



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciência e Tecnologia

Faculdade de Engenharia

Matheus Abreu Lopes

**Otimização estrutural de uma fundação de concreto armado
submetida a solicitações dinâmicas provenientes de um conjunto
motor-compressor de alta capacidade**

Rio de Janeiro

2017

Matheus Abreu Lopes

Otimização estrutural de uma fundação de concreto armado submetida a solicitações dinâmicas provenientes de um conjunto motor-compressor de alta capacidade



Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM, da Faculdade de Engenharia, FEN, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Ênfase: Mecânica dos Sólidos.

Orientadores: Prof. Dr. Francisco José da Cunha Pires Soeiro
Prof. Dr. José Guilherme Santos da Silva

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

L864 Lopes, Matheus Abreu.
Otimização estrutural de uma fundação de concreto armado submetida a solicitações dinâmicas provenientes de um conjunto motor-compressor de alta capacidade / Matheus Abreu Lopes. – 2017.
116f.

Orientadores: Francisco José da Cunha Pires Soeiro e José Guilherme Santos da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Mecânica - Teses. 2. Otimização estrutural - Teses. 3. Algoritmos genéticos - Teses. 4. Teoria das estruturas - Teses. I. Soeiro, Francisco José da Cunha Pires. II. Silva, José Guilherme Santos da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Título.

CDU 004:624.012.45

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Matheus Abreu Lopes

Otimização estrutural de uma fundação de concreto armado submetida a solicitações dinâmicas provenientes de um conjunto motor-compressor de alta capacidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM, da Faculdade de Engenharia, FEN, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Ênfase: Mecânica dos Sólidos.

Aprovado em:

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Francisco José da Cunha Pires Soeiro (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. José Guilherme Santos da Silva (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. Gines Arturo Santos Falcon
Laboratório de Engenharia Civil - UENF

Rio de Janeiro

2017

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por me permitir concluir mais uma grande etapa em minha vida profissional.

Agradeço à minha família, mais especificamente à minha mãe, ao meu pai e à minha irmã, minha base para tudo, sempre me apoiando em todas as minhas escolhas, decisões, dificuldades e vitórias. Não tenho como expressar minha gratidão, amo vocês.

À minha namorada, que sempre foi compreensiva em todos os momentos em que precisei me ausentar em motivo de minhas obrigações. Aos meus amigos, que tanto me cobram mais presença e me taxam de sumido, mas entendem minhas escolhas.

Aos meus orientadores, professor Soeiro, que me orienta desde o projeto de graduação, e que me permitiu dar continuidade no mestrado desenvolvendo essa dissertação, e ao professor José Guilherme, que acreditou no potencial desse trabalho, orientando e colaborando em minha formação de mestre em ciências de engenharia mecânica. Aos senhores agradeço pela confiança em mim depositada para desenvolver esse trabalho, pelos conhecimentos transmitidos e pela motivação em levar adiante essa grande etapa acadêmica.

Por último a todos os funcionários e servidores da UERJ, corpo docente, técnicos universitários, auxiliares administrativos, funcionários terceirizados, enfim, a todos que contribuem para o funcionamento desta universidade. Transmito às senhoras e aos senhores a minha enorme gratidão e admiração ao comprometimento institucional de vossas senhorias. Com salários atrasados há meses, sem condições de trabalho, até mesmo na parte de higienização da universidade, vocês foram essenciais para o funcionamento dessa Universidade, em meio à tenebrosa crise que assola o Estado do Rio de Janeiro e ao descaso das autoridades com a importância do ensino superior público e de qualidade. Meus parabéns pela fibra que os mantém firmes em seus trabalhos, mesmo com todas as dificuldades. Dedico grande parte deste trabalho a vocês. Meu muito obrigado e que Deus os abençoe.

RESUMO

LOPES, M. A. *Otimização estrutural de uma fundação de concreto armado submetida a solicitações dinâmicas provenientes de um conjunto motor-compressor de alta capacidade*. 2017. 116f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2017.

Este trabalho de pesquisa tem como objetivo a otimização de um sistema estrutural, projetado para suportar um conjunto motor-compressor de alta capacidade. Tal estrutura localiza-se em uma planta industrial de uma usina siderúrgica e consiste em uma fundação de concreto armado, com dimensões em planta de, aproximadamente, 15m x 11m com 1,5m de altura. O bloco de concreto se apoia sobre 20 estacas do tipo hélice, com aproximadamente 8,5m de comprimento e 0,5m de diâmetro. O sistema estrutural é submetido a carregamentos dinâmicos determinísticos pela natureza dos equipamentos que ali são operados. Para a modelagem numérica do sistema estrutural, são empregadas técnicas usuais de discretização, através do método dos elementos finitos (MEF), por meio do software ANSYS v. 12.1. Para a otimização, tem-se como a função objetivo do problema o volume da estrutura, a fim de reduzi-lo considerando a resposta estrutural dinâmica do sistema. Como restrições à redução do volume do sistema estrutural, são impostos os valores recomendados por normas quanto às frequências naturais calculadas, à segurança de operação dos equipamentos em picos de deslocamentos e velocidades, à avaliação do conforto humano em picos de acelerações e recomendações de projeto da estrutura, de acordo com as normas ACI-351, DIN 4024, ISO 2372, ISO 2631, NR-15 e Norma Petrobrás N-1848. Como ferramenta de otimização, foi aplicado um algoritmo genético através do software MATLAB R2015b, que aplica suas técnicas em conjunto com a avaliação da resposta dinâmica a partir do MEF através do ANSYS. Por fim, obteve-se uma redução percentual em cerca de 50% do volume original da estrutura.

Palavras-chave: Otimização estrutural; Algoritmos genéticos; Modelagem numérica; Carregamentos dinâmicos; Análise dinâmica de estruturas.

ABSTRACT

LOPES, M. A. *Structural optimization of a concrete foundation subjected to dynamic loadings from a high capacity motor-driven compressor*. 2017. 116f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2017.

This research work aims to optimize a structural system, designed to support a high capacity motor-driven compressor. The structure is located at an industrial plant in a steel mill and consists in a foundation in reinforced concrete, with dimensions, in plan of, approximately, 15m x 11m in 1,5m of height. The concrete block is provided to be supported by 20 piles of, approximately, 8,5m of length and 0,5m of diameter. The structural system is subjected to deterministic dynamic loadings, by the nature of equipment supported by the structure. For the numerical modeling of the structural system, usual discretization techniques are applied, through the ANSYS v. 12.1 software. For the optimization, the objective function for the problem is the volume of the structure, in order to reduce it, considering the dynamic response for the structural system. The restriction functions for the structural system volume reduction are imposed by normative instructions for the natural frequencies obtained by the finite element modeling, for the safe operation of the equipment in peaks of displacements and velocities, for the human comfort in acceleration peaks and for the design recommendations of the structure, according to the ACI-351, DIN 4024, ISO 2372, ISO 2631, NR-15 and Petrobras N-1848 norms. As the optimization tool, was applied a genetic algorithm through the MATLAB R2015b software, which applies its techniques in conjunction with the dynamic response of the structural system obtained by the finite element analysis through the ANSYS v.12.1 software. Finally, a percentage reduction was obtained in about 50% of the original volume of the structure.

Keywords: Structural optimization; Genetic Algorithms; Numerical modeling; Dynamic loadings; Dynamic structural analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (a) Sistema massa-mola-amortecedor. (b) Diagrama de corpo livre do sistema [16].....	22
Figura 2 – Fator de amplificação dinâmica em função da relação de frequências e do amortecimento. [19].....	29
Figura 3 – Modelo mecânico do corpo humano. [30]	49
Figura 4 – Direções do sistema de coordenadas para vibrações mecânicas em seres humanos. [33].....	52
Figura 5 – Curva base de aceleração no eixo z. [33]	53
Figura 6 – Curva base de aceleração nos eixos x e y. [33].....	54
Figura 7 – Curva base de acelerações em direções combinadas (eixos x, y e z). [33]	54
Figura 8 – Pontos de mínimos e máximos locais para uma função contínua de uma variável.....	60
Figura 9 – Exemplo de projeto de par de engrenagens. [39]	62
Figura 10 – Espaço viável e inviável de projeto. [39]	64
Figura 11 – Exemplo de seleção via método da roleta [46].....	70
Figura 12 – Fluxograma do algoritmo genético	73
Figura 13 – Isométrica do conjunto fundação-equipamento [3].....	74
Figura 14 – Modelo estrutural: planta da fundação [3].	75
Figura 15 – Modelo estrutural: elevação da fundação (Corte A-A) [3].....	75
Figura 16 – Modelo estrutural: elevação da fundação (Corte B-B) [3].....	76
Figura 17 – Modelo estrutural: elevação da fundação (Corte C-C) [3].	76
Figura 18 – Localização do empreendimento [3].....	77
Figura 19 – Vista aproximada das fundações executadas [3].	77
Figura 20 – Modelo estrutural: Fundação executada (vista superior) [3].....	78
Figura 21 – Elemento SOLID45. [37]	79
Figura 22 – Elemento COMBIN14. [37].....	79
Figura 23 – Modelo estrutural no ANSYS.	80
Figura 24 – Modelo estrutural no ANSYS – Vista das molas representativas.....	80
Figura 25 – 1º Modo de vibração da estrutura – Translação em Z.....	82
Figura 26 – 2º Modo de vibração da estrutura – Translação em X	82

Figura 27 – 3º Modo de vibração da estrutura – Rotação em Y.....	83
Figura 28 – 4º Modo de vibração da estrutura – Flexão no plano ZX	83
Figura 29 – 5º Modo de vibração da estrutura – Flexão no plano XZ	84
Figura 30 – 6º Modo de vibração da estrutura – Flexão no plano XZ	84
Figura 31 – 7º Modo de vibração da estrutura – Flexão assimétrica no plano XZ	85
Figura 32 – 8º Modo de vibração da estrutura – Flexão Assimétrica no plano XZ	85
Figura 33 – Nós dos chumbadores dos equipamentos.	86
Figura 34 – Gráfico do comportamento das componentes Y e Z do carregamento do motor.	87
Figura 35 – Gráfico do comportamento das componentes Y e Z do carregamento do compressor.....	88
Figura 36 – Nós avaliados para conforto humano.....	90
Figura 37 – Fluxograma de funcionamento da interface MATLAB-ANSYS.....	93
Figura 38 – Detalhe esquemático das variáveis de projeto.....	95
Figura 39 – Modelo em elementos finitos representativo da estrutura proposta pelo primeiro procedimento de otimização.....	101
Figura 40 – Gráfico da evolução do algoritmo genético do primeiro procedimento de otimização.	104
Figura 41 – Modelo em elementos finitos representativo da estrutura proposta pelo segundo procedimento de otimização.....	105
Figura 42 – Gráfico da evolução do algoritmo genético da segundo procedimento de otimização	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Escopo das normas N-1848, ACI-351 e DIN 4024-1/2. [1].....	41
Tabela 2 – Critérios de severidade das vibrações de máquinas [28]	47
Tabela 3 – Amplitude admissível de vibração de acordo com a velocidade da máquina [29]	48
Tabela 4 – Sintomas relacionados com a frequência de vibração [30]	50
Tabela 5 – Coeficientes de majoração. [33]	55
Tabela 6 – Valores aceitáveis de K_b [34].....	56
Tabela 7 – Limites de exposição e níveis de ação. [36]	57
Tabela 8 – Modos e Frequências naturais da estrutura	81
Tabela 9 – Dados do carregamento dos equipamentos [3].....	86
Tabela 10 – Deslocamentos e Velocidades Máximas	89
Tabela 11 – Acelerações máximas	90
Tabela 12 – Novas dimensões propostas pelo primeiro procedimento de otimização	101
Tabela 13 – Frequências naturais da nova configuração proposta pelo primeiro procedimento de otimização.....	102
Tabela 14 – Deslocamentos máximos na configuração proposta pelo primeiro procedimento de otimização.....	103
Tabela 15 – Velocidades máximas na configuração proposta pelo primeiro procedimento de otimização.....	103
Tabela 16– Acelerações máximas na configuração proposta pelo primeiro procedimento de otimização.....	104
Tabela 17 – Novas dimensões propostas pelo segundo procedimento de otimização.	105
Tabela 18 – Frequências naturais da nova configuração proposta pelo segundo procedimento de otimização.....	106
Tabela 19 – Deslocamentos máximos na configuração proposta pelo segundo procedimento de otimização.....	107
Tabela 20 – Velocidades máximas na configuração proposta pelo segundo procedimento de otimização.....	107

Tabela 21 – Acelerações máximas na configuração proposta pelo segundo procedimento de otimização.....	108
---	-----

LISTA DE SÍMBOLOS, SIGLAS E ABREVIATURAS

m – Massa do sistema

c – Constante de amortecimento do sistema

k – Constante de rigidez do sistema

ω_0 – Frequência natural angular do sistema

f – Frequência natural do sistema

T – Período

C_c – Constante de amortecimento crítico do sistema

ξ – Fator de amortecimento do sistema

ω_a – Frequência amortecida do sistema

F_0 – Amplitude da força harmônica de excitação

ω_f – Frequência de excitação

φ – Ângulo de fase

β – Relação de frequências

FAD – Fator de Amplificação Dinâmica

M_e – Massa desbalanceada

e – Excentricidade da massa desbalanceada

$[M]$ – Matriz de massa do sistema

$\{a(t)\}$ – Vetor de acelerações nodais do sistema

$[C]$ – Matriz de amortecimento do sistema

$\{v(t)\}$ – Vetor de velocidades nodais do sistema

$[K]$ – Matriz de rigidez do sistema

$\{x(t)\}$ – Vetor de deslocamentos nodais do sistema

$\{F(t)\}$ – Vetor de carregamentos nodais do sistema

$\{\phi_i\}$ – Vetor modo de vibração

$[I]$ – Matriz identidade

$[W]$ – Matriz diagonal das frequências naturais aos quadrado

$[\Phi]$ – Matriz dos modos normais de vibração

m_i – Massa generalizada

k_i – Rigidez generalizada

$\{\hat{\phi}_i\}$ – Modo de vibração normalizado

MEF – Método dos Elementos Finitos

PVC – Problema de Valor de Contorno

$[B]$ – Matriz de relação entre deslocamentos nodais e deformações no elemento finito

$[D]$ – Matriz de relação tensão-deformação da teoria da elasticidade

ρ – Densidade do material

$[N]$ – Matriz das funções de forma do elemento finito

α – Parâmetro da matriz de amortecimento de Rayleigh associado à matriz de massa

β – Parâmetro da matriz de amortecimento de Rayleigh associado à matriz de rigidez

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

ACI – *American Concrete Institute*

DIN - *Deutsches Institut für Normung (German Institute for Standardization)*

ISO – *International Organization for Standardization*

K_b – Fator de intensidade de percepção de vibração

NR – Norma regulamentadora

VDV – Valor Dose de Vibração

$[H]$ – Matriz Hessiana

$F(\mathbf{X})$ – Função objetivo

\mathbf{X} – Vetor contendo das variáveis de projeto

$g_j(\mathbf{X})$ – Restrições de projeto de desigualdade

$l_j(\mathbf{X})$ – Restrições de projeto de igualdade

DFP –

BFGS –

$\emptyset(\mathbf{X})$ – Função de aptidão

r_i – Parâmetros de penalidade associados às restrições de desigualdade

$\langle g_i(\mathbf{X}) \rangle$ – Função penalidade associada às restrições de desigualdade

R_j – Parâmetros de penalidade associados às restrições de igualdade

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
Contextualização	15
Revisão Bibliográfica	16
Motivação.	19
Objetivo.	19
1 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE DINÂMICA ESTRUTURAL	21
1.1 Sistemas com um grau de liberdade	21
1.1.1 Vibrações livres	22
1.1.1.1 Vibrações livres não amortecidas	23
1.1.1.2 Vibrações livres amortecidas	24
1.1.2 Vibração sujeita à excitação harmônica	26
1.1.2.1 Sistema sem amortecimento.....	26
1.1.2.2 Sistema com amortecimento.....	28
1.1.2.3 Desbalanceamento rotativo.....	30
1.2 Sistemas com vários graus de liberdade	30
1.2.1 Vibrações livres sem amortecimento.....	32
1.2.2 Método da superposição modal.....	35
1.3 Análise dinâmica a partir do Método dos Elementos Finitos	36
1.3.1 Matriz de rigidez.	37
1.3.2 Matriz de massa.	37
1.3.3 Matriz de amortecimento.	38
1.3.4 Demais considerações.	39
2 NORMAS E RECOMENDAÇÕES DE PROJETO	40
2.1 Normas para verificação de estruturas.	41
2.1.1 Norma Petrobrás N-1848 [24].....	43
2.1.2 Norma Americana ACI-351 [25].....	44
2.1.3 Norma Alemã DIN 4024-1/2 [26,27].....	46
2.2 Normas para verificação de equipamentos	47
2.3 Normas para verificação de segurança e conforto humano	49
2.3.1 Norma ISO 2631-1 [31].....	50
2.3.2 Norma ISO 2631-2 [33].....	51

2.3.3	Norma Alemã DIN 4150-2 [34].....	55
2.3.4	Norma Regulamentadora NR-15 [35]	56
2.3.5	Diretiva Europeia de 2002[36]	56
3	CONCEITOS BÁSICOS SOBRE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	58
3.1	Introdução.....	58
3.2	Contexto histórico.....	58
3.3	Definições básicas	59
3.3.1	Vetor das variáveis de projeto	62
3.3.2	Restrições de projeto.....	63
3.3.3	Espaço de projeto viável e inviável.....	63
3.3.4	Algoritmos de otimização.....	64
3.4	Algoritmo genético.....	65
3.4.1	Conceitos e definições básicas.....	66
3.4.2	Seleção e Reprodução	69
3.4.3	Crossover ou Recombinação.....	70
3.4.4	Mutação.....	71
3.4.5	Demais considerações	72
4	MODELAGEM DO SISTEMA ESTRUTURAL INVESTIGADO	74
4.1	Apresentação da estrutura.....	74
4.2	Modelagem em elementos finitos	78
5	ANÁLISE DINÂMICA DA FUNDAÇÃO DE CONCRETO ARMADO	81
5.1	Análise Modal da Estrutura	81
5.2	Análise Dinâmica da Estrutura	86
5.3	Demais Considerações.....	91
6	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL VIA ALGORITMO GENÉTICO	92
6.1	A interface ANSYS-MATLAB	92
6.2	O Problema de Otimização da Estrutura.....	94
6.2.1	A Função Objetivo e as Variáveis de Projeto	94
6.2.2	As Restrições de Projeto	96
6.2.2.1	Restrições sobre as variáveis de projeto	96
6.2.2.2	Restrições referentes a condições de operação dos equipamentos	
	97	
6.2.2.3	Restrições referentes a segurança e conforto humano.....	98
6.3	Procedimentos de Otimização Realizados	99

6.4	Resultados e Pós-Processamentos.....	101
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	109
7.1	Introdução.....	109
7.2	Conclusões.....	109
7.3	Recomendações para Trabalhos Futuros.....	111
	REFERÊNCIAS.....	113

INTRODUÇÃO

Contextualização

O dimensionamento e a previsão do comportamento de uma estrutura sujeita a um carregamento predominantemente estático é uma tarefa de realização corriqueira aos engenheiros projetistas. Entretanto, quando se trata de estruturas sujeitas a carregamentos de natureza dinâmica, tal tarefa se torna um pouco mais complexa. O dimensionamento de fundações para suporte de máquinas é um trabalho que exige dos engenheiros conhecimentos de análise dinâmica de estruturas para um projeto satisfatório. Caso seja realizado de forma inadequada, esse dimensionamento pode resultar em fundações antieconômicas, superdimensionadas, ou até mesmo em um caso oposto, onde o projeto torna-se inseguro devido ao subdimensionamento, colocando em risco o sistema fundação-equipamento, inclusive a vida das pessoas. [1,2,3,4]

De certa forma, existem algumas normas que balizam o projeto para uma fundação que atenda aos requisitos de segurança da operação da máquina, sem colocar em risco a estrutura e a vida das pessoas. Entretanto, sem os devidos conhecimentos de dinâmica estrutural, é comum alguns projetistas se pautarem apenas nas normas. Segundo Machado [2], para a verificação da resposta estrutural do sistema, torna-se necessário a análise do equipamento e das forças dinâmicas geradas durante a operação do mesmo.

Encontrar o projeto ideal, que seja seguro e econômico, é uma tarefa de muita complexidade, pois existem diversas restrições impostas ao problema. Nas últimas décadas, a área da Otimização ganhou bastante espaço para aplicação em problemas de engenharia. Diversos algoritmos de otimização foram propostos e implementados em programas computacionais, facilitando as etapas de projeto. Aliar a otimização

com análise dinâmica, permite ao projetista encontrar configurações de projeto visando reduzir custo e/ou maximizar a eficiência mecânica.

Revisão Bibliográfica

A seguir será apresentada uma breve revisão bibliográfica. Nesta parte, serão abordados, de maneira sucinta, os trabalhos que vêm sendo publicados nas áreas de otimização e dinâmica estrutural, em ordem cronológica das últimas duas décadas.

Lemonge [5], em 1999 discutiu, desenvolveu e implementou algoritmos genéticos para resolver problemas de otimização estrutural, mostrando a potencialidade desses algoritmos para obtenção de soluções ótimas eficientes e sua flexibilidade para ser aplicado em vários tipos de problemas de forma fácil. Foram analisados problemas de minimização de peso, minimização de trabalho de deformação, reação máxima de apoio, otimização de parâmetros e topologia, em estruturas reticuladas planas e espaciais. As análises estruturais foram desenvolvidas a partir do método dos elementos finitos em conjunto com o algoritmo genético. Por fim, foram demonstradas as vantagens que os algoritmos genéticos apresentam sobre os métodos clássicos para o tratamento de alguns problemas de otimização estrutural.

Ainda em 1999, Borges [6] realizou um trabalho onde foram resolvidos problemas de otimização envolvendo dinâmica estrutural, utilizando o método dos elementos finitos em conjunto com algoritmos genéticos. Entre os casos estudados, estava a otimização das frequências naturais de uma estrutura, utilizando uma técnica de otimização multi-objetivo baseado em um modelo não geracional, onde a melhora da aptidão da população se dá através da substituição de apenas uma parcela menos apta, que é descartada para a entrada de novos indivíduos, e não da substituição total da população a cada geração. Tais algoritmos genéticos também são chamados de *Steady-state*. Na otimização das frequências naturais de uma estrutura, uma técnica matricial foi introduzida como alternativa à otimização dos primeiros autovalores da estrutura. Observou-se que, além do baixo custo computacional em relação à solução do problema de autovalores, o método apresentou uma distribuição mais adequada dos modos de vibração superiores, tornando-se recomendável principalmente em problemas tridimensionais. Assim, foi apresentada uma forma mais adequada para o

uso do operador de recombinação em otimização global.

Em 2000, Silva et. Al [7] publicaram um trabalho para descrever o procedimento computacional de otimização de fundações aporticadas para máquinas desbalanceadas. Neste trabalho, a sapata foi modelada como uma placa de concreto de espessura constante e foi empregado o método dos elementos finitos nas análises realizadas. O problema de minimização do custo da estrutura é considerado como um problema de otimização, onde as variáveis de projeto são as dimensões da estrutura e a armação das peças de concreto armado. Os autores concluíram ser possível resolver problemas de otimização de grande porte, onde estruturas e fundações são otimizadas e analisadas simultaneamente, com um custo computacional relativamente baixo. É válido ressaltar que há dezessete anos atrás os recursos computacionais eram mais escassos para o desenvolvimento de trabalhos de otimização de grande porte.

Em 2001, Silva [8] desenvolveu um trabalho de otimização de estruturas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos. Neste trabalho foram apresentadas duas importantes áreas de pesquisa voltadas para problemas de otimização: a Programação Matemática e os Algoritmos Genéticos. Foram apresentadas as diferenças básicas entre os Métodos Clássicos e os Algoritmos Genéticos, com a análise posterior das vantagens e desvantagens entre essas duas classes de ferramentas de otimização. A essência do trabalho se baseou em alguns exemplos de otimização de estruturas de concreto armado, concluindo-se pela tendência promissora dos Algoritmos Genéticos para os anos posteriores.

Castro [9], também em 2001, publicou um trabalho apresentando uma revisão geral sobre a técnica dos algoritmos genéticos, seus fundamentos, operadores, parâmetros de configuração, vantagens e desvantagens, além de sua aplicação aos problemas de otimização multi-objetivos. Como ilustração para a utilização do algoritmo, foram apresentados exemplos numéricos de problemas testes e estruturais como vigas soldadas, treliças, pontes, torre treliçada de 47 barras, dentre outros.

Em 2006, Milet [10] desenvolveu um trabalho comparando os métodos de cálculo para fundações de máquinas. Neste trabalho, foram abordados conceitos de análise dinâmica de fundações de máquinas. Além disso, foram discutidos alguns

métodos analíticos e numéricos disponíveis de projeto e também foram apresentadas algumas recomendações de projeto e prescrições normativas. Blocos de fundações de concreto armado para máquinas alternativas e de impacto foram analisados, bem como fundações aporricadas de concreto armado para turbomáquinas. As frequências naturais e amplitudes da análise de elementos finitos foram comparadas com os resultados decorrentes da utilização de métodos analíticos, apresentando boa concordância entre os resultados analíticos e numéricos.

Lima [11] elaborou um trabalho em 2007 unindo dois campos de conhecimento. O primeiro deles, abordando a utilização do radier estaqueado como conceito de fundação e o segundo abordando a otimização de projetos de engenharia, já bastante extensa em trabalhos e pesquisas, porém ainda recém-chegada ao campo das fundações. Foram analisados diversos casos de fundação e o comportamento do programa de otimização, observando sua sensibilidade comparando-se casos com variação de tipo de carregamento, solo ou diâmetro da estaca. Por fim, foi feito um estudo de caso real de um radier estaqueado comparando-se três análises: a análise convencional, a otimização baseada na experiência do profissional num processo de tentativa-erro e a análise realizada por um programa de otimização.

Assunção [12], em 2009, realizou um trabalho que abordou os aspectos e considerações mais importantes de uma análise dinâmica em estruturas onde são alocados equipamentos para processos industriais. Para isso, foi feito um estudo sobre as principais causas de ações dinâmicas oriundas da operação de equipamentos industriais e, como um estudo de caso, foi analisada uma estrutura que suporta uma peneira vibratória, cuja principal fonte de excitação é um sistema rotativo com uma massa propositalmente desbalanceada, a fim de provocar os movimentos característicos do equipamento. Dessa análise ficou demonstrado que o modelo computacional, onde se representam as molas helicoidais de apoio do equipamento, com a massa do equipamento e sua força dinâmica atuando no topo da mola, é o mais adequado para simular a transmissão de esforços e a contribuição da massa vibrante nas respostas de sua estrutura aporricada de suporte.

Em 2010, Pereira [13] utilizou algoritmos genéticos para a otimização da configuração e da distribuição de estacas sobre um bloco de fundação profunda, levando em consideração o diâmetro e a resistência das mesmas, a carga vertical

aplicada que advém dos pilares e dos momentos fletores, tentando, assim, resolver o problema de estaqueamento sujeito a momentos, que geralmente é resolvido por tentativas, e que nem sempre resulta em resposta ótima. Obteve-se desse trabalho bons resultados, mostrando a eficiência dos algoritmos genéticos para otimização desses tipos de problema, de modo que a solução obtida foi ótima, ou aproximadamente ótima.

Tomaz et. Al [14] publicaram em 2015 um trabalho sobre dimensionamento ótimo de blocos sobre estacas. Nesse trabalho foi apresentada a formulação para um problema de otimização de blocos sobre estacas com exemplos e aplicação. Foram impostas restrições de acordo com os parâmetros definidos a partir da norma NBR 6118:2014. Para a resolução do problema de otimização foi utilizado o método dos pontos interiores através do software MATLAB. Tal método apresentou resultados satisfatórios na busca de um bloco com custo mínimo.

Motivação.

O projeto de estruturas submetidas a carregamentos predominantemente dinâmicos deve, sim, pautar-se a partir das normas técnicas. Entretanto, exige do engenheiro projetista conhecimentos avançados sobre análise dinâmica de estruturas. A motivação do presente trabalho de pesquisa é demonstrar a importância de tais conhecimentos. Aliado a isso, é conveniente apresentar a área de otimização, com uma poderosa gama de ferramentas, que vem a ser de suma importância para tais projetos. Os recentes algoritmos desenvolvidos têm apresentado bons resultados em fases de projeto estrutural.

Objetivo.

Neste trabalho propõe-se aplicar uma técnica de otimização conhecida como algoritmo genético a uma fundação de concreto armado projetada para suportar um conjunto motor-compressor de alta capacidade, localizada em uma planta industrial de uma usina siderúrgica em Ouro Branco/MG, Brasil. O principal objetivo é obter-se uma nova configuração de projeto, reduzindo seu volume total, de forma que as

restrições impostas a partir da resposta estrutural dinâmica do sistema estejam de acordo com os padrões de segurança para um projeto satisfatório.

1 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE DINÂMICA ESTRUTURAL

Em grande parte dos casos de análise dinâmica de um sistema estrutural, podemos reduzir o modelo matemático de um sistema contínuo para um modelo com parâmetros discretos. O caso mais simples é quando o modelo é reduzido a um sistema com um grau de liberdade, representado a partir de um sistema massa-mola-amortecedor, onde a posição de qualquer uma de suas partes é descrita por uma única variável em função do tempo. Apesar de tal representação parecer um tanto quanto grosseira, muitos sistemas reais podem ser modelados dessa forma, apresentando resultados satisfatórios.

Quando o sistema exige que a representação de sua posição se dê através de mais variáveis em função do tempo, tal sistema possui mais de um grau de liberdade. Dessa forma, a quantidade de graus de liberdade de um sistema mecânico representado é o número mínimo de variáveis independentes para definir sua posição em qualquer instante de tempo. [15]

1.1 Sistemas com um grau de liberdade

As propriedades físicas essenciais de qualquer sistema mecânico estrutural linear sujeito a uma fonte externa de excitação, ou carregamento dinâmico, são sua massa, suas propriedades elásticas como rigidez ou flexibilidade, e um mecanismo de dissipação de energia ou amortecimento. O modelo mais simples para representar tal configuração de um sistema discreto é representado na Fig. 1, por um sistema massa-mola-amortecedor.

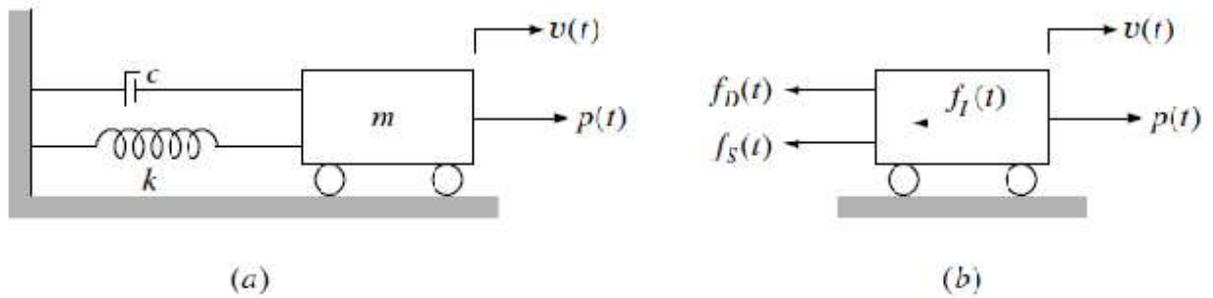


Figura 1 – (a) Sistema massa-mola-amortecedor. (b) Diagrama de corpo livre do sistema [16]

A partir do diagrama de corpo livre deste tipo de sistema, é possível chegar à Eq. (1).

$$ma(t) + cv(t) + kx(t) = p(t) \quad (1)$$

Onde m, c, k são as propriedades de massa, amortecimento e rigidez do sistema vibratório, $a(t), v(t)$ e $x(t)$ são, respectivamente, a aceleração, a velocidade e o deslocamento em função do tempo do sistema massa-mola-amortecedor e $p(t)$ é um carregamento externo em função do tempo aplicado ao sistema.

A Eq. (1) é chamada de equação de equilíbrio dinâmico e é de fundamental conhecimento para análise de qualquer problema de vibração para um sistema de um grau de liberdade. [16]

1.1.1 Vibrações livres

A Eq. (1) trata de um caso geral de vibração, onde não são consideradas hipóteses sobre as condições de excitação externa ou amortecimento. O primeiro caso a ser apresentado é o caso da vibração livre, na qual não são consideradas fontes de excitação externa. Dessa forma, assume-se que o carregamento externo $p(t)$ é nulo e a equação de equilíbrio dinâmico resume-se à Eq. (2).

$$ma(t) + cv(t) + kx(t) = 0 \quad (2)$$

A expressão dada pela Eq. (2) trata-se de uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea. A solução para este tipo de equação é da forma da Eq. (3).

$$x(t) = Ce^{st} \quad (3)$$

Ou seja, aplicando-se essa solução na Eq. (2), tem-se a Eq. (4).

$$(ms^2 + cs + k)Ce^{st} = 0 \quad (4)$$

Logo, chega-se à Eq. (5).

