



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Rodrigo Araújo da Silva Vartuli

**Efeitos de dissipação e flutuação no processo de ressonância
paramétrica**

Rio de Janeiro

2007

Rodrigo Araújo da Silva Vartuli

Efeitos de dissipação e flutuação no processo de ressonância paramétrica



Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos

Rio de Janeiro

2007

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

V326e Vartuli, Rodrigo Araújo da Silva.
Efeitos de dissipação e flutuação no processo de ressonância
paramétrica / Rodrigo Araújo da Silva Vartuli. - 2007.
94 f. : il.

Orientador: Rudnei de Oliveira Ramos.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Universo inflacionário – Teses. 2. Cosmologia – Teses.
3. Teoria quântica de campos – Teses. I. Ramos, Rudnei de
Oliveira. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de
Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 524.85

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Rodrigo Araújo da Silva Vartuli

Efeitos de dissipação e flutuação no processo de ressonância paramétrica

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 25 de Abril de 2007.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. César Augusto Linhares Junior
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Sérgio Eduardo de Carvalho Eyes Jorás
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2007

DEDICATÓRIA

A minha família e aos meus amigos, que me deram todo o suporte, e a natureza, infinita fonte de inspiração.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Rudnei de Oliveira Ramos pela confiança, mesmo nos momentos mais difíceis, e pela sua paciência no decorrer do trabalho. Ao pessoal da Pós-Graduação, pelo incentivo e apoio que recebi durante minha formação.

Ao aluno e grande amigo Ricardo de Souza e Silva, que muito me ajudou em especial na utilização dos programas computacionais

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Faça as coisas o mais simples que você puder, porém não se restrinja às mais simples.

Albert Einstein

RESUMO

VARTULI, R. A. S. *Efeitos de dissipação e flutuação no processo de ressonância paramétrica*. 2007. 90 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

Nesta dissertação nós investigamos os efeitos da interação bosônica trilinear no processo de produção ressonante de partículas após a fase inflacionária. Termos de interação trilinear permitem o decaimento completo do campo de inflaton em partículas massivas, o que é necessário para a transição para era da radiação. Nós estudamos um modelo que é genérico em modelos realísticos de inflação, motivado em particular pelo modelo de inflação morna robusta, no qual um campo escalar de inflaton ϕ pode excitar um campo de boson pesado χ que então decai em um campo de bosons leves σ . Nós estudamos as consequências de dissipação e de termos de ruído estocástico nas equações de movimento naturais em modelos de inflação morna, para o fenômeno de ressonância paramétrica durante o pré-aquecimento. As equações de movimento efetivas foram obtidas onde mostrou-se a auto-consistência na presença de termos de dissipação e ruído estocástico. Encontramos soluções analíticas para tais equações de movimento. As equações exibem o fenômeno de ressonância paramétrica usual e conseqüentemente o crescimento exponencial dos modos da radiação dentro das bandas de instabilidade. Estudamos também, numericamente, a influência das flutuações e de dissipação sobre a dinâmica durante o pré-aquecimento com interações trilineares.

Palavras-chave: Cosmologia. Teoria de Campos. Universo Inflacionário. Inflação morna.

ABSTRACT

VARTULI, R. A. S. *Dissipation and fluctuation effects in the parametric resonance process*. 2007. 90 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

In this work, we investigate the effects of bosonic trilinear interactions in the process of resonant particle production after the inflationary phase. A trilinear interaction terms allow for the complete decay of the massive inflaton particles, which is necessary for the transition to radiation domination. We study a generic model for realistic inflation, motivated in particular by the warm inflation model, in which a scalar inflaton field ϕ can excite a heavy bosonic field χ which then decays into a light bosonic field σ . We study the consequences of dissipation and stochastic noise terms in the field equations of motion, typical of warm inflation models, for the phenomenon of parametric resonance during preheating, a mechanism which is generic in realistic inflation models and which leads to robust warm inflation. This mechanism involves the We study the consequences of noise and dissipation for parametric resonance during preheating. The effective equations of motion for the inflaton and the radiation field are obtained and shown to present selfconsistent noise and dissipation terms. We found analytical solutions for these equations of motion. The equations exhibit the usual parametric resonance phenomenon, allowing for exponential amplification of the radiation modes inside the instability bands. We also study, numerically, the influence of fluctuations and dissipation on the dynamics during preheating with the trilinear interactions.

Keywords: Cosmology. Field theory. Inflationary universe. Warm inflation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Bandas de instabilidade (áreas escuras) para os modos χ_k como função de k^2 e g^2	45
Figura 2 -	A evolução de χ_k como função do tempo, para o caso da ressonância estreita	46
Figura 3 -	A evolução de χ_k como função do tempo, para o caso da ressonância larga. .	46
Figura 4 -	A evolução do número de partículas χ produzidas, como função do tempo, para o caso da ressonância larga.	49
Figura 5 -	A evolução do número de partículas χ produzidas, como função do tempo, para o caso da ressonância estreita.	50
Figura 6 -	O contorno de Keldysh no plano de tempo complexo.	54
Figura 7 -	O contorno de tempo fechado de Schwinger C . Pontos no seguimento $C_1 = -\infty < t < +\infty$ e no seguimento oposto C_2 , do contorno denotam os pontos de tempo discretizados.	55
Figura 8 -	Diagrama de Feynman de ordem mais baixa contribuindo para a ação efetiva do campo ϕ . As linhas pontilhadas referem-se ao propagador do campo χ . .	59
Figura 9 -	Bandas de instabilidade (áreas escuras) para os modos χ_k como função de k^2 e g^2 , no caso de acoplamento trilinear.	67
Figura 10 -	A evolução do valor médio na rede para o campo ϕ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$	73
Figura 11 -	A evolução do valor médio na rede para o campo χ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$	74
Figura 12 -	A evolução do valor médio na rede para o campo σ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$	75
Figura 13 -	Densidade número de partículas produzidas para os campos (curvas de cima para baixo) ϕ , χ e σ como função de $\tau = m_\phi t$	76
Figura 14 -	A evolução do valor médio na rede para o campo ϕ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no modelo de acoplamento trilineares e quadráticos.	78
Figura 15 -	A evolução do valor médio na rede para o campo χ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no modelo de acoplamento trilineares e quadráticos.	79
Figura 16 -	A evolução do valor médio na rede para o campo σ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no modelo de acoplamento trilineares e quadráticos.	80
Figura 17 -	Densidade número de partículas produzidas para os campos (curvas de cima para baixo) ϕ , χ e σ , como função de $\tau = m_\phi t$, no modelo de acoplamento trilineares e quadráticos.	81
Figura 18 -	A evolução do valor médio na rede para o campo ϕ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no caso das equações efetivas de movimento. . . .	83

- Figura 19 - A evolução do valor médio na rede para o campo χ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no caso das equações efetivas de movimento. . . . 84
- Figura 20 - A evolução do valor médio na rede para o campo σ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no caso das equações efetivas de movimento. . . . 85
- Figura 21 - Densidade número de partículas produzidas para os campos ϕ , χ e σ (curvas de cima para baixo) para o caso do uso das equações de movimento efetivas (linhas pretas) e sem os termos de dissipação e ruído (linhas cinzas). . . . 86

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA	13
1.1	Modelo Cosmológico Padrão	13
1.1.1	<u>Tensor Energia-Momento de um Fluido Perfeito</u>	14
1.1.2	<u>Equações de Friedmann</u>	15
1.2	Limitações do Modelo Padrão	19
1.3	Inflação	20
1.4	Alguns Exemplos de Modelos Inflacionários	25
1.4.1	<u>Inflação Caótica</u>	25
1.4.2	<u>Modelo Inflacionário Híbrido</u>	26
1.4.3	<u>Inflação Morna</u>	27
1.5	Campo Escalar Carregado	30
1.5.1	<u>Potencial Efetivo para Campo Carregado</u>	32
2	REAQUECIMENTO APÓS A INFLAÇÃO	38
2.1	Dinâmica do Inflaton após a Inflação	38
2.2	Método Perturbativo de Produção de Partículas	40
2.3	Pré-aquecimento	43
3	TEORIA DE CAMPOS EM TEMPERATURA FINITA E O FORMALISMO DE TEMPO REAL	51
3.1	Teoria de Campos de Temperatura Finita	51
3.2	A Formulação de Teoria Quântica de Campos a Tempo Real	53
3.3	Modelo de Campos e as correspondentes Equações Efetivas de Movimento	57
4	SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO E RESSONÂNCIA PARAMÉTRICA NO MODELO DE CAMPOS COM ACOPLA- MENTOS TRILINEARES	63
4.1	Solução para a Equação de Movimento para o Campo de Inflaton	63
4.2	Equação de Movimento para o Campo $\chi(x)$	66
4.3	Ressonância para caso das Equações de Movimento Clássicas e Efetivas: Resultados Numéricos	70
	CONCLUSÃO	87
	REFERÊNCIAS	88

INTRODUÇÃO

Segundo o modelo Cosmológico Padrão, após o Big Bang, o universo, inicialmente quente, passaria a expandir-se e a esfriar. Esse esfriamento, conforme explicado pela física de partículas elementares, levaria a possibilidade de quebras de simetrias com a consequente produção de defeitos topológicos como, por exemplo, monopólos magnéticos [1]. Em 1980, A. Guth [2], estudando sobre a abundância destes monopólos, mostrou que esta deveria ser bastante grande em nossos dias. No entanto, tais monopólos nunca foram detectados. A solução proposta por Guth para este problema foi que, logo após o Big Bang, o universo teria passado por uma fase de expansão acelerada, diluindo essa relíquia indesejada. Essa rápida expansão pode ser explicada no âmbito da física de partículas elementares com base na dinâmica de um campo escalar hipotético chamado inflaton. Este campo escalar teria fornecido ao universo a energia necessária para expandir-se.

Um dos grandes méritos deste modelo foi usar uma teoria microscópica para descrever um resultado cosmológico ampliando nossa visão da cosmologia. Apesar de ter sido criado com o intuito de resolver alguns problemas do Big Bang, tais quais o problema do horizonte, abundância de monopolos magnéticos entre outros, o modelo inflacionário mostrou-se ainda mais amplo ao fornecer uma previsão de forma satisfatória para a formação de macroestruturas em larga escala, tais quais galáxias, aglomerados de galáxias e super-aglomerados.

Segundo o modelo inflacionário quase todas as partículas que permeiam o universo foram criadas durante o processo conhecido como reaquecimento após a inflação, o que torna este processo extremamente importante. A idéia básica de reaquecimento após a inflação foi proposta no primeiro trabalho sobre o novo cenário inflacionário [3]. Neste cenário, o reaquecimento acontece devido a produção de partículas pela oscilação do campo escalar ϕ conhecido como inflaton, o mesmo campo escalar que é responsável por gerar a inflação. Ao final da inflação, o inflaton passa a oscilar em torno do mínimo de seu potencial efetivo e produz partículas elementares. Estas partículas, então, interagem uma com a outra até atingirem o equilíbrio térmico a uma temperatura T_r , chamada de temperatura de reaquecimento. O processo finaliza quando toda, ou quase toda a energia do campo escalar ϕ , é transferida para as partículas criadas. Já faz algum tempo que entende-se [4] que em muitos modelos inflacionários os primeiros estágios de reaquecimento ocorrem em um regime de ressonância paramétrica, na qual partículas são criadas de forma extremamente rápida. Para distinguir esse processo de produção de partículas do estágio posterior de reaquecimento lento e termalização, convencionou-se chamá-lo de pré-aquecimento. A energia transferida do inflaton para outras partículas durante o pré-aquecimento é extremamente eficiente [5].

No entanto, como foi mostrado em [4] o reaquecimento nunca se completa no

estágio de ressonância paramétrica. Eventualmente a ressonância torna-se estreita e ineficiente, de modo que os estágios finais de decaimento do inflaton e termalização podem ser perfeitamente descritos pela teoria elementar de reaquecimento, ou seja, reaquecimento perturbativo [3].

O curto período de produção explosiva de partículas durante o pre-aquecimento pode levar a importantes efeitos sobre os períodos posteriores de evolução do universo. Ele pode levar a transições de fase não térmicas [6], novos mecanismos da bariogênese [7] e ainda alterar a temperatura final de reaquecimento. Dentro deste contexto, podemos compreender a importância do bom entendimento deste período de evolução do universo. A teoria de ressonância paramétrica aplicada a produção de partículas pela oscilação de um campo externo foi desenvolvida há cerca de trinta anos como mostrado, por exemplo, em [8].

Uma primeira tentativa de aplicar esta teoria ao reaquecimento após inflação foi feita por Dolgov e Kirilova [9] e por Traschen e Brandenberger [10], para a ressonância paramétrica no cenário da nova inflação. No primeiro foi conjecturado que para um universo em expansão, a ressonância paramétrica não leva a reaquecimento eficiente. No segundo, os autores chegaram a importante conclusão de que, no novo cenário inflacionário, o reaquecimento pode ser bastante eficiente. Para o caso da ressonância paramétrica chamada de larga, suas características básicas foram delineadas em [4], onde a teoria do pré-aquecimento foi desenvolvida no cenário de inflação caótica levando-se em conta o backreaction das partículas criadas bem como a expansão do universo.

É bem estabelecido hoje em dia que modelos baseados em inflação em geral apresentam efeitos dissipativos durante o período inflacionário [11]. Estes efeitos tem duas consequências para a dinâmica inflacionária. Em primeiro, lugar elas resultam em produção de radiação durante a inflação, influenciando as flutuações que servem como geradoras para estruturas em larga escala. Em segundo lugar elas levam a termos temporalmente não locais na equação efetiva de evolução do inflaton, o que pode influenciar de modo significativo a natureza e a história do período inflacionário. O entendimento desta natureza dissipativa em modelos inflacionários tem resultado na divisão da inflação em duas possibilidades dinâmicas referidas como inflação fria e inflação morna. No primeiro caso, os efeitos de dissipação são desprezados. As flutuações criadas durante a inflação devem-se as flutuações do estado fundamental de ponto zero e a evolução do campo de inflaton é governada pela equação de estado fundamental.

Em contraste, no quadro de inflação morna [12], a expansão inflacionária e a produção de radiação ocorrem concomitantemente. As flutuações criadas durante a inflação surgem de algum estado estatístico excitado e a evolução do inflaton tem termos de dissipação decorrentes da interação do inflaton com outros campos. Neste modelo, dependendo dos acoplamentos entre os campos, existe a possibilidade de que não haja necessidade de um período posterior de reaquecimento. No entanto, nos casos mais ge-

rais, devemos também trabalhar com a hipótese de que o inflaton possa não ter decaído completamente durante a inflação, o que tornaria possível um estágio posterior de pré-aquecimento.

Em trabalhos recentes [13], foi identificado o mecanismo chave para a existência de inflação morna. Este mecanismo envolve o campo escalar de inflaton ϕ excitando um campo mais pesado de bósons χ que então decai em férmions ou bósons leves ψ_d . Nesta dissertação, estamos particularmente interessados em estudar o pré-aquecimento para o modelo baseado em inflação morna, onde neste caso os efeitos de dissipação e flutuação, inerentes ao processo de inflação, podem ser de relevância no estágio de pré-aquecimento, ou ressonância paramétrica. Pretendemos, portanto, determinar como a presença de flutuações e de dissipação afetam a ressonância paramétrica e, conseqüentemente a produção de partículas neste período.

Esta tese está dividida da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos uma breve revisão sobre inflação. Discutimos as limitações do modelo cosmológico padrão que serviram como motivação para o modelo inflacionário. Analisamos de forma sucinta alguns modelos baseados na hipótese de inflação. No capítulo 3 introduzimos em maiores detalhes a teoria de reaquecimento após a inflação no qual discutimos os métodos perturbativos e os métodos não perturbativos de produção de partículas. No capítulo 4 apresentamos uma breve introdução aos métodos de teoria quântica de campos de temperatura finita a tempo real os quais serão usados no restante desta dissertação, para determinar as equações de evolução dinâmicas relevantes ao nosso estudo, ou seja, em processos causais, dependentes no tempo para campos escalares e que envolvam tanto processos dissipativos como estocásticos. No capítulo 5 apresentamos os resultados analíticos e numéricos obtidos para as equações dinâmicas encontradas por meio da utilização do formalismo apresentado no capítulo 4. Finalmente no capítulo 6 apresentamos nossas conclusões e comentários finais. Um apêndice está incluído, onde damos alguns detalhes das soluções de equações do tipo Mathieu, relevantes neste trabalho.

Ao longo de todo esse trabalho usaremos as unidades naturais, onde $\hbar = c = k_B = 1$.

1 COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA

1.1 Modelo Cosmológico Padrão

O modelo cosmológico padrão foi desenvolvido com o objetivo de fornecer uma descrição de como o universo veio a existir, bem como, o modo como ele desenvolveu-se desde os seus primórdios até os nossos dias.

Para esta descrição, considera-se que o universo seja um sistema isolado, isto é, não haja nada além dele. Como se trata de um problema em larga escala, a interação de maior interesse é a gravitacional, pois esta constitui-se em uma interação de longo alcance. Neste caso, a Relatividade Geral parece ser a teoria mais adequada para descrever a evolução do universo.

As equações de Einstein, que descrevem a dinâmica de um espaço-tempo 4-dimensional com um certo conteúdo de matéria e energia são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (1)$$

onde $R_{\mu\nu}$ e R são o tensor e o escalar de Ricci, respectivamente, que podem ser obtidos a partir do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, G é a constante gravitacional, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e Λ é a chamada constante cosmológica. Este conjunto de equações não-lineares dá-se o nome de Equações de Einstein. Devido ao caráter simétrico do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, o sistema de equações dados por (1) se reduz a um conjunto de 10 equações diferenciais acopladas e de difícil solução. Um artifício usado para simplificar este problema consiste em fazer uso do chamado Princípio Cosmológico, que vem a ser a equivalência entre todas as posições e direções do universo, ou seja, ele afirma que o universo deve ser homogêneo e isotrópico.

Tais condições levam a espaços 3-dimensionais com curvatura constante. A geometria não-euclidiana mostra que existem apenas três espaços deste tipo que podem ser descritos de forma genérica pelas coordenadas r , θ , ϕ e expressos pelo elemento de linha espacial:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 . \quad (2)$$

Aqui o parâmetro k pode assumir três valores, correspondendo as três possibilidades de curvatura do espaço: $k = +1$, para curvatura positiva, ou seja, espaço esférico; $k = -1$, para curvatura negativa, ou seja espaço hiperbólico e $k = 0$, para curvatura nula, ou

espaço plano.

Com isto em mente, podemos encontrar um elemento de linha que descreva um universo homogêneo e isotrópico:

$$ds^2 \equiv dt^2 - dL^2(t)$$

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3)$$

ou seja, $dL^2 = a(t)^2 dl^2$. O parâmetro $a(t)$ é chamado de fator de escala e fornece a evidência de que o universo pode variar sua dimensão com o tempo. Uma vez que o universo se expande, $dL(t)$ é chamado de elemento de linha físico e dl de elemento de linha comóvel. A métrica dada por (3) é conhecida na literatura como métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e sua seção é maximalmente simétrica. Para esta métrica, neste sistema de coordenadas, as componentes do tensor métrico são dadas por:

$$g_{00} = 1, g_{11} = \frac{a(t)^2}{1-kr^2}, g_{22} = a(t)^2 r^2, g_{33} = a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (4)$$

sendo todas as outras nulas. Com esta métrica, podemos calcular as conexões, $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ e em seguida o tensor de Riemann, $R_{\nu\rho\lambda}^\mu$ e, por meio de operações tensoriais, podemos encontrar o tensor e o escalar de Ricci, $R_{\mu\nu}$ e R , respectivamente, que, por sua vez, são substituídos em (1).

1.1.1 Tensor Energia-Momento de um Fluido Perfeito

Com esta base, somos agora capazes de definir uma expressão para o tensor energia-momento que aparece nas equações de Einstein. Uma boa forma para descrever um universo homogêneo e isotrópico é considerá-lo como um fluido perfeito. Neste caso, o tensor energia momento simétrico é escrito como:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (5)$$

onde $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ representa a quadrivelocidade do fluido, $\rho = \rho(x^\mu)$, sua densidade própria e $p = p(x^\mu)$ a sua pressão própria. Para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, que possui seção maximalmente simétrica, a densidade e pressão serão apenas função do tempo, ou seja, $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$. A relação entre estas duas grandezas é dada pela equação de estado, $p = p(\rho, T)$, onde T é a temperatura. Durante a evolução

do universo, $p = p(\rho)$, sempre que o equilíbrio térmico for estabelecido.

Num referencial comóvel, as componentes espaciais ($i = 1, 2, 3$), e temporal da quadrivelocidade são dadas respectivamente por $u^i = 0$ e $u^0 = 1$. Assim as componentes do tensor energia-momento podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \rho, \\ T_0^i &= 0, \\ T_j^i &= -\delta_j^i p. \end{aligned} \tag{6}$$

Então T_ν^μ é uma matriz diagonal na métrica FRW. As equações de conservação são expressas por: $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Para $\mu = 0$ temos a equação de continuidade:

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -p \frac{d(a)^3}{dt} \tag{7}$$

ou ainda

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p) \tag{8}$$

onde H é conhecido como parâmetro de Hubble e é definido como: $H = \dot{a}(t)/a(t)$. Este parâmetro nos fornece a taxa de expansão do universo com o tempo.

Tendo-se definido a métrica mais adequada para a descrição do universo e o tensor energia-momento, retorna-se às equações (1) e constrói-se as equações de Friedmann que descreverão a evolução do universo.

1.1.2 Equações de Friedmann

As equações de Friedmann representam as Equações de Einstein descrevendo um universo homogêneo e isotrópico. Escrevendo-se o tensor métrico, o tensor e o escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, R , respectivamente, em termos da métrica (3), temos

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}g_{ij}\right], \\
R &= -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right].
\end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo estas grandezas, bem como o tensor energia-momento dado por (5), na equação de Einstein (1), para $\mu, \nu = 0$ obtemos

$$\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{10}$$

Já para $\mu, \nu = i$ temos

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \tag{11}$$

Subtraindo-se as duas equações acima, encontramos uma equação para a aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho) + \frac{1}{3}\Lambda. \tag{12}$$

O segundo termo corresponde a uma aceleração positiva e, uma vez que ele domine, o universo expandiria aceleradamente. Igualmente, se $3p + \rho < 0$, temos também um caso de expansão acelerada para o fator de escala. Os casos em que $\Lambda = 0$ e em que o universo seja dominado por uma densidade de energia de campo para a qual $3p + \rho < 0$, refere-se ao cenário inflacionário, que veremos mais abaixo.

A constante cosmológica pode ser incorporada ao tensor energia-momento que descreve o universo definindo a densidade ρ_Λ e pressão p_Λ ,

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda \equiv -\frac{\Lambda}{8\pi G}, \tag{13}$$

de modo que

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \tag{14}$$

Reescrevendo (10), (11), (12) de modo a incorporar a densidade total de energia do universo a densidade de matéria cosmológica,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_T - \frac{k}{a^2}, \quad (15)$$

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = -8\pi G p_T, \quad (16)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}(3p_T + \rho_T), \quad (17)$$

onde $p_T = p_\Lambda + p$ é a pressão total e $\rho_T = \rho_\Lambda + \rho$ é a densidade total. As equações (15) e (17) são as equações de Friedmann que fornecem a dinâmica do universo e devem ser capazes de reproduzir sua história.

