



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Ozório Bezerra Holanda Neto

**Renormalizabilidade de teorias de Yang-Mills massivas com um
campo tipo Stueckelberg**

Rio de Janeiro

2019

Ozório Bezerra Holanda Neto

**Renormalizabilidade de teorias de Yang-Mills massivas com um campo tipo
Stueckelberg**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

H722

Holanda Neto, Ozório Bezerra.

Renormalizabilidade de teorias de Yang-Mills
massivas com um campo tipo Stueckelberg / Ozório
Bezerra Holanda Neto. - 2019.

98 f.: il.

Orientador: Marcelo dos Santos Guimarães.

Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio
de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Teoria quântica de campos - Teses. 2. Renormalização
(Física) - Teses. 3. Supersimetria - Teses. I. Guimarães,
Marcelo Santos. II. Universidade do Estado do Rio de
Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares.
III. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Ozório Bezerra Holanda Neto

**Renormalizabilidade de teorias de Yang-Mills massivas com um campo tipo
Stueckelberg**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 05 de Agosto de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Professor Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Luís Esteban Oxman
Universidade Federal Fluminense

Prof^a. Dra. Letícia Farias Domingues Palhares
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe.

AGRADECIMENTOS

À família, com amor, admiração e gratidão por sua compreensão, carinho, presença e incansável apoio. Em especial minha mãe Janete, e também Raimunda (avó), Adelson (pai) e Yasmin (irmã). A Duijje pelos bons momentos e presença nas horas difíceis.

Ao Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães, pela orientação e oportunidade de realização deste trabalho. A Professora Dra. Patrizia Vitale e o Professor Dr. Luigi Rosa pela oportunidade e atenção durante o período sanduíche na Universidade de Nápoles Federico II. A todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos amigos do departamento de Física pelas discussões, momentos de lazer e que propiciaram que o ambiente fosse agradável para realização do trabalho. Aos amigos distantes que mesmo assim se fizeram presentes.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, pela oportunidade da realização do Doutorado em Física.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Quanto mais consciência eu tinha do bem e do tal *belo e sublime*, mais profundamente eu me afundava no meu lodo e mais capaz eu era de atolar nele completamente.

Dostoievski

RESUMO

HOLANDA NETO, O.B. *Renormalizabilidade de teorias de Yang-Mills massivas com um campo tipo Stueckelberg*. 2019. 98 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Neste trabalho o operador não-local invariante de gauge dimensão 2 A_{\min}^2 , obtido através da minimização de $\int d^4x A^2$ ao longo da órbita de gauge, permite introduzir uma configuração de campo invariante de gauge não-local A_μ^h que pode ser empregada para construir uma classe de modelos de Yang-Mills massivos euclidianos úteis para investigar efeitos infravermelhos não-perturbativos de teorias confinantes. Uma configuração totalmente local para A_{\min}^2 e A_μ^h pode ser alcançada, resultando numa ação invariante de BRST e local que compartilha similaridades com o formalismo de Stueckelberg. Embora, ao contrário do caso da ação de Stueckelberg, o uso de A_{\min}^2 dá origem a renormalizabilidade da ação a todas as ordens, uma característica que será demonstrada por meio de uma classe de fixações de gauge covariantes que, como o gauge R_ξ de 't Hooft das teorias de gauge com quebra espontânea de simetria, fornece uma massa para o campo de Stueckelberg. Além disso, construímos uma configuração de supercampo transversa invariante de gauge V^H , consistindo do supercampo V e de um supercampo quirial tipo Stueckelberg Ξ . A renormalizabilidade da ação de Super Yang-Mills no gauge de Landau é analisada na presença de um termo de massa $m^2 \int dV \mathcal{M}(V^H)$, com $\mathcal{M}(V^H)$ representando uma série de potências em V^H . Ao contrário da ação original de Stueckelberg, a ação resultante é renormalizável a todas as ordens.

Palavras-chave: Renormalizabilidade. Yang-Mills. Stueckelberg. Supersimetria.

ABSTRACT

HOLANDA NETO, O.B. *Renormalizability of massives Yang-Mills theories with a Stueckelberg-like field.* 2019. 98 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

In this work the dimension two gauge invariant non-local operator A_{min}^2 , obtained through the minimization of $\int d^4x A^2$ along the gauge orbit, allows to introduce a non-local gauge invariant configuration A_μ^h which can be employed to built up a class of Euclidean massive Yang-Mills models useful to investigate non-perturbative infrared effects of confining theories. A fully local setup for both A_{min}^2 and A_μ^h can be achieved, resulting in a local and BRST invariant action which shares similarities with the Stueckelberg formalism. Though, unlike the case of the Stueckelberg action, the use of A_{min}^2 gives rise to an all orders renormalizable action, a feature which will be illustrated by means of a class of covariant gauge fixings which, as much as 't Hooft's R_ξ -gauge of spontaneously broken gauge theories, provide a mass for the Stueckelberg field. Moreover, we construct a gauge invariant transverse superfield configuration V^H , consisting of the wellknown superfield V and of a Stueckelberg-like chiral superfield Ξ . The renormalizability of the Super Yang-Mills action in the Landau gauge is analyzed in the presence of a gauge invariant mass term $m^2 \int dV \mathcal{M}(V^H)$, with $\mathcal{M}(V^H)$ a power series in V^H . Unlike the original Stueckelberg action, the resulting action turns out to be renormalizable to all orders.

Keywords: Renormalizability. Yang-Mills. Stueckelberg. Supersymmetry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Propagador do gluon	24
Figura 2 - Propagador do ghost	24
Figura 3 - Vértices de Yang-Mills.	25

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Os números de ghost e dimensões	29
Tabela 2 - O números quânticos dos campos.	46
Tabela 3 - Os números quânticos das fontes.	47
Tabela 4 - O números quânticos dos campos.	73
Tabela 5 - Os números quânticos das fontes.	73

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	13
1	QUANTIZANDO TEORIAS DE YANG-MILLS	17
1.1	Os fundamentos da teoria de Yang-Mills	17
1.2	A quantização das teorias de Yang-Mills	20
2	RENORMALIZAÇÃO ALGÉBRICA DA TEORIA DE YANG-MILLS	26
2.1	Fixação de gauge e a simetria BRST	26
2.2	Introdução das fontes externas	27
2.3	Identidades de Ward e caracterização algébrica do contra-termo mais geral	27
2.4	Estabilidade da ação Σ_{ext}	30
3	RENORMALIZAÇÃO ALGÉBRICA DO OPERADOR INVARIANTE DE GAUGE A_{MIN}^2	32
3.1	Introdução	32
3.2	O operador A_{min}^2 e a construção do campo A_{μ}^h	32
3.3	A ação local de A_{μ}^h	38
3.4	A fixação de gauge S_{gf}	40
3.5	Os propagadores dos campos elementares	42
3.6	A_{min}^2 versus o termo de massa convencional de Stueckelberg	44
3.7	Caracterização algébrica do contratermo	44
3.8	Análise do contratermo e fatores de renormalização	52
3.9	Conclusão	54
4	QUANTIZANDO TEORIAS DE SUPER YANG-MILLS $\mathcal{N} = 1$	56
4.1	A álgebra supersimétrica	56
4.2	Superespaço $\mathcal{N}=1$	58
4.3	Supercampos $\mathcal{N} = 1$	59
4.4	A ação Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 1$	61
4.5	Fixação do gauge e a invariância BRST	62
4.6	Renormalizabilidade da Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 1$	64
5	RENORMALIZABILIDADE DA SUPER YANG-MILLS $\mathcal{N} = 1$ NO GAUGE DE LANDAU GAUGE COM UM CAMPO TIPO STUECKELBERG	67
5.1	Introdução	67
5.2	Construção do supercampo V^H	67
5.3	Super Yang-Mills-Stueckelberg modificado no gauge de Landau	69
5.4	Análise de renormalizabilidade	72

5.4.1	<u>Identities de Wars e caracterização algébrica do contratermo invariante</u> .	74
5.5	A caracterização algébrica do contratermo invariante e da renormalizabilidade	75
5.6	Análise do contratermo e fatores de renormalização	81
5.7	Conclusão	87
	CONCLUSÃO	88
	REFERÊNCIAS	89
	APÊNDICE A – A identidade de Slavnov-Taylor generalizada	96

INTRODUÇÃO

Efeitos não-perturbativos em teorias de Yang-Mills tem ganhado grande atenção recentemente. Essas teorias possuem uma característica muito interessante chamada **liberdade assintótica**. Essa propriedade está ligada com a constante de acoplamento forte, que possui valor muito grande na região infravermelha (região de baixas energias) impossibilitando uma simples expansão de série perturbativa, algo que funciona no ultravioleta (região de altas energias) onde a liberdade assintótica atua (GROSS; WILCZEK, 1973).

Outra característica das teorias de Yang-Mills na região do infravermelho é o **confinamento**. O confinamento de cor ou simplesmente confinamento diz que estados de glúons e quarks carregados de cor, nunca foram observados livremente na natureza, ou seja, eles sempre aparecem em estados compostos neutros da carga de cor como hádrons (formados de quarks) e glueballs (formados de glúons). Além disso, embora glúons são não-massivos, as glueballs são partículas massivas, portanto precisamos explicar a origem dessa massa.

Apesar da falta de dados experimentais sobre glúons em baixas energias, as teorias de Yang-Mills na região do infravermelho estão bem descritas hoje em dia por simulações na rede. Essa ferramenta é comumente usada para determinar o espectro de energia das partículas, das seções de choque e outros observáveis físicos (MONTVAY; MÜNSTER, 1997). Os resultados na rede tem servido com um guia fenomenológico para a construção de modelos analíticos (TISSIER; WSCHEBOR, 2011), (TISSIER; WSCHEBOR, 2010a), (MAAS; MUFTI, 2014), (SIRINGO; COMITINI, 2018).

Existem alguns resultados de simulações na rede focadas em funções de 2-pontos $\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle$ no *gauge* de Landau $\partial_\mu A_\mu = 0$. No caso das teorias de glúons sem quarks alguns fatos estão bem estabelecidos. Um desses fatos é que o propagador de glúon para dimensão espaço-temporal maior que 2 não diverge no infravermelho e tende para uma constante positiva, ou seja, o comportamento é semelhante a de uma partícula massiva.

Nesse contexto das teorias massivas de Yang-Mills investigamos o operador de dimensão 2, A_{\min}^2 , obtido quando minimizamos o funcional $\text{Tr} \int d^4x A_\mu^u A_\mu^u$ ao longo da órbita do campo de gauge A_μ (ZWANZIGER, 1990; BAAL, 1992; DELL'ANTONIO; ZWANZIGER, 1991; DELL'ANTONIO; ZWANZIGER, 1989), ou seja

$$\begin{aligned}
 A_{\min}^2 &\equiv \min_{\{u\}} \text{Tr} \int d^4x A_\mu^u A_\mu^u, \\
 A_\mu^u &= u^\dagger A_\mu u + \frac{i}{g} u^\dagger \partial_\mu u.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Como mostrado no trabalho de (CAPRI et al., 2016a), o funcional A_{\min}^2 nos permite

introduzir uma configuração de campo invariante de gauge e não-local A^h (LAVELLE; MCMULLAN, 1997a) que acaba sendo útil para construir teorias de Yang-Mills invariantes de BRST e renormalizáveis que podem ser empregadas como teorias massivas efetivas no espaço euclidiano para o estudo não-perturbativo da região infravermelha. Um exemplo de tais teorias é fornecido pela teoria de Gribov-Zwanziger refinada (DUDAL et al., 2008a), recentemente foi formulada uma versão invariante de BRST desta teoria por (CAPRI et al., 2015; CAPRI et al., 2016b; CAPRI et al., 2016a; CAPRI et al., 2017a; CAPRI et al., 2017a). Podemos também citar o modelo massivo discutido por (TISSIER; WS-CHEBOR, 2010b), onde o termo massivo pode ser visto como profundamente relacionado a A_{\min}^2 , graças ao uso do gauge de Landau. É importante mencionar que o comportamento massivo para o propagador do glúon, conhecido como a solução de desacoplamento, tem aparecido em outras abordagens, dentre elas as equações de Schwinger-Dyson, o grupo de renormalização e outras técnicas, ver por exemplo (AGUILAR; BINOSI; PAPAVASSILIOU, 2008; AGUILAR; NATALE, 2004; AGUILAR; BINOSI; PAPAVASSILIOU, 2016; FISCHER; MAAS; PAWLOWSKI, 2009; AGUILAR; BINOSI; PAPAVASSILIOU, 2015; HUBER, 2015; FISCHER; PAWLOWSKI, 2009; WEBER, 2012; FRASCA, 2008; SIRINGO, 2016). A solução do desacoplamento analítica para a função de correlação de 2-pontos do glúon acaba sendo um bom acordo com as recentes simulações numéricas em QCD na rede, ambas no gauge de Landau e os gauges lineares covariantes (CUCCHIERI et al., 2016; CUCCHIERI; MENDES, 2007; CUCCHIERI; MENDES, 2008b; CUCCHIERI et al., 2012; OLIVEIRA; SILVA, 2012; CUCCHIERI; MENDES; SANTOS, 2009; CUCCHIERI et al., 2011; BICUDO et al., 2015).

A análise do operador A_{\min}^2 para uma classe geral de gauges covariantes compartilha grande similaridade com o gauge R_ζ de 't Hooft, comumente usado nas teorias de Yang-Mills com quebra espontânea de simetria.

O procedimento de localização para ambos A_{\min}^2 e A_μ^h requer a introdução de um campo auxiliar de Stueckelberg adimensional ξ , como o campo de Higgs do gauge R_ζ de 't Hooft, na qual a condição de gauge aparecerá através de um parâmetro de gauge massivo μ^2 . Esta propriedade nos permitirá uma massa invariante de BRST para o campo auxiliar ξ , uma propriedade que poderia ter consequências úteis nos cálculos a 1-loop envolvendo ξ afim de manter o controle de futuras divergências associadas a sua natureza adimensional. Além disso, como no caso do gauge R_ζ , os ghosts de Faddeev-Popov adquirem uma massa através da fixação de gauge. É claro, colocando $\mu^2 = 0$, o gauge covariante linear discutido é recuperado (ver (CAPRI et al., 2016a)).

A extensão supersimétrica do campo A^h é construída, onde analisamos as propriedades de renormalizabilidade de uma teoria de gauge não-abeliana $\mathcal{N} = 1$ definida por um multipletto contendo uma excitação vetorial massiva. O modelo analisado é a versão supersimétrica da ação de Stueckelberg, no fato que o campo de gauge massivo é construído usando um supercampo escalar compensador, que faz este preservar a simetria de

gauge.

Os modelos de super Stueckelberg são muito bem revisados por (RUEGG; RUIZ-ALTABA, 2004). Tradicionalmente, a maioria das investigações desse modelos tem como objetivo uma alternativa para o mecanismo de Higgs, mas como discutido por (DELBOURGO; TWISK; THOMPSON, 1988) a renormalizabilidade e unitariedade são problemas inevitáveis dos modelos de Stueckelberg não-abelianos. O modelo de Stueckelberg original é abeliano e foi provado por (LOWENSTEIN; SCHROER, 1972) ser renormalizável e unitário, mas a versão não-abeliana é conhecida ser perturbativamente não renormalizável (KUNIMASA; GOTO, 1967; SLAVNOV; FADDEEV, 1970; SLAVNOV, 1972). O problema é devido ao comportamento ultravioleta do propagador. No caso abeliano, isso é perfeitamente compensado pela dinâmica do campo de Stueckelberg mas, em teorias não-abelianas, isso não é bem assim, resultando em amplitudes interagentes incuráveis ou seções de choque divergentes.

Mesmo assim há diversos interesses no estudo de modelos massivos vetoriais sem o mecanismo de Higgs. A principal motivação vem do comportamento confinante no infravermelho das teorias de gauge fortemente acopladas, como por exemplo QCD. Confinamento é um fenômeno muito importante neste contexto, mas o entendimento físico por trás dele ainda está em aberto. Uma maneira para obter informação deste fenômeno é através de cálculos na rede a qual mostrou que o propagador do glúon tem comportamento massivo na região não-perturbativa do infravermelho profundo, ao mesmo tempo, exibindo violações de positividade que impedem uma interpretação da propagação de partículas (CUCCHIERI; MENDES; TAURINES, 2005; CUCCHIERI; MENDES, 2007; CUCCHIERI; MENDES, 2008b; CUCCHIERI; MENDES, 2008a; CUCCHIERI; MENDES, 2008c; DUDAL; OLIVEIRA; SILVA, 2014; CORNWALL, 2013). Portanto, numa teoria confinante, a unitariedade é bastante complexa e de difícil previsão. Claro que, a unitariedade física é preservada em termos das excitações do espectro que são estados ligados de quarks e glúons como, por exemplo, mésons, bárions, glueballs, etc. Embora, a violação de positividade da função de correlação de dois pontos do glúon seja vista como uma forte evidência do confinamento, sinalizando que os glúons não são excitações do espectro físico da teoria. Mesmo assim, a renormalizabilidade deve ser mantida uma vez que queremos o bom comportamento UV da teoria. Esta tendência de investigações levou a muitos trabalhos que propuseram modificações da teoria de Yang-Mills devido aos resultados da rede (ALKOFER et al., 2004; DUDAL et al., 2008b; DUDAL et al., 2008; TISSIER; WSCHEBOR, 2010a; STRAUSS; FISCHER; KELLERMANN, 2012). Desenvolvimentos recentes ao longo destas linhas envolvem a introdução de modelos do tipo Stueckelberg modificados (CAPRI et al., 2015; CAPRI et al., 2016c; CAPRI et al., 2016b; CAPRI et al., 2016a; CAPRI et al., 2017b) construído como uma generalização de uma classe de teorias confinantes efetivas conhecidas como cenários de Gribov-Zwanziger (GRIBOV, 1978; ZWANZIGER, 1989), veja também (VANDERSICKEL; ZWANZIGER,

2012). Ao contrário da ação de Stueckelberg padrão, esses modelos modificados usufruem da propriedade de ser renormalizável a todas as ordens, veja (CAPRI et al., 2015; CAPRI et al., 2016c; CAPRI et al., 2016b; CAPRI et al., 2016a; CAPRI et al., 2017b) para um trabalho detalhado sobre a construção desses modelos modificados e suas diferenças com a teoria padrão de Stueckelberg. Vamos também mencionar aqui que, recentemente, uma reformulação invariante do BRST da teoria de Gribov-Zwanziger foi alcançada por (CAPRI et al., 2016b; CAPRI et al., 2017b), fazendo a extensão do gauge de Landau para um gauge covariante arbitrário.

A unitariedade perturbativa dos modelos não são explicitamente abordadas. O modelo não-supersimétrico não é unitário perturbativo, embora ele possa ser empregado como um modelo renormalizável efetivo, a fim de investigar a região infravermelha não-perturbativa de teorias de Yang-Mills. Até agora, a previsão do modelo não-supersimétrico está em boa concordância com os dados atuais da rede sobre as funções de correlação da teoria, como por exemplo o propagador de glúons.

O campo transversal invariante de BRST V^H possibilita a investigação do confinamento das teorias de Super Yang-Mills, que é conhecida ser uma teoria confinante.

Numa teoria de Yang-Mills confinante, a unitariedade tem sido abordada através de estados ligados sem simetria de cor, um tema que está distante do objetivo deste trabalho, cujo principal objetivo é obter uma teoria supersimétrica massiva renormalizável que generaliza o modelo proposto por (CAPRI et al., 2015; CAPRI et al., 2016c; CAPRI et al., 2016b; CAPRI et al., 2016a; CAPRI et al., 2017b). Provamos que a presente generalização é renormalizável, uma tarefa que será feita por meio de um conjunto de identidades de Ward adequadas. Generalizações supersimétricas de modelos do tipo Stueckelberg foram estudadas por (DELBOURGO, 1975). A maioria concentradas nos modelos abelianos com divergências bem comportadas (veja por exemplo (KORS; NATH, 2004a; KORS; NATH, 2004b; KORS; NATH, 2005) para uma proposta do modelo de Stueckelberg no MSSM). Algumas poucas análises desses modelos tipo Stueckelberg não-abeliano podem ser encontradas. Como a construção usando multipletos tensoriais por (NISHINO; RAJPOOT, 2013; NISHINO; RAJPOOT, 2014; SEZGIN; WULFF, 2013) e campos compostos por (NISHINO; RAJPOOT, 2016).

Usando o formalismo da supersimetria estendemos a nossa análise e construímos um supercampo vetorial $\mathcal{N} = 1$ invariante de gauge composto do supercampo V e de um supercampo quiral Ξ tipo Stueckelberg. A renormalizabilidade da ação de Super Yang-Mills é analisada na presença de um termo de massa invariante de gauge $m^2 \int dV \mathcal{M}(V^H)$, com $\mathcal{M}(V^H)$ dado por uma série de potências em V^H . Ao contrário da ação de Stueckelberg original, a ação é provada ser renormalizável a todas as ordens.

1 QUANTIZANDO TEORIAS DE YANG-MILLS

1.1 Os fundamentos da teoria de Yang-Mills

A teoria de Yang-Mills é uma teoria de gauge baseada no grupo de simetria não-abeliano $SU(N)$, cuja a ação é dada por

$$S_{YM} = \frac{1}{2} \int d^d x \text{Tr}(F^2) = \frac{1}{4} \int d^d x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (2)$$

tal que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (3)$$

com A_μ e $F_{\mu\nu}$ escrito na representação adjunta do $SU(N)$, ou seja,

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \text{ e } F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a, \quad (4)$$

com os geradores T^a , rotulados por a , que satisfazem

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad [T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (5)$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo. O tensor invariante de gauge $F_{\mu\nu}$ também pode ser escrito

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (6)$$

As transformações de simetria do $SU(N)$ são dadas por

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(x)\phi(x). \quad (7)$$

Ao invés das teorias no $U(1)$, a matriz U não passa através da derivada, quando $U = U(x) = e^{-ig\alpha(x)}$, e

$$\partial_\mu(U(x)\phi(x)) \neq U(x)\partial_\mu\phi(x). \quad (8)$$

A falha da comutação da derivada com U introduz um termo adicional (de acordo com a regra do produto), que quebra a invariância de gauge da ação. A fim de recuperar a invariância de gauge, definimos uma nova derivada covariante das transformações de gauge tal que a derivada de ϕ se transforma igual a ϕ

$$D_\mu(x)\phi(x) \rightarrow (D_\mu\phi(x))' = U(x)D_\mu\phi(x). \quad (9)$$

Esta nova derivada é denominada *derivada covariante de gauge* sendo definida

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \quad (10)$$

ou na representação adjunta

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} - gf^{abc} A_\mu^c. \quad (11)$$

Sobre a transformação (7), temos

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = U(x)D_\mu U(x)^\dagger. \quad (12)$$

A equação (12) implica que

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = U(x)A_\mu U^\dagger(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x). \quad (13)$$

Para transformações infinitesimais do $SU(N)$ como

$$U(x) = 1 - ig\alpha(x), \quad (14)$$

a transformação (13) vem a ser

$$\delta A_\mu = -D_\mu \alpha. \quad (15)$$

Podemos usar a derivada covariante para construir $F_{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}. \quad (16)$$

Apartir da ação (2) derivamos as equações de movimento

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (17)$$

O campo de gauge é auto-interagente e as equações de movimento são semilineares, com as não-linearidades ambas nas derivadas e campos de gauge. Isso significa que resolvemos essa equação quando as não-linearidades são pequenas.

A identidade de Bianchi é mantida como

$$D_\mu F_{\nu\kappa} + D_\kappa F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\kappa\mu} = 0, \quad (18)$$

o qual é equivalente a identidade de Jacobi

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\kappa]] + [D_\kappa, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\nu, [D_\kappa, D_\mu]] = 0, \quad (19)$$

onde $[D_\mu, F_{\nu\kappa}] = D_\mu F_{\nu\kappa}$.

Definindo o tensor invariante de gauge dual $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, a identidade de

Bianchi reduz a

$$D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0. \quad (20)$$

Uma fonte interagindo com o campo de gauge na ação $J \cdot A$, modifica as equações de movimento como

$$D_\mu F_{\mu\nu} = J_\nu. \quad (21)$$

Multiplicando a equação acima pela derivada covariante D_ν , obtemos a forma covariante da lei de conservação de corrente

$$D_\nu J_\nu = 0, \quad (22)$$

que implica na respectiva invariância das simetrias de Noether da ação. Através da identificação que

$$E_k = F_{0k}, \quad B_k = \tilde{F}_{0k}, \quad (23)$$

aplicamos às equações (20) e (21), onde podemos demonstrar as equações de Maxwell generalizadas

$$\partial_k E^k = J^0, \quad (24)$$

$$\partial_k B^k = \tilde{J}^0, \quad (25)$$

$$\varepsilon_{klm} \partial_l E_m = -\tilde{J}_k - \partial_0 B_k, \quad (26)$$

$$\varepsilon_{klm} \partial_l B_m = J_k + \partial_0 E_k, \quad (27)$$

onde a corrente eletromagnética de cor e a sua dual são

$$J^k = -ig[A_\mu, F_{\mu\nu}] + j_\mu, \quad (28)$$

$$\tilde{J}^k = -ig[A_\mu, \tilde{F}_{\mu\nu}]. \quad (29)$$

A equação (24) é a lei de Gauss não-abeliana e a equação (25) sua análoga magnética. As equações (26) e (27) correspondem a versão não-abeliana das leis de Faraday e Ampère, respectivamente. A grande diferença da versão abeliana é que a auto-interação entre os campos de gauge produzem a simetrização das equações devido a presença da simetria de cor nas correntes eletromagnéticas e a sua dual.

A equações de Yang-Mills (21) são extremamente difíceis para resolver. Há inúmeros estudos matemáticos sobre a existência, unicidade e suavidade das soluções (SEGAL, 1979; GINIBRE; VELO, 1981; CHOQUET-BRUHAT; CHRISTODOULOU, 1981; EARDLEY; MONCRIEF, 1982). Além disso, Coleman (COLEMAN, 1977) estabelece que a única solução não-singular possível para as equações de Yang-Mills é a solução de vácuo

($J = 0$), que no regime assintótico

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{3/2+\epsilon} F_{\mu\nu}^a(x^0, \mathbf{x}) = 0, \quad 0 < \epsilon < 1/2, \quad x^0 > 0 \quad (30)$$

permanece uniforme na direção e tempo. Algumas outras soluções especiais são obtidas, tais como, configurações de monopólos (HOOFT, 1974; POLYAKOV, 1996; WU; YANG, 1975), vórtices (NIELSEN; OLESEN, 1973), dyons (JULIA; ZEE, 1975) ou instantons (BELAVIN et al., 1975). Particularmente, instantons são conhecidos como a peça chave para resolver o problema das simetrias quirais $U(1)$ (HOOFT, 1976), por que produzem soluções no espaço euclidiano para a segunda classe de Chern $\int d^d x F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \nu$ com $\nu \neq 0$, ν é denominado o número de instanton. No espaço de Minkowski estas soluções de instantons representam processos de tunelamentos entre estados com diferentes números de instantons ν .

1.2 A quantização das teorias de Yang-Mills

Na seção anterior introduzimos a ação clássica da teoria de Yang-Mills e suas propriedades. Agora, quantizaremos a ação clássica de Yang-Mills através do método da integral de caminho. Desta forma, a integral de caminho é definida como

$$Z(J) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A e^{-1/\hbar(S_{YM} + \int d^d x J_\mu^a A_\mu^a)}, \quad (31)$$

$$S_{YM} = \int d^d x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (32)$$

Usando o método de Faddeev-Popov (FADDEEV; POPOV, 1967) para fixar o gauge, obtemos a seguinte integral de caminho

$$Z(J) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \delta(G) \det \left(\frac{\delta G}{\delta \alpha} \right) e^{-1/\hbar(S_{YM} + \int d^d x J_\mu^a A_\mu^a)}, \quad (33)$$

onde a função G é representada pelo gauge fixing. Usaremos a fixação de gauge R_ξ

$$G^a(x) \equiv \partial_\mu A_\mu(x) - \omega^a(x), \quad (34)$$

onde $\omega^a(x)$ é uma função arbitrária de x . Aplicando (34) em (33), obtemos

$$\det \left(\frac{\delta G^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} \right) \propto \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-S_{gh}}, \quad (35)$$

$$S_{gh} = \int d^d x \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b = \int d^d x \bar{c}^a \partial^2 c^a + g f^{abc} A_\mu^c (\partial_\mu \bar{c}^a) c^b, \quad (36)$$

onde os campos c e \bar{c} são chamados de *ghosts*. Assim, obtemos a integral de caminho para ação de Faddeev-Popov

$$Z(J) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \delta(\partial_\mu A_\mu(x) - \omega^a(x)) e^{-1/\hbar(S_{total} + S_{fontes})}, \quad (37)$$

$$S_{total} = S_{YM} + S_{gh} = \int d^d x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b, \quad (38)$$

$$S_{fontes} = \int d^d x J_\mu^a A_\mu^a + \bar{c}^a \chi^a + \bar{\chi}^a c^a. \quad (39)$$

O campo de ghost é também uma variável de Grassmann, e assim *loops* fechados de linhas de ghosts nos diagramas de Feynman carregam um fator extra de menos. Podemos ver através da equação (36) que os campos de ghost interagem com os campos de gauge, e assim teremos tais loops. Note que em teorias abelianas os campos de ghost não interagem com o campo de gauge simplesmente observando que $f^{abc} = 0$. Neste caso, o campo de ghost é livre e pode ser absorvido pelas constantes de renormalização.

Nossa função de fixação de gauge possui uma função arbitrária $\omega^a(x)$. Note que a integral de caminho é independente de $\omega^a(x)$. Assim, podemos introduzir uma identidade em função dessa constante arbitrária em $Z(J)$

$$\begin{aligned} Z(J) &= e^{-1/\hbar S_{gf}} e^{+1/\hbar S_{gf}} \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \delta(\partial_\mu A_\mu(x) - \omega^a(x)) e^{-1/\hbar(S_{FP} + S_{fontes})} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \delta(\partial_\mu A_\mu(x) - \omega^a(x)) e^{-1/\hbar(S_{FP} + S_{gf} + S_{fontes})}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$S_{gf} = \int d^d x \frac{1}{2\xi} \omega^a(x) \omega^a(x), \quad (41)$$

onde o fator $e^{+1/\hbar S_{gf}}$ é absorvido pela constante de normalização \mathcal{N} , e agora podemos ver que essa fixação do gauge R_ξ leva esse nome devido a constante de acoplamento ξ . Por causa da função delta na equação (40), é fácil integrar sobre ω .

Concluimos que o resultado para $Z(J)$ é

$$Z(J) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{-1/\hbar(S_{FP} + S_{gf} + S_{fontes})}, \quad (42)$$

$$S_{gf} = \int d^d x \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A_\mu^a \partial_\nu A_\nu^a. \quad (43)$$

Apartir de agora, podemos derivar as regras de Feynman que seguem desta integral.

