Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Giovani Peruzzo

Estudo de um operador de massa não local na teoria de Gribov-Zwanziger

Rio de Janeiro
2018

Giovani Peruzzo

Estudo de um operador de massa não local na teoria de Gribov-Zwanziger

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr Marcio André Lopes Capri

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

P471 Peruzzo, Giovani.
Estudo de um operador de massa não local na teoria de Gribov-Zwanziger / Giovani Peruzzo.- 2018.
74 f. : il.

Orientador: Marcio André Lopes Capri.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Teoria quântica de campos - Teses. 2. Campos de calibre - Teses. 3. Renormalização (Física) – Teses. 4. Simetria (Física) - Teses. I. Capri, Marcio André Lopes. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Giovani Peruzzo

Estudo de um operador de massa não local na teoria de Gribov-Zwanziger

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 27 de Fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr Marcio André Lopes Capri (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Sebastião Alves Dias
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Rio de Janeiro

2018

DEDICATÓRIA

Ao meus pais, Irineu e Verginia, e à minha nona, Lourdes.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Marcio, pela orientação, amizade e confiança, durantes esses dois anos.

Aos meus pais, Irineu e Verginia, à minha irmã Elisiane, ao meu tio Nini, à minha nona Lourdes e à minha avô Rosa, e à minha namorada Leticia.

Aos meus professores da pós-graduação da UERJ, Marcelo S. Guimarães, César A. Linhares F. Jr, Daniel Barci e, em especial pela oportunidade de ter feito um trabalho em conjunto, Silvio P. Sorella.

À UERJ e seus funcionários, em especial, Rogério Teixeira, secretário da pós-graduação, pelos serviços prestados e por não deixarem a UERJ sucumbir nesse momento financeiro tão difícil que vem passando o Estado do RJ.

Ao professor Orimar A. Battistel, por ter facilitado o meu mestrado com os seus ensinamentos sobre TQC na UFSM, e os professores José A. Helayël-Netto e *Tião* A Dias, pelos cursos e o acolhimento no CBPF.

Aos meus amigos e colegas de grupo, Henrique C. Toledo, pelas conversas, digamos, agradáveis, e Rodrigo C. Terin, por ter me levado conhecer o Burguer King.

Aos meus amigos, Pedro M. Ferreira, por ter me abrigado na sua mansão, que passaria a ser minha depois, e José F. Thuorst, ambos sempre colaboraram para o meu enriquecimento intelectual a respeito da Física.

À todas essas pessoas que eu considero amigas: Matheus Cerqueira, Apóllo Silva, Luciana Ebani, Thalis Girardi, Ozorio Holanda, Duifje V. Egmond, Rodrigo Dias, Rafael S. Santos, J.P. Balduíno e Taci, pessoal do AP 3217 da CEU-UFSM, Tiago S. Farias, Diego Luan, Eduardo Lewis e Mateus Tuzzin. Aquelas que eu esqueci de mencionar, me desculpem.

Por último, mas um dos mais importantes, ao CNPQ pelos dois anos de bolsa de estudos.

RESUMO

PERUZZO, G. *Estudo de um operador de massa não local na teoria de Gribov-Zwanziger*. 2018. 74 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Neste trabalho fazemos um estudo detalhado a respeito de um operador tipo massa não-local dentro da problemática de Gribov. Esse operador contribui para a massa do campo de calibre e o propagador decorrente, qualitativamente, está de acordo com os resultados numéricos obtidos na rede em $D = 3$. Esse operador pode ser colocado em uma forma local, de maneira análoga à teoria de Gribov-Zwanziger, através de campos auxiliares. A teoria resultante não possui a simetria BRST, no entanto, através da introdução de um conjunto de fontes é possível recuperá-la, a fim de aumentar o conteúdo de simetria e facilitar a renormalização a nível quântico. Embora não tenha sido provada a renormalizabilidade do modelo, um caminho pôde ser construído e alguns resultados já foram obtidos ou vislumbrados, como a existência de identidades de Ward que proíbem a existência de termos quárticos dos campos auxiliares, tão danosos para a renormalizabilidade em outros modelos, como é o caso do operador de massa invariante de calibre.

Palavras-chave: Operador composto não local. Cópias de Gribov. Renormalização.

ABSTRACT

PERUZZO, G. *Study of a nonlocal operator mass in the Gribov-Zwanziger theory.* 2018. 74 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

In this work we make a detailed study about a nonlocal mass type operator within the Gribov problem. This operator contributes to the mass of the gauge field and the resulting propagator, qualitatively, is in agreement with the numerical results obtained in the lattice in $D = 3$. This operator can be placed in a local form, analogously to the Gribov-Zwanziger theory, through auxiliary fields. The resulting theory does not have the BRST symmetry, however, by introducing a set of sources it is possible to retrieve it in order to increase the symmetry content and facilitate renormalization at the quantum level. Although the model's renormalizability has not been proven, a path could be constructed and some results have already been obtained or glimpsed, such as the existence of Ward identities that prohibit the existence of quark terms from auxiliary fields, so damaging to the model's renormalizability of the gauge invariant mass operator.

Keywords: Nonlocal composite operator. Copies of Gribov. Renormalization.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

QCD	Quantum Chromodynamics
QED	Quantum Electrodynamics
GZ	Gribov-Zwanziger
RGZ	Gribov-Zwanziger Refinada
BRST	Becchi-Rouet-Stora-Tyutin

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os problemas com a quantização de teorias de calibre não-abelianas começaram a ser descobertos com (FEYNMAN, 1963). Feynman, nessa ocasião, percebeu que a imposição do vínculo de calibre como era feita na Eletrodinâmica Quântica (EDQ) não era suficiente para a consistência da teoria, já que essa apresentava problemas de unitariedade através da violação das regras de Cutkosky. Esse problema foi parcialmente resolvido através do método de Faddeev-Popov (FADDEEV; POPOV, 1967), cujo fato marcante é o surgimento dos campos de *ghost* e *antighost*, cujos estados de partículas não possuem norma. Um eventual problema desse método é o de ter que lidar com um operador que não é positivo definido em situações onde este deveria ser. Em teorias de calibre não-abelianas esse problema é onipresente, sendo tão mais relevante à medida que a teoria se afasta do regime perturbativo. Em uma teoria como a QCD, onde o parâmetro de acoplamento na região infravermelha é grande, problemas como esse não podem e não devem ser negligenciados, já que existe um fenômeno que pode ser sensível a essa atitude, estamos falando do *confinamento* dos quarks e glúons.

O problema do operador envolvido no método de Faddeev-Popov não ser positivo definido foi detalhadamente estudado por (GRIBOV, 1978) no espaço euclidiano, que classificou as possíveis situações e propôs uma modificação na integral funcional para que esta se limitasse à região onde a positividade estivesse satisfeita, mas que o conteúdo físico existente não fosse perdido, essa região ficou conhecida como *primeira região de Gribov*. A partir desse trabalho, se desenvolveu toda uma área de pesquisa no que podemos chamar de *problemática de Gribov*. Esse assunto é muito rico no sentido matemático em si, mas também por apresentar algumas respostas para problemas físicos, como o, já mencionado anteriormente, confinamento. A restrição proposta por Gribov à região de integração funcional leva a resultados animadores, como a supressão do propagador do glúon na região infravermelha, excluindo-o do espectro físico da teoria. A implementação da restrição de integração à primeira região de Gribov foi feita através da *ação de Gribov*, inicialmente, no entanto, essa ação possui as desvantagens de ser não-local e quebrar a simetria BRST. Uma relativo avanço foi obtido por (ZWANZIGER, 1989) através da *ação de Gribov-Zwanziger* (GZ). Zwanziger obteve uma versão local e invariante por BRST através da introdução de campos e fontes auxiliares. Posteriormente, ainda foi encontrada uma versão refinada dessa ação (RGZ), no entanto, todas elas, desde a de Gribov até essa, apresentam como principal característica a quebra da simetria BRST, nos valores físicos das fontes adicionadas à teoria para demonstrar a sua renormalizabilidade.

Motivados por essa quebra de simetria na ação RGZ, buscou-se estudar outros operadores compostos não-locais, que também podem ser localizados, que violam essa simetria, mas que apresentam algumas características interessantes. Dentre elas, uma contribuição para a massa do campo de calibre pode ser obtida introduzindo-se o termo $tr(F_{\mu\nu}\frac{1}{D^2}F_{\mu\nu})$[1] (CAPRI et al., 2007). A principal vantagem desse termo é a sua invariância de calibre. Na época em que esse termo foi proposto, ele poderia ser uma alternativa ingênua para o mecanismo de Higgs, ou seja, ao bóson de Higgs que não havia sido encontrado até então. No entanto, como veremos com mais detalhes posteriormente, um termo desse possui vértices de interação que impõem que sejam adicionados, necessariamente, contratermos à teoria, alterando-a de tal forma que a interpretação física inicial é perdida.

Além de casos como esse, cuja utilidade é imediata, existem aspectos mais especulativos mas não menos relevantes, como o de querer saber qual seria a extensão da *problemática de Gribov* para os campos de matéria (campos escalares, espinoriais, etc). Nos trabalhos (CAPRI et al., 2014) e (CAPRI; FIORENTINI; SORELLA, 2015) essa tentativa de extensão foi feita através de uma classe de operadores não-locais[2]. Apesar dos propagadores terem uma boa concordância com as simulações na rede, ainda não existe uma justificativa geométrica convincente para essa proposta. Pode ser tomado como uma motivação ou simplesmente uma curiosidade, mas já foi demonstrado por (GUIMARAES; PEREIRA; SORELLA, 2016) que da compactificação de uma das dimensões na ação RGZ em $D = 5$ pode-se obter um termo não-local desse tipo.

Como foi mencionado, apesar da vantagem de ser invariante de calibre, $tr(F_{\mu\nu}\frac{1}{D^2}F_{\mu\nu})$ possui vértices indesejados do ponto de vista da renormalizabilidade. Devido a esse último fato e inspirados nas ideias de extensão do problema de Gribov ao setor de matéria, nos propusemos a estudar uma alternativa para esse operador, que se encaixa na classe de operadores não-locais proposta para o setor de matéria e que, também, contribui com uma massa para o campo de calibre, o operador $F_{\mu\nu}\frac{1}{\partial D}F_{\mu\nu}$[3]. Esse operador possui alguns vértices a menos que o anterior, no entanto, não é invariante de calibre e está mal definido se considerarmos todo o espaço dos campos de calibre. Por isso, há a necessidade dele ser estudado juntamente com a ação de Gribov-Zwanziger, garantindo que inverso do operador de Faddeev-Popov, $1/\partial D$, não tenha singularidades.

A questão da não invariância de calibre deste novo operador pode ser respondida através do que foi recentemente discutido em (CAPRI et al., 2016). Resumidamente falando, neste trabalho, foi encontrado um operador local composto, A^h_μ, construido em termos do próprio campo de calibre, A_μ, e de um campo auxiliar de dimensão zero tipo Stueckelberg, ξ^a. Tal operador possui as propriedades de ser invariante por tranformações

[1] Aqui, $F_{\mu\nu}$ é o tensor de intensidade de campo e D_μ é a derivada covariante na representação adjunta. Todas essas quantidades são definidas no Cap. 2.

[2] Ver Cap. 4.

[3] Essa é uma maneira simplificada, omitindo as constantes de estrutura, de escrever o operador que estudaremos e será apresentado no Cap. 4. Apesar de não ser esse o operador, ele guarda o essencial, por isso utilizamos essa notação em alguns momentos.

de calibre e de ser transverso (inclusive, o vículo de transversalidade impõe que o campo tipo Sturckelberg entre na teoria apenas como um campo auxiliar). Dessa forma, podemos "trocar" A_μ por A^h_μ na formulação de $F_{\mu\nu}\frac{1}{\partial D}F_{\mu\nu}$ e, com isso, este operador passa a ser escrito de forma invariante de calibre (isso, inclusive, foi feito com a própria função horizonte de Gribov em (CAPRI et al., 2015) e sua renormalizabilidade foi provada em (CAPRI et al., 2017)). Mais detalhes sobre esta formulação serão apresentadas no Cap. 3.

Finalmente, mais um motivo que torna interessante estudar o operador $F_{\mu\nu}\frac{1}{\partial D}F_{\mu\nu}$ é que os propagadores encontrados em simulações na rede em $D = 3$ se ajustam muito bem pelo propagador desse modelo, cujo denominador é do tipo $\sim k^6$ (CUCCHIERI et al., 2012).

Essa dissertação está organizada da seguinte maneira: no Cap. 2 fazemos uma revisão da teoria de Yang-Mills, da sua definição até a quantização e a simetria BRST; no Cap. 3 apresentamos o problema de Gribov, dentro da formulação feita por Zwanziger, e o campo composto A^h_μ; no Cap. 4 citamos alguns dos trabalhos mais relevantes a respeito de operadores não-locais e apresentamos a nossa proposta; no Cap. 5 apresentamos o conteúdo de simetria do modelo juntamente com alguns resultados, que dizem respeito à renormalizabilidade, devido a ele.

1 TEORIAS DE YANG-MILLS

1.1 Grupo SU(N)

Seja $S = \exp(i\varepsilon^a T^a)$ o elemento de um grupo de Lie, que no nosso caso será o SU(N). T^a é um dos geradores do grupo de Lie e ε^a um dos parâmetros reais que caracterizam o grupo. A todo grupo de Lie está associada uma álgebra de Lie

$$\left[T^a, T^b\right] = if^{abc}T^c, \tag{1}$$

na qual f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo e $a, b, c = 1, ..., N^2 - 1$ são chamados de índices de cor. Se é uma algebra de Lie, então, a identidade de Jacobi deve ser verificada

$$\left[\left[T^a, T^b\right], T^c\right] + \left[\left[T^b, T^c\right], T^a\right] + \left[\left[T^c, T^a\right], T^b\right] = 0\,, \tag{2}$$

$$\Rightarrow f^{abd}f^{dce} + f^{bcd}f^{dae} + f^{cad}f^{dbe} = 0. \tag{3}$$

Os geradores do grupo SU(N) na representação fundamental são hermitianos e de traço nulo, o que nos permite escrever que

$$\left\{T^a, T^b\right\} = C^{ab} + \lambda^{abc}T^c, \tag{4}$$

sendo C^{ab} uma matriz simétrica nos índices de cor e diagonal nos índices matriciais e λ^{abc} um tensor de ordem 3 nos índices de cor. Como $tr\left(T^aT^b\right)$ define um produto interno nesse espaço vetorial gerado pelos geradores desse grupo, podemos escolher uma base de geradores que satisfaçam a condição de normalização

$$tr\left(T^aT^b\right) = \frac{\delta^{ab}}{2}, \tag{5}$$

na qual δ^{ab} é o símbolo de Krönecker. Essa escolha da normalização, tem como resultado que f^{abc} e λ^{abc} são completamente antissimétrico e simétrico, respectivamente. Além disso, podemos tomar $C^{ab} = \frac{1}{N}I\delta^{ab}$. Um resultado que pode ser demonstrado, que é frequentemente utilizado, é o de que $f^{acd}f^{bcd} = N\delta^{ab}$.

1.2 Transformações de Calibre

Seja $\varphi_i(x)$ um campo de matéria complexo (campos escalar, espinorial, vetorial, etc) que pertence a um multipleto

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

A transformação de calibre de $\Phi(x)$ é definida como sendo

$$\Phi'(x) = U(S)\Phi(x), \tag{7}$$

em que $U(S)$ é a representação matricial $n \times n$ do grupo SU(N). O conjunto de todos os $\Phi(x)$ é chamado de espaço interno e é dito que o conjuntos de todos os $U(S)$ respresentam rotações nesse espaço interno. Nesta dissertação, trabalharemos na representação $U(S) = S$, ou seja, na representação fundamental.

Existem dois tipos de transformações de calibre, se ε^a não é função das coordenadas do espaço-tempo a transformação é dita *global*, caso contrário, ela é dita *local*. Teorias que são simétricas por transformações locais estão em acordo com a estrutura causal do espaço-tempo. No entanto, elas apresentam algumas complicações no momento da construção da parte cinética de uma teoria de campos, já que uma das peças fundamentais, $\partial_\mu\Phi(x)$, não se transforma como (7). Isso é de se esperar, já que as transformaçõees de $\Phi(x)$ e $\Phi(x+dx)$ são diferentes, analogamente ao que acontece na geometria riemanniana e por isso, também, devemos pensar na ideia de transporte paralelo de $\Phi(x)$. Dessa forma, definimos a derivada covariante, D_μ, nesse espaço interno como sendo

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \tag{8}$$

na qual $A_\mu = A^a_\mu T^a$, o campo de calibre, cumpre o papel de conexão e g é a constante de acoplamento. A partir dessa definição, temos que

$$D_\mu\Phi'(x) = U(D_\mu\Phi(x)), \tag{9}$$

se o campo de calibre se transformar como

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^\dagger. \tag{10}$$

Ao longo do texto, quando nos referirmos à transformação de calibre, estaremos nos referindo à transformação (10) e, por conveniência, utilizaremos a parametrização $\varepsilon^a(x) =$

$-g\omega^a(x)$. Dessa forma, para transformações de calibre infinitesimais teremos que:

$$A'^a_\mu = A^a_\mu - D^{ab}_\mu \omega^a(x)\,, \tag{11}$$

em que

$$D^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - gf^{abc}A^c_\mu \tag{12}$$

é a derivada covariante na representação adjunta, ou seja, $T^a = if^{abc}$. Quando dois campos de calibre estão relacionados por uma transformação como (10), é dito que esses campos pertencem à mesma *órbita de calibre.*

Do ponto de vista geométrico, a derivada covariante nos indica a existência de uma curvatura no espaço interno, que é expressa através do tensor de curvatura $F_{\mu\nu}$, que neste contexto é chamado de tensor de intensidade de campo,

$$[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu}\,, \tag{13}$$

$$\Rightarrow F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{14}$$

Frente a uma transformação de calibre, esse tensor de intensidade de campo se transforma como $F_{\mu\nu}(A') = SF_{\mu\nu}(A)\,S^\dagger$, assim a ação de Yang-Mills euclideana

$$S_{YM} = \int d^4x \frac{1}{2} tr\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = \int d^4x \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, \tag{15}$$

é invariante por uma transformação de calibre. Genericamente, teorias que são construídas em torno da ação de Yang-Mills e da simetria de calibre são ditas Teorias de Yang-Mills [4].

1.3 Quantização das Teorias de Yang-Mills

A quantização da ação de Yang-Mills apresenta algumas dificuldades, a começar que na quantização canônica não existe um momento canonicamente conjugado a A_0. No formalismo das integrais de trajetória, o funcional gerador

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \exp\left[-\left(S_{YM} + \int d^4x J^a_\mu A^a_\mu\right)\right] \tag{16}$$

[4] (YANG; MILLS, 1954) foram os primeiros a formular esse tipo de teoria. Nesse trabalhos, eles utilizam como plano de fundo a teoria dos núcleons e dos píons

está mal definido, já que a parte quadrática é constituída pelo operador $\delta^{ab}\left(\delta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu\right)$ que não possui inversa, ou seja, o propagador do campo de calibre não existe. O fato de o operador ter esse formato, ser um projetor tranverso, está ligado à simetria de calibre. No caso U(1) isso fica aparente, pois a transformação (11) é $\delta A^a_\mu = -\partial_\mu\omega^a$, logo, $\delta^{ab}\left(\delta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu\right)\left(\partial_\nu\omega^b\right) = 0$. Supondo que as órbitas de calibre fossem discretas e que A^i_μ pertencesse à i-ésima órbita de calibre, dessa forma,

$$\int \mathcal{D}A \, \exp\left(-S_{YM}\right) \;\; = \;\; \sum_i \int \mathcal{D}A^i \, \exp\left(-S_{YM}\right). \tag{17}$$

Como S_{YM} é a mesma ao longo de toda a órbita calibre, o que obtemos é que

$$\int \mathcal{D}A^i \, \exp\left(-S_{YM}\right) = \exp\left(-S_{YM}\right)\int \mathcal{D}A^i \to \infty \,.$$

Em palavras, podemos dizer que a indefinição acima é o resultado de uma sobrecontagem de configurações que são equivalentes.

Na QED[5], cujo grupo é o U(1), esse problema é contornável de maneira simples, além do termo de Yang-Mills a ação ganha um termo de vínculo, chamado de termo de *gauge fixing* [6]. Na época da construção da QED, essa modificação tinha como finalidade, apenas, obter um propagador para o campo A_μ. Por isso, bastava adicionar o termo $\frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2$, que é um dos vários *calibres* possíveis e pertencente à classe dos *calibres lineares covariantes*, sendo α o parâmetro de calibre. No entanto, a QED nesse calibre é uma situação muito específica dentro de todas as teorias possíveis, se o mesmo procedimento for aplicado para uma teoria cujo grupo não é abeliano, o princípio da unitariedade é violado. (FEYNMAN, 1963) percebeu com cálculos a 1-*loop* a necessidade da existência dos chamados campos de *ghost*[7] para restaurar a validade da regra de Cutkosky.

Afim de contornar esse problema para o caso mais geral possível, (FADDEEV; POPOV, 1967) propuseram uma maneira de introduzir vínculos na integração funcional sem "alterar" o seu conteúdo e fatorar o objeto da indefinição da integração funcional. A estratégia do método é selecionar um campo de calibre de cada órbita de calibre para compor o funcional gerador. Para isso, seja o funcional

$$\Delta\left[A\right] \;\; = \;\; \int \mathcal{D}S \, \delta\left(G[A']\right), \tag{18}$$

no qual $\int \mathcal{D}S \sim \prod_a \int D\omega^a$ é uma medida no espaço das transformações de calibre, δ

[5] Abreviação em inglês de *Quantum Electrodynamics*, que em português significa Eletrodinâmica Quântica.

[6] Designação em inglês para fixação de calibre.

[7] *Ghost*, em inglês, significa fantasma. Neste caso, seriam os *campos fantasmas*.

é a função delta funcional e $G^a[A] = 0$ é o calibre que se deseja implementar. Em outras palavras, $\Delta[A]$ conta o número de campos de calibre, dentro da mesma órbita, satisfazendo o vínculo de calibre. Supondo que exista apenas *uma* configuração de campo que obedeça o vínculo acima, podemos fazer a mudança de variável de integração

$$\prod_a \int \mathcal{D}\omega^a = \prod_a \int \mathcal{D}G^a \det\left(\frac{\delta G^b}{\delta\omega^c}\right)^{-1}, \tag{19}$$

então,

$$\Delta[A] = \prod_b \int \mathcal{D}G^b \det\left(\frac{\delta G^a[A']}{\delta\omega^b}\right)^{-1} \delta\left(G[A']\right) = \det\left(\frac{\delta G^a[A']}{\delta\omega^b}\right)^{-1}\Bigg|_{\omega=0} \tag{20}$$

considerando nessa última passagem que $G^a\left[A'_\mu\right]\big|_{\omega=0} = 0$. Assim sendo,

$$\Delta[A] \det\left(\frac{\delta G^a[A']}{\delta\omega^b}\right)\Bigg|_{\omega=0} = 1\,. \tag{21}$$

A respeito de $\Delta[A]$ podemos dizer que ele é também invariante de calibre, o que é necessário para demonstrar isso é que se $S = S'S''$, então, $\mathcal{D}S = \mathcal{D}S'$, para S'' fixo.

De posse desses resultados e esquecendo momentaneamente o termo de fonte, o funcional gerador pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}[A]\, e^{-S_{YM}} &= \int \mathcal{D}A\, \Delta[A] \det\left(\frac{\delta G^a[A']}{\delta\omega^b}\right)\Bigg|_{\omega=0} e^{-S_{YM}[A]} \\ &= \left(\prod_a \int \mathcal{D}\omega^a\right) \int \mathcal{D}A'\, \delta\left(G[A']\right) \det\left(\frac{\delta G^a[A']}{\delta\omega^b}\right)\Bigg|_{\omega=0} e^{-S_{YM}[A'_\mu]}\,.\end{aligned}$$

Note-se que, na segunda linha, foi utilizada a invariância de calibre da medida de integração $\mathcal{D}A$ e da ação de Yang-Mills. *Grosso modo*, a interpretação desse resultado é a de que a função delta filtra a contribuição do campo de cada órbita de calibre que satisfaz o vínculo e o resultado é multiplicado pelo volume do espaço das transformações de calibre. Com o objeto responsável pela indeterminação fatorado, basta normalizar o funcional gerador. Agora, façamos uma pequena redefinição, que não altera em nada o que foi feito, $G[A] \to G[A] - f(x)$, multipliquemos por $\exp\left(-\int d^4x \frac{1}{2\alpha} f(x)^2\right)$ e integremos em $\mathcal{D}f$, assim

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \, \det\left(\frac{\delta G^a[A']}{\delta\omega^b}\right)\Bigg|_{\omega=0} \exp\left[-\int d^4x \left(\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}G^2 + J^a_\mu A^a_\mu\right)\right]. \tag{22}$$

em que $\mathcal{N}$ é a constante de normalização do funcional gerador, pois $Z[0] = 1$. O determinante na Eq.(22) pode ser reescrito através de campos escalares grassmanianos

$$\det\left(\frac{\delta G^a[A']}{\delta\omega^b}\right)\Bigg|_{\omega=0} \sim \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} \exp\left[-\int d^4x \int d^4y\, \bar{c}^a(x) \left(\frac{\delta G^a[A']}{\delta\omega^b}\right)\Bigg|_{\omega=0} c^b(y)\right]. \tag{23}$$

Aqui, c^a e $\bar{c}^a$ são os campos de *ghost* e *antighost*, respectivamente, já anunciados anteriormente. O fato de eles serem escalares e anticomutantes, ou seja, possuirem a estatística errada e, além disso, apresentarem estados de partícula com norma que não é positiva, proibe que as partículas associadas a esses campos sejam vistas no espectro físico da teoria. Os únicos lugares onde esses campos podem aparecer são nas correções em *loops*, aliás, devem aparecer, para que a unitariedade seja preservada.

Para chegarmos à versão final, que será útil futuramente, vamos introduzir o campo de Nakanishi-Lautrup, b^a, e reescrever $\exp\left(-\int d^4x\, \frac{1}{2\alpha}G^2\right)$ como sendo

$$\exp\left(-\int d^4x \frac{1}{2\alpha}G^2\right) \quad \sim \quad \int \mathcal{D}b \, \exp\left[-\int d^4x \left(b^a G^a\left[A\right] + \frac{\alpha}{2}b^a b^a\right)\right].$$

O campo de Nakanishi-Lantrup, diferentemente dos outros campos, não possui dinâmica, pois, apesar de existir um termo quadrático, não existe um termo cinético, com b^a e derivadas apenas. Isso não quer dizer que não possa existir um propagador para esse campo.

