



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Jonatas Motta Quirino

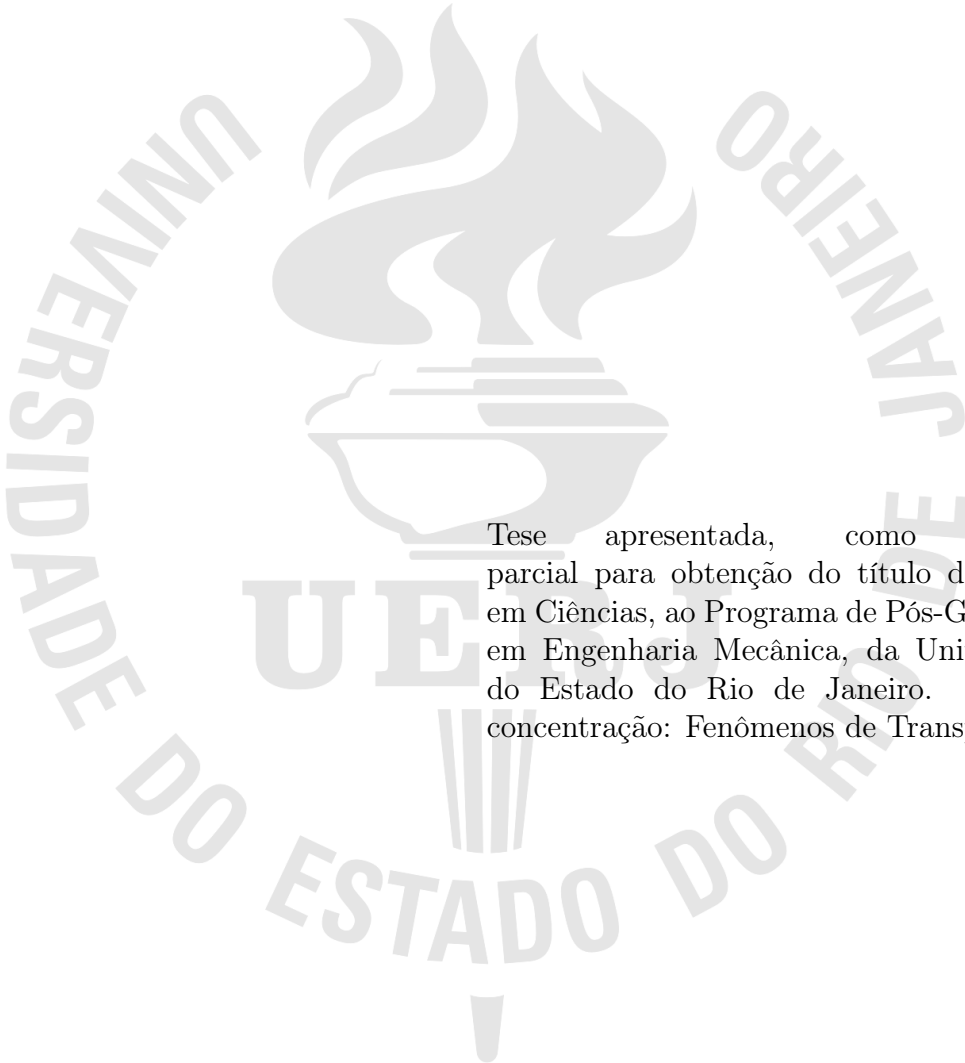
**Transferência de calor em aletas porosas por métodos analíticos e
numéricos em problemas não lineares**

Rio de Janeiro

2022

Jonatas Motta Quirino

**Transferência de Calor em aletas porosas por métodos analíticos e numéricos
em problemas não lineares**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transportes.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Dias Corrêa

Coorientador: Prof. Dr. Rodolfo do Lago Sobral

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

Q8 Quirino, Jonatas Motta.
Transferência de calor em aletas porosas por métodos analíticos e numéricos em problemas não lineares / Jonatas Motta Quirino. – 2022.
90f.

Orientador: Eduardo Dias Corrêa.
Coorientador: Rodolfo do Lago Sobral.
Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Teses. 3. Permutadores térmicos - Teses. 4. Métodos de simulação - Teses. I. Corrêa, Eduardo Dias. II. Sobral, Rodolfo do Lago. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 536.33

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Jonatas Motta Quirino

**Transferência de Calor em aletas porosas por métodos analíticos e numéricos
em problemas não lineares**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transportes.

Aprovado em: 13 de setembro de 2022

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Dias Corrêa (Orientador)

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

Prof. Dr. Rodolfo do Lago Sobral (Co-orientador)

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da
Fonseca - CEFET/RJ

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

Prof^a. Dr^a. Maria Laura Martins Costa

Universidade Federal Fluminense - UFF

Prof. Dr. Nide Geraldo do Couto Ramos Fico Júnior

Escola Naval - EN

Prof. Dr. Gustavo Rabello dos Anjos

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Rio de Janeiro

2022

AGRADECIMENTO

A gratidão, por si só, é um momento da vida que nos afasta um pouco de quem achamos que somos para nos aproximarmos daqueles que nos fazem ser quem realmente somos. Por isso me torno devedor da gratidão àqueles que me forjam na jornada da vida.

Deus, o Supremo forjador, que me moldou e a quem me submeto estar em constante deformação como bem Lhe parecer.

À minha esposa, Hellen, que é meu principal motivo de não parar de prosseguir. Meu oásis de águas calmas. A conquista também é sua.

Ao meu pai, Eliezer, que me deu tudo. Me deu uma vida e uma razão para ser quem tento ser.

Ao meu irmão, Tiago, meu companheiro de todas as jornadas. A ele devo todo meu conhecimento.

À minha irmã, Lília, sendo um ponto de equilíbrio e referência para construir meu caminho.

À minha mãe, Lilian, maior entusiasta de todas as minhas empreitadas.

À minha mãe, Dalva, que chora todas as minhas lágrimas e festeja minhas alegrias.

Aos meus ilustres professores orientadores, que acreditaram em mim e me colocaram nesse excelente ponto da jornada científica.

Aos meus amigos.

Vocês constroem o caminho por onde trilho.

*Ego sapientia habito cum prudentia
et artem excogitandi invenio.*

Liber Proverbiorum 8:12

Biblia Sagrada - Nova Vulgata

RESUMO

QUIRINO, Jonatas Motta. *Transferência de Calor em aletas porosas por métodos analíticos e numéricos em problemas não lineares*. 91 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2022.

A análise de problemas de dissipação de calor que envolvem aletas, tipicamente são expressos em situações de dissipação térmica, a qual é incrementada pela superfície estendida. Muitos modelos de problemas como desse tipo já foram desenvolvidos, onde cada modelo parte de pressuposições, simplificações ou aproximações que permitam ou colaborem com a solução do problema. Nesse sentido, este trabalho busca uma nova abordagem ao problema, propondo uma perspectiva analítica e outra numérica em uma modelagem que contemple fatores e fenômenos desconsiderados pela literatura específica para uma aplicação onde haja a dissipação de calor a partir de uma superfície primária, em que está ligada uma aleta porosa. A porosidade da aleta deixa a situação mais sofisticada, e essa análise em muitos estudos não é realizada adequadamente, pois os poros internos da aleta permitem que a superfície de troca de calor seja maximizada. Aliada a isso, será implementado um modelo não linear, pois a troca de calor por radiação térmica, bem como a convecção térmica serão avaliados, o que torna a equação que rege o problema como um modelo não linear. Para a modelagem a equação se baseia no método de Darcy para meios porosos, em que simulações numéricas buscam a solução de uma sequência de problemas lineares, onde cada elemento dessa sequência possui um princípio mínimo equivalente, que tem como limite a solução do problema original. À equação não linear que governa o problema é aplicado o método de Diferenças Finitas e, assim, é estudada a sequência de problemas lineares proposta e sua convergência. É investigada, por fim, a influência dos parâmetros físicos de radiação e como ela traz o modelo mais próximo de situações reais.

Palavras-chave: Solução analítica. Simulação numérica. Radiação térmica. Aletas porosas.

ABSTRACT

QUIRINO, Jonatas Motta. *Heat transfer in porous fins by analytical and numerical methods in nonlinear problems.* 91 f. Thesis (Doctorate in Mechanical Engineering) - Engineering School, State University of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2022.

