



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Diego José Humberto Fiorentini Álvarez

**Fator de forma do vértice $\pi D_1 D^*$ usando as regras de soma da
QCD**

Rio de Janeiro

2014

Diego José Humberto Fiorentini Álvarez

Fator de forma do vértice $\pi D_1 D^*$ usando as regras de soma da QCD



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Chiapparini
Coorientador: Profa. Dra. Mirian Enriquetta Bracco

Rio de Janeiro

2014

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS /CTC/D

F518

Fiorentini Alvarez, Diego José Humberto.

Fator de forma do vértice $\pi D_1 D^*$ usando as regras de soma da QDC / Diego Jose Humberto Fiorentini Álvarez. - 2104. 90 f.:il.

Orientador: Marcelo Chiapparini.

Coorientadora: Mirian Enriquetta Bracco.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Cromodinâmica quântica - Teses. 2. Regras de soma (Física) - Teses. 3. Fator de forma (Física nuclear) - Teses. 4. Monte Carlo, Método de - Teses. I. Chiapparini, Marcelo. III. Bracco, Mirian Enriquetta. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. IV. Título.

CDU 539.126

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Diego José Humberto Fiorentini Álvarez

Fator de forma do vértice $\pi D_1 D^*$ usando as regras de soma da QCD

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 14 de Agosto de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Chiapparini (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Profa. Dra. Mirian Enriquetta Bracco (Coorientador)
Faculdade de Tecnologia – UERJ

Prof. Dr. Sergio José Barbosa Duarte
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. José de Sá Borges Filho
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Rio de Janeiro

2014

DEDICATÓRIA

Ao meu avô Napoleón (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Eu quero agradecer não só àqueles que contribuíram diretamente na realização desta dissertação, mas a todos aqueles que colaboraram na minha formação como pesquisador e fizeram tudo isto possível.

Agradeço a minha mãe Amanda e a meu avô Napoleón, as pessoas mais importantes na minha vida, pelo apoio.

Agradeço a meu orientador, Marcelo Chiapparini, pela excelente orientação. Ao Bruno Osório, pela colaboração e por aquelas discussões tão esclarecedoras. A professora Mirian Bracco, pelas reuniões com o grupo em Resende que definiram o rumo da minha pesquisa.

Quero agradecer de forma especial ao Marcelo Guimarães, pelo melhor curso de física que eu já fiz na minha vida. É incrível o muito que me diverti estudando campos com ele!

A Carlos Damacén, Nelson Aragonés e Segundo Jauregui, pelo que ensinaram-me e por sua amizade.

Agradeço aos meus professores da graduação lá em Peru, José Roldán, Antonio Rivasplata, José Olivencia e Wilson Maco, assim como aos meus professores da pós-graduação na UERJ, Silvio Sorella, César Linhares, Marcio Capri, José de Sá Borges e Andre Sznajder.

Finalmente, agradeço também ao secretario da pós-graduação, Rogério, por sua ajuda com a enorme burocracia da UERJ e à FAPERJ pelo apoio financeiro na realização deste trabalho.

Homens nascem ignorantes, não estúpidos. Eles tornam-se estúpidos pela educação.

Bertrand Russell

RESUMO

FIorentini Álvarez, D.J.H. *Fator de forma do vértice $\pi D_1 D^*$ usando as regras de soma da QCD*. 2014. 90 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Nesta dissertação usamos as regras de soma da cromodinâmica quântica para calcular o fator de forma do vértice $\pi D_1 D^*$. São mostrados os termos gerais obtidos para o correlator da interação, expandido num produto de operadores de Wilson, com os termos perturbativo, condensado de quarks e condensados de quarks com massa. É apresentado também um estudo do lado fenomenológico, com a identificação dos elementos de matriz das correntes de interação associadas aos mésons do vértice e a matriz \mathcal{M} a partir de uma lagrangiana fenomenológica do processo. Finalmente, são usados todos estes resultados para calcular os correlatores de três processos de interação: $\pi^- \bar{D}_1^0 D^{*-}$, $D_1^0 \pi^+ D^{*+}$ e $\bar{D}_0^* D_1^+ \pi^+$, com correções até ordem 4 no lado da cromodinâmica quântica e com a primeira partícula de cada processo como estando fora da camada de massa, introduzindo uma análise de Monte Carlo para determinar as incertezas associadas ao método.

Palavras-chave: Regras de soma da QCD. Fator de forma. Constante de acoplamento.
Sorteio de Monte Carlo.

ABSTRACT

FIorentini Álvarez, D.J.H. *Form Factor of the $\pi D_1 D^*$ Vertex by Using QCD Sum Rules*. 2014. 90 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

In this dissertation the quantum chromodynamics sum rules have been used to obtain the form factor of the $\pi D_1 D^*$ vertex. We calculate the general terms obtained for the correlator of the iteration, expanded into a product of Wilson operators in perturbative, quark condensed and quark condensates with mass. A study of the phenomenological side is also presented, identifying the matrix elements of the iteration current associated with the vertex and \mathcal{M} matrix starting from a phenomenological Lagrangian of the process. Finally, all these results are used to find the correlators of three processes: $\pi^- \bar{D}_1^0 D^{*-}$, $D_1^0 \pi^+ D^{*+}$ e $\bar{D}_0^* D_1^+ \pi^+$, with corrections up to the fourth order on the side of QCD and the first particle of each process as the off-shell particle of the study, introducing a Monte Carlo analysis to determine the uncertainties associated with the method.

Keywords: QCD sum rules. Form factor. Coupling constant. Monte Carlo sorting.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Diagramas de decaimento de charme oculto do Z^+	15
Figura 2 -	Circulação dos quarks dos mésons interagentes em um vértice de três mésons.	21
Figura 3 -	Diagrama de Feynman do termo perturbativo da OPE da equação (19).	23
Figura 4 -	Diagrama de Feynman do condensado de quarks da equação (27).	26
Figura 5 -	Diagrama de Feynman do condensado de quarks com massa da equação (33).	27
Figura 6 -	Diagrama do vértice com os mésons como partículas pontuais.	28
Figura 7 -	Representação das massas e momentos das partículas virtuais circu- lando dentro do vértice.	32
Figura 8 -	Circulação dos quarks com o pión fora da camada de massa.	38
Figura 9 -	Circulação dos quarks com o D_1 fora da camada de massa.	40
Figura 10 -	Circulação dos quarks com o D^* fora da camada de massa.	43
Figura 11 -	Distribuição dos valores de Δs	63
Figura 12 -	Histograma correspondente à Figura 11.	64
Figura 13 -	Distribuição gaussiana dos valores da massa do quark charmoso m_c	64
Figura 14 -	Histograma correspondente à Figura 13, juntamente com seu ajuste gaussiano.	65
Figura 15 -	Resultados numéricos para o fator de forma em função do momento transferido e extrapolação da constante de acoplamento usando um ajuste analítico.	72
Figura 16 -	Contorno de integração para função Π com corte de ramificação sobre o eixo real.	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Aniquilação e criação dos mésons representados nos isodobletos na lagrangiana (121).	47
Tabela 2 - Valor das massas e constantes de decaimento que parametrizam o fator de forma.	55
Tabela 3 - Valores possíveis para os parâmetros de distribuição uniforme (Tipo 1) no caso π fora da camada de massa.	69
Tabela 4 - Valores possíveis para os parâmetros de distribuição uniforme (Tipo 1) no caso D_1 fora da camada de massa.	69
Tabela 5 - Mésons e seus correspondentes primeiros estados excitados	69
Tabela 6 - Valores possíveis para os parâmetros da distribuição gaussiana (Tipo 2).	69
Tabela 7 - Valor das variáveis a e b e seus erros estatísticos para os ajustes do fator de forma dados na equação (185).	71
Tabela 8 - Constante de acoplamento resultante da forma analítica ajustada para o fator de forma segundo os valores dados na Tabela 7.	71

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>e.g.</i>	Por exemplo
<i>h.c.</i>	Conjugação hermitiana
<i>i.e.</i>	Isto é
<i>l.h.s.</i>	lado esquerdo
OPE	Expansão em produto de operadores de Wilson
PCAC	Corrente axial parcialmente conservada
QCDSR	Regras de soma da QCD
QCD	Cromodinâmica quântica
<i>r.h.s.</i>	lado direito

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	13
1	AS REGRAS DE SOMA DA QCD E O CÁLCULO DO CORRELATOR DE 3-PONTOS	17
1.1	As regras de soma da QCD	18
1.2	Lado da QCD	20
1.2.1	<u>Termo perturbativo:</u>	22
1.2.2	<u>Correções não-perturbativas em q_3:</u>	23
1.3	Lado Fenomenológico	27
2	SOBRE A GEOMETRIA DAS REGRAS DE CUTKOSKY	31
2.1	Referencial Canônico	31
2.2	Valores Limites das Novas Variáveis no Referencial Canônico	35
3	O VÉRTICE $D_1 D^* \pi$	37
3.1	Lado da OPE	37
3.1.1	<u>O vértice $\pi^- \bar{D}_1^0 D^{*-}$</u>	37
3.1.2	<u>O vértice $D_1^0 \pi^+ D^{*+}$</u>	41
3.1.3	<u>O vértice $\bar{D}_0^* D_1^+ \pi^+$</u>	43
3.2	Lado fenomenológico	46
3.2.1	<u>O vértice $\pi^- \bar{D}_1^0 D^{*-}$</u>	47
3.2.2	<u>O vértice $D_1^0 \pi^+ D^{*+}$</u>	49
3.2.3	<u>O vértice $\bar{D}_0^* D_1^+ \pi^+$</u>	51
4	CÁLCULO DO FATOR DE FORMA	54
4.1	Implementação das Regras de Soma	54
4.1.1	<u>O vértice $\pi^- \bar{D}_1^0 D^{*-}$</u>	55
4.1.2	<u>O vértice $D_1^0 \pi^+ D^{*+}$:</u>	56
4.1.3	<u>O vértice $\bar{D}_0^* D_1^+ \pi^+$:</u>	57
4.2	Parâmetros nas QCDSR	58
4.2.1	<u>Estabilidade em M^2</u>	59
4.2.2	<u>Limite superior da janela de Borel: Dominância do Polo sobre o Contínuo</u>	59
4.2.3	<u>Limite inferior da janela de Borel: A convergência da OPE</u>	60
4.3	Implementação numérica	61
4.3.1	<u>O método de Monte Carlo</u>	61
4.3.1.1	<u>Validação do sorteio</u>	62
4.3.1.2	<u>O sorteio dos parâmetros</u>	62
4.3.1.3	<u>A transformação de Box-Müller</u>	63
4.3.2	<u>A constante de acoplamento e sua incerteza</u>	65
4.3.2.1	<u>A função de ajuste</u>	66

4.3.2.2	A constante de acoplamento e o método de Monte Carlo	66
5	RESULTADOS	68
	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	73
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A – Matrizes de Dirac e Teoremas de Traço	81
	APÊNDICE B – Relações de Dispersão e as Regras de Cutkosky	82
	APÊNDICE C – A Integral sobre k_μ	86
	APÊNDICE D – Regras de Feynman nos Lagrangianos Fenomenológicos	88
	APÊNDICE E – Contribuições nulas na expansão de Wick	89

INTRODUÇÃO

Os constituintes fundamentais da matéria usual no universo são os léptons e os quarks. Os quarks possuem um tipo de carga chamado cor, que pode ser verde, vermelho e azul¹, que leva à formação de estados ligados (singletes). Existem dois tipos básicos de singletes de cor: um par quark-antiquark ($\bar{q}q$) ou uma combinação de três quarks (qqq), ou anti-quarks ($\bar{q}\bar{q}\bar{q}$). O primeiro tipo tem spin inteiro e é chamado de méson, enquanto o segundo tem spin semi-inteiro e é chamado de bárion. Além de levar um de três possíveis cores, os quarks também apresentam a propriedade de sabor. Há seis tipos conhecidos de sabor, *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* e *top*, representados respetivamente pelas letras *u*, *d*, *s*, *c*, *b* e *t*. As interações fortes, responsáveis pela formação de hádrons (mésons e bárions), são descritas a partir de uma teoria *gauge* não-abeliana baseada na invariância sob o grupo SU(3), conhecida como cromodinâmica quântica (QCD), que apresenta três propriedades fundamentais: liberdade assintótica, confinamento e simetria quiral aproximada e sua quebra espontânea (1). A propriedade de liberdade assintótica faz possível o cálculo de processos duros, *id est*, a pequenas distâncias ou grande momento transferido. Por outro lado, estados ligados de quarks e glúons (ressonâncias) surgem pelos efeitos de confinamento, ou seja efeitos de acoplamento forte, que não podem ser tratados na teoria perturbativa. Vários modelos fenomenológicos baseados em QCD (modelos que incorporam propriedades fundamentais da QCD) foram propostos para tentar explicar a espectroscopia dos hádrons e outras propriedades de baixa energia (2), entre eles as Regras de Soma da QCD (QCDSR), desenvolvida pelos russos Shifman, Vainshtein e Zakharov (3, 4, 5). A ideia da QCDSR é aproximar a região de ressonância desde o lado de liberdade assintótica e incluir correções devidas aos efeitos não-perturbativos. Estas correções sinalizam a quebra da liberdade assintótica e são introduzidas como valores esperados não-nulos de operadores de dimensão superior, chamados de condensados. Os resultados dos cálculos de QCD são combinados, via relações de dispersão, com a soma sobre os estados hadrônicos. Nas QCDSR supõe-se que as funções de correlação podem ser escritas simultaneamente com graus de liberdade de quarks e de hádrons. Identificando a representação hadrônica (chamada de lado fenomenológico) com a representação correspondente em termos de quarks e glúons (chamada de lado da OPE), se obtém as regras de soma, a partir da qual podem ser calculadas as propriedades hadrônicas de interesse, como massa, constantes de decaimento e fatores de forma.

O espectro, produção e decaimento dos hádrons observados, porém, ainda possuem

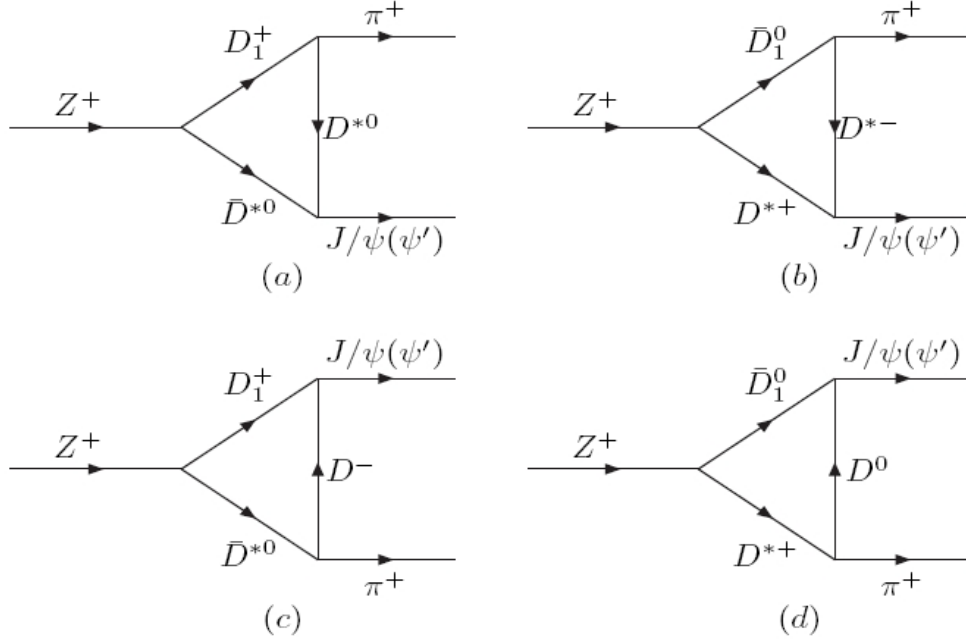
¹ As vezes é considerado o cor amarelo ao invés do vermelho, mas isso apenas depende da convenção usada

problemas teóricos no seu entendimento. Nos últimos anos, uma serie de hádrons pesados com propriedades inesperadas foram observados, tais como os $D_{sJ}(2317)$, $X(3872)$, $Y(4260)$, $X(3940)$ e o $Y(4140)$ (6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14). Estes dados experimentais tem estimulado as interpretações além do modelo de quarks (15). Para os estados X, Y, Z de charme oculto as interpretações incluem tetraquarks ou estados moleculares, charmonio híbrido, cúspide e efeitos de *threshold* (limiares). Contudo, não deve ser esquecido que estes estados X, Y, Z são ainda mésons dominados por componentes $c\bar{c}$. A questão surpreendente aqui é o fato de que tais estados tipo *charmonium* sejam estados que contém como mínimo quatro quarks, isto é, não podem ser simplesmente explicadas por uma estrutura quark-antiquark (16). Particularmente, o estado $Z^\pm(4430)$ pode ser considerado o mais especial, o qual foi descoberto pela colaboração *BELLE* (17, 18, 19, 20) no espectro de massa invariante de $\psi'\pi^\pm$ no decaimento $B \rightarrow \psi'\pi^\pm K$, com massa $m_Z = 4433_{\pm 1}^{+4} MeV$ e largura $\Gamma_Z = 44_{-13-11}^{+17+30} MeV$. A observação do $Z(4430)^\pm$ não suporta uma configuração híbrida $\bar{c}c$, pois o méson é carregado. Por isso, desde o anúncio do $Z(4430)^\pm$ um grande número de discussões sobre o jeito como aquele estado é formado apareceram, considerando-o candidato para um estado tetraquark (21, 22, 23), uma ressonância ou uma molécula mesônica compacta no canal $D_1\bar{D}^*$ (24, 25, 26, 27, 28, 29), um estado *baryonium* (30), uma cúspide limiar (threshold cusp) (31) e um estado radial excitado $c\bar{s}$ (32). Além da sua espectroscopia, foram feitas discussões sobre sua produção (33, 34, 35), decaimento (36) e sobre o espalhamento $\pi\psi'$ (37, 38).

Recentemente, o LHCb confirmou a existência do $Z(4430)$ como formado por quatro quarks $c\bar{c}u\bar{d}$ a $13, 6\sigma$ (39), confirmando a descoberta de *Belle* a $6, 5\sigma$, assim como os dados de *BaBar*. Contudo, a interpretação molecular é a mais natural e amplamente usada, devido à proximidade de m_Z aos limiares de $D^*(2010)D_1(2420)$ e $D^*(2010)D_1(2430)$, o que sugere fortemente que ele é induzido pelos efeitos de limiar desses canais (38, 40). Um estudo usando as QCDSR (29) mostra-se favorável à dita interpretação molecular. Porém, cálculos feitos na rede na aproximação *quenched* anisotrópica indicam possíveis problemas com esta interpretação (41), embora tenha sido só estudado um possível canal de decaimento e não foram considerados férmions dinâmicos.

No contexto desta interpretação molecular, os principais modos de decaimento do Z são o modo de charme aberto $Z \rightarrow D^*D^*\pi$ e o modo de charme oculto $Z \rightarrow J/\psi(\psi')\pi$ (28, 38), cujos diagramas são mostrados na Figura 1, e que envolve o vértice $D_1D^*\pi$. Do mesmo jeito, este vértice de interação aparece para outros canais de decaimento de Z^+ e Z^- (28, 38).

No contexto do mecanismo de re-espalhamento, o decaimento $Z \rightarrow J/\psi(\psi')\pi$ pode acontecer pela troca de um méson $D^{(*)}$ entre o D^* e o $D_1(D'_1)$. Assim, o decaimento de charme oculto pode ser escrito como $Z^\pm(4430) \rightarrow D^{*0}D_1^+(D^{*+}D_1^0) \rightarrow J/\psi(\psi')\pi$. O vértice πD_1D^* aparece precisamente no segundo decaimento do processo acima. Assim, conhecer o fator de forma e a constante de acoplamento desse vértice se faz imprescindível

Figura 1 - Diagramas de decaimento de charme oculto do Z^+ 

Legenda: O canal de decaimento é $Z^+(4430) \rightarrow \bar{D}^{*0} D_1^+ (\bar{D}^{*+} D_1^0) \rightarrow J/\psi(\psi') \pi^+$.

Fonte: MENG e CHAO(28), 2007, f. 2.

para entender e quantificar o decaimento de charme oculto do méson $Z^\pm(4430)$.

Neste trabalho vamos determinar o fator de forma do vértice $\pi D_1 D^*$ usando as QCDSR. A técnica utilizada se segue de outros trabalhos (42, 43, 44, 45) e consiste em usar correladores de 3-pontos com cada uma das partículas fora da camada de massa (*off-shell*) de cada vez, o qual permitira corroborar o valor obtido para o fator de forma por comparação direta. Isto mostrara que os resultados são consistentes. Mas, na implementação das QCDSR existe ainda o problema do tratamento dos erros sistemáticos associados com as aproximações feitas pelo método, assim como a propagação dos erros associados aos parâmetros envolvidos no cálculo. No análise convencional das QCDSR alguns parâmetros do modelo são fixados para certos valores preferenciais, se esperando que aquilo não reflita nas propriedades da QCD. Inspirados no trabalho (46) nós vamos estimar as incertezas fazendo um análise de erro de Monte Carlo. A ideia primordial é usar o erros experimentais para gerar distribuições uniformes ou gaussianas para os valores dos parâmetros que vêm da técnica das QCDSR, tais como os valores dos condensados ou a massa do quark charmoso, via um sorteio de Monte Carlo. Estas distribuições levam a uma distribuição nas propriedades hadrônicas obtidas pelas regras de soma associada à propagação do erro.

Esta dissertação se divide da seguinte maneira: no Capítulo 1 tratam-se os aspectos gerais das regras de soma da QCD e calculam-se de maneira genérica os correlatores do lado da QCD, com contribuições não perturbativas até dimensão de massa 4, e fenomenológico. Isto irá nos permitir sistematizar o cálculo dos primeiros termos. No Capítulo 2 fazemos um análise das condições introduzidas pelas regras de Cutkosky, descritas no Apêndice B, nas variáveis de integração nas relações de dispersão. Já no capítulo 3 implementamos os resultados obtidos no Capítulo 1 no cálculo do correlator correspondente ao vértice $\pi D_1 D^*$. No Capítulo 4 é mostrado o uso do princípio de Dualidade Quark-Hádron aos correlatores calculados no Capítulo 3, obtendo-se a forma analítica do fator de forma para o vértice em estudo. Logo é descrita a maneira como a implementação numérica baseada no sorteio de Montecarlo é feita. Finalmente, no Capítulo 5 são mostrados os resultados do nosso trabalho e as conclusões e perspectivas a continuação. Devido a problemas de ordem numérica, nesta dissertação os cálculos numéricos foram realizados com o termo perturbativo apenas. Estes problemas serão solucionados e as correções não perturbativas implementadas em uma continuação deste trabalho.

1 AS REGRAS DE SOMA DA QCD E O CÁLCULO DO CORRELATOR DE 3-PONTOS

As funções de correlação são uma das principais ferramentas usadas no estudo da estrutura do vácuo da QCD. Elas podem ser obtidas de muitas maneiras. Primeiro, elas podem ser deduzidas fenomenologicamente, usando a vasta quantidade de dados acumulados na física hadrônica, sendo que a representação espectral dela pode ser parametrizada em função de tais propriedades hadrônicas. Do outro lado, a Expansão em Produto de Operadores (OPE) foi desenvolvida para dar uma descrição sistemática das funções de correlação a pequenas distâncias, enxergando para os graus de liberdade dos constituintes hadrônicos, isto é, os quarks e glúons. A ideia, originalmente de Wilson (47), é a separação de escalas (48). Depois desta, os fenômenos a momento transferido maior do que a escala de renormalização escolhida são tratados explicitamente (perturbativamente), enquanto as contribuições a momento pequeno são parametrizadas por valores esperados de vácuo de alguns operadores, chamados de condensados.

A introdução destas contribuições e o uso da transformada de Borel são os que irão permitir estender o domínio padrão da QCD perturbativa para valores do momento transferido da ordem da massa do hádron. As amplitudes de interesse, aquelas nas quais temos estados iniciais e finais de hádrons, são dadas pelas funções de correlação (em geral, dada por um tensor de polarização do vácuo), ou seja, ordenações temporais dum produto de correntes interpolantes dos hádrons que entram ou saem de um vértice de interação. Usando o formalismo das relações de dispersão relacionamos a função de correlação obtida pela OPE com os estados confinados nos quais estamos interessados e fazendo uso da transformada de Borel nos momentos das partículas envolvidas, asseguramos a região de validade das QCDSR. Porém, a transformada de Borel por si só não elimina a contribuição de outros estados ressonantes e do contínuo que surgem explicitamente no correlator, por isso devem-se adicionar parâmetros (chamados de parâmetros de corte), os quais permitem que os resultados sejam predominantemente do estado fundamental em que estamos interessados. No nosso caso, estamos interessados em obter fatores de forma, precisando então de correlatores de 3-pontos, *i.e.*, correlatores de três correntes interpolantes (a razão disto ficará clara no estudo do lado fenomenológico).

Neste capítulo vamos descrever o formalismo das regras de soma e analisar a forma do correlator de 3-pontos sem particularizar na natureza das correntes de interação que entram no vértice. É claro que é só possível chegar até certo ponto intermediário nos cálculos, mas é muito mais efetiva esta abordagem, desde que oferece a possibilidade de se estender logo a qualquer problema futuro. Vamos analisar só um tipo de circulação possível para os mésons neste trabalho.

1.1 As regras de soma da QCD

Nas QCDSR (3, 4, 5) a descrição da função de correlação é feita de duas maneiras distintas. De um lado calcula-se a função de correlação utilizando as correntes interpolantes dos hádrons interagentes em termos dos campos fundamentais da QCD, ou seja quarks e glúons, sendo que a estrutura complexa do vácuo da QCD deve ser enxergada empregando a técnica da OPE de Wilson, a qual, além de permitir o uso das técnicas da QCD perturbativa, leva naturalmente à parametrização do vácuo da QCD em termos dos condensados do vácuo, além de ser possível nesse formalismo obter uma expressão explicitamente dependente dos propagadores dos quarks contidos nas correntes interpolantes. Tudo isto corresponde ao chamado Lado da QCD. Por outro lado, o cálculo também pode ser feito utilizando parâmetros hadrônicos (Lado Fenomenológico), onde quantificamos eles inserindo um conjunto completo de estados hadrônicos intermediários acoplados as correntes. Deve ficar claro que desde o ponto de vista fenomenológico considera-se os hádrons como se fossem partículas fundamentais, de maneira que as correntes interpolantes devem ser interpretadas como operadores de campo dos hádrons correspondentes, que incluem a criação e aniquilação de todos os estados ressonantes do hádron fundamental.

É na corrente interpolante que inserimos as características do hádron, tais como números quânticos, conteúdo de quarks e parâmetros fenomenológicos, tais como massa, fator de forma e constantes de decaimento. Finalmente, para extrairmos os valores dos observáveis físicos comparamos ambos os lados da teoria, usando o Princípio de Dualidade Quark-Hádron (3, 4, 49), que postula a existência de uma escala na qual o hádron pode ser equivalentemente descrito tanto do lado da QCD quanto do lado fenomenológico.

A forma geral do correlator de 3-pontos vêm dada por (49):

$$\Pi(p, p') = \int d^4x d^4y e^{-iqy} e^{ip'x} \langle \tilde{0} | T \left\{ j_{M_3}(x) j_{M_2}^{(\dagger)}(y) j_{M_1}^\dagger(0) \right\} | \tilde{0} \rangle \quad (1)$$

onde os subíndices \hat{M}_i , $i = 1, 2, 3$ das correntes interpolantes j indicam os três mésons, entrando ou saindo(o que é determinado pela presença do \dagger), nos três vértices 0 , y e x ; $\langle \tilde{0} |$ representa o vácuo não trivial da QCD, p e p' representam os momentos dos hádrons dentro da camada de massa (*on-shell*) e q o momento do hádron fora da camada de massa (*off-shell*).