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (5)$$

Dessa forma, é possível determinar os valores de s que permitem chegar à solução geral para a equação do movimento do sistema. Como s é um termo de uma equação do segundo grau, s possuirá dois valores que atendem ao sistema, logo, a equação geral do movimento do sistema, será dada a partir da combinação linear das duas soluções encontradas. [17]

1.1.1.1 Vibrações livres não amortecidas

Em muitas aplicações da engenharia, o valor do amortecimento é tão baixo que, para efeitos de análise, pode-se tratar o problema como um sistema de vibração livre sem amortecimento. Dessa forma, na Eq. (5), o valor de c torna-se nulo, o que faz que as soluções para s sejam dadas pela Eq. (6).

$$s = \pm i\omega_0 \quad (6)$$

Tal que é possível reduzir da forma dada pela Eq. (7).

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7)$$

Dessa forma, a equação do movimento admite uma solução do tipo da Eq. (8).

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (8)$$

Torna-se conveniente introduzir a identidade de *Euler*, dada pela Eq. (9).

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \quad (9)$$

A partir da fórmula de *Euler*, podemos reduzir a Eq. (9) à expressão dada pela Eq. (10).

$$x(t) = A\text{sen}(\omega_0 t) + B\text{cos}(\omega_0 t) \quad (10)$$

As constantes A e B são determinadas a partir das condições iniciais do sistema, ou seja, considerando que no instante $t = 0$ o deslocamento e a velocidade são U_0 e V_0 , respectivamente, obtém-se a equação do movimento para um sistema de um grau de liberdade em vibração livre e sem amortecimento, dada pela Eq. (11).

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t) + U_0 \text{cos}(\omega_0 t) \quad (11)$$

A constante ω_0 é uma propriedade intrínseca de cada sistema vibratório em particular e é chamada de frequência natural do sistema. A essa frequência, relaciona-se o período do sistema através das Eq. (12) e (13) [18].

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{f} \quad (13)$$

1.1.1.2 Vibrações livres amortecidas

Nos casos onde não se pode desconsiderar o amortecimento, o valor da constante c na Eq. (5) não se anula e a solução s é dada pela Eq. (14).

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \left[\left(\frac{c}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right] \quad (14)$$

É conveniente introduzir as grandezas dadas pelas Eq. (15) e (16).

$$C_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0 = \frac{2k}{\omega_0} \quad (15)$$

$$\xi = \frac{c}{C_c} \rightarrow c = 2\xi m\omega_0 \quad (16)$$

Essas constantes são chamadas de amortecimento crítico e fator de

amortecimento, respectivamente. Dessa forma, pode-se reescrever a Eq. (14) da forma dada pela Eq. (17).

$$s = -\xi\omega_0 \pm \omega_0(\sqrt{\xi^2 - 1}) \quad (17)$$

Devido à natureza da Eq. (17), percebe-se que o termo da raiz quadrada pode assumir valores positivos, negativos ou nulos, em função do valor do fator de amortecimento. Quando $\xi > 1$, o movimento é denominado super-amortecido, enquanto que para $\xi = 1$, é chamado de criticamente amortecido. Para esses casos, as aplicações de engenharia são mais restritas, e o desenvolvimento pode ser melhor compreendido no livro de Clough [16].

No caso quando $\xi < 1$, o movimento é conhecido como amortecimento subcrítico e a Eq. (17) pode ser reescrita como na Eq. (18).

$$s = -\xi\omega_0 \pm i\omega_a \quad (18)$$

Onde a constante ω_a é denominada de frequência amortecida, definida pela Eq. (19).

$$\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad (19)$$

O que resulta na Eq. (20).

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [C_1 e^{i\omega_a t} + C_2 e^{-i\omega_a t}] \quad (20)$$

A partir da identidade de Euler, podemos reescrever a Eq. (20) conforme a Eq. (21).

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t)] \quad (21)$$

Da mesma forma que para o caso sem amortecimento, as constantes A e B são determinadas a partir das condições iniciais do sistema vibratório. Logo, a Eq. (21) pode ser reescrita conforme a Eq. (22).

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left[\left(\frac{V_0 + \xi U_0 \omega_0}{\omega_a} \right) \text{sen}(\omega_a t) + U_0 \text{cos}(\omega_a t) \right] \quad (22)$$

Observando natureza da Eq. (22), percebe-se que a amplitude do movimento diminui ao longo do tempo, a partir da presença do exponencial negativo $e^{-\xi\omega_0 t}$, o que representa bem o fenômeno de dissipação de energia através do amortecimento [16]. Devido ao fato do movimento não preservar sua amplitude ao longo do tempo, não se pode afirmar que este seja um movimento harmônico, sendo chamado de movimento “pseudo-harmônico” [18].

A expressão da Eq. (22) foi obtida considerando-se um amortecimento viscoso, como na maioria dos casos. O amortecimento viscoso considera uma força de amortecimento proporcional à velocidade do sistema, representando o atrito devido à viscosidade de fluidos. Segundo Neto [15], o amortecimento é a propriedade do sistema dinâmico mais difícil de ser avaliada e a hipótese de um amortecimento linear com a velocidade é adotada mais por conveniência matemática do que pela representação do fenômeno físico e se justifica, na prática, devido aos bons resultados apresentados quando as taxas de amortecimento são pequenas, como na maioria dos problemas de dinâmica estrutural.

1.1.2 Vibração sujeita à excitação harmônica

Além da vibração livre, existem casos onde o sistema mecânico está sujeito a condições de vibração forçada. Esforços dinâmicos provenientes da operação de máquinas rotativas e alternativas podem ser decompostas em excitações harmônicas na forma $F_0 \text{sen}(\omega_f t + \varphi)$, sendo F_0 a amplitude da força aplicada, ω_f a frequência angular de excitação e φ o ângulo de fase.

1.1.2.1 Sistema sem amortecimento

No caso de uma vibração forçada por uma carga harmônica, um sistema dinâmico sem amortecimento terá sua equação de equilíbrio dinâmico dada pela Eq. (23).

$$ma(t) + kx(t) = F_0 \text{sen}(\omega_f t) \quad (23)$$

Esta equação diferencial linear de segunda ordem é não homogênea e apresenta solução particular dada pela Eq. (24).

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k(1 - \beta^2)} \text{sen}(\omega_f t) \quad (24)$$

Onde $\beta = \frac{\omega_f}{\omega_0}$ é chamada de relação de frequências. Logo, a solução final é a soma da solução particular (Eq. (24)) com a solução homogênea (Eq. (10)), dada pela Eq. (25).

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t) + B \text{cos}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{k(1 - \beta^2)} \text{sen}(\omega_f t) \quad (25)$$

Considerando as condições iniciais $U_0 = V_0 = 0$, teremos que a Eq. (25) reduz-se à Eq. (26).

$$x(t) = \frac{F_0}{k(1 - \beta^2)} (\text{sen}(\omega_f t) - \beta \text{sen}(\omega_0 t)) \quad (26)$$

A Eq. (26) possui duas parcelas harmônicas. A parcela com a frequência natural do sistema, consiste do regime transitório de vibração no sistema, imposto a partir das condições iniciais de vibração livre e ocorre só nos instantes iniciais da vibração. A parcela com a frequência de excitação, corresponde ao movimento permanente de vibração, proveniente da condição de excitação do sistema dinâmico.

O termo $\frac{F_0}{k}$ da Eq. (26) pode ser compreendido com um deslocamento estático que seria provocado se a força de excitação tivesse um caráter estático. Dessa forma, o termo $\frac{1}{1 - \beta^2}$ é chamado de fator de amplificação dinâmica (FAD), que representa o quanto os deslocamentos do sistema são amplificados, em função da relação entre as frequências de excitação e natural do sistema. É possível observar a expressão do FAD pela Eq. (27).

$$FAD = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (27)$$

Percebe-se que o quão mais próximo de 1 é o valor de β , maior é o FAD e, no

limite, quando β for igual a 1, seu valor tende ao infinito. Essa condição é conhecida como ressonância. O fenômeno da ressonância ocorre quando o sistema dinâmico é excitado por cargas harmônicas de frequências próximas, ou iguais, à frequência natural do sistema, e leva o sistema à grandes deslocamentos. Em casos de estruturas reais, o fenômeno também pode ocorrer, levando a falhas catastróficas, como o famoso colapso da ponte de *Tacoma Narrows*, por volta da década de 1940 [16].

1.1.2.2 Sistema com amortecimento

Para vibrações forçadas e amortecidas, a equação de equilíbrio dinâmico é dada pela Eq. (28).

$$ma(t) + cv(t) + kx(t) = F_0 \text{sen}(\omega_f t) \quad (28)$$

Como $c = 2\xi m\omega_0$, podemos reescrever a Eq. (28) conforme a Eq. (29).

$$a(t) + 2\xi\omega_0 v(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \text{sen}(\omega_f t) \quad (29)$$

A solução da equação homogênea associada é dada a partir da Eq. (21), definida para vibrações livres com amortecimento. A solução particular para a Eq. (29) é dada pela Eq. (30).

$$x_p(t) = C_1 \text{sen}(\omega_f t) + C_2 \text{cos}(\omega_f t) \quad (30)$$

Logo, determinando as constantes C_1 e C_2 , a solução geral é dada pela Eq. (31).

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A \text{sen}(\omega_a t) + B \text{cos}(\omega_a t)] + \frac{F_0}{k\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} [(1 - \beta^2) \text{sen}(\omega_f t) - 2\xi\beta \text{cos}(\omega_f t)] \quad (31)$$

O primeiro termo da Eq. (31) corresponde ao regime transiente de vibração, devido ao termo $e^{-\xi\omega_0 t}$, e desaparece rapidamente em decorrência do amortecimento. O regime permanente de vibração é representado pela segunda parcela da Eq. (31), possuindo a mesma frequência de excitação, mas com uma defasagem. O fator de amplificação dinâmica (FAD) da resposta permanente é dado pela Eq. (32).

$$FAD = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (32)$$

Na Fig. 2, é possível verificar a variação do FAD com a relação entre frequências e com o fator de amortecimento.

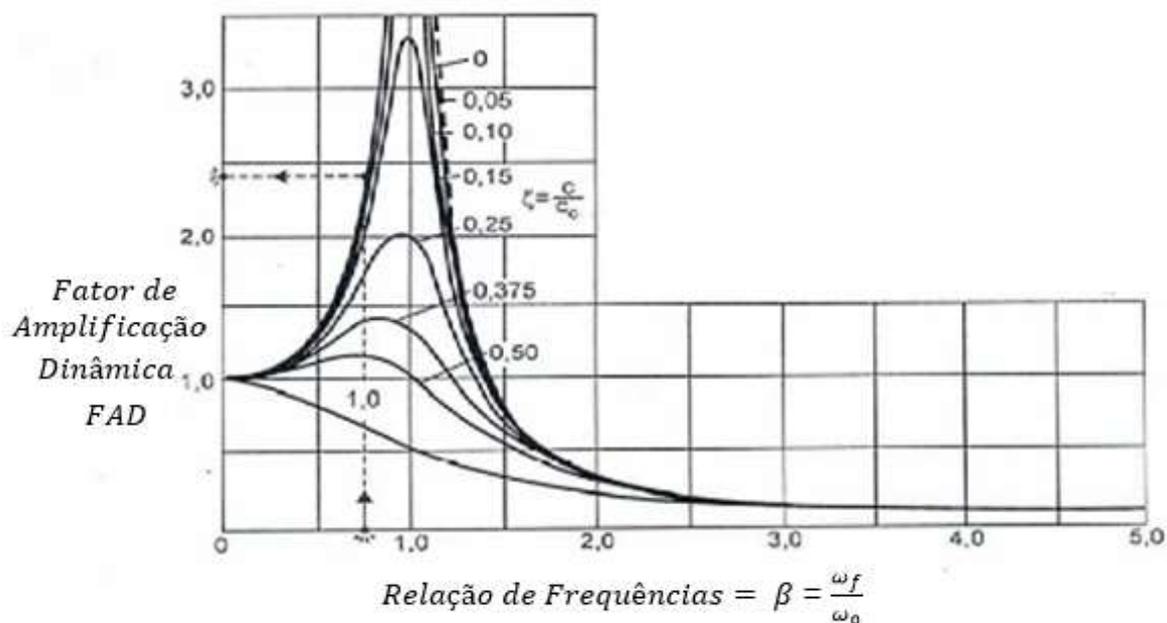


Figura 2 – Fator de amplificação dinâmica em função da relação de frequências e do amortecimento. [19]

Percebe-se que o FAD cresce para valores de β próximos a 1 e, quanto menor for o fator de amortecimento, maior é esse crescimento. Vale ressaltar, que nos casos do amortecimento ser nulo, tem-se um caso de vibração não amortecida, com FAD tendendo ao infinito quando $\beta = 1$.

Pode-se calcular as forças transmitidas à base, através da mola e do amortecedor, por meio da Eq. (33).

$$F_b(t) = cv(t) + kx(t) \quad (33)$$

A partir da expressão da resposta permanente do sistema, a Eq. (33) é reescrita conforme a Eq. (34).

$$F_b(t) = F_0 FAD \sin(\omega_f t - \varphi) + 2\xi\beta F_0 FAD \cos(\omega_f t - \varphi) \quad (34)$$

Onde $\varphi = \arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$ é o ângulo de fase.

A amplitude da força transmitida à base pode ser obtida pela Eq. (35).

$$F_{b0} = F_0 FAD \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad (35)$$

O termo $FAD \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$ é conhecido por transmissibilidade e implica do quanto da força de excitação é transmitida à base [15].

1.1.2.3 Desbalanceamento rotativo

O carregamento proveniente de máquinas rotativas pode ser modelado através do conceito de desbalanceamento rotativo, o qual considera que existe uma massa M_e desbalanceada de uma excentricidade e , que provoca o mesmo efeito de excitação de uma carga harmônica. Nesse caso, a força é proporcional ao quadrado da frequência de trabalho do eixo da máquina e é dada pela Eq. (36).

$$p(t) = M_e e \omega_f^2 \text{sen}(\omega_f t) \quad (36)$$

Então, a equação de equilíbrio dinâmico é dada pela Eq. (37).

$$ma(t) + cv(t) + kx(t) = M_e e \omega_f^2 \text{sen}(\omega_f t) \quad (37)$$

Portanto, a expressão para a amplitude do movimento é dada pela Eq. (38).

$$\text{Amplitude} = \frac{M_e e \omega_f^2}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (38)$$

Dessa forma, pode-se perceber que o efeito do desbalanceamento rotativo é equivalente ao da excitação harmônica, pois $F_0 = M_e e \omega_f^2$ [18].

1.2 Sistemas com vários graus de liberdade

A modelagem de sistemas reais como sistemas de um grau de liberdade tem sua aplicação no campo da engenharia desde que os parâmetros do sistema possam

ser reduzidos à uma constante de rigidez, uma de amortecimento e uma de inércia, sendo o seu movimento descrito por uma única coordenada em função do tempo. A vibração de uma viga engastada em modo de flexão, por exemplo, é um caso de vibração com infinitos graus de liberdade, pois cada ponto ao longo do comprimento total da viga terá uma amplitude em função do tempo, sendo assim, são necessárias infinitas coordenadas para representar o movimento completo da viga.

Na realidade, todos os sistemas vibratórios possuem infinitos graus de liberdade, o que faz com o que as equações de equilíbrio dinâmico do sistema não sejam equações diferenciais ordinárias, e sim equações diferenciais parciais no tempo e na posição (x,y,z) . Entretanto, em diversos sistemas mecânicos, a prática da engenharia demonstra que é conveniente discretizar o modelo contínuo, em um modelo discreto com vários graus de liberdade, quantos forem necessários para representar bem o fenômeno de vibração. Essa simplificação do problema exclui a resolução de qualquer equação diferencial parcial das etapas de cálculo, fazendo com que todas as equações envolvidas sejam ordinárias, em função apenas do tempo. Dessa forma, justifica-se estudar a modelagem da vibração em diversos graus de liberdade.

Em um grau de liberdade, a equação de equilíbrio dinâmico era única. Para N graus de liberdade, existirão N equações de equilíbrio dinâmico, uma para cada. Cada grau de liberdade possui uma rigidez, uma inércia e um amortecimento associado. Dessa forma, o estudo para sistemas com vários graus de liberdade é apresentado através de uma formulação matricial. A equação de equilíbrio dinâmico para um sistema com N graus de liberdade é dada pela Eq. (39).

$$[M]\{a(t)\} + [C]\{v(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (39)$$

A matriz $[M]$ é uma matriz quadrada de ordem N , chamada de matriz de massa. A matriz de massa exerce o papel de relacionar as acelerações nodais com as forças de inércia nodais. O vetor $\{a(t)\}$, é o vetor que representa as acelerações nodais. O elemento M_{ij} da matriz de massa é a força de inércia nodal, associada ao grau de liberdade i , resultante de uma aceleração unitária do grau de liberdade j .

A matriz de massa consistente de um elemento estrutural é a matriz de massa

obtida através da interpolação das forças de inércia associadas às massas distribuídas ao longo do elemento, pelas mesmas funções de interpolação utilizadas para a formulação da matriz de rigidez. A matriz de massa que considera apenas as massas concentradas nos nós dos elementos é uma matriz de massa diagonal.

A matriz $[C]$ também é uma matriz quadrada de ordem N , com o nome de matriz de amortecimento. Essa matriz, relaciona as forças nodais devido ao amortecimento às velocidades nodais. O vetor $\{v(t)\}$, é o vetor que contém as componentes de velocidade nodal. O elemento C_{ij} da matriz de amortecimento é a força de amortecimento nodal associada ao grau de liberdade i , resultante de uma velocidade unitária imposta ao grau de liberdade j .

Da mesma forma que para a matriz de massa, a matriz de amortecimento também possui uma parcela de amortecimento consistente. Entretanto, pela dificuldade da determinação da matriz de amortecimento da estrutura, não se faz essa separação. Na prática, a matriz de amortecimento utilizada é dada através do amortecimento de Rayleigh [15].

A matriz $[K]$, é chamada matriz de rigidez, também sendo uma matriz quadrada de ordem N . A matriz de rigidez relaciona as forças nodais provenientes dos deslocamentos nodais. O vetor $\{x(t)\}$ representa as componentes de deslocamentos nodais dos elementos estruturais. O elemento K_{ij} da matriz de rigidez representa a força nodal associada ao grau de liberdade i , proveniente de um deslocamento unitário no grau de liberdade j .

O vetor $\{F(t)\}$ contém as componentes dos carregamentos nodais externos ao elemento estrutural, representando, em um problema de dinâmica estrutural, a excitação na qual tal sistema está submetido [16].

1.2.1 Vibrações livres sem amortecimento

A matriz de amortecimento de Rayleigh é uma forma de obter uma a matriz de amortecimento para o sistema estrutural em função das propriedades de massa e rigidez do sistema, de forma aproximada, justificada pelos bons resultados práticos. Dessa forma, em um primeiro momento, é válido analisar o sistema desconsiderando

o amortecimento. A equação de equilíbrio dinâmico para um sistema com vários graus de liberdade em vibração livre, sem amortecimento, é dada pela Eq. (40).

$$[M]\{a(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (40)$$

A Eq. (40) representa um sistema de N equações diferenciais lineares, no qual N é a ordem das matrizes. Admitindo uma solução do tipo $\{x(t)\} = \{\phi_i\}\cos(\omega_i t)$ teremos que $\{a(t)\} = -\omega_i^2\{\phi_i\}\cos(\omega_i t)$, logo, podemos reescrever a Eq. (40) conforme a Eq. (41).

$$-\omega_i^2[M]\{\phi_i\}\cos(\omega_i t) + [K]\{\phi_i\}\cos(\omega_i t) = \{0\} \quad (41)$$

Reorganizando a Eq. (41), chega-se à Eq. (42).

$$\{[M]^{-1}[K] - \omega_i^2[I]\}\{\phi_i\} = \{0\} \quad (42)$$

A Eq. (42) é chamada de equação característica do i -ésimo modo de vibração do sistema vibratório. O vetor $\{\phi_i\}$ é chamado de modo de vibração e representa uma configuração na qual o sistema vibra. A Eq. (42), representa um problema de autovalores e autovetores e, para que essa equação seja satisfeita com modos de vibração não nulos, é necessário que o determinante da Eq. (43) seja nulo.

$$\det([M]^{-1}[K] - \omega_i^2[I]) = 0 \quad (43)$$

A resolução da Eq. (43) nos leva aos N autovalores deste problema matricial. Os autovalores correspondem aos valores das frequências naturais elevados ao quadrado. E a cada autovalor, está associado um autovetor, correspondente ao modo de vibração no qual o sistema vibra na frequência natural associada. É válido ressaltar que o sistema da equação característica (Eq. (42)) é linearmente dependente, ou seja, existem diversas soluções para os vetores $\{\phi_i\}$. Logo, o modo de vibração é representado por um vetor que dá apenas uma direção. [18]

De acordo com Neto [15], pode-se definir uma matriz $[W]$, diagonal, que contém as frequências naturais ao quadrado, de acordo com a Eq. (44).

$$[W] = \begin{bmatrix} \omega_{01}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{02}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{0N}^2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

É um vetor dos modos normais, sob a forma adimensional, dada pela Eq. (45).

$$[\Phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_N\}] \quad (45)$$

Pode-se demonstrar que os modos normais possuem a propriedade de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e de rigidez, conforme as Eq. (46) e (47).

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = \begin{cases} m_i & \rightarrow i = j \\ 0 & \rightarrow i \neq j \end{cases} \quad (46)$$

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} = \begin{cases} k_i & \rightarrow i = j \\ 0 & \rightarrow i \neq j \end{cases} \quad (47)$$

Os termos m_i e k_i são chamados de massa e rigidez generalizadas e a matriz que contém esses elementos, chamadas de matrizes de massa e rigidez generalizadas, são matrizes diagonais. [16]

Devido ao fato dos modos de vibração não terem valores absolutos, pela natureza do problema ser linearmente independente, adota-se a utilização dos modos normalizados. Para normalização, os modos de vibração são utilizados de forma que a aplicação da condição de ortogonalidade na matriz de massa corresponda à uma massa generalizada de valor unitário, dada pela Eq. (48).

$$\{\hat{\phi}_i\}^T [M] \{\hat{\phi}_i\} = 1 \quad (48)$$

Logo, chega-se à Eq. (49):

$$\{\hat{\phi}_i\} = \frac{\{\phi_i\}}{\sqrt{M_i}} \quad (49)$$

Dessa forma, a reunião dos modos normalizados em uma matriz quadrada é chamada de matriz modal ponderada. A aplicação da condição de ortogonalidade dessa matriz nas matrizes de massa e de rigidez, nos dá, respectivamente, as

matrizes identidade e a matriz com as frequências naturais [18].

1.2.2 Método da superposição modal

O primeiro passo a se realizar na análise de um sistema com muitos graus de liberdade é verificar as frequências naturais e os modos de vibração do sistema; a essa etapa dá-se o nome de análise modal. A partir disso, assume-se que a resposta de um sistema vibratório é dada a partir da combinação linear dos diversos modos de vibração, cada um com uma determinada ponderação, conhecida como fator de participação modal. A análise modal foi apresentada no tópico anterior. O necessário agora é saber como calcular os fatores de participação modal.

Pela superposição modal, a resposta dinâmica é dada pela Eq. (50).

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \{\phi_i\} Y \quad (50)$$

Introduzindo a Eq. (50) na equação de equilíbrio dinâmico (Eq. (39)) e multiplicando os termos previamente por $\{\phi_i\}^T$, tem-se a Eq. (51).

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} Y'' + \{\phi_i\}^T [C] \{\phi_i\} Y' + \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} Y = \{\phi_i\}^T \{F(t)\} \quad (51)$$

Pela propriedade de ortogonalidade, a Eq. (51) reduz-se à Eq. (52).

$$[M]_g Y'' + \{\phi_i\}^T [C] \{\phi_i\} Y' + [K]_g Y = \{F(t)\}_g \quad (52)$$

Onde $\{\phi_i\}^T \{F(t)\} = \{F(t)\}_g$ é o vetor de forças nodais generalizado.

Supondo que a matriz de amortecimento também possua a propriedade de ortogonalidade em relação aos modos de vibração, a Eq. (52) reduz-se à Eq. (53).

$$[M]_g Y'' + [C]_g Y' + [K]_g Y = \{F(t)\}_g \quad (53)$$

Como as matrizes são diagonais, o sistema de equações dado pela Eq. (53) é desacoplado, onde cada equação pode ser resolvida independente das outras. Logo, para cada modo de vibração i , precisa-se resolver uma equação de equilíbrio dinâmico que dará a solução para o fator de participação modal. Cada equação é da

forma já estudada para um grau de liberdade, dada pela Eq. (54)

$$m_i Y'' + c_i Y' + k_i Y = f(t)_i \quad (54)$$

Logo, é necessário calcular cada fator associado a cada modo e depois construir a solução da resposta dinâmica pela combinação linear dos modos com seus respectivos fatores de participação modal.

Uma das vantagens do método da superposição modal reside no fato da resposta dinâmica de uma estrutura estar geralmente associada aos modos normais de menor frequência natural. Assim, pode-se obter uma boa aproximação mesmo com um número reduzido de coordenadas normais. [15]

1.3 Análise dinâmica a partir do Método dos Elementos Finitos

Já foi comentado que a vibração de uma estrutura real é um sistema com infinitos graus de liberdade. Entretanto, a prática da engenharia nos mostra que a discretização de uma estrutura em um sistema com número finitos de graus de liberdade apresenta bons resultados em termos de aproximação. Dessa forma, é conveniente fazer uma breve introdução sobre o método dos elementos finitos (MEF) para análise dinâmica de estruturas.

O MEF é um método numérico para a resolução de problemas de valor de contorno (PVC), que envolve um sistema de equações diferenciais e suas respectivas condições de contorno. A formulação clássica do MEF se origina dos métodos dos resíduos ponderados, mais especificamente, do método de Galerkin. Em [20,21] é possível encontrar mais detalhes sobre a formulação clássica do MEF.

Embora o MEF seja aplicado a PVC, independente da natureza do problema, o método ganhou muito espaço para a resolução de problemas da área da mecânica dos sólidos, nas engenharias mecânica e civil. Para um sistema vibratório com diversos graus de liberdade, a equação de equilíbrio dinâmico é dada por uma equação matricial. Essa equação leva em consideração as matrizes de rigidez, massa e amortecimento. Apesar de já terem sido apresentadas as definições conceituais

sobre tais matrizes, é importante fazer uma introdução matemática sobre tais elementos.

1.3.1 Matriz de rigidez.

Em qualquer problema de elementos finitos, existirá uma matriz de rigidez associada, independente do problema ser de transmissão de calor, mecânica, eletricidade, etc. A matriz de rigidez do problema, em casos de mecânica estrutural, é obtida em função das matrizes de rigidez dos elementos que compõem a estrutura em análise. Para cada tipo de elemento finito, definido em termos de seus graus de liberdade, existe uma matriz de rigidez particular.

A formulação geral para definição da matriz de rigidez de qualquer elemento finito, que pode ser melhor verificada em [22]. Mais especificamente, a matriz de rigidez, em geral, para qualquer elemento finito, é dada pela Eq. (55).

$$[K] = \int_{vol} [B]^T [D] [B] dV \quad (55)$$

A matriz [B] é a matriz que relaciona os deslocamentos nodais do elemento com as deformações ao longo do seu comprimento. Cada elemento, de acordo com o comportamento físico que se propõe a simular, e de acordo com as hipóteses matemáticas adotadas para esse fim, apresenta sua matriz [B]. A matriz [D] é a matriz constitutiva de acordo com a teoria da elasticidade, que relaciona as tensões com as deformações no elemento. [22]

1.3.2 Matriz de massa.

Para a determinação da matriz de massa, se faz necessário apresentar a função de forma para o elemento finito. As funções de forma fazem a interpolação dos deslocamentos nodais para os deslocamentos no interior do elemento finito. Tais funções estão associadas às hipóteses matemáticas feitas para representar os deslocamentos do elemento finito. As funções de forma também são utilizadas na formulação da matriz de rigidez, entretanto, após a aplicação de um operador diferencial na matriz das funções de forma [N], temos a matriz [B], apresentada

anteriormente.

Dessa forma, a matriz de massa para qualquer elemento finito, é dada pela Eq. (56).

$$[M] = \int_{vol} \rho [N]^T [N] dV \quad (56)$$

Onde ρ é a densidade do material do elemento finito e $[N]$ é a matriz das funções de forma para o elemento [23].

1.3.3 Matriz de amortecimento.

Como já foi dito anteriormente, na prática, a determinação da matriz de amortecimento é algo não tão trivial, sendo mais utilizado o amortecimento de Rayleigh. A matriz de amortecimento de Rayleigh considera uma contribuição da matriz de rigidez e uma contribuição da matriz de massa, conforme a Eq. (57).

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (57)$$

Onde α e β são parâmetros a serem determinados.

Em termos de taxa de amortecimento modal e frequência natural, a Eq. (57) pode ser reescrita como da forma dada pela Eq. (58).

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_{0i}} + \frac{\beta\omega_{0i}}{2} \quad (58)$$

Isolando-se os termos para duas frequências naturais relevantes do sistema, em geral as primeiras frequências, temos as Eq. (59) e (60).

$$\alpha = 2\xi_1\omega_{01} - \beta\omega_{01}^2 \quad (59)$$

$$\beta = \frac{2(\xi_2\omega_{02} - \xi_1\omega_{01})}{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2} \quad (60)$$

Dessa forma, torna-se possível determinar os valores dos parâmetros α e β , que definem a taxa de amortecimento, a partir de duas frequências naturais relevantes

para a resposta dinâmica do sistema estrutural analisado. Com tais valores determinados, é possível obter-se a matriz de amortecimento para a estrutura em questão, a partir do conhecimento de suas matrizes de rigidez e massa e de suas frequências naturais. [18]

1.3.4 Demais considerações.

A formulação matemática das matrizes de massa e rigidez apresentadas nas seções 1.3.1 e 1.3.2 permitem que os *softwares* de elementos finitos as calculem para cada tipo de elemento utilizado para a modelagem da estrutura real. A partir da matriz de cada elemento os *softwares* “montam” as matrizes de massa e rigidez globais da estrutura reunindo essas informações em um domínio que é conhecido por malha de elementos finitos. A malha representa o domínio fechado no qual o MEF irá resolver o PVC associado no caso da mecânica estrutural.

Existem diversos tipos de elementos, cada um com as particularidades e hipóteses matemáticas correspondentes, de modo a representar bem o fenômeno físico a que se propõem. Elementos lineares de barras de treliça, vigas, molas, elementos bilineares planos, elementos tridimensionais de seis, oito, dez, vinte nós, elementos de casca, placa, etc. Cada elemento tem suas aplicações e restrições específicas. Logo, cabe ao projetista e ao usuário dos softwares de MEF conhecê-los para utilizá-los da melhor forma.

A cada elemento finito está associada uma quantidade de nós e de graus de liberdade. Esses graus de liberdade dependem do número de nós que o elemento possui e, quanto mais nós, mais graus de liberdade, logo, maiores serão as dimensões de suas matrizes de rigidez e de massa. [22]

No mercado de softwares de MEF é possível encontrar diversos programas voltados para análise estrutural estática, dinâmica, análises não-lineares, etc., com bibliotecas variadas de elementos finitos. Os softwares mais conhecidos são o ANSYS, o NASTRAN, o SAP, entre outros. Além disso, é possível se utilizar ferramentas matemáticas como o MATLAB, C++, Fortran para resolver PVC através de MEF.

2 NORMAS E RECOMENDAÇÕES DE PROJETO

O dimensionamento e a previsão do comportamento de uma estrutura sujeita a um carregamento predominantemente estático é uma tarefa de realização corriqueira aos engenheiros projetistas. Entretanto, quando se tratam de estruturas sujeitas à carregamentos de natureza dinâmica, tal tarefa se torna um pouco mais complexa. Prever deslocamentos em tais estruturas, por exemplo, não se resume apenas a um problema de análise estrutural em função dos carregamentos externos e da matriz de rigidez do sistema, com suas respectivas condições de contorno. Muito além disso, exige a aplicação dos conceitos de análise dinâmica, alguns destes apresentados ao longo do Capítulo 1.

Em estruturas projetadas para suportar equipamentos, como em plantas industriais, por exemplo, a resposta estrutural dinâmica deve levar em conta as condições operacionais de tais máquinas. Vibrações excessivas podem reduzir o desempenho de equipamentos, ou até mesmo os levar à condição de falha, gerando grandes prejuízos. Por exemplo, se uma estrutura que suporta um conjunto moto-bomba para transporte em oleodutos apresenta uma resposta inadequada e leva o conjunto à falha, o custo por hora do oleoduto parado para a substituição/manutenção do equipamento pode chegar a valores muito altos. Além disso, a falha de um conjunto estrutura-equipamento pode ocasionar acidentes de trabalho levando, em alguns casos, pessoas ao óbito.

Com o objetivo de facilitar ao projetista a tarefa do dimensionamento, existem algumas normas de projeto que dão as diretrizes para um projeto seguro. Dessa forma, o presente capítulo apresenta normas relativas à verificação de estruturas e equipamentos, bem como para a verificação de segurança e conforto humano.