The analysis of heat dissipation problems involving fins are typically expressed in situations of thermal dissipation, which is increased by the extended surface. Many problem models of this type have already been developed, where each model starts from presuppositions, simplifications or approximations that allow or collaborate with the solution of the problem. In this sense, this work seeks a new approach to the problem, proposing an analytical and a numerical perspective in a modeling that includes factors and phenomena disregarded by the specific literature for an application where there is heat dissipation from a primary surface, in which it is connected a porous fin. The fin porosity makes the situation more sophisticated, and this analysis in many studies is not performed properly, as the internal pores of the fin allow the heat exchange surface to be maximized. Allied to this, a non-linear model will be implemented, as the heat exchange by thermal radiation, as well as thermal convection will be evaluated, which makes the equation that governs the problem a non-linear model. For modeling, the equation is based on Darcy's method for porous media, in which numerical simulations seek the solution of a sequence of linear problems, where each element of this sequence has an equivalent minimum principle, which has as its limit the solution of the original problem. The Finite Differences method is applied to the nonlinear equation that governs the problem and, thus, the proposed sequence of linear problems and their convergence are studied. Finally, the influence of the physical parameters of radiation and how it brings the model closer to real situations is investigated.

Keywords: Analytical Solution. Numerical Simulation. Thermal radiation. Porous fins.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplo de trocador de calor compacto do tipo de placas.	19
Figura 2	Esquema de funcionamento de um trocador de calor de placas, com representação das direções dos fluidos.	19
Figura 3	Exemplos de trocadores aletados com diferentes geometrias para aplicações diferentes.	20
Figura 4	Esquema de funcionamento de rejeição de calor de fluido escoando no interior de um tubo aletado.	21
Figura 5	Exemplos de diferentes perfis geométricos de aletas.	24
Figura 6	Ilustração de um modelo de aleta radial e suas principais regiões.	24
Figura 7	Exemplos das variações de condutividade térmica no alumínio e no cobre, materiais tipicamente utilizados em engenharia.	26
Figura 8	Ilustração do modelo de aleta radial porosa, apresentando as principais características geométricas em detalhe.	33
Figura 9	Ilustração gráfica de um funcional coercivo, onde, na região limitada, a curva em vermelho deve necessariamente estar abaixo da curva amarela.	49
Figura 10	Quantidade de iterações requeridas para diversos valores de α	52
Figura 11	Quantidade de iterações requeridas para pequenos valores de α	53
Figura 12	Ilustração da segmentação da aleta em vista frontal, mostrando os pontos nodais que serão analisados.	54
Figura 13	Comportamento da sequência em pontos da superfície da aleta igualmente espaçados.	55
Figura 14	Comportamento da sequência, mostrando a quantidade de elementos requeridos na sequência para a estabilização da temperatura no ponto 0,25. .	56
Figura 15	Comportamento da sequência, mostrando a quantidade de elementos requeridos na sequência para a estabilização da temperatura no ponto 0,5. .	57
Figura 16	Comportamento da sequência, mostrando a quantidade de elementos requeridos na sequência para a estabilização da temperatura no ponto 0,75. .	58
Figura 17	Comportamento da sequência, mostrando a quantidade de elementos requeridos na sequência para a estabilização da temperatura no ponto 1,0. .	59

Figura 18 Avaliação da quantidade de iterações que não provocam mudança considerável no perfil térmico no ponto 1,0, em detalhe.....	60
Figura 19 Comportamento da sequência no meio da aleta (ponto 0,5) para diferentes α	62
Figura 20 Comportamento da sequência no meio da aleta (ponto 0,5) para $\alpha = 0,01$.	63
Figura 21 Comportamento da sequência no meio da aleta (ponto 0,5) para $\alpha = 0,0001$.	64
Figura 22 Comportamento da sequência no topo da aleta (ponto 1,0) para diferentes α	65
Figura 23 Quantidade de elementos requeridos para convergência do último nó (ponto 1,0), descrevendo uma tendência da convergência.....	66
Figura 24 Perfil Térmico gerado com $\alpha = 10$, $A = 1$ e $B = 1$	68
Figura 25 Superfície resultante da análise dos perfis térmicos gerados com diferentes quantidades de elementos na sequência.	69
Figura 26 Diversos perfis térmicos gerados por diferentes valores de taxa de porosidade, com $\alpha = 10$ e $B = 1$	71
Figura 27 Valores de temperatura normalizados para os quais a sequência converge do último nó (ponto 1,0), descrevendo uma tendência de variação de A. ...	72
Figura 28 Diversos perfis térmicos gerados por diferentes valores de taxa de Radiação Térmica, com $\alpha = 10$ e $A = 1$	76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Iterações mortas	61
Tabela 2	Quantidade de elementos requeridos para convergência do último nó	66
Tabela 3	Discrepância do valor de θ 100% afastado da base da aleta (ponto nodal 1,0) para vários A	72
Tabela 4	Comparação de valores de θ entre porosidade $A = 2$ e $A = 0$	73
Tabela 5	Comparação de valores de θ entre porosidade $A = 5$ e $A = 2$	74
Tabela 6	Comparação de valores de θ entre porosidade $A = 8$ e $A = 5$	74
Tabela 7	Comparação de valores de θ entre porosidade $A = 10$ e $A = 8$	75
Tabela 8	Comparação de valores de θ entre radiação $B = 20$ e $B = 0$	76
Tabela 9	Comparação de valores de θ entre radiação $B = 40$ e $B = 0$	77
Tabela 10	Comparação de valores de θ entre radiação $B = 60$ e $B = 0$	77
Tabela 11	Comparação de valores de θ entre radiação $B = 80$ e $B = 0$	78
Tabela 12	Comparação de valores de θ entre radiação $B = 100$ e $B = 0$	79

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	A MODELAGEM	17
1.1	Geometria	23
1.2	Parâmetros físicos	25
1.2.1	Condutividade térmica	25
1.2.2	Radiação térmica	26
1.2.3	Porosidade	29
1.3	A Equação	30
2	ABORDAGEM MATEMÁTICA	34
2.1	Parâmetro de porosidade A	34
2.2	Parâmetro de radiação B	35
2.3	As condições de contorno	36
2.4	Sequência de problemas	37
2.4.1	Prova do não decrescimento	39
2.4.2	Limite superior	41
2.5	Solução exata	42
3	MÉTODOS NUMÉRICOS	44
3.1	O Método de Diferenças Finitas	44
3.2	Existência e unicidade da solução	46
3.2.1	Convexidade	47
3.2.2	Coercividade	49
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	51
4.1	Análise da sequência	51
4.2	Convergência da sequência	53
4.2.1	Análise de α	61
4.3	Perfil Térmico	67
4.3.1	Parâmetro A	70
4.3.2	Parâmetro B	75

CONCLUSÃO	80
TRABALHOS FUTUROS	82
REFERÊNCIAS.....	83

INTRODUÇÃO

Em todas as áreas de estudo que envolvem engenharia, nota-se um considerável avanço dos processos de modelagem solicitados pelos problemas típicos tratados pelos engenheiros. Isso significa que à medida em que os processos de solução se tornam mais sofisticados, tem sido possível propor análises mais complexas a problemas historicamente simplificados, ou mesmo àqueles negligenciados por terem, até então, solução impossível [1].

Mesmo com o avanço da modelagem matemática, alguns modelos propostos ainda apresentam diversos entraves por limitações nos métodos de solução. Para vencer tal obstáculo, o último século tem testemunhado avanços em técnicas computacionais para resolver numericamente problemas que a engenharia não encontra fácil solução analítica. Os modelos analíticos ainda são importantes em técnicas aproximadas que requerem métodos computacionais [2].

Uma das grandes áreas da engenharia que tem usufruído amplamente das vantagens oferecidas pelos métodos numéricos é a ciência térmica, onde problemas de transferência de calor e massa têm sido solucionados satisfatoriamente. Através da modelagem matemática é possível desenvolver métodos de solução para problemas que apresentem condições de contorno não lineares, como é o caso dos problemas que envolvem dissipação de calor através de radiação. Os problemas de dissipação de calor podem ser encontrados em diversas situações cotidianas, além de inúmeras pesquisas e modelagens, visto que controlar corretamente a transmissão de calor de um corpo é extremamente importante em diversas aplicações de engenharia [3].

Das principais formas de incremento e otimização da dissipação de calor, pode-se destacar a utilização de aletas, isto é, superfícies estendidas, as quais são conectadas a um corpo que gera calor, doravante chamado de superfície primária, a fim de aumentar a superfície de dissipação térmica. Essa é, em geral, a escolha mais básica para problemas em que busca-se aumentar a taxa de transmissão de calor entre corpos, principalmente por ser um meio economicamente viável, por apresentar baixo custo. Tal aplicação visa proporcionar um aumento da superfície efetiva de transferência de calor. Uma vez que a necessidade de otimizar os processos de transmissão térmica é encontrada em diversas situações práticas, o estudo do comportamento térmico das aletas torna-se uma questão

fundamental na área de transferência de calor [4], [5], [6], [7].