Assim, chegamos em uma ação efetiva que implementa a quantização da teoria de Yang-Mills,

$$S_{YM} + S_{gf}, \tag{24}$$

com

$$S_{gf} \;=\; \int d^4x \left(b^a G^a\left[A\right] + \frac{\alpha}{2}b^a b^a\right) + \int d^4x \int d^4y \, \bar{c}^a\left(x\right)\left(\frac{\delta G^a[A']}{\delta \omega^b}\right)\Bigg|_{\omega=0} c^b\left(y\right). \tag{25}$$

Nos calibres lineares covariantes, $G^a\left[A\right] = \partial_\mu A^a_\mu + g^a(x)$, assim, $\frac{\delta G^a[A'](x)}{\delta\omega^b(y)} = -\partial_\mu D^{ab}_\mu \delta\left(x-y\right)$. Geralmente, são utilizados dois casos, $\alpha = 0$ (calibre de Landau) e $\alpha = 1$ (calibre de Feynman). Neste trabalho, utilizaremos o primeiro caso, devido às simplificações que a problemática de Gribov adquire pelo fato de A_μ ser transverso e também pela existência de uma identidade de Ward, que é a *Equação de Ghost.*

1.4 Simetria BRST

Apesar de necessário, o termo de *gauge fixing*, S_{gf}, destrói completamente a simetria de calibre local existente na ação de Yang-Mills. No entanto, uma simetria global continua existindo. (BECCHI; ROUET; STORA, 1976) e (TYUTIN, 1975), independentemente, descobriram um conjunto de transformações que deixam $S_{YM} + S_{gf}$ invariante.

Essas transformações são conhecidas atualmente como transformações BRST[8] e são:

$$
\begin{aligned}
\delta A^a_\mu &= -\bar{\lambda} D^{ab}_\mu c^b\,, &(26)\\
\delta c^a &= \frac{g}{2} f^{abc} \bar{\lambda} c^b c^c\,, &(27)\\
\delta \bar{c}^a &= i\bar{\lambda} b^a\,, &(28)\\
\delta b^a &= 0\,, &(29)
\end{aligned}
$$

nas quais $\bar{\lambda}$ é um parâmetro grassmaniano. A transformação do campo de calibre é a transformação de calibre com a substituição $\omega^a \to \bar{\lambda} c^a$, já as demais transformações contém o que há de realmente novo.

Como o parâmetro $\bar{\lambda}$ está presente em todas as transformações e pode ser fatorado, geralmente, e nosso trabalho fará uso disso, as transformações (26) – (29) são escritas em termos do *operador BRST*, s, onde $\delta = \bar{\lambda} s$. Esse operador BRST possui a propriedade de *nilpotência*, o que quer dizer que $s^2 = 0$. Essa propriedade é fundamental para demonstrar a unitariedade e a renormalizabilidade das teorias de Yang-Mills. A invariância BRST do termo de *gauge fixing* pode ser mostrada facilmente se identificarmos que

$$
S_{gf} = s \int d^4x \left(\bar{c}^a \partial_\mu A^a_\mu + \frac{\alpha}{2} \bar{c}^a b^a \right). \tag{30}
$$

Do ponto de vista quântico, as transformações BRST apresentam algumas complicações, pelo fato de não serem lineares, o que implica que no âmbito das identidades de Ward teremos funções de Green com produto de campos no mesmo ponto, ou seja, teremos funções de Green com operadores compostos. Como funções de Green são o produto de distribuições ordenadas temporalmente, naturalmente surgem problemas, divergências diferentes daquelas encontradas em funções de Green de pontos diferentes. A solução para esse problema é encontrar uma versão renormalizada para esses operadores compostos e adicioná-los, acoplados a fontes, na ação da teoria. Fazendo isso para as transformações do campo A^a_μ e c^a, adicionadas à ação da teoria através das fontes Ω^a_μ e L^a, chegamos à ação

$$
S = S_{YM} + S_{gf} + S_{fontes}, \tag{31}
$$

sendo

$$
S_{fontes} = \int d^4x \left(\Omega^a_\mu\, sA^a_\mu + L^a\, sc^a \right) = \int d^4x \left(-\Omega^a_\mu D^{ab}_\mu c^b + L^a \frac{g}{2} f^{abc} c^b c^c \right). \tag{32}
$$

No cálculo das funções de correlação, Ω^a_μ e L^a devem ser tomadas iguais a zero, da mesma

[8] BRST são as iniciais de Becchi, Rouet, Stora e Tyutin, os descobridores da simetria.

forma que J_μ. Como $s\Omega^a_\mu = 0$ e $sL^a = 0$, a ação S é invariante por BRST e essa simetria pode ser expressa em forma funcional,

$$\mathcal{S}(S) \;=\; 0, \tag{33}$$

na qual,

$$\mathcal{S}(f) \;=\; \int d^4x \left(\frac{\delta f}{\delta \Omega^a_\mu} \frac{\delta f}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta f}{\delta L^a} \frac{\delta f}{\delta c^a} + ib^a \frac{\delta f}{\delta \bar{c}^a} \right), \tag{34}$$

sendo $f[A, b, c, \bar{c}]$ um funcional qualquer dos campos. A Eq. (33) é chamada de *identidade de Slavnov-Taylor*, a versão generalizada da identidade de Ward da QED, e $\mathcal{S}(f)$ é chamado *operador de Slavnov-Taylor*. Neste trabalho chamaremos, de maneira genérica, todas as identidades de identidades de Ward. Além disso, a identidade de Slavnov-Taylor será modificada devido à presença de outros campos no modelo que estudaremos.

1.5 Cohomologia do operador s

O fato de o operador s ser nilpotente separa o problema de obter o funcional mais geral possível dos campos, $\Delta[A, b, c, \bar{c}]$, tal que, $s\Delta[A, b, c, \bar{c}] = 0$, chamado de *cohomologia do operador BRST*, em duas partes

$$\Delta[A, b, c, \bar{c}] \;=\; \Delta_{n-triv}[A, b, c, \bar{c}] + \Delta_{triv}[A, b, c, \bar{c}]\,.$$

$\Delta_{triv}[A, b, c, \bar{c}]$ é chamada de parte trivial da cohomologia, pois ela já é o resultado da aplicação do operador s sobre um funcional, $\Delta_{triv}[A, b, c, \bar{c}] = s\Delta^{(-1)}[A, b, c, \bar{c}]$. O mesmo não se pode dizer de $\Delta_{n-triv}[A, b, c, \bar{c}]$, que, por isso, é denominada de parte não-trivial da cohomologia de s.

As transformações (28) e (29) formam o que é chamado de *dubleto de BRST*. Um importantíssimo resultado para a construção da cohomologia de um operador nilpotente δ é o de que *todo o par de campos (u e v) que formam um dubleto de δ, $\delta u = v$ e $\delta v = 0$, devem, necessariamente, comparecer, apenas, na cohomologia trivial.* A demonstração desse resultado não é complicada, para isso definamos os operadores

$$\hat{N} \;=\; \int dx \left(u\frac{\delta}{\delta u} + v\frac{\delta}{\delta v} \right), \tag{35}$$

$$\hat{T} \;=\; \int dx \left(u\frac{\delta}{\delta v} \right) \tag{36}$$

e o operador nilpotente na forma funcional

$$\delta = \int dx \left(v \frac{\delta}{\delta u} \right) . \tag{37}$$

O operador $\hat{N}$ conta o número de campos existentes em um monômio, por isso, poderíamos chamá-lo de operador número. Não é difícil de demonstrar que,

$$\left\{ \delta, \hat{T} \right\} = \hat{N} \tag{38}$$

e

$$\left[\delta, \hat{N} \right] = 0. \tag{39}$$

Seja $\{\Delta_n\}$ uma base de autovetores de $\hat{N}$, ou seja, $\hat{N}\Delta_n = n\Delta_n$. Utilizemos essa base para expandir a cohomologia de δ

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{n\geq 0} a_n \Delta_n \\ &= a_0\Delta_0 + \hat{N} \sum_{n>0} a_n \frac{1}{n} \Delta_n \\ &= a_0\Delta_0 + \delta\hat{T} \left(\sum_{n>0} a_n \frac{1}{n} \Delta_n \right) . \end{aligned} \tag{40}$$

Na última passagem, utilizamos a Eq. (38) e o fato de que se

$$\delta\hat{N}\Delta = \hat{N}\delta\Delta = 0 \, ,$$

então $\delta\hat{N}\Delta = \sum_{n>0} n a_n \delta\Delta_n = 0 \Rightarrow \delta\Delta_n = 0$ devido à estrutura de dubleto. O resultado (40) nos diz que na cohomologia não-trivial não existem dubletos. Com relação a Δ_0, o que se pode afirmar, a partir deste resultado, é que se este ainda tiver uma parte trivial, esta é independente dos campos em dubleto.

2 PROBLEMÁTICA DE GRIBOV

Apesar do método de Faddeev-Popov representar um avanço, no sentido da correta quantização de uma teoria de Yang-Mills, existem algumas limitações que não podem ser omitidas, já que isso tem implicações severas em determinadas teorias físicas, como é o caso da QCD. Na sequência, estabeleceremos que o método de Faddeev-Popov possui sérios problemas quando a teoria se afasta do regime perturbativo, justamente o contexto no qual a QCD se encontra quando na *região infravermelha*[9] da escala de energia. Assim sendo, há a possibilidade de que a inadequada quantização da teoria, utilizando o método de Faddeev-Popov, seja a responsável pelo não entendimento do fenômeno do confinamento dos quarks e glúons. Essa possibilidade é reforçada pelos trabalhos de (GRIBOV, 1978) e (ZWANZIGER, 1989) que aprimoraram a quantização das teorias de calibre e, com isso, encontraram um comportamento mais próximo daquele que é esperado de uma teoria confinante. Apesar de ser um avanço, ainda existem dificuldades técnicas e conceituais envolvidas, que veremos a seguir, que deixam um caminho livre para a pesquisa.

2.1 As cópias de Gribov

Para que apenas um campo de calibre fosse escolhido dentre todos os outros da órbita de calibre, foi imposto um vínculo $G^a\left[A\right]=0$. O fato é que nem sempre existe apenas um campo de calibre que satifaça esse vínculo. Em seu trabalho original, (GRIBOV, 1978) apontou os três casos possíveis: (i) não existe solução; (ii) existe uma única solução; (iii) existe mais do que uma solução. Não existe nem um exemplo conhecido do caso (i) e se existisse deveríamos descartar esse vínculo, já que isso representaria uma quantização incompleta da teoria. No caso (iii), a matriz jacobiana $\mathcal{M}^{ab}=\left.\frac{\delta G^a[A']}{\delta\omega^b}\right|_{\omega=0}$ é singular, o que invalida a mudança de variáveis (19). Vale à pena ressaltar que, mesmo não sendo singular, $\mathcal{M}^{ab}$ nem sempre é positiva definida, ou seja, nem sempre temos a condição

$$\int d^dx\,\theta^a\mathcal{M}^{ab}\theta^b \;>\; 0 \tag{41}$$

satisfeita, em que θ^a são funções de quadrado integrável. Isso implica que, ao invés de trabalharmos com $\det\left(\mathcal{M}^{ab}\right)$, deveríamos trabalhar com $\left|\det\left(\mathcal{M}^{ab}\right)\right|$. A situação ideal, então, seria nos restringirmos ao caso (ii), em que todos esses problemas são evitados, no entanto, apenas em casos específicos essa situação é encontrada, na maioria das vezes

[9] Em baixa escala de energia.

somos levados ao caso (iii).

As *cópias de Gribov* são todos os campos de calibre de uma mesma órbita de calibre que satisfazem o vínculo $G^a[A] = 0$. De outra forma e de maneira mais imediata, podemos entender o porquê da condição de $\mathcal{M}^{ab} > 0$ ser necessária para garantir a não existência de cópias. Se existem duas cópias A_μ^a e $A_\mu'^a$ que satisfazem o vínculo e estão infinitesimalmente próximos na órbita de calibre, então,

$$\begin{aligned} G^a[A'](x) &= G^a[A](x) + \int d^dy\,\omega^b(y)\left.\frac{\delta G^a[A'](x)}{\delta\omega^b(y)}\right|_{\omega=0} \\ \Rightarrow 0 &= \int d^dx\,\mathcal{M}^{ab}(x,y)\,\omega^b(y)\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Isso implica que, uma condição suficiente para a existência de cópias é a de que existam autofunções de autovalores nulos de $\mathcal{M}^{ab}(x,y)$.

No caso dos calibre lineares covariantes, $G^a[A'] = \partial_\mu\left(A_\mu^a - D_\mu^{ab}\omega^b\right) + g^a(x) \Rightarrow \mathcal{M}^{ab} = -\partial_\mu D_\mu^{ab}\delta(x-y)$. Se o grupo é abeliano ou $g = 0$, então, $\mathcal{M}^{ab} = \mathcal{M}_0^{ab} = -\delta^{ab}\partial^2$, cujos autovalores positivos são $\epsilon^0 = p^2$ e, adotando condições de contorno periódica no espaço D-dimensional, as autofunções são

$$\psi_n^{a,b}(x) = \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}n\cdot x}}{L^{\frac{d}{2}}}\delta^{ab}, \tag{43}$$

com $n \in \mathbb{Z}^d/\{0\}$. No caso contínuo, quando $L \to \infty$,

$$\psi_p^{a,b}(x) = \frac{e^{ip\cdot x}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\delta^{ab}. \tag{44}$$

$p^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$, ou seja, $n \equiv n_0 = (0, ..., \pm1, ..., 0)$, é o menor autovalor não nulo de $\mathcal{M}_0^{ab}$. É válido ressaltar que sempre existirão as autofunções $\varphi^{a,b} = \delta^{ab}$.

Se $\epsilon_{n_0}^0 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ e $\psi_{n_0}^{a,b}(x)$ são o menor autovalor não nulo e a autofunção correspondente, respectivamente, para o caso livre, é de se esperar que eles evoluam continuamente para $\epsilon_{n_0}(\lambda)$ e $\psi_{n_0}^{a,b}(x,\lambda)$ quando a perturbação $\mathcal{M}_I^{ab}(\lambda) = \lambda g f^{abc}\partial_\mu A_\mu^c$ é considerada. Dessa forma, $\epsilon_{n_0}(\lambda = 1)$ é o indicador de quando o operador $\mathcal{M}^{ab}$ deixa de ser positivo no espaço das funções A_μ^a. A *primeira região de Gribov* Ω é a região no espaço das funções A_μ^a onde $\mathcal{M}^{ab} > 0$ e delimitada pela fronteira $\partial\Omega$ onde $\epsilon_{n_0}(\lambda = 1) = 0$. $\partial\Omega$ é chamado de *primeiro horizonte de Gribov.* Outras regiões podem ser definidas utilizando como critério o número de vezes que o operador $\mathcal{M}^{ab}$ apresenta autovalor nulo.

Devemos ainda ressaltar que, evidentemente, essa construção só é válida se o operador $\mathcal{M}^{ab}$ for hermitiano. No entanto, tal propriedade é garantida apenas no calibre de Landau. Portanto, deste ponto em diante assumiremos o calibre de Landau que, como vimos, é um caso particular da classe dos calibres lineares covariantes quando o parâmetro de calibre α é igual a zero.

Além disso, existe outra forma equivalente de definir a região de Gribov, que é através do funcional

$$\|A\|^2 = tr\int d^dx\, A_\mu A_\mu = \frac{1}{2}\int d^dx\, A_\mu^a A_\mu^a\,. \tag{45}$$

O mínimo desse funcional sobre uma órbita de calibre é a solução de $\delta\|A\|^2 = 0$ e $\delta^2\|A\|^2 > 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\delta\|A\|^2 &= \int d^dx\left(\delta A_\mu^a\right)A_\mu^a = \int d^dx\left(-D^{ab}\omega_\mu^b\right)A_\mu^a = \int d^dx\,\omega^a\left(\partial_\mu A_\mu^a\right)\\ \Rightarrow\left(\partial_\mu A_\mu^a\right) &= 0\end{aligned} \tag{46}$$

e

$$\begin{aligned}\delta^2\|A\|^2 &= \int d^dx\,\omega^a\partial_\mu\left(\delta A_\mu^a\right) = \int d^dx\,\omega^a\left(-\partial_\mu D_\mu^{ab}\right)\omega^b = \int d^dx\,\omega^a\mathcal{M}^{ab}\omega^b\\ \Rightarrow\mathcal{M}^{ab} &\geq 0.\end{aligned} \tag{47}$$

Assim, a primeira região de Gribov pode ser definida como sendo formada pelos mínimos locais do funcional $\|A\|^2$. Infelizmente, a primeira região de Gribov não é livre de cópias, como foi discutido por (SEMENOV-TYAN-SHANSKII; FRANKE, 1986), a única região livre de cópias é realmente a chamada *região modular fundamental* Λ na qual o funcional $\|A\|^2$ atinge um mínimo absoluto.

2.2 Função Horizonte de Gribov

Restringir a integração funcional a Λ seria uma situação ideal, no entanto, a implementação dessa restrição não é factível. É mais fácil integrar sobre Ω, que, apesar de não ser o melhor dos cenários, representa um avanço em relação ao método de Faddeev-Popov. Mas antes disso, há a necessidade de se demonstrar que, de fato, todas as órbitas de calibre passam por essa região. A demonstração desse fato foi dada por (GRIBOV, 1978) para casos próximo de $\partial\Omega$ e posteriormente por (DELL'ANTONIO; ZWANZIGER, 1991) para os casos mais gerais. Assim, a função de partição[10] modificada é

$$Z_\Omega = \mathcal{N}\int\mathcal{D}A\exp\left(-S_{YM}\right)\theta\left(\epsilon_{n_0}\left(\lambda=1\right)\right), \tag{48}$$

[10] O termo função de partição é utilizado para designar $Z[J=0]$. Tem esse nome devido à semelhança com a função de partição da Mecânica Estatística.

em que $\theta\left(\epsilon_{n_0}\left(\lambda=1\right)\right)$ é a distribuição teta. Para obtermos $\epsilon_{n_0}\left(\lambda=1\right)$, podemos utilizar a teoria de perturbação degenerada, já que existem $2d\left(N^2-1\right)$ autofunções com autovalor $\epsilon^0_{n_0}=\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$. Quando a perturbação é considerada, espera-se que essa degenerescência seja quebrada, sendo as correções para os autovalores dadas pelos autovalores das matrizes

$$\begin{aligned}
\epsilon_1^{ab}\left(n_0,m_0\right) &= \left\langle\psi^a_{n_0}\right|\mathcal{M}_I\left|\psi^b_{m_0}\right\rangle \\
\epsilon_2^{ab}\left(n_0,m_0\right) &= \left\langle\psi^a_{n_0}\right|\mathcal{M}_I\mathcal{P}\left(\frac{1}{\epsilon_0-\mathcal{M}_0}\right)\mathcal{P}\mathcal{M}_I\left|\psi^b_{m_0}\right\rangle \\
\epsilon_3^{ab}\left(n_0,m_0\right) &= \left\langle\psi^a_{n_0}\right|\mathcal{M}_I\mathcal{P}\left(\frac{1}{\epsilon_0-\mathcal{M}_0}\right)\mathcal{P}\mathcal{M}_I\mathcal{P}\left(\frac{1}{\epsilon_0-\mathcal{M}_0}\right)\mathcal{P}\mathcal{M}_I\left|\psi^b_{m_0}\right\rangle+\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

sendo

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{\epsilon_0-\mathcal{M}_0}\right)\mathcal{P}\left(x,y\right) = \sum_a\sum_{n\neq n_0}\frac{1}{\left(\epsilon_{n_0}-\epsilon_n\right)}\left|\psi^a_n\right\rangle\left\langle\psi^a_n\right|$$

a restrição do operador $\left(\frac{1}{\epsilon_0-\mathcal{M}_0}\right)$ ao subespaço gerado pelos autoestados de $\mathcal{M}_0$ que possuem autovalor diferente de $\epsilon^0_{n_0}=\left(\frac{2\pi}{L}\right)^d$. No limite $L^d\to\infty$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\left(\frac{1}{\epsilon_0-\mathcal{M}_0}\right)\mathcal{P}\left(x,y\right) &= \sum_a\int_{k^2>0}d^dk\frac{1}{\left(\left(\frac{2\pi}{L}\right)^d-k^2\right)}\left|\psi^a_n\right\rangle\left\langle\psi^a_n\right| \\
&\sim -\sum_a\int_{k^2>0}d^dk\frac{1}{k^2}\left|\psi^a_n\right\rangle\left\langle\psi^a_n\right| \\
&= -\frac{1}{\mathcal{M}_0}
\end{aligned}$$

O que implica que em segunda ordem, por exemplo,

$$\epsilon_2^{ab} \sim -\left\langle\psi^a_p\right|\mathcal{M}_I\frac{1}{\mathcal{M}_0}\mathcal{M}_I\left|\psi^b_q\right\rangle.$$

Para ordens maiores, surgem termos que são potências de $\mathcal{P}\left(\frac{1}{\epsilon_0-\mathcal{M}_0}\right)\mathcal{P}$ que serão desconsiderados. Desse modo, o termo de terceira ordem será

$$\epsilon_3^{ab} \sim \left\langle\psi^a_p\right|\mathcal{M}_I\frac{1}{\mathcal{M}_0}\mathcal{M}_I\frac{1}{\mathcal{M}_0}\mathcal{M}_I\left|\psi^b_q\right\rangle.$$

Como,

$$-\mathcal{M}_I\frac{1}{\mathcal{M}_0}\mathcal{M}_I+\mathcal{M}_I\frac{1}{\mathcal{M}_0}\mathcal{M}_I\frac{1}{\mathcal{M}_0}\mathcal{M}_I-\ldots = -\mathcal{M}_I\frac{1}{\mathcal{M}}\mathcal{M}_I\,, \tag{49}$$

então,

$$\sum_{n\geq 2}\epsilon_n^{ab} = -\left\langle \psi_p^a\right| \mathcal{M}_I \frac{1}{\mathcal{M}} \mathcal{M}_I \left|\psi_q^b\right\rangle . \tag{50}$$

No caso discreto, teríamos

$$\epsilon^{ab} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \delta^{ab}\delta_{n_0,m_0} , \tag{51}$$

$$\epsilon_1^{ab} = \left(\frac{2\pi i}{L}\right) \frac{gf^{abc}}{L^{\frac{d}{2}}} \widetilde{A}_\mu^c \left(n_0 - m_0\right) m_{0\mu} \tag{52}$$

e

$$\sum_{n\geq 2}\epsilon_n^{ab} = -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{1}{L^d} \int d^dx d^dy g f^{acm} A_\mu^m\left(x\right) n_{0\mu} \left(\frac{1}{\partial\cdot D}\right)^{cd} g f^{bdn} A_\nu^n\left(x\right) m_{0\nu}. \tag{53}$$

Além dessas considerações, vamos enfraquecer a nossa restrição, ao invés de utilizarmos $\theta\left(\epsilon_{n_0}\left(\lambda = 1\right)\right)$, utilizemos $\theta\left(tr\left(\epsilon^{ab}\right)\right)$, sendo

$$tr\left(\epsilon^{ab}\right) \equiv \sum_{\|n_0\|=1}\sum_a \epsilon^{aa}\left(n_0, n_0\right) \tag{54}$$

$$= 2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left[d\left(N^2-1\right) - h\left(A\right)\right] , \tag{55}$$

em que

$$h\left(A\right) = \frac{1}{V}\int d^dx d^dy\, g f^{acm} A_\mu^m\left(x\right) \left(\frac{1}{\partial\cdot D}\right)^{cd}\left(x,y\right) g f^{adn} A_\mu^n\left(y\right). \tag{56}$$

2.3 Ação de Gribov-Zwanziger

Agora, já temos uma expressão para a função de partição,

$$Z_\Omega = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}b\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\, e^{-S_{Landau}}\, \theta\left(d\left(N^2-1\right) - h\left(A\right)\right) ,$$

$$S_{Landau} = \int d^dx \left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + ib^a\, \partial_\mu A_\mu^a - \bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b\right) . \tag{57}$$

No entanto, para obtermos o que é a chamada de *ação de Gribov-Zwanziger*, mais uma hipótese precisa ser feita, que é a de que podemos fazer a substituição/aproximação

$$\theta\left(d\left(N^2-1\right) - h\left(A\right)\right) \to \delta\left(d\left(N^2-1\right) - h\left(A\right)\right) ,$$

que é discutida em (VANDERSICKEL, 2011). Utilizando a representação integral da distribuição delta de Dirac,

$$\delta\left(d\left(N^2-1\right)-h\left(A\right)\right) = \int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\beta}{(2\pi i)}\exp\left[\beta\left(d\left(N^2-1\right)-h\left(A\right)\right)\right], \tag{58}$$

então,

$$\begin{aligned} Z_\Omega &= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}b\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\beta}{(2\pi i)}\,e^{-S_{Landau}+\beta\left(d\left(N^2-1\right)-h(A)\right)} = \int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\beta}{(2\pi i)}e^{-V(\beta)}, \\ V(\beta) &= \ln\left[\int \mathcal{D}A\mathcal{D}b\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\,e^{-S_{Landau}+\beta\left(d\left(N^2-1\right)-h(A)\right)}\right]. \end{aligned}$$

Utilizando a *aproximação por ponto de sela* ,

$$e^{-V(\gamma)} \simeq e^{-\left(V\left(\bar{\beta}\right)+\frac{(\beta-\bar{\beta})^2}{2}V''\left(\bar{\beta}\right)\right)},$$

na qual $\bar{\beta}$ é a solução para a equação

$$\begin{aligned} V'\left(\bar{\beta}\right) &= 0 \\ \frac{\int\mathcal{D}\left[A^a_\mu\right]\mathcal{D}\left[c^a\right]\mathcal{D}\left[\overline{c}^a\right]\left(d\left(N^2-1\right)-h\left(A\right)\right)e^{-S_{Landau}+\bar{\beta}\left(d\left(N^2-1\right)-h(A)\right)}}{\int\mathcal{D}\left[A^a_\mu\right]\mathcal{D}\left[c^a\right]\mathcal{D}\left[\overline{c}^a\right]e^{-S_{Landau}+\bar{\beta}(d(N^2-1)-h(A))}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\left(N^2-1\right) = \langle h\left(A\right)\rangle_{\beta=\bar{\beta}}. \tag{59}$$

Portanto, obtemos que

$$Z_\Omega \simeq e^{-V\left(\bar{\beta}\right)} \tag{60}$$

$$= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}b\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\,e^{-S_{Landau}+\bar{\beta}\left(d\left(N^2-1\right)-h(A)\right)}. \tag{61}$$

Por uma conveniência, que veremos no futuro, é feita a redefinição $\gamma^d = \frac{\bar{\beta}}{V}$. Assim, a ação efetiva obtida, que é a ação de Gribov-Zwanziger, é

$$S_{GZ} = S_{Landau} + H\left(A\right) - \gamma^d V d\left(N^2-1\right), \tag{62}$$

em que

$$H\left(A\right) = \gamma^d h(A) = \gamma^d\int d^dx d^dy\, g f^{acm}A^m_\mu\left(x\right)\left(\frac{1}{\partial\cdot D}\right)^{cd}\left(x,y\right)g f^{adn}A^n_\mu\left(y\right) \tag{63}$$

é chamada de *função horizonte de Gribov.* γ é chamado de *parâmetro de Gribov* e é dado pela equação de *gap* (59).

