



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Michelle Regina Nigri

**Um novo procedimento para a simulação de aletas cilíndricas infinitas,
com condutividade térmica variável**

Rio de Janeiro

2022

Michelle Regina Nigri

**Um novo procedimento para a simulação de aletas cilíndricas infinitas,
com condutividade térmica variável**

Tese apresentada, como requisito parcial para
obtenção do título de Doutor, ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da
Universidade do Estado do Rio de Janeiro.



Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Coorientador: Prof. Dr. José Julio Pedrosa Filho

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

N689 Nigri, Michelle Regina.
Um novo procedimento para a simulação de aletas cilíndricas infinitas, com condutividade térmica variável / Michelle Regina Nigri. – 2022.
71f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.
Coorientador: José Julio Pedrosa Filho.
Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Transmissão - Teses. 3. Equações diferenciais não-lineares - Teses. 4. Modelos matemáticos - Teses. I. Gama, Rogério Martins Saldanha da. II. Pedrosa Filho, José Julio. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 536.24:519.6

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Michelle Regina Nigri

**Um novo procedimento para a simulação de aletas cilíndricas infinitas,
com condutividade térmica variável**

Tese apresentada, como requisito parcial para
obtenção do título de Doutor, ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da
Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 04 de janeiro de 2022.

Orientador:



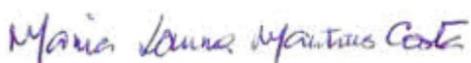
Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Coorientador:

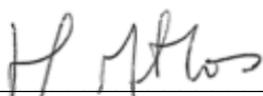


Prof. Dr. José Julio Pedrosa Filho
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Banca examinadora:



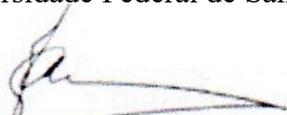
Prof. Dra. Maria Laura Martins Costa
Universidade Federal Fluminense



Prof. Dr. Heraldo Silva da Costa Mattos
Universidade Federal Fluminense



Prof. Dr. Aldrovando Luis Azeredo Araújo
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Dr. Carlos Antônio de Moura
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2022

Para meus amores Erik e Marina.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais (*in memoriam*) Haim e Sarita por me mostrarem o valor dos estudos e do conhecimento.

À minha família, minha bá Lourdes e aos meus irmãos Esther, Hélio e Ariel pela amizade e carinho de uma vida inteira.

Ao meu orientador Rogério Gama e ao meu coorientador José Julio Pedrosa Filho por toda ajuda e incentivo ao longo do trabalho.

Aos professores membros da banca: Maria Laura Martins Costa, Carlos Moura, Heraldo Costa Matos e Aldrovando Luis Azeredo.

À Escola Naval que me concedeu licença e forneceu apoio à conclusão desta tese.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UERJ e seus funcionários.

E a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração dessa tese.

Não creio em nada e em nada descreio. O que concebe a imaginação aproxima-nos tanto da verdade como o que pode provar a matemática.

Sir Charles Chaplin

RESUMO

NIGRI, Michelle Regina. **Um novo procedimento para a simulação de aletas cilíndricas infinitas, com condutividade térmica variável.** 71f. 2022. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

Superfícies estendidas, usualmente denominadas aletas, são dispositivos bem conhecidos, empregados para aumentar o calor transferido de uma determinada superfície por meio de um aumento artificial da área real de transmissão de calor. Este trabalho apresenta uma abordagem analítica para estabelecer uma relação entre a temperatura e a posição espacial em qualquer aleta cilíndrica infinita, fornecendo uma ferramenta completamente inovadora para esta classe de fenômenos que, até agora, foi modelado matematicamente como o processo de transferência de calor em uma aleta longa, mas com comprimento finito prescrito. Os resultados são válidos mesmo para processos de transferência de calor não lineares, especialmente aqueles em que a condutividade térmica depende da temperatura local, os que envolvem aletas porosas e aqueles nos quais a transferência de calor por radiação é levada em consideração. Além disso, o fluxo total de calor é calculado de forma simples, direta e exata. Alguns exemplos típicos são apresentados.

Palavras-chave: Condutividade térmica dependente da temperatura. Aletas cilíndricas. Equação diferencial ordinária não linear. Domínio não limitado. Solução exata.

ABSTRACT

NIGRI, Michelle Regina. **A new procedure for simulating infinite cylindrical fins, with temperature-dependent conductivity.** 71f. 2022. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

Extended surfaces, usually called fins, are well known devices employed for increasing the heat transferred from a given surface by means of an artificial increase of the actual area of heat transmission. This work presents an analytic approach for establishing a relationship between the temperature and the spatial position in any infinite cylindrical fin, providing a completely innovative tool for this class of phenomena that, up to now, was mathematically modeled as the heat transfer process in a long fin, but with prescribed finite length. The results are valid even for nonlinear heat transfer process, especially those in which the thermal conductivity depends on the local temperature, the ones involving porous fins and the ones in which radiation heat transfer is taken into account. In addition, the total heat flux is calculated in a simple, direct and exact way. Some illustrative examples are presented.

Keywords: Temperature-dependent thermal conductivity. Cylindrical fins. Nonlinear ordinary differential equation. Unbounded domain. Exact solution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Árvore genealógica dos trocadores de calor.....	12
Figura 2 -	Exemplos típicos de superfícies estendidas.....	14
Figura 3 -	Aletas cilíndricas.....	17
Figura 4 -	Balanço de energia.....	18
Figura 5 -	Condições de contorno para a extremidade das aletas.....	20
Figura 6 -	Ilustração de uma aleta cilíndrica.....	32
Figura 7 -	Balanço de energia.....	32
Figura 8 -	Gráfico da temperatura θ pela posição Z , para valores selecionados de A	59
Figura 9 -	Gráfico da temperatura θ pela posição Z , para valores selecionados de B	59
Figura 10 -	Gráfico da temperatura θ pela posição Z , para valores selecionados de C	60
Figura 11 -	Gráfico da temperatura θ como uma função de $Z\sqrt{hA/(k_0p)}$	61
Figura 12 -	Gráfico da temperatura θ como uma função de $Z\sqrt{B}$	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	A temperatura adimensional θ para quatro valores selecionados de Z , empregando três diferentes valores para ΔZ , e a solução exata.....	57
Tabela 2 –	A temperatura adimensional θ para quatro valores selecionados de Z , empregando três diferentes valores para ΔZ , e a solução exata, para o caso particular que $B = 0$	58
Tabela 3 –	A temperatura adimensional θ para quatro valores selecionados de Z , empregando três diferentes valores para ΔZ , e a solução exata, para o caso particular que $A = 0$ e $C = 0$	58

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO.....	12
	Revisão Bibliográfica.....	15
1	TEORIA CLÁSSICA DE ALETAS.....	17
1.1	Condições de contorno para aletas cilíndricas em regime permanente.....	20
1.2	Parâmetros de desempenho de aletas.....	21
2	A EQUAÇÃO DA ENERGIA – “1^A LEI DA TERMODINÂMICA”.....	23
2.1	O processo de transmissão de calor numa aleta reta convexa.....	27
3	ALETAS CILÍNDRICAS INFINITAS – UMA ABORDAGEM EXATA.....	30
3.1	Equação que modela o problema.....	32
3.2	Uma observação sobre um problema clássico e conhecido e suas limitações.....	35
3.3	Uma abordagem alternativa para o problema clássico de balanço de energia numa aleta.....	37
3.4	Consistência dos resultados.....	39
3.5	Uma observação na derivada de f em relação a T.....	41
3.6	Formulação adimensional.....	42
3.7	Alguns exemplos envolvendo aletas infinitas.....	43
4	SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ALETAS INFINITAS.....	48
4.1	Modelagem matemática.....	49
4.2	Formulação adimensional.....	52
4.3	Alguns exemplos com solução exata.....	53
4.4	Aproximação numérica.....	55
4.5	Uma comparação entre as soluções exatas e numéricas.....	56
4.6	Resultados numéricos.....	59

CONCLUSÕES.....	64
REFERÊNCIAS.....	65
APÊNDICE A – Sobre o comportamento de T qualquer.....	70

INTRODUÇÃO

Indústrias de vários setores necessitam aprimorar a transferência de calor em seus equipamentos termomecânicos. Para realizar essas melhorias, as principais técnicas são as que aprimoram os elementos pré-existentes, aumentando as áreas das superfícies e elevando os coeficientes de transferência de calor.

Muitos processos industriais requerem adição ou remoção de calor, muitas vezes em grandes quantidades. Como exemplos destes processos, temos uma grande variedade de trocadores de calor, como mostra a "árvore genealógica" de trocadores de calor da figura a seguir:

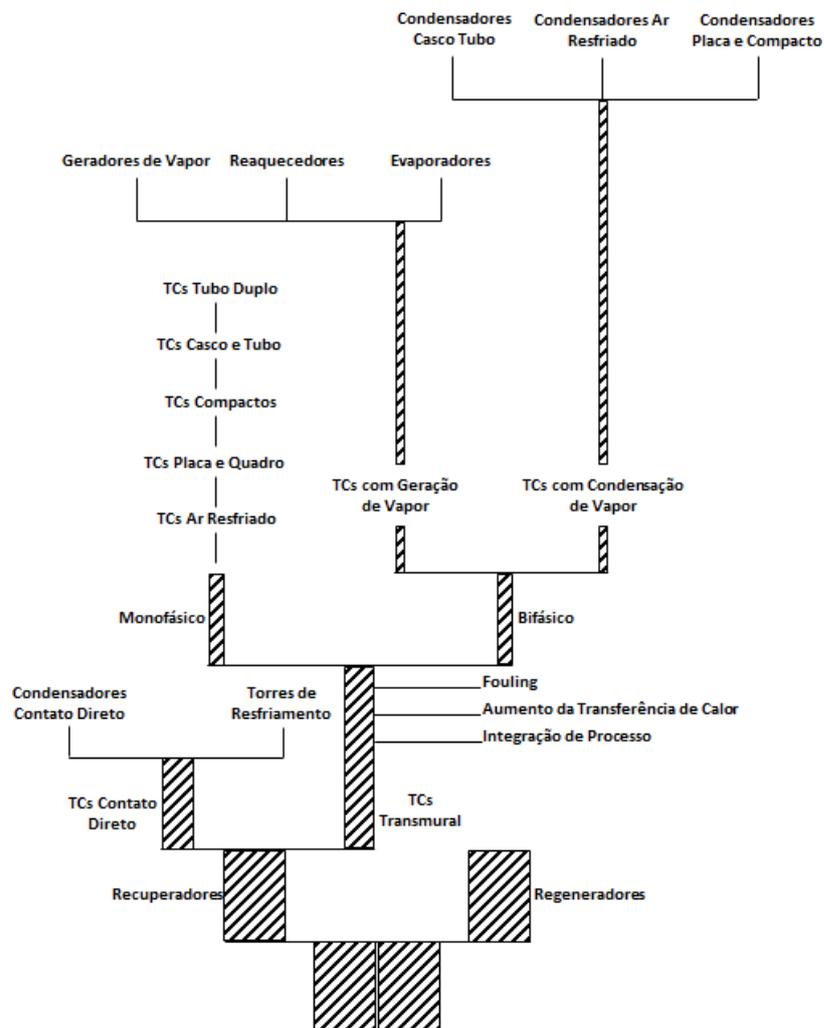


Figura 1 - Árvore genealógica dos trocadores de calor [1].

As usinas de energia térmica, indústrias e equipamentos eletrônicos utilizam em larga escala os trocadores de calor. Muitas pesquisas têm sido realizadas com o objetivo de aumentar a eficiência destes dispositivos. Dentre as principais variáveis que podem contribuir para o aumento desta eficiência podem citar a condutividade térmica do material, sua rugosidade, o fluido de escoamento, a geometria e a extensão da superfície de troca de calor. [1]

Um exemplo claro em que precisamos gerenciar o mapeamento térmico a fim de garantir a estabilidade, confiabilidade e funcionalidade do sistema é dos equipamentos eletrônicos. Como requerem um fluxo constante de elétrons e como a corrente flui através de uma resistência, frequentemente ocorre o aquecimento desses componentes.

Desta forma, o controle térmico dos equipamentos eletrônicos é essencial para que se evite a redução da vida útil de componentes e o aumento de custos de manutenção e reposição, além de garantir o seu bom funcionamento. No caso de equipamentos eletrônicos, a causa dos maioria dos defeitos apresentados tem relação com o aumento de temperatura. [2].

Ayub [3] e Hsieh [4] estudaram melhorias nos trocadores de calor por placas para sistemas de refrigeração. Métodos de aprimoramento de trocas térmicas tem como objetivo o acréscimo substancial dos coeficientes de transmissão de calor.

O estudo de Mufuta [5] analisa numericamente as formas de convecção que podem ajudar a melhorar a vida útil e o desempenho em transformadores de potência minimizando forma a ineficiência na dissipação térmica.

No entanto, tais técnicas não se mostram eficazes quando as temperaturas envolvidas são muito altas e/ou a atmosfera envolvida é rarefeita. Nestes casos a radiação térmica passa a desempenhar papel fundamental.

Os projetos atuais na área de engenharia têm como um importante objeto de estudo os componentes de troca térmica de alto desempenho com redução de custo e de peso. O estudo da transferência de calor em superfícies estendidas adquire papel de protagonista nesta área.

Trocadores de calor são encontrados em diversas áreas de engenharia e de pesquisa, como na refrigeração e aquecimento, como é o caso de fornos convencionais, caldeiras e técnicas criogênicas, e em outros processos como turbinas a gás, dispositivos eletroeletrônicos, e até em combustível nuclear e de aeronaves. [6]

Formas simples tais como cilindros, placas e barras são utilizados nos projetos de trocadores de calor para incrementar o fluxo de calor entre a fonte e o dissipador de calor. Tais superfícies são denominadas superfícies primárias e podem atuar como superfícies de absorção ou rejeição de calor,. Quando uma superfície primária é estendida por

prolongamentos ligados diretamente a mesma, sejam retangulares, cônicos ou cilíndricos, tais superfícies são denominadas superfícies estendidas, e estes elementos utilizados na extensão das superfícies primárias são denominados aletas como apresenta a figura abaixo.