Além disso, nos sistemas de troca de calor de alto desempenho, a engenharia tem buscado soluções cada vez com menor custo e com menor ocupação do espaço disponível, fatores esses que geralmente são contemplados pelo uso de superfícies estendidas [8], [9].

Atualmente, componentes de transferência de calor de alto desempenho estão relacionados à necessidade de alcançar altas taxas de transferência de calor com baixo custo e, acima de tudo, espaço e peso limitados. A transferência de calor em superfícies estendidas é, atualmente, um dos principais focos de estudos de transferência de calor de alto desempenho, respondendo pelos mais variados parâmetros e respectivos comportamentos no mapeamento térmico [10], [11], [12].

Um típico exemplo de aplicação dessas tecnologias pode ser visto em usinas térmicas e termonucleares, visto que tais usinas contam com o circuito primário que consiste de tubulações próprias para conter o fluido que será aquecido pelo sistema de geração de cada caso e com um circuito secundário que fica responsável por conter um segundo fluido que é encarregado por dissipar o calor gerado pelo sistema principal. No caso das usinas termonucleares, tipicamente são instaladas em locais próximo ao mar, pois é o mar que recebe o calor rejeitado pelo sistema tubular secundário [13], [14], [15].

A superfície estendida é amplamente utilizada em diversos sistemas de engenharia que incorporam desde conhecidos trocadores de calor até tubos de calor como mostram estudos recentes [16], [17] e [18].

O dimensionamento eficaz de aletas e dissipadores de calor requer conhecimento preciso da transferência de calor em superfícies estendidas. Normalmente, as transferências de calor por convecção e condução são os principais mecanismos considerados, mas a transferência de calor por radiação tem efeito significativo em aplicações específicas envolvendo principalmente altas temperaturas e/ou atmosferas rarefeitas [19], [20].

Ao implementar um sistema de troca de calor que conte com superfícies estendidas, deve-se ter em mente que o material do qual a superfície é composto também apresenta características extremamente influentes na taxa de transferência de calor e, conseqüentemente, em sua eficiência. A fim de aumentar ainda mais a taxa de transferência de calor que a aleta é capaz de proporcionar, que neste estudo contempla apenas a dissipação do calor, isto é, a remoção de parte do calor proveniente do corpo, aplicações de alto desempenho térmico recorrem à utilização de materiais porosos, visto que os poros que a aleta

possui aumentam ainda mais a superfície de troca de calor, incrementando, portanto, sua taxa de transmissão [21], [22].

Devido à maior área de superfície efetiva, as aletas porosas apresentam melhor desempenho térmico quando comparadas às convencionais sólidas de tamanho equivalente. Na literatura, constituintes porosos de alta condutividade térmica têm sido utilizados para melhorar o desempenho térmico de diferentes sistemas térmicos. A bioengenharia, as tecnologias eletrônicas e, principalmente, nanotecnologia (mais recente), têm se preocupado em conhecer os efeitos da transferência de calor em meios porosos.

Alguns estudos alavancaram a aplicação das aletas porosas. Pop et al. (1985) [23] conduziram análises de convecção livre de conjugado em estado estacionário sobre uma aleta vertical embutida em um meio poroso.

Huang e Vafai (1994) [24] apresentaram uma investigação do aumento de convecção forçada em um canal usando vários blocos porosos.

Kim et al. (2000) [25] investigaram experimentalmente o impacto de aletas porosas na queda de pressão e características de transferência de calor em trocadores de calor placa-aleta.

Kiwan (2006) [26] introduziu um método simples de análise para estudar o desempenho de aletas porosas em um ambiente de convecção natural.

Kundu e Bhanja (2011) [27] desenvolveram um modelo analítico para determinação do desempenho e dimensões ótimas de aletas porosas contabilizando diferentes modelos de predições. Gorla e Bakier (2011) [28] consideraram os efeitos de radiação e convecção em meios porosos em aletas de perfil retangular.

Darvishi et al. (2013) [22] realizaram um estudo numérico de transferência de calor em estado estacionário em aleta retangular porosa sob influência de convecção natural e radiação usando método de análise homotópica. Darvishi et al. (2014) [29] investigaram numericamente o efeito térmico transitório no desempenho da aleta porosa e o estudo comparativo entre a aleta com ou sem radiação. Darvishi et al. (2016) [30] resolveram a equação de energia com o Método de Colocação Espectral em aletas longitudinais úmidas sob convecção e radiação naturais.

Sobamowo (2017) [31] analisou a transferência de calor em aletas porosas com condutividade térmica dependente da temperatura. Os resultados mostram que aumentos nos parâmetros convectivos e de porosidade melhoraram a eficiência da aleta.

Jooma e Harley (2017) [32] verificaram numericamente a transferência de calor em uma aleta radial porosa com o método de transformação diferencial.

Sowmya et al. (2020) [33] estudaram numericamente o comportamento térmico de uma aleta longitudinal porosa sob efeito de convecção-radiação. A equação diferencial parcial não linear foi normalizada e resolvida numericamente com o auxílio do software Maple pelo Método das Diferenças Finitas.

Diversos estudos de dissipação de calor são realizados ao longo da história, embora muitos deles admitam determinada simplificação para possibilitar a solução do problema. Esse é o caso que este trabalho aborda, uma vez que são analisados os efeitos da dissipação de calor por radiação térmica dos materiais. O fenômeno, embora não seja novidade aos estudos de transferência de calor por aletas, apresenta solução analítica complexa, que geralmente é acompanhada de ferramentas numéricas que auxiliam na solução. [34] [35]

Conceitos e aplicações como esses citados, de meios porosos atrelados à transferência de calor por radiação térmica, são amplamente negligenciados na literatura haja vista que a implementação de tais efeitos na modelagem matemática de problemas de dissipação de calor trazem obstáculos à sua solução. Matematicamente falando, pode-se destacar a não linearidade obtida através da inserção dos efeitos da radiação, e a complexidade física de tratar os meios porosos. Uma vez que o problema irá trazer uma modelagem de uma situação que envolve condução, convecção e radiação térmica concomitantes, aplica-se o modelo de Darcy para investigar e simular o escoamento que acontece em um meio poroso. [36], [37]

Com o objetivo de tratar adequadamente os modelos que serão utilizados neste trabalho, serão realizadas duas abordagens complementares: uma solução analítica e uma solução numérica. A abordagem analítica para a equação geral do problema será tratada pelo limite de uma sequência linear da qual cada um dos elementos que a compõe será resultado da minimização de um funcional quadrático. Paralelamente, a solução numérica irá utilizar o método iterativo de diferenças finitas que permita alcançar a solução da equação diferencial não linear. [38] [39]

Dessa forma, por fim, serão apresentados os estudos de influência dos efeitos da dissipação de calor por radiação térmica, a influência do parâmetro de porosidade do material que compõe a aleta, além dos estudos inerentes ao método numérico, como análise de convergência do método e a prova da solução analítica exata do problema,

na qual a convexidade e a coercividade do funcional relacionado à equação provam a existência e unicidade da solução da minimização do funcional.

1 A MODELAGEM

O problema investigado por esse trabalho se concentra na aplicação de superfícies estendidas acopladas a fontes de calor que necessitem de dissipação térmica por um meio simples, econômico e de pouca utilização do espaço.

As aplicações de sistemas de dissipadores de calor podem ser encontradas desde a indústria alimentícia, onde existem diversos processos que envolvem troca térmica induzida, como na pasteurização de alimentos que comumente utiliza trocadores de calor de placas [40], passando pelo controle térmico de reservatórios de fermentação e reatores até a esterilização de recipientes. [41]

Diversos sistemas apresentam essa demanda, principalmente devido à necessidade de funcionamento e operação dentro de um limite específico de temperaturas. Sistemas eletrônicos se enquadram nessa categoria, visto que seu funcionamento adequado se limita a faixas específicas de temperatura, fora das quais o sistema corre riscos de colapso.

