



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Matheus Augusto Pereira

**Impacto da equação de estado nas propriedades de cascas  
auto-gravitantes**

Rio de Janeiro

2020

Matheus Augusto Pereira

**Impacto da equação de estado nas propriedades de cascas auto-gravitantes**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof Dr. Marcelo Chiapparini

Coorientador: Prof Dr. Santiago Estaban Perez Bergliaffa

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

P436      Pereira, Matheus Augusto.  
Impacto da equação de estado nas propriedades de  
cascas auto-gravitantes / Matheus Augusto Pereira. - 2020.  
144 f.: il.

Orientador: Marcelo Chiapparini.  
Coorientador: Santiago Estaban Perez Bergliaffa.  
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do  
Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1.Relatividade geral (Física) - Teses.2. Equações de  
estado - Teses. 3. Gravidade quântica - Teses. 4. Espaço  
e tempo I. Chiapparini, Marcelo II.Perez Bergliaffa, Santiago  
Estaban.III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro.  
Instituto de Física Armando Dias Tavares. IV. Titulo.

CDU 530.12

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou  
parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Matheus Augusto Pereira

## Impacto da equação de estado nas propriedades de cascas auto-gravitantes

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em 05 de outubro de 2020.

Banca Examinadora:

---

Prof Dr. Marcelo Chiapparini (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

---

Prof Dr. Santiago Estaban Perez Bergliaffa (Coorientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

---

Prof. Dr Hilário Antônio Rodrigues Gonçalves  
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

---

Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

---

Prof. Dr. Rodrigo Maier  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

---

Profa. Dra. Maria de Fátima Alves da Silva  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Rio de Janeiro

2020

## DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho aos meus pais, irmão, namorada, amigos e principalmente a Deus.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e meu irmão pelo apoio incondicional durante o período de mestrado.

Agradeço a minha namorada linda e maravilhosa, Raffisa Monteiro por sua compreensão, sempre me ouvir, aconselhar e ser meu maior motivo para continuar.

Também sou grato aos meus amigos: Gabriel, Matheus, Abner e Jonathas pelos momentos de descontração que ajudaram a desestressar para que pudesse continuar mantendo o foco.

Também agradeço meu amigo João Pedro da Costa Loureiro por ter me ajudado e ensinado a linguagem python de programação, sem ele esse trabalho não seria possível.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Marcelo Chiapparini por sua infinita paciência e didática para me ensinar aquilo que foi necessário para realizar esse projeto.

Agradeço aos colegas da pós que me ajudaram durante as disciplinas.

Agradeço principalmente a Deus, por ter me dado forças em todos os momentos da minha vida, e não foi diferente nesse período em que diversas vezes que me vi em momentos de desamparo e ansiedade. (Sl.121:1-2).

Agradeço também a FAPERJ pelo apoio financeiro que me possibilitou concluir o curso.

Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente.

Amém.

*Apóstolo Paulo.*

## RESUMO

PEREIRA, M.A. *Impacto da equação de estado nas propriedades de cascas auto-gravitantes*. 2020. 145 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

O estudo de cascas auto-gravitantes tem tido um grande crescimento nos últimos anos, devido a que sua exploração pode esclarecer as características da termodinâmica intrínsecas ao campo gravitacional e, por sua vez, nos fornecer orientações físicas úteis na busca de uma descrição quântica do espaço-tempo. Tal fato acontece porque as cascas são os objetos teóricos mais simples que se pode pensar como soluções de uma dada teoria gravitacional que descreve duas regiões do espaço-tempo separadas por uma região infinitamente delgada onde a matéria é confinada. Tal sistema conjuga as noções de vácuo, típicas dos buracos negros, com a presença de matéria, que pode ser descrita por meio da mecânica estatística e da termodinâmica. Através das relações de junção entre os espaços-tempos interno e externo à casca, é possível obter a equação de equilíbrio hidrostático, que combinada com uma equação de estado microscópica para a matéria, permite o cálculo da relação massa-raio destes objetos. Neste trabalho se estuda uma casca cujo interior é um espaço-tempo plano, descrito pela geometria de Minkowski e seu exterior é um espaço tempo curvo, descrito pela geometria de Schwarzschild. Diversas equações de estado em duas dimensões espaciais são usadas para descrever a matéria da casca, todas de graus de liberdade nucleares: gás de nêutrons livres, gás de nêutrons, prótons e elétrons livres, matéria nuclear interagente, modelada usando os modelos de Walecka linear e não-linear e finalmente um gás de quarks livres. Se estuda também a estabilidade mecânica destes objetos perante perturbações radiais.

Palavras-chave: Relatividade geral. Cascas auto-gravitantes. Equação de estado nuclear.

## ABSTRACT

PEREIRA, M.A *Impact of the state equation on the properties of self-gravitating shells.* 2020. 145 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

The study of self-gravitating shells has had a great growth in recent years, because its exploration can clarify the thermodynamic characteristics intrinsic to the gravitational field and, in turn, provide us with useful physical guidelines in the search for a quantum description of space- time. This happens because shells are the simplest theoretical objects that can be thought of as solutions to a given gravitational theory that describes two regions of space-time separated by an infinitely thin region where matter is confined. Such a system combines the notions of vacuum, typical of black holes, with the presence of matter, which can be described by means of statistical mechanics and thermodynamics, through the junction relations between the space-times internal and external to the shell, it is possible to obtain the hydrostatic equilibrium equation, which combined with a microscopic state equation for matter, allows the calculation of the mass-radius relationship of these objects. In this work, a shell is studied whose interior it is a flat space-time, described by Minkowski geometry and its exterior is a curved space-time, described by Schwarzschild geometry. Several equations of state in two spatial dimensions are used to describe the shell matter, all of nuclear degrees of freedom: free neutron gas, free neutron gas, protons and electrons, interacting nuclear matter, modeled using Walecka linear and non-linear and finally a free quarks gas. The mechanical stability of these objects in the face of radial disturbances is also studied.

Keywords: Self-gravitating shells. Nuclear state equation . General relativity.

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Casca bidimensional . . . . .	19
Gráfico 2 - Equações de estado do gás de nêutrons . . . . .	27
Gráfico 3 - Momento de Fermi dos nêutrons . . . . .	34
Gráfico 4 - Desidade de nêutrons . . . . .	35
Gráfico 5 - Desidade de prótons . . . . .	35
Gráfico 6 - Momento de Fermi dos prótons . . . . .	36
Gráfico 7 - Momento de Fermi dos elétrons . . . . .	37
Gráfico 8 - População relativa dos bárions . . . . .	37
Gráfico 9 - Equação de estado do gás $npe$ . . . . .	38
Gráfico 10 - Energia de ligação em três dimensões . . . . .	51
Gráfico 11 - Energia de ligação em duas dimensões . . . . .	52
Gráfico 12 - Energia de ligação em duas e três dimensões . . . . .	53
Gráfico 13 - Massa efetiva . . . . .	53
Gráfico 14 - Densidade de nêutrons . . . . .	54
Gráfico 15 - Densidade de prótons . . . . .	55
Gráfico 16 - População relativa dos bárions . . . . .	55
Gráfico 17 - Equação de estado . . . . .	58
Gráfico 18 - Equação de estado com zoom no início . . . . .	58
Gráfico 19 - Energia de ligação em 3 dimensões . . . . .	67
Gráfico 20 - Saturação em duas e três dimensões . . . . .	69
Gráfico 21 - Massa efetiva . . . . .	70
Gráfico 22 - População relativa de bárions . . . . .	71
Gráfico 23 - Equação de estado . . . . .	73
Gráfico 24 - Equações de estado com zoom a baixas densidades . . . . .	74
Gráfico 25 - Densidades dos quarks . . . . .	78
Gráfico 26 - Equação de estado . . . . .	80
Gráfico 27 - $\bar{m} \times \bar{R}$ . . . . .	82
Gráfico 28 - Estabilidade dinâmica . . . . .	83
Gráfico 29 - Estabilidade dinâmica . . . . .	84
Gráfico 30 - Estabilidade dinâmica . . . . .	84
Gráfico 31 - $\bar{m} \times \bar{R}$ . . . . .	86
Gráfico 32 - Estabilidade dinâmica . . . . .	87
Gráfico 33 - Estabilidade dinâmica . . . . .	88
Gráfico 34 - Estabilidade dinâmica . . . . .	88
Gráfico 35 - $\bar{m} \times \bar{R}$ . . . . .	90
Gráfico 36 - $\bar{m} \times \bar{R}$ . . . . .	91

Gráfico 37 - Estabilidade dinâmica . . . . .	91
Gráfico 38 - Estabilidade dinâmica . . . . .	92
Gráfico 39 - $\bar{m} \times \bar{R}$ . . . . .	94
Gráfico 40 - $\bar{m} \times \bar{R}$ . . . . .	94
Gráfico 41 - $\bar{m} \times \bar{R}$ . . . . .	95
Gráfico 42 - Estabilidade . . . . .	96
Gráfico 43 - Estabilidade . . . . .	96
Gráfico 44 - Estabilidade . . . . .	97
Gráfico 45 - Curva $\bar{m} \times \bar{R}$ referente ao gás de quarks livres . . . . .	98
Gráfico 46 - Estabilidade referente ao modelo de quarks livres. . . . .	99

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Constantes de acoplamento referente ao modelo de Walecka não linear em 2D. . . . .	68
Tabela 2	- Diferentes conjuntos de constantes de acoplamento referentes ao modelo de Walecka não linear em 2D com a inclusão do méson $\rho$ . . . . .	70
Tabela 3	- Tabela de constantes de acoplamento e densidade de corte para o modelo de Walecka não linear. . . . .	93

## LISTA DE SÍMBOLOS

$m_n$	Massa do nêutron.
$m_p$	Massa do próton.
$m_e$	Massa ds elétron.
$c$	Velocidade da luz.
$M$	Massa do bárion.
$M^*$	Massa efetiva dos bárions.
$m_q$	Massa do quark $u$ .
$m_u$	Massa do quark $d$ .
$m_s$	Massa do quark $s$ .

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b>	16
1	<b>CONDIÇÃO DE JUNÇÃO E ESTABILIDADE DE UMA CASCA BIDIMENSIONAL</b>	18
1.1	<b>Estabilidade dinâmica</b>	20
2	<b>GÁS DE FERMI EM DUAS DIMENSÕES À <math>T = 0</math></b>	22
2.1	<b>Gás de nêutrons livres</b>	22
2.1.1	<u>Aproximação politrópica</u>	25
2.2	<b>Gás de nêutrons, prótons e elétrons livres</b>	27
2.2.1	<u>Aproximação politrópica</u>	30
2.2.2	<u>Vínculos</u>	32
3	<b>MODELO DE WALECKA EM DUAS DIMENSÕES À <math>T = 0</math></b>	39
3.1	<b>Densidade lagrangeana</b>	39
3.2	<b>Equações de movimento</b>	41
3.2.1	<u>Equação de movimento para o campo <math>\sigma</math></u>	42
3.2.2	<u>Equação de movimento para o campo <math>\omega</math></u>	42
3.2.3	<u>Equação de movimento do campo <math>\psi_B</math></u>	42
3.2.4	<u>Equação de movimento do campo <math>\bar{\psi}_B</math></u>	43
3.2.5	<u>Equação de movimento para o campo <math>\psi_\lambda</math></u>	43
3.3	<b>Tensor Energia-Momento</b>	43
3.4	<b>Aproximação de campo médio</b>	44
3.4.1	<u>Aproximação de campo médio para o méson <math>\sigma</math></u>	45
3.4.2	<u>Aproximação de campo médio para o méson <math>\omega</math></u>	46
3.5	<b>Densidade escalar</b>	46
3.6	<b>Densidade bariônica</b>	47
3.7	<b>Densidade de energia</b>	48
3.8	<b>Pressão</b>	48
3.9	<b>Vínculos</b>	49
3.10	<b>Constantes de acoplamento e resultados numéricos</b>	50
3.10.1	<u>Energia de saturação</u>	50
3.10.2	<u>Massa efetiva</u>	52
3.10.3	<u>População de partículas</u>	54
3.11	<b>Equação de estado</b>	56
4	<b>MODELO DE WALECKA NÃO LINEAR EM DUAS DIMENSÕES À <math>T = 0</math></b>	59
4.1	<b>Equações de movimento</b>	60
4.1.1	<u>Equação de movimento para o méson <math>\sigma</math></u>	60

4.1.2	<u>Equação de movimento para o campo <math>\psi_B</math></u> . . . . .	61
4.1.3	<u>Equação de movimento para o campo <math>\bar{\psi}_B</math></u> . . . . .	61
4.1.4	<u>Equação de movimento para o méson <math>\rho</math></u> . . . . .	61
4.2	<b>Aproximação de campo médio</b> . . . . .	61
4.2.1	<u>Aproximação de campo médio para o méson <math>\sigma</math></u> . . . . .	62
4.2.2	<u>Aproximação de campo médio para o méson <math>\rho</math></u> . . . . .	62
4.3	<b>Densidade escalar</b> . . . . .	63
4.4	<b>Densidade bariônica</b> . . . . .	63
4.5	<b>Densidade de isospin</b> . . . . .	64
4.6	<b>Densidade de energia</b> . . . . .	64
4.7	<b>Pressão</b> . . . . .	65
4.8	<b>Vínculos</b> . . . . .	65
4.8.1	<u>Constantes de acoplamento e resultados numéricos</u> . . . . .	66
4.8.2	<u>Energia de assimetria</u> . . . . .	68
4.8.3	<u>Massa efetiva</u> . . . . .	69
4.8.4	<u>População</u> . . . . .	69
4.9	<b>Equação de estado</b> . . . . .	71
5	<b>GÁS DE QUARKS LIVRES EM DUAS DIMENSÕES À <math>T = 0</math></b> . . . . .	75
5.1	<b>Densidade bariônica</b> . . . . .	75
5.2	<b>Densidade de energia</b> . . . . .	76
5.3	<b>Pressão</b> . . . . .	76
5.4	<b>Vínculos</b> . . . . .	76
5.5	<b>Equação de estado</b> . . . . .	78
6	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	81
6.1	<b>Resultados para o gás de nêutrons</b> . . . . .	81
6.1.1	<u>Curvas <math>\bar{m} \times \bar{R}</math></u> . . . . .	82
6.1.2	<u>Estabilidade dinâmica</u> . . . . .	83
6.2	<b>Resultados para o gás <math>npe</math></b> . . . . .	85
6.2.1	<u>Curvas <math>\bar{m} \times \bar{R}</math></u> . . . . .	85
6.2.2	<u>Estabilidade dinâmica</u> . . . . .	86
6.3	<b>Resultados para o modelo de Walecka</b> . . . . .	87
6.3.1	<u>Curvas <math>\bar{m} \times \bar{R}</math></u> . . . . .	89
6.3.2	<u>Estabilidade dinâmica</u> . . . . .	90
6.4	<b>Resultados para o modelo de Walecka não linear</b> . . . . .	92
6.4.1	<u>Curvas <math>\bar{m} \times \bar{R}</math></u> . . . . .	93
6.5	<b>Estabilidade dinâmica</b> . . . . .	95
6.6	<b>Resultados para o gás de quarks livres</b> . . . . .	97
6.6.1	<u>Curva <math>\bar{m} \times \bar{R}</math></u> . . . . .	97
6.6.2	<u>Estabilidade dinâmica</u> . . . . .	98

<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	100
<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	103
<b>APÊNDICE A</b> – Detalhes para as condições de junção de uma casca bidimensional . . . . .	105
<b>APÊNDICE B</b> – Detalhes para os cálculos do gás de nêutrons . . . . .	108
<b>APÊNDICE C</b> – Detalhes para os cálculos do gás <i>npe</i> . . . . .	111
<b>APÊNDICE D</b> – Detalhes referente ao modelo de Walecka . . . . .	117
<b>APÊNDICE E</b> – Detalhes referente ao modelo de Walecka não linear . . . . .	139
<b>APÊNDICE F</b> – Fator utilizado para tornar as expressões de equilíbrio hidrostático adimensionais . . . . .	145

## INTRODUÇÃO

Uma vez que alguns buracos negros são soluções de vácuo de uma teoria gravitacional, enquanto nossos conceitos de entropia são baseados em propriedades da matéria, seria útil estudar as propriedades da matéria em colapso, ou seja, se as propriedades dos buracos negros poderiam surgir, ou não, quando comprimimos a matéria dentro de seu próprio raio gravitacional. Ao adotar essa abordagem, espera-se obter, por exemplo, indicações de como a entropia de Bekenstein-Hawking surge do estado final de colapso gravitacional (PRETORIUS; VOLLIK; ISRAEL, 1998). As soluções de colapso dependentes do tempo são difíceis de obter analiticamente e, em vez disso, pode-se tentar uma sequência de soluções estáticas ou quase-estáticas até o raio gravitacional de uma determinada configuração. Como mostrado pela primeira vez em (LE MOS; ZASLAVSKII, fev. 2010) , usando tal abordagem a entropia do buraco negro pode ser recuperada.

Portanto, é de grande interesse analisar sistemas de matéria auto-gravitante, que possuem tanto graus de liberdade gravitacional quanto de matéria. Um dos sistemas mais simples é uma casca infinitesimalmente fina, onde a matéria auto-gravitante é confinada, colocada em um espaço-tempo de outro modo vazio (ISRAEL, dez. 1996).

Uma vez que a casca está formada por algum tipo de matéria e as geometrias do espaço-tempo devem refleti-la, a casca delgada deve satisfazer condições para que todo o espaço-tempo seja uma solução válida das equações de Einstein. Tais condições relacionam o tensor energia-momento da casca à curvatura extrínseca do espaço-tempo e, portanto, à geometria do espaço-tempo fora da casca, por meio das condições de junção(?). O tensor energia-momento fornece a densidade e a pressão, sendo que elas estão relacionadas entre si pela equação de estado da matéria. Uma casca fina particularmente simples é aquela que é estática e esfericamente simétrica

De posse da configuração da casca fina, pode-se verificar em quais condições a casca pode, por exemplo, ser levada estaticamente até o raio do horizonte, e estudar a formação de um buraco negro durante um colapso quase-estático.

Desde o ponto de vista da equação de estado da matéria, mencionaremos nesta Introdução o modelo de Walecka. Ele se baseia numa teoria de campos quantizada com base em graus de liberdade hadrônicos, referida na literatura como hadrodinâmica quântica (QHD), que foi introduzida por Walecka em 1974 (WALECKA, ago.1974). Resulta ser uma abordagem bem-sucedida para descrever as propriedades dos núcleos e da matéria nuclear na aproximação de campo médio relativístico (RMF). Para a QHD original, também conhecida como modelo  $\sigma-\omega$  ou modelo de Walecka, foi usado um conjunto de parâmetros simples para modelar a força nuclear via a troca dos mesons escalar-isoescalar sigma ( $\sigma$ ) e vetorial-isoescalar ômega ( $\omega$ ). Descobriu-se que esses mésons são os mais importantes na

descrição das propriedades dos núcleos e da matéria nuclear (WALECKA, 1995). Os modelos predominantes no marco das RMF também incluem o auto-acoplamento não linear do méson  $\sigma$ , que dá lugar ao modelo de Walecka não linear, e que é essencial para reproduzir as propriedades quantitativas dos núcleos e dar um valor próximo do experimental para a incompressibilidade da matéria nuclear (BOGUTA; BODMER, mar.1977). Além disso, o canal de troca do méson vetorial-isovetorial rho  $\rho$  foi introduzido para descrever a matéria nuclear assimétrica (SEROT, out. 1979; HOROWITZ; SEROT, ago.1983).

O objetivo desta Dissertação é o de estudar o impacto da equação de estado da matéria nas propriedades das configurações de equilíbrio de cascas bi-dimensionais esféricas auto-gravitantes. Em particular, se estudam as curvas  $m \times R$  e a estabilidade dinâmica destas configurações. Para isso, se calculam e se aplicam as equações de estado bi-dimensionais à temperatura zero de um gás de nêutrons e de um gás que é uma mistura de nêutrons, prótons e elétrons, do modelo de Walecka e do modelo de Walecka não linear e de um gás de quarks.

A Dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 1 são obtidas as equações de equilíbrio hidrostático de uma casca bi-dimensional auto-gravitante e a condição para a estabilidade dinâmica das configurações de equilíbrio. No Capítulo 2 se obtém a equação de estado à  $T = 0$  de a um gás de nêutrons e um gás que é uma mistura de nêutrons, prótons e elétrons. No Capítulo 3 é obtida a equação de estado associada ao modelo de Walecka ao passo que no Capítulo 4 se obtém a equação de estado do modelo de Walecka não linear. No Capítulo 5 se obtém a equação de estado de uma gás que é uma mistura de quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$ . Já no Capítulo 6 se apresentam os resultados de aplicar as diferentes equações de estado obtidas nos capítulos anteriores, na estrutura e nas condições de estabilidade das cascas auto-gravitantes do Capítulo 1. Finalmente, no Capítulo 6.6.2 se apresentam as conclusões deste Trabalho.

## 1 CONDIÇÃO DE JUNÇÃO E ESTABILIDADE DE UMA CASCA BIDIMENSIONAL

Este Capítulo está baseado na Ref. (BERGLIAFFA; CHIAPPARINI; REYES, dez. 2020). Se usam unidades geométricas  $c = G = 1$ , de forma que  $[M] = [m] = [R] = L$  e  $[P] = [\sigma] = 1/L$ , onde  $[\cdot]$  representa dimensão e  $L$  representa comprimento.

Consideremos uma casca bidimensional  $\Sigma$  de raio  $R$  e massa própria  $M$ . A casca divide o espaço-tempo em duas partes: i) uma região interna  $r < R$ , com geometria plana, e ii) uma região externa,  $r > R$ , na qual a geometria é descrita pelo elemento da linha de Schwarzschild, como ilustrado no Gráfico 1. Desta forma, podemos expressar a métrica em ambas as regiões do espaço-tempo da seguinte forma:

$$ds_a^2 = -f_a dt_a^2 + g_a dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1)$$

Aqui  $a = e, i$  se refere tanto à região externa ( $e$ ) quanto à interna ( $i$ ), e as funções  $f_a$  e  $g_a$  estão dadas por:

$$f_i = g_i = 1, \quad f_e = 1 - \frac{2m}{r}, \quad g_e = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (2)$$

onde  $m$  é a massa de Arnowitt-Deser-Misner (ADM)<sup>1</sup> e  $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ .

A métrica  $h_{ab}$ , definida sobre  $\Sigma$ , ou seja para  $r = R$ , é a de uma 2-esfera, e pode ser escrita como

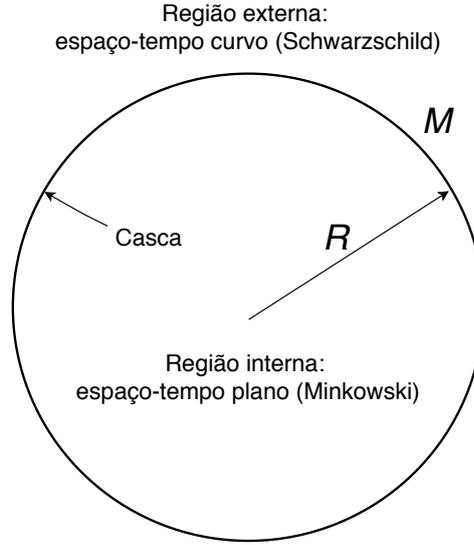
$$ds_\Sigma^2 = h_{ab} dy^a dy^b = -d\tau^2 + R^2(\tau) d\Omega^2, \quad (3)$$

onde  $y^a = (\tau, \theta, \phi)$  e  $R$  é uma função de  $\tau$ , o tempo próprio para um observador localizado sobre a casca, no caso dinâmico (não estático). A aplicação do formalismo de casca fina desenvolvido em (ISRAEL, mar. 1967) para juntar os dois espaços-tempos especificados pelas Eqs.(1) e (2), obtendo assim uma solução das equações de Einstein válida em todo o espaço-tempo, requer que a métrica induzida sobre a 2-esfera  $h_{ab}$  seja contínua na casca, e que a discontinuidade na curvatura extrínseca seja proporcional ao tensor de energia-momento sobre a casca, denotado por  $\mathcal{S}_\nu^\mu$ . Este é dado pela densidade de energia interna superficial  $\epsilon$  e pela pressão tangencial  $P_0$  as quais, para uma casca estática, são da forma

---

<sup>1</sup> A massa ADM  $m$  representa a intensidade do campo gravitacional gerado pela casca no infinito e sua expressão neste caso é dada pela Eq. (6).

Gráfico 1 - Casca bidimensional



Legenda: Representação da casca bidimensional e da divisão do espaço-tempo.

Fonte: O autor, 2020.

(ver por exemplo (MARTINEZ, 1996)):

$$\mathcal{S}^\tau_\tau \equiv \epsilon_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2m_0}{R_0}}}{4\pi R_0}, \quad (4)$$

$$\mathcal{S}^\theta_\theta = \mathcal{S}^\phi_\phi \equiv P_0 = \frac{\sqrt{1 - \frac{2m_0}{R_0}} - 1}{8\pi R_0} + \frac{m_0}{8\pi R_0^2 \sqrt{1 - \frac{2m_0}{R_0}}}, \quad (5)$$

onde o sub-índice 0 significa que as quantidades estão avaliadas na configuração de equilíbrio. A massa própria se escreve então como  $M = 4\pi R_0^2 \epsilon_0$ . As condições de junção implicam também que a massa  $m_0$  é dada por

$$m_0 = M - \frac{M^2}{2R_0}. \quad (6)$$

Substituindo a Eq.(6) nas Eqs.(4)-(5) se obtém as seguintes expressões para  $P_0$  e  $\epsilon_0$

$$P_0(M, R_0) = \frac{M^2}{16\pi R_0^2 (R_0 - M)}, \quad (7)$$

$$\epsilon_0(M, R_0) = \frac{M}{4\pi R_0^2}. \quad (8)$$

Se supõe que  $\epsilon_0$  e  $P_0$  são quantidades positivas (dessa forma  $M > 0$ ) e que  $R_0 \geq 2m_0$ .  $P_0$  na Eq.(7) representa a pressão necessária para manter em equilíbrio uma casca de massa  $M$  e raio  $R$  contra o colapso gravitacional. Trata-se da equação de equilíbrio hidrostático

da casca.

Ao inverter as Eqs. (7) and (8) obtemos  $R_0(P_0, \epsilon_0)$  e  $M(P_0, \epsilon_0)$ , dados por

$$R_0(P_0, \epsilon_0) = \frac{P_0}{\pi\epsilon_0(\epsilon_0 + 4P_0)}, \quad (9)$$

$$M(P_0, \epsilon_0) = \frac{4P_0^2}{\pi\epsilon_0(\epsilon_0 + 4P_0)^2}. \quad (10)$$

Usando as Eqs. (6) e (10) é possível ver que

$$m_0(M, R_0) = 4\pi\epsilon_0 R_0^2 (1 - 2\pi\epsilon_0 R_0). \quad (11)$$

As equações (9) e (10) descrevem o equilíbrio mecânico da casca, e serão usadas na análise da estabilidade linear e para construir os diagramas  $m \times R$  para cada uma das EOS desta Dissertação, como veremos no Capítulo 6.

### 1.1 Estabilidade dinâmica

Apresentamos aqui os passos que levam à condição para a estabilidade dinâmica das cascas apresentadas na Seção 1. O estado de equilíbrio da casca é descrito pelas Eqs. (7) e (8), no entanto as expressões correspondentes para uma casca dinâmica na qual  $R = R(\tau)$  são, (ver (MAZHARIMOUSAVI; HALILSOY; AMEN, 2017) e (??)) <sup>2</sup>

$$\epsilon = \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{f_e(R) + \dot{R}^2} - \sqrt{f_i(R) + \dot{R}^2}}{R}, \quad (12)$$

$$P = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{2\ddot{R} + f'_e(R)}{2\sqrt{f_e(R) + \dot{R}^2}} - \frac{2\ddot{R} + f'_i(R)}{2\sqrt{f_i(R) + \dot{R}^2}} + \frac{\sqrt{f_e(R) + \dot{R}^2} - \sqrt{f_i(R) + \dot{R}^2}}{R} \right], \quad (13)$$

onde  $f_i(R)$  e  $f_e(R)$  estão definidas na Eq. (2), os pontos e linhas denotam as derivadas com respeito a  $\tau$  e  $r$  respectivamente. Estas quantidades obedecem a equação que segue da conservação de  $\mathcal{S}^\mu_\nu$ , dada por

$$\frac{d\epsilon}{dR} + \frac{2}{R}(P + \epsilon) = 0. \quad (14)$$

Uma perturbação radial de uma configuração de equilíbrio com  $R = R_0$  faz com que  $R$ ,  $\epsilon$  e  $P$  venham a ser funções de  $\tau$ . Supondo uma EOS da forma  $P = P(\epsilon)$ , denominada barotrópica, segue-se das Eqs. (12) e (14) que a evolução posterior da casca é governada

---

<sup>2</sup> Para uma derivação da dinâmica da casca seguindo um tratamento hamiltoniano, ver (CRISÓSTOMO; OLEA, 2004).

pela equação (MAZHARIMOUSAVI; HALILSOY; AMEN, 2017)

$$\dot{R}^2 + V(R, \epsilon(R)) = 0, \quad (15)$$

sendo

$$V(R) = \frac{1}{2} (f_i(R) + f_e(R)) - \frac{1}{64} \frac{(f_i(R) - f_e(R))^2}{\pi^2 R^2 \epsilon(R)^2} - 4 \pi^2 R^2 \epsilon(R)^2. \quad (16)$$

A estabilidade linear da casca pode ser estudada expandindo o potencial  $V(R)$  ao redor de  $R - R_0$  até segunda ordem em  $x = R - R_0$ , obtendo dessa forma

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (17)$$

onde

$$\omega_0^2 \equiv \left. \frac{d^2 V}{dR^2} \right|_{R_0}. \quad (18)$$

A condição de estabilidade é

$$\omega_0^2 > 0. \quad (19)$$

O cálculo de  $\omega_0^2$  envolve  $\frac{d\epsilon}{dR}$  (o qual é dado pela Eq. (14)), e  $\frac{d^2 \epsilon}{dR^2}$ , a qual se obtém derivando a Eq. (14). Para a EOS barotrópica  $P = P(\epsilon)$ ,  $\omega_0^2$  é dado por (MAZHARIMOUSAVI; HALILSOY; AMEN, 2017):

$$\omega_0^2 = \frac{H_0(2F_0^2 - f'_{i0}R_0) - F_0(2H_0^2 - f'_{e0}R_0)}{(F_0 - H_0)R_0^2} \Omega_0 + \frac{[4F_0^4 - 2R_0F_0^2(f'_{i0} + R_0f''_{i0}) + R_0^2f'^2_{i0}]H_0^3 - [4H_0^2 - 2R_0H_0^2(f'_{e0} + R_0f''_{e0}) + R_0^2f'^2_{e0}]F_0^3}{4(F_0 - H_0)F_0^2H_0^2R_0^2}, \quad (20)$$

onde  $F_0 \equiv \sqrt{f_{i0}}$ ,  $H_0 \equiv \sqrt{f_{e0}}$ , e

$$\Omega_0 \equiv \left. \frac{dP}{d\sigma} \right|_{R_0}. \quad (21)$$

A condição que separa as configurações estáveis das instáveis é

$$\omega_0^2 = 0, \quad (22)$$

sendo que configurações com  $\omega_0^2 < 0$  são instáveis, e aquelas com  $\omega_0^2 > 0$  são estáveis, como dito na Eq.(19). Estas condições serão usadas para determinar as regiões de estabilidade nos diagramas  $m_0 \times R_0$  obtidos para diversas EOS no Capítulo 6.

## 2 GÁS DE FERMI EM DUAS DIMENSÕES À $T = 0$

Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente. Amém.

*Apóstolo Paulo*

### 2.1 Gás de nêutrons livres

Nesta Seção, será obtida a equação de estado (EOS) de um gás de nêutrons livre bidimensional à  $T = 0$ , para sua aplicação ao equilíbrio de uma casca esférica auto-gravitante.

Por definição, férmions são partículas que possuem spin semi-inteiro, o que infere que duas ou mais partículas não podem ocupar o mesmo estado quântico. No caso do gás à temperatura zero, pode-se afirmar que cada partícula ocupa o menor estado de energia possível, começando pelo estado fundamental (SALINAS, 1997).

Define-se então o número de ocupação médio  $\langle n_i \rangle$  da seguinte forma:

$$\langle n_i \rangle = \Theta(E_F - E_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } E_i \leq E_F \\ 0 & \text{se } E_i > E_F \end{cases}. \quad (23)$$

Da definição de distribuição de Fermi-Dirac,

$$f_q = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} + 1}, \quad (24)$$

onde  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ,  $T$  é a temperatura,  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $\mu$  é o potencial químico. Ao tomar o limite  $T \rightarrow 0$  na distribuição de Fermi-Dirac se obtém

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} + 1} = \Theta(\mu - E_i). \quad (25)$$

Ao comparar a equação (25) com a (23), nota-se que no limite  $T \rightarrow 0$ , o potencial químico ( $\mu$ ) é igual a energia de Fermi ( $E_F$ ). Para encontrar o número de partículas, usa-se a expressão

$$N = \sum f_q, \quad (26)$$

onde  $f_q$  é dado pela expressão (24). O princípio de exclusão de Pauli não permite que os férmions ocupem o mesmo estado quântico. Então para um gás que ocupe a área

macroscópica bidimensional  $L^2$  é possível rotular os estados na forma  $q \equiv (\vec{p}, s_z)$ , onde  $\vec{p}$  é o momento linear e  $s_z$  é a projeção do spin no eixo  $z$ . Considerando o espectro de energia como um contínuo e substituindo a equação (24) em (26), logo pode-se encontrar o número total de partículas ( $N$ ) e ao efetuar a soma em todos os estados ( $n$ ), lembrando de considerar que para cada estado degenerado existem  $2S + 1$  partículas (SALINAS, 1997) é possível ver que,

$$N = \sum_{i, S_z} \langle n_i \rangle = (2S + 1) \sum_i \langle n_i \rangle. \quad (27)$$

Substituindo (27) em (26),

$$N = \frac{(2S + 1)L}{h} \sum_i \langle p_i \rangle, \quad (28)$$

onde  $L$  é o tamanho do sistema.

