



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto Politécnico

João Gabriel Souza Debossam

**Simulação numérica do escoamento trifásico em reservatórios de  
petróleo**

Nova Friburgo

2022

João Gabriel Souza Debossam

**Simulação numérica do escoamento trifásico em reservatórios de petróleo**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Helio Pedro Amaral Souto

Orientador: Prof. Dr. Grazione de Souza

Nova Friburgo

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC/E

D287 Debossam, João Gabriel Souza.  
Simulação numérica do escoamento trifásico em reservatórios de petróleo / João Gabriel Souza Debossam. – 2022.  
131 f. : il.

Orientadores: Hélio Pedro Amaral Souto e Grazione de Souza.  
Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

1. Escoamento em meios porosos – Métodos de simulação - Teses. 2. Engenharia de reservatório de óleo – Métodos de simulação - Teses. 3. Escoamento trifásico - Teses. 4. Engenharia de petróleo – Teses. 5. Dinâmica dos fluidos – Teses. I. Souto, Hélio Pedro Amaral. II. Souza, Grazione de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico. IV. Título.

CDU 532.546:519.872

Bibliotecária Cleide Sancho CRB7/5843

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

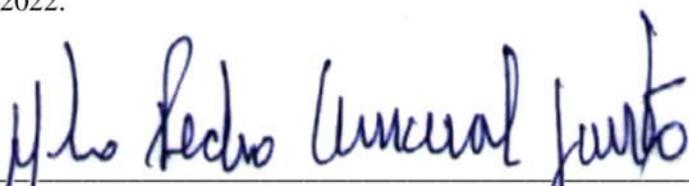
João Gabriel Souza Debossam

**Simulação numérica do escoamento trifásico em reservatórios de petróleo**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

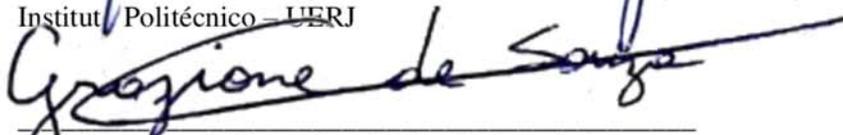
Aprovada em 20 de julho de 2022.

Banca examinadora:



---

Prof. Helio Pedro Amaral Souto, Docteur de L'INP (Orientador)  
Instituto Politécnico – UERJ



---

Prof. Grazione de Souza Boy, D.Sc. (Orientador)  
Instituto Politécnico – UERJ



---

Prof. Adolfo Puime Pires, D.Sc.  
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF



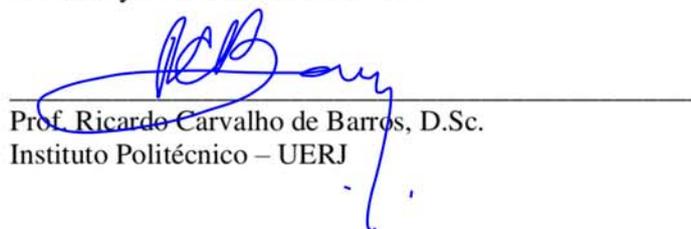
---

Prof. Eduardo Cardoso de Abreu, D.Sc.  
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP



---

Prof. Luis Felipe Feres Pereira, Ph.D.  
University of Texas at Dallas - UTD



---

Prof. Ricardo Carvalho de Barros, D.Sc.  
Instituto Politécnico – UERJ

Nova Friburgo

2022

## AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores Helio Pedro Amaral Souto e Grazione de Souza por serem exemplos de ética e dedicação aos alunos. Sou muito grato também por confiarem em mim ao longo de toda pós-graduação e pelo apoio constante. Mesmo com a impossibilidade das reuniões e conversas presenciais nunca deixaram de se fazer presentes, fornecendo valiosos conselhos e sugestões para o desenvolvimento do trabalho.

Ao professor Adolfo Puime Pires por ceder gentilmente dados relativos à verificação do simulador, o que sem dúvidas trouxe um grande valor para o trabalho.

Aos meus pais e ao meu irmão por, nesses tempos repletos de incertezas, me mostrarem o real significado de família, por serem a minha base e que sem o apoio deles nada disso seria possível.

À Priscila por todo amor, companheirismo e apoio incondicional durante todo o curso, fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Aos amigos e colegas que me encorajaram a seguir sempre em frente, por mais árdua que fosse a caminhada. Muito obrigado.

À Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) e em especial ao Instituto Politécnico (IPRJ), incluindo aqui os diversos docentes e colaboradores, por fornecerem uma educação de qualidade, estando presente na minha vida por mais de 10 anos, me formando como profissional e contribuindo na minha formação como cidadão.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro nos anos iniciais do curso. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço também à FAPERJ pelo apoio financeiro nos anos finais do curso.

A ciência jamais responderá todas as perguntas pelo simples motivo de que jamais  
saberemos todas as perguntas que podem ser feitas.

*Marcelo Gleiser*

## RESUMO

DEBOSSAM, J. G. S. *Simulação numérica do escoamento trifásico em reservatórios de petróleo*. 2022. 131 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2022.

O modelo físico-matemático para escoamento trifásico em meios porosos é composto por ao menos três equações diferenciais parciais, podendo conter heterogeneidades e não linearidades que dificultam a sua solução. Por conta das variadas formas de acoplar as equações e de lidar com as não linearidades, é possível obter a solução para esse modelo de diferentes formas. Neste trabalho, as formas mais tradicionais (IMPES e totalmente implícito) são revisadas a partir da discretização do modelo com o Método dos Volumes Finitos. Uma terceira estratégia de solução é avaliada, chamada aqui de método Sequencial Picard-Newton, em duas variações: simultânea e segregada. Esta estratégia representa a principal contribuição deste trabalho. O modelo analisado consiste no escoamento isotérmico de três fluidos imiscíveis, óleo, água e gás, considerando suas respectivas compressibilidades, no interior de um meio poroso também compressível. Considerou-se como exemplos de aplicação o escoamento trifásico em diferentes cenários, incluindo a presença de poços de produção e injeção alternada de água e gás (WAG), efeitos de capilaridade e também efeitos gravitacionais. O método Sequencial Picard-Newton, nas suas duas variações, se mostrou capaz de fornecer resultados similares aos apresentados pelos métodos tradicionais e, para os experimentos numéricos apresentados, com significativa redução no tempo de simulação.

Palavras-chave: Simulação de Reservatórios. Meios Porosos. Escoamento Trifásico. Método dos Volumes Finitos. WAG.

## ABSTRACT

DEBOSSAM, J. G. S. *Three-phase numerical simulation of petroleum reservoirs*. 2022. 131 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2022.

The mathematical model for three-phase flow in porous media is described by at least three partial differential equations. These equations are often non-linear and with the presence of heterogeneous coefficients, which makes it very hard to obtain an analytical solution. The nonlinearities and the coupling between the equations can be treated in different forms, raising different ways for solving the model. In this work, the traditional solutions are reviewed, including IMPES and fully implicit, together with the Finite Volume Method for the model discretization. A third option for the solution is examined, here called Sequential Picard-Newton method, in two versions: simultaneous and detached. This new strategy represents this work main contribution. The analyzed model consists in the isothermal and immiscible flow of oil, water and gas, taking into account the three fluids compressibilities and also considering the porous media to be compressible. As application examples, three-phase flow in porous media is considered under different scenarios, including the presence of production wells and the alternate injection of water and gas (WAG), capillary effects and also gravitational effects. Sequential Picard-Newton method, in both versions, was capable of producing similar results as shown by the traditional methods and, for the numerical experiments presented here, with a significant reduction in simulation time.

Keywords: Reservoir Simulation. Porous Media. Three-phase flow. Finite Volume Method. WAG.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação da malha computacional na direção do eixo $x$ . . . . .	42
Figura 2 - Representação da malha computacional em três dimensões . . . . .	43
Figura 3 - Nomenclatura indicando os vizinhos do volume finito $P$ . . . . .	45
Figura 4 - Nomenclatura indicando as interfaces do volume finito $P$ . . . . .	46
Figura 5 - Perfis de saturações: primeiro caso e uma função de permeabilidade relativa côncava . . . . .	90
Figura 6 - Perfis de saturações: segundo caso e uma função de permeabilidade relativa côncava . . . . .	91
Figura 7 - Perfis de saturações: terceiro caso e uma função de permeabilidade relativa côncava . . . . .	94
Figura 8 - Perfis de saturações para o escoamento no meio homogêneo . . . . .	95
Figura 9 - Campo de permeabilidade do reservatório heterogêneo . . . . .	97
Figura 10 - Perfis de saturações para o escoamento no meio heterogêneo . . . . .	99
Figura 11 - Perfis de saturações para o escoamento no meio homogêneo e a técnica WAG . . . . .	101
Figura 12 - Permeabilidade do reservatório heterogêneo . . . . .	102
Figura 13 - Perfis de saturações para o escoamento no meio heterogêneo e a técnica WAG . . . . .	103
Figura 14 - Permeabilidade do reservatório SPE 10 . . . . .	105
Figura 15 - Perfis de saturações para o SPE 10 e a técnica WAG . . . . .	106
Figura 16 - Perfis de saturações para o SPE 10, a técnica WAG e o poço injetor deslocado . . . . .	107
Figura 17 - Perfis de saturações para o SPE 10, a técnica WAG e com efeitos da pressão capilar . . . . .	110
Figura 18 - Perfis de saturações com a técnica WAG e os efeitos gravitacionais . . .	112

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Constantes para o cálculo do fator de compressibilidade . . . . .	24
Tabela 2 - Propriedades dos fluidos . . . . .	93
Tabela 3 - Propriedades do reservatório . . . . .	93
Tabela 4 - Tempos de execução: escoamento homogêneo e $n_x = 80$ . . . . .	96
Tabela 5 - Tempos de execução: escoamento homogêneo e $n_x = 160$ . . . . .	96
Tabela 6 - Tempos de execução: escoamento homogêneo e $n_x = 320$ . . . . .	97
Tabela 7 - Tempos de execução: escoamento heterogêneo . . . . .	98
Tabela 8 - Tempos de execução: meio homogêneo e técnica WAG . . . . .	102
Tabela 9 - Tempos de execução: meio heterogêneo e técnica WAG . . . . .	104
Tabela 10 - Tempos de execução: SPE 10 e técnica WAG . . . . .	105
Tabela 11 - Tempos de execução: SPE 10, técnica WAG e poço injetor deslocado .	108
Tabela 12 - Tempos de execução: SPE 10, técnica WAG e efeitos da pressão capilar	109
Tabela 13 - Tempos de execução: técnica WAG e efeitos gravitacionais . . . . .	111

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b>	11
1	<b>PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS</b>	20
1.1	Fator volume formação	20
1.2	Viscosidade	24
1.3	Porosidade	27
1.4	Permeabilidade	28
1.5	Permeabilidade relativa	28
1.6	Pressão capilar	32
2	<b>MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO</b>	35
2.1	Conservação da massa	35
2.2	Lei de Darcy	36
2.3	Equações governantes para o escoamento trifásico	37
3	<b>DISCRETIZAÇÃO DO MODELO TRIFÁSICO</b>	41
3.1	Método dos Volumes Finitos aplicado ao modelo trifásico	42
3.1.1	<u>Discretização espacial</u>	44
3.1.2	<u>Discretização temporal</u>	48
3.2	Acoplamento poço-reservatório	50
4	<b>LINEARIZAÇÃO E SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES</b>	55
4.1	Avaliação das transmissibilidades nas interfaces dos volumes finitos	56
4.2	Expansões dos termos de acúmulo	58
4.3	Linearização	61
4.4	Passo de tempo variável	62
4.5	Métodos de solução de sistemas de equações lineares	63
5	<b>MÉTODOS DE SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O MODELO TRIFÁSICO</b>	68
5.1	Método totalmente implícito	69
5.1.1	<u>Método totalmente implícito: acoplamento poço-reservatório</u>	74
5.2	<b>IMPES</b>	79
5.2.1	<u>IMPES: acoplamento poço-reservatório</u>	81
5.3	Método sequencial Picard-Newton	83
5.3.1	<u>Simultâneo</u>	83
5.3.2	<u>Segregado</u>	85
5.3.3	<u>Método sequencial Picard-Newton: acoplamento poço reservatório</u>	86
6	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	88
6.1	Verificação numérica	88
6.2	Injeção na fronteira do reservatório	92

6.2.1	<u>Reservatório homogêneo</u> . . . . .	92
6.2.2	<u>Reservatório heterogêneo</u> . . . . .	97
6.3	<b><i>Water Alternating Gas</i></b> em um arranjo <b><i>Five-Spot</i></b> . . . . .	100
6.3.1	<u>Reservatório homogêneo</u> . . . . .	100
6.3.2	<u>Reservatório heterogêneo</u> . . . . .	102
6.3.3	<u>O projeto SPE 10</u> . . . . .	104
6.3.4	<u>Efeitos da pressão capilar</u> . . . . .	108
6.3.5	<u>Efeitos gravitacionais</u> . . . . .	111
	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b> . . . . .	114
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	120

## INTRODUÇÃO

Modelos matemáticos são amplamente utilizados para aprimorar o entendimento e prever os mais diversos fenômenos (CHEN; EWING, 2000), de forma que a solução das equações que compõe esses modelos possibilita, de certa forma, a simulação da realidade (ALLAIRE, 2007). Os modelos matemáticos são aplicados em diversas áreas do conhecimento e são ferramentas importantes para a compreensão de fenômenos físicos, químicos, biológicos, sociais, econômicos, entre outros (CALDER et al., 2018). Para a solução das equações presentes nesses modelos é comum (e muitas vezes imprescindível) o uso de métodos numéricos, que naturalmente envolvem uma grande quantidade de operações matemáticas, fazendo com que os computadores sejam uma ferramenta muito importante na obtenção destas soluções (CHAPRA; CANALE, 2010), o que dá origem à chamada modelagem computacional.

Dentre as diferentes aplicações da modelagem computacional, uma em particular, é o estudo de meios porosos que, por si só, é uma área muito abrangente com aplicações em diversos ramos da ciência e da engenharia (BEAR, 1972), incluindo o escoamento em aquíferos (ISLAM; HYE; MAMUN, 2017; GASIOROWSKI; KOLERSKI, 2020), sequestro de carbono (KOLDITZ et al., 2012; KRZYSZTOFORSKI; JENNY; HENCZKA, 2018), reatores nucleares (VADI; SEPANLOO, 2016; CHAVEZ; IMKE; SANCHEZ-ESPINOZA, 2018), refrigeração de superfícies (HETSRONI; GUREVICH; ROZENBLIT, 2006; HERMANN et al., 2020), sistemas biológicos (KHALED; VAFAI, 2003; KHANAFER et al., 2008; WESSAPAN; RATTANADECHO, 2016) e, também, a engenharia de reservatórios (AVANSI; RIOS; SCHIOZER, 2019), incluindo a produção de óleo e gás. Essa última área é o foco deste trabalho, particularmente no contexto do escoamento trifásico em reservatórios.

### Simulação de reservatórios

De fato, os escoamentos multifásicos estão presentes em diversos fenômenos que ocorrem em meios porosos (PINDER; GRAY, 2008), o que inclui naturalmente a produção de hidrocarbonetos como o petróleo e o gás natural. Diferentemente do imaginário popular, o petróleo não se encontra em rios ou lagos subterrâneos e, sim, como o nome indica, no interior de rochas porosas onde a fase óleo é, por muitas vezes, acompanhada da fase água e da fase gás (PEACEMAN, 1977; CRAFT; HAWKINS, 1991), levando ao surgimento de escoamentos trifásicos.

As particularidades de cada fase e a interação entre elas, no interior do meio poroso, alteram significativamente a dinâmica do escoamento, de forma que a presença de mais

de uma fase torna todo o processo de predição do comportamento do escoamento mais complexo (WU, 2016). Posto isso, comumente, a modelagem computacional aplicada a problemas envolvendo a produção de hidrocarbonetos é denominada de *simulação de reservatórios* (LIE, 2019). Trata-se, atualmente, de uma ferramenta imprescindível na indústria do petróleo e gás (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019), que visa a prever com acurácia a performance dos reservatórios sob diferentes cenários de produção (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

Essa capacidade de prever e aprimorar a produção de hidrocarbonetos é cada vez mais importante do ponto de vista estratégico, tendo em mente a grande relevância do petróleo no mercado internacional e na composição da matriz energética mundial. A demanda por energia cresce a cada ano, com previsões de aumentar em 50% nos próximos 10 anos e, atualmente, o petróleo e o gás compõem aproximadamente metade da matriz energética global (HAIDER, 2020). O interesse por fontes de energia renováveis, de fato, pode alterar a composição da matriz energética, o que não significa que a produção de óleo e gás se tornará obsoleta, mas sim que a oferta de energia será expandida pela presença das fontes renováveis, ou seja, dificilmente ocorrerá uma substituição total do uso de combustíveis fósseis por fontes renováveis, mas sim uma complementação (YORK; BELL, 2019). Além da importância energética do petróleo, tem-se também os compostos advindos da petroquímica como os plásticos, as tintas e os solventes (THOMAS, 2001). Posto isso, o uso de simuladores fornece às produtoras de óleo e gás uma alternativa capaz de aumentar sua eficiência produtiva (HASSANI; SILVA; AL KAABI, 2017), principalmente ao simular a produção sob diferentes circunstâncias, considerando a existência de diversas técnicas destinadas à extração de petróleo.

## **Técnicas de recuperação**

As formas de extração dos hidrocarbonetos dos reservatórios são divididas em três categorias: recuperação primária, secundária e terciária. A recuperação primária é de certa forma um processo natural, onde os hidrocarbonetos são produzidos a partir da própria energia mecânica acumulada (na forma de pressão) no interior do reservatório (THOMAS, 2001). Com a produção contínua de fluidos, a pressão cai até que o excesso de pressão deixa de existir e a produção, conseqüentemente, é extinta. A recuperação primária produz, em média, de 15 a 30% dos hidrocarbonetos presentes no reservatório (CHEN, 2007), o que é um percentual muito baixo, frente aos altos custos de produção.

Já a recuperação secundária tem por objetivo aumentar a quantidade de óleo e gás produzido, através de métodos chamados convencionais, que visam à manutenção da pressão no reservatório (AHMED, 2001). Esses métodos consistem em injeção de água ou gás que, além de fazer com que a pressão no reservatório mantenha-se alta o suficiente,

garante uma vazão consistente nos poços produtores. A recuperação secundária também contribui para o aumento da produção ao “varrer” o óleo, deslocando-o dos poros para esses poços (CHEN, 2007).

Qualquer outra forma de estímulo à recuperação, diferente das já citadas, é denominada de recuperação terciária ou avançada (AHMED, 2001). Estes métodos incluem os métodos térmicos, como a injeção de vapor, a combustão *in situ* e o uso de micro-ondas (ESKANDARI; JALALALHOSSEINI; MORTEZAZADEH, 2015); métodos miscíveis onde se tem a injeção de fluidos que se misturam aos hidrocarbonetos no intuito de alterar as suas propriedades (THOMAS, 2001); ou, ainda, os métodos químicos como a injeção de polímeros ou espumas (SUNMONU; ONYEKONWU, 2013). Esse tipo de recuperação, chamado por vezes de *Enhanced Oil Recovery* (EOR), envolve processos que são custosos quando comparados aos das recuperações primária e secundária, de forma que o seu uso é mais sensível às flutuações econômicas (EZEKWE, 2010) e os simuladores numéricos são peças chave no planejamento do seu uso (LIE, 2019).

Um método de recuperação avançada que foi implementado com relativo sucesso é o *Water Alternating Gas* (WAG), onde ocorre a injeção alternada, no mesmo poço, de gás e água (AZFALI; REZAEI; ZENDEHBOUDI, 2018; BELAZREG; MAHMOOD, 2020). Apesar de ser uma injeção de água e gás, associada à recuperação secundária, o WAG é considerado uma técnica de recuperação avançada e é utilizado com o intuito de reduzir o custo da injeção de gás (EZEKWE, 2010; AZFALI et al., 2020) e controlar a mobilidade do fluido de injeção, evitando a produção precoce, principalmente, do gás injetado (LIE, 2019). O WAG pode, ainda, tirar vantagem das diferentes densidades da água e do gás, aumentando a varredura do óleo (ABDULLAH; HASAN, 2021).

Somado a esses diferentes mecanismos, também afetam a produção as heterogeneidades das formações rochosas, as complexas interações entre os fluidos envolvidos na produção de hidrocarbonetos e, também, entre os fluidos e o próprio meio poroso (formação rochosa). Dessa forma, existe uma vasta gama de estratégias que podem ser empregadas na otimização da produção. Pode-se, por exemplo, variar o tipo de fluido injetado, fazer uso de um método térmico, definir a melhor localização para a rede de poços injetores e produtores, entre outras maneiras de se construir um projeto eficiente de produção de hidrocarbonetos. Encontrar a melhor forma de extrair o maior volume de óleo e gás possível pode ser crucial na determinação da viabilidade econômica de um reservatório. Os altos custos envolvidos na indústria do petróleo trazem à tona a importância de poder prever, com relativa acurácia, o escoamento no interior do reservatório, bem como a vazão nos poços produtores (LU; WHEELER, 2009). Nos dias de hoje, os simuladores numéricos assumem grande parte dessa responsabilidade, sendo capazes de reproduzir diversas situações, incluindo diferentes heterogeneidades e o escoamento de diversos fluidos e, portanto, auxiliam no gerenciamento de campos produtores de petróleo e gás natural (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019).

## Simuladores numéricos

Segundo Odeh (1969), a simulação de reservatórios surge concomitantemente à engenharia de reservatórios e, desde o princípio, possuiu o intuito de avaliar e otimizar a recuperação de óleo e gás, fazendo isso de forma rápida e auxiliando nas tomadas de decisão (COATS, 1969). No entanto, conforme destacado em Coats (1982), nos primórdios os métodos eram em sua maioria analíticos, o que implicava serem extremamente simplificados, de forma que o termo simulação tornou-se comum apenas na década de 1960, com o surgimento de programas de computador e de uma capacidade computacional suficiente para simular problemas mais complexos.

Com o passar dos anos os simuladores evoluíram, em decorrência do maior conhecimento agregado aos modelos físicos aliado ao crescimento exponencial da capacidade dos computadores em termos de memória e velocidade de processamento e, também, da popularização destes, com as simulações deixando de serem exclusivas dos *mainframes* e podendo ser executadas também em computadores pessoais (BREITENBACH, 1991).

Em anos mais recentes, as simulações passaram a incorporar fenômenos mais complexos como os efeitos geomecânicos e térmicos (MUSTAFIZ; ISLAM, 2008), além do acoplamento com as técnicas da dinâmica dos fluidos computacional, ou *Computational Fluid Dynamics* (CFD) (HEMMINGSEN et al., 2019), entre outros fatores que resultam, geralmente, em tempos muito longos de simulação, mesmo nos computadores modernos. Logo, a busca por metodologias mais eficientes ainda é uma necessidade para essa indústria específica e continua a motivar diversas pesquisas na área (LU; BECKNER, 2011; WANG; HAJIBEYGI; TCHELEPI, 2016; LI et al., 2019).

No trabalho de Odeh (1982) pode-se encontrar um resumo dos passos que levam à construção de um simulador numérico de reservatórios de petróleo. Inicia-se o processo com a escolha de um modelo matemático adequado, que é composto invariavelmente por ao menos duas equações básicas, expressando o balanço de massa e da quantidade de movimento (Lei de Darcy). Elas são equações diferenciais parciais não-lineares e, em função das hipóteses assumidas, as não linearidades podem ou não serem consideradas em certas aplicações. Essa parte é crucial para que um bom simulador numérico seja elaborado, já que a solução numérica só fornecerá resultados condizentes com a realidade, se o modelo físico-matemático proposto for uma boa representação do fenômeno físico.

As equações desse modelo são, em seguida, discretizadas tradicionalmente via o método das diferenças finitas (AZIZ; SETTARI, 1979). No entanto, atualmente, também tem-se o uso corrente dos métodos dos elementos finitos (CHEN; HUAN; MA, 2006) e dos volumes finitos (JENNY; LEE; TCHELEPI, 2004), sendo que esse último foi o escolhido para ser utilizado no presente trabalho. Como as equações diferenciais parciais não são lineares, as equações discretizadas preservam essas não linearidades e, comumente, na etapa seguinte utiliza-se um procedimento de linearização dessas equações e, também,

conforme descrito em [Ertekin, Abou-Kassem e King \(2001\)](#), faz-se uso de uma técnica de acoplamento poço-reservatório visando a incorporar a representação dos poços no modelo numérico. A última etapa, ainda segundo [Odeh \(1982\)](#), é a solução do(s) sistema(s) de equações linearizadas obtendo-se, assim, a distribuição temporal e espacial das variáveis de interesse.

## Diferentes abordagens

Os simuladores podem ser classificados de forma genérica em três tipos: *black oil*, composicional e térmico ([ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006](#)). Modelos térmicos, como o nome indica, consideram a variação da temperatura do meio poroso e dos fluidos contidos nele ([HERINGER et al., 2019](#)). Simuladores composicionais são usados quando a variação da composição em uma ou mais fases é relevante para o escoamento ([DEBOSSAM et al., 2019](#)). Já o modelo *black oil*, também chamado de tipo Beta ou volumétrico, é o mais tradicional e considera que as três fases (gás, óleo e água) são compostas por um único componente, mesmo que sabidamente o óleo e o gás sejam compostos por uma mistura de hidrocarbonetos. O modelo considera, ainda, que em condições de reservatório a fase gás pode estar dissolvida na fase óleo ([LIE, 2019](#)). Outras classificações podem ser feitas, como em termos das dimensões espaciais, do número de fases e do sistema de coordenadas ([CHEN, 2007](#)).

O modelo *black oil* mais geral emprega três equações, uma para cada fase, formando um sistema de equações acopladas. A forma de lidar com esse sistema dá origem aos diferentes métodos de solução que podem ser aplicados ao escoamento trifásico, o que inclui as Soluções Simultâneas (SS), o método IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) e os Métodos Sequenciais ([AZIZ; SETTARI, 1979](#)).

A solução simultânea é a forma mais natural de se resolver o sistema ([CHEN, 2007](#)), onde as três equações são resolvidas de forma acoplada, ao mesmo tempo, em um sistema que engloba suas três incógnitas (variáveis dependentes). É um método caro do ponto de vista computacional e, conseqüentemente, a grande maioria das aplicações simultâneas optam por uma linearização totalmente implícita ([ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001](#)), dando origem ao chamado método totalmente implícito ou método de Newton, que é incondicionalmente estável, permitindo o uso de passos de tempo grandes o suficiente para compensarem o seu custo computacional ([MONTEAGUDO; FIROOZABADI, 2007](#)).

Nos primórdios da simulação numérica de reservatórios, a tecnologia da época tornava praticamente inviável o uso do método totalmente implícito, e a alternativa utilizada era o método IMPES ([RODRÍGUEZ; BONET-CUNHA, 1996](#)). Desenvolvido entre o fim dos anos 50 e início dos anos 60 ([STONE; GARDER, 1961](#)), para o escoamento bifásico e expandido no final dessa década para contemplar três fases escoando simultanea-

mente (BREITENBACH; THURNAU; VAN POOLEN, 1968), o método IMPES consiste em combinar as três equações representativas de cada fase, obtendo-se uma única equação para a pressão que é resolvida implicitamente e, em sequência, calculam-se explicitamente as saturações das fases fluidas (AZIZ; SETTARI, 1979). Devido à solução segregada entre as equações, cujas variáveis dependentes são a pressão e as saturações, e também devido ao uso de uma formulação explícita para a avaliação das saturações, o método demanda um esforço computacional por passo de tempo comparativamente menor que o das soluções simultâneas. Entretanto, em função da natureza explícita do método numérico para a determinação das saturações, sabe-se que ele será somente condicionalmente estável e que o uso de grandes passos de tempo podem gerar instabilidades numéricas, limitando o avanço da evolução da simulação no tempo (CHEN, 2007).

O método IMPES, apesar de suas limitações, ainda é muito usado na indústria do petróleo e gás e, na sua forma clássica, é muito eficiente para a obtenção da solução das equações que governam os escoamentos bifásicos incompressíveis ou ligeiramente compressíveis (CHEN; HUAN; MA, 2006). No entanto, para a sua aplicação em modelos trifásicos, algumas variações foram desenvolvidas para que o método fosse mais eficiente. Uma delas é o IMPES melhorado (*improved IMPES*), desenvolvido por Chen, Huan e Li (2004), onde para um determinado passo de tempo a equação para a determinação da pressão é resolvida apenas uma vez, enquanto que para o cálculo explícito das saturações o intervalo é subdividido em passos de tempo intermediários o que, segundo os autores, permite o uso de passos de tempo maiores sem comprometer a acurácia da solução, já que a pressão varia menos com o tempo quando comparada à saturação. Tem-se também o IMPES iterativo (CHEN, 2007), onde os coeficientes não lineares são linearizados com o uso de um processo iterativo, melhorando a estabilidade em relação à avaliação atrasada, em um passo de tempo, dos coeficientes das equações discretizadas na abordagem tradicional (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

O trabalho de Thomas e Thurnau (1983) introduziu o método implícito adaptativo na simulação de reservatórios, sendo que os autores buscaram reduzir o custo computacional do método totalmente implícito. Nesse método, nas células onde a variação da saturação é mais intensa, por exemplo nas regiões próximas aos poços, utiliza-se a formulação totalmente implícita, enquanto que nas regiões onde a variação da saturação é mais branda emprega-se o método IMPES. Com essa estratégia é possível desfrutar robustez do método totalmente implícito e reduzir o custo computacional com o uso do IMPES. Entretanto, como visto em Marcondes, Maliska e Zambaldi (2009), o critério de troca para o uso dos métodos IMPES e totalmente implícito impacta diretamente a convergência e a estabilidade numérica e, conseqüentemente, o tempo de simulação.

A classe de métodos sequenciais engloba diferentes abordagens segregadas de solução. O próprio método IMPES é tido como um método sequencial por alguns autores (PEACEMAN, 1977; JENNY; LEE; TCHELEPI, 2004), enquanto que Pacheco, Silva e Maliska

(2016) apresentam o método sequencial como uma variação iterativa do IMPES. No entanto, como visto em grande parte da literatura, um método sequencial, em geral, implica a solução segregada e implícita tanto para a pressão quanto para as saturações (AZIZ; SETTARI, 1979; RODRÍGUEZ; BONET-CUNHA, 1996; ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; LI; CHEN; HUAN, 2003). Como descrito por Watts (1986), o método sequencial pretende ser um intermediário entre os métodos IMPES e o totalmente implícito, sendo mais estável que o primeiro e apresentando menor custo computacional que o segundo. Contudo, devido à solução segregada, não há uma estratégia única para se resolverem as equações que fornecem a pressão e as saturações, de modo que se tem uma maior flexibilidade no que diz respeito à simulação e, também, à implementação (KOZLOVA et al., 2016).

Recentemente, o uso de métodos sequenciais foi renovado com muitos trabalhos utilizando uma abordagem sequencial totalmente implícita, introduzida por Jenny, Lee e Tchelepi (2006), em métodos multiescalas voltados para a resolução do escoamento bifásico e incompressível. Nesse método, o cálculo da pressão e da saturação são realizados implicitamente e, por ser um método multiescala, essa resolução é feita mediante o uso de malhas sobrepostas (LEE; WOLFSTEINER; TCHELEPI, 2008). Inicialmente limitado a escoamentos bifásicos incompressíveis, esse método também já foi utilizado no estudo de problemas abordando escoamentos trifásicos e compressíveis (KOZLOVA et al., 2016), na resolução de escoamentos composicionais (LEE et al., 2021), no tratamento de acoplamentos poço-reservatório complexos (LI et al., 2019) e, também, já foram estudadas formas de acelerar a convergência desse método em particular (JIANG; TCHELEPI, 2021).

A tese de Freitas (2017) trouxe uma nova alternativa para a implementação de um método sequencial. Nesse trabalho, desenvolvido para o estudo de escoamentos bifásicos, a pressão da fase não-molhante é calculada como no método IMPES, sendo linearizada por uma iteração de Picard, enquanto que a saturação é calculada com uma linearização totalmente implícita aplicada à equação que fornece a saturação da fase molhante, ou seja, utilizando o método de Newton, dando origem a um método híbrido (FREITAS; SOUZA; SOUTO, 2020), aqui chamado de método sequencial Picard-Newton.

Parte da motivação para o presente trabalho é, portanto, a continuação do estudo iniciado por Freitas (2017), estendendo a metodologia estudada pelo autor ao caso do escoamento trifásico em um reservatório de petróleo. Como dito anteriormente, a metodologia denominada Picard-Newton calcula a pressão via o método IMPES, linearizado com uma iteração de Picard, e em se tratando das saturações, fases água e gás, elas agora são determinadas a partir de uma linearização totalmente implícita, em uma aproximação do método de Newton. Diferentemente do método empregado para o escoamento bifásico, que calcula implicitamente apenas uma saturação, no escoamento trifásico deve-se encontrar os valores de duas saturações, dando margem para que o cálculo dessas saturações seja feito de forma simultânea, em um único sistema de equações comportando duas incógnitas,

ou segregado, com dois sistemas resolvidos separadamente. Além disso, uma motivação a mais é a possibilidade de se encontrar uma forma de melhorar a estabilidade do método IMPES, para problemas de escoamentos trifásicos, sem a necessidade de se resolver um sistema simultâneo de grande porte, como no caso do método totalmente implícito.

## Objetivos

O objetivo principal desta tese é o desenvolvimento de um código numérico capaz de simular o escoamento trifásico em reservatórios de petróleo. Para tanto, foi implementada a metodologia sequencial Picard-Newton. O desenvolvimento do simulador tomou por base o programa desenvolvido por Freitas (2017), específico para a simulação de escoamentos bifásicos, deixando claro que a extensão contemplando o escoamento trifásico foi realizada exclusivamente pelo autor desta tese. Os resultados também contemplam um estudo comparativo entre o desempenho do método sequencial Picard-Newton, utilizando as duas variações aqui propostas, com os métodos clássicos IMPES e totalmente implícito. Essa comparação foi feita mediante a realização de testes considerando diferentes cenários para o escoamento simultâneo das três fases: óleo, água e gás.

## Organização do Trabalho

No Capítulo 1, faz-se uma breve revisão das propriedades de rocha e fluido que são relevantes para o escoamento trifásico, incluindo as permeabilidades relativas e as pressões capilares, propriedades exclusivas do escoamento multifásico. Essas propriedades são fundamentais e necessárias para o entendimento do modelo físico-matemático descrito no Capítulo 2, onde a equação da continuidade (conservação da massa) e a Lei de Darcy (conservação do *momentum*), adaptada para o caso multifásico, são combinadas de forma a se obterem as três equações diferenciais parciais a serem resolvidas e cujas variáveis dependentes são a pressão do óleo, a saturação da água e a saturação do gás.

O Capítulo 3 traz a metodologia numérica empregada na obtenção da solução das equações diferenciais parciais que governam o escoamento multifásico. Devido às suas propriedades conservativas, escolheu-se o Método dos Volumes Finitos para a discretização das equações diferenciais parciais e a consequente determinação das equações algébricas, bem como nele ainda são apresentadas as aproximações utilizadas nesse processo. Nesse capítulo, também se encontra uma breve discussão sobre o acoplamento poço-reservatório, fornecendo maiores detalhes sobre as expressões que relacionam a pressão no poço, no reservatório e a vazão no poço produtor ou injetor.

Devido à natureza não linear do modelo físico matemático, as equações discretizadas

pelo método dos volumes finitos também não são lineares e, antes que se possa de fato resolver essas equações, utiliza-se algum método/técnica de linearização. Portanto, o Capítulo 4 apresenta uma discussão a respeito desse assunto, levando-se em consideração os prós e contras das estratégias de linearização tradicionais. Ele também traz uma técnica conservativa que reduz os erros do balanço de massa associados à discretização das derivadas temporais, além de introduzir uma proposta para a redução do tempo de simulação mediante o uso de um passo de tempo variável. Ao final do capítulo, discorre-se sobre algumas das questões fundamentais associadas aos métodos de solução de sistemas lineares e preconditionadores.

O Capítulo 5 trata especificamente das diferentes estratégias empregadas para se resolverem as equações discretizadas do modelo trifásico, iniciando com uma discussão dos modelos mais tradicionais, IMPES e totalmente implícito. Em seguida, é introduzido o método sequencial Picard-Newton, nas suas duas variantes: sequencial e segregada. Esse método é explorado visando à melhoria da estabilidade numérica e à redução de custo computacional. Nesse capítulo, também é apresentada a formulação utilizada para o acoplamento poço reservatório, assim como as particularidades que surgem em decorrência das diferentes abordagens de solução adotadas.

Os resultados das simulações do escoamento trifásico são encontrados no Capítulo 6. Neste capítulo é avaliado a injeção simultânea de água e gás e também a injeção alternada (WAG), em diferentes cenários, como reservatório homogêneo, com regiões quase impermeáveis ou ainda em um reservatório com propriedades altamente heterogêneas. Um dos objetivos dessas simulações é apresentar uma comparação entre os métodos descritos no Capítulo 5, levando em conta o resultado gerado e o tempo total gasto para a conclusão das simulações.

Por fim as conclusões do estudo são expostas a partir dos resultados obtidos. Algumas perspectivas para estudos futuros também são apresentadas, incluindo possíveis melhorias e implementações de novas funcionalidades.

## 1 PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

As propriedades de fluido relevantes para a modelagem do escoamento trifásico são a massa específica ( $\rho_\alpha$ ), o Fator Volume Formação (FVF) ( $B_\alpha$ ) e a viscosidade ( $\mu_\alpha$ ) (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019), onde  $\alpha$  indica a fase, podendo ser  $o$ ,  $w$  ou  $g$  (óleo, água ou gás). Em um modelo isotérmico, essas três propriedades são consideradas função apenas da pressão. Para os modelos onde é considerado que a fase gás encontra-se dissolvida na fase óleo, a razão de solubilidade ( $R_s$ ) é uma propriedade necessária para a sua completa descrição e ela também é dependente da pressão (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

Já as propriedades de rocha de interesse são aquelas relacionadas ao armazenamento e ao transporte dos fluidos, ou seja, a porosidade e a permeabilidade respectivamente (CHEN, 2007). Caso o meio poroso seja tratado como sendo compressível, a porosidade é tratada como sendo uma função da pressão. Por outro lado, para escoamentos multifásicos, emprega-se ainda a permeabilidade relativa como uma medida adimensional da permeabilidade efetiva associada a uma determinada fase e a pressão capilar, que expressa a descontinuidade de pressão que ocorre na interface de separação das fases fluidas (FANCHI, 2018). Usualmente, tanto a permeabilidade relativa quanto a pressão capilar são consideradas como sendo funções da saturação de fluido (fração volumétrica).

### 1.1 Fator volume formação

O FVF representa a razão entre o volume  $V$ , ocupado por uma dada fase sob as condições do reservatório, e o volume  $V_{sc}$ , ocupado pela fase em condições padrão (*standard conditions* ou condições básicas) (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006), ou seja

$$B_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_{\alpha_{sc}}} = \frac{\rho_{\alpha_{sc}}}{\rho_\alpha}, \quad (1)$$

onde o subscrito  $sc$  representa as condições padrão.

Para fluidos ligeiramente compressíveis, casos da água e do óleo sem a presença de gás dissolvido, o FVF pode ser calculado por (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$B_\alpha = \frac{B_\alpha^o}{1 + c_\alpha (p - p^o)}, \quad (2)$$

onde  $c_\alpha$  é o coeficiente de compressibilidade do fluido e  $B_\alpha^o$  é o FVF conhecido à pressão  $p^o$ .

Para o cálculo da compressibilidade da água pode ser utilizada a correlação de Osif

(1988), que leva em consideração a presença de sólidos nela dissolvidos:

$$c_w = \frac{1}{7,033p + 541,5C - 537T + 403300},$$

onde  $p$  é a pressão em psi,  $C$  é a concentração de sal (NaCl) em g/L e  $T$  a temperatura em °F.

