



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Faculdade de Engenharia

Lucas Encarnação Silva

**Análise de segunda ordem de elementos de pórtico baseados nas
soluções exatas das equações diferenciais utilizando o método dos
dois ciclos iterativos**

Rio de Janeiro
2022

Lucas Encarnação Silva

Análise de segunda ordem de elementos de pórtico baseados nas soluções exatas das equações diferenciais utilizando o método dos dois ciclos iterativos



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. DSc. Rodrigo Bird Burgos

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S586 Silva, Lucas Encarnação.
Análise de segunda ordem de elementos de pórtico baseados nas soluções exatas das equações diferenciais utilizando o método dos dois ciclos iterativos / Lucas Encarnação Silva. – 2022.

86f.

Orientador: Rodrigo Bird Burgos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia civil - Teses. 2. Pórticos estruturais - Teses. 3. Análise funcional não-linear - Teses. 4. Método dos elementos finitos - Teses. 5. Equações diferenciais - Teses. I. Burgos, Rodrigo Bird. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 692.299:519.61

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.



Assinatura

22/02/2022

Data

Lucas Encarnação Silva

Análise de segunda ordem de elementos de pórtico baseados nas soluções exatas das equações diferenciais utilizando o método dos dois ciclos iterativos

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Aprovado em:

Banca Examinadora:

Prof. DSc. Rodrigo Bird Burgos (Orientador)

Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof^a. DSc. Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira

Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. DSc. Marcos Antonio Campos Rodrigues

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Rio de Janeiro

2022

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Salvador e Nadja, por todo subsídio emocional e financeiro ao longo da minha formação profissional e pessoal. Sem eles nada seria possível.

A minha irmã Nayana por todo auxílio moral, companheirismo e pela ajuda com impressões e xerox ao longo do curso. Aos meus avós por todas as orações e palavras de incentivo durante a trajetória.

A minha noiva Jhulia, por todo amor, amizade, paciência e compreensão durante os longos períodos de estudo.

Ao meu orientador, professor Rodrigo Bird Burgos, pela paciência, disponibilidade, tempo cedido e pelos valiosos ensinamentos durante a orientação e as disciplinas.

A todos os professores do PGECIV que contribuíram diretamente para minha formação acadêmica.

Aos meus colegas de trabalho que me ajudaram com permutas para que eu pudesse assistir as aulas no horário e estudar para o curso.

E, por fim, a Deus pelo dom da vida e pela saúde.

RESUMO

SILVA, Lucas Encarnação. *Análise de segunda ordem de elementos de pórtico baseados nas soluções exatas das equações diferenciais utilizando o método dos dois ciclos iterativos*. 2022. 86 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

Em problemas geometricamente não-lineares, utilizando do Método dos Elementos Finitos (MEF), a resposta da estrutura é diretamente influenciada pelo modo como a estrutura é discretizada pelo analista. Como forma de reduzir essa dependência, com o emprego de funções de interpolação correspondentes à solução homogênea da equação diferencial do problema, desenvolveu-se elementos com soluções “exatas” baseadas no equilíbrio de um elemento infinitesimal em sua configuração deformada. Diante disso, com a intenção de avaliar as formulações desenvolvidas na literatura, dois objetivos foram propostos: o primeiro, realizar uma análise de segunda ordem de elementos de pórticos obtendo as trajetórias de equilíbrio pelo método simplificado dos Dois Ciclos Iterativos utilizando a formulação de elementos “exatos”; segundo, obter cargas críticas utilizando a expansão em série de Taylor da matriz de rigidez do elemento baseado na solução “exata”. Para a análise não-linear pelo Método dos Dois Ciclos Iterativos, além dos resultados na obtenção das curvas de equilíbrio, foi realizada uma comparação com os resultados de uma análise pelo programa *Mastan2 v3.5* e com os resultados analíticos do problema. Já para a obtenção das cargas críticas, foi analisada a carga crítica de cada grau da expansão em série de Taylor comparando os resultados com a análise tradicional por MEF e com os resultados analíticos. Os resultados mostram que a análise não-linear pelo Método dos Dois Ciclos Iterativos utilizando o elemento baseado nas soluções “exatas” são idênticos aos resultados analíticos, e a combinação da utilização desse método simplificado com o elemento “exato” mostrou ser simples e eficiente comparado com os métodos numéricos “tradicionais”, que além dos resultados dependentes do grau de discretização na modelagem pode apresentar um maior esforço computacional para obtê-los. E na análise para a obtenção das cargas críticas com a utilização da expansão em série de Taylor, apresentou resultados confiáveis, próximos ao “exatos”, com a utilização da aproximação a partir de 5 termos para todos os elementos estudados.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Cargas Críticas. Análise Não-Linear. Elementos Finitos.

ABSTRACT

SILVA, Lucas Encarnação. *Second-order analysis of frame elements based on exact solutions of differential equations using the two-cycle iterative method*. 2022. 86 f. Master's thesis (Master of Science in Civil Engineering) - Engineering Faculty, Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, 2022.

In geometrically nonlinear problems, using the Finite Element Method (FEM), the structure response is directly influenced by the way the bars are discretized by the analyst. To reduce this dependence, using interpolation functions corresponding to the homogeneous solution of the differential equation of the problem, elements with "exact" solutions were developed based on the equilibrium of an infinitesimal element in its deformed configuration. Therefore, with the intention of evaluating the formulations developed in the literature, two main objectives were proposed: the first, to carry out a second-order analysis of frame elements, obtaining the equilibrium paths by the Two-Cycle iterative method using the proposed formulation; second, obtain critical loads using the Taylor series expansion of the element based on the "exact" solution. For the non-linear analysis using the Two-Cycle method, in addition to the results in obtaining the equilibrium paths, a comparison was made with the results of an analysis using Mastan2 v3.5 software and analytical results of the problem. To obtain the critical loads, the critical load of each degree of the Taylor series expansion was analyzed comparing the results with the traditional analysis by FEM and analytical results. The results show that the non-linear analysis by the Two-Cycle Method using the element based on the "exact" solutions are identical to the analytical results, and the combination of the use of this simplified method with the "exact" element proved to be simple and efficient compared with the "traditional" numerical methods that, in addition to the results depending on the degree of discretization in the modeling, can present greater computational effort. The computation of critical loads using the Taylor series expansion also presented reliable results, close to the "exact" ones, with the use of the approximation from five terms for all the elements studied.

Keywords: Differential equations. Critical Loads. Non-Linear Analysis. Finite elements.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Efeitos de segunda ordem $P-\Delta$ e $P-\delta$	18
Figura 2 - Níveis de análise.....	19
Figura 3 - Posições de equilíbrio estático.....	20
Figura 4 - Estrutura reticulada de vigas e correspondente modelo estrutural	23
Figura 5 - Funções de interpolação do elemento de treliça.....	25
Figura 6 - Elemento de treliça	25
Figura 7 - Funções de interpolação do elemento de viga.....	26
Figura 8 - Elemento de viga	27
Figura 9 - Elemento de pórtico	27
Figura 10 - Esforços resultantes iniciais.....	32
Figura 11 - Equilíbrio de forças em uma coluna isolada.....	37
Figura 12 - Carregamento em uma barra de pórtico	40
Figura 13 - Efeito $P-\Delta$	42
Figura 14 - Equilíbrio de um elemento infinitesimal em sua configuração deformada	46
Figura 15 - Viga biapoiada com momento de mesmo sentido nas extremidades	56
Figura 16 - Comparação do deslocamento transversal da viga biapoiada com momentos de mesmo sentido	58
Figura 17 - Comparação da rotação da viga biapoiada com momentos de mesmo sentido.....	59
Figura 18 - Comparação do momento fletor da viga biapoiada com momentos de mesmo sentido	60
Figura 19 - Pórtico de Roorda	61
Figura 20 - Comparação do deslocamento transversal do pórtico de Roorda	62
Figura 21 - Comparação da rotação do pórtico de Roorda	62
Figura 22 - Comparação do momento fletor do pórtico de Roorda	63
Figura 23 - Viga engastada e livre.....	65
Figura 24 - Caminho de equilíbrio para viga engastada e livre	65
Figura 25 - Viga biapoiada com momento de sentidos opostos nas extremidades...	66
Figura 26 - Caminho de equilíbrio para viga biapoiada	67
Figura 27 - Pórtico de Roorda	68

Figura 28 - Caminho de equilíbrio para o pórtico de Roorda.....	69
Figura 29 - Pórtico biengastado de modo simétrico	70
Figura 30 - Caminho de equilíbrio para o pórtico biengastado de modo simétrico....	70
Figura 31 - Pórtico biengastado de modo assimétrico	71
Figura 32 - Caminho de equilíbrio para o pórtico biengastado de modo assimétrico	72
Figura 33 - Colunas clássicas para o estudo de flambagem sob diferentes condições de contorno	74
Figura 34 - Pórtico de Roorda	76
Figura 35 - Pórtico biengastado com e sem deslocabilidade	77

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados para a coluna engastada e livre	74
Tabela 2 - Resultados para a coluna biapojada	75
Tabela 3 - Resultados para a coluna engastada e apoiada	75
Tabela 4 - Resultados para a coluna biengastada	76
Tabela 5 - Resultados para o pórtico de Roorda.....	77
Tabela 6 - Resultados para o pórtico biengastado com deslocabilidade.....	78

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
NBR	Norma Brasileira

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal
d	Vetor dos deslocamentos das estruturas
d_i	Graus de liberdade do elemento
E	Módulo de elasticidade
f	Vetor de forças da estrutura
I	Momento de inércia da seção reta
k_i	Coefficientes de rigidez
K_e	Matriz de rigidez elástica da estrutura
K_g	Matriz de rigidez geométrica da estrutura
L	Comprimento do elemento
N_i	Funções de forma
P	Força axial
P_e	Carga crítica de Euler
P_{crit}	Carga crítica
q	Coordenadas generalizadas
U	Energia interna de deformação
u	Vetor dos deslocamentos axiais
V	Energia potencial das cargas externas
v	Vetor dos deslocamentos transversais
Π	Energia potencial total
$\Delta\Pi$	Varição da energia potencial total
δ	Parâmetro de deslocamento
λ	Parâmetro de carga
θ	Vetor de rotação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA	18
1.1 Introdução	18
1.2 Estabilidade Estrutural	19
1.2.1 Formas de Instabilidade	20
1.2.2 Critérios de Estabilidade	21
1.2.2.1 Critério Estático de Estabilidade	21
1.2.2.2 Critério Dinâmico de Estabilidade	21
1.2.2.3 Critério Energético de Estabilidade	22
1.3 Método dos Elementos Finitos	23
1.3.1 Formulação do Elemento de Pórtico	24
1.3.1.1 Funções de Interpolação	24
1.3.1.2 Referenciais Lagrangeanos	28
1.3.1.3 Matriz de Rigidez Elástica e Geométrica	28
1.3.2 Obtenção da Carga Crítica	33
2 MÉTODOS SIMPLIFICADOS	35
2.1 Introdução	35
2.2 Método P-Delta	35
2.3 Coeficiente γ_z	37
2.4 Método da Amplificação dos Momentos	39
2.4.1 Coeficiente B_1	39
2.4.2 Coeficiente B_2	42
2.5 Método dos Dois Ciclos Iterativos	43
3 ELEMENTO FINITO EXATO	45
3.1 Introdução	45
3.2 Equilíbrio do Elemento Infinitesimal na Configuração Deformada	45
3.3 Funções de interpolação da solução “exata”	48
3.4 Matriz de Rigidez Tangente	53
3.5 Cargas Nodais Equivalentes	55
3.6 Exemplos comparativos entre as funções de interpolação “exatas” e cúbicas utilizando o Método dos Dois Ciclos Iterativos	56

3.6.1 Viga biapoiada com momento de mesmo sentido nas extremidades.....	56
3.6.2 Pórtico de Roorda	60
4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS	64
4.1 Introdução.....	64
4.2 Análise de segunda ordem pelo Método dos Dois Ciclos Iterativos utilizando o elemento “exato”	64
4.2.1 Viga engastada e livre	64
4.2.2 Viga biapoiada com momento de sentidos opostos nas extremidades	66
4.2.3 Pórtico de Roorda	67
4.2.4 Pórtico Biengastado de Modo Simétrico.....	69
4.2.5 Pórtico Biengastado de Modo Assimétrico	71
4.3 Obtenção das cargas críticas utilizando a expansão em série de Taylor	72
4.3.1 Carga Crítica de Colunas	74
4.3.2 Carga Crítica do Pórtico de Roorda	76
4.3.3 Carga Crítica do Pórtico Biengastado	77
5 CONCLUSÃO	79
5.1 Sugestões para trabalhos futuros	80
REFERÊNCIAS.....	81

INTRODUÇÃO

Com a evolução tecnológica, os engenheiros estruturais são cada vez mais demandados a desenvolverem estruturas mais econômicas, reduzindo seu peso e consumo de materiais, sem que haja perda de segurança e durabilidade. Para tal finalidade, é comum o uso de materiais de alta resistência juntamente com o emprego de elementos mais esbeltos e/ou com seção variável.

Ao passo em que o elemento estrutural se torna mais esbelto, é natural a ocorrência do processo de flambagem, em que os elementos perdem sua estabilidade e pode haver ruptura devido às grandes deflexões. A perda de estabilidade está ligada aos efeitos de segunda ordem que são decorrentes de dois principais tipos de não-linearidade: a física e a geométrica.

No contexto da não-linearidade geométrica, em estruturas de pórticos, uma análise de estabilidade de segunda ordem pode ser realizada de muitas maneiras diferentes, variando de verificações simples baseadas em análises lineares de primeira ordem a análises numéricas não-lineares de ordem superior. E, ainda que existam soluções analíticas capazes de resolver problemas de estabilidade, em geral, emprega-se uma solução numérica pelo método dos elementos finitos (MEF), em que a análise de segunda ordem é realizada utilizando um conjunto de simplificações. Desse modo, a resolução do problema depende diretamente da forma como são discretizados os membros estruturais e, por consequência, da experiência do analista na escolha adequada do número de elementos que deve ser utilizado na análise estrutural (Burgos; Martha, 2013).

Segundo Rodrigues (2019), para melhorar a resposta de uma análise numérica, alguns fatores importantes podem ser citados, tais como: teoria de flexão considerada, a descrição cinemática do problema, a metodologia de análise não-linear empregada e, por fim, as funções de interpolação utilizadas.

Com relação a teoria de flexão considerada, a teoria de flexão de Euler-Bernoulli é a mais utilizada em problemas que contemplam a não linearidade geométrica. Inclusive, os principais *softwares* de análise estrutural têm por *default* a configuração dessa teoria. Entretanto, para elementos com baixo índice de esbeltez ou seções compostas, a teoria de flexão de Timoshenko fornece resultados mais precisos. A teoria de vigas de Timoshenko foi abordada por diversos autores, tais

como: Timoshenko & Gere (1963), Friedman & Kosmtka (1993), Pilkey et al. (1995) e Scramm et al (1994).

Já em relação à descrição cinemática, as aplicações mais comuns em problemas de não-linearidade geométrica baseiam-se em duas principais formulações: a Lagrangeana Total e a Lagrangeana Atualizada. Essas descrições diferem basicamente com respeito a configuração de referência considerada (Felippa, 2017, *apud* Rodrigues, 2019). Mais detalhes das formulações podem ser encontrados em Bathe (1996) e De Borst et al (2012).

Com relação à metodologia de análise não-linear empregada, segundo Fuina (2004), quando há ocorrência de pontos de instabilidade, diversos procedimentos têm sido propostos para obtenção da solução de uma trajetória de equilíbrio. Esses procedimentos, em geral, envolvem processos incremental-iterativos de tal forma que uma variável ou conjunto de variáveis do problema sejam controladas. Dentre elas destacam-se os métodos de Newton-Raphson, método da secante, método do comprimento de arco (Wempner, 1971; Ricks, 1972, 1979; Ramm, 1981; Crisfield, 1981, 1983), método de controle do deslocamento (Yang e Shieh, 1990; Yang e Kuo, 1994), método de controle indireto de deslocamento (de Borst, 1986, 1987), entre outros.

Cabe ressaltar, que além dos métodos mais tradicionais supracitados, há também métodos simplificados que são capazes de solucionar problema de análise não-linear de estruturas de forma a gerar um menor esforço computacional (Silva, 2017), tais como o método do coeficiente γ_z (NBR 6118, 2014), método de amplificação dos momentos (Chen; Lui, 1991), método da força lateral equivalente ou método P-Delta (Chen; Lui, 1991) e, por fim, o Método dos Dois Ciclos Iterativos (Chen; Lui, 1991), que é um dos objetos de estudo deste trabalho.

Quanto às funções de interpolação utilizadas, segundo Rodrigues (2019) as polinomiais (cúbicas) são as mais utilizadas e correspondem à solução da equação diferencial do equilíbrio de um elemento infinitesimal na configuração indeformada, sendo exata apenas para análises lineares. Nos casos de problemas não-lineares geometricamente, tal fato não ocorre, o que torna necessário a discretização da estrutura. Por conta disso, muitos autores exploraram alternativas para esse tipo de análise e buscaram soluções “exatas” baseadas no equilíbrio de elementos infinitesimais em suas configurações deformadas, levando ainda em consideração a combinação (ou não) de efeitos, como: carregamento transversal, carga axial,

deformação por cisalhamento e bases elásticas com um ou mais parâmetros (deslocamento e rotação).

Davis et al. (1972) elaboraram um elemento considerando a deformação por cisalhamento (teoria de Timoshenko), a partir do equilíbrio de um elemento infinitesimal em sua configuração deformada, sem levar em consideração a carga axial. Zhaohua & Cook (1983) apresentaram elementos finitos de vigas sob bases elásticas de dois parâmetros, mas sem considerar a deformação por cisalhamento. Já Ting & Mockry (1984), assim como Eisenberger & Yankelevsky (1985) formularam a solução exata de viga sob bases elásticas de um parâmetro (deslocamento), mas também sem considerar a deformação por cisalhamento.

Chiwanga & Valsangkar (1988) calcularam a matriz de rigidez e os carregamentos nodais de uma viga apoiada em uma base elástica de dois parâmetros, sem também considerar deformação por cisalhamento. Shirima & Giger (1992), por sua vez, obtiveram a matriz de rigidez e o vetor de cargas externas derivados da solução exata das equações diferenciais do problema, levando em consideração a teoria de Timoshenko. Já Areiza-Hurtado et al. (2005) apresentaram a matriz de rigidez e o vetor de carga de uma viga-coluna, incluindo a combinação de efeitos de força axial constante, a base elástica de Winkler, a teoria de vigas de Timoshenko e as conexões elásticas dos extremos do elemento.

Segundo Burgos & Martha (2013), Onu (2008) foi o primeiro autor a apresentar a combinação de todos os efeitos de cargas axiais, carregamento transversal, deformação por cisalhamento e a fundação elástica de dois parâmetros. Inclusive, Burgos & Martha (2013) apresentam todo o desenvolvimento de maneira didática e o cálculo das soluções analíticas para funções de forma, incluindo a combinação de efeitos do carregamento transversal, carga axial e a deformação por cisalhamento. Em Rodrigues (2019), desenvolveu-se a matriz de rigidez tangente tridimensional e cargas equivalentes nodais, por meio das funções de interpolação, considerando a carga axial, a deformação por cisalhamento e os termos de ordem elevada do tensor de deformação.

Portanto, nota-se, que na literatura há diversos estudos, alternativas e combinação de análises que tornam os problemas de não-linearidade geométrica com uma discretização mínima, um campo promissor de pesquisas.

Objetivos

Este trabalho é baseado fundamentalmente nos trabalhos de Chen & Lui (1991), Burgos & Martha (2013) e Rodrigues (2019), e tem dois objetivos principais:

- Realizar uma análise de segunda ordem utilizando o elemento “exato” desenvolvido por Burgos & Martha (2013) e verificar o caminho de equilíbrio utilizando o método dos Dois Ciclos Iterativos desenvolvido por Chen & Lui (1991) em elementos de pórtico;
- Obter as cargas críticas dos elementos clássicos de colunas e elementos de pórtico utilizando a aproximação em série de Taylor do elemento “exato” desenvolvido por Burgos & Martha (2013) em seu trabalho.