Para um  $L$  muito grande, o intervalo entre dois valores consecutivos de  $p$  é muito pequeno. Tal fato, permite substituir o somatório em  $p$  por uma integral em  $dp$  que aproxima o espectro discreto de um contínuo. Em duas dimensões fica,

$$N = \frac{(2S + 1)L^2}{h^2} \int_0^{p_F} d^2 p. \quad (29)$$

Ao aplicar o spin  $\frac{1}{2}$  correspondente aos nêutrons,

$$N = \frac{2L^2}{h^2} \int_0^{p_F} d^2 p. \quad (30)$$

Resolvendo a integral (30) por coordenadas polares:

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi L^2}{h^2} \int_0^{p_F} p dp, \\ &= \frac{L^2}{\pi \hbar^2} \int_0^{p_F} p dp, \\ &= \frac{L^2 p_F^2}{2\pi \hbar^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Ao dividir os dois lados por  $L^2$ , consegue-se encontrar uma expressão para densidade de número de partículas em função do momento de Fermi,

$$\rho = \frac{p_F^2}{2\pi \hbar^2}. \quad (32)$$

Com o fim de se trabalhar com grandezas adimensionais, define-se o momento de Fermi

adimensional,  $x = \frac{p_F}{mc}$ . Sendo assim,

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{x^2 m^2 c^2}{2\pi \hbar^2} \\ &= \frac{x^2}{2\pi \lambda^2},\end{aligned}\tag{33}$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de Compton, dado pela expressão  $\frac{\hbar}{mc}$ . A densidade de energia pode ser encontrada a partir da energia interna  $U$  (BELLAC, 1991). No qual

$$U = \sum_{i, S_z} \langle E_i \rangle \Big|_{\beta \rightarrow \infty} = (2s + 1) \sum_{\vec{p}} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}.\tag{34}$$

Ao resolver a equação acima, utilizando as técnicas que estão explícitas no Anexo B.1, chega-se ao seguinte resultado,

$$\begin{aligned}\frac{U}{L^2} \equiv \epsilon &= \frac{m^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] \\ &= \frac{m c^2}{3\pi \lambda^2} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right].\end{aligned}\tag{35}$$

Outra grandeza que será importante no decorrer desse trabalho é a pressão, que segundo (BERGLIAFFA; CHIAPPARINI; REYES, dez. 2020) será,

$$P = \frac{1}{2\pi \hbar^2} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} p dp.\tag{36}$$

Ao solucionar a integral acima, que pode ser conferida no Anexo B.2, obtemos

$$P = \frac{m c^2}{6\pi \lambda^2} \left[ \left( \frac{p_F^2}{m^2 c^2} - 2 \right) \sqrt{p_F^2 + 1} + 2 \right].\tag{37}$$

Empregando mais uma vez a definição  $\frac{p_F}{mc} = x$ , têm-se que

$$P = \frac{m c^2}{6\pi \lambda^2} \left[ (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + 2 \right],\tag{38}$$

onde pode-se definir que

$$\frac{m c^2}{\lambda^2} = \alpha,\tag{39}$$

com dimensões de densidade de energia em duas dimensões. Logo as expressões da densidade de energia e pressão ficam:

$$\epsilon = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right]\tag{40}$$

$$P = \frac{\alpha}{6\pi} \left[ (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + 2 \right]. \quad (41)$$

Podemos tornar estas quantidades adimensionais utilizando o  $\alpha$  definido em (39) na forma:

$$\frac{\epsilon}{\alpha} = \bar{\epsilon} \quad (42)$$

e

$$\frac{P}{\alpha} = \bar{P}. \quad (43)$$

Agora se tem de forma explícita, as expressões adimensionais para densidade de energia (40) e pressão (41) de um gás de nêutrons livre à  $T = 0$ . Sendo elas,

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{3\pi} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] \quad (44)$$

e

$$\bar{P} = \frac{1}{3\pi} \left[ \frac{1}{2} (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + 1 \right]. \quad (45)$$

### 2.1.1 Aproximação politrópica

Como as equações (44) e (45) se referem a um gás relativístico, pode-se explorar os limites não relativísticos e ultra-relativísticos através de aproximações simples. Para encontrar o limite não relativístico basta explorar o limite das equações em que  $x \ll 1$ , que é o mesmo que fazer  $P_F \ll mc$ . Para isso, usa-se a série de Maclaurin para expandir  $x$  em torno de zero,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad (46)$$

Ao aplicar a equação (44) em (46) até segunda ordem, é possível ver que,

$$\epsilon = \frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{3}{2} x^2 \right) = \frac{\alpha}{2\pi} x^2. \quad (47)$$

Ao aplicar a série de Maclaurin para pressão, têm-se que ir até a terceira ordem, pois as ordens anteriores são iguais a zero, logo

$$P = \frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{6x^4}{8} \right) \frac{1}{2!} = \frac{\alpha}{8\pi} x^4. \quad (48)$$

Para encontrar o limite ultra-relativístico deve-se explorar o limite em que  $x \gg 1$ , o que fisicamente é o mesmo que dizer que  $P_F \gg mc$ . Se  $x \gg 1$  os termos que não estão acompanhados da variável são irrelevantes para a função, logo para a densidade de energia, têm-se que

$$\epsilon = \frac{\alpha}{3\pi} x^3, \quad (49)$$

e para a pressão

$$P = \frac{\alpha}{6\pi} x^3 = \frac{1}{2} \epsilon. \quad (50)$$

Através dessas aproximações, têm-se três expressões para densidade de energia, sendo elas:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\alpha}{3\pi} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right], \text{ (Limite relativístico), } 1 > x > 0, \\ \epsilon &= \frac{\alpha}{2\pi} x^2, \text{ (Limite não relativístico), } 1 \gg x > 0, \\ \epsilon &= \frac{\alpha}{3\pi} x^3, \text{ (Limite ultra- relativístico), } x \gg 1. \end{aligned} \quad (51)$$

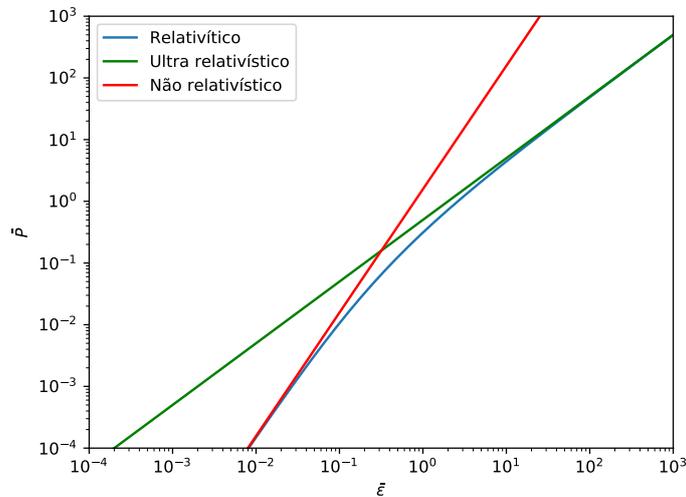
O mesmo acontece para a pressão:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \frac{1}{2} (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + 1 \right] \text{ (Limite relativístico), } 1 > x > 0, \\ P &= \frac{\alpha}{8\pi} x^4 \text{ (Limite não relativístico), } 1 \gg x > 0, \\ P &= \frac{\alpha}{6\pi} x^3 = \frac{1}{2} \epsilon \text{ (Limite ultra- relativístico), } x \gg 1, \end{aligned} \quad (52)$$

A fim de trabalhar com grandezas adimensionais, utiliza-se mais uma vez as transformações (42) e (43). Agora, têm-se todas as expressões para densidade de energia e pressão adimensionais nos três limites explorados:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{1}{3\pi} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right], \text{ (Limite relativístico), } 1 > x > 0, \\ \bar{\epsilon} &= \frac{1}{2\pi} x^2, \text{ (Limite não relativístico), } 1 \gg x > 0, \\ \bar{\epsilon} &= \frac{1}{3\pi} x^3, \text{ (Limite ultra-relativístico), } x \gg 1, \end{aligned} \quad (53)$$

Gráfico 2 - Equações de estado do gás de nêutrons



Legenda: Equações de estado adimensionais do gás de nêutrons livre em 2D à  $T = 0$ , referentes aos três limites de momento das Eqs. (53) e (54).

Fonte: O autor, 2020.

e

$$\bar{P} = \frac{1}{3\pi} \left[ \frac{1}{2} (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + 1 \right] \quad (\text{Limite relativístico}), 1 > x > 0, \quad (54)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{8\pi} x^4 \quad (\text{Limite não relativístico}), 1 \gg x > 0,$$

$$\bar{P} = \frac{1}{6\pi} x^3 = \frac{1}{2} \epsilon \quad (\text{Limite ultra-relativístico}), x \gg 1.$$

No Gráfico 2 estão representadas as EOS (53) e (54) para o gás de nêutrons livre à  $T = 0$  em todos seus limites de momento. Pode-se ver como os limites politrômicos acompanham corretamente o comportamento do gás relativístico nos limites  $x \ll 1$  e  $x \gg 1$ .

## 2.2 Gás de nêutrons, prótons e elétrons livres

Nesta Seção, será obtida a equação de estado (EOS) de um gás de nêutrons, prótons e elétrons livres bidimensional à  $T = 0$ , para sua aplicação ao equilíbrio de uma casca esférica auto-gravitante.

Em um sistema muito simples, negligenciando todas as interações, o método utilizado para encontrar os observáveis de interesse se assemelha muito ao modelo anterior do gás de nêutrons. Tal semelhança nasce devido aos prótons e elétrons também serem

férmions de spin  $\frac{1}{2}$ . Então, ignorando todas as interações, o número de partículas será encontrado de forma semelhante a (28):

$$N = \frac{(2S + 1)L}{h} \left( \sum_n \langle p_n \rangle + \sum_p \langle p_p \rangle + \sum_e \langle p_e \rangle \right), \quad (55)$$

no qual  $n$  representa o nêutrons,  $p$  representa os prótons e  $e$  representa os elétrons. Para um  $L$  muito grande, o intervalo entre dois valores consecutivos de  $p$  é muito pequeno. Tal fato permite substituir o somatório em  $p$  por uma integral em  $dp$  com os limites de integração variando de 0 (estado fundamental) até  $P_F$  (o último estado na esfera de Fermi). Em duas dimensões obtemos,

$$N = \frac{(2S + 1)L^2}{h^2} \left( \int_0^{P_{F_n}} d^2p + \int_0^{P_{F_p}} d^2p + \int_0^{P_{F_e}} d^2p \right). \quad (56)$$

Usando  $S = \frac{1}{2}$  correspondente a todos os férmions,

$$N = \frac{2L^2}{h^2} \left( \int_0^{P_{F_n}} d^2p + \int_0^{P_{F_p}} d^2p + \int_0^{P_{F_e}} d^2p \right). \quad (57)$$

Resolvendo a integral (57) em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi L^2}{h^2} \left( \int_0^{P_{F_n}} p dp + \int_0^{P_{F_p}} p dp + \int_0^{P_{F_e}} p dp \right), \\ &= \frac{L^2}{\pi \hbar^2} \left( \int_0^{P_{F_n}} p dp + \int_0^{P_{F_p}} p dp + \int_0^{P_{F_e}} p dp \right), \\ &= \frac{L^2 p_{F_n}^2}{2\pi \hbar^2} + \frac{L^2 p_{F_p}^2}{2\pi \hbar^2} + \frac{L^2 p_{F_e}^2}{2\pi \hbar^2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Ao dividir os dois lados por  $L^2$ , consegue-se encontrar uma expressão para densidade total de número de partículas  $\rho_t$  em função dos momentos de Fermi correspondentes a cada tipo de partícula,

$$\rho_t = \frac{p_{F_n}^2}{2\pi \hbar^2} + \frac{p_{F_p}^2}{2\pi \hbar^2} + \frac{p_{F_e}^2}{2\pi \hbar^2}, \quad (59)$$

ou

$$\rho_t = \rho_n + \rho_p + \rho_e. \quad (60)$$

Definindo as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned}\frac{p_{F_n}}{m_n c} &= x, \\ \frac{p_{F_p}}{m_p c} &= y, \\ \frac{p_{F_e}}{m_e c} &= z,\end{aligned}\tag{61}$$

a expressão (58) pode ser rescrita na forma:

$$\begin{aligned}\rho_t &= \frac{x^2 m_n^2 c^2}{2\pi \hbar^2} + \frac{y^2 m_p^2 c^2}{2\pi \hbar^2} + \frac{z^2 m_e^2 c^2}{2\pi \hbar^2} \\ &= \frac{x^2}{2\pi \lambda_n^2} + \frac{y^2}{2\pi \lambda_p^2} + \frac{z^2}{2\pi \lambda_e^2}.\end{aligned}\tag{62}$$

Na Eq. (62)  $\lambda_n$  é o comprimento de Compton dos nêutrons, dado pela expressão  $\frac{\hbar}{m_n c}$ ,  $\lambda_p$  é o comprimento de Compton dos prótons, dado pela expressão  $\frac{\hbar}{m_p c}$  e  $\lambda_e$  é o comprimento de Compton dos elétrons, dado pela expressão  $\frac{\hbar}{m_e c}$ .

A densidade de energia pode ser encontrada a partir da energia interna  $U$  (BELLAC, 1991). Onde,

$$\begin{aligned}U &= \sum_{i, S_z} \langle E_i \rangle + \sum_{j, S_z} \langle E_j \rangle + \sum_{k, S_z} \langle E_k \rangle \Big|_{\beta \rightarrow \infty} \\ &= (2s + 1) \left( \sum_{\vec{p}_n} \sqrt{p_n^2 c^2 + m_n^2 c^4} + \sum_{\vec{p}_p} \sqrt{p_p^2 c^2 + m_p^2 c^4} + \sum_{\vec{p}_e} \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \right).\end{aligned}\tag{63}$$

Através dos cálculos apresentados no Anexo C.1, pode-se concluir que a densidade de energia  $\epsilon = \frac{U}{L^3}$  pode ser escrita como,

$$\epsilon = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] + \frac{\gamma}{3\pi} \left[ (y^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] + \frac{\theta}{3\pi} \left[ (z^2 + 1)^{3/2} - 1 \right],\tag{64}$$

onde  $\alpha = \frac{m_n c^2}{\lambda_n^2}$ ,  $\gamma = \frac{m_p c^2}{\lambda_p^2}$  e  $\theta = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^2}$ . Outro observável que será importante é a pressão, que é dada por  $P = \rho E_F - \epsilon$ .

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2\pi \hbar} \left( \int_0^{p_{F_n}} \frac{p^2 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_n^2 c^4}} p dp + \int_0^{p_{F_p}} \frac{p^2 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_p^2 c^4}} p dp \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{p_{F_e}} \frac{p^2 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}} p dp \right).\end{aligned}\tag{65}$$

Após os cálculos realizados no Anexo C.2 é possível entender que a pressão pode ser

escrita da seguinte forma,

$$P = \frac{\alpha}{6\pi} \left[ (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + 2 \right] + \frac{\gamma}{6\pi} \left[ (y^2 - 2) \sqrt{y^2 + 1} + 2 \right] + \frac{\theta}{6\pi} \left[ (z^2 - 2) \sqrt{z^2 + 1} + 2 \right]. \quad (66)$$

onde mais uma vez,  $\alpha = \frac{m_n c^2}{\lambda_n^2}$ ,  $\gamma = \frac{m_p c^2}{\lambda_p^2}$  e  $\theta = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^2}$ , todas com dimensões de densidade de energia.

### 2.2.1 Aproximação politrópica

Como as equações (64) e (66) tratam de um gás relativístico, pode-se explorar os limites não relativísticos e ultra-relativísticos através de aproximações simples. Para encontrar o limite não relativístico basta explorar o limite das equações em que  $x$ ,  $y$  e  $z \ll 1$ , que é o mesmo que fazer  $p_{F_n} \ll m_n c$ ,  $p_{F_p} \ll m_p c$  e  $p_{F_e} \ll m_e c$ . Para isso, usa-se a série de Maclaurin para as três variáveis da expressão  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,

$$\epsilon(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{(n)}(0)}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{(n)}(0)}{n!} y^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{(n)}(0)}{n!} z^n. \quad (67)$$

Ao aplicar a equação (64) em (67) até segunda ordem, é possível ver que

$$\epsilon = \frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{3}{2} x^2 \right) + \frac{\gamma}{3\pi} \left( \frac{3}{2} y^2 \right) + \frac{\theta}{3\pi} \left( \frac{3}{2} z^2 \right), \quad (68)$$

ou

$$\epsilon = \frac{\alpha}{2\pi} x^2 + \frac{\gamma}{2\pi} y^2 + \frac{\theta}{2\pi} z^2. \quad (69)$$

Ao aplicar a série de Maclaurin para pressão, é necessário ir até a terceira ordem, pois as anteriores são iguais a zero, logo

$$P = \frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{6x^4}{8} \right) \frac{1}{2!} + \frac{\gamma}{3\pi} \left( \frac{6y^4}{8} \right) \frac{1}{2!} + \frac{\theta}{3\pi} \left( \frac{6z^4}{8} \right) \frac{1}{2!}, \quad (70)$$

ou de maneira simplificada,

$$P = \frac{\alpha}{8\pi} x^4 + \frac{\gamma}{8\pi} y^4 + \frac{\theta}{8\pi} z^4. \quad (71)$$

Para encontrar o limite ultra-relativístico deve-se explorar o limite em que  $x$ ,  $y$  e  $z \gg 1$ , o que fisicamente é o mesmo que dizer que  $p_{F_n} \gg m_n c$ ,  $p_{F_p} \gg m_p c$  e  $p_{F_e} \gg m_e c$ . Assim os termos que não estão acompanhados de sua respectiva variável são irrelevantes para a

função. Logo para a densidade de energia têm-se,

$$\epsilon = \frac{\alpha}{3\pi}x^3 + \frac{\gamma}{3\pi}y^3 + \frac{\theta}{3\pi}z^3 \quad (72)$$

e para a pressão,

$$P = \frac{\alpha}{6\pi}x^3 + \frac{\gamma}{6\pi}y^3 + \frac{\theta}{6\pi}z^3. \quad (73)$$

Através dessas aproximações, têm-se três expressões para densidade de energia, sendo elas:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\alpha}{3\pi} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] + \frac{\gamma}{3\pi} \left[ (y^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{\theta}{3\pi} \left[ (z^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] \text{ (Limite relativístico), } 1 > x > 0 \\ \epsilon &= \frac{\alpha}{2\pi}x^2 + \frac{\gamma}{2\pi}y^2 + \frac{\theta}{2\pi}z^2 \text{ (Limite não relativístico) } 1 \gg x > 0, \\ \epsilon &= \frac{\alpha}{3\pi}x^3 + \frac{\gamma}{3\pi}y^3 + \frac{\theta}{3\pi}z^3, \text{ (Limite ultra- relativístico), } x \gg 1. \end{aligned} \quad (74)$$

O mesmo acontece para a pressão:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\alpha}{6\pi} \left[ (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + 2 \right] + \frac{\gamma}{6\pi} \left[ (y^2 - 2) \sqrt{y^2 + 1} + 2 \right] \\ &\quad + \frac{\theta}{6\pi} \left[ (z^2 - 2) \sqrt{z^2 + 1} + 2 \right]. \text{ (Limite relativístico), } x > 0, \\ P &= \frac{\alpha}{8\pi}x^4 + \frac{\gamma}{8\pi}y^4 + \frac{\theta}{8\pi}z^4. \text{ (Limite não relativístico), } 1 \gg x > 0, \\ P &= \frac{\alpha}{6\pi}x^4 + \frac{\gamma}{6\pi}y^3 + \frac{\theta}{6\pi}z^3 \text{ (Limite ultra- relativístico), } x \gg 1. \end{aligned} \quad (75)$$

A fim de tornar às expressões adimensionais, eliminando as constantes  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\theta$ , usa-se mais uma vez as transformações (43) e (42).

Agora, têm-se todas as expressões para densidade de energia e pressão adimensionais nos três limites explorados:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{1}{3\pi} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] + \frac{m_p^3}{3\pi m_n^3} \left[ (y^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{m_e^3}{m_n^3 3\pi} \left[ (z^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] \text{ (Limite relativístico) } x > 0 \\ \bar{\epsilon} &= \frac{1}{2\pi}x^2 + \frac{m_p^3}{2\pi m_n^3}y^2 + \frac{m_e^3}{2\pi m_n^3}z^2 \text{ (Limite não relativístico) } 1 \gg x > 0, \\ \bar{\epsilon} &= \frac{1}{3\pi}x^3 + \frac{m_p^3}{3\pi m_n^3}y^3 + \frac{m_e^3}{3\pi m_n^3}z^3, \text{ (Limite ultra- relativístico). } x \gg 1. \end{aligned} \quad (76)$$

E

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{1}{6\pi} \left[ (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + 2 \right] + \frac{m_p^3}{6\pi m_n^3} \left[ (y^2 - 2) \sqrt{y^2 + 1} + 2 \right] \\
&\quad + \frac{m_e^3}{6\pi m_n^3} \left[ (z^2 - 2) \sqrt{z^2 + 1} + 2 \right]. \text{ (Limite relativístico), } x > 0, \\
\bar{P} &= \frac{1}{8\pi} x^4 + \frac{m_p^3}{m_n^3 8\pi} y^4 + \frac{m_e^3}{8\pi m_n^3} z^4. \text{ (Limite não relativístico), } 1 \gg x > 0, \\
\bar{P} &= \frac{1}{6\pi} x^3 + \frac{m_p^3}{6\pi m_n^3} y^3 + \frac{m_e^3}{6\pi m_n^3} z^3 \text{ (Limite ultra- relativístico), } x \gg 1.
\end{aligned} \tag{77}$$

### 2.2.2 Vínculos

Diferentemente do gás de nêutrons, não é possível encontrar a equação de estado somente com as expressões (64) e (66), pois ambas dependem de três variáveis;  $\epsilon(x, y, z)$  e  $P(x, y, z)$ . Então é natural procurar alguns vínculos entre as proporções de cada partícula presente no sistema. Um vínculo é estabelecer que a carga eléctrica total da casca auto-gravitante, que é o sistema ao qual vai se aplicar esta EOS, seja nula, em outras palavras, impor que a densidade de número de prótons e elétrons seja a mesma. Da expressão (62), suas respectivas densidades são:

$$\rho_p = \frac{y^2}{2\pi\lambda_p^2} \tag{78}$$

e

$$\rho_e = \frac{z^2}{2\pi\lambda_e^2}. \tag{79}$$

Ao igualar (78) e (79), fica explícito que

$$z = y \frac{m_p}{m_e}. \tag{80}$$

Outro vínculo que ajudará a solucionar o problema é que a densidade de número bariônico total ( $\rho_b$ ) é a soma da densidade de nêutrons ( $\rho_n$ ) e prótons ( $\rho_p$ ),

$$\begin{aligned}
\rho_b &= \rho_n + \rho_p \\
&= \frac{x^2}{2\pi\lambda_n^2} + \frac{y^2}{2\pi\lambda_p^2}.
\end{aligned} \tag{81}$$

Finalmente, o último vínculo imposto no sistema é o do equilíbrio entre o decaimento  $\beta$  e a captura eletrónica:



que impõe a seguinte equação de equilíbrio químico entre os potenciais químicos de cada partícula: (GLENDENNING, 2012)

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e. \quad (83)$$

Já foi demonstrado em (23) que para o gás de Fermi à temperatura zero, o potencial químico é igual à energia de Fermi, logo

$$E_{F_n} = E_{F_p} + E_{F_e}. \quad (84)$$

A energia de Fermi de um gás livre de férmions a temperatura zero é definida como  $E_F = \sqrt{p_F^2 c^2 + m^2 c^4}$ . Ao aplicar para as respectivas partículas presente no sistema, se tem

$$\sqrt{p_{F_n}^2 c^2 + m_n^2 c^4} = \sqrt{p_{F_p}^2 c^2 + m_p^2 c^4} + \sqrt{p_{F_e}^2 c^2 + m_e^2 c^4}. \quad (85)$$

Através da expressão acima, é possível demonstrar que,

$$y^2 = \frac{(m_n^2 c^4 x^2 + m_n^2 c^4 + m_p^2 c^4 - m_e^2 c^4)^2 - 4m_n^2 c^4 m_p^2 c^4 (x^2 + 1)}{4m_n^2 c^4 m_p^2 c^4 (x^2 + 1)}. \quad (86)$$

Tal demonstração encontra-se no Anexo C.3. Vale ressaltar que a expressão (86) impõe um limite mínimo para  $y$ , pois o numerador deve ser positivo para que haja raiz real. Logo,

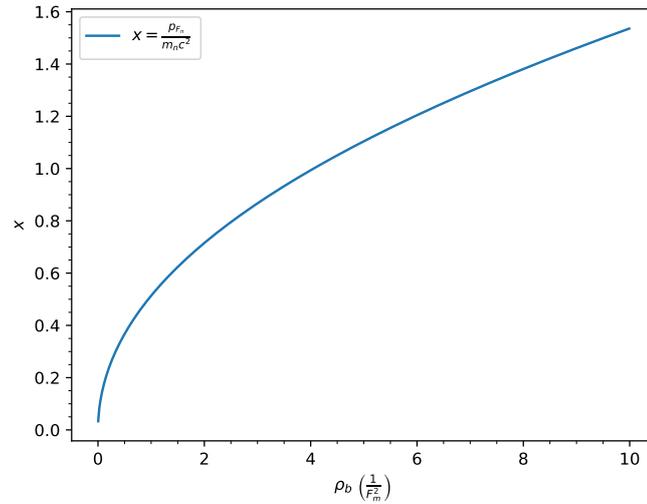
$$(m_n^2 c^4 x^2 + m_n^2 c^4 + m_p^2 c^4 - m_e^2 c^4)^2 > 4m_n^2 c^4 m_p^2 c^4 (x^2 + 1), \quad (87)$$

o que implica em valores mínimos para todas as variáveis e densidades, sendo elas:  $y = 9,32 \times 10^{-5}$ ,  $x = 3,30 \times 10^{-1}$ ,  $z = 1,71 \times 10^{-1}$ ,  $\rho_n = 3,98 \times 10^{-3} \text{ Fm}^{-2}$ ,  $\rho_p = 3,13 \times 10^{-9} \text{ Fm}^{-2}$ ,  $\rho_e = 3,13 \times 10^{-9} \text{ Fm}^{-2}$  e  $\rho_b = 3,98 \times 10^{-3} \text{ Fm}^{-2}$ .

Assim é possível encontrar uma expressão que relaciona a densidade de bárions em função apenas da variável  $x$ . Basta substituir (81) em (86):

$$\rho_b = \frac{1}{2\pi(\hbar c)^2} \left( x^2 m_n^2 c^4 + \frac{(m_n^2 c^4 x^2 + m_n^2 c^4 + m_p^2 c^4 - m_e^2 c^4)^2 - 4m_n^2 c^4 m_p^2 c^4 (x^2 + 1)}{4m_n^2 c^4 m_p^2 c^4 (x^2 + 1)} \right). \quad (88)$$

Gráfico 3 - Momento de Fermi dos nêutrons



Legenda: Ilustra-se a dependência do momento de Fermi adimensional dos nêutrons na densidade bariônica total em 2D.

Fonte: O autor, 2020.

Os valores de  $x$ , soluções de (88), podem ser vistos no Gráfico 3 como função de  $\rho_b$ . A partir dos resultados demonstrados no Gráfico 3, é fácil encontrar a densidade de nêutrons em relação à densidade de bárions, através da expressão

$$\rho_n = \frac{x^2 m_n^2 c^4}{2\pi(\hbar c)^2}, \quad (89)$$

que podem ser conferidos no Gráfico 4. Como a densidade de prótons é o que resta da densidade de nêutrons, logo é possível encontrá-la através da relação

$$\rho_p = \rho_b - \rho_n. \quad (90)$$

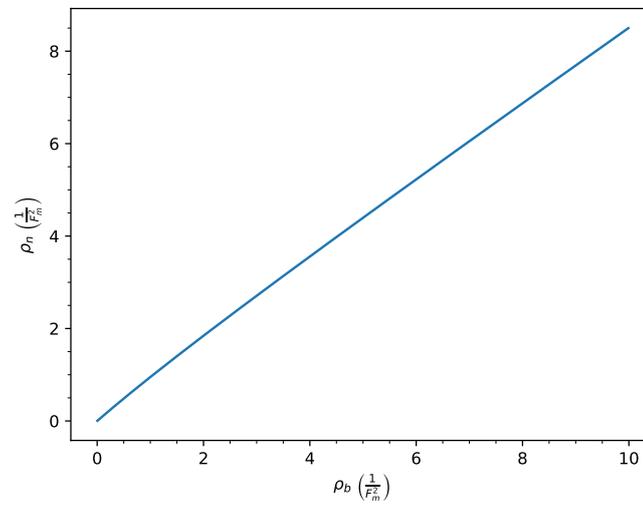
Os resultados se encontram no Gráfico 5. De posse da densidade de prótons é possível encontrar todos os valores de  $y$ , pois através da relação (81) é possível chegar à seguinte conclusão,

$$\rho_p = \frac{y^2 m_p^2 c^4}{2\pi(\hbar c)^2} \rightarrow y = \sqrt{\frac{2\pi\rho_p(\hbar c)^2}{m_p^2 c^4}}, \quad (91)$$

sendo que os resultados se encontram no Gráfico 6. Sabendo todos os valores de  $y$ , através do vínculo de carga nula,

$$z = \frac{m_p}{m_e} y, \quad (92)$$

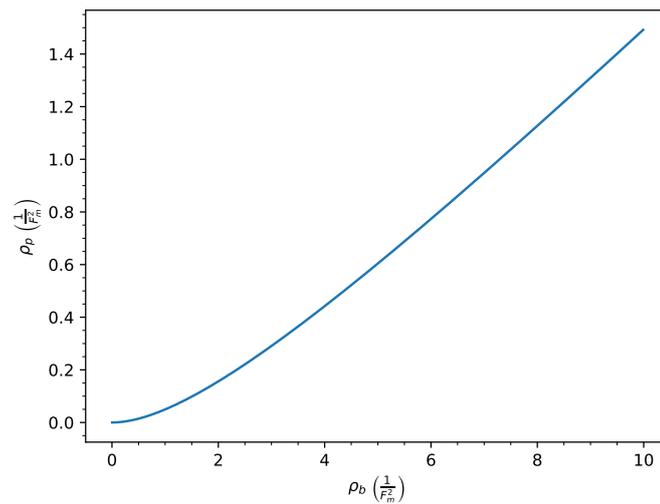
Gráfico 4 - Desidade de nêutrons



Legenda: Densidade de nêutrons relativa à densidade de bárions referente ao modelo do gás *npe* em 2D à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

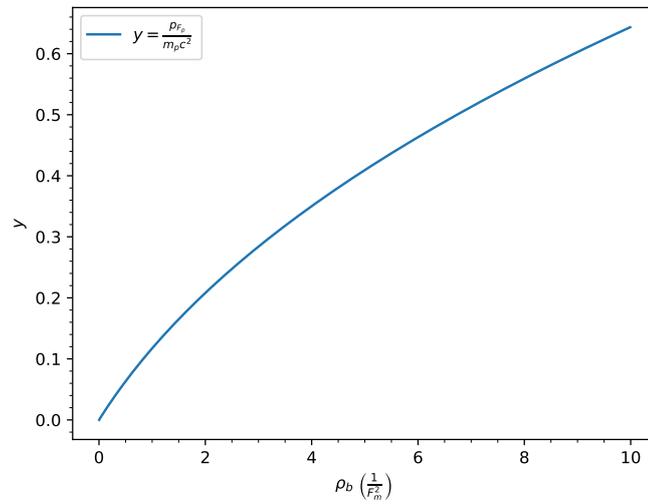
Gráfico 5 - Desidade de prótons



Legenda: Densidade de prótons relativa à densidade de bárions referente ao modelo do gás *npe* em 2D à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 6 - Momento de Fermi dos prótons

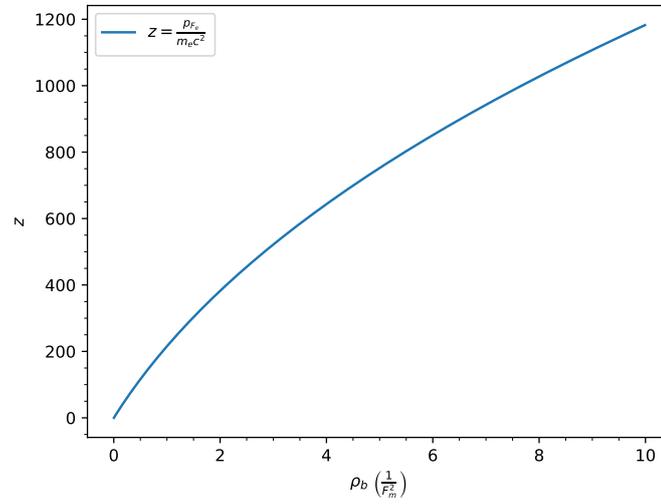


Legenda: Momento de Fermi adimensional dos prótons relativo à densidade bariônica para o modelo referente ao gás  $npe$  em 2D à  $T = 0$

Fonte: O autor, 2020.

é possível encontrar todos os valores de  $z$ , eles podem ser vistos no Gráfico 7. Para um melhor entendimento de como a densidade de cada bárion se comporta, será apresentado no Gráfico 8 como a população irá se comportar de acordo com a densidade de bárions. Agora, de posse dos valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , é possível encontrar a equação de estado que depende explicitamente de  $\bar{\epsilon}(x, y, z)$  e  $\bar{P}(x, y, z)$ , a qual é apresentada no Gráfico 9.

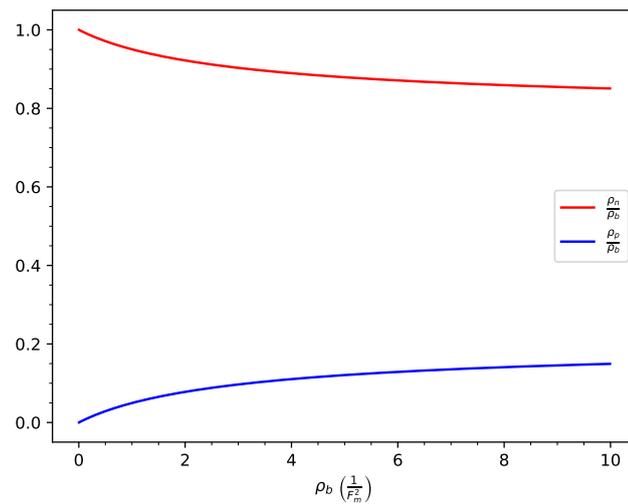
Gráfico 7 - Momento de Fermi dos elétrons



Legenda: Momento de Fermi dos elétrons em relação a densidade bariônica referente ao gás  $npe$  em 2D a  $T = 0$ .

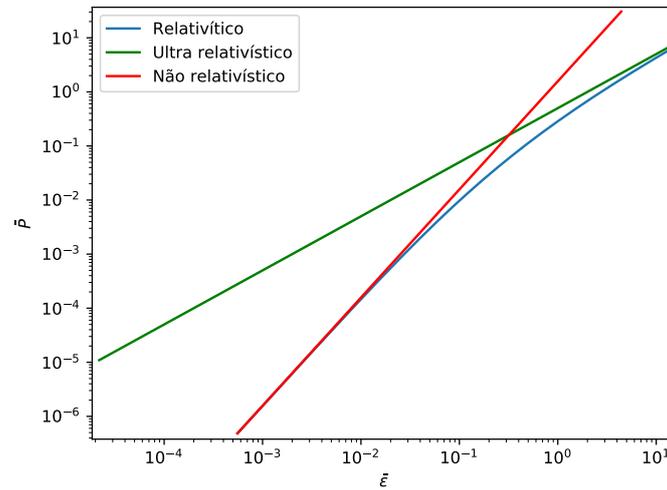
Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 8 - População relativa dos bárions



Legenda: População relativa dos bárions em relação a densidade bariônica total em 2D.

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 9 - Equação de estado do gás  $npe$ 

Legenda: Equações de estado para o gás  $npe$  em 2D à  $T = 0$ ,  
cujos valores são semelhantes ao Gráfico 2.

Fonte: O autor, 2020.

### 3 MODELO DE WALECKA EM DUAS DIMENSÕES À $T = 0$

Nesse Capítulo são adotadas as unidades nucleares, onde  $\hbar = c = 1$ . Assim  $[E] = L^{-1}$  e  $[P] = [\epsilon] = L^{-3}$ .

O modelo de Walecka é o modelo introdutório à QHD (hadrodinâmica quântica) que se baseia na teoria quântica de campos utilizando as densidades lagrangeanas que são invariantes de Lorentz e considerando os campos dos bárions e mésons como graus de liberdade. Tal modelo busca explicar as principais propriedades da matéria nuclear composta de muitos corpos, sendo motivado por grandes contribuições escalares neutras e vetoriais que são observadas empiricamente em uma análise invariante de Lorentz da amplitude de espalhamento nucleon-nucleon livre (WALECKA, 1997). O potencial que descreve a interação nucleon nucleon é do tipo Yukawa:

$$V_{eff} = \frac{g_\omega^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\omega r}}{r} - \frac{g_\sigma^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\sigma r}}{r}, \quad (93)$$

onde  $m_\sigma$  e  $m_\omega$  são as massas dos mesons trocados. Com escolhas apropriadas de constantes de acoplamento,  $g_\omega$  e  $g_\sigma$ , este potencial descreve as principais características qualitativas das interações nucleares, isto é, uma repulsão de curto alcance entre bárions devida à troca de mésons vetoriais omega ( $\omega$ ) e uma atração escalar de longo alcance devida à troca de mésons sigma ( $\sigma$ ).

Neste Capítulo serão apresentados os resultados do modelo de Walecka em duas dimensões, com o intuito de aplicar-los na obtenção do diagrama  $m \times R$  das cascas esféricas do Capítulo 1.

#### 3.1 Densidade lagrangeana

Da mecânica analítica, sabe-se que o movimento de um sistema físico é determinado através do princípio da mínima ação, que também é conhecido como princípio de Hamilton. Então o movimento de uma partícula movendo-se em três dimensões, sob um potencial qualquer  $V(q_i)$ , sendo  $q_i$  as coordenadas generalizadas, pode ser descrito pela lagrangeana,

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - V(q_i). \quad (94)$$

A ação  $S$  da partícula é definida como sendo a integral no tempo da lagrangeana, na forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt. \quad (95)$$

Segundo o princípio de Hamilton, a trajetória da partícula será aquela que minimize a ação calculada com extremos fixos. Em particular, ao ter  $S$  um extremo na trajetória da partícula, sua variação deve ser nula:

$$\delta S = 0. \quad (96)$$

Ao calcular  $\delta S$  a partir da equação (95) e impondo que  $\delta S = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(q_i, \dot{q}_i) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] = 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Como  $q_i(t_1)$  e  $q_i(t_2)$  são pontos fixos, têm-se,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (98)$$

Logo a ação será minimizada se são satisfeitas as seguintes equações,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (99)$$

conhecidas como equações de Euler-Lagrange.

Em teorias de campo é necessário trabalhar com uma densidade lagrangeana  $\mathcal{L}$ , tal que

$$L = \int \mathcal{L} d^3x, \quad (100)$$

de forma que a ação  $S$  se escreve agora

$$S = \int dt d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (101)$$

Considerando que as coordenadas generalizadas são campos genéricos  $\phi_i$  e utilizando a

notação de quadrivetores, as equações de Euler-Lagrange se tornam,

$$\sum_i \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \right] = 0. \quad (102)$$

No modelo de Walecka, a densidade lagrangeana é escrita em termos dos campos de quatro partículas, sendo elas: os bárions, nêutrons ( $n$ ) e prótons ( $p$ ), que por serem férmions, são representados pela densidade lagrangeana de Dirac, o méson  $\omega$ , que por ser um bóson vetorial é representado pela densidade lagrangeana de Proca e o méson sigma  $\sigma$ , que sendo um bóson escalar é descrito pela densidade lagrangeana de Klein-Gordon. Juntando esses três termos e somando com o termo de interação, que é definido supondo-se que o méson escalar se acopla à densidade escalar e que o méson vetorial se acopla mínimamente à corrente de bárions, obtém-se a densidade lagrangiana do modelo de Walecka na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= \mathcal{L}_{livre} + \mathcal{L}_{int} \\ \mathcal{L}_W &= \sum_B \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi_B + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ &\quad + \sum_B g_\sigma \bar{\psi}_B \psi_B \sigma - \sum_B g_\omega \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B \omega^\mu, \end{aligned} \quad (103)$$

onde  $\psi_B$  representa o campo dos bárions,  $M$  sua massa (trabalha-se na aproximação de que nêutrons e prótons têm a mesma massa  $M$ ),  $\gamma_\mu$  são as matrizes de Dirac e

$$\omega^{\mu\nu} = \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu. \quad (104)$$

Entretanto, é necessário adicionar um setor leptônico (elétrons) livre, que compense a carga elétrica do setor dos prótons, pois a carga elétrica das cascas que serão estudadas no Capítulo 6 deve ser nula. Então a densidade lagrangeana toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= \sum_B \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi_B + \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \\ &\quad - \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + g_\sigma \bar{\psi}_B \psi_B \sigma - g_\omega \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B \omega^\mu, \end{aligned} \quad (105)$$

onde  $\psi_\lambda \equiv \psi_e$  representa o campo dos elétrons e  $m_\lambda$  sua massa.

### 3.2 Equações de movimento

Através das equações de Euler-Lagrange (102), e considerando os campos da densidade lagrangeana (105) como graus de liberdade, pode-se escrever as equações de movimento para todos os campos. Doravante, neste Capítulo, e com o intuito de simplificar a notação, faremos  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_W$ .

