



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Alan Edgardo Guzmán Arana

**Efeitos da nucleação em sistemas fermiônicos**

Rio de Janeiro

2011

Alan Edgardo Guzmán Arana

**Efeitos da nucleação em sistemas fermiônicos**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci

Rio de Janeiro

2011

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

G993

Guzmán Arana, Alan Edgardo.  
Efeitos da nucleação em sistemas fermiônicos /  
Alan Edgardo Guzmán Arana.- 2011.  
62 f. : il.

Orientador: Daniel Gustavo Barci.  
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do  
Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Transformações de fase (Física estatística) - Teses.  
2. Férmions - Teses. 3. Bósons – Teses. 4. Anisotropia –  
Teses. 5. Simetria quebrada – Teses. I. Barci, Daniel  
Gustavo. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro.  
Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 531.19

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Alan Edgardo Guzmán Arana

**Efeitos da nucleação em sistemas fermiônicos**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 5 de julho de 2011.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

---

Prof. Dr. Daniel Lorenzo Reyes Lopez  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

---

Prof. Dr. Rubens Luis Pinto Gurgel do Amaral  
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2011

## DEDICATÓRIA

Para minha mãe.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por seu amor e sua infinita misericórdia. Muito obrigado. Agradeço aos meus pais e meus irmãos, por toda a ajuda fornecida. Em momentos difíceis encontrei em vocês a força para seguir em frente. Muito obrigado por estar sempre ao meu lado.

Agradeço a minha Rosa, por sua companhia e amor. Aos amigos de sempre: Helmunt, Azucena, Alfredo. Aos amigos que conheci aqui: Diego, Raquel, Victor, Gabriel, Lucho, Max, Enrique, Alejandro, Bruno Inchausp Teixeira e Diego Matos Figueiredo.

Agradeço aos meus professores da UNT. José Roldan e Antonio Rivasplata. Ao professor Grimaldo Sánchez Loyola.

Gostaria de agradecer de forma especial a meu orientador Daniel Barci, pela ajuda fornecida na elaboração desta dissertação, e sobretudo pela sua paciência para minha pessoa, para entender a física que estava por trás desta pesquisa.

Aos professores das disciplinas: Eletromagnetismo, Nilson Antunes. Mecânica Quântica I, Jose Mahon. Mecânica Quântica II, Silvio Sorella. Teoria Quântica de Campos, Daniel Barci(DFT-UERJ). Jose Helayel (CBPF).

Aos secretários Rogério e Isabel pelo apoio nos assuntos burocráticos da pós-graduação. Finalmente, agradeço ao PPGF-UERJ e à Capes pelo apoio financeiro e pela infraestrutura oferecida para a realização do meu mestrado.

## RESUMO

GUZMÁN ARANA, A. E. *Efeitos da nucleação em sistemas fermiônicos*. 2011. 62 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

Neste trabalho abordamos a teoria da nucleação de Langer e seus efeitos em um sistema fermiônico fortemente correlacionado em  $(2+1)$  dimensões. Em princípio analisamos a orientação anisotrópica metaestável de um fluido de Hall quântico nemático (BARCI; ARENAS, 2008). Para isso empregamos o modelo  $XY$  de baixas energias para descrever uma fase nemática quântica efetiva com um potencial externo de quebra de simetria. Posteriormente a interpretação da “rotação” dos eixos anisotrópicos como uma nucleação permite estudar o decaimento de estados metaestáveis homogêneos. Como veremos, uma equação diferencial de segundo ordem é estabelecida para estudar nosso sistema, mas a dificuldade de resolver analiticamente esta equação nos levava a postular um *ansatz* como solução. Este *ansatz*, ou *bolha crítica nemática*, permite que interpretemos a energia da bolha através da aproximação de parede fina como uma *competição* de sua energia superficial e perimetral para lograr seu equilíbrio por meio de um raio crítico. Estas duas expressões para a energia através do modelo  $XY$  e a teoria da nucleação, como veremos, são equivalentes. Por outro lado, a realização de uma aproximação semiclássica ao redor da bolha e uma constante de interação entre bósons e férmions muito pequena permite a “inclusão” dos bósons à ação fermiônica quirial através de uma “massa” local com um defeito circular. Finalmente, com o formalismo desenvolvido na referência (FOSCO; LOPEZ, 1999) estudaremos sistemas fermiônicos em presença desta massa local com defeito circular. E em correspondência com a referência (CALLAN JR; HARVEY, 1985) teremos modos zeros quirais ao redor do defeito circular.

Palavras-chave: Teoria da nucleação de Langer. Transições de fase de primeira ordem. Nucleação. Modos zeros quirais.

Em um momento haviam dois caminhos a percorrer.  
Eu escolhi o menos percorrido, e isso fez toda a diferença

*Robert Frost*

## ABSTRACT

GUZMÁN ARANA, A. E. *Effects of nucleation in fermionic systems*. 2011. 62 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011

In this work we boarded Nucleation Theory of Langer and its effects in a Strongly Correlated Fermionic System in  $(2 + 1)$  dimensions. In principio we analyzed the metastable anisotropic orientation of a nematic fluid quantum Hall (BARCI; ARENAS, 2008). For this we use the XY model of low energy to describe a effective nematic phase with a external potential breaking of symmetry. Thereafter the interpretation of the rotation anisotropic axis as a nucleation allows studying the decay of metastable states homogeneous. As we shall see, a second order differential equation is established to study our system, however, the difficulty of solving this equation analytically take us to postulate an ansatz as a solution. This ansatz, or nematic critical bubble, allows interpret the bubble energy through the thin wall approach a competition between its surface energy and perimeter energy to achieve equilibrium by a critical radius. These two expressions for the energy through the XY model and nucleation theory, as we shall see, are equivalent. Furthermore, performing a semiclassical approximation around the bubble and a constant interaction between bosons and fermions very small allows the "inclusion" of bosons to a chiral fermionic action through a "mass" local with circular defect. Finally, the formalism developed in (FOSCO; LOPEZ, 1999) study fermionics systems in the presence of the local mass with circular defect. And corresponding to reference (CALLAN JR; HARVEY, 1985) have chiral zeros modes around the circular defect.

Keywords: Theory of Langer nucleation. Phase transitions of first order. Nucleation. Quirid zero modes.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Diagrama de fases de um cristal líquido eletrônico . . . . .	14
Figura 2	- Diagrama de fases da água . . . . .	16
Figura 3	- Transições de fase de primeira e segunda ordem . . . . .	18
Figura 4	- Fluxo de probabilidade cruzando o ponto de sela. . . . .	20
Figura 5	- $V(\phi)$ vs $\phi$ . . . . .	22
Figura 6	- Sphaleron . . . . .	24
Figura 7	- Potencial: $V(\theta) = h_2 \cos(2\theta) - h_4 \cos(4\theta)$ . . . . .	25
Figura 8	- Bolha simétrica . . . . .	26
Figura 9	- Configuração típica de uma bolha com simetria radial. . . . .	28
Figura 10	- Ansatz variacional. . . . .	30
Figura 11	- Possível caminho entre 0 e $p$ . . . . .	57

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

QFT	Quantum Field Theory
QCD	Quantum Chromodynamics
2DEG	Gás eletrônico bidimensional
SPH	Sphaleron
C-H	Mecanismo de Callan - Harvey

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	12
1	<b>TRANSIÇÕES DE FASE DE PRIMEIRA ORDEM - TEORIA DA NUCLEAÇÃO</b> . . . . .	15
1.1	Transições de fase de primeira ordem, conceitos e definições . . .	15
1.2	Características de uma transição de fase de primeira ordem - nucleação . . . . .	16
1.3	Teoria da nucleação - Formalismo de Langer . . . . .	17
2	<b>NUCLEAÇÃO EM SISTEMAS BOSÔNICOS</b> . . . . .	21
2.1	Decaimento de estados metaestáveis em (1+1)D através de um potencial quártico efetivo . . . . .	21
2.1.1	<u>Sphaleron</u> . . . . .	22
2.2	Decaimento de estados metaestáveis em (2+1)D através de um potencial com simetria nemática . . . . .	23
2.3	Bolha crítica nemática $\theta_b(r - R_c)$ e a aproximação de parede fina $\xi/R_c \ll 1$ . . . . .	27
3	<b>EFEITOS DA NUCLEAÇÃO EM SISTEMAS FERMIÔNICOS DE DIRAC EM (2+1) DIMENSÕES</b> . . . . .	31
3.1	<b>Introdução</b> . . . . .	31
3.2	<b>Férmions na presença de uma parede de domínio</b> . . . . .	32
3.2.1	<u>Expressão geral para a ação fermiônica</u> . . . . .	32
3.2.2	<u>Expressão paramétrica geral para a ação fermiônica</u> . . . . .	33
3.2.3	<u>Defeito circular</u> . . . . .	35
3.2.4	<u>Inclusão dos bósons para um campo de Dirac fermiônico através da aproximação semiclássica</u> . . . . .	42
3.2.5	<u>Modos zeros quirais</u> . . . . .	46
3.3	<b>Densidade de corrente fermiônica</b> . . . . .	49
	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	52
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	53
	<b>APÊNDICE A – O modelo XY</b> . . . . .	55

## INTRODUÇÃO

A dinâmica das transições de fase de primeira ordem vem fascinando ao cientistas já desde os tempos de Maxwell e van der Waals. Muitos trabalhos na teoria clássica da nucleação foram explicados na última etapa do século passado, culminando na teoria de Becker e Döring (BECKER; DÖRING, 1935). Camaras de bolhas e névoa assim como o congelamento e precipitação de líquidos na atmosfera são algumas das implicações desta teoria. Uma teoria moderna da nucleação foi proposta por Langer (LANGER, 1969). A teoria de Langer é baseada em um enfoque mais fundamental das interações dos átomos e as moléculas, e tem por finalidade calcular a probabilidade de que uma bolha, com uma fase inicial, apareça em um sistema de fase final perto da temperatura crítica. Finalmente, a teoria da nucleação foi estendida para a teoria quântica de campos por Callan e Coleman (COLEMAN, 1977) a temperatura zero e por Affleck (AFFLECK, 1981) e Linde (LINDE, 1983) a temperatura finita. O decaimento de estados metaestáveis homogêneos explicados a través das transições de fase de primeira ordem são conjecturados para acontecer em algumas áreas importantes da física, tais como por exemplo: Na QCD, uma transição de fase de primeira ordem pode descrever a hadronização do plasma quark - gluon, o qual poderia ter sido produzido nos inícios do Universo no instante de  $10^{-5}$  segundos depois do Big Bang ou na colisão relativística de íons pesados. Na teoria eletrofraca, uma transição de fase de primeira ordem é proposta para demonstrar o problema da violação do número bariônico (baryogenesis). Em cosmologia, as transições de fase de primeira ordem são propostas como mecanismos para explicar o Modelo Inflacionário. Em física da matéria condensada, elas aparecem em diferentes sistemas como por exemplo: na transição de polímeros, líquidos misturados, no decaimento de estados de dimerização metaestáveis, em sistemas ondulatorios de densidades de carga quasi unidimensionais e em condutores orgânicos não degenerados.

Estas transições de fase de primeira ordem estão presentes também nos cristais líquidos quânticos que são condensados eletrônicos sem gap que quebram espontaneamente a simetria rotacional ou translacional. Estas novas fases de sistemas fortemente correlacionados estão sendo estudados em diferentes apresentações tais como, sistemas de Hall quântico, superconductores de alta temperatura crítica ( $T_c$ ), e compostos de férmions pesados [(KIVELSON; FRADKIN; EMERY, 1998), (CARVALHO; BONATO; COSTA-MILAN, 1989) y (CARVALHO, 1989)].

Os estados quânticos ou fases que caracterizam um cristal líquido quântico são a fase cristalina, esméctica, nemática e isotrópica, todas elas mostradas na figura 1 (KIVELSON; FRADKIN; EMERY, 1998). No entanto, o estado esméctico quântico bidimen-

sional, também referido como a *fase de faixas* (stripe phase), é um estado metálico que quebra a invariância translacional em uma direção. Esta configuração eletrônica modulada foi proposta como um bom estado fundamental de um gás de elétrons bidimensional (2DEG) sob valores específicos de um campo magnético externo.

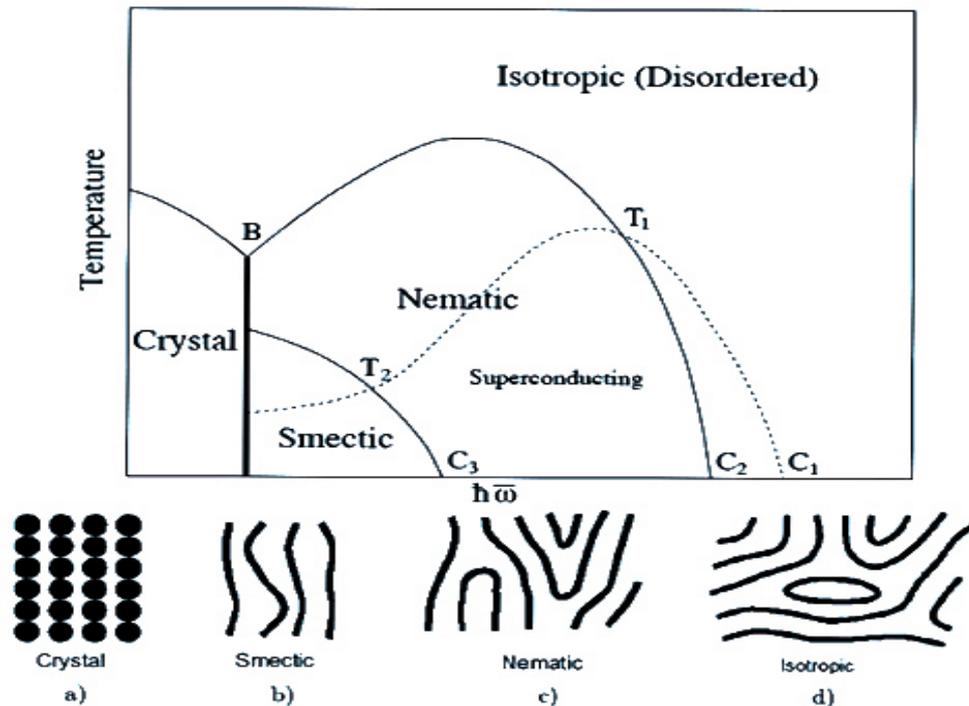
De fato, com o fator de preenchimento parcial o sistema tende a separar-se em fluidos homogêneos com diferentes densidades, mas a repulsão de Coulomb frustra esta tendência e o sistema é forçado a reorganizarse através da redução de sua dimensionalidade. Flutuações térmicas fortes, assim como flutuações quânticas das faixas podem gerar uma transição de fase a través da produção de defeitos topológicos<sup>1</sup>. No caso de um cristal líquido quântico, este defeito topológico pode ser entendido como deslocamentos ou desclinações que, sob circunstâncias apropriadas, podem mudar a ordem das faixas em um líquido homogêneo, porém, anisotrópico. Este novo estado é chamado de *estado nemático quântico*, e este é provavelmente o melhor candidato para explicar a anisotropia observada em 2DEG com os níveis de Landau semi-cheios. De fato, alguns experimentos são compatíveis com a interpretação de uma quebra espontânea de simetria rotacional com aproximadamente 150 mK e um potencial nativo fraco, responsável pelo alinhamento do eixo principal da resistência, da ordem de um 1 mK por elétron.

Como vemos as transições de fase de primeira ordem estão presentes em muitas áreas da física, assim, estudar estas transições, como um processo da nucleação em sistemas fermiônicos, podem resultar muito interessantes. Esta dissertação está dividida da seguinte forma: primeiro, estudaremos as transições de fase de primeira ordem através da teoria da nucleação de Langer. Segundo, analisaremos a nucleação em sistemas bosônicos no marco de uma orientação anisotrópica metaestável de um fluido de Hall quântico nemático (BARCI; ARENAS, 2008). Para isso usaremos o modelo  $XY$  de baixas energias visando descrever uma fase nemática quântica efetiva com um potencial externo de quebra de simetria explícita. Posteriormente a interpretação da “rotação” observada dos eixos de anisotropia como uma nucleação permitirá estudar o decaimento dos estados metaestáveis homogêneos. Veremos que uma equação diferencial de segunda ordem é estabelecida para estudar nosso sistema, mas a dificuldade de resolver analiticamente esta equação, e trabalhos feitos anteriormente (KLINKHAMER; MANTON, 1984), nos levaram a postular um *ansatz* como solução. Este *ansatz* ou bolha crítica nemática, permite que interpretemos a energia da bolha através da aproximação de parede fina como uma *competição*

---

<sup>1</sup> Na verdade, além de uma transição de fase em um sistema físico, o defeito topológico também tem que ver com o quebre espontâneo de sua simetria. Tal é o caso, como no magnetismo, eles são chamados de “domain walls” (paredes de domínio); em hélio superfluido e modelo  $XY$ , são chamados de “vórtices”; e em teorias de campo de gauge não-abelianas, são chamados de monopólos.