Além disso, para ambos os objetivos, planeja-se comparar o resultado obtido com as soluções analíticas dos elementos propostos.

Organização do trabalho

O presente capítulo apresentou um breve resumo dos trabalhos que foram realizados ao longo dos anos, o objetivo e uma descrição da organização do trabalho.

No capítulo um são introduzidos conceitos importantes da análise não-linear geométrica que é abordada neste trabalho. Nele, o conceito de estabilidade estrutural é apresentado. Após isso, introduz-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) seguindo pela formulação do elemento de pórtico em que se aborda o importante conceito das funções de interpolação, referenciais Lagrangeanos e desenvolve-se, a partir das funções de interpolação cúbicas, as matrizes de rigidez elástica e geométrica, inclusive considerando termos de alta ordem do tensor de deformação.

No capítulo dois, estudam-se os principais métodos simplificados para análise não-linear geométrica. Primeiramente, é apresentado o método P-Delta, seguido pelo método do coeficiente γ_z utilizado pela adotado pela ABNT NBR 6118 (2014) e pelo Método da Amplificação dos Momentos. E, por fim, apresenta-se o método dos Dois Ciclos Iterativos que é objeto de estudo deste trabalho.

No capítulo três, desenvolve-se o elemento “exato” proposto por Burgos & Martha (2013). Neste capítulo, formula-se o elemento finito baseado nas funções de

interpolação obtidas a partir da solução “exata” das equações diferenciais. Ainda neste capítulo, são apresentadas a matriz de rigidez tangente e uma aproximação utilizando a expansão em série de Taylor e, também, o conceito de cargas nodais equivalentes.

No capítulo quatro são apresentadas as aplicações numéricas decorrentes dos objetivos propostos para este trabalho. E, por fim, são apresentadas as conclusões obtidas com o desenvolvimento do presente trabalho, além de algumas propostas para trabalhos futuros.

1 ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA

1.1 Introdução

No estudo de estabilidade estrutural, há várias formas de análise que podem ser empregadas de acordo com os resultados do comportamento real da estrutura que se deseja obter. Tais resultados podem ser mais próximos da realidade ao passo que se introduz fontes de não-linearidade durante o processo de análise estrutural, fundamentalmente divididas em: não-linearidades geométricas e físicas.

A forma mais simples de análise – análise elástica de primeira ordem –, em que não se considera fontes de não-linearidade, pressupõe para o cálculo de esforços e deslocamentos o equilíbrio da estrutura em sua posição inicial indeformada e um comportamento linear dos materiais. Introduzindo uma fonte de não-linearidade geométrica, obtém-se a análise elástica de segunda ordem, em que os esforços e deslocamentos são calculados considerando o equilíbrio da estrutura na posição deformada, na qual surgem esforços adicionais devido às forças aplicadas sobre os deslocamentos, mas ainda com comportamento linear do material.

As fontes de não-linearidades geométricas têm dois fenômenos característicos, os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$. O primeiro deles está relacionado com a estabilidade global da estrutura, em que é produzido um momento de tombamento decorrente da atuação da carga vertical sob o deslocamento lateral produzido. Por outro lado, o segundo efeito está relacionado à estabilidade de cada barra, ou seja, um efeito local provocado pela influência da força axial na rigidez a flexão do elemento estrutural (Paulin, 2007). Na Figura 1, observa-se os dois efeitos supracitados:

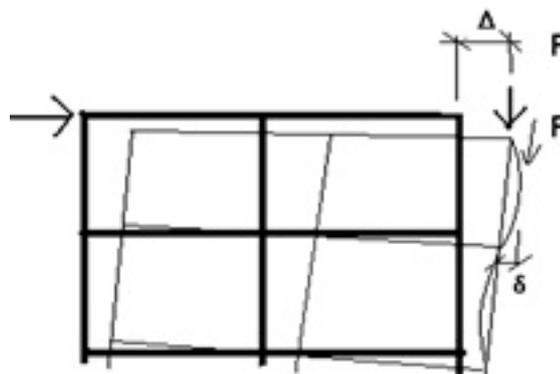


Figura 1 - Efeitos de segunda ordem $P-\Delta$ e $P-\delta$

Fonte: Paulin (2007)

Por outro lado, quando a fonte de não-linearidade física é introduzida a partir da forma de análise mais simples, obtém-se uma terceira forma de análise, a análise inelástica de primeira ordem. Esse tipo de análise, pressupõe o cálculo de esforços e deslocamentos para o equilíbrio da estrutura em sua posição inicial indeformada, considerando efeitos não-lineares do comportamento do material. Em outras palavras, a fonte de não-linearidade física caracteriza-se por ocasionar relações não lineares entre tensão e deformação, ou seja, relaciona as propriedades intrínsecas do material e gera a não proporcionalidade entre causa e efeito (Borges, 1999).

Por fim, a última forma de análise e a mais completa, é a combinação dos efeitos de não-linearidade geométrica e não-linearidade física, em que são calculados esforços e deslocamentos considerando o equilíbrio da estrutura na sua posição deformada e as relações entre tensão e deformação não-linear do material. A Figura 2, resume todas as formas de análise e as correspondentes trajetórias de equilíbrio:

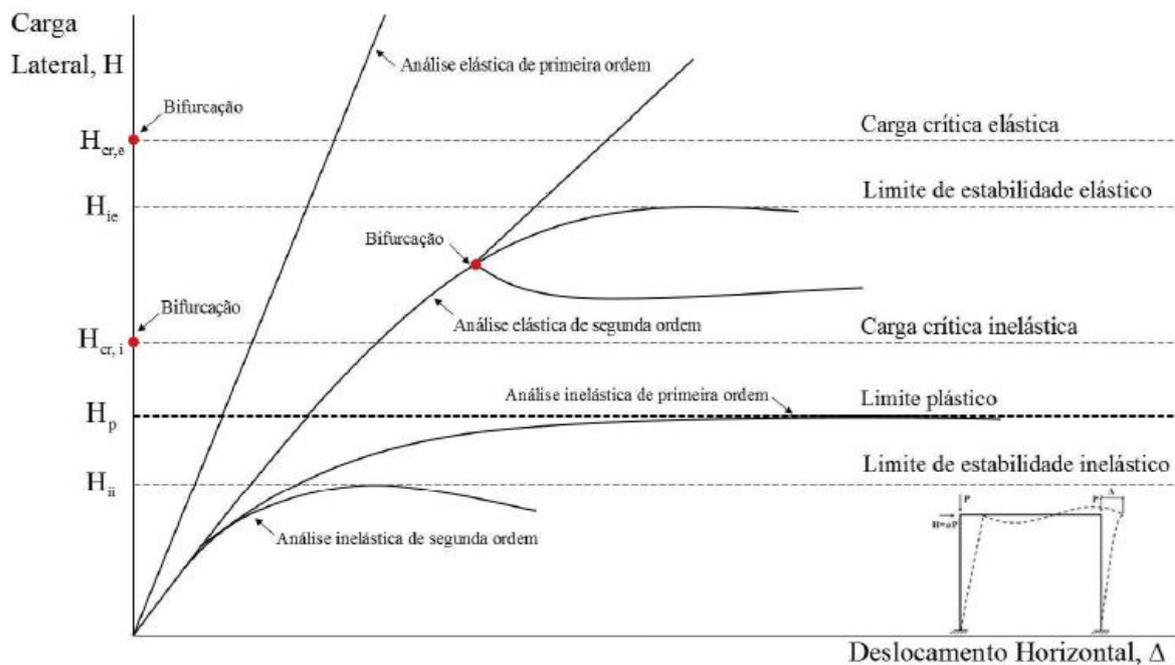


Figura 2 - Níveis de análise

Fonte: Silva (2017) adaptado de McGuire et al. (2000)

1.2 Estabilidade Estrutural

McGuire et al. (2000) constataram que o aumento de forma progressiva da resposta não-linear é o mecanismo de ruptura mais comum em uma estrutura. Desse

modo, durante o projeto, a detecção dos pontos-limite é uma tarefa de suma importância. Para isso, é necessário o estudo da estabilidade estrutural, analisando as configurações de equilíbrio possíveis em cada caso de carregamento.

A estabilidade do equilíbrio de um corpo rígido pode ser representada por uma esfera de massa m em repouso em três superfícies potenciais distintas, conforme Figura 3. Na figura 3a, onde a superfície é côncava, qualquer forma de perturbação levará a esfera voltar ao estado inicial, portanto, ela estará em equilíbrio estável. Já na figura 3b, é o equilíbrio neutro ou indiferente, ou seja, qualquer perturbação na esfera não alterará a quantidade de energia potencial. Por fim, na figura 3c, o equilíbrio instável, pois qualquer perturbação fará a esfera procurar um estado de menor energia (Burgos, 2005).

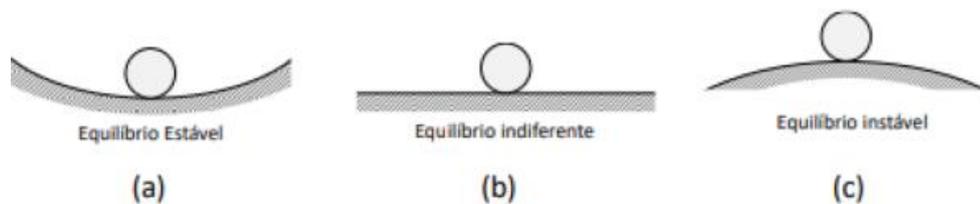


Figura 3 - Posições de equilíbrio estático

1.2.1 Formas de Instabilidade

Segundo Burgos (2005), uma configuração de equilíbrio tem sua característica modificada quando um determinado nível de carregamento (eixo vertical da Figura 2) é alcançado, alterando a forma como a energia potencial se comporta para pequenas perturbações. Tal nível de carregamento é denominado carga crítica e o seu ponto correspondente no eixo horizontal da Figura 2 é denominado ponto crítico.

A carga crítica de um sistema estrutural pode ser elástica ou inelástica. A carga crítica elástica de um sistema estrutural e a forma de sua configuração deformada no estado pós-crítico podem ser determinados por meio da resolução de um problema de autovalor. A carga crítica inelástica, por sua vez, pode ser obtida de maneira semelhante, porém a análise deve admitir a possibilidade de o material se comportar de forma inelástica no estado pré-crítico – estado que antecede o atingimento da carga crítica (McGuire et al., 2000).

Já o ponto crítico, ou ponto de fronteira, pode ser um ponto limite ou de bifurcação. As bifurcações, conforme Figura 2, são pontos de mudanças bruscas na trajetória de equilíbrio, em que dois ou mais caminhos de equilíbrio se cruzam. Elas são caracterizadas de acordo com os possíveis caminhos de equilíbrio quanto a sua estabilidade, tais como: bifurcação simétrica estável, bifurcação simétrica instável e bifurcação assimétrica. Os pontos limites, por sua vez, são pontos que correspondem a valores de máximo, ou mínimos, relativos de carga, ou deslocamento em torno de um ponto (Gonçalves, 1994).

1.2.2 Critérios de Estabilidade

Usualmente, são empregados 3 critérios para determinação da estabilidade estática de um sistema elástico conservativo. Os critérios empregados para a determinação da estabilidade dos caminhos de equilíbrio de sistemas mecânicos sujeitos a cargas estáticas são: estático, dinâmico e energético (Gonçalves, 1994).

1.2.2.1 Critério Estático de Estabilidade

Neste critério, delinea-se as equações de equilíbrio estático para o sistema estrutural que está sujeito a uma perturbação a partir do estado original de equilíbrio e verifica-se se as forças resultantes tendem a restaurar o sistema a seu estado original de equilíbrio. Conforme Figura 3, se a força resultante restaurar o sistema a sua posição inicial, o equilíbrio é estável. No caso de a força resultante afastar o sistema da sua posição original, o equilíbrio é instável. Por último, se, todavia, o sistema permanecer na posição perturbada, o equilíbrio é neutro (Croll; Walker, 1972; Gonçalves, 1993).

1.2.2.2 Critério Dinâmico de Estabilidade

O segundo critério – critério de estabilidade dinâmico –, analisa o comportamento das oscilações do sistema perturbado. Este comportamento se relaciona com as equações diferenciais que governam todo o sistema. As frequências naturais são raízes do problema de autovalor do sistema linearizado em torno de uma posição de equilíbrio do sistema. Se as frequências naturais de vibração são

verificadas e todas elas sejam reais, tem-se um equilíbrio estável. No caso de alguma frequência se tornar imaginária, o equilíbrio é instável. Por fim, se alguma das frequências for nula, tem-se um estado crítico (Croll; Walker, 1972).

1.2.2.3 Critério Energético de Estabilidade

O terceiro critério – critério de estabilidade energético –, formulado a partir do Teorema de Lagrange, estabelece que se a energia potencial total é mínima em uma posição de equilíbrio, então esse equilíbrio é estável. Por outro lado, o equilíbrio será instável quando estiver em uma configuração que corresponda a um máximo da energia potencial. Sendo assim, podemos definir a energia potencial total como na equação (1):

$$\Pi = U + V \quad (1)$$

Em que U é a energia interna de deformação elástica e V é o potencial das forças externas conservativas.

Portanto, pelo Princípio da Energia Potencial Estacionária, a energia potencial do sistema em um estado de equilíbrio será definida em um extremo (máximo ou mínimo). Desse modo, para verificar se uma posição de equilíbrio é estável ou instável, basta avaliar se a energia é mínima num ponto onde a derivada de primeira ordem é nula e a próxima derivada não nula é positiva (equilíbrio estável). E, máxima num ponto onde a derivada de primeira ordem é nula e a próxima derivada não nula é negativa (equilíbrio instável), conforme equação (2):

$$\frac{\partial(\Delta\Pi)}{\partial q} = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial^2(\Delta\Pi)}{\partial q^2} < 0 \text{ (equilíbrio estável)} \\ \frac{\partial^2(\Delta\Pi)}{\partial q^2} > 0 \text{ (equilíbrio instável)} \end{cases} \quad (2)$$

Em que q representa uma posição de equilíbrio (Burgos, 2005).

1.3 Método dos Elementos Finitos

Devido a sua eficiência e aplicabilidade, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos métodos amplamente utilizados no contexto da análise estrutural. Ele consiste na discretização de um meio contínuo em subdomínios chamados elementos, interligados por pontos nodais (nós), onde os graus de liberdade são definidos. O principal objetivo da aplicação deste método é a obtenção da solução para a distribuição de tensões e deformações no domínio da estrutura (Cook, 2001).

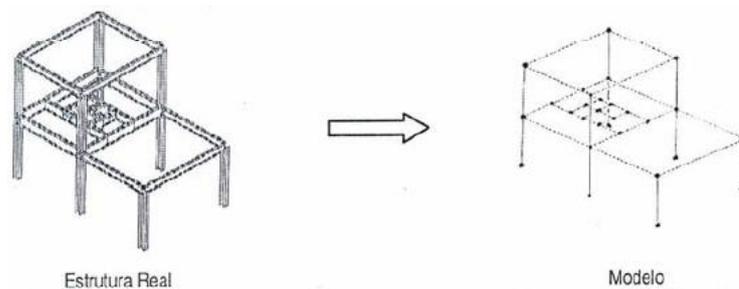


Figura 4 - Estrutura reticulada de vigas e correspondente modelo estrutural

Fonte: Alves Filho (2000)

Já o campo de deslocamentos é descrito através da relação do cálculo dos deslocamentos nodais do elemento discretizado e das funções de forma (ou de interpolação), conforme a equação (3) abaixo:

$$u(x) = \sum_i N_i(x) u_i \quad (3)$$

Em que $u(x)$ é a função que descreve o deslocamento no interior do elemento em qualquer ponto, $N_i(x)$ são as funções de forma e u_i são os deslocamentos nodais.

Segundo Alves Filho (2000), em Análise Matricial de Estruturas e, por consequência, no Método dos Elementos Finitos, o campo das forças, por sua vez, é obtido pela relação entre as forças nodais e deslocamentos nodais para cada elemento finito da estrutura discretizada através do coeficiente de rigidez, conforme a equação (4):

$$f = Kd \quad (4)$$

Em que f é o vetor de cargas nodais, K é a matriz de rigidez e d são os deslocamentos nodais.

Neste trabalho é utilizado o elemento finito de pórtico plano para todas as aplicações numéricas; a formulação desse elemento é descrita a seguir.

1.3.1 Formulação do Elemento de Pórtico

A formulação do elemento de pórtico plano é decorrente da combinação do elemento finito de treliça e do elemento finito de viga. As componentes de deslocamento e rotações nodais são os graus de liberdade do elemento discretizado. Para que haja a possibilidade de substituir o comportamento contínuo da estrutura por um comportamento discreto em função dos graus de liberdade, é necessário interpolar através de uma função – função de interpolação – os deslocamentos e rotações nodais do elemento para se obter os deslocamentos e rotações de qualquer ponto do eixo desse elemento (Martha, 2018).

Segundo Martha (2018), a utilização de funções de interpolação baseadas na solução homogêneas analíticas de vigas fará com que a solução discreta do modelo global forneça resultados para os deslocamentos e rotações nodais iguais aos da solução analítica do problema, ou seja, soluções exatas que independem da forma como o elemento foi discretizado. Portanto, as funções de interpolação a seguir são baseadas nas soluções analíticas homogêneas da barra.

1.3.1.1 Funções de Interpolação

Em um elemento de pórtico plano, as configurações deformadas elementares são definidas no sistema de eixos locais pelo deslocamento axial $u(x)$ e pelo deslocamento transversal $v(x)$. Segundo Martha (2018), os comportamentos axial e transversal de uma barra são considerados independentes. Desse modo, o deslocamento axial só depende de u_1 e u_2 e o deslocamento transversal e rotações só dependem de v_1 , v_2 , θ_1 e θ_2 .

Podemos descrever os deslocamentos axiais dentro do elemento, considerando a solução homogênea da seguinte forma, conforme equação (6):

$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_4(x) u_2 \quad (6)$$

As equações que definem as funções de forma axiais do elemento de treliça são as equações (7) e (8) abaixo:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (7)$$

$$N_4(x) = \frac{x}{L} \quad (8)$$

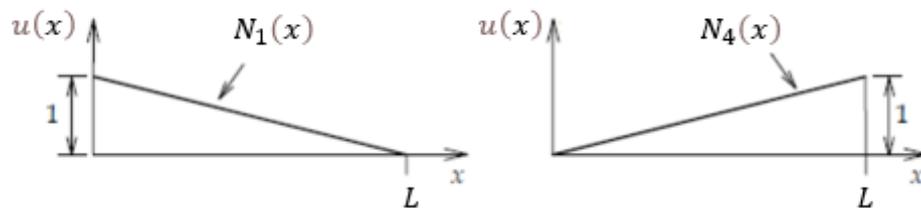


Figura 5 - Funções de interpolação do elemento de treliça

Fonte: Adaptado de Martha (2018)

Observe que a representação gráfica evidenciada na Figura 5 é o equivalente da Figura 6 com a consideração unitária no deslocamento de interesse e zero nos demais.

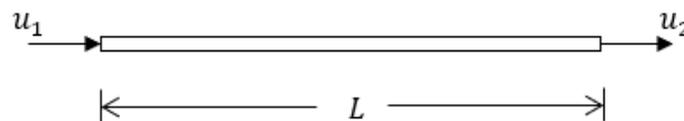


Figura 6 - Elemento de treliça

Fonte: Elaborado pelo autor

Analogamente ao deslocamento axial, podemos descrever o deslocamento transversal dentro do elemento da seguinte forma, conforme equação (9):

$$v(x) = N_2(x) v_1 + N_3(x) \theta_1 + N_5(x) v_2 + N_6(x) \theta_2 \quad (9)$$

As equações que definem as funções de forma transversais do elemento de viga são as equações (10), (11), (12) e (13):

$$N_2(x) = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \quad (10)$$

$$N_3(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (11)$$

$$N_5(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (12)$$

$$N_6(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad (13)$$

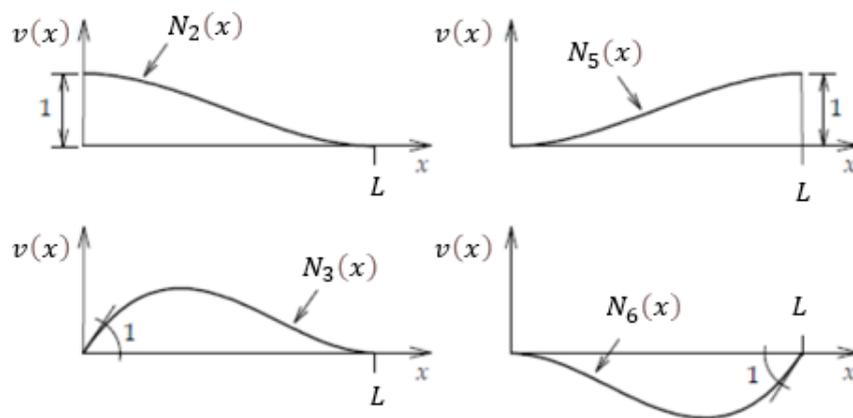


Figura 7 - Funções de interpolação do elemento de viga

Fonte: Adaptado de Martha (2018)

Observe que a representação gráfica evidenciada na Figura 7 é o equivalente da Figura 8 com a consideração unitária no grau de liberdade de interesse e zero nos demais.