A função de horizonte de Gribov é não-local, no entanto, isso não representa um problema já que ela pode ser reescrita em uma forma local através da introdução dos chamados *campos de Zwanziger*, φ_μ^{ab}, $\bar{\varphi}_\mu^{ab}$, ω_μ^{ab} e $\bar{\omega}_\mu^{ab}$. Os campos φ_μ^{ab} e $\bar{\varphi}_\mu^{ab}$ são bosônicos, o que permite escrevermos

$$e^{-H} = \int \mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\bar{\varphi}\,(\det(-\partial\cdot D))^f \; e^{-\int d^dx\left[\bar{\varphi}_\mu^{ac}\,\partial\cdot D^{ab}\varphi_\mu^{bc}+\gamma^{d/2}gf^{abc}A_\mu^a\left(\varphi_\mu^{bc}+\bar{\varphi}_\mu^{bc}\right)\right]}, \tag{64}$$

sendo $f = d\,(N^2-1)$. Já os campos ω_μ^{ab} e $\bar{\omega}_\mu^{ab}$ são fermiônicos e nos permitem escrever

$$(\det(-\partial\cdot D))^f = \int \mathcal{D}\omega\mathcal{D}\bar{\omega}\, e^{\int d^dx\left(\bar{\omega}_\mu^{ac}\,\partial\cdot D^{ab}\omega_\mu^{bc}\right)}\,. \tag{65}$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^{-H} &= \int \mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\bar{\varphi}\mathcal{D}\omega\mathcal{D}\bar{\omega}\, e^{-S_{local}}\,, \\ S_{local} &= \int d^dx\,\left[\bar{\varphi}_\mu^{ac}\,\partial\cdot D^{ab}\varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{bc}\,\partial\cdot D^{ab}\omega_\mu^{bc} + \gamma^{d/2}gf^{abc}A_\mu^a\left(\varphi_\mu^{bc}+\bar{\varphi}_\mu^{bc}\right)\right] \end{aligned} \tag{66}$$

e a versão local da ação de Gribov-Zwanziger é dada por:

$$S_{GZ}^{local} = S_{Landau} + S_{local}\,. \tag{67}$$

Com a introdução desses novos campos, resta ainda discutir a questão da simetria BRST. Notemos que a ação S_{local} é parcialmente invariante pelas transformações:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_\mu^{ab} &= \omega_\mu^{ab}\,, \qquad \delta\omega_\mu^{ab} = 0\,, \\ \delta\bar{\omega}_\mu^{ab} &= \bar{\varphi}_\mu^{ab}\,, \qquad \delta\bar{\varphi}_\mu^{ab} = 0\,, \end{aligned} \tag{68}$$

sendo δ um operador nilpotente. Dessa maneira é possível escrever

$$S_{local} = \delta\int d^dx\,\bar{\omega}_\mu^{ac}\,\partial\cdot D^{ab}\varphi_\mu^{ac} + \gamma^{d/2}\int d^dx\,gf^{abc}A_\mu^a(\varphi_\mu^{bc}+\bar{\varphi}_\mu^{bc})\,. \tag{69}$$

Isto nos sugere que podemos escrever um operador de BRST estendido,

$$s' = s + \delta \tag{70}$$

e assim,

$$\begin{aligned} s'A_\mu^a &= -D_\mu^{ab}c^b\,, \\ s'c^a &= \frac{g}{2}f^{abc}c^bc^c\,, \\ s'\bar{c}^a &= ib^a\,, \qquad s'b^a = 0\,, \\ s'\varphi_\mu^{ab} &= \omega_\mu^{ab}\,, \qquad s'\omega_\mu^{ab} = 0\,, \\ s'\bar{\omega}_\mu^{ab} &= \bar{\varphi}_\mu^{ab}\,, \qquad s'\bar{\varphi}_\mu^{ab} = 0\,. \end{aligned} \tag{71}$$

Então, a versão local da ação de Gribov-Zwanziger pode ser escrita como[11]:

$$S_{GZ}^{local} = S_{YM} + s' \int d^dx \left[\bar{c}^a\, \partial_\mu A_\mu^a + \bar{\omega}_\mu^{ac}\, \partial \cdot D^{ab}\varphi_\mu^{ac}\right] + \gamma^{d/2} \int d^dx\, g f^{abc} A_\mu^a(\varphi_\mu^{bc} + \bar{\varphi}_\mu^{bc})\,. \quad (72)$$

Porém,

$$s' S_{GZ}^{local} = \gamma^{d/2} \int d^dx\, g f^{abc}[A_\mu^a \omega_\mu^{bc} - (D_\mu^{ad} c^d)(\varphi_\mu^{bc} + \bar{\varphi}_\mu^{bc})]\,, \quad (73)$$

ou seja, ocorre uma aparente quebra da simetria BRST. Tal quebra foi longamente estudada ao longo dos últimos anos e, atualmente, encontrou-se uma nova formulação da função horizonte que recupera a simetria BRST. Na próxima seção discutiremos um pouco sobre essa formulação, que inclusive irá permitir o estudo do modelo de Gribov-Zwanziger em outros calibres além do de Landau, e ainda sobre o chamado refinamento da ação de Gribov-Zwanziger levando-se em conta o efeito da condensação de operadores locais compostos.

2.4 O operador $A^2_{mín}$, o refinamento de Gribov-Zwanziger e a simetria BRST

Uma das principais novidades da ação de Gribov-Zwanziger em comparação com a ação de Yang-Mills é a significativa mudança no propagador do campo de calibre, que se deve ao acoplamento $\gamma^2 g f^{abc} A_\mu^a \left(\varphi_\mu^{ab} + \bar{\varphi}_\mu^{ab}\right)$. O propagador fornecido pela teoria é

$$\left\langle \widetilde{A}_\mu^a(k)\, \widetilde{A}_\nu^b(p) \right\rangle_0 = (2\pi)^4\, \delta(p+k)\, \mathcal{D}_0\left(p^2\right) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right), \quad (74)$$

em que

$$\mathcal{D}_0\left(p^2\right) = \frac{p^2}{p^4 + 2Ng^2\gamma^4}.$$

Como o denominador pode ser reescrito como

$$p^4 + 2Ng^2\gamma^4 = \left(p^2 + i\sqrt{2Ng^2\gamma^4}\right)\left(p^2 - i\sqrt{2Ng^2\gamma^4}\right)\,,$$

[11] A menos de um deslocamento na variável de integração ω_μ^{ab}:

$$\omega_\mu^{bc}(x) \to \omega_\mu^{bc}(x) + \int d^4y\, \left[\partial \cdot D^{-1}\right]^{bk}(x,y)\partial_\alpha^y \left[g f^{kle}\left(D_\alpha^{de,y} c^e(y)\right)\varphi_\mu^{lc}(y)\right]\,,$$

tal como é descrito em (VANDERSICKEL, 2011).

então,

$$\frac{1}{p^4+2Ng^2\gamma^4} = \frac{1}{2i\sqrt{2Ng^2\gamma^4}}\left[\frac{1}{\left(p^2-i\sqrt{2Ng^2\gamma^4}\right)} - \frac{1}{\left(p^2+i\sqrt{2Ng^2\gamma^4}\right)}\right].$$

Esse resultado mostra uma violação da positividade da probabilidade, já que o resíduo de um dos pólos é negativo, e o próprio pólo é imaginário. A interpretação dada para esse fato é a de que as partículas associadas ao campo A^a_μ, que são os glúons na QCD, não aparecem no espectro físico da teoria, comportamento esse que é esperado para uma teoria confinante. Outra característica, que merece ser mencionada, é a violação da positividade da densidade espectral de Källén-Lehmann, $\rho\left(\lambda^2\right)$, onde λ^2 é um autovalor do operador $P_\mu P_\mu$ [12]. A função de Green de dois pontos conexa possui a mesma estrutura (74), porém, com $\mathcal{D}_0\left(p^2\right) \to \mathcal{D}\left(p^2\right)$. A representação espectral fornece que

$$\mathcal{D}\left(p^2\right) = \int_0^{+\infty} d\lambda^2 \frac{\rho\left(\lambda^2\right)}{p^2+\lambda^2},$$

no entanto, se $\mathcal{D}(0)=0$, como no caso a nível árvore, $\rho\left(\lambda^2\right) \ngtr 0$ para todo λ^2.

Durante muito tempo (até meados de 2007), os cálculos na rede indicavam o comportamento $\mathcal{D}(0)=0$, além do inframermelho mais singular (o chamado *enhancement* do propagador de *ghost*) da função de Green de dois pontos conexa do *ghost* que prevê que $\mathcal{G}\left(p^2 \simeq 0\right) \simeq \frac{1}{p^{2+\varepsilon}}$, com $\varepsilon > 0$ e $\left\langle \widetilde{c}^a(k)\,\widetilde{\overline{c}}^a(p)\right\rangle_C = (2\pi)^4\,\delta(p+k)\,\mathcal{G}\left(p^2\right)$. No entanto, mais recentemente, com o aumento do poder computacional, volumes maiores foram utilizados e os resultados obtidos para $D=3$ e $D=4$ apresentam desvios em relação aos anteriores, ou seja, $\mathcal{D}(0)\neq 0$ e $\mathcal{G}\left(p^2\simeq 0\right) \simeq \frac{1}{p^2}$ (CUCCHIERI; MENDES, 2007) (CUCCHIERI; MENDES, 2008). Estabelecido isso, a ação de Gribov-Zwanziger está incompleta, havendo a necessidade de que outros elementos não perturbativos sejam considerados.

A fim de incorporar esses aspectos, passou-se a estudar os condensados $\left\langle A^a_\mu A^a_\mu\right\rangle$, isto é, um valor esperado no vácuo não trivial para o operador local composto $A^a_\mu(x)A^a_\mu(x)$. A grande dificuldade de se trabalhar com um termo como esse é manter a simetria BRST. Com o objetivo de superar essa dificuldade, muitos trabalhos[13] foram feitos a respeito de $A^2_{mín}$, que é o mínimo do funcional $tr\left(\int d^dx A^u_\mu A^u_\mu\right)$ sobre uma órbita de calibre, sendo

$$A^u_\mu = uA_\mu u^\dagger + \frac{1}{ig}\left(\partial_\mu u\right)u^\dagger \tag{75}$$

e $u = e^{igT^a\zeta^a}$. Por construção, $A^2_{mín}$ é invariante de calibre. Se para $u=h$ temos uma

---

[12] P_μ é o operador de momento.

[13] Podemos citar (BOUCAUD et al., 2001), (BOUCAUD et al., 2002),(VERSCHELDE et al., 2001),(DUDAL; VERSCHELDE; SORELLA, 2003),(LI; SHAKIN, 2005)

configuração de campo, A^h_μ, que minimiza o funcional acima, então,

$$\partial_\mu A^h_\mu \;=\; 0. \tag{76}$$

Resolvendo essa equação para ζ^a iterativamente, obtemos que

$$A^h_\mu \;=\; \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial^2}\right)\left(A_\nu - ig\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A\,,\,A_\nu\right] + \frac{ig}{2}\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A\,,\,\partial_\nu\frac{1}{\partial^2}\partial A\right] + O\left(A^3\right)\right). \tag{77}$$

Isso quer dizer que A^h_μ é um objeto não-local. No entanto, no calibre de Landau, A_μ já é transverso (*on-shell*), portanto $tr\left(\int d^dx A^h_\mu A^h_\mu\right) = tr\left(\int d^dx A_\mu A_\mu\right)$.

A grande virtude de A^h_μ , que é um fato marcante, é ele ser invariante de calibre (isso pode ser mostrado ordem a ordem a partir da Eq. (77)). A grande desvantagem é ele não ser local, na forma como foi escrito acima. Isso traria complicações ao se trabalhar em calibres que não sejam o de Landau. No entanto, recentemente (CAPRI et al., 2016), A^h_μ foi escrito de forma local com a ajuda do campo auxiliar do tipo Stueckelberg, ξ. Se

$$A^h_\mu \;=\; hA_\mu h^\dagger + \frac{1}{ig}\left(\partial_\mu h\right)h^\dagger, \tag{78}$$

em que $h = \exp\left(ig\xi^a T^a\right)$, então, A^h_μ será invariante pela transformação de calibre, se $h' = U^\dagger h$. Daí, obtemos que

$$sh_{ij} \;=\; igc^a\left(T^a\right)_{ik} h_{kj} \tag{79}$$

$$\Rightarrow s\xi^a \;=\; g\left(\xi\right)^{ab} c^b, \tag{80}$$

sendo $g\left(\xi\right)^{ab} = -\delta^{ab} + \frac{g}{2}f^{abc}\xi^c - \frac{g^2}{12}f^{amr}f^{mbq}\xi^q\xi^r + O\left(\xi^3\right)$.

A última construção de A^h_μ é mais geral, no sentido que esse não é necessariamente transverso. Para recuperar a primeira interpretação, há a necessidade de que um vínculo seja imposto. Isso pode ser feito através do método de Fadeev-Popov, com a introdução de um termo

$$\int d^dx\left(\tau^a\partial_\mu A^{ha}_\mu + \bar{\eta}^a\partial\cdot D^{ab}\left(A^h\right)\eta^b\right), \tag{81}$$

em que τ^a é um multiplicador de Lagrange e η^a e $\bar{\eta}^a$ são novos campos tipo *ghost*. É importante mencionar que o vínculo de transversalidade traz uma diferença crucial com relação ao modelo original de Stueckelberg que, como é sabido, não é renormalizável. De fato, o vínculo faz com que o campo ξ seja meramente um campo auxiliar e, além disso, neste caso, o comportamento do propagador livre $\langle\xi^a(-p)\xi^b(p)\rangle$ é completamente diferente do caso original de Stueckelberg e por essa razão, nos referimos a esse campo como *tipo* Stueckelberg.

A existência desse campo composto invariante de calibre permite que toda a ação de Gribov-Zwanziger possa ser reescrita de tal forma a preservar a simetria BRST (CAPRI et al., 2015). Identificando que na expressão (77) existe um $\partial_\mu A_\mu = 0$ presente em todos os termos da expansão, a função horizonte pode ser reescrita como sendo

$$H(A) = H(A^h) - \gamma^d R(A)\partial A, \tag{82}$$

em que $R(A)\partial A$ é uma forma abreviada de se escrever $R(A)\partial A = \int d^dx \int d^dy\, R^a(x,y)\partial^y_\mu A^a_\mu$, sendo $R(A)$ uma série infinita não-local de A_μ. Dessa forma,

$$\begin{aligned} S_{GZ} &= S_{YM} + \int d^dx \left(ib^a\partial_\mu A^a_\mu + \bar{c}^a\partial\cdot D^{ab}c^b\right) + H(A^h) - \gamma^d R(A)\partial A - \gamma^d V d\left(N^2-1\right) \\ &= S_{YM} + \int d^dx \left(ib^a\partial_\mu A^a_\mu + \bar{c}^a\partial\cdot D^{ab}c^b\right) + H(A^h) - \gamma^d V d\left(N^2-1\right), \end{aligned} \tag{83}$$

sendo que, na última passagem, entende-se que foi feito na função de partição da teoria um deslocamento linear (cujo jacobiano é idependente dos campos) da variável de integração b^a:

$$b \to b - i\gamma^d R(A)\,. \tag{84}$$

Passando para a versão local dessa ação, com a introdução dos campos de Zwanziger,

$$\begin{aligned} S^{local}_{GZ} &= S_{YM} + \int d^dx \Big[ib^a\partial_\mu A^a_\mu + \bar{c}^a\partial\cdot D^{ab}c^b + \tau^a\partial_\mu A^{ha}_\mu + \bar{\eta}^a\partial\cdot D^{ab}\left(A^h\right)\eta^b \\ &\quad + \bar{\varphi}^{ac}_\mu\,\partial\cdot D^{ab}(A^h)\varphi^{ac}_\mu - \bar{\omega}^{bc}_\mu\,\partial\cdot D^{ab}(A^h)\omega^{bc}_\mu + \gamma^{d/2} g f^{abc} A^{ha}_\mu\left(\varphi^{bc}_\mu + \bar{\varphi}^{bc}_\mu\right)\Big], \end{aligned} \tag{85}$$

com A^h sendo dado por sua versão local Eq. (78) em termo do campo tipo Stueckelberg. Agora, podemos perceber que a ação acima é invariante pelas seguintes tranformaçãoes BRST:

$$\begin{aligned} sA^a_\mu &= -D^{ab}_\mu c^b\,, \\ sc^a &= \frac{g}{2} f^{abc}c^b c^c\,, \\ s\bar{c}^a &= ib^a\,, \qquad sb^a = 0\,, \\ s\varphi^{ab}_\mu &= 0\,, \qquad s\omega^{ab}_\mu = 0\,, \\ s\bar{\omega}^{ab}_\mu &= 0\,, \qquad s\bar{\varphi}^{ab}_\mu = 0\,. \end{aligned} \tag{86}$$

Note-se que as tranformações dos campos de Zwanziger são agora singletos. É possível ainda escrever um BRST estendido, como em (71), porém, nesse caso é preciso introduzir termos com fontes externas. Essa possibilidade será discutida longamente no Cap. 5.

Antes de finalizar este capítulo, devemos levar em conta, também, a possibilidade de se introduzir um outro operador local composto, construído com os campos de Zwanziger:

$$\bar{\varphi}^{ab}_{\mu}\varphi^{ab}_{\mu} - \bar{\omega}^{ab}_{\mu}\omega^{ab}_{\mu}\,.$$

Este operador foi extensamente estudado (VANDERSICKEL, 2011) dentro da teoria de Gribov-Zwanziger e deu origem, juntamente com o operador $A^{h,a}_{\mu}A^{h,a}_{\mu}$, ao chamado modelo refinado de Gribov-Zwanziger (RGZ). A condensação desses operadores gera parâmetros massivos que influenciam no comportamento dos propagadores ao nível árvore. A ação RGZ é dada então por:

$$S_{RGZ} = S^{local}_{GZ} + \int d^dx \left[\frac{m^2}{2}A^{h,a}_{\mu}A^{h,a}_{\mu} - \mu_1^2\left(\bar{\varphi}^{ab}_{\mu}\varphi^{ab}_{\mu} - \bar{\omega}^{ab}_{\mu}\omega^{ab}_{\mu}\right)\right]\,. \tag{87}$$

O propagador do campo de calibre desta teoria é então dado por:

$$\left\langle \widetilde{A}^a_{\mu}(k)\,\widetilde{A}^b_{\nu}(p)\right\rangle^{RGZ}_0 \;=\; (2\pi)^4\,\delta\,(p+k)\,\mathcal{D}^{RGZ}_0\left(p^2\right)\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^2}\right), \tag{88}$$

em que

$$\mathcal{D}^{RGZ}_0\left(p^2\right) \;=\; \frac{p^2+\mu_1^2}{p^4+(m^2+\mu_1^2)p^2+m^2\mu_1^2+2Ng^2\gamma^4}.$$

Note-se como as expressões (88) e (74) diferem uma da outra e como $\mathcal{D}^{RGZ}_0(0) \neq 0$. O propagador do modelo RGZ está em bom acordo qualitativo com os resultados recentes vindos da rede (CUCCHIERI; MENDES, 2007)[14].

[14] Além disso, o propagador dos *ghosts* a um *loop* na RGZ vai como $1/p^2$ quando $p^2 \approx 0$.

3 OPERADORES COMPOSTOS NÃO-LOCAIS

3.1 Casos já estudados

3.1.1 Operador de massa invariante de calibre $tr\, F\frac{1}{D^2}F$

Mesmo que a introdução dos condensados e a formulação da versão refinada de Gribov-Zwanziger representem um passo à frente e deem conta de várias situações, o estudo de outros mecanismos para a geração de massa não parece ser dispensável. Embora o mecanismo de Higgs esteja à frente do ponto de vista técnico para tratar da geração de massa em teorias fundamentais, já que preserva a unitariedade e a renormalizabilidade, em uma teoria confinante como a QCD, onde os graus de liberdade físicos não são A_μ, ainda existe espaço para outros mecanismos de geração de massa que sejam renormalizáveis.

Recentemente, foram estudados alguns operadores compostos não-locais com esse escopo[15]. O principal deles é o operador

$$S^{\frac{1}{D^2}} = -\frac{m^2}{2}\int d^4x\, d^4y\, tr\left(F_{\mu\nu}(x)\,\frac{1}{D^2}(x,y)\,F_{\mu\nu}(y)\right) \tag{89}$$

em que $D^2 = D^{ac}_\mu D^{cb}_\mu$ e m é um parâmetro massivo. Esse termo é o primeiro termo da expansão de $A^2_{mín}$ e tem como característica principal ser invariante de calibre. A localização desse termo pode ser feita de maneira análoga à ação de Gribov-Zwanziger. Inicialmente, com a ajuda do par de campos bosônicos $\mathcal{B}^a_{\mu\nu}$ e $\bar{\mathcal{B}}^a_{\mu\nu}$ podemos escrever

$$e^{-S^{\frac{1}{D^2}}} = \int \mathcal{D}\mathcal{B}\mathcal{D}\bar{\mathcal{B}}\,\left(\det\left(D^2\right)\right)^6 e^{-\frac{1}{4}\int d^4x\left[\bar{\mathcal{B}}^a_{\mu\nu}D^{ac}_\alpha D^{cb}_\alpha \mathcal{B}^b_{\mu\nu}+imF^a_{\mu\nu}\left(\mathcal{B}^a_{\mu\nu}-\bar{\mathcal{B}}^a_{\mu\nu}\right)\right]}\,. \tag{90}$$

O determinante também pode ser escrito de forma local por meio da introdução de campos fermiônicos $\mathcal{C}^a_{\mu\nu}$ e $\bar{\mathcal{C}}^a_{\mu\nu}$

$$\left(\det\left(D^2\right)\right)^6 = \int \mathcal{D}\mathcal{C}\mathcal{D}\bar{\mathcal{C}}\, e^{\frac{1}{4}\int d^4x\,\bar{\mathcal{C}}^a_{\mu\nu}D^{ac}_\alpha D^{cb}_\alpha \mathcal{C}^b_{\mu\nu}}. \tag{91}$$

Assim,

$$e^{-S^{1/D^2}} = \int \mathcal{D}\mathcal{B}\mathcal{D}\bar{\mathcal{B}}\mathcal{D}\mathcal{C}\mathcal{D}\bar{\mathcal{C}}\, e^{-S^{1/D^2}_{local}}, \tag{92}$$

$$S^{1/D^2}_{local} = \frac{1}{4}\int d^4x\left[\bar{\mathcal{B}}^a_{\mu\nu}D^{ac}_\alpha D^{cb}_\alpha \mathcal{B}^b_{\mu\nu} - \bar{\mathcal{C}}^a_{\mu\nu}D^{ac}_\alpha D^{cb}_\alpha \mathcal{C}^b_{\mu\nu} + imF^a_{\mu\nu}\left(\mathcal{B}^a_{\mu\nu}-\bar{\mathcal{B}}^a_{\mu\nu}\right)\right]\,. \tag{93}$$

---

[15] (CAPRI et al., 2005),(CAPRI et al., 2008a), (CAPRI et al., 2008b)

Em (CAPRI et al., 2005) foi demonstrado a renormalizabilidade dessa ação com certas modificações, necessárias para manter a simetria BRST. No entanto, a existência dos vértices quárticos do tipo $\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}AA$ e $\bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}AA$ permite que as funções de Green $\langle \mathcal{B}\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}} \rangle$, $\langle \mathcal{B}\bar{\mathcal{B}}\mathcal{C}\bar{\mathcal{C}} \rangle$ e $\langle \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}\bar{\mathcal{C}} \rangle$ possuam contribuições divergentes já a nível 1-loop. Isso impõe que contratermos do mesmo tipo, $\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}}\mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}$, sejam adicionados necessariamente à ação original. Do ponto de vista da Renormalização Algébrica (PIGUET; SORELLA, 1995), nenhuma simetria existente na teoria é capaz de eliminar esses contratermos. A exigência de que esses contratermos estejam presentes tem consequências desagradáveis, isso porque a interpretação inicial da teoria não pode ser recuperada. Não é possível integrarmos nos campos $\bar{\mathcal{B}}^a_{\mu\nu}$, $\mathcal{B}^b_{\mu\nu}$, $\bar{\mathcal{C}}^a_{\mu\nu}$ e $\mathcal{C}^b_{\mu\nu}$ e obtermos $S^{\frac{1}{D^2}}$.

3.1.2 Extensões do horizonte de Gribov para a matéria e uma interpretação geométrica

A ação refinada de Gribov-Zwanziger lida apenas com a quantização do campo de calibre A_μ. Surge então uma pergunta: *como a restrição ao horizonte de Gribov poderia afetar o setor de matéria (seja ele escalar, ou fermiônico)?* A pergunta surge a partir do entendimento de que a problemática de Gribov parece estar intimamente ligada com o problema de confinamento, que, no caso da QCD, seria o confinamento dos glúons em estados conhecidos como *glueballs*[16]. Então, espera-se que este mecanismo possa dar alguma informação sobre o confinamento da matéria, ou seja, no confinamento dos quarks, no caso da QCD. No entanto, como sabemos, diferentemente do campo de calibre, onde o problema das cópias é bem estabelecido, nenhuma modificação no setor de matéria, que tenha uma motivação semelhante, aparentemente, parece ser necessária. Apesar dessa falta de uma justificativa mais clara, recentemente, (CAPRI; FIORENTINI; SORELLA, 2015) propuseram o que seria o *termo de horizonte para a matéria.* Essa tentativa foi feita através do operador não-local

$$H_{Mat.}(\mathscr{F}, A) = -g^2 M^{6-2L} \int d^4x d^4y \, \overline{\mathscr{F}}^i(x) \, (T^a)^{ik} \left(\frac{1}{\partial \cdot D}\right)^{ab} (x,y) \left(T^b\right)^{jk} \mathscr{F}^j(y) \,, \quad (94)$$

em que L é a dimensão de massa do campo de matéria $\mathscr{F}^i$ e do seu conjugado $\overline{\mathscr{F}}^i$ e M é um parâmetro massivo, análogo ao parâmetro de Gribov γ. Notemos que, se o campo $\mathscr{F}^i$ for o próprio campo de calibre, A^a_μ, a função $H_{Mat.}$ coincide com a função horizonte de Gribov Eq. (63). Se, por outro lado, $\mathscr{F}^i$ tratar-se da matéria escalar neutra na adjunta,

[16] Bolas de glúons

tal com foi estudado em (CAPRI et al., 2014), temos:

$$\mathscr{F}^i \to \phi^a\,, \qquad \overline{\mathscr{F}}^i \to \phi^a\,, \qquad (T^a)^{ij} \to f^{abc}\,, \qquad L=1 \tag{95}$$

e

$$H_{Mat.}(\phi, A) = -g^2M^4 \int d^4x d^4y \, \phi^c(x) \, f^{ace} \left(\frac{1}{\partial \cdot D}\right)^{ab} (x,y) \, f^{bde} \phi^d(y) \ . \tag{96}$$

Já no caso de um campo espinorial, como feito em (CAPRI; FIORENTINI; SORELLA, 2015), teríamos o seguinte:

$$\mathscr{F}^i \to \psi^i\,, \qquad \overline{\mathscr{F}}^i \to \overline{\psi}^i\,, \qquad L=3/2 \tag{97}$$

e

$$H_{Mat.}(\psi, A) = -g^2M^3 \int d^4x d^4y \, \overline{\psi}^i(x) \, (T^a)^{ik} \left(\frac{1}{\partial \cdot D}\right)^{ab} (x,y) \, (T^a)^{jk} \, \psi^j(y) \ . \tag{98}$$

Assim como a função horizonte de Gribov para o setor de calibre, um termo como esse viola a simetria BRST. No entanto, de maneira análoga a A^h_μ, é possível construir um campo de matéria que seja invariante de calibre, ou seja, $\mathscr{F}^{h,i}$ (CAPRI et al., 2016).