Em se tratando da avaliação do FVF do óleo, deve-se levar em conta a sua dependência com relação à quantidade de gás nele dissolvido, já que é esperado que a presença desse gás em solução aumente a sua compressibilidade (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). A solubilidade do gás em um óleo, a uma determinada temperatura e pressão, é definida como sendo a razão entre o volume de gás dissolvido em uma unidade de volume de óleo, ambos em condições padrão (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006), ou seja, a razão de solubilidade é uma medida de quanto gás será liberado quando o óleo se encontrar em condições padrão.

O gás dissolvido pode se desprender, ou seja, se tornar um gás livre, quando a pressão reinante é reduzida abaixo de uma dada pressão limite. Tal pressão é chamada de *pressão de ponto de bolha*, já que quando ela é atingida aparecem as primeiras bolhas de gás (CHEN; HUAN; MA, 2006). O óleo que se encontra em pressões abaixo da limite é chamado de saturado e para pressões acima dela tem-se o óleo subsaturado (LIE, 2019). Na região saturada, a razão de solubilidade varia com a pressão, enquanto que para pressões acima do ponto de bolha a razão de solubilidade é constante (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

Na literatura é possível encontrar diferentes correlações para estimar a razão de solubilidade e a pressão de ponto de bolha, como pode ser visto em Ahmed (2001). A grande maioria dessas correlações são da forma

$$R_s = f(p_b, d_g, d_{API}, T),$$

enquanto que para a pressão de ponto de bolha

$$p_b = f(R_s, d_g, d_{API}, T),$$

onde  $d_g$  é a densidade relativa do gás (para o ar ela é igual a 1),  $p$  a pressão em psi,  $T$  a temperatura em °F e  $\gamma_{API}$  é o grau API, definido como (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006)

$$\gamma_{API} = \frac{141,5}{d_o} - 131,5,$$

com  $d_o$  sendo a densidade relativa do óleo (para a água ela é igual a 1). Todas as densidades relativas aqui presentes são medidas em condições padrão.

Uma correlação muito tradicional para a razão de solubilidade é a desenvolvida por [Standing \(1947\)](#),

$$R_s = d_g \left[ \left( \frac{p}{18,2} + 1,4 \right) 10^x \right]^{1,2048}, \quad (3)$$

com

$$x = 0,0125\gamma_{API} - 0,00091T$$

onde a unidade de  $R_s$  é scf/STB (pé cúbico em condição padrão por barril em condição padrão).

Para a pressão de ponto de bolha, comumente é utilizada a mesma correlação da razão de solubilidade, apenas rearranjando-se os termos ([EZEKWE, 2010](#)). Então, a correlação dada pela Eq. (3) pode ser reescrita para a pressão como

$$p_b = 18,2 \left[ \left( \frac{R_s}{d_g} \right)^{0,83} 10^a - 1,4 \right],$$

com

$$a = 0,00091T - 0,0125d_{API}.$$

A partir da determinação da razão de solubilidade é possível se calcular o FVF do óleo. Neste caso, precisa-se de duas correlações: uma para a região saturada e outra para a subsaturada. Para um óleo saturado, isto é, a pressões inferiores à pressão de ponto de bolha, pode ser utilizada a correlação de [Petrosky e Farshad \(1998\)](#)

$$B_o = 1,0113 + 7,2046 \times 10^{-5} \left[ R_s^{0,3738} \left( \frac{d_g^{0,2914}}{d_o^{0,6265}} \right) + 0,24626T^{0,5371} \right]^{3,0936}, \quad (4)$$

para  $R_s$  em scf/STB e  $T$  em °F.

Por outro lado, para o óleo subsaturado, o FVF deve ser calculado pela Eq. (2), substituindo-se  $B_\alpha^o$  por  $B_{ob}$ , que é o FVF do óleo no ponto de bolha, calculado pela Eq. (4), e  $c_\alpha$  pelo coeficiente de compressibilidade do óleo  $c_o$  ([PETROSKY; FARSHAD, 1998](#)):

$$c_o = 1,705 \times 10^{-7} R_s^{0,69357} d_g^{0,1885} d_{API}^{0,3272} T^{0,6729} p^{-0,5906}.$$

Para o gás, que é um fluido com uma compressibilidade maior que a das fases líquidas, utiliza-se a lei dos gases reais ([CHEN, 2007](#))

$$\rho_g = \frac{pM}{ZRT},$$

onde  $M$  é a massa molecular,  $Z$  o fator de compressibilidade,  $R$  a constante universal dos gases e  $T$  a temperatura.

Por conseguinte, assumindo que para as condições padrão o fator de compressibilidade esteja próximo da unidade,  $Z_{sc} \approx 1$ , tem-se que (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006)

$$B_g = \frac{p_{sc}}{T_{sc}} \frac{ZT}{p}. \quad (5)$$

Da Eq. (5) nota-se que para a determinação do FVF do gás necessita-se avaliar, previamente, o seu fator de compressibilidade. Dentre as possibilidades conhecidas, optou-se por utilizar a Equação de Estado de Benedict–Webb–Rubin (BENEDICT; WEBB; RUBIN, 1940). Primeiramente, definem-se as propriedades pseudo-reduzidas, que representam a razão entre a pressão e temperatura do gás e a pressão e temperatura pseudo-críticas,

$$p_r = \frac{p}{p_{pc}},$$

e

$$T_r = \frac{T}{T_{pc}},$$

sabendo que a fase gás é composta, em geral, por uma mistura de componentes ( $C_{1-4}$ ,  $CO_2$  e  $N_2$ ) e a proporção desses componentes influencia diretamente nas propriedades pseudo-críticas do gás (AHMED, 2001).

Correlações para as propriedades pseudo-críticas em função da densidade relativa do gás podem ser usadas, principalmente quando não se conhece, com exatidão, a composição do gás. Uma delas é apresentada por Sutton (2007),

$$p_{pc} = 671,1 + 14\gamma_g - 34,3\gamma_g^2,$$

para a pressão, em psi, e

$$T_{pc} = 120,1 + 429\gamma_g - 62,9\gamma_g^2,$$

para temperatura em °R, onde  $\gamma_g$  é a densidade relativa do gás (para o ar ela é igual a 1).

Por fim, para o cálculo de  $Z$ , usa-se uma das correlações mais populares (KAREEM; IWALEWA; AL-MARHOUN, 2016) formulada por Dranchuk e Abou-Kassem (1975):

$$Z = 1 + C_1y + C_2y^2 - C_3y^5 + C_4,$$

onde

$$y = 0,27 \frac{p_r}{Z T_r},$$

$$C_1 = A_1 + \frac{A_2}{T_r} + \frac{A_3}{T_r^3} + \frac{A_4}{T_r^4} + \frac{A_5}{T_r^5},$$

$$C_2 = A_6 + \frac{A_7}{T_r} + \frac{A_8}{T_r^2},$$

$$C_3 = A_9 \left( \frac{A_7}{T_r} + \frac{A_8}{T_r^2} \right),$$

e

$$C_4 = A_{10} (1 + A_{11} y^2) \left( \frac{y^2}{T_r^3} \right) \exp(-A_{11} y^2).$$

As constantes  $A_{1-11}$  são apresentadas na Tabela 1. A correlação apresentada é classificada como sendo implícita e o fator de compressibilidade é obtido através do uso de um método iterativo apropriado (KAREEM; IWALEWA; AL-MARHOUN, 2016), como o de Newton-Raphson ou do ponto fixo.

Tabela 1 - Constantes para o cálculo do fator de compressibilidade

Coeficiente	Valor
$A_1$	0,3265
$A_2$	-1,070
$A_3$	-0,5339
$A_4$	0,01569
$A_5$	-0,05165
$A_6$	0,5475
$A_7$	-0,7361
$A_8$	0,1844
$A_9$	0,1056
$A_{10}$	0,6134
$A_{11}$	0,7210

Fonte: KUMAR, 2004

## 1.2 Viscosidade

A viscosidade fornece uma medida da resistência do fluido ao escoamento. Ou seja, para um mesmo gradiente de pressão, uma viscosidade maior do fluido implica uma velocidade de escoamento menor e, de maneira inversa, para uma viscosidade menor (ER-

TEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). O seu valor é afetado em função da pressão e da temperatura do fluido (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006). Entretanto, como neste trabalho considera-se unicamente o escoamento isotérmico, admite-se apenas a sua dependência com a pressão.

Os diferentes fluidos presentes no interior da rocha reservatório, em geral, possuem valores de viscosidade diferentes entre si, com o gás sendo o fluido menos viscoso, a água tendo uma viscosidade praticamente constante e o óleo podendo ser extremamente viscoso, no caso de óleos pesados, ou possuindo uma viscosidade próxima a da água, no caso de óleos leves (CHEN, 2007).

Na falta de dados experimentais ou tabelados para a viscosidade dos fluidos, o uso de correlações é uma alternativa para se estimarem essa propriedade. Para a viscosidade da água a correlação fornecida por McCain (1991) é aqui utilizada,

$$\mu_w = \mu_{w1} (0,9994 + c_{\mu w} p),$$

onde  $p$  é a pressão em psi, o coeficiente  $c_{\mu w}$  é dado por

$$c_{\mu w} = 4,0295 \times 10^{-5} + 3,1062 \times 10^{-9} p,$$

e  $\mu_{w1}$  é a viscosidade da água na temperatura do reservatório, porém, sob uma pressão de 1 atmosfera. Ela é calculada aqui em função da temperatura e da salinidade

$$\mu_{w1} = aT^{-b},$$

onde

$$a = 109,574 - 8,40564C + 0,313314C^2 + 8,72213 \times 10^{-3}C^3,$$

e

$$b = 1,12166 - 2,63951 \times 10^{-2}C + 6,79461 \times 10^{-4}C^2 + 5,47119 \times 10^{-5}C^3 - 1,55586 \times 10^{-6}C^4,$$

com  $\mu_w$  em cp,  $p$  em psi,  $C$  representa a salinidade percentual e  $T$  em °F.

Em contrapartida, quando da avaliação da viscosidade do óleo utilizando correlações, ela será obtida em um procedimento que envolve duas etapas para um óleo saturado e três etapas para o óleo subsaturado (AHMED, 2001). Empregando as correlações desenvolvidas por Petrosky e Farshad (1995), inicia-se com o cálculo da viscosidade do óleo morto (em cp), isto é, sem nenhum gás dissolvido,

$$\mu_{od} = 2,3511 \times 10^7 T^{-2,0255} [\log(d_{API})]^X,$$

onde

$$X = 4,59388 \log(T) - 22,82792,$$

com  $T$  medido em °F.

Em seguida, no segundo passo, é calculada a viscosidade do óleo saturado,  $\mu_{ob}$ ,

$$\mu_{ob} = a\mu_{od}^b,$$

para

$$a = 0,1651 + 0,6165 \times 10^{(-6,0866 \times 10^{-4} R_s)}$$

e

$$b = 0,5131 + 0,5109 \times 10^{(-1,1830 \times 10^{-1} R_s)},$$

sendo que  $R_s$  é medido em scf/STB.

Caso o óleo encontre-se na região subsaturada ( $p > p_b$ ), passa-se à etapa final do cálculo da viscosidade do óleo,  $\mu_o$ , ou seja,

$$\mu_o = \mu_{ob} [1 + c_\mu (p - p_b)],$$

onde  $c_\mu$ , por vezes chamado de coeficiente de compressibilidade viscosa do óleo (CHEN; HUAN; MA, 2006), é dado por

$$c_\mu = \left( \frac{1,3449 \times 10^{-3}}{\mu_{ob}} \right) \times 10^A,$$

sendo que

$$A = -1,0146 + 1,3322 \log(\mu_{ob}) - 0,4876 [\log(\mu_{ob})]^2 - 1,15036 [\log(\mu_{ob})]^3.$$

Por fim, em se tratando da viscosidade do gás, ela também pode ser avaliada mediante o uso de uma das várias correlações disponíveis na literatura. Segundo Ezekwe (2010) é recomendado o emprego da correlação desenvolvida por Lee, Gonzalez e Eakin (1966), que determina o seu valor a partir do conhecimento da temperatura, da densidade e da massa molar do gás,

$$\mu_g = 10^{-4} K \exp(X \rho_g^Y),$$

onde

$$K = \frac{(9,379 + 0,01607M_g) T^{1,5}}{209,2 + 19,26M_g + T},$$

$$X = 3,448 + \left(\frac{986,4}{T}\right) + 0,01009M_g$$

e

$$Y = 2,447 - 0,2224X,$$

onde  $\rho_g$  é medido em  $\text{g/cm}^3$ ,  $M_g$  em  $\text{g/mol}$  (equivalente a  $\text{lbm/lbmol}$ ) e  $T$  em  $^{\circ}\text{R}$ .

### 1.3 Porosidade

Os fluidos contidos no reservatório se encontram nos poros e a porosidade,  $\phi$ , é a propriedade que mensura o quanto de fluido a rocha é capaz de conter (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Em termos matemáticos, a porosidade é a razão entre o volume poroso ocupado pelos fluidos (volume de vazios),  $V_v$ , e o volume total considerando a soma do volume de vazios e o ocupado pela rocha,  $V_t$  (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006),

$$\phi = \frac{V_v}{V_t}$$

No entanto, nem todos os poros da rocha estão interconectados entre si, de forma que o fluido contido neles não é capaz de escoar. Define-se, então, a *porosidade efetiva* levando em consideração apenas o volume dos poros interconectados e capazes de permitir a passagem dos fluidos por entre eles (CHEN, 2007). No presente trabalho, considera-se somente a porosidade efetiva.

Considerando a rocha ligeiramente compressível, o volume poroso pode variar com a pressão do fluido contido na formação rochosa, o que torna a porosidade também dependente dela. Assumindo que a compressibilidade da rocha é constante, pode-se usar a seguinte equação para determinar a variação da porosidade em função da pressão (FANCHI, 2018)

$$\phi = \phi^0 [1 + c_\phi (p - p^0)]$$

onde  $c_\phi$  é o coeficiente de compressibilidade da rocha e  $p^0$  é a pressão na qual a porosidade é dada por  $\phi^0$ .

## 1.4 Permeabilidade

A permeabilidade é uma medida da capacidade do meio poroso em permitir a passagem de fluidos pelos poros interconectados (CHEN, 2007), ou seja, enquanto a porosidade mede a capacidade de armazenar fluidos na rocha reservatório, a permeabilidade mede o quão fácil/difícil os fluidos armazenados podem ser transportados no interior do meio poroso.

As propriedades de rocha, como a porosidade e a própria permeabilidade, podem variar espacialmente e em função da direção, de forma que os reservatórios são classificados como homogêneos, heterogêneos, isotrópicos ou anisotrópicos (FANCHI, 2018). Um reservatório homogêneo geralmente significa dizer que ele tem as mesmas propriedades em todos os pontos do espaço; em outras palavras, ele é uniforme e não apresenta irregularidades. Também quer dizer que as suas propriedades não variam com a posição. Por sua vez, a anisotropia significa que algumas propriedades do meio poroso não têm o mesmo valor de acordo com as diferentes direções nas quais elas são medidas. Por exemplo, em um reservatório anisotrópico, os valores da permeabilidade dependem da direção espacial. No caso mais geral, essas propriedades são função tanto da localização no meio poroso quanto da orientação espacial.

Portanto, conforme dito, além de variar com a posição a permeabilidade pode ser diferente segundo uma dada direção espacial (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Para a grande maioria das aplicações, supõe-se que a permeabilidade pode ser representada por um tensor diagonal (CHEN, 2007)

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}$$

onde  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  representam os valores de permeabilidade nas direções dos eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. Para  $k_x = k_y = k_z$  o meio é dito isotrópico e, caso contrário, ele é considerado anisotrópico (CHEN; HUAN; MA, 2006). Devido ao processo de formação de muitas rochas reservatório, também pode ser considerado que  $k_H = k_x = k_y$ , onde  $k_H$  representa uma permeabilidade horizontal. Usualmente, a permeabilidade vertical  $k_z$  é menor do que a permeabilidade horizontal (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

## 1.5 Permeabilidade relativa

Em se tratando de escoamentos multifásicos, com dois ou mais fluidos escoando em um meio poroso, a velocidade de escoamento de uma dada fase é sempre menor que a sua

velocidade caso o meio estivesse completamente saturado por essa fase (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006). Isto quer dizer que o escoamento de uma fase influencia no escoamento das demais. Nesses casos, introduz-se a permeabilidade efetiva para que se possa quantificar a combinação dos efeitos da rocha e das fases fluidas no escoamento multifásico. A razão entre a permeabilidade efetiva e a permeabilidade absoluta é denominada permeabilidade relativa e o seu valor é restrito ao intervalo  $[0, 1]$  (FANCHI, 2018).

Os modelos usuais para a quantificação da permeabilidade relativa propõem correlações nas quais ela depende da saturação (fração, ou porcentagem, do volume de poro ocupado por um determinado fluido) e da molhabilidade dos fluidos. Alguns modelos podem considerar também o histórico dos processos de drenagem ou embebição do meio poroso (CHEN; HUAN; MA, 2006). Em se tratando dos meios porosos, a molhabilidade é a tendência que um fluido apresenta de aderir (molhar) ou espalhar-se sobre a superfície sólida dos poros na presença de uma outra fase imiscível (FANCHI, 2018). No contexto do escoamento trifásico, na presença das fases água, óleo e gás, comumente a água é considerada o fluido molhante e o gás o fluido não-molhante, enquanto que o óleo é o fluido de molhabilidade intermediária (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

O uso de experimentos é o caminho mais indicado para se estimarem os valores da permeabilidade relativa. Entretanto, em muitos casos, a obtenção desses dados não é uma tarefa simples e, portanto, se faz uso de modelos matemáticos para a inferência da permeabilidade relativa (LI; HORNE, 2006). Esses modelos consideram, conforme já exposto, as permeabilidades relativas como sendo funções das saturações dos fluidos que ocupam o meio poroso (THOMAS, 2001). Para o escoamento trifásico, uma suposição usual é que a permeabilidade relativa da água dependa apenas da saturação da água, a do gás somente da saturação do gás e a do óleo, da saturação do óleo, ou seja (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$k_{rw} = f(S_w), \quad (6)$$

$$k_{rg} = f(S_g) \quad (7)$$

e

$$k_{ro} = f(S_o) \quad (8)$$

onde  $k_{rw}$ ,  $k_{rg}$  e  $k_{ro}$  são as permeabilidades relativas da água, gás e óleo, sabendo que  $S_w$ ,  $S_g$  e  $S_o$  representam as suas respectivas saturações.

Para o escoamento bifásico, existem várias curvas e modelos de permeabilidade relativa disponíveis na literatura, os modelos mais comumente utilizados são os de Corey e Naar-Henderson (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

Para esses dois modelos, primeiramente define-se a saturação normalizada do fluido

molhante

$$\bar{S}_w = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi}}$$

onde  $S_w$  é a saturação do fluido molhante e  $S_{wi}$  é saturação irreduzível do fluido molhante, ou seja, o valor mínimo da saturação para que possa haver escoamento do fluido molhante.

Em ambos os modelos a permeabilidade relativa do fluido molhante é dada por (CHEN, 2007)

$$k_{rw} = \bar{S}_w^4.$$

e no modelo de Corey a permeabilidade relativa do fluido não-molhante é

$$k_{rn} = (1 - \bar{S}_w)^2 (1 - \bar{S}_w^2),$$

enquanto que no modelo de Naar e Henderson:

$$k_{rn} = (1 - 2\bar{S}_w)^{3/2} [2 - (1 - 2\bar{S}_w)^{1/2}].$$

Uma outra maneira de se calcular a permeabilidade relativa, para o escoamento bifásico, é mediante o modelo de Brooks-Corey (LI; HORNE, 2006),

$$k_{rw} = \bar{S}_w^{\left(\frac{2+3\lambda}{\lambda}\right)}$$

e

$$k_{rn} = (1 - \bar{S}_w)^2 \left[1 - \bar{S}_w^{\left(\frac{2+\lambda}{\lambda}\right)}\right]$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro que está relacionado ao tamanho dos poros. Quando  $\lambda = 2$  o modelo é reduzido ao modelo de Corey.

Na literatura também é possível encontrar correlações para as curvas de permeabilidade relativa na forma de leis de potência (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006):

$$k_{rw} = k_{rw_{max}} \left( \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{nrw} - S_{wi}} \right)^{ew}$$

e

$$k_{rn} = k_{rn_{max}} \left( \frac{S_n - S_{nrw}}{1 - S_{nrw} - S_{wi}} \right)^{eow}$$

onde  $k_{rw_{max}}$  e  $k_{rn_{max}}$  definem os pontos extremos das curvas (valores máximos da permeabilidade relativa),  $S_n$  é a saturação do fluido não-molhante,  $S_{nrw}$  é a saturação residual do

fluido não molhante, ou seja, para saturações menores do que  $S_{nrw}$  o fluido não-molhante não escoar. Os expoentes  $ew$  e  $enw$  são os fatores de ajuste das curvas, obtidos através de experimentos ou ajuste histórico.

Em comparação ao escoamento bifásico, a permeabilidade relativa na presença de três fases é ainda mais difícil de ser medida (FANCHI, 2018). Experimentos mostram que na presença de água, óleo e gás, a permeabilidade relativa da água e do gás podem ser aproximadas por funções que são dependentes apenas das suas respectivas saturações, Eqs (6) e (7) (AZIZ; SETTARI, 1979). Como considera-se que o meio poroso encontra-se totalmente preenchido (saturado) pelas três fases, a saturação do óleo pode ser determinada a partir das saturações da água e do gás, de maneira que a Eq. (8) pode ser reescrita como

$$k_{ro} = f(S_w, S_g). \quad (9)$$

No que diz respeito às permeabilidades relativas da água (fluido molhante) e do gás (fluido não-molhante), elas podem ser avaliadas pelos modelos já apresentados aqui para o escoamento bifásico (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Já um modelo específico do tipo da Eq. (9) dificilmente é conhecido, uma vez que a permeabilidade relativa do óleo varia de maneira mais complexa (HONARPOUR; KOEDERITZ; HARVEY, 1986). O que se faz usualmente, é usar dados dos escoamentos óleo-água e óleo-gás. Essa separação é baseada no fato de que o óleo e o gás agem como o fluido não-molhante em relação à água e, por sua vez, a água e o óleo agem como os fluidos molhantes em relação ao gás (CHEN, 2007).

Trabalhos como os de Corey et al. (1956) e Sarem (1966) exploraram formas de avaliação da permeabilidade relativa no escoamento trifásico, porém os trabalhos de Stone (STONE, 1970; STONE, 1973) apresentaram duas correlações simples de serem avaliadas e são amplamente utilizadas até os dias atuais (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019).

O primeiro modelo, aqui chamado de Stone I (STONE, 1970), pode ser escrito na forma mais geral (ZUO et al., 2014)

$$\bar{S}_w = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{gc} - S_{or}},$$

$$\bar{S}_g = \frac{S_g - S_{gc}}{1 - S_{wi} - S_{gc} - S_{or}}$$

e

$$\bar{S}_o = \frac{S_o - S_{or}}{1 - S_{wi} - S_{gc} - S_{or}}$$

onde  $\bar{S}_w$ ,  $\bar{S}_g$  e  $\bar{S}_o$  são as saturações normalizadas da água, do gás e do óleo. A saturação

irredutível da água é  $S_{wi}$ , a saturação crítica do gás é  $S_{gc}$  e saturação residual de óleo é  $S_{or}$ . Essas saturações, no contexto do escoamento, representam o menor valor da saturação para que ocorra o escoamento da respectiva fase.

Tem-se, então, para a permeabilidade relativa do óleo

$$k_{ro} = \left[ \frac{k_{row}k_{rog}}{k_{row}^0 (1 - \bar{S}_w) (1 - \bar{S}_g)} \right] \bar{S}_o$$

onde  $k_{row}$  e  $k_{rog}$  são as permeabilidades relativas referentes aos escoamentos bifásicos óleo-água e óleo-gás, respectivamente. Já  $k_{row}^0$  é a permeabilidade relativa do óleo, em um escoamento bifásico água-óleo, com a saturação da água sendo igual à sua saturação irredutível (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

O segundo modelo de Stone, Stone II (STONE, 1973), é mais simples já que não prevê a dependência em termos das saturações normalizadas (AZIZ; SETTARI, 1979)

$$k_{ro} = \left[ \left( \frac{k_{row}}{k_{row}^0} + k_{rw} \right) \left( \frac{k_{rog}}{k_{row}^0} + k_{rg} \right) - (k_{rw} + k_{rg}) \right] k_{row}^0$$

onde  $k_{rw}$  e  $k_{rg}$  são as permeabilidades relativas de água e gás obtidas a partir das curvas específicas para os escoamentos bifásicos óleo-água e óleo-gás, respectivamente.

Também é possível utilizar leis de potência para a avaliação das permeabilidades relativas no escoamento trifásico, onde pode ser chamado de modelo de Brooks-Corey modificado ou apenas modelo tipo Corey (DELSHAD; POPE, 1989; GODA; BEHRENBRUCH, 2004), de forma que

$$k_{rw} = k_{rw_{max}} (\bar{S}_w)^{ew}$$

$$k_{rg} = k_{rg_{max}} (\bar{S}_g)^{eg}$$

e

$$k_{ro} = k_{ro_{max}} (\bar{S}_o)^{eo}$$

onde, como anteriormente,  $k_{rw_{max}}$ ,  $k_{rg_{max}}$  e  $k_{ro_{max}}$  são os valores máximos de permeabilidade relativa e  $ew$ ,  $eg$  e  $eo$  são os fatores de ajuste das curvas.

## 1.6 Pressão capilar

Quando da presença de duas ou mais fases fluidas escoando no interior do meio poroso deve-se levar em conta a pressão capilar (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001), que surge em consequência da tensão superficial (ou interfacial) existente na interface de

separação dos fluidos (CHEN, 2007). A pressão capilar corresponde a uma descontinuidade de pressão através da superfície de separação entre dois fluidos (ISLAM et al., 2016) e é definida como a diferença entre as pressões das fases não-molhante e molhante (FANCHI, 2018).

No escopo do escoamento trifásico, podem aparecer três pressões capilares diferentes: entre o gás e o óleo, o óleo e a água e o gás e a água. Entretanto, para a completa descrição do modelo de escoamento, que será apresentado a seguir, são necessárias apenas a proposição de duas relações para as pressões capilares. As relações usuais são para as interfaces gás-óleo e óleo-água (AZIZ; SETTARI, 1979),

$$P_{cow} = p_o - p_w \quad (10)$$

e

$$P_{cgo} = p_g - p_o \quad (11)$$

onde  $P_{cow}$  e  $P_{cgo}$  são reciprocamente as pressões capilares para as interfaces óleo-água e gás-óleo e  $p_i$ , para  $i = o, w, g$ , representa a pressão das fases óleo, água ou gás, respectivamente. Como mencionado anteriormente, é possível notar que na interface óleo-água o óleo é considerado como sendo o fluido não-molhante e na interface gás-óleo o óleo é o fluido molhante. A terceira pressão capilar,  $P_{cgw}$ , para a interface gás-água, pode ser determinada via a adição de  $P_{cow}$  e  $P_{cgo}$  (CHEN; HUAN; MA, 2006)

$$P_{cgw} = p_g - p_w = P_{cow} + P_{cgo}.$$

Existem na literatura modelos para se calcular a pressão capilar, utilizando-se as propriedades do meio poroso tais como a porosidade e o tamanho médio dos poros, além do ângulo de contato entre os fluidos (BEAR, 1972), ou ainda das saturações da água e gás (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001), como por exemplo:

$$P_{cow} = p_o - p_w = f(S_w)$$

e

$$P_{cgo} = p_g - p_o = f(S_g),$$

que são formas aproximadas ainda bastante utilizadas (CHEN; HUAN; MA, 2006).

O modelo de Brooks e Corey (1964) é frequentemente utilizado e pode ser escrito,

para a água como fluido molhante, como (SKJAEVELAND et al., 2000)

$$P_{cow} = P_{cow_{max}} \left( \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi}} \right)^{-\lambda}$$

e pode ser estendido para o sistema gás-óleo na forma

$$P_{cgo} = P_{cgo_{max}} \left( \frac{S_o - S_{or}}{1 - S_{or}} \right)^{-\lambda}.$$

A pressão capilar, da mesma forma que a permeabilidade relativa, também pode ser obtida a partir de leis de potência (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006)

$$P_{cow} = P_{cow_{max}} \left( \frac{1 - S_{or} - S_w}{1 - S_{or} - S_{wi}} \right)^{epcow}$$

e

$$P_{cgo} = P_{cgo_{max}} \left( \frac{1 - S_o - S_w}{1 - S_{or} - S_{wi}} \right)^{epcgo}$$

onde os expoentes  $epcow$  e  $epcgo$  são obtidos através de ajuste histórico.

## 2 MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO

Neste capítulo, é apresentado o modelo físico-matemático que rege o escoamento multifásico em meios porosos. O modelo considera a presença de três fases imiscíveis (água, óleo e gás) em um reservatório isotérmico. O conjunto de equações diferenciais parciais que compõem o modelo é, para cada fase fluida, a da conservação de massa e a Lei de Darcy adaptada para o escoamento multifásico (CHEN; EWING, 1997).

### 2.1 Conservação da massa

Na literatura, é possível encontrar o desenvolvimento teórico que leva à obtenção da equação da conservação da massa (ou equação de continuidade), para o escoamento em meios porosos, na sua forma diferencial (BEAR, 1972; PEACEMAN, 1977; AZIZ; SETTARI, 1979; ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; CHEN; HUAN; MA, 2006; ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019),

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_{\alpha} S_{\alpha}) = -\nabla \cdot (\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) + \dot{q}_{\alpha}, \quad (12)$$

onde  $S_{\alpha}$ ,  $\mathbf{u}_{\alpha}$  e  $\dot{q}_{\alpha}$  representam, para a fase  $\alpha$ , a saturação, o vetor velocidade e um termo de fonte, respectivamente ( $\alpha = w, o, g$ ). A Eq. (12) indica que a variação da massa, no interior de um volume de controle, é igual ao fluxo de massa através das fronteiras do volume de controle mais o ganho ou perda de massa, por unidade de volume, através de uma fonte ou sumidouro (WU, 2016).

Da definição do FVF, dada pela Eq. (1), tem-se que  $\rho_{\alpha} = \rho_{\alpha_{sc}}/B_{\alpha}$ , que após substituição na Eq. (12) resulta em

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi \rho_{\alpha_{sc}} S_{\alpha}}{B_{\alpha}} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{\rho_{\alpha_{sc}}}{B_{\alpha}} \mathbf{u}_{\alpha} \right) + \dot{q}_{\alpha}, \quad (13)$$

agora, como  $\rho_{\alpha_{sc}}$  é definido em condições padrão e, portanto, é constante, a Eq. (13) pode ainda ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_{\alpha}}{B_{\alpha}} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{B_{\alpha}} \mathbf{u}_{\alpha} \right) + \frac{\dot{q}_{\alpha}}{\rho_{\alpha_{sc}}}. \quad (14)$$

A Eq. (14) descreve a conservação de massa para as fases água, óleo e gás considerando que essas três fases são imiscíveis (CHEN, 2007). Em geral, é possível encontrar uma certa quantidade de gás dissolvida no óleo (ISLAM et al., 2016), e o modelo *black oil* prevê, então, a divisão da fase gás em duas: gás dissolvido no óleo e gás livre (ABOU-KASSEM; ISLAM;

ALI, 2019). Pode-se, ainda, considerar a presença de gás dissolvido na água (FANCHI, 2018), mas esta possibilidade não será incluída no modelo aqui utilizado.

Considerando-se a presença do gás dissolvido no óleo, tem-se que as equações de conservação da massa podem ser escritas como (CHEN; HUAN; MA, 2006; FANCHI, 2018)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_o}{B_o} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{B_o} \mathbf{u}_o \right) + \dot{q}_{osc}, \quad (15)$$

para o óleo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{B_w} \mathbf{u}_w \right) + \dot{q}_{wsc}, \quad (16)$$

para a água e

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s S_o}{B_o} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{B_g} \mathbf{u}_g + \frac{R_s}{B_o} \mathbf{u}_o \right) + \dot{q}_{gsc},$$

para o gás, com

$$\dot{q}_{\alpha sc} = \frac{\dot{q}_\alpha}{\rho_{\alpha sc}}.$$

## 2.2 Lei de Darcy

Em meados do século XIX, o engenheiro francês Henry Darcy desenvolveu empiricamente uma relação linear entre a velocidade, de um fluido escoando no interior de um meio poroso, e o gradiente de pressão (BROWN, 2002), dando origem ao que hoje é chamada de Lei de Darcy. Apesar de empírica, a lei possui fundamentação teórica baseada na equação de Navier-Stokes, aplicando-se as devidas hipóteses simplificadoras, conforme já mostrado em trabalhos teóricos como os de Whitaker (1986) e Sanchez-Palencia (1980).

No contexto de meios porosos, a Lei de Darcy expressa a conservação da quantidade de movimento (FANCHI, 2018) e é dada por

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} (\nabla p - \gamma \nabla Z) \quad (17)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade,  $\mathbf{k}$  é o tensor de permeabilidades,  $\mu$  é a viscosidade,  $p$  é a pressão, e  $\gamma \nabla Z$  é o termo que representa os efeitos gravitacionais, com  $Z$  sendo a profundidade e  $\gamma = \rho g$  o peso específico, isto é, o produto da massa específica  $\rho$  pelo módulo da aceleração da gravidade  $g$ .

Da forma como ela foi apresentada na Eq. (17), a Lei de Darcy possui certas

limitações de aplicabilidade em decorrência das hipóteses assumidas (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Portanto, ela é válida caso:

- O fluido é monofásico, newtoniano e homogêneo;
- Não há reações químicas entre fluido e meio poroso;
- O escoamento é laminar;
- A permeabilidade é independente de pressão, temperatura e do fluido escoando;
- Não há efeitos de escorregamento e
- Não há efeitos eletro-cinéticos.

Algumas das limitações apresentadas podem ser contornadas com modificações da Lei de Darcy como, por exemplo, o modelo de Forchheimer que inclui efeitos inerciais (ISLAM et al., 2016). O modelo de Forchheimer se diferencia do de Darcy pela presença de um termo não-linear (FANCHI, 2018), permitindo modelar escoamentos com velocidades mais altas (efeitos de turbulência) (CHEN; HUAN; MA, 2006). Efeitos de escorregamento quando são relevantes, o que ocorre principalmente em reservatórios de gás com baixa permeabilidade, são possíveis de serem considerados na lei de Darcy sem grande esforço, bastando introduzir apenas uma permeabilidade efetiva que incorpora esse efeito (BERAWALA; ANDERSEN, 2020). No entanto, para ser utilizada no presente trabalho, a limitação em relação ao número de fases presentes no meio poroso é a que precisa ser contornada.

Inicialmente desenvolvida para o escoamento de apenas uma fase, a Lei de Darcy foi estendida e generalizada para modelar também escoamentos multifásicos, mediante a introdução da permeabilidade relativa (WU, 2016). A Lei de Darcy modificada é, então, escrita como (AZIZ; SETTARI, 1979)

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \mathbf{k} (\nabla p_\alpha - \gamma_\alpha \nabla Z) \quad (18)$$

onde  $p_\alpha$ ,  $k_{r\alpha}$  e  $\gamma_\alpha$  são respectivamente a pressão, a permeabilidade relativa e o peso específico da fase  $\alpha$ .

### 2.3 Equações governantes para o escoamento trifásico

Combinando a equação da continuidade para o óleo e a água, Eqs. (15) e (16), com a Lei de Darcy estendida para o caso multifásico, Eq. (18), tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_\alpha}{B_\alpha} \right) = \nabla \cdot \left[ \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha B_\alpha} \mathbf{k} (\nabla p_\alpha - \gamma_\alpha \nabla Z) \right] + \dot{q}_{\alpha sc}$$

para  $\alpha = w, o$ . Já para o gás, a equação adquire a forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s S_o}{B_o} \right) = \nabla \cdot \left[ \frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} \mathbf{k} (\nabla p_g - \gamma_g \nabla Z) + \frac{R_s k_{ro}}{\mu_o B_o} \mathbf{k} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla Z) \right] + \dot{q}_{gsc}.$$

Assim sendo, tem-se até agora seis incógnitas:  $p_o, p_w, p_g, S_o, S_w$  e  $S_g$  e, somente três equações. Portanto, para que seja possível obter uma solução única, em termos das variáveis dependentes, se faz necessário ao menos mais três equações. A primeira delas é proveniente do fato que se assume que as três fases preenchem por completo os espaços vazios dos poros, ou seja, o meio poroso encontra-se totalmente saturado (CHEN, 2007),

$$S_o + S_w + S_g = 1. \quad (19)$$

As outras duas equações são provenientes das relações para as pressões capilares apresentadas no Capítulo 1 e dadas pelas Eqs. (10) e (11):

$$P_{cow} = p_o - p_w$$

e

$$P_{cgo} = p_g - p_o$$

Agora, tem-se um conjunto de seis equações e seis incógnitas (ALLEN III; BEHIE; TRANGENSTEIN, 1988). No entanto, mais de um conjunto de variáveis dependentes pode ser escolhido, como pode ser visto em Chen e Ewing (1997). Não obstante, o presente trabalho foca na formulação conhecida como  $p_o$ - $S_w$ - $S_g$  (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019), sabendo que os valores de  $S_o, p_w$  e  $p_g$  podem ser calculados pelas Eqs. (19), (10) e (11), respectivamente.

Concluindo, o seguinte conjunto de equações é utilizado na simulação do escoamento trifásico:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi (1 - S_w - S_g)}{B_o} \right] = \nabla \cdot \left[ \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \mathbf{k} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla Z) \right] + \dot{q}_{osc} \quad (20)$$

para o óleo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) = \nabla \cdot \left[ \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \mathbf{k} (\nabla p_o - \nabla P_{cow} - \gamma_w \nabla Z) \right] + \dot{q}_{wsc} \quad (21)$$

para a água e

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_w - S_g)}{B_o} \right] = \nabla \cdot \left[ \frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} \mathbf{k} (\nabla p_o + \nabla P_{cgo} - \gamma_g \nabla Z) \right]$$

$$+\nabla \cdot \left[ \frac{R_s k_{ro}}{\mu_o B_o} \mathbf{k} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla Z) \right] + \dot{q}_{gsc} \quad (22)$$

para o gás.

As Eqs. (20), (21) e (22) são, portanto, as equações que efetivamente precisam ser resolvidas neste modelo de escoamento trifásico. Ainda, para a completa descrição do modelo, é necessário que sejam prescritas as condições iniciais e de contorno, a fim de que o problema seja matematicamente bem-posto e possa-se garantir a unicidade da solução (BEAR, 1972).

A condição inicial significa que se deve conhecer os valores da pressão e das saturações em todo o domínio no instante inicial do escoamento. Na ausência dos efeitos gravitacionais e capilares, os campos de pressão e de saturações precisam ser fornecidos em todo o domínio (WU, 2016), ou seja,

$$p(x, y, z, t_0) = p_0$$

$$S_w(x, y, z, t_0) = S_{w_0}$$

$$S_g(x, y, z, t_0) = S_{g_0}$$

onde  $t_0$  é o tempo inicial e  $p_0$ ,  $S_{w_0}$  e  $S_{g_0}$  são os valores iniciais da pressão e das saturações.

Levando-se em conta os efeitos gravitacionais e de capilaridade, os diferentes fluidos presentes no reservatório encontram-se distribuídos em até cinco regiões verticalmente distintas: uma capa de gás, uma transição gás-óleo, óleo, uma transição óleo-água e água (CHEN, 2007). Nessas regiões, a pressão é dada pelas relações hidrostáticas e as saturações pelas relações de pressão capilar, como pode ser visto em Ertekin, Abou-Kassem e King (2001).

Na zona da capa de gás, a fase é contínua e a distribuição de pressão é dada por

$$\frac{dp_g}{dZ} = \gamma_g$$

com  $S_o = 0$  e  $S_w = S_{wi}$ , de forma que  $p_o$  e  $p_w$  podem ser calculados pelas relações de  $P_{cgo}$  e  $P_{cow}$ , respectivamente.

Na transição gás-óleo, as duas fases são consideradas contínuas e

$$\frac{dp_o}{dZ} = \gamma_o$$

$$\frac{dp_g}{dZ} = \gamma_g$$

e dessas duas equações obtém-se  $P_{cgo}$  e, conseqüentemente,  $S_g$ . As propriedades da água são as mesmas que as reinantes na capa de gás.