2.1 Normas para verificação de estruturas.

A natureza do carregamento dinâmico imposto à estrutura, a frequência de operação do equipamento, as amplitudes das forças dinâmicas, entre outros, são alguns dos fatores que influenciam na resposta da estrutura. Além disso, é de suma importância a verificação de questões relativas à fadiga estrutural quando se trata de vibrações transmitidas às estruturas.

No que tange à verificação de estruturas, no Brasil não existe uma norma específica da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) para o projeto de fundações para máquinas rotativas. Entretanto, a referência nacional utilizada para tal fim é a Norma Petrobrás N-1848. Além disso, existem algumas Normas internacionais sobre tais assuntos, como a ACI-351 e a DIN 4024 partes 1 e 2. A seguir é possível verificar na Tabela 1 a comparação dos escopos de cada uma dessas normas.

Tabela 1 – Escopo das normas N-1848, ACI-351 e DIN 4024-1/2. [1]

Norma	Escopo
N-1848	<ul style="list-style-type: none"> – Determina os procedimentos a serem observados no projeto de fundações de máquinas estacionárias; – Aplica-se aos projetos de fundações de máquinas rotativas e alternativas, sujeitas a cargas vibratórias.
ACI-351	<p>Limitado a engenharia, construção, reparo e modernização de fundações de equipamentos dinâmicos. Para o propósito da norma equipamentos dinâmicos incluem os seguintes:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. máquinas rotativas; 2. máquinas alternativas; 3. máquinas de impacto ou impulsivas.
DIN 4024 Parte 1	<p>Especifica requisitos para estruturas de concreto armado ou aço que suportem sistemas mecânicos (fundações de máquinas). Tais sistemas mecânicos são entendidos principalmente como maquinários com elementos rotativos, as fundações dos quais são capazes de gerar vibrações de flexão no mínimo em um plano. Para o propósito desta norma, distinção é feita entre os seguintes tipos de fundações de máquinas:</p>

(Tabela 1– Continuação)

Norma	Escopo
DIN 4024 Parte 1	<p>a) fundações tipo mesa; b) fundações mola; c) fundações radier; d) fundações plataforma.</p> <p>Os requisitos especificados têm como objetivo prevenir que as cargas dinâmicas e estáticas transmitam vibrações inadmissíveis para o meio ambiente ou que causem danos ao maquinário e sua fundação. A norma estabelece critérios para determinar o comportamento da vibração, lidar com os efeitos das ações de projeto e cobre os princípios da construção baseados na experiência atual com fundações de máquinas.</p>
DIN 4024 Parte 2	<p>Especifica blocos e caixas de fundações de máquinas rígidos feitos de concreto armado ou aço que têm por objetivo servir de apoio e proporcionar ancoragem para o maquinário sujeito a vibrações periódicas. Devido à rigidez à flexão e torção tais fundações são assumidas como rígidas. Tal maquinário inclui:</p> <p>a) aqueles com massas rotativas (geradores, compressores, ventiladores, transformadores, bombas, impressoras rotativas, máquinas ferramentas e seus acionadores, motores elétricos e turbinas a gás e vapor); b) aqueles com massas oscilantes (como compressores de pistão e motores diesel); c) trituradores e moinhos.</p> <p>Nota: nos casos de trituradores e moinhos as vibrações transitórias podem predominar sobre as vibrações periódicas, que requerem consideração especial.</p> <p>Essa norma também se aplica a máquinas que são sensíveis a vibrações de fontes externas (fresadoras, tornos e outras máquinas ferramentas).</p> <p>Esta norma não se aplica a estruturas flexíveis cobertas na DIN 4024 parte1, fundações para martelos de impacto ou máquinas sujeitas a cargas aplicadas repentinamente ou quadros estruturais para grupos geradores diesel ou maquinário similar.</p> <p>Os requisitos especificados têm como objetivo prevenir que as cargas dinâmicas e estáticas transmitam vibrações inadmissíveis para o meio ambiente ou que causem danos ao maquinário e sua fundação.</p> <p>A norma estabelece critérios para determinar o comportamento de vibração, lidar com os efeitos das ações de projeto e cobre os princípios da construção baseados na experiência atual com fundações de máquinas.</p>

2.1.1 Norma Petrobrás N-1848 [24]

A Norma Petrobrás N-1848 apresenta as recomendações gerais a seguir para:

a) Fundações superficiais:

- A base deve ser ajustada para que o centroide da área de contato com o solo e o centro de gravidade do conjunto fundação + máquina estejam na mesma vertical. A distância em planta entre os 2 pontos, projetada segundo uma das dimensões (em planta) da base, deve ser, no máximo, igual a 5 % desta dimensão.

- A base deve ter uma espessura mínima de 0,6 m, não deve ser menor que 1/5 da menor dimensão e 1/10 da maior dimensão da base.

- Deve-se adotar uma razão 'massa da fundação / massa da maquinaria' maior que 3 para máquinas rotativas, e de 5 a 10 para máquinas alternativas.

- Deve-se manter um espaço ao redor da máquina de no mínimo 0,30 m para manutenção e outras atividades.

- A dimensão da base na direção de rotação deve ser no mínimo 1,5 vezes maior que a distância vertical entre a linha de centro da máquina e a base.

- Para fundações vizinhas de mesma característica, a cota de assentamento da fundação vibrante deve estar afastada e abaixo da não vibrante obedecendo, no mínimo, à relação de 1:3 (Vertical: Horizontal).

b) Fundações profundas:

- Recomenda-se a seguinte razão $s/d > 5$, sendo s é o espaçamento entre estacas (eixo a eixo) e d o diâmetro da estaca.

- Para máquina rotativa, o bloco de coroamento deve ter uma massa de cerca de 1,5 vezes a 2,5 vezes a massa da máquina. Para máquinas alternativas, esta relação deve ser de 2,5 vezes a 4 vezes.

- Deve-se garantir uma boa ancoragem entre as estacas e o bloco de coroamento. Como requisito mínimo, deve-se adotar 60 cm de penetração para a armadura da estaca no bloco e 30 cm de embutimento para estacas metálicas.

- A base deve ser ajustada para que o centroide da área de contato com o solo e o centro de gravidade do conjunto fundação + máquina estejam na mesma vertical. A distância em planta entre os dois pontos, projetada segundo uma das dimensões (em planta) da base, deve ser, no máximo, igual a 5 % desta dimensão.

c) Fundações para máquinas elevadas (pórticos):

- A espessura da laje de fundação não deve ser menor que $0,11 \times L^{4/3}$, onde L (em metros) é a média de dois vãos adjacentes entre colunas.

- A carga estática nas colunas deve ser, no máximo, igual a 1/6 da sua máxima carga admissível e a tensão média de compressão deve ser aproximadamente a mesma para todas as colunas.

- O espaçamento máximo entre as colunas deve ser de 3,5 m.

- A altura das vigas deve ser maior que 1/5 do vão livre. A flecha devida ao carregamento estático não deve exceder 0,5 mm.

- A rigidez à flexão das vigas deve ser no mínimo, duas vezes superior à das colunas.

- Para máquinas rotativas, a massa total da estrutura deve ser, no mínimo, igual a 3 vezes a massa suportada pela máquina. Esta relação deve ser de 5 para máquinas alternativas.

- A massa da laje do topo não deve ser menor que a da máquina.

- O centroide das colunas deve coincidir com o centro de gravidade (em planta) do equipamento mais a metade superior da estrutura. A distância em planta entre os 2 pontos, projetada segundo uma das dimensões (em planta) da laje da fundação deve ser, no máximo, igual a 5 % desta dimensão.

- A flecha horizontal das colunas, devida aos carregamentos dinâmicos, não deve ultrapassar 0,5 mm em qualquer caso.

- Deve ser feita a verificação das colunas e vigas do pórtico para evitar a possibilidade de ressonância isolada dos membros constitutivos da estrutura.

- Deve ser feita a verificação das colunas e vigas do pórtico para evitar a possibilidade de ressonância isolada dos membros constitutivos da estrutura.

2.1.2 Norma Americana ACI-351 [25]

Os valores para a razão entre a frequência de operação e a frequência natural da fundação não são estipulados pela Norma ACI-351. Entretanto, tal norma cita que diversas companhias exigem que esses valores estejam defasados de 20% a 33%.

Se tais exigências são atendidas, então não são necessárias mais avaliações dinâmicas.

A seguir apresentam-se as recomendações gerais da Norma ACI-351 para os casos de fundações superficiais, profundas e aporticadas (máquinas elevadas):

a) Fundações superficiais:

- A base deve ser ajustada para que o centroide da área de contato com o solo e o centro de gravidade do conjunto fundação + máquina estejam na mesma vertical. A distância em planta entre os 2 pontos, projetada segundo uma das dimensões (em planta) da base, deve ser, no máximo, igual a 5 % desta dimensão.

- Em qualquer caso, a fundação é dimensionada para que a pressão de suporte da fundação não exceda a capacidade de suporte do solo.

- A base deve ter uma espessura mínima de 0,6 m, não deve ser menor que 1/5 da menor dimensão e 1/10 da maior dimensão da base.

- Deve-se adotar uma razão 'massa da fundação / massa da maquinaria' maior que 3 para máquinas rotativas, e maior que 5 para máquinas alternativas.

- Deve-se manter espaço tal ao redor da máquina que proporcione área suficiente para manutenção.

- A dimensão da base na direção de rotação deve ser no mínimo 1,5 vezes maior que a distância vertical entre a linha de centro da máquina e a base.

- Para fundações vizinhas de mesma característica, a cota de assentamento da fundação vibrante deve estar afastada e abaixo da não vibrante obedecendo, no mínimo, à relação de 1:3 (Vertical: Horizontal). O projetista pode necessitar prover isolamento ou separação da fundação da máquina das fundações ou radier de edifícios. Separações na direção vertical também podem ser apropriadas. Normalmente fundações carregadas dinamicamente não são colocadas sobre fundações de edifícios ou em locais que os efeitos dinâmicos possam transferir para as fundações de edifícios.

b) Fundações profundas:

- Deve-se garantir uma boa ancoragem entre as estacas e o bloco de coroamento. Como requisito mínimo, deve-se adotar 60 cm de penetração para a armadura da estaca no bloco e 30 cm de embutimento para estacas metálicas.

- A base deve ser ajustada para que o centroide da área de contato com o solo e o centro de gravidade do conjunto fundação + máquina estejam na mesma vertical. A distância em planta entre os dois pontos, projetada segundo uma das dimensões (em planta) da base, deve ser, no máximo, igual a 5 % desta dimensão.

c) Fundações para máquinas elevadas (pórticos):

- O centroide das colunas deve coincidir com o centro de gravidade (em planta) do equipamento mais a metade superior da estrutura. A distância em planta entre os 2 pontos, projetada segundo uma das dimensões (em planta) da laje da fundação deve ser, no máximo, igual a 5 % desta dimensão.

- Deve ser feita a verificação das colunas e vigas do pórtico para evitar a possibilidade de ressonância isolada dos membros constitutivos da estrutura.

2.1.3 Norma Alemã DIN 4024-1/2 [26,27]

As recomendações gerais estabelecidas pela Norma DIN-4024 são:

- O número de frequências naturais e modos a serem estabelecidos devem ser selecionados de modo que a frequência natural mais alta calculada seja, no mínimo, 10% maior que a frequência de serviço. Este requisito pode ser dispensado para fundações de equipamentos de elevada frequência ($f > 75$ Hz); entretanto, dependendo do modelo analisado, o número de frequências naturais n a ser calculado, deve atender o seguinte:

a) $n = 10$ para modelos bidimensionais onde são considerados apenas os deslocamentos verticais e que vibrações simétricas e antissimétricas não são desacopladas;

b) $n = 6$ para modelos bidimensionais simétricos onde são considerados apenas os deslocamentos verticais e que vibrações simétricas e antissimétricas são desacopladas;

- A primeira frequência natural da fundação deve ser inferior a 0,80 ou maior que 1,25 vezes a frequência de operação da máquina.

- As frequências naturais mais elevadas da fundação devem defasar 10% a frequência de operação da máquina, isto é:

a) $f_n < 0,9f_m$

b) $f_{n+1} > 1,1f_m$

- Deve ser utilizado concreto com classe de resistência mínima B25 conforme especificado na norma DIN 1045, equivalente à classe C25 da ABNT NBR 8953:2015.

- A análise dinâmica pode ser dispensada caso a massa dos elementos rotativos seja menor que um centésimo da massa do sistema máquina + fundação.

- A base deve ser separada de outras edificações através de junta, cuja espessura deve ser de cerca de um décimo de seu comprimento.

- A fim de minimizar a interação da fundação com outros sistemas envolvidos, quaisquer tubulações ou outras conexões devem ser do tipo flexível.

- Durante a concretagem, devem ser evitadas juntas verticais.

2.2 Normas para verificação de equipamentos

De acordo com Rodrigues [3], vibrações ocasionadas por equipamentos mecânicos devem ser adequadamente controladas e as recomendações de normas existentes podem vir a servir como indicador das condições de operação de um equipamento. Buscando o funcionamento adequado dos equipamentos mecânicos, a norma ISO 2372 determina limites de vibração associados à potência da máquina e ao tipo de fundação. São medidas as vibrações em pontos distintos das superfícies dos equipamentos que funcionam com frequência de excitação na faixa de 10 a 1000 Hz. A Tabela 2 apresenta as faixas de classificação:

Tabela 2 – Critérios de severidade das vibrações de máquinas [28]

Faixas de severidade de vibração	Classe das máquinas			
	Classe I	Classe II	Classe III	Classe IV
Velocidades em mm/s				
0,28	Bom	Bom	Bom	Bom
0,45				
0,71				
1,12	Permissível	Permissível	Permissível	Permissível
1,8				
2,8	Tolerável	Tolerável	Tolerável	Permissível
4,5				
7,1	Inaceitável			

(Tabela 2 - Continuação)

Faixas de severidade de vibração	Classe das máquinas			
Velocidades em mm/s	Classe I	Classe II	Classe III	Classe IV
11,2	Inaceitável	Inaceitável	Tolerável	Tolerável
18			Tolerável	
28			Inaceitável	Inaceitável
45			Inaceitável	

Tal que:

- Classe I – equipamentos mecânicos de pequeno porte, de até 15 kW;
- Classe II – equipamentos mecânicos de médio porte, de 15 kW a 75 kW, quando rigidamente montadas, ou acima de 300 kW com fundações especiais;
- Classe III – equipamentos mecânicos de grande porte, apoiados sobre fundação rígida e pesada, cuja frequência natural seja inferior à de excitação;
- Classe IV – equipamentos mecânicos de grande porte, que operam com velocidade elevada, como as turbo-máquinas.

Além disso, a Tabela 3 apresenta valores máximos de amplitudes de vibrações para vários tipos de equipamentos mecânicos.

Tabela 3 – Amplitude admissível de vibração de acordo com a velocidade da máquina [29]

Tipo de máquina	Amplitude permissível (μm)
Máquina de baixa velocidade (até 500 RPM)	200 a 250
Fundações de martelos	1000 a 1200
Máquinas de alta velocidade:	
a) 3000 RPM	
i. Vibrações verticais	20 a 30
ii. Vibrações horizontais	40 a 50
b) 1500 RPM	
i. Vibrações verticais	40 a 60
ii. Vibrações horizontais	70 a 90

2.3 Normas para verificação de segurança e conforto humano

Não há como questionar a complexidade do corpo humano, tanto física, quanto biologicamente. De forma intuitiva, é possível compreender o corpo humano como um sistema que apresenta inércia e propriedades elásticas, representado por um modelo mecânico, composto por massas, elementos de rigidez (como molas) e de amortecimento. Dessa forma, como qualquer sistema mecânico representado dessa forma, cada parte do corpo humano possuirá um valor de frequência natural associado às suas propriedades dinâmicas.

A partir da Fig. 3, é possível verificar um modelo mecânico representativo do corpo humano, com valores de frequências naturais associadas à cada parte do corpo indicada.

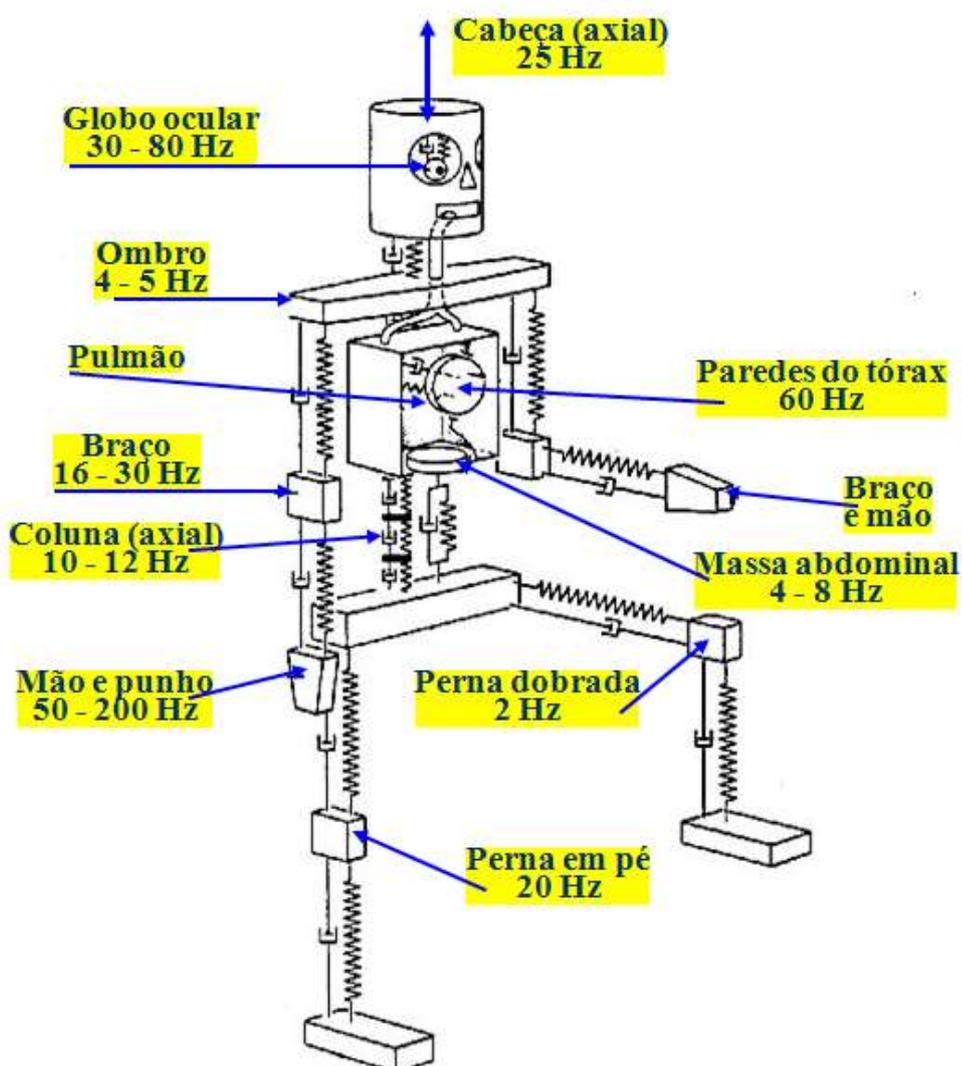


Figura 3 – Modelo mecânico do corpo humano. [30]

Caso estejam sujeitas a excitações em frequências iguais, qualquer uma das partes do corpo poderá encontrar-se na situação de ressonância, de forma que as vibrações serão dinamicamente amplificadas, provocando maiores deslocamentos, velocidades e acelerações. Alguns sintomas de desconforto são apresentados na Tabela 4, conforme o corpo humano é submetido a vibrações em valores característicos.

Tabela 4 – Sintomas relacionados com a frequência de vibração [30]

Sintoma	Frequência
Sensação geral de desconforto	4 – 9 Hz
Sintomas na cabeça	13 – 20 Hz
Dor no maxilar	6 – 8 Hz
Influência na fala	13 – 20 Hz
Dor na garganta	12 – 19 Hz
Dor no peito	5 – 7 Hz
Dor abdominal	4 – 10 Hz
Desejo de urinar	10 – 18 Hz
Aumento do tônus muscular	13 – 20 Hz
Influência nos movimentos respiratórios	4 – 8 Hz
Contrações musculares	4 – 9 Hz

Em geral, classificam-se as vibrações que podem vir a ser transmitidas ao corpo humano em dois diferentes tipos, com relação à forma de transmissão:

- Vibrações de corpo inteiro, que ocorrem quando o usuário exposto está suportado pela superfície vibratória, seja em pé, sentado ou deitado [31]
- Vibrações de extremidade, que está ocorre em situações nas quais a pessoa está manipulando algum tipo de equipamento vibratório [32].

2.3.1 Norma ISO 2631-1 [31]

A primeira parte da Norma ISO-2631 estipula métodos para a medição de vibração de corpo inteiro, apresentando quais os fatores principais atuantes na determinação do grau de aceitação relativo à exposição da vibração. Além disso, são apresentadas informações e orientações sobre os possíveis efeitos das vibrações em

relação à conforto humano, saúde, limite de percepção na faixa de 0,5 à 80 Hz e enjoos para frequências entre 0,1 e 0,5 Hz

Algumas opiniões sobre a relação entre o conforto humano e o grau de severidade da vibração são apresentados a partir do anexo C da referida norma. O grau de severidade da vibração é algo subjetivo. Nessa norma é apresentado um método conveniente e uniforme para sua determinação em veículos e edificações, mas sem o estabelecimento de limites específicos para o grau de aceitação.

A influência das vibrações nas pessoas pode se manifestar de diversas formas, segundo a ISO 2631-1. Enjoos, desconfortos, problemas de saúde, redução da capacidade de concentração e até mesmo da eficiência no trabalho, são algumas das consequências da exposição de pessoas a vibrações de frequências muito baixas. Há de se ressaltar que a sensação de desconforto de um indivíduo devido a vibrações em edificações está associada às frequências de excitação, às direções em que as vibrações atingem o indivíduo ou da sua característica vibratória ao longo do tempo (intermitente, contínua ou transitória). Além disso, a tolerância e a percepção à vibração são diretamente influenciadas pelo tipo de atividade, local, horário e expectativa da sensação de conforto.

2.3.2 Norma ISO 2631-2 [33]

A segunda parte da Norma ISO 2631 indica como utilizar a sua primeira parte (ISO 2631-1) no que tange à resposta humana, quando sujeita à vibração estrutural, incluindo curvas ponderadas relativas à frequência, no mesmo nível de perturbação para seres humanos, juntamente com técnicas de medição a serem utilizadas.

Além disso, os valores-limite de exposição a vibrações transmitidas ao corpo humano são definidos nesta segunda parte. Tais valores baseiam-se em vibrações periódicas e não periódicas, que ocorrem em um intervalo de frequências de excitação de 1 a 80 Hz. Ainda, é feita uma recomendação para que as medições das vibrações devam ser realizadas nas regiões onde existam o contato do indivíduo com a estrutura, em um único ponto, ou em vários locais, onde existam as maiores intensidades de vibração.

A posição em que o indivíduo se encontra é um dos fatores de maior relevância para a sua percepção às vibrações. Segundo a ISO 2631-2, a direção em que as vibrações se propagam no corpo humano, relacionam-se diretamente com o grau de percepção destas vibrações. Dessa forma, são estabelecidas três direções principais, relativas ao corpo humano, de forma que:

- Eixo Z – Longitudinal – Direção dos pés à cabeça;
- Eixo X – Frontal – Direção das costas ao peito; e
- Eixo Y – Lateral – Direção do lado direito ao lado esquerdo do corpo

A Fig. 4 mostra essas três direções de propagação.

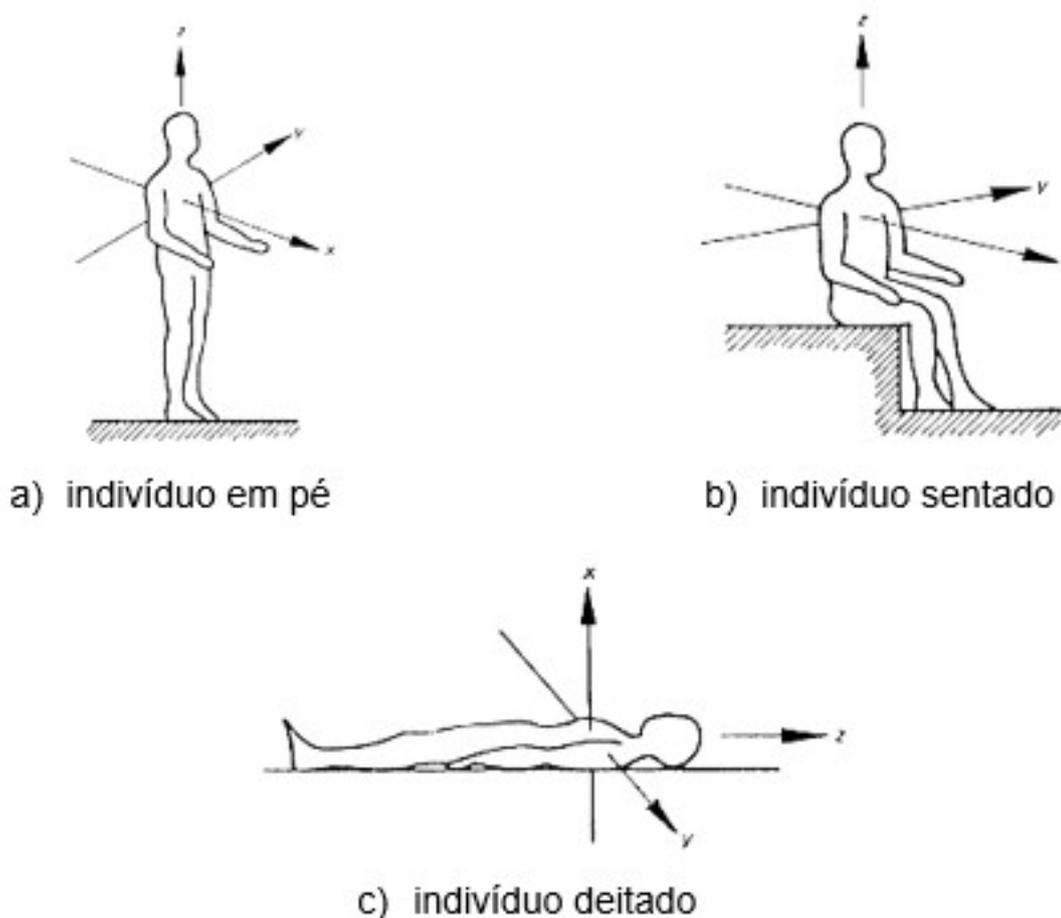


Figura 4 – Direções do sistema de coordenadas para vibrações mecânicas em seres humanos. [33]

Como unidades indicadoras para o nível máximo de vibração que atua no corpo humano, a ISO 2631-2 define valores em termos da aceleração máxima, medida em m/s^2 , dada para um valor estabelecido de frequência de excitação da vibração.

Em alguns ambientes específicos, no aspecto relativo ao conforto humano, o efeito das vibrações pode ser avaliado em termos do valor quadrático médio da aceleração ou da velocidade ponderada, de forma que sejam realizadas as medições em um período de tempo representativo, no que tange ao comportamento da fonte vibratória. Tal ponderação é realizada em função da frequência, conforme as curvas estabelecidas de acordo com o eixo no qual a vibração se propagará ao longo do corpo (X, Y ou Z) e nas posições de pé, sentado ou deitado.

Figuras 5, 6 e 7 a seguir apresentam as curvas das acelerações em RMS, em m/s^2 .

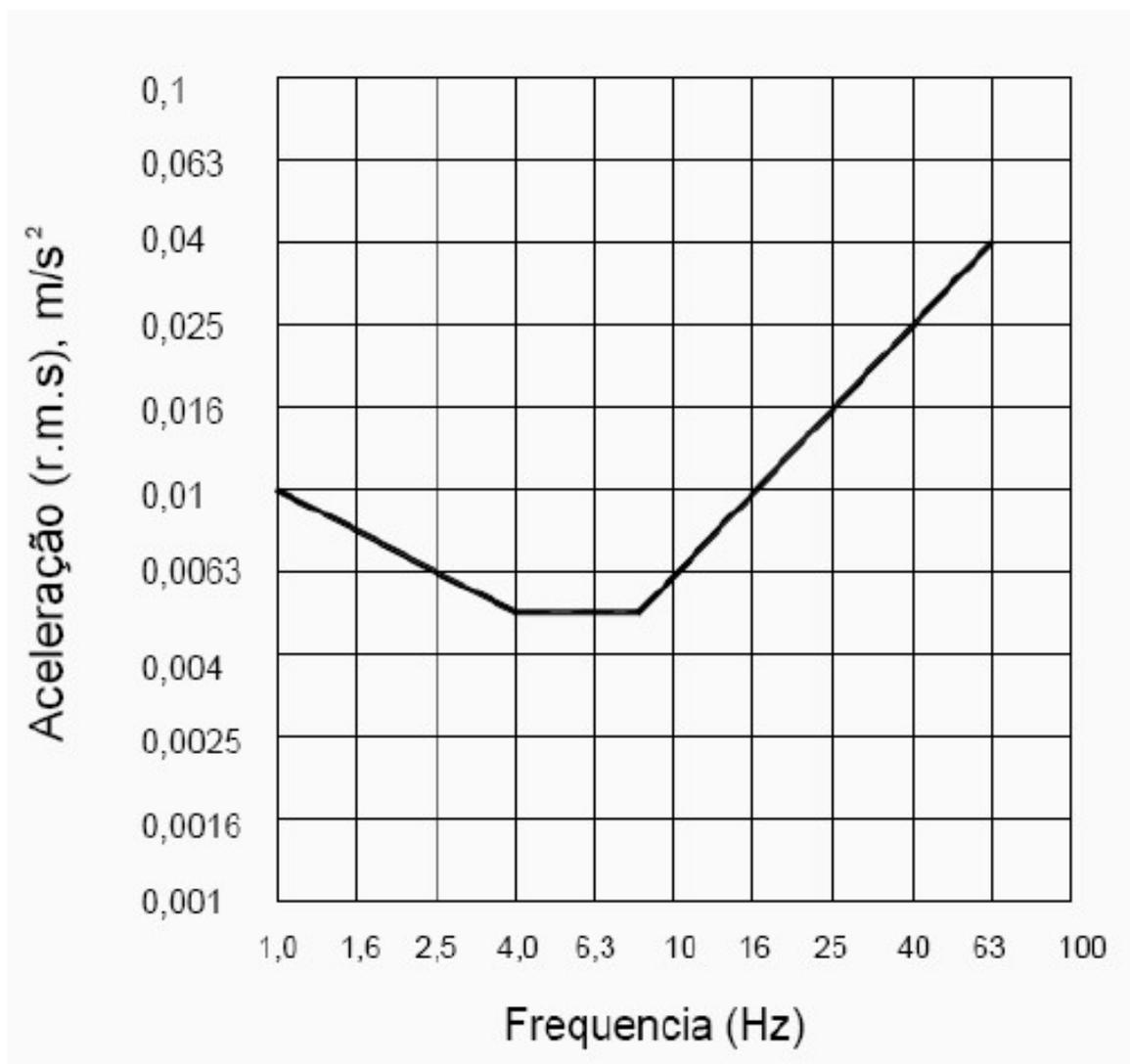


Figura 5 – Curva base de aceleração no eixo z. [33]

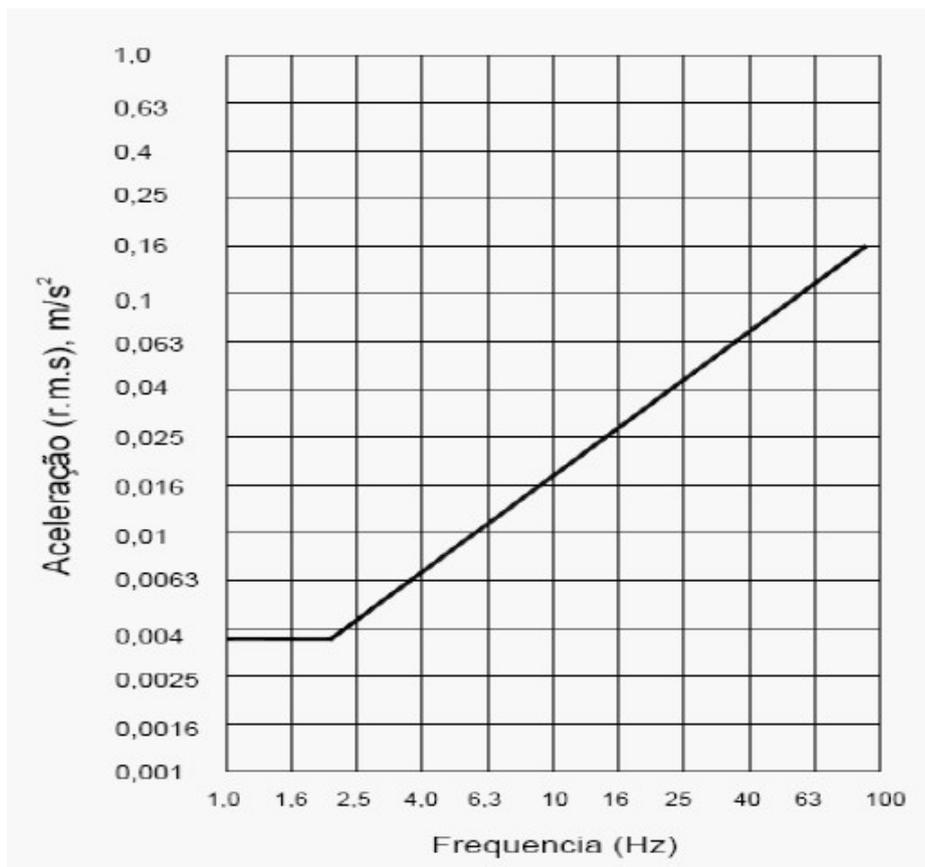


Figura 6 – Curva base de aceleração nos eixos x e y. [33]

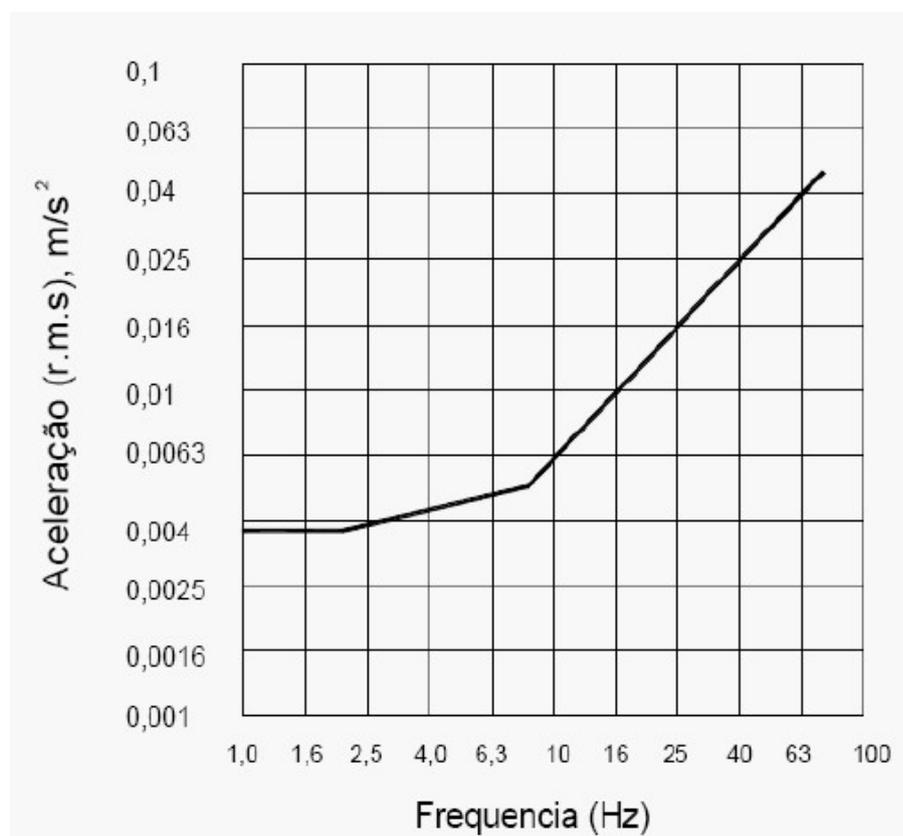


Figura 7 – Curva base de acelerações em direções combinadas (eixos x, y e z). [33]

Os valores aceitáveis de vibrações são estabelecidos pela ISO 2631-2, em função do tipo de vibração, período diurno ou noturno e também do tipo de ocupação. Tais limites de aceitação são determinados em termos de tempo de exposição, grandeza da aceleração, frequência de vibração e da direção da vibração atuante em relação ao corpo humano (longitudinal, frontal ou lateral). Alguns coeficientes de majoração das curvas apresentadas nas Fig. 5, 6 e 7, são apresentados pela Tabela 5, conforme os fatores anteriormente descritos.