Partindo da ação quadrática nos campos de gauge e de ghost

$$Z_{quad}(J) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{-1/\hbar(S_{total}^{quad} + S_{gf} + S_{fontes})}, \quad (44)$$

$$S_{total}^{quad} + S_{gf} = \int d^d x \frac{1}{2} A_\mu \left(-\delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \partial^2 - \left(\frac{1-\xi}{\xi} \right) \delta^{ab} \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu + \bar{c} \partial^2 c. \quad (45)$$

Tomando a transformada de Fourier

$$S_{total}^{quad} + S_{gf} = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a (\mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab}) A_\nu^b - \bar{c}^a \delta^{ab} k^2 c^b, \quad (46)$$

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab} \equiv \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} k^2 + \left(\frac{1-\xi}{\xi} \right) \delta^{ab} k_\mu k_\nu, \quad (47)$$

$$\mathcal{G}^{ab} \equiv \delta^{ab} k^2. \quad (48)$$

Então, podemos reescrever a integral de caminho dos campos de gauge como

$$Z_{gauge}(J) = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} J_\mu^a(k) (\mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab})^{-1}(k,q) J_\nu^b(q)} \quad (49)$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J_\mu^a(x) (\mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab})^{-1}(x,y) J_\nu^b(y)}. \quad (50)$$

Apartir disto podemos calcular o propagador de gauge usando

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(x)} \frac{\delta}{\delta J_\nu^b(y)} Z(J)|_{J=0} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{ikx} e^{iqy} \langle A_\mu(k) A_\nu(q) \rangle, \quad (51)$$

onde

$$\langle A_\mu^a(k) A_\nu^b(q) \rangle = \delta^{ab} \delta^d(k-q) \left(\frac{1}{k^2} \mathcal{P}_{\mu\nu} + \frac{\xi}{k^2} \omega_{\mu\nu} \right), \quad (52)$$

$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2$ e $\omega_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu / k^2$, são respectivamente os projetores transversal e longitudinal.

Para o propagador de ghost segue o mesmo procedimento com

$$Z_{ghost}(\chi, \bar{\chi}) = e^{-\int d^d x d^d y \chi^a(x) (\mathcal{G}^{ab})^{-1}(x,y) \bar{\chi}^b(y)}, \quad (53)$$

na qual o propagador de ghost é dado por

$$\langle \bar{c}^a(k) c^b(q) \rangle = \frac{\delta}{\delta \chi^a(k)} \frac{\delta}{\delta \bar{\chi}^b(q)} Z_0(\bar{\chi}, \chi) = \frac{\delta^{ab} \delta(k-q)}{k^2}. \quad (54)$$

Podemos ver através da técnica diagramática de Feynman (1) e (2) a representação dos propagadores (52) e (54) respectivamente.

Para calcular os vértices da teoria precisamos escrever a ação de interação (os termos não quadráticos),

$$S_{total}^{int} = \int d^d x g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c + \frac{1}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e + g f^{abc} A_\mu^c (\partial_\mu \bar{c}^a) c^b. \quad (55)$$

Da mesma forma como escrevemos a integral de caminho da parte quadrática em função

das correntes, podemos escrever a parte de interação. Assim, temos

$$Z_{int}(J, \bar{\chi}, \chi) = e^{-g \int d^d x f^{abc} \left(\partial_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu^a} \right) \frac{\delta}{\delta J_\mu^b} \frac{\delta}{\delta J_\mu^c}} e^{-g \int d^d x f^{abc} \frac{\delta}{\delta J_\mu^a} \left(\partial_\mu \frac{\delta}{\delta \bar{\chi}^a} \right) \frac{\delta}{\delta \chi^c}} e^{-\frac{g}{4} \int d^d x f^{abc} f^{ade} \frac{\delta}{\delta J_\mu^b} \frac{\delta}{\delta J_\mu^c} \frac{\delta}{\delta J_\mu^d} \frac{\delta}{\delta J_\mu^e}} \times Z_{quad}(J). \quad (56)$$

Aplicando (56), chegamos aos seguintes vértices com os momentos fluindo em direção ao vértice:

$$\Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\sigma^c}(-p_1, -p_2, -p_3) = -ig f^{abc} [(p_1 - p_3)_\nu \delta_{\sigma\mu} + (p_3 - p_2)_\mu \delta_{\nu\sigma} + (p_2 - p_1)_\sigma \delta_{\nu\mu}] \delta(p_1 + p_2 + p_3), \quad (57)$$

$$\Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c A_\sigma^d}(-p_1, -p_2, -p_3, -p_4) = g^2 [f^{cab} f^{ecd} (\delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) + f^{eac} f^{ebd} (\delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) + f^{ead} f^{ebc} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma})] \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4), \quad (58)$$

$$\Gamma_{\bar{c}^a A_\mu^b c^c}(-p_1, -p_2, -p_3) = ig f^{abc} p_{1,\mu} \delta(p_1 + p_2 + p_3), \quad (59)$$

onde as equações (57), (58) e (59) são representadas respectivamente através das figuras (3a), (3b) e (3c).

Expandindo em torno da constante de acoplamento g e calculando as derivadas funcionais, somos capazes de obter todas as funções de n -pontos que correspondem a processos de amplitudes, seções de choques, taxas de decaimento e entre outros processos. Além disso, as regras de Feynman podem ser usadas para a análise da renormalização perturbativa e da liberdade assintótica. De fato, podemos analisar algumas propriedades preliminares de renormalizabilidade. Suponhamos que desenhamos um diagrama geral contendo os dois propagadores da teoria ((1),(2)) e os três vértices ((3a),(3b),(3c)). Logo, a divergência deste diagrama será definida por

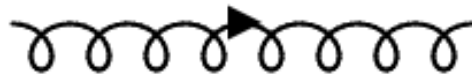
$$D \equiv dL - 2I, \quad (60)$$

onde d é a dimensão do espaço-tempo, n o número de loops e I a quantidade de linhas internas. Se $D \geq 0$ temos diagramas divergentes, e para $D < 0$ sem divergências. O parâmetro D é chamado de divergência superficial pois apesar de alguns diagramas apresentarem divergências, mesmo assim algumas correções podem ser feitas para que a finitude seja recuperada.

Nesse contexto que surge os procedimentos de renormalização, no caso das teorias de Yang-Mills isso requer um procedimentos de regularização dimensional cuidadoso que respeita a invariância de gauge e as identidades de Ward generalizadas; isto foi primeiro demonstrado por 't Hooft (HOOFT, 1971).

Quando há quebra espontânea de simetria devido ao mecanismo de Higgs, o propagador vetorial normalmente adquire um termo $\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}$, na qual muda as linhas internas $2I \rightarrow 4I$ promovendo a falha do cálculo de D . Então, 't Hooft demonstrou que existe uma escolha de gauge minuciosa que elimina o termo problemático $\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}$ dos diagramas

Figura 1 - Propagador do gluon



Fonte: O autor, 2019.

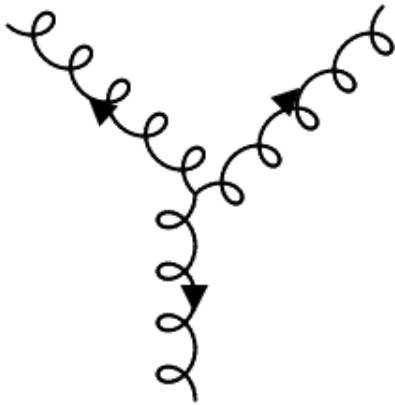
Figura 2 - Propagador do ghost



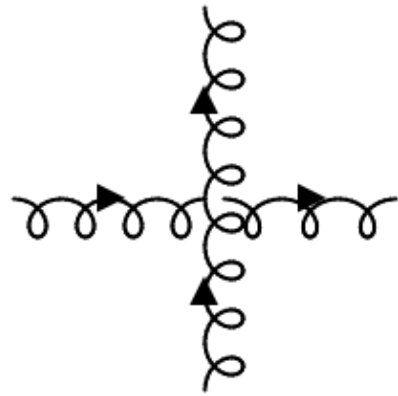
Fonte: O autor, 2019.

de Feynman, e com isso ele foi capaz de demonstrar a renormalizabilidade para o caso de quebra espontânea da simetria. No próximo capítulo, abordaremos a renormalizabilidade das teorias de Yang-Mills do ponto de vista das suas simetrias através da renormalização algébrica.

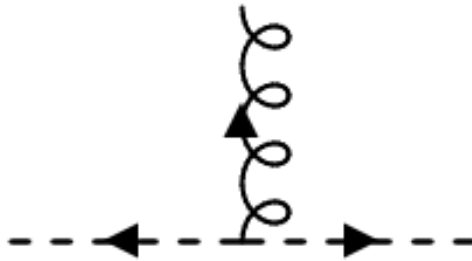
Figura 3 - Vértices de Yang-Mills.



(a)



(b)



(c)

Legenda: (a) 3-vértice do gluon. (b) 4-vértice do gluon. (c) vértice ghost-ghost-gluon.

Fonte: O autor, 2019.

2 RENORMALIZAÇÃO ALGÉBRICA DA TEORIA DE YANG-MILLS

Nesta seção formularemos todos os passos do procedimento de renormalização algébrica para mostrar a estabilidade e a renormalização da ação de Yang-Mills.

2.1 Fixação de gauge e a simetria BRST

Partindo da ação com gauge fixado:

$$\Sigma_{total} = \Sigma_{YM} + \Sigma_{gh} + \Sigma_{gf} \quad (61)$$

$$= - \int d^d x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b + \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A_\mu^a \partial_\nu A_\nu^a, \quad (62)$$

podemos ver que a ação total pode ser rederivada para obedecer uma simetria residual denominada **simetria de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin** ou comumente chamada **simetria BRST**. Essa simetria é muito importante no contexto da renormalizabilidade da teoria (PIGUET; SORELLA, 1995). Também, podemos mostrar que os glúons cujas polarizações não são tipo Minkowski e transversa desacoplam das amplitudes de espalhamento (assim como os ghosts).

As transformações de BRST são dadas por

$$sA_\mu^a = D_\mu^{ab} c^b, \quad (63)$$

$$sc^a = ic^2 = -\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c, \quad (64)$$

$$s\bar{c}^a = b^a, \quad (65)$$

$$sb^a = 0, \quad (66)$$

onde s é nilpotente:

$$s^2 = 0. \quad (67)$$

Uma vez estabelecidas as transformações BRST, podemos redefinir a fixação de gauge invariante BRST usando a nilpotência de s :

$$\Sigma_{gf} = s \int d^d x \left(\bar{c}^a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\xi}{2} \bar{c}^a b^a \right) \quad (68)$$

$$= \int d^d x \left(b^a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\xi}{2} b^a b^a - \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b \right), \quad (69)$$

tal que tomando $\xi = 0$ o usual gauge linear covariante é reduzido ao gauge de Landau.

Portanto, temos uma ação total invariante de BRST:

$$\Sigma_{total} = \Sigma_{YM} + \Sigma_{gh} + \Sigma_{gf} \quad (70)$$

$$= - \int d^d x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b - b^a \partial^\mu A_\mu^a - \frac{\xi}{2} b^a b^a, \quad (71)$$

com

$$s\Sigma_{total} = 0, \quad (72)$$

estabelecendo a ação invariante BRST podemos seguir com o procedimento de renormalização algébrica escrevendo as identidades de Ward.

2.2 Introdução das fontes externas

Vamos iniciar introduzindo as seguintes fontes (ρ_μ^a, σ^a) externas acopladas às transformações de BRST não-lineares dos campos (A_μ^a, c^a) . Isso é feito através da ação

$$\Sigma_{fontes} = s \int d^4 x (\rho^{a\mu} A_\mu^a + \sigma^a c^a), \quad (73)$$

na qual

$$s\rho^{a\mu} = s\sigma^a = 0. \quad (74)$$

A ação completa estendida é agora dado por

$$\Sigma_{ext} = \Sigma_{total} + \Sigma_{fontes} \quad (75)$$

$$= - \int d^d x \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b - b^a \partial^\mu A_\mu^a - \frac{\xi}{2} b^a b^a + \rho^{a\mu} D_\mu^{ab} c^b + \frac{1}{2} f^{abc} \sigma^a c^b c^c, \quad (76)$$

com $s\Sigma_{ext} = 0$. Observe que se as fontes externas forem desligadas $(\rho_\mu^a = \sigma^a = 0)$ recuperamos a ação invariante Σ_{total} .

2.3 Identidades de Ward e caracterização algébrica do contra-termo mais geral

A ação estendida Σ_{ext} são caracterizadas pelas seguintes identidades de Ward:

- A identidade de Slanov-Taylor

$$S(\Sigma) = \text{tr} \int d^4x \frac{\delta\Sigma}{\delta\rho^\mu} \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\sigma} \frac{\delta\Sigma}{\delta c} + b \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} = 0. \quad (77)$$

- A equação de movimento do multiplicador de lagrange b^a

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} = \partial^\mu A_\mu + \xi b^a. \quad (78)$$

- A equação de movimento do ghost

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} = -\partial^\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\rho^{a\mu}}. \quad (79)$$

- A identidade de Ward do número de ghost

$$\int d^4x \ c^a \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} - \bar{c}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} - \sigma^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\sigma^a} = 0. \quad (80)$$

Assim, podemos descobrir o contra-termo mais geral com dimensão 4 e número de ghost 0 que pode ser adicionado à ação clássica. Logo, a ação perturbada é

$$\Sigma_{pert} = \Sigma_{ext} + \epsilon \Sigma_{ct}, \quad (81)$$

onde ϵ é um parâmetro de expansão. Na primeira ordem de ϵ o contra-termo Σ_{ct} obedece a todas identidades de Ward demonstradas acima.

Temos também que

$$S_\Sigma \Sigma_{ct} = 0, \quad (82)$$

tal que S_Σ é o operador de Slavnov-Taylor linearizado

$$S_\Sigma = \text{tr} \int d^4x \frac{\delta\Sigma}{\delta\rho^\mu} \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu} \frac{\delta}{\delta\rho^\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\sigma} \frac{\delta}{\delta c} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c} \frac{\delta}{\delta\sigma} + b \frac{\delta}{\delta\bar{c}}, \quad (83)$$

com

$$S_\Sigma S_\Sigma = 0. \quad (84)$$

Usando (82) e (84) podemos mostrar que o contra-termo é da seguinte forma

$$\Sigma_{ct} = \Sigma_{cohom} + \Sigma_{trivial}, \quad t.q. \ \Sigma_{trivial} \equiv S_\Sigma \Sigma^{(-1)}, \quad (85)$$

na qual Σ_{cohom} é parte da cohomologia de S_Σ definida por $S_\Sigma \Sigma_{cohom} = 0$ e a parte trivial

Tabela 1 - Os números de ghost e dimensões

	s	A_μ	c	\bar{c}	ρ	$\bar{\sigma}$	b
número de ghost	1	0	1	-1	-1	-2	0
dimensão de massa	0	1	0	2	3	4	2

Fonte: O autor, 2019.

$S_\Sigma \Sigma^{(-1)}$ obtida pela nilpotência.

Através de (85) podemos primeiramente construir Σ_{cohom} . Em princípio podemos escrever todos os termos com dimensão 4 e número de ghost 0 e que não possam ser escritos trivialmente. Tendo isso em mente, o único termo presente na cohomologia do contra-termo é

$$\Sigma_{cohom} = \int d^4x \frac{a_0}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (86)$$

onde a_0 é um a parâmetro arbitrário. Como segundo passo, podemos escrever Σ^{-1} . Nessa parte podemos construir o mais geral polinômio de todos os campos e fontes com dimensão 4 e número de ghost -1 . Usando a tabela (1) encontramos que

$$\Sigma^{-1} = \int d^4x \ a_1 A_\mu^a \rho^{a\mu} + a_2 \partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^a + a_3 c^a \sigma^a + a_4 \bar{c}^a b^a + \frac{g}{2} a_5 f^{abc} c^a \bar{c}^b \bar{c}^c, \quad (87)$$

tal que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são todos parâmetros arbitrários. Usando S_Σ em (87), i.e.,

$$S_\Sigma \int d^4x \ a_1 A_\mu^a \rho^{a\mu} + a_2 \partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^a + a_3 c^a \sigma^a + a_4 \bar{c}^a b^a + \frac{g}{2} a_5 f^{abc} c^a \bar{c}^b \bar{c}^c, \quad (88)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma_{trivial} = & \int d^4x \ a_1 A_\mu^a \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu^a} + a_1 \frac{\delta \Sigma}{\delta \rho^{a\mu}} \rho^{a\mu} - a_2 b^a \partial^\mu A_\mu^a - a_2 \partial^\mu \bar{c}^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \rho^{a\mu}} - a_3 \sigma^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \sigma^a} - a_3 c^a \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} \\ & + a_4 b^a b^a + \frac{g}{2} a_5 f^{abc} \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \sigma^a} \bar{c}^b \bar{c}^c + 2c^a \bar{c}^b b^c \right). \end{aligned} \quad (89)$$

Podemos restringir ainda mais (89) usando (78) e (79), i.e.,

$$\frac{\delta(\Sigma + \Sigma_{ct})}{\delta b^a} = \partial^\mu A_\mu^a + \xi b^a \leftrightarrow \frac{\delta \Sigma_{ct}}{\delta b^a} = 0, \quad (90)$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + \partial^\mu \frac{\delta}{\delta \rho^{a\mu}} \right) \Sigma_{ct} = 0, \quad (91)$$

na qual obtemos que $a_1 = a_2$ e $a_4 = a_5 = 0$. Logo, tomando todos os resultados anteriores

o contratermo é dado por

$$\begin{aligned}\Sigma_{ct} &= \int d^4x \frac{a_0}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + a_1 A_\mu^a \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu^a} + a_1 \frac{\delta\Sigma}{\delta\rho^{a\mu}} \rho^{a\mu} - a_1 b^a \partial^\mu A_\mu^a - a_1 \partial^\mu \bar{c}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\rho^{\mu a}} \\ &- a_3 \sigma^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\sigma^a} - a_3 c^a \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a}.\end{aligned}\quad (92)$$

Escrevendo (92) na forma paramétrica $\Sigma_{ct} = \mathcal{R}\Sigma_{ext}$, temos

$$\begin{aligned}\Sigma_{ct} &= a_0 g^2 \frac{\delta\Sigma_{ext}}{\delta g^2} + a_1 A_\mu^a \frac{\delta\Sigma_{ext}}{\delta A_\mu^a} + a_1 \frac{\delta\Sigma_{ext}}{\delta\rho^{a\mu}} \rho^{a\mu} - a_1 b^a \frac{\delta\Sigma_{ext}}{\delta b^a} + 2a_1 \xi \frac{\delta\Sigma_{ext}}{\delta\xi} - a_1 \bar{c}^a \frac{\delta\Sigma_{ext}}{\delta\bar{c}^a} \\ &- a_3 \sigma^a \frac{\delta\Sigma_{ext}}{\delta\sigma^a} - a_3 c^a \frac{\delta\Sigma_{ext}}{\delta c^a},\end{aligned}\quad (93)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= a_0 g^2 \frac{\delta}{\delta g^2} + a_1 A_\mu^a \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} - a_1 \rho^{a\mu} \frac{\delta}{\delta\rho^{a\mu}} - a_1 b^a \frac{\delta}{\delta b^a} + 2a_1 \xi \frac{\delta}{\delta\xi} - a_1 \bar{c}^a \frac{\delta}{\delta\bar{c}^a} \\ &- a_3 \sigma^a \frac{\delta}{\delta\sigma^a} - a_3 c^a \frac{\delta}{\delta c^a}.\end{aligned}\quad (94)$$

O operador \mathcal{R} acaba sendo muito útil para análise da estabilidade da ação inicial Σ_{ext} , conforme abordado na próxima sessão.

2.4 Estabilidade da ação Σ_{ext}

Para terminar a prova algébrica da renormalização de (76), devemos provar que o contra-termo (93) pode ser reabsorvido na ação inicial Σ_{ext} através de uma redefinição adequada de campos, fontes e parâmetros. A determinação dessas redefinições torna-se muito fácil quando se conhece o contra-termo escrito em sua forma paramétrica, como em (93). Se o contra-termo (93) pode ser reabsorvido na ação inicial, então, para a primeira ordem na expansão do parâmetro, a seguinte relação deve conter

$$\Sigma[\phi_0] = \Sigma[\phi] + \epsilon \Sigma_{ct}[\phi] + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (95)$$

onde ϕ significa todos os campos, fontes e parâmetros da teoria. De $\Sigma_{ct} = \mathcal{R}\Sigma_{ext}$, concluímos que

$$\Sigma[\phi_0] = \Sigma[\phi] + \mathcal{R}\Sigma[\phi] + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (96)$$

e devido a forma de \mathcal{R} , é fácil ver que

$$\phi_0 = (1 + \epsilon\mathcal{R})\phi. \quad (97)$$

Os campos, fontes e parâmetros são redefinidos de acordo com

$$g_0 = Z_g g \tag{98}$$

$$(A_0) = Z_A^{1/2} A, \tag{99}$$

$$\rho_0 = Z_\rho \rho, \tag{100}$$

$$b_0 = Z_b^{1/2} b, \tag{101}$$

$$\xi_0 = Z_\xi^{1/2} \xi, \tag{102}$$

$$c_0 = Z_c^{1/2} c, \tag{103}$$

$$\bar{c}_0 = Z_{\bar{c}}^{1/2} \bar{c}, \tag{104}$$

$$\sigma_0 = Z_\sigma \sigma, \tag{105}$$

onde

$$Z_g = 1 + \frac{1}{2} a_0, \tag{106}$$

$$Z_A^{1/2} = Z_\rho^{1/2} = Z_b^{-1/2} = Z_c^{1/2} = Z_{\bar{c}}^{-1/2} = 1 + a_1, \tag{107}$$

$$Z_\sigma = Z_c^{-1/2} = 1 + a_3. \tag{108}$$

Vemos assim que, sob uma redefinição apropriada de campos, fontes e parâmetros, conforme descrito nas equações (106), (107) e (108), o contra-termo invariante local mais geral, compatível com as identidades de Ward, pode ser reabsorvido na ação (76).

3 RENORMALIZAÇÃO ALGÉBRICA DO OPERADOR INVARIANTE DE GAUGE A_{MIN}^2

3.1 Introdução

O operador de dimensão 2 não-local invariante de gauge A_{min}^2 , obtido através da minimização de $\int d^4x A^2$ ao longo da órbita de gauge, permite escolher uma configuração de campo invariante de gauge A_μ^h que pode ser usada para construir modelos de Yang-Mills massivos úteis para investigar efeitos não-perturbativos no infravermelho.

Uma configuração totalmente local para A_{min}^2 e A_μ^h pode ser obtida, resultando em uma ação invariante de BRST e local que compartilha similaridades com o mecanismo de Stueckelberg. Ao contrário da ação de Stueckelberg, a introdução de massa via o operador A_{min}^2 resulta em uma ação renormalizável a todas as ordens, uma característica ilustrada por meio de uma classe de fixações de gauge covariantes, mesmo que as teorias de gauge com quebra espontânea no gauge R_ξ de 't Hooft forneçam uma massa para o campo de Stueckelberg.

O capítulo é organizado da seguinte forma. Na seção 3.2 apresentamos como construir A_{min}^2 e A_μ^h e suas principais propriedades. As seções 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 são voltadas para apresentação da ação localizada invariante de BRST para A_{min}^2 e A_μ^h como também das propriedades de fixação de gauge já comentadas. Na seção 3.7 mostramos as identidades de Ward da ação resultante. Estas identidades são utilizadas para construir o contra-termo invariante mais geral permitido através do procedimento de renormalização algébrica (PIGUET; SORELLA, 2008). Na seção 3.8, é apresentada uma análise detalhada do contra-termo juntamente com os fatores de renormalização necessários para estabelecer a renormalização a todas as ordens do modelo. A seção 3.9 contém a conclusão do capítulo. No APÊNDICE A, há uma segunda prova equivalente da renormalizabilidade do modelo usando uma fixação de gauge generalizada e o estabelecimento das identidades de Ward.

3.2 O operador A_{min}^2 e a construção do campo A_μ^h

Partindo do funcional $f_A[u]$, temos

$$f_A[u] \equiv \text{Tr} \int d^4x A_\mu^u A_\mu^u = \text{Tr} \int d^4x \left(u^\dagger A_\mu u + \frac{i}{g} u^\dagger \partial_\mu u \right) \left(u^\dagger A_\mu u + \frac{i}{g} u^\dagger \partial_\mu u \right). \quad (109)$$

Para uma dada configuração de campo de gauge A_μ , $f_A[u]$ é um funcional definido na órbita de gauge de A_μ . Deixe \mathcal{A} ser o espaço das conexões A_μ^a com a norma de Hilbert

finita $\|A\|$, ou seja,

$$\|A\|^2 = \text{Tr} \int d^4x A_\mu A_\mu = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a A_\mu^a < +\infty, \quad (110)$$

e deixe \mathcal{U} ser o espaço das transformações de gauge locais u tal que a norma de Hilbert $\|u^\dagger \partial u\|$ é finita também, isto é

$$\|u^\dagger \partial u\|^2 = \text{Tr} \int d^4x (u^\dagger \partial_\mu u) (u^\dagger \partial_\mu u) < +\infty. \quad (111)$$

A seguinte proposição é válida por (ZWANZIGER, 1990; BAAL, 1992; DELL'ANTONIO; ZWANZIGER, 1991; DELL'ANTONIO; ZWANZIGER, 1989) .

- Proposição

O funcional $f_A[u]$ alcança seu mínimo absoluto na órbita de gauge de A_μ .

Esta proposição diz que existe um $h \in \mathcal{U}$ tal que

$$\delta f_A[h] = 0, \quad (112)$$

$$\delta^2 f_A[h] \geq 0, \quad (113)$$

$$f_A[h] \leq f_A[u], \quad \forall u \in \mathcal{U}. \quad (114)$$

Portanto o operador A_{\min}^2 é dado por

$$A_{\min}^2 = \min_{\{u\}} \text{Tr} \int d^4x A_\mu^u A_\mu^u = f_A[h]. \quad (115)$$

Dando uma olhada nas duas condições (112) e (113). Para calcular $\delta f_A[h]$ e $\delta^2 f_A[h]$ tomamos¹

$$v = h e^{ig\omega} = h e^{ig\omega^a T^a}, \quad (116)$$

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad \text{Tr} (T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (117)$$

onde ω é uma matriz hermitiana infinitesimal. Afim de obter os termos lineares e quadráticos da expansão do funcional $f_A[v]$ em potências ω . Vamos primeiro obter uma

¹ O caso do grupo de gauge $SU(N)$ é considerado aqui.

expressão para A_μ^v

$$\begin{aligned}
A_\mu^v &= v^\dagger A_\mu v + \frac{i}{g} v^\dagger \partial_\mu v \\
&= e^{-ig\omega} h^\dagger A_\mu h e^{ig\omega} + \frac{i}{g} e^{-ig\omega} (h^\dagger \partial_\mu h) e^{ig\omega} + \frac{i}{g} e^{-ig\omega} \partial_\mu e^{ig\omega} \\
&= e^{-ig\omega} A_\mu^h e^{ig\omega} + \frac{i}{g} e^{-ig\omega} \partial_\mu e^{ig\omega} .
\end{aligned} \tag{118}$$

Expandindo até a ordem de ω^2 , temos

$$\begin{aligned}
A_\mu^v &= \left(1 - ig\omega - g^2 \frac{\omega^2}{2}\right) A_\mu^h \left(1 + ig\omega - g^2 \frac{\omega^2}{2}\right) + \frac{i}{g} \left(1 - ig\omega - g^2 \frac{\omega^2}{2}\right) \partial_\mu \left(1 + ig\omega - g^2 \frac{\omega^2}{2}\right) \\
&= \left(1 - ig\omega - g^2 \frac{\omega^2}{2}\right) \left(A_\mu^h + igA_\mu^h \omega - g^2 A_\mu^h \frac{\omega^2}{2}\right) + \\
&+ \frac{i}{g} \left(1 - ig\omega - g^2 \frac{\omega^2}{2}\right) \left(ig\partial_\mu \omega - \frac{g^2}{2} (\partial_\mu \omega) \omega - \frac{g^2}{2} \omega (\partial_\mu \omega)\right) \\
&= A_\mu^h + igA_\mu^h \omega - \frac{g^2}{2} A_\mu^h \omega^2 - ig\omega A_\mu^h + g^2 \omega A_\mu^h \omega - \frac{g^2}{2} \omega^2 A_\mu^h \\
&+ \frac{i}{g} \left(ig\partial_\mu \omega - \frac{g^2}{2} (\partial_\mu \omega) \omega - \frac{g^2}{2} \omega \partial_\mu \omega + g^2 \omega \partial_\mu \omega\right) + O(\omega^3) ,
\end{aligned} \tag{119}$$

da qual segue

$$A_\mu^v = A_\mu^h + ig[A_\mu^h, \omega] + \frac{g^2}{2} [[\omega, A_\mu^h], \omega] - \partial_\mu \omega + i\frac{g}{2} [\omega, \partial_\mu \omega] + O(\omega^3) . \tag{120}$$