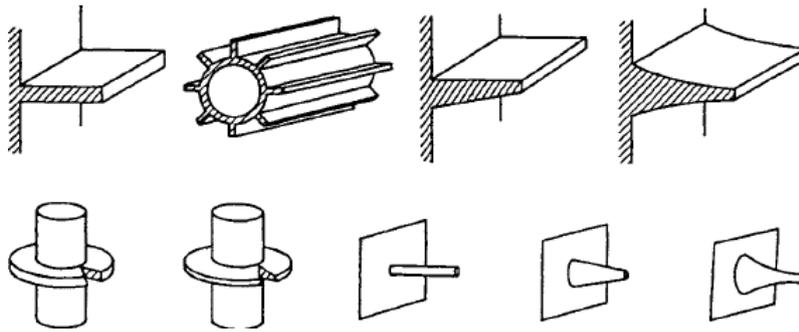


Figura 2 - Exemplos típicos de superfícies estendidas (aletas) [7].

Revisão Bibliográfica

Muitos livros e artigos abordam a questão da otimização na transmissão de calor, fazendo o uso de aletas, porém a maioria deles não trata do caso da aleta infinita, e da condutividade térmica variável. Mais especificamente de uma solução analítica para tal problema.

Sparrow et al. (1961a) [8] publicaram um estudo que contemplava duas aletas longitudinais de perfil retangular com uma aresta comum, considerando a radiação difusa e desprezando a variação da condutividade térmica.

Heaslet e Lomax (1961) [9] publicaram estudos em aletas com emissividade e condutividade térmica e variáveis.

Okamoto (1966a,b) [1] e [10] publicou um estudo em aletas, em que foram desprezadas as interações entre a superfície e a aleta, e concluiu que o modelo unidimensional se mostrava exato até relações de altura-espessura de 3.

Cohen (1969) [11] publicou um estudo fornecendo uma solução numérica para a transferência de calor em uma barra com condutividade térmica variável.

Campo e Wolko (1973) [12] pesquisaram a interação condução-radiação em aletas longitudinais de perfil retangular.

Mehta (1978) [13] apresentou seu estudo sobre as interações entre aletas dissipadoras de calor, visando a aplicação no resfriamento de computadores.

Balaji e Venkateshan (1995) [14] analisaram os resultados de um estudo numérico de transferência de calor em um “slot” vertical que simula um arranjo de aletas típicas de dissipadores de calor.

Kim e Huang (2007) [15] publicaram um estudo analisando problemas de aletas com condutividade térmica dependente da temperatura e condições de contorno não-lineares. O algoritmo, baseado na série de Taylor, compara as soluções obtidas com o algoritmo numérico e as soluções para o método de decomposição de Adomian (ADM), método que apresenta uma solução analítica utilizando uma série de potência infinita.

Arslanturk (2009) [16] publicou seu estudo a respeito das equações de aletas anulares com condutividade térmica dependente da temperatura. Esse estudo utiliza a decomposição de Adomian, para resolver a equação diferencial parcial não-linear associada à condutividade térmica variável.

Khani e Aziz (2010) [17] publicaram um estudo utilizando o método de análise de homotopia (HAM), em que analisam os resultados de perfis de temperatura de aletas trapezoidais, nas quais a condutividade térmica depende da temperatura. Esse método é utilizado para desenvolver os resultados da solução analítica de desempenho.

Aziz e Bouaziz (2011) [18] analisaram aletas longitudinais com condutividade térmica dependente de temperatura, utilizando o método dos mínimos quadrados no tratamento das não linearidades associadas à geração interna de calor.

Torabi et al. (2012) [19] apresentaram um estudo em que utilizam uma técnica de solução analítica aplicada a vários tipos de equações diferenciais conhecida como método da transformação diferencial (DTM), para estudar a transferência de calor em uma aleta em movimento com condições de contorno não lineares e com condutividade térmica variável.

Diani et al. (2013) [20] demonstraram resultados numéricos e experimentais desenvolvidos no software de análise multi-física Comsol para questões de transferência de calor em aletas longitudinais.

Bjork et al. (2014) [21] trabalharam com um modelo com condições de contorno não lineares para estudar diferentes mecanismos de perdas de calor em um gerador termoelétrico.

Ghasemi et al. (2014) [22] e Mosayebidorcheh et al. (2014) [23] publicaram um estudo a respeito da transmissão de calor em aletas longitudinais em regime transiente, com geração interna de calor e condutividade térmica como funções lineares da temperatura. Foi utilizada a técnica aproximada híbrida baseada no método de transformada diferencial (DTM) e diferenças finitas (FDM) para resolver a equação diferencial parcial não linear (PDE).

Sun e Xu (2015) [24] estudaram um modelo de aletas utilizando o método de colocação espectral (SCM) para prever os resultados da transferência de calor com emissividade e condutividade térmica dependentes da temperatura.

Dogonchi e Ganji (2016) [25] utilizaram o método de transformação diferencial (DTM) para analisar o resultado da transferência simultânea de calor por convecção e radiação através de aleta longitudinal única considerando condutividade térmica, coeficiente de transferência e geração de calor dependentes da temperatura.

1. TEORIA CLÁSSICA DE ALETAS

Algumas técnicas podem ser utilizadas quando precisamos melhorar a troca de calor por convecção em um sólido. Uma delas é aumentar a velocidade do fluido aumentando assim o coeficiente de convecção h . A outra é com o emprego de aletas, dispositivos que aumentam a área da superfície em contato com o fluido onde ocorre a convecção, aumentando o calor dissipado, e assim intensificando a troca térmica.

Numa aleta ocorre a transferência de calor por condução através de seu interior, e por convecção, na sua superfície. Em materiais com grande condutividade térmica k , a variação de temperatura da base para o topo é reduzida [26].

Para aletas de seção uniforme, definimos a função temperatura excedente (θ) como:

$$\theta(z) = T(z) - T_{REF} \quad (1.1)$$

A função θ corresponde então a uma nova escala de temperatura com o valor 0 como temperatura ambiente (T_{REF}).

Trataremos de aletas cilíndricas, definidas por:

$\Omega \equiv \{(x, y, z); \text{ de tal forma que } (x, y) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } z \in [0, L]\}$, onde L corresponde ao comprimento da aleta e Γ é a sua seção.

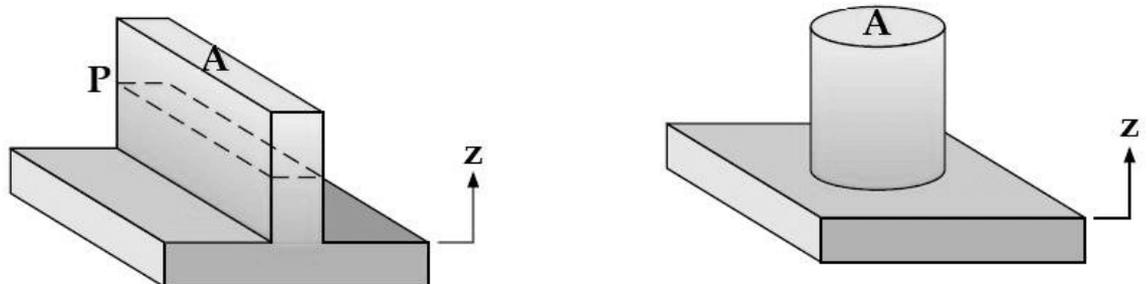


Figura 3 – Aletas cilíndricas

Adotaremos a hipótese de que todos os pontos com a mesma distância z até a base terão a mesma temperatura. Isso é uma aproximação razoável, principalmente supondo-se que a seção Γ possui uma espessura fina e o material da aleta é um bom condutor térmico.

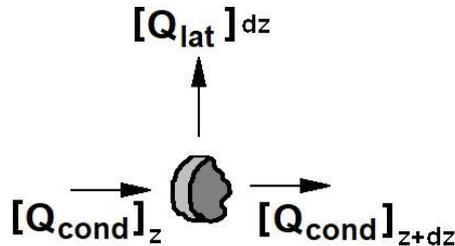


Figura 4 – Balanço de energia

Para calcular o calor total através de determinada superfície fechada ou o fluxo térmico em determinada posição z , temos que considerar o calor que entra e que sai através do interior da aleta por condução, e mais o calor perdido em suas laterais por convecção.

Calculando o calor total através de uma fatia de espessura dz da aleta; o fluxo através da base de altura z é dado por:

$$-kA\theta'(z)dt \quad (1.2)$$

E o fluxo através da base de altura $z + dz$:

$$+kA\theta'(z + dz)dt \quad (1.3)$$

onde A e P correspondem respectivamente à área e ao perímetro de Γ e k é a condutividade térmica

O fluxo através das laterais da fatia é dado por:

$$h\theta(z)Pdzdt \quad (1.4)$$

onde h é o coeficiente de convecção na aleta.

Em regime permanente temos:

$$kA(\theta'(z + dz) - \theta'(z)) - h\theta(z)Pdz = 0 \quad (1.5)$$

dividindo os dois lados por dz obtemos:

$$kA\theta''(z) - hP\theta(z) = 0 \text{ ou } \theta''(z) - \frac{hP}{kA}\theta(z) = 0 \quad (1.6)$$

A equação diferencial ordinária de segunda ordem cuja solução é dada por:

$$\theta(z) = C_1 e^{mz} + C_2 e^{-mz} \quad (1.7)$$

onde determinamos a distribuição de temperatura ao longo da aleta, $\theta(z)$ e que:

$$m = \sqrt{\frac{Ph}{Ak}} \text{ é um parâmetro positivo chamado } \mathbf{\text{parâmetro de aleta}} \quad (1.8)$$

Podemos reescrever a equação diferencial ordinária em termos de fluxo térmico como sendo o fluxo térmico por condução:

$$q_{cond} = -k\theta'(z) \text{ e } q'_{cond} = -k\theta''(z) \quad (1.9)$$

e o fluxo térmico por convecção nas laterais:

$$q_{lat} = -h\theta(z) \quad (1.10)$$

Substituindo (1.8) e (1.9) na equação diferencial, obtemos:

$$q'_{cond} + \frac{P}{A}q_{lat} = 0 \quad (1.11)$$

Podemos então determinar a distribuição de temperatura desde que tenhamos algumas condições de contorno para podermos determinar o valor das constantes C_1 e C_2 .

1.1 Condições de contorno para aletas cilíndricas em regime permanente

Para uma aleta de comprimento L , sabendo-se a temperatura na base da aleta $\theta_b = \theta(0)$, podemos ter condições de contorno de alguns tipos, entre elas:

- Temperatura fixa na extremidade da aleta ($\theta(L) = \theta_L$) com θ_b e θ_L determina-se C_1 e C_2 .
- Condição de Robin na extremidade (por exemplo, sujeita à convecção).

$$-kA\theta'(L) = hA\theta(L) \Rightarrow k\theta'(L) + h\theta(L) = 0 \quad (1.12)$$

Ou seja, na extremidade da aleta o fluxo térmico devido à convecção é igual ao fluxo devido à condução.

- Extremidade da aleta isolada termicamente (adiabática). Neste caso $\theta'(L^-) = 0$. Ou seja, o fluxo térmico na extremidade da aleta (imediatamente para dentro) é nulo.



Figura 5 – Condições de contorno para a extremidade das aletas

Outra situação que iremos descrever é o caso da aleta infinita. A aleta infinita não corresponde a uma situação real, mas é um caso limite que se enquadra em situações práticas. Uma aleta pode ser considerada “infinita” quando seu comprimento L é grande o suficiente para que a temperatura na extremidade seja praticamente igual a zero.

Trataremos as aletas infinitas e cilíndricas, definidas por:

$\Omega \equiv \{(x, y, z); \text{ de tal forma que } (x, y) \in \Gamma \subset \square^2 e z \in [0, +\infty)\}$, onde Γ é a seção da aleta.

Teremos então a condição de contorno $\theta(+\infty) = 0$ (entende-se por $\theta(+\infty) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \theta(z)$), implicando:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} (C_1 e^{-mz} + C_2 e^{mz}) \rightarrow C_2 \lim_{z \rightarrow +\infty} e^{mz} \rightarrow 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (1.13)$$

logo,

$$\theta(z) = C_1 e^{-mz}$$

Como

$$\theta(0) = \theta_b \Rightarrow C_1 = \theta_b$$

portanto no caso da aleta infinita, a função distribuição de temperatura fica:

$$\theta(z) = \theta_b e^{-mz} \quad (1.14)$$

Podemos calcular o calor total dissipado pela aleta (q_f) como o calor que atravessa a base da aleta, portanto:

$$q_f = -kA\theta'(0) \quad (1.15)$$

sendo o subíndice f correspondendo à aleta (“fin”). No caso de aleta infinita, o calor dissipado fica:

$$q_f = kAm\theta_b = \theta_b \sqrt{hPkA} \quad (1.16)$$

1.2 Parâmetros de desempenho de aletas

Apresentaremos dois parâmetros de desempenho para aletas:

Efetividade da aleta (ε_f), que é definida como a razão entre o calor dissipado pela aleta (q_f) e a taxa de calor que ocorreria se não houvesse aleta:

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{hA\theta_b} \quad (1.17)$$

que no caso da aleta infinita é dado por:

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{hA\theta_b} = \sqrt{\frac{Pk}{hA}} \quad (1.18)$$

Eficiência da aleta (η_f), que é definida como a razão entre q_f e q_{\max} , onde q_{\max} corresponde ao máximo que uma aleta poderia dissipar, ou seja, se toda a aleta estivesse a uma temperatura θ_b :

$$q_{\max} = h\theta_b(PL + A) \quad (1.19)$$

portanto:

$$\eta_f = \frac{q_f}{h\theta_b(PL + A)} \quad (1.20)$$

Repare que este conceito não tem utilidade no caso da aleta infinita.

