preferem chamar *locus* de Hugoniot ao conjunto de todas as retas (mais adiante, curvas) de Hugoniot.



## 5.2.2.1 Invariantes de Riemann

Estamos resolvendo o problema (5.3). Como explicitado acima, temos autovetores pela esquerda e pela direita correspondentes a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

$$\mathbf{l}_a \mathcal{A} = \lambda_a \mathbf{l}_a \quad (5.43a)$$

$$\mathcal{A} \mathbf{r}_a = \lambda_a \mathbf{r}_a. \quad (5.43b)$$

**Definição 5.1.** *Um  $a$ -invariante de Riemann (Smoller, 1983)<sup>14</sup> é uma função  $\Gamma_a : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que se  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ ,*

$$\langle \mathbf{r}_a(\mathbf{u}), \nabla \Gamma_a(\mathbf{u}) \rangle = 0, \quad (5.44)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual em  $\mathbb{R}^N$  e  $\nabla$  é tomado em relação às variáveis  $\mathbf{u}$ .

Consideremos agora as equações (5.44) no  $\mathbb{R}^2$ . Lembrando de (5.42), elas asseguram que  $\Gamma_a(\mathbf{u})$  é colinear a  $\mathbf{l}_b(\mathbf{u})$ .

Agora invocaremos um fato que só vale para o caso  $N = 2$ : os autovetores à esquerda e à direita são biortogonais, o que nos leva a

$$\nabla \Gamma_1 \mathcal{A} = \lambda_2 \nabla \Gamma_1, \quad (5.45a)$$

$$\nabla \Gamma_2 \mathcal{A} = \lambda_1 \nabla \Gamma_2. \quad (5.45b)$$

Multiplique agora (5.41) escalarmente por  $\nabla \Gamma_1$ . Teremos

$$\nabla \Gamma_1 \cdot \mathbf{u}_t + \nabla \Gamma_1 \cdot \mathcal{A} \mathbf{u}_x = 0. \quad (5.46)$$

Por (5.45a), vem

$$\nabla \Gamma_1 \cdot \mathbf{u}_t + \lambda_2 \nabla \Gamma_1 \cdot \mathbf{u}_x = 0. \quad (5.47)$$

Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\Gamma_{1,t} + \lambda_2 \Gamma_{1,x} = 0. \quad (5.48)$$

Cálculo análogo conduz a

$$\Gamma_{2,t} + \lambda_1 \Gamma_{2,x} = 0. \quad (5.49)$$

---

<sup>14</sup> Definição 17.1, p. 321

A expressões (5.48-5.49) conduzem a que, respectivamente, as derivadas direcionais sejam

$$D_{C_2}\Gamma_1 = 0 \quad \text{e} \quad D_{C_1}\Gamma_2 = 0, \quad (5.50)$$

onde as características  $C_2$  e  $C_1$  são dadas respectivamente por

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1(\mathbf{u}(x, t)) \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_2(\mathbf{u}(x, t)). \quad (5.51)$$

Trata-se de um caso especial do problema de integrabilidade de formas de Pfaff (Whitham, 1974).

As equações (5.50) mostram que  $\Gamma_1$  é constante ao longo de  $C_2$  e  $\Gamma_2$  é constante ao longo de  $C_1$ . Em homenagem ao seu descobridor, que os introduziu em Riemann (1860), eles são chamados **invariantes de Riemann**.

Note que para chegar à conclusão da constância dessas funções ao longo das características, fizemos uso de um fato que é privativo do  $\mathbb{R}^2$ . Para  $N \neq 2$  as funções  $\Gamma_a$  ainda podem ser construídas, mas não são mais invariantes em geral. Neste caso levam o nome de *variáveis* ou *funções* de Riemann (Whitham, 1974)<sup>15</sup>.

**Definição 5.2.** *Chama-se uma  **$\alpha$ -rarefação** a uma solução  $\mathbf{u}$  de (5.41) num domínio  $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$  onde o  $\alpha$ -invariante de Riemann seja constante (Smoller, 1983)<sup>16</sup>.*

### 5.2.2.2 Choques

Desejamos encontrar os dois *loci* de Hugoniot, correspondentes a  $\mathbf{r}_1(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{r}_2(\mathbf{u})$ , que contêm um ponto escolhido  $\mathbf{u}_-$ , i.e., o lugar geométrico dos pontos ligados a  $\mathbf{u}_-$  respectivamente por um 1-choque e um 2-choque.

Tomemos a condição de Rankine-Hugoniot (5.10). Fixando o ponto de interesse  $\mathbf{u}_-$ , a condição para os pontos de um locus de Hugoniot traduz-se como o lugar geométrico dos pontos  $\mathbf{u}$  tais que

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_-) - \mathbf{f}(\mathbf{u}) = s(\mathbf{u}_- - \mathbf{u}), \quad (5.52)$$

para algum  $s$ .

Trata-se de uma equação vetorial que contém duas equações escalares, e possuímos, como incógnitas, além das duas componentes de  $\mathbf{u}$ , a velocidade dos choque  $s$ , que pode ser entendida como parâmetro livre.

<sup>15</sup> p. 125

<sup>16</sup> Definição 17.3, p. 322

Assim, (5.52) fornece duas famílias a um parâmetro de soluções, uma correspondente a cada autovetor.<sup>17</sup>

Para obtermos as duas famílias de soluções, parametrizaremos (5.52) convenientemente como

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_-) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(\xi_a)) = s_a(\xi_a)[\mathbf{u}_- - \mathbf{u}(\xi_a)], \quad (5.53)$$

onde  $a = 1, 2$ .

Para fixar a solução desejada dentro de cada família, escolhemos impor as condições que  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_-$  e que  $s(0)$  é a velocidade do choque em  $\mathbf{u}_-$ .

Diferenciando a expressão (5.53) em relação a  $\xi_a$ , temos

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_a} = s_a(\xi_a) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_a}, \quad (5.54)$$

sendo conveniente lembrar que  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}$  denota a matriz jacobiana  $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ .

Fazendo o parâmetro  $\xi_a = 0$ , temos que

$$\mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_a} \Big|_{\xi_a=0} = s_a(0) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_a} \Big|_{\xi_a=0}, \quad (5.55)$$

o que implica que  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_a} \Big|_{\xi_a=0}$  é um autovetor de  $\mathcal{A}$  em  $\mathbf{u}_-$  com autovalor  $s_a(0) = \lambda_a(\mathbf{u}_-)$ .

A curva de Hugoniot construída a partir do ponto  $\mathbf{u}_-$  onde o autovetor  $\mathbf{r}_a$  é, portanto, tangente a  $\mathbf{r}_a(\mathbf{u}_-)$  neste ponto. Construir a curva completa equivale a resolver (5.53) sujeita à condição de tangência da curva ao autovetor correspondente no ponto  $\mathbf{u}_-$  com a velocidade do choque naquele ponto igual ao respectivo autovalor  $\lambda_a$ .

Isto deve ser feito para  $a = 1$  para encontrar os pontos ligados a  $\mathbf{u}_-$  por um 1-choque, e o mesmo procedimento para  $a = 2$  para obter-se o 2-choque. Chamemos  $\mathcal{H}_a(\mathbf{u}_-)$ ,  $a = 1, 2$ , a essas duas curvas.

Em princípio, o problema de Riemann então *poderia* ser resolvido construindo-se a curva  $\mathcal{H}_1(\mathbf{u}_E)$  e percorrendo-a de  $\xi_1 = 0$  até encontrar o ponto onde ela intercepta a curva  $\mathcal{H}_2(\mathbf{u}_D)$ , que é o estado intermediário  $\mathbf{u}^*$ . Percorre-se agora  $\mathcal{H}_2(\mathbf{u}_D)$  até  $\xi_2 = 0$ , obtendo a solução como a sucessão dos dois choques como em (5.40).

Isto nem sempre, entretanto, é possível. Para que uma solução assim exista, é necessário primeiramente que  $\mathbf{u}_E$  e  $\mathbf{u}_D$  estejam suficientemente próximos, pois pode-se garantir [Lax, 1957; LeFloch, 2002<sup>18</sup>] apenas que, para  $\mathbf{f}$  suave, a solução de (5.52) exista numa vizinhança  $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}$  de  $\mathbf{u}_-$ .

<sup>17</sup> No caso linear isto não ocorre pelo fato de  $s$  não ser um parâmetro a fixar, e sim igual a um dos autovalores de  $\mathcal{A}$ , que são constantes.

<sup>18</sup> cap. VI

Assim, a depender da distância entre  $\mathbf{u}_E$  e  $\mathbf{u}_D$  e dos tamanhos das vizinhanças de  $\mathbf{u}_E$  e  $\mathbf{u}_D$  onde a dita solução existe, a curva do 1-choque contendo  $\mathbf{u}_E$  e a curva do 2-choque contendo  $\mathbf{u}_D$  podem não interceptar-se. Neste caso, o estado intermediário  $\mathbf{u}^*$  não existiria e tampouco uma solução para o problema de Riemann na forma (5.40).

Esta não é, porém, sequer a única nem mais importante restrição, pois ainda não introduzimos as considerações de entropia discutidas em 5.1.2 no problema, que restringirão ainda mais a possibilidade de uma solução da forma (5.40) existir.

Em verdade, apenas a “metade” de cada curva  $\mathcal{H}_a(\mathbf{u}_-)$  é o lugar geométrico de estados  $\mathbf{u}$  ligados a  $\mathbf{u}_-$  por um choque compressivo de forma fisicamente viável, isto é, que respeite as condições entropia. A outra “semicurva”, contendo estados  $\mathbf{u}$  que se ligam a  $\mathbf{u}_-$  de forma a violar as condições de entropia, tem que ser descartada.

Chamemos  $\tilde{\mathcal{H}}_a(\mathbf{u}_-)$  a “meia curva” correspondente ao lugar geométrico de estados  $\mathbf{u}$  ligados a  $\mathbf{u}_-$  por um choque que satisfaz às condições de entropia. Lembremos que  $s_a(\xi_a)$  é a velocidade do choque no ponto  $\mathbf{u}(\xi_a)$  e é o autovalor  $\lambda_a(\mathbf{u}(\xi_a))$ .

A condição de entropia de Lax, porém, impõe que percorrer a curva de Hugoniot de  $\mathbf{u}_-$  para  $\mathbf{u}$ , por exemplo, só é admissível se

$$\lambda_a(\mathbf{u}_-) > s_a > \lambda_a(\mathbf{u}(\xi_a)). \quad (5.56)$$

Lembramos que o ponto  $\mathbf{u}_-$  corresponde a  $\xi_a = 0$  e o ponto  $\mathbf{u}$  a um  $\xi_a$  arbitrário. O ponto  $\mathbf{u}_-$  pode ser encarado como nosso ponto de interesse, a partir do qual estamos construindo as curvas de Hugoniot. Há autores que o chamam curiosamente de o “pé” da curva.

Prosseguindo na linha iniciada em (5.54-5.55), vamos agora diferenciar a relação (5.53) em relação a  $\xi_a$ , denotando, para maior conveniência, a derivada em relação em relação a  $\xi_a$  pelo símbolo ‘:

$$s'_a[\mathbf{u}] + s_a \mathbf{u}' = \mathbf{f}'. \quad (5.57)$$

Tomando  $\xi_a = 0$ , vem (pois  $[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$ ):

$$s_a(0) \mathbf{u}'(0) = \mathcal{A}(\mathbf{u}_-) \mathbf{u}'(0), \quad (5.58)$$

mostrando o que já sabíamos, isto é, que  $s_a(0)$  é autovalor de  $\mathcal{A}$  em  $\mathbf{u}_-$ , e, mais, que  $\mathbf{u}'(0) = \mathbf{r}_a(\mathbf{u}_-)$ .