Agora, calculamos

$$\begin{aligned}
f_A[v] &= \text{Tr} \int d^4x A_\mu^u A_\mu^u \\
&= \text{Tr} \int d^4x \left[\left(A_\mu^h + ig[A_\mu^h, \omega] + \frac{g^2}{2} [[\omega, A_\mu^h], \omega] - \partial_\mu \omega + i\frac{g}{2} [\omega, \partial_\mu \omega] + O(\omega^3) \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left(A_\mu^h + ig[A_\mu^h, \omega] + \frac{g^2}{2} [[\omega, A_\mu^h], \omega] - \partial_\mu \omega + i\frac{g}{2} [\omega, \partial_\mu \omega] + O(\omega^3) \right) \right] \\
&= \text{Tr} \int d^4x \left\{ A_\mu^h A_\mu^h + igA_\mu^h [A_\mu^h, \omega] + g^2 A_\mu^h \omega A_\mu^h \omega - \frac{g^2}{2} A_\mu^h A_\mu^h \omega^2 - \frac{g^2}{2} A_\mu^h \omega^2 A_\mu^h - A_\mu^h \partial_\mu \omega \right. \\
&+ i\frac{g}{2} A_\mu^h [\omega, \partial_\mu \omega] + ig[A_\mu^h, \omega] A_\mu^h - g^2 [A_\mu^h, \omega] [A_\mu^h, \omega] - ig[A_\mu^h, \omega] \partial_\mu \omega + g^2 \omega A_\mu^h \omega A_\mu^h \\
&- \left. \frac{g^2}{2} A_\mu^h \omega^2 A_\mu^h - \frac{g^2}{2} \omega^2 A_\mu^h A_\mu^h - \partial_\mu \omega A_\mu^h - ig\partial_\mu \omega [A_\mu^h, \omega] + \partial_\mu \omega \partial_\mu \omega + i\frac{g}{2} [\omega, \partial_\mu \omega] A_\mu^h \right\} + O(\omega^3) \\
&= f_A[h] - \text{Tr} \int d^4x \{ A_\mu^h, \partial_\mu \omega \} + \text{Tr} \int d^4x \left(g^2 A_\mu^h \omega A_\mu^h \omega - \frac{g^2}{2} A_\mu^h A_\mu^h \omega^2 - \frac{g^2}{2} A_\mu^h \omega^2 A_\mu^h \right. \\
&- \left. g^2 [A_\mu^h, \omega] [A_\mu^h, \omega] + g^2 \omega A_\mu^h \omega A_\mu^h - \frac{g^2}{2} A_\mu^h \omega^2 A_\mu^h - \frac{g^2}{2} \omega^2 A_\mu^h A_\mu^h \right) + \text{Tr} \int d^4x (\partial_\mu \omega \partial_\mu \omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i\frac{g}{2}[\omega, \partial_\mu\omega]A_\mu^h - ig\partial_\mu\omega[A_\mu^h, \omega] - ig[A_\mu^h, \omega]\partial_\mu\omega + i\frac{g}{2}A_\mu^h[\omega, \partial_\mu\omega] + O(\omega^3). \\
& = f_A[h] + 2 \int d^4x \operatorname{tr} (\omega\partial_\mu A_\mu^h) + \int d^4x \operatorname{tr} \{2g^2\omega A_\mu^h\omega A_\mu^h - 2g^2 A_\mu^h A_\mu^h \omega^2 \\
& - g^2 (A_\mu^h\omega - \omega A_\mu^h) (A_\mu^h\omega - \omega A_\mu^h)\} + \int d^4x \operatorname{tr} \left(\partial_\mu\omega\partial_\mu\omega + i\frac{g}{2}\omega\partial_\mu\omega A_\mu^h - i\frac{g}{2}\partial_\mu\omega\omega A_\mu^h \right. \\
& - ig\partial_\mu\omega A_\mu^h\omega + ig\partial_\mu\omega\omega A_\mu^h - igA_\mu^h\omega\partial_\mu\omega + ig\omega A_\mu^h\partial_\mu\omega + i\frac{g}{2}A_\mu^h\omega\partial_\mu\omega - i\frac{g}{2}A_\mu^h\partial_\mu\omega\omega \left. \right) + O(\omega^3) \\
& = f_A[h] + 2\operatorname{Tr} \int d^4x (\omega\partial_\mu A_\mu^h) + \operatorname{Tr} \int d^4x (\partial_\mu\omega\partial_\mu\omega + ig\omega\partial_\mu\omega A_\mu^h - ig\partial_\mu\omega\omega A_\mu^h \\
& - 2ig\partial_\mu\omega A_\mu^h\omega + 2ig\partial_\mu\omega\omega A_\mu^h) + O(\omega^3). \tag{121}
\end{aligned}$$

Portanto, após algumas simplificações chegamos na seguinte expressão

$$\begin{aligned}
f_A[v] & = f_A[h] + 2\operatorname{Tr} \int d^4x (\omega\partial_\mu A_\mu^h) + \operatorname{Tr} \int d^4x (\partial_\mu\omega\partial_\mu\omega + ig\omega\partial_\mu\omega A_\mu^h - ig\partial_\mu\omega\omega A_\mu^h \\
& - ig(\partial_\mu\omega) A_\mu^h\omega + ig(\partial_\mu\omega)\omega A_\mu^h) + O(\omega^3) \\
& = f_A[h] + 2\operatorname{Tr} \int d^4x (\omega\partial_\mu A_\mu^h) + \operatorname{Tr} \int d^4x \{ \partial_\mu\omega (\partial_\mu\omega - ig[A_\mu^h, \omega]) \} + O(\omega^3).
\end{aligned}$$

Finalmente, concluímos que

$$f_A[v] = f_A[h] + 2\operatorname{Tr} \int d^4x (\omega\partial_\mu A_\mu^h) - \operatorname{Tr} \int d^4x \omega\partial_\mu D_\mu(A^h)\omega + O(\omega^3), \tag{122}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\delta f_A[h] & = 0 \Rightarrow \partial_\mu A_\mu^h = 0, \\
\delta^2 f_A[h] & > 0 \Rightarrow -\partial_\mu D_\mu(A^h) > 0.
\end{aligned} \tag{123}$$

Portanto vemos que o conjunto das configurações de campos cumprindo as condições (123), ou seja, definindo o mínimo relativo do funcional $f_A[u]$, pertence à chamada região de Gribov Ω , a qual é definida como

$$\Omega = \{A_\mu | \partial_\mu A_\mu = 0 \text{ e } -\partial_\mu D_\mu(A) > 0\}. \tag{124}$$

Vamos continuar agora mostrando que a condição de transversalidade, $\partial_\mu A_\mu^h = 0$, pode ser resolvida para $h = h(A)$ como uma série de potências em A_μ . Partindo de

$$A_\mu^h = h^\dagger A_\mu h + \frac{i}{g} h^\dagger \partial_\mu h, \tag{125}$$

com

$$h = e^{ig\phi} = e^{ig\phi^a T^a}. \tag{126}$$

Expandindo h em potências de ϕ

$$h = 1 + ig\phi - \frac{g^2}{2}\phi^2 + O(\phi^3). \quad (127)$$

Apartir da equação (125) obtemos

$$A_\mu^h = A_\mu + ig[A_\mu, \phi] + g^2\phi A_\mu\phi - \frac{g^2}{2}A_\mu\phi^2 - \frac{g^2}{2}\phi^2 A_\mu - \partial_\mu\phi + i\frac{g}{2}[\phi, \partial_\mu] + O(\phi^3). \quad (128)$$

Então, a condição $\partial_\mu A_\mu^h = 0$, nos diz

$$\begin{aligned} \partial^2\phi &= \partial_\mu A + ig[\partial_\mu A_\mu, \phi] + ig[A_\mu, \partial_\mu\phi] + g^2\partial_\mu\phi A_\mu\phi + g^2\phi\partial_\mu A_\mu\phi + g^2\phi A_\mu\partial_\mu\phi \\ &- \frac{g^2}{2}\partial_\mu A_\mu\phi^2 - \frac{g^2}{2}A_\mu\partial_\mu\phi\phi - \frac{g^2}{2}A_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{g^2}{2}\partial_\mu\phi\phi A_\mu - \frac{g^2}{2}\phi\partial_\mu\phi A_\mu - \frac{g^2}{2}\phi^2\partial_\mu A_\mu \\ &+ i\frac{g}{2}[\phi, \partial^2\phi] + O(\phi^3). \end{aligned} \quad (129)$$

Esta equação pode ser resolvida iterativamente colocando ϕ como uma série de potências em A_μ , isto é

$$\phi = \frac{1}{\partial^2}\partial_\mu A_\mu + i\frac{g}{\partial^2}\left[\partial A, \frac{\partial A}{\partial^2}\right] + i\frac{g}{\partial^2}\left[A_\mu, \partial_\mu \frac{\partial A}{\partial^2}\right] + \frac{i}{2}\frac{g}{\partial^2}\left[\frac{\partial A}{\partial^2}, \partial A\right] + O(A^3), \quad (130)$$

de modo que

$$\begin{aligned} A_\mu^h &= A_\mu - \frac{1}{\partial^2}\partial_\mu\partial A - ig\frac{\partial_\mu}{\partial^2}\left[A_\nu, \partial_\nu \frac{\partial A}{\partial^2}\right] - i\frac{g}{2}\frac{\partial_\mu}{\partial^2}\left[\partial A, \frac{1}{\partial^2}\partial A\right] \\ &+ ig\left[A_\mu, \frac{1}{\partial^2}\partial A\right] + i\frac{g}{2}\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A, \frac{\partial_\mu}{\partial^2}\partial A\right] + O(A^3). \end{aligned} \quad (131)$$

A expressão (131) pode ser escrita de uma maneira mais útil. De fato

$$\begin{aligned} A_\mu^h &= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial^2}\right)\left(A_\nu - ig\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A, A_\nu\right] + \frac{ig}{2}\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A, \partial_\nu \frac{1}{\partial^2}\partial A\right]\right) + O(A^3) \\ &= A_\mu - ig\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A, A_\mu\right] + \frac{ig}{2}\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A, \partial_\mu \frac{1}{\partial^2}\partial A\right] - \frac{\partial_\mu}{\partial^2}\partial A + ig\frac{\partial_\mu}{\partial^2}\partial_\nu\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A, A_\nu\right] \\ &- i\frac{g}{2}\frac{\partial_\mu}{\partial^2}\partial_\nu\left[\frac{\partial A}{\partial^2}, \frac{\partial_\nu}{\partial^2}\partial A\right] + O(A^3) \\ &= A_\mu - \frac{\partial_\mu}{\partial^2}\partial A + ig\left[A_\mu, \frac{1}{\partial^2}\partial A\right] + \frac{ig}{2}\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A, \partial_\mu \frac{1}{\partial^2}\partial A\right] + ig\frac{\partial_\mu}{\partial^2}\left[\frac{\partial_\nu}{\partial^2}\partial A, A_\nu\right] \\ &+ i\frac{g}{2}\frac{\partial_\mu}{\partial^2}\left[\frac{\partial A}{\partial^2}, \partial A\right] + O(A^3), \end{aligned} \quad (132)$$

a qual é precisamente a expressão (131). O campo transversal dado na equação (137) possui a propriedade de ser invariante de gauge ordem a ordem na constante de acoplamento g . Vamos trabalhar as propriedades de transformação de ϕ sobre uma transformação de

gauge

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \omega + ig[A_\mu, \omega]. \quad (133)$$

Temos, até a ordem $O(g^2)$,

$$\begin{aligned} \delta \phi_\nu &= -\partial_\nu \omega + ig \left[\frac{1}{\partial^2} \partial A, \partial_\nu \omega \right] - i \frac{g}{2} \left[\omega, \partial_\nu \frac{1}{\partial^2} \partial A \right] - i \frac{g}{2} \left[\frac{\partial A}{\partial^2}, \partial_\nu \omega \right] + O(g^2) \\ &= -\partial_\nu \omega + i \frac{g}{2} \left[\frac{1}{\partial^2} \partial A, \partial_\nu \omega \right] + i \frac{g}{2} \left[\partial_\nu \frac{1}{\partial^2} \partial A, \omega \right] + O(g^2). \end{aligned} \quad (134)$$

Portanto

$$\delta \phi_\nu = -\partial_\nu \left(\omega - i \frac{g}{2} \left[\frac{\partial A}{\partial^2}, \omega \right] \right) + O(g^2), \quad (135)$$

da qual a invariância de gauge de A_μ^h é estabelecida.

Finalmente, vamos exercitar a expressão de A_{\min}^2 como uma série de potências em A_μ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} A_{\min}^2 &= \text{Tr} \int d^4x A_\mu^h A_\mu^h \\ &= \text{Tr} \int d^4x \left[\phi_\mu \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \right) \phi_\nu \right] \\ &= \text{Tr} \int d^4x \left[\left(A_\mu - ig \left[\frac{1}{\partial^2} \partial A, A_\mu \right] + \frac{ig}{2} \left[\frac{1}{\partial^2} \partial A, \partial_\mu \frac{1}{\partial^2} \partial A \right] \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \right) \left(A_\nu - ig \left[\frac{1}{\partial^2} \partial A, A_\nu \right] + \frac{ig}{2} \left[\frac{1}{\partial^2} \partial A, \partial_\nu \frac{1}{\partial^2} \partial A \right] \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \left[A_\mu^a \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \right) A_\nu^a - 2gf^{abc} \frac{\partial_\nu \partial A^a}{\partial^2} \frac{\partial A^b}{\partial^2} A_\nu^c - gf^{abc} A_\nu^a \frac{\partial A^b}{\partial^2} \frac{\partial_\nu \partial A^c}{\partial^2} \right] + O(A^4). \end{aligned} \quad (136)$$

Aqui notamos que, devido a invariância de gauge, A_{\min}^2 pode ser reescrito em uma maneira manifestamente invariante em termos de $F_{\mu\nu}$ e a derivada covariante D_μ (ZWANZIGER, 1990).

Em particular, olhando para a condição estacionária para o funcional (1), obtemos uma configuração de campo transversa não-local A_μ^h , $\partial_\mu A_\mu^h = 0$, o qual é mostrado como uma série infinita nos campos de gauge A_μ , ou seja

$$\begin{aligned} A_\mu^h &= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \right) \phi_\nu, \quad \partial_\mu A_\mu^h = 0, \\ \phi_\nu &= A_\nu - ig \left[\frac{1}{\partial^2} \partial A, A_\nu \right] + \frac{ig}{2} \left[\frac{1}{\partial^2} \partial A, \partial_\nu \frac{1}{\partial^2} \partial A \right] + O(A^3). \end{aligned} \quad (137)$$

A configuração A_μ^h é invariante por transformações de gauge infinitesimais ordem a ordem

na constante de acoplamento g (LAVELLE; MCMULLAN, 1997b):

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^h &= 0, \\ \delta A_\mu &= -\partial_\mu \omega + ig [A_\mu, \omega].\end{aligned}\tag{138}$$

Usando (137), a invariância de gauge da expressão (1) é explicitada ao escrever isto em termos do tensor de força $F_{\mu\nu}$. De fato, como provado em (ZWANZIGER, 1990), temos

$$\begin{aligned}A_{\min}^2 = \int d^4x A_\mu^h A_\mu^h &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \int d^4x \left(F_{\mu\nu} \frac{1}{D^2} F_{\mu\nu} + 2i \frac{1}{D^2} F_{\lambda\mu} \left[\frac{1}{D^2} D_\kappa F_{\kappa\lambda}, \frac{1}{D^2} D_\nu F_{\nu\mu} \right] \right. \\ &\quad \left. - 2i \frac{1}{D^2} F_{\lambda\mu} \left[\frac{1}{D^2} D_\kappa F_{\kappa\nu}, \frac{1}{D^2} D_\nu F_{\lambda\mu} \right] \right) + O(F^4),\end{aligned}\tag{139}$$

na qual a invariância de gauge é aparente. O operador $(D^2)^{-1}$ na expressão (139) expressa o inverso de $D^2 = D_\mu D_\mu$ com D_μ sendo a derivada covariante (ZWANZIGER, 1990). Vamos também sublinhar que, no gauge de Landau $\partial_\mu A_\mu = 0$, o operador $A_\mu^h A_\mu^h$ é reduzido ao operador A^2 , ou seja

$$(A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a}) \Big|_{\text{Landau}} = A_\mu^a A_\mu^a.\tag{140}$$

Esta característica, combinada com a invariância de gauge de $(A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a})$, implica que a dimensão anômala de $(A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a})$ é igual, a todas as ordens, a do operador $A_\mu^a A_\mu^a$ no gauge de Landau (CAPRI et al., 2016a), isto é

$$\gamma_{(A^h)^2} = \gamma_{A^2} \Big|_{\text{Landau}}.\tag{141}$$

Além disso, como provado em (DUDAL; VERSCHELDE; SORELLA, 2003), $\gamma_{A^2} \Big|_{\text{Landau}}$ não é um parâmetro independente, sendo dado por

$$\gamma_{A^2} \Big|_{\text{Landau}} = \left(\frac{\beta(a)}{a} + \gamma_A^{\text{Landau}}(a) \right), \quad a = \frac{g^2}{16\pi^2},\tag{142}$$

onde $(\beta(a), \gamma_A^{\text{Landau}}(a))$ expressa, respectivamente, a função β e a dimensão anômala do campo de gauge A_μ na fixação do gauge de Landau. Esta relação foi conjecturada e explicitamente verificada a 3-loops em (GRACEY, 2003).

3.3 A ação local de A_μ^h

Seguindo (CAPRI et al., 2016a), uma expressão totalmente local para o operador invariante de gauge A_μ^h pode ser obtida. Para este fim, consideramos a ação local,

invariante de BRST

$$S_{inv} = \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \int d^4x \left(\tau^a \partial_\mu A_\mu^{h,a} + \frac{m^2}{2} A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a} + \bar{\eta}^a \partial_\mu D_\mu^{ab}(A^h) \eta^b \right), \quad (143)$$

onde

$$A_\mu^h \equiv A_\mu^{h,a} T^a = h^\dagger A_\mu h + \frac{i}{g} h^\dagger \partial_\mu h. \quad (144)$$

com

$$h = e^{ig\xi} = e^{ig\xi^a T^a}. \quad (145)$$

As matrizes $\{T^a\}$ são os geradores do grupo de gauge $SU(N)$ e ξ^a é um campo auxiliar de Stueckelberg .

Expandindo (144), encontramos uma série infinita cujo os primeiros termos são

$$(A^h)_\mu^a = A_\mu^a - \partial_\mu \xi^a - g f^{abc} A_\mu^b \xi^c - \frac{g}{2} f^{abc} \xi^b \partial_\mu \xi^c + \text{altas ordens}. \quad (146)$$

A ação S_{inv} exibe uma configuração local para o operador não-local A_μ^h de (137), isto segue do fato que o multiplicador de Lagrange τ implementa precisamente a condição de transversalidade

$$\partial_\mu A_\mu^h = 0, \quad (147)$$

a qual, quando (147) é resolvida iterativamente pelo campo de Stueckelberg ξ^a , volta a expressão (137). Além disso, os campos de ghosts extras $(\bar{\eta}, \eta)$ explicam a origem do Jacobiano que surge da integração funcional sobre τ que resulta em uma função delta do tipo $\delta(\partial A^h)$. Finalmente, o termo $\frac{m^2}{2} A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a}$ é responsável pela inclusão do operador $A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a}$ através do parâmetro de m^2 que, como mencionado antes, pode ser usado como um parâmetro infravermelho efetivo cujo valor pode ser estimado comparando com os resultados disponíveis das simulações de QCD na rede da função de 2-pontos do glúon, para isso veja (DUDAL et al., 2008; DUDAL; SORELLA; VANDERSICKEL, 2011; AGUILAR; BINOSI; PAPAVALASSILIOU, 2016; CUCCHIERI; MENDES, 2007; CUCCHIERI; MENDES, 2008b; CUCCHIERI et al., 2012; OLIVEIRA; SILVA, 2012; CUCCHIERI; MENDES; SANTOS, 2009; CUCCHIERI et al., 2011; BICUDO et al., 2015; DUDAL et al., 2008a; TISSIER; WSCHEBOR, 2010b).

A ação local S_{inv} , (143), possui uma simetria BRST exata:

$$sS_{inv} = 0, \quad (148)$$

onde as transformações de BRST nilpotente são dados por

$$\begin{aligned}
sA_\mu^a &= -D_\mu^{ab}c^b, \\
sc^a &= \frac{g}{2}f^{abc}c^bc^c, \\
s\bar{c}^a &= ib^a, \\
sb^a &= 0, \\
s\tau^a &= 0, \\
s\bar{\eta}^a &= s\eta^a = 0, \\
s^2 &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{149}$$

Para o campo de Stueckelberg temos (DRAGON; HURTH; NIEUWENHUIZEN, 1997), com índices i, j associados com a representação genérica,

$$sh^{ij} = -igc^a(T^a)^{ik}h^{kj}, \quad s(A^h)_\mu^a = 0, \tag{150}$$

da qual a transformação BRST do campo ξ^a pode ser calculada iterativamente, produzindo

$$s\xi^a = g^{ab}(\xi)c^b = -c^a + \frac{g}{2}f^{abc}c^b\xi^c - \frac{g^2}{12}f^{amr}f^{mpq}c^p\xi^q\xi^r + O(\xi^3). \tag{151}$$

3.4 A fixação de gauge S_{gf}

A ação (143) precisa da adição do termo de fixação de gauge, S_{gf} , que escolhemos como

$$\begin{aligned}
S_{gf} &= \int d^4x s \left(\bar{c}^a (\partial_\mu A_\mu^a - \mu^2 \xi^a) - i \frac{\alpha}{2} \bar{c}^a b^a \right) \\
&= \int d^4x \left(ib^a \partial_\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} b^a b^a - i \mu^2 b^a \xi^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab}(A) c^b + \mu^2 \bar{c}^a g^{ab}(\xi) c^b \right). \tag{152}
\end{aligned}$$

Além do parâmetro de gauge tradicional α , introduzimos um segundo parâmetro de gauge massivo μ^2 . Como ficará claro na próxima seção, este parâmetro massivo fornecerá uma massa de regularização invariante de BRST para o campo de Stueckelberg ξ^a , um recurso que tem consequências úteis quando realizamos cálculos de loop explícitos envolvendo ξ^a . Pondo $\mu^2 = 0$, a fixação de gauge (152) reduz ao gauge linear covariante (CAPRI et al., 2016a). Além disso, quando $\mu^2 = \alpha = 0$, o gauge de Landau, $\partial_\mu A_\mu^a = 0$, é recuperado. No entanto, vale a pena sublinhar que tanto μ^2 quanto α aparecem apenas no termo de fixação de gauge, que é BRST exato. Sendo μ^2 e α parâmetros puro gauge, isso não afetará as funções de correlação dos operadores invariantes de BRST locais.

No entanto, antes de prosseguir, vamos fornecer algumas observações relacionadas

à presença explícita do campo de Stueckelberg ξ^a na equação (152). Como é facilmente percebido, o campo ξ^a é um campo adimensional, essa característica é embutida no fato de que a ação invariante S_{inv} é uma série infinita em potências de ξ^a . Como em qualquer teoria quântica de campo local envolvendo campos adimensionais, tem-se a liberdade de realizar reparametrização arbitrária desses campos como, por exemplo, no caso do modelo sigma bidimensional não-linear (BLASI; DELDUC; SORELLA, 1989b; BECCHI; PIGUET, 1989a) e da Yang-Mills Supersimétrica $\mathcal{N} = 1$ (PIGUET; SIBOLD, 1982a; PIGUET; SIBOLD, 1982b). No nosso caso, isso significa que temos a liberdade de substituir ξ^a por uma função adimensional arbitrária de ξ^a , ou seja

$$\xi^a \rightarrow \omega^a(\xi) = \xi^a + a_1^{abc} \xi^b \xi^c + a_2^{abcd} \xi^b \xi^c \xi^d + a_3^{abcde} \xi^b \xi^c \xi^d \xi^e + \dots \quad (153)$$

Esta liberdade, inerente a adimensionalidade de ξ^a , é claramente evidenciada no nível quântico pelo o fato que o campo de Stueckelberg é renormalizado de maneira não-linear (CAPRI et al., 2016a), isto é, como na equação (153), expressando precisamente a liberdade que se tem na escolha de uma reparametrização para ξ^a .

Na equação (152), nós poderíamos ter igualmente iniciado com um termo como

$$s(\bar{c}^a \xi^a) \rightarrow s(\bar{c}^a \omega^a(\xi)) = s(\bar{c}^a (\xi^a + a_1^{abc} \xi^b \xi^c + a_2^{abcd} \xi^b \xi^c \xi^d + \dots)) \quad (154)$$

Claro, como μ^2 e α , todos os coeficientes ($a_1^{abc}, a_2^{abcd}, a_3^{abcde}, \dots$) são parâmetros de gauge, não afetando as funções de correlação das quantidades invariante de gauge. A equação (154) expressa a liberdade que sempre se tem quando se trata de um termo de fixação de gauge que depende explicitamente de um campo adimensional, como o termo (152). Particularmente, esta liberdade continuará durante toda a análise da renormalização, significando que a renormalização da fixação de gauge é um termo nilpotente do tipo $s(\bar{c}^a \omega^a(\xi))$. Alternativamente, poderíamos iniciar com a fixação de gauge generalizada

$$\begin{aligned} S_{gf}^{gen} &= \int d^4x \, s \left(\bar{c}^a (\partial_\mu A_\mu^a) - \mu^2 \omega^a(\xi) - i \frac{\alpha}{2} \bar{c}^a b^a \right) \\ &= \int d^4x \left(i \bar{b}^a \partial_\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} b^a b^a - i \mu^2 b^a \omega^a(\xi) + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab}(A) c^b + \mu^2 \bar{c}^a \frac{\partial \omega^a(\xi)}{\partial \xi^c} g^{cd}(\xi) c^d \right), \end{aligned} \quad (155)$$

e levar em conta a renormalização da quantidade $\omega^a(\xi)$, codificado no conjunto infinito de parâmetros de gauge ($a_1^{abc}, a_2^{abcd}, a_3^{abcde}, \dots$). Seguindo, devemos usar a fixação de gauge (152) e identificar no contratérmo final o termo que corresponde a reparametrização (154). Além disso, no APÊNDICE A, fornecemos uma segunda prova da renormalizabilidade do modelo mostrando as identidades de generalizadas de Slavnov-Taylor correspondentes ao termo de fixação de gauge (155).

Resumindo, como ponto inicial, tomamos a ação local e invariante de BRST

$$S = S_{inv} + S_{gf} , \quad (156)$$

com

$$sS = 0 , \quad (157)$$

onde as transformações de BRST são dadas pelas equações(149),(150),(151). Vamos prosseguir agora para os propagadores em nível de árvore.

3.5 Os propagadores dos campos elementares

Os propagadores dos campos elementares são facilmente calculados da parte quadrática da ação (156), i.e.

$$\begin{aligned} S_{quad.} &= \int d^4x \left(\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + i b^a \partial_\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} b^a b^a + \bar{c}^a \partial^2 c^a - \mu^2 \bar{c}^a c^a \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a - m^2 A_\mu^a \partial_\mu \xi^a + \frac{m^2}{2} (\partial_\mu \xi^a) (\partial_\mu \xi^a) \right. \\ &\quad \left. + \tau^a \partial_\mu A_\mu^a - \tau^a \partial^2 \xi^a + \bar{\eta}^a \partial^2 \eta^a - i \mu^2 b^a \xi^a \right) \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccc} A_\mu^a & b^a & \xi^a & \tau^a \end{array} \right] \times \\ &\quad \times \left[\begin{array}{cccc} (-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu + m^2) & -i \partial_\mu & -m^2 \partial_\mu & -\partial_\mu \\ i \partial_\nu & \alpha & -i \mu^2 & 0 \\ m^2 \partial_\nu & -i \mu^2 & -m^2 \partial^2 & -\partial^2 \\ \partial_\nu & 0 & -\partial^2 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} A_\mu^a \\ b^a \\ \xi^a \\ \tau^a \end{array} \right] \\ &\quad + \int d^4x (\bar{c}^a \partial^2 c^a + \bar{\eta}^a \partial^2 \eta^a - \mu^2 \bar{c}^a c^a) . \end{aligned} \quad (158)$$

Portanto, os propagadores obtidos são

$$\begin{aligned}
\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle &= \delta^{ab} \left(\frac{P_{\mu\nu}}{p^2 + m^2} + \frac{\alpha p^2 L_{\mu\nu}}{(p^2 + \mu^2)^2} \right) \\
\langle A_\mu^a(p) b^b(-p) \rangle &= \delta^{ab} \left(\frac{p_\mu}{p^2 + \mu^2} \right) \\
\langle A_\mu^a(p) \xi^b(-p) \rangle &= \delta^{ab} \left(\frac{-i\alpha p_\mu}{(p^2 + \mu^2)^2} \right) \\
\langle A_\mu^a(p) \tau^b(-p) \rangle &= \delta^{ab} \left(\frac{i\mu^2 p_\mu}{p^2 (p^2 + \mu^2)} \right) \\
\langle b^a(p) b^b(-p) \rangle &= 0 \\
\langle b^a(p) \xi^b(-p) \rangle &= \frac{\delta^{ab} i}{p^2 + \mu^2} \\
\langle b^a(p) \tau^b(-p) \rangle &= 0 \\
\langle \xi^a(p) \xi^b(-p) \rangle &= \frac{\delta^{ab} \alpha}{(p^2 + \mu^2)^2} \\
\langle \xi^a(p) \tau^b(-p) \rangle &= \frac{\delta^{ab}}{p^2 + \mu^2} \\
\langle \tau^a(p) \tau^b(-p) \rangle &= -\frac{\delta^{ab} m^2}{p^2} \\
\langle \bar{c}^a(p) c^b(-p) \rangle &= \frac{\delta^{ab}}{p^2 + \mu^2} \\
\langle \bar{\eta}^a(p) \eta^b(-p) \rangle &= \frac{\delta^{ab}}{p^2}
\end{aligned} \tag{159}$$

onde, $P_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)$ e $L_{\mu\nu} = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$ são os projetores transversal e longitudinal. Vemos que todos os propagadores têm um bom comportamento ultravioleta, que pode ser verificado por contagem de potências. Além disso, o papel do parâmetro massivo de gauge μ^2 é clara agora: isso dá uma massa regularizada invariante de BRST para o campo de Stueckelberg ξ^a . Observe que, quando $\mu^2 = 0$, o propagador do campo de Stueckelberg é dado por $\langle \xi(p) \xi(-p) \rangle_{\mu^2=0} = \frac{\alpha}{p^4}$, o qual pode originar potenciais divergências infravermelhas em alguns tipos de diagramas de Feynman. Note também que, como esperado, o parâmetro de massa m^2 aparece na parte transversa do propagador de glúon, uma característica que tem um sentido físico. Na verdade, acoplado ao operador $(A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a})$, o parâmetro m^2 entrará na função de correlação dos operadores invariante de gauge, permitindo parametrizar de maneira efetiva seu comportamento infravermelho.

3.6 A_{\min}^2 versus o termo de massa convencional de Stueckelberg

Antes de enfrentar a análise da renormalizabilidade da ação S , em (156), vamos fazer uma pequena comparação com o modelo massivo padrão de Stueckelberg (RUEGG; RUIZ-ALTABA, 2004), correspondente à ação

$$S_{Stueck} = \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{m^2}{2} A_{\mu}^{h,a} A_{\mu}^{h,a} \right) + S_{gf}, \quad (160)$$

onde S_{gf} é dado pela equação (152). Vemos que a ação convencional de Stueckelberg corresponde à adição do operador invariante de gauge ($A_{\mu}^{h,a} A_{\mu}^{h,a}$) sem levar em conta a condição de transversalidade $\partial_{\mu} A_{\mu}^{h,a} = 0$, implementada na ação (156) através do multiplicador de Lagrange τ^a e os campos de ghost correspondentes ($\bar{\eta}^a, \eta^a$). A remoção da restrição $\partial_{\mu} A_{\mu}^{h,a} = 0$ dá origem ao propagador de Stueckelberg padrão, isto é

$$\langle \xi^a(p) \xi^b(-p) \rangle_{Stueck} = \frac{\delta^{ab} p^2}{m^2(p^2 + \mu^2)^2} + \frac{\delta^{ab} \alpha}{(p^2 + \mu^2)^2}. \quad (161)$$

A partir desta expressão, podemos entender facilmente a causa do mal comportamento ultravioleta do termo massivo de Stueckelberg, que é a causa da sua não-renormalizabilidade (FERRARI; QUADRI, 2004). Vemos que de fato o parâmetro de massa m^2 entra no denominador da expressão (161). É fácil ver que, esta propriedade prejudica a renormalizabilidade do modelo de Stueckelberg padrão (FERRARI; QUADRI, 2004). Devido a presença da massa m^2 no denominador do propagador (161), divergências não-renormalizáveis aparecerão devido ao inverso da massa m^2 , invalidando portanto a expansão perturbativa de loops baseada na expressão (160).

O papel do termo $\int d^4x \tau^a \partial_{\mu} A_{\mu}^{h,a}$, implementando a restrição $\partial_{\mu} A_{\mu}^{h,a} = 0$, é clara agora. Ele dá origem a uma profunda modificação do propagador de Stueckelberg, removendo o primeiro termo problemático, $\frac{\delta^{ab} p^2}{m^2(p^2 + \mu^2)^2}$, da expressão (161). Resta, portanto, apenas o segundo termo, *i.e.* $\frac{\delta^{ab} \alpha}{(p^2 + \mu^2)^2}$, qual não oferece qualquer perigo ultravioleta por contagem de potências. É esta modificação que assegura a renormalização da ação (156) a todas as ordens, que vamos discutir em detalhes na próxima seção.