Na indústria automotiva, a utilização de superfícies aletadas se dá principalmente nos sistema de arrefecimento, onde o motor de combustão gera uma quantidade alta de calor que deve ser removida para o funcionamento adequado do motor. As aletas, nesse caso, são utilizadas em sistemas de trocadores de calor de placas, onde um fluido de refrigeração passa em seu interior auxiliando o processo. [42]

Em sistemas de geração de energia, comumente encontram-se sistemas de troca de calor que contam com o auxílio de superfícies estendidas, visto que grande parte de tais processos se baseiam em processos de combustão, ou possuem um nível elevado de atrito em suas turbinas de geração, ou mesmo em sistemas de geração solar que, assim como em sistemas eletrônicos, devem trabalhar dentro de uma faixa de temperatura específica. [43]

A parte das instalações industriais usada para transportar fluidos é um importante setor a ser avaliado, visto que estima-se que o custo das tubulações, em diversas indústrias, pode alcançar 70% do custo com aquisição de equipamentos, ou mesmo 25% do custo total da instalação. [44]

Diversas aplicações são vistas atualmente na indústria de sistemas de refrigeração de instalações tubulares, visto que em muitos segmentos de engenharia faz-se necessário o transporte de fluidos em temperaturas mais altas do que aquelas em que de fato devem

ser encontradas no processamento desse fluido. [45]

Os trocadores de calor industriais são os componentes que mais se utilizam de tais mecanismos de troca térmica. Embora existam incontáveis equipamentos dessa natureza, alguns se destacam em utilização. Este trabalho, no entanto, não visa descrever cada trocador de calor, mas sim apresentar aplicações do mecanismo de troca térmica e a necessidade de se aprofundar no assunto. Como é o intuito deste trabalho, destacam-se aqui os equipamentos que incrementam a taxa de transmissão de calor, buscando ainda a otimização de espaço. Vários equipamentos com essa finalidade têm sido implementados e estudados nos mais diversos campos industriais [46].

Dos diversos tipos de trocadores de calor utilizados industrialmente para aplicações variadas, pode-se, para o propósito deste estudo, destacar os trocadores de calor do tipo de placas e os trocadores de calor compactos. Mesmo esses mencionados podem ser encontrados em configurações e aplicações das mais diversas, o que mostra que os estudos de aprofundamento desses dispositivos é crucial para o desenvolvimento da indústria em diversas áreas [47].

Os trocadores de calor de placas são amplamente utilizados quando se busca uma otimização de ocupação de espaço, preservando-se uma alta taxa de transferência de calor, portanto podem ser categorizados na extremidade inferior do espectro de compacidade, e são amplamente utilizados para inúmeras aplicações industriais, apresentando compacidade, eficácia, flexibilidade de projeto e baixo custo [48]. Esse tipo de trocador de calor pode ser visto na Figura 1.

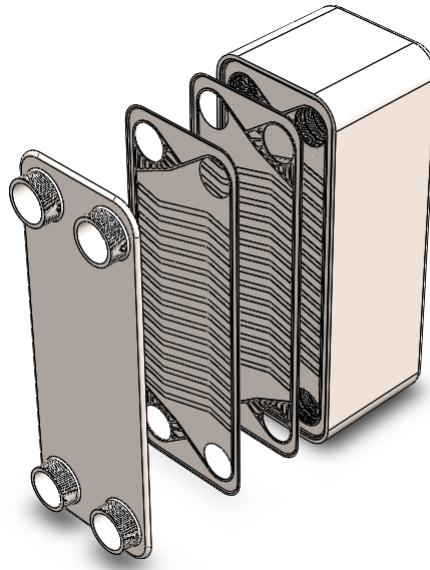


Figura 1: Exemplo de trocador de calor compacto do tipo de placas.

A fim de contextualizar o interesse da menção desse tipo de equipamento para troca de calor, a Figura 2 mostra como o escoamento dos fluidos de transferência térmica percorrem o sistema, na atuação do mecanismo de troca de calor [48].

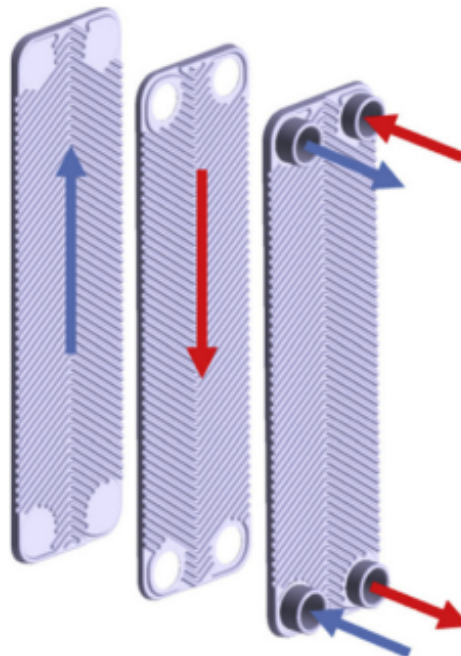


Figura 2: Esquema de funcionamento de um trocador de calor de placas, com representação das direções dos fluidos.

Além do trocador de calor de placas, outros tipos de trocadores de calor compactos

são de particular interesse a esse estudo, basicamente quando o mecanismo de troca de calor visa remover calor do sistema através do escoamento interno em um elemento tubular em que esteja acoplada uma aleta. Esse tipo de trocador de calor é conhecido como *fin-and-tube*, que em tradução livre, doravante será chamado aleta tubular.

Wang et al. (1997) [49] expuseram algumas formas de configuração de elementos tubulares com aletas acopladas à sua superfície. A Figura 3 mostra três configurações propostas por Wang et al. (1997), em que mostra-se respectivamente aletas retas, aletas circulares e aletas de placas contínuas.

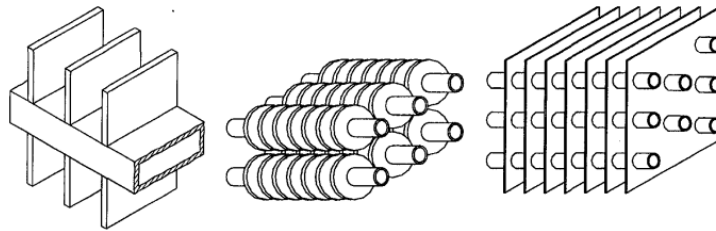


Figura 3: Exemplos de trocadores aletados com diferentes geometrias para aplicações diferentes.

Este trabalho se debruça nas aletas radiais, conforme visto na Figura 3, em que o propósito básico é dissipar o calor da superfície de um tubo em cujo interior escoar um fluido unidirecionalmente, gerando, assim, um gradiente térmico na superfície desse tubo, devido à perda de calor do fluido ao longo do trajeto de escoamento, conforme está ilustrado na Figura 4.

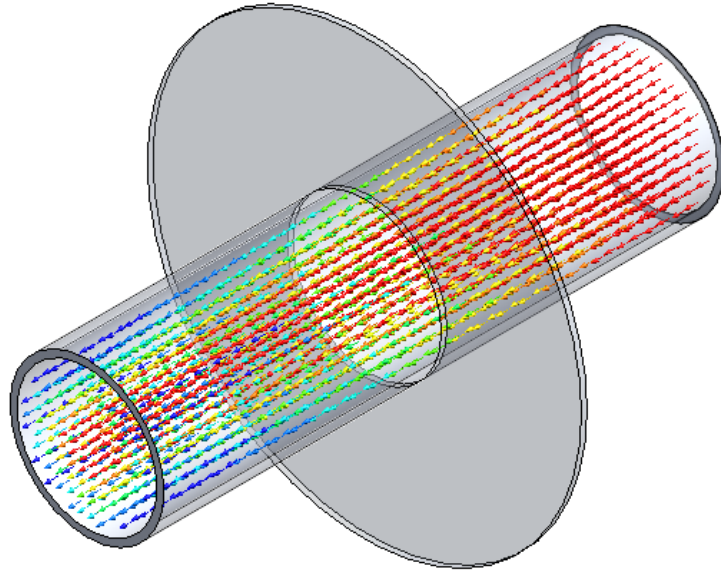


Figura 4: Esquema de funcionamento de rejeição de calor de fluido escoando no interior de um tubo aletado.

Nesse sentido, há uma ampla necessidade do correto dimensionamento dos sistemas de dissipação de calor e, por consequência, o modelo matemático que os descrevem devem ser também corretamente analisado para que haja uma previsibilidade das taxas de transferência de calor [50].

Uma forma típica e simples em que os problemas de dissipação com aletas se apresenta pode ser descrito pela Equação (1), conhecida como equação de Fourier-Biot.

$$\nabla^2(kT) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

onde

∇^2 é o operador Laplaciano

k é a condutividade térmica do corpo

T é a temperatura

\dot{q} é a geração interna de calor

ρ é a densidade de massa do material

c é a capacidade térmica específica

t é o intervalo de tempo da análise

Uma abordagem viável que simplifica toda a análise, bem como o modelo, é a consideração de que a análise do sistema acontece após alcançar um equilíbrio térmico, ou seja, ao longo do tempo não há variações consideráveis no perfil térmico espacial gerado.

