



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciências Sociais

Faculdade de Ciências Econômicas

Carla Gomes Costa de Souza

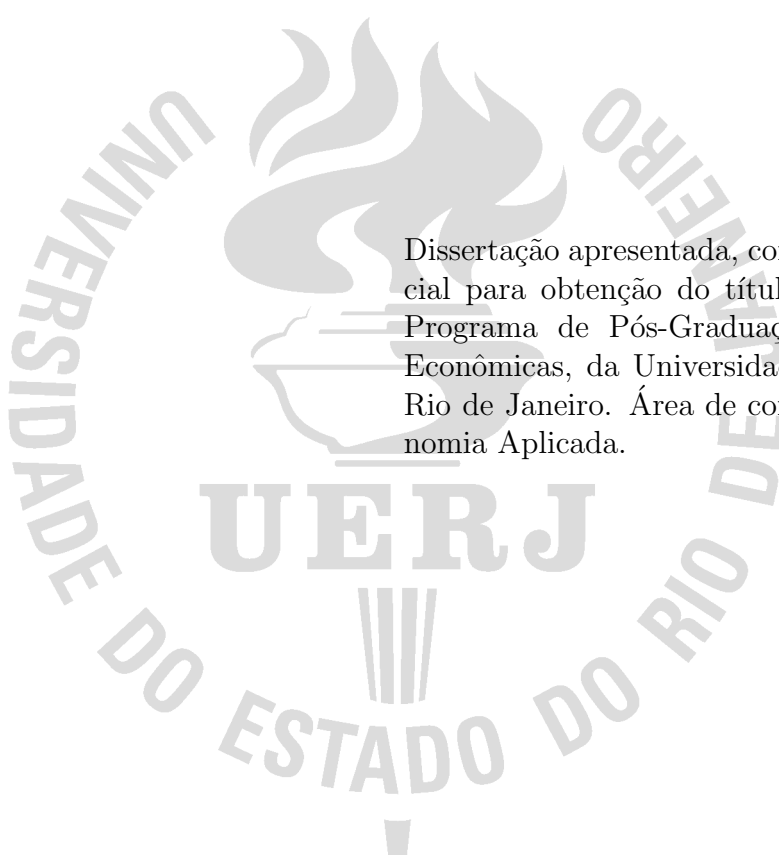
**Prêmio de risco de mercado variante no tempo e estrutura de
erro autorregressiva para os preços do petróleo**

Rio de Janeiro

2019

Carla Gomes Costa de Souza

**Prêmio de risco de mercado variante no tempo e estrutura de erro
autorregressiva para os preços do petróleo**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Econômicas, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Lucena Aiube

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CCS/B

S729 Souza, Carla Gomes Costa de.
Prêmio de risco de mercado variante no tempo e estrutura de erro autorregressiva para os preços do petróleo / Carla Gomes Costa de Souza. – 2019.
72 f.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Lucena Aiube.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Ciências Econômicas.
Bibliografia: f. 61-62.

1. Petróleo – Preços – Teses. 2. Investimentos – Teses. 3. Economia – Teses. I. Aiube, Fernando Antonio Lucena. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Ciências Econômicas. III. Título.

CDU 338.5:553.982

Bibliotecária: Regina Souza do Patrocinio CRB7/4954

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Carla Gomes Costa de Souza

**Prêmio de risco de mercado variante no tempo e estrutura de erro
autorregressiva para os preços do petróleo**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Econômicas, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Economia Aplicada.

Aprovada em 09 de dezembro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Antonio Lucena Aiube (Orientador)
Faculdade de Ciências Econômicas – UERJ

Prof. Dr. Andrea Ugolini
Faculdade de Ciências Econômicas - UERJ

Prof. Dr. Antonio Carlos Figueiredo Pinto
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

À minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador professor Fernando Antonio Lucena Aiube pelos valiosos ensinamentos e por toda dedicação e paciência ao longo deste trabalho.

À minha família pelo suporte e amor incondicional.

RESUMO

SOUZA, C. G. C. de. *Prêmio de risco de mercado variante no tempo e estrutura de erro autorregressiva para os preços do petróleo*. 2019. 72 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Econômicas) – Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Esta dissertação investiga se a consideração de um prêmio de risco de mercado variante no tempo (PRMVT) para os preços do petróleo melhora o ajuste dos preços observados aos alisados, em modelos de dois e três fatores. Os modelos de dois e três fatores são os de SCHWARTZ e SMITH (2000) e BHAR e LEE (2011) que inclui um prêmio de risco de mercado variante no tempo (PRMVT) e uma estrutura autorregressiva para os erros. Além disso, testa se a consideração de um fator autorregressivo diferente para cada contrato melhora o ajuste aos dados empíricos. Os modelos são estimados usando o filtro Kalman. Como resultado, o melhor modelo, em termos de ajuste, é o modelo de três fatores com uma estrutura de erro autorregressiva e um fator autorregressivo diferente para cada contrato, sob a premissa de um desvio-padrão único para todos os contratos.

Palavras-chave: Modelos em commodities. Prêmio de risco de mercado. Filtro de Kalman. Preços do petróleo.

ABSTRACT

SOUZA, C. G. C. de. *Time-varying market price of risk and autoregressive error structure of oil prices*. 2019. 72 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Econômicas) – Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

This Master's dissertation investigates whether considering a time-varying market price of risk (TVMPR) for oil prices improves the observed prices adjustment to smoothed ones. It compares SCHWARTZ e SMITH (2000) two and three factor models which is well established in the literature on commodity prices, with an extension proposed by BHAR e LEE (2011) that includes a time-varying market price (TVMPR) and autoregressive error structure. Additionally, it tests if considering a different autoregressive factor for each contract improves the fit of the empirical data. The models are estimated using the Kalman filter. As a result, the best model, considering prices adherence, is the three-factor model with an autoregressive structure of errors with a different autoregressive factor for each contract, under the assumption of a single standard deviation for all contracts.

Keywords: Commodity models. Market price of risk. Kalman filter. Oil prices.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Contratos futuros de petróleo $F_{t,T1}$ e $F_{t,T36}$ negociados na NYMEX . .	35
Figura 2 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 1	38
Figura 3 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 2	40
Figura 4 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 3	42
Figura 5 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 4	44
Figura 6 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 5a	47
Figura 7 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 5b	48
Figura 8 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 6a	49
Figura 9 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 6b	51
Figura 10 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 7	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Teste Ljung-Box para os resíduos no modelo clássico de SS	25
Tabela 2 - Principais estatísticas da série de preços	36
Tabela 3 - Parâmetros estimados para os Modelos 1, 2, 3 e 4	37
Tabela 4 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 1	38
Tabela 5 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 2	39
Tabela 6 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 3	41
Tabela 7 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 4	43
Tabela 8 - Parâmetros estimados para os Modelos 5a e 6a	45
Tabela 9 - Parâmetros estimados para os Modelos 5b e 6b	46
Tabela 10 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 5a	46
Tabela 11 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 5b	48
Tabela 12 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 6a	50
Tabela 13 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 6b	50
Tabela 14 - Parâmetros estimados para o Modelos 7	53
Tabela 15 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 7	53
Tabela 16 - Tabela resumo - AIC e \mathcal{L}	55
Tabela 17 - Testes de Razão da Verossimilhança (RV)	56
Tabela 18 - Parâmetros estimados para os Modelos SS(Clássico) e SS(3 fatores) . .	58
Tabela 19 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo de SS (Clássico)	59
Tabela 20 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo de SS(3 fatores)	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

NYMEX	New York Mercantile Exchange
PRM	Prêmio de risco de mercado
PRMVT	Prêmio de risco de mercado variante no tempo
SS	Schwartz e Smith
EDP	Equação diferencial parcial
CBOT	Chicago Board of Trade
MME	Medida Martingal Equivalente
AIC	Akaike Information Criterion
SIC	Schwartz Information Criterion
Var	Value at Risk
RMSE	Raiz quadrada da média do erro quadrático
MAE	Erro absoluto médio
MAPE	Erro absoluto médio percentual
i.i.d.	Independente e identicamente distribuído
Var	Value at Risk
WTI	Petróleo do tipo West Texas Intermediate
STM	Série Temporal Multivariada

LISTA DE SÍMBOLOS

S_t	Preço à vista
ζ	Primeiro fator de curto prazo
γ	Segundo fator de curto prazo
η	Fator de longo prazo
μ	Tendência de crescimento de longo prazo
$\bar{\zeta}$	Média de longo prazo do ativo para a variável ζ
$\bar{\gamma}$	Média de longo prazo do ativo para a variável γ
μ	Tendência de crescimento de longo prazo para a variável γ
ϵ_t	Estrutura de erros da equação de medição
ν_t	Estrutura de erros da equação de transição
$PR_{t,T}$	Prêmio de risco na data t de um contrato com vencimento em T
ϕ	Fator autorregressivo da estrutura de erros
$F_{t,T}$	Preço futuro em t de um contrato que vence em T
Ω	Espaço dos eventos, realizações
\mathcal{F}	σ -álgebra
$E^P(X)$	Valor esperado incondicional de X na medida \mathbb{P}
$E(X \mathcal{F})$	Valor esperado condicional de X dada a σ -álgebra \mathcal{F}
B_t	Processo Browniano Padrão
A^\top	Transposta da matriz A
$Var(X)$	Variância da variável aleatória X
$Var^{\mathbb{Q}}(X)$	Variância da variável aleatória X sob a medida \mathbb{Q}
L	Log-verossimilhança
L_R	Log-verossimilhança do modelo restrito
L_{UR}	Log-verossimilhança do modelo irrestrito
gl	Graus de liberdade
$\chi^2_{\alpha, gl}$	Estatística Qui-quadrado para o nível de significância α e gl graus de liberdade
H_0	Hipótese Nula
H_1	Hipótese Alternativa
V	Matriz de variância e covariância dos erros da equação de observação
W	Matriz de variância e covariância dos erros da equação de transição

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	13
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2	MODELAGEM	24
2.1	Modelo 1: SS (Caso Clássico), PRM constante e estrutura AR dos erros	24
2.2	Modelo 2: SS com dois fatores (PRMVT e estrutura AR dos erros)	26
2.3	Modelo 3: SS com três fatores (PRM constante e estrutura AR dos erros)	27
2.4	Modelo 4: SS com três fatores (PRMVT e estrutura AR dos erros)	28
2.5	Modelos 5 e 6 : SS dois e três fatores (PRMVT e estrutura AR dos erros com ϕ variante)	30
2.6	Modelos 7 : SS três fatores (PRM constante e estrutura AR dos erros com ϕ variante)	30
3	METODOLOGIA, DADOS E RESULTADOS	31
3.1	Metodologia	31
3.1.1	<u>Formulação Espaço-Estado</u>	32
3.1.2	<u>Algoritmo do filtro de Kalman</u>	32
3.1.3	<u>Estimação dos parâmetros</u>	33
3.1.4	<u>Algoritmo de Alisamento</u>	34
3.2	Dados	34
3.3	Resultados empíricos	36
3.3.1	<u>Modelo 1</u>	37
3.3.2	<u>Modelo 2</u>	39
3.3.3	<u>Modelo 3</u>	41
3.3.4	<u>Modelo 4</u>	41
3.3.5	<u>Modelos 5 e 6</u>	43
3.3.5.1	Modelo 5a	45
3.3.5.2	Modelo 5b	48
3.3.5.3	Modelo 6a	49
3.3.5.4	Modelo 6b	50
3.3.6	<u>Modelo 7</u>	52
3.3.6.1	Modelo 5a	52
3.3.7	<u>Resumo</u>	55
3.3.8	<u>Resultados adicionais</u>	57
3.3.8.1	Referência para comparação	57
	CONCLUSÃO	60

REFERÊNCIAS	61
APÊNDICE A – Derivação dos modelos	63
APÊNDICE B – Implementação do filtro de Kalman: Forma Espaço- Estado	71

INTRODUÇÃO

Commodities sempre foram consideradas bons instrumentos de hedge, embora durante o processo de financialização esta utilidade tenha sido reduzida. A entrada de agentes dos mercados financeiros nos mercados de commodities mudou suas principais características. Os agentes especuladores aumentaram ainda mais seu interesse nesses ativos a partir da crise financeira em 2008, período no qual assistiu-se a escalada nos preços de várias commodities. Com efeito, muitos agentes foram atraídos para esse mercado interessados na obtenção de ganhos face o aumento dos preços. Como consequência, não apenas a tarefa de modelagem de seus preços passou a receber considerável atenção na literatura, como também muitos modelos foram revisitados.

São usuários dessas informações produtores e consumidores, por exemplo. Saber como se comportam os preços dos ativos os ajuda em suas negociações, bem como em operações de mitigação de risco (hedge). Mas também, é a partir dessas informações que os agentes avaliam a expectativa de lucro e o risco envolvido, Value at Risk (Var), por exemplo. Além disso, uma modelagem adequada contribui para a avaliação de projetos de investimentos que envolvem commodities. Sem contar no grande número de outros instrumentos financeiros que têm seu valor atrelado aos seus preços, como é o caso de opções e swaps. Nesse sentido, entender como se dá a dinâmica dos seus preços é fundamental para a tomada de decisões acertadas envolvendo esses ativos, sejam elas a análise de investimentos, a decisão acerca do valor justo para contratos, a proteção ou mesmo a especulação.

Esta dissertação discute o caso do petróleo, uma commodity estratégica, presente nas mais diferentes cadeias produtivas e uma das mais líquidas dado o volume diário de negociação a nível global. Explora-se os recentes avanços na literatura dos modelos Gaussianos de fatores, com vistas a obter o melhor ajuste da estrutura a termos dos preços. Analisa-se a inclusão de um prêmio de risco de mercado variante no tempo (PRMVT) e de uma estrutura autorregressiva de erros ao modelo clássico de SCHWARTZ e SMITH (2000), doravante SS, seguindo a abordagem de BHAR e LEE (2011). O mesmo é feito para o caso de três fatores, isto é, ao modelo de SCHWARTZ e SMITH (2000) adicionando-se um segundo fator de curto prazo, como fizeram os autores. Mais a frente, apresenta-se uma extensão ao modelo de BHAR e LEE (2011) em que se flexibiliza a hipótese de um fator autorregressivo constante, considerando um parâmetro autorregressivo diferente para cada contrato. O restante dessa dissertação está dividido como segue. O capítulo 1 apresenta os avanços da literatura em modelos Gaussianos de fatores; O capítulo 2 trata da modelagem; O capítulo 3 apresenta a metodologia, dados e resultados; e o capítulo 4 conclui. Nesse sentido, este trabalho se propõe a alcançar os seguintes objetivos: (i) Comparar o caso clássico de SCHWARTZ e SMITH (2000) com modelos de dois e três fatores

que incluem a estrutura autorregressiva dos erros e um PRMVT, seguindo a abordagem de BHAR e LEE (2011); (ii) Flexibilizar a hipótese de BHAR e LEE (2011) que considera um único fator autorregressivo (ϕ), permitindo a existência de um ϕ_j , em que $j = 1, \dots, n$ e n é o número de meses até o vencimento do respectivo contrato futuro. A partir disso, analisar se há melhora na aderência entre preços observados e alisados, comparativamente aos demais modelos; (iii) Realizar os mesmos passos do item (ii), considerando uma única variância para todos os contratos e analisar o impacto dessa mudança na aderência do modelo, comparativamente aos demais modelos; (iv) Comparar os resultados obtidos nos três itens anteriores com o modelo de SS clássico, isto é, com dois fatores, sem estrutura autorregressiva dos erros e com PRM constante e com este mesmo modelo adicionado de um fator de curto prazo e também sem estrutura autorregressiva de erros e com PRM constante.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

GIBSON e SCHWARTZ (1990) propuseram um modelo de dois fatores para os preços do petróleo. A maioria dos estudos anteriores consideravam um único fator estocástico para descrever o preço das commodities, ver BRENNAN e SCHWARTZ (1985). Os autores consideraram o preço do ativo subjacente como função do seu preço à vista, guiado por um processo geométrico Browniano, e do retorno de conveniência¹, ao qual atribuíram um comportamento estocástico de reversão à média. Tais variáveis foram descritas por um processo de difusão conjunta. Considerando as hipóteses apropriadas e aplicando o lema de Itô, os autores chegaram a uma equação diferencial parcial (EDP) de segunda ordem para o preço futuro. Utilizando preços semanais de contratos futuros do petróleo, negociados na New York Mercantile Exchange (NYMEX), realizou-se uma regressão conjunta, descrita como um processo autorregressivo de primeira ordem, para estimar os parâmetros do modelo. Tendo em vista que tanto o preço à vista como o retorno de conveniência são variáveis não observáveis, o primeiro contrato futuro e uma estimativa do retorno de conveniência foram utilizados como proxies. Como resultado, os autores encontram evidências de um forte processo de reversão para o caso analisado. Além disso, encontraram evidências de uma correlação positiva e significativa entre o retorno de conveniência e o preço à vista. O PRM para o retorno de conveniência, contudo, precisou ser extraído da EDP. Para isso, a mesma foi resolvida numericamente e esse parâmetro obtido a partir da minimização da soma dos erros quadráticos. O valor ótimo encontrado foi negativo. GIBSON e SCHWARTZ (1990) repetiram esse exercício permitindo ao PRM para o retorno de conveniência variar em intervalos curtos de tempo. Foram calculados cinco valores ótimos para esse parâmetro e os resultados apontaram para uma relação inversa entre esse PRM e o preço à vista e, conseqüentemente, com o retorno de conveniência. Além disso, a inclusão do segundo fator estocástico evidenciou uma correlação imperfeita entre o preço do ativo subjacente e o preço à vista, permitindo capturar a diferença na estrutura de volatilidade entre os mesmos. Para testar a aderência do modelo, os autores realizaram um teste fora da amostra em contratos futuros de petróleo, separados por vencimento (curto, médio e longo prazo). A aderência foi satisfatória, comparativamente aos valores encontrados em estudos anteriores. Observou-se não apenas uma melhor aderência para contratos com vencimento mais próximo, bem como uma melhora substancial a partir da adoção do prêmio de risco de mercado variante

¹ Equivale à vantagem que o agente que possui a commodity fisicamente detém sobre o agente que possui um contrato futuro atrelado a esta commodity, já que a posse física desse ativo permite que o seu detentor se beneficie, por exemplo, de eventuais aumentos nos preços que ocorram entre a data de negociação do contrato e seu vencimento.

no tempo (PRMVT).

SCHWARTZ (1997) revisitou o modelo proposto por GIBSON e SCHWARTZ (1990) o resolvendo através do filtro de Kalman. A escolha desta metodologia simplificou muito os cálculos e, hoje, é uma técnica amplamente utilizada em estudos envolvendo modelos de fatores. O autor comparou três diferentes modelos, aplicando-os aos preços do petróleo, do cobre e do ouro. O primeiro modelo analisado foi um modelo de um único fator estocástico descrito por um processo de reversão à média. O segundo modelo analisado consistiu em uma aplicação do modelo de GIBSON e SCHWARTZ (1990) às commodities em questão. O terceiro modelo, por sua vez, correspondeu ao modelo de GIBSON e SCHWARTZ (1990) adicionado de uma terceira variável estocástica, a taxa de juros, modelada por um processo de reversão à média. Para estimar o modelo, SCHWARTZ (1997) utilizou preços futuros do petróleo, cobre e ouro, além de dados fornecidos pela empresa Enron, encontrando evidências de reversão à média para o petróleo e o cobre. Para o ouro, os resultados sugeriram ausência de reversão. Em todos os aspectos, os modelos de dois e três fatores apresentaram melhor aderência aos dados empíricos em relação ao primeiro modelo. Segundo os autores, o modelo de apenas um fator apresentou um ajuste insatisfatório tanto para os preços quanto para a estrutura de volatilidades. No caso dos modelos de dois e três fatores, o ajuste aos preços foi superior no terceiro modelo para o petróleo e o cobre, embora apenas marginalmente. No que diz respeito a estrutura de volatilidades, os resultados para o segundo e terceiro modelo foram muito similares.

SCHWARTZ e SMITH (2000) desenvolveram um modelo de dois fatores estocásticos para descrever os preços das commodities. Neste modelo, um dos fatores representa as variações no preços no curto prazo ao passo que o outro corresponde às oscilações do preço à vista em relação ao preço de equilíbrio de longo prazo. Neste contexto, o primeiro componente poderia ser interpretado como decorrente de mudanças capazes de afetar o preço temporariamente mas com tendência a se dissiparem ao longo do tempo, como, por exemplo, oscilações de oferta e demanda. Esse fator foi modelado pelos autores como um processo de reversão à média do tipo Ornstein-Uhlenbeck que reverte à média zero. Já o segundo fator teria relação com alterações no preço com caráter permanente, como mudanças de tecnologia ou regulamentação. Por meio de manipulações algébricas, os autores ressaltaram e provaram a similaridade de seu modelo com o de GIBSON e SCHWARTZ (1990). Segundo os autores, as variações de curto prazo, modeladas por um processo de reversão à média, equivaleriam ao retorno de conveniência, com a vantagem de que a forma como SCHWARTZ e SMITH (2000) descreveram o modelo, isto é, a independência estatística entre os fatores, permitia interpretar com mais clareza a contribuição de cada fator para as variações dos preços. SCHWARTZ e SMITH (2000) aplicam seu modelo aos preços semanais de contratos futuros do petróleo negociados na NYMEX e informações, fornecidas pela empresa Enron, acerca de dados históricos para a curva de preços forward. Eles estimaram os hiperparâmetros através do filtro de Kalman.