É importante ressaltar que os propagadores advindos da teoria em presença desses termos de horizonte para a matéria estão em acordo com os resultados numéricos da rede (CAPRI et al., 2014) e (DUDAL et al., 2016). No entanto, a interpretação do que isso representaria ainda está em aberto. Porém, o trabalho de (GUIMARAES; PEREIRA; SORELLA, 2016) trás novos *insights* e estabelece uma interpretação geométrica. Nesse trabalho, é estudado o efeito da redução de uma dimensão na ação de Gribov-Zwanziger em $D=5$. Essa redução é feita tratando-se uma das dimensões como um círculo de raio R. Assim, um campo qualquer da teoria, Φ_I, pode ser expresso como

$$\Phi_I(x, x_5) \;=\; \sum_n \Phi_I^{(n)}(x)\, e^{\frac{inx_5}{R}}. \tag{99}$$

Tomando-se R muito pequeno, apenas o menor modo é relevante, o que implica que $\Phi_I(x,x_5) \equiv \Phi_I(x)$. Dessa forma, $\partial_5 \Phi_I = 0$ e $\int d^5x\,(\ldots) = R\int d^4x\,(\ldots)$. Após um reescalonamento dos campos, além da ação refinada de Gribov-Zwanziger em $D=4$, surge um termo que é, na versão não-local,

$$S^\phi \;=\; \int d^4x \left(\frac{1}{2}\left(D^{ab}\phi^b\right)^2 + \frac{m_\phi^2}{2}\phi^a\phi^a\right) + H_{Mat.}(\phi, A)\,, \tag{100}$$

em que $\phi^a \equiv A^a_5$. O último termo é exatamente o termo de horizonte que propusemos anteriormente.

Até o presente momento, não sabemos até que ponto podemos levar em consideração essa interpretação para o termo (94), já que ela é válida apenas para um campo escalar e, mesmo assim, ainda está faltando o termo de interação $(\phi^a\phi^a)^2$, necessário para que a teoria seja renormalizável em $D = 4$. A não-renormalizabilidade da ação GZ em dimensões maiores que quatro também compromete essa visão.

3.2 Operador composto não-local $F\frac{1}{\partial D}F$

3.2.1 Definição e Localização

Na seção anterior vimos alguns exemplos de operadores não-locais já estudados e que podem ser escritos em forma local através da introdução de campos auxiliares como os de Zwanziger. Em particular, vimos que o operador $tr\,\left(F_{\mu\nu}\frac{1}{D^2}F_{\mu\nu}\right)$, embora seja invariante de calibre e possa ser localizado, encontra problemas em sua renormalização. Tendo isso em mente, nossa proposta de trabalho será a de unir as duas ideias apresentadas na seção anterior e escrever, a partir da expressão Eq. (94), o seguinte operador:

$$\mathcal{O}(A) \;=\; g^2M^2\int d^4x\, d^4y\, f^{abc}F^a_{\mu\nu}(x)\left(\frac{1}{\partial\cdot D}\right)^{be}(x,y)\, f^{dec}F^d_{\mu\nu}(y)\ , \tag{101}$$

no qual fizemos as seguintes redefinições em Eq. (94):

$$\mathscr{F}^i \to F^a_{\mu\nu}\,, \qquad \overline{\mathscr{F}}^i \to F^a_{\mu\nu}\,, \qquad (T^a)^{ij} \to f^{abc}\,, \qquad L = 2\,, \tag{102}$$

ou seja, escolhemos $\mathscr{F}^i$ como sendo um campo composto, em lugar de um campo fundamental. Notemos ainda que este novo operador é muito semelhante ao operador $tr\,\left(F_{\mu\nu}\frac{1}{D^2}F_{\mu\nu}\right)$. Essencialmente, a troca $D^2 \to \partial\cdot D$ corresponde a diferença entre esses dois operadores[17]. Inclusive, esse novo operador pode ser escrito de uma forma invariante de calibre, pois, lembrando do que vimos no capítulo anterior, este pode ser escrito em termos do campo composto A^h, ou seja,

$$\mathcal{O}\left[A^h\right] \;=\; g^2M^2\int d^4x\, d^4y\, f^{abc}F^a_{\mu\nu}\left[A^h\right](x)\left(\frac{1}{\partial\cdot D\left[A^h\right]}\right)^{be}(x,y)\, f^{dec}F^d_{\mu\nu}\left[A^h\right](y)\ . \tag{103}$$

[17] Também poderíamos ter estudado um operador mais simples, como

$$M^2\int d^4x\, d^4y\, F^a_{\mu\nu}(x)\left(\frac{1}{\partial\cdot D}\right)^{ab}(x,y)\, F^b_{\mu\nu}(y)\ ,$$

porém, do ponto de vista da prova da renormalização e dos propagadores ao nível árvore, não há uma diferença apreciável entre este operador e $\mathcal{O}(A)$.

Além disso, o operador estará bem definido se a integração funcional do campo A_μ estiver restrita à primeira região de Gribov, por isso, estudá-lo-emos juntamente com a versão refinada da ação de Gribov-Zwanziger. No entanto, por uma questão de simplicidade, já que A^h é uma série infinita não-local

$$A^h_\mu \simeq \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial^2}\right) A_\mu + \mathcal{O}\left(A^2\right), \tag{104}$$

trabalharemos com o primeiro termo da expansão, que é a componente transversa de A_μ. Como utilizaremos o calibre de Landau, A_μ já será transverso, portanto, $A^h_\mu \simeq A_\mu$. Nessa aproximação, obviamente a simetria de calibre é perdida, no entanto, a simetria BRST pode ser recuperada, introduzindo-se um sistema adequado de fontes externas, como mostraremos no capítulo seguinte.

Tomada essa aproximação, passemos para a localização do termo $\mathcal{O}(A)$. Introduzindo dois campos bosônicos, $B^{ab}_{\mu\nu}$ e $\bar{B}^{ab}_{\mu\nu}$, podemos reescrever

$$e^{-\mathcal{O}(A)} = \int \mathcal{D}B\mathcal{D}\bar{B}\left(\det\left(\partial\cdot D\right)\right)^{6(N^2-1)} e^{-\int d^4x\left[\bar{B}^{ac}_{\mu\nu}\partial\cdot D^{ab}B^{bc}_{\mu\nu}+mgf^{abc}F^a_{\mu\nu}\left(B^{bc}_{\mu\nu}+\bar{B}^{bc}_{\mu\nu}\right)\right]}. \tag{105}$$

O determinante pode ser localizado com um par de campos fermiônicos, $G^{ab}_{\mu\nu}$ e $\bar{G}^{ab}_{\mu\nu}$,

$$\left(\det\left(\partial\cdot D\right)\right)^{6(N^2-1)} = \int \mathcal{D}G\mathcal{D}\bar{G}\, e^{\int d^4x\, \bar{G}^{ac}_{\mu\nu}\partial\cdot D^{ab}G^{bc}_{\mu\nu}}. \tag{106}$$

Assim, a versão local de $\mathcal{O}(A)$ é

$$\mathcal{O}_{local} = \int d^4x\left[\bar{B}^{ac}_{\mu\nu}\partial\cdot D^{ab}B^{bc}_{\mu\nu} - \bar{G}^{ac}_{\mu\nu}\partial\cdot D^{ab}G^{bc}_{\mu\nu} + mgf^{abc}F^a_{\mu\nu}\left(B^{bc}_{\mu\nu}+\bar{B}^{bc}_{\mu\nu}\right)\right]. \tag{107}$$

De imediato, já podemos verificar uma vantagem desse operador em comparação com $tr\left(F_{\mu\nu}\frac{1}{D^2}{}_{\mu\nu}F\right)$. Vértices análogos ao caso anterior, do tipo $B\bar{B}AA$ e $G\bar{G}AA$ não existem nesse caso. Além disso, as equação de movimento dos campos auxiliares são facilmente transformadas em identidades de Ward.

Em $D=4$, a dimensão de massa dos campos auxiliares é igual a 1. Isso implica que, caso o operador composto $\bar{B}^{ab}_{\mu\nu}(x)\,B^{ab}_{\mu\nu}(x) - \bar{G}^{ab}_{\mu\nu}(x)\,G^{ab}_{\mu\nu}(x)$ condense, ele será proporcional a uma massa ao quadrado. Tendo em vista isso, estudaremos juntamente com $\mathcal{O}_{local}$ um termo

$$-\mu_2^2\int d^dx\,\left(\bar{B}^{ab}_{\mu\nu}B^{ab}_{\mu\nu} - \bar{G}^{ab}_{\mu\nu}G^{ab}_{\mu\nu}\right), \tag{108}$$

cujo efeito sobre os propagadores da teoria é marcante, como veremos em seguida. Esse operador é inteiramente análogo ao operador $\bar{\varphi}^{ab}_\mu\varphi^{ab}_\mu - \bar{\omega}^{ab}_\mu\omega^{ab}_\mu$ que mencionamos na RGZ.

3.2.2 Propagadores

Agora que encontramos a versão local de $\mathcal{O}$, podemos escrever a ação física completa que estudaremos,

$$
\begin{aligned}
S^{\mathcal{O}} &= \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i b^a \partial_\mu A^a_\mu + \bar{c}^a \partial \cdot D^{ab} c^b \right. \\
&+ \bar{\varphi}^{ac}_\mu \partial \cdot D^{ab} \varphi^{bc}_\mu - \bar{\omega}^{ac}_\mu \partial \cdot D^{ab} \omega^{bc}_\mu + \gamma^2 g f^{abc} A^a_\mu \left(\varphi^{bc}_\mu + \bar{\varphi}^{bc}_\mu \right) \\
&+ \frac{m^2}{2} A^a_\mu A^a_\mu - \mu_1^2 \left(\bar{\varphi}^a_\mu \varphi^a_\mu - \bar{\omega}^a_\mu \omega^a_\mu \right) \\
&+ \bar{B}^{ac}_{\mu\nu} \partial \cdot D^{ab} B^{bc}_{\mu\nu} - \bar{G}^{ac}_{\mu\nu} \partial \cdot D^{ab} G^{bc}_{\mu\nu} + M g f^{abc} F^a_{\mu\nu} \left(B^{bc}_{\mu\nu} + \bar{B}^{bc}_{\mu\nu} \right) \\
&\left. - \mu_2^2 \left(\bar{B}^{ab}_{\mu\nu} B^{ab}_{\mu\nu} - \bar{G}^{ab}_{\mu\nu} G^{ab}_{\mu\nu} \right) \right] . \qquad (109)
\end{aligned}
$$

No próximo capítulo, mais algumas modificações serão feitas no modelo, com o objetivo de demonstrar a sua renormalizabilidade. No entanto, todas as alterações realizadas, com a introdução de fontes, não deverão modificar a ação física. Como havíamos mencionado, os termos (107) e (108) devem contribuir com parâmetros massivos tanto para o campo de calibre como para os campos auxiliares. Afim de confirmar esses fatos, calcularemos os propagadores da teoria. A parte quadrática da ação é

$$
\begin{aligned}
S^{\mathcal{O}}_{quadr.} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A^a_\mu \left(\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu - m^2 \delta_{\mu\nu} \right) A^a_\nu + i b^a \partial_\mu A^a_\mu \right. \\
&+ \bar{c}^a \partial^2 c^a + \bar{\varphi}^a_{\mu\nu} \left(\partial^2 - \mu_1^2 \right) \varphi^a_{\mu\nu} - \bar{\omega}^a_{\mu\nu} \left(\partial^2 - \mu_1^2 \right) \omega^a_{\mu\nu} \\
&- g \gamma^2 f^{abc} A^a \left(\varphi^{bc}_\mu + \bar{\varphi}^{bc}_\mu \right) \\
&+ \bar{B}^{ab}_{\mu\nu} \left(\partial^2 - \mu_2^2 \right) B^{ab}_{\mu\nu} - \bar{G}^{ab}_{\mu\nu} \left(\partial^2 - \mu_2^2 \right) G^{ab}_{\mu\nu} + \\
&\left. + 2 g M f^{abc} \left(\partial_\mu A^a_\nu \right) \left(B^{bc}_{\mu\nu} + \bar{B}^{bc}_{\mu\nu} \right) \right] . \qquad (110)
\end{aligned}
$$

Por uma questão de conveniência, reescreveremos os campos bosônicos complexos, $\left(\varphi^{ab}_\mu, \bar{\varphi}^{ab}_\mu\right)$ e $\left(B^{ab}_{\mu\nu}, \bar{B}^{ab}_{\mu\nu}\right)$ em termos de campos bosônicos reais, $\left(\chi^{ab}_\mu, \psi^{ab}_\mu\right)$ e $\left(\mathcal{Q}^{ab}_{\mu\nu}, \mathcal{R}^{ab}_{\mu\nu}\right)$,

$$
\varphi^{ab}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\chi^{ab}_\mu + i \psi^{ab}_\mu \right) \qquad (111)
$$

$$
\bar{\varphi}^{ab}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\chi^{ab}_\mu - i \psi^{ab}_\mu \right) \qquad (112)
$$

e

$$
B^{ab}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{Q}^{ab}_{\mu\nu} + i \mathcal{R}^{ab}_{\mu\nu} \right) \qquad (113)
$$

$$
\bar{B}^{ab}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{Q}^{ab}_{\mu\nu} - i \mathcal{R}^{ab}_{\mu\nu} \right) . \qquad (114)
$$

Assim,

$$\begin{aligned}
S^{\mathcal{O}}_{quad.} &= \int d^4x \begin{bmatrix} A^a_\mu & b^a & \chi^{ab}_\mu & \mathcal{Q}^{ab}_{\mu\nu} \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\delta^{ac}\Delta_{\mu\rho} & -\frac{i}{2}\delta^{ac}\partial_\mu & -\frac{1}{\sqrt{2}}g\gamma^2 f^{acd}\delta_{\mu\rho} & -\frac{1}{\sqrt{2}}gMf^{acd}\partial_{\rho\sigma\mu} \\ \frac{i}{2}\delta^{ac}\partial_\rho & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}g\gamma^2 f^{abc}\delta_{\mu\rho} & 0 & \frac{1}{2}\left(\partial^2-\mu_1^2\right)\delta^{ac}\delta^{bd}\delta_{\mu\rho} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}gMf^{cab}\partial_{\mu\nu\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\partial^2-\mu_2^2\right)\delta^{ac}\delta^{bd}\delta_{\mu\nu\rho\sigma} \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} A^c_\rho \\ b^c \\ \chi^{cd}_\rho \\ \mathcal{Q}^{cd}_{\rho\sigma} \end{bmatrix} \\
&+ \int d^4x \Big[\bar{c}^a \partial^2 c^a + \frac{1}{2}\psi^a_{\mu\nu}\left(\partial^2-\mu_1^2\right)\psi^a_{\mu\nu} - \bar{\omega}^a_{\mu\nu}\left(\partial^2-\mu_1^2\right)\omega^a_{\mu\nu} \\
&+ \frac{1}{2}\mathcal{R}^{ab}_{\mu\nu}\left(\partial^2-\mu_2^2\right)\mathcal{R}^{ab}_{\mu\nu} - \bar{G}^{ab}_{\mu\nu}\left(\partial^2-\mu_2^2\right)G^{ab}_{\mu\nu}\Big] ,
\end{aligned} \tag{115}$$

sendo

$$\Delta_{\mu\rho} = \partial^2 P_{\mu\rho} - m^2\delta_{\mu\rho} , \tag{116}$$

$$\partial_{\mu\nu\rho} = \delta_{\nu\rho}\partial_\mu - \delta_{\mu\rho}\partial_\nu , \tag{117}$$

$$\delta_{\mu\nu\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\sigma} , \tag{118}$$

$$P_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial^2} . \tag{119}$$

Para encontrarmos os propagadores de parte do setor bosônico, devemos inverter a matriz

$$\mathbf{M}(x-y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\delta^{ac}\Delta_{\mu\rho} & -\frac{i}{2}\delta^{ac}\partial_\mu & -\frac{1}{\sqrt{2}}g\gamma^2 f^{acd}\delta_{\mu\rho} & -\frac{1}{\sqrt{2}}gMf^{acd}\partial_{\rho\sigma\mu} \\ \frac{i}{2}\delta^{ac}\partial_\rho & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}g\gamma^2 f^{abc}\delta_{\mu\rho} & 0 & \frac{1}{2}\left(\partial^2-\mu_1^2\right)\delta^{ac}\delta^{bd}\delta_{\mu\rho} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}gMf^{cab}\partial_{\mu\nu\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\partial^2-\mu_2^2\right)\delta^{ac}\delta^{bd}\delta_{\mu\nu\rho\sigma} \end{bmatrix} \delta\left(x-y\right) , \tag{120}$$

ou, equivalentemente, no espaço dos *momenta*

$$\tilde{\mathbf{M}}\left(k\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\delta^{ac}\tilde{\Delta}_{\mu\rho} & -\frac{1}{2}\delta^{ac}k_\mu & -\frac{1}{\sqrt{2}}g\gamma^2 f^{acd}\delta_{\mu\rho} & -\frac{1}{\sqrt{2}}gMf^{acd}\tilde{\partial}_{\rho\sigma\mu} \\ \frac{1}{2}\delta^{ac}k_\rho & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}g\gamma^2 f^{abc}\delta_{\mu\rho} & 0 & -\frac{1}{2}\left(k^2+\mu_1^2\right)\delta^{ac}\delta^{bd}\delta_{\mu\rho} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}gMf^{cab}\tilde{\partial}_{\mu\nu\rho} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\left(k^2+\mu_2^2\right)\delta^{ac}\delta^{bd}\delta_{\mu\nu\rho\sigma} \end{bmatrix} , \tag{121}$$

em que,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{\mu\rho} &= -(k^2\tilde{P}_{\mu\rho} + m^2\delta_{\mu\rho})\,, && (122)\\
\tilde{\partial}_{\mu\nu\rho} &= -i(\delta_{\nu\rho}k_\mu - \delta_{\mu\rho}k_\nu)\,, && (123)\\
\tilde{P}_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\,. && (124)
\end{aligned}$$

Depois de um certo trabalho algébrico, obtemos que:

- Propagador do campo A^a_μ:

$$\left\langle \tilde{A}^a_\mu(k)\,\tilde{A}^b_\nu(-k)\right\rangle = \frac{(k^2+\mu_1^2)\,(k^2+\mu_2^2)}{D_1}\delta^{ab}\tilde{P}_{\mu\nu}, \tag{125}$$

em que

$$D_1 = \left(k^2+M^2\right)\left(k^2+\mu_1^2\right)\left(k^2+\mu_2^2\right) + 2g^2\gamma^4 N\left(k^2+\mu_2^2\right) + 4g^2m^2Nk^2\left(k^2+\mu_1^2\right); \tag{126}$$

- Propagador misto dos campos A^a_μ-b^a:

$$\left\langle \tilde{A}^a_\mu(k)\,\tilde{b}^b(-k)\right\rangle = -\frac{k_\mu}{k^2}\delta^{ab}; \tag{127}$$

- Propagadores mistos dos campos A^a_μ-φ^{ab}_μ e A^a_μ-$\bar{\varphi}^{ab}_\mu$:

$$\left\langle \tilde{A}^a_\mu(k)\,\tilde{\varphi}^{bc}_\nu(-k)\right\rangle = \left\langle \tilde{A}^a_\mu(k)\,\tilde{\bar{\varphi}}^{bc}_\nu(-k)\right\rangle = -\frac{(k^2+\mu_2^2)\,g\gamma^2 f^{abc}\delta_{\mu\nu}}{D_2}, \tag{128}$$

sendo

$$D_2 = \left(k^2+m^2\right)\left(k^2+\mu_1^2\right)\left(k^2+\mu_2^2\right) + 2g^2\gamma^4 N\left(k^2+\mu_2^2\right) + 4g^2M^2Nk^2\left(k^2+\mu_1^2\right); \tag{129}$$

- Propagadores mistos dos campos A^a_μ-$B^{ab}_{\mu\nu}$ e A^a_μ-$\bar{B}^{ab}_{\mu\nu}$:

$$\left\langle \tilde{A}^a_\mu(k)\,\tilde{B}^{bc}_{\nu\rho}(-k)\right\rangle = \left\langle \tilde{A}^a_\mu(k)\,\tilde{\bar{B}}^{bc}_{\nu\rho}(-k)\right\rangle = \frac{(k^2+\mu_1^2)\,igMf^{abc}}{D_3}\left(\tilde{P}_{\mu\rho}k_\nu - \tilde{P}_{\mu\nu}k_\rho\right), \tag{130}$$

sendo

$$D_3 = \left(k^2+M^2\right)\left(k^2+\mu_1^2\right)\left(k^2+\mu_2^2\right) + 2g^2\gamma^4 N\left(k^2+\mu_2^2\right) + 4g^2m^2Nk^2\left(k^2+\mu_1^2\right); \tag{131}$$

- Propagador do campo b^a:

$$\left\langle \tilde{b}^a(k)\,\tilde{b}^b(-k)\right\rangle = \frac{2\delta^{ab}}{k^2}m^2 + \frac{4g^2\gamma^4N\delta^{ab}}{(k^2+\mu_1^2)\,k^2}; \tag{132}$$

- Propagadores mistos dos campos b^a-φ_μ^{ab} e b^a-$\bar{\varphi}_\mu^{ab}$:

$$\left\langle \tilde{b}^a(k)\,\tilde{\varphi}_\mu^{bc}(-k)\right\rangle = \left\langle \tilde{b}^a(k)\,\tilde{\bar{\varphi}}_\mu^{bc}(-k)\right\rangle = -\frac{g\gamma^2 f^{abc}k_\mu}{(k^2+\mu_1^2)\,k^2}; \tag{133}$$

- Propagadores mistos dos campos b^a-$B_{\mu\nu}^{ab}$ e b^a-$\bar{B}_{\mu\nu}^{ab}$:

$$\left\langle \tilde{b}^a(k)\,\tilde{B}_{\mu\nu}^{bc}(-k)\right\rangle = \left\langle \tilde{b}^a(k)\,\tilde{\bar{B}}_{\mu\nu}^{bc}(-k)\right\rangle = 0; \tag{134}$$

- Propagador dos campos φ_μ^{ab}-$\bar{\varphi}_\mu^{ab}$:

$$\left\langle \tilde{\varphi}_\mu^{ab}(k)\,\tilde{\bar{\varphi}}_\nu^{cd}(-k)\right\rangle = -\frac{\delta^{ac}\delta^{bd}\delta_{\mu\nu}}{(k^2+\mu_1^2)} + \frac{(k^2+\mu_2^2)\,g^2\gamma^4 f^{abk}f^{kcd}\delta_{\mu\nu}}{D_4}, \tag{135}$$

sendo

$$\begin{aligned} D_4 &= \left(k^2+m^2\right)\left(k^2+\mu_1^2\right)^2\left(k^2+\mu_2^2\right) + 2g^2\gamma^4 N\left(k^2+\mu_1^2\right)\left(k^2+\mu_2^2\right) \\ &\quad +4g^2M^2Nk^2\left(k^2+\mu_1^2\right)^2; \end{aligned} \tag{136}$$

- Propagadores dos campos φ_μ^{ab}-φ_μ^{ab} e $\bar{\varphi}_\mu^{ab}$- $\bar{\varphi}_\mu^{ab}$:

$$\left\langle \tilde{\varphi}_\mu^{ab}(k)\,\tilde{\varphi}_\nu^{cd}(-k)\right\rangle = \left\langle \tilde{\bar{\varphi}}_\mu^{ab}(k)\,\tilde{\bar{\varphi}}_\nu^{cd}(-k)\right\rangle = \frac{(k^2+\mu_2^2)\,g^2\gamma^4 f^{abk}f^{kcd}\delta_{\mu\nu}}{D_4}; \tag{137}$$

- Propagadores mistos dos campos φ_μ^{ab}-$B_{\mu\nu}^{ab}$, φ_μ^{ab}-$\bar{B}_{\mu\nu}^{ab}$, $\bar{\varphi}_\mu^{ab}$-$B_{\mu\nu}^{ab}$ e $\bar{\varphi}_\mu^{ab}$-$\bar{B}_{\mu\nu}^{ab}$:

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\varphi}_\mu^{ab}(k)\,\tilde{B}_{\nu\rho}^{cd}(-k)\right\rangle &= \left\langle \tilde{\varphi}_\mu^{ab}(k)\,\tilde{\bar{B}}_{\nu\rho}^{cd}(-k)\right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{\bar{\varphi}}_\mu^{ab}(k)\,\tilde{\bar{B}}_{\nu\rho}^{cd}(-k)\right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{\bar{\varphi}}_\mu^{ab}(k)\,\tilde{B}_{\nu\rho}^{cd}(-k)\right\rangle \\ &= -\frac{ig^2M\gamma^2 f^{abk}f^{kcd}}{D_5}\left(\tilde{P}_{\mu\rho}k_\nu - \tilde{P}_{\mu\nu}k_\rho\right), \end{aligned} \tag{138}$$

sendo

$$D_5 = \left(k^2+m^2\right)\left(k^2+\mu_1^2\right)\left(k^2+\mu_2^2\right) + 2g^2\gamma^4N\left(k^2+\mu_2^2\right) + 4g^2M^2Nk^2\left(k^2+\mu_1^2\right); \tag{139}$$

- Propagador dos campos $B_{\mu\nu}^{ab}$-$\bar{B}_{\mu\nu}^{ab}$:

$$\left\langle \tilde{B}^{ab}_{\mu\nu}(k)\,\tilde{\bar{B}}^{cd}_{\rho\sigma}(-k)\right\rangle = -\frac{1}{2}\left(\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu}-\delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}\right)\frac{\delta^{ac}\delta^{bd}}{(k^2+\mu_2^2)} + \frac{(k^2+\mu_1^2)\,g^2M^2f^{kab}f^{kcd}\left(\tilde{P}_{\lambda\rho}k_\sigma-\tilde{P}_{\lambda\sigma}k_\rho\right)\left(\tilde{P}_{\lambda\nu}k_\mu-\tilde{P}_{\lambda\mu}k_\nu\right)}{D_6}, \tag{140}$$

sendo

$$D_6 = \left(k^2+m^2\right)\left(k^2+\mu_1^2\right)\left(k^2+\mu_2^2\right)^2+2g^2\gamma^4N\left(k^2+\mu_2^2\right)^2 +4g^2M^2Nk^2\left(k^2+\mu_1^2\right)\left(k^2+\mu_2^2\right); \tag{141}$$

- Propagadores dos campos $B^{ab}_{\mu\nu}$-$B^{ab}_{\mu\nu}$ e $\bar{B}^{ab}_{\mu\nu}$-$\bar{B}^{ab}_{\mu\nu}$:

$$\left\langle \tilde{B}^{ab}_{\mu\nu}(k)\,\tilde{B}^{cd}_{\rho\sigma}(-k)\right\rangle = \left\langle \tilde{\bar{B}}^{ab}_{\mu\nu}(k)\,\tilde{\bar{B}}^{cd}_{\rho\sigma}(-k)\right\rangle = \frac{(k^2+\mu_1^2)\,g^2M^2f^{kab}f^{kcd}\left(\tilde{P}_{\lambda\rho}k_\sigma-\tilde{P}_{\lambda\sigma}k_\rho\right)\left(\tilde{P}_{\lambda\nu}k_\mu-\tilde{P}_{\lambda\mu}k_\nu\right)}{D_6}. \tag{142}$$

O restante dos propagadores são imediatos:

- Propagador do *ghost*:

$$\left\langle \tilde{\bar{c}}^a(k)\,\tilde{c}^b(-k)\right\rangle = \frac{-\delta^{ab}}{k^2}; \tag{143}$$

- Propagador do campo ω^{ab}_μ:

$$\left\langle \tilde{\bar{\omega}}^{ab}_\mu(k)\,\tilde{\omega}^{cd}_\nu(-k)\right\rangle = -\frac{\delta^{ac}\delta^{bd}\delta_{\mu\nu}}{(k^2+\mu_1^2)}. \tag{144}$$

- Propagador do campo $G^{ab}_{\mu\nu}$:

$$\left\langle \tilde{G}^{ab}_{\mu\nu}(k)\,\tilde{\bar{G}}^{cd}_{\rho\sigma}(-k)\right\rangle = -\frac{1}{2}\left(\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu}-\delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}\right)\frac{\delta^{ac}\delta^{bd}}{(k^2+\mu_2^2)}. \tag{145}$$

O propagador do campo de calibre é transverso, como era esperado já que estamos trabalhando no calibre de Landau, $\left\langle \tilde{A}^a_\mu(k)\,\tilde{A}^b_\nu(-k)\right\rangle = \mathcal{D}(k^2)\,\delta^{ab}P_{\mu\nu}$, em que

$$\mathcal{D}\left(k^2\right) = \frac{(k^2+\mu_1^2)(k^2+\mu_2^2)}{(k^2+m^2)(k^2+\mu_1^2)(k^2+\mu_2^2)+2g^2\gamma^4N(k^2+\mu_2^2)+4g^2M^2Nk^2(k^2+\mu_1^2)}, \tag{146}$$

cujo denominador $\sim k^6$. Se $M=0$, o resultado fornecido pela RGZ é recuperado, como também era esperado. O propagador fornecido pela teoria com o operador Eq. (89) é semelhante, com a excessão da massa μ_2 do condensado $\left\langle\left(\bar{B}B-\bar{G}G\right)\right\rangle$. As simulações numéricas encontradas na rede em $D = 3$ mostram esse comportamento (CUCCHIERI et al., 2012). Embora tenhamos formulado a teoria em $D = 4$, onde ela é renormalizável por contagem de potências, em $D = 3$ nenhuma mudança significativa existe, a não ser que ela passa a ser super-renormalizável por contagem de potências.