2. A EQUAÇÃO DA ENERGIA – “1ª LEI DA TERMODINÂMICA”

A equação da energia é baseada no axioma: “A taxa de variação (no tempo) da quantidade de energia de um corpo (cinética+interna) é igual à taxa de realização de trabalho mecânico sobre este corpo (potência mecânica das forças atuando sobre o corpo) mais a taxa de energia transmitida na forma de calor (calor transmitido por unidade de tempo pela fronteira + geração interna de calor)”.

O princípio acima é representado matematicamente por

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left[u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (2.1)$$

onde:

$$\int_{\Omega_t} \rho \left[u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV \rightarrow \text{Energia interna e energia cinética}$$

$$\int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS \rightarrow \text{Potência mecânica das forças de superfície (contato).}$$

$$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV \rightarrow \text{Potência mecânica das forças de corpo.}$$

$$\int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \rightarrow \text{Fluxo de calor entrando através da fronteira do corpo.}$$

$$\int_{\Omega_t} \dot{q} dV \rightarrow \text{Taxa de geração interna de calor (energia).}$$

A quantidade \mathbf{q} representa o vetor fluxo de calor (por unidade de tempo e área) enquanto a quantidade \dot{q} representa a taxa de geração de calor (por unidade de tempo e volume). Por exemplo, quando uma corrente elétrica flui através de um condutor, \dot{q} é positivo e, na média, igual ao produto da diferença de potencial pela corrente dividido pelo respectivo volume de material condutor.

O sinal - na penúltima integral da equação acima aparece para que esta integral represente o fluxo que entra e não o que sai.

Podemos reescrever a equação da energia, com o auxílio do Teorema do Transporte, na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{D}{Dt} \left[\rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} dV = \\
& = \int_{\partial \Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial \Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV
\end{aligned} \quad (2.2)$$

uma vez que::

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{Dt} \left[\rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} = \\
& = \frac{D\rho}{Dt} \left[\left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \\
& = \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \left[\left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right)
\end{aligned} \quad (2.3)$$

e que (equação da continuidade):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

ficamos com:

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right\} dV = \int_{\partial \Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial \Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (2.5)$$

A simetria do tensor tensão e o teorema da divergência nos permitem escrever que:

$$\int_{\partial \Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial \Omega_t} (\mathbf{Tv}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{Tv}) dV - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{q} dV \quad (2.6)$$

Assim, a equação da energia fica:

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right\} dV = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{Tv}) dV + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{q} dV + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (2.7)$$

Como a região Ω_t (configuração atual do corpo) é arbitrária, podemos concluir que (forma local da equação da energia para um corpo contínuo)

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \text{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} + q \quad (2.8)$$

uma vez que:

$$\text{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) = (\text{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} : \text{grad} \mathbf{v} \quad (2.9)$$

e:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} \quad (2.10)$$

podemos escrever o seguinte:

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} = (\text{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} : \text{grad} \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} + q \quad (2.11)$$

Da equação da quantidade de movimento linear sabemos que:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.12)$$

Assim (equação da energia, levando em conta que a equação da quantidade de movimento é satisfeita):

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \mathbf{T} : \text{grad} \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} + q \quad (2.13)$$

A simetria do tensor tensão e a definição de derivada material nos permitem reescrever a equação local da energia como

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } u \cdot \mathbf{v} \right) = -\text{div } \mathbf{q} + \mathbf{T} : \mathbf{D} + q \quad (2.14)$$

onde \mathbf{D} é a parte simétrica do gradiente de velocidades.

Podemos também escrever a equação da energia para uma região fixa R no espaço com o auxílio do Teorema do Transporte. Assim procedendo ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_R \rho \left[u + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right] dV + \int_{\partial R} \rho \left[u + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \\ = \int_R \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial R} \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \int_R q dV - \int_{\partial R} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (2.15)$$

que é a forma global da equação da energia para um volume de controle fixo (região R fixa no espaço).

Para um corpo opaco, rígido (gradiente de velocidades antissimétrico) e em repouso (velocidade nula) a equação da energia, na sua forma local, se reduz a:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q} + q \quad (2.16)$$

Por ser um corpo rígido, o calor específico a volume constante só depende da temperatura. Denotando este calor específico por c , ficamos com:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q} + q \quad (2.17)$$

onde T representa o campo de temperaturas. Considerando que (Lei de Fourier):

$$\mathbf{q} = -k \text{ grad } T \quad (2.18)$$

onde k denota a condutividade térmica, temos então a equação geral da condução de calor num sólido rígido, isotrópico e em repouso dada por

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \text{ grad } T) + q \quad (2.19)$$

A equação diferencial acima deve ser considerada junto com condições iniciais e condições de contorno.

2.1 O processo de transmissão de calor numa aleta reta convexa

Seja um corpo opaco convexo em repouso ocupando a região aberta e limitada Ω definida por

$$\Omega \equiv \{(x, y, z) \text{ tais que } (x, y) \in \Gamma \text{ e } 0 < z < H\}$$

onde Γ é um subconjunto limitado e convexo do \square^2 com fronteira $\partial\Gamma$. Este corpo será nossa aleta de referência, cuja base está em $z = 0$ e cuja extremidade está em $z = H$.

No interior de Ω o processo de transferência de energia ocorre exclusivamente por condução de calor enquanto, na fronteira $\partial\Omega$, temos troca de calor por convecção e por radiação térmica.

A descrição matemática do processo de transmissão de calor em regime permanente é representada por [27]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ T &= T_w \quad z = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \quad z = H \\ -k \nabla T \cdot \mathbf{m} &= q_{\text{CONVECCÃO}} + q_{\text{RADIACÃO}} \quad \text{sobre } \partial\Gamma \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde \mathbf{m} é o vetor normal unitário exterior definido sobre $\partial\Gamma$, $q_{\text{CONVECCÃO}}$ é o calor perdido (por unidade de tempo e área) por convecção, $q_{\text{RADIACÃO}}$ é o calor perdido (por unidade de tempo e área) por radiação térmica e T_w é a temperatura da base da aleta. A extremidade da

aleta é suposta isolada (como usualmente admitido). Na equação (2.20), T é a incógnita e, nesta tese, representará sempre uma temperatura absoluta.

Vamos admitir que, para qualquer $z \in (0, H)$,:

$$|T - \bar{T}| < \Delta \quad (\Delta \rightarrow \text{pequeno}), \quad \bar{T} = \frac{\int_{\Gamma} T dA}{\int_{\Gamma} dA} \quad (2.21)$$

Assim, integrando a equação diferencial parcial acima sobre Γ teremos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} dA + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dA = \int_{\partial\Gamma} k \nabla T \cdot \mathbf{m} d\ell + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dA = \\ & = \int_{\partial\Gamma} - \left(q_{\text{CONVECCÃO}} + q_{\text{RADIACÃO}} \right) d\ell + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dA = \\ & \cong \int_{\partial\Gamma} - \left(q_{\text{CONVECCÃO}} + q_{\text{RADIACÃO}} \right) d\ell + \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \left(k \frac{d\bar{T}}{dz} \right) dA = \\ & = - \left(q_{\text{CONVECCÃO}} + q_{\text{RADIACÃO}} \right) p + \frac{d}{dz} \left(k \frac{d\bar{T}}{dz} \right) A = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde a perda de calor a partir de $\partial\Gamma$ é admitida ser dependente apenas da variável z . Na equação (2.22) p denota o perímetro de $\partial\Gamma$ e A representa a área de Γ .

De acordo com a lei de Newton do resfriamento, $q_{\text{CONVECCÃO}}$ é dado por:

$$q_{\text{CONVECCÃO}} = h(\bar{T} - T_{\infty}) \quad (2.23)$$

onde h é o coeficiente de troca de calor por convecção e T_{∞} é uma temperatura de referência (em geral a temperatura ambiente), suposta menor que T_w ..

Uma vez que a aleta é reta e convexa, a perda por radiação térmica a partir da aleta é dada por:

$$q_{\text{RAD-1}} = \varepsilon_{\text{ALETA}} \sigma |\bar{T}|^3 \bar{T} \quad (2.24)$$

onde ε_{ALETA} representa a emissividade das fronteiras da aleta e σ é a constante de Stefan-Boltzmann.

Definindo q_{RAD-2} como a energia radiante térmica que atinge a aleta, proveniente do plano base, temos que $q_{RADIAÇÃO} = q_{RAD-1} - q_{RAD-2}$.

3. ALETAS CILÍNDRICAS INFINITAS – UMA ABORDAGEM EXATA

Esse capítulo apresenta uma abordagem analítica para estabelecer a relação existente entre a temperatura e a posição especial em qualquer aleta cilíndrica infinita, fornecendo uma ferramenta completamente inovadora para esta classe de fenômenos que, até o momento, era modelada matematicamente como o processo de transferência de calor em uma aleta longa, mas com um comprimento finito determinado. Os resultados obtidos são válidos inclusive para problemas de transferência de calor não linear, especialmente aqueles cuja condutividade térmica depende da temperatura local, os que envolvem aletas porosas e os que levam em consideração a transmissão de calor por radiação.

Superfícies estendidas, normalmente chamadas de aletas, são dispositivos bem conhecidos, utilizados para aumentar o calor transferido de uma dada superfície por meio de um incremento artificial na área de transmissão de calor por convecção.

Dentro os vários tipos de aletas, destacamos aqui as aletas cilíndricas, caracterizadas por suas formas cilíndricas e áreas constantes nas seções transversais. Talvez essa seja o tipo mais estudado de aletas [28, 29, 30].

Apesar da literatura largamente encontrada, situações envolvendo descrições matemáticas não lineares são muito limitadas quando a questão é oferecer um modo simples e confiável de se obter resultados, especialmente quando se assume que o comprimento da aleta é infinito. É óbvio que na realidade não existem aletas infinitas, mas aletas infinitas representam um importante caso limite [31, 32, 33].

Com exceção do caso linear clássico, não encontramos nenhuma simulação envolvendo aletas cilíndricas infinitas na literatura atual. Muitos autores sugerem estar simulando aletas infinitas, porém, na prática, estão simplesmente considerando um comprimento muito grande L . Essa lacuna será desmistificada neste estudo com a ajuda de uma abordagem analítica simples, e exata.

Sob as mesmas condições, o calor transferido de uma aleta cilíndrica aumenta à medida que seu comprimento L aumenta, e tende assintoticamente a um limite superior determinado, correspondente ao que chamamos aleta infinita $L \rightarrow \infty$.

Por isso, o conhecimento acerca do comportamento das aletas infinitas constitui uma importante questão. Uma aleta infinita não é o mesmo que uma aleta com um comprimento muito grande, mas um caso limite que fornece conhecimentos sobre uma importante cota superior.

Nos últimos 20 anos, muitos pesquisadores publicaram trabalhos cujo principal assunto é a simulação numérica do processo de transferência de calor em aletas cilíndricas, especialmente nas que se assumem ser muito longas.

Técnicas como o esquema Runge-Kutta combinado ao método Newton-Raphson [31, 34], método da decomposição Adomiana [35], algoritmo de busca Cucko [36], etc. podem ser encontradas na literatura, todas empregadas em aletas com comprimento finito determinado.

Nenhum desses trabalhos consideram realmente aletas infinitas. Eles assumem um comprimento muito longo, e desprezam qualquer transferência de calor na extremidade da aleta. Desta forma estão aptos a tratar o problema como um problema comum de valor definido na fronteira, num conjunto aberto limitado. Apesar de não existirem aletas infinitas, a solução nesses casos limites não pode ser obtida de forma precisa se um valor constante for previamente definido para o comprimento da aleta. O foco de trabalhos que envolvem transferência de calor em aletas é calcular o calor total transferido pela aleta, considerando a influência de vários parâmetros.

O objetivo principal desta tese é mostrar como determinar o fluxo total transferido por uma aleta cilíndrica infinita, considerando uma região realmente ilimitada, apresentando uma abordagem simplificada e mais precisa do que qualquer uma encontrada na literatura. Ao invés de representar o fenômeno da transferência de calor por meio de uma equação diferencial de segunda ordem, iremos representar através de uma equação diferencial de primeira ordem, sem lançar mão de qualquer aproximação numérica, de um jeito simples, exato e, às vezes, implícito.

Além disso, considerando as aletas infinitas, permitirá que a condutividade térmica seja variável e dependente da temperatura. Não empregaremos a transformada de Kirchoff e permitiremos qualquer dependência entre a condutividade térmica e a temperatura. É notório que alguns autores empregam relações particulares entre a temperatura e a condutividade térmica. Por exemplo, em [37] assume-se uma lei de potência. Em [38] assume-se uma aproximação constante por partes.

De fato, o resultado que será apresentado aqui vai além dos objetivos acima mencionados. Apresentaremos uma relação analítica entre a temperatura e a posição ao longo da aleta, que permitirá o conhecer a temperatura em qualquer posição de uma aleta infinita.

3.1 Equação que modela o problema

Uma aleta cilíndrica infinita é representada por um conjunto Ω como:

$$\Omega \equiv \{(x, y, z) ; \text{ de tal forma que } (x, y) \in \Gamma, 0 \leq z < L, L \rightarrow \infty\}$$

no qual Γ é um conjunto obviamente não dependente de z , compacto e conexo. O comprimento da aleta é definido por L enquanto a área da seção transversal é denotada por A .

Para fins de transferência de calor, assume-se que a temperatura em determinado ponto da aleta depende apenas de z , e a troca de calor entre a aleta e sua vizinhança acontece apenas através da fronteira de Ω , representados por $\partial\Omega$.