Figura 1 - Diagrama de fases de um cristal líquido eletrônico



Legenda: A temperatura está no eixo vertical, e o dopamento no eixo horizontal. O isolamento de Mott (B) com a) um cristal; as regiões com a ordem das faixas correspondentes para b) uma fase esméctica de um cristal líquido; a região supercondutora no diagrama de fases correspondente com c) uma fase nemática e a região sobredopada é relacionada com d) uma fase isotrópica.

Fonte: KIVELSON; FRADKIN; EMERY, 1998, p. 550.

entre sua energia superficial e perimetral para lograr seu equilíbrio por meio de um raio crítico. As duas expressões para a energia da bolha através do modelo  $XY$  e da teoria da nucleação, como veremos, são equivalentes e permitirá expressar o raio crítico, a energia crítica e comprimento crítico em função dos coeficientes do potencial externo. Terceiro, estudaremos os efeitos da nucleação em sistemas fermiônicos de Dirac. Uma aproximação semiclássica ao redor da bolha crítica nemática e uma constante de interação entre bósons e férmions muito pequena nos permitira a “inclusão” dos bósons à ação fermiônica quirial através de uma “massa” local com um defeito circular. Finalmente, o formalismo matemático desenvolvido na referência (FOSCO; LOPEZ, 1999), nos fornecera ferramentas necessárias visando estudar sistemas fermiônicos fortemente correlacionados em presença desta massa local com defeito circular e, em correspondência com a teoria de Callan-Harvey (CALLAN JR; HARVEY, 1985), os surgimentos dos modos zeros quirais ao redor do defeito circular vão estar presentes.

# 1 TRANSIÇÕES DE FASE DE PRIMEIRA ORDEM - TEORIA DA NUCLEAÇÃO

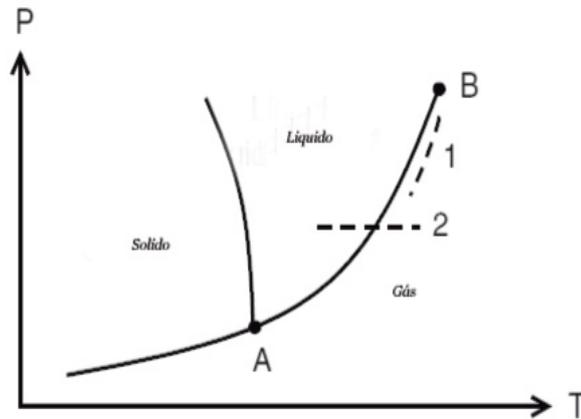
## 1.1 Transições de fase de primeira ordem, conceitos e definições

Antes de desenvolver o tema da transição de fase de um sistema, primeiro explicaremos o significado de uma fase. Este conceito é familiar da termodinâmica e mecânica estatística, neles definimos uma fase como um *sistema homogêneo*. Um exemplo simples e cotidiano seria o café solúvel, o qual consiste de pó de café dissolvido na água e depois de mover temos uma combinação homogênea, ou seja, apenas uma fase. Se adicionamos uma colherada de açúcar e movemos bem, temos novamente apenas uma fase, café doce. No entanto, se adicionamos colheradas cheias de açúcar, dentro da xícara podemos não chegar a ter uma combinação homogênea, mas no promedio temos uma combinação de dois sistemas homogêneos o fases, café líquido doce na parte de acima e café combinado com açúcar (sólido) na parte de embaixo.

No exemplo anterior, obtemos dois diferentes fases mediante a mudança da composição do sistema. No entanto, a forma mais usual da mudança de uma transição de fase é quando apenas uma solução, isto é, uma fase, muda as suas características quando *mudamos seus condições externas*, tais como, a temperatura, a pressão, campo elétrico o magnético. Um exemplo muito familiar é o que acontece com a água a temperatura ambiente e pressão atmosférica normal, ou seja, um líquido. Se esta temperatura é reduzida para  $0^{\circ}\text{C}$ , a fase líquida muda para gelo, um sólido. Agora, se aumentamos a temperatura acima dos  $100^{\circ}\text{C}$  muda para um vapor, um gás. A mudança de fases e as curvas de coexistência entre as fases são apresentadas no gráfico 2.

Do diagrama de fases da água (GITTEMAN; HALPERN, 2004), vemos que o aumento da temperatura e da pressão ao longo da curva  $AB$ , indica a coexistência de duas fases (líquido e gás) até o ponto crítico  $B$ . Após de atingir esta temperatura crítica, temos uma fase homogênea com um comportamento anômalo da água sob estas características. Naturalmente, a densidade é contínua nesta fase, no entanto, uma segunda derivada no potencial termodinâmico, o coeficiente de expansão térmico, se comportam de forma anômala. E, certamente, anomalias como acima descrito, tal como no caso da densidade, são as características de uma transição de fase. Na seção seguinte analisaremos as características que descrevem estas transições de fase, a de primeira ordem em particular, desde que nosso trabalho, o decaimento de estados metaestáveis através de uma *nucleação*, é uma transição de fase de primeira ordem.

Figura 2 - Diagrama de fases da água



Legenda: Pontos críticos: *A*, ponto triplo da água ( $273,16^{\circ}\text{K} \approx 0,001^{\circ}\text{C}$ ). *B* ( $374^{\circ}\text{C}$ , 220 atm).

Caminhos termodinâmicos: 1, aumento da temperatura a uma pressão constante de 1 atmosfera. 2, coexistência entre as duas fases, líquido e vapor.

Fonte: GITTERMAN; HALPERN, 2004, p. 2.

## 1.2 Características de uma transição de fase de primeira ordem - nucleação

Estudaremos com maior detalhe a transição de fase do vapor da água <sup>2</sup>. Isto vai permitir obter algumas características essenciais que descrevem uma transição de primeira ordem. Para isso tomaremos um parâmetro dependente das condições do sistema, isto é, a densidade do sistema  $\rho(T)$  como função da temperatura  $T$ . Agora bem, se a temperatura é aumentada com uma pressão constante de 1atm (caminho termodinâmico 2, figura 2), então inicialmente a densidade é aproximadamente  $1\text{g}/\text{cm}^3$ , e quando o sistema atinge a linha de transição de fase ( $100^{\circ}\text{C}$ ) uma segunda fase (vapor) aparece com uma densidade de  $0.001\text{g}/\text{cm}^3$  consideravelmente menor que da fase inicial, e ambas fases podem coexistir. Depois de cruzar esta linha, o sistema torna-se totalmente em um só sistema homogêneo, fase de vapor. Este tipo de transição, com uma descontinuidade em sua densidade, é própria das transições de fase de primeira ordem. A descontinuidade da densidade é "visto" na primeira derivada do potencial termodinâmico em uma temperatura de transição de fase <sup>3</sup>.

Em Termodinâmica cada estado de um sistema está definido mediante alguma caracterização da energia. Se o estado do sistema é definido mediante uma temperatura  $T$ ,

<sup>2</sup> Aqui estudamos a transição de fase da água para o vapor, em condições normais, ou seja, não temos superaquecimento, que é uma consequência da anulação das correntes de convecção.

<sup>3</sup> A classificação de uma transição de fase, através do ordem das derivadas da energia livre, e que tem uma descontinuidade na temperatura de transição de fase, é devido ao físico austriaco Paul Ehrenfest.

uma pressão  $P$ , ou volume  $V$ , esta energia é chamada de energia livre. Parte desta energia com temperatura zero, é a energia interna  $E$ , e o resto da energia depende da temperatura e a entropia  $S$  do sistema. Se as variáveis independentes são a temperatura e pressão, então o potencial termodinâmico relevante é a energia livre de Gibbs,  $G = E - TS + PV$ .

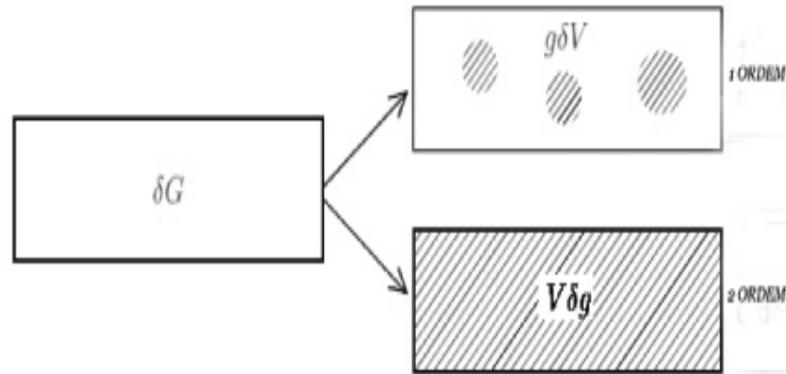
Agora bem, podemos considerar os efeitos na energia livre  $G$ , ao mudar um de seus parâmetros externos, por exemplo a temperatura, isto faz que tenhamos pequenas perturbações na energia do sistema. Então, se consideramos a energia livre de Gibbs por unidade de volume,  $g$ , de um sistema com um número fixo de partículas e escrevemos  $G = gV$ , o qual apresenta só dois tipos de mudança. Qualquer das dois pode acontecer; a mudança  $\delta G$  em  $G$  surge, desde a mudança na densidade de energia livre  $g$ ,  $\delta G = V\delta g$  ou a mudança no volumen  $V$ ,  $\delta G = g\delta V$ . Isto é, quando as propriedades de um sistema mudam como resultado de uma transição de fase, eles podem sofrer uma pequena mudança  $\delta g$  sobre o sistema todo ou inicialmente só em algumas partes  $\delta V$  (A figura 3 apresenta as duas formas que podem ter a variação do potencial termodinâmico  $\delta G$ , devido à alteração de um parâmetro externo, neste caso a temperatura  $T$ ). É precisamente as mudanças que surgem em algumas partes de  $\delta V$  as características de uma transição de fase de primeira ordem. Isto é, se a nova fase aparece como  $\delta G = g\delta V$ , só que esta aparece em partes de  $\delta V$  do sistema, então esta requer a **formação de núcleos** estáveis ou regiões de uma fase com um crescimento medio com o qual emergem.

Na secção seguinte, estudaremos a formação desses núcleos através de a *Teoria da Nucleação de Langer*. Basicamente, analisaremos o decaimento de estados metaestáveis (a fase líquida da água pode ser considerado como um estado metaestável que, através do aumento da temperatura (variável externa), mudaria de fase ou estado metaestável, vapor), que como o seu nome sugere, são estados com pouca estabilidade. A outra possibilidade para a mudança da energia livre,  $V\delta g$ . Corresponde a uma transição de fase de segunda ordem que, embora a densidade ou o momento magnético do sistema são contínuos na derivada de primeira ordem da energia livre, não é assim com as derivadas de segunda ordem em a energia livre para a compressibilidade ou susceptibilidade magnética. Nosso interesse está nas transições de fase de primeira ordem, portanto, não profundisaremos nas segunda ordem.

### 1.3 Teoria da nucleação - Formalismo de Langer

A teoria general da nucleação desenvolvida por J. S. Langer (LANGER, 1969), começa com uma introdução de um grupo de variáveis  $\eta_i$  (similar às coordenadas generalizadas,  $q_i$ ),  $i = 1, \dots, N$ , que descreve  $N$  graus de liberdade do sistema em interes.

Figura 3 - Transições de fase de primeira e segunda ordem



Legenda: Diferentes possibilidades para a mudança da energia associados com as transições de fase de primeira e segunda ordem.

Fonte: GITTERMAN; HALPERN, 2004, p. 6.

No sistema de decaimentos de estados metaestáveis, por exemplo, a variável  $\eta_i$  pode ser a densidade de energia  $e(\vec{r})$  e um fluxo de momento  $M(\vec{r})$  com posições  $\vec{r}$  no sistema. Isto é, uma soma sobre o índice  $i$  representa uma integração sobre  $\vec{r}$  e uma soma sobre cada um dos campos de densidade e fluxo.

Se introduzimos uma função de distribuição  $\rho(\{n\}, t)$ , que é uma densidade de probabilidade sobre as configurações  $\{\eta\} \equiv \{\eta_1, \dots, \eta_N\}$ , e também uma função do tempo  $t$ . Podemos assumir que  $\rho(\{\eta\}, t)$  satisfaz a equação de continuidade da forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \partial_t \rho = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial J_i}{\partial \eta_i}, \quad (1)$$

com a corrente de probabilidade  $J_i$  [2] dada por

$$J_i = - \sum_{j=1}^N M_{ij} \left( \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \rho + T \frac{\partial \rho}{\partial \eta_j} \right). \quad (2)$$

Sendo  $M_{ij}$  uma matriz generalizada e  $F\{\eta\}$  uma energia livre efetiva.

É importante notar que ambas equações (1) e (2) podem ser obtidas a través de técnicas estatísticas estandar (LANGER, 1969) por meio do adionamento de uma força adequada à equação de movimento de Langevin, de tal forma que podemos ter:

$$\partial_t \eta_i = - \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{\partial F}{\partial \eta_j}, \quad (3)$$

donde  $A$  é uma matriz antisimétrica com valores 0 e 1.

Com nosso sistema descrito no espaço  $\eta$ , a densidade de probabilidade na superfície de transição sera estacionaria (ver figura 4). Por tanto podemos estabelecer uma condição de equilíbrio nesta superfície  $\partial_t \rho(\{n\}) = 0$ , e a equação (1) faz que a distribuição de probabilidade tenha a seguinte forma

$$\rho\{\eta\} \propto e^{-F\{\eta\}/T}. \quad (4)$$

Esta configuração, contém estados metaestáveis<sup>4</sup> do sistema no espaço  $n$ . Isto é, um estado metaestável inicial denotado por  $\{\eta_0\}$  y um estado metatestável final o posterior denotado por  $\{\eta\}$ . Neste espaço, a transição de fase começa desde um estado metaestável  $\{\eta_0\}$  e move-se para seu vizinho mais próximo, um estado estável.

A energia livre,  $F$ , neste último estado tem um mínimo; energia no estado fundamental, por exemplo. Por outro lado, em uma transição de fase do sistema o caminho mais provável é passar através de um ponto de sela  $\{\bar{\eta}\}$ , como se mostra na figura 4. No ponto de sela, podemos assumir um fluxo estacionário,  $\partial_t \rho = 0$ , então podemos calcular a corrente cruzando esta sela  $\{\bar{\eta}\}$ . A taxa do *fluxo de probabilidade* cruzando o estado  $\{\bar{n}\}$  determina a *taxa de formação* ou *nucleação* (CSERNAI; KAPUSTA, 1992) de uma bolha. Esta taxa é:

$$I = I_0 \exp\{-\Delta F/T\}, \quad (5)$$

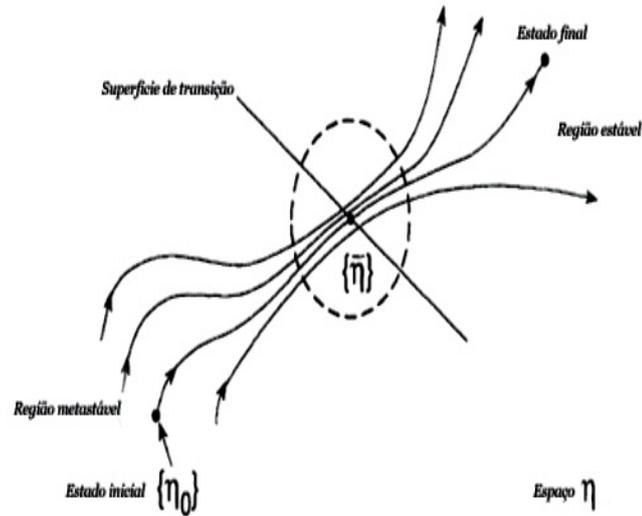
que indica o *número de criações de bolhas de tamanho crítico* em unidade de volume e tempo (LANGER, 1969). Aqui  $\Delta F$  é a energia de activação estabelecida como:

$$\Delta F = F\{\bar{\eta}\} - F\{\eta_0\}. \quad (6)$$

---

<sup>4</sup> Estado metaestável, é um estado que possui precária estabilidade, podendo facilmente ser perturbado. Uma pequena perturbação determinará que um sistema em um estado metaestável cairá para um nível de energia mais baixo. Por exemplo, na transição de fase da água, líquido - vapor. A fase líquida (fase metaestável inicial), pode ser aquecida (perturbada) aumentando a temperatura (condição externa) para atingir o ponto de ebulição e eventualmente transformarse tudo em vapor (fase metaestável final). É claro que, neste caso, o estado final atingido não é um estado de menor energia em comparação com o estado inicial, no entanto, uma transição de fase inversa (se resfriamos o sistema), o estado final é uma fase de menor energia.