O modelo considerou PRM constantes para o curto e longo prazo. Os melhores ajustes do modelo foram para os contratos de médio prazo, ao passo que a pior aderência foi registrada para aqueles contratos com vencimento mais próximo. Neste modelo a volatilidade dos preços futuros corresponde às volatilidades dos fatores curto e longo prazo somadas e tende a convergir para a volatilidade do fator de longo prazo, conforme o vencimento dos contratos se torna maior. Os autores encontraram certa dificuldade em estimar o PRM de curto prazo, bem como o termo de tendência de longo prazo. Verificaram ainda que o ajuste aos dados empíricos para contratos com vencimento mais distante não era tão bom. E, em um adendo ao artigo original, procuraram corrigir essa questão. Propuseram substituir a tendência de crescimento de longo prazo, até então determinística, por uma tendência estocástica. A tentativa apresentou bons resultados. Em uma comparação entre os dois modelos de SCHWARTZ e SMITH (2000), AIUBE e SAMANEZ (2014) encontraram evidências de que a adoção de uma taxa estocástica de crescimento de longo prazo proporcionava uma melhor aderência do modelo aos dados. Eles aplicaram o dois modelos aos preços diários de contratos futuros de petróleo negociados na NYMEX, para um período de seis anos (de 6 de novembro de 2006 a 1 junho de 2012). A análise resultou em um valor de verossimilhança maior e ajuste à estrutura de preços e à estrutura de volatilidade melhor para o caso de três fatores. Adicionalmente, para o período, os autores encontraram que o modelo de dois fatores subestimou o PRM.

O trabalho de SCHWARTZ e SMITH (2000) representou uma contribuição significativa para a literatura de modelos de fatores. Diversos autores não apenas aplicaram seu modelo como também o estenderam. LUCIA e SCHWARTZ (2002) procuraram entender o comportamento sazonal dos preços da eletricidade negociada na Bolsa dos países nórdicos (Nordic Power Exchange - Nord Pool). Para tanto, estimaram dois modelos. Um deles descrito por um único fator estocástico, modelado por um processo do tipo Ornstein-Uhlenbeck, adicionado de um componente sazonal determinístico. E o outro correspondente a uma aplicação do modelo de SCHWARTZ e SMITH (2000), adicionada de um componente determinístico sazonal. Para modelar a sazonalidade os autores propuseram a utilização de funções senoidais e variáveis dummies, sendo que tanto o modelo de um fator quanto o modelo de dois fatores foram avaliados não apenas sob a ótica dos preços, mas também do logaritmo dos preços. Como resultado, foram encontradas evidências de um forte componente sazonal, para a energia, nesse mercado.

SØRENSEN (2002) aplicou o modelo de SCHWARTZ e SMITH (2000) aos preços do milho, da soja e do trigo, com o objetivo principal de capturar o comportamento sazonal dessas commodities agrícolas. Utilizando dados da Chicago Board of Trade (CBOT), o modelo foi estimado a partir do filtro de Kalman. Os resultados evidenciaram que todos os parâmetros sazonais foram altamente significativos. Ademais, os autores encontram que os níveis de estoque e o retorno de conveniência são variáveis inversamente relacionadas.

MANOLIU e TOMPAIDIS (2002) apresentaram um modelo multi-fator genérico

para a análise dos preços do gás natural. Os autores aplicaram o modelo de dois fatores de SCHWARTZ e SMITH (2000), adicionado de um componente de sazonalidade descrito pela soma de funções trigonométricas. Os resultados apontaram para a relevância de se considerar a sazonalidade para o caso desta commodity. Os autores avaliaram ainda o desempenho do modelo de dois fatores para a previsão de um dia à frente, comparativamente a um modelo de um único fator seguidor de um processo de reversão à média. A análise dos erros de previsão para dentro da amostra revelou melhor aderência para o modelo de dois fatores. Ademais, o modelo de dois fatores oferece ganhos significativos em termos da análise da estrutura de correlação entre os preços futuros.

CORTAZAR e NARANJO (2003) estenderam o modelo de SCHWARTZ e SMITH (2000), propondo um modelo genérico composto por um termo de tendência constante e uma soma de N-fatores modelados por um processo de reversão à média. Adicionalmente, avançaram na literatura ao apresentarem uma forma de aplicação do filtro de Kalman a um painel com dados faltantes. Exemplificam seu estudo aplicando um modelo de quatro fatores a dados diários de preços futuros do petróleo negociados na NYMEX para um período de dez anos, incluindo contratos com vencimentos de um mês até sete anos. Os resultados sugeriram evidências de reversão à média para todos os três componentes de curto prazo. Encontrou-se ainda componentes de volatilidade e de correlação entre as variáveis de estado altamente significativos. O termo de tendência para os todos os subperíodos analisados foi não significativo. Ademais, observou-se um bom ajuste da estrutura de preços e volatilidade dos retornos futuros aos dados empíricos.

CORTAZAR e NARANJO (2006) propuseram um modelo de N-fatores que generalizava vários modelos existentes à época dentre eles o de SCHWARTZ e SMITH (2000). No entanto, em vez de usar um painel completo de dados, os autores propuseram uma adaptação que permitia que o número de observações dependesse do tempo. Assim, puderam aplicar o filtro de Kalman a um painel incompleto de dados. Eles argumentaram que a exclusão de dados ou sua agregação ocasionava uma grande perda de informações. E assim como CORTAZAR e NARANJO (2003), usaram contratos com até sete anos de vencimento. Os autores utilizaram preços futuros diários do petróleo, negociados na NYMEX. Encontraram parâmetros altamente significativos de reversão à média e que o modelo de um e dois fatores não apresentava uma boa adequação às observações, sendo necessário pelo menos três fatores para descrever os preços do petróleo. Contudo, apesar de o modelo de três fatores ter apresentado um bom ajuste aos dados, o ajuste do modelo de quatro fatores foi melhor para a estrutura de volatilidade. Segundo os autores, isso se deve ao fato de o quarto fator dar mais flexibilidade ao ajuste simultâneo da média e da variância. Foram encontrados resultados similares para o cobre.

Sob a hipótese de um PRM constante no tempo, KOLOS e RONN (2008) observaram seu sinal e magnitude para várias commodities energéticas, dentre elas o petróleo e o gás natural. Usaram o modelo de SCHWARTZ e SMITH (2000) para extrair a vola-

tilidade e com isso conseguiram obter diferentes PRM para o curto e longo prazo. Várias estimativas do PRM foram não significativas, embora com auxílio da estrutura a termo de volatilidades encontraram evidências de um PRM positivo para commodities energéticas. O método utilizado para resolver o modelo foi o da máxima verossimilhança, como em CASASSUS e COLLIN-DUFRESNE (2005).

MIRANTES, POBLACIÓN e SERNA (2012) estenderam o modelo de dois fatores de SCHWARTZ e SMITH (2000) transformando-o em um modelo de quatro fatores. Além do fator de curto prazo e do fator de longo prazo, presentes no modelo de SCHWARTZ e SMITH (2000), o autores adicionam mais um componente estocástico e outro complementar a esse para modelar a sazonalidade. Eles aplicam seu modelo aos contratos futuros de gás natural listados na NYMEX. Encontrou-se evidências de uma volatilidade estocástica para esta commodity e que considerá-la resultava em ganhos de ajuste em relação ao modelo SCHWARTZ e SMITH (2000) com dois fatores e volatilidade determinística. Os autores ilustraram o estudo com outras aplicações de seu modelo ao analisarem os contratos futuros de querosene e gasolina listados na NYMEX, além de contratos de gás natural e gasolina listados no mercado de futuros europeu (ICE Futures Europe - London). Os resultados reiteram a presença de volatilidade estocástica, bem como a superioridade do modelo com sazonalidade estocástica em termos de ajuste aos dados empíricos.

Embora a maioria dos estudos que aplicaram e estenderam o modelo de SCHWARTZ e SMITH (2000) tenham considerado um PRM constante, sua variação no tempo é bem demonstrada na literatura. Ele pode ser definido como a remuneração acima da taxa livre de risco por unidade de volatilidade. Diferentemente do mercado de equities, em que os agentes exigem uma remuneração positiva para aceitarem o risco, no mercado de commodities participantes podem desejar pagar para correr o risco, isto é, aceitar um PRM negativo. Isso tem a ver com o fato de os contratos futuros, instrumentos usuais nesse tipo de negociação, terem custo zero de entrada em contraposição ao mercado de ações. Isso pode ser facilmente observado ao escrevermos o processo de preços e de preços futuros na medida martingal equivalente (MME). No primeiro caso, há um drift dado pela taxa livre de risco enquanto no segundo não há tendência, ou seja, a dinâmica de preços futuros é martingal, ver KOLOS e RONN (2008) e AIUBE (2013).

Em transações envolvendo commodities, em geral, há um lapso temporal entre a negociação e a liquidação e entrega. Isso deixa os agentes que com elas negociam expostos as oscilações de seus preços. Para se proteger, produtores e compradores se dirigem ao mercado futuro para fazer operações de hedge (proteção). Nesse sentido, os contratos futuros são instrumentos utilizados como um espécie de “trava” aos preços. Por exemplo, um produtor de petróleo que vende um carregamento dessa commodity na data t , com entrega para uma data T , em que $T > t$, vai ao mercado futuro e assume a posição vendida (short), isto é, vende um contrato futuro. Dessa forma, se o preço do produto cair, o valor que ele está perdendo na venda física será compensado pelo ganho

na negociação no mercado futuro. Por sua vez, se o comprador da commodity deseja se proteger, basta comprar um contrato futuro, assumindo uma posição comprada (long) no mercado futuro. A contraparte dessas negociações, o especulador, toma para si o risco e como recompensa exige um ganho que é o PRM. Como definido em BHAR e LEE (2011) e AIUBE et al. (2017), o PRM, dado pela equação (1), pode ser definido como a diferença entre a expectativa para o preço à vista no futuro, dada as informações que se têm hoje, e o preço futuro.

$$PRM_{t,T} = E^{\mathbb{P}}(S_T | \mathcal{F}_t) - F_{t,T_j} \quad (1)$$

Onde \mathbb{P} representa a medida real de probabilidade, T as datas de vencimento dos contratos, \mathcal{F}_t a σ -álgebra, S_T o preço à vista em T e F_{t,T_j} o preço do contrato futuro na data t com vencimento em T em que $j = 1, \dots, n$ e n é o número de meses até o vencimento do respectivo contrato.

Se existe a expectativa de que o preço à vista na data T será maior que o preço futuro negociado na data t , diz-se que o mercado futuro está em Backwardation. À situação inversa dá-se o nome de Contango.

CASASSUS e COLLIN-DUFRESNE (2005) propuseram um modelo de três fatores, sendo eles o preço à vista, o retorno de conveniência e a taxa de juros. No entanto, em vez de considerarem dinâmicas independentes para cada fator, modelaram o retorno de conveniência como função do preço à vista e da taxa de juros. Adicionalmente consideraram um PRMVT. Desse modo, foi possível obter uma força de reversão diferente em cada medida, real e martingal e, portanto, identificar qual fator mais contribuía para esse comportamento. Os ativos analisados foram o petróleo, o cobre, o ouro, a prata e para as taxas de juros utilizou-se os preços dos títulos zero coupon do tesouro americano. Os dados foram analisados com frequência semanal. Encontrou-se evidências de uma relação positiva e significativa entre a taxa de juros e o retorno de conveniência. Segundo os autores este era um resultado esperado, tendo em vista que os custos de estocagem aumentam com as taxas de juros, aumentando, por consequência o retorno de conveniência. Além disso, a correlação entre preço à vista e retorno de conveniência com a taxa de juros foi não significativa, evidenciando que a taxa de juros segue um processo independente. Para todas as commodities encontrou-se uma reversão significativa relacionada à taxa de juros. Em relação ao preço à vista todas as commodities apresentaram reversão positiva e significativa, à exceção do ouro, um resultado similar ao de SCHWARTZ (1997). Para petróleo, cobre, prata e ouro encontrou-se evidências de um PRMVT, negativo e significativo. A comparação entre os parâmetros de reversão relacionados ao preço à vista, na medida real e martingal, possibilitou distinguir qual fator mais contribuiu para a reversão em cada commodity, isto é, o retorno de conveniência ou o PRMVT. Para o petróleo

e o cobre, encontrou-se que a reversão está majoritariamente relacionada ao retorno de conveniência, enquanto o ouro e a prata tem com principal fonte de reversão o PRMVT.

CARTEA e WILLIAMS (2008), por sua vez, aplicaram o modelo de SCHWARTZ e SMITH (2000) à análise do preço do gás natural no Reino Unido, adicionando um componente sazonal determinístico ao modelo. Os autores propuseram a adoção de um PRM de curto prazo, argumentando que os desvios no preço de equilíbrio provocados pelas variações de curto prazo causam alterações no retorno de conveniência o que, por consequência, impacta o PRM. Assim, modelaram o PRM de curto prazo como uma função afim das variações dos preços à vista no curto prazo. Encontraram evidências de um PRMVT negativo e significativo, contudo, houve dificuldades em obter resultados conclusivos, principalmente, quanto a magnitude do PRM. Este fato pode estar associado a quantidade limitada de dados utilizados no estudo.

BHAR e LEE (2011) aplicaram o modelo de SCHWARTZ e SMITH (2000) aos preços futuros do petróleo e propuseram a adoção de um PRMVT. Adicionalmente, estenderam o modelo de SCHWARTZ e SMITH (2000) adicionando um segundo fator de curto prazo também modelado como um processo de reversão à média. Diferentemente do trabalho de SCHWARTZ e SMITH (2000) que considerava os erros de medição independentes e indenticamente distribuídos (i.i.d.), sugeriram considerar um processo autoregressivo de ordem um. Os autores analisaram o caso de dois fatores de SCHWARTZ e SMITH (2000) adicionado da estrutura autorregressiva dos erros e este mesmo modelo adicionada de um segundo fator de curto prazo. A partir disso os ganhos da inclusão do PRMVT. Assim, através do filtro de Kalman, os autores estimam os hiperparâmetros do modelo, com base da maximização da verossimilhança. Os dados utilizados para a estimação foram preços semanais de contratos futuros de petróleo comercializados na NYMEX. Utilizaram desde contratos com vencimento de um mês até contratos com vencimento cinco anos a frente, para o período de fevereiro de 1999 a agosto de 2007. Os resultados demonstraram que é significativo considerar não apenas o PRMVT mas também a estrutura autorregressiva dos erros. Testes da Razão de Verossimilhança (RV) rejeitam a hipótese de um PRM constante no tempo, o que foi reiterado a partir da estimação dos parâmetros. Ademais, testes de aderência mostraram que a inclusão do PRMVT e da estrutura autorregressiva dos erros melhorou de forma significativa o ajuste. A estimação evidenciou ainda que é relevante considerar dois fatores de curto prazo para a modelagem de preços do petróleo. Para o modelo de três fatores, BHAR e LEE (2011) encontraram dificuldades em estimar a parcela variável de um dos PRM. Segundo os autores, a não significância desse parâmetro pode estar associada a necessidade de uma maior quantidade de dados para a estimação ou mesmo a existência de uma relação linear entre esse termo e o PRM.

MIRANTES, POBLACIÓN e SERNA (2014) também encontraram evidências empíricas de um PRMVT ao estudarem o caso do petróleo, da querosene, da gasolina sem chumbo e do gás natural. Os autores propuseram uma extensão ao modelo de

SCHWARTZ e SMITH (2000), modelando os PRM de curto e longo prazo como funções afins das variáveis de estado. Além disso, para todas as commodities, à exceção do petróleo, consideraram um componente determinístico sazonal, modelado por uma função trigonométrica. A partir de dados dos preços futuros de cada commodity, separados em dois subperíodos, os autores estimaram o modelo, através do filtro de Kalman. Os resultados indicaram que, para todos os casos analisados, considerar o PRMVT é relevante. Além disso, observou-se que os modelos que incluíam PRMVT apresentaram não apenas melhores indicadores de informação, notadamente, Akaike information criterion (AIC) e Schwartz information criterion (SIC), mas também, quando submetidos ao teste. Para ilustrar a utilização do modelo, os autores fizeram uma aplicação para o apreçamento de opções, mostrando, através do teste da raiz do erro quadrático médio, do erro absoluto médio e da raiz do erro quadrático percentual médio, que o modelo com PRMVT produz erros menores comparativamente aquele com PRM constante no tempo.

SHAO, BHAR e COLWELL (2015) estenderam o modelo de CARTEA e WILLIAMS (2008) ao adicionarem um segundo fator estocástico de curto prazo. Os autores consideraram PRMVT para ambos os componentes de curto prazo. Consideram ainda um componente sazonal para o PRM do segundo fator de curto prazo. Os dados analisados foram observações semanais de contratos futuros de gás natural dos EUA negociados no NYMEX. E o modelo foi estimado através do filtro de Kalman. Encontram evidências de um PRMVT para o gás natural nos Estados Unidos. Os autores compararam três modelos. O primeiro modelo com dois fatores de curto prazo, um fator de longo prazo, um componente sazonal e um PRMVT para cada fator de curto prazo, sendo um deles adicionado de um componente sazonal. Já o segundo modelo corresponde ao primeiro modelo, subtraído de um fator de curto prazo. E, o último modelo corresponde ao primeiro modelo sem o componente sazonal para o PRM. A comparação entre os modelos resulta na seguinte conclusão: o modelo de três fatores apresenta melhor qualidade no ajuste aos dados empíricos, relativamente aos demais.

AIUBE et al. (2017) também encontram evidências de um PRMVT ao analisar o caso do gás natural nos EUA. Os avanços na prospecção e extração do gás de xisto impactaram diretamente o preço do gás natural, iniciando um período de preços baixos para esta commodity. Essas mudanças por sua vez, impactaram diretamente as expectativas em torno dos seus preços. Nesse contexto, os autores aplicaram o modelo de dois fatores SCHWARTZ e SMITH (2000), considerando a sazonalidade e um PRM constante no tempo. Estimando o modelo através do filtro de Kalman, extraíram o PRM implícito no modelo para cada vencimento. Em relação ao sinal do PRM, encontraram que para o primeiro período analisado, isto é, antes da queda nos preços, o PRM era positivo. Com a mudança no preços, contudo, o sinal do PRM passou a ser negativo. Os autores encontram ainda evidências de que a magnitude do PRM era muito maior no primeiro subperíodo que no segundo. Esses resultados são consistentes um PRMVT para os preços

do gás natural.

LIEDTKE (2018) encontrou evidências de um PRMVT ao avaliar um modelo de três fatores para os preços do petróleo. Para calibrar o modelo o autor utiliza não apenas preços semanais dos contratos futuros negociados na NYMEX mas também informações acerca de expectativas desses preços, computadas pela Bloomberg. O autor analisa PRM para o curto, médio e longo prazo. Os resultados sugerem um comportamento estocástico desse componente. Ademais, sugerem ainda que o PRM é mais alto no curto que no longo prazo e a volatilidade desse prêmio mais alta para contratos com vencimentos mais próximos.

Com pôde ser visto, o PRM é uma variável central na dinâmica de preços de várias commodities, dentre elas o petróleo. Mesmo que com intensidades diferentes, o PRM está intrinsecamente relacionado aos processos de reversão à média e ao retorno de conveniência, sendo influenciado diretamente por notícias, oscilações de mercado, variações de estoques (notadamente, desvios em relação aquilo que é esperado), além de outros aspectos que fazem com que as expectativas se alterem. Assim, trata-se de um componente altamente variável, influenciado por contexto e tempo. Com efeito, considerá-lo variável no tempo é bem efetivo e como pôde ser observado contribui para um melhor ajuste do modelo à realidade. Mensurá-lo de forma apropriada contribui, portanto, para a formulação de estratégias de investimento, decisões de hedge e avaliações de risco mais acertadas, possibilitando não só aumentar ganhos como também evitar perdas.

2 MODELAGEM

2.1 Modelo 1: SS (Caso Clássico), PRM constante e estrutura AR dos erros

Para especificar o modelo, considere o espaço de probabilidade dado por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que Ω é o espaço de eventos, \mathcal{F} é a σ -álgebra e \mathbb{P} representa a medida real de probabilidade. Além disso, considere a hipótese de que o mercado é livre de arbitragem e completo de modo que uma medida martingal equivalente (MME) \mathbb{Q} existe e é única.

SCHWARTZ e SMITH (2000) decompuseram o preço à vista S_t como a soma de duas variáveis latentes, são elas, as variações de curto prazo e as variações de longo prazo. O primeiro componente está relacionado às flutuações temporárias, de oferta e demanda, por exemplo, capazes de distanciar o preço à vista do preço de longo prazo. Tal fator foi modelado como um processo do tipo Ornstein-Uhlenbeck com reversão a média zero. Já o outro componente representaria variações com impacto permanente na economia, como novas tecnologias ou alterações na regulação, capazes de deslocar o preço sem que ele volte para o nível anterior. Essas variações foram modeladas como um processo geométrico Browniano.

Sob a medida \mathbb{P} , o logaritmo do preço à vista é dado por:

$$\ln S_t = \zeta_t + \eta_t \quad (2a)$$

$$d\zeta_t = -\kappa_\zeta \zeta_t dt + \sigma_\zeta dB_{\zeta,t} \quad (2b)$$

$$d\eta_t = \mu dt + \sigma_\eta dB_{\eta,t}, \quad (2c)$$

onde κ_ζ é a velocidade de reversão do fator de curto prazo e σ_ζ é a volatilidade, do componente de curto prazo. μ e σ_η são, respectivamente, a tendência e a volatilidade de longo prazo. As duas variáveis de estado são guiadas por um processo Browniano padrão $dB_{\zeta,t}$ e $dB_{\eta,t}$, e são correlacionadas por $\rho_{\zeta\eta}$.

