



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Giovani Peruzzo

**Operadores compostos invariantes de BRST nos modelos de
Higgs $U(1)$ e $SU(2)$**

Rio de Janeiro

2022

Giovani Peruzzo

Operadores compostos invariantes de BRST nos modelos de Higgs $U(1)$ e $SU(2)$



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Paolo Sorella

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

P471o Peruzzo, Giovanni.
Operadores compostos invariantes de BRST nos modelos de Higgs U(1) e SU(2) / Giovanni Peruzzo. – 2022.
218 f. : il.

Orientador: Silvio Paolo Sorella.
Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Simetria (Física) – Teses. 2. Higgs, Bósons de – Teses. 3. Campos de calibre (Física) – Teses. 4. Green, Funções de – Teses. 5. Renormalização (Física) - Teses. 6. Homologia (Matemática) – Teses. I. Sorella, Silvio Paolo. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 539.12

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Giovani Peruzzo

Operadores compostos invariantes de BRST nos modelos de Higgs $U(1)$ e $SU(2)$

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de Junho de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Silvio Paolo Sorella (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Luis Esteban Oxman
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Antônio Duarte Pereira Junior
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Marcio André Lopes Capri
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Rio de Janeiro

2022

DEDICATÓRIA

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Silvio Paolo Sorella, pela excelente orientação e pela amizade. Que o professor nunca perca essa paixão pela pesquisa científica que, além de produzir conhecimento, influencia as pessoas na sua volta a também se tornarem pesquisadores.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Márcio André Lopes Capri, pela colaboração científica e amizade, que vem desde a época do mestrado.

Aos pesquisadores e pesquisadoras que colaboraram para a realização desta tese, que são a Profa. Dra. Leticia Palhares, o Prof. Dr. Marcelo Guimarães e o Prof. Dr. Bruno Mintz. Em especial, gostaria de expressar a minha gratidão ao Prof. Dr. David Dudal, sem a contribuição dele não teríamos ido tão longe com essa tese.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UERJ por terem aberto as portas e me dado a oportunidade de realizar o meu mestrado e doutorado na instituição. Em especial, gostaria de agradecer aos coordenadores que atuaram durante esse período e à Ranna e ao Samir, que trabalham na secretaria.

À UERJ como um todo, em especial, aos funcionários e funcionárias da Biblioteca.

Ao membros da banca examinadora, que aceitaram o convite para ler e analisar esta tese.

Aos professores e professoras que ajudaram na minha formação acadêmica e me incentivaram a seguir a carreira científica.

Ao meus familiares, em especial, meu pai Irineu, minha mãe Verginia, minha irmã Elisiane, minha nona Loures, minha avó Rosa e meu tio Nini, por todo amor e suporte.

Aos amigos que fiz na UERJ, em especial, Apóllo e Carlos.

Aos meus amigos e colegas de pesquisa, Duifje, Ozório e Igor.

Ao meu amigo José Thuorst, com quem dividi apartamento no Rio de Janeiro e discussões científicas, e à minha amiga querida Leticia Bertuzzi.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Para encerrar, eu gostaria de agradecer à todas as pessoas que trabalharam e continuam trabalhando no combate à pandemia do COVID-19. Gostaria também de deixar a minha solidariedade aos familiares das vítimas da COVID-19.

RESUMO

PERUZZO, G. P. *Operadores compostos invariantes de BRST nos modelos de Higgs $U(1)$ e $SU(2)$* . 2022. 218 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

No modelo de Higgs $U(1)$ e no modelo de Higgs $SU(2)$ existem operadores compostos invariantes de BRST que fornecem uma descrição completa do espectro físico da teoria. Utilizando o calibre R_ξ , fazemos uma análise detalhada dos polos e das densidades espectrais das funções de Green de 2-pontos desses operadores calculadas até 1-loop e comparamos com as funções de Green de 2-pontos dos campos elementares. Com a introdução desses operadores na ação de partida, no calibre de Landau, podemos derivar um conjunto de identidades de Ward adicionais às que já existem no modelo sem os operadores. Com essas identidades, nós determinamos a renormalização desses operadores compostos e derivamos alguns resultados exatos para as funções de Green desses operadores.

Palavras-chave: Modelo de Higgs. Operadores invariantes de BRST. Densidades espectrais. Renormalização.

ABSTRACT

PERUZZO, G. P. *BRST invariant composite operators in the $U(1)$ and $SU(2)$ Higgs model.* 2022. 218 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

In the Higgs model $U(1)$ and in the Higgs model $SU(2)$ there are BRST invariant composite operators that provide a complete description of the physical spectrum of the theory. Using the R_ξ gauge, we make a detailed analysis of the poles and spectral densities of the 2-point Green functions of these operators calculated up to 1-loop and compare them with the 2-point Green functions of the elementary fields. Adding these operators in the starting action, in the Landau gauge, we can derive a set of additional Ward identities to those that already exist in the model without the operators. With these identities we determine the renormalization of these composite operators and derive some exact results for the Green's functions of these operators.

Keywords: Higgs model. BRST invariant operators. Spectral densities. Renormalization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Propagadores da teoria.	41
Figura 2 - Correções a 1-loop para a Função de Green $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$	49
Figura 3 - Função de Green $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$	55
Figura 4 - Correções a 1-loop para a função de Green conexa $\langle h(p) h(-p) \rangle$	57
Figura 5 - Função de Green conexa $\langle h(p) h(-p) \rangle$	61
Figura 6 - Polo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ obtido pelo método perturbativo.	64
Figura 7 - Polo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ obtido por métodos diferentes.	65
Figura 8 - Polo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$, \bar{m}_h^2 obtido pelo método perturbativo.	66
Figura 9 - Polo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$, \bar{m}_h^2 obtido por métodos diferentes.	67
Figura 10 - Dependência do polo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$ obtido pelo método numérico.	68
Figura 11 - Resíduo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$	70
Figura 12 - Polo (em amarelo) e o ponto de corte (em verde) de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$	71
Figura 13 - Resíduo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$	72
Figura 14 - Polo e o ponto de corte de $\langle h(p) h(-p) \rangle$	73
Figura 15 - Densidade espectral de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$	75
Figura 16 - Densidade espectral de $\langle h(p) h(-p) \rangle$	77
Figura 17 - Contribuições para $\langle O(p) O(-p) \rangle$	84
Figura 18 - Diagramas com uma perna externa de h	84
Figura 19 - Diagramas sem pernas externas.	85
Figura 20 - Gráfico de $\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}} = G_{OO}(p^2)$	90
Figura 21 - Tipos de diagramas de $\langle O(x) O(y) \rangle$	92
Figura 22 - Tipos de diagramas $\langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle$	93
Figura 23 - Correções a 1-loop para $\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle$	94
Figura 24 - Correções a 1-loop para $\langle \rho(p) A_\mu(-p) \rangle$	95
Figura 25 - Quarto grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$	95
Figura 26 - Quinto grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$	96
Figura 27 - Sexto grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$	96
Figura 28 - Sétimo grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$	97
Figura 29 - Oitavo grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$	97
Figura 30 - Nono grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$	98
Figura 31 - Décimo grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$	98
Figura 32 - Décimo primeiro grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$	99
Figura 33 - Gráfico de $\langle V(p) V(-p) \rangle^{T, \text{res}}$	103
Figura 34 - Densidade espectral $\tilde{\rho}_O(t)$	106
Figura 35 - Densidade espectral $\tilde{\rho}_V(t)$	107
Figura 36 - Principais propagadores do modelo de Higgs $SU(2)$	142

Figura 37 - Correções a 1-loop para $\langle h(p) h(-p) \rangle$	145
Figura 38 - Correções a 1-loop para $\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle$	149
Figura 39 - Correções a 1-loop para $\langle O(p) O(-p) \rangle$	152
Figura 40 - Correções a 1-loop para $\langle R(p) R(-p) \rangle$	157
Figura 41 - Resíduo da função $\langle h(p) h(-p) \rangle$	159
Figura 42 - Densidades espectrais de $\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}}$	159
Figura 43 - Resíduo da função $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$	160
Figura 44 - Densidades espectrais de $\langle A(p) A(-p) \rangle^{T, \text{res}}$	161
Figura 45 - Densidades espectrais de $\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}}$	162
Figura 46 - Densidades espectrais de $\langle R(p) R(-p) \rangle^{T, \text{res}}$	163
Figura 47 - Densidades espectrais de $\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}}$	164
Figura 48 - Densidades espectrais de $\langle A(p) A(-p) \rangle^{T, \text{res}}$	165
Figura 49 - Vértices de interação de S_I	198
Figura 50 - Vértices de interação para o cálculo de funções de Green de $O(x)$	200
Figura 51 - Vértices de interação para o cálculo de funções de Green de $V_\mu(x)$	201
Figura 52 - Contorno no plano complexo.	207
Figura 53 - Função $\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle$	210
Figura 54 - Vértices de interação de S_I	214
Figura 55 - Vértices de interação para o cálculo de funções de Green de $O(x)$	215
Figura 56 - Vértices de interação para o cálculo de funções de Green de $O(x)$	216
Figura 57 - Função de Green $\langle h \rangle$	217
Figura 58 - Função de Green $\langle \rho^a(x) \rho^b(y) \rangle$	218
Figura 59 - Função de Green $\langle A_\mu^a(x) \rho^b(y) \rangle$	218

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Número de fantasma $[\mathcal{N}_g]$ e dimensão de massa.	43
Tabela 2 - Parâmetros usados para analisar as densidades espectrais.	158

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

VEV	Valor Esperado no Vácuo
BEH	Brout-Englert-Higgs
QCD	Quantum Chromodynamics
QED	Quantum Electrodynamics
RGZ	Gribov-Zwanziger Refinada
BRST	Becchi-Rouet-Stora-Tyutin
SDE	Equações de Schwinger-Dyson

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
1	CONCEITOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	19
1.1	Funcionais geradores	19
1.1.1	<u>Funções de Green</u>	19
1.1.2	<u>Funções de Green conexas</u>	22
1.1.3	<u>Funções 1PI ou Funções de Vértice</u>	24
1.1.4	<u>Potencial efetivo e energia do vácuo</u>	26
1.2	Simetrias e identidades de Ward	27
1.2.1	<u>Simetrias da ação clássica</u>	27
1.2.2	<u>Simetrias a nível quântico</u>	30
2	O MODELO DE HIGGS $U(1)$	34
2.1	A ação de Higgs	34
2.2	Calibres renormalizáveis	37
2.2.1	<u>Fixação do calibre</u>	37
2.2.2	<u>Quantização e simetria BRST</u>	38
2.3	Simetrias e Identidades de Ward	41
2.4	Identidades de Nielsen	44
2.5	Renormalização e consistência do calibre R_ξ	47
3	ANÁLISE DAS FUNÇÕES DE GREEN DE 2-PONTOS DOS CAMPOS ELEMENTARES ATÉ 1-LOOP	48
3.1	Função de Green $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$	48
3.1.1	<u>Cálculo da autoenergia do fóton</u>	48
3.1.2	<u>Expansão de $\Pi_{\mu\nu}^d(p)$ em torno de $d = 4$ e renormalização</u>	52
3.1.3	<u>Ressoma da autoenergia $\Pi_{\mu\nu}(p)$</u>	54
3.1.4	<u>Independência de calibre de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$</u>	55
3.2	Função de Green $\langle h(p) h(-p) \rangle$	56
3.2.1	<u>Cálculo da autoenergia do campo de Higgs</u>	56
3.2.2	<u>Expansão de $\Pi_h^d(p^2)$ em torno de $d = 4$ e renormalização</u>	59
3.2.3	<u>Ressoma da autoenergia $\Pi_h(p^2)$</u>	60
3.3	Propriedades espectrais das funções conexas	60
3.3.1	<u>Polos</u>	60
3.3.2	<u>O resíduo</u>	68
3.3.3	<u>A representação espectral de Källén-Lehmann</u>	69
3.4	Comentários adicionais	76
4	OPERADORES INVARIANTES DE BRST NO MODELO DE HIGGS $U(1)$	79

4.1	Introdução	79
4.2	Operadores Invariantes de BRST	80
4.2.1	<u>Operador escalar</u>	80
4.2.2	<u>Operador vetorial</u>	81
4.2.3	<u>Operadores a nível quântico</u>	82
4.3	Função de Green conexa $\langle O(p) O(-p) \rangle$	83
4.4	Função de Green $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$	92
4.4.1	<u>Correções a 1-loop</u>	92
4.5	Polos e densidades espectrais das funções de Green dos operadores compostos	104
4.5.1	<u>Polos e Resíduos</u>	104
4.5.2	<u>Densidades espectrais</u>	105
4.6	Comentários finais	108
5	RENORMALIZAÇÃO DOS OPERADORES COMPOSTOS $O(X)$ E $V_\mu(X)$ NO CALIBRE DE LANDAU; APLICAÇÃO DO TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA AO MODELO DE HIGGS $U(1)$	109
5.1	Introdução dos operadores invariantes de BRST	109
5.1.1	<u>Estudo da cohomologia de BRST</u>	109
5.1.2	<u>A ação inicial completa Σ e suas identidades de Ward</u>	111
5.1.3	<u>Identidades de Ward adicionais devido aos operadores compostos</u>	114
5.2	Caracterização do contratermo local invariante	116
5.3	Fatores de renormalização Z até 1-loop	123
5.4	“Tadpoles”, energia do vácuo e o condensado $\langle O(x) \rangle$	126
5.5	Resultados exatos para a função de correlação $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$	128
5.6	O modelo de Higgs revisitado através do Teorema de Equivalência	130
5.6.1	<u>Passo 1: das coordenadas cartesianas para as coordenadas polares</u>	131
5.6.2	<u>Passo 2: das coordenadas polares para os operadores invariantes de calibre (O, V_μ)</u>	133
6	PROPRIEDADES ESPECTRAIS DOS OPERADORES INVARIANTES DE CALIBRE NO MODELO DE HIGGS $SU(2)$	138
6.1	A ação e suas simetrias	138
6.1.1	<u>A ação de Higgs $SU(2)$ e a quebra espontânea da simetria</u>	138
6.1.2	<u>Fixação do Calibre e a simetria BRST</u>	141
6.1.3	<u>Simetria Custodial</u>	143
6.2	Funções de Green de 2-pontos dos campos $h(x)$ e $A_\mu^a(x)$	144
6.2.1	<u>Função conexa $\langle h(p) h(-p) \rangle$</u>	144
6.2.2	<u>Função conexa $\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle$</u>	146
6.3	Funções de Green dos operadores invariantes de BRST	149

6.3.1	<u>Função conexa do operador $O(x)$</u>	149
6.3.2	<u>Função conexa do operador $R_\mu^a(x)$</u>	151
6.4	Propriedades espectrais das funções de Green	157
6.4.1	<u>Propriedades espectrais das funções dos campos elementares</u>	157
6.4.2	<u>Propriedades espectrais dos operadores compostos</u>	161
6.4.3	<u>Calibre Unitário</u>	163
7	IDENTIDADES DE WARD E RENORMALIZAÇÃO DO MODELO DE HIGGS $SU(2)$ NO CALIBRE DE LANDAU COM OS OPERADORES $O(X)$ E $R_\mu^A(X)$	166
7.1	Fixador de calibre	166
7.2	Cohomologia do operador de BRST	167
7.2.1	<u>O operador escalar $O(x)$</u>	167
7.2.2	<u>O operador vetorial $R_\mu^a(x)$</u>	167
7.3	O operador vetorial R_μ^a como a corrente de Noether da simetria custodial	168
7.4	Simetrias e Identidades de Ward	171
7.4.1	<u>Operadores compostos a nível quântico; Identificando a ação completa Σ</u> .	171
7.4.2	<u>Identidades de Ward</u>	172
7.5	Análise algébrica da renormalizabilidade a todas as ordens	175
7.5.1	<u>Caracterização do contratermo local invariante</u>	175
7.5.2	<u>Identificando a ação bare e os fatores de renormalização Z</u>	180
7.6	“Tadpoles”, energia do vácuo e o condensado perturbativo $\langle O \rangle$.	184
7.7	A parte longitudinal da função de 2-pontos $\langle R_\mu^a(x) R_\nu^b(y) \rangle$	185
	CONCLUSÕES	187
	REFERÊNCIAS	189
	APÊNDICE A – Regras de Feynman do modelo de Higgs $U(1)$	195
	APÊNDICE B – Reduções das integrais de Feynman	202
	APÊNDICE C – Reconstrução das funções de 2-pontos a partir das densidades espectrais	206
	APÊNDICE D – Polologia	208
	APÊNDICE E – Regras de Feynman do modelo de Higgs $SU(2)$	211
	APÊNDICE F – Funções de Green envolvidas no estudo do modelo de Higgs $SU(2)$	217

INTRODUÇÃO

Dependência na escolha do calibre em teorias de calibre

Quando trabalhamos com uma teoria de calibre no contínuo, ao menos perturbativamente, somos obrigados a fixar o calibre e, portanto, escolher um calibre. Embora existam calibres mais convenientes de se trabalhar, como os calibres covariantes e renormalizáveis, a princípio, qualquer um poderia ser utilizado, já que, o que entendemos como *observáveis físicos* devem independender da escolha do calibre. Sendo mais abrangente, quando afirmamos algo a respeito de uma teoria de calibre, devemos demonstrar que essa afirmação independe do calibre escolhido. A facilidade para enunciar esse princípio fundamental não é a mesma que encontramos para implementá-lo. O método de Faddeev-Popov, que é o método utilizado para fixar o calibre na quantização de Feynman por integrais de trajetória, formalmente mantém as funções de Green de quantidades invariantes de calibre independentes do calibre, veja por exemplo (WEINBERG, 1996). Isso poderia ser o suficiente para não nos preocuparmos com a dependência na escolha do calibre se não fossem alguns fatos, como:

i) o método de Faddeev-Popov é tradicionalmente utilizado com a hipótese adicional de que não existem *cópias de Gribov*¹. Sabemos que isso não é verdade, como mostraram (GRIBOV, 1978; SINGER, 1978);

ii) usualmente trabalhamos com funções de Green de campos elementares, que, em geral, não são invariantes de calibre.

A respeito das cópias de Gribov, existem vários trabalhos tentando implementar melhorias no método de Faddeev-Popov, especialmente nas teorias de Yang-Mills não abelianas puras, isto é, sem campos de matéria, podemos mencionar (GRIBOV, 1978; ZWANZIGER, 1989a; ZWANZIGER, 1989b; DUDAL et al., 2008). As cópias de Gribov se tornam mais relevantes nas teorias de Yang-Mills não abelianas devido ao fenômeno da liberdade assintótica, que faz com que a constante de acoplamento cresça no regime infravermelho da teoria, o que, entre outras coisas, limita a aplicação da teoria de perturbações. Existe a esperança de que, com a remoção das cópias de Gribov, ao menos o fenômeno do confinamento dos glúons possa ser explicado. Atualmente, a melhor teoria que trata do problema das cópias de Gribov é a teoria RGZ²(DUDAL et al., 2008), cujos resultados, ao menos qualitativamente, estão de acordo com aqueles produzidos por

¹ Cópias de Gribov são campos de calibre que estão conectados por uma transformação de calibre e que satisfazem o mesmo calibre.

² RGZ são as siglas para “Refined Gribov-Zwanziger”

simulações numéricas da rede (CUCCHIERI; MENDES, 2007).

Em relação ao segundo fato mencionado acima, existem as chamadas *identidades de Nielsen* (NIELSEN, 1975), que são obtidas a partir das identidades de Slavnov-Taylor, que decorrem da simetria BRST existente nas teorias de calibre. Essas identidades estabelecem como as funções de Green devem se transformar quando são feitas modificações nos parâmetros de calibre. Através delas podemos demonstrar, entre outras coisas, que o polo de certas funções de Green dos campos elementares são independentes dos parâmetros de calibre, veja por exemplo (BRECKENRIDGE; LAVELLE; STEELE, 1995). As identidades de Nielsen também são utilizadas nos estudos de potenciais efetivos nos modelos de Higgs, podemos citar os trabalhos de (AITCHISON; FRASER, 1984; ANDREASSEN; FROST; SCHWARTZ, 2015; ANDREASSEN; FROST; SCHWARTZ, 2014), além do trabalho original de (NIELSEN, 1975). No entanto, devemos mencionar que, em certas classes de calibre, as identidades de Nielsen sofrem com problemas de singularidades infravermelhas, como discutem (NIELSEN, 1975; AITCHISON; FRASER, 1984). Essas singularidades acabam obscurecendo, por exemplo, os resultados para o potencial efetivo do modelo de Higgs, a partir do qual são calculadas quantidades importantes, como o valor esperado no vácuo (VEV) do campo de Higgs.

Embora existam as identidades de Nielsen, que são úteis para estabelecer quando uma quantidade é ou não independente do calibre, trabalhar com funções de Green dependentes do calibre exige que estejamos sempre alertas para que não sejam tiradas conclusões equivocadas ou conclusões dependentes do calibre. Além disso, as funções de Green dependentes do calibre podem apresentar características muito diferentes daquelas que encontramos na literatura tradicional, como (PESKIN; SCHROEDER, 1995; WEINBERG, 1995). Podemos citar como exemplo a *representação espectral de Källén-Lehman* das funções de Green de 2-pontos, que vem ganhando destaque na literatura que trata das teorias de Yang-Mills não abelianas, como a Cromodinâmica Quântica (QCD³). Existem simulações numéricas na rede mostrando que a densidade espectral do propagador do glúon no calibre de Landau mínimo não é positiva definida (CUCCHIERI; MENDES; TAURINES, 2005; BOWMAN et al., 2007; STRAUSS; FISCHER; KELLERMANN, 2012). Essa violação da positividade da densidade espectral é comumente associada ao fenômeno de confinamento dos glúons. Como o propagador do glúon e, conseqüentemente, a densidade espectral são quantidade dependentes do calibre, devemos tomar cuidado ao fazer essa associação. Fazemos esse alerta, pois nas análises que fizemos a respeito dos modelos de Higgs $U(1)$ e $SU(2)$, que podem ser encontradas em (DUDAL et al., 2019; DUDAL et al., 2020; DUDAL et al., 2021b) ou nos Capítulos 3 e 6, foram mostradas que as densidades espectrais de

³ QCD são as siglas de “Quantum Chromodynamics”, que em português significa Cromodinâmica Quântica.

funções de Green dependentes do calibre podem apresentar violação de positividade. Resultados semelhantes também foram encontrados por (MAAS; SONDENHEIMER, 2020) em um modelo de Higgs não abeliano com matéria.

No caso do modelo de Higgs, que mencionamos no parágrafo anterior, existem questões mais fundamentais ligadas ao mecanismo de Brout-Englert-Higgs (BEH) (ENGLERT; BROUT, 1964; HIGGS, 1964) que se relacionam com a fixação do calibre. De maneira simplificada, podemos descrever o mecanismo de BEH como sendo o mecanismo de quebra espontânea de simetria nas teorias de calibre. O trabalho de Elitzur estabelece que é impossível haver a quebra espontânea de simetria sem a existência de um termo de fixação de calibre (ELITZUR, 1975). Originalmente, em um modelo de Higgs abeliano formulado na rede sem a fixação do calibre, Elitzur estabelece o resultado geral de que as funções de correlação de quantidades não invariantes de calibre são nulas, portanto, em particular, o VEV do campo de Higgs, $\langle\varphi\rangle$, é nulo. Para quem trabalha com teorias de calibre no contínuo, que necessitam da fixação do calibre, diferentemente das teorias de calibre na rede, esse resultado em particular não tem nenhuma consequência prática, além do mais, as simetrias globais que, eventualmente, existem na teoria após a fixação do calibre podem ser espontaneamente quebradas, já que o teorema de Elitzur não trata de simetrias globais. No caso das teorias no contínuo, o ponto mais fundamental que se coloca é que, por exemplo, $\langle\varphi\rangle$ depende do calibre, como discutem (CAUDY; GREENSITE, 2008; MAAS, 2012), sendo que, existem calibres em que deveríamos ter $\langle\varphi\rangle = 0$. Esse resultado levanta dúvidas a respeito da consistência da descrição perturbativa que é normalmente utilizada nos modelos de Higgs, em que é mantido $\langle\varphi\rangle \neq 0$ a cada ordem perturbativa.

Formulação através de operadores invariantes de calibre

A fim de evitar alguns dos problemas listados na seção anterior que estão relacionados à dependência do calibre, (ITZYKSON et al., 1980) e, posteriormente, (FROHLICH; MORCHIO; STROCCHI, 1980; FROHLICH; MORCHIO; STROCCHI, 1981) propõem que o modelo de Higgs e toda a sua fenomenologia sejam descritos em termos de um conjunto de operadores compostos invariantes de calibre, que são construídos com os campos elementares da teoria. Esse tipo de abordagem é comumente utilizada em QCD para determinar os “bound states” da teoria, principalmente na rede onde a fixação do calibre não é necessária.

Os operadores invariantes de calibre de maior interesse são aqueles que possuem

superposição⁴ com algum estado de partícula, sendo que o tipo de partícula pode ser caracterizado pelos números quânticos do operador. Como discutido por (WEINBERG, 1995), a superposição pode ser inferida a partir dos polos das funções de Green desses operadores. Para obter esse tipo de informação, geralmente, é necessário utilizar alguma técnica especial que vai além da teoria de perturbação pura e simplesmente (COLLINS, 2009). No caso do modelo de Higgs, utilizando a metodologia tradicional de teoria de perturbações, em que o campo de Higgs, $\varphi(x)$, é expandido em torno de um dos mínimos do potencial, v , isto é, tomando $\varphi(x) = v + H(x)$, já a nível árvore podemos verificar que existem operadores invariantes de calibre cujas funções de Green possuem polos. Além do mais, nessa mesma ordem perturbativa, esses polos coincidem com os polos das funções de Green dos campos elementares.

Na rede, como não há a necessidade da introdução de um fixador de calibre, o teorema de Elitzur naturalmente leva à utilização da abordagem em termos de operadores compostos invariantes de calibre, esse é um dos motivos do interesse pelo assunto, veja (MAAS, 2019). No entanto, no contínuo essa abordagem não é tão popular porque o conteúdo físico do modelo de Higgs, geralmente, é extraído com a ajuda do *calibre unitário* e da parametrização polar do campo $\phi(x)$, que faz com que os graus de liberdade não físicos se desacoplem da teoria. O problema do calibre unitário é a sua inconsistência a nível quântico, já que ele não é renormalizável.

Sobre a tese

Nesta tese, aplicamos aos modelos de Higgs $U(1)$ e $SU(2)$ no espaço euclidiano contínuo a abordagem através de operadores compostos invariante de calibre. Como no contínuo devemos fixar o calibre, a simetria relevante é a simetria de BRST e não mais a simetria de calibre. Portanto, de maneira geral, os operadores compostos são invariantes de BRST. Em relação à fixação de calibre, escolhemos trabalhar com o calibre de Landau e o calibre R_ξ de 't Hooft que são, ao menos perturbativamente, renormalizáveis, locais e sem problemas infravermelhos conhecidos.

No Capítulo 1 é feita uma revisão sobre funções de Green, funcionais geradores e identidades de Ward. No Capítulo 2 apresentamos a ação do modelo de Higgs $U(1)$ no calibre R_ξ e as identidades de Nielsen do modelo. No Capítulo 3 analisamos os polos e as densidades espectrais das funções de Green de 2-pontos do campo de calibre e do campo de Higgs calculadas até 1-loop. No Capítulo 4 analisamos as funções de Green de 2-pontos de dois operadores compostos invariantes de BSRT, um escalar e um vetorial, até 1-loop.

⁴ Veja o Apêndice D para entender bem o que isso significa.

O estudo do modelo de Higgs $U(1)$ é concluído no Capítulo 5, onde são apresentadas as identidades de Ward da teoria após a adição dos operadores compostos na ação de partida. Essas identidades são utilizadas para caracterizar o contratermo invariante necessário para renormalizar esses operadores. Nos Capítulos 6 e 7 submetemos o modelo de Higgs $SU(2)$ ao mesmo tipo de análise realizada no caso abeliano. No último capítulo damos destaque especial para a simetria custodial que com a introdução dos operadores compostos dá origem à uma identidade de Ward local.

1 CONCEITOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

Neste capítulo alguns conceitos importantes de Teoria Quântica de Campos são revisados, como o de funções de Green, funcionais geradores e identidades de Ward. Na Seção 1.1 são apresentadas as definições dos vários funcionais geradores, assim como o método perturbativo de calculá-los. Na Seção 1.2 são discutidos, a nível clássico e a nível quântico, o teorema de Noether e as identidades de Ward, que estão intimamente relacionados com as simetrias contínuas de uma teoria.

1.1 Funcionais geradores

1.1.1 Funções de Green

Seja $\Phi_i(x)$ um campo quântico, sendo que i denota o conjunto de índices desse campo, que pode conter tanto índices de Lorentz quanto índices de grupos internos. A função de Green ou função de correlação de n -pontos dos campos $\Phi_{i_1}(x_1), \dots, \Phi_{i_n}(x_n)$ no espaço euclidiano é definida como sendo

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle = \frac{\int D\Phi \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) e^{-\frac{1}{\hbar}S(\Phi)}}{\int D\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}S(\Phi)}}, \quad (1)$$

em que $S(\Phi)$ é a ação da teoria. $\int D\Phi F(\Phi)$ é a integral de $F(\Phi)$ sobre todas as configurações de campo, que é chamada de *integral funcional* ou “*path integral*”⁵. Como utilizaremos as unidades naturais, então a constante de Planck reduzida vale $\hbar = 1$.

Através das funções de Green, podemos definir o funcional gerador $Z[J]$,

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\hbar)^{-n}}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle J_{i_1}(x_1) \dots J_{i_n}(x_n), \quad (2)$$

⁶ em que $J_i(x)$ é a fonte externa do campo $\Phi_i(x)$. Se $\Phi_i(x)$ é comutante (anticomutante), então $J_i(x)$ também é comutante (anticomutante). De imediato, podemos ver que o funcional gerador está normalizado, $Z[0] = 1$. Não é difícil de verificar a relação

$$Z[J] = \frac{\int D\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\Phi) + \int d^4x J_i(x)\Phi_i(x))}}{\int D\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}S(\Phi)}}, \quad (3)$$

⁵ Traduzido do inglês, significa “integral de trajetória”.

⁶ Utilizamos a convenção de Einstein, $\Sigma_i \langle \dots \Phi_i(x) \dots \rangle J_i(x) := \langle \dots \Phi_i(x) \dots \rangle J_i(x)$.

para isso, basta expandirmos a exponencial $e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^4x J_i(x) \Phi_i(x)}$ em série de potências. Portanto, as funções de Green são obtidas através de derivadas funcionais de $Z[J]$,

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle = (-\hbar)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J_{i_n}(x_n) \dots \delta J_{i_1}(x_1)} \Big|_{\mathcal{J}=0}, \quad (4)$$

em que “ $\mathcal{J} = 0$ ” denota que todas as fontes $J_i(x)$ são tomadas a zero.

O funcional gerador pode ser calculado perturbativamente. Suponhamos que a ação possa ser escrita como

$$S(\Phi) = S_0(\Phi) + S_I(\Phi), \quad (5)$$

em que $S_0(\Phi)$ é quadrática nos campos, ou seja,

$$S_0(\Phi) = \int d^4x \Phi_i(x) D_{ij} \Phi_j(x), \quad (6)$$

sendo D_{ij} , em geral, um operador diferencial. A exponencial da ação pode ser reescrita como

$$e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\Phi) + \int d^4x J_i(x) \Phi_i(x))} = e^{-\frac{1}{\hbar}(S_0(\Phi) + \int d^4x J_i(x) \Phi_i(x))} e^{-\frac{1}{\hbar} S_I(\Phi)}, \quad (7)$$

o que resulta em

$$\int D\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\Phi) + \int d^4x J_i(x) \Phi_i(x))} = e^{\frac{1}{\hbar} S_I(-\hbar \frac{\delta}{\delta J})} \int D\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}(S_0(\Phi) + \int d^4x J_i(x) \Phi_i(x))}. \quad (8)$$

Daí segue a relação

$$Z[J] = N e^{\frac{1}{\hbar} S_I(-\hbar \frac{\delta}{\delta J})} Z_0[J], \quad (9)$$

sendo N uma constante independente de $J_i(x)$ e

$$Z_0[J] = \frac{\int D\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}(S_0(\Phi) + \int d^4x J_i(x) \Phi_i(x))}}{\int D\Phi e^{-\frac{1}{\hbar} S_0(\Phi)}} \quad (10)$$

o funcional gerador da teoria livre, cujo resultado exato é conhecido,

$$Z_0[J] = \exp \left(\frac{1}{2\hbar^2} \int d^4x d^4y J_i(x) \Delta_{ij}(x-y) J_j(y) \right). \quad (11)$$

$\Delta_{ij}(x-y)$ em (11) é o *propagador* da teoria e satisfaz a equação⁷

$$D_{ij} \Delta_{jk}(x-y) = \hbar \delta_{ik} \delta^4(x-y). \quad (12)$$

⁷ δ_{ij} é a delta de Kronecker e $\delta^d(x)$ é a função delta de Dirac em d dimensões.

Vemos que no caso livre

$$\Delta_{ij}(x-y) = \hbar^2 \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J_i(x) \delta J_j(y)} \Big|_{J=0}. \quad (13)$$

Neste trabalho utilizaremos as seguintes notações para o propagador de $\Phi_i(x)$ e $\Phi_j(y)$: no espaço das configurações

$$\Delta_{ij}(x-y) = \langle \Phi_i(x) \Phi_j(y) \rangle_0, \quad (14)$$

e no espaço dos momentos

$$(2\pi)^4 \delta^4(p+q) \langle \Phi_i(p) \Phi_j(-p) \rangle_0 = \int d^4x d^4y e^{i(p \cdot x + q \cdot y)} \langle \Phi_i(x) \Phi_j(y) \rangle_0. \quad (15)$$

Na Eq. (15) já foi assumida a invariância de Lorentz da teoria, que leva à função delta $\delta^4(p+q)$ do lado esquerdo. O propagador $\Delta_{ij}(x-y)$ é um dos elementos fundamentais da expansão perturbativa (9), assim como os *fatores de vértice* oriundos do termo de interação $S_I(\Phi)$. Se o vértice de interação contém as pernas dos campos $\Phi_{i_1}(x_1)$, ..., $\Phi_{i_n}(x_n)$, o fator de vértice é definido como sendo:

$$\Gamma_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) = - \frac{\delta^n S_I(\Phi)}{\delta \Phi_{i_n}(x_n) \dots \delta \Phi_{i_1}(x_1)} \Big|_{\Phi=0}, \quad (16)$$

no espaço das configurações, que corresponde a

$$\begin{aligned} \Gamma_{i_1 \dots i_n}(p_1, \dots, p_n) &= \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} \Gamma_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \tilde{\Gamma}(p_1, \dots, p_n), \end{aligned} \quad (17)$$

no espaço dos momentos, sendo que “ $\Phi = 0$ ” denota que todos os campos devem ser tomados a zero depois da derivação. A função delta de Dirac na segunda linha da Eq. (17) é uma consequência de $S_I(\Phi)$ ser a integral de uma função local dos campos apenas. Neste capítulo não discutiremos as regras de Feynman gerais para construção de (9) através dos diagramas de Feynman em uma teoria qualquer, deixamos para fazer isso nos capítulos posteriores e nos modelos que nos interessam, o método geral pode ser encontrado em (PESKIN; SCHROEDER, 1995; GREINER; REINHARDT, 1996; HATFIELD, 1992).

Neste trabalho, além de funções de Green dos campos, estamos interessados em funções de Green de operadores compostos. Um operador composto é formado a partir do produto de campos no mesmo ponto, que denotaremos genericamente de $Q_i(x)$. Para calcularmos funções de operadores compostos, devemos modificar o funcional gerador da seguinte forma:

$$Z[J, \varrho] = \frac{\int D\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\Phi) + \int d^4x J_i(x) \Phi_i(x) + \int d^4x \varrho_i(x) Q_i(x))}}{\int D\Phi e^{-\frac{1}{\hbar}S(\Phi)}}, \quad (18)$$

em que $\varrho_i(x)$ é uma fonte externa, assim como $J_i(x)$. Como fizemos anteriormente, podemos obter uma expressão semelhante a (2),

$$Z[J, \varrho] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-\hbar)^{-(m+n)}}{m!n!} \int d^4x_1 \dots d^4y_n \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_m}(x_m) Q_{j_1}(y_1) \dots Q_{j_n}(y_n) \rangle \times \\ \times J_{i_1}(x_1) \dots J_{i_m}(x_m) \varrho_{i_1}(y_1) \dots \varrho_{i_n}(y_n) \quad (19)$$

em que $\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_m}(x_m) Q_{j_1}(y_1) \dots Q_{j_n}(y_n) \rangle$ é uma função de Green de $m+n$ pontos, com m campos elementares e n inserções de operadores compostos. É comum denotarmos por

$$Q_i(x) \cdot Z := -\hbar \frac{\delta Z[J, \varrho]}{\delta \varrho_i(x)} \quad (20)$$

o funcional gerador das funções de Green com uma inserção do operador composto $Q_i(x)$ no ponto x . A introdução de uma fonte para o operador composto não é simplesmente uma conveniência para definirmos o funcional gerador, mas sim uma necessidade imposta pela renormalização, veja por exemplo (ITZYKSON; ZUBER, 1980; PIGUET; SORELLA, 1995).

Para o cálculo perturbativo das funções de Green de operadores compostos,

$$\int d^4x \varrho_i(x) Q_i(x) \quad (21)$$

é tratado como um novo vértice, cujo fator de vértice é calculado da mesma forma que em (16), mas com $S_I(\Phi) + \int d^4x \varrho_i(x) Q_i(x)$ no lugar de $S_I(\Phi)$. Nesse caso, no espaço dos momentos, os fatores de vértice contêm transformadas de Fourier das fontes ϱ_i , não sendo mais proporcionais a uma função delta de Dirac de conservação. Nos Apêndices A e E são mostradas as regras de Feynman com os operadores compostos que serão estudados nos próximos capítulos. Para renormalizar as funções de operadores compostos, em geral, devemos introduzir contratermos com potências mais elevadas das fontes, o que resulta em fatores de vértice com um número maior de fontes, veja (CAPRI et al., 2020) ou os Capítulos 5 e 7 deste trabalho.

1.1.2 Funções de Green conexas

As funções de Green que definimos anteriormente possuem partes desconexas. Dito de outra forma, existem diagramas de Feynman em que dois ou mais pontos não estão conectados. Podemos definir a função de Green conexa de n -pontos dos campos $\Phi_{i_1}(x_1), \dots, \Phi_{i_n}(x_n)$, denotada por $\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle_c$, como sendo a parte conexa que há na função de Green $\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle$. O funcional gerador das funções de Green conexas

ou, simplesmente, funcional gerador conexo, representado por $W[J]$, é definido como sendo

$$W[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\hbar)^{-n+1}}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle_c \times \\ \times J_{i_1}(x_1) \dots J_{i_n}(x_n). \quad (22)$$

Note que, $W[0] = 0$ e

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle_c = (-\hbar)^{n-1} \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J_{i_n}(x_n) \dots \delta J_{i_1}(x_1)} \right|_{\mathcal{J}=0}. \quad (23)$$

Embora a prova seja um pouco elaborada e feita por indução, como mostra (POKORSKI, 2005), a partir da análise dos casos mais simples, não é difícil de se convencer que a relação entre os funcionais geradores $Z[J]$ e $W[J]$ é

$$W[J] = -\hbar \ln Z[J]. \quad (24)$$

De (24) resulta que, para $n = 1$ temos $\langle \Phi_i(x_1) \rangle_c = \langle \Phi_i(x_1) \rangle$, como esperado, pois um ponto é sempre conexo a ele mesmo. No caso $n = 2$, como a parte desconexa de $\langle \Phi_{i_1}(x_1) \Phi_{i_2}(x_2) \rangle$ é exatamente $\langle \Phi_{i_1}(x_1) \rangle \langle \Phi_{i_2}(x_2) \rangle$, temos

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1) \Phi_{i_2}(x_2) \rangle_c = \langle \Phi_{i_1}(x_1) \Phi_{i_2}(x_2) \rangle - \langle \Phi_{i_1}(x_1) \rangle \langle \Phi_{i_2}(x_2) \rangle, \quad (25)$$

que é justamente o resultado que decorre de (24).

É possível definir também o funcional gerador conexo na presença de operadores compostos,

$$W[J, \varrho] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-\hbar)^{-(m+n)+1}}{m!n!} \int d^4x_1 \dots d^4y_n \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_m}(x_m) Q_{j_1}(y_1) \dots Q_{j_n}(y_n) \rangle \times \\ \times J_{i_1}(x_1) \dots J_{i_m}(x_m) \varrho_{i_1}(y_1) \dots \varrho_{i_n}(y_n) \quad (26)$$

ou, equivalentemente,

$$W[J, \varrho] = -\hbar \ln Z[J, \varrho]. \quad (27)$$

É comum denotarmos por

$$Q_i(x) \cdot W = \frac{\delta W[J, \varrho]}{\delta \varrho_i(x)} \quad (28)$$

o funcional gerador das funções de Green conexas com uma inserção do operador composto $Q_i(x)$ no ponto x . Como neste trabalho estamos interessados apenas nas funções conexas, o subíndice “c”, que é utilizado para diferenciar as funções de Green conexas das funções de Green, é omitido.

1.1.3 Funções 1PI ou Funções de Vértice

Dentro das funções de Green conexas existem ainda estruturas mais fundamentais, que chamamos de *funções 1PI*⁸ ou *funções de vértice*. Um diagrama 1PI é um diagrama de Feynman que possui as pernas externas amputadas e que não pode ser separado em dois pelo corte de uma de suas linhas internas. Definimos a função 1PI de n -pontos dos campos $\Phi_{i_1}(x_1), \dots, \Phi_{i_n}(x_n)$ como a soma de todos esses diagramas 1PI e denotamos por $\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle_{1PI}$. Podemos definir para essas funções o funcional gerador $\Gamma[\phi]$,

$$\Gamma[\phi] = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle_{1PI} \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n), \quad (29)$$

em que $\phi_i(x)$ possui a mesma natureza da fonte $J_i(x)$. Da definição do funcional gerador, segue que

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle_{1PI} = - \left. \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta \phi_{i_n}(x_n) \dots \delta \phi_{i_1}(x_1)} \right|_{\phi=0}. \quad (30)$$

Assim como existe uma relação entre $Z[J]$ e $W[J]$, Eq. (24), também existe uma relação entre $W[J]$ e $\Gamma[\phi]$. Chamemos de $\varphi_i(x)$ a configuração de $\phi_i(x)$ que extremiza o funcional $\Gamma[\phi] + \int d^4x J_i(x) \phi_i(x)$, ou seja,

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_i(x)} \right|_{\phi=\varphi} = -J_i(x). \quad (31)$$

Obviamente, $\varphi_i(x)$ depende de $J_i(x)$. Vamos supor que a relação entre $\varphi_i(x)$ e $J_i(x)$ seja bijetiva, assim podemos escrever $\varphi_i(x)$ como função de $J_i(x)$ e vice-versa. Como é mostrado por (POKORSKI, 2005), o funcional gerador das funções de Green conexas é obtido através da equação

$$W[J] = \Gamma[\varphi] + \int d^4x J_i(x) \varphi_i(x), \quad (32)$$

que nada mais é do que a transformada de Legendre de $\Gamma[\varphi]$. De imediato, temos que

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J_i(x)} = \varphi_i(x). \quad (33)$$

Em geral, fazemos o caminho inverso, temos $W[J]$, tomamos como definição de $\varphi_i(x)$ a

⁸ 1PI significa “one particle irreducible”.

Eq. (33) e obtemos a *ação efetiva* $\Gamma[\varphi]$ por meio da transformada de Legendre,

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int d^4x J_i(x) \varphi_i(x). \quad (34)$$

Lembrando que $\left. \frac{\delta W[J]}{\delta J_i(x)} \right|_{J=0} = \langle \Phi_i(x) \rangle$ e que o vácuo é invariante por translações, então segue da Eq. (33) que, quando $J = 0$,

$$\varphi_i(x) = \langle \Phi_i(x) \rangle = v_i, \quad (35)$$

em que v_i é independente do ponto do espaço. A covariância dos campos e a invariância do vácuo implicam que apenas campos escalares podem ter $v_i \neq 0$. Nos modelos com *quebra espontânea de simetria*, como os que trataremos neste trabalho, existem campos escalares com VEV diferente de zero. Nos casos em que $v_i \neq 0$, em geral, trabalhamos com o campo

$$\tilde{\Phi}_i(x) = \Phi_i(x) - v_i \quad (36)$$

que possui valor esperado nulo, $\langle \tilde{\Phi}_i(x) \rangle = 0$. Em geral, $\langle \tilde{\Phi}_i(x) \rangle$ é divergente, então a nulidade dessa função somente é obtida se, através da renormalização, impusermos esse resultado.

Como as fontes $J_i(x)$ e $J_j(x)$ são independentes se $i \neq j$, então segue o resultado geral

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \delta^4(x-y) &= \frac{\delta J_i(x)}{\delta J_j(y)} \\ &= \int d^4z \frac{\delta \varphi_k(z)}{\delta J_j(y)} \frac{\delta J_i(x)}{\delta \varphi_k(z)} \\ &= - \int d^4z \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_j(y) \delta J_k(z)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_k(z) \delta \varphi_i(x)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Tomando $J_i(x) = 0$, o que implica em $\varphi_i(x) = v_i$, temos a relação

$$-\delta_{ij} \delta^4(x-y) = \int d^4z \langle \Phi_j(y) \Phi_k(z) \rangle_c \langle \tilde{\Phi}_k(z) \tilde{\Phi}_i(x) \rangle_{1\text{PI}} \quad (38)$$

entre a função de Green conexa de 2-pontos e a função 1PI de 2-pontos. A nível árvore $\langle \Phi_i(x) \Phi_j(y) \rangle_c = \Delta_{ij}(x-y)$, então de (12) e (38) segue que, nessa mesma ordem,

$$\langle \tilde{\Phi}_i(x) \tilde{\Phi}_j(y) \rangle_{1\text{PI}} = -D_{ij} \delta(x-y), \quad (39)$$

ou seja,

$$\langle \tilde{\Phi}_i(x) \tilde{\Phi}_j(y) \rangle_{1\text{PI}} = - \left. \frac{\delta^2 S_0[\varphi]}{\delta \varphi_j(y) \delta \varphi_i(x)} \right|_{\varphi=v}. \quad (40)$$

Da mesma forma que nos casos anteriores, podemos definir funções 1PI com operadores compostos. O funcional gerador das funções 1PI com operadores compostos, $\Gamma[\varphi, \varrho]$, é definido como

$$\Gamma[\varphi, \varrho] = W[J, \varrho] - \int d^4x J_i(x) \varphi_i(x). \quad (41)$$

A inserção de um operador composto é definida como sendo

$$Q_i(x) \cdot \Gamma = \frac{\delta \Gamma[\varphi, \varrho]}{\delta \varrho}. \quad (42)$$

A ação S define a teoria, já que é a partir dela que derivamos as regras de Feynman para o cálculo de qualquer função de Green ou, equivalentemente, qualquer gerador funcional. Além disso, existe uma relação mais próxima entre S e a ação efetiva. Expandindo $\Gamma[\phi]$ em série de \hbar , obtemos que

$$\Gamma[\phi] = S[\phi] + \mathcal{O}(\hbar), \quad (43)$$

isto é, a nível árvore a ação efetiva é igual à ação clássica. Podemos nos convencer que esse resultado é verdadeiro através da análise das funções 1PI a nível árvore. Se uma função 1PI de n -pontos possui contribuição a nível árvore, seu valor é dado por (40), no caso de $n = 2$, ou (16), se $n > 2$. Relacionando esses resultados com a definição (30) de função 1PI, através de uma engenharia reversa, chegamos no resultado (43). Essa é a justificativa para chamarmos Γ de *ação efetiva* e as funções 1PI de *funções de vértice*. Como a introdução de um operador composto é tratada como a introdução de um novo vértice, pelo que já foi discutido,

$$\Gamma[\phi, \rho] = S[\phi] + \int d^4x \varrho_i(x) Q_i(x) + \mathcal{O}(\hbar), \quad (44)$$

o que resulta em

$$Q_i(x) \cdot \Gamma = Q_i(x) + \mathcal{O}(\hbar). \quad (45)$$

Mais detalhes a respeito desse assunto podem ser encontrados em (PIGUET; SORELLA, 1995).

1.1.4 Potencial efetivo e energia do vácuo

Seja $\int d^4x \mathcal{V}(\phi)$ a parte de $\Gamma[\phi]$ que não possui derivadas. Tomando $\phi_i(x) = u_i$, em que u_i independe das coordenadas do espaço, temos

$$\Gamma[u] = (2\pi) \delta^4(0) \mathcal{V}(u). \quad (46)$$

$\mathcal{V}(u)$ é chamado de *potencial efetivo*. Dentre todos os estados $|\alpha\rangle$ tais que $\langle\alpha|\Phi_i(x)|\alpha\rangle = u_i$, $\mathcal{V}(u)$ é a densidade de energia do estado com a menor energia. Da Eq.(31) temos que

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}(u)}{\partial u_i} \right|_{u=v} = 0, \quad (47)$$

ou seja, o valor esperado no vácuo do campo $\Phi_i(x)$ é um mínimo do potencial efetivo e, conseqüentemente, $\mathcal{V}(v)$ é a densidade de energia do vácuo. As técnicas para o cálculo do potencial efetivo podem ser encontradas em (WEINBERG, 1996) ou em (PESKIN; SCHROEDER, 1995).

1.2 Simetrias e identidades de Ward

1.2.1 Simetrias da ação clássica

Consideremos como sendo a ação da teoria, S , não apenas aquela ação com os campos, mas também com as fontes e os operadores compostos, como apresentado na seção anterior. Um parâmetro da teoria (massa, constante de acoplamento, parâmetro de calibre, etc) denotemos por λ_n . Sejam as transformações nos campos, fontes e parâmetros:

$$\begin{aligned} \Phi'_i &= F_i(\Phi, \varrho, \lambda, \omega), \\ \varrho'_i &= \mathcal{F}_i(\varrho, \omega), \\ \lambda'_n &= f_n(\lambda, \omega), \end{aligned} \quad (48)$$

em que, F_i , \mathcal{F}_i e f_n são funções locais dos campos, das fontes e dos parâmetros, como está indicado. O conjunto finito de parâmetros presentes nas transformações é representado genericamente por ω . No caso em que os parâmetros λ_n são transformados, ω independe das coordenadas do espaço, na análise a seguir deixaremos subentendido isso. Se a ação é invariante por essas transformações, ou seja, se

$$S[\Phi', \varrho', \lambda'] = S[\Phi, \varrho, \lambda] \quad (49)$$

temos então uma simetria da ação. Consideremos os casos em que as transformações (48) são contínuas em ω e

$$\begin{aligned} F_i(\Phi, \varrho, \lambda, 0) &= \Phi, \\ \mathcal{F}_i(\varrho, \lambda, 0) &= \varrho, \\ f(\lambda, 0) &= \lambda. \end{aligned} \quad (50)$$

Dessa forma, para ω infinitesimal temos

$$\begin{aligned}\Phi'_i(x) &= \Phi_i(x) - i\omega^A G_i^A(\Phi, \varrho, \lambda)(x), \\ \varrho'_i(x) &= \varrho_i(x) - i\omega^A H_i^A(\varrho, \lambda)(x), \\ \lambda'_n &= \lambda_n - i\omega^A g_n^A(\lambda),\end{aligned}\tag{51}$$

ou seja, as variações infinitesimais são

$$\begin{aligned}\delta\Phi_i(x) &= -i\omega^A G_i^A(\Phi, \varrho, \lambda)(x), \\ \delta\varrho_i(x) &= -i\omega^A H_i^A(\varrho, \lambda)(x), \\ \delta\lambda_n &= -i\omega^A g_n^A(\lambda),\end{aligned}\tag{52}$$

⁹ em que $G_i^A(\Phi, \varrho, \lambda)$, $H_i^A(\varrho, \lambda)$ e $g_n^A(\lambda)$, também, são funções locais dos campos, fontes e parâmetros. A variação de S em relação à variação (52) pode ser escrita na forma funcional

$$\delta S = \int d^4x \left(\delta\Phi_i(x) \frac{\delta S}{\delta\Phi_i(x)} + \delta\varrho_i(x) \frac{\delta S}{\delta\varrho_i(x)} \right) + \delta\lambda_n \frac{\partial S}{\partial\lambda_n}.\tag{53}$$

Dessa forma, se $\delta S = 0$, então

$$\begin{aligned}0 &= \int d^4x \left[-i\omega^A G_i^A(\Phi, \varrho, \lambda)(x) \frac{\delta S}{\delta\Phi_i(x)} - i\omega^A H_i^A(\varrho, \lambda)(x) \frac{\delta S}{\delta\varrho_i(x)} \right] \\ &\quad - i\omega^A g_n^A(\lambda) \frac{\partial S}{\partial\lambda_n}.\end{aligned}\tag{54}$$

É conveniente definirmos o operador local

$$\mathcal{W}^A(x) = G_i^A(\Phi, \varrho, \lambda) \frac{\delta}{\delta\Phi_i(x)} + H_i^A(\varrho, \lambda) \frac{\delta}{\delta\varrho_i(x)} + \delta(x) g_n^A(\lambda) \frac{\partial}{\partial\lambda_n},\tag{55}$$

então a Eq. (54) pode ser reescrita como

$$\int d^4x \omega^A \mathcal{W}^A(x) S = 0.\tag{56}$$

Se o parâmetro ω^A independe das coordenadas do espaço, a simetria é dita ser global e de (54) segue

$$0 = \int d^4x \mathcal{W}^A(x) S,\tag{57}$$

⁹ Aqui também adotamos a convenção de Einstein, por exemplo, $\sum_A \omega^A G_i^A(\Phi) \equiv \omega^A G_i^A(\Phi)$.

pois (54) deve ser verdadeira para todo ω^A . Para que (57) seja verdade, devemos ter

$$\mathcal{W}^A(x) S = \partial_\mu J_\mu^A(x), \quad (58)$$

em que $J_\mu^A(x)$ é uma corrente local dos campos. (58) implica em (57), pois a integral em todo o espaço de uma derivada total de uma função local dos campos é nula, com a hipótese auxiliar, que sempre trabalhamos, de que os campos se anulam no infinito. (58) é uma versão do *teorema de Noether*. Utilizando os campos que satisfazem as equações do movimento de Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi_i(x)} = 0, \quad (59)$$

e considerando o caso em que as fontes e os parâmetros não sofrem variações, temos então

$$\partial_\mu J_\mu^A(x) = 0, \quad (60)$$

ou seja, $J_\mu^A(x)$ é uma corrente conservada.

Quando o parâmetro ω^A depende do ponto do espaço, a simetria é dita ser local e temos

$$0 = \mathcal{W}^A(x) S. \quad (61)$$

Como neste trabalho tratamos de teorias de calibre, esse caso é muito importante. Para a forma funcional de S , (61) é mais restritiva do que (57), tanto que (61) implica em (57), mas a recíproca não é verdadeira.

Pelas razões que apresentaremos na Subseção 1.2.2, se a transformação (52) de $\Phi_i(x)$ não é linear nos campos, introduzimos $G_i^A(\Phi, \varrho, \lambda)$ na ação de partida acoplada à uma fonte externa $\theta_i^A(x)$ e trabalhamos com a ação modificada

$$S' = S + \int d^4x \theta_i^A(x) G_i^A(\Phi, \varrho, \lambda)(x). \quad (62)$$

Como $\Phi_i(x)$ denota um campo qualquer da teoria, vale a pena destacar que fazemos isso apenas para os campos cujas transformação não são lineares. Lembrando da seção anterior, é possível notar que $G_i^A(\Phi, \varrho, \lambda)$ é tratado como um operador composto. Na notação, faremos distinção entre operadores compostos de transformações não lineares e outros operadores compostos quaisquer. Dessa forma, podemos reescrever (54) como

$$0 = \int d^4x \left[-i\omega^A \frac{\delta S'}{\delta \theta_i^A(x)} \Big|_{\theta=0} \frac{\delta S'}{\delta \Phi_i(x)} \Big|_{\theta=0} - i\omega^A H_i^A(\varrho, \lambda)(x) \frac{\delta S}{\delta \varrho_i(x)} \right] - i\omega^A g_n^A(\lambda) \frac{\partial S}{\partial \lambda_n} \quad (63)$$

Em geral, $\delta S' \neq 0$ para as transformações (52), por isso é necessário tomarmos $\theta_i^A(x) = 0$

em (63). Em alguns casos particulares, como o da simetria BRST, a ação modificada é invariante, assim obtemos a seguinte equação funcional

$$\int d^4x \left(\frac{\delta S'}{\delta \theta_i^A(x)} \frac{\delta S'}{\delta \Phi_i(x)} + H_i^A(\varrho, \lambda)(x) \frac{\delta S'}{\delta \varrho_i(x)} \right) + g_n^A(\lambda) \frac{\partial S'}{\partial \lambda_n} = 0, \quad (64)$$

no caso de uma simetria global, e

$$\frac{\delta S'}{\delta \theta_i^A(x)} \frac{\delta S'}{\delta \Phi_i(x)} + H_i^A(\varrho, \lambda)(x) \frac{\delta S'}{\delta \varrho_i(x)} = 0, \quad (65)$$

no caso de uma simetria local. Podemos também considerar uma possível transformação para $\theta_i^A(x)$, que nesse caso pode ser incluída junto às transformações das fontes $\varrho_i(x)$.

É relevante estudarmos as simetrias da ação clássica porque a maioria delas, algumas com adaptações, pode ser transportada para a ação efetiva Γ . Na verdade, não apenas as simetrias exatas são importantes. Em geral, estamos interessados em certas equações funcionais que são chamamos de *identidades de Ward*. Uma identidade de Ward integrada tem a forma

$$\int d^4x \mathcal{W}^A(x) S = \int d^4x \Delta^A(\Phi(x)). \quad (66)$$

Já uma identidade de Ward não integrada (também chamada de local) tem o formato

$$\mathcal{W}^A(x) S = \Delta^A(\Phi(x)). \quad (67)$$

Em ambos os casos, $\Delta^A(\Phi(x))$, a chamada *quebra clássica* ou *quebra linear*, é uma quantidade local e linear nos campos. O mesmo vale para as simetrias com transformações não lineares nos campos, aquelas com quebra clássica também possuem análogos a nível quântico.

1.2.2 Simetrias a nível quântico

Para derivarmos as identidades de Ward a nível quântico, partimos do resultado

$$\int D\Phi e^{-(S[\Phi, \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi_i)} = \int D\Phi' e^{-(S[\Phi', \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi'_i)}, \quad (68)$$

em que Φ_i e Φ'_i estão relacionados pelas transformações (52). (68) decorre do fato de a integração ser sobre todas as configurações de campo. O expoente do lado direito da

Eq.(68) pode ser reescrito através de (53) e (66),

$$\begin{aligned}
S[\Phi', \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi'_i &= S[\Phi', \varrho', \lambda'] - \int d^4x \delta \varrho_i \frac{\delta S}{\delta \varrho_i} - \delta \lambda_n \frac{\partial S}{\partial \lambda_n} \\
&\quad + \int d^4x J_i \Phi_i + \int d^4x J_i \delta \Phi_i \\
&= S[\Phi, \varrho, \lambda] - i \int d^4x \omega^A \Delta^A(\Phi(x)) - \int d^4x \delta \varrho_i \frac{\delta S}{\delta \varrho_i} \\
&\quad - \delta \lambda_n \frac{\partial S}{\partial \lambda_n} + \int d^4x J_i \Phi_i + \int d^4x J_i \delta \Phi_i,
\end{aligned} \tag{69}$$

em que já consideramos uma possível quebra clássica, isto é,

$$S[\Phi', \varrho', \lambda'] = S[\Phi, \varrho, \lambda] - i \int d^4x \omega^A \Delta^A(\Phi(x)). \tag{70}$$

Aqui trataremos dos casos em que a medida de integração é invariante, ou seja, $D\Phi' = D\Phi$. Isso quer dizer que os resultados a seguir não se aplicam, por exemplo, à uma teoria com um número arbitrário de férmions quirais. Dessa forma, o resultado que segue de (68) e (69) é

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^4x \int D\Phi e^{-(S[\Phi, \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi_i)} \left[-i \omega^A \Delta^A(\Phi(x)) - \delta \varrho_i \frac{\delta S}{\delta \varrho_i} \right. \\
&\quad \left. - \delta \lambda_n \frac{\partial S}{\partial \lambda_n} + J_i \delta \Phi_i \right].
\end{aligned} \tag{71}$$

Como a integração funcional é apenas nos campos Φ_i , então podemos reescrever

$$\begin{aligned}
\int D\Phi e^{-(S[\Phi, \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi_i)} \delta \varrho_i \frac{\delta S}{\delta \varrho_i} &= -\delta \varrho_i \frac{\delta}{\delta \varrho_i} \int D\Phi e^{-(S[\Phi, \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi_i)}, \\
\int D\Phi e^{-(S[\Phi, \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi_i)} \delta \lambda_n \frac{\partial S}{\partial \lambda_n} &= -\delta \lambda_n \frac{\delta}{\delta \lambda_n} \int D\Phi e^{-(S[\Phi, \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi_i)}.
\end{aligned} \tag{72}$$

Como Δ^A é linear nos campos, também podemos escrever sem problemas

$$\begin{aligned}
&\int D\Phi e^{-(S[\Phi, \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi_i)} \Delta^A(\Phi(x)) \\
&= \Delta^A\left(-\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \int D\Phi e^{-(S[\Phi, \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi_i)}.
\end{aligned} \tag{73}$$

A variação do campo $\delta \Phi_i$ exige um pouco de cuidado. Se $\delta \Phi_i = -i \omega^A G_i^A(\Phi, \varrho, \lambda)$ é linear nos campos, então

$$\begin{aligned}
&\int D\Phi e^{-(S[\Phi, \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi_i)} \delta \Phi_i \\
&= -i \omega^A G_i^A\left(-\frac{\delta}{\delta J}, \varrho, \lambda\right) \int D\Phi e^{-(S[\Phi, \varrho, \lambda] + \int d^4x J_i \Phi_i)}.
\end{aligned} \tag{74}$$

No caso de uma transformação não linear, teremos a inserção de um operador composto que, como já mencionamos, precisa ser adicionada na ação de partida. Como isso já foi

feito por $\theta_i^A(x)$, então

$$\delta\Phi_i = -i\omega^A \frac{\delta S}{\delta\theta_i^A}, \quad (75)$$

assim,

$$\int D\Phi e^{-(S[\Phi,\varrho,\lambda]+\int d^4x J_i\Phi_i)} \delta\Phi_i = i\omega^A \frac{\delta}{\delta\theta_i^A} \int D\Phi e^{-(S[\Phi,\varrho,\lambda]+\int d^4x J_i\Phi_i)}. \quad (76)$$

Lembrando das definições do funcional gerador das funções de Green conexas, Eq. (24), e do campo clássico, Eq. (33), podemos reescrever (71) como

$$0 = \int d^4x \left[i\omega^A \Delta^A(\varphi(x)) + \delta\varrho_i \frac{\delta W}{\delta\varrho_i(x)} + \delta(x) \delta\lambda_n \frac{\partial W}{\partial\lambda_n} + J_i(x) i\omega^A G_i^A(\varphi, \varrho, \lambda) \right], \quad (77)$$

para o caso de simetrias lineares. Lembrando também que $W[J, \varrho] = \Gamma[\varphi, \varrho] + \int d^4x J_i(x) \varphi_i(x)$ e $\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i(x)} = -J_i(x)$, (77) pode ser reescrita em termos da ação efetiva

$$0 = \int d^4x \left[i\omega^A \Delta^A(\varphi(x)) + \delta\varrho_i \frac{\delta\Gamma}{\delta\varrho_i(x)} + \delta(x) \delta\lambda_n \frac{\partial\Gamma}{\partial\lambda_n} + i\omega^A G_i^A(\varphi, \varrho, \lambda) \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} \right]. \quad (78)$$

Analogamente, para o caso de simetrias não lineares, temos as equações

$$0 = \int d^4x \left[i\omega^A \Delta^A(\varphi(x)) + \delta\varrho_i \frac{\delta W}{\delta\varrho_i(x)} + \delta(x) \delta\lambda_n \frac{\partial W}{\partial\lambda_n} - J_i(x) i\omega^A \frac{\delta W}{\delta\theta_i^A(x)} \right] \quad (79)$$

e

$$0 = \int d^4x \left[i\omega^A \Delta^A(\varphi(x)) + \delta\varrho_i \frac{\delta\Gamma}{\delta\varrho_i(x)} + \delta(x) \delta\lambda_n \frac{\partial\Gamma}{\partial\lambda_n} + i\omega^A \frac{\delta\Gamma}{\delta\theta_i^A(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} \right]. \quad (80)$$

Como os resultados (78) e (80) devem ser verdadeiros para todo ω^A e recordando da definição do operador $\mathcal{W}^A(x)$, temos

$$\int d^4x \mathcal{W}^A(x) \Gamma = \int d^4x \Delta^A(\varphi(x)) \quad (81)$$

no caso do parâmetro ser global, ou

$$\mathcal{W}^A(x) \Gamma = \Delta^A(\varphi(x)) \quad (82)$$

no caso do parâmetro ser local. Comparando as equações (81) e (82) com (66) e (67), vemos que S e Γ satisfazem as mesmas identidades de Ward.

Como as correções perturbativas apresentam divergências, é necessário utilizarmos alguma regularização e algum esquema de renormalização. Pode acontecer da regularização escolhida quebrar alguma das identidades de Ward da teoria. Quando isso acontece, a menos que existam as ditas *anomalias* na teoria, a identidade de Ward pode ser restaurada com a introdução dos chamados *contratermos não invariantes*. O leitor interessado nesses assuntos pode consultar (PIGUET; SORELLA, 1995) para um tratamento mais detalhado. Nos modelos de Higgs que analisamos neste trabalho, com a utilização da *Regularização Dimensional* (RD), nenhum desses problemas está presente, portanto, os resultados (81) e (82) serão utilizados sem ressalvas.

Antes de encerrarmos esta seção, devemos mencionar que, além das simetrias contínuas caracterizadas pelas transformações (48) ou (52), podem existir também as *simetrias discretas*, como a simetria de paridade, a simetria por conjugação de carga, etc. Essas simetrias não podem ser expressas na forma de uma equação funcional, isto é, através de uma identidade de Ward, mas podem ser estendidas da ação clássica para a ação efetiva a nível quântico.

2 O MODELO DE HIGGS $U(1)$

Neste capítulo, o modelo de Higgs com simetria $U(1)$ é definido e suas principais características discutidas. Na Seção 2.1 a ação da teoria é apresentada e escrita em termos dos campos de Higgs e do campo de Goldstone. Na Seção 2.2 é discutido o calibre renormalizável R_ξ de 't Hooft e a simetria BRST. As demais simetrias e identidades de Ward são apresentadas na Seção 2.3. A equação fundamental para derivarmos a identidade de Nielsen é obtida na Seção 2.4. O capítulo é encerrado com a Seção 2.5, onde é feita uma breve discussão a respeito da consistência do calibre R_ξ a nível quântico.

2.1 A ação de Higgs

Seja $\varphi(x)$ um campo escalar complexo e $A_\mu(x)$ um campo de calibre. A ação de Higgs euclidiana, S_{Higgs} , é definida como sendo

$$S_{\text{Higgs}} = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* (D_\mu \varphi) + \frac{\lambda}{2} \left(\varphi^* \varphi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \right], \quad (83)$$

em que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ D_\mu &= \partial_\mu + ieA_\mu \end{aligned} \quad (84)$$

são o tensor intensidade de campo e a derivada covariante, respectivamente. λ é a constante de acoplamento quártico de φ , enquanto que e é a carga elétrica, ambas possuem dimensão de massa nula. Por enquanto, v é apenas um parâmetro massivo, em seguida, será mostrado que ele está associado ao VEV do campo φ . Como estamos no caso abeliano, por vezes, chamaremos A_μ de *o campo do fóton*. A ação (83) é invariante pelas seguintes transformações de calibre do grupo $U(1)$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= e^{-ie\omega(x)} \varphi(x) \\ \varphi'^*(x) &= e^{ie\omega(x)} \varphi^*(x) \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \partial_\mu \omega(x), \end{aligned} \quad (85)$$

em que $\omega(x)$ é um parâmetro local. Além de ser invariante de calibre, S_{Higgs} é a ação invariante de calibre mais geral possível, potencialmente, renormalizável por contagem de potências em quatro dimensões. Obviamente, ainda é cedo para afirmar isso, pois o calibre, que determina o propagador do fóton, ainda não foi fixado, além do mais, a massa que aparece para o campo φ , $m_\varphi^2 = -\frac{\lambda v^2}{2}$, é uma massa taquiônica. Trataremos de todos

esses problemas a seguir e a ação resultante será renormalizável, mas não mais invariante de calibre.

Apesar de ainda não termos fixado o calibre, tentemos tirar algumas conclusões a respeito do vácuo da teoria olhando para o potencial de Higgs, que é

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{2} \left(\varphi^* \varphi - \frac{v^2}{2} \right)^2, \quad (86)$$

e utilizando a teoria de perturbações. Os mínimos desse potencial ocorrem quando $|\varphi|^2 = \frac{v^2}{2}$. Além disso, todos os mínimos são equivalentes, ou seja, se φ_o e φ'_o são dois mínimos, então existe uma transformação de calibre tal que $\varphi'_o = e^{ig\omega} \varphi_o$. Escolheremos como representante o mínimo

$$\varphi_o = \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (87)$$

No caso $U(1)$ não existem subgrupo invariantes além do subgrupo trivial, isto é, o único elemento $A \in U(1)$ tal que $A\varphi_o = \varphi_o$ é $A = 1$. Assumindo como válida a teoria de perturbações, isso implica que o VEV do campo $\varphi(x)$, a nível árvore, vale

$$\langle \varphi(x) \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (88)$$

O resultado (88) gera implicações profundas para o vácuo da teoria. O vácuo da teoria não é invariante por uma transformação de calibre, portanto temos o fenômeno de quebra espontânea da simetria de calibre.

Parametrizemos o campo $\varphi(x)$ como

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h(x) + i\rho(x)), \quad (89)$$

em que $h(x)$ e $\rho(x)$ são o campo de Higgs¹⁰ e o campo de Goldstone, respectivamente, ambos reais. De (88) temos que $\langle h(x) \rangle = \langle \rho(x) \rangle = 0$, a nível árvore. Substituindo (89)

¹⁰ Na introdução chamamos $\varphi(x)$ de campo de Higgs, mas de agora em diante usaremos esse nome para o campo $h(x)$.

na ação de Higgs (83), obtemos

$$\begin{aligned}
S_{\text{Higgs}} = & \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial_\mu \rho \right. \\
& + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A_\mu + e v A_\mu \partial_\mu \rho + \frac{1}{2} \lambda v^2 h^2 \\
& - e A_\mu \rho \partial_\mu h + e A_\mu h \partial_\mu \rho + e^2 v h A_\mu A_\mu + \frac{1}{2} e^2 \rho^2 A_\mu A_\mu + \frac{1}{2} e^2 h^2 A_\mu A_\mu \\
& \left. + \frac{1}{8} \lambda h^4 + \frac{1}{8} \lambda \rho^4 + \frac{1}{2} \lambda v h^3 + \frac{1}{2} \lambda v h \rho^2 + \frac{1}{4} \lambda h^2 \rho^2 \right]. \quad (90)
\end{aligned}$$

Olhando para (90) é possível notar que o campo do fóton e o campo de Higgs possuem massas, dadas, respectivamente, por

$$m = ev, \quad m_h = \sqrt{\lambda}v. \quad (91)$$

Por sua vez, o campo de Goldstone, como já sugere o nome, não adquire massa através da quebra espontânea de simetria.