Pode-se considerar que há muitas aplicações de engenharia nas quais existe significativa variação nos parâmetros que influem na taxa de transferência de calor. Contudo, mesmo nesses problemas, é tipicamente possível aproximar a abordagem a uma análise estacionária. Isso geralmente é representado por uma análise posterior ao equilíbrio térmico, que não significa que não hajam variações térmicas com o tempo, porém nesse caso a análise térmica é feita em um instante de tempo fixo, cujas variações de temperaturas posteriores se tornam irrelevantes à análise [51].

Isso é o mesmo de dizer que o transiente térmico é desconsiderado, ou mesmo que a análise é termicamente estacionária. Dessa forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Além disso, como foi explicado no início deste capítulo, a análise que interessa a este estudo caracteriza que a aleta investigada é exclusivamente um dissipador do calor oriundo da superfície primária a qual ela está acoplada.

A geração de calor é o fenômeno fundamental para a existência do problema da dissipação de calor. Isso acontece pelo simples fato de ser necessária uma fonte primária de calor o qual será dissipado ao ambiente pelas superfícies estendidas.

Em todo sistema térmico há uma fonte de calor, do qual há a origem do calor, que pode ser representada vetorialmente, onde o fluxo interno do calor no sistema fonte-aleta descreve um percurso com origem na fonte de calor, indo em direção ao ponto onde a temperatura inicialmente é mais baixa.

Esse fenômeno é matematicamente descrito pela Lei de Fourier, em que se destaca o sinal negativo, dado que o gradiente térmico caracteriza o sentido vetorial do processo do ponto de maior temperatura ao ponto de menor temperatura, como descrito na Equação (3) [52].

$$q = -kA\nabla T \quad (3)$$

onde q é a taxa de transferência de calor e A é a área da seção transversal por onde o

calor passa.

Diante do exposto, pode-se pressupor que todo o sistema seja essa supracitada fonte de calor cuja propagação se dá em sua extensão, contudo, considera-se que o sistema se trate de um acoplamento de dois corpos, onde a superfície primária e a aleta compõe respectivamente a fonte e o dissipador de calor, sendo próprio a cada um deles uma atribuição singular [53], [54].

Tratar de um sistema de dissipação significa que não se considera que haja geração interna de calor pela aleta, o que pode-se representar matematicamente, portanto, como mostra a relação (4).

$$\dot{q} = 0 \quad (4)$$

Dessa forma a Equação (1) se torna

$$\nabla^2(kT) = 0 \quad (5)$$

Uma vez de posse da Equação (5), que é o modelo básico da dissipação, agora cabe caracterizar a geometria do problema.

1.1 Geometria

Diversos estudos ao longo dos anos têm sido feitos para investigar as melhores configurações geométricas para cada tipo de aplicação de aletas para otimização de troca de calor. Nesse sentido, observa-se que há uma demanda pela otimização no uso do espaço disponível, os custos envolvidos e a influência das diferentes geometrias possíveis na efetividade das aletas [55], [56].

Embora a geometria e suas mais diversas configurações influenciem diretamente a efetividade da superfície estendida, deve-se ter em mente a aplicação para qual se propõe e a viabilidade da análise que será feita.

Existem diversos perfis geométricos de superfícies estendidas, onde cada perfil apresenta uma característica específica na taxa de troca de calor, trazendo consigo uma determinada complexidade ao modelo. O perfil mais simples que pode ser adotado é o de aletas retangulares, que são utilizadas com mais frequência. A Figura 5 apresenta alguns tipos de perfis que podem ser encontrados em superfícies estendidas.

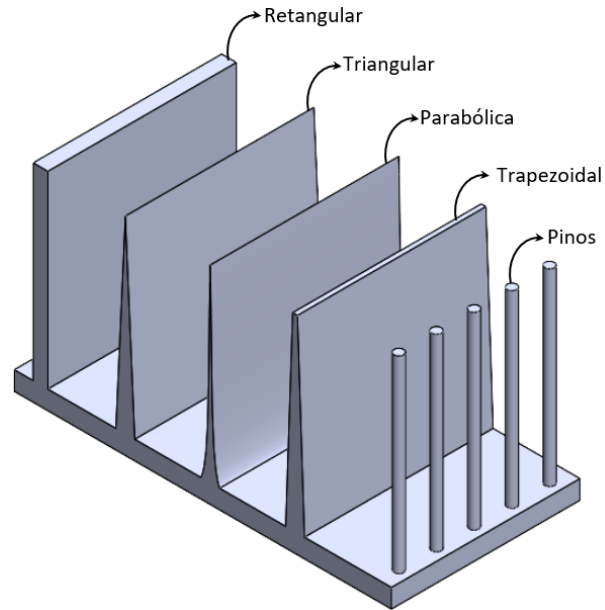


Figura 5: Exemplos de diferentes perfis geométricos de aletas.

Analisando, portanto, uma aleta de perfil retangular em disposição radial, obtém-se um sistema em que a superfície estendida está conectada a uma superfície tubular em posição vertical, como pode ser visto na Figura 6.

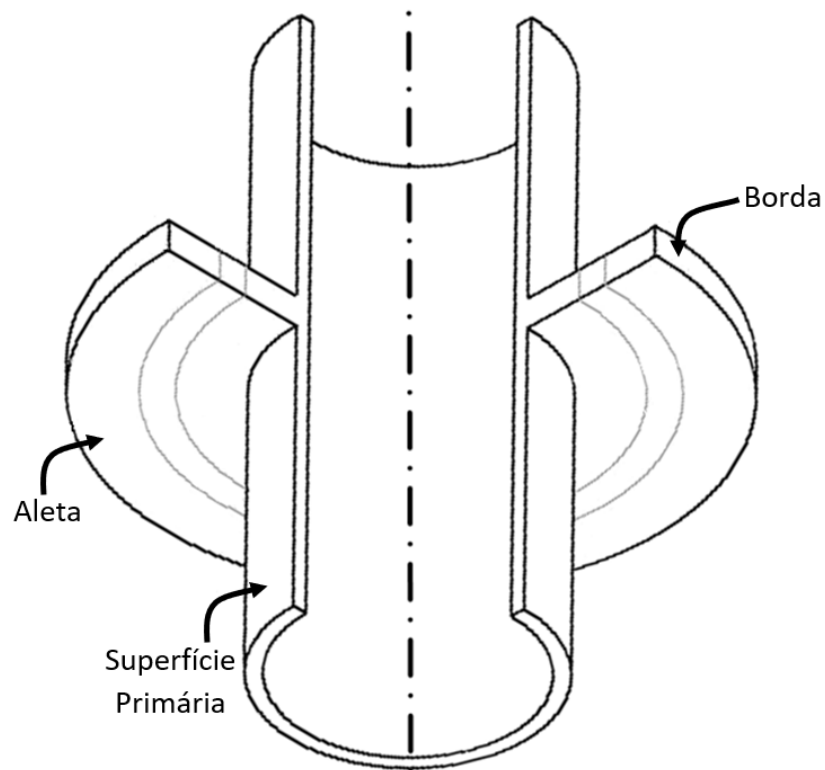


Figura 6: Ilustração de um modelo de aleta radial e suas principais regiões.

A partir da geometria escolhida, deve-se ajustar a Equação (5) para coordenadas cilíndricas, chegando na Equação (6).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(kr \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (6)$$

onde r , ϕ e z são as coordenadas cilíndricas do sistema.

Considera-se, também, que a temperatura da base da aleta, ou seja, no corpo do tubo onde a aleta está localizada, é uniforme. Isso significa que a temperatura é uniforme para todo ϕ , que é o mesmo que dizer que $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$.

Lembrando que o modelo já desconsiderou a geração interna de calor e o transiente térmico, a Equação Diferencial Parcial (6) se torna a Equação (7).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (7)$$

Uma vez estabelecida a geometria do problema e o modelo matemático que a descreve no contexto de transferência de calor, cabe agora analisar os parâmetros físicos envolvidos no problema.

1.2 Parâmetros físicos

Para realizar uma análise correta do problema e, por fim, fazer conclusões acertadas, é necessário que os dados que serão analisados tenham o máximo possível de aderência à realidade, sendo, portanto, necessária uma certa atenção aos fenômenos físicos envolvidos e sua parcela de influência na modelagem do problema.

O dissipador analisado tem por premissas básicas ser de material isotrópico e homogêneo, o que significa dizer que suas propriedades físicas, que serão abordadas nesta seção são independentes das direções espaciais e que todo o material que compõe a aleta possui exatamente as mesmas propriedades em cada ponto. Para isso, serão analisados separadamente os fenômenos físicos mais influentes no modelo e como eles afetam a descrição do problema.