Implementando a mudança de medida, pode-se escrever o modelo sob a medida martingal equivalente \mathbb{Q} como

$$d\zeta_t = (-\kappa_\zeta \zeta_t - \alpha_\zeta) dt + \sigma_\zeta d\tilde{B}_{\zeta,t} \quad (3a)$$

$$d\eta_t = (\mu - \alpha_\eta) dt + \sigma_\eta d\tilde{B}_{\eta,t}, \quad (3b)$$

em que, α_ζ e α_η são, respectivamente, o PRM das variações de curto prazo e de longo prazo e $d\tilde{B}_{j,t}$ representa o incremento do processo Browniano padrão sob a medida \mathbb{Q} , onde $j=\zeta, \eta$ e t representa o tempo. Considerando que $F_{t,T} = E^\mathbb{Q}(S_T|\mathcal{F}_t)$ prova-se que o

preço futuro é dado por:

$$\ln F_{t,T} = e^{-\kappa_\zeta(T-t)}\zeta_t + \eta_t + A(T-t) , \quad (4)$$

onde

$$\begin{aligned} A(T-t) = & \mu^*(T-t) - \frac{\alpha_\zeta}{\kappa}(1 - e^{-\kappa_\zeta(T-t)}) + \frac{\sigma_\zeta^2}{4\kappa_\zeta}(1 - e^{-2\kappa_\zeta(T-t)}) \\ & + \rho_{\zeta\eta} \frac{\sigma_\zeta\sigma_\eta}{\kappa_\zeta}(1 - e^{-\kappa_\zeta(T-t)}) + \frac{1}{2}\sigma_\eta^2(T-t) , \end{aligned}$$

onde $\mu^* = \mu - \alpha_\eta$ e o vetor $\Theta = \{\kappa_\zeta, \sigma_\zeta, \alpha_\zeta, \sigma_\eta, \mu^*, \mu, \rho_{\zeta\eta}, s_j^2\}$ representa os hiperparâmetros do modelo, em que s_j^2 é a variância da diferença entre os preços observado e modelados para cada contrato futuro, em que $j = 1, \dots, n$, n é o número de meses até o vencimento do respectivo contrato.

No modelo de SS, os erros são considerados independentemente e identicamente distribuídos, conforme a equação (5):

$$F_{t,T} = \hat{F}_{t,T} + \nu_t \quad (5)$$

em que ν_t é a distribuição dos erros da equação de medição ou observação.

Tabela 1 - Teste Ljung-Box para os
resíduos no modelo clássico
de SS

Lags	1	5	10
Estatística χ^2	534.7	2,160.7	3,439.7
p-valor	(0.0)	(0.0)	(0.0)

Fonte: O autor, 2019.

Embora a maioria dos trabalhos envolvendo modelos de fatores em commodities considere que os erros ($F_{t,T} = \hat{F}_{t,T} + \nu_t$) são independentemente e identicamente distribuídos como no Modelo de SS, ao analisar-se a autocorrelação dos resíduos do modelo clássico para os dados utilizados nessa dissertação, através do teste de Ljung-Box, nota-se que os mesmos são autocorrelacionados.

A Tabela 1 apresenta os resultados deste teste para um, cinco e dez lags. Pode-se observar que a hipótese nula de que não existe autocorrelação é rejeitada. Para incluí-la no termo de erro, especificamos o termo de erro como um processo autorregressivo de

ordem 1, isto é, AR(1), conforme a equação (6):

$$\nu_{j,t} = \phi \nu_{j,t-1} + \epsilon_{j,t} \quad (6)$$

em que $\epsilon_t \sim N(0, s_j^2)$, $j = 1, \dots, n$, n é o número de meses até o vencimento do contrato futuro e ν_t é a distribuição dos erros da equação de medição e, como em BHAR e LEE (2011), num primeiro momento, considera-se um fator autorregressivo ϕ constante. Posteriormente, nos Modelos 5a, 5b, 6a e 6b, essa hipótese será flexibilizada e considerar-se-á ϕ_j , ou seja, um parâmetro autorregressivo diferente para cada contrato.

2.2 Modelo 2: SS com dois fatores (PRMVT e estrutura AR dos erros)

O modelo 2 consiste em uma aplicação do modelo de BHAR e LEE (2011) de dois fatores considerando um PRMVT e uma estrutura autorregressiva para os erros.

Na medida \mathbb{P} , exatamente como no Modelo 1, o logaritmo do preço à vista é dado por:

$$\ln S_t = \zeta_t + \eta_t \quad (7a)$$

$$d\zeta_t = -\kappa_\zeta \zeta_t dt + \sigma_\zeta dB_{\zeta,t} \quad (7b)$$

$$d\eta_t = \mu dt + \sigma_\eta dB_{\eta,t} , \quad (7c)$$

onde todas as variáveis foram descritas anteriormente.

Considerando um PRMVT $\lambda_{\zeta t}$ para o fator de curto prazo ζ_t , podemos escrever:

$$\lambda_{\zeta t} = \frac{\alpha_\zeta + \beta_\zeta \zeta_t}{\sigma_\zeta} \quad (8)$$

Já para o fator de longo prazo, η_t , o PRM constante pode ser escrito por:

$$\lambda_\eta = \frac{\alpha_\eta}{\sigma_\eta} \quad (9)$$

Seguindo os mesmos passos de antes, obtém-se:

$$\ln F_{t,T} = \zeta_t e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)} + \eta_t + B(T-t) , \quad (10)$$

onde, $k_\zeta^* = k_\zeta + \beta_\zeta$, $\mu^* = \mu - \lambda_\eta$ e $B(T - t)$ é:

$$B(T - t) = \frac{-\alpha_\zeta}{\kappa_\zeta^*}(1 - e^{-k_\zeta^*(T-t)}) + \mu^*(T - t) + \frac{\sigma_\zeta^2}{4\kappa_\zeta^*}(1 - e^{-2\kappa_\zeta^*(T-t)}) + \frac{1}{2}\sigma_\eta^2(T - t) + \rho_{\zeta\eta}\frac{\sigma_\zeta\sigma_\eta}{\kappa_\zeta^*}(1 - e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)}) .$$

A derivação completa do modelo de dois fatores considerando o PRMVT encontra-se no Apêndice desta dissertação. A partir das mudanças, em relação ao Modelo 1, o vetor de hiperparâmetros passa a ser $\bar{\Theta} = \{\kappa, \sigma_\zeta, \alpha_\zeta, \beta_\zeta, \mu^*, \mu, \sigma_\eta, \rho_{\zeta\eta}, \phi, s_j\}$

2.3 Modelo 3: SS com três fatores (PRM constante e estrutura AR dos erros)

Conforme BHAR e LEE (2011), considerar apenas um componente para o curto prazo, como no modelo proposto por SCHWARTZ e SMITH (2000) não descreve bem os preços quando são considerados contratos com vencimentos mais longos. Assim, os autores sugerem a adição de um segundo fator de curto prazo, também modelado por um processo de reversão. Ao testarem a inclusão do segundo fator de curto prazo, juntamente com o PRMVT, os autores encontraram que esse novo modelo melhorava de forma significativa o ajuste aos dados empíricos.

Neste caso, o logaritmo do preço à vista, na medida \mathbb{P} , passa a ser descrito por:

$$\ln S_t = \zeta_t + \gamma_t + \eta_t \tag{11a}$$

$$d\zeta_t = -\kappa_\zeta\zeta_t dt + \sigma_\zeta dB_{\zeta,t} \tag{11b}$$

$$d\gamma_t = -\kappa_\gamma\gamma_t dt + \sigma_\gamma dB_{\gamma,t} \tag{11c}$$

$$d\eta_t = \mu dt + \sigma_\eta dB_{\eta,t} , \tag{11d}$$

onde κ_ζ e κ_γ são as velocidades de reversão e σ_ζ e σ_γ as volatilidades de curto prazo. μ e σ_η são, respectivamente, a tendência e a volatilidade das variações de longo prazo. Os três fatores desse modelo seguem um processo Browniano padrão em que $dB_{i,t}$, $i = \zeta, \gamma, \eta$ e $dB_{j,t}dB_{k,t} = \rho_{j,k}dt$, para $j \neq k$.

Implementando a mudança de medida, pode-se escrever o modelo, na medida martingal, equivalente como

$$d\zeta_t = (-\kappa_\zeta\zeta_t - \alpha_\zeta)dt + \sigma_\zeta d\tilde{B}_{\zeta,t} \tag{12a}$$

$$d\gamma_t = (-\kappa_\gamma\gamma_t - \alpha_\gamma)dt + \sigma_\gamma d\tilde{B}_{\gamma,t} \tag{12b}$$

$$d\eta_t = (\mu - \alpha_\eta)dt + \sigma_\eta d\tilde{B}_{\eta,t} , \tag{12c}$$

em que, α_ζ , α_γ e α_η são, respectivamente, o PRM para os dois fatores de curto prazo e de longo prazo. Da mesma forma, $d\tilde{B}_{j,t}$ representa o incremento do processo Browniano padrão sob a medida \mathbb{Q} , onde $j=\zeta,\eta$ e t representa o tempo. Seguindo os mesmos passos acima obtém-se:

$$\ln F_{t,T} = \zeta_t e^{-\kappa_\zeta(T-t)} + \gamma_t e^{-\kappa_\gamma(T-t)} + \eta_t + C(T-t), \quad (13)$$

onde

$$\begin{aligned} C(T-t) = & -\frac{\alpha_\zeta}{\kappa_\zeta}(1 - e^{-\kappa_\zeta(T-t)}) - \frac{\alpha_\gamma}{\kappa_\gamma}(1 - e^{-\kappa_\gamma(T-t)}) \\ & + (\mu - \alpha_\eta)(T-t) + \frac{\sigma_\zeta^2}{4\kappa_\zeta}(1 - e^{-2\kappa_\zeta(T-t)}) + \frac{\sigma_\gamma^2}{4\kappa_\gamma}(1 - e^{-2\kappa_\gamma(T-t)}) \\ & + \frac{\sigma_\zeta\sigma_\eta\rho_{\zeta\eta}}{\kappa_\zeta}(1 - e^{-\kappa_\zeta(T-t)}) + \frac{\sigma_\gamma\sigma_\eta\rho_{\gamma\eta}}{\kappa_\gamma}(1 - e^{-\kappa_\gamma(T-t)}) \\ & + \frac{\sigma_\zeta\sigma_\gamma\rho_{\zeta\gamma}}{\kappa_{\zeta+\gamma}}(1 - e^{-(\kappa_\zeta+\kappa_\gamma)(T-t)}). \end{aligned}$$

Analogamente ao Modelo 2, no Modelo 3, o termo de erro é descrito da seguinte forma:

$$\nu_{j,t} = \phi\nu_{j,t-1} + \epsilon_{j,t} \quad (14)$$

em que $\epsilon_{j,t} \sim N(0, s_j^2)$, $j = 1, \dots, n$, n é o número de meses até o vencimento do contrato futuro e $\nu_{j,t}$ é a distribuição dos erros da equação de medição, equação (5). O vetor de hiperparâmetros para o Modelo 3, portanto, é dado por:

$$\dot{\Theta} = \{\kappa_\zeta, \sigma_\zeta, \alpha_\zeta, \kappa_\gamma, \sigma_\gamma, \alpha_\gamma, \mu^*, \mu, \sigma_\eta, \rho_{\zeta\eta}\rho_{\gamma\eta}, \rho_{\zeta\gamma}, \phi, s_j\}$$

2.4 Modelo 4: SS com três fatores (PRMVT e estrutura AR dos erros)

O quarto modelo é também uma extensão do modelo de SS, feita por BHAR e LEE (2011), para o caso de três fatores com PRMVT e estrutura AR dos erros. Assim como no modelo três fatores, o logaritmo do preço à vista, na medida \mathbb{P} , é descrito por:

$$\ln S_t = \zeta_t + \gamma_t + \eta_t \quad (15a)$$

$$d\zeta_t = -\kappa_\zeta\zeta_t dt + \sigma_\zeta dB_{\zeta,t} \quad (15b)$$

$$d\gamma_t = -\kappa_\gamma\gamma_t dt + \sigma_\gamma dB_{\gamma,t} \quad (15c)$$

$$d\eta_t = \mu dt + \sigma_\eta dB_{\eta,t}, \quad (15d)$$

onde κ_ζ e κ_γ são as velocidades de reversão e σ_ζ e σ_γ as volatilidades de curto prazo. μ e σ_η são, respectivamente, a tendência e a volatilidade de longo prazo. Os três fatores desse modelo seguem um processo Browniano padrão em que $dB_{j,t}$, $j = \zeta, \gamma, \eta$ e $dB_{j,t}dB_{k,t} = \rho_{j,k}dt$, para $j \neq k$.

Considerando um PRMVT $\lambda_{\zeta t}$ and $\lambda_{\gamma t}$ para as variáveis de estado ζ_t e γ_t , pode-se escrever:

$$\lambda_{\zeta t} = \frac{\alpha_\zeta + \beta_\zeta \zeta_t}{\sigma_\zeta} \quad (16)$$

$$\lambda_{\gamma t} = \frac{\alpha_\gamma + \beta_\gamma \gamma_t}{\sigma_\gamma} \quad (17)$$

Para o fator de longo prazo, η_t , considera-se um PRM constante de modo que $\lambda_\eta = \frac{\alpha_\eta}{\sigma_\eta}$. Seguindo os mesmos passos acima obtém-se:

$$\ln F_{t,T} = \zeta_t e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)} + \gamma_t e^{-\kappa_\gamma^*(T-t)} + \eta_t + D(T-t), \quad (18)$$

where, $\kappa_\zeta^* = \kappa_\zeta + \beta_\zeta$, $\kappa_\gamma^* = \kappa_\gamma + \beta_\gamma$, $\mu^* = \mu - \lambda_\eta$ e $D(T-t)$ é

$$\begin{aligned} D(T-t) = & -\frac{\alpha_\zeta}{\kappa_\zeta^*}(1 - e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)}) - \frac{\alpha_\gamma}{\kappa_\gamma^*}(1 - e^{-\kappa_\gamma^*(T-t)}) + \mu^*(T-t) + \frac{\sigma_\zeta^2}{4\kappa_\zeta^*}(1 - e^{-2\kappa_\zeta^*(T-t)}) \\ & + \frac{\sigma_\gamma^2}{4\kappa_\gamma^*}(1 - e^{-2\kappa_\gamma^*(T-t)}) + \frac{\sigma_\eta^2}{2}(T-t) + \frac{\sigma_\zeta \sigma_\eta \rho_{\zeta\eta}}{\kappa_\zeta^*}(1 - e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)}) \\ & + \frac{\sigma_\gamma \sigma_\eta \rho_{\gamma\eta}}{\kappa_\gamma^*}(1 - e^{-\kappa_\gamma^*(T-t)}) + \frac{\sigma_\zeta \sigma_\gamma \rho_{\zeta\gamma}}{\kappa_\zeta^* + \kappa_\gamma^*}(1 - e^{-(\kappa_\zeta^* + \kappa_\gamma^*)(T-t)}) \end{aligned}$$

O novo vetor de hiperparâmetros é dado por:

$$\tilde{\Theta} = \{\kappa_\zeta, \kappa_\gamma, \sigma_\zeta, \alpha_\zeta, \beta_\zeta, \sigma_\gamma, \alpha_\gamma, \beta_\gamma, \sigma_\eta, \mu^*, \mu, \sigma_\eta, \rho_{\zeta\gamma}, \rho_{\zeta\eta}, \rho_{\gamma\eta}, s_j\}.$$

E os erros entre as variáveis observadas e filtradas é descrito pela equação (21):

$$\nu_{j,t} = \phi \nu_{j,t-1} + \epsilon_{j,t} \quad (19)$$

em que $\epsilon_{j,t} \sim N(0, s_j^2)$, $j = 1, \dots, n$, n é o número de meses até o vencimento do contrato futuro e ν_t é a distribuição dos erros da equação de medição, 5.

2.5 Modelos 5 e 6 : SS dois e três fatores (PRMVT e estrutura AR dos erros com ϕ variante)

Os Modelos 5 e 6 compreendem respectivamente os modelos 2 e 4, aplicações do modelo de SS de dois e três fatores, feitas por BHAR e LEE (2011), estendidos para o caso de o fator autorregressivo ϕ ser considerado variante, ϕ_j , ou seja, diferentes fatores autorregressivos para cada contrato. Isto é, aqui, estende-se a abordagem de BHAR e LEE (2011), considerando-se um fator autorregressivo diferente para cada contrato. A derivação deles é a mesma usada para os modelos 2 e 4, estando a única diferença presente na implementação da forma espaço conforme pode ser visto no Apêndice B. Em ambos os casos, a estrutura de erros passa a ser descrita pela equação (20):

$$\nu_{j,t} = \phi_j \nu_{j,t-1} + \epsilon_{j,t} \quad (20)$$

em que $\epsilon_{j,t} \sim N(0, s_j^2)$, $j = 1, \dots, n$, n é o número de meses até o vencimento do contrato futuro e $\nu_{j,t}$ é a distribuição dos erros da equação de medição.

São testadas duas versões dos modelos 5 e 6, isto é, os modelos 5a e 6a que consideram um fator autorregressivo e uma variância diferente para cada contrato e os modelos 5b e 6b em que uma única variância é considerado para todos os contratos.

2.6 Modelos 7 : SS três fatores (PRM constante e estrutura AR dos erros com ϕ variante)

O Modelo 7 compreende um modelo de três fatores, com PRM constante e estrutura AR dos erros, considerando um fator autorregressivo e uma variância diferente para cada contrato.

3 METODOLOGIA, DADOS E RESULTADOS

3.1 Metodologia

É usual na literatura que trata de modelos lineares e Gaussianos utilizar o filtro de Kalman para estimar variáveis que não se pode observar. Trata-se de um método bastante aplicado em econometria e finanças, ver HARVEY (1989) e SHUMWAY e STOFFER (2006). Compreende um método recursivo oriundo da Engenharia que permite estimar variáveis não observáveis (latentes ou de estado) a partir de variáveis observáveis (medição). É aplicável quando os modelos estão escritos sob a forma espaço-estado, isto é, com suas equações separadas em equações de medição (observação) e de transição (estado). A equação de medição relaciona as variáveis de estado às observações. A equação de transição, por sua vez, representa a evolução das variáveis latentes ao longo do tempo. Tais variáveis seguem um processo de Markov, ou seja, informações passadas não contribuem para a previsão.

Duas propriedades são desejáveis para a aplicação do filtro de Kalman. A primeira diz respeito a Gaussianidade, ou seja, a hipótese de que os erros das equações de medição e transição como também o vetor inicial seguem uma distribuição normal. Tal condição garante que seja possível obter a média condicional do vetor de estado. Isto significa que as distribuições condicionais podem ser descritas apenas a partir da matriz de covariância dos erros e da média. O estimador resultante do filtro minimiza a variância do erro sendo, portanto, um estimador ótimo. A outra hipótese desejável é a linearidade. Essa propriedade garante que uma matriz incondicional de variância do erro esteja associada ao estimador da média condicional. Isso permite que a previsão não esteja condicionada às informações passadas. Em caso de não linearidade, faz-se necessária a utilização da técnica de linearização, por expansão em séries de Taylor. Nesse caso, o filtro apropriado é o filtro de Kalman estendido, ver Anderson e Moore (1979) e HARVEY (1989). Por sua vez, a introdução de modelos não Gaussianos traz bastante complexidade à estimação impossibilitando a utilização do filtro de Kalman. Nesse caso, é necessário recorrer a outras abordagens como os métodos Bayseanos (Monte Carlo-Cadeia de Markov) ou métodos sequenciais de Monte Carlo (filtro de partículas). Em modelos de fatores, a não-gaussianidade pode ser introduzida ao se considerar volatilidade estocástica ou a partir da introdução de saltos nas variáveis de estado, por exemplo.

3.1.1 Formulação Espaço-Estado

Dada uma série temporal multivariada (STM) pelo vetor y_t , $N \times 1$ contendo as variáveis observáveis e um vetor x_t , $M \times 1$ de variáveis não observáveis, em que $t = 1 \dots T^*$, representando o avanço temporal dessa série, T^* refere-se ao número de observações, N é o número de elementos da STM e M o número de variáveis que não se pode observar.

Assim, a forma espaço-estado é descrita por duas equações, são elas: a equação de observação (medição) e a equação de transição (estado). A primeira relaciona as variáveis observáveis às variáveis de estado e é dada por:

$$y_t = Hx_t + d_t + \epsilon_t \quad (21)$$

em que H é uma matriz $N \times M$, d_t é um vetor $N \times 1$ e $\epsilon_t \sim NID(0, \mathbb{V})$.

Por sua vez, a equação de transição descreve a evolução das variáveis de estado ao longo do tempo e é dada por:

$$x_t = Ax_{t-1} + c_t + \nu_t \quad (22)$$

em que A é uma matriz $M \times M$, c_t é um vetor $M \times 1$ e $\nu_t \sim NID(0, \mathbb{W})$.

Nas equações 21 e 22, \mathbb{V} e \mathbb{W} representam respectivamente as matrizes de variância e covariância das equações de medição e observação. Vale ressaltar que na literatura de modelos Gaussianos com aplicação do filtro de Kalman os erros ϵ_t e ν_t são considerados não correlacionados entre si e com o estado inicial.