Como é sabido, veja por exemplo (WEINBERG, 1996; RYDER, 1996), o bóson de Goldstone associado ao campo $\rho(x)$ não está no espectro da teoria. Isso se deve ao mecanismo de BEH, que costumamos chamar simplesmente de mecanismo de Higgs. Graças à simetria de calibre local da ação, podemos sempre fazer uma transformação de calibre que remove o campo $\rho(x)$ completamente da teoria. O grau de liberdade correspondente ao campo $\rho(x)$ é transferido para o campo $A_\mu(x)$, que agora é massivo. Em certas parametrizações do campo $\varphi(x)$, como a parametrização polar, fica mais fácil de ver isso. No caso da parametrização cartesiana (89), tomando como fase $\omega(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\rho(x)}{v+h(x)}\right)$, então $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h'(x))$. A remoção do campo $\rho(x)$ dessa forma corresponde a impor uma condição de calibre, o chamado *calibre unitário*. Infelizmente, esse calibre não pode ser implementado de maneira consistente a nível quântico, pois a teoria resultante não é renormalizável. O propagador do fóton no calibre unitário, no espaço dos momentos, é

$$\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle_0 = \frac{1}{p^2 + m^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \frac{1}{m^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p), \quad (92)$$

em que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mu\nu}(p) &= \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \\
\mathcal{L}_{\mu\nu}(p) &= \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (93)
\end{aligned}$$

são o projetor transversal e o projetor longitudinal, respectivamente. No regime ultravioleta, ou seja, para $p^2 \rightarrow \infty$, podemos ver que a parte longitudinal se comporta como uma constante, $\frac{1}{m^2}$. Isso implica que o número de divergências primitivas dos diagramas

de Feynman aumenta com o número de loops, o que caracteriza, portanto, a teoria como não sendo renormalizável.

2.2 Calibres renormalizáveis

2.2.1 Fixação do calibre

Apesar do calibre unitário deixar claro o espectro da teoria, ele não é renormalizável, como discutido acima. O *calibre linear covariante*, que é empregado em certas teorias, como a Eletrodinâmica Quântica, é problemático no caso do modelo de Higgs. O calibre linear covariante, definido pelo termo de fixação de calibre clássico

$$S_{\text{gf}}^{\text{LC}} = \int d^4x \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2, \quad (94)$$

em que α é o parâmetro de calibre, leva aos seguintes propagadores a nível quântico:

$$\begin{aligned} \langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2 + m^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \frac{\alpha}{p^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p), \\ \langle h(p) h(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2 + m_h^2}, \\ \langle A_\mu(p) \rho(-p) \rangle_0 &= \frac{i\alpha m}{p^4} p_\mu, \\ \langle \rho(p) \rho(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2} + \frac{\alpha m^2}{p^4}. \end{aligned} \quad (95)$$

Os propagadores $\langle A_\mu(p) \rho(-p) \rangle_0$ e $\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle_0$ são altamente singulares no regime infravermelho da teoria. Os termos com $1/p^4$ que aparecem nesses propagadores tem sua origem no termo de mistura $m A_\mu \partial_\mu \rho$ presente na ação (90). A fim de evitar esses problemas, podemos utilizar o calibre proposto por (HOOFT, 1971b):

$$S_{\text{gf}}^\xi = \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu + \xi m \rho)^2, \quad (96)$$

conhecido como *calibre de 't Hooft* ou *calibre R_ξ* . Nesse caso, ξ é o parâmetro de calibre. É fácil de ver que S_{gf}^ξ cancela precisamente o termo de mistura, além disso, dá massa $\sqrt{\xi}m$ para o campo de Goldstone, melhorando assim o comportamento infravermelho dos propagadores. Nesse calibre, o campo de Goldstone está acoplado aos demais campos da teoria, diferentemente do que acontece no calibre unitário. Como a massa depende do parâmetro de calibre, já podemos desconfiar que o bóson de Goldstone não deve fazer parte do espectro físico da teoria.

2.2.2 Quantização e simetria BRST

Para fazermos a quantização de (96) devemos introduzir os campos fantasmas, como mostrado por (FEYNMAN, 1963). A maneira tradicional de se fazer isso é utilizando o método descoberto por (DEWITT, 1967; FADDEEV; POPOV, 1967), que é o *método de Faddeev-Popov*. Por esse método, o termo de fixação de calibre resultante que deve ser adicionado à S_{Higgs} é

$$S_{\text{gf}}^{\xi} = \int d^4x \left[\frac{1}{2\xi} (\partial_{\mu}A_{\mu} + \xi m\rho)^2 - \bar{c}(-\partial^2c + \xi mec(v+h)) \right], \quad (97)$$

sendo que $c(x)$ e $\bar{c}(x)$ são os *campos fantasmas de Faddeev-Popov*. É conveniente reescrevermos o primeiro termo do lado direito da Eq. (97) da seguinte forma:

$$\exp \left\{ - \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial_{\mu}A_{\mu} + \xi m\rho)^2 \right\} \sim \int Db \exp \left\{ - \int d^4x \left[\frac{\xi}{2} b^2 + ib(\partial_{\mu}A_{\mu} + \xi m\rho) \right] \right\}, \quad (98)$$

em que $b(x)$ é um campo escalar auxiliar, o *campo de Nakanishi-Lautrup* (NAKANISHI, 1966; LAUTRUP, 1967). Assim, o termo de fixação de calibre que trabalharemos é

$$S_{\text{gf}}^{\xi} = \int d^4x \left[\frac{\xi}{2} b^2 + ib(\partial_{\mu}A_{\mu} + \xi m\rho) - \bar{c}(-\partial^2c + \xi mec(v+h)) \right]. \quad (99)$$

Após a fixação de calibre, a ação resultante

$$S = S_{\text{Higgs}} + S_{\text{gf}}^{\xi} \quad (100)$$

não é invariante de calibre, mas possui a *simetria de BRST*, encontrada nos trabalhos de (BECCHI; ROUET; STORA, 1975; BECCHI; ROUET; STORA, 1976). Das transformações (85) e da parametrização (89) resulta que as transformações de calibre infinitesimais de $A_{\mu}(x)$, $h(x)$ e $\rho(x)$ são

$$\begin{aligned} \delta A_{\mu} &= -\partial_{\mu}\omega, \\ \delta h &= -e\omega\rho, \\ \delta \rho &= e\omega(v+h). \end{aligned} \quad (101)$$

Isso indica que as transformações BRST dos campos são

$$\begin{aligned}
sA_\mu &= -\partial_\mu c, \\
sh &= -ec\rho, \\
s\rho &= ec(v+h), \\
sc &= 0, \\
s\bar{c} &= ib, \\
sb &= 0, \\
sv &= 0,
\end{aligned} \tag{102}$$

em que s é o *operador de BRST*, que possui a propriedade de ser nilpotente, isto é,

$$s^2 = 0. \tag{103}$$

A invariância de BRST de (100) pode ser facilmente verificada com as seguintes observações:

(i) o termo de fixação de calibre é um termo *BRST-exato*¹¹,

$$S_{\text{gf}}^\xi = s \int d^4x \left[-i\frac{\xi}{2}\bar{c}b + \bar{c}(\partial_\mu A_\mu + \xi m\rho) \right]. \tag{104}$$

Portanto, pela nilpotência do operador s , Eq. (103), temos

$$sS_{\text{gf}}^\xi = s^2 \int d^4x \left[-i\frac{\xi}{2}\bar{c}b + \bar{c}(\partial_\mu A_\mu + \xi m\rho) \right] = 0; \tag{105}$$

(ii) as transformações de BRST dos campos (A_μ, h, ρ) são, essencialmente, as transformações de calibre (101) com $\omega(x) = \lambda c(x)$, em que λ é um parâmetro de Grassmann. Assim, para qualquer λ temos $\lambda sS_{\text{Higgs}} = \delta S_{\text{Higgs}} = 0$, o que implica em $sS_{\text{Higgs}} = 0$.

Diferentemente do que acontece no calibre linear covariante, no calibre R_ξ os campos fantasmas são relevantes, pois não se desacoplam dos demais campos. Como pode ser observado em (99), o acoplamento com os fantasmas se dá através do vértice de interação $-\int d^4x \xi m \bar{c} b$. Outra característica desse calibre é que os fantasmas também ganham massa, sendo ela $\sqrt{\xi}m$, exatamente o mesmo valor da massa do campo ρ . Essa não é uma simples coincidência, ambas as massas tem sua origem no termo BRST-exato $s \int d^4x \bar{c} \xi m \rho$. Esse é um fato importante que garante que, quando calcularmos um observável físico, existirá um cancelamento preciso entre as contribuições dependentes do parâmetro de calibre vindas de diferentes lugares.

¹¹ Um quantidade Δ é dita ser um BRST-exato se existe $\hat{\Delta}$, tal que, $\Delta = s\hat{\Delta}$.

Para determinarmos os propagadores da teoria, analisemos a parte quadrática da ação total (100), que é

$$\begin{aligned}
S_{\text{quad}} &= \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A_\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\mu h + \frac{m_h^2}{2} h^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial_\mu \rho + m A_\mu \partial_\mu \rho \right. \\
&\quad \left. + \xi \frac{b^2}{2} + ib (\partial_\mu A_\mu + \xi m \rho) - \bar{c} (\partial^2 c - \xi m^2 c) \right] \\
&= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu & b & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{\mu\nu} (-\partial^2 + m^2) + \partial_\mu \partial_\nu & -i\partial_\mu & m\partial_\mu \\ i\partial_\nu & \xi & i\xi m \\ -m\partial_\nu & i\xi m & -\partial^2 + \xi m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu \\ b \\ \rho \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\mu h + \frac{m_h^2}{2} h^2 - \bar{c} (\partial^2 c - \xi m^2 c) \right]. \tag{106}
\end{aligned}$$

De imediato, como $h(x)$, $c(x)$ e $\bar{c}(x)$ estão desacoplados dos outros campos em (106), podemos concluir que os propagadores desses campos são

$$\begin{aligned}
\langle h(p) h(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2 + m_h^2}, \\
\langle \bar{c}(p) c(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2 + \xi m^2}. \tag{107}
\end{aligned}$$

Os demais propagadores são obtidos através do cálculo da inversa do operador

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \delta_{\mu\nu} (-\partial^2 + m^2) + \partial_\mu \partial_\nu & -i\partial_\mu & m\partial_\mu \\ i\partial_\nu & \xi & i\xi m \\ -m\partial_\nu & i\xi m & -\partial^2 + \xi m^2 \end{pmatrix}, \tag{108}$$

cujos detalhes podem ser encontrados no Apêndice A. Fazendo esse cálculo, obtemos os seguintes propagadores:

$$\begin{aligned}
\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2 + m^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p), \\
\langle A_\mu(p) b(-p) \rangle_0 &= \frac{p_\mu}{p^2 + \xi m^2}, \\
\langle A_\mu(p) \rho(-p) \rangle_0 &= 0, \\
\langle b(p) b(-p) \rangle_0 &= 0, \\
\langle b(p) \rho(-p) \rangle_0 &= \frac{-im}{p^2 + \xi m^2}, \\
\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2 + \xi m^2}, \tag{109}
\end{aligned}$$

cuja notação diagramática é mostrada na Figura 1. A respeito dos propagadores com o campo $b(x)$, podemos dizer que eles são irrelevantes para o cálculo perturbativo de funções de Green que não possuem o próprio campo $b(x)$, pois não existem vértices de interação

Figura 1 - Propagadores da teoria.

$$\begin{aligned}
\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle_0 &= \text{—————} \\
\langle h(p) h(-p) \rangle_0 &= \text{-----} \\
\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle_0 &= \text{~~~~~} \\
\langle c(p) \bar{c}(-p) \rangle_0 &= \text{====>====}
\end{aligned}$$

Legenda: Notação diagramática para os principais propagadores da teoria.

Fonte: O autor, 2022.

com esse campo. Na verdade, antes de escrevermos (100), poderíamos ter integrado em $b(x)$ sem problemas, o que facilitaria o cálculo dos propagadores. Em relação aos demais propagadores, destacamos o fato de que a parte longitudinal de $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle_0$ possui exatamente a mesma massa dos propagadores $\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle_0$ e $\langle c(p) \bar{c}(-p) \rangle_0$. Novamente, essa não é uma coincidência, mas o resultado de um sofisticado mecanismo de cancelamento, produzido pela simetria BRST, necessário para que os observáveis físicos sejam independentes do parâmetro de calibre.

2.3 Simetrias e Identidades de Ward

A simetria de BRST de S pode ser expressa através de uma identidade de Ward, que é a *identidade de Slavnov-Taylor* (HOOFT, 1971a; TAYLOR, 1971; SLAVNOV, 1972). Para podermos fazer isso, como as transformações BRST de $h(x)$ e $\rho(x)$ não são lineares nos campos, como discutido na Seção 1.2, devemos introduzi-las na ação de partida acopladas a fontes externas. Fazendo isso, obtemos o termo adicional

$$\begin{aligned}
S_s &= \int d^4x [H(sh) + R(s\rho)] \\
&= \int d^4x [-He\rho c + Re(v+h)c],
\end{aligned} \tag{110}$$

nesse caso, as fontes externas são $H(x)$ e $R(x)$. Portanto, a ação de partida, Σ , deve ser

$$\Sigma = S + S_s, \tag{111}$$

em que S é definida em (100). A simetria de BRST da ação resultante é preservada para as transformações

$$sH = sR = 0. \quad (112)$$

Feito isso, então temos a identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) = 0, \quad (113)$$

sendo \mathcal{S} o operador de Slavnov-Taylor, definido como

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^4x \left(-\partial_\mu c \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \Sigma}{\delta H} \frac{\delta \Sigma}{\delta h} + \frac{\delta \Sigma}{\delta R} \frac{\delta \Sigma}{\delta \rho} + ib \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}} \right). \quad (114)$$

Além da identidade de Slavnov-Taylor, a linearidade do calibre R_ξ implica que a equação de movimento do campo $b(x)$,

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta b} = \xi b + i(\partial_\mu A_\mu + \xi m \rho), \quad (115)$$

também, é uma identidade de Ward. Como discutido na Subseção 1.2.2, a ação efetiva, Γ , também satisfaz a mesma equação, ou seja,

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta b} = \xi b + i(\partial_\mu A_\mu + \xi m \rho). \quad (116)$$

Essa mesma identidade (116) pode ser reescrita em termos do funcional gerador conexo, W ,

$$-J_b = \xi \frac{\delta W}{\delta J_b} + i\partial_\mu \frac{\delta W}{\delta J_{A_\mu}} + i\xi m \frac{\delta W}{\delta J_\rho}, \quad (117)$$

em que $J^b(x)$, $J_\mu^A(x)$ e $J^\rho(x)$ são as fontes dos campos $b(x)$, $A_\mu(x)$ e $\rho(x)$, respectivamente. Atuando com $\frac{\delta}{\delta J_\mu^A}$ sobre (117) em outro ponto do espaço e tomando as fontes a zero, obtemos a seguinte relação entre as funções de Green conexas:

$$0 = \xi \langle b(x) A_\nu(y) \rangle + i\partial_\mu \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle + i\xi m \langle \rho(x) A_\nu(y) \rangle. \quad (118)$$

Passando (118) para o espaço dos momentos e utilizando os propagadores (109), vemos que a nível árvore essa relação é satisfeita.

Outra identidade de Ward que pode ser escrita nesse calibre envolve a equação de movimento do antifantasma, $\bar{c}(x)$,

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}} - \xi m \frac{\delta \Sigma}{\delta R} = -\partial^2 c. \quad (119)$$

No entanto, parte da importância de (119) é reduzida pelo fato dela estar relacionada à identidade de Slavnov-Taylor e à equação de movimento do campo $b(x)$. Não é difícil

Tabela 1 - Número de fantasma $[\mathcal{N}_g]$ e dimensão de massa.

Campo ou fonte	A_μ	h	ρ	b	c	\bar{c}	H	R
Número de fantasma $[\mathcal{N}_g]$	0	0	0	0	1	-1	-1	-1
Dimensão de massa	1	1	1	2	0	2	3	3

Legenda: Tabela com o número de fantasma e a dimensão de massa de cada campo ou fonte.

Fonte: O autor, 2022.

de demonstrar que, para qualquer funcional \mathcal{F} dos campos e das fontes da teoria, vale a relação

$$\frac{\delta}{\delta b} \mathcal{S}(\mathcal{F}) - \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \left(\frac{\delta}{\delta b} \mathcal{F} \right) = i \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}}, \quad (120)$$

sendo $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ o operador de Slavnov-Taylor linearizado

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \int d^4x \left(-\partial_\mu c \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta H} \frac{\delta}{\delta h} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta h} \frac{\delta}{\delta H} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta R} \frac{\delta}{\delta \rho} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho} \frac{\delta}{\delta R} + ib \frac{\delta}{\delta \bar{c}} \right). \quad (121)$$

Dessa forma, substituindo Σ por \mathcal{F} na relação (120), de (114) e (115) resulta (119).

Podemos atribuir, também, um número de fantasma, $[\mathcal{N}_g]$, para os campos e as fontes, como mostrado na Tabela 1. A ação possui número de fantasma nulo, fato esse que pode ser expresso através da identidade de Ward

$$\mathcal{N}_g(\Sigma) = 0, \quad (122)$$

em que o operador de número de fantasma, \mathcal{N}_g , é definido como sendo

$$\mathcal{N}_g = \int d^4x \left(c \frac{\delta}{\delta c} - \bar{c} \frac{\delta}{\delta \bar{c}} - H \frac{\delta}{\delta H} - R \frac{\delta}{\delta R} \right). \quad (123)$$

Das transformações de BRST (102) e (112), não é difícil de inferir a relação de comutação

$$[\mathcal{N}_g, s] = -s, \quad (124)$$

portanto, o operador de BRST possui $[\mathcal{N}_g] = -1$.

Além das identidades de Ward, associadas às simetrias contínuas, a ação Σ (111) também possui uma simetria discreta do grupo \mathbb{Z}_2 , que podemos chamar de *simetria de*

conjugação de carga, caracterizada pelas transformações:

$$\begin{aligned}
A_\mu &\rightarrow -A_\mu, \\
h &\rightarrow h, \\
\rho &\rightarrow -\rho, \\
b &\rightarrow -b, \\
c &\rightarrow -c, \\
\bar{c} &\rightarrow -\bar{c}, \\
H &\rightarrow H, \\
R &\rightarrow -R.
\end{aligned} \tag{125}$$

Também não é difícil de ver que o operador de BRST comuta com essas transformações. Dessa simetria decorrem vários resultados imediatos, como o análogo do teorema de Furry da Eletrodinâmica Quântica (QED¹²): “Uma função de Green com apenas um número ímpar de pernas externas de fótons é nula”. Outro resultado que segue dessa simetria é que a função de um ponto do campo de Goldstone é nula, $\langle \rho(x) \rangle = 0$.

2.4 Identidades de Nielsen

O termo de fixação de calibre (99) é um BRST-exato de um polinômio integrado Δ com $[\mathcal{N}_g] = -1$, ou seja,

$$S_{\text{gf}}^\xi = s\Delta. \tag{126}$$

Por conveniência, separemos Δ como a soma de dois termos

$$\Delta = \xi\tilde{\Delta} + \Delta_0, \tag{127}$$

em que $\tilde{\Delta}$ e Δ_0 são ambos independentes do parâmetro de calibre ξ . Assim, como s é linear,

$$S_{\text{gf}}^\xi = \xi s\tilde{\Delta} + s\Delta_0. \tag{128}$$

Dada uma função de Green $\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle$, em que $\Phi_{i_k}(x_k)$ pode ser um campo fundamental ou um operador composto, segue da definição de função de Green, veja a

¹² QED são as iniciais de “Quantum Electrodynamics”.

Eq. (1), e de (128) que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle = - \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) s\tilde{\Delta} \rangle. \quad (129)$$

Apesar do resultado (133) valer para todo tipo de operador, por simplicidade, consideremos que os operadores Φ_i são comutantes. Como a teoria possui a simetria de BRST, então

$$s \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \tilde{\Delta} \rangle = 0, \quad (130)$$

o que implica em

$$0 = \sum_k \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots s\Phi_{i_k}(x_{i_k}) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \tilde{\Delta} \rangle + \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) s\tilde{\Delta} \rangle. \quad (131)$$

Portanto, (129) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle = \sum_k \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots s\Phi_{i_k}(x_{i_k}) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \tilde{\Delta} \rangle. \quad (132)$$

No caso particular em que $s\Phi_{i_k}(x_{i_k}) = 0$, para todo i_k , então

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle = 0. \quad (133)$$

Em palavras, o resultado (133) estabelece que funções de correlação com apenas operadores invariantes por BRST são independentes do parâmetro de calibre.

Os resultados acima fornecem uma boa intuição do que acontece quando o parâmetro de calibre é modificado, no entanto, a demonstração não é rigorosa. Como, em geral, $\tilde{\Delta}$ é um operador composto com número de ghost, devemos introduzir $\tilde{\Delta}$ na ação de partida acoplado a um parâmetro grassmanniano, que neste caso chamamos de χ . Como foi notado por (PIGUET; SIBOLD, 1985), o termo $\chi\tilde{\Delta}$ pode ser gerado automaticamente no termo de fixação de calibre se considerarmos as seguintes transformações de BRST para o parâmetro de calibre e o parâmetro χ ,

$$\begin{aligned} s\xi &= \chi, \\ s\chi &= 0. \end{aligned} \quad (134)$$

Assim, o termo de fixação de calibre modificado é

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{gf}}^\xi &= s \left(\xi\tilde{\Delta} + \Delta_0 \right) \\ &= \chi\tilde{\Delta} + \xi s\tilde{\Delta} + s\Delta_0. \end{aligned} \quad (135)$$

Para retornarmos à teoria com o calibre anterior devemos tomar $\chi = 0$. A identidade de

Slavnov-Taylor da teoria é modificada com a introdução das transformações (134). Como não existem anomalias, o funcional Γ_χ , obtido a partir da ação

$$\Sigma_\chi = S_{\text{Higgs}} + \tilde{S}_{\text{gf}}^\xi + S_s, \quad (136)$$

satisfaz a equação de Slavnov-Taylor

$$0 = \int d^4x \left(-\partial_\mu c \frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta H} \frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta h} + \frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta R} \frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta \rho} + ib \frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta \bar{c}} \right) + \chi \frac{\partial \Gamma_\chi}{\partial \xi}. \quad (137)$$

Note que $\Gamma_{\chi=0} = \Gamma$. Derivando (137) em relação a χ e depois tomando $\chi = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = & - \int d^4x \left[\partial_\mu c \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta A_\mu} \right) \Big|_{\chi=0} + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta H} \right) \Big|_{\chi=0} \frac{\delta \Gamma}{\delta h} - \frac{\delta \Gamma}{\delta H} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta h} \right) \Big|_{\chi=0} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta R} \right) \Big|_{\chi=0} \frac{\delta \Gamma}{\delta \rho} - \frac{\delta \Gamma}{\delta R} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta \rho} \right) \Big|_{\chi=0} + ib \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\delta \Gamma_\chi}{\delta \bar{c}} \right) \Big|_{\chi=0} \right]. \quad (138) \end{aligned}$$

A Eq. (138) é a equação fundamental a partir da qual todas as *identidades de Nielsen* (NIELSEN, 1975) para as funções 1PI podem ser derivadas. Fazendo a transformada de Legendre de Γ_χ , podemos reescrever (137) em termos do funcional gerador conexo W_χ ,

$$0 = \int d^4x \left(J_\mu^A \partial_\mu \frac{\delta W_\chi}{\delta J^c} - J^h \frac{\delta W}{\delta H} - J^\rho \frac{\delta W_\chi}{\delta R} - i J^{\bar{c}} \frac{\delta W_\chi}{\delta J^b} \right) + \chi \frac{\partial W_\chi}{\partial \xi}, \quad (139)$$

em que $(J_\mu^A, J^c, J^h, J^\rho, J^{\bar{c}}, J^b)$ são as fontes externas dos campos $(A_\mu, c, h, \rho, \bar{c}, b)$, respectivamente. Derivando (139) pela esquerda em relação a χ e, em seguida, tomando $\chi = 0$, obtemos a equação fundamental para gerar todas as identidades de Nielsen das funções conexas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} = & - \int d^4x \left(J_\mu^A \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\delta W_\chi}{\delta J^c} \Big|_{\chi=0} - J^h \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\delta W}{\delta H} \Big|_{\chi=0} - J^\rho \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\delta W_\chi}{\delta R} \Big|_{\chi=0} \right. \\ & \left. - i J^{\bar{c}} \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\delta W_\chi}{\delta J^b} \Big|_{\chi=0} \right), \quad (140) \end{aligned}$$

em que W é a transformada de Legendre de Γ . Essa identidade será utilizada no Capítulo 3. Para ver as aplicações das identidades de Nielsen na QED ou na QCD, veja (BRECKENRIDGE; LAVELLE; STEELE, 1995).

2.5 Renormalização e consistência do calibre R_ξ

No caso mais geral $\xi \neq 0$, a ação S e, conseqüentemente, Σ não possuem a *simetria global rígida*, caracterizada pelas transformações

$$\begin{aligned}\delta h(x) &= -e\rho(x)\omega \\ \delta\rho(x) &= e(v+h(x))\omega,\end{aligned}\tag{141}$$

que S_{Higgs} possui. A quebra dessa simetria não é nem clássica, então não existe nenhuma identidade de Ward associada. Esse fato tem profundas implicações para a renormalização da teoria, como é discutido em (KRAUS; SIBOLD, 1995). Por exemplo, os fatores de renormalização dos campos $h(x)$ e $\rho(x)$ e do parâmetro v são diferentes. Como consequência disso, o campo $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h(x)+i\rho(x))$ não se renormaliza multiplicativamente.

O calibre originalmente introduzido por 't Hooft é exatamente (99). No entanto, do ponto de vista da renormalização, esse calibre não é *estável*, o que significa que nem todas as divergências das funções de Green podem ser removidas através de uma redefinição dos campos e parâmetros da teoria. Esse fato já foi notado por (BECCHI; ROUET; STORA, 1975). O termo de fixação de calibre é um BRST-exato de três termos independentes, então cada um desses termos poderia ser considerado com o seu próprio parâmetro de calibre. Como um desses parâmetros pode sempre ser reabsorvido através da redefinição do campo b e dos campos fantasmas, então, além de ξ , pode existir outro parâmetro de calibre, que denotaremos por $\hat{\xi}$. De fato, o calibre estável é

$$\begin{aligned}S_{\text{gf}}^{R_{\xi\hat{\xi}}} &= s \int d^4x \left[-i\xi\bar{c}\frac{b}{2} + \bar{c} \left(\partial_\mu A_\mu + \hat{\xi}m\rho \right) \right] \\ &= \int d^4x \left[\xi\frac{b^2}{2} + ib \left(\partial_\mu A_\mu + \hat{\xi}m\rho \right) - \bar{c} \left(-\partial^2 c + \hat{\xi}mec(v+h) \right) \right],\end{aligned}\tag{142}$$

como pode ser encontrado em (HAUSSLING; KRAUS, 1997). Com essa mudança, os propagadores (107) e (109) são modificados, mas não são singulares no infravermelho, veja (KRAUS; SIBOLD, 1995). Com as correções quânticas, os parâmetros de calibre bare ξ_0 e $\hat{\xi}_0$ necessários para renormalizar a teoria são diferentes, mas isso não impede de tomarmos o caso particular $\xi = \hat{\xi}$ para os parâmetros de calibre renormalizados. Nos trabalhos (DUDAL et al., 2019; DUDAL et al., 2020) que fizemos a respeito do modelo de Higgs Abelian e que são mostrados nos Capítulos 3 e 4, esse caso particular foi utilizado. No Capítulo 3 serão apresentados os resultados obtidos no caso $\xi = \hat{\xi} = 0$, que corresponde ao *calibre de Landau*. Como nosso maior interesse é o estudo de funções de correlação de quantidades invariantes de calibre, o valor do parâmetro de calibre é irrelevante, como foi discutido na Seção 2.4. Além disso, como será mostrado, no calibre de Landau a ação é invariante pelas transformações rígidas (141), o que acaba aumentando o número de simetrias e, conseqüentemente, o número identidades de Ward da teoria.

3 ANÁLISE DAS FUNÇÕES DE GREEN DE 2-PONTOS DOS CAMPOS ELEMENTARES ATÉ 1-LOOP

Neste capítulo, as funções de Green conexas de 2-pontos de $A_\mu(x)$ e $h(x)$ são analisadas e comparadas. Nas Seções 3.1 e 3.2 são mostrados os cálculos a 1-loop dessas funções de Green, bem como os detalhes envolvendo a renormalização e a ressonância dessas funções. Na Seção 3.3 é feita a análise das propriedades espectrais dessas funções (polos, resíduos, densidades espectrais, etc). O capítulo é encerrado com a Seção 3.4, onde é feita uma discussão geral a respeito dos resultados obtidos. Os resultados apresentados neste capítulo também podem ser encontrados no trabalho (DUDAL et al., 2019).

3.1 Função de Green $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$

3.1.1 Cálculo da autoenergia do fóton

Os diagramas que contribuem para a função de Green $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$ a 1-loop são mostrados na Figura 2. As regras de Feynman para o cálculo desses diagramas podem ser encontradas no Apêndice A. Essas regras já levam em consideração que o esquema de regularização é a RD. Por isso, a dimensão do espaço-tempo passa a ser d (uma quantidade contínua e complexa) em vez de 4, e temos $\mu^{2-\frac{d}{2}}e$, $\mu^{4-d}\lambda$ e $\mu^{\frac{d}{2}-2}v$ no lugar dos parâmetros e , λ e v , sendo que μ é o parâmetro de massa característico da RD. Além disso, para expressarmos os cálculos dos diagramas, é conveniente definirmos as funções

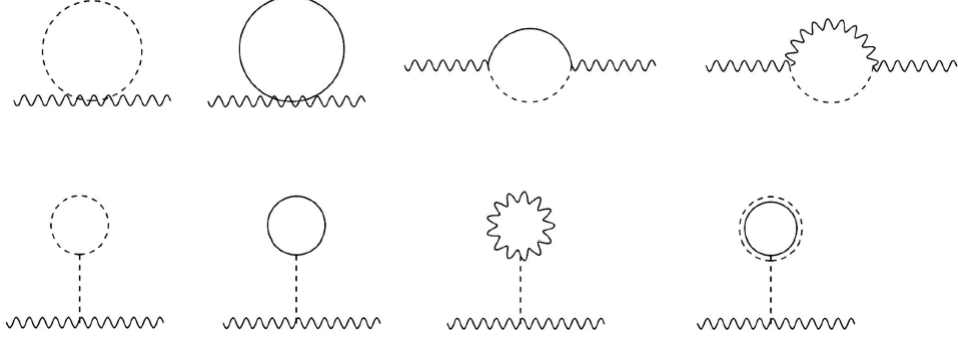
$$\begin{aligned} \chi(m^2) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) (m^2)^{\frac{d}{2}-1} \end{aligned} \quad (143)$$

e

$$\begin{aligned} \eta(m_1^2, m_2^2, p^2) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m_1^2} \frac{1}{(k-p)^2 + m_2^2} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx (p^2 x(1-x) + m_1^2 x + m_2^2(1-x))^{\frac{d}{2}-2}, \end{aligned} \quad (144)$$

em que $\Gamma(x)$ é a função gama de Euler-Weierstrass. Como será visto a seguir, todos os diagramas podem ser expressos como combinações lineares dessas integrais. No Apêndice

Figura 2 - Correções a 1-loop para a Função de Green $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$



Legenda: Diagramas de Feynman que contribuem para $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$ a 1-loop.

Fonte: O autor, 2022

B são mostradas as reduções a combinações lineares de $\chi(m^2)$ e $\eta(m_1^2, m_2^2, p^2)$ das integrais

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu}{(k^2 + m_1^2) ((p-k)^2 + m_2^2)},$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + m_1^2) ((p-k)^2 + m_2^2)}, \quad (145)$$

que aparecem nos cálculos dos diagramas. Essas reduções facilitam as demonstrações de alguns resultados importantes, como a independência de calibre dos polos das funções de Green dos campos elementares.

As pernas externas dos diagramas da Figura 2 são propagadores de $A_\mu(x)$, dessa forma, todos os diagramas possuem a mesma estrutura. O i -ésimo diagrama tem a forma

$$\langle A_\mu(p) A_\alpha(-p) \rangle_0 \Pi_{\alpha\beta}^{(i)}(p) \langle A_\beta(p) A_\nu(-p) \rangle_0, \quad (146)$$

em que $\Pi_{\alpha\beta}^{(i)}(p)$ é um gráfico 1PI ou uma contribuição dos “tadpoles”¹³. A seguir serão apresentados os resultados dos $\Pi_{\alpha\beta}$ ’s.

O primeiro diagrama da Figura 2 contém um loop com apenas uma linha interna de Higgs, portanto, sua contribuição é

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(p) = -\mu^{4-d} e^2 \chi(m_h^2) \delta_{\mu\nu}. \quad (147)$$

O segundo diagrama da Figura 2 contém um loop com apenas uma linha interna de

¹³ Traduzido literalmente do inglês, “tadpole” significa girino. Neste contexto, os “tadpoles” são os diagramas que contribuem para a função de Green de 1-ponto $\langle h \rangle$.

Goldstone, resultando em

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(p) = -\mu^{4-d}e^2\chi(\xi m^2)\delta_{\mu\nu} . \quad (148)$$

Vale lembrar que ambos os diagramas possuem fator de simetria $\frac{1}{2}$. Como $\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(p)$ e $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(p)$ independem do momento, suas contribuições afetarão apenas a renormalização das massas m^2 e m_h^2 . O terceiro e o quarto diagrama da Figura 2 são do tipo “sol nascente”. O terceiro contém um loop com uma linha de Higgs e uma linha de Goldstone, o que leva a

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(3)}(p) = & -\mu^{4-d}e^2 \left\{ -4\frac{1}{d-1}\mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \left[\frac{p^2 - m_h^2 + \xi m^2}{4p^2}\chi(m_h^2) \right. \right. \\ & - \left. \left(\xi m^2 + \frac{(p^2 + m_h^2 - \xi m^2)^2}{4p^2} \right) \eta(\xi m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ & \left. \left. + \frac{p^2 + m_h^2 - \xi m^2}{4p^2}\chi(\xi m^2) \right] \right. \\ & + \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \left[\left(-\frac{(p^2 + m_h^2 - \xi m^2)^2}{p^2} + p^2 + 2m_h^2 - 2\xi m^2 \right) \eta(\xi m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ & \left. \left. - \frac{p^2 + m_h^2 - \xi m^2}{p^2}\chi(m_h^2) - \frac{p^2 - m_h^2 + \xi m^2}{p^2}\chi(\xi m^2) \right] \right\} . \quad (149) \end{aligned}$$

Já o quarto diagrama da Figura 2 é formado por uma linha interna de fóton e uma linha interna de Higgs, resultando em

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(4)}(p) = & 4\mu^{4-d}e^2 \left\{ \delta_{\mu\nu}m^2\eta(m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ & + \frac{1}{d-1}\mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \left[- \left(m^2 + \frac{(p^2 + m_h^2 - m^2)^2}{4p^2} \right) \eta(m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ & + \frac{m^2(1-\xi)}{4p^2}\chi(m_h^2) + \frac{(p^2 + m_h^2 - m^2)}{4p^2}\chi(m^2) \\ & + \left(\xi m^2 + \frac{(p^2 + m_h^2 - \xi m^2)^2}{4p^2} \right) \eta(\xi m^2, m_h^2, p^2) \\ & \left. \left. - \frac{(p^2 + m_h^2 - \xi m^2)}{4p^2}\chi(\xi m^2) \right] \right. \\ & + \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \left[\frac{(p^2 + m_h^2 - m^2)^2}{4p^2}\eta(m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ & - \frac{m^2(1-\xi)}{4p^2}\chi(m_h^2) - \frac{(p^2 + m_h^2 - m^2)}{4p^2}\chi(m^2) \\ & \left. \left. - \frac{(p^2 + m_h^2 - \xi m^2)^2}{4p^2}\eta(\xi m^2, m_h^2, p^2) + \frac{(p^2 + m_h^2 - \xi m^2)}{4p^2}\chi(\xi m^2) \right] \right\} . \quad (150) \end{aligned}$$

Os diagramas restantes da Figura 2 são do tipo “tadpole” e contribuem apenas para a

renormalização das massas. O quinto diagrama da Figura 2 contém um loop com uma linha interna de Higgs,

$$\Pi_{\mu\nu}^{(5)}(p) = 3\mu^{4-d}e^2\chi(m_h^2)\delta_{\mu\nu}. \quad (151)$$

O sexto diagrama da Figura 2 contém um loop com uma linha interna de Goldstone,

$$\Pi_{\mu\nu}^{(6)}(p) = \mu^{4-d}e^2\chi(\xi m^2)\delta_{\mu\nu}. \quad (152)$$

Enquanto que, o sétimo diagrama da Figura 2 é formado com uma linha interna de fóton,

$$\Pi_{\mu\nu}^{(7)}(p) = 2\mu^{4-d}e^2\frac{m^2}{m_h^2}[(d-1)\chi(m^2) + \xi\chi(\xi m^2)]\delta_{\mu\nu}. \quad (153)$$

A oitava e última contribuição da Figura 2 vem de um loop com uma linha interna de fantasma,

$$\Pi_{\mu\nu}^{(8)}(p) = -2\mu^{4-d}e^2\frac{m^2}{m_h^2}\xi\chi(\xi m^2)\delta_{\mu\nu}. \quad (154)$$

O sinal negativo em (154) se deve ao fato do loop ser formado exclusivamente por linhas de campos anticomutantes.

Somando todas as contribuições, de (147) até (154), temos a autoenergia¹⁴ do fóton regularizada a 1-loop

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^d(p) &= \sum_{i=1}^8 \Pi_{\mu\nu}^{(i)}(p) \\ &= \mu^{4-d}e^2\mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \left\{ 2\chi(m_h^2) + 2\frac{m^2}{m_h^2}(d-1)\chi(m^2) + 4m^2\eta(m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{d-1}\frac{1}{p^2}[(p^2 - m_h^2 + m^2)\chi(m_h^2) \\ &\quad - \left. \left((p^2 + m_h^2 - m^2)^2 + 4p^2m^2 \right) \eta(m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ &\quad \left. + (p^2 + m_h^2 - m^2)\chi(m^2) \right\} \\ &\quad + \mu^{4-d}e^2\mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \left\{ - (p^2 + 2m_h^2 - 2\xi m^2)\eta(\xi m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ &\quad + \left(\frac{p^2 + m_h^2 - m^2}{p^2} + 2 + 2\frac{m^2}{m_h^2}(d-1) \right) \chi(m_h^2) + 2\chi(\xi m^2) \\ &\quad + \left(\frac{(p^2 + m_h^2 - m^2)^2}{p^2} + 4m^2 \right) \eta(m^2, m_h^2, p^2) \\ &\quad \left. - \frac{(p^2 + m_h^2 - m^2)}{p^2}\chi(m^2) \right\}. \end{aligned} \quad (155)$$

¹⁴ Aqui chamaremos de autonergia, mas é comum também chamarmos $\Pi_{\mu\nu}(p)$ de *polarização do vácuo*.

Nota-se que, a parte transversa de $\Pi_{\mu\nu}^d(p)$ e, conseqüentemente, a parte transversa de $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle^d$ ¹⁵ independem do parâmetro de calibre ξ . O mesmo não vale para a parte longitudinal, que depende explicitamente de ξ .

3.1.2 Expansão de $\Pi_{\mu\nu}^d(p)$ em torno de $d = 4$ e renormalizaçãõ

Estamos interessados no caso $d = 4$, então expandiremos a autoenergia regularizada (155) em série de Laurent de $\varepsilon = 4 - d$ no ponto $\varepsilon = 0$. Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{4-\varepsilon}(p) = & \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \left\{ \left(-\frac{1}{3}p^2 - 6\frac{m^4}{m_h^2} - 3m_h^2 + 3m^2 \right) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right) \right. \\
& + \frac{p^4 + m_h^4 + m^4 + 2p^2m_h^2 - 2m_h^2m^2 - 10p^2m^2}{3p^2} K(m^2, m_h^2, p^2, \mu^2) \\
& - 2m_h^2 - 2\frac{m^4}{m_h^2} - \frac{2}{9}(p^2 + 3m_h^2 + 3m^2) \\
& \left. - \frac{p^2m_h^2 - m_h^4 + 2m^2m_h^2 + p^2m^2 - m^4}{3p^2} \right\} \\
& + \mu^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \left\{ - (3m_h^2 + 3m^2) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right) \right. \\
& + \frac{p^4 + 2p^2m_h^2 - 2\xi p^2m^2}{p^2} K(\xi m^2, m_h^2, p^2, \mu^2) \\
& - \frac{(p^2 + m_h^2 - m^2)^2 + 4p^2m^2}{p^2} K(m^2, m_h^2, p^2, \mu^2) \\
& \left. - \frac{p^2m_h^2 + p^2m^2 + m_h^4 + m^4 - 2m_h^2m^2 + 2p^2m_h^2 + 2\xi p^2m^2}{p^2} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (156)
\end{aligned}$$

¹⁵ O índice d em $\Pi_{\mu\nu}^d(p)$ e $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle_c^d$ serve para denotar que essas são quantidades regularizadas.

em que γ é a constante de Euler-Mascheroni e

$$\begin{aligned}
K(m_1^2, m_2^2, p^2, \mu^2) &= \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m_1^2 x + m_2^2(1-x)}{\mu^2} \right) \\
&= \frac{1}{2p^2} \left\{ m_1^2 \ln \frac{m_2^2}{m_1^2} + m_2^2 \ln \frac{m_1^2}{m_2^2} + p^2 \ln \frac{m_1^2 m_2^2}{\mu^4} - 4p^2 \right. \\
&\quad - 2\sqrt{-m_1^4 + 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 p^2 - m_2^4 - 2m_2^2 p^2 - p^4} \times \\
&\quad \times \tan^{-1} \left[\frac{-m_1^2 + m_2^2 - p^2}{\sqrt{-m_1^4 + 2m_1^2(m_2^2 - p^2) - (m_2^2 + p^2)^2}} \right] \\
&\quad + 2\sqrt{-m_1^4 + 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 p^2 - m_2^4 - 2m_2^2 p^2 - p^4} \times \\
&\quad \left. \times \tan^{-1} \left[\frac{-m_1^2 + m_2^2 + p^2}{\sqrt{-m_1^4 + 2m_1^2(m_2^2 - p^2) - (m_2^2 + p^2)^2}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{157}$$

Para a maior parte da análise que será feita a seguir, basta considerarmos a representação integral da função $K(m_1^2, m_2^2, p^2, \mu^2)$. Como o esperado, já que a teoria é renormalizável, a parte divergente de $\Pi_{\mu\nu}^{4-\varepsilon}(p)$, que é a parte com um polo simples em ε , é polinomial no momento e nas massas,

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{4-\varepsilon}(p)|_{\text{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \left(-\frac{1}{3}p^2 + 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{e^2}{\lambda} \right) m^2 - 3m_h^2 \right) \frac{2}{\varepsilon} \\
&\quad - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) (3m_h^2 + 3m^2) \frac{2}{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{158}$$

Portanto, a renormalização de $\Pi_{\mu\nu}(p)$ acontece através da adição de contratermos locais na ação de partida. Utilizando o esquema de *Subtração Mínima Modificada* (\overline{MS}) para eliminar as divergências, que consiste em subtraírmos a parte com $\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi)$ da função $\Pi_{\mu\nu}^{4-\varepsilon}(p)$, temos a seguinte autoenergia renormalizada em $d = 4$:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(p) &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \left\{ \frac{p^4 + m_h^4 + m^4 + 2p^2 m_h^2 - 2m_h^2 m^2 - 10p^2 m^2}{3p^2} K(m^2, m_h^2, p^2, \mu^2) \right. \\
&\quad \left. - 2m_h^2 - 2\frac{m^4}{m_h^2} - \frac{2}{9}(p^2 + 3m_h^2 + 3m^2) - \frac{p^2 m_h^2 - m_h^4 + 2m^2 m_h^2 + p^2 m^2 - m^4}{3p^2} \right\} \\
&\quad + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \left\{ \frac{p^4 + 2p^2 m_h^2 - 2\xi p^2 m^2}{p^2} K(\xi m^2, m_h^2, p^2, \mu^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(p^2 + m_h^2 - m^2)^2 + 4p^2 m^2}{p^2} K(m^2, m_h^2, p^2, \mu^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{p^2 m_h^2 + p^2 m^2 + m_h^4 + m^4 - 2m_h^2 m^2 + 2p^2 m_h^2 + 2\xi p^2 m^2}{p^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{159}$$

3.1.3 Ressoma da autoenergia $\Pi_{\mu\nu}(p)$

Os diagramas de $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$ se organizam de tal forma a gerarem uma série geométrica, veja a Figura 3. Os diagramas são formados por inserções da autoenergia $\Pi_{\mu\nu}$ conectadas por propagadores do fóton $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle_0$. Escrevendo a autoenergia em termos das projeções transversais e longitudinais, $\Pi_A^T(p^2)$ e $\Pi_A^L(p^2)$, respectivamente, isto é,

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \Pi_A^T(p^2) \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \Pi_A^L(p^2) \mathcal{L}_{\mu\nu}(p), \quad (160)$$

e utilizando as propriedades conhecidas dos projetores:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu\alpha}(p) \mathcal{P}_{\alpha\nu}(p) &= \mathcal{P}_{\mu\nu}(p), \\ \mathcal{L}_{\mu\alpha}(p) \mathcal{L}_{\alpha\nu}(p) &= \mathcal{L}_{\mu\nu}(p), \\ \mathcal{P}_{\mu\alpha}(p) \mathcal{L}_{\alpha\nu}(p) &= 0, \end{aligned} \quad (161)$$

encontramos o resultado

$$\begin{aligned} \langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle &= \left[\frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{\Pi_A^T(p^2)}{(p^2 + m^2)^2} + \frac{\Pi_A^T(p^2)^2}{(p^2 + m^2)^3} + \dots \right] \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \\ &\quad + \left[\frac{\xi}{p^2 + \xi m^2} + \frac{\xi^2 \Pi_A^L(p^2)}{(p^2 + \xi m^2)^2} + \frac{\xi^3 \Pi_A^L(p^2)^2}{(p^2 + \xi m^2)^3} + \dots \right] \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \\ &= \frac{1}{p^2 + m^2 - \Pi_A^T(p^2)} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2 - \xi \Pi_A^L(p^2)} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p). \end{aligned} \quad (162)$$

Denotemos por $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ e $\langle A(p) A(-p) \rangle^L$ os fatores de forma da parte transversal e da parte longitudinal de $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$, respectivamente, isto é,

$$\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle = \langle A(p) A(-p) \rangle^T \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \langle A(p) A(-p) \rangle^L \mathcal{L}_{\mu\nu}(p). \quad (163)$$

Pela Eq. (162) temos que

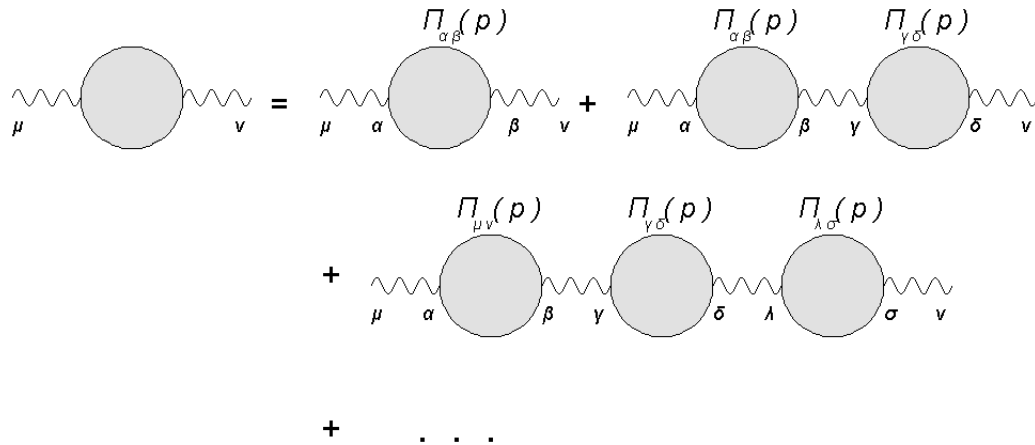
$$\langle A(p) A(-p) \rangle^T = \frac{1}{p^2 + m^2 - \Pi_A^T(p^2)} \quad (164)$$

e

$$\langle A(p) A(-p) \rangle^L = \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2 - \xi \Pi_A^L(p^2)}. \quad (165)$$

Vale ressaltar que esse resultado (162) é válido apenas se $\Pi_{\mu\nu}(p)$ for o resultado exato. Se for introduzida apenas uma aproximação de $\Pi_{\mu\nu}(p)$ no lado direito de (162), temos o chamado propagador ressomado, que denotaremos por $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle^{\text{res}}$. O propagador ressomado possui contribuições de todas as ordens em loops, mas não todas, por isso ele

Figura 3 - Função de Green $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$.



Legenda: Estrutura diagramática da função $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$, em que $\Pi_{\mu\nu}(p)$ é a autoenergia do fóton. Note que, fatorando uma perna externa de A_μ surge uma série geométrica, $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, de $x = \langle A(p) A(-p) \rangle_0 \Pi(p)$.

Fonte: O autor, 2022.

pode não ter as mesmas propriedades analíticas que o propagador exato ou o propagador calculado até certa ordem perturbativa possuem. A utilidade do propagador ressomado será mostrada na Seção 3.3.

3.1.4 Independência de calibre de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$

Como já foi chamada a atenção, a parte transversal da autoenergia a 1-loop, tanto a regularizada Eq.(155) quanto a renormalizada Eq.(159), são independentes do parâmetro de calibre ξ . Isso implica que a parte transversal da função conexa, nessa mesma ordem de loops, é independente do parâmetro de calibre. Na verdade, esse resultado é válido a todas as ordens, não apenas a 1-loop. Existem ao menos dois caminhos para demonstrar esse resultado. O mais direto parte da observação de que a parte transversa do campo de calibre,

$$A_\mu^T = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \right) A_\nu, \quad (166)$$

é invariante de BRST. A função de correlação de dois pontos de A_μ^T pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^T A_\nu^T \rangle &= \left(\delta_{\mu\alpha} - \frac{\partial_\mu \partial_\alpha}{\partial^2} \right) \left(\delta_{\nu\beta} - \frac{\partial_\nu \partial_\beta}{\partial^2} \right) \langle A_\alpha A_\beta \rangle \\ &= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \right) \langle AA \rangle^T. \end{aligned} \quad (167)$$

Como está demonstrado na Seção 2.4, toda função de correlação de operadores invariantes de BRST é independente do parâmetro de calibre. Logo, pela Eq. (167), $\langle AA \rangle^T$, também, é independente do parâmetro de calibre.

Uma outra forma de demonstrar a independência de $\langle A_\alpha(x) A_\beta(y) \rangle^T$ em relação a ξ é através das identidades de Nielsen. Derivando a Eq. (140) em relação a $J_\alpha^A(y)$ e $J_\beta^A(z)$ e depois tomando todas as fontes a zero, obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \langle A_\alpha(y) A_\beta(z) \rangle = 2\partial_\alpha^y \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\delta^2 W_\chi}{\delta J_\beta^A(z) \delta J^c(y)} \Big|_{\chi=\mathcal{J}=0}, \quad (168)$$

uma vez que, pela invariância de Lorentz, $\partial_\alpha^y \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\delta^2 W_\chi}{\delta J_\beta^A(z) \delta J^c(y)} \Big|_{\chi=\mathcal{J}=0} = \partial_\beta^z \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\delta^2 W_\chi}{\delta J_\alpha^A(y) \delta J^c(z)} \Big|_{\chi=\mathcal{J}=0}$. Atuando com o projetor transversal em (168), o lado direito se anula e temos o resultado desejado,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \langle A_\alpha(y) A_\beta(z) \rangle^T = 0. \quad (169)$$

3.2 Função de Green $\langle h(p) h(-p) \rangle$

3.2.1 Cálculo da autoenergia do campo de Higgs

Os diagramas que contribuem para a função de Green conexa $\langle h(p) h(-p) \rangle$ a 1-loop são mostrados na Figura 4. Utilizando as regras de Feynman do Apêndice A pode-se identificar que o i -ésimo diagrama possui a forma

$$\langle h(p) h(-p) \rangle_0 \Pi_h^{(i)}(p^2) \langle h(p) h(-p) \rangle_0, \quad (170)$$

em que $\Pi_h^{(i)}(p^2)$ é um diagrama 1PI ou um diagrama com um “tadpole”. Note que, (170) é análoga ao caso da função $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$.

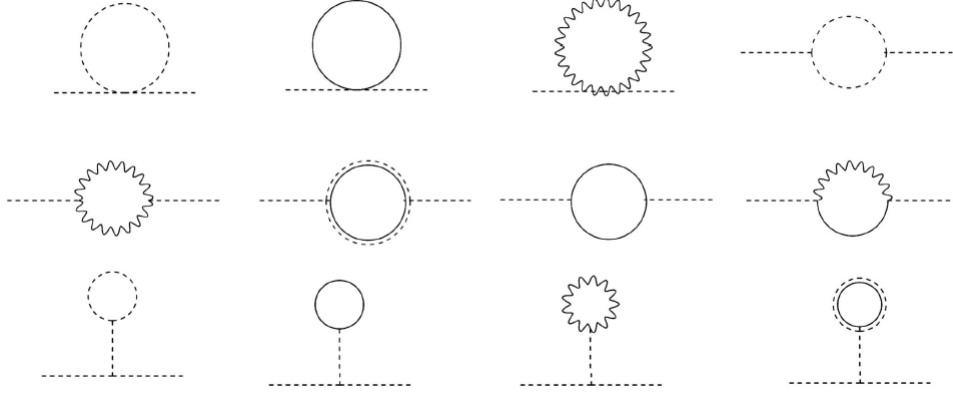
Os três primeiro diagramas da Figura 4 tem o mesmo formato, podemos dizer que são do tipo “caracol”. O primeiro diagrama da Figura 4 contém um loop formado com apenas uma linha interna de Higgs, resultando em

$$\Pi_h^{(1)}(p^2) = -\frac{3\mu^{4-d}\lambda}{2}\chi(m_h^2). \quad (171)$$

O segundo diagrama da Figura 4 contém um loop com uma linha de Goldstone, contribuindo com

$$\Pi_h^{(2)}(p^2) = -\frac{\lambda\mu^{4-d}}{2}\chi(\xi m^2). \quad (172)$$

Figura 4 - Correções a 1-loop para a função de Green conexa $\langle h(p) h(-p) \rangle$.



Legenda: Diagramas de Feynman que contribuem para $\langle h(p) h(-p) \rangle$ a 1-loop.

Fonte: O autor, 2022

O terceiro diagrama da Figura 4 é formado por um loop de fóton, cujo resultado é

$$\Pi_h^{(3)}(p^2) = -\mu^{4-d} e^2 [(d-1) \chi(m^2) + \xi \chi(\xi m^2)]. \quad (173)$$

Todos esses diagramas possuem um fator de simetria $\frac{1}{2}$.

Do quarto até o oitavo diagrama da Figura 4, temos diagramas do tipo “sol nascente”. O quarto diagrama da Figura 4 contém um loop formado por duas linhas internas de Higgs, por isso possui um fator de simetria $\frac{1}{2}$, resultando em

$$\Pi_h^{(4)}(p^2) = \frac{9\mu^{4-d}\lambda}{2} m_h^2 \eta(m_h^2, m_h^2, p^2). \quad (174)$$

O quinto diagrama da Figura 4 possui um loop constituídos por duas linhas internas de fótons, por isso possui um fator de simetria $\frac{1}{2}$, resultando em

$$\begin{aligned} \Pi_h^{(5)}(p^2) = & \mu^{4-d} e^2 \left[\left(2m^2 (d-1) + 2p^2 + \frac{p^4}{2m^2} \right) \eta(m^2, m^2, p^2) \right. \\ & - \left(2p^2 + \frac{p^4}{m^2} + \xi^2 m^2 + 2p^2 \xi - 2\xi m^2 + m^2 \right) \eta(m^2, \xi m^2, p^2) \\ & + \left(2\xi p^2 + 2\xi^2 m^2 + \frac{p^4}{2m^2} \right) \eta(\xi m^2, \xi m^2, p^2) \\ & \left. + (\xi - 1) \chi(m^2) + (1 - \xi) \chi(\xi m^2) \right]. \quad (175) \end{aligned}$$

O loop do sexto diagrama da Figura 4 é formado por linhas internas de ghost, por esse motivo ganha um sinal “-”, resultando em

$$\Pi_h^{(6)}(p^2) = -\mu^{4-d} e^2 m^2 \xi^2 \eta(\xi m^2, \xi m^2, p^2). \quad (176)$$

O sétimo diagrama da Figura 4 contém um loop com linhas de Goldstone, o que implica na existência de um fator de simetria $\frac{1}{2}$, contribuindo com

$$\Pi_h^{(7)}(p^2) = \frac{\mu^{4-d}\lambda}{2} m_h^2 \eta(\xi m^2, \xi m^2, p^2). \quad (177)$$

O oitavo diagrama da Figura 4, e o último diagrama desse grupo de diagramas do tipo “sol nascente”, possui um loop com uma linha interna de fóton e uma linha interna de Goldstone, resultando em

$$\begin{aligned} \Pi_h^{(8)}(p^2) = & \mu^{4-d} e^2 \left[\left(2p^2 + \frac{p^4}{m^2} + \xi^2 m^2 + 2p^2 \xi - 2\xi m^2 + m^2 \right) \eta(m^2, \xi m^2, p^2) \right. \\ & - \left(\xi^2 m^2 + \frac{p^4}{m^2} + 2p^2 \xi \right) \eta(\xi m^2, \xi m^2, p^2) \\ & \left. + \left(1 - \xi - \frac{p^2}{m^2} \right) \chi(m^2) + \left(2\xi - 1 + \frac{p^2}{m^2} \right) \chi(\xi m^2) \right]. \end{aligned} \quad (178)$$

Os quatro último diagramas da Figura 4 são do tipo “tadpole”. Todos eles possuem um fator de simetria $\frac{1}{2}$, exceto o último que possui um fator “-”, por ser um loop de fantasmas. O nono diagrama da Figura 4 possui um loop de Higgs, resultando em

$$\Pi_h^{(9)}(p^2) = \frac{9\mu^{4-d}\lambda}{2} \chi(m_h^2). \quad (179)$$

O décimo diagrama da Figura 4 contém um loop de Goldstone, contribuindo com

$$\Pi_h^{(10)}(p^2) = \frac{3\mu^{4-d}\lambda}{2} \chi(\xi m^2). \quad (180)$$

O loop do décimo primeiro diagrama da Figura 4 é formado com duas linhas internas de fóton, o que resulta em

$$\Pi_h^{(11)}(p^2) = 3\mu^{4-d} e^2 [(d-1)\chi(m^2) + \xi\chi(\xi m^2)]. \quad (181)$$

O último diagrama da Figura 4 possui um loop de fantasmas, o que implica em

$$\Pi_h^{(12)}(p^2) = -3\mu^{4-d} e^2 \xi \chi(\xi m^2). \quad (182)$$

Somando todas as contribuições, de (171) até (182), temos a autoenergia do campo

de Higgs regularizada a 1-loop

$$\begin{aligned}
\Pi_h^d(p^2) &= \sum_{i=1}^{12} \Pi_h^{(i)}(p^2) \\
&= 3\mu^{4-d}\lambda\chi(m_h^2) + \mu^{4-d}e^2 \left(2(d-1) - \frac{p^2}{m^2}\right) \chi(m^2) + \mu^{4-d} \left(\lambda + e^2 \frac{p^2}{m^2}\right) \chi(\xi m^2) \\
&\quad + \frac{9\mu^{4-d}\lambda}{2} m_h^2 \eta(m_h^2, m_h^2, p^2) + \left(-\mu^{4-d}e^2 \frac{p^4}{2m^2} + \frac{\mu^{4-d}\lambda}{2} m_h^2\right) \eta(\xi m^2, \xi m^2, p^2) \\
&\quad + \mu^{4-d}e^2 \left(2m^2(d-1) + 2p^2 + \frac{p^4}{2m^2}\right) \eta(m^2, m^2, p^2). \tag{183}
\end{aligned}$$

Assim como a parte longitudinal da autoenergia do fóton, a autoenergia do campo de Higgs e, conseqüentemente, a função de dois pontos conexa dependem explicitamente do parâmetro de calibre ξ . De fato, não existe razão para esperar que isso não acontecesse, já que o campo $h(x)$ não é invariante de BRST.

3.2.2 Expansão de $\Pi_h^d(p^2)$ em torno de $d = 4$ e renormalização

A expansão de $\Pi_h^d(p^2)$ em série de Laurent de $\varepsilon = 4 - d$ no ponto $\varepsilon = 0$ é

$$\begin{aligned}
\Pi_h^{4-\varepsilon}(p^2) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ (2\lambda m_h^2 - \lambda \xi m^2 + e^2(3 - \xi)p^2) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) \right. \\
&\quad \left. + \lambda m_h^2 \left[-3 + 3 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} - \frac{9}{2} K(m_h^2, m_h^2, p^2, \mu^2)\right] \right. \\
&\quad \left. + e^2 \left[(6m^2 - p^2) \left(-1 + \ln \frac{m^2}{\mu^2}\right) - \left(\frac{p^4}{2m^2} + 6m^2 + 2p^2\right) K(m^2, m^2, p^2, \mu^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \xi (\lambda m^2 + e^2 p^2) \left(-1 + \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{e^2 p^4}{2m^2} - \frac{\lambda}{2} m_h^2\right) K(\xi m^2, \xi m^2, p^2, \mu^2) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{184}
\end{aligned}$$

A parte divergente de $\Pi_h^{4-\varepsilon}(p^2)$ é polinomial no momento e nas massas,

$$\Pi_h^{4-\varepsilon}(p^2)|_{\text{div}} = \frac{1}{(4\pi)^2} (2\lambda m_h^2 - \lambda \xi m^2 + e^2(3 - \xi)p^2) \frac{2}{\varepsilon}, \tag{185}$$

como esperado, já que a teoria é renormalizável. Adotando o esquema de subtração \overline{MS} para $\Pi_h^{4-\varepsilon}(p^2)$, temos a autoenergia do campo de Higgs renormalizada em $d = 4$ como

sendo

$$\begin{aligned}
\Pi_h(p^2) = & \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \lambda m_h^2 \left[-3 + 3 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} - \frac{9}{2} K(m_h^2, m_h^2, p^2, \mu^2) \right] \right. \\
& + e^2 \left[(6m^2 - p^2) \left(-1 + \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) - \left(\frac{p^4}{2m^2} + 6m^2 + 2p^2 \right) K(m^2, m^2, p^2, \mu^2) \right] \\
& + \xi (\lambda m^2 + e^2 p^2) \left(-1 + \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2} \right) \\
& \left. + \left(\frac{e^2 p^4}{2m^2} - \frac{\lambda}{2} m_h^2 \right) K(\xi m^2, \xi m^2, p^2, \mu^2) \right\}. \tag{186}
\end{aligned}$$

3.2.3 Ressoma da autoenergia $\Pi_h(p^2)$

A função de 2-pontos conexa do campo de Higgs, também, se organiza como uma série geométrica de $\frac{\Pi_h(p^2)}{p^2 + m_h^2}$, como mostra a Figura 5. O que leva ao resultado

$$\begin{aligned}
\langle h(p) h(-p) \rangle &= \frac{1}{p^2 + m_h^2} + \frac{\Pi_h(p^2)}{(p^2 + m_h^2)^2} + \frac{\Pi_h(p^2)^2}{(p^2 + m_h^2)^3} + \dots \\
&= \frac{1}{p^2 + m_h^2 - \Pi_h(p^2)}. \tag{187}
\end{aligned}$$

Esse resultado é verdadeiro apenas se $\Pi_h(p^2)$ for exato. Se a autoenergia for apenas uma aproximação, então temos apenas a função de dois pontos conexa ressomada, que denotaremos por $\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}}$.

3.3 Propriedades espectrais das funções conexas

3.3.1 Polos

As funções $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ e $\langle h(p) h(-p) \rangle$ ressomadas, calculadas nas seções anteriores, possuem a mesma forma, são do tipo

$$D(p^2) = \frac{1}{p^2 + M^2 - \Pi(p^2)}, \tag{188}$$

em que $\Pi(p^2)$ corresponde às autoenergias $\Pi_A^T(p^2)$ e $\Pi_h(p^2)$. Portanto, a inversa de $D(p^2)$ é

$$D^{-1}(p^2) = p^2 + M^2 - \Pi(p^2). \tag{189}$$

como é esperado, já que a nível árvore $D(p^2) = \frac{1}{p^2 + M^2}$. Não é difícil de ver que a correção a 1-loop é

$$\overline{M}_1^2 = \Pi_1(-M^2). \quad (194)$$

Portanto, até 1-loop, temos que o polo calculado pelo método perturbativo é

$$\overline{M}^2 = -M^2 + \hbar \Pi_1(-M^2). \quad (195)$$

Se for utilizada apenas uma aproximação de $\Pi(p^2)$ até ordem \hbar^n em (190) e a equação for resolvida sem levar em consideração a ordem perturbativa, o polo obtido não será necessariamente igual a (192). Essas diferenças podem ser ilustradas através do exemplo simples em que $\Pi_1(p^2) = \alpha \frac{p^4}{M^2}$, sendo α a constante de acoplamento. Substituindo na Eq.(190) e já considerando $\hbar = 1$, obtemos

$$\overline{M}^2 + M^2 - \alpha \frac{\overline{M}^4}{M^2} = 0. \quad (196)$$

Essa é uma equação do segundo grau em \overline{M}^2 , em que uma das soluções é

$$\overline{M}^2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2\alpha} M^2. \quad (197)$$

Utilizando o método perturbativo descrito anteriormente, temos

$$\begin{aligned} \overline{M}_0^2 &= -M^2, \\ \overline{M}_1^2 &= \alpha M^2. \end{aligned} \quad (198)$$

Portanto, segue o resultado perturbativo

$$\overline{M}^2 = -M^2 + \alpha M^2, \quad (199)$$

que difere de (197). Agora, a diferença entre as duas formas de se calcular o polo ficam evidentes. Numericamente, os resultados podem ser semelhantes, especialmente se considerarmos valores pequenos para as constantes de acoplamento. Nesse exemplo, se $\alpha \ll 1$, podemos tomar a expansão em Taylor de $\sqrt{1 + 4\alpha}$ até ordem α^2 em (197), o que leva a

$$\overline{M}^2 = -M^2 + \alpha M^2 + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (200)$$

coincidindo com o resultado (199) da teoria de perturbações até a primeira ordem em α . Se quisermos verificar propriedades analíticas dos polos que são verdadeiras a cada loop, como a independência em relação ao parâmetro de calibre ξ , como veremos a seguir, devemos utilizar (192) e a teoria de perturbações. No caso do fóton, isso não é relevante, pois $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ já é independente do calibre. No entanto, no caso da função $\langle h(p) h(-p) \rangle$,

que é dependente do calibre, esses detalhes são fundamentais.

Utilizando (195) podemos calcular o polo da função de 2-pontos conexa do fóton, que denotaremos por \bar{m}^2 . Nesse caso, $\Pi_1(p^2) = \Pi^T(p^2)$, que é dada pela Eq. (159). O resultado obtido é

$$\begin{aligned} \bar{m}^2 = & -m^2 + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{m_h^4 - 4m^2m_h^2 + 12m^4}{3m^2} K(m^2, m_h^2, -m^2, \mu^2) \right. \\ & \left. - 2m_h^2 - 2\frac{m^4}{m_h^2} - \frac{2}{9}(3m_h^2 + 2m^2) + \frac{-m_h^4 + m^2m_h^2 - 2m^4}{3m^2} \right\}. \end{aligned} \quad (201)$$

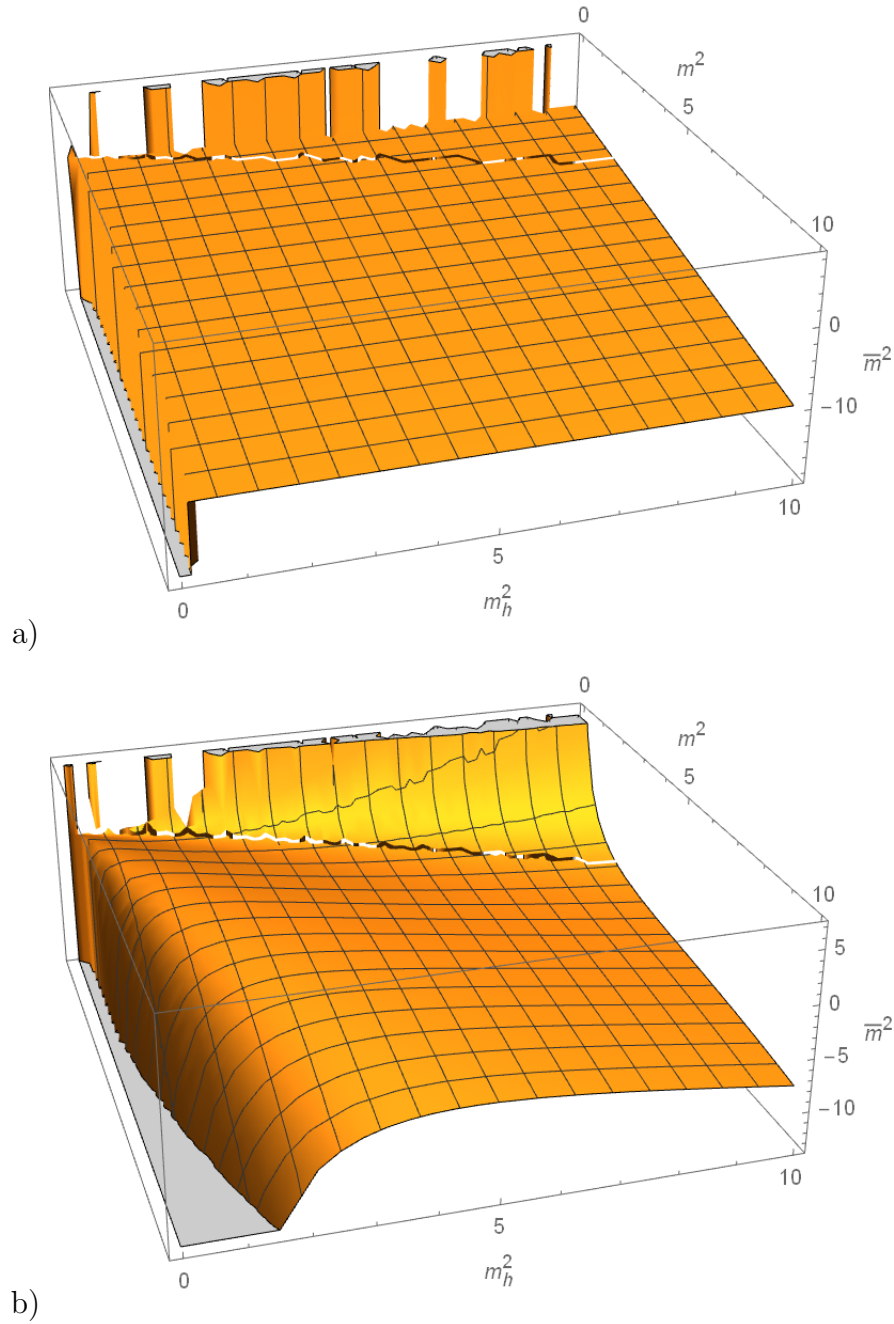
A função $K(m^2, m_h^2, -m^2, \mu^2)$ é real, já que $m^2 > 0$ e $m_h^2 > 0$. Para ver isso, basta notarmos que o argumento do logaritmo em (157) é positivo no intervalo de integração. Isso implica que \bar{m}^2 , também, é real. Nas Figuras 6-a e 6-b são mostrados os gráficos de \bar{m}^2 em função de m^2 e m_h^2 para os regimes de acoplamento fraco ($e = \frac{1}{10}$) e acoplamento forte ($e = 5$), respectivamente. Para efeito de comparação, na Figura 7-a e 7-b são mostrados também, em verde, os gráficos de \bar{m}^2 obtidos através da solução numérica da Eq. (190). Pode-se notar que não há muita diferença entre os dois métodos, especialmente no regime de acoplamento fraco.