A partir da equação de Friedmann (15) para o fator de Hubble H , podemos deduzir a seguinte expressão:

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{\rho_T}{3H^2/8\pi G} - 1, \quad (18)$$

o que nos permite definir o conceito de densidade crítica:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (19)$$

o que corresponde à densidade de energia no universo para a qual $k = 0$.

Outra quantidade de relevância em cosmologia que podemos definir é a abundância dos diferentes tipos de matéria com relação a densidade crítica:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (20)$$

onde i denota os diferentes tipos de matéria como, por exemplo, barion, neutrinos, entre outros. A soma das diferentes abundâncias resulta na abundância total, conforme nos mostra a relação

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c} = \frac{\sum_i \rho_i}{\rho_c} . \quad (21)$$

Isso significa que a expressão (18) pode ser reescrita como:

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega_T - 1 . \quad (22)$$

Existe uma correspondência entre Ω_T e k , ou seja, entre a densidade de energia total e a curvatura do universo:

$$\begin{aligned} k = 1 &\Rightarrow \Omega_T > 1 & (\rho_T > \rho_c) \\ k = 0 &\Rightarrow \Omega_T = 1 & (\rho_T = \rho_c) \\ k = -1 &\Rightarrow \Omega_T < 1 & (\rho_T < \rho_c) . \end{aligned} \quad (23)$$

A equação (21) é válida para todos os instantes de tempo, porém, Ω_T e ρ_c não são constantes. O valor estimado da densidade crítica é dado por:

$$\rho_{c0} = 1.879 \times 10^{-26} h_0^2 k g m^{-3} , \quad (24)$$

o que corresponderia a 10 átomos de hidrogênio por metro cúbico. Além disso, evidências apontam para uma abundância total de :

$$\Omega_T = 1.02 \pm 0.02 , \quad (25)$$

consistente, portanto, com o universo plano ($k = 0$), segundo a expressão (23).

O modelo cosmológico padrão desenvolvido na década de 40 constitui-se em um dos mais bem sucedidos em descrever e a evolução do universo. Entre as suas mais importantes contribuições destacam-se a previsão da existência de uma radiação cósmica de fundo e a abundância da matéria bariônica. Conforme mostra-nos o modelo, após o Big Bang, o universo passa a expandir-se e a esfriar, a partir de uma temperatura inicial superior a 10^{15} GeV ou próxima da escala de Planck, $M_{Pl} \simeq 1.22 \times 10^{19}$ GeV. Quando atinge uma temperatura de aproximadamente 0.1 MeV inicia-se um processo conhecido como nucleossíntese, onde formam-se núcleos leves como deutério (2H), trítio (3H), hélio 3 (3He), hélio 4 (4He), berílio 7 (7Be) e lítio 7 (7Li). Ao atingir uma temperatura de cerca de 0.1 eV os elétrons, antes livres, passam a ligar-se aos núcleos formando átomos.

O processo de ionização deixaria de ocorrer. A partir daí, inicia-se o estágio conhecido como recombinação, onde a radiação desacopla-se da matéria passando a viajar livremente pelo espaço. Esta é a radiação cósmica de fundo cujo espectro é compatível com o de um corpo negro com temperatura prevista para nossos dias de aproximadamente $2.7K$.

1.2 Limitações do Modelo Padrão

A confirmação da existência desta forma de radiação veio em 1964 com sua detecção por A. Penzias e R. Wilson [14]. No entanto, apesar deste e de outros sucessos, o modelo cosmológico padrão apresentou alguns problemas. Seguem alguns deles.

O problema do horizonte:

Regiões do céu separadas por uma distância angular superior a 1° correspondem a regiões causalmente desconectadas na época da recombinação do hidrogênio e portanto do desacoplamento da radiação (em $t \approx 10^{12}$ s). Considerando o universo com curvatura nula, isto é, com $k = 0$, e um raio de luz que viaja em nossa direção, sabendo-se que a trajetória da luz segue uma geodésica nula,

$$dt = -a(t)dr \implies r = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (26)$$

e calculando a distância comóvel para dois momentos distintos, antes e depois do desacoplamento, obtém-se:

$$\int_0^{t_{des}} \frac{dt'}{a(t')} \ll \int_{t_{des}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (27)$$

Isto significa que uma porção muito maior do universo é vista hoje quando comparado com a época do desacoplamento da radiação. Naquela época, portanto, existiam muitas regiões causalmente desconectadas. Por que então a radiação cósmica de fundo tem as mesmas propriedades seja qual for a direção em que ela seja observada hoje ?

O problema da planura:

Observações recentes [15] apontam para $\Omega_T \approx 1$ indicando portanto $k = 0$. Porém este é um ponto de instabilidade nas equações de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_T = -\frac{k}{a^2} \implies H^2(t) [1 - \Omega_T(t)] = -\frac{k}{a^2}. \quad (28)$$

Para obter $k = 0$, Ω_T deve ser exatamente 1. Observe que uma pequena variação de Ω_T em torno de 1, acarretaria uma mudança na curvatura do espaço. O problema é como

manter essa precisão ao longo da história do universo já que H e a variam com o tempo e a dependência temporal dos parâmetros depende das diferentes épocas pelas quais o universo passou. Por exemplo, para o período de domínio da radiação temos satisfeitas a relação $|1 - \Omega_T(t)| \approx t^{2/3}$, e na época de domínio da matéria temos $|1 - \Omega_T(t)| \approx t$. Ou seja, trata-se de um problema de ajuste fino. Para que Ω_T seja exatamente 1 hoje, é necessário que em $t \approx 10^{-43}$ s, a precisão fosse de $|1 - \Omega_T(t)| \approx 10^{-60}$, ou seja um ajuste extremamente fino dos vários parâmetros é necessário para se chegar a tal nível de precisão. Uma dinâmica deste tipo parece muito pouco provável.

O problema das relíquias

Logo após o Big Bang, a Física das Partículas Elementares prevê a criação de defeitos topológicos devido a quebras de simetrias decorrentes do esfriamento do universo [1]. Exemplos destes defeitos são: paredes de domínio e monopólos magnéticos. Esses defeitos seriam diluídos mais lentamente do que a radiação durante a expansão do universo na fase de domínio da radiação. Como consequência, essas relíquias estariam dominando a matéria total do universo existente atualmente o que não corresponde as observações.

Uma das possíveis soluções para os problemas apresentados é justamente o modelo inflacionário, que será estudado a seguir.

1.3 Inflação

Alguns dos problemas do modelo cosmológico padrão podem ser resolvidos supondo que o universo tenha passado por um curto período de expansão primordial acelerada. De fato, nos últimos 20 anos nenhum cenário alternativo tem-se mostrado tão eficiente neste sentido quanto o cenário inflacionário. Para um instante da ordem do tempo de Planck, isto é, $t_{\text{Pl}} = 10^{-43}$ s, neste cenário inflacionário o universo é dominado por um campo escalar ϕ , chamado de o campo de inflaton, ou simplesmente inflaton. Supõe-se que durante a inflação, a principal contribuição para o tensor energia-momento seja dada por este campo escalar. O entendimento da dinâmica do inflaton possibilita-nos determinar algumas características básicas do modelo inflacionário. Para isto, consideramos a seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) , \quad (29)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial do campo ϕ . Considerando que o campo escalar seja homogêneo para um espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker temos que $\phi = \phi(t)$ e a equação de movimento para o inflaton pode ser escrita na forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (30)$$

onde V' corresponde a derivada do potencial com respeito a ϕ . Podemos ainda calcular o tensor energia-momento a ele associado e que tem a seguinte forma:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (31)$$

e as componentes do tensor energia-momento são:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \\ T^{ij} &= -g^{ij} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Quando tratamos de um universo homogêneo e isotrópico podemos descrevê-lo como um fluido perfeito cujo tensor energia-momento simétrico pode ser escrito da forma

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (33)$$

onde $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ representa a quadri-velocidade do fluido, $\rho = \rho(x^\mu)$, sua densidade própria e $p = p(x^\mu)$ sua pressão. Estas grandezas estão relacionadas pela equação de estado $p = p(\rho, T)$ onde T é a temperatura. Durante a evolução do universo, sempre que se estabelece o equilíbrio térmico $p = p(\rho)$, que é dada por

$$p = w\rho, \quad (34)$$

onde w , para o caso inflacionário, é uma constante e deve ser determinada. Calculando-se as componentes do tensor energia-momento temos

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \\ T^{ij} &= p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi), \end{aligned} \quad (35)$$

com isso temos que, pela equação de estado,

$$w_\phi = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)}, \quad (36)$$

Supondo-se que no início da inflação o termo de potencial domina sobre o termo cinético, ou seja, $V(\phi) \gg (1/2)\dot{\phi}^2$ temos

$$\begin{aligned} \rho_\phi &\cong V(\phi), \\ p_\phi &\cong -V(\phi) \end{aligned} \quad (37)$$

de modo que temos que $w = -1$. As consequências do resultado obtido podem ser vistas ao se analisar as equações de Friedmann. Considerando a equação

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{-4\pi G}{3} (3p + \rho), \quad (38)$$

onde G é a constante gravitacional e $a(t)$ é o fator de escala que nos fornece as informações quanto a expansão do universo. Através desta equação pode-se perceber que a expansão acelerada pode ser obtida se $w < -1/3$, pois neste caso $\ddot{a} > 0$. Conclui-se, então, que o campo escalar pode produzir o cenário desejado, ou seja de expansão acelerada, se

$$1 \leq w \leq -1/3. \quad (39)$$

Sendo assim, para o valor de $w = -1$, encontra-se o seguinte resultado,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-8\pi G}{3} \rho_\phi = \frac{-8\pi G}{3} V(\phi). \quad (40)$$

Já da equação de Friedmann, temos que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (41)$$

onde k corresponde ao termo de curvatura do universo. Conforme os resultados encontrados, a equação (41) pode ser reescrita da forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}V(\phi) - \frac{k}{a^2}. \quad (42)$$

Baseado na hipótese de que $a(t)$ crescerá, muito neste período, desprezamos o termo de curvatura do universo k e obtemos

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}V(\phi)}t\right). \quad (43)$$

Por fazer $\Delta_\nu T^{0\nu} = 0$, podemos obter a equação de conservação

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0. \quad (44)$$

Para $w = -1$,

$$\dot{\rho}_\phi = 0 \Leftrightarrow \rho_\phi = \text{constante}. \quad (45)$$

Isto nos mostra que durante a inflação a densidade de energia é constante e, como $\rho \approx V(\phi)$ temos que $V(\phi)$ é também constante. Conforme a discussão apresentada acima podemos concluir que a inflação ocorre quando as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} V(\phi) &\gg \frac{\dot{\phi}^2}{2}, \\ V'(\phi) &\gg \ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (46)$$

Essas condições juntas são chamadas de aproximação de rolamento lento e garantem que se o potencial for plano o bastante o campo ϕ rolará lentamente. Nestas condições, o campo ϕ produz inflação e por isso é chamado de inflaton.

Podemos ainda obter uma expressão para as condições (46) em termos do potencial $V(\phi)$. Para isto, devemos considerar a equação de Friedmann dada por (42), desprezando o termo de curvatura do universo,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}V(\phi). \quad (47)$$

A equação de movimento (30) fica

$$3H\dot{\phi} \approx V'(\phi) . \quad (48)$$

As equações (47) e (48) nos fornecem as seguintes expressões para as condições de rolamento lento

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} \cong \frac{V'(\phi)}{18H^2} \xrightarrow{\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V(\phi)} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll \frac{48\pi}{M_{Pl}^2} . \quad (49)$$

É interessante destacar que o comportamento do fator de escala descrito por (43) pode ser obtido através da equação de Fiedmann (42) se $V(\phi) = 0$ e a curvatura for nula. Essa solução foi obtida por de Sitter em 1917 [16] e por essa razão a fase inflacionária é muitas vezes mencionada na literatura como fase de de Sitter.

Com o modelo inflacionário, os problemas citados na seção anterior podem ser solucionados. Para o problema do horizonte, o modelo inflacionário nos diz que cada região causalmente conectada do universo teria sido expandida exponencialmente. No instante da expansão o tamanho do universo seria de aproximadamente 10^{-33} cm. A inflação teria expandido o universo para $\sim 10^{-3}$ cm.

Quanto ao problema da planura, observe que, durante a inflação, fator de Hubble H é constante e, portanto,

$$|1 - \Omega_T| \approx \exp(-2Ht) , \quad (50)$$

indicando que no limite de t grande,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |1 - \Omega_T| = 0 \Rightarrow \Omega \rightarrow 1 . \quad (51)$$

Assim, mesmo que as condições iniciais não sejam tão precisas, o fator de densidade Ω_T vai necessariamente a 1 durante o período inflacionário.

Com relação as relíquias, devido a tremenda expansão, elas seriam, completamente diluídas durante a inflação, bem como toda a matéria e radiação existente no universo nesse momento, exceto no caso de inflação morna em que radiação é produzida durante o período inflacionário. Como veremos, matéria e radiação podem ser produzidas depois da inflação por meio do reaquecimento do universo.

1.4 Alguns Exemplos de Modelos Inflacionários

Como vimos, o modelo apresentado por Guth em 1981 foi muito bem sucedido em resolver uma série de problemas da cosmologia padrão. No entanto, este não era ainda um modelo plenamente consolidado no meio científico devido a alguns problemas apresentados. Este modelo, hoje conhecido como velha inflação baseava-se no super-resfriamento durante transições de fase de primeira ordem. Neste cenário, o universo encontra-se em um falso vácuo com grande densidade de energia que permanece constante enquanto o universo expande, permitindo que haja um crescimento exponencial. Durante a inflação, o universo, originalmente vazio, permanece vazio. Este processo finaliza quando o falso vácuo decai em bolhas de estados normais de vácuo. As colisões entre as paredes das bolhas formadas supostamente tornariam o universo quente. Infelizmente este cenário em sua forma original é bem pouco provável. Se a probabilidade de formação das bolhas for suficientemente grande, elas irão colidir, e estas colisões fazem com que o universo fique bastante heterogêneo. Se, por outro lado, a formação de bolhas for interrompida, então elas nunca colidem tendo como consequência um universo vazio, expandindo-se exponencialmente, contendo um grande número de bolhas separadas causalmente e completamente vazias. A proposta de Guth sofreu uma série de alterações ao longo dos anos o que levou ao surgimento de inúmeros e diferente modelos inflacionários tais quais inflação híbrida, natural, eterna entre muitas outras. Iremos considerar nesta seção de forma breve alguns destes modelos. A determinação do modelo utilizado é importante para sabermos como o período inflacionário irá finalizar.

1.4.1 Inflação Caótica

Neste modelo, podemos considerar um campo escalar ϕ de massa m_ϕ com potencial $(1/2)m_\phi^2\phi^2$ cujo mínimo se encontra no ponto $\phi = 0$ ao redor do qual o campo escalar pode efetuar oscilações próximas a esse mínimo. Diferente dos demais modelos de inflação baseados em super-resfriamento e tunelamento de um mínimo local [2], ou o rolamento em um potencial artificialmente plano [3], tal cenário pode ser tratado por meio de uma teoria tão simples como a de um oscilador harmônico.

Partindo de um universo clássico, isto é, um universo com tamanho da ordem do comprimento de Planck e densidade de energia de Planck, a soma das densidades de energia cinética, densidade do gradiente de energia e densidade de energia potencial é da ordem da energia de Planck, ou seja, $10^{15} GeV$:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + (\partial_i\phi)^2 + V(\phi) \sim \rho_{Pl} . \quad (52)$$

Deve ser enfatizado que não há nenhum vínculo *a priori* sobre o valor do campo escalar exceto o dado por 52, neste domínio. Assim, a inflação inicia e mantém-se enquanto o termo de potencial predomina sobre o termo cinético, isto é, enquanto $V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + (\partial_i\phi)^2$ e o tamanho do universo aumenta de $10^{-33}cm$ para $10^{-3}cm$ num intervalo de $10^{-30}s$.

1.4.2 Modelo Inflacionário Híbrido

Este modelo consiste na presença de dois campos escalares durante a inflação na qual um deles rola rapidamente sobre seu potencial enquanto o outro encontra-se em um regime de rolamento lento. Este processo é conhecido por "waterfall". Este modelo foi proposto por Linde dentre outros autores em [17] como um cenário alternativo de inflação em que não se necessitava de um ajuste muito preciso dos parâmetros.

O potencial utilizado neste modelo é

$$V(\phi, \sigma) = \lambda \left(M^2 - \frac{\phi^2}{4} \right)^2 + \frac{g^2\phi^2\sigma^2}{4} + \frac{m^2\sigma^2}{2}, \quad (53)$$

onde $\lambda, g^2 > 0$ são constantes adimensionais e $M^2, m^2 > 0$ são parâmetros de massa. Há um mínimo local (falso vácuo) em $\langle\phi\rangle = \pm 2M$, $\langle\sigma\rangle = 0$. Para $m = 0$, V tem uma direção plana em $\phi = 0$ onde $V = \lambda M^4$ e a massa quadrática de ϕ é $m_\phi^2 = -\lambda M^2 + g^2\sigma^2/2$. Assim, para $\phi = 0$ e $|\sigma| > \sigma_c \equiv \sqrt{2\lambda M/g}$, nós obtemos um vale plano como mínimo. Para $m = 0$ o vale adquire um pico e o sistema pode inflar a medida que σ rola lentamente para este vale. A inflação finaliza abruptamente quando $\sigma = \sigma_c$. A este segue o processo "waterfall", quando ela é sucedida pela fase oscilatória sobre um mínimo global. Desta forma, o sistema pode cair em qualquer um dos mínimos com igual probabilidade.

O início da inflação híbrida requer que, em $t \approx H^{-1}$, exista uma região com tamanho $\geq H^{-1}$ onde ϕ e σ sejam quase uniformes com energia cinética desprezível e valores próximos ao topo do vale do mínimo [18]. Tal região, em t_{P1} , deveria ser muito maior que o comprimento de Planck, $l_{P1} = 1/M_{P1}$, e é assim difícil imaginar como ele poderia ser homogêneo. Entretanto, como foi mostrado em [19], os valores iniciais dos campos seriam extremamente restritos de forma a obter a inflação desejada. Inúmeras soluções possíveis para este problema de condições iniciais para a inflação híbrida foram propostas em [20].

1.4.3 Inflação Morna

A idéia básica deste modelo consiste nos efeitos dissipativos durante o período inflacionário, que corresponde a produção de radiação concorrentemente a expansão inflacionária. A equação de movimento para um modelo simples de inflação morna tem a forma

$$\ddot{\phi} + (3H + \Gamma)\dot{\phi} + \xi R\phi + V'(\phi) = 0, \quad (54)$$

onde Γ é um termo de fricção devido a produção de partículas. Neste modelo as condições de rolamento lento (46) são modificadas devido ao termo extra de fricção. Sendo assim, as condições (46) passam a serem descritas da forma

$$\begin{aligned} \frac{m_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \frac{1}{(1+r)^2} < 1, \\ m_{\text{Pl}}^2 \left(\frac{V''}{V} \right)^2 \frac{1}{(1+r)^2} < 1, \end{aligned} \quad (55)$$

aqui temos que $r = \Gamma/3H$. Quando o termo de fricção Γ depende dos valores do campo de inflaton, podemos definir uma terceira condição para o rolamento lento conforme podemos ver na relação abaixo

$$\frac{r}{(1+r)^3} \frac{V'}{3H^2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} < 1. \quad (56)$$

Um dos mecanismos em que é possível ocorrer a inflação morna consiste no campo escalar de inflaton ϕ excitando um campo de bósons pesados χ que, por sua vez, decai em férmions ou outros bósons leves ψ_d , conforme representado pela esquema

$$\phi \rightarrow \chi \rightarrow \psi_d. \quad (57)$$

Mecanismos como este foram estudados nas Refs. [21] nos quais foram derivadas as equações de evolução efetivas para o inflaton. Nestas equações estão presentes termos dissipativos que advem do mecanismo de interação entre os vários campos de acordo com o esquema (57). Posteriormente, iremos retomar este modelo para o estudo da dinâmica dos campos durante o pré-aquecimento.

Primeiramente, recordamos a expressão do potencial efetivo Euclideano para teoria

$\lambda\phi^4$ na aproximação de um laço, a qual está deduzida em diversos livros-texto, como por exemplo [23], o que nos dá o resultado básico

$$V_{eff}(\bar{\phi}) = \frac{1}{2}m^2\bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\bar{\phi}^4 + \Delta V_\beta, \quad (58)$$

onde $\bar{\phi}$ é uma configuração de campo constante, $\bar{\phi} \equiv \langle \phi \rangle$, e

$$\Delta V_\beta = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln \left(k_E^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\bar{\phi}^2 \right), \quad (59)$$

é a correção ao nível de um laço para o potencial clássico. Fazendo uso de (??) e de

$$k_E^4 \rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad (60)$$

o potencial efetivo calculado até a ordem de um laço a temperatura finita torna-se

$$V_{eff}(\bar{\phi}) = \frac{1}{2}m^2\bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\bar{\phi}^4 + \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \omega_k^2), \quad (61)$$

onde definimos $\omega_k^2 = k_E^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\bar{\phi}^2$. A soma das frequências de Matsubara ω_n em (61) pode ser feita usando a identidade [25]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln(\omega_n^2 + \omega_k^2) = 2\beta \left[\frac{\omega_k}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) \right] + \text{termos independentes de } \omega_k \quad (62)$$

o que, portanto nos dá para a Eq. (58) o resultado

$$V_{eff}(\bar{\phi}) = \frac{1}{2}m^2\bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\bar{\phi}^4 + \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega_k}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) \right]. \quad (63)$$

A integral sobre o primeiro termo na expressão acima é a correção para o potencial efetivo a um laço a em $T = 0$,

$$\int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln \left(k_E^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\bar{\phi}^2 \right). \quad (64)$$

A integral nos momentos na expressão acima diverge no ultravioleta. A eliminação/renormalização

dessa divergência aparecendo na teoria em $T = 0$ é padrão em teoria quântica de campos e se dá pela introdução de contratermos na massa e constante acoplamento no potencial original do modelo da forma usual como dada nos livros textos (ver por exemplo [23]).

A parte dependente da temperatura na expressão do potencial efetivo em (63) é finita e pode ser escrita como

$$\int \frac{d^3k_E}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) = \frac{1}{2\pi^2\beta^4} J_B [m(\bar{\phi})\beta], \quad (65)$$

onde escrevemos $m^2(\bar{\phi}) = m^2 + \frac{\lambda}{2}\bar{\phi}^2$ e a função $J_B [m(\bar{\phi})\beta]$ é definida como

$$J_B [y] = \int_0^\infty dx x^2 \ln(1 - e^{-\sqrt{x^2+y^2}}). \quad (66)$$

A integral acima, que é o potencial efetivo bosônico térmico, admite uma expansão em altas temperaturas, para $y \ll 1$, a qual é dada por [25]

$$\begin{aligned} J_B [y] = & -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}y^2 - \frac{\pi}{6}(y^2)^{3/2} - \frac{1}{32}y^4 \ln\left(\frac{y^4}{a_b}\right) \\ & - 2\pi^{7/2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{\zeta(2l+1)}{(l+1)!} \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^{l+2}, \end{aligned} \quad (67)$$

onde $a_b = 16\pi^2 e^{3/2-2\gamma}$, $\ln(a_b) = 5.4076$ e $\zeta(x)$ é a função zeta de Riemann.