Diferenciando (5.57) novamente e levando  $\xi_a$  a zero, temos

$$s_a(0) \mathbf{u}''(0) + 2s'_a(0) \mathbf{u}'(0) = \mathcal{A} \mathbf{u}''(0) + \mathcal{A}' \mathbf{u}'(0). \quad (5.59)$$

Substituindo os fatos conhecidos, reescrevemos

$$\lambda_a(\mathbf{u}_-)\mathbf{u}''(0) + 2s'_a(0)\mathbf{r}_a(\mathbf{u}_-) = \mathcal{A}\mathbf{u}''(0) + \mathcal{A}'\mathbf{r}_a(\mathbf{u}_-) \quad (5.60)$$

Socorremo-nos da prosaica relação  $\lambda_a\mathbf{r}_a = \mathcal{A}\mathbf{r}_a$  e também a diferenciamos em relação a  $\xi_a$ , sendo certo que ela é válida em particular para  $\xi_a = 0$ :

$$\lambda'_a\mathbf{r}_a + \lambda_a\mathbf{r}'_a = \mathcal{A}'\mathbf{r}_a + \mathcal{A}\mathbf{r}'_a. \quad (5.61)$$

Subtraindo (5.61) de (5.60), temos que

$$\lambda_a(\mathbf{u}_-)[\mathbf{u}''(0) - \mathbf{r}'_a(\mathbf{u}_-)] + [2s'_a(0) - \lambda'_a(\mathbf{u}_-)]\mathbf{r}_a(\mathbf{u}_-) = \mathcal{A}[\mathbf{u}''(0) - \mathbf{r}'_a(\mathbf{u}_-)]. \quad (5.62)$$

Como  $\mathbf{u}'(0) = \mathbf{r}_a(\mathbf{u}_-)$ , concluímos ser nulo o segundo termo desta equação:

$$2s'_a(0) - \lambda'_a(0) = 0. \quad (5.63)$$

Para finalmente concluir a demonstração, retomemos (5.63). Podemos escrever, sem perda de generalidade,

$$2s'_a(0) = \lambda'_a(0) = 1. \quad (5.64)$$

O valor numérico exato depende apenas da normalização escolhida. O valor 1, porém, é bastante cômodo, e é compatível com a normalização que escolheremos ao falar de não linearidade genuína.

Daí decorre, expandindo  $\lambda_a(\xi_a)$  e  $s_a(\xi_a)$  em série de Taylor e retendo termos até primeira ordem em  $\xi_a$ , que

$$\lambda_a(\xi_a) = \lambda_a(0) + \xi_a + O(\xi_a^2) \quad (5.65a)$$

$$s_a(\xi_a) = \lambda_a(0) + \frac{\xi_a}{2} + O(\xi_a^2). \quad (5.65b)$$

Reescrevendo as condições (5.56):

$$\lambda_a(0) > s_a > \lambda_a(\xi_a), \quad (5.66)$$

torna-se muito claro que (5.65) só pode ser satisfeita para o parâmetro  $\xi_a < 0$ .

Isto demonstra cabalmente que apenas o trecho de  $\mathcal{H}_a$  correspondente a valores negativos do parâmetro  $\xi_a$  é fisicamente realizável, pois obedece às condições de entropia (5.66).

Pode-se percorrer a curva de Hugoniot a partir de  $\xi_a = 0$  no sentido decrescente do parâmetro  $\xi_a$ , até que ela termine. Chamamos a este trecho  $\tilde{\mathcal{H}}_a$ .

A outra “metade”, com  $\xi_a > 0$ , é fisicamente inviável, violando a entropia, e deve *ergo* ser descartada.

Para o caso estritamente convexo, como o nosso, esta condição de entropia simplesmente garante que as características *entram* no choque com o avançar do tempo, resultando num requerimento mais simples que é apenas

$$\lambda_a(0) > \lambda_a(\xi_a), \quad (5.67)$$

pois  $\lambda_a$  varia monotonicamente ao longo da mesma curva de Hugoniot.

### 5.2.2.3 Rarefações

Ampliemos nossas possibilidades estudando uma segunda classe de soluções, relacionada às campos integrais dos autovetores  $\mathbf{r}_a(\mathbf{u})$  de  $\mathcal{A}$ . Contrariamente aos choques, estas soluções são contínuas – ou melhor, enquanto o rigor matemático for uma preocupação nossa, digamos *Lipschitz contínuas*.

Elas originam-se da propriedade de que todas as soluções do problema de Riemann são constantes ao longo de raios da forma  $x = \xi t$ , ou, dito de outro modo, são funções apenas da razão  $\xi = x/t$ .

Podemos pensar também em termos de autossimilaridade, isto é, se executarmos a transformação  $(x, t) \mapsto (\vartheta x, \vartheta t)$ , sendo  $\vartheta$  constante, uma solução do problema de Riemann não deixa de sê-lo.

Pelas considerações acima, sentimo-nos motivados a buscar soluções contínuas para o problema de Riemann que dependam apenas da variável de similaridade  $\xi$ , respeitando, naturalmente, as condições de contorno do problema.

Em nosso caso bidimensional, esperamos encontrar duas famílias de soluções, que serão indexadas pelo índice  $a$ ,  $a = 1, 2$ .

Um candidato a solução desta forma seria

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_-, & x < \xi_- t \\ \beta_a(x/t), & \xi_- t < x < \xi_+ t \\ \mathbf{u}_+, & x > \xi_+ t \end{cases}, \quad (5.68)$$

onde  $\beta_a$  é uma função suave com  $\beta_a(\xi_-) = \mathbf{u}_- = \mathbf{u}_E$  e  $\beta_a(\xi_+) = \mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_D$ .

Procederemos como antes. Tomaremos um ponto  $\mathbf{u}_-$  de interesse. Como o problema é estritamente convexo, ou seja,  $p'' > 0$ , todos os campos são **genuinamente não lineares**.

Lembremos que um campo **degeneradamente linear** não permite rarefações, embora possua invariantes de Riemann. Suas soluções são *descontinuidades de contato*. Já um **campo linear** (tratado em 5.2.1) não admite nenhum dos dois, mas tão somente choques com velocidades iguais aos autovalores.

Dizemos que o  $a$ -ésimo campo característico é **genuinamente não linear** se

$$\nabla \lambda_a(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_a(\mathbf{u}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}. \quad (5.69)$$

Tomamos a oportunidade para impor uma normalização conveniente para  $\mathbf{r}_a$ :

$$\nabla \lambda_a(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_a(\mathbf{u}) = 1 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}. \quad (5.70)$$

A solução desejada deve satisfazer à EDO

$$-\xi \boldsymbol{\beta}'_a + \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}_a)' = \mathbf{0}, \quad \text{sendo} \quad \boldsymbol{\beta}_a = \boldsymbol{\beta}_a(\xi), \quad (5.71)$$

que é apenas a reescritura da EDP original em termos da variável  $\xi$  no lugar de  $(x, t)$ , o que é trivialmente verificável, com condições de contorno

$$\boldsymbol{\beta}_a(-\infty) = \mathbf{u}_- \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\beta}_a(\infty) = \mathbf{u}_+. \quad (5.72)$$

As rarefações serão soluções suaves e autossimilares da equação (5.71). Podemos construí-las resolvendo a EDO equivalente

$$[-\xi + \mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_a)] \boldsymbol{\beta}'_a = 0, \quad (5.73)$$

ou, para maior clareza,

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_a) \boldsymbol{\beta}'_a = \xi \boldsymbol{\beta}'_a, \quad (5.74)$$

o que mostra que, obviamente,  $\boldsymbol{\beta}'_a$  é um autovetor de  $\mathcal{A}$ , desde que  $\boldsymbol{\beta}'_a(\xi) \neq \mathbf{0}$ .

Sendo  $\mathbf{r}_a$  normalizado, existem escalares  $c_a(\xi)$ ,  $a = 1, 2$ , tais que

$$\boldsymbol{\beta}'_a(\xi) = c_a(\xi) \mathbf{r}_a(\boldsymbol{\beta}_a(\xi)), \quad (5.75)$$

sendo

$$\xi = \lambda_a(\boldsymbol{\beta}_a(\xi)). \quad (5.76)$$

A equação (5.75) demonstra que as soluções contínuas do problema proposto formam as curvas integrais dos autovetores de  $\mathcal{A}$ .

Se a condição de genuína não linearidade (5.69) estiver em vigor, as constantes  $c_a$  podem ser determinadas diferenciando-se (5.76), levando a

$$1 = c_a(\xi) \nabla \lambda_a(\boldsymbol{\beta}_a(\xi)) \cdot \mathbf{r}_a(\boldsymbol{\beta}_a(\xi)), \quad (5.77)$$

donde

$$c_a(\xi) = \frac{1}{\nabla \lambda_a(\beta_a(\xi)) \cdot \mathbf{r}_a(\beta_a(\xi))}. \quad (5.78)$$

Aplicando esta expressão a (5.75), vem uma EDO para  $\beta_a(\xi)$ :

$$\beta'_a(\xi) = \frac{\mathbf{r}_a(\beta_a(\xi))}{\nabla \lambda_a(\beta_a(\xi)) \cdot \mathbf{r}_a(\beta_a(\xi))}, \quad \xi_- < \xi < \xi_+. \quad (5.79)$$

Note que o denominador de (5.79) permanece finito apenas se  $\lambda_a(\xi)$  for monotônico entre  $\xi_-$  e  $\xi_+$  e que as equações (5.77) a (5.79) não são aplicáveis ao caso degeneradamente linear ou linear.

As condições iniciais são, naturalmente

$$\beta_a(\xi_-) = \mathbf{u}_-. \quad (5.80)$$

Como havíamos desde o início definido o ponto  $\mathbf{u}_-$  como nosso ponto arbitrário escolhido a partir do qual construir a curva (à maneira da seção anterior – “o pé”), escrevemos a rarefação como

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_-, & x < \xi_- t \\ \beta_a(x/t; \mathbf{u}_-), & \xi_- t < x < \xi_+ t \\ \mathbf{u}_+, & x > \xi_+ t \end{cases}, \quad (5.81)$$

que é uma solução Lipschitz contínua e autossimilar.

A equação (5.75) nos mostra, de fato, que o conjunto de pontos  $\mathbf{u}$  ligados ao nosso ponto escolhido  $\mathbf{u}_-$  por uma rarefação consiste em uma curva integral tangente ao campo vetorial  $\mathbf{r}_a$  em todos os seus pontos. Chamá-la-emos de  $\mathcal{J}_a(\mathbf{u}_-)$ .

Será ela inteira constituída de estados  $\mathbf{u}$  ligados ao nosso ponto inicial  $\mathbf{u}_-$  por uma rarefação fisicamente admissível, obediente às condições de entropia, ou teremos, à maneira do capítulo anterior, que fazer algum tipo de “amputação”?

Responderemos a esta pergunta agora. Podemos definir a velocidade da onda

$$s_a \mapsto \lambda_a(\beta_a(s_a; \mathbf{u}_-)). \quad (5.82)$$

Dado que a condição de não linearidade genuína  $\nabla \lambda_a \cdot \mathbf{r}_a(\mathbf{u}_-) = 1 > 0$  vale no ponto  $\mathbf{u}_-$ , ao menos na vizinhança deste ponto, esta função é crescente. Escolhendo qualquer valor  $s_a > 0$  e definindo  $\mathbf{u}_+ = \beta_a(s_a; \mathbf{u}_-)$  obtemos uma  $a$ -rarefação ligando  $\mathbf{u}_-$  e  $\mathbf{u}_+$ , que é o que desejamos. Já se escolhermos um valor  $s_a < 0$ , a fórmula da rarefação não produz valores unívocos e não seríamos capazes de atingir  $\mathbf{u}_+$ .



Desta forma, concluímos que em se tratando de uma rarefação, devemos desprezar o trecho da curva  $J_a(\mathbf{u}_-)$  com valores de  $s_a < 0$  e conservar apenas a “metade” da curva que possui  $s_a > 0$ . Chamaremos a este trecho fisicamente admissível da rarefação  $\tilde{J}_a(\mathbf{u}_-)$ .