De acordo com as identidades de Nielsen, o polo da função de 2-pontos conexa do campo de Higgs, que denotamos por \bar{m}_h^2 , é independente do parâmetro de calibre ξ . De fato, o cálculo até 1-loop mostra isso. Utilizando (195) e $\Pi_h(p^2) = \Pi_1(p^2)$, dada pela Eq. (186), temos

$$\begin{aligned} \bar{m}_h^2 = & -m_h^2 + \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \lambda m_h^2 \left[-3 + 3 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} - \frac{9}{2} K(m_h^2, m_h^2, -m_h^2, \mu^2) \right] \right. \\ & + e^2 (6m^2 + m_h^2) \left(-1 + \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) \\ & \left. - e^2 \left(\frac{m_h^4}{2m^2} + 6m^2 - 2m_h^2 \right) K(m^2, m^2, -m_h^2, \mu^2) \right\}. \end{aligned} \quad (202)$$

Note que, a expressão (202) não contém ξ . Nas Figuras 8-a e 8-b são mostrados os gráficos de \bar{m}_h^2 em função de m^2 e m_h^2 para $e = \frac{1}{10}$ e $e = 5$, respectivamente. Já nas Figuras 9-a e 9-b são comparados os gráficos de \bar{m}_h^2 obtidos através do método perturbativo (em amarelo) e da solução numérica de (190) (em verde). Podemos notar que a diferença entre os dois métodos aumenta à medida que o acoplamento cresce, em concordância com a análise feita acima. Na Figura 10 são mostrados os gráficos dos polos obtidos através da solução numérica para $\xi = 2$ (em amarelo) e $\xi = 100$ (em verde), em um regime de acoplamento intermediário caracterizado por $e = 1$. Analisando as imagens da Figura 10, claramente, nota-se que o método numérico introduz uma dependência do polo em relação ao parâmetro de calibre, diferentemente do que acontece no método perturbativo.

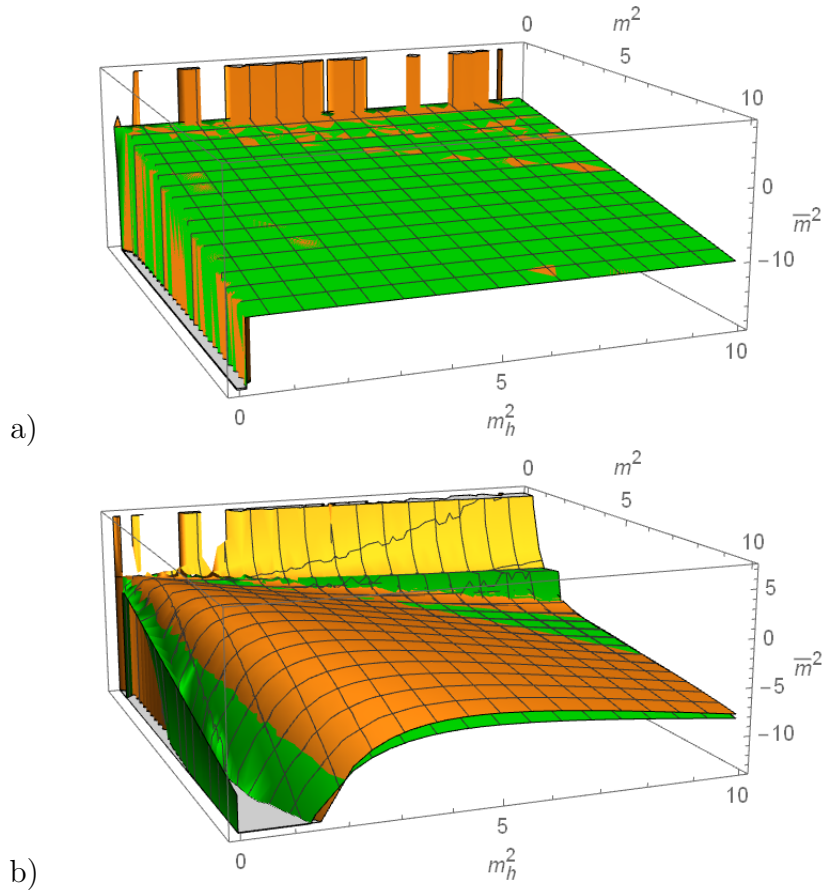
Figura 6 - Polo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ obtido pelo método perturbativo.



Legenda: Polo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$, \bar{m}^2 , obtido pelo método perturbativo, em função das massas m^2 e m_h^2 , que são dadas em GeV^2 . Em a) temos o acoplamento fraco, $e = \frac{1}{10}$, enquanto que em b) temos o acoplamento forte, $e = 5$. Em todos os casos, foi escolhido $\mu = 10 \text{ GeV}$.

Fonte: O autor, 2022.

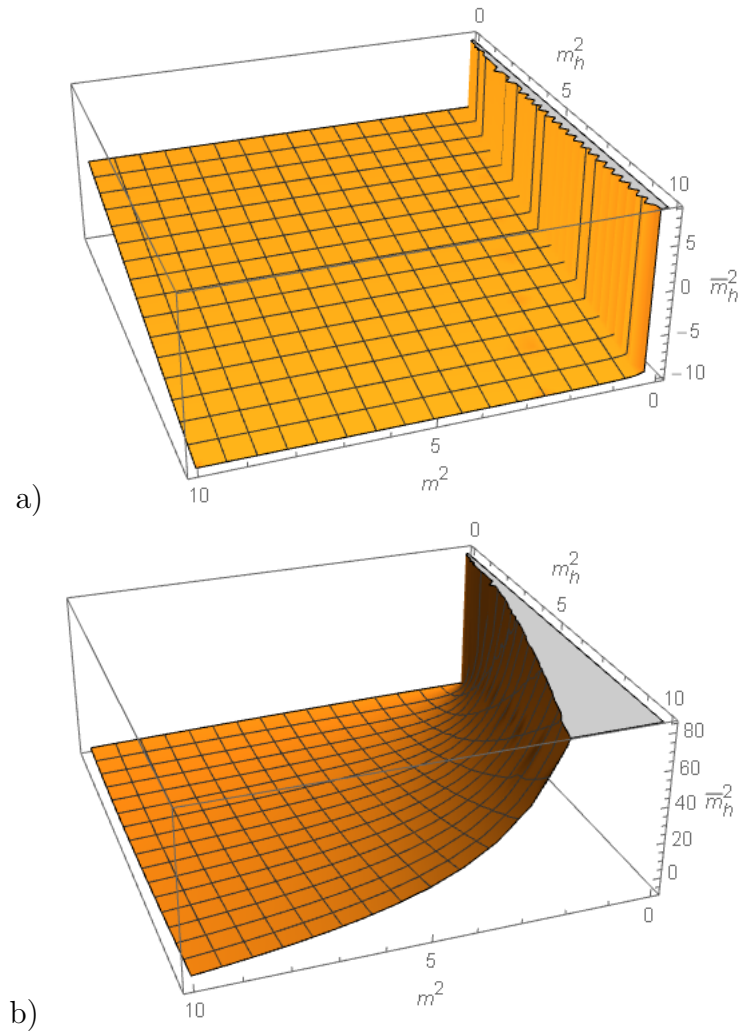
Figura 7 - Polo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ obtido por métodos diferentes.



Legenda: Em amarelo o gráfico do polo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ obtido pelo método perturbativo, enquanto que em verde o gráfico do pólo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ obtido através da solução numérica da Eq. (190). Em a) temos o acoplamento fraco, $e = \frac{1}{10}$, enquanto que em b) temos o acoplamento forte, $e = 5$. m^2 e m_h^2 são dadas em GeV^2 . Em todos os casos, foi escolhido $\mu = 10 \text{ GeV}$.

Fonte: O autor, 2022

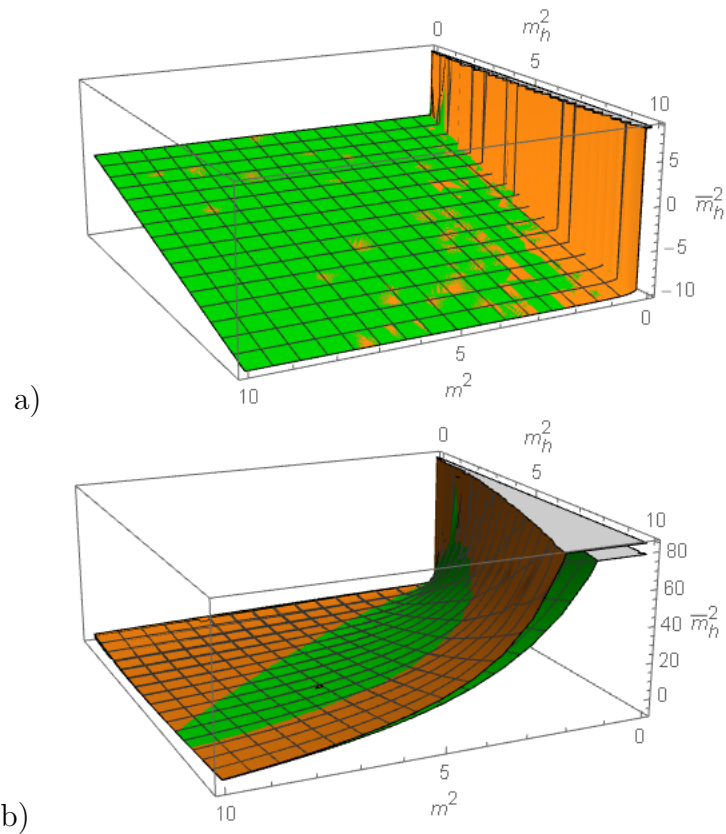
Figura 8 - Polo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$, \bar{m}_h^2 obtido pelo método perturbativo.



Legenda: Polo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$, \bar{m}_h^2 , em função das massas. Em a) temos o acoplamento fraco, $e = \frac{1}{10}$, enquanto que em b) temos o acoplamento forte, $e = 5$. m^2 e m_h^2 são dadas em GeV^2 . Em todos os casos, foi escolhido $\mu = 10 \text{ GeV}$.

Fonte: O autor, 2022.

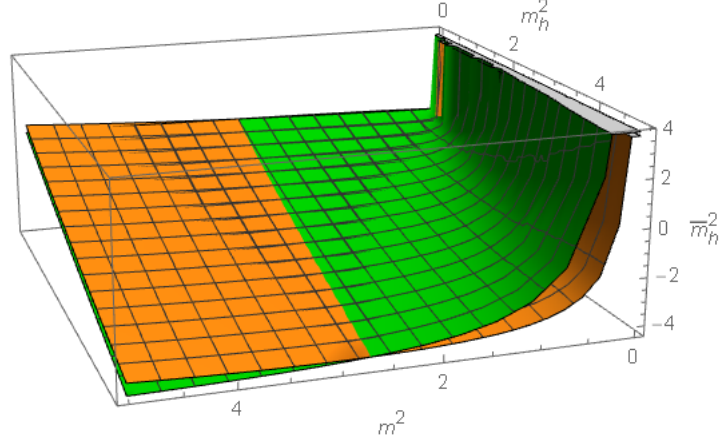
Figura 9 - Polo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$, \bar{m}_h^2 obtido por métodos diferentes.



Legenda: Em amarelo o gráfico de \bar{m}_h^2 obtido pelo método perturbativo, enquanto que, em verde o gráfico de \bar{m}_h^2 obtido através da solução numérica da Eq. (190). Em a) temos o acoplamento fraco, $e = \frac{1}{10}$, enquanto que em b) temos o acoplamento forte, $e = 5$. m^2 e m_h^2 são dadas em GeV^2 . Em todos os casos, foi escolhido $\mu = 10 \text{ GeV}$.

Fonte: O autor, 2022

Figura 10 - Dependência do polo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$ obtido pelo método numérico.



Legenda: Gráficos de \bar{m}_h^2 obtidos através da solução numérica da Eq. (190) para $\xi = 2$ (em amarelo) e $\xi = 100$ (em verde), em um regime de acoplamento intermediário $e = 1$. m^2 e m_h^2 são dadas em GeV^2 . Em todos os casos, foi escolhido $\mu = 10 \text{ GeV}$.

Fonte: O autor, 2022.

3.3.2 O resíduo

Para obtermos o resíduo, que denotaremos por R , podemos reescrever $D(p^2)$ da seguinte forma:

$$D(p^2) = \frac{1}{p^2 - \bar{M}^2 - \tilde{\Pi}(p^2)}, \quad (203)$$

em que $\tilde{\Pi}(p^2) = \Pi(p^2) - \Pi(-\bar{M}^2)$ e \bar{M}^2 é dado pela Eq. (190). Expandindo $\tilde{\Pi}(p^2)$ em torno de $p^2 = \bar{M}^2 = -M^2 + \mathcal{O}(\hbar)$, até 1-loop, obtemos a seguinte expressão para o resíduo

$$\begin{aligned} R &= \lim_{p^2 \rightarrow \bar{M}^2} (p^2 - \bar{M}^2) D(p^2) \\ &= \frac{1}{1 - \hbar \left. \frac{d\Pi_1(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2 = -M^2}} \\ &= 1 + \hbar \left. \frac{d\Pi_1(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2 = -M^2} + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned} \quad (204)$$

Como $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ é independente do parâmetro de calibre, o resíduo em $p^2 = \bar{m}^2$, denotado por R_A , também é independente do parâmetro de calibre. As Figuras 11-a e 11-b mostram os gráficos de R_A em função de m^2 e m_h^2 para $e = \frac{1}{10}$ e $e = 5$, respectivamente. Do ponto de vista do cálculo de funções complexas, para que faça sentido falarmos em série de Laurent e em resíduo, o que calculamos acima e chamamos de polo

de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ não deve estar sobre um corte da função $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$. Como será discutido com mais detalhes a seguir, a função $\Pi^T(p^2)$ possui um corte no semi-eixo real negativo que começa em $-(m^2 + m_h^2)^2$ e se estende até $-\infty$. Nas Figuras 12-a e 12-b são mostrados os gráficos do ponto de corte (em verde) e do polo (em amarelo) em função de m^2 e m_h^2 . Nas regiões onde o polo está sobre o corte, $-(m^2 + m_h^2)^2 > \bar{m}^2$, o que graficamente significa que a parte em verde está sobre a parte em amarelo. Para $e = \frac{1}{10}$, isso acontece apenas se m_h^2 for muito pequeno, da ordem de 10^{-12}GeV^2 , mas nessa região de valores não há como ter garantias de que o problema não seja numérico.

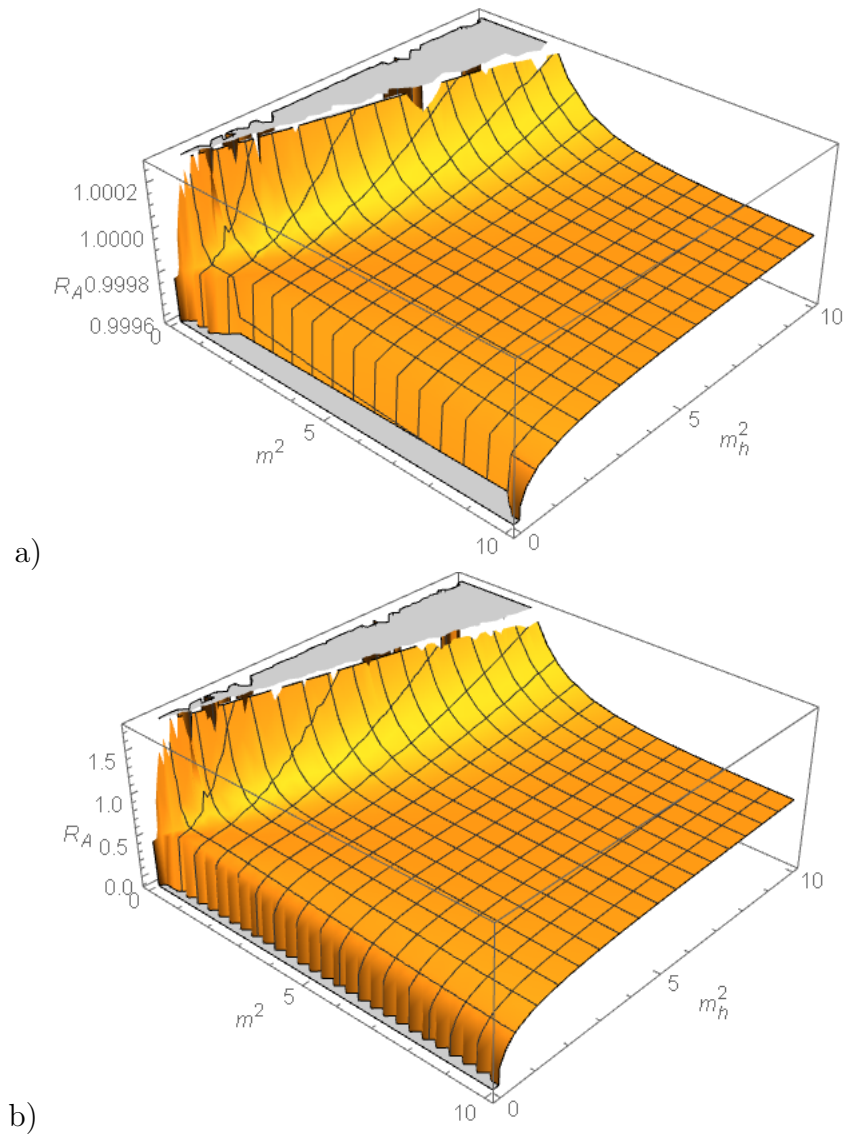
O resíduo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$ em $p^2 = \bar{m}_h^2$, que denotamos por R_h , ao contrário de \bar{m}_h^2 , é dependente de ξ , como mostram as Figuras 13-a e 13-b. As Figuras 13-a e 13-b mostram os gráficos para os valores $\xi = 3$ (em verde), $\xi = 4$ (em amarelo) e $\xi = 6$ (em azul), nos dois regimes de acoplamento, $e = \frac{1}{10}$ e $e = 5$, respectivamente. Assim como $\Pi_A^T(p^2)$, $\Pi_h(p^2)$ também possui um corte de descontinuidade no semi-eixo real negativo que começa em $p^2 = \max\{-4m^2, -4\xi m^2, -4m_h^2\}$ e se estende até $-\infty$. As Figuras 14-a e 14-b mostram o ponto de corte (em verde) e o polo (em amarelo) em função de m^2 e m_h^2 para $\xi > 1$ nos casos de $e = \frac{1}{10}$ e $e = 5$, respectivamente. Se o polo está sobre o corte, então o gráfico em verde está sobre o gráfico em amarelo. Podemos notar que, à medida que a constante de acoplamento e aumenta, a região de valores aceitáveis para m^2 e m_h^2 diminui. Embora aqui não seja mostrado através de gráficos, se $\xi < 1$, a região de parâmetros aceitáveis diminui a medida que ξ diminui. De fato, se tomarmos o caso em que o corte começa em $-4\xi m^2$, como o polo é independente de ξ , ξ pequeno exige m^2 grande para que o polo se mantenha fora do corte. Diferentemente do que encontramos no caso de $\Pi_A^T(p^2)$, no caso de $\Pi_h(p^2)$ não podemos atribuir total responsabilidade às imprecisões numéricas por esse mau comportamento do ponto de corte. A causa principal talvez seja a dependência de calibre da função $\langle h(p) h(-p) \rangle$. No entanto, devemos mencionar que, nas Figuras 13-a e 13-b são mostrados todos os casos em que $\xi > 1$, o que inclui o calibre unitário $\xi \rightarrow \infty$. Mesmo nesse calibre, que é entendido como sendo o “calibre físico”, existe uma região apreciável onde o pólo está sobre o ponto de corte.

3.3.3 A representação espectral de Källén-Lehmann

A função $D(p^2)$, além de polos, pode possuir descontinuidades no plano complexo de p^2 , que são caracterizadas por cortes. Nos casos que estamos considerando, a fonte desses cortes é a função $K(m_1^2, m_2^2, p^2, \mu)$ que aparece nas expressões de $\Pi_{\mu\nu}(p)$ e $\Pi_h(p^2)$, veja (159) e (186). Essa função possui um corte no semi-eixo real negativo de p^2 que começa em $-(m_1 + m_2)^2$ e se estende até $-\infty$.

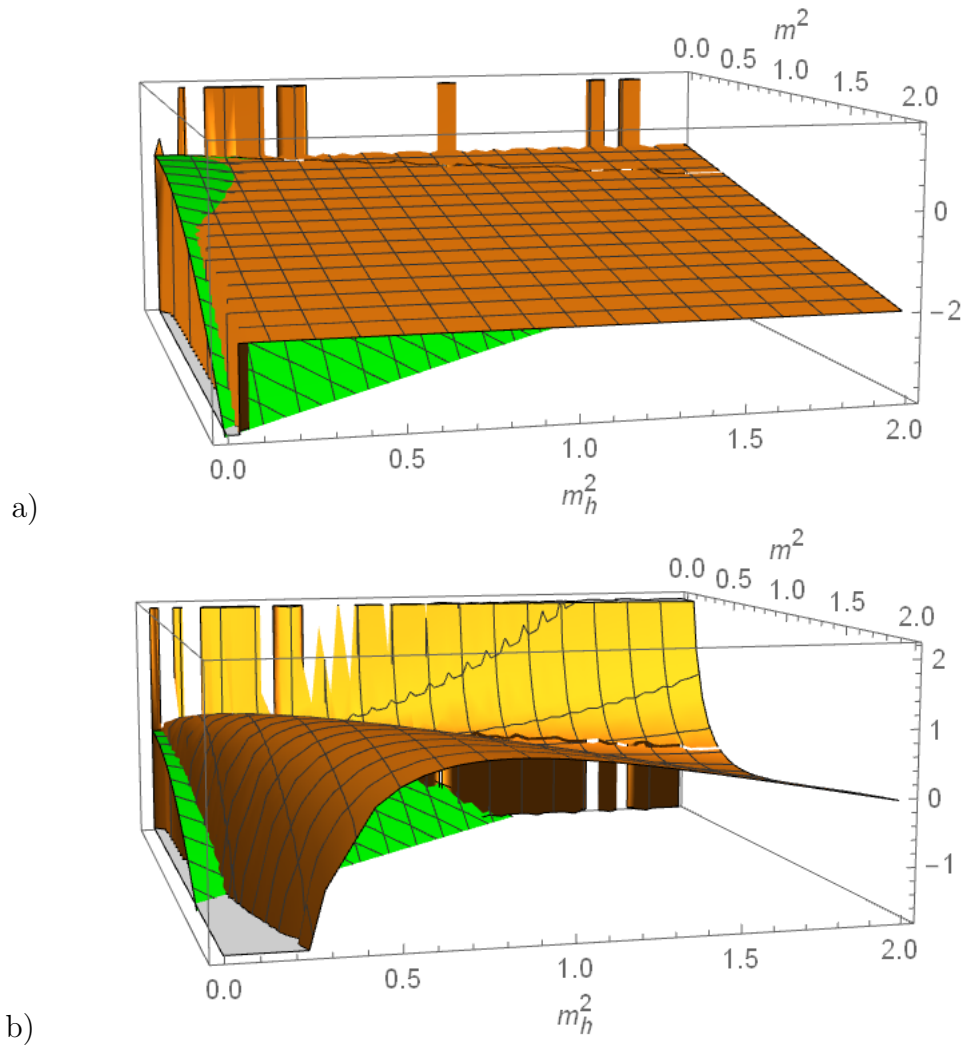
A *representação espectral de Källén-Lehmann* de $D(p^2)$, que chamaremos sim-

Figura 11 - Resíduo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$.



Legenda: Resíduo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ em função de m^2 e m_h^2 , que são dadas em GeV^2 . Em a) temos, enquanto que, em b) temos $e = \frac{1}{10}$ b) $e = 5$. Em todos os casos $\mu = 10 \text{ GeV}$.
 Fonte: O autor, 2022.

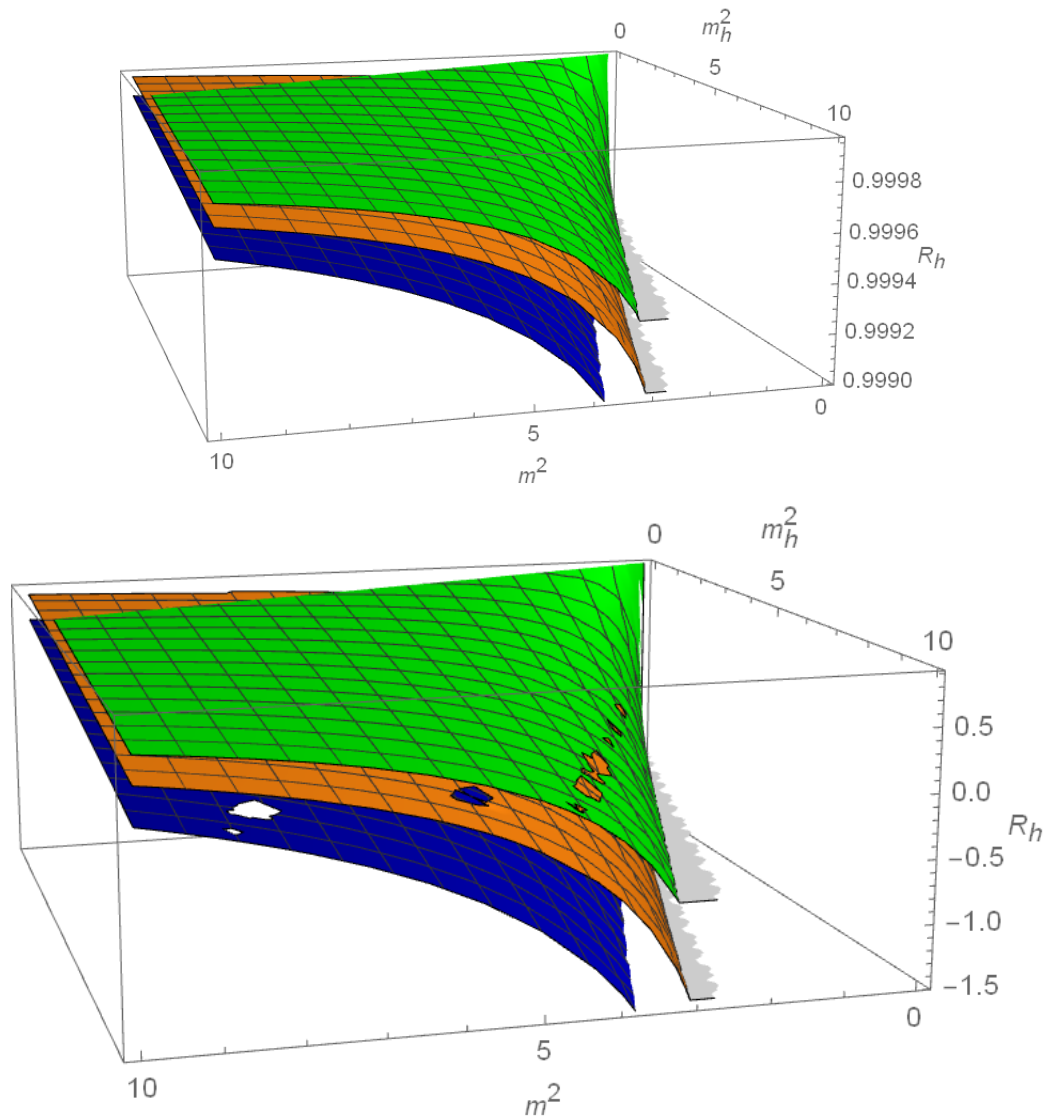
Figura 12 - Polo (em amarelo) e o ponto de corte (em verde) de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$.



Legenda: Polo (em amarelo) e o ponto de corte (em verde) de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ em função das massas m^2 e m_h^2 , que são dadas em GeV^2 . Em a) temos $e = \frac{1}{10}$, enquanto que, em b) temos $e = 5$. Em todos os casos $\mu = 10 \text{ GeV}$.

Fonte: O autor, 2022.

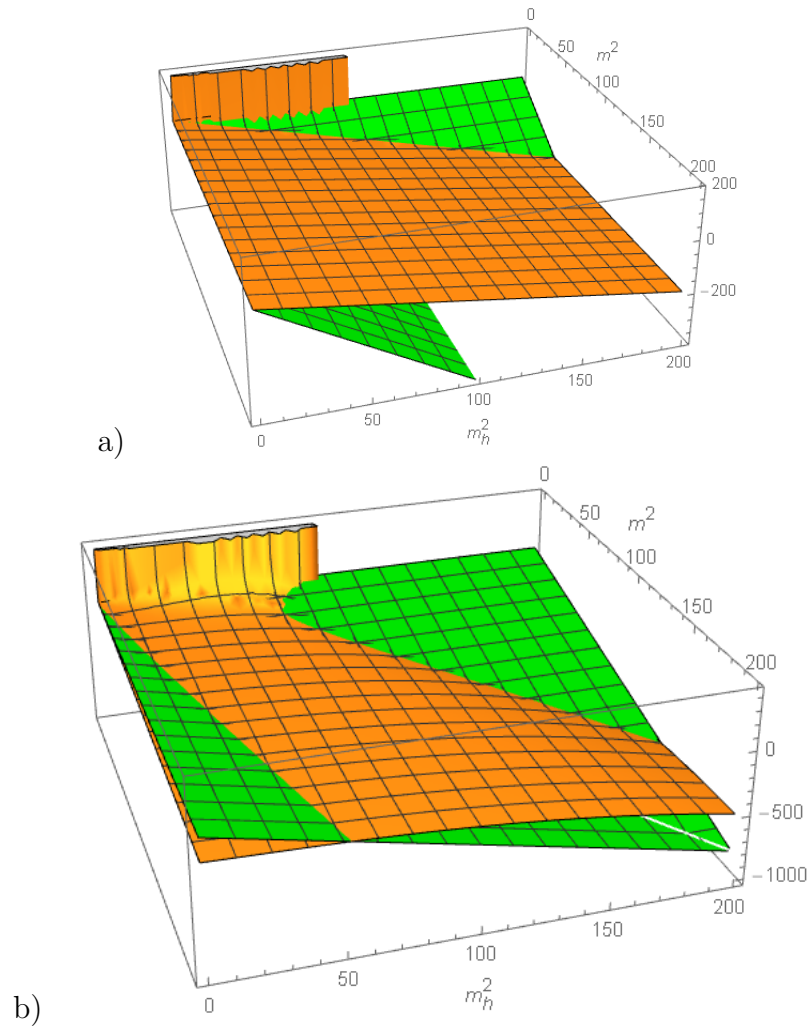
Figura 13 - Resíduo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$.



Legenda: Resíduo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$ em $p^2 = \bar{m}_h^2$, R_h , em função de m^2 e m_h^2 , que são ambas dadas em GeV^2 . Em a) temos $e = \frac{1}{10}$, enquanto que em b) $e = 5$. Em todos os casos $\mu = 100\text{GeV}$.

Fonte: O autor, 2022.

Figura 14 - Polo e o ponto de corte de $\langle h(p) h(-p) \rangle$.



Legenda: Polo (em amarelo) e o ponto de corte (em verde) de $\langle h(p) h(-p) \rangle$ em função das massas m^2 e m_h^2 , que são dadas em GeV^2 . Em a) temos $e = \frac{1}{10}$, enquanto que em b) temos $e = 5$. Em todos os casos $\mu = 10\text{GeV}$ e $\xi > 1$.

Fonte: O autor, 2022.

plamente de *densidade espectral*, denotada por $\rho(t)$, é definida pela integral

$$D(p^2) = \int_0^\infty dt \frac{\rho(t)}{p^2 + t}. \quad (205)$$

Como

$$D(p^2) = \frac{R}{p^2 - \overline{M}^2} + \tilde{D}(p^2), \quad (206)$$

em que $\tilde{D}(p^2)$ é analítica em $p^2 = \overline{M}^2$, comparando as duas expressões, temos

$$\rho(t) = R \delta(p^2 + \overline{M}^2) + \tilde{\rho}(t), \quad (207)$$

sendo $\tilde{\rho}(t)$ definida por

$$\tilde{D}(p^2) = \int_0^\infty dt \frac{\tilde{\rho}(t)}{p^2 + t}. \quad (208)$$

Expandindo R e \overline{M}^2 até 1-loop em (206), obtemos

$$\tilde{D}(p^2) = R \frac{\left(\Pi_1(p^2) - \Pi_1(-M^2) - (p^2 - \overline{M}^2) \left. \frac{d\Pi_1}{dp^2} \right|_{p^2=-M^2} \right)}{(p^2 - \overline{M}^2)^2}. \quad (209)$$

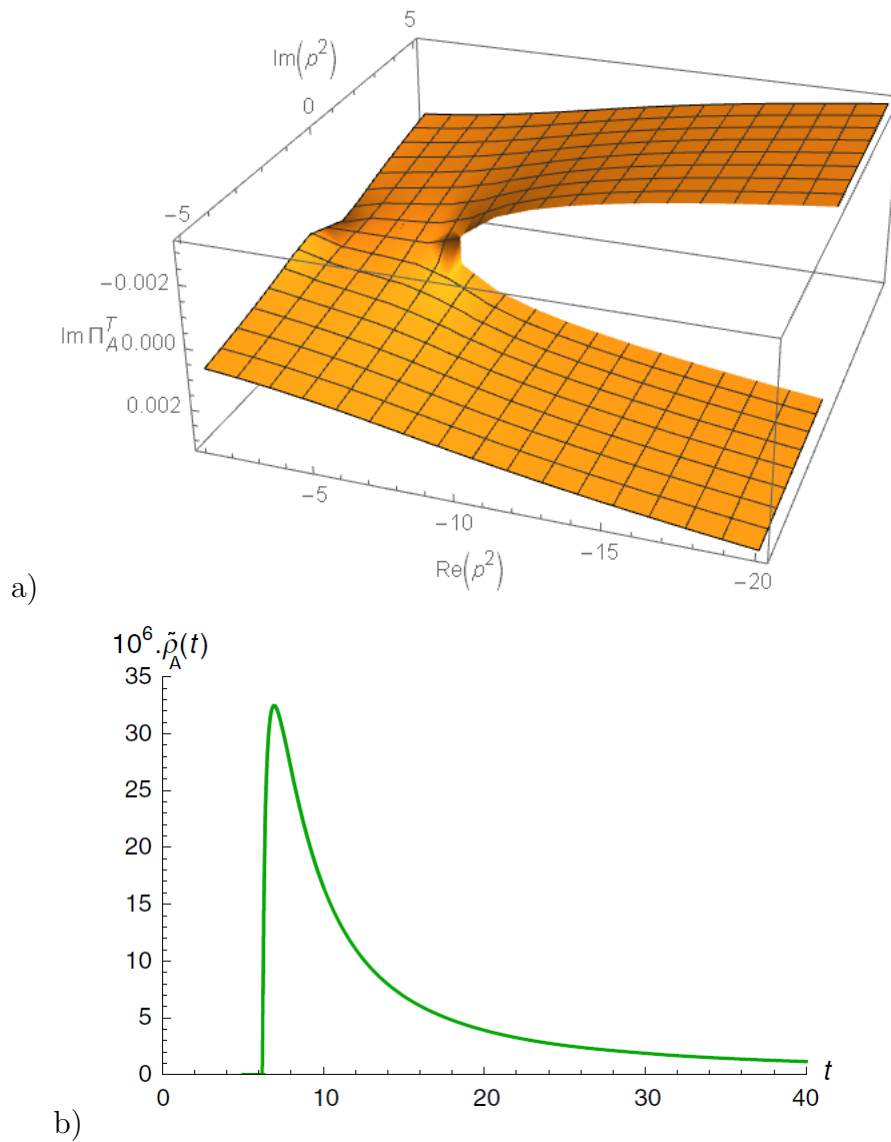
Usando a fórmula de Cauchy em (208), encontramos que

$$\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\tilde{D}(-t - i\epsilon) - \tilde{D}(-t + i\epsilon) \right). \quad (210)$$

Analisemos, primeiramente, a densidade espectral de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$, que denotaremos por $\rho_A(t)$. A parte imaginária da função $\Pi^T(p^2)$, $\text{Im} \Pi_A^T$, é mostrado na Figura 15-a, para os valores $e = \frac{1}{10}$, $\mu = 10 \text{ GeV}$, $m = 2 \text{ GeV}$ e $m_h = \frac{1}{2} \text{ GeV}$. É possível notar que existe uma descontinuidade em $\Pi^T(p^2)$ que resultará, de acordo com as Eqs. (209) e (210), em $\tilde{\rho}_A(t) \neq 0$. O polo e o ponto de corte de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ nesse caso valem $\overline{m}^2 = -4,00396 \text{ GeV}^2$ e $-(m + m_h)^2 = -6,25 \text{ GeV}^2$, respectivamente. O gráfico da densidade espectral é mostrado na Figura 15-b. Nota-se que, a densidade espectral é positiva, começando exatamente no ponto de corte, $t = 6,25 \text{ GeV}$, que corresponde a um “threshold”¹⁶ para o decaimento de um bóson vetorial em um bóson vetorial mais um bóson de Higgs. A positividade da função espectral de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ de certa forma é esperada, pois $A_\mu^T(x)$ é invariante de BRST.

¹⁶ Chamamos de “threshold” a quantidade de energia cinética mínima necessária que as partículas devem ter para que um certo processo possa acontecer.

Figura 15 - Densidade espectral de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$.



Legenda: a) O gráfico de $\text{Im } \Pi^T(p^2)$ no plano complexo de p^2 ; b) A função espectral $\tilde{\rho}_A(t)$ em função de t . p^2 e t são dados em GeV^2 .

Fonte: DUDAL, 2019, f. 11.

Vejam os contrastes entre $\rho_A(t)$ e a densidade espectral de $\langle h(p)h(-p) \rangle$, que denotamos por $\rho_h(t)$. Para os mesmos valores dos parâmetros, $e = \frac{1}{10}$, $\mu = 10 \text{ GeV}$, $m = 2 \text{ GeV}$ e $m_h = \frac{1}{2} \text{ GeV}$, o polo de $\langle h(p)h(-p) \rangle$ vale $\bar{m}_h^2 = -0,245332 \text{ GeV}^2$. Portanto, pelo que foi discutido na Subseção 3.3.2, se $\xi > 0,016$ o polo estará fora do corte. As Figuras 16-a, 16-b e 16-c mostram os gráficos da parte imaginária da função $\Pi_h(p^2)$ para $\xi = 2$, $\xi = 3$ e $\xi = 4$, respectivamente. No caso em que $\xi = 2$, a Figura 16-a mostra que a descontinuidade de $\text{Im} \Pi_h(p^2)$ ao longo do corte muda de sinal. Como consequência disso, a densidade espectral para $\xi = 2$ deve ter valores negativos. O mesmo não acontece para $\xi = 3$ ou $\xi = 4$, veja as Figuras 16-b e 16-c. As densidades espectrais são mostradas na Figura 16-d, como podemos ver, no intervalo mostrado, que vai de $t = 0$ até $t = 80 \text{ GeV}^2$, para $\xi = 2$ encontramos violação da positividade da densidade espectral, enquanto que, para $\xi = 3$ e $\xi = 4$ a densidade espectral é positiva. Em (DUDAL et al., 2019) é mostrado que, para esses valores dos parâmetros (e, μ, m^2, m_h^2) , se $\xi < 3$, então $\rho_h(t)$ viola a positividade. Esse resultado pode ser demonstrado a partir do comportamento ultravioleta da função $\langle h(p)h(-p) \rangle$. Nesse regime, temos o seguinte comportamento

$$\langle h(p)h(-p) \rangle = \frac{\mathcal{Z}}{p^2 \ln \frac{p^2}{\mu^2}}. \quad (211)$$

Se $\mathcal{Z} > 0$, então $\rho_h(t)$ viola a positividade. De fato, fazendo a expansão, encontramos que

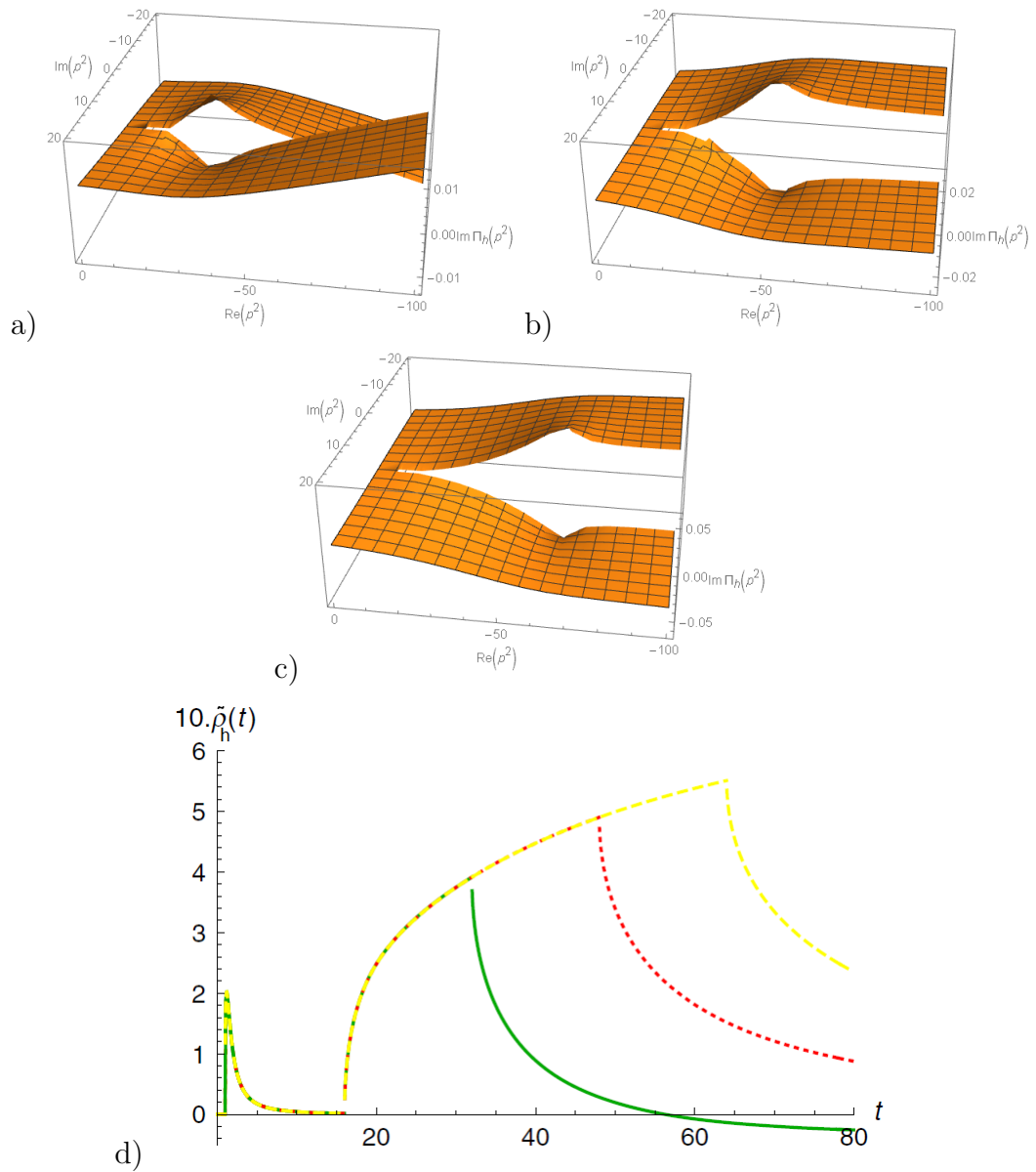
$$\langle h(p)h(-p) \rangle^{-1} \rightarrow (3 - \xi) \frac{p^2 \ln p^2}{1600\pi^2}, \quad (212)$$

para $p^2 \rightarrow \infty$. Tem dito isso, precisamos ressaltar que os valores de $\langle h(p)h(-p) \rangle$ nesse regime não são confiáveis sem que se leve em consideração o grupo de renormalização. Vale lembrar também que esta teoria não possui liberdade assintótica, o que compromete ainda mais a análise.

3.4 Comentários adicionais

A análise feita acima mostra claramente as dificuldades de se interpretar uma função de Green dependente do calibre, que no caso é $\langle h(p)h(-p) \rangle$. Embora o polo dessa função seja independente do parâmetro de calibre e tenha significado físico, temos que lidar com o problema causado por “thresholds” não físicos que dependem de ξ . Como foi mostrado, dependendo do valor de ξ , o polo se localiza sobre um corte. Levando a sério esse fato, temos então uma limitação para a utilização do calibre de Landau, por exemplo, que é caracterizado por $\xi = 0$, pois nesse caso o ponto de corte começa em $p^2 = 0$. Se não bastasse a dependência do calibre, a densidade espectral $\rho_h(t)$ não é

Figura 16 - Densidade espectral de $\langle h(p) h(-p) \rangle$.



Legenda: Em a), b) e c) são mostrados os gráficos de $\text{Im} \Pi_h(p^2)$ no plano complexo de p^2 para $\xi = 2$, $\xi = 3$ e $\xi = 4$, respectivamente. Em d) são mostradas as densidades espectrais $\tilde{\rho}_A(t)$ em função de t para os valores de $\xi = 2$ (em verde), $\xi = 3$ (em vermelho) e $\xi = 4$ (em amarelo). p^2 e t são dados em GeV^2 .

Fonte: O autor, 2022.

positiva definida para todos os valores de ξ . A propósito, é justamente o termo que produz um “threshold” em $t = 4\xi m^2$ que é responsável por essa violação de positividade de $\rho_h(t)$. Uma estratégia para evitar que esse termo contribua para $\rho_h(t)$ é tomar $\xi \rightarrow \infty$, que formalmente corresponde ao calibre unitário. No entanto, em geral, esse limite não está bem definido para quantidades dependentes do calibre.

A parte transversal de $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$, diferentemente de $\langle h(p) h(-p) \rangle$, é independente do parâmetro de calibre, conseqüentemente, o polo, o resíduo e a função espectral também são. Além disso, não encontramos nenhuma patologia nessas quantidades, como era o esperado, já que, dentre outras coisas, A_μ^T é invariante de BRST e o modelo de Higgs é unitário. No próximo capítulo, são analisadas as funções de Green de outros operadores invariantes de BRST existentes no modelo de Higgs $U(1)$. Essa análise deixará ainda mais evidente as vantagens conceituais de se trabalhar com quantidades invariantes de BRST.

Para finalizar este capítulo, gostaríamos de mencionar o estudo que fizemos em (DUDAL et al., 2019), que ilustra a importância do operador de BRST, s , ser nilpotente. A importância da nilpotência do operador de BRST para a unitariedade de uma teoria já foi mostrada no trabalho de (KUGO; OJIMA, 1979). No trabalho (DUDAL et al., 2019) é estudado um modelo do tipo Curci-Ferrari (CURCI; FERRARI, 1976), caracterizado pela ação da QED escalar no calibre linear covariante com um termo de massa $\frac{m^2}{2} A_\mu A_\mu$. Esse termo de massa quebra a simetria de BRST de uma maneira “soft”¹⁷, de modo que a ação ainda é invariante pelo operador de BRST modificado s_m , que não é nilpotente, ou seja, $s_m^2 \neq 0$. Nesse modelo existe o operador $\frac{b^2}{2} + m^2 \bar{c}c$, que é invariante por s_m . Foi mostrado em (DUDAL et al., 2019) que a densidade espectral da função de Green de 2-pontos desse operador viola a positividade. Isso é algo esperado, já que essa teoria não é unitária, como é discutido nos trabalhos de (OJIMA, 1982) e (BOER et al., 1996).

¹⁷ “Soft” é uma palavra do inglês cuja tradução é *suave*.

4 OPERADORES INVARIANTES DE BRST NO MODELO DE HIGGS

$U(1)$

Neste capítulo são calculadas e analisadas as funções de Green de 2-pontos dos operadores compostos invariantes BRST $O(x)$ e $V_\mu(x)$. Na Seção 4.1 é feita uma introdução a respeito do assunto. Na Seção 4.2 são apresentados os operadores invariantes de BRST $O(x)$ e $V_\mu(x)$, enquanto que, nas Seções 4.3 e 4.4 são mostrados os cálculos explícitos dos diagramas de Feynman até 1-loop que contribuem para as funções $\langle O(p)O(-p) \rangle$ e $\langle V_\mu(p)V_\nu(-p) \rangle$. Os polos e as densidades espectrais dessas funções são analisadas na Seção 4.5. O capítulo é concluído com a Seção 4.6, onde é feita uma discussão geral a respeito dos principais resultados. Este capítulo trata dos resultados que deram origem à publicação do trabalho (DUDAL et al., 2020).

4.1 Introdução

No capítulo anterior foram mostradas as diferenças entre a parte transversal da função $\langle A_\mu(p)A_\nu(-p) \rangle$, que é independente do calibre, e $\langle h(p)h(-p) \rangle$, que depende explicitamente do parâmetro de calibre ξ . Nos dois casos, os polos são independentes do parâmetro de calibre, como mostram as identidades de Nielsen. Como os polos são também quantidades invariantes pelo grupo de renormalização, eles são candidatos a observáveis físicos. De fato, os polos correspondem às massas físicas das partículas. Em relação às densidades espectrais, o cenário é um pouco mais complicado. Ao contrário da densidade espectral de $\langle A(p)A(-p) \rangle^T$, a densidade espectral de $\langle h(p)h(-p) \rangle$ é dependente do parâmetro de calibre e, além disso, não é positiva definida para todos os valores de ξ . Isso faz com que a interpretação tradicional que é dada à densidade espectral, que podem ser encontrada em (PESKIN; SCHROEDER, 1995; WEINBERG, 1995), não seja possível de ser aplicada ao caso de $\langle h(p)h(-p) \rangle$.

Tendo em vista os resultados obtidos para $\langle A(p)A(-p) \rangle^T$, podemos pensar em uma alternativa invariante de BRST ao campo $h(x)$ e as suas funções de correlação. O ideal seria que essa alternativa fosse capaz de reproduzir os mesmos resultados físicos obtidos com $h(x)$ (mesmos polos, seções de choque, etc), mas sem que as funções de correlação tivessem os problemas causados pela dependência do calibre. Como nos modelos de Higgs não abelianos A_μ^T não é invariante de BRST, podemos pensar em outros operadores invariantes de BRST associados a A_μ que existem no modelo de Higgs $U(1)$ e possuem análogos não abelianos. Em geral, não é difícil construirmos operadores invariantes de BRST. A maior dificuldade é verificar se esses operadores estão associado à algum estado de partícula específico. Para obtermos tal informação, geralmente, precisamos utilizar

alguma abordagem que vai além da teoria de perturbações. O modelo de Higgs é um dos poucos exemplos onde a abordagem perturbativa tradicional já é suficiente. De fato, no modelo de Higgs podemos encontrar operadores cujas funções de correlação, já a nível árvore, indicam a superposição com um estado de partícula. Um exemplo é o operador $\partial_\nu F_{\nu\mu} = \partial^2 A_\mu^T$, que, como foi analisado no capítulo anterior, a sua função de 2-pontos possui um polo na massa da partícula vetorial.

Na busca por operadores invariantes de BRST que sejam alternativas aos campos elementares, podemos utilizar como guias as análises feitas no Apêndice D a respeito da estrutura de polos das funções de Green. De maneira resumida, elas indicam que devemos procurar por operadores invariantes de BRST que tenham uma superposição com os campos elementares $h(x)$ e $A_\mu(x)$, além de possuírem os mesmos números quânticos desses campos. Nas próximas seções será apresentado e analisado um conjunto de operadores invariantes de BRST, e também de calibre, que possuem essas características.

4.2 Operadores Invariantes de BRST

4.2.1 Operador escalar

O operador escalar invariante de calibre mais simples que podemos construir é o operador composto

$$O(x) = vh(x) + \frac{1}{2} (h^2(x) + \rho^2(x)). \quad (213)$$

A invariância de calibre de $O(x)$ fica explícita se o reescrevermos em termos do campo $\varphi(x)$,

$$O(x) = \varphi^*(x)\varphi(x) - \frac{v^2}{2}. \quad (214)$$

A opção de $O(x)$ em vez de $\varphi^*(x)\varphi(x)$ é apenas por conveniência, para não termos que lidar com o termo constante invariante de calibre $\frac{v^2}{2}$. Como $O(x)$ não contém campos fantasmas, então a invariância por BRST é imediata. Como mostra a Eq. (213), $O(x)$ possui um termo linear em $h(x)$. Isso implica que a nível árvore¹⁸

$$\begin{aligned} \langle O(x)O(y) \rangle_{\text{tree}} &= v^2 \langle h(x)h(y) \rangle_{\text{tree}} \\ &= \frac{v^2}{p^2 + m_h^2}, \end{aligned} \quad (215)$$

¹⁸ Indicaremos as funções de Green a nível árvore com o subíndice “tree”, que significa justamente *árvore* em inglês.

pois os termos $h^2(x)$ e $\rho^2(x)$ contribuem somente a partir de 1-loop. Os polos de $\langle O(x)O(y) \rangle$ e $\langle h(x)h(y) \rangle$, ao menos nessa ordem, são os mesmos, estão localizados em $p^2 = -m_h^2$. Isso quer dizer que o operador $O(x)$ também possui uma superposição com um estado de partícula, nesse caso, do bóson de Higgs. O operador $O(x)$ possui dimensão de massa 2, essa é a menor dimensão em que podemos construir um operador local escalar, polinomial nos campos e em v , que é invariante de BRST. Podemos construir outros operadores escalares invariantes de BRST com dimensão maior mas esses objetos não contém nenhuma informação nova relevante em relação aos polos¹⁹.

4.2.2 Operador vetorial

O operador vetorial invariante de calibre $\partial_\nu F_{\nu\mu}$ possui dimensão de massa 3. Além dele, outro operador vetorial invariante de calibre com a mesma dimensão é o operador

$$\tilde{V}_\mu(x) = -i\varphi^*(x)D_\mu\varphi(x). \quad (216)$$

A invariância de calibre de $\tilde{V}_\mu(x)$ é explícita. O operador $\tilde{V}_\mu(x)$ pode ser reduzido à soma de dois outros operadores invariantes de calibre com propriedades diferentes em relação às transformações de conjugação de carga (125). Podemos escrevê-lo como

$$\tilde{V}_\mu(x) = V_\mu(x) - i\partial_\mu O(x), \quad (217)$$

em que

$$\begin{aligned} V_\mu &= e\varphi^*\varphi A_\mu - \frac{i}{2}\varphi^*\partial_\mu\varphi + \frac{i}{2}\varphi\partial_\mu\varphi^* \\ &= \frac{1}{2}[-\rho\partial_\mu h + (v+h)\partial_\mu\rho + eA_\mu(v^2 + 2vh + h^2 + \rho^2)]. \end{aligned} \quad (218)$$

A invariância de calibre do operador $\partial_\mu O(x)$ decorre de $O(x)$. Logo, $V_\mu(x)$, que é a diferença entre dois operadores invariantes de calibre, também é invariante de calibre. Em relação às transformações discretas (125), $\partial_\mu O(x)$ e $V_\mu(x)$ são par e ímpar, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} \partial_\mu O(x) &\rightarrow \partial_\mu O(x) \\ V_\mu(x) &\rightarrow -V_\mu(x). \end{aligned} \quad (219)$$

¹⁹ Analisando a cohomologia do operador s , é fácil de ver que entre os operadores escalares invariantes de BRST de dimensão $n > 2$ e par em relação à conjugação de carga, existe o operador escalar $v^{n-2}O(x)$, que, em termos de polos, é equivalente a $O(x)$.

Essas propriedades implicam, entre outras coisas, que $\langle V_\mu(x) (\partial_\nu O)(y) \rangle = 0$. Portanto, a renormalização da função de 2-pontos de $V_\mu(x)$ não envolve o operador $\partial_\mu O(x)$. Como veremos no Capítulo 5, a renormalização da função de 2-pontos de $V_\mu(x)$, inclui $\partial_\nu F_{\nu\mu}$, que também é ímpar, isto é, $\partial_\nu F_{\nu\mu} \rightarrow -\partial_\nu F_{\nu\mu}$ para uma conjugação de carga. A invariância de BRST de $V_\mu(x)$, também, é imediata, pois esse operador não contém campos fantasmas.

Devido à propriedade $\langle (\partial_\mu O)(x) \dots \rangle = \partial_\mu^x \langle O(x) \dots \rangle$, o operador $\partial_\mu O(x)$ contém as mesmas informações do operador $O(x)$. Portanto, o operador que consideramos é $V_\mu(x)$. De acordo com (218), esse operador possui uma parte linear nos campos, que é

$$V_\mu|_{\text{linear}} = \frac{1}{2} (v\partial_\mu\rho + ev^2 A_\mu), \quad (220)$$

o que resulta no seguinte resultado a nível árvore:

$$\begin{aligned} \langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle_{\text{tree}} &= \frac{1}{2} [v^2 \partial_\mu^x \partial_\nu^y \langle \rho(x) \rho(y) \rangle_{\text{tree}} + 2ev^3 \partial_\mu^x \langle \rho(x) A_\nu(y) \rangle_{\text{tree}} \\ &\quad + e^2 v^4 \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle_{\text{tree}}]. \end{aligned} \quad (221)$$

Passando (221) para o espaço dos momentos e usando os resultados para os propagadores, que são mostrados em (109) ou no Apêndice A, temos

$$\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle_{\text{tree}} = \frac{e^2 v^4}{4} \frac{1}{p^2 + m^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + v^2 \mathcal{L}_{\mu\nu}(p). \quad (222)$$

Note que (222) é independente do parâmetro de calibre ξ , o que está de acordo com o resultado fornecido pelas identidades de Nielsen. Além disso, o polo da parte transversal em $p^2 = -m^2$ e a parte longitudinal constante indicam que $V_\mu(x)$ deve estar associado ao fóton massivo. A seguir será mostrado que esse resultado é verdadeiro também a 1-loop. A demonstração algébrica de que esse resultado é verdadeiro a todas as ordens é apresentada no Capítulo 5.

4.2.3 Operadores a nível quântico

Como discutido na Seção 1.1, para estudarmos funções de Green dos operadores compostos $O(x)$ e $V_\mu(x)$, devemos introduzi-los na teoria acoplados à fontes externas, que neste caso denotaremos por $J(x)$ e $\Omega_\mu(x)$, respectivamente. Dessa forma, a ação de partida, Σ , é modificada para

$$\Sigma \rightarrow \Sigma + \int d^4x (J(x) O(x) + \Omega_\mu(x) V_\mu(x)). \quad (223)$$

Conseqüentemente, o funcional gerador das funções conexas, também, será modificado,

$$W [J^A, J^\rho, J^h, J^c, J^{\bar{c}}, J^b, H, R] \rightarrow W' [J_\mu^A, J^\rho, J^h, J^c, J^{\bar{c}}, J^b, H, R, J, \Omega]. \quad (224)$$

Assim, as funções de Green de 2-pontos conexas desses operadores são definidas como

$$\begin{aligned}\langle O(x) O(y) \rangle &= - \frac{\delta^2 W'}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{\mathcal{J}=0}, \\ \langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle &= - \frac{\delta^2 W'}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{\mathcal{J}=0},\end{aligned}\tag{225}$$

em que “ $\mathcal{J} = 0$ ” denota que todas as fontes externas são tomadas a zero, inclusive $J(x)$ e $\Omega_\mu(x)$. O termo $\int d^4x (J(x) O(x) + \Omega_\mu(x) V_\mu(x))$ em (223) fornece as regras de Feynman adicionais para o cálculo de qualquer função de Green com esses operadores compostos. Essas regras se encontram no Apêndice A e são utilizadas a seguir no cálculo das funções de Green de 2-pontos desses operadores. A renormalização desses operadores compostos, em geral, exige a introdução de outros operadores na teoria, de acordo com a contagem de potências. Esses outros operadores geram novas regras de Feynman com os contratermos necessários para o cancelamento das partes divergentes das funções de correlação. A análise detalhada de como a renormalização desses operadores se dá exatamente é deixada para o Capítulo 5. Para o restante deste capítulo, utilizamos apenas o fato de que, de uma forma ou de outra, é possível eliminar as divergências desses operadores utilizando o esquema \overline{MS} , que é consistente com as identidades de Ward da teoria.

4.3 Função de Green conexa $\langle O(p) O(-p) \rangle$

Os diagramas que contribuem para $\langle O(p) O(-p) \rangle$ a 1-loop podem ser colocados em três grupos, como mostra a Figura 17, de acordo com o número de pernas externas de h . O símbolo “ J ”, que aparece nos diagramas de agora em diante, indica que o vértice continha a fonte $J(x)$, que foi utilizada para introduzir $O(x)$ a nível quântico.

O primeiro grupo é constituído, simplesmente, pelas correções da função $\langle h(p) h(-p) \rangle$, que já foram calculadas no Capítulo 3. Assim, temos que a primeira contribuição para $\langle O(x) O(y) \rangle$ é

$$\langle O(p) O(-p) \rangle^{(1)} = v^2 \frac{\Pi_h^d(p^2)}{(p^2 + m_h^2)^2},\tag{226}$$

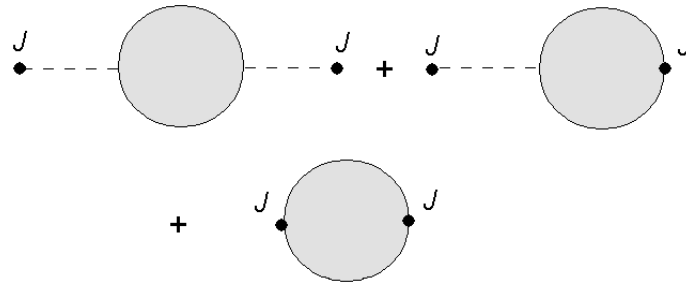
em que $\Pi_h^d(p^2)$ é a autoenergia regularizada de h a 1-loop, que é mostrada na Eq. (183).

No segundo grupo, temos os diagramas da Figura 18, que possuem uma perna externa de Higgs. O primeiro diagrama da Figura 18 é composto por um loop de Higgs, que, de acordo com as regras de Feynman, resulta em

$$\langle O(p) O(-p) \rangle^{(2)} = - \frac{3m_h^2}{p^2 + m_h^2} \eta(m_h^2, m_h^2, p^2).\tag{227}$$

O segundo diagrama da Figura 18 é parecido com o primeiro, no entanto, com um loop

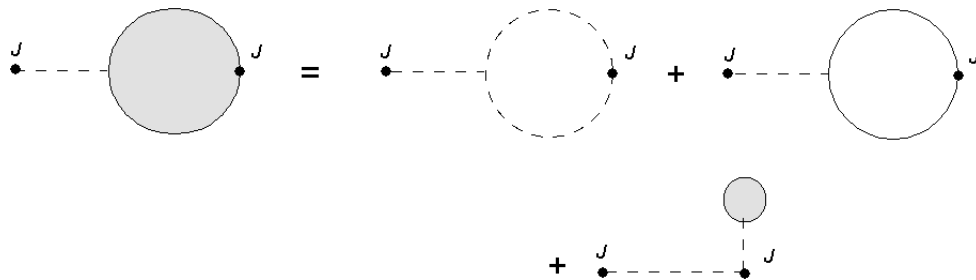
Figura 17 - Contribuições para $\langle O(p) O(-p) \rangle$.



Legenda: As contribuições para $\langle O(p) O(-p) \rangle$, que foram separadas em grupos de acordo com o número de pernas externas de h .

Fonte: O autor, 2022.

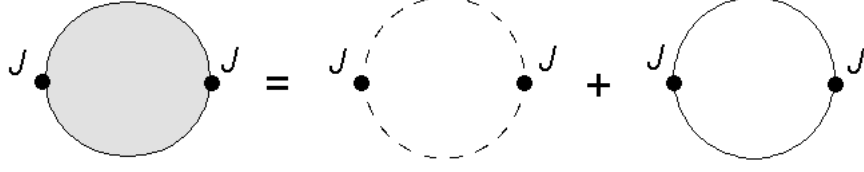
Figura 18 - Diagramas com uma perna externa de h .



Legenda: Contribuições a 1-loop para $\langle O(p) O(-p) \rangle$ com apenas uma perna externa de h .

Fonte: O autor, 2022.

Figura 19 - Diagramas sem pernas externas.



Legenda: Contribuições a 1-loop para $\langle O(p)O(-p) \rangle$ sem nenhuma perna externa de h .

Fonte: O autor, 2022.

de Goldstone, o que resulta em

$$\langle O(p)O(-p) \rangle^{(3)} = -\frac{m_h^2}{p^2 + m_h^2} \eta(\xi m^2, \xi m^2, p^2). \quad (228)$$

O terceiro diagrama da Figura 18 é, essencialmente, a função de um ponto $\langle h(0) \rangle$, portanto

$$\begin{aligned} \langle O(p)O(-p) \rangle^{(4)} &= 2v \frac{1}{p^2 + m_h^2} \langle h(0) \rangle \\ &= \frac{1}{p^2 + m_h^2} \left[-3\chi(m_h^2) - \chi(\xi m^2) - 2\frac{m^2}{m_h^2} (d-1)\chi(m^2) \right]. \end{aligned} \quad (229)$$

O terceiro grupo é formado pelos diagramas da Figura 19. Esses diagramas não possuem nenhuma perna externa. O primeiro deles é formado com um loop de Higgs, resultando na contribuição

$$\langle O(p)O(-p) \rangle^{(5)} = \frac{1}{2} \eta(m_h^2, m_h^2, p^2). \quad (230)$$

O segundo diagrama da Figura 19 é constituído por um loop de Goldstone, cujo resultado é

$$\langle O(p)O(-p) \rangle^{(6)} = \frac{1}{2} \eta(\xi m^2, \xi m^2, p^2). \quad (231)$$

Somando todas as contribuições temos

$$\sum_{i=1}^6 \langle O(p)O(-p) \rangle^{(i)} = \frac{A^O}{(p^2 + m_h^2)^2} + \frac{B^O}{p^2 + m_h^2} + C^O \quad (232)$$

em que

$$\begin{aligned}
A^O &= \mu^{2(d-4)} v^2 \left[3\lambda \chi(m_h^2) + e^2 \left(2(d-1) - \frac{p^2}{m^2} \right) \chi(m^2) \right. \\
&\quad + \left(\lambda + e^2 \frac{p^2}{m^2} \right) \chi(\xi m^2) + \frac{9\lambda}{2} m_h^2 \eta(m_h^2, m_h^2, p^2) \\
&\quad + \left(-e^2 \frac{p^4}{2m^2} + \frac{\lambda}{2} m_h^2 \right) \eta(\xi m^2, \xi m^2, p^2) \\
&\quad \left. + e^2 \left(2m^2(d-1) + 2p^2 + \frac{p^4}{2m^2} \right) \eta(m^2, m^2, p^2) \right], \tag{233}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^O &= -3m_h^2 \eta(m_h^2, m_h^2, p^2) - m_h^2 \eta(\xi m^2, \xi m^2, p^2) - 3\chi(m_h^2) \\
&\quad - \chi(\xi m^2) - 2 \frac{m^2}{m_h^2} (d-1) \chi(m^2), \tag{234}
\end{aligned}$$

e

$$C^O = \frac{1}{2} [\eta(m_h^2, m_h^2, p^2) + \eta(\xi m^2, \xi m^2, p^2)]. \tag{235}$$

É importante chamar a atenção para o fato de que

$$A^O = \frac{1}{v^2} \Pi_h^d(p^2). \tag{236}$$

Adicionando ao resultado (232) a parte a nível árvore, temos que a função de 2-pontos conexa de $O(x)$, até 1-loop, é

$$\langle O(p) O(-p) \rangle^d = \frac{v^2 \mu^{4-d}}{p^2 + m_h^2} + \frac{v^2 \mu^{4-d} \Pi_{OO}^d(p^2)}{(p^2 + m_h^2)^2}, \tag{237}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
\Pi_{OO}^d(p^2) &= \frac{\mu^{4-d}}{v^2} \left\{ \frac{1}{2} [4(d-1)m^4 + 4m^2 p^2 + p^4] \eta(m^2, m^2, p^2) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (p^2 - 2m_h^2)^2 \eta(m_h^2, m_h^2, p^2) \\
&\quad \left. - p^2 \left[2(d-1) \frac{m^2}{m_h^2} + 1 \right] \chi(m^2) - 3p^2 \chi(m_h^2) \right\}. \tag{238}
\end{aligned}$$

Como é possível notar, $\langle O(p) O(-p) \rangle^d$ é independente do parâmetro de calibre ξ , em acordo com as identidades de Nielsen, já que $O(x)$ é invariante de BRST. Ao invés de expandirmos diretamente $\Pi_{OO}^d(p^2)$ em torno de $\varepsilon = 0$, façamos antes a expansão de A^O ,

B^O e C . As partes divergentes desses coeficientes são

$$\begin{aligned} A_{\text{div}}^O &= \frac{\mu^{-\varepsilon} v^2}{8\pi^2} \left\{ 2v^2 \lambda^2 - e^2 \left[p^2 (-3 + \xi) + v^2 \lambda \xi \right] \right\} \frac{1}{\varepsilon}, \\ B_{\text{div}}^O &= \frac{\mu^{-\varepsilon} v^2}{8\pi^2 \lambda} (6e^4 - \lambda^2 + e^2 \lambda \xi) \frac{1}{\varepsilon}, \\ C_{\text{div}}^O &= \frac{\mu^{-\varepsilon}}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (239)$$

enquanto que as partes finitas são

$$\begin{aligned} A_{\text{fin}}^O &= \frac{v^2}{(4\pi)^2} \left\{ e^2 \left[p^2 \left(1 - \ln \frac{m^2}{\mu^2} - 2K(m^2, m^2, p^2) \right) - \frac{p^4}{2m^2} K(m^2, m^2, p^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 6m^2 \left(1 - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + K(m^2, m^2, p^2) \right) \right] + \frac{\lambda m_h^2}{2} \left(-6 + 6 \ln \frac{m^2}{\mu^2} - 9K(m_h^2, m_h^2, p^2) \right) \right. \\ &\quad \left. - \xi (e^2 p^2 + \lambda m^2) \left(1 - \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2} \right) + \left(\frac{e^2 p^4}{2m^2} - \frac{\lambda m_h^2}{2} \right) K(\xi m^2, \xi m^2, p^2) \right\}, \\ B_{\text{fin}}^O &= \frac{\mu^\varepsilon}{(4\pi)^2 m_h^2} \left\{ -\xi m^2 m_h^2 \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2} + \xi m^2 m_h^2 \right. \\ &\quad \left. + m_h^2 [3K(m_h^2, m_h^2, p^2) + K(\xi m^2, \xi m^2, p^2)] \right. \\ &\quad \left. - 3m_h^4 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} + 3m_h^4 + 2m^4 - 6m^4 \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right\}, \\ C_{\text{fin}}^O &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} (K(m_h^2, m_h^2, p^2) + K(\xi m^2, \xi m^2, p^2)). \end{aligned} \quad (240)$$

A divergência $\frac{A_{\text{div}}^O}{(p^2 + m_h^2)^2}$ de $\langle O(p) O(-p) \rangle$ é cancelada pelos mesmos contratermos que renormalizam a função $\langle h(p) h(-p) \rangle$. A divergência $\frac{B_{\text{div}}^O}{p^2 + m_h^2}$ é afetada pelos contratermos da função de 1-ponto $\langle h(0) \rangle$, no entanto, esses contratermos não são suficientes para eliminar B_{div}^O completamente, já que existem outros diagramas com uma perna externa de h , como mostra a Figura 18. De maneira geral, B_{div}^O e C_{div}^O exigem a introdução de novos contratermos na teoria, sendo eles do tipo

$$\int d^d x \left(\delta_1 J(x) O(x) + \frac{\delta_2}{2} J(x)^2 \right), \quad (241)$$

em que δ_1 e δ_2 são ajustados de tal forma a cancelarem as divergências residuais de $\langle O(p) O(-p) \rangle$. A 1-loop esses contratermos contribuem com

$$\frac{-2v^2 \delta_1}{p^2 + m_h^2} + \delta_2, \quad (242)$$

que possui exatamente a mesma estrutura de $\frac{B_{\text{div}}^O}{p^2 + m_h^2} + C_{\text{div}}^O$. É importante notar que os contratermos em (241) são invariantes por BRST, portanto a simetria BRST é preservada após a renormalização. Aplicando o esquema \overline{MS} para eliminar as divergências de

$\langle O(p) O(-p) \rangle$, obtemos a função renormalizada em $d = 4$:

$$\langle O(p) O(-p) \rangle = \frac{v^2}{p^2 + m_h^2} + \frac{v^2 \Pi_O(p^2)}{(p^2 + m_h^2)^2}, \quad (243)$$

em que

$$\begin{aligned} \Pi_O(p^2) &= \frac{1}{v^2} \left[A_{\text{fin}}^O + B_{\text{fin}}^O (p^2 + m_h^2) + C_{\text{fin}}^O (p^2 + m_h^2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{32\pi^2 v^2 m_h^2} \left\{ -8m_h^2 m^4 - 2m^2 p^2 (m_h^2 + 6m^2) \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right. \\ &\quad + m_h^2 \left[- (p^2 - 2m_h^2)^2 K(m_h^2, m_h^2, p^2) \right. \\ &\quad \left. - (12m^4 + 4m^2 p^2 + p^4) K(m^2, m^2, p^2) \right] \\ &\quad \left. + 2p^2 (3m_h^4 + m_h^2 m^2 + 2m^4) - 6m_h^2 p^2 \ln \left(\frac{m_h^2}{\mu^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (244)$$

Para que as correções perturbativas modifiquem os polos de $\langle O(p) O(-p) \rangle$, algum tipo de ressonância deve ser feito. A Eq. (243) tem a mesma estrutura de $\langle h(p) h(-p) \rangle$ e $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$, veja o Capítulo 3. Isso sugere que talvez seja possível aplicar à função $\langle O(p) O(-p) \rangle$ a mesma ressonância que foi utilizada nessas funções no Capítulo 3, o que resultaria em

$$\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}} = \frac{v^2}{p^2 + m_h^2 - \Pi_O(p^2)}. \quad (245)$$

No trabalho que fizemos, (DUDAL et al., 2020), foi utilizada essa ressonância, mas com uma pequena modificação. Como $\Pi_O(p^2)$ contém termos do tipo $p^4 \int_0^1 dx \ln \frac{p^2 x(1-x) + M^2}{\mu^2}$, para p^2 suficientemente grande, a contribuição a 1-loop se torna maior do que a contribuição a nível árvore. Isso implica que a aproximação de $\langle O(p) O(-p) \rangle$ por (245) não faz sentido. Além disso, pode-se observar que ela leva ao aparecimento de uma massa taquiônica. A alternativa que utilizamos em (DUDAL et al., 2020) para melhorar esse esquema de ressonância foi utilizar a identidade

$$p^4 = (p^2 + m_h^2)^2 - 2p^2 m_h^2 - m_h^4$$

para reescrever

$$\begin{aligned} \frac{p^4}{(p^2 + m_h^2)^2} \int_0^1 dx \ln \frac{p^2 x(1-x) + M^2}{\mu^2} &= \int_0^1 dx \ln \frac{p^2 x(1-x) + M^2}{\mu^2} \\ &\quad + \frac{-2p^2 m_h^2 - m_h^4}{(p^2 + m_h^2)^2} \int_0^1 dx \ln \frac{p^2 x(1-x) + M^2}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (246)$$

Fazendo isso com todos os termos de $\Pi_O(p^2)$ que contém $p^4 \int_0^1 dx \ln \frac{p^2 x(1-x)+\dots}{\mu^2}$, obtemos

$$\langle O(p) O(-p) \rangle = \frac{v^2}{p^2 + m_h^2} + \frac{v^2 \hat{\Pi}_O(p^2)}{(p^2 + m_h^2)^2} + C_O(p^2), \quad (247)$$

em que

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_O(p^2) = & \frac{1}{32\pi^2 v^2 m_h^2} \left\{ -8m_h^2 m^2 - 2m^2 p^2 (m_h^2 + 6m^2) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right. \\ & + m_h^2 [3(m_h^4 + 2m_h^2 p^2) K(m_h^2, m_h^2, p^2) \\ & - (12m^4 + 4m^2 p^2 - m_h^2 - 2p^2 m_h^2) K(m^2, m^2, p^2)] \\ & \left. + 2p^2 (3m_h^4 + m_h^2 m^2 + 2m^4) - 6m_h^4 p^2 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \right\} \end{aligned} \quad (248)$$

e

$$C_O(p^2) = -\frac{1}{32\pi^2} (K(m_h^2, m_h^2, p^2) + K(m^2, m^2, p^2)). \quad (249)$$

Como a função $\hat{\Pi}_O(p^2)$ não possui termos do tipo $p^4 \int_0^1 dx \ln \frac{p^2 x(1-x)+M^2}{\mu^2}$, podemos considerar a seguinte ressonância

$$\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}} = \frac{v^2}{p^2 + m_h^2 - \hat{\Pi}_O(p^2)} + C_O(p^2), \quad (250)$$

no lugar de (245).