4 RESTAURAÇÃO DA SIMETRIA BRST E IDENTIDADES DE WARD

4.1 Restauração da Simetria BRST

Um passo importante para demonstrar a renormalizabilidade da teoria é restaurar a simetria BRST, que tanto o setor RGZ quanto o setor do operador $\mathcal{O}_{local}$ não possuem. Seguindo a ordem cronológica, comecemos pelo setor RGZ. A primeira mudança que faremos é no campo ω^{ab}_{μ}:

$$\omega^{bc}_{\mu}(x) \;\; \rightarrow \;\; \omega^{bc}_{\mu}(x) + \int d^4y \, \left[\partial \cdot D^{-1}\right]^{bk}(x,y)\partial^{y}_{\alpha}\left[g f^{kle}\left(D^{de,y}_{\alpha}c^{e}(y)\right)\varphi^{lc}_{\mu}(y)\right]. \tag{147}$$

Essa transformação (147) não tem nenhum efeito já que o jacobiano é igual à identidade. Dessa forma,

$$S_{RGZ} \;\; \rightarrow \;\; S^{'}_{RGZ} = S_{RGZ} - \int d^4x \, \bar{\omega}^{ac}_{\mu}\partial_{\alpha}\left[g f^{abd}\left(D^{de}_{\alpha}c^{e}\right)\varphi^{bc}_{\mu}\right]. \tag{148}$$

Agora, escrita dessa forma, se assumirmos que

$$s\varphi^{ab}_{\mu} \;\; = \;\; \omega^{ab}_{\mu} \tag{149}$$
$$s\omega^{ab}_{\mu} \;\; = \;\; 0 \tag{150}$$

e

$$s\bar{\omega}^{ab}_{\mu} \;\; = \;\; \bar{\varphi}^{ab}_{\mu} \tag{151}$$
$$s\bar{\varphi}^{ab}_{\mu} \;\; = \;\; 0, \tag{152}$$

então,

$$S^{'}_{RGZ}\Big|_{\gamma^2=m^2=\mu_1^2=0} = S_{YM} + S_{gf} + s(\int d^4x \, \bar{\omega}^{ac}_{\mu}\partial \cdot D^{ab}\varphi^{ac}_{\mu}), \tag{153}$$

que, obviamente, é invariante de BRST. A parte restante da ação que não possui essa simetria pode ser reescrita através da introdução de fontes auxiliares. No setor de Gribov, podemos fazer a passagem

$$\gamma^2 g f^{abc}\int d^4x \, A^{a}_{\mu}(\varphi^{bc} + \bar{\varphi}^{bc}_{\mu}) \rightarrow -\int d^4x \, (\bar{M}^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_{\mu}\varphi^{bc}_{\nu} + M^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_{\mu}\bar{\varphi}^{bc}_{\nu}), \tag{154}$$

em que, $(M^{ab}_{\mu\nu}, \bar{M}^{ab}_{\mu\nu})$ são duas fontes comutantes. A teoria é recuperada se tomarmos o chamado *limite físico* das fontes,

$$M^{ab}_{\mu\nu}\big|_{Fís.} = \bar{M}^{ab}_{\mu\nu}\big|_{Fís.} = -\delta^{ab}\delta_{\mu\nu}\gamma^2. \tag{155}$$

Essa modificação ainda não devolve a simetria BRST, no entanto, podemos introduzir um outro par de fontes, desta vez anticomutantes, $(N^{ab}_{\mu\nu}, \bar{N}^{ab}_{\mu\nu})$, para formar uma estrutura de dubletos com as fontes anteriores,

$$\begin{aligned} sM^{ab}_{\mu\nu} &= M^{ab}_{\mu\nu}\,, &(156)\\ sN^{ab}_{\mu\nu} &= 0 &(157)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s\bar{N}^{ab}_{\mu\nu} &= \bar{M}^{ab}_{\mu\nu}\,, &(158)\\ s\bar{M}^{ab}_{\mu\nu} &= 0\,. &(159)\end{aligned}$$

Assim, fazendo a modificação

$$\begin{aligned} -\int d^4x\,(\bar{M}^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_{\mu}\varphi^{bc}_{\nu} + M^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_{\mu}\bar{\varphi}^{bc}_{\nu}) &\;\to \\ -s\int d^4x\,(\bar{N}^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_{\mu}\varphi^{bc}_{\nu} + M^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_{\mu}\bar{\omega}^{bc}_{\nu}) &= \int d^4x\,\big(-\bar{M}^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_{\mu}\varphi^{bc}_{\nu} + \bar{N}^{ac}_{\mu\nu}gf^{abd}(D^{de}_{\mu}c^e)\varphi^{bc}_{\nu} \\ &\quad +\bar{N}^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_{\mu}\omega^{bc}_{\nu} - N^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_{\mu}\bar{\omega}^{bc}_{\nu} \\ &\quad -M^{ac}_{\mu\nu}gf^{abd}(D^{de}_{\mu}c^e)\bar{\omega}^{bc}_{\nu} - M^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_{\mu}\bar{\varphi}^{bc}_{\nu}\big)\,, \qquad (160)\end{aligned}$$

teremos a simetria BRST recuperada, desde que no limite físico

$$N^{ab}_{\mu\nu}\big|_{Fís.} = \bar{N}^{ab}_{\mu\nu}\big|_{Fís.} = 0 \qquad (161)$$

e, depois disso, fizermos a translação

$$\omega^{bc}(x)_{\mu} \to \omega^{bc}_{\mu}(x) - \int d^4y\,\left[\partial\cdot D^{-1}\right]^{bk}(x,y)g\gamma^2 f^{klc}D^{lp}c^p(y)\,. \qquad (162)$$

A parte que envolve os condensados pode ser reescrita como:

$$s\int d^4x\,\left(\lambda^{ab}_{\mu\nu}A^a_{\mu}A^b_{\nu}\right) = \int d^4x\,\left[j^{ab}_{\mu\nu}A^a_{\mu}A^b_{\nu} + \lambda^{ab}_{\mu\nu}\left(A^b_{\nu}D^{ac}_{\mu}c^c + A^a_{\mu}D^{bc}_{\nu}c^c\right)\right], \qquad (163)$$

para

$$\begin{aligned} s\lambda^{ab}_{\mu\nu} &= j^{ab}_{\mu\nu}\,, &(164)\\ sj^{ab}_{\mu\nu} &= 0\,, &(165)\end{aligned}$$

em que

$$\lambda^{ab}_{\mu\nu}\big|_{Fís.} = 0 \qquad (166)$$

e

$$j^{ab}_{\mu\nu}\big|_{Fís.} \;=\; \frac{m^2}{2}\delta^{ab}\delta_{\mu\nu}\,. \tag{167}$$

Portanto, a ação RGZ com todas essas modificações acaba tornando-se

$$\begin{aligned} S''_{RGZ} \;=\; & \int d^4x \left\{ \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + ib^a\partial_\mu A^a_\mu + \bar{c}^a\partial_\mu D^{ab}_\mu c^b - \Omega^a_\mu D^{ab}_\mu c^b + \frac{g}{2}f^{abc}L^a c^b c^c \right. \\ & +\bar{\varphi}^{ac}_\nu\partial_\mu D^{ab}_\mu\varphi^{bc}_\nu - \bar{\omega}^{ac}_\nu\partial_\mu D^{ab}_\mu\omega^{bc}_\nu - gf^{abd}\bar{\omega}^{ac}_\nu\partial_\mu\left[\left(D^{de}_\mu c^e\right)\varphi^{bc}_\nu\right] - \bar{M}^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_\mu\varphi^{bc}_\nu \\ & +\bar{N}^{ac}_{\mu\nu}\left[D^{ab}_\mu\omega^{bc}_\nu + gf^{abd}\varphi^{bc}_\nu D^{de}_\mu c^e\right] - N^{ac}_{\mu\nu}D^{ab}_\mu\bar{\omega}^{bc}_\nu - M^{ac}_{\mu\nu}\left[D^{ab}_\mu\bar{\varphi}^{bc}_\nu - gf^{abd}\bar{\omega}^{bc}_\nu D^{de}_\mu c^e\right] \\ & +j^{ab}_{\mu\nu}A^a_\mu A^b_\nu + \lambda^{ab}_{\mu\nu}[(D^{ac}_\mu c^c)A^b_\mu + A^a_\mu(D^{bc}_\mu c^c)] - \mu_1^2(\bar{\varphi}^{ab}_\mu\varphi^{ab}_\mu - \bar{\omega}^{ab}_\mu\omega^{ab}_\mu) \\ & \left. -\left(\bar{M}^{ab}_{\mu\nu}M^{ab}_{\mu\nu} - \bar{N}^{ab}_{\mu\nu}N^{ab}_{\mu\nu}\right) \right\}, \end{aligned} \tag{168}$$

na qual reintroduzimos os termos de fonte externa Ω^a_μ e L^a, devido às transformações não lineares de BRST dos campos A^a_μ e c^a, como discutido no Cap. 2. Além disso, o último termo corresponde a um termo de vácuo permitido por contagem de potencias[18].

A restauração da simetria para o setor do operador de massa segue em completa analogia com o setor RGZ. Inicialmente, façamos o deslocamento

$$G^{bc}_{\mu\nu}(x) \;\to\; G^{bc}_{\mu\nu}(x) + \int d^4y\, \left[\partial\cdot D^{-1}\right]^{bk}(x,y)\partial^y_\alpha\left[gf^{kle}\left(D^{de,y}_\alpha c^e(y)\right)B^{lc}_{\mu\nu}(y)\right], \tag{169}$$

que é semelhante aquele feito na ação de Gribov-Zwanziger. Assim,

$$\mathcal{O}_{local} \;\to\; \mathcal{O}'_{local} = \mathcal{O}_{local} - \int d^4x\, \bar{G}^{ac}_{\mu\nu}\partial_\alpha\left[gf^{abd}\left(D^{de}_\alpha c^e\right)B^{bc}_{\mu\nu}\right]. \tag{170}$$

Com essa modificação, se impusermos que os campos auxiliares formam dubletos de BRST

$$sB^{ab}_{\mu\nu} \;=\; G^{ab}_{\mu\nu} \tag{171}$$
$$sG^{ab}_{\mu\nu} \;=\; 0 \tag{172}$$

e

$$s\bar{G}^{ab}_{\mu\nu} \;=\; \bar{B}^{ab}_{\mu\nu} \tag{173}$$
$$s\bar{B}^{ab}_{\mu\nu} \;=\; 0, \tag{174}$$

[18] Note-se que, no limite físico das fontes, este termo é proporcional a γ^4, como o que surge em Eq. (62) na construção da função horizonte.

então,

$$\mathcal{O}'_{local}\Big|_{m=0} = s\left(\int d^4x\bar{G}^{ac}_{\mu\nu}\partial\cdot D^{ab}B^{bc}_{\mu\nu}\right) \qquad \Rightarrow \qquad s\,\mathcal{O}'_{local}\Big|_{m=0} = 0\,.$$

O termo restante pode ser reescrito com a ajuda de um conjunto de fontes $\left(V^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho}, \bar{V}^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho}\right)$ comutantes

$$Mgf^{abc}\int d^4xF^a_{\mu\nu}\left(B^{ac}_{\mu\nu}+\bar{B}^{ac}_{\mu\nu}\right) \;\rightarrow\; gf^{abc}\int d^4x\left(F^a_{\mu\nu}B^{bd}_{\alpha\beta}\bar{V}^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta}+F^a_{\mu\nu}\bar{B}^{bd}_{\alpha\beta}V^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta}\right), \tag{175}$$

de tal maneira que, se tomarmos o limite físico,

$$V^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho}\big|_{Fís.} = \bar{V}^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho}\big|_{Fís.} \;=\; \frac{M\delta^{ab}}{2}\left(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\rho}-\delta_{\lambda\rho}\delta_{\mu\nu}\right). \tag{176}$$

Assim, a estratégia que vamos adotar será escrever a teoria em termos dessas fontes, demonstrar a renormalizabilidade para valores arbitrários delas e, ao final, tomar o limite físico desejado. Em outras palavras, vamos escrever uma ação mais geral, que possui um conjunto de simetrias maior, e a ação que realmente nos interessa do ponto de vista físico é um caso particular dessa ação mais geral, obtida para certos valores das fontes externas. Adicionemos, agora, outro conjunto de fontes $\left(U^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho}, \bar{U}^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho}\right)$, mas dessa vez anticomutantes, para formar dubletos com as anteriores

$$sV^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho} = U^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho} \tag{177}$$
$$sU^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho} = 0 \tag{178}$$

e

$$s\bar{U}^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho} = \bar{V}^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho} \tag{179}$$
$$s\bar{V}^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho} = 0. \tag{180}$$

Então, façamos a seguinte substituição

$$Mgf^{abc}\int d^4xF^a_{\mu\nu}\left(B^{bc}_{\mu\nu}+\bar{B}^{bc}_{\mu\nu}\right) \;\rightarrow\; gf^{abc}s\int d^4xF^a_{\mu\nu}\left(B^{bd}_{\alpha\beta}\bar{U}^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta}+\bar{G}^{bd}_{\alpha\beta}V^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta}\right). \tag{181}$$

Assim, chegamos em uma versão parcial que é invariante por BRST

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}'_{local} \to \mathcal{O}''_{local} &= s\int d^4x\left[\bar{G}^{ac}_{\mu\nu}\partial\cdot D^{ab}B^{bc}_{\mu\nu} + gf^{abc}F^{a}_{\mu\nu}\left(B^{bd}_{\alpha\beta}\bar{U}^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta} + \bar{G}^{bd}_{\alpha\beta}V^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta}\right)\right] \\
&= \int d^4x\Bigg[\bar{B}^{ac}_{\mu\nu}\partial\cdot D^{ab}B^{bc}_{\mu\nu} - \bar{G}^{ac}_{\mu\nu}\partial\cdot D^{ab}G^{bc}_{\mu\nu} - \bar{G}^{ac}_{\mu\nu}\partial_{\alpha}\left[gf^{abd}\left(D^{de}_{\alpha}c^{e}\right)B^{bc}_{\mu\nu}\right] \\
&\quad + g^2 f^{abc}f^{amn}c^{m}F^{n}_{\mu\nu}B^{bd}_{\alpha\beta}\bar{U}^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta} + g^2 f^{abc}f^{amn}c^{m}F^{n}_{\mu\nu}\bar{G}^{bd}_{\alpha\beta}V^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta} \\
&\quad + gf^{abc}F^{a}_{\mu\nu}G^{bd}_{\alpha\beta}\bar{U}^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta} + gf^{abc}F^{a}_{\mu\nu}B^{bd}_{\alpha\beta}\bar{V}^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta} \\
&\quad + gf^{abc}F^{a}_{\mu\nu}\bar{B}^{bd}_{\alpha\beta}V^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta} - gf^{abc}F^{a}_{\mu\nu}\bar{G}^{bd}_{\alpha\beta}U^{cd}_{\mu\nu\alpha\beta}\Bigg],
\end{aligned}
\tag{182}
$$

na qual, reobtem-se o operador local original $\mathcal{O}_{local}$, Eq. (107), no limite físico das fontes

$$
U^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho}\Big|_{Fís.} = \bar{U}^{ab}_{\lambda\mu\nu\rho}\Big|_{Fís.} = 0,
\tag{183}
$$

juntamente com Eq. (176) e com os deslocamentos Eq. (169) e

$$
G^{bc}_{\mu\nu} \to G^{bc}_{\mu\nu} - Mg^2 f^{kdc}f^{kmn}\int d^4y\,\left[\partial\cdot D^{-1}\right]^{bd}(x,y)c^{m}(y)F^{n}_{\mu\nu}(y)\,.
\tag{184}
$$

Como os campos auxiliares se transformam como dubletos de BRST, o operador (108), apresentado anteriormente, é automaticamente invariante, pois,

$$
s\left(\bar{G}^{ab}_{\mu\nu}B^{ab}_{\mu\nu}\right) = \bar{B}^{ab}_{\mu\nu}B^{ab}_{\mu\nu} - \bar{G}^{ab}_{\mu\nu}G^{ab}_{\mu\nu}\,.
\tag{185}
$$

Além disso, como ficará mais claro na próxima seção, a existência de determinadas identidades de Ward depende da introdução de certos termos, que são operadores compostos de campos, acoplados a fontes externas:

$$
\begin{aligned}
S_{ext} &= s\int d^4x\left(T^{abc}_{\mu\nu}c^{a}\bar{G}^{bc}_{\mu\nu} + \tau^{abc}_{\mu}c^{a}\bar{\omega}^{bc}_{\mu}\right) \\
&= \int d^4x\left[R^{abc}_{\mu\nu}c^{a}\bar{G}^{bc}_{\mu\nu} - T^{abc}_{\mu\nu}\left(\frac{g}{2}f^{aed}c^{e}c^{d}\bar{G}^{bc}_{\mu\nu} - c^{a}\bar{B}^{bc}_{\mu\nu}\right)\right. \\
&\quad \left.\rho^{abc}_{\mu}c^{a}\bar{\omega}^{bc}_{\mu} - \tau^{abc}_{\mu}\left(\frac{g}{2}f^{aed}c^{e}c^{d}\bar{\omega}^{bc}_{\mu} - c^{a}\bar{\varphi}^{bc}_{\mu}\right)\right]\,,
\end{aligned}
\tag{186}
$$

sendo $(T^{ab}_{\mu\nu}, R^{ab}_{\mu\nu})$ e $(\tau^{abc}_{\mu}, \rho^{abc}_{\mu})$ formam de BRST dubletos, i.e.,

$$
\begin{aligned}
sT^{abc}_{\mu\nu} &= R^{abc}_{\mu\nu}\,, \\
sR^{abc}_{\mu\nu} &= 0\,, \\
s\tau^{abc}_{\mu} &= \rho^{abc}_{\mu}\,, \\
s\rho^{abc}_{\mu} &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{187}
$$

que ao final podem ser tomadas a zero, assim como Ω^{a}_{μ} e L^{a}. No Apêndice A, apresentamos em maiores detalhes a necessidade de se introduzir tais termos na teoria.

4.2 Identidades de Ward

A primeira simetria que podemos identificar é a da contração dos índices. No setor RGZ, a forma como os índices estão contraídos nos permite definir um chamado *multi-índice*, ou índice composto, ${}^{a}_{\mu} \equiv {}_{i}$, assim, por exemplo, $\varphi^{ab}_{\mu} = \varphi^{a}_{i}$ e o novo índice i vai de 1 até $4(N^2-1)$. Enquanto que, para o setor do operador de massa não-local, também podemos definir um multi-índice, ${}^{a}_{\mu\nu} \equiv {}_{I}$, como exemplo $B^{ab}_{\mu\nu} = B^{a}_{I}$, sendo que, neste caso, o índice I vai de 1 até $6(N^2-1)$. A possibilidade de escrever tais índices compostos se traduz nas identidades Eq. (230) e Eq. (233), que veremos mais adiante. Portanto, a ação que iremos estudar[19], levando-se em conta todas as considerações da seção anterior e utilizando os multi-índices, é[20]

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= S''_{RGZ} + \mathcal{O}''_{local} + s\int d^4x\, \bar{G}^a_I B^a_I + S_{ext} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + i b^a \partial_\mu A^a_\mu + \bar{c}^a \partial_\mu D^{ab}_\mu c^b - \Omega^a_\mu D^{ab}_\mu c^b + \frac{g}{2} f^{abc} L^a c^b c^c \right. \\
&\quad + \bar{\varphi}^a_i \partial_\mu D^{ab}_\mu \varphi^b_i - \bar{\omega}^a_i \partial_\mu D^{ab}_\mu \omega^b_i - g f^{abc} \bar{\omega}^a_i \partial_\mu \left[\left(D^{cd}_\mu c^d \right) \varphi^b_i \right] - \bar{M}^a_{\mu i} D^{ab}_\mu \varphi^b_i \\
&\quad + \bar{N}^a_{\mu i} \left[D^{ab}_\mu \omega^b_i + g f^{abc} \varphi^b_i D^{cd}_\mu c^d \right] - N^a_{\mu i} D^{ab}_\mu \bar{\omega}^b_i - M^a_{\mu i} \left[D^{ab}_\mu \bar{\varphi}^b_i - g f^{abc} \bar{\omega}^b_i D^{cd}_\mu c^d \right] \\
&\quad - \left(\bar{M}^a_{\mu i} M^a_{\mu i} - \bar{N}^a_{\mu i} N^a_{\mu i} \right) + j^{ab}_{\mu\nu} A^a_\mu A^b_\nu + \lambda^{ab}_{\mu\nu} [(D^{ac}_\mu c^c) A^b_\nu + A^a_\nu D^{bc}_\mu c^c] \\
&\quad + \mu_1^2 (\bar{\varphi}^a_i \varphi^a_i - \bar{\omega}^a_i \omega^a_i) + \rho^{ab}_i c^a \bar{\omega}^b_i - \tau^{ab}_i \left(\frac{g}{2} f^{acd} c^c c^d \bar{\omega}^b_i - c^a \bar{\varphi}^b_i \right) \\
&\quad + \bar{B}^a_I \partial_\mu D^{ab}_\mu B^b_I - \bar{G}^a_I \partial_\mu D^{ab}_\mu G^b_I - g f^{abc} \bar{G}^a_I \partial_\mu \left[\left(D^{cd}_\mu c^d \right) B^b_I \right] \\
&\quad - g^2 f^{abc} f^{bde} \bar{U}^a_{\mu\nu I} c^d F^e_{\mu\nu} B^c_I + g^2 f^{abc} f^{bde} V^a_{\mu\nu I} c^d F^e_{\mu\nu} \bar{G}^c_I \\
&\quad + g f^{abc} U^a_{\mu\nu I} F^b_{\mu\nu} \bar{G}^c_I + g f^{abc} V^a_{\mu\nu I} F^b_{\mu\nu} \bar{B}^c_I + g f^{abc} \bar{V}^a_{\mu\nu I} F^b_{\mu\nu} B^c_I - g f^{abc} \bar{U}^a_{\mu\nu I} F^b_{\mu\nu} G^c_I \\
&\quad \left. + \mu_2^2 (\bar{B}^a_I B^a_I - \bar{G}^a_I G^a_I) + R^{ab}_I c^a \bar{G}^b_I - T^{ab}_I \left(\frac{g}{2} f^{acd} c^c c^d \bar{G}^b_I - c^a \bar{B}^b_I \right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{188}
$$

A simetria BRST é expressa através da identidade de Slavnov-Taylor

$$
\mathcal{S}(\Sigma) = 0\,, \tag{189}
$$

[19] Essa ação ainda poderia ser generalizada com a introdução de termos de vácuo que são permitidos por contagem de potências, como, por exemplo, termos proporcinais a $\bar{V}V\bar{V}V$, que no limite físico são proporcinais a M^4. Porém, uma vez que esses termos não irão interferir na análise do conteúdo de simetria da teoria, mencionaremos tais termos apenas no momento oportuno no final da análise do contratermo.