Dentro da aproximação de altas temperaturas dada pela Eq. (67), a expressão do potencial efetivo na teoria $\lambda\phi^4$ fica (desprezando termos independentes de $\bar{\phi}$ e mantendo até ordem mais baixa em (67)),

$$V_{eff}(\bar{\phi}) = \frac{1}{2}m^2\bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\bar{\phi}^4 + \frac{\lambda}{48}T^2\bar{\phi}^2. \quad (68)$$

Da equação acima, minimizando em relação ao campo, encontramos o valor esperado do campo como função da temperatura:

$$\left. \frac{\partial V_{eff}}{\partial \bar{\phi}} \right|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}(T)} = 0 \longrightarrow \bar{\phi}^2(T) = -\frac{6m^2}{\lambda} - \frac{T^2}{4}, \text{ ou } \bar{\phi}^2 = 0. \quad (69)$$

Notemos que da solução dependente de temperatura, na situação clássica de quebra espontânea de simetria do potencial clássico, ou seja, quando $m^2 = -|m^2|$, o resultado acima expressa como o vácuo com simetria quebrada, $\bar{\phi} \neq 0$, restaura a simetria, $\bar{\phi} = 0$,

quando a temperatura aumenta, o que nos leva a obtenção de uma temperatura crítica de restauração de simetria (transição de fase) definida por

$$T_c^2 = \frac{24|m^2|}{\lambda}, \quad (70)$$

acima da qual $\bar{\phi}(T) = 0$.

1.5 Campo Escalar Carregado

Para o caso de um campo escalar carregado com simetria $U(1)$, levando em conta cargas de Noether conservadas devido a simetria contínua, trabalhamos no ensemble Gran Canônico, onde desejamos obter a função de partição neste ensemble. Temos que

$$Z = Tr \exp - [\beta(\mathcal{H}' - \mu_i \mathcal{Q}_i)], \quad (71)$$

onde \mathcal{Q}_i é um conjunto de operadores número conservados, com multiplicadores de Lagrange expressos pelos potenciais químicos μ_i . Podemos formular uma expressão para a função de partição Gran Canônica no formalismo Hamiltoniano para as integrais de trajetória como fizemos no caso do campo escalar neutro, desta vez fazendo a substituição $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' - \mu_i \mathcal{Q}_i$. Uma vez que estamos considerando um campo escalar carregado, este tem de ser necessariamente complexo. Para a teoria livre tendo a seguinte densidade de Lagrangiana no espaço de Minkowski:

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*) = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^*, \quad (72)$$

que tem claramente uma simetria $U(1)$,

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi, \quad (73)$$

levando a seguinte corrente de Noether conservada no espaço de Minkowski

$$j_\mu = \phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi \quad (74)$$

A componente temporal de j_μ nos fornece a carga conservada

$$\mathcal{Q} = \int d^3x j_0. \quad (75)$$

Como é usual em teoria quântica de campos, nós decompomos o campo ϕ em sua parte real e imaginária fazendo

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}.$$

Aplicamos o mesmo procedimento ao seu conjugado complexo, o que nos fornece para a densidade de Hamiltoniana em termos das componentes real e imaginária do campo e momento conjugado,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}\pi_2^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 + \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2), \quad (76)$$

e para a densidade de carga

$$\mathcal{Q} = (\phi_2\pi_1 - \phi_1\pi_2). \quad (77)$$

A presença da quantidade conservada \mathcal{Q} indica a existência de um potencial associado μ . Combinando as Eq. (76) e (77) junto com a Eq. (71), a integral de trajetória para a função de partição Gran Canônica toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} Z[\beta, \mu] &= \int [d\phi_1] [d\phi_2] \int [d\pi_1] [d\pi_2] \exp \left\{ \int d^4x \left[i(\pi_1\dot{\phi}_1 + \pi_2\dot{\phi}_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathcal{H}(\phi_i, \pi_i) + \mu(\phi_1\pi_2 - \phi_2\pi_1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (78)$$

Efetuada a integração em π_i e redefinindo ϕ_i em relação as quantidades originais ϕ e ϕ^* , nós obtemos que

$$Z[\beta, \mu] = \int [d\phi] [d\phi^*] \exp \left\{ \int d^4x \phi \left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \mu \right)^2 + \nabla^2 + m^2 \right] \phi^* \right\}. \quad (79)$$

Podemos notar que o efeito do potencial químico consiste em provocar o deslocamento $i\omega_n \rightarrow i\omega_n + \mu$, que por sua vez altera o propagador de Matsubara que passa a adquirir a seguinte forma

$$\Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) = \frac{1}{(i\omega_n + \mu)^2 + \omega_k^2}. \quad (80)$$

De modo similar, o propagador misto também tem sua forma alterada. Com potencial químico diferente de zero temos

$$\begin{aligned} \Delta_F(\tau, \mathbf{k}) &= T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2\omega_k} [(1 + n_k^-) e^{-(\omega_k - \mu)\tau} + n_k^+ e^{(\omega_k + \mu)\tau}], \end{aligned} \quad (81)$$

onde

$$n_k^\pm = \frac{1}{e^{\beta(\omega_k \pm \mu)} - 1}, \quad (82)$$

é a função de distribuição de Bose-Einstein na presença de potencial químico. O propagador de Matsubara pode ser obtido novamente ao se efetuar a transformação de Fourier do propagador misto com respeito ao tempo euclidiano τ , conforme feito em (81).

1.5.1 Potencial Efetivo para Campo Carregado

Nesta seção, nós mostramos como podemos encontrar uma expressão para o potencial efetivo a um laço na presença de carga. Mostraremos que a aproximação a um laço é relativamente simples de se obter. Este objeto mostra-se bastante útil pois, por meio do potencial efetivo podemos derivar todas as quantidades termodinâmicas, como energia livre, entropia e pressão para o sistema. O ponto de partida para os nossos cálculos é a função de partição Gran Canônica dada por

$$Z(\beta, \Omega, J_i, \mu_i) = Tr \{ \exp[-\beta(\mathcal{H}' - \mu_i \mathcal{Q}_i)] \}, \quad (83)$$

onde nós escrevemos explicitamente a função de partição Gran Canônica como sendo uma função do inverso da temperatura β , do volume do sistema Ω , das fontes externas J_i , introduzidos para evidenciar os campos, e dos potenciais químicos μ_i . O Hamiltoniano \mathcal{H}' consiste em dois pedaços: o Hamiltoniano ordinário H e as fontes acopladas a todas os campos externos,

$$\mathcal{H}' \equiv H - \frac{J_i}{\beta\Omega} \int d^3x \phi_i(x). \quad (84)$$

O Hamiltoniano acima possui uma simetria global resultante de uma carga de Noether conservada \mathcal{Q}_i . A inclusão de cargas conservadas nos resultados é obtida por meio da condição de vínculo termodinâmica dada por

$$\bar{\mathcal{Q}}_i \equiv \langle \mathcal{Q}_i \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu_i} \ln Z. \quad (85)$$

Para isso, definimos a transformação de Legendre

$$\Gamma(\bar{\phi}_i, \mu_i) \equiv -\ln Z(J_i, \mu_i) - J_i \bar{\phi}_i \equiv W(J_i, \mu) - J_i \bar{\phi}_i. \quad (86)$$

A vantagem desta transformação é que Γ não é mais função das fontes externas. Para que o lado direito de (86) também não seja mais função dos J_i , requeremos que

$$\left. \frac{\partial W}{\partial J_i} \right|_{\mu_i} = \bar{\phi}_i. \quad (87)$$

Aplicando isto junto com a definição de Z , dada em (83), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial J_i} &= -\frac{1}{Z} \text{Tr} \left[\int d^3x \phi_i(x) e^{-\beta(\mathcal{H}' - \mu_i \mathcal{Q}_i)} \right], \\ \bar{\phi}_i &\equiv \Omega \int d^3x \langle \phi_i(x) \rangle_{J_i}, \\ \bar{\phi}_i &= \langle \phi_i(x) \rangle_{J_i}, \end{aligned} \quad (88)$$

que nos dá o valor esperado no vácuo para o campo ϕ na presença de fontes. Claramente, $\langle \phi_i(x) \rangle_0$ é a quantidade de interesse físico, uma vez que estamos interessados em problemas onde não há fontes externas.

Uma equação mais relevante segue da definição da transformação de Legendre. Se variarmos ambos os lados de (86) por fazer uma pequena variação em ϕ_i , mantendo μ_i fixo, definimos

$$\delta\Gamma = \left. \frac{\partial W}{\partial J_i} \right|_{\mu_i} \left. \frac{\partial J_i}{\partial \bar{\phi}_i} \right|_{\mu_i} \delta\bar{\phi}_i + \left. \frac{\partial J_i}{\partial \bar{\phi}_j} \right|_{\mu_i} \delta\bar{\phi}_i \bar{\phi}_j - J_i \delta\bar{\phi}_i. \quad (89)$$

Se não houvesse carga fixa, ou equivalentemente, potencial químico, parariamos aqui. O ponto seria que em β e Ω fixos, gostaríamos que $\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\phi}_i}$ fosse zero, uma vez que é igual a J_i e, no caso de interesse $J_i = 0$. Entretanto, com uma carga fixa, uma pequena variação arbitrária em Γ é

$$\delta \Gamma = \left. \frac{\partial J_i}{\partial \bar{\phi}_i} \right|_{\mu_i} \delta \bar{\phi}_i + \left. \frac{\partial J_i}{\partial \mu_i} \right|_{\bar{\phi}_i} \delta \mu_i. \quad (90)$$

Queremos a carga fixa, não o potencial químico, de modo que não é verdade que os pontos estacionários de Γ são estados fisicamente relevantes. Por isso, fazemos mais uma transformação de Legendre e definimos a energia livre como

$$F(\bar{\phi}_i, \bar{Q}_i) \equiv \frac{1}{\beta} \Gamma(\phi, \mu_i) + \mu_i \bar{Q}_i. \quad (91)$$

A equação de vínculo (85) nos diz que F independe de μ_i . Além do mais, em \bar{Q}_i fixos, o sistema estará em um estado de equilíbrio quando F está em seu mínimo.

Coletando estas várias definições acima, escrevemos o potencial efetivo em temperatura e densidade finitas como

$$\begin{aligned} V_{eff} &= \frac{F}{\Omega} \\ &= -\frac{1}{\beta \Omega} (\ln Z + J_i \bar{\phi}_i) + \frac{\mu_i \bar{Q}_i}{\Omega}. \end{aligned} \quad (92)$$

Em temperatura, volume, e cargas fixos, V_{eff} deve ser minimizado com respeito a μ_i e $\bar{\phi}_i$. Lembramos que aqui, nós escrevemos os campos complexos em termos de suas componentes reais da seguinte forma

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}. \quad (93)$$

Para que possamos encontrar o potencial efetivo para o nosso modelo, precisamos determinar uma expressão para a ação efetiva. Partindo da função de partição

$$\begin{aligned} Z[J_i] &= \int \prod_i [d\phi_i] \prod_i [d\pi_i] \\ &\times \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[i\pi_i \dot{\phi}_i - (\mathcal{H}' - \mu_i \mathcal{Q}_i) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (94)$$

a integral funcional é realizada sobre os campos ϕ_i e os momentos conjugados π_i . Como estamos interessados em investigar o sistema em temperatura finita, a integral sobre o tempo euclidiano percorre o intervalo de 0 a β . O Hamiltoniano acima é invariante sobre uma simetria global SO(2). Esta simetria é gerada pela integral sobre todos os espaços da densidade de carga:

$$\mathcal{Q}_k \equiv \phi_i \pi_j - \phi_j \pi_i. \quad (95)$$

Efetuada a integral sobre os momentos conjugados π_i , obtemos

$$Z[J_i] = N \int \prod_i [d\phi_i] \exp(-S[\phi_i, J_i]), \quad (96)$$

onde N é uma constante e S é a ação. Expandindo a ação em torno de uma configuração de campo constante: $\phi_i = \bar{\phi}_i$, temos

$$\begin{aligned} S &= S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \text{termos de ordem superior} \\ &= S_0[\bar{\phi}_i, J_i] + \int d^4x \left. \frac{\delta S[\phi_i(x) - \bar{\phi}_i]}{\delta \phi_i(x)} \right|_{\phi_i = \bar{\phi}_i} [\phi - \bar{\phi}_i(x)] \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y [\phi_i - \bar{\phi}_i(x)] \left. \frac{\delta^2 S[\phi_i(x) - \bar{\phi}_i]}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_i(y)} \right|_{\phi_i = \bar{\phi}_i} [\phi_i - \bar{\phi}_i(y)] + \dots \end{aligned} \quad (97)$$

Há duas razões para fazermos a expansão em torno de $\phi_i = \bar{\phi}_i$. A primeira é que, como vimos acima, no fim dos cálculos $\bar{\phi}_i$ corresponde ao valor esperado no vácuo para os campos ϕ_i . Os campos ϕ_i oscilarão em torno deste vácuo com amplitude proporcional a \hbar (quando este é restaurado nas expressões acima, lembrando que assumimos do início as unidades naturais $c = k_B = \hbar = 1$) e, no limite que \hbar é pequeno, é razoável assumir que estas oscilações serão também pequenas. A segunda razão é que veremos que tal expansão torna especialmente fácil inverter a Eq. (87), que determina os J_i em termos de $\bar{\phi}_i$.

Até agora não foi necessário fazer nenhuma escolha específica para o potencial. Definimos por enquanto apenas de um modo bem geral o potencial do campo escalar como $U_0(\phi_i)$, onde requer-se somente que seja função de ϕ_i^2 ou no máximo ϕ_i^4 . Fazendo o shift $\phi'_i = \phi_i - \bar{\phi}_i$, temos que a contribuição de ordem zero para a ação calculado em $\bar{\phi}_i$ é:

$$S^{(0)}(\bar{\phi}_i) = S_0[\bar{\phi}_i, J_i] = \beta \Omega \left[U_0(\bar{\phi}_i) - \frac{1}{2} \mu_i^2 \bar{\phi}_i^2 \right] + J_i \bar{\phi}_i, \quad (98)$$

e para o termo de primeira ordem temos

$$S^{(1)}(\bar{\phi}_i) = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi'(x) \left[\frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi_i = \bar{\phi}_i} - \mu \bar{\phi}_i + \frac{J_i}{\beta \Omega} \right]. \quad (99)$$

A contribuição de segunda ordem para a ação é

$$S^{(2)} = \beta \Omega U_{ct}(\bar{\phi}) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi'_i(x) \mathcal{M}_{ij} \phi'_j(y), \quad (100)$$

onde

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{\delta^2 S}{\delta \phi'_i(x) \delta \phi'_j(y)}. \quad (101)$$

O primeiro termo do lado direito de (100) representa os contra-termos, calculados em $\phi_i = \bar{\phi}_i$, incluídos de tal modo a cancelar as divergências ultravioletas que podem surgir no cálculo do potencial efetivo. Os elementos da matriz \mathcal{M}_{ij} correspondem as segundas derivadas funcionais da ação na Eq. (97) com respeito a $\phi'_i(x)$ e $\phi'_j(y)$.

A aproximação a um laço do potencial efetivo corresponde a negligenciar todos os termos na ação de ordem superior a $S^{(2)}$, isto é, todos aqueles de ordem superior ao quadrático em ϕ'_i (e qualquer desvio de $\phi_i = \bar{\phi}_i$ nos contra-termos). Nesta aproximação,

$$W \equiv -\ln Z^{(1)} \simeq S^{(0)} - \ln \left[\int \prod_i [d\phi'_i] \exp(-S^{(1)} - S^{(2)}) \right]. \quad (102)$$

Podemos escolher os J_i de tal forma que o termo linear $S^{(1)}$ na ação se anule. Uma vez que fixamos J_i , temos uma expressão manejável para a função de partição em um laço, que pode ser inserida na equação (92) para obtermos o potencial efetivo

$$V_{eff} = U_0(\bar{\phi}) - \frac{1}{2} \mu_i^2 \bar{\phi}_i^2 - \frac{1}{\beta \Omega} \ln Z^{(1)}, \quad (103)$$

onde

$$Z^{(1)} = \int \prod_i [d\phi'_i] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi'_i(x) \mathcal{M}_{ij} \phi'_j(y) \right]. \quad (104)$$

Podemos ainda fazer uso da seguinte relação

$$Z^{(1)} = \int \prod_i [d\phi'_{i,n}] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_n \int d^3x \phi'_{i,n}(x) \mathcal{M}_{ij} \phi'_{j,n}(y) \right) = \frac{N'}{|\det \mathcal{M}|^{1/2}},$$

onde N' é uma constante infinita independente de β que iremos absorver sobre toda a normalização da integração funcional e usamos a relação $\det A = \exp(\text{Tr} \ln A)$ para trazer o determinante na exponencial. Notamos que esta expressão para $Z^{(1)}$ é exatamente a que teríamos obtido se tivéssemos iniciado nossos cálculos sem a inclusão de qualquer termos de fontes. Expandimos sobre os campos constantes $\bar{\phi}_i$ e mantivemos somente os termos quadráticos. O formalismo que apresentamos nesta seção tem três propostas básicas: I) convencer-nos de que devemos minimizar a expressão completa para o potencial efetivo com respeito a $\bar{\phi}_i$; II) convencer-nos que $\langle \phi_i \rangle = \bar{\phi}_i$; III) prover-nos uma prescrição, ou pelo menos o ponto de partida para o cálculo das correções de mais alta ordem para o potencial efetivo. No próximo capítulo mostraremos uma expressão para o potencial efetivo para o modelo de dois campos escalares complexos, que é o modelo que estaremos trabalhando ao longo desta tese.

2 REAQUECIMENTO APÓS A INFLAÇÃO

Conforme mostrado no capítulo 1, o modelo inflacionário prevê que o universo passou por um período de rápida expansão que teria, exceto para o caso de inflação morna, diluído a matéria e radiação nele existente. Vimos ainda que este fenômeno poderia ser reproduzido através da dinâmica do campo escalar chamado inflaton. No entanto, o universo que observamos hoje e os dados de radiação cósmica de fundo, requerem que em algum momento, após a fase inflacionária, o universo tenha passado por uma fase dominada por radiação. Para explicar este fato, considera-se a hipótese de que logo após a inflação, o universo tenha sido repopulado por meio de um mecanismo produtor de partículas relativísticas, e que a subsequente termalização delas tenha levado o universo a atingir um equilíbrio térmico. A temperatura que caracteriza este período é conhecida na literatura como temperatura de reaquecimento. Neste capítulo serão considerados os modelos de produção de partículas conhecidos como perturbativos e não-perturbativos. Modelos perturbativos constituem aqueles em que o inflaton decai em partículas relativísticas que promovem o reaquecimento do universo. A literatura denota este modelo simplesmente por reaquecimento (reheating). Os modelos não-perturbativos prevêem produção de partículas sempre que um campo clássico varie temporalmente de forma a perturbar o vácuo de um campo quântico acoplado a ele. Na chamada fase de pré-aquecimento (preheating), o inflaton é considerado um campo clássico, uma vez que durante a inflação, os modos quânticos associados ao inflaton sofrem o processo chamado de decoerência, por meio do qual se tornam clássicos e dão origem a geração de densidades de perturbações. O campo de inflaton, ao final de inflação, ao oscilar em torno do mínimo de seu potencial, excita os modos quânticos de outros campos a ele acoplados, levando a um processo de ressonância conhecido como ressonância paramétrica, processo esse que iremos detalhar mais a frente.

2.1 Dinâmica do Inflaton após a Inflação

A matéria existente hoje no universo pode ter sido produzida após a inflação quando o inflaton passou a oscilar em torno do ponto mínimo de seu potencial efetivo. Por simplicidade, considera-se aqui o modelo mais simples de inflação caótica que é o modelo de campo escalar massivo com potencial $V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$. A equação de movimento que rege a dinâmica do inflaton para este potencial é dada por:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m_\phi^2\phi = 0, \tag{105}$$

com

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi , \quad (106)$$

onde

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 . \quad (107)$$

A dinâmica do campo ϕ produziria a inflação se fossem satisfeitas as condições de rolagento lento:

$$\begin{aligned} V(\phi) &\gg \frac{\dot{\phi}^2}{2} , \\ V'(\phi) &\gg \ddot{\phi} . \end{aligned} \quad (108)$$

Neste caso, o termo de fricção $3H\dot{\phi}$ domina sobre o termo $\ddot{\phi}$ e o termo de potencial domina sobre o termo cinético. Com o decréscimo do campo ϕ abaixo de M_{Pl} o termo de fricção $3H\dot{\phi}$ torna-se cada vez menor e a inflação finaliza quando $\phi \approx \frac{M_{\text{Pl}}}{2}$. Ao atingir este valor, o termo $\ddot{\phi}$ volta a ser importante. A solução para o sistema de equações (105), (106) e (107) pode ser aproximada pela expressão:

$$\phi(t) \approx \frac{M_{\text{Pl}} \sin(m_\phi t)}{3 m_\phi t} = \Phi(t) \sin(m_\phi t) , \quad (109)$$

onde $\Phi(t) = M_{\text{Pl}}/(3m_\phi t)$ é a amplitude do campo ϕ que diminui com o tempo uma vez que o universo está em expansão. Podemos ainda escrever a equação (109) em termos de uma variável adimensional mais conveniente,

$$N = \frac{m_\phi t}{2\pi} , \quad (110)$$

em que N corresponde ao número de oscilações do campo ϕ . Assim, a solução de (109) pode ser reescrita da forma

$$\phi(t) \approx \frac{M_{\text{Pl}} \sin(2\pi N)}{3 \cdot 2\pi N} = \Phi(N) \sin(2\pi N) , \quad (111)$$

onde a amplitude do campo Φ é dada por $\Phi(N) = M_{\text{Pl}}/(6\pi N)$. Esta parametrização é boa a partir de $N = 1/4$ em caso de serem realizadas simulações numéricas. Para o regime de oscilações rápidas no mínimo de seu potencial efetivo, a densidade de energia pode ser calculada considerando-se a média sobre um período de oscilação que, nesse caso, fornece $\langle \dot{\phi}^2/2 \rangle = \langle V(\phi) \rangle$. Mas, segundo a equação (35) a pressão se anularia. Conclui-se que, na fase de oscilações do campo ϕ em torno do mínimo de seu potencial efetivo o universo expandiria segundo o comportamento da matéria não relativística [22]

$$a(t) \propto t^{2/3} . \quad (112)$$

O comportamento estudado de ϕ corresponde ao inflaton livre. Neste caso, o inflaton seria diluído como matéria não-relativística o que acarretaria na não existência de uma posterior era da radiação e *consequentemente* a não-existência de um universo conforme o observado hoje. Sendo assim, parece necessário que após a inflação, a energia concentrada em ϕ seja transferida para outros campos de matéria e partículas relativísticas sejam geradas, interagindo entre si até termalizarem na temperatura de reaquecimento. Logo, a solução natural seria acoplar o inflaton a outros campos de matéria, campos estes que seriam desprezíveis durante a inflação e, portanto, supoe-se que não afetariam este estágio. Note que esta hipótese não é a seguida pela proposta de inflação morna, onde se leva em conta tais interações do inflaton com outros campos de matéria e, dependendo dos diversos parâmetros do modelo, tais interações podem de fato modificar a dinâmica do campo de inflaton [11, 13, 21]. Segue-se a descrição de dois mecanismos de produção de partículas o perturbativo e o não-perturbativo.