A Figura 20 mostra o gráfico de $\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}}$ em função de p para os valores $e = 1$, $v = 1\mu$ e $\lambda = \frac{1}{5}$. Podemos ver que, para p suficientemente grande, $\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}}$ passa a ser negativa. Esse comportamento se deve, exatamente, ao termo $C_O(p^2)$. Se tomarmos $v = 0$, ou seja, se desligarmos o mecanismo de Higgs, a ação de Higgs (83) corresponde a ação da QED escalar sem massa,

$$S_{\text{Higgs}}|_{v=0} = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* (D_\mu \varphi) + \frac{\lambda}{2} (\varphi^* \varphi)^2 \right], \quad (251)$$

e o operador escalar é, simplesmente,

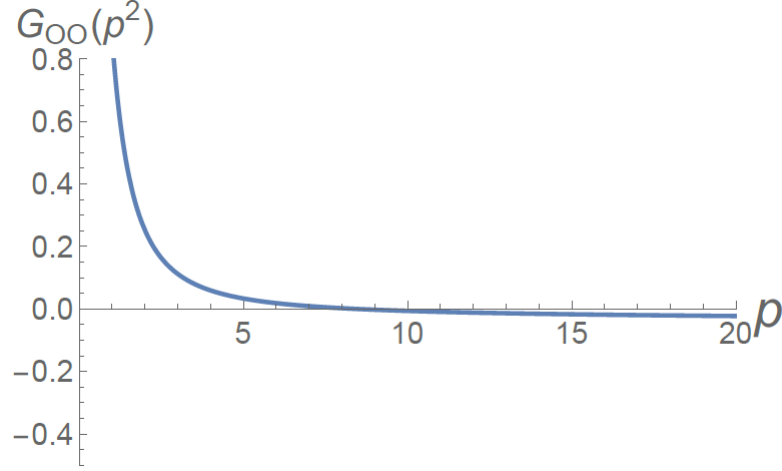
$$O(x)|_{v=0} = \varphi^*(x) \varphi(x). \quad (252)$$

Nessa situação

$$\begin{aligned} \langle (\varphi^* \varphi)(p) (\varphi^* \varphi)(-p) \rangle^{\text{res}} &= C_O(p^2)|_{v=0} \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} K(0, 0, p^2), \end{aligned} \quad (253)$$

o que deixa evidente que $C_O(p^2)$ não é uma particularidade do modelo de Higgs abeliano. No caso do modelo de Higgs, além de $C_O(p^2)$ existe o termo $\frac{v^2}{p^2 + m_h^2 - \hat{\Pi}_O(p^2)}$, que surge

Figura 20 - Gráfico de $\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}} = G_{OO}(p^2)$.



Legenda: Gráfico de $\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}} = G_{OO}(p^2)$ em função de p para os valores $e = 1$,
 $v = 1\mu$ e $\lambda = \frac{1}{5}$.

Fonte: DUDAL, 2020, f. 13.

da expansão de $\varphi(x)$ em torno de um dos mínimos do potencial de Higgs. Como será mostrado, esse termo adicional é o que fornece a informação de que $O(x)$ está associado à partícula de Higgs.

É importante mencionarmos que termos do tipo $p^4 \int_0^1 dx \ln \frac{p^2 x(1-x) + M^2}{\mu^2}$, também, aparecem na função $\langle h(p) h(-p) \rangle$. Isso faz com que $\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}}$, definido em (187), faça sentido apenas para p^2 pequeno. Podemos aplicar a mesma abordagem utilizada para definir $\langle O(x) O(y) \rangle^{\text{res}}$ à função $\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}}$. Fazendo isso, obtemos

$$\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}} = \frac{1}{p^2 + m_h^2 - \hat{\Pi}_h(p^2)} + C_h(p^2) \quad (254)$$

em que

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_h(p^2) = & \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \lambda m_h^2 \left[-3 + 3 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} - \frac{9}{2} K(m_h^2, m_h^2, p^2, \mu^2) \right] \right. \\ & + e^2 \left[(6m^2 - p^2) \left(-1 + \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{-2p^2 m_h^2 - m_h^2}{2m^2} + 6m^2 + 2p^2 \right) K(m^2, m^2, p^2, \mu^2) \right] \\ & + \xi (\lambda m^2 + e^2 p^2) \left(-1 + \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2} \right) \\ & \left. + \left(-\frac{2p^2 m_h^2 + m_h^2}{2m^2} e^2 - \frac{\lambda}{2} m_h^2 \right) K(\xi m^2, \xi m^2, p^2, \mu^2) \right\} \quad (255) \end{aligned}$$

e

$$C_h(p^2) = \frac{e^2}{2m^2(4\pi)^2} [K(\xi m^2, \xi m^2, p^2, \mu^2) - K(m^2, m^2, p^2, \mu^2)]. \quad (256)$$

Na prática, $\hat{\Pi}_h(p^2)$ e $\hat{\Pi}_O(p^2)$ são obtidas a partir de $\Pi_h(p^2)$ e $\Pi_O(p^2)$, respectivamente, através da substituição $p^4 \rightarrow -2p^2 m_h^2 - m_h^2$ nos termos com $p^4 \int_0^1 dx \ln \frac{p^2 x(1-x) + M^2}{\mu^2}$. Como temos $p^4|_{p^2=-m_h^2} = (-2p^2 m_h^2 - m_h^2)|_{p^2=-m_h^2}$, então

$$\hat{\Pi}_h(-m_h^2) = \Pi_h(-m_h^2) \quad (257)$$

e

$$\Pi_O(-m_h^2) = \hat{\Pi}_O(-m_h^2). \quad (258)$$

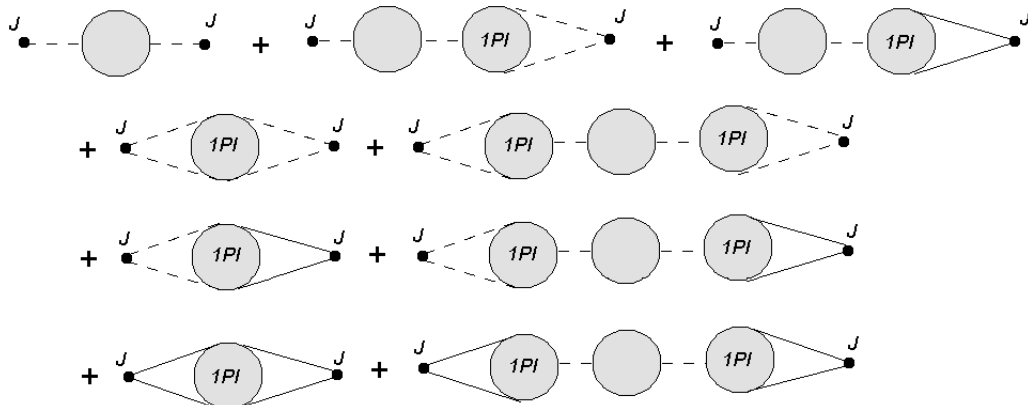
A Eq. (257) implica que o pólo \bar{m}_h^2 é o mesmo nas duas ressonas, resultando que o pólo na ressona modificada também é independente do parâmetro de calibre. Esse resultado é importante, pois mostra a consistência de (254) com as identidades de Nielsen.

As dificuldades relacionadas à ressona, fundamentalmente, se devem à natureza de $O(x)$, que é bem diferente da natureza de $h(x)$ e $A_\mu(x)$. Lembrando, $O(x)$ é um operador composto. Os diagramas de Feynman que constituem $\langle O(x) O(y) \rangle$ não formam estruturas análogas às de $\langle h(p) h(-p) \rangle$ e $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$. Sendo mais específico, não encontramos uma série geométrica para $\langle O(x) O(y) \rangle$. Os diagramas de Feynman de $\langle O(x) O(y) \rangle$ se organizam nas estruturas mostradas na Figura 21, cuja expressão matemática é

$$\begin{aligned} \langle O(x) O(y) \rangle &= \frac{v^2}{p^2 + m_h^2 - \Pi_h(p^2)} \\ &+ \frac{v}{p^2 + m_h^2 - \Pi_h(p^2)} (\langle h(p) h^2(-p) \rangle_{1\text{PI}} + \langle h(p) \rho^2(-p) \rangle_{1\text{PI}}) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{p^2 + m_h^2 - \Pi_h(p^2)} (\langle h(p) h^2(-p) \rangle_{1\text{PI}} + \langle h(p) \rho^2(-p) \rangle_{1\text{PI}})^2 \\ &+ \frac{1}{4} \langle h^2(p) h^2(-p) \rangle_{1\text{PI}} + \frac{1}{2} \langle h^2(p) \rho^2(-p) \rangle_{1\text{PI}} \\ &+ \frac{1}{4} \langle \rho^2(p) \rho^2(-p) \rangle_{1\text{PI}}. \end{aligned} \quad (259)$$

Na Eq. (259) já foi utilizada a expressão (187) para a função conexa $\langle h(x) h(y) \rangle$. As funções 1PI que aparecem do lado direito da Eq. (259) guardam o significado original, mas, a rigor, não estão bem definidas, pois os operadores compostos $h^2(x)$ e $\rho^2(x)$ não foram introduzidos separadamente na teoria. Pode ser que cada uma delas, individualmente, seja divergente, no entanto, como $\langle O(x) O(y) \rangle$ está bem definida, a soma do lado direito de (259) deve ser um resultado finito. Como é sugerido por (MAAS; SONDENHEIMER, 2020), outro tipo de ressona pode ser definida a partir da expressão (259). Nesse trabalho, os autores sugerem utilizar na expressão (259), no lugar dos valores exatos de $\Pi_h(p^2)$ e das

Figura 21 - Tipos de diagramas de $\langle O(x) O(y) \rangle$.



Legenda: Os diferentes tipos de diagramas de Feynman que contribuem para $\langle O(x) O(y) \rangle$.

Fonte: O autor, 2022.

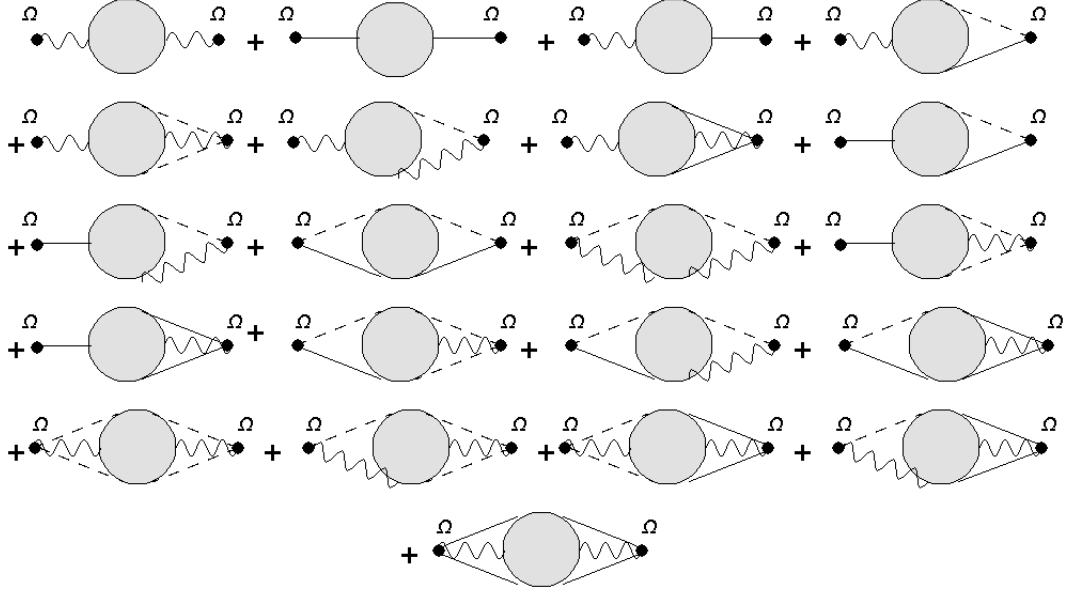
funções 1PI, as suas correspondentes aproximações até certa ordem perturbativa. Essa é uma alternativa interessante, já que apresenta uma forma sistemática de ressomar os diagramas de Feynman de $\langle O(x) O(y) \rangle$. No entanto, nada garante que a função ressomada dessa forma seja independente do parâmetro de calibre ξ , pois nem todos os diagramas de Feynman são levados em conta. Para ter uma versão ressomada de $\langle O(x) O(y) \rangle$ que não seja dependente de ξ , os mesmos autores sugerem que as aproximações de $\Pi_h(p^2)$ e das funções 1PI sejam modificadas antes de serem inseridas em (259). Eles sugerem que sejam removidas dessas funções as partes que dependem explicitamente de ξ . A origem desses termos são os loops formados por linhas internas de fantasmas, Goldstone e da parte longitudinal do propagador de $A_\mu(x)$, cuja massa é $\sqrt{\xi}m$. Como $\langle O(x) O(y) \rangle$ é independente do parâmetro de calibre, essas partes não devem ter papel relevante, por isso, de certa forma, faz sentido removê-las. Nesse mesmo trabalho, os autores comentam que, a 1-loop, numericamente, (250) e (259) levam a resultados semelhantes.

4.4 Função de Green $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$

4.4.1 Correções a 1-loop

Os diagramas de Feynman que contribuem para $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ podem ser organizados em 21 grupos, como mostra a Figura 22. O símbolo “ Ω ” nos diagramas indica que o vértice continha a fonte $\Omega_\mu(x)$, que foi utilizada para introduzir o operador $V_\mu(x)$ a nível quântico. Esse número elevado de grupos decorre dos 6 tipos diferentes de vértices locais que compõem $V_\mu(x)$. Felizmente, do décimo quarto ao vigésimo primeiro grupo, na ordem mostrada na Figura 22, as contribuições começam a partir de 2-loops. Os grupos

Figura 22 - Tipos de diagramas $\langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle$.



Legenda: Os diferentes tipos de diagramas de Feynman que contribuem para $\langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle$.

Fonte: O autor, 2022.

e seus diagramas que contribuem a 1-loop serão descritos a seguir. As regras de Feynman para calcular esses diagramas se encontram no Apêndice A.

O primeiro grupo nada mais é do que

$$\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^{(1)} = \frac{e^2 v^4}{4} \langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle, \quad (260)$$

assim podemos utilizar os resultados do Capítulo 3 para $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$.

O segundo grupo é constituído por $\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle$, de modo que

$$\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^{(2)} = \frac{v^2 p^2}{4} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \langle \rho(p) \rho(-p) \rangle. \quad (261)$$

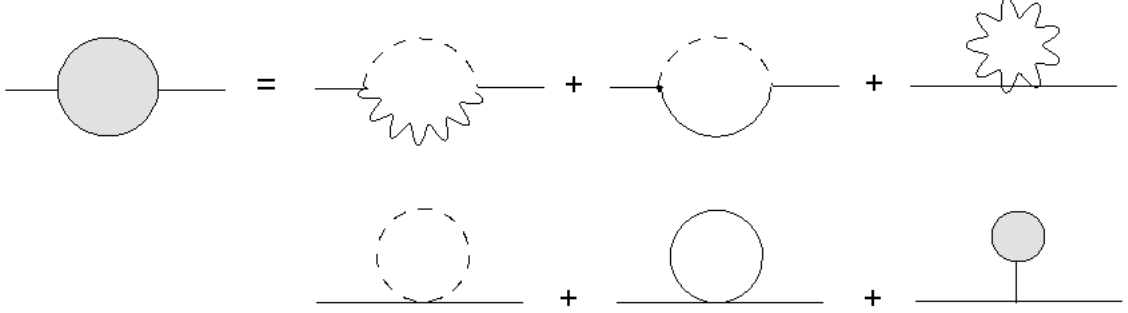
Os diagramas que contribuem para $\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle$ a 1-loop são mostrados na Figura 23. Aqui apresentaremos apenas o resultado final, que é

$$\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle = \frac{1}{p^2 + \xi m^2} + \frac{\Pi_\rho(p^2)}{(p^2 + \xi m^2)^2}, \quad (262)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Pi_\rho(p^2) = & \frac{\mu^{2-\frac{d}{2}}}{v^2} \left\{ \left[m_h^4 - (p^2 + m_h^2)^2 \right] \eta(\xi m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ & + \left[(m_h^2 - m^2 + p^2)^2 + 4m^2 p^2 \right] \eta(m^2, m_h^2, p^2) \\ & \left. + p^2 \chi(\xi m^2) + (m_h^2 - m^2) \chi(m_h^2) - (m_h^2 - m^2 + p^2) \chi(m^2) \right\}. \end{aligned} \quad (263)$$

Figura 23 - Correções a 1-loop para $\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle$.



Legenda: Diagramas de Feynman que contribuem para $\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle$ a 1-loop. Note que a última contribuição contém a função $\langle h \rangle$ (“tadpoles”).

Fonte: O autor, 2022.

Os detalhes envolvendo cada diagrama que contribui para $\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle$ podem ser encontrados no trabalho (DUDAL et al., 2020).

No terceiro grupo também encontramos uma função de 2-pontos de campos elementares, neste caso $\langle \rho(p) A_\mu(-p) \rangle$. Mais precisamente, temos

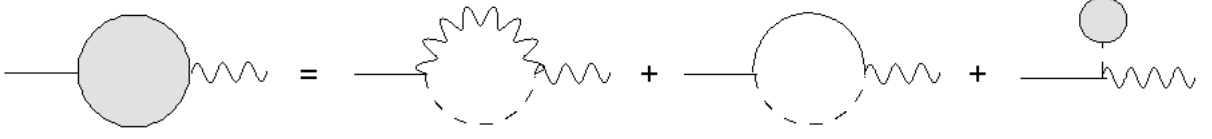
$$\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^{(3)} = -\frac{iev^3}{2} p_\mu \langle \rho(p) A_\nu(-p) \rangle. \quad (264)$$

Os diagramas que contribuem a 1-loop para $\langle \rho(p) A_\mu(-p) \rangle$ são mostrados na Figura 24. Os detalhes do cálculo desses diagramas também podem ser encontrados no trabalho (DUDAL et al., 2020). Como essa função não possui contribuição a nível árvore, o resultado até 1-loop é

$$\begin{aligned} \langle \rho(p) A_\nu(-p) \rangle = & \frac{ie\xi}{v} \frac{1}{(p^2 + \xi m^2)} \frac{p_\nu}{p^2} \left\{ \left[(m_h^2 - m^2 + p^2)^2 + 4m^2 p^2 \right] \eta(m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ & + \left[m_h^2 (m_h^2 - \xi m^2) - (p^2 + m_h^2) (m_h^2 - \xi m^2 + p^2) \right] \eta(m_h^2, \xi m^2, p^2) \\ & + 3p^2 \chi(\xi m^2) + \left[\frac{(d-1)m^2 p^2}{m_h^2} - m_h^2 + m^2 - p^2 \right] \chi(m^2) \\ & \left. + \frac{2m_h^2 + 3p^2 - 2m^2}{2} \chi(m_h^2) \right\}. \end{aligned} \quad (265)$$

O quarto grupo contribui com apenas um diagrama. Esse diagrama é composto por uma linha externa de fóton e um loop com uma linha interna de Higgs e uma linha

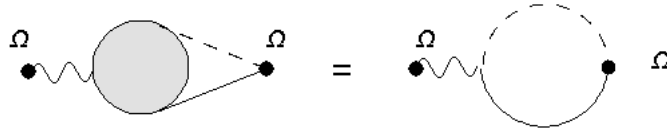
Figura 24 - Correções a 1-loop para $\langle \rho(p) A_\mu(-p) \rangle$.



Legenda: Diagramas Feynman que contribuem a 1-loop para $\langle \rho(p) A_\mu(-p) \rangle$. Note que a última contribuição contém a função $\langle h \rangle$ (“tadpoles”).

Fonte: O autor, 2022.

Figura 25 - Quarto grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$.



Legenda: Contribuição para $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ com uma perna externa de A_μ e vértice $\Gamma_{h\rho}$.

Fonte: O autor, 2022.

interna de Goldstone, como mostra a Figura 25,

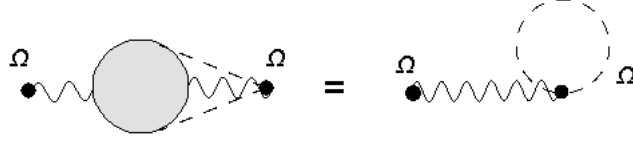
$$\begin{aligned}
 \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^{(4)} &= \frac{m^2}{2(d-1)p^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \times \\
 &\times \left\{ - \left[(-m_h^2 + \xi m^2 + p^2)^2 + 4m_h^2 p^2 \right] \eta(m_h^2, \xi m^2, p^2) \right. \\
 &+ (m_h^2 - \xi m^2 + p^2) \chi(\xi m^2) + (-m_h^2 + \xi m^2 + p^2) \chi(m_h^2) \left. \right\} \\
 &+ \frac{m^2}{2p^2} \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \left\{ (m_h^2 - \xi m^2 - p^2) \chi(m_h^2) \right. \\
 &+ (-m_h^2 + \xi m^2 + 3p^2) \chi(\xi m^2) \\
 &+ \left. \left[-p^2 (4m_h^2 - 4\xi m^2 + 3p^2) \right. \right. \\
 &\left. \left. + (m_h^2 - \xi m^2 + p^2)^2 + 2p^4 \right] \eta(m_h^2, \xi m^2, p^2) \right\}. \quad (266)
 \end{aligned}$$

O quinto grupo contribui, também, com apenas um diagrama. Esse diagrama possui uma linha externa de fóton e o loop é formado por uma linha interna de Higgs, como está representado na Figura 26. Aplicando as regras de Feynman, obtemos

$$\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^{(5)} = \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{p^2 + m^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \right) \chi(m_h^2). \quad (267)$$

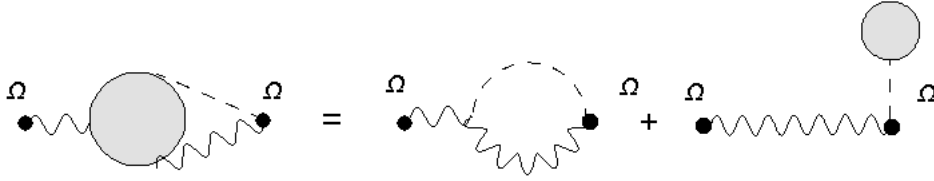
O sexto grupo contém duas contribuições, como mostra a Figura 27. O primeiro diagrama é constituído por uma linha externa de fóton e um loop com uma linha de fóton e uma linha de Higgs. O segundo diagrama contém uma linha externa de fóton e um

Figura 26 - Quinto grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$.



Legenda: Contribuição para $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ com uma perna externa de A_μ e vértice Γ_{hhA} .
Fonte: O autor, 2022.

Figura 27 - Sexto grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$.



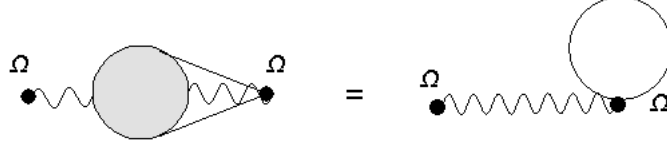
Legenda: Contribuição para $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ com uma perna externa de A_μ e vértice Γ_{hA} .
Fonte: O autor, 2022.

“tadpole”. Usando as regras de Feynman e somando os dois diagramas, obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^{(6)} &= -\frac{m^2}{2(d-1)p^2} \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}(p)}{p^2 + m^2} \left\{ [(d-2)p^2 + \xi m^2 - m_h^2] \chi(\xi m^2) \right. \\
 &+ [3(1-d)p^2 + (1-\xi)m^2] \chi(m_h^2) \\
 &+ \left[2m_h^2(p^2 - \xi m^2) + (p^2 + \xi m^2)^2 + m_h^4 \right] \eta(m_h^2, \xi m^2, p^2) \\
 &+ [-2(3-2d)m^2 p^2 - m^4 - p^4 \\
 &+ 2m_h^2(m^2 - p^2) - m_h^4] \eta(m_h^2, m^2, p^2) \\
 &+ \left. \left[2(d-1)^2 \frac{m^2 p^2}{m_h^2} - m^2 + p^2 + m_h^2 \right] \chi(m^2) \right\} \\
 &+ \frac{1}{2p^2} \frac{m^2 \xi \mathcal{L}_{\mu\nu}(p)}{p^2 + \xi m^2} \left\{ (m_h^2 - \xi m^2 + p^2)^2 \eta(m_h^2, \xi m^2, p^2) \right. \\
 &- \left[-2m_h^2(m^2 - p^2) + m_h^4 + (p^2 + m^2)^2 \right] \eta(m^2, m_h^2, p^2) \\
 &+ \frac{-2(d-1)m^2 p^2 + m_h^2(p^2 - m^2) + m_h^4}{m_h^2} \chi(m^2) \\
 &- (m_h^2 - \xi m^2 + 2p^2) \chi(\xi m^2) \\
 &\left. - [m^2(\xi - 1) + 3p^2] \chi(m_h^2) \right\}. \tag{268}
 \end{aligned}$$

O sétimo grupo é formado por apenas um diagrama. Esse diagrama é constituído por uma linha externa de fóton e um loop com uma linha interna de Goldstone, como

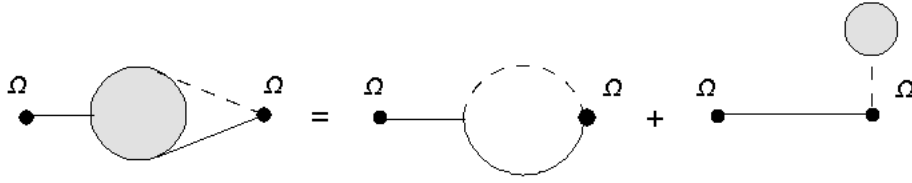
Figura 28 - Sétimo grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$.



Legenda: Contribuição para $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ com uma perna externa de A_μ e vértice $\Gamma_{\rho\rho A}$.

Fonte: O autor, 2022.

Figura 29 - Oitavo grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$.



Legenda: Contribuição para $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ com uma perna externa de ρ e vértice $\Gamma_{h\rho}$.

Fonte: O autor, 2022.

mostra a Figura 28. O resultado desse diagrama é

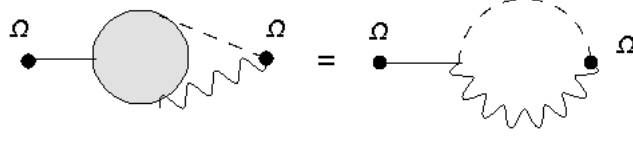
$$\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^{(7)} = \frac{e^2 v^2}{2} \left(\frac{1}{p^2 + m^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \right) \chi(\xi m^2). \quad (269)$$

O oitavo grupo contribui com dois diagramas, como está mostrado na Figura 29. O primeiro deles é formado por uma linha externa de Goldstone e um loop com linhas internas de Goldstone e Higgs. O segundo diagrama contém uma perna externa de Goldstone e um “tadpole”. A soma desses dois diagramas resulta em

$$\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^{(8)} = \frac{p^2}{2} \frac{1}{p^2 + \xi m^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \left[m_h^2 \eta(\xi m^2, m_h^2, p^2) + (d-1) \chi(m^2) + \frac{3}{2} \chi(m_h^2) + \frac{1}{2} \chi(\xi m^2) \right]. \quad (270)$$

Do nono grupo temos apenas um diagrama, que é mostrado na Figura 30. O diagrama possui uma perna externa de Goldstone e um loop com linhas internas de fóton

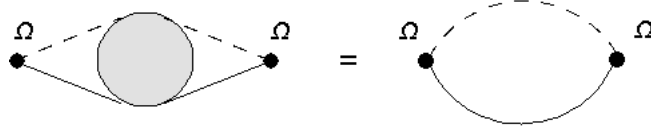
Figura 30 - Nono grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$.



Legenda: Contribuição para $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ com uma perna externa de ρ e vértice Γ_{hA} .

Fonte: O autor, 2022.

Figura 31 - Décimo grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$.



Legenda: Contribuição para $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ sem pernas externas e vértices $\Gamma_{h\rho}$.

Fonte: O autor, 2022.

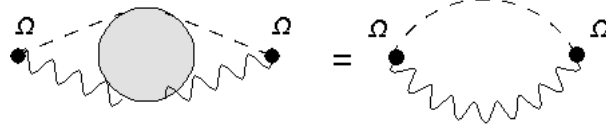
e de Higgs. O resultado desse diagrama é

$$\begin{aligned}
 \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle_c^{(9)} &= \frac{1}{2(p^2 + \xi m^2)} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \times \\
 &\times \left\{ (p^2 + m_h^2) (m_h^2 - \xi m^2 + p^2) \eta(\xi m^2, m_h^2, p^2) \right. \\
 &- \left[(m_h^2 - m^2 + p^2)^2 + 4m^2 p^2 \right] \eta(m^2, m_h^2, p^2) \\
 &- (p^2 + m_h^2) \chi(\xi m^2) + m^2 \chi(m_h^2) \\
 &\left. + (p^2 + m_h^2 - m^2) \chi(m^2) \right\}. \tag{271}
 \end{aligned}$$

O décimo grupo contribui, também, com apenas um diagrama, que é mostrado na Figura 31. Esse diagrama não possui pernas extenas, apenas um loop formado com linhas internas de Goldstone e Higgs. O cálculo do diagrama resulta em

$$\begin{aligned}
 \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle_c^{(10)} &= -\frac{1}{4(d-1)p^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \times \\
 &\times \left\{ \left[(-m_h^2 + \xi m^2 + p^2)^2 + 4m_h^2 p^2 \right] \eta(m_h^2, \xi m^2, p^2) \right. \\
 &+ (-m_h^2 + \xi m^2 - p^2) \chi(\xi m^2) - (-m_h^2 + \xi m^2 + p^2) \chi(m_h^2) \left. \right\} \\
 &- \frac{1}{4p^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \times \\
 &\times \left\{ - (m_h^2 - \xi m^2 - p^2) (m_h^2 - \xi m^2 + p^2) \eta(\xi m^2, m_h^2, p^2) \right. \\
 &+ (m_h^2 - \xi m^2 - p^2) \chi(\xi m^2) - (m_h^2 - \xi m^2 + p^2) \chi(m_h^2) \\
 &\left. - p^4 \eta(\xi m^2, m_h^2, p^2) \right\}. \tag{272}
 \end{aligned}$$

Figura 32 - Décimo primeiro grupo de diagramas de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$.



Legenda: Contribuição para $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ sem pernas externas e vértices Γ_{hA} .

Fonte: O autor, 2022.

O décimo primeiro grupo, e o último que contribui a 1-loop, contém apenas um diagrama, que é mostrado na Figura 32. Como o anterior, esse diagrama não possui pernas externas, mas somente um loop formado com linhas internas de fóton e Higgs. O resultado desse diagrama é

$$\begin{aligned}
 \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle_c^{(11)} &= \frac{1}{4p^2(d-1)} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \times \\
 &\times \left\{ \left[(m_h^2 - \xi m^2 + p^2)^2 + 4\xi m^2 p^2 \right] \eta(m_h^2, \xi m^2, p^2) \right. \\
 &+ \left[4(d-2)m^2 p^2 - (m_h^2 - m^2 + p^2)^2 \right] \eta(m^2, m_h^2, p^2) \\
 &- (m_h^2 - \xi m^2 + p^2) \chi(\xi m^2) + (m_h^2 - m^2 + p^2) \chi(m^2) \\
 &\left. - (\xi - 1) m^2 \chi(m_h^2) \right\} \\
 &+ \frac{1}{4p^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \left\{ - (m_h^2 - \xi m^2 + p^2)^2 \eta(m_h^2, \xi m^2, p^2) \right. \\
 &+ \left[(m_h^2 - m^2 + p^2)^2 + 4m^2 p^2 \right] \eta(m^2, m_h^2, p^2) \\
 &+ m^2 (\xi - 1) \chi(m_h^2) + (m_h^2 - \xi m^2 + p^2) \chi(\xi m^2) \\
 &\left. + (-m_h^2 + m^2 - p^2) \chi(m^2) \right\}. \tag{273}
 \end{aligned}$$

Se somarmos todas as contribuições, obteremos a função de Green regularizada

$$\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^d = \sum_{i=1}^{11} \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^{(i)}$$

até 1-loop, já que algumas das contribuições foram consideradas com o seu nível árvore junto. A parte transversal dessa função, que denotamos por

$$\langle V(p) V(-p) \rangle^{d,T} = \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle_c}{d-1},$$

a 1-loop tem a forma

$$\langle V(p) V(-p) \rangle_{1\text{-loop}}^{d,T} = \frac{A^V}{(p^2 + m^2)^2} + \frac{B^V}{p^2 + m^2} + C^V, \tag{274}$$

sendo

$$\begin{aligned}
A^V &= \frac{m^2}{4} \left[-\frac{m^2 \left((m_h^2 - m^2 + p^2)^2 - 4(d-2)m^2 p^2 \right)}{(d-1)p^2} \eta(m^2, m_h^2, p^2) \right. \\
&\quad + \frac{m^2 \left(2(d-1)^2 m^2 p^2 + m_h^2 (p^2 - m^2) + m_h^4 \right)}{(d-1)p^2 m_h^2} \chi(m^2) \\
&\quad \left. + \frac{m^2 \left((2d-1)p^2 - m_h^2 + m^2 \right)}{(d-1)p^2} \chi(m_h^2) \right], \tag{275}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^V &= m^2 \left[-\frac{m_h^2 \left(-2(3-2d)m^2 p^2 - m^4 - p^4 \right) + 2m_h^4 (m^2 - p^2) - m_h^6}{2(d-1)m_h^2 p^2} \eta(m^2, m_h^2, p^2) \right. \\
&\quad - \frac{3dm_h^2 p^2 + m^2 m_h^2 - 3m_h^2 p^2}{2(d-1)m_h^2 p^2} \chi(m_h^2) \\
&\quad \left. - \frac{2(d-1)^2 m^2 p^2 - m^2 m_h^2 + m_h^2 p^2 + m_h^4}{2(d-1)m_h^2 p^2} \chi(m^2) \right] + \frac{m^2}{2} \chi(m_h^2), \tag{276}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^V &= \frac{4(d-2)m^2 p^2 - (m_h^2 - m^2 + p^2)^2}{4(d-1)p^2} \eta(m^2, m_h^2, p^2) \\
&\quad + \frac{m_h^2 - m^2 + p^2}{4(d-1)p^2} \chi(m^2) + \frac{m^2 - m_h^2 + p^2}{4(d-1)p^2} \chi(m_h^2) \tag{277}
\end{aligned}$$

Vale destacar, para fins futuros, que

$$A^V = \frac{4}{e^2 v^4} \Pi^T(p^2), \tag{278}$$

lembrando que $\Pi^T(p^2)$ é a parte transversal da autoenergia do fóton. $\langle V(p) V(-p) \rangle_{1\text{-loop}}^{d,T}$ possui uma estrutura análoga à função $\langle O(p) O(-p) \rangle$, no entanto, os coeficientes A^V , B^V e C^V são individualmente independentes do parâmetro de calibre, diferentemente dos coeficientes A^O , B^O e C^O , vide Eqs. (233)-(235). Expandindo em série de Laurent esses coeficientes em torno de $\varepsilon = 0$ ($\varepsilon = 4 - d$), obtemos que as partes divergentes são

$$\begin{aligned}
A_{\text{div}}^V &= \frac{e^2 v^4}{2(2\pi)^2} \left(\frac{p^2}{3} - 6 \left(\frac{e^2}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) e^2 v^2 + 3\lambda v^2 \right) \frac{1}{\varepsilon}, \\
B_{\text{div}}^V &= \frac{v^2 e^2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \left(\frac{6e^4 v^2}{\lambda} - 3e^2 v^2 - \frac{p^2}{3} + 3\lambda v^2 \right) \frac{1}{\varepsilon}, \\
C_{\text{div}}^V &= \frac{1}{6(4\pi)^2 \varepsilon} (9e^2 v^2 - p^2 - 3\lambda v^2) \frac{1}{\varepsilon}, \tag{279}
\end{aligned}$$

enquanto que as partes finitas são

$$\begin{aligned}
A_{\text{fin}}^V &= \frac{e^2 v^4}{2(4\pi)^4} \left\{ \frac{p^2}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m_h^2}{2} + 2m^2 K(m_h^2, m^2, p^2) \right. \\
&\quad \left. - m_h^2 \left[\frac{p^2 + m_h^2 - m^2}{2p^2} K(m_h^2, m^2, p^2) - \frac{m_h^2}{2p^2} \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} + \frac{m^2}{2p^2} \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{m_h^2 - m^2}{2p^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + m_h^2 \left(1 - \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \right) + \frac{m^4}{m_h^2} \left(1 - 3 \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) \right\} \quad (280)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{\text{fin}}^V &= \frac{m^2}{18m_h^2 p^2 (4\pi)^2} \left\{ 3m_h^4 (m_h^2 - m^2 - 7p^2) \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \right. \\
&\quad \left. - 3m_h^2 \left[2p^2 (m_h^2 - 5m^2) + (m_h^2 - m^2)^2 + p^4 \right] K(m_h^2, m^2, p^2) \right. \\
&\quad \left. - 3(m_h^3 - m^2 m_h)^2 + 9p^2 (m^2 m_h^2 + 3m_h^4 + 2m^4) + 2p^4 m_h^2 \right. \\
&\quad \left. - 3m^2 [m_h^2 (p^2 - m^2) + m_h^4 + 18m^2 p^2] \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right\}, \quad (281)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\text{fin}}^V &= \frac{1}{36(4\pi)^2 p^2} \left\{ 3m^2 (m_h^2 - m^2 + p^2) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right. \\
&\quad \left. + 3m_h^2 (-m_h^2 + m^2 + p^2) \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} + 6m_h^2 (p^2 - m^2) \right. \\
&\quad \left. - 5p^2 (3m_h^2 - 9m^2 + p^2) + 3m_h^4 + 3m^4 - 54m^2 p^2 + 3p^4 \right. \\
&\quad \left. + 3 [2m_h^2 (p^2 - m^2) + m_h^4 + m^4 - 10m^2 p^2 + p^2] K(m^2, m_h^2, p^2) \right\}. \quad (282)
\end{aligned}$$

Parte das divergências de A_{div}^V , B_{div}^V e C_{div}^V são canceladas pelos contratermos que renormalizam a parte transversal da função $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$ e a função $\langle h(0) \rangle$ (“tadpoles”). As divergências restantes precisam ser renormalizadas com a introdução de novos contratermos. Como utilizaremos o esquema \overline{MS} , esses novos contratermos devem ser ajustados de tal forma a serem consistentes com esse esquema. A análise detalhada da renormalização desses operadores é mostrada no Capítulo 5. Portanto, a função renormalizada em $d = 4$ até um 1-loop é

$$\langle V(p) V(-p) \rangle^T = \frac{e^2 v^4}{4} \left(\frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{\Pi_V^T(p^2)}{(p^2 + m^2)^2} \right)$$

em que

$$\begin{aligned}
\Pi_V^T(p^2) &= \frac{4}{e^2 v^4} \left(A_{\text{fin}}^V + (p^2 + m^2) B_{\text{fin}}^V + (p^2 + m^2)^2 C_{\text{fin}}^V \right) \\
&= -\frac{1}{9(4\pi)^2 e^2 v^4 m_h^2} \left\{ -18m^4 (m_h^4 + m^4) + 9m_h^2 p^4 (m_h^2 + m^2) \right. \\
&\quad \left. -3m_h^2 p^2 \left[2p^2 (m_h^2 - 5m^2) + (m_h^2 - m^2)^2 + p^4 \right] K(m_h^2, m^2, p^2) \right. \\
&\quad \left. +2m_h^2 p^6 + 3m_h^4 \left[p^2 (m_h^2 + 11m^2) + 6m^4 - p^4 \right] \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \right. \\
&\quad \left. +3m^2 \left[-m_h^2 p^4 + p^2 (-m_h^4 + m_h^2 m^2 + 36m^4) + 18m^6 \right] \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right. \\
&\quad \left. -3p^2 (m_h^6 + 10m_h^4 m^2 + m_h^2 m^4 + 12m^6) \right\} \tag{283}
\end{aligned}$$

Como $\Pi_V^T(p^2)$ também possui termos do tipo $p^4 \int_0^1 dx \ln \frac{p^2 + \dots}{\mu^2}$, a ressonância deve ser feita com os mesmos cuidados utilizados para tratar a função $\langle O(p) O(-p) \rangle$. Neste caso, utilizamos a identidade

$$p^4 = (p^2 + m^2)^2 - 2p^2 m^2 - m^4. \tag{284}$$

Reescrevendo os termos problemáticos de (283) com essa identidade, obtemos

$$\langle V(p) V(-p) \rangle^T = \frac{e^2 v^4}{4} \left(\frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{\hat{\Pi}_V^T(p^2)}{(p^2 + m^2)^2} \right) + C_V(p^2), \tag{285}$$

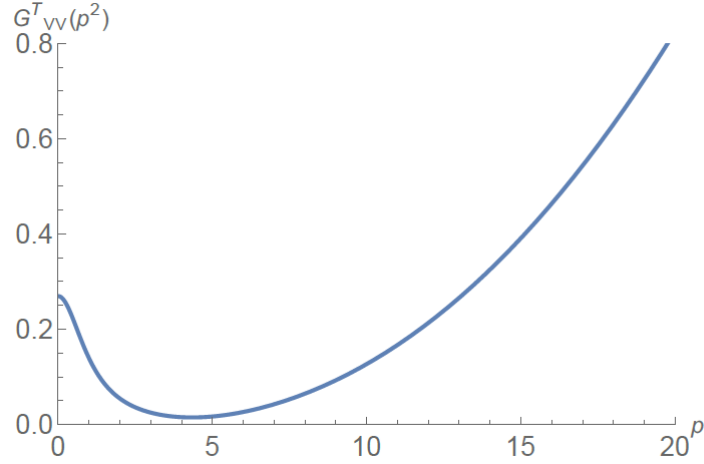
de modo que

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}_V^T(p^2) &= \frac{4}{e^2 v^4} \left(A_{\text{fin}}^V + (p^2 + m^2) B_{\text{fin}}^V + (p^2 + m^2)^2 C_{\text{fin}}^V \right) \\
&= -\frac{1}{9(4\pi)^2 e^2 v^4 m_h^2} \left\{ -18m^4 (m_h^4 + m^4) + 9m_h^2 p^4 (m_h^2 + m^2) \right. \\
&\quad \left. -3m_h^2 \left[2(-2m^2 p^2 - m^4) (m_h^2 - 5m^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p^2 (m_h^2 - m^2)^2 - 2m^2 p^2 - m^4 \right] K(m_h^2, m^2, p^2) \right. \\
&\quad \left. +2m_h^2 p^6 + 3m_h^4 \left[p^2 (m_h^2 + 11m^2) + 6m^4 - p^4 \right] \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \right. \\
&\quad \left. +3m^2 \left[-m_h^2 p^4 + p^2 (-m_h^4 + m_h^2 m^2 + 36m^4) + 18m^6 \right] \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right. \\
&\quad \left. -3p^2 (m_h^6 + 10m_h^4 m^2 + m_h^2 m^4 + 12m^6) \right\} \tag{286}
\end{aligned}$$

e

$$C_V(p^2) = \frac{1}{12(4\pi)^2} (2m_h^2 + p^2) K(m_h^2, m^2, p^2). \tag{287}$$

Figura 33 - Gráfico de $\langle V(p) V(-p) \rangle^{T, \text{res}}$.



Legenda: Gráfico de $\langle V(p) V(-p) \rangle^{T, \text{res}} = G_{VV}(p^2)$ em função de p para os valores $e = 1$, $v = 1\mu$ e $\lambda = \frac{1}{5}$.

Fonte: DUDAL, 2020, f. 18.

Assim, temos que a função ressomada é

$$\langle V(p) V(-p) \rangle^{T, \text{res}} = \frac{e^2 v^4}{4} \left(\frac{1}{p^2 + m^2 - \hat{\Pi}_V^T(p^2)} \right) + C_V(p^2). \quad (288)$$

A Figura 33 mostra o gráfico de $\langle V(p) V(-p) \rangle^{T, \text{res}}$ em função de p para os valores $e = 1$, $v = 1\mu$ e $\lambda = \frac{1}{5}$. Pelas mesmas razões que levam à Eq. (258), temos

$$\hat{\Pi}_V^T(-m^2) = \Pi_V^T(-m^2). \quad (289)$$

Novamente, podemos tomar o limite $v \rightarrow 0$ e verificar se $C_V(p^2)|_{v=0} = \frac{p^2}{12(4\pi)^2} K(0, 0, p^2)$ corresponde ao valor da parte transversal da função $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ na QED escalar sem massa, em que $V_\mu = e\varphi^* \varphi A_\mu - \frac{i}{2} \varphi^* \partial_\mu \varphi + \frac{i}{2} \varphi \partial_\mu \varphi^*$. Analisando com cuidado $\frac{e^2 v^4}{4} \frac{\hat{\Pi}_{VV}^T(p^2)}{(p^2 + m^2)^2}$ verificamos que nesse limite essa função tende para $-\frac{2p^2}{9(4\pi)^2}$. Portanto, na QED escalar sem massa temos

$$\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle = \frac{p^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{12} K(0, 0, p^2) - \frac{2}{9} \right]. \quad (290)$$

Apesar dessa situação ser um pouco diferente de $\langle O(p) O(-p) \rangle$ e $C_O(p^2)$, a conclusão é a mesma, os termos que dificultam a ressonância não estão relacionados ao mecanismo de Higgs. Pelo contrário, é o mecanismo de Higgs que produz essa estrutura com polos que pode ser observada já a nível árvore.

Para a parte longitudinal de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle^d$, que é

$$\langle V(p) V(-p) \rangle^{d,L} := \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle_c \quad (291)$$

encontramos o resultado

$$\begin{aligned} \langle V(p) V(-p) \rangle^{4-\varepsilon,L} &= -\frac{v^2(3e^4 + \lambda^2)}{(4\pi)^2 \lambda} \frac{1}{\varepsilon} \\ &\quad + v^2 - \frac{1}{32\pi^2 m_h^2} \left(m_h^4 - m_h^4 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} + m^4 - 3m^4 \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (292)$$

Note que, a parte finita de $\langle V(p) V(-p) \rangle^L$ é independente do momento, isso significa que a parte longitudinal não está associada a nenhum modo físico de propagação.

4.5 Polos e densidades espectrais das funções de Green dos operadores compostos

4.5.1 Polos e Resíduos

Nesta seção é feita uma análise dos polos e das representações espectrais de Källén-Lehmann de $\langle O(p) O(-p) \rangle$ e $\langle V(p) V(-p) \rangle^T$. Basicamente, a teoria utilizada é a mesma da Subseção 3.3.3, onde tratamos das densidades espectrais das funções $\langle h(p) h(-p) \rangle$ e $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$. As funções de 2-pontos ressomadas dos operadores compostos até 1-loop tem a forma

$$D(p^2) = \kappa_D \frac{1}{p^2 + M^2 - \hat{\Pi}(p^2)} + C(p^2), \quad (293)$$

em que κ_D é um parâmetro que possui a dimensão de massa correta para que a expressão (293), dimensionalmente, faça sentido. Comparando (293) com (250) e (288), temos que $\kappa_O = v^2$ e $\kappa_V = e^2 v^4$ são as constantes de $\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}}$ e $\langle V(p) V(-p) \rangle^{T,\text{res}}$, respectivamente. $C(p^2)$ é uma função analítica em quase todo plano complexo, exceto, em parte do eixo real negativo, onde possui um corte. Até 1-loop, o polo de $D(p^2)$, que denotamos por \overline{M}^2 , é dado por

$$\overline{M}^2 = -M^2 + \hat{\Pi}(-M^2), \quad (294)$$

enquanto que o resíduo é obtido pela expressão

$$R = \kappa_D \left(1 + \left. \frac{d\hat{\Pi}}{dp^2} \right|_{p^2 = -M^2} \right). \quad (295)$$

No caso do operador escalar, temos que o polo de $\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}}$, que denotamos por \overline{M}_O^2 , até 1-loop, é dado pela expressão

$$\overline{M}_O^2 = -m_h^2 + \hat{\Pi}_O(-m_h^2). \quad (296)$$

Vimos que $\hat{\Pi}_O(-m_h^2) = \Pi_O(-m_h^2)$, Eq.(258). Como

$$\Pi_O(p^2) = \frac{1}{v^2} \left[A_{\text{fin}}^O + B_{\text{fin}}^O(p^2 + m_h^2) + C_{\text{fin}}^O(p^2 + m_h^2)^2 \right] \quad (297)$$

e $A^O = v^2 \Pi_h(p^2)$, veja as Eqs. (244) e (236), então, $\hat{\Pi}_O(-m_h^2) = \Pi_h(-m_h^2)$. A conclusão que segue é que

$$\overline{M}_O^2 = -m_h^2 + \Pi_h(-m_h^2), \quad (298)$$

ou seja, até 1-loop, o polo de $\langle O(p) O(-p) \rangle$ é igual ao polo de $\langle h(p) h(-p) \rangle$.

Como a função do operador vetorial $V_\mu(x)$ é completamente análoga à função de $O(x)$, podemos seguir o mesmo caminho e demonstrar que o polo de $\langle V(p) V(-p) \rangle^{T, \text{res}}$, que chamamos de \overline{M}_V^2 , é

$$\overline{M}_V^2 = -m^2 + \Pi^T(-m^2). \quad (299)$$

Assim, $\langle V(p) V(-p) \rangle^T$ e $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$, até 1-loop, possuem o mesmo polo.

4.5.2 Densidades espectrais

Definindo $\tilde{\Pi}(p^2) = \hat{\Pi}(p^2) - \hat{\Pi}(-M^2)$, assim como fizemos na Subseção 3.3.3, podemos reescrever a Eq. (293) como

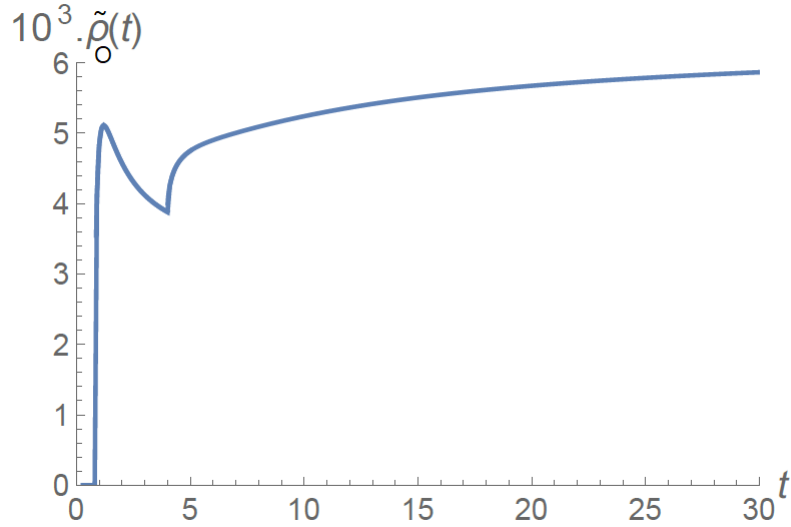
$$D(p^2) = \frac{R}{(p^2 - \overline{M}^2)} + R \frac{\left(\tilde{\Pi}(p^2) + (p^2 - \overline{M}^2) \frac{d\tilde{\Pi}}{dp^2} \Big|_{p^2=-M^2} \right)}{(p^2 - \overline{M}^2)^2} + C(p^2). \quad (300)$$

Assim, temos que $D(p^2)$ subtraída da sua parte com o pólo é

$$\tilde{D}(p^2) = R \frac{\left(\tilde{\Pi}(p^2) + (p^2 - \overline{M}^2) \frac{d\tilde{\Pi}}{dp^2} \Big|_{p^2=-M^2} \right)}{(p^2 - \overline{M}^2)^2} + C(p^2)$$

Olhando para as Eqs. (247)-(249) e lembrando das propriedades da função

$$K(m_1^2, m_2^2, p^2),$$

Figura 34 - Densidade espectral $\tilde{\rho}_O(t)$.

Legenda: Densidade espectral $\tilde{\rho}_O(t)$ para os valores $e = 1$, $v = 1\mu$, $\lambda = \frac{1}{5}$ e $\mu = 1\text{GeV}$. t é dado em GeV^2 .

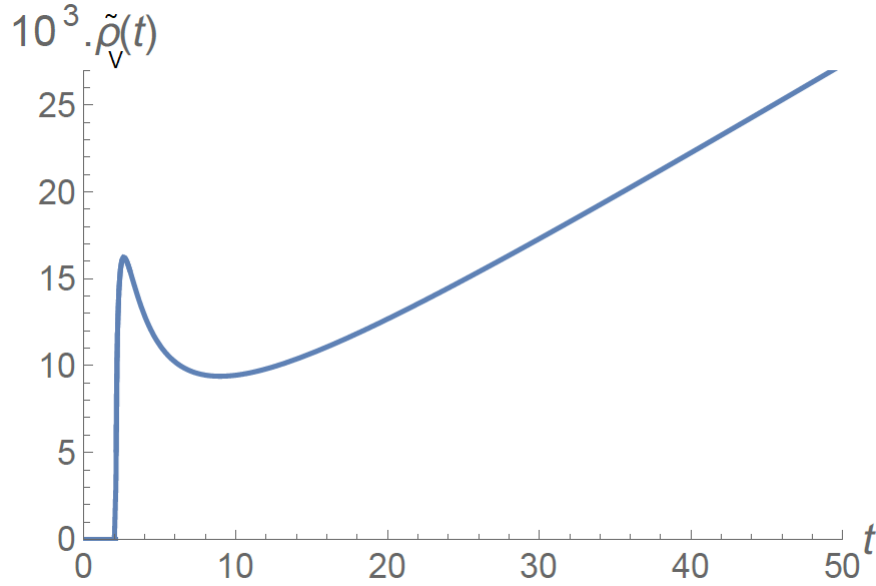
Fonte: DUDAL, 2020, f. 25.

podemos concluir que a função $\langle O(p)O(-p) \rangle$ possui “thresholds” em $p^2 = -4m_h^2$ e $p^2 = -4m^2$. $\langle O(p)O(-p) \rangle$ não possui o “threshold” não físico em $p^2 = -4\xi m^2$ da função $\langle h(p)h(-p) \rangle$. O gráfico da densidade espectral de $\langle O(p)O(-p) \rangle$, $\tilde{\rho}_O(t)$, para os valores $e = 1$, $v = 1\mu$, $\lambda = \frac{1}{5}$ e $\mu = 1\text{GeV}$ é mostrado na Figura 34. Para esses valores dos parâmetros, $m_h < m$ e os “thresholds”, que correspondem aos dois saltos na densidade espectral, estão localizados em $t = \frac{4}{5}\text{GeV}^2$ e $t = 4\text{GeV}^2$, como mostra a Figura 34. Os fatos mais importantes a respeito da densidade espectral $\tilde{\rho}_O(t)$ é que ela é positiva e independente do parâmetro de calibre ξ . A análise que fizemos aqui também pode ser encontrada no trabalho (DUDAL et al., 2020).

A densidade espectral de $\langle V(p)V(-p) \rangle^T$, que denotamos por $\tilde{\rho}_V(t)$, é mostrada na Figura 35. Analisando $\hat{\Pi}_V(p^2)$, vemos que deve existir um “threshold” em $t = (m + m_h)^2$. De fato, para $e = 1$, $v = 1\mu$, $\lambda = \frac{1}{5}$ e $\mu = 1\text{GeV}$, que são os valores utilizados para gerar o gráfico da Figura 35, encontramos um “threshold” em $t \simeq 2,1\text{GeV}^2$. Esse mesmo “threshold” foi encontrado em $\tilde{\rho}_A(t)$, veja a análise feita na Seção 3.3.3. Assim como as densidades espectrais das funções dos outros operadores invariantes de calibre, $\tilde{\rho}_V(t)$ é positiva definida, como mostrado também em (DUDAL et al., 2020).

Uma questão que não podemos deixar de mencionar é o da reconstrução das funções de Green a partir das densidades espectrais. Pela forma como foi definida a densidade espectral, se resolvermos a integral $\int_0^\infty dt \frac{\tilde{\rho}(t)}{p^2+t}$ devemos obter $\tilde{D}(p^2)$. Analisando o gráfico de $\tilde{\rho}_O(t)$ na Figura 34, podemos notar que essa densidade espectral não tende a zero

Figura 35 - Densidade espectral $\tilde{\rho}_V(t)$.



Legenda: Densidade espectral $\tilde{\rho}_V(t)$ para os valores $e = 1$, $v = 1\mu$, $\lambda = \frac{1}{5}$ e $\mu = 1\text{GeV}$. t é dado em GeV^2 .

Fonte: DUDAL, 2022, f. 26.

quando $t \rightarrow \infty$. No caso de $\tilde{\rho}_V(t)$, as coisas ficam ainda piores, como mostra a Figura 35, pois a densidade espectral cresce. Esse tipo de comportamento de $\tilde{\rho}_O(t)$ e $\tilde{\rho}_V(t)$, implica que a integral acima diverge. Esse é um fato já esperado, devido à dimensionalidade mais elevada dos operadores compostos. Como discutido por (WEINBERG, 1995), nesses casos, a fórmula para obtermos $\tilde{D}(p^2)$ a partir de $\tilde{\rho}(t)$ é

$$\begin{aligned} \tilde{D}(p^2) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (p^2 - \Lambda)^k D^{(k)}(\Lambda) \\ &+ (-p^2 + \Lambda)^{n+1} \int_0^\infty dt \frac{\tilde{\rho}(t)}{(t + \Lambda)^{n+1} (p^2 + t)}, \end{aligned} \quad (301)$$

em que Λ é um ponto arbitrário e n é um inteiro positivo que deve ser suficientemente grande para que a integral convirja. Uma demonstração²⁰ dessa fórmula pode ser encontrada no Apêndice C. A fórmula (301) tem uma semelhança grande com o esquema BPHZ, que é utilizado para tornar finitas as integrais inicialmente divergentes que aparecem nos diagramas de Feynman. Em ambos os casos, aparece um polinômio nos momentos externos que precisa ser fixado. Se as partes finitas dos contratermos que renormalizam

²⁰ Se não se trata de uma demonstração rigorosa, é ao menos um forma mnemônica de lembrar de (301)

$\langle O(p)O(-p) \rangle$ e $\langle V(p)V(-p) \rangle$ coincidem com $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (p^2 - \Lambda)^k \tilde{D}^{(k)}(\Lambda)$, cada escolha de valores para o conjunto $\{D^{(k)}(\Lambda); k = 1, \dots, n\}$ corresponde a um esquema diferente de renormalização de $\tilde{D}(p^2)$. Como o esquema de renormalização não afeta os observáveis físicos, podemos escolher $\{D^{(k)}(\Lambda); k = 1, \dots, n\}$ da forma mais conveniente possível.²¹

4.6 Comentários finais

Os resultados mostrados nas seções anteriores a respeito das funções de Green dos operadores $O(x)$ e $V_\mu(x)$, combinados com os resultados do capítulo anterior a respeito de A_μ^T , evidenciam as vantagens, ao menos, conceituais de se trabalhar com objetos invariantes de BRST. Não existem “thresholds” não físicos e as densidades espectrais são independentes do calibre, o que facilita a interpretação dos resultados. Obviamente, as dificuldades computacionais aumentam, já que estamos lidando com operadores compostos. Além disso, temos a questão da escolha da ressonância, que se trata de mais uma aproximação.

²¹ Podemos sempre escolher a parte finita dos contratermos da maneira que quisermos, desde que essa escolha seja compatível com as identidades de Ward da teoria. Pelo grupo de renormalização sabemos que os observáveis físicos são independentes dessa escolha.

5 RENORMALIZAÇÃO DOS OPERADORES COMPOSTOS $O(X)$ E $V_\mu(X)$ NO CALIBRE DE LANDAU; APLICAÇÃO DO TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA AO MODELO DE HIGGS $U(1)$

Este capítulo é uma continuação do capítulo anterior e tem como objetivo explorar alguns tópicos importantes que foram abordados de maneira superficial, como a renormalização dos operadores compostos $O(x)$ e $V_\mu(x)$. Além disso, através da aplicação do Teorema da Equivalência, tentamos dar substância à afirmação de que as funções de Green desses operadores são fisicamente equivalentes às funções de Green dos campos elementares. Na Seção 5.1, através da análise da cohomologia do operador de BRST, são estabelecidos os operadores envolvidos na renormalização de $O(x)$ e $V_\mu(x)$, além disso, são apresentadas as identidades de Ward da teoria depois da introdução desses operadores na ação de partida. Na Seção 5.2 é encontrado o contratérmo local invariante necessário para renormalizar a teoria. Na Seção 5.3 são apresentados os resultados explícitos dos fatores de renormalização até 1-loop e discutida a consistência deles com as identidades de Ward do modelo. A Seção 5.4 contém uma análise a respeito da relação entre os “tadpoles” e a energia do vácuo. Na Seção 5.5 são mostrados alguns resultados exatos para a função $\langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle$. O capítulo é encerrado com a Seção 5.6, onde é aplicado o Teorema da Equivalência para demonstrar que o conjunto de funções de Green dos operadores $O(x)$ e $V_\mu(x)$ é fisicamente equivalente ao conjunto de funções de Green dos campos elementares $h(x)$, $\rho(x)$ e A_μ . Este capítulo é baseado nos trabalhos (CAPRI et al., 2020; DUDAL; PERUZZO; SORELLA, 2021a), portanto, para obter mais detalhes a respeito dos assuntos tratados aqui, o leitor pode consultar essas referências.

5.1 Introdução dos operadores invariantes de BRST

5.1.1 Estudo da cohomologia de BRST

Para implementarmos as identidades de Ward necessárias para a análise da renormalização dos operadores $O(x)$ e $V_\mu(x)$, primeiramente, devemos estudar a cohomologia do operador de BRST, s , como é discutido por (PIGUET; SORELLA, 1995). Esse estudo mostrará as possíveis misturas que podem haver entre os operadores compostos no momento da renormalização, como discutem (KLUBERG-STERN; ZUBER, 1975) e (JOGLEKAR; LEE, 1976). No trabalho de (DUDAL et al., 2009), por exemplo, é mostrada a matriz de mistura do operador composto invariante de calibre $F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x)$, que está presente nas teorias de Yang-Mills não abelianas.

Começamos pelo operador $O(x)$, definido na Eq. (213). Esse operador é escalar,

possui dimensão de massa 2, $[\mathcal{N}_g] = 0$ (número de fantasma) e é par em relação à conjugação de carga (125) (isto é, $O(x) \rightarrow O(x)$). Assim, devemos buscar a quantidade não integrada, que denotaremos por $\Delta(x)$, com os mesmos números quânticos de $O(x)$ e que seja invariante de BRST, ou seja, devemos encontrar a solução mais geral possível para a equação

$$s\Delta(x) = 0. \quad (302)$$

Fazendo isso, obtemos que a solução mais geral possível de (302) é

$$\Delta(x) = a_1 O(x) + a_2 v^2, \quad (303)$$

em que a_1 e a_2 são coeficientes arbitrários. Portanto, se quisermos estudar $O(x)$ devemos considerar também a quantidade invariante por BRST $\int d^4x v^2 J(x)$. Embora tenhamos escolhido $O(x)$, em vez de $\varphi^*(x)\varphi(x)$, para nos livrarmos desse termo constante v^2 , ele reaparece inevitavelmente por causa da renormalização. Um fato que merece ser mencionado é o de que $\Delta(x)$ não possui partes triviais, como mostra a Eq. (303). Dito de outra forma, nenhum termo de $\Delta(x)$ pode ser escrito como um BRST-exato.

O operador $V_\mu(x)$ é um vetor que possui dimensão de massa 3 e $[\mathcal{N}_g] = 0$. Além disso, como foi discutido na Subseção 4.2.2, esse operador é ímpar em relação à conjugação de carga (125). Denotemos por $\Delta_\mu(x)$ a quantidade não integrada mais geral possível com os mesmos números quânticos de $V_\mu(x)$ e que é invariante por BRST, ou seja,

$$s\Delta_\mu(x) = 0. \quad (304)$$

A solução da Eq. (304) é

$$\Delta_\mu(x) = c_1 V_\mu(x) + c_2 \partial_\nu F_{\nu\mu}(x) + c_3 \partial_\mu b, \quad (305)$$

em que c_1 , c_2 e c_3 são coeficientes arbitrários. O termo $\partial_\nu F_{\nu\mu}(x) = \partial^2 A_\mu^T$ já foi encontrado por (CLARK, 1975) no seu trabalho a respeito do modelo de Higgs abeliano no calibre de Landau. O único termo que pertence à cohomologia trivial do operador s é $\partial_\mu b = -is(\partial_\mu \bar{c})$. Esse termo não desempenha nenhum papel relevante, pois, além de $b(x)$ não ser um campo interagente, as identidades de Ward, que serão apresentadas a seguir, implicam que $\partial_\mu b(x)$ não contribui para a renormalização dos outros operadores. Não é difícil de prever isso, já que, a invariância de BRST da teoria implica em $\langle V_\mu(x) (\partial_\nu b)(y) \rangle = -i \langle s[V_\mu(x) \partial_\nu \bar{c}(y)] \rangle = 0$ e $\langle \partial_\lambda F_{\lambda\mu}(x) (\partial_\nu b)(y) \rangle = -i \langle s[\partial_\lambda F_{\lambda\mu}(x) \partial_\nu \bar{c}(y)] \rangle = 0$. Seguindo o que estabelece (COLLINS, 1986), o resultado (305) indica que a renormalização de $V_\mu(x)$ e $\partial_\nu F_{\nu\mu}(x)$ será matricial, com os fatores de renormalização das fontes externas, que são necessárias para introduzir esses operadores, formando uma matrix 2×2 .

5.1.2 A ação inicial completa Σ e suas identidades de Ward

Agora que todos os operadores necessários para introduzir $O(x)$ e $V_\mu(x)$ já foram listados, sabemos que devemos adicionar o termo

$$S_\Delta = \int d^4x [J(x)O(x) + \eta(x)v^2 + \Omega_\mu(x)V_\mu(x) + \Upsilon_\mu(x)(\partial_\nu F_{\nu\mu})(x) + \Theta_\mu(x)(\partial_\mu b)(x)] \quad (306)$$

na ação inicial. As fontes externas $J(x)$ e $\eta(x)$ dão conta de $O(x)$ e v^2 , respectivamente, que são as quantidades envolvidas na renormalização de $O(x)$. Já as fontes externas $\Omega_\mu(x)$, $\Upsilon_\mu(x)$ e $\Theta_\mu(x)$ tratam dos operadores $V_\mu(x)$, $(\partial_\nu F_{\nu\mu})(x)$ e $(\partial_\mu b)(x)$, respectivamente. O termo S_Δ é invariante por BRST se tomarmos todas as fontes externas como sendo, também, invariantes por BRST, isto é,

$$sJ = s\eta = s\Omega_\mu = s\Upsilon_\mu = s\Theta_\mu = 0 \quad . \quad (307)$$

Adotando o calibre de Landau, temos o termo de fixação de calibre

$$S_{\text{gf}}^{\text{Landau}} = \int d^4x (ib\partial_\mu A_\mu + \bar{c}\partial^2 c), \quad (308)$$

que corresponde a tomarmos $\xi = 0$ no calibre de 't Hooft, definido na Eq. (99). Assim, a ação de partida que vamos analisar é

$$\Sigma = S_{\text{Higgs}} + S_{\text{gf}}^{\text{Landau}} + S_s + S_\Delta, \quad (309)$$

que é invariante de BRST,

$$s\Sigma = 0. \quad (310)$$

Lembrando que, S_{Higgs} é definida na Eq. (90) e $S_s = \int d^4x [H(sh) + R(s\rho)]$ é o termo com as transformações não lineares de BRST dos campos $h(x)$ e $\rho(x)$.