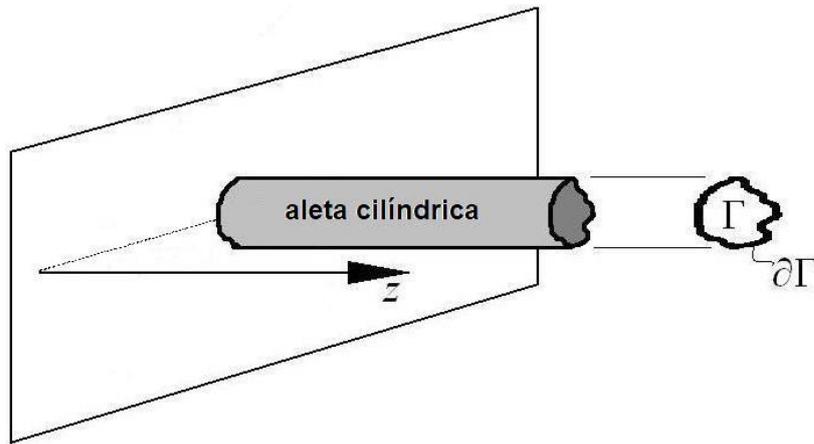


Figura 6 – Ilustração de uma aleta cilíndrica.

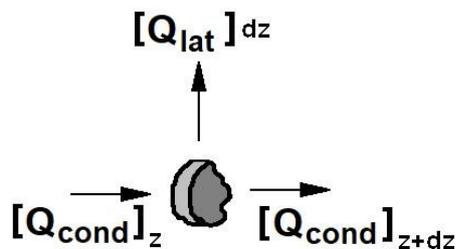


Figura 7 – Balanço de energia

Considerando a fatia genérica na figura 7 na qual $[Q_{cond}]_z$ representa o calor transferido pela fatia através da face z , $[Q_{cond}]_{z+dz}$ representa o calor transferido para a fatia através da face $z + dz$ e $[Q_{lat}]_{dz}$ representa a troca de calor entre a fatia e o meio, temos, no regime permanente, o balanço de energia dado por:

$$[Q_{cond}]_z = [Q_{cond}]_{z+dz} + [Q_{lat}]_{dz} \quad (3.1)$$

A transferência de calor da fatia para seu entorno é uma função da temperatura na posição z , mas não depende, explicitamente, de z .

A equação (3.1) pode ser reescrita, nos termos de fluxo de calor por unidade de tempo e área. Sendo $q_{cond}(z)$ o fluxo térmico dentro da aleta devido à condução, e $q_{lat}(z)$ o fluxo térmico ao longo da superfície $\partial\Omega$. Teremos que, em uma fatia de espessura dz :

$$q_{cond}(z) = \frac{Q_{cond}(z)}{A dt}, \quad q_{lat} = \frac{Q_{lat}}{P dt dz} \quad (3.2)$$

substituindo na equação de energia (3.1) temos:

$$q_{cond}(z + dz) A dt - q_{cond}(z) A dt = q_{lat} P dz dt, \text{ cortando } dt \text{ e dividindo por } dz, \text{ obtemos:}$$

$$A \frac{d}{dz}(q_{cond}) + P q_{lat} = 0 \quad (3.3)$$

sendo $A \rightarrow$ área transversal e $P \rightarrow$ perímetro de $\partial\Omega$

Definindo, convenientemente, a função f , podemos escrever, para qualquer aleta cilíndrica, a seguinte equação que modela o problema como sendo:

$$\frac{dq}{dz} + f = 0 \quad (3.4)$$

na qual q é uma notação simplificada para q_{cond} e f é uma função que representa a perda de calor pela aleta dada por $f = \frac{P}{A} q_{lat}$

Levando em conta a Lei de Fourier [30] a equação (3.4) dá origem à seguinte equação diferencial ordinária, na temperatura T :

$$\frac{d}{dz} \left(-k \frac{dT}{dz} \right) + f = 0 \quad (3.5)$$

sendo k a condutividade térmica. Manteremos o k dentro da derivada para incluirmos a possibilidade dele ser variável, no caso, dependente da temperatura.

Como o assunto principal deste trabalho são as aletas infinitas, é fisicamente esperado que, para um z muito grande, a temperatura se aproxime, assintoticamente, de um valor fixo, denotado aqui por T_{REF} , representando um equilíbrio de temperatura. Em outras palavras, se parte da superfície está na temperatura T_{REF} , a troca de calor é igual a zero.

Dessa forma, procuramos a situação típica em aletas infinitas na qual:

$$T \rightarrow T_{REF} \Leftrightarrow z \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

Buscando satisfazer a condição acima, assumiremos que a função f é uma função estritamente crescente da temperatura T , possuindo a raiz única T_{REF} e com a derivada limitada nas proximidades de T_{REF} . Em outras palavras:

$$f = \hat{f}(T), \quad C > \frac{df}{dT} > 0$$

para qualquer $T_{REF} + \delta > T > T_{REF}$, $\delta, C \rightarrow$ constantes:

$$\hat{f}(T_{REF}) = 0, \text{ e } \hat{f}(b) > \hat{f}(a) \text{ se } b > a \quad (3.7)$$

A condutividade térmica k é um limite de valor positivo, em função da temperatura T , com as seguintes características [39, 40].

$$k = \hat{k}(T), \quad C_2 \geq \hat{k}(T) \geq C_1 > 0, \text{ para qualquer } T \quad (3.8)$$

sendo $C_1, C_2 \rightarrow$ constantes

Como será mostrado adiante, as condições (3.7) e (3.8) garantem a existência de uma solução para a equação (3.5), submetida à condição usual de limite em $z = 0$:

$$T = T_{BASE} \text{ em } z = 0 \quad (3.9)$$

e satisfaz a condição:

$$\frac{dT}{dz} = 0 \text{ quando } z \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

3.2 Uma observação sobre um problema clássico e conhecido e suas limitações

Um dos problemas mais estudados é o processo de transferência de calor numa aleta sólida que efetua troca de energia com o ambiente, de acordo com a lei de Newton de resfriamento [28]. Para esse fenômeno, a função $\hat{f}(T)$ é dada por:

$$f = \hat{f}(T) = \frac{hP}{A}(T - T_\infty) \quad (3.11)$$

onde h, T_∞, P e A são, respectivamente, o coeficiente de transferência de calor por convecção, a temperatura ambiente, o perímetro da seção transversal e sua área.

Quando se assume que a condutividade térmica é constante, a distribuição de temperatura em uma aleta infinita, como a caracterizada em (3.5), (3.9) e (3.10), e com $T_{REF} = T_\infty$ [29] é dada por:

$$T = (T_{BASE} - T_\infty) \exp\left(-\sqrt{\frac{hP}{kA}} z\right) + T_\infty, \quad 0 \leq z < \infty \quad (3.12)$$

Enquanto o calor total transferido é dado por [29]:

$$Q_{ALETA} = -kA \left[\frac{dT}{dz} \right]_{z=0} = -kA \left(-\sqrt{\frac{hP}{kA}} \right) (T_{BASE} - T_{\infty}) \exp \left(-\sqrt{\frac{hP}{kA}} 0 \right) = \sqrt{hpkA} (T_{BASE} - T_{\infty})$$

(3.13)

3.3 Uma abordagem alternativa para o problema clássico de balanço de energia numa aleta

Como a condutividade térmica de qualquer material depende da temperatura e como existem situações em que $f = \hat{f}(T)$ não é uma função linear da diferença $T - T_{REF}$ (por exemplo, quando a radiação térmica é levada em consideração, e/ou quando temos uma aleta porosa e convecção livre, etc.) iremos considerar casos em que a condutividade térmica é dependente da temperatura e $f = \hat{f}(T)$ não é função linear da diferença $T - T_{REF}$, fornecido por (3.7) e (3.8).

Como já foi apontado, nosso objetivo principal é apresentar uma expressão exata do total de calor transferido pela aleta assim como uma relação exata entre posição e temperatura, evitando a simulação numérica de uma equação diferencial não linear.

Algumas soluções exatas e fechadas também serão apresentadas para alguns casos selecionados envolvendo a constante de condutividade térmica. Com esse objetivo, iremos evitar equações diferenciais de segunda ordem, normalmente utilizadas para empregar ao descrever o processo de transmissão de calor em uma aleta cilíndrica.

Vamos considerar novamente a equação (3.4) e a Lei de Fourier:

$$\frac{dq}{dz} + f = 0, \quad q = -k \frac{dT}{dz} \quad (3.14)$$

Ao invés de substituir a uma equação na outra, para se obter a equação (3.5), vamos multiplicar uma pela outra obtendo:

$$q \frac{dq}{dz} - kf \frac{dT}{dz} = 0 \quad (3.15)$$

cortando o dz origina a seguinte equação diferencial (separável):

$$q dq = \hat{k}(T) \hat{f}(T) dT \quad (3.16)$$

Integrando os dois lados da equação, a partir da temperatura T_{REF} , podemos escrever:

$$\frac{1}{2}(q|_T)^2 - \frac{1}{2}(q|_{T_{REF}})^2 = \int_{T_{REF}}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \quad (3.17)$$

Como $\hat{f}(T_{REF}) = 0$, e como $q|_{T_{REF}}$ é zero. Então:

$$q|_T = q = \pm \sqrt{2 \int_{T_{REF}}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi} \quad (3.18)$$

onde q denota o fluxo de calor (por unidade de tempo e unidade de área) no ponto onde a temperatura é T

Considerando que estamos tratando de aletas para resfriamento, usaremos o sinal positivo, pois quando o fluxo térmico associado à convecção tem sinal positivo, significa que a aleta está dissipando calor. Em casos de aletas de aquecimento, o sinal a ser utilizado será o negativo, ou seja, a aleta está absorvendo calor. Para aletas de resfriamento, levamos em consideração que a temperatura diminui à medida que z aumenta e q é positivo ao longo da aleta (assume-se que $T_{BASE} > T_{REF}$). Então:

$$q = -k \frac{dT}{dz} = \sqrt{2 \int_{T_{REF}}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi} \quad (3.19)$$

O fluxo total de calor (por unidade de tempo), transferido pela aleta, é dado por:

$$Q_{TOTAL} = (q|_{z=0}) A = \left[-k \frac{dT}{dz} \right]_{z=0} A = A \sqrt{2 \int_{T_{REF}}^{T_{BASE}} \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi} \quad (3.20)$$

A equação (3.19) também pode ser usada para se obter a temperatura de distribuição ao longo da aleta, de forma implícita. Com esse objetivo, vamos reescrever (3.17) como:

$$\frac{\hat{k}(T)dT}{\sqrt{2 \int_{T_{REF}}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi}} = -dz \quad (3.21)$$

Levando em consideração que em $z=0$ temos $T=T_{BASE}$ e integrando (3.21) de $z=0$ até um z genérico, temos

$$\int_T^{T_{BASE}} \frac{\hat{k}(\eta)d\eta}{\sqrt{2 \int_{T_{REF}}^{\eta} \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi}} = -\int_z^0 dz = z \quad (3.22)$$

A equação (3.22) apresenta uma relação explícita entre a temperatura T e a posição z .

3.4 Consistência dos resultados

Agora, antes de mostrar alguns exemplos, temos que mostrar que (3.22) satisfaz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(-k \frac{dT}{dz} \right) + f &= 0, \quad 0 < z < \infty \\ T &= T_{BASE} \quad \text{em } z = 0 \\ \frac{dT}{dz} &= 0 \quad \text{quando } z \rightarrow \infty \\ T &= T_{REF} \quad \text{quando } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.23)$$

A partir da equação (3.22) temos:

$$\frac{d}{dT} \int_T^{T_{BASE}} \frac{\hat{k}(\eta)d\eta}{\sqrt{2 \int_{T_{REF}}^{\eta} \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi}} = \frac{dz}{dT} \Rightarrow \frac{dz}{dT} = -\frac{\hat{k}(T)}{\sqrt{2 \int_{T_{REF}}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi}} \quad (3.24)$$

que corresponde exatamente à equação (3.19). Inserindo esse resultado na equação diferencial ordinária presente em (3.23), temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dz} \left(\sqrt{2 \int_{T_{REF}}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi} \right) + \hat{f}(T) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{2} \left(\int_{T_{REF}}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \right)^{-1/2} \hat{k}(T) \hat{f}(T) \frac{dT}{dz} + \hat{f}(T) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{2} \left(\int_{T_{REF}}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \right)^{-1/2} \frac{\hat{k}(T) \hat{f}(T)}{(-\hat{k}(T))} \sqrt{2 \int_{T_{REF}}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi} + \hat{f}(T) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\hat{k}(T) \hat{f}(T)}{(-\hat{k}(T))} + \hat{f}(T) = 0 \Rightarrow \text{satisfaz a EDO em (3.23)}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

De (3.22) é imediato que em $z = 0$, $T = T_{BASE}$. A principal questão agora é provar que quando $z \rightarrow \infty$, então $T = T_{REF}$. Em outras palavras, podemos provar que:

$$\lim_{T \rightarrow T_{REF}} z = \lim_{T \rightarrow T_{REF}} \int_T^{T_{BASE}} \frac{\hat{k}(\eta) d\eta}{\sqrt{2 \int_{T_{REF}}^{\eta} \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi}} \rightarrow \infty \tag{3.26}$$

Como $C_2 \geq \hat{k}(T) \geq C_1 > 0$ e como df/dT é positivo e limitado, podemos concluir:

$$\frac{\hat{k}(\eta)}{\sqrt{2 \int_{T_{REF}}^{\eta} \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi}} \geq \frac{C_1}{\sqrt{2 \int_{T_{REF}}^{\eta} C_2 C (\xi - T_{REF}) d\xi}} = \frac{C_1}{\sqrt{C_2 C}} \frac{1}{(\eta - T_{REF})} \tag{3.27}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow T_{REF}} \int_T^{T_{BASE}} \frac{\hat{k}(\eta) d\eta}{\sqrt{2 \int_{T_{REF}}^{\eta} \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi}} & \geq \frac{C_1}{\sqrt{C_2 C}} \lim_{T \rightarrow T_{REF}} \int_T^{T_{BASE}} \frac{d\eta}{(\eta - T_{REF})} = \\
& = \frac{C_1}{\sqrt{C_2 C}} \lim_{T \rightarrow T_{REF}} \left\{ \ln \left(\frac{T_{BASE} - T_{REF}}{T - T_{REF}} \right) \right\} \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{3.28}$$

portanto (3.26) está provada. A partir de (3.24) temos:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1}{\hat{k}(T)} \sqrt{2 \int_{T_{REF}}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi} \Rightarrow \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z \rightarrow \infty} = -\frac{1}{\hat{k}(T_{REF})} \sqrt{2 \int_{T_{REF}}^{T_{REF}} \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi} = 0 \quad (3.29)$$

E desta forma a demonstração está completa

3.5 Uma observação na derivada de f em relação a T

Pode-se notar que, quando a derivada de f em relação a T não é limitada, não podemos garantir (3.27) e a solução não é válida para qualquer $z \in [0, \infty)$.