Lembremos que  $s_a = \lambda_a(\beta_a(\xi)) = \xi$  (5.76) e que ela admite uma inversa, que chamaremos

$$\xi \mapsto \zeta(\xi) = \zeta(x/t). \quad (5.83)$$

Assim, chegamos à forma final da  $a$ -rarefação:

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_-, & x < \lambda_a(\mathbf{u}_-)t \\ \beta_a(\zeta(x/t); \mathbf{u}_-), & \lambda_a(\mathbf{u}_-)t < x < \lambda_a(\mathbf{u}_+)t \\ \mathbf{u}_+, & x > \lambda_a(\mathbf{u}_+)t \end{cases}, \quad (5.84)$$

tal como Godlewski e Raviart (1996),<sup>19</sup> LeVeque (1999),<sup>20</sup> LeFloch (2002)<sup>21</sup>.

Nunca é excessivo lembrar apenas o trecho com  $s_a > 0$  serve para construir uma rarefação fisicamente admissível, o trecho  $s_a < 0$  daria uma função multivalorada e deve, pois, ser descartado.

Ora, a curva  $\tilde{\mathcal{H}}_a(\mathbf{u}_-)$  começa justamente em  $\mathbf{u}_-$ , e a curva  $\tilde{J}_a(\mathbf{u}_-)$  começa precisamente no mesmo ponto. Nada mais natural que tentar uni-las numa única solução, e é exatamente isso que faremos na próxima seção. A esta solução chamaremos *onda*.

#### 5.2.2.4 Ondas

Definimos uma  $a$ -onda construída a partir de  $\mathbf{u}_-$  como

$$\mathcal{O}_a(\mathbf{u}_-) = \tilde{\mathcal{H}}_a(\mathbf{u}_-) \cup \tilde{J}_a(\mathbf{u}_-). \quad (5.85)$$

A  $a$ -onda  $\mathcal{O}_a(\mathbf{u}_-)$  é o conjunto de todos os estados  $\mathbf{u}$  que estão ligados a  $\mathbf{u}_-$  por um  $a$ -choque ou uma  $a$ -rarefação que respeitam as condições de entropia, como ilustrado na figura 5.

Tanto  $\tilde{\mathcal{H}}_a(\mathbf{u}_-)$  quanto  $\tilde{J}_a(\mathbf{u}_-)$  podem naturalmente ser parametrizadas por  $s$ , de modo que em  $\mathcal{O}_a(s; \mathbf{u}_-)$ , o trecho com  $s < 0$  corresponde a  $\tilde{\mathcal{H}}_a(\mathbf{u}_-)$  e o trecho com  $s > 0$  a  $\tilde{J}_a(\mathbf{u}_-)$  (LeFloch, 2002).<sup>22</sup>

<sup>19</sup> Equação 3.5, p. 51

<sup>20</sup> Equação 8.1, p. 81

<sup>21</sup> Equação 1.22, p.144

<sup>22</sup> Teorema 1.6

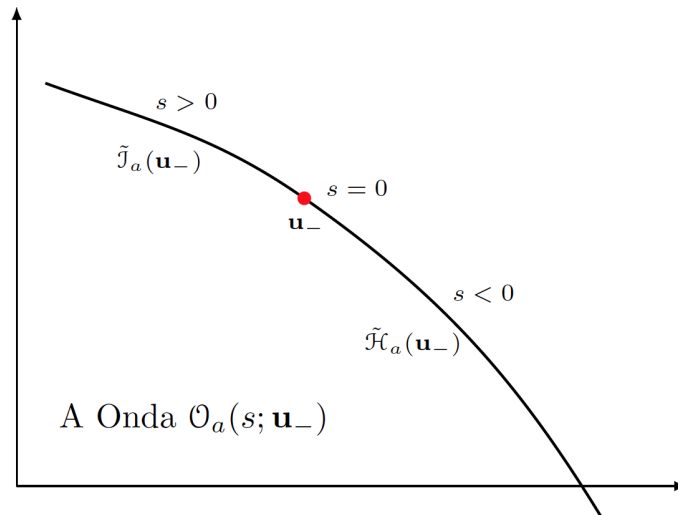


Figura 5 – A  $a$ -onda  $\mathcal{O}_a(s; \mathbf{u}_-)$  representada no plano de fase.

Mais ainda, as curvas  $\tilde{\mathcal{H}}_a(\mathbf{u}_-)$  e  $\tilde{\mathcal{J}}_a(\mathbf{u}_-)$  se juntam no ponto  $\mathbf{u}_-$  suavemente, com mesma inclinação e mesma curvatura (Lax, 1972). Apenas a terceira derivada em relação ao parâmetro comum  $s$  difere para as duas curvas.

Construiremos, no próximo capítulo, a solução completa do problema de Riemann como uma sucessão de  $a$ -ondas.

## 6 Solução do Problema de Riemann Associado à Relação Constitutiva Proposta

Introduzimos, no capítulo 4, com as devidas justificativas e motivações, a relação constitutiva  $p = p(\phi)$  (4.4) estudada neste trabalho. Não é redundante recordar a sua forma

$$p = c_1^2 \phi + c_2^2 \frac{\phi}{\bar{\epsilon} - \phi} - 2c_1 c_2 \sqrt{\bar{\epsilon}} \ln \left( \frac{\bar{\epsilon} - \phi}{\bar{\epsilon}} \right), \quad (6.1)$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes positivas.

O problema de Riemann associado para a fração de fluido  $\phi$  e a velocidade de encharcamento  $\phi v$  que nos propomos a resolver, escrito na forma de (5.3) é, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -v^2 + p' & 2v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

sujeito a condições iniciais da forma (5.23) dadas por

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} \phi_E, & x < 0 \\ \phi_D, & x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (\phi v)(x, 0) = \begin{cases} (\phi v)_E, & x < 0 \\ (\phi v)_D, & x > 0 \end{cases}, \quad (6.3)$$

onde  $\phi_E$ ,  $\phi_D$ ,  $(\phi v)_E$  e  $(\phi v)_D$  são constantes conhecidas.

O Teorema 5.4 de Lax (1972) garante que, para estados  $\begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix}_E$  e  $\begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix}_D$  suficientemente próximos, o problema de valor inicial (6.2-6.3) possui uma solução que consiste, para  $N = 2$ , em ligar o estado  $\begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix}_E$  por uma 1-onda a um estado intermediário  $\begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix}_*$ , e, em seguida, atingir o estado  $\begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix}_D$  a partir de  $\begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix}_*$  por meio de uma 2-onda.

Esquemáticamente, temos:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix}_E \xrightarrow{1\text{-onda}} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix}_* \xrightarrow{2\text{-onda}} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi v \end{pmatrix}_D, \quad (6.4)$$

em analogia com o que mostramos, anteriormente, para um caso bem mais simples em (5.40).

Ora, sabemos pelo capítulo anterior que uma  $a$ -onda é uma união de um trecho fisicamente admissível de um  $a$ -choque com um trecho também fisicamente admissível de uma  $a$ -rarefação, que têm natureza física substancialmente distinta. A solução completa de nosso problema passará, necessariamente, por discernir, em (6.4), os casos em que a primeira passagem é uma 1-rarefação ou um 1-choque e, igualmente, a segunda passagem é uma 2-rarefação ou um 2-choque.

Por contagem elementar, temos quatro possibilidades, que encontram-se exibidas na tabela 1. Estudaremos detidamente cada um dos casos, demonstrando as condições necessárias e suficientes para que ocorram e apresentando a forma de suas soluções.

Tabela 1 – Possíveis soluções para o Problema de Riemann

	$(\phi_E, v_E) \rightarrow (\phi_*, v_*)$	$(\phi_*, v_*) \rightarrow (\phi_D, v_D)$
Caso 1	1-rarefação	2-rarefação
Caso 2	1-choque	2-choque
Caso 3	1-rarefação	2-choque
Caso 4	1-choque	2-rarefação

Antes de dedicar-nos a este detalhamento dos quatro casos, é conveniente recapitular, organizar e deduzir algumas expressões que serão instrumentais à tarefa que estamos propondo. Notemos que por conveniência doravante não faremos mais menção a  $(\phi v)$ , mas simplesmente  $v$ .

Primeiramente calculamos sem dificuldades os autovalores da matriz  $\mathcal{A}$  exibida em (6.3). Ordenando-os segundo a convenção já estabelecida  $\lambda_1 < \lambda_2$ , temos

$$\lambda_1(\phi, v) = v - \sqrt{p'} \tag{6.5a}$$

$$\lambda_2(\phi, v) = v + \sqrt{p'}. \tag{6.5b}$$

Podemos fornecer a forma explícita de  $\sqrt{p'}$  para uso futuro, escrevendo

$$\sqrt{p'} = c_1 + c_2 \frac{\sqrt{\bar{\epsilon}}}{\bar{\epsilon} - \phi}. \tag{6.6}$$

Notemos também que

$$p'' = \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} = 2 \left( c_1 + c_2 \frac{\sqrt{\bar{\epsilon}}}{\bar{\epsilon} - \phi} \right) \frac{c_2 \sqrt{\bar{\epsilon}}}{(\bar{\epsilon} - \phi)^2} \tag{6.7}$$

é sempre positiva, fato que será invocado em algumas provas mais adiante.

Os invariantes de Riemann serão também ingredientes importantes das demonstrações que se seguem. Passemos agora a calculá-los.

É conveniente introduzir aqui uma função de  $\phi$  (definida a menos de uma constante) dada por

$$\Lambda(\phi) = \int^{\phi} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi. \quad (6.8)$$

Os invariantes de Riemann tomam a forma [ver, por exemplo, a equação (1.43) em Zel'dovich (1966)]:

$$\Gamma_- = v - \Lambda(\phi), \quad (6.9a)$$

$$\Gamma_+ = v + \Lambda(\phi), \quad (6.9b)$$

estando também sempre definidos a menos de uma constante.

Para a relação constitutiva (6.1), a forma explícita da função  $\Lambda(\phi)$  é

$$\Lambda(\phi) = \int^{\phi} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi = \int^{\phi} \left( \frac{c_1}{\varphi} + \frac{c_2 \sqrt{\bar{\epsilon}}}{\varphi(\bar{\epsilon} - \varphi)} \right) d\varphi = c_1 \ln \phi + \frac{c_2}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \ln \left( \frac{\phi}{\bar{\epsilon} - \phi} \right) + c_3, \quad (6.10)$$

onde  $c_3$  é uma constante de integração, que geralmente tomamos como zero por conveniência.

Acreditamos estar, agora, de posse de todas as expressões necessárias para analisar os quatro casos possíveis para a solução do problema de Riemann desta tese, estabelecendo e provando as condições necessárias e suficientes para que ocorram, bem como fornecendo (mesmo que implicitamente) expressões para os estados intermediários.

## 6.1 1-rarefação $\rightarrow$ 2-rarefação

A sucessão de duas rarefações  $(\phi_E, v_E) \xrightarrow{1\text{-rarefação}} (\phi_*, v_*) \xrightarrow{2\text{-rarefação}} (\phi_D, v_D)$  ocorre, pelo próprio conceito de rarefação, quando

$$\phi_* < \phi_E \quad \text{e} \quad \phi_* < \phi_D. \quad (6.11)$$

Uma discussão interessante que, *nolens volens*, precisaremos adiar é a impossibilidade da existência de soluções contínuas de natureza compressiva. Não fosse a limitação de espaço, certamente seria um tema digno de ser abordado neste trabalho.

**Proposição 6.1.** *A solução do problema de Riemann (6.1, 6.2, 6.3) é da forma 1-rarefação  $\rightarrow$  2-rarefação se e somente se*

$$v_D - v_E > \left| c_1 \left( \ln \frac{\phi_E}{\phi_D} \right) + c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \left( \ln \frac{\phi_E(\bar{\epsilon} - \phi_D)}{\phi_D(\bar{\epsilon} - \phi_E)} \right) \right|. \quad (6.12)$$

*Demonstração.* Sabemos pela definição 5.2 que ao longo da 1-rarefação o invariante de Riemann  $\Gamma_-$  é constante, assim como o invariante de Riemann  $\Gamma_+$  o é ao longo da 2-rarefação.