Tabela 5 – Coeficientes de majoração. [33]

Tipo de ocupação	Período do dia	Vibrações contínuas ou intermitentes	Vibrações transientes
Áreas de trabalho críticas	Dia e noite	1	1
Residências	Dia	2 a 4	30 a 90
	Noite	1,4	1,4 a 20
Escritórios	Dia e noite	4	60 a 128
Salas de conferência	Dia e noite	8	90 a 128

Há de se salientar que existe uma constante discussão em torno de tais valores-limite de vibração para o homem, tendo em vista que dependem de diversas variáveis e que a sensibilidade da exposição a vibrações é algo subjetivo, podendo variar de pessoa para pessoa e de acordo com o ambiente no qual ocorre a vibração.

2.3.3 Norma Alemã DIN 4150-2 [34]

A segunda parte da Norma Alemã DIN 4150 estabelece alguns critérios relativos a vibrações que incidem sobre pessoas, em edifícios residenciais, para uma faixa de frequência de excitação entre 1 a 80 Hz. Os valores de deslocamentos resultantes de vibrações que são medidos são considerados para a determinação do fator de intensidade de percepção da vibração, que pode ser obtido através da Eq. (61).

$$K_b = d \frac{0,8f^2}{\sqrt{1 + 0,032f^2}} \quad (61)$$

Onde:

K_b = Fator de intensidade de percepção da vibração

d = Deslocamento, em milímetros, referente ao primeiro harmônico;

f = Frequência excitante, em Hertz, referente ao primeiro harmônico.

Na Tabela 6, alguns valores aceitáveis para o fator de intensidade de percepção de vibração (K_b) são apresentados, em função do tipo de edificação, do período do dia no qual ocorre a exposição à vibração e das características do tipo de vibração.

Tabela 6 – Valores aceitáveis de K_b [34]

Tipo da edificação	Período do dia	Valores aceitáveis de K_b (mm/s)	
		Vibrações frequentes	Vibrações não-frequentes
Residência rural	Diurno	0,20	4,00
	Noturno	0,15	0,15
Residência em cidade pequena	Diurno	0,30	8,00
	Noturno	0,20	0,20
Pequenos negócios	Diurno	0,40	12,00
	Noturno	0,30	0,30
Industrial	Diurno	0,60	12,00
	Noturno	0,40	0,40

2.3.4 Norma Regulamentadora NR-15 [35]

A Norma regulamentadora NR-15 é uma norma brasileira que apresenta, em seu anexo nº 8, no que tange à exposição de pessoas a vibrações causadas por equipamentos em ambientes de trabalho, as recomendações a serem seguidas no caso de atividades insalubres. Ainda assim, tal norma define a exposição a vibrações como um risco físico ocupacional, que pode colocar em risco a saúde dos trabalhadores, levando-se em conta as recomendações e determinações já abordadas pelas normas ISO 2631-1 e ISO 5394-1

2.3.5 Diretiva Europeia de 2002[36]

A Diretiva Europeia de 2002 vêm sendo adotada por diversas organizações internacionais como a referência para a determinação dos níveis de ação e limites para exposição a vibrações em mãos e braços, bem como vibrações de corpo inteiro.

Além disso, tal Diretiva fornece meios para orientar o empregador a desenvolver ações de prevenção, além de implementar programas com o objetivo de reduzir os níveis de vibração, definindo os valores limites de exposição diária que não devem ser excedidos.

A Tabela 7 apresenta os valores estabelecidos pela Diretiva Europeia de 2002 para os valores limites de exposição e os níveis de ação.

Tabela 7 – Limites de exposição e níveis de ação. [36]

Parâmetro	Nível de ação	Limite de exposição
Vibração em mãos e braços	2,5 m/s ² A(8)	5,0 m/s ² A(8)
Vibração de corpo inteiro	0,5 m/s ² A(8) ou 9,1 VDV	1,15 m/s ² A(8) ou 21 VDV

Onde:

A(8) – aceleração para exposição de oito horas, expressa em r.m.s.

VDV – valor dose de vibração

3 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

3.1 Introdução

O conceito de Otimização é um tanto quanto conhecido em nossas vidas. Querer melhorar o desempenho em atividades físicas ou até mesmo melhorar o lucro de uma empresa implica em um desejo de ser ou fazer o melhor, de alguma forma. Na área de projetos de engenharia, faz necessário o desenvolvimento de técnicas que proverão os resultados desejados de forma rápida e econômica. A Otimização é uma dessas técnicas à disposição dos engenheiros e os ajuda a encontrar racionalmente a melhor configuração de um determinado sistema em fase de projeto. [37]

Otimização é o processo de busca do melhor resultado para um dado modelo, a partir de técnicas para selecionar as melhores alternativas, valores ou resultados para se atingir os objetivos desejados. Do ponto de vista da matemática, o termo otimização ou programação matemática está relacionado ao estudo de problemas cujo propósito é maximizar ou minimizar funções a partir da escolha sistemática dos valores de variáveis de projeto dentro de um conjunto viável. [38]

3.2 Contexto histórico

Desenvolvida em seus primórdios a partir das contribuições de Newton e Leibnitz ao cálculo diferencial e integral, a programação matemática teve contribuições de renomados matemáticos como Bernoulli, Euler, Lagrange em problemas de cálculo das variações, que trabalham com a minimização de funcionais, além de Cauchy com o desenvolvimento do método “Steepest Descent” para resolução de problemas de otimização sem restrições. Apesar dessas grandes contribuições, pouco avanço foi obtido até meados do século XX, quando começaram a surgir melhores recursos computacionais, tais como maiores velocidades de cálculo e capacidade de armazenamento, permitindo um maior desenvolvimento da pesquisa na área de Otimização [39].

Em termos de otimização estrutural, Maxwell foi o primeiro a aplicar este conceito em 1872. Enquanto os engenheiros da época buscavam desenvolver modelos para análise das tensões mecânicas com maior precisão em estruturas de pontes, Maxwell optou por encarar o problema sob outra perspectiva, desenvolver um projeto de ponte que utilizasse a menor quantidade possível de material, sem que houvessem falhas na estrutura devido às cargas impostas. [40]

Michell retomou a idéia de Maxwell em 1904, aplicando o método para o projeto de diversas estruturas na tentativa de reduzir ao máximo o volume de material utilizado. Até 1960 a otimização estrutural não demonstrou grandes evoluções, sendo estudados apenas problemas acadêmicos sem aplicação prática. Com o surgimento de recursos computacionais e do método dos elementos finitos, na década de 60, a indústria aeronáutica teve um papel importante em desenvolver estudos de otimização estrutural. Em 1970, diversos algoritmos para otimização de problemas não lineares foram sendo aplicados. É válido ressaltar que a teoria de grande parte desses algoritmos já havia sido desenvolvida no século XIX, entretanto, suas implementações só foram permitidas a partir dos recursos computacionais advindos da época. [41]

Os primeiros softwares comerciais de otimização estrutural surgiram na década de 1980, incorporado com o método dos elementos finitos e, da década de 90 até os dias de hoje, os métodos de otimização encontram-se disponíveis em inúmeros programas comerciais, sendo utilizados não somente na engenharia mecânica, como também em diversas outras áreas da engenharia. [42]

3.3 Definições básicas

Do cálculo diferencial e integral, sabe-se que para uma função de uma variável, contínua e que possua as derivadas de primeira ordem, podemos encontrar os pontos de máximos e mínimos locais pela condição de que as derivadas de primeira ordem sejam nulas nestes pontos.

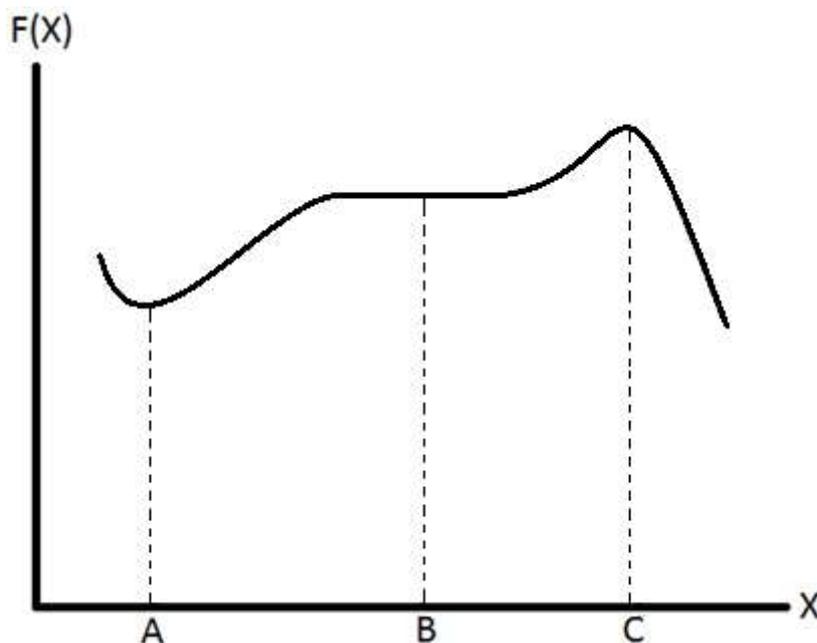


Figura 8 – Pontos de mínimos e máximos locais para uma função contínua de uma variável.

Expandindo este conceito para funções de várias variáveis, um ponto do domínio deste tipo de funções que seja de máximo ou mínimo local, deve satisfazer a condição que o gradiente seja nulo, assim, teremos que:

Seja $F(\mathbf{X})$ uma função contínua de n variáveis e o vetor de variáveis de projeto \mathbf{X} , pode-se dizer que se a expressão da Eq. (62) for verdadeira.

$$\nabla F(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial X_1} \\ \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial X_N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (62)$$

Onde o vetor \mathbf{X} é dado pela Eq. (63).

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \quad (63)$$

Então, o vetor \mathbf{X}^* é um ponto de máximo ou mínimo local para a função $F(\mathbf{X})$.

Entretanto, esse resultado não nos fornece informações se o ponto em questão trata-se de um ponto de mínimo ou de máximo para a função. A partir da Fig. Figura 8, vemos que o ponto A é um ponto de mínimo, o ponto C representa um ponto de máximo e o ponto B não é um ponto de mínimo nem de um ponto de máximo local.

Lembrando ainda do cálculo diferencial, para uma função de uma variável, podemos afirmar se um ponto é de mínimo a partir da análise da sua derivada de segunda ordem, tal que para valores positivos desta derivada neste ponto o ponto em questão é, de fato, um ponto de mínimo. Em n variáveis, para podermos afirmar se o ponto que satisfaz a condição do gradiente nulo da função é um ponto de mínimo, se faz necessária a análise da matriz Hessiana da função. A matriz Hessiana é definida pela Eq. (64).

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial^2 X_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1 \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial^2 X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_2 \partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial X_n \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{X})}{\partial^2 X_n} \end{bmatrix} \quad (64)$$

No caso que matriz Hessiana seja positiva-definida para o ponto, pode-se, então, concluir que este ponto se trata de um ponto de mínimo local. [37]

Em um problema de otimização, a função a ser minimizada é chamada de Função Objetivo e, a formulação geral para qualquer problema de otimização é dada por:

$$\text{Encontrar } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \text{ que minimize } F(\mathbf{X}) \text{ sujeito às restrições } g_j(\mathbf{X}) \text{ e } l_j(\mathbf{X}), \text{ tal que:}$$

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (65)$$

$$l_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (66)$$

Onde m e p são os totais de restrições de desigualdade e de igualdade, respectivamente.

O vetor X é chamado de vetor das variáveis de e as funções $g_j(X)$ e $l_j(X)$ definem as restrições para o problema.

3.3.1 Vetor das variáveis de projeto

No projeto de um sistema mecânico qualquer pode ser definido um conjunto de quantidades que são consideradas variáveis durante o projeto. Outros parâmetros têm valores fixos e são tratados como parâmetros pré-estabelecidos. Como exemplo, ao se projetar o par de engrenagens representado na Fig. Figura 9, podemos definir as quantidades de interesse do projeto como os números de dentes das engrenagens T_1 e T_2 , a largura b , a distância entre centros d , o ângulo de pressão ϕ , o perfil dos dentes e o material das engrenagens.

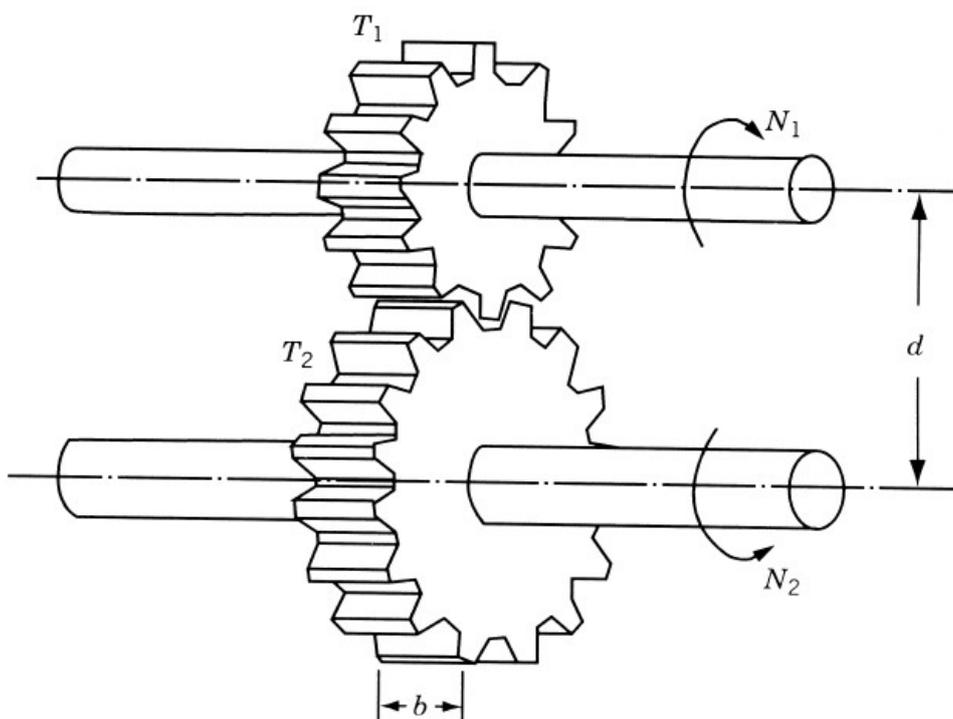


Figura 9 – Exemplo de projeto de par de engrenagens. [39]

Se o material, o perfil dos dentes, o ângulo de pressão ϕ e a distância entre centros d forem fixos, então esses valores serão tratados como parâmetros pré-estabelecidos para o projeto. As outras quantidades serão representadas no Vetor de Projeto como as Variáveis de Projeto, dado pela Eq. (67).

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} b \\ T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (67)$$

Se não existem restrições para a escolha das variáveis de projeto, então qualquer conjunto de três números constituirá um projeto para o par de engrenagens.

3.3.2 Restrições de projeto

Em grande parte dos diversos problemas de engenharia, não é possível encontrar configurações de projeto sem estabelecer alguma limitação aos valores de interesse do problema. No exemplo do projeto do par de engrenagens da Fig. 9 os números de dentes das engrenagens devem ser números inteiros, tem uma limitação máxima e um valor mínimo de dentes para que a fabricação seja factível, a largura b do par não pode ser muito pequena, ou seja, existem uma série de limitações que são impostas pelo problema em questão e que são traduzidas ao problema de otimização por meio de restrições de projeto. Na formulação básica do problema, essas restrições podem ser de igualdade, desigualdade e laterais.

As restrições laterais, por exemplo, podem definir o número máximo e mínimo para os dentes do par de engrenagens. As restrições de igualdade podem definir a relação de velocidades. E as restrições de desigualdade podem estabelecer os valores de tensões admissíveis para o projeto.

3.3.3 Espaço de projeto viável e inviável

Para ilustrar, considera-se um problema de otimização de uma função objetivo hipotética de duas variáveis com restrições apenas de desigualdade $g_j(\mathbf{X}) \leq 0$. Quando o vetor de projeto satisfazer a função $g_j(\mathbf{X}) = 0$, então têm-se uma superfície que separa a região de projeto viável da inviável (Fig. 10), de forma que, quando $g_j(\mathbf{X}) < 0$, tem-se o espaço de projeto viável e, $g_j(\mathbf{X}) > 0$, o espaço inviável [40].

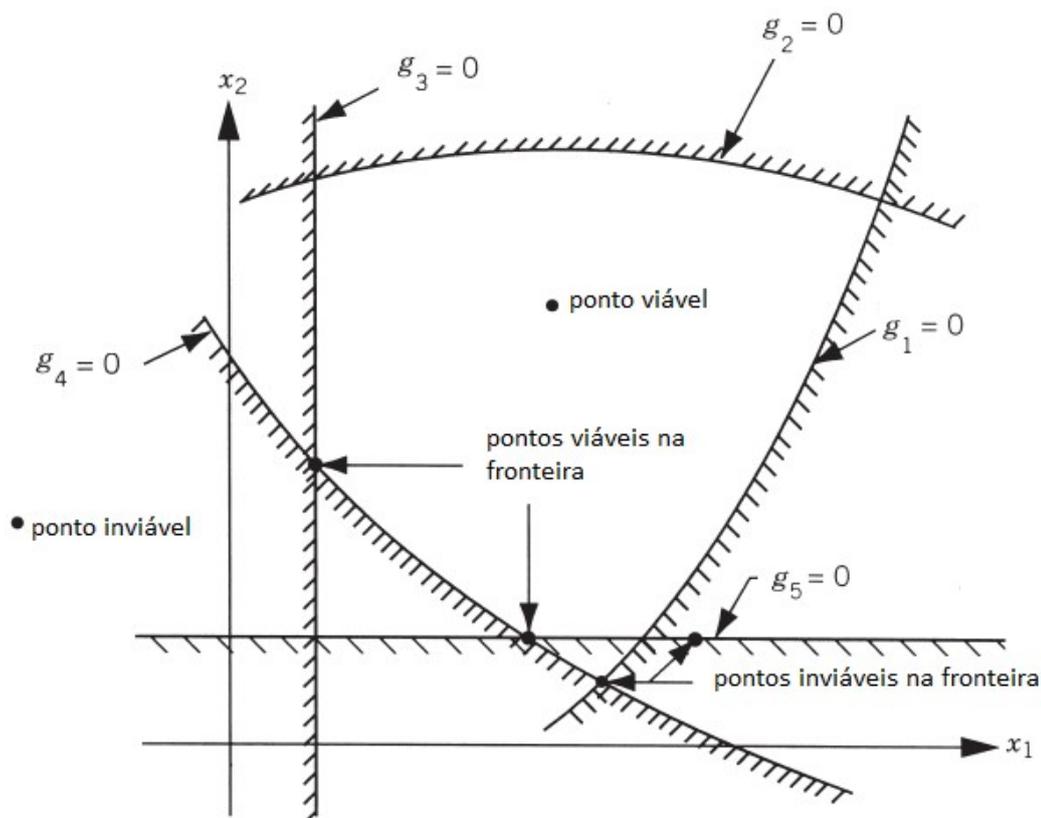


Figura 10 – Espaço viável e inviável de projeto. [39]

3.3.4 Algoritmos de otimização

A programação matemática pode ser dividida em programação linear e programação não-linear. A programação linear é um caso de otimização onde a função objetivo e as restrições são funções lineares. Já a programação não-linear representa o caso quando a função objetivo e/ou ao menos uma das restrições é uma função não-linear.

A programação linear tem aplicações em modelagens para problemas de logística, otimização de custos em grandes empresas, melhorias em processos de cadeias produtivas de manufatura, entre outros. Um dos métodos mais conhecidos para a programação linear é o método Simplex, com grandes aplicações em problemas da engenharia de produção ou engenharia de processos, onde os modelos são essencialmente lineares.

Apesar da grande utilidade dos métodos de programação linear, os problemas de otimização em engenharia, em sua maior parte, são não-lineares. Haja vista a natureza das equações matemáticas que regem os fenômenos de interesse na

engenharia, como problemas de vibrações, resistência dos materiais, mecânica dos fluidos, transmissão de calor, termodinâmica, etc.

Grande esforços foram feitos na busca de técnicas de programação não-linear e, ao longo dos anos, foram desenvolvidos métodos de otimização que se consagraram. Os métodos de *Powell* e *Pattern Search* são exemplos de métodos que avaliam apenas o valor da função objetivo, sem qualquer análise de suas derivadas e, devido a isso, são chamados de métodos de ordem zero. Já os métodos dos *Gradientes Conjugados* e *Steepest Descent* são chamados de métodos de primeira ordem, pois utilizam o gradiente da função objetivo em seus algoritmos. Os métodos Quasi-Newton, que utilizam a segunda derivada da função objetivo, são métodos de segunda ordem, como por exemplo os algoritmos DFP e BFGS. [37,38,39]

Nos últimos anos, alguns métodos de otimização que são conceitualmente diferente dos métodos tradicionais de programação não-linear foram desenvolvidos. Estes são chamados de métodos modernos de otimização ou não-tradicionais. A maioria destes são baseados em certas características e comportamentos de sistemas biológicos, moleculares, neurobiológicos e até mesmo enxame de insetos. Os mais conhecidos são os algoritmos genéticos, recozimento simulado, redes neurais, métodos baseados em colônias de formigas e enxames de abelhas. A maioria desses métodos foi desenvolvida recentemente e estão surgindo como métodos populares para resolução de problemas complexos de otimização em engenharia. Muitos deles são métodos que não necessitam das derivadas das funções, sendo apenas avaliada a função objetivo, sendo classificados como métodos de ordem zero. [39]

3.4 Algoritmo genético

O algoritmo genético, criado por John Holland na década de 60 e desenvolvido principalmente na década de 70, se baseia nos estudos de Charles Darwin. Na teoria evolucionista de Darwin os indivíduos que conseguem uma melhoria genética, tornando-se mais adequados ao ambiente atual que habitam, viverão possivelmente mais, gerando mais descendentes, ou seja, a informação genética será espalhada

para as próximas gerações enquanto as condições do meio indiquem que seus genes são vantajosos neste ambiente. [43]

O algoritmo genético é uma técnica que combina a sobrevivência dos mais aptos com a troca de informações de uma forma estruturada, onde um problema no mundo real é modelado através de um conjunto de indivíduos que são soluções potenciais que melhor se ajustam ao ambiente. De forma análoga à teoria da evolução, os indivíduos são selecionados, se reproduzem e sofrem mutação, obtendo deste modo uma nova geração de indivíduos que também atendem às necessidades do ambiente. Após certo número de gerações espera-se convergir para uma geração de elite que corresponda a uma solução ótima ou quase ótima para o problema. [44]

3.4.1 Conceitos e definições básicas

Embora já tenha sido apresentada um conjunto de definições para a formulação de um problema de otimização, é válido introduzir alguns conceitos relativos ao algoritmo genético.

- **População:** é o conjunto de variáveis de projeto que representa um candidato à solução para o problema de otimização, gerado a cada iteração. Cada vetor de projeto é um indivíduo da população e cada população no algoritmo genético possui um tamanho pré-estabelecido.
- **Geração:** cada iteração no processo de otimização é chamada de geração, nas quais são construídas novas populações.
- **Cromossomo:** é a cadeia de caracteres que representa cada vetor de projeto, ou cada indivíduo da população.
- **Gene:** é a unidade básica do cromossomo. Cada cromossomo possui uma certa quantidade de genes, cada um representando uma variável de projeto.

A ideia básica de abordagem do algoritmo genético se baseia em começar com uma população inicial de indivíduos, gerada aleatoriamente a partir dos valores permitidos para as variáveis de projeto. Cada indivíduo passa por uma análise no processo de otimização no qual irá receber um valor de aptidão. Um subconjunto de indivíduos da população é selecionado aleatoriamente, com uma tendência em

selecionar indivíduos mais adaptados, a partir da função de aptidão. Processos aleatórios são utilizados para gerar uma nova população, utilizando o subconjunto de indivíduos mais adaptados e o tamanho da população continua fixo. Como os indivíduos mais adaptados são usados para gerar a nova população, existe uma maior probabilidade dos indivíduos das populações subseqüentes serem mais adaptados. Esse processo é continuado a cada geração, até um determinado critério de convergência ser atingido [45]

No algoritmo genético, os cromossomos são, geralmente, representados por códigos binários, referentes aos valores do conjunto das variáveis de projeto. Por exemplo, considerando o vetor de projeto a seguir:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Transformando os valores para código binário, temos:

$$|1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0| \ |0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1| \ |0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1| \ |0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0|$$

Onde cada conjunto binário de 5 dígitos, ou de 5 bits, representa um gene ou uma variável de projeto, compondo o cromossomo que representa um indivíduo.

O exemplo acima traz consigo a dúvida de como representar quantidades decimais, já que a codificação binária se adequa melhor aos números inteiros. Para representar um número real x com casas decimais, a partir de um código binário com q dígitos, situado entre os limites x^i e x^s , precisamos recorrer à formulação da Eq. (68).

$$x = x^i + \frac{x^s - x^i}{2^q - 1} \sum_{k=0}^q 2^k b_k \quad \text{Onde } b_k = 0 \text{ ou } 1 \quad (68)$$

O problema de otimização se resume em tentar maximizar uma função chamada de função de aptidão. Para problemas sem restrições, a função de aptidão pode ser a mesma que a função objetivo. Entretanto, para problemas de otimização com restrições, devemos usar uma função de penalidade para que o problema seja

equivalente a um problema de otimização sem restrições. Um problema de minimização pode ser transformado em um problema de maximização antes da aplicação do algoritmo genético. A forma mais comum de fazer essa conversão é dada pela Eq. (69).

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{1 + F(\mathbf{X})} \quad (69)$$

É possível verificar que essa transformação não irá alterar a localização da solução do problema, mas irá converter em um problema de maximização.

Como já foi visto anteriormente, um problema de otimização com restrições é definido a partir das Eq. (65) e (66). Esse problema pode ser transformado em um problema de otimização sem restrições equivalente à Eq. (70).

$$\text{Minimizar } \phi(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^m r_i \langle g_i(\mathbf{X}) \rangle^2 + \sum_{j=1}^p R_j \left(l_j(\mathbf{X}) \right)^2 \quad (70)$$

Os valores r_i e R_j são os parâmetros de penalidade associados às restrições $g_i(\mathbf{X})$ e $l_j(\mathbf{X})$, cujos valores são constantes durante todo o processo. A função $\langle g_i(\mathbf{X}) \rangle$ é definida de acordo com a Eq. (71).

$$\langle g_i(\mathbf{X}) \rangle = \begin{cases} g_i(\mathbf{X}) & \text{se } g_i(\mathbf{X}) > 0 \\ 0 & \text{se } g_i(\mathbf{X}) \leq 0 \end{cases} \quad (71)$$

Em geral, os parâmetros de penalidade associados às restrições tendem a assumir valores constantes e iguais para todas as restrições, conforme a Eq. (72).

$$r_i = r, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad e \quad R_j = R, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (72)$$

Então, para a função de aptidão a ser maximizada para um problema de otimização com restrições, tem-se a Eq. (73).

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{1 + \phi(\mathbf{X})} \quad (73)$$

As funções de penalidade mostram que se um determinado cromossomo viola uma restrição, a penalidade será aplicada proporcionalmente ao quadrado do valor desta função, enquanto que nenhuma penalidade será aplicada caso não haja violação das restrições. Ou seja, os cromossomos que se situem no espaço de projeto inviável serão menos adaptados e terão menos chances de compor o subconjunto que irá formar a nova população. [39]

3.4.2 Seleção e Reprodução

Seleção é a primeira operação realizada e consiste em selecionar os indivíduos que irão compor um novo conjunto, denominado população temporária. A reprodução é definida como um conjunto de operações genéticas que consistem em utilizar os indivíduos pertencentes à população temporária para gerar os novos indivíduos que irão compor a próxima geração. O processo de seleção se baseia no princípio da “sobrevivência dos melhores indivíduos”, onde os cromossomos com melhor aptidão recebem uma maior probabilidade de serem copiados para a população temporária. Existem diversos esquemas de seleção dos indivíduos, entretanto, um dos métodos de seleção mais empregados é o método da roleta.

A seleção proporcional à aptidão via método da roleta foi proposta por Holland e quantifica a probabilidade p_i do i -ésimo indivíduo da população vir a ser selecionado para a reprodução, a partir do cálculo proporcional ao seu valor da função de aptidão, $f_i(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_i)$.

Para o cálculo da probabilidade, pode-se implementar a expressão da Eq. (74).

$$p_i = \frac{f_i(\mathbf{X})}{\sum_{j=1}^N f_j} \quad (74)$$

Onde f_i é assumida positiva e N é o tamanho da população.