Figura 4 - Fluxo de probabilidade cruzando o ponto de sela.



Legenda: Ilustração esquemática do fluxo de probabilidade cruzando o ponto de sela.

Fonte: CSERNAI; KAPUSTA, 1992, p. 1381.

O prefactor  $I_0$  é o produto de dois termos:

$$I_0 = \frac{\kappa}{2\pi} \Omega_0, \quad (7)$$

o prefactor dinâmico  $\kappa[\frac{c}{fm}]$  e o prefactor estatístico  $\Omega_0[fm^{-3}]$ . Em termos dos autovalores  $\bar{\lambda}_\alpha$  e  $\lambda_\alpha^{(0)}$  da matriz  $\frac{\partial^2 F\{\eta\}}{\partial \eta_i \partial \eta_j}$  avaliada nos pontos  $\{n\}$  e  $\{n_0\}$  respectivamente, o prefactor estatístico é escrito da seguinte maneira (LANGER, 1969):

$$\Omega_0 = \nu \left( \frac{2\pi T}{|\bar{\lambda}_1|} \right)^{1/2} \prod_{\alpha=\alpha_0+2}^N \left( \frac{2\pi T}{|\bar{\lambda}_\alpha|} \right)^{1/2} \prod_{\alpha=1}^N \left( \frac{\lambda_\alpha^0}{2\pi T} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

onde  $\nu$  é o volume do espaço  $\eta$  avaliado para o fluxo da probabilidade.

O decaimento de estados metaestáveis estudados através teoria da nucleação de Langer, nos permitiu quantificar o número de bolhas críticas criadas, o qual é representado por uma taxa de nucleação. Esta taxa de nucleação, só é válida para transições de fase com um tempo de duração muito pequeno. Nós podemos pensar, por exemplo, na transição de fase da água, da fase líquida para a fase de vapor. Esta teoria de nucleação não só se limita aos casos comumente conhecidos, as implicações são muitas e variadas, como os mencionados na parte da introdução deste trabalho. Assim, decaimentos de estados metaestáveis é o que podemos ver em potenciais  $\lambda\phi^4$  com um termo que quebra a simetria e, assim, gerar metaestabilidade. Este e outros sistemas que apresentam metaestabilidade é o que estudaremos no próximo capítulo.

## 2 NUCLEAÇÃO EM SISTEMAS BOSÔNICOS

Um modelo simples para estudar a nucleação e as transições de fase de primeira ordem é através da teoria de campos de  $\lambda\phi^4$  com um pequeno termo de quebra de simetria explícito, que quebra a degenerescência entre os estados de menor energia (estado estável ou mínimo global) e por tanto conduzir à existência de um estado metaestável (mínimo local). Veremos agora como estos decaimentos de estados metaestáveis podem ser feitos em  $(1 + 1)$  e  $(2 + 1)$  dimensões através de diferentes potenciais.

### 2.1 Decaimento de estados metaestáveis em $(1+1)D$ através de um potencial quártico efetivo

Consideremos um campo escalar real  $\phi(x)$ , cuja dinâmica é determinada mediante a seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\nu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad (9)$$

onde  $V(\phi)$  é um poço de potencial duplo com um mínimo metaestável,  $\phi_-$  e um mínimo estável,  $\phi_+$ . O qual pode ser parametrizado da seguinte forma (KLINKHAMER; MANTON, 1984):

$$V(\phi) = \lambda(\phi - \phi_-)^2\phi(\phi - \phi_*). \quad (10)$$

Esta forma de potencial esta ilustrada na figura 5.

O mínimo estável  $\phi_+$  é dado por

$$\phi_+ = \frac{1}{8}\left(2\phi_- + 3\phi_* - \sqrt{4\phi_-^2 + 9\phi_*^2 - 4\phi_- \phi_*}\right). \quad (11)$$

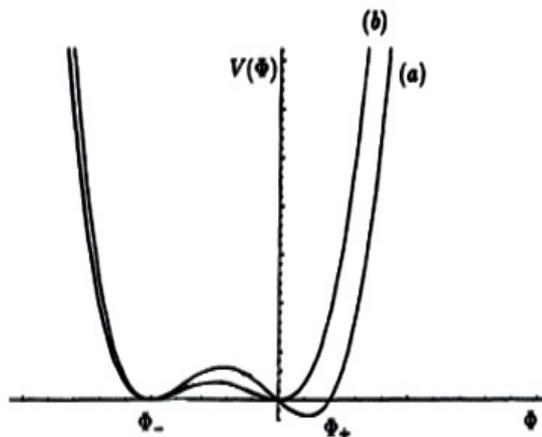
Aqui o ponto  $\phi_*$  é parametrizado mediante a massa  $m$  de pequenas oscilações harmônicas ao redor do mínimo metaestável  $\phi_-$  como

$$\phi_* = \phi_-(1 - \epsilon) \quad (12)$$

com

$$\epsilon = \frac{m^2}{2\lambda\phi_-^2}, \quad m^2 = V''(\phi_-), \quad (13)$$

e  $\lambda$  é uma constante de acoplamiento quártico.

Figura 5 -  $V(\phi)$  vs  $\phi$ 

Legenda: Quando  $\phi_-(x)$ , é um estado metaestável (a) e um estado degenerado (b).

Fonte: KLINKHAMER; MANTON, 1984, p, 2212.

É importante ressaltar que  $\epsilon$  representa a “profundidade” do poço ou medida do estado metatestável global  $\phi^+(x)$ . Se esta profundidade  $\epsilon \rightarrow 0$ , então  $\phi^*(x) = \phi_-(x)$  e, por conseguinte, o estado de energia mais baixo  $\phi_+(x) = 1/4\phi_-(x)$ . Se analisamos o potencial  $V(x)$  sob estas características, vemos que esta tem um mínimo local  $\phi_{\text{mín.}}(x) = 1/4\phi_-(x)$ . Assim, podemos concluir que o sistema apresenta estados degenerados quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . A solução da equação de movimento que descreve nosso sistema sob o Lagrangiano  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\nu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$ , é o que vamos discutir na próxima seção. De fato, esta solução unidimensional tem que apresentar mínimos locais e globais nos limites assintóticos. Isto é, esta solução representa a formação ou nucleação de uma bolha em uma dimensão. Finalmente, como veremos mais adiante, esta solução unidimensional irá permitir-nos a compreender melhor a nucleação em sistemas de duas dimensões.

### 2.1.1 Sphaleron

A nucleação, entendida através do decaimento de estados metaestáveis, implica uma transição sobre uma barreira. Klinkhamer e Manton (KLINKHAMER; MANTON, 1984) sugeriram que estas transições sobre uma barreira correspondem a configurações estáticas que extremizam a energia funcional pelo menos com um modo inestável. Estes autores chamaram a esta configuração de o *sphaleron*  $\phi_{\text{sph}}(x)$ . Tal expressão para o sphaleron, apresenta uma configuração de campo que começa em um mínimo local ou falso vácuo  $\phi_-(x)$ , para em seguida quase atingir o mínimo global ou verdadeiro vácuo  $\phi_+(x)$ , e retornar para  $\phi_-(x)$ .

Em um caso estacionário, uma solução da equação de movimento satisfaz:

$$-\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \frac{\partial V[\phi(x)]}{\partial\phi(x)} = 0. \quad (14)$$

Esta equação é similar à descrição do movimento de uma partícula no “tempo” (aqui denotado por  $x$ ) sob um potencial  $-V[\phi(x)]$ . A solução que começa em  $\phi_-(x)$  com  $x \rightarrow -\infty$  e volta para  $\phi_-(x)$  com  $x \rightarrow +\infty$  é facilmente encontrada (CARVALHO; BONATO; COSTAMILAN, 1989):

$$\phi_{sph}(x) = \phi_-(x) + \frac{m}{2\sqrt{2\lambda}} \left[ \tanh\left(\frac{m}{2}(x - x_0) + s_0\right) - \tanh\left(\frac{m}{2}(x - x_0) - s_0\right) \right], \quad (15)$$

$$\text{tal que } s_0 = \frac{1}{2} \arccos\left[\frac{\epsilon + 1}{\epsilon - 1}\right], \quad (16)$$

$$\text{e } \epsilon = \frac{m^2}{2\lambda\phi_-^2}. \quad (17)$$

Aqui  $x_0$  é uma constante de integração arbitrária e reflete a invariância translacional das equações de movimento. Esta solução  $\phi_{sph}(x)$ , corresponde para um par torção – antitorção<sup>5</sup> ou uma bolha com um raio  $2s_0/m$ , e é similar à *solução de um polaron* encontrados em polímeros quasi unidimensionais (CARVALHO, 1989).

O parâmetro adimensional  $\epsilon$ , representa a “profundidade” do poço ou medida do mínimo global  $\phi_+(x)$ . Por outro lado, quando  $\epsilon \rightarrow 1$  o sistema apresenta degeneração nos estados de menor energia, ou seja, não temos estados metaestáveis locais o globais, e  $s_0 \rightarrow \infty$ .

A particularidade  $\epsilon \approx 1$ ; e  $s_0 \gg 1$ , correspondente para uma bolha de *parede fina* pelo qual o raio é muito maior que a largura ou “pele” da bolha unidimensional  $\xi = 2/m$ , como o mostrado na figura 6.

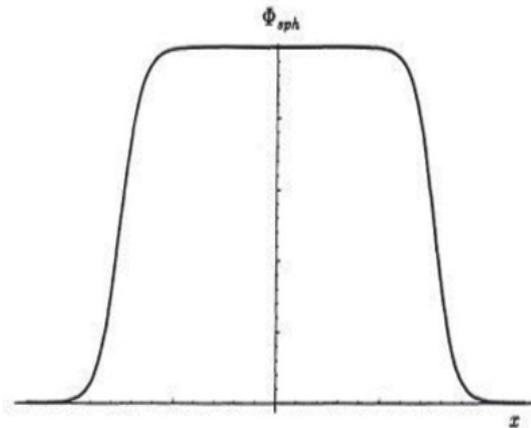
## 2.2 Decaimento de estados metaestáveis em (2+1)D através de um potencial com simetria nemática

A análise bidimensional da teoria da nucleação está enmarcada no estudo da orientação anisotrópica metaestável de um fluido de Hall quântico nemático (BARCI; ARENAS, 2008). Um estado nemático é entendido como um estado com ordem orientacional,

---

<sup>5</sup> O termo torção – antitorção vem da configuração da solução de uma equação diferencial unidimensional estacionária de primeira ordem, ou seja o sóliton. É assim que temos um sóliton (torção) =  $m/(2\sqrt{2\lambda}) \tanh(m/2(x - x_0) + s_0)$  e um antisóliton (antitorção) =  $m/(2\sqrt{2\lambda}) \tanh(m/2(x - x_0) - s_0)$ .

Figura 6 - Sphaleron



Legenda:  $\phi_{sph}(x)$  vs  $x$  para um sphaleron (bolha) de “parede fina”  $x/\xi$ .

Fonte: KLINKHAMER; MANTON, 1984, p. 2213.

ou estado anisotrópico, e que forma um ângulo  $\theta$  com seu eixo de orientação . Este estado apresenta uma simetria,  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ . Em duas dimensões, esta propriedade é codificada na definição do parâmetro de ordem complexo,  $Q = \rho e^{i2\theta}$ , com o argumento  $2\theta$  garantindo a simetria nemática. A dinâmica dos modos de baixas energias é governado pela hamiltoniana efetiva do modelo  $XY$  (Ver apêndice A).

$$H = \int d^2x \frac{J}{2} |\nabla\theta|^2 + V(\theta), \quad (18)$$

aqui  $J$  é a escala de energia típica da transição de fase Kosterlitz-Thouless (KOSTERLITZ; THOULESS, 1973) e  $V(\theta)$  é justamente nosso potencial que apresenta mínimos metaestáveis que especifica quebras de invariância rotacional, mas preserva a simetria nemática, isto é ,  $V(\theta) = V(\theta + \pi)$ .

O qual nos permite parametrizar o potencial em termos dos coeficientes de Fourier pares

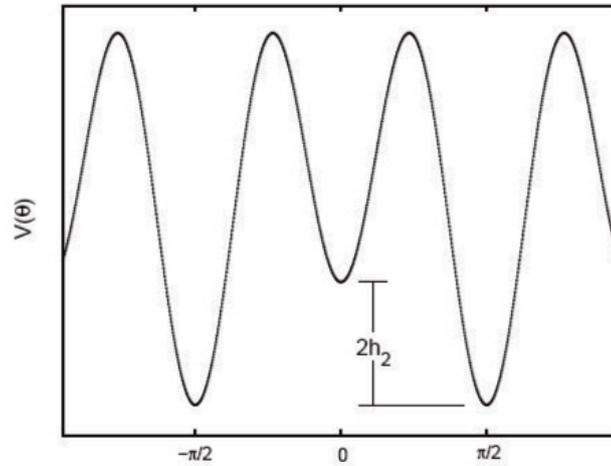
$$V(\theta) = \sum_n h_{2n} \cos(2n\theta), \quad (19)$$

aqui  $h_2$  esta relacionado con um campo externo nemático,  $h_4$  é um coeficiente de quebra de simetria com simetria tetragonal.

O estabelecimento de mínimos locais e mínimos globais, faz que consideremos o estudo de harmônicos nos campos externos. Para este propósito analisamos o efeito do segundo termo,  $n = 2$ , para o potencial proposto anteriormente (19). Isto é, consideramos o potencial da seguinte forma

$$V(\theta) = h_2 \cos(2\theta) - h_4 \cos(4\theta), \quad (20)$$

Figura 7 - Potencial:  $V(\theta) = h_2 \cos(2\theta) - h_4 \cos(4\theta)$



Legenda: Potencial da equação (20) com  $h_2 < 4h_4$ . Estados metaestáveis com  $\theta = n\pi$ , estados estáveis com  $\theta = \pi(2n + 1)/2$ , para  $n = 0, \pm 1 \dots$

Fonte: BARCI; ARENAS, 2008, p. 085303-3.

com  $h_2 > 0$  e  $h_4 > 0$ , coeficientes que medem os pesos relativos da componente nemática e tetragonal respectivamente. A estrutura de mínimos e máximos é fixado pela relação  $h_2 < 4h_4$ , ver figura 7, o qual permite estabelecer um mínimo local com  $\theta = n\pi$  e um mínimo global ou estado de menor energia com  $\theta = \pi(2n + 1)/2$  para  $n = 0, \pm 1 \dots$ . Por outro lado, o potencial apresenta um máximo com  $\cos(\theta_{Max}) = h_2/(4h_4)$ . A diferença entre o mínimo estável e o mínimo metaestável é  $2h_2$ .

A dinâmica do decaimento de estados metaestáveis em sistemas bidimensionais é determinada mediante o domínio de energia que, em geral, é uma “competição ” entre uma contribuição do volume (proporcional ao área) e um termo de fronteira da bolha (proporcional ao perímetro)

Consideramos a nossa solução bidimensional como uma bolha com simetria esférica de raio  $R$  como o descrito na figura 8. Na aproximação de parede fina, ou seja, quando a largura da parede é menor que o raio, a contribuição do volume e a fronteira da bolha para a energia esta definido mediante

$$E(R) = -\pi\Delta\mathcal{F}R^2 + 2\pi\sigma R \quad (21)$$

aqui  $\Delta\mathcal{F} = |V(\phi_+, T) - V(\phi_-, T)|$  é a diferença de energia entre os estados metaestáveis ( $\phi_+$ ) e estáveis ( $\phi_-$ ) por unidade de área e  $\sigma$  é a tensão superficial.

Figura 8 - Bolha simétrica



Legenda: Gráfico de uma bolha simétrica

Fonte: BARCI; ARENAS, 2008, p. 085303-3.