Por exemplo, supondo que $f = \hat{f}(T) = 3\sqrt{T - T_{REF}}$ e que k é unitário. Nesse caso temos

$$\begin{aligned} z &= \int_T^{T_{BASE}} \frac{d\eta}{\sqrt{2 \int_{T_{REF}}^{\eta} 3\sqrt{\xi - T_{REF}} d\xi}} = \int_T^{T_{BASE}} \frac{d\eta}{\sqrt{4(\eta - T_{REF})^{3/2} - 0}} = \int_T^{T_{BASE}} \frac{d\eta}{2(\eta - T_{REF})^{3/4}} = \\ &= 2(\eta - T_{REF})^{1/4} \Big|_T^{T_{BASE}} = 2(T_{BASE} - T_{REF})^{1/4} - 2(T - T_{REF})^{1/4} \end{aligned} \quad (3.30)$$

De (3.30), temos que (3.23) é válida apenas para $0 \leq z \leq 2(T_{BASE} - T_{REF})^{1/4}$, contudo a equação diferencial em (3.24) é satisfeita se:

$$T = \left((T_{BASE} - T_{REF})^{1/4} - \frac{z}{2} \right)^4 + T_{REF} \quad (3.31)$$

Essa solução não tem significado físico para $2(T_{BASE} - T_{REF})^{1/4} < z < \infty$. Além do que (3.31) nos leva a:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T = \lim_{z \rightarrow \infty} \left((T_{BASE} - T_{REF})^{1/4} - \frac{z}{2} \right)^4 + T_{REF} \rightarrow \infty \quad (3.32)$$

Isso soa absurdo. No entanto, a solução a seguir satisfaz (3.23)

$$T = \begin{cases} \left((T_{BASE} - T_{REF})^{1/4} - \frac{z}{2} \right)^4 + T_{REF}, & 0 \leq z \leq 2(T_{BASE} - T_{REF})^{1/4} \\ T_{REF} & , \quad 2(T_{BASE} - T_{REF})^{1/4} < z < \infty \end{cases} \quad (3.33)$$

mas se origina em (3.22) e, sai do escopo desse trabalho, pois não representa um comportamento admissível para a distribuição de temperatura em uma aleta.

3.6 Formulação dimensional

Definindo as quantidades:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T - T_{REF}}{T_{BASE} - T_{REF}} \quad (\Rightarrow 0 \leq \theta \leq 1) \\ Z &= \frac{p}{A} z \\ \alpha &= \frac{\hat{k}(T)}{\hat{k}(T_{BASE})} = \frac{\hat{k}(\theta(T_{BASE} - T_{REF}) + T_{REF})}{k_{BASE}} = \tilde{\alpha}(\theta) \quad (\Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = 1) \\ F &= \left(\frac{A}{p} \right)^2 \frac{\hat{f}(\theta(T_{BASE} - T_{REF}) + T_{REF})}{(T_{BASE} - T_{REF})k_{BASE}} = \tilde{F}(\theta) \quad \left(\Rightarrow \tilde{F}(1) = \left(\frac{A}{p} \right)^2 \frac{\hat{f}(T_{BASE})}{(T_{BASE} - T_{REF})k_{BASE}} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

O problema original se torna dimensional:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dZ} \left(\alpha \frac{d\theta}{dZ} \right) - F &= 0, \quad 0 \leq Z < \infty \\ \theta &= 1 \quad \text{em } Z = 0 \\ \frac{d\theta}{dZ} &= 0 \quad \text{quando } Z \rightarrow \infty \\ \theta &= 0 \quad \text{quando } Z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.35)$$

A troca total de calor pela aleta é agora representada por:

$$Q_{TOTAL} = (q|_{z=0})A = \left[-k \frac{dT}{dz} \right]_{z=0} A = pk_{BASE} (T_{BASE} - T_{REF}) \sqrt{2 \int_0^1 \tilde{\alpha}(\xi) \tilde{F}(\xi) d\xi} \quad (3.36)$$

em que k_{BASE} representa a condutividade térmica na base da aleta (em $z = 0$).

A relação entre θ e Z é a seguinte:

$$Z = \int_{\theta}^1 \frac{\tilde{\alpha}(\eta) d\eta}{\sqrt{2 \int_0^{\eta} \tilde{\alpha}(\xi) \tilde{F}(\xi) d\xi}} \quad (3.37)$$

Esse resultado adimensional pode ser empregado até em casos em que a aleta é utilizada para aquecimento ao invés de resfriamento. Em outras palavras, casos em que $T_{BASE} < T_{REF}$.

3.7 Alguns exemplos envolvendo aletas infinitas

Exemplo 1

Aleta sólida sujeita à transferência de calor por convecção livre, com condutividade térmica constante. Para tal fenômeno, temos que $\alpha = 1$, $\tilde{F}(\theta) = m^2\theta$, $\gamma > 0$. Neste caso, o problema resulta em [28,29, 30]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dZ^2} - m^2\theta &= 0, \quad 0 \leq Z < \infty \\ \theta &= 1 \quad \text{em } Z = 0 \\ \frac{d\theta}{dZ} &= 0 \quad \text{quando } Z \rightarrow \infty \\ \theta &= 0 \quad \text{quando } Z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.38)$$

E sua solução [28, 29] é obtida a partir de:

$$Z = \int_{\theta}^1 \frac{\tilde{\alpha}(\eta) d\eta}{\sqrt{2 \int_0^{\eta} \tilde{\alpha}(\xi) \tilde{F}(\xi) d\xi}} = \int_{\theta}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{2 \int_0^{\eta} m^2 \xi d\xi}} = \int_{\theta}^1 \frac{d\eta}{m\eta} = \frac{1}{m} (\ln 1 - \ln \theta) \Rightarrow \theta = \exp(-mZ) \quad (3.39)$$

correspondendo exatamente à equação (3.10), quando $m = \sqrt{\frac{hA}{kP}}$ e $T_{REF} = T_{\infty}$ visto que:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_{BASE} - T_{\infty}} = \exp\left(-\sqrt{\frac{hA}{kP}} \frac{p}{A} z\right), \quad 0 \leq Z < \infty, \quad m = \sqrt{\frac{hA}{kP}} \quad (3.40)$$

O fluxo total de calor, nesse caso, (como a condutividade térmica é constante, K_{BASE} é denotada simplesmente por k) é a mesma apresentada na equação (3.12).

$$Q_{TOTAL} = Pk(T_{BASE} - T_{\infty}) \sqrt{2 \int_0^1 m^2 \xi d\xi} = Pk(T_{BASE} - T_{\infty}) m = \sqrt{hAPk} (T_{BASE} - T_{\infty}) \quad (3.41)$$

Exemplo 2

Aleta porosa com condutividade térmica constante, sujeita à transferência de calor por convecção natural [31]. Para este fenômeno temos que $\tilde{\alpha}(\theta) = 1$, $\tilde{F}(\theta) = \gamma^2 |\theta| \theta$ com $\gamma > 0$.

$$Z = \int_{\theta}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{2 \int_0^{\xi} \gamma^2 |\eta| \eta d\eta}} = \frac{1}{\gamma \sqrt{2}} \int_{\theta}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\int_0^{\xi} |\eta| \eta d\eta}} = \frac{\sqrt{3}}{\gamma \sqrt{2}} \int_{\theta}^1 |\xi|^{-3/2} d\xi = -\frac{\sqrt{6}}{\gamma} (1 - |\theta|^{-3/2} \theta) \quad (3.42)$$

Como Z é não negativo, θ tem que ser não negativo. Portanto:

$$\theta = \left(\frac{Z\gamma}{\sqrt{6}} + 1\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{6}}{\gamma Z + \sqrt{6}}\right)^2, \quad 0 \leq Z < \infty \quad (3.43)$$

O fluxo total de calor, neste caso, é dado por:

$$\begin{aligned}
Q_{TOTAL} &= Pk(T_{BASE} - T_{REF}) \sqrt{2 \int_0^1 \gamma^2 |\xi| \xi d\xi} = pk(T_{BASE} - T_{REF}) \gamma \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left[|\xi|^{3/2} \right]_0^1 = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \gamma Pk(T_{BASE} - T_{REF})
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Em geral, $T_{REF} = T_{\infty}$ (temperatura do ambiente).

Exemplo 3

Aleta sólida, com condutividade térmica constante, no vácuo. Para tal fenômeno temos que $\tilde{\alpha}(\theta) = 1$, $\tilde{F}(\theta) = \gamma^2 |\theta|^3 \theta$ com $\gamma > 0$.

$$Z = \int_{\theta}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{2 \int_0^{\xi} \gamma^2 |\eta| \eta d\eta}} = \frac{1}{\gamma \sqrt{2}} \int_{\theta}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\int_0^{\xi} |\eta|^3 \eta d\eta}} = \frac{\sqrt{5}}{\gamma \sqrt{2}} \int_{\theta}^1 |\xi|^{-5/2} d\xi = -\frac{\sqrt{10}}{3\gamma} (1 - |\theta|^{-5/2} \theta) \tag{3.45}$$

Como Z é não negativo, θ tem que ser não negativo. Portanto:

$$\theta = \left(\frac{3\gamma Z}{\sqrt{10}} + 1 \right)^{-2/3} = \left(\frac{\sqrt{10}}{3\gamma Z + \sqrt{10}} \right)^{2/3}, \quad 0 \leq Z < \infty \tag{3.46}$$

O fluxo total de calor, neste caso, é dado por:

$$Q_{TOTAL} = Pk(T_{BASE} - T_{REF}) \sqrt{2 \int_0^1 \gamma^2 |\xi|^3 \xi d\xi} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \gamma Pk(T_{BASE} - T_{REF}) \tag{3.47}$$

Como assumimos se tratar do vácuo, temos que $T_{REF} = 0$.

Exemplo 4

Aletas sólidas sujeitas à transferência de calor linear, com condutividade térmica dependendo linearmente da temperatura. Para tal fenômeno temos que:

$$\tilde{F}(\theta) = m^2 \theta = \left(\frac{hA}{Pk_{BASE}} \right) \theta, \quad \tilde{\alpha}(\theta) = \left(\frac{1 + \beta \theta}{1 + \beta} \right), \quad \beta > -1 \quad (3.48)$$

Neste caso, o problema resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dZ} \left(\alpha \frac{d\theta}{dZ} \right) - m^2 \theta &= 0, \quad 0 \leq Z < \infty \\ \theta &= 1 \quad \text{em } Z = 0 \\ \frac{d\theta}{dZ} &= 0 \quad \text{quando } Z \rightarrow \infty \\ \theta &= 0 \quad \text{quando } Z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.49)$$

E a solução é obtida a partir de:

$$\begin{aligned} Z &= \int_{\theta}^1 \frac{\left(\frac{1 + \beta \eta}{1 + \beta} \right) d\eta}{\sqrt{2 \int_0^{\eta} \left(\frac{1 + \beta \xi}{1 + \beta} \right) \left(\frac{hA}{Pk_{BASE}} \right) \xi d\xi}} = \sqrt{\frac{Pk_{BASE}}{(1 + \beta) hA}} \int_{\theta}^1 \frac{(1 + \beta \eta) d\eta}{\sqrt{2 \int_0^{\eta} (1 + \beta \xi) \xi d\xi}} \Rightarrow \\ \Rightarrow Z &= \sqrt{\frac{Pk_{BASE}}{(1 + \beta) hA}} \int_{\theta}^1 \frac{(1 + \beta \eta) d\eta}{\sqrt{\eta^2 + \frac{2}{3} \beta \eta^3}} = \sqrt{\frac{3Pk_{BASE}}{(1 + \beta) hA}} \int_{\theta}^1 \frac{(1 + \beta \eta) d\eta}{\eta \sqrt{3 + 2\beta \eta}} \Rightarrow \\ \Rightarrow Z &= \sqrt{\frac{Pk_{BASE}}{(1 + \beta) hA}} \left\{ -\ln \left| \sqrt{1 + \frac{2}{3} \beta} + 1 \right| + \ln \left| \sqrt{1 + \frac{2}{3} \beta} - 1 \right| + 3 \sqrt{1 + \frac{2}{3} \beta} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left| \sqrt{1 + \frac{2}{3} \beta \theta} + 1 \right| - \ln \left| \sqrt{1 + \frac{2}{3} \beta \theta} - 1 \right| - 3 \sqrt{1 + \frac{2}{3} \beta \theta} \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

O fluxo total de calor, neste caso, é dado por:

$$\begin{aligned}
Q_{TOTAL} &= Pk_{BASE} (T_{BASE} - T_{REF}) \sqrt{2 \int_0^1 \left(\frac{1 + \beta\theta}{1 + \beta} \right) \left(\frac{hA}{Pk_{BASE}} \right) \theta d\theta} = \\
&= (T_{BASE} - T_{REF}) \sqrt{\left(\frac{3 + 2\beta}{3 + 3\beta} \right) (Pk_{BASE} hA)}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

É interessante notar que, se $\beta = 0$, (3.51) coincide com (3.12) (aleta linear sólida).

4. SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ALETAS INFINITAS

O processo de transferência de calor em regime permanente numa aleta é descrito por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, sujeito a duas condições de contorno.

Como mencionado no capítulo anterior, praticamente todos os trabalhos, cujo principal assunto é a transferência de calor em aletas, apresentam simulações envolvendo aletas muito longas, normalmente chamadas aletas infinitas. No entanto, esses casos são tratados considerando aletas com comprimento previamente estabelecidos para essas aletas [31, 32, 33, 36, 41], dando origem a uma região limitada. Na verdade, apenas poucas soluções envolvendo aletas infinitas são conhecidas, em particular no caso clássico linear, encontrado nos livros de transmissão de calor [29, 30, 42, 43].