Na zona de óleo tem-se que o óleo é a fase contínua e que  $S_g = 0$  e  $S_w = S_{wi}$ , com a pressão do óleo sendo determinada da mesma forma que na transição gás-óleo. Já na transição óleo-água,  $S_g = 0$  e as pressões são dadas por

$$\frac{dp_o}{dZ} = \gamma_o$$

$$\frac{dp_w}{dZ} = \gamma_w$$

e a partir dos valores das pressões calcula-se  $P_{cow}$  e  $S_w$ .

Por fim, na parte mais baixa do reservatório a água se acumula e se torna a fase contínua, com a sua pressão sendo determinada pelas equações da hidrostática, igual à transição óleo-água, e  $S_o = S_g = 0$ . Portanto,  $p_o$  é calculada pela equação de  $P_{cow}$ .

A profundidade de referência é, em geral, a posição da zona de contato entre o gás e o óleo, com a pressão de referência sendo a pressão de ponto de bolha (CHEN, 2007). Caso a capilaridade seja desconsiderada, as zonas de transição podem ser negligenciadas e as saturações em cada uma das três regiões restantes precisam ser fornecidas (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

As condições de contorno mais comuns para o escoamento em meios porosos podem ser divididas em dois tipos distintos: Dirichlet e Neumann (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019). A condição de contorno de primeiro tipo (de Dirichlet) implica o valor da variável dependente fornecido na fronteira, enquanto a de segundo tipo (Neumann) implica a prescrição de um fluxo na fronteira do reservatório (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Condições do tipo Dirichlet aparecem, por exemplo, quando a fronteira do domínio encontra-se em contato com um reservatório de água, de forma que a pressão e as saturações são conhecidas nesse contorno (CHEN; HUAN; MA, 2006). As condições de Neumann aparecem quando existe um transporte de massa através da fronteira do reservatório, de forma que esse fluxo é avaliado através de um termo contendo o gradiente de pressão.

A condição de contorno mais comum na simulação de reservatórios é a de fluxo nulo (FANCHI, 2018), sendo utilizada quando as fronteiras do reservatório são consideradas impermeáveis. Reservatórios com essa característica são simulados mediante a imposição de condições de contorno de Neumann, já que o fluxo nulo é imposto via um gradiente de pressão nulo (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

### 3 DISCRETIZAÇÃO DO MODELO TRIFÁSICO

No Capítulo 2 foram apresentadas as equações que regem o escoamento trifásico, cujas soluções fornecem os campos de pressão e de saturações. Entretanto, elas formam um conjunto de equações diferenciais parciais altamente não-lineares podendo ainda conter anisotropias e heterogeneidades (HAMON; TCHELEPI, 2016). Tais fatos tornam a obtenção de uma solução analítica viável apenas para um número limitado de aplicações (BEAR, 1972). Um exemplo de aplicação, que possui uma solução analítica, é o clássico problema de Buckley–Leverett (BUCKLEY; LEVERETT, 1942), inicialmente restrita ao problema bifásico incompressível (PINDER; GRAY, 2008).

Na literatura também é possível encontrar soluções analíticas e semianalíticas para o escoamento trifásico. Essas soluções são, de certa forma, uma expansão da teoria de Buckley-Leverett para contemplar o escoamento de três fases (FALLS; SCHULTE, 1992; GUZMÁN; FAYERS, 1997a). Trabalhos como os de Guzmán e Fayers (1997b) e Juanes e Patzek (2004) descrevem soluções analíticas para essa classe de problemas, considerando um escoamento incompressível unidimensional com condições iniciais constantes separadas por uma descontinuidade (problema de Riemann). O trabalho de Marchesin e Plohr (2001) traz considerações sobre a injeção alternada de água e gás (WAG) e uma solução semianalítica, enquanto o trabalho de Barros, Pires e Peres (2021) traz uma solução analítica considerando curvas de permeabilidade relativas convexas. Outros trabalhos recentes abordam esse tipo de problema com soluções analíticas (CASTAÑEDA et al., 2016; CASTAÑEDA; MARCHESIN; FURTADO, 2022), porém ainda com a limitação de ser um escoamento incompressível e em apenas uma dimensão.

Na busca de soluções de problemas mais diversos, utilizam-se metodologias numéricas para se obter as soluções aproximadas dessas EDPs (AZIZ; SETTARI, 1979). Essas metodologias envolvem a discretização do domínio, isto é, convertem o domínio contínuo, com infinitos graus de liberdade, em um domínio discreto onde as pressões e as saturações são conhecidas apenas em determinados pontos (nós) do domínio (CHEN, 2007).

Os métodos numéricos mais comumente empregados na simulação de reservatórios, como já mencionado, são: o Método das Diferenças Finitas (PEACEMAN, 1977; AZIZ; SETTARI, 1979), o Método dos Elementos Finitos (CHEN; HUAN; MA, 2006; AMOOIE; MOORTGAT, 2018; FABIEN; KNEPLEY; RIVIERE, 2020) e o Método dos Volumes Finitos (JENNY; LEE; TCHELEPI, 2003; FANCHI, 2018; LAURENT et al., 2021). Qualquer um desses métodos pode ser aplicado na busca pelas soluções das equações apresentadas no Capítulo 2, cada um com as suas vantagens e desvantagens. No entanto, o Método dos Volumes Finitos possui um grande atrativo, que é a garantia, por definição, da conservação de massa e da quantidade de movimento, independentemente do número de volumes finitos utilizados para discretizar o domínio computacional (ISLAM et al., 2016),

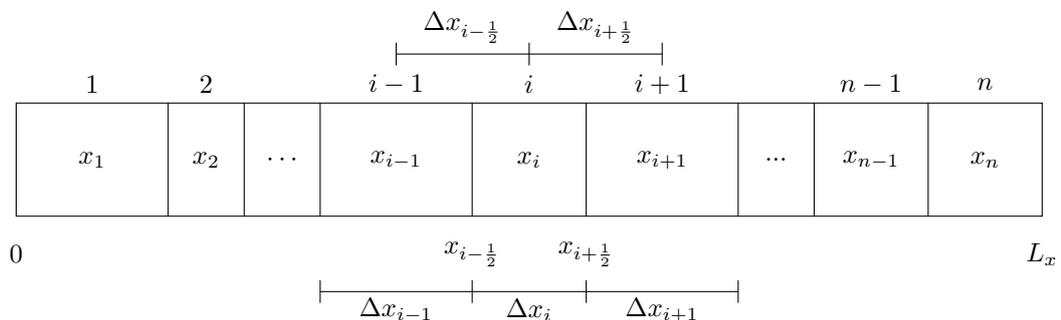
além de ser um método robusto e capaz de lidar com diferentes geometrias (EYMARD; GALLOUËT; HERBIN, 2000).

### 3.1 Método dos Volumes Finitos aplicado ao modelo trifásico

No contexto do Método dos Volumes Finitos, a discretização significa substituir o domínio contínuo pelo seu particionamento em uma quantidade finita de pequenos blocos, também chamado de células ou volumes finitos ou de controle, com dimensões e posições bem definidas, de forma que as propriedades (pressão e saturações) sejam avaliadas no centro desses blocos (FERZIGER; PERIĆ, 2002). Esses valores de pressão e saturações no centro dos blocos representam o valor aproximado médio dessas variáveis e são considerados constantes no interior de cada respectivo volume finito.

A Figura 1 ilustra um exemplo de malha computacional, segundo a direção  $x$  de um sistema de coordenadas cartesianas, mostrando que o espaçamento dos blocos não é, necessariamente, uniforme.

Figura 1 - Representação da malha computacional na direção do eixo  $x$



Fonte: O autor, 2022

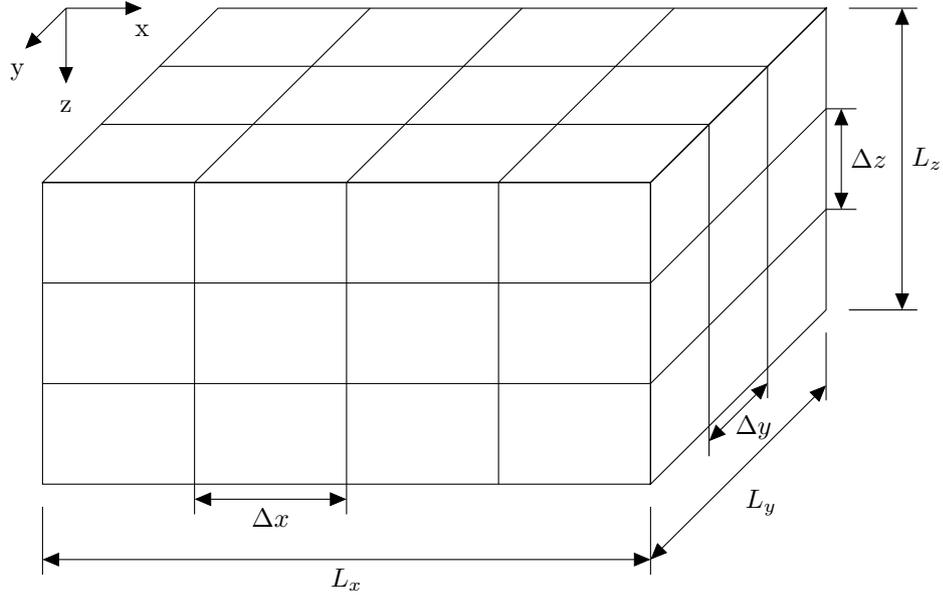
Considera-se que a malha na Figura 1 possua  $n_x$  células na direção  $x$  e que o comprimento total nessa direção é  $L_x$ . O tamanho dos blocos é definido por  $\Delta x_i$  e a soma dos mesmos sempre satisfaz

$$\sum_{i=1}^{n_x} \Delta x_i = L_x.$$

Em um cenário tridimensional, a análise é similar, como ilustrado na Figura 2, onde  $\Delta y$  e  $\Delta z$  são as dimensões dos blocos nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente, e o número total de blocos nessas direções é representado por  $n_y$  e  $n_z$  respectivamente.

Da mesma forma que para apenas uma dimensão, o comprimento total nas direções

Figura 2 - Representação da malha computacional em três dimensões



Fonte: O autor, 2022

$y$  e  $z$  é dado por  $L_y$  e  $L_z$  e tem-se que

$$\sum_{j=1}^{n_y} \Delta y_j = L_y$$

$$\sum_{k=1}^{n_z} \Delta z_k = L_z,$$

e os nós centrais dos volumes finitos são identificados por  $(i, j, k)$ , um conjunto de números inteiros variando de 1 até  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  respectivamente.

Após a construção da malha computacional, a discretização das EDPs que governam o escoamento trifásico ocorre de fato, no método dos volumes finitos, a partir da integração delas sobre cada volume finito e em um intervalo de tempo também finito (ISLAM et al., 2016). Portanto, das Eqs (20), (21) e (22) tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi(1 - S_w - S_g)}{B_o} \right] dV dt &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_V \nabla \cdot \left[ \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \mathbf{k} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla Z) \right] dV dt \\ + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_V \dot{q}_{osc} dV dt & \end{aligned} \quad (23)$$

para o óleo,

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right) dV dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_V \nabla \cdot \left[ \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \mathbf{k} (\nabla p_o - \nabla P_{cow} - \gamma_w \nabla Z) \right] dV dt$$

$$+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_V \dot{q}_{wsc} dV dt \quad (24)$$

para a água e

$$\int_t^{t^{n+1}} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_w - S_g)}{B_o} \right] dV dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_V \nabla \cdot \left[ \frac{R_s k_{ro}}{\mu_o B_o} \mathbf{k} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla Z) \right] dV dt$$

$$+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_V \nabla \cdot \left[ \frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} \mathbf{k} (\nabla p_o + \nabla P_{cgo} - \gamma_g \nabla Z) \right] dV dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_V \dot{q}_{gsc} dV dt \quad (25)$$

para o gás, onde  $V$  representa o volume da célula, sobre o qual está se integrando, e  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ , com  $\Delta t$  sendo o incremento de tempo.

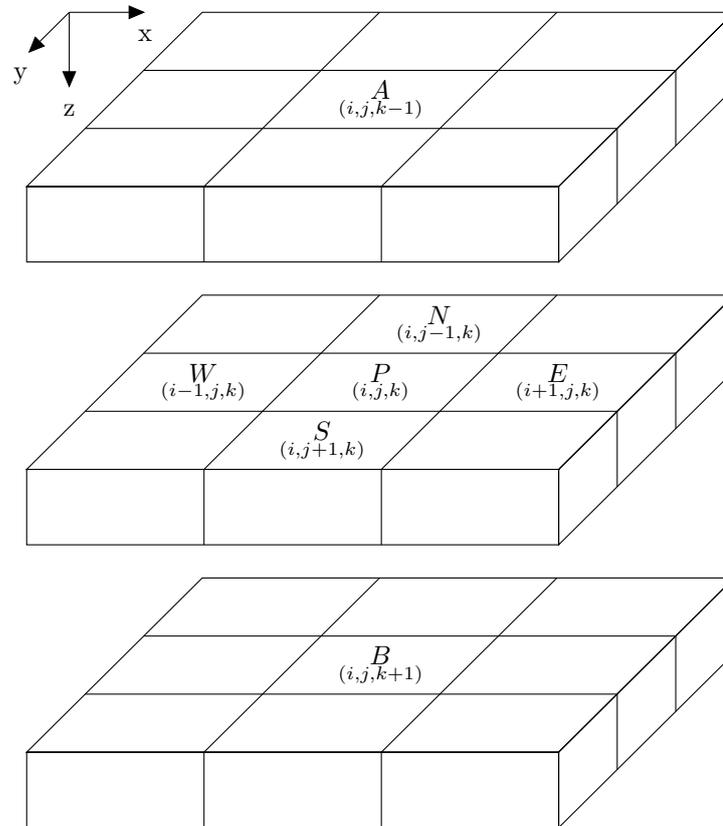
Para dar uma maior clareza no processo de integração das Eqs. (23), (24) e (25), procede-se com a sua separação em duas etapas: primeiro aborda-se a integração no espaço e, em seguida, no tempo.

### 3.1.1 Discretização espacial

É possível distinguir três tipos de termos nas Eqs. (23), (24) e (25): o termo de acúmulo (derivada parcial em relação ao tempo), os termos com a presença do operador divergência e o termo fonte. Com intuito de melhorar a compreensão, uma notação simplificada, similar à introduzida por Patankar (1980), é aqui utilizada. Nessa notação, o volume finito genérico, indexado por  $(i, j, k)$ , é representado pela letra maiúscula  $P$ . Como considera-se um sistema de coordenadas cartesianas e os volumes são paralelepípedos retos, os seus vizinhos diretos (nas direções oeste, leste, norte, sul, acima e abaixo) são indicados pelas letras maiúsculas (índices entre parêntese):  $W (i - 1, j, k)$ ,  $E (i + 1, j, k)$ ,  $N (i, j - 1, k)$ ,  $S (i, j + 1, k)$ ,  $A (i, j, k - 1)$  e  $B (i, j, k + 1)$ , como ilustrado na Figura 3.

Para indicar as fronteiras internas (ou interfaces) entre os volumes, a notação segue um padrão similar, mas agora empregando letras minúsculas. Como pode ser visto na Figura 4, as interfaces e os seus respectivos índices são dados por  $w (i - \frac{1}{2}, j, k)$ ,  $e (i + \frac{1}{2}, j, k)$ ,  $n (i, j - \frac{1}{2}, k)$ ,  $s (i, j + \frac{1}{2}, k)$ ,  $a (i, j, k - \frac{1}{2})$  e  $b (i, j, k + \frac{1}{2})$ . Portanto, a integral volumétrica

Figura 3 - Nomenclatura indicando os vizinhos do volume finito  $P$



Fonte: O autor, 2022

do termo de acúmulo pode ser generalizada na forma (DEHKORDI et al., 2014)

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV = \int_a^b \int_n^s \int_w^e \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dy dz = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_P V_P$$

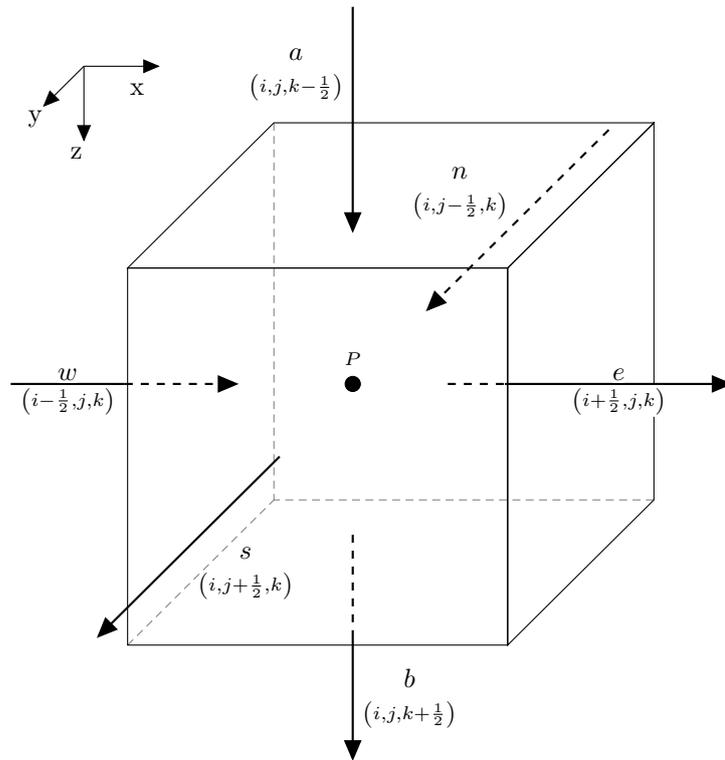
onde  $V_P = \Delta x_P \Delta y_P \Delta z_P$  é o volume ocupado pelo bloco  $P$ . Nessa generalização, a função  $\varphi$  assumirá diferentes formas dependendo das correspondentes equações consideradas para as fases óleo, água e gás.

Quando da integração envolvendo o operador divergência, tira-se proveito do teorema de Gauss (ou teorema da divergência) (BUTKOV, 1968) para converter a integral sobre o volume em uma integral de superfície. Por conseguinte, sem perda de generalidade (ROZON, 1989),

$$\int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \varphi) dV = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \nabla \varphi) d\mathbf{A}$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície  $d\mathbf{A}$ . Portanto, a integração no volume é determinada a partir do somatório de  $\Gamma \nabla \varphi$  em todas as faces do volume finito (DEHKORDI et al.,

Figura 4 - Nomenclatura indicando as interfaces do volume finito  $P$



Fonte: O autor, 2022

2014). De acordo com os sentidos indicados na Figura 4, a integração pode ser escrita como

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \nabla \varphi) d\mathbf{A} = \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_w \right] A_x + \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n \right] A_y + \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_b - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_a \right] A_z \quad (26)$$

onde  $A_x = \Delta y_P \Delta z_P$ ,  $A_y = \Delta x_P \Delta z_P$  e  $A_z = \Delta x_P \Delta y_P$  são as áreas das interfaces.

A Eq. (26) representa uma aproximação do valor da integral, pois não se conhece o integrando  $\Gamma \nabla \varphi$  em todos os pontos da superfície e ele é avaliado utilizando-se os valores calculados nos centros dos volumes finitos (FERZIGER; PERIĆ, 2002). Bem entendido que há mais de uma forma de se realizar essa aproximação, porém, a mais comum é a aproximação a dois pontos, chamada de *Two Points Flux Approximation* (TPFA) (BARTH; HERBIN; OHLBERGER, 2017), que é uma aproximação do tipo diferença centrada, de segunda ordem, que pode ser derivada usando-se expansões em séries de Taylor (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Dessa forma, por exemplo,

para direção  $x$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_e = \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\Delta x}$$

e

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_w = \frac{\varphi_P - \varphi_W}{\Delta x}.$$

Para as direções  $y$  e  $z$  um procedimento similar pode ser empregado. A avaliação de  $\Gamma$  nas interfaces será apresentada em detalhes posteriormente.

Por fim, para o termo fonte, tem-se de forma simples que

$$\int_a^b \int_n^s \int_w^e \dot{q}_{\alpha sc} dx dy dz = q_{\alpha sc P}$$

onde  $q_{\alpha sc P} = \dot{q}_{\alpha sc P} V_P$ , ou seja, a integral é aproximada pelo produto do valor da fonte, conhecido no centro do bloco, multiplicado pelo volume da célula  $P$ . Esse termo também será abordado, de maneira mais detalhada, na sequência.

Em consonância com o desenvolvimento feito em [Ertekin, Abou-Kassem e King \(2001\)](#), introduz-se agora uma notação mais compacta para facilitar a leitura das equações discretizadas:

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma \Delta \varphi)_P &= \Gamma_w (\varphi_W - \varphi_P) + \Gamma_e (\varphi_E - \varphi_P) + \Gamma_n (\varphi_N - \varphi_P) \\ &+ \Gamma_s (\varphi_S - \varphi_P) + \Gamma_a (\varphi_A - \varphi_P) + \Gamma_b (\varphi_B - \varphi_P) \end{aligned}$$

Avaliadas todas as integrações e introduzidas as devidas aproximações e a notação mais compacta, as Eqs. (23), (24) e (25) podem ser reescritas como

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi(1 - S_w - S_g)}{B_o} \right]_P V_P dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_P dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} q_{osc P} dt \quad (27)$$

para o óleo,

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)_P V_P dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P_{cow} - \gamma_w \Delta Z)]_P dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} q_{wsc P} dt \quad (28)$$

para a água e

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_w - S_g)}{B_o} \right]_P V_P dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta Z)]_P dt$$

$$+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_P dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} q_{gscP} dt \quad (29)$$

para o gás.

Nas Eqs. (27)-(29), as variáveis  $T_o$ ,  $T_w$  e  $T_g$  são chamadas de transmissibilidade e são definidas, de forma generalizada, como (CHEN, 2007)

$$T_{\alpha_f} = \left( \frac{k_x A_x k_{r\alpha}}{\mu_\alpha B_\alpha \Delta x} \right)_f \quad f = w, e \quad (30)$$

para a direção  $x$ ,

$$T_{\alpha_f} = \left( \frac{k_y A_y k_{r\alpha}}{\mu_\alpha B_\alpha \Delta y} \right)_f \quad f = n, s \quad (31)$$

para a direção  $y$  e

$$T_{\alpha_f} = \left( \frac{k_z A_z k_{r\alpha}}{\mu_\alpha B_\alpha \Delta z} \right)_f \quad f = a, b \quad (32)$$

para a direção  $z$ . Sabendo que  $\alpha$  pode representar qualquer uma das fases água ( $w$ ), óleo ( $o$ ) ou gás ( $g$ ).

### 3.1.2 Discretização temporal

Para a discretização no tempo, as integrais presentes nas Eqs (27), (28) e (29) devem ser avaliadas. Por se tratar de evolução no tempo, a discretização se dá de forma que a solução avance de um incremento de tempo a cada iteração (FERZIGER; PERIĆ, 2002). Isso posto, independente do método de discretização, espera-se que ao fim desse processo seja obtido o conjunto de incógnitas, em todos os centros dos volumes finitos, no próximo instante de tempo, ou seja, em um instante  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . Assim sendo, todas as informações são conhecidas no tempo  $t^n$  e anteriores.

Conforme já visto, a notação utiliza o índice  $n$  para indicar o tempo mais recente, informações conhecidas, e  $n + 1$  para o tempo no qual se quer determinar as incógnitas. Dessa forma, escreve-se  $\varphi^n = \varphi(t^n)$  indicando a avaliação no tempo  $n$  e  $\varphi^{n+1} = \varphi(t^{n+1})$  para o tempo  $n + 1$ .

Novamente, por questão de clareza, opta-se por apresentar separadamente as aproximações das integrais contidas nas Eqs (27), (28) e (29). Considerando que os valores dados nos centros dos volumes finitos são representativos da célula como um todo (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), tem-se que a integral do termo de acúmulo

pode ser escrita de forma generalizada como

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_P dt = \varphi_P^{n+1} - \varphi_P^n$$

Para as outras duas integrais é preciso, primeiramente, levantar algumas considerações em relação às alternativas disponíveis. As três opções mais comuns para essa avaliação são os métodos explícito, de Crank-Nicolson e o totalmente implícito (PATANKAR, 1980). No esquema explícito, considera-se que na integração no tempo os termos espaciais são avaliados no tempo  $n$ , e o método tem esse nome umas vez que o valor que se quer avaliar, no tempo  $n + 1$ , pode ser obtido explicitamente a partir da equação discretizada. Já no esquema totalmente implícito, os termos espaciais são avaliados no tempo  $n + 1$  e a equação gerada precisa ser resolvida implicitamente, ou seja, a cada avanço no tempo tem-se que resolver um sistema de equações algébricas. No esquema de Crank-Nicolson os termos espaciais são avaliados parcialmente nos instantes de tempo  $n$  e  $n + 1$ , meio termo entre o explícito e o totalmente implícito (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006), e ele também é um esquema do tipo implícito (porém não totalmente implícito).

Em geral, métodos explícitos apresentam alguma restrição no que diz respeito ao valor do passo de tempo ( $\Delta t$ ), pois tendem a serem métodos somente condicionalmente estáveis, podendo apresentar instabilidades numéricas que comprometem o resultado final, inviabilizando a sua utilização na solução do problema multifásico (ISLAM et al., 2016). O método de Crank-Nicolson é mais robusto e não introduz instabilidades numéricas, contudo, também pode apresentar alguma restrição com relação ao passo de tempo, quando se buscam resultados fisicamente coerentes (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Portanto, a melhor (e mais utilizada) opção se torna o método totalmente implícito, que não possui as restrições quanto aos valores do passo de tempo (com respeito à estabilidade numérica), apesar de ter um custo computacional maior que o do método explícito, uma vez que a cada iteração no tempo deve-se resolver um ou mais sistemas de equações algébricas (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019).

Utilizando então um esquema totalmente implícito, a aproximação das integrais contendo as transmissibilidades é dada, de forma generalizada, por

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta (\Gamma \Delta \varphi)_P dt = \Delta (\Gamma \Delta \varphi)_P^{n+1} \Delta t$$

e para, o termo fonte,

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} q_{\alpha sc P} dt = q_{\alpha sc P}^{n+1} \Delta t$$

Portanto, concluídas as etapas de discretização espacial e temporal, as Eqs (27),

(28) e (29) resultam nas formas finais

$$\frac{V_P}{\Delta t} \left\{ \left[ \frac{\phi(1 - S_w - S_g)}{B_o} \right]_P^{n+1} - \left[ \frac{\phi(1 - S_w - S_g)}{B_o} \right]_P^n \right\} = \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_P^{n+1} + q_{oscP}^{n+1} \quad (33)$$

para o óleo,

$$\frac{V_P}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)_P^{n+1} - \left( \frac{\phi S_w}{B_w} \right)_P^n \right] = \Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P_{cow} - \gamma_w \Delta Z)]_P^{n+1} + q_{wscP}^{n+1} \quad (34)$$

para a água e

$$\begin{aligned} & \frac{V_P}{\Delta t} \left\{ \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_w - S_g)}{B_o} \right]_P^{n+1} - \left[ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_w - S_g)}{B_o} \right]_P^n \right\} \\ & = \Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta Z)]_P^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_P^{n+1} + q_{gscP}^{n+1} \end{aligned} \quad (35)$$

para o gás, sendo que as equações foram todas divididas por  $\Delta t$ .

As Eqs. (33), (34) e (35) são as formas finais discretizadas, obtidas com o método dos volumes finitos, das equações que governam o escoamento trifásico. Para que se possa obter a solução de fato dessas equações, alguns passos adicionais ainda são necessários, como a expansão do termo de acúmulo e o uso de alguma técnica de linearização.

As condições de contorno são implementadas utilizando aproximações do tipo diferenças avançadas ou recuadas, em um volume finito com metade do comprimento, dos volumes internos, na direção normal à fronteira (PATANKAR, 1980; FERZIGER; PERIĆ, 2002). Então, a pressão e as saturações serão sempre conhecidas nas fronteiras, independente do tipo de condição de contorno especificado. Isto é, mesmo com condições do tipo Neumann, as pressões e as saturações podem ser extrapoladas e seus valores nas fronteiras passam a ser conhecidos. Mais detalhes sobre a implementação das condições de contorno podem ser encontrados no trabalho de Freitas (2017).

### 3.2 Acoplamento poço-reservatório

Esta seção é dedicada a detalhar a implementação do termo fonte que, no contexto da simulação de reservatórios, representa os poços produtores e injetores. Aqui, o objetivo é o de se obter relações que permitam a avaliação da pressão ou da vazão no poço (CHEN; HUAN; MA, 2006). Em um volume finito contendo um poço, seja de injeção ou de produção, grandes gradientes de pressão surgem na proximidade do poço que, em geral,

possui dimensões muito menores que a do bloco no qual ele está contido. Como a pressão no centro de uma célula representa uma média da pressão em todo o seu volume, não é possível assumir que essa pressão represente a pressão no poço (AZIZ; SETTARI, 1979). Logo, uma das maiores dificuldades do acoplamento poço-reservatório é a de relacionar a pressão do bloco, que contém o poço, com a pressão de fato no poço (CARLSON, 2003).

Outras dificuldades adicionais que surgem são devidas às complexas interações entre o reservatório (meio poroso) e o poço (meio livre), ao cálculo da vazão de uma fase (no contexto multifásico) quando uma taxa de produção ou injeção de uma determinada fase é imposta, aos detalhes de completação, à presença de mais de um poço no interior de um volume finito e ao poço deslocado com relação ao centro do volume finito (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Independentemente das complexidades a serem incorporadas, a forma mais simples e utilizada de se relacionar a pressão nos volumes finitos contendo poços com a pressão no poço é através da vazão escrita em termos de um índice de produtividade (LIE, 2019), que é similar ao visto em Coats et al. (1974) e escrito de forma geral como

$$q_{\alpha sc_m} = -J_{\alpha_m} (p_{\alpha} - p_{wf_m}) \quad (36)$$

onde  $J_{\alpha}$  representa o índice de produtividade,  $p_{wf}$  a pressão no poço e  $m$  é o índice das células que contêm ao menos um trecho do poço. Para o óleo e a água pode-se usar expressões similares à Eq. (36), porém, o gás pode ser produzido também a partir da sua porção dissolvida no óleo e, portanto, ela deve possuir um termo a mais. Então, para cada fase a vazão pode ser escrita como:

$$q_{osc_m} = -J_{o_m} (p_{o_m} - p_{wf_m}) \quad (37)$$

para a vazão de óleo,

$$q_{wsc_m} = -J_{w_m} (p_{o_m} - P_{cow_m} - p_{wf_m}) \quad (38)$$

para a água e

$$q_{gsc_m} = -J_{g_m} (p_{o_m} + P_{cgo_m} - p_{wf_m}) - R_{s_m} J_{o_m} (p_{o_m} - p_{wf_m}) \quad (39)$$

para o gás.

Trabalhos como o de Schwabe e Brand (1967), van Poolen, Breitenbach e Thurnau (1968) e, principalmente, o de Peaceman (1978) mostram que o índice de produtividade para o caso multifásico pode ser escrito como

$$J_{\alpha_m} = G_{wf_m} \left( \frac{k_{r\alpha_m}}{\mu_{\alpha_m} B_{\alpha_m}} \right)$$

sendo que  $G_{wf}$  é o fator geométrico do poço. Para poços verticais ele é dado por (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$G_{wf_m} = \frac{2\pi\sqrt{k_{x_m}k_{y_m}}\Delta z_m}{\ln(r_{eq_m}/r_w)}$$

onde  $r_{eq}$  é o raio equivalente. Para a avaliação de  $r_{eq}$  utiliza-se a equação mais generalizada desenvolvida por Peaceman (1983), que leva em consideração os efeitos da anisotropia do meio e do uso de uma malha não-uniforme

$$r_{eq_m} = 0,28 \left\{ \frac{\left[ (k_{y_m}/k_{x_m})^{1/2} \Delta x_m^2 + (k_{x_m}/k_{y_m})^{1/2} \Delta y_m^2 \right]^{1/2}}{(k_{y_m}/k_{x_m})^{1/4} + (k_{x_m}/k_{y_m})^{1/4}} \right\}$$

O poço, via de regra, atravessa mais de uma célula da malha computacional, portanto, a vazão de produção de cada fase é a soma das respectivas vazões em cada camada, Eqs. (37), (38) e (39), isto é (CHEN, 2007)

$$q_{osc} = - \sum_m J_{o_m} (p_{o_m} - p_{wf_m})$$

para o óleo,

$$q_{wsc} = - \sum_m J_{w_m} (p_{o_m} - P_{cow_m} - p_{wf_m})$$

para a água e

$$q_{gsc} = - \sum_m [J_{g_m} (p_{o_m} + P_{cgo_m} - p_{wf_m}) + R_{s_m} J_{o_m} (p_{o_m} - p_{wf_m})]$$

para o gás. Portanto, a vazão total, soma da vazão total de cada fase, é

$$q_{sc} = - \sum_m [(J_{o_m} + J_{w_m} + J_{g_m} + R_{s_m} J_{o_m}) (p_{o_m} - p_{wf_m}) - J_{w_m} P_{cow_m} + J_{g_m} P_{cgo_m}] \quad (40)$$

A pressão do poço em cada célula que o contém, considerando-se o gradiente hidrostático no interior do poço (desprezando as perdas de carga devido à fricção), pode ser escrita em termos de uma pressão de referência (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001), ou seja,

$$p_{wf_m} = p_{wf_{ref}} + \bar{\gamma}_{wf} (Z_m - Z_{ref})$$

onde  $p_{wf_{ref}}$  é a pressão de referência do poço na profundidade  $Z_{ref}$  e  $\bar{\gamma}_{wf}$  é o peso específico

médios dos fluidos no interior do poço. Assim, a Eq (40) pode ser reescrita como

$$q_{sc} = - \sum_m \{ (J_{o_m} + J_{w_m} + J_{g_m} + R_{s_m} J_{o_m}) [p_{o_m} - p_{wf_{ref}} - \bar{\gamma}_{wf} (Z_m - Z_{ref})] - J_{w_m} P_{cow_m} + J_{g_m} P_{cgo_m} \} \quad (41)$$

e, desse modo, a presença de um poço implica a inclusão de mais uma equação ao sistema de equações oriundo da discretização das equações governantes. Então, a pressão do poço passa a ser mais uma incógnita do problema, caso a taxa de produção seja especificada ou vice-versa.

No que diz respeito aos poços de injeção, considera-se que apenas água ou gás são injetados, e a equação para o acoplamento poço-reservatório é similar à Eq. (36)

$$q_{\alpha sc_m} = -J_{i_m} (p_{\alpha} - p_{wf_m})$$

onde  $\alpha$  pode corresponder à água ou ao gás. Agora,  $J_{i_m}$  representa o índice de injetividade (LIE, 2019) e admite-se que a mobilidade do fluido injetado seja igual à mobilidade total do fluido na célula contendo o poço (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001), ou seja

$$J_{i_m} = \frac{G_{wf_m}}{B_{w_m}} \left( \frac{k_{rw_m}}{\mu_{w_m}} + \frac{k_{ro_m}}{\mu_{o_m}} + \frac{k_{rg_m}}{\mu_{g_m}} \right)$$

para a injeção de água ou

$$J_{i_m} = \frac{G_{wf_m}}{B_{g_m}} \left( \frac{k_{rw_m}}{\mu_{w_m}} + \frac{k_{ro_m}}{\mu_{o_m}} + \frac{k_{rg_m}}{\mu_{g_m}} \right)$$

para a injeção de gás.

Posto isso, a vazão total de injeção, diferentemente da de produção, é composta de apenas uma fase e tem-se que:

$$q_{wsc} = - \sum_m J_{i_m} [p_{o_m} - P_{cow_m} - p_{wf_{ref}} - \bar{\gamma}_{wf} (Z_m - Z_{ref})] \quad (42)$$

para a injeção de água e

$$q_{gsc} = - \sum_m J_{i_m} [p_{o_m} + P_{cgo_m} - p_{wf_{ref}} - \bar{\gamma}_{wf} (Z_m - Z_{ref})] \quad (43)$$

para a injeção de gás.

Em resumo, tem-se que o acoplamento poço-reservatório é modelado pela Eq. (41), para os poços de produção, e pelas Eqs. (42) e (43), para os poços de injeção. Bem

entendido que elas precisam ser resolvidas para que a vazão seja calculada, quando a pressão do poço é fornecida, ou para a determinação da pressão no poço, caso a vazão seja especificada. A forma como essas equações são incorporadas ao modelo discretizado, Eqs. (33), (34) e (35), depende do método escolhido para ser empregado na obtenção da solução dos sistemas de equações algébricas. Essa questão será abordada em um capítulo posterior.

## 4 LINEARIZAÇÃO E SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

O sistema acoplado de equações discretizadas, apresentado no Capítulo 3, da mesma forma que as EDPs das quais ele é originário, são não-lineares (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019). Neste trabalho, antes de se buscar a solução desse sistema de equações não-lineares, utiliza-se de técnicas iterativas envolvendo algum método de linearização, de modo a viabilizar o uso de métodos propostos para a resolução de sistemas lineares (FERZIGER; PERIĆ, 2002).

Nessas equações discretizadas, as não linearidades estão presentes via as transmissibilidades, a pressão capilar, o termo gravitacional, o termo de acúmulo e o termo fonte, já que são funções das variáveis dependentes pressão e saturações (AZIZ; SETTARI, 1979). Essas não linearidades podem ser divididas em dois grupos: as não linearidades fracas e as não linearidades fortes.

As não linearidades fracas são aquelas provenientes da dependência da pressão, como são os caso de  $\phi$  e de  $B_\alpha$  por exemplo, enquanto que as fortes são aquelas dependentes das saturações como, por exemplo, as que surgem nas pressões capilares e, principalmente, nas permeabilidades relativas (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). É possível verificar que as transmissibilidades  $T_{\alpha_f}$  e os termos fonte podem possuir tanto não linearidades dos tipos forte e fraca. Ademais, como o gás é compressível, o seu FVF pode ser considerado como introduzindo uma não linearidade forte (CHEN, 2007). Neste capítulo, abordam-se as formas empregadas para se efetuar a linearização em relação às incógnitas do sistema, que pode ser chamada de uma linearização temporal.

Já viu-se que as transmissibilidades presentes nas Eqs. (33), (34) e (35) devem ser avaliadas nas interfaces dos volumes finitos, enquanto que a pressão e as saturações são conhecidas apenas nos seus centros. Portanto, alguma forma de interpolação deve ser proposta para se aproximarem os seus valores, utilizando os valores das variáveis calculadas nos nós centrais dos blocos adjacentes (CHEN, 2007), que pode ser considerada uma linearização espacial. Dentre as alternativas mais comuns, utilizadas em tais situações, estão a média aritmética (simples ou ponderada), a média harmônica e a ponderação à montante (*upwind*) (FANCHI, 2018).

Para que uma completa linearização do termo de acúmulo possa ser efetuada, emprega-se uma expansão conservativa deste termo para evitar o aparecimento de instabilidades numéricas e erros na conservação de massa (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Nessa expansão, leva-se em consideração a “força” das não linearidades presentes no termo de acúmulo, como será destacado mais adiante.

Ao final do capítulo, aborda-se o tema da solução de sistemas de equações algébricas lineares, com uma breve discussão sobre os métodos mais comuns e, também, sobre o método iterativo de solução escolhido para aplicação no presente trabalho. O uso de

pré-condicionadores, que é uma forma de acelerar o processo de convergência na busca pela solução desses sistemas também é brevemente discutido.