[20] Em d dimensões o índice i vai de 1 até $d(N^2-1)$ e o índice I vai de 1 até $\frac{d(d-1)}{2}(N^2-1)$, devido a antissimetria nos índices de Lorentz.

na qual, para um funcional qualquer dos campos, $\mathcal{F}$, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathcal{F}) &= \int d^4x \Big\{ \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Omega^a_\mu}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta L^a}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta c^a} + ib^a\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{c}^a} + \omega^a_i\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi^a_i} + \bar{\varphi}^a_i\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{\omega}^a_i} \\ &+ N^a_{\mu i}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta M^a_{\mu i}} + \bar{M}^a_{\mu i}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{N}^a_{\mu i}} + G^a_I\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta B^a_I} + \bar{B}^a_I\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{G}^a_I} + U^a_{\mu\nu I}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta V^a_{\mu\nu I}} \\ &+ \bar{V}^a_{\mu\nu I}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{U}^a_{\mu\nu I}} + j^{ab}_{\mu\nu}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\lambda^{ab}_{\mu\nu}} + \rho^{ab}_i\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\tau^{ab}_i} + R^{ab}_I\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta T^{ab}_I}\Big\} . \end{aligned} \tag{190}$$

Além da identidade de Slavnov-Taylor, que merece destaque, a ação Σ possui outras identidades de Ward que são listadas abaixo:

- Equação de Fixação de Calibre e Equação do Antighost:

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} = i\partial_\mu A^a_\mu \,, \tag{191}$$

e

$$\bar{\mathcal{G}}^a(\Sigma) = 0\,, \tag{192}$$

em que,

$$\bar{\mathcal{G}}^a = \frac{\delta}{\delta\bar{c}^a} + \partial_\mu\frac{\delta}{\delta\Omega^a_\mu}. \tag{193}$$

- Equações dos campos φ^a_i, $\overline{\varphi}^a_i$, ω^a_i e $\bar{\omega}^a_i$:

$$\Theta^a_i(\Sigma) = -gf^{abc}A^c_\mu M^b_{\mu i} - \mu_1^2\varphi^a_i + \tau^{ba}c^b, \tag{194}$$

$$\Xi^a_i(\Sigma) = gf^{abc}A^c_\mu N^b_{\mu i} + \mu_1^2\omega^a_i - \rho^{ba}_i c^b, \tag{195}$$

$$\Pi^a_i(\Sigma) = -gf^{abc}A^c_\mu\overline{M}^b_{\mu i} - \mu_1^2\bar{\varphi}^a_i \tag{196}$$

e

$$\Upsilon^a_i(\Sigma) = -gf^{abc}A^c_\mu\bar{N}^b_{\mu i} - \mu_1^2\bar{\omega}^a_i, \tag{197}$$

em que,

$$\Theta^a_i = \frac{\delta}{\delta\overline{\varphi}^a_i} + \partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta\overline{M}^a_{\mu i}}\right), \tag{198}$$

$$\Xi_i^a = \frac{\delta}{\delta\overline{\omega}_i^a} + \partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta\overline{N}_{\mu i}^a}\right) - gf^{abc}M_{\mu i}^b\left(\frac{\delta}{\delta\Omega_\mu^c}\right) - \tau_i^{ba}\left(\frac{\delta}{\delta L^b}\right), \tag{199}$$

$$\Pi_i^a = \frac{\delta}{\delta\varphi_i^a} + \partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta M_{\mu i}^a}\right) - gf^{abc}\overline{N}_{\mu i}^b\frac{\delta}{\delta\Omega_\mu^c} + igf^{abc}\overline{\varphi}_i^b\frac{\delta}{\delta b^c} - gf^{abc}\overline{\omega}_i^b\frac{\delta}{\delta\overline{c}^c} \tag{200}$$

e

$$\Upsilon_i^a = \frac{\delta}{\delta\omega_i^a} + \partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta N_{\mu i}^a}\right) + igf^{abc}\overline{\omega}_i^b\frac{\delta}{\delta b^c}. \tag{201}$$

- Equações não-locais dos campos B_I^a, $\bar{B}_I^a$, G_I^a e $\bar{G}_I^a$:

$$\mathcal{A}_I^a(\Sigma) = \int d^4x\left(2gf^{bac}\left(\partial_\mu A_\nu^b\right)V_{\mu\nu I}^c - \mu_2^2B_I^a + T_I^{ba}c^b\right), \tag{202}$$

$$\mathcal{B}_I^a(\Sigma) = \int d^4x\left(\mu_2^2G_I^a + 2gf^{abc}\left(\partial_\mu A_\nu^b\right)U_{\mu\nu I}^c\right), \tag{203}$$

$$\mathcal{C}_I^a(\Sigma) = \int d^4x\left(-\mu_2^2\bar{G}_I^a + 2gf^{bac}\left(\partial_\mu A_\nu^b\right)\bar{U}_{\mu\nu I}^c\right), \tag{204}$$

$$\mathcal{D}_I^a(\Sigma) = \int d^4x\left(-\mu_2^2\bar{B}_I^a + 2gf^{bac}\left(\partial_\mu A_\nu^b\right)\bar{V}_{\mu\nu I}^c\right) \tag{205}$$

e

$$\mathcal{E}_I^a(\Sigma) = 0, \tag{206}$$

em que,

$$\mathcal{A}_I^a = \int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta\bar{B}_I^a} - g^2f^{kac}f^{kde}V_{\mu\nu I}^c\frac{\delta}{\delta j_{\mu\nu}^{de}}\right), \tag{207}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_I^a = \int d^4x\Bigg(&\frac{\delta}{\delta\bar{G}_I^a} + g^2f^{abc}V_{\mu\nu I}^b\left(2\partial_\mu\frac{\delta}{\delta\Omega_\nu^c} - gf^{cde}\frac{\delta}{\delta\lambda_{\mu\nu}^{de}}\right) - T_I^{ba}\frac{\delta}{\delta L^b}\\ &+g^2f^{abc}f^{cde}U_{\mu\nu I}^b\frac{\delta}{\delta j_{\mu\nu}^{de}}\Bigg),\end{aligned} \tag{208}$$

$$\mathcal{C}_I^a = \int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta G_I^a} + igf^{abc}\bar{G}_I^b\frac{\delta}{\delta b^c} - g^2f^{abc}f^{cde}\bar{U}_{\mu\nu Q}^b\frac{\delta}{\delta j_{\mu\nu}^{de}}\right), \tag{209}$$

$$\mathcal{D}_I^a = \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta B_I^a} + igf^{abc}\bar{B}_I^b \frac{\delta}{\delta b^c} - gf^{abc}\bar{G}_I^b \frac{\delta}{\delta \bar{c}^c} + gf^{abc}\bar{U}_{\mu\nu I}^b \left(2\partial_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega_\nu^c} - gf^{cde} \frac{\delta}{\delta \lambda_{\mu\nu}^{de}} \right) - g^2 f^{abc} f^{cde} \bar{V}_{\mu\nu I}^b \frac{\delta}{\delta j_{\mu\nu}^{de}} \right) \tag{210}$$

e

$$\mathcal{E} = \int d^4x \left(\overline{G}_I^a \frac{\delta}{\delta \overline{B}_I^a} - B_I^a \frac{\delta}{\delta G_I^a} - V_{\mu\nu I}^a \frac{\delta}{\delta U_{\mu\nu I}^a} + \overline{U}_{\mu\nu I}^a \frac{\delta}{\delta \overline{V}_{\mu\nu I}^a} - T_I^{ab} \frac{\delta}{\delta R_I^{ab}} \right). \tag{211}$$

- Equações não-locais que contém os ghosts de Faddeev-Popov e os campos φ_i^a, $\overline{\varphi}_i^a$, ω_i^a e $\bar{\omega}_i^a$:

$$\Phi_i\left(\Sigma\right) = 0, \tag{212}$$

$$\Psi_i\left(\Sigma\right) = 0 \tag{213}$$

e

$$\pi\left(\Sigma\right) = 0, \tag{214}$$

em que, para um funcional $\mathcal{F}$,

$$\Phi_i = \int d^4x \left(c^a \frac{\delta}{\delta \omega_i^a} + \overline{\omega}_i^a \frac{\delta}{\delta \overline{c}^a} + \overline{N}_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^a} - \mu_1^2 \delta^{ab} \frac{\delta}{\delta \rho_i^{ab}} \right), \tag{215}$$

$$\Psi_i\left(\mathcal{F}\right) = \int d^4x \left(c^a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi_i^a} - \overline{\varphi}_i^a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \overline{c}^a} - \overline{M}_{\mu i}^a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Omega_\mu^a} - \mu_1^2 \delta^{ab} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \tau_i^{ab}} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta L^a} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_i^a} \right) \tag{216}$$

e

$$\pi = \int d^4x \left(\overline{\omega}_i^a \frac{\delta}{\delta \overline{\varphi}_i^a} - \varphi_i^a \frac{\delta}{\delta \omega_i^a} - M_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta N_{\mu i}^a} + \overline{N}_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta \overline{M}_{\mu i}^a} - \tau_i^{ab} \frac{\delta}{\delta \rho_i^{ab}} \right). \tag{217}$$

- Equações não-locais que contém os ghosts de Faddeev-Popov e os campos B_I^a, $\bar{B}_I^a$, G_I^a e $\bar{G}_I^a$:

$$\mathcal{H}_I\left(\Sigma\right) = 0 \tag{218}$$

e

$$\mathcal{I}_I\left(\Sigma\right) = 0, \tag{219}$$

em que,

$$\mathcal{H}_I = \int d^4x \left(c^a \frac{\delta}{\delta G_I^a} + \bar{G}_I^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + \bar{U}_{\mu\nu I}^a \left(2\partial_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega_\nu^a} - gf^{abc} \frac{\delta}{\delta \lambda_{\mu\nu}^{bc}} \right) + \mu_2^2 \delta^{ab} \frac{\delta}{\delta R_I^{ab}} \right) \tag{220}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_I(\mathcal{F}) &= \int d^4x \left(c^a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta B_I^a} - \bar{B}_I^a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}^a} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta G_I^a} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta L^a} \right. \\ &\left. -gf^{abc} \bar{V}_{\mu\nu I}^b \left(2\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Omega_\nu^c} - gf^{cde} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \lambda_{\mu\nu}^{de}} \right) + \mu_2^2 \delta^{ab} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta T_I^{ab}} \right). \end{aligned} \tag{221}$$

- Equação da fonte $\lambda_{\mu\nu}^{ab}$:

$$\Omega(\Sigma) = 0, \tag{222}$$

em que,

$$\Omega = \int d^4x \left(\delta_{\mu\nu} \delta^{ab} \frac{\delta}{\delta \lambda^{ab}} - 2ic^a \frac{\delta}{\delta b^a} \right). \tag{223}$$

- Equação dos ghosts de Faddeev-Popov e do campo de Nakanishi-Lautrup, b^a:

$$\Lambda(\Sigma) = 0, \tag{224}$$

em que,

$$\Lambda(\mathcal{F}) = \int d^4x \left(c^a \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}^a} - i \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta L^a} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta b^a} \right). \tag{225}$$

- A Equação do Ghost:

$$\mathcal{G}^a(\Sigma) = \Delta_{class}^a, \tag{226}$$

em que Δ_{class}^a é uma quebra clássica e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^a &= \int d^4x \left\{ \frac{\delta}{\delta c^a} + gf^{abc} \left(-i\bar{c}^b \frac{\delta}{\delta b^c} + \varphi_i^b \frac{\delta}{\delta \omega_i^c} + \bar{\omega}_i^b \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_i^c} + M_{\mu i}^b \frac{\delta}{\delta N_{\mu i}^c} + \bar{N}_{\mu i}^b \frac{\delta}{\delta \bar{M}_{\mu i}^c} \right. \right. \\ &+ \tau_i^{db} \frac{\delta}{\delta \rho_i^{dc}} + \tau_i^{bd} \frac{\delta}{\delta \rho_i^{cd}} + B_I^b \frac{\delta}{\delta G_I^c} + \bar{G}_I^b \frac{\delta}{\delta \bar{B}_I^c} + V_{\mu\nu I}^b \frac{\delta}{\delta U_{\mu\nu I}^c} + \bar{U}_{\mu\nu I}^b \frac{\delta}{\delta \bar{V}_{\mu\nu I}^c} \\ &\left. \left. + T_I^{bd} \frac{\delta}{\delta R_I^{cd}} + T_I^{db} \frac{\delta}{\delta R_I^{dc}} + \lambda_{\mu\nu}^{bd} \frac{\delta}{\delta j_{\mu\nu}^{cd}} + \lambda_{\mu\nu}^{db} \frac{\delta}{\delta j_{\mu\nu}^{dc}} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{227}$$

- A Simetria Rígida:

$$\mathcal{R}^a(\Sigma) = 0, \tag{228}$$

em que,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^a &= gf^{abc}\int d^4x \left(A^b_\mu \frac{\delta}{\delta A^c_\mu} + \Omega^b_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega^c_\mu} + c^b \frac{\delta}{\delta c^c} \right.\\
&\quad + L^b \frac{\delta}{\delta L^c} + \bar{c}^b \frac{\delta}{\delta \bar{c}^c} + b^b \frac{\delta}{\delta b^c}\\
&\quad + \varphi^b_i \frac{\delta}{\delta \varphi^c_i} + \omega^b_i \frac{\delta}{\delta \omega^c_i} + \bar{\omega}^b_i \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}^c_i} + \bar{\varphi}^b_i \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}^c_i}\\
&\quad + M^b_{\mu i} \frac{\delta}{\delta M^c_{\mu i}} + N^b_{\mu i} \frac{\delta}{\delta N^c_{\mu i}} + \overline{N}^b_{\mu i} \frac{\delta}{\delta \overline{N}^c_{\mu i}} + \overline{M}^b_{\mu i} \frac{\delta}{\delta \overline{M}^c_{\mu i}}\\
&\quad + \tau^{mb}_i \frac{\delta}{\delta \tau^{mc}_i} + \rho^{mb}_i \frac{\delta}{\delta \rho^{mc}_i} + \tau^{bm}_i \frac{\delta}{\delta \tau^{cm}_i} + \rho^{bm}_i \frac{\delta}{\delta \rho^{cm}_i}\\
&\quad + B^b_I \frac{\delta}{\delta B^c_I} + G^b_I \frac{\delta}{\delta G^c_I} + \bar{G}^b_I \frac{\delta}{\delta \bar{G}^c_I} + \bar{B}^b_I \frac{\delta}{\delta \bar{B}^c_I}\\
&\quad + V^b_{\mu\nu I} \frac{\delta}{\delta V^c_{\mu\nu I}} + U^b_{\mu\nu I} \frac{\delta}{\delta U^c_{\mu\nu I}} + \overline{U}^b_{\mu\nu I} \frac{\delta}{\delta \bar{U}^c_{\mu\nu I}} + \bar{V}^b_{\mu\nu I} \frac{\delta}{\delta \overline{V}^c_{\mu\nu I}}\\
&\quad + T^{bm}_I \frac{\delta}{\delta T^{cm}_I} + R^{bm}_I \frac{\delta}{\delta R^{cm}_I} + T^{mb}_I \frac{\delta}{\delta T^{mc}_I} + R^{mb}_I \frac{\delta}{\delta R^{mc}_I}\\
&\quad \left. + \lambda^{bm}_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \lambda^{cm}_{\mu\nu}} + j^{bm}_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta j^{cm}_{\mu\nu}} + \lambda^{mb}_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \lambda^{mc}_{\mu\nu}} + j^{mb}_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta j^{mc}_{\mu\nu}} \right). \qquad (229)
\end{aligned}
$$

- Carga Q do setor RGZ:

$$
\hat{Q}^{ab}_{\mu\nu}(\Sigma) = 0, \qquad (230)
$$

em que,

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}^{ab}_{\mu\nu} &= \int d^4x \left(\varphi^{ca}_\mu \frac{\delta}{\delta \varphi^{cb}_\nu} - \overline{\varphi}^{cb}_\nu \frac{\delta}{\delta \overline{\varphi}^{ca}_\mu} + \omega^{ca}_\mu \frac{\delta}{\delta \omega^{cb}_\nu} - \overline{\omega}^{cb}_\nu \frac{\delta}{\delta \overline{\omega}^{ca}_\mu} . \right.\\
&\quad + M^{ca}_{\sigma\mu} \frac{\delta}{\delta M^{cb}_{\sigma\nu}} - \overline{M}^{cb}_{\sigma\nu} \frac{\delta}{\delta \overline{M}^{ca}_{\sigma\mu}} + N^{ca}_{\sigma\mu} \frac{\delta}{\delta N^{cb}_{\sigma\nu}} - \overline{N}^{cb}_{\sigma\nu} \frac{\delta}{\delta \overline{N}^{ca}_{\sigma\mu}}\\
&\quad \left. + \tau^{cda}_\mu \frac{\delta}{\delta \tau^{cdb}_\nu} + \rho^{cda}_\mu \frac{\delta}{\delta \rho^{cdb}_\nu} \right). \qquad (231)
\end{aligned}
$$

No entanto, a carga Q será definida através do traço desse operador $\hat{Q}^{aa}_{\mu\mu} = \hat{Q}$,

$$
\begin{aligned}
\hat{Q} &= \int d^4x \left(\varphi^a_i \frac{\delta}{\delta \varphi^a_i} - \overline{\varphi}^a_i \frac{\delta}{\delta \overline{\varphi}^a_i} + \omega^a_i \frac{\delta}{\delta \omega^a_i} - \overline{\omega}^a_i \frac{\delta}{\delta \overline{\omega}^a_i} \right.\\
&\quad + M^a_{\mu i} \frac{\delta}{\delta M^a_{\mu i}} - \overline{M}^a_{\mu i} \frac{\delta}{\delta \overline{M}^a_{\mu i}} + N^a_{\mu i} \frac{\delta}{\delta N^a_{\mu i}} - \overline{N}^a_{\mu i} \frac{\delta}{\delta \overline{N}^a_{\mu i}}\\
&\quad \left. + \tau^{ab}_i \frac{\delta}{\delta \tau^{ab}_i} + \rho^{ab}_i \frac{\delta}{\delta \rho^{ab}_i} \right). \qquad (232)
\end{aligned}
$$

- Carga $\bar{Q}$ do setor Σ^O:

$$\hat{\bar{Q}}^{ab}_{\mu\nu}\left(\Sigma\right) \;=\; 0, \tag{233}$$

em que,

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{Q}}^{ab}_{\mu\nu\alpha\beta} \;=\; & \int d^4x \left(B^{ca}_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta B^{cb}_{\alpha\beta}} - \overline{B}^{cb}_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta \overline{B}^{ca}_{\mu\nu}} + G^{ca}_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta G^{cb}_{\alpha\beta}} - \overline{G}^{cb}_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta \overline{G}^{ca}_{\mu\nu}} + \right. \\
& + V^{ca}_{\xi\sigma\mu\nu}\frac{\delta}{\delta V^{cb}_{\xi\sigma\alpha\beta}} - \overline{V}^{cb}_{\xi\sigma\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta \overline{V}^{ca}_{\xi\sigma\mu\nu}} + U^{ca}_{\xi\sigma\mu\nu}\frac{\delta}{\delta U^{cb}_{\xi\sigma\alpha\beta}} - \overline{U}^{cb}_{\xi\sigma\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta \overline{U}^{ca}_{\xi\sigma\mu\nu}} \\
& \left. + T^{cda}_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta T^{cdb}_{\alpha\beta}} + R^{cda}_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta R^{cdb}_{\alpha\beta}} \right).
\end{aligned} \tag{234}$$

Também nesse caso, a carga $\bar{Q}$ será definida pelo traço, $\hat{\bar{Q}}^{aa}_{\mu\nu\mu\nu} = \hat{\bar{Q}}$,

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{Q}} \;=\; & \int d^4x \left(B^{a}_{I}\frac{\delta}{\delta B^{a}_{I}} - \overline{B}^{a}_{I}\frac{\delta}{\delta \overline{B}^{a}_{I}} + G^{a}_{I}\frac{\delta}{\delta G^{a}_{I}} - \overline{G}^{a}_{I}\frac{\delta}{\delta \overline{G}^{a}_{I}} \right. \\
& + V^{a}_{\mu\nu I}\frac{\delta}{\delta V^{a}_{\mu\nu I}} - \overline{V}^{a}_{\mu\nu I}\frac{\delta}{\delta \overline{V}^{a}_{\mu\nu I}} + U^{a}_{\mu\nu I}\frac{\delta}{\delta U^{a}_{\mu\nu I}} - \overline{U}^{a}_{\mu\nu I}\frac{\delta}{\delta \overline{U}^{a}_{\mu\nu I}} \\
& \left. + T^{ab}_{I}\frac{\delta}{\delta T^{ab}_{I}} + R^{ab}_{I}\frac{\delta}{\delta R^{ab}_{I}} \right).
\end{aligned} \tag{235}$$

- Número de Ghost $N_{\mathcal{G}}$:

$$\hat{N}_{\mathcal{G}}\left(\Sigma\right) \;=\; 0, \tag{236}$$

em que,

$$\begin{aligned}
\hat{N}_{\mathcal{G}} \;=\; & \int d^4x \left(c^a\frac{\delta}{\delta c^a} - \bar{c}^a\frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} - \Omega^a_\mu\frac{\delta}{\delta \Omega^a_\mu} - 2L^a\frac{\delta}{\delta L^a} - \lambda^{ab}\frac{\delta}{\delta \lambda^{ab}} \right. \\
& + \omega^a_i\frac{\delta}{\delta \omega^a_i} - \bar{\omega}^a_i\frac{\delta}{\delta \bar{\omega}^a_i} + N^a_{\mu i}\frac{\delta}{\delta N^a_{\mu i}} - \overline{N}^a_{\mu i}\frac{\delta}{\delta \overline{N}^a_{\mu i}} - \tau^{ab}_i\frac{\delta}{\delta \tau^{ab}_i} \\
& \left. + G^a_I\frac{\delta}{\delta G^a_I} - \bar{G}^a_I\frac{\delta}{\delta \bar{G}^a_I} + U^a_{\mu\nu I}\frac{\delta}{\delta U^a_{\mu\nu I}} - \overline{U}^a_{\mu\nu I}\frac{\delta}{\delta \bar{U}^a_{\mu\nu I}} - T^{ab}_I\frac{\delta}{\delta T^{ab}_I} \right).
\end{aligned} \tag{237}$$

Todas essas cargas, bem como as dimensões de massa dos campos e fontes, estão reunidas em Tabela 1 e Tabela 2.

Tabela 1 - Tabela de números quânticos dos campos.

Campos	A	b	c	$\bar{c}$	φ	$\bar{\varphi}$	ω	$\bar{\omega}$	B	$\bar{B}$	G	$\bar{G}$
$D(m)$	1	2	0	2	1	1	1	1	1	1	1	1
$N_{\mathcal{G}}$	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1
Q	0	0	0	0	1	-1	1	-1	0	0	0	0
$\bar{Q}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1
Natureza	B	B	F	F	B	B	F	F	B	B	F	F

Legenda: “B”significa natureza bosônica e “F” natureza fermiônica.

Fonte: O autor, 2018.

Tabela 2 - Tabela de números quânticos das fontes.

Fontes	Ω	L	M	$\bar{M}$	N	$\bar{N}$	V	$\bar{V}$	U	$\bar{U}$	τ	ρ	T	R	j	λ
$D(m)$	3	4	2	2	2	2	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2
$N_{\mathcal{G}}$	-1	-2	0	0	1	-1	0	0	1	-1	-1	0	-1	0	0	-1
Q	0	0	1	-1	1	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$\bar{Q}$	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	0	0	1	1	0	0
Natureza	F	B	B	B	F	F	B	B	F	F	F	B	F	B	B	F

Legenda: “B”significa natureza bosônica e “F” natureza fermiônica.

Fonte: O autor, 2018.

4.3 **Renormalizabilidade**

Seja Γ o gerador funcional das funções de Green 1PI e também chamado de *ação efetiva*. A ação efetiva pode ser expandida em loops ou, equivalentemente, em potências de $\hbar$,

$$\Gamma \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)}. \tag{238}$$

em que, em especial, temos $\Gamma^{(0)} = \Sigma$.

Γ é finita, isso geralmente acontece porque a cada ordem existe um contratermo, $\Gamma^{(n)}_{CT}$, que cancela divergências vindas das correções em loops, $\Gamma^{(n)}_{div-loop}$. Além de eliminar as divergências, $\Gamma^{(n)}_{CT}$ pode ter uma parte finita arbitrária, $\Gamma^{(n)}_{CT-fin.}$, que é fixada por condições de normalização das funções de Green. Como essas condições de normalização devem ser estabelecidas já para $\Gamma^{(0)}$, todo monômio dos campos existente em $\Gamma^{(n)}_{CT-fin.}$ deve estar presente em $\Gamma^{(0)}$. Em uma teoria renormalizável por contagem de potências e sem campos de dimensão de massa nula, $\Gamma^{(n)}_{CT}$ contém um número limitado de monômios, pois cada um deles deve ter dimensão de massa menor ou igual à dimensão do espaço-tempo. Isso pode ser entendido facilmente no contexto da regularização com *cutoff*, Λ, termos com essa dimensão de massa podem ser combinados com potências positivas de Λ, que no limite $\Lambda \to \infty$ causam divergências.