A abordagem utilizada neste capítulo utiliza a equação diferencial ordinária de primeira ordem desenvolvida no capítulo anterior para a realização de simulações numéricas em aletas cilíndricas infinitas. A equação diferencial ordinária de primeira ordem é, em geral, muito mais simples de resolver do que a de segunda ordem, e permite uma simulação simples, mesmo em contextos não lineares, como aqueles que surgem quando se assume que a condutividade térmica depende da temperatura e naqueles em que a transferência de calor de/para a aleta obedece a relações não lineares entre o calor transferido e a temperatura.

E, além disso, os métodos numéricos disponíveis também são mais simples, e nos permitem lidar com regiões não limitadas. O problema se torna um problema de “dados iniciais”, e pode ser resolvido por aproximação, por exemplo, com a ajuda de um esquema de Euler, tratando a posição espacial da mesma forma que tratamos do tempo em problemas transientes.

Na verdade, para uma aleta cilíndrica muito longa, é possível descrever o processo de transmissão de calor através de um problema de valor inicial de primeira ordem (dando à posição espacial o mesmo tratamento que ao tempo), dando origem a um modo de simulação extremamente conveniente, preciso, rápido e com baixo custo.

4.1 Modelagem matemática

A modelagem matemática para o fenômeno da transferência de em uma aleta cilíndrica é normalmente representada como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(-k \frac{dT}{dz} \right) + f &= 0, \quad 0 < z < L \\ T &= T_0 \quad z = 0 \\ \frac{dT}{dz} &= 0 \quad z = L \end{aligned} \tag{4.1}$$

na qual L denota o comprimento da aleta. Em $z = 0$ temos uma temperatura determinada (condições de contorno de Dirichlet) enquanto em $z = L$ temos a condição de contorno de Neumann, representando a extremidade isolada.

Como representa um importante caso limite, aletas infinitas são estudadas pela maioria dos autores. No entanto, eles limitam seus estudos a situações em que um determinado comprimento muito grande é considerado.

Nesta tese, ao invés de considerarmos um problema de aleta com comprimento L muito grande, porém finito, iremos considerar uma região realmente ilimitada, como a mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(-k \frac{dT}{dz} \right) + f &= 0, \quad 0 < z < \infty \\ T &= T_0 \quad z = 0 \\ \frac{dT}{dz} &= 0 \quad z \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{4.2}$$

na qual f depende de T (normalmente uma temperatura absoluta [29]) de modo que:

$$\begin{aligned} f &= \hat{f}(T), \quad \infty > \bar{c} \geq \frac{\hat{f}(b) - \hat{f}(a)}{b - a} > 0, \quad \bar{c} = \text{constante}, \quad a \neq b \\ \hat{f}(T_\infty) &= 0, \quad T_\infty = \text{constante} \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

e a função k (normalmente condutividade térmica [42]) é uma função tal que:

$$k = \hat{k}(T), \quad \infty > k_{MAX} \geq \hat{k}(T) \geq k_{MIN} > 0, \quad \text{para qualquer } T, \quad k_{MAX}, k_{MIN} \rightarrow \text{constantes} \quad (4.4)$$

As características matemáticas de f e k garantem o comportamento monotônico da temperatura T (ver Apêndice 1). Se $T_0 > T_\infty$ então T é uma função decrescente da posição z , com valores compreendidos no intervalo $[T_\infty, T_0]$. Por outro lado, se $T_0 < T_\infty$ então T é uma função crescente da posição z , com valores dentro do intervalo $[T_0, T_\infty]$. Adicionalmente, é garantido que a derivada de T na posição espacial z seja sempre não nula para qualquer z .

Além disso, o comportamento da derivada de f nos permite concluir que:

$$T_\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} T \quad (4.5)$$

Agora, vamos escrever a partir de (4.2) a seguinte equação:

$$\left(-k \frac{dT}{dz}\right) \frac{d}{dz} \left(-k \frac{dT}{dz}\right) + \left(-k \frac{dT}{dz}\right) f = 0 \quad (4.6)$$

que dá origem à equação diferencial separável abaixo:

$$\left(-k \frac{dT}{dz}\right) d\left(-k \frac{dT}{dz}\right) + (-k f) dT = 0 \quad (4.7)$$

gerando:

$$\frac{1}{2} \left(-k \frac{dT}{dz}\right)^2 - \left[\frac{1}{2} \left(-k \frac{dT}{dz}\right)^2 \right]_{z \rightarrow \infty} = \int_{T_\infty}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \quad (4.8)$$

Como a derivada de T é zero para $z \rightarrow \infty$, temos

$$\frac{1}{2} \left(-k \frac{dT}{dz} \right)^2 = \int_{T_\infty}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \quad (4.9)$$

Se o problema original representa a descrição matemática de uma aleta de resfriamento, temos $T_\infty < T_0$. Nesse caso, a temperatura é uma função decrescente da posição z e portanto:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1}{\hat{k}(T)} \sqrt{2 \int_{T_\infty}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi}, \quad T = T_0 \text{ em } z = 0 \quad (4.10)$$

Se o problema original representa a descrição matemática de uma aleta de aquecimento, temos $T_\infty > T_0$. Nesse caso, a temperatura é uma função crescente da posição z e, portanto:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{\hat{k}(T)} \sqrt{2 \int_{T_\infty}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi}, \quad T = T_0 \text{ em } z = 0 \quad (4.11)$$

combinando (4.10) com (4.11) encontramos:

$$\frac{dT}{dz} = -\left(\frac{T_0 - T_\infty}{|T_0 - T_\infty|} \right) \frac{1}{\hat{k}(T)} \sqrt{2 \int_{T_\infty}^T \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi}, \quad T = T_0 \text{ em } z = 0 \quad (4.12)$$

o calor total transferido pela aleta é facilmente obtido a partir de:

$$Q = \left[-kA \frac{dT}{dz} \right]_{z=0} = \left(\frac{T_0 - T_\infty}{|T_0 - T_\infty|} \right) \frac{A}{\hat{k}(T_0)} \sqrt{2 \int_{T_\infty}^{T_0} \hat{k}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi} \quad (4.13)$$

na qual A é a área da seção da aleta. É surpreendente que não exista necessidade de resolver nenhuma equação diferencial para determinar o fluxo total de calor.

4.2 Formulação adimensional

O problema (4.2) pode ser reescrito na forma adimensional como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dZ} \left(\eta \frac{d\theta}{dZ} \right) - \Phi &= 0, \quad 0 < Z < \infty \\ \theta &= 1 \quad \text{em } Z = 0 \\ \frac{d\theta}{dZ} &= 0 \quad \text{quando } Z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.14)$$

na qual:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (4.15)$$

$$Z = \frac{zP}{A} \quad (4.16)$$

$$\eta = \hat{\eta}(\theta) = \frac{\hat{k}(\theta T_0 - \theta T_\infty + T_\infty)}{k_0}, \quad k_0 = \hat{k}(T_0) \quad (4.17)$$

$$\Phi = \hat{\Phi}(\theta) = \frac{\hat{f}(\theta T_0 - \theta T_\infty + T_\infty)}{(T_0 - T_\infty) k_0 (p/A)^2}, \quad k_0 = \hat{k}(T_0) \quad (4.18)$$

Com as novas quantidades, temos a equação (4.12) na forma adimensional:

$$\frac{d\theta}{dZ} = -\frac{1}{\hat{\eta}(\theta)} \sqrt{2 \int_0^\theta \hat{\eta}(\xi) \hat{\Phi}(\xi) d\xi}, \quad \theta = 1 \quad \text{em } Z = 0 \quad (4.19)$$

Então, o fluxo total de calor pode ser obtido, ao invés de (4.13), a partir de:

$$Q = \left[-kA \frac{dT}{dz} \right]_{z=0} = Pk_0 (T_0 - T_\infty) \sqrt{2 \int_0^1 \hat{\eta}(\xi) \hat{\Phi}(\xi) d\xi} \quad (4.20)$$

4.3 Alguns exemplos com solução exata

A fim de dar suporte às simulações numéricas que serão apresentadas, vamos considerar alguns casos conhecidos de soluções exatas e fechadas.

O problema mais clássico envolvendo aletas cilíndricas é o caso linear [42, 45], em que a equação que modela o problema é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(k \frac{dT}{dz} \right) - \frac{hP}{A} (T - T_\infty) &= 0, \quad 0 < z < L \\ T &= T_0 \quad \text{em } z = 0 \\ \frac{dT}{dz} &= 0 \quad \text{em } z = L \end{aligned} \quad (4.21)$$

no qual o coeficiente de transferência de calor h , a condutividade térmica k , o perímetro p e a área A são constantes positivas. Claramente, o problema (4.21) é um caso particular do problema (4.1), no qual k é constante e $f = \hat{f}(T) = hp(T - T_\infty)/A$

Quando $L \rightarrow \infty$, obtemos um dos resultados mais conhecidos em transferência de calor

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp\left(-\sqrt{\frac{hp}{kA}} z\right) \Leftrightarrow \theta = \exp\left(-\sqrt{\frac{hA}{kp}} Z\right) \quad (4.22)$$

Podemos utilizar diretamente a forma adimensional, mas optamos por usar a apresentação usualmente encontrada na literatura. A partir deste ponto, utilizaremos a formulação adimensional.

Apesar de limitada a situação na qual $T_0 > T_\infty$, outra interessante descrição pode ser encontrada no artigo de Gorla e Bakier [31], que considera a aleta cilíndrica porosa com condutividade térmica constante, envolvendo convecção e radiação térmica.

É possível generalizar essa descrição de forma a considerar as aletas de aquecimento também. Com esse objetivo, substituiremos a equação original pela seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dZ^2} - A|\theta| - B\left\{|\theta + C|^3(\theta + C) - |C|^3 C\right\} \\ \theta = 1 \text{ em } Z = 0 \\ \frac{d\theta}{dZ} = 0 \text{ quando } Z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.23)$$

na qual A , B e C são constantes. As constantes A e B devem ser não negativas e de modo que $A+B>0$. Os parâmetros A , B e C representam, respectivamente, parâmetros de convecção livre, parâmetro associado a radiação emitida pela aleta para o ambiente e parâmetro associado a radiação emitida pelo ambiente para a aleta.

Pode-se notar que (4.23) representa uma melhoria no modelo apresentado em [31] pois admite temperaturas abaixo de T_∞ (aletas de aquecimento) e considera a variável espacial adimensional como definido em (4.16). O modelo apresentado em [31] emprega a aleta de comprimento L para definir a posição espacial adimensional, tornando impossível a simulação de aletas infinitas.

Quando $B=0$ a solução exata é dada por:

$$\theta = \left(\frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{A})z + \sqrt{6}} \right)^2 \quad (4.24)$$

Quando $C=0$ e $A=0$ temos:

$$\theta = \left(\frac{\sqrt{10}}{3(\sqrt{B})z + \sqrt{10}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.25)$$

Está claro que assumir a condutividade térmica como constante foi fundamental para atingir uma solução acima da forma exata e fechada.

O problema (4.23) também é descrito pela equação diferencial ordinária de primeira ordem (sujeito aos dados iniciais)

$$\frac{d\theta}{dZ} = -\sqrt{2\int_0^{\theta} \left\{ A|\xi|\xi + B\left\{ |\xi + C|^3 (\xi + C) - |C|^3 C \right\} \right\} d\xi}, \quad \theta = 1 \quad \text{em} \quad Z = 0 \quad (4.26)$$

4.4 Aproximação numérica

O problema (4.14) tem a estrutura de um problema de dados iniciais de primeira ordem. Então, o método empregado para resolver a equação diferencial de primeira ordem (Euler, Runge-Kutta) pode ser usado aqui [43].

Por exemplo, considerando o método de Euler explícito temos:

$$\frac{\theta^{i+1} - \theta^i}{\Delta Z} \cong -\frac{1}{\hat{\eta}(\theta^i)} \sqrt{2\int_0^{\theta^i} \hat{\eta}(\xi) \hat{\Phi}(\xi) d\xi}, \quad \text{com} \quad \theta^0 = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.27)$$

ou:

$$\theta^{i+1} \cong \theta^i - \frac{\Delta Z}{\hat{\eta}(\theta^i)} \sqrt{2\int_0^{\theta^i} \hat{\eta}(\xi) \hat{\Phi}(\xi) d\xi}, \quad \text{com} \quad \theta^0 = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

na qual θ^i representa a aproximação para a temperatura adimensional em uma posição espacial adimensional $Z = Z_i$. Por exemplo, considerando $\Delta Z = \text{constante}$, temos:

$$Z_i = (i-1)\Delta Z \quad (4.29)$$

A escolha de ΔZ deve levar em conta que θ^i é um valor no intervalo (0,1). Valores muito grandes para ΔZ podem gerar inconsistências físicas para θ^i . É conveniente que ΔZ seja pelo menos de forma que:

$$\frac{\Delta Z}{\hat{\eta}(\theta^i)} \sqrt{2\int_0^1 \hat{\eta}(\xi) \hat{\Phi}(\xi) d\xi} < 1 \quad (4.30)$$

Essa condição é sempre satisfeita se:

$$\Delta Z < \frac{k_{MAX}}{\sqrt{2k_0 k_{MIN} \hat{\Phi}(1)}} \quad (4.31)$$

Nos casos em que a condutividade térmica é constante, a desigualdade (4.31) se reduz a:

$$\Delta Z < \frac{1}{\sqrt{2\hat{\Phi}(1)}} \quad (4.32)$$

Naturalmente, a aproximação obtida fica melhor a medida que ΔZ diminui.