1.2.1 Condutividade térmica

A maioria dos modelos que trata da dissipação de calor por superfícies estendidas considera que o coeficiente de condução de calor k seja um valor constante indepen-

dentemente dos valores de temperatura. Essa consideração é razoável na maioria das aplicações, visto que a maioria dos materiais tipicamente utilizados para superfícies estendidas apresenta condutividade térmica aproximadamente constante na maior parte da sua temperatura de trabalho.

A evidenciação dessa característica pode ser vista em uma vastidão de materiais, considerando-se uma região de temperatura de operação. A Figura 7 exemplifica essa tendência exponencial à estabilidade da condutividade térmica.

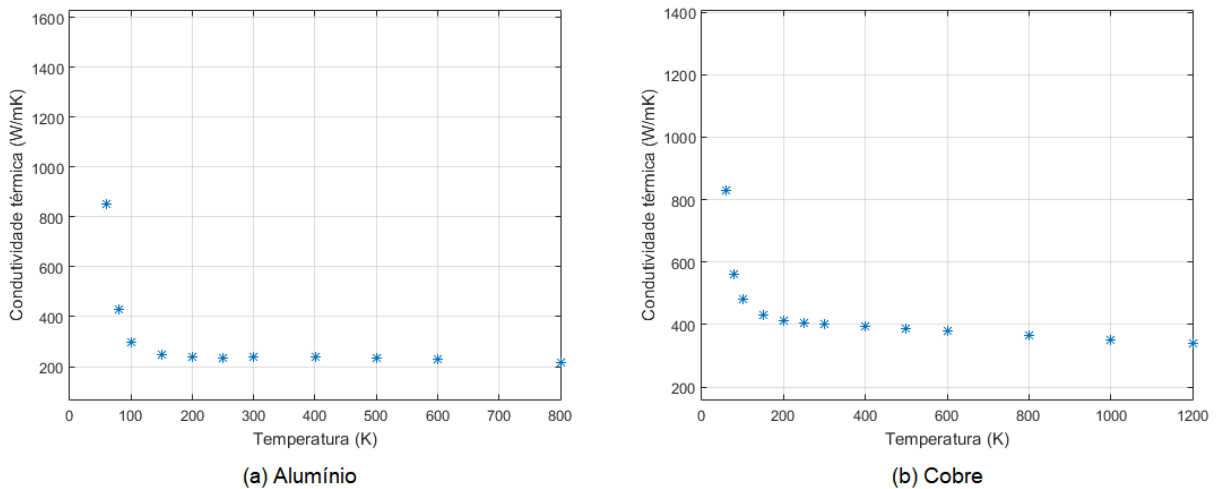


Figura 7: Exemplos das variações de condutividade térmica no alumínio e no cobre, materiais tipicamente utilizados em engenharia.

Dessa forma, considerar a condutividade térmica constante é o equivalente de dizer que $\frac{\partial k}{\partial T} = 0$, logo a Equação (7) é modificada, se tornando a Equação (8).

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (8)$$

Vale ressaltar que neste estudo o fenômeno de condução é o único mecanismo de transferência de calor a ser considerado no interior da aleta. Os demais mecanismos que serão mencionados e analisados são responsáveis exclusivamente pela dissipação de calor para fora da aleta.

1.2.2 Radiação térmica

O fenômeno da radiação térmica, em se tratando do contexto de dissipadores de calor por superfícies estendidas, comumente é negligenciado, considerando-se em análise

apenas os efeitos de condução e convecção térmica. O fato de não considerar a influência do fenômeno pode trazer discrepâncias consideráveis nos perfis térmicos analisados [57].

Para avaliar adequadamente como o fenômeno influencia sobre os resultados do modelo, deve-se antes compreender a formulação que descreve o fenômeno, dada pela Lei de Stefan-Boltzmann.

A formulação dessa lei deriva do estudo da termodinâmica do corpo negro, conceito esse que foi sugerido em 1862 por Gustav Kirchhoff, com o objetivo de descrever a emissividade do corpo como fator preponderante para a radiação térmica.

Mais tarde, em 1879, Josef Stefan realizou experimentos que o levaram a concluir que a energia emitida por um corpo de emissividade máxima (chamado corpo negro, que também é utilizado nesta análise) é uma função da quarta potência da temperatura [58].

Assim sendo, a análise das superfícies estendidas proposta por este trabalho considera o conceito de *corpo negro*, ou seja:

- Absorve completamente a radiação que incide sobre ele para todos os comprimentos de onda;
- Nenhum corpo emite mais radiação que ele, se comparados com os mesmos valores de temperatura e comprimento de onda;
- É um emissor difuso, ou seja, a radiação emitida não depende da direção de emissão.

Já em 1884 este modelo foi aprimorado por Ludwig Boltzmann, que propôs que a emissão total pode ser derivada de fundamentos clássicos da termodinâmica, em cuja análise não considerava a radiância espectral, que foi descoberta e proposta por Max Planck em 1901 [59], [60].

Atualmente, como os estudos, análises e leis supracitados já foram amplamente testados, debatidos e se estabeleceram, a lei de Stefan-Boltzmann, que descreve a energia por unidade de volume, ou seja, $u = \frac{U}{V}$, é simplesmente deduzida, na maioria dos livros, da lei de Planck integrada sobre frequências.

Analisando as conclusões de Boltzmann, percebe-se que os dois principais conceitos empregados por ele são a segunda lei da termodinâmica e o resultado obtido por James Clerk Maxwell em 1873, de que a radiação exerce uma pressão $p(T)$ proporcional à densidade de energia total, $p(T) = \frac{1}{3}u(T)$. O fator $\frac{1}{3}$, obtido por Boltzmann, resulta da média angular em três dimensões e é, de fato, o inverso da dimensionalidade do espaço [61].

Assim, considera-se que, uma onda monocromática com uma frequência determinada carrega um momento linear dado por $p = U/c$, sendo U a energia eletromagnética total e c a constante que descreve a velocidade da luz. Assim sendo, pode-se dizer que a reflexão no envoltório de um corpo que reflita absolutamente toda a radiação nele emitida, seja a origem da pressão termodinâmica p aplicada no corpo negro.

Por isso, de acordo com Montambaux (2018) [62], conclui-se que, se a densidade da energia emitida u é tipicamente $p = u/3$. Dessa forma é possível descrever a Equação (9)

$$\frac{du}{dT} = \frac{4u}{T} \quad (9)$$

cuja solução geral é

$$u = c_{rad}T^4 \quad (10)$$

onde c_{rad} é uma constante de radiação.

Para a investigação do problema, será considerado que a radiação térmica não propaga calor no interior da aleta, portanto a transmissão de calor responsável por distribuir o calor ao longo da superfície estendida é função apenas da condução térmica. Assim sendo, pode-se dizer geometricamente que a taxa de transferência de calor por condução e radiação são analisadas de acordo com as Equações (11) e (12).

$$q_{cond} = f(r) \quad (11)$$

$$q_{rad} = g(z) \quad (12)$$

Portanto até este ponto da análise, considera-se

$$k \frac{d}{dz} \left(\frac{dT}{dz} \right) = \sigma \varepsilon T^4 \quad (13)$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e ε é a emissividade do corpo.

Assim menciona-se mais uma vez que o problema descreve a dissipação de calor em uma geometria radial (cilíndrica), em que suas características próprias e as condições matemáticas para a análise ainda serão discutidas com maior profundidade.

Ao adicionar os efeitos da radiação no modelo, a equação geral que rege o problema passar a ter um termo não linear da temperatura, o qual altera o perfil térmico e muda

a perspectiva da abordagem matemática. Dessa forma, a Equação (8) se transforma na Equação (14).

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) - \sigma \varepsilon T^4 = 0 \quad (14)$$

O sinal negativo da Equação (14) se refere ao fato do mecanismo de transferência de calor por radiação ser exclusivamente um dissipador de calor, ou seja, não considera-se que haja absorção de calor pela aleta através da radiação térmica.

1.2.3 Porosidade

Um dos pontos centrais desta análise é aplicar à aleta em questão uma situação onde o meio que a compõe seja poroso, além de considerá-lo homogêneo e isotrópico, como já foi mencionado. A inserção de porosidade, além de alterar o problema e sua análise, também muda a abordagem aos fenômenos físicos envolvidos.