A energia,  $E(R) = -\pi\Delta\mathcal{F}R^2 + 2\pi\sigma R$ , tal e como está expressado, representa como já dissemos, uma “competição” entre o volume e seu perímetro para alcançar um equilíbrio. Isto é, para um raio pequeno o termo preponderante na energia é o que nos brinda  $2\pi\sigma R$ , enquanto que, para raios grandes, o termo a ser tomado em conta é  $-\pi\Delta\mathcal{F}R^2$ . Devido a esta competição entre os dois termos na energia, podemos obter alguns resultados dela, obtendo seus pontos críticos, ou seja,  $\frac{dE(R)}{dR}|_{R=R_c} = 0$ . O raio crítico,  $R_c = \frac{\sigma}{\Delta\mathcal{F}}$ . A energia máxima ou energia crítica,  $E_c = \pi\frac{\sigma^2}{\Delta\mathcal{F}}$ . Obtendo assim, uma bolha em um estado de equilíbrio. As bolhas supercríticas obtidas quando  $R > R_c$ , podem crescer para preencher toda a área com o estado de menor energia, estado estável. Enquanto que uma bolha subcrítica obtidas quando  $R < R_c$ , pode encolher-se até desaparecer. As duas contribuições são importantes em uma transição de fase, desde que o mecanismo atual é dado através de flutuações térmicas de comprimento de onda grandes aleatorias que geram todo tipo de bolhas. Algumas delas crescem e outras podem desaparecer. Neste sentido, uma transição de fase é completada quando o estado estável percola o volume disponível. Naturalmente podemos obter, a partir da solução da bolha crítica, alguns parâmetros relacionados a esta bolha como por exemplo, a *taxa de nucleação* por unidade de área

$$\Gamma = \Omega\mathcal{D} e^{-E_c/T}, \quad (22)$$

aqui  $E_c$  é a energia de uma bolha crítica,  $T$  é a temperatura de equilíbrio final,  $\Omega$  é o crescimento médio de uma bolha supercrítica e o prefactor  $\mathcal{D}$  é obtido através de cálculos

de flutuações ao redor do perfil de uma bolha supercrítica.

A referência (VOLOSHIN, 1985) demonstra que uma análise bidimensional, e na aproximação de parede fina ( $\Delta\mathcal{F} \rightarrow 0$ ), a taxa de nucleação é expressada em termos de variáveis macroscópicas  $\Delta\mathcal{F}$  em contraste com a nucleação em três dimensões, que leva em conta quantidades quânticas microscópicas. Por tanto podemos escrever a equação (22) novamente como

$$\Gamma = \frac{\Delta\mathcal{F}}{2\pi\hbar} e^{-E_c/T}, \quad (23)$$

o qual curiosamente não tem correções em séries de potências de parâmetros adimensionais de parede fina (VOLOSHIN, 1985)  $\frac{\Delta\mathcal{F}T}{\sigma^2}$ .

Também podemos obter o tempo típico para completar uma transição considerando apenas um evento

$$\tau = \frac{1}{\Gamma A} = \frac{2\pi\hbar}{\Delta\mathcal{F}A} e^{E_c/T}, \quad (24)$$

aqui  $\tau$  é o tempo estimado para completar uma transição de fase.  $\Gamma$  é a taxa de nucleação por unidade de área e  $A$  é a área de uma mostra considerada. É importante observar, que esta aproximação é válida, desde que a taxa de nucleação seja suficientemente pequena.

### 2.3 Bolha crítica nemática $\theta_b(r - R_c)$ e a aproximação de parede fina $\xi/R_c \ll 1$

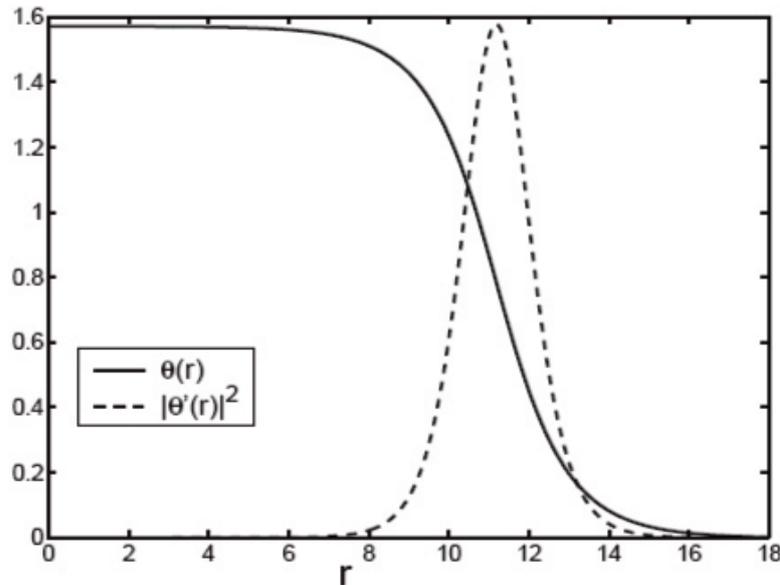
A igual que no Sphaleron, caso unidimensional; uma bolha crítica é uma configuração de campo estático, que neste caso apresenta simetria radial, e é determinada através da equação diferencial que já estamos habituados a ver:

$$\nabla^2\theta - \frac{1}{J} \frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta} = 0, \quad (25)$$

com as condições de fronteira  $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r) = 0$  e  $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta'(r) = 0$ .  $V(\theta)$  é o potencial da equação (20).

A solução desta equação diferencial tem uma configuração semelhante ao de uma bolha que começa fechada ( $r = 0$ ) para o estado fundamental ou estado estável,  $\theta = \pi/2$ , com energia,  $E_-$  e posteriormente percolar até um estado metaestável,  $\theta = 0$ , com distâncias assintoticamente longas ( $r \rightarrow \infty$ ) e energia  $E_+$ . A mudança desde um estado estável para um estado metaestável ocorre em torno de um raio crítico  $R_c$ , sobre uma distância  $\xi$  que define a largura da parede da bolha, e que está relacionada com o comprimento de correlação na fase metaestável. A figura 9 ilustra uma configuração típica de esta bolha.

Figura 9 - Configuração típica de uma bolha com simetria radial.



Legenda: A linha contínua representa a uma bolha que começa fechada em  $\theta = \pi/2$  (mínimo global) e percola para  $\theta = 0$  (mínimo local) com distâncias assintoticamente longas.

Fonte: BARCI; ARENAS, 2008, p. 085303-4.

Resolver a equação diferencial (25) é muito complicada analiticamente. Em estas circunstâncias e tendo em conta o comportamento da bolha em seus estados metaestáveis, isto é, tendo em conta  $R_c$  e  $\xi$  como parâmetros variacionais, os quais podem ser calculados extremizando a energia crítica. Podemos propor um *ansatz* (BARCI; ARENAS, 2008) da seguinte forma:

$$\theta_b(r) = \frac{\pi}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{r - R_c}{\xi} \right) \right]. \quad (26)$$

Este ansatz está inspirado no problema de um potencial quártico assimétrico, como no caso unidimensional (CARVALHO, 1989), (CARVALHO; BONATO; COSTAMILAN, 1989) e tem como soluções aos sphaleron. Na aproximação de parede fina para uma bolha,  $\xi/R_c \ll 1$ , este ansatz corresponde a uma solução exata do problema.

Sustituindo o ansatz, equação (26) dentro do Hamiltoniano do sistema (18), obtemos a energia da bolha como função dos parâmetros variacionais,  $R_c$  e  $\xi$ ,

$$E(R_c, \xi) = \int d^2x \frac{J}{2} \left| \nabla \theta_b(r, R_c, \xi) \right|^2 + V(\theta_b(r, R_c, \xi)). \quad (27)$$

Integrando até a primeira ordem em  $\xi/R_c$  encontramos uma expressão similar à já esta-

belecida em (21),

$$E(R_c, \xi) = -\pi \Delta \mathcal{F} R_c^2 + 2\pi \sigma(\xi) R_c + O((\xi/R_c)^2), \quad (28)$$

onde como já sabemos,

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F} &= |V(\phi_+, T) - V(\phi_-, T)| = V(0) - V(\pi/2) \\ &= h_2 - h_4 - (-h_2 - h_4) \end{aligned}$$

$$\Delta \mathcal{F} = 2h_2. \quad (29)$$

Por outro lado,  $\sigma(\xi)$  tem contribuições desde ambos termos da equação (27); da integral e do potencial, esta é estabelecida por:

$$\sigma(\xi) = \frac{\pi^2}{32} \left( \frac{\pi J}{2 \xi} + 0.39 V''(0) \xi \right). \quad (30)$$

O primeiro termo é devido à contribuição do gradiente e cresce quando a largura da parede da bolha é reduzida. Contrariamente ao que acontece no segundo termo que tem um incremento linear de  $\xi$ . Por tanto podemos fixar este parâmetro estabelecendo uma solução estacionária

$$\frac{\partial E(R_c, \xi)}{\partial \xi} = 2\pi R_c \frac{d\sigma}{d\xi} = 0 \quad (31)$$

que ao substituir (30) em (31), obtemos

$$\begin{aligned} \xi &= 2\sqrt{\frac{J}{V''(0)}} \\ \xi &= \sqrt{\frac{J}{4h_4 - h_2}}. \end{aligned} \quad (32)$$

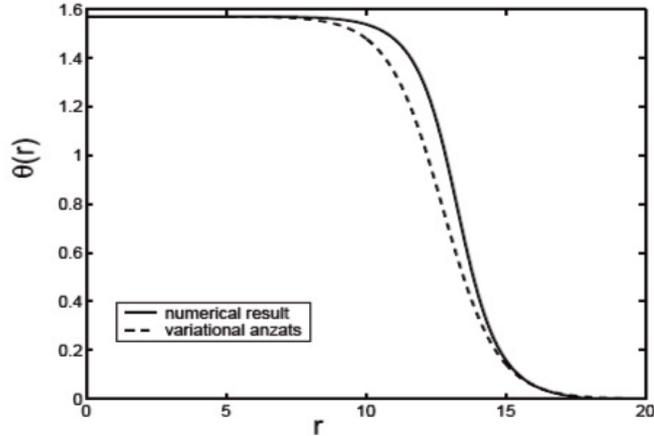
Por tanto de (30), podemos obter uma solução aproximada para a tensão superficial da forma:

$$\sigma(\xi) \approx \frac{J}{\xi} = \sqrt{J(4h_4 - h_2)}. \quad (33)$$

Naturalmente podemos encontrar os pontos críticos da energia  $E$ , como o raio crítico  $R_c$ , impondo:

$$\frac{\partial E(R_c, \xi)}{\partial R_c} = -2\pi R_c \Delta \mathcal{F} + 2\pi \sigma(\xi) = 0 \quad (34)$$

Figura 10 - Ansatz variacional.



Legenda: Comparação entre uma solução numérica (linha contínua) e o ansatz variacional (26) (linha cortada).

Fonte: BARCI; ARENAS, 2008, p. 085303-4.

Obtendo:

$$R_c = \frac{\sigma}{\Delta\mathcal{F}} = \frac{\sqrt{J(4h_4 - h_2)}}{2h_2}. \quad (35)$$

Ao substituir (29), (33) y (35) em (28) obtemos uma expressão para a energia da bolha crítica:

$$E_c = J\frac{\pi}{2} \left( \frac{4h_4}{h_2} - 1 \right). \quad (36)$$

Lembramos que na aproximação de parede fina para a bolha crítica, estabelecemos que  $\xi/R_c \ll 1$ , isto faz que também podamos restringir nossos parâmetros  $h_2$  e  $h_4$  à seguinte expressão

$$2 \left( \frac{4h_4}{h_2} - 1 \right)^{-1} \ll 1. \quad (37)$$

Finalmente, o ansatz ficaria expreso através destes parâmetros da seguinte forma

$$\theta_b(r) = \frac{\pi}{4} \left\{ 1 - \tanh \left[ \frac{\sqrt{(4h_4 - h_2)}}{J} \left( r - \frac{\sqrt{J(4h_4 - h_2)}}{2h_2} \right) \right] \right\}, \quad (38)$$

e que por meio de cálculos numéricos, podemos darnos conta que é uma boa aproximação para a solução da equação diferencial (25). (BARCI; ARENAS, 2008). Figura 10.

### 3 EFEITOS DA NUCLEAÇÃO EM SISTEMAS FERMIONIÇOS DE DIRAC EM (2+1) DIMENSÕES

#### 3.1 Introdução

O objetivo fundamental deste trabalho é estudar o efeito que tem os bósons, através da nucleação, em sistemas fermiônicos de um campo de Dirac  $\psi_F(r, \theta, t)$  em (2+1) dimensões, ou seja, estudar um sistema descrito pela densidade lagrangiana  $\mathcal{L}[\bar{\psi}, \psi, \theta] = \mathcal{L}[\bar{\psi}, \psi] + \mathcal{L}[\theta] + \mathcal{L}_I[\bar{\psi}, \psi, \theta]$ . A qual representa as densidades lagrangianas para os férmions, bósons e a interação entre eles respetivamente.

Em principio, sistemas fermiônicos de um campo de Dirac bidimensional livre  $\mathcal{L}[\bar{\psi}, \psi]$  sem interação com os bósons, podem ser estudados através do mecanismo de Callan-Harvey (C-H) (CALLAN JR; HARVEY, 1985). Este mecanismo C-H explica a *existência e propriedades de modos zeros quirais fermiônicos, e que aparecem sempre e quando, a massa local  $M(\hat{x})$  de um campo de Dirac  $\psi_F$  em  $2k+1$  dimensões ( $k = 1, 2, \dots$ ) tenha um defeito de parede de domínio*. De fato, trabalhos feitos (FOSCO; LOPEZ, 1999) para uma massa local com defeito linear mostram o surgimento de modos zeros quirais  $\phi_0(x) = N_0 e^{-1/2|M'(0)|x^2}$  localizados ao redor dele, corroborando assim o mecanismo de C-H. A generalização (FOSCO; TORROBA, 2003) deste mecanismo, para o caso das ações com um termo de massa não local para os férmions, mostra também a existencia e propriedades de modos zeros quirais localizados. Por tanto, sistemas fermiônicos quando a massa é não local, podem ser consistentemente estudados.

Por outro lado, no capítulo anterior analisamos o termo  $\mathcal{L}[\theta]$  de forma isolada dos férmions de nossa densidade lagrangiana  $\mathcal{L}[\bar{\psi}, \psi, \theta]$  através da teoria de nucleação de Langer e do modelo  $XY$  (descrevendo uma fase nemática quântica efetiva). Este sistema submetido a um potencial externo de quebra de simetria  $V(\theta) = h_2 \cos(2\theta) - h_4 \cos(4\theta)$ , no qual o primeiro termo  $h_2 \cos(2\theta)$  tem simetria nemática e o segundo termo  $h_4 \cos(4\theta)$  tem simetria tetragonal, apresenta como solução estacionária, uma "bolha" crítica nemática com simetria radial  $\theta_b(r - R_c)$  que descreve um mínimo global com  $\theta = \pi/2$  ( $r = 0$ ) e um mínimo local com  $\theta = 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ).

Resta agora por entender a forma do termo de interação  $\mathcal{L}_I[\bar{\psi}, \psi, \theta]$  em nosso sistema  $\mathcal{L}[\bar{\psi}, \psi, \theta]$ . Se consideramos a natureza estrutural da funcional geradora  $Z$  de nosso sistema, ela leva consigo a uma integração sobre a ação do sistema  $S[\bar{\psi}, \psi, \theta] = \int d^3x \mathcal{L}[\bar{\psi}, \psi, \theta]$ , mas, se nós fazemos uma aproximação semiclássica ao redor da solução  $\theta_b(r - R_c)$  que extremiza a ação bósonica  $S[\theta]$ , ficaríamos apenas com uma funcional ge-

radora expressa através de uma ação funcional  $S[\bar{\psi}, \psi, \theta_b]$ . Esta aproximação semiclássica só é possível se a constante de acoplamento entre bósons e férmions é muito pequena. Por tanto,  $\mathcal{L}_I[\bar{\psi}, \psi, \theta]$  depois da aproximação semiclássica ficaria como  $\mathcal{L}_I[\bar{\psi}, \psi, \theta_b]$ , o qual levaria com ela o termo de uma “nova” massa fermiônica. Esta nova massa mantém a simetria nemática através do argumento dela  $2\theta$ . A natureza radial desta massa local faz que a consideremos como um defeito circular de parede fina, porém podemos estudá-la através do formalismo matemático feito na referência (FOSCO; LOPEZ, 1999).