3.1.2 Algoritmo do filtro de Kalman

O algoritmo do filtro de Kalman é composto por equações de previsão e de correção. A partir de uma inicialização para a média e a covariância das variáveis de estado, o filtro gera uma estimativa a priori \hat{x}_t^- , dada por:

$$\hat{x}_t^- = A\hat{x}_{t-1} + c_t \quad (23)$$

Da mesma forma, gera-se uma matriz de covariância dos erros das variáveis latentes dada por:

$$P_t^- = AP_{t-1}A^\top + \mathbb{W} \quad (24)$$

A partir de cada informação y_t , das informações contida no vetor de observações, gera-se uma estimativa a posteriori que também gerará um erro. O objetivo do filtro é minimizar esse erro. O ganho de Kalman é o termo que efetua a ponderação entre a estimativa feita a priori com o erro entre o que foi observado e o que foi estimado, e foi definido de modo a minimizar a covariância do erro à posteriori.

O ganho de Kalman faz parte do conjunto de equações de correção e é dado por:

$$K_t = P_t^- H^\top (H P_t^- H^\top + \mathbb{V})^{-1} \quad (25)$$

Este ganho juntamente com as novas informações y_t são adicionados a estimação a priori para gerar uma estimação a posteriori pela equação:

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t(y_t - H\hat{x}_t^- - d_t) \quad (26)$$

Por fim, obtem-se a matriz de covariância dos erros a posteriori dada por:

$$P_t = (I - K_t H) P_t^- \quad (27)$$

Esse ciclo é repetido recursivamente até que a matriz de covariância dos erros a posteriori seja mínima. O processo sucessivo originado com um vetor de hiperparâmetros Θ_0 repete-se de $t = 1 \dots T^*$.

3.1.3 Estimação dos parâmetros

Considerando um modelo Gaussiano, a função de densidade conjunta é conhecida e dada por:

$$L(y; \Theta) = \prod_{t=1}^{T^*} f_Y(y_t) \quad (28)$$

onde f_Y é a função de densidade de probabilidade no instante t e Θ o vetor de hiperparâmetros a serem estimados. A distribuição condicional de y_t tem os momentos dados por:

$$E(y_t | y_{t-1}) = H\hat{x}_t^- + d_t \quad (29)$$

$$\text{Var}(y_t|y_{t-1}) = \mathbb{F}_t = HP_t^- H^\top + \mathbb{V} \quad (30)$$

Consequentemente, os hiperparâmetros do modelo podem ser obtidos pela maximização da função de verossimilhança do erro de predição $\nu_t = F_{t,T} - \hat{F}_{t,T}$, dada pela equação:

$$\ln[L(y; \Theta)] = -\frac{NT^*}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T^*} \ln|\mathbb{F}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T^*} \nu_t^T \mathbb{F}_t^{-1} \nu_t \quad (31)$$

Em outras palavras,

$$\mathcal{L} = \arg \max \ln[L(y; \Theta)] \quad (32)$$

3.1.4 Algoritmo de Alisamento

Os valores obtidos a partir da implementação do filtro de Kalman são os valores *predict* (significando o valor a priori de cada observação) e filtrados, juntamente com os parâmetros estimados. Uma vez que a proposta é minimizar o erro entre o que é observado e a série resultante da estimação das variáveis de estado, após essa etapa, aplica-se o filtro de alisamento que fornece a menor variância entre as observações e a série estimada das variáveis de estado, ver SHUMWAY e STOFFER (2006).

3.2 Dados

Para estimar os modelos utilizou-se dados de preços de contratos futuros, F_{t,T_j} , negociados² na NYMEX (New York Mercantile Exchange). A série de preços analisada se estendeu de 25 de janeiro de 2006 a 6 de junho de 2018. Foram utilizados dados semanais de fechamento da quarta-feira a fim de evitar dados contaminados pela volatilidade característica de fim e início de semana. Quando a bolsa não operou nesse dia, utilizou-se dados da quinta-feira e quando este dia foi feriado, dados da terça-feira. Os vencimentos dos contratos utilizados na análise foram de um, cinco, dez, doze, quinze, vinte, vinte-quatro

² De acordo com as definições anteriores, $T^* = 645$ e $j = \{1, 5, 10, 12, 15, 20, 24, 36\}$, vide Tabela 2.

e trinta e seis meses a frente. A rolagem dos contratos ocorreu no terceiro dia útil antes do seu vencimento, que ocorre mensalmente próximo ao dia 25.

Figura 1 - Contratos futuros de petróleo $F_{t,T1}$ e $F_{t,T36}$ negociados na NYMEX



Fonte: O autor, 2019.

As principais estatísticas dos dados são apresentadas na Tabela 2. A Figura 1 mostra o primeiro e último contrato futuro de petróleo. Nota-se a presença de aglomerados de volatilidade ao longo de toda a série histórica. Durante esse período, os preços reagiram, principalmente, a crises políticas ou econômicas internacionais. O período de maior turbulência, por longa margem, foi durante a crise financeira americana quando os preços do petróleo dispararam para aproximadamente US\$140 por barril, seguidos por uma forte queda. Em 2014, registrou-se novamente uma forte queda nos preços causada, principalmente, pelo excesso de produção do petróleo WTI frente a sua demanda e a forte valorização do dólar frente as demais moedas.

Tabela 2 - Principais estatísticas da série de preços

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$
Nobs	645	645	645	645	645	645	645	645
Mínimo	26.55	31.77	34.54	35.36	37.05	38.35	38.66	41.34
Máximo	143.57	144.97	144.96	144.54	141.32	140.27	142.26	140.61
Média	74.93	76.43	76.87	76.90	76.81	76.64	76.52	76.18
Variância	524.22	463.61	419.70	405.95	385.92	361.34	347.77	319.75
Desvio-Padrão	22.90	21.53	20.49	20.15	19.64	19.01	18.65	17.88
Assimetria	0.16	0.20	0.22	0.23	0.22	0.24	0.28	0.34
Curtose	-0.77	-0.64	-0.47	-0.42	-0.38	-0.24	-0.10	0.13

Fonte: O autor, 2019.

3.3 Resultados empíricos

A implementação numérica foi feita com o software R. Optou-se por excluir contratos com vencimentos superiores a três anos por apresentarem menor liquidez. O método utilizado para maximização da função de verossimilhança foi o L-BFGS-B para todos os modelos, à exceção dos modelos 5b e 6b em que se utilizou o método Nelder-Mead. Ademais diversas estimações foram realizadas com vistas a garantir que o resultado escolhido não correspondesse a um máximo local em vez de global. Optou-se sempre pelo resultado com menor AIC e maior log-verossimilhança. Previsões não estão no escopo desta pesquisa. A maioria dos trabalhos em modelos de fatores não realiza testes fora da amostra, concentrando-se em testes dentro da amostra. Portanto, todos os resultados e testes realizados ao longo desta dissertação são feitos no contexto in-sample. A análise do processo de filtragem é feita através dos seguintes critérios:

(i) raiz do erro quadrático médio

$$RMSE = \left[\frac{1}{T^*} \sum_{t=1}^{T^*} (F_{t,T_j} - \hat{F}_{t,T_j})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

(ii) erro absoluto médio

$$MAE = \frac{1}{T^*} \sum_{t=1}^{T^*} |F_{t,T_j} - \hat{F}_{t,T_j}| \quad (34)$$

(iii) erro absoluto percentual médio

$$MAPE = \frac{1}{T^*} \sum_{t=1}^{T^*} \frac{F_{t,T_j} - \hat{F}_{t,T_j}}{\hat{F}_{t,T_j}} \quad (35)$$

em que $j = 1, \dots, n$ e n é o número de meses até o vencimento do contrato futuro.

O teste de Razão de Verossimilhança (RV) também é aplicado. O intuito é verificar a relevância de se incluir um prêmio de risco variante no tempo e um fator autorregressivo diferente para cada contrato. Isso é feito tanto considerando variâncias diferentes para cada contrato quanto considerando uma única variância para todos eles.

Tabela 3 - Parâmetros estimados para os Modelos 1, 2, 3 e 4

	2 fatores		3 fatores	
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
κ_ζ	0,8484*** (9,68)	1,2009*** (2,78)	1,2734*** (7,46)	0,5103*** (2,64)
σ_ζ	0,3626** (2,26)	0,4001*** (16,42)	0,1892*** (8,45)	0,4000*** (4,60)
α_ζ	0,0538 (0,34)	0,0897*** (3,37)	-0,1275** (-2,01)	0,2991*** (8,34)
β_ζ	-	-0,9991** (-2,31)	-	-0,2996 (-1,53)
κ_γ	-	-	0,5020*** (19,46)	0,4999*** (12,29)
σ_γ	-	-	0,5101*** (11,25)	0,4000*** (7,85)
α_γ	-	-	0,0299 (0,89)	-0,3002*** (-11,84)
β_γ	-	-	-	0,2999*** (5,33)
σ_η	0,3263*** (4,55)	0,2999*** (13,51)	0,2493*** (10,81)	0,3000*** (6,16)
μ^*	-0,0801*** (-3,10)	-0,0498*** (-8,63)	-0,0343*** (-5,32)	-0,0483*** (-3,17)
μ	0,0294 (0,40)	0,0300 (0,36)	0,0232 (0,30)	0,0400 (0,377)
$\rho_{\zeta\gamma}$	-	-	0,1626*** (3,70)	0,1998*** (3,56)
$\rho_{\zeta\eta}$	0,7425*** (6,21)	0,2999*** (4,28)	0,2774** (2,19)	0,2000*** (4,92)
$\rho_{\gamma\eta}$	-	-	0,2774*** (8,35)	0,2000*** (6,19)
ϕ	0,9858*** (175,88)	0,9002*** (132,61)	0,8528*** (44,89)	0,8995*** (75,99)
s_1^2	$1,01 \times 10^{-4}***$ (872,59)	$1,01 \times 10^{-4}***$ (1419,89)	$1,00 \times 10^{-5}***$ (596,07)	$1,12 \times 10^{-4}***$ (1023,73)
s_2^2	$1,51 \times 10^{-5}***$ (4,19)	$7,93 \times 10^{-6}***$ (1004,11)	$1,00 \times 10^{-6}***$ (3,67)	$5,62 \times 10^{-6}***$ (2336,06)
s_{10}^2	$1,00 \times 10^{-6}***$ (2,21)	$4,42 \times 10^{-8}***$ (7,83)	$1,00 \times 10^{-6}***$ (10,23)	$1,97 \times 10^{-10}***$ (0,04)
s_{12}^2	$1,00 \times 10^{-6}***$ (4,88)	$4,55 \times 10^{-8}***$ (7,21)	$1,00 \times 10^{-6}***$ (18,31)	$1,13 \times 10^{-8}***$ (2,30)
s_{15}^2	$1,78 \times 10^{-4}***$ (857,60)	$1,60 \times 10^{-4}***$ (1063,50)	$1,72 \times 10^{-4}***$ (911,88)	$1,56 \times 10^{-4}***$ (1106,12)
s_{20}^2	$1,59 \times 10^{-4}***$ (725,34)	$1,73 \times 10^{-4}***$ (763,00)	$1,50 \times 10^{-4}***$ (920,07)	$1,36 \times 10^{-4}***$ (1138,46)
s_{24}^2	$9,33 \times 10^{-6}***$ (23,72)	$9,35 \times 10^{-6}***$ (432,23)	$1,00 \times 10^{-6}***$ (0,42)	$5,42 \times 10^{-6}***$ (281,37)
s_{36}^2	$4,79 \times 10^{-5}***$ (72,31)	$5,85 \times 10^{-5}***$ (567,13)	$2,58 \times 10^{-5}***$ (804,75)	$1,09 \times 10^{-5}***$ (16,88)
\mathcal{L}	20.565,76	20.893,2	21.081,44	21.216,81

Legenda: \mathcal{L} é a log-verossimilhança de cada modelo. Níveis de significância: 0.01 ($***$), 0.05 ($**$) e 0.10 ($*$). Em parênteses, são apresentados os valores da estatística t para cada parâmetro estimado.

Fonte: O autor, 2019.

3.3.1 Modelo 1

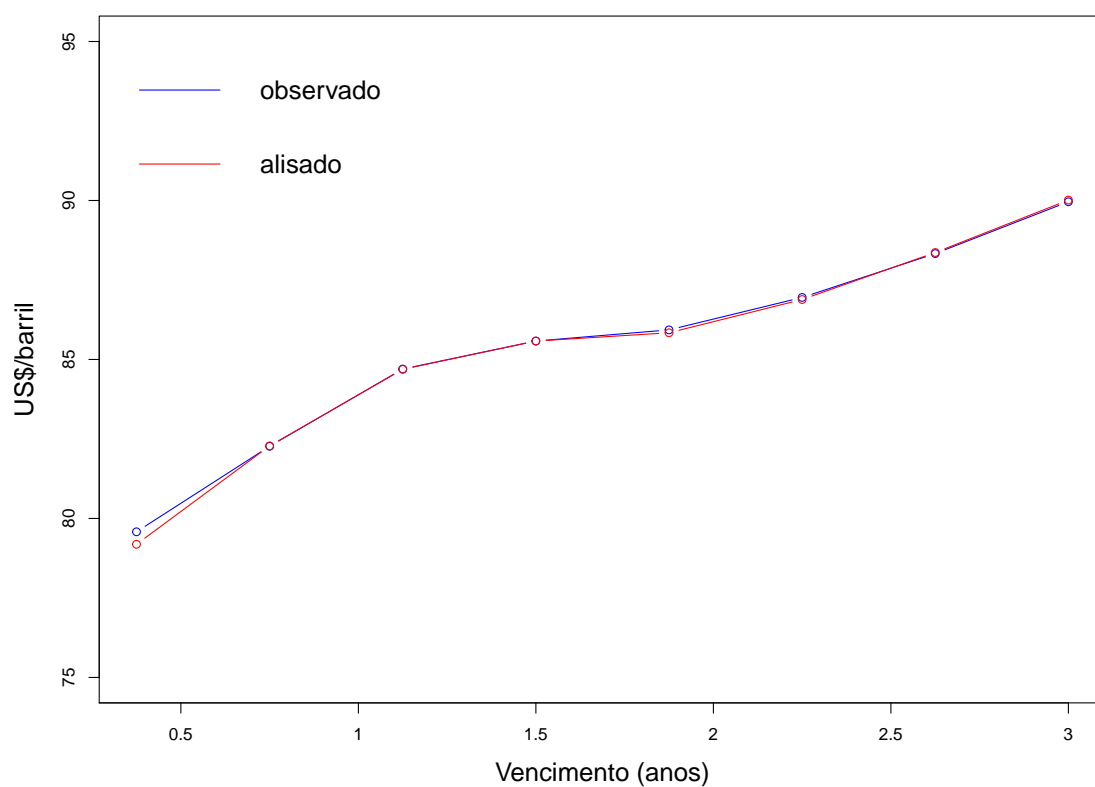
Como se pode notar através da Tabela 3, o Modelo 1 apresentou velocidade de reversão à média significativa ao nível de 1%. As volatilidades das variações de curto prazo e longo prazo também foram ambas significativas ao nível de 1%, sendo aquelas maiores que essas. Além disso, como em SCHWARTZ e SMITH (2000), a tendência de crescimento de longo prazo na medida real foi não significativa. As variâncias para todos os contratos foram significativas ao nível de 1%, exceto a variância para o contrato $F_{t,T10}$ que foi significativo ao nível de 5%. A correlação entre as variáveis de estado foi positiva e significativa ao nível de 1%, demonstrando a necessidade das duas variáveis latentes para a explicação dos preços do petróleo.

Tabela 4 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 1

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	0,39144	0,03192	0,02718	0,02155	0,82556	0,79395	0,12581	0,28956	0,31337
MAE	0,24231	0,02387	0,02030	0,01569	0,58165	0,55353	0,09174	0,19776	0,21586
MAPE	0,00372	0,00033	0,00027	0,00021	0,00780	0,00737	0,00123	0,00266	0,00295

Fonte: O autor, 2019.

Figura 2 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 1



Legenda: Em 18/11/2008.

Fonte: O autor, 2019.

A Tabela 4 apresenta a aderência do modelo, isto é, o ajuste entre os dados observados e alisados, pelas medidas de RMSE, MAE e MAPE, para o Modelo 1. Como se pode observar, os melhores ajustes ocorrem para os contratos $F_{t,T10}$ e $F_{t,T12}$. Isso também pode ser observado pela Figura 3.3.1 que mostra a estrutura a termo dos preços para o Modelo 1. O pior ajuste ocorreu para o primeiro contrato. Em média, o Modelo 1 apresentou um MAPE de 0,00295.

3.3.2 Modelo 2

Para o Modelo 2, como pode ser observado na Tabela 3, a velocidade de reversão à média estimada para o fator de curto prazo foi significativa ao nível de 1% e, como no caso anterior, as volatilidades para as variações de curto prazo e longo prazo foram ambas significativas ao nível de 1%. As variações de curto prazo apresentaram-se mais voláteis que as de longo prazo, como esperado. Por sua vez, a inclusão do PRMVT aumentou a log-verossimilhança do modelo que foi de 20.893,2. Ambos os componentes do PRM, isto

Tabela 5 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 2

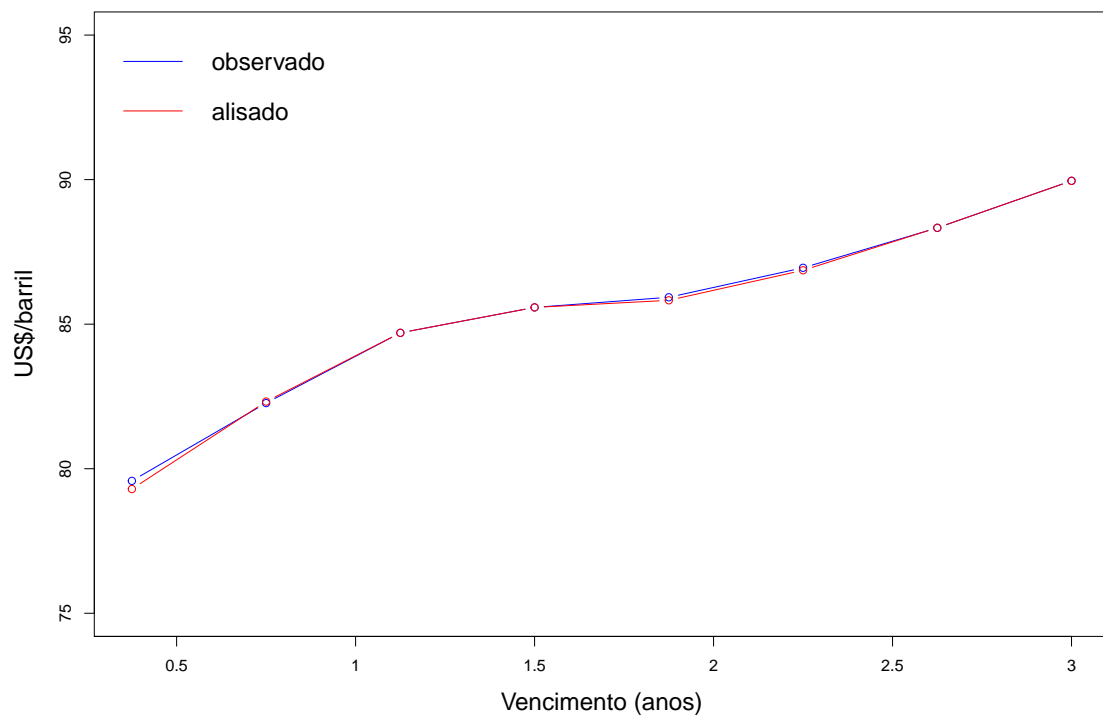
	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	0,43380	0,09858	0,00613	0,00697	0,81256	0,77160	0,10523	0,25692	0,31147
MAE	0,27628	0,07444	0,00457	0,00525	0,57235	0,53753	0,07795	0,17702	0,21567
MAPE	0,00421	0,00103	0,00006	0,00007	0,00768	0,00715	0,00104	0,00237	0,00295

Fonte: O autor, 2019.

é, α_ζ e β_ζ , foram significativos ao nível de 1%, sugerindo a necessidade de considerar um PRMVT. O componente variável do PRM, β_ζ , foi negativo e significativo, evidenciando uma relação inversa entre o preço da commodity e o prêmio de risco, como salientado por BHAR e LEE (2011). Como no modelo 1 e em SCHWARTZ e SMITH (2000), a tendência de crescimento de longo prazo, na medida real, foi não significativa. A correlação entre as variáveis de estado foi positiva e significativa ao nível de 1%.

As variâncias para todos os contratos foram significativas ao nível de 1%. O mesmo ocorreu com o fator autorregressivo ϕ , evidenciando a pertinência de se considerar a estrutura autorregressiva (AR) de erros. O MAPE médio a partir da inclusão do PRMVT, conforme a Tabela 5, foi de 0,00295, o mesmo encontrado para o caso com PRM constante. Não obstante, verifica-se que a inclusão do PRMVT melhorou o ajuste para os contratos $F_{t,T10}$, $F_{t,T12}$, $F_{t,T15}$, $F_{t,T20}$, $F_{t,T24}$ e $F_{t,T36}$, ao passo que para os contratos $F_{t,T1}$ e $F_{t,T5}$ o ajuste piorou.

Figura 3 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 2



Legenda: Em 18/11/2008.

Fonte: O autor, 2019.