3.7 Caracterização algébrica do contratermo

Estamos agora prontos para iniciar a análise da renormalizabilidade da ação eq.(156). Seguindo os passos da renormalização algébrica (PIGUET; SORELLA, 1995), procedemos primeiramente estabelecendo as identidades de Ward que empregaremos para o estudo das correções quânticas. Para finalizar, precisamos introduzir fontes externas invariantes de BRST (Ω_{μ}^a, L^a, K^a) acoplado aos campos (A_{μ}^a, c^a, ξ^a) que possui variações de BRST não-

lineares assim como fontes $(\mathcal{J}_\mu^a, \Xi_\mu^a)$ acopladas aos operadores compostos invariantes de BRST $(A_\mu^{ha}, D_\mu^{ab}(A^h))$, i.e.,

$$s\Omega_\mu^a = sL^a = sK^a = s\mathcal{J}_\mu^a = s\Xi_\mu^a = 0 . \quad (162)$$

Partiremos da ação completa invariante de BRST Σ definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Sigma = \int d^4x & \left(\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + ib^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b + \frac{\alpha}{2} (b^a)^2 - iM^{ab} b^a \xi^b \right. \\ & - N^{ab} \bar{c}^a \xi^b + M^{ab} \bar{c}^a g^{bc} (\xi) c^c + \bar{\eta}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} (A^h) \eta^b + \frac{m^2}{2} A_\mu^{ha} A_\mu^{ha} \\ & + \tau^a \partial_\mu A_\mu^{ha} - \Omega_\mu^a D_\mu^{ab} c^b + \frac{g}{2} f^{abc} L^a c^b c^c + K^a g (\xi)^{ab} c^b + \mathcal{J}_\mu^a A_\mu^{ha} \\ & \left. + \Xi_\mu^a D_\mu^{ab} (A^h) \eta^b \right) , \end{aligned} \quad (163)$$

onde, por conveniência, temos também introduzido os dubletos de BRST das fontes externas (M^{ab}, N^{ab})

$$sM^{ab} = N^{ab} , \quad sN^{ab} = 0 , \quad (164)$$

afim de que

$$s\Sigma = 0 . \quad (165)$$

Note que a ação invariante (156) é imediatamente recuperada da ação Σ colocando as fontes externas $(\Omega_\mu^a = L^a = K^a = \mathcal{J}_\mu^a = \Xi_\mu^a = 0)$ e $(M^{ab} = \delta^{ab} \mu^2, N^{ab} = 0)$.

A ação completa Σ obedece as seguintes identidades de Ward:

- A identidade de Slanov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega_\mu^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} + ib^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \bar{c}^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta K^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta \xi^a} + N^{ab} \frac{\delta\Sigma}{\delta M^{ab}} \right) = 0; \quad (166)$$

- A equação de movimento do multiplicador de Lagrange b^a e do anti-ghost \bar{c}^a

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} = i\partial_\mu A_\mu^a + \alpha b^a - iM^{ab} \xi^b ; \quad (167)$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta \bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta \Omega_\mu^a} - M^{ab} \frac{\delta\Sigma}{\delta K^b} = N^{ab} \xi^b ; \quad (168)$$

Tabela 2 - O números quânticos dos campos.

	A_μ^a	b^a	c^a	\bar{c}^a	τ^a	η^a	$\bar{\eta}^a$	ξ^a
dimensão	1	2	0	2	2	0	2	0
nº de ghost c	0	0	1	-1	0	0	0	0
nº de ghost η	0	0	0	0	0	1	-1	0

Fonte: O autor, 2019.

- A identidade de Ward do número de ghost

$$\int d^4x \left(c^a \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} - \bar{c}^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^a} - \Omega_\mu^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu^a} - 2L^a \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} - K^a \frac{\delta \Sigma}{\delta K^a} + N^{ab} \frac{\delta \Sigma}{\delta N^{ab}} \right) = 0; \quad (169)$$

- A equação do multiplicador de Lagrange τ^a

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta \tau^a} - \partial_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta \mathcal{J}_\mu^a} = 0; \quad (170)$$

- A identidade de Ward η^a

$$\int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \eta^a} + g f^{abc} \bar{\eta}^b \frac{\delta \Sigma}{\delta \tau^c} + g f^{abc} \Xi^b \frac{\delta \Sigma}{\delta \mathcal{J}_\mu^c} \right) = 0; \quad (171)$$

- A equação do anti-ghost $\bar{\eta}^a$

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\eta}^a} - \partial_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta \Xi_\mu^a} = 0; \quad (172)$$

- O número de ghost ($\eta^a, \bar{\eta}^a$)

$$\int d^4x \left(\eta^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \eta^a} - \bar{\eta}^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\eta}^a} - \Xi^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \Xi^a} \right) = 0. \quad (173)$$

Todos os números quânticos e dimensões de todos os campos e fontes são fornecidos nas Tabelas (2) e (3).

Afim de encontrar o contratermo invariante mais geral que pode ser livremente adicionado a todas as ordens em teoria da perturbação, seguimos o programa da renormalização algébrica (PIGUET; SORELLA, 1995) e perturbamos a ação clássica (163), adicionando uma quantidade integrada local nos campos e fontes, Σ^{ct} , com dimensão 4 e número de ghost 0. Exigimos então que a ação perturbada, $(\Sigma + \varepsilon \Sigma^{ct})$, onde ε é um

Tabela 3 - Os números quânticos das fontes.

	Ω_μ^a	L^a	K^a	\mathcal{J}_μ^a	Ξ_μ^a	M^{ab}	N^{ab}
dimensão	3	4	4	3	2	2	2
n° de ghost c	-1	-2	-1	0	0	0	1
n° de ghost η	0	0	0	0	-1	0	0

Fonte: O autor, 2019.

parâmetro de expansão, obedeça, para a primeira ordem em ε , as mesmas identidades de Ward obedecidas pela ação clássica Σ , *i.e.*, equações (166), (167), (169), (170), (171) e (172). Isso equivale a impor a seguinte restrição em Σ :

$$\mathcal{B}_\Sigma \Sigma^{ct} = 0, \quad (174)$$

$$\frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta b^a} = 0, \quad (175)$$

$$\frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \Omega_\mu^a} - M^{ab} \frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta K^b} = 0, \quad (176)$$

$$\frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \tau^a} - \partial_\mu \frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \mathcal{J}_\mu^a} = 0, \quad (177)$$

$$\int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \eta^a} + g f^{abc} \bar{\eta}^b \frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \tau^c} + g f^{abc} \Xi^b \frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \mathcal{J}_\mu^c} \right) = 0, \quad (178)$$

$$\frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \bar{\eta}^a} - \partial_\mu \frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \Xi_\mu^a} = 0, \quad (179)$$

onde \mathcal{B}_Σ é o chamado operador de Slavnov-Taylor nilpotente linearizado (PIGUET; SORELLA, 1995), definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Sigma = & \int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu^a} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} \frac{\delta}{\delta L^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta K^a} \frac{\delta}{\delta \xi^a} \right) \\ & + \int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \xi^a} \frac{\delta}{\delta K^a} + i b^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + N^{ab} \frac{\delta}{\delta M^{ab}} \right), \end{aligned} \quad (180)$$

com

$$\mathcal{B}_\Sigma \mathcal{B}_\Sigma = 0 . \quad (181)$$

A primeira condição (174), diz que o contratermo Σ^{ct} pertence a cohomologia do operador \mathcal{B}_Σ no espaço dos polinômios locais integrados nos campos, fontes e parâmetros, de dimensão 4 e número de ghost zero. Devido aos resultados na cohomologia do BRST das teorias de Yang-Mills (PIGUET; SORELLA, 1995) e levando em conta as análises já feitas em (CAPRI et al., 2016a), a forma mais geral para Σ^{ct} pode ser escrito como

$$\Sigma^{ct} = \Delta_{cohom} + \mathcal{B}_\Sigma \Delta^{(-1)} ,$$

onde Δ_{cohom} denomina a cohomologia de \mathcal{B}_Σ , *i.e.* a solução não-trivial da equação (174), e $\Delta^{(-1)}$ a parte exata, *i.e.* a solução trivial de (174). Perceba que, segundo os números quânticos dos campos, $\Delta^{(-1)}$ é um polinômio integrado de dimensão 4, número de ghost $c-1$ e número de ghost η zero.

Para Δ_{cohom} , temos

$$\begin{aligned} \Delta_{cohom} = & \int d^4x \left(\frac{a_0}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + a_1 (\partial_\mu A_\mu^{ha}) (\partial_\nu A_\nu^{ha}) + a_2 (\partial_\mu A_\nu^{ha}) (\partial_\mu A_\nu^{ha}) \right. \\ & + a_3^{abcd} A_\mu^{ha} A_\mu^{hb} A_\nu^{hc} A_\nu^{hd} + (\partial_\mu \tau^a + \mathcal{J}_\mu^a) F_\mu^a(A, \xi) + a_5 (\partial_\mu \bar{\eta}^a + \Xi_\mu^a) (\partial_\mu \eta^a) \\ & \left. + f^{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}^a + \Xi_\mu^a) \eta^b G_\mu^c(A, \xi) + m^2 I(A, \xi) \right) , \end{aligned} \quad (182)$$

onde $F_\mu^a(A, \xi)$, $G_\mu^c(A, \xi)$ e $I(A, \xi)$ são funções locais de A_μ^a e ξ^a , com dimensão 1, 1 e 2, respectivamente. Para escrever a expressão (182) temos que levar em conta as restrições (176)–(179). Além disso, da condição (174) obtemos

$$\mathcal{B}_\Sigma F_\mu^a(A, \xi) = \mathcal{B}_\Sigma G_\mu^c(A, \xi) = \mathcal{B}_\Sigma I(A, \xi) = 0 . \quad (183)$$

Seguindo, as equações (183) são resolvidas por

$$F_\mu^a(A, \xi) = a_4 A_\mu^{ha} , \quad G_\mu^c(A, \xi) = a_6 A_\mu^{ha} , \quad I(A, \xi) = a_7 A_\mu^{ha} A_\mu^{ha} , \quad (184)$$

onde (a_4, a_6, a_7) são coeficientes livres. Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta_{cohom} = & \int d^4x \left(\frac{a_0}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + a_1 (\partial_\mu A_\mu^{ha}) (\partial_\nu A_\nu^{ha}) + a_2 (\partial_\mu A_\nu^{ha}) (\partial_\mu A_\nu^{ha}) \right. \\ & + a_3^{abcd} A_\mu^{ha} A_\mu^{hb} A_\nu^{hc} A_\nu^{hd} + a_4 (\partial_\mu \tau^a + \mathcal{J}_\mu^a) A_\mu^{ha} + a_5 (\partial_\mu \bar{\eta}^a + \Xi_\mu^a) (\partial_\mu \eta^a) \\ & \left. + a_6 f^{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}^a + \Xi_\mu^a) \eta^b A_\mu^{hc} + a_7 m^2 A_\mu^{ha} A_\mu^{ha} \right) . \end{aligned}$$

Vamos discutir agora a parte exata da cohomologia de \mathcal{B}_Σ que, tendo em vista os números

quânticos dos campos e fontes, parametrizamos como

$$\begin{aligned} \Delta^{(-1)} = & \int d^4x \left(f_1^{ab}(\xi, \alpha) \xi^a K^b + f_2^{ab}(\xi, \alpha) L^a c^b + f_3^{ab}(\xi, \alpha) \xi^a (\partial_\mu \Omega_\mu^b) + f_4^{ab}(\xi, \alpha) (\partial_\mu \xi^a) \Omega_\mu^b \right. \\ & + f_5^{ab}(\xi, \alpha) A_\mu^a \Omega_\mu^b + f_6^{ab}(\xi, \alpha) A_\mu^a (\partial_\mu \bar{c}^b) + f_7^{ab}(\xi, \alpha) (\partial_\mu A_\mu^a) \bar{c}^b \\ & + f_8^{ab}(\xi, \alpha) (\partial_\mu \xi^a) (\partial_\mu \bar{c}^b) + f_9^{ab}(\xi, \alpha) \xi^a (\partial^2 \bar{c}^b) + f_{10}^{ab}(\xi, \alpha) \bar{c}^a b^b \\ & + f_{11}^{ab}(\xi, \alpha) \bar{c}^a \tau^b + f_{12}^{abc}(\xi, \alpha) \bar{\eta}^a \eta^b \bar{c}^c + f_{13}^{abc}(\xi, \alpha) \bar{c}^a \bar{c}^b c^c \\ & \left. + f_{14}^{abcd}(\xi, \alpha) M^{ab} \xi^c \bar{c}^d \right), \end{aligned}$$

onde (f_1, \dots, f_{14}) são coeficientes arbitrários. Impondo as restrições (175), *i.e.*

$$\frac{\delta}{\delta b^k} \mathcal{B}_\Sigma \Delta^{(-1)} = 0, \quad (185)$$

e fazendo o uso da relação de comutação

$$\frac{\delta}{\delta b^k} \mathcal{B}_\Sigma = \mathcal{B}_\Sigma \frac{\delta}{\delta b^k} + i \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}^k} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^k} - M^{kl} \frac{\delta}{\delta K^l} \right), \quad (186)$$

encontramos

$$\frac{\delta \Delta^{(-1)}}{\delta b^k} = f_{10}^{ak}(\xi, \alpha) \bar{c}^a \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_\Sigma \frac{\delta \Delta^{(-1)}}{\delta b^k} = \frac{\delta \Sigma}{\delta K^m} \frac{\partial f_{10}^{ak}(\xi, \alpha)}{\partial \xi^m} \bar{c}^a + i f_{10}^{ak}(\xi, \alpha) b^a.$$

Além disso, de

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\delta \Delta^{(-1)}}{\delta \bar{c}^k} + \partial_\mu \frac{\delta \Delta^{(-1)}}{\delta \Omega_\mu^k} - M^{kl} \frac{\delta \Delta^{(-1)}}{\delta K^l} \right) = & -i \partial_\mu (f_6^{ak}(\xi, \alpha) A_\mu^a) + i f_7^{ak}(\xi, \alpha) (\partial_\mu A_\mu^a) \\ & -i \partial_\mu (f_8^{ak}(\xi, \alpha) (\partial_\mu \xi^a)) + i \partial^2 (f_9^{ak}(\xi, \alpha) \xi^a) \\ & + i f_{10}^{kb}(\xi, \alpha) b^b + i f_{11}^{kb}(\xi, \alpha) \tau^b \\ & + i f_{12}^{abk}(\xi, \alpha) \bar{\eta}^a \eta^b + 2i f_{13}^{kbc}(\xi, \alpha) \bar{c}^b c^c \\ & + i f_{14}^{abck}(\xi, \alpha) M^{ab} \xi^c \\ & -i \partial^2 (f_3^{ak}(\xi, \alpha) \xi^a) + i \partial_\mu (f_4^{ak}(\xi, \alpha) (\partial_\mu \xi^a)) \\ & + i \partial_\mu (f_5^{ak}(\xi, \alpha) A_\mu^a) - i M^{kl} f_1^{al}(\xi, \alpha) \xi^a, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta b^k} \mathcal{B}_\Sigma \Delta^{(-1)} = 0 &= \left[\frac{\partial f_{10}^{bk}(\xi, \alpha)}{\partial \xi^m} g^{mc}(\xi) - 2i f_{13}^{kbc}(\xi, \alpha) \right] c^c \bar{c}^b \\
&+ i [f_{10}^{ak}(\xi, \alpha) + f_{10}^{ka}(\xi, \alpha)] b^a \\
&+ i [-f_6^{ak}(\xi, \alpha) + f_5^{ak}(\xi, \alpha) + f_7^{ak}(\xi, \alpha)] (\partial_\mu A_\mu^a) \\
&- i [(\partial_\mu f_6^{ak}(\xi, \alpha)) - (\partial_\mu f_5^{ak}(\xi, \alpha))] A_\mu^a \\
&+ i [-(\partial_\mu f_8^{ak}(\xi, \alpha)) - (\partial_\mu f_3^{ak}(\xi, \alpha)) + (\partial_\mu f_4^{ak}(\xi, \alpha)) + (\partial_\mu f_9^{ak}(\xi, \alpha))] (\partial_\mu \xi^a) \\
&+ i [-f_8^{ak}(\xi, \alpha) - f_3^{ak}(\xi, \alpha) + f_4^{ak}(\xi, \alpha) + f_9^{ak}(\xi, \alpha)] (\partial^2 \xi^a) \\
&+ i [-(\partial^2 f_3^{ak}(\xi, \alpha)) + (\partial^2 f_9^{ak}(\xi, \alpha))] \xi^a \\
&+ i f_{11}^{kb}(\xi, \alpha) \tau^b + i f_{12}^{abk}(\xi, \alpha) \bar{\eta}^a \eta^b + i [f_{14}^{abck}(\xi, \alpha) - \delta^{ka} f_1^{cb}(\xi, \alpha)] M^{ab} \xi^c .
\end{aligned}$$

Apartir de (187) podemos derivar relações entre os coeficiente (f_1, \dots, f_{14}) . Vamos iniciar com

$$(\partial_\mu f_6^{ak}(\xi, \alpha)) - (\partial_\mu f_5^{ak}(\xi, \alpha)) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_6^{ab} = f_5^{ab} + \delta^{ab} a , \quad (187)$$

onde a é uma constante. Outra relação seria

$$-f_6^{ak}(\xi, \alpha) + f_5^{ak}(\xi, \alpha) + f_7^{ak}(\xi, \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_7^{ak}(\xi, \alpha) = \delta^{ab} a . \quad (188)$$

Analogamente

$$-(\partial^2 f_3^{ak}(\xi, \alpha)) + (\partial^2 f_9^{ak}(\xi, \alpha)) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_9^{ak}(\xi, \alpha) = f_3^{ak}(\xi, \alpha) + b \delta^{ak} , \quad (189)$$

com b uma constante livre. Em seguida, de

$$[-(\partial_\mu f_8^{ak}(\xi, \alpha)) - (\partial_\mu f_3^{ak}(\xi, \alpha)) + (\partial_\mu f_4^{ak}(\xi, \alpha)) + (\partial_\mu f_9^{ak}(\xi, \alpha))] , \quad (190)$$

obtemos

$$f_8^{ak}(\xi, \alpha) = f_4^{ak}(\xi, \alpha) + c \delta^{ak} , \quad (191)$$

com c constante. Finalmente

$$-f_8^{ak}(\xi, \alpha) - f_3^{ak}(\xi, \alpha) + f_4^{ak}(\xi, \alpha) + f_9^{ak}(\xi, \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = c . \quad (192)$$

Portanto, $\Delta^{(-1)}$ torna

$$\begin{aligned} \Delta^{(-1)} = & \int d^4x \left(f_1^{ab}(\xi, \alpha) (\xi^a K^b + M^{cb} \xi^a \bar{c}^c) \right. \\ & + f_2^{ab}(\xi, \alpha) L^a c^b + f_3^{ab}(\xi, \alpha) \xi^a ((\partial_\mu \Omega_\mu^b) + (\partial^2 \bar{c}^b)) \\ & + f_4^{ab}(\xi, \alpha) (\partial_\mu \xi^a) (\Omega_\mu^b + (\partial_\mu \bar{c}^b)) \\ & + f_5^{ab}(\xi, \alpha) A_\mu^a (\Omega_\mu^b + (\partial_\mu \bar{c}^b)) \\ & \left. + f_{10}^{ab}(\xi, \alpha) \bar{c}^a b^b + \frac{1}{2i} \frac{\partial f_{10}^{ba}(\xi, \alpha)}{\partial \xi^m} g^{mc}(\xi) \bar{c}^a \bar{c}^b c^c \right). \end{aligned}$$

Agora impomos a restrição (178)

$$\int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \eta^m} + g f^{mnp} \bar{\eta}^n \frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \tau^p} + g f^{mnp} \Xi^n \frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \mathcal{J}_\mu^p} \right) = 0,$$

$$\Rightarrow \int d^4x (a_6 + a_4 g) f^{mnp} (\partial_\mu \bar{\eta}^n + f^{mnp} \Xi^n) A_\mu^{hp} = 0,$$

da qual obtemos $a_6 = -a_4 g$.

Além do mais, podemos reduzir o número de parâmetros de Σ^{ct} observando que, colocando $K^a = M^{ab} = N^{ab} = \mathcal{J}_\mu^a = \Xi_\mu^a = m = 0$, a ação completa (163), reduz para a teoria de Yang-Mills ordinária no gauge linear covariante, com a integração sobre τ^a , η^a e $\bar{\eta}^a$ dando 1. Consequentemente, usando a bem conhecida renormalização da teoria de Yang-Mills padrão no gauge linear covariante (PIGUET; SORELLA, 1995), obtemos $a_1 = a_2 = a_3^{abcd} = 0$, $a_5 = a_4$, assim como

$$f_2^{ab}(\xi, \alpha) = \delta^{ab} d_1(\alpha), \quad f_5^{ab}(\xi, \alpha) = \delta^{ab} d_2(\alpha), \quad (193)$$

com (d_1, d_2) sendo parâmetro livres. Além de, temos também

$$f_3^{ab}(\xi, \alpha) = f_4^{ab}(\xi, \alpha) = f_{10}^{ab}(\xi, \alpha) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_{cohom} = & \int d^4x \left(\frac{a_0}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + a_4 ((\partial_\mu \tau^a + \mathcal{J}_\mu^a) A_\mu^{ha} + (\partial_\mu \bar{\eta}^a + \Xi_\mu^a) D^{ab} (A^h) \eta^b) \right. \\ & \left. + a_7 m^2 A_\mu^{ha} A_\mu^{ha} \right), \end{aligned}$$

e

$$\Delta^{(-1)} = \int d^4x \left(f_1^{ab}(\xi, \alpha) (\xi^a K^b + M^{cb} \xi^a \bar{c}^c) + d_1(\alpha) L^a c^a + d_2(\alpha) A_\mu^a (\Omega_\mu^a + (\partial_\mu \bar{c}^a)) \right).$$

Vamos finalizar esta seção escrevendo a expressão final do contratermo mais geral invariante Σ^{ct} na forma paramétrica (PIGUET; SORELLA, 1995), i.e.

$$\begin{aligned}
\Sigma^{ct} = & -a_0 g \frac{\partial \Sigma}{\partial g} + d_2(\alpha) 2\alpha \frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha} + a_7 m^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial m^2} \\
& + \int d^4x \left(a_4 \left(-\tau^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \tau^a} + \mathcal{J}_\mu^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \mathcal{J}_\mu^a} - \bar{\eta}^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\eta}^a} + \Xi_\mu^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \Xi_\mu^a} \right) \right. \\
& - \left(f_1^{ab}(\xi, \alpha) + \frac{\partial f_1^{kb}(\xi, \alpha)}{\partial \xi^a} \xi^k \right) K^b \frac{\delta \Sigma}{\delta K^a} + f_1^{ab}(\xi, \alpha) \xi^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \xi^b} \\
& + d_2(\alpha) A_\mu^a \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu^a} - d_2(\alpha) b^a \frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} - d_2(\alpha) \Omega_\mu^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu^a} - d_2(\alpha) \bar{c}^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^a} \\
& - d_1(\alpha) c^a \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} + d_1(\alpha) L^a \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} + (-f_1^{cb}(\xi, \alpha) + d_2(\alpha) \delta^{cb}) N^{ab} \frac{\delta \Sigma}{\delta N^{ac}} \\
& \left. + (d_2(\alpha) \delta^{ab} - f_1^{ab}(\xi, \alpha)) M^{cb} \frac{\delta \Sigma}{\delta M^{ca}} + \frac{\partial f_1^{ab}(\xi, \alpha)}{\partial \xi^k} M^{cb} \xi^a g(\xi)^{kd} c^d \bar{c}^c \right). \quad (194)
\end{aligned}$$

3.8 Análise do contratermo e fatores de renormalização

Tendo determinado a forma mais geral do contratermo invariante local (194), vamos prestar atenção ao seu significado físico. Como já mencionado antes, no intuito de determinar a renormalização dos campos, fontes e parâmetros, prestamos atenção ao fato que, devido a explícita dependência da fixação de gauge do campo de Stueckelberg ξ^a , a renormalização da fixação de gauge para uma ambiguidade do tipo da equação (154), que corresponde a renormalização da quantidade $\omega^a(\xi)$, i.e. dos parâmetros de gauge $(a_1^{abc}, a_2^{abcd}, a_3^{abcde}, \dots)$. Para esse fim, será suficiente analisar os dois últimos termos da expressão para (194), que, ao definir as fontes (M^{ab}, N^{ab}) para seus valores físicos, ou seja, $(M^{ab} = \delta^{ab} \mu^2, N^{ab} = 0)$, torna

$$(d_2(\alpha) - f_1(0, \alpha)) \mu^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu^2} + \mu^2 \int d^4x \left(\tilde{f}_1^{ab}(\xi, \alpha) (i b^b \xi^a - \bar{c}^b g^{ak}(\xi) c^k) + \frac{\partial \tilde{f}_1^{ab}(\xi, \alpha)}{\partial \xi^k} \bar{c}^b \xi^a g^{kd}(\xi) c^d \right), \quad (195)$$

onde colocamos

$$f_1^{ab}(\xi, \alpha) = f_1^{ab}(0, \alpha) + \tilde{f}_1^{ab}(\xi, \alpha), \quad (196)$$

com $f_1^{ab}(0, \alpha) = \delta^{ab} f_1(0, \alpha)$ sendo o primeiro, independente de ξ^a , termo da série de Taylor de $f_1^{ab}(\xi, \alpha)$ em potências de ξ^a e $\tilde{f}_1^{ab}(\xi, \alpha)$ indicando os termos restantes dependentes de ξ . Claro que, $f_1^{ab}(0, \alpha) = \delta^{ab} f_1(0, \alpha)$ é apenas uma constante.

Ademais, observamos que a expressão (195) pode ser reescrita como

$$(d_2(\alpha) - f_1(0, \alpha)) \mu^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu^2} + \mu^2 \int d^4x s \left(\tilde{f}_1^{ab}(\xi, \alpha) \bar{c}^b \xi^a \right) , \quad (197)$$

ou, equivalente a

$$(d_2(\alpha) - f_1(0, \alpha)) \mu^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu^2} + \mu^2 \int d^4x s \left(\bar{c}^b \tilde{\omega}^b(\xi, \alpha) \right) , \quad (198)$$

com $\tilde{\omega}^b(\xi, \alpha) = \tilde{f}_1^{ab}(\xi, \alpha) \xi^a$.

Agora somos capazes de revelar o significado destes termos. Primeiro, o termo $(d_2(\alpha) - f_1^{aa}(0, \alpha))$ corresponde a uma renormalização multiplicativa do parâmetro de gauge massivo μ^2 . Isto segue da observação que, se μ^2 é um parâmetro independente do espaço-tempo, sua renormalização deve ser dada por um fator constante independente do espaço-tempo, *i.e.* precisamente $(d_2(\alpha) - f_1^{aa}(0, \alpha))$. Por outro lado, o termo $\int d^4x s (\bar{c}^b \tilde{\omega}^b(\xi, \alpha))$ é do tipo de (154), portanto correspondendo a ambiguidade inerente a fixação de gauge já discutido antes. Como já mencionado, este termo pode ser manipulado partindo desde o início a fixação de gauge generalizada (155), cuja renormalização algébrica pode ser feita empregando as identidades de Ward mostradas no APÊNDICE A. Fazendo isso, o termo $\int d^4x s (\bar{c}^b \tilde{\omega}^b(\xi, \alpha))$ corresponderá a uma renormalização da função de fixação de gauge $\omega^a(\xi)$, *i.e.* dos parâmetros de gauge $(a_1^{abc}, a_2^{abcd}, a_3^{abcde}, \dots)$.

Podemos ler os fatores de renormalização, *i.e.*

$$\Sigma(\Phi) + \varepsilon \Sigma^{ct}(\Phi) = \Sigma(\Phi_0) + O(\varepsilon^2) , \quad (199)$$

com

$$\Phi_0 = Z_\Phi \Phi + O(\varepsilon^2) , \quad (200)$$

onde Φ significa uma notação abreviada para todos os campos, fontes e parâmetros. Então, encontramos os seguintes fatores de renormalização:

$$A_0 = Z_A^{1/2} A_\mu , \quad b_0 = Z_b^{1/2} b , \quad c_0 = Z_c^{1/2} c , \quad \bar{c}_0 = Z_{\bar{c}}^{1/2} \bar{c} , \quad (201)$$

$$\xi_\alpha^a = Z_\xi^{ab}(\xi) \xi^b , \quad \tau_0 = Z_\tau^{1/2} \tau , \quad \Omega_0 = Z_\Omega \Omega , \quad L_0 = Z_L L \quad (202)$$

$$K_0^a = Z_K^{ab}(\xi) K^b , \quad m_0^2 = Z_{m^2} m^2 , \quad \mathcal{J}_0 = Z_{\mathcal{J}} \mathcal{J} , \quad (203)$$

$$g_0 = Z_g g , \quad \alpha_0 = Z_\alpha \alpha , \quad \bar{\eta}_0 = Z_{\bar{\eta}}^{1/2} \bar{\eta} , \quad \eta_0 = Z_\eta^{1/2} \eta , \quad (204)$$

$$\Xi_0 = Z_\Xi \Xi , \quad \mu_0^2 = Z_{\mu^2} \mu^2 , \quad (205)$$

onde

$$\begin{aligned}
Z_g &= 1 - \varepsilon \frac{a_0}{2} \\
Z_A^{1/2} &= Z_\Omega^{-1} = Z_{\bar{c}}^{-1/2} = Z_b^{-1/2} = Z_\alpha^{1/2} = 1 + \varepsilon d_2(\alpha) \\
Z_\xi^{ab} &= \delta^{ab} + \varepsilon f_1^{ab}(\xi, \alpha) \\
Z_L &= Z_c^{-1/2} = 1 + \varepsilon d_1(\alpha) \\
Z_{\bar{\eta}} &= Z_\eta = Z_{\Xi}^2 = Z_{\bar{r}}^{1/2} = Z_{\mathcal{J}} = 1 + \varepsilon a_4 \\
Z_{m^2} &= 1 + \varepsilon a_7 \\
Z_{\mu^2} &= 1 + \varepsilon (d_2 - f_2(0, \alpha)) \\
Z_K^{ab} &= \delta^{ab} - \varepsilon \left(f_1^{ab}(\xi, \alpha) + \frac{\partial f_1^{kb}(\xi, \alpha)}{\partial \xi^a} \xi^k \right). \tag{206}
\end{aligned}$$

Note que, como esperado, o campo adimensional ξ^a renormaliza em uma maneira não-linear através da quantidade $f_1^{ab}(\xi, \alpha)$ que é uma série de potências em ξ^a . As equações (199) e (206) estabelecem a renormalizabilidade da ação eq.(163), e portanto da ação invariante (156), até uma ambiguidade não-física exata de BRST do tipo da equação (154). Como já dito, a inclusão explícita de tal ambiguidade será fornecida no APÊNDICE A.