Como veremos mais adiante, a aparição dos modos zeros quirais localizados é natural. O desenvolvimento sistemático de todo o exposto aqui será feito, primeiro, estudando de maneira geral as propriedades dos férmions de Dirac com uma massa com defeito circular, logo faremos algumas aproximações para esta massa, e finalmente estudaremos as correntes quirais.

## 3.2 Férmions na presença de uma parede de domínio

### 3.2.1 Expressão geral para a ação fermiônica

Consideremos a ação  $S$ , para férmions de Dirac em  $2 + 1$  dimensões Euclidianas na presença de um campo de gauge Abelianiano  $A_\mu$  e uma massa com quebra de paridade e dependência espacial  $M(\vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ . Esta ação fermiônica é estabelecida como:

$$S = \int d^3x \bar{\psi}_E(x) \left( \gamma_\mu \partial_\mu + ie\gamma_\mu A_\mu + M(\vec{x}) \right) \psi_E(x) \quad (39)$$

com  $x = (\vec{x}, x_3)$ , sendo  $x_3$  a coordenada temporal Euclideana. As matrizes de Dirac  $\gamma_\mu$  são Hermitianas  $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$  além de cumprir a seguinte relação:<sup>6</sup>

$$\gamma_\mu = \sigma_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3. \quad (40)$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (41)$$

---

<sup>6</sup> Aqui  $\sigma_\mu$  são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mediante definição, a massa fermiônica  $M(\vec{x})$  tem um defeito de parede de domínio implicando assim uma mudança de sinal. Estes defeitos são provenientes das regiões onde a superfície se estende através da função  $M(\vec{x})$  e cruza o plano  $M(\vec{x}) = 0$ . Esta idéia pode ser estendida para uma curva qualquer com defeitos de parede de domínio, como é o caso de um defeito circular o qual consideramos a massa como positiva em seu interior e com um raio crítico. Naturalmente esta curva que representa a massa pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \vec{x}(\tau), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \\ M(\vec{x}(\tau)) &= 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \end{aligned} \tag{42}$$

A análise seguinte será estabelecer uma estrutura apropriada para a configuração da massa, tendo em consideração o acima exposto.

### 3.2.2 Expressão paramétrica geral para a ação fermiônica

Considerando a referência (FOSCO; LOPEZ, 1999) como base de nosso estudo, o qual incorpora uma configuração para a massa com dependência espacial linear; nós estudaremos o caso da configuração da massa com um defeito de parede de domínio circular.

A parametrização de uma curva definida em termos do parâmetro de comprimento de arco  $s$  é

$$\begin{aligned} s(\tau) &= \int_{\tau_1}^{\tau} d\tau' \sqrt{\frac{d\vec{x}(\tau')}{d\tau'} \cdot \frac{d\vec{x}(\tau')}{d\tau'}}, \\ s &\longrightarrow \vec{x}(s), \quad s \in [0, L], \end{aligned} \tag{43}$$

sendo  $L$  o comprimento total da curva. Esta parametrização é definida através dos vetores tangente, normal e binormal, e são denotados por  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ , e  $\vec{e}_3$  respectivamente. Como é usual, estes vetores tem a seguinte forma

$$\vec{e}_1 = \frac{d}{ds} \vec{x}(s), \quad \vec{e}_2 = \pm \left\| \frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} \right\|^{-1} \frac{d\vec{e}_1}{ds}. \tag{44}$$

Devido a que a curva é plana, podemos então escrever o vetor normal de maneira mais

simples como:

$$e_2^j = \epsilon^{jk} e_1^k \quad (45)$$

que é explicitamente ortogonal ao vetor tangente  $\vec{e}_1$ . Devido às características destes vetores que definem a curva, pode-se estabelecer que  $\vec{e}_3$  seja um vetor constante e apontando numa terceira direção, isto é, podemos escrever  $\det[e_j^i] = +1$ .

Agora bem, se denotamos por  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  aos parâmetros descrevendo os pontos ao longo de cada uma das integrais de linha, então a ação correspondente para a região ao redor do defeito é

$$\begin{aligned} S &= \int d^3u \det[e_j^i] \bar{\psi}_E \left[ \gamma_\alpha e_\alpha^i \mathcal{D} + M(u_1) \right] \psi_E , \\ &= \int d^3u \det[e_j^i] \bar{\psi}_E \left[ \gamma_\alpha e_\alpha^i (\partial_i + ieA_i) + M(u_1) \right] \psi_E , \end{aligned} \quad (46)$$

notamos que o  $\det[e_j^i] = 1$ ,  $e_\alpha^i \partial_i$  é a derivada direcional ao longo da integral curvilínea  $\alpha$  e  $e_\alpha^i A_i$  é a componente do campo de gauge ao longo da mesma direção. A equação (46) é uma expressão paramétrica geral para a ação Euclideana fermiônica. Da ação Euclideana fermiônica, equação (46), podemos considerar algumas características para o campo de gauge Abeliano, isto é, a configuração do campo de gauge é de tal forma que

$$F_{2\mu} = 0, \quad \mu = 1, 3 \quad (47)$$

que corresponde naturalmente a não ter um campo magnético,  $F_{21} = 0$ , assim como também não ter um campo elétrico perpendicular ao defeito,  $F_{23} = 0$ . Estas condições permanecem invariantes ante o gauge  $A_2 = 0$ , é dizer:

$$\partial_2 A_\mu = 0, \quad \mu = 1, 3. \quad (48)$$

Com estas considerações feitas para o campo de gauge, a ação (46) ficaria expressa como

$$S = \int d^3u \bar{\psi}_F \left[ \gamma_1 \mathcal{D}_{u_1} + \gamma_2 \partial_{u_2} + \gamma_3 \mathcal{D}_{u_3} + M(u_2) \right] \psi_F . \quad (49)$$

### 3.2.3 Defeito circular

A parametrização para um defeito circular de raio  $R$  e massa positiva dentro do círculo permite fazer uma eleição conveniente das coordenadas polares, com a parametrização usual em termos do comprimento de arco  $s$ . Por tanto temos que:

$$\vec{x} = R \left( \cos(s/R), \sin(s/R) \right), \quad 0 \leq s \leq 2\pi R. \quad (50)$$

Os vetores tangente e normal são desde logo

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \left( -\sin(s/R), \cos(s/R) \right), \\ \vec{e}_2 &= \left( \cos(s/R), \sin(s/R) \right). \end{aligned} \quad (51)$$

As coordenadas locais são definidas como:  $u_1 = r\theta$ , com  $r$  igual à distância radial para a origem e  $\theta$  o ângulo polar.  $u_2 = r - R$  e  $u_3 = t$ . Por tanto de (49), a ação fermiônica Euclideana para um defeito circular  $S_C$  com uma largura  $\Delta$ , em função dos termos  $r$ ,  $\theta$ , e  $t$ , toma a seguinte forma:

$$S_C = \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int dt \bar{\psi}_F(r, \theta, t) \left[ \frac{1}{r} \gamma_1 (\partial_\theta + ieA_\theta) + \gamma_2 \partial_r + \gamma_3 \mathcal{D}_t + M(r - R) \right] \psi_F(r, \theta, t), \quad (52)$$

que também pode ser escrita como:

$$S_C = \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \bar{\psi}_F(r, \hat{x}) \mathcal{D} \psi_F(r, \hat{x}), \quad (53)$$

sendo  $\hat{x} = (\theta, t)$  e

$$\mathcal{D} = \frac{1}{r} \gamma_1 (\partial_\theta + ieA_\theta) + \gamma_2 \partial_r + \gamma_3 \mathcal{D}_t + M(r - R). \quad (54)$$

Mas podemos reescrever o operador  $\mathcal{D}$  da seguinte forma:

$$\mathcal{D} = (a + \bar{d})\mathcal{P}_L + (a^\dagger + \bar{d})\mathcal{P}_R, \quad (55)$$

com  $a$  e  $a^\dagger$  operadores atuando em função de  $r$

$$a = \partial_r + M(r - R) \quad , \quad a^\dagger = -\partial_r + M(r - R), \quad (56)$$

$\mathcal{P}_L$  e  $\mathcal{P}_R$  são os projetores ao longo do espaço propio da matriz  $\gamma_2$ :

$$\mathcal{P}_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_2) \quad , \quad \mathcal{P}_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_2) \quad (57)$$

e  $\bar{d}$  é o operador de Dirac Euclidean bidimensional em função das coordenadas  $\theta$  e  $t$ , que simplificamos através da notação  $\hat{x}$

$$\bar{d} = \frac{1}{r}\gamma_1\left(\partial_\theta + ieA_\theta(\hat{x})\right) + \gamma_3\left(\partial_t + ieA_t(\hat{x})\right). \quad (58)$$

Agora bem, como  $\mathcal{D}$  é não hermitiano, então podemos formar um operador hermitiano positivo da seguinte forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}, \quad (59)$$

e assim chegamos à seguinte expressão

$$\mathcal{H} = (h - \bar{d}^2)\mathcal{P}_L + (\bar{h} - \bar{d}^2)\mathcal{P}_R, \quad (60)$$

com  $h = a^\dagger a$  e  $\bar{h} = a a^\dagger$ . A expressão para  $h$  e  $\bar{h}$  nos faz pensar em uma configuração adequada para o campo fermiônico  $\psi_F(r, \hat{x})$  que de alguma forma pode se integrar sobre

a variável  $r$ , é dizer, podemos expandir o campo fermiônico através de suas autofunções :

$$\begin{aligned}
\psi_F(r, \hat{x}) &\propto \sum_n \phi_n(r) \psi_n(\hat{x}), \\
\psi_F(r, \hat{x}) &= \sum_n \left[ \phi_n(r) \psi_L^{(n)}(\hat{x}) + \tilde{\phi}_n(r) \psi_R^{(n)}(\hat{x}) \right], \\
\bar{\psi}_F(r, \hat{x}) &= \sum_m \left[ \bar{\psi}_L^{(m)}(\hat{x}) \phi_m^\dagger(r) + \bar{\psi}_R^{(m)}(\hat{x}) \tilde{\phi}_m^\dagger(r) \right], \tag{61}
\end{aligned}$$

onde  $L$  e  $R$  descrevem a quiralidade definida através da matriz  $\gamma_2$ . Fazendo uso das relações  $\psi_{L,R}^n(\hat{x}) = \mathcal{P}_{L,R} \psi^n$  y  $\bar{\psi}_{L,R}^n(\hat{x}) = \bar{\psi}^n \mathcal{P}_{R,L}$ , escrevemos

$$\begin{aligned}
h\phi_n(r) &= \lambda_n^2 \phi_n(r) \quad , \quad \bar{h}\tilde{\phi}_n(r) = \lambda_n^2 \tilde{\phi}_n(r) \\
\langle \phi_n | \phi_m \rangle &= \delta_{n,m} \quad , \quad \langle \tilde{\phi}_n | \tilde{\phi}_m \rangle = \delta_{n,m}. \tag{62}
\end{aligned}$$

Com a observação de que o  $\lambda_n \in \Re^+$  e é o mesmo para  $h$  y  $\bar{h}$ . Por outro lado, para qualquer  $\phi_n$  com  $\lambda_n \neq 0$ , então existe uma autofunção com autovalores idênticos, ou seja:

$$\begin{aligned}
h\phi_n(r) &= \lambda_n^2 \phi_n(r) \\
a^\dagger a [\phi_n(r)] &= \lambda_n^2 [\phi_n(r)] \\
aa^\dagger \left[ \frac{1}{\lambda_n} a\phi_n(r) \right] &= \lambda_n^2 \left[ \frac{1}{\lambda_n} a\phi_n(r) \right] \\
\bar{h} \left[ \frac{1}{\lambda_n} a\phi_n(r) \right] &= \lambda_n^2 \left[ \frac{1}{\lambda_n} a\phi_n(r) \right]. \tag{63}
\end{aligned}$$

Por tanto as autofunções de  $\bar{h}$  são  $\frac{1}{\lambda_n} a\phi_n(r)$  com o mesmo espectro que  $h$ ,  $\lambda_n^2$ .

Agora bem, se expressâmos  $\psi_F(r, \hat{x})$  através da expansão de suas autofunções e substituindo na ação fermiônica Euclideana (52), temos uma expressão:

$$\begin{aligned}
S_C &= \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \bar{\psi}_F(r, \hat{x}) \mathcal{D} \psi_F(r, \hat{x}) \\
&= \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \sum_m \left[ \bar{\psi}_L^{(m)}(\hat{x}) \phi_m^\dagger(r) + \bar{\psi}_R^{(m)}(\hat{x}) \tilde{\phi}_m^\dagger(r) \right] \times \\
&\quad \times \left[ (a + \bar{d}) \mathcal{P}_L + (a^\dagger + \bar{d}) \mathcal{P}_R \right] \sum_n \left[ \phi_n(r) \psi_L^{(n)}(\hat{x}) + \tilde{\phi}_n(r) \psi_R^{(n)}(\hat{x}) \right] \\
&= \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \sum_m \left[ \bar{\psi}_L^{(m)}(\hat{x}) \phi_m^\dagger(r) + \bar{\psi}_R^{(m)}(\hat{x}) \tilde{\phi}_m^\dagger(r) \right] \times \\
&\quad \times \left[ a \mathcal{P}_L + a^\dagger \mathcal{P}_R + \bar{d} \right] \sum_n \left[ \phi_n(r) \psi_L^{(n)}(\hat{x}) + \tilde{\phi}_n(r) \psi_R^{(n)}(\hat{x}) \right], \tag{64}
\end{aligned}$$

que podemos escrever da seguinte forma:

$$S_C = S_{a\mathcal{P}_L + a^\dagger \mathcal{P}_R} + S_{\bar{d}} \tag{65}$$

com

$$\begin{aligned}
S_{a\mathcal{P}_L + a^\dagger \mathcal{P}_R} &= \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \bar{\psi}_F(r, \hat{x}) \left( a \mathcal{P}_L + a^\dagger \mathcal{P}_R \right) \psi_F(r, \hat{x}) \\
&= \frac{1}{2} \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \bar{\psi}_F(r, \hat{x}) \left( a + a\gamma_2 + a^\dagger - a^\dagger \gamma_2 \right) \psi_F(r, \hat{x}), \tag{66}
\end{aligned}$$

devido a que tanto  $a$  e  $a^\dagger$  apresenta autovalores iguais então, a equação (66) fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
S_{a\mathcal{P}_L + a^\dagger \mathcal{P}_R} &= \frac{1}{2} \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \bar{\psi}_F(r, \hat{x}) \left( a + a^\dagger \right) \psi_F(r, \hat{x}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \left[ \bar{\psi}_L^{(m)} \phi_m^\dagger + \bar{\psi}_R^{(m)} \tilde{\phi}_m^\dagger \right] \left( a + a^\dagger \right) \times \\
&\quad \times \left[ \phi_n \psi_L^{(n)} + \tilde{\phi}_n \psi_R^{(n)} \right]
\end{aligned}$$

$$S_{a\mathcal{P}_L+a^\dagger\mathcal{P}_R} = \frac{1}{2} \sum_{m,n} \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \left[ \bar{\psi}_L^{(m)} \phi_m^\dagger a + \bar{\psi}_R^{(m)} \tilde{\phi}_m^\dagger a + \bar{\psi}_L^{(m)} \phi_m^\dagger a^\dagger + \bar{\psi}_R^{(m)} \tilde{\phi}_m^\dagger a^\dagger \right] \left[ \phi_n \psi_L^{(n)} + \tilde{\phi}_n \psi_R^{(n)} \right],$$

considerando os autovalores para  $a$  e  $a^\dagger$ , ou seja  $\lambda_n$ ; a relação de ortogonalidade  $\int dr \tilde{\phi}_m(r) \cdot \phi_n(r) = 0$ ; ortonormalidade  $\int dr \tilde{\phi}_m^\dagger(r) \cdot \tilde{\phi}(r)_n = \delta_{m,n}$ ;  $\int dr \phi_m^\dagger(r) \cdot \phi_n(r) = \delta_{m,n}$ ; campos muito perto do defeito, isto é  $\int r dr \tilde{\phi}_m^\dagger(r) \cdot \tilde{\phi}(r)_n = R \int dr \tilde{\phi}_m^\dagger(r) \cdot \tilde{\phi}(r)_n$  y  $\int r dr \phi_m^\dagger(r) \cdot \phi_n(r) = R \int r dr \phi_m^\dagger(r) \cdot \phi_n(r)$ , então

$$S_{a\mathcal{P}_L+a^\dagger\mathcal{P}_R} = R \sum_n \int d\hat{x} \bar{\psi}_L^{(n)} \lambda_n \psi_L^{(n)} + R \sum_n \int d\hat{x} \bar{\psi}_R^{(n)} \lambda_n \psi_R^{(n)},$$

sostituindo  $\psi_{L,R}^n(\hat{x}) = \mathcal{P}_{L,R} \psi^n(\hat{x})$ ,  $\bar{\psi}_{L,R}^n(\hat{x}) = \bar{\psi}^n(\hat{x}) \mathcal{P}_{R,L}$  e (56) na última equação, obtemos

$$S_{a\mathcal{P}_L+a^\dagger\mathcal{P}_R} = R \sum_{n \neq 0} \int d\hat{x} \bar{\psi}^n(\hat{x}) \lambda_n \psi^n(\hat{x}). \quad (67)$$