Assim, temos que

$$\Gamma_-(\phi_E) = \Gamma_-(\phi_*), \quad (6.13a)$$

$$\Gamma_+(\phi_*) = \Gamma_+(\phi_D), \quad (6.13b)$$

o que se traduz em

$$v_E - \Lambda(\phi_E) = v_* - \Lambda(\phi_*) \quad (6.14a)$$

$$v_* + \Lambda(\phi_*) = v_D + \Lambda(\phi_D). \quad (6.14b)$$

Somando (6.14a) e (6.14b), temos

$$v_E - v_D = \Lambda(\phi_E) + \Lambda(\phi_D) - 2\Lambda(\phi_*). \quad (6.15)$$

Usando (6.8), temos que

$$v_E - v_D = \int_{\phi_*}^{\phi_D} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi + \int_{\phi_*}^{\phi_E} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi = 2 \int_{\phi_*}^{\min\{\phi_E, \phi_D\}} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi + \int_{\min\{\phi_E, \phi_D\}}^{\max\{\phi_E, \phi_D\}} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi. \quad (6.16)$$

Dado que  $\frac{\sqrt{p'}}{\varphi} > 0$  e, pela hipótese (6.11),  $\phi_* < \min\{\phi_E, \phi_D\}$ , vem que

$$\int_{\phi_*}^{\min\{\phi_E, \phi_D\}} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi > 0, \quad (6.17)$$

donde

$$v_E - v_D > \int_{\min\{\phi_E, \phi_D\}}^{\max\{\phi_E, \phi_D\}} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi = |\Lambda(\phi_D) - \Lambda(\phi_E)|, \quad (6.18)$$

o que prova que

$$\phi_* < \phi_E \quad \text{e} \quad \phi_* < \phi_D \quad \implies \quad v_E - v_D > |\Lambda(\phi_D) - \Lambda(\phi_E)|, \quad (6.19)$$

e (6.12) é uma condição necessária.

Resta provar a afirmação inversa, demonstrando que (6.12) é também uma condição suficiente, isto é, que

$$v_E - v_D > |\Lambda(\phi_D) - \Lambda(\phi_E)| \quad \implies \quad \phi_* < \phi_E \quad \text{e} \quad \phi_* < \phi_D. \quad (6.20)$$

Retomamos (6.15), escrevendo-a de forma mais conveniente

$$2\Lambda(\phi_*) = \Lambda(\phi_E) + \Lambda(\phi_D) - (v_E - v_D). \quad (6.21)$$

Por outro lado, a hipótese (6.20) implica

$$2\Lambda(\phi_*) < \Lambda(\phi_E) + \Lambda(\phi_D) - |\Lambda(\phi_D) - \Lambda(\phi_E)|. \quad (6.22)$$

Abrindo o módulo da equação acima, temos que

(i) Se  $\phi_E < \phi_D$ :  $|\Lambda(\phi_D) - \Lambda(\phi_E)| = \Lambda(\phi_D) - \Lambda(\phi_E)$ , implicando  $2\Lambda(\phi_*) < 2\Lambda(\phi_E)$  e por conseguinte  $\phi_* < \phi_E < \phi_D$ .

(ii) Se  $\phi_E > \phi_D$ :  $|\Lambda(\phi_D) - \Lambda(\phi_E)| = \Lambda(\phi_E) - \Lambda(\phi_D)$ , implicando  $2\Lambda(\phi_*) < 2\Lambda(\phi_D)$  e por conseguinte  $\phi_* < \phi_D < \phi_E$ .

Como (i) e (ii) esgotam todas as possibilidades, (6.20) está demonstrada e, com isso, a proposição 6.1.  $\square$

### 6.1.1 Cálculo do estado intermediário

Recapitemos a igualdade dos invariantes de Riemann  $\Gamma_-$  e  $\Gamma_+$  (6.13) ao longo, respectivamente, da 1-rarefação e da 2-rarefação. Ela nos leva a

$$c_1 \ln \phi_* + c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \ln \left( \frac{\phi_*}{\bar{\epsilon} - \phi_*} \right) + v_* = c_1 \ln \phi_E + c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \ln \left( \frac{\phi_E}{\bar{\epsilon} - \phi_E} \right) + v_E, \quad (6.23a)$$

$$-c_1 \ln \phi_* - c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \ln \left( \frac{\phi_*}{\bar{\epsilon} - \phi_*} \right) + v_* = -c_1 \ln \phi_D - c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \ln \left( \frac{\phi_D}{\bar{\epsilon} - \phi_D} \right) + v_D. \quad (6.23b)$$

Somando as duas equações e multiplicando por  $\frac{1}{2}$ , chegamos a uma expressão para a velocidade do estado intermediário,  $v_*$ :

$$v_* = \frac{1}{2} \left[ c_1 \left( \ln \frac{\phi_E}{\phi_D} \right) + c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \left( \ln \frac{\phi_E(\bar{\epsilon} - \phi_D)}{\phi_D(\bar{\epsilon} - \phi_E)} \right) + v_E + v_D \right]. \quad (6.24)$$

Da própria condição (6.12), devidamente provada, vemos que módulo da soma dos dois primeiros termos do lado direito é menor que  $v_D - v_E$ . Assim, desdobramos novamente o módulo em dois casos, substituindo em (6.24):

(i)  $c_1 \left( \ln \frac{\phi_E}{\phi_D} \right) + c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \left( \ln \frac{\phi_E(\bar{\epsilon} - \phi_D)}{\phi_D(\bar{\epsilon} - \phi_E)} \right) < v_D - v_E$ . Neste caso, segue diretamente que  $v_D > v_*$ .

(ii)  $c_1 \left( \ln \frac{\phi_E}{\phi_D} \right) + c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \left( \ln \frac{\phi_E(\bar{\epsilon} - \phi_D)}{\phi_D(\bar{\epsilon} - \phi_E)} \right) > v_E - v_D$ . Aqui, segue que  $v_* > v_E$ .

Demonstrado está, pois, que

$$v_D > v_* > v_E. \quad (6.25)$$

Resta apenas apresentar uma expressão para a fração de fluido  $\phi_*$  neste caso. Ela está determinada implicitamente em qualquer das linhas de (6.23), onde todas as quantidades, exceto o próprio  $\phi_*$ , são conhecidas explicitamente.

## 6.2 1-choque $\rightarrow$ 2-choque

A sucessão de dois choques *compressivos*  $(\phi_E, v_E) \xrightarrow{1\text{-choque}} (\phi_*, v_*) \xrightarrow{2\text{-choque}} (\phi_D, v_D)$ , como sugere o próprio nome, dá-se na hipótese de ter-se

$$\phi_* > \phi_E \quad \text{e} \quad \phi_* > \phi_D. \quad (6.26)$$

**Proposição 6.2.** *A solução do problema de Riemann (6.1, 6.2, 6.3) é da forma 1-choque  $\rightarrow$  2-choque se e somente se*

$$v_E - v_D > |\phi_D - \phi_E| \sqrt{\left(\frac{p_D - p_E}{\phi_D - \phi_E}\right) \cdot \frac{1}{\phi_D \phi_E}}. \quad (6.27)$$

*Demonstração.* Retomemos (6.1). Vemos que  $p(\phi)$  é crescente e, destarte,  $p_D - p_E$  e  $\phi_D - \phi_E$  têm o mesmo sinal.

Se os estados  $(\phi_E, v_E)$  e  $(\phi_D, v_D)$  estão ligados por uma sucessão 1-choque  $\rightarrow$  2-choque, as condições de Rankine-Hugoniot (5.10)

$$\frac{[\phi v]}{[\phi]} = \frac{[\phi v^2 + p]}{[\phi v]} = s$$

têm de ser satisfeitas, separadamente, para cada um dos choques, brindando-nos com duas equações independentes:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_* v_* - \phi_E v_E}{\phi_* - \phi_E} &= \frac{\phi_* v_*^2 - \phi_E v_E^2 + (p_* - p_E)}{\phi_* v_* - \phi_E v_E} \\ \frac{\phi_D v_D - \phi_* v_*}{\phi_D - \phi_*} &= \frac{\phi_D v_D^2 - \phi_* v_*^2 + (p_D - p_*)}{\phi_D v_D - \phi_* v_*} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Resolvemos agora as duas linhas das condições de Rankine-Hugoniot (6.28) para  $v_*$ , o que terá grande utilidade futura. Tomaremos por exemplo a primeira linha e faremos o devido desenvolvimento, sendo o da segunda inteiramente análogo.

A primeira linha nos fornece

$$(\phi_* v_* - \phi_E v_E)^2 = (\phi_* - \phi_E) [\phi_* v_*^2 - \phi_E v_E^2 + (p_* - p_E)] \quad (6.29)$$

Desenvolvendo ambos os lados, temos:

$$\phi_*^2 v_*^2 - 2\phi_* v_* \phi_E v_E + \phi_E^2 v_E^2 = \phi_*^2 v_*^2 - \phi_* \phi_E v_E^2 + \phi_E^2 v_E^2 - \phi_* \phi_E v_*^2 + (\phi_* - \phi_E)(p_* - p_E). \quad (6.30)$$



Com os devidos cancelamentos e rearranjos, ficamos com

$$\phi_* \phi_E (v_* - v_E)^2 = (\phi_* - \phi_E)(p_* - p_E), \quad (6.31)$$

o que nos permite isolar  $v_*$  como

$$v_* = v_E - (\phi_* - \phi_E) \sqrt{\frac{p_* - p_E}{\phi_* - \phi_E} \cdot \frac{1}{\phi_* \phi_E}}. \quad (6.32)$$

O mesmo tratamento, se empregado à segunda linha de (6.28), nos dá

$$v_* = v_D - (\phi_D - \phi_*) \sqrt{\frac{p_D - p_*}{\phi_D - \phi_*} \cdot \frac{1}{\phi_* \phi_D}}. \quad (6.33)$$

Podemos agora igualar  $v_*$  em (6.32) e (6.33), que são equações independentes, o que nos dará

$$v_D - (\phi_D - \phi_*) \sqrt{\frac{p_D - p_*}{\phi_D - \phi_*} \cdot \frac{1}{\phi_D \phi_*}} = v_E - (\phi_* - \phi_E) \sqrt{\frac{p_* - p_E}{\phi_* - \phi_E} \cdot \frac{1}{\phi_* \phi_E}}. \quad (6.34)$$

Rearranjando, vem

$$v_D - v_E = (\phi_D - \phi_*) \sqrt{\frac{p_D - p_*}{\phi_D - \phi_*} \cdot \frac{1}{\phi_D \phi_*}} - (\phi_* - \phi_E) \sqrt{\frac{p_* - p_E}{\phi_* - \phi_E} \cdot \frac{1}{\phi_* \phi_E}}. \quad (6.35)$$

Com a devida atenção ao sinal de  $(\phi_D - \phi_*)$  que é negativo, tomamos o negativo da equação inteira e introduzimos estes termos na raiz quadrada, obtendo

$$v_E - v_D = \sqrt{p_* - p_D} \sqrt{\frac{1}{\phi_D} - \frac{1}{\phi_*}} + \sqrt{p_* - p_E} \sqrt{\frac{1}{\phi_E} - \frac{1}{\phi_*}}. \quad (6.36)$$

Sabemos que  $p_* > p_D$  pois  $p(\phi)$  é crescente. Pela hipótese,  $\phi_* > \phi_D$ . Assim, se trocarmos em (6.36) \* por  $D$ , estaremos zerando o primeiro termo, que é positivo, e diminuindo o segundo termo. A igualdade transforma-se, então, numa desigualdade com sinal  $>$ .

Portanto, a substituição  $* \rightarrow D$  leva (6.36) em

$$v_E - v_D > \sqrt{p_D - p_E} \sqrt{\frac{1}{\phi_E} - \frac{1}{\phi_D}}, \quad (6.37)$$

que é um rearranjo de (6.27), demonstrando que esta expressão é uma condição necessária para que a solução seja do tipo 1-choque  $\rightarrow$  2-choque, isto é,

$$\phi_* > \phi_E \quad \text{e} \quad \phi_* > \phi_D \quad \implies \quad v_E - v_D > \sqrt{p_D - p_E} \sqrt{\frac{1}{\phi_E} - \frac{1}{\phi_D}}. \quad (6.38)$$

Não há risco de perda de realidade na expressão (6.37) pois os termos contidos nos radicais têm sempre o mesmo sinal, de modo que seu produto é garantidamente positivo e o radical um número real.