3.9 Conclusão

O operador invariante de gauge A_{\min}^2 , eq.(1), e a configuração de campo transversa invariante de gauge A_μ^{ah} , eq.(137), foi investigada numa classe geral de fixações de gauge, eq.(152) e eq.(155), que compartilha similaridades com o gauge R_ζ de 't Hooft's usado na análise das teorias de Yang-Mills com quebra espontânea de simetria. Como mostrado por (CAPRI et al., 2016a), uma configuração local é construída para ambos A_{\min}^2 e A_μ^{ah} , sendo representada pela ação local e invariante de BRST (143). O procedimento de localização é feito usando um campo auxiliar adimensional ξ^a tipo Stueckelberg. Portanto, apesar da presença do campo ξ^a e ao contrário do modelo massivo de Stueckelberg, a presente construção origina um modelo bem comportado no ultravioleta e renormalizável a todas as ordens, como foi discutido em detalhes nas Secções (3.7) e (3.8) como também no APÊNDICE A. Particularmente, o ponto chave da renormalização que foi a condição de transversalidade $\partial_\mu A_\mu^{ah} = 0$ foi enfatizado ao longo do capítulo. É a implementação direta dessa restrição na ação local (143) que faz uma substancial diferença em relação ao modelo convencional de Stueckelberg. Com certeza, como mostrado na Seção (3.6), esta remove a componente do propagador de Stueckelberg que gera as divergências ultravioletas, veja eq.(161) versus eqs.(159). Sobretudo, através da equação (159), vemos que, similar ao que acontece no caso do gauge R_ζ de 't Hooft, o uso da classe geral de fixações de gauge (152) e (155) produz uma massa μ^2 para o campo adimensional de Stueckelberg ξ^a . Isto é

um recurso bem aceito a qual pode ser empregado como uma regularização infravermelha invariante de BRST para ξ^a em cálculos de loops mais altos.

4 QUANTIZANDO TEORIAS DE SUPER YANG-MILLS $\mathcal{N} = 1$

4.1 A álgebra supersimétrica

A álgebra supersimétrica consiste na extensão do grupo de Poincaré ² adicionando geradores bosônicos Q_α^I e fermiônicos $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I$, onde $\alpha = 1, 2$; $I = 1, \dots, \mathcal{N}$ t.q. \mathcal{N} representa a dimensão do grupo.

A superálgebra estendida \mathcal{N} , também chamada \mathcal{N} -superálgebra de Poincaré é escrita como

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}), \quad (207)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(P_\mu g_{\nu\lambda} - P_\nu g_{\mu\lambda}), \quad (208)$$

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (209)$$

$$\{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{IJ}, \quad (210)$$

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{Z}^{IJ}, \quad (211)$$

$$\{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = 2\delta^{IJ}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu, \quad (212)$$

$$[Q_\alpha^I, P_\mu] = 0, \quad (213)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, P_\mu] = 0, \quad (214)$$

$$[Q_\alpha^I, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^I, \quad (215)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}^I, \quad (216)$$

$$[Q_\alpha^I, T_a] = (R_a)_J^I Q_\alpha^J, \quad (217)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, T_a] = (\bar{R}_a)_J^I \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^J \quad (218)$$

Os $Z^{IJ} = -\bar{Z}^{IJ}$ são chamadas de cargas centrais que significa que elas comutam com todos os geradores da superálgebra (BILAL, 2001). A mais simples superálgebra que podemos usar é $\mathcal{N} = 1$, ou seja, possui um índice e $Z^{11} = 0$. No primeiro caso de uma superálgebra estendida $\mathcal{N} = 2$, há apenas uma carga central com $Z^{12} \equiv Z$. Do ponto de vista algébrico não há limites para \mathcal{N} , mas podemos ver que a dimensão \mathcal{N} é proporcional a helicidade das partículas contidas numa teoria. Então, para uma teoria não massiva devido a antisimetria em I, J há $2^\mathcal{N}$ estados com $2^{\mathcal{N}-1}$ férmions e $2^{\mathcal{N}-1}$ bósons, com o supermultiplete representado por $(\lambda_0, (\lambda_0 + 1/2)_I, (\lambda_0 + 1)_{IJ}, \dots, (\lambda_0 + \mathcal{N}/2))$. Em geral, num supermultiplete, exceto se $\lambda_0 = -\mathcal{N}/4$, as helicidades não serão simetricamente

² O grupo que contém as transformações de Lorentz, rotações J_i e boosts K_i , e as translações P_μ .

distribuída sobre 0. Logo, tais multipletos não podem ser invariantes CPT, uma vez que a simetria CPT muda o sinal da helicidade. Para satisfazer CPT precisamos dobrar estes multipletos adicionando seu conjugado CPT com helicidade oposta e números quânticos opostos.

Portanto, para uma superálgebra não-extendida $\mathcal{N} = 1$ podemos construir os seguintes multipletos:

- **multipleteo quiral:** consiste de $(0, 1/2)$ e seu conjugado $(-1/2, 0)$, correspondendo a um férmion e um escalar;
- **multipleteo vetorial:** consiste de $(1/2, 1)$ e seu conjugado $(-1, -1/2)$, correspondendo a um bóson de gauge e um férmion;
- **multipleteo do gravitino:** consiste de $(1, 3/2)$ e seu conjugado $(-3/2, -1)$, correspondendo a um bóson de gauge e o gravitino;
- **multipleteo do gráviton:** consiste de $(3/2, 2)$ e seu conjugado $(-2, -3/2)$, correspondendo ao gráviton e o gravitino.

Para $\mathcal{N} = 2$ o supermultipleteo é $(\lambda_0, \lambda_0 + 1/2, \lambda_0 + 1/2, \lambda_0 + 1)$. Desta forma vemos que para casos que não excede helicidade maior que 1, existe dois casos:

- **multipleteo vetorial:** contém $(0, 1/2, 1/2, 1)$ e seu conjugado $(-1, -1/2, -1/2, 0)$, correspondendo a um escalar, dois férmions e um bóson de gauge. Em termos de $\mathcal{N} = 1$ temos a soma de um multipleteo quiral e vetorial.
- **hipermultipleteo:** contém $(-1/2, 0, 0, 1/2)$, que é auto-invariante de CPT.

Para $\mathcal{N} = 4$, com uma helicidade que não exceda 1, temos

$$(\lambda_0, (\lambda_0 + 1/2)_I, (\lambda_0 + 1)_{IJ}, (\lambda_0 + 3/2)_{IJK}, (\lambda_0 + 2)_{IJKL}) \quad (219)$$

onde $I, J, K, L = 1, \dots, 4$. Assim, o único estado que podemos construir é $\lambda_0 = -1$, i.e.,

$$(-1, (-1/2)_I, (0)_{IJ}, (1/2)_{IJK}, (1)_{IJKL}) \quad (220)$$

tal que as combinações não repetidas dos índices nos dão

$$(-1, 4 \times (-1/2), 6 \times 0, 4 \times 1/2, 1), \quad (221)$$

que é um multipleteo auto-invariante de CPT, contendo um bóson de gauge, 4 férmions de Weyl e 3 escalares complexos.

4.2 Superespaço $\mathcal{N}=1$

Uma vez apresentada a álgebra supersimétrica, temos que encontrar as representações da álgebra em termos de campos. A maneira mais simples e compacta para fazer isso é introduzir um *superespaço* (WESS; BAGGER, 1992). Nesta seção nos restringiremos a um superespaço $N = 1$ que é o enfoque do nosso trabalho.

A idéia básica para construir um superespaço $\mathcal{N} = 1$ é enlargar o espaço usual adicionando coordenadas Grassmanianas anticomutantes θ_α e $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Logo, as coordenadas no superespaço são $(x_\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$.

As coordenadas θ_α e $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ são espinores constantes independentes das coordenadas x^μ . Por sua vez os espinores constantes anticomutam entre eles, i.e., $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0$. Tal que os bilineares são contraídos pela regra

$$\theta\theta = \theta^\alpha\theta_\alpha = -\theta_\alpha\theta^\alpha = -2\theta^1\theta^2 = +2\theta_2\theta_1 = -2\theta_1\theta_2 \quad (222)$$

e

$$\bar{\theta}\bar{\theta} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = +2\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 = -2\bar{\theta}_2\bar{\theta}_1 = +2\bar{\theta}^1\bar{\theta}^2. \quad (223)$$

O índices podem ser escritos de forma covariante e contravariante usando

$$\theta^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta, \quad \theta_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\theta^\beta, \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}, \quad \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad (224)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\sigma} = \delta_\alpha^\lambda\delta_\beta^\sigma - \delta_\beta^\lambda\delta_\alpha^\sigma, \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\lambda}\dot{\sigma}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\lambda}}\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\sigma}} - \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\lambda}}\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\sigma}}, \quad (225)$$

onde $\epsilon_{\alpha\beta}$ é um tensor anti-simétrico rank 2 com $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta} = 1, 2$ e δ_α^λ é um tensor rank-2 simétrico atuando como $\theta_\alpha = \delta_\alpha^\beta\theta_\beta$ e $\theta_{\dot{\alpha}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}\theta_{\dot{\beta}}$. As derivadas em θ e $\bar{\theta}$ são definidas

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta \text{ e } \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \quad (226)$$

Uma vez que os θ 's anticomutam segue que $\theta^n = 0, \forall n > 2$ tal que $n \in \mathbb{N}$, i.e.,

$$\theta\theta\theta^\gamma = \theta^\alpha\theta_\alpha\theta^\gamma = -\theta_\alpha\theta^\alpha\theta^\gamma = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\gamma}\theta_\alpha\theta\theta = -\frac{1}{2}\epsilon^{\gamma\alpha}\theta_\alpha\theta\theta = -\frac{1}{2}\theta^\gamma\theta\theta. \quad (227)$$

Logo,

$$\theta\theta\theta^\gamma = -\frac{1}{2}\theta^\gamma\theta\theta \Rightarrow \theta\theta\theta^\gamma = 0. \quad (228)$$

Todas as combinações possíveis podem ser mostradas nulas pela (228), por exemplo $\theta^\alpha\theta^\beta\theta^\gamma = -(1/2)\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta\theta^\gamma = 0$.

A integração no superespaço é definida por

$$\int d\theta_1 = (a + b\theta_1) = b, \quad (229)$$

isso implica que

$$\int \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = \int \int d\bar{\theta}_2 d\bar{\theta}_1 \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 = 1. \quad (230)$$

Como $(1/2)d\theta_1 d\theta_2 = d^2\theta$ e $(1/2)d\bar{\theta}_2 d\bar{\theta}_1 = d^2\bar{\theta}$, temos ainda que

$$\int \int d^2\theta \theta\theta = \int \int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}\bar{\theta} = 1. \quad (231)$$

Através de (231) obtemos a delta de Dirac espinorial

$$\delta^2(\theta) = \theta\theta \text{ e } \delta^2(\bar{\theta}) = \bar{\theta}\bar{\theta}. \quad (232)$$

A integração pode ser escrita como

$$\int \int d^2\theta = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \text{ e } \int \int d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}. \quad (233)$$

E claramente temos que

$$\int \int \int \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta = 1. \quad (234)$$

4.3 Supercampos $\mathcal{N} = 1$

No caso $\mathcal{N} = 1$, temos a álgebra de Poincaré onde as cargas espinoriais anticomutam como

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad (235)$$

e comutam

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta, \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}, \quad (236)$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0, \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0, \quad (237)$$

e ainda para

$$[Q_\alpha, R] = -Q_\alpha, \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, R] = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \quad (238)$$

onde R é um gerador infinitesimal de um grupo abeliano $U(1)$ no qual o grupo de simetria interna G encolheu.

Usando as transformações supersimétricas como uma álgebra de Lie podemos definir objetos

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i(-x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})}, \quad (239)$$

chamado supercampos que transforma covariantemente sobre transformações supersimétricas. Supercampos pode ser do tipo vetorial, ou tipo quiral. Um supercampo quiral $A(x, \theta, \bar{\theta})$ e anti-quiral $\bar{A}(x, \theta, \bar{\theta})$, é um supercampo obedecendo a condição de quiralidade

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}A = 0, \quad D_{\alpha}\bar{A} = 0, \quad (240)$$

onde

$$D_{\alpha} = \frac{\delta}{\delta\theta^{\alpha}} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\delta_{\mu}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\delta}{\delta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\delta_{\mu} \quad (241)$$

são as derivadas covariantes supersimétricas e

$$A(y, \theta) = z(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) - \theta\theta f(y). \quad (242)$$

Usando que

$$y^{\mu} = x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}, \quad \bar{y}^{\mu} = x^{\mu} - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} \quad (243)$$

$$D_{\alpha}\bar{\theta} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = D_{\alpha}\bar{y} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}y = 0, \quad (244)$$

podemos expandir em série de Taylor o supercampo (242) em termos de x, θ e $\bar{\theta}$:

$$A(x, \theta, \bar{\theta}) = z(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}z(x) - \theta\theta f(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_{\mu}\psi(x)\sigma^{\mu}\bar{\theta} \quad (245)$$

$$- \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2 z(x). \quad (246)$$

Para \bar{A} temos

$$\bar{A}(x, \theta, \bar{\theta}) = \bar{z}(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\bar{z}(x) - \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{f}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}(x) \quad (247)$$

$$- \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2 \bar{z}(x). \quad (248)$$

O supercampo vetorial é real $V^{\dagger} = V$, escrito como

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}A_{\mu} + \frac{i}{2}\theta\theta(M + iN) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M - iN) + i\theta\theta\bar{\theta}\left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi\right) \\ & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}\right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(D - \frac{1}{2}\delta^2 C\right). \end{aligned} \quad (249)$$

Os supercampos são funções do superespaço que pode ser vistos em componentes por séries de potências em θ e $\bar{\theta}$. As leis de transformações (translação, supersimetria e

simetria-R) de um supercampo qualquer ϕ são respectivamente definidos

$$\delta_\mu^P \phi = \partial_\mu \phi, \quad (250)$$

$$\delta_\alpha^Q \phi = \left(\frac{\delta}{\delta \theta^\alpha} + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \delta_\mu \right) \phi, \quad (251)$$

$$\delta_{\dot{\alpha}}^{\bar{Q}} \phi = \left(-\frac{\delta}{\delta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \delta_\mu \right) \phi, \quad (252)$$

e

$$\delta^R \phi = i \left(n + \theta^\alpha \frac{\delta}{\delta \tau^\alpha} - \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\delta}{\delta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \right) \phi. \quad (253)$$

O número n em (253) é o “peso-R” do supercampo ϕ . Os pesos-R são opostos entre eles em supercampos conjugados complexos. Estes operadores obedece a álgebra de super-Poincaré

$$\{\delta_\alpha^Q, \delta_{\dot{\alpha}}^{\bar{Q}}\} = -2i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \delta_\mu^P, \quad (254)$$

$$[\delta_\alpha^Q, \delta^R] = i \delta_\alpha^Q, \quad [\delta_{\dot{\alpha}}^{\bar{Q}}, \delta^R] = -i \delta_{\dot{\alpha}}^{\bar{Q}}. \quad (255)$$

4.4 A ação Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 1$

Começamos com o supercampo vetorial V no grupo de gauge G , i.e. $V \equiv V^a T^a$, $a = 1, \dots, \dim G$ onde T^a são os geradores do grupo. O objeto fundamental é e^V . A transformação de gauge é dada por

$$e^V \rightarrow e^{i\Lambda^\dagger} e^V e^{-i\Lambda} \quad (256)$$

$$e^{-V} \rightarrow e^{i\Lambda} e^{-V} e^{-i\Lambda^\dagger} \quad (257)$$

Tendo isso podemos construir a ação Super Yang-Mills

$$\Sigma_{SYM} = -\frac{1}{4} \text{tr} \left(\int dS W^a W_a + \int d\bar{S} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \right) \quad (258)$$

$$= -\frac{1}{2} \text{tr} \int dS W^a W_a, \quad (259)$$

onde usamos de (258) para (259) que $D^\alpha W_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}$. Além disso, temos

$$W_\alpha = \bar{D}^2 (e^{-V} D_\alpha e^V), \quad (260)$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = D^2 (e^V \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-V}), \quad (261)$$

representando o supercampo invariante de gauge W^α e seu complexo conjugado $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$. Esse supercampo é quiral e se transforma covariantemente sobre (257) da seguinte forma:

$$W^\alpha = e^{i\Lambda} W^\alpha e^{-i\Lambda}. \quad (262)$$

Similarmente, temos o complexo conjugado como

$$\bar{W}^{\dot{\alpha}} = e^{i\Lambda^\dagger} \bar{W}^{\dot{\alpha}} e^{-i\Lambda^\dagger}. \quad (263)$$

Para as transformações infinitesimais, temos que

$$\delta_{gauge} W^\alpha = i[\Lambda, W^\alpha], \quad (264)$$

$$\delta_{gauge} \bar{W}^{\dot{\alpha}} = i[\Lambda^\dagger, \bar{W}^{\dot{\alpha}}]. \quad (265)$$

Podemos também escrever a ação (259) em função do supercampo vetorial V como

$$\Sigma_{SYM} = -\frac{1}{2} \int dV V D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha V, \quad (266)$$

tal que através das transformações (257) e observando que $[V, e^V] = 0$, mostramos que

$$\delta_{gauge} V = -\frac{i}{2} L_V (\Lambda + \bar{\Lambda}) - \frac{i}{2} (L_V \coth(L_V/2)) (\Lambda - \bar{\Lambda}), \quad (267)$$

onde $L_V X = [V, X]$ é a derivada de Lie. Para uma detalhada dedução de (267) veja (MULLER-KIRSTEN; WIEDEMANN, 1987).

Para encontrar as equações de campos, minimizamos (266) com relação a V :

$$\frac{\delta}{\delta V} \Sigma_{SYM} = 0 \rightarrow D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha V = 0 \leftrightarrow D^\alpha W_a = 0. \quad (268)$$

4.5 Fixação do gauge e a invariância BRST

Um dos fundamentos para construção de uma teoria supersimétrica de gauge é a fixação do gauge. A fixação do gauge permite que possamos eliminar as liberdades das teorias de gauge e obter resultados físicos consistentes. A fixação de gauge da teoria de SYM $\mathcal{N} = 1$ é obtida pela implementação do termo

$$\bar{D}^2 D^2 V = 0, \quad (269)$$

através de um campo auxiliar B . Assim, temos ação

$$\Sigma_B = \frac{1}{8} \text{tr} \int dS B \bar{D}^2 D^2 V + c.c \quad (270)$$

$$= \frac{1}{8} \text{tr} \int dV B D^2 V + \bar{B} \bar{D}^2 V. \quad (271)$$

Sabemos que os grupos não-abelianos possuem a simetria BRST. Antes de escrever a ação vamos definir as transformações BRST, sobre o qual a ação total é invariante:

$$sV = \frac{1}{2} L_V (c + \bar{c}) + \frac{1}{2} (L_V \coth(L_V/2))(c - \bar{c}), \quad (272)$$

$$sc = -c^2 = -\frac{i}{2} f^{abc} c^b c^c, \quad (273)$$

$$s\bar{c} = -\bar{c}^2, \quad (274)$$

$$sc' = B, \quad (275)$$

$$s\bar{c}' = \bar{B}, \quad (276)$$

$$sB = 0, \quad (277)$$

$$s\bar{B} = 0. \quad (278)$$

Podemos ver que a simetria BRST exige a introdução dos supercampos de ghost de Faddeev-Popov. Os ghosts (c, \bar{c}) e os anti-ghosts (c', \bar{c}') são supercampos quirais e anti-quirais grassmanianos, respectivamente.

A ação (259) já é invariante de BRST. Mas, Σ_B ainda não é. Para fazer Σ_B invariante de BRST podemos usar a nilpotência do operador BRST ($s^2 = 0$) para construir a seguinte ação de fixação de gauge:

$$\Sigma_{SGF} = s \left[\frac{1}{8} \int dV (c'^a D^2 V^a + \bar{c}'^a \bar{D}^2 V^a) \right] \quad (279)$$

$$= \frac{1}{8} \int dV \left(B^\alpha D^2 V^\alpha + \bar{B}^\alpha \bar{D}^2 V^\alpha - c'^a D^2 sV^a - \bar{c}'^a \bar{D}^2 sV^a \right). \quad (280)$$

Concluimos que a ação total BRST invariante correspondente a extensão supersimétrica de Faddeev-Popov é dada por

$$\Sigma_{SFP} = \Sigma_{SYM} + \Sigma_{SGF} \quad (281)$$

$$= -\frac{1}{2} \int dV W^{a\alpha} W_\alpha^a + \frac{1}{8} \int dV \left(B^\alpha D^2 V^\alpha + \bar{B}^\alpha \bar{D}^2 V^\alpha - c'^a D^2 sV^a - \bar{c}'^a \bar{D}^2 sV^a \right). \quad (282)$$

4.6 Renormalizabilidade da Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 1$

Partindo da ação de Super Yang-Mills invariante BRST

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{SYM}} &= \Sigma_{\text{SYM}} + \Sigma_{\text{SGF}} + \Sigma_{\text{EXT}} \\
&= -\frac{1}{128g^2} \text{tr} \int dS (W^a W_a) + s \left[\frac{1}{8} \int dV (c'^a D^2 V^a + \bar{c}'^a \bar{D}^2 V^a) \right] \\
&\quad + \int dV \Omega^a G_V^a(c, \bar{c}) + \frac{i}{2} \int dS f^{abc} L^a c^b c^c + \frac{i}{2} \int d\bar{S} f^{abc} \bar{L}^a \bar{c}^b \bar{c}^c.
\end{aligned} \tag{283}$$

Sabemos que a ação obedece as seguintes identidades de Ward:

- As equações da fixação de gauge

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta A^a} = \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 V^a, \quad \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{A}} = \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 V^a; \tag{284}$$

- Equações de anti-ghost

$$\mathcal{G}_-^a \Sigma = 0, \quad \bar{\mathcal{G}}_-^a \Sigma = 0, \tag{285}$$

com

$$\mathcal{G}_-^a = \frac{\delta}{\delta c'^a} + \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta \Omega^a} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{G}}_-^a = \frac{\delta}{\delta \bar{c}'^a} + \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \frac{\delta}{\delta \bar{\Omega}^a}; \tag{286}$$

- A equação de ghost quebrada linearmente (PIGUET; SORELLA, 1996)

$$\mathcal{G}_+ \Sigma = \Delta_{\text{clas}}, \tag{287}$$

com

$$\mathcal{G}_+ = \int dS \left(\frac{\delta}{\delta c^c} - i f^{abc} c'^a \frac{\delta}{\delta A^b} \right) + \int d\bar{S} \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}^c} - i f^{abc} \bar{c}'^a \frac{\delta}{\delta \bar{A}^b} \right), \tag{288}$$

e

$$\Delta_{\text{clas}} = i f^{abc} \int dV \Omega^a V^b + i f^{abc} \int dS L^a c^b + i f^{abc} \int d\bar{S} \bar{L}^a \bar{c}^b; \tag{289}$$

- As simetrias lineares de Susy, translação, simetria R e transformações rígidas são

expressas pelas seguintes identidades de Ward

$$W_X \Sigma = -i \sum_{\phi} \int \delta_X \phi \frac{\delta}{\delta \phi} \Sigma = 0, \quad X = Q_{\alpha}, P_{\mu}, R \text{ e transformações r\u00edgidas,} \quad (290)$$

como tamb\u00e9m a identidade de Slavnov-Taylor :

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int dV \left\{ \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta V^a} \right\} + \left[\int dS \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} + A^a \frac{\delta \Sigma}{\delta c'^a} \right) + c.c. \right] = 0. \quad (291)$$

Assim, o contratermo Σ_{CT} pode ser escrito como

$$\Sigma_{CT} = \Delta + \mathcal{B}_{\Sigma} \Delta^{(-1)}, \quad (292)$$

com

$$\Delta = a_0 \text{Tr} \int dS W^{\alpha} W_{\alpha}, \quad (293)$$

e

$$\Delta^{-1} = \int dV \left(F_1^{ab}(V) V^b \Omega^a - \frac{1}{8} F_1^{ab}(V) V^b (D^2 c'^a + \bar{D}^2 \bar{c}'^a) \right) + \left[\int dS (a_1^{ab} L^a c^b) + c.c. \right]. \quad (294)$$

Construindo o contra-termo com $\mathcal{F}^a(V)$ sendo um campo composto. Temos que introduzir um dubleto (R^a, P^a) e a a\u00e7\u00e3o completa \u00e9 dado por

$$\Sigma_{\text{SPYM}} = -\frac{1}{128g^2} \text{tr} \int dS (W^a W_a) + \left[\int dS \left(\frac{i}{2} f^{abc} L^a c^b c^c \right) + c.c. \right] \quad (295)$$

$$+ \frac{1}{8} \int dV \left\{ A^a D^2 \mathcal{F}^a - c'^a D^2 \left[\frac{\partial \mathcal{F}^a}{\partial V^c} G_V^c \right] + c.c. \right\} \\ + \int dV \left(\Omega^a G_V^a(c, \bar{c}) + P^a \mathcal{F}^a(V) - R^a \frac{\partial \mathcal{F}^a}{\partial V^c} G_V^c(c, \bar{c}) \right). \quad (296)$$

A a\u00e7\u00e3o obedece as identidades de Ward acima, como tamb\u00e9m a identidade de Slavnov-Taylor:

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int dV \left\{ \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta V^a} + P^a \frac{\delta \Sigma}{\delta R^a} \right\} + \left[\int dS \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} + A^a \frac{\delta \Sigma}{\delta c'^a} \right) + c.c. \right] = 0. \quad (297)$$

Fazendo o uso da rela\u00e7\u00e3o $[\frac{\partial}{\partial A^a} - \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta P^a}, S_{\Sigma}] = \frac{\delta}{\delta c'^a} - \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta R}$, encontramos

$$\Delta^{-1} = \int dV \left(F_1^{ab} V^b \Omega^a + F_2^{ab} V^b (R^a + \frac{1}{8} D^2 c'^a + \frac{1}{8} \bar{D}^2 \bar{c}'^a) \right) + \left[\int dS (a_1^{ab} L^a c^b) + c.c. \right]. \quad (298)$$

Definindo

$$\begin{aligned} F_2^{ab}(V) &= F_2(0)\delta^{ab} + \tilde{F}_2^{ab}(V) \\ \tilde{F}_2^{ab}(V) &= \tilde{\alpha}_1^{abc}V^c + \tilde{\alpha}_2^{abcd}V^d + \tilde{\alpha}_3^{abcde}V^e + \dots, \end{aligned} \quad (299)$$

encontramos o contra-termo

$$\begin{aligned} \Sigma_{CT} &= \int dS a_0 g^2 \frac{\delta\Sigma}{\delta g^2} + \int dV \left(F_2(0)P^a \frac{\delta\Sigma}{\delta P^a} + F_2(0)\bar{A}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \bar{A}^a} \right. \\ &+ F_2(0)A^a \frac{\delta\Sigma}{\delta A^a} + F_2(0)R^a \frac{\delta\Sigma}{\delta R^a} + F_2(0)c'^a \frac{\delta\Sigma}{\delta c'^a} + F_2(0)\bar{c}'^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \bar{c}'^a} \left. \right) \\ &+ \int dV \left(F_1^{ab}V^b \frac{\delta\Sigma}{\delta V^a} - \left(\frac{\delta F_1^{ab}}{\delta V^c}V^b + F_1^{ac} \right) \Omega^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \Omega^c} \right) \\ &+ \left[\int dS \left(\alpha_1 L^a \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} - \alpha_1 c^a \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} \right) + c.c. \right] \\ &+ \int dV \left((\tilde{\alpha}_1^{abc} - F_2(0)) \frac{\delta\Sigma}{\delta \alpha_1^{abc}} + (\tilde{\alpha}_2^{abcd} - F_2(0)) \frac{\delta\Sigma}{\delta \alpha_2^{abcd}} + (\tilde{\alpha}_3^{abcde} - F_2(0)) \frac{\delta\Sigma}{\delta \alpha_3^{abcde}} + \dots \right). \end{aligned} \quad (300)$$

Seguindo a análise de estabilidade da ação, os fatores de renormalização obtemos

$$\begin{aligned} Z_g &= 1 + a_0 \\ Z_\Omega^{ab} &= \delta^{ab} - \left(\frac{\delta F_1^{ac}}{\delta V^b}V^c + F_1^{ab} \right) \\ Z_V^{ab} &= \delta^{ab} + F_1^{ab} \\ Z_P &= Z_A = Z_{\bar{A}} = Z_R = Z_{c'} = Z_{\bar{c}'} = 1 + F_2(0) \\ Z_L^{ab} &= Z_{\bar{L}}^{ab} = Z_c^{ab} = Z_{\bar{c}}^{ab} = \delta^{ab} + a_1^{ab}. \end{aligned} \quad (301)$$

Assim, concluímos a prova da renormalizabilidade da super Yang-Mills $\mathcal{N} = 1$ sem massa.

5 RENORMALIZABILIDADE DA SUPER YANG-MILLS $\mathcal{N} = 1$ NO GAUGE DE LANDAU GAUGE COM UM CAMPO TIPO STUECKELBERG

5.1 Introdução

Nesse capítulo abordaremos a construção da configuração de campo supersimétrico transverso invariante de gauge V^H , baseado no campo A^h sem supersimetria abordado no Capítulo 3. A construção do supercampo V^H consiste do supercampo vetorial V e de um supercampo quiral tipo Stueckelberg Ξ . A renormalizabilidade da ação de Super Yang Mills no gauge Landau é analisada na presença termo massivo invariante de gauge $m^2 \int dV \mathcal{M}(V^H)$, com $\mathcal{M}(V^H)$ representado uma série de potências em V^H . Ao contrário da ação de Super Stueckelberg, a ação com o campo V^H é renormalizável a todas as ordens.

O Capítulo é organizado da seguinte forma. Na Seção 5.2 construímos a ação clássica massiva $\mathcal{N} = 1$. Na Seção 5.3 discutimos a fixação de gauge e a simetria BRST. As Seções 5.4 e 5.5 são direcionadas para a dedução das identidades de Ward e a caracterização do contratermo local invariante de gauge mais geral seguindo o programa da renormalização algébrica. Na Seção 5.6 fornecemos uma análise detalhada do contratermo mostrando que este pode ser absorvido na ação clássica inicial através de uma redefinição dos campos e parâmetros, estabelecendo assim a renormalização a todas ordens. A Seção 5.7 contém a conclusão do Capítulo.