### 3.2.1 Equação de movimento para o campo $\sigma$

A equação de Euler-Lagrange para o campo  $\sigma$  é,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = 0. \quad (106)$$

Sendo assim, após realizar todas as derivadas, que podem ser encontradas em detalhes no Anexo D.1, a equação de movimento para o campo  $\sigma$  será,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma = g_\sigma \sum_B \bar{\psi}_B \psi_B. \quad (107)$$

### 3.2.2 Equação de movimento para o campo $\omega$

A equação de Euler-Lagrange para o campo  $\omega$  é,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \omega_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_\nu} = 0. \quad (108)$$

Após resolver as derivadas da equação (108) no Anexo D.1, o resultado da equação de movimento será,

$$\partial_\mu \omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \sum_B \bar{\psi}_B \gamma^\nu \psi_B. \quad (109)$$

### 3.2.3 Equação de movimento do campo $\psi_B$

A equação de Euler-Lagrange para o campo  $\psi_B$  é

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_B)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_B} = 0. \quad (110)$$

Logo a equação de movimento será,

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi_B = 0, \quad (111)$$

onde se define a massa efetiva  $M^*$  na forma

$$M^* = M - g_\sigma \sigma. \quad (112)$$

A obtenção detalhada desta equação encontra-se no Anexo D.1.

### 3.2.4 Equação de movimento do campo $\bar{\psi}_B$

A equação de Euler-Lagrange para o campo  $\bar{\psi}_B$  é

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_B)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_B} = 0. \quad (113)$$

Após os cálculos do Anexo D.1, a equação de movimento para o campo  $\bar{\psi}_B$  será dada por,

$$\bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] = 0. \quad (114)$$

### 3.2.5 Equação de movimento para o campo $\psi_\lambda$

Por último, a equação de movimento referente ao setor leptônico é:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi}_\lambda)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\lambda} &= 0 \\ (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda &= 0, \end{aligned} \quad (115)$$

que é a equação de Dirac sem fontes, pois nesse modelo não é considerada a interação coulombiana e o lépton presente no sistema (elétron), não interage com nenhum outro campo do sistema.

## 3.3 Tensor Energia-Momento

Em mecânica dos meios contínuos, o tensor energia-momento surge a partir do princípio variacional como quantidade que é conservada no tempo, no caso de sistemas estacionários. Na teoria quântica de campos é definido por,

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i, \quad (116)$$

onde  $\phi_i$  é um campo genérico e  $g_{\nu\mu}$  é o tensor métrico de Minkowski, que vale  $diag(1, -1, -1, -1)$ . Através desse conceito, é possível encontrar a densidade de energia e pressão para os campos, através das relações (GLENDENNING, 2012),

$$\epsilon = \langle T_{00} \rangle \quad (117)$$

e

$$P = \frac{1}{D} \langle T_{jj} \rangle. \quad (118)$$

onde  $\langle T_{00} \rangle$  é a aproximação de campo médio do tensor energia momento na coordenada temporal,  $\langle T_{jj} \rangle$  é a aproximação de campo médio do tensor energia momento na coordenada espacial e  $D$  é a dimensão espacial do sistema. (DELFINO; NUNES; MARTINS, abr.1998)

Ao aplicar a densidade lagrangeana de Walecka (105) nas relações (117) e (118) encontra-se que,

$$\epsilon = -\langle \mathcal{L} \rangle + \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 i \partial_0 \psi_B \rangle + \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_0 i \partial_0 \psi_\lambda \rangle \quad (119)$$

e

$$P = \langle \mathcal{L} \rangle + \frac{1}{2} \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_j i \partial_j \psi_B \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_j i \partial_j \psi_\lambda \rangle, \quad (120)$$

onde a dimensão do espaço foi fixada em  $D = 2$ , devido à aplicação na casca esférica bidimensional.

### 3.4 Aproximação de campo médio

Os campos presentes nas equações (107), (109) e (111) são, na verdade, operadores de campo. Resolveremos essas equações acopladas usando as seguintes aproximações:

1. Aproximação de campo médio: conhecida também como aproximação de Hartree nas Teorias de Campo, consiste em substituir os campos quânticos mesônicos pelos seus valores clássicos no estado fundamental do sistema. Da mesma forma feita na resolução do átomo de hidrogênio, preservando o caráter quântico do campo do elétron, mas o campo dos fótons substitui-se por um potencial coulombiano clássico. A aproximação de campo médio se justifica em sistemas a altas densidades, onde as flutuações quânticas são pequenas quando comparadas com os valores médios. Assim:

$$\hat{\phi} \rightarrow \phi \equiv \langle \phi \rangle \equiv \langle EF | \hat{\phi} | EF \rangle, \quad (121)$$

onde  $|EF\rangle$  representa o estado fundamental do sistema.

2. Invariância translacional: esta aproximação consiste em especificar uma forma particular para o  $|EF\rangle$ . Neste caso o estado fundamental é um gás de férmions à  $T = 0$ ,

representado por um determinante de Slater (WALECKA, 1995), com os níveis de momento  $\vec{k}$  de cada partícula ( $n, p, e$ ) preenchidos até o nível de Fermi:

$$|EF\rangle = \left( \prod_{\vec{k}=0}^{\vec{k}_F} a_{\vec{k},s_z}^\dagger |0\rangle \right)_n \otimes \left( \prod_{\vec{k}=0}^{\vec{k}_F} a_{\vec{k},s_z}^\dagger |0\rangle \right)_p \otimes \left( \prod_{\vec{k}=0}^{\vec{k}_F} a_{\vec{k},s_z}^\dagger |0\rangle \right)_e, \quad (122)$$

onde  $a_{\vec{k},s_z}^\dagger |0\rangle = |\vec{k}, s_z\rangle$ . Por sua vez, a invariância translacional imposta aos campos mesônicos implica em que eles assumem valores constantes independentes da posição.

3. Simetria esférica: se trabalhará com um sistema onde nenhuma direção espacial é preferenciada, assim sendo, o valor médio da parte espacial do campo bosônico vectorial é nulo:

$$\omega_\mu = \delta_{0\mu} \omega_0. \quad (123)$$

### 3.4.1 Aproximação de campo médio para o méson $\sigma$

Ao aplicar a aproximação de campo médio na equação de movimento do campo  $\sigma$  (107):

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 \right) \langle \sigma \rangle = g_\sigma \sum_B \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle. \quad (124)$$

Devido à invariância translacional do sistema,  $\langle \sigma \rangle \equiv \sigma$  é constante, e suas derivadas são nulas. Sendo assim,

$$m_\sigma^2 \sigma = g_\sigma \sum_B \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle \quad (125)$$

ou

$$\sigma = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle. \quad (126)$$

Introduzindo a densidade escalar  $\rho_{sB}$  na forma

$$\rho_{sB} = \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle \quad (127)$$

e somando sobre todos os bárions (nêutrons e prótons), rescrevemos a equação para o campo  $\sigma$  ba forma

$$\sigma = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_B \rho_{sB}. \quad (128)$$

### 3.4.2 Aproximação de campo médio para o méson $\omega$

Aplicando a aproximação de campo médio na equação de movimento do campo  $\omega$  (109):

$$\partial_\mu \langle \omega^{\mu\nu} \rangle + m_\omega^2 \langle \omega^\nu \rangle = g_\omega \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_\nu \psi_B \rangle. \quad (129)$$

Como  $\omega_{\mu\nu}$  envolve derivadas do campo e, devido à invariância translacional do sistema, o campo é uma constante, as derivadas são nulas,

$$\langle \omega_{\mu\nu} \rangle = 0. \quad (130)$$

Resultando em,

$$m_\omega^2 \langle \omega_\nu \rangle = g_\omega \sum_B \langle \psi_B^\dagger \psi_B \rangle, \quad (131)$$

e usando a simetria esférica,

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \sum_B \rho_B = \rho_b, \quad (132)$$

no qual

$$\rho_B = \langle \psi_B^\dagger \psi_B \rangle \quad (133)$$

é definido como densidade de número de bárions ou densidade bariônica e deve ser somado sobre todos os bárions (prótons e nêutrons).

## 3.5 Densidade escalar

As equações (128) e (132) se referem aos campos de mésons, entretanto é mais adequado trabalhar com potenciais mesônicos. Para encontrá-lo, basta multiplicar as equações dos campos por suas respectivas constantes de acoplamento. Assim o potencial

escalar tem a forma,

$$V_\sigma = g_\sigma \sigma. \quad (134)$$

Substituindo (134) em (128), é possível chegar a uma expressão explícita para o potencial escalar, sendo ela,

$$V_\sigma = \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \sum_B \rho_{sB}, \quad (135)$$

onde  $\sum_B \rho_{sB}$  é resolvido no Anexo D.1.5. Logo,

$$\rho_s = \sum_B \rho_{sB} = \frac{M^*}{\pi} \left( \sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} + \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} - 2M^* \right). \quad (136)$$

Ao substituir (136) em (135) a expressão para o potencial será,

$$V_\sigma = \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \frac{M^*}{\pi} \left( \sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} + \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} - 2M^* \right). \quad (137)$$

Utilizando a definição (112), é possível chegar uma equação não linear para a massa efetiva  $M^*$ ,

$$M^* = M - \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \frac{M^*}{\pi} \left( \sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} + \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} - 2M^* \right), \quad (138)$$

que pode ser resolvida com auxílio de cálculo numérico.

### 3.6 Densidade bariônica

Também é preciso encontrar uma expressão para a densidade bariônica total em duas dimensões, a partir da definição (133). Após uma série de cálculos que podem ser consultados no Anexo D.1.6, é possível escrever a densidade bariônica como,

$$\rho_b = \sum_B \langle \psi_B^\dagger \psi_B \rangle = \frac{1}{2\pi} (k_{F_n}^2 + k_{F_p}^2). \quad (139)$$

### 3.7 Densidade de energia

Como visto anteriormente a densidade de energia pode ser obtida através da relação,

$$\epsilon = -\langle \mathcal{L} \rangle + \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 i \partial_0 \psi_B \rangle + \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_0 i \partial_0 \psi_\lambda \rangle. \quad (140)$$

Ao aplicar a aproximação de campo médio na lagrangeana (105), a simetria translacional impõe que todos os termos que possuem derivadas sejam nulos, e a simetria rotacional anula as componentes espaciais do campo  $\omega_\mu$ , fazendo com que a densidade de energia seja,

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 i \partial_0 \psi_B \rangle + \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_0 i \partial_0 \psi_\lambda \rangle. \quad (141)$$

Então, é preciso calcular  $\sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 i \partial_0 \psi_B \rangle$  e  $\langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_0 i \partial_0 \psi_\lambda \rangle$  para encontrar uma expressão adequada à densidade de energia. Tais cálculos encontram-se em detalhe no Anexo D.1.7, resultando em,

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 \\ & + \frac{M^{*3}}{3\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_n}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{k_{F_p}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \right] + \frac{m_e^3}{3\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (142)$$

### 3.8 Pressão

Como visto na equação (120) a pressão poderá ser obtida a partir da relação,

$$P = \langle \mathcal{L} \rangle + \sum_B \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_B \gamma_j i \partial_j \psi_B \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_j i \partial_j \psi_\lambda \rangle. \quad (143)$$

Ao substituir a densidade lagrangeana (105) em (143) obtém-se, nas aproximações de campo médio, simetria translacional e rotacional,

$$P = -\frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{1}{2} \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_j i \partial_j \psi_B \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_j i \partial_j \psi_\lambda \rangle. \quad (144)$$

Para encontrar uma expressão adequada à pressão em função das variáveis desejadas, basta calcular os últimos dois termos da expressão (144), e após serem calculadas no

Anexo D.1.8, resultam em,

$$P = -\frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{M^{*3}}{6\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_n}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_n}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{k_{F_p}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_p}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 4 \right] + \frac{m_e^3}{6\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]. \quad (145)$$

### 3.9 Vínculos

Da mesma forma que acontece no gás *npe* estudado na Seção 2.1, as expressões referentes à densidade de energia e pressão dependem das variáveis ( $k_{F_n}$ ,  $k_{F_p}$  e  $k_{F_e}$ ). Então é natural procurar por vínculos para encontrar os valores destas variáveis. Um vínculo importante para o sistema é o que impõe que a carga elétrica total é nula, uma vez que a EOS será aplicada a um objeto de carga elétrica total nula. Assim, a população de prótons e elétrons devem ser iguais, o que implica em,

$$k_{F_p} = k_{F_e}. \quad (146)$$

Outro vínculo que será utilizado é o referente à densidade de número bariônica total,

$$\begin{aligned} \rho_b &= \rho_n + \rho_p \\ &= \frac{1}{2\pi} (k_{F_n}^2 + k_{F_p}^2). \end{aligned} \quad (147)$$

E finalmente impomos o equilíbrio químico decorrente do equilíbrio entre os decaimentos  $\beta$  e captura eletrônica:



que implica na seguinte relação entre os potenciais químicos das partículas envolvidas, (GLENDENNING, 2012),

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e, \quad (149)$$

que se traduz em,

$$E_{F_n} + \rho_b \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = E_{F_p} + \rho_b \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} + E_{F_e}, \quad (150)$$

onde  $E_{F_n} = \sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}}$ ,  $E_{F_p} = \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}}$  e  $E_{F_e} = \sqrt{k_{F_e}^2 + m_e^2}$ . Rescrevemos a equação (150) como,

$$\sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} = \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} + \sqrt{k_{F_e}^2 + m_e^2}. \quad (151)$$

A partir da expressão (151) é possível obter

$$k_{F_p}^2 = \frac{(k_{F_n}^2 + 2M^{*2} - m_e^2)^2 - 4M^{*2}(k_{F_n}^2 + M^{*2})}{4(k_{F_n}^2 + M^{*2})}, \quad (152)$$

cuja demonstração se encontra no Anexo D.2.

### 3.10 Constantes de acoplamento e resultados numéricos

#### 3.10.1 Energia de saturação

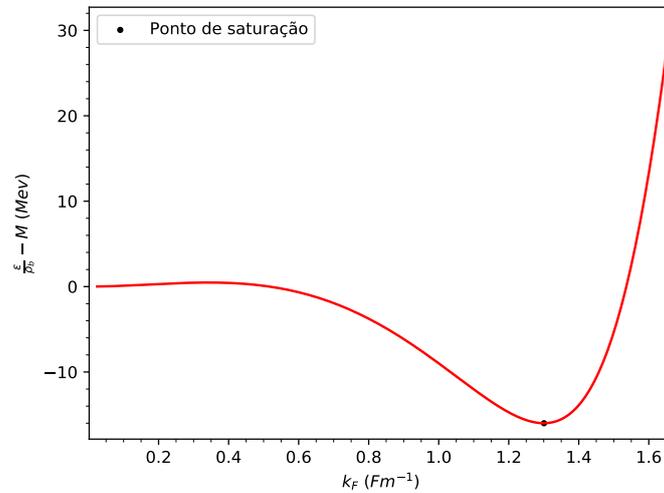
Uma dificuldade que surge ao se trabalhar com modelo de Walecka em duas dimensões é determinar os valores das constantes de acoplamento, pois as mesmas deveriam ser determinadas através de dados experimentais. Como não se tem acesso a materiais em duas dimensões para realizar os experimentos, uma saída é encontrar os valores das constantes de acoplamento em duas dimensões que satisfaça algum resultado experimental em três dimensões (DELFINO; NUNES; MARTINS, abr.1998). O observável escolhido será a energia de saturação. Ao dividir a densidade de energia pela densidade de número de partículas se chegará a energia por partícula, que será a soma da energia de ligação com a energia de repouso. Então é necessário subtrair a energia de repouso para encontrar a energia de ligação. As expressões para a densidade de energia, em um modelo mais simples, sem elétrons e considerando que o número de nêutrons é igual ao número de prótons - denominado *matéria nuclear*, e a densidade de número de partículas em três dimensões são: (WALECKA, 1997).

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{2}{\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{8} M^{*2} k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{M^{*2} + k_F^2} - \frac{1}{8} M^{*4} \log \left( \frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + M^{*2}}}{M^*} \right) \right], \quad (153)$$

onde  $V_\sigma$  em 3D é dado por,

$$V_\sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{M^*}{2\pi^2} \left[ k_F \sqrt{k_F^2 + M^{*2}} - M^{*2} \log \left( \frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + M^{*2}}}{M^*} \right) \right], \quad (154)$$

Gráfico 10 - Energia de ligação em três dimensões



Legenda: Energia de ligação referente ao modelo de Walecka em 3D à  $T = 0$ , com destaque no ponto de saturação em  $k_F = 1,3 \text{ Fm}^{-1}$  e  $\epsilon_{lig} = -16 \text{ MeV}$ .

Fonte: O autor, 2020.

e

$$\rho_b = \frac{2k_F^3}{3\pi^2}. \quad (155)$$

A energia de ligação é dada pela expressão,

$$\epsilon_{lig} = \frac{\epsilon}{\rho_b} - M, \quad (156)$$

e se mostra no Gráfico 10, que apresenta o ponto de saturação em  $k_F = 1,3 \text{ Fm}^{-1}$  e  $\epsilon_{lig} = -16 \text{ MeV}$ . Para duas dimensões, que é o caso desta Dissertação, deve-se utilizar também a equação (156) juntamente com as equações (139) e (142), na matéria nuclear. Para conseguir o mesmo ponto de saturação que em três dimensões, será necessário utilizar as seguintes constantes de acoplamento em duas dimensões:

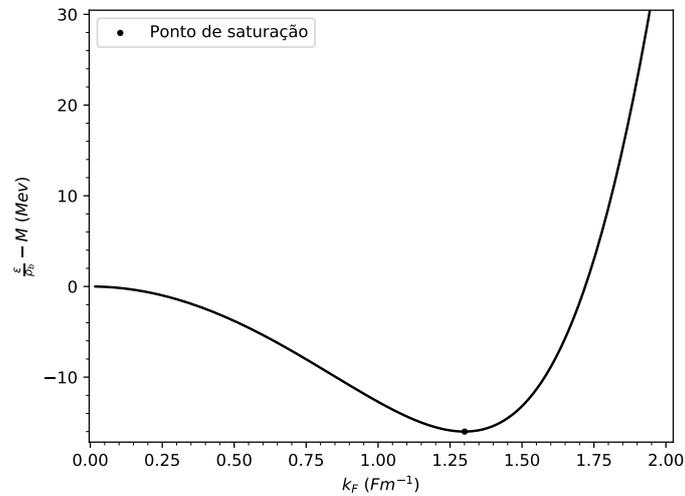
$$\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} = 3,6335 \text{ Fm}$$

e

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = 2,7976 \text{ Fm}, \quad (157)$$

as quais coincidem com as obtidas em (DELFINO; NUNES; MARTINS, abr.1998). A energia de ligação em duas dimensões se apresenta no Gráfico 11. Já no Gráfico 12 se

Gráfico 11 - Energia de ligação em duas dimensões



Legenda: Comportamento da energia de ligação referente ao modelo de Walecka em 2D à  $T = 0$ , com destaque no ponto de saturação em  $k_F = 1,3 \text{ Fm}^{-1}$  e  $\epsilon_{lig} = -16 \text{ MeV}$ .

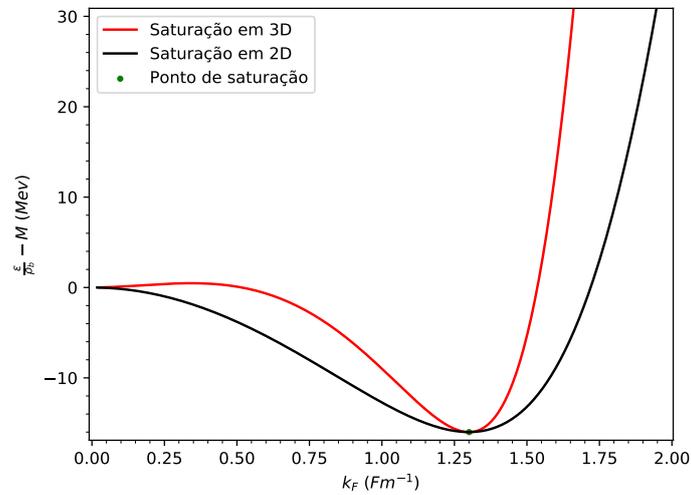
Fonte: O autor, 2020.

apresentam juntas as curvas de energia de ligação em duas e três dimensões para fins de comparação.

### 3.10.2 Massa efetiva

De posse das constantes de acoplamento em 2D e a equação (138), é possível encontrar a dependência da massa efetiva  $M^*$  com a densidade bariônica  $\rho_b$ , levando a concluir que quanto maior o campo escalar, menor será o valor da massa efetiva. Os resultados podem ser conferidos no Gráfico 13 onde se apresenta  $M^*/M$  como função de  $\rho_b$ .

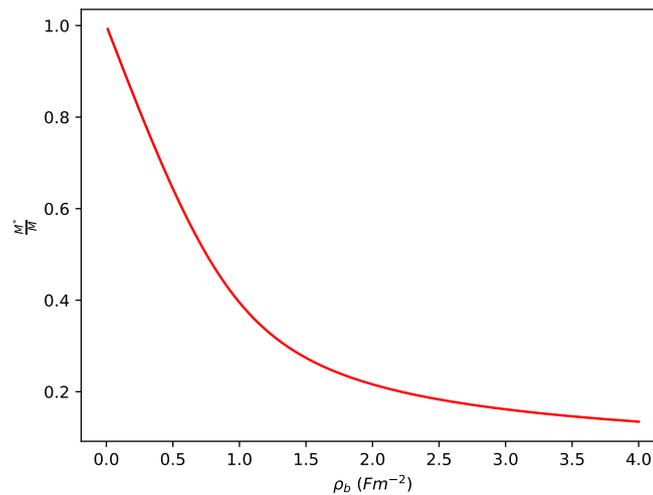
Gráfico 12 - Energia de ligação em duas e três dimensões



Legenda: Energias de ligação referentes ao modelo de Walecka em 3D e 2D à  $T = 0$  com destaque para a sobreposição do ponto de saturação em  $k_F = 1,3 \text{ Fm}^{-1}$  e  $\epsilon_{lig} = -16 \text{ MeV}$ .

Fonte: O autor, 2020.

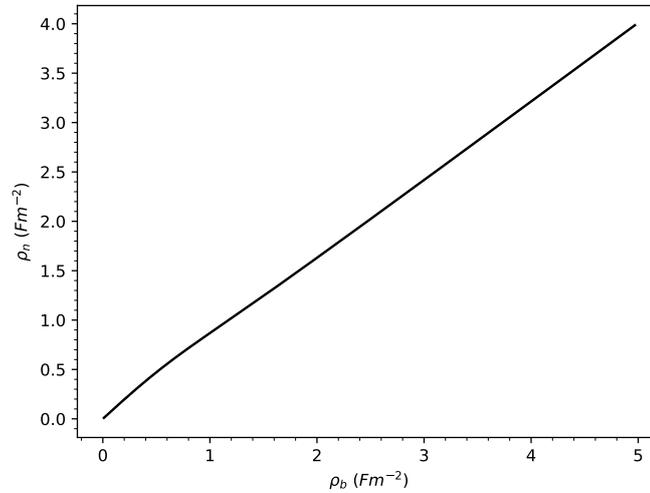
Gráfico 13 - Massa efetiva



Legenda: Dependência do valor relativo da massa efetiva  $M^*/M$  com a densidade bariônica referente ao modelo de Walecka em 2D à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 14 - Densidade de nêutrons



Legenda: Densidade de nêutrons como função da densidade de bárions para o modelo de Walecka em 2D à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

### 3.10.3 População de partículas

Ao substituir a expressão (473) em (147), se chega a seguinte expressão, cuja dedução pode ser consultada no Anexo D.2:

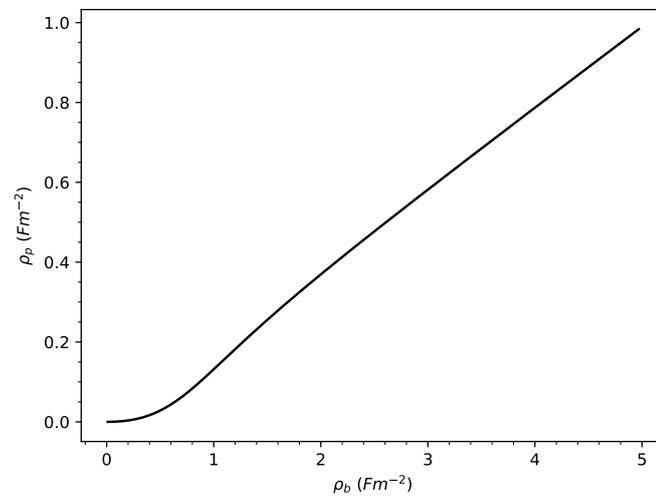
$$\rho_b = \frac{1}{2\pi} \left[ k_{F_n}^2 + \frac{(k_{F_n}^2 + 2M^{*2} - m_e^2)^2 - 4M^{*2}(k_{F_n}^2 + M^{*2})}{4(k_{F_n}^2 + M^{*2})} \right], \quad (158)$$

juntamente com os valores da massa efetiva  $M^*$  que podem ser encontrados a partir dos resultados apresentados no Gráfico 13, é possível encontrar a densidade de nêutrons como função da densidade de bárions. O resultado é apresentado Gráfico 14. Como a densidade de prótons pode ser escrita como,

$$\rho_p = \rho_b - \rho_n, \quad (159)$$

a partir dos resultados do Gráfico 14 é possível encontrar a densidade de prótons como função da densidade de bárions, e que pode ser visto no Gráfico 15. Para um melhor entendimento quanto ao comportamento da população de partículas, apresentamos no Gráfico 16 a população relativa de ambos os bárions.

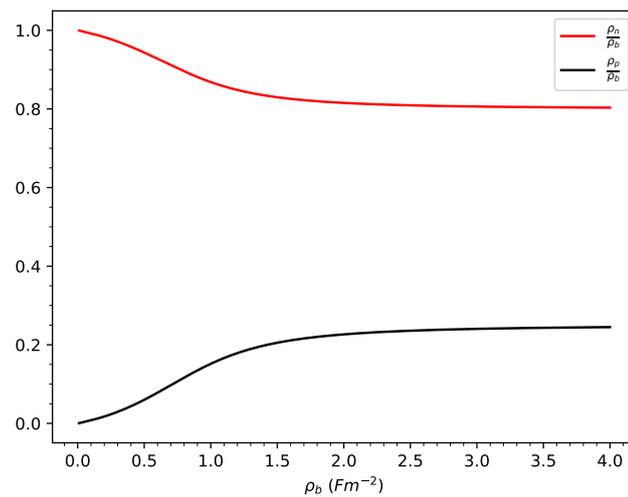
Gráfico 15 - Densidade de prótons



Legenda: Densidade de prótons como função da densidade de bárions para o modelo de Walecka em 2D à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 16 - População relativa dos bárions



Legenda: População relativa dos bárions em relação a densidade bariônica total para o modelo de Walecka em 2D à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

### 3.11 Equação de estado

Devido à posterior aplicação nas cascas auto-gravitantes do Capítulo 1, há interesse em expressões adimensionais para a equação de estado. É preciso então tornar as expressões da densidade de energia e pressão referente ao modelo atual em expressões adimensionais. Para realizar essa tarefa de maneira correta, deve se fazer aparecer de forma explícita as constantes  $c$  e  $\hbar$  nas equações (142) e (145). Logo, vê-se que as equações que dão origem à equação de estado adimensional, com as constantes adicionadas da maneira correta, são:

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{c^4}{2\hbar^2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{c^4}{2\hbar^2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{M^{*3} c^4}{3\pi\hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \right] \\ & + \frac{m_e^3 c^4}{3\pi\hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (160)$$

e

$$\begin{aligned} P = & -\frac{c^4}{2\hbar^2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{c^4}{2\hbar^2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{M^{*3} c^4}{6\pi\hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\ & \left. - 3 \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 4 \right] + \frac{m_e^3 c^4}{6\pi\hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]. \end{aligned} \quad (161)$$

Introduzindo mais uma vez o  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{m_n c^2}{\lambda^2} = \frac{m_n^3 c^4}{\hbar^2}, \quad (162)$$

com dimensões de densidade de energia, as expressões para a densidade de energia e pressão ficam da forma:

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{\alpha}{2m_n^3} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{\alpha}{2m_n^3} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{\alpha M^{*3}}{3\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \right] \\ & + \frac{\alpha m_e^3}{3\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (163)$$

e

$$P = -\frac{\alpha}{2m_n^3} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{\alpha}{2m_n^3} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{\alpha M^{*3}}{6\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 4 \right] + \frac{\alpha m_e^3}{6\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]. \quad (164)$$

Recorrendo às transformações,

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\alpha}$$

e

$$\bar{P} = \frac{P}{\alpha}, \quad (165)$$

se tem as expressões que constituem a equação de estado adimensional referente ao modelo de Walecka em 2D à  $T = 0$ , sendo elas,

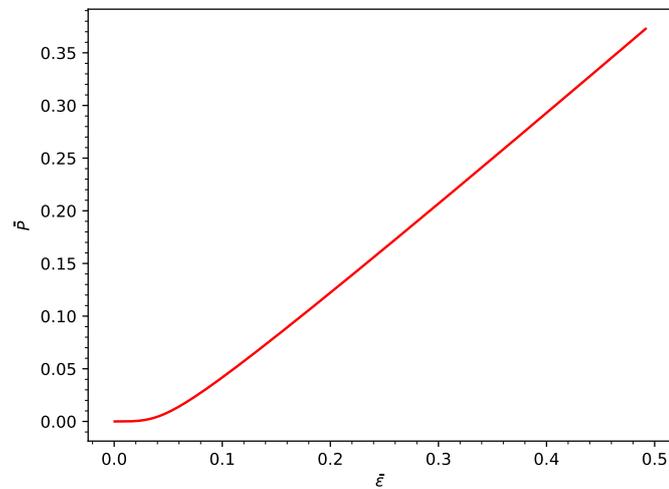
$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2m_n^3} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2m_n^3} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{M^{*3}}{3\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \right] + \frac{m_e^3}{3\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \quad (166)$$

e

$$\bar{P} = -\frac{1}{2m_n^3} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2m_n^3} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{M^{*3}}{6\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 4 \right] + \frac{m_e^3}{6\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]. \quad (167)$$

O Gráfico 17 mostra a equação de estado (166) e (167). Embora seja quase imperceptível, a curva tem um mínimo negativo de pressão em relação à densidade de energia. Isso trará uma grande diferença na aplicação final na casca auto-gravitante. Fisicamente significa que para uma densidade de energia finita específica existe uma pressão zero. Esta situação pode ser conferida no Gráfico (18), e é consequência direta da escolha (157) das constantes de acoplamento.

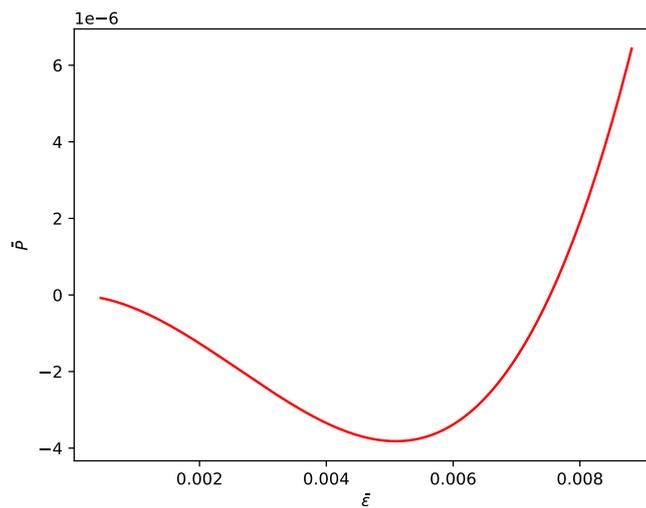
Gráfico 17 - Equação de estado



Legenda: Equação de estado adimensional para o modelo de Walecka em 2D à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 18 - Equação de estado com zoom no início



Legenda: Equação de estado referente ao modelo de Walecka em 2D à  $T = 0$  com zoom no início que possibilita ver as pressões negativas para baixas densidades.

Fonte: O autor, 2020.

#### 4 MODELO DE WALECKA NÃO LINEAR EM DUAS DIMENSÕES À $T = 0$

Nesse Capítulo são adotadas as unidades nucleares, onde  $\hbar = c = 1$ . Assim  $[E] = L^{-1}$  e  $[P] = [\epsilon] = L^{-3}$ .

O Modelo de Walecka tem tido sucesso em descrever as propriedades da matéria nuclear. No entanto, seu valor para a compressibilidade nuclear, de aproximadamente 500 MeV, é alto quando comparado com o valor experimental de aproximadamente 250–290 MeV. No entanto, é possível obter uma teoria que se aproxime mais dos valores experimentais. Para isso, é necessário adicionar à densidade lagrangeana (105) termos  $U(\sigma)$  que correspondem à auto-interação do méson escalar  $\sigma$  (BOGUTA; BODMER, mar.1977) e também o méson rho ( $\rho$ ), o qual é um méson vetorial iso-vetorial. Fisicamente o méson  $\rho$  está ligado ao termo de energia de assimetria entre os nêutrons e prótons da fórmula de massas. O termo de autointeração  $U(\sigma)$  do campo escalar aproxima o valor da compressibilidade do modelo ao valor experimental. A densidade lagrangeana do modelo de Walecka não linear com a adição do méson  $\rho$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WNL} = & \sum_B \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi_B + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu + g_\sigma \sum_B \bar{\psi}_B \psi_B \sigma - g_\omega \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B \omega^\mu \\ & - g_\rho \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \psi_B \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu - U(\sigma), \end{aligned} \quad (168)$$

onde,

$$U(\sigma) = \frac{1}{3} b M (g_\sigma \sigma)^3 + \frac{1}{4} h (g_\sigma \sigma)^4 \quad (169)$$

é a autointeração do campo  $\sigma$ ,  $\psi_B$  representa o campo dos bárions,  $M$  sua massa (se trabalha considerando que a massa dos nêutrons é igual a massa dos prótons),

$$\omega^{\mu\nu} = \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu \quad (170)$$

e

$$\boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} = \partial^\mu \boldsymbol{\rho}^\nu - \partial^\nu \boldsymbol{\rho}^\mu. \quad (171)$$

Finalmente,  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  são as matrizes de Pauli, e  $\boldsymbol{\rho}^\mu = (\rho_1^\mu, \rho_2^\mu, \rho_3^\mu)$ . Entretanto, é necessário adicionar um setor leptônico (elétrons) livre para compensar a carga elétrica dos prótons, pois a carga das cascas que serão estudadas no Capítulo 6 deve ser nula.

Então a lagrangeana toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WNL} = & \sum_B \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi_B + \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2 \right) - \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
& - \frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu + g_\sigma \sum_B \bar{\psi}_B \psi_B \sigma - g_\omega \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B \omega^\mu \\
& - g_\rho \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \psi_B \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu - U(\sigma) + \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda,
\end{aligned} \tag{172}$$

onde  $\psi_\lambda \equiv \psi_e$  e representa o campo dos elétrons e  $m_\lambda \equiv m_e$ , sua massa.

#### 4.1 Equações de movimento

Assim como no Capítulo 3, através da equação de Euler-Lagrange (102) e considerando os campos da densidade lagrangeana (172) como graus de liberdade, pode-se escrever as equações de movimento para todos os campos. Entretanto nesse Capítulo, as equações de movimento para os campos  $\omega$  e  $\psi_\lambda$  serão exatamente iguais às do modelo de Walecka do Capítulo 3, podendo ser conferidas nas equações, (109) e (115). Já a equação de movimento para o campo  $\sigma$  irá se modificar devido aos termos de auto-interação, e as equações referentes aos campos  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  também mudarão devido ao acoplamento com o méson  $\rho$  e também será necessário calcular a equação de movimento para o campo  $\rho$ .

##### 4.1.1 Equação de movimento para o méson $\sigma$

A equação de Euler-Lagrange para o campo  $\sigma$  será,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = 0. \tag{173}$$

Após resolver todas as derivadas da equação (173), presentes no Anexo E.1, a equação de movimento para o campo  $\sigma$  é,

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2 \right) \sigma = g_\sigma \sum_B \bar{\psi}_B \psi_B - bMg_\sigma^3 \sigma^2 - hg_\sigma^4 \sigma^3. \tag{174}$$

#### 4.1.2 Equação de movimento para o campo $\psi_B$

A equação de Euler-Lagrange para o campo  $\psi_B$  é,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_B)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_B} = 0. \quad (175)$$

Após calcular as derivadas, que podem ser encontradas no Anexo E.1, o resultado fica da forma,

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_{\rho \frac{1}{2}} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi_B = 0. \quad (176)$$

#### 4.1.3 Equação de movimento para o campo $\bar{\psi}_B$

A equação de Euler-Lagrange para o campo  $\bar{\psi}_B$  é,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_B)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_B} = 0. \quad (177)$$

Após resolver as derivadas, que podem ser consultadas no Anexo E.1, o resultado é,

$$\bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_{\rho \frac{1}{2}} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] = 0. \quad (178)$$

#### 4.1.4 Equação de movimento para o méson $\rho$

A equação de Euler-Lagrange para o campo  $\rho$  é,

$$\partial^\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu \boldsymbol{\rho}^\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\rho}^\mu} = 0. \quad (179)$$

Após resolver as derivadas que podem ser consultadas no Anexo E.1. Seu resultado será,

$$-\partial^\nu \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} + m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu = g_\rho \sum_B \bar{\psi}_B \gamma_\mu \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \psi_B. \quad (180)$$

## 4.2 Aproximação de campo médio

Seguindo os mesmos conceitos apresentados na Seção (3.4), aqui também se faz necessário aplicar a aproximação de campo médio, porem para o campo que se refere ao méson omega  $\omega$  será exatamente igual ao que foi encontrado na equação (132). Como

nesse modelo, o campo  $\sigma$  é acrescido dos termos de auto-interação, é necessário calcular a teoria de campo médio para ele. E naturalmente também para o campo  $\rho$ .