2.2 Método Perturbativo de Produção de Partículas

Na presente seção, discutiremos a teoria elementar de reaquecimento conforme desenvolvida em [3]. Consideramos um modelo simples em que o campo escalar de inflaton ϕ interage com um outro campo escalar χ e com um campo fermiônico ψ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 \\ &+ \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 - \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2 \\ &+ \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi - h\phi) \psi , \end{aligned} \quad (113)$$

aqui g e h são constantes de acoplamento, assumidas serem muito pequenas ($\ll 1$). A densidade de energia para o campo de inflaton enquanto oscila próximo ao mínimo de seu

potencial efetivo é $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$. A frequência de oscilações é $k_0 = m_\phi$. Devido aos efeitos da expansão do universo, a amplitude de oscilações decresce como $a^{-3/2}$ e a energia do campo ϕ decresce da mesma forma que a densidade de partículas não relativísticas de massa m , ou seja:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 \approx a^{-3} . \quad (114)$$

Um campo escalar homogêneo com frequência m_ϕ pode ser considerado como uma onda coerente de partículas ϕ com momento zero e com densidade de partículas $n_\phi = \rho_\phi/m_\phi$. Em outras palavras, n_ϕ osciladores de mesma frequência m_ϕ , oscilando coerentemente com a mesma fase, podem ser descritos como uma única onda homogênea $\phi(t)$. Para um campo escalar homogêneo em um universo com constante de Hubble H a equação de movimento para ϕ , na aproximação de pequena amplitude de oscilação, é dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + [m_\phi^2 + \Pi(\omega)]\phi = 0 , \quad (115)$$

onde temos aqui que $\Pi(\omega)$ é o operador de polarização com quadrimomento $k_\mu = (\omega, 0, 0, 0)$, $\omega = m_\phi$. Quando, $m_\phi \geq 2m_\psi$, $\Pi(\omega)$ adquire uma parte imaginária $Im\Pi(\omega)$, que é um resultado típico de física de partículas, $m_\phi \geq 2m_\psi$, indica que é cinematicamente possível o decaimento de ϕ em férmions ψ e $Im\Pi(\omega)$ dá a respectiva largura de decaimento do campo ϕ [23]. Assumindo que $m_\phi^2 \gg H^2$, que deve ser válido ao final de inflação e $m_\phi^2 \gg Im\Pi(\omega)$, válido para o caso de acoplamentos perturbativos, temos $\Phi(t) = \Phi_0 a^{-3/2}(t) = \Phi_0 e^{-\frac{3}{2} \int dt H(t)}$. Negligenciando por simplicidade a dependência temporal de H e $Im\Pi(\omega)$ devido a expansão do universo, obtemos a solução da equação (115)

$$\phi \approx \phi_0 \exp(im_\phi t) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(3H + \frac{Im\Pi(m_\phi)}{m_\phi} \right) t \right] . \quad (116)$$

Expressando-se $Im\Pi(\omega)$ em termos da largura de decaimento para ϕ , Γ_ϕ [23],

$$Im\Pi = m_\phi \Gamma_\phi , \quad (117)$$

podemos notar que a equação (116) descreve oscilações amortecidas do campo próximo do ponto $\phi = 0$. Uma descrição fenomenológica deste efeito pode ser realizada através da adição de um termo de amortecimento $\Gamma_\phi \dot{\phi}$ ao invés de adicionar um termo proporcional ao operador de polarização,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_{\phi}\dot{\phi} + m_{\phi}^2\phi = 0. \quad (118)$$

A equação (118) nos diz que o campo ϕ diminui não apenas devido a expansão do universo mas também devido a produção e transferência de energia para as novas partículas, por um canal de decaimento representado pela taxa ou largura de decaimento Γ_{ϕ} . Neste modelo, o reaquecimento finalizaria somente quando a constante de Hubble H se torna menor do que Γ_{ϕ} , pois de outro modo a principal porção de energia permaneceria armazenada no campo ϕ . Uma vez satisfeita esta condição, o universo atinge o equilíbrio térmico. A idade do universo neste momento é dada por $t_r = \frac{2}{3}\Gamma_{\phi}^{-1}$, ou em termos da densidade de energia ρ temos $t = \sqrt{M_p/\sqrt{6\pi\rho}}$ [3]. Estas duas condições juntas nos fornecem a densidade de energia num tempo t_r :

$$\rho(t_r) \approx \frac{3\Gamma_{\phi}^2 M_{\text{Pl}}^2}{8\pi}. \quad (119)$$

Segundo a termodinâmica de equilíbrio, após o decaimento do inflaton, a matéria adquire uma temperatura T_r , que é definida pela equação

$$\rho(t_r) \approx \frac{3\Gamma_{\phi}^2 M_{\text{Pl}}^2}{8\pi} \cong \frac{\pi^2 \varepsilon(T_r)}{30} T_r^4, \quad (120)$$

onde $\varepsilon(T)$ é o número de graus de liberdade relativísticos na temperatura T . Em algum modelo realístico espera-se $\varepsilon(T) \approx 10^2 - 10^3$, que nos fornece a seguinte estimativa para a temperatura de reaquecimento em termos de Γ_{ϕ} :

$$T_r \approx 0.2\sqrt{\Gamma M_{\text{Pl}}}, \quad (121)$$

que não depende do valor inicial de ϕ e é completamente determinada por parâmetros que o modelo da física de partículas elementares utiliza para descrever esses decaimentos. Isso significa que esse modelo de reaquecimento pode ser aplicado para modelos inflacionários com fundo de poço que possam ser aproximados por uma função quadrática do campo. Segue-se agora uma descrição detalhada de outro mecanismo de produção de partículas, que se mostrou ser muito mais eficiente do que o método perturbativo. Esse mecanismo é conhecido como reaquecimento ressonante, ou pré-aquecimento.

2.3 Pré-aquecimento

Em anos recentes, foi notado que, ao fim da inflação, oscilações do inflaton em torno do mínimo de seu potencial, poderiam dar origem a um curto período de produção não-perturbativa de partículas [4–6]. O decaimento de uma partícula ϕ em duas partículas χ poderia levar a uma produção explosiva de partículas se estas forem bósons devido aos efeitos relacionados com a estatística de Bose-Einstein, pela qual a probabilidade de decaimento torna-se favoravelmente ampliada. Os autores em [4], desenvolveram este modelo de produção ressonante de partículas para o cenário de inflação caótica. Por simplicidade, considera-se neste trabalho a interação entre o campo clássico de inflaton ϕ e o campo escalar quântico χ com a lagrangiana (113). Em mecânica quântica, um campo escalar pode ser considerado como um operador cuja representação de Heisenberg é

$$\hat{\chi}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[\hat{a}_k \chi_k(t) e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger \hat{\chi}_k^*(t) e^{ikx} \right] \quad (122)$$

onde \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger são operadores de criação e de destruição respectivamente. Para um métrica plana de Friedmann com fator de escala $a(t)$ a parte temporal das autofunções com momento comóvel k obedece a seguinte equação de movimento

$$\ddot{\chi}_k + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2\phi^2 \right) \chi = 0. \quad (123)$$

A equação acima descreve um oscilador com frequência variável no tempo devido a dependência temporal de $a(t)$ e do campo ϕ . Analisaremos a equação (123) em diferentes regimes. Desprezando por enquanto a expansão do universo, isto é, fazendo $a = 1$, podemos escrever a equação para os modos (flutuações quânticas do campo χ) da seguinte forma

$$\ddot{\chi}_k + (k^2 + g^2\phi^2) \chi_k = 0, \quad (124)$$

onde $k = |\vec{k}|$. Como foi visto na seção 3.1, após a inflação, as oscilações do inflaton em torno do mínimo de seu potencial podem ser descritas como $\phi(t) = \Phi(t) \sin(m_\phi t)$. Desta forma, podemos reescrever a Eq. (124) como segue

$$\ddot{\chi}_k + (k^2 + g^2\Phi^2 \sin^2(m_\phi t)) \chi_k = 0. \quad (125)$$

Esta equação descreve um oscilador de frequência $\omega_k^2(t) = k^2 + g^2\Phi^2 \sin^2(m_\phi t)$ variando periodicamente no tempo. Esta periodicidade leva a ressonância paramétrica para modos com certos valores de k . Podemos reescrever (125) de uma forma mais simples ao fazer a seguinte substituição de variáveis: $z = m_\phi t$, $A_k = \frac{k^2}{m_\phi^2} + 2q$ e $q = \frac{g^2\Phi^2}{4m_\phi^2}$. Assim temos

$$\ddot{\chi}_k + (A_k - 2q \cos(2z)) \chi_k = 0. \quad (126)$$

Esta é a bem conhecida equação de Mathieu [24]. As propriedades das soluções desta equação são bem representadas por meio de seus gráficos de estabilidade/instabilidade [4, 5]. No apêndice A mostramos um método de tratamento da equação de Mathieu.

Uma importante característica das soluções de (126) é a existência de uma instabilidade exponencial $\chi(z) \propto \exp(\pm \mu_k^{(n)} z)$ dentro do conjunto de bandas de ressonância de frequências $\Delta k^{(n)}$ rotulado por um índice inteiro n . Esta instabilidade corresponde ao crescimento exponencial do número de ocupação das flutuações quânticas $n_k(t) \propto \exp(2\mu_k^{(n)} m_\phi t)$ que pode ser interpretada como uma produção de partículas.

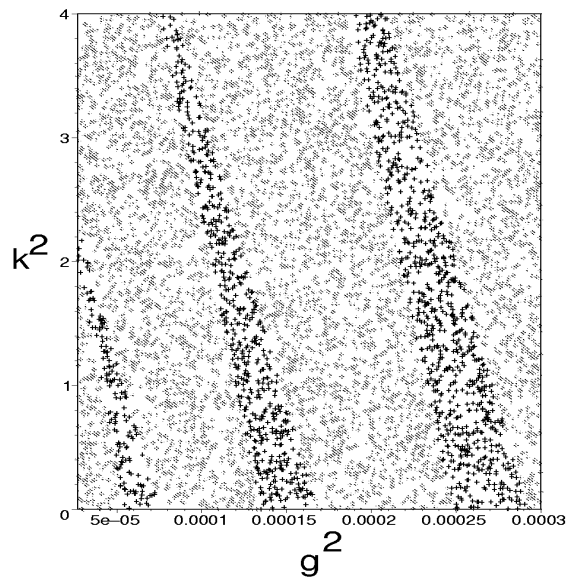
Um exemplo dessas bandas de instabilidade para os modos χ_k , como função do momento k^2 e constante de acoplamento g^2 , é mostrada na Fig. 1, para o caso do potencial $V = m_\phi^2 \phi^2/2 + m_\chi^2 \chi^2/2 + g^2 \phi^2 \chi^2/2$, com parâmetros escolhidos da forma $m_\phi = 10^{-6} M_{\text{Pl}}$, $m_\chi = 4 \times 10^{-7} M_{\text{Pl}}$.

Para $g\Phi < m_\phi$, temos o regime de ressonância paramétrica chamada de estreita, onde então $q \ll 1$. Neste regime, a ressonância é mais pronunciada na primeira banda de ressonância, para modos com $k^2 \sim m_\phi^2 (1 - 2q \pm q)$. Os modos de χ_k com momentos correspondentes ao centro da banda de ressonância em $k \sim m_\phi$ crescem como $e^{qz/2}$, que em nosso caso é igual a $e^{\mu_k m_\phi t} \sim \exp\left(\frac{g^2 \Phi^2 t^2}{8m_\phi}\right)$ e o número de partículas χ cresce como $e^{qz/2} \sim e^{\mu_k m_\phi t} \sim \exp\left(\frac{g^2 \Phi^2 t}{4m_\phi}\right)$. Este processo pode ser interpretado como uma ressonância com decaimento de duas partículas ϕ , de massa m_ϕ , em duas partículas χ com momento $k \sim m_\phi$. O comportamento do campo χ nestes dois regimes pode ser visto nas Figs. 3 e 2

Por sua vez, para oscilações com grandes amplitudes Φ , o parâmetro $q = \frac{g^2 \Phi^2}{4m_\phi^2}$ pode ser muito grande. Neste caso, a ressonância ocorre para amplos valores de k e o parâmetro μ_k torna-se grande, o que faz com que o préaquecimento aconteça de forma extremamente eficiente. Tem-se ressonância para modos com $k^2/m_\phi^2 = A_k - 2q$, para valores acima da linha $A_k = 2q$ no gráfico de estabilidade/instabilidade da equação de Mathieu. A figura 3 ilustra como evolui o campo χ para o regime de ressonância larga.

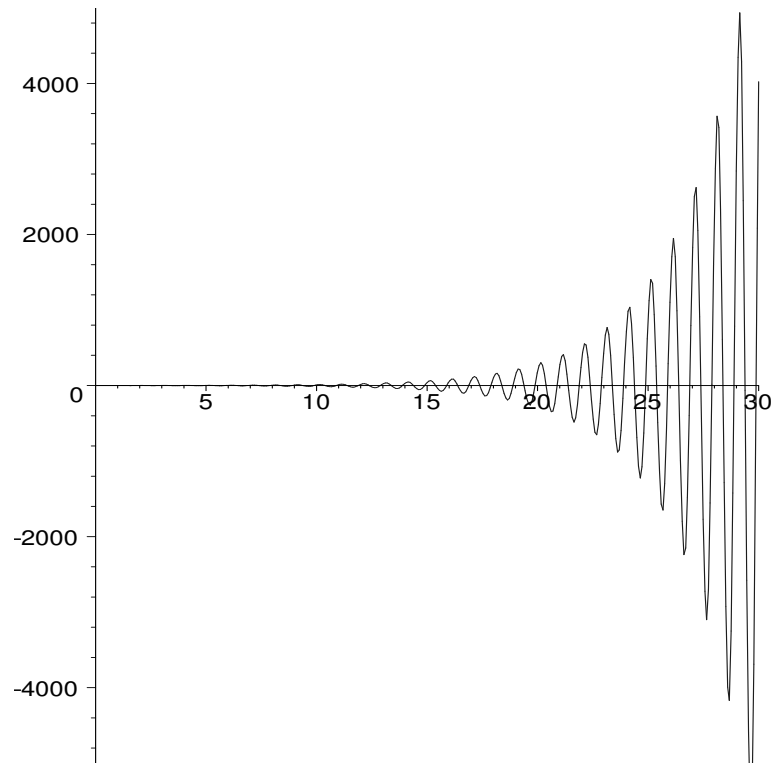
Durante cada oscilação do campo de inflaton ϕ , o campo χ oscila muitas vezes.

Figura 1 - Bandas de instabilidade (áreas escuras) para os modos χ_k como função de k^2 e g^2 .



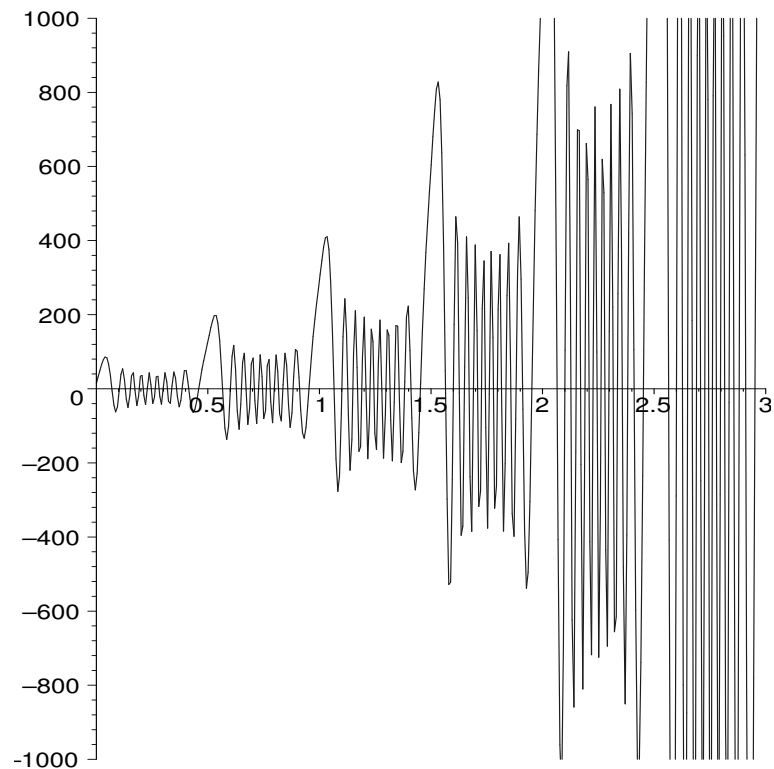
Fonte: O autor, 2007.

Figura 2 - A evolução de χ_k como função do tempo, para o caso da ressonância estreita



Fonte: O autor, 2007.

Figura 3 - A evolução de χ_k como função do tempo, para o caso da ressonância larga.



Fonte: O autor, 2007.

Sendo assim, sua massa efetiva $m_\chi(t) = g\phi(t)$ é muito maior do que a massa do inflaton para $g\phi(t) \gg m_\phi$. Esta relação é satisfeita para a parte principal do período de oscilação do campo de inflaton ϕ no regime de ressonância larga com $q^{1/2} = \frac{g\Phi}{2} \gg 1$. Como um resultado, a frequência típica de oscilações $\omega_k(t) = \sqrt{k^2 + g^2\phi^2}$ do campo χ é muito maior que a do campo ϕ . O grande número de oscilações do campo χ para cada oscilação do campo ϕ é devido a uma variação na adiabaticidade para a massa efetiva m_χ durante a parte principal deste intervalo. Isto significa que durante a ressonância larga a amplitude de χ_k é mínima no ponto em que sua frequência é máxima, isto é, em $\phi(t) = \Phi$, e aumenta substancialmente perto do ponto em que $\phi = 0$. Para $\phi(t)$ muito pequeno a variação na frequência de oscilação $\omega_k(t)$ cessa de ser adiabática.

A condição padrão necessária para produção de partículas é a ausência de adiabaticidade na variação de $\omega_k(t)$:

$$\frac{d\omega_k}{dt} \geq \omega_k^2. \quad (127)$$

Esta condição é fundamental para a ressonância larga devido aos consideráveis efeitos esperados durante cada oscilação, o que não acontece durante a ressonância estreita. Para determinar o intervalo de tempo típico Δt_* e o momento típico k_* , ou seja, quando e onde podem acontecer a ressonância, lembremos que para ϕ pequeno tem-se $\dot{\phi} \approx m_\phi\Phi$. Junto com a condição (127) temos

$$k^2 \leq (g^2\phi m_\phi\Phi)^{2/3} - g^2\phi^2. \quad (128)$$

Esta condição torna-se satisfeita para pequenos valores de k quando o campo $\phi(t)$ torna-se menor do que $\sqrt{\frac{m_\phi\Phi}{g}}$. O intervalo máximo de momento para os quais a produção de partículas ocorre corresponde a $\phi(t) = \phi_*$, onde

$$\phi_* \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_\phi\Phi}{g}} \approx \frac{1}{3} \Phi q^{-1/4}. \quad (129)$$

O valor máximo de momento para as partículas produzidas naquela época pode ser estimado por $k_{\max} = \sqrt{\frac{gm_\phi\Phi}{2}}$. Na parte principal do intervalo $|\phi| \leq 2\phi_*$ a faixa de momentos permanece menor mas da mesma ordem de magnitude de k_{\max} . Assim pode-se estimar o valor típico de momento das partículas produzidas no estágio como $k_*/2$, onde

$$k_* = \sqrt{gm_\phi\Phi} = \sqrt{2}m_\phi q^{1/4}, \quad (130)$$

da mesma forma, cada vez que o campo ϕ aproxima-se do ponto $\phi = 0$, ele leva o tempo

$$\Delta t_* \sim \frac{2\phi_*}{\dot{\phi}} \sim \frac{1}{\sqrt{gm_\phi \Phi}} \sim k_*^{-1}, \quad (131)$$

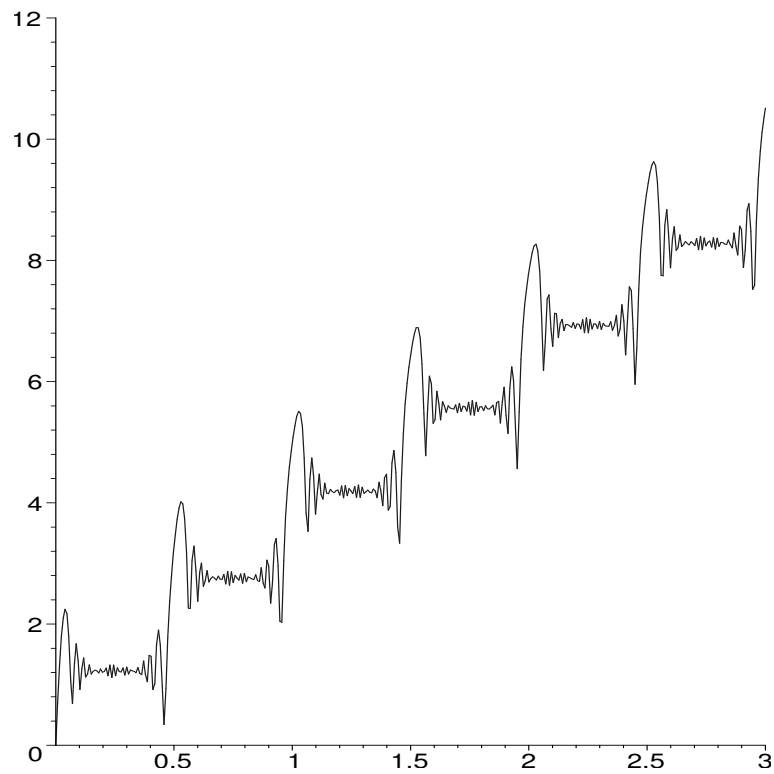
no domínio $|\phi| \leq \phi_*$. No tempo $k_* \approx m_\chi = g\phi_*$, então $\omega_k \sim k_*$. Esta estimativa de Δt_* diz-nos que a produção de partículas no regime de ressonância larga ocorre dentro de um tempo da ordem do período de uma oscilação do campo χ , ou seja, $\Delta t_* \sim \omega_{k_*}^{-1}$, de acordo com o princípio de incerteza. No regime semi-clássico, onde valem as soluções do tipo WKB, quando a frequência $\omega_k(t)$ está variando adiabaticamente, n_k é constante, equivalendo a um invariante adiabático.

Uma comparação entre a ressonância larga e a ressonância curta nos mostra que, no primeiro caso, o campo χ varia vigorosamente de modo que se calcularmos $\ln(n_k)$, veremos que este tem um comportamento aproximadamente linear. No segundo caso, as amplificações do campo ocorrem próximos ao ponto $\phi = 0$, onde o processo não é adiabático. O número de ocupação n_k , sendo um invariante adiabático, varia somente nestes curtos intervalos onde o número de partículas não é bem definido. Este comportamento da produção de partículas para os diferentes regimes pode ser visto nas figuras 4 e 5.