Para obter os correlatores dos lados QCD-fenomenológico, o uso direto do Princípio de Dualidade introduz complicações. O lado da QCD sofre com a impossibilidade de calcular toda a OPE, de forma que é preciso truncar ela em alguma ordem. No lado fenomenológico vai se ter uma densidade espectral na qual as ressonâncias formam um contínuo de estados excitados além de um único polo fundamental. A supressão das contribuições de ordem mais alta da OPE e dos estados excitados é possível de ser feita usando uma transformada de Borel nos momentos das partículas dentro da camada de

massa (on-shell), definida como (50)

$$\Pi(M^2) \equiv \mathcal{B}_{M^2} [\Pi(Q^2)] = \lim_{Q^2, n \rightarrow \infty} \frac{(-Q^2)^{n+1}}{n!} \left(\frac{d}{dQ^2} \right)^n \Pi(Q^2) \quad (2)$$

onde Q^2 é o momento da partícula no espaço euclidiano ($q^2 = -Q^2$) e a relação $Q^2/n = M^2$ é mantida finita no limite $Q^2, n \rightarrow \infty$. O parâmetro M é chamado de massa de Borel. As transformadas de Borel que serão usadas neste trabalho são as seguintes (51):

$$\mathcal{B}_{M^2} \left[(q^2)^k \right] = \begin{cases} 0 & , k \geq 0 \\ \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{1}{M^2} \right)^{k-1} & , k < 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathcal{B}_{M^2} \left[\frac{1}{s - q^2} \right] = e^{-s/M^2} \quad (4)$$

Os coeficientes dos operadores não-perturbativos na OPE são proporcionais às potências negativas de $(Q^2)^k$, onde k cresce com a dimensão do operador. Logo, segundo a transformada (2), a inserção do fator $\frac{1}{(k-1)!}$ reduz a importância dos operadores de ordem superior (52). Do lado fenomenológico, a forma geral da função de correlação é:

$$\Pi(Q^2) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{K_{ki}}{m_{ki}^2 + Q^2} \right\} \quad (5)$$

onde n é o número de mésons on-shell (dentro da camada de massa) e m_{k0} representa a massa do k -ésimo hádron no estado fundamental, enquanto $\forall i > 0$ temos as massas dos estados ressonantes. É claro que K_i são constantes (ao respeito de Q^2). Usando (3), temos:

$$\mathcal{B} [\Pi(Q^2)] = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^n K_{ki} e^{-m_{ki}^2/M^2} \right\} \quad (6)$$

e desde que $m_{k,i+1} > m_{k,i}$, a transformada de Borel acaba suprimindo os estados ressonantes. Assim, o princípio de dualidade pode-se expressar como:

$$\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\Pi^{QCD}] = \mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\Pi^{phen}] \quad (7)$$

Logo, precisamos achar uma região no espaço da massa de Borel na qual as contribuições dos operadores da OPE de dimensão mais alta e as ressonâncias de massa mais altas sejam igualmente suprimidas, de maneira que as descrições de ambos lados, fenomenológico e da QCD se igualarão e poderemos extrair as propriedades hadrônicas de interesse para o estado fundamental dos hádrons envolvidos. Esta é o geralmente chamada de Janela de

Borel. Voltaremos a esta discussão no Capítulo 4.

1.2 Lado da QCD

Na OPE, o produto temporalmente ordenado de operadores locais é expandido em termos de um conjunto completo de operadores locais (47), que no caso de correlatores de 3-pontos leva a forma:

$$i \int d^4x d^4y e^{iqy} e^{ipx} T \{A(x)B(y)C(0)\} = \sum_d C_d(p, q) \hat{O}_d(0) \quad (8)$$

Os coeficientes C_d são chamados de coeficientes de Wilson e contêm os efeitos perturbativos da QCD, *id est*, podem se calcular pela teoria perturbativa. Os operadores locais \hat{O}_d são operadores compostos, construídos a partir de campos de quarks e glúons e contêm os efeitos não-perturbativos, de longa distância. O índice d denota a dimensão de massa do operador. Os operadores \hat{O}_d são ordenados em (8) de forma crescente pela dimensão de massa. Os coeficientes $C_d(p, q)$ são funções do momento transferido que aparecem naturalmente na integral em (8). O operador de dimensão zero é dado por $\hat{O}_0 = \hat{1}$ e, assim, o seu coeficiente C_0 representa as contribuições de origem perturbativa. Uma lista bem completa de tais operadores locais pode ser encontrada em (49). Os valores esperados destes operadores locais, no vácuo da QCD, fornecem as expressões analíticas dos condensados, os quais, sendo parâmetros não-perturbativos, tem valores numéricos que não podem ser calculados diretamente e tem que ser determinados por outros métodos fenomenológicos, *e.g.*, usando a hipótese de PCAC (corrente axial parcialmente conservada). Alguns métodos de cálculo dos valores dos condensados são mostrados em (53), enquanto uma apresentação rápida dos resultados comparados aos valores experimentais é apresentada em (52). Neste trabalho vamos obter os valores dos coeficientes de Wilson por meio de uma expansão do produto temporalmente ordenado segundo o teorema de Wick (54, 55), conforme será mostrado a seguir. Sejam três mésons (M_1, M_2, M_3) entrando/saindo no vértice, como é mostrado na Figura 2. Genericamente, as correntes podem ser escritas como:

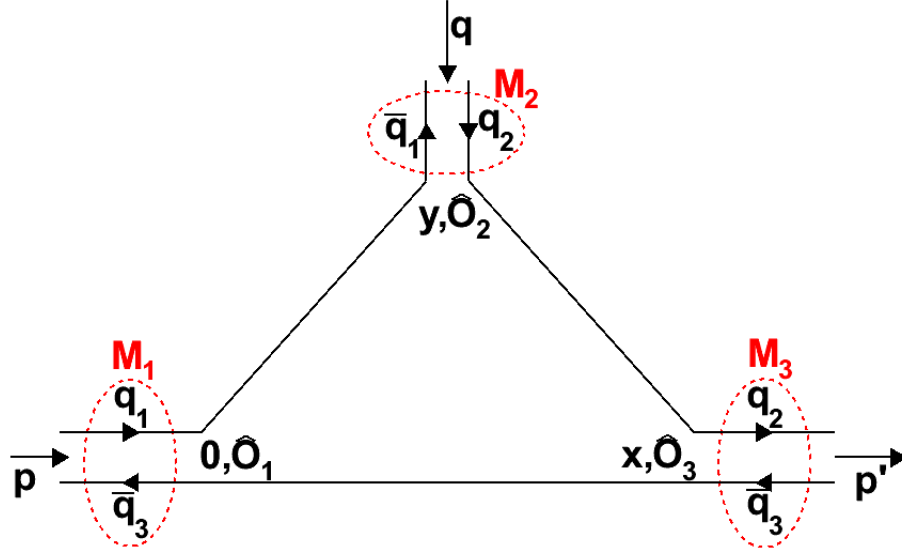
$$j_{M_1}(0) = \bar{q}_3(0) \hat{O}_1 q_1(0) \quad (9a)$$

$$j_{M_2}(y) = \bar{q}_1(y) \hat{O}_2 q_2(y) \quad (9b)$$

$$j_{M_3}(x) = \bar{q}_3(x) \hat{O}_3 q_2(x) \quad (9c)$$

onde \hat{O}_i , $i = 1, 2, 3$ são operadores hermitianos cuja forma depende da natureza do méson.

Figura 2 - Circulação dos quarks dos mésons interagentes em um vértice de três mésons.



Fonte: O autor, 2014.

Daqui, temos que o correlator (8) fica:

$$\begin{aligned} \Pi(p, p') &= \int d^4x d^4y e^{-iqy} e^{ip'x} (\hat{O}_3)_{ij} (\hat{O}_2)_{kl} (\hat{O}_1)_{mn} \times \\ &\quad \times \langle \tilde{0} | T \{ \bar{q}_{3i}^a(x) q_{2j}^a(x) \bar{q}_{2k}^b(y) q_{1l}^b(y) \bar{q}_{1m}^c(0) q_{3n}^c(0) \} | \tilde{0} \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

Aqui, letras a, b, c representam índices de cor, o subíndice numérico indica o sabor do quark e as letras i, j, k, l, m, n são índices matriciais da representação das correntes interpolantes de mésons. Usando agora o teorema de Wick, podemos expandir o produto temporalmente ordenado da última linha na equação (10), depois de fazer um número ímpar de permutações nos spinores dos quarks, sendo que cada uma delas tem associada uma troca de sinal:

$$\begin{aligned} W &= T \{ \bar{q}_{3i}^a(x) q_{2j}^a(x) \bar{q}_{2k}^b(y) q_{1l}^b(y) \bar{q}_{1m}^c(0) q_{3n}^c(0) \} \\ &= - \{ W^0 + W^1 + W^2 + W^3 + (t.c.s.) \} \end{aligned} \quad (11)$$

onde:

$$W^0 = \langle 0 | T \{ q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(x) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ q_{2j}^a(x) \bar{q}_{2k}^b(y) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ q_{1l}^b(y) \bar{q}_{1m}^c(0) \} | 0 \rangle \quad (12a)$$

$$W^1 = \langle 0 | T \{ q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(x) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ q_{2j}^a(x) \bar{q}_{2k}^b(y) \} | 0 \rangle : q_{1l}^b(y) \bar{q}_{1m}^c(0) : \quad (12b)$$

$$W^2 = \langle 0 | T \{ q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(x) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ q_{1l}^b(y) \bar{q}_{1m}^c(0) \} | 0 \rangle : q_{2j}^a(x) \bar{q}_{2k}^b(y) : \quad (12c)$$

$$W^3 = \langle 0 | T \{ q_{2j}^a(x) \bar{q}_{2k}^b(y) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ q_{1l}^b(y) \bar{q}_{1m}^c(0) \} | 0 \rangle : q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(x) : \quad (12d)$$

e $(t.c.s)$ representa os termos com número superior de contrações segundo teorema de

Wick. Note-se que $\langle 0 |$ representa o vácuo perturbativo da QCD, condição que vem do teorema de Wick. Embora não seja evidente num rápido olhar, os termos $W^{1,2}$, equações (12b) e (12c), levam a correlatores que não dependem simultaneamente de p, p' , pelo que serão sempre nulos após a dupla transformada de Borel. Uma demonstração disto é feita no Apêndice E. Deve levar-se em conta também que quando existir interação, o termo do propagador de quarks é modificado segundo a fórmula de Gell-Mann-Low (56, 57):

$$S_{ab}^{(p)}(x-y) = \langle 0 | T \left\{ q_a(x) \bar{q}_b(y) e^{i \int d^4 z \mathcal{L}_{int}(z)} \right\} | 0 \rangle \quad (13)$$

É evidente que numa expansão em serie de Taylor, o primeiro termo é exatamente o propagador de Feynman livre, dado por

$$S_{ij,ab}^{(h)}(x-y) = \delta_{ab} \langle 0 | T \left\{ q_{h,i}^a(x) \bar{q}_{h,j}^b(y) \right\} | 0 \rangle \quad (14)$$

Nós não vamos trabalhar com as correções de ordem superior (ao primeiro) da equação (13), já que estas fornecem apenas condensados de glúons, que não serão agregados neste trabalho. Vamos agora calcular os três primeiros termos da OPE.

1.2.1 Termo perturbativo:

Se não levarmos em conta o termo exponencial de (13), ou o que é o mesmo, se só tomamos o propagador na primeira ordem na expansão de Taylor na fórmula de Gell-Mann-Low, o correlator para o termo W^0 (12a), associado ao termo de dimensão zero na OPE, isto é, a contribuição perturbativa, então o correlator fica

$$\begin{aligned} \Pi^{pert} &= \int d^4 x d^4 y e^{-iqy} e^{ip'x} \left(\hat{\mathcal{O}}_3 \right)_{ij} \left(\hat{\mathcal{O}}_2 \right)_{kl} \left(\hat{\mathcal{O}}_1 \right)_{mn} \langle \tilde{0} | W^0 | \tilde{0} \rangle \\ &= \int d^4 x d^4 y e^{-iqy} e^{ip'x} \left(\hat{\mathcal{O}}_3 \right)_{ij} \left(\hat{\mathcal{O}}_2 \right)_{kl} \left(\hat{\mathcal{O}}_1 \right)_{mn} \times \\ &\quad \times (-1) \langle \tilde{0} | S_{ni,ca}^{(3)}(-x) \delta_{ca} S_{jk,ab}^{(2)}(x-y) \delta_{ab} S_{lm,bc}^{(1)}(y) \delta_{bc} | \tilde{0} \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

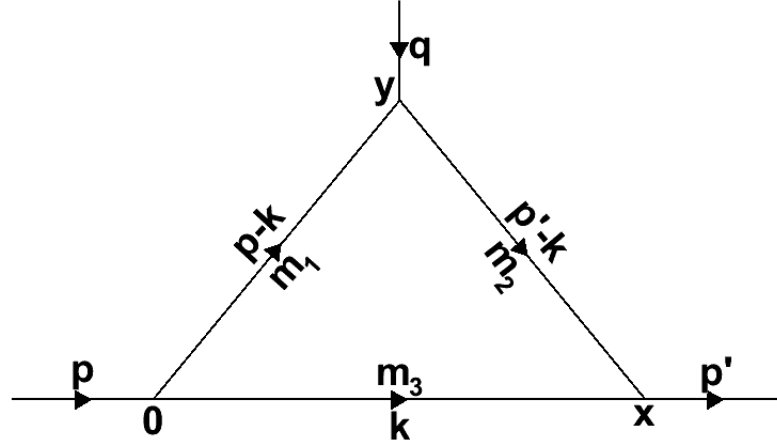
onde esta sendo usado (14). A contração dos índices de cor dos propagadores com as deltas de Kronecker leva a:

$$\Pi^{pert} = (-3) \int d^4 x d^4 y e^{-iqy} e^{ip'x} Tr \left\{ S^{(3)}(-x) \hat{\mathcal{O}}_3 S^{(2)}(x-y) \hat{\mathcal{O}}_2 S^{(1)}(y) \hat{\mathcal{O}}_1 \right\} \quad (16)$$

Usando agora a representação do propagador livre no espaço de Fourier

$$S(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} S(p), \quad S^{(q)}(p) = i \frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2} \quad (17)$$

Figura 3 - Diagrama de Feynman do termo perturbativo da OPE da equação (19).



Fonte: O autor, 2014.

obteremos mais três integrais nos momentos que circulam pelas linhas internas do diagrama perturbativo (ver Figura 3), mas quando se juntar as exponenciais que aparecem desta representação com as outras duas exponenciais do correlator original e as integrais em x, y teremos apenas a representação de Fourier da delta de Dirac, levando imediatamente à expressão:

$$\Pi^{pert} = (-3) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ S^{(3)}(-k) \hat{O}_3 S^{(2)}(p' - k) \hat{O}_2 S^{(1)}(p - k) \hat{O}_1 \right\} \quad (18)$$

sendo que as deltas de Dirac foram integradas em dois dos momentos internos, sobrando apenas a integral sob o momento interna que circula pela linha embaixo, como mostrado na Figura 3. Finalmente, usando a expressão explícita para o propagador dada em (17) obtemos a expressão geral para o termo perturbativo, dada por:

$$\Pi^{pert} = (3i) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{(-\not{k} + m_3) \hat{O}_3 (\not{p}' - \not{k} + m_2) \hat{O}_2 (\not{p} - \not{k} + m_1) \hat{O}_1}{(k^2 - m_3^2) ((p' - k)^2 + m_2^2) ((p - k)^2 + m_1^2)} \right\} \quad (19)$$

1.2.2 Correções não-perturbativas em q_3 :

As correções não-perturbativas vêm do termo (12d) só, desde que, como já foi dito e mostrado no Apêndice E, os termos (12b) e (12c) serão nulos após o uso da transformada

de Borel. Desta maneira, o correlator associado ao termo W^3 na expansão de Wick é:

$$\Pi^{(3)} = \int d^4x d^4y e^{-iqy} e^{ip'x} \left(\hat{O}_3 \right)_{ij} \left(\hat{O}_2 \right)_{kl} \left(\hat{O}_1 \right)_{mn} \langle \tilde{0} | W^3 | \tilde{0} \rangle \quad (20)$$

onde os dois primeiros termos de W^3 serão simplesmente os propagadores dados em (17) e ainda é necessário calcular o termo:

$$\langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(x) : | \tilde{0} \rangle \quad (21)$$

Fazemos uma expansão de Taylor para $\bar{q}_{3i}^a(x)$:

$$\bar{q}_{3i}^a(x) = \bar{q}_{3i}^a(0) + x_\mu \partial^\mu \bar{q}_{3i}^a(x) |_{x=0} + \frac{1}{2} x_\mu x_\nu \partial^\mu \partial^\nu \bar{q}_{3i}^a(x) |_{x=0} + \dots \quad (22)$$

e inserindo em (21) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(x) : | \tilde{0} \rangle &= \langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(0) : | \tilde{0} \rangle + x_\mu \langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) \partial^\mu \bar{q}_{3i}^a(x) |_{x=0} : | \tilde{0} \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} x_\mu x_\nu \langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) \partial^\mu \partial^\nu \bar{q}_{3i}^a(x) |_{x=0} : | \tilde{0} \rangle + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Cada termo de da equação acima inserido no correlator (22) representará uma correção não perturbativa na primeira ordem na fórmula de Gell-Mann-Low no correlator. Vamos calcular apenas os primeiros dois termos, associados ao condensado de quarks.

Da sua estrutura spinorial, se define:

$$S_{ca}^{(3)} \equiv S_{ca,ni}^{(3)} \delta^{ni} = \delta^{ni} \langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(0) : | \tilde{0} \rangle = N \delta_{ac} \delta^{ni} \quad (24)$$

de onde, multiplicando esta última equação por $\delta_{ca} \delta^{in}$ e definindo:

$$\delta_{ac} \delta^{ni} \langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(0) : | \tilde{0} \rangle = -\langle \bar{q}_3 q_3 \rangle \quad (25)$$

obtemos o equivalente ao propagador no caso do condensado com estrutura escalar:

$$S_{ca}^{(3)} = -\frac{\delta_{ac}}{12} \langle \bar{q}_3 q_3 \rangle \quad (26)$$

Assim, usando o índice $\langle \bar{q}_3 q_3 \rangle$ para esta correção do correlator, obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi^{(\bar{q}_3 q_3)} &= \int d^4x d^4y e^{-iqy} e^{ip'x} (-1) \langle \tilde{0} | S_{ca}^{(3)} \hat{O}_3 \delta_{ab} S_{ab}^{(2)}(x-y) \hat{O}_2 \delta_{bc} S_{bc}^{(1)}(y) \hat{O}_1 | \tilde{0} \rangle \\ &= \frac{\langle \bar{q}_3 q_3 \rangle}{12} \int d^4x d^4y e^{-iqy} e^{ip'x} \langle \tilde{0} | \hat{O}_3 S_{ab}^{(2)}(x-y) \hat{O}_2 S_{bc}^{(1)}(y) \hat{O}_1 \delta_{ac} \delta_{ab} \delta_{bc} | \tilde{0} \rangle \\ &= \frac{3 \langle \bar{q}_3 q_3 \rangle}{12} \int d^4x d^4y e^{-iqy} e^{ip'x} \text{Tr} \left\{ \hat{O}_3 S^{(2)}(x-y) \hat{O}_2 S^{(1)}(y) \hat{O}_1 \right\} \end{aligned}$$

Neste ponto, podemos usar as mesmas considerações que foram usadas no caso do termo

perturbativo com as representações (14) e (17), de forma que obtemos a correção não-perturbativa de ordem mais baixa, o correlator de condensado de quark, dado por:

$$\Pi^{\langle \bar{q}_3 q_3 \rangle} = -\frac{\langle \bar{q}_3 q_3 \rangle}{4} \frac{Tr \left\{ \hat{\mathcal{O}}_3 (\not{p}' + m_2) \hat{\mathcal{O}}_2 (\not{p} + m_1) \hat{\mathcal{O}}_1 \right\}}{(p^2 - m_2^2)(p^2 - m_1^2)} \quad (27)$$

Podemos calcular a seguinte correção, a qual corresponde ao condensado de quarks com massa, para o qual só basta considerar o segundo termo em (23). Usando o gauge de ponto fixo (49, 58):

$$x_\mu A^\mu = 0 \implies \partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu - i g_s A^\mu \quad (28)$$

Isto não traz problema nenhum desde que todos os termos na expansão de Taylor que contém derivadas estão multiplicados por x com o mesmo índice de Lorentz. Definindo:

$$S_{ca}^{\mu(3)} S \equiv_{ca,ni}^{\mu(3)} \delta^{ni} = \delta^{ni} \langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) D^\mu \bar{q}_{3i}^a(x) |_{x=0} : | \tilde{0} \rangle = N \delta_{ca} (\gamma^\mu)^{ni} \delta^{ni} \quad (29)$$

obtemos, depois de multiplicar por $\delta_{ca} (\gamma_\mu)^{ni}$:

$$i m_3 \delta_{ca} \langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(0) : | \tilde{0} \rangle = 48 N \quad (30)$$

onde foi usado o fato que:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu D^\mu \bar{q}_{3i}^a(x) |_{x=0} &= \not{D} \bar{q}_{3i}^a(x) |_{x=0} \\ &= i m_3 \bar{q}_{3i}^a(0) \end{aligned} \quad (31)$$

Assim, chegamos ao equivalente do propagador no caso dos condensados com estrutura vetorial:

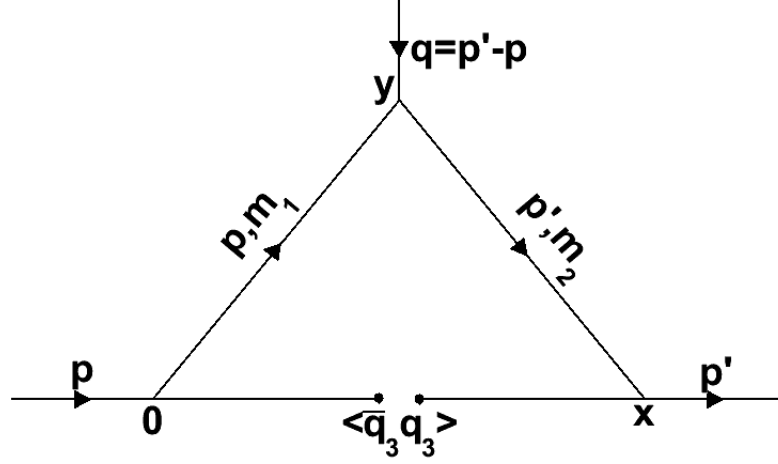
$$S_{ca}^{\mu(3)} = -\frac{i m_3 \langle \bar{q}_3 q_3 \rangle}{48} \delta_{ca} \gamma^\mu \quad (32)$$

Usando agora o índice $m_3 \langle \bar{q}_3 q_3 \rangle$ para esta correção, obtemos o correlator :

$$\begin{aligned} \Pi^{m_3 \langle \bar{q}_3 q_3 \rangle} &= \int d^4 x d^4 y e^{-iqy} e^{ip'x} (-1) x_\mu \langle \tilde{0} | S_{ca}^{\mu(3)} \hat{\mathcal{O}}_3 \delta_{ab} S_{jk,ab}^{(2)}(x-y) \hat{\mathcal{O}}_2 \delta_{bc} S_{lm,bc}^{(1)}(y) \hat{\mathcal{O}}_1 | \tilde{0} \rangle \\ &= \frac{3 i m_3 \langle \bar{q}_3 q_3 \rangle}{48} \int d^4 x d^4 y e^{-iqy} e^{ip'x} x_\mu Tr \left\{ \gamma^\mu \hat{\mathcal{O}}_3 S^{(2)}(x-y) \hat{\mathcal{O}}_2 S^{(1)}(y) \hat{\mathcal{O}}_1 \right\} \end{aligned}$$

Chegados neste ponto, não é possível fazer uso da mesma técnica usada nos dois casos anteriores, pois tem-se o x multiplicando. Porém, se usarmos o fato de que $x e^{ipx}$ é apenas a derivada com relação a p da exponencial, podemos novamente aplicar as técnicas usadas acima, com a adição de que teremos uma derivada sobre o termo dentro do traço, o que leva finalmente ao correlator de condensado de quarks com correção de termo de massa,

Figura 4 - Diagrama de Feynman do condensado de quarks da equação (27).



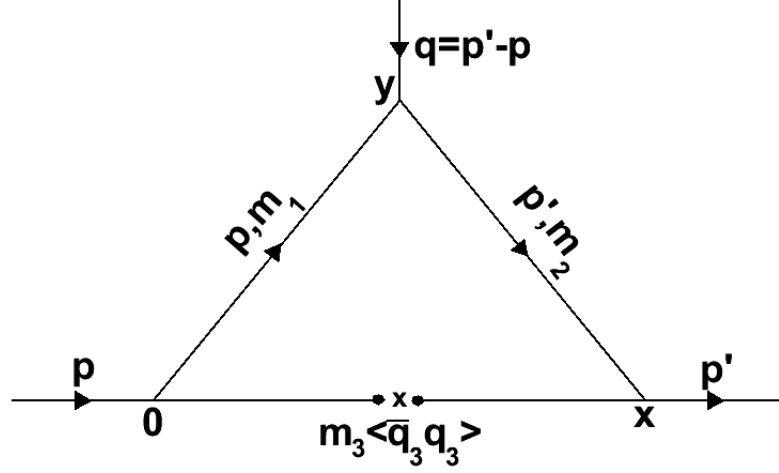
Fonte: O autor, 2014.

a segunda correção não-perturbativa de ordem mais baixa da OPE, dada por:

$$\begin{aligned} \Pi^{m_3 \langle \bar{q}_3 q_3 \rangle} = & \frac{m_3 \langle \bar{q}_3 q_3 \rangle}{16} \left[\frac{\text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \hat{O}_3 (\not{p}' + m_2) \gamma_\mu (\not{p}' + m_2) \hat{O}_2 (\not{p} + m_1) \hat{O}_1 \right\}}{(p'^2 - m_2^2) (p^2 - m_1^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{\text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \hat{O}_3 (\not{p}' + m_2) \hat{O}_2 (\not{p} + m_1) \gamma_\mu (\not{p} + m_1) \hat{O}_1 \right\}}{(p'^2 - m_2^2) (p^2 - m_1^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

As representações diagramáticas tipo Feynman para estas duas últimas correções são dadas nas Figuras 4 e 5. Embora possamos lidar com os demais termos da expansão (23), é preciso levar em conta a relevância e a complexidade que envolvem tais termos. Desde que a dimensão de massa do condensado de quarks com massa é igual a dimensão do condensado de glúons (igual a 4)(53), estes últimos deveriam ser incluídos. Porém, como será visto mais na frente, no problema de mésons interagentes estudado nesta dissertação, todas as contribuições dos condensados de quarks com massa são nulas. Além disso, em outros trabalhos de QCDSR foram já obtidas as correções de condensados de glúons, sendo sempre muito baixa em relação às contribuições dos termos perturbativo e de condensados de quarks. Por tudo isto e pela grande complexidade no cálculo dos termos correspondentes aos condensados de glúons, eles não serão incluídos neste trabalho.

Figura 5 - Diagrama de Feynman do condensado de quarks com massa da equação (33).



Fonte: O autor, 2014.