A partir da quantificação das probabilidades de cada indivíduo, compõem-se uma roleta onde cada fatia dela representa um indivíduo com sua respectiva probabilidade proporcional à área ocupada na roleta. Daí, lança-se a roleta N vezes e os indivíduos sorteados irão compor a população temporária. A seguir é possível verificar (Fig. 11) um exemplo de composição de roleta. [46]

Indivíduo S_i	Aptidão f(S_i)	Aptidão Relativa
S1	10110	2.23
S2	11000	7.27
S3	11110	1.05
S4	01001	3.35
S5	00110	1.69

Aptidão Relativa

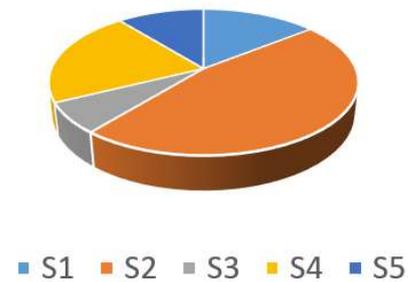


Figura 11 – Exemplo de seleção via método da roleta [46]

É válido ressaltar que se um membro é sorteado na roleta, esse membro irá compor a população temporária, mas também poderá ser sorteado de novo nos lançamentos subsequentes. Ou seja, é possível que na população temporária existam indivíduos idênticos. [45]

3.4.3 Crossover ou Recombinação

O Crossover é um dos métodos de reprodução definidos pelo algoritmo genético. Após a formação da população temporária, indivíduos são aleatoriamente selecionados para formarem pares, os quais passarão por uma operação de recombinação, a fim de gerar dois novos indivíduos com características dos dois indivíduos que o geraram. Esse processo, resume-se em recombinar os cromossomos dos dois indivíduos selecionados, formando dois novos cromossomos [46]. Existem diversas formas de recombinar os cromossomos, entretanto, a mais simples e mais usual é a recombinação com um ponto de corte, que será exemplificada a seguir.

Considerando dois indivíduos (pais) com os cromossomos a seguir:

$$\text{Indivíduo 1} = X_1 = [0 \ 1 \ 0 \ | \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$$

$$\text{Indivíduo 2} = X_2 = [1 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Para recombinarmos os cromossomos desses dois indivíduos, a partir do terceiro dígito do código binário, temos que substituir a parte do cromossomo que foi separada de um indivíduo no outro, conforme a seguir:

$$\text{Novo indivíduo 1} = X_3 = [0 \ 1 \ 0 \ | \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\text{Novo indivíduo 2} = X_4 = [1 \ 0 \ 0 \ | \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$$

Assim, dois novos indivíduos foram gerados e substituirão os indivíduos que os geraram para formar a nova população, estes são cromossomos filhos.

Como os cromossomos filhos são gerados a partir da recombinação dos cromossomos pais, ou seja, de indivíduos mais adaptados, espera-se que os filhos herdem características dos pais em questão de adaptação, ou sejam até melhores, desde que seja selecionado um local apropriado (ponto de corte) para realizar a recombinação dos cromossomos. Entretanto, o local adequado para realizar a recombinação não é conhecido e, normalmente, é escolhido aleatoriamente. Dessa forma, os filhos podem ou não ter melhores características do que seus pais, em termos da função de aptidão. Caso tenham características boas ou melhores que as de seus pais, irão contribuir positivamente para aumentar a média da função de aptidão das populações subsequentes. Caso contrário, não irão sobreviver muito tempo, haja vista que estes terão menor chance de serem selecionados para reprodução. [39]

3.4.4 Mutação

Um outro processo de reprodução é a mutação. A mutação é uma operação que permite a introdução e a manutenção da diversidade genética na população, alterando arbitrariamente um ou mais componentes de uma estrutura escolhida [46]. A ideia da mutação é de evitar a perda prematura de um valioso material genético durante a reprodução e a recombinação. Basicamente, consiste em selecionar alguns indivíduos da população, determinar aleatoriamente uma localização do cromossomo e alterar o valor de 0 para 1 ou vice-versa [45].

Consideremos a população de cinco indivíduos a seguir:

$$\text{Indivíduo 1} = X_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$$

$$\text{Indivíduo 2} = X_2 = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\text{Indivíduo 1} = X_3 = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$$

$$\text{Indivíduo 2} = X_4 = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$\text{Indivíduo 1} = X_5 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Vamos supor que no problema de otimização para esta população, a solução ótima seja representada por um cromossomo que tenha em seu primeiro dígito o valor 0. Como todos os valores dos primeiros dígitos desses indivíduos são 1, se não for utilizada a mutação, nunca será alcançada a solução para o problema de otimização em questão

Diversos métodos podem ser utilizados para implementar a mutação. Em geral, seleciona-se uma probabilidade de mutação p_m de baixo valor, como na natureza. Após isso, um dígito do cromossomo candidato a ser alterado pela mutação é escolhido aleatoriamente. Então, um número entre 0 e 1 é gerado aleatoriamente e, caso esse número seja maior que p_m , então o dígito é alterado, caso contrário, nada ocorre. [39]

3.4.5 Demais considerações

Como todo algoritmo iterativo, um critério de parada deve ser ajustado para a implementação do algoritmo genético. Em geral, números máximos de iterações são utilizados, assim como critérios de convergência em relação aos valores observados a cada geração para a função de aptidão.

O algoritmo genético, pode ser resumido em:

- Selecionar a população inicial aleatoriamente;
- Avaliar a função de aptidão para cada indivíduo;
- Selecionar os indivíduos para a reprodução com algum critério, em geral o da roleta;
- Efetuar a operação de crossover ou recombinação;
- Efetuar a operação de mutação;
- Avaliar novamente a função de aptidão para cada indivíduo da nova população

- Testar a convergência do método, caso não tenha atingido o critério de convergência, nem o número máximo de gerações, retornar para o passo de seleção para reprodução.

Na Fig. 12 apresenta-se um fluxograma esquemático que representa o algoritmo genético:

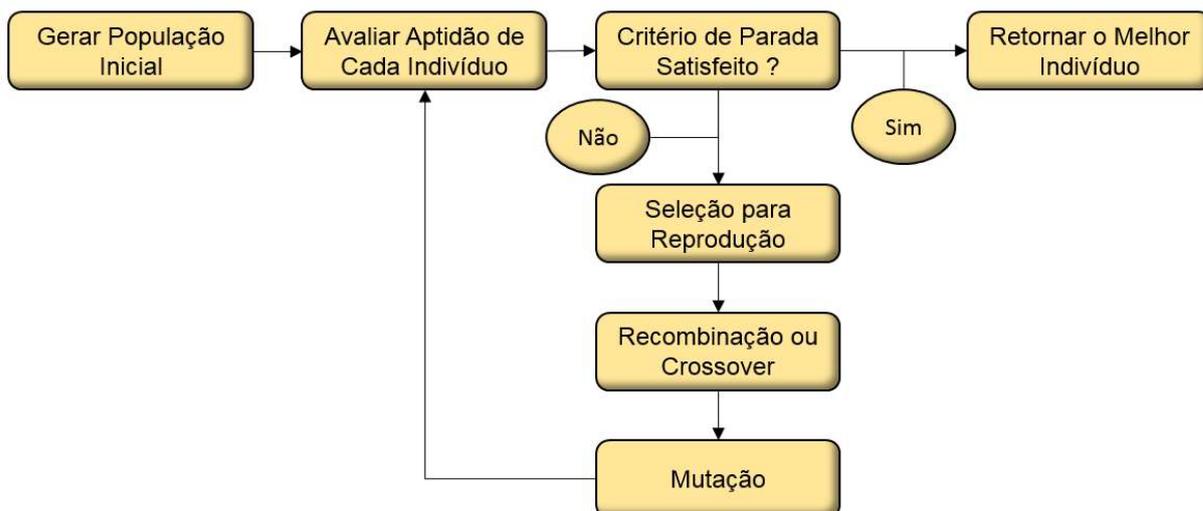


Figura 12 – Fluxograma do algoritmo genético

4 MODELAGEM DO SISTEMA ESTRUTURAL INVESTIGADO

4.1 Apresentação da estrutura

A fundação em questão localiza-se em uma planta industrial de uma usina siderúrgica em Ouro Branco/MG, Brasil. Trata-se de um bloco de concreto armado que se apoia sobre 20 estacas do tipo hélice, com diâmetro de 0,50m e comprimento de em torno de 8,50m. O bloco de concreto possui dimensões em planta de aproximadamente 15,00m x 11,75m com 1,50m de altura. O motor fica apoiado em uma base de concreto com dimensões de 5,55m x 3,15m e altura de 3,84m. Já o compressor possui duas bases de apoio com dimensões de 2,40m x 1,50m e 2,40m x 0,60m, ambas com altura de 2,66m. O concreto utilizado para o bloco de concreto possui módulo de elasticidade da ordem de 26 GPa enquanto que o utilizado para as estacas possui módulo de elasticidade de cerca de 21 GPa. É possível verificar nas Figuras de 13 a 20 as imagens da fundação e os detalhes dimensionais.

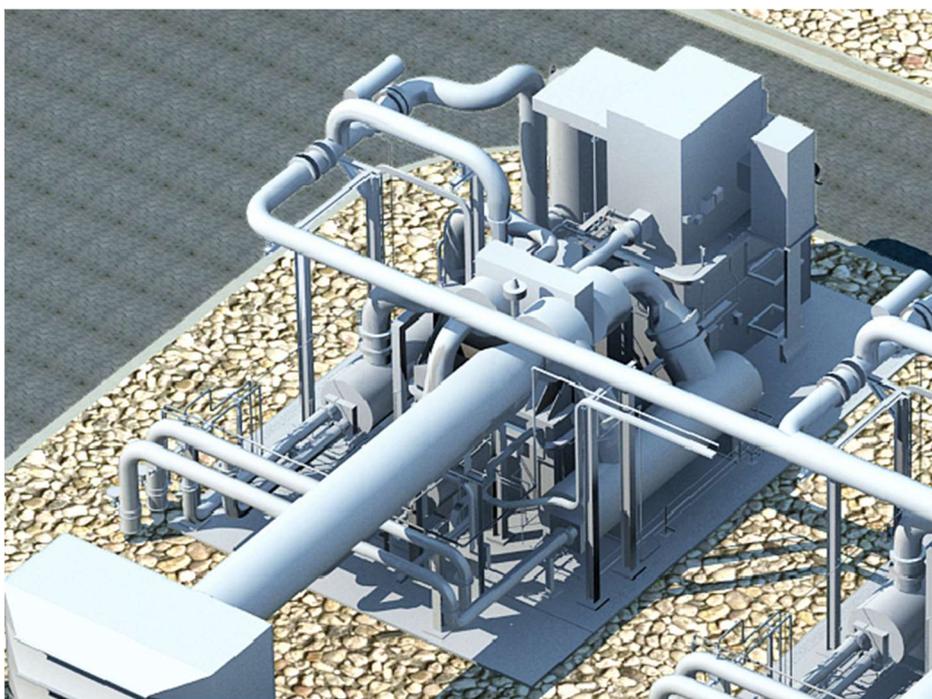


Figura 13 – Isométrica do conjunto fundação-equipamento [3].

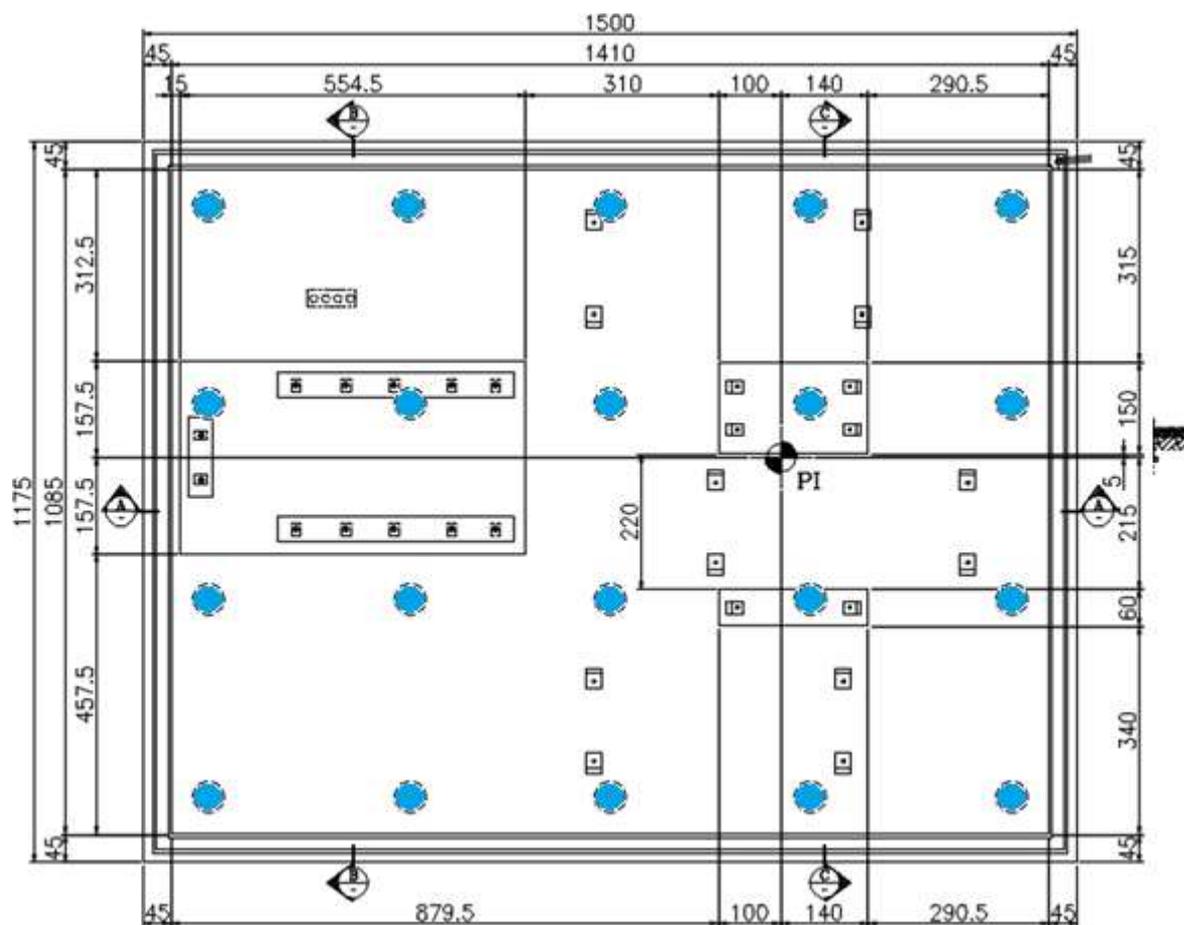


Figura 14 – Modelo estrutural: planta da fundação [3].

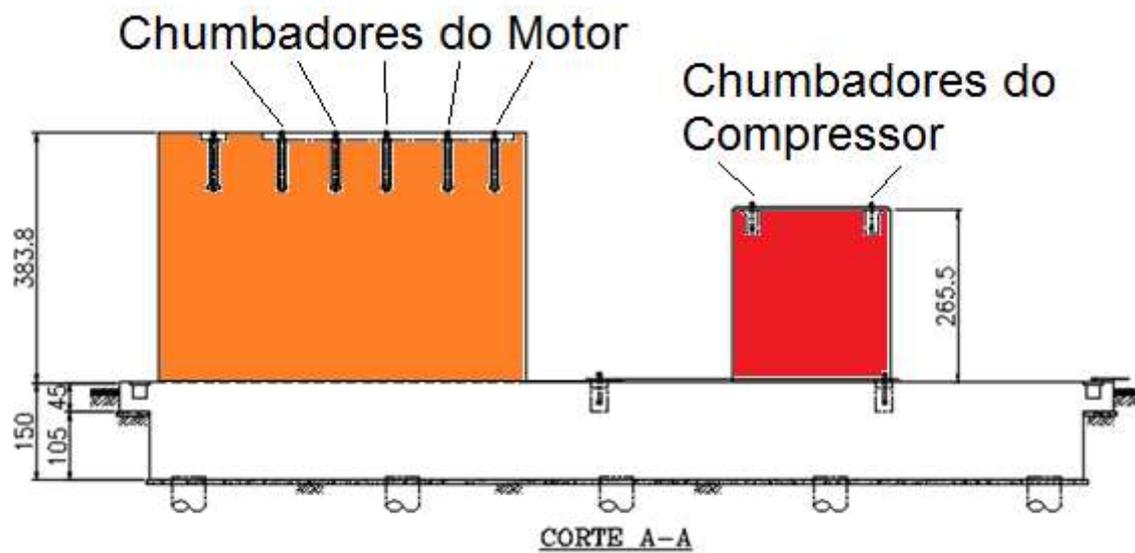


Figura 15 – Modelo estrutural: elevação da fundação (Corte A-A) [3].

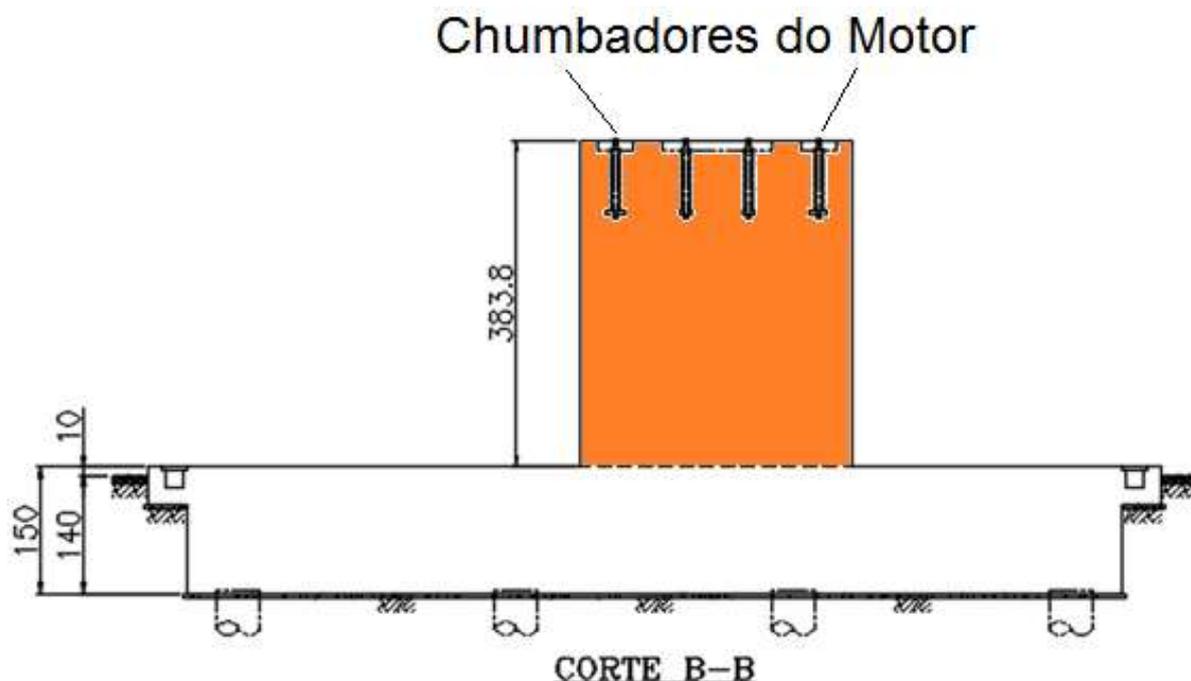


Figura 16 – Modelo estrutural: elevação da fundação (Corte B-B) [3].

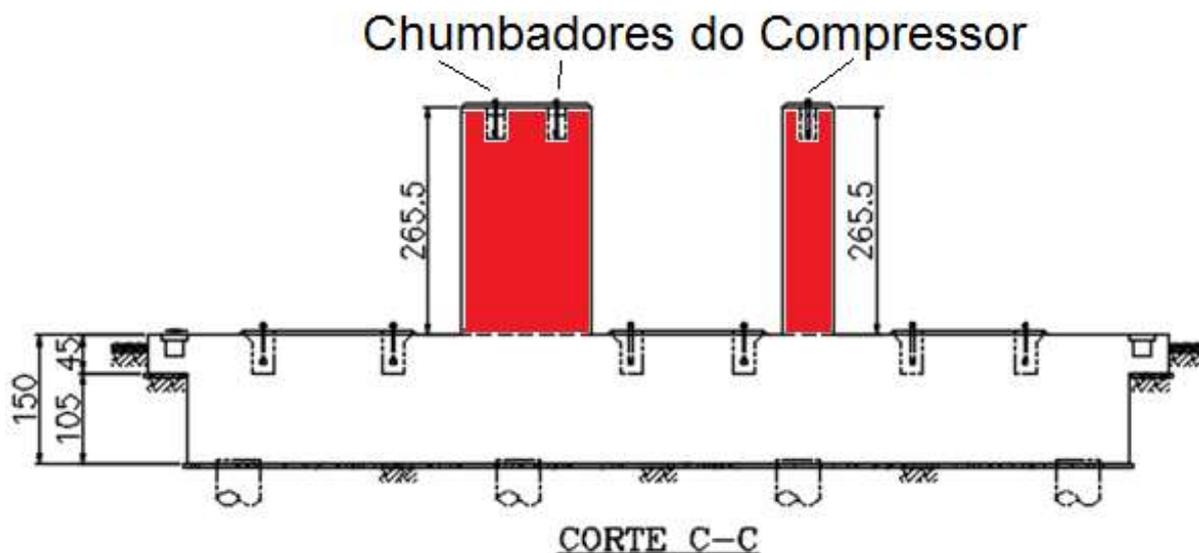


Figura 17 – Modelo estrutural: elevação da fundação (Corte C-C) [3].

Na Fig. 14, as marcações em cor azul representam o posicionamento das estacas. Já pelas Fig. 15 e 16, é possível identificar nas cores laranja e vermelha as bases nas quais se apoiam o motor e o compressor, respectivamente, bem como seus respectivos chumbadores, responsáveis pela fixação dos equipamentos na estrutura.



Figura 18 – Localização do empreendimento [3].



Figura 19 – Vista aproximada das fundações executadas [3].



Figura 20 – Modelo estrutural: Fundação executada (vista superior) [3].

4.2 Modelagem em elementos finitos

A modelagem por elementos finitos foi desenvolvida através do software ANSYS, utilizando elementos sólidos tridimensionais hexaédricos de 8 nós, com 3 graus de liberdade por nó, cada um associado aos deslocamentos translacionais relativos aos três eixos cartesianos. O referido elemento é nomeado como SOLID45 no ANSYS e pode-se verificar sua geometria na Fig. 21.

As estacas foram modeladas a partir de elementos de molas lineares (COMBIN14, no ANSYS, (Fig. 22)) com os coeficientes de rigidez relativos aos deslocamentos translacionais (X,Y,Z) referentes às rigidezes associadas das estacas (axial) e do solo (transversais). A estrutura em questão resultou em um modelo com 8876 nós e 6590 elementos, em um total de 26588 graus de liberdade. Pelas Figuras 23 e 24 é possível verificar o modelo obtido.

Torna-se conveniente comentar que o modelo sólido obtido possui a distribuição de seus nós no plano XZ em tamanhos não uniformes, de modo que o posicionamento de tais nós coincidam com pontos específicos da estrutura, como o posicionamento das estacas e dos chumbadores dos equipamentos. Entretanto, ao longo do eixo Y, todos os elementos sólidos do bloco de coroamento das estacas possuem a mesma altura, assim como os elementos da base na qual se apoia o motor e da base na qual se apoia o compressor. Essas alturas foram definidas a partir de parâmetros que, caso sejam alterados, só mudarão o fator de escala do modelo, não alterando a quantidade total de nós, elementos e graus de liberdade do modelo estrutural em elementos finitos obtido.

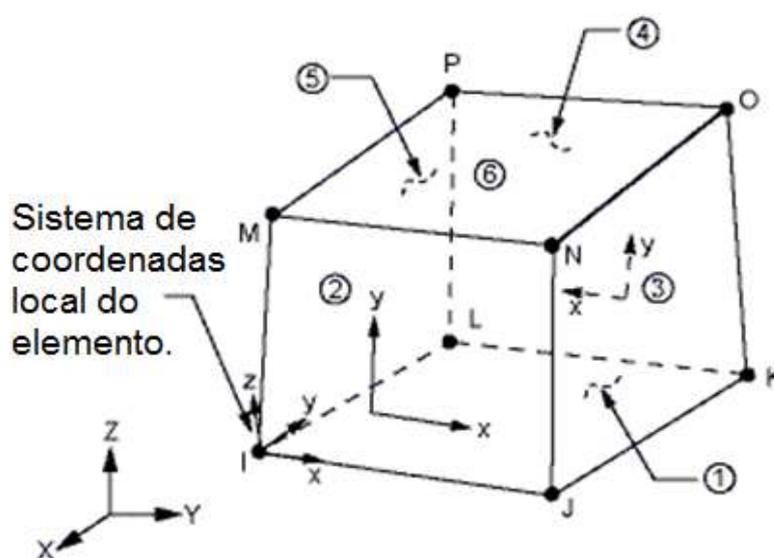


Figura 21 – Elemento SOLID45. [37]

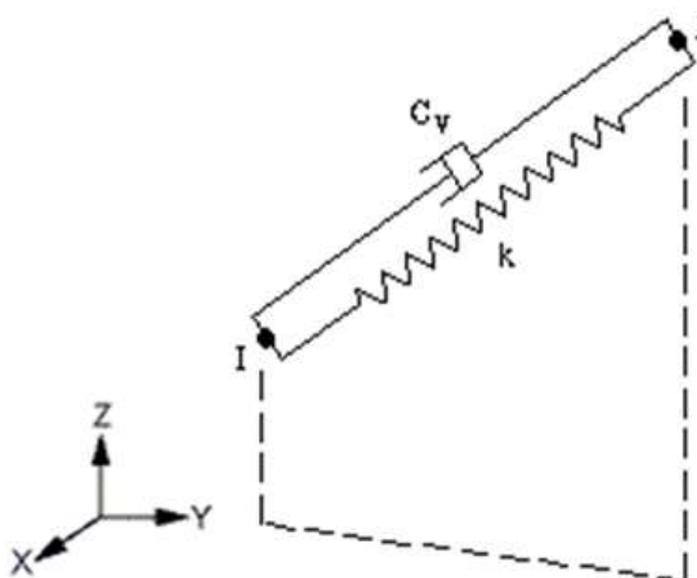


Figura 22 – Elemento COMBIN14. [37]

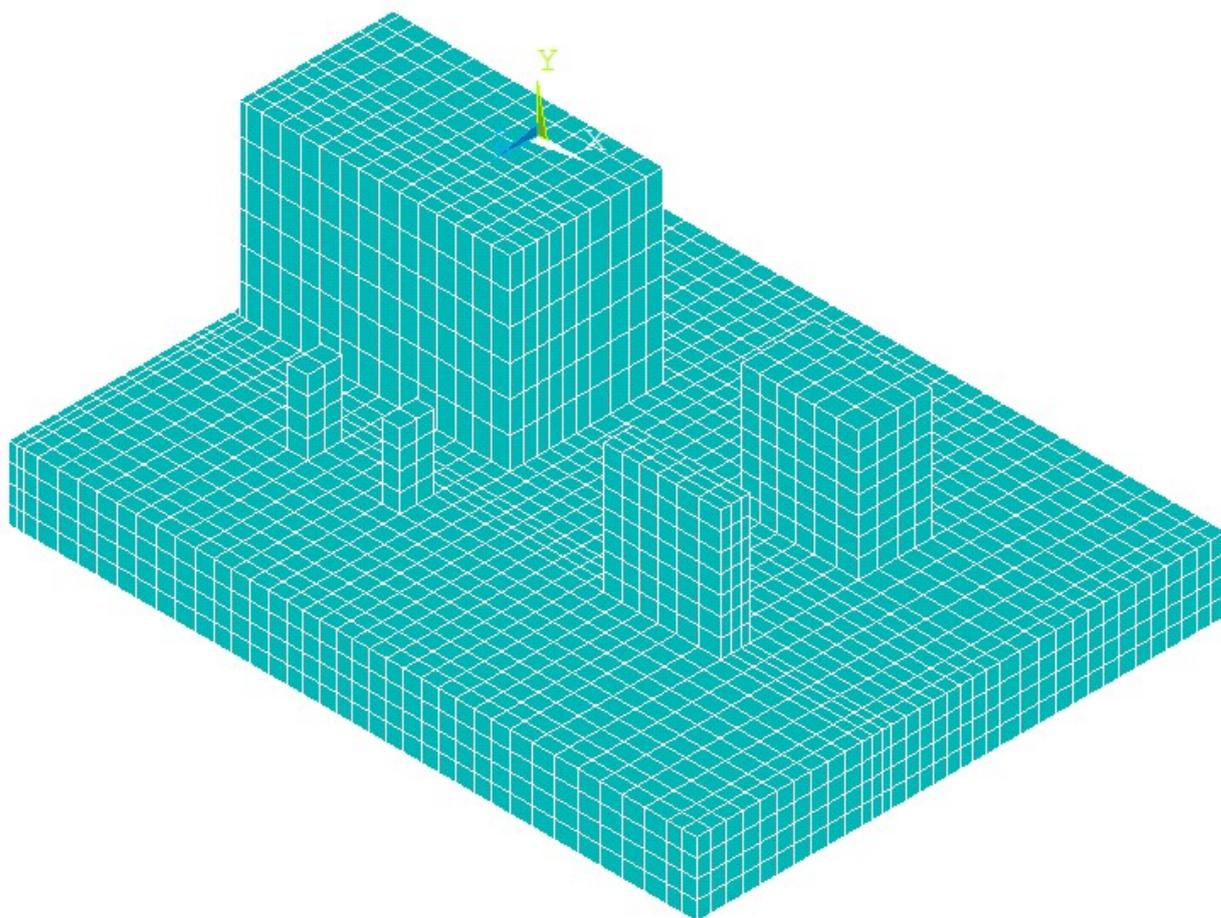


Figura 23 – Modelo estrutural no ANSYS.

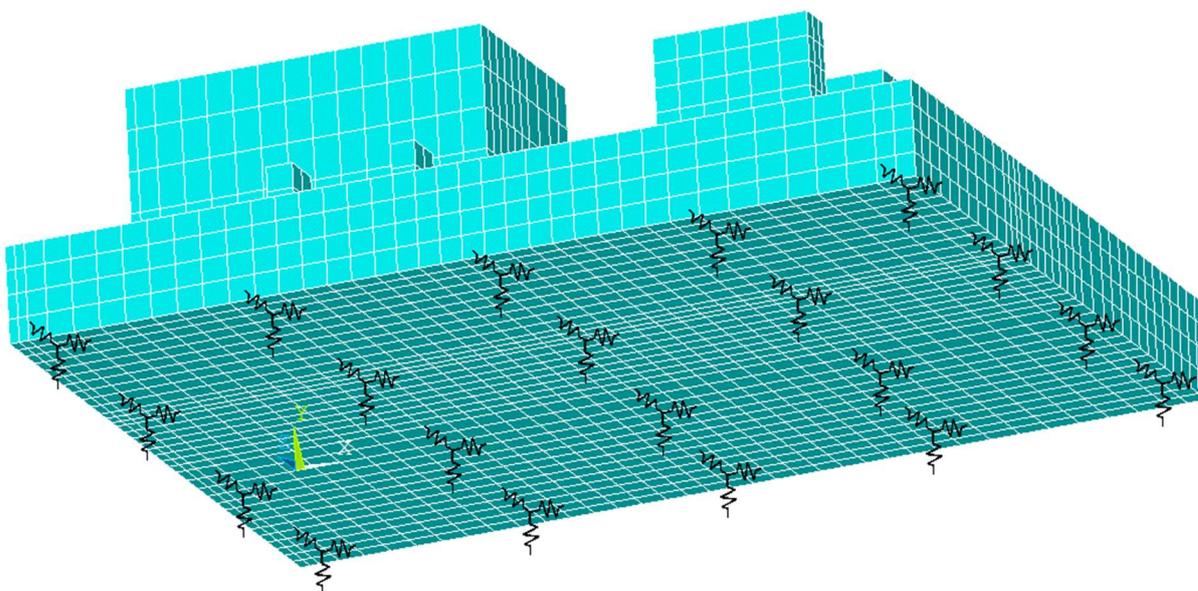


Figura 24 – Modelo estrutural no ANSYS – Vista das molas representativas.

5 ANÁLISE DINÂMICA DA FUNDAÇÃO DE CONCRETO ARMADO

A partir do modelo em elementos finitos apresentado no Capítulo 3, foram desenvolvidas análises para o cálculo do comportamento dinâmico da estrutura em regime de serviço. Em primeiro lugar, foi realizada uma análise modal da estrutura, objetivando conhecer os 15 primeiros modos de vibração da estrutura bem como as frequências naturais associadas a cada um destes modos. A segunda etapa foi desenvolver uma análise dinâmica, de vibração forçada da estrutura, simulando os carregamentos dinâmicos provenientes do conjunto motor-compressor a fim de se obter a resposta dinâmica do sistema estrutural investigado. Tanto a análise modal quanto a análise de vibração forçada foram desenvolvidas através do sistema computacional ANSYS v12.1.