Em outras palavras, o crescimento dos modos de χ_k leva ao crescimento do número de ocupação. Assim sendo, a densidade número de partículas pode ser calculada como a energia dos modos, $\frac{1}{2} |\dot{\chi}_k|^2 + \frac{1}{2} \omega_k^2 |\chi_k|^2$ dividido pela energia ω_k de cada partícula:

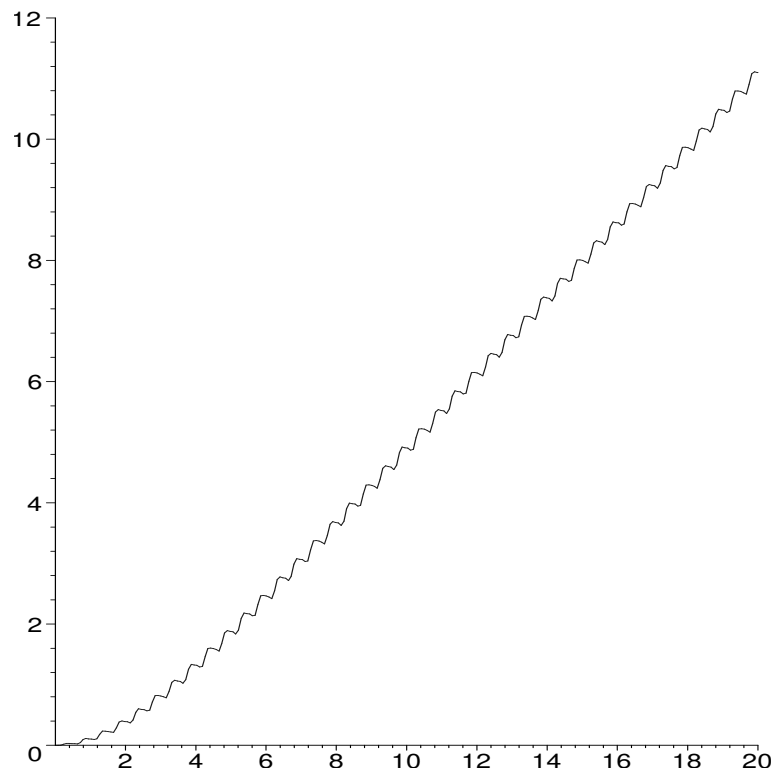
$$n_k = \frac{\omega_k}{2} \left(\frac{1}{\omega_k^2} |\dot{\chi}_k|^2 + |\chi_k|^2 \right) - \frac{1}{2}. \quad (132)$$

Figura 4 - A evolução do número de partículas χ produzidas, como função do tempo, para o caso da ressonância larga.



Fonte: O autor, 2007.

Figura 5 - A evolução do número de partículas χ produzidas, como função do tempo, para o caso da ressonância estreita.



Fonte: O autor, 2007.

3 TEORIA DE CAMPOS EM TEMPERATURA FINITA E O FORMALISMO DE TEMPO REAL

3.1 Teoria de Campos de Temperatura Finita

Discutiremos a seguir uma formulação da teoria de campos em temperatura finita realizada em tempo real. Neste método faz-se algumas modificações no propagador de Feynman de temperatura zero, $T = 0$, de modo que permaneçam válidas as regras de Feynman sem a necessidade do uso de continuações analíticas do tempo imaginário para o tempo real (para o caso do formalismo de tempo imaginário, ver a Ref. [25]. Nesta dissertação só iremos discutir o caso do formalismo de tempo real).

Em temperatura zero, o propagador de Feynman está relacionado com a função de Green de dois pontos pela equação

$$i\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T [\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] | 0 \rangle , \quad (133)$$

onde o campo escalar ϕ pode ser expresso em termos dos operadores de criação e de aniquilação,

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [a(k)e^{-i\vec{k}\vec{x}} + a^+(k)e^{i\vec{k}\vec{x}}] . \quad (134)$$

Em temperatura finita, podemos expressar a média das funções de dois pontos como uma média térmica, com valor esperado no vácuo substituído pelo valor esperado da estatística quântica. Desta forma, o propagador (133) pode ser reescrito como

$$i\Delta_F(x - y) \rightarrow \langle T [\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} [e^{-\beta\hat{H}} [\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)]] , \quad (135)$$

onde \hat{H} é a Hamiltoniana do sistema com autovalores e autoestados $\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$ e $Z(\beta) = \text{tr} [\exp -\beta\hat{H}]$ é a função de partição. Em termos dos autoestados de energia, podemos reescrever o propagador (135) como

$$i\Delta_F(x - y) = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n \langle n | T [\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] | n \rangle e^{-\beta E_n} , \quad (136)$$

onde a soma é realizada sobre todos os estados termicamente excitados com o fator de

Boltzmann dado por $\exp -\beta E_n$. Para o caso em que $x_0 > y_0$,

$$i\Delta_F(x-y) = \frac{1}{Z(\beta)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{k'}} \times \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | \left[a(k)e^{-i\vec{k}\vec{x}} + a^+(k)e^{i\vec{k}\vec{x}} \right] \left[a(k')e^{-i\vec{k}'\vec{y}} + a^+(k')e^{i\vec{k}'\vec{y}} \right] | n \rangle . \quad (137)$$

Os estados de multi-boson são dados por se agir repetidamente com o operador de criação sobre o estado de vácuo de acordo com

$$|n\rangle = |n_1(k_1), n_2(k_2), \dots\rangle = \prod_i \frac{[a^+(k_i)]^{n_i}}{\sqrt{n_i(k_i)!}} |0\rangle , \quad (138)$$

onde os estados $|n\rangle$ são orto-normalizados. Com isto e as relações usuais de comutação para os operadores de criação e aniquilação [23] obtemos

$$i\Delta_F(x-y) = \frac{1}{Z(\beta)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_n e^{-\beta E_n} \left\{ [n(k)+1] e^{-i\vec{k}(x-y)} + n(k) e^{i\vec{k}(x-y)} \right\} . \quad (139)$$

Podemos agora usar o resultado

$$\frac{1}{Z(\beta)} \sum_n n(k) e^{-\beta E_n} = \frac{1}{\exp \beta\omega_k - 1} = n(\omega_k) , \quad (140)$$

para encontrar uma expressão para o propagador térmico de Feynman para $x_0 > y_0$. Este é dado por

$$i\Delta_F(x-y)|_{x_0>y_0} = D^>(x,y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left\{ [n(\omega_k)+1] e^{-i\vec{k}(y)} + n(\omega_k) e^{i\vec{k}(x-y)} \right\} |_{k_0=\omega_k} . \quad (141)$$

Fazendo o mesmo cálculo para $y_0 > x_0$ temos

$$i\Delta_F(x-y)|_{y_0>x_0} = D^<(x,y) = D^>(y,x) . \quad (142)$$

Podemos ainda expressar a transformada de Fourier do propagador de Feynman em temperatura finita da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
i\Delta_F(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} i\Delta_F(k) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi n(k_0)\delta(k^2 - m^2) \right] e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}, \tag{143}
\end{aligned}$$

onde o segundo termo de (143) corresponde aos termos de temperatura finita. Uma das vantagens encontradas na representação em tempo real é a possibilidade de se escrever as funções de Green de dois pontos sem ter que fazer uso de um tempo imaginário, o que exigiria o uso de continuações analíticas para voltar ao tempo real. Uma outra vantagem é que este formalismo pode ser usado como ponto de partida para o estudo da dinâmica de sistemas fora do equilíbrio. Infelizmente, há alguns problemas com o formalismo de tempo real. Singularidades provenientes das funções δ de Dirac são possíveis nos diagramas de Feynman com dois ou mais propagadores [25]. Mostramos então a seguir, como é estabelecido o formalismo corretamente.

3.2 A Formulação de Teoria Quântica de Campos a Tempo Real

Uma solução para o problema apresentado na seção anterior pode ser obtida para as muitas formas em que a temperatura é introduzida na teoria através de uma periodicidade dos campos no tempo complexo. De acordo com as condições de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) [25], o tempo dos campos vai de um tempo inicial t_i até um tempo final $t = t_i - i\beta$. Podemos fazer uma escolha apropriada de contorno de modo a incluir o eixo de tempo real. Dos diferentes contornos existentes no plano complexo nem todos constituem escolhas apropriadas devido a necessidade de se preservar a analiticidade e a convergência das funções de Green de dois pontos. Consideremos uma função de Green dada pela equação (135) que pode ser escrita em termos de um contorno no plano temporal complexo como

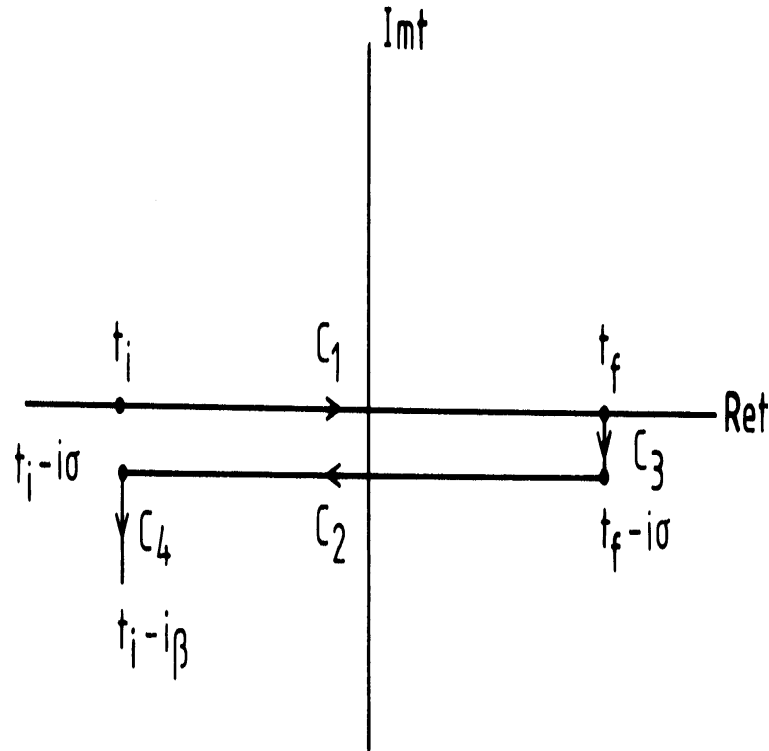
$$\left\langle T \left[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) \right] \right\rangle_{\beta} = D^>(x,y)\theta_c(x^0 - y^0) + D^<(x,y)\theta_c(y^0 - x^0), \tag{144}$$

onde

$$\begin{aligned}
D^>(x,y) &= \left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) \right\rangle_{\beta}, \\
D^<(x,y) &= \left\langle \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) \right\rangle_{\beta}, \tag{145}
\end{aligned}$$

considerando os estados $|n\rangle$ com autovalores E_n , podemos calcular (145) no ponto $\vec{x} =$

Figura 6 - O contorno de Keldysh no plano de tempo complexo.



Fonte: O autor, 2007.

$\vec{y} = 0$ como

$$D^>(x^0, y^0) = \sum_{m,n} |\langle m | \phi(0) | n \rangle|^2 e^{iE_n(x^0 - y^0 + i\beta)}, \quad (146)$$

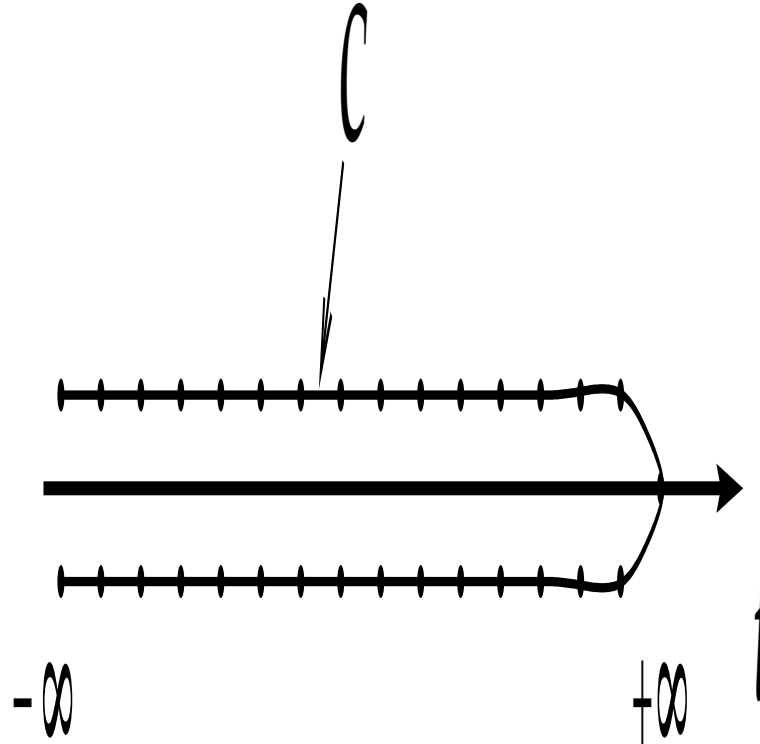
de modo que a convergência da soma implica que $-\beta \leq \text{Im}(x^0 - y^0) \leq 0$ o que requer que $\theta_c(x^0 - y^0) = 0$ para $\text{Im}(x^0 - y^0) > 0$. De (145) segue que uma propriedade similar para a convergência de $D^<(x^0, y^0)$ é que $0 \leq \text{Im}(x^0 - y^0) \leq \beta$, o que requer $\theta_c(y^0 - x^0) = 0$ para $\text{Im}(x^0 - y^0) < 0$, e a condição final para convergência completa das funções de Green é

$$-\beta \leq \text{Im}(x^0 - y^0) \leq \beta, \quad (147)$$

para θ_c tal que $\theta_c(t) = 0$ para $\text{Im}(t) > 0$. Tais condições implicam que o caminho C deve ser tal que um ponto movendo-se ao longo dele tenha um decréscimo monotônico ou parte imaginária constante.

Entre os possíveis contornos que satisfazem as condições acima existe o chamado contorno de Keldysh conforme mostrado na figura ???. Neste contorno C é dado pela

Figura 7 - O contorno de tempo fechado de Schwinger C . Pontos no seguimento $C_1 = -\infty < t < +\infty$ e no seguimento oposto C_2 , do contorno denotam os pontos de tempo discretizados.



Fonte: O autor, 2007.

relação $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ em que C_1 vai do tempo inicial t_i até o tempo final t_f , C_3 percorre o intervalo entre t_f e $t_f - i\sigma$ com $0 \leq \sigma \leq \beta$, C_2 vai de $t_f - i\sigma$ até $t_i - i\sigma$ e C_4 se encontra no intervalo de $t_i - i\sigma$ até $t_i - i\beta$. Para o cálculo das funções de Green é conveniente tomar $t_i \rightarrow -\infty$ e $t_f \rightarrow \infty$. Neste caso, [25] as contribuições de C_3 e C_4 podem ser desprezadas. Este é o chamado contorno de Schwinger, mostrado na figura ??, o qual passaremos a descrever e utilizar nas nossas deduções das equações de movimento efetivas determinadas mais adiante. Deste modo, no contorno de Schwinger, podemos determinar dois tipos diferentes de campos, os quais identificaremos pelos índices + e -, dependendo de os campos estarem sobre C_1 ou C_2 respectivamente. Logo, para o propagador entre x^0 e y^0 há quatro possibilidades dependendo de os campos estarem sobre C_1 ou C_2 . Correspondentemente haverá quatro propagadores que serão identificados pelos índices ++, +-, -+, -.

O contorno de Schwinger é o contorno no plano complexo do tempo mais simples que podemos escolher. Ele consiste em fixar um tempo inicial t_i no passado infinito, caminhando até o futuro infinito sem fixar nenhuma condição final e depois voltando ao passado infinito. Este contorno é portanto também chamado de contorno de trajetória

temporal fechada. Podemos então expressar o funcional gerador Z das funções de Green ao longo deste contorno como segue

$$Z[J_+, J_-] = \int D\phi_+ D\phi_- e^{i \int d^4x \{[\mathcal{L}[\phi_+] + J_+ \phi_+] - [\mathcal{L}[\phi_-] + J_- \phi_-]\}}, \quad (148)$$

onde J^+ e J^- são as fontes para as partes C_1 e C_2 do contorno temporal, respectivamente. Levando-se em conta a periodicidade KMS do campo escalar, $\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t - i\beta)$, pode-se calcular as integrais de trajetória sobre as formas quadráticas obtendo-se como resultado final a função de partição em tempo real, generalizada para levar em conta o contorno de trajetória temporal fechada no plano complexo,

$$Z[J_+, J_-] = e^{i \int d^4z \left[L_{int}\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_+(z)}\right) - L_{int}\left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_-(z)}\right) \right]} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J_a \Delta^{ab}(x-x') J_b(x')}, \quad (149)$$

com $a, b = +, -$. Os propagadores Δ^{ab} que entram na integral ao longo do contorno na equação (149) são dados por

$$\begin{aligned} i\Delta^{++}(x-x') &= \langle T_+ [\phi(x)\phi(x')] \rangle, \\ i\Delta^{--}(x-x') &= \langle T_- [\phi(x)\phi(x')] \rangle, \\ i\Delta^{+-}(x-x') &= \langle \phi(x)\phi(x') \rangle, \\ i\Delta^{-+}(x-x') &= \langle \phi(x')\phi(x) \rangle, \end{aligned} \quad (150)$$

onde T_+ e T_- indicam operadores de ordenação temporal cronológico e anti-cronológico. $i\Delta^{++}(x-x')$ é o propagador físico causal (ou de Feynman) usual da teoria quântica de campos. Os outros três propagadores surgem como consequência do contorno de tempo fechado. Os propagadores na equação (150) podem ser expressos em termos das quantidades $D^>(x, x')$ e $D^<(x, x')$ como

$$\begin{aligned} \Delta^{++}(x-x') &= D^>(x, x')\theta(t-t') + D^<(x, x')\theta(t-t'), \\ \Delta^{--}(x-x') &= D^>(x, x')\theta(t'-t) + D^<(x, x')\theta(t'-t), \\ \Delta^{+-}(x-x') &= D^<(x, x'), \\ \Delta^{-+}(x-x') &= D^>(x, x'). \end{aligned} \quad (151)$$

O formalismo de Schwinger em tempo real pode ser útil para tratar de diversos problemas que envolvam a teoria quântica de campos em temperatura finita inclusive aplicações a cosmologia. Na próxima seção veremos como utilizá-lo para derivar equações dinâmicas

para campos escalares fora do equilíbrio.

3.3 Modelo de Campos e as correspondentes Equações Efetivas de Movimento

Por simplicidade, adotaremos em nosso estudo o seguinte modelo descrito pela densidade de Lagrangiana para os campos escalares ϕ , χ e σ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 - g\phi\chi^2 \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - h\chi\sigma^2 \end{aligned} \quad (152)$$

onde g é o acoplamento trilinear entre os campos ϕ e χ e h é o acoplamento entre o campo χ e σ . Neste caso ϕ é um campo escalar real oscilante, ao final de inflação. ϕ pode decair em um par de partículas χ através do termo de interação $g\phi\chi^2$ e χ por sua vez pode decair em par de partículas σ . Desejamos encontrar a ação efetiva bem como a equação de movimento efetiva para os campos ϕ e χ . Estudaremos aqui basicamente o processo de ressonância paramétrica para o campo χ e como as diferentes correções quânticas oriundas tanto devido ao acoplamento de ϕ com χ e χ com σ afetam o fenômeno de ressonância. Para isto, fazemos uso do contorno de Schwinger conforme visto na última seção. Com isto temos que, no presente modelo, o funcional gerador é dado por

$$\begin{aligned} Z [J^\phi, J^\chi, J^\sigma] = & \int D\phi \int D\chi \int D\sigma \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \left[\mathcal{L}[\phi_+, \chi_+, \sigma_+] + J_+^\phi \phi_+ + J_+^\chi \chi_+ + J_+^\sigma \sigma_+ \right] \right. \\ & \left. - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \left[\mathcal{L}[\phi_-, \chi_-, \sigma_-] + J_-^\phi \phi_- + J_-^\chi \chi_- + J_-^\sigma \sigma_- \right] \right\} \\ = & \exp \left\{ iW_c [J_c^\phi, J_c^\chi, J_c^\sigma] \right\} , \end{aligned} \quad (153)$$

onde $J_c^\phi, J_c^\chi, J_c^\sigma$ representam fontes externas para os campos escalares, no caminho C de tempo fechado, conforme mostrado na figura ???. Desta forma, o funcional gerador pode ser escrito da forma simplificada

$$e^{iW_c [J^\phi, J^\chi, J^\sigma]} = \int_c D\phi \int_c D\chi \int_c D\sigma e^{iS_c [\phi, \chi, \sigma, J^\phi, J^\chi, J^\sigma]} \quad (154)$$

onde o índice c indica integrações sobre o contorno de caminho fechado C e a ação clássica S é dada por

$$S[\phi, \chi, \sigma, J^\phi, J^\chi, J^\sigma] = \int d^4x [\mathcal{L} + J^\phi(x)\phi(x) + J^\chi(x)\chi(x) + J^\sigma(x)\sigma(x)] . \quad (155)$$

Nesta formulação os campos escalares ϕ , χ e σ são periódicos, por exemplo, $\phi(t, \vec{x}) = \phi(t - i\beta, \vec{x})$, com o mesmo para os campos χ e σ , onde β é o inverso da temperatura, $\beta = 1/T$. A ação efetiva, por sua vez, é definida pelo funcional gerador conectado como

$$\Gamma_c[\phi] = W_c[J^\phi, J^\chi, J^\sigma] - \int_c d^4x J^\phi(x)\phi(x) , \quad (156)$$

onde $\phi(x) = \delta W_c[J^\phi, J^\chi, J^\sigma]/\delta J^\phi(x)$. Em termos das componentes em torno dos intervalos positivos e negativos temos

$$\Gamma[\phi_+, \phi_-] = W[J_+^\phi, J_-^\phi, \dots] - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x [J_+^\phi(x)\phi_+(x) - J_-^\phi(x)\phi_-(x)] \quad (157)$$

com $\phi_+(x) = \delta W[J_+^\phi, J_-^\phi, \dots]/\delta J_+^\phi(x)$ e $\phi_-(x) = -\delta W[J_+^\phi, J_-^\phi, \dots]/\delta J_-^\phi(x)$. Por sua vez, as componentes do propagador dos campos escalares na caminho de Schwinger são definidos por (com expressões se aplicando para qualquer dos campos escalares)

$$\Delta(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} G^{ij} \quad (158)$$

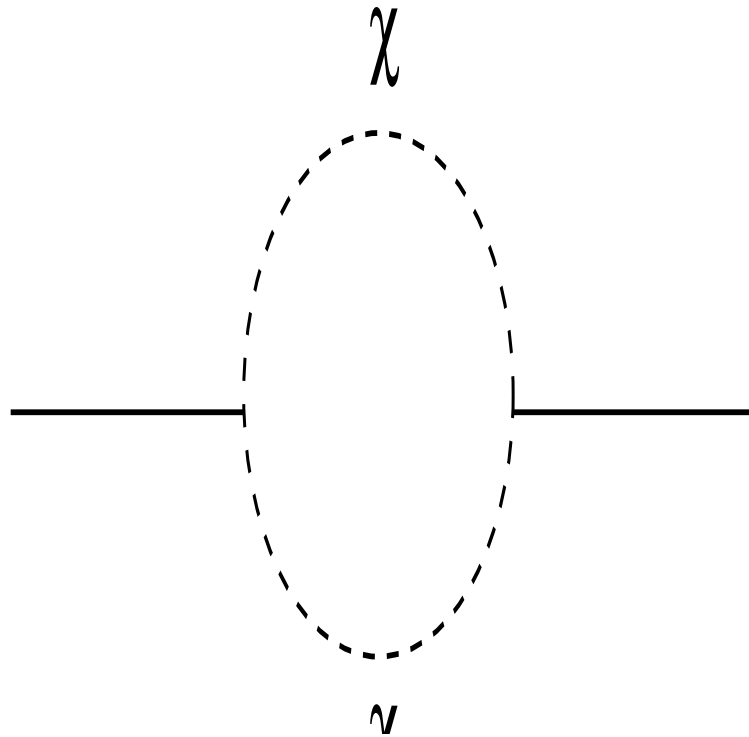
onde

$$\begin{aligned} G^{++}(k) &= \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2i\pi n_B(\omega_k)\delta(k^2 - m^2) \\ G^{--}(k) &= \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - 2i\pi n_B(\omega_k)\delta(k^2 - m^2) \\ G^{+-}(k) &= -2i\pi[\theta(-k_0) + n_B(k)]\delta(k^2 - m^2) \\ G^{-+}(k) &= -2i\pi[\theta(k_0) + n_B(k)]\delta(k^2 - m^2) \end{aligned} \quad (159)$$

com $n_B = 1/(e^{\beta\omega_k} - 1)$ e $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$.