A ação Σ satisfaz um número significativamente grande de identidades de Ward, que são listadas a seguir:

(i) A identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) = 0, \quad (311)$$

sendo

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^4x \left(-\partial_\mu c \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \Sigma}{\delta H} \frac{\delta \Sigma}{\delta h} + \frac{\delta \Sigma}{\delta R} \frac{\delta \Sigma}{\delta \rho} + ib \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}} \right). \quad (312)$$

A Eq. (311) expressa a invariância de BRST da ação Σ na forma de uma equação funci-

onal;

(ii) Equação de movimento de $b(x)$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b} = i\partial_\mu A_\mu - \partial_\mu \Theta_\mu. \quad (313)$$

O lado direito da Eq. (313), sendo linear nos campos quânticos, é uma quebra clássica, portanto, não é afetada por correções quânticas, como discutido no Capítulo 1. A Eq. (313) expressa, na forma funcional, o fato de $b(x)$ não ser um campo interagente;

(iii) As equações de movimento dos campos fantasmas,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta \bar{c}} = \partial^2 c \quad (314)$$

e

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c} = -\partial^2 \bar{c} - Re(v+h) + He\rho. \quad (315)$$

Essas equações expressam, de forma funcional, o fato de que os campos fantasmas de Faddeev-Popov se desacoplam da teoria no calibre de Landau;

(iv) As transformações de calibre globais (101) podem ser estendidas às fontes externas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta_\omega h &= -e\omega\rho, & \delta_\omega \rho &= e\omega(v+h) \\ \delta_\omega A_\mu &= 0, & \delta_\omega \bar{c} &= 0, & \delta_\omega c &= 0, & \delta_\omega b &= 0, \\ \delta_\omega H &= -e\omega R, & \delta_\omega R &= e\omega H, \\ \delta_\omega J &= \delta_\omega \eta = \delta_\omega \Omega_\mu = \delta_\omega \Upsilon_\mu = \delta_\omega \Theta_\mu = 0, \end{aligned} \quad (316)$$

assim

$$\delta_\omega \Sigma = 0.$$

Dessa forma, temos a poderosa identidade de Ward

$$\int d^4x \left[-\rho \frac{\delta\Sigma}{\delta h} + (v+h) \frac{\delta\Sigma}{\delta \rho} - R \frac{\delta\Sigma}{\delta H} + H \frac{\delta\Sigma}{\delta R} \right] = 0. \quad (317)$$

Vale a pena destacar que essa simetria e, conseqüentemente, essa identidade de Ward não existem no calibre R_ξ ;

(v) A invariância por conjugação de carga

$$\begin{aligned}
A_\mu &\rightarrow -A_\mu, & h &\rightarrow h, \\
\rho &\rightarrow -\rho, & b &\rightarrow -b, \\
c &\rightarrow -c, & \bar{c} &\rightarrow -c, \\
H &\rightarrow H, & R &\rightarrow -R, \\
J &\rightarrow J, & \Omega_\mu &\rightarrow -\Omega_\mu, \\
\Upsilon_\mu &\rightarrow -\Upsilon_\mu, & \Theta_\mu &\rightarrow -\Theta_\mu,
\end{aligned} \tag{318}$$

(vi) Identidade do número de ghost

$$\mathcal{N}_g(\Sigma) = 0, \tag{319}$$

em que

$$\mathcal{N}_g = \int d^4x \left(c \frac{\delta}{\delta c} - \bar{c} \frac{\delta}{\delta \bar{c}} - H \frac{\delta}{\delta H} - R \frac{\delta}{\delta R} \right), \tag{320}$$

(vii) Identidades das fontes externas

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Sigma}{\delta \eta} &= v^2, \\
\frac{\delta \Sigma}{\delta \Upsilon_\mu} &= \partial_\nu F_{\nu\mu}, \\
\frac{\delta \Sigma}{\delta \Theta_\mu} &= \partial_\mu b.
\end{aligned} \tag{321}$$

Nesse caso, também temos quebras lineares nos campos, que não são afetadas por correções quânticas. Essas identidades implicam que o contratérmo invariante mais geral possível é independente das fontes $\eta(x)$, $\Upsilon_\mu(x)$ e $\Theta_\mu(x)$.

A contagem de potências e as identidades de Ward listadas acima permitem que sejam introduzidos termos puramente quadráticos, cúbicos e quárticos nas fontes $J(x)$ e $\Omega_\mu(x)$, como

$$\int d^4x J^2, \quad \int d^4x \Omega_\mu \partial^2 \Omega_\mu, \quad \text{etc.}$$

Esses termos dão origem a termos de contato nas funções de Green com mais de uma inserção dos operadores compostos $O(x)$ e $V_\mu(x)$, como $\langle O(x) O(y) \rangle = - \frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{\mathcal{J}=0}$. Como estamos estudando a renormalização perturbativa dos operadores compostos, esses termos não são incluídos na ação clássica de partida Σ , Eq. (309), já que, as divergência

ultravioletas relacionadas a eles surgem de correções quânticas ²². Todos os termos não lineares nas fontes $J(x)$ e $\Omega_\mu(x)$ serão identificados e analisados quando escrevermos o contratermo mais geral possível compatível com as identidades de Ward.

5.1.3 Identidades de Ward adicionais devido aos operadores compostos

O conjunto de identidades (312)-(321) existiria na teoria mesmo se os operadores $O(x)$ e $V_\mu(x)$ não fossem considerados. De maneira surpreendente, quando esses operadores são adicionados na ação de partida, acoplados às suas correspondentes fontes externas, novas identidades de Ward são geradas. Esse tipo de situação não ocorre com tanta frequência, tanto que, as pistas da existência dessas identidades nos foram fornecidas somente após o cálculo a 1-loop da função de correlação $\langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle$. Por isso, decidimos abrir uma subseção somente para elas.

A ação S_{Higgs} possui uma quebra da simetria global

$$\begin{aligned}\delta v &= -\omega, \\ \delta h &= \omega,\end{aligned}\tag{322}$$

que estabelece que v e $h(x)$ devem aparecer sempre na combinação $v + h(x)$. O potencial de Higgs com o acoplamento em λ é o responsável por essa quebra. De fato, o que resulta dessas transformações é a equação

$$\int d^4x \frac{\delta S_{\text{Higgs}}}{\delta h(x)} - \frac{\partial S_{\text{Higgs}}}{\partial v} = \int d^4x \lambda v O(x).\tag{323}$$

Note que, do lado direito da Eq. (323) temos exatamente o operador composto $O(x)$. Como a quebra é quadrática nos campos, a Eq. (323) não pode ser traduzida em uma identidade de Ward a nível quântico, a menos que $O(x)$ seja introduzido desde o começo, que é justamente o nosso caso. Assim, com algumas pequenas modificações, devido ao termo de fixação de calibre, termos de fonte, etc, temos a identidade de Ward

$$\int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta h} - \lambda v \frac{\delta \Sigma}{\delta J} \right) - \frac{\partial \Sigma}{\partial v} = \int d^4x v (J - 2\eta).\tag{324}$$

²² Na verdade, pode ser que um operador composto condense devido a efeitos não perturbativos. Nesse caso, existe uma contribuição já a nível árvore que precisa ser levada em consideração.

Além da identidade (324), a ação Σ possui a identidade

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu} - 2e \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega_\mu} - e\Omega_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta J} &= -\partial_\nu F_{\nu\mu} - i\partial_\mu b + \frac{ev^2}{2}\Omega_\mu \\ &+ \partial^2\Upsilon_\mu - \partial_\mu\partial_\nu\Upsilon_\nu. \end{aligned} \quad (325)$$

Os termos que aparecem do lado direito de (325) são termos lineares nos campos, portanto não são um problema. Essa identidade (325) é ainda mais restritiva que (324), pois não é integrada. Analisando o correspondente clássico da Eq. (325), podemos perceber um fato importante a respeito de $V_\mu(x)$. A equação de movimento de $A_\mu(x)$ que resulta da ação de Higgs é

$$\frac{\delta S_{\text{Higgs}}}{\delta A_\mu} = -\partial_\nu F_{\nu\mu} + 2eV_\mu, \quad (326)$$

assim,

$$\partial_\mu V_\mu(x) = \frac{1}{2e} \partial_\mu \frac{\delta S_{\text{Higgs}}}{\delta A_\mu}, \quad (327)$$

o que mostra que, a nível clássico, V_μ é uma corrente conservada. A identidade de Ward (325) expressa na forma funcional e “off-shell” essa propriedade do operador V_μ . Se temos uma corrente conservada, naturalmente existe uma simetria por detrás dela. De fato, V_μ é a corrente da simetria de calibre global $U(1)$, caracterizada pelas transformações (316). A Eq. (317) pode ser reescrita como

$$\int d^4x \mathcal{W}(x) \Sigma = 0, \quad (328)$$

em que $\mathcal{W}(x)$ é o operador local

$$\mathcal{W}(x) = -\rho(x) \frac{\delta}{\delta h(x)} + (v + h(x)) \frac{\delta}{\delta \rho(x)} - R(x) \frac{\delta}{\delta H(x)} + H(x) \frac{\delta}{\delta R(x)}. \quad (329)$$

Assim, pelo teorema de Noether

$$\mathcal{W}(x) \Sigma = \partial_\mu J_\mu(x). \quad (330)$$

Fazendo o cálculo explícito, chegamos ao resultado que

$$J_\mu(x) = -\left(\Omega_\mu(x) O(x) + \frac{v^2}{2} \Omega_\mu(x) + 2V_\mu(x) \right). \quad (331)$$

Tomando todas as fontes $\{J, \eta, \Omega_\mu, \Upsilon_\mu, \Theta_\mu\}$ a zero, temos

$$\left(-\rho(x) \frac{\delta}{\delta h(x)} + (v + h(x)) \frac{\delta}{\delta \rho(x)} \right) (S_{\text{Higgs}} + S_{\text{gf}}) = -2\partial_\mu V_\mu(x). \quad (332)$$

Assim, fica claro que V_μ é a corrente conservada da simetria global $U(1)$. Como os operadores $O(x)$ e $V_\mu(x)$ já estão na ação de partida, a Eq. (330) pode ser transformada na identidade de Ward

$$-\rho \frac{\delta \Sigma}{\delta h} + (v+h) \frac{\delta \Sigma}{\delta \rho} - R \frac{\delta \Sigma}{\delta H} + H \frac{\delta \Sigma}{\delta R} = -\partial_\mu \left(\Omega_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta J} + 2 \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu} + \frac{v^2}{2} \Omega_\mu \right). \quad (333)$$

Combinando as Eqs. (325) e (333), obtemos a conhecida identidade de Ward local com quebra linear

$$\partial_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu} + e \left[-\rho \frac{\delta \Sigma}{\delta h} + (v+h) \frac{\delta \Sigma}{\delta \rho} - R \frac{\delta \Sigma}{\delta H} + H \frac{\delta \Sigma}{\delta R} \right] = -i\partial^2 b, \quad (334)$$

que pode ser obtida através da anticomutação da identidade de Slavnov-Taylor (312) com a equação de movimento do campo fantasma c (315).

5.2 Caracterização do contratermo local invariante

Para encontrarmos o contratermo local invariante mais geral possível, seguimos os métodos da Renormalização Algébrica, apresentados em (PIGUET; SORELLA, 1995). Primeiramente, perturbamos a ação inicial Σ da seguinte forma: $\Sigma \rightarrow \Sigma + \epsilon \Sigma^{\text{ct}}$, em que ϵ é um parâmetro de expansão. De acordo com a contagem de potências, Σ^{ct} é um polinômio local integrado nos campos, parâmetros de massa e nas fontes externas, de dimensão quatro, invariante por conjugação de carga e com $[\mathcal{N}_g] = 0$. Exigindo que a ação perturbada, $\Sigma + \epsilon \Sigma^{\text{ct}}$ satisfaça as mesmas identidades de Ward que Σ até primeira ordem no parâmetro de ϵ , temos de imediato as equações:

$$\frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta b} = \frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta \bar{c}} = \frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta c} = 0, \quad (335)$$

assim como,

$$\frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta \eta} = \frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta \Theta_\mu} = \frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta \Upsilon_\mu} = 0. \quad (336)$$

Como (335) implica que Σ^{ct} é independente do campo antifantasma, \bar{c} , e as fontes (H, R) têm $[\mathcal{N}_g] = -1$, não é possível formar nenhum contratermo local com essas fontes que tenha $[\mathcal{N}_g] = 0$, isso quer dizer que

$$\frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta H} = \frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta R} = 0. \quad (337)$$

As Eqs. (335)-(337) já impõem restrições importantes aos tipos de campos e fontes que

aparecem no contratermo, devemos ter que

$$\Sigma^{\text{ct}} = \Sigma^{\text{ct}}(A, h, \rho, v, J, \Omega). \quad (338)$$

Em especial, a Eq. (337) simplifica bastante a identidade de Slavnov-Taylor (312), que se torna equivalente a

$$s\Sigma^{\text{ct}} = 0. \quad (339)$$

Das Eqs. (324) e (325), obtemos as duas condições adicionais

$$\int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma^{\text{ct}}}{\delta h} - \lambda v \frac{\delta\Sigma^{\text{ct}}}{\delta J} \right) - \frac{\partial\Sigma^{\text{ct}}}{\partial v} = 0 \quad (340)$$

e

$$\frac{\delta\Sigma^{\text{ct}}}{\delta A_\mu} - 2e \frac{\delta\Sigma^{\text{ct}}}{\delta\Omega_\mu} - e\Omega_\mu \frac{\delta\Sigma^{\text{ct}}}{\delta J} = 0, \quad (341)$$

respectivamente.

O contratermo mais geral possível que satisfaz as Eqs. (335)-(341) é

$$\begin{aligned} \Sigma^{\text{ct}} = & \int d^4x \left\{ a_0 \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2e} \Omega_\mu \partial_\nu F_{\nu\mu} - \frac{1}{8e^2} \Omega_\mu \partial^2 \Omega_\mu + \frac{1}{8e^2} \Omega_\mu \partial_\mu \partial_\nu \Omega_\nu \right] \right. \\ & + a_1 \left[(D_\mu \varphi)^* D_\mu \varphi + \Omega_\mu V_\mu + \frac{1}{8} v^2 \Omega_\mu \Omega_\mu + \frac{1}{4} O \Omega_\mu \Omega_\mu \right] \\ & + a_2 \left[\frac{\lambda}{2} \left(\varphi^* \varphi - \frac{v^2}{2} \right)^2 + JO - \frac{1}{4} O \Omega_\mu \Omega_\mu + \frac{1}{32\lambda} (\Omega_\mu \Omega_\mu \Omega_\nu \Omega_\nu + 16J^2 - 8J \Omega_\mu \Omega_\mu) \right] \\ & + (\delta a) \left[\frac{v^4}{4} + \frac{1}{16\lambda^2} (\Omega_\mu \Omega_\mu \Omega_\nu \Omega_\nu + 16J^2 - 8J \Omega_\mu \Omega_\mu) - \frac{1}{\lambda} \left(Jv^2 - \frac{1}{4} v^2 \Omega_\mu \Omega_\mu \right) \right] \\ & + (\delta \sigma) \left[\frac{v^2}{2} (h^2 + 2vh + \rho^2) + \frac{1}{\lambda} \left(Jv^2 - \frac{1}{4} v^2 \Omega_\mu \Omega_\mu - 2JO + \frac{1}{2} O \Omega_\mu \Omega_\mu \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{8\lambda^2} (\Omega_\mu \Omega_\mu \Omega_\nu \Omega_\nu + 16J^2 - 8J \Omega_\mu \Omega_\mu) \right] \left. \right\}, \quad (342) \end{aligned}$$

em que a_1 , a_2 , a_3 , $\delta\sigma$ e δa são parâmetros livres. Tomando as fontes externas a zero, fica claro o significado de alguns desses parâmetros: a_0 está relacionado à renormalização de $\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$, a_1 está relacionado à renormalização de $\langle h(x) h(y) \rangle$ e $\langle \rho(x) \rho(y) \rangle$ e a_2 deve estar associado à renormalização da constante de acoplamento quártico λ . Já o significado do contratermo invariante de BRST $(\delta\sigma) \frac{v^2}{2} (h^2 + 2vh + \rho^2)$ pode ser extraído do seu termo linear em h . Esse contratermo começa a partir de ordem \hbar e é responsável por renormalizar a função de um ponto $\langle h \rangle$ (“tadpoles”), que na maioria das vezes é tomada como sendo zero,

$$\langle h \rangle = 0. \quad (343)$$

A existência desse tipo de contratermo é um fato bem conhecido nos modelos onde o mecanismo de Higgs é empregado, veja por exemplo (KRAUS; SIBOLD, 1995; HAUSSLING; KRAUS, 1997; BECCHI; ROUET; STORA, 1975; BECCHI; ROUET; STORA, 1974). O termo $\frac{v^2}{2}(h^2(x) + 2vh(x) + \rho^2)$, que nada mais é do que v^2O , é removido da ação inicial quando o campo escalar φ é expandido em torno de um dos mínimos do potencial de Higgs. Já o contratermo $(\delta a)\frac{v^2}{4}$ é responsável por renormalizar a energia do vácuo. Os contratermos $(\delta\sigma)v^2O$ e $(\delta a)\frac{v^2}{4}$ serão discutidos com mais detalhes na Seção 5.4.

Em relação ao contratermos com as fontes externas, algumas características chamam a atenção. A primeira delas é a presença do termo $\Omega_\mu\partial_\nu F_{\nu\mu}$, lembrando que Ω_μ é a fonte usada para introduzir V_μ na teoria. Esse termo mistura na renormalização de V_μ o termo $\partial_\nu F_{\nu\mu}$, como já havíamos antecipado. Algo semelhante acontece com as quantidades O e v^2 , já que existe o contratermo v^2J . As identidades de Ward também permitem termos quadráticos, cúbicos e quárticos nas fontes externas, como $\Omega_\mu\partial^2\Omega_\mu$, $J\Omega^2$, Ω^4 , etc, não apenas em Σ^{ct} , mas também na ação de partida. Contudo, como já foi explicado, todos eles, exceto possíveis termos originários de condensados, começam a partir da ordem \hbar .

Depois de encontrarmos o contratermo local invariante por BRST mais geral possível, Eq. (342), podemos determinar qual é a ação “bare” do modelo, Σ_{bare} . Uma das propriedades que a ação “bare” deve ter é

$$\Sigma + \epsilon\Sigma^{\text{ct}} = \Sigma_{\text{bare}} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (344)$$

Não é difícil de se convencer que

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{bare}} = & \Sigma(A_{0\mu}, h_0, \rho_0, b_0, c_0, \bar{c}_0, v_0, e_0, \lambda_0, J_0, \eta_0, \Omega_{0\mu}, \Upsilon_{0\mu}, \Theta_{0\mu}, H_0, R_0) \\
& + \int d^4x \delta\sigma_0 \frac{v_0^2}{2} (h_0^2 + 2v_0h_0 + \rho_0^2) \\
& + \int d^4x \frac{(Z_A - 1)}{8e_0^2} (-\Omega_{0\mu}\partial^2\Omega_{0\mu} + \Omega_{0\mu}\partial_\mu\partial_\nu\Omega_{0\nu}) \\
& + \int d^4x \frac{(Z_h - 1)}{4} \left(\frac{1}{2}v_0^2 + O_0\right) \Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu} \\
& + \int d^4x (Z_\lambda + 2Z_h - 3) \left[-\frac{1}{4}O_0\Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{32\lambda_0} (\Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu}\Omega_{0\nu}\Omega_{0\nu} + 16J_0^2 - 8J_0\Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu}) \right] \\
& + \int d^4x (\delta\sigma)_0 \left[\frac{1}{\lambda_0} \left(-\frac{1}{4}v_0^2\Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu} + \frac{1}{2}O_0\Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu}\right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{8\lambda_0^2} (\Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu}\Omega_{0\nu}\Omega_{0\nu} + 16J_0^2 - 8J_0\Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu}) \right] \\
& + \int d^4x (\delta a)_0 \left[\frac{v_0^4}{4} + \frac{1}{16\lambda_0^2} (\Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu}\Omega_{0\nu}\Omega_{0\nu} + 16J_0^2 - 8J_0\Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu}) + \frac{v_0^2}{4\lambda_0}\Omega_{0\mu}\Omega_{0\mu}\right],
\end{aligned} \tag{345}$$

em que

$$O_0 := \frac{1}{2} (h_0^2 + 2v_0h_0 + \rho_0^2) \tag{346}$$

e

$$\begin{aligned}
A_{0\mu} &= Z_A^{\frac{1}{2}} A_\mu, & h_0 &= Z_h^{\frac{1}{2}} h, \\
\rho_0 &= Z_\rho^{\frac{1}{2}} \rho, & v_0 &= Z_v^{\frac{1}{2}} v, \\
b_0 &= Z_b^{\frac{1}{2}} b, & c_0 &= Z_c^{\frac{1}{2}} c, \\
\bar{c}_0 &= Z_{\bar{c}}^{\frac{1}{2}} \bar{c}, & e_0 &= Z_e e, \\
\lambda_0 &= Z_\lambda \lambda, & H_0 &= Z_H H, \\
R_0 &= Z_R R, & \Theta_{0\mu} &= Z_\Theta \Theta_\mu,
\end{aligned} \tag{347}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Omega_{0\mu} \\ \Upsilon_{0\mu} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{\Omega\Omega} & Z_{\Omega\Upsilon} \\ Z_{\Upsilon\Omega} & Z_{\Upsilon\Upsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_\mu \\ \Upsilon_\mu \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} J_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{JJ} & Z_{J\eta} \\ Z_{\eta J} & Z_{\eta\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ \eta \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{348}$$

As matrizes em (348) expressam, em termos das correspondentes fontes $(\Omega_\mu, \Upsilon_\mu, J, \eta)$, a mistura entre as quantidades $V_\mu(x)$ e $\partial_\nu F_{\nu\mu}(x)$, assim como entre $O(x)$ e v^2 .

Inspecionando as Eqs. (342), (344) e (345), com as definições dos fatores de renormalização, (347) e (348), obtemos que

$$\begin{aligned}
Z_A^{\frac{1}{2}} &= Z_e^{-1} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon a_0, \\
Z_h^{\frac{1}{2}} &= Z_\rho^{\frac{1}{2}} = Z_v^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon a_1, \\
Z_\lambda &= 1 + \epsilon(a_2 - 2a_1), \\
Z_c^{\frac{1}{2}} &= Z_c^{\frac{1}{2}}, \\
Z_\Theta &= Z_b^{-\frac{1}{2}} = Z_A^{\frac{1}{2}}, \\
Z_H &= Z_R = Z_e^{-1} Z_h^{-\frac{1}{2}} Z_c^{-\frac{1}{2}}, \\
Z_{\Omega\Omega} &= 1, \\
Z_{\Omega\Upsilon} &= 0, \\
Z_{\Upsilon\Omega} &= -\frac{1}{2e}\epsilon a_0 = -\frac{1}{2e}(Z_A - 1), \\
Z_{\Upsilon\Upsilon} &= Z_A^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon a_0, \\
Z_{JJ} &= 1 + \epsilon\left(a_2 - a_1 - 2\frac{\delta\sigma}{\lambda}\right), \\
Z_{J\eta} &= 0, \\
Z_{\eta J} &= \epsilon\left(\frac{\delta\sigma}{\lambda} - \frac{\delta a}{\lambda}\right) a \\
Z_{\eta\eta} &= Z_h^{-\frac{1}{2}} = 1 - \epsilon a_1
\end{aligned} \tag{349}$$

e

$$(\delta\sigma)_0 = \epsilon(\delta\sigma), \quad (\delta a)_0 = \epsilon(\delta a). \tag{350}$$

Portanto, para a ação “bare”, obtemos²³

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{bare}} = & \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{0\mu\nu} F_{0\mu\nu} + (D_{0\mu}\varphi_0)^* (D_{0\mu}\varphi_0) + \frac{\lambda_0}{2} \left(\varphi_0^* \varphi_0 - \frac{v^2}{2} \right)^2 \right] \\
& + \int d^4x \left(\bar{c}_0 \partial^2 c_0 + ib_0 \partial_\mu A_{0\mu} + J_0 O_0 + \eta_0 v_0^2 + \Omega_{0\mu} V_{0\mu} + \Upsilon_{0\mu} \partial_\nu F_{0\nu\mu} \right) \\
& + \int d^4x \delta\sigma_0 \frac{v_0^2}{2} (h_0^2 + 2v_0 h_0 + \rho_0^2) \\
& + \int d^4x \left\{ \frac{(Z_A - 1)}{8e_0^2} (-\Omega_{0\mu} \partial^2 \Omega_{0\mu} + \Omega_{0\mu} \partial_\mu \partial_\nu \Omega_{0\nu}) \right. \\
& + \frac{(Z_h - 1)}{4} \left(\frac{1}{2} v_0^2 + O_0 \right) \Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu} \\
& + (Z_\lambda + 2Z_h - 3) \left[-\frac{1}{4} O_0 \Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu} + \frac{1}{32\lambda_0} (\Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu} \Omega_{0\nu} \Omega_{0\nu} + 16J_0^2 - 8J_0 \Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu}) \right] \\
& + (\delta\sigma)_0 \left[\frac{1}{\lambda_0} \left(-\frac{1}{4} v_0^2 \Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu} + \frac{1}{2} O_0 \Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{8\lambda_0^2} (\Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu} \Omega_{0\nu} \Omega_{0\nu} + 16J_0^2 - 8J_0 \Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu}) \right] \\
& \left. + (\delta a)_0 \left[\frac{v_0^4}{4} + \frac{1}{16\lambda_0^2} (\Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu} \Omega_{0\nu} \Omega_{0\nu} + 16J_0^2 - 8J_0 \Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu}) + \frac{v_0^2}{4\lambda_0} \Omega_{0\mu} \Omega_{0\mu} \right] \right\}, \tag{351}
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
F_{0\mu\nu} &= \partial_\mu A_{0\nu} - \partial_\nu A_{0\mu}, \\
D_{0\mu} &= \partial_\mu + ie_0 A_{0\mu}
\end{aligned} \tag{352}$$

e

$$\varphi_0 = \frac{Z_h^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} (v + h + i\rho). \tag{353}$$

A Eq. (351) mostra que, com a exceção do termo $\int d^4x \delta\sigma_0 \frac{v_0^2}{2} (h_0^2 + 2v_0 h_0 + \rho_0^2)$ e os

²³ Como não estamos interessados no cálculo de funções de correlação com inserções dos operadores BRST exatos (sh, sp), já consideraremos o caso em que as correspondentes fontes externas são nulas, isto é, $H = R = 0$.

demais termos não lineares nas fontes²⁴ que começam a partir de 1-loop, o contratermo invariante mais geral possível compatível pode ser absorvido na ação de partida (309) através da redefinição dos campos, parâmetros e fontes, Eqs. (347) e (348). Com isso, estabelecemos a renormalização do modelo de Higgs com os operadores compostos $V_\mu(x)$ e $O(x)$. A ação “bare” final (351) deve ser o ponto de partida para o cálculo perturbativo de qualquer função de Green do modelo de Higgs abeliano, com ou sem inserções desses operadores compostos, já que, se tomarmos as fontes externas $\Omega_\mu = J = 0$, recuperamos o resultado obtido por (BECCHI; ROUET; STORA, 1974; HAUSSLING; KRAUS, 1997).

A Eq. (349) merece alguns comentários adicionais:

(i) Os fatores de renormalização de v e dos campos $h(x)$ e $\rho(x)$ são iguais, isto é,

$$Z_h = Z_\rho = Z_v. \quad (357)$$

Essa propriedade se deve ao conjunto de identidades de Ward do calibre de Landau. Em especial, a identidade de Ward (317) que expressa a simetria global $U(1)$. Esse resultado implica que

$$\begin{aligned} O_0(x) &= Z_h O(x), \\ V_{0\mu}(x) &= Z_h V_\mu(x), \end{aligned} \quad (358)$$

que são relações muito úteis para o cálculo dos fatores de renormalização das fontes $J(x)$ e $\Omega_\mu(x)$.

(ii) O fator de renormalização da carga elétrica, Z_e , não é independente do fator

²⁴ É importante mencionarmos que esses termos de ordens mais elevadas nas fontes podem ser absorvidos através de redefinições não lineares das fontes (J, η) . Podemos tomar

$$J_0 = J + \epsilon (z_1 J + z_\Omega \Omega_\mu \Omega_\mu + z_3 v^2) \quad (354)$$

e

$$\eta_0 = \eta + \epsilon \left[z_\eta \eta + \tilde{z}_J J + \tilde{z}_\Omega \Omega_\mu \Omega_\mu + \frac{\tilde{z}_4}{v^2} (\Omega^4 + 16J^2 - 8J\Omega^2) \right], \quad (355)$$

em que

$$\begin{aligned} z_J &= a_2 - a_1 - 2\frac{\delta\sigma}{\lambda}, & z_\Omega &= -\frac{a_2}{4}, \\ z_3 &= \frac{\delta\sigma}{2}, & z_\eta &= -a_1, \\ \tilde{z}_J &= \frac{\delta\sigma}{\lambda}, & \tilde{z}_\Omega &= -\frac{\delta\sigma}{4\lambda}, & z_4 &= \frac{a_2}{32\lambda} - \frac{\delta\sigma}{8\lambda^2}. \end{aligned} \quad (356)$$

Note a similaridade entre (z_J, z_η) e os fatores Z_{JJ} e $Z_{\eta\eta}$ da Eq. (349).

de renormalização do campo de calibre A_μ . O que temos é

$$e_0 A_{0\mu} = e A_\mu, \quad Z_e Z_A^{\frac{1}{2}} = 1, \quad (359)$$

que é um resultado bem conhecido das teorias de calibre abelianas, como a QED, veja (PESKIN; SCHROEDER, 1995). A verificação explícita dessa propriedade a 1-loop, ou ordens mais elevadas, pode ser feita através da análise da parte divergente na massa do bóson de calibre. Comentaremos mais a respeito disso a seguir.

(iii) Para finalizar, vamos escrever explicitamente as matrizes de mistura

$$\begin{pmatrix} \Omega_{0\mu} \\ \Upsilon_{0\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2e}\epsilon a_0 & (1 - \frac{\epsilon}{2}a_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{0\mu} \\ \Upsilon_{0\mu} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} J_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \epsilon(a_2 - a_1 - 2\frac{\delta\sigma}{\lambda})) & 0 \\ \epsilon(\frac{\delta\sigma}{\lambda} - \frac{\delta a}{\lambda}) & (1 - \epsilon a_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (360)$$

Essa renormalização segue o padrão geral fornecido em (KLUBERG-STERN; ZUBER, 1975; JOGLEKAR; LEE, 1976).

5.3 Fatores de renormalização Z até 1-loop

Com a ação “bare” (351), podemos obter as regras de Feynman corretas para o cálculo perturbativo de qualquer função de Green. Como nenhum fator de renormalização novo é necessário para a renormalização dos operadores compostos $O(x)$ e $V_\mu(x)$, todos os fatores de renormalização da teoria podem ser obtidos a partir do cálculo das funções de correlação dos campos elementares. Graças às simetrias que existem no modelo, também não é preciso calcular todas as funções de correlação com os correspondentes contratermos na ação bare. Neste modelo, é suficiente calcularmos as funções $\langle h(0) \rangle$, $\langle h(x)h(y) \rangle$, $\langle \rho(x)\rho(y) \rangle$ e $\langle A_\mu(x)A_\nu(y) \rangle$. Os cálculos que fornecem os fatores de renormalização e verificam a validade da análise algébrica feita na seção anterior podem ser encontrados nos trabalhos (CAPRI et al., 2020; DUDAL; PERUZZO; SORELLA, 2021a). Aqui apresentaremos apenas os principais resultados.

Expandindo os fatores de renormalização até ordem \hbar , ou seja, até 1-loop,

$$\begin{aligned}
Z_A &= 1 + \hbar Z_A^{(1)} \\
Z_h &= 1 + \hbar Z_h^{(1)} \\
Z_\lambda &= 1 + \hbar Z_\lambda^{(1)} \\
Z_{JJ} &= 1 + \hbar Z_{JJ}^{(1)} \\
Z_{\eta J} &= \hbar Z_{\eta J}^{(1)} \\
Z_{J\eta} &= 0 \\
Z_{\eta\eta} &= Z_h^{-1} \\
Z_{\Omega\Omega} &= 1 + \hbar Z_{\Omega\Omega}^{(1)} \\
Z_{\Upsilon\Omega} &= \hbar Z_{\Upsilon\Omega}^{(1)} \\
Z_{\Omega\Upsilon} &= 0 \\
Z_{\Upsilon\Upsilon} &= Z_A^{-1} \\
(\delta\sigma)_0 &= \hbar (\delta\sigma)^{(1)}, \\
(\delta a)_0 &= \hbar (\delta a)^{(1)},
\end{aligned} \tag{361}$$

obtemos a ação “bare” e as regras de Feynman do Apêndice A. Com essas regras, no trabalho (CAPRI et al., 2020) foram calculadas até 1-loop as funções dos campos elementares: $\langle h \rangle$, $\langle h(x) h(y) \rangle$ e $\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$. Nesse mesmo trabalho existe uma subseção com o cálculo da função $\langle \rho(x) \rho(y) \rangle$, que mostra explicitamente que o modo de Goldstone permanece sem massa no calibre de Landau. Também existe uma seção com o cálculo das funções $\langle h(x) O(x) \rangle$ e $\langle A_\mu(x) V_\nu(y) \rangle$, que possuem uma inserção de operador composto.

A função de um ponto $\langle h(0) \rangle$ até 1-loop, com a inclusão do contratermo, vale

$$\langle h(0) \rangle_{1\text{-loop}} = \frac{3\lambda v}{2} \chi(m_h^2) + e^2 v (d-1) \chi(m^2) + (\delta\sigma)^{(1)} v^3. \tag{362}$$

Impondo que os “tadpoles” se anulam a 1-loop, ou seja,

$$\langle h(0) \rangle_{1\text{-loop}} = 0,$$

obtemos que

$$(\delta\sigma)^{(1)} = \frac{1}{v^2} \left[-e^2 (d-1) \chi(m^2) - \frac{3}{2} \lambda \chi(m_h^2) \right], \tag{363}$$

cuja parte divergente no esquema \overline{MS} é

$$(\delta\sigma)_{\text{div}}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{v^2} \left(3e^2 m^2 + \frac{3}{2} \lambda m_h^2 \right) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right). \tag{364}$$

(em que $\varepsilon = 4 - d$). Os fatores de renormalização $(Z_A^{(1)}, Z_h^{(1)}, Z_\lambda^{(1)})$ podem ser obti-

dos através do cálculo a 1-loop das funções de 2-pontos $\langle h(x) h(y) \rangle$, $\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$ e $\langle \rho(x) \rho(y) \rangle$. Aplicando nessas funções de Green o esquema \overline{MS} , obtemos

$$\begin{aligned} Z_A^{(1)} &= -\frac{e^2}{48\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right), \\ Z_h^{(1)} &= \frac{3e^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right), \\ Z_\lambda^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left(5\lambda + 6\frac{e^4}{\lambda} - 6e^2 \right) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right). \end{aligned} \quad (365)$$

A partir dos fatores $Z_A^{(1)}$ e $Z_\lambda^{(1)}$, como mostrado por (RAMOND, 1981), podemos determinar que as funções β de e e λ , até 1-loop, valem

$$\begin{aligned} \beta_e &= \frac{e^3}{48\pi^2}, \\ \beta_\lambda &= \frac{1}{8\pi^2} (5\lambda^2 - 6e^2\lambda + 6e^4), \end{aligned} \quad (366)$$

respectivamente, que concordam com os resultados fornecidos por (KRAUS; SIBOLD, 1995).

A respeito da relação $Z_e Z_A^{\frac{1}{2}} = 1$, que foi mencionada anteriormente e implica em $e_0 A_{0\mu} = e A_\mu$, existem algumas formas de verificá-la. Por exemplo, poderíamos calcular as correções perturbativas ao vértice $ve^2 h A_\mu A_\mu$. No entanto, a forma mais simples de se verificar essa relação é através das correções à massa do bóson de calibre. A relação acima implica que

$$\frac{1}{2} e_0^2 v_0^2 A_{0\mu} A_{0\mu} = \frac{Z_h}{2} e^2 v^2 A_\mu A_\mu = \frac{Z_h}{2} m^2 A_\mu A_\mu,$$

o que significa que a renormalização da massa do bóson de calibre deve ser feita inteiramente pelo fator de renormalização do campo de Higgs h , Z_h . Esse é precisamente o resultado que encontramos em (CAPRI et al., 2020) através do cálculo a 1-loop da função $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$.

Vejam agora os demais fatores de renormalização, que são aqueles envolvendo as fontes externas. Os fatores $(Z_{JJ}^{(1)}, Z_{Y\Omega}^{(1)}, Z_{\Omega\Omega}^{(1)})$ podem ser extraídos das funções $\langle h(x) O(y) \rangle$ e $\langle A_\mu(x) V_\nu(y) \rangle$. Como fizemos em (CAPRI et al., 2020), para obter essas funções, primeiramente, calculamos as funções de 1-ponto $\langle h(x) \rangle_J$ e $\langle A_\mu(x) \rangle_\Omega$, em que os índices “ J ” e “ Ω ” significam que essas fontes não são tomadas iguais a zero ainda, sendo tratadas como campos externos nas regras de Feynman, veja o Apêndice A. Depois do cálculo a 1-loop de $\langle h(x) \rangle_J$ e $\langle A_\mu(x) \rangle_\Omega$, essas funções são derivadas em relação a J e Ω , respectivamente,

para obtermos as funções desejadas, isto é,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \langle h(x) \rangle_J}{\delta J(y)} \right|_{J=\Omega=0} &= \langle h(x) O(y) \rangle, \\ \left. \frac{\delta \langle A_\mu(x) \rangle_\Omega}{\delta \Omega_\nu(y)} \right|_{J=\Omega=0} &= \langle A_\mu(x) V_\nu(y) \rangle. \end{aligned} \quad (367)$$

A correção a 1-loop do fator Z_{JJ} é obtido a partir de $\langle h(x) O(y) \rangle$. O resultado que encontramos no esquema \overline{MS} é

$$Z_{JJ}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} (2\lambda - 3e^2) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right). \quad (368)$$

Esse resultado concorda com aquele estabelecido a partir das identidades de Ward e da análise algébrica, Eq. (349), que é

$$Z_{JJ}^{(1)} = Z_\lambda^{(1)} + Z_h^{(1)} - 2 \frac{(\delta\sigma)_{\text{div}}^{(1)}}{\lambda}. \quad (369)$$

Outros resultados fornecidos pelas identidades de Ward e a análise algébrica são

$$\begin{aligned} Z_{\Omega\Omega} &= 1, \\ Z_{\Upsilon\Omega} &= -\frac{1}{2e} (Z_A - 1), \end{aligned} \quad (370)$$

que significa que $Z_{\Omega\Omega}$ não recebe correções perturbativas, enquanto que $Z_{\Upsilon\Omega}$ começa a partir de 1-loop e é expresso em termos do fator de renormalização do campo de calibre, Z_A . A 1-loop, o que encontramos são

$$\begin{aligned} Z_{\Omega\Omega}^{(1)} &= 0, \\ Z_{\Upsilon\Omega}^{(1)} &= \frac{e}{96\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right), \end{aligned}$$

veja (CAPRI et al., 2020), que está em total acordo com a predição (370).

5.4 “Tadpoles”, energia do vácuo e o condensado $\langle O(x) \rangle$

Analisemos agora a energia do vácuo, que denotamos por \mathcal{E}_v . A 1-loop²⁵, o resultado que segue da soma de todas as bolhas de vácuo é

$$\mathcal{E}_v = \frac{1}{2} \int d^d k \ln(k^2 + m_h^2) + \frac{d-1}{2} \int d^d k \ln(k^2 + m^2) + (\delta a)^{(1)} \frac{v^4}{4}. \quad (371)$$

²⁵ O valor da energia do vácuo a nível clássico é zero, já que $\varphi = \frac{v}{\sqrt{2}}$ é um mínimo do potencial.

Derivando a Eq. (371) em relação a v , temos

$$\frac{\partial \mathcal{E}_v}{\partial v} = \lambda v \chi(m_h^2) + e^2 v (d-1) \chi(m^2) + (\delta a)^{(1)} v^3, \quad (372)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathcal{E}_v}{\partial v} = \langle h \rangle_{1\text{-loop}} + (\delta a)^{(1)} v^3 - (\delta \sigma)^{(1)} v^3 - \frac{\lambda v}{2} \chi(m_h^2), \quad (373)$$

através da Eq. (362). Escolhendo o contratermo $(\delta a)^{(1)}$ como sendo

$$\begin{aligned} (\delta a)^{(1)} &= (\delta \sigma)^{(1)} + \frac{\lambda}{2v^2} \chi(m_h^2) \\ &= \frac{1}{v^2} [-e^2 (d-1) \chi(m^2) - \lambda \chi(m_h^2)], \end{aligned} \quad (374)$$

o resultado que segue é

$$\frac{\partial \mathcal{E}_v}{\partial v} = \langle h \rangle_{1\text{-loop}} = 0, \quad (375)$$

se os “tadpoles” forem cancelados. De maneira geral, os dois contratermos invariantes por BRST, $(\delta \sigma)_0$ e $(\delta a)_0$, podem ser fixados ordem a ordem na expansão em loops de tal forma que as duas condições: cancelamento do “tadpoles” e minimização da energia do vácuo, sejam simultaneamente satisfeitas.

Se as duas condições descritas no parágrafo anterior forem satisfeitas ($\frac{\partial \mathcal{E}_v}{\partial v} = 0$ e $\langle h \rangle = 0$), a identidade de Ward (324) impõe que, perturbativamente, o operador $O(x)$ não condensa. Podemos verificar isso explicitamente a 1-loop com os resultados obtidos até agora. Por definição,

$$\langle O(x) \rangle = \left. \frac{\delta W}{\delta J} \right|_{J=0}, \quad (376)$$

em que W é o gerador das funções conexas. Para o cálculo de $\langle O(0) \rangle$, somamos todos os diagramas de Feynman conexas que possuem um vértice com a fonte $\tilde{J}(0)$ e nenhuma perna externa ($\tilde{J}(p)$ é a transformada de fourier de $J(x)$). Depois disso, derivamos em relação à fonte J e tomamos todas as fontes externas como sendo zero. Olhando para a ação bare (351) e os fatores de renormalização (347), vemos que os termos lineares em J estão contidos em

$$\int d^4x (J_0 O_0 + \eta_0 v_0^2). \quad (377)$$

Fazendo o cálculo, como foi feito em (DUDAL; PERUZZO; SORELLA, 2021a), obtemos

$$\begin{aligned} \langle O(0) \rangle &= \frac{1}{2} \chi(m_h^2) + \frac{(\delta \sigma)^{(1)}}{\lambda} v^2 - \frac{(\delta a)^{(1)}}{\lambda} v^2 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (378)$$

em que o anulamento se deve exatamente à condição (374).

Da identidade de Ward (324) resulta a identidade

$$\int d^4x \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta h} - \lambda v \frac{\delta\Gamma}{\delta J} \right) - \frac{\partial\Gamma}{\partial v} = \int d^4x v (J - 2\eta) \quad (379)$$

para o funcional gerador 1PI, Γ . Tomando todos os campos e fontes a zero, obtemos

$$\frac{\partial\mathcal{E}_v}{\partial v} = \langle h \rangle - \lambda v \langle O \rangle. \quad (380)$$

Até onde nós sabemos, (DUDAL; PERUZZO; SORELLA, 2021a) é o primeiro trabalho onde a relação entre o cancelamento dos “tadpoles” e o procedimento de minimização da energia do vácuo \mathcal{E}_v é estabelecida através de uma identidade de Ward, (379). Claro, essa identidade depende da introdução do operador composto $O(x)$ desde o começo.

Como $(\delta\sigma)_0$ e $(\delta a)_0$ são independentes entre si, poderíamos escolher outras condições de renormalização para $\langle h \rangle$ e $\frac{\partial\mathcal{E}_v}{\partial v}$, que resultariam em $\langle O \rangle_{\text{pert}} \neq 0$, de acordo com a Eq. (380). A Eq. (380) resulta de uma identidade funcional da teoria, portanto, a princípio, sua validade deve ir além da teoria de perturbações. Assim sendo, mesmo que $\langle O \rangle_{\text{pert}} = 0$ ordem a ordem em teoria de perturbações, o que garantiria a equivalência entre o cancelamento dos “tadpoles” e a minimização da energia, efeitos não perturbativos poderiam levar a $\langle O \rangle_{\bar{n}\text{-pert}} \neq 0$. No modelo de Higgs abeliano não esperamos que esse seja o caso, é mais provável que esse condensado não perturbativo exista em modelos não-abelianos.

5.5 Resultados exatos para a função de correlação $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$

Nesta seção, será demonstrada que a parte transversal da função de 2-pontos do operador composto V_μ , $\mathcal{P}_{\mu\nu} \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$, pode ser expressa exatamente em termos da função de 2-pontos do campo de calibre, $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$. Além disso, a mesma identidade implica que a parte longitudinal, $\mathcal{L}_{\mu\nu} \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$, é independente do momento p e a única correção quântica resulta de $\langle O \rangle$. Esse último resultado, em especial, implica que $\mathcal{L}_{\mu\nu} \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ não pode ser associado a nenhum modo físico de propagação. Esse é um importante teste de consistência para a descrição do bóson vetorial massivo em termos do operador composto V_μ . Apenas a parte transversal da função $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ contém um polo em $p^2 \neq 0$, o que implica na existência de uma partícula vetorial massiva no espectro da teoria.

A demonstração começa pela identidade de Ward

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)} - 2e \frac{\delta\Gamma}{\delta\Omega_\mu(x)} - 2\Omega_\mu(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta J(x)} &= -(\partial^2\delta_{\mu\alpha} - \partial_\mu\partial_\alpha) A_\alpha(x) - i\partial_\mu b(x) \\ &+ \frac{ev^2}{2}\Omega_\mu(x) + \partial^2\Upsilon_\mu - \partial_\mu\partial_\alpha\Upsilon_\alpha, \end{aligned} \quad (381)$$

que resulta da identidade de Ward (325) da ação Σ . Essa identidade (381) pode ser reescrita em termos do funcional gerador das funções conexas

$$W = \Gamma + \sum_{\text{campos } \phi} \int d^4x J^\phi \phi,$$

resultando em

$$\begin{aligned} -J_\mu^A - 2e \frac{\delta W}{\delta \Omega_\mu(x)} - 2\Omega_\mu(x) \frac{\delta W}{\delta J(x)} &= -(\partial^2 \delta_{\mu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha) \frac{\delta W}{\delta J_\alpha^A(x)} - i\partial_\mu \frac{\delta W}{\delta J^b(x)} \\ &\quad + \frac{ev^2}{2} \Omega_\mu(x) + \partial^2 \Upsilon_\mu - \partial_\mu \partial_\alpha \Upsilon_\alpha, \end{aligned} \quad (382)$$

em que J_μ^A e J^b são as fontes de A_μ e b , respectivamente. Atuando com $\delta/\delta J_\nu^A(y)$ em (382) e tomando todas as fontes a zero, obtemos

$$\begin{aligned} -\delta_{\mu\nu} \delta^4(x-y) + 2e \langle V_\mu(x) A_\nu(y) \rangle &= ((\partial^2)^x \delta_{\mu\alpha} - \partial_\mu^x \partial_\alpha^x) \langle A_\alpha(x) A_\nu(y) \rangle \\ &\quad + i\partial_\mu^x \langle b(x) A_\nu(y) \rangle, \end{aligned} \quad (383)$$

em que as funções conexas são definidas como

$$\begin{aligned} \langle V_\mu(x) A_\nu(y) \rangle &= - \left. \frac{\delta^2 W}{\delta \Omega_\mu(x) \delta J_\nu^A(y)} \right|_{\mathcal{J}=0}, \\ \langle b(x) A_\nu(y) \rangle &= - \left. \frac{\delta^2 W}{\delta J^b(x) \delta J_\nu^A(y)} \right|_{\mathcal{J}=0}, \\ \langle A_\alpha(x) A_\nu(y) \rangle &= - \left. \frac{\delta^2 W}{\delta J_\alpha^A(x) \delta J_\nu^A(y)} \right|_{\mathcal{J}=0}. \end{aligned} \quad (384)$$

Da identidade de Ward (313) resulta que

$$\langle b(x) A_\nu(y) \rangle = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{k^2} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (385)$$

assim como a transversalidade da função $\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$, devido ao calibre ser de Landau, $\partial_\mu A_\mu = 0$. Assim, a Eq. (383) pode ser reescrita como

$$2e \langle V_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = \partial_x^2 \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle + \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \right)^{xz} \delta^4(z-y) \quad (386)$$

ou, equivalentemente, no espaço dos momentos,

$$2e \langle V_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle = -p^2 \langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle + \mathcal{P}_{\mu\nu}(p). \quad (387)$$

Agora, atuando com $\delta/\delta \Omega_\nu(y)$ em (382), obtemos uma relação entre as funções $\langle V_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$

e $\langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle$, que é

$$2e \langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle - e \delta_{\mu\nu} \delta^4(x-y) \langle O(x) \rangle = (\partial^2 \delta_{\mu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha)^x \langle A_\alpha(x) V_\nu(y) \rangle + i \partial_\mu^x \langle b(x) V_\nu(y) \rangle + \frac{ev^2}{2} \delta_{\mu\nu} \delta^4(x-y). \quad (388)$$

A equação acima pode ser simplificada graças à invariância de BRST da teoria e do operador V_μ , que implicam em

$$\langle b(x) V_\nu(y) \rangle = -i \langle s[\bar{c}(x) V_\nu(y)] \rangle = 0. \quad (389)$$

Utilizando a Eq. (386) na Eq.(388), encontramos

$$4e^2 \langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle = (\partial^4)^x \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle + (\partial^2)^x \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} \right)^{xz} \delta^4(x-y) + (m^2 + 2e^2 \langle O \rangle) \delta_{\mu\nu} \delta^4(x-y), \quad (390)$$

que no espaço dos momentos corresponde a

$$4e^2 \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle = p^4 \langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle - p^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + (m^2 + 2e^2 \langle O \rangle) \delta_{\mu\nu}. \quad (391)$$

Separando a Eq. (391) nas componentes longitudinais e transversais, obtemos os resultados já anunciados:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle &= \frac{p^4}{4e^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle \\ &\quad - 3 \frac{(p^2 - m^2 - 2e^2 \langle O \rangle)}{4e^2} \end{aligned} \quad (392)$$

e

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle = \frac{v^2}{4} + \frac{\langle O \rangle}{2}. \quad (393)$$

Essas relações foram verificadas explicitamente até 1-loop no trabalho (DUDAL; PERUZZO; SORELLA, 2021a). Em especial, (392) é uma prova algébrica de que a parte transversal de $\langle V_\mu(p) V_\nu(-p) \rangle$ possui o mesmo polo da parte transversal de $\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle$, concordando com o resultado a 1-loop do Capítulo 4.

5.6 O modelo de Higgs revisitado através do Teorema de Equivalência

Como $O(x)$ e $V_\mu(x)$ parecem levar aos mesmos resultados dos campos elementares $h(x)$ e $A_\mu(x)$, no entanto, com o adicional da invariância de calibre, podemos pensar em reescrever toda a ação de Higgs com o termo de fixação de calibre, isto é, $S_{\text{Higgs}} + S_{\text{gf}}$,

em função desses operadores. Este tipo de mudança de variáveis no modelo de Higgs pode ser encontrado na literatura, como em (POKORSKI, 2005), no entanto, isso é feito geralmente a nível clássico, sem levar em consideração o Jacobiano que aparece na integral funcional e no calibre unitário. A seguir, faremos algo semelhante, mas sem negligenciar esses pontos.

5.6.1 Passo 1: das coordenadas cartesianas para as coordenadas polares

Seja a função de partição do modelo de Higgs

$$\mathcal{Z}_{\text{Higgs}} = \int [D\Phi] e^{-\left(S_{\text{Higgs}}(A, h, \rho) + \int d^4x (ib\partial A + \bar{c}\partial^2 c)\right)} \quad (394)$$

em que $S_{\text{Higgs}}(A, h, \rho)$ é a ação de Higgs expressa em termos de coordenadas cartesianas (h, ρ) do campo $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x) + i\rho(x))$, veja a Eq. (90). A medida $[D\Phi]$ denota a integração sobre os campos $(A_\mu, h, \rho, b, \bar{c}, c)$. O campo $\varphi(x)$ também pode ser expresso em termos de coordenadas polares (h', ρ') , em que $\varphi(x) = (v + h'(x))e^{i\rho'}$. Façamos a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares com uma transformação adicional no campo A_μ :

$$\begin{aligned} h &= (h' + v) \cos(\rho') - v, \\ \rho &= (h' + v) \sin(\rho'), \\ A_\mu &= A'_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \rho', \end{aligned} \quad (395)$$

os demais campos (b, \bar{c}, c) são mantidos inalterados. Fazendo a mudança de variáveis na função de partição, temos²⁶

$$\mathcal{Z}_{\text{Higgs}} = \int [D\Phi'] (\det \mathcal{M}) e^{-\left(S_{\text{Higgs}}(A', h', \rho') + \int d^4x (ib(\partial A' - \frac{1}{e}\partial^2 \rho') + \bar{c}\partial^2 c)\right)}, \quad (396)$$

em que $[D\Phi'] = [DA' Dh' D\rho' Db D\bar{c} Dc]$ e $(\det \mathcal{M})$ é o Jacobiano resultante de (395),

$$(\det \mathcal{M}) = \det \left(\delta^4(x-y) \begin{pmatrix} \cos(\rho') & -(h'+v)\sin(\rho') & 0 \\ \sin(\rho') & (h'+v)\cos(\rho') & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e}\partial_\nu^x & \delta_{\nu\mu} \end{pmatrix} \right). \quad (397)$$

²⁶ $S_{\text{Higgs}}(A', h', \rho') := S_{\text{Higgs}}(A(A', h', \rho'), h(A', h', \rho'), \rho'(A', h', \rho'))$.

O determinante que aparece em (396) pode ser exponenciado com a ajuda de um novo conjunto de campos fantasmas (η, σ, ξ_ν) e campos antifantasmas $(\bar{\eta}, \bar{\sigma}, \bar{\xi}_\nu)$,

$$(\det \mathcal{M}) = \int [D(\text{novos fantasmas})] e^{-S_{\text{ghosts},1}}, \quad (398)$$

sendo $[D(\text{novos fantasmas})] = [D\bar{\eta} D\bar{\sigma} D\bar{\xi} D\eta D\sigma D\xi]$ e

$$\begin{aligned} S_{\text{ghosts},1} = & \int d^4x \left(\bar{\eta}\eta \cos(\rho') - \bar{\eta}\sigma (h' + v) \sin(\rho') - \frac{1}{e} \bar{\xi}_\mu \partial_\mu \sigma \right) \\ & + \int d^4x \left(\bar{\sigma}\eta \sin(\rho') + \bar{\sigma}\sigma (h' + v) \cos(\rho') + \bar{\xi}_\mu \xi_\mu \right). \end{aligned} \quad (399)$$

Daí resulta que

$$\mathcal{Z}_{\text{Higgs}} = \int [D\Phi'] [D(\text{novos ghosts})] e^{-S_{\text{eff}}}, \quad (400)$$

em que

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= S_0 + S_{\text{ghosts},1}, \\ S_0(A', h', \rho') &= S_{\text{Higgs}}(A', h', \rho') + \int d^4x \left(ib \left(\partial_\mu A'_\mu - \frac{1}{e} \partial^2 \rho' \right) + \bar{c} \partial^2 c \right). \end{aligned}$$

Não é difícil de verificar que S_{eff} é invariante pelas seguintes transformações nilpotentes de BRST

$$\begin{aligned} sA'_\mu &= 0, \\ sh' &= 0, \\ s\rho' &= ec, & sc &= 0, \\ s\bar{c} &= ib, & sb &= 0, \\ s\bar{\xi}_\mu &= s\xi_\mu = s\eta = s\sigma = 0, \\ s\bar{\eta} &= -ec\bar{\sigma}, \\ s\bar{\sigma} &= ec\bar{\eta}. \end{aligned} \quad (401)$$

Como é mencionado por (BLASI et al., 1999), a existência da transformação de BRST (401) garante que as redefinições (395) são imperceptíveis para as quantidades físicas, como é estabelecido pelo *Teorema da Equivalência* (BERGERE; LAM, 1976; HAAG, 1958; KAMEFUCHI; O'RAIFEARTAIGH; SALAM, 1961; LAM, 1973). Os novos campos fantasmas (η, σ, ξ_ν) e antifantasmas $(\bar{\eta}, \bar{\sigma}, \bar{\xi}_\nu)$ são responsáveis por compensar os efeitos da mudança de variáveis, veja (BLASI et al., 1999).

Vejamos o que aconteceu com a ação de Higgs escrita em coordenadas polares:

$$S_{\text{Higgs}}(A', h', \rho') = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F^2(A') + \frac{1}{2} (\partial_\mu h')^2 + \frac{e^2}{2} (A')^2 (v + h')^2 + \frac{\lambda}{8} (h'^2 + 2h'v)^2 \right], \quad (402)$$

em que, de acordo com as transformações de BRST (401), as novas variáveis (A'_μ, h') são invariantes de calibre. Isso significa que não existe mais nenhum rastro da simetria de calibre local $U(1)$ original, pois tudo está expresso em termos de campos invariantes de calibre. Da Eq. (395) é possível notar que, de fato, o bóson de Goldstone ρ' foi “absorvido” pelo campo vetorial, que é o conteúdo físico principal do mecanismo de Higgs.

5.6.2 Passo 2: das coordenadas polares para os operadores invariantes de calibre (O, V_μ)

O Passo 1 pode ser melhorado, não apenas para formalmente banirmos do setor físico da teoria os novos campos fantasmas $(\bar{\eta}, \bar{\sigma}, \bar{\xi}_\mu)$ e antifantasma (η, σ, ξ_μ) , mas também para mostrar que o termo $S_{\text{ghosts},1}$ é um termo do tipo “fixação de calibre”.

Primeiramente, notemos que os operadores (O, V_μ) nas novas variáveis são

$$O = \frac{1}{2} (v + h')^2 - \frac{v^2}{2}, \quad V_\mu = \frac{e}{2} (v + h')^2 A'_\mu \quad (403)$$

Como esperado, O e V_μ não dependem do campo de Goldstone ρ' . As relações (403) podem ser invertidas,

$$h' = \sqrt{2 \left(O + \frac{v^2}{2} \right)} - v, \quad A'_\mu = \frac{1}{e} \frac{V_\mu}{\left(O + \frac{v^2}{2} \right)}, \quad (404)$$

que por conveniência escrevemos como

$$h' = \frac{O}{v} \left(1 + \zeta f_1 \left(\frac{O}{v^2} \right) \right), \quad A'_\mu = \frac{2V_\mu}{ev^2} \left(1 + \zeta f_2 \left(\frac{O}{v^2} \right) \right), \quad (405)$$

em que o parâmetro ζ foi introduzido na frente das partes não-lineares $f_1 \left(\frac{O}{v^2} \right)$ e $f_2 \left(\frac{O}{v^2} \right)$, que são séries de potências em $\frac{O}{v^2}$. O papel de ζ ficará claro em breve. Podemos usar (405) e fazer outra mudança de variáveis na função de partição $\mathcal{Z}_{\text{Higgs}}$, (396). Como fizemos antes, podemos introduzir um novo conjunto de campos fantasmas e antifantasma $(\omega, \bar{\omega}, \omega_\mu, \bar{\omega}_\mu)$ para exponenciar o Jacobiano da transformação. Procedendo dessa forma, a nova ação clássica resultante é

$$S_{\text{new}}(V_\mu, O, \rho') = S_0 \left(\frac{2V_\mu}{ev^2}, \frac{O}{v}, \rho' \right) + \zeta S_1(V_\mu, O, \rho') + S_{\text{ghosts},1} + S_{\text{ghosts},2}, \quad (406)$$

em que

$$\begin{aligned} \zeta S_1(V_\mu, O, \rho') &= S_0\left(\frac{2V_\mu}{ev^2}\left(1 + \zeta f_2\left(\frac{O}{v^2}\right)\right), \frac{O}{v}\left(1 + \zeta f_1\left(\frac{O}{v^2}\right)\right), \rho'\right) \\ &\quad - S_0\left(\frac{2V_\mu}{ev^2}, \frac{O}{v^2}, \rho'\right) \end{aligned} \quad (407)$$

e

$$\begin{aligned} S_{\text{ghosts}, 2} &= \int d^4x \begin{pmatrix} \bar{\omega} & \bar{\omega}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{v}(1 + \zeta f_1) + \frac{O}{v}\zeta\frac{\delta f_1}{\delta O} & 0 \\ 2\frac{\zeta V_\mu}{ev^2}\frac{\delta f_2}{\delta O} & \frac{2}{ev^2}\delta_{\mu\nu}(1 + \zeta f_2) \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (408)$$

Como O e V_μ são invariantes de calibre, as transformações de BRST podem ser naturalmente generalizada para os novos fantasmas,

$$s\omega = s\bar{\omega} = s\omega_\mu = s\bar{\omega}_\mu = 0. \quad (409)$$

Além do operador de BRST s , podemos introduzir um outro operador nilpotente anticomutante δ , com as transformações

$$\begin{aligned} \delta B^\eta &= \bar{\eta}, & \delta B^\sigma &= \bar{\sigma}, & \delta B_\mu^\xi &= \bar{\xi}_\mu, \\ \delta B^\omega &= \bar{\omega}, & \delta B_\mu^\omega &= \bar{\omega}_\mu, \\ \delta \beta &= \zeta, & \delta \zeta &= 0, \end{aligned}$$

$$\delta(\text{demais campos}) = 0, \quad (410)$$

em que, seguindo (BLASI et al., 1999), foram adicionados novos campos fantasmas ($B^\eta, B^\sigma, B_\mu^\xi, B^\omega, B_\mu^\omega$) e um parâmetro grassmaniano β , todos eles invariantes pelo operador de BRST, ou seja,

$$s(B^\eta, B^\sigma, B_\mu^\xi, B^\omega, B_\mu^\omega, \beta, \zeta) = 0. \quad (411)$$

Das transformações geradas por s e δ , seguem os resultados

$$\delta^2 = 0, \quad \{s, \delta\} = 0. \quad (412)$$

Por conveniência, vamos fazer a substituição de $S_{\text{ghosts}, 1}$ da Eq. (399) por

$$\begin{aligned} S_{\text{ghosts}, 1} &= \zeta \int d^4x \left(\bar{\eta}\eta \cos(\rho') - \bar{\eta}\sigma \left(\frac{O}{v}(1 + \zeta f_1) + v \right) \sin(\rho') - \frac{1}{e}\bar{\xi}_\nu \partial_\nu \sigma \right) \\ &\quad \zeta \int d^4x \left(\bar{\sigma}\eta \sin(\rho') + \bar{\sigma}\sigma \left(\frac{O}{v}(1 + \zeta f_1) + v \right) \cos(\rho') + \bar{\xi}_\nu \xi_\nu \right), \end{aligned} \quad (413)$$

que corresponde a multiplicar por $\sqrt{\zeta}$ cada um dos campos $(\bar{\eta}, \bar{\sigma}, \bar{\xi}_\mu, \eta, \sigma, \xi_\mu)$. É impor-

tante notar que essa redefinição não altera as transformações BRST (401). Feitas essas alterações, podemos agora reescrever a nova ação (406) como

$$S_{\text{new}}(V_\mu, O, \rho') = S_0\left(\frac{2V_\mu}{ev^2}, \frac{O}{v}, \rho'\right) + \delta[\beta S_1(V_\mu, O, \rho') + \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2], \quad (414)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \zeta \int d^4x \left(B^\eta \eta \cos(\rho') - B^\eta \sigma \left(\frac{O}{v} (1 + \zeta f_1) + v \right) \sin(\rho') - \frac{1}{e} B_\mu^\xi \partial_\mu \sigma \right) \\ &\quad + \zeta \int d^4x \left(B^\sigma \bar{\sigma} \eta \sin(\rho') + B^\sigma \sigma \left(\frac{O}{v} (1 + \zeta f_1) + v \right) \cos(\rho') + B_\mu^\xi \xi_\nu \right), \\ \mathcal{G}_2 &= \int d^4x \left(\begin{array}{cc} B^\omega & B_\mu^\omega \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{v} (1 + \zeta f_1) + \frac{O}{v} \zeta \frac{\delta f_1}{\delta O} & 0 \\ 2 \frac{\zeta V_\mu}{ev^2} \frac{\delta f_2}{\delta O} & \frac{2}{ev^2} \delta_{\mu\nu} (1 + \zeta f_2) \end{array} \right) \\ &\quad \left(\begin{array}{c} \omega \\ \omega_\mu \end{array} \right). \end{aligned} \quad (415)$$

Equivalentemente, nós poderíamos ter introduzido uma invariância de BRST estendida, como no trabalho de (DELDUC et al., 1996), que corresponderia ao operador nilpotente $\tilde{s} = s + \delta$, $\tilde{s}S_{\text{new}} = 0$. Não usaremos esse abordagem, aqui trabalharemos com s e δ^{27} .

Os ghost que foram introduzido para exponenciar os Jacobianos possuem um novo número de ghost, que denotaremos por $[\overline{\mathcal{N}}_g]$. $[\overline{\mathcal{N}}_g] = +1$ para $(\sigma, \eta, \xi_\mu, \omega, \omega_\mu)$, $[\overline{\mathcal{N}}_g] = -1$ para $(\bar{\sigma}, \bar{\eta}, \bar{\xi}_\mu, \bar{\omega}, \bar{\omega}_\mu, \beta)$ e $[\overline{\mathcal{N}}_g] = -2$ para $(B^\eta, B^\sigma, B_\mu^\xi, B^\omega, B_\mu^\omega)$. O operador δ aumenta em uma unidade $[\overline{\mathcal{N}}_g]$. Os outros campos e, obviamente, a ação S_{new} possuem $[\overline{\mathcal{N}}_g] = 0$.

Para definir o subespaço físico da teoria, podemos identificar a cohomologia do operador de BRST s , que, além dos operadores invariantes de calibre já conhecidos do modelo de Higgs abeliano, contém outros operadores formados com os novos fantasmas e que não são s -exatos. Para remover esses operadores adicionais do subespaço físico, podemos impor a restrição de que os funcionais dos campos, além de pertencerem à cohomologia de s , devem pertencer à cohomologia do operador δ . Denotando por $s \cap \delta$ a interseção da cohomologia de s com a cohomologia δ , isso significa que o subespaço físico deve estar contido em $s \cap \delta$. Esse é um exemplo de “constrained cohomology”, um conceito que já foi empregado em outros casos, como na caracterização dos observáveis de teorias de Yang-Mills topológicas, veja (DELDUC et al., 1996; OUVRY; STORA; BAAL, 1989; STORA, 1996). No nosso caso, como todos os campos fantasmas introduzidos no Passo 1 e Passo 2 formam dubletos do operador δ , pelo Teorema dos Dubletos (PIGUET; SORELLA, 1995), qualquer funcional F formado com esses campos fantasmas e invariante

²⁷ As duas formulações devem ser equivalentes, veja (DELDUC et al., 1996)

por δ é δ -exato, isto é, $F = \delta(\dots)$. Portanto, $s \cap \delta$ conterá apenas os operadores invariáveis de calibre já conhecidos, como o desejado. Além disso, esses operadores podem ser expressos em termos de O e V_μ .

A dependência da ação efetiva Γ , e conseqüentemente da matriz-S, em relação ao parâmetro ζ está sob controle e pode ser expressa na forma de uma equação funcional. O operador δ pode ser escrito em forma funcional como

$$\mathcal{D} = \int d^4x \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta B^\eta} + \bar{\sigma} \frac{\delta}{\delta B^\sigma} + \bar{\xi}_\mu \frac{\delta}{\delta B_\mu^\xi} + \bar{\omega} \frac{\delta}{\delta B^\omega} + \bar{\omega}^\mu \frac{\delta}{\delta B_\mu^\omega} + \zeta \frac{\partial}{\partial \beta} \right). \quad (416)$$

Podemos ver que, assim como δ , o operador \mathcal{D} é nilpotente, isto é,

$$\mathcal{D}^2 = 0. \quad (417)$$

Como \mathcal{D} é linear, ele pode ser usado a nível quântico sem modificações. Além disso, não é difícil de demonstrar que

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{D}\mathcal{F} - \mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}, \quad (418)$$

para qualquer funcional \mathcal{F} . Já que S_{new} é invariante por δ , então $\mathcal{D}S_{\text{new}} = 0$ e, conseqüentemente,

$$\mathcal{D}\Gamma = 0, \quad (419)$$

que é uma identidade de Ward não anômala, já que, os termos de quebra devem pertencer à cohomologia trivial de δ ²⁸.

A Eq. (414) pode ser reescrita como

$$S_{\text{new}} = S_0 + \mathcal{D}\mathcal{Y}, \quad (421)$$

em que

$$\mathcal{Y} = \beta S_1(V_\mu, O, \rho') + \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2. \quad (422)$$

²⁸ Ao invés de (419), poderíamos ter

$$\mathcal{D}\Gamma = \hbar^n \Delta, \quad (420)$$

em que Δ (o termo de quebra) é um polinômio local integrado nos campos e com $[\mathcal{N}_g] = 1$. Da nilpotência de \mathcal{D} , resulta $\mathcal{D}\Delta = 0$. Como todos os campos que possuem a carga $[\mathcal{N}_g]$ formam dubletos de δ , pelo Teorema dos Dubletos (PIGUET; SORELLA, 1995), então $\Delta = \mathcal{D}\hat{\Delta}$. Assim, encontramos um funcional $\bar{\Gamma} = \Gamma - \hbar^n \Delta$ que satisfaz a identidade de Ward, $\mathcal{D}\bar{\Gamma} = 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$. Isso quer dizer que a identidade de Ward não é anômala.

Atuando com $\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}$ em (421) e utilizando a propriedade (418) do operador \mathcal{D} , obtemos

$$\zeta \frac{\partial S_{\text{new}}}{\partial \zeta} = \mathcal{D} \left(\zeta \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \zeta} + \beta S_1 \right). \quad (423)$$

Lembrando que S_0 é independente ζ . Pelo Princípio de Ação Quântica, veja (PIGUET; SORELLA, 1995), o resultado a nível clássico (423) resulta em

$$\zeta \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} = \mathcal{D} (\Delta_y \cdot \Gamma + \Delta_1 \cdot \Gamma), \quad (424)$$

em que $\Delta_y \cdot \Gamma = \zeta \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \zeta} + \mathcal{O}(\hbar)$ e $\Delta_1 \cdot \Gamma = \beta S_1 + \mathcal{O}(\hbar)$ são as inserções quânticas que se reduzem aos operadores presentes em (423) quando $\hbar \rightarrow 0$, veja o Capítulo 1. O que foi demonstrado com o resultado (424) é que os termos dependentes de ζ da ação efetiva pertencem todos à cohomologia trivial de δ , portanto não afetam os valores dos observáveis físicos. A fortiori, os termos não renormalizáveis que resultam de f_1 e f_2 em (414) não resultarão em divergências ultravioletas incuráveis nas funções de correlação físicas.

A análise feita acima implica que, no final, as partes da ação relevantes fisicamente podem ser expressas em termos dos operadores de calibre O e V_μ , em que apenas os termos lineares em (405) são relevantes. Concretamente, isso significa considerarmos

$$\begin{aligned} S_{\text{new}} = & \int d^4x \left[\frac{1}{4} F^2 \left(\frac{2V_\mu}{ev^2} \right) + \frac{1}{2v^2} (\partial_\mu O)^2 + \frac{2}{v^2} V_\mu^2 + \frac{4}{v^4} V_\mu^2 O + \frac{\lambda}{2} O^2 \right] \\ & + s \left[\int d^4x \left(\frac{2\bar{c}}{ev^2} \partial_\mu V_\mu - \frac{1}{e} \bar{c} \partial^2 \rho' \right) \right] + \delta [\dots]. \end{aligned} \quad (425)$$

Note que em (425) existem dois termos exatos, um em relação a s e outro em relação a δ , esses termos não devem ser relevantes fisicamente. O termo s -exato tem a sua origem no termo de fixação do calibre de Landau. As funções de correlações físicas devem ser completamente determinadas pela primeira linha da Eq. (425), que é escrita em termos dos operadores invariantes de calibre.