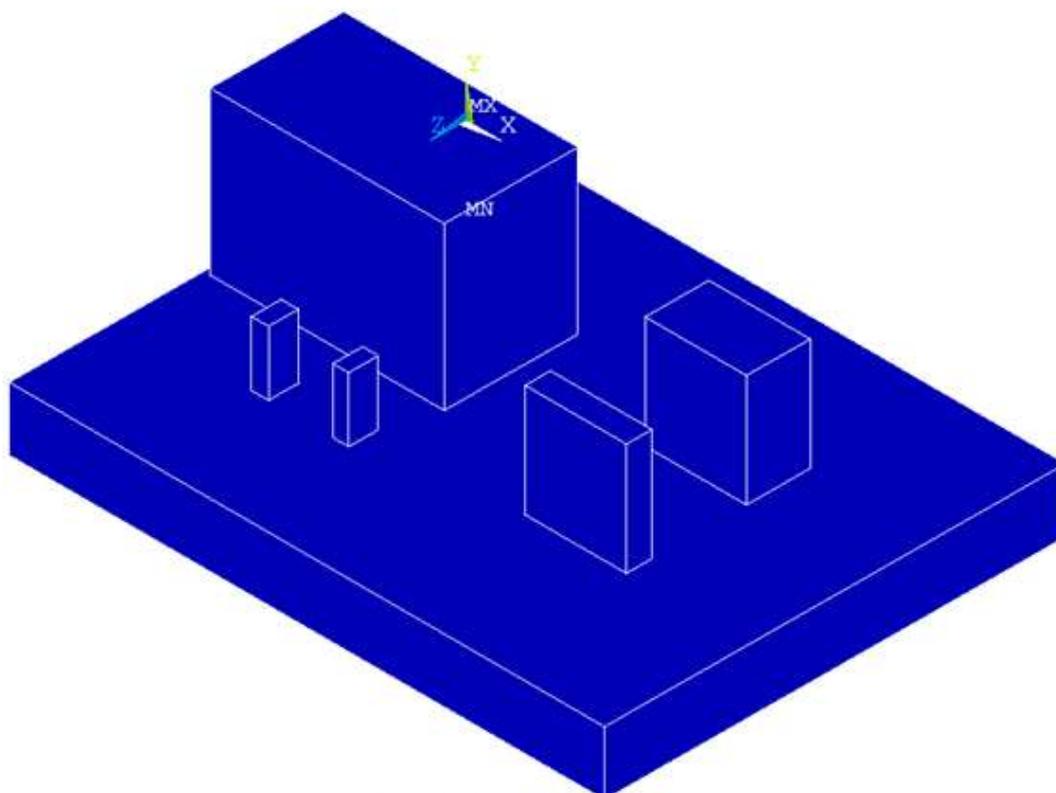
5.1 Análise Modal da Estrutura

Conforme já abordado ao longo do Capítulo 1, a análise modal consiste em resolver o problema de autovalores e autovetores associados à condição de vibração livre da estrutura. Para tal problema, foram extraídos os primeiros 15 modos de vibração da estrutura, que têm suas frequências naturais associadas apresentadas pela Tabela 8.

Tabela 8 – Modos e Frequências naturais da estrutura

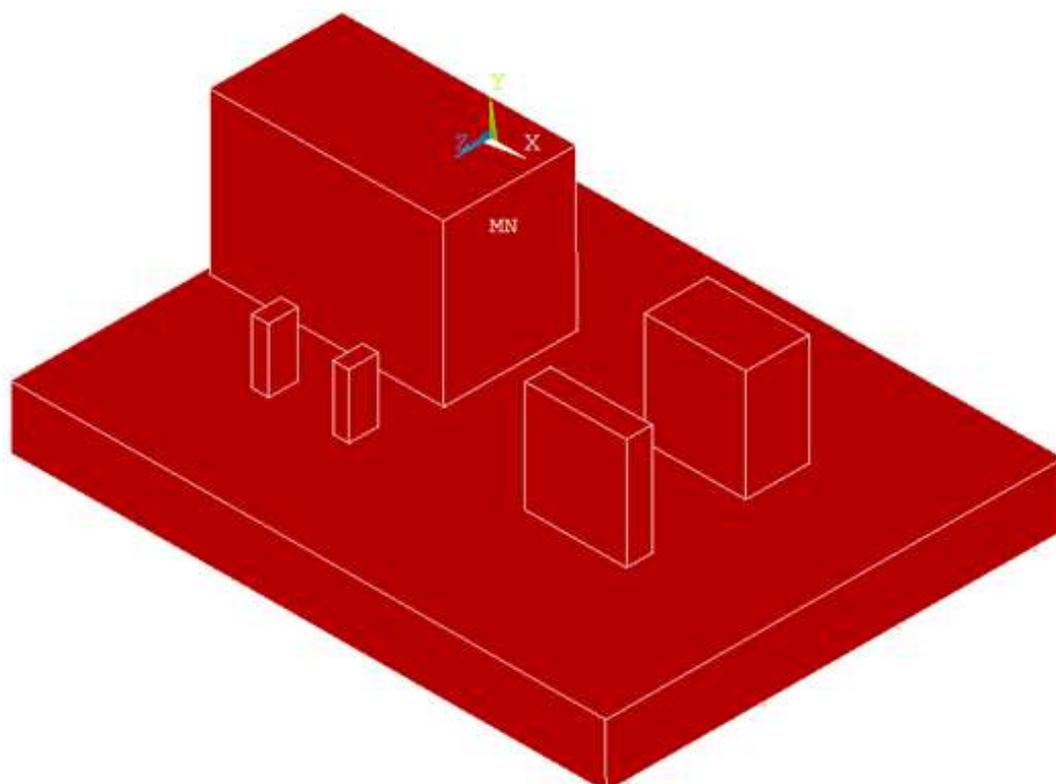
Modo	Frequência Natural Associada (Hz)	Modo	Frequência Natural Associada (Hz)	Modo	Frequência Natural Associada (Hz)
1	3,46	6	19,49	11	51,75
2	3,55	7	26,13	12	52,97
3	4,35	8	28,9	13	60,05
4	15,49	9	37,67	14	68,1
5	18,09	10	44,46	15	71,95

As Figuras 25 a 32 apresentam os modos de vibração mais relevantes da estrutura.



Escala de Deslocamentos
Mínimos  Máximos

Figura 25 – 1º Modo de vibração da estrutura – Translação em Z



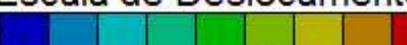
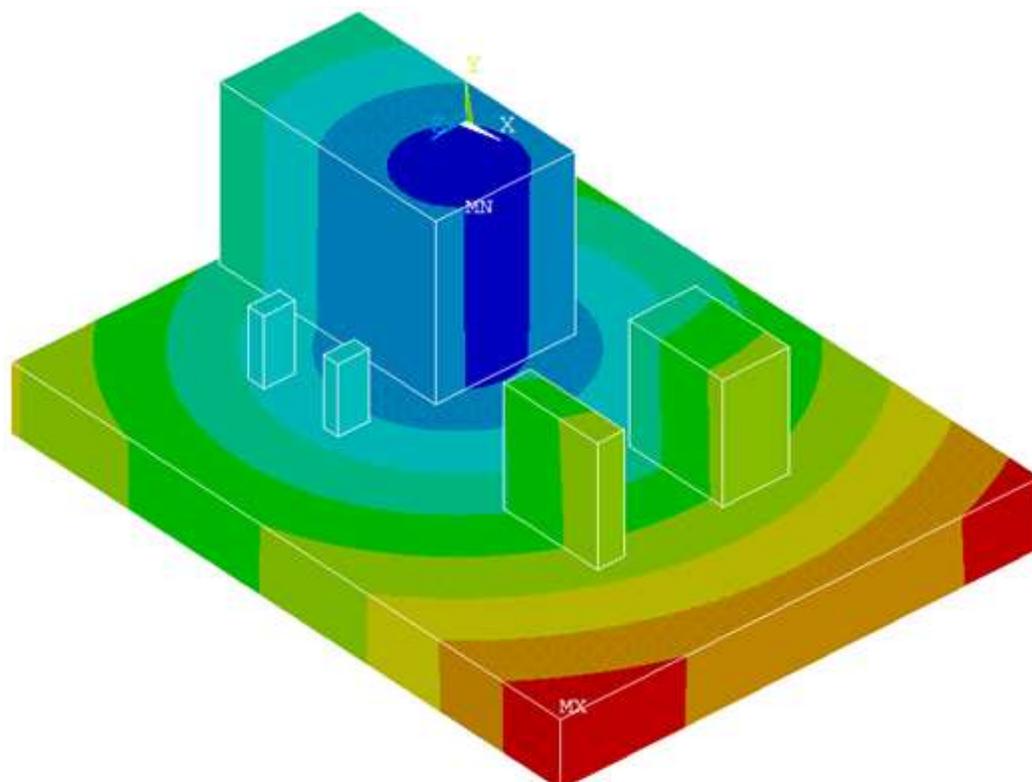
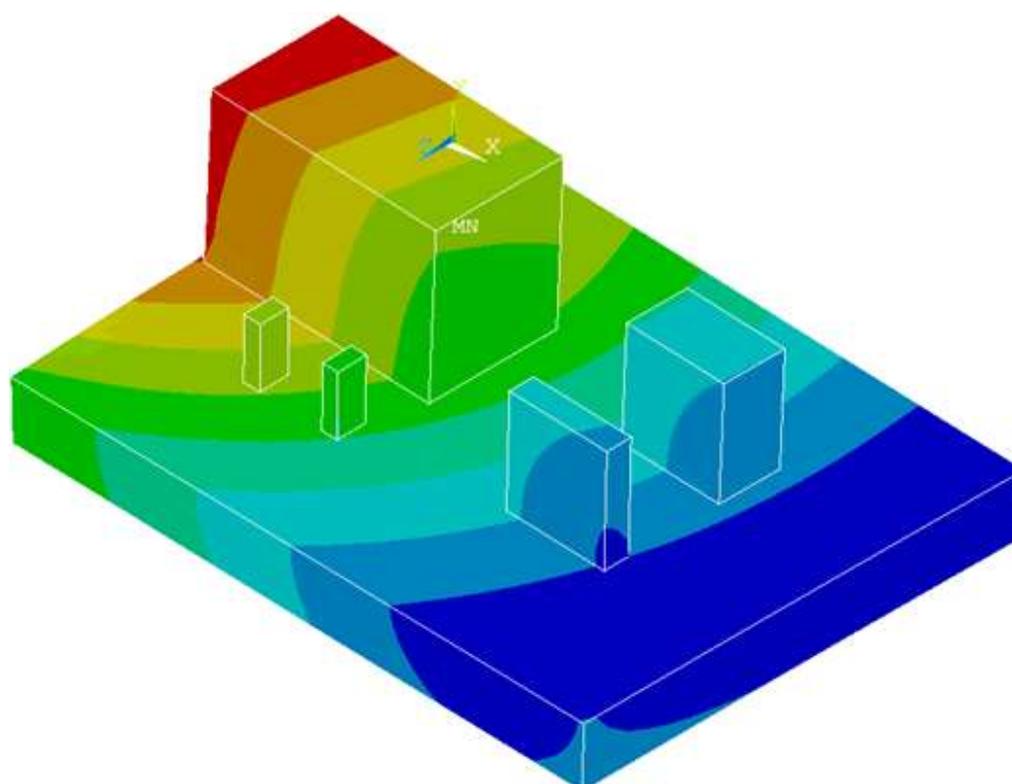
Escala de Deslocamentos
Mínimos  Máximos

Figura 26 – 2º Modo de vibração da estrutura – Translação em X



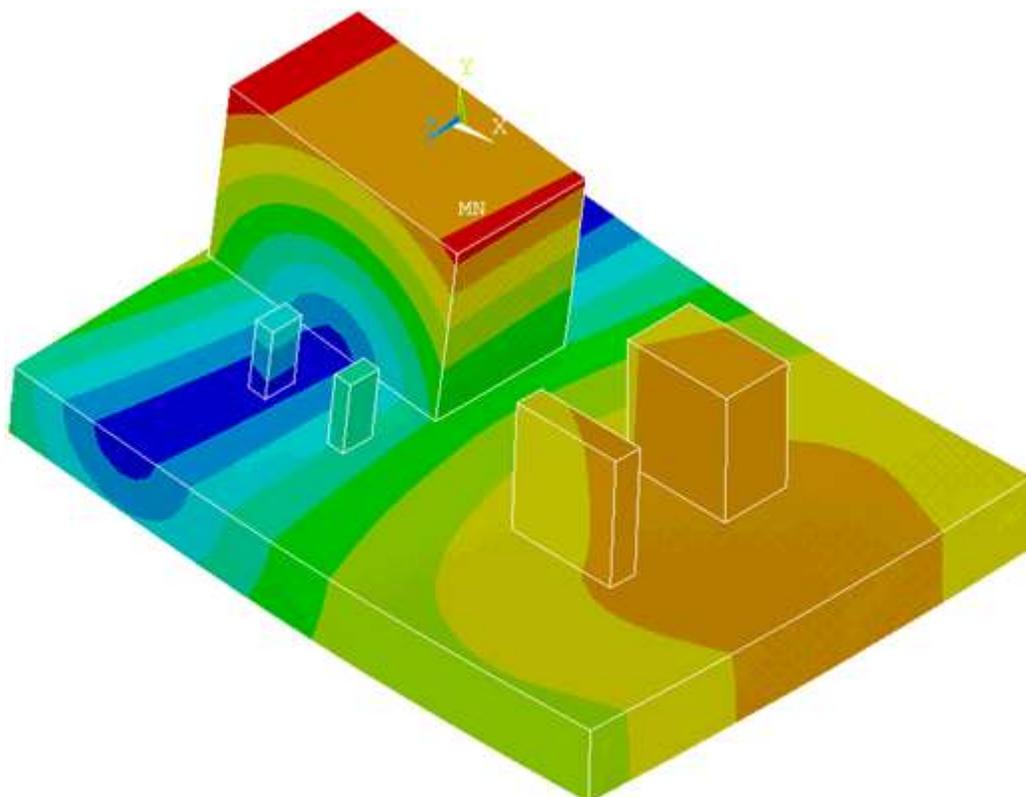
Escala de Deslocamentos
 Mínimos Máximos

Figura 27 – 3º Modo de vibração da estrutura – Rotação em Y



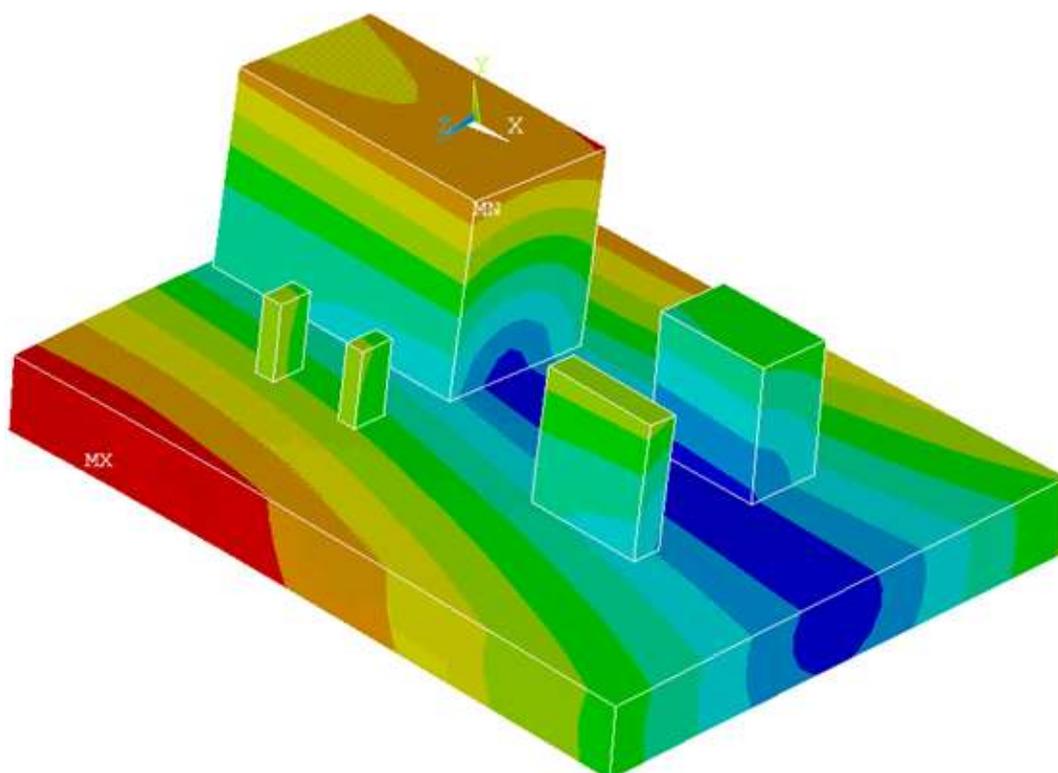
Escala de Deslocamentos
 Mínimos Máximos

Figura 28 – 4º Modo de vibração da estrutura – Flexão no plano ZX



Escala de Deslocamentos
 Mínimos  Máximos

Figura 29 – 5º Modo de vibração da estrutura – Flexão no plano XZ



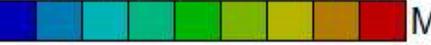
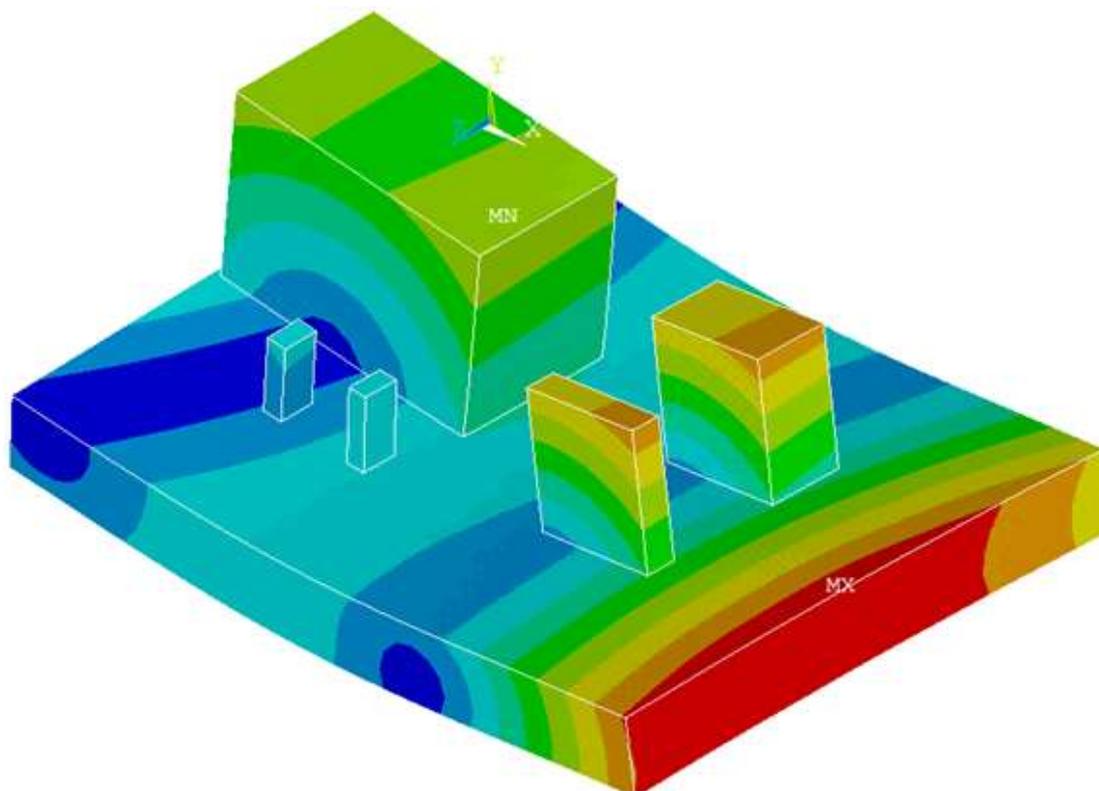
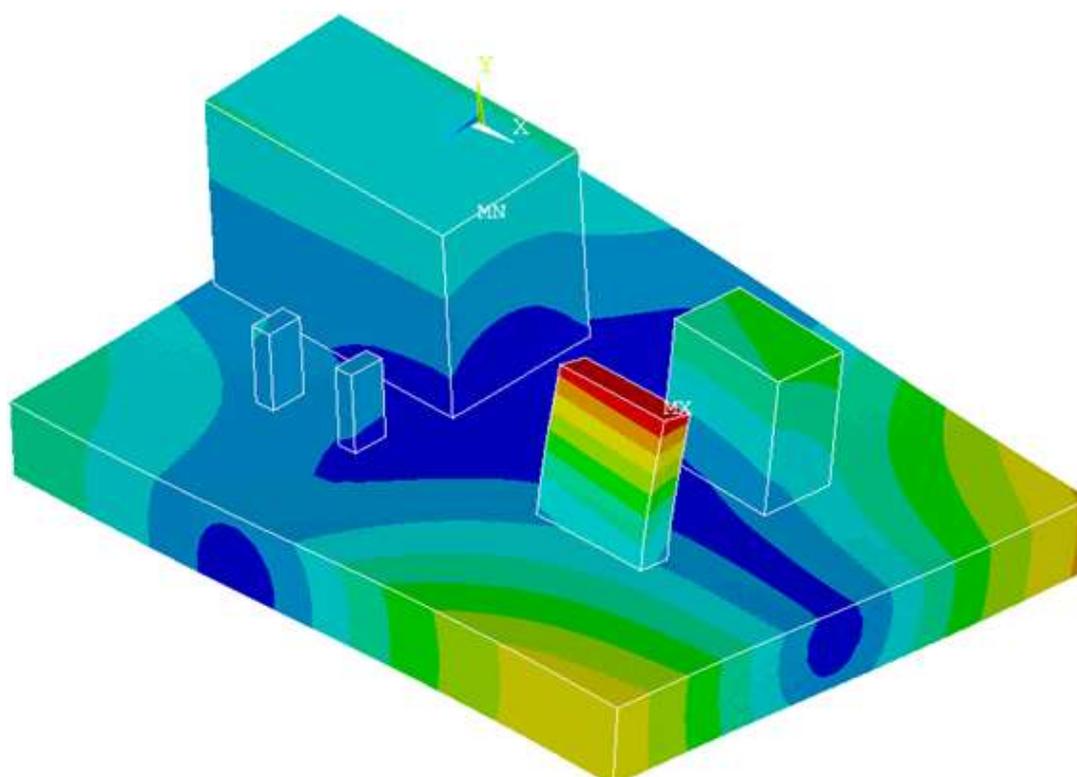
Escala de Deslocamentos
 Mínimos  Máximos

Figura 30 – 6º Modo de vibração da estrutura – Flexão no plano XZ



Escala de Deslocamentos
 Mínimos  Máximos

Figura 31 – 7º Modo de vibração da estrutura – Flexão assimétrica no plano XZ



Escala de Deslocamentos
 Mínimos  Máximos

Figura 32 – 8º Modo de vibração da estrutura – Flexão Assimétrica no plano XZ

5.2 Análise Dinâmica da Estrutura

A estrutura em questão suporta um conjunto motor-compressor que opera com carregamentos cíclicos bem definidos, de modo que a análise dinâmica foi desenvolvida com base em um carregamento determinístico senoidal, simulando a condição de desbalanceamento rotativo proveniente de tais máquinas. A partir dos dados dos equipamentos, foi possível estabelecer a amplitude da força senoidal (definida com base no desbalanceamento rotativo e dada por $F_0 = M_e e \omega_f^2$), bem como a sua frequência de operação, que podem ser observadas na Tabela 9:

Tabela 9 – Dados do carregamento dos equipamentos [3].

Equipamento	Frequência de Operação	Amplitude da Força
Motor	188,49 rad/s (30 Hz)	8,5 kN
Compressor	188,49 rad/s (30 Hz)	6,3 kN

Dessa forma, o carregamento dinâmico de cada equipamento foi modelado através de carregamento senoidal com suas respectivas amplitudes e inseridos nos nós referentes aos chumbadores dos equipamentos, representados pela Fig. 33.

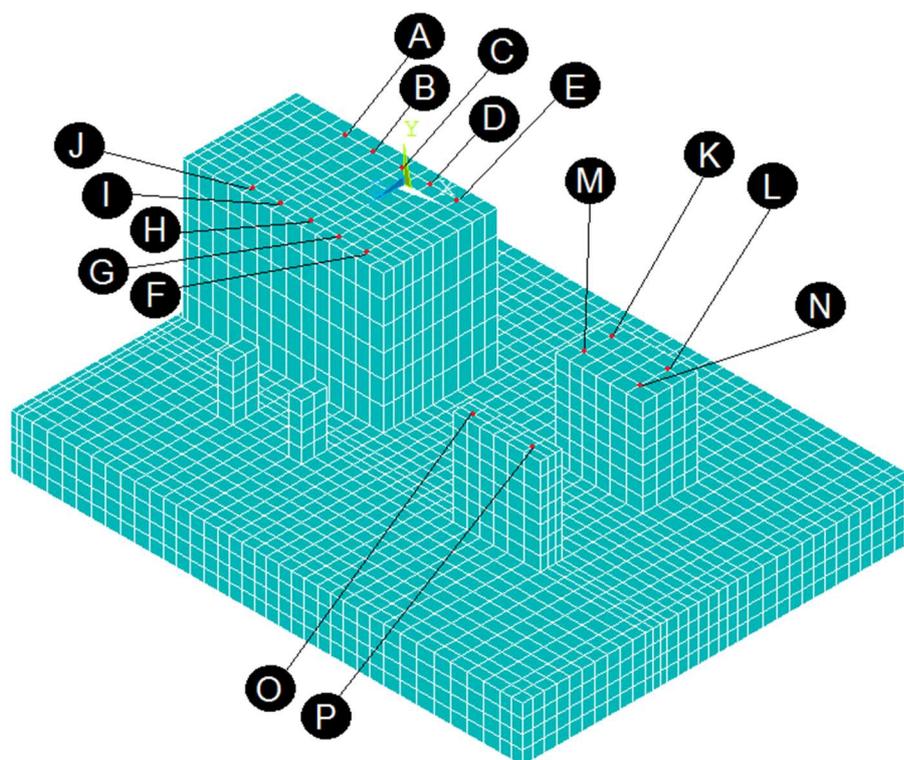


Figura 33 – Nós dos chumbadores dos equipamentos.

Os dez nós nomeados de A a J representam os pontos de ancoragem dos chumbadores do motor e os seis nós nomeados de K a P representam os pontos de ancoragem dos chumbadores do compressor.

É válido ressaltar que o carregamento senoidal atuante em tais nós, proveniente do desbalanceamento rotativo dos equipamentos, atua em todas as direções no plano YZ, com componentes F_Y e F_Z , nas direções Y e Z, respectivamente, de tal forma que quando o carregamento atinge sua máxima amplitude na direção Y, seu valor é nulo na direção Z e vice-versa. Dessa forma, existem dois carregamentos senoidais defasados de 90° . Logo, o desbalanceamento rotativo induz carregamentos em todas as direções no plano YZ, dado pela soma vetorial das componentes F_Y e F_Z em cada instante de tempo. Cada uma das duas curvas em cores distintas nos dois gráficos (Fig. 34 e 35) representa o comportamento de uma componente da força (F_Y e F_Z) ao longo do tempo, defasadas de 90° .

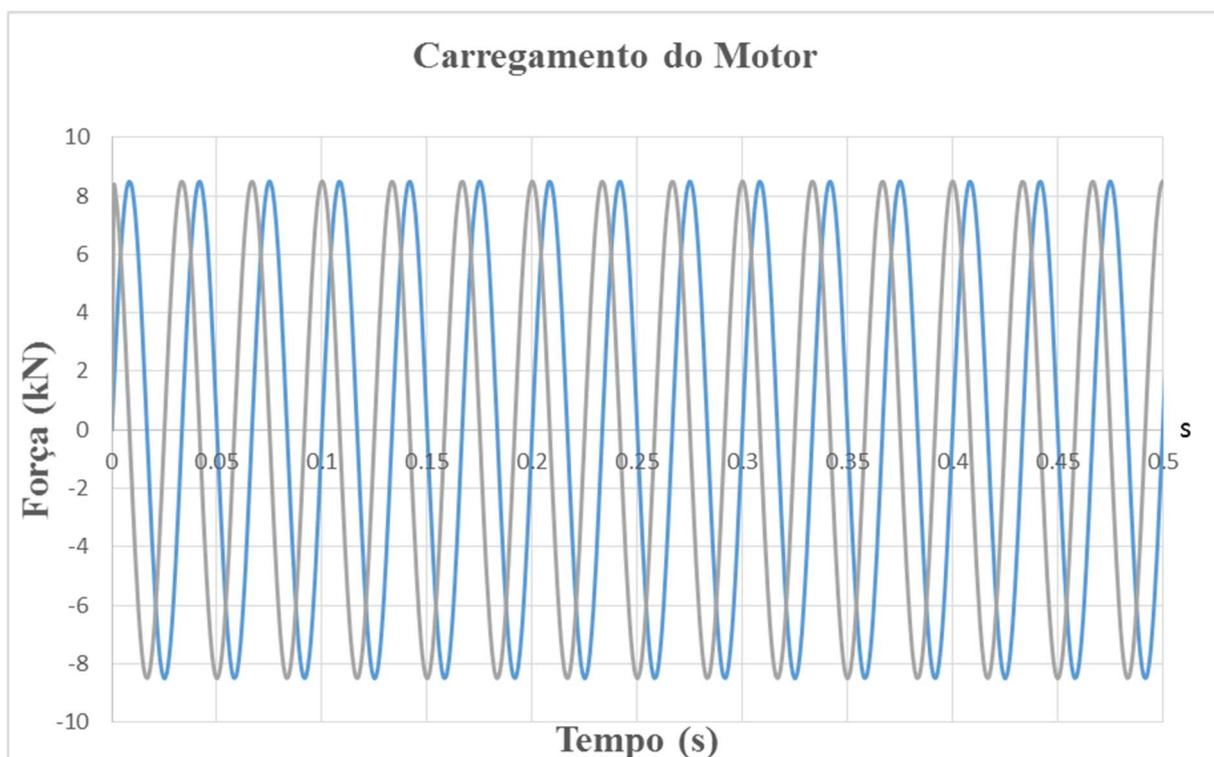


Figura 34 – Gráfico do comportamento das componentes Y e Z do carregamento do motor.

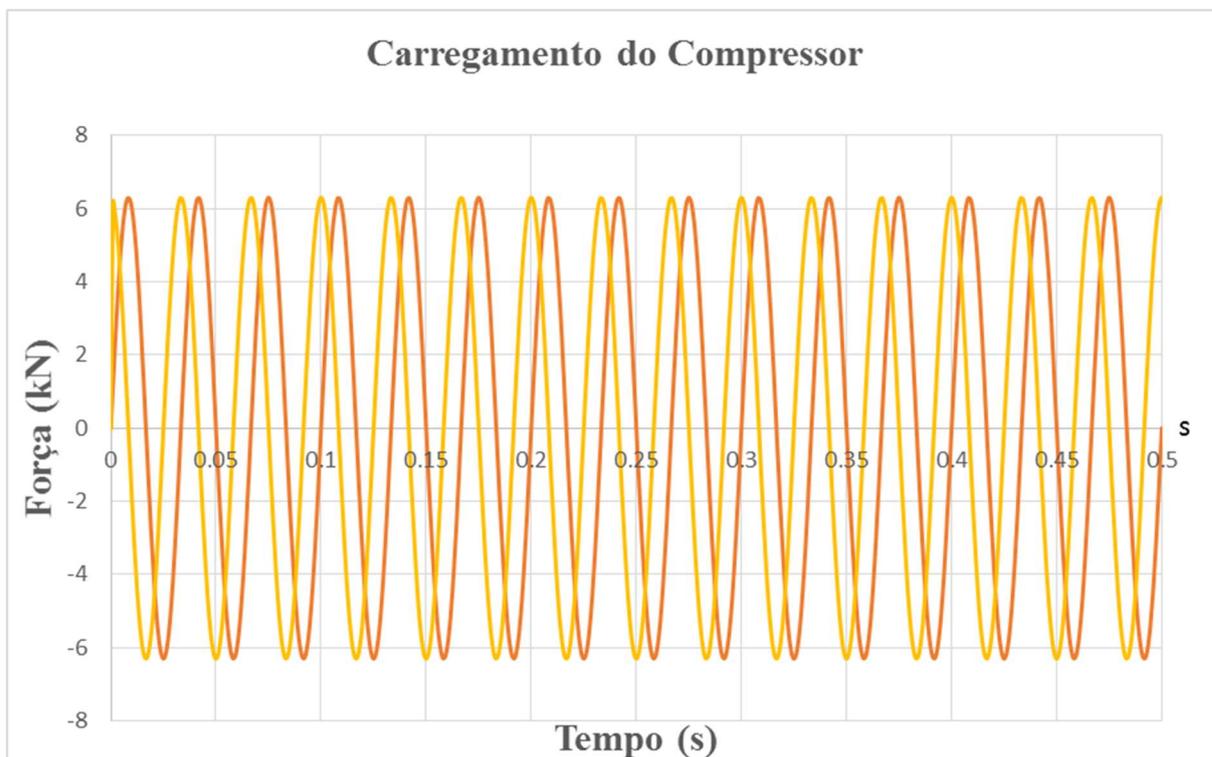


Figura 35 – Gráfico do comportamento das componentes Y e Z do carregamento do compressor.

O objetivo principal da análise de vibração forçada foi obter a resposta dinâmica da estrutura em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações em regiões específicas da estrutura. Tais regiões foram escolhidas com base em critérios normativos, a fim de se obter os valores representativos dos deslocamentos e velocidades que ocorrem nos apoios dos equipamentos. Os deslocamentos e as velocidades foram analisados nos nós referentes aos chumbadores dos equipamentos (Fig. 33), a fim de se avaliar a condição de segurança de operação dos equipamentos, com base nos valores recomendados pela ISO 2372 e nas recomendações de Srinivasulu [28,29].