#### 4.1 Avaliação das transmissibilidades nas interfaces dos volumes finitos

Quando da determinação das transmissibilidades, pode-se calculá-las a partir do produto de três coeficientes. Portanto, as Eqs. (30), (31) e (32) podem ser reescritas como

$$T_{\alpha_f} = \left( \frac{k_x A_x}{\Delta x} \right)_f \left( \frac{1}{\mu_\alpha B_\alpha} \right)_f k_{r\alpha_f} \quad f = w, e$$

para a direção  $x$ ,

$$T_{\alpha_f} = \left( \frac{k_y A_y}{\Delta y} \right)_f \left( \frac{1}{\mu_\alpha B_\alpha} \right)_f k_{r\alpha_f} \quad f = n, s$$

para a direção  $y$  e

$$T_{\alpha_f} = \left( \frac{k_z A_z}{\Delta z} \right)_f \left( \frac{1}{\mu_\alpha B_\alpha} \right)_f k_{r\alpha_f} \quad f = a, b$$

para a direção  $z$ , ou ainda, de forma generalizada

$$\eta_f = G_f F_{p_f} F_{S_f} \tag{44}$$

onde  $G_f$  introduz os efeitos provenientes das propriedades que são independentes da pressão e/ou saturação (geometria e permeabilidade absoluta),  $F_{p_f}$  aqueles oriundos da dependência da pressão e  $F_{S_f}$  os provenientes da variação da saturação. O índice  $f$  representa a interface na qual está se avaliando a transmissibilidade ( $w$ ,  $e$ ,  $n$ ,  $s$ ,  $a$  ou  $b$ ). A forma generalizada (44), além da transmissibilidade, também pode ser estendida ao caso do produto da transmissibilidade pelo peso específico:  $T_{\alpha_f} \gamma_{\alpha_f}$ , ou pela razão de solubilidade:  $T_{o_f} R_{s_f}$  ou, ainda, pela razão de solubilidade e pelo peso específico:  $T_{o_f} R_{s_f} \gamma_{o_f}$ . Quando do tratamento desses casos, a função  $\eta_f$  irá diferir apenas no que diz respeito à função dependente da pressão:  $F_{p_f}$ .

Inicia-se, na sequência, com o tratamento do termo  $G_f$ . Nesse caso, utiliza-se uma média harmônica e, tomando como exemplo a face  $w$ , tem-se que (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$G_w = \frac{2A_{x_w} k_{x_P} k_{x_W}}{k_{x_P} \Delta x_W + k_{x_W} \Delta x_P}$$

onde a área  $A_{x_w}$  é a da interface entre os volumes finitos vizinhos e, como neste trabalho

foi utilizada uma malha retangular, essa área é constante. Para as outras interfaces, expressões análogas são empregadas. A escolha da média harmônica é justificada pela própria Lei de Darcy, como ressaltado em [Chen \(2007\)](#).

Já na avaliação do termo dependente da pressão nas interfaces, utiliza-se uma média aritmética. Ela pode ser calculada como a média de fato entre os valores de  $F_p$  nas duas células vizinhas, mediante o cômputo de  $F_p$  a uma pressão média ou, ainda, calcular  $F_p$  na interface mediante o uso da média das propriedades ([ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001](#)). Aqui, optou-se pela primeira opção, com uma ponderação empregando o comprimento do volume finito. Por exemplo, para a face  $w$ ,

$$F_{pw} = \frac{1}{\Delta x_W + \Delta x_P} \left( \frac{1}{\mu_P B_P} \Delta x_W + \frac{1}{\mu_W B_W} \Delta x_P \right)$$

e procede-se de modo similar em relação às outras faces.

O termo dependente da saturação, ao ser aproximado por média aritmética, pode gerar resultados que são fisicamente incorretos. Logo, usualmente utiliza-se uma aproximação do tipo *upwind* de primeira ordem ([CHEN, 2007](#)), onde o valor atribuído na interface depende do sentido do escoamento. Como é a permeabilidade relativa a propriedade que depende da saturação, o seu valor nas interfaces  $w$  e  $e$  são dados por:

$$k_{r\alpha_w} = \begin{cases} k_{r\alpha_W} & \text{se } u_{\alpha_w} \geq 0 \\ k_{r\alpha_P} & \text{se } u_{\alpha_w} < 0 \end{cases}$$

para a face  $w$  e

$$k_{r\alpha_e} = \begin{cases} k_{r\alpha_P} & \text{se } u_{\alpha_e} \geq 0 \\ k_{r\alpha_E} & \text{se } u_{\alpha_e} < 0 \end{cases}$$

para a face  $e$ . Uma vez mais, um procedimento semelhante é aplicado em se tratando das demais faces. Como é sabido, o esquema *upwind* aqui usado é uma aproximação apenas de primeira ordem, o que indica que o resultado produzido terá uma menor acurácia, haja vista o aparecimento de uma difusão numérica (falsa difusão) ([VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007](#)). Contudo, o seu emprego não resultará no aparecimento de oscilações espúrias e com o uso de uma malha computacional adequada é possível mitigar esse efeito de difusão.

Nas fronteiras, a estimativa dos termos dependentes da pressão  $F_{pf}$  e da saturação  $F_{Sf}$  é feita de forma diferente. Como mencionado no Capítulo 3, a pressão e as saturações são conhecidas em toda a fronteira, independentemente do tipo de condição de contorno imposta. Portanto, os termos  $F_{pf}$  e  $F_{Sf}$  são facilmente calculados nas fronteiras. Por outro lado, o termo  $G_f$  é calculado considerando somente a metade do comprimento do volume finito (Capítulo 3) e a permeabilidade absoluta na fronteira é extrapolada a partir dos

valores conhecidos nos dois blocos vizinhos mais próximos.

## 4.2 Expansões dos termos de acúmulo

A expansão do termo de acúmulo é um procedimento efetuado de modo a expressá-lo em termos das incógnitas do problema (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019), ou seja, em termos da pressão e das saturações. Como tem-se três equações governantes, Eqs. (33), (34) e (35), abordar-se-ão os seguintes termos:

$$\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)_P^{n+1} - \left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)_P^n$$

para a equação do óleo,

$$\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)_P^{n+1} - \left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)_P^n$$

para equação da água e

$$\left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s S_o}{B_o}\right)_P^{n+1} - \left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s S_o}{B_o}\right)_P^n$$

para equação do gás, com  $S_o = 1 - S_w - S_g$ .

Como as equações não são lineares, reforça-se mais uma vez que é recomendado que um esquema conservativo seja usado nas expansões a fim de se evitar o aparecimento de erros no balanço material e, conseqüentemente, instabilidades numéricas (AZIZ; SETTARI, 1979). Ertekin, Abou-Kassem e King (2001) propôs uma forma genérica para a expansão conservativa do termo de acúmulo. Introduzindo-se a notação

$$\Delta_t \varphi = \varphi^{n+1} - \varphi^n$$

e, tomando-se  $\varphi = UVXY$ , tem-se diretamente que

$$\Delta_t (UVXY) = (UVXY)^{n+1} - (UVXY)^n$$

e a expansão conservativa é preconizada na forma:

$$\Delta_t (UVXY) = (VXY)^n \Delta_t U + U^{n+1} (XY)^n \Delta_t V + (UV)^{n+1} \Delta_t X + (UVX)^{n+1} \Delta_t Y$$

admitindo-se que o grau da não linearidade seja crescente de  $U$  para  $Y$ , isto é,  $U$  é a propriedade associada à não linearidade mais fraca enquanto que  $Y$  à mais forte (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019).

Em seguida, faz-se  $U = \phi$ ,  $V = 1/B_\alpha$ ,  $X = R_s$  e  $Y = S_\alpha$ . Caso alguma das propriedades não esteja presente ela assume o valor unitário. Para a equação do gás, o processo é dividido em duas partes, uma para  $\phi S_g/B_g$  e outra para  $\phi R_s S_o/B_o$ . Por fim, resta escrever a variação no tempo das propriedades em termos das incógnitas principais ( $p_o$ ,  $S_w$  e  $S_g$ ). Como  $\phi$ ,  $1/B_\alpha$  e  $R_s$  são dependentes da pressão, suas variações no tempo podem ser escritas como

$$\Delta_t U = \Delta_t \phi = \phi' \Delta_t p_o$$

$$\Delta_t V = \Delta_t \left( \frac{1}{B_\alpha} \right) = \left( \frac{1}{B_\alpha} \right)' \Delta_t p_o$$

e

$$\Delta_t X = \Delta_t R_s = R'_s \Delta_t p_o$$

onde

$$\phi' = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{p^{n+1} - p^n}$$

$$\left( \frac{1}{B_\alpha} \right)' = \frac{(1/B_\alpha)^{n+1} - (1/B_\alpha)^n}{p^{n+1} - p^n}$$

$$R'_s = \frac{R_s^{n+1} - R_s^n}{p^{n+1} - p^n}$$

No caso da variação da saturação,  $\Delta_t Y = \Delta_t S_\alpha$  já encontra-se escrito em termos das variáveis principais e, portanto, nenhuma ação precisa ser tomada. A linearização dos termos avaliados no tempo  $n + 1$  é feita mediante um processo iterativo, com as propriedades a serem avaliadas nesse tempo sendo aproximadas pelos seus respectivos valores conhecidos na iteração mais recente (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

Após terem sido realizadas todas as expansões conservativas e lembrando, mais uma vez, que  $S_o = 1 - S_w - S_g$ , as Eqs. (33), (34) e (35) podem ser reescritas como

$$C_{op} \Delta_t p_o + C_{ow} \Delta_t S_w + C_{og} \Delta_t S_g = \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_P^{n+1} + q_{o_{scP}}^{n+1} \quad (45)$$

para o óleo,

$$C_{wp} \Delta_t p_o + C_{ww} \Delta_t S_w = \Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P_{cow} - \gamma_w \Delta Z)]_P^{n+1} + q_{w_{scP}}^{n+1} \quad (46)$$

para a água e

$$\begin{aligned}
C_{gp}\Delta_t p_o + C_{gw}\Delta_t S_w + C_{gg}\Delta_t S_g &= \Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta Z)]_P^{n+1} \\
&+ \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_P^{n+1} + q_{gscP}^{n+1}
\end{aligned} \tag{47}$$

para o gás, onde

$$C_{op} = \frac{V_P}{\Delta t} \left[ \frac{\phi'_P}{B_{oP}^n} + \phi_P^{n+1} \left( \frac{1}{B_o} \right)'_P \right] (1 - S_{wP}^n - S_{gP}^n)$$

$$C_{ow} = C_{og} = -\frac{V_P}{\Delta t} \left( \frac{\phi}{B_o} \right)_P^{n+1}$$

$$C_{wp} = \frac{V_P}{\Delta t} \left[ \frac{\phi'_P}{B_{wP}^n} + \phi_P^{n+1} \left( \frac{1}{B_w} \right)'_P \right] S_w^n$$

$$C_{ww} = \frac{V_P}{\Delta t} \left( \frac{\phi}{B_w} \right)_P^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
C_{gp} &= \frac{V_P}{\Delta t} \left\{ \left[ \frac{\phi'_P}{B_{oP}^n} + \phi_P^{n+1} \left( \frac{1}{B_o} \right)'_P \right] R_{sP}^n + \left( \frac{\phi}{B_o} \right)_P^{n+1} R'_{sP} \right\} (1 - S_{wP}^n - S_{gP}^n) \\
&+ \frac{V_P}{\Delta t} \left[ \frac{\phi'_P}{B_{gP}^n} + \phi_P^{n+1} \left( \frac{1}{B_g} \right)'_P \right] S_{gP}^n
\end{aligned}$$

$$C_{gw} = -\frac{V_P}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\phi}{B_o} \right)_P^{n+1} R_{sP}^{n+1} \right]$$

$$C_{gg} = \frac{V_P}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\phi}{B_g} \right)_P^{n+1} - \left( \frac{\phi}{B_o} \right)_P^{n+1} R_{sP}^{n+1} \right]$$

Finda a etapa da expansão conservativa dos termos de acúmulo, ainda resta linearizar os termos que se encontram do lado direito do sinal da igualdade das Eqs. (45), (46) e (47) e que são avaliados no tempo  $n + 1$ . Esse é um assunto para a próxima seção.

### 4.3 Linearização

A linearização temporal (muitas vezes chamada apenas de linearização) é o processo de aproximar os coeficientes, dependentes das incógnitas pressão e saturações, que devem ser avaliados no tempo futuro  $n + 1$ . Destacam-se aqui três métodos de linearização no tempo: linearização explícita, iteração simples e linearização totalmente implícita (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019).

Na linearização explícita, todos os coeficientes que deveriam ser avaliados no tempo  $n + 1$  são, na prática, determinados no instante de tempo  $n$ , isto é,

$$T_{\alpha_f}^{n+1} \approx T_{\alpha_f}^n$$

tomando-se como exemplo a transmissibilidade. No entanto, esse tipo de aproximação leva a um método condicionalmente estável e cuja solução é muito sensível à variação de pressão ou saturação (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001), o que faz com que essa opção seja viável apenas para um número limitado de problemas.

A iteração simples, ou iteração de Picard (PUTTI; PANICONI, 1995; NICK et al., 2013), aproxima os termos em  $n + 1$  por seus valores obtidos no nível iterativo mais recente, isto é (AZIZ; SETTARI, 1979), em se tratando da transmissibilidade,

$$T_{\alpha_f}^{n+1} \approx T_{\alpha_f}^{n+1,v}$$

onde  $v$  é o nível iterativo mais recente onde as propriedades são conhecidas, o que faz com que  $v + 1$  seja a próxima iteração na qual se deseja obter o valor das incógnitas.

A linearização totalmente implícita aproxima o termo no tempo  $n + 1$  pelo seu valor no nível iterativo  $v$  acrescida da taxa de variação em relação a todas as incógnitas (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019), isto é,

$$\begin{aligned} T_{\alpha_w}^{n+1} \approx T_{\alpha_w}^v &+ \left. \frac{\partial T_{\alpha_w}}{\partial p_{oW}} \right|^v \delta p_{oW}^{v+1} + \left. \frac{\partial T_{\alpha_w}}{\partial p_{oP}} \right|^v \delta p_{oP}^{v+1} + \left. \frac{\partial T_{\alpha_w}}{\partial S_{wW}} \right|^v \delta S_{wW}^{v+1} \\ &+ \left. \frac{\partial T_{\alpha_w}}{\partial S_{wP}} \right|^v \delta S_{wP}^{v+1} + \left. \frac{\partial T_{\alpha_w}}{\partial S_{gW}} \right|^v \delta S_{gW}^{v+1} + \left. \frac{\partial T_{\alpha_w}}{\partial S_{gP}} \right|^v \delta S_{gP}^{v+1} \end{aligned}$$

para a transmissibilidade na face  $w$ , onde  $v$  e  $v + 1$  continuam representando os níveis iterativos no tempo  $n + 1$ , que por questões de simplificação foi suprimido, e

$$\delta \eta^{v+1} = \eta^{v+1} - \eta^v$$

A linearização totalmente implícita, em geral, permite o uso de maiores passos de tempo, porém, a um maior custo computacional por passo de tempo (CHEN; HUAN; MA,

2006). O alto custo computacional está ligado à avaliação das derivadas, que pode ser minimizado usando-se as derivadas calculadas no tempo  $n$  (explícitas) (AZIZ; SETTARI, 1979), ou as derivadas calculadas a partir de secantes (método semi-implícito) (NOLEN; BERRY, 1972), ou ainda negligenciar as derivadas das não linearidades fracas (derivadas em relação à pressão) (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001), contudo perde-se em estabilidade quando comparado à linearização totalmente implícita.

O tipo de linearização a ser empregada depende da estratégia de solução adotada. Geralmente, pode-se dizer que as linearizações explícitas tendem a ser menos custosas do ponto de vista computacional, porém, o passo de tempo deve ser severamente limitado. Por outro lado, uma linearização totalmente implícita possibilita o emprego de passos de tempo maiores, mas acarreta em um maior custo por passo de tempo. As estratégias de solução e as suas correspondentes linearizações serão abordadas no próximo capítulo.

#### 4.4 Passo de tempo variável

Idealmente, um método numérico deveria fornecer a solução almejada, dadas as condições auxiliares apropriadas, em apenas um passo de tempo. No entanto, por questões envolvendo o erro de truncamento e a estabilidade do método numérico isso não é possível. Então, os valores dos incrementos de tempo são limitados, principalmente, por esses dois fatores. Entretanto, quanto menor o passo de tempo, mais tempo é necessário para a conclusão de uma simulação para um dado tempo final físico estipulado. O uso de um passo de tempo variável visa, portanto, a aumentar a eficiência computacional do método numérico sem comprometer a estabilidade ou a acurácia do próprio método (TODD; O'DELL; HIRASAKI, 1972; ISLAM; HYE; MAMUN, 2017).

É possível obter diferentes estratégias igualmente eficientes para variação do passo de tempo. Essa variação pode estar baseada, por exemplo, no quanto uma dada propriedade variou no último passo de tempo (em geral as saturações) (TODD; O'DELL; HIRASAKI, 1972; CHEN; HUAN; LI, 2004; PACHECO; SILVA; MALISKA, 2016), na condição de estabilidade CFL (HURTADO; MALISKA; SILVA, 2006), ou ainda no número de iterações necessárias para alcançar a convergência no último passo de tempo (ISLAM; HYE; MAMUN, 2017).

Uma estratégia embasada no número de iterações, utilizada nesse trabalho, pode ser descrita como

$$\Delta t_n = \begin{cases} n_{incr} \Delta t_{n-1} & \text{se } it_{n-1} \leq it_{incr} \\ \Delta t_{n-1} & \text{se } it_{incr} < it_{n-1} \leq it_{decr} \\ n_{decr} \Delta t_{n-1} & \text{se } it_{n-1} > it_{decr} \end{cases}$$

onde  $n_{incr}$  é um valor maior que 1 que representa o fator de crescimento do passo de tempo enquanto que  $n_{decr}$  é um valor menor que 1 representando o fator de decrescimento,  $it_{n-1}$  é o número de iterações que foram necessárias para se obter a convergência no passo de tempo anterior e  $it_{incr}$  e  $it_{decr}$  são os limites de iterações para o aumento e a redução do passo de tempo e, evidentemente,  $it_{incr} < it_{decr}$ . Em estratégias desse tipo, é comum se impor um limite máximo para o valor do incremento de tempo, de forma que o erro de truncamento não cresça indefinidamente, isto é  $\Delta t_n \leq \Delta t_{max}$ .

#### 4.5 Métodos de solução de sistemas de equações lineares

Independente do tipo de linearização, ao fim desse processo as equações discretizadas formam um sistema acoplado de equações algébricas lineares. Tal sistema pode ser representado na forma vetorial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz dos coeficientes,  $\mathbf{x}$  o vetor cujas componentes são as incógnitas e  $\mathbf{b}$  o vetor composto pelos termos conhecidos. Na maioria das situações, o tempo dedicado à resolução numérica dos sistemas de equações corresponde ao maior esforço computacional quando da execução do simulador e, conseqüentemente, aquele que demanda o maior percentual do tempo total de simulação (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

Conforme será abordado no próximo capítulo, o sistema formado pelas Eqs. (45), (46) e (47) linearizadas pode ser resolvido simultaneamente ou de forma desacoplada. Considerando um número  $N$  de volumes finitos, a solução simultânea implica somente um sistema com  $3N$  incógnitas e uma matriz de coeficientes da ordem de  $3N \times 3N$ , enquanto que as soluções desacopladas geram mais de um sistema contendo  $N$  ou  $2N$  incógnitas e matrizes da ordem de  $N \times N$  ou  $2N \times 2N$  (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019). Isso indica, em princípio, que a solução simultânea do sistema de equações levaria a um maior custo computacional, enquanto que os métodos desacoplados seriam menos custosos do ponto de vista computacional (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; PACHECO; SILVA; MALISKA, 2016).

Independentemente da resolução simultânea ou desacoplada, a matriz  $A$  dos coeficientes é esparsa e, em geral, não é simétrica, com a sua ordem sujeita ao número de volumes finitos  $N$ , podendo variar de centenas a milhões (CHEN; HUAN; MA, 2006). Métodos diretos (como a eliminação gaussiana) não são usados com frequência pois são, comumente, mais custosos e o conseqüente ganho na acurácia da solução não compensa o alto custo computacional (FERZIGER; PERIĆ, 2002; BERTACCINI; DURASTANTE, 2018), a não ser em casos raros como o do escoamento unidimensional (AZIZ; SETTARI, 1979).

Por conta disso, o uso de métodos iterativos é a opção frequentemente utilizada (CHEN; HUAN; MA, 2006).

Os métodos iterativos buscam, a partir de uma aproximação inicial, melhorar a solução numérica a cada iteração (BERTACCINI; DURASTANTE, 2018) e, após um número finito de operações, tem-se a solução convergida, dentro de uma tolerância previamente estabelecida. Os métodos iterativos mais aplicados são os do chamado subespaço de Krylov, que reúnem uma vasta gama de métodos. Dentre estas opções encontra-se o método dos Gradientes Conjugados (CG) (HESTENES; STIEFEL, 1952), que é um método muito eficiente, porém, restrito a matrizes  $\mathbf{A}$  simétricas definidas positivas. Matrizes desse tipo são comuns nas simulações envolvendo o escoamento de apenas uma fase (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001), contudo, nos escoamentos multifásicos ou na presença de poços transpassando várias células, a matriz dos coeficientes não será simétrica (CHEN; HUAN; MA, 2006; WU, 2016).

Entretanto, existem outras possibilidades como o método dos Gradientes Biconjugados (BCG) (LANCZOS, 1952), que é capaz de resolver sistemas nos quais as matrizes dos coeficientes não são simétricas, porém ele pode apresentar dificuldades no que diz respeito à convergência e, principalmente, uma maior dificuldade de implementação, já que necessita da avaliação da matriz dos coeficientes transposta,  $\mathbf{A}^T$ , e é raramente utilizado (LIN; YANG; CHIENG, 1995; CHUANG; CHIENG, 1995; CHEN; HUAN; MA, 2006). Um método que é frequentemente empregado no caso de matrizes que não são simétricas é o *Generalized Minimal Residual Method* (GMRES) (SAAD; SCHULTZ, 1986), que é um método bastante robusto, contudo, na grande maioria das aplicações ele necessita de um condicionador altamente efetivo para que o seu uso seja justificado frente a outros métodos (GHAI; LU; JIAO, 2019).

Em contrapartida, o método dos Gradientes Biconjugados Estabilizado (BiCGSTAB) (VAN DER VORST, 1992) é, de certa forma, uma combinação do BCG e do GMRES, apresentando uma convergência melhorada em relação ao primeiro e um menor custo computacional em relação ao segundo (CHEN; HUAN; MA, 2006). O BiCGSTAB é menos robusto que o GMRES e, em casos muito raros, o primeiro pode não convergir para uma solução que o segundo é capaz de alcançar (GHAI; LU; JIAO, 2019). Entretanto, em diversas situações, o BiCGSTAB converge em menor tempo que o GMRES (LA CRUZ; RAYDAN, 2008; AMRITKAR et al., 2015); sendo assim, uma opção altamente eficiente e foi o escolhido para aplicação no presente trabalho. Melhorias para o método BiCGSTAB já foram propostas (GUTKNECHT, 1993; SLEIJPEN; FOKKEMA, 1993; AMRITKAR et al., 2015), contudo, a sua versão clássica ainda é bastante utilizada e disponível em diversos *softwares* e bibliotecas (GHAI; LU; JIAO, 2019). O Algoritmo 1 apresenta os passos para a implementação do método clássico, como apresentado originalmente por van der Vorst (1992).

Deve-se chamar a atenção para o fato de que os métodos aqui citados têm a sua

---

**Algoritmo 1: BiCGSTAB.**


---

```

1  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$  /*  $\mathbf{x}_0 =$  estimativa inicial */
2 Escolher  $\hat{\mathbf{r}}_0$  tal que  $\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{r}_0 \neq 0$  (Ex:  $\hat{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_0$ )
3  $\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1$ 
4  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$ 
5 para  $i = 1, 2, 3, \dots$ , faça
6    $\rho_i = \hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{r}_{i-1}$ 
7    $\beta = (\rho_i / \rho_{i-1})(\alpha / \omega_{i-1})$ 
8    $\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_{i-1} + \beta(\mathbf{p}_{i-1} - \omega_{i-1}\mathbf{v}_{i-1})$ 
9    $\mathbf{v}_i = \mathbf{A}\mathbf{p}_i$ 
10   $\alpha = \rho_i / (\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{v}_i)$ 
11   $\mathbf{s} = \mathbf{r}_{i-1} - \alpha\mathbf{v}_i$ 
12   $\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ 
13   $\omega_i = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}) / (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})$ 
14   $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \alpha\mathbf{p}_i + \omega_i\mathbf{s}$ 
15   $\mathbf{r} = \mathbf{s} - \omega\mathbf{t}$ 
16  se  $\mathbf{x}_i$  for acurado o suficiente então sair
17   $\mathbf{r}_i = \mathbf{s} - \omega_i\mathbf{t}$ 

```

---

utilização inviabilizada em diversas situações, seja devido a uma convergência lenta ou pela própria incapacidade de convergir, sem o uso de preconditionadores (CHEN; HUAN; MA, 2006) que, via de regra, melhoram os métodos de solução de sistemas lineares no sentido de acelerar e favorecer a convergência deles (FERZIGER; PERIĆ, 2002). A ideia do preconditionamento é a de modificar, de alguma forma, o sistema original de forma a tornar a sua solução mais eficiente (SAAD, 2003).

Normalmente, considera-se o uso de uma matriz  $\mathbf{K}$  inversível, chamada de matriz de preconditionamento ou preconditionador, que possui características semelhantes às da matriz dos coeficientes  $\mathbf{A}$ , como o padrão de esparsidade, e que pode ser fatorada em  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ , de forma que (BERTACCINI; DURASTANTE, 2018)

$$\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}_2^{-1}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{b} \quad (48)$$

onde  $\mathbf{x} = \mathbf{K}_2^{-1}\tilde{\mathbf{x}}$ .

Ressalta-se que a Eq. (48) representa a forma geral para o uso de um preconditionamento. Os casos particulares ocorrem quando  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{I}$  (matriz identidade) e tem-se o chamado preconditionamento à esquerda e quando  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{I}$  à direita (VAN DER VORST, 1992). No caso do preconditionamento à esquerda, resolve-se apenas o sistema modificado  $\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{b}$ , enquanto que com o preconditionamento à direita soluciona-se  $\mathbf{A}\mathbf{K}_2^{-1}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$  e, em seguida,  $\mathbf{K}_2\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ .

Na prática, quando da aplicação eficiente dos métodos do subespaço de Krylov com preconditionadores, os seus respectivos algoritmos são levemente modificados (BERTACCINI; DURASTANTE, 2018). Isso posto, o Algoritmo 2 apresenta a forma preconditionada

do método do gradiente biconjugado estabilizado (PBiCGSTAB), conforme descrito por van der Vorst (1992).

---

**Algoritmo 2:** PBiCGSTAB.

---

```

1  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$  /*  $\mathbf{x}_0 =$  estimativa inicial */
2 Escolher  $\hat{\mathbf{r}}_0$  tal que  $\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{r}_0 \neq 0$  (Ex:  $\hat{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_0$ )
3  $\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1$ 
4  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$ 
5 para  $i = 1, 2, 3, \dots$ , faça
6    $\rho_i = \hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{r}_{i-1}$ 
7    $\beta = (\rho_i / \rho_{i-1})(\alpha / \omega_{i-1})$ 
8    $\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_{i-1} + \beta(\mathbf{p}_{i-1} - \omega_{i-1}\mathbf{v}_{i-1})$ 
9    $\mathbf{y} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}_i$ 
10   $\mathbf{v}_i = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 
11   $\alpha = \rho_i / (\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{v}_i)$ 
12   $\mathbf{s} = \mathbf{r}_{i-1} - \alpha\mathbf{v}_i$ 
13   $\mathbf{z} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{s}$ 
14   $\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ 
15   $\omega_i = (\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{t} \cdot \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{s}) / (\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{t} \cdot \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{t})$ 
16   $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \alpha\mathbf{p}_i + \omega_i\mathbf{s}$ 
17   $\mathbf{r} = \mathbf{s} - \omega\mathbf{t}$ 
18  se  $\mathbf{x}_i$  for acurado o suficiente então sair
19   $\mathbf{r}_i = \mathbf{s} - \omega_i\mathbf{t}$ 

```

---

Uma leitura atenta do Algoritmo 2 mostra que o método é capaz de lidar tanto com o condicionamento à esquerda quanto à direita. Sendo que não há diferença na construção da matriz de condicionamento seja ele à esquerda ou à direita; entretanto, o comportamento da convergência e, conseqüentemente, a eficiência podem variar (SAAD, 2003) e, como observado por Ghai, Lu e Jiao (2019), o uso do condicionamento à direita tende a ser melhor do que o à esquerda e, portanto, os condicionadores aqui utilizados são desse tipo.

Em se tratando da proposição do condicionador  $\mathbf{K}$ , há na literatura diversas opções e esta é uma área de pesquisa que produz, recorrentemente, novas alternativas (LIU; WANG; CHEN, 2016; MOHAJERI et al., 2020). O condicionador mais simples é o chamado de Jacobi (ou diagonal), onde a matriz  $\mathbf{K}$  é uma matriz diagonal contendo os elementos da diagonal principal da matriz dos coeficientes  $\mathbf{A}$  (BERTACCINI; DURASTANTE, 2018). Apesar de não proporcionar uma aceleração significativa na convergência, em comparação a outros condicionadores, devido à sua simplicidade ele é um condicionador muito fácil de ser implementado e o custo computacional referente à sua construção é mínimo (SAAD, 2003), fazendo com que seja comumente um dos primeiros condicionadores a serem testados.

Um outro tipo de condicionamento é dado pela classe ILU (*incomplete LU*), onde busca-se fatorar a matriz  $\mathbf{A}$  mediante o produto de uma matriz triangular inferior  $\mathbf{L}$

(*Lower*) e uma triangular superior  $\mathbf{U}$  (*Upper*). Caso as matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{U}$  sejam construídas de forma a representar exatamente a matriz  $\mathbf{A}$ , ou seja  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ , a solução do sistema é obtida mediante a resolução de dois subsistemas via substituições sucessivas (BERTACCINI; DURASTANTE, 2018). Nesse caso, a fatoração leva a um método direto de solução de sistemas lineares e ele é extremamente ineficiente quando a matriz  $\mathbf{A}$  é esparsa e de elevada ordem, como é o caso em problemas de escoamentos multidimensionais (CHEN; HUAN; MA, 2006). Entretanto, ao se substituir a matriz dos coeficientes por apenas uma aproximação,  $\mathbf{A} \approx \mathbf{LU}$ , tem-se um preconditionador do tipo ILU (SAAD, 2003). Nessa decomposição as matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{U}$  continuam sendo matrizes triangulares e esparsas. Além disso, quanto mais a fatoração se aproximar da fatoração completa, a convergência será atingida em um menor número de iterações.

Nos casos onde as matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{U}$  possuem o mesmo padrão de esparsidade que o da matriz  $\mathbf{A}$  tem-se o chamado método ILU(0) (MOHAJERI et al., 2020). Já quando se perde a esparsidade de  $\mathbf{A}$ , aumenta-se o custo computacional associado à construção do preconditionador, porém, aproxima-se mais da fatoração completa e, portanto, ganha-se em eficiência quando da solução do sistema linear (CHEN; HUAN; MA, 2006). Então, diz-se que o preconditionador é do tipo ILU( $l$ ), onde  $l$  representa o quanto de “preenchimento” (*fill-in*) foi permitido, isto é, quanto maior  $l$  maior será o número de não-zeros adicionados às matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{U}$ . O Algoritmo 3 corresponde ao algoritmo de implementação do preconditionador ILU(0) conforme disponibilizado em Saad (2003), onde  $NZ(\mathbf{A})$  representa os elementos diferentes de zero em  $\mathbf{A}$ . No presente trabalho é aplicado, quando possível, os preconditionadores de Jacobi e ILU(0).

---

**Algoritmo 3:** ILU(0)

---

```

1 para  $i = 2, \dots, N$  faça
2   para  $k = 1, \dots, i - 1$  e  $(i, k) \in NZ(\mathbf{A})$  faça
3      $a_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$ 
4     para  $j = k + 1, \dots, N$  e  $(i, j) \in NZ(\mathbf{A})$  faça
5        $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$ 

```

---

Deve-se ressaltar que no Algoritmo 3 não aparecem explicitamente as matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{U}$ , mas apenas os seus elementos. Evidentemente, os elementos que se encontram abaixo da diagonal principal formam a matriz  $\mathbf{L}$  e os que se encontram acima, a matriz  $\mathbf{U}$ . Nessa decomposição, assume-se que a diagonal principal da matriz  $\mathbf{L}$  é formada apenas por elementos cujos valores são iguais a 1 e, portanto, os elementos da diagonal principal fornecidos pelo algoritmo aparecem na matriz  $\mathbf{U}$ .

## 5 MÉTODOS DE SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O MODELO TRIFÁSICO

O escoamento trifásico em meios porosos, como mostrado nos capítulos precedentes, envolve a solução de três equações cujas variáveis dependentes são a pressão, a saturação da água e a saturação do gás. Considerando o processo apresentado no Capítulo 3, nota-se que há mais de uma maneira de se resolverem as equações algébricas provenientes das suas discretizações, levando em conta, por exemplo, o tipo de linearização aplicada ou, ainda, se vai-se resolvê-las de forma acoplada ou não. O propósito agora é o de descrever brevemente os métodos estudados e, também, apresentar o objetivo principal do trabalho, que é o de avaliar o potencial do método sequencial Picard-Newton no contexto dos escoamentos trifásicos, expandindo o trabalho iniciado em Freitas (2017), onde foi feita uma análise similar, porém limitada aos escoamentos bifásicos.

Em um escoamento real, tanto a pressão quanto as saturações variam simultaneamente. Logo, uma escolha natural seria o uso de um método que resolvesse as Eqs. (45), (46) e (47) de forma simultânea (CHEN, 2007). O método de Solução Simultânea (SS) (DOUGLAS; PEACEMAN; RACHFORD, 1959) resolve, apenas, um sistema de equações com  $3N$  incógnitas e cuja matriz dos coeficientes é da ordem de  $3N \times 3N$ . Portanto, é um método caro do ponto de vista computacional e, para que o seu uso seja justificado, uma linearização totalmente implícita deve ser aplicada, de forma a permitir o uso de passos de tempo maiores sem comprometer a estabilidade do método (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Dessa linearização resulta o método totalmente implícito que será discutido na Seção 5.1.

Em contrapartida, o método IMPES (STONE; GARDNER, 1961) é uma alternativa mais fácil de ser implementada e que demanda um menor tempo computacional por passo de tempo quando comparado aos métodos simultâneos, visto que a construção e a resolução de um sistema cuja matriz dos coeficientes é da ordem de  $3N \times 3N$ , para a solução simultânea, é muito custosa (CHEN; HUAN; LI, 2004). Nesse método, a pressão e as saturações são resolvidas de forma segregada. A pressão é calculada implicitamente, para uma matriz dos coeficientes da ordem de  $N \times N$ , enquanto que as saturações são calculadas, em sequência, explicitamente (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Uma discussão sobre o tipo de linearização empregada, bem como mais detalhes sobre o método, encontram-se na Seção 5.2.

Na Seção 5.3, encontra-se o detalhamento do método sequencial Picard-Newton. O método consiste em uma tentativa de se combinarem a facilidade de implementação e o baixo custo computacional do método IMPES, com a robustez do método totalmente implícito. Isso é feito uma vez que se abandona o cálculo explícito das saturações, do método IMPES, e emprega-se uma linearização totalmente implícita aos termos dependentes da saturação, que são aqueles que apresentam as não linearidades mais fortes, nas equações

que antes eram resolvidas explicitamente. Assim sendo, a pressão é solucionada de forma idêntica à utilizada no método IMPES, embora as saturações sejam determinadas de modo mais próximo ao do método totalmente implícito. Como o método IMPES, no escoamento trifásico, necessita que duas saturações (água e gás) sejam calculadas explicitamente, duas opções de cálculo das saturações “surtem” no método Picard-Newton: as saturações sendo calculadas simultaneamente ou de forma segregada, conforme será detalhado mais a frente.

### 5.1 Método totalmente implícito

É sabido que o método totalmente implícito é amplamente utilizado, principalmente devido ao uso de um passo de tempo teoricamente irrestrito, não obstante o fato de que a resolução acoplada das equações demanda um grande esforço computacional (MONTEAGUDO; FIROOZABADI, 2007; KWOK; TCHELEPI, 2007; YANG; YANG; SUN, 2016). Como é do conhecimento geral, o sistema acoplado surge da linearização totalmente implícita, o que implica a construção da matriz Jacobiana contendo as derivadas parciais em relação a cada incógnita do problema e o consequente uso do método de Newton-Raphson para que a solução do sistema seja obtida (LIE, 2019).

Em linhas gerais, o método pode ser expresso na forma (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$\mathbf{J}^v \delta \mathbf{X}^{v+1} = -\mathbf{R}^v \quad (49)$$

onde  $\mathbf{J}$  representa a matriz Jacobiana,  $\mathbf{X}$  o vetor cujas componentes são as incógnitas e  $\mathbf{R}$  o vetor de resíduos. Por ser um método totalmente implícito, todos os termos com índice  $v$  ou  $v + 1$  devem ser avaliados no tempo  $n + 1$ , sendo que se suprimiu essa indicação, enquanto os termos avaliados no instante de tempo anterior serão indicados pelo sobrescrito  $n$ .

O vetor de incógnitas é, por sua vez, definido por

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N)^T$$

onde cada elemento desse vetor é um outro vetor contendo as incógnitas de fato, ou seja,  $\mathbf{X}_m = (p_{om}, S_{wm}, S_{gm})^T$ . Similarmente, define-se o vetor de resíduos

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N)^T$$

onde  $\mathbf{R}_m = (R_{om}, R_{wm}, R_{gm})^T$ .

Os resíduos são definidos de forma que  $R_{\alpha_m} = 0$  quando as incógnitas forem, de

fato, a solução das equações. Então, a partir das Eqs. (45), (46) e (47), tem-se

$$R_{oP}^v = C_{op} (p_{oP}^v - p_{oP}^n) + C_{ow} (S_{wP}^v - S_{wP}^n) + C_{og} (S_{gP}^v - S_{gP}^n) - \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_P^v - q_{o_{scP}}^v \quad (50)$$

para o óleo,

$$R_{wP}^v = C_{wp} (p_{oP}^v - p_{oP}^n) + C_{ww} (S_{wP}^v - S_{wP}^n) - \Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P_{cow} - \gamma_w \Delta Z)]_P^v - q_{w_{scP}}^v \quad (51)$$

para a água e

$$R_{gP}^v = C_{gp} (p_{oP}^v - p_{oP}^n) + C_{gw} (S_{wP}^v - S_{wP}^n) + C_{gg} (S_{gP}^v - S_{gP}^n) - \Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta Z)]_P^v + \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_P^v + q_{g_{scP}}^v \quad (52)$$

para o gás.

A matriz Jacobiana é uma matriz composta por blocos, isto é, cada elemento da matriz é uma submatriz, de forma que ela é do tipo heptadiagonal, padrão usual em problemas similares, considerando-se os seus elementos como blocos (CHEN, 2007). Por tratar-se de um escoamento trifásico e, portanto, tendo-se três incógnitas, cada submatriz tem ordem  $3 \times 3$  e pode ser representada por (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$\mathbf{J}_{P,m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{oP}}{\partial p_{om}} & \frac{\partial R_{oP}}{\partial S_{wm}} & \frac{\partial R_{oP}}{\partial S_{gm}} \\ \frac{\partial R_{wP}}{\partial p_{om}} & \frac{\partial R_{wP}}{\partial S_{wm}} & \frac{\partial R_{wP}}{\partial S_{gm}} \\ \frac{\partial R_{gP}}{\partial p_{om}} & \frac{\partial R_{gP}}{\partial S_{wm}} & \frac{\partial R_{gP}}{\partial S_{gm}} \end{bmatrix}$$

onde  $m = \{A, N, W, P, E, S, B\}$  seguindo a notação introduzida no Capítulo 3, isto é, pode representar qualquer um dos vizinhos ou o próprio volume central.