1.3 Lado Fenomenológico

No lado fenomenológico interpretamos as correntes que entram no correlator como operadores de criação e aniquilação dos hádrons sob estudo. A função de correlação corresponde ao diagrama mostrado na Figura 6, onde as funções M_i , $i = 1, 2, 3$ correspondem aos mésons interagindo como partículas pontuais. Usando a representação de Heisenberg para a evolução temporal de um operador:

$$\hat{O}(x + a) = e^{i\hat{p}a} \hat{O}(x) e^{-i\hat{p}a} \quad (34)$$

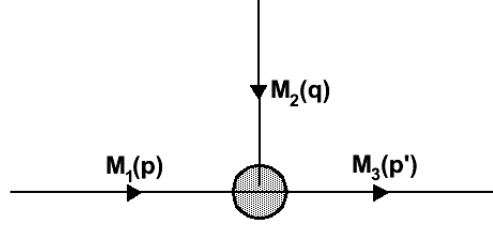
levando em conta que:

$$\hat{p} | p \rangle = p | p \rangle \rightarrow e^{-i\hat{p}a} | p \rangle = e^{-ipa} | p \rangle \quad (35)$$

e usando a definição de ordenamento temporal (ver, *e.g.*, (54)), podemos expandir o produto temporalmente ordenado das correntes no correlator (1) (onde está usando-se a notação simplificada $j_i(0) \equiv j_i$):

$$\begin{aligned} \Pi^{phen} = & \langle 0 | j_3 e^{-ip(y-x)} j_2^\dagger e^{-ipy} j_1^\dagger | 0 \rangle \Theta(x_0 - y_0) \Theta(y_0) \\ & + \langle 0 | j_3 e^{-ip(y-x)} j_2^\dagger e^{-ipy} j_1^\dagger | 0 \rangle \Theta(y_0 - x_0) \Theta(-y_0) \\ & + \langle 0 | j_3 e^{-ip(y-x)} j_2^\dagger e^{-ipy} j_1^\dagger | 0 \rangle \Theta(-x_0) \Theta(x_0 - y_0) \\ & + \langle 0 | j_3 e^{-ip(y-x)} j_2^\dagger e^{-ipy} j_1^\dagger | 0 \rangle \Theta(y_0 - x_0) \Theta(x_0) \\ & + \langle 0 | j_3 e^{-ip(y-x)} j_2^\dagger e^{-ipy} j_1^\dagger | 0 \rangle \Theta(y_0) \Theta(-x_0) \\ & + \langle 0 | j_3 e^{-ip(y-x)} j_2^\dagger e^{-ipy} j_1^\dagger | 0 \rangle \Theta(x_0) \Theta(-y_0) \end{aligned} \quad (36)$$

Figura 6 - Diagrama do vértice com os mésons como partículas pontuais.



Fonte: O autor, 2014.

Introduzimos agora duas vezes um conjunto completo de estados de partícula no espaço de Fock usando o operador identidade:

$$\int \frac{d^3q}{2q_0 (2\pi)^3} |M(q)\rangle \langle M(q)| \equiv \int D^3q |q\rangle \langle q| \quad (37)$$

onde $M(q)$ faz referencia ao méson M com momento q , mas será escrito segundo a equivalência mostrada acima, só para abreviar, e usando adicionalmente a *crossing symmetry* (55)², chega-se a:

$$\Pi^{phen}(x, y) = \int D^3p_1 D^3p_3 \rho(p_1, p_3) e^{-ip_3y} e^{ip_3(y-x)} \quad (38)$$

onde:

$$\rho(p_1, p_3) = \langle 0 | j_3 | p_3 \rangle \langle p_3 | j_2^\dagger | p_1 \rangle \langle p_1 | j_1^\dagger | 0 \rangle \quad (39)$$

Agora vamos transformar a integral tridimensional acima em uma integral quadridimensional usando a identidade (59) (que pode ser provada integrando-se em p_0 no plano complexo)

$$\int D^3q \{ \Theta(x_0) e^{-iqx} + \Theta(-x_0) e^{iqx} \} \mathcal{P}(p) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} \mathcal{P}(p)}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (40)$$

e assumindo que a função ρ é uma função separável nos momentos³, segundo:

$$\rho(p_1, p_3) = \rho_1(p_1) \rho_3(p_3) \quad (41)$$

² Basicamente, o fato do que $\langle p | j | q \rangle = \langle p - q | j | 0 \rangle$

³ O qual é uma hipótese perfeitamente razoável se o notamos em (39) que os valores esperados das correntes j_3, j_1 são calculadas em relação a p_3, p_1 , respetivamente

então é possível escrever o correlator da forma:

$$\Pi^{phen}(x, y) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{\rho(p_1, p_3) e^{iy(p_3 - p_1)} e^{-ip_3 x}}{(p_1^2 - m_1^2)(p_3^2 - m_3^2)} \quad (42)$$

mas identificando:

$$p_3 = p', \quad p_1 = p, \quad p_2 = p_3 - p_1 = q \quad (43)$$

obtemos que o correlator tem a forma geral no espaço de coordenadas

$$\Pi^{phen}(x, y) = - \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\rho(p', p) e^{iqy} e^{-ip'x}}{(p^2 - m_1^2)(p'^2 - m_3^2)} \quad (44)$$

Evidentemente, isto é apenas uma transformada de Fourier sob ambas as variáveis no espaço dos momentos, p, p' :

$$\Pi^{phen}(x, y) = - \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{iqy} e^{-ip'x} \Pi^{phen}(p, p') \quad (45a)$$

$$\Pi^{phen}(p, p') = \frac{\rho(p', p)}{(p^2 - m_1^2)(p'^2 - m_3^2)} \quad (45b)$$

$$\rho(p', p) = \langle 0 | j_3 | p' \rangle \langle p' | j_2^\dagger | p \rangle \langle p | j_1^\dagger | 0 \rangle \quad (45c)$$

Novamente pela *crossing symmetry*, da relação de completeza e da identidade (40)

$$\begin{aligned} \langle p' | j_2^\dagger | p \rangle &= \langle p' - p | j_2^\dagger | 0 \rangle \\ &= \int D^3 q \langle p' - p | q \rangle \langle q | j_2^\dagger | 0 \rangle \\ &= i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\langle p' - p | q \rangle \langle q | j_2^\dagger | 0 \rangle}{q^2 - m_2^2} \end{aligned} \quad (46)$$

Mas, da necessidade do que os elementos de matriz que vêm da probabilidade de espalhamento entre algum estado inicial e final reflete a conservação do momento, então estes termos devem ser proporcionais a certo elemento invariante de matriz \mathcal{M} (55)

$$\langle p' - p | q \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(q - (p' - p)) \mathcal{M} = (2\pi)^4 \delta^4(q - (p' - p)) i\Gamma(p, p') \quad (47)$$

A matriz \mathcal{M} representa a amplitude de Feynman do processo de iteraç~ao. Assim:

$$\begin{aligned}
\langle p' | j_2^\dagger | p \rangle &= \int d^4q \frac{\langle q | j_2^\dagger | 0 \rangle}{q^2 - m_2^2} \delta^4(q - (p' - p)) \Gamma(p, p') \\
&= -\frac{\langle p' - p | j_2^\dagger | 0 \rangle}{(p' - p)^2 - m_2^2} \Gamma(p, p') \\
&= \frac{\langle q | j_2^\dagger | 0 \rangle}{q^2 - m_2^2} \Gamma(p, p')
\end{aligned} \tag{48}$$

Finalmente, lembrando que os estados $|p_i\rangle$ s~ao estados mes~onicos (a notaç~ao foi simplificada), temos:

$$\Pi^{phen}(p, p') = \sum_{M_1, M_2, M_3} \frac{\langle 0 | j_3 | M_3(p') \rangle \langle M_2(q) | j_2^\dagger | 0 \rangle \langle M_1(p) | j_1^\dagger | 0 \rangle \Gamma(p, p')}{(p^2 - m_1^2)(p'^2 - m_3^2)(q^2 - m_2^2)} \tag{49}$$

Separando no somat~orio o estado fundamental dos estados excitados (e.e.):

$$\Pi^{phen}(p, p') = \frac{\langle 0 | j_3 | M_3(p') \rangle \langle M_2(q) | j_2^\dagger | 0 \rangle \langle M_1(p) | j_1^\dagger | 0 \rangle \Gamma(p, p')}{(p^2 - m_1^2)(p'^2 - m_3^2)(q^2 - m_2^2)} + (e.e.) \tag{50}$$

Os elementos de matriz das correntes j_i que aparecem na equaç~ao acima s~ao definidos como (52, 42):

$$\langle 0 | j_\zeta | V(q, \lambda) \rangle = m_V f_V \varepsilon_\zeta(q, \lambda) \tag{51a}$$

$$\langle V(q, \lambda) | j_\zeta | 0 \rangle = m_V f_V \varepsilon_\zeta^*(q, \lambda) \tag{51b}$$

$$\langle 0 | j_\zeta | AV(q, \lambda) \rangle = m_{AV} f_{AV} \varepsilon_\zeta(q, \lambda) \tag{51c}$$

$$\langle AV(q, \lambda) | j_\zeta | 0 \rangle = m_{AV} f_{AV} \varepsilon_\zeta^*(q, \lambda) \tag{51d}$$

$$\langle P | j_\zeta | 0 \rangle = m_P^2 f_P \tag{51e}$$

onde $V(q, \lambda)$ e $AV(q, \lambda)$ representam genericamente um m~eson vetorial ou pseudo-vetorial de momento q e polarizaç~ao λ , respetivamente; P representa um m~eson pseudo-escalar, $m_{V,AV,P}$ ~e a massa do m~eson, $f_{V,AV,P}$ ~e a constante de decaimento; m_{q_1}, m_{q_2} s~ao as massas dos quarks constituintes do m~eson pseudo-escalar e $\varepsilon_\zeta(q, \lambda)$ ~e o vetor de polarizaç~ao do m~eson (pseudo-) vetorial.

2 SOBRE A GEOMETRIA DAS REGRAS DE CUTKOSKY

O cálculo do termo perturbativo do lado da OPE na implementação das QCDSR será feito usando as regras de Cutkosky e as relações de dispersão descritas no Apêndice B. Porém, para obter o valor do fator de forma de qualquer vértice no formalismo das QCDSR é preciso resolver as integrais que vêm das relações de dispersão. Além disso, as regras de Cutkosky introduzem funções de Heaviside que precisamos implementar no computador explicitamente. Neste capítulo vamos obter todas as condições que precisamos na implementação numérica para o cálculo de tais integrais.

2.1 Referencial Canônico

O termo perturbativo do correlator dado em (19) contém o produto:

$$f = \delta(k^2 - m^2) \delta((p - k)^2 - m_1^2) \delta((p' - k)^2 - m_2^2) \Theta(k_0) \Theta(p_0 - k_0) \Theta(p'_0 - k_0) \quad (52)$$

que vem do uso das regras de Cutkosky, segundo as quais (*vide* o Apêndice B):

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (k^2 - m^2)^{-1} ((p - k)^2 - m_1^2)^{-1} ((p' - k)^2 - m_2^2)^{-1} \rightarrow \frac{i}{2\pi} \int d^4k f \quad (53)$$

Vamos usar a circulação interna do vértice representada na Figura 7. Uma primeira análise das δ 's em (52) leva-nos a:

$$\delta(k^2 - m^2) \neq 0 \iff k^2 = m^2 \quad (54a)$$

$$\delta((p - k)^2 - m_1^2) \neq 0 \iff (p - k)^2 = m_1^2 \quad (54b)$$

$$\delta((p' - k)^2 - m_2^2) \neq 0 \iff (p' - k)^2 = m_2^2 \quad (54c)$$

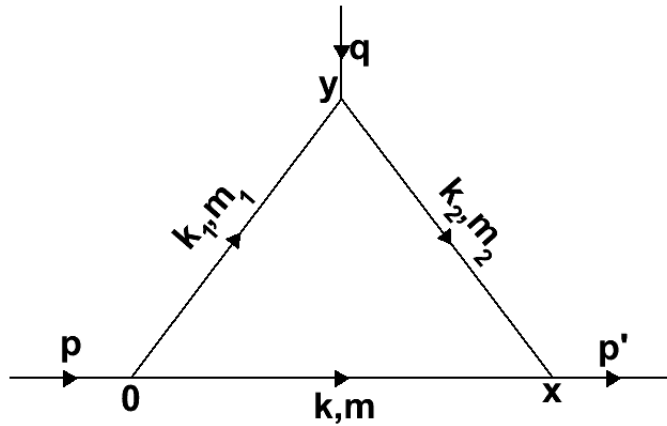
Escolhendo o referencial em repouso para a primeira partícula, *i.e.*, no qual a partícula que entra pela esquerda fica fixa na origem, o problema pode simplificar-se muito. Este será o chamado sistema canônico, dado por

$$p = (p_0, \mathbf{0}) \rightarrow s = p_0^2 \quad (55a)$$

$$p' = (p'_0, 0, 0, |\mathbf{p}'|) \rightarrow u = p'^2_0 - |\mathbf{p}'|^2 \quad (55b)$$

$$t = (p' - p)^2 = u + s - 2p'_0\sqrt{s} \quad (55c)$$

Figura 7 - Representação das massas e momentos das partículas virtuais circulando dentro do vértice.



Fonte: O autor, 2014.

de obtemos para as δ -Dirac de (54):

$$\begin{aligned}
 \delta(k^2 - m^2) &= \delta(k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2) \\
 &= \delta[-(|\mathbf{k}|^2 - (k_0^2 - m^2))] \\
 &= \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \\
 \delta((p - k)^2 - m_1^2) &= \delta(p^2 - 2p \cdot k + k^2 - m_1^2) \\
 &= \delta(s - 2p_0 \cdot k_0 + m^2 - m_1^2) \\
 &= \delta\left[-2p_0 \left(k_0 - \frac{s + m^2 - m_1^2}{2p_0}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \delta(k_0 - \bar{k}_0) \\
 \delta((p' - k)^2 - m_2^2) &= \delta(p'^2 - 2p' \cdot k + k^2 - m_2^2) \\
 &= \delta(u - 2p'_0 k_0 + 2|\mathbf{p}'||\mathbf{k}|\cos\theta + m^2 - m_2^2) \\
 &= \delta\left[2|\mathbf{p}'||\mathbf{k}|\left(\cos\theta - \frac{2p'_0 k_0 + m_2^2 - u - m_2^2}{2|\mathbf{p}'||\mathbf{k}|}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2|\mathbf{p}'||\mathbf{k}|} \delta(\cos\theta - \overline{\cos\theta})
 \end{aligned}$$

onde temos definido o ângulo θ como aquele que fazem a parte espacial dos quadrivetores p' e k , isto é, $\theta = \angle(\mathbf{p}', \mathbf{k})$, e as variáveis barradas foram definidas como

$$|\bar{\mathbf{k}}|^2 = k_0^2 - m^2 \quad (56a)$$

$$\bar{k}_0 = \frac{s + m^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}} \quad (56b)$$

$$\cos\theta = \frac{2p'_0\bar{k}_0 + m_2^2 - m^2 - u}{2|\mathbf{p}'||\bar{\mathbf{k}}|} \quad (56c)$$

Assim, a expressão dada em (52) para f pode ser reescrita como função das variáveis do referencial canônico (55), com a notação compacta (56)

$$f = \frac{1}{4\sqrt{s}|\mathbf{p}'||\bar{\mathbf{k}}|} \delta(k_0 - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \overline{\cos\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(k_0) \Theta(p_0 - k_0) \Theta(p'_0 - k_0) \quad (57)$$

Podemos ainda reescrever, por conveniência, todas as componentes de p , p' e k em função das novas variáveis tipo Mandelstram s , u e t . Para isso, definimos primeiro a função (chamada de função de Källén):

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \quad (58)$$

e levamos agora em conta que as δ -Dirac em (57) implicam, de forma equivalente a (54)

$$\delta(k_0 - \bar{k}_0) \neq 0 \iff k_0 = \bar{k}_0 \quad (59a)$$

$$\delta(\cos\theta - \overline{\cos\theta}) \neq 0 \iff \cos\theta = \overline{\cos\theta} \quad (59b)$$

$$\delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \neq 0 \iff |\mathbf{k}|^2 = |\bar{\mathbf{k}}|^2 \quad (59c)$$

Agora, usando as variáveis barradas (56)

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{k}}|^2 &= k_0^2 - m^2 \\ &= \bar{k}_0^2 - m^2 \\ &= \frac{(s + m^2 - m_1^2)^2}{4s} - m^2 \\ &= \frac{s^2 + m^4 + m_1^4 - 2sm^2 - 2sm_1^2 - 2m^2m_1^2}{4s} \\ &= \frac{\lambda(s, m^2, m_1^2)}{4s} \\ |\mathbf{p}'|^2 &= p_0'^2 - u \\ &= \frac{(s + u - t)^2}{4s} - u \\ &= \frac{\lambda(s, t, u)}{4s} \end{aligned}$$

o qual permite definir todas as componentes dos momentos no referencial canônico como funções das variáveis tipo Mandelstam

$$|\bar{\mathbf{k}}| = \frac{\lambda^{1/2}(s, m^2, m_1^2)}{2\sqrt{s}} \quad (60a)$$

$$p'_0 = \frac{s + u - t}{2\sqrt{s}} \quad (60b)$$

$$|\mathbf{p}'| = \frac{\lambda^{1/2}(s, t, u)}{2\sqrt{s}} \quad (60c)$$

Porém, por razões de conveniência na hora de fazer as integrais de Cutkosky, é melhor deixar explicitamente o módulo de k na equação 57

$$f = \frac{\delta(k_0 - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \overline{\cos\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2)}{2|\bar{\mathbf{k}}|\lambda^{1/2}(s, t, u)} \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \quad (61)$$

Note-se que nesta última expressão não foi usada a equação (60a). Uma álgebra muito simples permite obter, em função das relações obtidas acima, as seguintes expressões para as combinações de produtos escalares de p , p' e k em função das variáveis do nosso sistema referencial canônico:

$$k^2 = m^2 \quad (62a)$$

$$p \cdot k = \frac{1}{2}(s + m^2 - m_1^2) \quad (62b)$$

$$p' \cdot k = \frac{1}{2}(u + m^2 - m_2^2) \quad (62c)$$

$$p' \cdot p = \frac{1}{2}(s + u - t) \quad (62d)$$

$$p \cdot (p - k) = s - p \cdot k = \frac{1}{2}(s + m_1^2 - m^2) \quad (62e)$$

$$p \cdot (p' - k) = p' \cdot p - p \cdot k = \frac{1}{2}(u - t + m_1^2 - m^2) \quad (62f)$$

$$p' \cdot (p - k) = u - p' \cdot k = \frac{1}{2}(u + m_2^2 - m^2) \quad (62g)$$

$$p' \cdot (p' - k) = p' \cdot p - p' \cdot k = \frac{1}{2}(s - t + m_2^2 - m^2) \quad (62h)$$

Estas condições são necessárias desde que para correlatores com estrutura tensorial de dois índices, quando tiver a estrutura $g_{\mu\nu}$, o coeficiente desta é proporcional aos produtos escalares mostrados acima.

2.2 Valores Limites das Novas Variáveis no Referencial Canônico

Existem, adicionalmente aos obtidos na Seção 2.1, alguns vínculos que devem ser satisfeitos:

$$\bar{k}_0 > 0 \quad (63a)$$

$$p_0 - \bar{k}_0 > 0 \quad (63b)$$

$$p'_0 - \bar{k}_0 > 0 \quad (63c)$$

$$|\cos\bar{\theta}| < 1 \quad (63d)$$

$$\bar{k}_0^2 - m^2 > 0 \quad (63e)$$

As equações (63a)-(63c) vêm diretamente das funções de Heaviside em (61), enquanto (63d)-(63e) vêm da necessidade de ter como argumento não nulos nas δ -Dirac em (61). Vamos escrever estas condições em função das variáveis do referencial canônico e impor diretamente nas integrais que vêm das relações de dispersão com a finalidade de fazer a implementação numérica. Usando (55a) e (56b) em (63a) e (63b), obtemos imediatamente que

$$s > |m_1^2 - m^2| \quad (64)$$

Agora, de (60a) vemos que a condição (63e) é equivalente a $\lambda(s, m_1^2, m^2) > 0$, ou seja, é equivalente à condição:

$$s^2 - 2(m_1^2 + m^2)s + (m_1^2 - m^2)^2 > 0 \quad (65)$$

Trata-se duma equação quadrática cujas raízes são $s_{\pm} = (m_1 \pm m)^2$. Uma vez que a parábola em s , descrita na equação supracitada, tem coeficiente principal positivo, ela é côncava para cima e para garantir sua positividade deve ter que $s > s_+$ ou $s < s_-$. Mas (64) implica $s > s_-$ (isto pode ser facilmente mostrado avaliando os casos nos quais ou $m_1 > m$ ou $m_1 < m$), de maneira que para garantir das condições (63a), (63b) e (63e) devemos ter que:

$$s \geq s_{min} = (m_1 + m)^2 \quad (66)$$

Usando (56b) e (60b) na condição (63c), obtemos imediatamente que:

$$u > t + m^2 - m_1^2 \quad (67)$$

A condição (63d) pode ser expressa também em função das variáveis do referencial canônico, mas desde o ponto de vista da implementação numérica, é mais fácil avaliar-la

direitamente. Assim, obtemos que as regras de Cutkosky, aplicadas ao correlator perturbativo para os dois tipos de circulação, levam a:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (k^2 - m^2)^{-1} ((p - k)^2 - m_1^2)^{-1} ((p' - k)^2 - m_2^2)^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{i}{2\pi} \int d^4 k \frac{1}{2 |\bar{\mathbf{k}}| \lambda^{1/2}(s, t, u)} \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \quad (68)$$

Mas, passando o diferencial a coordenadas esféricas:

$$\frac{d^4 k}{2 |\bar{\mathbf{k}}|} = dk_0 \frac{d^3 \mathbf{k}}{2 |\bar{\mathbf{k}}|} = dk_0 d(-\cos\theta) d\varphi \frac{d|\mathbf{k}|^2}{4} \quad (69)$$

obtemos finalmente:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (k^2 - m^2)^{-1} ((p - k)^2 - m_1^2)^{-1} ((p' - k)^2 - m_2^2)^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{i}{8\pi} \lambda^{-1/2}(s, t, u) \int dk_0 d(\cos\theta) d\varphi d|\mathbf{k}|^2 \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \quad (70)$$

Todo isso junto com as condições (63d), (66) e (67).

3 O VÉRTICE $D_1 D^* \pi$

Neste vértice, temos a iteração dos mésons D_1 , D^* e π , os quais são pseudo-vetorial, vetorial e pseudo-escalar, respetivamente (60). Vamos fazer o análise com cada um dos mésons fora da camada de massa, segundo é mostrado a seguir.

3.1 Lado da OPE

Nesta seção vamos calcular os valores da chamada dupla descontinuidade (DD) usando as regras de Cutkosky, a qual será inserida nas relações de dispersão nos permitindo obter o termo perturbativo da OPE (veja-se o Apêndice B para os detalhes destes procedimentos). De (202), o termo perturbativo terá sempre a forma geral:

$$\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p) = \Pi_0 - \frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds \int_{u_0}^{\infty} du \frac{p'^2 p^2}{s u} \frac{DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(s, u)]}{(s - p^2)(u - p'^2)} \quad (71)$$

sendo que após a aplicação da dupla transformada de Borel (usando a propriedade (4)):

$$\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)] = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds \int_{u_0}^{\infty} du DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(s, u)] e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \quad (72)$$

Os termos não-perturbativos são obtidos apenas calculando os traços, usando as propriedades descritas no Apêndice A. Levaremos sempre em conta também que $m_u \approx m_d \ll m_c$, pelo que faremos:

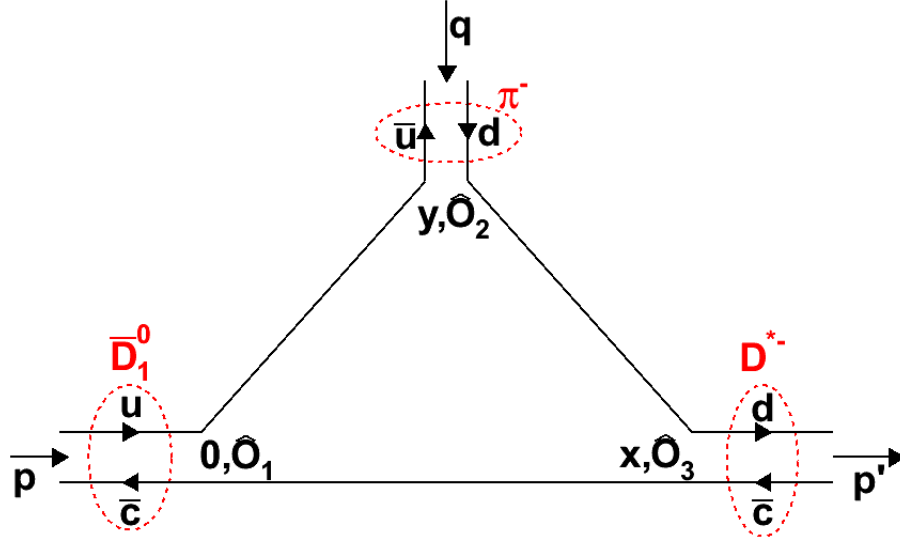
$$m_u \approx m_d \rightarrow 0 \quad (73)$$

3.1.1 O vértice $\pi^- \bar{D}_1^0 D^{*-}$

O problema tem a circulação mostrada na Figura 8, com os termos das correntes dados por:

$$\begin{aligned} j_{\bar{D}_1^0}(0) &= \bar{c}_3(0) \gamma_\mu \gamma_5 u(0) \\ j_{\pi^-}(y) &= i \bar{u}(y) \gamma_5 d(y) \\ j_{D^{*-}}(x) &= \bar{c}(x) \gamma_\nu d(x) \end{aligned} \quad (74)$$

Figura 8 - Circulação dos quarks com o pión fora da camada de massa.