Na Tabela 10 é possível identificar os valores máximos dos deslocamentos e velocidades que ocorrem nos nós analisados, resultante dos carregamentos inseridos em tais nós, obtidos pela cálculo no ANSYS.

Para tais valores, dá se o devido destaque ao nó L, representativo de um dos chumbadores do compressor, o qual apresenta as maiores amplitudes em termos de deslocamento ($5,10 \mu m$) e velocidade ($0,99 mm/s$). É válido ressaltar que todos os valores apresentados pela Tabela 10 são absolutos, de forma a considerar os

máximos deslocamentos e velocidades absolutas, sem levar em conta o sentido (positivo ou negativo) em relação ao eixo Y.

Tabela 10 – Deslocamentos e Velocidades Máximas

Nó	Deslocamento Máximo (μm)	Velocidade Máxima (mm/s)
A	3,81	0,48
B	3,53	0,48
C	3,35	0,48
D	3,42	0,47
E	3,56	0,51
F	3,91	0,51
G	3,80	0,51
H	3,71	0,51
I	3,77	0,60
J	4,00	0,65
K	4,42	0,69
L	5,10	0,99
M	3,60	0,75
N	4,38	0,89
O	3,82	0,66
P	4,06	0,78

Para tais valores, dá se o devido destaque ao nó L, representativo de um dos chumbadores do compressor, o qual apresenta as maiores amplitudes em termos de deslocamento ($5,10 \mu\text{m}$) e velocidade ($0,99 \text{ mm/s}$). É válido ressaltar que todos os valores apresentados pela Tabela 10 são absolutos, de forma a considerar os máximos deslocamentos e velocidades absolutas, sem levar em conta o sentido (positivo ou negativo) em relação ao eixo Y.

Quanto às acelerações, foram analisados nove pontos da fundação, escolhidos em uma região da estrutura na qual existe uma área de trânsito de pessoal, a fim de se avaliar a condição de conforto humano e segurança do pessoal que trabalha no local. Estes pontos analisados podem ser verificados pela Fig. 36, nos nós nomeados de Q à Y.

Da mesma forma que para as velocidades e deslocamentos máximos, os valores obtidos para as acelerações representam valores absolutos, sem levar em

conta o sentido do eixo Y. Assim, a Tabela 11 apresenta os valores de acelerações obtidos nos nós nomeados de Q à Y.

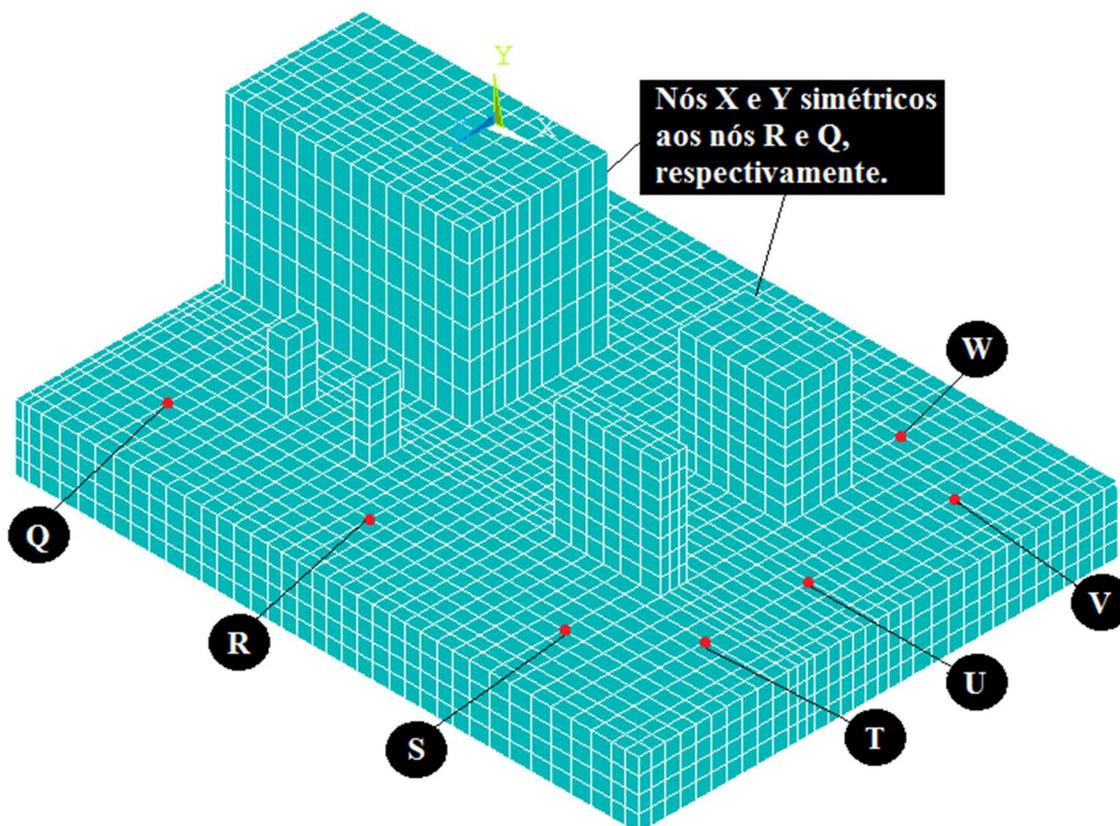


Figura 36 – Nós avaliados para conforto humano

Tabela 11 – Acelerações máximas

Nó	Aceleração Máxima (m/s^2)
Q	0,21
R	0,24
S	0,32
T	0,24
U	0,15
V	0,34
W	0,36
X	0,14
Y	0,15

É possível verificar que os nós S, V e W apresentam os maiores valores para as amplitudes de acelerações, da ordem de $0,30 m/s^2$.

5.3 Demais Considerações

Considerando-se as normas e recomendações para segurança de operação dos equipamentos apresentadas ao longo do Capítulo 2, a partir da Tabela 2 é possível verificar que, para um critério de severidade classificado como bom para vibrações de máquinas, os valores máximos das velocidades impostas aos equipamentos não devem ultrapassar o limite de $2,8 \text{ mm/s}$, levando-se em conta que os equipamentos apoiados na estrutura se enquadram como máquinas de Classe III (equipamentos mecânicos de grande porte, apoiados sobre fundação rígida e pesada, cuja frequência natural seja inferior à de excitação).

Além disso, em termos de deslocamentos máximos permissíveis aos quais os equipamentos são submetidos, é possível verificar que, de acordo com a Tabela 3, as amplitudes admissíveis de vibração não devem ultrapassar $20 \mu\text{m}$, pois tratam-se de equipamentos que operam 1800 rotações por minuto sujeitos a vibrações verticais.

No que diz respeito ao conforto humano e segurança das pessoas, a Norma ISO 2631-2 estabelece que para um nível de eficiência reduzido (fadiga), o limite de aceleração na direção longitudinal (vibração do sentido dos pés à cabeça), para uma vibração da ordem de 30 Hz, é da ordem de cerca de 1 m/s^2 , considerando-se uma carga horária de trabalho de 8 horas diárias.

Em posse de tais resultados da análise dinâmica, é possível verificar que os valores de interesse obtidos em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações, encontram-se consideravelmente abaixo dos limites estabelecidos por normas. Rodrigues [3] desenvolveu um trabalho de análise dinâmica sobre a mesma estrutura, no qual constatou que os valores para os deslocamentos, velocidades e acelerações na estrutura também encontravam-se consideravelmente abaixo dos limites estipulados por normas. Os resultados aqui apresentados corroboram com o trabalho desenvolvido por Rodrigues, demonstrando o superdimensionamento da estrutura, quando considerados os valores limites estipulados por normas para a segurança de operação dos equipamentos apoiados na estrutura e conforto e segurança das pessoas que operam os equipamentos e transitam pela fundação.

6 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL VIA ALGORITMO GENÉTICO

Com base nas análises realizadas e apresentadas ao longo do Capítulo 4, foi possível constatar um superdimensionamento da estrutura de estudo, resultando em um projeto antieconômico. Dessa forma, foi realizada uma otimização da estrutura, levando-se em consideração as condições de operação do conjunto motor-compressor e uma série de restrições normativas. O presente Capítulo apresenta os procedimentos realizados para otimizar o projeto da estrutura, bem como seus resultados. Para otimizar a estrutura, foi utilizado o Algoritmo Genético do *toolbox* de otimização global do MATLAB R2015b, em conjunto com o software ANSYS de elementos finitos.

6.1 A interface ANSYS-MATLAB

O software MATLAB R2015b possui um módulo (*toolbox*) de otimização próprio, o qual disponibiliza uma ferramenta para aplicação de algoritmos genéticos. Para a utilização deste módulo de otimização, faz-se necessária a definição correta do problema, em uma linguagem adequada ao software. A definição do problema de otimização baseia-se nos fundamentos básicos dos Algoritmos Genéticos, sendo necessário definir a função objetivo, as variáveis de projeto e restrições, bem como alguns parâmetros de otimização necessários para o funcionamento do algoritmo, tais como taxa de mutação e de *crossover*.

Quanto a parte de análise estrutural, o ANSYS é o software responsável pela execução das análises estruturais para o processo de otimização. O MATLAB é responsável por gerar os indivíduos em cada população, sendo cada indivíduo um conjunto de valores para as variáveis de projeto. Para cada indivíduo, são realizadas as análises estruturais no ANSYS e obtidas as respostas em termos da função objetivo e das restrições de projeto, que serão levadas ao Algoritmo Genético do MATLAB para a avaliação e geração de novos indivíduos mais aptos. Na Fig. 37 é possível verificar um fluxograma do funcionamento dos dois softwares em conjunto.

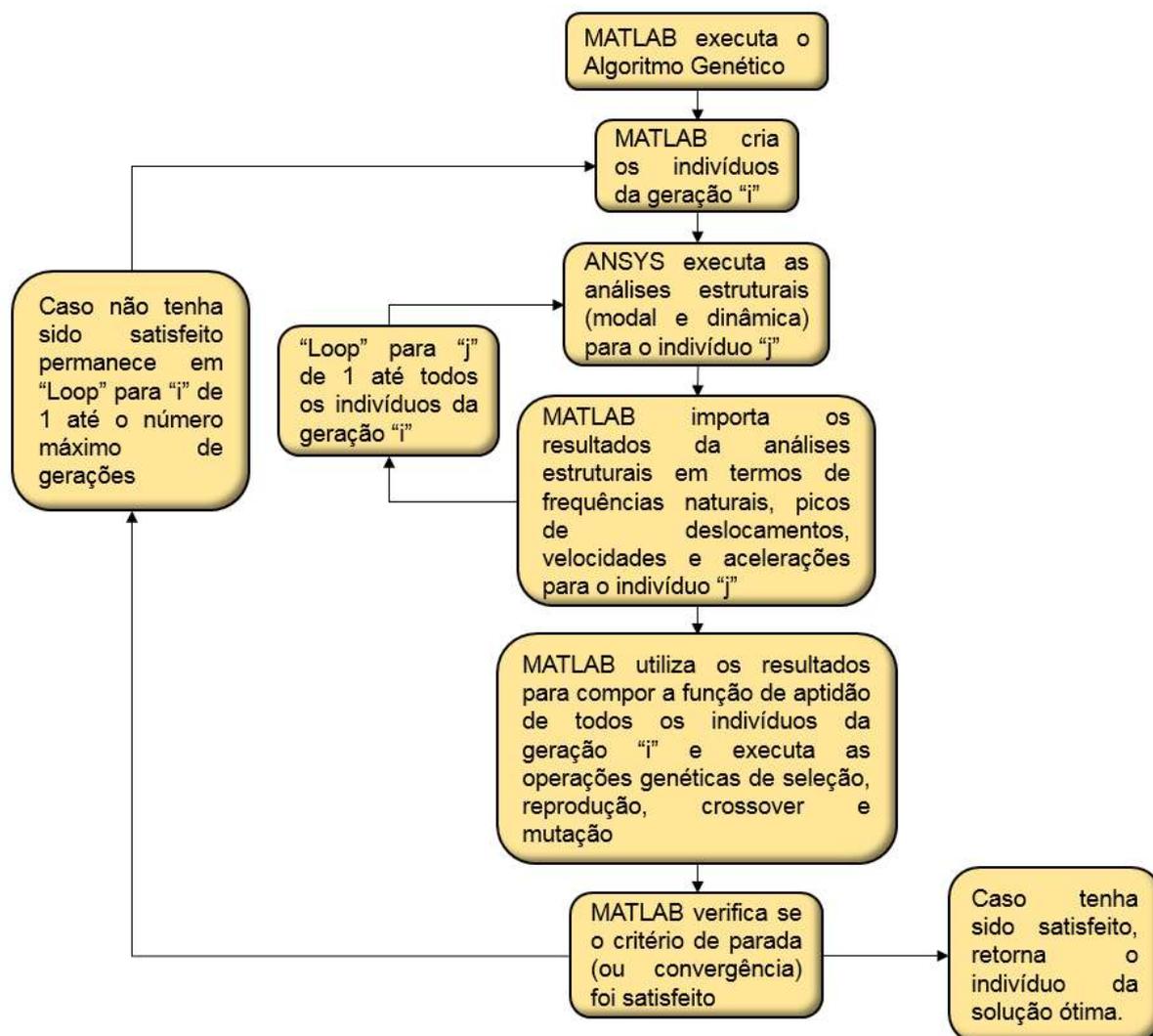


Figura 37 – Fluxograma de funcionamento da interface MATLAB-ANSYS

É válido ressaltar que quem comanda todo o processo é o Algoritmo Genético do MATLAB. Ao processo de realizar as análises estruturais para um único indivíduo e analisar os resultados no MATLAB, dá-se o nome de iteração. Dessa forma, para cada geração contendo N indivíduos serão realizadas N iterações. A cada iteração, o MATLAB utiliza um comando para executar o ANSYS em seu modo *batch* (escrita na linguagem de programação APDL do ANSYS) para executar uma análise modal e uma análise dinâmica da estrutura.

A linguagem APDL é própria do ANSYS e é relativamente simples de ser escrita. Em um arquivo de extensão ".txt" o usuário utiliza os códigos próprios do ANSYS (disponíveis em seu manual digital acoplado ao *software*) para definir as dimensões do modelo, elementos finitos a utilizar, carregamentos, condições de

contorno, propriedades de material e os demais parâmetros de interesse para a modelagem.

Em cada iteração o ANSYS fornece uma resposta associada ao indivíduo, em termos de deslocamentos, velocidades, acelerações e frequências naturais. Tais respostas são levadas novamente ao Algoritmo Genético do MATLAB para verificação das restrições de projeto e verificação de convergência que, ao fim das iterações para os indivíduos de uma determinada geração, fornecem subsídios para o algoritmo genético executar as operações genéticas de seleção, reprodução, *crossover* e mutação, gerando novos indivíduos mais aptos para a próxima geração.

6.2 O Problema de Otimização da Estrutura

O problema teve como objetivo a redução do volume total da fundação, buscando uma nova configuração do projeto, de modo a atender aos requisitos recomendados por normas com o volume mínimo. Tais requisitos foram definidos com base em normas para a verificação da estrutura, em seus aspectos de concepção geométrica e frequências naturais, de modo a atender as recomendações de segurança de operação das máquinas, normas para verificação de segurança das pessoas e conforto humano.

Dessa forma, para parametrizar o problema de otimização foi preciso definir a função objetivo (Volume da estrutura) em termos das variáveis de projeto selecionadas.

6.2.1 A Função Objetivo e as Variáveis de Projeto

Para a definição da função objetivo, foi necessário selecionar quais as possíveis variáveis de projeto poderiam ser alteradas para uma melhor configuração de projeto que possibilita a minimização do volume da fundação. Dessa forma, levando-se em conta a concepção geométrica da fundação, foram elencadas todas as variáveis possíveis de serem alteradas, sem influenciar na montagem dos equipamentos apoiados na estrutura. Foram escolhidas três variáveis de projeto, representando a espessura do bloco de coroamento das estacas e as duas alturas

das bases nas quais o motor e o compressor se apoiam. A Fig. 38 mostra de forma esquemática tais variáveis.

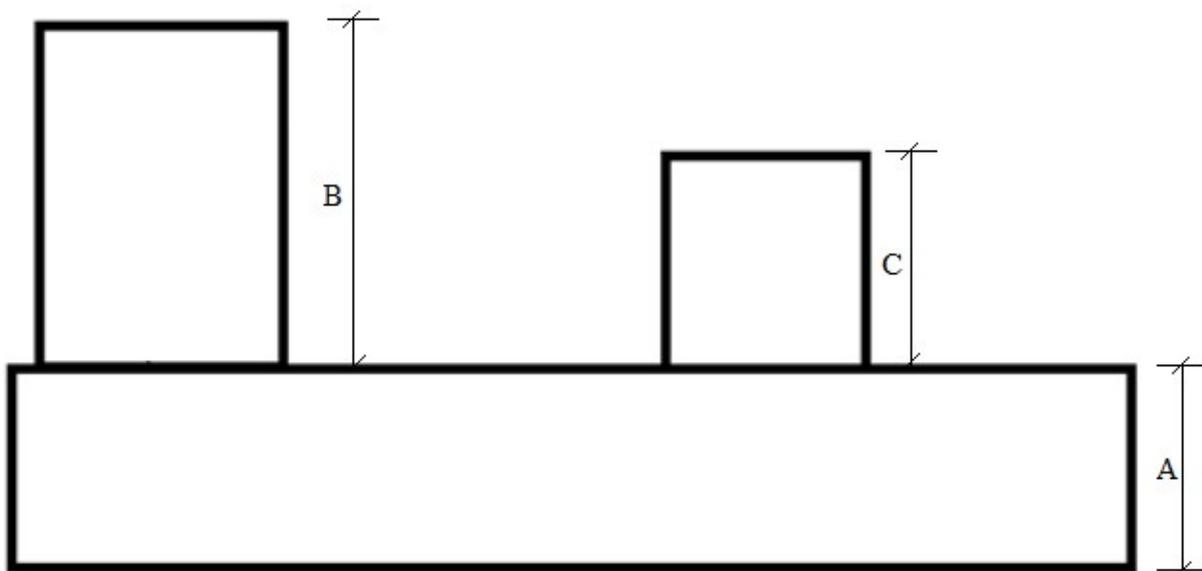


Figura 38 – Detalhe esquemático das variáveis de projeto.

A variável nomeada por A representa a espessura do bloco de coroamento das estacas, a variável B representa a altura da base na qual se apoia o motor e a variável C a altura da base na qual se apoia o compressor.

Não foi possível estabelecer mais variáveis de projeto, pois devido ao perfil geométrico da estrutura, as possíveis candidatas para as variáveis de projeto seriam as larguras e os comprimentos do bloco de coroamento e das bases dos equipamentos. Tais larguras e comprimentos não poderiam ser escolhidos como variáveis de projeto pois iriam alterar a concepção de montagem dos equipamentos mecânicos ali apoiados e diversos sistemas auxiliares como redes e tubulações que passam pela estrutura, além do projeto de arquitetura.

Considerando-se então as três variáveis de projeto selecionadas, a função objetivo (Volume da estrutura) foi definida como na Eq. (75).

$$V(x_1, x_2, x_3) = 152,985 * x_1 + 17,466 * x_2 + 5,04 * x_3 + 0,825 \text{ m}^3 \quad (75)$$

Onde as variáveis de projeto são dadas pelas Eq. (76), (77) e (78).

$$x_1 = A \quad (76)$$

$$x_2 = B \quad (77)$$

$$x_3 = C \quad (78)$$

Ressalta-se o fato de que os termos que acompanham as variáveis de projeto representam as áreas dos respectivos blocos considerados e o termo independente representa uma constante que considera o volume de dois pedestais fixos nos quais se apoia uma tubulação.

Um outro ponto importante diz respeito à natureza das variáveis de projeto. O algoritmo genético no MATLAB permite trabalhar com variáveis contínuas ou inteiras (discretas), de tal forma que seu funcionamento apresenta melhores resultados em termos computacionais quando utilizadas variáveis inteiras. Dessa forma, foi feita uma discretização das variáveis no espaço de projeto considerado para poder utilizar variáveis inteiras.

6.2.2 As Restrições de Projeto

6.2.2.1 Restrições sobre as variáveis de projeto

A primeira restrição de projeto foi considerada com base na Norma Petrobrás N-1848, que estabelece que a altura do bloco de coroamento das estacas não tenha um valor menor do que 0,60 m. Assim, essa restrição foi inserida como o limite inferior para a variável A. Para as variáveis B e C foram considerados como valores para seus respectivos limites inferiores os valores de 2,0 m e 1,5 m. Quanto aos valores limite superiores para as variáveis de projeto, foram considerados os valores já existentes para o projeto original. Assim, nas Eq. (79), (80) e (81) é possível verificar o espaço de projeto para as variáveis A, B e C.

$$0,6 \text{ m} \geq A \geq 1,5 \text{ m} \quad (79)$$

$$2,0 \text{ m} \geq B \geq 3,84 \text{ m} \quad (80)$$

$$1,5 \text{ m} \geq C \geq 2,65 \text{ m} \quad (81)$$

A discretização realizada para utilizar-se variáveis inteiras no algoritmo genético foi obtida realizando uma subdivisão do espaço de projeto em intervalos de 1cm para cada variável. Logo, o espaço de projeto com as variáveis discretizadas pode ser visto pelas Eq. (85), (85) e (86).

$$A \rightarrow [0,60; 0,61; 0,62; \dots, 1,48; 1,49; 1,50] \text{ m} \quad (82)$$

$$B \rightarrow [2,00; 2,01; 2,02; \dots; 3,82; 3,63; 3,84] \text{ m} \quad (83)$$

$$C \rightarrow [1,50; 1,51; 1,52; \dots; 2,63; 2,64; 2,65] \text{ m} \quad (84)$$

Salienta-se para o fato de que a altura do bloco no qual se apoia o motor é maior do que a altura do bloco no qual se apoia o compressor. Isso deve-se à concepção de montagem dos dois equipamentos em suas respectivas bases. Logo, a fim de se garantir a continuidade dessa concepção de montagem, foi introduzida uma restrição para garantir que a variável B sempre seja maior do que a variável C, conforme a Eq. (85).

$$C - B \leq 0 \quad (85)$$

6.2.2.2 Restrições referentes a condições de operação dos equipamentos

Quanto às frequências naturais da estrutura, a Norma DIN 4024-1/2 preconiza que as frequências naturais mais elevadas da estrutura devem estar defasadas de ao menos 10% da frequência de operação dos equipamentos apoiados na estrutura. Logo, a cada análise modal realizada, foram obtidas as frequências naturais associadas aos 6 primeiros modos de vibração da estrutura, de forma que estes valores devem estar defasados de ao menos 10% do valor da frequência de operação (frequência forçada - f_f) de 30 Hz (1800 RPM). Logo, para a formulação foi atribuído como restrição de projeto a Eq. (86).

$$0,1 - \left\| \frac{f_f - f_{ni}}{f_f} \right\| \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (86)$$

Adicionalmente, no que tange à verificação dos equipamentos, foram utilizados como restrições as recomendações de segurança de operação, em termos de velocidades impostas aos equipamentos, definidas pela Norma ISO 2372, que estabelece os valores limites de severidade de vibrações de máquinas. Dessa forma, de acordo com a Tabela 2, considerando-se os equipamentos como de Classe III, com uma severidade classificada como boa para vibração em máquinas, o valor limite de velocidades impostas ao conjunto de equipamentos não deve ultrapassar 2,8 mm/s. Assim, a restrição imposta ao problema de otimização no MATLAB assume a forma matemática dada pela Eq. (87).

$$[Velocidades\ Máximas]_i - 2,8\text{ mm/s} \leq 0 \quad i = 1,2, \dots, 16\text{ nós} \quad (87)$$

Ainda sobre verificação dos equipamentos, foram utilizados critérios em termos de deslocamentos dinâmicos aos quais os equipamentos são submetidos durante a vibração. Logo, de acordo com o preconizado pela Tabela 3, para máquinas de alta velocidades de até 3000 RPM em vibrações verticais, os deslocamentos máximos permitidos para uma operação segura dos equipamentos não devem ultrapassar o limite de 20 μm . Logo, foi implementada a restrição no MATLAB de acordo com a Eq. (88).

$$[Deslocamentos\ Máximos]_i - 20\ \mu\text{m} \leq 0 \quad i = 1,2, \dots, 16\text{ nós} \quad (88)$$

É válido atentar-se ao fato de que os deslocamentos e as velocidades máximas são em termos absolutos, não levando em conta o sentido em qual tais valores possam ocorrer. Assim para fins de cálculo dessas restrições foram utilizados os valores absolutos.

Além disso, tanto as velocidades máximas quanto os deslocamentos máximos considerados foram obtidos nos 16 nós do modelo em elementos finitos referentes aos chumbadores dos equipamentos.

6.2.2.3 Restrições referentes a segurança e conforto humano

Em termos de segurança e do conforto humano das pessoas que operam os equipamentos e trafegam pela estrutura, foram consideradas as restrições normativas dadas pela ISO 2631, em termos das acelerações máximas obtidas em pontos específicos da estrutura. Tais pontos estão demonstrados na Fig. 30, onde foram escolhidos nove pontos da estrutura, representados pelos nós nomeados de Q a Y. A Norma ISO 2631-2 estabelece que para uma vibração da ordem de 30 Hz (Frequência de vibração forçada dos equipamentos), o valor máximo da aceleração no sentido longitudinal (vibração dos pés à cabeça), é da ordem de 1 m/s^2 , para um nível de eficiência reduzido no trabalho (fadiga) em uma carga horária de 8 horas diárias. Logo, a restrição é da forma da Eq. (89).

$$[Acelerações\ Máximas]_j - 1\ \text{m/s}^2 \leq 0 \quad j = 1,2, \dots, 9\text{ nós} \quad (89)$$

Da mesma forma que para os deslocamentos e velocidades, tais acelerações são consideradas como os valores absolutos, não sendo levado em conta o sentido em que ocorrem.

6.3 Procedimentos de Otimização Realizados

O algoritmo genético do *toolbox* de otimização do MATLAB permite uma certa flexibilidade quanto à escolha dos métodos de criação de novos indivíduos para as próximas gerações. Existem algumas funções pré-estabelecidas de *crossover* e de mutação disponíveis para o usuário aplicar ao problema da maneira que julgar mais adequada e, ainda, permite ao usuário utilizar suas próprias funções customizadas.

O método de seleção dos indivíduos para reprodução também pode ser definido a partir de funções pré-estabelecidas pelo MATLAB, ou o próprio usuário pode definir sua função de seleção customizada. Para este trabalho, foi utilizada a função de seleção *Stochastic Uniform* (do Algoritmo Genético do MATLAB) que cria uma linha fictícia onde cada indivíduo corresponde a um segmento da linha, de comprimento proporcional à sua função de aptidão. O algoritmo “se move” ao longo dessa linha em “passos” de tamanho constante e, a cada “parada”, aloca à população temporária o indivíduo pertencente ao segmento de linha em que está.

O algoritmo genético utiliza um recurso chamado de *Elite Count*, que seleciona 5% dos indivíduos da população com maior função de aptidão e, automaticamente, os leva à próxima geração, de modo a manterem suas características genéticas na geração futura.

Com os indivíduos que faltam para compor a próxima geração, o algoritmo genético analisa a taxa de *crossover* definida pelo usuário. A taxa de *crossover* define o percentual de indivíduos que serão criados pela operação genética de reprodução *crossover*, sendo o restante criados por mutação. Logo, uma taxa de *crossover* de 1, define que 100% dos indivíduos serão criados por *crossover* e nenhum por Mutação, e vice-versa.

A função de *crossover* utilizada pelo Algoritmo Genético do MATLAB intitula-se por *Scattered*. Essa função cria aleatoriamente um vetor de tamanho igual ao do vetor

de variáveis de projeto, que assume os caracteres de 0 ou 1. Os genes que possuem o número 1 associados serão herdados do primeiro indivíduo selecionado para reprodução e o número 0, do segundo, conforme exemplo a seguir:

1° indivíduo $\rightarrow [a \ b \ c \ d \ e]$

2° indivíduo $\rightarrow [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$

Vetor aleatório $\rightarrow [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$

Indivíduo criado $\rightarrow [a \ b \ 3 \ 4 \ e]$

A mutação foi definida pela função *Uniform Mutation*, do Algoritmo Genético do MATLAB. Essa função é definida em duas etapas. A primeira etapa constitui em selecionar aleatoriamente uma componente do vetor de variáveis de projeto, que possui uma probabilidade (estabelecida pelo usuário) de ser alterada. Após isso, o algoritmo genético seleciona um número aleatório entre 0 e 1 e, se esse número for maior do que a probabilidade, então não ocorre a mutação e o indivíduo será levado à próxima geração sem mutação. Caso contrário, ocorrerá a mutação. A mutação se dará na parte do vetor de projeto selecionada aleatoriamente na primeira etapa do processo e o número lá existente, será aleatoriamente substituído por outro que esteja dentro dos valores definidos pelos limites superior e inferior do espaço de projeto. A seguir um exemplo:

Indivíduo sem mutação $\rightarrow [a \ b \ \mathbf{C} \ d \ e]$

Indivíduo com mutação $\rightarrow [a \ b \ \mathbf{D} \ d \ e]$

Neste trabalho foram realizadas dois procedimentos de otimização utilizando-se a interface MATLAB-ANSYS. As duas análises realizadas diferem entre si apenas na forma em que realizam suas operações genéticas de *crossover* e mutação. O primeiro procedimento realizado utilizou uma taxa de *crossover* de 70% e uma probabilidade de mutação de 10%. O segundo procedimento realizado utilizou tanto a taxa de *crossover* quanto a probabilidade de mutação variando a cada geração. Nesta segunda análise a taxa de *crossover* começou em 70% e foi diminuindo a cada geração, até chegar a 50%, e a probabilidade de mutação iniciou em 10%, aumentando a cada geração e chegando ao valor final de 30%. Para ambos os

procedimentos de otimização foram criados 90 indivíduos por geração em um total de 20 gerações.

6.4 Resultados e Pós-Processamentos

O projeto da estrutura, na sua configuração inicial, possui um volume de 310,7 m³. Após a aplicação do algoritmo genético ao problema em questão, na primeira análise, chegou-se a uma configuração com volume final de 157 m³, de tal forma que houve uma redução de, aproximadamente, 49,4% do volume original da estrutura.

As dimensões obtidas para a nova configuração ótima da estrutura em comparação com as dimensões originais da estrutura são apresentadas pela Tabela 12.

Tabela 12 – Novas dimensões propostas pelo primeiro procedimento de otimização

Dimensão	Original	Otimizada	Diferença
A	1,500 m	0,70 m	53,33%
B	3,838 m	2,25 m	41,38%
C	2,655 m	1,95 m	26,55%
Volume	310,7 m ³	157,00 m ³	49,46%

É possível verificar (Fig. 39) o modelo em elementos finitos representativo da estrutura com sua nova configuração:

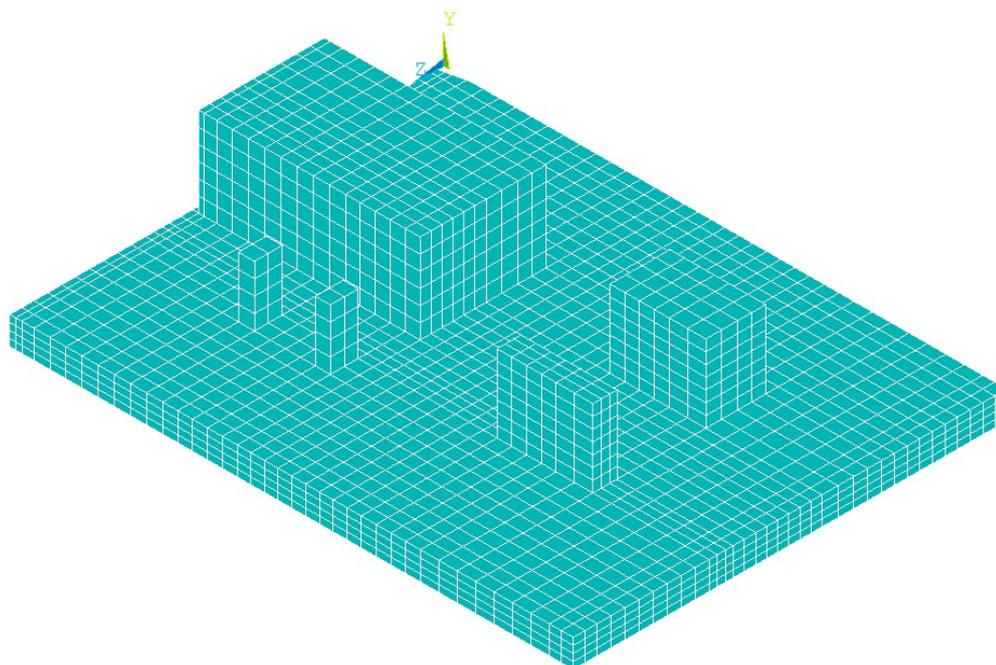


Figura 39 – Modelo em elementos finitos representativo da estrutura proposta pelo primeiro procedimento de otimização

Para os valores das frequências naturais da estrutura otimizada, é possível verificar a Tabela 13.