Agora restaria escrever a outra parte para a ação fermiônica (65)

$$\begin{aligned} S_{\bar{d}} &= \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \bar{\psi}_F(r, \hat{x}) \left( \bar{d} \right) \psi_F(r, \hat{x}) \\ &= \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} r dr \int d\hat{x} \bar{\psi}_F(r, \hat{x}) \left[ \frac{1}{r} \gamma_1 \left( \partial_\theta + ie A_\theta(\hat{x}) \right) + \gamma_3 \left( \partial_t + ie A_t(\hat{x}) \right) \right] \psi_F(r, \hat{x}), \end{aligned} \quad (68)$$

Se considerarmos um campo magnético uniforme e estacionário  $\vec{B}$  atravessando este defeito circular de raio  $R$  e área  $\pi R^2$ , então o fluxo através de esta superfície é  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA' = B \pi R^2$ . Mas nós sabemos que,  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \rightarrow \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} dA' = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA' \rightarrow \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi \rightarrow \vec{A}_\theta = \Phi / (2\pi R) \hat{\theta} = (BR/2) \hat{\theta}$ . Vemos apenas uma componente que não desaparece na direção angular  $\hat{\theta}$ ; se consideramos este potencial vetor magnético perto do defeito, então isso significa que podemos avalia-la através de um valor

fixo  $R$ , de tal forma que  $S_{\bar{d}}$  ficaria expressa como<sup>7</sup>

$$S_{\bar{d}} = R \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} dr \int d\hat{x} \bar{\psi}_F(r, \hat{x}) \left[ \frac{1}{R} \gamma_1 \left( \partial_\theta + ieA_\theta(\hat{x}) \right) + \gamma_3 \left( \partial_t + ieA_t(\hat{x}) \right) \right] \psi_F(r, \hat{x}), \quad (69)$$

se chamamos  $\mathcal{K} = \frac{1}{R} \gamma_1 \left( \partial_\theta + ieA_\theta(\hat{x}) \right) + \gamma_3 \left( \partial_t + ieA_t(\hat{x}) \right)$ , então

$$S_{\bar{d}} = R \int_{R-\Delta}^{R+\Delta} dr \int d\hat{x} \bar{\psi}_F(r, \hat{x}) \left[ \mathcal{K} \right] \psi_F(r, \hat{x}), \quad (70)$$

e considerando  $\psi_F$  e  $\bar{\psi}_F$  através da expansão de suas autofunções

$$\begin{aligned} S_{\bar{d}} &= R \sum_{m,n} \int d\hat{x} \left[ \bar{\psi}_L^m \mathcal{K} \psi_L^n \int dr \phi_m^\dagger \phi_n \right] + R \sum_{m,n} \int d\hat{x} \left[ \bar{\psi}_R^m \mathcal{K} \psi_R^n \int dr \tilde{\phi}_m^\dagger \tilde{\phi}_n \right] \\ &= R \sum_n \int d\hat{x} \bar{\psi}_L^n \mathcal{K} \psi_L^n + R \sum_n \int d\hat{x} \bar{\psi}_R^n \mathcal{K} \psi_R^n \\ &= R \int d\hat{x} \bar{\psi}_L^0 \mathcal{K} \psi_L^0 + R \int d\hat{x} \bar{\psi}_R^0 \mathcal{K} \psi_R^0 + R \sum_{n \neq 0} \int d\hat{x} \left[ \bar{\psi}_L^n \mathcal{K} \psi_L^n + \bar{\psi}_R^n \mathcal{K} \psi_R^n \right] \\ &= R \int d\hat{x} \bar{\psi}_L^0 \mathcal{K} \psi_L^0 + R \int d\hat{x} \bar{\psi}_R^0 \mathcal{K} \psi_R^0 + R \sum_{n \neq 0} \int d\hat{x} \bar{\psi}^n \mathcal{K} \psi^n, \end{aligned} \quad (71)$$

finalmente ao substituir (67) e esta última equação em (65) teremos:

$$S_C = R \int d\hat{x} \bar{\psi}_L^0 \mathcal{K} \psi_L^0 + R \int d\hat{x} \bar{\psi}_R^0 \mathcal{K} \psi_R^0 + R \sum_{n \neq 0} \int d\hat{x} \bar{\psi}^n \left[ \mathcal{K} + \lambda_n \right] \psi^n \quad (72)$$

$$= S_L^0 + S_R^0 + S^{(n)}, \quad (73)$$

sendo  $S_R^0$ ,  $S_L^0$  e  $S^{(n)}$ :

---

<sup>7</sup> O fato de ter estas considerações sobre  $A_\theta$  muito perto do defeito circular, faz que a integração sobre  $r$  não seja tão complicada. É assim que podemos tomar  $r$  na integração como uma constante  $R$ .

Ação para o modo zero quiral direito,  $S_R^0 = R \int d\hat{x} \bar{\psi}_R^0 \mathcal{K} \psi_R^0$ .

Ação para o modo zero quiral esquerdo,  $S_L^0 = R \int d\hat{x} \bar{\psi}_L^0 \mathcal{K} \psi_L^0$ .

$$\text{Ação de modo } n, S^{(n)} = R \sum_{n \neq 0} \int d\hat{x} \bar{\psi}^n \left[ \mathcal{K} + \lambda_n \right] \psi^n. \quad (74)$$

Com a integração fermiônica descomposta em produtos infinitos

$$\mathcal{D}\bar{\psi}_F \mathcal{D}\psi_F = \mathcal{D}\bar{\psi}_L^0 \mathcal{D}\psi_L^0 \mathcal{D}\bar{\psi}_R^0 \mathcal{D}\psi_R^0 \prod_{n \neq 0} \mathcal{D}\bar{\psi}^n \mathcal{D}\psi^n \quad (75)$$

e a ação efetiva  $\Gamma$

$$\Gamma = \Gamma_L^0 + \Gamma_R^0 + \sum_{n \neq 0} \Gamma^n \quad (76)$$

sendo  $\Gamma_R^0$ ,  $\Gamma_L^0$  e  $\sum_{n \neq 0} \Gamma^n$  as ações efetivas quirais direita, esquerda e massiva bidimensional com massa  $\lambda_n$  respectivamente, escrita como

$$\Gamma_R^0 = -\ln \det \mathcal{K} \mathcal{P}_R, \quad \Gamma_L^0 = -\ln \det \mathcal{K} \mathcal{P}_L, \quad \Gamma^n = -\ln \det(\mathcal{K} + \lambda_n). \quad (77)$$

### 3.2.4 Inclusão dos bósons para um campo de Dirac fermiônico através da aproximação semiclássica

Nesta parte do capítulo, faremos algumas considerações importantes a nossa densidade lagrangiana,  $\mathcal{L}[\psi]$ , que tem de forma implícita a ação funcional da equação (39), ou seja,  $\mathcal{L}[\psi] = \bar{\psi}_E(r, \hat{x})(\gamma_\mu \partial_\mu + ie\gamma_\mu A_\mu + M(r - R_c))\psi_E(r, \hat{x})$ <sup>8</sup>. Estas modificações tem apenas um objetivo, que é incorporar de alguma forma aos bósons em nosso sistema a descrever.

Como vimos anteriormente a densidade lagrangiana que descreve nosso sistema involucra apenas férmions,  $\psi_E(r, \hat{x})$ , na presença de um campo de gauge Abelian,  $A_\mu$ . Agora, nós consideraremos bósons,  $\theta(r, \hat{x})$ , e também a interação entre bósons e férmions,  $(\psi_E, \theta)$ , através de uma constante de interação ou acoplamento  $g$  (posteriormente veremos que características tem esta constante de acoplamento). Então nossa nova densidade Lagrangiana,  $\mathcal{L}[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta]$ , que por comodidade sera apresentada no espaço de Minkowsky, ficaria da seguinte forma:<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta] &= \mathcal{L}[\bar{\psi}_E, \psi_E] + \mathcal{L}[\theta] + \mathcal{L}_I[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta], \\ &= \bar{\psi}_E \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - M \right) \psi_E + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - V(\theta) + \left( -g\theta \bar{\psi}_E \psi_E \right). \end{aligned} \quad (78)$$

O primeiro, segundo e terceiro termo do segundo membro da última equação são as densidades Lagrangianas para campos fermiônicos, bosônicos e a interação entre eles respectivamente. Esta é uma expressão geral, ainda sem as considerações feitas que contem o nosso sistema. Podemos agora escrever a ação funcional para este caso, como:

$$\mathcal{S}_C[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta] = \int L dt = \int dt \int r dr d\theta \mathcal{L} = \int_{R^{2+1}} d^3x \mathcal{L}[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta], \quad (79)$$

ao substituir (78) na equação (79)<sup>10</sup>, temos

---

<sup>8</sup> Notar que aqui, tanto,  $\bar{\psi}_E(r, \hat{x})$  como  $\psi_E(r, \hat{x})$ , são dependentes das coordenadas paramétricas,  $r$ ,  $\theta$ (ângulo polar) e  $t$ , pois estamos interessados em postular uma massa como um defeito circular.

<sup>9</sup> Bastaria só fazer uma rotação no eixo do tempo,  $t = -i\tau$ , para modificar nossas matrizes  $\gamma^\mu$  por  $\gamma_\mu$  e assim estar novamente acorde no espaço Euclidean.

<sup>10</sup> Notar que na equação para a ação funcional, o integrando para a densidade Lagrangiana  $d\theta$ ,  $\theta$  é um ângulo polar.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_C[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta] &= S[\bar{\psi}_E, \psi_E] + S[\theta] + S_I[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta] \\
&= \int_{R^{2+1}} d^3x \bar{\psi}_E \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - M \right) \psi_E + \int_{R^{2+1}} d^3x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - V(\theta) \right\} + \\
&\quad + \int_{R^{2+1}} d^3x \left( -g\theta \bar{\psi}_E \psi_E \right), \tag{80}
\end{aligned}$$

Agora faremos considerações importantes a nosso sistema, especificamente a  $S[\theta]$  e  $S_I[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta]$ . Na verdade, as considerações que vamos à fazer tem que ver muito com a orientação anisotrópica metaestável de um fluido de Hall quântico nemático desenvolvido na referência (BARCI; ARENAS, 2008), o qual faz uso do modelo  $XY$  (ver apêndice A) para descrever uma fase nemática quântica efetiva com um potencial de quebra de simetria externa,  $V(\theta) = h_2 \cos(2\theta) - h_4 \cos(4\theta)$ , como foi explicado na seção 2.3 do capítulo anterior.

Por outro lado, sabemos que os cristais líquidos quânticos são condensados sem gap, com quebra espontânea de simetria rotacional ou translacional. Este cristal líquido apresenta fases ou estados muito importantes, tais como os mostrados na figura 1. Precisamente o estado nemático quântico é um estado com ordem orientacional homogênea, mas anisotrópica, com as direções de frente e para trás identificadas. Isso significa que se o sistema tem um eixo de preferência ao longo de um ângulo  $\theta$ , então o estado tem uma simetria nemática ao fazer a rotação  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ . Em duas dimensões, esta propriedade é estabelecida através da definição do parâmetro de ordem complexo,  $Q = \rho e^{i2\theta}$ , com o argumento  $2\theta$  garantindo a simetria nemática.

Em seguida, neste panorama, podemos fazer algumas modificações à ação (80) de nosso sistema. A primeira de elas, fica da definição de um líquido quântico, que ao não ter gap, podemos fazer que o termo da massa da equação (80) seja zero,  $M = 0$ . Outra consideração a nosso sistema vem da simetria nemática, que ao apresentar uma simetria com o ângulo orientacional  $\theta$  o sistema tem que permanecer invariante. Porém, o termo bosônico  $\theta$  que se acopla com a densidade fermiônica  $\bar{\psi}_E \psi_E$  da equação (80) tem que preservar esta condição, então nós fazemos que  $\theta$  tenha a forma de  $\cos(2\theta)$  com o argumento de aquela função trigonometria garantindo a simetria nemática. Na verdade esta forma de  $\theta$  tem relação com o potencial  $V(\theta)$ , que como veremos depois, através de uma aproximação semiclássica, o termo  $\theta$  avaliado na solução clássica  $\theta_b(r)$  e que multiplica a densidade fermiônica  $\bar{\psi}_E \psi_E$  faz que ela fique dentro da ação funcional fermiônica.

Muito bem, já neste contexto de levar em conta estas considerações feitas para nosso sistema, podemos então escrever novamente a ação funcional (80) de nosso sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_C[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta] = & \int_{R^{2+1}} d^3x \bar{\psi}_E \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - g \cos(2\theta) \right) \psi_E + \int_{R^{2+1}} d^3x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \right. \\ & \left. - \left[ h_2 \cos(2\theta) - h_4 \cos(4\theta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (81)$$

Com esta ação funcional podemos escrever a funcional geradora:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}_E \mathcal{D}\psi_E \mathcal{D}\theta \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_C[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta] \right] \quad (82)$$

que pode tomar a forma:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}_E \mathcal{D}\psi_E \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S[\bar{\psi}_E, \psi_E] \right] \left\{ \int \mathcal{D}\theta \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( S[\theta] + S_I[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta] \right) \right] \right\}, \quad (83)$$

com:

$$S[\bar{\psi}_E, \psi_E] = \int_{R^{2+1}} d^3x \bar{\psi}_E \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu \right) \psi_E,$$

$$S[\theta] = \int_{R^{2+1}} d^3x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \left[ h_2 \cos(2\theta) - h_4 \cos(4\theta) \right] \right\},$$

$$S_I[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta] = \int_{R^{2+1}} d^3x \bar{\psi}_E \left( -g \cos(2\theta) \right) \psi_E,$$

por tanto, (82) pode ser transformada em:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}_E \mathcal{D}\psi_E \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S[\bar{\psi}_E, \psi_E] \right] \times \quad (84)$$

$$\times \left\{ \int \mathcal{D}\theta \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \int_{R^{2+1}} d^3x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \bar{K} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) \right) \right] \right\},$$

$$(85)$$

aqui,  $\bar{K} = h_2 + g\bar{\psi}_E\psi_E$ . O termo entre chaves da última equação tem uma ação funcional  $\mathcal{S}[\theta]$  modificada pelo termo  $\bar{K}$ , mas se consideramos à constante de interação entre bósons e férmions muito pequena, podemos então ter uma ação similar ao da seção (2.3). Ou seja, a esta ação funcional  $\mathcal{S}[\theta]$  podemos fazer uma variação funcional para determinar suas equações de movimento e assim obter as soluções que minimizam esta ação. Como já vimos no capítulo anterior, a solução ou ansatz estacionária que minimiza esta ação é uma bolha com a configuração  $\theta_b(r - R_c) = \frac{\pi}{4} \left\{ 1 - \tanh \left[ 1/\xi(r - R_c) \right] \right\}$ . Agora, se nós fazemos uma aproximação semiclássica ao redor da solução clássica  $\theta_b(r - R_c)$  desta funcional geradora correspondente para  $\theta$ , naturalmente podemos obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}_E \mathcal{D}\psi_E \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S[\bar{\psi}_E, \psi_E] \right] \times \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( S[\theta_b] + S_I[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta_b] \right) \right\} \\
&= \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S[\theta_b] \right] \int \mathcal{D}\bar{\psi}_E \mathcal{D}\psi_E \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S[\bar{\psi}_E, \psi_E] + \frac{i}{\hbar} S_I[\bar{\psi}_E, \psi_E, \theta_b] \right] \\
&= K' \int \mathcal{D}\bar{\psi}_E \mathcal{D}\psi_E \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{R^{2+1}} d^3x \bar{\psi}_E \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - g \cos(2\theta_b(r - R_c)) \right) \psi_E \right], \tag{86}
\end{aligned}$$

com  $K' = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S[\theta_b] \right]$ .