O sistema dado pela Eq. (49) é resolvido em termos de  $\delta \mathbf{X}^{v+1}$  e, após a obtenção da solução, atualizam-se os valores da pressão e das saturações:

$$\mathbf{X}^{v+1} = \mathbf{X}^v + \delta \mathbf{X}^{v+1}.$$

Também pode-se obter, a partir do sistema representado pela Eq. (49), as três equações que devem ser verificadas em cada volume finito

$$-R_{\alpha P}^v = \left. \frac{\partial R_{\alpha P}}{\partial p_{oP}} \right|^v \delta p_{oP}^{v+1} + \left. \frac{\partial R_{\alpha P}}{\partial S_{wP}} \right|^v \delta S_{wP}^{v+1} + \left. \frac{\partial R_{\alpha P}}{\partial S_{gP}} \right|^v \delta S_{gP}^{v+1}$$

$$+ \frac{\partial R_{\alpha P}}{\partial p_{onb}} \Big|_v \delta p_{onb}^{v+1} + \frac{\partial R_{\alpha P}}{\partial S_{wnb}} \Big|_v \delta S_{wnb}^{v+1} + \frac{\partial R_{\alpha P}}{\partial S_{gnb}} \Big|_v \delta S_{gnb}^{v+1} \quad (53)$$

onde  $\alpha = o, w, g$  indicam as fases óleo, água e gás e o subscrito  $nb$  representa os volumes vizinhos, ou seja,  $nb = \{A, N, W, E, S, B\}$ .

As derivadas dos resíduos, dados pelas Eqs (50), (51) e (52), presentes na Eq (53), podem ser divididas em duas categorias: as derivadas em relação ao volume  $P$  e em relação aos volumes vizinhos  $nb$ . Em relação ao volume  $P$  tem-se que (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{oP}}{\partial p_{oP}} \Big|_v &= C_{oPP} + T_{ow}^v - \frac{\partial T_{ow}}{\partial p_{oP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oW}^v + T_{oe}^v - \frac{\partial T_{oe}}{\partial p_{oP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oE}^v \\ &\quad + T_{on}^v - \frac{\partial T_{on}}{\partial p_{oP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oN}^v + T_{os}^v - \frac{\partial T_{os}}{\partial p_{oP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oS}^v \\ &\quad + T_{oa}^v - \frac{\partial T_{oa}}{\partial p_{oP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oA}^v + T_{ob}^v - \frac{\partial T_{ob}}{\partial p_{oP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oB}^v - \frac{\partial q_{oscp}}{\partial p_{oP}} \Big|_v \\ \frac{\partial R_{oP}}{\partial S_{wP}} \Big|_v &= C_{owP} - \frac{\partial T_{ow}}{\partial S_{wP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oW}^v - \frac{\partial T_{oe}}{\partial S_{wP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oE}^v - \frac{\partial T_{on}}{\partial S_{wP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oN}^v \\ &\quad - \frac{\partial T_{os}}{\partial S_{wP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oS}^v - \frac{\partial T_{oa}}{\partial S_{wP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oA}^v - \frac{\partial T_{ob}}{\partial S_{wP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oB}^v - \frac{\partial q_{wscP}}{\partial S_{wP}} \Big|_v \\ \frac{\partial R_{oP}}{\partial S_{gP}} \Big|_v &= C_{ogP} - \frac{\partial T_{ow}}{\partial S_{gP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oW}^v - \frac{\partial T_{oe}}{\partial S_{gP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oE}^v - \frac{\partial T_{on}}{\partial S_{gP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oN}^v \\ &\quad - \frac{\partial T_{os}}{\partial S_{gP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oS}^v - \frac{\partial T_{oa}}{\partial S_{gP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oA}^v - \frac{\partial T_{ob}}{\partial S_{gP}} \Big|_v \Delta \Phi_{oB}^v - \frac{\partial q_{wscP}}{\partial S_{gP}} \Big|_v \end{aligned}$$

para o óleo,

$$\frac{\partial R_{wP}}{\partial p_{oP}} \Big|_v = C_{wPP} + T_{ww}^v - \frac{\partial T_{ww}}{\partial p_{oP}} \Big|_v \Delta \Phi_{wW}^v + T_{we}^v - \frac{\partial T_{we}}{\partial p_{oP}} \Big|_v \Delta \Phi_{wE}^v$$

$$\begin{aligned}
& + T_{w_n}^v - \frac{\partial T_{w_n}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{w_N}^v + T_{w_s}^v - \frac{\partial T_{w_s}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{w_S}^v \\
& + T_{w_a}^v - \frac{\partial T_{w_a}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{w_A}^v + T_{w_b}^v - \frac{\partial T_{w_b}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{w_B}^v - \frac{\partial q_{wSCP}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \\
\frac{\partial R_{wP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v & = C_{owP} - \frac{\partial T_{w_w}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{w_W}^v - \frac{\partial T_{w_e}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{w_E}^v - \frac{\partial T_{w_n}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{w_N}^v \\
& - \frac{\partial T_{w_s}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{w_S}^v - \frac{\partial T_{w_a}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{w_A}^v - \frac{\partial T_{w_b}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{w_B}^v \\
& - (T_{w_w}^v + T_{w_e}^v + T_{w_n}^v + T_{w_s}^v + T_{w_a}^v + T_{w_b}^v) \frac{\partial P_{cowP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v - \frac{\partial q_{wSCP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \\
\frac{\partial R_{wP}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v & = - \frac{\partial q_{wSCP}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v
\end{aligned}$$

para a água e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{gP}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v & = C_{gPP} + T_{g_w}^v - \frac{\partial T_{g_w}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{g_W}^v + T_{g_e}^v - \frac{\partial T_{g_e}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{g_E}^v + T_{g_n}^v - \frac{\partial T_{g_n}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{g_N}^v \\
& + T_{g_s}^v - \frac{\partial T_{g_s}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{g_S}^v + T_{g_a}^v - \frac{\partial T_{g_a}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{g_A}^v + T_{g_b}^v - \frac{\partial T_{g_b}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{g_B}^v \\
& + (T_o R_s)_w^v - \frac{\partial (T_o R_s)_w}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{oW}^v + (T_o R_s)_e^v - \frac{\partial (T_o R_s)_e}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{oE}^v \\
& + (T_o R_s)_n^v - \frac{\partial (T_o R_s)_n}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{oN}^v + (T_o R_s)_s^v - \frac{\partial (T_o R_s)_s}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{oS}^v \\
& + (T_o R_s)_a^v - \frac{\partial (T_o R_s)_a}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{oA}^v + (T_o R_s)_b^v - \frac{\partial (T_o R_s)_b}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \Delta \Phi_{oB}^v - \frac{\partial q_{gsCP}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial R_{gP}}{\partial S_{wP}} \right|^v &= C_{gwP} - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_w}{\partial S_{wP}} \right|^v \Delta\Phi_{oW}^v - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_e}{\partial S_{wP}} \right|^v \Delta\Phi_{wE}^v - \left. \frac{\partial (T_w R_s)_n}{\partial S_{wP}} \right|^v \Delta\Phi_{wN}^v \\
&\quad - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_s}{\partial S_{wP}} \right|^v \Delta\Phi_{wS}^v - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_a}{\partial S_{wP}} \right|^v \Delta\Phi_{wA}^v - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_b}{\partial S_{wP}} \right|^v \Delta\Phi_{wB}^v - \left. \frac{\partial q_{gscP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \\
\left. \frac{\partial R_{gP}}{\partial S_{gP}} \right|^v &= C_{ggP} - \left. \frac{\partial T_{gw}}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gW}^v - \left. \frac{\partial T_{ge}}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gE}^v - \left. \frac{\partial T_{gn}}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gN}^v \\
&\quad - \left. \frac{\partial T_{gs}}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gS}^v - \left. \frac{\partial T_{ga}}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gA}^v - \left. \frac{\partial T_{gb}}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gB}^v \\
&\quad + (T_{gw}^v + T_{ge}^v + T_{gn}^v + T_{gs}^v + T_{ga}^v + T_{gb}^v) \left. \frac{\partial P_{cgoP}}{\partial S_{gP}} \right|^v \\
&\quad - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_w}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{oW}^v - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_e}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gE}^v - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_s}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gN}^v \\
&\quad - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_s}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gS}^v - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_a}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gA}^v - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_b}{\partial S_{gP}} \right|^v \Delta\Phi_{gB}^v - \left. \frac{\partial q_{gscP}}{\partial p_{oP}} \right|^v
\end{aligned}$$

para o gás. Agora, no que diz respeito às derivadas em relação ao vizinhos, considerando-se  $f = a, n, w, e, s, b$ , obtém-se

$$\left. \frac{\partial R_{oP}}{\partial p_{o_{nb}}} \right|^v = -T_{of}^v - \left. \frac{\partial T_{of}}{\partial p_{o_{nb}}} \right|^v \Delta\Phi_{o_{nb}}^v$$

$$\left. \frac{\partial R_{oP}}{\partial S_{w_{nb}}} \right|^v = - \left. \frac{\partial T_{of}}{\partial S_{w_{nb}}} \right|^v \Delta\Phi_{o_{nb}}^v$$

$$\left. \frac{\partial R_{oP}}{\partial S_{g_{nb}}} \right|^v = - \left. \frac{\partial T_{of}}{\partial S_{g_{nb}}} \right|^v \Delta\Phi_{o_{nb}}^v$$

para o óleo,

$$\left. \frac{\partial R_{wP}}{\partial p_{o_{nb}}} \right|^v = -T_{wf}^v - \left. \frac{\partial T_{wf}}{\partial p_{o_{nb}}} \right|^v \Delta\Phi_{w_{nb}}^v$$

$$\left. \frac{\partial R_{wP}}{\partial S_{w_{nb}}} \right|^v = - \left. \frac{\partial T_{wf}}{\partial S_{w_{nb}}} \right|^v \left[ \Delta \Phi_{w_{nb}}^v + T_{wf}^v \frac{\partial P_{cowP}}{\partial S_{w_{nb}}} \right]^v$$

$$\left. \frac{\partial R_{wP}}{\partial S_{g_{nb}}} \right|^v = 0$$

para a água e

$$\left. \frac{\partial R_{gP}}{\partial p_{o_{nb}}} \right|^v = -T_{gf}^v - \left. \frac{\partial T_{gf}}{\partial p_{o_{nb}}} \right|^v \left[ \Delta \Phi_{g_{nb}}^v - (T_o R_s)_f^v - \frac{\partial (T_o R_s)_f}{\partial p_{o_{nb}}} \right]^v$$

$$\left. \frac{\partial R_{gP}}{\partial S_{w_{nb}}} \right|^v = - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_f}{\partial S_{w_{nb}}} \right|^v \Delta \Phi_{o_{nb}}^v$$

$$\left. \frac{\partial R_{gP}}{\partial S_{g_{nb}}} \right|^v = - \left. \frac{\partial T_{gf}}{\partial S_{g_{nb}}} \right|^v \left[ \Delta \Phi_{g_{nb}}^v - T_{gf}^v \frac{\partial P_{cgoP}}{\partial S_{g_{nb}}} \right]^v - \left. \frac{\partial (T_o R_s)_f}{\partial S_{g_{nb}}} \right|^v \Delta \Phi_{o_{nb}}^v$$

para o gás. O termo  $\Delta \Phi_\alpha$  pode ser escrito para cada fase como

$$\Delta \Phi_{o_A}^v = (p_{o_A}^v - p_{o_P}^v) - \gamma_{o_a}^v (Z_A - Z_P)$$

$$\Delta \Phi_{w_A}^v = (p_{o_A}^v - p_{o_P}^v) - (P_{cow_A}^v - P_{cow_P}^v) - \gamma_{w_a}^v (Z_A - Z_P)$$

e

$$\Delta \Phi_{g_A}^v = (p_{o_A}^v - p_{o_P}^v) + (P_{cgo_A}^v - P_{cgo_P}^v) - \gamma_{g_a}^v (Z_A - Z_P)$$

com definições similares para os índices  $N, W, E, S, B$ .

O sistema dado pela Eq. (49) é resolvido para as  $3N$  incógnitas simultaneamente (considerando um domínio com  $N$  volumes), em um processo iterativo onde, a cada nova iteração, a matriz Jacobiana é recalculada. Interrompe-se o procedimento quando a convergência for atingida, tomando-se por base uma tolerância previamente estabelecida, ou quando um número máximo de iterações é alcançado. No segundo caso, o passo de tempo é reduzido e reinicia-se o processo iterativo. Como critério de parada utiliza-se uma diferença relativa para a pressão e absoluta para as saturações.

### 5.1.1 Método totalmente implícito: acoplamento poço-reservatório

Em simulações considerando o acoplamento poço-reservatório, o método totalmente implícito requer a avaliação das derivadas do termo fonte. Como visto na Seção 3.2, a

vazão avaliada na iteração  $v$  é dada por

$$q_{oscP}^v = -J_{oP}^v \left[ p_{oP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para o óleo,

$$q_{wscP}^v = -J_{wP}^v \left[ p_{oP}^v - P_{cowP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para a água e

$$q_{gscP}^v = -J_{gP}^v \left[ p_{oP}^v + P_{cgoP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] \\ - R_{sP}^v J_{oP}^v \left[ p_{oP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para o gás, onde essas equações são escritas apenas para as células contendo um trecho do poço. Então, as derivadas presentes nos elementos da matriz Jacobiana são

$$\frac{\partial q_{oscP}}{\partial p_{oP}} = -J_{oP}^v - \left. \frac{\partial J_{oP}}{\partial p_{oP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

$$\frac{\partial q_{oscP}}{\partial S_{wP}} = - \left. \frac{\partial J_{oP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

$$\frac{\partial q_{oscP}}{\partial S_{gP}} = - \left. \frac{\partial J_{oP}}{\partial S_{gP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para  $q_{osc}$ ,

$$\frac{\partial q_{wscP}}{\partial p_{oP}} = -J_{wP}^v - \left. \frac{\partial J_{wP}}{\partial p_{oP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v - P_{cowP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

$$\frac{\partial q_{wscP}}{\partial S_{wP}} = - \left. \frac{\partial J_{wP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v - P_{cowP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] + J_{wP}^v \left. \frac{\partial P_{cowP}}{\partial S_{wP}} \right|^v$$

$$\frac{\partial q_{wscP}}{\partial S_{gP}} = 0$$

para  $q_{wsc}$  e

$$\frac{\partial q_{gscP}}{\partial p_{oP}} = -J_{gP}^v - R_{sP}^v J_{oP}^v - \left. \frac{\partial J_{gP}}{\partial p_{oP}} \right|^v P_{cgoP}^v$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \left. \frac{\partial J_{gP}}{\partial p_{oP}} \right|^v + \left. \frac{\partial R_{sP} J_{oP}}{\partial p_{oP}} \right|^v \right) \left[ p_{oP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] \\
\frac{\partial q_{gscP}}{\partial S_{wP}} &= - \left. \frac{\partial R_{sP} J_{oP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] \\
\frac{\partial q_{gscP}}{\partial S_{gP}} &= - \left( \left. \frac{\partial J_{gP}}{\partial S_{gP}} \right|^v + \left. \frac{\partial R_{sP} J_{oP}}{\partial S_{gP}} \right|^v \right) \left[ p_{oP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] \\
& - \left. \frac{\partial J_{gP}}{\partial S_{gP}} \right|^v \left[ P_{cgoP}^v - J_{gP}^v \frac{\partial P_{cgoP}}{\partial S_{gP}} \right]^v
\end{aligned}$$

para  $q_{gsc}$ .

Para poços de injeção, as vazões na iteração  $v$  são definidas por

$$q_{wscP}^v = -J_{iP}^v \left[ p_{oP}^v - P_{cowP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para injeção de água e

$$q_{gscP}^v = -J_{iP}^v \left[ p_{oP}^v + P_{cgoP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para injeção de gás. Por conseguinte, as suas derivadas são avaliadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_{wscP}}{\partial p_{oP}} &= -J_{iP}^v - \left. \frac{\partial J_{iP}}{\partial p_{oP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v - P_{cowP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] \\
\frac{\partial q_{wscP}}{\partial S_{wP}} &= - \left. \frac{\partial J_{iP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v - P_{cowP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] + J_{iP}^v \left. \frac{\partial P_{cowP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \\
\frac{\partial q_{wscP}}{\partial S_{gP}} &= - \left. \frac{\partial J_{iP}}{\partial S_{gP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v - P_{cowP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] \\
\frac{\partial q_{gscP}}{\partial p_{oP}} &= -J_{iP}^v - \left. \frac{\partial J_{iP}}{\partial p_{oP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v + P_{cgoP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] \\
\frac{\partial q_{gscP}}{\partial S_{wP}} &= - \left. \frac{\partial J_{iP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v + P_{cgoP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] \\
\frac{\partial q_{gscP}}{\partial S_{gP}} &= - \left. \frac{\partial J_{iP}}{\partial S_{gP}} \right|^v \left[ p_{oP}^v + P_{cgoP}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] - J_{iP}^v \left. \frac{\partial P_{cgoP}}{\partial S_{gP}} \right|^v
\end{aligned}$$

Caso o poço tenha a sua vazão especificada, em consonância com o que já foi

discutido na Seção 3.2, uma incógnita adicional surge além da pressão e das saturações, ou seja,  $p_{wf_{ref}}$ . Na sequência, para que a linearização totalmente implícita seja aplicada é preciso que os resíduos  $R_o$ ,  $R_w$  e  $R_g$  também sejam diferenciados em relação a essa nova incógnita. Como  $p_{wf_{ref}}$  está presente apenas nos volumes que contêm um trecho de poço, as seguintes derivadas dizem respeito, apenas, aos volumes finitos por onde passa o poço,

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial R_{oP}}{\partial p_{wf_{ref}}} \right|^v &= -J_{oP}^v \\ \left. \frac{\partial R_{wP}}{\partial p_{wf_{ref}}} \right|^v &= -J_{wP}^v \\ \left. \frac{\partial R_{gP}}{\partial p_{wf_{ref}}} \right|^v &= -J_{gP}^v - R_{sP}^v J_{oP}^v\end{aligned}$$

Logo, a linearização implícita inclui uma nova incógnita,  $\delta p_{wf_{ref}}^{v+1}$  e, em decorrência, uma nova equação deve ser adicionada ao sistema (49), no caso da vazão ser especificada. Essa equação adicional é obtida definindo-se os resíduos para as Eqs (41) (produção) e (42) e (43) (injeção), isto é,

$$\begin{aligned}R_{wf}^v &= - \sum_m \left\{ (J_{o_m}^v + J_{w_m}^v + J_{g_m}^v + R_{s_m}^v J_{o_m}^v) \left[ p_{o_m}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_m - Z_{ref}) \right] \right. \\ &\quad \left. - J_{w_m}^v P_{cow_m}^v + J_{g_m}^v P_{cgo_m}^v \right\} - q_{sc}\end{aligned}\quad (54)$$

para os poços de produção,

$$R_{wf}^v = - \sum_m J_{i_m}^v \left[ p_{o_m}^v - P_{cow_m}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_m - Z_{ref}) \right] - q_{wsc}\quad (55)$$

para a injeção de água e

$$R_{wf}^v = - \sum_m J_{i_m}^v \left[ p_{o_m}^v + P_{cgo_m}^v - p_{wf_{ref}}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_m - Z_{ref}) \right] - q_{gsc}\quad (56)$$

para a injeção de gás. Consequentemente, deve-se também obter as derivadas desses resíduos em relação às agora quatro incógnitas: pressão, saturações e pressão no poço:

$$\left. \frac{\partial R_{wf}}{\partial p_{oP}} \right|^v = - (J_{o_m}^v + J_{w_m}^v + J_{g_m}^v + R_{s_m}^v J_{o_m}^v) + \left. \frac{\partial J_{wP}}{\partial p_{oP}} \right|^v P_{cowP}^v - \left. \frac{\partial J_{gP}}{\partial p_{oP}} \right|^v P_{cgoP}^v$$

$$- \left( \frac{\partial J_{oP}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v + \frac{\partial J_{wP}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v + \frac{\partial J_{gP}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v + \frac{\partial R_{sP} J_{oP}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \right) \left[ p_{oP}^v - p_{wfref}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_{ref} - Z_P) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{wf}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v &= - \left( \frac{\partial J_{oP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v + \frac{\partial J_{wP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v + \frac{\partial R_{sP} J_{oP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \right) \left[ p_{oP}^v - p_{wfref}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_{ref} - Z_P) \right] \\ &\quad + \frac{\partial J_{wP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v P_{cowP}^v + J_{wP}^v \frac{\partial P_{cowP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{wf}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v &= - \left( \frac{\partial J_{oP}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v + \frac{\partial J_{gP}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v + \frac{\partial R_{sP} J_{oP}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v \right) \left[ p_{oP}^v - p_{wfref}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_{ref} - Z_P) \right] \\ &\quad - \frac{\partial J_{gP}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v P_{cgoP}^v - J_{gP}^v \frac{\partial P_{cgoP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \end{aligned}$$

$$\frac{\partial R_{wf}}{\partial p_{wfref}} \Big| ^v = \sum_m (J_{om}^v + J_{wm}^v + J_{gm}^v + R_{sm}^v J_{om}^v)$$

para poços de produção e

$$\frac{\partial R_{wf}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v = -J_{iP}^v - \frac{\partial J_{iP}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \left[ p_{oP}^v - P_{cowP}^v - p_{wfref}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

$$\frac{\partial R_{wf}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v = - \frac{\partial J_{iP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \left[ p_{oP}^v - P_{cowP}^v - p_{wfref}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] + J_{iP}^v \frac{\partial P_{cowP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v$$

$$\frac{\partial R_{wf}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v = - \frac{\partial J_{iP}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v \left[ p_{oP}^v - P_{cowP}^v - p_{wfref}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para injeção de água e

$$\frac{\partial R_{wf}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v = -J_{iP}^v - \frac{\partial J_{iP}}{\partial p_{oP}} \Big| ^v \left[ p_{oP}^v + P_{cgoP}^v - p_{wfref}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

$$\frac{\partial R_{wf}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v = - \frac{\partial J_{iP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v \left[ p_{oP}^v + P_{cgoP}^v - p_{wfref}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

$$\frac{\partial R_{wf}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v = - \frac{\partial J_{iP}}{\partial S_{gP}} \Big| ^v \left[ p_{oP}^v + P_{cgoP}^v - p_{wfref}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] - J_{iP}^v \frac{\partial P_{cgoP}}{\partial S_{wP}} \Big| ^v$$

para injeção de gás.

Desse modo, a adição de um número  $n_{wf}$  de poços, com vazões especificadas, seja de produção ou de injeção, aumenta o tamanho da matriz dos coeficientes do sistema Eq. (49) em  $n_{wf}$  linhas e  $n_{wf}$  colunas, além do decorrente redimensionamento dos vetores de incógnitas e de resíduos. Após a solução desse sistema, a pressão de cada poço é atualizada da mesma forma que a pressão e as saturações do reservatório, ou seja,

$$p_{wf_{ref}}^{v+1} = p_{wf_{ref}}^v + \delta p_{wf_{ref}}^{v+1}.$$

## 5.2 IMPES

Como já dito, o método IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) é uma alternativa mais fácil de ser implementada e com um menor custo computacional por passo de tempo, no entanto, ele sofre em decorrência das limitações impostas aos valores do passo de tempo devido, principalmente, ao uso de uma formulação explícita para a determinação das saturações. Nesse método, combinam-se as equações de forma a eliminar qualquer dependência direta das saturações na equação escrita em termos da pressão, que é resolvida de maneira implícita e, na sequência, as saturações são resolvidas explicitamente (ABOU-KASSEM; ISLAM; ALI, 2019).

Nele, as transmissibilidades e as pressões capilares podem ser avaliadas explicitamente (no tempo  $n$ ) ou no último nível iterativo  $v$  (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). No método IMPES clássico, esses termos são avaliados no tempo  $n$  (CHEN, 2007), já que o passo de tempo é limitado pela solução das saturações e, portanto, a linearização explícita não levaria a maiores restrições do  $\Delta t$ . Para melhorar a estabilidade do método, as não linearidades podem ser avaliadas na iteração  $v$ , obtendo-se o que alguns autores chamam de IMPES iterativo (KOU; SUN, 2010). Por ser uma estratégia segregada, onde encontra-se primeiro o campo de pressões e, na sequência, os campos de saturações, alguns autores referem-se ao método como sequencial (PACHECO; SILVA; MALISKA, 2016; LIE, 2019). Neste trabalho, a linearização empregada no método IMPES considera o último nível iterativo (iteração de Picard) e é, então, um método IMPES iterativo, mas que será simplesmente chamado de IMPES.

Conforme já mencionado, uma equação para a pressão, sem dependências diretas das saturações, é obtida a partir das Eqs. (45), (46) e (47). Para tanto, multiplica-se a primeira equação (óleo) por  $(B_o - R_s B_g)_P^{n+1}$ , a segunda (água) por  $B_{wP}^{n+1}$  e a última (gás) por  $B_{gP}^{n+1}$  e, por último, essas três equações são somadas. Com isso, obtém-se uma equação sem os termos  $\Delta_t S_w$  e  $\Delta_t S_g$  (COATS, 2000; ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$[(B_o - R_s B_g)_P^{n+1} C_{op} + B_{wP}^{n+1} C_{wp} + B_{gP}^{n+1} C_{gp}] \Delta_t p_o$$

$$\begin{aligned}
&= (B_o - R_s B_g)_P^{n+1} \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_P^{n+1} + B_{w_P}^{n+1} \Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P_{cow} - \gamma_w \Delta Z)]_P^{n+1} \\
&+ B_{g_P}^{n+1} \left\{ \Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta Z)]_P^{n+1} + \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta Z)]_P^{n+1} \right\} \\
&+ (B_o - R_s B_g)_P^{n+1} q_{osc_P}^{n+1} + B_{w_P}^{n+1} q_{scw_P}^{n+1} + B_{g_P}^{n+1} q_{gsc_P}^{n+1} \tag{57}
\end{aligned}$$

A Eq. (57), ao ser linearizada por uma iteração de Picard, pode ser reescrita em termos da incógnita pressão como (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$\begin{aligned}
&- \sum_{nb} \left\{ (B_o - R_s B_g)_P^v T_{of}^v + B_{w_P}^v T_{wf}^v + B_{g_P}^v \left[ T_{gf}^v + (T_o R_s)_f^v \right] \right\} p_{onb}^{v+1} \\
&+ [(B_o - R_s B_g)_P^v C_{op} + B_{w_P}^v C_{wp} + B_{g_P}^v C_{gp}] p_{oP}^{v+1} \\
&+ \sum_{nb} \left\{ (B_o - R_s B_g)_P^v T_{of}^v + B_{w_P}^v T_{wf}^v + B_{g_P}^v \left[ T_{gf}^v + (T_o R_s)_f^v \right] \right\} p_{oP}^{v+1} \\
&= [(B_o - R_s B_g)_P^v C_{op} + B_{w_P}^v C_{wp} + B_{g_P}^v C_{gp}] p_{oP}^n - \sum_{nb} B_{w_P}^v T_{wf}^v (P_{cow_{nb}}^v - P_{cow_P}^v) \\
&+ \sum_{nb} B_{g_P}^v T_{gf}^v (P_{cgo_{nb}}^v - P_{cgo_P}^v) + (B_o - R_s B_g)_P^v q_{osc_P}^{v*} + B_{w_P}^v q_{scw_P}^{v*} + B_{g_P}^v q_{gsc_P}^{v*} \\
&- \sum_{nb} \left\{ (B_o - R_s B_g)_P^v T_{of}^v \gamma_{of}^v + B_{w_P}^v T_{wf}^v \gamma_{wf}^v + B_{g_P}^v \left[ T_{gf}^v \gamma_{gf}^v + (T_o R_s)_f^v \gamma_{of}^v \right] \right\} (Z_{nb} - Z_P) \tag{58}
\end{aligned}$$

onde  $nb = \{A, N, W, E, S, B\}$  representa os volumes vizinhos,  $f = \{a, n, w, e, s, b\}$  indica as interfaces correspondentes e o sobrescrito  $v^*$  será explicado na próxima seção. A Eq. (58) forma um sistema do tipo  $\mathbf{Ax} = b$  que ao ser resolvido fornece o campo de pressões  $p_o^{n+1, v+1}$ . Em seguida, o método IMPES determina a saturação da água explicitamente, mediante a substituição das novas pressões na Eq. (46) (água) linearizada pela iteração de Picard, resultando em:

$$\begin{aligned}
S_{w_P}^{v+1} &= S_{w_P}^n + \frac{1}{C_{ww}} \sum_{nb} \left\{ T_{wf}^v \left[ p_{onb}^{v+1} - p_{oP}^{v+1} - P_{cow_{nb}}^v + P_{cow_P}^v - \gamma_{wf}^v (Z_{nb} - Z_P) \right] \right\} \\
&- \frac{1}{C_{ww}} \left[ C_{wp} (p_{oP}^{v+1} - p_{oP}^n) + q_{wsc_P}^{v*} \right] \tag{59}
\end{aligned}$$

Claro está que da Eq. (59), para cada volume finito, determina-se o campo de saturações da água. Finalmente, falta apenas a avaliação da saturação do gás. Entretanto, ela pode ser calculada substituindo-se a pressão  $p_o^{v+1}$  e a saturação da água  $S_w^{v+1}$  na Eq. (47) (gás) ou, ainda, na Eq. (45) (óleo). Escolhendo-se a segunda opção, apenas por uma questão de simplicidade, chega-se à equação para o cálculo explícito da saturação do gás:

$$S_{gP}^{v+1} = S_{gP}^n + \frac{1}{C_{og}} \sum_{nb} \left\{ T_{of}^v \left[ p_{onb}^{v+1} - p_{oP}^{v+1} - \gamma_{of}^v (Z_{nb} - Z_P) \right] \right\} - \frac{1}{C_{og}} \left[ C_{op} (p_{oP}^{v+1} - p_{oP}^n) - C_{ow} (S_{wP}^{v+1} - S_{wP}^n) + q_{oscP}^{v*} \right] \quad (60)$$

### 5.2.1 IMPES: acoplamento poço-reservatório

Para que a adição de poços não introduza instabilidades, a linearização dos termos de produção e injeção deve ser compatível com a linearização das transmissibilidades (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Dessa forma, os termos  $q_{oscP}^{n+1}$ ,  $q_{wscP}^{n+1}$  e  $q_{gscP}^{n+1}$  também são linearizados pela iteração de Picard. Além disso, a pressão no poço,  $p_{wfref}$ , é calculada conjuntamente com a pressão, similar ao que é feito no método totalmente implícito (FREITAS, 2017). Assim sendo, as vazões são dadas por

$$q_{oscP}^{v*} = -J_{oP}^v \left[ p_{oP}^{v+1} - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wfP}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para o óleo,

$$q_{wscP}^{v*} = -J_{wP}^v \left[ p_{oP}^{v+1} - P_{cowP}^v - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para a água e

$$q_{gscP}^{v*} = -J_{gP}^v \left[ p_{oP}^{v+1} + P_{cgoP}^v - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

$$- R_{sP}^v J_{oP}^v \left[ p_{oP}^{v+1} - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para o gás, onde o sobrescrito  $v^*$  representa as vazões com os seus coeficientes linearizados por iterações de Picard (sobrescrito  $v$ ) enquanto que as pressões, no interior do volume finito e do poço, são variáveis a serem calculadas (sobrescrito  $v + 1$ ), lembrando que para esse tipo de linearização o sobrescrito  $n + 1$  foi suprimido nos termos contendo  $v$ ,  $v^*$  ou

$v + 1$ . Assim, para poços de injeção tem-se

$$q_{wscP}^{v*} = -J_{iP}^v \left[ p_{oP}^{v+1} - P_{cowP}^v - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para injeção de água e

$$q_{gscP}^{v*} = -J_{iP}^v \left[ p_{oP}^{v+1} + P_{cgoP}^v - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para injeção de gás.

No caso dos poços com a pressão especificada, a inclusão deles irá apenas alterar alguns coeficientes das equações escritas para as células contendo os poços. Já para as vazões de produção ou injeção especificadas, como discutido anteriormente, o sistema passará a ter uma nova incógnita. Portanto, pelo menos uma equação adicional se fará necessária para se garantir a unicidade da solução. Tal equação é similar às Eqs. (54), (55) e (56), porém, não nas suas respectivas formas residuais, isto é,

$$\begin{aligned} - \sum_m \left[ (J_{om}^v + J_{wm}^v + J_{gm}^v + R_{sm}^v J_{om}^v) (p_{om}^{v+1} - p_{wfref}^{v+1}) \right] &= q_{sc} \\ - \sum_m \left\{ (J_{om}^v + J_{wm}^v + J_{gm}^v + R_{sm}^v J_{om}^v) \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_m - Z_{ref}) + J_{wm}^v P_{cowm}^v - J_{gm}^v P_{cgom}^v \right\} & \quad (61) \end{aligned}$$

para os poços de produção,

$$- \sum_m \left[ J_{im}^v (p_{om}^{v+1} - p_{wfref}^{v+1}) \right] = q_{wsc} - \sum_m J_{im}^v [P_{cowm}^v + \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_m - Z_{ref})] \quad (62)$$

para a injeção de água e

$$- \sum_m \left[ J_{im}^v (p_{om}^{v+1} - p_{wfref}^{v+1}) \right] = q_{gsc} + \sum_m J_{im}^v [P_{cgom}^v - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_m - Z_{ref})] \quad (63)$$

para a injeção de gás.

Destarte, quando poços com vazões especificadas estão presentes no reservatório, a Eq. (61), (62) ou (63) deve ser acoplada ao sistema representado pela Eq. (58). Tal acoplamento também é similar ao do método totalmente implícito, onde a inclusão de  $n_w$  poços acrescenta à matriz dos coeficientes  $n_w$  linhas e colunas, com o conseqüente aumento do número das componentes do vetor de incógnitas, com a inclusão de  $p_{wfref}$ , assim como do vetor que contém os termos conhecidos.

### 5.3 Método sequencial Picard-Newton

Essa seção visa a investigar a metodologia de solução que tenta unir a facilidade de implementação do método IMPES com a robustez e estabilidade do método totalmente implícito, em aplicações voltadas para a simulação de escoamentos trifásicos. O ponto de partida é a equação para a pressão, que é a mesma utilizada no método IMPES, Eq. (58), ou seja, ela é linearizada por uma iteração de Picard.

Sabe-se que as transmissibilidades variam fortemente em função da variação da saturação, no entanto, na Eq. (58) os coeficientes relacionados a elas contém a soma das transmissibilidades do óleo, da água e do gás, de forma que apesar das transmissibilidades individuais poderem variar fortemente, em um passo de tempo, a soma das transmissibilidades apresenta uma variação mais suave (FREITAS, 2017). Dessa maneira, a instabilidade do método recai principalmente sobre as avaliações das saturações. Já no método totalmente implícito, a estabilidade independe do passo de tempo principalmente devido à linearização implícita das não linearidades fortes (termos dependentes da saturação).

Tendo em vista que a restrição no passo de tempo, no método IMPES, é proveniente da obtenção explícita das saturações, uma tentativa de se melhorar a estabilidade seria mediante o uso de uma linearização totalmente implícita (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001) aplicada às equações antes resolvidas explicitamente, preconizando uma solução em sequência baseada em uma decomposição de operadores (*operator splitting*) (VENNEMO, 2016; LIE, 2019). Essa linearização se dá em termos das derivadas dos resíduos em relação às saturações da água e do gás, responsáveis pelas não linearidades fortes, conforme discutido no Capítulo 4.

Com a linearização implícita para o cômputo das saturações, tenta-se aproximar o método IMPES do totalmente implícito, dando origem ao método sequencial Picard-Newton. Para o cálculo implícito das saturações esse método pode ser implementado de duas formas distintas. A forma mais natural, ou seja, a que mais o aproxima do método totalmente implícito, preconiza o cálculo simultâneo das saturações. A segunda opção propõe a determinação segregada das saturações da água e do gás. Essas duas formas são discutidas a seguir.

#### 5.3.1 Simultâneo

Após a solução do sistema dado pela Eq. (58), obtém-se a pressão no nível iterativo  $v + 1$  (no tempo  $n + 1$ ). Logo, nesse nível iterativo a pressão deixa de ser uma incógnita e, portanto, a matriz Jacobiana deixa de conter os elementos representando as derivadas

parciais em relação à pressão. Com isso, o sistema passa a ser escrito como

$$\mathbf{J}^v \delta \mathbf{S}^{v+1} = -\mathbf{R}^v \quad (64)$$

com  $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_N)^T$  e  $\mathbf{S}_m = (S_{w_m}, S_{g_m})^T$ . O vetor de resíduos  $\mathbf{R}$  é similar ao visto no método totalmente implícito, porém, é composto agora por apenas dois resíduos que podem ser escolhidos entre  $R_o$ ,  $R_w$  ou  $R_g$ . De modo similar ao que foi feito no método IMPES, por uma questão de simplicidade, escolhe-se  $\mathbf{R}_m = (R_{w_m}, R_{o_m})^T$ . Como a pressão em  $v + 1$  é conhecida, os resíduos agora são dados por

$$\begin{aligned} R_{w_P}^v &= C_{wp} (p_{o_P}^{v+1} - p_{o_P}^n) + C_{ww} (S_{w_P}^v - S_{w_P}^n) \\ &\quad - \sum_{nb} \left\{ T_{wf}^v \left[ p_{o_{nb}}^{v+1} - p_{o_P}^{v+1} - P_{cow_{nb}}^v + P_{cow_P}^v - \gamma_{wf}^v (Z_{nb} - Z_P) \right] \right\} - q_{w_{scP}}^{v*} \end{aligned} \quad (65)$$

para o resíduo da água e

$$\begin{aligned} R_{o_P}^v &= C_{op} (p_{o_P}^{v+1} - p_{o_P}^n) + C_{ow} (S_{w_P}^v - S_{w_P}^n) + C_{og} (S_{g_P}^v - S_{g_P}^n) \\ &\quad - \sum_{nb} \left\{ T_{wf}^v \left[ p_{o_{nb}}^{v+1} - p_{o_P}^{v+1} - \gamma_{wf}^v (Z_{nb} - Z_P) \right] \right\} - q_{o_{scP}}^{v*} \end{aligned} \quad (66)$$

para o resíduo do óleo, utilizado para o cálculo da saturação do gás.

As submatrizes que compõem a matriz Jacobiana, por sua vez, são agora escritas como

$$\mathbf{J}_{P,m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{w_P}}{\partial S_{w_m}} & \frac{\partial R_{w_P}}{\partial S_{g_m}} \\ \frac{\partial R_{o_P}}{\partial S_{w_m}} & \frac{\partial R_{o_P}}{\partial S_{g_m}} \end{bmatrix}$$

onde  $m = \{A, N, W, P, E, S, B\}$ . Os elementos dessa matriz são avaliados de modo análogo ao apresentado na Seção 5.1.

Sabe-se, também, que o sistema representado pela Eq. (64) pode ser reescrito de modo a representar as duas equações que devem ser verificadas em cada volume finito

$$-R_{\alpha_P}^v = \frac{\partial R_{\alpha_P}}{\partial S_{w_P}} \Big|_v \delta S_{w_P}^{v+1} + \frac{\partial R_{\alpha_P}}{\partial S_{g_P}} \Big|_v \delta S_{g_P}^{v+1} + \frac{\partial R_{\alpha_P}}{\partial S_{w_{nb}}} \Big|_v \delta S_{w_{nb}}^{v+1} + \frac{\partial R_{\alpha_P}}{\partial S_{g_{nb}}} \Big|_v \delta S_{g_{nb}}^{v+1} \quad (67)$$

onde  $\alpha = w, o$  representa as fases água e óleo e o subscrito  $nb$  representa os volumes vizinhos, ou seja,  $nb = \{A, N, W, E, S, B\}$ . Ressalta-se, ainda, que as derivadas presentes na Eq. (67) são avaliadas conforme mostrado na Seção 5.1.

Assim sendo, o uso do método sequencial Picard-Newton, com a solução simultânea das equações das saturações, segue os seguintes passos: resolve-se o sistema dado pela Eq. (58) e, em seguida, resolve-se o sistema de ordem  $2N \times 2N$  dado pela Eq. (64). Com isso, atualizam-se os campos de saturações fazendo

$$\mathbf{S}^{v+1} = \mathbf{S}^v + \delta\mathbf{S}^{v+1}$$

e, na sequência, recalculam-se todas as propriedades e o processo iterativo prosseguirá até que a convergência seja estabelecida.

### 5.3.2 Segregado

Embora o método simultâneo seja a opção mais “natural”, ou mais próxima do método totalmente implícito, no entanto, ele também acarreta na solução simultânea onde a matriz dos coeficientes é da ordem de  $2N \times 2N$  que, apesar de ser mais barato do ponto de vista computacional em relação ao totalmente implícito ( $3N \times 3N$ ), continua demandando um maior esforço na montagem da matriz dos coeficientes. Além disso, também introduz uma maior dificuldade de implementação e um maior custo computacional no que diz respeito à solução do sistema propriamente dito.