Tabela 13 – Frequências naturais da nova configuração proposta pelo primeiro procedimento de otimização.

Frequências Naturais (Hz)				
f_n	Otimizada	Original	Diferença	Restrição
1	4,84	3,46	39,9%	-0,74
2	5,00	3,55	40,8%	-0,73
3	6,23	4,35	43,2%	-0,69
4	19,36	15,49	25,0%	-0,25
5	22,40	18,09	23,8%	-0,15
6	26,83	19,49	37,7%	-0,01
7	28,30	26,13	8,3%	0,04
8	31,88	28,90	10,3%	0,04
9	37,82	37,67	0,4%	-0,16
10	42,94	44,46	3,4%	-0,33
11	43,59	51,75	15,8%	-0,35
12	45,79	52,97	13,6%	-0,43
13	55,06	60,05	8,3%	-0,74
14	55,91	68,10	17,9%	-0,76
15	59,13	71,95	17,8%	-0,87

Considerando-se a frequência de excitação dos equipamentos de 30 Hz, a 7ª e a 8ª frequências naturais encontram-se com uma diferença de menos 10% entre as frequências mais elevadas. Entretanto, torna-se necessário ressaltar que foram inseridas como restrições apenas a defasagem de 10% das 6 primeiras frequências naturais do sistema vibratório, conforme preconizado pela Norma DIN-4024-1/2.

Em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações máximas, é possível verificar nas Tabelas 14, 15 e 16 os valores para a nova configuração de projeto, bem como a comparação com os valores originais e das restrições de projeto.

Conforme é possível observar nas Tabelas 14 e 16 as restrições em deslocamentos e acelerações encontram-se, ainda, abaixo dos valores estabelecidos por normas, com uma certa folga considerável. Os maiores deslocamentos e as maiores acelerações estão abaixo de cerca de 80% do limite estabelecido por norma. Já para as velocidades (Tabela 15), é possível verificar que no nó L, o valor se aproximou bastante do limite estabelecido pela norma, de 2,8 mm/s.

Tabela 14 – Deslocamentos máximos na configuração proposta pelo primeiro procedimento de otimização.

Deslocamentos Máximos (μm)				
Nó	Otimizada	Original	Diferença	Restrição (Max. 20 μm)
A	15,46	3,81	306%	-4,54
B	14,11	3,53	300%	-5,89
C	12,79	3,35	282%	-7,21
D	13,25	3,42	287%	-6,76
E	14,40	3,56	304%	-5,60
F	11,87	3,91	204%	-8,13
G	12,36	3,80	225%	-7,64
H	12,87	3,71	247%	-7,13
I	13,38	3,77	255%	-6,62
J	14,56	4,00	264%	-5,44
K	10,63	4,42	140%	-9,37
L	15,74	5,10	209%	-4,26
M	9,84	3,60	173%	-10,16
N	14,65	4,38	234%	-5,35
O	11,12	3,82	191%	-8,88
P	13,85	4,06	241%	-6,15

Tabela 15 – Velocidades máximas na configuração proposta pelo primeiro procedimento de otimização.

Velocidades Máximas (mm/s)				
Nó	Otimizada	Original	Diferença	Restrição (Máx. 2.8 mm/s)
A	2,56	0,48	433%	-0,24
B	2,27	0,48	374%	-0,53
C	2,14	0,48	347%	-0,66
D	2,18	0,47	363%	-0,62
E	2,40	0,51	370%	-0,40
F	2,08	0,51	308%	-0,72
G	2,10	0,51	311%	-0,70
H	2,13	0,51	317%	-0,67
I	2,15	0,60	259%	-0,65
J	2,34	0,65	260%	-0,46
K	1,85	0,69	169%	-0,95
L	2,79	0,99	182%	-0,01
M	1,61	0,75	115%	-1,19
N	2,49	0,89	180%	-0,31
O	2,05	0,66	210%	-0,75
P	2,59	0,78	232%	-0,21

Tabela 16– Acelerações máximas na configuração proposta pelo primeiro procedimento de otimização.

Acelerações Máximas (m/s ²)				
Nó	Otimizada	Original	Diferença	Restrição (Máx. 1,0 m/s ²)
Q	0,74	0,21	254%	-0,26
R	0,62	0,24	157%	-0,38
S	0,55	0,32	72%	-0,45
T	0,60	0,24	150%	-0,40
U	0,59	0,15	291%	-0,41
V	0,68	0,34	101%	-0,32
W	0,55	0,36	52%	-0,45
X	0,56	0,14	297%	-0,44
Y	0,71	0,15	373%	-0,29

Quanto à evolução do algoritmo genético, na busca da configuração ótima, é possível identificar no gráfico da Fig. 40, os valores da função objetivo para o melhor indivíduo e a o valor médio da função objetivo para os indivíduos, a cada geração.

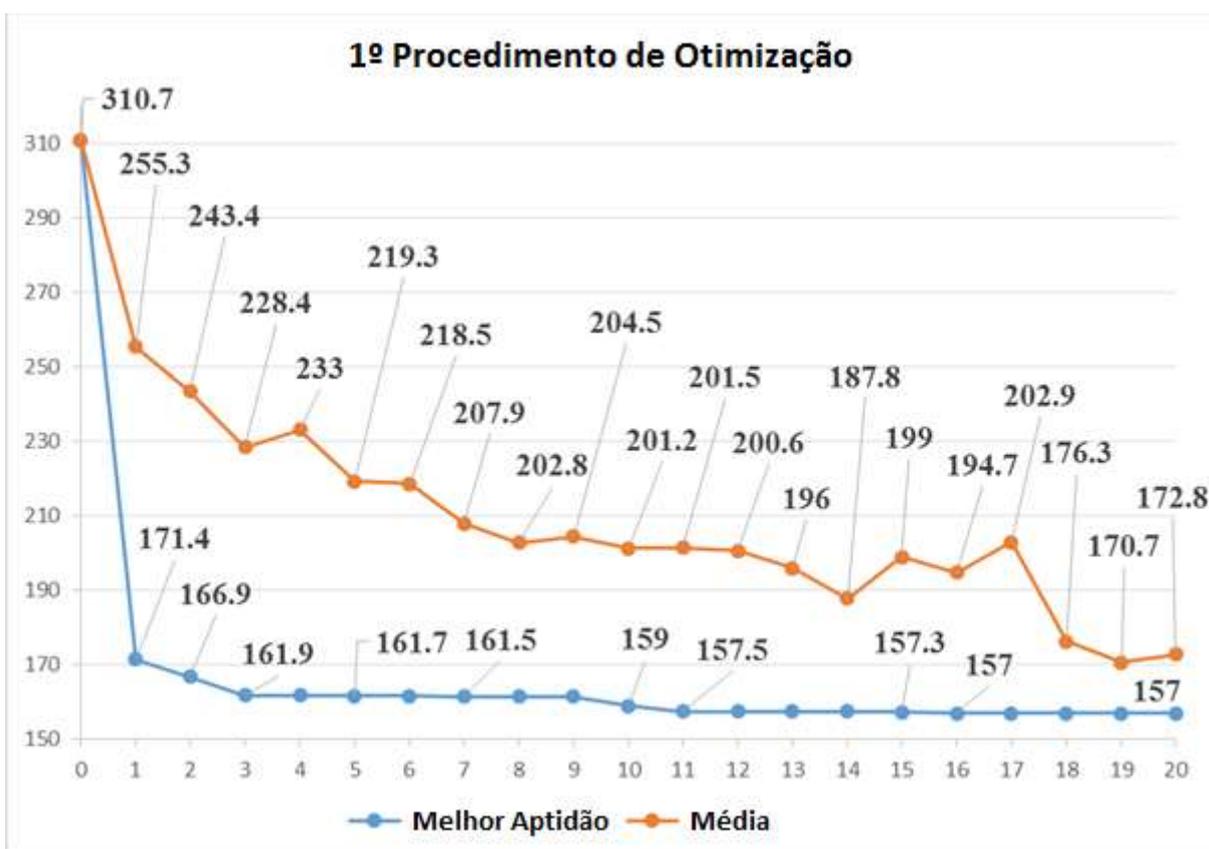


Figura 40 – Gráfico da evolução do algoritmo genético do primeiro procedimento de otimização.

Quanto aos resultados obtidos pelo segundo procedimento de otimização, chegou-se a uma configuração ótima com volume total de 157,3 m³, incorrendo em uma redução de, aproximadamente, 49,3% do volume original da estrutura.

As dimensões ótimas propostas pelo segundo procedimento de otimização, em comparação com as dimensões originais da estrutura, são apresentadas pela Tabela 17:

Tabela 17 – Novas dimensões propostas pelo segundo procedimento de otimização.

Dimensão	Original	Otimizada	Diferença
A	1,500 m	0,70 m	53,33%
B	3,838 m	2,31 m	39,81%
C	2,655 m	1,79 m	32,58%
Volume	310,7 m ³	157,3 m ³	49,37%

Na Fig. 41, pode-se verificar o modelo em elementos finitos representativo da estrutura na configuração de projeto proposta pelo segundo procedimento de otimização.

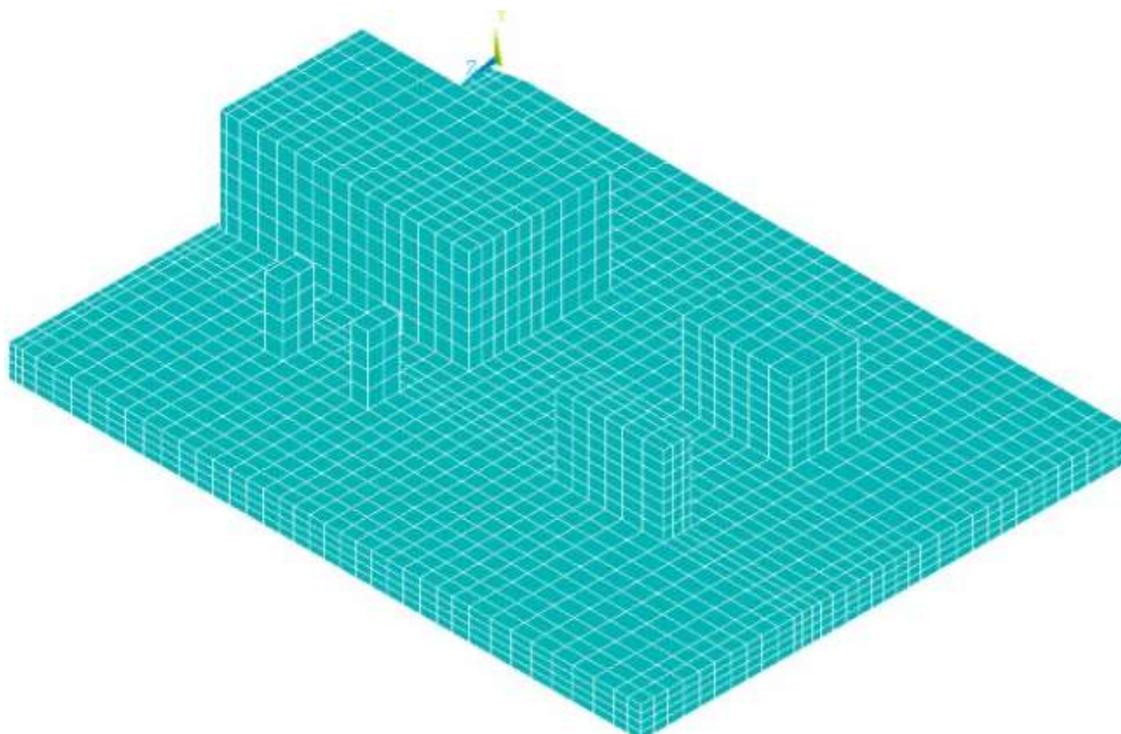


Figura 41 – Modelo em elementos finitos representativo da estrutura proposta pelo segundo procedimento de otimização

O segundo procedimento de otimização resultou em frequências naturais conforme a Tabela 18.

Tabela 18 – Frequências naturais da nova configuração proposta pelo segundo procedimento de otimização.

Frequências Naturais (Hz)				
f_n	Otimizada	Original	Diferença	Restrição
1	4,84	3,46	39,9%	-0,74
2	5,00	3,55	40,8%	-0,73
3	6,25	4,35	43,6%	-0,69
4	19,23	15,49	24,2%	-0,26
5	22,38	18,09	23,7%	-0,15
6	26,68	19,49	36,9%	-0,01
7	28,49	26,13	9,0%	0,05
8	32,12	28,90	11,1%	0,03
9	38,21	37,67	1,4%	-0,17
10	43,08	44,46	3,1%	-0,34
11	43,81	51,75	15,3%	-0,36
12	46,07	52,97	13,0%	-0,44
13	54,99	60,05	8,4%	-0,73
14	56,23	68,10	17,4%	-0,77
15	61,35	71,95	14,7%	-0,95

Da mesma forma que para o primeiro procedimento de otimização, a 7^a e a 8^a frequências naturais do sistema encontram-se com uma defasagem menor do que 10% para as frequências mais elevadas. Entretanto, somente as 6 primeiras frequências naturais foram consideradas para fins de restrição de projeto.

Para os deslocamentos, velocidades e acelerações máximas, a estrutura com a configuração de projeto proposta pelo segundo procedimento de otimização, resultou em valores que podem ser observados pelas Tabelas 19, 20 e 21.

Similar à primeiro procedimento de otimização, na segunda análise os deslocamentos e as acelerações ainda permaneceram em valores abaixo das restrições estabelecidas por normas. Os maiores deslocamentos e as maiores acelerações estão abaixo de cerca de 83% do limite estabelecido por norma. Ainda assim, para os nós L, N e P, as velocidades (Tabela 20) atingiram valores bem próximos aos limites permitidos pelas restrições normativas, de 2,8 mm/s.

Tabela 19 – Deslocamentos máximos na configuração proposta pelo segundo procedimento de otimização.

Deslocamentos Máximos (μm)				
Nó	Otimizada	Original	Diferença	Restrição (Max. 20 μm)
A	14,10	3,81	270%	-5,90
B	12,43	3,53	252%	-7,57
C	11,89	3,35	255%	-8,11
D	12,90	3,42	277%	-7,10
E	14,29	3,56	301%	-5,71
F	11,18	3,91	186%	-8,82
G	11,53	3,80	203%	-8,47
H	11,89	3,71	220%	-8,11
I	12,23	3,77	224%	-7,77
J	13,73	4,00	243%	-6,27
K	10,63	4,42	141%	-9,37
L	16,52	5,10	224%	-3,48
M	10,99	3,60	205%	-9,01
N	16,61	4,38	279%	-3,39
O	11,72	3,82	207%	-8,28
P	14,84	4,06	265%	-5,16

Tabela 20 – Velocidades máximas na configuração proposta pelo segundo procedimento de otimização.

Velocidades Máximas (mm/s)				
Nó	Otimizada	Original	Diferença	Restrição (Máx. 2.8 mm/s)
A	2,21	0,48	361%	-0,59
B	2,00	0,48	316%	-0,80
C	1,95	0,48	306%	-0,85
D	2,12	0,47	351%	-0,68
E	2,39	0,51	368%	-0,41
F	1,91	0,51	274%	-0,89
G	1,94	0,51	280%	-0,86
H	1,97	0,51	287%	-0,83
I	2,01	0,60	234%	-0,79
J	2,13	0,65	228%	-0,67
K	1,77	0,69	157%	-1,03
L	2,79	0,99	182%	-0,01
M	1,83	0,75	144%	-0,97
N	2,77	0,89	211%	-0,03
O	1,90	0,66	188%	-0,90
P	2,77	0,78	255%	-0,03

Tabela 21 – Acelerações máximas na configuração proposta pelo segundo procedimento de otimização.

Acelerações Máximas (m/s ²)				
Nó	Otimizada	Original	Diferença	Restrição (Máx. 1,0 m/s ²)
Q	0,67	0,21	217%	-0,33
R	0,58	0,24	143%	-0,42
S	0,50	0,32	57%	-0,50
T	0,61	0,24	156%	-0,39
U	0,63	0,15	323%	-0,37
V	0,68	0,34	99%	-0,32
W	0,52	0,36	45%	-0,48
X	0,59	0,14	325%	-0,41
Y	0,64	0,15	326%	-0,36

Quanto à evolução do algoritmo genético para a segunda análise, é possível verificar no gráfico da Fig. 42, os valores da função objetivo para o melhor indivíduo e da média das funções objetivo a cada geração.

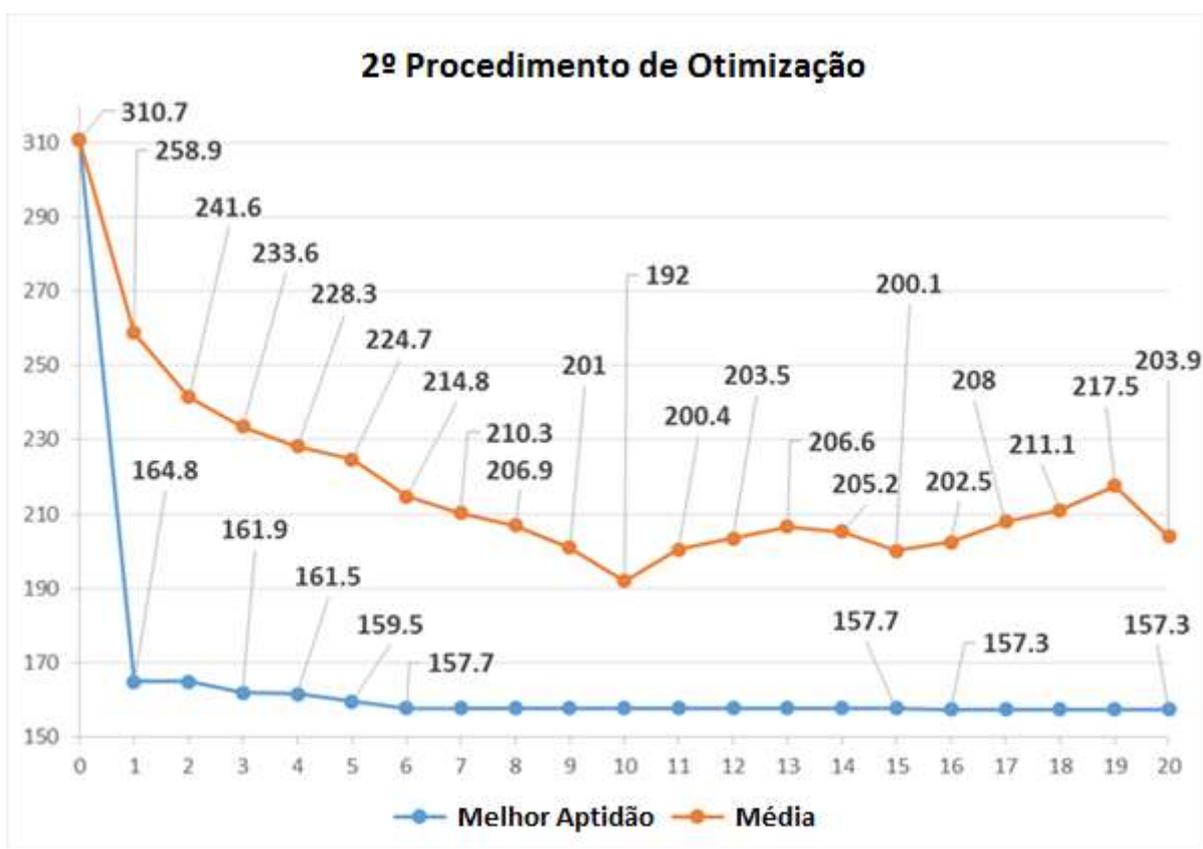


Figura 42 – Gráfico da evolução do algoritmo genético da segundo procedimento de otimização

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Introdução

O objetivo principal deste trabalho foi desenvolver um modelo de otimização estrutural de uma fundação projetada para suportar um conjunto motor-compressor de alta capacidade, aliado à análise dinâmica da estrutura, a fim de prever os comportamentos e restringir, no problema de otimização, os deslocamentos, velocidades, acelerações e frequências naturais da estrutura. Para isso, foi utilizado um algoritmo genético, utilizando-se a interface MATLAB-ANSYS, a fim de se obter a melhor redução possível do volume estrutural da fundação, sem comprometer o funcionamento dos equipamentos, a segurança das pessoas e as recomendações geométricas de projeto.

Foram realizados dois procedimentos de otimização, as quais diferem entre si apenas nos parâmetros utilizados para a taxa de *crossover* e a probabilidade de mutação. A primeira análise foi realizada com a taxa de *crossover* fixa em 70% e a probabilidade de mutação em 10%. Já a segunda análise foi realizada com uma variação desses parâmetros ao longo das gerações, de tal forma que a taxa de *crossover* iniciou em 70%, reduzindo até 50% e a probabilidade de mutação começou em 10%, aumentando até chegar em 30% na última geração.

7.2 Conclusões

A partir dos dois procedimentos de otimização realizados, constatou-se que a redução percentual do volume original da estrutura permaneceu em torno de 49,4%, reduzindo de 310,7 m³ para 157 m³ na primeira análise e 157,3 m³ para a segunda análise.

Quanto às restrições, os limites de acelerações e deslocamentos máximos definidos por normas foram respeitados, com uma certa folga considerável. Quanto aos limites de velocidade máximas impostas à estrutura em suas duas novas configurações de projeto, foram observados valores bem próximos aos estabelecidos

por normas, de forma que esta foi uma das restrições que limitou a otimização estrutural.

No que tange às restrições em frequências naturais, percebeu-se que, para as duas análises, a configuração estrutural proposta pela otimização não atendeu plenamente a diferença mínima de 10% para as frequências mais elevadas. A 7ª e a 8ª frequências naturais do sistema, encontram-se em valores próximos à frequência de excitação dos equipamentos. Entretanto, foram consideradas para fins de restrição de projeto, as 6 primeiras frequências naturais do sistema, conforme preconizado pela Norma DIN-4024-1/2.

Entretanto, há de se salientar que, quando comparado à configuração original da estrutura, a 8ª frequência natural do sistema assume o valor de 28,9 Hz. Ou seja, mesmo que não atendendo plenamente a defasagem em frequências naturais para as frequências mais elevadas, o projeto otimizado encontra-se em uma configuração mais favorável do que a original, pois na configuração original de projeto a análise modal revelou que a frequência natural mais próxima da frequência de excitação encontrava-se com uma diferença de 3,67% e, para as duas configurações ótimas obtidas nos dois procedimentos de otimização, tais valores são de 5,67% (28,30 Hz) e 5,03% (28,49 Hz).

Em termos de comparação entre os dois procedimentos de otimização realizados, não foram observadas vantagens em se utilizar taxas de *crossover* e probabilidades de mutação variáveis ao longo das gerações. Comparando-se os gráficos das Figuras 40 e 42, foi possível observar que na primeira análise, o valor da média da função objetivo para os indivíduos ao longo das gerações apresenta uma tendência a se aproximar do valor ótimo, ou seja, a população encontra-se cada vez mais apta e os indivíduos cada vez com características mais parecidas. Já para a segunda análise, a partir da 10ª geração verifica-se que a média para a função objetivo dos indivíduos apresenta-se instável, aumentando até 13ª geração, depois reduzindo até 15ª, aumentando novamente até a 19ª e reduzindo mais uma vez na 20ª. Tal instabilidade justifica-se pelo aumento da mutação, aumentando a diversificação da população que compõe a geração futura.

Quanto à evolução do algoritmo genético na busca da solução ótima, percebeu-se que, para as duas análises realizadas, a busca pelo indivíduo mais apto ocorreu

de forma parecida, tendo já na primeira geração encontrado um indivíduo que atendesse ao projeto de uma forma bem mais econômica (menor volume) que a configuração original e encontrando o indivíduo ótimo a partir da 16ª geração.

Apesar de não ser algo trivial, a implementação do algoritmo genético ao problema de otimização utilizando a interface MATLAB-ANSYS apresentou um resultado satisfatório, não ocorrendo erros ao longo de suas gerações e operações genéticas.

Finalmente, com base no desenvolvimento da presente metodologia de análise a partir dos dois procedimentos de otimização, constatou-se que, considerando-se um custo médio de R\$ 250,00 por metro cúbico de concreto, verifica-se uma possibilidade de economia em torno de R\$ 38000,00 por fundação e, de R\$ 76000,00 para as duas fundações existentes. Deve-se levar em consideração que essa potencial economia de recursos não faz referência a outros custos associados como a armadura do concreto, as estacas que talvez possam ser menos robustas, os custos de obra e outros custos indiretos, de forma que a economia pode vir ser ainda maior.

7.3 Recomendações para Trabalhos Futuros

Como sugestões e recomendações para o desenvolvimento de trabalhos futuros sobre essa estrutura, pode-se citar as seguintes:

- Desenvolvimento de uma análise de tensões para o problema de otimização, incluindo a modelagem das bases dos equipamentos e a interface com os chumbadores de tais máquinas;
- Verificação da possibilidade de realização de uma otimização topológica, a fim de propor uma alteração da configuração das bases dos equipamentos para uma fundação aporticada;
- Inclusão das estacas na modelagem para realizar a otimização estrutural levando-se em conta o efeito mais preciso da interação entre solo-estrutura.
- Alteração do algoritmo de otimização, verificando-se a possibilidade da inclusão de um operador gradiente para uma avaliação e uma convergência mais rápida da função objetivo.

- Pesquisa para a verificação da possibilidade de inclusão de análise de fadiga estrutural no problema de otimização.

REFERÊNCIAS

- [1] DALBONE, A.R.; SÁNCHEZ FILHO, E. de S., 2011. “Análise Dinâmica de Fundações Diretas para Máquinas Rotativas.” Engenharia Estudo e Pesquisa. vol. 11, n. 2, pp. 36-46.
- [2] MACHADO, F.G., “Estudo do Comportamento de Fundações Submetidas a Vibrações de Máquinas.” Dissertação de Mestrado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2010.
- [3] RODRIGUES, D. M. C. ; SILVA, J. G. S. ; BURGOS, R. B. “Modelagem Numérica e Estudo da Resposta Dinâmica de Sistemas Estruturais para Fundações de Máquinas.” In: CILAMCE 2016
- [4] SOUZA COSTA, G.A., 2013. “Análise Vibratória de Fundações de Máquinas sobre Estacas.” Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- [5] LEMONGE, A. C. C. “Aplicação de Algoritmos Genéticos em Otimização Estrutural”, COPPE/UFRJ, D.Sc, 1999.
- [6] BORGES, C. C. H. “Algoritmos Genéticos para Otimização em Dinâmica de Estruturas”, COPPE/UFRJ, D.Sc, 1999.
- [7] SILVA, M. A. & BRASIL, R. M. L. R. F & ARORA, J. S & SWAN, C. C. “Otimização de Fundações Aporticadas de Máquinas Desbalanceadas”, Escola Politécnica da USP, 2000. [8] SILVA – REV BIBLIO
- [8] SILVA, E. E. “Otimização de Estruturas de Concreto Armado Utilizando Algoritmos Genéticos”, Escola Politécnica da USP, M.Sc, 2001
- [9] CASTRO, R. E. “Otimização de Estruturas com Multi-Objetivos via Algoritmos Genéticos”, COPPE/UERJ, D.Sc, 2001
- [10] MILET, R. R. “Análise Comparativa de Métodos de Cálculo para Fundações de Máquinas”, Departamento de Engenharia Civil, UFPE, M.Sc, 2006

- [11] LIMA, B. S. “Otimização de Fundações Estaquedas”, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, UnB, M.Sc, 2007.
- [12] ASSUNÇÃO, T. M. R. C. “Considerações sobre Efeitos Dinâmicos e Carregamentos Induzidos por Fontes de Excitação em Estruturas Industriais”, DEES/UFMG, M.Sc, 2009
- [13] PEREIRA, F. L. G. “Utilização de Algoritmos Genéticos para Otimização de Blocos de Fundações Profundas”, Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-RIO, 2010.
- [14] TOMAZ, A. G. S. & ALVES, E. C. “Dimensionamento Ótimo de Blocos sobre Estacas”, UFES, 2015.
- [15] NETO, E. S. A. “Introdução à Análise Dinâmica de Fundações de Máquinas”, Escola Politécnica da USP, M.Sc, 1989.
- [16] CLOUGH, R. W., PENZIEN, J, “Dynamics of Structures”, McGraw-Hill, 3ed, 1995.
- [17] CRAIG, R.R, JR, “Structural Dynamics”, John Wiley & Sons, 1981.
- [18] SILVA, J. G. S. “Dinâmica das Estruturas Volume I: Análise no domínio do Tempo”, apostila do curso de Dinâmica da Estruturas I, PGECIV/UERJ, 2016.
- [19] AVELINO, A. F. “Elementos Finitos, A Base da Tecnologia CAE: Análise Dinâmica”, Editora Érica, 2005.
- [20] HUGHES, T. J. R. “The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis”, Prentice-Hall, 1987.
- [21] REDDY, J. N. “An Introduction to the Finite Element Method”, McGraw-Hill, 2ed, 1993.
- [22] AVELINO, A. F. “Elementos Finitos, A Base da Tecnologia CAE”, Editora Érica, 2006.
- [23] WEAVER JR., W. & JOHNSTON, P.R. “Structural Dynamics by Finite Elements”, Editora Prentice-Hall, 1987
- [24] PETROBRAS – PETRÓLEO BRASILEIRO S.A. – “N-1848 – REV. C – Projeto de Fundações de Máquinas.” Rio de Janeiro, Brasil, 2011.

- [25] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. "ACI 351 – Foundations for Dynamic Equipment." Farmington Hills, Michigan, United States of America, 2004.
- [26] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. "DIN 4024-1 – Machine Foundations – Rigid Foundations for Machinery Subjected to Periodic Vibration", Berlin, German, 1988.
- [27] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. "DIN 4024-2 – Machine Foundations – Rigid Foundations for Machinery Subjected to Periodic Vibration." Berlin, German, 1991.
- [28] INTERNATIONAL STANDARD ORGANIZATION. "ISO 2372: Mechanical Vibration of Machines with Operating Speeds from 10 to 200 rev/s." Basis for Specifying Evaluation Standards. 1974
- [29] SRINIVASULU, P., VAIDYANATHAN, C. V. "Handbook of Machine Foundations. McGraw-Hill, New Delhi, 1976.
- [30] ATAÍDE, C. A. V. Vibração. "Notas de aula da Pós-Graduação em Engenharia de Segurança do Trabalho". Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2007
- [31] INTERNATIONAL STANDARD ORGANIZATION. ISO 2631-1: "*Mechanical Vibration and Shock - Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration – Part 1: General Requirements.*" 1997.
- [32] INTERNATIONAL STANDARD ORGANIZATION, ISO 5349-1: "*Mechanical Vibration – Measurement and Evaluation of Human Exposure to Hand-Transmitted Vibration – Part 1: General Requirements.*" 2001.
- [33] INTERNATIONAL STANDARD ORGANIZATION. ISO 2631-2: "*Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration – Part 2: Human Exposure to Continuous and Shock-Induced Vibrations in Buildings (1 to 80Hz).*" 2001.
- [34] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. DIN 4150-2: "*Vibrations in Buildings - Part 2: Effects on Persons in Buildings.*" 1999.
- [35] NORMA REGULAMENTADORA. NR 15. anexo nº 8: Vibrações - Alterado pela Portaria SSMT n.º 12, Ministério do Trabalho, Brasil. 1983.

- [36] DIRETIVA EUROPÉIA - DIRECTIVE 2002/44/EC: "*On the Minimum Health and Safety Requirements Regarding the Exposure of Workers to the Risks Arising From Physical Agents (Vibration)*" - European Parliament and of the Council", 2002.
- [37] VANDERPLAATS, G.N., "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications, McGraw-Hill, New York, 1984
- [38] PONTE, D. S. "Estudo do comportamento e otimização do projeto estrutural de edifícios de concreto armado", PGECIV/UERJ, M.Sc, 2015.
- [39] RAO, S.S., "Engineering Optimization, Theory and Practice", John Wiley, New York, 2009.
- [40] ROZVANY, G., BENDSOE, M.P., KIRSCH, U., "Layout Optimization of Structures", Applied Mechanical Review, 48, no.2, pp.41-119, 1995.
- [41] SILVA, E. C. N. "Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas", Departamento de Engenharia Mecatrônica e Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da USP, D.Sc, 2005.
- [42] SANTOS, N. A. A. S. "Otimização de Torre de Aço para Aerogerador Eólico", PGECIV/UERJ, M.Sc, 2013.
- [43] BORGES, C. C. H. "Algoritmos Genéticos para Otimização em Dinâmica de Estruturas", COPPE/UFRJ, D.Sc, 1999.
- [44] ZINI, E. O. C. "Algoritmo Genético Especializado na Resolução de Problemas com Variáveis Contínuas e Altamente Restritos", UNESP, M.Sc, 2009.
- [45] ARORA, J. S. "Introduction to Optimum Design." McGraw-Hill, 1989.
- [46] CASTRO, R. E. "Otimização de Estruturas com Multi-objetivos Via Algoritmos Genéticos de Pareto", COPPE/UFRJ, D.Sc, 2001.
- [47] ANSYS - Swanson Analysis Systems, Inc., 2009 Release 12.1.