Precisamos agora provar a afirmação de que ela também é uma condição suficiente, ou seja,

$$v_E - v_D > \sqrt{p_D - p_E} \sqrt{\frac{1}{\phi_E} - \frac{1}{\phi_D}} \implies \phi_* > \phi_E \quad \text{e} \quad \phi_* > \phi_D. \quad (6.39)$$

Adotaremos uma prova por contradição. Suponhamos e.g. que  $\phi_D < \phi_*$ . Ao efetuar a troca  $* \rightarrow D$  em (6.36), seremos levados a

$$v_E - v_D < \sqrt{p_D - p_E} \sqrt{\frac{1}{\phi_E} - \frac{1}{\phi_D}}, \quad (6.40)$$

o que contradiz a hipótese. Com isso provamos que (6.26) é também condição suficiente para a ocorrência de uma solução do tipo 1-choque  $\rightarrow$  2-choque.

Assim está provada a proposição 6.2. □

### 6.2.1 Cálculo do estado intermediário

A fração de fluido do estado intermediário  $\phi_*$  está implicitamente determinada em (6.35), onde é a única quantidade desconhecida

Quanto à velocidade do estado intermediário  $v_*$ , já a calculamos em (6.32) e (6.33), porém estas equações ainda dependem da fração de fluido intermediária,  $\phi_*$ . Isto não é problema algum pois indicamos imediatamente acima como calcular  $\phi_*$ . Abaixo apresentaremos ainda uma outra expressão para  $v_*$ .

Somando (6.32) e (6.33), e multiplicando por  $\frac{1}{2}$ , temos uma expressão adicional para  $v_*$ , que é

$$v_* = \frac{1}{2} \left( v_E + v_D - (\phi_D - \phi_*) \sqrt{\frac{p_D - p_*}{\phi_D - \phi_*} \cdot \frac{1}{\phi_* \phi_D}} - (\phi_* - \phi_E) \sqrt{\frac{p_* - p_E}{\phi_* - \phi_E} \cdot \frac{1}{\phi_* \phi_E}} \right). \quad (6.41)$$

Lembremos da condição (6.27) devidamente provada para que a solução seja do tipo 1-choque  $\rightarrow$  2-choque. Na mesma esteira da explicação detalhada fornecida para a obtenção de (6.37), e evitando tornar-nos repetitivos sobrecarregando o leitor com análise e técnicas de estimativa, vemos claramente que, em (6.41), a troca  $* \rightarrow D$  leva à conclusão

$$v_E > v_*,$$

assim como a troca  $* \rightarrow E$  comprova que

$$v_* > v_D.$$

Sintetizamos estas conclusões em

$$v_D < v_* < v_E. \quad (6.42)$$

### 6.3 Casos “mistos”

Quando nenhuma das condições elencadas e demonstradas acima (Proposições 6.1 e 6.2) é satisfeita, i. e.,

$$\left| c_1 \left( \ln \frac{\phi_E}{\phi_D} \right) + c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \left( \ln \frac{\phi_E(\bar{\epsilon} - \phi_D)}{\phi_D(\bar{\epsilon} - \phi_E)} \right) \right| > v_D - v_E > -|\phi_D - \phi_E| \sqrt{\left( \frac{p_D - p_E}{\phi_D - \phi_E} \right) \cdot \frac{1}{\phi_D \phi_E}}, \quad (6.43)$$

estaremos diante de um dentre os que denominamos Caso 3 e Caso 4 na tabela 1, isto é, de uma solução do tipo 1-rarefação  $\rightarrow$  2-choque ou 1-choque  $\rightarrow$  2-rarefação. Todo o recém exposto pode ser aplicado sem maiores delongas a estes casos, pois a teoria já se encontra inteiramente desenvolvida em detalhe tanto para choques quanto para rarefações. E é o que faremos nas duas próximas breves seções.

### 6.4 1-rarefação $\rightarrow$ 2-choque

A solução do tipo 1-rarefação  $\rightarrow$  2-choque caracteriza-se, naturalmente, pelas condições  $\phi_E > \phi_*$  e  $\phi_* > \phi_D$ , resultando diretamente em  $\phi_E > \phi_D$ , fato que, no caso de estarmos numa situação onde (6.43) vale, serve para discernir entre as duas possibilidades remanescentes.

Valerão, portanto, para a primeira passagem (a rarefação), as equações obtidas na seção 6.1; e na segunda passagem (o choque), o que foi deduzido na seção 6.2.

Assim, vemos que as equações que determinam o estado intermediário são (6.23a) e (6.33):

$$\begin{aligned} c_1 \ln \phi_* + c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \ln \left( \frac{\phi_*}{\bar{\epsilon} - \phi_*} \right) + v_* &= c_1 \ln \phi_E + c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \ln \left( \frac{\phi_E}{\bar{\epsilon} - \phi_E} \right) + v_E, \\ v_* &= v_D - (\phi_D - \phi_*) \sqrt{\frac{p_D - p_*}{\phi_D - \phi_*} \cdot \frac{1}{\phi_* \phi_D}}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

bastando resolver o sistema para  $\phi_*$  e  $v_*$  que são as únicas quantidades desconhecidas.

A análise de sinais nas duas equações acima, mais imediatamente visível na segunda linha, à luz dos fatos conhecidos  $\phi_E > \phi_*$  e  $\phi_D > \phi_*$ , e  $p_E > p_*$  e  $p_D > p_*$ , nos mostra que este caso exibe o comportamento de velocidades

$$v_* < v_E \quad \text{e} \quad v_* < v_D, \quad (6.45)$$

inexistindo elementos para qualquer afirmação ulterior.

## 6.5 1-choque $\rightarrow$ 2-rarefação

A solução do tipo 1-choque  $\rightarrow$  2-rarefação caracteriza-se, de modo igualmente esperado, pelas condições  $\phi_E < \phi_*$  e  $\phi_* < \phi_D$ , o que importa automaticamente  $\phi_E < \phi_D$ , fato patognomônico desta classe de soluções na vigência de (6.43).

Valerá, portanto, para a primeira passagem (choque), a teoria desenvolvida na seção 6.2; e na segunda passagem (rarefação), o que logramos deduzir na seção 6.1.

O estado intermediário fica completamente determinado por (6.23b) e (6.32), na forma do sistema

$$\begin{aligned} -c_1 \ln \phi_* - c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \ln \left( \frac{\phi_*}{\bar{\epsilon} - \phi_*} \right) + v_* &= -c_1 \ln \phi_D - c_2 \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \ln \left( \frac{\phi_D}{\bar{\epsilon} - \phi_D} \right) + v_D, \\ v_* &= v_E - (\phi_* - \phi_E) \sqrt{\frac{p_* - p_E}{\phi_* - \phi_E} \cdot \frac{1}{\phi_* \phi_E}}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Para concluir, com base nos mesmos elementos de análise de sinais, tudo que podemos afirmar sobre o comportamento de velocidades é

$$v_* > v_E \quad \text{e} \quad v_* > v_D. \quad (6.47)$$

## 6.6 Recapitulação e Síntese Final

Nas últimas seções, dedicamo-nos a analisar em algum detalhe as quatro possíveis classes de soluções para o problema de Riemann associado à nova relação constitutiva desta tese, conseguindo estabelecer as condições necessárias e suficientes para que cada uma delas ocorra, suas principais propriedades, e formas (ora implícitas, ora explícitas) para a fração de fluido e a velocidade do fluido no estado intermediário. Analisamos também o comportamento relativo das velocidades do fluido para cada caso nos três trechos de interesse ( $E$ ,  $*$  e  $D$ ).

Procuramos sintetizar todo este trabalho na tabela 2 abaixo.

Tabela 2 – Tipos de Soluções para o Problema de Riemann associado a este trabalho e atributos de suas frações de fluido e as velocidades do fluido.

	$(\phi_E, v_E) \rightarrow (\phi_*, v_*)$	$(\phi_*, v_*) \rightarrow (\phi_D, v_D)$	Frações de Fluido	Velocidades
Caso 1	1-rarefação	2-rarefação	$\phi_* < \phi_E$ e $\phi_* < \phi_D$	$v_E < v_* < v_D$
Caso 2	1-choque	2-choque	$\phi_* > \phi_E$ e $\phi_* > \phi_D$	$v_E > v_* > v_D$
Caso 3	1-rarefação	2-choque	$\phi_E > \phi_* > \phi_D$	$v_* < v_E$ e $v_* < v_D$
Caso 4	1-choque	2-rarefação	$\phi_E < \phi_* < \phi_D$	$v_* > v_E$ e $v_* > v_D$

Não medimos esforços para produzir um texto autocontido, que iniciasse a teoria dos primeiros princípios e a desenvolvesse até que o leitor, mesmo relativamente pouco versado no assunto, pudesse compreender os resultados centrais e inéditos deste trabalho, ligados à proposição de uma relação constitutiva inovadora (4.4)/(6.1).

Foi neste espírito que tentamos, modestamente, oferecer esta pequena contribuição ao tema, que ora submetemos à apreciação de nossos preclaros colegas.

O capítulo seguinte, para encerrar a exposição, exhibe diferentes resultados ligados ao problema em questão.

## 7 Resultados

A fim de ilustrar as características da relação constitutiva (4.4) proposta neste trabalho, consideram-se os seguintes dados iniciais (em  $t = 0$ ):

$$(\phi, v) = (0.85, 10.0), \text{ para } -\infty < x < 0$$

$$(\phi, v) = (0.60, 0.0), \text{ para } 0 < x < \infty,$$

representados na figura 6.

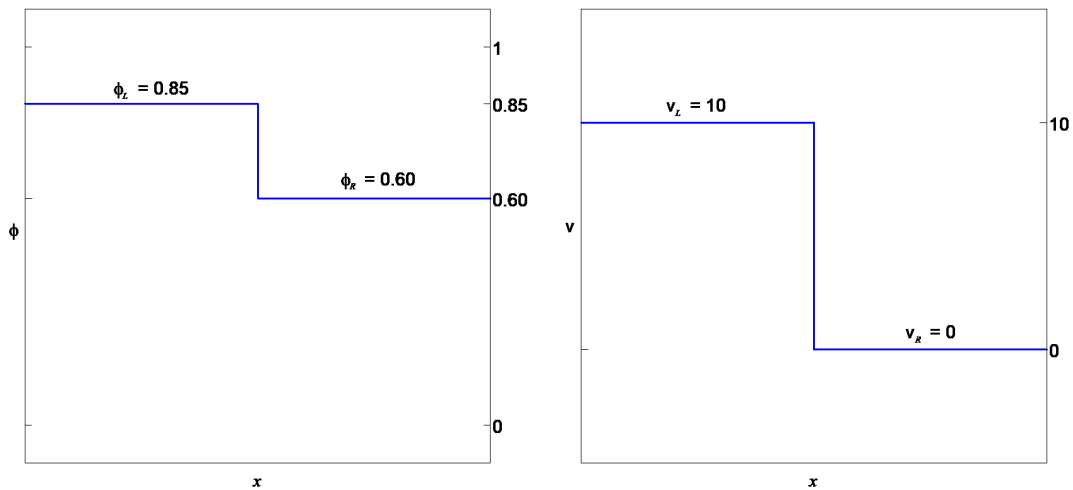


Figura 6 – Dados Iniciais

Todos os resultados apresentados neste capítulo são obtidos supondo uma porosidade  $\epsilon = 0.9$  e uma saturação de 5%, ou seja, com  $\delta = 0.045$ . Cabe ressaltar que esta supersaturação pode ser escolhida e pode ser feita tão pequena quanto se deseje.