Fonte: O autor, 2014.

com a identificação em relação a (9)

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \bar{D}_1^0 & q_1 &= u & \mathcal{O}_1 &= \gamma_\mu \gamma_5 \\
 M_2 &= \pi^- & q_2 &= d & \mathcal{O}_2 &= i \gamma_5 \\
 M_3 &= D^{*-} & q_3 &= c & \mathcal{O}_3 &= \gamma_\nu
 \end{aligned} \tag{75}$$

Usamos agora (75) nos resultados genéricos obtidos para os primeiros termos da OPE. Para o termo perturbativo temos, de (19)

$$\Pi^{pert} = (-3) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Tr \{ (-\not{k} + m_c) \gamma_\nu (\not{p}' - \not{k}) \gamma_5 (\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu \gamma_5 \}}{(k^2 - m_c^2) (p' - k)^2 (p - k)^2} \tag{76}$$

Calculamos o traço usando os resultados gerais mostrados no Apêndice A:

$$\begin{aligned}
 Tr \{ \dots \} &= -Tr \{ (\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}' - \not{k}) \gamma_5 (\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu \gamma_5 \} + m_c Tr \{ \gamma_\nu (\not{p}' - \not{k}) \gamma_5 (\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu \gamma_5 \} \\
 &= m_c (p' - k)^\Delta (p - k)^\omega Tr \{ \gamma_\nu \gamma_\Delta \gamma_5 \gamma_\omega \gamma_\mu \gamma_5 \} \\
 &= m_c (p' - k)^\Delta (p - k)^\omega Tr \{ \gamma_\nu \gamma_\Delta \gamma_\omega \gamma_\mu \} \\
 &= m_c (p' - k)^\Delta (p - k)^\omega 4 \{ g_{\nu\Delta} g_{\omega\mu} - g_{\nu\omega} g_{\Delta\mu} + g_{\nu\mu} g_{\Delta\omega} \} \\
 &= 4m_c \{ (p'_\nu p_\mu - p'_\mu p_\nu) - (p'_\nu k_\mu - p'_\mu k_\nu) - (k_\nu p_\mu - k_\mu p_\nu) + \\
 &\quad + g_{\nu\mu} (p' \cdot p - p' \cdot k - k \cdot p + k^2) \}
 \end{aligned} \tag{77}$$

Na primeira linha, o primeiro termo é zero por ter o traço de um número ímpar de matrizes γ , equação (190f); na segunda linha usamos a anticomutação de γ_5 com γ , equação (190d);

finalmente usamos (190e), pelo que obtemos para o traço:

$$\Pi_{\nu\mu}^{pert} = (-12m_c) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Xi}{(k^2 - m_c^2) (p' - k)^2 (p - k)^2} \quad (78)$$

onde foi definido:

$$\Xi = \{ (p'_\nu p_\mu - p'_\mu p_\nu) - (p'_\nu k_\mu - p'_\mu k_\nu) - (k_\nu p_\mu - k_\mu p_\nu) + g_{\nu\mu} (p' \cdot p - (p' + p) \cdot k + k^2) \} \quad (79)$$

Daqui, aplicando as regras de Cutkosky, passamos à dupla descontinuidade:

$$DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}] = \frac{-12m_c i}{8\pi\lambda^{1/2}} \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \cdot \Xi \quad (80)$$

Podemos separar a integral em duas partes, segundo:

$$I_{\nu\mu}^I = \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \{ (p'_\nu p_\mu - p'_\mu p_\nu) + g_{\nu\mu} (p' \cdot p - p' \cdot k - k \cdot p + k^2) \} \quad (81)$$

$$I_{\nu\mu}^{II} = - \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \{ (p'_\nu k_\mu - p'_\mu k_\nu) + (k_\nu p_\mu - k_\mu p_\nu) \} \quad (82)$$

Vemos imediatamente que na integral $I_{\nu\mu}^I$ nenhum termo do integrando depende de k_0 , $|\mathbf{k}|^2$ ou $\cos\theta$, pelo que se tem só uma integral trivial sobre a variável φ :

$$I_{\nu\mu}^I = 2\pi \{ (p'_\nu p_\mu - p'_\mu p_\nu) + g_{\nu\mu} (p' \cdot p - p' \cdot k - k \cdot p + k^2) \} \quad (83)$$

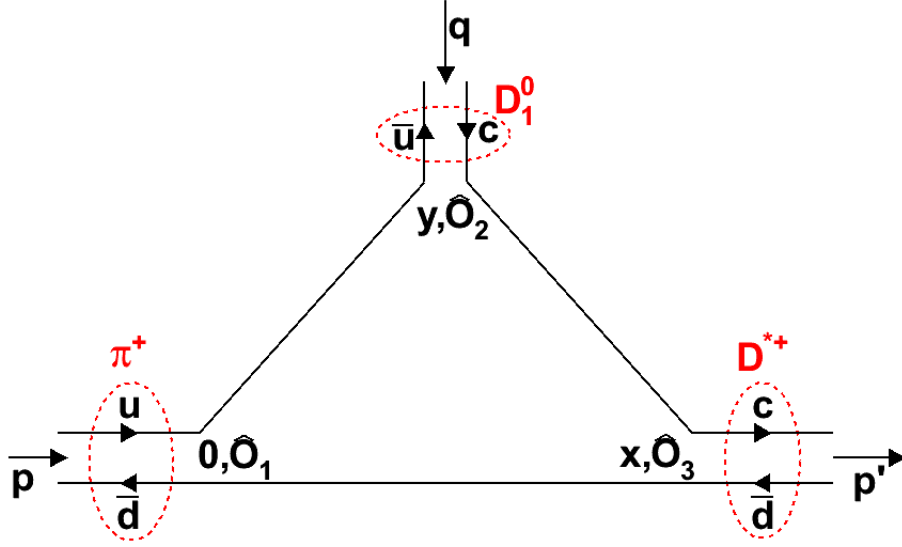
No caso da integral $I_{\nu\mu}^{II}$, obtém-se (ver o Apêndice C para detalhes):

$$I_{\nu\mu}^{II} = (-2\pi) \{ (A + B) (p'_\nu p_\mu - p'_\mu p_\nu) + B (p'_\nu p'_\mu - p'_\mu p'_\nu) + A (p_\nu p_\mu - p_\mu p_\nu) \} \quad (84)$$

Mas os dois últimos termos na equação acima serão nulos, o qual é claro ao verificar que podem ser escritos como um produto de uma estrutura simétrica de p 's multiplicadas por el tensor antissimétrico de Levi-Civita:

$$\begin{aligned} q_\mu q_\nu - q_\nu q_\mu &= q_\alpha q_\beta (\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta}) \\ &= -\frac{1}{2} q_\alpha q_\beta \varepsilon^{\eta\theta\mu\nu} \varepsilon_{\eta\theta\alpha\beta} \end{aligned} \quad (85)$$

Figura 9 - Circulação dos quarks com o D_1 fora da camada de massa.



Fonte: O autor, 2014.

o qual é claramente nulo. Desta forma, a dupla descontinuidade fica:

$$\begin{aligned}
 DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}] &= \frac{-12m_c i}{8\pi\lambda^{1/2}} \{I_{\nu\mu}^I + I_{\nu\mu}^{II}\} \\
 &= \frac{-3m_c i}{\lambda^{1/2}(s, u, t)} \left\{ (1 - A - B) (p'_\nu p_\mu - p_\nu p'_\mu) \right. \\
 &\quad \left. + g_{\nu\mu} (p' \cdot p - p' \cdot k - k \cdot p + k^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{86}$$

No caso dos condensados, o resultado é nulo desde que os termos (27) e (33) são diretamente proporcionais ao valor do condensado do quark que flui pela linha embaixo (*vide* a Figura 8), o qual segundo (61, 62) é quase nulo, $\langle \bar{c}c \rangle \approx 0$, desde que o condensado é proporcional ao inverso da massa do quark charmoso; daqui:

$$\Pi^{\langle \bar{c}c \rangle} = \Pi^{m_c \langle \bar{c}c \rangle} = 0 \tag{87}$$

Assim, a única contribuição corresponde ao termo perturbativo.

3.1.2 O vértice $D_1^0 \pi^+ D^{*+}$

O problema tem a circulação de quarks mostrada na Figura 9, com os termos das correntes dados por:

$$\begin{aligned}
j_{\pi^+}(0) &= i\bar{d}_3(0)\gamma_5 u(0) \\
j_{D_1^0}(y) &= \bar{u}(y)\gamma_\mu\gamma_5 c(y) \\
j_{D^{*+}}(x) &= \bar{d}(x)\gamma_\nu c(x)
\end{aligned} \tag{88}$$

com a seguinte identificação em relação a (9):

$$\begin{aligned}
M_1 = \pi^+ & & q_1 = u & & \mathcal{O}_1 = i\gamma_5 \\
M_2 = D_1^0 & , & q_2 = c & , & \mathcal{O}_2 = \gamma_\mu\gamma_5 \\
M_3 = D^{*+} & & q_3 = d & & \mathcal{O}_3 = \gamma_\nu
\end{aligned} \tag{89}$$

Para o termo perturbativo (19) se segue imediatamente que:

$$\Pi^{pert} = (-3) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \{ (-\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}' - \not{k} + m_c) \gamma_\mu \gamma_5 (\not{p} - \not{k}) \gamma_5 \}}{k^2 ((p' - k)^2 + m_c^2) (p - k)^2} \tag{90}$$

Calculamos o traço usando as propriedades mostradas no Apêndice A:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \{ \dots \} &= - \text{Tr} \{ (\not{k}) \gamma_\nu (\not{p}' - \not{k}) \gamma_\mu \gamma_5 (\not{p} - \not{k}) \gamma_5 \} - m_c \text{Tr} \{ (\not{k}) \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5 (\not{p} - \not{k}) \gamma_5 \} \\
&= -m_c k^\Delta (p - k)^\omega \text{Tr} \{ \gamma_\Delta \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\omega \gamma_5 \} \\
&= m_c k^\Delta (p - k)^\omega \text{Tr} \{ \gamma_\Delta \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\omega \} \\
&= m_c k^\Delta (p - k)^\omega 4 \{ g_{\Delta\nu} g_{\mu\omega} - g_{\Delta\mu} g_{\nu\omega} + g_{\Delta\omega} g_{\nu\mu} \} \\
&= 4m_c \{ (k_\nu p_\mu - k_\mu p_\nu) - (k_\nu k_\mu - k_\mu k_\nu) + g_{\nu\mu} (k \cdot p - k^2) \}
\end{aligned} \tag{91}$$

onde, de (85), o segundo termo do *rhs* é nulo, pelo que obtemos para o correlator perturbativo:

$$\Pi_{\nu\mu}^{pert} = (-12m_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Xi}{k^2 ((p' - k)^2 + m_c^2) (p - k)^2} \tag{92}$$

onde foi definido:

$$\Xi = \{ (k_\nu p_\mu - k_\mu p_\nu) + g_{\nu\mu} (k \cdot p - k^2) \} \tag{93}$$

Daqui, aplicando as regras de Cutkosky, passamos à dupla descontinuidade:

$$\begin{aligned}
DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}] &= \frac{-12m_c i}{8\pi\lambda^{1/2}} \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \\
&\quad \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \cdot \Xi
\end{aligned} \tag{94}$$

Novamente, podemos separar a integral es duas partes, segundo:

$$I_{\nu\mu}^I = \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \{g_{\nu\mu} (k \cdot p - k^2)\} \quad (95)$$

$$I_{\nu\mu}^{II} = \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \{(k_\nu p_\mu - k_\mu p_\nu)\} \quad (96)$$

Vemos rapidamente que na integral $I_{\nu\mu}^I$ nenhum termo do integrando depende de k_0 , $|\mathbf{k}|^2$ ou $\cos\theta$, pelo que se tem só uma integral imediata sobre a variável φ :

$$I_{\nu\mu}^I = 2\pi \{g_{\nu\mu} (k \cdot p - k^2)\} \quad (97)$$

No caso da integral $I_{\nu\mu}^{II}$, esta é exatamente igual ao segundo termo entre chavetas da direita na equação (82):

$$I_{\nu\mu}^{II} = (2\pi) \{B (p'_\nu p_\mu - p'_\mu p_\nu) + A (p_\nu p_\mu - p_\mu p_\nu)\} \quad (98)$$

Novamente, de (85), vemos que o segundo termo do *rhs* será nulo. Desta forma, a dupla descontinuidade fica:

$$\begin{aligned} DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}] &= \frac{-12m_c}{8\pi\lambda^{1/2}} \{I_{\nu\mu}^I + I_{\nu\mu}^{II}\} \\ &= \frac{-3m_c}{\lambda^{1/2}(s, u, t)} \{g_{\nu\mu} (k \cdot p - k^2) + B (p'_\nu p_\mu - p'_\mu p_\nu)\} \end{aligned} \quad (99)$$

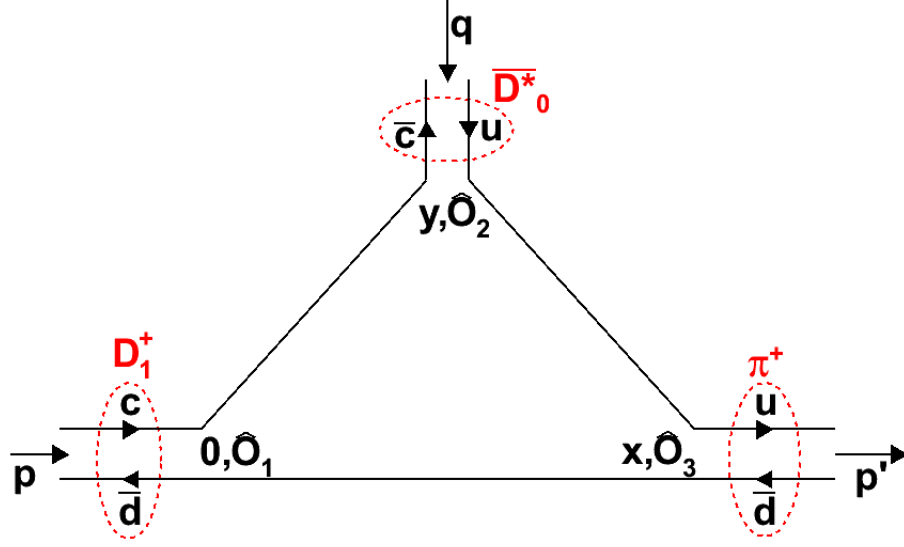
Neste caso, o termo correspondente ao condensado de quarks não será nulo. Assim, usando (89) em (27) temos:

$$\Pi^{(\bar{d}d)} = -\frac{i\langle\bar{d}d\rangle}{4} \frac{Tr \{\gamma_\nu (\not{p}' + m_c) \gamma_\mu \gamma_5 (\not{p}) \gamma_5\}}{(p'^2 - m_c^2) p^2} \quad (100)$$

O cálculo, seguindo as regras em (190) do traço é imediato:

$$\begin{aligned} Tr \{...\} &= Tr \{\gamma_\nu (\not{p}') \gamma_\mu \gamma_5 (\not{p}) \gamma_5\} + m_c Tr \{\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5 (\not{p}) \gamma_5\} \\ &= -Tr \{\gamma_\nu (\not{p}') \gamma_\mu (\not{p})\} \\ &= -p'^\Delta p^\omega Tr \{\gamma_\nu \gamma_\Delta \gamma_\mu \gamma_\omega\} \\ &= -p'^\Delta p^\omega 4 \{g_{\nu\Delta} g_{\mu\omega} - g_{\nu\mu} g_{\Delta\omega} + g_{\nu\omega} g_{\Delta\mu}\} \\ &= -4 \{p'_\nu p_\mu - g_{\nu\mu} p' \cdot p + p'_\mu p_\nu\} \end{aligned} \quad (101)$$

Figura 10 - Circulação dos quarks com o D^* fora da camada de massa.



Fonte: O autor, 2014.

então:

$$\Pi^{\langle \bar{d}d \rangle} = i \langle \bar{d}d \rangle \frac{\{p'_\nu p_\mu - g_{\nu\mu} p' \cdot p + p'_\mu p_\nu\}}{(p'^2 - m_c^2) p^2} \quad (102)$$

Aplicando a dupla transformada de Borel:

$$\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)] = i \langle \bar{d}d \rangle \{p'_\nu p_\mu - g_{\nu\mu} p' \cdot p + p'_\mu p_\nu\} e^{-m_c^2/M'^2} \quad (103)$$

Já no caso da correção no condensado com massa $\Pi^{m_d \langle \bar{d}d \rangle}$, dado pela eq. (33), este é proporcional à massa do quark d , de maneira que sua contribuição neste caso é nula.

3.1.3 O vértice $\bar{D}_0^* D_1^+ \pi^+$

O problema tem a circulação de quarks mostrada na Figura 10, com os termos das correntes dados por:

$$\begin{aligned} j_{D_1^+}(0) &= \bar{d}(0) \gamma_\mu \gamma_5 c(0) \\ j_{\bar{D}_0^*}(y) &= \bar{c}(y) \gamma_\nu u(y) \\ j_{\pi^+}(x) &= i \bar{d}(x) \gamma_5 u(x) \end{aligned} \quad (104)$$

com a identificação ao respeito de (9):

$$\begin{aligned}
M_1 &= D_1^+ & q_1 &= c & \hat{O}_1 &= \gamma_\mu \gamma_5 \\
M_2 &= \bar{D}_0^* & q_2 &= u & \hat{O}_2 &= \gamma_\nu \\
M_3 &= \pi^+ & q_3 &= d & \hat{O}_3 &= i\gamma_5
\end{aligned} \tag{105}$$

Usamos, como antes, a forma explícita das correntes dadas em (105) e as identificações dadas em (105) nos resultados genéricos obtidos para os primeiros termos da OPE. Para o termo perturbativo temos, de (19):

$$\Pi^{pert} = (-3) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Tr \{ (-\not{k}) \gamma_5 (\not{p}' - \not{k}) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k} + m_c) \gamma_\mu \gamma_5 \}}{k^2 (p' - k)^2 ((p - k)^2 + m_c^2)} \tag{106}$$

Calculando o traço:

$$\begin{aligned}
Tr \{ \dots \} &= - Tr \{ (\not{k}) \gamma_5 (\not{p}' - \not{k}) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu \gamma_5 \} - m_c Tr \{ (\not{k}) \gamma_5 (\not{p}' - \not{k}) \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5 \} \\
&= -m_c k^\Delta (p' - k)^\omega Tr \{ \gamma_\Delta \gamma_5 \gamma_\omega \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5 \} \\
&= m_c k^\Delta (p' - k)^\omega Tr \{ \gamma_\Delta \gamma_\omega \gamma_\nu \gamma_\mu \} \\
&= m_c k^\Delta (p' - k)^\omega 4 \{ g_{\Delta\omega} g_{\nu\mu} - g_{\Delta\nu} g_{\omega\mu} + g_{\Delta\mu} g_{\omega\nu} \} \\
&= 4m_c \{ g_{\nu\mu} (k \cdot p' - k^2) + (k_\mu p'_\nu - k_\nu p'_\mu) + (k_\nu k_\mu - k_\mu k_\nu) \}
\end{aligned} \tag{107}$$

onde, usando sempre (85), vemos que o terceiro termo do *rhs* é nulo, pelo que obtemos para o correlator perturbativo:

$$\Pi_{\nu\mu}^{pert} = (-12m_c) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Xi}{k^2 ((p' - k)^2 + m_c^2) (p - k)^2} \tag{108}$$

onde estamos fazendo:

$$\Xi = \{ g_{\nu\mu} (k \cdot p' - k^2) + (k_\mu p'_\nu - k_\nu p'_\mu) \} \tag{109}$$

Daqui, aplicando as regras de Cutkosky, passamos à dupla descontinuidade:

$$\begin{aligned}
DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}] &= \frac{-12m_c i}{8\pi\lambda^{1/2}} \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \\
&\quad \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \cdot \Xi
\end{aligned} \tag{110}$$

Separamos a integral em duas partes, segundo:

$$I_{\nu\mu}^I = \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \{g_{\nu\mu}(k \cdot p' - k^2)\} \quad (111)$$

$$I_{\nu\mu}^{II} = \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \{k_\mu p'_\nu - k_\nu p'_\mu\} \quad (112)$$

Vemos rapidamente que na integral $I_{\nu\mu}^I$ nenhum termo do integrando depende de k_0 , $|\mathbf{k}|^2$ ou $\cos\theta$, pelo que se tem só uma integral imediata sobre a variável φ :

$$I_{\nu\mu}^I = 2\pi \{g_{\nu\mu}(k \cdot p' - k^2)\} \quad (113)$$

No caso da integral $I_{\nu\mu}^{II}$, resulta exatamente no segundo termo entre chavetas da direita na equação (82):

$$I_{\nu\mu}^{II} = (2\pi) \{A(p_\mu p'_\nu - p_\nu p'_\mu) + B(p'_\mu p'_\nu - p'_\nu p'_\mu)\} \quad (114)$$

De (85), o segundo termo será nulo. Desta forma, a dupla descontinuidade fica:

$$\begin{aligned} DD[\Pi_{\nu\mu}^{pert}] &= \frac{-12m_c}{8\pi\lambda^{1/2}} \{I_{\nu\mu}^I + I_{\nu\mu}^{II}\} \\ &= \frac{-3m_c}{\lambda^{1/2}(s, u, t)} \{g_{\nu\mu}(k \cdot p' - k^2) + A(p_\mu p'_\nu - p_\nu p'_\mu)\} \end{aligned} \quad (115)$$

Finalmente, usando a relação de dispersão (72) e fazendo a dupla transformada de Borel:

$$\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds \int_{u_0}^{\infty} du DD[\Pi_{\nu\mu}^{pert}(s, u)] e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \quad (116)$$

Também neste caso, da mesma maneira que no anterior, o termo correspondente ao condensado de quarks não será nulo. Assim, de (27) temos:

$$\Pi^{(\bar{d}d)} = -\frac{i\langle\bar{d}d\rangle}{4} \frac{Tr\{\gamma_5(\not{p}')\gamma_\nu(\not{p} + m_c)\gamma_\mu\gamma_5\}}{p'^2(p^2 - m_c^2)} \quad (117)$$

Calculamos agora o traço:

$$\begin{aligned}
Tr \{ \dots \} &= Tr \{ \gamma_5 (\not{p}') \gamma_\nu (\not{p}) \gamma_\mu \gamma_5 \} + m_c Tr \{ \gamma_5 (\not{p}') \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5 \} \\
&= Tr \{ (\not{p}') \gamma_\nu (\not{p}) \gamma_\mu \} \\
&= p'^\Delta p^\omega Tr \{ \gamma_\Delta \gamma_\nu \gamma_\omega \gamma_\mu \} \\
&= p'^\Delta p^\omega 4 \{ g_{\Delta\nu} g_{\omega\mu} - g_{\Delta\omega} g_{\nu\mu} + g_{\Delta\mu} g_{\nu\omega} \} \\
&= 4 \{ p'_\nu p_\mu - g_{\nu\mu} p' \cdot p + p'_\mu p_\nu \}
\end{aligned} \tag{118}$$

então:

$$\Pi_{\nu\mu}^{\langle \bar{d}d \rangle} = -i \langle \bar{d}d \rangle \frac{\{ p'_\nu p_\mu - g_{\nu\mu} p' \cdot p + p'_\mu p_\nu \}}{(p'^2 - m_c^2) p^2} \tag{119}$$

e aplicando a dupla transformada de Borel:

$$\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\langle \bar{d}d \rangle_{\nu\mu}^{pert}(p', p)] = i \langle \bar{d}d \rangle \{ p'_\nu p_\mu - g_{\nu\mu} p' \cdot p + p'_\mu p_\nu \} e^{-m_c^2/M^2} \tag{120}$$

De novo, o condensado de quarks com massa será nulo, pelas mesmas razões que no caso anterior.

3.2 Lado fenomenológico

A lagrangiana fenomenológica para o problema usada neste trabalho é (38):

$$\mathcal{L}_{D_1 D^* \pi} = \frac{g_{D_1 D^* \pi}}{2\sqrt{2}} D^{*\alpha\beta} \pi \cdot \tau \bar{D}_{1\alpha\beta} + \frac{g_{D_1 D^* \pi}}{2\sqrt{2}} D_1^{\alpha\beta} \pi \cdot \tau \bar{D} *_{\alpha\beta} + h.c. \tag{121}$$

onde $V^{\alpha\beta} = \partial^\alpha V^\beta - \partial^\beta V^\alpha$ é o tensor de intensidade dos mésons, $V = D_1, D^*$. Assim, explicitamente temos que o lagrangiano será:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{D_1 D^* \pi} &= \frac{g_{D_1 D^* \pi}}{2\sqrt{2}} \left\{ \partial^\alpha D^{*\beta} \pi \cdot \tau \partial_\alpha \bar{D}_{1\beta} - \partial^\alpha D^{*\beta} \pi \cdot \tau \partial_\beta \bar{D}_{1\alpha} \right. \\
&\quad \left. - \partial^\beta D^{*\alpha} \pi \cdot \tau \partial_\alpha \bar{D}_{1\beta} + \partial^\beta D^{*\alpha} \pi \cdot \tau \partial_\beta \bar{D}_{1\alpha} \right\} \\
&+ \frac{g_{D_1 D^* \pi}}{2\sqrt{2}} \left\{ \partial^\alpha D_1^\beta \pi \cdot \tau \partial_\alpha \bar{D} *_\beta - \partial^\alpha D_1^\beta \pi \cdot \tau \partial_\beta \bar{D} *_{1\alpha} \right. \\
&\quad \left. - \partial^\beta D_1^\alpha \pi \cdot \tau \partial_\alpha \bar{D} *_\beta + \partial^\beta D_1^\alpha \pi \cdot \tau \partial_\beta \bar{D} *_{1\alpha} \right\}
\end{aligned} \tag{122}$$

Agora, levando em conta que as funções D_1, D^* são isodoubletos dos mésons, segundo: $D = (D^0, D^+)$, $\bar{D}^\dagger = (\bar{D}^0, D^-)$, $D^* = (D^{*0}, D^{*+})$ e $\bar{D}^{*\dagger} = (\bar{D}^{*0}, D^{*-})$, então tais isodoubletos criam ou aniquilam partículas segundo é mostrado na Tabela 1. Como foi já dito, de (60) sabemos que os mésons D_1, D^* e π são pseudo-vetorial, vetorial e pseudo-escalar, respetivamente.

Tabela 1 - Aniquilação e criação dos mésons representados nos isodoublets na lagrangiana (121).

Campo mesônico	aniquila	cria
D_1	D_1^0, D_1^+	\bar{D}_1^0, \bar{D}_1^-
\bar{D}_1	\bar{D}_1^0, \bar{D}_1^-	D_1^0, D_1^+
D^*	D^{*0}, D^{*+}	D^{*0}, D^{*-}
\bar{D}^*	$\bar{D}^{*0}, \bar{D}^{*-}$	D^{*0}, D^{*+}

Fonte: O autor, 2014.