A existência ou não de $\Gamma^{(n)}_{div-loop}$ ou, equivalentemente, de $\Gamma^{(n)}_{CT}$, depende das simetrias existentes em Σ, que se traduzem em Γ. Como não existem campos que são fontes de anomalias, nas identidades de Ward, obtidas acima, basta fazermos a substituição $\Sigma \to \Gamma$. Assim, para a identidade de Slavnov-Taylor teremos que

$$\mathcal{S}(\Gamma) \;=\; 0. \tag{239}$$

Expandindo a ação efetiva,

$$\mathcal{S}\left(\Sigma + \hbar\Gamma^{(1)}_{CT} + ...\right) \;=\; \mathcal{S}(\Sigma) + \hbar\mathcal{S}_\Sigma\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) + ...$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_\Sigma\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) \;=\; 0, \tag{240}$$

em que, $\mathcal{S}_\Sigma$ é o operador de Slavnov-Taylor linearizado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\Sigma &= \int d^4x \Big\{ \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^a_\mu}\frac{\delta}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta}{\delta\Omega^a_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a}\frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a}\frac{\delta}{\delta L^a} + ib^a\frac{\delta}{\delta\bar{c}^a} + \omega^a_i\frac{\delta}{\delta\varphi^a_i} + \bar{\varphi}^a_i\frac{\delta}{\delta\bar{\omega}^a_i} \\
&\quad + N^a_{\mu i}\frac{\delta}{\delta M^a_{\mu i}} + \bar{M}^a_{\mu i}\frac{\delta}{\delta\bar{N}^a_{\mu i}} + G^a_I\frac{\delta}{\delta B^a_I} + \bar{B}^a_I\frac{\delta}{\delta\bar{G}^a_I} + U^a_{\mu\nu I}\frac{\delta}{\delta V^a_{\mu\nu I}} \\
&\quad + \bar{V}^a_{\mu\nu I}\frac{\delta}{\delta\bar{U}^a_{\mu\nu I}} + j^{ab}_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta\lambda^{ab}_{\mu\nu}} + \rho^{ab}_i\frac{\delta}{\delta\tau^{ab}_i} + R^{ab}_I\frac{\delta}{\delta T^{ab}_I} \Big\}.
\end{aligned} \tag{241}$$

De forma análoga para as outras identidades, teremos

$$\frac{\delta\Gamma^{(1)}_{CT}}{\delta b^a} = 0\,, \tag{242}$$

$$\bar{\mathcal{G}}^a\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) = 0\,, \tag{243}$$

$$\mathcal{A}^a_I\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) = 0\,, \tag{244}$$

$$\mathcal{B}^a_I\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) = 0\,, \tag{245}$$

$$\mathcal{C}^a_I\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) = 0, \tag{246}$$

$$\mathcal{D}^a_I\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) = 0, \tag{247}$$

$$\mathcal{E}_I\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) = 0, \tag{248}$$

$$\Phi_i\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) = 0, \tag{249}$$

$$\Psi_{\Sigma i}\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) = 0, \tag{250}$$

em que,

$$\Psi_{\Sigma i} = \int d^4x \left(c^a\frac{\delta}{\delta\varphi^a_i} - \overline{\varphi}^a_i\frac{\delta}{\delta\overline{c}^a} - \overline{M}^a_{\mu i}\frac{\delta}{\delta\Omega^a_\mu} + \mu_1^2\delta^{ab}\frac{\delta}{\delta\tau^{ab}_i} - \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a}\frac{\delta}{\delta\omega^a_i} - \frac{\delta\Sigma}{\delta\omega^a_i}\frac{\delta}{\delta L^a} \right), \tag{251}$$

$$\pi\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) = 0, \tag{252}$$

$$\mathcal{H}_I\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) \;=\; 0, \tag{253}$$

$$\mathcal{I}_{\Sigma I}\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) \;=\; 0, \tag{254}$$

em que,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\Sigma I} \;=\; & \int d^4x \left(c^a\frac{\delta}{\delta B^a_I} - \bar{B}^a_I\frac{\delta}{\delta\bar{c}^a} - \frac{\delta\Sigma}{\delta G^a_I}\frac{\delta}{\delta L^a} - \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a}\frac{\delta}{\delta G^a_I}\right.\\ & \left. -gf^{abc}\bar{V}^b_{\mu\nu I}\left(2\partial_\mu\frac{\delta}{\delta\Omega^c_\nu} - gf^{cde}\frac{\delta}{\delta\lambda^{de}_{\mu\nu}}\right) + \mu_2^2\delta^{ab}\frac{\delta}{\delta T^{ab}_I}\right),\end{aligned} \tag{255}$$

$$\Omega\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) \;=\; 0, \tag{256}$$

$$\Lambda_\Sigma\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) \;=\; 0, \tag{257}$$

em que,

$$\Lambda_\Sigma \;=\; \int d^4x\left(c^a\frac{\delta}{\delta\bar{c}^a} - i\frac{\delta\Sigma}{\delta L^a}\frac{\delta}{\delta b^a} - i\frac{\delta\Sigma}{\delta b^a}\frac{\delta}{\delta L^a}\right), \tag{258}$$

$$\mathcal{G}^a(\Gamma^{(1)}_{CT}) \;=\; 0, \tag{259}$$

$$\mathcal{R}^a(\Gamma^{(1)}_{CT}) \;=\; 0, \tag{260}$$

$$\hat{Q}(\Gamma^{(1)}_{CT}) \;=\; 0, \tag{261}$$

$$\hat{\bar{Q}}(\Gamma^{(1)}_{CT}) \;=\; 0 \tag{262}$$

e

$$\hat{N}_{\mathcal{G}}\left(\Gamma^{(1)}_{CT}\right) \;=\; 0. \tag{263}$$

Como $\mathcal{S}_\Sigma$ é nilpotente, então, o problema de encontrar $\Gamma^{(1)}_{CT}$ que satisfaça a identidade (240) se resume em encontrar a cohomologia, Δ, do operador $\mathcal{S}_\Sigma$. Com a ajuda do teorema dos dubletos, não é difícil de ver que

$$\Delta_{n-triv} \;=\; a_0 S_{YM}, \tag{264}$$

sendo a_0 um parâmetro arbitrário. Já a parte trivial da cohomologia será

$$\Delta_{triv} = \mathcal{S}_\Sigma \Delta^{(-1)}, \tag{265}$$

em que, $\Delta^{(-1)}$ é o polinômio não-local dos campos mais geral possível.

Para impor as identidades de Ward no contratermo, será conveniente utilizar as seguintes relações de comutação e anticomutação:

$$[\Theta_i^a, \mathcal{S}_\Sigma] = \Xi_i^a, \qquad \{\Xi_i^a, \mathcal{S}_\Sigma\} = 0, \tag{266}$$

$$\{\Upsilon_i^a, \mathcal{S}_\Sigma\} = \Pi_i^a, \qquad [\Pi_i^a, \mathcal{S}_\Sigma] = 0, \tag{267}$$

$$[\Phi_i, \mathcal{S}_\Sigma] = \Psi_{\Sigma i}, \qquad \{\Psi_{\Sigma i}, \mathcal{S}_\Sigma\} = 0, \tag{268}$$

$$\{\pi, \mathcal{S}_\Sigma\} = Q, \qquad [Q, \mathcal{S}_\Sigma] = 0, \tag{269}$$

$$\{\Omega, \mathcal{S}_\Sigma\} = \Lambda, \qquad [\Lambda, \mathcal{S}_\Sigma] = 0, \tag{270}$$

$$[\mathcal{A}_I^a, \mathcal{S}_\Sigma] = \mathcal{B}_I^a, \qquad \{\mathcal{B}_I^a, \mathcal{S}_\Sigma\} = 0, \tag{271}$$

$$\{\mathcal{C}_I^a, \mathcal{S}_\Sigma\} = \mathcal{D}_I^a, \qquad [\mathcal{D}_I^a, \mathcal{S}_\Sigma] = 0, \tag{272}$$

$$[\mathcal{H}_I, \mathcal{S}_\Sigma] = \mathcal{I}_{\Sigma I}, \qquad \{\mathcal{I}_{\Sigma I}, \mathcal{S}_\Sigma\} = 0, \tag{273}$$

$$\{\mathcal{E}, \mathcal{S}_\Sigma\} = \bar{Q}, \qquad \left[\bar{Q}, \mathcal{S}_\Sigma\right] = 0, \tag{274}$$

$$\{\mathcal{G}^a, \mathcal{S}_\Sigma\} = \mathcal{R}^a, \qquad [\mathcal{R}^a, \mathcal{S}_\Sigma] = 0. \tag{275}$$

Como $\mathcal{S}_\Sigma$ possui $N_\mathcal{G} = 1$, $Q = 0$, $\bar{Q} = 0$ e dimensão de massa nula, então, $\Delta^{(-1)}$ possui

$N_{\mathcal{G}}=-1$, $Q=0$ e $\bar{Q}=0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\Delta^{(-1)} \;=\; & \int d^4x \left\{ a_1 \left(\Omega^a_\mu + (\partial_\mu \bar{c}^a)\right) A^a_\mu + a_2 c^a L^a + a_3 g f^{abc} \bar{\varphi}^a_i \tau^{bc}_i + a_4 g f^{abc} \bar{\omega}^a_i \rho^{bc}_i \right. \\
& + a_5 g f^{abc} \bar{B}^a_I T^{bc}_I + a_6 g f^{abc} \bar{G}^a_I R^{bc}_I + a^{abcd}_{7\,\mu\nu\rho\sigma} j^{ab}_{\mu\nu} \lambda^{cd}_{\rho\sigma} + a_8 M^a_{\mu i} \bar{N}^a_{\mu i} \\
& + a^{abcd}_{9\,\mu\nu\rho\sigma} A^a_\mu A^b_\nu \lambda^{cd}_{\rho\sigma} + a_{10} g f^{abc} \varphi^a_i \bar{N}^b_{\mu i} A^c_\mu + a_{11} g f^{abc} \bar{\omega}^a_i M^b_{\mu i} A^c_\mu + a_{12\,\mu\nu\rho\sigma} f^{abc} \lambda^{ab}_{\mu\nu} \partial_\rho A^c_\sigma \\
& + a^{abcd}_{13} c^a \bar{\omega}^b_i \tau^{cd}_i + a^{abcd}_{14} c^a \bar{G}^b_I T^{cd}_I + a^{abcde}_{15\,\mu\nu\rho\sigma} c^a \lambda^{bc}_{\mu\nu} \lambda^{de}_{\rho\sigma} + a^{abcd}_{16} \varphi^a_i \bar{\varphi}^b_i \lambda^{cd}_{\mu\mu} \\
& + a^{abcd}_{17} \varphi^a_i \bar{\omega}^b_i j^{cd}_{\mu\mu} + a_{18} \varphi^a_i \partial_\mu \bar{N}^a_{\mu i} + a^{abcd}_{19} \omega^a_i \bar{\omega}^b_i \lambda^{cd}_{\mu\mu} + a_{20} \bar{\omega}^a_i \partial_\mu M^a_{\mu i} \\
& + a^{abcd}_{21} B^a_I \bar{B}^b_I \lambda^{cd}_{\mu\mu} + a^{abcd}_{22} B^a_I \bar{G}^b_I j^{cd}_{\mu\mu} + a^{abcd}_{23\,\mu\nu\rho\sigma} B^a_I j^{bc}_{\mu\nu} \bar{U}^d_{\rho\sigma I} \\
& + a^{abcd}_{24\,\mu\nu\rho\sigma} B^a_I \lambda^{bc}_{\mu\nu} \bar{V}^d_{\rho\sigma I} + a^{abcd}_{25\,\mu\nu\rho\sigma} \bar{B}^a_I \lambda^{bc}_{\mu\nu} V^d_{\rho\sigma I} + a^{abcd}_{26} G^a_I \bar{G}^b_I \lambda^{cd}_{\mu\mu} \\
& + a^{abcd}_{27\,\mu\nu\rho\sigma} G^a_I \lambda^{bc}_{\mu\nu} \bar{U}^d_{\rho\sigma I} + a^{abcd}_{28\,\mu\nu\rho\sigma} \bar{G}^a_I j^{bc}_{\mu\nu} V^d_{\rho\sigma I} + a^{abcd}_{29\,\mu\nu\rho\sigma} \bar{G}^a_I \lambda^{bc}_{\mu\nu} U^d_{\rho\sigma I} \\
& + a^{abcd}_{30\,\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} j^{ab}_{\mu\nu} V^c_{\rho\sigma I} \bar{U}^d_{\tau\upsilon I} + a^{abcd}_{31\,\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} \lambda^{ab}_{\mu\nu} V^c_{\rho\sigma I} \bar{V}^d_{\tau\upsilon I} + a^{abcd}_{32\,\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} \lambda^{ab}_{\mu\nu} U^c_{\rho\sigma I} \bar{U}^d_{\tau\upsilon I} \\
& + a_{33} \lambda^{aa}_{\mu\mu} \mu_1^2 + a_{34} \lambda^{aa}_{\mu\mu} \mu_1 \mu_2 + a_{35} \lambda^{aa}_{\mu\mu} \mu_2^2 + a^{abcd}_{36} A^a_\mu A^b_\mu \varphi^c_i \bar{\omega}^d_i + a^{abcd}_{37} A^a_\mu A^b_\mu B^c_I \bar{G}^d_I \\
& + a^{abcd}_{38} A^a_\mu A^b_\nu B^c_I \bar{U}^d_{\mu\nu I} + a^{abcd}_{39} A^a_\mu A^b_\nu \bar{G}^c_I V^d_{\mu\nu I} + a^{abcd}_{40\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} A^a_\mu A^b_\nu V^c_{\rho\sigma I} \bar{U}^d_{\tau\upsilon I} \\
& + a_{41} g f^{abc} \left(\partial_\mu A^a_\mu\right) \varphi^b_i \bar{\omega}^c_i + a_{42} g f^{abc} A^a_\mu \left(\partial_\mu \varphi^b_i\right) \bar{\omega}^c_i + a_{43} g f^{abc} \left(\partial_\mu A^a_\mu\right) B^b_I \bar{G}^c_I \\
& + a_{44} g f^{abc} A^a_\mu \left(\partial_\mu B^b_I\right) \bar{G}^c_I + a_{45} g f^{abc} \left(\partial_\mu A^a_\nu\right) B^b_I \bar{U}^c_{\mu\nu I} + a_{46} g f^{abc} A^a_\nu \left(\partial_\mu B^b_I\right) \bar{U}^c_{\mu\nu I} \\
& + a_{47} g f^{abc} \left(\partial_\mu A^a_\nu\right) \bar{G}^b_I V^c_{\mu\nu I} + a_{48} g f^{abc} A^a_\nu \left(\partial_\mu \bar{G}^b_I\right) V^c_{\mu\nu I} \\
& + a_{49\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} g f^{abc} \left(\partial_\mu A^a_\nu\right) V^b_{\rho\sigma I} \bar{U}^c_{\tau\upsilon I} + a_{50\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} g f^{abc} A^a_\mu \left(\partial_\nu V^b_{\rho\sigma I}\right) \bar{U}^c_{\tau\upsilon I} \\
& + a^{abcde}_{51} c^a \varphi^b_i \bar{\omega}^c_i \lambda^{de}_{\mu\mu} + a^{abcde}_{52} c^a B^b_I \bar{G}^c_I \lambda^{de}_{\mu\mu} + a^{abcde}_{53\,\mu\nu\rho\sigma} c^a B^b_I \lambda^{cd}_{\mu\nu} \bar{U}^e_{\rho\sigma I} \\
& + a^{abcde}_{54\,\mu\nu\rho\sigma} c^a \bar{G}^b_I \lambda^{cd}_{\mu\nu} V^e_{\rho\sigma I} + a^{abcde}_{55\,\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} c^a \lambda^{bc}_{\mu\nu} V^d_{\rho\sigma I} \bar{U}^e_{\tau\upsilon I} + a^{abcd}_{56\,ijkl} \varphi^a_i \varphi^b_j \bar{\varphi}^c_k \bar{\omega}^d_l \\
& + a^{abcd}_{57\,ijkl} \varphi^a_i \omega^b_j \bar{\omega}^c_k \bar{\omega}^d_l + a^{abcd}_{58} \varphi^a_i \bar{\varphi}^b_i B^c_I \bar{G}^d_I + a^{abcd}_{59} \varphi^a_i \bar{\omega}^b_i B^c_I \bar{B}^d_I \\
& + a^{abcd}_{60} \varphi^a_i \bar{\omega}^b_i G^c_I \bar{G}^d_I + a^{abcd}_{61} \omega^a_i \bar{\omega}^b_i B^c_I \bar{G}^d_I + a^{abcd}_{62} \varphi^a_i \bar{\varphi}^b_i V^c_{\mu\nu I} \bar{U}^d_{\mu\nu I} \\
& + a^{abcd}_{63} \varphi^a_i \bar{\omega}^b_i V^c_{\mu\nu I} \bar{V}^d_{\mu\nu I} + a^{abcd}_{64} \varphi^a_i \bar{\omega}^b_i U^c_{\mu\nu I} \bar{U}^d_{\mu\nu I} + a^{abcd}_{65} \omega^a_i \bar{\omega}^b_i V^c_{\mu\nu I} \bar{U}^d_{\mu\nu I} \\
& + a_{66} \varphi^a_i \partial^2 \bar{\omega}^a_i + a_{67} \varphi^a_i \bar{\omega}^a_i \mu_1^2 + a_{68} \varphi^a_i \bar{\omega}^a_i \mu_1 \mu_2 + a_{69} \varphi^a_i \bar{\omega}^a_i \mu_2^2 \\
& + a^{abcd}_{70\,IJKL} B^a_I B^b_J \bar{B}^c_K \bar{G}^d_L + a^{abcd}_{71\,IJKL} B^a_I G^b_J \bar{G}^c_K \bar{G}^d_L + a^{abcd}_{72\,IJKL} B^a_I B^b_J \bar{V}^c_{\mu\nu K} \bar{U}^d_{\mu\nu L} \\
& + a^{abcd}_{73\,IJKL} B^a_I \bar{B}^b_J V^c_{\mu\nu K} \bar{U}^d_{\mu\nu L} + a^{abcd}_{74\,IJKL} B^a_I G^b_J \bar{U}^c_{\mu\nu K} \bar{U}^d_{\mu\nu L} + a^{abcd}_{75\,IJKL} B^a_I \bar{G}^b_J V^c_{\mu\nu K} \bar{V}^d_{\mu\nu L} \\
& + a^{abcd}_{76\,IJKL} B^a_I \bar{G}^b_J U^c_{\mu\nu K} \bar{U}^d_{\mu\nu L} + a_{77} B^a_I \partial^2 \bar{G}^a_I + a_{78} B^a_I \bar{G}^a_I \mu_1^2 + a_{79} B^a_I \bar{G}^a_I \mu_1 \mu_2 \\
& + a_{80} B^a_I \bar{G}^a_I \mu_2^2 + a^{abcd}_{81\,\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon IJKL} B^a_I V^b_{\mu\nu J} \bar{V}^c_{\rho\sigma K} \bar{U}^d_{\tau\upsilon L} + a^{abcd}_{82\,IJKL\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} B^a_I U^b_{\mu\nu J} \bar{U}^c_{\rho\sigma K} \bar{U}^d_{\tau\upsilon L} \\
& + a^{abcd}_{83\,IJKL} \bar{B}^a_I \bar{G}^b_J V^c_{\mu\nu K} V^d_{\mu\nu L} + a^{abcd}_{84\,IJKL\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} \bar{B}^a_I V^b_{\mu\nu J} V^c_{\rho\sigma K} \bar{U}^d_{\tau\upsilon L} \\
& + a^{abcd}_{85\,IJKL} G^a_I \bar{G}^b_J V^c_{\mu\nu K} \bar{U}^d_{\mu\nu L} + a^{abcd}_{86\,IJKL\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} G^a_I V^b_{\mu\nu J} \bar{U}^c_{\rho\sigma K} \bar{U}^d_{\tau\upsilon L} \\
& + a^{abcd}_{87\,IJKL} \bar{G}^a_I \bar{G}^b_J V^c_{\mu\nu K} U^d_{\mu\nu L} + a^{abcd}_{88\,IJKL\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} \bar{G}^a_I V^b_{\mu\nu J} V^c_{\rho\sigma K} \bar{V}^d_{\tau\upsilon L} \\
& + a^{abcd}_{89\,IJKL\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} \bar{G}^a_I V^b_{\mu\nu J} U^c_{\rho\sigma K} \bar{U}^d_{\tau\upsilon L} + a^{abcd}_{90\,IJKL\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon\theta\pi} V^a_{\mu\nu I} V^b_{\rho\sigma J} \bar{V}^c_{\tau\upsilon K} \bar{U}^d_{\theta\pi I} \\
& + a^{abcd}_{91\,IJKL\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon\theta\pi} V^a_{\mu\nu I} U^b_{\rho\sigma J} \bar{U}^c_{\tau\upsilon K} \bar{U}^d_{\theta\pi I} + a_{92} V^a_{\mu\nu I} \partial^2 \bar{U}^a_{\mu\nu I} + a_{93} V^a_{\mu\nu I} \bar{U}^a_{\mu\nu I} \mu_1^2 \\
& \left. + a_{94} V^a_{\mu\nu I} \bar{U}^a_{\mu\nu I} \mu_1 \mu_2 + a_{95} V^a_{\mu\nu I} \bar{U}^a_{\mu\nu I} \mu_2^2 \right\} , \qquad (276)
\end{aligned}
$$

em que os a's são parâmetros arbitrários, que podem se combinar através das identidades de Ward. Na construção do $\Delta^{(-1)}$ foram levadas em consideração a Eq. (242), que proíbe a existência de termos com b^a, e a Eq. (243), que implica que Ω^a_μ e $\bar{c}^a$ devam aparecer apenas em combinações $\Omega^a_\mu + \partial_\mu \bar{c}^a$.

A próxima tarefa, que não pode ser concluída neste trabalho, seria impor as identidades de Ward a $\Gamma^{(1)}_{CT}$, afim de relacionar ou eliminar parte dos contratermos. Eventualmente, algum outro termo deverá ser adicionado à ação, assim $\Sigma \to \Sigma'$. Depois disso, as simetrias não-lineares deverão ser reescritas e verificadas. Por último, vem a demonstração que a ação é *estável*, ou seja,

$$\Sigma' [\Phi_0, J_0, \alpha_0] = \Sigma' [\Phi, J_0, \alpha_0] + \hbar \Gamma^{(1)}_{CT}, \tag{277}$$

para uma renormalização multiplicativa dos campos $\Phi \in \left\{A^a_\mu, \varphi^a_i, \bar{\varphi}^a_i, \omega^a_i, \bar{\omega}^a_i, B^a_I, \bar{B}^a_I, G^a_I, \bar{G}^a_I\right\}$, das fontes $J \in \left\{M^a_{\mu i}, \bar{M}^a_{\mu i}, N^a_{\mu i}, \bar{N}^a_{\mu i}, U^a_{\mu\nu I}, \bar{U}^a_{\mu\nu I}, V^a_{\mu\nu I}, \bar{V}^a_{\mu\nu I}, \lambda^{ab}_{\mu\nu}, j^{ab}_{\mu\nu}, \tau^{ab}_i, \rho^{ab}_i, T^{ab}_I, R^{ab}_I\right\}$ e dos parâmetros de acoplamento $\alpha \in \{g, \mu_1, \mu_2\}$,

$$\Phi_0 = Z^{\frac{1}{2}}_\Phi \Phi \,, \tag{278}$$

$$J_0 = Z_J J \,, \tag{279}$$

e

$$\alpha_0 = Z_\alpha \alpha \,, \tag{280}$$

em que, $Z^{\frac{1}{2}}_\Phi$, Z_J e Z_α são os fatores de renormalização dos campos, das fontes e dos parâmetros de acoplamento, respectivamente.

Como resultado preliminar, podemos destacar que o contratermo do setor GZ, encontrado em (VANDERSICKEL, 2011), é recuperado, ou seja,

$$a_1 = a_8 = a_{10} = a_{11} = -a_{18} = -a_{20} = -a_{41} = -a_{42} = -a_{66} \tag{281}$$

e

$$\begin{aligned} a_2 &= a_3 = a_4 = a^{abcd}_{13} = a^{abcd}_{16} = a^{abcd}_{17} = a^{abcd}_{19} = a^{abcde}_{51} = a^{abcd}_{56\,ijkl} = a^{abcd}_{57\,ijkl} = a^{abcd}_{58} \\ &= a^{abcd}_{59} = a^{abcd}_{60} = a^{abcd}_{61} = a^{abcd}_{62} = a^{abcd}_{63} = a^{abcd}_{64} = a^{abcd}_{65} = a_{67} = a_{68} = a_{69} = 0 \end{aligned} \tag{282}$$

Isso já era esperado, pois não existe nenhum acoplamento entre os campos de Zwanziger e os campos auxiliares do setor $\mathcal{O}$, o que impossibilita que funções de Green conexas envolvendo campos desses dois setores sejam não nulas. Além desse resultado, os vínculos

(244), (245), (246) e (247) implicam que

$$a_1 = -a_{43} = -a_{44} = -a_{77} \tag{283}$$

e

$$\begin{aligned} a_5 = a_6 = a_{14}^{abcd} = a_{21}^{abcd} = ... = a_{32\,\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon}^{abcd} = a_{37}^{abcd} = a_{52}^{abcde} = a_{53\,\mu\nu\rho\sigma}^{abcde} = a_{54\,\mu\nu\rho\sigma}^{abcde} \\ = a_{55\,\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon}^{abcde} = a_{72\,IJKL}^{abcd} = ... = a_{76\,IJKL}^{abcd} = a_{78} = ... = a_{89\,IJKL\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon}^{abcd} = 0\,, \end{aligned} \tag{284}$$

e, em especial, que

$$a_{69\,IJKL}^{abcd} = a_{70\,IJKL}^{abcd} = 0\,, \tag{285}$$

proibindo a existência dos termos quárticos do tipo $B_I^a B_J^b \bar{B}_K^c \bar{B}_L^d$ ou $G_I^a G_J^b \bar{G}_K^c \bar{G}_L^d$, tão problemáticos no modelo do operador $tr(F\frac{1}{D^2}F)$. Assim, provisoriamente, temos que

$$\begin{aligned} \Delta^{(-1)} \;=\; \int d^4x \,\{ & a_1 \left[\left(\Omega_\mu^a + (\partial_\mu \bar{c}^a)\right) A_\mu^a + M_{\mu i}^a \bar{N}_{\mu i}^a + gf^{abc}\varphi_i^a \bar{N}_{\mu i}^b A_\mu^c + gf^{abc}\bar{\omega}_i^a M_{\mu i}^b A_\mu^c \right. \\ & -\varphi_i^a \partial_\mu \bar{N}_{\mu i}^a - \bar{\omega}_i^a \partial_\mu M_{\mu i}^a + gf^{abc} A_\mu^a \varphi_i^b \left(\partial_\mu \bar{\omega}_i^c\right) - \varphi_i^a \partial^2 \bar{\omega}_i^a \\ & \left. +gf^{abc} A_\mu^a B_I^b \left(\partial_\mu \bar{G}_I^c\right) - B_I^a \partial^2 \bar{G}_I^a \right] \\ & +a_{7\,\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} j_{\mu\nu}^{ab} \lambda_{\rho\sigma}^{cd} + a_{9\,\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} A_\mu^a A_\nu^b \lambda_{\rho\sigma}^{cd} + a_{12\,\mu\nu\rho\sigma} f^{abc} \lambda_{\mu\nu}^{ab} \partial_\rho A_\sigma^c \\ & +a_{38}^{abcd} A_\mu^a A_\nu^b B_I^c \bar{U}_{\mu\nu I}^d + a_{39}^{abcd} A_\mu^a A_\nu^b \bar{G}_I^c V_{\mu\nu I}^d + a_{40\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon}^{abcd} A_\mu^a A_\nu^b V_{\rho\sigma I}^c \bar{U}_{\tau\upsilon I}^d \\ & +a_{45} gf^{abc} \left(\partial_\mu A_\nu^a\right) B_I^b \bar{U}_{\mu\nu I}^c + a_{46} gf^{abc} A_\nu^a \left(\partial_\mu B_I^b\right) \bar{U}_{\mu\nu I}^c \\ & +a_{47} gf^{abc} \left(\partial_\mu A_\nu^a\right) \bar{G}_I^b V_{\mu\nu I}^c + a_{48} gf^{abc} A_\nu^a \left(\partial_\mu \bar{G}_I^b\right) V_{\mu\nu I}^c \\ & +a_{49\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} gf^{abc} \left(\partial_\mu A_\nu^a\right) V_{\rho\sigma I}^b \bar{U}_{\tau\upsilon I}^c + a_{50\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon} gf^{abc} A_\mu^a \left(\partial_\nu V_{\rho\sigma I}^b\right) \bar{U}_{\tau\upsilon I}^c \\ & +a_{90\,IJKL\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon\theta\pi}^{abcd} V_{\mu\nu I}^a V_{\rho\sigma J}^b \bar{V}_{\tau\upsilon K}^c \bar{U}_{\theta\pi I}^d + a_{91\,IJKL\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon\theta\pi}^{abcd} V_{\mu\nu I}^a U_{\rho\sigma J}^b \bar{U}_{\tau\upsilon K}^c \bar{U}_{\theta\pi I}^d \\ & +a_{92} V_{\mu\nu I}^a \partial^2 \bar{U}_{\mu\nu I}^a + a_{93} V_{\mu\nu I}^a \bar{U}_{\mu\nu I}^a \mu_1^2 + a_{94} V_{\mu\nu I}^a \bar{U}_{\mu\nu I}^a \mu_1 \mu_2 + a_{95} V_{\mu\nu I}^a \bar{U}_{\mu\nu I}^a \mu_2^2 \}\,. \end{aligned} \tag{286}$$

Olhando para o conjunto de identidades e para (286), já podemos antecipar que o termo do coeficiente a_{48} é problemático. Após renormalizado o modelo e tomado o limite físico de cada fonte, para que a interpretação inicial possa ser recuperada, deveríamos encontrar

$$\int d^4x \left[\bar{B}_{0\mu\nu}^{ac} \partial \cdot D^{ab}(A_0) B_{0\mu\nu}^{bc} - \bar{G}_{0\mu\nu}^{ac} \partial \cdot D^{ab}(A_0) G_{0\mu\nu}^{bc} + m_0 g_0 f^{abc} F_{0\mu\nu}^a \left(B_{0\mu\nu}^{bc} + \bar{B}_{0\mu\nu}^{bc}\right)\right]\,, \tag{287}$$

em que $F_{0\mu\nu}^a := F_{0\mu\nu}^a(A_0, g_0)$. Para que isso fosse possível os coeficientes a_{47} e a_{48} deveriam se juntar e diferirem de a_{39}^{abcd} apenas por um fator $Z_g Z_A^{\frac{1}{2}}$. No entanto, as identidades encontradas não tem essa capacidade por serem integradas, dessa forma, o coeficiente a_{48} se mantém independente, Essa mesma análise vale para os os coeficientes a_{38}^{abcd}, a_{45} e a_{46}, no entanto, a respeito deles é prematuro afirmar qualquer coisa. Uma possível solução, que precisa ser testada, seria aumentar ainda mais a ação a fim de estender o número de identidades de Ward. Os outros termos ainda precisam ser analisados com mais cuidado, com exceção dos termos $a^{a\cdots}_{40\,\mu\ldots}$, $a_{49\,\mu\ldots}$, $a_{50\,\mu\ldots}$ e o termos de vácuo, $a^{a\cdots}_{90\,I\ldots\mu\ldots}$, $a^{a\cdots}_{91\,I\ldots\mu\ldots}$, a_{92}, a_{93}, a_{94} e a_{95}, que devem ser adicionados à ação de partida.