5.2 Construção do supercampo V^H

Afim de definir a teoria Super Yang-Mills tipo Stueckelberg $\mathcal{N} = 1$, iniciamos com o supercampo de gauge abeliano real

$$\begin{aligned}
 V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + \frac{i}{2}\theta\theta(M + iN) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M - iN) + i\theta\theta\bar{\theta}\left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right) \\
 & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}\right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(D - \frac{1}{2}\delta^2 C\right), \tag{302}
 \end{aligned}$$

e com o supercampo quiral adimensional que atua como um supercampo de Stueckelberg

$$\begin{aligned}\Xi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \xi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\xi(x) - \theta\theta f(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} \\ &\quad - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2\xi(x),\end{aligned}\tag{303}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Xi}(x, \theta, \bar{\theta}) &= \bar{\xi}(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\xi}(x) - \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{f}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(x) \\ &\quad - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2\bar{\xi}(x).\end{aligned}\tag{304}$$

Agora, é possível construir um supercampo invariante de gauge

$$V^H(x, \theta, \bar{\theta}) = V(x, \theta, \bar{\theta}) + i\Xi(x, \theta, \bar{\theta}) - i\bar{\Xi}(x, \theta, \bar{\theta}),\tag{305}$$

que é invariante sobre as transformações

$$V \rightarrow V + i\phi - i\bar{\phi}, \quad \Xi \rightarrow \Xi - \phi, \quad \bar{\Xi} \rightarrow \bar{\Xi} - \bar{\phi}.\tag{306}$$

Tendo em vista toda a transformação abeliana do supercampo V^H . É fácil generalizar a definição de V^H para o caso não-abeliano. Partimos do supercampo V^H (305) na representação adjunta do grupo G , $V^H \equiv V^{Ha}T^a$, ($a = 1, \dots, \dim G$) onde o T^a são os geradores da adjunta. Agora, o objeto fundamental é e^{V^H} em vez de V^H . Portanto a versão não-abeliana de (305) é

$$e^{V^H} = \bar{H}e^V H,\tag{307}$$

onde $H = e^{i\Xi}$, $U = e^{i\phi}$ e V é o supercampo de gauge usual. As transformações de gauge são

$$e^V \rightarrow \bar{U}e^V U, \quad H \rightarrow U^{-1}H, \quad \bar{H} \rightarrow \bar{H} \bar{U}^{-1},\tag{308}$$

de tal forma que V^H é invariante. Para as transformações infinitesimais, temos

$$\begin{aligned}\delta_{gauge}V &= \frac{i}{2}L_V(\phi + \bar{\phi}) + \frac{i}{2}(L_V \coth(L_{V/2}))(\phi - \bar{\phi}) \\ &= i(\phi - \bar{\phi}) + \frac{i}{2}[V, \phi + \bar{\phi}] + \frac{i}{12}[V, [V, \phi - \bar{\phi}]] + \mathcal{O}(V^3),\end{aligned}\tag{309}$$

$$\begin{aligned}\delta_{gauge}\Xi &= \frac{i}{2}L_\Xi\phi - \frac{1}{2}(L_\Xi \cot(L_{\Xi/2}))\phi \\ &= -\phi + \frac{i}{2}[\Xi, \phi] + \frac{1}{12}[\Xi, [\Xi, \phi]] + \mathcal{O}(\Xi^3),\end{aligned}\tag{310}$$

$$\begin{aligned}\delta_{gauge}\bar{\Xi} &= -\frac{i}{2}L_{\bar{\Xi}}\bar{\phi} - \frac{1}{2}(L_{\bar{\Xi}} \cot(L_{\bar{\Xi}/2}))\bar{\phi} \\ &= -\bar{\phi} - \frac{i}{2}[\bar{\Xi}, \bar{\phi}] + \frac{1}{12}[\bar{\Xi}, [\bar{\Xi}, \bar{\phi}]] + \mathcal{O}(\bar{\Xi}^3),\end{aligned}\tag{311}$$

com $L_A X = [A, X]$. Tomando a primeira ordem in ϕ temos os limite abeliano que recai em (306).

Agora, usando todas as definições acima construímos um modelo de super Yang-Mills tipo Stueckelberg $\mathcal{N} = 1$ invariante de gauge, i.e.

$$\mathcal{L}_{\text{SYM}} = -\frac{1}{128g^2} \text{tr} \int dS W^\alpha W_\alpha + m^2 \text{tr} \int dV \mathcal{M}(V^H), \quad (312)$$

com

$$W_\alpha \equiv \bar{D}^2(e^{-V} D_\alpha e^V), \quad (313)$$

e

$$\mathcal{M} = V^{Ha} V^{Ha} + \sigma_1^{abc} V^{Ha} V^{Hb} V^{Hc} + \sigma_2^{abcd} V^{Ha} V^{Hb} V^{Hc} V^{Hd} + \dots, \quad (314)$$

onde $\sigma_1^{abc}, \sigma_2^{abcd}, \dots$ é um conjunto infinito de parâmetros arbitrários adimensionais. Como podemos observar, o fato do termo massivo $\mathcal{M}(V^H)$ ser uma série infinita de V^H vem da adimensionalidade de V^H . Embora que, perturbativamente, apenas o primeiro termo (314), i.e. $m^2 V^{Ha} V^{Ha}$ entrará na função do propagador. Os termos restantes representam um conjunto infinito de interações, uma característica típica de teorias de Stueckelberg não-abelianas. Note que o primeiro termo da ação, $W^\alpha W_\alpha$, é invariante sobre a troca $V \rightarrow V^H$.

5.3 Super Yang-Mills-Stueckelberg modificado no gauge de Landau

A extensão supersimétrica do gauge de Landau é

$$\bar{D}^2 D^2 V = 0. \quad (315)$$

Vindo da seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L}_{SGF} = \frac{1}{8} \text{Tr} \int dS A \bar{D}^2 D^2 V + c.c. = \frac{1}{8} \text{Tr} \int dV (A D^2 V + \bar{A} \bar{D}^2 V), \quad (316)$$

onde A são supercampos quirais auxiliares, com as seguintes equações de campo

$$\frac{\delta}{\delta A} \mathcal{L}_{SGF} = \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 V = 0, \quad \frac{\delta}{\delta \bar{A}} \mathcal{L}_{SGF} = \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 V = 0. \quad (317)$$

Seguindo o procedimento BRST padrão, a fixação de gauge é implementada numa maneira invariante de BRST definindo os campos auxiliares como a variação BRST do supercampo de anti-ghost c' , ou seja $sc' = A$, desta forma podemos adicionar o termo

invariante de BRST na ação afim de fixar o gauge, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SGF} &= s \left[\frac{1}{8} \text{tr} \int dV (c' D^2 V + c.c.) \right] \\ &= \frac{1}{8} \text{tr} \int dS [(A \bar{D}^2 D^2 V - c' \bar{D}^2 D^2 sV + c.c.)].\end{aligned}\quad (318)$$

Olhando para a fixação de gauge (318), é importante perceber que para qualquer teoria quântica de campos local com campos adimensionais, podemos reparametrizar esses campos como é feito na Seção 3.4. Como por exemplo os modelos sigma não-lineares bidimensionais em (BLASI; DELDUC; SORELLA, 1989a; BECCHI; PIGUET, 1989b). na fixação de gauge (318), significa que temos a liberdade de trocar V^a por uma função arbitrária adimensional V^a

$$V^a \rightarrow \mathcal{F}^a(V) = V^a + \alpha_1^{abc} V^b V^c + \alpha_2^{abcd} V^b V^c V^d + \alpha_3^{abcde} V^b V^c V^d V^e + \dots, \quad (319)$$

onde $\alpha_1^{abc}, \alpha_2^{abcd}, \alpha_3^{abcde}, \dots$ são coeficientes adimensionais. Esta liberdade, é específica da natureza adimensional de V^a , a nível quântico essa liberdade é mais evidente porque esse campo se renormaliza não-linearmente (GATES et al., 1983; PIGUET; SORELLA, 1995; PIGUET; SIBOLD, 1982a; PIGUET; SIBOLD, 1984). Assim, (319) expressa precisamente a liberdade de reparametrização do V^a .

Em nosso caso, isso significa que em vez de (318) poderíamos já termos partido da ação

$$s \left[\frac{1}{8} \text{tr} \int dV (c' D^2 V + c.c.) \right] \rightarrow s \left[\frac{1}{8} \text{tr} \int dV (c' D^2 \mathcal{F}(V) + c.c.) \right], \quad (320)$$

sem afetar as funções de correlação das quantidades invariantes de gauge. Os coeficientes ($\alpha_1^{abc}, \alpha_2^{abcd}, \alpha_3^{abcde} \dots$) são parâmetros de gauge, não afetando as funções de correlação das quantidades invariantes de gauge. A liberdade que temos no termo de fixação de gauge tornará aparente ao executar o procedimento de renormalização. De fato, na Seção 5.5, usaremos uma fixação de gauge generalizada

$$\begin{aligned}S_{gf}^{gen} &= s \left[\frac{1}{8} \text{tr} \int dV (c' D^2 \mathcal{F}(V) + c.c.) \right] \\ &= \frac{1}{8} \text{tr} \int dS \left[A \bar{D}^2 D^2 \mathcal{F}(V) - c' \bar{D}^2 D^2 \frac{\partial \mathcal{F}(V)}{\partial V} sV \right] + c.c.,\end{aligned}\quad (321)$$

e utilizando as identidades de Ward, podemos controlar as ambiguidades da fixação de gauge. O contratermo corresponderá a renormalização dos parâmetros de gauge ($\alpha_1^{abc}, \alpha_2^{abcd}, \alpha_3^{abcde} \dots$), que ficará claro na Seção 5.6.

Uma dos principais pontos que asseguram a renormalização dos modelos tipo Stueckelberg sem supersimetria introduzido primeiramente por (CAPRI et al., 2015; CAPRI et al., 2016c; CAPRI et al., 2016b; CAPRI et al., 2016a; CAPRI et al., 2017b) foi a im-

plementação da condição de transversalidade sobre A^h . No caso supersimétrico a mesma condição existe no campo análogo V^H . Essa restrição de transversalidade explicita a vantagem entre os modelos modificados contruídos por (CAPRI et al., 2015; CAPRI et al., 2016c; CAPRI et al., 2016b; CAPRI et al., 2016a; CAPRI et al., 2017b) e o modelo de Stueckelberg não-abeliano convencional. É precisamente a condição de transversalidade que assegura a renormalizabilidade UV dos modelos modificados. Na Seção 3.6 mostramos a diferença entre o modelo de Stueckelberg modificado e o convencional. Portanto aqui o mesmo programa de renormalização feito no Capítulo anterior e imporemos a condição de transversalidade no caso supersimétrico. Mais precisamente, isso equivale a exigir que o supercampo V^H obedeça à restrição

$$\bar{D}^2 D^2 V^H = 0, \quad (322)$$

que, no nível da ação, implementamos introduzindo

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{8} \int dS \left(B \bar{D}^2 D^2 V^H - \eta'^a \bar{D}^2 D^2 G_{V^H}^a(\eta, \bar{\eta}) \right) + c.c., \quad (323)$$

com $G_{V^H}^a(\eta, \bar{\eta}) = (\eta^a - \bar{\eta}^a) + \frac{i}{2} f^{abc} V^{H,b} (\eta^c + \bar{\eta}^c) - \frac{i}{12} f^{amr} f^{mpq} (\eta^p - \bar{\eta}^p) V^{H,q} V^{H,r} + \mathcal{O}(V^{H3})$. O campo B é um multiplicador de Lagrange implementando a restrição de transversalidade (322), equanto os campos $\eta, \bar{\eta}$ são os ghosts necessários ao Jacobiano que surge da integral funcional sobre B e Ξ afim de obter 1.

Logo, no gauge de Landau, bem como a condição de transversalidade, a ação total é

$$\begin{aligned} \Sigma_{SPYM} &= \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{SYM}} + \mathcal{L}_{\text{SP}} + \mathcal{L}_{\text{SGF}} + \mathcal{L}_T) \\ &= -\frac{1}{128g^2} \text{tr} \int dS W^a W_a + \frac{m^2}{2} \text{tr} \int dV \mathcal{M}(V^H) \\ &\quad + \left[s \left(\frac{1}{8} \text{tr} \int dS (c' \bar{D}^2 D^2 V) \right) + \frac{1}{8} \int dS \left(B \bar{D}^2 D^2 V^H - \eta'^a \bar{D}^2 D^2 G_{V^H}^a(\eta, \bar{\eta}) \right) + c.c. \right] \\ &= -\frac{1}{128g^2} \text{tr} \int dS W^a W_a + \frac{m^2}{2} \text{tr} \int dV \mathcal{M}(V^H) \\ &\quad + \left[\frac{1}{8} \int dS \left(A^a \bar{D}^2 D^2 V^a - c'^a \bar{D}^2 D^2 G_V^a \right) + \frac{1}{8} \int dS \left(B \bar{D}^2 D^2 V^H - \eta'^a \bar{D}^2 D^2 G_{V^H}^a(\eta, \bar{\eta}) \right) \right] \end{aligned}$$

Esta ação possui a simetria BRST nilpotente exata

$$\begin{aligned}
sV^a &= G_V^a(c, \bar{c}), \\
sV^{Ha} &= 0, \\
s\Xi^a &= G_{\Xi}^a(c), \\
s\bar{\Xi}^a &= G_{\bar{\Xi}}^a(\bar{c}), \\
sc^a &= -\frac{i}{2}f^{abc}c^b c^c, \\
s\eta^a &= 0 \\
s\bar{c}^a &= -\frac{i}{2}f^{abc}\bar{c}^b \bar{c}^c \\
s\bar{\eta}^a &= 0 \\
sC^a &= A^a, \\
sA^a &= 0, \\
s\eta'^a &= 0, \\
sB^a &= 0, \\
s\bar{C}^a &= \bar{A}^a, \\
s\bar{\eta}'^a &= 0,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
G_V^a(c, \bar{c}) &= (c^a - \bar{c}^a) - \frac{1}{2}f^{abc}V^b(c^c + \bar{c}^c) - \frac{i}{12}f^{amr}f^{mpq}(c^p - \bar{c}^p)V^qV^r + \mathcal{O}(V^3), \\
G_{\Xi}^a(c) &= -c^a - \frac{1}{2}f^{abc}\bar{\Xi}^b c^c - \frac{1}{12}f^{amr}f^{mpq}c^p\bar{\Xi}^q\bar{\Xi}^r + \mathcal{O}(\bar{\Xi}^3), \\
G_{\bar{\Xi}}^a(\bar{c}) &= -\bar{c}^a + \frac{1}{2}f^{abc}\bar{\Xi}^b \bar{c}^c - \frac{1}{12}f^{amr}f^{mpq}c^p\bar{\Xi}^q\bar{\Xi}^r + \mathcal{O}(\bar{\Xi}^3)
\end{aligned} \tag{325}$$

e

$$s\mathcal{S}_{SPYM} = 0, \quad s^2 = 0. \tag{326}$$

5.4 Análise de renormalizabilidade

Com a finalidade da renormalizabilidade da ação (324), iniciamos estabelecendo o conjunto das identidades de Ward que será empregada para o estudo das correções quânticas. Seguindo o programa da renormalização algébrica de (PIGUET; SORELLA, 1995), temos que primeiro adicionar algumas fontes externas para transformações de BRST não-lineares dos campos e dos operadores compostos. Desta forma, precisamos do conjunto de fontes externas invariantes de BRST $(\Omega^a, \Lambda^a, \bar{\Lambda}^a, L^a, \bar{L}^a)$ acopladas as variações de BRST não-lineares de $(V^a, \Xi^a, \bar{\Xi}^a, c^a, \bar{c}^a)$ como também fontes (Π^a, Ψ^a) aco-

Tabela 4 - O números quânticos dos campos.

	θ^a	D^a	V^a	V^{Ha}	Ξ^a	$\bar{\Xi}^a$	c^a	\bar{c}^a	c'^a	\bar{c}'^a	A^a	B^a	η^a	η'^a	$\bar{\eta}^a$	$\bar{\eta}'^a$
dimensão	-1/2	1/2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1
n° de ghost c	-1	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
n° de ghost η	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1
simetria R	-1	1	0	0	0	0	0	0	-2	2	-2	-2	0	-2	0	2

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 5 - Os números quânticos das fontes.

	Ω^a	Ψ^a	$\bar{\Lambda}^a$	Λ^a	L^a	\bar{L}^a	Π^a
dimensão	2	2	3	3	3	3	2
n° de ghost c	-1	0	-1	-1	-2	-2	0
n° de ghost η	0	-1	-1	-1	0	0	0
simetria R	0	0	2	-2	-2	2	0

Fonte: O autor, 2019.

pladas aos operadores compostos invariantes de BRST ($V^H, G_{V^H}^a$),

$$s\Omega^a = s\Pi^a = s\Pi^a = s\Lambda^a = s\bar{\Lambda}^a = sL^a = s\bar{L}^a = 0. \quad (327)$$

Portanto, devemos partir da ação completa invariante de BRST Σ definida por

$$\Sigma_{SPYM} = \Sigma_{SYM} + \Sigma_{SP} + \Sigma_{SGF} + \Sigma_T + \Sigma_{EXT} \quad (328)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{SPYM} = & -\frac{1}{128g^2} \text{tr} \int dS W^a W_a + \frac{m^2}{2} \int dV \mathcal{M}(\mathcal{V}^{\mathcal{H}}) \\ & + \frac{1}{8} \int dS \left\{ A^a \bar{D}^2 D^2 V^a - c'^a \bar{D}^2 D^2 G_V^a \right\} + c.c. \\ & + \frac{1}{8} \int dS \left\{ B \bar{D}^2 D^2 V^H - \eta'^a \bar{D}^2 D^2 G_{V^H}^a \right\} + c.c. \\ & + \int dV \left\{ \Omega^a G_V^a + \Pi^a V^{H,a} + \Pi^a G_{V^H}^a \right\} \\ & + \int dS \left\{ -\Lambda^a G_{\Xi}^a - \frac{i}{2} f^{acb} L^a c^b c^c \right\} + c.c.. \end{aligned} \quad (329)$$

Todos os números quânticos, dimensões e simetria R de todos os campos e fontes estão apresentados nas tabelas 4 e 5.

5.4.1 Identidades de Wars e caracterização algébrica do contratérmo invariante

A ação completa Σ_{SPYM} obedece as identidades de Ward:

- A identidade de Slanov-Taylor

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Sigma) &= \int dV \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta V^a} + \left[\int dS \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \Lambda^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta \Xi^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} + A^a \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} \right) + c.c. \right] \\ &= 0; \end{aligned} \quad (330)$$

- As equações da fixação de gauge

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta A^a} = \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 V^a, \quad \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{A}} = \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 V^a; \quad (331)$$

- As equações para o multiplicador de Lagrange B^a

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta B^a} = \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta \Sigma}{\delta \Pi^a}, \quad \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{B}^a} = \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \frac{\delta \Sigma}{\delta \Pi^a}; \quad (332)$$

- Equações de anti-ghost

$$\mathcal{G}_-^a \Sigma = 0, \quad \bar{\mathcal{G}}_-^a \Sigma = 0; \quad (333)$$

com

$$\mathcal{G}_-^a = \frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta \Omega^a} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{G}}_-^a = \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \frac{\delta}{\delta \Omega^a}; \quad (334)$$

- As equações de η

$$\mathcal{F}_-^a \Sigma = 0, \quad \bar{\mathcal{F}}_-^a \Sigma = 0, \quad (335)$$

com

$$\mathcal{F}_-^a = \frac{\delta}{\delta \eta^a} + \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta \Psi^a} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{F}}_-^a = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^a} + \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \frac{\delta}{\delta \Psi^a}; \quad (336)$$

- A equação de ghost quebra linearmente (FIGUET; SORELLA, 1996)

$$\mathcal{G}_+ \Sigma = \Delta_{clas}, \quad (337)$$

com

$$\mathcal{G}_+ = \int dS \left(\frac{\delta}{\delta c^c} - i f^{abc} c'^a \frac{\delta}{\delta A^b} \right) + \int d\bar{S} \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}^c} - i f^{abc} \bar{c}'^a \frac{\delta}{\delta \bar{A}^b} \right), \quad (338)$$

e

$$\Delta_{clas} = i f^{abc} \int dV \Omega^a V^b + i f^{abc} \int dS L^a c^b + i f^{abc} \int d\bar{S} \bar{L}^a \bar{c}^b. \quad (339)$$

Perceba que o termo quebrado Δ_{clas} é puramente linear nos campos quânticos. Esta quebra não afetará nas correções quânticas (PIGUET; SORELLA, 1996; PIGUET; SORELLA, 1995).

- As simetrias lineares de supersimetria, translação, simetria R e transformações rígidas são expressas pelas seguintes identidades de Ward

$$W_X \Sigma = -i \sum_{\phi} \int \delta_X \phi \frac{\delta}{\delta \phi} \Sigma = 0, \quad X = Q_{\alpha}, P_{\mu}, R \text{ e transformações rígidas} \quad (340)$$

onde δ_{μ}^P , δ_{α}^Q , $\delta_{\alpha}^{\bar{Q}}$, δ^R são definidas na seção 4.3. Logo, vemos a ação covariante Σ satisfaz as identidades de Ward e a invariância de Lorentz.

5.5 A caracterização algébrica do contratermo invariante e da renormalizabilidade

Afim de caracterizar o contratermo mais geral invariante que pode ser livremente adicionado a todas às ordens na teoria perturbativa, seguimos o programa da renormalização algébrica (PIGUET; SORELLA, 1995) e perturbamos a ação clássica (324), adicionando uma quantidade local integrada nos campos e fontes, Σ_{CT} , que tem simetria R 0, número de ghost (0,0), é hermitiano e tem dimensão 3 no caso de um supercampo quiral, ou 2 no caso do supercampo de gauge. Portanto, impomos que a ação perturbada, $(\Sigma + \varepsilon \Sigma_{CT})$, onde ε é um parâmetro da expansão, obedece, na primeira ordem em ε , as mesmas identidades de Ward obedecidas pela ação clássica Σ , ou seja, as equações (330)

à (340). Isso equivale impor as seguintes restrições em Σ_{CT} :

$$\mathcal{B}_\Sigma \Sigma_{ct} = 0, \quad (341)$$

$$\frac{\delta \Sigma_{ct}}{\delta A^a} = \frac{\delta \Sigma_{ct}}{\delta \bar{A}^a} = 0, \quad (342)$$

$$\frac{\delta \Sigma_{CT}}{\delta B^a} = \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta \Sigma}{\delta \Pi^a}, \quad \frac{\delta \Sigma_{CT}}{\delta \bar{B}^a} = \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \frac{\delta \Sigma}{\delta \Pi^a}, \quad (343)$$

$$\mathcal{G}_-^a \Sigma_{CT} = \bar{\mathcal{G}}_-^a \Sigma_{CT} = 0, \quad (344)$$

$$\mathcal{F}_-^a \Sigma_{CT} = \bar{\mathcal{F}}_-^a \Sigma_{CT} = 0, \quad (345)$$

$$\mathcal{G}_+^a \Sigma_{CT} = 0, \quad (346)$$

onde \mathcal{B}_Σ é o chamado operador de Slavnov-Taylor linearizado nilpotente (PIGUET; SORELLA, 1995), definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Sigma = & \int dV \left\{ \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega^a} \frac{\delta}{\delta V^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta V^a} \frac{\delta}{\delta \Omega^a} \right\} + \int dS \left\{ \frac{\delta \Sigma}{\delta \Lambda^a} \frac{\delta}{\delta \Xi^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \Xi^a} \frac{\delta}{\delta \Lambda^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} \frac{\delta}{\delta L^a} \right. \\ & \left. + A^a \frac{\delta}{\delta c^a} + c.c. \right\}, \end{aligned} \quad (347)$$

com $\mathcal{B}_\Sigma \mathcal{B}_\Sigma = 0$. Da equação (341) tiramos que Σ_{CT} pertence a cohomologia (PIGUET; SORELLA, 1995) do operador de Slavnov-Taylor linearizado \mathcal{B}_Σ no espaço das quantidades locais integradas nos campos e fontes com número de ghost (0,0), simetria R 0 e dimensão 3 no caso de um supercampo quiral, ou 2 no caso de um supercampo vetorial. Assim, estabelecemos

$$\Sigma_{CT} = \Delta_{cohom} + \mathcal{B}_\Sigma \Delta^{-1}, \quad (348)$$

onde $\Delta^{(-1)}$ é uma quantidade 0-dimensional integrada nos campos e fontes com número de ghost (-1,0) e simetria R 0. O termo $\mathcal{B}_\Sigma \Delta^{(-1)}$ na equação (348) corresponde a solução trivial, i.e. a parte exata da cohomologia de \mathcal{B}_Σ . Por outro lado, a quantidade Δ_{cohom} é a solução não-trivial, i.e. a cohomologia de \mathcal{B}_Σ , significando que $\Delta_{cohom} \neq \mathcal{B}_\Sigma Q$, para qualquer Q integrado local.

Todos os termos da cohomologia Δ_{cohom} são dados por

$$\begin{aligned}
\Delta_{cohom} = & \int dS \frac{a_0(V^H)}{128g^2} W^\alpha W_\alpha + \int dV \frac{m^2}{2} \tilde{\mathcal{M}}(V^H) \\
& + \left(\int dS b_1^{ab}(V^H) B^a \bar{D}^2 D^2 V^{H,b} + \int dS b_2^{ab}(V^H) V^{H,b} \bar{D}^2 D^2 B^a \right. \\
& + \int dS B^a V^{H,b} \bar{D}^2 D^2 b_3^{ab}(V^H) + \int dS d_1^{ab} \eta'^a \bar{D}^2 D^2 \eta^b \\
& + \int dS c_1^{abc}(V^H) \eta'^a V^{H,b} \bar{D}^2 D^2 \eta^c + \int dS c_2^{abc}(V^H) \eta'^a \eta^b \bar{D}^2 D^2 V^{H,c} \\
& + \int dS c_3^{abc}(V^H) \eta^a V^{H,b} \bar{D}^2 D^2 \eta'^c + \int dS \eta'^a \eta^b V^{H,c} \bar{D}^2 D^2 c_4^{abc}(V^H) \\
& + \int dS c_5^{abc}(V^H) \eta'^a \bar{\eta}^b \bar{D}^2 D^2 V^{H,c} + \int dS c_6^{abc}(V^H) \bar{\eta}^a V^{H,b} \bar{D}^2 D^2 \eta'^c \\
& + \left. \int dS \eta'^a \bar{\eta}^b V^{H,c} \bar{D}^2 D^2 c_7^{abc}(V^H) + c.c. \right) \\
& + \int dV b_4^{ab}(V^H) \Pi^a V^{H,b} + \int dV d_2^{ab} \Psi^a \eta^b \\
& + \int dV c_8^{abc}(V^H) V^{Hc} \Pi^a \eta^b + \int dV d_3^{ab} \Psi^a \bar{\eta}^b + \int dV c_9^{abc}(V^H) V^c \Pi^a \bar{\eta}^b, \tag{349}
\end{aligned}$$

com

$$\tilde{\mathcal{M}} = b_0 V^{Ha} V^{Ha} + \tilde{\sigma}_1^{abc} V^{Ha} V^{Hb} V^{Hc} + \tilde{\sigma}_2^{abcd} V^{Ha} V^{Hb} V^{Hc} V^{Hd} + \dots, \tag{350}$$

e $(a_0(V^H), b_i^{ab}(V^H), c_i^{abc}(V^H), d_i^{ab})$ coeficientes arbitrários. Logo, implementando as restrições (343) e (344) encontramos

$$\begin{aligned}
\Delta_{cohom} = & \int dS \frac{a_0(V^H)}{128g^2} W^\alpha W_\alpha + \int dV \frac{m^2}{2} \tilde{\mathcal{M}}(V^H) \\
& + \int dV d_1^{ab} \Psi^a \eta^b + \left(\frac{1}{8} \int dS d_1^{ab} \eta^a \bar{D}^2 D^2 \eta^b + c.c. \right) \\
& + \int dV d_2^{ab} \Psi^a \bar{\eta}^b + \left(\frac{1}{8} \int dS d_2^{ab} \bar{\eta}^a \bar{D}^2 D^2 \eta^b + c.c. \right) \\
& + \int dV c_1^{abc}(V^H) \Psi^a V^{Hb} \eta^c + \left(\frac{1}{8} \int dS c_1^{abc}(V^H) \eta^a V^{Hb} \bar{D}^2 D^2 \eta'^c + c.c. \right) \\
& + \int dV c_2^{abc}(V^H) \Psi^a V^{Hb} \bar{\eta}^c + \left(\frac{1}{8} \int dS c_2^{abc}(V^H) \bar{\eta}^a V^{Hb} \bar{D}^2 D^2 \eta'^c + c.c. \right) \\
& + \int dV b_1^{ab}(V^H) V^{Hb} \Pi^a + \left(\frac{1}{8} \int dS b_1^{ab}(V^H) V^{Hb} \bar{D}^2 D^2 B^a + c.c. \right). \tag{351}
\end{aligned}$$

Agora vamos discutir a parte trivial do contratermo, $\mathcal{B}_\Sigma \Delta^{(-1)}$. O termo $\Delta^{(-1)}$, levando

em conta os números quânticos dos campos e fontes, é escrito como:

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} = & \int dV \left(F_1^{ab} V^b \Omega^a + F_2^{ab} V^b D^2 c'^a + F_3^{ab} D^2 V^b c'^a + D^2 F_4^{ab} V^b c'^a + c.c. \right) \\ & + \left[\int dS (a_1^{ab} L^a c^b + a_2^{ab} \Xi^b \Lambda^a) + c.c. \right], \end{aligned} \quad (352)$$

onde,

$$\begin{aligned} F_{1,\dots,4}^a &= F_{1,\dots,4}^a [V, \Xi, \bar{\Xi}], \\ a_1^{ab} &= a_1^{ab} [\Xi], \\ a_2^{ab} &= a_2^{ab} [\Xi]. \end{aligned} \quad (353)$$

Impondo a restrição (342)

$$\frac{\delta}{\delta A^a} \mathcal{B}_\Sigma \Delta^{(-1)} = \frac{\delta}{\delta \bar{A}^a} \mathcal{B}_\Sigma \Delta^{(-1)} = 0, \quad (354)$$

e observando de (352) que

$$\frac{\delta \Delta^{(-1)}}{\delta A^a} = \frac{\delta \Delta^{(-1)}}{\delta \bar{A}^a} = 0 \Rightarrow \mathcal{B}_\Sigma \frac{\delta \Delta^{(-1)}}{\delta A^a} = \mathcal{B}_\Sigma \frac{\delta \Delta^{(-1)}}{\delta \bar{A}^a} = 0, \quad (355)$$

podemos usar a relação

$$\left[\frac{\delta}{\delta A^a}, \mathcal{B}_\Sigma \right] = \frac{\delta}{\delta c'^a} + \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta \Omega}, \quad (356)$$

para exigir que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{\delta c'^a} + \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta \Omega} \right) \Delta^{-1} &= \bar{D}^2 D^2 (F_2^{ab} V^b) + \bar{D}^2 (F_3^{ab} D^2 V^b) + \bar{D}^2 ((D^2 F_4^{ab}) V^b) \\ &+ \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 (F_1^{ab} V^b) = 0. \end{aligned} \quad (357)$$

Usando a equação (357) encontramos as relações

$$F_2^{ab} = -\frac{1}{8} F_1^{ab} \quad (358)$$

$$F_3^{ab} = 0 \quad (359)$$

$$F_4^{ab} = a \delta^{ab}, \quad (360)$$

Usando (358), (359) e (360) em (352), simplificamos isso para

$$\Delta^{-1} = \int dV \left(F_1^{ab} V^b (\Omega^a - \frac{1}{8} D^2 c'^a - \frac{1}{8} \bar{D}^2 \bar{c}'^a) \right) + \left[\int dS \left(a_1^{ab} L^a c^b + a_2^{ab} \Xi^b \Lambda^a \right) + c.c. \right].$$

Podemos reduzir ainda mais o número de parâmetros em Σ_{CT} percebendo que se

impomos o limite de (CAPRI et al., 2016a)

$$m^2 = \Pi = \Psi = \Lambda = \bar{\Lambda} = 0, \quad (361)$$

em (329), a ação resultante é

$$\begin{aligned} \Sigma_{SPYM} = & -\frac{1}{128g^2} tr \int dS W^a W_a \\ & + \frac{1}{8} \left[\int dS \left(A^a \bar{D}^2 D^2 V^a - c'^a \bar{D}^2 D^2 G_V^a \right) + c.c. \right] \\ & + \frac{1}{8} \left[\int dS \left(B^a \bar{D}^2 D^2 V^{H,a} - \eta'^a \bar{D}^2 D^2 G_{V^H}^a \right) + c.c. \right] \\ & + \int dV \Omega^a G_V^a + \left[\int dS \left(-\frac{i}{2} f^{acb} L^a c^b c^c \right) + c.c. \right], \end{aligned} \quad (362)$$

que é nada mais que a Super Yang-Mills no gauge de Landau com os termos

$$\Sigma_B = \frac{1}{8} \left[\int dS \left(B \bar{D}^2 D^2 V^H - \eta'^a \bar{D}^2 D^2 G_{V^H}^a \right) + c.c. \right]. \quad (363)$$

Portanto, integrando sobre $(B, \eta, \bar{\eta}, \Xi)$, obtemos 1. Portanto, no limite (361) a ação de partida toma a seguinte forma:

$$\Sigma_{inicial} = \Sigma_{SPYM} + \Sigma_B. \quad (364)$$

Agora, vamos considerar as funções de correlação do supercampo de Yang-Mills V , ou seja

$$\langle V(1) \dots V(n) \rangle = \frac{\int [D\Phi] \langle V(1) \dots V(n) \rangle \exp(-\Sigma_{inicial})}{\int [D\Phi] \exp(-\Sigma_{inicial})}, \quad (365)$$

tal que $[D\Phi]$ significa a variável de integração sobre todos os campos. Embora, que $m^2 = 0$, podemos integrar em (365) sobre $(H, B, \eta, \bar{\eta})$, i.e. integrar nos campos que aparecem em Σ_B .