As figuras 7 a 10 representam o comportamento da fração de fluido em função da posição para quatro instantes de tempo, considerando alguns valores escolhidos de  $c_1$  e  $c_2$  em (4.4). Já as figuras 11 a 14 representam o comportamento da velocidade do constituinte fluido em função da posição para quatro instantes de tempo, mantidos os mesmos valores de  $c_1$  e  $c_2$ . Em todos os casos foram empregados os seguintes valores para a constante  $c_1$ :  $c_1 = 1.0$ ,  $c_1 = 10.0$ ,  $c_1 = 20.0$  e  $c_1 = 30.0$ , enquanto para a constante  $c_2$  foram empregados os valores  $c_2 = 0.5$ ,  $c_2 = 1.0$  e  $c_2 = 2.0$ .

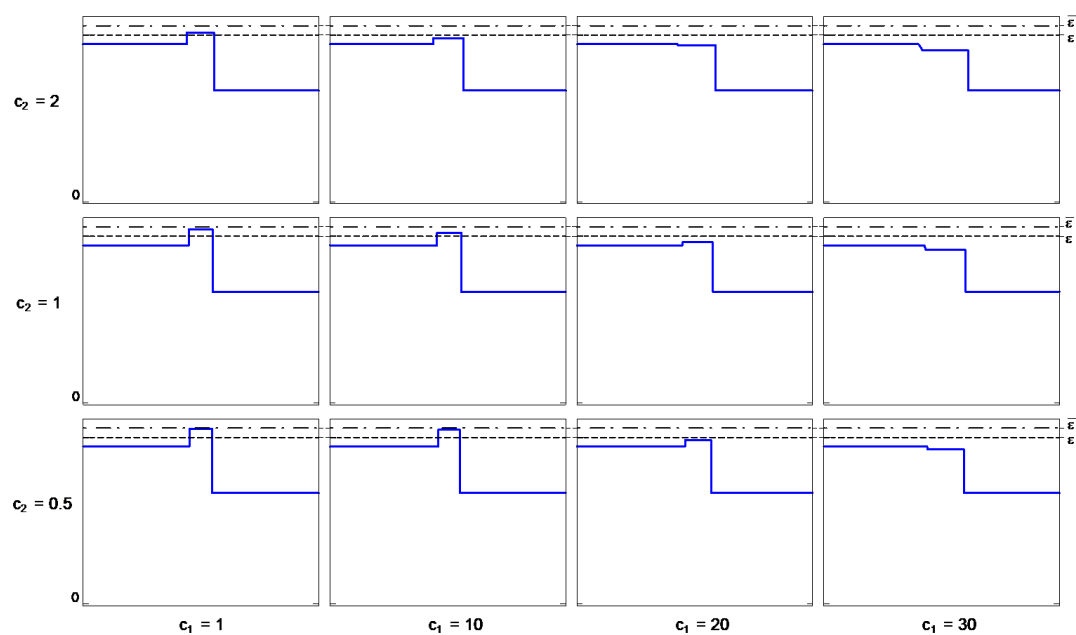


Figura 7 – Comportamento da fração de fluido ao longo do eixo  $x$  para valores escolhidos de  $c_1$  e  $c_2$  em  $t = 0.25$ .

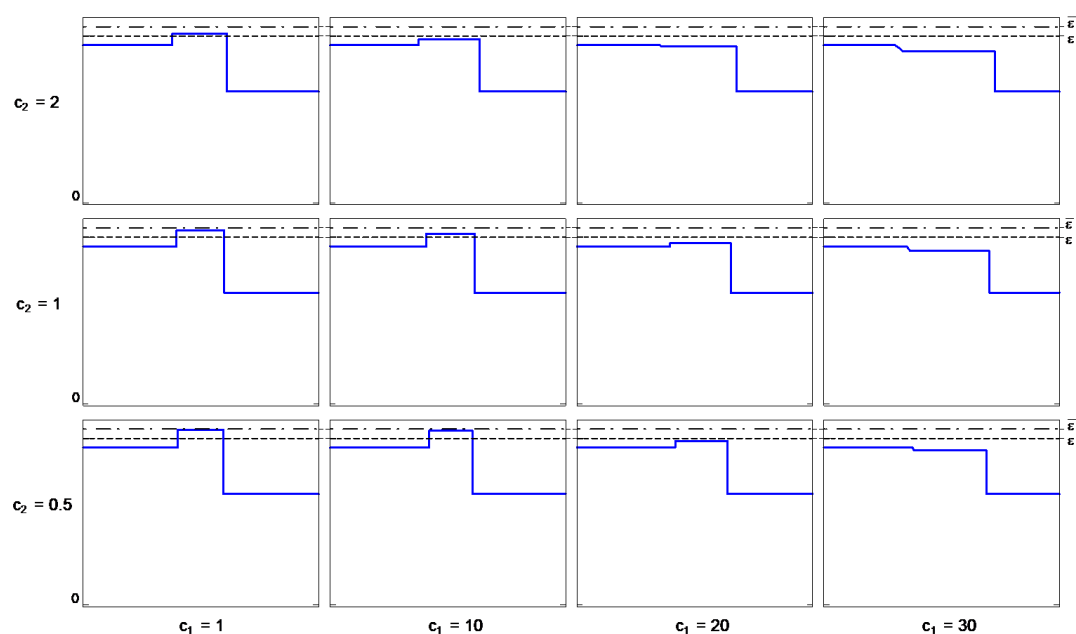


Figura 8 – Comportamento da fração de fluido ao longo do eixo  $x$  para valores escolhidos de  $c_1$  e  $c_2$  em  $t = 0.50$ .

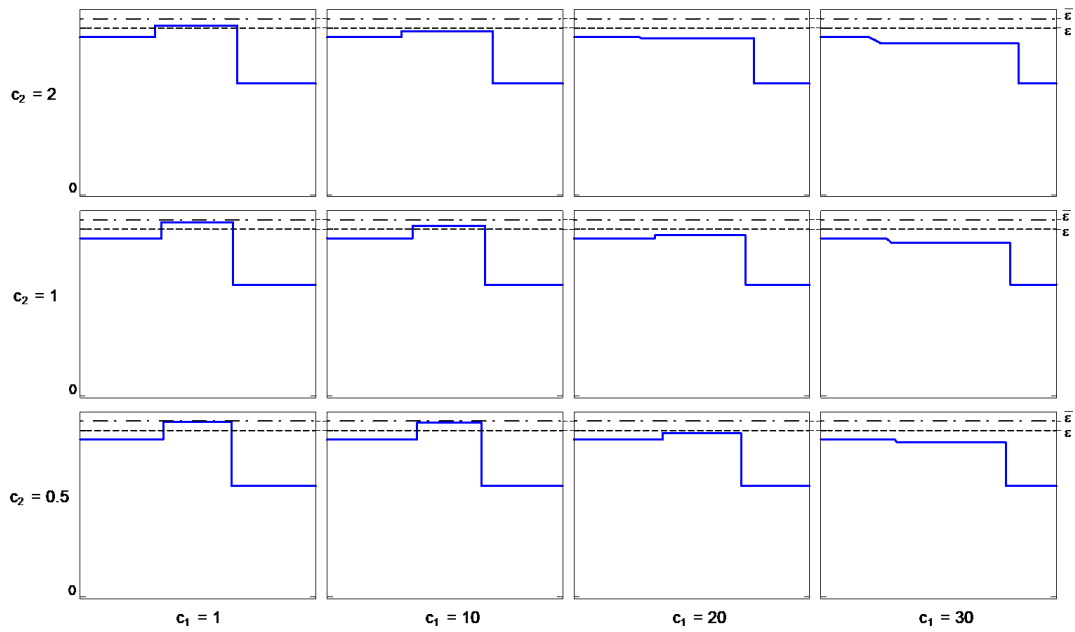


Figura 9 – Comportamento da fração de fluido ao longo do eixo  $x$  para valores escolhidos de  $c_1$  e  $c_2$  em  $t = 0.75$ .

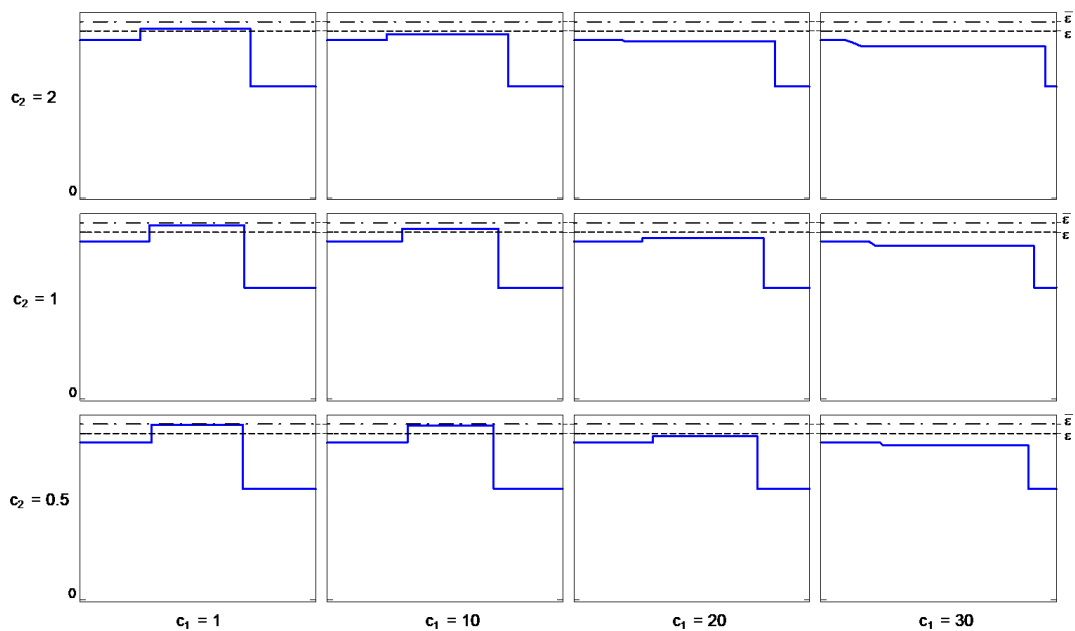


Figura 10 – Comportamento da fração de fluido ao longo do eixo  $x$  para valores escolhidos de  $c_1$  e  $c_2$  em  $t = 1.00$ .



Nas figuras 7 a 10 existem duas linhas tracejadas: a linha superior representa  $\bar{\epsilon}$ , e a linha inferior representa  $\epsilon$ . Neste ponto, vale ressaltar que a relação constitutiva (4.4) proposta neste trabalho evita que a fração de fluido exceda  $\bar{\epsilon}$ . Esta característica é mantida para qualquer valor de  $\delta$ , uma vez que é sempre positivo.

Relações constitutivas como (4.2), proposta por Martins-Costa et al. (2017), assim como a relação para a pressão apresentada na equação (4.1) (veja Saldanha da Gama et al., 2012), não garantem um limite superior para a fração de fluido, podendo levar a resultados não realistas.