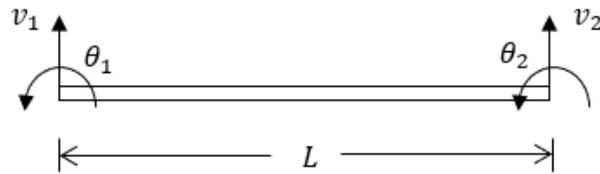


Figura 8 - Elemento de viga

Fonte: Elaborado pelo autor

Como não há qualquer interação entre os efeitos axiais e transversais, a combinação das contribuições dos elementos de treliça e viga formam o elemento de pórtico plano, conforme Figura 9. Sendo assim, podemos descrever as matrizes de função de interpolação do elemento de pórtico da seguinte forma, conforme equação (14):

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

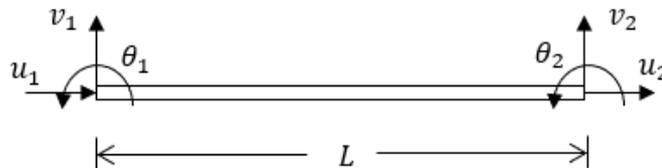


Figura 9 - Elemento de pórtico

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir das funções de forma do elemento e pelo Princípio da Energia Potencial Estacionária (PEPE), pode-se definir as matrizes de rigidez elástica e geométrica. Outra forma é através dos coeficientes de rigidez do Método da Rigidez Direta. Nas seções seguintes é definida a matriz de rigidez elástica e a matriz de rigidez geométrica considerando as parcelas lineares e não-lineares.

1.3.1.2 Referenciais Lagrangeanos

Grande parte das formulações de elementos finitos com a presença da fonte de não-linearidade geométrica se baseiam em referenciais Lagrangeanos. Nesses referenciais, os deslocamentos de um sistema estrutural – decorrentes de um carregamento qualquer –, são medidos em relação a uma configuração inicial desse sistema. Em uma análise não-linear pode-se adotar dois modos de referenciais Lagrangeanos: referencial Lagrangeano total e referencial Lagrangeano atualizado (Galvão, 2000).

No referencial Lagrangeano atualizado, utilizado neste trabalho, os deslocamentos são medidos em relação à última configuração t de equilíbrio obtida no processo incremental. Em outras palavras, as equações de equilíbrio de uma configuração desconhecida $t + \Delta t$ são descritas utilizando variáveis conhecidas da configuração de referência t – um referencial que é atualizado a cada incremento de carga.

Em McGuire et al (2000) todas as formulações para a configuração $t + \Delta t$ são descritas com detalhes.

1.3.1.3 Matriz de Rigidez Elástica e Geométrica

As componentes de deformação axial e deformação transversal do tensor de deformação de Green-Lagrange, já considerando as parcelas lineares (15) e (16) e não lineares (17) e (18) são descritas abaixo. Vale ressaltar que $u_o(x)$, $v_o(x)$ e θ são o deslocamento axial e transversal do centroide da seção, e rotação da seção transversal, respectivamente. E, para todo o desenvolvimento a seguir, considera-se a teoria de flexão de Euler-Bernoulli ($\theta = \frac{\partial v_o}{\partial x}$):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial x} - \theta = \frac{\partial v_o}{\partial x} - \frac{\partial v_o}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (17)$$

$$\eta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (18)$$

A matriz de rigidez elástica do elemento de pórtico plano pode ser obtida através da parcela linear (15) e (16) do tensor de deformação de Green-Lagrange. A partir da equação (1), podemos descrever a energia de deformação U da seguinte forma:

$$U = \int_A \left[\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \right] dA \quad (19)$$

$$\begin{aligned} U = & E \int_A \left(\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dA + E \int_A \left(\int_0^L y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right) dA \\ & - E \int_A \left(\int_0^L y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dA - E \int_A \left(\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right) dA \end{aligned} \quad (20)$$

Considerando $\int_A y^2 dA = I$ e $\int_A y dA = 0$, chegamos na seguinte expressão:

$$U = EA \left(\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + EI \left(\int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right) - 0 - 0 \quad (21)$$

Como mencionado, é possível obter as matrizes de rigidez elástica e geométrica a partir das funções de forma. Desse modo, com auxílio das funções de interpolação (6) e (9) e aplicando o Princípio da Energia Potencial Estacionária, temos:

$$U = \{\delta u\}^T \left[EA \int_0^L \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} \right)^T dx \right] \{u\} + \{\delta v\}^T \left[EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 N_v}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 N_v}{\partial x^2} \right)^T dx \right] \{v\} \quad (22)$$

Obtemos assim, substituindo as funções de forma e resolvendo as integrais, a partir da equação (22), a matriz de rigidez elástica do elemento de pórtico plano em que E é o modulo de elasticidade do material, I o momento de inércia da seção transversal, L o comprimento do elemento e, por fim, A área da seção transversal, conforme equação (23):

$$K_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (23)$$

A matriz de rigidez geométrica do elemento de pórtico plano pode ser obtida através das parcelas não-lineares (17) e (18) do tensor de deformação de Green-Lagrange. A partir da equação (1), podemos descrever a energia de deformação U para mover-se de uma configuração de equilíbrio t para uma secundária $t + \Delta t$ da seguinte forma:

$$U = \int_A \left[\int_0^L \tau_{xx} \left[\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx \right] dA \\ + \int_A \left[\int_0^L \tau_{xy} \left(y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right] dA \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_A \left[\int_0^L \tau_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] dA + \frac{1}{2} \int_A \left[\int_0^L \tau_{xx} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right] dA \\
&+ \frac{1}{2} \int_A \left[\int_0^L \tau_{xx} y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] dA - \int_A \left(\int_0^L \tau_{xx} y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dA \\
&+ \int_A \left(\int_0^L \tau_{xy} y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dA - \int_A \left(\int_0^L \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dA
\end{aligned} \tag{25}$$

Tomando as relações $\int_A \tau_{xx} dA = P$, $\int_A \tau_{xy} dA = Q$, $\int_A \tau_{xx} y dA = -M$ e aplicando na equação (25), temos:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \left[\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] P + \frac{1}{2} \left[\int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right] P + \frac{1}{2} \left[\int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] P \frac{I}{A} \\
&+ \left(\int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) M - \left(\int_0^L \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) Q
\end{aligned} \tag{26}$$

Analogamente ao que foi realizado para determinação da matriz de rigidez elástica, aplica-se as funções de forma (6) e (9) na equação (26):

$$\begin{aligned}
U &= \{\delta u\}^T \left[P \int_0^L \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} \right)^T dx \right] \{u\} + \{\delta v\}^T \left[P \int_0^L \left(\frac{\partial N_v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_v}{\partial x} \right)^T dx \right] \{v\} \\
&+ \{\delta v\}^T \left[\frac{PI}{A} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 N_v}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 N_v}{\partial x^2} \right)^T dx \right] \{v\} + \{\delta v\}^T \left[M \int_0^L \left(\frac{\partial^2 N_v}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} \right)^T dx \right] \{u\} \\
&+ \{\delta u\}^T \left[M \int_0^L \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 N_v}{\partial x^2} \right)^T dx \right] \{v\} - \{\delta v\}^T \left[Q \int_0^L \left(\frac{\partial N_v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} \right)^T dx \right] \{u\} \\
&- \{\delta u\}^T \left[Q \int_0^L \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_v}{\partial x} \right)^T dx \right] \{v\}
\end{aligned} \tag{27}$$

Obtemos assim, substituindo as funções de forma e resolvendo as integrais, a partir da equação (27), a matriz de rigidez geométrica do elemento de pórtico plano considerando os termos de ordem elevada do tensor de deformação de Green-Lagrange:

$$K_g = \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & 0 & -\frac{M_1}{L} & -\frac{P}{L} & 0 & -\frac{M_2}{L} \\ 0 & \frac{6P}{5L} + \frac{12PI}{AL^3} & \frac{P}{10} + \frac{6PI}{AL^2} & 0 & -\frac{6P}{5L} + \frac{12PI}{AL^3} & \frac{P}{10} + \frac{6PI}{AL^2} \\ -\frac{M_1}{L} & \frac{P}{10} + \frac{6PI}{AL^2} & \frac{2PL}{15} + \frac{4PI}{AL} & \frac{M_1}{L} & -\frac{P}{10} - \frac{6PI}{AL^2} & -\frac{PL}{30} + \frac{2PI}{AL^2} \\ -\frac{P}{L} & 0 & \frac{M_1}{L} & \frac{P}{L} & 0 & \frac{M_2}{L} \\ 0 & -\frac{6P}{5L} - \frac{12PI}{AL^3} & -\frac{P}{10} - \frac{6PI}{AL^2} & 0 & \frac{6P}{5L} + \frac{12PI}{AL^3} & -\frac{P}{10} - \frac{6PI}{AL^2} \\ -\frac{M_2}{L} & \frac{P}{10} + \frac{6PI}{AL^2} & -\frac{PL}{30} + \frac{2PI}{AL^2} & \frac{M_2}{L} & -\frac{P}{10} - \frac{6PI}{AL^2} & \frac{2PL}{15} + \frac{4PI}{AL} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Assume-se que a uma força cortante constante, o momento fletor M e a força constante Q podem ser calculados a partir de M_1 e M_2 conforme as equações (29) e (30) respectivamente:

$$M = -M_1 + \frac{(M_1 + M_2)x}{L} \quad (29)$$

$$Q = -\frac{(M_1 + M_2)}{L} \quad (30)$$

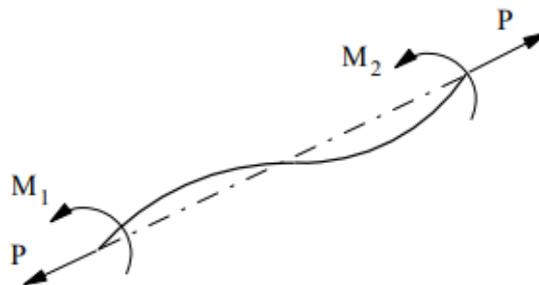


Figura 10 - Esforços resultantes iniciais

Fonte: Galvão (2000)

Vale ressaltar que na literatura é comum desconsiderar os termos de ordem elevada no tensor de deformação na matriz de rigidez geométrica, ou seja, tomando $\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$ e $\eta_{xy} = 0$, o que resulta na seguinte matriz de rigidez geométrica, conforme equação (31):

$$K_g = \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & 0 & 0 & -\frac{P}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} & 0 & -\frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} \\ 0 & \frac{P}{10} & \frac{2PL}{15} & 0 & -\frac{P}{10} & -\frac{PL}{30} \\ -\frac{P}{L} & 0 & 0 & \frac{P}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6P}{5L} & -\frac{P}{10} & 0 & \frac{6P}{5L} & -\frac{P}{10} \\ 0 & \frac{P}{10} & -\frac{PL}{30} & 0 & -\frac{P}{10} & \frac{2PL}{15} \end{bmatrix} \quad (31)$$

1.3.2 Obtenção da Carga Crítica

A análise matricial para equilíbrio estático de um sistema estrutural discretizado é obtida através da equação (4) onde K é a matriz de rigidez elástica K_e . Em problemas que envolvem a não-linearidade, introduz-se a matriz de rigidez geométrica K_g que depende da força axial. Em outras palavras, a matriz K da equação (4) assume a forma da matriz tangente K_t (34):

$$K_t d = (K_e + K_g) d = f \quad (32)$$

Nestes casos, a carga crítica (quando existe) corresponde a um ponto de bifurcação. Desse modo, pode-se dizer que há um nível de carga em que é possível ocorrer um incremento Δd sem que essa carga sofra uma modificação significativa $\Delta f = 0$, conforme equação (33) (Burgos, 2005):

$$(K_e + K_g) \Delta d = 0 \quad (33)$$

A expressão (33) também pode ser utilizada para a determinação do fator de carga crítica λ , que representa a majoração das cargas nodais f necessárias para produzir o processo de flambagem elástica. Dessa forma, convenientemente, podemos reescrever:

$$(K_e + \lambda K_g) \Delta d = 0 \quad (34)$$

A expressão acima recai em um problema de autovalor, em que para uma solução não trivial $\Delta d \neq 0$, o parâmetro λ são os autovalores e Δd são os autovetores obtidos para cada autovalor, representando os modos críticos da estrutura. Neste contexto, a obtenção da carga crítica advém da determinação dos valores de carga para os quais o determinante da matriz de rigidez tangente se anula ($\det(K_t) = 0$) (Vaz, 2011). Neste trabalho, a obtenção da carga crítica ocorre através da expansão em série de Taylor dos coeficientes da matriz rigidez tangente e o problema de autovalor passa a ser não-linear ou polinomial.

2 MÉTODOS SIMPLIFICADOS

2.1 Introdução

Quando uma estrutura é submetida a um carregamento que atua sob sua configuração geométrica deformada, é produzido um fenômeno chamado efeito de segunda ordem. Esse efeito é, geralmente, prejudicial à estabilidade e resistência da estrutura e é prudente sua consideração no seu dimensionamento, caracterizando uma análise não-linear.

Os efeitos da não-linearidade geométrica em um dimensionamento estrutural normalmente são considerados, a rigor, através de técnicas que demandam robustez de processamento computacional e tempo hábil para solução. Para o caso em que não são necessários soluções tão precisas, é mais vantajoso recorrer aos métodos simplificados em que os efeitos são considerados de forma aproximada (Chen; Lui, 1991).

Na atualidade, há uma gama de métodos simplificados para análise não-linear geométrica de estruturas. Dentre eles, destacam-se alguns, como o método P-Delta, o método do coeficiente γ_z adotado pela ABNT NBR 6118 (2014), o método da amplificação dos momentos adotado pela ABNT NBR 8800 (2018), e, por fim, o método dos Dois Ciclos Iterativos, proposto por Chen & Lui (1991) e objeto de estudo deste trabalho.

2.2 Método P-Delta

O método P-Delta ou método da Força Lateral Equivalente ou Fictícia é um método simplificado para análise de segunda ordem elástica que considera apenas o efeito global P- Δ em sua composição. Ele é baseado na aplicação das forças horizontais atuantes nos nós da estrutura que causam deslocamentos de 1ª ordem. As forças verticais, por sua vez, quando aplicadas nesses nós já deslocados, geram momentos de 2ª ordem que provocam novos deslocamentos horizontais e assim sucessivamente. Todos esses esforços e deslocamentos adicionais podem ser obtidos pelo método P-Delta, através de um processo iterativo, até que haja estabilização e uma nova condição de equilíbrio para a estrutura seja encontrada.

A Figura 11, adaptada por Silva (2017), ilustra as forças horizontais e verticais aplicadas nos nós. Após uma análise de 1ª ordem, obtém-se os deslocamentos relativos entre os pavimentos e, considerando a estrutura deformada, calcula-se a força cortante fictícia V'_i , no andar i , resultante do efeito P- Δ , dada pela equação (35) abaixo:

$$V'_i = \frac{\sum P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad (35)$$

Em que $\sum P_i$ é o somatório das forças normais que atuam nos pilares do andar, h_i é a altura do andar e, Δ_{i+1} e Δ_i são os deslocamentos horizontais dos níveis $i + 1$ e i , respectivamente.

Após o cálculo da força cortante fictícia V'_i , a força horizontal fictícia H'_i atuante no mesmo andar i é calculada pela equação (36):

$$H'_i = V'_{i-1} - V'_i \quad (36)$$

A força lateral fictícia H'_i é somada a outras cargas laterais previamente presentes no mesmo andar i , resultando em forças horizontais modificadas, dando início a um processo iterativo até que o deslocamento encontrado no ciclo atual seja muito próximo ou igual àquele do ciclo anterior. Quando isso ocorre, o método converge e as forças e momentos resultantes nas barras agora incluem o efeito P-Delta.

Segundo Silva (2004), Macgregor e Hage (1977) recomendaram que o processo pode ser interrompido quando o deslocamento de uma iteração não exceder em mais de 5% o da iteração anterior. No entanto, vale ressaltar que há trabalhos como o de Silva (2004) que estabelecem critérios de convergência mais rígidos como o de 1%.

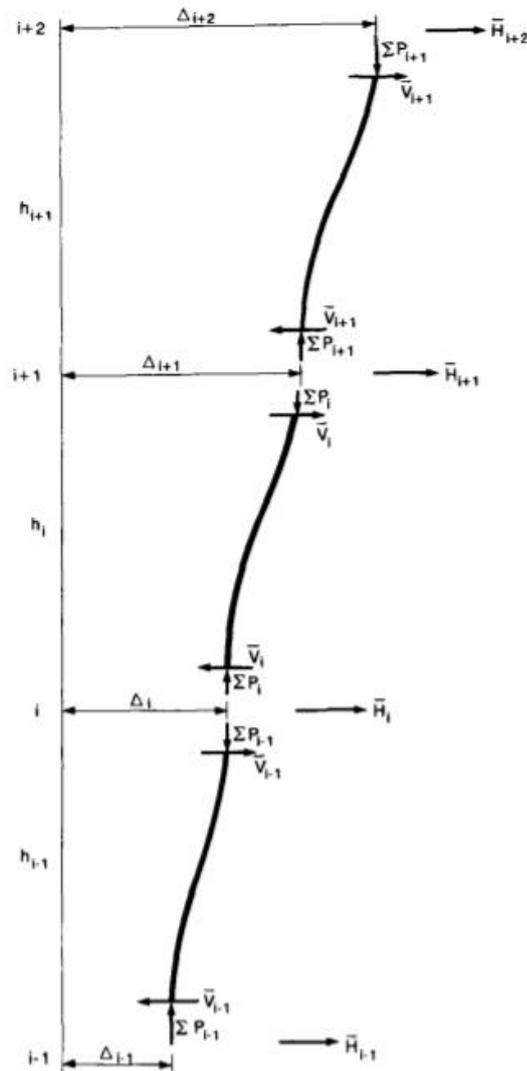


Figura 11 - Equilíbrio de forças em uma coluna isolada

Fonte: Chen e Lui (1991)

2.3 Coeficiente γ_z

Criado por Franco e Vasconcelos (1997), o coeficiente γ_z é um parâmetro capaz de avaliar a estabilidade global de uma estrutura e também de estimar os esforços de segunda ordem através da majoração dos esforços de primeira ordem. Introduzido a partir da observação de que em estruturas regulares submetidas a forças horizontais e verticais uniformemente distribuídas ao longo do eixo, as razões entre os acréscimos de deslocamentos de uma iteração e os acréscimos referentes à iteração anterior de cada passo do método P- Δ têm valores aproximadamente iguais independente de quaisquer que sejam essas iterações. Desse modo, assumindo essa

hipótese, pode-se aproximar os deslocamentos horizontais na forma de uma progressão geométrica (Lima, 2001).