3.3.3 Modelo 3

A Tabela 3 apresenta os resultados estimados para o Modelo 3, um modelo de três fatores com PRM constante e com estrutura AR dos erros, basicamente o modelo de SS com estrutura AR, acrescido de um segundo fator de curto prazo.

Tabela 6 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 3

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	0,35114	0,02300	0,02666	0,02739	0,79884	0,76347	0,02784	0,16458	0,27287
MAE	0,21294	0,01719	0,02004	0,01984	0,56187	0,53118	0,02040	0,09076	0,18428
MAPE	0,00330	0,00023	0,00027	0,00026	0,00754	0,00707	0,00027	0,00123	0,00252

Fonte: O autor, 2019.

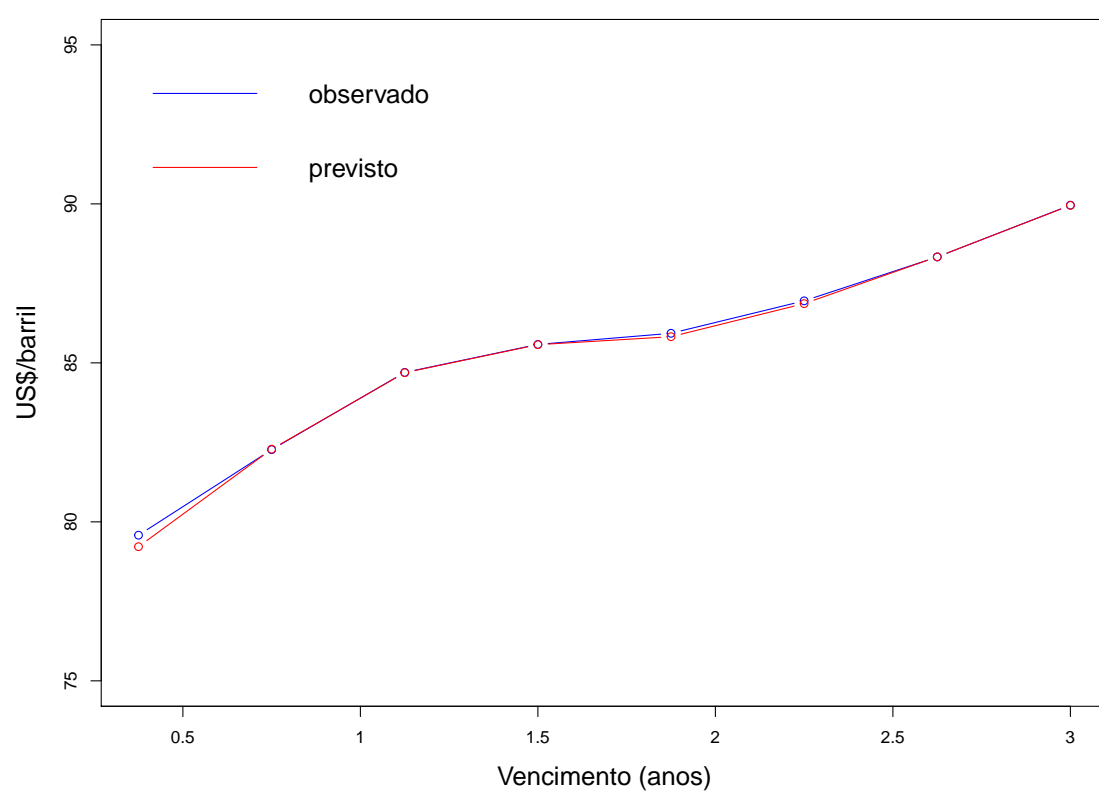
Como nos casos anteriores, a velocidade de reversão à média e as volatilidades de variações de curto e longo prazo foram significativas ao nível de 1%. Um dos prêmios de risco de curto prazo foi não significativo, notadamente α_γ , ao passo que o outro, α_ζ foi significativo ao nível de 5%. Nesse caso, embora significativa ao nível de 1%, uma das volatilidades das variações de curto prazo, σ_ζ , foi menos volátil que a do longo prazo. A tendência de crescimento de longo prazo, na medida real, foi não significativa, enquanto, na medida martingal, foi significativa ao nível de 1%. Todas as correlações entre as variáveis de estado foram significativas ao nível de 1%, exceto $\rho_{\zeta\eta}$ que foi significativa ao nível de 5%. Isso sugere a pertinência da inclusão de um terceiro fator para explicar os preços do petróleo. Nesse caso, todas as variâncias foram significativas, à exceção da variância para o contrato $F_{t,T24}$. No Modelo 3, a log-verossimilhança foi de 21.081,44, ou seja, aumentou de forma significativa, em relação aos Modelos 1 e 2, a partir da inclusão do segundo fator de curto prazo.

Com relação à aderência do modelo aos dados, verifica-se que a inclusão do terceiro fator melhora a aderência do modelo relativamente aos Modelos 1 e 2. Como pode ser visto na Tabela 6 o erro diminuiu, sendo os melhores ajustes para os contratos $F_{t,T5}$, $F_{t,T10}$ e $F_{t,T12}$. O MAPE médio para o Modelo 3 foi de 0,00252. Relativamente ao Modelo 1, a inclusão do segundo fator de curto prazo melhorou o ajuste dos contratos de mais curto prazo, $F_{t,T1}$ e $F_{t,T5}$, e dos contratos de mais longo prazo, $F_{t,T15}$, $F_{t,T20}$, $F_{t,T24}$ e $F_{t,T36}$.

3.3.4 Modelo 4

No Modelo 4, vide a Tabela 3, ambas as velocidades de reversão à média foram significativas ao nível de 1%, bem como as volatilidades de curto e longo prazo. Como esperado, a volatilidade das variações de curto prazo foi maior que aquela para o curto

Figura 4 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 3



Legenda: Em 18/11/2008.

Fonte: O autor, 2019.

prazo. A tendência de crescimento de longo prazo, na medida martingal, foi significativa ao nível de 1% e, na medida real, foi não significativa. Todas as correlações foram positivas e significativas aos nível de 1%, bem como as variâncias para todos os contratos analisados, à exceção da variância para o contrato $F_{t,T10}$. Como em BHAR e LEE (2011), o componente variável de apenas um dos fatores de curto prazo foi significativo. Em nossa análise, esse foi o caso do β_γ que foi significativo ao nível de 1%. O componente variável do prêmio de risco para o outro fator de curto prazo, β_ζ , foi não significativo, sugerindo, conforme os autores, que a variação no tempo para o prêmio de risco é majoritariamente gerada por um dos fatores de curto prazo. Ademais, o componente constante do prêmio de risco para ambos os fatores, α_ζ e α_γ , foi significativo, ao nível de 1%.

Tabela 7 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 4

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	0,43997	0,10789	0,00004	0,00210	0,81287	0,77444	0,08248	0,13990	0,29496
MAE	0,29511	0,07781	0,00003	0,00153	0,57246	0,53943	0,05811	0,09239	0,20461
MAPE	0,00441	0,00104	0,00000	0,00002	0,00768	0,00718	0,00077	0,00121	0,00279

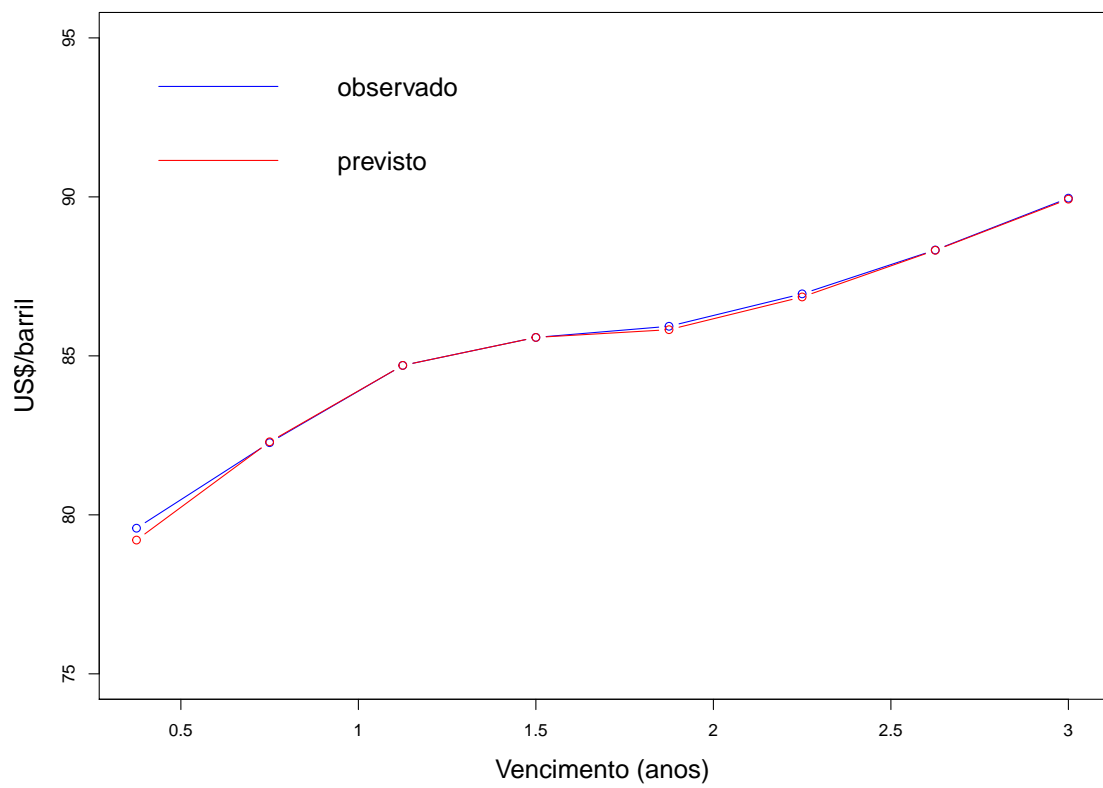
Fonte: O autor, 2019.

A estimação do Modelo 4 resultou em uma log-verossimilhança de 21.216,81. Comparativamente ao Modelo 2, nota-se do PRMVT juntamente com a inclusão do terceiro fator contribuiu de forma significativa para a explicação do modelo. Contudo, com relação aos erros RMSE, MAE e MAPE, conforme Tabela 7, nota-se que a inclusão o segundo fator de curto prazo, em média, não contribuiu para a redução dos erros, relativamente ao Modelo 3. O MAPE médio para o Modelo foi de 0,00279. Esse ajuste foi melhor que aquele encontrado para os Modelos 1 e 2, porém, pior que a aderência aos dados observados encontrada para o Modelo 3. Relativamente a este último, nota-se uma ligeira melhora para os contratos $F_{t,T10}$, $F_{t,T10}$, $F_{t,T12}$ e $F_{t,T36}$. No entanto, o ajuste para os contratos de mais curto prazo, $F_{t,T1}$ e $F_{t,T5}$ piorou.

3.3.5 Modelos 5 e 6

As Tabelas 8 e 9 mostram os resultados encontrados para as extensões ao modelo de BHAR e LEE (2011), isto é, os modelos 5a, 5b, 6a e 6b. Como explicado no capítulo de modelagem, os Modelos 5a e 6a são, respectivamente, modelos de 2 e 3 fatores, com PRMTV e estrutura autorregressiva dos erros, que consideram um fator autorregressivo diferente para cada contrato, flexibilizando a hipótese de BHAR e LEE (2011) de um único fator autorregressivo para a todos os contratos. Neste caso, considera-se uma variância diferente para cada contrato. Já o Modelos 5b e 6b consideram também um PRMVT e

Figura 5 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 4



Legenda: Em 18/11/2008.

Fonte: O autor, 2019.

uma estrutura AR dos erros com um fator autorregressivo diferente para cada contrato, sob a hipótese de uma única variância para todos os oito contratos.

Tabela 8 - Parâmetros estimados para os Modelos 5a e 6a

Parâmetros	Modelo 5a	Modelo 6a
κ_ζ	1,2061*** (5,99)	0,5203*** (2,46)
σ_ζ	0,3900*** (15,64)	0,4000*** (17,19)
α_ζ	0,2995*** (9,31)	0,2991*** (14,13)
β_ζ	-0,5999*** (-3,43)	-0,2996 (-1,52)
κ_γ	-	0,5009*** (10,22)
σ_γ	-	0,3999*** (17,70)
α_γ	-	-0,3001*** (-11,61)
β_γ	-	0,2999*** (4,23)
σ_η	0,2999*** (7,71)	0,3000*** (17,32)
μ^*	-0,0491*** (-3,99)	-0,0482*** (-5,76)
μ	0,0300 (0,31)	0,0399 (0,42)
$\rho_{\zeta\gamma}$	-	0,2996*** (5,74)
$\rho_{\zeta\eta}$	0,3000** (2,56)	0,3001*** (18,09)
$\rho_{\gamma\eta}$	-	0,2999*** (11,68)
ϕ_1	0,9000*** (66,04)	0,9000*** (49,82)
ϕ_5	0,9000*** (58,63)	0,8999*** (44,14)
ϕ_{10}	0,9000*** (72,85)	0,9000*** (57,00)
ϕ_{12}	0,9000*** (81,04)	0,8998*** (53,11)
ϕ_{15}	0,9000*** (31,67)	0,8999*** (22,46)
ϕ_{20}	0,9000*** (38,21)	0,8999*** (24,46)
ϕ_{24}	0,9000*** (78,21)	0,9000*** (47,17)
ϕ_{36}	0,9000*** (39,10)	0,9001*** (34,80)
s_1^2	$9,46 \times 10^{-5}$ *** (1422,57)	$1,06 \times 10^{-4}$ *** (1019,48)
s_5^2	$1,10 \times 10^{-5}$ *** (457,17)	$4,16 \times 10^{-6}$ *** (1238,44)
s_{10}^2	$2,35 \times 10^{-8}$ *** (4,30)	$6,26 \times 10^{-9}$ (1,29)
s_{12}^2	$1,73 \times 10^{-8}$ *** (2,95)	$2,63 \times 10^{-8}$ *** (5,20)
s_{15}^2	$1,77 \times 10^{-4}$ *** (898,15)	$1,58 \times 10^{-4}$ *** (1055,08)
s_{20}^2	$1,13 \times 10^{-4}$ *** (1467,02)	$1,33 \times 10^{-4}$ *** (1140,09)
s_{24}^2	$4,93 \times 10^{-6}$ *** (1136,45)	$4,02 \times 10^{-6}$ *** (1063,12)
s_{36}^2	$3,91 \times 10^{-5}$ *** (1251,25)	$1,20 \times 10^{-5}$ *** (280,22)
\mathcal{L}	20.806,2	21.163,33

Legenda: \mathcal{L} é a log-verossimilhança de cada modelo. Níveis de significância: 0.01 (***), 0.05 (**) e 0.10 (*). Em parênteses, são apresentados os valores da estatística t para cada parâmetro estimado.

Fonte: O autor, 2019.

3.3.5.1 Modelo 5a

No Modelo 5a analisa-se um modelo de 2 fatores com PRMVT e uma estrutura autorregressiva que considera um fator autorregressivo diferente para cada contrato. Como pode ser visto na Tabela 8, a velocidade de reversão foi significativa ao nível de 1%, com as variações de curto prazo oscilando mais que as de longo prazo. A tendência de crescimento do longo prazo, na medida real, foi não significativa e, na medida martingal, foi significativa ao nível de 1%. A correlação entre as variáveis de estado foi positiva e significativa ao nível de 5%. Todos os fatores autorregressivos e as variâncias foram significativas ao nível

Tabela 9 - Parâmetros estimados para os Modelos 5b e 6b

Parâmetros	Modelo 5b	Modelo 6b
κ_ζ	3,099*** (5, 43)	0,5792*** (3, 02)
σ_ζ	0,2586*** (25, 66)	0,2401*** (15, 98)
α_ζ	-0,0704*** (-4, 33)	0,1872*** (9, 02)
β_ζ	-2,4556*** (-4, 27)	-0,3316* (-1, 69)
κ_γ	-	0,9894*** (5, 60)
σ_γ	-	0,2425*** (5, 68)
α_γ	-	-0,4783*** (-9, 48)
β_γ	-	0,0317 (0, 18)
σ_η	0,2155*** (33, 48)	0,1794*** (22, 28)
μ^*	-0,0348*** (-12, 28)	0,0078 (1, 51)
μ	-0,1946*** (-3, 13)	-0,1688*** (-2, 82)
$\rho_{\zeta\gamma}$	-	-0,2599*** (-2, 96)
$\rho_{\zeta\eta}$	0,1771*** (3, 85)	0,3492*** (4, 69)
$\rho_{\gamma\eta}$	-	0,2555** (2, 24)
ϕ_1	0,9763*** (106, 77)	-0,5560*** (-8, 32)
ϕ_5	0,9217*** (34, 77)	0,8413*** (34, 27)
ϕ_{10}	0,6539*** (9, 03)	0,6963*** (15, 34)
ϕ_{12}	0,6910*** (13, 05)	0,5432*** (8, 13)
ϕ_{15}	-0,4227*** (-9, 33)	-0,6070*** (-16, 09)
ϕ_{20}	-0,4850*** (-10, 95)	-0,2592*** (-3, 77)
ϕ_{24}	0,6872*** (12, 80)	-0,0403*** (-0, 46)
ϕ_{36}	0,9622*** (79, 64)	0,4744*** (5, 09)
s^2	6,51X10 ⁻³ *** (8740, 24)	6,12X10 ⁻³ *** (10874, 06)
\mathcal{L}	19088,4	19.247,3

Legenda: \mathcal{L} é a log-verossimilhança de cada modelo.
Níveis de significância: 0.01 (***), 0.05 (**) e 0.10 (*).
Fonte: O autor, 2019.

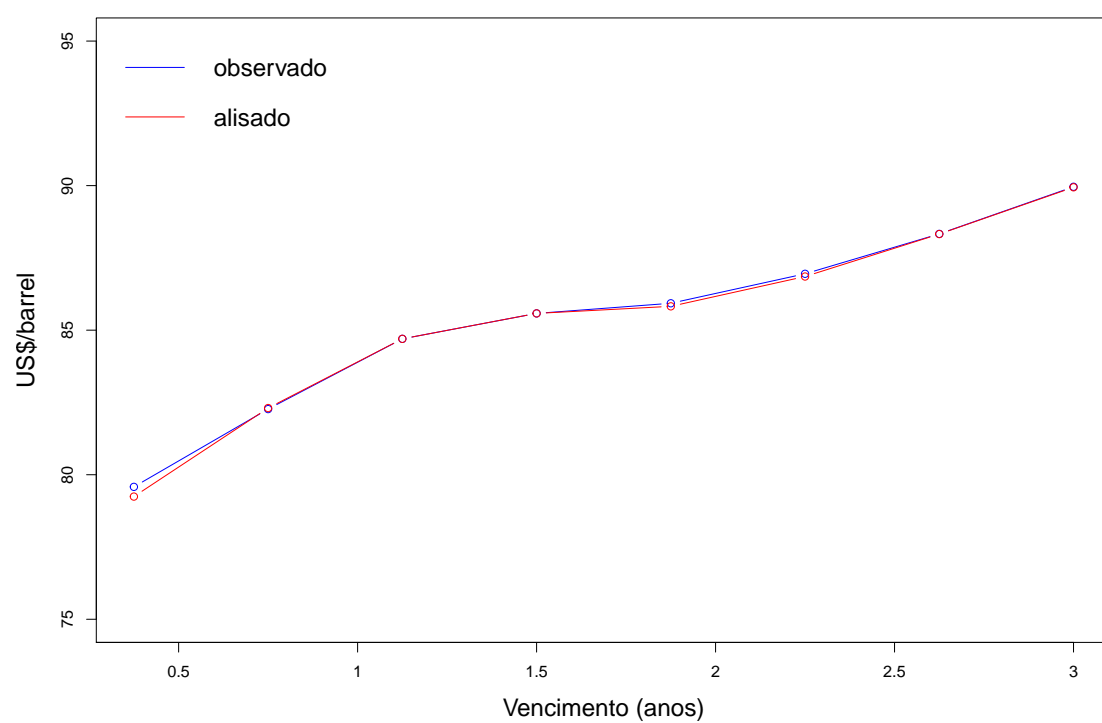
de 1%. Os erros, dados pelas medidas RMSE, MAE e MAPE, não apresentaram melhora para esse modelo, comparativamente ao Modelo 2. O MAPE médio foi de 0,00295, ver Tabela 10. Além disso, a inclusão de um fator autorregressivo diferente para cada contrato reduziu ligeiramente a log-verossimilhança do modelo ($\mathcal{L} = 20.806,2$), relativamente ao Modelo 2 ($\mathcal{L} = 20.893,2$). Em relação a este mesmo modelo, a inclusão de um fator autorregressivo diferente para cada contrato melhorou o ajuste para os contratos $F_{t,T10}$ e $F_{t,T12}$, os quais correspondem aos melhores ajustes encontrados para aquele modelo.

Tabela 10 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 5a

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	0,43810	0,10294	0,00298	0,00254	0,81313	0,77922	0,11231	0,25765	0,31361
MAE	0,28655	0,07572	0,00219	0,00186	0,57269	0,54288	0,08148	0,17054	0,21674
MAPE	0,00432	0,00102	0,00003	0,00002	0,00768	0,00722	0,00108	0,00227	0,00295

Fonte: O autor, 2019.