Essa integral é vista facilmente como 1. Na verdade não é nada mais que o Super Faddeev-Popov (see (GATES et al., 1983)) que, devido a $m^2 = 0$, é 1.

Portanto, no limite, $m^2 = 0$, segue que

$$\langle V(1) \dots V(n) \rangle = \frac{\int [D\Phi] \langle V(1) \dots V(n) \rangle \exp(-\Sigma_{SPYM})}{\int [D\Phi] \exp(-\Sigma_{SPYM})}, \quad (366)$$

o que diz que $\langle V(1) \dots V(n) \rangle$ reduz ao SPYM padrão. Como consequência, da adimensionalidade, e da m -independência, os coeficientes que aparecem no contratermo Σ_{CT} estão

sujeito as seguintes condições adicionais

$$a_0(V^H) = a_0, \quad (367)$$

$$d_1^{ab}\eta^b + d_2^{ab}\bar{\eta}^b + (c_1^{abc}\eta^c + c_2^{abc}\bar{\eta}^c)V^{Hb} = b_1 G_{V^H}^a(\eta, \bar{\eta}), \quad (368)$$

$$b_1^{ab}(V^H) = b_1\delta^{ab}, \quad (369)$$

e para equação (352)

$$F_{1,\dots,4}^a[V, \Xi, \bar{\Xi}] = F_{1,\dots,4}^a[V] \quad (370)$$

$$a_1^{ab}[\Xi] = a_1^{ab} \quad (371)$$

$$a_2^{ab}[\Xi] = a_2^{ab}[\Xi], \quad (372)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \Delta_{cohom} &= \int dS \frac{a_0}{128g^2} W^\alpha W_\alpha + \int dV \frac{m^2}{2} \tilde{\mathcal{M}}(V^H) \\ &+ \int dV b_1 V^{H^a} \Pi^a + \frac{1}{8} \left[\int dS b_1 \left(V^{H^a} \bar{D}^2 D^2 B^a - \eta'^a \bar{D}^2 D^2 G_{V^H}^a(\eta, \bar{\eta}) \right) + c.c. \right] \\ &+ \int dV b_1 \Psi^a G_{V^H}^a(\eta, \bar{\eta}), \end{aligned} \quad (373)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= \int dV \left(F_1^{ab}(V) V^b (\Omega^a - \frac{1}{8} D^2 c'^a - \frac{1}{8} \bar{D}^2 \bar{c}'^a) \right) \\ &+ \left[\int dS \left(a_1^{ab} L^a c^b + a_2^{ab}(\Xi) \Xi^b \Lambda^a \right) + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (374)$$

Com a finalidade da análise dos fatores de renormalização, reescreveremos Σ_{CT} na forma paramétrica, i.e., escrito como derivadas funcionais da ação clássica Σ , sendo escrito como

$$\begin{aligned}
\Sigma_{CT} &= \int dS a_0 g^2 \frac{\delta \Sigma}{\delta g^2} + \int dV b_0 m^2 \frac{\delta \Sigma}{\delta m^2} + b_1 \left[\int dS \left(B^a \frac{\delta \Sigma}{\delta B^a} \right) + c.c. \right] + b_1 \int dV \Pi^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \Pi^a} \\
&+ \frac{1}{2} b_1 \int dV \Psi^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \Psi^a} + \frac{1}{2} b_1 \left[\int dS \left(\eta^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \eta^a} \right) + c.c. \right] + \frac{1}{2} b_1 \left[\int dS \left(\eta'^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \eta'^a} \right) + c.c. \right] \\
&+ \int dV \left(\tilde{\sigma}_1^{abc} \frac{\delta \Sigma}{\delta \sigma_1^{abc}} + \tilde{\sigma}_2^{abcd} \frac{\delta \Sigma}{\delta \sigma_2^{abcd}} + \tilde{\sigma}_3^{abcde} \frac{\delta \Sigma}{\delta \sigma_3^{abcde}} + \dots \right) \\
&+ \int dV \left(\left(\frac{\delta F_1^{ab}}{\delta V^c} V^b + F_1^{ab} \delta^{bc} \right) \Omega^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega^c} + F_1^{ab} V^b \frac{\delta \Sigma}{\delta V^a} \right) \\
&+ \left[\int dS \left(a_2^{ab} \Xi^b \frac{\delta \Sigma}{\delta \Xi^a} - \left(\frac{\delta a_2^{ab}(V)}{\delta \Xi^c} \Xi^b + a_2^{ab}(\Xi) \delta^{bc} \right) \Lambda^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \Lambda^c} \right) + c.c. \right] \\
&- \frac{1}{8} \left(\frac{\delta F_1^{ab}(V)}{\delta V^c} V^b + F_1^{ab}(V) \delta^{bc} \right) G_V^c (D^2 c'^a + \bar{D}^2 \bar{c}'^a) - \frac{1}{8} A^a D^2 (F_1^{ab} V^b) \\
&- \frac{1}{8} \bar{A}^a \bar{D}^2 (F_1^{ab} V^b). \tag{375}
\end{aligned}$$

5.6 Análise do contratermo e fatores de renormalização

Tendo determinado a forma mais geral do contratermo invariante local, eq.(375), observamos que, os termos na última linha,

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{8} S_\Sigma (c'^a D^2 (F_1^{ab} V^b) + \bar{c}'^a \bar{D}^2 (F_1^{ab} V^b)) \\
&= -\frac{1}{8} \left(\frac{\delta F_1^{ab}(V)}{\delta V^c} V^b + F_1^{ab}(V) \delta^{bc} \right) G_V^c (D^2 c'^a + \bar{D}^2 \bar{c}'^a) - \frac{1}{8} A^a D^2 (F_1^{ab} V^b) \\
&- \frac{1}{8} \bar{A}^a \bar{D}^2 (F_1^{ab} V^b), \tag{376}
\end{aligned}$$

não pode ser reescrito numa forma paramétrica exata. Essa característica é devido a adimensionalidade do supercampo V na fixação de gauge. Como consequência, a renormalização da fixação de gauge é determinada para uma ambiguidade do tipo de (319). Como já mencionamos antes, esse termo pode ser ajustado para uma fixação de gauge generalizada. Significa que poderíamos ter igualmente partido da ação

$$s \left[\frac{1}{8} tr \int dV (c' D^2 V + \bar{c}' \bar{D}^2 V) \right] \rightarrow s \left[\frac{1}{8} tr \int dV (c' D^2 \mathcal{F}(V) + \bar{c}' \bar{D}^2 \mathcal{F}^a(V)) \right], \tag{377}$$

com \mathcal{F}^a dado por (319). Uma vez que \mathcal{F}^a é agora um campo composto, precisamos introduzir na ação inicial uma fonte externa para esse campo. Afim de manter a invariância BRST, fazemos uso de um dubleto de fontes invariantes BRST (R^a, P^a) , de dimensão 2,

simetria R 0 e número de ghost $(-1, 0)$

$$sR^a = P^a, \quad sP^a = 0 \quad (378)$$

e introduzir o termo

$$\int dV s(R^a \mathcal{F}^a(V)) = \int dV \left(P^a \mathcal{F}^a(V) - R^a \frac{\partial \mathcal{F}^a}{\partial V^c} G^c(V) \right), \quad (379)$$

assim a ação completa é

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{SPYM}} = & -\frac{1}{128g^2} \text{tr} \int dS \left(W^a W_a \right) + \frac{m^2}{2} \int dV \mathcal{M}(V^H) \\ & + \frac{1}{8} \int dS \left\{ A^a \bar{D}^2 D^2 \mathcal{F}^a(V) - c'^a \bar{D}^2 D^2 \left[\frac{\partial \mathcal{F}^a}{\partial V^c} G_V^c \right] + c.c. \right\} \\ & + \frac{1}{8} \int dS \left\{ B \bar{D}^2 D^2 V^H - \eta'^a \bar{D}^2 D^2 G_{V^H}^a + c.c. \right\} \\ & + \int dS \left\{ -\Lambda^a G_{\Xi}^a + \frac{i}{2} f^{abc} L^a c^b c^c + c.c. \right\} \\ & + \int dV \left(\Omega^a G_V^a + \Pi^a V^{H,a} + \Pi^a G_{V^H}^a + P^a \mathcal{F}^a(V) - R^a \frac{\partial \mathcal{F}^a(V)}{\partial V^c} G_V^c \right). \quad (380) \end{aligned}$$

A ação Σ_{SPYM} obedece as seguintes identidades de Ward:

- A identidade de Slanov-Taylor

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Sigma) = & \int dV \left\{ \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta V^a} + P^a \frac{\delta \Sigma}{\delta R^a} \right\} + \left(\int dS \frac{\delta \Sigma}{\delta \Lambda^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta \Xi^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} + A^a \frac{\delta \Sigma}{\delta c'^a} \right. \\ & \left. + c.c. \right) = 0; \quad (381) \end{aligned}$$

- As equações de fixação de gauge

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta A^a} = \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta \Sigma}{\delta P^a}, \quad \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{A}} = \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \frac{\delta \Sigma}{\delta P^a}; \quad (382)$$

- As equações para o multiplicador de Lagrange B^a

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta B^a} = \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta \Sigma}{\delta \Pi^a}, \quad \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{B}^a} = \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \frac{\delta \Sigma}{\delta \Pi^a}; \quad (383)$$

- As equações de anti-ghost

$$\mathcal{G}_-^a \Sigma = 0, \quad \bar{\mathcal{G}}_-^a \Sigma = 0, \quad (384)$$

com

$$\mathcal{G}_-^a = \frac{\delta}{\delta c'^a} - \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta R^a} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{G}}_-^a = \frac{\delta}{\delta \bar{c}'^a} - \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \frac{\delta}{\delta R^a}; \quad (385)$$

- As identidades de Ward η

$$\mathcal{F}_-^a \Sigma = 0, \quad \bar{\mathcal{F}}_-^a \Sigma = 0, \quad (386)$$

com

$$\mathcal{F}_-^a = \frac{\delta}{\delta \eta'^a} + \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta \Psi^a} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{F}}_-^a = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}'^a} + \frac{1}{8} D^2 \bar{D}^2 \frac{\delta}{\delta \Psi^a}; \quad (387)$$

- As simetrias lineares de supersimetria, translação, simetria R e transformações rígidas são expressas pelas identidades de Ward em (340).

Tendo que R e P são um dubleto BRST, eles na parte não trivial do contratérmo (PI-GUET; SORELLA, 1995), assim isso permanecerá como na equação (373). Por outro lado, o $\Delta^{(-1)}$ é

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} = & \int dV \left(F_1^{ab} V^b \Omega^a + F_2^{ab} V^b D^2 c'^a + F_3^{ab} D^2 V^b c'^a + D^2 F_4^{ab} V^b c'^a \right. \\ & \left. + F_8^{ab} V^b R^a + c.c. \right) + \left[\int dS (a_1^{ab} L^a c^b + a_2^{ab} \Xi^a \Lambda^b) + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (388)$$

Em modo semelhante ao da análise das equações (354)–(357), usamos as relações $[\frac{\partial}{\partial A^a} - \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta P^a}, S_\Sigma] = \frac{\delta}{\delta c'^a} - \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta R}$, para encontrar

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{\delta c'^a} - \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 \frac{\delta}{\delta R} \right) \Delta^{-1} = & \bar{D}^2 D^2 (F_2^{ab} V^b) + \bar{D}^2 (F_3^{ab} D^2 V^b) + \bar{D}^2 ((D^2 F_4^{ab}) V^b) \\ & - \frac{1}{8} \bar{D}^2 D^2 (F_8^{ab} V^b) = 0, \end{aligned} \quad (389)$$

do qual obtemos as relações

$$\begin{aligned} F_2^{ab} &= \frac{1}{8} F_8^{ab} \\ F_3^{ab} &= 0 \\ F_4^{ab} &= a \delta^{ab}, \end{aligned} \quad (390)$$

assim (388) resulta

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= \int dV \left(F_1^{ab} V^b \Omega^a + F_2^{ab} V^b (R^a + \frac{1}{8} D^2 c'^a + \frac{1}{8} \bar{D}^2 \bar{c}'^a) \right) \\ &+ \left[\int dS (a_1 L^a c^a + a_2^{ab} \Xi^b \Lambda^a) + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (391)$$

Agora, ajustamos

$$\begin{aligned} F_2^{ab}(V) &= F_2^{ab}(0) + \tilde{F}_2^{ab}(V), \\ \tilde{F}_2^{ab}(V) &= \tilde{\alpha}_1^{abc} V^c + \tilde{\alpha}_2^{abcd} V^c V^d + \tilde{\alpha}_3^{abcde} V^c V^d V^e + \dots, \end{aligned} \quad (392)$$

onde $F_2^{ab}(0) = F_2(0)\delta^{ab}$ é o primeiro termo independente de V , e $\tilde{F}_2^{ab}(V)$ os termos dependentes das potências de V . Vemos que $F_2^{ab}(0)$ a renormalização dos campos dentro da fixação de gauge, enquanto $\tilde{F}_2^{ab}(V)$ renormaliza os parâmetros em (319). Empregando a fixação de gauge generalizada (377), escrevemos o contratermo completo na seguinte forma paramétrica

$$\begin{aligned} \Sigma_{CT} &= \int dS a_0 g^2 \frac{\delta\Sigma}{\delta g^2} + b_0 \int dV m^2 \frac{\delta\Sigma}{\delta m^2} + b_1 \left[\int dS \left(B^a \frac{\delta\Sigma}{\delta B^a} \right) + c.c. \right] + b_1 \int dV \Pi^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \Pi^a} \\ &+ \frac{1}{2} b_1 \int dV \Psi^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \Psi^a} + \frac{1}{2} b_1 \left[\int dS \left(\eta^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \eta^a} \right) + c.c. \right] + \frac{1}{2} b_1 \left[\int dS \left(\eta'^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \eta'^a} \right) + c.c. \right] \\ &+ \int dV \left(\tilde{\sigma}_1^{abc} \frac{\delta\Sigma}{\delta \sigma_1^{abc}} + \tilde{\sigma}_2^{abcd} \frac{\delta\Sigma}{\delta \sigma_2^{abcd}} + \tilde{\sigma}_3^{abcde} \frac{\delta\Sigma}{\delta \sigma_3^{abcde}} + \dots \right) \\ &- \int dV \left(\left(\frac{\delta F_1^{ab}}{\delta V^c} V^b + F_1^{ab} \delta^{bc} \right) \Omega^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \Omega^c} + F_1^{ab} V^b \frac{\delta\Sigma}{\delta V^a} + F_2(0) P^a \frac{\delta\Sigma}{\delta P^a} + F_2(0) \bar{A}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \bar{A}^a} \right. \\ &+ F_2(0) A^a \frac{\delta\Sigma}{\delta A^a} + F_2(0) R^a \frac{\delta\Sigma}{\delta R^a} + F_2(0) c'^a \frac{\delta\Sigma}{\delta c'^a} + F_2(0) \bar{c}'^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \bar{c}'^a} \left. \right) \\ &+ \left[\int dS \left(a_1^{ab} L^a \frac{\delta\Sigma}{\delta L^b} - a_1^{ab} c^a \frac{\delta\Sigma}{\delta c^b} - \left(\frac{\delta a_2^{ab}(\Xi)}{\delta \Xi^c} \Xi^b + a_2^{ab}(\Xi) \delta^{bc} \right) \Lambda^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \Lambda^c} + a_2^{ab}(\Xi) \Xi^b \frac{\delta\Sigma}{\delta \Xi^a} \right) + c.c. \right] \\ &+ \int dV (\tilde{\alpha}_1^{abc} - F_2(0) a_1^{abc}) \frac{\delta\Sigma}{\delta \alpha_1^{abc}} + (\tilde{\alpha}_2^{abcd} - F_2(0) \alpha_2^{abcd}) \frac{\delta\Sigma}{\delta \alpha_2^{abcd}} + (\tilde{\alpha}_3^{abcde} \\ &- F_2(0) \alpha_3^{abcde}) \frac{\delta\Sigma}{\delta \alpha_3^{abcde}} + \dots, \end{aligned} \quad (393)$$

onde os pontos \dots na última linha significa o conjunto infinito de termos

$$\sum_j (\tilde{\alpha}_j^{abcde\dots} - F_2(0) \alpha_j^{abcde\dots}) \frac{\delta\Sigma}{\delta \alpha_j^{abcde\dots}}, \quad j = 4, \dots, \infty. \quad (394)$$

A praticidade de escrever o contratermo (393) na forma paramétrica fica claro na forma

$$\mathcal{R}\Sigma = 0, \quad (395)$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} = & \int dS a_0 g^2 \frac{\delta}{\delta g^2} + b_0 \int dV m^2 \frac{\delta}{\delta m^2} + b_1 \left[\int dS \left(B^a \frac{\delta}{\delta B^a} \right) + c.c. \right] + b_1 \int dV \Pi^a \frac{\delta}{\delta \Pi^a} \\
& + \frac{1}{2} b_1 \int dV \Psi^a \frac{\delta}{\delta \Psi^a} + \frac{1}{2} b_1 \left[\int dS \left(\eta^a \frac{\delta}{\delta \eta^a} \right) + c.c. \right] + \frac{1}{2} b_1 \left[\int dS \left(\eta'^a \frac{\delta}{\delta \eta'^a} \right) + c.c. \right] \\
& + \int dV \left(\tilde{\sigma}_1^{abc} \frac{\delta}{\delta \sigma_1^{abc}} + \tilde{\sigma}_2^{abcd} \frac{\delta}{\delta \sigma_2^{abcd}} + \tilde{\sigma}_3^{abcde} \frac{\delta}{\delta \sigma_3^{abcde}} + \dots \right) \\
& - \int dV \left(\left(\frac{\delta F_1^{ab}}{\delta V^c} V^b + F_1^{ab} \delta^{bc} \right) \Omega^a \frac{\delta}{\delta \Omega^c} + F_1^{ab} V^b \frac{\delta}{\delta V^a} + F_2(0) P^a \frac{\delta}{\delta P^a} + F_2(0) \bar{A}^a \frac{\delta}{\delta \bar{A}^a} \right. \\
& + \left. F_2(0) A^a \frac{\delta}{\delta A^a} + F_2(0) R^a \frac{\delta}{\delta R^a} + F_2(0) c'^a \frac{\delta}{\delta c'^a} + F_2(0) \bar{c}'^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}'^a} \right) \\
& + \left[\int dS \left(a_1^{ab} L^a \frac{\delta}{\delta L^b} - a_1^{ab} c^a \frac{\delta}{\delta c^b} - \left(\frac{\delta a_2^{ab}(\Xi)}{\delta \Xi^c} \Xi^b + a_2^{ab}(\Xi) \delta^{bc} \right) \Lambda^a \frac{\delta}{\delta \Lambda^c} + a_2^{ab}(\Xi) \Xi^b \frac{\delta}{\delta \Xi^a} \right) + c.c. \right] \\
& + \int dV (\tilde{\alpha}_1^{abc} - F_2(0) \alpha_1^{abc}) \frac{\delta}{\delta \alpha_1^{abc}} + (\tilde{\alpha}_2^{abcd} - F_2(0) \alpha_2^{abcd}) \frac{\delta}{\delta \alpha_2^{abcd}} + (\tilde{\alpha}_3^{abcde} \\
& - F_2(0) \alpha_3^{abcde}) \frac{\delta}{\delta \alpha_3^{abcde}} + \dots \tag{396}
\end{aligned}$$

Agora, afim de determinar os fatores de renormalização podemos usar que

$$\Sigma(\Phi) + \varepsilon \Sigma_{CT}(\Phi) = \Sigma(\Phi) + \varepsilon \mathcal{R} \Sigma(\Phi) = \Sigma(\Phi_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{397}$$

com

$$\Phi_0 = Z_\Phi \Phi = (1 + \varepsilon \mathcal{R}) \Phi + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{398}$$

onde Φ_0 é todos as quantidades renormalizadas: campos, parâmetros e fontes externas.

Portanto descobrimos os seguintes fatores de renormalização

$$\begin{aligned}
Z_g &= 1 + a_0 \\
Z_{m^2} &= 1 + b_0 \\
Z_B = Z_{\bar{B}} = Z_{\Pi} = Z_{\Psi}^2 = Z_{\eta}^2 = Z_{\eta'}^2 = Z_{\bar{\eta}}^2 = Z_{\bar{\eta}'}^2 &= 1 + b_1 \\
Z_{\Omega}^{ab} &= \delta^{ab} - \left(\frac{\delta F_1^{ac}}{\delta V^b} V^c + F_1^{ab} \right) \\
Z_V^{ab} &= \delta^{ab} + F_1^{ab} \\
Z_P = Z_A = Z_{\bar{A}} = Z_R = Z_{c'} = Z_{\bar{c}'} &= 1 + F_2(0) \\
Z_L^{ab} = Z_{\bar{L}}^{ab} = Z_c^{ab} = Z_{\bar{c}}^{ab} &= \delta^{ab} + a_1^{ab} \\
Z_{\Lambda}^{ab} &= \delta^{ab} - \left(\frac{\delta a_2^{ac}}{\delta \Xi^b} \Xi^c + a_2^{ab}(\Xi) \right) \\
Z_{\bar{\Lambda}}^{ab} &= \delta^{ab} - \left(\frac{\delta \bar{a}_2^{ac}}{\delta \bar{\Xi}^b} \bar{\Xi}^c + \bar{a}_2^{ab}(\bar{\Xi}) \right) \\
Z_{\Xi}^{ab} &= \delta^{ab} + a_2^{ab}(\Xi) \\
Z_{\bar{\Xi}}^{ab} &= \delta^{ab} + \bar{a}_2^{ab}(\bar{\Xi}), \tag{399}
\end{aligned}$$

como também o conjunto de fatores que é renormalizado multiplicativamente: $(\sigma_1^{abc}, \sigma_2^{abcd}, \sigma_3^{abcde})$ e $(\alpha_1^{abc}, \alpha_2^{abcd}, \alpha_3^{abcde})$ das equações (314) e (319), sendo

$$\begin{aligned}
(\sigma_1^{abc})_0 &= (1 + \varepsilon \tilde{\sigma}_1^{abc}) \sigma_1^{abc} \\
(\sigma_2^{abcd})_0 &= (1 + \varepsilon \tilde{\sigma}_2^{abce}) \sigma_2^{abcd} \\
(\sigma_3^{abcde})_0 &= (1 + \varepsilon \tilde{\sigma}_3^{abcde}) \sigma_3^{abcde} \\
&\dots \tag{400}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\alpha_1^{abc})_0 &= (1 + F_2(0)) \alpha_1^{abc} + \varepsilon \tilde{\alpha}_1^{abc} \\
(\alpha_2^{abcd})_0 &= (1 + F_2(0)) \alpha_2^{abcd} + \varepsilon \tilde{\alpha}_2^{abcd} \\
(\alpha_3^{abcde})_0 &= (1 + F_2(0)) \alpha_3^{abcde} + \varepsilon \tilde{\alpha}_3^{abcde} \\
&\dots \tag{401}
\end{aligned}$$

Isso mostra que a inclusão do campo generalizado $\mathcal{F}(V)$ na fixação de gauge conduz a renormalização padrão dos campos, parâmetros e fontes. A renormalização de $\mathcal{F}(V)$ está na renormalização no conjunto infinito de parâmetros de gauge $(\alpha_1^{abc}, \alpha_2^{abcd}, \alpha_3^{abcde}, \dots)$, como em (401).

Note que ambos V e Ξ , como também suas fontes Ω e Λ , são renormalizadas numa maneira não-linear através da série de potências em V e Ξ , respectivamente. Isso já era esperado, devido ao fato de que os supercampos são adimensionais. Então, sabemos que V contém os campos de gauge e férmions (A_μ, λ) . Apesar do fato que V é renormalizado de maneira

não-linear devido sua adimensionalidade, as componentes (A_μ, λ) são renormalizadas de maneira multiplicativa através de fatores constantes (*i.e.* independente de campo), uma característica que podemos checar impondo o gauge de Wess-Zumino.

5.7 Conclusão

Nesse capítulo construímos o campo de Stueckelberg modificado V^H numa teoria de gauge supersimétrica não-abeliana. A configuração de campo transversa invariante de gauge V^H foi investigada na Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 1$ usando o gauge de Landau. Na construção do V^H introduzimos um supercampo quirial auxiliar Ξ que compensa a variação de gauge do supercampo V , portanto preservando a invariância de gauge do campo composto V^H . Isso permite a construção de um modelo massivo invariante de BRST local, representado pela ação (324). Ambos V e Ξ são adimensionais, fato que faz surgir ambiguidades na definição do termo massivo de V^H e o termo de fixação de gauge. Portanto, trabalhando com um termo de fixação de gauge generalizado, encontramos que o modelo termina por ser renormalizável a todas as ordens perturbativas, como foi discutido em 5.5 e 5.6.

Para aplicações futuras do nosso resultado, a possibilidade de construirmos um campo de Stueckelberg modificado supersimétrico não-abeliano renormalizado nos permite investigar fenômenos não-perturbativos na abordagem do problema de Gribov no superespaço, generalizando a ação de $\mathcal{N} = 1$ Gribov-Zwanziger. Isso permite estudarmos da região não-perturbativa de teorias supersimétricas $\mathcal{N} = 1$, veja também (AMARAL; CHIFARELLI; LEMES, 2014) para uma leitura preliminar nessa direção.

CONCLUSÃO

Nessa tese estudamos a renormalizabilidade de teorias de Yang-Mills massivas a todas as ordens usando o mecanismo da renormalização algébrica. Para a construção desses modelos massivos, investigamos o operador invariante A_{min}^2 , obtido através da minimização de $\int d^4x A^2$, na qual escolhemos a configuração de campo invariante de gauge A_μ^{ah} , que respeita a condição de transversalidade $\partial_\mu A_\mu^{ah}$.

Então, construímos uma ação local e invariante de BRST, usando o campo auxiliar adimensional ξ^a tipo Stueckelberg. O modelo foi analisado na classe de gauge R_ξ . Logo, apesar do campo adimensional ξ^a conseguimos mostrar a teoria renormalizável a todas as ordens ao invés do modelo de Stueckelberg não-abeliano massivo. O ponto chave da renormalização usando o campo A^h é a condição de transversalidade $\partial_\mu A_\mu^h = 0$. Esta elimina a divergência presente no propagador $\langle \xi^a(p) \xi^b(-p) \rangle$. Além disso, o gauge R_ξ introduz uma massa μ^2 no propagador de ξ^a que produz uma regularização infravermelha invariante de BRST em cálculos de loops mais altos.

Na segunda parte da tese construímos o supercampo transversal invariante de gauge V^H inspirado no campo A^h . Na construção de V^H usamos um supercampo quiral auxiliar Ξ em compensação da variância de gauge do campo V . Os campos V , Ξ e V^H são adimensionais, fato que dificulta a renormalizabilidade da teoria. Assim, construímos uma ação massiva local e invariante de BRST com uma fixação de gauge generalizada para resolver a renormalização dos termos adimensionais. Logo, concluímos provando que a teoria é renormalizável a todas as ordens.

A renormalizabilidade a todas as ordens dos modelos massivos A^h e V^H , permite investigações de fenômenos físicos em teorias bem comportadas em todo intervalo de energia. Além disso, podemos estudar fenômenos não-perturbativos nas teorias de Yang-Mills. Dentre algumas possibilidades estão a extensão dos modelos aqui discutidos para o formalismo de Gribov-Zwanziger refinado como apresentado em (CAPRI et al., 2017b), (AMARAL; CHIFARELLI; LEMES, 2014), e a análise do confinamento através das funções espectrais dos propagadores de A^h e V^H similar aos trabalhos de (TISSIER; WSCHEBOR, 2011) e (DUDAL et al., 2019).