Desta última equação podemos extrair a ação funcional fermiônica

$$\mathcal{S}_C[\bar{\psi}_E, \psi_E] = \int_{R^{2+1}} d^3x \bar{\psi}_E \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - g \cos(2\theta_b(r - R_c)) \right) \psi_E,$$

que no espaço Euclideano é

$$\mathcal{S}_C[\bar{\psi}_E, \psi_E] = \int_{R^{2+1}} d^3x \bar{\psi}_E \left( \gamma_\mu \partial_\mu + ie\gamma_\mu A_\mu + g \cos(2\theta_b(r - R_c)) \right) \psi_E.$$

Nesta última expressão vemos que o termo  $g \cos(2\theta_b(r - R_c))$  se comporta como uma “massa fermiônica”. Mas lembramos que esta expressão vem da aproximação semiclássica da funcional geradora bosônica, porém então temos um “aporte” da parte bosônica com-

portada como se fosse uma massa fermiônica nesta ação .

Naturalmente, como é lógico e em concordância com o “comportamento normal” da massa dos férmions este termo  $g \cos(2\theta_b(r - R_c))$  muda de sinal quando  $r \rightarrow 0$  e  $r \rightarrow \infty$ , no intervalo de  $[-1, 1]$  respectivamente. A idéia seguinte é estudar as implicações que tem este termo na parte dos férmions. Obtendremos de maneira natural os modos zeros quirais ao redor de esta massa com defeito de parede de domínio circular na aproximação de uma parede fina ( $\xi/R_c \ll 1$ ).

### 3.2.5 Modos zeros quirais

O termo  $g \cos(2\theta_b(r - R_c))$  da “nova massa” fermiônica dentro da ação pode levar a cálculos difíceis de resolver, porém faremos uma linealização do termo da massa ao redor do ponto donde ela muda de sinal, ou seja donde ela é zero,  $r = R_c/\xi$ . Para facilitar os cálculos faremos uma mudança de variável,  $g \cos(2\theta_b(r - R_c))$  por  $\Lambda(\theta)$ . Então podemos escrever

$$\Lambda(\theta_b) = g \cos(2\theta_b), \quad (87)$$

expandindo em potencias de  $(r - R_c)$

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta_b) &\longrightarrow \Lambda\left\{\theta_b(r)\right\} \\ &\approx \Lambda\left\{\theta_b(R_c)\right\} + \Lambda'\left\{\theta_b(R_c)\right\}(r - R_c) \\ &\approx \Lambda\left\{\theta_b(R_c)\right\} + \left.\frac{\partial\Lambda(\theta_b)}{\partial\theta_b}\right|_{\theta_b=\theta_b(R_c)} \cdot \left.\frac{d\theta_b}{dr}\right|_{r=R_c} (r - R_c), \end{aligned} \quad (88)$$

sabemos que a configuração da bolha é o ansatz  $\theta_b(r) = \frac{\pi}{4} \left[ 1 - \tanh\left(\frac{r-R_c}{\xi}\right) \right]$ , avaliando isso em  $r = R_c$  obtemos,  $\theta_b(R_c) = \frac{\pi}{4} \left[ 1 - \tanh(0) \right] = \pi/4$ .

Então o primero termo da equação (88) ficaria

$$\Lambda\left\{\theta_b(R_c)\right\} = \Lambda(\pi/4) = g \cos(\pi/2) = 0, \quad (89)$$

assim como o segundo termo

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Lambda(\theta_b)}{\partial \theta_b} \right|_{\theta_b=\theta(R_c)} \cdot \left. \frac{d\theta_b}{dr} \right|_{r=R_c} &= -2g \sin(2\theta) \Big|_{\theta=\pi/4} \cdot -\frac{\pi}{4} \frac{1}{\xi} \operatorname{Sech}^2\left(\frac{r}{\xi} - \frac{R_C}{\xi}\right) \Big|_{r=R_C} \\ &= -2g \cdot -\frac{\pi}{4} \frac{1}{\xi} \\ &= \frac{g\pi}{2\xi}, \end{aligned} \quad (90)$$

por tanto a aproximação linear ficaria como

$$\Lambda\left\{\theta(r)\right\}_{\text{linear}} = \frac{g\pi}{2\xi}(r - R_c). \quad (91)$$

Da equação (56), vemos que com esta aproximação podemos escrever os operadores  $a$  y  $a^\dagger$

$$\begin{aligned} a &= \partial_r + M(r - R_C) = \partial_r + \frac{g\pi}{2} \left( \frac{r}{\xi} - \frac{R_C}{\xi} \right) \\ a^\dagger &= -\partial_r + M(r - R_C) = -\partial_r + \frac{g\pi}{2} \left( \frac{r}{\xi} - \frac{R_C}{\xi} \right), \end{aligned} \quad (92)$$

podemos definir operadores  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  similar aos operadores de criação e aniquilação

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{\xi}{g\pi}} a^\dagger \\ \hat{a} &= \sqrt{\frac{\xi}{g\pi}} a \end{aligned} \quad (93)$$

$$\therefore [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.$$

Finalmente podemos determinar o modo zero  $\phi_0(r)$  para  $\hat{a}$  da seguinte condição :

$$\begin{aligned}\hat{a}\phi_0(r) &= 0 \\ \left\{ \partial_r + \frac{g\pi}{2} \left( \frac{r}{\xi} - \frac{R_c}{\xi} \right) \right\} \phi_0(r) &= 0 \\ \longrightarrow \phi_0(r) &= \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{g\pi}{4\xi} (r - R_c)^2 \right\},\end{aligned}\tag{94}$$

sendo  $\mathcal{N}$  uma constante de normalização  $\phi_0(r)$  é um modo zero quirar. Na verdade não tem muito misterio esta determinação, pois trabalhos anteriores [9,10] dan referencias da aparição de modos zeros quirales ao redor do defeito. Agora, é possível calcular os autovalores de  $h$  y  $\bar{h}$  já que ambos apresentam o mesmo espectro  $\lambda_n$  então com ajuda dos operadores (92) podemos escrever a relação para o operador número de particulas  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  :

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle &= n|n\rangle \\ a^\dagger a|n\rangle &= \frac{g\pi}{\xi} n|n\rangle \\ h|n\rangle &= \frac{g\pi}{\xi} n|n\rangle \\ \lambda_n^2 &= \frac{g\pi}{\xi} n|n\rangle \\ \therefore \lambda_n &= \sqrt{\frac{\pi}{\xi} n},\end{aligned}\tag{95}$$

com a ação efetiva

$$\Gamma = \Gamma_R^{(0)} + \Gamma_L^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma^{(n)},\tag{96}$$

sendo

$$\Gamma^n = -\text{Lndet} \left( \mathcal{K} + \sqrt{\frac{g\pi}{\xi} n} \right).\tag{97}$$

### 3.3 Densidade de corrente fermiônica

Agora determinaremos o valor esperado da corrente fermiônica  $j_\mu(r, \hat{x})$  na presença de um defeito circular, e baixo a influência de um campo elétrico externo. Então o valor esperado no vácuo da corrente fermiônica na presença de um campo de gauge externo que satisfaz as condições impostas anteriormente, isto é,  $F_{2\mu} = 0$ , tem a seguinte forma

$$j_\mu(r, \hat{x}) = \frac{\partial S(r, \hat{x})}{\partial A_\mu} = -\text{etr} \left[ \gamma_\mu S(x, x) \right]$$

$$j_\mu(r, \hat{x}) = \frac{\partial S(r, \hat{x})}{\partial A_\mu} \longrightarrow \begin{matrix} j_r = 0 \\ j_\theta = -\frac{e}{R_c} \text{Tr} \left[ \gamma_1 S(x, x) \right] \\ j_t = 0 . \end{matrix} \quad (98)$$

Sendo  $S(x, y)$  o propagador fermiônico, a inversa do operador define a forma quadrática da ação fermiônica:

$$S_{\alpha\beta}(x, y) = \langle x, \alpha | \mathcal{D}^{-1} | y, \beta \rangle \quad (99)$$

com

$$\mathcal{D} = (a + \bar{d})\mathcal{P}_L + (a^\dagger + \bar{d})\mathcal{P}_R$$

e através da identidade  $\mathcal{D}^{-1} = (\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D})^{-1} \mathcal{D}^\dagger$  obtemos:

$$\mathcal{D}^{-1} = (h - \bar{d}^2)^{-1} \mathcal{P}_L (a^\dagger - \bar{d}) + (\bar{h} - \bar{d}^2)^{-1} \mathcal{P}_R (a - \bar{d}) \quad (100)$$

Extraemos a dependência em  $r$  do propagador fermiônico introduzindo as relações de completeza  $\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = 1$ ,  $\sum_m |\phi_m\rangle \langle \phi_m| = 1$ , ortonormalidade das autofunções  $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{n,m}$ ,  $\langle \tilde{\phi}_n | \tilde{\phi}_m \rangle = \delta_{n,m}$ , autovalores de  $h$ ,  $\bar{h}$ ,  $h\phi_n(r) = \lambda_n^2 \phi_n(r)$ ,  $\bar{h}\tilde{\phi}_n(r) = \lambda_n^2 \tilde{\phi}_n(r)$ . Então:

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta}(\hat{x}, \hat{x}') &= \sum_{n=0, m=1}^{\infty} \phi_n(r) \tilde{\phi}_m^\dagger(r') \langle \hat{x}, \alpha | (\lambda_n^2 - \bar{d}^2)^{-1} \lambda_n \mathcal{P}_L | \hat{x}', \beta \rangle \delta_{mn} \\
&\quad - \sum_{n=0, m=0}^{\infty} \phi_n(r) \phi_m^\dagger(r') \langle \hat{x}, \alpha | (\lambda_n^2 - \bar{d}^2)^{-1} \bar{d} \mathcal{P}_R | \hat{x}', \beta \rangle \delta_{mn} \\
&\quad + \sum_{n=1, m=0}^{\infty} \tilde{\phi}_n(r) \phi_m^\dagger(r') \langle \hat{x}, \alpha | (\lambda_n^2 - \bar{d}^2)^{-1} \lambda_n \mathcal{P}_R | \hat{x}', \beta \rangle \delta_{mn} \\
&\quad - \sum_{n=1, m=0}^{\infty} \tilde{\phi}_n(r) \tilde{\phi}_m^\dagger(r') \langle \hat{x}, \alpha | (\lambda_n^2 - \bar{d}^2)^{-1} \bar{d} \mathcal{P}_L | \hat{x}', \beta \rangle \delta_{mn}.
\end{aligned} \tag{101}$$

por tanto o valor esperado para a corrente fermiônica  $j_\theta$  ficaria expresso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
j_\mu = j_\theta &= -\frac{e}{R_c} \text{Tr} \left[ \gamma_1 S(x, x) \right] \\
&= -\frac{e}{R_c} \phi_0^2(r) \text{Tr} \left[ \gamma_1 \langle \hat{x} | \bar{d}^{-1} \mathcal{P}_R | \hat{x} \rangle \right] + \frac{e}{R_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \phi_n^2(r) \text{Tr} \left[ \gamma_1 \langle \hat{x} | (\lambda_n^2 - \bar{d}^2)^{-1} \bar{d} \mathcal{P}_R | \hat{x} \rangle \right] \right. \\
&\quad + \tilde{\phi}_n^2(r) \text{Tr} \left[ \gamma_1 \langle \hat{x} | (\lambda_n^2 - \bar{d}^2)^{-1} \bar{d} \mathcal{P}_L | \hat{x} \rangle \right] - \phi_n(r) \tilde{\phi}_n(r) \text{Tr} \left[ \gamma_1 \langle \hat{x} | (\lambda_n^2 - \bar{d}^2)^{-1} \lambda_n \mathcal{P}_L | \hat{x} \rangle \right] \\
&\quad \left. - \tilde{\phi}_n(r) \phi_n(r) \text{Tr} \left[ \gamma_1 \langle \hat{x} | (\lambda_n^2 - \bar{d}^2)^{-1} \lambda_n \mathcal{P}_R | \hat{x} \rangle \right] \right\},
\end{aligned} \tag{102}$$

aqui, naturalmente, o raio crítico  $R_c$  se expressa através dos parâmetros  $h_2$  y  $h_4$  como  $R_c = \frac{\sqrt{J(4h_4 - h_2)}}{2h_2}$ . O primeiro termo do segundo membro da equação (101) vem desde a corrente fermiônica quiral, então, o valor esperado no vácuo para a corrente quiral bidimensional atravessando o defeito circular, que representamos através de  $j_1^L(\hat{x})$  fica expressa como:

$$j_\theta^L(r) = -\frac{e}{R_c} \text{Tr} \left[ \gamma_\theta \langle \hat{x} | \bar{d}^{-1} \mathcal{P}_R | \hat{x} \rangle \right] \tag{103}$$

isso faz que podamos escrever  $j_\theta(r, \hat{x})$  como

$$j_\theta(r, \hat{x}) = \phi_0^2(r) j_\theta^L(\hat{x}) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (\tilde{\phi}_n^2(r) + \phi_n^2(r)) \delta_{\mu\nu} + i(\tilde{\phi}_n^2(r) - \phi_n^2(r)) \epsilon_{\mu\nu} \right] j_\theta^n \tag{104}$$

sendo  $j_\theta^n$  o valor esperado da corrente fermiônica vetorial bidimensional no vácuo.

Do resultado (103), podemos determinar a corrente fermiônica devido a um campo elétrico externo,  $E$ , constante no tempo e uniforme no espaço. Para uma aproximação de resposta linear, o valor esperado de uma corrente massiva  $j_\mu^{(n)}$  é zero, devido à existência de um gap, ou a massa  $\lambda_n$ . A contribuição do modo zero quiral é obtido desde a parte da conservação da paridade da ação fermiônica e nos proporciona uma metade da contribuição correspondente para um férmion de Dirac sem massa:

$$j_\theta^L(r) = \frac{e^2}{2\pi R_c} EL, \quad (105)$$

onde  $L$  é o comprimento do sistema na direção de  $\theta$ . Por tanto a corrente em (2+1) dimensões é:

$$j_\theta = \phi_0^2(r) \frac{e^2}{2\pi R_c} EL, \quad (106)$$

onde  $\phi_0^2$  é o modo zero quiral para um defeito circular em uma aproximação linear, equação (93).

## CONCLUSÃO

A motivação principal deste trabalho foi estudar a influência que tem os bósons através da nucleação em um campo de Dirac fermiônico. Por meio de uma aproximação semiclássica, ao redor de uma solução que tem a configuração de uma bolha crítica nemática que extremiza a ação funcional bosônica, fomos capazes de expressar uma nova ação fermiônica.

Esta nova ação fermiônica contém uma “massa” local que é interpretada como um defeito circular com uma aproximação de parede fina. O estudo feito de esta ação através do formalismo matemático proposto na referência (BARCI; ARENAS, 2008) resultou como o previsto pela referência (CALLAN JR; HARVEY, 1985), o surgimento de modos zeros quirais ao redor do defeito circular, mas estes modos zeros estão em função dos parâmetros da nucleação, ou seja, o raio crítico e o comprimento de correlação .

Também determinamos a corrente fermiônica quiral devido a um campo elétrico externo. Esta corrente fermiônica como vimos é dada através dos modos zeros quirais. Mas como é natural, a corrente fermiônica, para os modos diferentes do modo zero quiral, é zero.

O tratamento para as interações entre bósons e fermiões foi o mais simples, porque nós consideramos a constante de acoplamento entre eles muito pequena. Assim como também a não presença de flutuações quânticas dos bósons, por que só temos em conta as soluções clássicas.

Então fica ainda por ver que repercussões tem no campo de Dirac fermiônico o fato de considerar as flutuações quânticas ao redor da solução já conhecida, a de uma bolha crítica nemática.

Também seria interessante ver que resultados obtemos para a corrente quiral ao substituir os valores dos parâmetros da nucleação, toda vez que estes parâmetros sejam calculados através de métodos numéricos.