Figura 6 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 5a



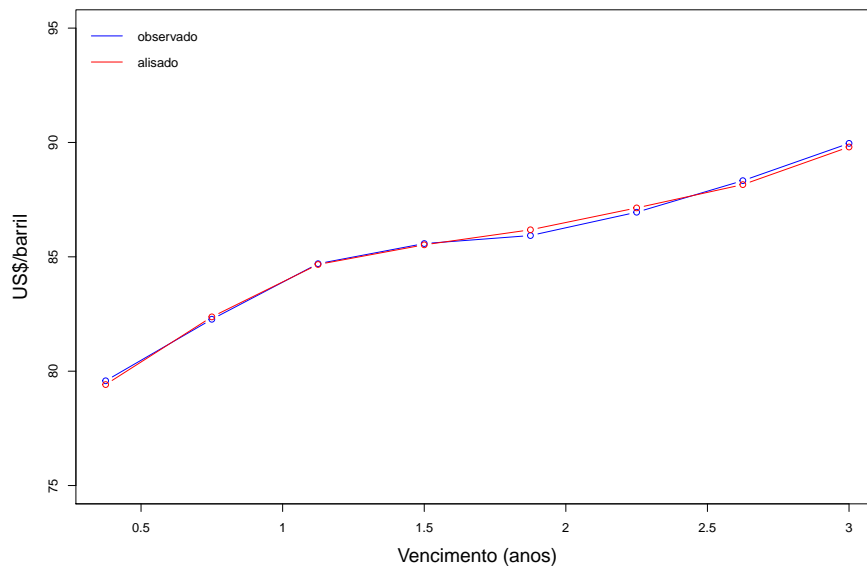
Legenda: Em 18/11/2008.

Fonte: O autor, 2019.

3.3.5.2 Modelo 5b

Quando se avalia a inclusão de um fator autorregressivo diferente para cada contrato sob a hipótese de uma única variância para todos os contratos, nota-se uma redução significativa da log-verossimilhança que foi a menor encontrada até aqui, não obstante, todos os parâmetros analisados tenham sejam significativos ao nível de 1% e os erros, pelas medidas RMSE, MAE e MAPE, sejam bem menores que para os Modelos 1, 2, 3, 4 e 5a, conforme Tabela 11. Nesse caso, o melhor ajuste ocorreu para o contrato $F_{t,T5}$, seguido dos contratos $F_{t,T10}$ e $F_{t,T12}$. O MAPE médio foi de 0,00253. Adicionalmente, considerar uma única variância para todos os contratos contribuiu para melhorar o ajuste do primeiro contrato, $F_{t,T1}$.

Figura 7 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 5b



Legenda: Em 18/11/2008.

Fonte: O autor, 2019.

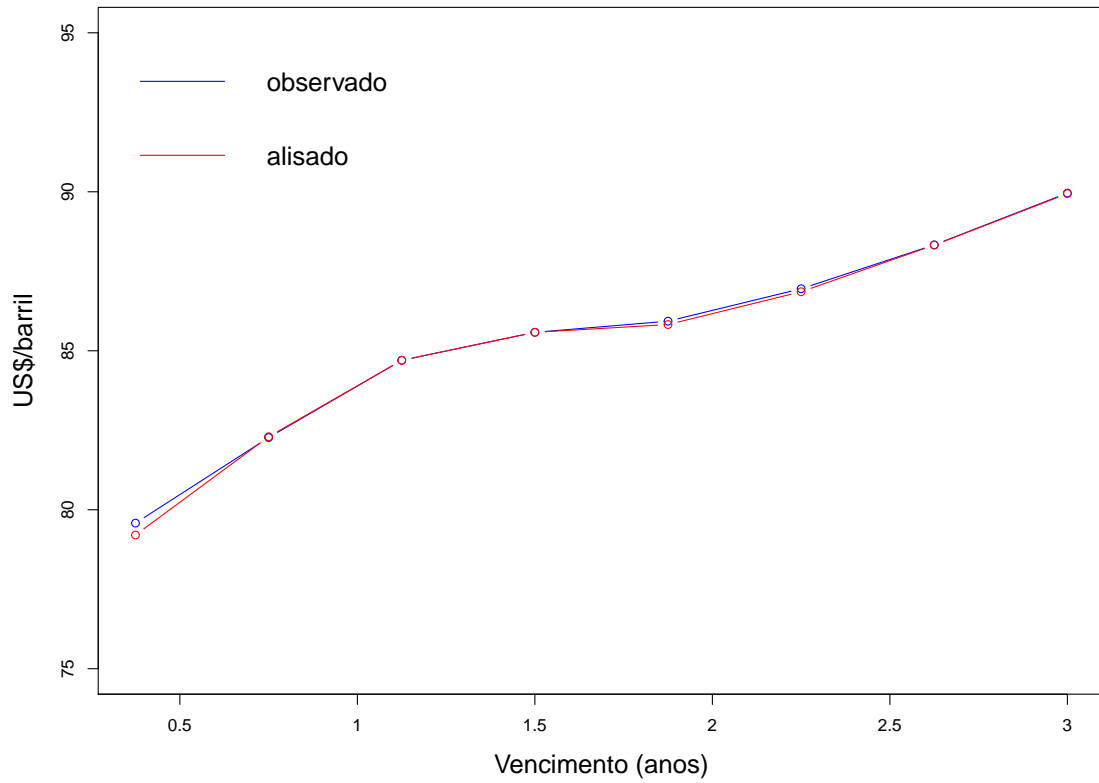
Tabela 11 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 5b

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	0,21846	0,17607	0,17755	0,17962	0,45914	0,39444	0,21184	0,30066	0,26472
MAE	0,14103	0,11951	0,13016	0,13119	0,32973	0,27627	0,14766	0,20893	0,18556
MAPE	0,00214	0,00170	0,00177	0,00177	0,00445	0,00367	0,00196	0,00278	0,00253

Fonte: O autor, 2019.

3.3.5.3 Modelo 6a

Figura 8 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 6a



Legenda: Em 18/11/2008.

Fonte: O autor, 2019.

Para o Modelo 6a, vide Tabela 8, uma das velocidades de reversão foi significativa ao nível de 5%, notadamente, κ_{ζ} , enquanto a outra, κ_{γ} , foi significativa ao nível de 1%. Ambas as volatilidade das variações de curto prazo e de longo prazo foram significativas ao nível de 1%. Como nos casos anteriores, as estimativas para a volatilidade das variações de curto prazo foram maiores que para o longo prazo. Um dos fatores de curto prazo apresentou a parcela variável do PRM não significativa, notadamente, β_{ζ} , como em BHAR e LEE (2011). No entanto, para o outro fator de curto prazo, ambos os componentes do PRMVT foram significativos ao nível de 1%. As correlações entre as variáveis de estado foram todas positivas e significativas ao nível de 1%, bem como os fatores autorregressivos. Nesse caso, a tendência de crescimento de longo prazo, na medida real, foi significativa ao nível de 1% enquanto, na medida martingal, foi não significativa. A log-verossimilhança caiu ligeiramente em relação ao Modelo 4, apresentando um valor de 21.163,33.

Tabela 12 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 6a

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	0,41932	0,09286	0,00133	0,00593	0,81295	0,77603	0,07852	0,14966	0,29207
MAE	0,26950	0,06737	0,00097	0,00438	0,57243	0,54038	0,05572	0,09946	0,20128
MAPE	0,00409	0,00091	0,00001	0,00006	0,00768	0,00719	0,00074	0,00132	0,00275

Fonte: O autor, 2019.

Os melhores ajustes entre os preços observados e alisados ocorreu para os contratos $F_{t,T10}$ e $F_{t,T12}$, como pode ser visto na Tabela 12 e na Figura 8. A média do MAPE foi de 0,00275. Embora considerar um fator autorregressivo diferente para cada contrato, neste modelo, não tenha contribuído de forma significativa para melhorar a aderência entre preços observados e alisados, relativamente ao modelo 4, nota-se uma ligeira melhora para o ajuste dos dois primeiros contratos, $F_{t,T1}$ e $F_{t,T5}$.

3.3.5.4 Modelo 6b

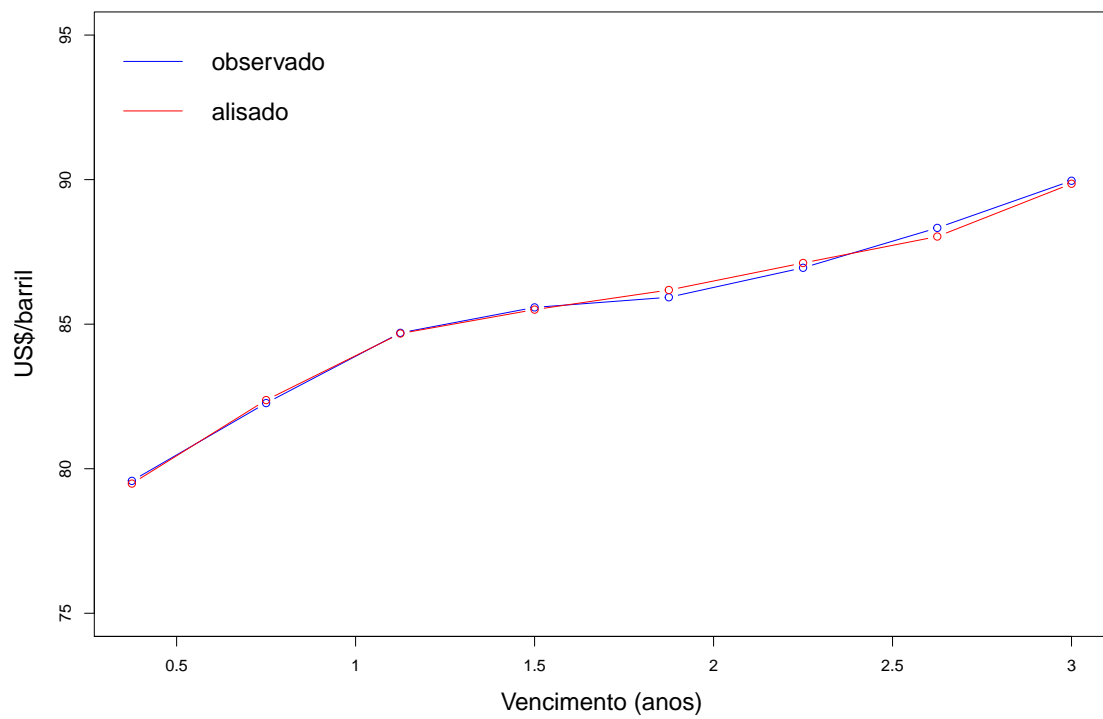
No Modelo 6b, ambas as velocidades de reversão à média foram significativas ao nível de 1% assim como as volatilidade das variações de curto e longo prazo. Como esperado, a oscilação das variações de curto prazo é maior que aquela para o longo prazo. A tendência de crescimento de longo prazo, na medida martingal, foi não significativa ao passo que, na medida real, foi significativa ao nível de 1%. Todas as correlações entre as variáveis de estado foram significativas ao nível de 1%, à exceção de $\rho_{\gamma\eta}$, que foi significativa ao nível de 5%. Diferentemente dos outros modelos, neste caso, uma das correlações entre as variáveis de estado foi negativa, notadamente, $\rho_{\zeta\gamma}$. Todos os fatores autorregressivos foram significativos ao nível de 1% à exceção do ϕ_{24} que foi não significativo. A variância, única para todos os contratos, foi significativa ao nível de 1%. Como no Modelo 5b, a log-verossimilhança sofreu uma queda expressiva, apresentando um valor de 19.247,3, maior apenas que aquele encontrado para o Modelo 5b.

Tabela 13 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 6b

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	0,12595	0,16928	0,18824	0,19718	0,42601	0,40397	0,23590	0,26838	0,25186
MAE	0,08248	0,12226	0,13833	0,14437	0,30694	0,28347	0,17213	0,18467	0,17933
MAPE	0,00124	0,00172	0,00187	0,00195	0,00413	0,00378	0,00228	0,00243	0,00243

Fonte: O autor, 2019.

Figura 9 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 6b



Legenda: Em 18/11/2008.

Fonte: O autor, 2019.

A aderência entre os preços previstos e alisados, em termos do MAPE médio, é melhor dentre todos os oito modelos analisados até aqui. Os melhores ajustes são para o contrato $F_{t,T1}$ e $F_{t,T5}$, seguidos dos contratos $F_{t,T10}$ e $F_{t,T12}$. A média do MAPE foi 0,00243. Comparativamente ao Modelo 6a, nota-se que considerar uma única variância para todos os contratos melhora de forma significativa o ajuste para o primeiro contrato, $F_{t,T1}$, apesar de piorar o ajuste para os contratos $F_{t,T5}$, $F_{t,T10}$ e $F_{t,T12}$.

3.3.6 Modelo 7

A estimação dos modelos 5a, 5b, 6a e 6b evidencia a pertinência de se considerar um fator autorregressivo diferente para cada contrato, embora, os resultados para os modelos 5a e 6a não tenham revelado ganhos de ajuste. Há que se considerar que a inclusão dos fatores autorregressivos diferentes aumenta demasiadamente o número de parâmetros, o que, eventualmente, pode ocasionar problemas de *overfitting*.

Ao considerar os modelos 5b e 6b, com uma única variância para todos os contratos, reduz-se o número de parâmetros e melhora-se o ajuste do modelo aos dados, contudo, há uma queda expressiva no nível de informação dos modelos. Esse impacto, por sua vez, pode estar relacionado a importância de se considerar uma variância diferente para cada contrato.

A partir desses resultados, testa-se um último modelo: o Modelo 7. Esse modelo, de três fatores, inclui fatores autorregressivos e variâncias diferentes para cada contrato. E, diferentemente dos casos anteriores, considera um PRM constante. Na Tabela 14 são apresentados os resultados da estimação. Como pode ser visto, todos os parâmetros são significativos ao nível de 1% à exceção do PRM de um dos fatores de curto prazo, notadamente, α_γ , que foi significativo ao nível de 10%. O parâmetro $\rho_{\zeta\gamma}$ também foi significativo ao nível de 10%, enquanto a variância para o contrato $F_{t,T24}$ foi não significativa. A tendência de crescimento de longo prazo na medida martingal também foi não significativa.

3.3.6.1 Modelo 5a

A análise da aderência do modelo aos dados, conforme Tabela 15, revela um MAPE médio de 0,00249. Trata-se de uma aderência muito próxima a do Modelo 6b, o melhor analisado até aqui (ver Figura 10), em termos de ajuste. Contudo, a log-verossimilhança do modelo 7 é bem maior que a encontrada para aquele modelo, apresentando um valor de 21.021,4.

Além disso, há uma melhora, relativamente ao Modelo 6b, para os contratos $F_{t,T5}$,

Tabela 14 - Parâmetros
estimados para o
Modelos 7

Parâmetro	Modelo 7
κ_{ζ}	1,3260*** (11, 41)
σ_{ζ}	0,1938*** (15, 18)
α_{ζ}	-0,2732*** (-4, 73)
κ_{γ}	0,5373*** (15, 52)
σ_{γ}	0,4914*** (10, 70)
α_{γ}	0,0737* (1, 92)
σ_{η}	0,23130*** (22, 28)
μ^*	-0,0320*** (-6, 34)
μ	0,0595 (0, 87)
$\rho_{\zeta\gamma}$	0,1259* (1, 79)
$\rho_{\zeta\eta}$	0,2994*** (5, 24)
$\rho_{\gamma\eta}$	0,2922*** (4, 82)
ϕ_1	0,9000*** (18, 48)
ϕ_5	0,8980*** (2, 67)
ϕ_{10}	0,8817*** (6, 29)
ϕ_{12}	0,8896*** (8, 60)
ϕ_{15}	0,8163*** (16, 41)
ϕ_{20}	0,8232*** (16, 65)
ϕ_{24}	0,8927*** (21, 15)
ϕ_{36}	0,9000*** (24, 59)
$s_{\frac{1}{2}}^2$	9,33X10 ⁻⁵ *** (673, 17)
$s_{\frac{5}{2}}^2$	1,00X10 ⁻⁶ *** (3, 38)
$s_{\frac{10}{2}}^2$	1,00X10 ⁻⁶ *** (33, 61)
$s_{\frac{12}{2}}^2$	1,00X10 ⁻⁶ *** (48, 87)
$s_{\frac{15}{2}}^2$	1,00X10 ⁻⁴ *** (1835, 54)
$s_{\frac{20}{2}}^2$	1,00X10 ⁻⁴ *** (1517, 10)
$s_{\frac{24}{2}}^2$	1,00X10 ⁻⁶ (0, 53)
$s_{\frac{36}{2}}^2$	1,00X10 ⁻⁵ *** (516, 42)
\mathcal{L}	21.021,4

Legenda: \mathcal{L} é a log-verossimilhança de cada modelo. Níveis de significância: 0.01 (***), 0.05 (**) e 0.10 (*). Em parênteses, são apresentados os valores da estatística t para cada parâmetro estimado.

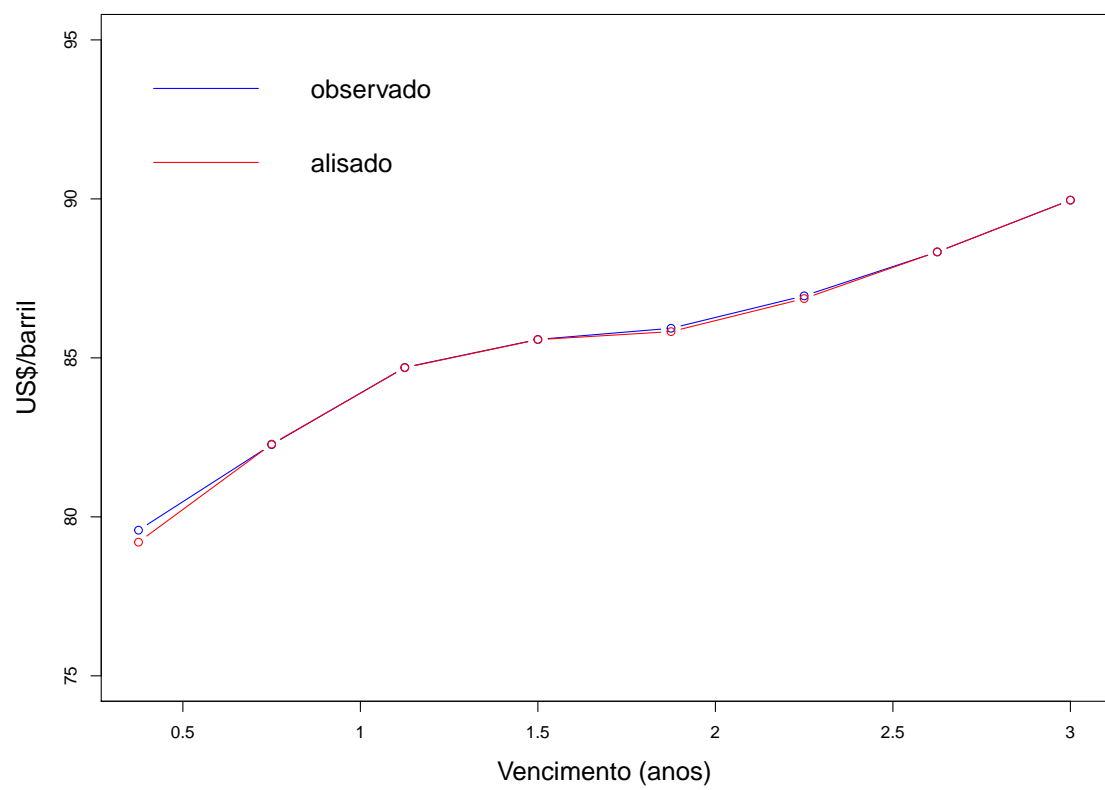
Fonte: O autor, 2019.

Tabela 15 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo 7

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	0,35154	0,02183	0,02528	0,02640	0,78783	0,75398	0,02741	0,16521	0,26993
MAE	0,21227	0,01634	0,01895	0,01917	0,55428	0,52459	0,01980	0,09103	0,18205
MAPE	0,00329	0,00022	0,00025	0,00025	0,00743	0,00698	0,00026	0,00123	0,00249

Fonte: O autor, 2019.

Figura 10 - Estrutura a termo de preços para o Modelo 7



Legenda: Em 18/11/2008.

Fonte: O autor, 2019.

$F_{t,T10}$ e $F_{t,T12}$. Contudo, o ajuste para o primeiro contrato, $F_{t,T1}$, piora.

3.3.7 Resumo

A Tabela 16 apresenta um resumo com o número de parâmetros estimados, a média do MAPE, o AIC e a log-verossimilhança para cada modelo analisado. Como se pode notar, o Modelo 2 apresentou um AIC menor e uma log-verossimilhança maior que o Modelo 1. Por sua vez, o teste de Razão de Verossimilhança (RV) para este modelo, apresentado na Tabela 17, sugere que é relevante incluir um prêmio de risco variante no tempo, uma vez que a estatística de teste calculada foi de 2.654,88, bem superior ao valor crítico $\chi^2_{0,05,1}$ de 3,841, de modo que se rejeita a hipótese de restrição $\beta_\zeta = 0$.

Embora admitir um fator autorregressivo diferente para cada contrato tenha se mostrado importante quando da análise individualizada dos parâmetros, para o caso de dois fatores, em termos da aderência entre preços alisados e observados, não houve melhora. Isto é, o MAPE médio continuou 0,00295. Ainda assim, o teste RV rejeitou a hipótese nula de que o modelo 1 é melhor que o modelo 5a. A estatística de teste calculada da RV foi de 480,88, ainda muito superior ao valor crítico $\chi^2_{0,05,8}$ de 15,507. Os valores estimados para AIC e log-verossimilhança foram, respectivamente, um pouco maior e menor que para o Modelo 2.