Em função do exposto, propõe-se também uma alternativa segregada resolvendo-se primeiramente o sistema que fornece a solução para a saturação da água e, posteriormente, outro sistema é resolvido para a determinação da saturação do gás. Nessa estratégia, as Eqs. (65) e (66), que são as formas residuais das equações resolvidas explicitamente para as saturações no método IMPES (Eqs. (59) e (60)), são linearizadas em termos das respectivas saturações da água e do gás.

Primeiramente, para a água, tem-se o seguinte sistema

$$\mathbf{J}^v \delta\mathbf{S}_w^{v+1} = -\mathbf{R}_w^v \quad (68)$$

que pode ser reescrito de modo a fornecer as equações para cada volume finito:

$$-R_{wP}^v = \left. \frac{\partial R_{wP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \delta S_{wP}^{v+1} + \left. \frac{\partial R_{wP}}{\partial S_{w_{nb}}} \right|^v \delta S_{w_{nb}}^{v+1}$$

onde  $nb$  representa os blocos vizinhos e as derivadas são avaliadas conforme indicado na Seção 5.1. Com a solução do sistema dado pela Eq. (68) atualiza-se o campo de saturação da água

$$\mathbf{S}_w^{v+1} = \mathbf{S}_w^v + \delta\mathbf{S}_w^{v+1}$$

O próximo passo consiste na solução do sistema que proverá a saturação do gás,

$$\mathbf{J}^v \delta \mathbf{S}_g^{v+1} = -\mathbf{R}_o^v \quad (69)$$

onde, agora, a saturação da água no nível iterativo  $v + 1$  é conhecida e, portanto, o resíduo  $R_{oP}^v$  é reescrito como

$$\begin{aligned} R_{oP}^v = & C_{op} (p_{oP}^{v+1} - p_{oP}^n) + C_{ow} (S_{wP}^{v+1} - S_{wP}^n) + C_{og} (S_{gP}^v - S_{gP}^n) \\ & - \sum_{nb} \left\{ T_{wf}^v \left[ p_{onb}^{v+1} - p_{oP}^{v+1} - \gamma_{wf}^v (Z_{nb} - Z_P) \right] \right\} - q_{oscP}^{v*} \end{aligned} \quad (70)$$

e, de modo análogo,

$$-R_{oP}^v = \frac{\partial R_{oP}}{\partial S_{gP}} \bigg|_v \delta S_{gP}^{v+1} + \frac{\partial R_{oP}}{\partial S_{gnb}} \bigg|_v \delta S_{gnb}^{v+1}$$

sendo as derivadas novamente avaliadas conforme o preconizado na Seção 5.1.

A partir da solução do sistema (69) atualizam-se as saturações do gás

$$\mathbf{S}_g^{v+1} = \mathbf{S}_g^v + \delta \mathbf{S}_g^{v+1}$$

e finda-se a iteração. Após a obtenção da saturação do gás, atualizam-se as propriedades com os novos valores da pressão e das saturações e repete-se o processo: solucionam-se em sequência os sistemas que proverão a pressão, a saturação da água e, por último, a saturação do gás. O processo iterativo como um todo é repetido até que a convergência seja atingida.

A solução pelo método Picard-Newton de forma segregada exige, então, a solução de três sistemas de equações algébricas lineares, cada um com a matriz dos coeficientes da ordem de  $N \times N$ . Esses sistemas são mais fáceis de serem implementados e as suas resoluções, através dos métodos apresentados no Capítulo 4, são, normalmente, mais rápidas.

### 5.3.3 Método sequencial Picard-Newton: acoplamento poço reservatório

O cálculo da pressão no método sequencial Picard-Newton é executado identicamente ao feito no método IMPES. Então, na presença de poços os procedimentos são análogos aos discutidos na Seção 5.2.1. Isto é, quando a pressão do poço  $p_{wf_{ref}}$  é uma incógnita, mais elementos são adicionados à matriz dos coeficientes e a pressão nos poços é obtida junto com as pressões no reservatório.

Após o cálculo da pressão, e eventualmente da pressão no poço, conhece-se  $p_o^{v+1}$  e  $p_{wfref}^{v+1}$ . Independente da estratégia utilizada, simultânea ou segregada, as vazões avaliadas no nível iterativo  $v^*$  e presentes nas Eqs. (65), (66) e (70) são avaliadas da mesma maneira que a apresentada na Seção 5.2.1, tanto para os poços de produção quanto os de injeção.

Já no que concerne às derivadas em relação às respectivas saturações nos termos representando as vazões:

$$\left. \frac{\partial q_{scwP}}{\partial S_{wP}} \right|^v = - \left\{ \left. \frac{\partial J_{wP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \left[ p_{oP}^{v+1} - P_{cowP}^v - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] - J_{wP}^v \left. \frac{\partial P_{cowP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \right\}$$

para  $q_{scwP}^{v^*}$  em relação a  $S_w$ ,

$$\left. \frac{\partial q_{scwP}}{\partial S_{gP}} \right|^v = 0$$

para  $q_{scwP}^{v^*}$  em relação a  $S_g$ ,

$$\left. \frac{\partial q_{scop}}{\partial S_{wP}} \right|^v = - \left. \frac{\partial J_{oP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \left[ p_{oP}^{v+1} - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para  $q_{scop}^{v^*}$  em relação a  $S_w$  e

$$\left. \frac{\partial q_{scop}}{\partial S_{gP}} \right|^v = - \left. \frac{\partial J_{oP}}{\partial S_{gP}} \right|^v \left[ p_{oP}^{v+1} - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para  $q_{scop}^{v^*}$  em relação a  $S_g$ .

Por outro lado, para poços de injeção não se tem o termo  $q_{sco}$  já que não é considerado aqui a injeção de óleo, apenas de água ou gás, de forma que precisam ser avaliadas apenas os termos:

$$\left. \frac{\partial q_{scwP}}{\partial S_{wP}} \right|^v = - \left\{ \left. \frac{\partial J_{iP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \left[ p_{oP}^{v+1} - P_{cowP}^v - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right] - J_{iP}^v \left. \frac{\partial P_{cowP}}{\partial S_{wP}} \right|^v \right\}$$

para  $q_{scwP}^{v^*}$  em relação a  $S_w$ ,

$$\left. \frac{\partial q_{scwP}}{\partial S_{gP}} \right|^v = - \left. \frac{\partial J_{iP}}{\partial S_{gP}} \right|^v \left[ p_{oP}^{v+1} - P_{cowP}^v - p_{wfref}^{v+1} - \bar{\gamma}_{wf}^v (Z_P - Z_{ref}) \right]$$

para  $q_{scwP}^{v^*}$  em relação a  $S_g$ .

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo tem como finalidade apresentar os resultados gerados com os métodos apresentados no Capítulo 5 e comparar as suas performances. As simulações foram realizadas utilizando o simulador RES-SIM-TWO-PHASE-LABTRAN-3D, desenvolvido originalmente por Freitas (2017) para escoamentos bifásicos, e que foi expandido pelo autor a fim de que ele fosse capaz de simular o escoamento trifásico em um reservatório de petróleo.

Todos os tempos de simulação apresentados foram obtidos mediante a execução do simulador em um cluster do Departamento de Modelagem Computacional (DMC) do Instituto Politécnico (IPRJ). O processador do nó empregado era um Intel® Xeon® E5645, com frequência base de 2.40 GHz e com um sistema operacional Linux: distribuição openSUSE Leap 42.1 (x86\_64).

Primeiramente, são apresentados os resultados da verificação numérica com o intuito de atestar a funcionalidade do simulador desenvolvido, além de comprovar a acurácia dos resultados determinados via os métodos Picard-Newton. Em seguida são apresentados estudos com a injeção simultânea de água e gás via condição de contorno, considerando um reservatório homogêneo e também com a presença de heterogeneidades.

Foi avaliado também um esquema de injeção *Five-Spot* junto à estratégia *Water Alternating Gas* (WAG), novamente em campos homogêneos e heterogêneos. Outra aplicação avaliada foi esse tipo de injeção em um campo altamente heterogêneo derivado do décimo projeto de comparação da SPE, com o poço injetor em duas posições diferentes, além da avaliação do impacto da presença da pressão capilar. Também foi avaliado um caso com a adição dos efeitos gravitacionais. Nessas aplicações foi comparado o tempo de execução entre os métodos discutidos no presente trabalho, que são: IMPES, totalmente implícito, Picard-Newton simultâneo e Picard-Newton segregado.

### 6.1 Verificação numérica

Em uma primeira análise de verificação optou-se por reproduzir os resultados apresentados por Barros, Pires e Peres (2021). Esse trabalho apresenta uma solução analítica para um escoamento trifásico incompressível unidimensional, em um contexto onde as funções de permeabilidade relativa são côncavas, isto é, os expoentes do modelo tipo Corey são menores que a unidade, em contraste com as tradicionais curvas convexas.

Duas situações abordadas no trabalho de Barros, Pires e Peres (2021) são apresentadas aqui. Nesses dois casos, foi considerada uma condição de 2<sup>o</sup> tipo (Neumann) para a pressão, de forma que a taxa de injeção fosse constante na fronteira esquerda.

Primeiramente, considerou-se os seguintes expoentes para o modelo de permeabilidade relativa:  $(ew, eg, eo) = (0, 2, 0, 3, 0, 1)$ . As viscosidades verificam a relação  $\mu_o = 2\mu_w = 4\mu_g$  e é feita uma injeção, na fronteira esquerda, de uma mistura contendo 35% água e 65% gás (valores de saturação normalizados). Em um segundo caso, os expoentes são dados por  $(ew, eg, eo) = (0, 7, 0, 4, 0, 5)$  e mantém-se a mesma relação de viscosidades. Por outro lado, a mistura injetada na fronteira é de 10% água e 90% gás, valores normalizados.

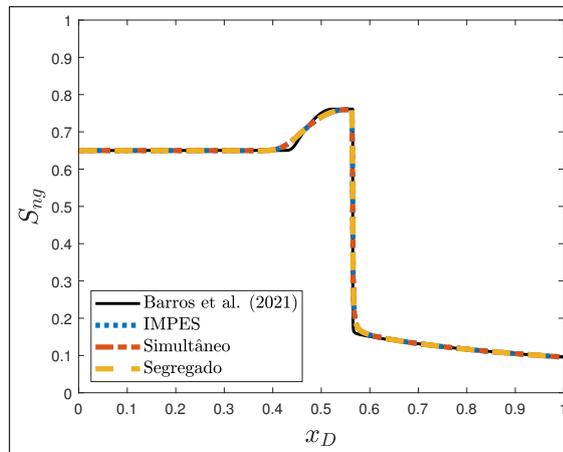
A solução analítica foi desenvolvida para um escoamento incompressível. Entretanto, no presente trabalho, considera-se que o escoamento é compressível e, portanto, para que uma comparação fosse possível, assumiu-se que a compressibilidade fosse pequena tanto para os fluidos quanto para a rocha. No entanto, mesmo para um escoamento ligeiramente compressível, a obtenção da convergência, considerando as curvas côncavas de permeabilidade relativa, foi severamente afetada. Para os casos tratados, o Método Totalmente Implícito (MTI) não logrou sucesso. Em função de testes realizados, entende-se que a causa é possivelmente devida aos expoentes menores que a unidade nos modelos utilizados para as curvas de permeabilidade relativa, levando a uma maior dificuldade na obtenção numérica da solução do sistema linear. Uma situação semelhante foi relatada por Freitas (2017), quando da simulação de escoamentos bifásicos, embora não relacionada às curvas de permeabilidades côncavas.

A Figura 5 apresenta os resultados obtidos para o primeiro caso, enquanto que os para o segundo caso podem ser vistos na Figura 6. A solução foi obtida para um sistema de equações adimensional e maiores detalhes podem ser encontrados na referência citada. É possível perceber em ambos casos uma ótima concordância entre a solução numérica e a analítica proposta em Barros, Pires e Peres (2021). Além disso, também é notória a sobreposição dos resultados determinados com os métodos IMPES tradicional e os de Picard-Newton, nas suas duas versões apresentadas no Capítulo 5.

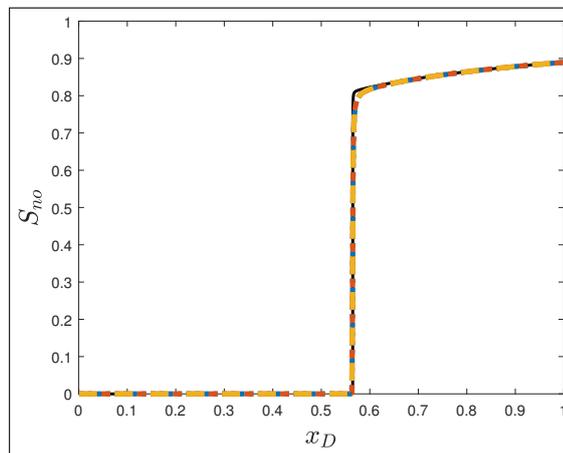
A inclusão dos efeitos de compressibilidade não alteraram significativamente os perfis das saturações para os dois casos, conforme pode ser visto nas Figuras 5 e 6. No entanto, é possível perceber uma clara difusão numérica, o que já era esperado em função do uso do *upwind* de primeira ordem, na aproximação das permeabilidades relativas (Capítulo 4). Todavia, o código desenvolvido e os métodos aqui apresentados, à exceção do MTI, foram claramente capazes de capturar as particularidades desse tipo de escoamento.

Como não logrou-se êxito nas simulações com o MTI, um problema mais simples, com funções de permeabilidade relativa usuais, foi utilizado a fim de se verificar a aplicabilidade desse método nesse novo contexto. O trabalho de Guzmán e Fayers (1997b) apresenta uma solução para escoamentos trifásicos incompressíveis unidimensionais, similar à apresentada por Barros, Pires e Peres (2021). Neste novo caso, os três fluidos possuem a mesma viscosidade, isto é,  $\mu_o = \mu_w = \mu_g$  e é utilizado o modelo de Corey quadrático para as curvas de permeabilidade relativa, ou seja,  $ew = eg = eo = 2$ . Uma mistura de 10% água e 90% gás é injetada na fronteira esquerda.

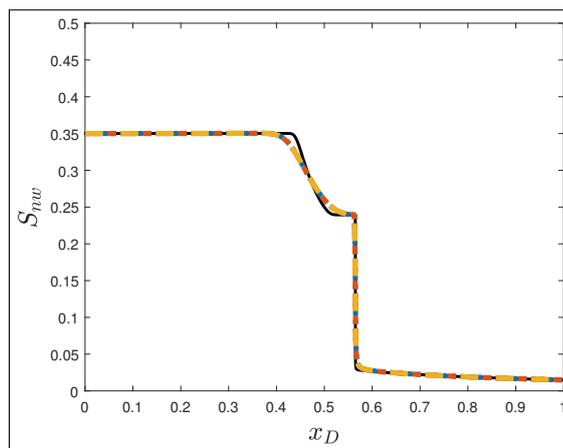
Figura 5 - Perfis de saturações: primeiro caso e uma função de permeabilidade relativa côncava



(a)



(b)

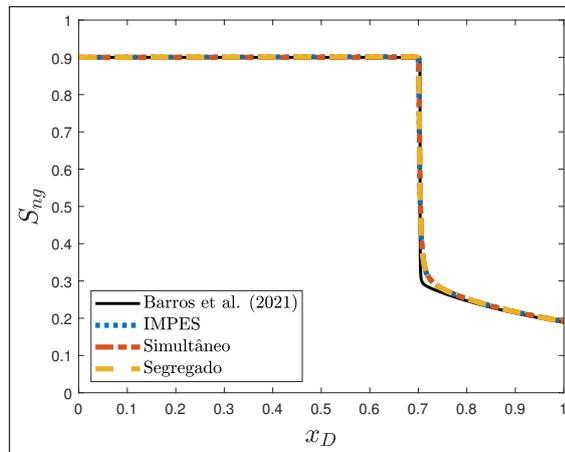


(c)

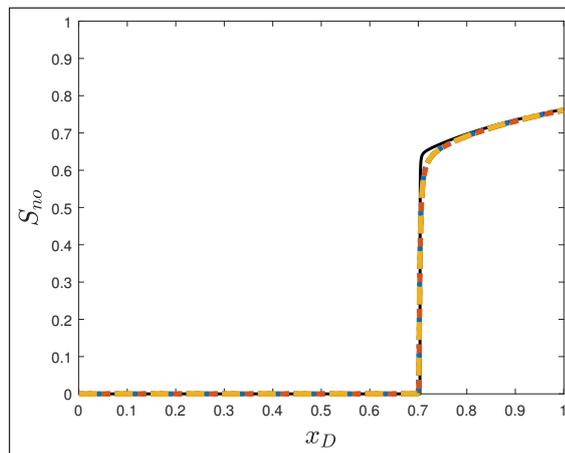
Legenda: Perfis de saturação normalizada para os métodos IMPES, Simultâneo e Segregado:  
(a) gás, (b) óleo e (c) água.

Fonte: O autor, 2022.

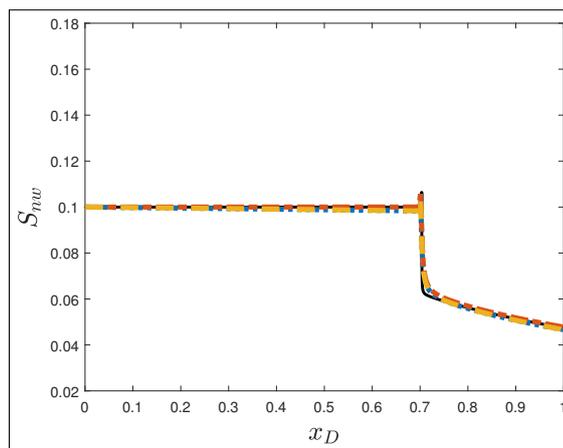
Figura 6 - Perfis de saturações: segundo caso e uma função de permeabilidade relativa côncava



(a)



(b)



(c)

Legenda: Perfis de saturação normalizada para os métodos IMPES, Simultâneo e Segregado:  
(a) gás, (b) óleo e (c) água.

Fonte: O autor, 2022.

A Figura 7 traz os perfis de saturações de gás, óleo e água para o terceiro caso e é possível ver que as curvas oriundas dos diferentes métodos encontram-se praticamente sobrepostas. Além disso, quando compara-se qualitativamente os resultados deste trabalho com os de Guzmán e Fayers (1997b), mesmo na presença de uma pequena compressibilidade dos fluidos e da difusão numérica, verifica-se que eles estão de acordo com o previsto pela teoria.

As curvas de saturação exibidas mostram que o código desenvolvido, tanto para os métodos tradicionais (IMPES e MTI) quanto para as duas estratégias do tipo Picard-Newton (simultâneo e segregado), é capaz de capturar as diferentes dinâmicas inerentes ao escoamento trifásico em meios porosos. Essa capacidade é refletida na correta reprodução dos diferentes resultados analíticos encontrados nas referências citadas.

## 6.2 Injeção na fronteira do reservatório

Apresenta-se, agora, uma sequência de simulações onde pretende-se, além da apresentação dos perfis de saturações obtidos sob diferentes situações, comparar os métodos Picard-Newton e os métodos IMPES e MTI. Em uma primeira análise são considerados escoamentos trifásicos onde a injeção no domínio é imposta via uma condição de contorno.

Portanto, impõe-se uma condição de fluxo constante representada por um gradiente de pressão  $\partial p / \partial x = -0,5$  psi/ft, constante na direção  $x$ , na fronteira  $x = 0$  (contorno à esquerda) do domínio, enquanto na fronteira  $x = L_x$  (contorno à direita) tem-se uma pressão constante e igual à pressão inicial do reservatório. Na fronteira onde o fluxo é imposto, considera-se que uma mistura de 70 % água e 30 % gás é injetada no reservatório, que contém inicialmente apenas óleo e água.

As Tabelas 2 e 3 contêm as propriedades e os parâmetros utilizados em todas as simulações. As propriedades relevantes que não constam nessas tabelas foram calculadas seguindo as correlações introduzidas no Capítulo 1. Para esse estudo não foi considerado a presença de gás dissolvido em óleo.

### 6.2.1 Reservatório homogêneo

Considera-se um reservatório homogêneo com as propriedades descritas nas Tabelas 2 e 3 e dimensões iguais a  $L_x = 1000$  ft,  $L_y = 100$  ft e  $L_z = 30$  ft. Devido às condições de contorno impostas e por se tratar de um problema homogêneo, o escoamento se dá em uma única direção (direção  $x$ ). Então, um estudo de refinamento de malha é feito. Porém, considera-se a variação no número de células apenas na direção do escoamento, de forma que três malhas foram testadas: com 80, 160 e 320 células. Nas direções  $y$  e  $z$  foi mantido

Tabela 2 - Propriedades dos fluidos

Parâmetro	Valor	Unidade
$B_o^0$	1,14	-
$B_w^0$	1,01	-
$c_o$	$5 \times 10^{-6}$	psi <sup>-1</sup>
$c_w$	$3 \times 10^{-6}$	psi <sup>-1</sup>
$C$ (salinidade)	20	%
$d_o$	0,82	-
$p_b$	1760	psi
$p_w^0$	2000	psi
$\gamma_g$	0,60	-
$\mu_{ob}$	0,79	cp

Fonte: O autor, 2022.

Tabela 3 - Propriedades do reservatório

Parâmetro	Valor	Unidade
$c_\phi$	$1 \times 10^{-6}$	psi <sup>-1</sup>
$k_{rw_{max}}$	0,8	-
$k_{rg_{max}}$	0,3	-
$k_x = k_y$	10	md
$k_z$	5	md
$p_{ini}$	4000	psi
$S_{iw}$	0,15	-
$S_{or}$	0,10	-
$T$	150	°F
$\phi^0$	0,2	-

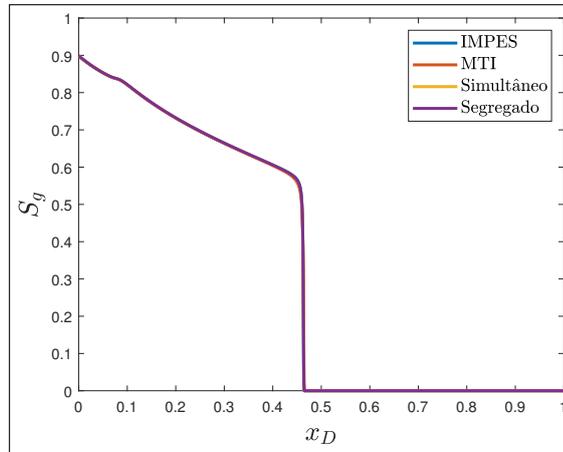
Fonte: O autor, 2022.

um número constante e igual a 3 células.

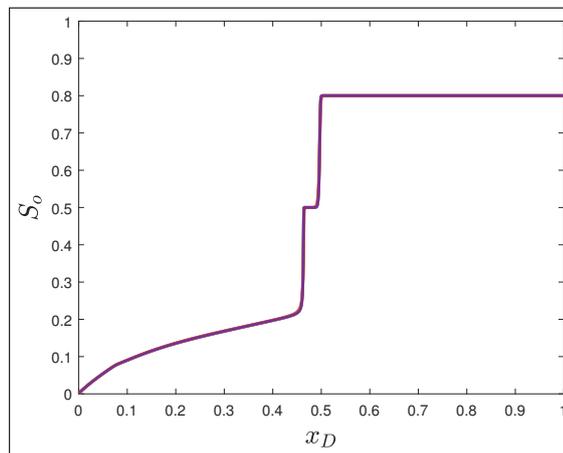
A Figura 8 traz os perfis das saturações para um tempo  $t = 3650$  dias. É possível ver que os resultados convergem e que a difusão numérica é reduzida. Também, constata-se que a diferença entre os valores das saturações calculadas com as diferentes malhas é pequena. Somente são mostrados os resultados gerados com o método Picard-Newton segregado, no entanto, similarmente ao visto na seção de verificação, as quatro estratégias de resolução apresentaram resultados similares. Eles foram omitidos por serem redundantes e também para simplificar a leitura.

O problema aqui simulado é similar ao encontrado no trabalho de [Abreu, Furtado e Pereira \(2004\)](#) e verifica-se que os perfis exibidos na Figura 8 coincidem, ao menos de forma qualitativa, com os da referência citada. Logo, garante-se de fato que a convergência ocorre e que todos os métodos foram capazes de capturar os perfis de saturações de gás, óleo e água que correspondem aos fisicamente esperados.

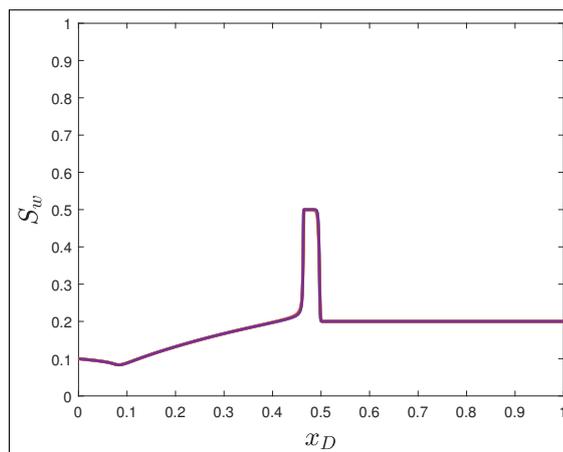
Figura 7 - Perfis de saturações: terceiro caso e uma função de permeabilidade relativa côncava



(a)



(b)

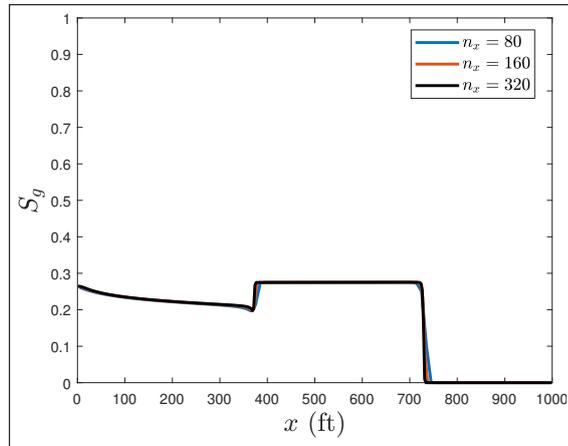


(c)

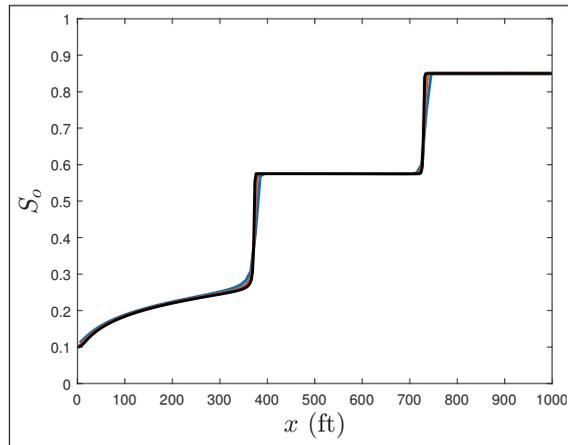
Legenda: Perfis de saturação para os métodos IMPES, Simultâneo e Segregado: (a) gás, (b) óleo e (c) água.

Fonte: O autor, 2022.

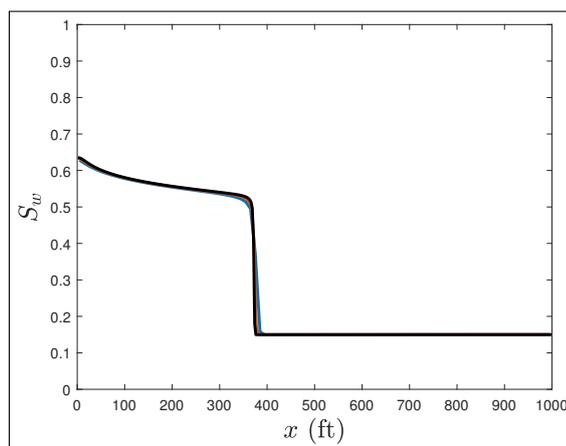
Figura 8 - Perfis de saturações para o escoamento no meio homogêneo



(a)



(b)



(c)

Legenda: Perfis de saturações para diferentes malhas obtidos com o método Picard-Newton segregado: (a) gás, (b) óleo e (c) água.

Fonte: O autor, 2022.

As Tabelas 4, 5 e 6 trazem os tempos de simulação referentes aos diferentes métodos e para as três malhas analisadas nesse exemplo. Nas tabelas, também constam o número de passos de tempo que cada método utilizou nas simulações para alcançar a convergência, assim como o valor de  $it_{med}$  associado, que representa o número médio de iterações por passo de tempo. Para essas simulações foi empregado um passo de tempo variável, conforme exposto no Capítulo 4, sendo que o seu valor inicial foi 0,5 dia e o máximo 5 dias. O número máximo de iterações no qual o passo de tempo é aumentado é 10 ( $it_{incr}$ ), enquanto o número mínimo de iterações para o passo de tempo ser reduzido é 20 ( $it_{decr}$ ). As taxas de crescimento e decréscimo ( $n_{incr}$  e  $n_{decr}$ ) foram, respectivamente, de 1,2 e 0,5.

Os tempos de simulação para o problema com a malha mais grosseira ( $n_x = 80$ ), Tabela 4, mostram que o IMPES teve o melhor desempenho e o MTI teve o tempo de execução mais longo. Isso é facilmente explicado uma vez que o número de passos de tempo para os quatro métodos foi o mesmo. Portanto, como o IMPES tem o menor custo por passo de tempo, ele acaba tendo o menor tempo. Por outro lado, como o MTI possui o maior custo por passo de tempo, tal fato implica a simulação com o maior tempo de execução.

Tabela 4 - Tempos de execução: escoamento homogêneo e  $n_x = 80$

	Tempo de execução	Passos de tempo	$it_{med}$
IMPES	00 min 33 s	739	7,18
MTI	01 min e 42 s	739	4,01
Simultâneo	00 min e 51 s	739	7,37
Segregado	00 min e 48 s	739	7,38

Fonte: O autor, 2022

Tabela 5 - Tempos de execução: escoamento homogêneo e  $n_x = 160$

	Tempo de execução	Passos de tempo	$it_{med}$
IMPES	02 min e 34 s	849	15,93
MTI	03 min e 58 s	739	4,00
Simultâneo	02 min e 29 s	739	10,31
Segregado	02 min e 19 s	739	10,30

Fonte: O autor, 2022

Com o uso de malhas mais refinadas, percebe-se um aumento no número de passos de tempo para o método IMPES, enquanto o MTI mantém o mesmo número que o correspondente à malha mais grossa, ressaltando a sua capacidade de fazer uso de passos de tempo maiores. No que diz respeito às estratégias do tipo Picard-Newton, verifica-se que elas foram capazes de proporcionar um número de passos de tempo menor que o do IMPES. Além desse fato, os tempos apresentados nas Tabelas 5 e 6 para as estratégias simultânea

Tabela 6 - Tempos de execução: escoamento homogêneo e  $n_x = 320$ 

	Tempo de execução	Passos de tempo	$it_{med}$
IMPES	09 min e 38 s	1786	14,19
MTI	10 min e 31 s	739	4,01
Simultâneo	07 min e 54 s	857	14,11
Segregado	07 min e 30 s	868	13,98

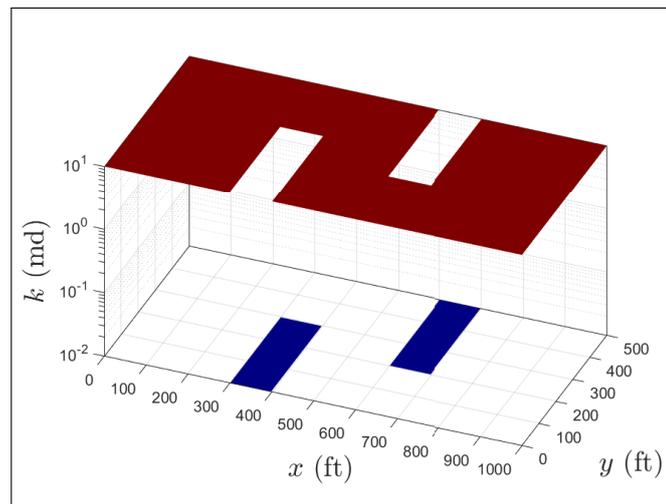
Fonte: O autor, 2022

e segregada foram menores que os obtidos com os métodos IMPES e totalmente implícito, demonstrando, para as condições impostas, um melhor desempenho computacional.

### 6.2.2 Reservatório heterogêneo

Em seguida, aborda-se um problema similar ao caso anterior. Porém, agora, considera-se o escoamento trifásico em um reservatório heterogêneo. A heterogeneidade é consequência da presença de descontinuidades abruptas no campo de permeabilidades, como pode ser visto na Figura 9, sendo que duas regiões retangulares possuem valores da permeabilidade 1000 vezes menores que os do restante do reservatório.

Figura 9 - Campo de permeabilidade do reservatório heterogêneo



Fonte: O autor, 2022.

Foi considerado um reservatório de dimensões  $L_x = 1000$  ft,  $L_y = 500$  ft e  $L_z = 30$  ft, com uma malha contendo 160 volumes finitos na direção  $x$ , 80 em  $y$  e apenas 3 em  $z$ . Essa malha foi escolhida de forma a se ter o mesmo valor do incremento de espaço nas direções  $x$  e  $y$ , que são as direções principais do escoamento, já que a gravidade não foi considerada

nessas simulações.

A Figura 10 traz os campos de saturação do gás e da água para três instantes de tempo distintos. Os resultados foram obtidos utilizando o método Picard-Newton com a estratégia segregada. Ressalta-se que os campos de saturação determinados com os outros métodos não foram incluídos em função dos mesmos terem fornecido resultados análogos.

Conforme pode ser observado, o escoamento reproduz os efeitos decorrentes da introdução das “barreiras” criadas em função da heterogeneidade do campo de permeabilidade. Como consequência, tem-se a mudança da direção dos fluidos que encontram-se escoando, uma vez que a resistência ao seu deslocamento será menor nas regiões com os maiores valores da permeabilidade. Outro fator a ser notado é a diferença entre os padrões de deslocamento do gás e da água. Entende-se como algo esperado dada a diferença entre os valores de viscosidade entre os fluidos, com o gás sendo muito menos viscoso, levando a uma maior velocidade de escoamento (de acordo com a lei de Darcy). Também é importante destacar que nenhuma oscilação espúria significativa foi observada nas frentes de avanço, ou seja, os métodos mantiveram os valores das saturações dentro dos limites físicos permitidos de variação.

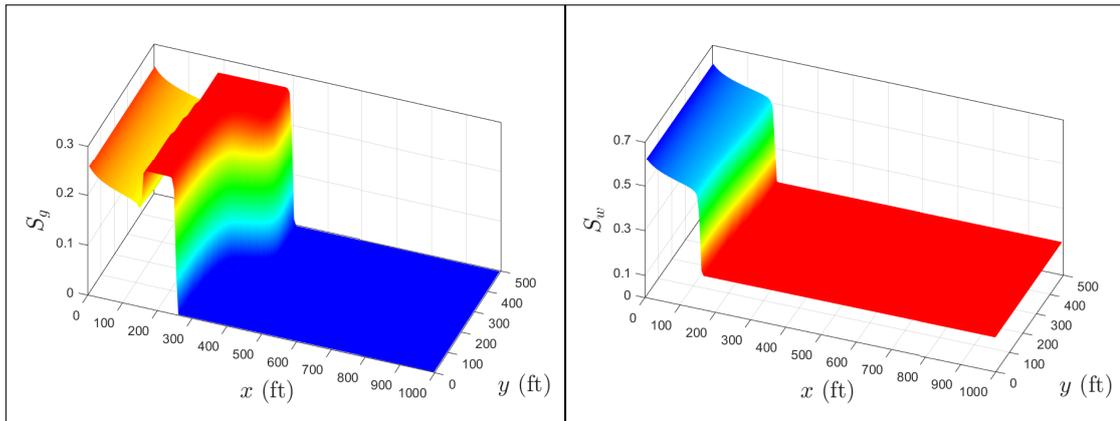
Os tempos de execução das simulações para esse caso heterogêneo podem ser vistos na Tabela 7. Para o problema em questão, fica claro que a restrição do passo de tempo no método IMPES impacta severamente a sua performance, necessitando de um grande número de passos de tempo para que a convergência seja verificada. Entretanto, para os métodos do tipo Picard-Newton, apesar de necessitarem de mais passos de tempo que o MTI, o custo por passo de tempo compensa seu uso. Por exemplo, a estratégia segregada demanda um tempo aproximadamente 40% menor que o MTI. Já a estratégia simultânea, a despeito de ter um maior custo que a segregada, também resultou em um tempo de execução menor que os dos métodos IMPES e Totalmente Implícito.

Tabela 7 - Tempos de execução: escoamento heterogêneo

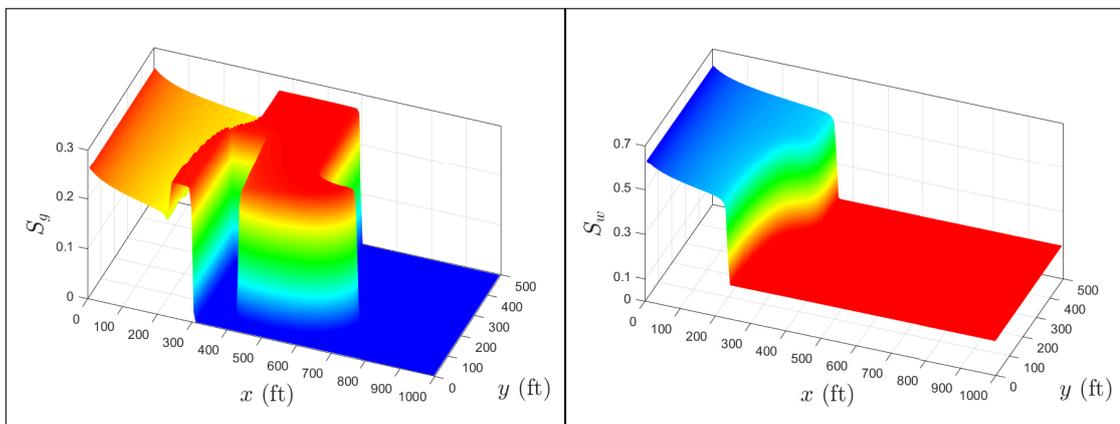
	Tempo de execução	Passos de tempo	$it_{med}$
IMPES	4 h 48 min e 23 s	2762	20,31
MTI	4 h 42 min e 18 s	739	4,23
Simultâneo	3 h 11 min e 33 s	1549	12,66
Segregado	2 h 47 min e 23 s	1549	12,64

Fonte: O autor, 2022

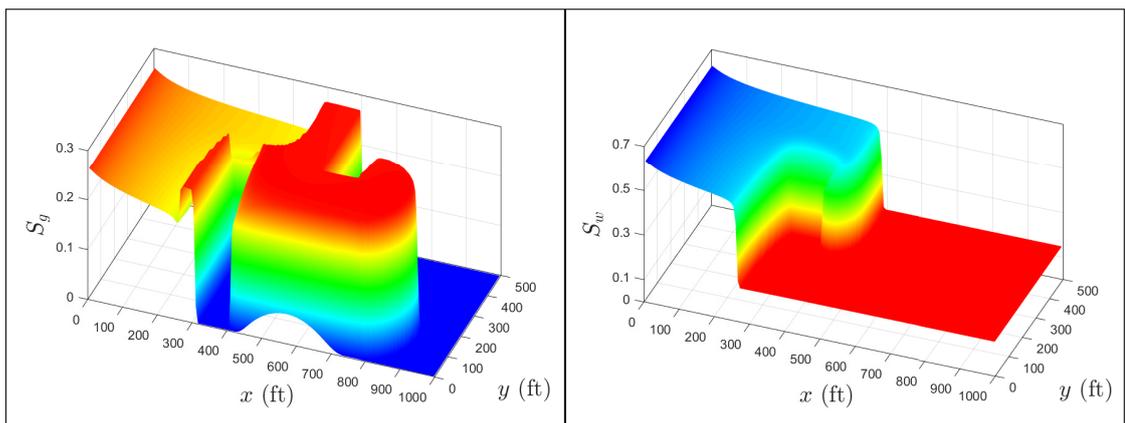
Figura 10 - Perfis de saturações para o escoamento no meio heterogêneo



(a)



(b)



(c)

Legenda: Superfícies de saturação do gás (esquerda) e da água (direita), obtidas com o método Picard-Newton segregado, para os tempos (a)  $t \approx 1620$  dias, (b)  $t \approx 2840$  dias (c)  $t \approx 3650$  dias.