Isso posto, prossegue-se para a inserção do fenômeno no modelo proposto nesta análise. Para isso, recorre-se à Lei de Darcy, proposta pelo engenheiro francês Henry Philibert Gaspard Darcy em 1856. [63]

Define-se por meio poroso aquele que é formado por uma matriz porosa constituída por uma fase sólida estacionária e preenchida por uma fase fluida, onde a taxa de porosidade determina o volume livre de armazenamento. A taxa de porosidade é dada na Equação (15) por

$$\alpha_{poros} = \frac{V_{vazio}}{(V_{vazio} + V_{ocupado})} \quad (15)$$

onde V_{vazio} e $V_{ocupado}$ são os volumes vazio e ocupado, respectivamente.

De posse da relação entre os volumes vazio e ocupado em um meio poroso, torna-se possível descrever a razão das seções transversais vazia e ocupada em que ocorre o escoamento dada pela Equação (16).

$$\alpha_{poros} = \frac{A_{vazio}}{(A_{vazio} + A_{ocupado})} \quad (16)$$

onde A_{vazio} e $A_{ocupado}$ são as áreas de seção transversal vazia e ocupada, respectivamente.

Conhecendo, portanto a permeabilidade de um sistema em que haja escoamento, Darcy desenvolveu uma equação capaz de calcular a vazão Q em que um fluido de vis-

cosidade dinâmica μ atravessa um meio poroso de comprimento L , relacionando a permeabilidade do meio com o gradiente de pressão ΔP gerado no escoamento dada pela Equação(17).

$$Q = \frac{-KA \Delta P}{\mu L} \quad (17)$$

onde a permeabilidade do meio K , que atravessa um comprimento Δx , dada em unidades *darcy*, em que $1 \text{ darcy} = 10^{-12} m^2$ é dada por

$$K = \frac{v\mu\Delta x}{\Delta P} \quad (18)$$

A aplicação do meio poroso traz consigo propriedades interessantes à dissipação do calor, visto que os poros que compõem o material permitem a infiltração do fluido no qual a aleta está inserida, aumentando significativamente a taxa de transmissão de calor por convecção ao fluido. Além disso, a taxa de porosidade faz com que a área superficial da aleta seja amplificada, gerando assim uma maior capacidade de troca térmica.

1.3 A Equação

Uma vez definidos os parâmetros geométricos e físicos que serão considerados para a análise do problema, é possível compreender as descrições matemáticas que serão usadas e reuni-las permitindo uma análise abrangente da equação que governa o problema.

Para iniciar, considera-se a Equação Fundamental da Calorimetria, (19), que descreve a influência do fluxo de massa \dot{m} na transmissão do calor, sendo

$$dq = \dot{m}c_p dT \quad (19)$$

onde c_p é o calor específico à pressão constante.

Essa equação pode ser escrita como

$$q_r - q_{r+\Delta r} = \rho c_p A \Delta r \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (20)$$

onde os índices r e t representam respectivamente a posição e o instante que estão sendo analisados.

Portanto, considerando que

- a área $A = 2\pi rL$ para uma superfície plana é constante.
- a camada de espessura $\Delta r \rightarrow 0$.
- a espessura da aleta $t \rightarrow 0$.
- a difusividade térmica do material é dada por $\alpha_{difus} = \frac{k}{\rho c_p}$.

e combinando as Equações (8) e (20), tem-se que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha_{difus}} \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} \quad (21)$$

Agora aplicando as premissas que foram analisadas até aqui, desconsidera-se o transiente térmico e acrescenta-se o termo convectivo da rejeição do calor. Esse termo acrescenta o termo h que representa o coeficiente convectivo de troca de calor entre o corpo e o fluido que o cerca. Além disso, é importante considerar a absorvância (α_{absort}) do corpo para radiação.

E assim a Equação (22) traz o modelo que representa matematicamente o fenômeno da porosidade aplicado à transferência de calor.

$$q(r) - q(r + \Delta r) = \dot{m}c_p [T(r) - T_\infty] + hP\Delta r [T(r) - T_\infty] + P\Delta r\sigma\varepsilon \left[T^4(r) - \frac{\alpha_{absort}}{\varepsilon} T_\infty^4 \right] \quad (22)$$

onde o fluxo do fluido que atravessa a aleta deve ser paralelo à superfície primária e, conseqüentemente, perpendicular à condução do calor que vai da base ao topo da aleta. Portanto considera-se a velocidade do fluido na direção ajustada como v_p . Sendo P o perímetro da aleta, tem-se a Equação (23).

$$\dot{m} = \rho v_p \Delta r P \quad (23)$$

O meio poroso, como descrito na subseção 1.2.3, apresenta uma parte de seu volume vazia e outra parte ocupada pelo material. Quando associada a um problema de transferência de calor em que os valores de temperatura são muito superiores à temperatura ambiente (T_∞), essa característica traz consigo a possibilidade de incrementar a expansão térmica do volume do corpo. Tal característica também deve ser prevista na análise do problema, adicionando-se um coeficiente de expansão térmica β .

Portanto as interações entre o meio poroso e o fluido são descritas pela lei de Darcy e aproximação de Boussinesq, que fornece o modelo dado pela Equação (24).

$$v_p(r) = \frac{gK\beta}{\nu}[T(r) - T_\infty] \quad (24)$$

Salienta-se que a condutividade térmica praticada neste sistema já não apresenta mais os mesmos valores que se encontram em tabelas típicas, visto que tais valores são estabelecidos para corpos rígidos isotrópicos e homogêneos. Como o corpo estudado apresenta uma determinada taxa de porosidade, deve-se ajustar o valor da condutividade térmica para uma condutividade térmica efetiva (k_{ef}) e, conseqüentemente, a equação que rege o problema, como visto na Equação (25).

$$q_{cond} = -k_{ef}A\frac{dT}{dr} \quad (25)$$

É importante ressaltar ainda que a transferência de calor por radiação térmica é um fenômeno que depende fortemente da forma dos corpos que trocam calor entre si. Neste caso, a troca de calor se dá entre o corpo poroso e o fluido que o transpassa, portanto, para esse caso, o parâmetro F_{a-f} representa um fator de forma que ajusta a equação de transmissão do calor para a realidade.

Esse fator de forma representa como um corpo interage com outro, principalmente na troca de calor por radiação. Isso, naturalmente, depende da posição dos corpos, suas áreas superficiais, bem como da geometria dessas áreas. Assim sendo, pode-se dizer que a radiação proveniente de uma superfície isotérmica opaca e difusa (representada no índice do fator como a) é absorvida em alguma parte pelo fluido, que é o outro único meio material avaliado no problema (representada no índice do fator como f).

Para aplicar corretamente a este estudo, deve-se adaptar o modelo às coordenadas cilíndricas expostas na subseção 1.1. Dessa forma, a Figura 6 deverá ser adaptada para o novo meio de transferência de calor, sendo melhor ilustrada na Figura 8.

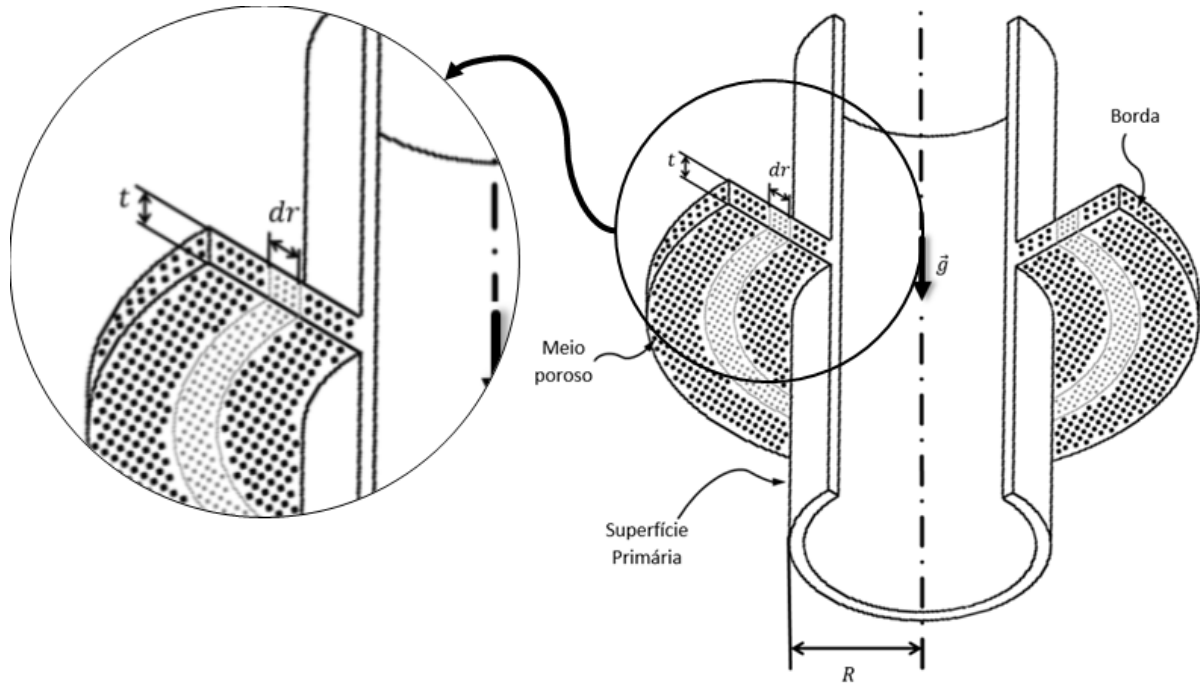


Figura 8: Ilustração do modelo de aleta radial porosa, apresentando as principais características geométricas em detalhe.