Conforme o método P- Δ , o momento de segunda ordem M_{II} é dado pela soma do momento de primeira ordem M_I com o somatório do acréscimo no valor do momento ΔM_i na i -ésima iteração após n iterações necessárias para o equilíbrio, pode-se escrever:

$$M_{II} = M_I + \Delta M_1 + \Delta M_2 + \dots + \Delta M_n \quad (37)$$

Por meio do quociente entre dois termos, pode-se calcular a razão da progressão geométrica:

$$r = \frac{\Delta M_1}{M_I} = \frac{\Delta M_2}{M_1} = \dots = \frac{\Delta M_n}{M_{n-1}} \quad (38)$$

Pode-se, convenientemente, reescrever a equação (37) da seguinte forma:

$$M_{II} = M_I (1 + r + r^2 \dots + r^n) \quad (39)$$

Quando n tende ao infinito, o momento de segunda ordem pode ser reescrito como:

$$M_{II} = \frac{1}{1 - r} \quad M_I = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_1}{M_I}} \quad (40)$$

Denominado γ_z , este coeficiente pode ser entendido como a soma da progressão geométrica, cuja razão é a relação entre o acréscimo de momentos $\Delta M_{tot,d}$ e o momento de primeira ordem $M_{I_{tot,d}}$, conforme equação abaixo:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{I_{tot,d}}}} \quad (41)$$

Adotado pela ABNT NBR 6118 (2014), o coeficiente γ_z é aplicável para estruturas reticuladas com no mínimo quatro andares. Além de sua usabilidade para classificação das estruturas quanto à deslocabilidade dos nós, ele pode ser usado para majoração de momentos de primeira ordem.

2.4 Método da Amplificação dos Momentos

O método de amplificação dos momentos, ou método B_1 - B_2 consiste no cálculo do momento fletor de segunda ordem através dos fatores de majoração B_1 e B_2 sobre os momentos de primeira ordem M_{nt} e M_{lt} respectivamente:

$$M_{sd} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} \quad (42)$$

Em que M_{nt} pode ser definido como o momento fletor solicitante de cálculo na estrutura em que não se admite deslocamentos horizontais. Desse modo, é necessário a modelagem da estrutura com apoios fictícios que impeçam o deslocamento horizontal em cada andar. Por outro lado, M_{lt} pode ser definido como o momento fletor solicitante de cálculo na estrutura em que há os deslocamentos horizontais. Os momentos M_{nt} e M_{lt} são calculados de forma independente.

O B_1 é o coeficiente responsável pela consideração do efeito P- δ (local) que ocorre na estrutura tanto em forma deslocável quanto indeslocável. Já, o B_2 , por sua vez, considera apenas o efeito P- Δ (global) que ocorre na estrutura em sua forma deslocada. É importante ressaltar que os coeficientes de B_1 e B_2 também devem ser calculados de forma independente para cada um dos eixos principais de inércia.

2.4.1 Coeficiente B_1

Pode-se definir o coeficiente B_1 a partir de uma barra indeslocável submetida a uma força normal de compressão P, um carregamento distribuído $q(z)$ e a dois momentos M_1 e M_2 aplicados em sua extremidade, conforme Figura 12.

Para quaisquer valores de P, $q(z)$, M_1 e M_2 é possível garantir que a solução M_z na barra é igual ao momento de primeira ordem vezes um fator de majoração devido à carga axial de compressão P. Desse modo, segundo Chen e Lui (1991) é

necessário encontrar o valor máximo de M_z para que a peça seja dimensionada corretamente.

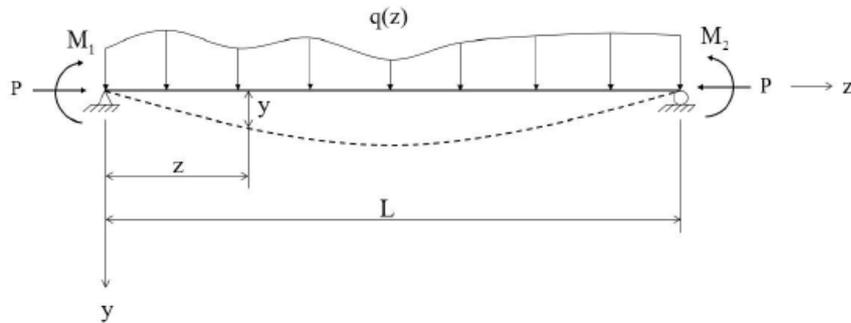


Figura 12 - Carregamento em uma barra de pórtico

Fonte: Silva (2017) adaptado de Silva (2004)

Assumindo que a deformada da viga da Figura 12 possui a forma de uma curva senoidal e que a deflexão máxima do vão ocorre exatamente no meio da barra, pode-se definir o momento de segunda ordem M_{II} em que δ é dado pela soma das deflexões de primeira e segunda ordem:

$$M_{II} = P \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (43)$$

O momento fletor na barra se relaciona com sua deflexão por meio da seguinte equação diferencial:

$$M_{II} = -EI \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (44)$$

Aplicando as condições de contorno adequadas e substituindo a equação (43) na equação (44), chega-se à equação para a deflexão de segunda ordem de viga:

$$\delta_2 = -\frac{P\delta}{EI} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (45)$$

Para uma coluna biapoada, a deflexão máxima ocorre na metade da barra ($z = \frac{L}{2}$). Substituindo $z = \frac{L}{2}$ e colocando em função da carga crítica de Euler ($P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$) a equação (45), é possível escrever a expressão para a deflexão máxima da seguinte forma:

$$\delta = \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{P_e}} \right) \delta_1 \quad (46)$$

De forma análoga, pode-se escrever o momento $M_{z,máx}$ como:

$$M_{z,máx} = M_{I,máx} + P\delta = \left(\frac{1 + \psi \frac{P}{P_e}}{1 - \frac{P}{P_e}} \right) M_{I,máx} \quad (47)$$

Em que o coeficiente ψ é definido por:

$$\psi = \frac{\delta_1 P_e}{M_{I,máx}} - 1 \quad (48)$$

Dessa forma, portanto:

$$M_{z,máx} = \left(\frac{1 + \psi \frac{P}{P_e}}{1 - \frac{P}{P_e}} \right) M_{I,máx} = B_1 M_{I,máx} \therefore B_1 = \left(\frac{1 + \psi \frac{P}{P_e}}{1 - \frac{P}{P_e}} \right) \quad (49)$$

Ao multiplicar o momento de primeira ordem pelo fator B_1 , os efeitos de segunda ordem decorrentes da deflexão do elemento serão incluídos. No caso da força P ser igual a zero, o coeficiente B_1 será igual a 1 e o momento fletor máximo ficará restrito ao momento de primeira ordem. A expressão encontrada para o coeficiente ψ é válida apenas para os casos em que o momento máximo ocorre no

meio do vão. Para os demais casos, é necessário deduzir novamente a expressão para ψ . Essa dedução é feita por Chen e Lui (1991) em sua obra.

2.4.2 Coeficiente B_2

O coeficiente B_2 é aquele que considera apenas o efeito P- Δ (global) na estrutura indeslocada. A partir da Figura 13, visualiza-se o efeito P- Δ sobre um pórtico de um andar qualquer de uma estrutura. A Figura 13 (a) representa apenas o efeito de primeira ordem e o deslocamento horizontal Δ_1 de primeira ordem. Já Figura 13 (b), por sua vez, representa o deslocamento horizontal de segunda ordem Δ .

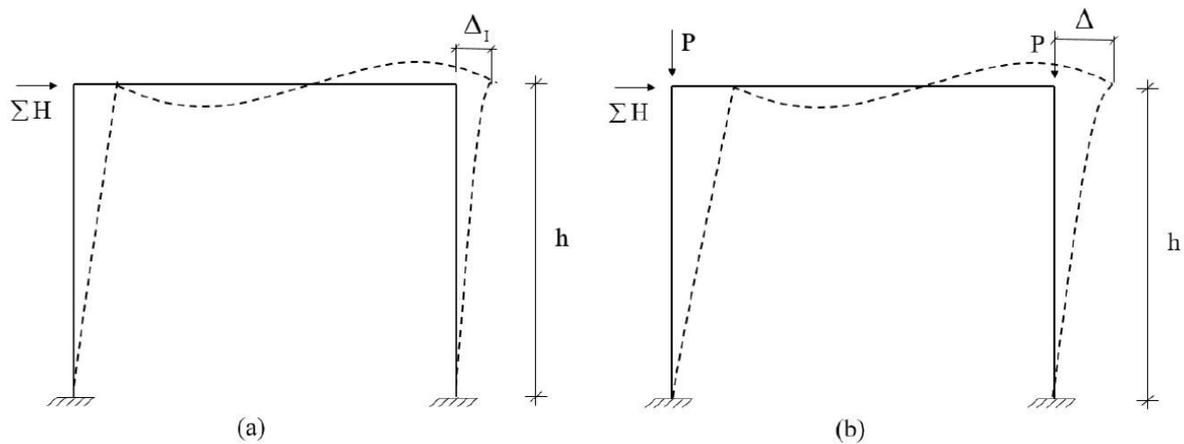


Figura 13 - Efeito P- Δ

Fonte: Silva (2017) adaptado de Chen e Lui (1991)

Pode-se escrever a igualdade da equação (50) que diz que o quociente do somatório das forças horizontais atuantes no pavimento pelo deslocamento de primeira ordem é igual ao quociente do somatório das forças horizontais acrescidas pela força lateral $\Sigma P\Delta/h$ pelo deslocamento total do andar, a partir da Figura 13, assumindo que o momento de segunda ordem que atua nas colunas oriundo do efeito P- Δ é o equivalente ao causado por uma força lateral de magnitude $\Sigma P\Delta/h$, onde h é a altura do andar:

$$\frac{\Sigma H}{\Delta_1} = \frac{\Sigma H + \Sigma P\Delta/h}{\Delta} \quad (50)$$

Rescrevendo a igualdade, pode-se chegar a seguinte expressão:

$$\Delta = \left(\frac{1}{1 - \sum P \Delta_I / \sum H h} \right) \Delta_I \quad (51)$$

Assim como em B_1 , a expressão (51) nos permite escrever o deslocamento total que considera os efeitos de segunda ordem decorrente do efeito P- Δ (global) em função do deslocamento horizontal Δ_I de primeira ordem. Analogamente, podemos reescrever a mesma equação em função dos momentos atuantes nas colunas, já que são diretamente proporcionais aos deslocamentos horizontais no andar. Dessa forma, o momento fletor final pode ser escrito:

$$M = \left(\frac{1}{1 - \sum P \Delta_I / \sum H h} \right) M_I = B_2 M_I \therefore B_2 = \left(\frac{1}{1 - \sum P \Delta_I / \sum H h} \right) \quad (52)$$

Desse modo, é definido o coeficiente B_2 . Vale ressaltar que Andrade e Vellasco (2016) sugerem que o B_2 deve corrigir o esforço em até 40% do esforço de primeira ordem, do contrário é indicado o uso de contraventamentos ou de peça com uma rigidez maior, já que a estrutura é considerada muito flexível (Silva, 2017).

2.5 Método dos Dois Ciclos Iterativos

Proposto por Chen & Lui (1991), o método dos Dois Ciclos Iterativos faz uso de duas iterações para obter esforços de segunda ordem. Nesse método, utiliza-se a seguinte equação de equilíbrio (53) em dois passos (ou dois ciclos), onde K é a matriz de rigidez do elemento, d é o vetor de deslocamentos e, por fim, f é o vetor de forças externas aplicadas na estrutura.

$$f = K d \quad (53)$$

No ciclo 1, é realizado a análise linear elástica da estrutura, em que K é a matriz de rigidez elástica K_e da equação (23). Com a obtenção dos esforços axiais obtidos na análise de primeira ordem realizada no primeiro ciclo, deve-se incluir os efeitos de

segunda ordem com o acréscimo da matriz de rigidez geométrica K_g do elemento e reanalisar a estrutura com a matriz de rigidez K atualizada. Dessa forma, conseguimos incluir os efeitos da não-linearidade da estrutura (Chen; Lui, 1991).

Vale ressaltar que neste trabalho, a matriz de rigidez geométrica K_g utilizada é uma matriz de rigidez geométrica cuja função de forma é oriunda da solução homogênea da equação diferencial do equilíbrio do elemento infinitesimal em sua configuração deformada, conforme equação (94) para os casos de compressão e equação (95) para os casos de tração.

3 ELEMENTO FINITO EXATO

3.1 Introdução

Na literatura, é comum encontrar o desenvolvimento de elementos finitos utilizando funções de forma cúbicas (Hermitianas) que são calculadas a partir do equilíbrio de elemento infinitesimal na sua configuração indeformada. Nelas, a não-linearidade geométrica em um nível infinitesimal é desconsiderada gerando funções cúbicas conforme as apresentadas nas equações (10) a (13) para um elemento de pórtico. Entretanto, em problemas não-lineares geometricamente, para reduzir a dependência da discretização da estrutura, muitos autores buscaram soluções a partir do equilíbrio de elementos infinitesimais em sua configuração deformada, levando em consideração a carga axial do elemento. E, uma vez que, as funções de forma são obtidas dessas soluções homogêneas das equações diferenciais – chamadas de “exatas” – a discretização da estrutura não é necessária.

Neste capítulo, portanto, desenvolve-se o elemento finito baseado nas funções de interpolação obtidas a partir da solução “exata” das equações diferenciais, chamado de elemento finito exato. Vale ressaltar que esse elemento é descrito nas seções seguinte e é baseado fundamentalmente nos trabalhos de Burgos e Martha (2013) e Rodrigues (2019).

3.2 Equilíbrio do Elemento Infinitesimal na Configuração Deformada

Com auxílio da Figura 14 em que é apresentado um elemento infinitesimal em sua configuração deformada, submetido a um carregamento distribuído q e a uma carga axial P constante, impõe-se o equilíbrio do elemento resultando nas seguintes expressões (54) e (55):

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -dV + q(x)dx = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = q(x) \quad (54)$$

$$\sum M_o = 0 \rightarrow dM - (V + dV) dx - P dv + q(x) \frac{dx^2}{2} = 0 \quad (55)$$

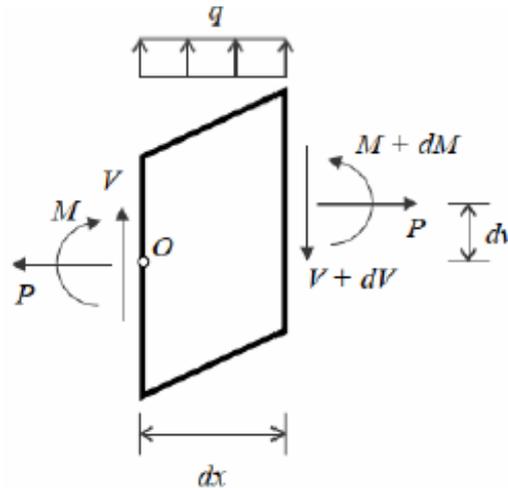


Figura 14 - Equilíbrio de um elemento infinitesimal em sua configuração deformada

Fonte: Martha e Burgos (2015)

Em que $v(x)$ é o deslocamento transversal, $V(x)$ é a componente vertical do esforço na seção transversal e $M(x)$ é o momento fletor na seção transversal. A partir da equação da linha elástica $M(x) = EI \frac{d\theta}{dx}$, obtém-se a equação diferencial (56) que descreve o problema:

$$EI \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - V(x) - P \frac{dv(x)}{dx} = 0 \rightarrow EI \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - \frac{dV(x)}{dx} - P \frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0 \quad (56)$$

Como pode-se descrever o carregamento da viga igual derivada do esforço cortante $q(x) = \frac{dV}{dx}$ e a rotação como a derivada do deslocamento transversal $\theta(x) = \frac{dv}{dx}$ – já que a teoria de flexão adotada é a de Euler-Bernoulli –, pode-se chegar à equação diferencial que rege o equilíbrio de um elemento infinitesimal em sua configuração indeformada, convenientemente expressa pela equação (57) abaixo:

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} - \frac{P}{EI} \frac{dv^2(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{EI} \quad (57)$$

A partir da solução da equação diferencial acima, pode-se deduzir a solução dos deslocamentos e rotações que serão utilizados para definir as funções de forma do elemento. Segundo Rodrigues (2019), essa solução $v(x)$ é obtida pela composição de uma solução homogênea $v_h(x)$ que corresponde a uma situação da barra sem

carregamento ($q(x) = 0$), dependendo apenas das condições de contorno; e uma solução particular $v_p(x)$ da estrutura que se relaciona com a condição de contorno com valores nulos, podendo ser interpretadas como soluções locais de engastamento de barras com carregamento, conforme equação (58):

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x) \quad (58)$$

Por um lado, considerando a parcela da solução homogênea em que o carregamento é nulo ($q(x) = 0$) na equação (57), temos a seguinte expressão:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \mu^2 \frac{dv^2(x)}{dx^2} = 0, \quad \mu = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (59)$$

A solução da equação diferencial acima é dada pela equação (60):

$$v_h(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} + c_3 x + c_4 \quad (60)$$

E, para a teoria de flexão adotada, pode-se relacionar a rotação com o deslocamento através da relação $\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx}$, conforme equação (61):

$$\theta_h(x) = \mu c_1 e^{\mu x} - \mu c_2 e^{-\mu x} + c_3 \quad (61)$$

Por outro lado, a parcela da solução particular não introduz nenhum coeficiente na solução geral. Dessa forma, a solução geral fica só a cargo da parcela da solução homogênea em que c_1 , c_2 , c_3 , e c_4 são coeficientes de uma função exponencial.

Conforme Burgos e Martha (2013), para o caso em que a força axial seja de tração $P > 0$, μ é um número real e a solução da equação diferencial pode ser descrita por funções hiperbólicas tanto para o deslocamento (62) quanto para a rotação (63):

$$v_h(x) = c_1 \sinh(\mu x) + c_2 \cosh(\mu x) + c_3 x + c_4 \quad (62)$$

$$\theta_h(x) = c_1 \mu \cosh(\mu x) + c_2 \mu \sinh(\mu x) + c_3 \quad (63)$$

De forma análoga, para o caso em que a força axial seja de compressão $P < 0$, μ é um número complexo e a solução da equação diferencial pode ser descrita por funções trigonométricas tanto para o deslocamento (64) quanto para a rotação (65):

$$v_h(x) = c_1 \text{sen}(\mu x) + c_2 \text{cos}(\mu x) + c_3 x + c_4 \quad (64)$$

$$\theta_h(x) = c_1 \mu \text{cos}(\mu x) - c_2 \mu \text{sen}(\mu x) + c_3 \quad (65)$$

Em forma matricial, podemos convenientemente escrever as equações (60) e (61) abaixo. Vale ressaltar que o mesmo processo pode ser feito com os pares de equação (62), (63) e (64), (65):

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X] \cdot \{C\}, \quad [X] = \begin{bmatrix} e^{\mu x} & e^{-\mu x} & x & 1 \\ \mu e^{\mu x} & -\mu e^{-\mu x} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \{C\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (66)$$

Assim como descrito na seção 1.3.1.1, conforme Figura 8, avaliando a equação (66) nos nós, podemos escrever:

$$[H] \cdot \{C\} = \{d\},$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v(0) \\ \theta(0) \\ v(L) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \mu & -\mu & 1 & 0 \\ e^{L\mu} & e^{-L\mu} & L & 1 \\ \mu e^{L\mu} & -\mu e^{-L\mu} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

3.3 Funções de interpolação da solução “exata”

Considerando uma não-linearidade a nível infinitesimal, como realizada na seção anterior, as funções de forma ou interpolação podem ser obtidas diretamente da solução homogênea da equação diferencial do equilíbrio de um elemento infinitesimal em sua configuração deformada, que tem a solução para o deslocamento transversal $v(x)$ e rotação $\theta(x)$ dada por funções exponenciais. Entretanto, para o

caso de forças de compressão, a solução é dada por funções trigonométricas e para o caso de forças de tração, a solução é dada por funções hiperbólicas.