Fonte: O autor, 2022.

### 6.3 *Water Alternating Gas* em um arranjo *Five-Spot*

Nesta seção, simulações do tipo WAG foram realizadas tendo em vista um esquema de injeção em um arranjo do tipo *Five-Spot*. A injeção alternada de água e gás é uma estratégia que resulta no aumento da recuperação do óleo, sendo uma técnica de recuperação avançada associada ao escoamento trifásico (SURGUCHEV et al., 1992; NEZHAD et al., 2006). Já o arranjo de injeção *Five-Spot* se refere ao padrão de distribuição dos poços no reservatório, onde quatro poços de injeção se situam nos cantos de um quadrado e um poço produtor se encontra no centro desse quadrado (MOHAJERI et al., 2020). Devido à simetria desse esquema, foi simulado aqui apenas um quarto desse quadrado, simulando então um poço injetor em um vértice do quadrado com o poço produtor no vértice diagonalmente oposto.

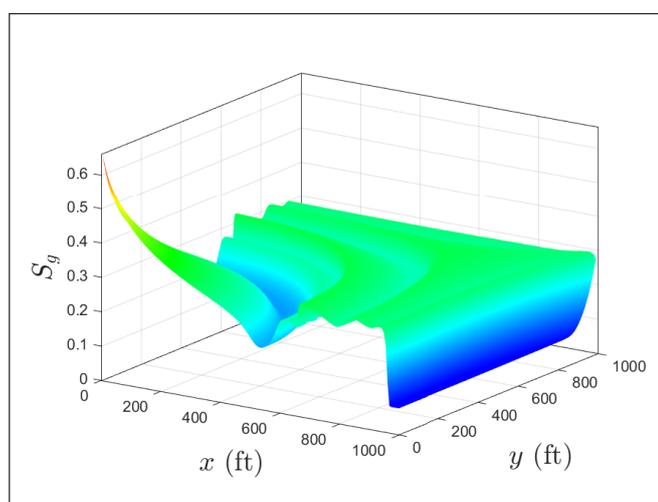
Essas simulações, a menos quando mencionado contrário, utilizaram os parâmetros e propriedade das Tabelas 2 e 3, o reservatório possui as dimensões  $L_x = 1000$  ft,  $L_y = 1000$  ft e  $L_z = 30$  ft, a malha computacional é composta de 160 volumes finitos nas direções  $x$  e  $y$  e, novamente, apenas 3 na direção do eixo  $z$ . As simulações foram realizadas para um tempo máximo igual a  $t = 3000$  dias, com um intervalo de alternância entre a injeção de água e gás de 300 dias. As pressões nos poços injetor e produtor são prescritas em 8000 psi e 3000 psi, respectivamente, com o poço atravessando verticalmente todo o reservatório. O reservatório contém inicialmente água em sua saturação irreduzível, 10% de gás e o restante preenchido com óleo.

#### 6.3.1 Reservatório homogêneo

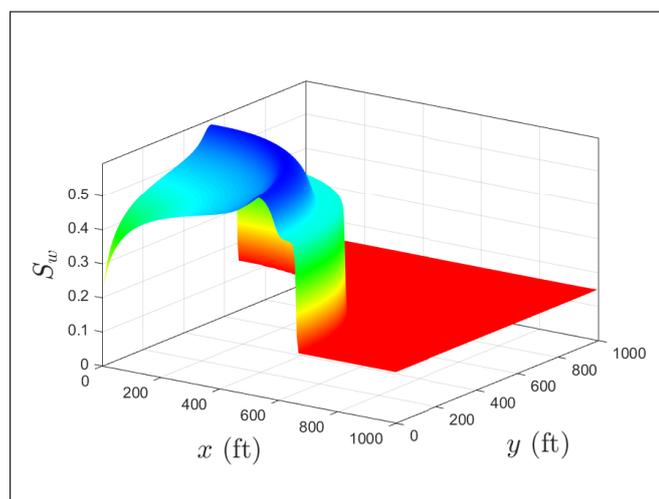
A Figura 11 contém a representação tridimensional do campo de saturação para a simulação do escoamento em um meio homogêneo. Para o instante de tempo mostrado ( $t = 3000$  dias) é observado o final do quinto ciclo de injeção de gás. Pode-se perceber que a viscosidade mais baixa do gás faz com que essa fase chegue ao poço produtor muito mais cedo que a água. Portanto, um dos objetivos da técnica WAG é o de aumentar a eficiência de varredura do óleo, quando comparada à recuperação avançada injetando unicamente a fase gás.

Novamente, os valores da saturação calculados via os quatro métodos foram similares. Então, optou-se por mostrar na Figura 11 somente os campos de saturação obtidos com o método Picard-Newton simultâneo. Vale ressaltar que as ondulações, vistas principalmente em se tratando da saturação do gás, são consequências da alternância dos fluidos de injeção e do escoamento simultâneo das três fases, não sendo percebido oscilações espúrias de origem numérica.

Figura 11 - Perfis de saturações para o escoamento no meio homogêneo e a técnica WAG



(a)



(b)

Legenda: Superfícies de saturação, obtidas com o método Picard-Newton simultâneo, do (a) gás e da (b) água.

Fonte: O autor, 2022.

A comparação entres os tempos de simulação de cada método pode ser feita levando-se em conta os valores da Tabela 8. Para esse caso, é notório o melhor desempenho dos métodos Picard-Newton, com uma redução no tempo de execução de aproximadamente 60% quando comparados os métodos Totalmente Implícito e a estratégia Simultânea. O método IMPES teve um desempenho muito inferior aos outros, destacando-se o elevado número de passos de tempo quando compara-se com os respectivos valores associados aos demais métodos. Conforme sabido, tal fato se deve ao método ser explícito e existir uma

restrição que o incremento de tempo deve verificar para que o método seja numericamente estável. Salienta-se, também, para esse caso, que com a estratégia de resolução simultânea foi possível obter um passo de tempo médio maior do que o da estratégia segregada. Assim sendo, o melhor desempenho dentre os métodos Picard-Newton foi alcançado com essa estratégia.

Tabela 8 - Tempos de execução: meio homogêneo e técnica WAG

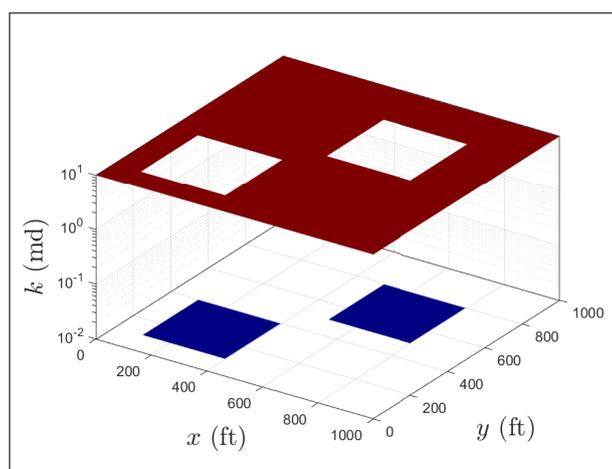
	Tempo de execução	Passos de tempo	$it_{med}$
IMPES	32 h 37 min e 41 s	29922	11,05
MTI	16 h 35 min e 45 s	661	5,19
Simultâneo	5 h 55 min e 35 s	1577	12,07
Segregado	6 h 50 min e 03 s	2030	11,20

Fonte: O autor, 2022

### 6.3.2 Reservatório heterogêneo

Abordou-se, também, o uso da técnica WAG em se tratando de um reservatório heterogêneo. Novamente, o meio é heterogêneo em decorrência da presença de duas regiões cujas permeabilidades são de três ordens de grandeza inferiores às do restante do reservatório. Assim sendo, tem-se o surgimento de uma descontinuidade abrupta no campo de permeabilidades, como pode ser visto na Figura 12. As duas regiões quadradas são caracterizadas por possuírem uma permeabilidade de  $10^{-2}$  md enquanto que na região remanescente ela é igual a  $10^1$  md.

Figura 12 - Permeabilidade do reservatório heterogêneo

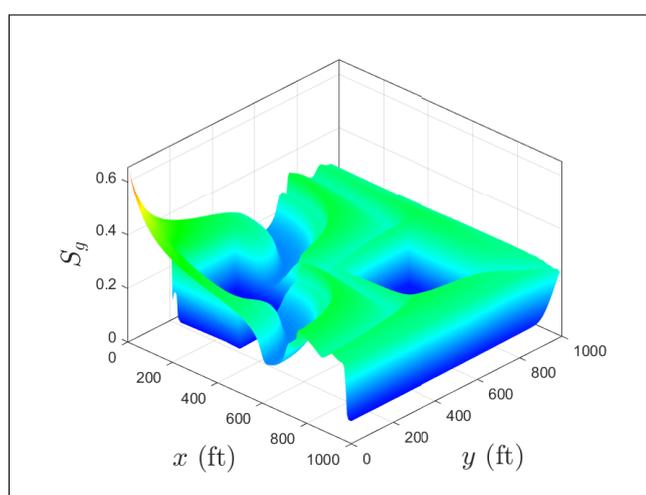


Fonte: O autor, 2022.

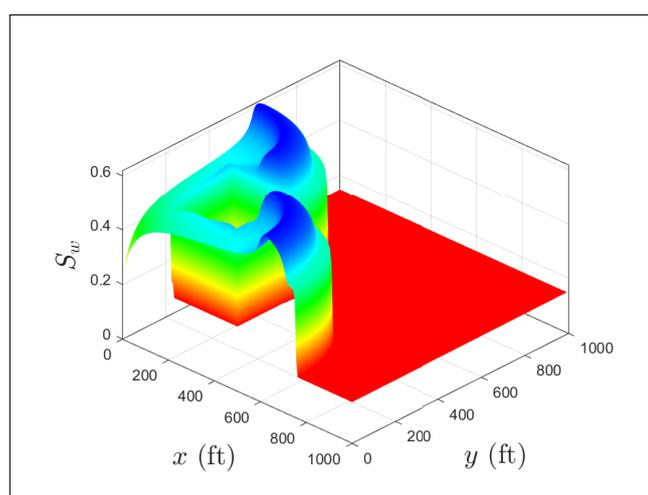
Os campos de saturações da água e do gás têm um comportamento similar ao visto no caso do escoamento no reservatório homogêneo. No entanto, claro está que ambos fluidos

praticamente não percolam as regiões de baixa permeabilidade, como pode ser constatado na Figura 13. Isso decorre do fato, já mencionado anteriormente, que o escoamento ocorre preferencialmente nas regiões que oferecem uma menor resistência ao mesmo, ou seja, onde os valores da permeabilidade são mais elevados. Todos os métodos forneceram resultados similares entre si e mostraram-se eficientes na captura dos efeitos advindos das discontinuidades das saturações, no entorno das regiões de baixa permeabilidade. Uma vez mais, as oscilações surgem, principalmente no campo de saturações do gás, em função das características da injeção alternada e não são originárias dos métodos numéricos.

Figura 13 - Perfis de saturações para o escoamento no meio heterogêneo e a técnica WAG



(a)



(b)

Legenda: Superfícies de saturação, obtidas com o método Picard-Newton simultâneo, do (a) gás e da (b) água.

Fonte: O autor, 2022.

A existência das regiões implicando um grande contraste nos valores das permeabilidades acarretou a diminuição do tempo total de simulação para todos os métodos, conforme pode ser verificado a partir dos seus valores na Tabela 9. De novo, constata-se que os métodos Picard-Newton proporcionaram tempos de execução menores que os dos métodos tradicionais, confirmando o que havia sido concluído no caso do escoamento no meio homogêneo.

Tabela 9 - Tempos de execução: meio heterogêneo e técnica WAG

	Tempo de execução	Passos de tempo	$it_{med}$
IMPES	23 h 17 min e 20 s	5599	23,07
MTI	16 h 00 min e 44 s	704	4,96
Simultâneo	5 h 30 min e 16 s	1454	12,68
Segregado	6 h 01 min e 53 s	1928	11,31

Fonte: O autor, 2022

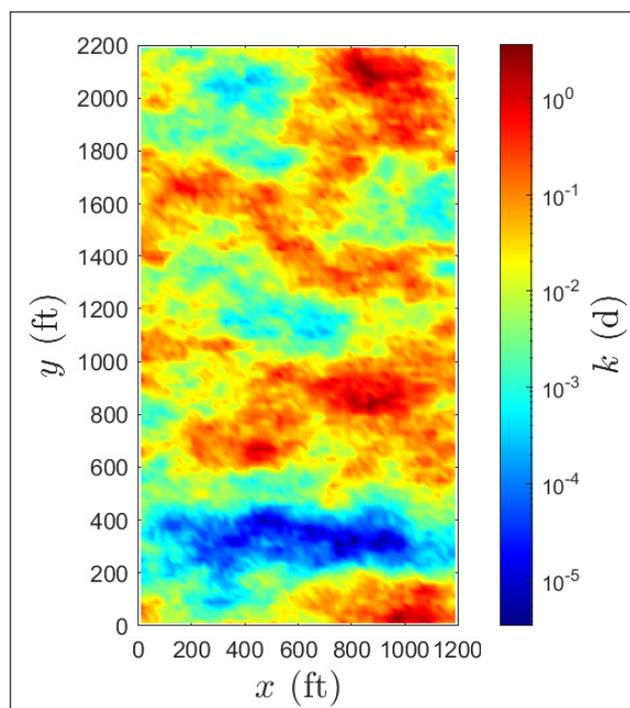
### 6.3.3 O projeto SPE 10

O décimo projeto de estudo da SPE (*Society of Petroleum Engineers*), aqui chamado de SPE 10, fornece um campo de permeabilidade altamente heterogêneo gerado a partir de dados de um campo real (CHRISTIE; BLUNT, 2001). Foi usado neste trabalho um campo derivado desse projeto, conforme mostrado na Figura 14.

Para esse caso específico, um arranjo do tipo *Five-Spot* foi utilizado. Alternativamente ao apresentado anteriormente, o arranjo contém um poço injetor posicionado no centro e quatro poços produtores nos cantos do reservatório, com as mesmas pressões de produção e injeção que as prescritas nos casos anteriores. Foi simulado um tempo total de produção de 3650 dias (10 anos) e cada ciclo de injeção sofre uma alternância a cada 365 dias, de forma a se obter 10 ciclos de injeção no período de tempo abordado. O reservatório possui dimensões  $L_x = 1200$  ft,  $L_y = 2200$  ft e  $L_z = 30$  ft.

A Figura 15 mostra os correspondentes campos de saturação do gás e da água. A viscosidade mais baixa do gás faz com que ele avance mais facilmente através do domínio. Como o poço injetor encontra-se em uma região de baixa permeabilidade ( $< 1$  md), a água enfrenta uma maior resistência ao escoamento e apresenta uma maior dificuldade para atravessar a região central, ainda mais quando o gás já ocupa boa parte do reservatório. Todos os métodos estudados forneceram campos de saturações similares e, então, optou-se por fornecer apenas aqueles do método Segregado.

Figura 14 - Permeabilidade do reservatório SPE 10



Fonte: O autor, 2022.

Os tempos de simulação associados aos diferentes métodos podem ser vistos na Tabela 10. Assim como em casos anteriores, os métodos Picard-Newton mostraram ter um desempenho computacional melhor do que aqueles dos métodos Totalmente Implícito e, principalmente, IMPES, onde mais uma vez a restrição imposta ao valor do incremento de tempo afetou severamente o tempo total de execução. Ressalta-se que foi possível obter uma redução de aproximadamente 60% no tempo de execução com o uso do método Picard-Newton Simultâneo quando comparado ao MTI.

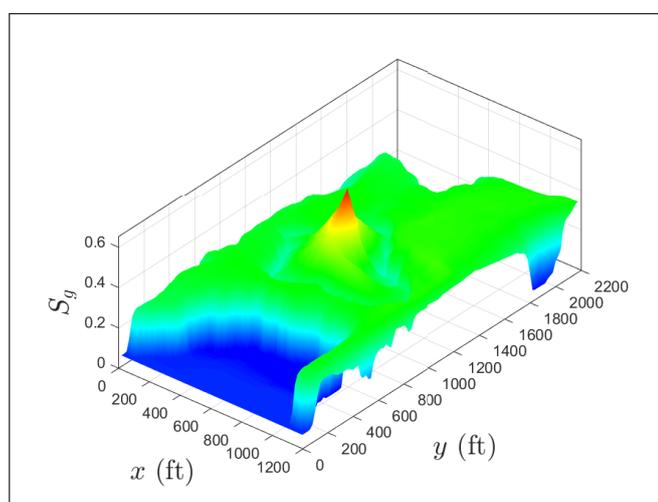
Tabela 10 - Tempos de execução: SPE 10 e técnica WAG

	Tempo de execução	Passos de tempo	$it_{med}$
IMPES	9 h 06 min e 55 s	10986	17,40
MTI	3 h 51 min e 04 s	793	4,61
Simultâneo	1 h 30 min e 27 s	938	11,84
Segregado	1 h 46 min e 12 s	1211	11,86

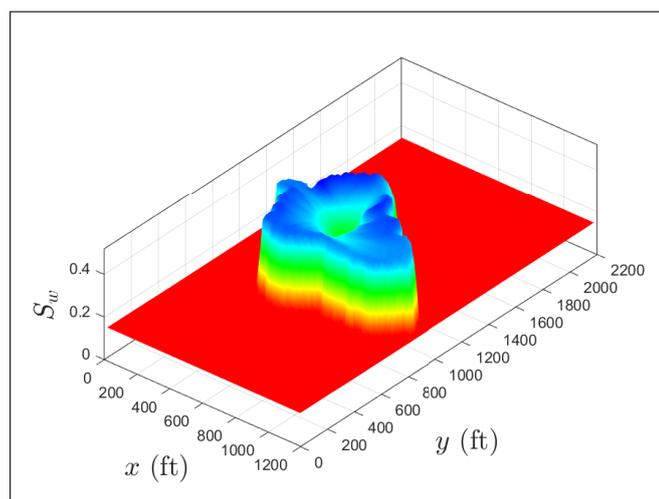
Fonte: O autor, 2022

Como a permeabilidade na região central do campo vista na Figura 14 é baixa, a água enfrenta uma maior dificuldade para se deslocar pelo reservatório. Por conta disso, um segundo problema foi testado, onde o poço injetor se localiza agora em uma região mais permeável, de coordenadas (830, 830) ft.

Figura 15 - Perfis de saturações para o SPE 10 e a técnica WAG



(a)



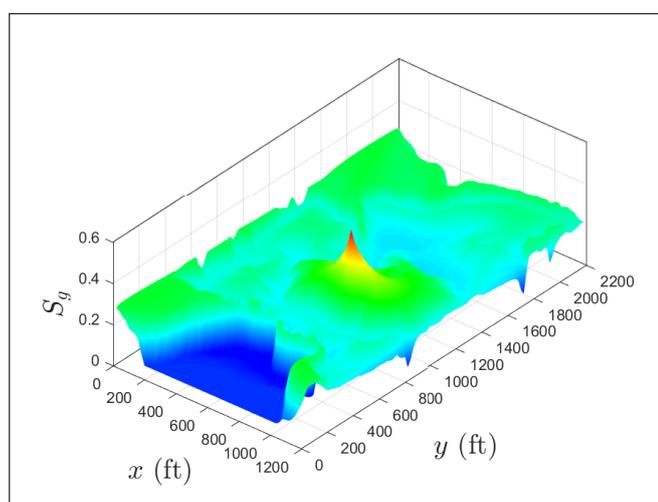
(b)

Legenda: Superfície de saturação, obtidas com o método Picard-Newton segregado, de (a) gás e (b) água.

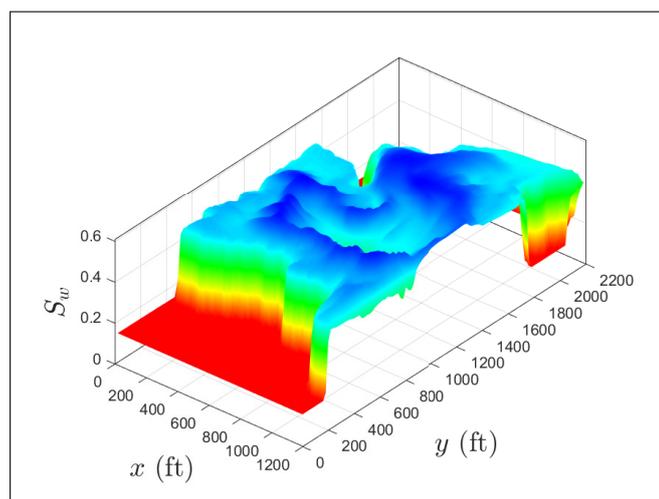
Fonte: O autor, 2022.

Conseqüentemente, como pode ser atestado na Figura 16, em função da mudança do poço injetor, a fase água experimenta agora um avanço mais significativo no interior do reservatório, em comparação ao que aconteceu no caso anterior com o um poço de injeção centralizado. Como no caso anterior, o simulador foi capaz de capturar o escoamento em um campo altamente heterogêneo sem induzir oscilações espúrias nos campos de saturação de água e gás.

Figura 16 - Perfis de saturações para o SPE 10, a técnica WAG e o poço injetor deslocado



(a)



(b)

Legenda: Superfície de saturação, obtidas com o método Picard-Newton segregado, de (a) gás e (b) água.

Fonte: O autor, 2022.

Na Tabela 11, apresenta-se os tempos totais de execução para esse novo esquema de injeção e algumas diferenças podem ser destacadas em relação aos casos precedentes. Primeiramente, deve-se salientar a incapacidade de se obter a convergência em se tratando do método IMPES. É sabido que esse método apresenta uma maior dificuldade no escoamento trifásico em relação ao com apenas duas fases (CHEN; HUAN; MA, 2006). Para esse caso em específico, uma possível explicação para tal não convergência reside na necessidade de passos de tempo proibitivamente pequenos, em comparação ao caso anterior, devido a

maior heterogeneidade nos campos de saturação com a evolução da simulação. Entretanto, uma investigação aprofundada deve ser feita a fim de se poder afirmar com certeza a razão do método não ter convergido. Nota-se também que os outros três métodos apresentaram tempos de execução bem mais elevados após o reposicionamento do poço injetor.

Tabela 11 - Tempos de execução: SPE 10, técnica WAG e poço injetor deslocado

	Tempo de execução	Passos de tempo	$it_{med}$
IMPES	-	-	-
MTI	4 h 57 min e 14 s	870	4,20
Simultâneo	2 h 16 min e 32 s	1734	12,78
Segregado	2 h 15 min e 51 s	1676	13,29

Fonte: O autor, 2022

Prosseguindo, também ressalta-se, baseado nos resultados apresentados na tabela, que foi alcançada uma redução de mais de 50% no tempo de execução em relação aos resultados obtidos respectivamente com os métodos de Picard-Newton Segregado e Totalmente Implícito. Ainda, verifica-se que os tempos de execução associados às estratégias simultânea e segregada ficaram muito próximos um do outro, com uma pequena vantagem para a segregada.

Para esses problemas, fica claro que o custo computacional da solução simultânea de pressão, saturação da água e do gás no MTI toma um tempo de fato grande, tendo em vista que em todos os casos apresentados, o número de passos de tempo foi sempre menor para o MTI. Além disso, o número de iterações por passo de tempo também é menor, ficando sempre em torno de 4 a 5 iterações por passo de tempo, explicitando o custo computacional da solução simultânea. Já os métodos Picard-Newton se mostraram um bom compromisso entre custo computacional por passo de tempo e o tamanho do passo de tempo, obtendo assim, para os casos estudados, um tempo de execução menor que o IMPES e o MTI.

#### 6.3.4 Efeitos da pressão capilar

As simulações feitas até o presente momento desconsideraram os efeitos das pressões capilares. Entretanto, sabe-se da importância da pressão capilar na correta descrição do escoamento multifásico em meios porosos (FAYERS; SHELDON, 1959; AZFALI et al., 2020). No entanto, em muitos trabalhos os seus efeitos são negligenciados (TRANGENSTEIN; BELL, 1989; LEE et al., 2003), levando-se em consideração que, principalmente, na escala de campo o escoamento é dominado pelas forças viscosas, resultando em um menor impacto da pressão capilar em função da ordem de grandeza desses dois mecanismos de

transporte (ZUO et al., 2014). Porém, apesar da prática corriqueira em se desprezar os seus efeitos, decidiu-se realizar uma simulação com a finalidade de se atestar a capacidade dos métodos Picard-Newton em lidar com os efeitos oriundos das pressões capilares.

Para tanto, tomou-se como ponto de partida o exemplo do caso anterior, com um campo de permeabilidades correspondente ao da Figura 14 e o poço injetor deslocado para a região de maior permeabilidade. No que diz respeito às funções que fornecem os valores das pressões capilares para os sistemas óleo-água e gás-óleo, apresentadas ao final do Capítulo 1, considerou-se os seguintes valores para os expoentes:  $epcow = epcgo = 2$ . Agora, em se tratando dos valores máximos, assumiu-se que  $P_{cow_{max}} = 16$  psi e  $P_{cgo_{max}} = 10$  psi.

A Figura 17 contém a representação espacial dos campos de saturações do gás e da água sem (à esquerda) e com (à direita) os efeitos da pressão capilar. Observa-se que eles são muito similares aos calculados no caso anterior, não considerando-se os efeitos das pressões capilares (Figura 16). De fato, para o caso simulado, as pressões capilares não causam o aparecimento de um efeito muito pronunciado nos campos de saturações, além da já esperada suavização das frentes de avanço, embora ele exista e possa ser percebido para o gás, por exemplo, na região de injeção. Apesar do efeito no resultado final do cálculo das saturações ser pequeno, o mesmo não pode ser dito em relação à performance dos métodos com a inclusão da pressão capilar.

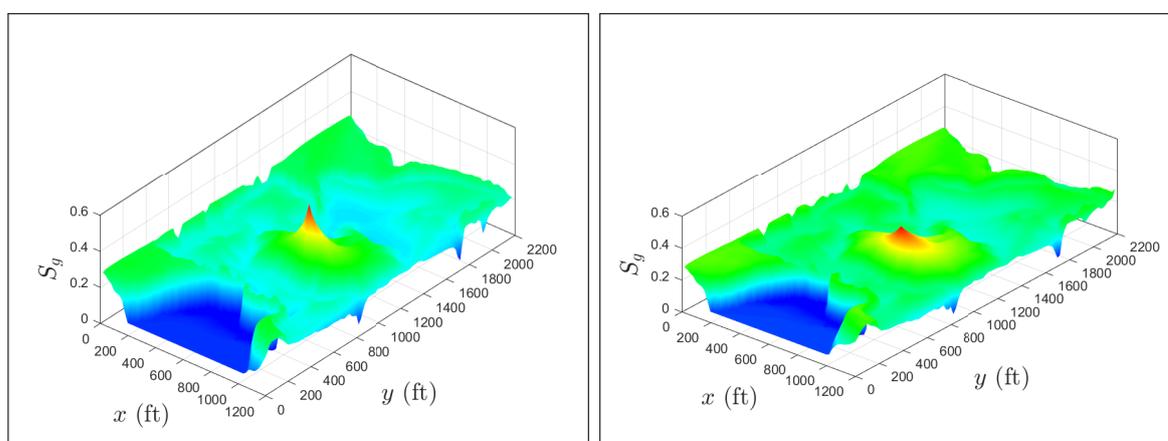
Antes de mais nada, informa-se que, uma vez mais, não foi possível concluir a simulação com o método IMPES. Para os demais métodos, da observação dos resultados da Tabela 12 percebe-se que a inclusão da capilaridade afetou negativamente os valores dos tempos de execução dos métodos Picard-Newton, sendo que as duas estratégias demandam, agora, mais tempo para que as simulações sejam concluídas. Entretanto, o contrário se aplica ao MTI, uma vez que observa-se uma redução no tempo total de execução. Assim sendo, vê-se que os efeitos da pressão capilar favoreceu a convergência desse método. Não obstante, os métodos Picard-Newton ainda se sobressaem, com uma redução de 34% no tempo de execução em relação ao MTI.

Tabela 12 - Tempos de execução: SPE 10, técnica WAG e efeitos da pressão capilar

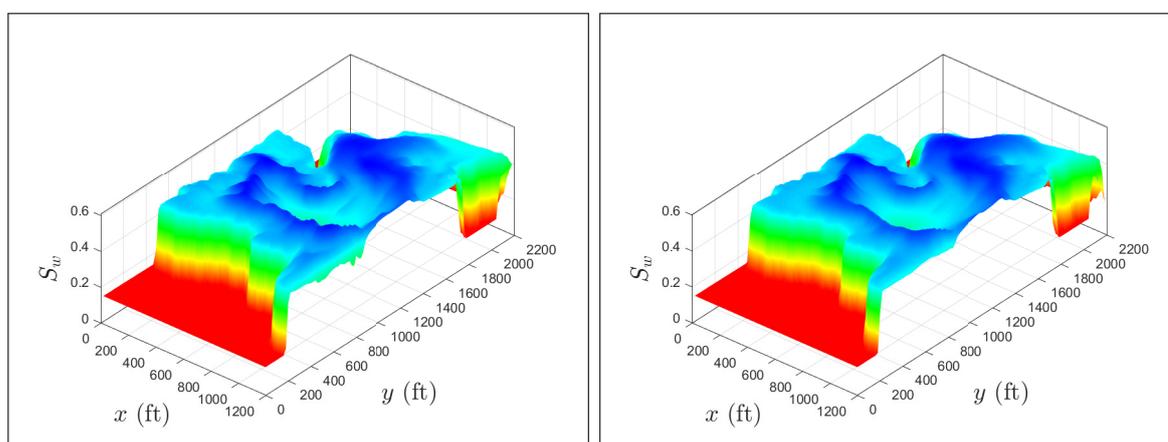
	Tempo de execução	Passos de tempo	$it_{med}$
IMPES	-	-	-
MTI	4 h 27 min e 13 s	799	6,23
Simultâneo	3 h 06 min e 29 s	2007	14,70
Segregado	2 h 56 min e 33 s	2007	15,00

Fonte: O autor, 2022

Figura 17 - Perfis de saturações para o SPE 10, a técnica WAG e com efeitos da pressão capilar



(a)



(b)

Legenda: Superfícies de saturação, obtidas com o método Picard-Newton segregado, do gás e da água sem (a) e com (b) os efeitos da pressão capilar.

Fonte: O autor, 2022.

Logo, pode-se afirmar que a presença dos efeitos da capilaridade resultou no aumento do número de passos de tempo necessários para a atingir a convergência e o tempo máximo de produção nos métodos Picard-Newton. Por outro lado, eles acarretaram uma redução desse número quando considera-se o MTI. Esse fato mostra que o método Picard-Newton enfrenta uma maior dificuldade para convergir na presença da pressão capilar. Entretanto, estudos mais aprofundados ainda são necessários para se avaliar o impacto da capilaridade na performance do método.

### 6.3.5 Efeitos gravitacionais

Por fim, avaliou-se os efeitos gravitacionais no escoamento multifásico. Para que eles fossem mais facilmente percebidos, estipulou-se que o reservatório teria dimensões dadas por  $L_x = 1000$  ft,  $L_y = 10$  ft e  $L_z = 50$  ft. Adicionou-se um poço injetor na fronteira esquerda do reservatório ( $x = 0$ ), com pressão prescrita de 5000 psi, e um poço produtor na fronteira direita ( $x = 1000$  ft), com pressão de 3000 psi. Por conta das características do escoamento, a malha utilizada possui 160 volumes finitos na direção  $x$ , 32 na direção  $z$  e apenas 3 volumes finitos na direção  $y$ . Foi simulado um tempo total de produção de 1800 dias, sendo o intervalo de alternância entre a injeção de água e gás de 300 dias. Para esse caso, o reservatório continha inicialmente 30% de gás e 15% de água na sua saturação irreduzível. As demais propriedades são as mesmas que as disponibilizadas nas Tabelas 2 e 3.

A Figura 18 apresenta os campos de saturação de gás e água. Conforme esperado, devido à sua baixa densidade, o gás tende a se movimentar em direção à região superior do reservatório, enquanto a água, mais densa que o óleo, para a região de maior profundidade. Os quatro métodos conseguiram capturar essa dinâmica de escoamento dos fluidos e forneceram campos de saturação semelhantes. A título de exemplo, apresenta-se na Figura 18 os resultados gerados pelo Picard-Newton segregado.

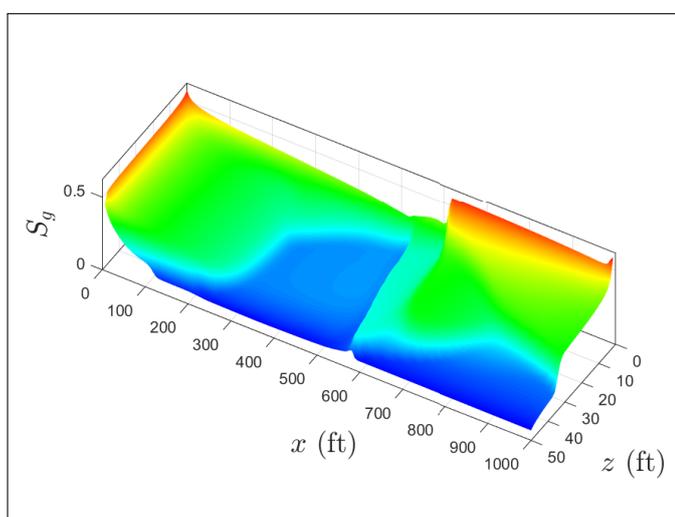
Os correspondentes tempos de execução das simulações se encontram na Tabela 13. Diferentemente das outras simulações exibidas, o MTI conclui a simulação em um tempo notoriamente maior que o das outras estratégias de solução. Em uma análise inicial, foi percebida uma dificuldade acentuada para que a convergência fosse alcançada quando da solução do sistema linear após a adição dos efeitos gravitacionais, o que de fato aumenta o tempo de simulação. No entanto, uma investigação mais aprofundada se faz necessária para o entendimento dessa queda significativa de performance do método MTI. Diferentemente, o método Picard-Newton Segregado foi capaz de proporcionar uma redução de aproximadamente 35% no tempo total de execução, quando comparado ao método IMPES. O uso da versão simultânea também levou a uma melhoria no tempo de execução, com uma redução próxima aos 30%.

Tabela 13 - Tempos de execução: técnica WAG e efeitos gravitacionais

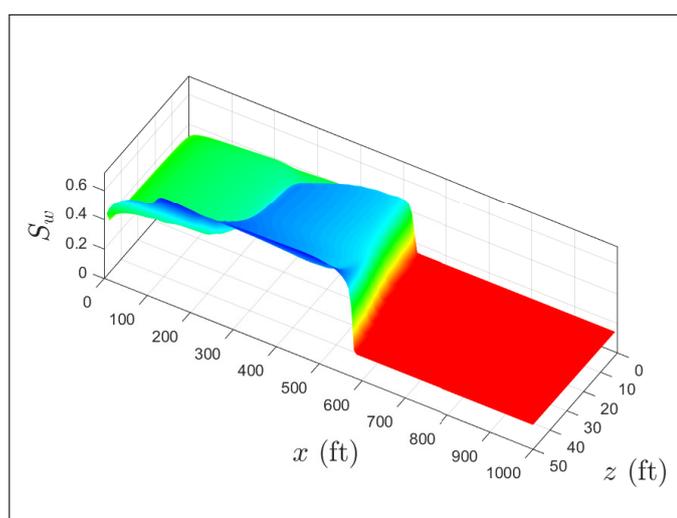
	Tempo de execução	Passos de tempo	$it_{med}$
IMPES	1 h 04 min e 22 s	2092	13,35
MTI	3 h 26 min e 51 s	370	4,81
Simultâneo	0 h 46 min e 04 s	931	12,73
Segregado	0 h 41 min e 33 s	850	13,07

Fonte: O autor, 2022

Figura 18 - Perfis de saturações com a técnica WAG e os efeitos gravitacionais



(a)



(b)

Legenda: Superfícies de saturação, obtidas com o método Picard-Newton segregado, do (a) gás e da (b) água.

Fonte: O autor, 2022.

Concluída a apresentação dos tempos de execução, salienta-se que o método IMPES aqui apresentado foi linearizado empregando o método de Picard, o diferenciando do IMPES clássico onde a linearização é explícita e o passo de tempo é restrito pela condição de CFL (FRANC et al., 2016). A estratégia utilizada neste trabalho é similar a do IMPES iterativo visto em Kou e Sun (2010), teoricamente mais estável. Por esse motivo, o procedimento de escolha do incremento de tempo, apresentada no Capítulo 4, foi empregada

também para o método IMPES. Apesar da avaliação explícita das saturações, nenhuma instabilidade numérica foi identificada, com os resultados gerados por esse método sendo sempre similares aos dos métodos implícitos. Entretanto, como o passo de tempo não foi limitado em função do número de Courant, não foi possível dizer se os valores utilizados seriam os maiores possíveis segundo a condição de estabilidade.

## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Na literatura, dois métodos tradicionais são frequentemente utilizados quando da solução do escoamento trifásico em meios porosos: o IMPES e o Totalmente Implícito (ou método de Newton). No método IMPES, a equação da pressão é resolvida de forma implícita, enquanto as saturações são determinadas, após a atualização da pressão, de forma explícita, obtendo-se inicialmente a saturação da água e, em seguida, a do gás. Por sua vez, o método Totalmente Implícito resolve implicitamente e simultaneamente as três equações associadas às incógnitas, ou seja, um sistema acoplado linearizado. Por sua simplicidade, o método IMPES é mais facilmente implementado e possui um baixo custo computacional por passo de tempo. No entanto, pela sua natureza explícita e segregada, o valor do incremento de tempo é limitado, principalmente em simulações com malhas finas e/ou em reservatórios heterogêneos. Já o método Totalmente Implícito é mais difícil de ser implementado, além de extremamente custoso do ponto de vista computacional. Por outro lado, ele possibilita a utilização de passos de tempo maiores, mesmo em malhas finas e/ou na presença de heterogeneidades.

As duas abordagens aqui propostas são baseadas na busca de um equilíbrio considerando as principais vantagens dos dois métodos citados acima: um baixo custo computacional e a possibilidade de utilização de maiores incrementos de tempo. Dessa forma, tem-se como exemplo o método Picard-Newton, introduzido por [Freitas \(2017\)](#) para escoamentos bifásicos. Nele, a pressão é primeiramente calculada de forma implícita, como no método IMPES e, em seguida, as saturações são calculadas como no método de Newton. No entanto, isso é feito de duas formas distintas: resoluções simultânea e segregada, com a primeira obtendo as duas saturações a partir da resolução acoplada das equações em um único sistema, e a segunda com a resolução sequencial das duas equações.

### Conclusões

O objetivo da tese foi o de construir um simulador numérico voltado para a resolução das equações diferenciais parciais que regem o escoamento trifásico água-óleo-gás em um reservatório de petróleo, implementando um modelo do tipo Picard-Newton. Após a introdução das propriedades relevantes, mostrou-se o modelo físico-matemático e, em seguida, apresentou-se o método dos volumes finitos empregado na discretização das equações governantes, bem como o desenvolvimento detalhado levando à forma final das equações discretizadas. Prosseguindo, a fim de que fosse possível determinar as soluções dos sistemas de equações algébricas não-lineares, ou seja, as equações governantes discretizadas, introduziram-se as estratégias de linearização e os métodos empregados na obtenção das

soluções dos sistemas de equações algébricas linearizadas.

Constatada a viabilidade da aplicação do método Picard-Newton na resolução de escoamentos bifásicos (FREITAS, 2017), entendeu-se ser natural pensar na sua extensão para o caso dos escoamentos trifásicos, a fim de testar a sua validade e potencial de utilização para esse tipo de escoamento. Devido à necessidade do cálculo de mais uma saturação, o presente trabalho então propôs duas alternativas para a aplicação do método Picard-Newton, via as estratégias de resolução simultânea e segregada para o cômputo das saturações. Na solução simultânea, um único sistema linearizado é solucionado de forma implícita. Na solução segregada, dois sistemas distintos, também linearizados, são resolvidos implicitamente para a obtenção das saturações da água e, em sequência, a do gás.