A expansão em loops perturbativos da ação efetiva pode ser obtida por transformar $\phi \rightarrow \phi_{cl}$ onde ϕ_{cl} é o campo de configuração que extremiza a ação clássica $S[\phi, J]$ e ϕ' é uma pequena perturbação em torno de ϕ_{cl} . Para a ordem de dois loops, $\Gamma[\phi_+, \phi_-]$ é constituída por meio dos gráficos de Feynman como mostrados na figura 8.

Figura 8 - Diagrama de Feynman de ordem mais baixa contribuindo para a ação efetiva do campo ϕ . As linhas pontilhadas referem-se ao propagador do campo χ .



Fonte: O autor, 2007.

Usando as expressões para os propagadores, Eqs. (151) e (159), a contribuição do diagrama mostrado na Fig. 8 para a ação do campo ϕ é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma[\phi_+, \phi_-] &= ig^2 \int d^4x d^4x' [\phi_+(x) G_\chi^{++}(x-x') \phi_+(x') - \phi_-(x) G_\chi^{-+}(x-x') \phi_+(x') \\ &\quad - \phi_+(x) G_\chi^{+-}(x-x') \phi_-(x') + \phi_-(x) G_\chi^{--}(x-x') \phi_-(x')], \end{aligned} \quad (160)$$

e a ação efetiva para o campo ϕ , em ordem mais baixa na expansão em loops para as correções advindas do campo χ , se torna então,

$$\Gamma[\phi_+, \phi_-] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi_+)^2 - (\partial\phi_-)^2 - \frac{1}{2} m_\phi^2 (\phi_+^2 - \phi_-^2) \right] + \Delta\Gamma[\phi_+, \phi_-]. \quad (161)$$

A ação efetiva (161) fica numa forma mais transparente e de fácil interpretação se ao invés de se usarmos as variáveis de campo ϕ_+ e ϕ_- , usarmos as variáveis $\phi_c = (\phi_+ + \phi_-)/2$ e $\phi_\Delta = \phi_+ - \phi_-$ e, no final, tomamos $\phi_\Delta \rightarrow 0$ de modo ue ϕ_+ e ϕ_- passem a coincidir. ϕ_Δ é considerado na literatura um campo de resposta, pois os termos em ϕ_Δ podem ser associados com termos estocásticos (associados a instabilidades do sistema) como mostraremos abaixo. O campo ϕ_c é associado ao campo físico [26]. Usando as novas variáveis ϕ_c e ϕ_Δ , a ação efetiva para o campo ϕ , Eq. (161), pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_c, \phi_\Delta] &= \int d^4x \phi_\Delta(x) (\square + m^2) \phi_c - \int d^4x d^4x' C_\chi(x-x') \theta(t-t') \phi_\Delta(x) \phi_c(x) \\ &\quad + \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' D_\chi(x-x') \phi_\Delta(x) \phi_\Delta(x'), \end{aligned} \quad (162)$$

onde

$$C_\chi(x-x') \equiv 4g^2 Im [G_\chi^{++}(x-x')^2], \quad (163)$$

e

$$D_\chi(x-x') \equiv 2g^2 Re [G_\chi^{++}(x-x')^2]. \quad (164)$$

O termo de valor complexo na ação efetiva, dado pelo último termo em (162), revela a natureza dissipativa do sistema. Desta forma não há como encontrar nenhuma equação de movimento efetiva por apenas derivá-la com respeito a variável de campo, pois estamos tratando com um campo escalar real e sua equação deve ter igualmente de valor real. A

solução para problemas desta ordem foi proposta por Morikawa [27], na qual é introduzido um campo auxiliar $\xi(x)$, de propriedades estocásticas, como mostrado abaixo. Para escrever a ação efetiva (162) numa forma real, usamos a identidade funcional,

$$e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \phi_\Delta(x) D_\chi(x-x') \phi_\Delta(x')} = \int D\xi(x) e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi(x) D_\chi^{-1}(x-x') \xi(x') + i \int d^4x \xi(x) \phi_\Delta(x)}. \quad (165)$$

Usando a Eq. (165), podemos então reescrever a ação (162) da forma

$$\exp(i\Gamma[\phi_c, \phi_\Delta]) = \int D\xi P[\xi] \exp\{i\Gamma_{eff}[\phi_c, \phi_\Delta, \xi]\} \quad (166)$$

onde

$$\Gamma_{eff}[\phi_c, \phi_\Delta, \xi] = Re\Gamma[\phi_c, \phi_\Delta] + \int d^4x \xi(x) \phi_\Delta(x), \quad (167)$$

e $P[\xi]$ é uma distribuição estatística funcional para $\xi(x)$, que é uma gaussiana,

$$P[\xi] = N e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi(x) D_\chi^{-1}(x-x') \xi(x')}, \quad (168)$$

e que possui dispersão dada pela parte imaginária da ação efetiva

$$\langle \xi(x) \xi(x') \rangle = D_\chi(x-x'), \quad (169)$$

e possui média nula,

$$\langle \xi(x) \rangle = 0. \quad (170)$$

A equação de movimento para o campo ϕ_c é obtida ao aplicar o princípio variacional á ação efetiva, definido por [26]

$$\left. \frac{\delta \Gamma_{eff}[\phi_c, \phi_\Delta, \xi]}{\delta \phi_\Delta} \right|_{\phi_\Delta=0} = 0, \quad (171)$$

tal que, das Eqs. (162) e (167), obtemos que

$$(\square + m_\phi^2) \phi_c(x) + \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x' C_\chi(x-x') \phi_c(x') = \xi(x), \quad (172)$$

onde o segundo termo no lado esquerdo em (172) pode ser mostrado carregar a natureza dissipativa do sistema e o termo $C_\chi(x-x')$ é chamado de kernel de memória e é temporalmente não-local. Nesta equação $\xi(x)$ é considerado como um ruído gaussiano de propriedades como dadas anteriormente pelas Eqs. (169) e (170).

Da mesma forma, seguindo o mesmo procedimento adotado para determinar a Eq. (172), podemos determinar a equação de movimento efetiva para o campo χ como sendo dada por

$$(\square + m_\chi^2 + g\phi_c) \chi_c(x) + \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x' C_\sigma(x-x') \chi_c(x') = \eta(x), \quad (173)$$

onde $C_\sigma(x-x') \equiv 4h^2 \text{Im} [G_\sigma^{++}(x-x')^2]$ e $\eta(x)$ é um outro termo de ruído gaussiano de propriedades semelhantes as de $\xi(x)$ dadas anteriormente, $\langle \eta(x)\eta(x') \rangle = D_\sigma(x-x')$ e média nula, $\langle \eta(x) \rangle = 0$, com $D_\sigma(x-x') = 2h^2 \text{Re} [G_\sigma^{++}(x-x')^2]$.

Diferentes aproximações podem ser aplicadas as equações de movimento efetivas (172) e (173), em especial aproximações locais para kernels não-locais (dissipativos) podem ser úteis dependendo da aplicação específica. Aplicações recentes podem ser vistas por exemplo [11, 13, 21]. Adotaremos o procedimento mais simples, para o caso da Eq. (173), de reescreve-la numa forma fenomenológica e local, que inclui explicitamente um termo descrevendo o decaimento de χ em σ ,

$$(\square + m_\chi^2 + g\phi_c) \chi_c(x) + \Gamma_\chi \dot{\chi}_c(x) = \eta(x), \quad (174)$$

onde Γ_χ é o termo de largura de decaimento de $\chi \rightarrow 2\sigma$, definido por [13, 21, 28]

$$\Gamma_\chi = \frac{h^2}{8\pi m_\chi} \left(1 - \frac{4m_\sigma^2}{m_\chi^2}\right)^{1/2} [1 + 2n_B(m_\chi/2)] \theta(m_\chi - 2m_\sigma). \quad (175)$$

Na próximo capítulo passamos a discutir as soluções para as Eqs. (172) e (173) o uso e implicações dos termos de dissipação e flutuação para o problema de pré-aquecimento, ou ressonância paramétrica.

4 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO E RESSONÂNCIA PARAMÉTRICA NO MODELO DE CAMPOS COM ACOPLAMENTOS TRILINEARES

4.1 Solução para a Equação de Movimento para o Campo de Inflaton

Podemos encontrar soluções para as equações de movimento tanto para o campo de inflaton ϕ quanto para as flutuações χ . Para isso, iremos nos concentrar no caso linear onde as equações de movimento são dadas por (172) e (173).

Neste regime, é conveniente reescrever a equação (172) no espaço do número de onda. Definindo as transformadas de Fourier espacial do campo ϕ e do termo estocástico ξ como

$$\begin{aligned}\phi_k(t) &\equiv \int d^3x \phi(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k}\vec{x}}, \\ \xi_k(t) &\equiv \int d^3x \xi(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k}\vec{x}},\end{aligned}\tag{176}$$

e para o kernel de dissipação,

$$C_{\chi,k}(t-t') \equiv \int d^3x C_{\chi}(\vec{x}, t-t') e^{-i\vec{k}\vec{x}},\tag{177}$$

nós encontramos

$$\ddot{\phi}_k(t) + (k^2 + m_{\phi}^2)\phi_k(t) + \int_{-\infty}^t dt' C_{\chi,k}(t-t')\phi_k(t') = \xi_k(t')\tag{178}$$

onde $C_{\chi,k}(t-t')$ é uma função real, já que pode ser mostrado, das relações dadas anteriormente para os propagadores no plano de tempo complexo, que $C_{\chi,k}^{\dagger}(t-t') = C_{\chi,k}(t-t')$. Aqui, o termo de ruído no espaço de Fourier, $\xi_k(t)$, é uma variável aleatória Gaussiana com a dispersão

$$\langle \xi_k(t) \xi_{k'}^*(t') \rangle = \int d^3x D_{\chi}(\vec{x}, t-t') e^{-i\vec{k}\vec{x}} (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \equiv D_{\chi,k}(t-t') (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}')\tag{179}$$

Desta forma cada modo de Fourier é desacoplado um do outro no regime linear, mesmo na presença do termo de ruído.

A equação (178) pode ser resolvida em termos da transformada de Fourier com

respeito ao tempo, ao definir:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\omega) &\equiv \int dt \phi(t) e^{i\omega t} , \\ \tilde{\xi}(\omega) &\equiv \int dt \xi_k(t) e^{i\omega t} ,\end{aligned}\tag{180}$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{\chi,k}(\omega) &\equiv \int d^3x C_{\chi,k}(t) e^{i\omega t} , \\ \tilde{D}_{\chi,k}(\omega) &\equiv \int d^3x D_{\chi,k}(t) e^{i\omega t} ,\end{aligned}\tag{181}$$

Notamos que $\tilde{C}_{\chi,k}(\omega)$ é imaginário puro como pode ser visto que $C_{\chi,k}(t)$ satisfaz a relação $C_{\chi,k}(t) = -C_{\chi,k}(-t)$, ou seja, o termo de kernel de dissipação é anti-simétrico no tempo e portanto tem transformada de Fourier no tempo que é puramente imaginária. Usando a fórmula

$$\int_0^\infty d\tau e^{i(\omega-\omega')\tau} = iP \frac{1}{\omega - \omega'} + \pi\delta(\omega - \omega') ,\tag{182}$$

nós encontramos

$$(-\omega^2 + k^2 + m_\phi^2)\tilde{\phi}_k(\omega) + \int \frac{d\omega'}{2\pi} P \frac{1}{\omega - \omega'} i\tilde{C}_{\chi,k}(\omega')\tilde{\phi}(\omega) + \frac{1}{2}\tilde{C}_{\chi,k}\tilde{\phi}(\omega) = \tilde{\xi}(\omega) .\tag{183}$$

Definindo as quantidades

$$\begin{aligned}M_k^2 &\equiv m_\phi^2 + k^2 + \int \frac{d\omega'}{2\pi} P \frac{1}{\omega - \omega'} i\tilde{C}_{\chi,k}(\omega') , \\ \tilde{\Gamma}(\omega) &\equiv i\frac{\tilde{C}_{\chi,k}}{2\omega} ,\end{aligned}\tag{184}$$

obtemos deste modo, que $\phi_k(t)$ pode ser escrito da forma,

$$\phi_k(t) = - \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\tilde{\xi}(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega^2 - M_k^2 + i\omega\tilde{\Gamma}_k(\omega)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\tilde{\xi}(\omega) e^{-i\omega(t'-t)}}{\omega^2 - M_k^2 + i\omega\tilde{\Gamma}_k(\omega)} .\tag{185}$$

Se $\tilde{\Gamma}_k(\omega)$ satisfaz $0 < \tilde{\Gamma}_k(\omega) \ll M_k$ e a parte de M_k dependente de ω for desprezível, a

Eq. (185) tem um pólo em $\omega \cong \pm M_k - i\tilde{\Gamma}_k(M_k)/2$ e pode ser resolvido como

$$\phi_k(t) = \frac{1}{M_k} \int dt' e^{-\frac{1}{2}\tilde{\Gamma}_k(M_k)(t-t')} \sin M_k(t-t') \xi_k(t'). \quad (186)$$

Considerando apenas os modos com $k = 0$, o que corresponde ao campo de inflaton sendo homogêneo no espaço, $\phi \equiv \phi(t)$, e adicionando dois modos homogêneos independentes, uma solução geral com uma condição inicial arbitrária de amplitude $\phi_k(t_i)$ e velocidade $\dot{\phi}_k(t_i)$ em algum tempo inicial $t = t_{inicial}$, é dada por

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= \phi_0(t_i) e^{-\frac{1}{2}\tilde{\Gamma}_0(M_0)(t-t_i)} \cos M_0(t-t_i) \\ &+ \frac{\dot{\phi}_0(t_i)}{M_0} e^{-\frac{1}{2}\tilde{\Gamma}_0(M_0)(t-t_i)} \sin M_0(t-t_i) \\ &+ \frac{1}{M_0} \int dt' e^{-\frac{1}{2}\tilde{\Gamma}_0(M_0)(t-t')} \sin M_0(t-t') \xi_0(t'), \end{aligned} \quad (187)$$

a qual é obtido por virtude da suposição de que $\tilde{\Gamma}_0(M_0) \ll M_0 \simeq m_\phi$, a qual deve ser válida para acoplamentos perturbativos (lembrando que $\tilde{\Gamma}$ depende quadraticamente do acoplamento g). Na Eq. (187) vemos que $\tilde{\Gamma}_0(M_0) \equiv \Gamma_\phi$ é a própria largura de decaimento do campo ϕ , para o canal de decaimento $\phi \rightarrow 2\chi$, definido de forma análoga a Eq. (175), por [13]

$$\tilde{\Gamma}_0(M_0) \equiv \Gamma_\phi = \frac{g^2}{8\pi m_\phi} \left(1 - \frac{4m_\chi^2}{m_\phi^2}\right)^{1/2} [1 + 2n_B(m_\phi/2)] \theta(m_\phi - 2m_\chi). \quad (188)$$

Então usando (179) e (181), o valor esperado da amplitude quadrada absoluta em um tempo $t \ll t_i + \tilde{\Gamma}_0^{-1}(M_0)$ torna-se, para o caso do campo de inflaton homogêneo,

$$\langle |\phi_0(t)|^2 \rangle = \frac{\tilde{D}_\chi(M_0)}{2M_0^2 \tilde{\Gamma}_0(M_0)} \left[1 + \frac{\tilde{\Gamma}(M_0)}{M_0} \sin 2M_0 t \right]. \quad (189)$$

O segundo termo no parênteses em (189) se anula sempre que tomamos a média sobre um período de oscilação. As equações (187) e (189) indicam que cada modo não decai completamente mas que sua amplitude aproxima-se de um valor de equilíbrio determinada pela taxa do espectro de potências do ruído para $\tilde{\Gamma}_0(M_0)$ com escala temporal $\tilde{\Gamma}_0^{-1}(M_0) = -2iM_0/\tilde{C}_\chi(M_0)$. Para determinarmos estas quantidades, devemos calcular as transformadas de Fourier do kernel de memória C_χ e a correlação do ruído ξ , D_χ , explicitamente usando as expressões dadas acima. Estudaremos agora como podemos encontrar

uma solução para a equação de movimento das flutuações χ .

4.2 Equação de Movimento para o Campo $\chi(x)$

Mostraremos aqui como podemos obter uma solução para a equação de evolução do campo χ . Para isso, não poderemos usar o mesmo método que usamos para o campo de inflaton pois agora estamos tratando de um caso onde a frequência de oscilações não é mais constante, mas varia no tempo, como visto na Eq. (174), devido a dependência desta com o campo de inflaton ϕ_c . A Eq. (174) é semelhante a uma equação do tipo Mathieu com termo de amortecimento Γ e de flutuação estocástica η . A análise desta equação, supondo o efeito do termo estocástico desprezível, é possível de se fazer analiticamente e será mostrado abaixo. A análise do efeito do termo de flutuação na equação 174 é muito mais difícil e aqui só o estudaremos numericamente. Para obtermos uma solução analítica para a Eq. (174), vamos adotar também a dependência temporal do campo de inflaton que pode ser colocada simplesmente numa forma oscilatória, ou seja: da solução obtida na seção anterior, Eq. (187), tomaremos simplesmente a aproximação que $\phi_c(t) \sim \Phi \sin(m_\phi t)$, com amplitude $\Phi(t)$.

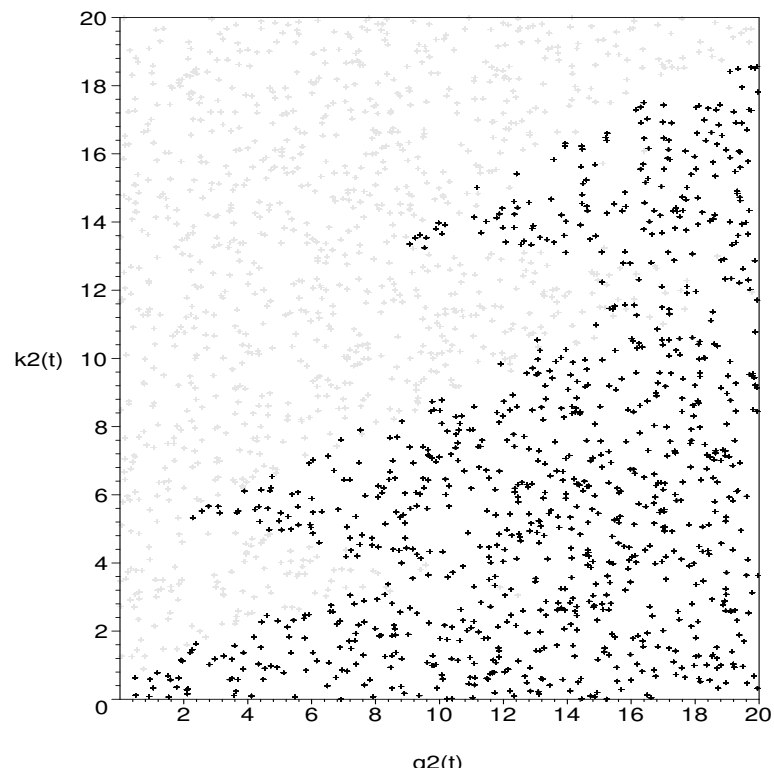
Consideraremos o caso de ressonância paramétrica estreita, isto é, quando $\Phi(t) \ll m_\phi$, o que nos permite tratar o caso por meio da análise perturbativa. Neste regime, a ressonância é mais acentuada na primeira banda. As bandas de ressonância para o modelo estudado com acoplamento de ϕ com χ de forma trilinear, são mostradas na Fig. ??.

Podemos expandir o campo χ em termos dos operadores de criação e aniquilação como em (122). Porém, como o operador hamiltoniano não pode ser diagonalizado por meio dos operadores de criação e de aniquilação na presença de interações, fazemos uso das transformações de Bogolyubov que nos dão a transição dos operadores de criação e de aniquilação de campo livre para o de operadores dependentes do tempo (preservando as relações de comutação). Assim, o hamiltoniano pode ser diagonalizado. As transformações de Bogolyubov são definidas da forma

$$\begin{aligned} b(t) &= \alpha(t) a + \beta^*(t) a^\dagger, \\ b^\dagger(t) &= \beta(t) a + \alpha^*(t) a^\dagger, \end{aligned} \tag{190}$$

e $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ podem ser escritos como

Figura 9 - Bandas de instabilidade (áreas escuras) para os modos χ_k como função de k^2 e g^2 , no caso de acoplamento trilinear.



Fonte: O autor, 2007.