4.5 Uma comparação entre as soluções exatas e numéricas

Primeiramente, consideraremos o caso linear em que $\Phi = \hat{\Phi}(\theta) = \theta \{hA/(pk)\}$ ($f = \hat{f}(T) = hp(T - T_\infty)/A$ - Lei do resfriamento de Newton). Nesse caso, assumindo a condutividade térmica constante, temos:

$$\theta^{i+1} \cong \theta^i - \Delta Z \sqrt{\frac{hA}{kP}} \sqrt{2 \int_0^{\theta^i} \xi d\xi} = \theta^i - \Delta Z \left\{ \sqrt{\frac{hA}{kP}} \right\} \theta^i, \quad \text{com } \theta^0 = 1 \quad (4.33)$$

A tabela 1 apresenta uma comparação entre a solução exata e algumas aproximações obtidas com o esquema de Euler. Nesse caso $\hat{\Phi}(1) = hA/(Pk)$ e a desigualdade (4.32) sugere $\Delta Z < \sqrt{Pk/(2hA)}$.

Tabela 1 – A temperatura adimensional θ para quatro valores selecionados de Z , empregando três diferentes valores para ΔZ , e a solução exata.

$\theta =$	$\Delta Z \sqrt{\frac{hA}{kp}} = 0.5$	$\Delta Z \sqrt{\frac{hA}{kp}} = 0.1$	$\Delta Z \sqrt{\frac{hA}{kp}} = 0.01$	EXATA
$Z = 0.5 \sqrt{\frac{kp}{hA}}$	0.500000000	0.590489995	0.605006074	0.606539659
$Z = \sqrt{\frac{kp}{hA}}$	0.250000000	0.348678434	0.366032350	0.367879441
$Z = 5 \sqrt{\frac{kp}{hA}}$	0.000097656	0.005153775	0.006570484	0.006737946
$Z = 10 \sqrt{\frac{kp}{hA}}$	0.000000095	0.000026561	0.000043171	0.000045399

Vamos agora considerar o problema (4.23). Nesse caso, temos que a temperatura adimensional é solução de (4.26). Avaliando a integral (que pode ser analisada numericamente), obtemos:

$$\frac{d\theta}{dZ} = -\sqrt{\frac{2A}{3}|\theta|^3 + \frac{2B}{5}\left(|\theta + C|^5 - |C|^5\right) - 2B\theta|C|^3 C}, \quad \theta = 1 \text{ em } Z = 0 \quad (4.34)$$

O esquema de Euler nos leva a:

$$\theta^{i+1} = \theta^i - \Delta Z \sqrt{\frac{2A}{3}|\theta^i|^3 + \frac{2B}{5}\left(|\theta^i + C|^5 - |C|^5\right) - 2B\theta^i|C|^3 C}, \quad \theta^0 = 1 \quad (4.35)$$

As tabelas 2 e 3 apresentam alguns resultados obtidos para casos particulares do problema (4.26), que admitem soluções exatas e fechadas.

Tabela 2 – A temperatura adimensional θ para quatro valores selecionados de Z , empregando três diferentes valores para ΔZ , e a solução exata, para o caso particular em que $B = 0$ (solução exata dada por (4.24)).

$\theta =$	$\Delta Z \sqrt{\frac{2A}{3}} = 0.5$	$\Delta Z \sqrt{\frac{2A}{3}} = 0.1$	$\Delta Z \sqrt{\frac{2A}{3}} = 0.01$	EXATA
$Z = 0.5 \sqrt{\frac{3}{2A}}$	0.500000000	0.621555611	0.638274201	0.640000000
$Z = \sqrt{\frac{3}{2A}}$	0.323223305	0.425524022	0.442633866	0.444444444
$Z = 5 \sqrt{\frac{3}{2A}}$	0.059430540	0.077248422	0.081194363	0.081632653
$Z = 10 \sqrt{\frac{3}{2A}}$	0.021638358	0.026540105	0.027653420	0.027777777

Tabela 3 – A temperatura adimensional θ para quatro valores selecionados de Z , empregando três diferentes valores para ΔZ , e a solução exata, para o caso particular em que $A = 0$ e $C = 0$ (solução exata dada por (4.25)).

$\theta =$	$\Delta Z \sqrt{\frac{2B}{5}} = 0.5$	$\Delta Z \sqrt{\frac{2B}{5}} = 0.1$	$\Delta Z \sqrt{\frac{2B}{5}} = 0.01$	EXATA
$Z = 0.5 \sqrt{\frac{5}{2B}}$	0.500000000	0.668414634	0.686760492	0.688612075
$Z = \sqrt{\frac{5}{2B}}$	0.411611652	0.525296436	0.541216123	0.542883523
$Z = 5 \sqrt{\frac{5}{2B}}$	0.209027210	0.234969450	0.239592800	0.240097358
$Z = 10 \sqrt{\frac{5}{2B}}$	0.143879371	0.155183884	0.157262425	0.157490131

4.6 Resultados numéricos

As figuras 8, 9, 10 e 11 apresentam alguns resultados para o problema (4.23) obtidos com a ajuda de um esquema numérico representado em (4.35).

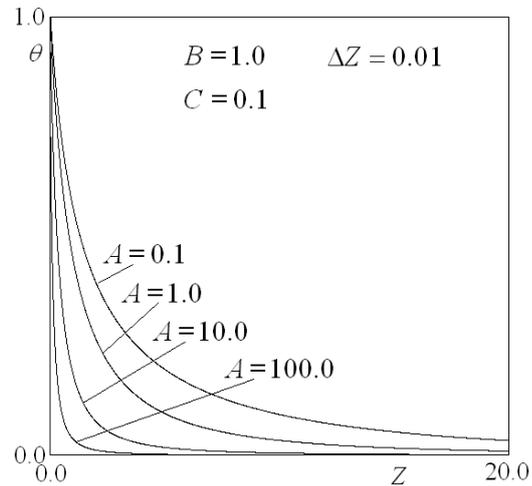


Figura 8 – A temperatura adimensional θ como uma função da posição adimensional Z , para quatro valores seleccionados de A , obtidos com $\Delta Z = 0.01$, para $B = 1.0$ e $C = 0.1$.

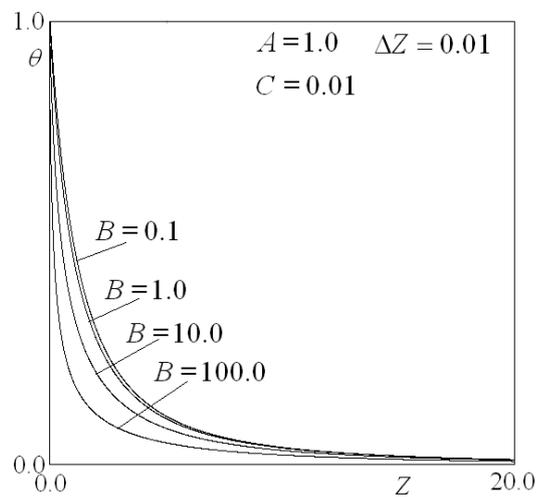


Figura 9 – A temperatura adimensional θ como uma função da posição adimensional Z , para quatro valores seleccionados de B , obtidos com $\Delta Z = 0.01$, para $A = 1.0$ e $C = 0.01$.

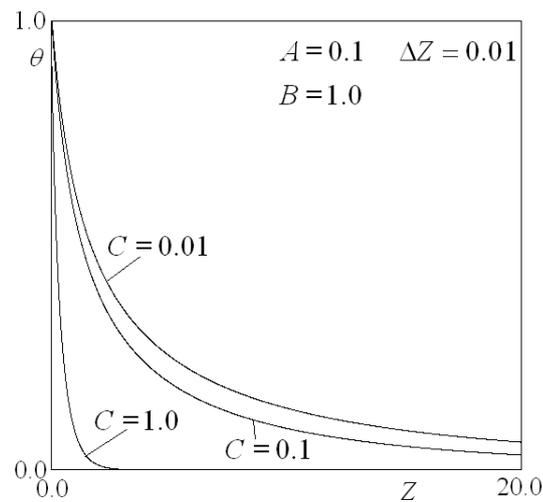


Figura 10 – A temperatura adimensional θ como uma função da posição adimensional Z , para três valores seleccionados de C , obtidos com $\Delta Z = 0.01$, para $A = 0.1$ e $B = 1.0$.

Agora, vamos considerar que a condutividade térmica depende da temperatura de modo que:

$$k = \hat{k}(T) = \frac{k_0 - k_\infty}{T_0 - T_\infty}(T - T_\infty) + k_\infty \quad (4.36)$$

na qual k_0 e k_∞ são constantes positivas (representando a condutividade térmica nas temperaturas T_0 e T_∞ , respectivamente).

Nesse caso, a partir de (4.17) temos:

$$\eta = \hat{\eta}(\theta) = \theta + \alpha(1 - \theta), \quad \alpha = \frac{k_\infty}{k_0} \quad (4.37)$$

Vamos considerar uma aleta sólida que troca energia com o meio seguindo a Lei de Newton do resfriamento (problema (4.21). Na forma adimensional temos:

$$\frac{d}{dZ} \left((\theta + \alpha(1-\theta)) \frac{d\theta}{dZ} \right) - \frac{hA}{k_0 P} \theta = 0, \quad \alpha = \frac{k_\infty}{k_0}$$

$$\theta = 1 \quad \text{em} \quad Z = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{d\theta}{dZ} = 0 \quad \text{quando} \quad Z \rightarrow \infty$$

A equação diferencial de primeira ordem correspondente, sujeita aos dados iniciais, se torna:

$$\frac{d\theta}{dZ} = - \frac{1}{(\theta + \alpha(1-\theta))} \sqrt{2 \int_0^\theta (\xi + \alpha(1-\xi)) \frac{hA}{k_0 P} \xi d\xi}, \quad \theta = 1 \quad \text{em} \quad Z = 0 \quad (4.39)$$

e pode ser escrita como:

$$\frac{d\theta}{dZ} = - \sqrt{\frac{hA}{k_0 P}} \sqrt{\frac{2(1-\alpha)\theta^3 + 3\alpha\theta^2}{3(\theta(1-\alpha) + \alpha)^2}}, \quad \theta = 1 \quad \text{em} \quad Z = 0 \quad (4.40)$$

É fácil perceber que o caso da condutividade térmica constante, ($k_0 = k_\infty$) nos leva ao caso linear (θ dado pela equação (4.22)).

A figura 12 mostra alguns resultados obtidos a partir de (4.40) empregando o esquema apresentado em (4.28), considerando diversas valores para a razão k_∞ / k_0 .

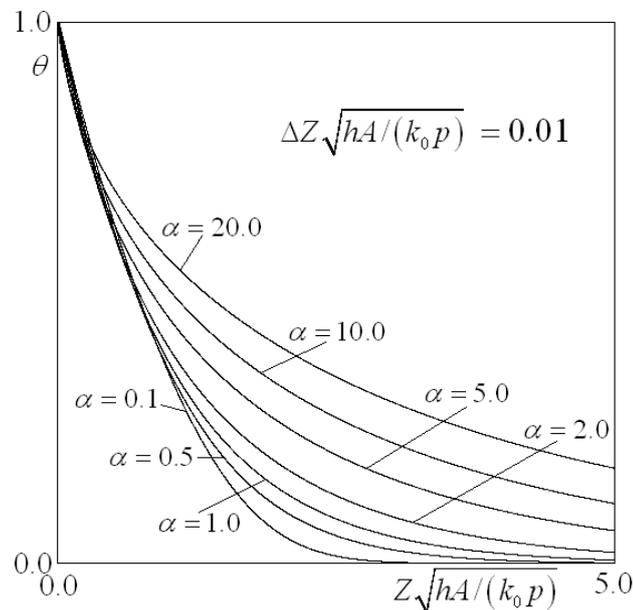


Figura 11 - A temperatura adimensional θ como uma função de $Z\sqrt{hA/(k_0P)}$, para sete valores para a razão $\alpha = k_\infty/k_0$, obtidos com $\Delta Z\sqrt{hA/(k_0P)} = 0.01$, a partir do esquema representado em (4.28).

Consideraremos, agora, uma aleta infinita porosa, como a considerada no problema (4.23), porém com a condutividade térmica dependente da temperatura, seguindo a relação (4.36). Em outras palavras, considere o problema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dZ} \left((\theta + \alpha(1-\theta)) \frac{d\theta}{dZ} \right) - A|\theta|\theta - B \left\{ |\theta + C|^3 (\theta + C) - |C|^3 C \right\} &= 0 \\ \theta &= 1 \quad \text{em } Z = 0 \\ \frac{d\theta}{dZ} &= 0 \quad \text{quando } Z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.41)$$

O esquema de Euler, nesse caso, dá origem a:

$$\theta^{i+1} \cong \theta^i - \Delta Z \frac{\sqrt{2 \int_0^{\theta^i} (\xi + \alpha(1-\xi)) \left\{ A|\xi|\xi + B \left\{ |\xi + C|^3 (\xi + C) - |C|^3 C \right\} \right\} d\xi}}{(\theta^i + \alpha(1-\theta^i))}, \quad \theta^0 = 1 \quad (4.42)$$

Vamos considerar o caso em que $A=0$ e $C=0$ tal que, se $\alpha=1$, existe a solução exata e fechada dada por (4.25). Esse caso corresponde a uma aleta infinita cercada por vácuo. Nesse caso (4.42) se reduz a

$$\theta^{i+1} \cong \theta^i - \Delta Z \sqrt{B} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(1-\alpha)|\theta^i|^5 \theta^i + \frac{2}{5}\alpha|\theta^i|^5}}{(\theta^i + \alpha(1-\theta^i))}, \quad \text{com } \theta^0 = 1 \quad (4.43)$$

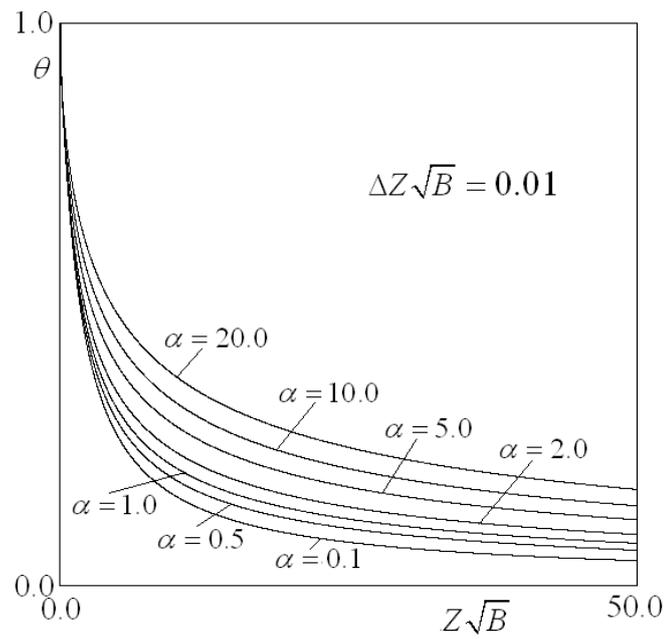


Figura 12 – A temperatura adimensional θ como uma função de $Z\sqrt{B}$, para sete valores para a razão $\alpha = k_\infty / k_0$, obtidos com $\Delta Z\sqrt{B} = 0.01$, a partir do esquema representado em (4.28).