6 PROPRIEDADES ESPECTRAIS DOS OPERADORES INVARIANTES DE CALIBRE NO MODELO DE HIGGS $SU(2)$

Neste capítulo submeteremos o modelo de Higgs $SU(2)$ ao mesmo tipo de análise aplicada ao modelo de Higgs abeliano. No caso $SU(2)$ as funções de correlação dos campos elementares também dependem do calibre, além do que, a parte transversa do campo de calibre, A_μ^{aT} , não é mais invariante de calibre. Seguindo a estratégia utilizada no caso $U(1)$, estudaremos um conjunto de operadores invariantes de calibre, $\{O(x), R_\mu^a(x)\}$ ²⁹, que fornecem resultados equivalentes aos dos campos elementares, ao menos até 1-loop. Na Seção 6.1 a ação de Higgs $SU(2)$ no calibre R_ξ com o campo escalar na representação fundamental é definida. Nessa mesma seção são discutidas a quebra espontânea de simetria e a simetria custodial. Na Seção 6.2 são apresentados os cálculos das funções de Green $\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle$ e $\langle h(p) h(-p) \rangle$ até 1-loop, enquanto que, na Seção 6.3 são mostrados os resultados explícitos das funções de Green dos operadores invariantes de calibre, $\langle R_\mu^a(p) R_\nu^b(-p) \rangle$ e $\langle O(p) O(-p) \rangle$, também a 1-loop. Na Seção 6.4 são analisados e comparados os polos e as densidades espectrais dos dois conjuntos de funções de Green calculadas nas seções anteriores. Os resultados mostrados neste capítulo também podem ser encontrados no trabalho (DUDAL et al., 2021b).

6.1 A ação e suas simetrias

6.1.1 A ação de Higgs $SU(2)$ e a quebra espontânea da simetria

A ação euclidiana do modelo de Higgs $SU(2)$ com um campo escalar complexo na representação fundamental, $\varphi(x)$, é definida como sendo

$$S_{\text{Higgs}} = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + (D_\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) + \frac{\lambda}{2} \left(\varphi^\dagger \varphi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \right], \quad (426)$$

²⁹ Alguns dos símbolos utilizados no modelo de Higgs $U(1)$ serão utilizados aqui, mas com significados diferentes, que é o caso de $O(x)$. Quando quisermos nos referir a algo do modelo abeliano que tem o mesmo símbolo, para não causar confusão, indicaremos explicitamente com o índice “ $U(1)$ ”. Por exemplo, o operador escalar invariante de calibre (213) será denotado como

$$O^{U(1)}(x).$$

em que $F_{\mu\nu}^a$ é o tensor intensidade de campo,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (427)$$

e D_μ a derivada covariante,

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - ig\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a\varphi. \quad (428)$$

τ^a ($a = 1, 2, 3$) é uma matriz Pauli e ϵ^{abc} é o símbolo de Levi-Civita. g e λ são as constantes de acoplamento da teoria, enquanto que, v é um parâmetro massivo que corresponde ao valor esperado no vácuo do campo φ . A ação de Higgs é invariante em relação às transformações de calibre

$$\begin{aligned} A'_\mu &= UA_\mu U^\dagger + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^\dagger \\ \varphi' &= U\varphi \\ \varphi'^\dagger &= \varphi^\dagger U^\dagger \end{aligned} \quad (429)$$

em que $U = \exp(-ig\frac{\tau^a}{2}\theta^a) \in SU(2)$ e $\theta^a(x)$ é um parâmetro local. Como estamos trabalhando na representação fundamental de $SU(2)$, podemos adotar a seguinte parametrização para o campo escalar:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pi(x) + i\rho^3(x) \\ -\rho^2(x) + i\rho^1(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi(x)I + i\rho^a(x)\tau^a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (430)$$

sendo $\pi(x)$, $\rho^1(x)$, $\rho^2(x)$ e $\rho^3(x)$ campos escalares reais. Analisando o potencial de Higgs

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{2} \left(\varphi^\dagger\varphi - \frac{v^2}{2} \right)^2, \quad (431)$$

notamos que os seus pontos de mínimo absoluto são soluções da equação $\varphi^\dagger\varphi = \frac{v^2}{2}$. Isso significa que $\langle\varphi\rangle \neq 0$, logo o vácuo não pode ser invariante por transformações de calibre, ou seja, temos a quebra espontânea de simetria. Escolhendo como mínimo representativo a configuração de campo

$$\varphi_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (432)$$

podemos considerar $\varphi(x) - \varphi_o$ como sendo o campo relevante, ou seja, podemos considerar a parametrização

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((v + h(x)) I + i\rho^a(x) \tau^a \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (433)$$

em que $h(x) = \pi(x) - v$. Reescrevendo a ação (426) em termos dos campos $h(x)$ e $\rho^a(x)$, encontramos

$$\begin{aligned} S_{\text{Higgs}} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{\lambda}{2} v^2 h^2 + \frac{1}{2} \lambda v h^3 + \frac{1}{2} \lambda v h \rho^a \rho^a \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \lambda h^4 + \frac{1}{4} \lambda h^2 \rho^a \rho^a + \frac{1}{8} \lambda (\rho^a \rho^a)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial_\mu h) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho^a) (\partial_\mu \rho^a) + \frac{1}{2} g A_\mu \rho^a (\partial_\mu h) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g (v + h) A_\mu^a (\partial_\mu \rho^a) + \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} A_\mu^a \rho^b (\partial_\mu \rho^c) \right. \\ \left. + \frac{1}{8} g^2 A_\mu^a A_\mu^a (v + h)^2 + \frac{1}{8} g^2 A_\mu^a A_\mu^a \rho^b \rho^b \right\}. \quad (434) \end{aligned}$$

Analisando a Eq.(434), podemos ver que o campo de calibre A_μ^a e o campo de Higgs h adquiriram massas, dadas por

$$m = \frac{1}{2} g v, \quad m_h = \sqrt{\lambda} v, \quad (435)$$

respectivamente, enquanto que o campo $\rho^a(x)$ não possui massa, desempenhando o papel de campos de Goldstone. É importante notar que a simetria de calibre de S_{Higgs} continua presente, já que a ação apenas foi reescrita em termos de novos campos. As transformações de calibre (429) para θ^a infinitesimal são

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= -D_\mu^{ab} \theta^b, \\ \delta \varphi &= -i g \theta^a \frac{\tau^a}{2} \varphi, \\ \delta \varphi^\dagger &= i g \theta^a \varphi^\dagger \frac{\tau^a}{2}, \end{aligned} \quad (436)$$

o que implica que as transformações de calibre infinitesimais dos campos (h, ρ^a) são

$$\begin{aligned} \delta h &= \frac{g}{2} \theta^a \rho^a, \\ \delta \rho^a &= -\frac{g}{2} [\omega^a (v + h) I - \epsilon^{abc} \omega^b \rho^c]. \end{aligned} \quad (437)$$

6.1.2 Fixação do Calibre e a simetria BRST

Como o modelo de Higgs possui a simetria de calibre local, podemos fazer sempre uma transformação de calibre de tal forma a eliminarmos o campo de Goldstone, $\rho^a(x)$, completamente da teoria. Essa propriedade já foi discutida no caso do modelo de Higgs $U(1)$, veja a Seção 2.1. Como também já foi discutido, a remoção do campo $\rho^a(x)$ corresponde a fixarmos um calibre, que chamamos de *calibre unitário*. A nível quântico esse calibre produz uma teoria que não é renormalizável, então utilizaremos o calibre R_ξ . A implementação desse calibre a nível quântico através do método de Faddeev-Popov resulta no termo de fixação de calibre

$$S_{\text{gf}}^\xi = \int d^4x \left(\frac{\xi}{2} b^a b^a + i b^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b - \xi m^2 \bar{c}^a c^a - g \xi m h \bar{c}^a c^a - \xi g \epsilon^{abc} \bar{c}^a c^b \rho^c \right), \quad (438)$$

em que (c^a, \bar{c}^a) são os campos fantasmas de Faddeev-Popov e b^a o campo de Nakanishi-Lautrup. Assim, a ação da teoria que consideraremos é

$$S = S_{\text{Higgs}} + S_{\text{gf}}^\xi. \quad (439)$$

Essa ação é invariante pelas transformações de BRST

$$\begin{aligned} sA_\mu^a &= -D_\mu^{ab} c^b, \\ sh &= \frac{g}{2} c^a \rho^a, \\ s\rho^a &= -\frac{g}{2} [c^a (v + h) - \epsilon^{abc} c^b \rho^c], \\ sc^a &= \frac{g}{2} \epsilon^{abc} c^b c^c, \\ s\bar{c}^a &= i b^a, \\ sb^a &= 0, \end{aligned} \quad (440)$$

ou seja,

$$sS = 0, \quad (441)$$

em que

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g \epsilon^{abc} A_\mu^c \quad (442)$$

é a derivada covariante na representação adjunta de $SU(2)$.

Olhando para a Eq. (438), podemos notar que os campos fantasmas ganharam uma massa, $\sqrt{\xi}m$. Integrando no campo b^a , também fica claro que o campo de Goldstone, também, possui a mesma massa, $\sqrt{\xi}m$. Tomando a parte quadrática nos campos de S

Figura 36 - Principais propagadores do modelo de Higgs $SU(2)$.

$$\begin{aligned}
 \langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle &= \text{Diagrama de uma linha de espiral} \\
 \langle \rho^a(p) \rho^b(-p) \rangle &= \text{Diagrama de uma linha sólida} \\
 \langle h(p) h(-p) \rangle &= \text{Diagrama de uma linha tracejada} \\
 \langle \bar{c}^a(p) c^b(-p) \rangle &= \text{Diagrama de uma linha tracejada com uma seta}
 \end{aligned}$$

Legenda: Representação diagramática dos propagadores do modelo de Higgs $SU(2)$ no calibre R_ξ .

Fonte: O autor, 2022.

e calculando os propagadores da teoria, como é feito no Apêndice E, obtemos que o propagador do campo A_μ^a no espaço dos momentos é

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle = \delta^{ab} \left(\frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}(p)}{p^2 + m^2} + \frac{\xi \mathcal{L}_{\mu\nu}(p)}{p^2 + \xi m^2} \right). \quad (443)$$

Note que, além da massa na parte transversal, existe uma massa, $\sqrt{\xi}m$, na parte longitudinal de $\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle$. O fato das massas dos campos fantasmas, do campo de Goldstone e da parte longitudinal de A_μ^a serem iguais não é uma simples coincidência. A origem de todas essas massas é o termo de fixação de calibre, que é um termo BRST-exato,

$$S_{\text{gf}}^\xi = s \int d^4x \left\{ -i \frac{\xi}{2} \bar{c}^a b^a + \bar{c}^a (\partial_\mu A_\mu^a - \xi m \rho^a) \right\}. \quad (444)$$

Todas essas propriedades também foram encontradas no modelo de Higgs $U(1)$ no calibre R_ξ , tanto que, os propagadores nos dois modelos são os mesmos, exceto, eventualmente, por uma delta de Kronecker, δ^{ab} , como mostra o Apêndice E.

A notação que utilizaremos para representar os propagadores da teoria nos diagramas de Feynman é mostrada na Figura 36. Os vértices de interação da teoria podem ser encontrados no Apêndice E.

6.1.3 Simetria Custodial

Além da simetria BRST, existe uma simetria global adicional, que denominamos de *simetria custodial*, caracterizada pelas transformações:

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu^a &= \epsilon^{abc} \omega^b A_\mu^c, \\
\delta \rho^a &= \epsilon^{abc} \omega^b \rho^c, \\
\delta c^a &= \epsilon^{abc} \omega^b c^c, \\
\delta \bar{c}^a &= \epsilon^{abc} \omega^b \bar{c}^c, \\
\delta b^a &= \epsilon^{abc} \omega^b b^c, \\
\delta h &= 0,
\end{aligned} \tag{445}$$

em que ω^a é um parâmetro global. Note que, todos os campos que possuem índice $a = 1, 2, 3$, ou seja, $(A_\mu^a, \rho^a, c^a, \bar{c}^a, b^a)$, se transformam na representação adjunta do grupo $SU(2)$, enquanto que, o campo h é deixado invariante, isto é, se comporta como um singleto. A origem dessa simetria é uma simetria $SU(2)_{\text{calibre}} \times SU(2)_{\text{global}}$ da ação de Higgs (426). Para vermos isso, é conveniente reescrevermos a ação (426) através do campo escalar

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^{0*} & \phi^+ \\ -\phi^{+*} & \phi^0 \end{pmatrix} \tag{446}$$

como é feito por (SHIFMAN, 2012), em que $\phi^+ = v + h + i\rho^3$ e $\phi^0 = i\rho^1 - \rho^2$. Não é difícil de demonstrar que a ação

$$S_{\text{Higgs}} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \frac{\lambda}{8} (\text{Tr} \Phi^\dagger \Phi - v^2)^2 \right\} \tag{447}$$

é invariante pelas seguintes transformações do grupo $SU(2)_{\text{calibre}} \times SU(2)_{\text{global}}$:

$$\begin{aligned}
\Phi' &= U(x) \Phi M^{-1}, \\
A'_\mu &= U(x) \Phi U^{-1}(x) + \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^{-1}(x)
\end{aligned} \tag{448}$$

em que $M \in SU_{\text{global}}(2)$ é uma matriz que independe do ponto do espaço. Nessa nova notação, a expansão (433) corresponde a

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} [(v + h) I + i\rho^a \tau^a], \tag{449}$$

o que significa que o valor esperado no vácuo de Φ , $\langle \Phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} I$, não é invariante em relação às transformações (448). Contudo, $\langle \Phi \rangle$ é invariante em relação ao subgrupo diagonal global de $SU(2) \times SU(2)$ que corresponde a tomarmos $U(x) = M$. Esse subgrupo

é isomórfico ao grupo $SU(2)$. Essa é a simetria custodial, que corresponde às transformações infinitesimais (445).

6.2 Funções de Green de 2-pontos dos campos $h(x)$ e $A_\mu^a(x)$

6.2.1 Função conexa $\langle h(p) h(-p) \rangle$

Os diagramas de Feynman que contribuem a 1-loop para a função de Green conexa $\langle h(p) h(-p) \rangle$ são mostrados na Figura 37. O cálculo de cada diagrama em particular pode ser encontrado em (DUDAL et al., 2021b), aqui apresentaremos apenas os resultados finais. Encontramos que, até 1-loop, a função regularizada com a RD tem a forma

$$\langle h(p) h(-p) \rangle^d = \frac{1}{p^2 + m_h^2} + \frac{1}{(p^2 + m_h^2)} \Pi_h^d(p^2), \quad (450)$$

em que $\Pi_h^d(p^2)$ é a autoenergia de h a 1-loop regularizada. Expandindo Π_h^d em série de Laurent em torno de $\varepsilon = 0$ ($\varepsilon = 4 - d$), obtemos que o termo divergente vale

$$\Pi_h^{4-\varepsilon}(p^2)|_{\text{div}} = \frac{\mu^\varepsilon g^2}{32\pi^2} \left[3 \left(\frac{4\lambda}{e^2} - \xi \right) m_h^2 + 3(3 - \xi) p^2 \right] \frac{1}{\varepsilon}, \quad (451)$$

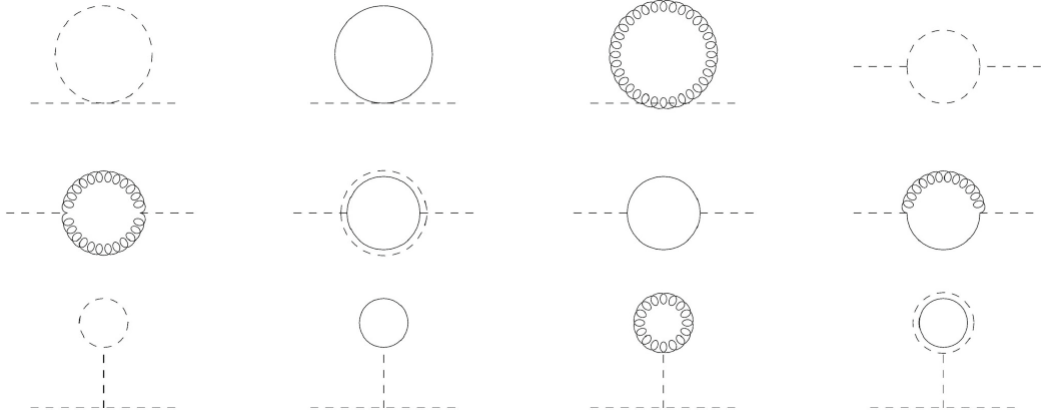
em que μ é o parâmetro massivo introduzido pela RD. Essa parte divergente pode ser eliminada através da introdução de contratermos locais na ação de partida. Além dos contratermos $\int d^4x (\delta_1 (\partial_\mu h)^2 + \delta_2 h^2)$, naturais da função $\langle h(x) h(y) \rangle$, como os “tadpoles” não foram cancelados, existe também a contribuição de um contratermo $\int d^4x (\delta_3 v^2 h)$, necessário para renormalizar a função de 1-ponto $\langle h(0) \rangle$. Os coeficiente δ_1 , δ_2 e δ_3 são ajustados de tal forma a implementarem o esquema de renormalização \overline{MS} . Fazendo isso, obtemos que a autoenergia renormalizada em $d = 4$ é

$$\begin{aligned} \Pi_h(p^2) = & \frac{3g^2}{8(4\pi)^2} \left\{ -12m^2 + 2(1 - \xi)p^2 - 2\xi m_h^2 \right. \\ & + 2\xi (m_h^2 + p^2) \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2} + 2(6m^2 - p^2) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\ & - \left(12m^2 + \frac{p^4}{m^2} + 4p^2 \right) K(m^2, m^2, p^2) \\ & + \frac{p^4 - m_h^4}{m^2} K(\xi m^2, \xi m^2, p^2) \\ & \left. - \frac{m_h^4}{m^2} \left[-2 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} + 3K(m_h^2, m_h^2, p^2) + 2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (452)$$

em que $K(m_1^2, m_2^2, p^2)$ é definida pela Eq. (157).

Antes de tentarmos fazer qualquer ressona, já que isso é possível pois a função

Figura 37 - Correções a 1-loop para $\langle h(p) h(-p) \rangle$



Legenda: Diagramas de Feynman que contribuem para a função $\langle h(p) h(-p) \rangle$ a 1-loop.

Fonte: DUDAL, 2021, f. 19.

$\langle h(p) h(-p) \rangle$ se organiza como uma série geométrica, tratemos dos termos do tipo

$$p^4 \ln \frac{p^2 x (1-x) + M^2}{\mu^2},$$

que invalidam a ressonância para p^2 suficientemente grande. De fato, se fizermos a ressonância sem tomar esse cuidado, esses termos dão origem a táquions, como acontece no caso $U(1)$ e no modelo não abeliano estudado por (MAAS; SONDENHEIMER, 2020). Seguindo o que foi feito no Capítulo 4, podemos utilizar novamente a identidade $p^4 = (p^2 + m_h^2)^2 - m_h^4 - 2p^2 m_h^2$ e reescrever

$$\begin{aligned} \frac{p^4}{(p^2 + m_h^2)} \ln \frac{p^2 x (1-x) + M^2}{\mu^2} &= \ln \frac{p^2 x (1-x) + M^2}{\mu^2} \\ &\quad - \frac{m_h^4 + 2p^2 m_h^2}{(p^2 + m_h^2)^2} \ln \frac{p^2 x (1-x) + M^2}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (453)$$

O termo da segunda linha da Eq. (453) pode ser ressonado sem problemas, já que ele decai rápido o suficiente para p^2 grande (tem o mesmo comportamento ultravioleta da contribuição a nível árvore). Daí segue que a contribuição a 1-loop podem ser reescrita como

$$\frac{\Pi_h(p^2)}{(p^2 + m_h^2)^2} = \frac{\hat{\Pi}_h(p^2)}{(p^2 + m_h^2)^2} + C_h(p^2), \quad (454)$$

em que

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}_h(p^2) = & \frac{3g^2}{8(4\pi)^2} \left\{ -12m^2 + 2(1-\xi)p^2 - 2\xi m_h^2 \right. \\
& + 2\xi(m_h^2 + p^2) \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2} + 2(6m^2 - p^2) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\
& - \left(12m^2 - \frac{m_h^4 + 2p^2 m_h^2}{m^2} + 4p^2 \right) K(m^2, m^2, p^2) \\
& - \frac{2(m_h^4 + p^2 m_h^2)}{m^2} K(\xi m^2, \xi m^2, p^2) \\
& \left. - \frac{m_h^4}{m^2} \left[-2 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} + 3K(m_h^2, m_h^2, p^2) + 2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{455}$$

e

$$C_h(p^2) = -\frac{3g^2}{8m^2(4\pi)^2} (K(m^2, m^2, p^2) - K(\xi m^2, \xi m^2, p^2)). \tag{456}$$

Assim, obtemos a função ressomada

$$\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}} = \frac{1}{p^2 + m_h^2 - \hat{\Pi}_h(p^2)} + C_h(p^2). \tag{457}$$

É importante destacar que $\langle h(p) h(-p) \rangle$ e $\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}}$ dependem explicitamente do parâmetro de calibre ξ .

6.2.2 Função conexa $\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle$

A simetria de Lorentz e a simetria custodial implicam que a função de Green conexa de 2-pontos de A_μ^a tem a forma

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle = \delta^{ab} \left[\langle A(p) A(-p) \rangle^T \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \langle A(p) A(-p) \rangle^L \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \right], \tag{458}$$

já que δ^{ab} é o único tensor invariante de ordem dois, sendo

$$\begin{aligned}
\langle A(p) A(-p) \rangle^T &= \frac{1}{3(d-1)} \delta^{ab} \mathcal{P}_{\mu\nu} \langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle, \\
\langle A(p) A(-p) \rangle^L &= \frac{1}{3} \delta^{ab} \mathcal{L}_{\mu\nu} \langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle,
\end{aligned} \tag{459}$$

os fatores de forma transversal e longitudinal, respectivamente, ambos funções de p^2 apenas. Os diagramas de Feynman que contribuem a 1-loop para a função $\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle$ são mostrados na Figura 38. Até 1-loop, encontramos que a componente transversal

regularizada é

$$\langle A(p) A(-p) \rangle^{T,d} = \frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \Pi_A^{T,d}, \quad (460)$$

em que $\Pi_A^{T,d}$ é a componente transversal da autoenergia de A_μ^a regularizada. O cálculo de cada diagrama da Figura 38, que contribui para $\Pi_A^{T,d}$, pode ser encontrado no trabalho (DUDAL et al., 2021b). Expandindo $\Pi_A^{T,d}$ em série de Laurent em torno de $\varepsilon = 0$ ($\varepsilon = 4 - d$), obtemos que a parte divergente é

$$\Pi_A^{T,4-\varepsilon}(p^2) \Big|_{\text{div}} = \frac{g^2}{\pi^2} \left[- \left(\frac{9}{64} \frac{e^2}{\lambda} + \frac{\xi}{8} + \frac{3}{32} \right) m^2 - \frac{3}{32} m_h^2 + \left(\frac{25}{48} - \frac{\xi}{8} \right) p^2 \right] \frac{1}{\varepsilon}. \quad (461)$$

Esse termo divergente é eliminado com a introdução de contratermos locais bilineares em A_μ^a e, não podemos esquecer, do contratermo que renormaliza os “tadpoles”. Esses contratermos são ajustados de tal maneira a implementarmos o esquema \overline{MS} . Daí resulta que a parte transversal da autoenergia renormalizada em $d = 4$ é

$$\begin{aligned} \Pi_A^T(p^2) = & - \frac{g^2}{36(4\pi)^2 m^4 p^2 m_h^2} \left\{ \left[-27m^4 m_h^4 p^2 + 3m^4 m_h^4 (m_h^2 - m^2 + 2p^2) \right] \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \right. \\ & - 3\xi m^4 m_h^2 (2m^4 (\xi - 1) + (4\xi + 7) m^2 p^2 + 2(\xi + 9) p^4) \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2} \\ & - 27\xi m^6 m_h^2 p^2 \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2} \\ & + 3m^4 m_h^2 (m^4 (2\xi - 1) + m^2 (4\xi + 45) p^2 + 2(\xi + 9) p^4) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\ & + 3m^4 (-m^2 m_h^4 - 54m^4 p^2) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\ & + m^4 [6m^2 m_h^4 + m_h^2 (3m^4 (2(\xi - 2)\xi + 1) + 3m^2 (\xi - 1) (4\xi - 1) p^2 \\ & + 2(3\xi (\xi + 4) - 17) p^4) - 3m_h^6 + 54m^4 p^2] \\ & + 27m^4 m_h^2 p^2 (m_h^2 + \xi m^2) \\ & - 3m_h^2 \left[m^4 \left(2p^2 (m_h^2 - 5m^2) + (m_h^2 - m^2)^2 + p^4 \right) K(m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ & - 2(m^2 + p^2)^2 (m^4 (\xi - 1)^2 + 2m^2 p^2 (\xi - 5) + p^4) K(m^2, \xi m^2, p^2) \\ & + p^2 (p^4 - m^4) (4\xi m^2 + p^2) K(\xi m^2, \xi m^2, p^2) \\ & \left. + p^2 (4m^2 + p^2) (12m^4 - 20m^2 p^2 + p^4) K(m^2, m^2, p^2) \right] \left. \right\}. \quad (462) \end{aligned}$$

Analisando (462) notamos que existem termos do tipo $p^4 \ln \frac{p^2 x(1-x)+\dots}{\mu^2}$ e $p^6 \ln \frac{p^2 x(1-x)+\dots}{\mu^2}$. Reescrevendo esses termos como fizemos anteriormente, obtemos que

$$\frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \Pi_A^T = \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \hat{\Pi}_A^T + C_A(p^2), \quad (463)$$

sendo

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}_A^T(p^2) = & -\frac{g^2}{36(4\pi)^2 m^4 p^2 m_h^2} \left\{ [-27m^4 m_h^4 p^2 + 3m^4 m_h^4 (m_h^2 - m^2 + 2p^2)] \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \right. \\
& -3\xi m^4 m_h^2 (2m^4 (\xi - 1) + (4\xi + 7) m^2 p^2 + 2(\xi + 9) p^4) \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2} \\
& -27\xi m^6 m_h^2 p^2 \ln \frac{\xi m^2}{\mu^2} \\
& +3m^4 m_h^2 (m^4 (2\xi - 1) + m^2 (4\xi + 45) p^2 + 2(\xi + 9) p^4) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\
& +3m^4 (-m^2 m_h^4 - 54m^4 p^2) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\
& +m^4 [6m^2 m_h^4 + m_h^2 (3m^4 (2(\xi - 2)\xi + 1) + 3m^2 (\xi - 1) (4\xi - 1) p^2 \\
& +2(3\xi (\xi + 4) - 17) p^4) - 3m_h^6 + 54m^4 p^2] + 27m^4 m_h^2 p^2 (m_h^2 + \xi m^2) \\
& -3m_h^2 [m^4 (2p^2 (m_h^2 - 5m^2) + (m_h^2 - m^2)^2 + p^4) K(m^2, m_h^2, p^2) \\
& -2m^4 (\xi - 1)^2 (m^2 + p^2)^2 K(m^2, \xi m^2, p^2) \\
& -2m^4 (4\xi - 1) p^2 (p^2 + m^2) K(\xi m^2, \xi m^2, p^2) \\
& \left. +33(2m^6 p^2 - m^4 p^4) K(m^2, m^2, p^2) \right\} \quad (464)
\end{aligned}$$

e

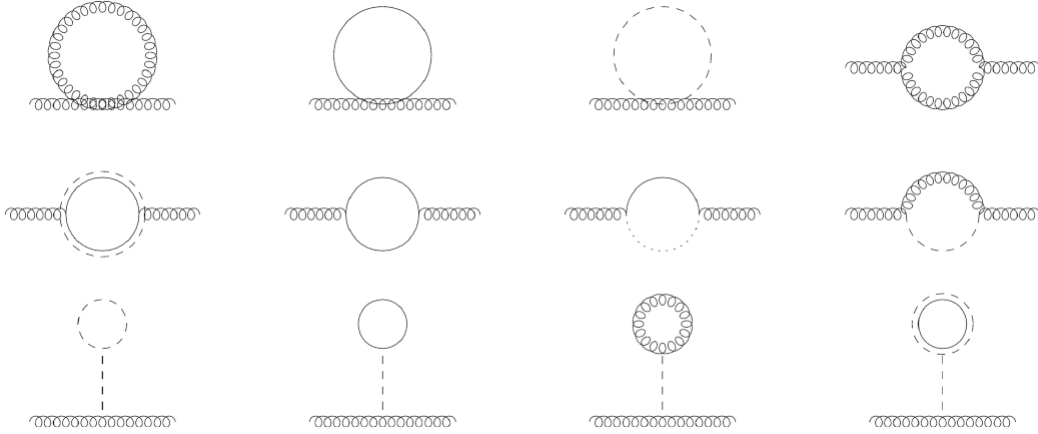
$$\begin{aligned}
C_A(p^2) = & \frac{g^2}{12(4\pi)^2 m^4} \left\{ [-4m^2 (\xi - 5) - 2p^2] K(\xi m^2, m^2, p^2) \right. \\
& + (4\xi m^2 + p^2 - 2m^2) K(\xi m^2, \xi m^2, p^2) \\
& \left. + (-18m^2 + p^2) K(m^2, m^2, p^2) \right\}. \quad (465)
\end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito de (464) pode ser ressomado sem problemas, assim definimos a função ressomada como sendo

$$\langle A(p) A(-p) \rangle^{T, \text{res}} = \frac{1}{p^2 + m^2 - \hat{\Pi}_A^T(p^2)} + C_A(p^2). \quad (466)$$

Assim como a função de 2-pontos de $h(x)$, as funções $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ e $\langle A(p) A(-p) \rangle^{T, \text{res}}$ dependem explicitamente do parâmetro de calibre ξ . Isso acontece porque A_μ^{aT} não é invariante de calibre, diferentemente do caso abeliano. Na Seção 6.4 serão mostradas as consequências desse fato para as densidades espectrais dessas funções.

Figura 38 - Correções a 1-loop para $\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle$.



Legenda: Diagramas de Feynman que contribuem a 1-loop para a função $\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle$.

Fonte: DUDAL, 2021, f. 20.

6.3 Funções de Green dos operadores invariantes de BRST

6.3.1 Função conexa do operador $O(x)$

O operador escalar invariante de calibre mais simples que podemos construir é $\varphi^\dagger(x) \varphi(x)$. Expandindo esse operador em termos dos campos $h(x)$ e $\rho^a(x)$ encontramos um termo constante $\frac{v^2}{2}$, que também é invariante de calibre. Para não termos que trabalhar com esse termo, consideraremos o operador

$$O(x) = \varphi^\dagger(x) \varphi(x) - \frac{v^2}{2}, \quad (467)$$

que também é invariante de calibre. Reescrevendo (467) com a expansão (433), obtemos

$$O(x) = \frac{1}{2} (h^2(x) + 2vh(x) + \rho^a(x) \rho^a(x)) \quad (468)$$

O operador $O(x)$ possui um termo linear em $h(x)$. Daí resulta que, a nível árvore, a função de 2-pontos de $O(x)$ é proporcional à função de 2-pontos de $h(x)$, mais especificamente,

$$\begin{aligned} \langle O(x) O(y) \rangle_{\text{tree}} &= v^2 \langle h(x) h(y) \rangle_{\text{tree}} \\ &= \frac{v^2}{p^2 + m_h^2}. \end{aligned} \quad (469)$$

Isso mostra a conexão entre o operador escalar $O(x)$ e o bóson de Higgs existente na teoria. A invariância de BRST de $O(x)$ é imediata pois esse operador não contém campos fantasmas.

Para que possamos calcular funções de correlação do operador composto $O(x)$,

devemos introduzi-lo na ação de partida acoplado à uma fonte externa, que neste caso denotaremos por $J(x)$. Assim, a ação S será modificada para

$$S \rightarrow S + \int d^4x J(x) O(x)$$

e, conseqüentemente, o funcional gerador conexo também,

$$W \rightarrow W'[J],$$

de modo a obtermos as regras de Feynman para o cálculo das funções de Green com inserções de $O(x)$. Em especial, temos que a função de Green conexa de 2-pontos é definida como

$$\langle O(x) O(y) \rangle = - \frac{\delta^2 W'}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{\mathcal{J}=0}.$$

As regras de Feynman modificadas são mostradas em (DUDAL et al., 2022).

Os diagramas que contribuem para $\langle O(p) O(-p) \rangle$ são mostrados na Figura 39. Os cálculos desses diagramas podem ser encontrados no trabalho (DUDAL et al., 2021b), aqui apresentaremos apenas os resultados mais importantes. A função até 1-loop regularizada tem a forma

$$\langle O(p) O(-p) \rangle^d = \frac{v^2}{p^2 + m_h^2} + \frac{v^2}{(p^2 + m_h^2)^2} \Pi_O^d(p^2),$$

em que

$$\begin{aligned} \Pi_O^d(p^2) = & \frac{1}{v^2} \left\{ \frac{3}{2} [4(d-1)m^4 + 4m^2p^2 + p^4] \eta(m^2, m^2, p^2) \right. \\ & + \frac{1}{2} (p^2 - 2m_h^2)^2 \eta(m_h^2, m_h^2, p^2) \\ & \left. - \frac{3p^2 [2(d-1)m^2 + m_h^2]}{m_h^2} \chi(m^2) - 3p^2 \chi(m_h^2) \right\}. \end{aligned} \quad (470)$$

Expandindo $\Pi_O^d(p^2)$ em série de Laurent em torno de $\varepsilon = 0$ ($\varepsilon = 4 - d$), encontramos que a parte divergente é

$$\Pi_O^{4-\varepsilon}(p^2) \Big|_{\text{div}} = \frac{1}{4v^2\pi^2} \left(\frac{9g^4 p^2 v^2}{16\lambda} + \frac{9g^4 v^4}{16} + \frac{9}{8} g^2 p^2 v^2 \right. \quad (471)$$

$$\left. + p^4 + \frac{1}{2} \lambda p^2 v^2 + \lambda^2 v^4 \right) \frac{1}{\varepsilon}, \quad (472)$$

que é local no momento p^2 e na massa v . Encontramos em $\Pi_O^{4-\varepsilon}(p^2) \Big|_{\text{div}}$ termos que não são encontrados nas autoenergias de teorias renormalizáveis, como $\frac{p^4}{\varepsilon}$, mas isso não é um problema, já que, esse é um operador composto. Esse termo $\frac{p^4}{\varepsilon}$, em especial, pode ser eliminada através da introdução de um contratérmo quadrático na fonte $J(x)$, ou seja,

$\int d^4x \delta J^2(x)$ em que $\delta \sim \frac{1}{\epsilon}$. Mais detalhes da renormalização do operador $O(x)$ podem ser encontrado no Capítulo 7. Aplicando o esquema \overline{MS} , obtemos a função renormalizada em $d = 4$:

$$\begin{aligned} \Pi_O(p^2) &= \frac{1}{32v^2\pi^2 m_h^2} \left[-24m_h^2 m^4 + 6p^2 (m_h^4 + m_h^2 m^2 + 2m^4) \right. \\ &\quad - 6m^2 p^2 (m_h^2 + 6m^2) \ln \frac{m^2}{\mu^2} - 6m_h^4 p^2 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \\ &\quad - m_h^2 (p^2 - 2m_h^2)^2 K(m_h^2, m_h^2, p^2) \\ &\quad \left. - 3m_h^2 (12m^4 + 4m^2 p^2 + p^4) K(m^2, m^2, p^2) \right]. \end{aligned} \quad (473)$$

Procedendo da mesma forma que nos casos anteriores com os termos $p^4 \ln \frac{p^2 + \dots}{\mu^2}$ de $\Pi_O(p^2)$, obtemos a função ressomada

$$\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}} = \frac{v^2}{p^2 + m_h^2 - \hat{\Pi}_O(p^2)} + C_O(p^2), \quad (474)$$

em que

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_O(p^2) &= \frac{1}{32v^2\pi^2 m_h^2} \left[-24m_h^2 m^4 + 6p^2 (m_h^4 + m_h^2 m^2 + 2m^4) \right. \\ &\quad - 6m^2 p^2 (m_h^2 + 6m^2) \ln \frac{m^2}{\mu^2} - 6m_h^4 p^2 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \\ &\quad - m_h^2 (3m_h^4 - 6m_h^2 p^2) K(m_h^2, m_h^2, p^2) \\ &\quad \left. - 3m_h^2 (12m^4 + 4m^2 p^2 - m_h^4 - 2p^2 m_h^2) K(m^2, m^2, p^2) \right]. \end{aligned} \quad (475)$$

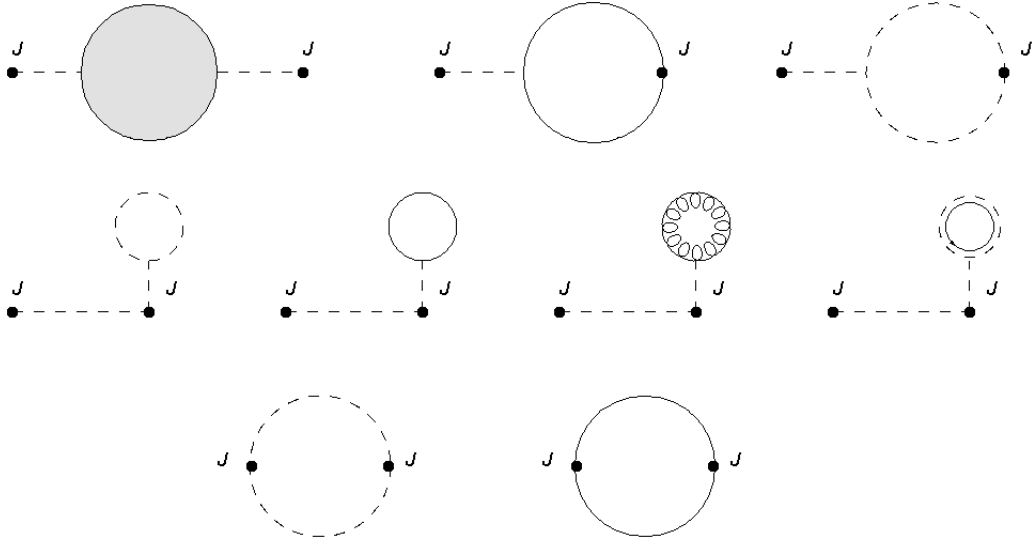
Como esperado, ao contrário de $\langle h(p) h(-p) \rangle$, a função $\langle O(p) O(-p) \rangle$ é independente do parâmetro de calibre ξ .

6.3.2 Função conexa do operador $R_\mu^a(x)$

No modelo de Higgs $SU(2)$ podemos identificar três operadores compostos invariáveis de calibre:

$$\begin{aligned} O_\mu^3 &= i\varphi^\dagger D_\mu \varphi, \\ O_\mu^+ &= \varphi^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} D_\mu \varphi, \\ O_\mu^- &= (O_\mu^+)^{\dagger}, \end{aligned} \quad (476)$$

que são os operadores apresentados por (ITZYKSON et al., 1980). A invariância de calibre de O_μ^3 é aparente. Para O_μ^+ , podemos mostrar a invariância de calibre usando uma

Figura 39 - Correções a 1-loop para $\langle O(p) O(-p) \rangle$.

Legenda: Diagramas de Feynman que contribuem a 1-loop para a função $\langle O(p) O(-p) \rangle$.

Fonte: O autor, 2022.

matriz de transformação 2×2 genérica do grupo $SU(2)$,

$$U = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}, \quad (477)$$

com determinante $\det U = |a|^2 + |b|^2 = 1$. Para uma transformação de calibre escrita dessa forma, temos

$$\begin{aligned} O_\mu^+ &\rightarrow (U\varphi)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} D_\mu(U\varphi) \\ &= \varphi^T U^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U D_\mu \varphi \\ &= \varphi^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} D_\mu \varphi, \end{aligned} \quad (478)$$

o que mostra a invariância de calibre de O_μ^+ e, conseqüentemente, de O_μ^- . Podemos reescrever o primeiro operador utilizando a expansão do campo φ , Eq. (433), o que resulta em

$$\begin{aligned} O_\mu^3 &= \frac{1}{2} \left[-(v+h) \partial_\mu \rho^3 + \rho^3 \partial_\mu h - \rho^1 \partial_\mu \rho^2 + \rho^2 \partial_\mu \rho^1 + \frac{1}{2} g (v+h)^2 A_\mu^3 \right. \\ &\quad \left. - g (v+h)^2 A_\mu^3 - g (v+h) (A_\mu^1 \rho^2 - A_\mu^2 \rho^1) - \frac{1}{2} g \rho^a \rho^a A_\mu^3 + g \rho^3 \rho^a A_\mu^a \right] \\ &\quad + \frac{i}{2} \partial_\mu O. \end{aligned} \quad (479)$$

O último termo do lado direito de (479), $\frac{i}{2}\partial_\mu O$, é invariante de BRST, portanto o termo entre colchetes em (479) também é invariante de calibre. Assim, podemos considerar os seguintes operadores invariantes de calibre:

$$\begin{aligned} R_\mu^1 &= \frac{i}{2}(O_\mu^+ - O_\mu^-), \\ R_\mu^2 &= \frac{1}{2}(O_\mu^+ + O_\mu^-), \\ R_\mu^3 &= O_\mu^3 - \frac{i}{2}\partial_\mu O, \end{aligned} \tag{480}$$

que podem ser expressos através de um único operador:

$$\begin{aligned} R_\mu^a &= -\frac{1}{2} \left[(v+h) \partial_\mu \rho^a - \rho^a \partial_\mu h + \epsilon^{abc} \rho^b \partial_\mu \rho^c - \frac{g}{2} A_\mu^a (v+h)^2 \right. \\ &\quad \left. + g \epsilon^{abc} A_\mu^b \rho^c (v+h) + \frac{g}{2} A_\mu^a \rho^b \rho^b - g A_\mu^b \rho^a \rho^b \right], \end{aligned} \tag{481}$$

em que $a = 1, 2, 3$. Obviamente, temos que

$$sR_\mu^a = 0, \tag{482}$$

pois, assim como o operador escalar $O(x)$, R_μ^a não contém os campos fantasmas de Faddeev-Popov.

Podemos mencionar alguns fatos a respeito de R_μ^a . O primeiro deles são os termos lineares nos campos,

$$R_\mu^a|_{\text{linear}} = \frac{v}{2} (mA_\mu^a - \partial_\mu \rho^a), \tag{483}$$

que sugerem que R_μ^a deve ser a versão invariante de BRST de A_μ^a . Outro fato relevante a respeito do operador R_μ^a é a sua transformação em relação à simetria custodial (445):

$$\delta R_\mu^a = \epsilon^{abc} \omega^b R_\mu^c, \tag{484}$$

ou seja, R_μ^a se comporta como um tripleto. No trabalho (DUDAL et al., 2022) e no Capítulo 7 é mostrado que R_μ^a é o único operador vetorial de dimensão três, invariante de calibre e que se transforma como um tripleto, que pertence à cohomologia não-trivial do operador de BRST. Além disso, é mostrado que R_μ^a é, na verdade, a corrente de Noether clássica da simetria custodial. Como consequência disso, já que R_μ^a é introduzido na ação de partida, existe uma identidade de Ward local adicional associada à simetria custodial. Essa identidade tem profundas consequências sobre a renormalização de R_μ^a . A principal delas, a dimensão anômala de R_μ^a é nula, como é o esperado para uma corrente conservada.

Como R_μ^a é um operador composto, devemos aplicar a ele os mesmos métodos que foram empregados para os outros operadores compostos estudados até agora. R_μ^a será introduzido na ação de partida acoplado à fonte externa Ω_μ^a , assim temos a seguinte

modificação na ação

$$S \rightarrow S + \int d^4x \Omega_\mu^a R_\mu^a. \quad (485)$$

o que implica em uma modificação no gerador funcional conexo

$$W \rightarrow W'[\Omega]. \quad (486)$$

Dessa forma, a função de Green conexa de 2-pontos de R_μ^a é definida como

$$\langle R_\mu^a(x) R_\nu^b(y) \rangle = - \frac{\delta^2 W'}{\delta \Omega_\mu^a(x) \delta \Omega_\nu^b(y)} \Big|_{\mathcal{J}=0}.$$

A fonte Ω_μ^a herda de R_μ^a a invariância de BRST e a transformação

$$\delta \Omega_\mu^a = \epsilon^{abc} \omega^b \Omega_\mu^c \quad (487)$$

em relação à simetria custodial.

Devido às propriedades de transformação do operador R_μ^a em relação à simetria custodial, Eq. (484), a função de 2-pontos conexa $\langle R_\mu^a(p) R_\nu^b(-p) \rangle$ pode ser decomposta como

$$\langle R_\mu^a(p) R_\nu^b(-p) \rangle = \delta^{ab} \left[\langle R(p) R(-p) \rangle^T \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \langle R(p) R(-p) \rangle^L \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \right], \quad (488)$$

em que

$$\begin{aligned} \langle R(p) R(-p) \rangle^T &= \frac{1}{3(d-1)} \delta^{ab} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \langle R_\mu^a(p) R_\nu^b(-p) \rangle, \\ \langle R(p) R(-p) \rangle^L &= \frac{1}{3} \delta^{ab} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \langle R_\mu^a(p) R_\nu^b(-p) \rangle. \end{aligned} \quad (489)$$

Note as semelhanças dessa função com a função $\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle$. A nível árvore, apenas os termos lineares de R_μ^a contribuem para a função, resultando em

$$\begin{aligned} \langle R_\mu^a(p) R_\nu^b(-p) \rangle_{\text{tree}} &= \frac{1}{16} g^2 v^4 \langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle_{\text{tree}} + \frac{1}{4} v^2 p_\mu p_\nu \langle \rho^a(p) \rho^b(-p) \rangle_{\text{tree}} \\ &= \frac{3}{16} g^2 v^4 \frac{1}{p^2 + m^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \frac{3}{4} v^2 \mathcal{L}_{\mu\nu}(p). \end{aligned} \quad (490)$$

A Eq. (490) mostra explicitamente aquilo que já foi mencionado, $\langle R(p) R(-p) \rangle^T$, assim como $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$, possui um pólo na massa do bóson vetorial, enquanto que, a parte longitudinal é uma constante, $\langle R(p) R(-p) \rangle^L = \frac{3}{4} v^2$.

Os diagramas que contribuem para $\langle R_\mu^a(p) R_\nu^b(-p) \rangle$ até 1-loop são mostrados na Figura 40. O cálculo desses diagramas pode ser encontrado em (DUDAL et al., 2021b).

A componente transversal da função $\langle R_\mu^a(p) R_\nu^b(-p) \rangle$ regularizada tem a forma

$$\langle R(p) R(-p) \rangle^{T,d} = \frac{1}{16} g^2 v^4 \left[\frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{1}{(p^2 + m^2)} \Pi_R^d(p^2) \right] \quad (491)$$

em que

$$\begin{aligned} \Pi_R^d(p^2) = & -\frac{4}{g^2 v^4} \left\{ -p^2 [2(3-2d)m^2 p^2 - 2m_h^2(m^2 - p^2)] \eta(m^2, m_h^2, p^2) \right. \\ & - p^2 (m_h^4 + m^4 + p^4) \eta(m^2, m_h^2, p^2) \\ & - (4m^2 + p^2) [4(d-1)m^4 + 4(3-2d)m^2 p^2 + p^4] \eta(m^2, m^2, p^2) \\ & + \frac{m_h^2(-8(d^2 - 3d + 2)m^4 + (15 - 8d)m^2 p^2 + 3p^4)}{m_h^2} \chi(m^2) \\ & + \frac{-6(d-1)^2 m^4 (m^2 + 2p^2) + p^2 m_h^4}{m_h^2} \chi(m^2) \\ & \left. + [-2(d-1)m^4 + (5-4d)m^2 p^2 - p^2 m_h^2 + p^4] \chi(m_h^2) \right\}. \end{aligned} \quad (492)$$

Expandindo $\Pi_R^d(p^2)$ em série de Laurent em torno de $\varepsilon = 0$ ($\varepsilon = 4 - d$), obtemos que a parte divergente é

$$\begin{aligned} \Pi_R^{4-\varepsilon}(p^2)|_{\text{div}} = & \frac{g^2}{\pi^2} \left(-\frac{m_h^2 p^4}{32m^4} + \frac{9m^4}{16m_h^2} + \frac{9m^2 p^2}{8m_h^2} + \frac{m_h^2 p^2}{8m^2} \right. \\ & \left. + \frac{m_h^2}{16} - \frac{p^6}{48m^4} + \frac{23p^4}{96m^2} + \frac{7p^2}{8} \right) \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (493)$$

Note que, a divergência de $\langle R(p) R(-p) \rangle^{T,4-\varepsilon}$ é polinomial em p^2 e v^2 , portanto, pode ser eliminada através da introdução de contratermos locais na ação. Impondo o esquema de \overline{MS} , obtemos que a função renormalizada em $d = 4$ é

$$\begin{aligned} \Pi_R(p^2) = & \frac{1}{12\pi^2 g^2 v^4 m_h^2} \left\{ 6m^4 (m_h^4 + 3m^4) - \frac{p^4 m_h^2}{3} (9m_h^2 + 35m^2 + 4p^2) \right. \\ & + p^2 (m^4 m_h^2 + 10m^2 m_h^4 + m_h^6 + 36m^6) \\ & + m_h^4 [-p^2 (m_h^2 + 11m^2) - 6m^4 + p^4] \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \\ & + m^2 m_h^2 (-48m^4 - 17m^2 p^2 + 3p^4) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\ & + m^2 [p^2 m_h^4 - 54(m^6 + 2m^4 p^2)] \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\ & + m_h^2 \left[2p^4 (m_h^2 - 5m^2) + (m^2 - m_h^2)^2 p^2 + p^6 \right] K(m_h^2, m^2, p^2) \\ & \left. + m_h^2 (48m^6 - 68m^4 p^2 - 16m^2 p^4 + p^6) K(m^2, m^2, p^2) \right\}. \end{aligned} \quad (494)$$

Reescrevendo os termos de $\Pi_R(p^2)$ com $p^4 \ln \frac{p^2 x(1-x)+\dots}{\mu^2}$ e $p^6 \ln \frac{p^2 x(1-x)+\dots}{\mu^2}$, obtemos a versão

ressomada de $\langle R(p) R(-p) \rangle^T$,

$$\langle R(p) R(-p) \rangle^{T, \text{res}} = \frac{1}{16} g^2 v^4 \frac{1}{p^2 + m_h^2 - \hat{\Pi}_R(p^2)} + C_R(p^2) \quad (495)$$

em que

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_R(p^2) = & \frac{1}{12\pi^2 g^2 v^4 m_h^2} \left\{ 6m^4 (m_h^4 + 3m^4) - \frac{p^4 m_h^2}{3} (9m_h^2 + 35m^2 + 4p^2) \right. \\ & + p^2 (m^4 m_h^2 + 10m^2 m_h^4 + m_h^6 + 36m^6) \\ & + m_h^4 [-p^2 (m_h^2 + 11m^2) - 6m^4 + p^4] \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} \\ & + m^2 m_h^2 (-48m^4 - 17m^2 p^2 + 3p^4) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\ & + m^2 [p^2 m_h^4 - 54 (m^6 + 2m^4 p^2)] \ln \frac{m^2}{\mu^2} \\ & + m_h^2 (m_h^4 p^2 - 2m_h^2 m^4 - 6m_h^2 m^2 p^2) K(m_h^2, m^2, p^2) \\ & + m_h^2 (12m^6 + 24m^4 p^2) K(m_h^2, m^2, p^2) \\ & \left. + 33m_h^2 (2m^6 - m^4 p^2) K(m^2, m^2, p^2) \right\} \quad (496) \end{aligned}$$

e

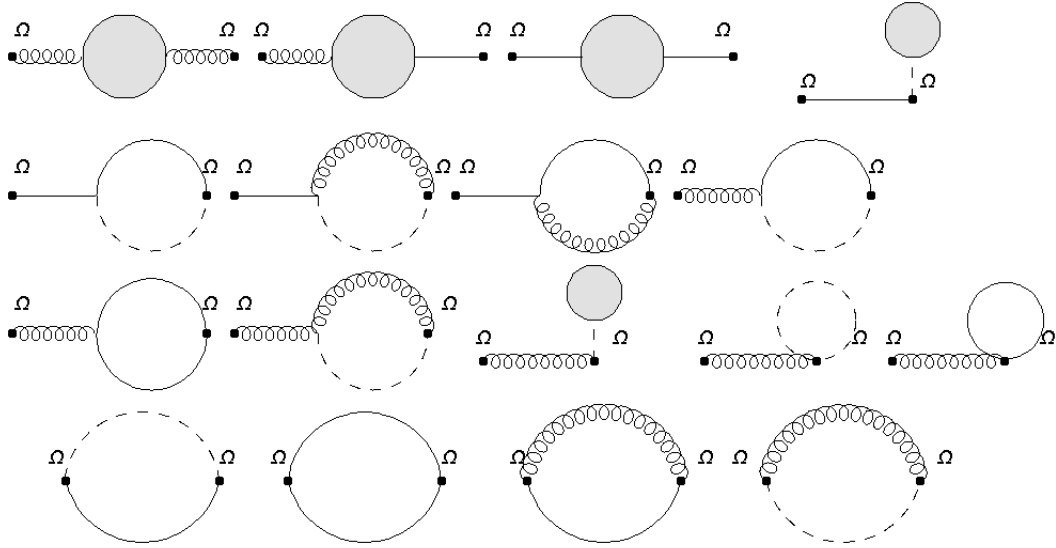
$$\begin{aligned} C_R(p^2) = & \frac{1}{12(4\pi)^2} [(-18m^2 + p^2) K(m^2, m^2, p^2) \\ & + (2m_h^2 - 12m^2 + p^2) K(m_h^2, m^2, p^2)]. \quad (497) \end{aligned}$$

Para a parte longitudinal de $\langle R_\mu^a(p) R_\nu^b(-p) \rangle$ o que encontramos é

$$\begin{aligned} \langle R(p) R(-p) \rangle^{L, 4-\varepsilon} = & \frac{v^2}{4} + \frac{1}{(4\pi)^2} \left(m_h^2 - 9 \frac{m^4}{m_h^2} \right) \frac{1}{\varepsilon} \\ & - \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{m_h^4 - 3m_h^4 \ln \frac{m_h^2}{\mu^2} + 9m^4 - 27m^4 \ln \frac{m^2}{\mu^2}}{2m_h^2} \right) \\ & + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (498) \end{aligned}$$

Esse resultado mostra que a correção a 1-loop, assim como a contribuição a nível árvore, é independente do momento externo p . Isso quer dizer que nenhuma partícula está associada à parte longitudinal de $\langle R_\mu^a(p) R_\nu^b(-p) \rangle$. Seria interessante termos um resultado semelhante que valesse para todas as ordens. De fato, como é mostrado no trabalho (DUDAL et al., 2022) e no Capítulo 7, devido a R_μ^a ser a corrente de Noether da simetria custodial, a parte longitudinal da função de Green de 2-pontos conexa é independente do momento. Além disso, todas as correções perturbativas de $\langle R(p) R(-p) \rangle^L$ resultam da função $\langle O \rangle$, que com condições de renormalização apropriadas (cancelamento dos “tad-

Figura 40 - Correções a 1-loop para $\langle R(p) R(-p) \rangle$.



Legenda: Diagramas de Feynman que contribuem a 1-loop para a função $\langle R(p) R(-p) \rangle$. Os diagramas que contribuem para as funções $\langle h \rangle$, $\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle$ e $\langle A_\mu^a(p) \rho(-p) \rangle$ são mostrados no Apêndice F.

Fonte: O autor, 2022.

poles” e minimização da energia do vácuo) é nula.

6.4 Propriedades espectrais das funções de Green

Nesta seção analisaremos as representações espectrais de Källén-Lehmann e os polos das funções de Green calculadas nas seções anteriores. Como a teoria é a mesma que foi utilizada nos Capítulos 3 e 4 para estudar o modelo de Higgs abeliano, não repetiremos aqui todos os passos.

6.4.1 Propriedades espectrais das funções dos campos elementares

Primeiramente, analisaremos as funções dos campos elementares $h(x)$ e $A_\mu^a(x)$ para dois conjuntos de valores, que denominamos de Região I e Região II e são mostrados na Tabela 2. O parâmetro massivo v é expresso em unidades da escala de energia μ . Como $m^2 = \frac{1}{4}g^2v^2$ e $m_h^2 = \lambda v^2$, temos que $m^2 = 0,23\mu^2$ e $m_h^2 = 0,192\mu^2$ na Região I e $m^2 = 0,625\mu^2$ e $m_h^2 = 0,205\mu^2$ na Região II.

- Campo de Higgs

Tabela 2 - Parâmetros usados para analisar as densidades espectrais.

	Região I	Região II
v	$0,8\mu$	1μ
g	$1,2$	$0,5$
λ	$0,3$	$0,205$

Legenda: Regiões de parâmetros I e II.

Fonte: Dudal, 2021.

Para o campo de Higgs, encontramos que o polo até um 1-loop vale: para Região I

$$\overline{m}_h^2 = -0,207\mu^2, \quad (499)$$

e para Região II

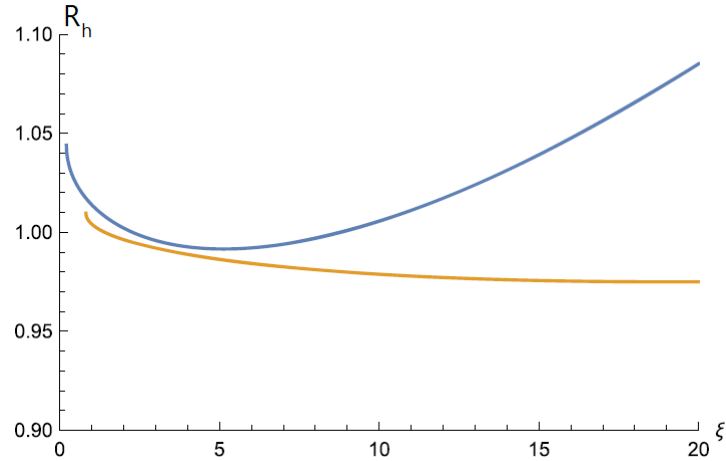
$$\overline{m}_h^2 = -0,206\mu^2, \quad (500)$$

para todos os valores de ξ , ou seja, o polo de $\langle h(p)h(-p) \rangle$ é independente do parâmetro de calibre. Esse é um resultado que decorre das identidades de Nielsen, que existem também no modelo de Higgs $SU(2)$. A derivação dessas identidades e a demonstração da independência do pólo de $\langle h(p)h(-p) \rangle$ é completamente análoga ao caso $U(1)$, veja (GAMBINO; GRASSI, 2000). O resíduo de $\langle h(p)h(-p) \rangle$ em $p^2 = \overline{m}_h^2$, que denotamos por R_h , por outro lado, depende de ξ , como mostra a Figura 41. Para valores muito pequenos de ξ , o resíduo não está bem definido, pois o que seria o polo se encontra sobre o corte de $\langle h(p)h(-p) \rangle$, essa situação é semelhante ao que encontramos no modelo de Higgs abeliano, veja o Capítulo 3.

Na Figura 42 são mostradas as densidades espectrais de $\langle h(p)h(-p) \rangle^{\text{res}}$ subtraída da parte com o pólo, $\tilde{\rho}_h(t)$, para três valores de ξ : 1, 2 e 5. Na Região I, podemos ver, através dos saltos da densidade espectral, que o primeiro “threshold” surge em $t = (m_h + m_h)^2 = 0,768\mu^2$, seguido por outro em $t = (m + m)^2 = 0,922\mu^2$. Depois, aparece um “threshold” que depende do valor de ξ em $t = (\sqrt{\xi}m + \sqrt{\xi}m)^2$, que corresponde ao estado não físico com dois bósons de Goldstone. Para $\xi < 3$, a densidade espectral apresenta valores negativos, a causa provável para isso talvez seja o mau comportamento da função $\langle h(p)h(-p) \rangle$ para p^2 grande, veja a discussão feita na Seção 3.3.3. Para a Região II, os resultados são essencialmente os mesmos: um “threshold” para dois bósons de Higgs em $t = (m_h + m_h)^2 = 0,81\mu^2$, um “threshold” para dois bósons de calibre em $t = (m + m)^2 = 0,25\mu^2$. Também vemos um “threshold” não físico para dois “bósons de Goldstone” em $t = (\sqrt{\xi}m + \sqrt{\xi}m)^2$ e a densidade espectral com valores negativos para $\xi < 3$.

- Componente transversal do campo de calibre

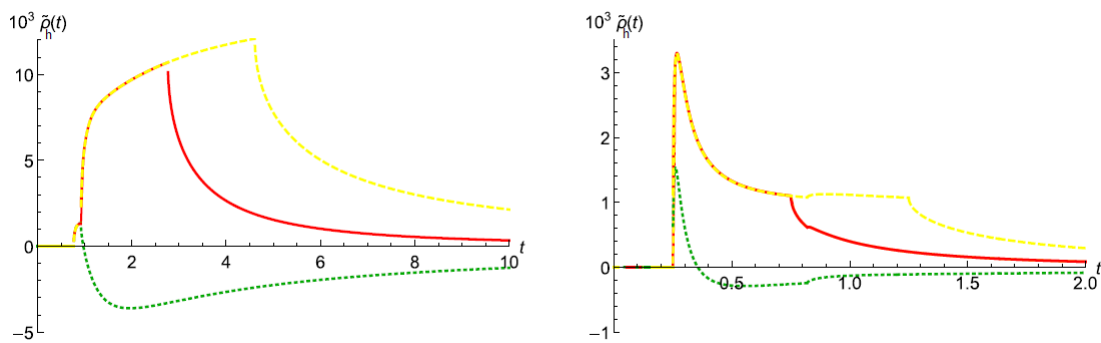
Figura 41 - Resíduo da função $\langle h(p) h(-p) \rangle$.



Legenda: Resíduo da função $\langle h(p) h(-p) \rangle$, R_h , em função do parâmetro de calibre ξ , para a Região I (em azul) e a Região II (em laranja).

Fonte: DUDAL, 2021, f. 12.

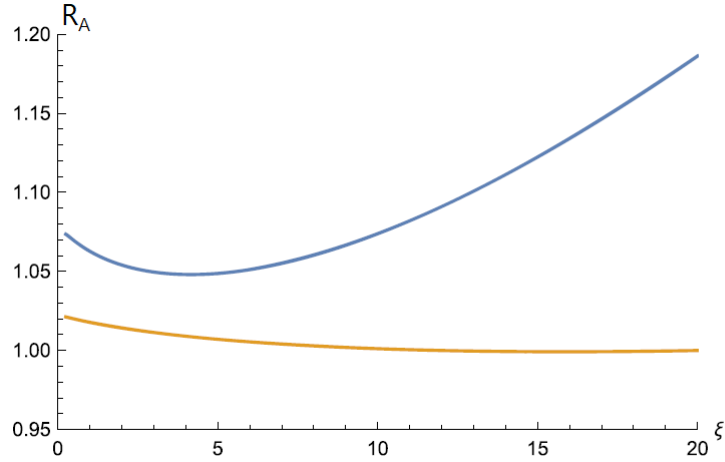
Figura 42 - Densidades espectrais de $\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}}$.



Legenda: Densidades espectrais de $\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}}$ subtraída da parte com o polo, $\tilde{\rho}_h(t)$, para $\xi = 1$ (em verde), $\xi = 3$ (em vermelho), $\xi = 5$ (em amarelo), em que t é dado em unidades de μ^2 . Do lado esquerdo temos os parâmetros da Região I, enquanto que, do lado direito temos os parâmetros da Região II, como mostra a Tabela 2

Fonte: DUDAL, 2021, f. 13.

Figura 43 - Resíduo da função $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$.



Legenda: Resíduo da função $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$, R_A , em função do parâmetro de calibre ξ , para a Região I (em azul) e a Região II (em laranja).

Fonte: DUDAL, 2021, f. 13.

Para o campo de calibre, obtemos que o polo de $\langle A(p) A(-p) \rangle^{T, \text{res}}$ vale: para a Região I

$$\bar{m}^2 = -0,274\mu^2, \quad (501)$$

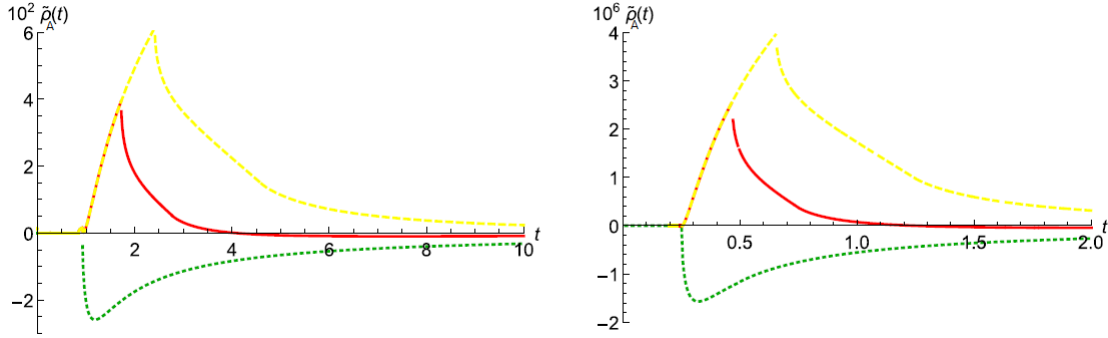
e para Região II

$$\bar{m}^2 = -0,065\mu^2. \quad (502)$$

Aqui também obtemos que o polo é independente do parâmetro de ξ , em acordo com as identidades de Nielsen do modelo. Já o resíduo depende de ξ , como mostra a Figura 43, e para valores muito pequenos de ξ não está bem definido, pois o pólo se encontra sobre o corte da função $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$.

Na Figura 7.6 são mostradas as densidades espectrais para os valores de $\xi = 1$, $\xi = 2$ e $\xi = 5$. Neste caso encontramos quatro “thresholds”. No caso da Região I, vemos o primeiro “threshold” para duas partículas em $t = (m_h + m)^2 = 0,843\mu^2$, seguido de um “threshold” para dois bósons vetoriais em $t = (m + m)^2 = 0,922\mu^2$. Existe um “threshold” não físico em $t = (m + \sqrt{\xi}m)^2$, que corresponde a um “bóson de Goldstone” e um bóson de Higgs, a partir desse valor, encontramos regiões onde a densidade espectral é negativa. Na Região II, as mesmas características são observadas, mas com valores diferentes para as energias de cada “threshold”.

Figura 44 - Densidades espectrais de $\langle A(p) A(-p) \rangle^{T, \text{res}}$.



Legenda: Densidades espectrais de $\langle A(p) A(-p) \rangle^{T, \text{res}}$ subtraída da parte com o polo, $\tilde{\rho}_A(t)$, para $\xi = 1$ (em verde), $\xi = 2$ (em vermelho), $\xi = 5$ (em amarelo), em que t é dado em unidades de μ^2 . Do lado esquerdo temos os parâmetros da Região I, enquanto que, do lado direito temos os parâmetros da Região II, como mostra a Tabela 2.

Fonte: DUDAL, 2021, f. 14.

6.4.2 Propriedades espectrais dos operadores compostos

- Operador escalar $O(x)$

Para o operador composto escalar $O(x)$, cuja função de dois pontos é dada pela Eq. (474), encontramos que o polo até 1-loop vale: para Região I

$$\bar{m}_O^2 = -0,207\mu^2, \quad (503)$$

e para Região II

$$\bar{m}_O^2 = -0,206\mu^2, \quad (504)$$

que coincide com o polo da função $\langle h(p) h(-p) \rangle$, Eqs. (499) e (500). Esse resultado é verdadeiro para quaisquer valores dos parâmetros, a demonstração é análoga ao caso abeliano. Os resíduos, que agora são independentes de ξ , têm os valores

$$R_O = 1,11v^2, \quad (505)$$

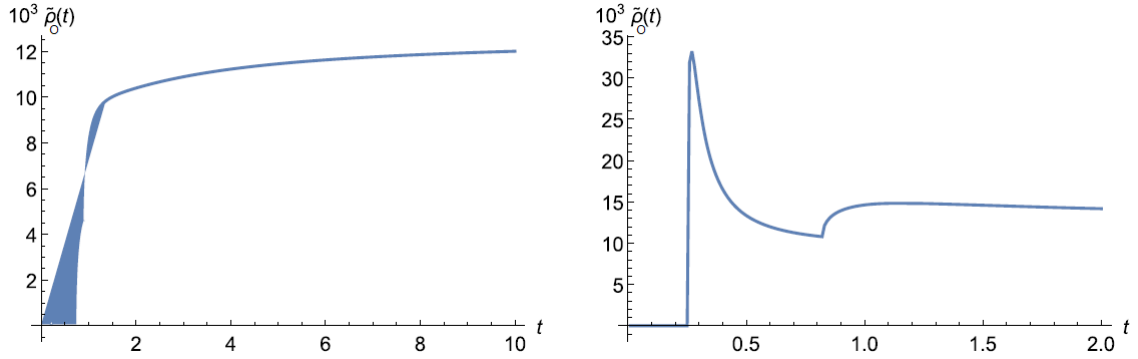
para a Região I, e

$$R_O = 1,01v^2, \quad (506)$$

para a Região II.

A densidade espectral de $\langle O(x) O(y) \rangle^{\text{res}}$ subtraída da parte com o polo, $\tilde{\rho}_O(t)$, calculada através da Eq. (647), é mostrada na Figura 45. Podemos notar a existência

Figura 45 - Densidades espectrais de $\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}}$.



Legenda: Densidades espectrais de $\langle O(p) O(-p) \rangle^{\text{res}}$ subtraída da parte com o polo, $\tilde{\rho}_O(t)$, em que t é dado em unidades de μ^2 . Do lado esquerdo temos os parâmetros da Região I, enquanto que, do lado direito temos os parâmetros da Região II, como mostra a Tabela 2.

Fonte: DUDAL, 2021, f. 15.

de um “threshold” para dois bósons de Higgs em $t = (m_h + m_h)^2$ e outro “threshold” para dois bósons vetoriais em $t = (m + m)^2$. Comparando com a densidade espectral de $\langle h(x) h(y) \rangle$, Figura 42, vemos que $\tilde{\rho}_O(t)$ não possui o “threshold” não-físico com dois “bósons de Goldstone” em $t = (\sqrt{\xi}m + \sqrt{\xi}m)^2$, além disso, $\tilde{\rho}_O(t)$ é positiva para todos os valores de t .

- Operador vetorial R_μ^a

Para a parte transversal da função de 2-pontos de $R_\mu^a(x)$, Eq. (495), obtemos os seguintes polos: na Região I temos

$$\bar{m}_R^2 = -0,274\mu^2, \quad (507)$$

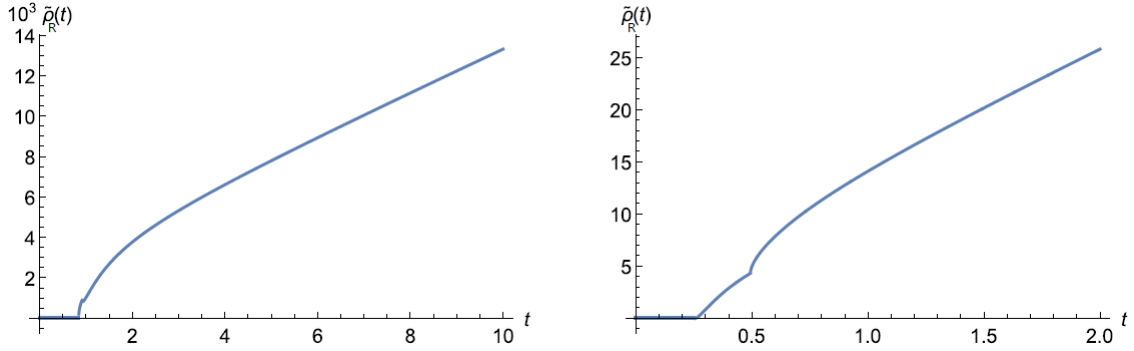
e na Região II temos

$$\bar{m}_R^2 = -0,065\mu^2, \quad (508)$$

que são os mesmos polos de $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$. De forma análoga ao caso abeliano, podemos demonstrar que $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ e $\langle R(p) R(-p) \rangle^T$ possuem o mesmo polo até 1-loop, independentemente dos valores escolhidos para os parâmetro da teoria. Os valores obtidos para os resíduos são

$$R_R = \frac{127}{1600}g^2v^4, \quad (509)$$

Figura 46 - Densidades espectrais de $\langle R(p) R(-p) \rangle^{T, \text{res}}$.



Legenda: Densidades espectrais de $\langle R(p) R(-p) \rangle^{T, \text{res}}$, $\tilde{\rho}_O(t)$, em que t é dado em unidades de μ^2 . Do lado esquerdo temos os parâmetros da Região I, enquanto que, do lado direito temos os parâmetros da Região II, como mostra a Tabela 2.

Fonte: DUDAL, 2021, f. 16.

na Região I, e

$$R_R = \frac{105}{1600} g^2 v^4, \quad (510)$$

na Região II.