3.2.1 O vértice $\pi^- \bar{D}_1^0 D^{*-}$

Neste caso temos para o correlator fenomenológico (50):

$$\Pi^{phen}(p, p')_{\nu\mu} = \frac{\langle 0 | j_\nu | D^{*-}(p') \rangle \langle \pi^-(q) | j_5^\dagger | 0 \rangle \langle \bar{D}_1^0(p) | j_\mu^\dagger | 0 \rangle \Gamma(p, p')}{(p^2 - m_1^2)(p'^2 - m_3^2)(q^2 - m_2^2)} + (e.e.) \quad (123)$$

Daqui, usando (51) fazemos a identificação:

$$\langle \bar{D}_1^0(p) | j_\mu^\dagger | 0 \rangle = m_{D_1} f_{D_1} \varepsilon_\mu^*(p, \lambda) \quad (124a)$$

$$\langle 0 | j_\nu | D^{*-}(p') \rangle = m_{D^*} f_{D^*} \varepsilon_\nu(p', \lambda') \quad (124b)$$

$$\langle \pi^-(q) | j_5^\dagger | 0 \rangle = m_\pi f_\pi \quad (124c)$$

Neste problema, é criado um D^{*-} e aniquilado um \bar{D}_1^0 , pelo que, segundo a Tabela 1, $\mathcal{L} \propto D^*, \bar{D}_1$. Assim, só é relevante o primeiro termo no lagrangiano (121):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D_1 D^* \pi} = & \frac{g_{D_1 D^* \pi}}{2\sqrt{2}} \left\{ \partial^\alpha D^{*\beta} \pi \cdot \tau \partial_\alpha \bar{D}_{1\beta} - \partial^\alpha D^{*\beta} \pi \cdot \tau \partial_\beta \bar{D}_{1\alpha} \right. \\ & \left. - \partial^\beta D^{*\alpha} \pi \cdot \tau \partial_\alpha \bar{D}_{1\beta} + \partial^\beta D^{*\alpha} \pi \cdot \tau \partial_\beta \bar{D}_{1\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (125)$$

Logo, seguindo as regras de Feynman (*vide* Apêndice D) obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma(p, p') = & \frac{g_{D_1 D^* \pi}^{(\pi)}}{2\sqrt{2}} \left\{ \left(ip'^\alpha \right) (-ip_\alpha) \varepsilon^{\beta*}(p', \lambda') \varepsilon_\beta(p, \lambda) - \left(ip'^\alpha \right) (-ip_\beta) \varepsilon^{\beta*}(p', \lambda') \varepsilon_\alpha(p, \lambda) \right. \\ & \left. - \left(ip'^\beta \right) (-ip_\alpha) \varepsilon^{\alpha*}(p', \lambda') \varepsilon_\beta(p, \lambda) + \left(ip'^\beta \right) (-ip_\beta) \varepsilon^{\alpha*}(p', \lambda') \varepsilon_\alpha(p, \lambda) \right\} \end{aligned} \quad (126)$$

onde o super-índice de g indica a partícula fora da camada de massa. Agora, lembrando que fisicamente temos um sistema de mésons com estrutura interna, devemos mudar a

constante de decaimento pelo fator de forma, pelo que obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi^{phen}(p, p') &= \frac{F_{D_1 D^* \pi}^\pi(q^2) m_{\bar{D}_1} m_{D^*} - m_\pi^2 f_{D_1^0} f_{\pi^-} f_{D^{*-}}}{2\sqrt{2}} \frac{\varepsilon_\nu(p', \lambda') \varepsilon_\mu^*(p, \lambda)}{(p^2 - m_1^2)(p'^2 - m_3^2)(q^2 - m_2^2)} \\ &\quad \times \left\{ 2p' \cdot p \varepsilon^{\beta*}(p', \lambda') \varepsilon_\beta(p, \lambda) - 2p'^\alpha p_\beta \varepsilon^{\beta*}(p', \lambda') \varepsilon_\alpha(p, \lambda) \right\} \end{aligned} \quad (127)$$

Para simplificar a notação, redefinimos:

$$\Omega = \frac{F_{D_1 D^* \pi}^\pi(q^2) m_{D_1} m_{D^*} m_\pi f_{D_1} f_\pi f_{D^*}}{\sqrt{2} (p^2 - m_{D_1}^2) (p'^2 - m_{D^*}^2) (q^2 - m_\pi^2)} \quad (128)$$

de maneira que (127) fica:

$$\Pi^{phen}(p, p') = \Omega \varepsilon_\nu(p', \lambda') \varepsilon_\mu^*(p, \lambda) \left\{ p' \cdot p \varepsilon^{\beta*}(p', \lambda') \varepsilon_\beta(p, \lambda) - p'^\alpha p_\beta \varepsilon^{\beta*}(p', \lambda') \varepsilon_\alpha(p, \lambda) \right\} \quad (129)$$

A partir da seguinte propriedade para os tensores de polarização (59):

$$\varepsilon_\mu^*(k, \lambda) \varepsilon_\nu(k, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \quad (130)$$

obtemos para os produtos de vetores de polarização em (127):

$$\bullet \varepsilon^{\beta*}(p', \lambda') \varepsilon_\nu(p', \lambda') = g^{\beta\sigma} \varepsilon_\sigma^*(p', \lambda') \varepsilon_\nu(p', \lambda') = g^{\beta\sigma} \left(-g_{\sigma\nu} + \frac{p'_\sigma p'_\nu}{m_{D^*}^2} \right) \quad (131a)$$

$$\bullet \varepsilon_\mu^*(p, \lambda) \varepsilon_\beta(p, \lambda) = -g_{\mu\beta} + \frac{p_\mu p_\beta}{m_{D_1}^2} \quad (131b)$$

$$\bullet \varepsilon_\mu^*(p, \lambda) \varepsilon_\alpha(p, \lambda) = -g_{\mu\alpha} + \frac{p_\mu p_\alpha}{m_{D_1}^2} \quad (131c)$$

então:

$$\begin{aligned}
\Pi^{phen}(p, p') &= \Omega \left\{ p' \cdot p g^{\beta\sigma} \left(-g_{\sigma\nu} + \frac{p'_\sigma p'_\nu}{m_{D^*}^2} \right) \left(-g_{\mu\beta} + \frac{p_\mu p_\beta}{m_{D_1}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - p'^\alpha p_\beta g^{\beta\sigma} \left(-g_{\sigma\nu} + \frac{p'_\sigma p'_\nu}{m_{D^*}^2} \right) \left(-g_{\mu\alpha} + \frac{p_\mu p_\alpha}{m_{D_1}^2} \right) \right\} \\
&= \Omega \left\{ p' \cdot p \left(\delta_\nu^\beta g_{\mu\beta} - \delta_\nu^\beta \frac{p_\mu p_\beta}{m_{D_1}^2} - g^{\beta\sigma} g_{\mu\beta} \frac{p'_\sigma p'_\nu}{m_{D^*}^2} + \frac{p'^\beta p'_\nu p_\mu p_\beta}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - p'^\alpha p_\beta \left(\delta_\nu^\beta g_{\mu\alpha} - \delta_\nu^\beta \frac{p_\mu p_\alpha}{m_{D_1}^2} - \delta_\mu^\sigma \frac{p'_\sigma p'_\nu}{m_{D^*}^2} + \frac{p'^\beta p'_\nu p_\mu p_\alpha}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) \right\} \\
&= \Omega \left\{ p' \cdot p \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m_{D_1}^2} - \frac{p'_\mu p'_\nu}{m_{D^*}^2} + \frac{(p' \cdot p) p'_\nu p_\mu}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(p'_\mu p_\nu - p'^\alpha p_\nu \frac{p_\mu p_\alpha}{m_{D_1}^2} - p'_\mu p_\beta \frac{p'^\beta p'_\nu}{m_{D^*}^2} + \frac{(p' \cdot p)^2 p'_\nu p_\mu}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) \right\} \\
&= \Omega \left\{ \left(g_{\mu\nu} p' \cdot p - p' \cdot p \frac{p_\mu p_\nu}{m_{D_1}^2} - p' \cdot p \frac{p'_\mu p'_\nu}{m_{D^*}^2} + \frac{(p' \cdot p)^2 p'_\nu p_\mu}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(p'_\mu p_\nu - p' \cdot p \frac{p_\nu p_\mu}{m_{D_1}^2} - p' \cdot p \frac{p'_\mu p'_\nu}{m_{D^*}^2} + \frac{(p' \cdot p)^2 p'_\nu p_\mu}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) \right\} \\
&= \Omega \left(g_{\mu\nu} p' \cdot p - p'_\mu p_\nu - \frac{p' \cdot p}{m_{D_1}^2} (p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu) \right)
\end{aligned}$$

Mas, note-se que no último termo se tem, segundo (85), um produto de termos simétrico-antissimétrico, correspondendo a uma contribuição nula, pelo que obtemos finalmente o correlator fenomenológico:

$$\Pi_{\mu\nu}^{phen}(p, p') = \frac{F_{D_1 D^* \pi}^\pi(q^2) m_{D_1}^0 m_{D^*} - m_\pi^2 f_{D_1}^- f_{\pi^-} - f_{D^*}^-}{\sqrt{2} (p^2 - m_{D_1}^2) (p'^2 - m_{D^*}^2) (q^2 - m_\pi^2)} \{g_{\mu\nu} p' \cdot p - p'_\mu p_\nu\} \quad (132)$$

que após de aplicar a dupla transformada de Borel sobre as variáveis p e p' dá-nos:

$$\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} \{ \Pi_{\mu\nu}^{phen}(p, p') \} = \frac{F_{D_1 D^* \pi}^\pi(q^2) m_{D_1}^0 m_{D^*} - m_\pi^2 f_{D_1}^- f_{\pi^-} - f_{D^*}^-}{\sqrt{2} (q^2 - m_\pi^2)} \times e^{-m_{D_1}^2/M^2} e^{-m_{D^*}^2/M'^2} \{g_{\mu\nu} p' \cdot p - p'_\mu p_\nu\} \quad (133)$$

3.2.2 O vértice $D_1^0 \pi^+ D^{*+}$

Neste caso temos para o correlator fenomenológico (50):

$$\Pi^{phen}(p, p') = \frac{\langle 0 | j_\nu | D^{*+}(p') \rangle \langle D_1^0(q) | j_\mu^\dagger | 0 \rangle \langle \pi^+(p) | j_5^\dagger | 0 \rangle \Gamma(p, p')}{(p^2 - m_\pi^2) (p'^2 - m_{D^*}^2) (q^2 - m_{D_1}^2)} + (e.e.) \quad (134)$$

Daqui, usando (51) fazemos a identificação:

$$\langle D_1^0(q) | j_\mu^\dagger | 0 \rangle = m_{D_1} f_{D_1} \varepsilon_\mu^*(q, \lambda) \quad (135a)$$

$$\langle 0 | j_\nu | D^{*+}(p') \rangle = m_{D^*} f_{D^*} \varepsilon_\nu(p', \lambda') \quad (135b)$$

$$\langle \pi^+(p) | j_5^\dagger | 0 \rangle = m_\pi f_\pi \quad (135c)$$

Neste caso, é criado um D^{*+} e aniquilado um D_1^0 , pelo que, segundo a Tabela 1, $\mathcal{L} \propto \bar{D}^*, D_1$. Assim, só é relevante o segundo termo no lagrangiano (121):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D_1 D^* \pi} = & \frac{g_{D_1 D^* \pi}}{2\sqrt{2}} \left\{ \partial^\alpha D_1^\beta \pi \cdot \tau \partial_\alpha \bar{D}^*_{\beta} - \partial^\alpha D_1^\beta \pi \cdot \tau \partial_\beta \bar{D}^*_{1\alpha} \right. \\ & \left. - \partial^\beta D_1^\alpha \pi \cdot \tau \partial_\alpha \bar{D}^*_{\beta} + \partial^\beta D_1^\alpha \pi \cdot \tau \partial_\beta \bar{D}^*_{1\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (136)$$

Logo, segundo as regras de Feynman (ver Apêndice D) obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma(p, p') = & \frac{F_{D_1 D^* \pi}^{(D_1)}(q^2)}{2\sqrt{2}} \left\{ (-iq^\alpha) (ip'_\alpha) \varepsilon_\beta^*(p', \lambda') \varepsilon^\beta(q, \lambda) - (ip'_\beta) (-iq^\alpha) \varepsilon_\alpha^*(p', \lambda') \varepsilon^\beta(q, \lambda) \right. \\ & \left. - (-iq^\beta) (ip'_\alpha) \varepsilon^\alpha(p, \lambda) \varepsilon_\beta^*(p', \lambda') + (-iq^\beta) (ip'_\beta) \varepsilon^\alpha(q, \lambda) \varepsilon_\alpha^*(p', \lambda') \right\} \end{aligned} \quad (137)$$

e daqui, o correlator do lado fenomenológico (134) fica:

$$\Pi^{phen}(p, p') = \Omega \varepsilon_\nu(p', \lambda') \varepsilon_\mu^*(q, \lambda) \left\{ (p' \cdot q) \varepsilon_\beta^*(p', \lambda') \varepsilon^\beta(q, \lambda) - (p'_\beta q^\alpha) \varepsilon_\alpha^*(p', \lambda') \varepsilon^\beta(q, \lambda) \right\} \quad (138)$$

onde temos simplificado a notação fazendo a definição

$$\Omega = \frac{F_{D_1 D^* \pi}^{(D_1)}(q^2) m_{D_1} m_{D^*} m_\pi f_{D_1} f_\pi f_{D^*}}{\sqrt{2} (p^2 - m_\pi^2) (p'^2 - m_{D^*}^2) (q^2 - m_{D_1}^2)} \quad (139)$$

Usando novamente a propriedade (130), obtemos para os produtos de vetores de polarização na equação supracitada

$$\bullet \varepsilon_\beta^*(p', \lambda') \varepsilon_\nu(p', \lambda') = -g_{\beta\nu} + \frac{p'_\beta p'_\nu}{m_{D^*}^2} \quad (140a)$$

$$\bullet \varepsilon_\mu^*(q, \lambda) \varepsilon^\beta(q, \lambda) = g^{\beta\sigma} \varepsilon_\mu^*(q, \lambda) \varepsilon_\sigma(q, \lambda) = g^{\beta\sigma} \left(-g_{\mu\sigma} + \frac{q_\mu q_\sigma}{m_{D_1}^2} \right) \quad (140b)$$

$$\bullet \varepsilon_\alpha^*(p', \lambda') \varepsilon_\nu(p', \lambda') = -g_{\alpha\nu} + \frac{p'_\alpha p'_\nu}{m_{D^*}^2} \quad (140c)$$

então:

$$\begin{aligned}
\Pi^{phen}(p, p')_{\nu\mu} &= \Omega \left\{ p' \cdot q \left(-g_{\beta\nu} + \frac{p'_\beta p'_\nu}{m_{D^*}^2} \right) g^{\beta\sigma} \left(-g_{\mu\sigma} + \frac{q_\mu q_\sigma}{m_{D_1}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - (p'_\beta q^\alpha) \left(-g_{\alpha\nu} + \frac{p'_\alpha p'_\nu}{m_{D^*}^2} \right) g^{\beta\sigma} \left(-g_{\mu\sigma} + \frac{q_\mu q_\sigma}{m_{D_1}^2} \right) \right\} \\
&= \Omega \left\{ p' \cdot q \left(\delta_\nu^\sigma g_{\mu\sigma} - \delta_\nu^\sigma \frac{q_\mu q_\sigma}{m_{D_1}^2} - \delta_\mu^\beta \frac{p'_\beta p'_\nu}{m_{D^*}^2} + \frac{p'^\sigma p'_\nu}{m_{D^*}^2} \frac{q_\mu q_\sigma}{m_{D_1}^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - (p'_\beta q^\alpha) \left(\delta_\mu^\beta g_{\alpha\nu} - g_{\alpha\nu} g^{\beta\sigma} \frac{q_\mu q_\sigma}{m_{D_1}^2} - \delta_\mu^\beta \frac{p'_\alpha p'_\nu}{m_{D^*}^2} + \frac{p'_\alpha p'_\nu}{m_{D^*}^2} \frac{q_\mu q^\beta}{m_{D_1}^2} \right) \right\} \\
&= \Omega \left\{ p' \cdot q \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_{D_1}^2} - \frac{p'_\mu p'_\nu}{m_{D^*}^2} + \frac{(p' \cdot q) p'_\nu q_\mu}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(p'_\mu q_\nu - p'^\sigma q_\nu \frac{q_\mu q_\sigma}{m_{D_1}^2} - p'_\mu q^\alpha \frac{p'_\alpha p'_\nu}{m_{D^*}^2} + \frac{(p' \cdot q)^2 p'_\nu q_\mu}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) \right\} \\
&= \Omega \left\{ g_{\mu\nu} (p' \cdot q) - p'_\mu q_\nu - \frac{p' \cdot q}{m_{D_1}^2} (q_\mu q_\nu - q_\mu q_\sigma) \right\}
\end{aligned}$$

Mas, usando (85) e levando em conta que $q = p' - p$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{phen}(p, p') &= \frac{F_{D_1 D^* \pi}^{(D_1)}(q^2) m_{D_1} m_{D^*} m_\pi^2 f_{D_1} f_\pi f_{D^*}}{\sqrt{2} (m_u + m_d) (p^2 - m_\pi^2) (p'^2 - m_{D^*}^2) (q^2 - m_{D_1}^2)} \\
&\quad \{ g_{\mu\nu} (p' \cdot p' - p' \cdot p) - p'_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu \}
\end{aligned} \tag{141}$$

Logo, aplicando uma dupla transformada de Borel sobre as variáveis p e p' , para obter finalmente

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} \{ \Pi_{\mu\nu}^{phen}(p, p') \} &= \frac{F_{D_1 D^* \pi}^{(D_1)}(q^2) m_{D_1} m_{D^*} m_\pi^2 f_{D_1} f_\pi f_{D^*}}{\sqrt{2} (m_u + m_d) (q^2 - m_{D_1}^2)} e^{-m_\pi^2/M^2} e^{-m_{D^*}^2/M'^2} \\
&\quad \times \{ g_{\mu\nu} (p'^2 - p' \cdot p) - p'_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu \}
\end{aligned} \tag{142}$$

3.2.3 O vértice $\bar{D}_0^* D_1^+ \pi^+$

Neste caso temos para o correlator fenomenológico (50):

$$\Pi^{phen}(p, p') = \frac{\langle 0 | j_5 | \pi^+(p') \rangle \langle \bar{D}_0^*(q) | j_\nu^\dagger | 0 \rangle \langle D_1^+(p) | j_\mu^\dagger | 0 \rangle \Gamma(p, p')}{(p^2 - m_{D_1}^2) (p'^2 - m_\pi^2) (q^2 - m_{D^*}^2)} + (e.e.) \tag{143}$$

Daqui, usando (51) fazemos a identificação:

$$\langle \bar{D}_0^*(q) | j_\nu^\dagger | 0 \rangle = m_{D^*} f_{D^*} \varepsilon_\nu^*(q, \lambda) \quad (144a)$$

$$\langle D_1^+(p) | j_\mu^\dagger | 0 \rangle = m_{D_1} f_{D_1} \varepsilon_\mu^*(p, \lambda) \quad (144b)$$

$$\langle 0 | j_5 | \pi^+(p') \rangle = m_\pi f_\pi \quad (144c)$$

Neste caso, é aniquilado um \bar{D}_0^* e um D_1^+ , pelo que, segundo a Tabela 1, $\mathcal{L} \propto \bar{D}^*, D_1$. Assim, só é relevante o segundo termo no lagrangiano (121):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D_1 D^* \pi} = & \frac{g_{D_1 D^* \pi}}{2\sqrt{2}} \left\{ \partial^\alpha D_1^\beta \pi \cdot \tau \partial_\alpha \bar{D} *_\beta - \partial^\alpha D_1^\beta \pi \cdot \tau \partial_\beta \bar{D} *_{1\alpha} \right. \\ & \left. - \partial^\beta D_1^\alpha \pi \cdot \tau \partial_\alpha \bar{D} *_\beta + \partial^\beta D_1^\alpha \pi \cdot \tau \partial_\beta \bar{D} *_{1\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (145)$$

De novo, segundo as regras de Feynman (ver Apêndice D) obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma(p, p') = & \frac{F_{D_1 D^* \pi}^{(D^*)}(q^2)}{2\sqrt{2}} \left\{ (-ip^\alpha)(-iq_\alpha) \varepsilon^\beta(p, \lambda) \varepsilon_\beta(q, \lambda) - (-ip^\alpha)(-iq_\beta) \varepsilon^\beta(p, \lambda) \varepsilon_\alpha(q, \lambda) - \right. \\ & \left. - (-ip^\beta)(-iq_\alpha) \varepsilon^\alpha(p, \lambda) \varepsilon_\beta(q, \lambda) + (-ip^\beta)(-iq_\beta) \varepsilon^\alpha(p, \lambda) \varepsilon_\alpha(q, \lambda') \right\} \end{aligned} \quad (146)$$

e daqui, o correlator do lado fenomenológico (143) fica:

$$\Pi^{phen}(p, p') = -\Omega \varepsilon_\nu^*(q, \lambda) \varepsilon_\mu^*(p, \lambda) \left\{ (p \cdot q) \varepsilon^\beta(p, \lambda) \varepsilon_\beta(q, \lambda) - (p^\alpha q_\beta) \varepsilon^\beta(p, \lambda) \varepsilon_\alpha(q, \lambda) \right\} \quad (147)$$

onde temos definido

$$\Omega = \frac{F_{D_1 D^* \pi}^{(D^*)}(q^2) m_{D_1} m_{D^*} m_\pi f_{D_1} f_\pi f_{D^*}}{\sqrt{2} (p^2 - m_{D_1}^2) (p'^2 - m_\pi^2) (q^2 - m_{D^*}^2)} \quad (148)$$

Obtemos para os produtos de vetores de polarização na equação acima:

$$\bullet \varepsilon_\nu^*(q, \lambda) \varepsilon_\beta(q, \lambda) = -g_{\nu\beta} + \frac{q_\nu q_\beta}{m_{D^*}^2} \quad (149a)$$

$$\bullet \varepsilon_\mu^*(p, \lambda) \varepsilon^\beta(p, \lambda) = g^{\beta\sigma} \varepsilon_\mu^*(p, \lambda) \varepsilon_\sigma(q, \lambda) = g^{\beta\sigma} \left(-g_{\mu\sigma} + \frac{p_\mu p_\sigma}{m_{D_1}^2} \right) \quad (149b)$$

$$\bullet \varepsilon_\nu^*(q, \lambda) \varepsilon_\alpha(q, \lambda) = -g_{\nu\alpha} + \frac{q_\nu q_\alpha}{m_{D^*}^2} \quad (149c)$$

então:

$$\begin{aligned}
\Pi^{phen}(p, p') &= -\Omega \left\{ p' \cdot q \left(-g_{\nu\beta} + \frac{q_\nu q_\beta}{m_{D^*}^2} \right) g^{\beta\sigma} \left(-g_{\mu\sigma} + \frac{p_\mu p_\sigma}{m_{D_1}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - (p^\alpha q_\beta) \left(-g_{\nu\alpha} + \frac{q_\nu q_\alpha}{m_{D^*}^2} \right) g^{\beta\sigma} \left(-g_{\mu\sigma} + \frac{p_\mu p_\sigma}{m_{D_1}^2} \right) \right\} \\
&= -\Omega \left\{ p \cdot q \left(\delta_\nu^\sigma g_{\mu\sigma} - \delta_\nu^\sigma \frac{p_\mu p_\sigma}{m_{D_1}^2} - \delta_\mu^\beta \frac{q_\nu q_\beta}{m_{D^*}^2} + \frac{q_\nu q_\beta p_\mu p^\beta}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - (p^\alpha q_\beta) \left(\delta_\mu^\beta g_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha} g^{\beta\sigma} \frac{p_\mu p_\sigma}{m_{D_1}^2} - \delta_\mu^\beta \frac{q_\nu q_\alpha}{m_{D^*}^2} + \frac{q_\nu q_\alpha p_\mu p^\beta}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) \right\} \\
&= -\Omega \left\{ p' \cdot q \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m_{D_1}^2} - \frac{q_\nu q_\mu}{m_{D^*}^2} + \frac{(p \cdot q) q_\nu p_\mu}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(p_\nu q_\mu - p_\nu q^\sigma \frac{p_\mu p_\sigma}{m_{D_1}^2} - p^\alpha q_\mu \frac{q_\nu q_\alpha}{m_{D^*}^2} + \frac{(p \cdot q)^2 q_\nu p_\mu}{m_{D^*}^2 m_{D_1}^2} \right) \right\} \\
&= -\Omega \left\{ g_{\mu\nu} (p \cdot q) - p_\nu q_\mu - \frac{p \cdot q}{m_{D^*}^2} (q_\nu q_\mu - q_\mu q_\sigma) - \frac{p \cdot q}{m_{D_1}^2} (p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu) \right\}
\end{aligned}$$

Mas, de (85) os dois últimos termos na equação acima são nulos, e levando em conta que $q = p' - p$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\nu\mu}^{phen}(p, p') &= -\frac{F_{D_1 D^* \pi}^{(D_1)}(q^2) m_{D_1} m_{D^*} m_\pi^2 f_{D_1} f_\pi f_{D^*}}{\sqrt{2} (p^2 - m_{D_1}^2) (p'^2 - m_\pi^2) (q^2 - m_{D^*}^2)} \\
&\quad \times \{ g_{\mu\nu} (p \cdot p' - p \cdot p) - p_\nu p'_\mu + p_\nu p_\mu \}
\end{aligned} \tag{150}$$

Logo, aplicando uma dupla transformada de Borel sobre as variáveis p e p' na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} \{ \Pi_{\nu\mu}^{phen}(p, p') \} &= -\frac{F_{D_1 D^* \pi}^{(D_1)}(q^2) m_{D_1} m_{D^*} m_\pi^2 f_{D_1} f_\pi f_{D^*}}{\sqrt{2} (q^2 - m_{D_1}^2)} e^{-m_\pi^2/M'^2} e^{-m_{D_1}^2/M^2} \\
&\quad \times \{ g_{\mu\nu} (p' \cdot p - p^2) - p_\nu p'_\mu + p_\nu p_\mu \}
\end{aligned} \tag{151}$$

4 CÁLCULO DO FATOR DE FORMA

Neste capítulo vamos fornecer as expressões gerais do fator de forma para o vértice estudado segundo os resultados obtidos nos capítulos anteriores. São mostrados os valores das variáveis no referencial canônico para cada um dos casos estudados (com cada méson fora da camada de massa de cada vez) e os limites da integral nas relações de dispersão. Logo são descritas condições sobre os parâmetros das regras de soma que devem ser respeitadas na implementação numérica e finalmente como esta será feita usando o método de Monte Carlo.

4.1 Implementação das Regras de Soma

Uma vez obtidos os correlatores tanto no lado da QCD quanto do lado fenomenológico, é possível já usar o princípio de dualidade de Gell-Mann, segundo o qual (3, 4, 49):

$$\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\Pi^{pert} + \Pi^{\langle \bar{q}_3 q_3 \rangle} + \Pi^{m_3 \langle \bar{q}_3 q_3 \rangle} + \dots] = \mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\Pi^{phen}] \quad (152)$$

Como foi dito no Capítulo 2, precisamos eliminar os estados excitados, ou seja, eliminar suas contribuições, ficando apenas com os estados fundamentais. Usamos para isto a hipótese de que o contínuo do lado da OPE nas relações de dispersão correspondem exatamente as contribuições dos estados excitados do lado fenomenológico (42, 46), isto é, comparando (72) e (50), assume-se:

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_{sup}}^{\infty} ds \int_{u_{sup}}^{\infty} du DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(s, u)] e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} = (e.e.) \quad (153)$$

Está a se usar o fato de que os estados excitados dos mésons correspondem do lado da QCD àqueles do termo perturbativo com $s > s_{sup}$ e $u > u_{sup}$, pelo que no termo perturbativo do lado da QCD ficará apenas como contribuição relevante:

$$\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\tilde{\Pi}^{pert}] = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{s_{sup}} ds \int_{u_0}^{u_{sup}} du DD [\Pi^{pert}(s, u)] e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \quad (154)$$

enquanto do *rhs* de (50) os termos de estados excitados serão cancelados. É conveniente definir:

$$s_{sup} = (m_{M_{in}} + \Delta_s)^2 \quad (155a)$$

$$u_{sup} = (m_{M_{out}} + \Delta_u)^2 \quad (155b)$$

Tabela 2 - Valor das massas e constantes de decaimento que parametrizam o fator de forma.

Parâmetro	Valor experimental [MeV]	Erro (\pm)
m_c	1.275	25
m_{π^\pm}	139.57018	0.00035
$m_{D_1(2420)}$	2421.3	0.6
$m_{D^*(2010)}$	2010.28	0.13
f_{π^-}	130.41	0.03
f_{D^*}	241.9	0.6
f_{D_1}	385	175

Fonte: SUNGU, 2010, f. 7; BERINGER, 2012, f. 34,934,937; BECIREVIC, 2012, f. 10.

desde que, como não queremos incluir os estados excitados na integral, os valores de s_{sup} e u_{sup} devem ser menores ou, no máximo, iguais a massa ao quadrado do primeiro estado excitado do méson. Isto limitará os valores possíveis dos assim chamados parâmetros de corte Δ_s e Δ_u , sendo evidente que só podem tomar valores positivos.

No cálculo numérico do fator de forma usando QCDSR é preciso inserir os valores das massas dos mésons envolvidos, as constantes de decaimento de cada um deles e a massa do quark charmoso. Nós vamos usar os valores experimentais dados pelo *Particle Data Group* (60), com a exceção das constantes de decaimento para o méson D^* , para a qual vamos usar o valor calculado usando *Lattice-QCD* da referência (63), e para o méson D_1 , para a qual vamos usar o valor calculado por regras de soma de 2-pontos dado na referência (64). Os valores são mostrados na Tabela 2.

Adicionalmente, faremos uma rotação de Wick, $q^2 \rightarrow -Q^2$ e vamos considerar somente um dos valores da massa de Borel como independente, sendo que o outro vêm relacionado com o primeiro pela relação:

$$\frac{M'}{M} = \frac{m_{M_{out}}}{m_{M_{in}}} \quad (156)$$

Isto é possível desde que esperamos que a dependência do fator de forma com relação às massas de Borel M^2 e M'^2 seja fraca e esta relação leva a uma boa estabilidade (65).