#### 4.2.1 Aproximação de campo médio para o méson $\sigma$

Ao aplicar a aproximação de campo médio para a equação de movimento referente ao campo  $\sigma$  (174) obtemos:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2\right) \langle \sigma \rangle = g_\sigma \sum_B \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle + bMg_\sigma^3 \langle \sigma \rangle^2 + hg_\sigma^4 \langle \sigma \rangle^3. \quad (181)$$

Devido a invariância translacional do sistema,  $\langle \sigma \rangle$  é constante, levando suas derivadas a serem nulas. Haciendo então  $\langle \sigma \rangle \equiv \sigma$  temos

$$m_\sigma^2 \sigma = g_\sigma \sum_B \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle + bMg_\sigma^3 \sigma^2 + hg_\sigma^4 \sigma^3, \quad (182)$$

ou

$$m_\sigma^2 \sigma = g_\sigma \sum_B \rho_{sB} + bMg_\sigma^3 \sigma^2 + hg_\sigma^4 \sigma^3, \quad (183)$$

onde  $\rho_{sB}$  é a densidade escalar do bárion  $B$ .

#### 4.2.2 Aproximação de campo médio para o méson $\rho$

Aplicando a aproximação de campo médio para a equação de movimento referente ao campo  $\rho$  (180) obtemos:

$$-\partial^\mu \langle \rho_{\mu\nu} \rangle + m_\rho^2 \langle \rho_\nu \rangle = g_\rho \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_\nu \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \psi_B \rangle. \quad (184)$$

Como o termo  $\langle \rho_{\mu\nu} \rangle$  envolve as derivadas do campo e, devido a invariância translacional o campo é constante, seu resultado será zero.

$$m_\rho^2 \langle \rho_\nu \rangle = g_\rho \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_\nu \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \psi_B \rangle. \quad (185)$$

Implementando a invariância rotacional do sistema, o qual também supomos saturado em isospin, a única componente não nula do campo  $\rho$  é  $\rho_{03}$ , satisfazendo

$$\rho_{03} = \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 \frac{1}{2} \tau_3 \psi_B \rangle. \quad (186)$$

### 4.3 Densidade escalar

A densidade escalar é dada por  $\langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle = \rho_s$ , e sua soma sobre todos os bárions já foi encontrada no Anexo D.1.5 e vale,

$$\sum_B \rho_{sB} = \frac{M^*}{\pi} \left( \sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} + \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} - 2M^* \right). \quad (187)$$

Substituindo (187) na expressão de campo médio (183) se tem,

$$m_\sigma^2 \sigma = \frac{g_\sigma M^*}{\pi} \left( \sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} + \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} - 2M^* \right) + bM g_\sigma^3 \sigma^2 + h g_\sigma^4 \sigma^3. \quad (188)$$

O potencial escalar é dado por,

$$V_\sigma = g_\sigma \sigma, \quad (189)$$

o qual, usando (188) se escreve,

$$V_\sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left[ \frac{M^*}{\pi} \left( \sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} + \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} - 2M^* \right) + bM V_\sigma^2 + h V_\sigma^3 \right]. \quad (190)$$

Com a definição de  $M^*$  encontrada em (112), a equação (190) pode ser escrita como,

$$M^* = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left[ \frac{M^*}{\pi} \left( \sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} + \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} - 2M^* \right) + bM(M - M^*)^2 + h(M - M^*)^3 \right], \quad (191)$$

que constitui a equação para a massa efetiva  $M^*$  e que pode ser resolvida numericamente.

### 4.4 Densidade bariônica

A expressão para densidade a bariônica total em duas dimensões referente ao modelo de Walecka não linear é igual ao modelo de Walecka e já foi definida no Capítulo 3 na equação (139) como,

$$\rho_b = \frac{1}{2\pi} \left( k_{F_p}^2 + k_{F_n}^2 \right). \quad (192)$$

#### 4.5 Densidade de isospin

Da equação de campo médio (186) do méson  $\rho$ , é possível encontrar uma expressão para o potencial associado ao campo, que é definido como,

$$g_\rho \rho_{03} = V_\rho. \quad (193)$$

Para obté-lo basta multiplica-la em ambos os lados de (186) por  $g_\rho$ . Se tem então,

$$\begin{aligned} V_\rho &= \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 \frac{1}{2} \tau_3 \psi_B \rangle \\ &= \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \frac{1}{2} \left( \langle \psi_n^\dagger \tau_3 \psi_n \rangle + \langle \psi_p^\dagger \tau_3 \psi_p \rangle \right) \\ &= \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \frac{1}{2} \left( \langle \psi_n^\dagger \psi_n \rangle - \langle \psi_p^\dagger \psi_p \rangle \right) \\ &= \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \frac{1}{2} (\rho_n - \rho_p), \end{aligned} \quad (194)$$

demonstrando então que o campo  $\rho_{03}$  está ligado à assimetria entre os nêutrons e prótons.

#### 4.6 Densidade de energia

Como visto anteriormente na Seção (3.7), a densidade de energia pode ser obtida através da relação,

$$\epsilon = -\langle \mathcal{L} \rangle + \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 i \partial_0 \psi_B \rangle + \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_0 i \partial_0 \psi_\lambda \rangle. \quad (195)$$

Ao aplicar a aproximação de campo médio na lagrangeana (172), a simetria translacional impõe que todas as derivadas sejam nulas, e a simetria rotacional cancela as componentes espaciais referentes aos campos  $\omega$  e  $\rho$ , ao passo que a saturação em isospin só mantém a componente 3 do campo  $\rho$ . Logo a densidade de energia será dada por,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 + \frac{1}{3} b M V_\sigma^3 + \frac{1}{4} h V_\sigma^4 + \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 i \partial_0 \psi_B \rangle \\ &\quad + \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_0 i \partial_0 \psi_\lambda \rangle. \end{aligned} \quad (196)$$

Os termos  $\sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 i \partial_0 \psi_B \rangle$  e  $\langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_0 i \partial_0 \psi_\lambda \rangle$  já foram calculados no Anexo D.1.7. Dessa forma, a densidade de energia referente ao modelo de Walecka não linear em duas dimen-

sões, já com as massas fatoradas, será dada por,

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 + \frac{1}{3} M b V_\sigma^3 + \frac{1}{4} h V_\sigma^4 \\ & + \frac{M^{*3}}{3\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_n}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{k_{F_p}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \right] \frac{m_e^3}{3\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (197)$$

#### 4.7 Pressão

Como visto na Seção (3.8), a pressão poderá ser obtida a partir da relação,

$$P = \langle \mathcal{L} \rangle + \sum_B \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_B \gamma_j i \partial_j \psi_B \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_j i \partial_j \psi_\lambda \rangle. \quad (198)$$

Ao aplicar a densidade lagrangeana (172) em (198) e considerar as simetrias translacional e rotacional e saturação de isospin, a pressão será dada por,

$$\begin{aligned} P = & -\frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 - \frac{1}{3} M b V_\sigma^3 - \frac{1}{4} h V_\sigma^4 + \frac{1}{2} \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_j i \partial_j \psi_B \rangle \\ & + \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_j i \partial_j \psi_\lambda \rangle. \end{aligned} \quad (199)$$

Uma vez que  $\langle \bar{\psi}_B \gamma_j i \partial_j \psi_B \rangle$  e  $\langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_j i \partial_j \psi_\lambda \rangle$  já foram calculados no Anexo D.1.8, a expressão para a pressão em duas dimensões referente ao modelo de Walecka não linear, já com as massas fatoradas, será dada por,

$$\begin{aligned} P = & -\frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 - \frac{1}{3} M b V_\sigma^3 - \frac{1}{4} h V_\sigma^4 \\ & + \frac{M^{*3}}{6\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_n}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_n}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{k_{F_p}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_p}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 4 \right] \\ & + \frac{m_e^3}{6\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right], \end{aligned} \quad (200)$$

#### 4.8 Vínculos

Assim como as EOS do Capítulo 2.1, referentes ao gás  $npe$ , e do Capítulo 3, referente ao modelo de Walecka, dependem de três variáveis, as expressões referentes à densidade de energia e pressão para o modelo de Walecka não linear também dependem de três variáveis ( $k_{F_n}$ ,  $k_{F_p}$  e  $k_{F_e}$ ). Então, mais uma vez se fará necessário implementar

vínculos a serem satisfeitos pelo sistema. O primeiro deles será impor a neutralidade da carga elétrica total, visto que no Capítulo 6 as EOS serão aplicadas a uma casca de carga elétrica nula. Sendo assim, a população de prótons e elétrons deve ser iguais, resultando em,

$$k_{F_p} = k_{F_e}. \quad (201)$$

Também é necessário utilizar a relação referente à densidade bariônica total. Assim,

$$\begin{aligned} \rho_b &= \rho_n + \rho_p \\ &= \frac{1}{2\pi} (k_{F_n}^2 + k_{F_p}^2). \end{aligned} \quad (202)$$

Por último, usa-se as relações de equilíbrio químico que nascem a partir dos decaimentos  $\beta$  e captura eletrônica,

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ p + e^- &\longrightarrow n + \nu_e. \end{aligned} \quad (203)$$

Desta forma é possível chegar a uma relação acerca dos potenciais químicos entre as partículas (GLENDENNING, 2012),

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e, \quad (204)$$

ou

$$E_{F_n} + g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \rho_{03} \tau_{3n} = E_{F_p} + g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \rho_{03} \tau_{3p} + E_{F_e}. \quad (205)$$

Esse vínculo pode ser escrito como

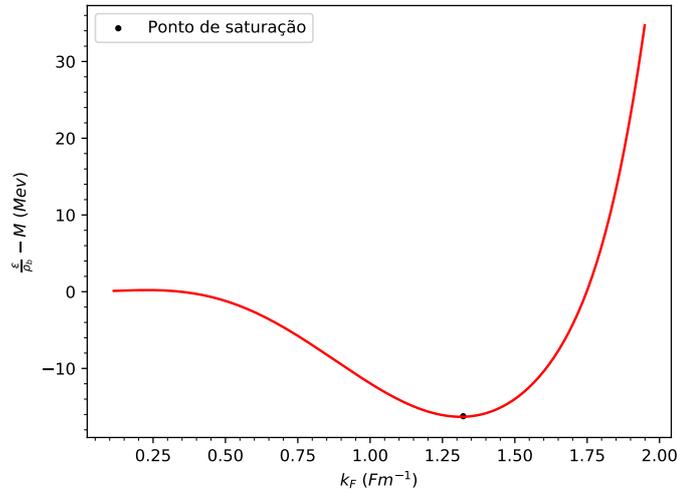
$$E_{F_n} = E_{F_p} + E_{F_e} - V_\rho, \quad (206)$$

onde  $E_{F_n}$  é definido como  $\sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}}$ ,  $E_{F_p}$  é definido como  $\sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}}$  e  $E_{F_e}$  é definido como  $\sqrt{k_{F_e}^2 + m_e^2}$ .

#### 4.8.1 Constantes de acoplamento e resultados numéricos

Nesse modelo existe a mesma dificuldade para determinar os valores das constantes de acoplamento citada na Seção 3.10.1. Da mesma forma que o feito no Capítulo 3, igualamos as energias de saturação em duas e três dimensões através da expressão que já

Gráfico 19 - Energia de ligação em 3 dimensões



Legenda: Energia de ligação referente ao modelo de Walecka não linear em 3D, com destaque para o ponto de saturação em  $k_F = 1,31 \text{ Fm}^{-1}$  e com  $\epsilon_{lig} = -16,3 \text{ MeV}$  à  $T = 0$

Fonte: O autor, 2020.

foi definida em (156). As expressões para a densidade de energia e densidade de número bariônico em três dimensões matéria nuclear são (GLENDEENING, 2012):

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 + \frac{1}{3} M b V_\sigma^3 + \frac{1}{4} h V_\sigma^4 \\ & + \frac{2}{\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{8} M^{*2} k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{M^{*2} + k_F^2} - \frac{1}{8} M^{*4} \log \left( \frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + M^{*2}}}{M^*} \right) \right], \end{aligned} \quad (207)$$

onde  $V_\sigma$  em 3D é dado por,

$$V_\sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left\{ \frac{M^*}{2\pi^2} \left[ k_F \sqrt{k_F^2 + M^{*2}} - M^{*2} \log \left( \frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + M^{*2}}}{M^*} \right) \right] - b M V_\sigma^2 - h V_\sigma^3 \right\}, \quad (208)$$

e

$$\rho_b = \frac{2k_F^3}{3\pi^2}. \quad (209)$$

A energia de ligação referente ao modelo de Walecka não linear em 3D está apresentada no Gráfico 19, usando as constantes de acoplamento de (GLENDEENING, 2012) cuja saturação está em  $k_F \approx 1,31 \text{ Fm}^{-1}$ , valendo  $\epsilon_{lig} = -16,3 \text{ MeV}$ . A equação (156) também será utilizada para encontrar a energia de saturação em duas dimensões, que é o

Tabela 1 - Constantes de acoplamento referente ao modelo de Walecka não linear em 2D.

	$\frac{M^*}{M}$	$\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2$	$\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2$	$b$	$h$
		Fm	Fm	$\times 100$	$\times 100$
Conj.1	0,5440	3,886	2,933	2,610	-4,986
Conj.2	0,5372	2,535	1,567	9,631	3,979
Conj.3	0,5735	4,091	2,227	0,6100	-1,980

Fonte: O autor, 2020.

foco desse trabalho, juntamente com as equações (197) e (192), na matéria nuclear. Para que as energias de saturação em duas dimensões se sobreponha à energia de saturação em três dimensões, deve-se utilizar as constantes de acoplamento da Tabela 1. O Gráfico 20 apresenta a sobreposição dos pontos de saturação em duas e três dimensões<sup>3</sup>.

#### 4.8.2 Energia de assimetria

Como as constantes de acoplamento são definidas a partir da matéria nuclear, que é uma teoria onde  $\rho_n = \rho_p$ , não é possível encontrar os valores de  $\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2$ , visto que a mesma aparece multiplicando a diferença entre prótons e nêutrons. Então, deve-se utilizar outro meio para encontrar seu valor. Sendo assim, usaremos o ajuste de um observável experimental, o coeficiente de assimetria,

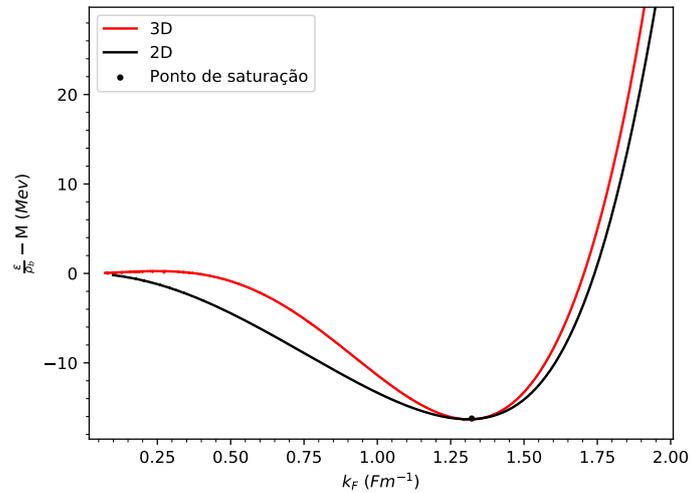
$$a_{sym} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right), \quad (210)$$

onde  $t$  é o parâmetro de assimetria  $t = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_n + \rho_p}$ . Mais uma vez, na impossibilidade de se realizar experimentos com materiais em duas dimensões, será aplicado em duas dimensões o valor experimental em três dimensões apresentado em (GLENDENNING, 2012) de  $a_{sym}^{exp} = 32,5$  MeV, possibilitando encontrar a última constante necessária para definir a equação de estado. Após realizar os cálculos que estão em detalhes no Anexo E.3 é possível concluir que

$$\frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} = \frac{4}{\rho_b} \left( a_{sym} - \frac{k_F^2}{2\sqrt{k_F^2 + M^{*2}}} \right). \quad (211)$$

<sup>3</sup> Os conjuntos apresentados na Tabela 1 não são os únicos existentes, porém são suficientes para as análises subsequentes do trabalho.

Gráfico 20 - Saturação em duas e três dimensões



Legenda: Energias de ligação referente ao modelo de Walecka não linear em 2D e 3D, com destaque para o ponto de saturação em  $k_F = 1,31 \text{ Fm}^{-1}$  e com  $\epsilon_{lig} = -16,3 \text{ MeV}$  à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

Sendo assim, se apresenta a Tabela 2 todas as constantes necessárias para construir a equação de estado.

Nos resultados numéricos a seguir, foi usado o Conjunto 1 de constantes de acoplamento.

#### 4.8.3 Massa efetiva

Usufruindo das constantes de acoplamento em 2D apresentadas na Tabela 2, é possível resolver numericamente a equação (191), possibilitando encontrar a dependência da massa efetiva  $M^*$  com a densidade bariônica. Os resultados estão apresentados no Gráfico 21.

#### 4.8.4 População

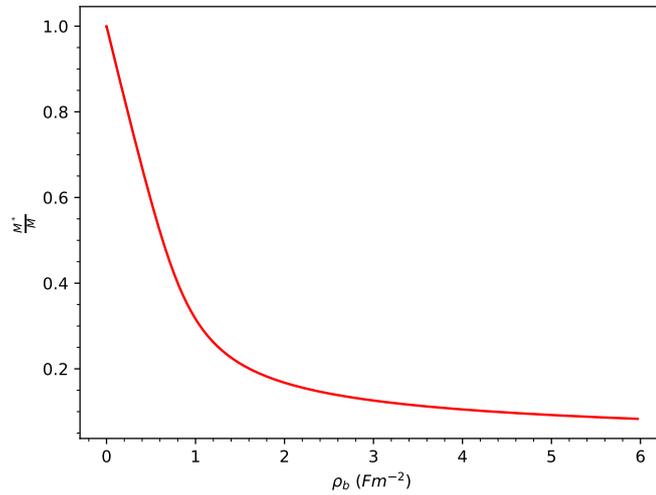
Após encontrar todos os valores de  $M^*$  é possível encontrar como a população de bárions se comporta em função da densidade bariônica. Para isso se resolve um sistema

Tabela 2 - Diferentes conjuntos de constantes de acoplamento referentes ao modelo de Walecka não linear em 2D com a inclusão do méson  $\rho$ .

	$\frac{M^*}{M}$	$\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2$	$\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2$	$\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2$	$b$	$h$
		Fm	Fm	Fm	$\times 100$	$\times 100$
Conjunto 1	0,5440	3,886	2,933	0,988	2,610	-4,986
Conjunto 2	0,5372	2,535	1,567	0,954	9,631	3,979
Conjunto 3	0,5735	4,091	2,227	1,131	0,610	-1,980

Fonte: O autor, 2020.

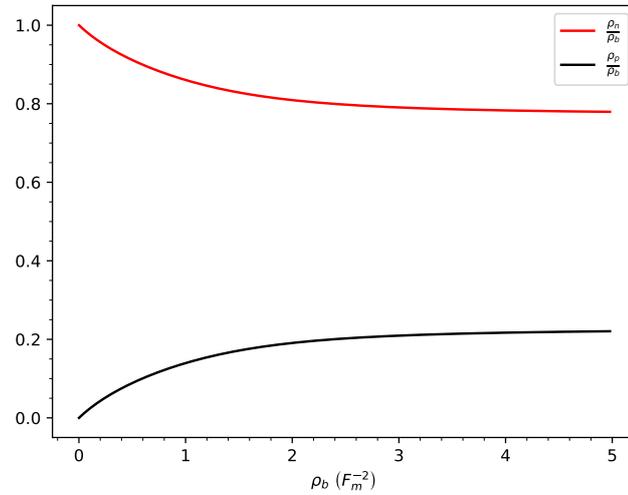
Gráfico 21 - Massa efetiva



Legenda: Dependência do valor relativo da massa efetiva  $M^*/M$  com a densidade bariônica à  $T = 0$  referente ao modelo de Walecka não linear em 2D.

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 22 - População relativa de bárions



Legenda: População relativa dos bárions em relação a densidade bariônica total referente ao modelo de Walecka não linear em 2D à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

não linear constituído pelas equações (201), (202) e (206), que retornará os valores de  $k_{F_n}$ ,  $k_{F_p}$  e  $k_{F_e}$ , possibilitando encontrar as populações. O resultado está apresentado no Gráfico 22.

#### 4.9 Equação de estado

Seguindo os mesmos passos da Seção (3.11), rescrevemos as equações (217) e (200) com as constantes  $\hbar$  e  $c$  de forma explícita na forma:

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{c^4}{2\hbar^2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{c^4}{2\hbar^2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{c^4}{2\hbar^2} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 + \frac{c^4}{\hbar^2} \frac{MbV_\sigma^3}{3} + \frac{c^4}{\hbar^2} \frac{hV_\sigma^4}{4} \\ & + \frac{M^{*3}c^4}{3\pi\hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \right] + \frac{m_e^3c^4}{3\pi\hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (212)$$

e

$$\begin{aligned}
P = & \frac{c^4}{2\hbar} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{c^4}{2\hbar^2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{c^4}{2\hbar^2} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 - \frac{c^4}{\hbar^2} \frac{MbV_\sigma^3}{3} - \frac{c^4}{\hbar^2} \frac{hV_\sigma^4}{4} \\
& + \frac{M^{*3}c^4}{6\pi\hbar^2} \left[ \left( \frac{k_{F_n}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_n}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{k_{F_p}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_p}^2}{M^{*2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 4 \right] \\
& + \frac{m_e^3 c^4}{6\pi\hbar^2} \left[ \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]. \tag{213}
\end{aligned}$$

Recorrendo à definição do  $\alpha$  com dimensões de densidade de energia,

$$\alpha = \frac{m_n c^2}{\lambda^2} = \frac{m_n^3 c^4}{\hbar^2}, \tag{214}$$

as expressões para a densidade de energia e pressão ficam da forma:

$$\begin{aligned}
\epsilon = & \frac{\alpha}{2m_n^3} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{\alpha}{2m_n^3} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{\alpha}{2m_n^3} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 + \frac{\alpha}{m_n^3} \frac{MbV_\sigma^3}{3} + \frac{\alpha}{m_n^3} \frac{hV_\sigma^4}{4} \\
& + \frac{\alpha M^{*3}}{3\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \right] + \frac{\alpha m_e^3}{3\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]. \tag{215}
\end{aligned}$$

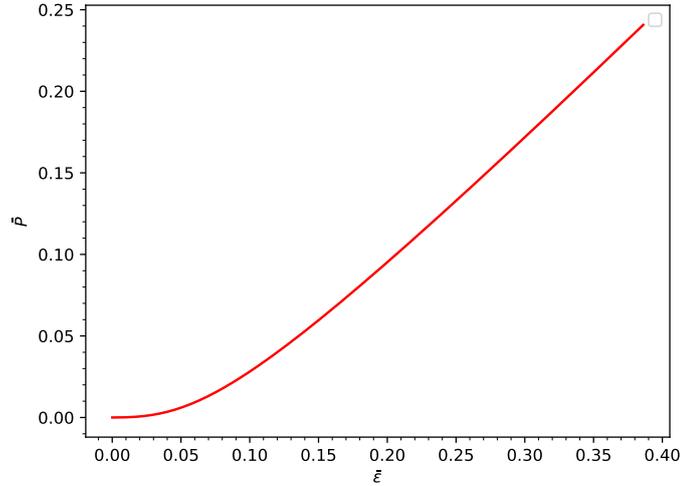
e

$$\begin{aligned}
P = & - \frac{\alpha}{2m_n^3} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{\alpha}{2m_n^3} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{\alpha}{2m_n^3} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 - \frac{\alpha}{m_n^3} \frac{MbV_\sigma^3}{3} - \frac{\alpha}{m_n^3} \frac{hV_\sigma^4}{4} \\
& + \frac{\alpha M^{*3}}{6\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 4 \right] \\
& + \frac{\alpha m_e^3}{6\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]. \tag{216}
\end{aligned}$$

Recorrendo mais uma vez as transformações (42) e (43), têm-se as equações que formam a equação de estado adimensional referente ao modelo de Walecka não linear em 2D à  $T = 0$ . Sendo elas,

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon} = & \frac{1}{2m_n^3} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2m_n^3} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{1}{2m_n^3} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 + \frac{1}{m_n^3} \frac{MbV_\sigma^3}{3} + \frac{1}{m_n^3} \frac{hV_\sigma^4}{4} \\
& + \frac{M^{*3}}{3\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \right] + \frac{m_e^3}{3\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \tag{217}
\end{aligned}$$

Gráfico 23 - Equação de estado



Legenda: Equação de estado para o modelo de Walecka não linear em 2D adimensional à  $T = 0$ .

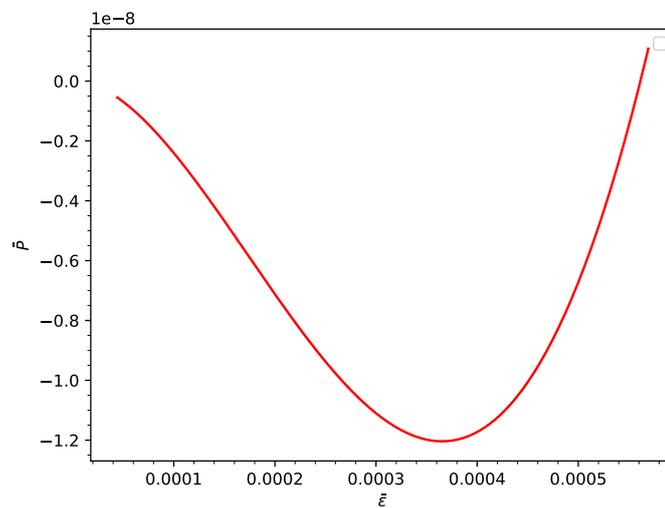
Fonte: O autor, 2020.

e

$$\begin{aligned}
 \bar{P} = & -\frac{1}{2m_n^3} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} V_\sigma^2 + \frac{1}{2m_n^3} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b^2 + \frac{1}{2m_n^3} \frac{m_\rho^2}{g_\rho^2} V_\rho^2 - \frac{1}{m_n^3} \frac{MbV_\sigma^3}{3} - \frac{1}{m_n^3} \frac{hV_\sigma^4}{4} \\
 & + \frac{M^{*3}}{6\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 4 \right] \\
 & + \frac{m_e^3}{6\pi m_n^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right], \quad (218)
 \end{aligned}$$

A equação de estado formada pelas equações (218) e (217) é apresentada no Gráfico 23. Analogamente ao que acontece no modelo de Walecka, de maneira quase imperceptível, a curva representada no Gráfico 23 tem um mínimo negativo de pressão em relação a densidade de energia, que é uma consequência direta das constantes de acoplamento presente na Tabela 2. Isso terá uma relevância significativa na aplicação final demonstrada no Capítulo 6. Fisicamente, significa que para uma densidade de energia específica, a pressão será zero. Tal resultado é apresentado no Gráfico 24.

Gráfico 24 - Equações de estado com zoom a baixas densidades



Legenda: Equação de estado referente ao modelo de Walecka não linear em 2D adimensional à  $T = 0$ , com zoom a baixas densidades.

Fonte: O autor, 2020.

## 5 GÁS DE QUARKS LIVRES EM DUAS DIMENSÕES À $T = 0$

Nesse Capítulo são adotadas as unidades nucleares, onde  $\hbar = c = 1$ . Assim  $[E] = L^{-1}$  e  $[P] = [\epsilon] = L^{-3}$ .

Outra equação de estado que será interessante analisar é a que se refere a um sistema de quarks livres. Serão considerados os quarks *up* ( $u$ ), *down* ( $d$ ) e *strange* ( $s$ ). Como os quarks também são férmions, suas densidades lagrangeanas serão as de Dirac.

$$\mathcal{L} = \sum_q \bar{\psi}_q (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_q) \psi_q, \quad (219)$$

onde  $\psi_q$  representa o campo dos quarks e  $m_q$  suas massas, com  $q = u, d, s$ . Todavia, é necessário adicionar um setor leptônico (elétrons) livre, que compense a carga elétrica dos quarks, pois a carga elétrica das cascas que serão estudadas no Capítulo 6 deve ser nula. Assim

$$\mathcal{L} = \sum_q \bar{\psi}_q (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_q) \psi_q + \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda, \quad (220)$$

sendo  $\lambda \equiv e$ .

### 5.1 Densidade bariônica

A densidade bariônica  $\rho_b$  é a soma da densidade de número de quarks, sendo:

$$\rho_b = \sum_q \rho_q = \sum_q \langle \psi_q^\dagger \psi_q \rangle, \quad (221)$$

onde  $q = u, d, s$ . O operador de campo dos quarks  $\psi_q$  é análogo ao que foi utilizado na Seção (3.6). Considerando o fator de degenerescência de cor igual a 3, o cálculo da equação (221) se dará da mesma maneira que o cálculo da densidade bariônica (139). Logo,

$$\rho_b = \frac{3}{2\pi} \left( k_{F_u}^2 + k_{F_d}^2 + k_{F_s}^2 \right). \quad (222)$$

## 5.2 Densidade de energia

Aplicando a lagrangeana (220) nos cálculos da Seção 3.7 obtemos,

$$\epsilon = \sum_q \langle \psi_q^\dagger \gamma_0 i \partial_0 \psi_q \rangle + \langle \psi_\lambda^\dagger \gamma_0 i \partial_0 \psi_\lambda \rangle. \quad (223)$$

Os cálculos são muito parecidos com os que já foram feitos para o setor fermiônico do modelo de Walecka na Seção (3.7) e os detalhes podem ser consultados no Anexo D.1.7, lembrando apenas de considerar o degenerescência de cor 3 para cada quark,

$$\epsilon = \frac{1}{\pi} \sum_q m_q^3 \left[ \left( \frac{k_{F_q}^2}{m_q^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] + \frac{m_e^3}{3\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right], \quad (224)$$

com  $q = u, d, s$ .

## 5.3 Pressão

Aplicando a lagrangeana (220) nos cálculos da Seção 3.8 obtemos,

$$P = \frac{1}{2} \sum_q \langle \bar{\psi}_q \gamma_j i \partial_j \psi_q \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_j i \partial_j \psi_\lambda \rangle. \quad (225)$$

O cálculo detalhado pode ser encontrado no Anexo D.1.8,

$$P = \frac{1}{2\pi} \sum_q m_q \left[ \left( \frac{k_{F_q}^2}{m_q^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_d}^2}{m_d^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right] + \frac{m_e^3}{6\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]. \quad (226)$$

## 5.4 Vínculos

Como feito nos Capítulos 3 e 4, é preciso impor condições de equilíbrio com relação às interações fracas. No caso da matéria de quarks de três sabores, os processos relevantes

são os processos leptônicos (SCHMITT, 2010),

$$\begin{aligned}
 d &\rightarrow u + e + \bar{\nu}_e \\
 u + e &\rightarrow d + \nu_e \\
 s &\rightarrow u + e + \bar{\nu}_e \\
 u + e &\rightarrow s + \nu_e,
 \end{aligned} \tag{227}$$

e o processo não leptônico

$$s + u \leftrightarrow d + u. \tag{228}$$

De posse dessas informações, é possível relacionar os potenciais químicos das partículas presentes no sistema,

$$\begin{aligned}
 \mu_d &= \mu_e + \mu_u \\
 \mu_s &= \mu_e + \mu_u,
 \end{aligned} \tag{229}$$

que é equivalente a,

$$\begin{aligned}
 E_{F_d} &= E_{F_e} + E_{F_u} \\
 E_{F_s} &= E_{F_u} + E_{F_e},
 \end{aligned} \tag{230}$$

ou até mesmo

$$\begin{aligned}
 \sqrt{k_{F_d} + m_d^2} &= \sqrt{k_{F_e} + m_e^2} + \sqrt{k_{F_u} + m_u^2}, \\
 \sqrt{k_{F_s} + m_s^2} &= \sqrt{k_{F_u} + m_u^2} + \sqrt{k_{F_e} + m_e^2}.
 \end{aligned} \tag{231}$$

Por outro lado, temos o vínculo de carga elétrica nula,

$$\sum_q q_d \rho_q - \rho_e = 0. \tag{232}$$

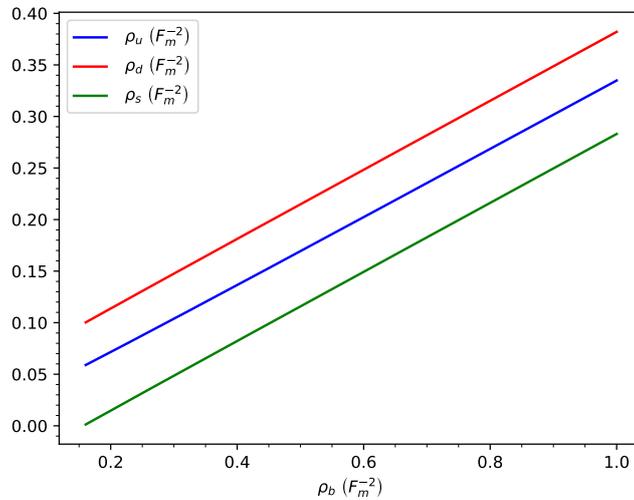
Usando que,

$$q_u = \frac{2}{3} \text{ e } q_d = q_s = -\frac{1}{3}, \tag{233}$$

o vínculo de carga elétrica nula é então,

$$\frac{2}{3}\rho_u - \frac{1}{3}\rho_d - \frac{1}{3}\rho_s - \rho_e = 0 \tag{234}$$

Gráfico 25 - Densidades dos quarks



Legenda: Dependência da densidade dos diferentes tipos de quarks referente a densidade bariônica em 2D à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

Por último existe o vínculo que relaciona a densidade de número de quarks com a densidade bariônica (222),

$$\rho_b = \rho_u + \rho_d + \rho_s. \quad (235)$$

Resolvendo o sistema de equações (231), (234) e (235), é possível obter a população dos três diferentes tipos de quarks do sistema como função da densidade bariônica. Os resultados são apresentados no Gráfico 25. O vínculo que impõe o equilíbrio químico resulta em que a densidade mínima  $\rho_b^{min}$  para que esse tipo de sistema exista seja aproximadamente  $\rho_b^{min} = 0,16 \text{ Fm}^{-2}$ .

## 5.5 Equação de estado

Devido à aplicação nas cascas auto-gravitantes do Capítulo 1, será necessário transformar as equações , (224) e (226) em equações adimensionais. Para isso, é introduzida a constante,

$$\xi = \frac{m_s c^2}{\lambda_s^2}, \quad (236)$$

que tem dimensões de densidade de energia, e onde  $\lambda_s$  é o comprimento de onda Cômpton do quark  $s$ . Utilizando a mesma técnica utilizada para dimensionalizar o modelo de Walecka presente na Seção (3.11), as expressões para a densidade de energia e pressão referente ao gás de quarks livres são:

$$\epsilon = \frac{c^4}{\hbar^2 \pi} \sum_q m_q^3 \left[ \left( \frac{p_{F_q}^2}{(m_q c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] + \frac{m_e^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \quad (237)$$

e

$$P = \frac{c^4}{2\pi \hbar^2} \sum_q m_q^3 \left[ \left( \frac{p_{F_q}^2}{(m_q c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_q}^2}{(m_q c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right] + \frac{m_e^3 c^4}{6\pi \hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right], \quad (238)$$

com  $q = u, d, s$ . Em função da constante  $\xi$  que foi definida em (236),

$$\epsilon = \frac{\xi}{\pi} \sum_q \frac{m_q^3}{m_s^3} \left[ \left( \frac{p_{F_q}^2}{(m_q c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] + \frac{\xi m_e^3}{3\pi m_s^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \quad (239)$$

e

$$P = \frac{\xi}{2\pi} \sum_q \frac{m_q^3}{m_s^3} \left[ \left( \frac{p_{F_q}^2}{(m_q c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_q}^2}{(m_q c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right] + \frac{\xi m_e^3}{6\pi m_s^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]. \quad (240)$$

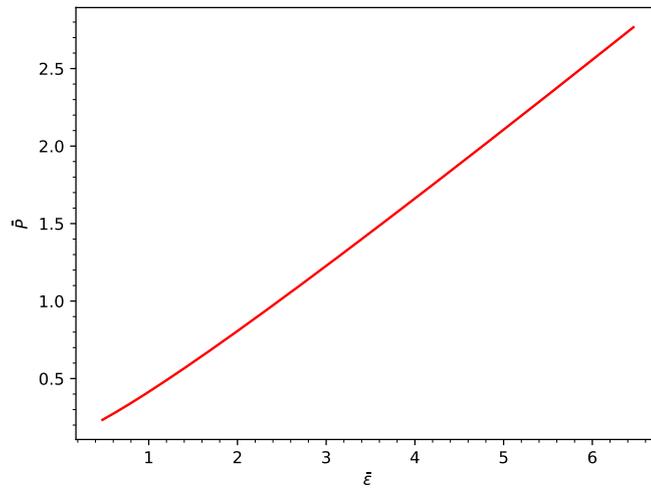
É necessário utilizar as seguintes transformações com o fim de transformar as expressões de densidade de energia e pressão em expressões adimensionais:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\xi} \\ \bar{P} = \frac{P}{\xi}. \quad (241)$$

Logo as expressões para a densidade de energia e pressão adimensionais referentes ao modelo de quarks livres são,

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{\pi} \sum_q \frac{m_q^3}{m_s^3} \left[ \left( \frac{p_{F_q}^2}{(m_q c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] + \frac{m_e^3}{3\pi m_s^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \quad (242)$$

Gráfico 26 - Equação de estado



Legenda: Equação de estado adimensional para o gás de quarks em 2D à  $T = 0$ .

Fonte: O autor, 2020.

e

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \sum_q \frac{m_q^3}{m_s^3} \left[ \left( \frac{p_{F_q}^2}{(m_q c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_q}^2}{(m_q c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right] + \frac{m_e^3}{6\pi m_s^3} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \left( \frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]. \quad (243)$$

A equação de estado resultante é apresentada no Gráfico 26.