## REFERÊNCIAS

- AFFLECK, I. Quantum-statistical metastability. *Physical Review Letters*, [S. L.], APS, v. 46, n. 6, p. 388, 1981.
- BARCI, D. G.; ARENAS, Z. G. Metastable anisotropy orientation of nematic quantum hall fluids. *Physical Review B*, [S. I.], APS, v. 78, n. 8, p. 085303, 2008.
- BECKER, R.; DÖRING, W. Kinetische behandlung der keimbildung in übersättigten dämpfen. *Annals of Physics, Leipzig*, v. 24, p. 719, 1935.
- BELLAC, M. L. Quantum and statistical field theory. [S. L.]: *Oxford Science Publications*, 1991.
- CALLAN JR, C. G.; HARVEY, J. A. Anomalies and fermion zero modes on strings and domain walls. *Nuclear Physics B*, [S. I.], Elsevier, v. 250, n. 1-4, p. 427–436, 1985.
- CARVALHO, C. A. D. On the dimerization of linear polymers. *Modern Physics Letters B*, [S. I.], World Scientific, v. 3, n. 02, p. 125–133, 1989.
- CARVALHO, C. A. D.; BONATO, C.; COSTAMILAN, G. Polarons in  $\phi^4$ . *Journal of Physics A: Mathematical and General*, [S. I.], IOP Publishing, v. 22, n. 24, p. L1153, 1989.
- COLEMAN, S. Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. *Physical Review D*, [S. I.], v. 15, p. 2929, 1977.
- CSERNAI, L. P.; KAPUSTA, J. I. Nucleation of relativistic first-order phase transitions. *Physical Review D*, [S. I.], APS, v. 46, n. 4, p. 1379, 1992.
- FOSCO, C.; LOPEZ, A. Dirac fermions and domain wall defects in 2+ 1 dimensions. *Nuclear Physics B*, [S. I.], Elsevier, v. 538, n. 3, p. 685–700, 1999.
- FOSCO, C.; TORROBA, G. Chiral zero modes in non local domain walls. *arXiv preprint hep-th/0308126*, 2003.
- GITTERMAN, M.; HALPERN, V. Phase transitions - a brief account with modern applications. [S. L.]: *World Scientific*, 2004.
- KIVELSON, S. A.; FRADKIN, E.; EMERY, V. J. Electronic liquid-crystal phases of a doped mott insulator. *Nature*, [S. I.], Nature Publishing Group, v. 393, n. 6685, p. 550, 1998.
- KLINKHAMER, F.; MANTON, N. A saddle-point solution in the weinberg-salam theory. *Physical Review D*, [S. I.], v. 30, p. 2212, 1984.
- KOSTERLITZ, J. M.; THOULESS, D. J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, [S. I.], IOP Publishing, v. 6, n. 7, p. 1181, 1973.
- LANGER, J. S. Statistical theory of the decay of metastable states. *Annals of Physics*, [S. I.], Elsevier, v. 54, n. 2, p. 258–275, 1969.

- LINDE, A. D. Decay of the false vacuum at finite temperature. *Nuclear Physics B*, [S. I.], Elsevier, v. 216, n. 2, p. 421–445, 1983.
- TEIXEIRA, B. F. I. Dualidade na teoria de landau-ginzburg da supercondutividade. 2010. Dissertação (mestrado) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- VOLOSHIN, M. B. Decay of false Vacuum in (1+1)-Dimensions. *Soviet Journal of Nuclear Physics*, [S. I.], v. 42, p. 1017–1026, 1985.

## APÊNDICE A – O modelo XY

### A.1 Estudo qualitativo

No modelo XY (TEIXEIRA, 2010) o spin no sítio  $i$  é um vetor com duas componentes  $\vec{S}_i$ , que pode ser considerado no plano da rede como  $\vec{S}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$  tal que  $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_i = 1$ . A Hamiltoniana é invariante sobre rotações no plano; em outras palavras, tem simetria  $O(2)$ , sendo dada por

$$\begin{aligned} H &= -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (\cos \theta_i, \sin \theta_i) \cdot (\cos \theta_j, \sin \theta_j) \\ &= -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j), \end{aligned} \tag{107}$$

onde  $\langle i, j \rangle$  representa os vizinhos próximos e  $\theta_i$  é o ângulo entre o spin com sítio  $i$  e alguma direção de referencia (por exemplo  $x$ ). A função de partição será

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{[\theta_\ell]} \exp \left( \frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \prod_{\ell=1}^n d\theta_\ell \exp \left( \frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \right) \end{aligned} \tag{108}$$

onde tomamos o limite contínuo para  $\theta_\ell$ .

## A.2 A expansão de $Z$ em altas temperaturas

Quando  $T \rightarrow \infty$  expandimos a exponencial em potências de  $(J/T)$  e ficamos apenas com os termos de ordem mais baixa, ou seja:

$$\begin{aligned}
 \exp\left(\frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j)\right) &\equiv \prod_{\langle i,j \rangle} \exp\left(\frac{J}{T} \cos(\theta_i - \theta_j)\right) \\
 &\approx \prod_{\langle i,j \rangle} \left\{ 1 + \left(\frac{J}{T}\right) \cos(\theta_i - \theta_j) + \dots \right\} \\
 &= 1 + \frac{J}{T} \prod_{\langle i,j \rangle} \exp\left\{i(\theta_i - \theta_j)\right\} \\
 &= 1 + \frac{J}{T} \exp\left\{i \sum_{\langle i,j \rangle} (\theta_i - \theta_j)\right\}. \tag{109}
 \end{aligned}$$

A função de partição devido à altas temperaturas ficaria como

$$\begin{aligned}
 Z_{T \rightarrow \infty} &= \int_0^{2\pi} \prod_{\ell=1}^n d\theta_\ell \left\{ 1 + \frac{J}{T} \exp\left[ i \sum_{\langle i,j \rangle} (\theta_i - \theta_j) \right] \right\} \\
 &= \int_0^{2\pi} \prod_{\ell=1}^n d\theta_\ell + \int_0^{2\pi} \prod_{\ell=1}^n d\theta_\ell \exp\left[ i \sum_{\langle i,j \rangle} (\theta_i - \theta_j) \right] \\
 Z_{T \rightarrow \infty} &= (2\pi)^n \tag{110}
 \end{aligned}$$

Então fomos capazes de estimar utilizando este método a *função correlação* entre os dois spins, um no sítio 0 e o outro no sítio  $p$ :

$$\langle \vec{S}_0 \cdot \vec{S}_p \rangle = \langle \cos(\theta_0 - \theta_p) \rangle = \Re \langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle \tag{111}$$

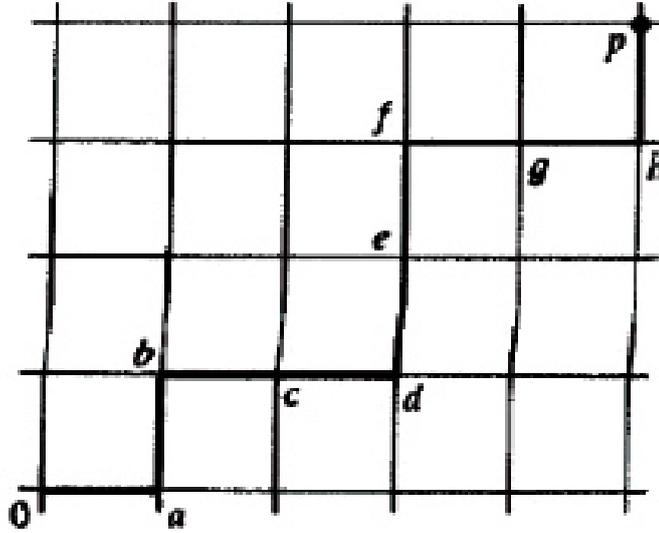
Assim, devemos calcular

$$\Re \langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \frac{1}{Z_{T \rightarrow \infty}} \int_0^{2\pi} \prod_l d\theta_l \exp[i(\theta_0 - \theta_p)] \exp\left(\frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j)\right) \tag{112}$$

de onde ao substituir (108) e (109) na equação (111), obtemos

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \frac{J}{CT} \int_0^{2\pi} \prod_l d\theta_l \exp\left[ i \sum_{\langle i,j \rangle} (\theta_0 - \theta_p + \theta_i - \theta_j) \right] \tag{113}$$

Figura 11 - Possível caminho entre 0 e  $p$ .



Legenda: Possível caminho entre 0 e  $p$ .

Fonte: BELLAC, 1991, p, 128.

onde  $C = (2\pi)^n$ . Mas sabemos que

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi; \quad \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} = 0 \quad (114)$$

isso nos permite imaginar “um possível caminho” sobre a rede que podemos tomar, pois para a função correlação não ser nula (resultado trivial) devemos ter integrais de  $d\theta$  e não  $e^{i\theta}d\theta$  como mostramos acima, desde que elas não contribuem para o resultado da função de partição. Assim, escolhemos um caminho tal que (ver Fig. 11)

$$e^{i\theta_0}(e^{-i\theta_0}e^{i\theta_a})e^{-i\theta_a} \dots e^{i\theta_n}(e^{-i\theta_n}e^{i\theta_p})e^{-i\theta_p} \quad (115)$$

Como existem muitos caminhos possíveis, podemos escolher como um “caminho médio” o caminho classicamente favorável e então a contribuição “média” do termo  $(J/T)^n$  será aproximadamente  $(J/T)^{r/a}$ . Reunindo estas suposições chegamos ao seguinte resultado:

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \left( \frac{J}{T} \right)^{r/a} = e^{-(r/a)\ln(T/J)} \quad (116)$$

de onde extraímos o comprimento de correlação

$$\begin{aligned}
e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle &= e^{-\frac{r}{\xi}} \\
\xi &= \frac{a}{\ln(T/J)}
\end{aligned}
\tag{117}$$

que corresponde exatamente ao comprimento de correlação clássico.

### A.3 A expansão de $Z$ em baixas temperaturas

Quando  $T \rightarrow 0$  as flutuações dominantes são aquelas com grande comprimento de onda, e então a função de partição será

$$Z = \int_0^{2\pi} \prod_{\ell=1}^n d\theta_\ell \exp\left(\frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j)\right)$$

com o termo  $\frac{J}{T} \rightarrow \infty$ , por tanto o termo  $\cos(\theta_i - \theta_j)$  tem que ser  $\ll 1$ . Porén expressamos  $\cos(\theta_i - \theta_j)$  em série de potências e nós ficamos apenas com a potencia de ordem mais baixo, ou seja

$$\cos(\theta_i - \theta_j) \approx 1 - \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_j)^2,$$

isso faz que a Hamiltoniana do sistema tenha a seguinte forma

$$H \rightarrow H_0 + \frac{1}{2}J \sum_{\langle i,j \rangle} (\theta_i - \theta_j)^2 \tag{118}$$

Podemos introduzir uma notação mais conveniente

$$\partial_\mu \theta_i = \theta_{i+\mu} - \theta_i \tag{119}$$

assim reescrevemos a Hamiltoniana como

$$H = \frac{1}{2}J \sum_i \sum_\mu (\partial_\mu \theta_i)^2 \tag{120}$$

ou no limite contínuo

$$H = \frac{1}{2}J \int d^2x (\vec{\nabla}\theta)^2 \quad (121)$$

Então, a correlação entre os spins  $o$  e  $p$  fica

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_l d\theta_l \exp \left( i(\theta_0 - \theta_p) - \frac{J}{2T} \sum_{i,\mu} (\partial_\mu \theta_i)^2 \right) \quad (122)$$

sendo

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_l d\theta_l \exp \left( -\frac{J}{2T} \sum_{i,\mu} (\partial_\mu \theta_i)^2 \right). \quad (123)$$

Primeiramente, podemos calcular a função correlação do modelo para dois spins próximos  $i$  e  $j$ . O resultado é bem conhecido na literatura (BELLAC, 1991).

$$G_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) = a^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}}{4 - 2\cos(k_1 a) - 2\cos(k_2 a)} \quad (124)$$

Vemos que a função correlação apresenta uma divergência infravermelha ( $k_i a \approx 0 \rightarrow G_{ij} \rightarrow \infty$ ). Baseado nisso, regularizamos  $G_{ij}$  subtraindo 1 da exponencial e definindo uma função

$$\tilde{G}(\vec{x}) = a^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - 1}{4 - 2\cos(k_1 a) - 2\cos(k_2 a)} \quad (125)$$

Também é possível mostrar que

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = e^{-\frac{T}{2J}[G_{00} + G_{pp} - 2G_{0p}]} = e^{(T/J)\tilde{G}(\vec{x})} \quad (126)$$

desde que

$$G_{00} + G_{pp} - 2G_{0p} = 2G_{00} - 2G_{0p} = -\tilde{G}(\vec{x}) \quad (127)$$

Pela versão contínua teríamos o resultado

$$-\vec{\nabla}^2 \tilde{G}(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \quad (128)$$

cuja solução é bem conhecida (equação de Poisson)

$$\tilde{G}(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{a} + \text{const.} \quad (129)$$

Logo,

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = e^{-\frac{T}{2\pi J} \ln(r/a)} = \left(\frac{a}{r}\right)^{T/2\pi J} = \left(\frac{a}{r}\right)^{\eta(T)} \quad (130)$$

onde  $\eta(T) = \frac{T}{2\pi J}$ . Esta expressão mostra que o modelo XY não gera magnetização espontânea:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \langle \vec{S}_0 \cdot \vec{S}_p \rangle = 0 \quad (131)$$

Das diferenças entre a função de correlação entre baixas e altas temperaturas podemos concluir que deve existir um determinado ponto da transição de fase onde o comportamento da função correlação muda de um comportamento de lei de potências (baixas temperaturas) para uma exponencial (altas temperaturas). Pode-se concluir então que acima de algum ponto de transição eventual, o argumento de baixas temperaturas começa a falhar. No cálculo da função correlação entre os spins  $o$  e  $p$  em baixas temperaturas consideramos, assim como no de altas temperaturas, a periodicidade de  $\theta$ . Integramos  $\theta$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ , e portanto poderíamos nos perguntar se a periodicidade de  $\theta$  torna-se importante uma vez que as flutuações tornam-se grandes. É exatamente isso que ocorre; a quase-ordem obtida em baixas temperaturas é eventualmente destruída por excitações topológicas (o mesmo que defeitos topológicos) ou vórtices que dependem da periodicidade de  $\theta$ .

### Os vórtices na transição de fase

O gradiente em coordenadas polares é dado por

$$\vec{\nabla}\theta = \frac{\partial\theta}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\theta}\hat{\theta} \quad (132)$$

mas obviamente  $\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0$ , e então temos

$$\vec{\nabla}\theta = \frac{1}{r}\hat{\theta} = \left(0, \frac{1}{r}\right). \quad (133)$$

Se  $C$  é uma curva fechada em torno de uma origem  $O$  sobre o plano dos spins, então

$$\oint_C \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} = \oint_C \left(0, \frac{1}{r} \cdot (dr, rd\theta)\right) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \quad (134)$$

Geralmente, devido à periodicidade de  $\theta$ , têm-se

$$\oint_C \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} = 2\pi q, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (135)$$

onde  $q$  é a vorticidade, que nada mais é que a "intensidade" do vortex. Notamos que os sinais positivo e negativo nos fornecem uma informação extremamente importante; os vórtices ( $q > 0$ ) podem ser acompanhados por antivórtices ( $q < 0$ ) para o mesmo  $|q|$ .

A energia associada com o vortex pode ser posta como

$$E \approx \int H d^2x = \frac{J}{2} \int (\vec{\nabla}\theta)^2 d^2x \quad (136)$$

$$E = \frac{J}{2} \int_{\pi/L}^{\pi/a} \frac{(\hat{\theta})^2}{r^2} d^2x = \pi J \ln \frac{L}{a} \quad (137)$$

A entropia associada com a criação de um vortex é

$$S = \ln \left(\frac{L}{a}\right)^2, \quad (138)$$

desde que existem  $(L/a)^2$  sítios. Com isso, a energia livre correspondente será

$$F = E - ST = (\pi J - 2T) \ln \frac{L}{a} \quad (139)$$

e conseguimos notar que os vórtices se desestabilizaram para uma quase-ordem quando  $T > T_C = \pi J/2$ .

Todos os resultados obtidos até agora concordam plenamente com a descrição proposta, no ano 1973, por Kosterlitz e Thouless para as fases do sistema. Em baixas temperatu-

ras, somente flutuações de grande comprimento de onda contribuem (também conhecidas como “ondas de spin”); a função correlação entre os spins decresce de acordo com leis de potência, e o sistema é quase-ordenado com ilhas de magnetização de todos os tamanhos. Nessa fase não existem vórtices “livres”, mas encontramos pares de vórtices (um vórtice e um antivórtice de vorticidades opostas), cuja influência sobre o sistema está confinada a pequenas distâncias. À medida que aumentamos a temperatura o tamanho destes pares vórtice-antivórtice aumenta também e ele diverge em  $T = T_C$ , onde os vórtices livres começam a aparecer. Estes vórtices desestabilizam o quase-ordenamento das ondas de spin, e a função correlação decresce exponencialmente.