Como supracitado na seção 1.3, as funções de forma interpolam os deslocamentos nodais do elemento discreto, obtendo os deslocamentos dentro do elemento da solução contínua do problema, conforme a equação (68):

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d\}, \quad [N] = \begin{bmatrix} N_2^v & N_3^v & N_5^v & N_6^v \\ N_2^\theta & N_3^\theta & N_5^\theta & N_6^\theta \end{bmatrix} \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (68)$$

Invertendo a equação (67) e substituindo em (68) temos:

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X] \cdot [H]^{-1} \cdot \{d\} \rightarrow [N] = [X] \cdot [H]^{-1} \quad (69)$$

Dessa forma, as funções de interpolação desenvolvidas a partir da solução homogênea do equilíbrio de um elemento infinitesimal na sua configuração deformada são dadas pelas expressões (70) a (77):

$$N_2^v = - \frac{e^{\mu(L+x)} + e^{\mu L} - e^{\mu x} - e^{2\mu x} - L\mu e^{\mu(L+x)} + x\mu e^{\mu(L+x)} - L\mu e^{\mu x} + x\mu e^{\mu x}}{2e^{\mu x} - 2e^{\mu(L+x)} + L\mu e^{\mu(L+x)} + L\mu e^{\mu x}} \quad (70)$$

$$N_3^v = \frac{e^{\mu L} - e^{2\mu L} - e^{\mu x} + e^{2\mu x} - e^{\mu(L+2x)} + e^{\mu(2L+x)} + L\mu e^{2\mu L} - 2x\mu e^{\mu(L+x)}}{\mu(2e^{\mu x} - 4e^{\mu(L+x)} + 2e^{\mu(2L+x)} + L\mu e^{\mu x} - L\mu e^{\mu(2L+x)})} + \frac{-L\mu e^{\mu x} - L\mu e^{2\mu x} - L\mu e^{\mu(2L+x)} + x\mu e^{\mu x} + x\mu e^{\mu(2L+x)}}{\mu(2e^{\mu x} - 4e^{\mu(L+x)} + 2e^{\mu(2L+x)} + L\mu e^{\mu x} - L\mu e^{\mu(2L+x)})} \quad (71)$$

$$N_5^v = \frac{e^{L\mu} - e^{\mu(L+x)} + e^{\mu x} - e^{2\mu x} + x\mu e^{\mu(L+x)} + x\mu e^{\mu x}}{2e^{\mu x} - 2e^{\mu(L+x)} + L\mu e^{\mu(L+x)} + L\mu e^{\mu x}} \quad (72)$$

$$N_6^v = \frac{e^{\mu L} - e^{2\mu L} - e^{\mu x} + e^{2\mu x} - e^{\mu(L+2x)} + e^{\mu(2L+x)} + L\mu e^{L\mu} - 2L\mu e^{\mu(L+x)}}{\mu(2e^{\mu x} - 4e^{\mu(L+x)} + 2e^{\mu(2L+x)} + L\mu e^{\mu x} - L\mu e^{\mu(2L+x)})} +$$

$$+ \frac{2x\mu e^{\mu(L+x)} + L\mu e^{\mu(L+2x)} - \mu x e^{\mu x} - \mu x e^{\mu(2L+x)}}{\mu(2e^{\mu x} - 4e^{\mu(L+x)} + 2e^{\mu(2L+x)} + L\mu e^{\mu x} - L\mu e^{\mu(2L+x)})} \quad (73)$$

$$N_2^\theta = -\frac{\mu(e^{\mu(L+x)} - e^{\mu L} + e^{\mu x} - e^{2\mu x})}{2e^{\mu x} - 2e^{\mu(L+x)} + L\mu e^{\mu(L+x)} + L\mu e^{\mu x}} \quad (74)$$

$$N_3^\theta = \frac{e^{2\mu L} - e^{\mu L} - 2e^{\mu(L+x)} + e^{\mu x} + e^{2\mu x} - e^{\mu(L+2x)} + e^{\mu(2L+x)} - L\mu e^{2L\mu} - L\mu e^{2x\mu}}{2e^{\mu x} - 4e^{\mu(L+x)} + 2e^{\mu(2L+x)} + L\mu e^{\mu x} - L\mu e^{\mu(2L+x)}} \quad (75)$$

$$N_5^\theta = \frac{\mu(e^{\mu(L+x)} - e^{\mu L} + e^{\mu x} - e^{2\mu x})}{2e^{\mu x} - 2e^{\mu(L+x)} + L\mu e^{\mu(L+x)} + L\mu e^{\mu x}} \quad (76)$$

$$N_6^\theta = \frac{e^{\mu L} - 2e^{\mu(L+x)} - e^{2\mu L} + e^{\mu x} - e^{2\mu x} + e^{\mu(L+2x)} + e^{\mu(2L+x)} + L\mu e^{L\mu} - L\mu e^{\mu(L+2x)}}{2e^{\mu x} - 4e^{\mu(L+x)} + 2e^{\mu(2L+x)} + L\mu e^{\mu x} - L\mu e^{\mu(2L+x)}} \quad (77)$$

Se μ é um número real ($P > 0$), a solução da equação diferencial pode ser descrita por funções hiperbólicas e as funções de interpolação ficam do seguinte modo, conforme equações (78) a (85):

$$N_2^v = \frac{\cosh(\mu x) - \cosh[\mu(L-x)] - \cosh(\mu L) + \mu(L-x)\sinh(\mu L) + 1}{2 - 2\cosh(\mu L) + \mu L\sinh(\mu L)} \quad (78)$$

$$N_3^v = \frac{\sinh(\mu x) + \sinh[\mu(L-x)] - \sinh(\mu L) + \mu(L-x)\cosh(\mu L)}{\mu[2 - 2\cosh(\mu L) + \mu L\sinh(\mu L)]} +$$

$$+ \frac{-\mu L\cosh[\mu(L-x)] + \mu x}{\mu[2 - 2\cosh(\mu L) + \mu L\sinh(\mu L)]} \quad (79)$$

$$N_5^v = \frac{-\cosh(\mu x) + \cosh[\mu(L-x)] - \cosh(\mu L) + \mu(L-x)\sinh(\mu L) + 1}{2 - 2\cosh(\mu L) + \mu L\sinh(\mu L)} \quad (80)$$

$$N_6^v = \frac{-\sinh(\mu x) - \sinh[\mu(L-x)] + \sinh(\mu L) + \mu L \cosh(\mu x) - \mu x \cosh(\mu L)}{\mu[2 - 2\cosh(\mu L) + \mu L\sinh(\mu L)]} + \frac{-\mu(L-x)}{\mu[2 - 2\cosh(\mu L) + \mu L\sinh(\mu L)]} \quad (81)$$

$$N_2^\theta = \frac{\mu[\sinh(\mu x) - \sinh(L\mu) + \sinh[\mu(L-x)]]}{2 - 2\cosh(\mu L) + \mu L\sinh(\mu L)} \quad (82)$$

$$N_3^\theta = \frac{\cosh(\mu x) - \cosh(\mu L) - \cosh[\mu(L-x)] + \mu L\sinh[\mu(L-x)] + 1}{2 - 2\cosh(\mu L) + \mu L\sinh(\mu L)} \quad (83)$$

$$N_5^\theta = \frac{\mu[-\sinh(\mu x) + \sinh(\mu L) - \sinh[\mu(L-x)]]}{2 - 2\cosh(\mu L) + \mu L\sinh(\mu L)} \quad (84)$$

$$N_6^\theta = \frac{-\cosh(\mu x) - \cosh(\mu L) + \cosh[\mu(L-x)] + \mu L\sinh(\mu x) + 1}{2 - 2\cosh(\mu L) + \mu L\sinh(\mu L)} \quad (85)$$

Se μ é um número complexo ($P < 0$), a solução da equação diferencial pode ser descrita por funções trigonométricas e as funções de interpolação ficam do seguinte modo, conforme equações (86) a (93):

$$N_2^v = \frac{\cos(\mu x) - \cos[\mu(L-x)] - \cos(\mu L) + \mu(L-x)\sin(\mu L) + 1}{2 - 2\cos(\mu L) + \mu L\sin(\mu L)} \quad (86)$$

$$N_3^v = \frac{\sin(\mu x) + \sin[\mu(L-x)] - \sin(\mu L) + \mu(L-x)\cos(\mu L)}{\mu[2 - 2\cos(\mu L) + \mu L\sin(\mu L)]} + \quad (87)$$

$$+ \frac{-\mu L \cos[\mu(L-x)] + \mu x}{\mu[2 - 2 \cos(\mu L) + \mu L \operatorname{sen}(\mu L)]}$$

$$N_5^v = \frac{-\cos(\mu x) + \cos[\mu(L-x)] - \cos(\mu L) + \mu(L-x)\operatorname{sen}(\mu L) + 1}{2 - 2 \cos(\mu L) + \mu L \operatorname{sen}(\mu L)} \quad (88)$$

$$N_6^v = \frac{-\operatorname{sen}(\mu x) - \operatorname{sen}[\mu(L-x)] + \operatorname{sen}(\mu L) + \mu L \cos(\mu x) - \mu x \cos(\mu L)}{\mu[2 - 2 \cos(\mu L) + \mu L \operatorname{sen}(\mu L)]} +$$

$$+ \frac{-\mu(L-x)}{\mu[2 - 2 \cos(\mu L) + \mu L \operatorname{sen}(\mu L)]} \quad (89)$$

$$N_2^\theta = \frac{\mu[\operatorname{sen}(\mu x) - \operatorname{sen}(L\mu) + \operatorname{sen}[\mu(L-x)]]}{2 - 2 \cos(\mu L) + \mu L \operatorname{sen}(\mu L)} \quad (90)$$

$$N_3^\theta = \frac{\cos(\mu x) - \cos(\mu L) - \cos[\mu(L-x)] + \mu L \operatorname{sen}[\mu(L-x)] + 1}{2 - 2 \cos(\mu L) + \mu L \operatorname{sen}(\mu L)} \quad (91)$$

$$N_5^\theta = \frac{\mu[-\operatorname{sen}(\mu x) + \operatorname{sen}(\mu L) - \operatorname{sen}[\mu(L-x)]]}{2 - 2 \cos(\mu L) + \mu L \operatorname{sen}(\mu L)} \quad (92)$$

$$N_6^\theta = \frac{-\cos(\mu x) - \cos(\mu L) + \cos[\mu(L-x)] + \mu L \operatorname{sen}(\mu x) + 1}{2 - 2 \cos(\mu L) + \mu L \operatorname{sen}(\mu L)} \quad (93)$$

Por fim, vale ressaltar que se considerarmos o elemento infinitesimal em sua configuração indeformada as respectivas funções de formas são as da equação (10) a (13), ou seja, são funções de forma cúbicas.

3.4 Matriz de Rigidez Tangente

A partir da mesma abordagem utilizada na seção 1.3.1.1 para definir a matriz de rigidez elástica, pode-se definir a matriz de rigidez tangente nesta seção, que é obtida da derivada das funções de interpolação das soluções “exatas”. Vale ressaltar que os componentes axiais da matriz de rigidez tangente são os mesmos da matriz da equação (23). Utilizando as funções de forma das equações (70) a (77), em sua configuração exponencial, os coeficientes da matriz de rigidez tangente (94) são:

$$\begin{aligned}
 k_{22} = k_{55} = -k_{25} = k_{52} &= \frac{12EI (\mu L)^3 (e^{\mu L} + 1)}{L^3 12D} \\
 k_{23} = k_{26} = k_{32} = -k_{35} = -k_{53} = -k_{56} = k_{62} = -k_{65} &= \frac{6EI (\mu L)^2 (e^{\mu L} - 1)}{L^3 6D} \\
 k_{33} = k_{66} &= \frac{4EI \mu L [\mu L (e^{2\mu L} + 1) - (e^{2\mu L} - 1)]}{L 4D (e^{\mu L} - 1)} \\
 k_{36} = k_{63} &= \frac{2EI \mu L [(e^{2\mu L} + 1) - 2\mu L e^{\mu L}]}{L 2D (e^{\mu L} - 1)} \\
 D = \mu L (e^{\mu L} + 1) - 2(e^{\mu L} - 1), \quad \mu &= \sqrt{\frac{P}{EI}}
 \end{aligned} \tag{94}$$

Em termos de funções hiperbólicas (95), para o caso de μ ser um número real ($P > 0$), temos:

$$\begin{aligned}
 k_{22} = k_{55} = -k_{25} = k_{52} &= \frac{12EI (\mu L)^3 \sinh(\mu L)}{L^3 12D} \\
 k_{23} = k_{26} = k_{32} = -k_{35} = -k_{53} = -k_{56} = k_{62} = -k_{65} &= \frac{6EI (\mu L)^2 (\cosh(\mu L) - 1)}{L^3 6D} \\
 k_{33} = k_{66} &= \frac{4EI \mu L [\mu L \cosh(\mu L) - \sinh(\mu L)]}{L 4D}
 \end{aligned} \tag{95}$$

$$k_{36} = k_{63} = \frac{2EI \mu L [\sinh(\mu L) - \mu L]}{L \cdot 2D}$$

$$D = 2 - 2 \cosh(\mu L) + \mu L \sinh(\mu L), \quad \mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Já em termos de funções trigonométricas (96), para o caso de μ ser um número complexo ($P < 0$), temos:

$$k_{22} = k_{55} = -k_{25} = k_{52} = \frac{12EI (\mu L)^3 \sin(\mu L)}{L^3 \cdot 12D}$$

$$k_{23} = k_{26} = k_{32} = -k_{35} = -k_{53} = -k_{56} = k_{62} = -k_{65} = \frac{6EI (\mu L)^2 (\cos(\mu L) - 1)}{L^3 \cdot 6D}$$

$$k_{33} = k_{66} = \frac{4EI \mu L [\mu L \cos(\mu L) - \sin(\mu L)]}{L \cdot 4D} \quad (96)$$

$$k_{36} = k_{63} = \frac{2EI \mu L [\sin(\mu L) - \mu L]}{L \cdot 2D}$$

$$D = 2 - 2 \cos(\mu L) + \mu L \sin(\mu L), \quad \mu = \sqrt{\frac{-P}{EI}}$$

A matriz de rigidez tangente pode também ser escrita na forma de aproximação em série de Taylor. Desse modo, a matriz de rigidez tangente em expansão da série de Taylor até μ^{10} (P^5) (97) é dada por:

$$\begin{aligned} k_{22} = k_{55} = -k_{25} = k_{52} = & \\ = \frac{12EI}{L^3} + \frac{6P}{5L} - \frac{P^2 L}{700EI} + \frac{P^3 L^3}{63000E^2 I^2} - \frac{37P^4 L^5}{194040000E^3 I^3} + \frac{59P^5 L^7}{25225200000E^4 I^4} & \\ k_{23} = k_{26} = k_{32} = -k_{35} = -k_{53} = -k_{56} = k_{62} = -k_{65} = & \\ = \frac{6EI}{L^3} + \frac{P}{10} - \frac{P^2 L}{1400EI} + \frac{P^3 L^4}{126000E^2 I^2} - \frac{37P^4 L^6}{388080000E^3 I^3} + \frac{59P^5 L^8}{50450400000E^4 I^4} & \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned}
 k_{33} = k_{66} = & \\
 = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} - \frac{11P^2L^3}{6300EI} + \frac{P^3L^5}{27000E^2I^2} - \frac{509P^4L^7}{582120000E^3I^3} + \frac{14617P^5L^9}{681080400000E^4I^4} \\
 k_{36} = k_{63} = & \\
 = \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} + \frac{13P^2L^3}{12600EI} - \frac{11P^3L^5}{378000E^2I^2} + \frac{907P^4L^7}{1164240000E^3I^3} - \frac{27641P^5L^9}{1362160800000E^4I^4}
 \end{aligned}$$

3.5 Cargas Nodais Equivalentes

Segundo Martha (2017), as cargas nodais equivalentes são correspondentes às reações de engastamento perfeito dos elementos de barra carregados – com alguma solicitação externa em seu interior – com sentidos invertidos. Tanto para o método da rigidez direta, quanto no método dos elementos finitos, as solicitações externas que atuam no modelo estrutural devem ser transformadas em cargas nodais combinadas, pois a discretização desse modelo estrutural está fundamentada na representação do comportamento do modelo contínuo por parâmetros de rigidez e carregamentos nos nós, que são os pontos de discretização.

As forças nodais equivalentes são calculadas utilizando as mesmas funções de interpolação utilizadas para definir as matrizes de rigidez, através da equação (98) abaixo. Desse modo, fica claro que dependendo da abordagem utilizada para definir as funções de forma, as cargas nodais equivalentes “mudam”.

$$\{f\} = \int_S [N]^T \{q\} dS \quad (98)$$

Em que $\{f\}$ é o vetor de cargas nodais equivalentes, $[N]$ é a matriz com as funções de forma e $\{q\}$ é o vetor com o carregamento aplicado no elemento estrutural.

Todas as formulações para a determinação das cargas nodais equivalentes, tanto para a consideração da solução do problema de equilíbrio de um elemento infinitesimal em sua configuração indeformada – em que geram funções de formas cúbicas – quanto para a consideração da solução do problema de equilíbrio de um

elemento infinitesimal em sua configuração deformada, são encontradas nas obras de Rodrigues (2019) e Burgos e Martha (2013).

3.6 Exemplos comparativos entre as funções de interpolação “exatas” e cúbicas utilizando o Método dos Dois Ciclos Iterativos

Neste item, compara-se as duas abordagens em elementos finitos utilizando as funções de interpolação “exata” e a cúbica (Hermitiana). Para esses exemplos de aplicação, utiliza-se o Método dos Dois Ciclos Iterativos, em que o primeiro ciclo é realizado utilizando a matriz de rigidez elástica, conforme equação (23), em que se obtém os esforços de primeira ordem. Em seguida, para o segundo ciclo, aplica-se os esforços na matriz de rigidez tangente “exata”, conforme equação (95) ou (96), para obter os deslocamentos e esforços de segunda ordem. Por fim, compara-se os resultados de deslocamentos, rotação e momento para cada função de forma (“exata” e cúbica) com a solução analítica do elemento. É importante pontuar que para todos os exemplos estudados, no segundo ciclo, é considerado que o comprimento L original da barra mesmo após a aplicação da carga axial.

3.6.1 Viga biapoiada com momento de mesmo sentido nas extremidades

Nesta análise, estuda-se a viga biapoiada com momento de mesmo sentido nas extremidades, conforme Figura 15. A coluna possui comprimento $L = 6m$, módulo de elasticidade do material $E = 10^8 kN/m^2$, $I = 10^{-5} m^4$, carga $P = 1000kN$, $\alpha = 0,01$ e $EA = 10^6 kN$.