Tabela 16 - Tabela resumo - AIC e \mathcal{L}

Modelo	Nº de parâmetros	AIC	\mathcal{L}	MAPE médio
1	16	-41.099,5	20.565,8	0,00295
2	17	-41.752,5	20.893,2	0,00295
3	21	-42.120,9	21.081,4	0,00252
4	23	-42.387,6	21.216,8	0,00279
5a	24	-41.564,4	20.806,2	0,00295
6a	30	-42.266,7	21.163,3	0,00275
5b	17	-38.142,9	19.088,4	0,00253
6b	23	-38.448,5	19.247,3	0,00243
7	28	-41.986,8	20.565,8	0,00249

Legenda: \mathcal{L} é a log-verossimilhança de cada modelo.

Fonte: O autor, 2019.

Já o Modelo 5b foi, dentre os modelos de dois fatores, o que apresentou um MAPE médio menor, 0,00253, embora os estimadores do AIC e log-verossimilhança tenham sido bem piores que para os modelos 1, 2 e 5a. Além disso, o teste RV não rejeitou a hipótese de que o Modelo 1 é melhor que o modelo 5b para descrever os dados, com um valor calculado de -2954,72, bem menor que o valor crítico $\chi^2_{0,05,1}$ de 3,841.

Quando da análise dos modelos de 3 fatores, a inclusão de um segundo fator de curto prazo, por si só, melhorou o ajuste, reduzindo a média do MAPE de 0,00256. Além disso, o critério de informação AIC mostrou-se menor e a log-verossimilhança maior, comparativamente ao Modelo 2.

Tabela 17 - Testes de Razão da Verossimilhança (RV)

Modelos	gl	\mathcal{L}	RV	$\chi^2_{\alpha, gl}$	Resultado
Modelo1 Modelo 2	1	$\mathcal{L}_R = 20.565,76$ $\mathcal{L}_{UR} = 20.893,2$	2.654,88	3,841	Rejeita-se H_0
Modelo1 Modelo 5a	8	$\mathcal{L}_R = 20.565,76$ $\mathcal{L}_{UR} = 20.806,2$	480,88	15,507	Rejeita-se H_0
Modelo1 Modelo 5b	1	$\mathcal{L}_R = 20.565,76$ $\mathcal{L}_{UR} = 19.088,4$	-2.954,72	3,841	Não se Rejeita H_0
Modelo 3 Modelo 4	2	$\mathcal{L}_R = 20.778,83$ $\mathcal{L}_{UR} = 21.071,49$	270,74	5,991	Rejeita-se H_0
Modelo 3 Modelo 6a	9	$\mathcal{L}_R = 20.778,83$ $\mathcal{L}_{UR} = 21.006,1$	163,78	16,919	Rejeita-se H_0
Modelo 3 Modelo 6b	2	$\mathcal{L}_R = 20.778,83$ $\mathcal{L}_{UR} = 19.247,3$	-3.668,28	5,991	Não se Rejeita H_0
Modelo 3 Modelo 7	7	$\mathcal{L}_R = 20.778,83$ $\mathcal{L}_{UR} = 21.021,4$	-120,08	14,067	Não se Rejeita H_0
Modelo 4 Modelo 7	5	$\mathcal{L}_R = 21.071,49$ $\mathcal{L}_{UR} = 21.021,4$	-390,82	11,070	Não se Rejeita H_0

Legenda: \mathcal{L}_R é a log-verossimilhança do modelo restrito (simples) e \mathcal{L}_{UR} é a log-verossimilhança do modelo irrestrito. Assim, $RV = -2\log\left(\frac{\mathcal{L}_R}{\mathcal{L}_{UR}}\right)$. Se $RV > \chi^2_{\alpha, gl}$, em que α é o nível de significância e gl são os graus de liberdade, então, rejeita-se a H_0 , ou seja, o modelo irrestrito é melhor. Caso contrário, não se rejeita H_0 . Utilizou-se $\alpha = 0,05$.

Fonte: O autor, 2019.

Por sua vez, o Modelo 4 resultou em um MAPE médio de 0,00275. Ainda para este modelo, os critério AIC e de log-verossimilhança mostraram-se os melhores até aqui. O teste RV rejeitou a hipótese de que o modelo restrito, Modelo 3, é melhor que o Modelo 4, com um valor calculado de 270,74 superior ao valor crítico $\chi^2_{0,05,2}$ de 5,991.

O Modelo 6a apresentou um MAPE médio de 0,00275. O teste RV para esses modelos, rejeitou as restrições impostas pelo Modelo 3, com um valor calculado de 163,78 bem superior ao valor crítico $\chi^2_{0,05,9}$ de 16,919.

Assim como no Modelo 5b a log-verossimilhança e o AIC para o modelo 6b foram baixos, melhores apenas que aqueles encontrados para o Modelo 5b. Nesse caso, o MAPE médio foi de 0,00243. O teste RV não rejeitou a hipótese nula de que o Modelo 3 é superior ao Modelo 6b ($RV = -3.668,28 < \chi^2_{0,05,2} = 5,991$). Não obstante, o teste da Razão da Verossimilhança pode apresentar limitações à análise desses modelos, e, normalmente, não é utilizado, na literatura de modelos de fatores, para escolha do melhor modelo.

Pelo teste RV , não se rejeita a hipótese nula de que o modelo restrito, Modelo 3, é melhor que o modelo 7 para descrever os dados analisados, tendo em vista que o valor calculado de -120,08 é inferior ao valor crítico de $\chi^2_{0,05,7}$ de 14,067.

Portanto, o melhor modelo em termos do AIC e da log-verossimilhança é o Modelo 4 de BHAR e LEE (2011). Já, em termos de ajuste, o melhor é o Modelo 6b, com a vantagem de fornecer o melhor ajuste para o contrato $F_{t,T1}$. Esse contrato é o que tem a maior liquidez e, consequentemente, maior volatilidade. Isso, em geral, dificulta o ajuste. O MAPE médio do Modelo 7 foi muito próximo aquele encontrado para o Modelo 6b. Pelo teste RV, entre o Modelo 4 (restrito) e o Modelo 7 (irrestrito), apresentado na Tabela 17, não se rejeita a hipótese nula de que o Modelo 4 é melhor que o Modelo 7 para descrever os preços.

Como salientado anteriormente, a literatura em modelos Gaussianos de fatores não costuma apresentar testes fora da amostra. Contudo, um teste útil para comparar o ganho de inclusão de parâmetros em relação aderência do modelo aos dados empíricos entre modelos é o teste Giacomini-White. Optou-se, portanto, por não incluí-lo nesta dissertação tendo em vista que isso aumentaria demasiadamente a complexidade do estudo. Isso aconteceria não apenas em termos da literatura a qual precisaria ser extensivamente ampliada, mas também em relação à modelagem.

3.3.8 Resultados adicionais

3.3.8.1 Referência para comparação

Com vistas a manter a coerência com o estudo de BHAR e LEE (2011), os Modelos 1 e 3 foram estimados considerando a inclusão de uma estrutura autorregressiva dos erros, como feito por esses autores. Contudo, ter como referência o Modelo Clássico de SS pode ser interessante no sentido de avaliar os ganhos da inclusão da estrutura autorregressiva dos erros, em termos da aderência dos modelos.

Para o caso de dois fatores, esse exercício já foi realizado, em SOUZA e AIUBE (2020). Como resultado, os autores obtiveram que a inclusão do PRMVT e da estrutura AR dos erros contribuiu de forma significativa para o ajuste dos preços modelados aos preços observados, comparativamente ao caso clássico de SS.

Nesta dissertação, esse exercício é repetido e estendido para o caso de três fatores, isto é, para o modelo de SS adicionado de um segundo fator de curto prazo. A tabela 18 apresenta os parâmetros estimados para cada caso, ambos sem considerar a estrutura autorregressiva dos erros. Como se pode observar, na Tabela 18, para o caso clássico, todos os parâmetros foram significativos ao nível de 1%, à exceção do PRM para o fator de curto prazo que foi significativo ao nível de 10%. Adicionalmente, a tendência de crescimento de longo prazo, na medida real, e a variância para o contrato $F_{t,T12}$ foram não significativos. Para o caso de três fatores, todos os parâmetros foram significativos ao nível de 1%, exceto os prêmios de risco de curto prazo foram não significativos, bem como

Tabela 18 - Parâmetros estimados para os Modelos
SS(Clássico) e SS(3 fatores)

Parâmetro	SS (Clássico)	SS (3 fatores)
κ_{ζ}	0,4969*** (49,61)	1,0001*** (41,56)
σ_{ζ}	0,3003*** (16,85)	0,4001*** (12,86)
α_{ζ}	0,0270* (1,69)	0,0398 (0,69)
β_{ζ}	-	-
κ_{γ}	-	0,5993*** (46,05)
σ_{γ}	-	0,4104*** (24,58)
α_{γ}	-	0,0396 (1,56)
β_{γ}	-	-
σ_{η}	0,2069*** (35,76)	0,2023*** (18,88)
μ^*	-0,0267*** (-17,92)	-0,0307*** (-10,15)
μ	0,0300 (0,53)	0,0200*** (0,39)
$\rho_{\zeta\gamma}$	-	0,2997*** (15,98)
$\rho_{\zeta\eta}$	0,2998*** (6,62)	0,3000*** (4,14)
$\rho_{\gamma\eta}$	-	0,3000*** (10,86)
s_1^2	$1,13 \times 10^{-3} \text{***} (913,74)$	$3,87 \times 10^{-4} \text{***} (1516,02)$
s_5^2	$5,26 \times 10^{-5} \text{***} (808,35)$	$2,08 \times 10^{-6} \text{***} (46,07)$
s_{10}^2	0,00 (0,00)	$1,35 \times 10^{-6} \text{***} (2373,74)$
s_{12}^2	$2,98 \times 10^{-7} \text{***} (9,72)$	$2,95 \times 10^{-7} \text{***} (15,36)$
s_{15}^2	$3,14 \times 10^{-4} \text{***} (873,82)$	$3,05 \times 10^{-4} \text{***} (934,55)$
s_{20}^2	$3,05 \times 10^{-4} \text{***} (802,96)$	$2,40 \times 10^{-4} \text{***} (1103,41)$
s_{24}^2	$1,15 \times 10^{-4} \text{***} (480,05)$	$1,21 \times 10^{-5} \text{***} (290,70)$
s_{36}^2	$6,30 \times 10^{-4} \text{***} (640,04)$	$1,59 \times 10^{-4} \text{***} (420,99)$
\mathcal{L}	19.477,6	20.233,6

Legenda: \mathcal{L} é a log-verossimilhança de cada modelo. Níveis de significância: 0.01 (***), 0.05 (**) e 0.10 (*). Em parênteses, são apresentados os valores da estatística t para cada parâmetro estimado.

Fonte: O autor, 2019.

a tendência de crescimento de longo prazo, na medida real. Todas as correlações foram positivas e significativas sugerindo a importância de se considerar um segundo fator de curto prazo.

Tabela 19 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo de SS (Clássico)

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	2,26255	0,55109	0,00000	0,02208	1,30805	1,28273	0,71764	1,73489	0,98488
MAE	1,77568	0,42232	0,00000	0,01644	0,94801	0,94832	0,55539	1,36904	0,75440
MAPE	0,02604	0,00554	0,00000	0,00022	0,01275	0,01259	0,00734	0,01874	0,01040

Fonte: O autor, 2019.

Por sua vez, a análise da aderência dos modelos, como pode ser visto nas Tabelas 19 e 20, revela que tanto o Modelo SS (Clássico) quanto o Modelo SS (3 fatores) apresentaram um MAPE médio bastante superior aos de todos os nove modelos analisados anteriormente. O MAPE médio do caso clássico foi de 0,01040 e do caso do modelo de SS com três fatores foi de 0,00637.

Tabela 20 - Erros entre os preços alisados e observados para o Modelo de SS(3 fatores)

	$F_{t,T1}$	$F_{t,T5}$	$F_{t,T10}$	$F_{t,T12}$	$F_{t,T15}$	$F_{t,T20}$	$F_{t,T24}$	$F_{t,T36}$	Média
RMSE	1,36247	0,04596	0,07374	0,01672	1,31524	1,25279	0,22904	0,78768	0,63546
MAE	0,94031	0,03486	0,05537	0,01253	0,94692	0,88959	0,17107	0,57854	0,45365
MAPE	0,01446	0,00048	0,00074	0,00017	0,01275	0,01189	0,00228	0,00816	0,00637

Fonte: O autor, 2019.

CONCLUSÃO

Nesta dissertação investigou-se os modelos de dois e três fatores de SS considerando um PRMVT e também uma estrutura autorregressiva para os erros, aplicando a metodologia de BHAR e LEE (2011). Avaliou-se, ainda, a flexibilização da hipótese dos autores de considerar um único fator autorregressivo para todos os contratos. Nesse sentido, avaliou-se o ajuste de mais dois modelos, de dois e três fatores, para dois casos distintos, isto é, com ϕ_j e s_j^2 e com ϕ_j e s^2 em que $j = 1, \dots, n$ e n é o número de meses até o vencimento do contrato respectivo futuro, ϕ é o fator autorregressivo e s^2 é a variância. A estimação foi feita a partir da implementação do filtro de Kalman, como usual na literatura de modelos de fatores afins e Gaussianos. Como resultado, encontrou-se que considerar um prêmio de risco variante no tempo contribui de forma bastante positiva para o ajuste. Embora seu AIC e log-verossimilhança tenham sido baixos, o melhor modelo, em termos de ajuste entre preços alisados e observados, foi o modelo 6b, com três fatores, PRMVT e estrutura autorregressiva dos erros com ϕ_j e uma única variância para todos os contratos. Além disso, ao flexibilizar sua hipótese de um único fator autorregressivo para todos os contratos, encontrou-se uma melhor aderência entre os preços alisados e observados, tanto para o caso de dois como de três fatores, sob a hipótese de uma única variância para todos os contratos. Além disso, embora o Modelo 7 tenha apresentado uma log-verossimilhança maior, um AIC menor e um MAPE médio muito próximo ao Modelo 6b, o teste RV não rejeitou a hipótese de que tanto o Modelo 3 quanto o Modelo 4 são melhores que o Modelo 7 para explicar os dados.

REFERÊNCIAS

- AIUBE, F. A. L. *Modelos Quantitativos em Finanças: Com enfoque em commodities*. [S.l.]: Bookman, 2013. 438 p.
- AIUBE, F. A. L.; SAMANEZ, C. P. On the comparison of Schwartz and Smith's two-and three-factor models on commodity prices. *Applied Economics*, v. 46, n. 30, p. 3736–3749, July 2014.
- AIUBE, F. A. L. et al. Evaluating the risk premium in the U.S.A. natural gas market: evidence from low-price regime. *Applied Economics*, v. 49, n. 9, p. 860–871, Feb. 2017.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. *Optimal Filtering*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1979. 367 p.
- BHAR, R.; LEE, D. Time-varying market price of risk in the crude oil futures market. *Journal of Futures Markets*, v. 31, n. 8, p. 779–807, Aug. 2011.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. Evaluating natural resource investments. *Journal of Business*, p. 135–157, Feb. 1985.
- CARTEA, A.; WILLIAMS, T. UK gas markets: The market price of risk and applications to multiple interruptible supply contracts. *Energy Economics*, Elsevier, v. 30, n. 3, p. 829–846, Aug. 2008.
- CASASSUS, J.; COLLIN-DUFRESNE, P. Stochastic convenience yield implied from commodity futures and interest rates. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 60, n. 5, p. 2283–2331, Oct. 2005.
- CORTAZAR, G.; NARANJO, L. A multi-factor stochastic model and estimation procedure for the valuation and hedging of commodity contingent claims. *SSRN*, p. 1–30, Mar. 2003. Disponível em: <<https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstractid=476025>>. Acesso em: 17 jan. 2019.
- _____. An n-factor gaussian model of oil futures prices. *Journal of Futures Markets*, Wiley Periodicals, v. 26, n. 3, p. 243–268, Mar. 2006.
- GIBSON, R.; SCHWARTZ, E. Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, v. 45, n. 3, p. 959–976, July 1990.
- HARVEY, A.C. *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 1989.
- KOLOS, S. P.; RONN, E. I. Estimating the commodity market price of risk for energy prices. *Energy Economics*, v. 30, p. 621–641, Feb. 2008.
- LIEDTKE, P. *Time-Varying Oil Risk Premiums*. 63 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) — Pontificia universidad católica de Chile (Escuela de Ingeniería), Chile, July 2018.

- LUCIA, J. J.; SCHWARTZ, E. S. Electricity prices and power derivatives: Evidence from the nordic power exchange. *Review of Derivatives Research*, v. 5, n. 1, p. 5–50, Jan. 2002.
- MANOLIU, M.; TOMPAIDIS, S. Energy futures prices: term structure models with Kalman filter estimation. *Applied Mathematical Finance*, v. 9, n. 1, p. 21–43, Feb. 2002.
- MIRANTES, A. G.; POBLACIÓN, J.; SERNA, G. The stochastic seasonal behaviour of natural gas prices. *European Financial Management*, v. 18, n. 3, p. 410–443, June 2012.
- _____. Commodity derivative valuation under a factor model with time-varying market prices of risk. *Review of Derivatives Research*, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 75–93, Apr. 2014.
- SCHWARTZ, E.; SMITH, J. E. Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, v. 46, n. 7, p. 893–911, July 2000.
- SCHWARTZ, E. S. The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, v. 52, n. 3, p. 923–973, July 1997.
- SHAO, C.; BHAR, R.; COLWELL, D. B. A multi-factor model with time-varying and seasonal risk premiums for the natural gas market. *Energy Economics*, v. 50, p. 207–214, May 2015.
- SHUMWAY, R.H.; STOFFER, D.S. *Time series analysis and its applications*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer V., 2006. 558 p.
- SØRENSEN, C. Modeling seasonality in agricultural commodity futures. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, v. 22, n. 5, p. 393–426, May 2002.
- SOUZA, C. G. C. de; AIUBE, F. A. L. Time-varying market price of risk and autoregressive error structure of oil prices. *Estudios de Economía Aplicada*, v. 38, n. 1, 2020. Publicação em breve.

APÊNDICE A – Derivação dos modelos

A.1 Derivação do modelo 2

Esse apêndice apresenta a derivação do modelo 2, de dois fatores, PRMVT e estrutura autorregressiva dos erros. Considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade. As soluções para as equações 2b e 2c entre 0 e t são

$$\zeta_t = \zeta_0 e^{-k_\zeta t} + \sigma_\zeta \int_0^t e^{k_\zeta(u-t)} dB_{\zeta,u} \quad (\text{A.1a})$$

$$\eta_t = \eta_0 + \mu t + \sigma_\eta \int_0^t dB_{\eta,u} , \quad (\text{A.1b})$$

Agora, considere que os PRM para as variáveis de estado são:

$$\lambda_{\zeta t} = \frac{\alpha_\zeta + \beta_\zeta \zeta_t}{\sigma_\zeta} , \quad (\text{A.2})$$

$$\lambda_\eta = \frac{\alpha_\eta}{\sigma_\eta} , \quad (\text{A.3})$$

Realizando a mudança de medida através do teorema de Girsanov, tem-se:

$$d\tilde{B}_{\zeta,t} = dB_{\zeta,t} + \lambda_{\zeta t} dt \quad (\text{A.4})$$

$$d\tilde{B}_{\eta,t} = dB_{\eta,t} + \lambda_\eta dt . \quad (\text{A.5})$$

Substituindo as equações A.4 e A.5 nas equações 2b e 2c, obtém-se:

$$d\zeta_t = (-\alpha_\zeta - \kappa_\zeta^* \zeta_t) dt + \sigma_\zeta d\tilde{B}_{\zeta,t} \quad (\text{A.6a})$$

$$d\eta_t = \mu^* dt + \sigma_\eta d\tilde{B}_{\eta,t} , \quad (\text{A.6b})$$

em que , $\kappa_\zeta^* = \kappa_\zeta + \beta_\zeta$ and $\mu^* = \mu - \lambda_\eta$.