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{e^{i \int \Omega_k dt}}{\sqrt{2\Omega_k}} (\Omega_k \chi_- + i \dot{\chi}_-) , \\ \beta(t) &= \frac{e^{-i \int \Omega_k dt}}{\sqrt{2\Omega_k}} (\Omega_k \chi_- - i \dot{\chi}_-) .\end{aligned}\tag{191}$$

onde $\Omega_k^2 = \omega_k^2 + 2g\phi_c$, com $\omega_k^2 = k^2 + m_\chi^2$ e as condições iniciais para α e β são dadas por

$$|\alpha(0)| = 1, \quad \beta(0) = 0 .\tag{192}$$

Então, a forma da solução para o campo χ pode ser escrita como

$$\chi_- = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [X \cos(\omega_k t) - Y \sin(\omega_k t)] ,\tag{193}$$

onde X,Y são funções complexas variando lentamente com relação ao tempo. De (191) e (122) as condições iniciais para χ tornam-se

$$i\dot{\chi}_-(0) = \omega_k \chi_-(0), \quad |\chi_-(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} ,\tag{194}$$

o que nos fornece como valores iniciais para X e Y

$$X(0) = e^{i\delta}, \quad Y(0) = ie^{i\delta} ,\tag{195}$$

onde δ é uma fase pouco importante (já que estaremos interessados em ver o módulo envolvendo as quantidades X e Y) que pode ser tomada como zero. As soluções para X e Y são obtidas como sendo

$$\begin{aligned}X &\cong \frac{1+i}{2} e^{\mu t} + \frac{1-i}{2} e^{-\mu t} , \\ Y &\cong \frac{1+i}{2} e^{\mu t} - \frac{1-i}{2} e^{-\mu t}\end{aligned}\tag{196}$$

onde $\mu = m_\phi^{-1} \sqrt{g^2 \Phi^2 - \Delta^2}$ e $\Delta = \omega_k^2 - m_\phi^2/4$. Onde podemos notar que para que haja ressonância é necessário que tenhamos $\omega_k \approx m_\phi/2$, Com isto, podemos obter o quadrado das amplitudes de χ_- e $\dot{\chi}_-$ na forma

$$\begin{aligned}
|\chi_-|^2 &= \frac{e^{-\Gamma_\chi t}}{2\omega_k} [\cosh(2\mu t) - \sinh(2\mu t) \sin(2\omega_k t)] , \\
|\dot{\chi}_-|^2 &= \frac{e^{-\Gamma_\chi t}}{2\omega_k} \omega_k^2 [\cosh(2\mu t) + \sinh(2\mu t) \sin(2\omega_k t)] .
\end{aligned} \tag{197}$$

Com estes resultados, nós podemos determinar a evolução da densidade de energia das partículas χ como modo k . Temos que

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_\chi^k &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\dot{\chi}_-|^2 + \frac{1}{2} \Omega_k^2 |\chi_-|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{d(\Omega_k^2)}{dt} \frac{1}{2} \Omega_k^2 |\chi_-|^2 - \Gamma_\chi \frac{1}{2} \Omega_k^2 |\chi_-|^2 \\
&\cong \frac{g\Phi}{m_\phi} \rho_\chi^k - \Gamma_\chi \rho_\chi^k ,
\end{aligned} \tag{198}$$

onde usamos a Eq. (197) na segunda linha, e na terceira linha tomamos a média sobre um período de oscilação do campo de inflaton ϕ . O primeiro termo corresponde a produção ressonante usual devido ao decaimento do campo de inflaton, enquanto que o segundo termo nos mostra o decréscimo de energia devido ao decaimento de partículas χ . Podemos notar que a densidade de energia das partículas χ com modo k é reduzida por um fator $e^{-\Gamma_\chi}$. Se somarmos sobre todos os k , obteremos a densidade de energia total da produção ressonante das partículas χ :

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_\chi &= \int \frac{\omega_k^2}{2\pi^2} d\omega_k \frac{1}{2} \frac{d(\Omega_k^2)}{dt} |\chi_-|^2 \\
&\simeq \frac{Hm_\phi^2}{32\pi^2} \exp \left[\frac{4g^2\Phi^2}{Hm_\phi^3} \left(\sin^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{m_\phi\Gamma_\chi}{2g\Phi} \right)^2} - \frac{m_\phi\Gamma_\chi}{2g\Phi} \sqrt{1 - \left(\frac{m_\phi\Gamma_\chi}{2g\Phi} \right)^2} \right) \right] ,
\end{aligned} \tag{199}$$

onde na segunda linha, nós levamos em conta que a largura da banda de ressonância diminui devido a dissipação: $\Delta = g\Phi \rightarrow g\Phi \sqrt{1 - \left(\frac{m_\phi\Gamma_\chi}{2g\Phi} \right)^2}$. Se $\Gamma_\chi < g\Phi/m_\phi (\simeq \mu)$, a taxa de produção torna-se aproximadamente

$$\dot{\rho}_\chi \simeq \frac{H}{2\pi^2} \left(\frac{m_\phi}{2} \right)^2 \frac{1}{4} \exp \left[\frac{4g^2\Phi^2}{Hm_\phi^3} \left(1 - \frac{2m_\phi\Gamma_\chi}{2g\Phi} \right) \right] . \tag{200}$$

Da expressão (200), nós podemos ver que a produção ressonante de partículas χ é reduzida devido aos efeitos dissipativos, o que reduz a taxa de decaimento ressonante do campo de inflaton ϕ . H nas equações acima é a constante de Hubble e surge ao se fazer uso da

aproximação do deslocamento para o vermelho ("redshift") dos números de onda k [4] $\omega_k(t) \propto k \propto a^{-1}(t)$.

Como vimos, derivamos uma solução analítica para a equação de movimento efetiva para o campo χ considerando apenas o caso onde não há a presença de flutuações. Soluções para o caso com flutuação são um tanto mais difíceis o que não encontra-se dentro dos objetivos desta dissertação. No entanto, temos uma forte razão para acreditar que a existência de termos estocásticos nas equações de movimento não afetam de forma qualitativa as soluções de equações do tipo Mathieu conforme pode ser visto em [29].

4.3 Ressonância para caso das Equações de Movimento Clássicas e Efetivas: Resultados Numéricos

Nós começamos a mostrar os resultados inicialmente para o caso das equações clássicas de movimento. Nosso objetivo aqui é primeiramente mostrar a ressonância paramétrica para o caso das equações de movimento clássicas e depois verificar o efeito de dissipação e flutuação no caso das equações efetivas de movimento. Tomemos para isso, inicialmente, o modelo de campos descrito pela densidade de lagrangiana, diferente que o modelo de acoplamentos trilineares estudado nas seções anteriores, mas com acoplamentos quadráticos entre os campos.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 - \frac{\lambda^2}{2} \phi^2 \chi^2 \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{\alpha^2}{2} \chi^2 \sigma^2, \end{aligned} \quad (201)$$

cujas equações de movimento clássicas são dadas por:

$$[\square + m_\phi^2 + \lambda^2 \chi^2(x)] \phi(x) = 0, \quad (202)$$

$$[\square + m_\chi^2 + \lambda^2 \phi^2(x) + \alpha^2 \sigma^2(x)] \chi(x) = 0, \quad (203)$$

$$[\square + m_\sigma^2 + \alpha^2 \chi^2(x)] \sigma(x) = 0, \quad (204)$$

Nós voltaremos ao estudo do modelo de acoplamentos trilineares mais abaixo.

Para resolvermos o conjunto de equações (202), (203) e (204), fazemos uso do programa *LATTICEASY*, descrito e disponível em [30]. Nesse caso as Eqs. (202),

(203) e (204) são resolvidas discretizando o espaço e as equações são resolvidas numa rede. Seguindo o procedimento descrito em [30], colocamos inicialmente o conjunto de equações em unidades adimensionais, apropriadas para o programa. Para tanto definimos as quantidades adimensionais,

$$\begin{aligned}
\bar{\phi} &= \phi/\phi_0 \\
\bar{\chi} &= \chi/\phi_0 \\
\bar{\sigma} &= \sigma/\phi_0 \\
\tau &= t m_\phi \\
\bar{\mathbf{x}} &= m_\phi \mathbf{x} ,
\end{aligned} \tag{205}$$

onde normalizamos todos os campos pelo valor inicial do campo $\phi(t_i) = \phi_0$. Nessas unidades as Eqs. (202), (203) e (204) se tornam:

$$[\bar{\phi}'' - \bar{\nabla}^2 \bar{\phi} + 1 + \bar{\lambda}^2 \bar{\chi}^2(\bar{\mathbf{x}}, \tau)] \bar{\phi}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = 0 , \tag{206}$$

$$\left[\bar{\chi}'' - \bar{\nabla}^2 \bar{\chi} + \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} + \bar{\lambda}^2 \bar{\phi}^2(\bar{\mathbf{x}}, \tau) + \bar{\alpha}^2 \bar{\sigma}^2(\bar{\mathbf{x}}, \tau) \right] \bar{\chi}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = 0 , \tag{207}$$

$$\left[\bar{\sigma}'' - \bar{\nabla}^2 \bar{\sigma} + \frac{m_\sigma^2}{m_\phi^2} + \bar{\alpha}^2 \bar{\chi}^2(\bar{\mathbf{x}}, \tau) \right] \bar{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = 0 , \tag{208}$$

onde definimos $\bar{\phi}'' = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \tau^2}$, etc, $\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}$ e

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}^2 &= \lambda^2 \frac{\phi_0^2}{m_\phi^2} \\
\bar{\alpha}^2 &= \alpha^2 \frac{\phi_0^2}{m_\phi^2} .
\end{aligned} \tag{209}$$

Os parâmetros que escolhemos são:

$$\begin{aligned}
m_\phi &= 10^{-6} M_{\text{Pl}} \\
m_\chi &= 10^{-7} M_{\text{Pl}} \\
m_\sigma &= 10^{-8} M_{\text{Pl}} \\
\lambda &= 10^{-4} \\
\alpha &= 10^{-3} \\
\phi_0 &= 0.193 M_{\text{Pl}} ,
\end{aligned} \tag{210}$$

os quais são para parâmetros típicos de modelos adotados nos estudos sobre inflação e estudo de pré-aquecimento [4, 5]. Note que as massas dos campos definidas em (210) estão em unidades da massa de Planck e ϕ_0 é tomado como sendo o valor do campo ϕ logo após a fase inflacionária [4, 5, 30]. A velocidade inicial para ϕ , $\dot{\phi}_0$, é tomada igual a zero enquanto que as condições iniciais para os demais campos (χ , σ e suas derivadas temporais) são geradas automaticamente na rede de acordo com o algoritmo descrito em [30].

Os resultados numéricos para a evolução dos campos são mostrados nas Figs. 10, 11, 12, para o valor médio na rede dos campos ϕ , χ e σ , respectivamente.

Nas figuras 10, 11 e 12, o valor médio na rede dos campos ϕ , χ e σ , são definidos da forma (e analogamente para o valor médio dos campos χ e σ):

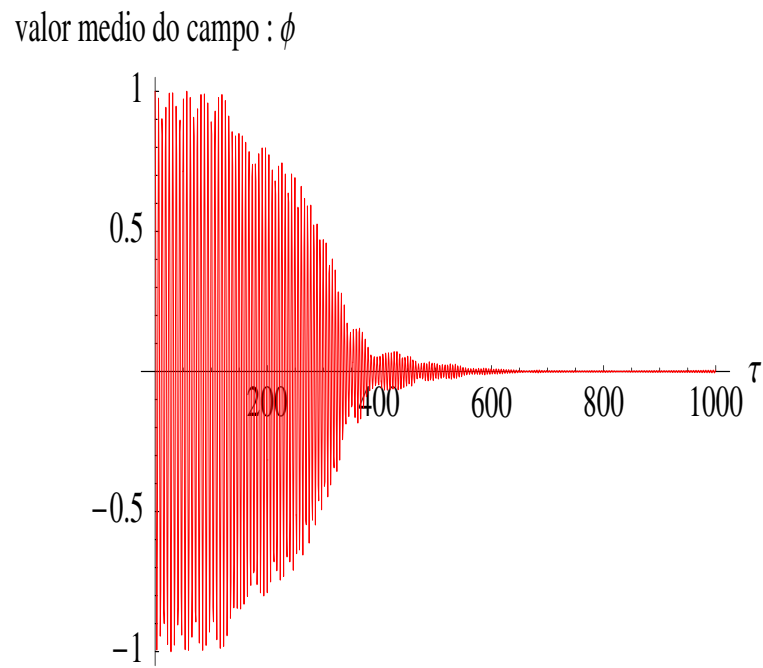
$$\langle \bar{\phi} \rangle(\tau) = \frac{1}{N^3} \sum_{i,j,k=1}^N \bar{\phi}(i, j, k, \tau) , \tag{211}$$

onde N é o número de pontos da rede. Para todas as simulações aqui mostradas, utilizando-se o programa *LATTICEASY*, fizemos uso dos seguintes parâmetros de rede: rede cúbica de $N = 32$ pontos, tamanho de rede $L = 16$ e passo no tempo $\Delta\tau = 0.01$ (em unidades adimensionais).

Na figura 13, mostramos as densidades número de partículas produzidas por ressonância paramétrica para os campos, as quais também são obtidas diretamente pelo programa *LATTICEASY* e definida de acordo com a fórmula

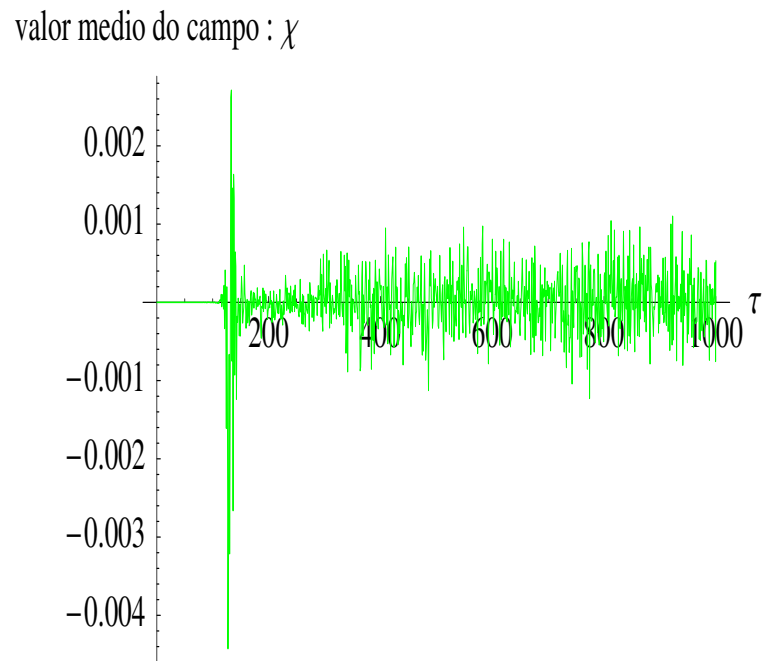
$$n_i(t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} n_k(t) , \tag{212}$$

Figura 10 - A evolução do valor médio na rede para o campo ϕ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$.



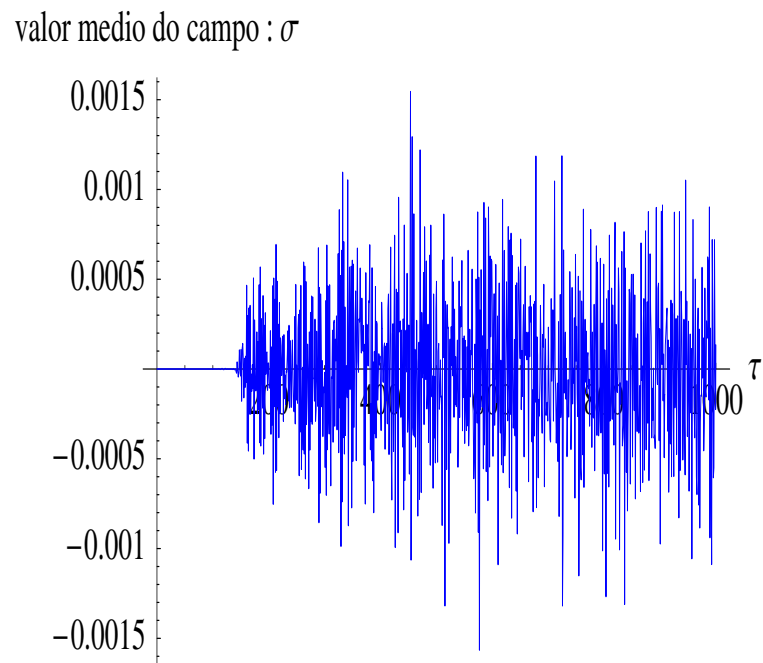
Fonte: O autor, 2007.

Figura 11 - A evolução do valor médio na rede para o campo χ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$.



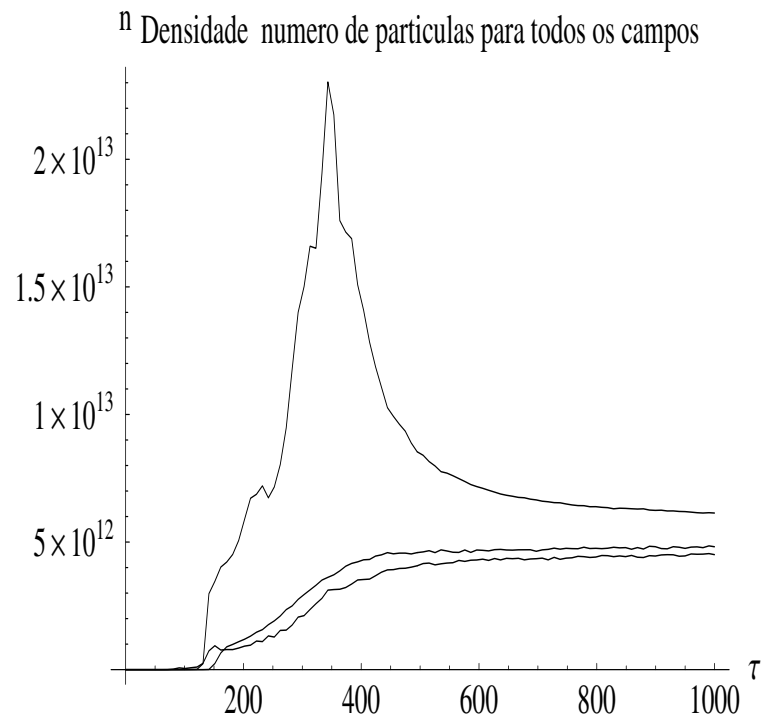
Fonte: O autor, 2007.

Figura 12 - A evolução do valor médio na rede para o campo σ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$.



Fonte: O autor, 2007.

Figura 13 - Densidade número de partículas produzidas para os campos (curvas de cima para baixo) ϕ , χ e σ como função de $\tau = m_\phi t$.



Fonte: O autor, 2007.

onde $n_k(t)$, é dada pela Eq. (132), calculada para cada campo ($i = \phi, \chi, \sigma$).

Na figura 13 fica claro a produção de partículas por ressonância paramétrica. Comparando com a evolução dos campos mostradas nas figuras 10, 11 e 12, observamos que o máximo de partículas produzidas coincidem com a máxima variação de cada campo. Ao final da dinâmica o campo ϕ relaxa para um valor próximo de zero, enquanto que os campos χ e σ relaxam para uma amplitude $\sim 0.01\phi_0$. As densidades número de partículas geradas por ressonância paramétrica para os campos se equilibram num tempo aproximado de $t_{\text{eq}} \sim 800m_\phi^{-1}$, os quais devem assumir ao final da equilibração um espectro térmico clássico (espectro de Boltzmann, devido todas as evoluções estudadas serem clássicas) [31].

A seguir consideramos o caso da inclusão de acoplamentos trilineares na densidade de lagrangiana Eq. (201) e passamos a estudar o caso do modelo descrito da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 - g\phi\chi^2 - \frac{\lambda^2}{2}\phi^2\chi^2 \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - h\chi\sigma^2 - \frac{\alpha^2}{2}\chi^2\sigma^2, \end{aligned} \quad (213)$$

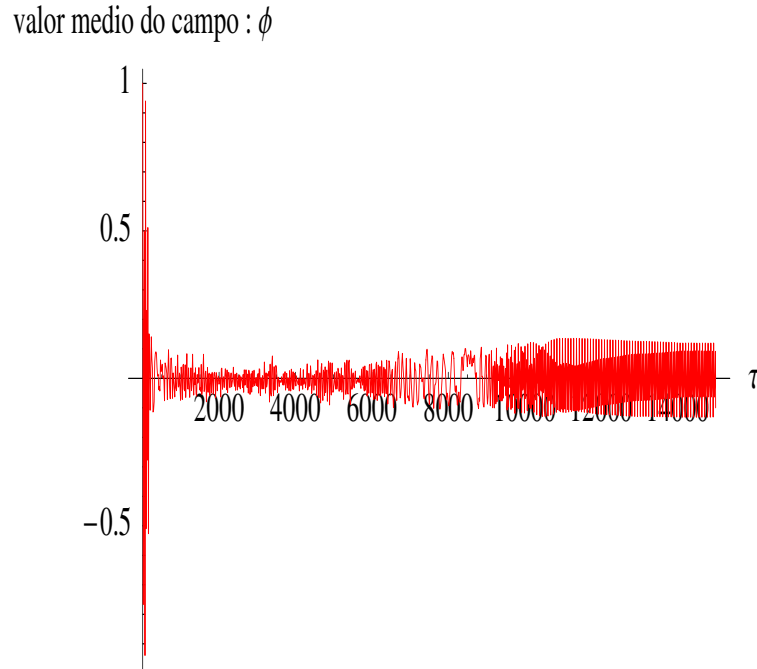
onde as mesmas parametrizações adotadas anteriormente se aplicam, exceto que as novas constantes de acoplamento (de dimensão de massa) g e h , sejam escritas da forma $g = \bar{g}m_\phi$ e $h = \bar{h}m_\phi$. Os parâmetros que agora escolhemos são

$$\begin{aligned} m_\phi &= 10^{-6}M_{\text{Pl}} \\ m_\chi &= 10^{-7}M_{\text{Pl}} \\ m_\sigma &= 10^{-8}M_{\text{Pl}} \\ \bar{g} &= 10^{-7} \\ \bar{h} &= 10^{-5} \\ \lambda^2 &= \bar{g}^{3/2} \\ \alpha^2 &= 100\bar{g}^{3/2} \\ \phi_0 &= 0.193M_{\text{Pl}}. \end{aligned} \quad (214)$$

Com essa escolha de parâmetros, temos que os termos dominantes são exatamente os dos acoplamentos trilineares, e portanto, ainda esperamos que os resultados derivados na seção anterior, em especial os resultados (174), (187) e (200) permaneçam válidos e que utilizaremos adiante.

Os resultados da evolução na rede obtidos para o caso do modelo descrito pela densidade de lagrangiana (213), sem ainda levar em consideração os termos referentes ao decaimento/dissipação dos campos e correspondente termos de ruído estocásticos, como

Figura 14 - A evolução do valor médio na rede para o campo ϕ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no modelo de acoplamento trilineares e quadráticos.



Fonte: O autor, 2007.

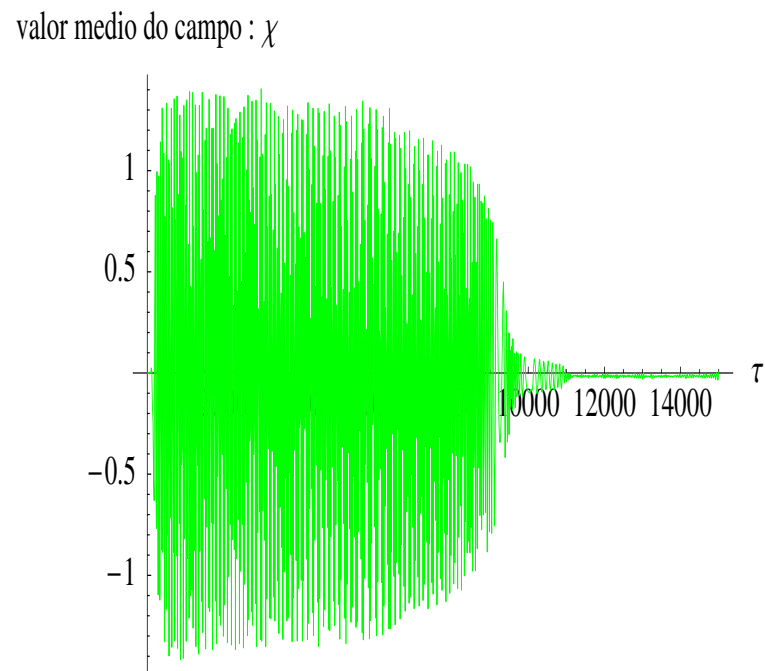
derivados nas seções anteriores, estão mostrados nas figuras 14, 15 e 16, para a evolução dos campos e na figura 17 para as densidades números de partículas produzidas por ressonância paramétrica.

Comparando os resultados 14, 15, 16, 17 com os anteriores, onde somente acoplamentos quadráticos foram considerados, vemos que há uma grande diferença tanto qualitativa quanto quantitativa. Há um número maior de partículas produzidas e os campos e distribuições de partículas produzidas levam um tempo muito maior para atingir um estado estacionário ($t_{\text{eq}} \sim 10000m_\phi^{-1}$ comparado com $t_{\text{eq}} \sim 800m_\phi^{-1}$ no caso anterior).