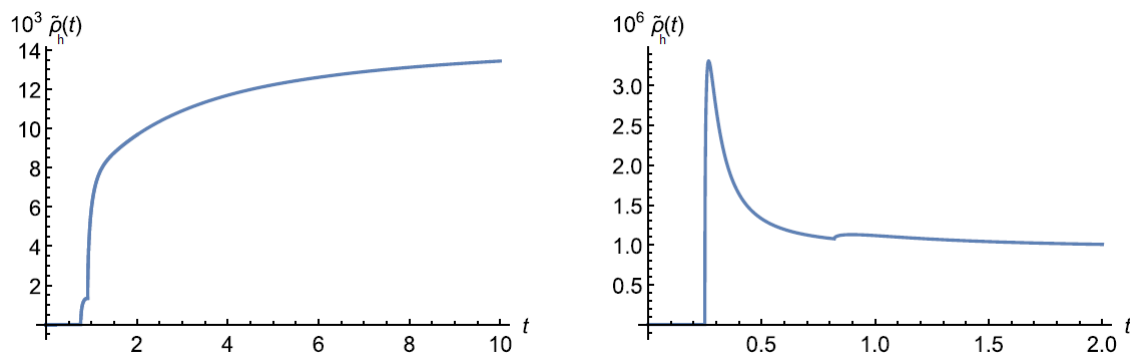
A densidade espectral de $\langle R(p) R(-p) \rangle^{T, \text{res}}$ com a parte de polo subtraída, $\tilde{\rho}_R(t)$, é calculada por meio da Eq. (647) e mostrada na Figura 46. Podemos notar que existe um “threshold” em $t = (m_h + m)^2$, que corresponde a um estado com duas partículas (um bóson de Higgs e um bóson vetorial). Além desse, existe um outro “threshold” em $t = (m + m)^2$, que corresponde a um estado com dois bósons vetoriais. Os “thresholds” não físicos presentes em $\tilde{\rho}_A(t)$ não são observados em $\tilde{\rho}_R(t)$. Além disso, vemos que $\tilde{\rho}_R(t)$ é positiva para todos os valores de t .

Devido às dimensões elevadas dos operadores $O(x)$ e $R_\mu^a(x)$, para reconstruirmos $\langle O(p) O(-p) \rangle$ e $\langle R(p) R(-p) \rangle$ a partir das densidades espectrais, devemos utilizar a fórmula do Apêndice C, que possui as subtrações necessárias para que a integral dispersiva convirja.

6.4.3 Calibre Unitário

As contribuições negativas para as densidades espectrais $\tilde{\rho}_h(t)$ e $\tilde{\rho}_A(t)$ dos “threshold” não físico podem ser suprimidas se tomarmos o limite $\xi \rightarrow \infty$, que corresponde ao calibre unitário. Nesse limite, as densidades $\tilde{\rho}_h(t)$ e $\tilde{\rho}_A(t)$ se assemelham qualitativamente às densidades espectrais $\tilde{\rho}_O(t)$ e $\tilde{\rho}_R(t)$, respectivamente, são positivas e os “th-

Figura 47 - Densidades espectrais de $\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}}$.

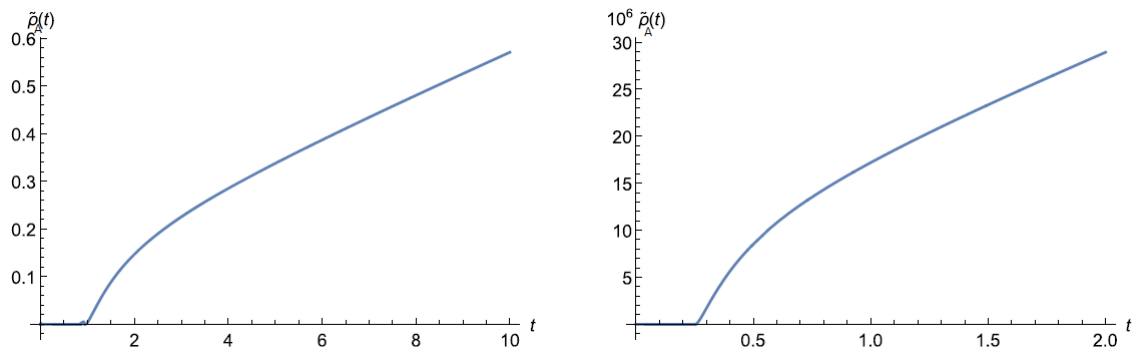


Legenda: Densidades espectrais de $\langle h(p) h(-p) \rangle^{\text{res}}$, $\tilde{\rho}_h(t)$, no calibre unitário, em que t é dado em unidades de μ^2 . Do lado esquerdo temos os parâmetros da Região I, enquanto que, do lado direito temos os parâmetros da Região II, como mostra a Tabela 2.

Fonte: DUDAL, 2021, f. 25.

resholds” são os mesmos. Os gráficos de $\tilde{\rho}_O(t)$ e $\tilde{\rho}_R(t)$ no calibre unitário são mostrados nas Figuras 47 e 48, respectivamente.

Figura 48 - Densidades espectrais de $\langle A(p) A(-p) \rangle^{T, \text{res}}$.



Legenda: Densidades espectrais de $\langle A(p) A(-p) \rangle^{T, \text{res}}$, $\tilde{\rho}_A(t)$, no calibre unitário, em que t é dado em unidades de μ^2 . Do lado esquerdo temos os parâmetros da Região I, enquanto que, do lado direito temos os parâmetros da Região II, como mostra a Tabela 2.

Fonte: DUDAL, 2021, f. 26.

7 IDENTIDADES DE WARD E RENORMALIZAÇÃO DO MODELO DE HIGGS $SU(2)$ NO CALIBRE DE LANDAU COM OS OPERADORES $O(X)$ E $R_\mu^A(X)$

No capítulo anterior foram apresentados os resultados até um 1-loop das funções de Green de 2-pontos dos operadores invariantes de BRST $O(x)$ e $R_\mu^a(x)$ do modelo de Higgs $SU(2)$. Este capítulo é uma continuação do anterior, cujo objetivo principal é estabelecer a renormalização de $O(x)$ e $R_\mu^a(x)$ à todas as ordens perturbativas. Como as funções de correlação desses operadores são independentes do calibre, utilizaremos o calibre de Landau, que, além da simplicidade, preserva a simetria de calibre global. O contratermo local invariante é analisado através do método algébrico descrito por (PIGUET; SORELLA, 1995), que já foi utilizado no caso $U(1)$. Também discutimos um pouco mais a simetria custodial e a sua correspondente identidade de Ward, que com a introdução desses dos operadores compostos $O(x)$ e $R_\mu^a(x)$ passa a ser local. Na Seção 7.1 apresentamos o termo de fixação de calibre. Na Seção 7.2 é estudada a cohomologia do operador de BRST para determinar todos os operadores compostos que estão envolvidos na renormalização dos operadores $O(x)$ e $R_\mu^a(x)$. Na Seção 7.3 discutimos a simetria custodial e sua corrente. As demais simetrias e identidades de Ward da teoria são mostradas na Seção 7.4. Na Seção 7.5 é determinada o contratermo local invariante e a ação “bare” da teoria. Nas últimas duas seções, Seção 7.6 e Seção 7.7, derivamos algumas relações importantes entre as funções de Green com a ajuda das identidades de Ward obtidas com a introdução dos operadores compostos na teoria. Este capítulo está baseado no trabalho (DUDAL et al., 2022).

7.1 Fixador de calibre

Tomando o limite $\xi \rightarrow 0$ em Eq. (438), obtemos o termo de fixação de calibre no calibre de Landau:

$$S_{\text{gf}} = \int d^4x [ib^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b]. \quad (511)$$

Desse modo a ação que consideraremos, por enquanto, é

$$S = S_{\text{Higgs}} + S_{\text{gf}}. \quad (512)$$

Como essa ação é um caso particular da ação (439) no calibre R_ξ , nada é alterado em relação à simetria BRST (440) e a simetria custodial (445). No modelo de Higgs, o calibre de Landau possui a propriedade especial de preservar a simetria de calibre global,

que é quebrada no caso geral $\xi \neq 0$, além disso, temos a tradicional transversalidade do propagador de A_μ^a . Veremos a seguir que o conhecido *teorema de não renormalização do vértice* $\Gamma_{A\bar{c}c}$, que é encontrado em outras teorias com o calibre de Landau, veja por exemplo (TAYLOR, 1971; BLASI; PIGUET; SORELLA, 1991), e tem um papel relevante nos estudos das equações de Schwinger-Dyson, como mostram (ALKOFER; SMEKAL, 2001; BINOSI; PAPAVALASSILOU, 2009; HUBER, 2020), também está presente no modelo de Higgs $SU(2)$ com o campo φ na representação fundamental.

7.2 Cohomologia do operador de BRST

7.2.1 O operador escalar $O(x)$

O operador escalar $O(x)$ possui dimensão dois e é um singleto em relação à simetria custodial, veja a Eq. (468). Procuremos pela solução mais geral possível da equação

$$s\Delta(x) = 0, \quad (513)$$

em que $\Delta(x)$ é um polinômio escalar de dimensão dois, local nos campos $(A_\mu^a, h, \rho^a, b^a, c^a, \bar{c}^a)$ e em v e um singleto em relação à simetria custodial. A solução geral da Eq. (513) é

$$\Delta(x) = b_1 O(x) + b_2 v^2, \quad (514)$$

em que b_1 e b_2 são constantes arbitárias. $O(x)$ e v^2 não são BRST-exatos, ou seja, não existem $\Delta_1(x)$ e $\Delta_2(x)$ tais que $s\Delta_1(x) = O(x)$ ou $s\Delta_2 = v^2$. Note a semelhança entre (514) e o análogo abeliano (303).

7.2.2 O operador vetorial $R_\mu^a(x)$

Como foi feito para o operador $O(x)$, procuremos pelos operadores invariantes de BRST com os mesmos números quânticos de $R_\mu^a(x)$, isto é, pela solução mais geral da equação

$$s\Delta_\mu^a(x) = 0, \quad (515)$$

em que $\Delta_\mu^a(x)$ é um polinômio local nos campos e em v , possui dimensão três, se comporta como um tripleto em relação à simetria custodial e tem número de fantasma zero³⁰. Com um certo esforço algébrico, é possível mostrar que a solução da Eq. (515) é

$$\begin{aligned}\Delta_\mu^a(x) &= c_1 R_\mu^a + s(c_2 \epsilon^{abc} A_\mu^b \bar{c}^c - c_3 i \partial_\mu \bar{c}^a) \\ &= c_1 R_\mu^a + c_2 (-\epsilon^{abc} (D_\mu^{bd} c^d) \bar{c}^c + i \epsilon^{abc} A_\mu^b b^c) + c_3 (\partial_\mu b^a),\end{aligned}\quad (516)$$

em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. O resultado (516) mostra que R_μ^a é o único operador que não é BRST-exato. Como ele também não contém os campos (b^a, c^a, \bar{c}^a) , esse é o único operador de dimensão três invariante de calibre. No caso $SU(2)$ não existe o análogo de $\partial_\nu F_{\nu\mu}$ do modelo abeliano. O candidato seria $D_\nu^{ab} F_{\nu\mu}^b$, mas esse operador não é invariante de BRST, apenas covariante, isto é,

$$s(D_\nu^{ab} F_{\nu\mu}^b) = \epsilon^{abc} (D_\nu^{bd} F_{\nu\mu}^d) c^c, \quad (517)$$

portanto não aparece em (516).

7.3 O operador vetorial R_μ^a como a corrente de Noether da simetria custodial

Nesta seção analisaremos o operador $R_\mu^a(x)$ do ponto de vista da simetria custodial global. Para isso, modifiquemos um pouco a notação e as transformações da simetria custodial da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\delta^c A_\mu^a &= g \epsilon^{abc} \omega^b A_\mu^c, \\ \delta^c h &= 0, \\ \delta^c \rho^a &= g \epsilon^{abc} \omega^b \rho^c, \\ \delta^c c^a &= g \epsilon^{abc} \omega^b c^c, \\ \delta^c \bar{c}^a &= g \epsilon^{abc} \omega^b \bar{c}^c, \\ \delta^c b^a &= g \epsilon^{abc} \omega^b b^c,\end{aligned}\quad (518)$$

em que ω^a é um parâmetro global. Comparando (445) e (518), vemos que a diferença entre elas é apenas a constante g . O significado de (518) é bem claro: todos os campos $(A_\mu^a, \rho^a, c^a, \bar{c}^a, b^a)$ se transformam na representação adjunta de $SU(2)$, enquanto que, o campo de Higgs h é um singleto. A invariância de S , Eq. (512), em relação às trans-

³⁰ Assim como no modelo de Higgs $U(1)$, existe uma número de fantasma, $[\mathcal{N}_g]$, para os campos. $[\mathcal{N}_g] = 1$ para c^a , $[\mathcal{N}_g] = -1$ para \bar{c}^a e $[\mathcal{N}_g] = 0$ para os demais campos.

formações (518),

$$\delta^{\mathcal{C}} S = 0, \quad (519)$$

não é difícil de ser verificada, já que os índices do grupo (a, b, c, \dots) estão perfeitamente contraídos em S . As transformações (518) gozam das seguintes propriedades:

$$[s, \delta^{\mathcal{C}}] = 0, \quad \{s, \dots\} \neq \delta^{\mathcal{C}}, \quad (520)$$

que significam que $\delta^{\mathcal{C}}$ comuta com o operador de BRST s , ao mesmo tempo que não pode ser obtido a partir da anticomutação de s com outro operador. Quando traduzido em termos de correntes de Noether, (520) implica que as correntes associadas a $\delta^{\mathcal{C}}$ pertencem à cohomologia não-trivial do operador s , ou seja, não são BRST-exatos.

A relevância de (520) pode ser compreendida através da comparação com outra simetria. A ação (512) também é invariante frente ao conjunto de transformações globais

$$\begin{aligned} \delta^{\mathcal{R}} A_{\mu}^a &= g\epsilon^{abc}\omega^b A_{\mu}^c, \\ \delta^{\mathcal{R}} h &= \frac{1}{2}g\omega^a \rho^a, \\ \delta^{\mathcal{R}} \rho^a &= \frac{1}{2}g\omega^b (- (v + h) \delta^{ab} + \epsilon^{abc} \rho^c), \\ \delta^{\mathcal{R}} c^a &= g\epsilon^{abc}\omega^b c^c, \\ \delta^{\mathcal{R}} \bar{c}^a &= g\epsilon^{abc}\omega^b \bar{c}^c, \\ \delta^{\mathcal{R}} b^a &= g\epsilon^{abc}\omega^b b^c, \end{aligned} \quad (521)$$

isto é,

$$\delta^{\mathcal{R}} S = 0, \quad (522)$$

que nós chamamos de *simetria* \mathcal{R} . Assim como $\delta^{\mathcal{C}}$, pode ser verificado que

$$[s, \delta^{\mathcal{R}}] = 0, \quad (523)$$

no entanto,

$$\{s, \delta^{\mathcal{G}}\} = \delta^{\mathcal{R}}, \quad (524)$$

em que $\delta^{\mathcal{G}}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\delta^{\mathcal{G}} A_{\mu}^a &= 0, \\
\delta^{\mathcal{G}} h &= 0, \\
\delta^{\mathcal{G}} \rho^a &= 0, \\
\delta^{\mathcal{G}} c^a &= \omega^a, \\
\delta^{\mathcal{G}} \bar{c}^a &= i\epsilon^{abc}\omega^b\bar{c}^c,
\end{aligned} \tag{525}$$

e

$$\delta^{\mathcal{G}} S = 0. \tag{526}$$

Portanto, as correntes de Noether correspondentes à simetria \mathcal{R} são BRST-exatas, ao contrário daquelas associadas a $\delta^{\mathcal{C}}$. Assim sendo, as correntes da simetria \mathcal{R} não estão associadas a nenhuma excitação física.

Vejamos agora quais são as correntes de Noether da simetria custodial. Para essa finalidade, vamos reescrever a Eq. (519) como

$$\int d^4x \mathcal{C}^a(x) S = 0, \tag{527}$$

em que $\mathcal{C}^a(x)$ representa o operador local

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^a(x) &= -g\epsilon^{abc} \left(A_{\mu}^c(x) \frac{\delta}{\delta A_{\mu}^b(x)} + \rho^c(x) \frac{\delta}{\delta \rho^b(x)} + c^c(x) \frac{\delta}{\delta c^b(x)} \right. \\
&\quad \left. + \bar{c}^c(x) \frac{\delta}{\delta \bar{c}^b(x)} + b^c(x) \frac{\delta}{\delta b^b(x)} \right).
\end{aligned} \tag{528}$$

De acordo com o teorema de Noether, que foi discutido na Seção 1.2, a simetria custodial de S implica em

$$\mathcal{C}^a(x) S = \partial_{\mu} (J^{\mathcal{C}})_{\mu}^a(x), \tag{529}$$

em que $(J^{\mathcal{C}})_{\mu}^a(x)$ é uma corrente. Fazendo o cálculo explícito, obtemos que

$$(J^{\mathcal{C}})_{\mu}^a = gR_{\mu}^a - \frac{\delta S}{\delta A_{\mu}^a} - s(D_{\mu}^{ab}\bar{c}^b). \tag{530}$$

A Eq. (530) está mostrando que, a menos de equações de movimento e termos BRST-exatos, os operadores locais R_{μ}^a são as correntes de Noether da simetria custodial. Ressaltamos que a Eq. (530) está em perfeito acordo com a análise feita na Subseção 7.2.2 a respeito da cohomologia de BRST, em que o operador R_{μ}^a pertence à cohomologia de s e não pode ser escrito como um BRST-exato. A seguir será mostrado que as Eqs. (529) e (530) dão origem à uma importante identidade de Ward não integrada.

7.4 Simetrias e Identidades de Ward

7.4.1 Operadores compostos a nível quântico; Identificando a ação completa Σ

Agora, temos todos os elementos principais para começar a análise da renormalização dos operadores compostos $(O(x), R_\mu^a(x))$. Como foi já discutido no Capítulo 1, para calcularmos funções de correlação com inserções desses operadores, devemos introduzi-los na ação de partida acoplados à fontes externas, neste caso $(J(x), \Omega_\mu(x))$. Seguindo o formalismo da Renormalização Algébrica, apresentado em (PIGUET; SORELLA, 1995), na verdade, todos os operadores pertencentes à cohomologia de BRST devem ser introduzidos na teoria através de fontes externas. No caso especial de R_μ^a , temos que tratar de maneira adequada o operador BRST-exato $-\epsilon^{abc} (D_\mu^{bd} c^d) \bar{c}^c + i\epsilon^{abc} A_\mu^b b^c = s(\epsilon^{abc} A_\mu^b \bar{c}^c)$. Introduzindo as fontes $\Upsilon_\mu^a(x)$ e $\zeta_\mu^a(x)$ que formam um dubleto de BRST, isto é,

$$s\Upsilon_\mu^a = \zeta_\mu^a, \quad s\zeta_\mu^a = 0, \quad (531)$$

podemos obter o operador acima acoplado à uma fonte externa através do termo BRST-exato

$$s \left(\int d^4x \Upsilon_\mu^a \epsilon^{abc} A_\mu^b \bar{c}^c \right) = \int d^4x \zeta_\mu^a \epsilon^{abc} A_\mu^b \bar{c}^c + \int d^4x \Upsilon_\mu^a \left(-\epsilon^{abc} (D_\mu^{bd} c^d) \bar{c}^c + i\epsilon^{abc} A_\mu^b b^c \right). \quad (532)$$

Uma das vantagens desse dubleto de fontes é que conseguimos aumentar o número de identidades de Ward da teoria, como veremos a seguir. Em relação ao termo $\partial_\mu b^a = -is(\partial_\mu \bar{c}^a)$, que pertence à mesma cohomologia, como ele é linear no campo, basta introduzi-lo através de apenas uma fonte externa, que neste caso denotaremos por $\Theta_\mu^a(x)$. Assim sendo, o termo com todos os operadores compostos invariantes de BRST que deve ser adicionado à ação S é

$$S_\Delta = \int d^4x \left\{ JO + \eta v^2 + \Omega_\mu^a R_\mu^a + \zeta_\mu^a \epsilon^{abc} A_\mu^b \bar{c}^c + \Upsilon_\mu^a \left(-\epsilon^{abc} (D_\mu^{bd} c^d) \bar{c}^c + i\epsilon^{abc} A_\mu^b b^c \right) + i\Theta_\mu^a \partial_\mu b^a \right\}, \quad (533)$$

em que $(J(x), \eta(x), \Omega_\mu^a(x), \Theta_\mu^a(x))$ são fontes externas invariantes de BRST, ou seja,

$$s\Omega_\mu^a = s\Theta_\mu^a = sJ = s\eta = 0. \quad (534)$$

As transformações (534) junto com (531) garantem a invariância de BRST de S_Δ , isto é,

$$sS_\Delta = 0. \quad (535)$$

Além de S_Δ , devemos adicionar um termo com as transformações de BRST não lineares dos campos $(A_\mu^a, c^a, h, \rho^a)$, que denotaremos por S_s . Com esse propósito, introduziremos as fontes invariantes de BRST (K_μ^a, L^a, H, P^a) ,

$$sK_\mu^a = sL^a = sH = sP^a = 0, \quad (536)$$

assim, podemos escrever

$$S_s = \int d^4x [K_\mu^a (sA_\mu^a) + L^a (sc^a) + H (sh) + P^a (s\rho^a)]. \quad (537)$$

Note que

$$sS_s = 0.$$

Reunindo todos os termos, temos que a ação clássica de partida, Σ , a partir da qual começaremos a análise das identidade de Ward é

$$\Sigma = S + S_s + S_\Delta. \quad (538)$$

Obviamente, como cada termo é invariante de BRST, temos

$$s\Sigma = 0. \quad (539)$$

7.4.2 Identidades de Ward

A ação Σ possui um número significativo de simetrias que resultam nas identidades de Ward listadas abaixo:

(i) Identidade de Slavnov-Taylor,

$$\mathcal{S}(\Sigma) = 0, \quad (540)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Sigma) = \int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta K_\mu^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} + ib^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \bar{c}^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta H} \frac{\delta\Sigma}{\delta h} \right. \\ \left. + \frac{\delta\Sigma}{\delta P^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta \rho^a} + \zeta_\mu^a \frac{\delta\Sigma}{\delta \Upsilon_\mu^a} \right) \end{aligned} \quad (541)$$

é o operador de Slavnov-Taylor. A identidade (540) é consequência da invariância de

BRST da teoria, cujas transformações são

$$\begin{aligned}
sA_\mu^a &= -D_\mu^{ab}c^b, \\
sh &= \frac{g}{2}c^a\rho^a, \\
s\rho^a &= -\frac{g}{2}[c^a(v+h) - \epsilon^{abc}c^b\rho^c], \\
sc^a &= \frac{g}{2}\epsilon^{abc}c^b c^c, \\
s\bar{c}^a &= ib^a, \\
sb^a &= 0, \\
s\Upsilon_\mu^a &= \zeta_\mu^a, \\
s\zeta_\mu^a &= 0, \\
sK_\mu^a &= sL^a = sH = sP^a = 0, \\
s\Omega_\mu^a &= sJ = s\eta = s\Theta_\mu^a = 0;
\end{aligned} \tag{542}$$

(ii) A equação de movimento do campo b^a ,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} = i\partial_\mu A_\mu^a - i\partial_\mu \Theta_\mu^a - i\epsilon^{abc}A_\mu^b \Upsilon_\mu^c, \tag{543}$$

que expressa a condição de calibre de Landau em forma funcional. Note que, do lado direito de (543) existe uma quebra linear nos campos, mas que não será afetada por correções perturbativas, veja o Capítulo 1 (PIGUET; SORELLA, 1995);

(iii) A equação do antighost,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta \bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta K_\mu^a} + \epsilon^{abc}\Upsilon_\mu^b \frac{\delta\Sigma}{\delta K_\mu^c} = \epsilon^{abc}A_\mu^b \zeta_\mu^c. \tag{544}$$

A Eq. (544) também possui uma quebra linear nos campos;

(iv) A equação não integrada do campo fantasma,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} - g\epsilon^{abc}i\bar{c}^b \frac{\delta\Sigma}{\delta b^c} + g\epsilon^{abc}\Upsilon_\mu^b \frac{\delta\Sigma}{\delta \zeta_\mu^c} + g\partial_\mu \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta \zeta_\mu^a} \right) = \Delta_{cl}^a, \tag{545}$$

em que Δ_{cl}^a denota a quebra linear

$$\begin{aligned}
\Delta_{cl}^a &= -\partial^2 \bar{c}^a - D_\mu^{ab}K_\mu^b + g\epsilon^{bac}L^b c^c - g\epsilon^{abc}(\partial_\mu \Theta_\mu^c)\bar{c}^b \\
&\quad - \frac{g}{2}H\rho^a + \frac{g}{2}P^a(v+h) - \frac{g}{2}\epsilon^{bac}P^b\rho^c + \epsilon^{bac}\partial_\mu(\Upsilon_\mu^b \bar{c}^c).
\end{aligned} \tag{546}$$

Vale a pena chamar a atenção para o fato de (545) não ser integrada. Em outros modelos, veja por exemplo (PIGUET; SORELLA, 1995; BLASI; PIGUET; SORELLA, 1991), a identidade do campo fantasma é integrada. No caso que estamos tratando, ela não é integrada graças à presença das fontes externas $(\Upsilon_\mu^a, \zeta_\mu^a)$;

(v) A simetria exata \mathcal{R} ,

$$\mathcal{R}^a(\Sigma) = 0, \quad (547)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^a = & g \left[\epsilon^{abc} A_\mu^b \frac{\delta}{\delta A_\mu^c} + \epsilon^{abc} K_\mu^b \frac{\delta}{\delta K_\mu^c} + \epsilon^{abc} c^b \frac{\delta}{\delta c^c} + \epsilon^{abc} L^b \frac{\delta}{\delta L^c} + \epsilon^{abc} \bar{c}^b \frac{\delta}{\delta \bar{c}^c} + \epsilon^{abc} b^b \frac{\delta}{\delta b^c} \right. \\ & + \frac{1}{2} \rho^a \frac{\delta}{\delta h} + \frac{1}{2} P^a \frac{\delta}{\delta H} + \frac{1}{2} \left(-\delta^{ca} (v + h) + \epsilon^{cab} \rho^b \right) \frac{\delta}{\delta \rho^c} \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(H \delta^{ca} - \epsilon^{abc} P^b \right) \frac{\delta}{\delta P^c} + \epsilon^{abc} \Upsilon_\mu^b \frac{\delta}{\delta \Upsilon_\mu^c} + \epsilon^{abc} \zeta_\mu^b \frac{\delta}{\delta \zeta_\mu^c} \right]; \end{aligned} \quad (548)$$

(vi) A identidade de Ward $c - \bar{c}$,

$$\tau(\Sigma) = 0, \quad (549)$$

em que

$$\tau(\Sigma) = \int d^4x \left\{ c^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^a} - i \frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} + \frac{1}{g} \zeta_\mu^a \frac{\delta \Sigma}{\delta K_\mu^a} - \left(\frac{1}{g} \partial_\mu \Upsilon_\mu^a + i \partial_\mu \Theta_\mu^a \right) \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \right\}; \quad (550)$$

(vii) A equação do campo de Higgs h integrada,

$$\int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta h} - \lambda v \frac{\delta \Sigma}{\delta J} \right) - \frac{\partial \Sigma}{\partial v} = \int d^4x v (J - 2\eta). \quad (551)$$

Note que, (551) também possui um termo de quebra, mas que não depende dos campos;

(viii) A identidade de Ward não integrada associada à simetria custodial,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}^a(\Sigma) = & \frac{1}{4} g v^2 \partial_\mu \Omega_\mu^a + i \epsilon^{bac} \partial_\mu (\Upsilon_\mu^b b^c) \\ & + \epsilon^{bac} \partial_\mu (\zeta_\mu^b \bar{c}^c) - i g \epsilon^{bac} \partial_\mu (b^c \Theta_\mu^b) - i \partial^2 b^a, \end{aligned} \quad (552)$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}^a(\Sigma) = & g \epsilon^{abc} \left(A_\mu^b \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu^c} + \rho^b \frac{\delta \Sigma}{\delta \rho^c} + c^b \frac{\delta \Sigma}{\delta c^c} + \bar{c}^b \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^c} + b^b \frac{\delta \Sigma}{\delta b^c} + K_\mu^b \frac{\delta \Sigma}{\delta K_\mu^c} \right. \\ & + L^b \frac{\delta \Sigma}{\delta L^c} + P^b \frac{\delta \Sigma}{\delta P^c} + \Omega_\mu^b \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu^c} + \Upsilon_\mu^b \frac{\delta \Sigma}{\delta \Upsilon_\mu^c} + \zeta_\mu^b \frac{\delta \Sigma}{\delta \zeta_\mu^c} + \Theta_\mu^b \frac{\delta \Sigma}{\delta \Theta_\mu^c} \Big) \\ & + \partial_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu^a} - g \partial_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu^a} - \frac{1}{2} g \partial_\mu \left(\Omega_\mu^a \frac{\delta \Sigma}{\delta J} \right) + g \partial_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta \Upsilon_\mu^a}. \end{aligned} \quad (553)$$

A Eq. (552) possui do lado direito uma quebra linear nos campos que é uma derivada total, $\partial_\mu(\dots)$. Integrando (553), obtemos o operador

$$\int d^4x \tilde{\mathcal{C}}^a(\Sigma) := \mathcal{C}^a(\Sigma) \quad (554)$$

associado à simetria custodial global, veja a Seção 7.3. Já que o lado direito de (554) é uma derivada total, temos a identidade de Ward integrada

$$\mathcal{C}^a(\Sigma) = 0; \quad (555)$$

(ix) As equações das fontes externas η e Θ_μ^a ,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\eta} = v^2 \quad (556)$$

e

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\Theta_\mu^a} = i\partial_\mu b^a. \quad (557)$$

Essas equações implicam que, a nível quântico, η e Θ_μ^a não devem aparecer no contratermo necessário para renormalizar a teoria;

(x) Equação do número de fantasma,

$$\mathcal{N}_g(\Sigma) = 0, \quad (558)$$

em que,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_g = \int d^4x \left(c^a \frac{\delta}{\delta c^a} - \bar{c}^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} - K_\mu^a \frac{\delta}{\delta K_\mu^a} - 2L^a \frac{\delta}{\delta L^a} \right. \\ \left. - H \frac{\delta}{\delta H} - P^a \frac{\delta}{\delta P^a} + \zeta_\mu^a \frac{\delta}{\delta \zeta_\mu^a} \right). \end{aligned} \quad (559)$$

7.5 Análise algébrica da renormalizabilidade a todas as ordens

7.5.1 Caracterização do contratermo local invariante

De acordo com a contagem de potências, o contratermo local invariante Σ^{ct} , que deve ser adicionado a cada ordem perturbativa, é um polinômio local de dimensão quatro integrado, formado com os campos, fontes e parâmetros massivos da teoria. De acordo com (PIGUET; SORELLA, 1995), a caracterização de Σ^{ct} é feita através da exigência de que a ação “bare” Σ_{bare} , definida como

$$\Sigma + \epsilon\Sigma^{\text{ct}} = \Sigma_{\text{bare}} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (560)$$

satisfaça, até a primeira ordem no parâmetro perturbativo ϵ , as mesmas identidades de Ward da ação a nível árvore Σ . Impondo que Σ_{bare} satisfaça as mesmas identidades de

Ward de Σ , temos o conjunto de equações:

$$\mathcal{S}(\Sigma_{\text{bare}}) = 0, \quad (561)$$

$$\frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta b^a} = i\partial_\mu A_\mu^a - i\partial_\mu \Theta_\mu^a - i\epsilon^{abc} A_\mu^b \Upsilon_\mu^c, \quad (562)$$

$$\frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta \bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta K_\mu^a} + \epsilon^{abc} \Upsilon_\mu^b \frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta K_\mu^c} = \epsilon^{abc} A_\mu^b \zeta_\mu^c, \quad (563)$$

$$\frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta \bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta K_\mu^a} + \epsilon^{abc} \Upsilon_\mu^b \frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta K_\mu^c} = \epsilon^{abc} A_\mu^b \zeta_\mu^c. \quad (564)$$

$$\frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta c^a} - g\epsilon^{abc} i\bar{c}^b \frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta b^c} + g\epsilon^{abc} \Upsilon_\mu^b \frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta \zeta_\mu^c} + g\partial_\mu \left(\frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta \zeta_\mu^a} \right) = \Delta_{cl}^a, \quad (565)$$

$$\mathcal{R}^a(\Sigma_{\text{bare}}) = 0, \quad (566)$$

$$\tau(\Sigma_{\text{bare}}) = 0, \quad (567)$$

$$\int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta h} - \lambda v \frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta J} \right) - \frac{\partial \Sigma_{\text{bare}}}{\partial v} = \int d^4x v (J - 2\eta), \quad (568)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}^a(\Sigma_{\text{bare}}) &= \frac{1}{4} g v^2 \partial_\mu \Omega_\mu^a + i\epsilon^{bac} \partial_\mu (\Upsilon_\mu^b b^c) \\ &\quad + \epsilon^{bac} \partial_\mu (\zeta_\mu^b \bar{c}^c) - ig\epsilon^{bac} \partial_\mu (b^c \Theta_\mu^b) - i\partial^2 b^a, \end{aligned} \quad (569)$$

$$\frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta \eta} = v^2, \quad (570)$$

$$\frac{\delta \Sigma_{\text{bare}}}{\delta \Theta_\mu^a} = i\partial_\mu b^a, \quad (571)$$

$$\mathcal{N}_g(\Sigma_{\text{bare}}) = 0. \quad (572)$$

Da Eq. (560) e das equações da Subseção 7.4.2, resulta então que o contratermo Σ^{ct} deve satisfazer as seguintes equações:

$$\frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta b^a} = 0, \quad (573)$$

$$\frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta \eta} = 0, \quad (574)$$

$$\frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta \Theta_\mu^a} = 0, \quad (575)$$

$$\frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta \bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta K_\mu^a} + \epsilon^{abc} \Upsilon_\mu^b \frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta K_\mu^c} = 0, \quad (576)$$

$$\frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta c^a} - g \epsilon^{abc} i \bar{c}^b \frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta b^c} + g \epsilon^{abc} \Upsilon_\mu^b \frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta \zeta_\mu^c} + g \partial_\mu \left(\frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta \zeta_\mu^a} \right) = 0, \quad (577)$$

$$\int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta h} - \lambda v \frac{\delta \Sigma^{\text{ct}}}{\delta J} \right) - \frac{\partial \Sigma^{\text{ct}}}{\partial v} = 0, \quad (578)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}^a(\Sigma^{\text{ct}}) = 0. \quad (579)$$

Em especial, temos que o contratermo deve ter número de fantasma zero, isto é,

$$\mathcal{N}_g(\Sigma^{\text{ct}}) = 0. \quad (580)$$

Devido à não linearidade do operador de Slavnov-Taylor, temos que

$$\mathcal{S}(\Sigma_{\text{bare}}) = \mathcal{S}(\Sigma) + \epsilon \mathcal{B}_\Sigma(\Sigma^{\text{ct}}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (581)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Sigma = \int d^4x \left\{ \frac{\delta \Sigma}{\delta K_\mu^a} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta}{\delta K_\mu^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} \frac{\delta}{\delta L^a} \right. \\ \left. + i b^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta H} \frac{\delta}{\delta h} + \frac{\delta \Sigma}{\delta h} \frac{\delta}{\delta H} + \frac{\delta \Sigma}{\delta P^a} \frac{\delta}{\delta \rho^a} \right. \\ \left. + \frac{\delta \Sigma}{\delta \rho^a} \frac{\delta}{\delta P^a} + \zeta_\mu^a \frac{\delta}{\delta \Upsilon_\mu^a} \right\} \end{aligned} \quad (582)$$

é o operador de Slavnov-Taylor linearizado. O operador \mathcal{B}_Σ é nilpotente, isto é,

$$\mathcal{B}_\Sigma \mathcal{B}_\Sigma = 0, \quad (583)$$

veja (PIGUET; SORELLA, 1995). Como $\mathcal{S}(\Sigma_{\text{bare}}) = 0$ e $\mathcal{S}(\Sigma) = 0$, então temos a condição

$$\mathcal{B}_\Sigma(\Sigma^{\text{ct}}) = 0, \quad (584)$$

que significa que o contratermo pertence à cohomologia do operador linearizado \mathcal{B}_Σ .

Para encontrarmos a expressão mais geral para Σ^{ct} , comecemos pela condição (584). A propriedade de nilpotência de \mathcal{B}_Σ , Eq. (583), implica que o contratermo se separa em dois termos:

$$\Sigma^{\text{ct}} = \Delta + \mathcal{B}_\Sigma \Delta^{(-1)},$$

em que Δ e $\mathcal{B}_\Sigma \Delta^{(-1)}$ são a cohomologia não-trivial e a cohomologia trivial, respectivamente, do operador \mathcal{B}_Σ . $\Delta^{(-1)}$ é um polinômio local integrado dos campos e fontes com $\mathcal{N}_g = -1$, pois \mathcal{B}_Σ possui o mesmo número de ghost de s , que é $\mathcal{N}_g = 1$. Levando em consideração as Eqs. (573)-(575) e fazendo uso dos resultados gerais a respeito da cohomologia de teorias de calibre não abeliana, que podem ser encontrados em (PIGUET; SORELLA, 1995), obtemos que

$$\begin{aligned} \Delta = \int d^4x \left\{ a_0 \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + a_1 O^2 + a_2 v^2 O + a_3 J O + a_4 J v^2 + a_5 v^4 \right. \\ + a_6 \Omega_\mu^a R_\mu^a + a_7 \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a v^2 + a_8 \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a O + a_9 J^2 + a_{10} J \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a \\ + a_{11} (\partial_\mu \Omega_\mu^a) (\partial_\nu \Omega_\nu^a) + a_{12} \Omega_\mu^a \partial^2 \Omega_\mu^a + a_{13} \epsilon^{abc} \Omega_\mu^a \Omega_\nu^b \partial_\mu \Omega_\nu^c \\ \left. + a_{14} \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a \Omega_\nu^b \Omega_\nu^b + a_{15} \Omega_\mu^a \Omega_\nu^a \Omega_\mu^b \Omega_\nu^b \right\} \end{aligned} \quad (585)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta^{(-1)} = \int d^4x \left[\bar{c}^a (d_1 \partial_\mu A_\mu^a + d_2 \partial_\mu \Omega_\mu^a + d_3 \partial_\mu \Upsilon_\mu^a + d_4 \epsilon^{abc} A_\mu^b \Omega_\mu^c \right. \\ + d_5 \epsilon^{abc} A_\mu^b \Upsilon_\mu^c + d_6 \epsilon^{abc} \Omega_\mu^b \Upsilon_\mu^c + d_7 \epsilon^{abc} \bar{c}^b c^c + d_8 h \rho^a + d_9 v \rho^a) \\ + K_\mu^a (d_{10} A_\mu^a + d_{11} \Omega_\mu^a + d_{12} \Upsilon_\mu^a) \\ \left. + H (d_{13} v + d_{14} h) + d_{15} P^a \rho^a + d_{16} L^a c^a \right], \end{aligned} \quad (586)$$

em que (a_0, \dots, a_{15}) e (d_1, \dots, d_{16}) são parâmetros livres adimensionais.

Impondo as demais restrições, Eqs. (576)-(579), encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\Delta = & \int d^4x \left\{ a_0 \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + a_1 \left(O^2 + \frac{2}{\lambda} JO + \frac{1}{\lambda^2} J^2 - \frac{1}{2\lambda} \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a O \right) \right. \\
& + a_1 \left(-\frac{1}{2\lambda^2} J \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a + \frac{1}{24\lambda^2} \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a \Omega_\nu^b \Omega_\nu^b \right) \\
& + a_2 \left(v^2 O - \frac{2}{\lambda} JO + \frac{1}{\lambda} Jv^2 - \frac{2}{\lambda^2} J^2 - \frac{1}{4\lambda} \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a v^2 \right) \\
& + a_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} J \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a + \frac{1}{2\lambda} \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a O - \frac{1}{8\lambda^2} \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a \Omega_\nu^b \Omega_\nu^b \right) \\
& + a_5 \left(v^4 - \frac{4}{\lambda} Jv^2 + \frac{4}{\lambda^2} J^2 + \frac{1}{\lambda} \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a v^2 \right) \\
& \left. + a_5 \left(-\frac{2}{\lambda^2} J \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a + \frac{1}{4\lambda^2} \Omega_\mu^a \Omega_\mu^a \Omega_\nu^b \Omega_\nu^b \right) - \frac{1}{2} a_{12} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\Omega) \mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\Omega) \right\} \quad (587)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta^{(-1)} = & \int d^4x \left\{ -d_1 (K_\mu^a + \partial_\mu \bar{c}^a + \epsilon^{abc} \Upsilon_\mu^b \bar{c}^c) \left(A_\mu^a - \frac{1}{g} \Upsilon_\mu^a \right) \right. \\
& \left. + d_{13} [H(v+h) + P^a \rho^a] \right\}, \quad (588)
\end{aligned}$$

sendo

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\Omega) = \partial_\mu \Omega_\nu^a - \partial_\nu \Omega_\mu^a - \epsilon^{abc} \Omega_\mu^b \Omega_\nu^c. \quad (589)$$

Vemos que o contratermo local invariante na sua forma final contém sete parâmetros livres, que são: $(a_0, a_1, a_2, a_5, a_{12})$ e (d_1, d_{13}) . Em particular, podemos notar a presença de termos não lineares nas fontes (J, Ω) , que não estão presentes na ação a nível árvore, Σ . Alguns desses termos que aparecem a partir de 1-loop em diante são necessários para renormalizar as funções de Green de 2-pontos $\langle O(x) O(y) \rangle$ e $\langle R_\mu^a(x) R_\nu^b(y) \rangle$, que foram calculadas no Capítulo 6.

Analisando com cuidado Σ^{ct} , vemos que ele se assemelha bastante ao contratermo do modelo abeliano, veja Eq. (342). Aqui também aparece um contratermo BRST invariante responsável por renormalizar os “tadpoles” que começa a partir de 1-loop, que é $a_2 v^2 O$. O parâmetro a_2 é fixado, na maioria das vezes, de tal forma a cancelar os “tadpoles”, ou seja, a garantir que $\langle h \rangle = 0$. Encontramos também o contratermo de vácuo $a_5 v^4$, que é permitido pela contagem de potências e pela dimensionalidade. O parâmetro a_5 pode ser escolhido de modo que o condensado perturbativo de dimensão dois $\langle O \rangle_{\text{pert}}$ se anule ordem a ordem. Combinado a identidade de Ward (551) com as duas condições $\langle h \rangle = 0$ e $\langle O \rangle_{\text{pert}} = 0$, obtemos que a energia do vácuo, \mathcal{E}_v , atinge o seu mínimo em v , ou seja, $\frac{\partial \mathcal{E}_v}{\partial v} = 0$. Voltaremos a discutir esse ponto a seguir, na Seção 7.6.

Em relação a Σ^{ct} , também chama a atenção em (587) o termo $a_{12} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\Omega) \mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\Omega)$. Olhando para a definição de $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\Omega)$ na Eq. (589), notamos a semelhança desse termo

com $F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$. Isso se deve à identidade de Ward local (579) associada à simetria custodial, cujas transformações de A_μ^a e Ω_μ^a são muito parecidas:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^a &= -\partial_\mu \omega^a + g \epsilon^{abc} \omega^b A_\mu^c, \\ \delta \Omega_\mu^a &= g (\partial_\mu \omega^a + \epsilon^{abc} \omega^b \Omega_\mu^c).\end{aligned}\tag{590}$$

7.5.2 Identificando a ação bare e os fatores de renormalização Z

Uma vez identificado o contratermo local invariante necessário para cancelar as divergências que aparecem no modelo de Higgs $SU(2)$ com os operadores compostos $O(x)$ e $R_\mu(x)$, o próximo passo para concluir a renormalização é obtermos a ação bare Σ_{bare} , definida em (560). Levando em consideração os termos não lineares nas fontes externas, que começam a partir de 1-loop, assim como os contratermos invariantes de BRST necessários para renormalizar os “tadpoles” e o condensado $\langle O \rangle_{\text{pert}}$, obtemos que a

ação bare deve ser

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{bare}} = & \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(A_0) F_{\mu\nu}^a(A_0) + \frac{\lambda_0}{2} v_0 h_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} v_0 h_0^3 + \frac{\lambda_0}{2} v_0 h_0 \rho_0^a \rho_0^a \right. \\
& + \frac{1}{8} \lambda_0 h_0^4 + \frac{1}{4} \lambda_0 h_0^2 \rho_0^a \rho_0^a + \frac{1}{8} \lambda_0 (\rho_0^a \rho_0^a)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu h_0)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho_0^a)^2 \\
& + \frac{1}{2} g_0 A_{0\mu}^a \rho_0^a (\partial_\mu h_0) - \frac{1}{2} g_0 (v_0 + h_0) (\partial_\mu \rho_0^a) A_{0\mu}^a + \frac{1}{2} g_0 \epsilon^{abc} A_{0\mu}^a \rho_0^b \partial_\mu \rho_0^c \\
& + \frac{1}{8} g_0^2 A_{0\mu}^a A_{0\mu}^a (v_0 + h_0)^2 + \frac{1}{8} g_0^2 A_{0\mu}^a A_{0\mu}^a \rho_0^a \rho_0^a + i b_0^a \partial_\mu A_{0\mu}^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab}(A_0) c_0^b \\
& - K_{0\mu}^a D_\mu^{ab}(A_0) c_0^b + L_0^a \frac{g_0}{2} \epsilon^{abc} c_0^b c_0^c \\
& + H_0 \frac{g_0}{2} c_0^a \rho_0^a + P_0^a \left(-\frac{g_0}{2} c_0^a (v_0 + h_0) + \frac{g_0}{2} \epsilon^{abc} c_0^b \rho_0^c \right) \\
& + J_0 O_0 + \eta_0 v_0^2 \\
& + \Omega_{0\mu}^a R_{0\mu}^a + \Upsilon_{0\mu}^a (-\epsilon^{abc} (D_\mu^{bd}(A_0) c_0^d) \bar{c}_0^c + i \epsilon^{abc} A_{0\mu}^b b_0^b) \\
& + \zeta_{0\mu}^a \epsilon^{abc} A_{0\mu}^b \bar{c}_0^c + \Theta_{0\mu}^a \partial_\mu b_0^a + \delta \sigma_0 v_0^2 O_0 \\
& + (Z_\lambda - 1) \frac{\lambda_0}{2} \left(\frac{1}{\lambda_0^2} J_0^2 - \frac{1}{2\lambda_0} \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\mu}^a O_0 \right) \\
& + (Z_\lambda - 1) \frac{\lambda_0}{2} \left(-\frac{1}{2\lambda_0^2} J_0 \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\mu}^a + \frac{1}{24\lambda_0^2} \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\nu}^b \Omega_{0\nu}^b \right) \\
& + \left(\delta \sigma_0 - \frac{\lambda_0}{2} (Z_h - 1) \right) \left(-\frac{2}{\lambda_0^2} J_0^2 - \frac{1}{4\lambda_0} \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\mu}^a v_0^2 + \frac{1}{\lambda_0^2} J_0 \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\mu}^a \right) \\
& + \left(\delta \sigma_0 - \frac{\lambda_0}{2} (Z_h - 1) \right) \left(\frac{1}{2\lambda_0} \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\mu}^a O_0 - \frac{1}{8\lambda_0^2} \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\nu}^b \Omega_{0\nu}^b \right) \\
& + \delta a_0 \left(v_0^4 - \frac{4}{\lambda_0} J_0 v_0^2 + \frac{4}{\lambda_0^2} J_0^2 + \frac{1}{\lambda_0} \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\mu}^a v_0^2 \right) \\
& + \delta a_0 \left(-\frac{2}{\lambda_0^2} J_0 \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\mu}^a + \frac{1}{4\lambda_0^2} \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\mu}^a \Omega_{0\nu}^b \Omega_{0\nu}^b \right) \\
& \left. - \delta \theta_0 \mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\Omega_0) \mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\Omega_0) + Z_{A\Upsilon}^{\frac{1}{2}} (-K_{0\mu}^a \zeta_{0\mu}^a - (\partial_\mu \bar{c}_0^a) \zeta_{0\mu}^a - i b_0^a \partial_\mu \Upsilon_{0\mu}^a) \right\}, \quad (591)
\end{aligned}$$

em que o subíndice “0” denota as quantidades bare, enquanto que

$$O_0 := \frac{1}{2} (h_0^2 + 2v_0 h_0 + \rho_0^a \rho_0^a) \quad (592)$$

e

$$\begin{aligned}
R_{0\mu}^a := & -\frac{1}{2} \left[(v_0 + h_0) \partial_\mu \rho_0^a - \rho_0^a \partial_\mu h_0 + \epsilon^{abc} \rho_0^b \partial_\mu \rho_0^c - \frac{g_0}{2} A_{0\mu}^a (v_0 + h_0)^2 \right. \\
& \left. + g_0 \epsilon^{abc} A_{0\mu}^b \rho_0^c (v_0 + h_0) + \frac{g_0}{2} A_{0\mu}^a \rho_0^b \rho_0^b - g_0 A_{0\mu}^b \rho_0^a \rho_0^b \right]. \quad (593)
\end{aligned}$$

As quantidades bare estão relacionadas às quantidades renormalizadas através dos fatores de renormalização da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A_{0\mu}^a &= Z_{AA}^{\frac{1}{2}} A_\mu^a + Z_{A\Upsilon}^{\frac{1}{2}} \Upsilon_\mu^a, & h_0 &= Z_h^{\frac{1}{2}} h, & \rho_0^a &= Z_\rho^{\frac{1}{2}} \rho^a, \\
v_0 &= Z_v^{\frac{1}{2}} v, & c_0^a &= Z_c^{\frac{1}{2}} c^a, & \bar{c}_0^a &= Z_{\bar{c}}^{\frac{1}{2}} \bar{c}^a, & b_0^a &= Z_b^{\frac{1}{2}} b^a, \\
g_0 &= Z_g g, & \lambda_0 &= Z_\lambda \lambda, & K_{0\mu}^a &= Z_K K_\mu^a, & L_0^a &= Z_L L^a, \\
H_0 &= Z_H H, & P_0^a &= Z_P P^a, & \Omega_{0\mu}^a &= Z_\Omega \Omega_\mu^a, & \Upsilon_{0\mu}^a &= Z_\Upsilon \Upsilon_\mu^a, \\
\zeta_{0\mu}^a &= Z_\zeta \zeta_\mu^a, & \Theta_{0\mu}^a &= Z_\Theta \Theta_\mu^a, & J_0 &= Z_{JJ} J + Z_{J\eta} \eta, \\
\delta\sigma_0 &= \epsilon \delta\sigma, & \delta a_0 &= \epsilon \delta a, & \delta\theta_0 &= \epsilon \theta,
\end{aligned} \tag{594}$$

em que ϵ é o parâmetro de expansão. Por exemplo, no caso de uma expansão em loops, em que o contratermo é determinado recursivamente, ordem a ordem, o parâmetro de expansão ϵ não é nada mais do que \hbar^n .

Reescrevendo a ação bare em termos das quantidades renormalizadas e dos fatores de renormalização, definidos pelas equações de (594), obtemos da Eq. (560) que os fatores de renormalização até ordem ϵ são:

$$\begin{aligned}
Z_{AA}^{\frac{1}{2}} &= Z_b^{-\frac{1}{2}} = Z_L = Z_\Theta = 1 + \frac{1}{2}\epsilon(a_0 - 2d_1), \\
Z_g &= 1 - \frac{1}{2}\epsilon a_0, \\
Z_h^{\frac{1}{2}} &= Z_\rho^{\frac{1}{2}} = Z_v^{\frac{1}{2}} = Z_{\eta\eta}^{-\frac{1}{2}} = 1 + \epsilon d_{13}, \\
Z_{A\Upsilon}^{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{g} \left(Z_{AA}^{\frac{1}{2}} + Z_g - 2 \right), \\
Z_\Omega &= 1, \\
Z_\lambda &= 1 + \epsilon a_1, \\
Z_c^{\frac{1}{2}} &= Z_{\bar{c}}^{\frac{1}{2}} = Z_K = 1 + \frac{1}{2}\epsilon d_1 = Z_g^{-\frac{1}{2}} Z_{AA}^{-\frac{1}{2}}, \\
Z_H &= Z_P = Z_g^{-\frac{1}{2}} Z_{AA}^{\frac{1}{2}} Z_h^{-\frac{1}{2}}, \\
Z_\zeta &= Z_g^{\frac{1}{2}} Z_{AA}^{-\frac{1}{2}}, \\
Z_{JJ} &= 1 + \epsilon \left(-2\frac{a_2}{\lambda} + a_1 \right), \\
Z_{J\eta} &= 0, \\
Z_{\eta J} &= \epsilon \left(\frac{a_2}{\lambda} - 4\frac{a_5}{\lambda} + d_{13} \right), \\
\delta\sigma &= a_2 + \lambda d_{13}, \\
\delta\theta &= \frac{a_{12}}{2}, \\
\delta a &= a_5.
\end{aligned} \tag{595}$$

Como já havíamos antecipado, os coeficientes $\{\delta\sigma_0, \delta a_0, \delta\theta_0\}$ assim como $\{Z_{J\eta}, Z_{\eta J}\}$ começam a partir de 1-loop. Em especial, os fatores de renormalização $\{Z_{J\eta}, Z_{\eta J}\}$ dão origem à uma matriz de mistura entre as fontes externas J e η que estão acopladas a O e

v^2 , respectivamente, uma característica que também foi encontrado no modelo de Higgs abeliano, veja o Capítulo 5 ou (ITZYKSON; ZUBER, 1980).

Devido à introdução do operador BRST-exato $s(\epsilon^{abc}A_\mu^b\bar{c}^c)$ acoplado à fonte Υ_μ^a , veja a Eq. (532), a renormalização do campo A_μ^a possui uma mistura com a fonte Υ_μ^a , como mostram as Eqs. (594) e (595). De fato, a fonte Υ_μ^a possui os mesmos número quânticos de A_μ^a , ambos possuem dimensão de massa um, $[\mathcal{N}_g] = 0$ e não são invariantes de BRST. A Eq. (595) mostra que

$$Z_{A\Upsilon}^{\frac{1}{2}} = -\epsilon\frac{d_1}{g}, \quad (596)$$

ou seja, a mistura começa a partir de 1-loop. A existência dessa mistura significa que o campo elementar A_μ^a possui uma superposição não nula com o operador composto $s(\epsilon^{abc}A_\mu^b\bar{c}^c)$, isto é,

$$\langle A_\mu^a(x) [s(\epsilon^{bcd}A_\nu^c\bar{c}^d)(y)] \rangle = -\frac{\delta^2 W}{\delta J_\mu^a(x)\delta\Upsilon_\nu^b(y)}\Big|_{\mathcal{J}=0} \neq 0, \quad (597)$$

em que W é o funcional gerador conexo. O fator de renormalização (596) é necessário para cancelar as divergências de funções de Green como (597). Como Υ_μ^a e ζ_μ^a formam um dubleto de BRST, pelo *Teorema dos Dubletos* que é mostrado por (PIGUET; SORELLA, 1995), essas fontes devem pertencer apenas à parte trivial da cohomologia de BRST. Devido aos resultados bem gerais

$$\langle O(x_1)\dots O(x_n)sQ(y) \rangle = \langle s(O(x_1)\dots O(x_n))Q(y) \rangle = 0, \quad (598)$$

$$\langle R_{\mu_1}^{a_1}(x_1)\dots R_{\mu_n}^{a_n}(x_n)sQ(y) \rangle = \langle s(R_{\mu_1}^{a_1}(x_1)\dots R_{\mu_n}^{a_n}(x_n))Q(y) \rangle = 0, \quad (599)$$

em que $Q(y)$ é uma quantidade local qualquer, temos que o operador $s(\epsilon^{abc}A_\mu^b\bar{c}^c)$ não possui superposição com os operadores $O(x)$ e $R_\mu^a(x)$. Levando em consideração que, após a derivação de W em relação às fontes J ou Ω_μ , todas as fontes são tomadas a zero, o termo de mistura com a fonte Υ_μ^a presente na ação bare não possui nenhuma consequência prática para as funções de correlação de operadores invariantes de BRST.

Terminaremos esta seção mencionando dois resultados importantes, válidos a todas as ordens, que seguem da análise algébrica feita acima:

(i) o teorema de não renormalização para o vértice $\Gamma_{A\bar{c}c}$, expresso pela relação

$$Z_g Z_c Z_{AA}^{\frac{1}{2}} = 1, \quad (600)$$

se generaliza ao caso do modelo de Higgs com o campo escalar φ na representação fundamental. Este teorema possui implicações importantes no estudo das funções de correlação das teorias de calibre não abelianas na região infravermelha. Os trabalhos (ALKO-

FER; SMEKAL, 2001; BINOSI; PAPAVALASSILIOU, 2009; HUBER, 2020) são exemplos da aplicações do teorema de não renormalização no estudo das equações de Schwinger-Dyson.

(ii) como consequência da não renormalização da fonte Ω_μ^a , Eq. (595), ou seja,

$$Z_\Omega = 1, \quad (601)$$

a dimensão anômala de R_μ^a é nula a todas as ordens, isto é,

$$\gamma_R = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\Omega = 0, \quad (602)$$

em que μ representa o parâmetro massivo introduzido na renormalização da teoria. Esse resultado está em perfeito acordo com o fato de R_μ^a ser a corrente de Noether da simetria custodial, como foi discutido na Seção 7.3.

7.6 “Tadpoles”, energia do vácuo e o condensado perturbativo $\langle O \rangle$

Exploremos um pouco das consequências da identidade de Ward (551), que a nível quântico resulta em

$$\int d^4x \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta h} - \lambda v \frac{\delta \Gamma}{\delta J} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \int d^4x v (J - 2\eta), \quad (603)$$

em que Γ é o funcional gerador das funções 1PI. Essa identidade existe apenas porque $O(x)$ foi introduzido na ação desde o início. O modelo de Higgs $U(1)$ no calibre de Landau possui uma identidade análoga, veja a Eq. (324). Tomando todas as fontes externas a zero, de (603) obtemos a equação

$$\frac{\partial \mathcal{E}_v}{\partial v} = \langle h \rangle - 2\lambda v \langle O \rangle, \quad (604)$$

que estabelece uma relação entre a densidade de energia do vácuo \mathcal{E}_v , os “tadpoles” $\langle h \rangle$ e o condensado de dimensão dois $\langle O \rangle$.

Como (603) é uma equação para o gerador funcional Γ , esse resultado deve ser verdade além da teoria de perturbações. A nível perturbativo, como foi discutido na Subseção 7.5.1, temos a liberdade de escolher as condições de renormalização $\langle h \rangle = 0$ e $\langle O \rangle_{\text{pert}} = 0$, em que $\langle O \rangle_{\text{pert}}$ é o condensado perturbativo de $O(x)$. Fazendo isso, o resultado que segue de (604) é que a densidade de energia do vácuo mantém o seu mínimo em v após a renormalização da teoria a cada ordem perturbativa. Caso $O(x)$ condense devido a efeitos não perturbativos, a configuração de mínimo será modificada. Até o momento não podemos afirmar nada a respeito de $\langle O \rangle_{\text{não pert}}$, essa é uma análise que pretendemos fazer futuramente.

7.7 A parte longitudinal da função de 2-pontos $\langle R_\mu^a(x) R_\nu^b(y) \rangle$

Nesta seção discutiremos as consequências da identidade de Ward (552) sobre a parte longitudinal da função conexa de 2-pontos $\langle R_\mu^a(x) R_\nu^b(y) \rangle$. A nível quântico a identidade (552) resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^a(\Gamma) = & \frac{1}{4} g v^2 \partial_\mu \Omega_\mu^a + i \epsilon^{bac} \partial_\mu (\Upsilon_\mu^b b^c) \\ & + \epsilon^{bac} \partial_\mu (\zeta_\mu^b \bar{c}^c) - i g \epsilon^{bac} \partial_\mu (b^c \Theta_\mu^b) - i \partial^2 b^a. \end{aligned} \quad (605)$$

Passando para o funcional conexo, W , através da transformada de Legendre

$$\Gamma = W - \sum_\phi \int d^4x J^\phi \phi, \quad (606)$$

a identidade (605) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & -g \epsilon^{mnp} \left((J^A)_\alpha^p \frac{\delta W}{\delta (J^A)_\alpha^m} + (J^\rho)^p \frac{\delta W}{\delta (J^\rho)^m} + (J^c)^p \frac{\delta W}{\delta (J^c)^m} \right. \\ & + (J^{\bar{c}})^p \frac{\delta W}{\delta (J^{\bar{c}})^m} + (J^b)^p \frac{\delta W}{\delta (J^b)^m} - K_\alpha^p \frac{\delta W}{\delta K_\alpha^m} - L^p \frac{\delta W}{\delta L^m} \\ & \left. - P^p \frac{\delta W}{\delta P^m} - \Omega_\alpha^p \frac{\delta W}{\delta \Omega_\alpha^m} - \Upsilon_\alpha^p \frac{\delta W}{\delta \Upsilon_\alpha^m} - \zeta_\alpha^p \frac{\delta W}{\delta \zeta_\alpha^m} - \Theta_\alpha^p \frac{\delta W}{\delta \Theta_\alpha^m} \right) \\ & - \partial_\alpha (J^A)_\alpha^n - g \partial_\alpha \frac{\delta W}{\delta \Omega_\alpha^n} - \frac{1}{2} g \partial_\alpha \left(\Omega_\alpha^n \frac{\delta W}{\delta J} \right) + g \partial_\alpha \frac{\delta W}{\delta \Upsilon_\alpha^n} \\ = & \frac{1}{4} g v^2 \partial_\alpha \Omega_\alpha^n + i \epsilon^{mnp} \partial_\alpha \left(\Upsilon_\alpha^m \frac{\delta W}{\delta (J^b)^p} \right) + \epsilon^{mnp} \partial_\alpha \left(\zeta_\alpha^m \frac{\delta W}{\delta (J^{\bar{c}})^p} \right) \\ & - g \epsilon^{mnp} \partial_\alpha \left(\Theta_\alpha^m \frac{\delta W}{\delta (J^b)^p} \right) - i \partial^2 \frac{\delta W}{\delta (J^b)^n}, \end{aligned} \quad (607)$$

em que $(J^A)_\mu^a$, $(J^\rho)^a$, $(J^c)^a$, $(J^{\bar{c}})^a$ e $(J^b)^a$ são as fontes dos campos A_μ^a , ρ^a , c^a , \bar{c}^a e b^a , respectivamente. Atuando com $\delta/\delta \Omega_\beta^l$ em (607) e tomando todas as fontes a zero, obtemos

$$\begin{aligned} & g \partial_\alpha^x \langle R_\beta^l(y) R_\alpha^n(x) \rangle - \frac{1}{2} g \delta^{nl} \partial_\beta^x \left(\delta^4(x-y) \langle O \rangle_{\text{pert}} \right) \\ & = \frac{1}{4} g v^2 \delta^{nl} \partial_\beta^x \delta^4(x-y) + i (\partial^2)^x \langle R_\beta^l(y) b^n(x) \rangle. \end{aligned} \quad (608)$$

Esse resultando pode ainda ser simplificado, já que:

(i) $\langle R_\beta^l(y) b^n(x) \rangle = -i \langle s [R_\beta^l(y) \bar{c}^n(x)] \rangle = 0$, devido à simetria de BRST da teoria,

(ii) como foi discutido na Subseção 7.5.1, é possível ajustar o contratermo $a_5 v^4$ de tal forma que $\langle O \rangle_{\text{pert}}$ se anule ordem a ordem: $\langle O \rangle_{\text{pert}} = 0$.

Como consequência disso, deriva o importante resultado

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^x \langle R_\beta^l(y) R_\alpha^n(x) \rangle &= \frac{1}{4} v^2 \delta^{nl} \partial_\alpha^x \delta^4(x-y) \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{\alpha\beta} \langle R_\beta^l(y) R_\alpha^n(x) \rangle &= \frac{1}{4} v^2 \delta^{nl} \delta^4(x-y). \end{aligned} \quad (609)$$

A Eq. (609) estabelece que a parte longitudinal de $\langle R_\mu^a(x) R_\nu^b(x) \rangle$ não recebe correções quânticas ao seu resultado a nível árvore, o que significa também que é independente do momento externo. Isso quer dizer que a componente longitudinal do operador $R_\mu^a(x)$ não está associada a nenhuma partícula física. Apenas a parte transversal de $R_\mu^a(x)$ é relevante fisicamente.

CONCLUSÕES

Como mostram as análises feitas até 1-loop nos Capítulos 3 e 6, as funções de Green dependentes do calibre podem não gozar das propriedades mencionadas na literatura tradicional, como (PESKIN; SCHROEDER, 1995; WEINBERG, 1995). Esse não é um fato novo a respeito das teorias de calibre, veja por exemplo (STROCCHI, 2013). Nos modelos que estudamos isso nos foi mostrado através das densidades espectrais, que para certos valores do parâmetro de calibre apresentam violação de positividade. Por causa de fatos como esse, alguns autores costumam chamar as funções de Green dependentes do calibre de *não físicas*. Denominá-las dessa forma não é um erro, mas, ao menos perturbativamente, isso não significa uma desqualificação grave. Veja os exemplos da QED, do setor eletrofraco do Modelo Padrão e até mesmo da QCD a altas energias. Mesmo sendo definidas através de um conjunto de funções de Green dependentes do calibre, todas essas teorias conseguem fazer previsões físicas acertadas a respeito da fenomenologia que se propõem a descrever. Isso acontece porque, com grande esforço, desde (GUPTA, 1950; BLEULER, 1950) até (BECCHI; ROUET; STORA, 1974) e (KUGO; OJIMA, 1978), entendemos os mecanismos que fazem com que perturbativamente, por exemplo, a matriz S de uma teoria de calibre seja unitária e independente do calibre.

Fazemos questão sempre de destacar e lembrar que conhecemos bastante bem apenas as teorias de calibre perturbativas. Fora do regime perturbativo, que nas teoria de calibre não abelianas com liberdade assintótica, como a QCD, corresponde ao regime de baixas energias, a situação é bem diferente. Esse assunto se relaciona com o tema desta tese, pois é sabido que os modelos de Higgs não abelianos também podem apresentar liberdade assintótica, veja o trabalho de (GROSS; WILCZEK, 1973), e uma fase confinante, veja (FRADKIN; SHENKER, 1979). Em relação ao regime não perturbativo, não precisamos mencionar o problema extremamente difícil da existência ou não de uma teoria de campos interagentes no contínuo em quatro dimensões. Podemos falar de problemas mais concretos que surgem nas regiões onde a teoria de perturbações não faz mais sentido, como a da fixação do calibre, que já mencionamos na Introdução. O método de fixação do calibre de Faddeev-Popov em teoria de calibre não abelianas sofre com o problema das cópias de Gribov. Esse problema é mais relevante à medida que nos afastamos da região perturbativa, pois o termo do operador de Faddeev-Popov responsável pela existência de cópias depende da constante de acoplamento, veja as discussões de (GRIBOV, 1978; ZWANZIGER, 1989a; CAPRI et al., 2013).

Existem várias abordagens que tentam extrair informações não perturbativas a respeito das teorias de calibre não abelianas, como as Equações de Schwinger-Dyson (SDE), as simulações numéricas na rede, a teoria RGZ, o Grupo de Renormalização Funcional, etc. No caso das teorias de Yang-Mills puras, é possível observar uma certa convergência

entre essas várias abordagens, vide o exemplo do propagador do glúon no calibre de Landau, que na rede (CUCCHIERI; MENDES, 2007), na RGZ (DUDAL et al., 2008) e nas SDE (BOUCAUD et al., 2008; AGUILAR; BINOSI; PAPAVALASSILIOU, 2008) apresenta o mesmo comportamento na região infravermelha.

Como já foi mencionado, as teorias de calibre formuladas na rede não necessitam da fixação de calibre, então para que seja possível fazer a comparação entre a rede e uma abordagem no contínuo, o calibre deve ser fixado também na rede. No caso do modelo de Higgs, poderíamos entender a fixação de calibre como bem vinda, uma vez que, para que haja a quebra espontânea de simetria, de acordo com o teorema de Elitzur, essa é uma necessidade. No entanto, como discutido nos trabalhos de (CAUDY; GREENSITE, 2008; GREENSITE; LUCINI, 2008) a respeito do modelo de Higgs $SU(2)$ na rede, se fixarmos o calibre e tentarmos extrair, por exemplo, um diagrama de fases que mostra as regiões dos parâmetros onde temos uma fase tipo QCD (confinante) ou uma fase tipo Higgs (não confinante), esse diagrama dependerá da escolha do calibre. Em virtude de situações como essa, tem ganhado força na rede a abordagem invariante de calibre de FMS, veja (MAAS, 2019) e as referências contidas nele.

Com este estudo que fizemos a respeito do modelos de Higgs $U(1)$ e, principalmente, do modelo de Higgs $SU(2)$ acreditamos ter desenvolvido um conjunto de ferramentas fundamentais para o estudo das regiões não perturbativas do modelo de Higgs. Os operadores invariantes de BRST $O(x)$ e $R_\mu^a(x)$ também são invariantes de calibre, o que os torna fortes candidatos a serem estudados na rede também (MAAS, 2019). Talvez, com a introdução de elementos não-perturbativos, como aqueles da teoria RGZ invariante de BRST (CAPRI et al., 2015; CAPRI et al., 2018), seja possível fazer uma conexão com as previsões de Fradkin e Shenker na rede (FRADKIN; SHENKER, 1979).

O passo natural que pode ser dado em direção ao Modelo Padrão é o estudo do modelo de Higgs $SU(2) \times U(1)$. Esse um projeto que já iniciamos, até o momento, conseguimos caracterizar um conjunto de operadores invariantes de calibre que descrevem cada partícula do espectro do modelo. Alguns desses operadores não são locais, por isso temos que introduzir na teoria o campo auxiliar de Stueckelberg para localizá-los. Assim como em outros grupos não abelianos diferentes do grupo $SU(2)$ que possui a simetria custodial, no caso $SU(2) \times U(1)$ temos que trabalhar com um conjunto menor de simetrias, o que torna o estudo mais desafiador do ponto de vista da renormalização.

REFERÊNCIAS

- AGUILAR, A. C.; BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 78, p. 025010, 2008.
- AITCHISON, I. J. R.; FRASER, C. M. Gauge Invariance and the Effective Potential. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 156, p. 1, 1984.
- ALKOFER, R.; SMEKAL, L. von. The Infrared behavior of QCD Green's functions: Confinement dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 353, p. 281, 2001.
- ANDREASSEN, A.; FROST, W.; SCHWARTZ, M. D. Consistent Use of the Standard Model Effective Potential. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 113, n. 24, p. 241801, 2014.
- ANDREASSEN, A.; FROST, W.; SCHWARTZ, M. D. Consistent Use of Effective Potentials. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 91, n. 1, p. 016009, 2015.
- BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. The abelian higgs kibble model, unitarity of the s-operator. *Physics Letters B*, [s.l.], v. 52, n. 3, p. 344–346, 1974. ISSN 0370-2693.
- BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble Model. *Commun. Math. Phys.*, [s.l.], v. 42, p. 127–162, 1975.
- BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. Renormalization of Gauge Theories. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 98, p. 287–321, 1976.
- BERGERE, M. C.; LAM, Y.-M. P. Equivalence Theorem and Faddeev-Popov Ghosts. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 13, p. 3247–3255, 1976.
- BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Pinch Technique: Theory and Applications. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 479, p. 1–152, 2009.
- BLASI, A. et al. Renormalizability of nonrenormalizable field theories. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 59, p. 121701, 1999.
- BLASI, A.; PIGUET, O.; SORELLA, S. P. Landau gauge and finiteness. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 356, p. 154–162, 1991.
- BLEULER, K. A New method of treatment of the longitudinal and scalar photons. *Helv. Phys. Acta*, [s.l.], v. 23, p. 567–586, 1950.
- BOER, J. de et al. On the renormalizability and unitarity of the Curci-Ferrari model for massive vector bosons. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 367, p. 175–182, 1996.
- BOUCAUD, P. et al. On the IR behaviour of the Landau-gauge ghost propagator. *JHEP*, [s.l.], v. 06, p. 099, 2008.
- BOWMAN, P. O. et al. Scaling behavior and positivity violation of the gluon propagator in full QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 76, p. 094505, 2007.