4.1.1 O vértice $\pi^- \bar{D}_1^0 D^{*-}$

A única contribuição neste caso para o lado da OPE vem dado pelo termo perturbativo, cuja dupla descontinuidade, $DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(s, u)]$ foi calculada em (86), a qual deve ser inserida em (154) para poder ser comparada com o termo do lado fenomenológico,

dado em (133). Para ambos casos assumimos que os estados excitados já foram compensados. Daqui, igualando as estruturas $p_\nu p'_\mu$, desde que são as únicas presentes de ambos os lados da equação, obtemos:

$$F_{D_1 D^* \pi}^\pi(q^2) = \frac{\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{s_{sup}} ds \int_{u_0}^{u_{sup}} du DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(s, u)] e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2}}{\frac{m_{D_1^0} m_{D^*} - m_\pi^2 - f_{D_1^0} f_\pi - f_{D^*}}{\sqrt{2(m_u + m_d)(Q^2 + m_\pi^2)}} e^{-m_{D_1^0}^2/M^2} e^{-m_{D^*}^2/M'^2}} \quad (157)$$

onde tem sido já performada a rotação de Wick, $q^2 \rightarrow -Q^2$. Da análise geométrica das regras de Cutkosky e usando o facto de que

$$m_1 \equiv m_u \approx 0, \quad m_2 \equiv m_d \approx 0 \quad (158)$$

então as variáveis (56) e (60) correspondem a

$$\bar{k}_0 = \frac{s + m_c^2}{2\sqrt{s}} \quad (159a)$$

$$|\bar{\mathbf{k}}| = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_c^2, 0)}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s^2 + m_c^4 - 2m_c^2 s}}{2\sqrt{s}} \quad (159b)$$

$$p'_0 = \frac{s + u - t}{2\sqrt{s}} \quad (159c)$$

$$|\mathbf{p}'| = \frac{\lambda^{1/2}(s, t, u)}{2\sqrt{s}} \quad (159d)$$

$$\cos\bar{\theta} = \frac{2p'_0 \bar{k}_0 - m_c^2 - u}{2|\mathbf{p}'||\bar{\mathbf{k}}|} \quad (159e)$$

Além disso, devem ser satisfeitas as desigualdades (63d), (66) e (67), o que, levando em conta (158), implica em

$$s \geq s_{min} = m_c^2, \quad \geq u_{min} = t + m_c^2 \quad (160)$$

Finalmente, a relação entre as massas de Borel (156) neste caso corresponde a

$$M' = \frac{m_{D^*}}{m_{D_1}} M \quad (161)$$

4.1.2 O vértice $D_1^0 \pi^+ D^{*+}$:

Neste caso as contribuições para o lado da OPE vem dadas pelo termo perturbativo cuja dupla descontinuidade foi calculada em (99), e pelo condensado de quarks (103), enquanto o termo do lado fenomenológico é dado em (142), sempre assumindo que os estados excitados já foram compensados. Após inserir o termo perturbativo em (154) e

performando a rotação de Wick $q^2 \rightarrow -Q^2$, igualamos os termos para as estruturas $p_\nu p'_\mu$, obtendo:

$$F_{D_1 D^* \pi}^{(D_1)}(q^2) = \frac{-\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{s_{sup}} ds \int_{u_0}^{u_{sup}} du DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(s, u)] e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} + \langle \bar{d}d \rangle e^{-m_c^2/M'^2}}{-\frac{m_{D_1} m_{D^*} m_\pi^2 - f_{D_1} f_\pi f_{D^*}}{\sqrt{2}(m_u + m_d)(Q^2 + m_{D_1}^2)} e^{-m_\pi^2/M^2} e^{-m_{D^*}^2/M'^2}} \quad (162)$$

Da análise geométrica das regras de Cutkosky e usando o facto de que

$$m_1 \equiv m_u \approx 0, \quad m_3 \equiv m_d \approx 0 \quad (163)$$

então as variáveis (56) e (60) correspondem a

$$\bar{k}_0 = \frac{s}{2\sqrt{s}} \quad (164a)$$

$$|\bar{\mathbf{k}}| = \frac{\lambda^{1/2}(s, 0, 0)}{2\sqrt{s}} = \frac{s}{2\sqrt{s}} \quad (164b)$$

$$p'_0 = \frac{s + u - t}{2\sqrt{s}} \quad (164c)$$

$$|\mathbf{p}'| = \frac{\lambda^{1/2}(s, t, u)}{2\sqrt{s}} \quad (164d)$$

$$\cos\bar{\theta} = \frac{2p'_0 \bar{k}_0 - u}{2|\mathbf{p}'||\bar{\mathbf{k}}|} \quad (164e)$$

além de ter que satisfazer as desigualdades (63d), (66) e (67), o que, levando em conta (163), implica em

$$s \geq s_{min} = 0, \quad u \geq u_{min} = t \quad (165)$$

Finalmente, a relação entre as massas de Borel (156) neste caso corresponde a

$$M' = \frac{m_{D^*}}{m_\pi} M \quad (166)$$

4.1.3 O vértice $\bar{D}_0^* D_1^+ \pi^+$:

Neste caso as contribuições para o lado da OPE vem dadas pelo termo perturbativo cuja dupla descontinuidade foi calculada em (116), e pelo condensado de quarks (120), enquanto o termo do lado fenomenológico é dado em (151), sempre assumindo que os estados excitados já foram compensados. Após inserir o termo perturbativo em (154) e performando a rotação de Wick $q^2 \rightarrow -Q^2$, igualamos os termos para as estruturas $p_\nu p'_\mu$,

obtendo:

$$F_{D_1 D^* \pi}^{(D_1)}(q^2) = \frac{-\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{s_{sup}} ds \int_{u_0}^{u_{sup}} du DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(s, u)] e^{-s/M^2} e^{-u/M^2} + \langle \bar{d}d \rangle e^{-m_c^2/M^2}}{-\frac{F_{D_1 D^* \pi}^{(D_1)}(q^2) m_{D_1} m_{D^*} m_\pi - f_{D_1} f_\pi f_{D^*}}{\sqrt{2}(Q^2 + m_{D_1}^2)} e^{-m_\pi^2/M^2} e^{-m_{D_1}^2/M^2}} \quad (167)$$

Da análise geométrica das regras de Cutkosky e usando o factod e que

$$m_2 \equiv m_u \approx 0, \quad m_3 \equiv m_d \approx 0 \quad (168)$$

então as variáveis (56) e (60) correspondem a

$$\bar{k}_0 = \frac{s - m_c^2}{2\sqrt{s}} \quad (169a)$$

$$|\bar{\mathbf{k}}| = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_c^2, 0)}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s^2 + m_c^4 - 2m_c^2 s}}{2\sqrt{s}} \quad (169b)$$

$$p'_0 = \frac{s + u - t}{2\sqrt{s}} \quad (169c)$$

$$|\mathbf{p}'| = \frac{\lambda^{1/2}(s, t, u)}{2\sqrt{s}} \quad (169d)$$

$$\cos\bar{\theta} = \frac{2p'_0 \bar{k}_0 - u}{2|\mathbf{p}'||\bar{\mathbf{k}}|} \quad (169e)$$

além de ter que satisfazer as desigualdades (63d), (66) e (67), o que, levando em conta (163), implica em

$$s \geq s_{min} = m_c^2, \quad u \geq u_{min} = t - m_c^2 \quad (170)$$

Já a relação entre as massas de Borel (156) neste caso corresponde a

$$M' = \frac{m_\pi}{m_{D_1}} M \quad (171)$$

4.2 Parâmetros nas QCDSR

A determinação do fator de forma depende das duas massas de Borel M^2 e M'^2 e os dois parâmetros de corte Δ_s e Δ_u , de maneira que os valores deles podem ser ajustados em função do valor da massa do primeiro estado excitado dos mésons na camada de massa. Isto limita perfeitamente os valores possíveis para os parâmetros de corte, mas ainda fica a necessidade de estabelecer as restrições sobre os valores possíveis das massas de Borel. Como já tinha se dito no Capítulo 1, deve-se determinar uma região no espaço da massa

de Borel na qual as descrições hadrônica e da OPE sejam iguais. Este intervalo é chamado de Janela de Borel.

4.2.1 Estabilidade em M^2

Espera-se que a massa do hádron possua uma certa estabilidade em seu valor, dentro de uma janela de Borel. Isto porque teoricamente a massa é independente do parâmetro M^2 . Portanto, quando há uma grande dependência de m com relação à M^2 , é um forte indicativo de que devemos reavaliar as QCDSR, incluindo, por exemplo, mais condensados ou considerando outras aproximações.

Em condições ideais não haveria nenhuma dependência em relação à massa de Borel e conseqüentemente teríamos uma teoria válida em qualquer região de M^2 , no entanto o truncamento da OPE e as suposições fenomenológicas introduzem a instabilidade. A condição de estabilidade é, porém, pouco restritiva e um tanto subjetiva. Vamos limitar, então, a consideração da estabilidade ao estabelecimento da restrição (156), que limita os valores de M'^2 . As região possível para M^2 ficará restrita pelas duas condições seguintes, muito mais fortes.

4.2.2 Limite superior da janela de Borel: Dominância do Polo sobre o Contínuo

Como estamos interessados em estudar o estado fundamental dos hádrons, devemos trabalhar numa região de M^2 onde a contribuição do polo seja maior que a contribuição do contínuo. Assim, seria natural exigir uma escolha dos parâmetros livres da teoria tal que o termo correspondente a este polo seja grande se comparado com o termo que representa o contínuo. As contribuições do polo e do contínuo são

$$\mathcal{B}_{M^2}\mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)]_{polo} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{s_{sup}} ds \int_{u_0}^{u_{sup}} du DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(s, u)] e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \quad (172)$$

$$\mathcal{B}_{M^2}\mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)]_{cont} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{s_{sup}}^{\infty} ds \int_{u_{sup}}^{\infty} du DD [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(s, u)] e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \quad (173)$$

Daqui, as contribuições relativas polo-contínuo serão dadas por

$$Polo = \frac{\mathcal{B}_{M^2}\mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)]_{polo}}{\mathcal{B}_{M^2}\mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)]_{polo} + \mathcal{B}_{M^2}\mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)]_{cont}} \quad (174)$$

$$Cont\u00ednuo = \frac{\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)]_{cont}}{\mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)]_{polo} + \mathcal{B}_{M^2} \mathcal{B}_{M'^2} [\Pi_{\nu\mu}^{pert}(p', p)]_{cont}} \quad (175)$$

de maneira que $Polo + Cont\u00ednuo = 1$. Para valores baixos da massa de Borel, a contribui\u00e7\u00e3o do cont\u00ednuo \u00e9 pequena, de forma que temos a condi\u00e7\u00e3o $Polo > Cont\u00ednuo$. Por\u00e9m, a medida que aumentamos o valor de M^2 , o cont\u00ednuo vai se tornando cada vez mais importante e para um dado valor de M^2 temos que as contribui\u00e7\u00f5es do polo e do cont\u00ednuo s\u00e3o iguais. \u00c9 neste ponto que definimos o limite superior para a massa de Borel, M_{max}^2 .

O problema surge quando comparamos esta condi\u00e7\u00e3o no caso de QCDSR de 2 e 3-pontos. Enquanto nas QCDSR de 2-pontos \u00e9 claro que o polo \u00e9 referido ao limite correspondente a massa do primeiro estado excitado da part\u00edcula (49, 52), desde que apenas se tem uma nesse caso, nas QCDSR de 3-pontos isso n\u00e3o \u00e9 assim t\u00e3o evidente. Trabalhos anteriores em regras de soma de 3-pontos, *exempli gratia* (42, 43, 44, 45), trabalham sempre com aquela condi\u00e7\u00e3o, mas n\u00e3o \u00e9 conhecido pelo autor uma prova disto. Isto pode justificar o fato de relaxar a condi\u00e7\u00e3o de polo-cont\u00ednuo num c\u00e1lculo o mais geral poss\u00edvel do fator de forma, que \u00e9 precisamente o que ser\u00e1 feito nesta disserta\u00e7\u00e3o. Fica ent\u00e3o o problema de como limitar superiormente o valor da massa de Borel. O que nos faremos \u00e9 executar varias simula\u00e7\u00f5es num\u00e9ricas com distintos valores do limite superior, at\u00e9 notar que os valores calculados se estabilizam, de maneira que o fator de forma varie de forma desprez\u00edvel se aquele limite mudar.

4.2.3 Limite inferior da janela de Borel: A converg\u00eancia da OPE

A transformada de Borel faz com que termos que antes dependiam de potencias cada vez mais altas de $1/q^2$ agora dependam de pot\u00eancias crescentes do par\u00e2metro livre $1/M^2$. Com isto, conforme aumentamos o valor de M^2 os termos superiores da OPE tendem a contribuir menos, melhorando a converg\u00eancia. Logo, \u00e9 poss\u00edvel identificar o valor de M^2 no qual a serie passa a convergir fornecendo o limite inferior da massa de Borel, M_{min}^2 . Desta maneira, estaremos numa regi\u00e3o na qual os resultados das QCDSR s\u00e3o confi\u00e1veis. Todo isto pode ser implementado exigindo que as contribui\u00e7\u00f5es dos termos de dimens\u00e3o superior na OPE sejam menores que os termos de ordem inferior. Por exemplo, o termo de condensados de quarks deve contribuir menos do que o termo perturbativo.

4.3 Implementação numérica

Os fatores de forma associados a um vértice mesônico de três pontos são funções do tipo $F(Q^2; \vec{M}^2, \vec{\Delta}, \vec{f}, \vec{m}, \langle \cdot \rangle)$, onde Q^2 é o momento transferido euclidiano, $\vec{M}^2 = (M^2, M'^2)$ são as massas de Borel, $\vec{\Delta} = (\Delta_s, \Delta_u)$ são os parâmetros de corte, associados ao limite de integração do polo, $\vec{f} = \{f_i\}_{i=1,2,3}$ são as constantes de decaimento dos mésons envolvidos no vértice, $\vec{m} = \{m_{m_i}, m_{q_i}\}_{i=1,2,3}$ são as massas desses mésons e dos quarks que os constituem, e finalmente $\langle \cdot \rangle = (\langle \bar{q}q \rangle, \dots)$ são os condensados envolvidos nas contribuições não-perturbativas. Por simplicidade, vamos escrever a dependência do fator de forma com os parâmetros na forma $F(Q^2; \{a_i\}_{i=1, \dots, n}) \equiv F(Q^2; \{a_i\})$.

Em geral, cada parâmetro a_i tem associada uma incerteza δa_i . Essa incerteza pode ser de dois tipos:

- Tipo 1: Se conhece somente o intervalo (b_i, c_i) no qual o parâmetro a_i pode tomar valores, e mais nada. Este é o caso dos parâmetros $\{M^2, M'^2, \Delta_s, \Delta_u\}$.
- Tipo 2: Se conhece uma incerteza δa_i ao redor de um valor central \bar{a}_i . Este é o caso dos parâmetros determinados experimentalmente (ou teoricamente em casos menos frequentes), como as constantes de decaimento, massas e condensados.

Embora os parâmetros do Tipo 2 pareçam ser um caso particular daqueles do Tipo 1, na verdade não é o caso. No Tipo 2 estamos dizendo que o valor mais provável para a_i é \bar{a}_i , ao passo que no Tipo 1 estamos dizendo que todos os valores em (b_i, c_i) são igualmente prováveis. Isto terá consequências importantes na hora de implementar o sorteio de Monte Carlo.

4.3.1 O método de Monte Carlo

A implementação do cálculo dos erros dos fatores de forma usando o método de Monte Carlo procede da seguinte maneira: fixo o valor de Q^2 , sorteiam-se N vezes (N é o "número de passos de Monte Carlo") os valores dos parâmetros $\{a\}$. Na próxima subseção se explica como esse sorteio é feito. O j -ésimo sorteio gera um conjunto $\{a\}_j$ de parâmetros, que então é usado para calcular um valor do fator de forma $F_j \equiv F(Q^2; \{a\}_j)$. O valor médio do fator de forma \bar{F} , seu desvio padrão σ e seu erro

estatístico ε são então:

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_j \quad (176)$$

$$\sigma = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (F_j - \bar{F})^2 \right]^{1/2} \quad (177)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (178)$$

Se $N \rightarrow \infty$, temos $\sigma \rightarrow cte$ e $\varepsilon \rightarrow 0$. Dado então um valor de Q^2 , definimos o fator de forma nesse ponto, com a sua incerteza, na forma

$$F(Q^2) = \bar{F} \pm \varepsilon \quad (179)$$

4.3.1.1 Validação do sorteio

Deve lembrar-se que, dado um conjunto de parâmetros $\{a\}_j$ resultante de um sorteio, ainda deve ser feita uma validação dos mesmos da maneira descrita nas Subseções 2.2-3. Calculados os correlatores correspondentes ao j -ésimo sorteio, deve ser constatado que eles satisfazem as condições:

1. $\Pi_j^{polo} > \Pi_j^{continuo}$
2. $\Pi_j^{polo} > \Pi_j^{condensados}$
3. $\Pi_j^{continuo} > 0$

Se estas relações não forem satisfeitas, descarta-se o conjunto $\{a\}_j$ e se procede a um novo sorteio. O conjunto eliminado não participa do cálculo estatístico. A estatística de Monte Carlo deve ser feita sobre sorteios válidos.

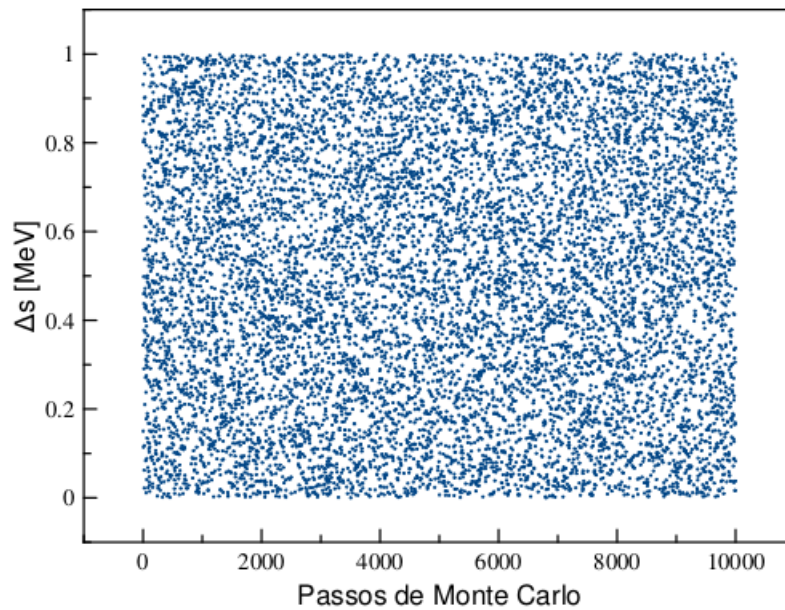
4.3.1.2 O sorteio dos parâmetros

Os parâmetros são sorteados da seguinte maneira:

Tipo 1: O parâmetro a_i é sorteado com distribuição uniforme no intervalo (b_i, c_i) . Para isso se define $a_i = (c_i - b_i)x + b_i$, onde x é uma variável com distribuição uniforme em $(0, 1)$, obtida com uma sob-rotina de sorteio (ou função intrínseca do compilador) de boa qualidade. Pertencem a este tipo de parâmetros $\{M^2, M'^2, \Delta_s, \Delta_u\}$.

Tipo 2: O parâmetro a_i é sorteado com distribuição gaussiana (também chamada de normal), com média \bar{a}_i e desvio padrão δa_i . Para isso se define $a_i = \bar{a}_i + x\delta a_i$, onde x

Figura 11 - Distribuição dos valores de Δs .



Legenda: Dados sorteados uniformemente no intervalo $(0, 1) MeV$, com $N = 10000$.

Fonte: O autor, 2014.

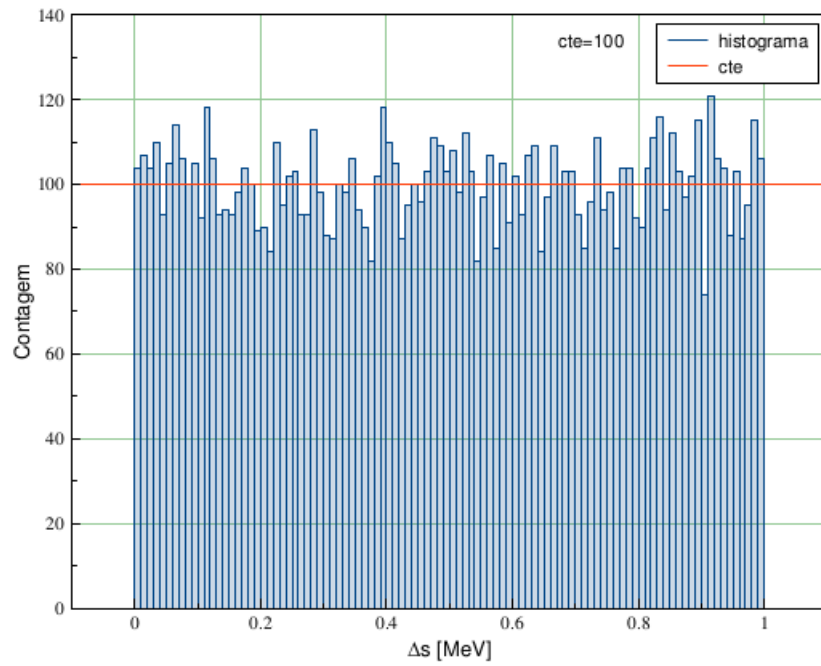
é uma variável aleatória com distribuição normal de média 0 e desvio padrão 1. A variável x se obtém com, por exemplo, o algoritmo Box Müller, explicado na subseção seguinte. Pertencem a este tipo as constantes de decaimento dos mésons, as massas e os condensados, onde são usados os valores experimentais.

Para ilustrar o procedimento, na Figura 11 é mostrada a distribuição dos valores de Δ_s sorteados uniformemente no intervalo $(0, 1) MeV$, com 10 mil passos de Monte Carlo. Na Figura 12 é apresentado o histograma correspondente. Já na Figura 13 é apresentada a distribuição dos valores da massa do quark charmoso m_c obtidos sorteados com uma distribuição gaussiana de média 1.275 GeV e desvio padrão 25 MeV (valores experimentais), também com 10 mil passos de Monte Carlo. Na Figura 14 é apresentado o histograma correspondente juntamente com seu ajuste gaussiano.

4.3.1.3 A transformação de Box-Müller

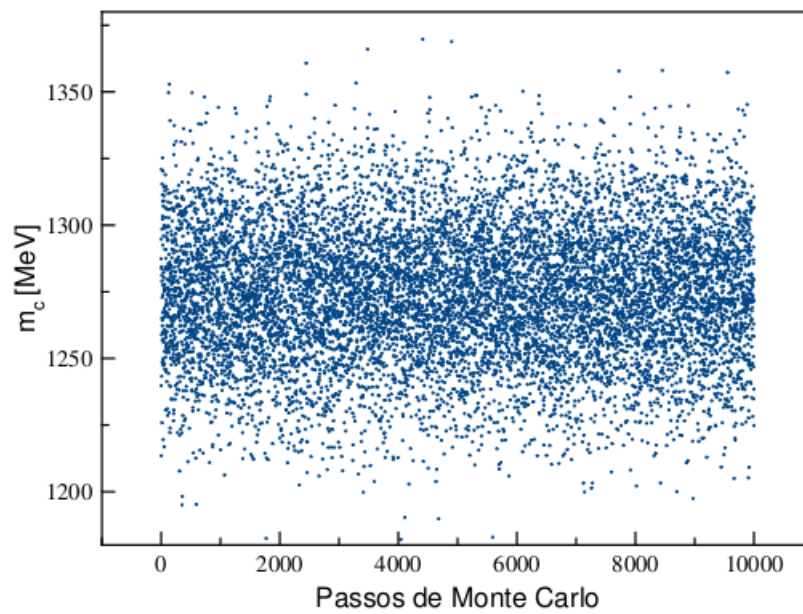
A transformação de Box-Müller é um método para gerar pares de variáveis aleatórias independentes segundo uma distribuição gaussiana de valor médio 0 e variância 1, a partir de um par de variáveis aleatórias distribuídas uniformemente em $(0, 1]$.

Figura 12 - Histograma correspondente à Figura 11.



Fonte: O autor, 2014.

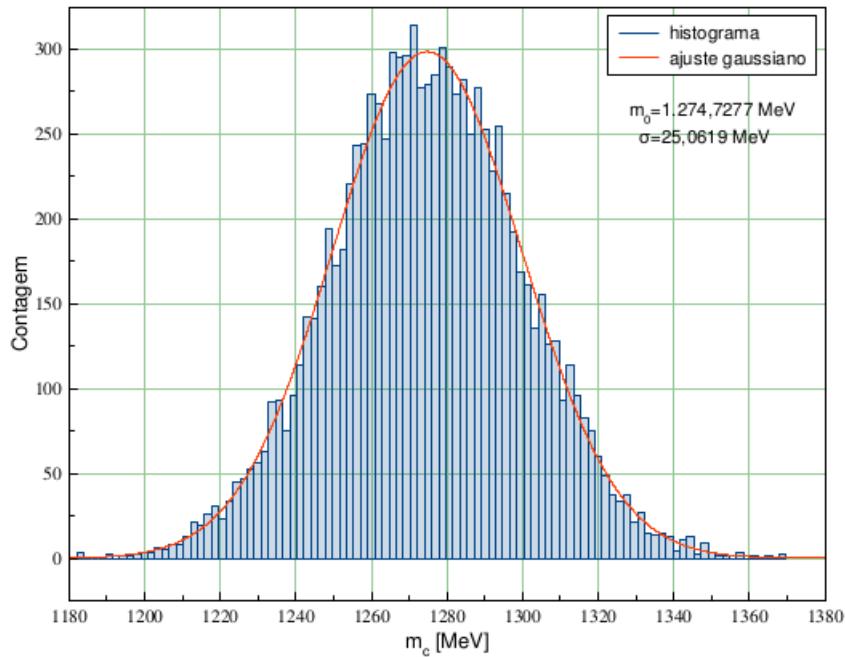
Figura 13 - Distribuição gaussiana dos valores da massa do quark charmado m_c .



Legenda: Dados sorteados com média de $1,275 GeV$ e desvio $25 MeV$, com $n = 10^3$.

Fonte: O autor, 2014.

Figura 14 - Histograma correspondente à Figura 13, juntamente com seu ajuste gaussiano.



Fonte: O autor, 2014.

Aqui se apresenta a forma polar do algoritmo. Sejam u_1 e u_2 duas variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo $(0,1]$. Então $u = 2u_1 - 1$ e $v = 2u_2 - 1$ estão uniformemente distribuídas no intervalo $(-1,1]$. Seja $s = u^2 + v^2$. Se $s = 0$ ou $s > 1$, u e v são descartados e se procede a um novo sorteio. As variáveis z_1 e z_2 definidas na forma

$$z_1 = u \sqrt{\frac{-2 \ln s}{s}}, \quad z_2 = v \sqrt{\frac{-2 \ln s}{s}} \quad (180)$$

são duas variáveis aleatórias independentes, normalmente distribuídas, com média 0 e variância 1. Variáveis aleatórias, normalmente distribuídas, de média μ e variância σ são obtidas com a transformação $x = \mu + \sigma z$.

4.3.2 A constante de acoplamento e sua incerteza

O cálculo da constante de acoplamento e sua incerteza procede muito semelhante à forma como foi obtido o fator de forma.

4.3.2.1 A função de ajuste

O fator de forma é obtido aplicando o procedimento da subseção 3.1 a um conjunto discreto de M valores do momento transferido euclidiano $\{Q_i^2\}_{i=1,\dots,M}$, obtendo assim o conjunto $\{F(Q_i^2) \pm \sigma_i\}_{i=1,\dots,M} \equiv \{F_i \pm \sigma_i\}$.

Com o propósito de estender o fator de forma à região $Q^2 < 0$, onde é definida a constante de acoplamento, é necessário implementar um ajuste do conjunto de valores $\{F_i \pm \sigma_i\}$. Seja $\mathcal{F}(Q^2; \{b_i\}_{i=1,\dots,n}) \equiv \mathcal{F}(Q^2; \{b\})$ a função usada no ajuste, onde $\{b\}$ representa o conjunto de parâmetros dos quais a função F depende. Usualmente F é uma função monopolar, exponencial ou gaussiana, sendo que em todos esses casos temos $\{b\} = \{b_1, b_2\}$, ou seja, F depende apenas de dois parâmetros. Os valores $\{b\}$ podem ser obtidos, por exemplo, através da minimização com respeito a $\{b\}$ da função $\chi^2(\{b\})$ definida como

$$\chi^2(\{b\}) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M \frac{[F_i - \mathcal{F}_i(\{b\})]^2}{\sigma_i^2} \quad (181)$$

Este procedimento é o método dos mínimos quadrados. Uma vez que \mathcal{F} pode ser não linear nos parâmetros $\{b\}$, deve ser usada uma boa sob-rotina de minimização. A minimização permite obter os valores $\{\bar{b}\}$ que minimizam (249), juntamente com suas incertezas $\{\delta b\}$. Assim, depois da minimização teremos o conjunto $\{\bar{b} \pm \delta b\}$ de parâmetros da função de ajuste \mathcal{F} .