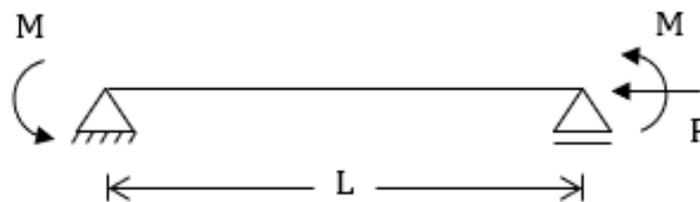


Figura 15 - Viga biapoiada com momento de mesmo sentido nas extremidades

Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados analíticos característicos para a viga estudada são $\theta(0) = \theta(6) = -0,4409 \text{ rad}$ e $M(0) = -M(6) = 60 \text{ kNm}$, que por sua vez, são oriundos da equação analítica (99) que descreve o deslocamento da barra a seguir (o momento fletor é obtido a partir da segunda derivada de $v(x)$):

$$v(x) = \alpha L \left\{ \cos(\mu x) + \frac{2x}{L} - \frac{\text{sen}(\mu x) [\cos(\mu L) + 1]}{\text{sen}(\mu L)} - 1 \right\} \quad (99)$$

Aplicando o método dos Dois Ciclos Iterativos, obtém-se os vetores de esforços f_{II} e deslocamentos d_{II} de segunda ordem.

$$d_{II} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,4409 \\ 0 \\ 0 \\ -0,4409 \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ \text{rad.} \\ m \\ m \\ \text{rad} \end{matrix}; \quad f_{II} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ -20 \\ -60 \\ -1000 \\ 20 \\ 60 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{kN} \\ \text{kN} \\ \text{kNm} \\ \text{kN} \\ \text{kN} \\ \text{kNm} \end{matrix} \quad (100)$$

Observa-se que os resultados encontrados pelo método dos Dois Ciclos Iterativos na equação (100) utilizando a matriz de tangente “exata” são idênticos ao encontrados pela solução analítica considerando o efeito da carga axial no elemento. Os valores de deslocamentos transversais e rotações obtidos na equação (100) foram interpolados utilizando as funções de forma “exatas” e as funções de forma Hermitiana relativas a eles, além da solução analítica. Desse modo, conseguimos obter o gráfico que descreve o deslocamento transversal na barra:

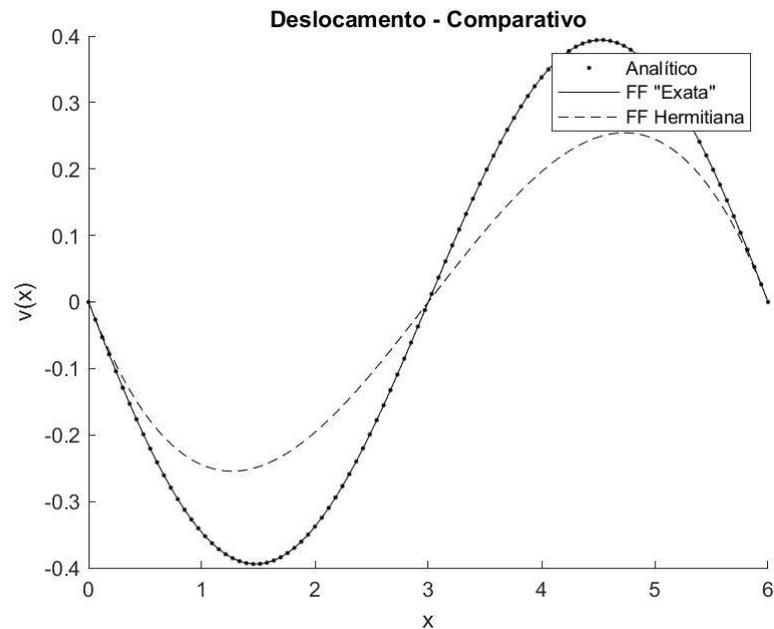


Figura 16 - Comparação do deslocamento transversal da viga biapoada com momentos de mesmo sentido

Fonte: Elaborado pelo autor

De forma análoga, derivando as funções de interpolação dos deslocamentos (ou utilizando diretamente as funções de interpolação de rotação), obtemos o gráfico que descreve as rotações na barra, conforme Figura 17. Neste caso, a rotação máxima é de $\theta_{m\acute{a}x} = \theta(3) = 0,4052 \text{ rad}$ tanto para a solução analítica, quanto para a solução utilizando as funções de forma “exatas”, como é de se esperar. Neste exemplo, em que a barra está discretizada em apenas 1 elemento, fica muito claro como as funções de forma Hermitianas (quadráticas no caso da rotação) acabam sendo ineficazes para encontrar a rotação máxima que fica em $x = 3$, pois não há nó nesse ponto.

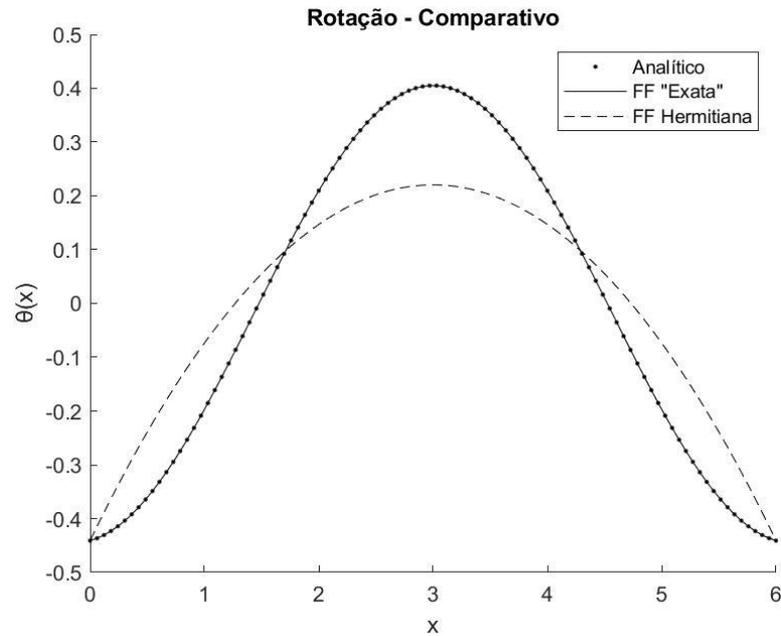


Figura 17 - Comparação da rotação da viga biapoiada com momentos de mesmo sentido

Fonte: Elaborado pelo autor

E, por fim, o momento fletor que é calculado utilizando as funções de interpolação correspondentes (segunda derivada das funções de deslocamento). Nota-se que no caso das funções Hermitianas não é captado o efeito $P-\delta$ do braço de alavanca gerado por $v(x)$, o que fornece uma interpolação linear para momento fletor. Já as funções "exatas" já incorporam naturalmente tal efeito.

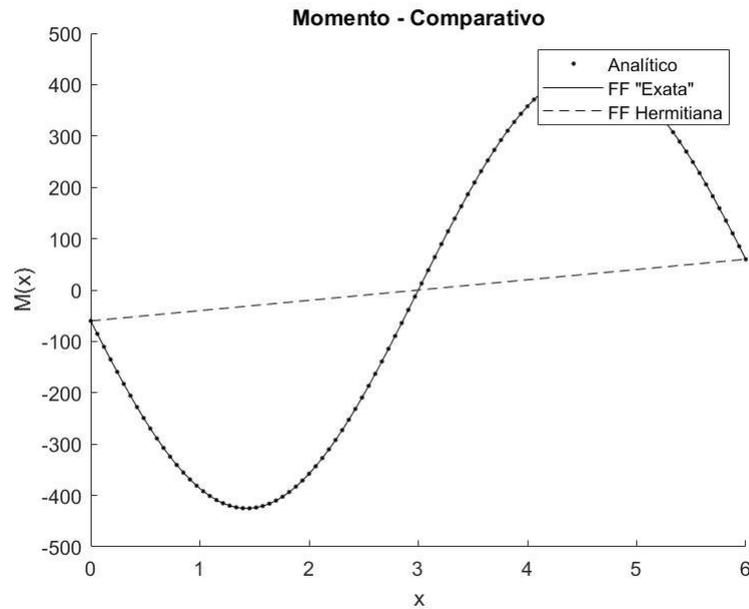


Figura 18 - Comparação do momento fletor da viga biapoiada com momentos de mesmo sentido

Fonte: Elaborado pelo autor

3.6.2 Pórtico de Roorda

Nesta análise, estuda-se o pórtico de Roorda com um momento no apoio da esquerda, conforme Figura 19. Cada barra do pórtico possui comprimento $L = 6m$, módulo de elasticidade do material $E = 10^8 kN/m^2$, $I = 10^{-5} m^4$, carga $P = 1000kN$ e $EA = 10^6 kN$.

Os resultados analíticos característicos para a primeira barra do pórtico estudada são de $\theta(0) = -0,0659 rad$, $\theta(6) = -0,0802 rad$, $M(0) = 60 kNm$ e $M(6) = 40,11 kNm$, que por sua vez, são oriundos da equação analítica (101) que descreve o deslocamento da barra abaixo:

$$v(x) = \alpha L \frac{[3\mu L \text{sen}(\mu L) + (3 + \mu^2 L^2) \text{cos}(\mu L) - 3]}{[3\mu L \text{cos}(\mu L) - (3 + \mu^2 L^2) \text{sen}(\mu L)]} \left[\text{sen}(\mu x) - \text{sen}(\mu L) \frac{x}{L} \right] + \alpha \{x[1 - \text{cos}(\mu L)] - L[1 - \text{cos}(\mu x)]\} \quad (101)$$

Aplicando o Método dos Dois Ciclos Iterativos, obtém-se os vetores de esforços f_{II} e deslocamentos d_{II} de segunda ordem (102):

$$d_{II} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0659 \\ -0,006 \\ 0 \\ -0,0802 \end{Bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ rad. \\ m \\ m \\ rad \end{matrix}, \quad f_{II} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ -3,3 \\ 60 \\ -1000 \\ 3,3 \\ 40,11 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \\ kN \\ kN \\ kNm \end{matrix} \quad (102)$$

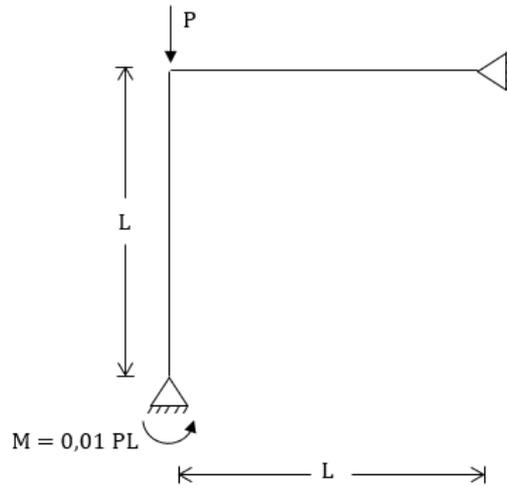


Figura 19 - Pórtico de Roorda

Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que os resultados encontrados pelo Método dos Dois Ciclos Iterativos na equação (102) utilizando a matriz de tangente “exata” são idênticos ao encontrados pela solução analítica considerando o efeito da carga axial no elemento. Os valores de deslocamentos transversais e rotações obtidos na equação (102) foram interpolados utilizando as funções de forma “exatas” e as funções de forma Hermitiana relativas a eles, além da solução analítica. Desse modo, conseguimos obter o gráfico que descreve o deslocamento transversal na barra:

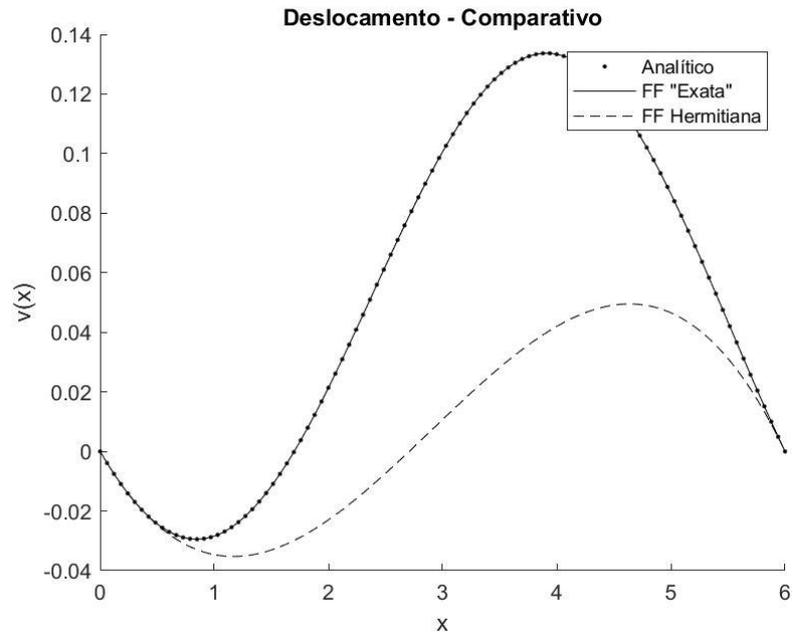


Figura 20 - Comparação do deslocamento transversal do pórtico de Roorda

Fonte: Elaborado pelo autor

De forma análoga, derivando as equações dos deslocamentos, obtemos o gráfico que descreve as rotações na barra:

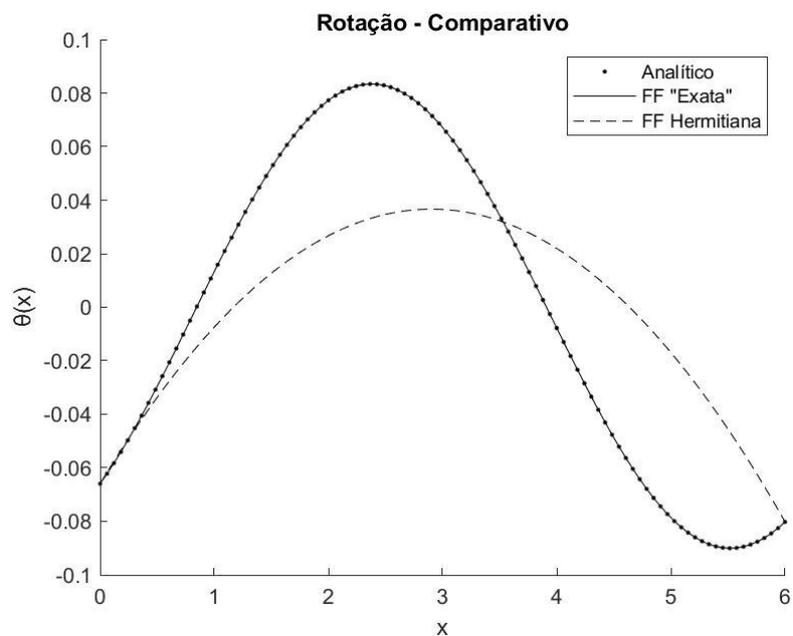


Figura 21 - Comparação da rotação do pórtico de Roorda

Fonte: Elaborado pelo autor

E, por fim, o momento fletor que é calculado utilizando as funções de interpolação para o deslocamento axial e o efeito P- Δ do braço de alavanca gerado por $v(x)$:

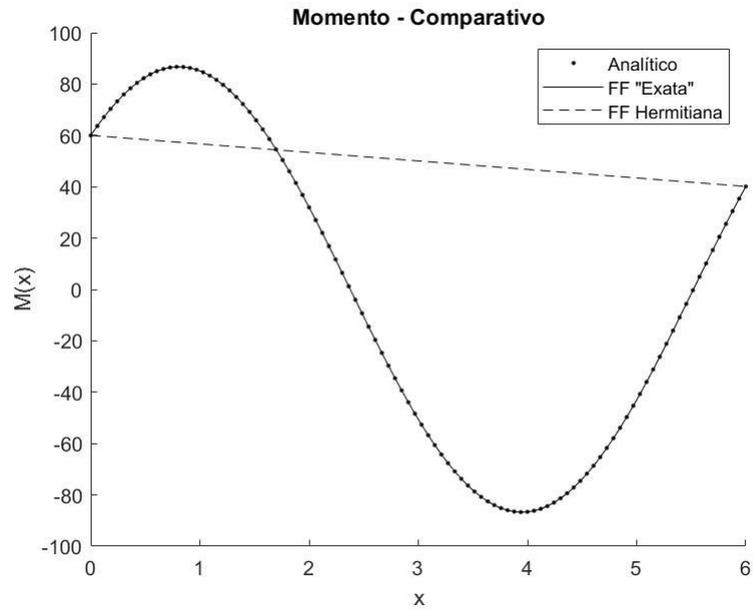


Figura 22 - Comparação do momento fletor do pórtico de Roorda

Fonte: Elaborado pelo autor

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

4.1 Introdução

Para satisfazer os objetivos propostos, as análises foram divididas em duas partes. Na primeira parte, é realizada uma análise de segunda ordem utilizando o elemento “exato” e o Método dos Dois Ciclos Iterativos para obtenção das curvas de equilíbrio de cada elemento estudado. Já na segunda, são obtidas as cargas críticas dos elementos de pórtico e elementos clássicos de coluna utilizando a expansão em série de Taylor. Vale ressaltar que todas as análises foram realizadas com o auxílio do software MATLAB.

4.2 Análise de segunda ordem pelo Método dos Dois Ciclos Iterativos utilizando o elemento “exato”

Neste item, foram analisados 5 tipos de estruturas: viga engastada e livre, viga biapoiada com momentos de sentidos opostos nas extremidades, pórtico de Roorda, pórtico biengastado com modos simétrico e assimétrico.

Para validar a eficácia do Método dos Dois Ciclos Iterativos para análise de segunda ordem, obtém-se as curvas de equilíbrio de cada elemento utilizando o método (*TwoCycle*) e seus resultados são comparados com as soluções analíticas presentes na literatura e a análise pelo programa *Mastan2 v3.5* (McGuire et al., 2000). No *software Mastan2 v3.5*, o elemento finito utilizado é o oriundo das funções de interpolação Hermitianas, conforme equação (23). O programa *Mastan2 v3.5* não considera os termos de ordem elevada no tensor de deformação de Green-Lagrange, ou seja, a matriz de rigidez geométrica é a mesma da equação (31). Pelo *software*, as análises são realizadas com as barras modeladas com a discretização mínima de 1 elemento e, também, com a discretização em 4 elementos utilizando o método *predictor-corrector* para a análise não-linear geométrica.

4.2.1 Viga engastada e livre

Nesta análise, estuda-se a viga engastada e livre, conforme Figura 23. A viga possui comprimento $L = 6m$, módulo de elasticidade do material $E = 10^8 kN/m^2$, $I =$

$10^{-5} m^4$, $\alpha = 0,01$ e $EA = 10^6 kN$. A carga crítica de Euler para a viga engastada e livre neste caso é de $P_{crit} = \pi^2 EI / (2L)^2 = 68,54 kN$.

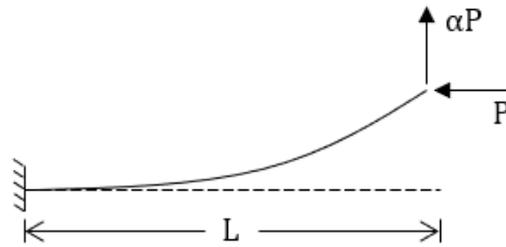


Figura 23 - Viga engastada e livre

Fonte: Elaborado pelo autor

A expressão analítica (103) e os resultados para os caminhos de equilíbrio do elemento são apresentados na Figura 24:

$$v(L) = \alpha L \left[\frac{\tan(\mu L)}{\mu L} - 1 \right] \quad (103)$$

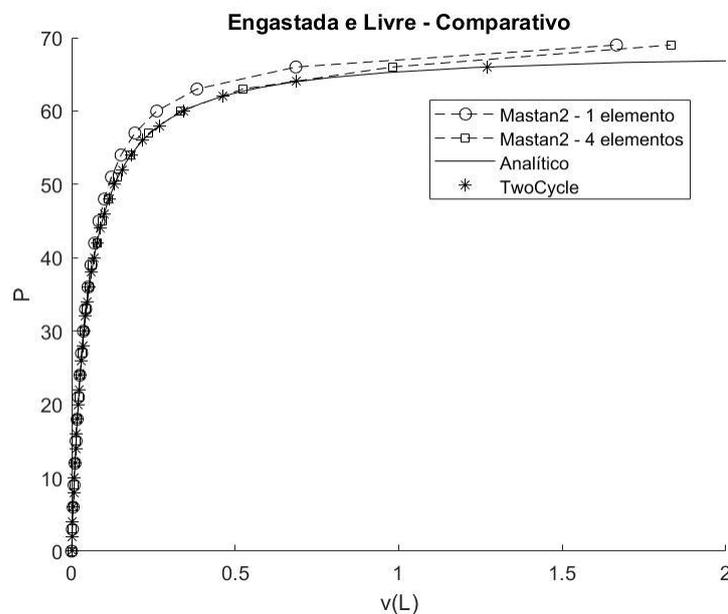


Figura 24 - Caminho de equilíbrio para viga engastada e livre

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando as curvas de equilíbrio, pode-se observar que a análise de segunda ordem pelo Método dos Dois Ciclos Iterativos (*TwoCycle*) é equivalente à da solução analítica, isso ocorre pois o elemento utilizado para a análise de segunda ordem pelo *TwoCycle* é oriundo da solução “exata” das equações diferenciais. Além disso, as análises pelo *Mastan2* apresentaram resultados muito próximos do analítico, principalmente, com a barra discretizada em 4 elementos. É interessante notar que pela análise numérica “tradicional” do *Mastan2* seria necessário a discretização em mais alguns elementos para obter o resultado “exato” como o do elemento proposto.

4.2.2 Viga biapoiada com momento de sentidos opostos nas extremidades

Nesta análise, estuda-se a viga biapoiada com momento de sentidos opostos nas extremidades, conforme Figura 25. A viga possui comprimento $L = 10\text{ m}$, módulo de elasticidade do material $E = 10^8\text{ kN/m}^2$, $I = 10^{-5}\text{ m}^4$, $\alpha = 0,01$ e $EA = 10^6\text{ kN}$. A carga crítica de Euler para a viga engastada e livre neste caso é de $P_{crit} = \pi^2 EI / L^2 = 98,70\text{ kN}$.