Primeiramente, os métodos Picard-Newton, IMPES e MTI foram verificados mediante a reprodução de dois resultados semi-analíticos (BARROS; PIRES; PERES, 2021), obtendo-se uma boa concordância entre a solução teórica e as fornecidas pelo simulador para os métodos Picard-Newton e IMPES. Entretanto, o MTI não logrou êxito na obtenção da convergência numérica. Portanto, uma outra solução semi-analítica foi utilizada (GUZMÁN; FAYERS, 1997b). Verificou-se, também, que os métodos numéricos implementados foram capazes de fornecer valores que verificavam os previstos na referida referência.

Na verificação numérica, não foi feito nenhum estudo comparativo entre os métodos, já que as soluções analíticas encontradas não consideravam, por exemplo, a compressibilidade e usavam modelos específicos de permeabilidade relativa. Assim sendo, a comparação entre os métodos Picard-Newton, IMPES e Totalmente Implícito se deu em um cenário considerando diferentes problemas, ou seja, simulações numéricas incluindo os efeitos de compressibilidade e as curvas de permeabilidade relativa apresentadas no Capítulo 1.

Iniciaram-se os estudos com o escoamento trifásico em um reservatório homogêneo, onde água e gás são injetados simultaneamente em uma mesma fronteira. Avaliou-se, também, a presença de heterogeneidades no campo de permeabilidades, ainda com a injeção das duas fases através da fronteira. Na sequência, foram feitos testes com a injeção alternada de água e gás (WAG), em um domínio representando 1/4 do esquema de injeção do tipo *five-spot*, em um reservatório homogêneo e na presença de regiões quase impermeáveis. Também avaliou-se o caso da injeção do tipo WAG em um reservatório altamente heterogêneo, derivado do campo do décimo projeto de comparação da SPE (SPE 10), com o poço de injeção tendo sido alocado em duas posições diferentes. Ainda, tratou-se de um caso onde os efeitos da pressão capilar foram considerados na simulação. Por fim, avaliou-se a presença da gravidade em conjunto com a injeção WAG.

O primeiro caso envolveu o escoamento em um reservatório homogêneo e o estudo do refinamento de malha na direção do escoamento. Embora a simulação compreendesse um domínio tridimensional, o escoamento é unidimensional, de forma que a variação da

malha é feita apenas segundo a sua direção. O MTI, para esse caso, não se mostrou eficiente como os demais métodos. Apesar de conseguir manter um passo de tempo grande, seu custo computacional não pôde ser compensado, independentemente da malha utilizada. Para a malha mais grossa, o IMPES apresentou o menor tempo de execução, já que seu custo por passo de tempo é o menor entre os métodos. Por outro lado, em se tratando das malhas mais refinadas, o IMPES passa a ter um passo de tempo menor, levando os métodos Picard-Newton a apresentarem uma pequena vantagem frente ao próprio IMPES e ao MTI, com as estratégias simultânea e segregada obtendo tempos muito próximos.

Quando da introdução de discontinuidades no campo de permeabilidades, para um problema onde o escoamento é bidimensional, a sua complexidade aumentou consideravelmente. Então, para esse reservatório heterogêneo, o método IMPES apresentou um aumento considerável no número de passos de tempo, com um consequente impacto na sua performance. Já o MTI apresentou os menores números de passos de tempo e de iterações. No entanto, devido ao seu custo computacional, o tempo total de execução foi similar ao do IMPES. Aos métodos Picard-Newton foram associados passos de tempo e número de iterações intermediários entre os do IMPES e MTI. Quanto aos tempos de execução, eles foram os menores, com a estratégia segregada finalizando a simulação em um tempo 40% menor que o do método Totalmente Implícito.

No que se refere à simulação da injeção do tipo WAG em um arranjo do tipo *five-spot*, adicionam-se mais camadas de complexidade às simulações, devido à existência dos poços de injeção e de produção, além da variação das propriedades das fases que dependentes das saturações (introduzindo não-linearidades). Para um reservatório homogêneo, o IMPES concluiu a simulação com um número muito grande de passos de tempo, com a simulação levando mais de 24 horas. Já o MTI, como esperado, apresentou um número de passos de tempo pequeno, levando quase metade do tempo demandado pelo IMPES. Entretanto, os métodos Picard-Newton obtiveram uma performance ainda melhor, sendo que a estratégia simultânea reduziu em mais de 60% o tempo de execução em relação ao MTI. A estratégia segregada também obteve uma redução significativa, em torno de 58%.

Na injeção alternada (WAG), algumas regiões do reservatório acumulam parte do fluido injetado, seja água ou gás, levando ao aparecimento de um comportamento aparentemente ondulatório no campo de saturações, tornando-se mais evidente em se tratando da fase gás. Ressalta-se que os quatro métodos produziram resultados muito similares entre si e que não percebeu-se o aparecimento de oscilações espúrias. As flutuações ocorrem devidas à própria alternância na injeção de água e gás e em função da permeabilidade relativa favorecer o escoamento do fluido que ocupa a maior fração do meio poroso.

Na presença de regiões praticamente impermeáveis e para a injeção WAG, os métodos levaram em geral a um menor tempo de execução, possivelmente devido ao espaço restrito para que as ondulações descritas anteriormente se desenvolvessem. Deve-se

lembrar que as não-linearidades fortes do sistema são exatamente as dependentes das saturações. Assim sendo, com uma menor variação dos valores das saturações era esperado que a convergência fosse mais facilmente atingida. Dito isso, apesar dos menores tempos de execução, as conclusões enunciadas anteriormente se mantiveram, com o maior e o menor tempos sendo os dos métodos IMPES e Picard-Newton com a estratégia simultânea, respectivamente. Sendo que esse último proporcionou novamente uma redução de mais de 60%, em relação ao MTI, e a estratégia segregada com um tempo mais próximo ao da simultânea.

O uso de um campo proveniente do projeto da SPE (derivado de um campo real) teve, mais uma vez, como objetivo aumentar a complexidade das simulações, testando a capacidade do simulador e dos métodos em lidarem com uma alta variabilidade das propriedades de rocha. Agora, o IMPES se mostrou novamente ineficiente frente aos demais métodos, levando mais que o dobro do tempo que o MTI, sendo que este último também levou mais que duas vezes o tempo correspondente ao do método Picard-Newton simultâneo.

O esquema de injeção, proposto inicialmente para o campo altamente heterogêneo do projeto SPE 10, resultou na acumulação da fase água na região de baixa permeabilidade onde se encontrava o poço injetor. Portanto, de forma a se contornar essa situação, propôs-se deslocar o poço injetor para uma região mais permeável e manter-se o mesmo campo de permeabilidades. Nessa nova disposição, o método IMPES não conseguiu atingir a convergência. Devido à variabilidade dos campos de saturação, os métodos que obtiveram êxito nas simulações o fizeram às custas de maiores tempos de execução em comparação aos do caso anterior. Entretanto, não houve alteração no que diz respeito ao desempenho computacional, constatando-se uma redução de cerca de 60% em relação ao MTI, com a estratégia segregada apresentando um tempo ligeiramente menor que o da simultânea.

Em seguida, considerou-se exatamente o mesmo problema de escoamento que o anterior à exceção da introdução dos efeitos da pressão capilar. Novamente, o método IMPES falhou e não foi possível concluir a simulação. Contrariamente, com os outros métodos a convergência foi alcançada e os do tipo Picard-Newton resultaram em tempos aproximadamente 30% menores que o MTI. De fato, eles foram executados nos menores tempos mas, no entanto, a redução de tempo em relação ao MTI foi menor. Logo, os efeitos da capilaridade afetaram negativamente a performance dos métodos estudados. Como consequência, estudos mais aprofundados se fazem necessários para que se possa avaliar o quanto a pressão capilar pode impactar na performance deles.

Os efeitos gravitacionais quando do uso do esquema de injeção WAG também foram avaliados. A presença dos mesmos em escoamentos trifásicos adiciona uma complexidade ao escoamento e, conseqüentemente, à simulação, já que as diferentes densidades das fases induzem um deslocamento na direção na qual atua a gravidade. Posto isso, os quatro métodos se mostraram capazes de capturar a dinâmica de escoamento das fases e

produziram resultados análogos. Em termos da performance computacional, no entanto, o MTI levou a um tempo de execução significativamente maior, em comparação aos outros métodos. Constatou-se que o tempo despendido na resolução acoplada dos sistemas lineares é o possível responsável. Entretanto, uma análise mais criteriosa é necessária para que se possa entender a(s) causa(s) dessa diferença. Contudo, em comparação ao método IMPES, ambos os métodos Picard-Newton resultaram numa melhor performance, chegando a alcançar uma redução no tempo de execução em torno de 30%.

Em função dos resultados apresentados, fica claro que a aplicação do método Picard-Newton, independente da estratégia escolhida, pode proporcionar um desempenho computacional que leva à redução do tempo de simulação, sem comprometer a qualidade da solução. No entanto, ressalta-se que essa não é uma conclusão definitiva e não se propõe que os métodos IMPES e Totalmente Implícito devam ser, necessariamente, substituídos por uma estratégia do tipo Picard-Newton. Além do número limitado de testes realizados, a comparação entre os métodos foi feita utilizando os mesmos parâmetros para os quatro métodos estudados. Entretanto, é possível que os tempos obtidos possam ser melhorados para todos os métodos mediante uma escolha apropriada dos parâmetros de simulação, principalmente os que envolvem a determinação do passo de tempo. No entanto, encontrar os valores ótimos para cada caso e método não é uma tarefa simples, implicando um grande volume de experimentos numéricos.

## Perspectivas

O código computacional desenvolvido pode servir de arcabouço para a aquisição de novos conhecimentos relacionados à simulação de escoamentos trifásicos. Para trabalhos futuros, recomenda-se o aprofundamento do estudo do acoplamento poço-reservatório. Aspecto que foi pouco explorado neste trabalho, apesar da sua relevância. Por exemplo, alguns modelos de acoplamento e as suas formas de implementação podem ser encontrados no trabalho de [Rosário \(2021\)](#).

Em se tratando de possíveis melhorias na performance dos métodos numéricos duas opções são sugeridas, podendo até mesmo serem aplicadas em conjunto: o uso de melhores preconditionadores ([SHUHONG et al., 2014](#)) e a paralelização do código numérico ou de partes do mesmo ([YANG et al., 2019](#); [WERNECK, 2021](#)). O uso de preconditionadores pode reduzir significativamente o tempo gasto na solução dos sistemas lineares, sendo a parte da simulação que demanda mais tempo. Em certas situações, não usar preconditionadores ou aplicar um de pouca eficiência pode levar até mesmo a não convergência numérica da solução ([MOHAJERI et al., 2020](#)). Adicionalmente, a paralelização do problema, em geral, também acelera a simulação a partir da divisão da carga computacional em diversos núcleos de processamento como, por exemplo, mediante

o uso dos diversos núcleos das placas de video ([ESLER et al., 2014](#); [ALMEIDA, 2021](#)).

Além do que já foi aventado, outras funcionalidades ainda podem ser adicionadas ao simulador, como por exemplo:

- inclusão de efeitos térmicos ([HERINGER et al., 2019](#)),
- tratamento do gás dissolvido no óleo com pressão de ponto de bolha variável ([LI; CHEN; HUAN, 2004](#)) e
- uso de malhas não estruturadas ([JENNY; LEE; TCHELEPI, 2003](#)).

## REFERÊNCIAS

- ABDULLAH, N.; HASAN, N. The implementation of water alternating (WAG) injection to obtain optimum recovery in Cornea Field, Australia. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, v. 11, p. 1475–1485, 2021.
- ABOU-KASSEM, J. H.; ISLAM, M. R.; ALI, S. M. F. *Petroleum Reservoir Simulation: The Engineering Approach*. 2. ed. Oxford, Reino Unido: Gulf Professional Publishing, 2019.
- ABREU, E.; FURTADO, F.; PEREIRA, F. On the numerical simulation of three-phase reservoir transport problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, v. 33, n. 5-7, p. 503–526, 2004.
- AHMED, T. H. *Reservoir Engineering Handbook*. 2. ed. Houston, USA: Gulf Professional Publishing, 2001.
- ALLAIRE, G. *Numerical Analysis and Optimization*. New York, USA: Oxford University Press, 2007.
- ALLEN III, M. B.; BEHIE, G. A.; TRANGENSTEIN, J. A. *Multiphase Flow in Porous Media: Mechanics, mathematics, and numerics*. New York, USA: Springer-Verlag, 1988. (Lecture Notes in Engineering).
- ALMEIDA, R. A. B. S. *Solução numérica do escoamento não-isotérmico em reservatórios de óleo pesado empregando computação paralela*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2021.
- AMOOIE, M. A.; MOORTGAT, J. Higher-order black-oil and compositional modeling of multiphase compressible flow in porous media. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 105, p. 45–59, 2018.
- AMRITKAR, A. et al. Recycling Krylov subspaces for CFD applications and a new hybrid recycling solver. *Journal of Computational Physics*, v. 303, p. 222–237, 2015.
- AVANSI, G.; RIOS, V.; SCHIOZER, D. Numerical tuning in reservoir simulation: it is worth the effort in practical petroleum applications. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 41, n. 59, 2019.
- AZFALI, S. et al. Mathematical modeling and simulation of water-alternating-gas (WAG) process by incorporating capillary pressure hysteresis effects. *Fuel*, v. 263, p. 116362, 2020.
- AZFALI, S.; REZAEI, N.; ZENDEHBOUDI, S. A comprehensive review on enhanced oil recovery by water alternating gas (WAG) injection. *Fuel*, v. 227, p. 218–246, 2018.
- AZIZ, M.; SETTARI, A. *Petroleum Reservoir Simulation*. New York, USA: Elsevier Applied Science, 1979.
- BARROS, W. Q.; PIRES, A. P.; PERES, A. M. M. Analytical solution for one-dimensional three-phase incompressible flow in porous media for concave relative permeability curves. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 137, n. 103792, 2021.

- BARTH, T.; HERBIN, R.; OHLBERGER, M. Finite volume methods: Foundation and analysis. In: STEIN, E.; BORST, R.; HUGHES, T. J. R. (Ed.). *Encyclopedia of Computational Mechanics*. 2. ed. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2017.
- BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. New York, USA: Dover Publications, Inc., 1972.
- BELAZREG, L.; MAHMOOD, S. M. Water alternating gas incremental recovery factor prediction and WAG pilot lessons learned. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, v. 10, p. 249–269, 2020.
- BENEDICT, M.; WEBB, G. B.; RUBIN, L. C. An empirical equation for thermodynamic properties of light hydrocarbons and their mixtures I. Methane, ethane, propane, and n-butane. *Journal of Chemical Physics*, v. 8, n. 4, p. 334–345, 1940.
- BERAWALA, D. S.; ANDERSEN, P. O. Evaluation of multicomponent adsorption kinetics for carbon dioxide enhanced gas recovery from tight shales. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 23, n. 3, p. 1060–1076, 2020.
- BERTACCINI, D.; DURASTANTE, F. *Iterative Methods and Preconditioning for Large and Sparse Linear Systems with Applications*. Boca Raton, USA: CRC Press, 2018.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- BREITENBACH, E. A. Reservoir simulation: State of the art. *Journal of Petroleum Technology*, v. 43, n. 9, p. 1033–1036, 1991.
- BREITENBACH, E. A.; THURNAU, D. H.; VAN POOLEN, H. K. The fluid flow simulation equations. In: *SPE Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*. Dallas, Texas, USA: [s.n.], 1968.
- BROOKS, R. H.; COREY, A.T. Hydraulic properties of porous media. *Hydrology Papers, Colorado State University*, n. 5, 1964.
- BROWN, G. O. Henry Darcy and the making of a law. *Water Resources Research*, v. 38, n. 7, p. 1–12, 2002.
- BUCKLEY, S. E.; LEVERETT, M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. *Transactions of the AIME*, v. 146, n. 1, p. 107–116, 1942.
- BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. Reading, USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- CALDER, M. et al. Computational modelling for decision-making: where, why, what, who and how. *Royal Society Open Science*, v. 5, n. 6, p. 1–15, 2018.
- CARLSON, M. R. *Practical Reservoir Simulation: Using, assessing, and developing results*. Tulsa, USA: PennWell, 2003.
- CASTAÑEDA, P. et al. On a universal structure for immiscible three-phase flow in virgin reservoirs. *Computational Geosciences*, v. 20, p. 171–185, 2016.

CASTAÑEDA, P.; MARCHESIN, D.; FURTADO, F. Universality of Riemann solutions in porous media. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, v. 28, n. 6, 2022.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical methods for engineers*. 6. ed. [S.l.]: McGrawHill, 2010.

CHAVEZ, V. J.; IMKE, U.; SANCHEZ-ESPINOZA, V. TWOPORFLOW: A two-phase flow porous media code, main features and validation with BWR-relevant bundle experiments. *Nuclear Engineering and Design*, v. 338, p. 181–188, 2018.

CHEN, Z. *Reservoir Simulation – Mathematical Techniques in Oil Recovery*. Philadelphia, USA: Society of Industrial and Applied Mathematics, 2007.

CHEN, Z.; EWING, R. E. Comparison of various formulations of three-phase flow in porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 132, n. 2, p. 362–373, 1997.

\_\_\_\_\_. Mathematical and numerical techniques in energy and environmental modeling. In: CHEN, Z.; EWING, R. E.; SHI, Z. C. (Ed.). *Numerical Treatment of Multiphase Flows in Porous Media*. Berlin, Germany: Springer, 2000. p. 1–21.

CHEN, Z.; HUAN, G.; LI, B. An improved IMPES method for two-phase flow in porous media. *Transport in Porous Media*, v. 54, p. 361–376, 2004.

CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Philadelphia, USA: Society of Industrial and Applied Mathematics, 2006.

CHRISTIE, M.A.; BLUNT, M. J. Tenth SPE comparative solution project: A comparison of upscaling techniques. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 4, p. 308–317, 2001.

CHUANG, C. C.; CHIENG, C.C. Comparison of variants of the bi-conjugate gradient method for compressible Navier-Stokes solver with second-moment closure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 20, n. 3, p. 233–253, 1995.

COATS, K. H. Use and misuse of reservoir simulation models. *Journal of Petroleum Technology*, v. 21, n. 11, p. 1391–1398, 1969.

\_\_\_\_\_. Reservoir simulation: State of the art. *Journal of Petroleum Technology*, v. 34, n. 08, p. 1633–1642, 1982.

\_\_\_\_\_. A note on IMPES and some IMPES-based simulation models. *SPE Journal*, v. 5, n. 3, p. 245–251, 2000.

COATS, K. H. et al. Three-dimensional simulation of steamflooding. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 14, n. 06, p. 573–592, 1974.

COREY, A.T. et al. Three-phase relative permeability. *Journal of Petroleum Technology*, v. 8, n. 11, p. 63–65, 1956.

CRAFT, B.C.; HAWKINS, M. *Applied petroleum reservoir engineering*. Englewood Cliffs, USA: Prentice Hall, 1991.

DEBOSSAM, J. G. S. et al. Numerical simulation of single-phase two-components flow in naturally fractured oil reservoirs. *Coupled Systems Mechanics*, v. 8, n. 2, p. 129–146, 2019.

- DEHKORDI, M. M. et al. A general finite volume based numerical algorithm for hydrocarbon reservoir simulation using blackoil model. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, v. 24, n. 8, p. 1831–1863, 2014.
- DELSHAD, M.; POPE, G. A. Comparison of three-phase oil relative permeability models. *Transport in Porous Media*, v. 4, p. 59–83, 1989.
- DOUGLAS, J. Jr.; PEACEMAN, D. W.; RACHFORD, H. H. Jr. A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement. *Transactions of the AIME*, v. 216, n. 1, p. 297–306, 1959.
- DRANCHUK, P. M.; ABOU-KASSEM, J. H. Calculation of Z factors for natural gases using equations of state. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 14, n. 3, p. 34–36, 1975.
- ERTEKIN, T.; ABOU-KASSEM, J.H.; KING, G.R. *Basic Applied Reservoir Simulation*. Richardson, USA: Society of Petroleum Engineers, 2001.
- ESKANDARI, S.; JALALALHOSSEINI, S. M.; MORTEZAZADEH, E. Microwave heating as an enhanced oil recovery method - potential and effective parameters. *Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization and Environmental Effects*, v. 37, n. 7, p. 742–749, 2015.
- ESLER, K. et al. Realizing the potential of GPUs for reservoir simulation. In: *ECMOR XIV - 14th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*. Sicily, Italy: [s.n.], 2014.
- EYMARD, R.; GALLOUËT, T.; HERBIN, R. Finite volume methods. In: LIONS, J. L.; CIARLET, P. (Ed.). *Handbook of Numerical Analysis*. [S.l.]: Elsevier, 2000. v. 7, p. 713–1018.
- EZEKWE, N. *Petroleum Reservoir Engineering Practice*. Westford, USA: Prentice Hall, 2010.
- FABIEN, M. S.; KNEPLEY, M.; RIVIERE, B. A high order hybridizable discontinuous Galerkin method for incompressible miscible displacement in heterogeneous media. *Results in Applied Mathematics*, v. 8, p. 100089, 2020.
- FALLS, A.H.; SCHULTE, W. M. Theory of three-component, three-phase displacement in porous media. *SPE Reservoir Engineering*, v. 7, n. 3, p. 377–384, 1992.
- FANCHI, J. R. *Principles of Applied Reservoir Simulation*. 4. ed. Cambridge, USA: Gulf Professional Publishing, 2018.
- FAYERS, F. J.; SHELDON, J. W. The effect of capillary pressure and gravity on two-phase fluid flow in a porous medium. *Transactions of the AIME*, v. 216, n. 1, p. 147–155, 1959.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2002.
- FRANC, J. et al. Benchmark of different CFL conditions for IMPES. *Comptes Rendus Mécanique*, v. 344, n. 10, p. 715–724, 2016.

FREITAS, M. M. *Estudo Comparativo das Estratégias de Solução Numérica para Escoamentos Bifásicos em Reservatórios de Petróleo*. Tese (Doutorado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2017.

FREITAS, M. M.; SOUZA, G.; SOUTO, H. P. A. A Picard-Newton approach for simulating two-phase flow in petroleum reservoirs. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science*, v. 7, n. 4, p. 428–457, 2020.

GASIOROWSKI, D.; KOLERSKI, T. Numerical solution of the two-dimensional Richards equation using alternate splitting methods for dimensional decomposition. *Water*, v. 12, n. 6, p. 1–20, 2020.

GHAI, A.; LU, C.; JIAO, X. A comparison of preconditioned Krylov subspace methods for large-scale nonsymmetric linear systems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, v. 26, n. 1, p. 1–35, 2019.

GODA, H. M.; BEHRENBRUCH, P. Using a modified brooks-corey model to study oil-water relative permeability for diverse pore structures. In: . Perth, Australia: [s.n.], 2004.

GUTKNECHT, M. H. Variants of BICGSTAB for matrices with complex spectrum. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 14, n. 5, p. 1020–1033, 1993.

GUZMÁN, R. E.; FAYERS, F. J. Mathematical properties of three-phase flow equations. *SPE Journal*, v. 2, n. 3, p. 291–300, 1997.

\_\_\_\_\_. Solutions to the three-phase Buckley-Leverett problem. *SPE Journal*, v. 2, n. 3, p. 301–311, 1997.

HAIDER, W. H. Estimates of total oil & gas reserves in the world, future of oil and gas companies and SMART investments by E & P companies in renewable energy sources for future energy needs. In: *International Petroleum Technology Conference*. Dhahran, Saudi Arabia: [s.n.], 2020.

HAMON, F. P.; TCHELEPI, H. A. Analysis of hybrid upwinding for fully-implicit simulation of three-phase flow with gravity. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 54, n. 3, p. 1682–1712, 2016.

HASSANI, H.; SILVA, E. S.; AL KAABI, A. M. The role of innovation and technology in sustaining the petroleum and petrochemical industry. *Technological Forecasting and Social Change*, v. 119, p. 1–17, 2017.

HEMMINGSSEN, C. S. et al. Multiphase coupling of a reservoir simulator and computational fluid dynamics for accurate near-well flow. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 178, p. 517–527, 2019.

HERINGER, J. D. S. et al. Numerical simulation of non-isothermal flow in oil reservoirs using two-equation model. *Coupled Systems Mechanics*, v. 8, n. 2, p. 147–168, 2019.

HERMANN, T. et al. Thermal impulse response in porous media for transpiration-cooling systems. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, v. 34, n. 2, p. 447–456, 2020.

HESTENES, M. R.; STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, v. 49, n. 6, p. 409–436, 1952.

HETSRONI, G.; GUREVICH, M.; ROZENBLIT, R. Sintered porous medium heat sink for cooling of high-power mini-devices. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 27, n. 2, p. 259–266, 2006.

HONARPOUR, M.; KOEDERITZ, L.; HARVEY, A. H. *Relative Permeability of Petroleum Reservoirs*. Boca Raton, USA: CRC Press, 1986.

HURTADO, F. S. V.; MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C. A variable timestep strategy for accelerating the IMPES solution algorithm in reservoir simulation. In: . Belém, Pará, Brasil: Proceeding of the XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2006.

ISLAM, M.; HYE, A.; MAMUN, A. Nonlinear effects on the convergence of Picard and Newton iteration methods in the numerical solution of one-dimensional variably saturated-unsaturated flow problems. *Hydrology*, v. 4, n. 4, 2017.

ISLAM, M. R. et al. *Advanced Petroleum Reservoir Simulation*. 2. ed. Beverly, USA: Scrivener Publishing, 2016.

JENNY, P.; LEE, S. H.; TCHELEPI, H. A. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *Journal of Computational Physics*, v. 187, n. 1, p. 47–67, 2003.

\_\_\_\_\_. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media. *Multiscale Modeling & Simulation*, v. 3, n. 1, p. 50–64, 2004.

\_\_\_\_\_. Adaptive fully implicit multi-scale finite-volume method for multi-phase flow and transport in heterogeneous porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 217, n. 2, p. 627–641, 2006.

JIANG, J.; TCHELEPI, H. A. Nonlinear acceleration of sequential fully implicit (SFI) method for coupled flow and transport in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 352, p. 246–275, 2021.

JUANES, R.; PATZEK, T. W. Analytical solution to the Riemann problem of three-phase flow in porous media. *Transport in Porous Media*, v. 55, p. 47–70, 2004.

KAREEM, L. A.; IWALEWA, T. M.; AL-MARHOUN, M. New explicit correlation for the compressibility factor of natural gas: linearized Z-factor isotherms. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, v. 6, p. 481–492, 2016.

KHALED, A. R. A.; VAFAI, K. The role of porous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, p. 4989–5003, 2003.

KHANAFER, K. et al. Flow and heat transfer in biological tissues: Application of porous media theory. In: VADÁSZ, P. (Ed.). *Emerging Topics in Heat and Mass Transfer in Porous Media*. Berlin, Germany: Springer, 2008. p. 237–259.

KOLDITZ, O. et al. Numerical simulation of two-phase flow in deformable porous media: Application to carbon dioxide storage in the subsurface. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 82, n. 10, p. 1919–1935, 2012.

KOU, J.; SUN, S. On iterative IMPES formulation for two-phase flow with capillarity in heterogeneous porous media. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling. Series B*, v. 1, n. 1, p. 20–40, 2010.

KOZLOVA, A. et al. A real-field multiscale black-oil reservoir simulator. *SPE Journal*, v. 21, n. 6, p. 2049–2061, 2016.

KRZYSZTOFORSKI, J.; JENNY, P.; HENCZKA, M. Porous membrane cleaning using supercritical carbon dioxide. part 2: Development of mathematical model and CFD simulations. *The Journal of Supercritical Fluids*, v. 136, p. 1–11, 2018.

KUMAR, N. *Compressibility factors for natural and sour reservoir gases by correlations and cubic equations of state*. Dissertação (Mestrado) — Texas Tech University, Lubbock, USA, 2004.

KWOK, F.; TCHELEPI, H. Potential-based reduced Newton algorithm for nonlinear multiphase flow in porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 1, p. 706–727, 2007.

LA CRUZ, W.; RAYDAN, M. Residual iterative schemes for large-scale nonsymmetric positive definite linear systems. *Computational & Applied Mathematics*, v. 27, n. 2, p. 151–173, 2008.

LANCZOS, C. Solution of systems of linear equations by minimized iterations. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, v. 49, n. 1, p. 33–53, 1952.

LAURENT, K. et al. Design of coupled finite volume schemes minimizing the grid orientation effect in reservoir simulation. *Journal of Computational Physics*, v. 425, p. 109923, 2021.

LEE, A.L.; GONZALEZ, M.H.; EAKIN, B.E. The viscosity of natural gases. *Journal of Petroleum Technology*, v. 18, n. 8, p. 997–1000, 1966.

LEE, S. H. et al. A conservative sequential fully implicit method for compositional reservoir simulation. *Journal of Computational Physics*, v. 428, 2021.

\_\_\_\_\_. New developments in multiblock reservoir simulation: Black oil modeling, nonmatching subdomains and near-well upscaling. In: . Houston, Texas, USA: [s.n.], 2003.

LEE, S. H.; WOLFSTEINER, C.; TCHELEPI, H. A. Multiscale finite-volume formulation for multiphase flow in porous media: black oil formulation of compressible, three-phase flow with gravity. *Computational Geosciences*, v. 12, p. 351–366, 2008.

LI, B.; CHEN, Z.; HUAN, G. The sequential method for the black-oil reservoir simulation on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, v. 192, p. 36–72, 2003.

\_\_\_\_\_. Comparison of solution schemes for black oil reservoir simulation with unstructured grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 3-5, p. 319–355, 2004.

- LI, J. et al. Sequential implicit newton method for coupled multi-segment wells. In: *SPE Reservoir Simulation Conference*. Galveston, Texas, USA: [s.n.], 2019.
- LI, K.; HORNE, R.N. Comparison of methods to calculate relative permeability from capillary pressure in consolidated water-wet porous media. *Water Resources Research*, v. 42, p. 477–482, 2006.
- LIE, K. A. *An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2019.
- LIN, H.; YANG, D. Y.; CHIENG, C.C. Variants of biconjugate gradient method for compressible Navier-Stokes solver. *AIAA Journal*, v. 33, n. 7, p. 1177–1184, 1995.
- LIU, H.; WANG, K.; CHEN, Z. A family of constrained pressure residual preconditioners for parallel reservoir simulations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, v. 23, n. 1, p. 120–146, 2016.
- LU, B.; WHEELER, M.F. Iterative coupling reservoir simulation on high performance computers. *Petroleum Science*, v. 6, p. 43–50, 2009.
- LU, P.; BECKNER, B. An adaptive Newton's method for reservoir simulation. In: *SPE Reservoir Simulation Conference*. The Woodlands, Texas, USA: [s.n.], 2011.
- MARCHESIN, D.; PLOHR, B. J. Wave structure in WAG recovery. *SPE Journal*, v. 6, n. 2, p. 209–219, 2001.
- MARCONDES, F.; MALISKA, C. R.; ZAMBALDI, M. C. A comparative study of implicit and explicit methods using unstructured Voronoi meshes in petroleum reservoir simulation. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 31, n. 4, p. 353–361, 2009.
- MCCAIN, W. D. Jr. Reservoir-fluid property correlations: State of the art. *SPE Reservoir Engineering*, v. 6, n. 2, 1991.
- MOHAJERI, S. et al. A novel linear solver for simulating highly heterogeneous black oil reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 194, p. 107506, 2020.
- MONTEAGUDO, J. E. P.; FIROOZABADI, A. Comparison of fully implicit and IMPES formulations for simulation of water injection in fractured and unfractured media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 69, n. 4, p. 698–728, 2007.
- MUSTAFIZ, S.; ISLAM, M. R. State-of-the-art petroleum reservoir simulation. *Petroleum Science and Technology*, v. 26, n. 10, p. 1303–1329, 2008.
- NEZHAD, S. A. R. T. et al. Experimental study on applicability of water alternating CO<sub>2</sub> injection in the secondary and tertiary recovery. In: *SPE International Oil Conference and Exhibition in Mexico*. Cancun, Mexico: [s.n.], 2006.
- NICK, H. M. et al. Reactive dispersive contaminant transport in coastal aquifers: Numerical simulation of a reactive Henry problem. *Journal of Contaminant Hydrology*, v. 145, p. 90–104, 2013.

NOLEN, J. S.; BERRY, D. W. Tests of the stability and time-step sensitivity of semi-implicit reservoir stimulation techniques. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 12, n. 3, p. 253–266, 1972.

ODEH, A. S. Reservoir simulation ...What is it. *Journal of Petroleum Technology*, v. 21, n. 11, p. 1383–1388, 1969.

\_\_\_\_\_. An overview of mathematical modeling of the behavior of hydrocarbon reservoirs. *SIAM Review*, v. 24, n. 3, p. 263–273, 1982.

OSIF, T. L. The effects of salt, gas, temperature, and pressure on the compressibility of water. *SPE Reservoir Engineering*, v. 3, n. 1, p. 175–181, 1988.

PACHECO, T. B.; SILVA, A. F. C.; MALISKA, C. R. Comparasion of IMPES, sequential and fully implicit formulations for two-phase flow in porous media with the element-based finite volume method. In: . Brasília, Distrito Federal, Brazil: XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2016.

PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington, USA: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Amsterdam, Netherlands: Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. v. 6.

\_\_\_\_\_. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 18, n. 3, p. 183–194, 1978.

\_\_\_\_\_. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 23, n. 3, p. 531–543, 1983.

PETROSKY, G. E.; FARSHAD, F. F. Viscosity correlations for Gulf of Mexico crude oils. In: SPE PRODUCTION AND OPERATION SYMPOSIUM, Oklahoma City. USA, 1995.

\_\_\_\_\_. Pressure-volume-temperature correlations for Gulf of Mexico crude oils. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 1, n. 5, p. 416–420, 1998.

PINDER, G. F.; GRAY, W. G. *Essentials of Multiphase Flow and Transport in Porous Media*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2008.

PUTTI, M.; PANICONI, C. Picard and Newton linearization for the coupled model of saltwater intrusion in aquifers. *Advances in Water Resources*, v. 18, n. 3, p. 159–170, 1995.

RODRÍGUEZ, F.; BONET-CUNHA, L. A general formulation of linearization methods used in reservoir simulation with applications to adaptive implicit methods. *SPE Advanced Technology Series*, v. 4, n. 1, p. 165–170, 1996.

ROSA, A.J.; CARVALHO, R.S.; XAVIER, J.A.D. *Engenharia de reservatórios de petróleo*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

ROSÁRIO, R. C. D. *Determinação de pressão em poços horizontais na simulação numérica de reservatórios de gás natural incorporando os efeitos de escorregamento e de adsorção*. Tese (Doutorado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2021.

ROZON, B. J. A generalized finite volume discretization method for reservoir simulation. In: *SPE Symposium on Reservoir Simulation*. Houston, Texas, USA: [s.n.], 1989.

SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2. ed. Philadelphia, USA: SIAM, 2003.

SAAD, Y.; SCHULTZ, M. H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 7, n. 3, p. 856–869, 1986.

SANCHEZ-PALENCIA, E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1980. (Lecture Notes in Physics).

SAREM, A. M. Three-phase relative permeability measurements by unsteady-state method. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 6, n. 3, p. 199–205, 1966.

SCHWABE, K.; BRAND, J. Prediction of reservoir behavior using numerical simulators. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. New Orleans, USA: [s.n.], 1967.

SHUHONG, W. et al. A multilevel preconditioner and its shared memory implementation for a new generation reservoir simulation. *Petroleum Science*, v. 11, p. 540–549, 2014.

SKJAEVELAND, S. M. et al. Capillary pressure correlation for mixed-wet reservoirs. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 3, n. 1, p. 60–67, 2000.

SLEIJPEN, G. L. G.; FOKKEMA, D. R. BiCGstab(*l*) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, v. 1, p. 11–32, 1993.

STANDING, M. B. A pressure-volume-temperature correlations for mixtures of California oil and gases. In: *API Drilling and Production Practice*. New York, New York, USA: [s.n.], 1947. p. 275–287.

STONE, H. L. Probability model for estimating three-phase relative permeability. *Journal of Petroleum Technology*, v. 22, n. 2, p. 214–218, 1970.

\_\_\_\_\_. Estimation of three-phase relative permeability and residual oil data. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 12, n. 4, p. 53–61, 1973.

STONE, H. L.; GARDNER, A. O. Analysis of gas-cap or dissolved-gas drive reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 1, n. 2, p. 92–104, 1961.

SUNMONU, R. M.; ONYEKONWU, M. Enhanced oil recovery using foam injection; a mechanistic approach. In: *SPE Nigeria Annual International Conference and Exhibition*. Lagos, Nigeria: [s.n.], 2013.

SURGUCHEV, L. M. et al. Screening of WAG injection strategies for heterogeneous reservoirs. In: *European Petroleum Conference*. Cannes, France: [s.n.], 1992.

SUTTON, R.P. Fundamental PVT calculations for associated and gas/condensate natural-gas systems. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 10, n. 3, p. 270–284, 2007.

THOMAS, G. W.; THURNAU, D. H. Reservoir simulation using an adaptive implicit method. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 23, n. 5, p. 759–768, 1983.

THOMAS, J. E. O. *Fundamentos de Engenharia de Petróleo 2. ed.* Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

TODD, M. R.; O'DELL, P. M.; HIRASAKI, G. J. Methods for increased accuracy in numerical reservoir simulators. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 12, n. 6, p. 515–530, 1972.

TRANGENSTEIN, J. A.; BELL, J. B. Mathematical structure of the black-oil model for petroleum reservoir simulation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 49, n. 3, p. 749–783, 1989.

VADI, R.; SEPANLOO, K. An improved porous media model for nuclear reactor analysis. *Nuclear Science and Techniques*, v. 27, p. 1–24, 2016.

VAN DER VORST, H. A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 13, n. 2, p. 631–644, 1992.

VAN POOLEN, H. K.; BREITENBACH, E. A.; THURNAU, D. H. Treatment of individual wells and grids in reservoir modeling. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 8, n. 4, p. 341–346, 1968.

VENNEMO, S. B. *Multiscale Simulation of Thermal Flow in Porous Media*. Dissertação (Mestrado) — Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway, 2016.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An introduction to Computational Fluid Dynamics: the finite volume method*. [S.l.]: Pearson, 2007.

WANG, Y.; HAJIBEYGI, H.; TCHELEPI, H. A. Monotone multiscale finite volume method. *Computational Geosciences*, v. 20, p. 509–524, 2016.

WATTS, J. W. A compositional formulation of the pressure and saturation equations. *SPE Reservoir Engineering*, v. 1, n. 3, 1986.

WERNECK, L. F. *Simulação numérica de escoamentos não-isotérmicos em reservatórios de óleo empregando um coprocessador e a API OpenMP*. Tese (Doutorado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2021.

WESSAPAN, T.; RATTANADECHO, P. Flow and heat transfer in biological tissue due to electromagnetic near-field exposure effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 97, p. 174–184, 2016.

WHITAKER, S. Flow in porous media i: A theoretical derivation of Darcy's Law. *Transport in Porous Media*, v. 1, p. 3–25, 1986.

WU, Y. S. *Multiphase Fluid Flow in Porous and Fractured Reservoirs*. Oxford, Reino Unido: Gulf Professional Publishing, 2016.

YANG, H. et al. A fully implicit constraint-preserving simulator for the black oil model of petroleum reservoirs. *Journal of Computational Physics*, v. 396, p. 347–363, 2019.

YANG, H.; YANG, C.; SUN, S. Active-set reduced-space methods with nonlinear elimination for two-phase flow problems in porous media. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 38, n. 4, p. B593–B618, 2016.

YORK, R.; BELL, S. E. Energy transitions or additions?: Why a transition from fossil fuels requires more than the growth of renewable energy. *Energy Research & Social Science*, v. 51, p. 40–43, 2019.

ZUO, L. et al. Three-phase relative permeability modeling in the simulation of WAG injection. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 17, p. 326–339, 2014.