Para simplificar, considere $\bar{\zeta} = -\frac{\alpha_\zeta}{\kappa_\zeta^*}$. As soluções para o intervalo entre t e T são:

$$\zeta_T = \bar{\zeta} + (\zeta_t - \bar{\zeta})e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)} + \sigma_\zeta \int_t^T e^{\kappa_\zeta^*(u-T)} d\tilde{B}_{\zeta,u} \quad (\text{A.7a})$$

$$\eta_T = \eta_t + \mu^*(T-t) + \sigma_\eta \int_t^T d\tilde{B}_{\eta,u} . \quad (\text{A.7b})$$

Considerando $F_{t,T} = E^{\mathbb{Q}}[S_T|\mathcal{F}_t]$ e $t \in 0, T$, tem-se $F_{t,T} = E^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta_T + \eta_T}|\mathcal{F}_t]$. Para clareza e uniformidade de notação, mantém-se a notação do segundo momento da distribuição condicional à medida de probabilidade. Calculando a média, a variância e a covariância das variáveis de estado, na medida \mathbb{Q} , e usando a isometria de Itô, pode-se escrever:

$$E^{\mathbb{Q}}(\zeta_T|\mathcal{F}_t) = \bar{\zeta} + (\zeta_t - \bar{\zeta})e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)} , \quad (\text{A.8})$$

$$Var^{\mathbb{Q}}(\zeta_T|\mathcal{F}_t) = \frac{\sigma_\zeta^2}{2\kappa_\zeta^*}(1 - e^{-2\kappa_\zeta^*(T-t)}) , \quad (\text{A.9})$$

$$E^{\mathbb{Q}}(\eta_T|\mathcal{F}_t) = \eta_t + \mu^*(T-t) , \quad (\text{A.10})$$

$$Var^{\mathbb{Q}}(\eta_T|\mathcal{F}_t) = \sigma_\eta^2(T-t) , \quad (\text{A.11})$$

$$Cov^{\mathbb{Q}}(\zeta_T, \eta_T|\mathcal{F}_t) = \rho_{\zeta\eta} \frac{\sigma_\zeta \sigma_\eta}{\kappa_\zeta^*}(1 - e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)}) , \quad (\text{A.12})$$

A equação $E^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta_T + \eta_T}|\mathcal{F}_t]$ pode ser escrita como:

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta_T + \eta_T}|\mathcal{F}_t] = E^{\mathbb{Q}}[\zeta_T + \eta_T|\mathcal{F}_t] + \frac{1}{2}Var^{\mathbb{Q}}[\zeta_T + \eta_T|\mathcal{F}_t] . \quad (\text{A.13})$$

Note que os fatores estocásticos ζ_T e η_T são independentes de \mathcal{F}_t , de modo que a esperança condicional é a mesma que a incondicional. Dessa forma, introduzindo as equações A.8, A.9, A.10, A.11 e A.12 na equação A.13, a expressão para o preço futuro,

considerando um PRMVT, é dado por:

$$\ln F_{t,T} = \zeta_t e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)} + \eta_t + B(T-t) , \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\begin{aligned} B(T-t) = & \frac{-\alpha_\zeta}{\kappa_\zeta^*} (1 - e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)}) + \mu^*(T-t) + \frac{\sigma_\zeta^2}{4\kappa_\zeta^*} (1 - e^{-2\kappa_\zeta^*(T-t)}) + \frac{1}{2} \sigma_\eta^2 (T-t) \\ & + \rho_{\zeta\eta} \frac{\sigma_\zeta \sigma_\eta}{\kappa_\zeta^*} (1 - e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)}) . \end{aligned}$$

A.2 Derivação do modelo 3

Esse apêndice apresenta a derivação do modelo 3, de três fatores e com PRM constante no tempo, além de estrutura autorregressiva dos erros. Considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade. As soluções para as equações 11b, 11c e 11d entre 0 e t são

$$\ln S_t = \zeta_t + \gamma_t + \eta_t \quad (\text{A.16a})$$

$$\zeta_t = \zeta_0 e^{-\kappa_\zeta t} + \sigma_\zeta \int_0^t e^{\kappa_\zeta(u-t)} dB_{\zeta,u} \quad (\text{A.16b})$$

$$\gamma_t = \gamma_0 e^{-\kappa_\gamma t} + \sigma_\gamma \int_0^t e^{\kappa_\gamma(u-t)} dB_{\gamma,u} \quad (\text{A.16c})$$

$$\eta_t = \eta_0 + \mu t + \sigma_\eta \int_0^t dB_{\eta,u} , \quad (\text{A.16d})$$

Implementando a mudança de medida, pode-se escrever o modelo na medida martingal equivalente como

$$d\zeta_t = (-\kappa_\zeta \zeta_t - \lambda_\zeta) dt + \sigma_\zeta d\tilde{B}_{\zeta,t} \quad (\text{A.17a})$$

$$d\gamma_t = (-\kappa_\gamma \gamma_t - \lambda_\gamma) dt + \sigma_\gamma d\tilde{B}_{\gamma,t} \quad (\text{A.17b})$$

$$d\eta_t = (\mu - \lambda_\eta) dt + \sigma_\eta d\tilde{B}_{\eta,t} , \quad (\text{A.17c})$$

em que, λ_ζ , λ_γ e λ_η são, respectivamente, o PRM para os dois fatores de curto prazo e de longo prazo.

As soluções para o intervalo entre t e T são:

$$\zeta_T = \zeta_t - \frac{\lambda_\zeta}{\kappa_\zeta}(1 - e^{-\kappa_\zeta(T-t)}) + \sigma_\zeta \int_t^T e^{\kappa_\zeta(u-T)} d\tilde{B}_{\zeta,u} \quad (\text{A.18a})$$

$$\gamma_T = \gamma_t - \frac{\lambda_\gamma}{\kappa_\gamma}(1 - e^{-\kappa_\gamma(T-t)}) + \sigma_\gamma \int_t^T e^{\kappa_\gamma(u-T)} d\tilde{B}_{\gamma,u} \quad (\text{A.18b})$$

$$\eta_T = \eta_t + \mu^*(T-t) + \sigma_\eta \int_t^T d\tilde{B}_{\eta,u} . \quad (\text{A.18c})$$

em que $\mu^* = (\mu - \lambda_\eta)$.

Considerando $F_{t,T} = E^\mathbb{Q}[S_T|\mathcal{F}_t]$ e $t \in 0, T$, tem-se $F_{t,T} = E^\mathbb{Q}[e^{\zeta_T + \eta_T}|\mathcal{F}_t]$. Note que para clareza e uniformidade de notação, mantém-se a notação do segundo momento da distribuição condicional à medida de probabilidade. Calculando a média, a variância e a covariância das variáveis de estado, na medida \mathbb{Q} , e usando a isometria de Itô, pode-se escrever:

$$E^\mathbb{Q}(\zeta_T|\mathcal{F}_t) = \zeta_t e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)} - \frac{\lambda_\zeta}{\kappa_\zeta}(1 - e^{-\kappa_\zeta(T-t)}) , \quad (\text{A.19})$$

$$E^\mathbb{Q}(\gamma_T|\mathcal{F}_t) = \gamma_t e^{-\kappa_\gamma^*(T-t)} - \frac{\lambda_\gamma}{\kappa_\gamma}(1 - e^{-\kappa_\gamma(T-t)}) , \quad (\text{A.20})$$

$$E^\mathbb{Q}(\eta_T|\mathcal{F}_t) = \eta_t + (\mu - \lambda_\eta)(T-t) , \quad (\text{A.21})$$

$$Var^\mathbb{Q}(\zeta_T|\mathcal{F}_t) = \frac{\sigma_\zeta^2}{2\kappa_\zeta}(1 - e^{-2\kappa_\zeta(T-t)}) , \quad (\text{A.22})$$

$$Var^\mathbb{Q}(\gamma_T|\mathcal{F}_t) = \frac{\sigma_\gamma^2}{2\kappa_\gamma}(1 - e^{-2\kappa_\gamma(T-t)}) , \quad (\text{A.23})$$

$$Var^\mathbb{Q}(\eta_T|\mathcal{F}_t) = \sigma_\eta^2(T-t) , \quad (\text{A.24})$$

$$Cov^{\mathbb{Q}}(\zeta_T, \eta_T | \mathcal{F}_t) = \rho_{\zeta\eta} \frac{\sigma_{\zeta} \sigma_{\eta}}{\kappa_{\zeta}} (1 - e^{-\kappa_{\zeta}(T-t)}) , \quad (\text{A.25})$$

$$Cov^{\mathbb{Q}}(\gamma_T, \eta_T | \mathcal{F}_t) = \rho_{\gamma\eta} \frac{\sigma_{\gamma} \sigma_{\eta}}{\kappa_{\gamma}} (1 - e^{-\kappa_{\gamma}(T-t)}) , \quad (\text{A.26})$$

$$Cov^{\mathbb{Q}}(\zeta_T, \gamma_T | \mathcal{F}_t) = \rho_{\zeta\gamma} \frac{\sigma_{\zeta} \sigma_{\gamma}}{\kappa_{\gamma} + \kappa_{\zeta}} (1 - e^{-(\kappa_{\gamma} + \kappa_{\zeta})(T-t)}) , \quad (\text{A.27})$$

A equação $E^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta_T + \gamma_T + \eta_T} | \mathcal{F}_t]$ pode ser escrita como:

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta_T + \gamma_T + \eta_T} | \mathcal{F}_t] = E^{\mathbb{Q}}[\zeta_T + \gamma_T + \eta_T | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} Var^{\mathbb{Q}}[\zeta_T + \gamma_T + \eta_T | \mathcal{F}_t] . \quad (\text{A.28})$$

Note que os fatores estocásticos ζ_T , γ_T e η_T são independentes de \mathcal{F}_t , de modo que a esperança condicional é a mesma que a incondicional. Dessa forma, introduzindo as equações A.19, A.20, A.21, A.22, A.23, A.24, A.25, A.26 e A.27 na equação A.28, a expressão para o preço futuro, considerando um PRM constante no tempo, é dado por:

$$\ln F_{t,T} = \zeta_t e^{-\kappa_{\zeta}(T-t)} + \gamma_t e^{-\kappa_{\gamma}(T-t)} + \eta_t + C(T-t) , \quad (\text{A.29})$$

onde

$$\begin{aligned} C(T-t) = & -\frac{\lambda_{\zeta}}{\kappa_{\zeta}} (1 - e^{-\kappa_{\zeta}(T-t)}) - \frac{\lambda_{\gamma}}{\kappa_{\gamma}} (1 - e^{-\kappa_{\gamma}(T-t)}) \\ & + (\mu - \lambda_{\eta})(T-t) + \frac{\sigma_{\zeta}^2}{4\kappa_{\zeta}} (1 - e^{-2\kappa_{\zeta}(T-t)}) + \frac{\sigma_{\gamma}^2}{4\kappa_{\gamma}} (1 - e^{-2\kappa_{\gamma}(T-t)}) \\ & + \frac{\sigma_{\zeta} \sigma_{\eta} \rho_{\zeta\eta}}{\kappa_{\zeta}} (1 - e^{-\kappa_{\zeta}(T-t)}) + \frac{\sigma_{\gamma} \sigma_{\eta} \rho_{\gamma\eta}}{\kappa_{\gamma}} (1 - e^{-\kappa_{\gamma}(T-t)}) \\ & + \frac{\sigma_{\zeta} \sigma_{\gamma} \rho_{\zeta\gamma}}{\kappa_{\zeta} + \kappa_{\gamma}} (1 - e^{-(\kappa_{\zeta} + \kappa_{\gamma})(T-t)}) . \end{aligned}$$

A.3 Derivação do modelo 4

Esse apêndice apresenta a derivação do modelo 4, de três fatores, PRMVT e estrutura autorregressiva dos erros. Considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade. As solução

para as equações 11b, 11c e 11d entre 0 e t são

$$\zeta_t = \zeta_0 e^{-\kappa_\zeta t} + \sigma_\zeta \int_0^t e^{k(u-t)} dB_{\zeta,u} \quad (\text{A.30a})$$

$$\gamma_t = \gamma_0 e^{-\kappa_\gamma t} + \sigma_\gamma \int_0^t e^{k(u-t)} dB_{\gamma,u} \quad (\text{A.30b})$$

$$\eta_t = \eta_0 + \mu t + \sigma_\eta \int_0^t dB_{\eta,u} , \quad (\text{A.30c})$$

Agora, considere que os PRM para as variáveis de estado são:

$$\lambda_{\zeta t} = \frac{\alpha_\zeta + \beta_\zeta \zeta_t}{\sigma_\zeta} , \quad (\text{A.31})$$

$$\lambda_{\gamma t} = \frac{\alpha_\gamma + \beta_\gamma \gamma_t}{\sigma_\gamma} , \quad (\text{A.32})$$

$$\lambda_\eta = \frac{\alpha_\eta}{\sigma_\eta} , \quad (\text{A.33})$$

Realizando a mudança de medida através do teorema de Girsanov, tem-se:

$$d\tilde{B}_{\zeta,t} = dB_{\zeta,t} + \lambda_{\zeta t} dt \quad (\text{A.34})$$

$$d\tilde{B}_{\gamma,t} = dB_{\gamma,t} + \lambda_{\gamma t} dt \quad (\text{A.35})$$

$$d\tilde{B}_{\eta,t} = dB_{\eta,t} + \lambda_\eta dt . \quad (\text{A.36})$$

Substituindo as equações A.34, A.35 e A.36 nas equações 11b, 11c e 11d, obtém-se:

$$d\zeta_t = (-\alpha_\zeta - \kappa_\zeta^* \zeta_t) dt + \sigma_\zeta d\tilde{B}_{\zeta,t} \quad (\text{A.37a})$$

$$d\gamma_t = (-\alpha_\gamma - \kappa_\gamma^* \gamma_t) dt + \sigma_\gamma d\tilde{B}_{\gamma,t} \quad (\text{A.37b})$$

$$d\eta_t = \mu^* dt + \sigma_\eta d\tilde{B}_{\eta,t} , \quad (\text{A.37c})$$

em que , $\kappa_\zeta^* = \kappa_\zeta + \beta_{\zeta_t}$, $\kappa_\gamma^* = \kappa_\gamma + \beta_{\gamma_t}$ and $\mu^* = \mu - \lambda_\eta$.

Para simplificar, considere $\bar{\zeta} = -\frac{\alpha_\zeta}{\kappa_\zeta^*}$ e $\bar{\gamma} = -\frac{\alpha_\gamma}{\kappa_\gamma^*}$. As soluções para o intervalo entre t e T são:

$$\zeta_T = \bar{\zeta} + (\zeta_t - \bar{\zeta})e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)} + \sigma_\zeta \int_t^T e^{\kappa_\zeta^*(u-T)} d\tilde{B}_{\zeta,u} \quad (\text{A.38a})$$

$$\gamma_T = \bar{\gamma} + (\gamma_t - \bar{\gamma})e^{-\kappa_\gamma^*(T-t)} + \sigma_\gamma \int_t^T e^{\kappa_\gamma^*(u-T)} d\tilde{B}_{\gamma,u} \quad (\text{A.38b})$$

$$\eta_T = \eta_t + \mu^*(T-t) + \sigma_\eta \int_t^T d\tilde{B}_{\eta,u} . \quad (\text{A.38c})$$

Considerando $F_{t,T} = E^\mathbb{Q}[S_T|\mathcal{F}_t]$ e $t \in 0, T$, tem-se $F_{t,T} = E^\mathbb{Q}[e^{\zeta_T + \gamma_T + \eta_T}|\mathcal{F}_t]$. Note bem que para clareza e uniformidade de notação, mantém-se a notação do segundo momento da distribuição condicional à medida de probabilidade. Calculando a média, a variância e a covariância das variáveis de estado, na medida \mathbb{Q} , e usando a isometria de Itô, pode-se escrever:

$$E^\mathbb{Q}(\zeta_T|\mathcal{F}_t) = \bar{\zeta} + (\zeta_t - \bar{\zeta})e^{-\kappa_\zeta^*(T-t)} , \quad (\text{A.39})$$

$$E^\mathbb{Q}(\gamma_T|\mathcal{F}_t) = \bar{\gamma} + (\gamma_t - \bar{\gamma})e^{-\kappa_\gamma^*(T-t)} , \quad (\text{A.40})$$

$$E^\mathbb{Q}(\eta_T|\mathcal{F}_t) = \eta_t + \mu^*(T-t) , \quad (\text{A.41})$$

$$Var^\mathbb{Q}(\zeta_T|\mathcal{F}_t) = \frac{\sigma_\zeta^2}{2\kappa_\zeta^*}(1 - e^{-2\kappa_\zeta^*(T-t)}) , \quad (\text{A.42})$$

$$Var^\mathbb{Q}(\gamma_T|\mathcal{F}_t) = \frac{\sigma_\gamma^2}{2\kappa_\gamma^*}(1 - e^{-2\kappa_\gamma^*(T-t)}) , \quad (\text{A.43})$$

$$Var^\mathbb{Q}(\eta_T|\mathcal{F}_t) = \sigma_\eta^2(T-t) , \quad (\text{A.44})$$

$$Cov^{\mathbb{Q}}(\zeta_T, \eta_T | \mathcal{F}_t) = \frac{\rho_{\zeta\eta} \sigma_{\zeta} \sigma_{\eta}}{\kappa_{\zeta}^*} (1 - e^{-\kappa_{\zeta}^*(T-t)}) , \quad (\text{A.45})$$

$$Cov^{\mathbb{Q}}(\gamma_T, \eta_T | \mathcal{F}_t) = \frac{\rho_{\gamma\eta} \sigma_{\gamma} \sigma_{\eta}}{\kappa_{\gamma}^*} (1 - e^{-\kappa_{\gamma}^*(T-t)}) , \quad (\text{A.46})$$

$$Cov^{\mathbb{Q}}(\zeta_T, \gamma_T | \mathcal{F}_t) = \frac{\rho_{\zeta\gamma} \sigma_{\zeta} \sigma_{\gamma}}{(\kappa_{\zeta}^* + \kappa_{\gamma}^*)(1 - e^{-(\kappa_{\zeta}^* + \kappa_{\gamma}^*)(T-t)})} , \quad (\text{A.47})$$

A equação $E^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta_T + \eta_T} | \mathcal{F}_t]$ pode ser escrita como:

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta_T + \eta_T} | \mathcal{F}_t] = E^{\mathbb{Q}}[\zeta_T + \eta_T | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} Var^{\mathbb{Q}}[\zeta_T + \eta_T | \mathcal{F}_t] . \quad (\text{A.48})$$

Note que os fatores estocásticos ζ_T , γ_T e η_T são independentes de \mathcal{F}_t , de modo que a esperança condicional é a mesma que a incondicional. Dessa forma, introduzindo as equações A.39, A.40, A.41, A.42, A.43, A.44, A.45, A.46 e A.47 na equação A.48, a expressão para o preço futuro, considerando um PRMVT, é dado por:

$$\ln F_{t,T} = \zeta_t e^{-\kappa_{\zeta}^*(T-t)} + \gamma_t e^{-\kappa_{\gamma}^*(T-t)} + \eta_t + D(T-t) , \quad (\text{A.49})$$

onde

$$\begin{aligned} D(T-t) = & \frac{-\alpha_{\zeta}}{\kappa_{\zeta}^*} (1 - e^{-\kappa_{\zeta}^*(T-t)}) + \mu^*(T-t) + \frac{\sigma_{\zeta}^2}{4\kappa_{\zeta}^*} (1 - e^{-2\kappa_{\zeta}^*(T-t)}) + \frac{1}{2} \sigma_{\eta}^2 (T-t) \\ & + \frac{\rho_{\zeta\eta} \sigma_{\zeta} \sigma_{\eta}}{\kappa_{\zeta}^*} (1 - e^{-\kappa_{\zeta}^*(T-t)}) + \frac{\rho_{\zeta\gamma} \sigma_{\zeta} \sigma_{\gamma}}{(\kappa_{\zeta}^* + \kappa_{\gamma}^*)} (1 - e^{-\kappa_{\zeta}^*(T-t)}) \\ & + \frac{\rho_{\gamma\eta} \sigma_{\gamma} \sigma_{\eta}}{\kappa_{\gamma}^*} (1 - e^{-\kappa_{\gamma}^*(T-t)}) . \end{aligned}$$

APÊNDICE B – Implementação do filtro de Kalman: Forma Espaço-Estado

B.1 Caso geral

Considerando todos os modelos, modelos aninhados, este apêndice apresenta a forma espaço-estado para o caso geral, o modelo 6. Os demais podem ser obtidos aplicando restrições a este último.

Para a equação de medição, tem-se :

$$y_t = (\ln(F_{t,T_1}), \dots, \ln(F_{t,T_{36}}))^\top \quad (\text{B.1})$$

$$H_t = \begin{bmatrix} e^{-\kappa_\zeta^*(T_1-t)} & e^{-\kappa_\gamma^*(T_1-t)} \mathbf{1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\kappa_\zeta^*(T_{36}-t)} & e^{-\kappa_\gamma^*(T_{36}-t)} \mathbf{1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$d_t = \begin{bmatrix} D(T_1 - t) \\ \vdots \\ D(T_{36} - t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$\epsilon_t \sim NID(0, \mathbb{V})$ com

$$\epsilon_t = \begin{bmatrix} s_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & s_{36}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

A equação de transição, por sua vez, é dada por:

$$A_t = \begin{bmatrix} e^{-\kappa_\zeta \Delta t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{36} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$c_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$\nu_t \sim N(0, \mathbb{W})$ com

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_\zeta^2}{2\kappa_\zeta}(1 - e^{-2\kappa_\zeta \Delta t}) & \frac{\sigma_\zeta \sigma_\gamma \rho_{\zeta\gamma}}{(\kappa_\zeta + \kappa_\gamma)}(1 - e^{-(\kappa_\zeta + \kappa_\gamma) \Delta t}) & \frac{\sigma_\zeta \sigma_\eta \rho_{\zeta\eta}}{\kappa_\zeta}(1 - e^{-\kappa_\zeta \Delta t}) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\sigma_\zeta \sigma_\gamma \rho_{\zeta\gamma}}{\kappa_\zeta + \kappa_\gamma}(1 - e^{-(\kappa_\zeta + \kappa_\gamma) \Delta t}) & \frac{\sigma_\gamma^2}{2\kappa_\gamma}(1 - e^{-2\kappa_\gamma \Delta t}) & \frac{\sigma_\gamma \sigma_\eta \rho_{\gamma\eta}}{\kappa_\gamma}(1 - e^{-\kappa_\gamma \Delta t}) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\sigma_\zeta \sigma_\eta \rho_{\zeta\eta}}{\kappa_\zeta}(1 - e^{-\kappa_\zeta \Delta t}) & \frac{\sigma_\gamma \sigma_\eta \rho_{\gamma\eta}}{\kappa_\gamma}(1 - e^{-\kappa_\gamma \Delta t}) & \sigma_\eta^2 \Delta t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_{36}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$