## 6 RESULTADOS

Neste Capítulo serão apresentadas as curvas  $m \times R$  para as cascas esféricas auto-gravitantes do Capítulo 1, usando as equações de estado dos Capítulos 2, 3, 4 e 5. Uma vez que sempre estaremos nos referindo às configurações de equilíbrio, abandonaremos o subíndice 0 utilizado no Capítulo 1. Assim  $P \equiv P_0$ ,  $\epsilon \equiv \epsilon_0$ ,  $R \equiv R_0$  e  $m \equiv m_0$  no restante desta Dissertação. Será conveniente trabalhar com quantidades adimensionais usando uma constante  $\alpha$  com  $[\alpha] = 1/L$  (em unidades naturais), através das seguintes transformações:

$$\begin{aligned} P &= \alpha \bar{P} \\ \epsilon &= \alpha \bar{\epsilon} \\ \bar{R} &= \alpha R \\ \bar{m} &= \alpha m, \end{aligned} \tag{244}$$

onde  $\bar{P}$ ,  $\bar{\epsilon}$ ,  $\bar{R}$  e  $\bar{m}$  são quantidades sem dimensões. Para as EOS dos Capítulos 2, 3 e 4 é usado  $\alpha = m_n^3 c^4 / \hbar^2 \equiv m_n c^2 / \lambda_n^2$ , onde  $\lambda_n = h / m_n c$  é o comprimento de onda Compton dos nêutrons, ao passo que para a EOS do Capítulo 5 é substituído  $m_n$  por  $m_s$  no  $\alpha$ , onde  $m_s$  é a massa do quark  $s$ . As equações de equilíbrio hidrostático das cascas auto-gravitantes (9) e (11) serão:

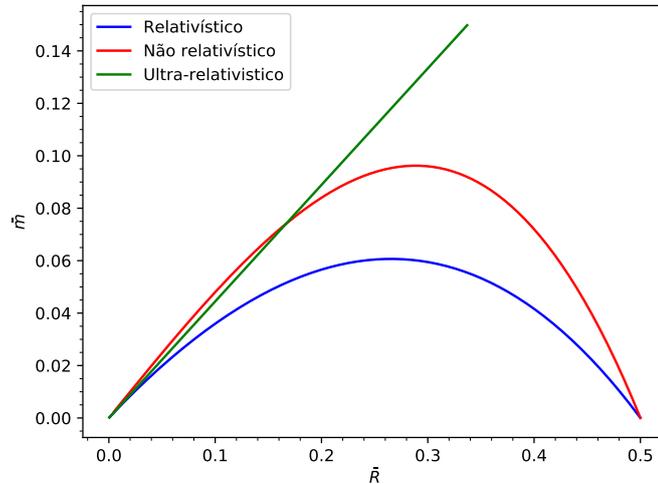
$$\bar{R}(\bar{P}, \bar{\epsilon}) = \frac{\bar{P}}{\pi \bar{\epsilon} (\bar{\epsilon} + 4\bar{P})}, \tag{245}$$

$$\bar{m}(\bar{R}, \bar{\epsilon}) = 4\pi \bar{R}^2 \bar{\epsilon} (1 - 2\pi \bar{R} \bar{\epsilon}), \tag{246}$$

onde  $\bar{m}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{P}$  e  $\bar{\epsilon}$  são a massa ADM, o raio, a pressão e a densidade de energia da casca respectivamente.

### 6.1 Resultados para o gás de nêutrons

Da equação de estado do gás de nêutrons (44) e (45), juntamente com as expressões (245) e (246), é possível encontrar as configurações de equilíbrio referentes a uma casca formada apenas por nêutrons. A Eq. (20) permitirá determinar quais configurações da casca serão estáveis ou instáveis frente a uma perturbação radial, sendo que  $\omega_0^2 > 0$  caracteriza as configurações estáveis.

Gráfico 27 -  $\bar{m} \times \bar{R}$ 

Legenda: Curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  para as três diferentes equações de estado referente ao gás de nêutrons.

Fonte: O autor, 2020.

### 6.1.1 Curvas $\bar{m} \times \bar{R}$

Ao utilizar as expressões para a densidade de energia (44) e pressão (45) referentes ao gás de nêutrons, nas expressões de equilíbrio hidrostático (245) e (246), será possível encontrar as curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$ , apresentadas no Gráfico 27. Pode-se ver no Gráfico que as curvas correspondentes às EOS relativística e não-relativística apresentam um extremo ao passo que a EOS ultra-relativística apresenta um comportamento monotônico crescente, sem extremo. As EOS relativística e não-relativística convergem para os valores de  $\bar{m} = 0$  e  $\bar{R} = 0,5$  quando  $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$  (lado direito do gráfico), o que significa que mesmo a densidades de energias baixas, as EOSs fornecem uma pressão capaz de sustentar uma casca de diâmetro finito. Já para  $\bar{\epsilon} \rightarrow \infty$  (lado esquerdo do Gráfico) todas EOSs apresentam  $\bar{m} \rightarrow 0$  e  $\bar{R} \rightarrow 0$ , o que significa que neste regime, a gravitação vence as forças de pressão e nenhuma casca é possível. A EOS não-relativística é mais dura do que a EOS relativística, fornecendo uma pressão maior para um mesmo valor de  $\epsilon$ . Por este motivo, a curva da EOS não-relativística fica por cima da curva relativística, produzindo estruturas mais massivas do que a EOS relativística para um mesmo valor de  $\bar{R}$ .

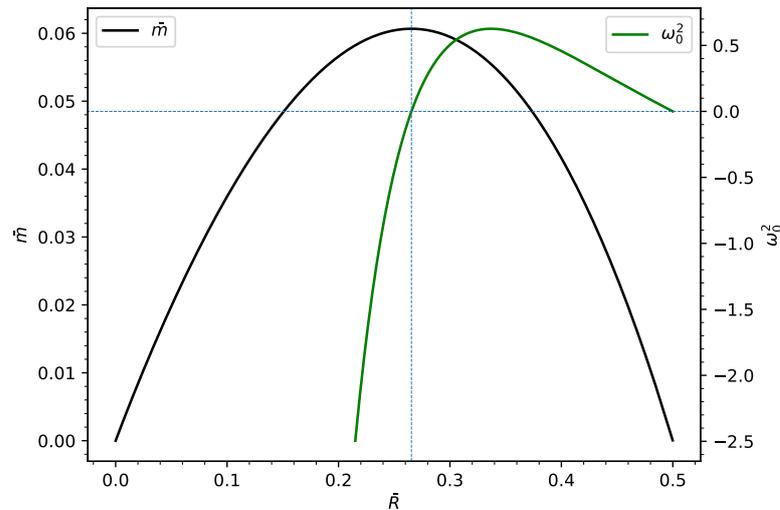
A curva correspondente à EOS relativística atinge seu extremo nos valores

$$\bar{R} = 0.2644$$

$$\bar{m} = 0.0606.$$

Então, para saber os valores reais da massa e raio da casca correspondentes, deve-se voltar

Gráfico 28 - Estabilidade dinâmica



Fonte: O autor, 2020.

Legenda: Estabilidade dinâmica das cascas relativísticas do gás de nêutrons. As configurações à direita do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  são estáveis, e as configurações à esquerda são instáveis.

para as variáveis dimensionais utilizando as transformações (244) e as equivalências e valor de  $\alpha$  calculado no Anexo F. Sendo assim, o extremo do Gráfico 27 referente ao gás relativístico de nêutrons terá

$$R = 9,380 \times 10^{18} \text{ km} = 18,76 R_{VL} \quad (247)$$

$$m = 2,892 \times 10^{48} \text{ kg} = 3,044 \times 10^6 m_{VL}, \quad (248)$$

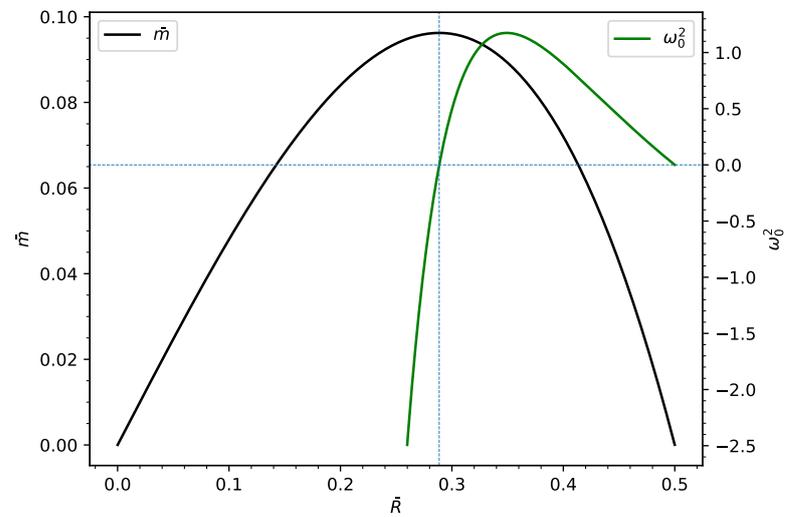
onde  $R_{VL}$  e  $m_{VL}$  são o raio e a massa de Via Láctea, respectivamente.

### 6.1.2 Estabilidade dinâmica

A estabilidade dinâmica das cascas esféricas auto-gravitantes estudadas nesta Dissertação, está diretamente ligada ao sinal do  $\omega_0^2$  introduzido no Capítulo 1, na Eq. (20), sendo que as configurações estáveis correspondem a  $\omega_0^2 > 0$ , e as instáveis correspondem a  $\omega_0^2 < 0$ .

Nos Gráficos (29), (28) e (30) se apresentam as curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$  juntamente com a curva de  $\omega_0^2 \times \bar{R}$  para cada uma das EOS correspondentes ao gás de nêutrons. Nos casos das EOS não-relativística e relativística constata-se, acompanhando a troca de sinal da curva  $\omega_0^2 \times \bar{R}$ , que as configurações à direita do máximo são estáveis e as configurações à esquerda

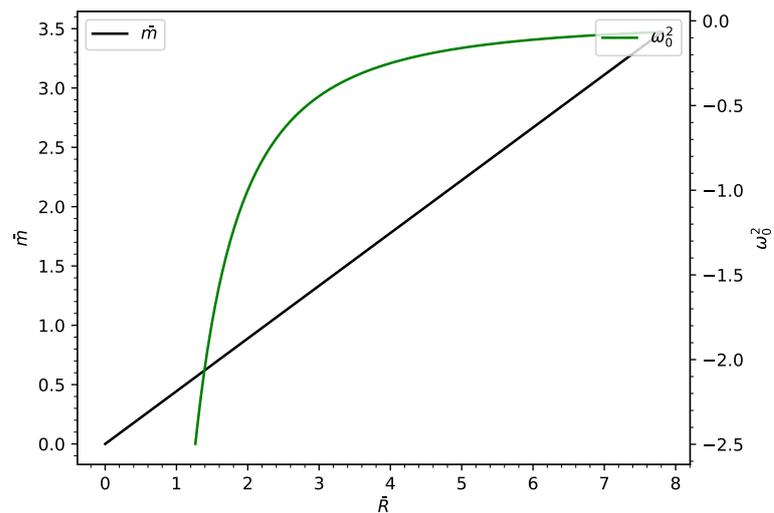
Gráfico 29 - Estabilidade dinâmica



Legenda: Estabilidade dinâmica das cascas não-relativísticas do gás de nêutrons. As configurações à direita do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  são estáveis, e as configurações à esquerda são instáveis.

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 30 - Estabilidade dinâmica



Legenda: Estabilidade dinâmica das cascas ultra-relativísticas do gás de nêutrons. Todas as possíveis configurações são instáveis.

Fonte: O autor, 2020.

do máximo são instáveis. Assim, o ponto de mudança de estabilidade corresponde ao máximo das curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$ . Também pode ser visto que o ponto de mudança de estabilidade na EOS não-relativística está deslocado para a direita em relação à EOS relativística. Já as configurações correspondentes à EOS ultra-relativística são todas instáveis, uma vez que  $\omega_0^2 < 0$  para todas elas.

## 6.2 Resultados para o gás *npe*

Aplicando as equações que dão origem às EOS que se referem ao gás *npe* (77) e (76) nas equações (245) e (246) é possível encontrar as configurações de equilíbrio para uma casca formada de nêutrons, prótons e elétrons. A equação (20) possibilitará encontrar quais cascas são estáveis e quais são instáveis frente a uma perturbação radial, visto que  $\omega_0^2 > 0$  caracteriza as cascas estáveis.

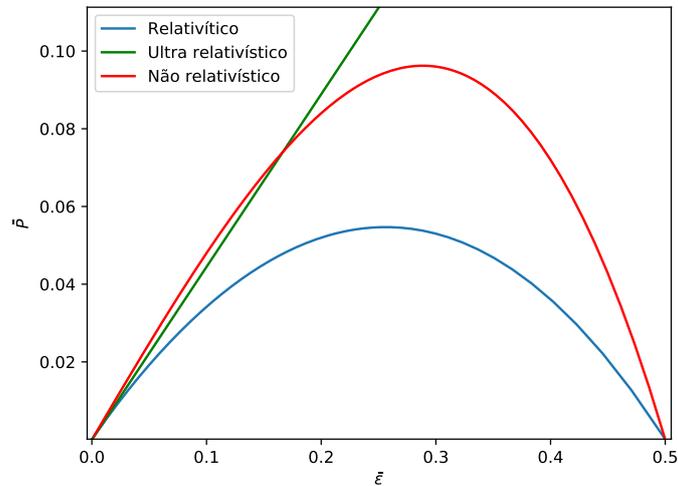
### 6.2.1 Curvas $\bar{m} \times \bar{R}$

Utilizando as equações para a densidade de energia (76) e pressão (77) juntamente com as equações de equilíbrio (245) e (246) é possível encontrar as curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$ , apresentadas no Gráfico 31. Mostra-se que as curvas que correspondem às EOSs relativística e não-relativística geram curvas que possuem um máximo positivo e a EOS ultra-relativística gera uma curva com comportamento de uma reta crescente, sem extremo. Nas EOSs relativística e não-relativística quando a  $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$  (limites de baixas densidades) ela irá convergir para  $\bar{R} = 0,5$  e  $\bar{m} = 0$ , levando a concluir que mesmo em baixas densidades essas EOSs conseguem produzir uma pressão suficiente para equilibrar as cascas com diâmetro finito. Já para  $\bar{\epsilon} \rightarrow \infty$  (limites de altas densidades) o campo gravitacional se torna muito intenso ao passo que a pressão não consegue manter o equilíbrio, levando as cascas a convergirem para  $\bar{R} = 0$  e  $\bar{m} = 0$ . Assim como no gás de nêutrons, a EOS não-relativística fornece uma pressão maior do que a EOS relativística para um mesmo valor de  $\bar{\epsilon}$ , por esse motivo a EOS não-relativística produz uma curva mais alta que a relativística, produzindo assim, uma estrutura mais massiva para um mesmo valor de  $\bar{R}$ . A curva da EOS relativística tem seu extremo com os valores,

$$\bar{R} = 0,2472$$

$$\bar{m} = 0,0556.$$

Para saber os valores reais da massa e raio referente a essa casca, é necessário retornar as variáveis dimensionais mediante as transformações (244) e utilizar os respectivos valores

Gráfico 31 -  $\bar{m} \times \bar{R}$ 

Legenda: Ilustração das curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$  para as diferentes EOS referentes ao gás de *npe*.

Fonte: O autor, 2020.

de  $\alpha$  que pode ser encontrado no Anexo F. Utilizando essas informações, o extremo gerado pela EOS relativística representada no Gráfico 31 será de,

$$R = 8,768 \times 10^{18} \text{ km} = 17,53 R_{VL} \quad (249)$$

$$m = 2,653 \times 10^{48} \text{ kg} = 2,789 \times 10^6 m_{VL}, \quad (250)$$

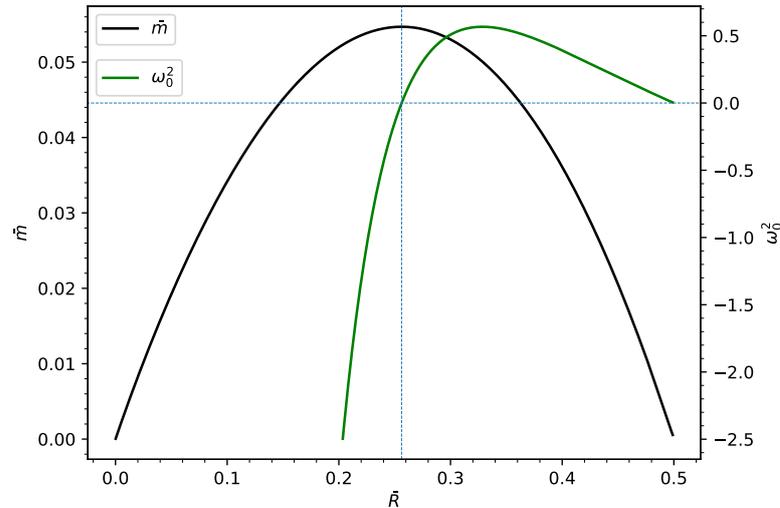
onde  $R_{VL}$  e  $m_{VL}$  são o raio e a massa de Via Láctea, respectivamente.

### 6.2.2 Estabilidade dinâmica

A condição de estabilidade dinâmica das cascas esféricas auto-gravitantes estão intimamente ligadas ao sinal de  $\omega_0^2$  introduzido no Capítulo 1, na Eq. (20), onde as configurações estáveis condiz a  $\omega_0^2 > 0$  e as instáveis,  $\omega_0^2 < 0$ .

São apresentados nos Gráficos 32, 33 e 34 as curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$  juntamente com as curvas de  $\omega_0^2 \times \bar{R}$  para as três EOS referentes ao gás *npe* estudadas nessa Dissertação. Para as EOSs relativística e não-relativística se percebe, acompanhando a troca de sinal na curva  $\omega_0^2 \times \bar{R}$ , que as configurações à direita do máximo são estáveis e as configurações à esquerda do máximo são instáveis. Também é notório que as configurações de equilíbrio correspondentes a EOS não-relativística está deslocada a direita em relação a EOS relativística. Já as configurações referentes a EOS ultra-relativística são todas instáveis, visto

Gráfico 32 - Estabilidade dinâmica



Legenda: Estabilidade dinâmica das cascas relativísticas referente ao gás  $npe$ . As configurações à direita do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  são estáveis, e as configurações à esquerda são instáveis.

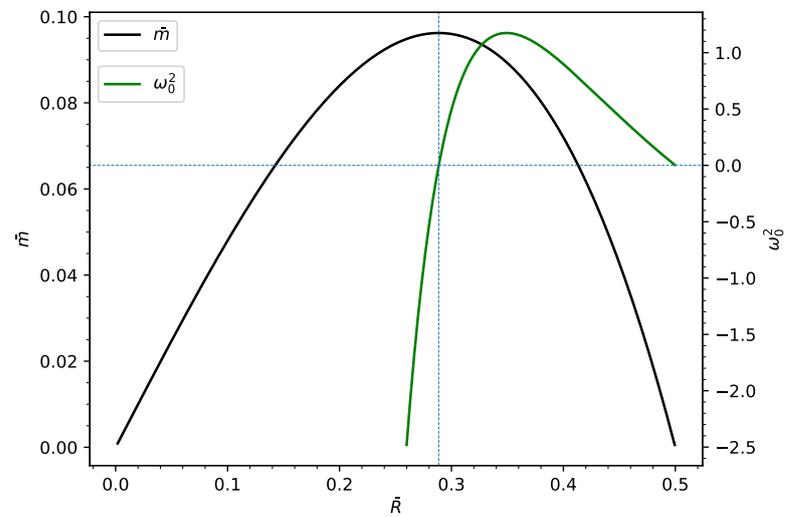
Fonte: O autor, 2020.

que  $\omega_0^2$  é sempre negativo.

### 6.3 Resultados para o modelo de Walecka

No modelo de Walecka, é possível ver que a pressão (145) e a densidade de energia (142) dependem das interações mesônicas. Como dito no início do Capítulo 3, o méson escalar  $\sigma$  representa as atrações de longas distâncias da interação forte, logo quanto maior for o campo, menor será a pressão, detalhe que pode ser visto nitidamente ao reparar o sinal negativo a frente do setor escalar da equação 145. Já o méson vetorial  $\omega$ , que representa a repulsão a curtas distâncias, irá contribuir para o aumento da pressão, ou seja, quanto maior o valor do campo vetorial, maior será a pressão, fato que também pode ser notado através do sinal positivo do setor vetorial na equação (145). Os dois campos estão acompanhados de constantes de acoplamento que irão afetar diretamente a intensidade de cada força, gerando assim uma grande influência sobre a equação de estado, que por sua vez terá impacto nos resultados finais nas cascas auto-gravitantes. O método utilizado para encontrar essas constantes de acoplamento, que se baseou em (DELFINO; NUNES; MARTINS, abr.1998), levará a uma equação de estado que a baixas densidades bariônicas fará com que a pressão caia mais rapidamente que no caso do gás de nêutrons,

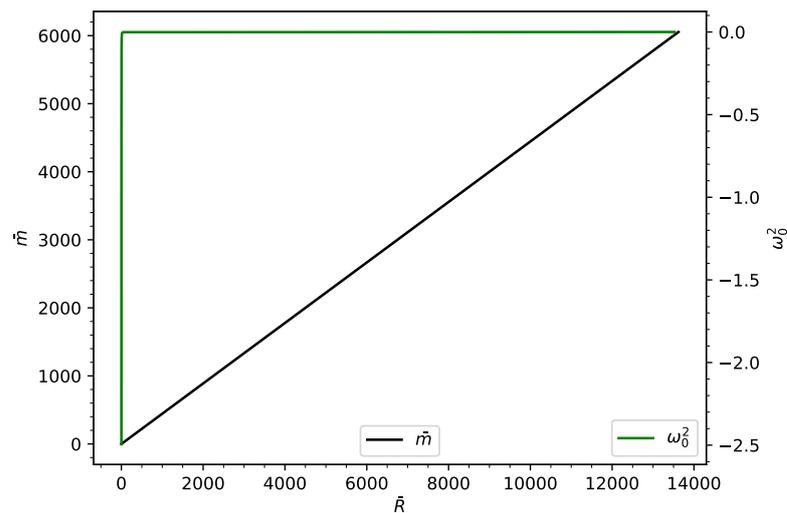
Gráfico 33 - Estabilidade dinâmica



Legenda: Estabilidade dinâmica das cascas não-relativísticas referente ao gás *npe*. As configurações à direita do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  são estáveis, e as configurações à esquerda são instáveis.

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 34 - Estabilidade dinâmica



Legenda: Estabilidade dinâmica das cascas ultra-relativísticas referente ao gás *npe*. Todas as possíveis configurações são instáveis.

Fonte: O autor, 2020.

devido à presença do campo  $\sigma$ , produzindo uma pressão negativa<sup>4</sup>, o que irá gerar um raio negativo para a casca, que obviamente não pode existir. Logo só será possível a existência de cascas auto-gravitante após uma densidade bariônica mínima, dando origem a uma densidade de corte  $\rho_c$ . Por fim, a equação (20) possibilitará estudar a estabilidade frente a perturbações radiais, visto que  $\omega_0^2 > 0$  define as cascas estáveis.

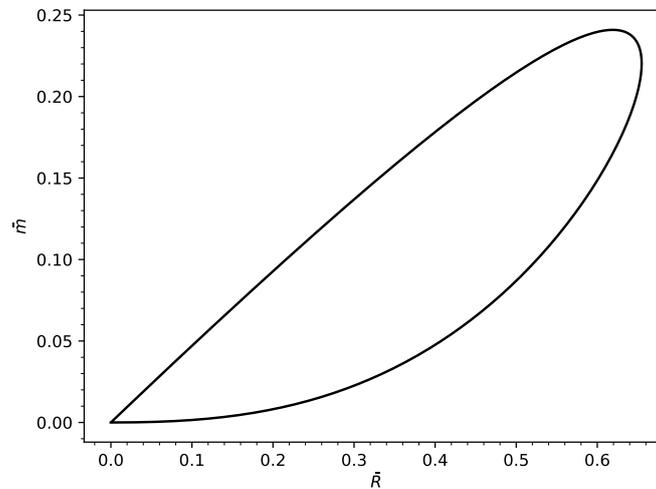
### 6.3.1 Curvas $\bar{m} \times \bar{R}$

A curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  para o modelo de Walecka se mostra no Gráfico 35. O primeiro que se observa na curva é a presença de um máximo no ponto  $\bar{R} = 0,6183$  e  $\bar{m} = 0,2409$ . A baixas densidades de energia a pressão da EOS cai mais rapidamente que no caso do gás de nêutrons, e isso faz com que diminuindo a densidade e partindo do máximo para a direita, apareça um ponto de retorno e faz com que a curva volte para o ponto  $\bar{R} = \bar{m} = 0$ . Isto significa que para a densidades de energia baixas, a pressão não é alta o bastante como para sustentar cascas de tamanho finito na presença do campo gravitacional da casca, como no caso do gás de nêutrons. Já o comportamento no limite de altas densidades é o mesmo que no caso do gás de nêutrons, onde não existem cascas de tamanho finito devido ao alto valor do campo gravitacional. O ponto de retorno no Gráfico 35 é devido à presença do campo escalar  $\sigma$  reduzindo a pressão  $P$  na EOS. Irá aparecer uma densidade de corte de  $\rho_c \approx 0,17 \text{ Fm}^{-2}$ , que é exatamente o momento em que  $\bar{P} = 0$ . Mas para essa densidade de bárions, haverá uma densidade de energia  $\bar{\epsilon}_c > 0$  que gerará um campo gravitacional e como não há pressão para equilibrar o campo gravitacional, será impossível que a casca exista. Então as cascas auto-gravitantes para as constantes de acoplamento citadas em (157), só serão possíveis para uma densidade de partículas que são maiores que a densidade de corte  $\rho_c$ . A presença do ponto de retorno no Gráfico 35 faz com que a curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  feche em si mesma. Dessa forma  $\bar{m}(\bar{R})$  resulta bi valuada, com dois possíveis valores para a massa,  $\bar{m}_1 < \bar{m}_2$ , para um dado valor de  $\bar{R}$ , salvo no ponto de retorno, onde só se tem um valor para a massa).

Como dito no início desta Seção, o Gráfico 35 irá depender diretamente das constantes de acoplamento (157). Então, se mudarmos a constante de acoplamento  $g_\omega$  de modo a verificar a relação  $\frac{g_\omega}{m_\omega} > \frac{g_\sigma}{m_\sigma}$ , a pressão negativa a baixas densidades desaparece, a curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  não mais resulta fechada, e o irá se aproximar do comportamento do Gráfico 27 do gás de  $n$  e do Gráfico 31, do gás  $npe$ , como se ilustra no Gráfico 36, onde no limite  $\epsilon \rightarrow 0$  temos  $\bar{R} \approx 0,6655$  e  $\bar{m} \approx 0$ . Essa combinação de constantes não é comum na literatura e se apresenta aqui apenas como exemplo didático da influência dos campos

---

<sup>4</sup> A pressão negativa à baixas densidades pode ser conferida em detalhe no Gráfico 18.

Gráfico 35 -  $\bar{m} \times \bar{R}$ 

Legenda: Curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  para o modelo de Walecka.

Fonte: O autor, 2020.

mesônicos.

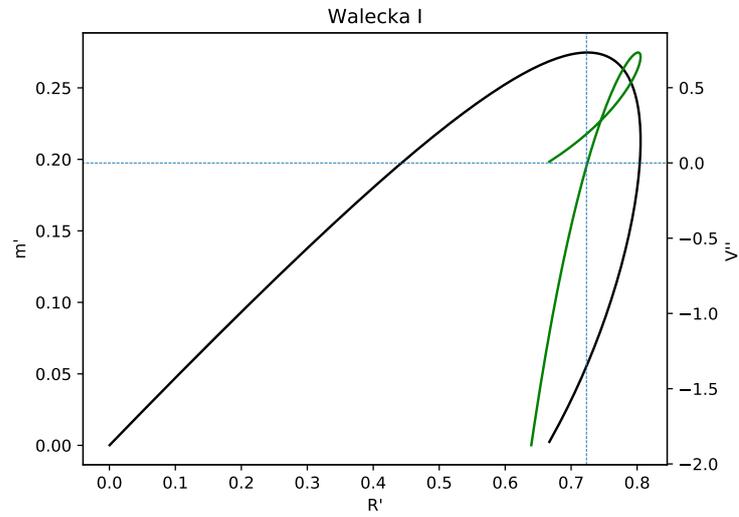
### 6.3.2 Estabilidade dinâmica

No Gráfico 37 se apresenta a curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  juntamente com a curva  $\omega_0^2 \times \bar{R}$ , que determina a estabilidade dinâmica das configurações de equilíbrio. Se observa que a curva  $\omega_0^2 \times \bar{R}$  muda seu sinal no máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ , sendo que as configurações que se iniciam à direita do máximo, mantém  $\omega_0^2 > 0$ , mesmo após o ponto de retorno da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ . Assim, todas as configurações que se iniciam à direita do máximo são estáveis, ao passo que as configurações à esquerda do máximo são instáveis, uma vez que para elas  $\omega_0^2 < 0$ . O máximo então é o ponto de mudança de estabilidade.

Foi observado na Subseção 6.3.1, que  $\bar{m}(\bar{R})$  é bi-valorada, e que para um dado valor de  $\bar{R}$  existem dois valores possíveis de massa  $\bar{m}_1 < \bar{m}_2$ . A partir do Gráfico 37 se observa que, no caso em que  $\bar{R}$  se encontre à esquerda do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ ,  $\bar{m}_1$  corresponde a uma configuração estável, ao passo que  $\bar{m}_2$  corresponde a uma configuração instável. Já no caso em que  $\bar{R}$  esteja à direita do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ ,  $\bar{m}_1$  e  $\bar{m}_2$  correspondem ambas a configurações estáveis.

A situação se repete no Gráfico 38, onde  $\frac{g_\omega}{m_\omega} > \frac{g_\sigma}{m_\sigma}$ .

Gráfico 36 -  $\bar{m} \times \bar{R}$

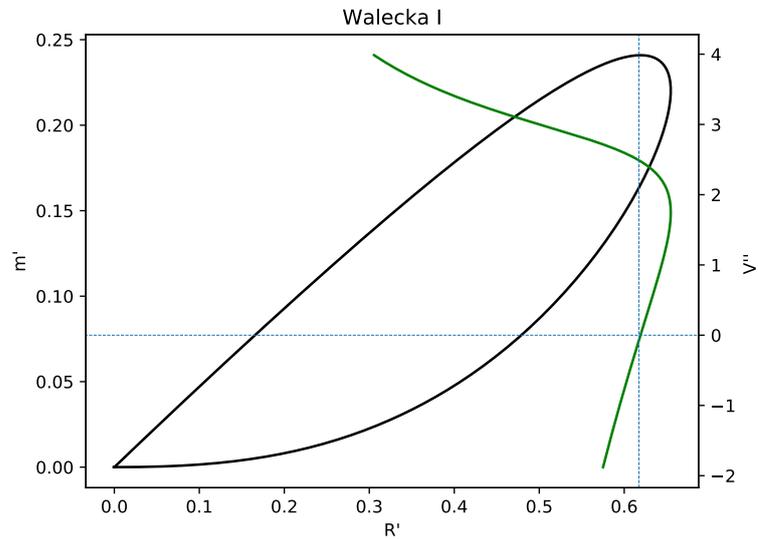


Legenda: Curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  para o modelo de Walecka com

$$\frac{g_\omega}{m_\omega} \gg \frac{g_\sigma}{m_\sigma}.$$

Fonte: O autor, 2020.

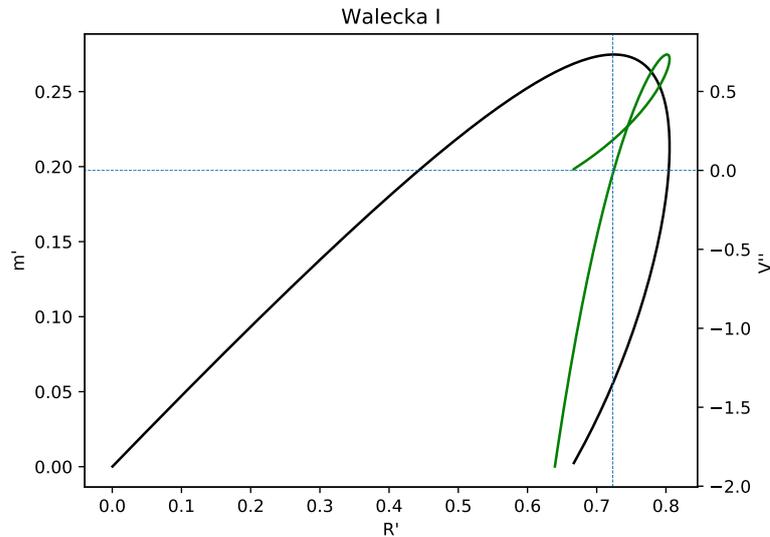
Gráfico 37 - Estabilidade dinâmica



Legenda: Estabilidade para o modelo de Walecka. A curva  $\omega_0^2 \times \bar{R}$  muda de sinal no máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ . Configurações que se iniciam à direita do máximo são estáveis, e configurações à esquerda são instáveis.

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 38 - Estabilidade dinâmica



Legenda: Estabilidade para o modelo de Walecka com  $\frac{g_\omega}{m_\omega} > \frac{g_\sigma}{m_\sigma}$ .  
 A curva  $\omega_0^2 \times \bar{R}$  muda de sinal no máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ . Configurações que se iniciam à direita do máximo são estáveis, e configurações à esquerda são instáveis.

Fonte: O autor, 2020.

#### 6.4 Resultados para o modelo de Walecka não linear

A equação de estado do modelo de Walecka não linear é acrescida de mais dois termos mesônicos, quando comparada com a do modelo de Walecka, que podem ser conferidos nas Eqs.(218) e (217). Como explicado anteriormente, os termos ligados ao méson  $\sigma$ , irão contribuir negativamente para a pressão. Desta forma, seus novos termos ligados a auto-interação, também irão contribuir para diminuir a pressão. Em contrapartida, o modelo de Walecka não linear conta com a adição de mais um méson vetorial-isovetorial ( $\rho$ ) que irá contribuir para aumentar a pressão. Então mais uma vez, ao governar as intensidades relativas dos campos mesônicos, as constantes de acoplamento terão uma importância primordial em todos os resultados, seja na equação de estado apresentada no Capítulo 3 ou nos diagramas  $\bar{m} \times \bar{R}$  e de estabilidade apresentados nesse Capítulo.

Como foram encontrados três conjuntos possíveis de constantes de acoplamento, mostrados na Tabela 2, serão apresentados três diagramas  $\bar{m} \times \bar{R}$ , com suas respectivas curvas de estabilidade  $\omega_0^2 \times \bar{R}$ . Cada conjunto de constantes irá definir uma densidade de corte diferente (densidade para a qual  $\bar{P} = 0$  e  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_c > 0$ ). Os conjuntos de constantes de acoplamento e densidades de corte são apresentados na Tabela 3.

Por fim, a equação (20) possibilitará estudar a estabilidade frente a perturbações

Tabela 3 - Tabela de constantes de acoplamento e densidade de corte para o modelo de Walecka não linear.

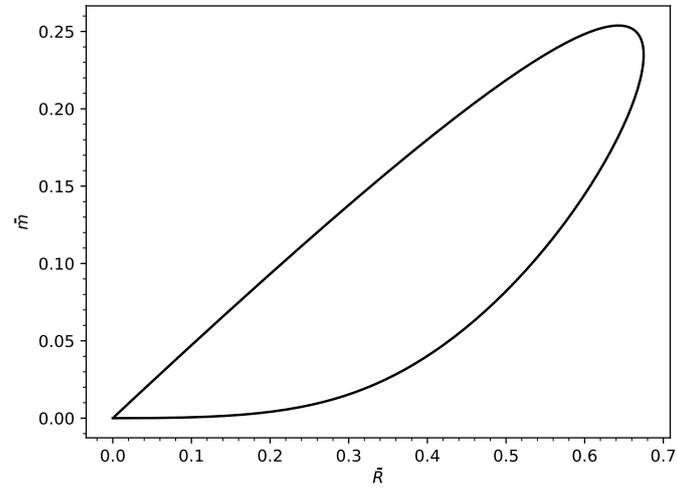
	$\frac{M^*}{M}$	$\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2$	$\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2$	$\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2$	$b$	$h$	$\rho_c$	$\bar{\epsilon}_c$
		Fm	Fm	Fm	$\times 100$	$\times 100$	$\text{Fm}^{-2}$	$\times 100$
Conjunto 1	0,5440	3,886	2,933	0,988	2,610	-4,986	0,0435	0,192
Conjunto 2	0,5372	2,535	1,567	0,955	0,631	3,979	0,0575	0,411
Conjunto 3	0,5735	4,091	2,227	1,131	0,610	-1,980	0,5595	2,213

Fonte: O autor, 2020.

radiais, visto que  $\omega_0^2 > 0$  define as cascas estáveis.

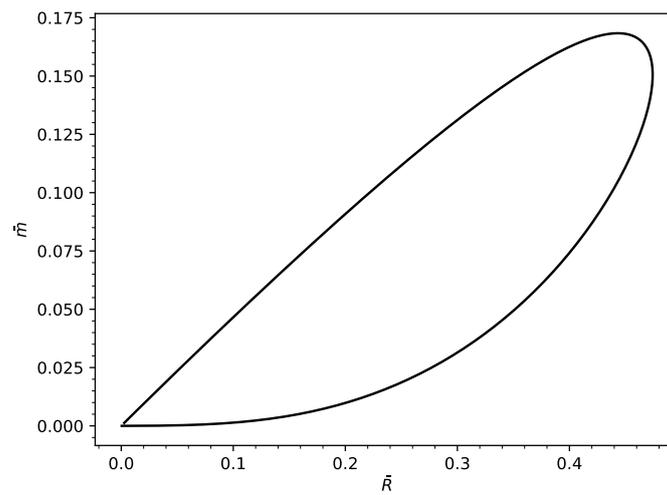
#### 6.4.1 Curvas $\bar{m} \times \bar{R}$

De forma qualitativa, as curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$  no modelo de Walecka não linear são as mesmas que as do modelo de Walecka, e são apresentadas nos Gráficos 39, 40 e 41 para os três conjuntos de constantes de acoplamento da Tabela 3. Se observa que todas as curvas são fechadas e apresentam um máximo nos pontos  $\bar{R} = 0.6425$  e  $\bar{m} = 0.2538$  para o Conjunto 1 de constantes de acoplamento,  $\bar{R} = 0.4413$  e  $\bar{m} = 0.1683$  para o Conjunto 2 e  $\bar{R} = 0.6162$  e  $\bar{m} = 0.2410$  e para o Conjunto 3, que são da ordem dos valores do máximo encontrado para o modelo de Walecka. A baixas densidades de energia a pressão da EOS cai rapidamente, e isso faz com que baixando a densidade e partindo do máximo para a direita, apareça um ponto de retorno e faz com que a curva volte para o ponto  $\bar{R} = \bar{m} = 0$ . Isto significa que para baixas densidades de energia, a pressão não é alta o bastante como para sustentar cascas de tamanho finito na presença do campo gravitacional da casca. Como acontece com o modelo de Walecka, Seção 3, irá aparecer uma densidade de corte  $\rho_c$ , que é exatamente o momento em que  $\bar{P} = 0$ . Mas para essa densidade de bárions, haverá uma densidade de energia  $\bar{\epsilon}_c > 0$  que gerará um campo gravitacional e como não há pressão para equilibrar o campo gravitacional, será impossível que a casca exista. Então as cascas auto-gravitantes só serão possíveis para uma densidade de partículas que é maior que a densidade de corte  $\rho_c$  (Tabela 3). Já no limite de altas densidades não existem cascas de tamanho finito devido ao alto valor do campo gravitacional. Este comportamento faz com que a curva feche, de forma que a relação  $\bar{m}(\bar{R})$  seja bi-valuada, com dois possíveis valores para a massa,  $\bar{m}_1 < \bar{m}_2$ , para um dado valor de  $\bar{R}$ , salvo no ponto de retorno, onde só se tem um valor para a massa.