REFERÊNCIAS

- AGUILAR, A. C.; BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 78, p. 025010, Jul 2008. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.025010>. Acesso em: 8 abr. 2019.
- AGUILAR, A. C.; BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Yang-mills two-point functions in linear covariant gauges. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 91, p. 085014, Apr 2015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.085014>. Acesso em: 8 abr. 2019.
- AGUILAR, A. C.; BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. The Gluon Mass Generation Mechanism: A Concise Primer. *Front. Phys.*, Beijing, v. 11, n. 2, p. 111203, 2016.
- AGUILAR, A. C.; NATALE, A. A. A Dynamical gluon mass solution in a coupled system of the Schwinger-Dyson equations. *JHEP*, v. 08, p. 057, 2004.
- ALKOFER, R. et al. Analytic properties of the Landau gauge gluon and quark propagators. *Phys. Rev.*, Maryland, D70, p. 014014, 2004.
- AMARAL, M. M.; CHIFARELLI, Y. E.; LEMES, V. E. R. $N = 1$ Gribov superfield extension. *J. Phys.*, [s.l.], A47, n. 7, p. 075401, 2014.
- BAAL, P. van. More (thoughts on) Gribov copies. *Nuclear Physics B*, Elsevier, Amsterdam, v. 369, n. 1-2, p. 259–275, 1992.
- BECCHI, C.; PIGUET, O. On the Renormalization of Two-dimensional Chiral Models. *Nucl. Phys.*, Amsterdam, B315, p. 153–165, 1989.
- BECCHI, C.; PIGUET, O. On the renormalization of two-dimensional chiral models. *Nuclear Physics B*, Elsevier, Amsterdam, v. 315, n. 1, p. 153–165, 1989.
- BELAVIN, A. A. et al. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. *Physics Letters B*, Elsevier, Amsterdam, v. 59, n. 1, p. 85–87, 1975.
- BICUDO, P. et al. Lattice gluon propagator in renormalizable ξ gauges. *Phys. Rev.*, Maryland, D92, n. 11, p. 114514, 2015.
- BILAL, A. Introduction to supersymmetry. 2001.
- BLASI, A.; DELDUC, F.; SORELLA, S. The background-quantum split symmetry in two-dimensional σ -models: A regularization-independent proof of its renormalizability. *Nuclear Physics B*, Elsevier, Amsterdam, v. 314, n. 2, p. 409–424, 1989.
- BLASI, A.; DELDUC, F.; SORELLA, S. P. The Background Quantum Split Symmetry in Two-dimensional σ Models: A Regularization Independent Proof of Its Renormalizability. *Nucl. Phys.*, Amsterdam, B314, p. 409–424, 1989.
- CAPRI, M. A. L. et al. Exact nilpotent nonperturbative BRST symmetry for the Gribov-Zwanziger action in the linear covariant gauge. *Phys. Rev.*, Maryland, D92, n. 4, p. 045039, 2015.

CAPRI, M. A. L. et al. Local and brst-invariant yang-mills theory within the gribov horizon. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 94, p. 025035, Jul 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.025035>. Acesso em: 10 jun. 2019.

CAPRI, M. A. L. et al. Local and BRST-invariant Yang-Mills theory within the Gribov horizon. *Phys. Rev.*, Maryland, D94, n. 2, p. 025035, 2016.

CAPRI, M. A. L. et al. Nonperturbative aspects of euclidean yang-mills theories in linear covariant gauges: Nielsen identities and a brst-invariant two-point correlation function. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 95, p. 045011, Feb 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.045011>. Acesso em: 02 maio 2019.

CAPRI, M. A. L. et al. Nonperturbative aspects of Euclidean Yang-Mills theories in linear covariant gauges: Nielsen identities and a BRST-invariant two-point correlation function. *Phys. Rev.*, Maryland, D95, n. 4, p. 045011, 2017.

CAPRI, M. A. L. et al. Exact nilpotent nonperturbative brst symmetry for the gribov-zwanziger action in the linear covariant gauge. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 92, p. 045039, Aug 2015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.045039>. Acesso em: 10 jun. 2019.

CAPRI, M. A. L. et al. Local and renormalizable framework for the gauge-invariant operator A_{\min}^2 in Euclidean Yang-Mills theories in linear covariant gauges. *Phys. Rev.*, Maryland, D94, n. 6, p. 065009, 2016.

CAPRI, M. A. L. et al. More on the nonperturbative gribov-zwanziger quantization of linear covariant gauges. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 93, p. 065019, Mar 2016. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.065019>. Acesso em: 10 jun. 2019.

CAPRI, M. A. L. et al. More on the nonperturbative Gribov-Zwanziger quantization of linear covariant gauges. *Phys. Rev.*, Maryland, D93, n. 6, p. 065019, 2016.

CAPRI, M. A. L. et al. Renormalizability of the refined gribov-zwanziger action in linear covariant gauges. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 96, p. 054022, Sep 2017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.054022>. Acesso em: 27 jun. 2019.

CAPRI, M. A. L. et al. Renormalizability of the refined Gribov-Zwanziger action in linear covariant gauges. *Phys. Rev.*, Maryland, D96, n. 5, p. 054022, 2017.

CHOQUET-BRUHAT, Y.; CHRISTODOULOU, D. Existence of global solutions of the yang-mills, higgs and spinor field equations in $3 + 1$ dimensions. In: *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*. Paris: [s.n.], 1981. v. 14, n. 4, p. 481–506.

COLEMAN, S. There are no classical glueballs. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, New York, v. 55, n. 2, p. 113–116, 1977.

CORNWALL, J. M. Positivity violations in QCD. *Mod. Phys. Lett.*, Singapore, A28, p. 1330035, 2013.

- CUCCHIERI, A. et al. Modeling the Gluon Propagator in Landau Gauge: Lattice Estimates of Pole Masses and Dimension-Two Condensates. *Phys. Rev.*, Maryland, D85, p. 094513, 2012.
- CUCCHIERI, A. et al. Modeling the landau-gauge ghost propagator in 2, 3, and 4 spacetime dimensions. *Physical Review D*, APS, Maryland, v. 93, n. 9, p. 094513, 2016.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. What's up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices. *PoS*, Regensburg, LATTICE2007, p. 297, 2007.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Constraints on the IR behavior of the ghost propagator in Yang-Mills theories. *Phys. Rev.*, Maryland, D78, p. 094503, 2008.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Constraints on the IR behavior of the gluon propagator in Yang-Mills theories. *Phys. Rev. Lett.*, Maryland, v. 100, p. 241601, 2008.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Infrared behavior and infinite-volume limit of gluon and ghost propagators in Yang-Mills theories. *PoS*, Mainz, CONFINEMENT8, p. 040, 2008.
- CUCCHIERI, A. et al. Feynman gauge on the lattice: New results and perspectives. *AIP Conf. Proc.*, Maryland, v. 1354, n. 1, p. 45–50, 2011.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; SANTOS, E. M. S. Covariant gauge on the lattice: A New implementation. *Phys. Rev. Lett.*, Maryland, v. 103, p. 141602, 2009.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; TAURINES, A. R. Positivity violation for the lattice Landau gluon propagator. *Phys. Rev.*, Maryland, D71, p. 051902, 2005.
- DELBOURGO, R. A Supersymmetric Stuckelberg Formalism. *J. Phys.*, Bristol, G1, p. 800–804, 1975.
- DELBOURGO, R.; TWISK, S.; THOMPSON, G. MASSIVE YANG-MILLS THEORY: RENORMALIZABILITY VERSUS UNITARITY. *Int. J. Mod. Phys.*, Singapore, A3, p. 435, 1988.
- DELL'ANTONIO, G.; ZWANZIGER, D. Ellipsoidal bound on the gribov horizon contradicts the perturbative renormalization group. *Nuclear Physics B*, Elsevier, Amsterdam, v. 326, n. 2, p. 333–350, 1989.
- DELL'ANTONIO, G.; ZWANZIGER, D. Every gauge orbit passes inside the gribov horizon. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, New York, v. 138, n. 2, p. 291–299, 1991.
- DRAGON, N.; HURTH, T.; NIEUWENHUIZEN, P. van. Polynomial form of the Stuckelberg model. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, Buckow, v. 56B, p. 318–321, 1997.
- DUDAL, D. et al. Some remarks on the spectral functions of the Abelian Higgs Model. 2019.
- DUDAL, D. et al. A Refinement of the Gribov-Zwanziger approach in the Landau gauge: Infrared propagators in harmony with the lattice results. *Phys. Rev.*, Maryland, D78, p. 065047, 2008.

- DUDAL, D.; OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. Källén-Lehmann spectroscopy for (un)physical degrees of freedom. *Phys. Rev.*, Maryland, D89, n. 1, p. 014010, 2014.
- DUDAL, D.; SORELLA, S. P.; VANDERSICKEL, N. The dynamical origin of the refinement of the Gribov-Zwanziger theory. *Phys. Rev.*, Maryland, D84, p. 065039, 2011.
- DUDAL, D. et al. New features of the gluon and ghost propagator in the infrared region from the Gribov-Zwanziger approach. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 77, p. 071501, Apr 2008. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.071501>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- DUDAL, D. et al. New features of the gluon and ghost propagator in the infrared region from the Gribov-Zwanziger approach. *Phys. Rev.*, Maryland, D77, p. 071501, 2008.
- DUDAL, D.; VERSCHELDE, H.; SORELLA, S. P. The Anomalous dimension of the composite operator A^{*2} in the Landau gauge. *Phys. Lett.*, Maryland, B555, p. 126–131, 2003.
- EARDLEY, D. M.; MONCRIEF, V. The global existence of yang-mills-higgs fields in 4-dimensional Minkowski space. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, New York, v. 83, n. 2, p. 171–191, 1982.
- FADDEEV, L.; POPOV, V. Feynman diagrams for the yang-mills field. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 25, n. 1, p. 29 – 30, 1967. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269367900676>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- FERRARI, R.; QUADRI, A. Physical unitarity for massive non-Abelian gauge theories in the Landau gauge: Stueckelberg and Higgs. *JHEP*, Singapore, v. 11, p. 019, 2004.
- FISCHER, C. S.; MAAS, A.; PAWLOWSKI, J. M. On the infrared behavior of Landau gauge Yang–Mills theory. *Annals of Physics*, Elsevier, Amsterdam, v. 324, n. 11, p. 2408–2437, 2009.
- FISCHER, C. S.; PAWLOWSKI, J. M. Uniqueness of infrared asymptotics in Landau gauge Yang–Mills theory. ii. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 80, p. 025023, Jul 2009. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.025023>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- FRASCA, M. Infrared gluon and ghost propagators. *Physics Letters B*, Elsevier, Amsterdam, v. 670, n. 1, p. 73–77, 2008.
- GATES, S. J. et al. Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. *Front. Phys.*, [s.l.], v. 58, p. 1–548, 1983.
- GINIBRE, J.; VELO, G. The Cauchy problem for coupled Yang–Mills and scalar fields in the temporal gauge. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, New York, v. 82, n. 1, p. 1–28, 1981.
- GRACEY, J. A. Three loop $\overline{\text{MS}}$ renormalization of the Curci-Ferrari model and the dimension two BRST invariant composite operator in QCD. *Phys. Lett.*, Maryland, B552, p. 101–110, 2003.

- GRIBOV, V. N. Quantization of Nonabelian Gauge Theories. *Nucl. Phys.*, Amsterdam, B139, p. 1, 1978. [,1(1977)].
- GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, APS, Maryland, v. 30, n. 26, p. 1343, 1973.
- HOOFT, G. Renormalization of massless yang-mills fields. *Nuclear physics: B*, Elsevier, Amsterdam, v. 33, n. 1, p. 173–199, 1971.
- HOOFT, G. t. Magnetic monopoles in unified theories. *Nucl. Phys. B*, CM-P00060463, Amsterdam, v. 79, n. CERN-TH-1876, p. 276–284, 1974.
- HOOFT, G. 't. Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle. *Phys. Rev.*, Maryland, D14, p. 3432–3450, 1976. [,70(1976)].
- HUBER, M. Q. Gluon and ghost propagators in linear covariant gauges. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 91, p. 085018, Apr 2015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.085018>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- JULIA, B.; ZEE, A. Poles with both magnetic and electric charges in non-abelian gauge theory. *Physical Review D*, APS, Maryland, v. 11, n. 8, p. 2227, 1975.
- KORS, B.; NATH, P. A Stueckelberg extension of the standard model. *Phys. Lett.*, Maryland, B586, p. 366–372, 2004.
- KORS, B.; NATH, P. A Supersymmetric Stueckelberg U(1) extension of the MSSM. *JHEP*, New York, v. 12, p. 005, 2004.
- KORS, B.; NATH, P. Aspects of the Stueckelberg extension. *JHEP*, New York, v. 07, p. 069, 2005.
- KUNIMASA, T.; GOTO, T. Generalization of the Stueckelberg Formalism to the Massive Yang-Mills Field. *Prog. Theor. Phys.*, Oxford, v. 37, p. 452–464, 1967.
- LAVELLE, M.; MCMULLAN, D. Constituent quarks from qcd. *Physics Reports*, Elsevier, Amsterdam, v. 279, n. 1, p. 1–65, 1997.
- LAVELLE, M.; MCMULLAN, D. Constituent quarks from QCD. *Phys. Rept.*, Amsterdam, v. 279, p. 1–65, 1997.
- LOWENSTEIN, J. H.; SCHROER, B. Gauge invariance and Ward identities in a massive vector meson model. *Phys. Rev.*, Maryland, D6, p. 1553–1571, 1972.
- MAAS, A.; MUFTI, T. Two- and three-point functions in Landau gauge Yang-Mills-Higgs theory. *JHEP*, New York, v. 04, p. 006, 2014.
- MONTVAY, I.; MÜNSTER, G. *Quantum fields on a lattice*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- MULLER-KIRSTEN, H.; WIEDEMANN, A. Supersymmetry-an introduction with conceptual and calculational details. 1987.
- NIELSEN, H. B.; OLESEN, P. Vortex-line models for dual strings. *Nuclear Physics B*, Elsevier, Amsterdam, v. 61, p. 45–61, 1973.

- NISHINO, H.; RAJPOOT, S. Variant $N=1$ Supersymmetric Non-Abelian Proca-Stueckelberg Formalism in Four Dimensions. *Nucl. Phys.*, Amsterdam, B872, p. 213–227, 2013.
- NISHINO, H.; RAJPOOT, S. $N=1$ supersymmetric Proca–Stueckelberg mechanism for extra vector multiplet. *Nucl. Phys.*, Amsterdam, B887, p. 265–275, 2014.
- NISHINO, H.; RAJPOOT, S. Supersymmetric composite gauge fields with compensators. *Phys. Lett.*, Maryland, B757, p. 237–243, 2016.
- OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. The lattice Landau gauge gluon propagator: lattice spacing and volume dependence. *Phys. Rev.*, Maryland, D86, p. 114513, 2012.
- PIGUET, O.; SIBOLD, K. Renormalization of $N=1$ Supersymmetrical Yang-Mills, Theories. 1. The Classical Theory. *Nucl. Phys.*, Amsterdam, B197, p. 257–271, 1982.
- PIGUET, O.; SIBOLD, K. Renormalization of $N=1$ Supersymmetrical Yang-Mills, Theories. 2. The Radiative Corrections. *Nucl. Phys.*, Amsterdam, B197, p. 272–289, 1982.
- PIGUET, O.; SIBOLD, K. The Anomaly in the Slavnov Identity for $N=1$ Supersymmetric Yang-Mills Theories. *Nucl. Phys.*, Amsterdam, B247, p. 484, 1984.
- PIGUET, O.; SORELLA, S. P. Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies. *Lect. Notes Phys. Monogr.*, New York, v. 28, p. 1–134, 1995.
- PIGUET, O.; SORELLA, S. P. The Antighost equation in $N=1$ superYang-Mills theories. *Phys. Lett.*, Amsterdam, B371, p. 238–244, 1996.
- PIGUET, O.; SORELLA, S. P. *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*. New York: Springer Science & Business Media, 2008. v. 28.
- POLYAKOV, A. M. Particle spectrum in quantum field theory. In: *30 Years Of The Landau Institute—Selected Papers*. Singapore: World Scientific, 1996. p. 540–541.
- RUEGG, H.; RUIZ-ALTABA, M. The Stueckelberg field. *Int. J. Mod. Phys.*, Singapore, A19, p. 3265–3348, 2004.
- SEGAL, I. The cauchy problem for the yang-mills equations. *Journal of functional analysis*, Elsevier, Amsterdam, v. 33, n. 2, p. 175–194, 1979.
- SEZGIN, E.; WULFF, L. Supersymmetric Proca-Yang-Mills System. *JHEP*, New York, v. 03, p. 023, 2013.
- SIRINGO, F. Analytical study of yang–mills theory in the infrared from first principles. *Nuclear Physics B*, Elsevier, Amsterdam, v. 907, p. 572–596, 2016.
- SIRINGO, F.; COMITINI, G. Gluon propagator in linear covariant $r \xi$ gauges. *Physical Review D*, APS, Maryland, v. 98, n. 3, p. 034023, 2018.
- SLAVNOV, A. A. Massive gauge fields. *Teor. Mat. Fiz.*, [s.l.], v. 10, p. 305–328, 1972.
- SLAVNOV, A. A.; FADDEEV, L. D. Massless and massive yang-mills field. (in russian). *Theor. Math. Phys.*, [s.l.], v. 3, p. 312–316, 1970. [Teor. Mat. Fiz.3,18(1970)].

STRAUSS, S.; FISCHER, C. S.; KELLERMANN, C. Analytic structure of the Landau gauge gluon propagator. *Phys. Rev. Lett.*, Maryland, v. 109, p. 252001, 2012.

TISSIER, M.; WSCHEBOR, N. Infrared propagators of Yang-Mills theory from perturbation theory. *Phys. Rev.*, Maryland, D82, p. 101701, 2010.

TISSIER, M.; WSCHEBOR, N. Infrared propagators of yang-mills theory from perturbation theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 82, p. 101701, Nov 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.101701>. Acesso em: 27 maio 2019.

TISSIER, M.; WSCHEBOR, N. Infrared safe perturbative approach to yang-mills correlators. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 84, p. 045018, Aug 2011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.045018>. Acesso em: 10 jun. 2019.

VANDERSICKEL, N.; ZWANZIGER, D. The Gribov problem and QCD dynamics. *Phys. Rept.*, Amsterdam, v. 520, p. 175–251, 2012.

WEBER, A. Epsilon expansion for infrared yang-mills theory in landau gauge. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, Maryland, v. 85, p. 125005, Jun 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.125005>. Acesso em: 10 jun. 2019.

WESS, J.; BAGGER, J. *Supersymmetry and supergravity*. Princeton: Princeton university press, 1992.

WU, T. T.; YANG, C. N. Some remarks about unquantized non-abelian gauge fields. *Physical Review D*, APS, Maryland, v. 12, n. 12, p. 3843, 1975.

ZWANZIGER, D. Action From the Gribov Horizon. *Nucl. Phys.*, Amsterdam, B321, p. 591–604, 1989.

ZWANZIGER, D. Quantization of gauge fields, classical gauge invariance and gluon confinement. *Nuclear Physics B*, Elsevier, Amsterdam, v. 345, n. 2-3, p. 461–471, 1990.

APÊNDICE A – A identidade de Slavnov-Taylor generalizada

Neste APÊNDICE derivamos as identidades de Ward para a fixação de gauge generalizada de eq.(155). Uma vez que a quantidade $\omega^a(\xi)$ é agora um operador composto, *i.e.* um produto de campos no mesmo ponto do espaço-tempo, precisamos definir $\omega^a(\xi)$ introduzindo na ação inicial através de uma fonte externa adequada. Afim de manter a invariância BRST, usamos um dubleto de BRST de fontes externas (Q^a, R^a) , de dimensão 4 e número de ghost $(-1, 0)$,

$$sQ^a = R^a, \quad sR^a = 0, \quad (402)$$

e introduzimos o termo

$$\int d^4x s(Q^a \omega^a(\xi)) = \int d^4x \left(R^a \omega^a(\xi) - Q^a \frac{\partial \omega^a}{\partial \xi^c} g^{cd}(\xi) c^d \right). \quad (403)$$

Portanto iniciamos com a ação clássica completa Σ dada agora por

$$\begin{aligned} \Sigma = & S_{inv} + \int d^4x \left(\mathcal{J}_\mu^a A_\mu^{ah} + \Xi_\mu^a D_\mu^{ab} (A^h) \eta^b \right) \\ & + \int d^4x \left(ib^a \partial_\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} b^a b^a - iM^{ab} b^a \omega^b(\xi) - N^{ab} \bar{c}^a \omega^b(\xi) + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b + M^{ab} \bar{c}^a \frac{\partial \omega^b(\xi)}{\partial \xi^c} g^{cd}(\xi) c^d \right) \\ & + \int d^4x \left(-\Omega_\mu^a D_\mu^{ab} c^b + L^a \frac{g f^{abc}}{2} c^b c^c + K^a g^{ab}(\xi) c^d + R^a \omega^a(\xi) - Q^a \frac{\partial \omega^a}{\partial \xi^c} g^{cd}(\xi) c^d \right), \end{aligned} \quad (404)$$

com S_{inv} dado pela expressão (143).

A ação Σ , eq.(404), obedece as seguintes identidades de Ward:

- a identidade de Slavnov-Taylor

$$\int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \xi^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta K^a} + ib^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^a} + N^{ab} \frac{\delta \Sigma}{\delta M^{ab}} + R^a \frac{\delta \Sigma}{\delta Q^a} \right) = 0; \quad (405)$$

- A equação de movimento do multiplicador de Lagrange b^a

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} = i \partial_\mu A_\mu^a + \alpha b^a - iM^{ab} \frac{\delta \Sigma}{\delta R^b}; \quad (406)$$

- A equação de anti-ghost

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu^a} + M^{ab} \frac{\delta \Sigma}{\delta Q^b} - N^{ab} \frac{\delta \Sigma}{\delta R^b} = 0; \quad (407)$$

- A equação de τ^a

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\tau^a} - \partial_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\mathcal{J}_\mu^a} = 0; \quad (408)$$

- A equação de ghost η^a

$$\int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\eta^a} + g f^{abc} \bar{\eta}^b \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau^c} + g f^{abc} \Xi^b \frac{\delta\Sigma}{\delta\mathcal{J}_\mu^c} \right) = 0; \quad (409)$$

- A equação do antighost $\bar{\eta}^a$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\eta}^a} - \partial_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\Xi_\mu^a} = 0. \quad (410)$$

Estas identidades de Ward podem ser empregadas para a análise da renormalização algébrica quando a função generalizada $\omega^a(\xi)$ está explicitamente presente na fixação de gauge. Neste caso, o contra-termo geral será reabsorvido através da renormalização de $\omega^a(\xi)$, correspondendo a uma renormalização do conjunto infinito de parâmetros de gauge não físicos ($a_1^{abc}, a_2^{abcd}, a_3^{abcde}, \dots$) da expressão (153).

Repetindo a discussão longa das seções anteriores, para o contra-termo local invariante mais geral encontramos agora

$$\begin{aligned} \Sigma^{ct} = & \int d^4x \left\{ -a_0 g^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial g^2} + d_2(\alpha) 2\alpha \frac{\partial\Sigma}{\partial\alpha} + a_7 m^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial m^2} \right. \\ & + a_4 \left(\tau^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau^a} + \mathcal{J}_\mu^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\mathcal{J}_\mu^a} + \frac{1}{2} \bar{\eta}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\eta}^a} + \frac{1}{2} \eta^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\eta^a} + \frac{1}{2} \Xi_\mu^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\Xi_\mu^a} \right) \\ & + d_2(\alpha) A_\mu^a \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu^a} - d_2(\alpha) \Omega_\mu^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega_\mu^a} - d_1(\alpha) c^a \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} + d_1(\alpha) L^a \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} \\ & + f_1^{ab}(\xi, \alpha) \xi^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\xi^b} - \left(f_1^{ab}(\xi, \alpha) + \frac{\partial f_1^{kb}(\xi, \alpha)}{\partial\xi^a} \xi^k \right) K^b \frac{\delta\Sigma}{\delta K^a} \\ & - d_2(\alpha) \bar{c} \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} + (d_2(\alpha) - f_2(0, \alpha)) M^{ab} \frac{\delta\Sigma}{\delta M^{ab}} + (d_2(\alpha) - f_2(0, \alpha)) N^{ab} \frac{\delta\Sigma}{\delta N^{ab}} \\ & - d_2(\alpha) b^a \frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} - f_2(0, \alpha) Q^a \frac{\delta\Sigma}{\delta Q^a} - f_2(0, \alpha) R^a \frac{\delta\Sigma}{\delta R^a} \\ & + \left[(f_2(0, \alpha) a_1^{abc} + \tilde{a}_1^{abc}) \frac{\delta\Sigma}{\delta a_1^{abc}} + (f_2(0, \alpha) a_2^{abcd} + \tilde{a}_2^{abcd}) \frac{\delta\Sigma}{\delta a_2^{abcd}} \right. \\ & \left. + (f_2(0, \alpha) a_3^{abcde} + \tilde{a}_3^{abcde}) \frac{\delta\Sigma}{\delta a_3^{abcde}} + \dots \right] \Big\}, \quad (411) \end{aligned}$$

onde as reticências ... denota o remanescente, conjunto infinito, de termos do tipo

$$\sum_j (f_2(0, \alpha) a_j^{abcde\dots} + \tilde{a}_j^{abcde\dots}) \frac{\delta \Sigma}{\delta a_j^{abcde\dots}}, \quad j = 4, \dots, \infty, \quad (412)$$

O contratermo Σ^{ct} in eq.(411) pode ser reescrito como

$$\Sigma^{ct} = \mathcal{R}\Sigma, \quad (413)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & -a_0 g^2 \frac{\partial}{\partial g^2} + d_2(\alpha) 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + a_7 m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \\ & + \int d^4x \left\{ a_4 \left(\tau^a \frac{\delta}{\delta \tau^a} + \mathcal{J}_\mu^a \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}_\mu^a} + \frac{1}{2} \bar{\eta}^a \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^a} + \frac{1}{2} \eta^a \frac{\delta}{\delta \eta^a} + \frac{1}{2} \Xi_\mu^a \frac{\delta}{\delta \Xi_\mu^a} \right) \right. \\ & + d_2(\alpha) A_\mu^a \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} - d_2(\alpha) \Omega_\mu^a \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^a} - d_1(\alpha) c^a \frac{\delta}{\delta c^a} + d_1(\alpha) L^a \frac{\delta}{\delta L^a} \\ & + f_1^{ab}(\xi, \alpha) \xi^a \frac{\delta}{\delta \xi^b} - \left(f_1^{ab}(\xi, \alpha) + \frac{\partial f_1^{kb}(\xi, \alpha)}{\partial \xi^a} \xi^k \right) K^b \frac{\delta}{\delta K^a} \\ & - d_2(\alpha) \bar{c} \frac{\delta}{\delta \bar{c}} + (d_2(\alpha) - f_2(0, \alpha)) M^{ab} \frac{\delta}{\delta M^{ab}} + (d_2(\alpha) - f_2(0, \alpha)) N^{ab} \frac{\delta}{\delta N^{ab}} \\ & - d_2(\alpha) b^a \frac{\delta}{\delta b^a} - f_2(0, \alpha) Q^a \frac{\delta}{\delta Q^a} - f_2(0, \alpha) R^a \frac{\delta}{\delta R^a} \\ & + \left[(f_2(0, \alpha) a_1^{abc} + \tilde{a}_1^{abc}) \frac{\delta}{\delta a_1^{abc}} + (f_2(0, \alpha) a_2^{abcd} + \tilde{a}_2^{abcd}) \frac{\delta}{\delta a_2^{abcd}} \right. \\ & \left. + (f_2(0, \alpha) a_3^{abcde} + \tilde{a}_3^{abcde}) \frac{\delta}{\delta a_3^{abcde}} + \dots \right] \}. \end{aligned} \quad (414)$$

Para os fatores de renormalização, temos agora

$$\Sigma(\Phi) + \varepsilon \Sigma^{ct}(\Phi) = \Sigma(\Phi) + \varepsilon \mathcal{R}\Sigma(\Phi) = \Sigma(\Phi_0) + O(\varepsilon^2), \quad (415)$$

com

$$\Phi_0 = Z_\Phi \Phi = (1 + \varepsilon \mathcal{R})\Phi + O(\varepsilon^2). \quad (416)$$

onde

$$\begin{aligned}
A_0 &= Z_A^{1/2} A_\mu, \quad b_0 = Z_b^{1/2}, \quad c_0 = Z_c^{1/2} c, \quad \bar{c}_0 = Z_{\bar{c}}^{1/2} \bar{c}, \\
\xi_0^a &= Z_\xi^{ab}(\xi) \xi^b, \quad \tau_0 = Z_\tau^{1/2} \tau, \quad \Omega_0 = Z_\Omega \Omega, \quad L_0 = Z_L L, \\
K_0^a &= Z_K^{ab}(\xi) K^b, \quad m_0^2 = Z_{m^2} m^2, \quad \mathcal{J}_0 = Z_{\mathcal{J}} \mathcal{J}, \\
g_0 &= Z_g, \quad \alpha_0 = Z_\alpha \alpha, \quad \bar{\eta}_0 = Z_{\bar{\eta}}^{1/2} \bar{\eta}, \quad \eta_0 = Z_\eta^{1/2} \eta, \\
\Xi_0 &= Z_\Xi \Xi, \quad M_0 = Z_M M, \\
N_0 &= Z_N N, \quad Q_0 = Z_Q Q, \quad R_0 = Z_R R,
\end{aligned} \tag{417}$$

e

$$\begin{aligned}
Z_g &= 1 - \varepsilon \frac{a_0}{2} \\
Z_A^{1/2} &= Z_\Omega^{-1} = Z_{\bar{c}}^{-1/2} = Z_b^{-1/2} = Z_\alpha^{1/2} = 1 + \varepsilon d_2(\alpha) \\
Z_\xi^{ab} &= \delta^{ab} + \varepsilon f_1^{ab}(\xi, \alpha) \\
Z_L &= Z_c^{-1/2} = 1 + \varepsilon d_1(\alpha) \\
Z_{\bar{\eta}} &= Z_\eta = Z_\Xi^2 = Z_\tau^{1/2} = Z_{\mathcal{J}} = 1 + \varepsilon a_4 \\
Z_{m^2} &= 1 + \varepsilon a_7 \\
Z_M &= Z_N = 1 + \varepsilon(d_2 - f_2(0, \alpha)) \\
Z_Q &= Z_R = 1 - \varepsilon(f_2(0, \alpha)) \\
Z_K^{ab} &= \delta^{ab} - \varepsilon \left(f_1^{ab}(\xi, \alpha) + \frac{\partial f_1^{kb}(\xi, \alpha)}{\partial \xi^a} \xi^k \right),
\end{aligned} \tag{418}$$

com a adição de uma renormalização multiplicativa do conjunto infinito de parâmetros de gauge $(a_1^{abc}, a_2^{abcd}, a_3^{abcde}, \dots)$ da equação (153), ou seja

$$\begin{aligned}
(a_1^{abc})_0 &= (1 + \varepsilon f_2(0, \alpha)) a_1^{abc} + \varepsilon \tilde{a}_1^{abc} \\
(a_2^{abcd})_0 &= (1 + \varepsilon f_2(0, \alpha)) a_2^{abcd} + \varepsilon \tilde{a}_2^{abcd} \\
(a_3^{abcde})_0 &= (1 + \varepsilon f_2(0, \alpha)) a_3^{abcde} + \varepsilon \tilde{a}_3^{abcde} \\
&\dots
\end{aligned} \tag{419}$$

A equações (418) e (419) mostra que a inclusão da ambiguidade $\omega^a(\xi)$ na função da fixação de gauge generalizada eq.(155) dá origem a uma renormalização padrão dos campos, parâmetros e fontes. Claramente, de eq.(419) vemos que a renormalização de $\omega^a(\xi)$ em si é agora codificada em uma renormalização multiplicativa do conjunto infinito dos parâmetros de gauge não físicos $(a_1^{abc}, a_2^{abcd}, a_3^{abcde}, \dots)$.