4.3.2.2 A constante de acoplamento e o método de Monte Carlo

A constante de acoplamento g é definida como sendo o valor do fator de forma em $Q^2 = -m^2$, $g = F(-m^2; \{a\})$, onde m é a massa do méson que se encontra fora da camada de massa no vértice. Esta massa tem associados um valor \bar{m} e uma incerteza δm experimentais. Uma vez que o fator de forma foi ajustado pela função $\mathcal{F}(Q^2; \{\bar{b} \pm \delta b\})$, esta mesma função é usada para obter g . Para isso se procede a um sorteio de Monte Carlo dos parâmetros $\{m, \{b\}\}$, da seguinte maneira: dado N passos de Monte Carlo, o j -ésimo sorteio gera um conjunto de parâmetros $\{m_j, \{b\}_j\}$ que é usado para calcular o valor da constante de acoplamento na forma $g_j = \mathcal{F}(-m_j^2; \{b\}_j)$. O parâmetro m é sorteado segundo uma distribuição gaussiana de média \bar{m} e desvio padrão δm , ao passo que cada parâmetro b_i é sorteado segundo uma distribuição gaussiana e média \bar{b}_i e desvio

padrão δb_i . O valor médio \bar{g} e seu desvio padrão σ_g são obtidos na forma usual

$$\bar{g} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g_j \quad (182)$$

$$\sigma_g = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (g_j - \bar{g})^2 \right]^{1/2} \quad (183)$$

Definimos então a constante de acoplamento e sua incerteza como sendo

$$g = \bar{g} \pm \sigma_g \quad (184)$$

5 RESULTADOS

Os resultados foram obtidos seguindo o procedimento apresentado no Capítulo 4 para a estrutura $p_\mu p'_\nu$. Devido a problemas na obtenção de valores aceitáveis para as contribuições dos condensados de quarks, os resultados apresentados foram obtidos usando unicamente o termo perturbativo da OPE. Também a implementação numérica das relações polo-contínuo apresentaram problemas no caso do D_1 fora da camada de massa. Por este motivo, esta condição foi relaxada no cálculo dos resultados que seguem.

Outro ponto importante é a eleição da corrente interpolante para o pión no caso fora da camada de massa. É conhecido que neste caso, a corrente que deve ser usada é a axial-vetorial, no lugar da pseudo escalar usada normalmente para as outras posições do pión dentro do vértice (66, 67). No entanto, por questões de simplicidade começou por ser usada apenas a corrente pseudo-escalar. Posteriormente não houve tempo para implementar o cálculo com a corrente axial-vetorial antes da defesa desta Dissertação.

Para calcular numericamente o fator de forma precisamos dos valores numéricos de todos os parâmetros envolvidos, como foi descrito no início da Seção 4.3. Os valores para os intervalo de sorteio das variáveis de Tipo 1, aquelas na qual todos os valores possíveis dentro de certo intervalo são igualmente prováveis, são apresentados nas Tabelas 3 e 4, para os casos dos mésons π e D_1 fora da camada de massa, respectivamente. O valores máximos de Δs e Δu foram escolhidos como sendo a massa do primeiro estado excitado dos mésons que entram e saem do vértice, respectivamente. No caso do pión fora da camada de massa, são as massas dos primeiros estados excitados do D_1 e D^* , isto é, as massas dos mésons $D_1(2430)$ e $D^*(2640)^\pm$. Já no caso do D_1 fora da camada de massa, usamos as massas do primeiro estado excitado do pión e do D^* , ou seja, o $\pi(1300)$ e o $D_1(2430)$. As massas de tais estados excitados são apresentadas na Tabela 5 e tem sido extraídos da referência (60). No caso das variáveis de Tipo 2, aquelas que tem uma probabilidade de escolha seguindo uma distribuição gaussiana, elas são mostradas na Tabela 2. Porém, desde que o erro associado as massas dos mésons e a constante de acoplamento do pión é muito pequena, a propagação desse erro no fator de forma é desprezível. Assim, as únicas variáveis de Tipo 2 cujo erro será levado em conta no sorteio de Monte Carlo serão as mostradas na Tabela 6. Como tinha-se dito, o primeiro valor corresponde ao estabelecido pelo *Particle Data Group* (60), enquanto os outros foram calculados por *lattice-QCD* (63) e QCDSR (64), respectivamente.

Note-se que nada foi dito sobre o caso no qual a partícula fora da camada de massa é o méson D^* . Este, apesar de ter sido implementado, não deu resultados bons, desde que o comportamento funcional do fator de forma foi o de uma função monótona crescente, mesmo incluindo o condensado de quarks. Isto é incompatível com o comportamento esperado para o fator de forma, de maneira que foi preciso pôr de lado este cálculo.

Tabela 3 - Valores possíveis para os parâmetros de distribuição uniforme (Tipo 1) no caso π fora da camada de massa.

Parâmetro	Intervalo [GeV^2]
M^2	[0, 1; 25]
Δ_s	[0; 0, 006]
Δ_u	[0; 0, 627]
Q^2	[2; 8]

Fonte: O autor, 2014.

Tabela 4 - Valores possíveis para os parâmetros de distribuição uniforme (Tipo 1) no caso D_1 fora da camada de massa.

Parâmetro	Intervalo [GeV^2]
M^2	[0, 1; 25]
Δ_s	[0; 1, 16]
Δ_u	[0; 0, 627]
Q^2	[1; 7]

Fonte: O autor, 2014.

Tabela 5 - Mésons e seus correspondentes primeiros estados excitados .

Partícula	1º estado excitado	Massa do estado excitado [MeV]
π^\pm	$\pi(1300)^\pm$	1345 ± 8
$D_1(2420)^0$	$D_1(2430)^0$	2427 ± 26
$D^*(2010)^\pm$	$D^*(2640)^\pm$	2637 ± 2

Fonte: BERINGER, 2012, f. 751,934,936.

Tabela 6 - Valores possíveis para os parâmetros da distribuição gaussiana (Tipo 2).

Parâmetro	Valor experimental [MeV]	Erro (\pm)
m_c	1.275	25
f_{D^*}	241.9	0.6
f_{D_1}	385	175

Fonte: SUNGU, 2010, f. 7; BERINGER, 2012, f. 666; BECIREVIC, 2012, f. 10.

Com os dados das Tabelas 2,3,4 e 6 se fez o cálculo numérico do fator de forma. Os dados obtidos numericamente são apresentados na figura 15 com seus erros estatísticos. A análise numérica foi feita usando 25 pontos na janela do Q^2 e 500 sorteios de Monte Carlo válidos. Os sorteios válidos são referidos ao fato de que para as variáveis do Tipo 2, aquelas com distribuição gaussiana, eventualmente podem ser sorteados valores negativos, o que não faz sentido fisicamente. No programa, foi implementada a verificação deste fato, rejeitando os sorteios do algoritmo de Box-Müller com valores negativos.

Para a obtenção da constante de acoplamento, precisamos de valores do fator de forma na região de $Q^2 < 0$, e em particular, para $Q^2 = -m^2$, sendo m a massa do méson fora da camada de massa. No entanto, o método das QCDSR não é válido nessa região. Para ter acesso aos valores do fator de forma, é necessário fazer uma extrapolação dos valores obtidos na região $Q^2 > 0$. Esta extrapolação é feita ajustando os valores obtidos por alguma curva analítica, que posteriormente é extrapolada para a região de $Q^2 < 0$. Assim, na figura 15 são apresentados também ajustes de curvas aos dados numéricos. As expressões analíticas usuais na bibliografia para representar os fatores de forma como função do momento transferido, $F(Q^2)$, são curvas do tipo monopolar, exponencial e gaussiano (42, 44, 52, 65). A forma funcional é a seguinte:

$$F(Q^2) = \begin{cases} ae^{-b(Q^2)^2} & : \textit{gaussiano} \\ ae^{-bQ^2} & : \textit{exponencial} \\ \frac{a}{b+Q^2} & : \textit{monopolar} \end{cases} \quad (185)$$

O decrescimento rápido dos dados correspondentes ao caso do méson π fora da camada de massa, com um valor tão alto do fator de forma para os valores menores na janela de Q^2 em comparação aos valores obtido para o caso D_1 off-shell, leva a que o melhor ajuste seja nesse caso o gaussiano, desde que os outros ajustes terão valores extrapolados no polo, isto é, para valores de Q^2 igual à massa quadrática do D_1 , maiores. Desde que devemos exigir a compatibilidade entre os resultados obtidos nos dois casos com as partículas fora da camada de massa, devemos tomar o ajuste que mais aproxime os resultados extrapolados em ambos os casos. No caso do méson D_1 fora da camada de massa, os ajustes feitos foram o exponencial e o monopolar. Os resultados dos ajustes são apresentados na Tabela 7.

É claro que o ajuste monopolar apresenta uma assíntota vertical em $Q^2 = -b$ que segundo a Tabela 7 é maior do que menos a massa ao quadrado do méson D_1 . Isto quer dizer que não faz sentido extrapolar o valor do fator de forma analiticamente até essa região, pela presença da descontinuidade. Dessa maneira, o ajuste monopolar não serve e é rejeitado.

Finalmente, calculamos o valor da constante de acoplamento correspondente a cada ajuste para o fator de forma. Lembre-se que ela é definida como o valor do fator de forma

Tabela 7 - Valor das variáveis a e b e seus erros estatísticos para os ajustes do fator de forma dados na equação (185).

Tipo de ajuste	Méson off-shell	a	δa	b	δb
monopolar	D_1	18,9506	1,0188	4,9371	0,4605
exponencial	D_1	3,4165	0,0895	0,1144	0,0059
gaussiano	π	18,1908	0,1771	0,0273	0,00045

Fonte: O autor, 2014.

Tabela 8 - Constante de acoplamento resultante da forma analítica ajustada para o fator de forma segundo os valores dados na Tabela 7.

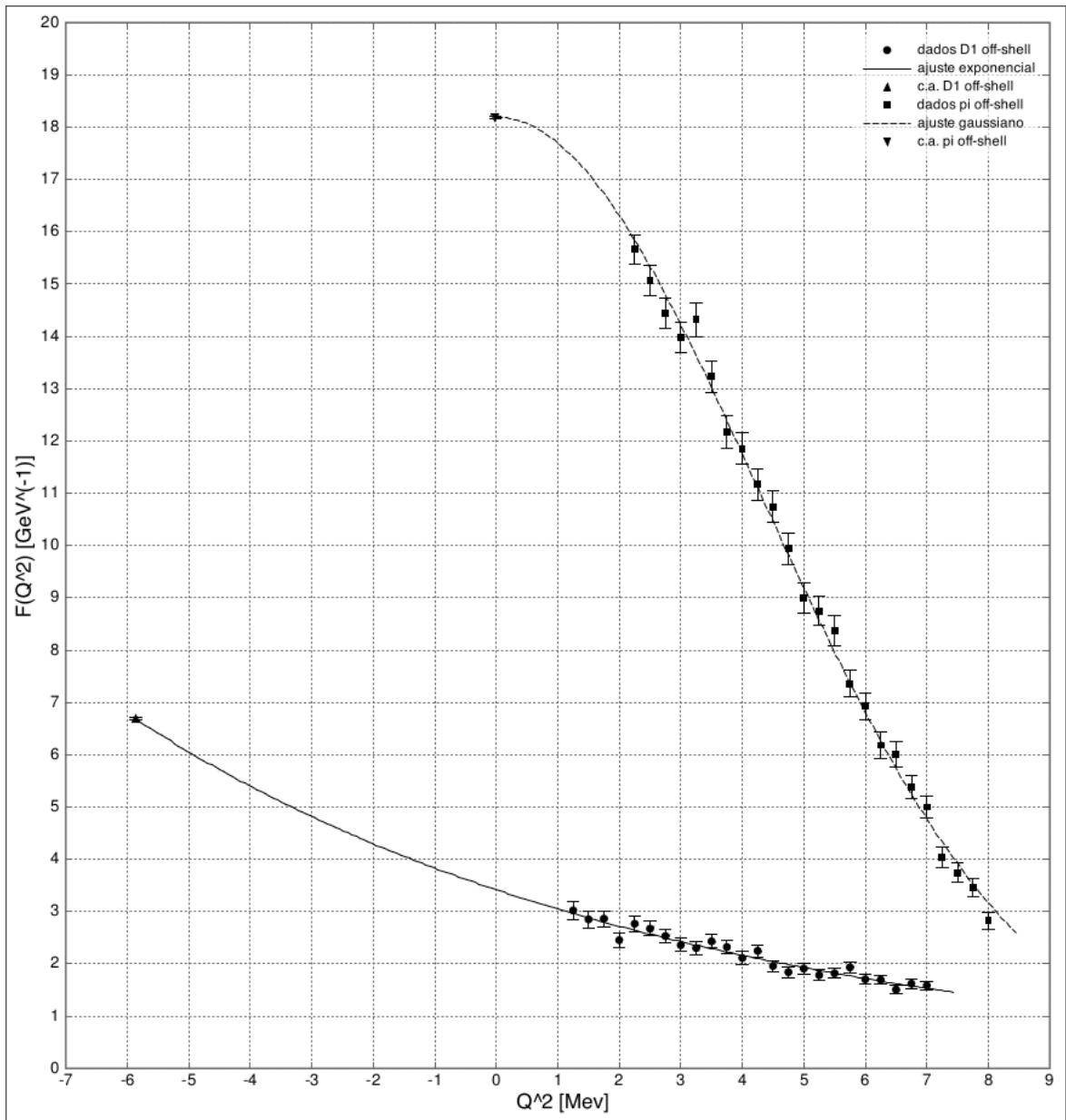
Méson off-shell	Ajuste	Massa quadrática [GeV^2]	Constante de acoplamento $g[GeV^{-1}]$	erro estatístico (\pm)
D_1	exponencial	5,863	6,69	0,03
π	gaussiano	0,1949	18,19	0,02

Fonte: O autor, 2014.

quando o momento transferido é igual a menos a massa ao quadrado do méson fora da camada de massa, $Q^2 = -m_{off-shell}^2$. Neste caso foram feitos 100 sorteios válidos de Monte Carlo, enquanto os erros dos parâmetros de ajuste do fator de forma são os apresentados na Tabela 7. Os valores das massas quadráticas das partículas off-shell foram tomados da Tabela 2. Lembre-se que desde que o erro associado as massas dos mésons apresentadas nessa tabela são muito pequenos, a propagação desse erro pode ser rejeitado nos cálculos. Os resultados são apresentados na Tabela 8.

É imediato ver que os valores obtidos para a constante de acoplamento com os dois tipos de ajuste são incompatíveis. Isto é consequência da já mencionada escolha da corrente pseudo-escalar para o caso do pión fora da camada de massa.

Figura 15 - Resultados numéricos para o fator de forma em função do momento transferido e extrapolação da constante de acoplamento usando um ajuste analítico.



Fonte: O autor, 2014.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho usamos as regras de soma da QCD para calcular o fator de forma correspondente ao vértice $\pi D_1 D^*$, além de obter o valor da constante de acoplamento como o valor do fator de forma no valor da massa quadrática da partícula fora da camada de massa, considerando uma das partículas fora da camada de massa de cada vez, a fim de avaliar a consistência dos cálculos através da compatibilidade entre os dois cálculos efetuados.

No caso do méson D^* fora da camada de massa, o comportamento obtido para o fator de forma só com o termo perturbativo foi monótono crescente, o que não se ajusta ao comportamento funcional esperado, desde que a estrutura interna do méson deveria ser menos importante para processos de alto momento transferido. Além disso, quando se considera também a contribuição do condensado de quarks, não se conseguiu achar um conjunto de parâmetros com os quais a contribuição do termo perturbativo seja maior do que a contribuição dos condensados, impedindo garantir o tratamento perturbativo do lado da OPE, desde que não se pode ter certeza que os termos de dimensão maior sejam de ordens menores que os primeiros termos na expansão; *id est*, não se tem como garantir o truncamento da expansão em produtos de operadores de Wilson. Isto tudo levou a pôr de lado o estudo desse caso, nos focando só nos casos dos mésons π e D_1 fora da camada de massa.

Já no caso das partículas π e D_1 fora da camada de massa, a implementação numérica foi feita com sucesso, embora só levando em conta o termo perturbativo e rejeitando as contribuições do condensado de quarks, este último sendo não nulo apenas no caso da partícula D_1 fora da camada de massa. O problema com o termo do condensado foi que não se conseguiu, do mesmo modo que no caso do D^* off-shell, uma combinação de parâmetros tal que a contribuição do condensado seja menor do que a perturbativa. Dessa maneira, os resultados obtidos tiveram que se limitar apenas à contribuição perturbativa em ambos os casos. Uma possível explicação poderia ser o fato de ter apenas uma exponencial no termo correspondente ao condensado de quarks, enquanto o termo perturbativo contém duas, como é amostrado na equação (162), fazendo que a supressão do termo perturbativo seja muito maior, razão pela qual nossa busca encontrou sempre contribuições próximas de 100% para o condensado de quarks.

Um estudo futuro deveria se concentrar na busca de um intervalo apropriado, se este existir, para a janela de Borel e o Q^2 . É necessário analisar também se a outra estrutura presente tanto do lado da OPE quanto do lado fenomenológico, a $g_{\nu\mu}$, poderia apresentar um comportamento melhor para as contribuições de condensado no fator de forma. No início, não foi implementada por razões históricas, desde que anteriores trabalhos no grupo o desconsideraram.

Os resultados obtidos numericamente para o fator de forma foram ajustados pelas seguintes funções analítica:

$$F_{\pi D_1 D^*}^{(\pi)}(Q^2) = (18, 191) e^{-0,027(Q^2)^2} GeV^{-1} \quad (186)$$

$$F_{\pi D_1 D^*}^{(D_1)}(Q^2) = (3, 417) e^{-0,115Q^2} GeV^{-1} \quad (187)$$

correspondentes a um ajuste gaussiano e exponencial para os casos π e D_1 *off-shell*, respetivamente. No caso do ajuste monopolar no caso D_1 fora da camada de massa, este apresentou um assíntota para um valor $Q^2 = -4,937 > -m_{D_1}^2 = -5,86$, o que não permite extrapolar o ajuste para a região onde se encontra a massa quadrática da partícula fora da camada de massa. Isto levou a descartar o ajuste monopolar. Rejeitado o ajuste monopolar, o melhor ajuste achado para o caso D_1 fora da camada de massa foi o exponencial. No caso do ajuste gaussiano para o caso do pión *off-shell*, isto foi feito desse jeito pela distribuição dos dados numéricos obtidos para o fator de forma. Qualquer outro ajuste daria um valor extrapolado para a constante de acoplamento ainda maior que a obtida. Isto, ademais, é compatível com outros resultados obtidos em QCDSR de 3-pontos, nos casos no qual a partícula leve é considerada fora da camada de massa (43, 66, 68, 69). O problema aqui é que este resultado é incompatível com o resultado obtido para o ajuste exponencial no caso do D_1 fora da camada de massa. Isto é assim porque os valores extrapolados para a constante de acoplamento em cada caso foram dados por:

$$g_{\pi D_1 D^*}^{(\pi)} = F_{\pi D_1 D^*}^{(\pi)}(-m_\pi^2) = (18, 19 \pm 0, 02) GeV^{-1} \quad (188)$$

$$g_{\pi D_1 D^*}^{(D_1)} = F_{\pi D_1 D^*}^{(D_1)}(-m_{D_1}^2) = (6, 69 \pm 0, 03) GeV^{-1} \quad (189)$$

Na referencia (38) é apresentado o valor $g_{\pi D_1 D^*} = 0,49 GeV^{-1}$ a partir do cálculo da largura de decaimento radiativa do Z^+ . Levando em conta que ainda precisamos acrescentar correções não-perturbativas, o resultado (189), para o D_1 fora da camada de massa, poderia vir a concordar com aquele valor, enquanto o resultado para o (188) deve ser descartado completamente.

Como mencionado no início do Capítulo 5, uma possível explicação para o desacordo dos resultados pode ser o fato de ter usado uma corrente interpolante pseudo-escalar para o caso do méson π fora da camada de massa. Já aconteceu no passado que os resultados para o fator de forma tomando a corrente interpolante do méson π como

pseudo-escalar não concordaram com os resultados experimentais, enquanto que quando considerar a corrente interpolante como axial-vetorial se obtêm resultados perfeitamente concordantes (66, 67). Isto faz necessário refazer o estudo apresentado aqui para o caso do pión fora da camada de massa com uma corrente pseudo-vetorial, e corroborar se dessa vez é possível verificar a compatibilidade dos resultados para o fator de forma com diferentes partículas fora da camada de massa de cada vez.

REFERÊNCIAS

- 1 ECKER, G. *Quantum Chromodynamics*. 2006. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0604165>. Acesso em: 1 aug. 2014.
- 2 SHURYAK, E. *The QCD vacuum, hadrons and super dense matter*. 1. ed. Singapore: World Scientific, 1988. 416 p.
- 3 SHIFMAN, M.; VAINSHTEIN, A.; ZAKHAROV, V. QCD and resonance physics. Theoretical foundations. *Nucl. Phys. B*, v. 147, n. 5, p. 385–447, 1979.
- 4 SHIFMAN, M.; VAINSHTEIN, A.; ZAKHAROV, V. QCD and resonance physics. Applications. *Nucl. Phys. B*, v. 147, n. 5, p. 448–518, 1979.
- 5 SHIFMAN, M.; VAINSHTEIN, A.; ZAKHAROV, V. QCD and resonance physics: The $\rho - \omega$ mixing. *Nucl. Phys. B*, v. 147, n. 5, p. 519–534, 1979.
- 6 BESSON, D. et al. (CLEO Collaboration). Observation of a narrow resonance of mass $2.46 \text{ GeV}/c^2$ decaying to $D_s^{*+}\pi^0$ and confirmation of the $D_{sJ}^*(2317)$ state. *Phys. Rev. D*, v. 75, n. 119908, 2007.
- 7 AUBERT, B. et al. (BABAR Collaboration). Observation of a Narrow Meson State Decaying to $D_s^+\pi^0$ at a Mass of $2.32\text{GeV}/c^2$. *Phys. Rev. Lett.*, v. 90, n. 242001, 2003.
- 8 AUBERT, B. et al. (BABAR Collaboration). Observation of a broad structure in the $\pi^+\pi^-J/\psi$ mass spectrum around $4.26 \text{ GeV}/c^2$. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, n. 142001, 2005.
- 9 AUBERT, B. et al. (BABAR Collaboration). Observation of $Y(3940) \rightarrow J/\psi\omega$ in $B \rightarrow J/\psi\omega K$ at BABAR. *Phys. Rev. Lett.*, v. 101, n. 082001, 2008.
- 10 AALTONEN, T. et al. (CDF Collaboration). Evidence for a narrow near-threshold structure in the $J/\psi\phi$ mass spectrum in $B^+ \rightarrow J/\psi\phi K^+$ decays. *Phys. Rev. Lett.*, v. 102, n. 242002, 2009.
- 11 KROKOVNY, P. et al. (Belle Collaboration). Observation of the $D_{sJ}(2317)$ and $D_{sJ}(2457)$ in B decays. *Phys. Rev. Lett.*, v. 91, n. 262002, 2003.
- 12 CHOI, S.K. et al. (Belle Collaboration). Observation of a narrow charmoniumlike state in exclusive $B^\pm \rightarrow K^\pm\pi^+\pi^-J/\psi$ decays. *Phys. Rev. Lett.*, v. 91, n. 262001, 2003.
- 13 YUAN, C.Z. et al. (Belle Collaboration). Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi$ cross section via initial-state radiation at Belle. *Phys. Rev. Lett.*, v. 99, n. 182004, 2007.
- 14 ABAZOV, V.M. et al. (D0 Collaboration). Observation and properties of the $X(3872)$ decaying to $J/\psi\pi^+\pi^-$ in p anti- p collisions at $\sqrt{s} = 1.96 \text{ TeV}$. *Phys. Rev. Lett.*, v. 93, n. 1620021, 2004.
- 15 LIU, X. An overview of XYZ new particles. *Chinese Science Bulletin*, v. 597, n. 29/30, p. 3815–3830, 2014.
- 16 GELL-MANN, M. A schematic model of baryons and mesons. *Phys. Lett.*, v. 8, p. 214, 1964.

- 17 GODFREY, S.; OLSEN, S. The exotic XYZ charmonium-like mesons. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, v. 58, p. 51–73, 2008.
- 18 ABE, K. et al. (Belle Collaboration). *Observation of resonance-like structure in the $\pi^\pm\psi$ mass distribution in the exclusive $B \rightarrow K\pi^\pm\psi$ decays*. 2007. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0708.1790v1>. Acesso em: 1 aug. 2014.
- 19 CHOI, S.K. et al. (Belle Collaboration). Observation of a resonancelike structure in the $\pi^{+-}\psi'$ mass distribution in the exclusive $B \rightarrow K\pi^{+-}\psi'$ decays. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, n. 142001, 2008.
- 20 MIZUK, R. et al. (Belle Collaboration). Dalitz analysis of $B \rightarrow K\pi^+\psi'$ decays and the $Z(4430)^+$. *Phys. Rev. D*, v. 80, n. 031104(R), 2009.
- 21 ZONG, H.; SUN, W. Calculation of the equation of state of QCD at finite chemical and zero temperature. *Phys. Rev. D*, v. 78, n. 054001, 2008.
- 22 GERSHTEIN, S.; LIKHODED, A.; PRONKO, G. *Possible nature of $Z^+(4430)$* . 2007. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0709.2058>. Acesso em: 1 aug. 2014.
- 23 MAIANI, L.; POLOSA, A.; RIQUER, V. *The charged $Z(4433)$: towards a new spectroscopy*. 2007. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0708.3997>. Acesso em: 1 aug. 2014.
- 24 LEE, S. et al. QCD sum rules study of the meson $Z^+(4430)$. *Phys. Lett. B*, v. 661, n. 1, p. 28–32, 2009.
- 25 LIU, X. et al. $Z^+(4430)$ as a $D_1'^{D^*}(D_1D^*)$ molecular state. *Phys. Rev. D*, v. 77, n. 0940153, 2008.
- 26 LIU, X. et al. Is $z^+(4430)$ a loosely bound molecular state? *Phys. Rev. D*, v. 77, n. 034003, 2008.
- 27 DING, G. *Understanding the charged meson $Z(4430)$* . 2007. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0711.1485>. Acesso em: 1 aug. 2014.
- 28 MENG, C.; CHAO, K. *The charged $Z(4433)$: towards a new spectroscopy $Z^+(4430)$ as resonance in the $D_1(D_1')D^*$ channel*. 2007. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0708.4222>. Acesso em: 1 aug. 2014.
- 29 BRACCO, M. et al. The meson $Z^+(4430)$ as tetraquark state. *Phys. Lett. B*, v. 671, n. 2, p. 240–244, 2009.
- 30 QIAO, C. A uniform description of the states recently observed at b-factories. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, v. 35, n. 075008, 2008.
- 31 BUGG, D. How resonances can synchronize with thresholds. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, v. 35, n. 075005, 2008.
- 32 MATSUKI, T.; MORII, T.; SUDOH, K. Is the $Z^+(4430)$ a radially excited state of D_s . *Phys. Lett. B*, v. 669, n. 2, p. 156–159, 2008.
- 33 ROSNER, J. Threshold effect and $\pi^{pm}\psi(2S)$ peak. *Phys. Rev. D*, v. 76, n. 114002, 2007.