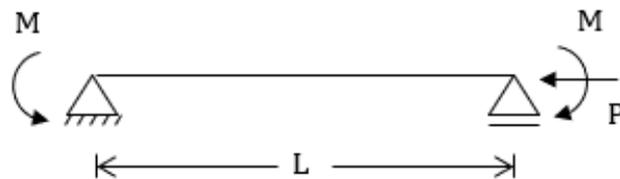


Figura 25 - Viga biapoiada com momento de sentidos opostos nas extremidades

Fonte: Elaborado pelo autor

A expressão analítica (104) e os resultados para os caminhos de equilíbrio são apresentados na Figura 26.

$$\theta(L) = \frac{\alpha\mu L[\cos(\mu L) - 1]}{\text{sen}(\mu L)} \quad (104)$$

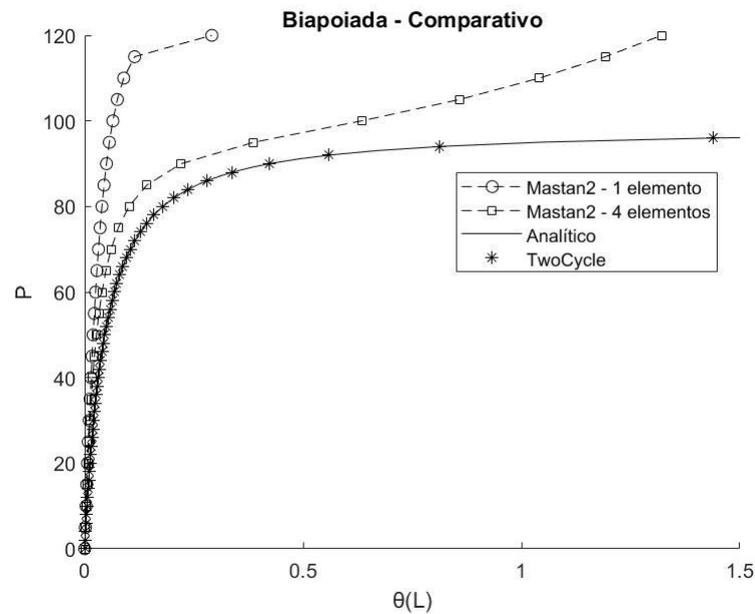


Figura 26 - Caminho de equilíbrio para viga biapoiada

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando as curvas de equilíbrio, pode-se observar que a análise de segunda ordem pelo Método dos Dois Ciclos Iterativos (*TwoCycle*) é equivalente à da solução analítica, pelo mesmo motivo da análise anterior. Por outro lado, as análises pelo *Mastan2* apresentaram resultados muito ruins comparados com o analítico. A carga crítica da análise com 1 elemento alcança um valor de $P_{crit} = 120kN$, ou seja, tem um erro de 21,58% da carga analítica, sendo necessário uma modelagem mais discretizada para se tornar confiável. Já a discretização em 4 elementos melhora bastante a performance, mas ainda fica aquém da performance da análise pelo Método dos Dois Ciclos Iterativos.

4.2.3 Pórtico de Roorda

Nesta análise, estuda-se o pórtico de Roorda, conforme Figura 27. Diferentemente do pórtico de Roorda “tradicional”, conforme apresentado na Figura 27, este possui um apoio de primeiro gênero na direita. Cada barra do pórtico possui comprimento $L = 6 m$, módulo de elasticidade do material $E = 10^8 kN/m^2$, $I = 10^{-5} m^4$, $H = 0,01P$ e $EA = 10^6 kN$. A carga crítica de Euler para o pórtico de Roorda

neste caso é de $P_{crit} = 0,144 \pi^2 EI / L^2 = 39,48 \text{ kN}$, conforme apresentado por Bazant e Cedolin (2010) em sua obra.

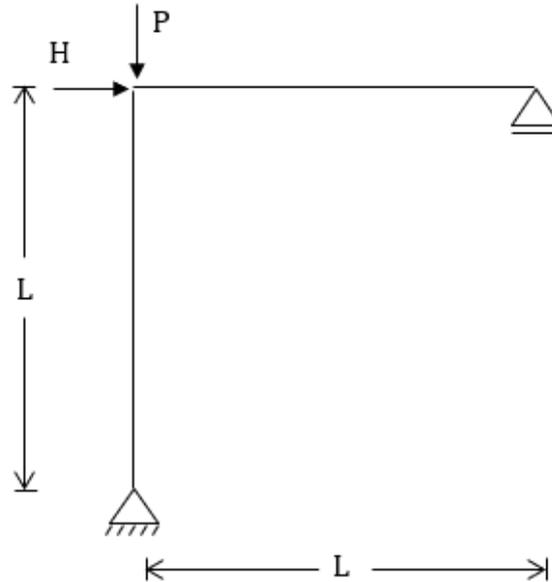


Figura 27 - Pórtico de Roorda

Fonte: Elaborado pelo autor

A expressão analítica (105) e os resultados para os caminhos de equilíbrio do elemento são apresentados na Figura 28 a seguir:

$$v(L) = \frac{\alpha L \cos(\mu L)}{EI} - \frac{\alpha L}{EI} - \alpha L + \frac{\alpha \text{sen}(\mu L) [3EI + L^2 \mu^2 \cos(\mu L) + 3\mu L \text{sen}(\mu L)]}{\mu EI [3 \cos(\mu L) - \mu L \text{sen}(\mu L)]} \quad (105)$$

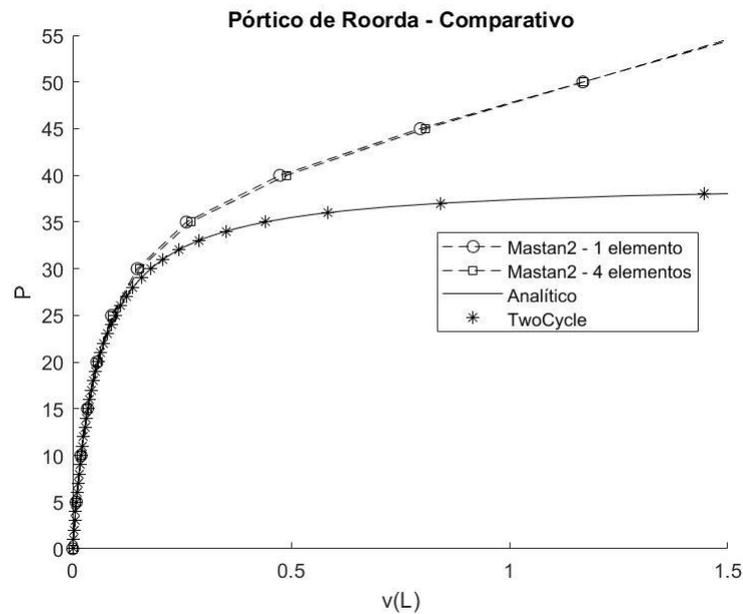


Figura 28 - Caminho de equilíbrio para o pórtico de Roorda

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim como nos exemplos anteriores, analisando as curvas de equilíbrio, pode-se observar que a análise de segunda ordem pelo Método dos Dois Ciclos Iterativos (*TwoCycle*) é equivalente à da solução analítica. Por outro lado, as análises pelo *Mastan2* apresentaram resultados bem aquém quando comparados com o analítico. É interessante notar que para este caso do pórtico de Roorda, a modelagem pelo *Mastan2* considerando 1 e 4 elementos apresentam uma performance praticamente idênticas e igualmente ruins comparadas com o analítico.

4.2.4 Pórtico Biengastado de Modo Simétrico

Nesta análise, estuda-se o pórtico de biengastado de modo simétrico, ou seja, sem deslocabilidade, conforme Figura 29. Cada barra do pórtico possui comprimento $L = 6\text{ m}$, módulo de elasticidade do material $E = 10^8\text{ kN/m}^2$, $I = 10^{-5}\text{ m}^4$, $M = 0,001PL$ e $EA = 10^6\text{ kN}$. A carga crítica de Euler para o pórtico de biengastado sem deslocabilidade neste caso é de $P_{crit} = 2,5515 \pi^2 EI / L^2 = 699,51\text{ kN}$.

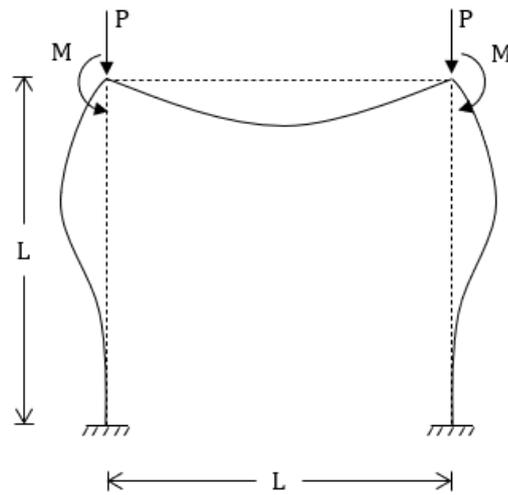


Figura 29 - Pórtico biengastado de modo simétrico

Fonte: Elaborado pelo autor

A expressão analítica (106) e os resultados para os caminhos de equilíbrio do elemento são apresentados na Figura 30 a seguir:

$$\theta(L) = \frac{\alpha\mu L^2 [2\mu \cos(\mu L) - 2\mu + \mu^2 L \text{sen}(\mu L)]}{4 \cos(\mu L) + \mu^2 L^2 \cos(\mu L) + \mu L \text{sen}(\mu L) - 4} \quad (106)$$

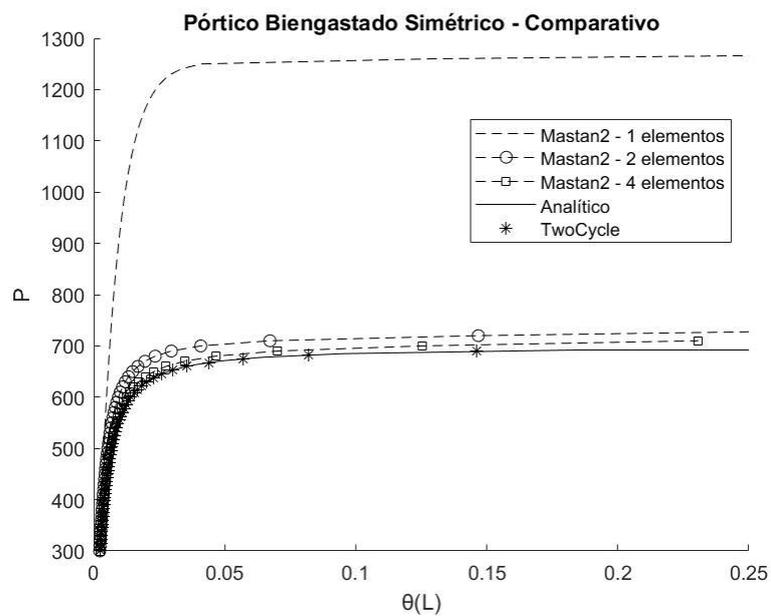


Figura 30 - Caminho de equilíbrio para o pórtico biengastado de modo simétrico

Fonte: Elaborado pelo autor

Diferentemente dos demais exemplos, a curva de equilíbrio para análise no *Mastan2* é realizada com 1, 2 e 4 elementos na modelagem. A carga crítica da análise com 1 elemento alcança uma carga crítica de $P_{crit} = 1251,56kN$, ou seja, com um erro de 44,10% da carga analítica. É interessante notar que a carga crítica com apenas 2 elementos, já apresenta uma performance muito superior a com 1 elemento e bem próxima do analítico. Já a discretização em 4 elementos, por sua vez, apresentou uma performance muito boa quando comparada ao analítico. Por fim, a análise pelo *Two Cycle* apresenta, como as demais, uma performance análoga a do analítico.

4.2.5 Pórtico Biengastado de Modo Assimétrico

Nesta análise, estuda-se o pórtico biengastado de modo assimétrico, ou seja, com deslocabilidade lateral, conforme Figura 31. Cada barra do pórtico possui comprimento $L = 6 m$, módulo de elasticidade do material $E = 10^8 kN/m^2$, $I = 10^{-5} m^4$, $H = 0,001P$ e $EA = 10^6 kN$. A carga crítica de Euler para o pórtico de biengastado sem deslocabilidade neste caso é de $P_{crit} = 0,74766 \pi^2 EI / L^2 = 204,98 kN$.

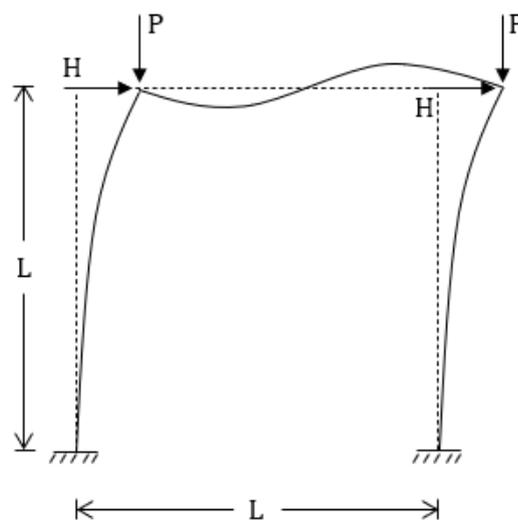


Figura 31 - Pórtico biengastado de modo assimétrico

Fonte: Elaborado pelo autor

A expressão analítica (107) e os resultados para os caminhos de equilíbrio do elemento são apresentados na Figura 32 a seguir:

$$v(L) = \frac{\alpha[12 \cos(\mu L) + L^2 \mu^2 \cos(\mu L) + 5\mu L \sin(\mu L) - 12]}{\mu[6 \sin(\mu L) + \mu L \cos(\mu L)]} \quad (107)$$

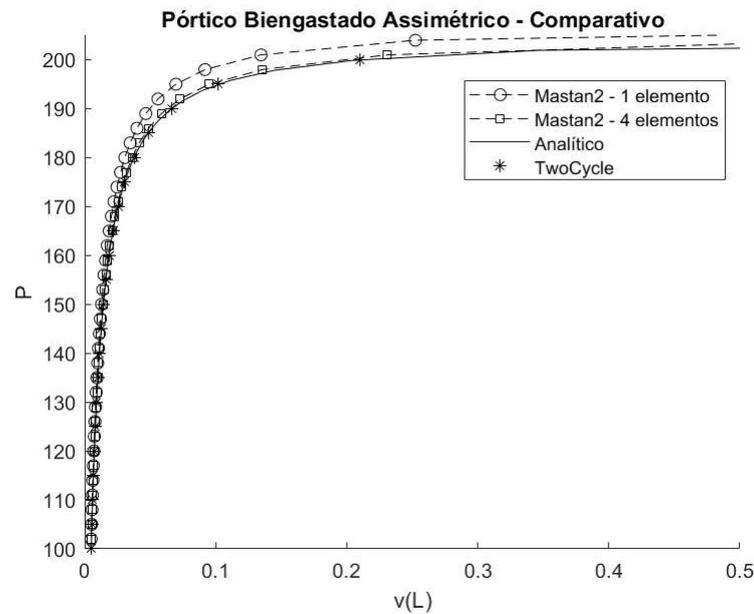


Figura 32 - Caminho de equilíbrio para o pórtico biengastado de modo assimétrico

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando as curvas de equilíbrio, pode-se observar que a análise de segunda ordem pelo Método dos Dois Ciclos Iterativos (*TwoCycle*) é equivalente à da solução analítica. Além disso, as análises pelo Mastan2 apresentaram resultados muito próximos do analítico, principalmente, com o elemento discretizado em 4 elementos que é praticamente “exato” assim como o *TwoCycle*.

4.3 Obtenção das cargas críticas utilizando a expansão em série de Taylor

Neste item, as cargas críticas foram obtidas utilizando a expansão em série de Taylor para 7 exemplos. Os 4 primeiros são as colunas clássicas geralmente encontradas na literatura para o estudo de flambagem: engastada livre, biapoada,

engastada e apoiada e biengastada. Os demais elementos são 3 pórticos: pórtico de Roorda, pórtico biengastado com deslocabilidade e pórtico biengastado sem deslocabilidade.

Para cada exemplo, foi calculada a carga crítica para cada ordem em uma série de Taylor até μ^{10} (5º termo) e comparado com o valor analítico. Nos exemplos, foram utilizadas as seguintes legendas:

- P_{crit} é a carga crítica analítica;
- P_{crit_G} é a carga crítica utilizando a matriz de rigidez geométrica discretizada em 1 elemento;
- $P_{crit_{G2}}$ é a carga crítica utilizando a matriz de rigidez geométrica discretizada em 2 elementos;
- $P_{crit_{G4}}$ é a carga crítica utilizando a matriz de rigidez geométrica discretizada em 4 elementos;
- $P_{crit_{T2}}$ é a carga crítica para aproximação em série de Taylor com 2 termos em 1 elemento;
- $P_{crit_{T3}}$ é a carga crítica para aproximação em série de Taylor com 3 termos em 1 elemento;
- $P_{crit_{T4}}$ é a carga crítica para aproximação em série de Taylor com 4 termos em 1 elemento;
- $P_{crit_{T5}}$ é a carga crítica para aproximação em série de Taylor com 5 termos em 1 elemento.

Além disso, foi calculado o percentual de erro de cada carga crítica utilizando o MEF referente à carga crítica analítica. Vale ressaltar que todas as análises foram realizadas com a utilização da função *polyeig* do software MATLAB para cálculo dos autovalores polinomiais, e que, para fins de cálculo e simplificação, foi considerado $E = I = L = 1$. Quer dizer, todas as cargas críticas apresentadas nas tabelas podem ser consideradas sendo adimensionalizadas pelo fator EI/L^2 .

4.3.1 Carga Crítica de Colunas

Para a obtenção e estudo das cargas críticas de colunas utilizando a matriz tangente com a expansão em série de Taylor até μ^{10} , utiliza-se os seguintes elementos conforme Figura 33.

Da esquerda para a direita, a primeira coluna analisada é a engastada e livre. De acordo com os resultados descritos na Tabela 1, observa-se que para esse elemento, o cálculo “tradicional” utilizando apenas a matriz de rigidez elástica e geométrica, conforme equação (34), já possui ótimos resultados bem próximos ao analítico. Outro ponto interessante, é que considerando 4 casas decimais após a vírgula no valor da carga crítica, já na expansão de Taylor de ordem 4 na matriz de rigidez tangente, o valor já “converge” para o analítico. E, na expansão de Taylor de ordem 5 na matriz de rigidez tangente, o valor é praticamente “exato”. Em nenhum outro exemplo estudado de colunas neste trabalho os resultados são tão próximos.