5. CONCLUSÕES

Apesar de um vasto número de artigos na literatura atual tratar, ou afirmar tratar, de aletas infinitas, esses artigos de fato consideram aletas muito compridas, mas com comprimento previamente definido. A única exceção é a aleta linear clássica, presente em quase todos os livros de transferência de calor, como é o caso do exemplo 1 do capítulo 3.

No entanto, esses trabalhos empregam aletas finitas com determinado comprimento (muito longo) e resolvem uma equação diferencial de segunda ordem sujeita a duas condições de contorno. Nessa tese, resolvemos para uma aleta verdadeiramente infinita e utilizamos uma equação diferencial de primeira ordem, de uma forma muito mais simples e precisa.

Além de apresentar uma descrição exata para regiões sem limites em uma dimensão, a metodologia desenvolvida nesta tese permite qualquer relação entre a temperatura e a condutividade térmica, e pode ser utilizado para aletas porosas ou maciças; com convecção e/ou radiação. Para qualquer temperatura dada, entre a temperatura da base e a temperatura de referência, a posição espacial é obtida explicitamente.

É interessante observar que o procedimento utilizado fornece uma solução exata e uma solução numérica para uma grande classe de problemas de transferência de calor não linear, envolvendo regiões sem fronteiras, que, em geral, requer um grande esforço numérico para se obter uma simulação aproximada.

Devemos salientar fortemente, como um dos grandes resultados deste trabalho, que o fluxo total de calor dissipado pela aleta (por unidade de tempo), é fornecido explicitamente e com exatidão pela equação (3.20).

Nesta tese também é apresentada um esquema numérico para a solução do modelo proposto para aletas infinitas. Tal esquema numérico representa um procedimento inovador e simples para determinar a distribuição de temperatura numa aleta cilíndrica (verdadeiramente) infinita. Além do mais, a ferramenta apresentada permite considerar a condutividade térmica dependente da temperatura.

É claro que aletas infinitas não existem na prática, todas têm um comprimento finito. Mas os resultados obtidos para uma aleta infinita representam um limite para as aletas de comprimento finito. Esse limite não é realmente atingido na atual literatura, exceto para casos lineares.

REFERÊNCIAS

- [1] OKAMOTO, Y. Temperature distribution and efficiency of a plate and annular fin with constant thickness. *Bulletin of JSME, The Japan Society of Mechanical Engineers*, v. 9, n. 33, p. 143 150, 1966.
- [2] SOBRAL, R. L. Tese de doutorado: Simulação numérica de aletas num contexto com condutividade térmica dependente da temperatura. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, p. 14, 2017.
- [3] AYUB, Z. H. Plate heat exchanger literature survey and new heat transfer and pressure drop correlations for refrigerant evaporators. *Heat Transfer Engineering*, Taylor & Francis, v. 24, n. 5, p. 3 16, 2003.
- [4] HSIEH, Y.; LIN, T. Saturated flow boiling heat transfer and pressure drop of refrigerant R-410a in a vertical plate heat exchanger. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 45, n. 5, p. 1033 1044, 2002.
- [5] MUFUTA, J. M.; BULCK, E. Van den. Modelling of the mixed convection in the windings of a disc-type power transformer. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 20, n. 5, p. 417 437, 2000.
- [6] DONOVAN, R. C.; ROHRER, W. Radiative and convective conducting fins on a plane wall, including mutual irradiation. *Journal of Heat Transfer*, American Society of Mechanical Engineers, v. 93, n. 1, p. 41 46, 1971.
- [7] KREITH, F.; BOHN, M. S. *Princípios de Transferência de Calor*. Cengage Learning, 2003.
- [8] SPARROW, E. M. E. R. G.; IRVINE, T. F. The effectiveness of radiating fins with mutual irradiation. *J. Aeros. Sci.*, Pergamon, v. 28, n. 10, p. 763 778, 1961
- [9] HEASLET, M. A.; LOMAX, H. Numerical predictions of radiative interchange between conducting fins with mutual irradiations. [S.l.], 1961.

- [10] OKAMOTO, Y. Thermal performances of radiative and convective plate-fins with mutual irradiation. *Bulletin of JSME*, v. 9, n. 33, p. 165, 1966.
- [11] COHEN, B. Heat transfer by conduction and radiation with temperature-dependent thermal conductivity. *Journal of Heat Transfer*, American Society of Mechanical Engineers, v. 91, n. 1, p. 159 160, 1969.
- [12] CHANG, H. Optimization of linearized solutions of radiating annular fin. Rep./AIAA, New York.
- [13] MEHTA, R. Computer-aided optimum design of heat sinks. *IETE Journal of Research*, Taylor & Francis, v. 24, n. 7, p. 298 301, 1978.
- [14] BALAJI, C.; VENKATESHAN, S. Combined conduction, convection and radiation in a slot. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Elsevier, v. 16, n. 2, p. 139 144, 1995.
- [15] KIM, S.; HUANG, C.-H. A series solution of the non-linear fin problem with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 40, n. 9, p. 2979, 2007.
- [16] ARSLANTURK, C. Correlation equations for optimum design of annular fins with temperature dependent thermal conductivity. *Heat and Mass Transfer*, Springer, v. 45, n. 4, p. 519 525, 2009.
- [17] AZIZ, A.; KHANI, F.; Darvishi, M.T. Homotopy analysis method for variable thermal conductivity heat flux gage with edge contact resistance. *Non Linear Sci Numer. Simul.* V. 15, 2010.
- [18] AZIZ, A.; BOUAZIZ, M. A least squares method for a longitudinal fin with temperature dependent internal heat generation and thermal conductivity. *Energy conversion and Management*, Elsevier, v. 52, n. 8, p. 2876 2882, 2011.
- [19] TORABI, M.; YAGHOOBI, H.; AZIZ, A. Analytical solution for convective radiative continuously moving fin with temperature-dependent thermal conductivity. *International Journal of Thermophysics*, Springer, v. 33, n. 5, p. 924 941, 2012.

- [20] DIANI, A.; Mancini, S.; Zilio, C.; Rossetto, L. An assessment on air forced convection on extended surfaces: Ex- perimental results and numerical modeling. *International Journal of Thermal Sciences*, Elsevier, v. 67, p. 120 134, 2013.
- [21] BJØRK, R.; Christensen, D. V.; Eriksen, D.; Pryds, N. Analysis of the internal heat losses in a thermoelectric generator. *International Journal of Thermal Sciences*, Elsevier, v. 85, p. 12 20, 2014.
- [22] GHASEMI, S. E.; HATAMI, M.; GANJI, D. Thermal analysis of convective fin with temperature-dependent thermal conductivity and heat generation. *Case Studies in Thermal Engineering*, Elsevier, v. 4, p. 1 8, 2014.
- [23] MOSAYEBIDORCHEH, S.; FARZINPOOR, M.; GANJI, D. Transient thermal analysis of longitudinal ns with internal heat generation considering temperature-dependent properties and diferent fin profiles. *Energy Conversion and Management*, Elsevier, v. 86, p. 365 370, 2014.
- [24] SUN, Y. S.; XU, J. L. Thermal performance of continuously moving radiative convective fin of complex cross-section with multiple nonlinearities. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 63, p. 23 34, 2015.
- [25] DOGONCHI, A.; GANJI, D. Convection radiation heat transfer study of moving fin with temperature-dependent thermal conductivity, heat transfer coeficient and heat generation. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 103, p. 705 712, 2016.
- [26] MORAN, M. J.; SHAPIRO, H. N.; MUNSON, B. R.; DEWITT, D. P. *Intoduction to termo systems engineering*. Jonh Wiley & Sons, p. 377 383, 2002
- [27] CAMPO, A.; WOLKO, H. Optimum rectangular radiative fins having temperature-variant properties. *Journal of Spacecraft and Rockets*, v. 10, n. 12, p. 811 812, 1973.
- [28] BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S.; INCROPERA F. P.; DEWITT D. P., *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 7th. edition, John Wiley&Sons, Inc., Danvers, MA, 2007.
- [29] HOLMAN, J. P., *Heat Transfer*., 10th Edition, McGraw-Hill, New York, 2009.

- [30] KREITH, F.; MANGLIK, R. M. Principles of Heat Transfer, 8th Edition, CENGAGE Learning, 2011.
- [31] GORLA, R. S. R.; BAKIER, A. Y.. Thermal analysis of natural convection and radiation in porous fins. *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, 38 (2011) 638-645.
- [32] BHANJA, D.; KUNDU, B.; MANDAL, P.K.. Thermal analysis of porous fin used for electronic cooling. *Procedia Engineering*, vol.64, pp.956-965, 2013.
- [33] KIWAN, S. Effect of radiative losses on heat transfer from porous fins, *Int. J. Thermal Sci*, 46, n.10, pp. 1046-1055, 2007.
- [34] WYLIE, C. R. *Advanced Engineering Mathematics*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1975.
- [35] LI, W.; PANG, Y. Application of Adomian decomposition method to nonlinear systems. *Adv Differ Equ* 2020, 67 (2020).
- [36] WASEEM, W.; SULAIMAN, M.; ISLAM, S.; KUMAM, P.; NAWAZ, R.; RAJA, M. A. Z.; FAROOQ, M.; SHOAIIB, M. A Study of Changes in Temperature Profile of Porous Fin using Cuckoo search Algorithm, *Alexandria Engineering Journal*, vol. 59, no. 1, pp.11-24, 2020.
- [37] MOITSHEKI, R. J.; HAYAT, T.; MALIK, M. Y. Some exact solutions for a fin problem with a power law temperature-dependent thermal conductivity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. Vol. 11, 3287-3294 (2010).
- [38] GAMA, R.S. Closed-Form Formulae for the Kirchhoff Transformation assuming a Piecewise Constant Temperature Dependent Thermal Conductivity. *Latin American Applied Research*, vol. 47, pp. 53-57, 2017.
- [39] GAMA, R.S.; CORRÊA, E. D.; MARTINS-COSTA M.L. An upper bound estimate for the steady-state temperature for a class of heat conduction problems wherein the thermal conductivity is temperature dependent, *Int. J. of Eng. Science*, 69, pp. 77-83 (2013).
- [40] KIM, S. A simple direct estimation of temperature-dependent thermal conductivity with Kirchhoff transformation, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 28 537-544 (2001).

[41] DARVISHI, M. T.; GORLA, R. S. R.; KHANI, F. Natural convection and radiation in porous fins, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 23, pp. 1406-1420, 2013.

[42] INCROPERA, F.; DEWITT, P. D. *Introduction to Heat Transfer*, 3rd edition, John Wiley&Sons Inc., New York, 1996.

[43] CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. *Conduction of Heat in Solids*, 2nd Edition, Oxford University Press, New York 2000.

APENDICE 1 – Sobre o comportamento de T qualquer

Vamos assumir que $T_0 > T_\infty$ e que existem pontos no intervalo $(0, \infty)$ no qual $T < T_\infty$. Então, em alguns desses pontos, teremos um mínimo em que:

$$\frac{d}{dz} \left(k \frac{dT}{dz} \right) \geq 0 \Leftrightarrow f \geq 0 \quad (\text{A1-1})$$

No entanto, como $f \geq 0$, devemos ter $T \geq T_\infty$ em um dos pontos onde se assumiu que $T < T_\infty$. Conseqüentemente esses pontos não existem e garantimos que, se $T_0 > T_\infty$, então $T \geq T_\infty$ e (A1-1) é válida em todos os pontos. Como $T = T_0$ em $z = 0$ e $T \geq T_\infty$ em todos os pontos, a derivada de T por z em $z = 0$ é negativa.

Como (A1-1) é válida, a derivada em T por z é uma função crescente de z e a derivada de T por z é zero para $z \rightarrow \infty$, podemos concluir que:

$$k \frac{dT}{dz} \leq 0 \quad \text{em todos os pontos} \quad (\text{A1-2})$$

Agora, vamos assumir que $T_0 < T_\infty$ e que existem pontos no intervalo $(0, \infty)$ em que $T > T_\infty$. Então, em alguns desses pontos, teremos um mínimo em que:

$$\frac{d}{dz} \left(k \frac{dT}{dz} \right) \leq 0 \Leftrightarrow f \leq 0 \quad (\text{A1-3})$$

Porém, como $f \leq 0$, devemos ter $T \leq T_\infty$ em um dos pontos onde se assumiu que $T > T_\infty$. Conseqüentemente esses pontos não existem e garantimos que, se $T_0 < T_\infty$, então $T \leq T_\infty$ e (A1-3) é válida em todos os pontos. Como $T = T_0$ em $z = 0$ e $T \leq T_\infty$ em todos os pontos, a derivada de T por z em $z = 0$ é positiva.

Como (A1-3) é válida, a derivada em T por z é uma função decrescente de z e a derivada de T por z é zero para $z \rightarrow \infty$, podemos concluir que:

$$k \frac{dT}{dz} \geq 0 \quad \text{em todos os pontos} \quad (\text{A1-4})$$