CONCLUSÕES

A proposta apresentada, o operador composto não-local $\mathcal{O}$, que tenta ser um avanço do operador S^{1/D^2} no sentido da renormalizabilidade, foi estudada detalhadamente e algumas conclusões podem ser mencionadas, apesar da falta da prova completa da renormalizabilidade. A primeira delas é que o operador $\mathcal{O}$ pode ser tornado local, da *maneira Zwanziger*, e a ação resultante pode ser ampliada, através da introdução de novos termos com fontes, a fim de que um conjunto maior de simetrias possa existir, entre elas a simetria BRST, no entanto, sem prejudicar a interpretação inicial que é recuperada quando o apropriado limite físico dessas fontes é tomado. As identidades de Ward referentes ao setor desse operador impõem significativas restrições para os tipos de gráficos de Feynman divergentes, ou contratermos, que possam existir na teoria, sendo os principais deles os termos de interações quárticas dos campos auxiliares. Essa era uma condição necessária para que a nível quântico essa teoria fosse consistente, já que, caso contrário a integração nos campos auxiliares não seria possível. Apesar disso, existe o problema do termo a_{48}, discutido no final do Cap. 5, que até o momento não pode ser resolvido e se persistir, significa que o modelo como foi escrito não é renormalizável. Em defesa do modelo, podemos citar o acordo, ao menos qualitativo, do seu propagador do campo de calibre com as simulações da rede em $D = 3$ (CUCCHIERI et al., 2012).

REFERÊNCIAS

BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. Renormalization of Gauge Theories. *Annals of Physics*, Elsevier, [s.l], v. 98, p. 287–321, 1976.

BOUCAUD, P. et al. Instantons and condensate. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 66, p. 034504, 2002.

BOUCAUD, P. et al. Testing landau gauge ope on the lattice with a condensate. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 63, p. 114003, 2001.

CAPRI, M. A. L. et al. Exact nilpotent nonperturbative brst symmetry for the gribov-zwanziger action in the linear covariant gauge. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 92, n. 4, p. 045039, 2015.

CAPRI, M. A. L. et al. Local and BRST-invariant Yang-Mills theory within the Gribov horizon. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 94, n. 2, p. 025035, 2016.

CAPRI, M. A. L. et al. A Study of the gauge invariant, nonlocal mass operator $Tr \int d^4x F_{\mu\nu}(D^2)^{-1}F_{\mu\nu}$ in Yang-Mills theories. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 72, p. 105016, 2005.

CAPRI, M. A. L. et al. The Gribov-Zwanziger action in the presence of the gauge invariant, nonlocal mass operator $Tr \int d^4x F_{\mu\nu}(D^2)^{-1}F_{\mu\nu}$ in the Landau gauge. *European Physical Journal C*, EDP Sciences, [s.l], v. 52, p. 459–476, 2007.

CAPRI, M. A. L. et al. Local and renormalizable framework for the gauge-invariant operator A^2_{min} in Euclidean Yang-Mills theories in linear covariant gauges. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 94, n. 6, p. 065009, 2016.

CAPRI, M. A. L. et al. Renormalizability of the refined Gribov-Zwanziger action in linear covariant gauges. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 96, n. 5, p. 054022, 2017.

CAPRI, M. A. L.; FIORENTINI, D.; SORELLA, S. P. Study of the all orders multiplicative renormalizability of a local confining quark action in the Landau gauge. *Annals of Physics*, Elsevier, [s.l], v. 356, p. 320–335, 2015.

CAPRI, M. A. L. et al. Properties of the Faddeev-Popov operator in the Landau gauge, matter confinement and soft BRST breaking. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 90, n. 8, p. 085010, 2014.

CAPRI, M. A. L. et al. Local renormalizable gauge theories from nonlocal operators. *Annals of Physics*, Elsevier,[s.l], v. 323, p. 752–767, 2008.

CAPRI, M. A. L. et al. Study of the nonlocal gauge invariant mass operator $Tr \int d^4x F_{\mu\nu}(D^2)^{-1}F_{\mu\nu}$ in the maximal Abelian gauge. *Journal Physics A*, IOPscience, [s.l], v. 41, p. 155401, 2008.

CUCCHIERI, A. et al. Modeling the Gluon Propagator in Landau Gauge: Lattice Estimates of Pole Masses and Dimension-Two Condensates. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 85, p. 094513, 2012.

CUCCHIERI, A.; MENDES, T. What's up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices. *PoS*, In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON LATTICE FIELD THEORY, 25., 2007, Regensburg, Germany. Disponível em: <**https://arxiv.org/pdf/0710.0412.pdf**>., p. 297, 2007.

CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Constraints on the IR behavior of the gluon propagator in Yang-Mills theories. *Physical Review Letters*, APS, EUA, v. 100, p. 241601, 2008.

DELL'ANTONIO, G.; ZWANZIGER, D. Every gauge orbit passes inside the Gribov horizon. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, [s.l], v. 138, p. 291–299, 1991.

DUDAL, D. et al. Confinement and dynamical chiral symmetry breaking in a non-perturbative renormalizable quark model. *Annals of Physics*, Elsevier, [s.l], v. 365, p. 155–179, 2016.

DUDAL, D.; VERSCHELDE, H.; SORELLA, S. P. The Anomalous dimension of the composite operator A^2 in the Landau gauge. *Physics Letters B*, Elsevier, [s.l], v. 555, p. 126–131, 2003.

FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Physics Letters B*, Elsevier, [s.l], v. 25, p. 29–30, 1967.

FEYNMAN, R. P. Quantum theory of gravitation. *Acta Physica Polonica*, Jagiellonian University, Polônia, v. 24, p. 697–722, 1963.

GRIBOV, V. N. Quantization of Nonabelian Gauge Theories. *Nuclear Physics B*, Elsevier, [s.l], v. 139, p. 1, 1978.

GUIMARAES, M. S.; PEREIRA, A. D.; SORELLA, S. P. Remarks on the effects of the Gribov copies on the infrared behavior of higher dimensional Yang-Mills theory. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 94, n. 11, p. 116011, 2016.

LI, X.-d.; SHAKIN, C. M. Description of gluon propagation in the presence of an A^2 condensate. *Physical Review D*, APS, EUA, v. 71, p. 074007, 2005.

PIGUET, O.; SORELLA, S. *Algebraic Renormalization.* [S.l.]: Springer, 1995. (Lecture Notes in Physics, m28).

SEMENOV-TYAN-SHANSKII; FRANKE, V. A variational principle for the lorentz condition and restriction of the domain of path integration in non-abelian gauge theory. *Journal of Soviet Mathematics*, Springer, [s.l], v. 34, p. 1999–2004, 1986.

TYUTIN, I. V. Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism. Disponível em: <**arXiv:0812.0580 [hep-th]**>, 1975.

VANDERSICKEL, N. *A study of the Gribov-Zwanziger action: from propagator to glueballs.* Tese (Doutorado) — Faculty of Sciences, Universiteit Gent, Gent, 2011.

VERSCHELDE, H. et al. The Nonperturbative groundstate of QCD and the local composite operator A_μ^2. *Physics Letters B*, Elsevier, [s.l], v. 516, p. 307–313, 2001.

YANG, C.-N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, APS, EUA, v. 96, p. 191–195, 1954.

ZWANZIGER, D. Local and renormalizable action from the gribov horizon. *Nuclear Physics B*, Elsevier, [s.l], v. 323, p. 513–544, 1989.

APÊNDICE A – Restauração das identidades com quebras não-lineares

Chamemos de $S_1 = S''_{RGZ} + \mathcal{O}_{local} - \mu^2 s \int d^4x \left(\bar{G}^a_I B^a_I\right) + S_{ext}$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
S_1 \;=\; & \int d^4x \left(\frac{1}{4}F^2 + ib^a\partial_\mu A^a_\mu + \bar{c}^a\partial\cdot D^{ab}c^b \right. \\
& -\Omega^a_\mu D^{ab}_\mu c^b + \frac{g}{2} f^{abc} L^a c^b c^c \\
& +\bar{\varphi}^a_i \partial_\mu D^{ab}_\mu \varphi^b_i - \bar{\omega}^a_i \partial_\mu D^{ab}_\mu \omega^b_i - g f^{abc}\bar{\omega}^a_i \partial_\mu \left[\left(D^{cd}_\mu c^d\right)\varphi^b_i\right] \\
& -\bar{M}^a_{\mu i} D^{ab}_\mu \varphi^b_i + \bar{N}^a_{\mu i}\left[D^{ab}_\mu \omega^b_i + g f^{abc}\varphi^b_i D^{cd}_\mu c^d\right] \\
& -N^a_{\mu i} D^{ab}_\mu \bar{\omega}^b_i - M^a_{\mu i}\left[D^{ab}_\mu \bar{\varphi}^b_i - g f^{abc}\bar{\omega}^b_i D^{cd}_\mu c^d\right] \\
& -\left(\bar{M}^a_{\mu i} M^a_{\mu i} - \bar{N}^a_{\mu i} N^a_{\mu i}\right) + j^{ab}_{\mu\nu} A^a_\mu A^b_\nu + \lambda^{ab}_{\mu\nu}[(D^{ac}_\mu c^c)A^b_\nu + A^a_\mu D^{bc}_\nu c^c] \\
& -\mu_1^2(\bar{\varphi}^a_i \varphi^a_i - \bar{\omega}^a_i \omega^a_i) \\
& +\bar{B}^a_I \partial\cdot D^{ab} B^b_I - \bar{G}^a_I \partial\cdot D^{ab} G^b_I - \bar{G}^a_I \partial_\alpha \left[g f^{abc}\left(D^{cd}_\alpha c^d\right) B^b_I\right] \\
& -\mu_2^2\left(\bar{B}^a_I B^a_I - \bar{G}^a_I G^b_I\right) \\
& +g^2 f^{abc} f^{ade} c^d F^e_{\mu\nu} B^b_I \bar{U}^c_{\mu\nu I} + g f^{abc} F^a_{\mu\nu} G^b_I \bar{U}^c_{\mu\nu I} + g f^{abc} F^a_{\mu\nu} B^b_I \bar{V}^c_{\mu\nu I} \\
& \left. +g^2 f^{abc} f^{ade} c^d F^e_{\mu\nu} \bar{G}^b_I V^c_{\mu\nu I} + g f^{abc} F^a_{\mu\nu} \bar{B}^b_I V^c_{\mu\nu I} - g f^{abc} F^a_{\mu\nu} \bar{G}^b_I U^c_{\mu\nu I} \right)
\end{aligned} \tag{288}
$$

A equação de movimento do campo ω^a_i é

$$
\frac{\delta S_1}{\delta \omega^k_q} \;=\; D^{kb}_\mu \partial_\mu \bar{\omega}^b_q + D^{kb}_\mu \bar{N}^b_{\mu q} - \mu_1^2 \bar{\omega}^k_q \tag{289}
$$

$$
\Rightarrow \int d^4x \left(c^k \frac{\delta S_1}{\delta \omega^k_q} \right) \;=\; \int d^4x \left(-\bar{\omega}^k_q \partial_\mu D^{kb}_\mu c^b + \bar{N}^k_{\mu q} D^{kb}_\mu c^b - \mu_1^2 c^k \bar{\omega}^k_q\right) \tag{290}
$$

$$
\Rightarrow \int d^4x \left(c^a \frac{\delta S_1}{\delta \omega^a_i} + \bar{\omega}^a_i \frac{\delta S_1}{\delta \bar{c}^a} + \bar{N}^a_{\mu i} \frac{\delta S_1}{\delta \Omega^a_\mu} \right) \;=\; \int d^4x \left(-\mu_1^2 c^a \bar{\omega}^a_i\right) \tag{291}
$$

Não podemos utilizar a Eq.(291) como uma identidade de Ward, pois essa apresenta uma quebra não-linear, $\int d^4x \left(-\mu_1^2 c^k \bar{\omega}^k_q\right)$. No entanto, esse termo que causa essa quebra não-linear pode ser adicionado à ação de partida, acoplado a uma fonte:

$$
\begin{aligned}
S_1^{ext} \;&=\; s \int d^4x \left(\tau^{ab}_i c^a \bar{\omega}^b_i\right) \\
&=\; \int d^4x \left[\rho^{ab}_i c^a \bar{\omega}^b_i - \tau^{ab}_i \left(\frac{g}{2} f^{acd} c^c c^d \bar{\omega}^b_i - c^a \bar{\varphi}^b_i\right)\right],
\end{aligned} \tag{292}
$$

para

$$s\tau_i^{ab} = \rho_i^{ab} \tag{293}$$
$$s\rho_i^{ab} = 0. \tag{294}$$

Desse modo,

$$\int d^4x \left(c^a \frac{\delta S_2}{\delta \omega_i^a} + \bar{\omega}_i^a \frac{\delta S_2}{\delta \bar{c}^a} + \bar{N}_{\mu i}^a \frac{\delta S_2}{\delta \Omega_\mu^a} + \mu_1^2 \delta^{ab} \frac{\delta S_2}{\delta \rho_i^{ab}} \right) = 0 \tag{295}$$

é uma identidade de Ward, em que $S_2 = S_1 + S_1^{ext}$. Essa modificação na ação não altera em nada a equação de movimento do campo ω_q^a, que pode ser escrita como:

$$\frac{\delta S_2}{\delta \omega_i^a} + \partial_\mu \left(\frac{\delta S_2}{\delta N_i^a} \right) + igf^{abc}\bar{\omega}_q^b \frac{\delta S_2}{\delta b^c} = -gf^{abc}A_\mu^c \bar{N}_{\mu i}^b - \mu_1^2 \bar{\omega}_i^a, \tag{296}$$

que também é uma identidade de Ward.

A equações de movimento dos campos $\bar{\varphi}_i^a$ e $\bar{\omega}_i^a$ podem ser transformadas facilmente em identidades de Ward. Para $\bar{\varphi}_i^a$, temos que:

$$\frac{\delta S_2}{\delta \bar{\varphi}_q^k} = \partial_\mu D_\mu^{kb} \varphi_q^b + D_\mu^{kb} M_{\mu q}^b - \mu_1^2 \varphi_q^k + \tau_q^{ak} c^a \tag{297}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta S_2}{\delta \bar{\varphi}_i^a} + \partial_\mu \frac{\delta S_2}{\delta \bar{M}_{\mu i}^a} = -gf^{abc}A_\mu^c M_{\mu i}^b - \mu_1^2 \varphi_i^a + \tau_q^{ba} c^b. \tag{298}$$

No caso do campo $\bar{\omega}_i^a$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_2}{\delta \bar{\omega}_q^k} = & -\partial_\mu D_\mu^{kb} \omega_q^b - gf^{kbc}\partial_\mu \left[\left(D_\mu^{cd} c^d \right) \varphi_q^b \right] \\ & - D_\mu^{kb} N_{\mu q}^b + gf^{akc} M_{\mu q}^a D_\mu^{cd} c^d + \mu_1^2 \omega_q^k \\ & - \rho_q^{ak} c^a + \frac{g}{2} f^{acd} \tau_q^{ak} c^c c^d \end{aligned} \tag{299}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta S_2}{\delta \bar{\omega}_i^a} + \partial_\mu \frac{\delta S_2}{\delta \bar{N}_{\mu i}^a} - gf^{abc} M_{\mu i}^b \frac{\delta S_2}{\delta \Omega_\mu^c} - \tau_i^{ba} \frac{\delta S_2}{\delta L^b} = gf^{abc} A_\mu^c N_{\mu i}^b + \mu_1^2 \omega_i^a - \rho_i^{ba} c^b. \tag{300}$$

As Eqs. (298) e (300) são legítimas identidades de Ward.

Ainda falta explorarmos a equação de movimento de φ_i^a:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_2}{\delta \varphi_q^k} = & \partial_\mu D_\mu^{kb} \bar{\varphi}_q^b + gf^{kbc} \bar{\varphi}_q^b \partial_\mu A_\mu^c + gf^{akc} \left(\partial_\mu \bar{\omega}_q^a \right) \left(D_\mu^{cd} c^d \right) \\ & + D_\mu^{kb} \bar{M}_{\mu q}^b + gf^{akc} \bar{N}_{\mu q}^a D_\mu^{cd} c^d - \mu_1^2 \bar{\varphi}_q^k \end{aligned} \tag{301}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta S_2}{\delta \varphi^a_i} + \partial_\mu \frac{\delta S_2}{\delta M^a_{\mu i}} - g f^{abc} \bar{\omega}^b_i \frac{\delta S_2}{\delta \bar{c}^c} + i g f^{abc} \bar{\varphi}^b_i \frac{\delta S_2}{\delta b^c} - g f^{abc} \bar{N}^b_{\mu i} \frac{\delta S_2}{\delta \Omega^c_\mu} = -g f^{abc} A^c_\mu \bar{M}^b_{\mu i} - \mu^2 \bar{\varphi}^a_i \quad (302)$$

Além da Eq. (302) temos que

$$\int d^4x \left(c^a \frac{\delta S_2}{\delta \varphi^a_i} - \bar{\varphi}^a_i \frac{\delta S_2}{\delta c^a} - \bar{M}^a_{\mu i} \frac{\delta S_2}{\delta \Omega^a_\mu} - \frac{\delta S_2}{\delta \omega^a_i} \frac{\delta S_2}{\delta L^a} + \mu_1^2 \delta^{ab} \frac{\delta S_2}{\delta \tau^{ab}} \right) = 0 \quad (303)$$

Agora, passemos para o setor do operador $\mathcal{O}$. A equação de movimento do campo G^a_I é:

$$\frac{\delta S_2}{\delta G^k_Q} = D^{kb} \cdot \partial \bar{G}^b_I - \mu_2^2 \bar{G}^k_Q + g f^{akc} F^a_{\mu\nu} \bar{U}^c_{\mu\nu Q} \quad (304)$$

$$\Rightarrow \int d^4x \left(c^k \frac{\delta S_2}{\delta G^k_Q} + \bar{G}^k_Q \frac{\delta S_2}{\delta \bar{c}^k} \right) = \int d^4x \left(-\mu_2^2 c^k \bar{G}^k_Q + g f^{akc} c^k F^a_{\mu\nu} \bar{U}^c_{\mu\nu Q} \right). \quad (305)$$

A Eq. (305) pode ser reescrita, já que,

$$f^{ade} c^d F^e_{\mu\nu} = \partial_\mu \frac{\delta S_2}{\delta \Omega^a_\nu} - \partial_\nu \frac{\delta S_2}{\delta \Omega^a_\mu} - g f^{abc} \frac{\delta S_2}{\delta \lambda^{bc}_{\mu\nu}}. \quad (306)$$

Desse modo, temos que

$$\int d^4x \left(c^k \frac{\delta S_2}{\delta G^k_Q} + \bar{G}^k_Q \frac{\delta S_2}{\delta \bar{c}^k} + \bar{U}^c_{\mu\nu Q} \left(2\partial_\mu \frac{\delta S_2}{\delta \Omega^a_\nu} - g f^{abc} \frac{\delta S_2}{\delta \lambda^{bc}_{\mu\nu}} \right) \right) = \int d^4x \left(-\mu_2^2 c^k \bar{G}^k_Q \right), \quad (307)$$

mas que não é uma identidade de Ward devido à quebra não-linear $\int d^4x \left(-\mu_2^2 c^k \bar{G}^k_Q \right)$. Contudo, seguindo o mesmo procedimento do setor RGZ, adicionemos um termo

$$\begin{aligned} S_2^{ext} &= s \int d^4x \left(T^{ab}_I c^a \bar{G}^b_I \right) \\ &= \int d^4x \left[R^{ab}_I c^a \bar{G}^b_I - T^{ab}_I \left(\frac{g}{2} f^{acd} c^c c^d \bar{G}^b_I - c^a \bar{B}^b_I \right) \right], \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} sT^{ab} &= R^{ab} \\ sR^{ab} &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Rightarrow \int d^4x \left(c^k \frac{\delta S_3}{\delta G^k_Q} + \bar{G}^k_Q \frac{\delta S_3}{\delta \bar{c}^k} + \bar{U}^c_{\mu\nu Q} \left(2\partial_\mu \frac{\delta S_3}{\delta \Omega^a_\nu} - g f^{abc} \frac{\delta S_3}{\delta \lambda^{bc}_{\mu\nu}} \right) + \mu_2^2 \delta^{kl} \frac{\delta S_3}{\delta R^{kl}} \right) = 0. \quad (308)$$

Além dessa identidade (308), da Eq. (304) podemos derivar a relação

$$\int d^4x \left(\frac{\delta S_3}{\delta G_Q^k} + igf^{kbc}\bar{G}_I^b \frac{\delta S_3}{\delta b^c} - g^2 f^{akc} f^{ade} \bar{U}^c_{\mu\nu Q} \frac{\delta S_3}{\delta j^{de}_{\mu\nu}} \right) \quad = \qquad \int d^4x \left(-\mu_2^2 \bar{G}_Q^k + 2gf^{akc} \left(\partial_\mu A_\nu^a \right) \bar{U}^c_{\mu\nu Q} \right). \tag{309}$$

Vejamos agora a equação do campo B_I^a:

$$\frac{\delta S_3}{\delta B_Q^k} \quad = \quad D^{kb} \cdot \partial \bar{B}_I^b + \left(\partial_\alpha \bar{G}_Q^a \right) gf^{akc} \left(D_\alpha^{cd} c^d \right) - \mu_2^2 \bar{B}_Q^k + g^2 f^{akc} f^{ade} c^d F^e_{\mu\nu} \bar{U}^c_{\mu\nu Q} + gf^{akc} F^a_{\mu\nu} \bar{V}^c_{\mu\nu Q}$$

$$\Rightarrow \int d^4x \left(\frac{\delta S_3}{\delta B_Q^k} + igf^{kbc} \bar{B}_I^b \frac{\delta S_3}{\delta b^c} + gf^{akc} \bar{G}_Q^a \frac{\delta S_3}{\delta \bar{c}^c} \right.$$
$$\left. + gf^{akc} \bar{U}^c_{\mu\nu Q} \left(2\partial_\mu \frac{\delta S_3}{\delta \Omega_\nu^a} - gf^{ade} \frac{\delta S_3}{\delta \lambda^{de}_{\mu\nu}} \right) - g^2 f^{akc} f^{ade} \bar{V}^c_{\mu\nu Q} \frac{\delta S_3}{\delta j^{de}_{\mu\nu}} \right) \quad = \quad .$$
$$\int d^4x \left(-\mu_2^2 \bar{B}_Q^k + 2gf^{akc} \left(\partial_\mu A_\nu^a \right) \bar{V}^c_{\mu\nu Q} \right)$$

Além dessa identidade, podemos derivar outra a partir da equação de movimento do campo B_I^a:

$$\int d^4x \left(c^k \frac{\delta S_3}{\delta B_Q^k} - \bar{B}_Q^k \frac{\delta S_3}{\delta \bar{c}^k} - \frac{\delta S_3}{\delta G_Q^k} \frac{\delta S_3}{\delta L^k} - gf^{akc} \bar{V}^c_{\mu\nu Q} \left(2\partial_\mu \frac{\delta S_3}{\delta \Omega_\nu^a} - gf^{ade} \frac{\delta S_3}{\delta \lambda^{de}_{\mu\nu}} \right) + \mu_2^2 \delta^{kl} \frac{\delta S_3}{\delta T^{kl}} \right) \quad = \quad 0.$$

A equação de movimento do campo $\bar{B}_I^a$ é

$$\frac{\delta S_3}{\delta \bar{B}_Q^k} \quad = \quad \partial \cdot D^{kb} B_Q^b + gf^{akc} F^a_{\mu\nu} V^c_{\mu\nu Q} - \mu_2^2 B_Q^k + T_Q^{ak} c^a$$

$$\Rightarrow \int d^4x \left(\frac{\delta S_3}{\delta \bar{B}_Q^k} - g^2 f^{akc} f^{ade} V^c_{\mu\nu Q} \frac{\delta S_3}{\delta j^{de}_{\mu\nu}} \right) \quad = \quad \int d^4x \left(2gf^{akc} \left(\partial_\mu A_\nu^a \right) V^c_{\mu\nu Q} - \mu_2^2 B_Q^k + T_Q^{ak} c^a \right)$$

Para o campo $\bar{G}_I^a$:

$$\frac{\delta S_3}{\delta \bar{G}_Q^k} \quad = \quad -\partial \cdot D^{kb} G_Q^b - \partial_\alpha \left[gf^{kbc} \left(D_\alpha^{cd} c^d \right) B_Q^b \right] + \mu_2^2 G_Q^k$$
$$-g^2 f^{akc} f^{ade} c^d F^e_{\mu\nu} V^c_{\mu\nu Q} - gf^{akc} F^a_{\mu\nu} U^c_{\mu\nu Q} + T_Q^{ak} \left(\frac{g}{2} f^{acd} c^c c^d - c^a \bar{B}_Q^b \right)$$

então

$$\int d^4x \left(\frac{\delta S_3}{\delta \bar{G}^k_Q} + g^2 f^{akc} V^c_{\mu\nu Q} \left(2\partial_\mu \frac{\delta S_3}{\delta \Omega^a_\nu} - g f^{abc} \frac{\delta S_3}{\delta \lambda^{bc}_{\mu\nu}} \right) - T^{ak}_Q \frac{\delta S_3}{\delta L^a} + g^2 f^{akc} f^{ade} U^c_{\mu\nu Q} \frac{\delta S_3}{\delta j^{de}_{\mu\nu}} \right) = \int d^4x \left(\mu_2^2 G^k_Q - 2g f^{akc} \left(\partial_\mu A^a_\nu \right) U^c_{\mu\nu Q} \right) \quad .$$

Repare que $S_3 = \Sigma$.