Gráfico 39 -  $\bar{m} \times \bar{R}$ 

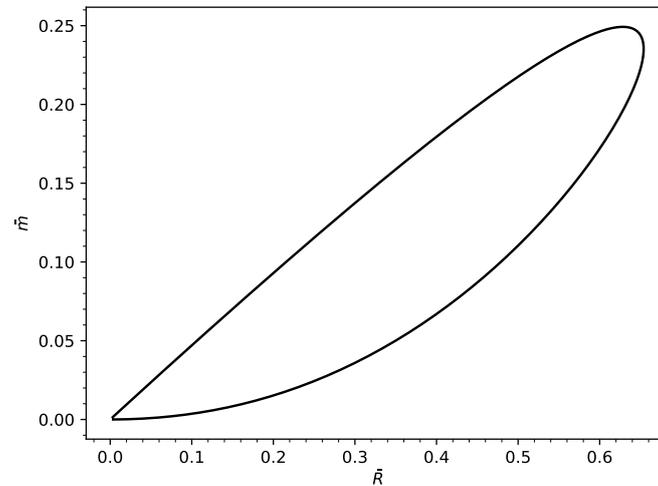
Legenda: Curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  para o modelo de Walecka não linear, utilizando o Conjunto 1 de constantes de acoplamento.

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 40 -  $\bar{m} \times \bar{R}$ 

Legenda: Curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  para o modelo de Walecka não linear, utilizando o Conjunto 2 de constantes de acoplamento.

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 41 -  $\bar{m} \times \bar{R}$ 

Legenda: Curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  para o modelo de Walecka não linear, utilizando o Conjunto 3 de constantes de acoplamento.

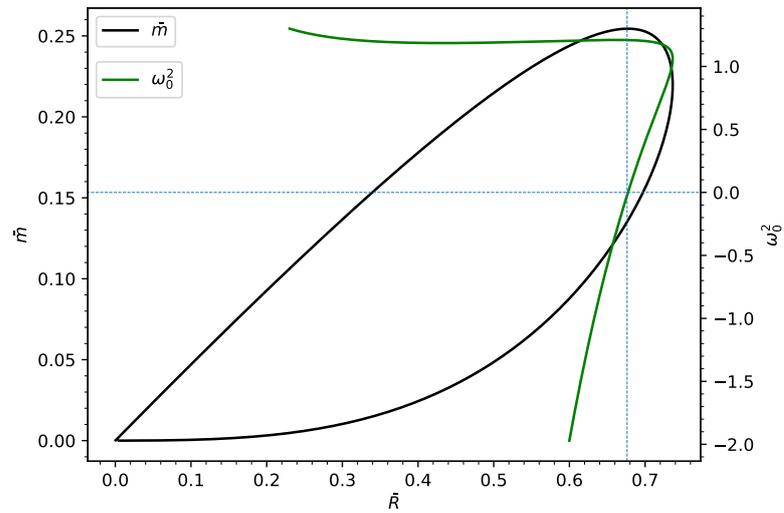
Fonte: O autor, 2020.

## 6.5 Estabilidade dinâmica

Nos Gráficos 42, 43 e 44 se apresentam as curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$  juntamente com a correspondente curva  $\omega_0^2 \times \bar{R}$ , que determina a estabilidade dinâmica das configurações de equilíbrio, para os três conjuntos de constantes de acoplamento da Tabela 3. Analogamente ao caso do modelo de Walecka, se observa que as curvas  $\omega_0^2 \times \bar{R}$  mudam seu sinal no máximo das curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$ , sendo que as configurações que se iniciam à direita do máximo, têm  $\omega_0^2 > 0$ , mesmo após o ponto de retorno da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ . Assim, todas as configurações que se iniciam à direita do máximo são estáveis, ao passo que as configurações à esquerda do máximo são instáveis, uma vez que para elas  $\omega_0^2 < 0$ . O máximo então é o ponto de mudança de estabilidade.

Foi observado na Subseção 6.4.1, que  $\bar{m}(\bar{R})$  é bi-valorada para os três conjuntos de constantes de acoplamento estudados, e que para um dado valor de  $\bar{R}$  existem dois valores possíveis de massa  $\bar{m}_1 < \bar{m}_2$ . A partir dos Gráficos 42, 43 e 44 se observa que, no caso em que  $\bar{R}$  se encontra à esquerda do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ ,  $\bar{m}_1$  corresponde a uma configuração estável, ao passo que  $\bar{m}_2$  corresponde a uma configuração instável. Já no caso em que  $\bar{R}$  esteja à direita do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ ,  $\bar{m}_1$  e  $\bar{m}_2$  correspondem ambas a configurações estáveis.

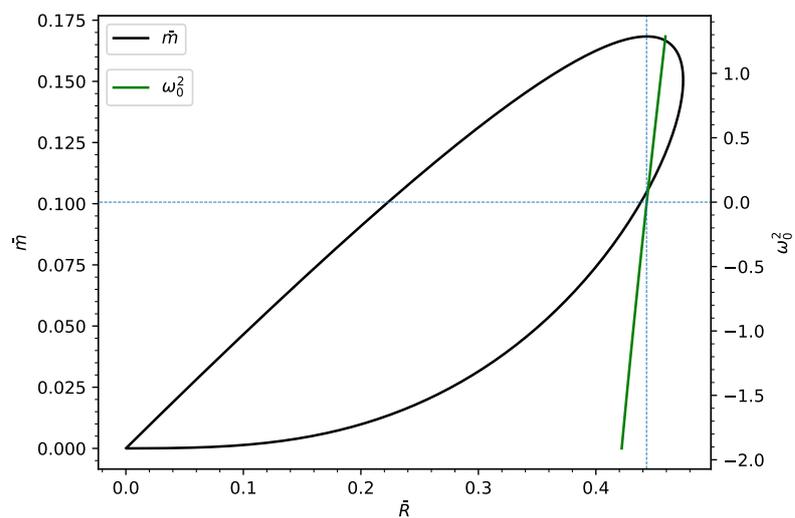
Gráfico 42 - Estabilidade



Legenda: Curva do potencial  $\omega_0$  sobreposta a massa  $\times$  Raio utilizando o conjunto 1 de constantes que podem ser vistos na tabela (3) demonstrando em quais limites a casca se tornará instável.

Fonte: O autor, 2020.

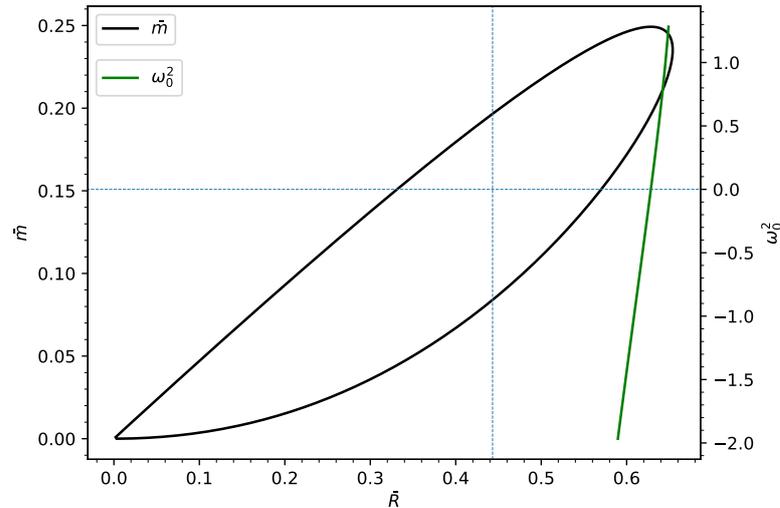
Gráfico 43 - Estabilidade



Legenda: Curva do potencial  $\omega_0$  sobreposta a massa  $\times$  Raio com o conjunto 2 de constantes de acomplamento presentes na tabela (3) para demonstrar em quais limites a casca será instável ou estável.

Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 44 - Estabilidade



Legenda: Curva do potencial  $\omega_0$  sobreposta a massa  $\times$  Raio com o conjunto 3 de constantes de acomodamento que podem ser vistos na tabela (3) demonstrando em quais limites a casca se tornará instável.

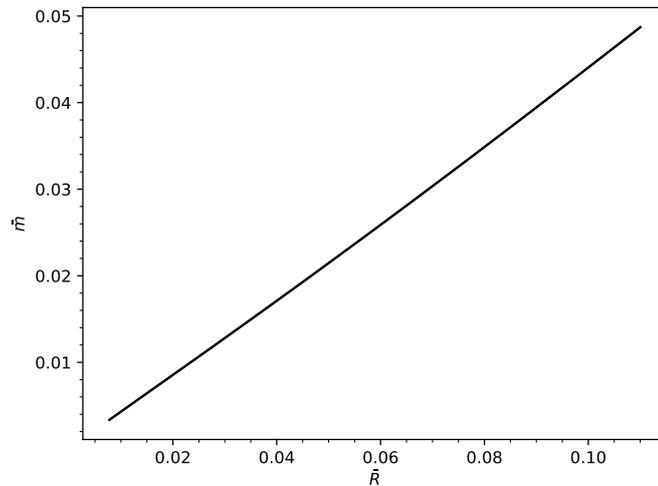
Fonte: O autor, 2020.

## 6.6 Resultados para o gás de quarks livres

Ao utilizar a EOS correspondente ao gás de quarks livres, encontrada no Capítulo 5, Eqs. (243) e (242) juntamente com as equações (246) e (245), será possível encontrar as configurações de equilíbrio para as cascas auto-gravitantes formadas de quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$ . A equação (20) possibilitará estudar se existe estabilidade dinâmica frente a uma perturbação radial, visto que  $\omega_0^2 > 0$  define as cascas estáveis.

### 6.6.1 Curva $\bar{m} \times \bar{R}$

Utilizando as expressões de densidade de energia (242) e pressão (243) nas expressões de equilíbrio hidrostático (246) e (245) é possível encontrar a curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  apresentada no Gráfico 45. A curva resultante cresce indefinidamente, sem apresentar nenhum extremos, de forma semelhante às curvas ultra-relativísticas referentes ao gás de nêutrons (Gráfico 27) e ao gás  $npe$  (Gráfico 31). Isto é decorrente de que no intervalo de densidades bariônicas permitidas pelo vínculo de equilíbrio químico mostrado na Seção 5.4 ( $\rho_b > \rho_b^{min} = 0,16 \text{ Fm}^{-2}$ ), as três espécies de quarks se encontram no regime ultra-relativístico.

Gráfico 45 - Curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  referente ao gás de quarks livres

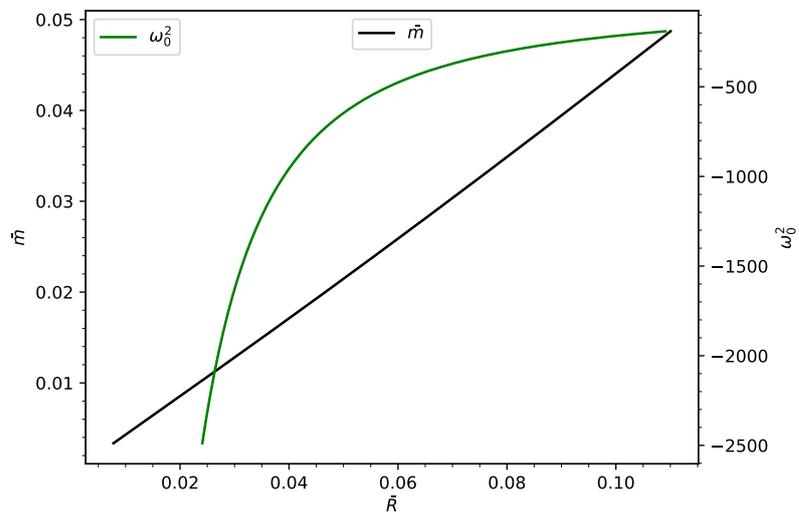
Legenda: Curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  referente a equação de estado dos quarks livres

Fonte: O autor, 2020.

### 6.6.2 Estabilidade dinâmica

A condição de estabilidade dinâmica das cascas auto-gravitantes está diretamente ligadas ao sinal de  $\omega_0^2$  introduzido no Capítulo 1, Eq.(20), onde as configurações estáveis tem  $\omega_0^2 > 0$  e as instáveis  $\omega_0^2 < 0$ . O Gráfico 46 apresenta a curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$  juntamente com a curva  $\omega_0^2 \times \bar{R}$  para a EOS referente ao gás de quarks livres. Como explicado Seção 6.6.1, no intervalo de densidades bariônicas permitidas pelo vínculo de equilíbrio químico ( $\rho_b > \rho_b^{min} = 0,16 \text{ Fm}^{-2}$ ), as três espécies de quarks se encontram no regime ultra-relativístico. Como pode ser visto no Gráfico 46, se tem  $\omega_0^2 < 0$  ao longo de toda a curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ , assim, todas as possíveis configurações de equilíbrio das cascas são instáveis.

Gráfico 46 - Estabilidade referente ao modelo de quarks livres.



Legenda: Estabilidade dinâmica das cascas do gás de quarks livres. Todas as possíveis configurações são instáveis.

Fonte: O autor, 2020.

## CONCLUSÃO

Nesta Dissertação se estuda o impacto da equação de estado nas propriedades de cascas esféricas auto-gravitantes. Após as análises das cinco diferentes equações EOSs, é possível concluir que os diagramas  $\bar{m} \times \bar{R}$  e a condição de estabilidade das cascas auto-gravitantes estão diretamente ligadas as suas respectivas equações de estado.

As EOSs referentes ao gás de nêutrons não-relativísticas e relativísticas irão gerar um diagrama  $\bar{m} \times \bar{R}$  com um máximo positivo. Nos limites de baixas densidades  $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$  a massa  $\bar{m}$  irá convergir para zero mas o raio  $\bar{R}$  tenderá para um número finito, levando a conclusão que, mesmo para baixas densidades, essas EOSs produzirão uma pressão suficiente para sustentar uma casca de diâmetro finito. Já para os limites de altas densidades,  $\bar{\epsilon} \rightarrow \infty$ , os valores de  $\bar{m}$  e  $\bar{R}$  irão convergir para zero, pois a gravitação será muito intensa, vencendo qualquer pressão produzida pela casca. Por outro lado, a EOS ultra-relativística irá produzir uma curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  com formato de uma reta crescente, sem máximo. Também é possível obter conclusões acerca da estabilidade dinâmica destas cascas perante perturbações radiais, pois a condição de estabilidade está diretamente ligada ao sinal de  $\omega_0^2$ , sendo que  $\omega_0^2 > 0$  representa as cascas estáveis e  $\omega_0^2 < 0$  as instáveis. Para as EOSs não-relativística e relativística é possível concluir que todas as cascas à direita do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  serão estáveis. Em contrapartida, todas as curvas representadas à esquerda do máximo serão instáveis. Para a EOS ultra-relativística, todas as cascas serão instáveis, pois para ela,  $\omega_0^2$  é sempre negativo.

O gás *npe* não difere muito do gás de nêutrons, suas EOSs não-relativística e relativística também dão origem a curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$  com um máximo positivo, mas diferindo nos valores. Na posição do máximo referente a EOS relativística do gás *npe*, os valores são,  $\bar{R} = 0,5$  e  $\bar{m} = 0,0556$ , que é próxima aos valores quando comparada com as EOS relativística do gás de nêutrons que tem seu máximo em  $\bar{R} = 0,5$  e  $\bar{m} = 0,0606$ . A EOS ultra-relativística, assim como o gás de nêutrons, também irá gerar uma curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  com formato de uma reta crescente, sem máximo. Quanto a os resultados da estabilidade dinâmica, também serão análogos aos do gás de nêutrons, onde as configurações à direita do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  serão estáveis e as situadas à esquerda serão instáveis para as EOSs não-relativísticas e relativísticas. Já para a EOS ultra-relativística todas as configurações serão instáveis.

A EOS referente ao gás de quarks *u*, *d* e *s* livres irá gerar uma curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  com formato de uma reta crescente, semelhante às curvas geradas pelas EOSs ultra-relativísticas do gás de nêutrons e gás *npe*. Tal fato acontece devido ao vínculo de equilíbrio químico entre os quarks, que exige que a densidade mínima para a existência do sistema seja de  $0,16 \text{ Fm}^{-2}$ , e devido pequeno valor das massas dos quarks, a essa densidade eles são ultra-relativísticos. Assim, as configurações de equilíbrio resultantes são instáveis, com

$$\omega_0^2 < 0.$$

A EOS referente ao modelo de Walecka, onde se começa a considerar as interações nucleares, que se resumem em uma atração a longas distâncias gerada pela troca do méson escalar  $\sigma$  e em uma repulsão a curto alcance gerada pela troca do méson vetoriais  $\omega$ , irá gerar uma curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  diferente das discutidas mais acima. A primeira mudança observada é que a EOS a baixas densidades não consegue produzir pressão suficiente para se equilibrar com a gravitação, logo só será possível a existência de cascas auto-gravitantes a partir de uma densidade mínima que foi chamada nessa Dissertação de densidade de corte  $\rho_c$ . Isto fará com que a curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  nos limites de baixas densidades  $\bar{\epsilon} \rightarrow \bar{\epsilon}_c$ , onde  $\bar{\epsilon}_c$  é a densidade de energia correspondente a  $\rho_c$ ,  $\bar{m}$  e  $\bar{R}$  convergirão para zero, pois nessa densidade existe uma pressão zero com uma densidade de energia finita, em outras palavras, existe força gravitacional mas não existe pressão para equilibrá-la. Nos limites de altas densidades  $\bar{\epsilon} \rightarrow \infty$ ,  $\bar{m}$  e  $\bar{R}$  também convergirão para zero devido à supremacia do campo gravitacional, formando então uma curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  fechada bi-valuada, com dois possíveis valores de  $\bar{m}$  para um valor de  $\bar{R}$ , que correspondem a duas configurações de estabilidade diferentes, ou as duas estáveis, com exceção do ponto de retorno, que terá apenas um valor de  $\bar{m}$  para um valor de  $\bar{R}$ . Também pode-se concluir que os valores de  $\bar{R} \approx > 0,45$  irão sustentar uma estrutura mais massiva que as EOSs referentes ao gás de nêutrons e gás *npe*. Tal fato ocorre devido a interação com o méson  $\omega$  que aumenta a pressão nuclear, possibilitando equilibrar valores maiores da gravitação. Outra conclusão à qual se chega sobre a EOS de Walecka, é que as curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$  irão depender das constantes de acoplamento, uma vez que as mesmas irão regir o módulo das forças nucleares. Por exemplo, aumentando a constante de acoplamento relacionada ao méson  $\omega$ , os valores negativos da pressão negativa a baixas densidades desaparece fazendo com que nos limites de baixas densidades  $\bar{\epsilon} \rightarrow \bar{\epsilon}_c$ ,  $\bar{R}$  convirja para um valor finito, se aproximando do comportamento das EOSs relativísticas e não-relativísticas do gás de nêutrons e gás *npe*. Quanto a estabilidade referente ao modelo de Walecka, também se observa a mudança de sinal de  $\omega_0^2$  exatamente no máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$ , em concordância com os resultados de (BERGLIAFFA; CHIAPPARINI; REYES, dez. 2020), onde as configurações iniciadas a direita do máximo mantém  $\omega_0^2 > 0$  e são estáveis, ao passo que as configurações à esquerda do máximo são instáveis.

A EOS encontrada a partir do modelo de Walecka não linear é acrescida de mais dois termos mesônicos escalares e um termo vetorial isovetorial quando comparada ao modelo de Walecka. Neste caso, foi possível encontrar mais de um conjunto de constantes de acoplamento, possibilitando ver com mais clareza a influência dessas constantes nas curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$ ,  $\omega_0^2 \times \bar{R}$  e nas densidades de corte  $\rho_c$ . As curvas  $\bar{m} \times \bar{R}$  obtidas com o modelo de Walecka não linear são parecidas com as modelo de Walecka, onde no limite de baixas densidades  $\bar{\epsilon} \rightarrow \bar{\epsilon}_c$ ,  $\bar{m}$  e  $\bar{R}$  irão convergir para zero e no limite de altas densidades  $\bar{\epsilon} \rightarrow \infty$ ,  $\bar{m}$  e  $\bar{R}$  também convergirão para zero, gerando assim curvas fechadas bi-valuadas

parecidas com as que se obtém no modelo de Walecka. A estabilidade dinâmica no caso das EOS do modelo de Walecka não linear irá se comportar similarmente ao modelo de Walecka, onde todas as configurações que se iniciam à direita do máximo da curva  $\bar{m} \times \bar{R}$  manterão  $\omega_0^2$  positivo, dando lugar a cascas estáveis, e as configurações que se iniciam à esquerda do pico manterão  $\omega_0^2$  negativo, fazendo com que sejam instáveis.

## REFERÊNCIAS

- BELLAC, M. L. *Quantum and statistical field theory*. 2. ed. Oxônia: Clarendon Press Oxford, 1991.
- BERGLIAFFA, S.; CHIAPPARINI, M.; REYES, L. Thermodynamical and dynamical stability of a self-gravitating uncharged thin shell. *The European Physical Journal*, Wieblingen, v. 719, n. 80, p. 1–10, dez. 2020.
- BOGUTA, J.; BODMER, A. R. Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface. *Nuclear Physics A*, Londres, v. 292, n. 3, p. 413, mar.1977.
- CRISÓSTOMO, J.; OLEA, R. Hamiltonian treatment of the gravitational collapse of thin shells. *Physical Review D*, Severna Park, v. 69, n. 10, may. 2004.
- DELFINO, A.; NUNES, L. H.; MARTINS, J. S. Dimensional effects in a relativistic mean-field approach. *Physical Review C*, [S.I.], v. 57, n. 2, p. 857, abr.1998.
- DEXHEIMER, V. A. Compressibilidade da matéria nuclear em estrelas de nêutrons. 2006. 170 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- GLENDENNING, N. K. *Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity*. 2. ed. California: Springer Science & Business Media, 2012.
- HOROWITZ, C. J.; SEROT, B. D. Self-consistent hartree description of finite nuclei in a relativistic quantum field theory. *Nuclear Physics*, [S.I.], A399, n. 52, p. 529, ago.1983.
- ISRAEL, W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento D*, Reverside, B 44, p. 1, dez. 1996.
- ISRAEL, W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento A*, Reverside, v. 51, p. 774, mar. 1967.
- LEMOS, J. P.; QUINTA, G. M.; ZASLAVSKII, O. B. Entropy of a self-gravitating electrically charged thin shell and the black hole limit. *Physical Review D*, [S.I.], v. 91, n. 10, p. 104027, jan. 2015.
- LEMOS, J. P. S.; ZASLAVSKII, O. B. Entropy of quasiblack holes. *Physical Review D*, [S.I.], v. 81, p. 064012, fev. 2010.
- MARTINEZ, E. A. Fundamental thermodynamical equation of a self-gravitating system. *Physical Review D*, [S.I.], v. 53, n. 12, p. 7062, 1996.
- MAZHARIMOUSAVI, S. H.; HALILSOY, M.; AMEN, S. H. Stability of spherically symmetric timelike thin-shells in general relativity with a variable equation-of-state. *International Journal of Modern Physics D*, Instabul, v. 26, n. 14, p. 1750158, 2017.
- PRETORIUS, F.; VOLLICK, D.; ISRAEL, W. An operational approach to black hole entropy. *Physical Review D*, Califórnia, v. 57, p. 6311, 1998.

SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. 3. ed. Tóquio: Person New International edition, 1995.

SALINAS, S. R. *Introdução a física estatística vol. 09*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 1997.

SCHMITT, A. *Dense matter in compact stars: A pedagogical introduction*. 1. ed. Southampton: Springer, 2010.

SEROT, B. D. "hypercp particle" can be identified with the light pseudoscalar higgs boson. *Physics Letters*, [S.I.], B86, p. 146, out. 1979.

WALECKA, J. D. *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*. 2. ed. Oxônia: Oxford University Press, 1995.

WALECKA, J. D. *The relativistic nuclear many-body problem*. 2. ed. Oxônia: Oxford University Press, 1997.

WALECKA, J. D. An equation of state for nuclear and higher-density matter based on relativistic mean-field theory. *Annals of Physics*, Oxford, v. 83, p. 491, ago.1974.

## APÊNDICE A – Detalhes para as condições de junção de uma casca bidimensional

A métrica da região interna da casca  $r < R$  é dada por,

$$ds_i^2 = -dt_a^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (251)$$

Já a métrica da região externa da casca  $r > R$  será dada por,

$$ds_e = - \left( 1 - \frac{2Gm}{r} \right) dt_e^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm}{r}} + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (252)$$

onde  $t_e$  é a coordenada de tempo extra e novamente polar  $(r, \theta, \phi)$ , e  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ , a constante  $m$  é interpretada como massa *ADM*. Finalmente a própria hipersuperfície,  $r = R$  a métrica  $h_{ab}$  é dada por,

$$ds\Sigma^2 = h_{ab} dy^a dy^b = -d\tau^2 + R(\tau) d\Omega^2, \quad (253)$$

onde se escolhe que  $y^a = (\tau, \theta, \phi)$  como tempo e as coordenadas espaciais da casca. Adotamos a convenção de usar índices latinos para os componentes da hipersuperfície. A coordenada de tempo  $\tau$  é o tempo para um observador localizado na casca, o raio da casca é dado pela equação paramétrica  $R = R(\tau)$  para um observados na casca. Em cada lado da hipersuperfície, as equações paramétricas para o tempo e as coordenadas radiais são denotadas por  $t_i = T_i(\tau)$ ,  $r_i = R_i(\tau)$  e  $t_e = T_e(\tau)$ ,  $r_e = R_e(\tau)$ . A métrica  $h_{ab}$  é chamada de métrica induzida e pode ser escrita em termos da métrica espaço-tempo 3+1  $g_{\alpha\beta}$ , em particular, cada lado da casca, a métrica é induzida por:

$$\begin{aligned} h_{ab}^i &= g_{\alpha\beta}^i L_{i\ a}^\alpha L_{i\ b}^\beta \\ h_{ab}^e &= g_{\alpha\beta}^e L_{e\ a}^\alpha L_{e\ b}^\beta, \end{aligned} \quad (254)$$

onde  $L_{i\ a}^\alpha$  e  $L_{e\ a}^\alpha$  são vetores tangentes à hipersuperfície vista das regiões interna e externa, respectivamente.

A primeira condição de junção pode ser expressa pela expressão,

$$[h_{ab}] = 0, \quad (255)$$

implicando diretamente em,

$$h_{ab}^e = h_{ab}^i. \quad (256)$$

Utilizando as expressões (251) e (252), tem-se,

$$\dot{T}_i^2 + \dot{R}_i^2 = - \left( 1 - \frac{2Gm}{r} \right) \dot{T}_e^2 + \frac{\dot{R}_e^2}{1 - \frac{2Gm}{r}} \quad (257)$$

onde o ponto denota a diferenciação em função do tempo próprio  $\tau$ .

A segunda condição de junção está relacionada a curvatura extrínseca interna e externa  $K_{ib}^a$  e  $K_{eb}^a$ , definidas respectivamente,

$$\begin{aligned} K_{ib}^a &= \nabla \left( \eta_\alpha^i \right) L_{i\ c}^\alpha L_{i\ b}^\beta h_i^{ca} \\ K_{eb}^a &= \nabla \left( \eta_\alpha^e \right) L_{e\ c}^\alpha L_{e\ b}^\beta h_e^{ca}, \end{aligned} \quad (258)$$

A segunda condição de junção propriamente dita é:

$$[K_b^a] = 0, \quad (259)$$

se a métrica for uniforme em toda hipersuperfície, e para o caso que pode ser fisicamente interpretada como a existência de uma casca de matéria delgada onde a hipersuperfície está localizada (ISRAEL, mar. 1967). Além disso, o tensor de energia-momento da casca  $S_a^b$  está relacionado ao salto na curvatura extrínseca através da equação de Lanczos,

$$\mathcal{S}^a_b = -\frac{1}{8\pi G} ([K_b^a] - [K]h_b^a). \quad (260)$$

Procedendo então ao cálculo das componentes extrínsecas da curvatura, pode-se mostrar que elas são dadas pelas expressões gerais (LEMONS; QUINTA; ZASLAVSKII, jan. 2015),

$$K_{i\ \tau}^\tau = \frac{\ddot{R}}{\sqrt{1 + \dot{R}^2}}, \quad (261)$$

$$K_{e\ \tau}^\tau = \frac{-\frac{G\dot{m}}{R\dot{R}} - \frac{Gm}{R^2} + \ddot{R}}{\sqrt{1 - \frac{2Gm}{R} + \dot{R}^2}}, \quad (262)$$

$$K_{i\ \phi}^\phi = K_{i\ \theta}^\theta = \frac{1}{R} \sqrt{1 + \dot{R}^2}, \quad (263)$$

$$K_{e\ \phi}^\phi = K_{e\ \theta}^\theta = \frac{1}{R} \sqrt{1 - \frac{2Gm}{R} + \dot{R}^2}. \quad (264)$$

Utilizando as equações (261), (262), (263) e (264) em (260), é possível calcular as componentes não nulas do tensor energia-momento. Assumindo o caso particular de uma casca esférica em equilíbrio tem-se que,  $\dot{R}$ ,  $\ddot{R}$  e  $\dot{m}$  serão nulos e as componentes do tensor

em unidades naturais,  $c = G = 1$ , serão dadas por:

$$\mathcal{S}^\tau_\tau = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{2m_0}{R_0}}}{4\pi R_0}, \quad (265)$$

$$\mathcal{S}^\theta_\theta = \mathcal{S}^\phi_\phi = \frac{\sqrt{1 - \frac{2m_0}{R_0}} - 1}{8\pi R_0} + \frac{m_0}{8\pi R_0^2 \sqrt{1 - \frac{2m_0}{R_0}}}, \quad (266)$$

onde o subíndice zero deixa explícito que as grandezas estão em equilíbrio. Especificando que a casca é feita de um fluido perfeito com densidade de energia  $\epsilon$  e pressão superficial  $P$ , é possível relacionar as componentes do tensor energia momento com a pressão e densidade de energia da seguinte forma:

$$\mathcal{S}^\tau_\tau = -\epsilon, \quad (267)$$

$$\mathcal{S}^\theta_\theta = \mathcal{S}^\phi_\phi = P. \quad (268)$$

Substituindo (268) e (267) em (266) e (265), se tem as condições de densidade de energia e pressão no equilíbrio, dadas por,

$$\epsilon_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2m_0}{R_0}}}{4\pi R_0}, \quad (269)$$

$$P_0 = \frac{\sqrt{1 - \frac{2m_0}{R_0}} - 1}{8\pi R_0} + \frac{m_0}{8\pi R_0^2 \sqrt{1 - \frac{2m_0}{R_0}}}. \quad (270)$$

A partir da densidade de energia da casca, podemos definir o massa de repouso  $M$  através da equação

$$M = 4\pi R_0^2 \epsilon_0 \quad (271)$$

Substituindo (271) em (269) é possível ver que a massa  $ADM$  poderá ser escrita como,

$$m_0 = M - \frac{M^2}{2R_0}. \quad (272)$$

Com posse da definição (272) e as expressões (269) e (270) é possível escrever a densidade de energia e pressão da seguinte forma:

$$R_0(P_0, \epsilon_0) = \frac{P_0}{\pi \epsilon_0 (\epsilon_0 + 4P_0)}, \quad (273)$$

$$M(P_0, \epsilon_0) = \frac{4P_0^2}{\pi \epsilon_0 (\epsilon_0 + 4P_0)^2}. \quad (274)$$

## APÊNDICE B – Detalhes para os cálculos do gás de nêutrons

### B.1 Densidade de energia

A densidade de energia interna referente ao gás de nêutrons pode ser escrita como:

$$U = \sum_{i, S_z} \langle E_i \rangle \Big|_{\beta \rightarrow \infty} = (2s + 1) \sum_{\vec{p}} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (275)$$

Como  $L$  é muito grande ( $L \rightarrow \infty$ ), mais uma vez os intervalos de  $p$  são muito pequenos, fato que permite aproximar o somatório em momento  $p$  por uma integral em  $dp$ , já generalizando para duas dimensões,

$$\sum_{\vec{p}} = \sum_{n_x} \sum_{n_y} \rightarrow \frac{L^2}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2p. \quad (276)$$

Substituindo (376) em (276),

$$U = (2S + 1) \frac{L^2}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^{p_F} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (277)$$

Ao aplicar o spin correspondente aos nêutrons e dividindo os dois lados por  $L^2$ , nasce uma expressão para a densidade de energia:

$$\epsilon = \frac{2}{h^2} \int_0^{p_F} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (278)$$

Mais uma vez, resolvendo a integral por coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{4\pi}{4\hbar^2 \pi^2} \int_0^{p_F} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} p dp \\ &= \frac{1}{\pi\hbar^2} \int_0^{p_F} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} p dp. \end{aligned} \quad (279)$$

Para facilitar o cálculo fatora-se  $m^2 c^4$ :

$$\epsilon = \frac{m c^2}{\pi\hbar^2} \int_0^{p_F} \sqrt{\frac{p^2}{m^2 c^2} + 1} p dp. \quad (280)$$

Utilizando o método de substituição de variáveis é possível resolver a integral acima, basta utilizar a substituição  $\frac{p^2}{m^2 c^2} = y$ , por consequência,  $dy = \frac{2p dp}{m^2 c^2}$ . Então,

$$\epsilon = \frac{m^3 c^4}{2\pi\hbar^2} \int_0^{P_F} \sqrt{y + 1} dy. \quad (281)$$

É necessário uma nova substituição.  $y + 1 = u$ , por consequência  $dy = du$ . Logo,

$$\begin{aligned}\epsilon &= \int \sqrt{U} du \\ &= \frac{m^3 c^4}{3\pi \hbar^2} U^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{m^3 c^4}{3\pi \hbar^2} (y + 1)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\tag{282}$$

Ao voltar para variável original:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{m^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left( \frac{p^2}{m^2 c^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{P_F} \\ &= \frac{m^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left[ \left( \frac{p_F^2}{m^2 c^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].\end{aligned}\tag{283}$$

Mudando para variável adimensional que foi definido em (33):

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{m^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left[ (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \\ &= \frac{m c^2}{3\pi \lambda^2} \left[ (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].\end{aligned}\tag{284}$$

## B.2 Pressão referente ao gás de nêutrons

$$P = \frac{1}{2m\pi\hbar^2} \int_0^{P_F} \frac{p^2}{\sqrt{\frac{p^2}{m^2 c^2} + 1}} p dp.\tag{285}$$

Com o fim de resolver a integral acima utiliza-se o métodos das substituições no qual  $\frac{p^2}{m^2 c^2} = y$ , por consequência,  $dy = \frac{2p dp}{m^2 c^2}$ . Substituindo em (285),

$$P = \frac{m^3 c^4}{4\pi \hbar^2} \int_0^{P_F} \frac{y dy}{\sqrt{y + 1}}.\tag{286}$$

Para resolver a integral acima, usa-se a substituição  $y + 1 = A$ , por consequência, têm-se  $dy = dA$ . Logo,

$$\begin{aligned}P &= \frac{m^3 c^4}{4\pi \hbar^2} \int \frac{(A - 1)dA}{\sqrt{A}} \\ &= \frac{m^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left( \int \frac{AdA}{\sqrt{A}} - \int \frac{dA}{\sqrt{A}} \right),\end{aligned}\tag{287}$$

Relizando a integral,

$$P = \frac{m^3 c^4}{4\pi \hbar^2} \left( \frac{2A^{3/2}}{3} - 2A^{1/2} \right). \quad (288)$$

Ao retornar para a variável  $y$ ,

$$P = \frac{m^3 c^4}{12\pi \hbar^2} \left[ 2(y+1)^{\frac{3}{2}} - 6(y+1)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (289)$$

De forma mais simples pode ser escrito como

$$P = \frac{mc^2}{3\pi\lambda^2} \left[ \frac{1}{2} (y^2 - 2) \sqrt{y^2 + 1} \right]. \quad (290)$$

Ou

$$P = \frac{mc^2}{6\pi\lambda^2} \left[ (y^2 - 2) \sqrt{y^2 + 1} \right]. \quad (291)$$

Agora pode-se voltar para a variável original do problema e o respectivo limite de integração;

$$P = \frac{mc^2}{6\pi\lambda^2} \left[ \left( \frac{p^2}{m^2 c^2} - 2 \right) \sqrt{p^2 + 1} \right] \Big|_0^{p_F}. \quad (292)$$

Ao substituir os limites de integração:

$$P = \frac{mc^2}{6\pi\lambda^2} \left[ \left( \frac{p_F^2}{m^2 c^2} - 2 \right) \sqrt{p_F^2 + 1} + 2 \right]. \quad (293)$$

## APÊNDICE C – Detalhes para os cálculos do gás $npe$

### C.1 Densidade de energia

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{i,S_z} \langle E_i \rangle + \sum_{j,S_z} \langle E_j \rangle + \sum_{k,S_z} \langle E_k \rangle \Big|_{\beta \rightarrow \infty} \\
 &= (2s+1) \left( \sum_{\vec{p}_n} \sqrt{p_n^2 c^2 + m^2 c^4} + \sum_{\vec{p}_p} \sqrt{p_p^2 c^2 + m^2 c^4} + \sum_{\vec{p}_e} \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} \right). \quad (294)
 \end{aligned}$$

No qual  $i$  é o número total de nêutrons,  $j$  é o número total de prótons e  $k$  é o número total de elétrons.