- BRECKENRIDGE, J. C.; LAVELLE, M. J.; STEELE, T. G. The Nielsen identities for the two point functions of QED and QCD. *Z. Phys. C*, [s.l.], v. 65, p. 155–164, 1995.
- CAPRI, M. A. L. et al. Exact nilpotent nonperturbative BRST symmetry for the Gribov-Zwanziger action in the linear covariant gauge. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 92, n. 4, p. 045039, 2015.
- CAPRI, M. A. L. et al. An all-order proof of the equivalence between Gribov’s no-pole and Zwanziger’s horizon conditions. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 719, p. 448–453, 2013.
- CAPRI, M. A. L. et al. The universal character of Zwanziger’s horizon function in Euclidean Yang–Mills theories. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 781, p. 48–54, 2018.
- CAPRI, M. A. L. et al. Study of the renormalization of BRST invariant local composite operators in the $U(1)$ Higgs model. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 102, n. 3, p. 033003, 2020.
- CAUDY, W.; GREENSITE, J. On the ambiguity of spontaneously broken gauge symmetry. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 78, p. 025018, 2008.
- CLARK, T. The abelian higgs model in the landau gauge. *Nuclear Physics B*, [s.l.], v. 90, p. 484–500, 1975. ISSN 0550-3213.
- COLLINS, J. C. *Renormalization: An Introduction to Renormalization, The Renormalization Group, and the Operator Product Expansion*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. v. 26. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, v. 26). ISBN 978-0-521-31177-9, 978-0-511-86739-2.
- COLLINS, P. D. B. *An Introduction to Regge Theory and High-Energy Physics*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2009. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-11035-8.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. What’s up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices. *PoS*, [s.l.], LATTICE2007, p. 297, 2007.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; TAURINES, A. R. Positivity violation for the lattice Landau gluon propagator. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 71, p. 051902, 2005.
- CURCI, G.; FERRARI, R. Slavnov Transformations and Supersymmetry. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 63, p. 91–94, 1976.
- DELDUC, F. et al. Note on constrained cohomology. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 385, p. 132–138, 1996.
- DEWITT, B. S. Quantum Theory of Gravity. 2. The Manifestly Covariant Theory. *Phys. Rev.*, [s.l.], v. 162, p. 1195–1239, 1967.
- DUDAL, D. et al. Some remarks on the spectral functions of the Abelian Higgs Model. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 100, n. 6, p. 065009, 2019.

- DUDAL, D. et al. Gauge-invariant spectral description of the $U(1)$ Higgs model from local composite operators. *JHEP*, [s.l.], v. 02, p. 188, 2020.
- DUDAL, D. et al. Gauge invariant operators in the $SU(2)$ Higgs model: Ward identities and renormalization. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 105, n. 6, p. 065018, 2022.
- DUDAL, D. et al. A Refinement of the Gribov-Zwanziger approach in the Landau gauge: Infrared propagators in harmony with the lattice results. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 78, p. 065047, 2008.
- DUDAL, D.; PERUZZO, G.; SORELLA, S. P. The Abelian Higgs model under a gauge invariant looking glass: exploiting new Ward identities for gauge invariant operators and the Equivalence Theorem. *JHEP*, [s.l.], v. 10, p. 039, 2021a.
- DUDAL, D. et al. Spectral properties of local gauge invariant composite operators in the $SU(2)$ Yang–Mills–Higgs model. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v.81, n. 3, p. 222, 2021b.
- DUDAL, D. et al. A purely algebraic construction of a gauge and renormalization group invariant scalar glueball operator. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 64, n. 1, sep 2009.
- ELITZUR, S. Impossibility of Spontaneously Breaking Local Symmetries. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 12, p. 3978–3982, 1975.
- ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 13, p. 321–323, 1964.
- FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 25, p. 29–30, 1967.
- FEYNMAN, R. P. Quantum theory of gravitation. *Acta Phys. Polon.*, [s.l.], v. 24, p. 697–722, 1963.
- FRADKIN, E. H.; SHENKER, S. H. Phase Diagrams of Lattice Gauge Theories with Higgs Fields. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 19, p. 3682–3697, 1979.
- FROHLICH, J.; MORCHIO, G.; STROCCHI, F. Higgs phenomenon without a symmetry breaking order parameter. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 97, p. 249–252, 1980.
- FROHLICH, J.; MORCHIO, G.; STROCCHI, F. Higgs phenomenon without symmetry breaking order parameter. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 190, p. 553–582, 1981.
- GAMBINO, P.; GRASSI, P. A. The Nielsen identities of the SM and the definition of mass. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 62, p. 076002, 2000.
- GREENSITE, J.; LUCINI, B. Is Confinement a Phase of Broken Dual Gauge Symmetry? *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 78, p. 085004, 2008.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field quantization*. [S.l.: s.n.], 1996.
- GRIBOV, V. N. Quantization of Nonabelian Gauge Theories. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 139, p. 1, 1978.

- GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Asymptotically Free Gauge Theories - I. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 8, p. 3633–3652, 1973.
- GUPTA, S. N. Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics. *Proc. Phys. Soc. A*, [s.l.], v. 63, p. 681–691, 1950.
- HAAG, R. Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions. *Phys. Rev.*, [s.l.], v. 112, p. 669–673, 1958.
- HATFIELD, B. *Quantum field theory of point particles and strings*. [S.l.: s.n.], 1992.
- HAUSSLING, R.; KRAUS, E. Gauge parameter dependence and gauge invariance in the Abelian Higgs model. *Z. Phys. C*, [s.l.], v. 75, p. 739–750, 1997.
- HIGGS, P. W. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 13, p. 508–509, 1964.
- HOOFT, G. 't. Renormalization of Massless Yang-Mills Fields. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 33, p. 173–199, 1971a.
- HOOFT, G. 't. Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 35, p. 167–188, 1971b.
- HUBER, M. Q. Nonperturbative properties of Yang–Mills theories. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 879, p. 1–92, 2020.
- ITZYKSON, C. et al. *Recent developments in gauge theories*. [S.l.]: Springer, 1980.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J. B. *Quantum Field Theory*. New York: McGraw-Hill, 1980. (International Series In Pure and Applied Physics). ISBN 978-0-486-44568-7.
- JOGLEKAR, S. D.; LEE, B. W. General Theory of Renormalization of Gauge Invariant Operators. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 97, p. 160, 1976.
- KAMEFUCHI, S.; O'RAIFEARTAIGH, L.; SALAM, A. Change of variables and equivalence theorems in quantum field theories. *Nucl. Phys.*, [s.l.], v. 28, p. 529–549, 1961.
- KLUBERG-STERN, H.; ZUBER, J. B. Ward Identities and Some Clues to the Renormalization of Gauge Invariant Operators. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 12, p. 467–481, 1975.
- KRAUS, E.; SIBOLD, K. Rigid invariance as derived from BRS invariance: The Abelian Higgs model. *Z. Phys. C*, [s.l.], v. 68, p. 331–344, 1995.
- KUGO, T.; OJIMA, I. Manifestly Covariant Canonical Formulation of Yang-Mills Field Theories: Physical State Subsidiary Conditions and Physical S Matrix Unitarity. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 73, p. 459–462, 1978.
- KUGO, T.; OJIMA, I. Local Covariant Operator Formalism of Nonabelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, [s.l.], v. 66, p. 1–130, 1979.

- LAM, Y.-M. P. Equivalence theorem on Bogolyubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann renormalized Lagrangian field theories. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 7, p. 2943–2949, 1973.
- LAUTRUP, B. Canonical quantum electrodynamics in covariant gauges. [s.l.], 1967.
- MAAS, A. (Non-)Aligned gauges and global gauge symmetry breaking. *Mod. Phys. Lett. A*, [s.l.], v. 27, p. 1250222, 2012.
- MAAS, A. Brout-Englert-Higgs physics: From foundations to phenomenology. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, [s.l.], v. 106, p. 132–209, 2019.
- MAAS, A.; SONDENHEIMER, R. Gauge-invariant description of the Higgs resonance and its phenomenological implications. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 102, p. 113001, 2020.
- NAKANISHI, N. Covariant Quantization of the Electromagnetic Field in the Landau Gauge. *Prog. Theor. Phys.*, [s.l.], v. 35, p. 1111–1116, 1966.
- NIELSEN, N. K. On the Gauge Dependence of Spontaneous Symmetry Breaking in Gauge Theories. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 101, p. 173–188, 1975.
- OJIMA, I. Comments on Massive and Massless Yang-Mills Lagrangians With a Quartic Coupling of Faddeev-popov Ghosts. *Z. Phys. C*, [s.l.], v. 13, p. 173, 1982.
- OUVRY, S.; STORA, R.; BAAL, P. van. On the Algebraic Characterization of Witten's Topological Yang-Mills Theory. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 220, p. 159–163, 1989.
- PASSARINO, G.; VELTMAN, M. J. G. One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 160, p. 151–207, 1979.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Westview Press, 1995. Reading: Addison-Wesley, 1995.
- PIGUET, O.; SIBOLD, K. Gauge Independence in Ordinary Yang-Mills Theories. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 253, p. 517–540, 1985.
- PIGUET, O.; SORELLA, S. P. *Algebraic renormalization : perturbative renormalization, symmetries and anomalies*. Berlin ;; Springer-Verlag, 1995. (Lecture notes in physics. New series m, Monographs ; m28). ISBN 354059115X.
- POKORSKI, S. *Gauge field theories*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 978-0-511-03780-1, 978-0-521-47816-8.
- RAMOND, P. *Field theory. A modern primer*. [S.l.: s.n.], 1981. v. 51.
- RYDER, L. *Quantum Field Theory*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- SHIFMAN, M. *Advanced topics in quantum field theory.: A lecture course*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2012. ISBN 978-1-139-21036-2, 978-0-521-19084-8.
- SINGER, I. M. Some Remarks on the Gribov Ambiguity. *Commun. Math. Phys.*, [s.l.], v. 60, p. 7–12, 1978.
- SLAVNOV, A. A. Ward Identities in Gauge Theories. *Theor. Math. Phys.*, [s.l.], v. 10, p. 99–107, 1972.

STORA, R. Exercises in equivariant cohomology and topological theories. In: *Conference on the Mathematical Beauty of Physics (In Memory of C. Itzykson) CONFERENCE ON THE MATHEMATICAL BEAUTY OF PHYSICS IN MEMORY OF C. ITZYKSON*. [S.l.]: [s.l.], 1996. p. 51–66.

STRAUSS, S.; FISCHER, C. S.; KELLERMANN, C. Analytic structure of the Landau gauge gluon propagator. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 109, p. 252001, 2012.

STROCCHI, F. *An introduction to non-perturbative foundations of quantum field theory*. [S.l.: s.n.], 2013. v. 158. ISBN 978-0-19-967157-1.

TAYLOR, J. C. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 33, p. 436–444, 1971.

WEINBERG, S. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. ISBN 978-0-521-67053-1, 978-0-511-25204-4.

WEINBERG, S. *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. ISBN 978-1-139-63247-8, 978-0-521-67054-8, 978-0-521-55002-4.

ZWANZIGER, D. Action From the Gribov Horizon. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 321, p. 591–604, 1989.

ZWANZIGER, D. Local and Renormalizable Action From the Gribov Horizon. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 323, p. 513–544, 1989.

APÊNDICE A – Regras de Feynman do modelo de Higgs $U(1)$

A ação do modelo de Higgs $U(1)$ no calibre R_ξ com os operadores compostos $O(x)$ e $V_\mu(x)$ é

$$\begin{aligned}
S &= S_{\text{Higgs}} + S_{\text{gf}}^\xi + \int d^4x (J(x) O(x) + \Omega_\mu(x) V_\mu(x)) \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial_\mu \rho \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A_\mu + e v A_\mu \partial_\mu \rho + \frac{1}{2} \lambda v^2 h^2 \\
&\quad - e A_\mu \rho \partial_\mu h + e A_\mu h \partial_\mu \rho + e^2 v h A_\mu A_\mu + \frac{1}{2} e^2 \rho^2 A_\mu A_\mu + \frac{1}{2} e^2 h^2 A_\mu A_\mu \\
&\quad + \frac{1}{8} \lambda h^4 + \frac{1}{8} \lambda \rho^4 + \frac{1}{2} \lambda v h^3 + \frac{1}{2} \lambda v h \rho^2 + \frac{1}{4} \lambda h^2 \rho^2 \\
&\quad + \frac{\xi}{2} b^2 + i b (\partial_\mu A_\mu + \xi m \rho) - \bar{c} (-\partial^2 c + \xi m e c (v + h)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \Omega_\mu [-\rho \partial_\mu h + (v + h) \partial_\mu \rho + e A_\mu (v^2 + 2v h + h^2 + \rho^2)] \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} J (h^2 + 2v h + \rho^2) \right\}. \tag{610}
\end{aligned}$$

Lembrando que $J(x)$ e $\Omega_\mu(x)$ são as fontes externas necessárias para introduzir os operadores compostos $O(x)$ e $V_\mu(x)$.

A.1 Propagadores

A parte quadrática nos campos e sem fontes externas da ação (610) é

$$\begin{aligned}
S_{\text{quad}} &= \int d^d x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A_\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\mu h + \frac{m_h^2}{2} h^2 \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial_\mu \rho + m A_\mu \partial_\mu \rho \\
&\quad \left. + \xi \frac{b^2}{2} + i b (\partial_\mu A_\mu + \xi m \rho) - \bar{c} (\partial^2 c - \xi m^2 c) \right\} \\
&= \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_\mu & b & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{\mu\nu} (-\partial^2 + m^2) + \partial_\mu \partial_\nu & -i \partial_\mu & m \partial_\mu \\ & i \partial_\nu & \xi \\ & -m \partial_\nu & i \xi m & -\partial^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu \\ b \\ \rho \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\mu h + \frac{m_h^2}{2} h^2 - \bar{c} (\partial^2 c - \xi m^2 c) \right\}. \tag{611}
\end{aligned}$$

Como o campo de Higgs e os campos fantasmas estão desacoplados dos demais campos, de imediato, temos que o propagador do campo de Higgs e o propagador dos campos

fantasmas no espaço dos momentos são:

$$\begin{aligned}\langle h(p) h(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2 + m_h^2}, \\ \langle \bar{c}(p) c(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2 + \xi m^2}.\end{aligned}\quad (612)$$

É conveniente trabalharmos com todos os campos com a mesma dimensão de massa, por isso redefinimos o campo de Nakanishi-Lautrup como sendo $b(x) = \beta \bar{b}(x)$, em que β e $\bar{b}(x)$ possuem dimensão de massa igual a um. Assim, os campos (A_μ, ρ, \bar{b}) possuem todos a mesma dimensão de massa. Como (611) não contém β , os propagadores dos campos (A_μ, ρ, b) também não devem conter esse parâmetro. Os propagadores de (A_μ, ρ, \bar{b}) são dados pela inversa da matriz

$$M(x-y) = \begin{bmatrix} \delta_{\mu\nu}(-\partial^2 + m^2) + \partial_\mu \partial_\nu & -i\beta \partial_\mu & m \partial_\mu \\ i\beta \partial_\nu & \xi \beta^2 & i\xi \beta m \\ -m \partial_\nu & i\xi \beta m & -\partial^2 \end{bmatrix} \delta^d(x-y). \quad (613)$$

Passando (613) para o espaço dos momentos, via transformada de Fourier, obtemos

$$\widetilde{M}(p) = \begin{bmatrix} (p^2 + m^2) \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + m^2 \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) & -\beta p_\mu & -i m p_\mu \\ \beta p_\nu & \beta^2 \xi & i\xi \beta m \\ i m p_\nu & i\xi \beta m & p^2 \end{bmatrix}, \quad (614)$$

em que $(2\pi)^d \delta(p+q) \widetilde{M}(p) = \int d^d x e^{i(p \cdot x + q \cdot y)} M(x-y)$. Todos os elementos de $\widetilde{M}(p)$ possuem dimensão de massa igual a dois, essa é uma das consequências a redefinição do campo $b(x)$, feita anteriormente, com a introdução do parâmetro β . A inversa de $\widetilde{M}(p)$, $\widetilde{M}^{-1}(p)$, já pode ser escrita levando-se em consideração a simetria de Lorentz da teoria, ou seja, já podemos escrever os elementos de $\widetilde{M}^{-1}(p)$ com a sua estrutura tensorial:

$$\widetilde{M}^{-1}(p) = \begin{bmatrix} A(p^2) \mathcal{P}_{\nu\lambda}(p) + B(p^2) \mathcal{L}_{\nu\lambda}(p) & C(p^2) p_\nu & D(p^2) p_\nu \\ E(p^2) p_\lambda & F(p^2) & G(p^2) \\ H(p^2) p_\lambda & I(p^2) & J(p^2) \end{bmatrix}. \quad (615)$$

Multiplicando $\widetilde{M}^{-1}(p)$ por $\widetilde{M}(p)$, devemos obter a matriz identidade I , que neste caso é

$$I = \begin{bmatrix} \delta_{\mu\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (616)$$

Fazendo essa multiplicação, obtemos

$$A(p^2) = \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (617)$$

e um sistema de equações algébricas, que pode ser escrito em notação matricial como sendo

$$\begin{bmatrix} m^2 & -\beta & -im \\ p^2\beta & \beta^2\xi & i\xi\beta m \\ ip^2m\beta & i\xi\beta m & (p^2 + \xi m^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(p^2) & C(p^2) & D(p^2) \\ p^2E(p^2) & F(p^2) & G(p^2) \\ p^2H(p^2) & I(p^2) & \frac{1}{p^2+\xi m^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (618)$$

O sistema (618) pode ser resolvido pelo método de eliminação de Gauss, resultando em

$$\widetilde{M}^{-1}(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{p^2+m^2}\mathcal{P}_{\nu\lambda}(p) + \frac{\xi}{p^2+\xi m^2}\mathcal{L}_{\nu\lambda}(p) & \frac{\beta^{-1}}{p^2+\xi m^2}p_\nu & 0 \\ \frac{\beta^{-1}}{p^2+\xi m^2}p_\lambda & 0 & \frac{-im\beta^{-1}}{p^2+\xi m^2} \\ 0 & \frac{-im\beta^{-1}}{p^2+\xi m^2} & J(p^2) \end{bmatrix}. \quad (619)$$

Os propagadores da teoria no espaço dos momentos podem ser lidos diretamente da matriz (619), de acordo como a origem da matriz $M(x-y)$, veja a Eq. (611). Assim, além de (612), temos os propagadores:

$$\begin{aligned} \langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2+m^2}\mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \frac{\xi}{p^2+\xi m^2}\mathcal{L}_{\mu\nu}(p), \\ \langle A_\mu(p) b(-p) \rangle_0 &= -\langle b(p) A_\mu(-p) \rangle_0 = \frac{p_\mu}{p^2+\xi m^2}, \\ \langle A_\mu(p) \rho(-p) \rangle_0 &= -\langle \rho(p) A_\mu(-p) \rangle_0 = 0, \\ \langle b(p) b(-p) \rangle_0 &= 0, \\ \langle b(p) \rho(-p) \rangle_0 &= \langle \rho(p) b(-p) \rangle_0 = \frac{-im}{p^2+\xi m^2}, \\ \langle \rho(p) \rho(-p) \rangle &= \frac{1}{p^2+\xi m^2}. \end{aligned} \quad (620)$$

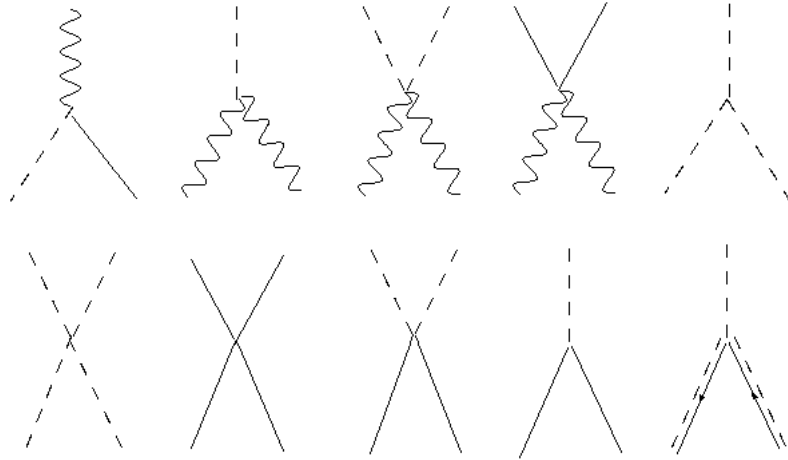
Note que o parâmetro β não aparece em (620), como deveria ser. A Figura 1 mostra a notação utilizada para os principais propagadores.

A.2 Vértices de interação

Vértices de interação que surgem do termo de interação

$$\begin{aligned} S_I &= \int d^d x \left\{ -e\rho A_\mu \partial_\mu h + eh A_\mu \partial_\mu \rho - m\xi e\bar{c}h \right. \\ &\quad + \frac{\mu^{4-d}e^2}{2} A_\mu A_\mu h^2 + \mu^{2-\frac{d}{2}}ve^2 A_\mu A_\mu h + \frac{\mu^{4-d}e^2}{2} A_\mu A_\mu \rho^2 \\ &\quad \left. + \frac{\mu^{4-d}\lambda}{8} h^4 + \frac{\mu^{4-d}\lambda}{8} \rho^4 + \frac{\mu^{2-\frac{d}{2}}\lambda}{2} vh^3 + \frac{\mu^{4-d}\lambda}{4} h^2 \rho^2 + \frac{\mu^{2-\frac{d}{2}}\lambda}{2} v h \rho^2 \right\}: \end{aligned} \quad (621)$$

Figura 49 - Vértices de interação de S_I .



Legenda: Representação diagramática dos vértices de interação de S_I , cujos fatores de vértice são mostrados na Eq. (622).

Fonte: O autor, 2022.

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{Ah\rho})_{\mu} (p, q, r) &= ie\mu^{2-\frac{d}{2}} (q_{\mu} - r_{\mu}) (2\pi)^d \delta^d (p + q + r), \\
 (\Gamma_{AAh})_{\mu\nu} (p, q, r) &= -2\mu^{2-\frac{d}{2}} e^2 v \delta_{\mu\nu} (2\pi)^d \delta^d (p + q + r), \\
 (\Gamma_{AAhh}) (p, q, r, s) &= -2\mu^{4-d} e^2 \delta_{\mu\nu} (2\pi)^d \delta^d (p + q + r + s), \\
 (\Gamma_{AA\rho\rho}) (p, q, r, s) &= -2\mu^{4-d} e^2 \delta_{\mu\nu} (2\pi)^d \delta^d (p + q + r + s), \\
 (\Gamma_{hhh}) (p, q, r) &= -3\mu^{2-\frac{d}{2}} \lambda v (2\pi)^d \delta^d (p + q + r), \\
 (\Gamma_{hhhh}) (p, q, r, s) &= -3\mu^{4-d} \lambda (2\pi)^d \delta^d (p + q + r + s), \\
 (\Gamma_{\rho\rho\rho\rho}) (p, q, r, s) &= -3\mu^{4-d} \lambda (2\pi)^d \delta^d (p + q + r + s), \\
 (\Gamma_{hh\rho\rho}) (p, q, r, s) &= -\mu^{4-d} \lambda (2\pi)^d \delta^d (p + q + r + s), \\
 (\Gamma_{h\rho\rho}) (p, q, r) &= -\mu^{2-\frac{d}{2}} \lambda v (2\pi)^d \delta^d (p + q + r), \\
 (\Gamma_{\bar{c}ch}) (p, q, r) &= \mu^{2-\frac{d}{2}} m \xi e (2\pi)^d \delta^d (p + q + r).
 \end{aligned} \tag{622}$$

Para o cálculo desses fatores de vértice, foi utilizada a definição (16). A Figura 49 mostra a representação diagramática desses vértices.

No calibre de Landau, a análise algébrica feita no Capítulo 5 mostra que os con-

tratermos a 1-loop são:

$$\begin{aligned}
(\Gamma_h)(p) &= (\delta\sigma)^{(1)} v^3 (2\pi)^d \delta^d(p), \\
(\Gamma_{AA})_{\mu\nu}(p, q) &= -\left(Z_A^{(1)}(p^2\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) + Z_h^{(1)} m^2 \delta_{\mu\nu}\right) (2\pi)^d \delta^d(p+q), \\
(\Gamma_{hh})(p, q) &= -\left(Z_h^{(1)} p^2 + \left(Z_\lambda^{(1)} + 2Z_h^{(1)}\right) m_h^2 + (\delta\sigma)^{(1)} v^2\right) (2\pi)^d \delta^d(p+q), \\
(\Gamma_{\rho\rho})(p, q) &= -\left(Z_h^{(1)} p^2 + (\delta\sigma)^{(1)} v^2\right) (2\pi)^d \delta^d(p+q), \\
(\Gamma_{A\rho})_\mu(p, q) &= -iev Z_h^{(1)} q_\mu (2\pi)^d \delta^d(p+q), \\
(\Gamma_{Ah\rho})_\mu(p, q, r) &= ie(q_\mu - r_\mu) Z_h^{(1)} (2\pi)^d \delta^d(p+q+r), \\
(\Gamma_{AAh})_{\mu\nu}(p, q, r) &= -2e^2 v Z_h^{(1)} \delta_{\mu\nu} (2\pi)^d \delta^d(p+q+r), \\
(\Gamma_{AAhh})(p, q, r, s) &= -2e^2 Z_h^{(1)} \delta_{\mu\nu} (2\pi)^d \delta^d(p+q+r+s), \\
(\Gamma_{AA\rho\rho})(p, q, r, s) &= -2e^2 Z_h^{(1)} \delta_{\mu\nu} (2\pi)^d \delta^d(p+q+r+s), \\
(\Gamma_{hhh})(p, q, r) &= -3\lambda v \left(Z_\lambda^{(1)} + 2Z_h^{(1)}\right) (2\pi)^d \delta^d(p+q+r), \\
(\Gamma_{hhhh})(p, q, r, s) &= -3\lambda \left(Z_\lambda^{(1)} + 2Z_h^{(1)}\right) (2\pi)^d \delta^d(p+q+r+s), \\
(\Gamma_{\rho\rho\rho})(p, q, r, s) &= -3\lambda \left(Z_\lambda^{(1)} + 2Z_h^{(1)}\right) (2\pi)^d \delta^d(p+q+r+s), \\
(\Gamma_{hh\rho\rho})(p, q, r, s) &= -\lambda \left(Z_\lambda^{(1)} + 2Z_h^{(1)}\right) (2\pi)^d \delta^d(p+q+r+s), \\
(\Gamma_{h\rho\rho})(p, q, r) &= -\lambda v \left(Z_\lambda^{(1)} + 2Z_h^{(1)}\right) (2\pi)^d \delta^d(p+q+r), \tag{623}
\end{aligned}$$

em que os fatores $Z^{(1)}$ são definidos pela Eq. (361).

A.3 Vértices especiais para o cálculo de funções de Green dos operadores compostos $O(x)$ e $V_\mu(x)$

Os vértices que decorrem do termo $\int d^d x J(x) O(x)$ são:

$$\begin{aligned}
(\Gamma_h^J)(p) &= -v \tilde{J}(p), \\
(\Gamma_{hh}^J)(p, q) &= -\tilde{J}(p+q), \\
(\Gamma_{\rho\rho}^J)(p, q) &= -\tilde{J}(p+q), \tag{624}
\end{aligned}$$

em que $\tilde{J}(p)$ é a transformada de Fourier da fonte $J(x)$. Lembrando que

$$O(x) = \frac{1}{2} (h^2(x) + 2vh(x) + \rho^2(x)).$$

Para o cálculo desses fatores de vértice, foi utilizada a definição (16). A Figura 50 mostra a representação diagramática desses vértices.

Figura 50 - Vértices de interação para o cálculo de funções de Green de $O(x)$.



Legenda: Representação diagramática dos vértices de interação de $\int d^d x J O$, cujos fatores de vértice são mostrados na Eq. (624).

Fonte: O autor, 2022.

Os vértices que decorrem do termo $\int d^d x \Omega_\mu(x) V_\mu(x)$ são:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_\rho^\Omega)(p) &= -\frac{iv}{2} p_\mu \tilde{\Omega}_\mu(p), \\
 (\Gamma_A^\Omega)_\mu(p) &= -\frac{ev^2}{2} \tilde{\Omega}_\mu(p), \\
 (\Gamma_{Ah})_\mu(p, q) &= -ev \tilde{\Omega}_\mu(p+q), \\
 (\Gamma_{h\rho}^\Omega)(p, q) &= -\frac{i}{2} (q_\mu - p_\mu) \tilde{\Omega}_\mu(p+q), \\
 (\Gamma_{Ahh}^\Omega)_\mu(p, q, r) &= -e \tilde{\Omega}_\mu(p+q+r), \\
 (\Gamma_{A\rho\rho}^\Omega)_\mu(p, q, r) &= -e \tilde{\Omega}_\mu(p+q+r),
 \end{aligned} \tag{625}$$

em que $\tilde{\Omega}_\mu(p)$ é a transformada de Fourier da fonte $\Omega_\mu(x)$. Lembrando que

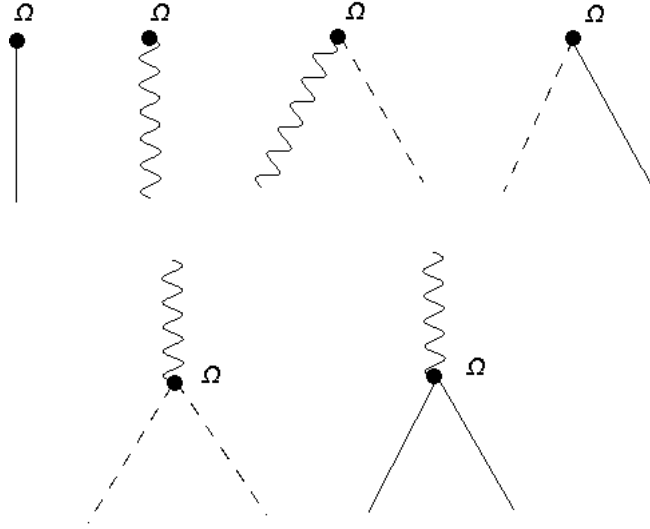
$$\begin{aligned}
 V_\mu(x) &= \frac{1}{2} [-\rho \partial_\mu h + h \partial_\mu \rho + v \partial_\mu \rho \\
 &\quad + e A_\mu (v^2 + 2vh + h^2 + \rho^2)].
 \end{aligned}$$

Para o cálculo desses fatores de vértice, foi utilizada a definição (16). A Figura 51 mostra a representação diagramática desses vértices.

No calibre de Landau, a análise algébrica feita no Capítulo 5 mostra que os contra-termos a 1-loop necessários para renormalizar as funções de Green até 2-pontos dos operadores compostos são:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_h^J)(p) &= -v \left(Z_{JJ}^{(1)} + Z_h^{(1)} \right) \tilde{J}(p), \\
 (\Gamma_{hh}^J)(p, q) &= - \left(Z_{JJ}^{(1)} + Z_h^{(1)} \right) \tilde{J}(p+q), \\
 (\Gamma_{\rho\rho}^J)(p, q) &= - \left(Z_{JJ}^{(1)} + Z_h^{(1)} \right) \tilde{J}(p+q),
 \end{aligned} \tag{626}$$

Figura 51 - Vértices de interação para o cálculo de funções de Green de $V_\mu(x)$.



Legenda: Representação diagramática dos vértices de interação de $\int d^d x \Omega_\mu(x) V_\mu(x)$, cujos fatores de vértice são mostrados na Eq. (625).

Fonte: O autor, 2022.

e

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_\rho^\Omega)(p) &= -\frac{vi}{2} \left(Z_\Omega^{(1)} + Z_h^{(1)} \right) p_\mu \tilde{\Omega}_\mu(p) \\
 (\Gamma_A^\Omega)_\mu(p) &= \left[-\frac{1}{2} \left(Z_{\Omega\Omega}^{(1)} + Z_h^{(1)} \right) ev^2 \delta_{\mu\nu} + Z_{\Upsilon\Omega}^{(1)} (p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \right] \tilde{\Omega}_\nu(p), \\
 (\Gamma_{Ah}^\Omega)_\mu(p, q) &= -ev \left(Z_{\Omega\Omega}^{(1)} + Z_h^{(1)} \right) \tilde{\Omega}_\mu(p+q), \\
 (\Gamma_{h\rho}^\Omega)(p, q) &= -\frac{i}{2} (q_\mu - p_\mu) \left(Z_{\Omega\Omega}^{(1)} + Z_h^{(1)} \right) \tilde{\Omega}_\mu(p+q), \\
 (\Gamma_{Ahh}^\Omega)(p, q, r) &= -e \left(Z_{\Omega\Omega}^{(1)} + Z_h^{(1)} \right) \tilde{\Omega}_\mu(p+q+r), \\
 (\Gamma_{A\rho\rho}^\Omega)(p, q, r) &= -e \left(Z_{\Omega\Omega}^{(1)} + Z_h^{(1)} \right) \tilde{\Omega}_\mu(p+q+r), \tag{627}
 \end{aligned}$$

em que os fatores $Z^{(1)}$ são definidos pela Eq. (361).

APÊNDICE B – Reduções das integrais de Feynman

No cálculo dos diagramas de Feynman são encontradas as integrais com índices de Lorentz e momentos no numerador:

$$I_\mu(p^2, m_1^2, m_2^2) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)} \quad (628)$$

e

$$I_{\mu\nu}(p^2, m_1^2, m_2^2) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)}. \quad (629)$$

A forma mais útil de resolver essas integrais é utilizando o método de Passarino-Veltman (PASSARINO; VELTMAN, 1979).

Começemos pela integral (628). Como as simetrias de Lorentz são preservadas pela Regularização Dimensional, veja por exemplo (COLLINS, 1986), devemos ter

$$I_\mu(p^2, m_1^2, m_2^2) = p_\mu F(p^2), \quad (630)$$

em que o fator de forma, $F(p^2)$, depende apenas do escalar p^2 e das massas m_1^2 e m_2^2 . Contraindo (630) com p_μ , obtemos a seguinte expressão para o fator de forma

$$\begin{aligned} F(p^2) &= \frac{1}{p^2} p^\mu I_\mu(p^2, m_1^2, m_2^2) \\ &= \frac{1}{p^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k \cdot p}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)}. \end{aligned} \quad (631)$$

O produto escalar $k \cdot p$, que aparece no numerador de (631), pode ser reescrito como

$$k \cdot p = \frac{1}{2} [(k^2 + m_1^2) - ((k-p)^2 + m_2^2) + p^2 - m_1^2 + m_2^2]. \quad (632)$$

Assim, temos que o fator de forma se decompõe em integrais mais simples

$$\begin{aligned} F(p^2) &= \frac{1}{2p^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k-p)^2 + m_2^2} \\ &\quad - \frac{1}{2p^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m_1^2} \\ &\quad + \frac{p^2 - m_1^2 + m_2^2}{2p^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)}. \end{aligned} \quad (633)$$

Relembrando das definições das integrais

$$\begin{aligned}\eta(m_1^2, m_2^2, p^2) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)}, \\ \chi(m^2) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2},\end{aligned}\tag{634}$$

definidas em (144) e (143), temos o resultado

$$I_\mu(p^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{p_\mu}{2p^2} [\chi(m_2^2) - \chi(m_1^2) + (p^2 - m_1^2 + m_2^2) \eta(m_1^2, m_2^2, p^2)].\tag{635}$$

A integral (629) pode ser resolvida de maneira análoga. Devemos ter

$$I_{\mu\nu}(p^2, m_1^2, m_2^2) = F(p^2) \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + G(p^2) \mathcal{L}_{\mu\nu}(p),\tag{636}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mu\nu}(p) &= \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \\ \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) &= \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\end{aligned}\tag{637}$$

são os projetores transversal e longitudinal, respectivamente. Daí segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\mu\nu}(p) I_{\mu\nu}(p^2, m_1^2, m_2^2) &= F(p^2) \mathcal{P}^{\mu\nu}(p) \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + G(p^2) \mathcal{P}^{\mu\nu}(p) \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \\ &= F(p^2) \mathcal{P}^{\mu\nu}(p) \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \\ &= (d-1) F(p^2),\end{aligned}\tag{638}$$

ou seja,

$$F(p^2) = \frac{1}{d-1} \mathcal{P}^{\mu\nu}(p) I_{\mu\nu}(p^2, m_1^2, m_2^2).\tag{639}$$

Fazendo o mesmo com o projetor longitudinal,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mu\nu}(p) I_{\mu\nu}(p^2, m_1^2, m_2^2) &= F(p^2) \mathcal{L}^{\mu\nu}(p) \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + G(p^2) \mathcal{L}^{\mu\nu}(p) \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \\ &= G(p^2) \mathcal{L}^{\mu\nu}(p) \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \\ &= G(p^2).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}I_{\mu\nu}(p^2, m_1^2, m_2^2) &= \frac{1}{d-1} \mathcal{P}^{\alpha\beta}(p) I_{\alpha\beta}(p^2, m_1^2, m_2^2) \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \\ &\quad + \mathcal{L}^{\alpha\beta}(p) I_{\alpha\beta}(p^2, m_1^2, m_2^2) \mathcal{L}_{\mu\nu}(p).\end{aligned}\tag{640}$$

Analisemos a estrutura de $\mathcal{P}^{\alpha\beta}(p) I_{\alpha\beta}(p^2, m_1^2, m_2^2)$, que é

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\alpha\beta}(p) I_{\alpha\beta}(p^2, m_1^2, m_2^2) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)} \\ &\quad - \frac{1}{p^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k \cdot p)^2}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)}. \end{aligned} \quad (641)$$

O primeiro termo do lado direito de (641) possui k^2 no numerador, que pode ser reescrito simplesmente como

$$k^2 = k^2 + m_1^2 - m_1^2, \quad (642)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)} &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k-p)^2 + m_2^2} \\ &\quad - m_1^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)} \\ &= \chi(m_2^2) - m_1^2 \eta(m_1^2, m_2^2, p^2). \end{aligned} \quad (643)$$

A segunda integral do lado direito de (641) possui $(k \cdot p)^2$ no numerador. Neste caso, a identidade (632) pode ser usada repetidas vezes até obtermos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k \cdot p)^2}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)} &= \frac{(p^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4} \eta(m_1^2, m_2^2, p^2) \\ &\quad + \frac{3p^2 + m_2^2 - m_1^2}{4} \chi(m_2^2) \\ &\quad - \frac{p^2 + m_2^2 - m_1^2}{4} \chi(m_1^2). \end{aligned} \quad (644)$$

Portanto, temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\alpha\beta}(p) I_{\alpha\beta}(p^2, m_1^2, m_2^2) &= \chi(m_2^2) - m_1^2 \eta(m_1^2, m_2^2, p^2) \\ &\quad - \frac{(p^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4p^2} \eta(m_1^2, m_2^2, p^2) \\ &\quad - \frac{3p^2 + m_2^2 - m_1^2}{4p^2} \chi(m_2^2) + \frac{p^2 + m_2^2 - m_1^2}{4p^2} \chi(m_1^2). \end{aligned}$$

A parte longitudinal de $I_{\mu\nu}(p^2, m_1^2, m_2^2)$ é dada por

$$\mathcal{L}^{\alpha\beta}(p) I_{\alpha\beta}(p^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{1}{p^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k \cdot p)^2}{(k^2 + m_1^2)((k-p)^2 + m_2^2)}, \quad (645)$$

como mostra a Eq. (640). A integral (645) já foi resolvida acima, em (644). Dessa forma,

reunindo todos os resultados, chegamos à seguinte expressão para a integral (629):

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p^2, m_1^2, m_2^2) &= \frac{1}{(d-1)} [\chi(m_2^2) - m_1^2 \eta(m_1^2, m_2^2, p^2) \\
&\quad - \frac{(p^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4p^2} \eta(m_1^2, m_2^2, p^2) \\
&\quad - \frac{3p^2 + m_2^2 - m_1^2}{4p^2} \chi(m_2^2) + \frac{p^2 + m_2^2 - m_1^2}{4p^2} \chi(m_1^2)] \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \\
&\quad + \left[\frac{(p^2 + m_2^2 - m_1^2)^2}{4} \eta(m_1^2, m_2^2, p^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3p^2 + m_2^2 - m_1^2}{4} \chi(m_2^2) - \frac{p^2 + m_2^2 - m_1^2}{4} \chi(m_1^2) \right] \mathcal{L}_{\mu\nu}(p). \quad (646)
\end{aligned}$$

APÊNDICE C – Reconstrução das funções de 2-pontos a partir das densidades espectrais

No caso dos operadores compostos, a função $D(p^2)$ também possui um corte no semi-eixo real negativo de p^2 . No entanto, a função espectral $\tilde{\rho}_D(t)$ obtida pela equação

$$\tilde{\rho}_D(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\tilde{D}(-t - i\epsilon) - \tilde{D}(-t + i\epsilon) \right). \quad (647)$$

em que

$$\tilde{D}(p^2) = D(p^2) - \frac{R_D}{p^2 - \overline{M}_D^2}, \quad (648)$$

produz uma integral $\int_0^\infty dt \frac{\tilde{\rho}_D(t)}{p^2+t}$ divergente. Esse tipo de situação é comum em operadores compostos devido à sua dimensão mais elevada. Para estabelecermos a relação entre $\tilde{D}(p^2)$ e $\tilde{\rho}_D(t)$ podemos utilizar a fórmula de Cauchy

$$\tilde{D}(p^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\tilde{D}(t)}{t - p^2} dt. \quad (649)$$

A Figura 52 mostra no plano complexo o caminho C (em azul) onde será calculada a integral e o corte da função $\tilde{D}(p^2)$ (em vermelho). Se a contribuição da integral sobre o círculo de raio R que compõe C é nula quando $R \rightarrow \infty$, então obtemos o resultado tradicional utilizado no Capítulo 3, que é $\tilde{D}(p^2) = \int_0^\infty dt \frac{\tilde{\rho}_D(t)}{p^2+t}$, sendo $\tilde{\rho}_D(t)$ dado pela Eq. (647). Quando isso não acontece, podemos reescrever

$$\frac{1}{t - p^2} = \sum_{k=0}^n \frac{(p^2 - \Lambda)^k}{(t - \Lambda)^{k+1}} + \frac{(p^2 - \Lambda)^{n+1}}{(t - \Lambda)^{n+1} (t - p^2)}. \quad (650)$$

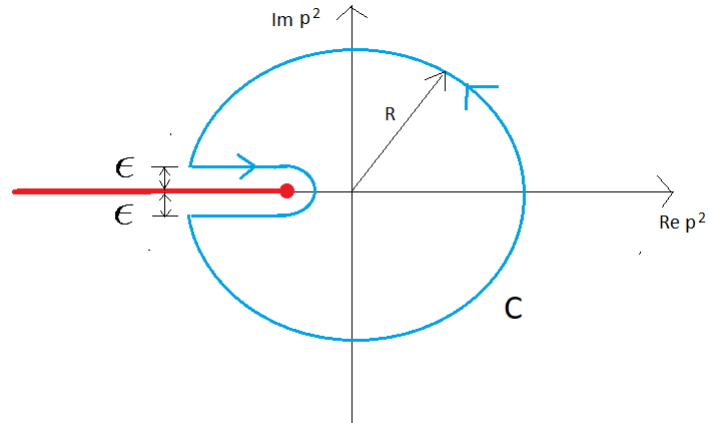
A fórmula (650) pode ser obtida através da iteração da fórmula

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - p^2} &= \frac{1}{t - p^2} - \frac{1}{t - \Lambda} + \frac{1}{t - \Lambda} \\ &= \frac{(p^2 - \Lambda)}{(t - p^2)(t - \Lambda)} + \frac{1}{t - \Lambda}. \end{aligned} \quad (651)$$

Assim o que temos é

$$\tilde{D}(p^2) = \sum_{k=0}^n \frac{(p^2 - \Lambda)^k}{2\pi i} \oint_C \frac{\tilde{D}(t)}{(t - \Lambda)^{k+1}} dt + \frac{(p^2 - \Lambda)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{\tilde{D}(t)}{(t - \Lambda)^{n+1} (t - p^2)} dt. \quad (652)$$

Figura 52 - Contorno no plano complexo.



Legenda: Contorno no plano complexo utilizado para reconstruir a função de Green a partir da densidade espectral.

Fonte: O autor, 2022.

Se Λ é um ponto onde $\tilde{D}(p^2)$ é analítica, então

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\tilde{D}(t)}{(t - \Lambda)^{k+1}} dt = \frac{1}{k!} D^{(k)}(\Lambda). \quad (653)$$

Tomando n suficientemente grande de modo que a integral sobre o círculo de C não contribua quando $R \rightarrow \infty$, temos

$$\tilde{D}(p^2) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (p^2 - \Lambda)^k D^{(k)}(\Lambda) + (-p^2 + \Lambda)^{n+1} \int_0^\infty dt \frac{\tilde{\rho}_D(t)}{(t + \Lambda)^{n+1} (p^2 + t)}. \quad (654)$$

Essa fórmula pode ser encontrada em (WEINBERG, 1995).

APÊNDICE D – Polologia

Resultado I - Seja a função de correlação $\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle$ dos operadores locais $\Phi_{i_1}(x_1), \dots, \Phi_{i_n}(x_n)$ (que podem ser campos elementares ou operadores compostos). Sejam também $|M\rangle$ um estado de partícula com massa M^{31} e $|0\rangle$ o vácuo. Passando para o espaço dos momentos essa função de correlação, através da transformada de Fourier, temos

$$G_{i_1 \dots i_n}(p_1, \dots, p_n) := \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle. \quad (655)$$

O momento total carregado pelos campos $\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_r}$ é

$$q = p_1 + \dots + p_r. \quad (656)$$

(Por conservação do momento, temos que o momento total carregado por $\Phi_{i_{r+1}}, \dots, \Phi_{i_n}$ é

$$-q = p_{r+1} + \dots + p_n). \quad (657)$$

Se $\langle 0 | \Phi_{i_1} \dots \Phi_{i_r} | M \rangle \neq 0$ e $\langle M | \Phi_{i_{r+1}} \dots \Phi_{i_n} | 0 \rangle \neq 0$, então a função $G_{i_1 \dots i_n}(p_1, \dots, p_n)$ possui um pólo em $q^2 = M^2$. Dito de outra forma, se existe uma superposição entre o estado $|M\rangle$ e os estados $\Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_r}(x_r) | 0 \rangle$ e $\Phi_{i_{r+1}}^\dagger(x_{r+1}) \dots \Phi_{i_n}^\dagger(x_n) | 0 \rangle$, então a função $G_{i_1 \dots i_n}(p_1, \dots, p_n)$ deve mostrar isso através de um polo em $q^2 = M^2$.

Esse resultado tem o *status* de ser *não perturbativo* e é demonstrado utilizando conceitos de espaços de Hilbert, como o de operadores, estados, conjunto completo, etc, que são encontrados na quantização canônica. É sabido que em teorias de calibre (que envolvem estados sem norma, campos fantasmas, etc) tais conceitos precisam ser utilizados com cuidado, como é discutido por (STROCCHI, 2013). Levando em consideração essas questões e o fato de que este trabalho utiliza o formalismo funcional, o mais prudente é utilizar o Resultado I para entender o significado dos polos das funções de correlação mas sem apego. O caso mais importante para este trabalho é o das funções de 2-pontos, que pela invariância translacional tem a forma

$$G_{ij}(p_1, p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) G_{ij}(p_1^2). \quad (658)$$

Se $\Phi_i | 0 \rangle$ e $\Phi_j | 0 \rangle$ possuem uma superposição não trivial com $|M\rangle$, pelo resultado acima,

³¹ O estado pode conter outros números quânticos, que aqui foram omitidos.

temos

$$G_{i_1 i_2}(q^2) \rightarrow \frac{R_{i_1 i_2}}{q^2 - M^2}, \quad (659)$$

se $q^2 \rightarrow M^2$ em que $R_{i_1 i_2}$ é o “resíduo”. Encontramos exatamente essa estrutura de polo para $\langle A(p) A(-p) \rangle^T$ e $\langle h(p) h(-p) \rangle$ cuja interpretação é bem conhecida, existe um bóson vetorial massivo e um um bóson de Higgs no espectro físico da teoria. Obviamente, não podemos dar a mesma interpretação para $\langle \rho(p) \rho(-p) \rangle$ cujo polo depende de ξ .

Além do resultado acima, que é obtido a partir de considerações formais, podemos utilizar outro “quase resultado” (resultados que esperamos encontrar) a respeito das funções de correlação que tem uma importância prática maior que o anterior, embora sejam deduzidos através de uma análise das estruturas dos diagramas de Feynman, isto é, sem muito rigor matemático. Como é mostrado no Capítulo 5, graças às identidades de Ward que existem no modelo de Higgs $U(1)$, é possível dar, também, uma demonstração algébrica rigorosa para o caso da função $\langle V_\mu(x) V_\nu(y) \rangle$.

Resultado II - Sejam $\Phi_{i_1}(x_1), \dots, \Phi_{i_n}(x_n)$ operadores locais (que podem ser campos elementares ou operadores compostos) e $\langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle$ a função de 2-pontos do campo elementar $\varphi(x)$ com um polo em $p^2 = M^2$. Se

$$\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_r}(p_r) \varphi(-p) \rangle \neq 0 \quad (660)$$

e

$$\langle \varphi(-p) \Phi_{i_{r+1}}(p_{r+1}) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle \neq 0, \quad (661)$$

então a função de correlação

$$\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle \quad (662)$$

possui um polo idêntico ao da função $\langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle$ em $p^2 = M^2$, em que $p = p_1 + \dots + p_r = -p_{r+1} - \dots - p_n$.

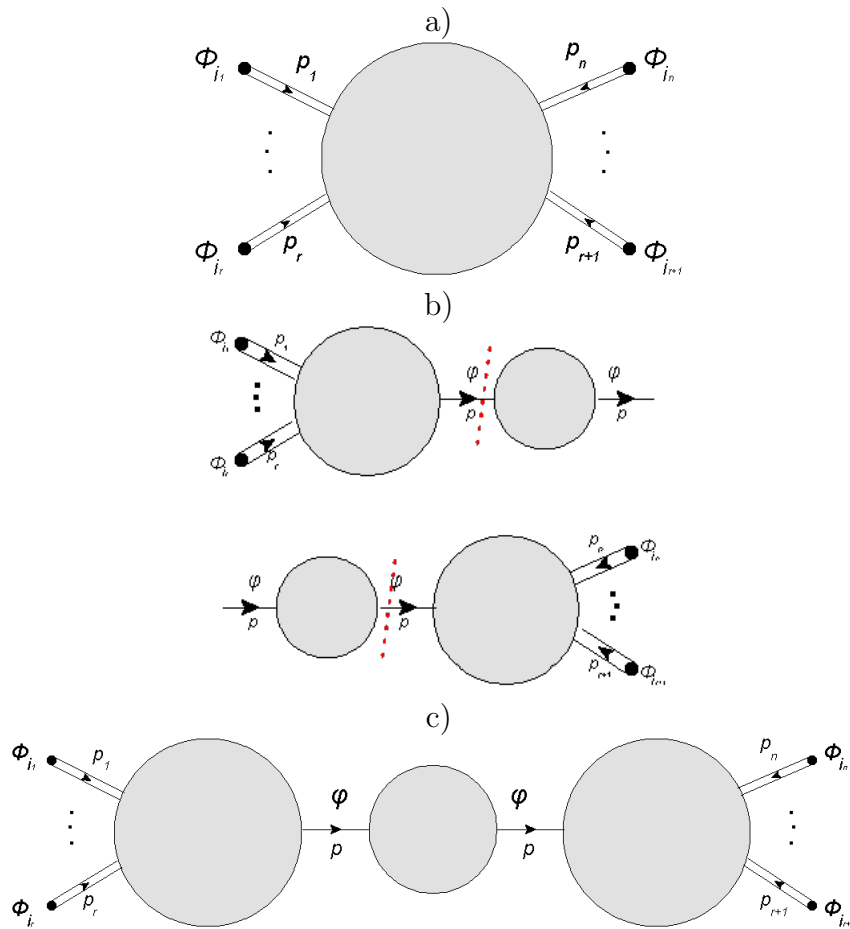
A validade desse resultado pode ser inferida através da análise dos diagramas de Feynman que contribuem para $\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle$, que é representada na Figura 5.1-a. Se

$$\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_r}(p_r) \varphi(-p) \rangle \neq 0$$

e

$$\langle \varphi(-p) \Phi_{i_{r+1}}(p_{r+1}) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle \neq 0,$$

Figura 53 - Função $\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle$.



Legenda: a) Função $\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle$; b) Amputação das funções $\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_r}(p_r) \varphi(-p) \rangle$ e $\langle \varphi(-p) \Phi_{i_{r+1}}(p_{r+1}) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle$; c) Contribuição para a função $\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle$ obtida com a ligação das funções amputada em b) através da função $\langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle$.

Fonte: O autor, 2022.

podemos amputar as pernas externas com φ dessas funções, como mostra a Figura 5.1-b, e depois ligar as funções amputadas através da função $\langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle$. O resultado final disso é o diagrama da Figura 5.1-c, que possui o mesmo polo de $\langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle$. Note que, o diagrama da Figura 5.1-c é uma das contribuições para a função $\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle$. Portanto, $\langle \Phi_{i_1}(p_1) \dots \Phi_{i_n}(p_n) \rangle$ deve possuir um polo idêntico ao da função $\langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle$ em $p^2 = M^2$, sendo $p = p_1 + \dots + p_r = -p_{r+1} - \dots - p_n$.

Tomando novamente o caso particular da função de 2-pontos. Se $\langle \Phi_i(p) \varphi(-p) \rangle \neq 0$ e $\langle \varphi(p) \Phi_j(-p) \rangle \neq 0$, então a função $\langle \Phi_i(p) \Phi_j(-p) \rangle \neq 0$ deve possuir o mesmo pólo da função $\langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle$.

APÊNDICE E – Regras de Feynman do modelo de Higgs $SU(2)$

E.1 Propagadores

Os propagadores da teoria são determinados a partir da parte quadrática nos campos, que neste caso é

$$\begin{aligned}
 S_{\text{quad}} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \frac{m_h^2}{2} h^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho^a)^2 - m A_\mu^a \partial_\mu \rho^a \right. \\
 \left. + i b^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial^2 c^a - \xi m^2 \bar{c}^a c^a - i \xi m b^a \rho^a \right\}. \quad (663)
 \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma que no Apêndice A, obtemos os seguintes propagadores:

$$\begin{aligned}
 \langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle_0 &= \delta^{ab} \left(\frac{1}{p^2 + m^2} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) + \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2} \mathcal{L}_{\mu\nu}(p) \right), \\
 \langle \rho^a(p) \rho^b(-p) \rangle_0 &= \frac{\delta^{ab}}{p^2 + \xi m^2}, \\
 \langle h(p) h(-p) \rangle_0 &= \frac{1}{p^2 + m_h^2}, \\
 \langle A_\mu^a(p) b^b(-p) \rangle_0 &= \frac{\delta^{ab} p_\mu}{p^2 + \xi m^2}, \\
 \langle b^a(p) \rho^b(-p) \rangle_0 &= \frac{\delta^{ab} i m}{p^2 + \xi m^2}, \\
 \langle \bar{c}^a(p) c^b(-p) \rangle_0 &= \frac{\delta^{ab}}{p^2 + \xi m^2}, \quad (664)
 \end{aligned}$$

os demais propagadores são nulos. A notação diagramática utilizada para representar esses propagadores é mostrada na Figura 36.

E.2 Vértices

Vértices de interação que surgem do termo

$$\begin{aligned}
S_I = & \int d^d x \left\{ \mu^{2-\frac{d}{2}} g \epsilon^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c + \frac{\mu^{4-d} g^2}{4} \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e \right. \\
& + \frac{1}{2} \mu^{2-\frac{d}{2}} \lambda v h^3 + \frac{1}{2} \mu^{2-\frac{d}{2}} \lambda v h \rho^a \rho^a \\
& + \frac{1}{8} \mu^{4-d} \lambda h^4 + \frac{1}{4} \mu^{4-d} \lambda h^2 \rho^a \rho^a + \frac{1}{8} \mu^{4-d} \lambda (\rho^a \rho^a)^2 \\
& + \frac{1}{2} \mu^{2-\frac{d}{2}} g A_\mu \rho^a (\partial_\mu h) - \frac{1}{2} \mu^{2-\frac{d}{2}} g h A_\mu^a (\partial_\mu \rho^a) \\
& + \frac{1}{2} \mu^{2-\frac{d}{2}} g \epsilon^{abc} A_\mu^a \rho^b (\partial_\mu \rho^c) + \frac{1}{8} \mu^{4-d} g^2 A_\mu^a A_\mu^a \left(2\mu^{\frac{d}{2}-2} v h + h^2 \right) \\
& + \frac{1}{8} \mu^{4-d} g^2 A_\mu^a A_\mu^a \rho^b \rho^b + \mu^{2-\frac{d}{2}} g \epsilon^{abc} (\partial_\mu \bar{c}^a) c^b A_\mu^c \\
& \left. - \mu^{2-\frac{d}{2}} g \xi m h \bar{c}^a c^a - \xi \mu^{2-\frac{d}{2}} g \epsilon^{abc} m \bar{c}^a c^b \rho^c \right\} : \tag{665}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{A\rho h})_{\mu}^{ab}(p, q, r) &= \frac{ig\mu^{2-\frac{d}{2}}}{2}\delta^{ab}(r_{\mu}-q_{\mu})(2\pi)^d\delta(p+q+r), \\
(\Gamma_{A\rho\rho})_{\mu}^{abc}(p, q, r) &= \frac{ig\mu^{2-\frac{d}{2}}}{2}\epsilon^{abc}(q_{\mu}-r_{\mu})(2\pi)^d\delta(p+q+r), \\
(\Gamma_{AAh})_{\mu\nu}^a(p, q, r) &= -\frac{\mu^{2-\frac{d}{2}}g^2v}{2}\delta_{\mu\nu}\delta^{ab}(2\pi)^d\delta(p+q+r), \\
(\Gamma_{AAhh})_{\mu\nu}^{ab}(p, q, r) &= -\frac{\mu^{4-d}g^2}{2}\delta^{ab}\delta_{\mu\nu}(2\pi)^d\delta(p+q+r+s), \\
(\Gamma_{AA\rho\rho})_{\mu\nu}^{abcd}(p, q, r, s) &= -\frac{\mu^{2(4-d)}g^2}{2}\delta_{\mu\nu}\delta^{ab}\delta^{cd}(2\pi)^d\delta(p+q+r+s) \\
(\Gamma_{hhh})(p, q, r) &= -3\mu^{2-\frac{d}{2}}\lambda v(2\pi)^d\delta(p+q+r+s) \\
(\Gamma_{h\rho\rho})^{ab}(p, q, r) &= -\mu^{2-\frac{d}{2}}\lambda v\delta^{ab}(2\pi)^d\delta(p+q+r+s) \\
(\Gamma_{hhhh})(p, q, r, s) &= -3\mu^{4-d}\lambda(2\pi)^d\delta(p+q+r+s) \\
(\Gamma_{hh\rho\rho})^{ab}(p, q, r, s) &= -\mu^{4-d}\lambda\delta^{ab}(2\pi)^d\delta(p+q+r+s) \\
(\Gamma_{\rho\rho\rho})^{abcd}(p, q, r, s) &= -\mu^{4-d}\lambda(\delta^{ab}\delta^{cd}+\delta^{ac}\delta^{bd}+\delta^{ad}\delta^{bc})(2\pi)^d\delta(p+q+r+s) \\
(\Gamma_{AAA})_{\mu\nu\sigma}^{abc}(p, q, r) &= -i\mu^{2-\frac{d}{2}}g\epsilon^{abc}[(p_{\nu}-r_{\nu})\delta_{\mu\sigma} \\
&\quad + (r_{\mu}-q_{\mu})\delta_{\nu\sigma}+(q_{\sigma}-p_{\sigma})\delta_{\mu\nu}](2\pi)^d\delta(p+q+r), \\
(\Gamma_{AAAA})_{\mu\nu\sigma\rho}^{abcd}(p, q, r, s) &= \mu^{4-d}g^2[\epsilon^{eab}\epsilon^{ecd}(\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}-\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}) \\
&\quad +\epsilon^{eac}\epsilon^{ebd}(\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}-\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}) \\
&\quad +\epsilon^{ead}\epsilon^{ebc}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}-\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma})](2\pi)^d\delta(p+q+r), \\
(\Gamma_{\bar{c}Ac})_{\mu}^{abc}(p, q, r) &= i\mu^{2-\frac{d}{2}}g\epsilon^{abc}p_{\mu}(2\pi)^d\delta(p+q+r), \\
(\Gamma_{\bar{c}hc})^{ab}(p, q, r) &= \frac{\mu^{2-\frac{d}{2}}\xi g^2v}{4}(2\pi)^d\delta(p+q+r), \\
(\Gamma_{\bar{c}c\rho})^{abc}(p, q, r) &= \frac{\mu^{2-\frac{d}{2}}\xi g^2v}{4}\epsilon^{abc}(2\pi)^d\delta(p+q+r)
\end{aligned} \tag{666}$$

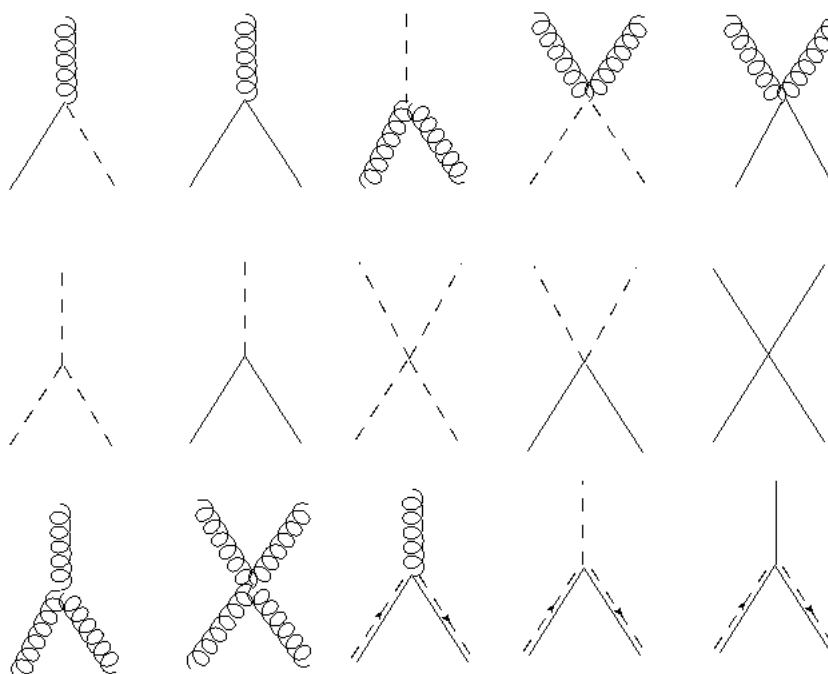
Esses vértices são mostrados na Figura 54

E.3 Vértices de interação especiais para o cálculo de funções de Green dos operadores $O(x)$ e $R_{\mu}^a(x)$

Vértices de interação que surgem do termo $\int d^d x J(x) O(x)$:

$$\begin{aligned}
(\Gamma_h^J)(p) &= -v\tilde{J}(p), \\
(\Gamma_{hh}^J)(p, q) &= -\tilde{J}(p), \\
(\Gamma_{\rho\rho}^J)^{ab}(p, q) &= -\delta^{ab}\tilde{J}(p),
\end{aligned} \tag{667}$$

Figura 54 - Vértices de interação de S_I .



Legenda: Representação diagramática dos vértices de interação de S_I , cujos fatores de vértice são mostrados na Eq. (666).

Fonte: O autor, 2022.

Figura 55 - Vértices de interação para o cálculo de funções de Green de $O(x)$.



Legenda: Representação diagramática dos vértices de interação de $\int d^d x J O$, cujos fatores de vértice são mostrados na Eq. (667).

Fonte: O autor, 2022.

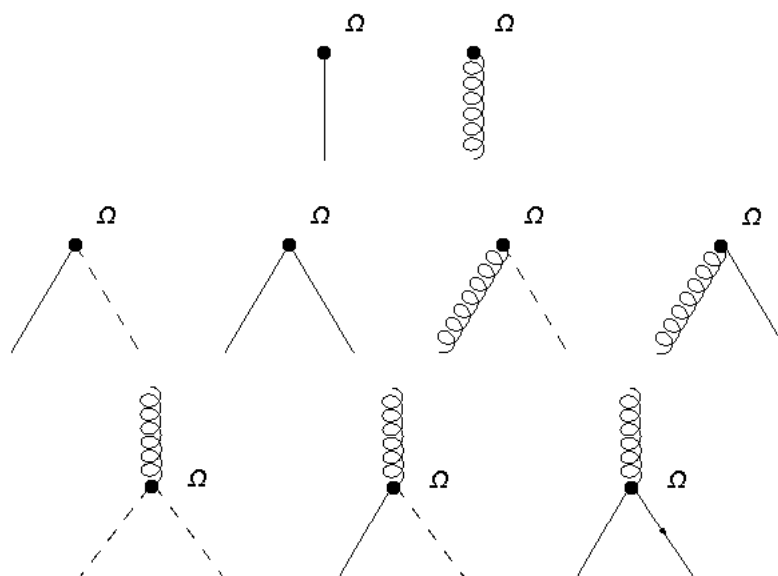
em que $\tilde{J}(p)$ é a transformada de Fourier da fonte $J(x)$. Lembrando que $O(x)$ é definido na Eq. (468). Esses vértices são mostrados na Figura 55

Vértices de interação que surgem do termo $\int d^d x \Omega_\mu^a(x) R_\mu^a(x)$:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_\rho^\Omega)^a(p) &= \frac{iv}{2} p_\mu \tilde{\Omega}_\mu^a(p), \\
 (\Gamma_A^\Omega)_\mu^a(p) &= -\frac{gv^2}{4} \tilde{\Omega}_\mu^a(p), \\
 (\Gamma_{\rho h}^\Omega)^a(p, q) &= -\frac{iq_\mu}{2} \tilde{\Omega}_\mu^a(p+q), \\
 (\Gamma_{\rho\rho}^\Omega)^{ab}(p, q) &= \frac{iq_\mu}{2} \epsilon^{abc} \tilde{\Omega}_\mu^c(p+q), \\
 (\Gamma_{Ah}^\Omega)_\mu^a(p, q) &= -\frac{gv}{2} \tilde{\Omega}_\mu^a(p+q), \\
 (\Gamma_{A\rho}^\Omega)^{ab} &= \frac{gv}{2} \epsilon^{abc} \tilde{\Omega}_\mu^c(p+q), \\
 (\Gamma_{Ahh}^\Omega)_\mu^a(p, q, r) &= -\frac{g}{2} \tilde{\Omega}_\mu^a(p+q+r), \\
 (\Gamma_{A\rho h}^\Omega)_\mu^{ab} &= \frac{g}{2} \epsilon^{abc} \tilde{\Omega}_\mu^c(p+q+r), \\
 (\Gamma_{A\rho\rho}^\Omega)_\mu^{abc} &= \frac{g}{2} (\delta^{bc} \delta^{da} - \delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ab} \delta^{cd}) \tilde{\Omega}_\mu^d(p+q+r)
 \end{aligned} \tag{668}$$

em que $\tilde{\Omega}_\mu^a(p)$ é a transformada de Fourier da fonte $\Omega_\mu^a(x)$. Lembrando que R_μ^a é definido na Eq. (481). Esses vértices são mostrados na Figura 56

Figura 56 - Vértices de interação para o cálculo de funções de Green de $O(x)$.



Legenda: Representação diagramática dos vértices de interação de $\int d^d x \Omega_\mu^a R_\mu^a$, cujos fatores de vértice são mostrados na Eq. (668).

Fonte: O autor, 2022.

APÊNDICE F – Funções de Green envolvidas no estudo do modelo de Higgs $SU(2)$

F.1 Função de Green $\langle h \rangle$

Na Figura 57 são mostrados os diagramas de Feynman que contribuem a 1-loop para a função de 1-ponto do campo $h(x)$. Os cálculos desses diagramas podem ser encontrados em (DUDAL et al., 2021b).

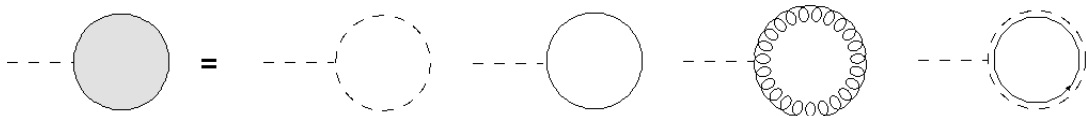
F.2 Função de Green $\langle \rho^a(x) \rho^b(y) \rangle$

Na Figura 58 são mostrados os diagramas de Feynman que contribuem a 1-loop para a função de 2-pontos do campo $\rho^a(x)$. Os cálculos desses diagramas podem ser encontrados em (DUDAL et al., 2021b).

F.3 Função de Green $\langle A_\mu^a(x) \rho^b(y) \rangle$

Na Figura 59 são mostrados os diagramas de Feynman que contribuem a 1-loop para a função de 2-pontos dos campos $A_\mu^a(x)$ e $\rho^a(x)$. Os cálculos desses diagramas podem ser encontrados em (DUDAL et al., 2021b).

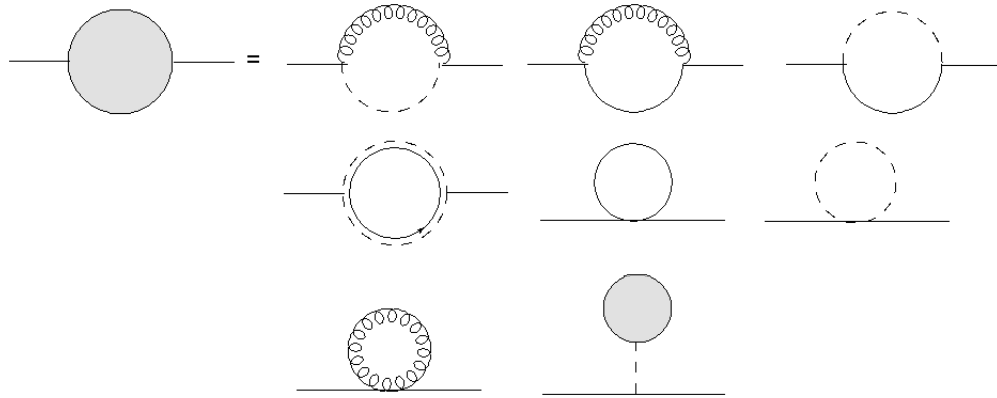
Figura 57 - Função de Green $\langle h \rangle$



Legenda: Diagramas que contribuem para a função de Green $\langle h \rangle$ a 1-loop.

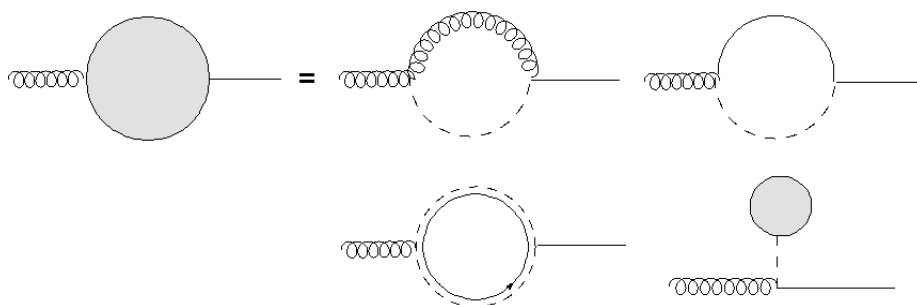
Fonte: O autor, 2022.

Figura 58 - Função de Green $\langle \rho^a(x) \rho^b(y) \rangle$



Legenda: Diagramas que contribuem para a função de Green $\langle \rho^a(x) \rho^b(y) \rangle$ a 1-loop.
Fonte: O autor, 2022.

Figura 59 - Função de Green $\langle A_\mu^a(x) \rho^b(y) \rangle$



Legenda: Diagramas que contribuem para a função de Green $\langle A_\mu^a(x) \rho^b(y) \rangle$ a 1-loop.
Fonte: O autor, 2022.