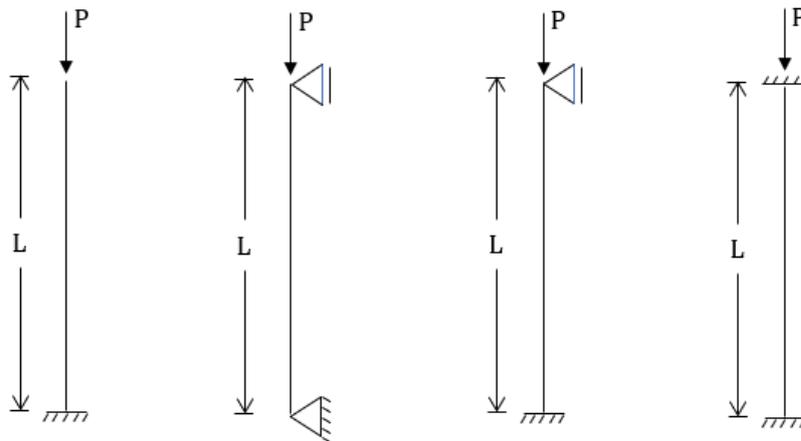


Figura 33 - Colunas clássicas para o estudo de flambagem sob diferentes condições de contorno

Fonte: Elaborado pelo autor

	P_{crit}	P_{critG}	P_{critT_2}	P_{critT_3}	P_{critT_4}	P_{critT_5}
Engastada e Livre	2,4674	2,4860	2,4685	2,4675	2,4674	2,4674
% de Erro	-	0,7500%	0,0433%	0,0027%	0,0000%	0,0000%

Tabela 1 - Resultados para a coluna engastada e livre

Já na segunda análise, para a coluna biapoiada, nota-se que na análise “tradicional” por MEF, o resultado para o cálculo de carga crítica discretizado em 2 elemento ($P_{crit_{G2}}$) não é satisfatório. Se discretizamos em 4 elementos, a fim de melhorar os resultados, temos uma carga crítica de $P_{crit_{G2}} = 9,9683$, com um erro de 1,000% em relação ao valor da carga crítica analítica, e mesmo assim os resultados utilizando a expansão em série de Taylor da matriz de rigidez tangente a partir da ordem 3 são melhores, conforme Tabela 2:

	P_{crit}	P_{crit_G}	$P_{crit_{G2}}$	$P_{crit_{T2}}$	$P_{crit_{T3}}$	$P_{crit_{T4}}$	$P_{crit_{T5}}$
Biapoiada	9,8696	12,0000	9,9683	10,2492	9,9562	9,8907	9,8748
% de Erro	-	21,5854%	1,0000%	3,8463%	0,8779%	0,2136%	0,0530%

Tabela 2 - Resultados para a coluna biapoiada

Dentre as análises de coluna, a engastada e apoiada é aquela que apresenta os piores resultados na obtenção da carga crítica por MEF de acordo com os resultados na Tabela 3. Utilizando a análise “tradicional” discretizada em 2 elementos, obtemos uma carga crítica de $P_{crit_{G2}} = 20,6701$, com um erro de 2,6221% em relação ao valor da carga crítica analítica. É interessante notar que neste caso, diferente da análise anterior, a discretização em 2 elementos, produziu resultados melhores que os utilizando a expansão em série de Taylor de ordem 4, só ficando atrás dos de ordem 5 que teve uma performance melhor.

	P_{crit}	P_{crit_G}	$P_{crit_{G2}}$	$P_{crit_{T2}}$	$P_{crit_{T3}}$	$P_{crit_{T4}}$	$P_{crit_{T5}}$
Engastada e apoiada	20,1420	30,0000	20,6701	23,0453	21,3385	20,7098	20,4390
% de Erro	-	48,9421%	2,6221%	14,4139%	5,9398%	2,8188%	1,4743%

Tabela 3 - Resultados para a coluna engastada e apoiada

Por fim, a última coluna analisada é a biengastada, os resultados descritos na Tabela 4 mostram ótimos resultados de carga crítica para as análises utilizando a expansão de Taylor. A análise “tradicional” discretizada em 4 elementos produz um resultado de carga crítica de $P_{crit_{G4}} = 39,78$, com um erro de 0,7639% em relação ao valor da carga crítica analítica. Ou seja, o resultado discretizando em 2 elementos é pior que os encontrados nas análises com a matriz de rigidez tangente utilizando a expansão em série de Taylor a partir da ordem 2. Vale notar também, que na análise de ordem 5 da expansão de Taylor o resultado é praticamente “exato”.

	P_{crit}	$P_{crit_{G2}}$	$P_{crit_{G4}}$	$P_{crit_{T2}}$	$P_{crit_{T3}}$	$P_{crit_{T4}}$	$P_{crit_{T5}}$
Biengastada	39,4784	40,000	39,78	39,5348	39,4851	39,4792	39,4785
% de Erro	-	1,3212%	0,7639%	0,1429%	0,0169%	0,0020%	0,0002%

Tabela 4 - Resultados para a coluna biengastada

4.3.2 Carga Crítica do Pórtico de Roorda

Este exemplo, assim como os demais, procura obter as cargas críticas com a aproximação em série de Taylor até μ^{10} da matriz tangente do elemento “exato” para o pórtico de Roorda, conforme figura 34:

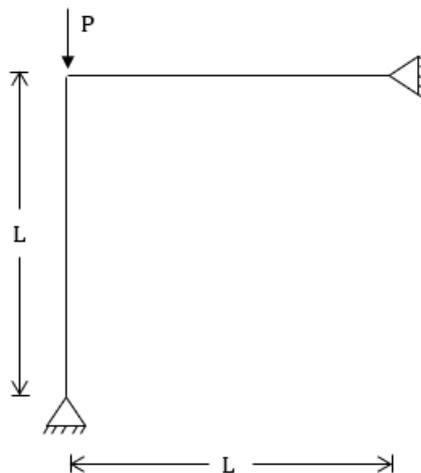


Figura 34 - Pórtico de Roorda

Fonte: Elaborado pelo autor

Para o pórtico de Roorda, a obtenção da carga crítica segundo a análise “tradicional” discretizada em 1 elemento não apresenta uma boa performance em relação ao analítico, sendo necessário uma discretização maior do elemento pelo método “tradicional” ou a utilização de mais termos na expansão em série de Taylor. Nesta análise, segundo a Tabela 5, os resultados são mais confiáveis somente a partir da ordem 4, sendo necessário mais alguns termos da expansão da série para o elemento ficar praticamente “exato” como os de ordem 5.

	P_{crit}	P_{crit_G}	$P_{crit_{T2}}$	$P_{crit_{T3}}$	$P_{crit_{T4}}$	$P_{crit_{T5}}$
Pórtico de Roorda	13,8855	18,6061	14,9600	14,2114	13,9938	13,9230
% de Erro	-	33,9969%	7,7381%	2,3471%	0,7800%	0,2698%

Tabela 5 - Resultados para o pórtico de Roorda

4.3.3 Carga Crítica do Pórtico Biengastado

Este exemplo, assim como os demais, procura obter as cargas críticas com a aproximação em série de Taylor até μ^{10} da matriz tangente do elemento “exato” para o pórtico de biengastado, conforme figura 35. Para este elemento, analisa-se dois casos: o primeiro, aquele em que há deslocabilidade do pórtico, ou seja, não-simétrico. Depois, aquele em que não há deslocabilidade do pórtico, ou seja, simétrico.

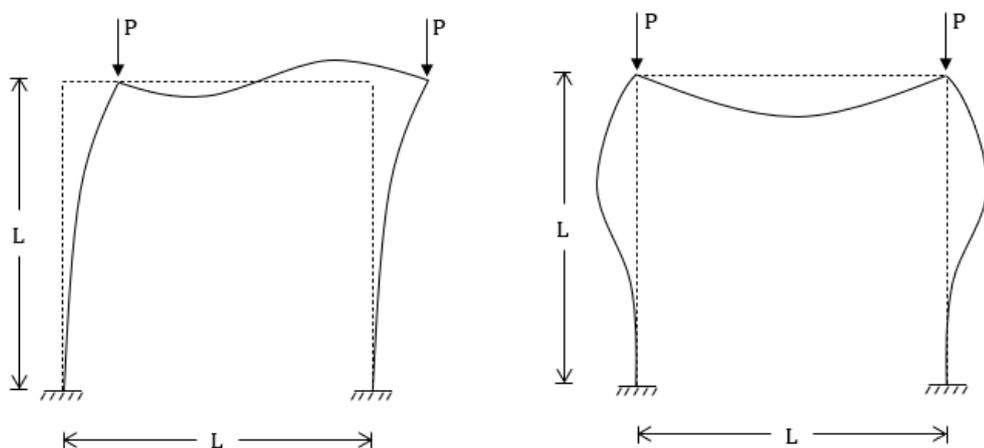


Figura 35 - Pórtico biengastado com e sem deslocabilidade

Fonte: Elaborado pelo autor

Da esquerda para a direita, conforme figura 35, o elemento analisado é o pórtico biengastado com deslocabilidade. As análises da Tabela 6 apresentam resultados bastante confiáveis, mesmo para análise “tradicional” discretizada em 1 elemento. E na análise utilizando a matriz de rigidez tangente com aproximação em série de Taylor de grau 5 produziu resultados praticamente “exatos”

	P_{crit}	P_{crit_G}	$P_{crit_{T_2}}$	$P_{crit_{T_3}}$	$P_{crit_{T_4}}$	$P_{crit_{T_5}}$
Com deslocabilidade	7,3792	7,4446	7,3871	7,3803	7,3793	7,3792
% de Erro	-	0,8873%	0,1075%	0,0159%	0,0026%	0,0004%

Tabela 6 - Resultados para o pórtico biengastado com deslocabilidade

Por fim, em contraste com a análise anterior, o pórtico biengastado sem deslocabilidade não produziu resultados tão bons, mesmo utilizando a expansão em Taylor de grau 5. Neste caso, seria necessário discretizar em muito mais elementos utilizando o método “tradicional” ou adicionar mais termos na expansão de Taylor, caso o interesse seja em uma solução numérica.

	P_{crit}	P_{crit_G}	$P_{crit_{T_2}}$	$P_{crit_{T_3}}$	$P_{crit_{T_4}}$	$P_{crit_{T_5}}$
Sem deslocabilidade	25,1675	45,0000	31,7768	28,2652	26,8230	26,1155
% de Erro	-	78,8020%	26,2614%	12,3084%	6,5780%	3,7668%

Tabela 7 – Resultados para o pórtico biengastado sem deslocabilidade

5 CONCLUSÃO

Na literatura, a busca por soluções que procuram reduzir a dependência da discretização do elemento a partir do equilíbrio de elementos infinitesimais em sua configuração deformada, levando em consideração a carga axial do elemento e outras combinações como carregamentos transversais, deformação por cisalhamento, bases elásticas com um ou mais parâmetros (deslocamento e rotação) e seções variáveis geram grandes oportunidades para valiosos estudos e aplicações de métodos.

Desse modo, este trabalho consistiu em atender dois principais objetivos: o primeiro, realizar uma análise de segunda ordem de elementos de pórtico e obter as curvas de equilíbrio pelo método simplificado dos Dois Ciclos Iterativos utilizando a matriz de rigidez tangente “exata” baseado nas funções de interpolação obtidas a partir da solução “exata” das equações diferenciais; segundo, obter cargas críticas com a utilização de uma aproximação em série de Taylor até μ^{10} da matriz de rigidez tangente “exata”. Em todos os casos, a discretização adotada foi a mínima necessária.

Quanto ao primeiro objetivo, para problemas não-lineares geometricamente, todas as análises apresentadas demonstram de forma evidente como a “combinação” da abordagem utilizando da matriz de rigidez tangente “exata”, que produz um comportamento exato da estrutura para uma discretização mínima que independe da experiência do analista, com o método simplificado para análise de segunda ordem como o Método dos Dois Ciclos Iterativos foi bastante eficiente do ponto de vista de custo computacional e tempo para resolução dos problemas de viga e pórtico até a carga crítica. Devido sua eficiência, praticidade e assertividade, sua aplicação em *software* como o MASTAN2, FTOOL, Frame Design, entre outros, pode ser de grande valia.

Além disso, é interessante pontuar que para alguns elementos, na análise pelo *software Mastan2*, como o da viga submetida a momento opostos nas extremidades e pórtico de Roorda têm performances ruins para discretização em 1 e até em 4 elementos. Nestes casos, por exemplo, para a obtenção de resultados confiáveis, seria necessário contar com a experiência do operador tanto em relação a discretização quanto aos parâmetros da análise não-linear. Por outro lado, os demais elementos, apresentaram uma performance aceitável pelo *Mastan2*, principalmente quando discretizado em 4 elementos, mas inferior quando comparado ao Método dos Dois Ciclos Iterativos utilizando o elemento proposto, que consegue reproduzir o

comportamento “exato” da estrutura, sendo a melhor opção para análise de segunda ordem neste trabalho.

Já na obtenção das cargas críticas utilizando a expansão em série de Taylor, a confiabilidade do resultado em relação ao analítico depende diretamente da condição de contorno do elemento analisado. Em outras palavras, a precisão depende da quantidade e do tipo de graus de liberdade livres que o elemento estudado apresenta. Então, para os elementos como a coluna engastada e livre, biengastada e pórtico com deslocabilidade apresentam ótimos resultados utilizando a expansão em Taylor já nos primeiros termos (2º e 3º), enquanto os demais elementos necessitam de pelo menos 4 termos para ter resultados confiáveis o que onera um pouco mais o desempenho computacional. Outro ponto interessante de notar, é que a discretização em 2 elementos dependendo da condição de contorno analisada, por ora apresenta resultados melhores que a expansão em 2 termos, por ora a expansão em 4 termos. Mas com a utilização da expansão de Taylor em 5 termos, de maneira unânime, os casos apresentam uma performance bem superior comparado com a discretização em 2 elementos.

Neste caso, portanto, é um *trade-off* do que é mais vantajoso para o desenvolvimento da análise: depender da experiência do analista para discretizar em mais elementos ou adicionar mais termos da expansão em série de Taylor, onerando o custo computacional, de modo que não há uma “resposta certa” como teria caso utilizasse a matriz de rigidez tangente “exata” como na análise de segunda ordem utilizando o Método dos Dois Ciclos Iterativos.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Para trabalhos futuros sugere-se o desenvolvimento de análises análogas as realizadas neste trabalho, mas para elementos “exatos” que considerem deformação por cisalhamento, bases elásticas ou seções variáveis, por exemplo. Ainda também a utilização de carregamentos distribuídos. Outra sugestão é a implementação de um algoritmo para encontrar a carga crítica diretamente a partir da matriz de rigidez tangente “exata”.

REFERÊNCIAS

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A base da tecnologia CAE**. São Paulo: Érica, 2000.

ANDRADE, S.; VELLASCO, P. Comportamento e projeto de estruturas de aço. 1. ed., 397 p. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro: 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios – Procedimento. Rio de Janeiro: 2008.

AREIZA-HURTADO, M., VEGA-POSADA, C.; ARISTIZÁBAL-OCHOA, J. D. Second-order stiffness matrix and loading vector of a beam-column with semirigid connections on an elastic foundation. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 131, n.7, p. 752-762, 2005.

BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of structures**. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapura, 2010.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ USA, 1996

BORGES, A. C. L. **Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados a flexo-compressão oblíqua**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, 1999.

BURGOS, R. B. **Avaliação de cargas críticas e comportamento pós-crítico inicial de pórticos planos**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2005.

BURGOS, R. B, MARTHA, L. F. Exact shape functions and tangent stiffness matrix for the buckling of beam-columns considering shear deformation. In: **XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2013, Pirenópolis, Brazil

BURGOS, R. B, MARTHA, L. F. Discussion on Possible Inconsistencies when Considering Shear Deformation in Axially Loaded Beams. In: **23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering**, 2015, Rio de Janeiro.

CHEN, W. F., LUI, E.M. **Stability Design of Steel Frames**. EUA: CRC Press, 1991.

CHIWANGA, M.; VALSANGKAR, A. J. Generalized beam element on two parameter elastic foundation. **Journal of Structural Engineering**, vol. 114, n. 6, p. 1414-1427, 1988.

COOK, R. D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**: 4th Edition. EUA: John Wiley & Sons, 2001

CRISFIELD, M. A. An arc-length method including line searches and accelerations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 19:1269–1289, 1983.

CRISFIELD, M. A. Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 22(3):751–767, 1986.

CROLL, J. G. A.; WALKER, A. C. **Elements of structural stability**. 1. ed., 223 p. New York: Wiley, 1972

DAVIS, R.; HENSHELL, R. D.; WARBURTON, G. B. A Timoshenko beam element. **Journal of Sound and Vibration**. v. 22, n. 4, p. 475-487, 1972.

DE BORST. R. **Non-linear analysis of frictional materials**. Dissertation, Delft University of Technology. 1986

DE BORST, R. Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. **Comput. Struct.** 25, 211-224. 1987

DE BORST, R.; CRISFIELD, M. A.; REMMERS, J. J. C.; VERHOUSEL, C. V. **Nonlinear finite element analysis of solids and structures**. 2. ed, 540 p. New York: Wiley, 2012

EISENBERGER, M.; YANKELEVSKY, D. Z. Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation. **Computers and Structures**, vol. 21, n. 6, p. 1355-1359, 1985.

FRIEDMAN, Z.; KOSMATKA, J. B. An improved two-node Timoshenko beam finite element. **Computers and Structures**, vol. 47, n. 3, p. 473-481, 1993.

FUINA, J.S. **Métodos de Controle de Deformações para Análise Não-Linear de Estruturas**. Dissertação de Mestrado, Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UFMG, Belo Horizonte, 2004

GALVÃO, A.S. (2000), **Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos**. Dissertação de Mestrado, UFOP, Ouro Preto.

GONÇALVES, P. B. **Análise Elástica de Estruturas Reticuladas**. Apostila com notas de aula. Rio de Janeiro, UFRJ, 2003.

GONÇALVES, P. B. **Uma introdução à instabilidade de estruturas**. Notas de aula do curso de Instabilidade das Estruturas, PUC-RJ, Agosto 1994

LIMA, J. S., 2001. **Verificações da punção e da estabilidade global de edifícios de concreto: desenvolvimento e aplicação de recomendações normativas**. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. 2ª Edição. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017.

MARTHA, L. F. **Análise matricial de estruturas com orientação a objetos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.

MACGREGOR, J. G., HAGE, S. E. **Stability Analysis and Design of Concrete Frames**. In: Journal of the Structural Division, pp 1953-1970, Outubro de 1977.

MCGUIRE, W., GALLAGHER, R.H., ZIEMIAN, R.D. **Matrix Structural Analysis**. EUA: John Wiley & Sons, 2000.

ONU, G. Shear effect in beam finite element on two-parameter elastic foundation. **Journal of Structural Engineering**, vol. 126, n. 9, p. 1104–1107, 2000.

ONU, G. Finite elements on generalized elastic foundation in Timoshenko beam theory. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 134, n. 9, p. 763-776, 2008.

PAULIN, M.M. **Estabilidade de Estruturas de Aço**. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de São Carlos, 2007

PILKEY, W. D.; KANG, W.; SCHRAMM, U. New structural matrices for a beam element with shear deformation. **Finite Elements in Analysis and Design**. v.19, p.25-44, 1995.

RAMM, E. **Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**, ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, Berlin, pp 63-89, 1981

RIKS, E., The Application of Newton's Methods to the Problems Elastic Stability. **Journal of Applied Mechanics**, v.39, pp. 1060 - 1066, 1972.

RIKS, E., An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems. **International Journal of Solids and Structures**, v.15, pp. 529 - 551, 1979.

RODRIGUES, M. A. C. **Soluções Integradas para as Formulações do Problema de Não Linearidade Geométrica**. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2019.

SCHRAMM, U.; KITIS, L.; KANG, W.; PILKEY, W. D. On the shear deformation coefficient in beam theory. **Finite Elements in Analysis and Design**. v.16, p.141-162, 1994.

SHRIMA, L. M.; GIGER M. W. Timoshenko beam element resting on two parameter elastic foundation, **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 118, n. 2, p. 280-295, 1992.

SILVA, M. F. S. **Ferramenta gráfico-interativa para o dimensionamento de pórticos planos de concreto armado considerando não linearidade geométrica**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2017.

SILVA, R. G. L. **Avaliação dos Efeitos de 2ª Ordem em Edifícios de Aço Utilizando Métodos Aproximados e Análise Rigorosa**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. 2.ed. McGraw Hill, Singapura, 1963.

TING, B. Y.; MOCKRY, E. F. Beam on elastic foundation finite element. **Journal of Structural Engineering**, vol. 110, n. 10, p. 2324-2339, 1984.

VASCONCELOS, A. C; FRANCO, M. **Avaliação Prática dos Efeitos de 2ª Ordem em Edifícios Altos** - Coletânea de Trabalhos sobre Estabilidade Global e Local das Estruturas de Edifícios. São Paulo, 1997.

VAZ, L.E. **Métodos dos elementos finitos em análise de estruturas**. ed Elsevier, Rio de Janeiro, 2011.

WEMPNER, G.A., Discrete approximations related to nonlinear theories of solids.
International Journal of Solids and Structures, v.7, pp. 1581-1599, 1971

YANG, Y.B, KUO, S.B., **Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures**.
Pentice Hall, 1994.

YANG, Y.B, SHIEH, M.S., **Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple
Critical Points**. American Institute of Aeronautics and Astronautics, v.28(12), pp.
2110-2216, 1990.

ZHAOHUA, F.; COOK, R. D. Beam elements on two-parameter elastic foundations.
Journal of Engineering Mechanics, vol. 109, n. 6, p. 1390-1402, 1983.