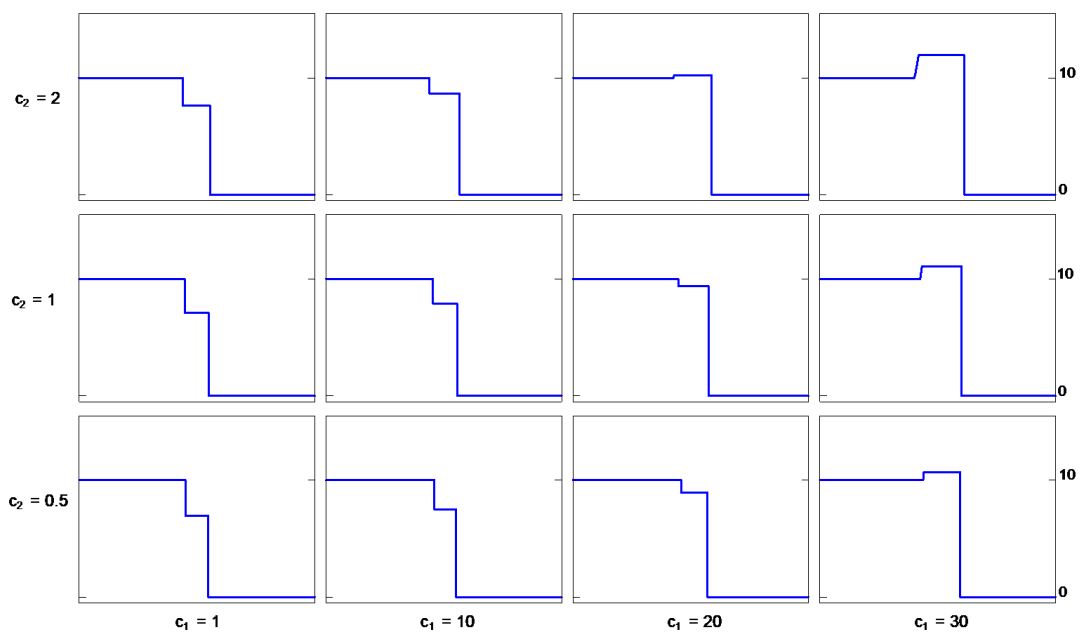


Figura 11 – Comportamento da velocidade ao longo do eixo  $x$  para valores escolhidos de  $c_1$  e  $c_2$  em  $t = 0.25$ .

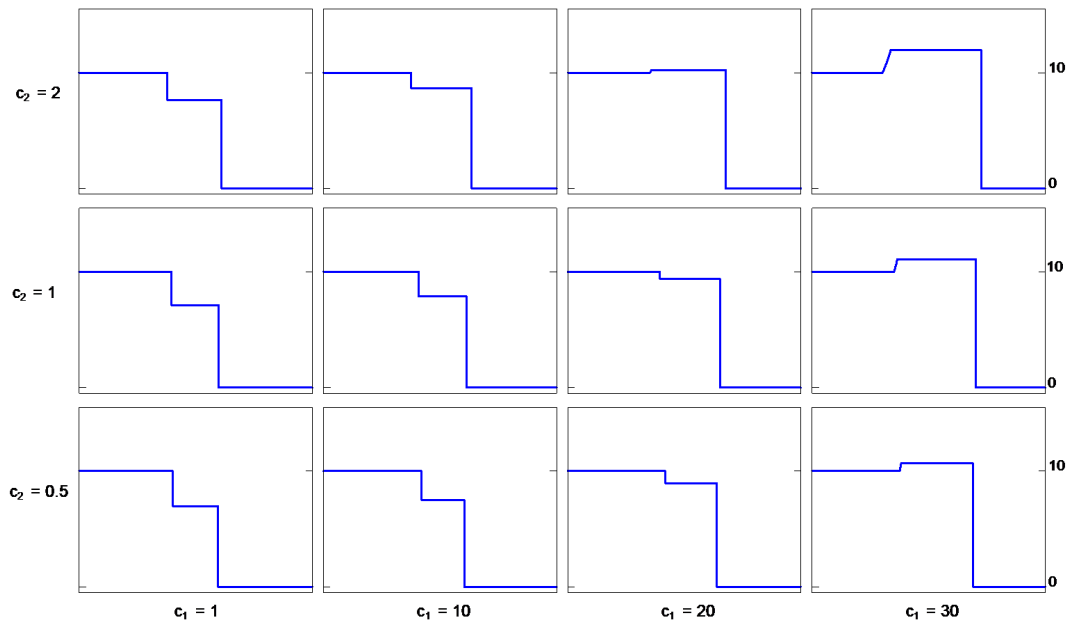


Figura 12 – Comportamento da velocidade ao longo do eixo  $x$  para valores escolhidos de  $c_1$  e  $c_2$  em  $t = 0.50$ .

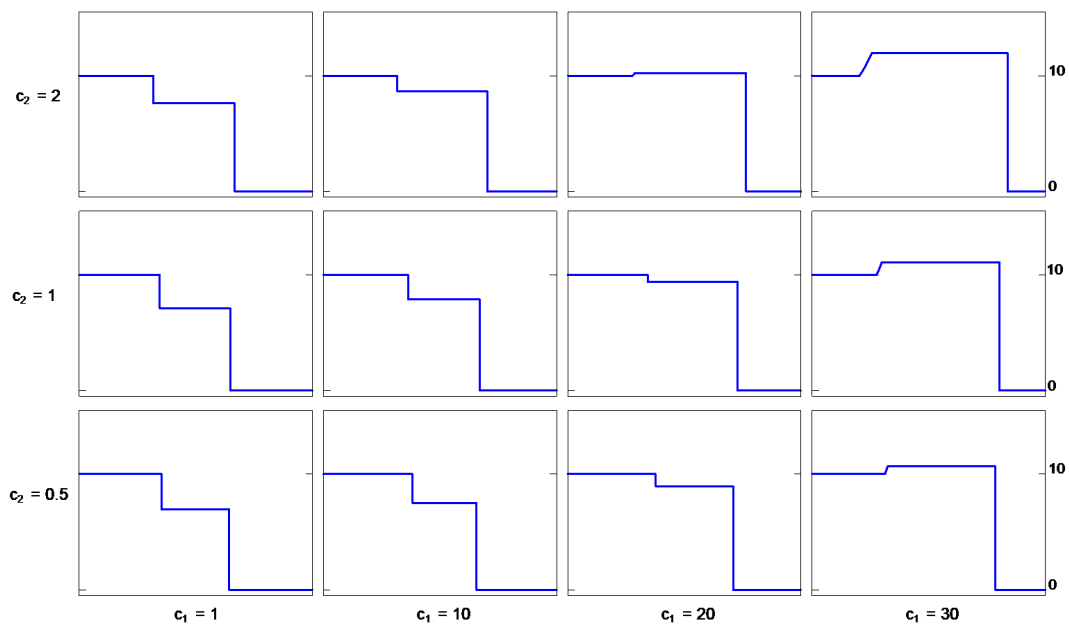


Figura 13 – Comportamento da velocidade ao longo do eixo  $x$  para valores escolhidos de  $c_1$  e  $c_2$  em  $t = 0.75$ .

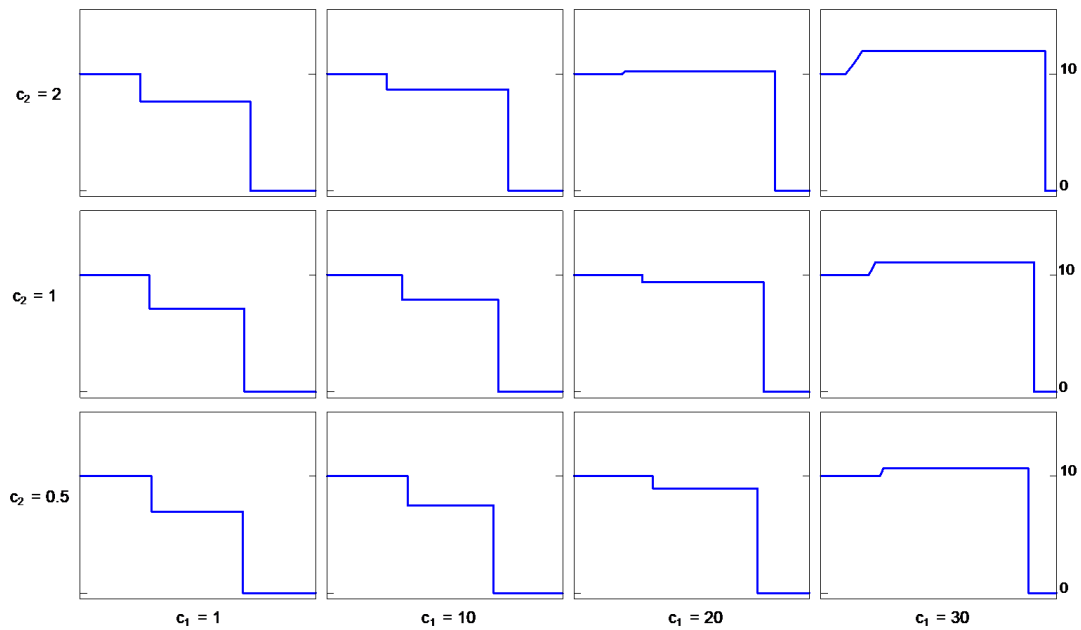


Figura 14 – Comportamento da velocidade ao longo do eixo  $x$  para valores escolhidos de  $c_1$  e  $c_2$  em  $t = 1.00$ .

Como pode ser observado nas figuras, o limite superior pré-estabelecido  $\bar{e}$  jamais é atingido, mostrando assim que a estrutura da relação constitutiva proposta atende plenamente aos objetivos. Observa-se também que quanto mais a fração de fluido ultrapassa a porosidade nominal, maiores ficam as velocidades de propagação, gerando assim uma penalidade cinemática que impede a ocorrência de situações inconsistentes.

## 8 Considerações Finais

Neste trabalho foi proposta uma relação constitutiva contínua e com primeira derivada contínua para a pressão como função da saturação, como uma continuação de uma sequência de trabalhos anteriores. Em Martins-Costa et al. (2017), por exemplo, a relação constitutiva contínua para a pressão como função da saturação já identificava a transição entre escoamentos insaturados e saturados, considerando um meio poroso fracamente deformável (desnecessário analisar o movimento do constituinte sólido), preservando a física do escoamento.

Na verdade, o modelo matemático permite uma pequena supersaturação da matriz porosa, correspondendo a admitir uma matriz porosa fracamente deformável, o que permite garantir que a hiperbolicidade do sistema seja mantida, mesmo quando a saturação for atingida.

A principal vantagem da relação constitutiva proposta nesta tese é garantir o crescimento da velocidade de propagação quando se tenta saturar o meio poroso muito além da unidade. Além disso, a supersaturação pode ser controlada e a relação constitutiva apresenta uma forma conveniente para os autovalores e para os invariantes de Riemann.

A relação constitutiva para a pressão proposta neste trabalho, além de dar origem a uma fórmula explícita para os invariantes de Riemann, fornece uma cota superior para a fração de fluido. Assim, qualquer simulação realizada com base nessa relação não apresentará resultados físicos inconsistentes. Portanto, tem-se uma ferramenta confiável para descrever a transição de escoamento saturado-insaturado em meios porosos rígidos. Vice versa, a ferramenta será também confiável.

Foram obtidas as soluções completas para o problema de Riemann associado ao modelo proposto: demonstração das condições necessárias e suficientes para a ocorrência de cada um dos quatro casos, determinação da fração de fluido e da velocidade (implícita ou explicitamente) do estado intermediário e relações entre velocidades e frações de fluido dos estados  $E$ ,  $*$  e  $D$ .

A partir da solução completa do problema de Riemann, foi possível analisar resultados numéricos para os casos 1-rarefação  $\rightarrow$  2-rarefação, 1-choque  $\rightarrow$  2-choque, 1-rarefação  $\rightarrow$  2-choque e 1-choque  $\rightarrow$  2-rarefação.

# Referências

- (1) A. Abbassi, G. Namah, Characterization of the speed of a two-phase interface in a porous medium, *Mathematical Problems in Engineering* **2005:6** (2005) 641-661; doi:10.1155/MPE.2005.641
- (2) B. Alazmi and K. Vafai, Analysis of variants within the porous media transport models, *J. Heat Transfer* **122** (2000) 303-326; doi:10.1115/1.521468
- (3) M. B. Allen, Mechanics of multiphase fluid flows in variably saturated porous media, *Int. J. Engng. Sci.* **24** (1986) 339-351.
- (4) H. Altenbach, V. A. Eremeyev (eds.), *Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications*, CISM, Udine (2013).
- (5) R. J. Atkin, R. E. Craine, *Continuum Theories of Mixtures. Basic theory and historical development*, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **29** (1976) 209-244; doi:10.1093/qjmam/29.2.209  
*Appl. Math.* **60/3** (2000) 916-938.
- (6) A. Bedford, D. S. Drumheller, Theories of immiscible and structured mixtures, *Int. J. Engng Sci.* **21** (1983) 863-960.
- (7) M. A. Biot, General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.* **12** (1941) 155-164; doi:10.1063/1.1712886
- (8) F. Bouchut, Y. Brenier, J. Cortes, J. F. Ripoll, A hierarchy of models for two-phase flows, *J. Nonlinear Sci.* **10** (2000) 639–660.
- (9) R. M. Bowen, Theory of Mixtures, *in* A. C. Eringen (ed.), *Continuum Physics III*, Academic Press, New York (1976).
- (10) R. M. Bowen, Compressible porous media models by the use of theory of mixtures, *Int. J. Engng. Sci.* **20** (1982) 697-735; doi:10.1016/0020-7225(82)90082-9
- (11) A. L. Cauchy, Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique, *Ex. de math.* **3** (1828) 160-187.
- (12) A. J. Chorin, Random Choice Solution of Hyperbolic Systems, *Journal of Comput. Physics* **22** (1976) 517-533.