Da expressão (276) é possível fazer as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{2\pi n_n \hbar}{L}; \\
 p_p &= \frac{2\pi n_p \hbar}{L}; \\
 p_e &= \frac{2\pi n_e \hbar}{L} \quad (295)
 \end{aligned}$$

Como  $L$  é muito grande ( $L \rightarrow \infty$ ), mais uma vez os intervalos de  $p$  são muito pequenos, fato que permite aproximar os somatórios em momento  $p$  em integrais em  $dp$ ,

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{n_n \hbar}{L} \rightarrow dn_n = \frac{L dp_n}{2\pi \hbar}, \\
 p_p &= \frac{n_p \hbar}{L} \rightarrow dn_p = \frac{L dp_p}{2\pi \hbar}, \\
 p_e &= \frac{n_e \hbar}{L} \rightarrow dn_e = \frac{L dp_e}{2\pi \hbar}. \quad (296)
 \end{aligned}$$

Generalizando para duas dimensões:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\vec{p}_n} &= \sum_{n_{nx}} \sum_{n_{ny}} \rightarrow \frac{L^2}{(2\pi \hbar)^2} \int_0^{p_{Fn}} d^2 p, \\
 \sum_{\vec{p}_p} &= \sum_{n_{px}} \sum_{n_{py}} \rightarrow \frac{L^2}{(2\pi \hbar)^2} \int_0^{p_{Fp}} d^2 p, \\
 \sum_{\vec{p}_e} &= \sum_{n_{pz}} \sum_{n_{pz}} \rightarrow \frac{L^2}{(2\pi \hbar)^2} \int_0^{p_{Fe}} d^2 p. \quad (297)
 \end{aligned}$$

Ao fazer a substituição e utilizando os limites de integração de zero (estado fundamental)

até  $p_F$  (último estado na esfera de Fermi), se tem

$$U = (2S + 1) \frac{L^2}{(2\pi\hbar)^2} \left( \int_0^{p_{F_n}} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m_n^2 c^4} + \int_0^{p_{F_p}} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m_p^2 c^4} + \int_0^{p_{F_e}} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \right). \quad (298)$$

Ao aplicar o spin correspondente a todos os férmions,

$$U = \frac{2L^2}{h^2} \left( \int_0^{p_{F_n}} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m_n^2 c^4} + \int_0^{p_{F_p}} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m_p^2 c^4} + \int_0^{p_{F_e}} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \right). \quad (299)$$

Dividindo os dois lados por  $L^2$ , nasce a expressão para a densidade de energia

$$\epsilon = \frac{2}{h^2} \left( \int_0^{p_{F_n}} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m_n^2 c^4} + \int_0^{p_{F_p}} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m_p^2 c^4} + \int_0^{p_{F_e}} d^2p \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \right). \quad (300)$$

Para facilitar o cálculo coloca-se os termos:  $m_n^2 c^4$ ,  $m_p^2 c^4$  e  $m_e^2 c^4$  em evidência e utiliza-se coordenadas polares

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{m_n c^2}{\pi \hbar^2} \int_0^{p_{F_n}} \sqrt{\frac{p^2}{m_n^2 c^2} + 1} p dp + \frac{m_p c^2}{\pi \hbar^2} \int_0^{p_{F_p}} \sqrt{\frac{p^2}{m_p^2 c^2} + 1} p dp \\ & + \frac{m_e c^2}{\pi \hbar^2} \int_0^{p_{F_e}} \sqrt{\frac{p^2}{m_e^2 c^2} + 1} p dp. \end{aligned} \quad (301)$$

Usando as substituições:  $\frac{p^2}{m_n^2 c^2} = a$ ,  $\frac{p^2}{m_p^2 c^2} = b$  e  $\frac{p^2}{m_e^2 c^2} = c$ , se tem por consequência,  $da = \frac{2p dp}{m_n^2 c^2}$ ,  $db = \frac{2p dp}{m_p^2 c^2}$  e  $dc = \frac{2p dp}{m_e^2 c^2}$  Resultando em

$$\frac{m_n^3 c^4}{2\pi \hbar^2} \int \sqrt{a+1} da + \frac{m_p^3 c^4}{2\pi \hbar^2} \int \sqrt{b+1} db + \frac{m_e^3 c^4}{2\pi \hbar^2} \int \sqrt{c+1} dc. \quad (302)$$

Ao realizar as integrais as integrais na expressão (302), obten-se o seguinte resultado,

$$\frac{m_n^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left[ (a+1)^{\frac{3}{2}} + (b+1)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{m_e^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left[ (c+1)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (303)$$

Voltando para as variáveis originais e seus respectivos limites de integração:

$$\frac{m_n^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left( \frac{p^2}{m_n^2 c^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{p_{F_n}} + \frac{m_p^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left( \frac{p^2}{m_p^2 c^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{p_{F_p}} + \frac{m_e^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left[ \left( \frac{p^2}{m_e^2 c^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{p_{F_e}} \right]. \quad (304)$$

Substituindo os limites de integração:

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{m_n^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{m_n^2 c^2} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right] + \frac{m_p^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_p}^2}{m_p^2 c^2} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right] \\ & + \frac{m_e^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{m_e^2 c^2} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (305)$$

Em função do comprimento de onda Compton que foi definido em (33):

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{m_n c^2}{3\pi \lambda_n^2} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{m_n^2 c^2} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right] + \frac{m_p c^2}{3\pi \lambda_p^2} \left[ \left( \frac{p_{F_p}^2}{m_p^2 c^2} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right] \\ & + \frac{m_e c^2}{3\lambda_e^2} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{m_e^2 c^2} + 1 \right)^{3/2} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (306)$$

Utilizando as variáveis adimensionais que foram definidas em (61) se tem,

$$\epsilon = \frac{m_n c^2}{3\pi \lambda_n^2} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] + \frac{m_p c^2}{3\pi \lambda_p^2} \left[ (y^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] + \frac{m_e c^2}{3\pi \lambda_e^2} \left[ (z^2 + 1)^{3/2} - 1 \right]. \quad (307)$$

Já foi definido no Capítulo anterior que as constantes  $\frac{m_n c^2}{\lambda_n^2} = \alpha$ , então os outros conjuntos de constantes serão:  $\frac{m_p c^2}{\lambda_p^2} = \gamma$  e  $\frac{m_e c^2}{\lambda_e^2} = \theta$ . Sendo assim

$$\epsilon = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ (x^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] + \frac{\gamma}{3\pi} \left[ (y^2 + 1)^{3/2} - 1 \right] + \frac{\theta}{3\pi} \left[ (z^2 + 1)^{3/2} - 1 \right]. \quad (308)$$

## C.2 Pressão referetne ao gás *npe*

Para facilitar o cálculo coloca-se os termos:  $m_n^2 c^4$ ,  $m_p^2 c^4$  e  $m_e^2 c^4$  em evidência:

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{2m_n \pi \hbar^2} \int_0^{p_{F_n}} \frac{p^2}{\sqrt{\frac{p^2}{m_n^2 c^2} + 1}} p dp + \frac{1}{2m_p \pi \hbar^2} \int_0^{p_{F_p}} \frac{p^2}{\sqrt{\frac{p^2}{m_p^2 c^2} + 1}} p dp \\ & + \frac{1}{2m_e \pi \hbar^2} \int_0^{p_{F_e}} \frac{p^2}{\sqrt{\frac{p^2}{m_e^2 c^2} + 1}} p dp. \end{aligned} \quad (309)$$

Com o fim de resolver a integral acima utiliza-se o métodos das substituições no qual  $\frac{p^2}{m_n^2 c^2} = a$ ,  $\frac{p^2}{m_p^2 c^2} = b$  e  $\frac{p^2}{m_e^2 c^2} = c$  e por consequência,  $da = \frac{2p dp}{m_n^2 c^2}$ ,  $db = \frac{2p dp}{m_p^2 c^2}$  e  $dc = \frac{2p dp}{m_e^2 c^2}$ . Logo,

$$P = \frac{m_n^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \int \frac{ada}{\sqrt{a+1}} + \frac{m_p^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \int \frac{bdb}{\sqrt{b+1}} + \frac{m_e^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \int \frac{cdc}{\sqrt{c+1}}. \quad (310)$$

Para resolver a integral acima, é preciso fazer as seguintes substituições:  $a + 1 = A$ ,  $b + 1 = B$  e  $c + 1 = C$ . E por consequência,  $da = dA$ ,  $db = dB$  e  $dc = dC$ . Logo

$$P = \frac{m_n^3 c^4}{4\pi \hbar^2} \int \frac{(A-1)dA}{\sqrt{A}} + \frac{m_p^3 c^4}{4\pi \hbar^2} \int \frac{(B-1)dA}{\sqrt{B}} + \frac{m_e^3 c^4}{4\pi \hbar^2} \int \frac{(C-1)dA}{\sqrt{C}}, \quad (311)$$

ou

$$P = \frac{m_n^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left( \int \frac{AdA}{\sqrt{A}} - \int \frac{dA}{\sqrt{A}} \right) + \frac{m_p^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left( \int \frac{BdB}{\sqrt{B}} - \int \frac{dB}{\sqrt{B}} \right) + \frac{m_e^3 c^4}{3\pi \hbar^2} \left( \int \frac{CdC}{\sqrt{C}} - \int \frac{dC}{\sqrt{C}} \right). \quad (312)$$

Resolvendo a integral (312) é possível ver que,

$$P = \frac{m_n^3 c^4}{4\pi \hbar^2} \left( \frac{2A^{3/2}}{3} - 2A^{1/2} \right) + \frac{m_p^3 c^4}{4\pi \hbar^2} \left( \frac{2B^{3/2}}{3} - 2B^{1/2} \right) + \frac{m_e^3 c^4}{4\pi \hbar^2} \left( \frac{2C^{3/2}}{3} - 2C^{1/2} \right). \quad (313)$$

Ao retornar para as variáveis  $a$ ,  $b$  e  $c$ :

$$P = \frac{m_n^3 c^4}{12\pi \hbar^2} \left[ 2(a+1)^{\frac{3}{2}} - 6(a+1)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{m_p^3 c^4}{12\pi \hbar^2} \left[ 2(b+1)^{\frac{3}{2}} - 6(b+1)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{m_e^3 c^4}{12\pi \hbar^2} \left[ 2(c+1)^{\frac{3}{2}} - 6(c+1)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (314)$$

que de forma mais simples pode ser escrito como:

$$P = \frac{m_n c^2}{3\pi \lambda_n^2} \left[ \frac{1}{2} (a^2 - 2) \sqrt{a^2 + 1} \right] + \frac{m_p c^2}{3\pi \lambda_p^2} \left[ \frac{1}{2} (b^2 - 2) \sqrt{b^2 + 1} \right] + \frac{m_e c^2}{3\pi \lambda_e^2} \left[ \frac{1}{2} (c^2 - 2) \sqrt{c^2 + 1} \right]. \quad (315)$$

Ou

$$P = \frac{m_n c^2}{6\pi \lambda_n^2} \left[ (y^2 - 2) \sqrt{y^2 + 1} \right] + \frac{m_p c^2}{6\pi \lambda_p^2} \left[ (y^2 - 2) \sqrt{y^2 + 1} \right] + \frac{m_e c^2}{6\pi \lambda_e^2} \left[ (y^2 - 2) \sqrt{y^2 + 1} \right]. \quad (316)$$

Agora pode-se voltar para as variáveis originais do problema e os respectivos limites de integração,

$$P = \frac{m_n c^2}{6\pi \lambda_n^2} \left[ \left( \frac{p^2}{m_n^2 c^2} - 2 \right) \sqrt{p^2 + 1} \right] \Big|_0^{p_{Fn}} + \frac{m_p c^2}{6\pi \lambda_p^2} \left[ \left( \frac{p^2}{m_p^2 c^2} - 2 \right) \sqrt{p^2 + 1} \right] \Big|_0^{p_{Fp}} + \frac{m_e c^2}{6\pi \lambda_e^2} \left[ \left( \frac{p^2}{m_e^2 c^2} - 2 \right) \sqrt{p^2 + 1} \right] \Big|_0^{p_{Fe}}, \quad (317)$$

que ao serem aplicados,

$$P = \frac{m_n c^2}{6\pi \lambda_n^2} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{m_n^2 c^2} - 2 \right) \sqrt{p_{F_n}^2 + 1} + 2 \right] + \frac{m_p c^2}{6\pi \lambda_p^2} \left[ \left( \frac{p_{F_p}^2}{m_p^2 c^2} - 2 \right) \sqrt{p_{F_p}^2 + 1} + 2 \right] + \frac{m_e c^2}{6\pi \lambda_e^2} \left[ \left( \frac{p_{F_e}^2}{m_e^2 c^2} - 2 \right) \sqrt{p_{F_e}^2 + 1} + 2 \right], \quad (318)$$

em função das variáveis adimensionais já definidas,

$$P = \frac{m_n c^2}{6\pi \lambda_n^2} \left[ (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + 2 \right] + \frac{m_p c^2}{6\pi \lambda_p^2} \left[ (y^2 - 2) \sqrt{y^2 + 1} + 2 \right] + \frac{m_e c^2}{6\pi \lambda_e^2} \left[ (z^2 - 2) \sqrt{z^2 + 1} + 2 \right]. \quad (319)$$

Já foram definidos  $\frac{m_n c^2}{\lambda_n^2} = \alpha$ ,  $\frac{m_p c^2}{\lambda_p^2} = \gamma$  e  $\frac{m_e c^2}{\lambda_e^2} = \theta$ . Sendo assim a expressão para pressão fica,

$$P = \frac{\alpha}{6\pi} \left[ (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + 2 \right] + \frac{\gamma}{6\pi} \left[ (y^2 - 2) \sqrt{y^2 + 1} + 2 \right] + \frac{\theta}{6\pi} \left[ (z^2 - 2) \sqrt{z^2 + 1} + 2 \right]. \quad (320)$$

### C.3 Vínculos

Trocando os termos de lugar, se tem

$$\sqrt{p_{F_e}^2 c^2 + m_e^2 c^4} = \sqrt{p_{F_n}^2 c^2 + m_n^2 c^4} - \sqrt{p_{F_p}^2 c^2 + m_p^2 c^4}. \quad (321)$$

Para facilitar, fatora-se as massas e  $c^2$ , resultando em

$$m_e c^2 \sqrt{\frac{p_{F_e}^2 c^2}{m_e^2 c^4} + 1} = m_n c^2 \sqrt{\frac{p_{F_n}^2 c^2}{m_n^2 c^4} + 1} - m_p c^2 \sqrt{\frac{p_{F_p}^2 c^2}{m_p^2 c^4} + 1}. \quad (322)$$

Ou

$$m_e \sqrt{\frac{p_{F_e}^2}{m_e^2 c^2} + 1} = m_n \sqrt{\frac{p_{F_n}^2}{m_n^2 c^2} + 1} - m_p \sqrt{\frac{p_{F_p}^2}{m_p^2 c^2} + 1}, \quad (323)$$

no qual se pode usar as definições (61), e

$$m_e \sqrt{z^2 + 1} = m_n \sqrt{x^2 + 1} - m_p \sqrt{y^2 + 1}. \quad (324)$$

Ao elevar os dois lados ao quadrado

$$m_e^2(z^2 + 1) = m_n^2(x^2 + 1) + m_p^2(y^2 + 1) - 2m_n m_p \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{y^2 + 1}. \quad (325)$$

Ao fazer uso da propriedade distributiva:

$$m_e^2 z^2 + m_e^2 = m_n^2 x^2 + m_n^2 + m_p^2 y^2 + m_p^2 - 2m_n m_p \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{y^2 + 1}. \quad (326)$$

Substituindo (80) em (326), se tem,

$$m_p^2 y^2 = m_n^2 x^2 + m_n^2 + m_p^2 y^2 + m_p^2 - 2m_n m_p \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{y^2 + 1} - m_e^2. \quad (327)$$

De um modo mais simples

$$2m_n m_p \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{y^2 + 1} = m_n^2 x^2 + m_n^2 + m_p^2 - m_e^2. \quad (328)$$

Para isolar  $y^2$ , basta elevar os dois termos ao quadrado

$$4m_n^2 m_p^2 (x^2 + 1)(y^2 + 1) = (m_n^2 x^2 + m_n^2 + m_p^2 - m_e^2)^2. \quad (329)$$

Logo é possível afirmar que

$$y^2 = \frac{(m_n^2 x^2 + m_n^2 + m_p^2 - m_e^2)^2}{4m_n^2 m_p^2 (x^2 + 1)} - 1. \quad (330)$$

De um jeito mais elegante fica:

$$y^2 = \frac{(m_n^2 x^2 + m_n^2 + m_p^2 - m_e^2)^2 - 4m_n^2 m_p^2 (x^2 + 1)}{4m_n^2 m_p^2 (x^2 + 1)}. \quad (331)$$

Com intuito de fazer as massas ficarem com unidade de energia, multiplica-se e divide-se o lado direito da expressão (86) por  $c^8$ , logo

$$y^2 = \frac{(m_n^2 c^4 x^2 + m_n^2 c^4 + m_p^2 c^4 - m_e^2 c^4)^2 - 4m_n^2 c^4 m_p^2 c^4 (x^2 + 1)}{4m_n^2 c^4 m_p^2 c^4 (x^2 + 1)}. \quad (332)$$

## APÊNDICE D – Detalhes referente ao modelo de Walecka

### D.1 Equações de movimento

#### D.1.1 Equação de movimento para o campo $\sigma$

Utilizando o campo  $\sigma$  como grau de liberdade,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = 0. \quad (333)$$

Resolvendo a primeira derivada, é possível ver que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right] &= \partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma) \right] \right\} \\ &= \partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma g_{\mu\nu} \partial_\nu \sigma) \right] \right\} \\ &= \partial_\mu \left[ \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \partial_\nu \sigma + g_{\mu\nu} \partial_\mu \sigma) \right] \\ &= \partial_\mu g_{\mu\nu} \partial_\nu \sigma \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \sigma. \end{aligned} \quad (334)$$

Da segunda derivada:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} &= -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \sum_B \bar{\psi}_B [-(M - g_\sigma \sigma)] \psi_B + \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \right\} \\ &= -\sum_B \bar{\psi}_B g_\sigma \psi_B + m_\sigma^2 \sigma. \end{aligned} \quad (335)$$

Então, com os resultados das derivadas chega-se a equação de movimento para o campo  $\sigma$ ,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma = \sum_B \bar{\psi}_B g_\sigma \psi_B. \quad (336)$$

#### D.1.2 Equação de movimento para $\omega$

Repetindo o mesmo processo para o campo  $\omega$ ,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \omega)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = 0. \quad (337)$$

Da primeira derivada:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \omega)} \right) &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \omega)} \left( -\frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right) \right] \\ &= -\partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \omega)} [(\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu) (\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu)] \right\}.\end{aligned}\quad (338)$$

Aplicando a propriedade distributiva pode-se ver que

$$\begin{aligned}-\partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \omega)} (\partial_\mu \omega_\nu \partial^\mu \omega^\nu - \partial_\mu \omega_\nu \partial^\mu \omega^\nu - \partial_\nu \omega_\mu \partial^\mu \omega^\nu + \partial_\nu \omega_\mu \partial^\mu \omega^\nu) \\ = -2\partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \omega)} (\partial_\mu \omega_\nu \partial^\mu \omega^\nu - \partial_\mu \omega_\nu \partial^\nu \omega^\mu) \\ = -2\partial_\mu \left[ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \omega)} (\partial_\mu \omega_\nu g^{\mu\nu} g^{\beta\theta} \partial_\beta \omega_\theta) - \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \omega)} (\partial_\mu \omega_\nu g^{\beta\omega} g^{\mu\theta} \partial_\beta \omega_\theta) \right].\end{aligned}\quad (339)$$

Resolvendo a primeira derivada da expressão acima têm-se,

$$\begin{aligned}-2\partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \omega)} (\partial_\mu \omega_\nu g^{\mu\nu} g^{\beta\theta} \partial_\beta \omega_\theta) &= -2g^{\mu\nu} g^{\beta\theta} (\delta_{\nu\mu} \delta_{\gamma\nu} \partial_\omega \omega_\theta + \delta_{\nu\omega} \delta_{\gamma\mu} \partial_\mu \omega_\nu) \\ &= -2\delta_{\nu\mu} \delta_{\gamma\nu} g^{\mu\nu} g^{\beta\theta} \partial_\omega \omega_\theta - 2\delta_{\nu\omega} \delta_{\gamma\mu} g^{\mu\nu} g^{\beta\theta} \partial_\mu \omega_\nu \\ &= -2g^{\nu\omega} g^{\gamma\theta} \partial_\omega \omega_\theta - 2g^{\mu\nu} g^{\gamma\nu} \partial_\gamma \omega_\theta \\ &= -2\partial^\nu \omega^\mu - 2\partial^\nu \omega^\mu \\ &= -4\partial_\mu \partial^\nu \omega^\mu.\end{aligned}\quad (340)$$

E da segunda derivada da expressão(338):

$$\begin{aligned}2\partial_\mu \frac{\partial}{\partial \nu} (\partial_\omega \omega_\theta g^{\nu\omega} g^{\alpha\theta} \partial_\omega \omega_\theta) &= 2g^{\nu\omega} g^{\mu\phi} [\delta_{\phi\mu} \delta_{\alpha\nu} \partial_\omega \omega_\nu + \delta_{\nu\omega} \delta_{\gamma\theta} \partial_\mu \omega_\nu] \\ &= 2\delta_{\nu\mu} \delta_{\gamma\nu} g^{\mu\nu} g^{\beta\theta} \partial_\omega \omega_\theta + 2\delta_{\nu\omega} \delta_{\gamma\mu} g^{\mu\nu} g^{\beta\theta} \partial_\mu \omega_\nu \\ &= 4\partial_\mu \omega_\mu.\end{aligned}\quad (341)$$

Substituindo as equações (341) e (340) em (339),

$$\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \omega)} \left[ -\frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right] = -\partial^\mu \omega^{\mu\nu}.\quad (342)$$

Resolvendo a última derivada da equação (114),

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} &= -\frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \sum_B \bar{\psi}_B [\gamma^\nu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu)] \psi_B \frac{1}{2} m_\omega \omega_\mu \omega^\mu \right\} \\ &= -\sum_B \bar{\psi}_B \gamma^\nu \psi_B g_\omega + m_\omega^2 \omega^\nu.\end{aligned}\quad (343)$$

Logo, a equação de movimento para o campo vetorial se torna,

$$\partial_\mu \omega^{\mu\nu} + m_\nu^2 \omega^\nu = \sum_B g_\omega \bar{\psi}_B \gamma^\nu \psi_B. \quad (344)$$

#### D.1.3 Equação de movimento para $\bar{\psi}_B$

Para encontra-la, basta considerar o campo  $\psi$  como grau de liberdade.

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_B)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_B} = 0. \quad (345)$$

A primeira derivada resulta em,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_B)} \right) &= \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \psi_B)} \left\{ \sum_B \bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu \psi_B - g_\omega \omega^\mu \psi_B) - (M\psi_B - g_\sigma \sigma)] \psi_B \right\} \\ &= \partial_\mu (\gamma_{\mu i}) = 0. \end{aligned} \quad (346)$$

E a segunda derivada:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_B} &= -\frac{\partial}{\partial \psi_B} \left\{ \sum_B \bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu \psi_B - g_\omega \omega^\mu \psi_B) - (M\psi_B - g_\sigma \sigma)] \psi_B \right\} \\ &= \sum_B \left\{ \bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] \right\}. \end{aligned} \quad (347)$$

Sendo assim, é possível montar a equação de movimento para o campo espinorial  $\psi_B$ :

$$\sum_B \left\{ \bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] \right\} = 0. \quad (348)$$

#### D.1.4 Equação de movimento para o campo $\psi$

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_B)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_B} = 0. \quad (349)$$

Resolvendo as derivadas,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_B)} \right) &= \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_B)} \sum_B \left\{ \bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu \psi_B - g_\omega \omega^\mu \psi_B) - (M\bar{\psi}_B - g_\sigma \sigma)] \psi_B \right\} \\ &= \partial_\mu (\gamma_{\mu i}) = 0. \end{aligned} \quad (350)$$

E

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_B} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_B} \sum_B \left\{ \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu (i\partial_B^\mu - g_\omega \omega^\mu \psi_B) - (M \bar{\psi}_B - g_\sigma \sigma) \right] \psi_B \right\} \\
&= \sum_B \left\{ [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi_B \right\}.
\end{aligned} \tag{351}$$

h A equação de movimento para o campo  $\bar{\psi}_B$  é

$$\sum_B \left\{ [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \sigma)] \psi_B \right\} = 0. \tag{352}$$

#### D.1.5 Detalhes para o cálculo da densidade escalar

Para realizar o cálculo da densidade escalar é preciso resolver  $\langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle$ , e substituir em (127). Na representação de Schrödinger, o operador de campo bariônico pode ser expandido em termos do conjunto completo de soluções para a equação de Dirac. De acordo com(WALECKA, 1997),

$$\psi_B(x, t) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k},\lambda} U(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} + B_{\vec{k},\lambda}^\dagger V(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \right] \tag{353}$$

e

$$\psi_B^\dagger(x, t) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left[ A_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger U(\vec{k}', \lambda') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(-)}(\vec{k}')t} + B_{\vec{k}',\lambda'} V(\vec{k}', \lambda') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(+)}(\vec{k}')t} \right], \tag{354}$$

onde  $A_{\vec{k},\lambda}^\dagger$  e  $A_{\vec{k},\lambda}$  são os operadores construção e destruição ligados as partículas do sistema,  $B_{\vec{k},\lambda}^\dagger$  e  $B_{\vec{k},\lambda}$  são operadores de construção e destruição, porém ligados as antipartículas do sistema,  $U$  e  $U^\dagger$  são os espinores de Dirac, ligados as partículas,  $V$  e  $V^\dagger$  são espinores de Dirac, mas ligados as antipartículas e  $\lambda$  a desgenerecência.

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle &= \langle \psi_B^\dagger \gamma_0 \psi_B \rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left[ A_{\vec{k},\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} + B_{\vec{k},\lambda} V(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \right] \gamma_0 \right. \\
&\quad \left. \left[ A_{\vec{k}',\lambda'} U(\vec{k}', \lambda') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k}')t} + B_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger V(\vec{k}', \lambda') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k}')t} \right] \right\rangle.
\end{aligned} \tag{355}$$

Escrevendo em função de  $(\sum_B \rho_{sB})$  e utilizando a propriedade distributiva,

$$\begin{aligned} \sum_B \rho_{sB} = & \left[ \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} [A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k},\lambda} U^\dagger(\vec{k}, \lambda) \gamma_0 U(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k},\lambda} V^\dagger(\vec{k}, \lambda) \gamma_0 V(\vec{k}, \lambda) \right. \\ & e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k},\lambda} V^\dagger(\vec{k}, \lambda) \gamma_0 V(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k},\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}, \lambda) \gamma_0 V(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \\ & \left. + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k},\lambda}^\dagger V^\dagger(\vec{k}, \lambda) \gamma_0 U(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right]. \end{aligned} \quad (356)$$

No qual  $U$ ,  $U^\dagger$ ,  $V$  e  $V^\dagger$  são os espinores de Dirac:

$$U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{M^* + E^*} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (357)$$

$$U^\dagger = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix}, \quad (358)$$

$$V = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M^* + E^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (359)$$

$$\text{e} \quad (360)$$

$$V^\dagger = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M^* + E^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (361)$$

onde  $\gamma_0$  é definido como  $diag(1, 1, -1, -1)$ . Então,

$$U^\dagger \gamma_0 U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{M^* + E^*} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (362)$$

Ao efetuar a multiplicação entre as matrizes  $\gamma_0$  e  $U$ ,

$$U^\dagger \gamma_0 U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{k}{M^* + E^*} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (363)$$

Ou

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{E^* + M^*}{2E} \left( 1 - \frac{k^2}{(M^* + E^*)^2} \right). \quad (364)$$

Para esse caso, a energia de Férmi ( $E^*$ ) é definida como  $\sqrt{k^2 + M^{*2}}$  (GLENDENNING, 2012)

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{1}{2E} \left( \frac{M^{*2} + 2EM + E^{*2} - E^{*2} + M^{*2}}{E^* + M} \right). \quad (365)$$

Ou

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{1}{E^*} \left( \frac{M^{*2} + E^* M^*}{E^* + M^*} \right). \quad (366)$$

Que pode ser escrito como

$$U^\dagger \gamma_0 U = \frac{M^*}{E^*} = \frac{M^*}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}}. \quad (367)$$

O cálculo de  $V^\dagger \sigma V$  é feito de maneira análoga

$$V^\dagger \gamma_0 V = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M^* + E^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (368)$$

Ao aplicar a matriz  $\gamma_0$ , se tem

$$V^\dagger \gamma_0 V = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} \frac{k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M^* + E^*} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou

$$V^\dagger \gamma_0 V = \frac{E^* + M^*}{2E} \left( \frac{k^2}{(M^* + E^*)^2} - 1 \right). \quad (369)$$

Utilizando a definição da energia de Fermi:

$$\begin{aligned}
 V^\dagger \gamma_0 V &= \frac{1}{2E} \left( -\frac{M^{*2} + 2EM + E^{*2} - E^{*2} + -M^{*2}}{E^* + M} \right). \\
 V^\dagger \gamma_0 V &= \frac{1}{E^*} \left( \frac{-M^{*2} - E^* M^*}{E^* + M^*} \right). \\
 V^\dagger \gamma_0 V &= -\frac{M^*}{E} = -\frac{M^*}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}}.
 \end{aligned} \tag{370}$$

Os termos cruzados são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 U^\dagger \gamma_0 V &= \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{M+E^*} & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M^*+E^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
 U^\dagger \gamma_0 V &= \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{M+E^*} & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M^*+E^*} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
 U^\dagger \gamma_0 V &= \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( -\frac{k}{M^* + E^*} - \frac{k}{M^* + E^*} \right) \\
 &= -\frac{k}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}}.
 \end{aligned} \tag{371}$$

Também têm-se ,

$$V^\dagger \gamma_0 U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M+E^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{M^*+E^*} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{372}$$

Ou

$$V^\dagger \gamma_0 U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M^* + E^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{k}{M^* + E^*} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (373)$$

$$= \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M^* + E^*} & -\frac{k}{M^* + E^*} \end{pmatrix} \quad (374)$$

$$= -\frac{k}{M^* + E^*}. \quad (375)$$

$$\begin{aligned} \sum_B \rho_{sB} &= \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} \frac{M^* e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} - \frac{M^* e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \right. \\ &\quad \left. + A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} - \frac{k e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} - \frac{k e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \right]. \end{aligned} \quad (376)$$

Na aproximação de campo médio, se supões a matéria nuclear uniforme, estática e em seu estado fundamental, estado esse, conhecido como estado de Fermi que possibilita aplicar os operadores nele e resolver a equação, (376)

$$\begin{aligned} \sum_B \rho_{sB} &= \frac{1}{A} \langle E_F | \sum_{\vec{k}'\lambda'} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} \frac{M^* e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} - \frac{M^* e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \right. \\ &\quad \left. + A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} - \frac{k e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} - \frac{k e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \right] | E_F \rangle \end{aligned} \quad (377)$$

Ao aplicar as bases  $|E_F\rangle$  nos operadores presentes na expressão acima se tem,

$$\begin{aligned} \sum_B \rho_{sB} &= \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ \langle E_F | A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} | E_F \rangle \frac{M^* e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} + \langle E_F | B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} | E_F \rangle \frac{M^* e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \right. \\ &\quad \left. + \langle E_F | A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} | E_F \rangle - \frac{k e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} + \langle E_F | B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} | E_F \rangle - \frac{k e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \right]. \end{aligned} \quad (378)$$

Como já mencionado antes, não existe interesse nas antipartículas. Então  $B = B^\dagger = 0$ . Sendo assim, somente o primeiro termo sobrevive

$$\sum_B \rho_{sB} = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ \langle E_F | A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} | E_F \rangle \frac{M^* e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \right]. \quad (379)$$

Utilizando as propriedades dos operadores escada(SAKURAI, 1995)

$$A_{\vec{k},\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} |E_F\rangle = |E_F\rangle. \quad (380)$$

O que leva a

$$\sum_B \rho_{sB} = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}'} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ \langle E_F | E_F \rangle \frac{M^* e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \right]. \quad (381)$$

Em uma aproximação em que  $A$  é muito grande ( $A \rightarrow \infty$ ) os intervalos de  $k$  são muito pequenos, fato que permite aproximar o somatório em  $k$  em uma integral em  $dk$ , como nesse Capítulo é utilizada a convenção  $\hbar = c = 1$ ,

$$\sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \frac{1}{A} \cong \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{k_F} d^2k. \quad (382)$$

Ao trocar os somatórios pela integral (382),

$$\sum_B \rho_{sB} = \sum_{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{k_F} \frac{d^2k M^* e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}}. \quad (383)$$

Na expressão (382) aparece exatamente a definição de uma delta de Dirac:

$$\int_0^{k_F} dk e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = \delta_{k'k}, \quad (384)$$

levando automaticamente a,

$$\sum_B \rho_{sB} = \sum_{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{k_F} \frac{d^2k M^*}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}}. \quad (385)$$

Como  $\rho_s$  é na verdade  $\sum_B \rho_{sB}$ , pois deve-se encontrar a densidade escalar para a soma de todos os bárions (nêutrons e prótons) a equação (385) deve ser,

$$\sum_B \rho_{sB} = \sum_{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int_0^{k_{Fn}} \frac{d^2k M^*}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} + \int_0^{k_{Fp}} \frac{d^2k M^*}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \right) \quad (386)$$

No qual  $\lambda$  é a degenerescência de spin que nesse caso é igual a 2. Logo,

$$\sum_B \rho_{sB} = \frac{M^*}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fn}} \frac{k d^2k}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} + \frac{M^*}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp}} \frac{k d^2k}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}}. \quad (387)$$

Resolvendo as integrais por coordenadas polares, se tem:

$$\sum_B \rho_{sB} = \frac{M^*}{\pi} \left( \int_0^{k_{Fp}} \frac{k dk}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} + \int_0^{k_{Fn}} \frac{k dk}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \right). \quad (388)$$

Para resolver a integral, basta fazer a substituição de variável  $k^2 + M^{*2} = A$ , que por consequência  $kdk = \frac{dA}{2}$ , logo

$$\frac{M^*}{\pi} \left( \int \frac{dA}{2\sqrt{A}} + \int \frac{dA}{2\sqrt{A}} \right) = \frac{M^*}{\pi} (\sqrt{A} + \sqrt{A}). \quad (389)$$

Ao retornar para as variáveis iniciais e substituindo os limites de integração se tem:

$$\begin{aligned} \sum_B \rho_{sB} &= \frac{M^*}{\pi} \left( \sqrt{k^2 + M^{*2}} \Big|_0^{k_{F_n}} + \sqrt{k^2 + M^{*2}} \Big|_0^{k_{F_p}} \right), \\ \sum_B \rho_{sB} &= \frac{M^*}{\pi} \left( \sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} + \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} - 2M^* \right). \end{aligned} \quad (390)$$

#### D.1.6 Detalhes para o cálculo da densidade bariônica

$$\begin{aligned} \rho &= \left[ \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} [A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} U^\dagger(\vec{k}, \lambda) U(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}, \lambda) V(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \\ &\quad \left. + A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}, \lambda) V(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}, \lambda) U(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right]. \end{aligned} \quad (391)$$

No qual é preciso recorrer aos espinores de Dirac que foram mencionados nas expressões (357), (358), (359) e (361). Logo,

$$U^\dagger U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E^* + M^*} & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{M^* + E^*} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (392)$$

Multiplicando os espinores,

$$U^\dagger U = \frac{E^* + M^*}{2E} \left( 1 + \frac{k^2}{(M^* + E^*)^2} \right). \quad (393)$$

Utilizando a definição  $E^{*2} = k^2 + M^{*2}$

$$U^\dagger U = \frac{1}{2E} \left( \frac{E^{*2} + 2EM + E^{*2} + M^{*2} - M^{*2}}{E^* + M} \right). \quad (394)$$

Ou

$$U^\dagger U = \frac{1}{2E^*} \left( \frac{2E^{*2} + 2M^*E^*}{E^* + M^*} \right). \quad (395)$$

$$U^\dagger U = \frac{2E^*}{2E^*} \begin{pmatrix} E^* + M^* \\ E^* + M^* \end{pmatrix} \quad (396)$$

Deixando claro que  $U^\dagger U = 1$  Das outras definições dos espinores de Dirac, também é possível ver que  $V^\dagger V = 1$ . Segue a demonstração,

$$V^\dagger V = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{E^* + M^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M^* + E^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (397)$$

Ou

$$V^\dagger V = \frac{E^* + M^*}{2E} \left( \frac{k^2}{(M^* + E^*)^2} + 1 \right). \quad (398)$$

Utilizando a definição  $E^{*2} = k^2 + M^{*2}$

$$V^\dagger V = \frac{1}{2E} \left( \frac{E^{*2} + 2EM + E^{*2} + M^{*2} - M^{*2}}{E^* + M} \right). \quad (399)$$

Ou

$$V^\dagger V = \frac{1}{2E^*} \left( \frac{2E^{*2} + 2ME^*}{E^* + M^*} \right).$$

$$V^\dagger V = \frac{2E^*}{2E^*} \begin{pmatrix} E^* + M^* \\ E^* + M^* \end{pmatrix} \quad (400)$$

Provando então que

$$V^\dagger V = 1. \quad (401)$$

Os termos cruzados ficam

$$U^\dagger V = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{M^* + E^*} & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M^* + E^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (402)$$

Relizando a multiplicação,

$$U^\dagger V = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( -\frac{k}{M^* + E^*} + \frac{k}{M^* + E^*} \right) = 0. \quad (403)$$

E

$$V^\dagger U = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} -\frac{k}{M+E^*} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{M^*+E^*} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (404)$$

Realizando a multiplicação,

$$V^\dagger U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( -\frac{k}{M^* + E^*} + \frac{k}{M^* + E^*} \right) = 0. \quad (405)$$

É possível chegar a esses resultados utilizando apenas argumentos físicos, visto que U e V e são ortonormais. Ao substituir os resultados (405),(403),(401) e (396) em (391), se tem

$$\rho = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}, \lambda) V(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}. \quad (406)$$

Como as antipartículas não são de interesse:

$$\rho = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}. \quad (407)$$

Na aproximação de campo médio, se supões a matéria nuclear uniforme, estática e em seu estado fundamental, estado esse conhecido como estado de Fermi, possibilitando aplicar os operadores nesse estado,

$$\rho = \langle EF | \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} | EF \rangle. \quad (408)$$

Ou

$$\rho = \langle EF | A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k},\lambda} | EF \rangle \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}. \quad (409)$$

Ao aplicar os operadores escada(SAKURAI, 1995) se tem,

$$\rho = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}. \quad (410)$$

Em uma aproximação em que A é muito grande ( $A \rightarrow \infty$ ) os intervalos de k são muito pequenos, fato que permite aproximar o somatório em k em uma integral em dk, como

nesse Capítulo é utilizada a convenção  $\hbar = c = 1$ .