- 34 LI, Y.; LU, C.; WANG, W. Partners of $Z(4430)$ and productions in B decays. *Phys. Rev. D*, v. 77, n. 054001, 2008.
- 35 BRAATEN, E.; LU, M. Line shapes of the $Z(4430)$. *Phys. Rev. D*, v. 79, n. 051503(R), 2009.
- 36 CARDOSO, M.; BICUDO, P. Microscopic calculation of the decay of Jaffe-Wilczek tetraquarks and the $Z(4433)$. *AIP Conf. Proc.*, v. 1030, p. 352–356, 2008.
- 37 DANILKIN, I.; KULINOV, P. Y. The possibility of $Z(4430)$ resonance structure description in $\pi\psi'$ reaction. *JETP Lett.*, v. 89, n. 8, p. 390–392, 2009.
- 38 BRANZ, T.; GUTSCHE, T.; LYUBOVITSKIJ, V. Hidden-charm and radiative decays of the $Z(4430)$ as a hadronic $D_1\bar{D}^*$ bound state. *Phys. Rev. D*, v. 82, n. 054025, 2010.
- 39 AAIJ, R. et al. (LHCb Collaboration). Observation of the Resonant Character of the $Z(4430)^-$ state. *Phys. Rev. Lett.*, v. 112, n. 222002, 2014.
- 40 WONG, C. Molecular states of heavy quark mesons. *Phys. Rev. C*, v. 69, n. 055202, 2004.
- 41 MENG, G.Z. et al. (CLQCD Collaboration). Low-energy $D^{*+}\bar{D}_1^0$ scattering and resonancelike structure $Z^+(4430)$. *Phys. Rev. D*, v. 80, n. 034503, 2009.
- 42 BRACCO, M. et al. Charm coupling and form factors in QCD sum rules. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, v. 67, n. 4, p. 1019–1052, 2012.
- 43 BRACCO, M. et al. $\rho D^* D^*$ vertex from QCD sum rules. *Phys. Lett. B*, v. 659, n. 3, p. 559–564, 2008.
- 44 BRACCO, M. et al. $D^* D_s K$ and $D_s^* D K$ vertices in a QCD sum rules approach. *Phys. Lett. B*, v. 641, n. 3-4, p. 286–293, 2006.
- 45 RODRIGUES, B.; BRACCO, M.; CHIAPPARINI, M. Coupling constant for the $J/\psi D_s D_s$ vertex from QCD sum rules. *Nucl. Phys. A*, v. 929, p. 143–156, 2014.
- 46 LEINWEBER, D. B. QCD sum rules for skeptics. *Annals of Physics*, v. 254, n. 2, p. 328–396, 1997.
- 47 WILSON, K. Non-lagrangian models of current algebra. *Phys. Rev.*, v. 179, p. 1499–1512, 1969.
- 48 NOVIKOV, V. et al. Wilson's operator expansion: Can it fail? *Nucl. Phys. B*, v. 249, n. 3, p. 445–471, 1985.
- 49 REINDERS, L.; YAZAKI, S.; RUBINSTEIN, H. Hadron properties from QCD sum rules. *Phys. Rep.*, v. 127, n. 1, p. 1–97, 1985.
- 50 YANG, K. et al. QCD sum rules and neutron-proton mass difference. *Phys. Rev. D*, v. 47, n. 7, p. 3001–3012, 1993.
- 51 RADYUSHKIN, A. *Introduction to QCD Sum Rule Approach*. 2001. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0101227>. Acesso em: 1 aug. 2014.

- 52 COLANGELO, P.; KHODJAMIRIAN, A. *QCD Sum Rules, A Modern Perspective*. 2001. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0010175>. Acesso em: 1 aug. 2014.
- 53 NARISON, S. *QCD Spectral Sum Rules*. 1. ed. Singapore: World Scientific, 1989. 527 p.
- 54 GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field quantization*. 1. ed. Berlim: Springer-Verlag, 1996. 441 p.
- 55 PESKIN, M.; SCHOROEDER, V. *An introduction to quantum field theory*. 1. ed. Massachusetts: Westview Press, 1995. 864 p.
- 56 GELL-MANN, M.; LOW, F. Bound states in quantum field theory. *Phys. Rev.*, v. 84, n. 2, p. 350–354, 1951.
- 57 FETTER, A.; WALECKA, J. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. 1. ed. New York: Dover Publications, 2003. 640 p.
- 58 DUBOVIKOV, M.; SMILGA, A. Analytical properties of the quark polarization operator in an external self-dual field. *Nuclear Physics B*, v. 185, n. 1, p. 109 – 132, 1981.
- 59 MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum field theory*. 2. ed. Chichester: World Scientific, 2010. 492 p.
- 60 BERINGER, J. et al. (Particle Data Group). Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, v. 86, p. 010001, 2012.
- 61 RAFAEL, E. D. *An Introduction to Sum Rules in QCD*. 1998. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9802448v1>. Acesso em: 1 aug. 2014.
- 62 GREINER, W.; SHRAMM, S.; STEIN, E. *Quantum chromodynamics*. 3. ed. Berlim: Springer-Verlag, 2006. 554 p.
- 63 BECIREVIC, D. et al. *D-meson decay constants and a check of factorization in non-leptonic B-decays*. 2012. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-lat/1201.4039v2>. Acesso em: 1 aug. 2014.
- 64 SUNGU, J. et al. Heavy-light scalar and axial-vector mesons decay constants and masses in QCD sum rule approach. *PoS, FACESQCD*, p. 045, 2010.
- 65 RODRIGUES, B. O.; BRACCO, M.; CHIAPPARINI, M. An inspection on the Borel masses relation used in QCD sum rules. *AIP Conf.Proc.*, v. 1296, p. 302–305, 2010.
- 66 NAVARRA, F.; NIELSEN, M.; BRACCO, M. $D^*D\pi$ form-factor revisited. *Phys.Rev. D*, v. 65, p. 037502, 2002.
- 67 NAVARRA, F. et al. $D^{D\pi}$ and $B^{B\pi}$ form factors from QCD sum rules. *Phys. Lett. B*, v. 489, n. 3-4, p. 319 – 328, 2000.
- 68 BRACCO, M. E. et al. Coupling constants of D^*D_sK and D_s^*DK processes. *Brazilian Journal of Physics*, v. 37, p. 59 – 62, 2007. ISSN 0103-9733.
- 69 BRACCO, M. et al. D and ρ mesons: who resolves whom? *Phys. Lett. B*, v. 521, n. 1-2, p. 1 – 6, 2001.

- 70 QUIGG, C. *Gauge theories of strong, weak and electromagnetics interactions*. 1. ed. New York: Westview Press, 1997. 334 p.
- 71 CUTKOSKY, R. Singularities and discontinuities of feynman amplitudes. *Journal of Mathematical Physics*, v. 1, n. 5, p. 429–433, 1960.
- 72 KNIEHL, B. Dispersion relations in loop calculations. *Acta Phys.Polon. B*, v. 27, p. 3631–3644, 1996.
- 73 WYLD, H. *Mathematical methods for physics*. 2. ed. New York: Westview Press, 1999. 656 p.

APÊNDICE A – Matrizes de Dirac e Teoremas de Traço

São usadas neste trabalho as seguintes propriedades das matrizes γ -Dirac (70):

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (190a)$$

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \quad (190b)$$

$$(\gamma_5)^2 = 1 \quad (190c)$$

$$\{\gamma_5, \gamma_\nu\} = 0 \quad (190d)$$

$$Tr \{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\} = 4(g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \quad (190e)$$

$$Tr \{\# \text{ impar de } \gamma' \text{'s}\} = 0 \quad (190f)$$

Outros resultados úteis são:

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda \quad (191)$$

$$-\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} = 2(\delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu - \delta_\tau^\mu \delta_\sigma^\nu) \quad (192)$$

APÊNDICE B – Relações de Dispersão e as Regras de Cutkosky

O termo perturbativo geral obtido na equação (19), visto como uma função analítica dos momentum, possui um corte de ramificação associado com os estados intermediários de multipartículas. Pelo teorema óptico, a parte imaginária da polarização do vácuo deve ser proporcional à polarização total (55). Isto é uma consequência da unitariedade da matriz da teoria. Para construir a parte imaginária do correlator podemos usar as regras de Cutkosky (71), logo depois do qual, apelando à analiticidade, é possível recuperar o correlator completo usando as relações de dispersão. Este caminho oferece uma grande vantagem, desde que o cálculo direto da integral no termo perturbativo é bem mais simples usando as regras de Cutkosky. Vamos calcular primeiro as relações de dispersão no caso geral, para correlatores de duas variáveis, as quais vai corresponder aos dois momentos das partículas *on-shell* do nosso problema. Usualmente na bibliografia, pode-se achar relações de dispersão para funções analíticas de uma variável (50, 52, 61). É preciso generalizar o cálculo para o caso de uma função de correlação de duas variáveis, já que as regras de Cutkosky empregadas levaram a uma dupla descontinuidade, *i.e.*, dois cortes de ramificação sobre o eixo real de cada variável.

Vamos supor então que temos uma função de duas variáveis complexas $\Pi(s, u)$, tal que (72):

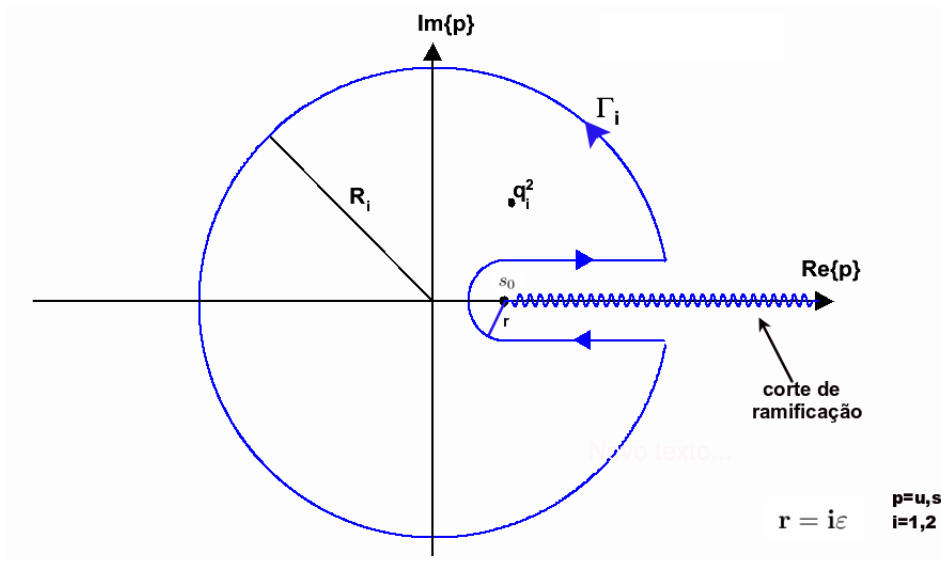
- $\Pi(s, u) \in \mathbb{R}, \forall s < s_0(s_{min}), u < u_0(u_{min})/s, u \in \mathbb{R}$.
- $\Pi(s, u)$ tem cortes de ramificação (singularidades) para valores reais de $s > s_0$ e $u > u_0$.
- $\Pi(s, u)$ é analítica $\forall s, u \in \mathbb{C}$, exceto ao longo dos cortes de ramificação.

Do princípio de reflexão de Schwartz (73):

$$\begin{aligned} \Pi(s + i\varepsilon, u) - \Pi(s - i\varepsilon, u) &= 2i \operatorname{Im} \{ \Pi(s, u) \} \\ \Pi(s, u + i\varepsilon) - \Pi(s, u - i\varepsilon) &= 2i \operatorname{Im} \{ \Pi(s, u) \} \end{aligned} \tag{193}$$

e da integral de Cauchy sobre o contorno mostrado na Figura 16, temos:

Figura 16 - Contorno de integração para função Π com corte de ramificação sobre o eixo real.



Fonte: O autor, 2014.

$$\begin{aligned}
 \Pi(q^2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma_1} ds \oint_{\Gamma_2} du \frac{\Pi(s, u)}{(s - q_1^2)(u - q_2^2)} \\
 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma_2} \frac{du}{(u - q_2^2)} \left\{ \oint_{s=|R_1|} ds \frac{\Pi(s, u)}{(s - q_1^2)} + \int_{s_0}^{R_1} ds [\Pi(s + i\varepsilon, u) - \Pi(s - i\varepsilon, u)] \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma_2} \frac{du}{(u - q_2^2)} \left\{ \oint_{s=|R_1|} ds \frac{\Pi(s, u)}{(s - q_1^2)} + 2i \int_{s_0}^{R_1} ds \frac{\text{Im} \{ \Pi(s, u) \}}{(s - q_1^2)} \right\} \\
 &\quad + \oint_{s=|R_1|} \int_{u_0}^{R_2} du \frac{\text{Im} \{ \Pi(s, u) \}}{(s - q_1^2)(u - q_2^2)} + (2i)^2 \int_{s_0}^{R_1} ds \int_{u_0}^{R_2} du \frac{\text{Im} \{ \Pi(s, u) \}}{(s - q_1^2)(u - q_2^2)} \quad (194)
 \end{aligned}$$

Supomos que somente conhecemos $\text{Im}\Pi$ e queremos avaliar Π em alguns ponto q_i^2 qualquer. A equação acima será útil se a função Π no *r.h.s.* se anular suficientemente rápido ao longo dos contornos Γ_i quando $|q_i^2| \sim R_i \rightarrow \infty$, logo a integral sobre o contorno circular tende a zero e obtemos a chamada relação de dispersão não subtraída. Porém, muitas vezes a condição para que a integral sobre o contorno se anule não é satisfeita. Então devemos fazer que este termo se comporte bem de alguma maneira. Note-se que a integral dispersiva envolve todos os valores de s . Para se conhecer $\Pi(q^2)$ para valores pequenos de s , necessitamos conhecer $\text{Im}(s)$ também para grandes valores de s . Em muitos casos, a parte imaginária não se anula no limite no infinito e a integral dispersiva diverge. Mas, desde que o limite assintótico da função Π ou alguma das suas derivadas seja constante, então é sempre possível usar (194). O algoritmo consiste em subtrair

tantos termos de potencia dos polos do integrando nas relações de dispersão quantas derivadas sejam necessárias para ter um limite assintótico de Π finito. As potencias no polo são obtidas fazendo uma expansão em serie de Taylor. Vamos mostrar o procedimento explicitamente agora. Da serie geométrica:

$$\frac{1}{(s - q_1^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q_1^2 - q_{10}^2)^k}{(s - q_{10}^2)^{k+1}} \quad (195)$$

$$\frac{1}{(u - q_2^2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q_2^2 - q_{20}^2)^m}{(u - q_{20}^2)^{m+1}} \quad (196)$$

podemos, apos um simples álgebra, reescrever (194) como:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) = & \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(k, m) (q_1^2 - q_{10}^2)^k (q_2^2 - q_{20}^2)^m + \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left\{ \left[\oint_{s=|R_1|} ds \oint_{u=|R_2|} du \operatorname{Im}^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \oint_{s=|R_1|} \int_{u_0}^{R_2} du + (2i)^2 \int_{s_0}^{R_1} ds \int_{u_0}^{R_2} du \right] \frac{(q_1^2 - q_{10}^2)^k (q_2^2 - q_{20}^2)^m}{(s - q_{10}^2)^{k+1} (u - q_{20}^2)^{m+1}} \operatorname{Im} \{ \Pi(s, u) \} \right\} \quad (197) \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \alpha(k, m) = & \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\oint_{s=|R_1|} ds \oint_{u=|R_2|} du \operatorname{Im}^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \oint_{s=|R_1|} \int_{u_0}^{R_2} du + (2i)^2 \right] \frac{\operatorname{Im} \{ \Pi(s, u) \}}{(s - q_{10}^2)^{k+1} (u - q_{20}^2)^{m+1}} \right\} \quad (198) \end{aligned}$$

Os n e p termos tirados dos somatórios devem ser tantos quanto precisarmos para fazer que os integrais sobre os contornos $s = |R_1|$ e $u = |R_2|$ sejam nulos quando passar ao limite $R_1, R_2 \rightarrow \infty$. Assim, supondo que já conhecemos esse número de termos, temos no limite:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) = & \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(k, m) (q_1^2 - q_{10}^2)^k (q_2^2 - q_{20}^2)^m \\ & + \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \int_{s_0}^{\infty} ds \int_{u_0}^{\infty} du \frac{(q_1^2 - q_{10}^2)^k (q_2^2 - q_{20}^2)^m}{(s - q_{10}^2)^{k+1} (u - q_{20}^2)^{m+1}} \operatorname{Im} \{ \Pi(s, u) \} \quad (199) \end{aligned}$$

Como as expansões foram feitas num q_{10} e q_{20} arbitrários, fazemos $q_{10} = q_{20} = 0$,

sempre que $s_0, u_0 > 0$. Desta maneira, obtemos:

$$\Pi(q^2) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(k, m) (q_1^2)^k (q_2^2)^m + \frac{1}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds \int_{u_0}^{\infty} du \frac{(q_1^2)^n (q_2^2)^p}{(s)^n (u)^p} \frac{Im\{\Pi(s, u)\}}{(s - q_1^2)(u - q_2^2)} \quad (200)$$

Agora, do teorema óptico para os diagramas de Feynman (55):

$$DD[\Pi(q^2)] = -4 Im\{\Pi(q^2)\} \quad (201)$$

sendo $DD[\dots]$ a dupla descontinuidade de $\Pi(q^2)$ (em cada variável, s e u). Deste jeito, obtemos finalmente:

$$\Pi(q^2) = \Pi_0 - \frac{1}{4\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds \int_{u_0}^{\infty} du du \frac{(q_1^2)^n (q_2^2)^p}{(s)^n (u)^p} \frac{DD[\Pi(s, u)]}{(s - q_1^2)(u - q_2^2)} \quad (202)$$

onde para simplificar a notação fizemos:

$$\Pi_0 = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(k, m) (q_1^2)^k (q_2^2)^m \quad (203)$$

É claro que este último termo é nulo quando aplicar a dupla transformada de Borel, o qual é claro da equação (3), já que são termos polinomiais em q . Agora precisamos uma maneira de calcular a dupla descontinuidade (201). Isto é feito usando as Regras de Cutkosky, que fornecem um método de fazer o computo da dupla descontinuidade completamente geral. O algoritmo de cálculo é dado pelas seguintes regras (55):

- Cortar passando pelo diagrama de Feynman em todas as possíveis formas tal que o propagador possa ser simultaneamente posto on-shell.
- Fazer a passagem $1/(q^2 - m^2) \rightarrow -2\pi i \delta(q^2 - m^2)$ para cada propagador cortado e executar a integral.
- Somar as contribuições para todos os cortes possíveis.

Usando estas regras de corte é possível provar o teorema óptico (201) em todas as ordens da teoria perturbativa.

APÊNDICE C – A Integral sobre k_μ

Neste apêndice vai se resolver a integral do tipo:

$$I_\mu = \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) k_\mu \quad (204)$$

Multiplicando o integrando por γ^μ temos que:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu k_\mu &= (\gamma^0, \gamma^i)(k_0, -\mathbf{k}) = (\gamma^0 k_0 - \gamma \mathbf{k}) \\ &= [\gamma^0 k_0 - (\gamma_x k_x + \gamma_y k_y + \gamma_z k_z)] \\ &= [\gamma^0 k_0 - |\mathbf{k}| (\sin\theta \cos\phi \gamma_x + \sin\theta \sin\phi \gamma_y + \cos\theta \gamma_z)] \end{aligned} \quad (205)$$

Mas:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \sin\phi = 0 \quad (206)$$

de modo que os termos em γ_x, γ_y podem ser eliminados. Ficamos então apenas com:

$$\gamma^\mu k_\mu = \gamma^0 k_0 - |\mathbf{k}| \cos\theta \gamma_z \quad (207)$$

e daqui, usando o sistema canônico (98-99):

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = (\gamma^0, \gamma^i)(p_0, \mathbf{0}) \rightarrow \gamma^0 = \frac{\gamma^\mu p_\mu}{p_0} \quad (208)$$

$$\not{p}' = \gamma^\mu p'_\mu = (\gamma^0, \gamma^i)(p'_0, 0, 0, |\mathbf{p}'|) \rightarrow \gamma_z = \frac{1}{|\mathbf{p}'|} \left(\frac{\gamma^\mu p'_\mu}{p_0} - \gamma^\mu p'_\mu \right) \quad (209)$$

de maneira que a integral fica:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu I_\mu &= \int dk_0 d(\cos\theta) d|\mathbf{k}|^2 d\varphi \delta(k - \bar{k}_0) \delta(\cos\theta - \cos\bar{\theta}) \delta(|\mathbf{k}|^2 - |\bar{\mathbf{k}}|^2) \Theta(\bar{k}_0) \\ &\quad \Theta(p_0 - \bar{k}_0) \Theta(p'_0 - \bar{k}_0) \gamma^\mu \left[\frac{k_0}{p_0} p_\mu - \frac{|\mathbf{k}| \cos\theta}{|\mathbf{p}'|} \left(\frac{p'_0}{p_0} p_\mu - p'_\mu \right) \right] \end{aligned} \quad (210)$$

de modo que, a solução agora é imediata:

$$I_\mu = 2\pi [A(s, u, t) p_\mu + B(s, u, t) p'_\mu] \quad (211)$$

onde:

$$A(s, u, t) = \frac{k_0}{p_0} - \frac{|\bar{\mathbf{k}}| \cos\bar{\theta} p_0}{|\mathbf{p}'| p_0} \quad (212)$$

$$B(s, u, t) = \frac{|\bar{\mathbf{k}}| \cos\bar{\theta}}{|\mathbf{p}'|} \quad (213)$$

APÊNDICE D – Regras de Feynman nos Lagrangianos Fenomenológicos

Para obter a amplitude \mathcal{M} do processo usando os lagrangianos fenomenológicos devemos seguir os seguintes passos (42)

- I. Todos os termos constantes (que não dependem dos campos) da lagrangiana contribuem para \mathcal{M} .
- II. Os termos com derivadas dos campos contribuem com um fator:
 - $-ip_\mu$ caso o campo esteja entrando no vértice.
 - ip_μ caso o campo esteja saindo no vértice.

sendo ip_μ o quadrimomento associado ao campo em questão.

- III. Cada campo vetorial massivo de quadrimomento p contribui com um fator:
 - $\varepsilon_\mu(p, \lambda)$ caso o campo esteja entrando no vértice.
 - $\varepsilon_\mu^*(p, \lambda)$ caso o campo esteja saindo no vértice.

- IV. Acrescentar o fator i devido ao vértice.

A amplitude \mathcal{M} obtêm-se multiplicando todas as contribuições listadas acima. Mas, desde que as partículas envolvidas neste trabalho não são pontuais deve-se trocar a constante de acoplamento g pelo fator de forma $F(q^2)$, tal que no limite $q^2 \rightarrow m_M^2$, sendo M o méson de quadrimomento q , temos $F(q^2) \rightarrow g$

APÊNDICE E – Contribuições nulas na expansão de Wick

Vamos a olhar para o segundo termo na expansão de Wick (11) e vamos provar que as contribuições não-perturbativas são nulas após a aplicação da dupla transformada de Borel. Da equação (12c) temos

$$W^1 = \langle 0 | T \{ q_{3n}^c(0) \bar{q}_{3i}^a(x) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ q_{2j}^a(x) \bar{q}_{2k}^b(y) \} | 0 \rangle : q_{1l}^b(y) \bar{q}_{1m}^c(0) : \quad (214)$$

É claro que o correlator associado a dita correção é:

$$\Pi^{(2)} = \int d^4x d^4y e^{-iqy} e^{ip'x} \left(\hat{O}_3 \right)_{ij} \left(\hat{O}_2 \right)_{kl} \left(\hat{O}_1 \right)_{mn} \langle \tilde{0} | W^2 | \tilde{0} \rangle \quad (215)$$

da mesma maneira como foi feito na equação (22). Os dois primeiros termos de (286) são simplesmente o propagadores livres definidos em (14), enquanto o terceiro termo, correspondente ao ordenamento normal, tem que ser avaliado em relação aos vetores *bra* e *ket* que representam o vácuo não-trivial da QCD, segundo:

$$\langle \tilde{0} | : q_{1l}^b(y) \bar{q}_{1m}^c(0) : | \tilde{0} \rangle \quad (216)$$

Fazemos uma expansão de Taylor para $q_{1l}^b(y)$:

$$q_{1l}^b(y) = q_{1l}^b(0) + y_\mu \partial^\mu q_{1l}^b(y) |_{y=0} + \frac{1}{2} y_\mu y_\nu \partial^\mu \partial^\nu q_{1l}^b(y) |_{y=0} + \dots \quad (217)$$

e inserindo em (216) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{0} | : q_{1l}^b(y) \bar{q}_{1m}^c(0) : | \tilde{0} \rangle &= \langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) \bar{q}_{1m}^c(0) : | \tilde{0} \rangle + y_\mu \langle \tilde{0} | : \partial^\mu q_{1l}^b(y) |_{y=0} \cdot \bar{q}_{1m}^c(0) : | \tilde{0} \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} y_\mu y_\nu \langle \tilde{0} | : q_{3n}^c(0) \partial^\mu \partial^\nu q_{1l}^b(y) |_{y=0} \cdot \bar{q}_{1m}^c(0) : | \tilde{0} \rangle + \dots \end{aligned} \quad (218)$$

Cada termo de (218) inserido no correlator (287)(215) representara uma correção não perturbativa no primeiro ordem na formula de Gell-Mann-Low no correlator. Vamos calcular apenas os primeiros dois termos, associados ao condensado de quarks. Como já foi visto em (26) e (32), os valores esperados em relação ao vácuo não-trivial da QCD do produto normalmente ordenado em (218) é associado aos condensados:

$$\delta^{lm} \langle \tilde{0} | : q_{1l}^b(y) \bar{q}_{1m}^c(0) : | \tilde{0} \rangle = -\frac{1}{12} \delta_{bc} \langle \bar{q}_1 q_1 \rangle \quad (219)$$

$$\delta^{lm} y_\mu \langle \tilde{0} | : \partial^\mu q_{1l}^b(y) |_{y=0} \cdot \tilde{q}_{1m}^c(0) : | \tilde{0} \rangle = \frac{im_1}{48} \delta_{bc} \not{y} \langle \tilde{q}_1 q_1 \rangle \quad (220)$$

Daqui, o correlator correspondente a esta correção é:

$$\begin{aligned} \Pi^{\langle \tilde{q}_1 q_1 \rangle} &= \frac{\langle \tilde{q}_1 q_1 \rangle}{12} \int d^4x d^4y e^{-iqy} e^{ip'x} Tr \{ \delta \} Tr \left\{ S^{(3)}(-x) \hat{O}_3 S^{(2)}(x-y) \hat{O}_2 \hat{O}_1 \right\} \\ &= \frac{\langle \tilde{q}_1 q_1 \rangle}{4} \int d^4x d^4y \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{-iqy} e^{ip'x} e^{ip_3x} e^{-ip_2(x-y)} \times \\ &\quad \times Tr \left\{ S^{(3)}(p_3) \hat{O}_3 S^{(2)}(p_2) \hat{O}_2 \hat{O}_1 \right\} \end{aligned} \quad (221)$$

onde foi usado (17) para passar numa representação do propagador no espaço dos momentos. Podemos agora calcular as integrais sobre as variáveis x e y , segundo:

$$\int d^4y e^{ix(p_2-q)} = (2\pi)^4 \delta(q-p_2) \rightarrow p_2 = q \quad (222)$$

$$\int d^4x e^{ix(p'+p_3-p_2)} = (2\pi)^4 \delta(p'+p_3-p_2) \rightarrow p_3 = q-p' \quad (223)$$

Isto leva a uma forma geral do correlator dada como

$$\Pi^{\langle \tilde{q}_1 q_1 \rangle} = \frac{\langle \tilde{q}_1 q_1 \rangle}{4} \int d^4p_3 d^4p_2 Tr \left\{ S^{(3)}(q-p') \hat{O}_3 S^{(2)}(q) \hat{O}_2 \hat{O}_1 \right\} \quad (224)$$

É claro agora que o correlator obtido não é simultaneamente uma função das variáveis p e p' , os momentos das partículas off-shell, $\Pi^{\langle \tilde{q}_1 q_1 \rangle} = f(q, p') \neq g(p', p)$, de maneira que ao executar a dupla transformada de Borel sobre estas variáveis, o resultado é nulo. Tanto no seguinte termo corretivo na expansão de Taylor (218) quanto no outro termo na expansão de Wick, equação (12b), os resultados são completamente análogos, pelo que só levam a termos nulas, sem contribuição nos cálculos das QCDSR que nos fazem respeito.