- 
- (13) A. J. Chorin, J. E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York (2000).
- (14) R. Courant, K. O. Friedrichs, Supersonic Flow and Shock Waves: a manual on the mathematical theory of non-linear wave motion, Applied Mathematics Panel Report **38.2R**, National Defense Research Committee (1948).
- (15) H. S. da Costa Mattos, J. L. dos Reis, J. A. Puente Angulo, M. L. Martins-Costa, Temperature effect on low permeability porous media filled with water at high pressures, *Adv. Water Resources* **83** (2015) 10-16; doi:10.1016/j.advwatres.2015.05.007
- (16) I. G. Currie, Fundamental Mechanics of Fluids, 3. ed., Marcel Dekker, New York (2003).
- (17) C. M. Dafermos, Introduction to the Theory of Hyperbolic Conservation Laws, *in* R. Abgrall, C.-W. Shu (orgs.), Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems **17**, North Holland, Amsterdam (2016).
- (18) H. Darcy, Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon, Victor Dalmont, Paris (1856).
- (19) J. C. C. Dias, Dissertação de Mestrado: Procedimento alternativo para simular escoamento de fluidos em meios porosos insaturados, Programa Francisco Eduardo Mourão Saboya de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal Fluminense (2015).
- (20) C. Fang, An Introduction to Fluid Mechanics, Springer, Cham (2019).
- (21) J. A. Fay, Introduction to Fluid Mechanics, MIT Press, Cambridge (1994).
- (22) A. Fick, Über Diffusion, *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* **94** (1855) 59-86.
- (23) S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik **III/1**, Springer-Verlag, Berlin (1960).
- (24) Y. C. Fung, A First Course in Continuum Mechanics, 3. ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs (1994).
- (25) J. Glimm, Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965) 697-715.
- (26) E. Godlewski, P.-A. Raviart, Nonlinear hyperbolic systems in one space dimension, Springer, New York (1996).
- (27) S. K. Godunov, A Finite Difference Method for the Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics, *Mat. Sb.* **47** (1959) 357-393.

- 
- (28) H. Gupta, L. P. Singh, Simulation of dam-break problem using random choice method, *Comput. & Fluids* **111** (2015) 187-196; doi:10.1016/j.compfluid.2015.02.001
- (29) A. C. Hansen, Reexamining some basic definitions of modern mixture theory, *Int. J. Engng. Sci.* **27** (1989) 1531-1544.
- (30) S. M. Hassanizadeh, W. G. Gray, Mechanics and thermodynamics of multiphase flows in porous media including interphase boundaries, *Adv. Water Resources* **13** (1990) 169-186; doi:10.1016/0309-1708(90)90040-B
- (31) K. M. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1971).
- (32) L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics 6*, Pergamon Press, Oxford (1987).
- (33) P. D. Lax, Weak Solutions of Non-Linear Hyperbolic Equations and their numerical computation, *Comm. Pure Appl. Math.* **7** (1954) 159-193.
- (34) P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws, II., *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957) 537-566.
- (35) P. D. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, SIAM Regional Conference Series in Applied Mathematics **11** (1972).
- (36) P. G. LeFloch, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The theory of classical and nonclassical shock waves*, Lectures in Mathematics – ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel (2002).
- (37) R. J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics – ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel (1999).
- (38) H. A. Lorentz, Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluß dieser Bewegung bei der Strömung durch Röhren, *Abh. theor. Phys.* (1907).
- (39) L. E. Malvern, *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1969).
- (40) D. Marchesin, P. J. Paes-Leme, Shocks in Gas Pipelines, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **4** (1983) 105-116.
- (41) R. Martins, J. Leandro, S. Djordjvić, Analytical and numerical solutions of the Local Inertial Equations, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **81** (2016) 222-229, doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2016.01.015

- 
- (42) M. L. Martins-Costa, R. M. Saldanha da Gama, Numerical simulation of one-dimensional flows through porous media with shock waves, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **52/10** (2001) 1047-1067; doi:10.1002/nme.233
- (43) M. L. Martins-Costa, R. M. Saldanha da Gama, Glimm's method simulation for the pollutant transport in an isothermal atmosphere, *Computational Mechanics* **32** (2003) 214-223; doi:10.1007/s00466-003-0476-6
- (44) M. L. Martins-Costa, R. M. Saldanha da Gama, A mixture theory model for the forced convection flow through an unsaturated wellbore, *Int. J. Heat Fluid Flow* **26** (2005) 141-155; doi:10.1016/j.ijheatfluidflow.2004.06.003
- (45) M. L. Martins-Costa, R. M. Saldanha da Gama, Simulation of a pollutant motion and decay in polytropic atmospheres with spherical symmetry, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* **33** (2006) 872-879; doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2006.04.007
- (46) M. L. Martins-Costa, R. M. Saldanha da Gama, A new constrained constitutive equation for unsaturated flows of incompressible liquids through rigid porous media, *J. Porous Media* **14** (2011) 205-217.
- (47) M. L. Martins-Costa, D. Monte Alegre, F. B. Freitas Rachid, L. G. C. M. Jardim, R. M. Saldanha da Gama, A hyperbolic mathematical modeling for describing the transition saturated/unsaturated in a rigid porous medium, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **95** (2017) 168-177; doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2017.06.014
- (48) M. L. Martins-Costa, J. A. Puente Angulo, H. S. da Costa Mattos, Modeling the connection between porosity and permeability: A mixture theory approach, *J. Porous Media* **20** (2017a) 389-403; doi:10.1615/JPorMedia.v20.i5.20
- (49) M. L. Martins-Costa, D. Cunha da Silva, M. Cunha da Silva, R. M. Saldanha da Gama, A New Constitutive Relation for Describing the Flow through Porous Media with Unsaturated--Saturated Transition, *Mathematical Problems in Engineering* **2019** (2019) 347809; doi.org/10.1155/2019/2347809
- (50) J. C. Maxwell, Illustrations of the dynamical theory of gases – Part I: On the motions and collisions of perfectly elastical particles, *Philosophical Magazine Series 4* **19** 19-32 (1860), Part II: On the process of diffusion of two or more kinds of moving particles among one another, *Philosophical Magazine Series 4* **20** 21-37 (1860).
- (51) I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Joseph Streater, Londres (1687).
- (52) O. A. Oleĭnik, Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, **26** (1957) 95-172.



- (53) O. A. Oleĭnik, Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation, *Uspekhi Mat. Nauk* **14** (1959) 165–170.
- (54) Y. Pang, Y. Zhang, Y. Wen, Delta shock wave to the compressible fluid flow with the generalized Chaplygin gas, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **99** (2018) 311-318; doi:/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.12.014
- (55) E. M. Porto, M. L. Martins-Costa, R. M. Saldanha da Gama, An alternative procedure for simulating one-dimensional transport phenomena with shock waves in a gas, *Int. J. Numerical Meth. Biomedical Engineering* **27** (2011) 157-172, doi: 10.1002/cnm.1303
- (56) L. Preziosi, D. D. Joseph, G. Beavers, Infiltration of initially dry, deformable porous media, *Int. J. Multiphase Flows* **22** (1996) 1205-1222.
- (57) F. B. F. Rachid, R. M. Saldanha da Gama, H. Costa Mattos, Modelling the hydraulic transients in damageable elasto-viscoplastic piping systems, *Appl. Math. Modelling* **182** (1994) 207-215; doi:10.1016/0307-904X(94)90083-3
- (58) K. R. Rajagopal, M. Massoudi, J. M. Ekmann, Mathematical modeling of fluid-solid mixtures, *in* D. de Kee, P. N. Kaloni (eds.), *Recent Developments in Structured Continua*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **2**, Longman Scientific & Technical, Essex (1990).
- (59) K. R. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of Mixtures*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences **35**, World Scientific, Singapore (1995).
- (60) B. Riemann, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **8** (1860), *in* R. Dedekind, H. Weber (orgs.), *Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß*, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig (1876).
- (61) P. L. Roe, Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, *Journal Comput. Physics* **43/2** (1981) 200-212.
- (62) R. M. Saldanha da Gama, A new mathematical modelling for describing the unsaturated flow of an incompressible liquid through a rigid porous medium, *Int. J. Non-Linear Mech.* **40** (1986) 59-68.
- (63) R. M. Saldanha da Gama, M. L. Martins-Costa, Incompressible fluid flow and heat transfer through a nonsaturated porous medium, *Computational Mechanics* **20** (1997) 479-494, doi.org/10.1007/s004660050269
- (64) R. M. Saldanha da Gama, M. L. Martins-Costa, An alternative procedure for approximating hyperbolic systems of conservation laws, *Nonlinear Analysis Real World Applications* **9** (2008) 1310-1322, doi:10.1016/j.nonrwa.2007.03.001

- 
- (65) R. M. Saldanha da Gama, Fundamentos de Mecânica dos Fluidos, EDUERJ, Rio de Janeiro (2012a).
- (66) R. M. Saldanha da Gama, J. J. Pedrosa Filho, M. L. Martins-Costa, Modeling the saturation process of flows through rigid porous media by the solution of a nonlinear hyperbolic system with one constrained unknown, ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. **92** (2012) 921-936, doi:10.1002/zamm.201100031
- (67) S. R. A. Salinas, Introdução à Física Estatística, EDUSP, São Paulo (2005).
- (68) R. Sampaio, W. O. Williams, Thermodynamics of diffusing mixtures, Journal de Mécanique **18** (1979) 19-45.
- (69) G. A. Sod, A Numerical Study of a Converging Cylindrical Shock, J. Fluid Mech. **83** (1977) 785-794.
- (70) J. Smoller, Shock-Waves and Reaction-Diffusion Equations, Cambridge University Press, New York (1983).
- (71) J. Spurk, N. Aksel, Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen, 9. ed., Springer, Berlin (2019).
- (72) S. Srinivasan, K. R. Rajagopal, A thermodynamic basis for the derivation of the Darcy, Forchheimer and Brinkman models for flows through porous media and their generalizations, Int. J. Non-Linear Mech. **58** (2014) 162-166; doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.004
- (73) J. Stefan, Über das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen, Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien, II Abteilung **63** (1871) 63-124.
- (74) E. F. Toro, The Random Choice Method on a non-staggered grid utilising an efficient Riemann Solver, College of Aeronautics Report N° 8708, Cranfield (1987).
- (75) C. Truesdell, R. Toupin, Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie, in S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik **III/1**, Springer-Verlag, Berlin (1960).
- (76) K. Vafai, S. Whitaker, Simultaneous heat and mass transfer accompanied by phase change in porous insulation, J. Heat Transfer **108** (1986) 225-281; doi:10.1115/1.3246877
- (77) S. Whitaker, Introduction to Fluid Mechanics, Krieger, Malabar (1968).
- (78) G. B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons, New York (1974).

- 
- (79) W. O. Williams, Constitutive equations for a flow of an incompressible viscous fluid through a porous medium, *Quart. Appl. Math.* **36** (1978) 255-267; <https://doi.org/10.1090/qam/99640>
- (80) Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-temperature Hydrodynamic Phenomena*, Academic Press, New York (1966).