Vejamos agora os efeitos de dissipação e ruído estocástico na dinâmica. Neste caso, as equações de movimento que utilizamos, consistente com os resultados anteriores obtidos no contexto da teoria quântica de campos, Eqs. (174) e (187), são, para o campo ϕ :

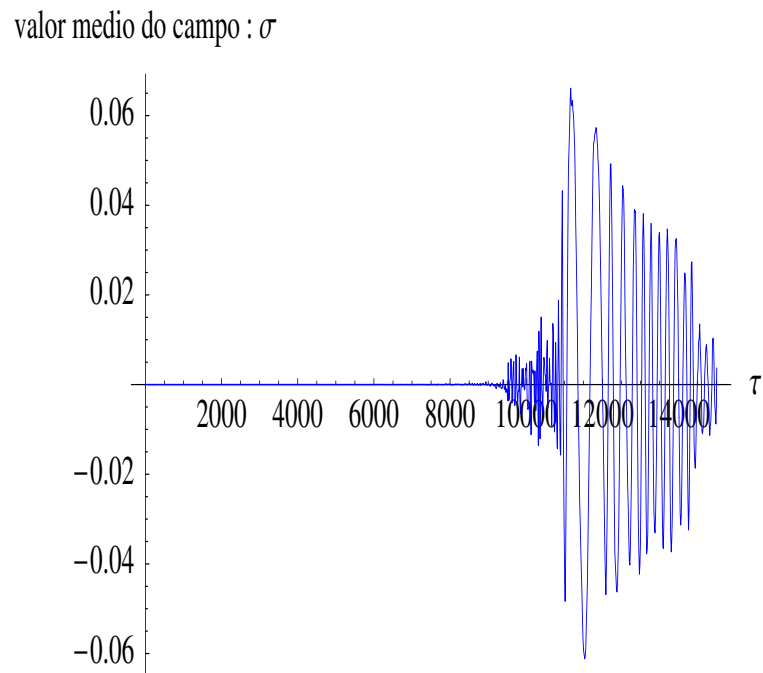
$$[\square + m_\phi^2 + \lambda^2 \chi^2(x)] \phi(x) + g\chi^2(x) + \Gamma_\phi \dot{\phi} = \xi_\phi, \quad (215)$$

Figura 15 - A evolução do valor médio na rede para o campo χ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no modelo de acoplamento trilineares e quadráticos.



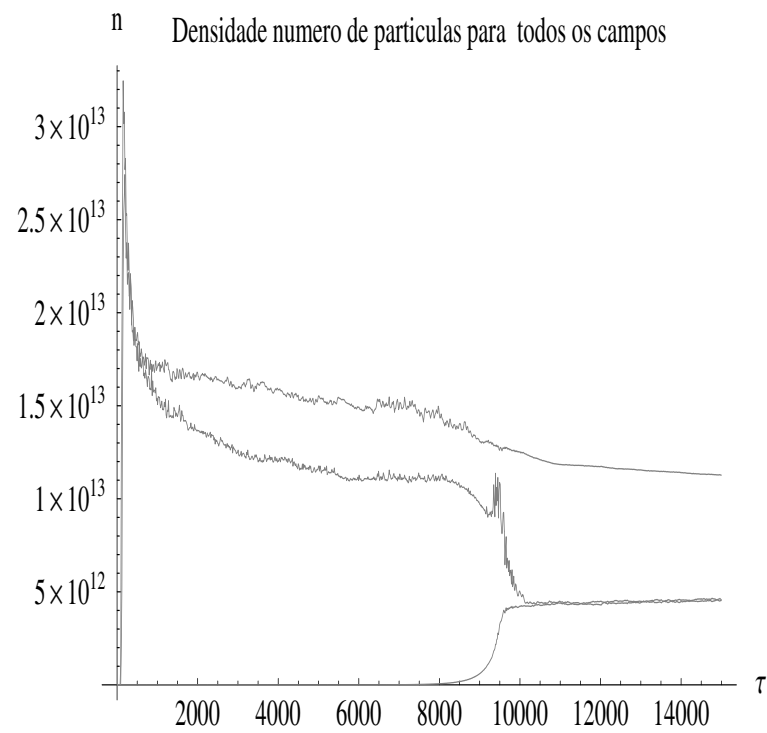
Fonte: O autor, 2007.

Figura 16 - A evolução do valor médio na rede para o campo σ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no modelo de acoplamento trilineares e quadráticos.



Fonte: O autor, 2007.

Figura 17 - Densidade número de partículas produzidas para os campos (curvas de cima para baixo) ϕ , χ e σ , como função de $\tau = m_\phi t$, no modelo de acoplamento trilineares e quadráticos.



Fonte: O autor, 2007.

onde o coeficiente do termo de dissipação, Γ_ϕ , é dado pela Eq. (188) e o termo de ruído ξ_ϕ é escolhido de tal forma a satisfazer as condições de ter média nula e ser Gaussiano com função de dois pontos satisfazendo o teorema de flutuação e dissipação [11, 26]:

$$\langle \xi_\phi(x) \xi_\phi(x') \rangle = 2T\Gamma_\phi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') . \quad (216)$$

Note que embora a expressão acima do teorema flutuação-dissipação seja uma expressão de equilíbrio na temperatura T , aqui tomamos o ponto de vista que a dinâmica do sistema, muito embora seja fora do equilíbrio térmico, possa ainda ser considerada localmente de equilíbrio, com uma temperatura T aproximadamente àquela da energia do sistema, de acordo com o teorema de equipartição de energia, e escolhida de tal modo a ser aproximadamente m_ϕ , a qual caracteriza em magnitude a temperatura usual de reaquecimento do sistema de campos após termalização. Na rede o termo de ruído é definido da forma:

$$\xi_{i,m} = \sqrt{\frac{2\Gamma_\phi T}{\Delta x^3 \Delta t}} G_{i,m} , \quad (217)$$

onde $\Delta x = L/N$ é o espaçamento da rede, Δt o passo no tempo, i e m são índices espaciais e temporais e $G_{i,m}$ é obtido de uma Gaussiana de variância unitária e de média zero (gerada pelo código numérico *gasdev* do *Numerical Recipes* [32]).

Do mesmo modo, para a equação para o campo χ , de acordo com a Eq. (174), escrevemos,

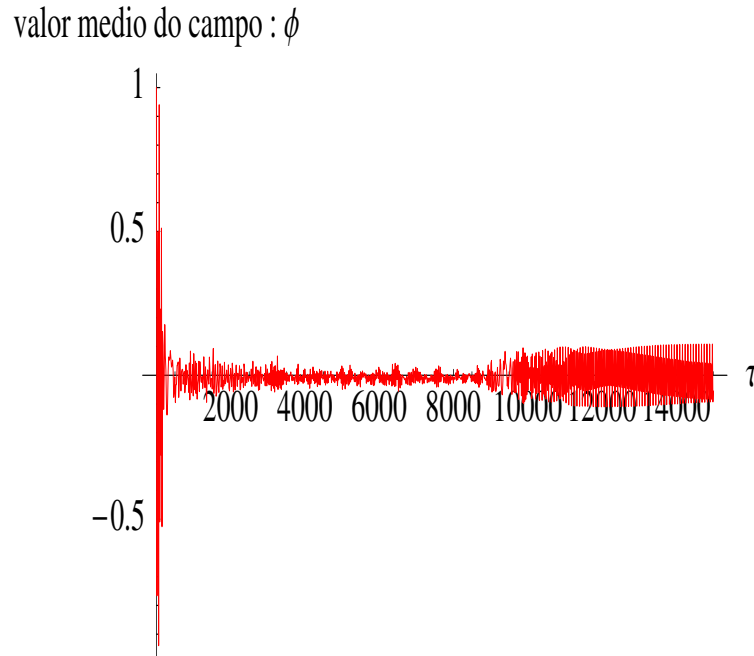
$$[\square + m_\chi^2 + g\phi(x) + \lambda^2\phi^2(x) + \alpha^2\sigma^2(x)] \chi(x) + h\sigma^2(x) + \Gamma_\chi \dot{\chi} = \xi_\chi , \quad (218)$$

onde Γ_χ é dada por (175) e o termo de ruído ξ_χ é escolhido de forma análoga a expressão (216). Finalmente, para a equação para σ , tomamos simplesmente

$$[\square + m_\sigma^2 + h\chi(x) + \alpha^2\chi^2(x)] \sigma(x) = 0 , \quad (219)$$

sem termos de dissipação ou ruído, uma vez que não consideramos a possibilidade de decaimento de σ (o produto de decaimento final é constituído pelas partículas σ). Os resultados para o caso do uso das Eqs. (215), (218) e (219), estão mostrados nas figuras 18, 19 e 20, para a evolução dos campos e na figura 21 para a densidade números de partículas produzidas por ressonância paramétrica para cada campo. Vemos por estes resultados que o maior efeito da inclusão dos efeitos de decaimento e ruído estocástico é o de aumentar o tempo de equilibração das partículas produzidas. Dado que pelos

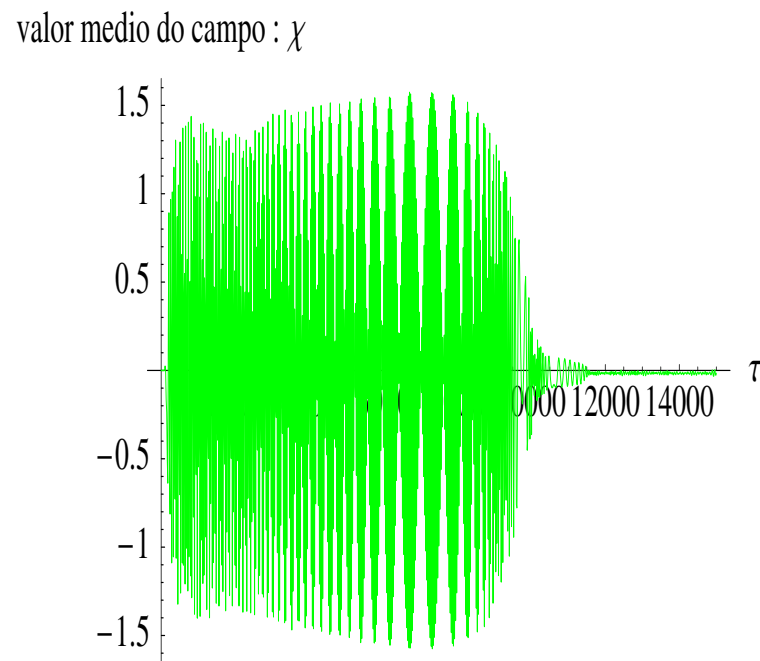
Figura 18 - A evolução do valor médio na rede para o campo ϕ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no caso das equações efetivas de movimento.



Fonte: O autor, 2007.

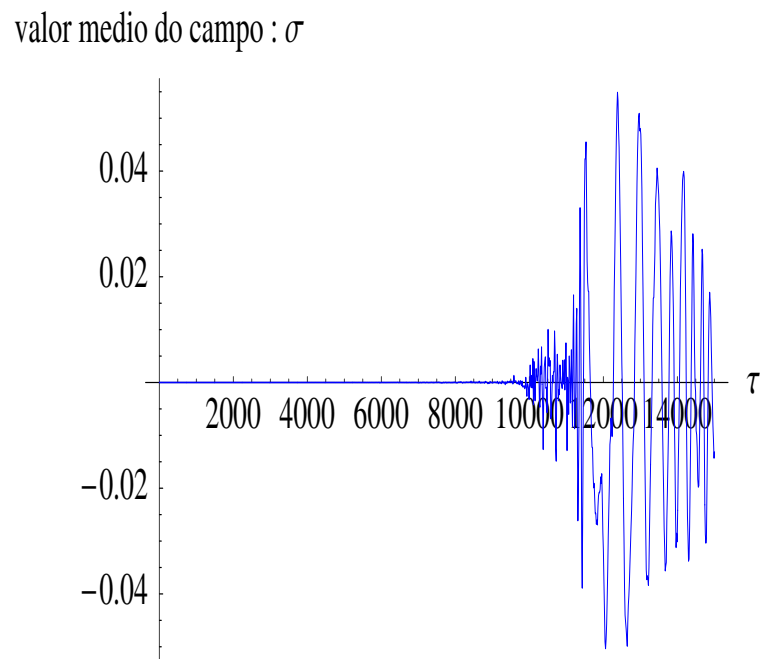
parâmetros utilizados os termos de decaimento são de magnitude muito pequenas, $\Gamma_\phi \sim 10^{-15}m_\phi$ e $\Gamma_\chi \sim 10^{-10}m_\phi$, igualmente os termos estocásticos também são muito pequenos comparados com as flutuações típicas para os campos que são da ordem da massa dos campos. Por essa mesma razão, o efeito predito pela Eq. (200), de diminuição da taxa de produção de partículas devido ao efeito de decaimento dos campos, é extremamente reduzido. Uma solução para verificar de fato tal diminuição da taxa de produção de partículas por ressonância paramétrica seria de aumentar os valores dos acoplamentos trilineares g e h . Entretanto verificamos com isso que os resultados numéricos ficam extremamente instáveis, requerendo um cuidado muito maior na seleção do tamanho da rede e espaçamentos espacial e temporal, com um aumento significativo do tempo de CPU necessários para um estudo mais detalhado. Para os parâmetros de rede e simulação que aqui utilizamos, o tempo de CPU necessário foi de aproximadamente 20 horas para cada simulação do tipo Langevin, num PC com processador Pentium 4 de 3 GHz e 1 Gb de memória.

Figura 19 - A evolução do valor médio na rede para o campo χ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no caso das equações efetivas de movimento.



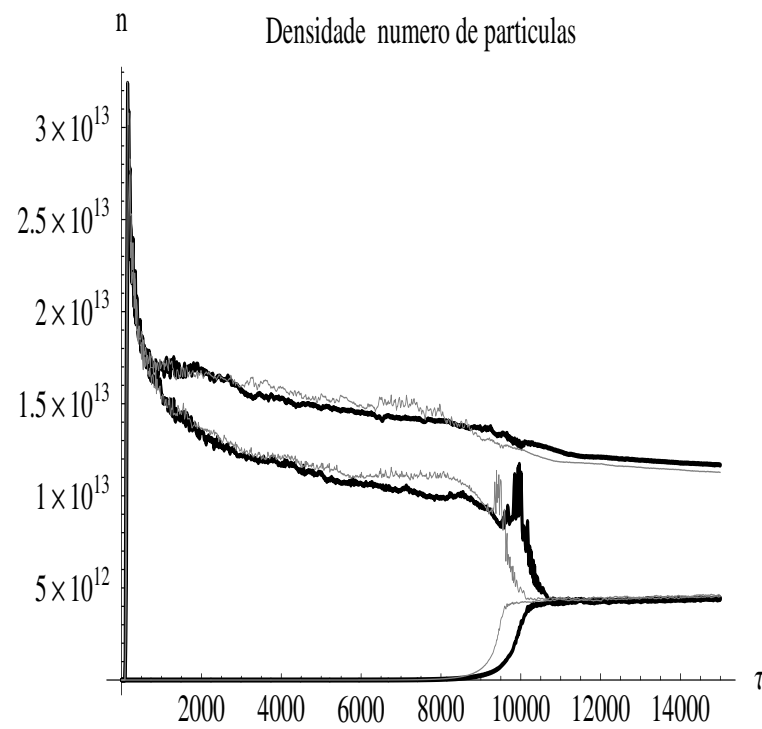
Fonte: O autor, 2007.

Figura 20 - A evolução do valor médio na rede para o campo σ (em unidades de ϕ_0) como função de $\tau = m_\phi t$ no caso das equações efetivas de movimento.



Fonte: O autor, 2007.

Figura 21 - Densidade número de partículas produzidas para os campos ϕ , χ e σ (curvas de cima para baixo) para o caso do uso das equações de movimento efetivas (linhas pretas) e sem os termos de dissipação e ruído (linhas cinzas).



Fonte: O autor, 2007.

CONCLUSÃO

O estudo da dinâmica de campos tem sido um assunto de grande interesse recente devido as diferentes aplicações possíveis, desde o contexto de problemas em matéria condensada até em cosmologia. Em particular, no contexto da cosmologia, o estudo da dinâmica de campos tem um papel importante no estudo de inflação, produção de partículas e geração de densidade de perturbações.

Nesta dissertação investigamos a dinâmica associada de três campos escalares reais em interação. Começamos por deduzir as equações de movimento efetivas para esses campos escalares acoplados onde, trabalhando em ordem mais baixa em teoria de perturbação, no formalismo de tempo real, mostramos que a dinâmica associada é dissipativa e estocástica. Dissipação e consequente produção de entropia aqui estudados estão diretamente relacionados ao processo cinemático de decaimento desses campos em partículas mais leves.

Estudamos então, no Cap. 5 o papel da dinâmica efetiva desses campos escalares tanto analiticamente como numericamente, para o caso da produção ressonante de partículas após inflação, fazendo uso do método explicado no Cap. 4. Neste trabalho não consideramos o efeito de expansão da métrica, dado que após inflação esse efeito é considerado dar uma contribuição pequena [4]. Nossos resultados mostram que os termos de dissipação e flutuação podem gerar efeitos importantes na dinâmica de produção ressonante de partículas, devido ao amortecimento das oscilações dos campos e consequente redução na taxa de produção de partículas. Dos resultados numéricos obtidos, entretanto, esses efeitos foram pequenos, devido ao valor pequeno das diversas constantes de acoplamento adotadas, de tal modo a manter a simulação numérica estavel tempo suficiente para se observar os efeitos de ressonância paramétrica.

Notemos que nos restringimos tão somente ao caso de dissipação como advindo do decaimento dos campos através dos termos de acoplamento trilineares. Entretanto é mostrado em outras referências [11, 13, 26], que acoplamentos biquadráticos podem também gerar outros termos de dissipação nas equações efetivas de movimento, entretanto esses termos são não-locais e em geral de difícil tratamento. Futuramente, seria interessante também investigar o efeito desses termos não-locais no processo de ressonância paramétrica e, uma vez que esses termos são em geral também não-lineares, eles podem gerar importantes efeitos dado que, durante ressonância, as amplitudes dos campos podem crescer enormemente. A análise numérica mais detalhada para o caso de acoplamentos de maiores magnitudes também seria interessante, principalmente para se resolver possíveis instabilidades numéricas nesses casos. Nesse trabalho, devido as restrições computacionais e de tempo, não realizamos um estudo mais detalhado nesse sentido.

REFERÊNCIAS

- 1 VILENKIN, A.; SHELLARD, E.P.S., **Cosmic Strings and Other Topological Defects**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 2 GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Phys.Rev. D**, College Park, v.23, n.347, 1981.
- 3 ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking. **Phys. Rev. Lett.**, College Park, v.48, n.1220, 1982.
- 4 SHTANOV, Y.; TRASCHEN, J.; BRANDEMBERG, R. Universe reheating after inflation. **Phys.Rev. D**, College Park, v.51, n.5438, 1995.
- 5 KOFMAN, L.; LINDE, A.; STAROBINSKY, A. A. Towards the theory of reheating after inflation. **Phys.Rev. D**, College Park, v.56, n.3258, 1997.
- 6 KOFMAN, L.; LINDE, A.; STAROBINSKY, A. A., Nonthermal Phase Transitions after Inflation **Phys. Rev. Lett.**, College Park, v.76, n.1011, 1996.
- 7 KOLB, E. W.; LINDE, A.; RIOTTO, A. Grand-Unified-Theory Baryogenesis after Preheating. **Phys. Rev. Lett.**, College Park, v.77, n. 4290, 1996.
- 8 MOSTEPANENKO, M. V. ;FROLOV, V. M. Creation and scattering of particles by a nonstationary electromagnetic field in the canonical formalism. **Sov. J. Nucl. Phys.**, Moscou, v. 19, n.885 (1974);
- 9 DOLGOV, A. D.;KIRILOVA, D. P. On particle creation by a time dependent scalar field. **Sov. J. Nucl. Phys.**, Moscou, v. 51, n.172 (1990).
- 10 TRASCHEN, J.;BRANDENBERG, R. Particle production during out-of-equilibrium phase transitions. **Phys.Rev. D**, College Park, v.42, n.2491, 1990.
- 11 BERERA, A.; GLEISER, M.; RAMOS, R. O. Warm inflation and its microphysical basis. **Phys.Rev. D**, College Park, v.58, n.123508, 1998.
- 12 BERERA, A. Strong dissipative behavior in quantum field theory. **Phys. Rev. Lett.**, College Park, v.75, n.3218, 1995.
- 13 BERERA, A.; RAMOS, R. O. Construction of a robust warm inflation mechanism. **Phys. Lett. B**, College Park, v.567, n.294, 2003.
- 14 PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s, **Astrophys. J.**, Chicago, v.142, n. 419, 1965.

- 15 SPERGEL, D. N. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* Observations: Determination of Cosmological Parameters. **Astrophys. J.**, Chicago, v.148, n.175, 2003.
- 16 SITTER, W. On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis. **Proc. Roy. Acad. Sci.**, Amsterdam, v.19, n.1217, 1917.
- 17 LINDE, A. Axions in inflationary cosmology. **Phys. Lett.B**, College Park, v.259, n.38, 1991.
- 18 GOLDWIRTH D. S.; PIRAN, T. Initial conditions for inflation. **Phys. Rep.**, Amsterdam, v.214, n. 233, 1991.
- 19 LAZARIDES, G.; VLACHOS, N. Initial conditions for supersymmetric inflation. **Phys.Rev. D**, College Park, v.56, n.4562, 1997.
- 20 PANGITAKOPOULOS, C.; TETRADIS, N. Two-stage inflation as a solution to the initial condition problem of hybrid inflation. **Phys.Rev. D**, College Park, v.59, n.83502, 1999.
- 21 BERERA, A.; RAMOS, R. O. Dynamics of interacting scalar fields in expanding space-time. **Phys.Rev. D**, College Park, v.71, n.23513, 2005.
- 22 TURNER, M. S. Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe. **Phys.Rev. D**, College Park, v.28, n.1243, 1983.
- 23 RAMOND, P., **Field Theory: a modern primer**. Boston: Addison-Wesley Publ. Co., 1990.
- 24 MAC LACHLAN, N. W. **Theory and Application of Mathieu functions**. New York, Dover Publications: 1961.
- 25 LE BELLAC, M., **Thermal Field Theory**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- 26 M. GLEISER, M.; RAMOS, R. O. Microphysical approach to nonequilibrium dynamics of quantum fields. **Phys.Rev. D**, College Park, v.50, n.2441, 1994.
- 27 MORIKAWA, M. Classical fluctuations in dissipative quantum systems. **Phys.Rev. D**, College Park, v.33, n.3607, 1986.
- 28 YOKOYAMA, J. Fate of oscillating scalar fields in a thermal bath and their cosmological implications. **Phys.Rev. D**, College Park, v.70, n.103511, 2004.
- 29 GITTERMAN, M.; SHRAGER, R. I.; WEISS, G. H. Stochastic resonance and symmetry breaking in a one-dimensional system. **Phys.Rev. E**, College Park, v.56, n.3713, 1997.

- 30 LATTICEEASY. Disponível em: <http://www.felderbooks.com/latticeeasy/>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2007.
- 31 FELDER, G.; KOFMAN, L. Development of equilibrium after preheating. **Phys.Rev. D**, College Park, v.63, n.103503, 2001.
- 32 NUMERICAL Recipes Home Page. Disponível em: <http://numerical.recipes/>. Acesso em: 12 de fevereiro 2007.
- 33 HSIEH, D. Y. On Mathieu equation with damping. **J. Math. Phys.** St. Paul, Vol. 21, n.722, 1980.