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}. \quad (411)$$

Mais uma vez, agora na expressão (411) aparece exatamente a definição de uma delta de Dirac:

$$\int_0^{k_F} dk e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = \delta_{k'k}. \quad (412)$$

Então ao aplicar a definição se tem,

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^2k. \quad (413)$$

Como na verdade deve-se calcular a soma sobre todos os bárions ( $\sum_B \rho_B$ ) a expressão (413) deve ser,

$$\sum_B \rho_B = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda} \left( \int_0^{k_{Fn}} d^2k + \int_0^{k_{Fp}} d^2k \right). \quad (414)$$

No qual  $\lambda$  é a degenerescência de spin que nesse caso é igual a 2 para os prótons e 2 para os nêutrons. Então a expressão para densidade bariônica será,

$$\sum_B \rho_B = \frac{1}{2\pi^2} \left( \int_0^{k_{Fn}} d^2k + \int_0^{k_{Fp}} d^2k \right). \quad (415)$$

Após a solução da integral acima por coordenadas polares, chega-se a expressão para densidade bariônica referente ao modelo de Walecka.

$$\sum_B \rho_B = \frac{1}{2\pi} (k_{Fp}^2 + k_{Fn}^2). \quad (416)$$

### D.1.7 Detalhes para o cálculo da densidade de energia

Como dito na Seção (3.7) é preciso calcular os termos,

$$\sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 i \partial_0 \psi_B \rangle. \quad (417)$$

e

$$\langle \bar{\psi}_{\lambda} \gamma_0 i \partial_0 \psi_{\lambda} \rangle. \quad (418)$$

Como a matemática irá se desenvolver da mesma maneira, aqui se resolverá apenas o primeiro termo.

Então,

$$\sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_0 i \partial_0 \psi_B \rangle = \sum_B \langle \psi_B^\dagger i \partial_0 \psi_B \rangle. \quad (419)$$

O primeiro passo é resolver a derivada que se encontra na expressão acima, na qual  $\psi_B$  é dado mais uma vez por (353). Logo,

$$\begin{aligned} \partial_0 \psi_B &= \frac{\partial \psi_B}{\partial t} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{A}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ \epsilon^{(+)}(\vec{k}) A_{\vec{k}\lambda} U(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} + \epsilon^{(-)}(\vec{k}) B_{\vec{k},\lambda}^\dagger V(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \right]. \end{aligned} \quad (420)$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle \psi_B^\dagger i \partial_0 \psi_B \rangle &= \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left[ A_{\vec{k}'\lambda'} U(\vec{k}', \lambda') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(-)}(\vec{k}')t} + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger V(\vec{k}', \lambda') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(+)}(\vec{k}')t} \right] \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ \epsilon^{(+)}(\vec{k}) A_{\vec{k}\lambda} U(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} + \epsilon^{(-)}(\vec{k}) B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \right] \end{aligned} \quad (421)$$

Após realizar a multiplicação, se tem

$$\begin{aligned} \langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle &= \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left( \epsilon^{(+)} A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k},\lambda} U^\dagger(\vec{k}, \lambda) U(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \\ &\quad + \epsilon^{(-)} B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k},\lambda} V^\dagger(\vec{k}, \lambda) V(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \\ &\quad + \epsilon^{(-)} A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k},\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}, \lambda) V(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \\ &\quad \left. + \epsilon^{(+)} B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k},\lambda} V^\dagger(\vec{k}, \lambda) U(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right). \end{aligned} \quad (422)$$

Como já demonstrado nas equações (405),(403),(396) e (401)  $U^\dagger U = V^\dagger V = 1$  e  $U^\dagger V = V^\dagger U = 0$ . Então a expressão (422) se resume à

$$\langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left[ \epsilon^{(+)} A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k},\lambda} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + \epsilon^{(-)} B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k},\lambda} V^\dagger(\vec{k}, \lambda) V(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right]. \quad (423)$$

Como já dito acima, as antipartículas não serão consideradas, levando à

$$\langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \epsilon^{(+)} A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k},\lambda} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \quad (424)$$

Na aproximação de campo médio, se supões a matéria nuclear uniforme, estática e em seu estado fundamental, estado esse conhecido como estado de Fermi, possibilitando aplicar os operadores nesse estado, para resolver a equação (424)

$$\langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \epsilon^{(+)} \langle EF | A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} | EF \rangle e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}. \quad (425)$$

Ao aplicar os operadores escada(SAKURAI, 1995),

$$\langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'} \epsilon^{(+)} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}. \quad (426)$$

Mais uma vez, em uma aproximação em que  $A$  é muito grande ( $A \rightarrow \infty$ ) os intervalos de  $k$  são muito pequenos, fato que permite aproximar o somatório em  $k$  em uma integral em  $dk$ , como nesse Capítulo é utilizada a convenção  $\hbar = c = 1$ , se tem

$$\langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^2 k \epsilon^{(+)} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}. \quad (427)$$

Aplicando mais uma vez a definição da delta de Dirac, se tem

$$\langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\lambda} \int_0^{k_F} d^2 k \epsilon^{(+)}. \quad (428)$$

Aplicando a equação (428) em (417) têm-se,

$$\sum_B \langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\lambda} \sum_B \int_0^{k_F} d^2 k \epsilon^{(+)} \quad (429)$$

No qual  $\lambda$  é a degenerescência de spin que nesse caso é igual a 2 e deve-se somar para todos os bárions, então a expressão irá se dividir em duas integrais, uma variando de 0 à  $k_{F_n}$  e a outra que vai de 0 até  $k_{F_p}$ ,

$$\langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \left( \int_0^{k_{F_p}} d^2 k \epsilon^{(+)} + \int_0^{k_{F_n}} d^2 k \epsilon^{(+)} \right). \quad (430)$$

Utilizando os autovalores da energia de Dirac, presente em (SAKURAI, 1995), se tem que

$$\langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \left( \int_0^{k_{F_p}} d^2 k \sqrt{k^2 + M^{*2}} + \int_0^{k_{F_n}} d^2 k \sqrt{k^2 + M^{*2}} \right)$$

Ou,

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi^2} \left( \int_0^{k_{F_p}} d^2 k \sqrt{k^2 + M^{*2}} + \int_0^{k_{F_n}} d^2 k \sqrt{k^2 + M^{*2}} \right)$$

Como as integrais são iguais, diferindo apenas nos limites de integração, será resolvida apenas uma e o resultado aplicado para as duas. Para resolver a integral acima, basta utilizar coordenadas polares,

$$\int_0^{k_{Fp}} d^2k \sqrt{k^2 + M^{*2}} = 2\pi \int_0^{k_{Fp}} k dk \sqrt{k^2 + M^{*2}}.$$

Então, utiliza-se uma substituição simples no qual,  $(k^2 + M^{*2}) = U$ , e derivando ambos os lados, se encontra que  $\frac{dU}{2} = k dk$ . Tornando a integral,

$$\begin{aligned} \int_0^{k_{Fp}} k dk \sqrt{k^2 + M^{*2}} &= \frac{1}{2} \int dU \sqrt{U} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(U)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \frac{(k_{Fp}^2 + M^{*2})^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^{k_{Fp}} \\ &= \frac{(k^2 + M^{*2})^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{M^{*3}}{3}. \end{aligned} \quad (431)$$

Utilizando a mesma técnica para resolver a primeira integral (431) e aplicando seu respectivo limite de integração,

$$\frac{(k_{Fn}^2 + M^{*2})^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{M^{*3}}{3}. \quad (432)$$

Por último basta encontrar  $\langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_0 i \partial_\nu \psi_\lambda \rangle$ . É perceptível que essa expressão será resolvida da mesma maneira de  $\langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle$ , bastando trocar apenas as massas e os limites de integração. Logo seu resultado será,

$$\frac{1}{3\pi} \left[ (k_{Fe}^2 + m_e^2)^{\frac{3}{2}} - m_e^3 \right]. \quad (433)$$

Substituindo (432) e (433) em (??) encontra-se uma expressão para densidade de energia em duas dimensões

$$\epsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{3\pi} \left[ (k_{Fp}^2 + M^{*2})^{\frac{3}{2}} + (k_{Fn}^2 + M^{*2})^{\frac{3}{2}} + (k_{Fe}^2 + m_e^2)^{\frac{3}{2}} - 2M^{*3} - m_e^3 \right]. \quad (434)$$

#### D.1.8 Detalhes para o cálculo da pressão

Para solucionar  $-\frac{1}{2} \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_i i \partial_i \psi_B \rangle$  é preciso primeiro resolver

$$\gamma_i \partial_i = \gamma_\mu \partial_\mu. \quad (435)$$

Que pode ser resolvido facilmente através da propriedade:

$$\gamma_\mu \partial_\mu = \gamma_0 \partial_0 - \gamma_i \partial_i = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_0 \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}. \quad (436)$$

Então

$$\gamma_i \partial_i = -\gamma_0 \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}. \quad (437)$$

Substituindo (435) e utilizando a propriedade que diz que  $\psi^\dagger = \gamma_0 \psi_B$ , pode-se resolver o termo bariônico da pressão, que é parecido com a resolução da densidade de energia, a diferença é que para densidade de energia a derivada foi feita em relação ao tempo, e para a pressão deve ser feita em relação à posição, então:

$$-\frac{1}{2} \sum_B \langle \bar{\psi}_B \gamma_i i \partial_\nu \psi_B \rangle = +\frac{1}{2} \sum_B \langle \bar{\psi}_B^\dagger i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi_B \rangle. \quad (438)$$

Recorrendo mais uma vez a expressão (353):

$$\vec{\nabla} \psi_B = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ (i\vec{k}) A_{\vec{k}\lambda} U(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} (-i\vec{k}) B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \right]. \quad (439)$$

Ou

$$\vec{\nabla} \psi_B = \frac{i\vec{k}}{\sqrt{A}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[ A_{\vec{k}\lambda} U(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} - B_{\vec{k}\lambda}^\dagger V(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \right]. \quad (440)$$

Substituindo a equação (439) em (438) e já realizando a multiplicação distributiva se tem,

$$\begin{aligned} \sum_B \langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle &= \frac{1}{A} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \left[ A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} U^\dagger(\vec{k}', \lambda') \vec{\alpha} \cdot \vec{k}' U(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \\ &\quad + B_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}', \lambda') \vec{\alpha} \cdot \vec{k}' V(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \\ &\quad + A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger B_{\vec{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\vec{k}', \lambda') \vec{\alpha} \cdot \vec{k}' V(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \\ &\quad \left. + B_{\vec{k}'\lambda'} A_{\vec{k}\lambda} V^\dagger(\vec{k}', \lambda') \vec{\alpha} \cdot \vec{k}' U(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right]. \quad (441) \end{aligned}$$

Pode-se escrever  $\vec{\alpha} \cdot \vec{k}$  de uma maneira esperta, basta usar a expressão relativística que corresponde a energia efetiva do núcleo(DEXHEIMER, 2006)

$$E^* = \vec{\alpha} \cdot \vec{k}' + \gamma_0 M^*. \quad (442)$$

O que nos dá que  $\vec{\alpha} \cdot \vec{k}'$  podendo ser escrito como:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{k}' = E^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - M^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (443)$$

ou

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{k}' = \begin{pmatrix} E^* - M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* - M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^* + M^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^* + M^* \end{pmatrix}. \quad (444)$$

Agora é possível calcular  $U^\dagger \vec{k} \cdot \vec{\alpha} U$ :

$$U^\dagger \vec{k} \cdot \vec{\alpha} U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{M^* + E^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* - M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* - M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^* + M^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^* + M^* \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (445)$$

$$U^\dagger \vec{k} \cdot \vec{\alpha} U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left( (E^* - M^*) \ 0 \ k \ 0 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E^* + M^*} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (446)$$

Ou

$$U^\dagger \vec{k} \cdot \vec{\alpha} U = \frac{E^* + M^*}{2E^*} \left[ (E^* - M^*) + \frac{k^2}{M^* + E^*} \right] = \frac{1}{2E^*} \left[ (E^* - M^*)(E^* + M^*) + k^2 \right]. \quad (447)$$

Usando a definição  $E^{*2} = k^2 + M^{*2}$ ,

$$U^\dagger \vec{k} \cdot \vec{\alpha} U = \frac{k^2}{\sqrt{M^{*2} + k^2}}. \quad (448)$$

Como já dito anteriormente, todos os termos ligados ao operador  $B$  e  $B^\dagger$  são iguais a zero, devido a falta de antipartículas no sistema, então não há necessidade de calcular os termos  $V^\dagger \vec{k} \cdot \vec{\alpha} V, U^\dagger \vec{k} \cdot \vec{\alpha} V e V^\dagger \vec{k} \cdot \vec{\alpha} U$ . Substituindo a equação (448) em (441) e eliminando os termos ditos acima, têm-se

$$\frac{1}{2} \sum_B \langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = + \frac{1}{2A} \sum_B \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} \frac{k^2}{\sqrt{M^{*2} + k^2}} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}}. \quad (449)$$

Na aproximação de campo médio, se supões a matéria nuclear uniforme, estática e em seu estado fundamental, estado esse, conhecido como estado de Fermi que possibilita aplicar os operadores nele e resolver a equação, (449),

$$\frac{1}{2} \sum_B \langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = + \frac{1}{2A} \sum_B \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \langle EF | A_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} | EF \rangle \frac{k^2}{\sqrt{M^{*2} + k^2}} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}}. \quad (450)$$

Mais uma vez, aplica-se o operador escada(SAKURAI, 1995)

$$\frac{1}{2} \sum_B \langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = + \frac{1}{2A} \sum_B \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \frac{k^2}{\sqrt{M^{*2} + k^2}} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}}. \quad (451)$$

Mais uma vez, em uma aproximação em que  $A$  é muito grande ( $A \rightarrow \infty$ ) os intervalos de  $k$  são muito pequenos, fato que permite aproximar o somatório em  $k$  em uma integral em  $dk$ , como nesse Capítulo é utilizada a convenção  $\hbar = c = 1$ , se tem

$$\frac{1}{2} \sum_B \langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \sum_B \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^{k_F} d^2k \frac{k^2}{\sqrt{M^{*2} + k^2}} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}}. \quad (452)$$

Outra vez, usa-se a definição da delta de Dirac:

$$\frac{1}{2} \sum_B \langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \sum_B \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^{k_F} d^2k \frac{k^2}{\sqrt{M^{*2} + k^2}}. \quad (453)$$

No qual  $\lambda$  é a degenerescência de spin que nesse caso é igual a 2 para os prótons e 2 para os nêutrons. Então ao somar sobre todos os bárions a expressão para densidade escalar deve se dividir em duas integrais, uma variando de 0 à  $k_{F_n}$  e a outra que vai de 0 até  $k_{F_p}$ ,

$$\frac{1}{2} \sum_B \langle \psi_B \gamma_0 i \partial_\nu \psi_B \rangle = \frac{2}{2(2\pi)^2} \left( \int_0^{k_{F_n}} d^2k \frac{k^2}{\sqrt{M^{*2} + k^2}} + \int_0^{k_{F_p}} d^2k \frac{k^2}{\sqrt{M^{*2} + k^2}} \right). \quad (454)$$

Como as integrais são semelhantes, diferindo apenas no limite de integração, será resolvida apenas uma. Utilizando coordenadas polares:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{k_{Fp}} dk \frac{k^3}{\sqrt{M^{*2} + k^2}}. \quad (455)$$

Nesse caso, será preciso utilizar duas substituições para resolver a integral. A primeira delas é  $k^2 = U$ . Ao derivar ambos os lados têm-se que  $\frac{dU}{2} = kdk$ . Então,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{k_{Fp}} dk \frac{k^3}{\sqrt{M^{*2} + k^2}} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{U dU}{\sqrt{M^{*2} + U}}. \quad (456)$$

A segunda substituição é  $M^{*2} + U = A$  e derivando ambos os lados, têm-se  $dA = dU$

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{(A - M^{*2})}{\sqrt{A}} dA = \frac{1}{4\pi} \int \frac{A}{\sqrt{A}} dA - \frac{1}{4\pi} \int \frac{M^{*2}}{\sqrt{A}} dA. \quad (457)$$

Ao efetuar a integral se tem o seguinte resultado:

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{2}{3} A^{\frac{3}{2}} - 2M^{*2} \sqrt{A} \right) \quad (458)$$

ou

$$\frac{1}{6\pi} \left( A^{\frac{3}{2}} - 3M^{*2} \sqrt{A} \right). \quad (459)$$

Voltando para a variável  $U$  obtemos,

$$\frac{1}{6\pi} \left[ (M^{*2} + U)^{\frac{3}{2}} - 3M^{*2} \sqrt{M^{*2} + U} \right]. \quad (460)$$

Voltando para as variáveis iniciais e substituindo os respectivos limites de integração o resultado da equação (460) pode ser dado por,

$$\frac{1}{6\pi} \left[ (M^{*2} + k^2)^{\frac{3}{2}} - 3M^{*2} \sqrt{M^{*2} + k^2} \right] \Big|_0^{k_{Fn}}. \quad (461)$$

Ao aplicar as mesmas técnicas para a segunda integral, trará o seguinte resultado

$$\frac{1}{6\pi} \left( (M^{*2} + k^2)^{\frac{3}{2}} - 3M^{*2} \sqrt{M^{*2} + k^2} \right) \Big|_0^{k_{Fp}}. \quad (462)$$

Então,

$$\frac{1}{6\pi} \left( (M^{*2} + k^2)^{\frac{3}{2}} - 3M^{*2} \sqrt{M^{*2} + k^2} \right) \Big|_0^{k_{Fn}} + \frac{1}{6\pi} \left( (M^{*2} + k^2)^{\frac{3}{2}} - 3M^{*2} \sqrt{M^{*2} + k^2} \right) \Big|_0^{k_{Fp}}. \quad (463)$$

Ao substituir os limites de integração se tem,

$$\frac{1}{6\pi} \left[ (M^{*2} + k_{F_n}^2)^{\frac{3}{2}} - 3M^{*2} \sqrt{M^{*2} + k_{F_n}^2} + (M^{*2} + k_{F_p}^2)^{\frac{3}{2}} - 3M^{*2} \sqrt{M^{*2} + k_{F_p}^2} + 4M^{*3} \right]. \quad (464)$$

Ao resolver o setor leptônico que é semelhante ao setor bariônico, diferindo apenas nas massas, pode-se afirmar que,

$$\frac{1}{2} \langle \bar{\psi}_\lambda \gamma_i i \partial_i \psi_\lambda \rangle = \frac{1}{6\pi} \left[ (m_e^2 + k_{F_e}^2)^{\frac{3}{2}} - 3m_e^2 \sqrt{m_e^2 + k_{F_e}^2} - 2m_e^3 \right]. \quad (465)$$

Agora é possível definir uma expressão para pressão basta substituir (465) e (464) em (144)

$$P = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{6\pi} \left[ (k_{F_p}^2 + M^{*2})^{\frac{3}{2}} - 3M^{*2} \sqrt{(k_{F_p}^2 + M^{*2})} + (k_{F_n}^2 + M^{*2})^{\frac{3}{2}} - 3M^{*2} \sqrt{(k_{F_n}^2 + M^{*2})} + (m_e^2 + k_{F_e}^2)^{\frac{3}{2}} - 3m_e^2 \sqrt{m_e^2 + k_{F_e}^2} - 2m_e^3 + 4M^{*3} + 2m_e^3 \right].$$

É conveniente fatorar as massas. Então,

$$P = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{M^{*3}}{6\pi} \left[ \left( \frac{p_{F_n}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \sqrt{\frac{k_{F_n}^2}{M^{*2}} + 1} + \left( \frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \sqrt{\frac{p_{F_p}^2}{(cM^*)^2} + 1} + 4 \right] + \frac{m_e^3}{6\pi} \left[ \left( \frac{k_{F_e}^2}{m_e^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 3 \sqrt{\frac{p_{F_e}^2}{(m_e c)^2} + 1} + 2 \right]. \quad (466)$$

## D.2 Vínculos Walecka

$$\sqrt{k_{F_e}^2 + m_e^2} = \sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} - \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}}. \quad (467)$$

Elevando ambos os lados ao quadrado se tem,

$$k_{F_e}^2 = k_{F_n}^2 + 2M^{*2} + k_{F_p}^2 - 2\sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} - m_e^2. \quad (468)$$

Substituindo o vínculo (146) em (468),

$$k_{F_p}^2 = k_{F_n}^2 + k_{F_p}^2 + 2M^{*2} - 2\sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}} \sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} - m_e^2; \quad (469)$$

$$2\sqrt{k_{F_n}^2 + M^{*2}}\sqrt{k_{F_p}^2 + M^{*2}} = k_{F_n}^2 + 2M^{*2} - m_e^2. \quad (470)$$

Mais uma vez, eleva-se ambos os lados ao quadrado:

$$4(k_{F_n}^2 + M^{*2})(k_{F_p}^2 + M^{*2}) = (k_{F_n}^2 + 2M^{*2} - m_e^2)^2. \quad (471)$$

Ao isolar  $k_{F_p}^2$  têm-se,

$$k_{F_p}^2 = \frac{(k_{F_n}^2 + 2M^{*2} - m_e^2)^2}{4(k_{F_n}^2 + M^{*2})} - M^{*2}, \quad (472)$$

ou de um modo mais elegante:

$$k_{F_p}^2 = \frac{(k_{F_n}^2 + 2M^{*2} - m_e^2)^2 - 4M^{*2}(k_{F_n}^2 + M^{*2})}{4(k_{F_n}^2 + M^{*2})}, \quad (473)$$

## APÊNDICE E – Detalhes referente ao modelo de Walecka não linear

### E.1 Equações de movimento

A equação de Euler-Lagrange para sigma é,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = 0. \quad (474)$$

Resolvendo a primeira derivada, é possível ver que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \right] &= \partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma) \right] \right\} \\ &= \partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma g_{\mu\nu} \partial_\nu \sigma) \right] \right\} \\ &= \partial_\mu \left[ \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \partial_\nu \sigma + g_{\mu\nu} \partial_\mu \sigma) \right] \\ &= \partial_\mu g_{\mu\nu} \partial_\nu \sigma \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \sigma. \end{aligned} \quad (475)$$

Da segunda derivada:

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \sum_B \bar{\psi}_B [-(M - g_\sigma \sigma)] \psi_B + \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3} b M (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} h (g_\sigma \sigma)^4 \right\}.$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = -\sum_B \bar{\psi}_B g_\sigma \psi_B + m_\sigma^2 \sigma + b M g_\sigma^3 \sigma^2 + h g_\sigma^4 \sigma^3. \quad (476)$$

Então, com os resultados das derivadas chega-se a equação de movimento para o campo  $\sigma$ ,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma = \sum_B \bar{\psi}_B g_\sigma \psi_B - b M g_\sigma^3 \sigma^2 - h g_\sigma^4 \sigma^3. \quad (477)$$

#### E.1.1 Equação de movimento para $\rho$

A equação de Euler-Lagrange para o campo  $\rho$  é,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \rho)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0. \quad (478)$$

A resolução da primeira derivada se dará da seguinte forma,

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \boldsymbol{\rho})} \right) &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \boldsymbol{\rho})} \left( -\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} \right) \right] \\ &= -\partial_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \boldsymbol{\rho})} [(\partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\rho}_\mu) (\partial^\mu \boldsymbol{\rho}^\nu - \partial^\nu \boldsymbol{\rho}^\mu)] \right\}.\end{aligned}\quad (479)$$

Aplicando a propriedade distributiva pode-se ver que,

$$\begin{aligned}-\partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \boldsymbol{\rho})} (\partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu \partial^\mu \boldsymbol{\rho}^\nu - \partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu \partial^\mu \boldsymbol{\rho}^\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\rho}_\mu \partial^\mu \boldsymbol{\rho}^\nu + \partial_\nu \boldsymbol{\rho}_\mu \partial^\mu \boldsymbol{\rho}^\nu) \\ = -2\partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \boldsymbol{\rho})} (\partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu \partial^\mu \boldsymbol{\rho}^\nu - \partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu \partial^\nu \boldsymbol{\rho}^\mu) \\ = -2\partial_\mu \left[ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \boldsymbol{\rho})} (\partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu g^{\mu\rho} g^{\beta\theta} \partial_\beta \boldsymbol{\rho}_\theta) - \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \boldsymbol{\rho})} (\partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu g^{\beta\rho} g^{\mu\theta} \partial_\beta \boldsymbol{\rho}_\theta) \right],\end{aligned}\quad (480)$$

resolvendo a primeira derivada da equação acima se tem,

$$\begin{aligned}-2\partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \boldsymbol{\rho})} (\partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu g^{\mu\rho} g^{\beta\theta} \partial_\beta \boldsymbol{\rho}_\theta) &= -2g^{\mu\rho} g^{\beta\theta} (\delta_{\nu\mu} \delta_{\gamma\nu} \partial_\rho \boldsymbol{\rho}_\theta + \delta_{\nu\rho} \delta_{\gamma\mu} \partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu) \\ &= -2\delta_{\nu\mu} \delta_{\gamma\nu} g^{\mu\rho} g^{\beta\theta} \partial_\rho \boldsymbol{\rho}_\theta - 2\delta_{\nu\rho} \delta_{\gamma\mu} g^{\mu\rho} g^{\beta\theta} \partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu \\ &= -2g^{\nu\rho} g^{\gamma\theta} \partial_\rho \boldsymbol{\rho}_\theta - 2g^{\mu\nu} g^{\gamma\nu} \partial_\gamma \boldsymbol{\rho}_\theta \\ &= -2\partial^\nu \boldsymbol{\rho}^\mu - 2\partial^\nu \boldsymbol{\rho}^\mu \\ &= -4\partial_\mu \partial^\nu \boldsymbol{\rho}^\mu\end{aligned}\quad (481)$$

A segunda derivada se resolve analogamente a (481), resultando em,

$$2\partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \boldsymbol{\rho})} (\partial_\rho \boldsymbol{\rho}_\theta g^{\nu\rho} g^{\alpha\theta} \partial_\rho \boldsymbol{\rho}_\theta) = 4\partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\mu. \quad (482)$$

Substituindo as equações (482) e (481) em (479) se tem,

$$\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \boldsymbol{\rho})} \left[ -\frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} \right] = -\partial^\mu \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu}. \quad (483)$$

Após resolver a segunda derivada da equação (478) a equação de movimento para  $\boldsymbol{\rho}$  será,

$$-\partial^\mu \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}^\mu = \frac{1}{2} g_\rho \sum_B \bar{\psi}_B \gamma^\mu \tau \psi_B. \quad (484)$$

## E.2 Equação de movimento para $\bar{\psi}$

Para encontra-la, basta considerar o campo  $\psi$  como grau de liberdade.

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_B)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_B} = 0. \quad (485)$$

A primeira derivada resulta em,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_B)} \right) &= \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \psi_B)} \left\{ \sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( i\partial^\mu \psi_B - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \psi_B \right) - (M\psi_B - g_\sigma \sigma) \right] \psi_B \right\} \\ &= \partial_\mu (\gamma_{\mu i}) = 0. \end{aligned} \quad (486)$$

E a segunda derivada:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_B} &= -\frac{\partial}{\partial \psi_B} \left\{ \sum_B \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( i\partial^\mu \psi_B - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \psi_B \right) - (M\psi_B - g_\sigma \sigma) \right] \psi_B \right\} \\ &= \sum_B \left\{ \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \right) - (M - g_\sigma \sigma) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (487)$$

Sendo assim, é possível montar a equação de movimento para o campo espinorial  $\psi_B$ :

$$\sum_B \left\{ \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \right) - (M - g_\sigma \sigma) \right] \right\} = 0. \quad (488)$$

### E.2.1 Equação de movimento para o campo $\psi$

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_B)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_B} = 0. \quad (489)$$

Resolvendo as derivadas,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_B)} \right) &= \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_B)} \sum_B \left\{ \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( i\partial^\mu \psi_B - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \psi_B \right) - (M\bar{\psi}_B - g_\sigma \sigma) \right] \psi_B \right\} \\ &= \partial_\mu (\gamma_{\mu i}) = 0. \end{aligned} \quad (490)$$

Resolvendo a segunda derivada,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_B} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_B} \sum_B \left\{ \bar{\psi}_B \left[ \gamma_\mu \left( i\partial_B^\mu - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \psi_B \right) - (M \bar{\psi}_B - g_\sigma \sigma) \right] \psi_B \right\} \\ &= \sum_B \left\{ \left[ \gamma_\mu \left( i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \right) - (M - g_\sigma \sigma) \right] \psi_B \right\}. \end{aligned} \quad (491)$$

A equação de movimento para o campo  $\bar{\psi}_B$  é

$$\sum_B \left\{ \left[ \gamma_\mu \left( i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \right) - (M - g_\sigma \sigma) \right] \psi_B \right\} = 0. \quad (492)$$

### E.3 Energia de assimetria

Como as constantes de acoplamento são definidas a partir de uma teoria simétrica é impossível encontrar os valores de  $\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2$ , visto que a mesma está acompanhado de  $\frac{\rho_p - \rho_n}{2}$ , deve-se utilizar outra técnica para saber seu valor. Para isso é definido um parâmetro de assimetria ( $t$ ), no qual,

$$t = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_b} \text{ onde } \rho_b = \rho_n + \rho_p. \quad (493)$$

Em função de  $k_{F_n}$  e  $k_{F_p}$ , ( $t$ ) pode ser definido como,

$$\begin{aligned} k_{F_n} &= k_F \sqrt{1+t}, \\ k_{F_p} &= k_F \sqrt{1-t}, \end{aligned} \quad (494)$$

onde

$$k_F = \sqrt{\frac{k_{F_n}^2 + k_{F_p}^2}{2}}, \quad (495)$$

As derivadas em relação a ( $t$ ) são,

$$\frac{dk_{F_n}}{dt} = \frac{k_F}{2\sqrt{1+t}} \quad (496)$$

e

$$\frac{dk_{F_p}}{dt} = \frac{k_F}{2\sqrt{1-t}}. \quad (497)$$

Da definição de densidade de energia presente no apêndice A,

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{03}^2 + \frac{1}{3}Mb(g_\sigma\sigma)^3 - \frac{1}{4}j(g_\sigma\sigma)^4 \\ & + \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{k_{fp}} dk\sqrt{k^2 + M^{*2}} + \int_0^{k_{fn}} dk\sqrt{k^2 + M^{*2}} \right). \end{aligned} \quad (498)$$

Divide-se ambos os lados por  $\rho_b$

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\rho_b} = & \frac{1}{2\rho_b}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2\rho_b}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2\rho_b}m_\rho^2\rho_{03}^2 + \frac{1}{3\rho_b}Mb(g_\sigma\sigma)^3 - \frac{1}{4\rho_b}j(g_\sigma\sigma)^4 \\ & + \frac{1}{\rho_b\pi} \left( \int_0^{k_{fp}} dk\sqrt{k^2 + M^{*2}} + \int_0^{k_{fn}} dk\sqrt{k^2 + M^{*2}} \right). \end{aligned} \quad (499)$$

Substituindo a definição de campo médio (186)  $\rho_{03}$  na equação acima se tem,

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\rho_b} = & \frac{1}{2\rho_b}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2\rho_b}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{8\rho_b} \frac{g_\rho^2 t^2 \rho_b^2}{m_\rho^2} + \frac{1}{3\rho_b}Mb(g_\sigma\sigma)^3 - \frac{1}{4\rho_b}j(g_\sigma\sigma)^4 \\ & + \frac{1}{\rho_b\pi} \left( \int_0^{k_{fn}} dk\sqrt{k^2 + M^{*2}} + \int_0^{k_{fp}} dk\sqrt{k^2 + M^{*2}} \right). \end{aligned} \quad (500)$$

Derivando em relação a  $(t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right) = \frac{1}{4} \frac{g_\rho^2 t \rho_b}{m_\rho^2} + \frac{1}{\pi \rho_b} \left( k_{Fn} \sqrt{k_{Fn}^2 + M^{*2}} \frac{dk_{Fn}}{dt} + k_{Fp} \sqrt{k_{Fp}^2 + M^{*2}} \frac{dk_{Fp}}{dt} \right). \quad (501)$$

Substituindo (494) e (496) em (501),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right) = \frac{1}{4} \frac{g_\rho^2 t \rho_b}{m_\rho^2} + \frac{1}{\pi \rho_b} \left( k_{Fn} \sqrt{k_{Fn}^2 + M^{*2}} \frac{k_F}{2\sqrt{1+t}} - k_{Fp} \sqrt{k_{Fp}^2 + M^{*2}} \frac{k_F}{2\sqrt{1-t}} \right). \quad (502)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right) = \frac{1}{4} \frac{g_\rho^2 t \rho_b}{m_\rho^2} + \frac{1}{k_F^2} \left( k_{Fn} \sqrt{k_{Fn}^2 + M^{*2}} \frac{k_F}{2\sqrt{1+t}} - k_{Fp} \sqrt{k_{Fp}^2 + M^{*2}} \frac{k_F}{2\sqrt{1-t}} \right). \quad (503)$$

Utilizando mais uma vez as definições (496),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right) = \frac{1}{4} \frac{g_\rho^2 t \rho_b}{m_\rho^2} + \frac{1}{2} \left( \sqrt{1+t} \sqrt{k_{Fn}^2 + M^{*2}} \frac{1}{\sqrt{1+t}} - \sqrt{1-t} \sqrt{k_{Fp}^2 + M^{*2}} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \right) \quad (504)$$

ou até mesmo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right) = \frac{1}{4} \frac{g_\rho^2 t \rho_b}{m_\rho^2} + \frac{1}{2} \left( \sqrt{k_{Fp}^2 + M^{*2}} - \sqrt{k_{Fn}^2 + M^{*2}} \right). \quad (505)$$

Utilizando mais uma vez a definição (496),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right) = \frac{1}{4} \frac{g_\rho^2 t \rho_b}{m_\rho^2} + \frac{1}{2} \left( \sqrt{k_F^2(1+t) + M^{*2}} - \sqrt{k_F(1-t) + M^{*2}} \right). \quad (506)$$

Derivando mais uma vez em relação a  $(t)$ ,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right) = \frac{1}{4} \frac{g_\rho^2 \rho_b}{m_\rho^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{k_F^2}{\sqrt{k_F^2(1+t) + M^{*2}}} + \frac{k_F^2}{\sqrt{k_F(1-t)^2 + M^{*2}}} \right). \quad (507)$$

Zerando o parâmetro de assimetria se tem,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right) = \frac{1}{4} \frac{g_\rho^2 \rho_b}{m_\rho^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{k_F^2}{\sqrt{k_F^2 + M^{*2}}} + \frac{k_F^2}{\sqrt{k_F^2 + M^{*2}}} \right). \quad (508)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right) = \frac{1}{2} \frac{g_\rho^2 \rho_b}{m_\rho^2} + \frac{k_F^2}{\sqrt{k_F^2 + M^{*2}}}. \quad (509)$$

Da qual a literatura define o coeficiente de assimetria como a metade do termo do lado esquerdo da equação acima.

$$a_{sym} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\epsilon}{\rho_b} \right) \quad (510)$$

Então,

$$a_{sym} = \frac{1}{4} \frac{g_\rho^2 \rho_b}{m_\rho^2} + \frac{k_F^2}{2\sqrt{k_F^2 + M^{*2}}}. \quad (511)$$

Ao isolar a constante de interesse:

$$\frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} = \frac{4}{\rho_b} \left( a_{sym} - \frac{k_F^2}{2\sqrt{k_F^2 + M^{*2}}} \right) \quad (512)$$

**APÊNDICE F** – Fator utilizado para tornar as expressões de equilíbrio hidrostático adimensionais

Para encontrar o valor de  $\lambda_n$  e por consequência de  $\alpha$ , será preciso fazer as seguintes transformações, usando as unidades naturais  $G = c = \hbar = 1$  (GLENDEENING, 2012):

$$\begin{aligned}
 1 \text{ MeV} &= 1.6022 \times 10^{-6} \text{ erg} = 1.7827 \times 10^{-27} \text{ g} = 1.3234 \times 10^{-55} \text{ cm} \\
 &= 1.3234 \times 10^{-60} \text{ km} \\
 1 \text{ fm} &= 10^{-13} \text{ cm} = 10^{-18} \text{ km} \\
 mc^2 &= 939.56 \text{ MeV} \\
 \lambda &= \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{197.33 \text{ MeV fm}}{939.56 \text{ MeV}} = 0.21002 \text{ fm} = 0.21002 \times 10^{-18} \text{ km} \\
 \alpha &= \frac{mc^2}{\lambda^2} = \frac{939.56 \times 1.3234 \times 10^{-60} \text{ km}}{0.044108 \times 10^{-36} \text{ km}^2} = 2.8190 \times 10^{-20} \text{ km}^{-1}
 \end{aligned} \tag{513}$$