Combinando as equações, avaliando em $\Delta r \rightarrow 0$, e assumindo que a absorvância do corpo é igual à emissividade ($\alpha_{absort} = \varepsilon$), pode-se reescrever a Equação 22. E assim tem-se, finalmente na Equação (26) o modelo

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) - \frac{\rho_f g \beta_f K}{\nu_f k_{ef} t} (T - T_\infty)^2 - \frac{2\varepsilon \sigma F_{a-f}}{k_{ef} t} (T^4 - T_\infty^4) = 0 \quad (26)$$

onde

ρ_f é a densidade do fluido

β_f é o coeficiente de expansão térmica

K é a permeabilidade do meio poroso

ν_f é a viscosidade cinemática do fluido

k_{ef} é a condutividade térmica efetiva no meio poroso

F_{a-f} é o fator de forma entre o meio poroso e o fluido

t é a espessura da aleta

2 ABORDAGEM MATEMÁTICA

A análise deste trabalho se concentra na avaliação térmica de uma superfície estendida que está conectada a um corpo, sendo deste um dissipador de calor, considerando que tal superfície seja constituída de um corpo poroso.

O resultado que se busca, do perfil de temperaturas gerado pelo processo térmico, dependerá de diversas análises preliminares de todos os processos envolvidos no sistema dissipativo. Isso gera a necessidade de analisar cada fenômeno, contudo sem perder de vista o objetivo principal que é a influência de cada um desses fenômenos.

A Equação (26) contém representações de todos os fenômenos, já considerando os fatores geométricos e físicos abordados no Capítulo 1. As representações expostas na Equação podem ser simplificadas se forem agrupados os coeficientes influentes no problema em apenas dois parâmetros aglutinantes A e B .

2.1 Parâmetro de porosidade A

A porosidade, como visto, é um dos principais destaques deste trabalho, visto que é o fenômeno que incrementa significativamente a taxa de transferência de calor do corpo ao fluido que o envolve.

A partir dessa análise, já pode-se pressupor que a porosidade está intimamente ligada ao mecanismo de rejeição de calor por convecção térmica natural da superfície estendida.

Na região porosa, devido às suas características geométricas, pode-se concluir que a velocidade do fluido enquanto se encontrar no interior da aleta é muito baixa, o que diminui sua influência na troca de calor de todo o sistema. Por esse motivo deve-se descrever com maior cuidado os efeitos convectivos aos quais o meio poroso está submetido.

A convecção natural nada mais é do que uma consideração do sistema de transferência de calor por condução, onde a troca de calor não se dá mais entre dois corpos sólidos, mas sim na interface de um corpo sólido com o fluido que o envolve. Isso acontece pelo acréscimo à análise de algum movimento fluido. Esse movimento pode ser gerado pela simples diferença de densidade do fluido em pontos distintos, gerando assim, um gradiente de densidade, ou mesmo de movimento provocado por fatores externos, produzindo um movimento relativo entre o fluido e o corpo.

Contudo, diferentemente da análise da condução térmica, na convecção geralmente admite-se que a massa do fluido que envolve o corpo é muito maior do que a massa do corpo, tornando a troca de calor entre eles basicamente um fenômeno unilateral, visto que esse raciocínio permite afirmar que o fluido que envolve o corpo apresentará uma mudança em sua temperatura devido à troca de calor desprezível, podendo ser considerada constante.

Isso é representado da equação de troca de calor por convecção considerando o gradiente térmico entre o corpo e o fluido como sendo $T - T_\infty$, onde T_∞ é a temperatura considerada constante do fluido. Essa característica se dá pelo fato de se considerar que a troca de calor acontece desde um ponto muito próximo ao corpo até uma região suficientemente distante do corpo, em que não é mais observada mudanças na temperatura do fluido.

Além dessa perspectiva, alia-se a essa premissa a condição de que hajam diferenças de temperatura tão pequenas no fluido, que, por consequência, as diferenças de densidade também serão muito pequenas, podendo ser desprezadas. Isso caracteriza a convecção natural, baseada no número de Grashof, que relaciona as forças de flutuação e viscosas. [64]

Tal consideração é conhecida como aproximação de Boussinesq, que é uma maneira de analisar escoamento não isotérmico, como problemas de convecção natural, sem ter que resolver a formulação compressível completa das equações de Navier-Stokes. [65]

A partir daí os coeficientes relacionados à porosidade (e conseqüentemente, à convecção térmica) são agrupados em apenas um coeficiente A , descrita pela Equação (27).

$$A = \frac{\rho_f g \beta_f K}{\nu_f k_{eff} t} \quad (27)$$

2.2 Parâmetro de radiação B

A influência da radiação térmica à dissipação de calor do corpo pode alterar significativamente o perfil térmico gerado entre a base e o topo da aleta, visto que a taxa de transferência de calor por radiação se dá à quarta potência da temperatura, como visto na Equação (13).

A análise do fator de radiação térmica depende das considerações e aproximações

descritas na subseção 1.2.2, contudo deve-se ressaltar algumas propriedades do problema analisado a fim de se alcançar um perfil térmico ajustado à realidade da análise.

Os valores de temperatura considerados neste trabalho pertencem a uma faixa estritamente positiva, visto que as equações expostas até aqui adotam valores de temperatura em Kelvin. Isso representa uma limitação aos valores de T e, conseqüentemente deve-se abordar o que isso implica à Equação (26), que rege o problema.

Para análise que é realizada, uma vez que a função para a temperatura T é estritamente crescente, faz-se necessário garantir a coercividade do perfil de temperaturas em todos os valores aplicados, garantindo a correta descrição do fenômeno [66].

A análise substitui o termo T^4 pelo termo $|T|^3T$, garantindo a coercividade do funcional relacionado à equação, conceito este que será aprofundado mais adiante.

Assim como foi feito no parâmetro de porosidade, os coeficientes responsáveis por trazer os efeitos de radiação térmica ao problema podem ser agrupados, formando um parâmetro de radiação B , que é dado pela Equação (28).

$$B = \frac{2\varepsilon\sigma F_{a-f}}{k_{eff}t} \quad (28)$$

2.3 As condições de contorno

Problemas como este descrito pela Equação (21) demandam algumas observações para a correta análise. Já foi dito na Seção 1.1 que $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$. Além disso na subseção 1.2.1 estabeleceu-se que $\frac{\partial k}{\partial T} = 0$. Agora serão estabelecidas as demais condições que permitem uma abordagem física e matemática adequadas ao problema.

Considera-se que não há geração interna de calor na aleta, pois a aleta está sendo analisada exclusivamente do ponto de vista da propagação e dissipação do calor gerado pela superfície primária.

A superfície primária se encontra durante toda a análise em uma mesma temperatura que é conhecida e prescrita. Essa condição de contorno é amplamente conhecida como condição de contorno do primeiro tipo, ou de Dirichlet.

A borda da aleta, localizada no topo dela, é considerada termicamente isolada, o que significa que não há troca de calor entre a borda e o meio em que a aleta está contida. Portanto considera-se que não há rejeição de calor na borda da aleta nem por convecção,

nem por radiação térmica. Esse sistema é conhecido como condição de contorno do segundo tipo, ou de Neumann.

Para a espessura da aleta, é considerado que seja tão estreita quando comparada à sua altura e comprimento, que as diferenças de temperatura ao longo de sua espessura são desprezíveis, o que significa dizer que $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$.

As faces da aleta são o local em que há a dissipação de calor, tanto pelo mecanismo da convecção, quanto da radiação térmica. Portanto é ali que se concentra a análise do fenômeno que gera, por fim, o perfil térmico.

Para uma análise matemática mais abrangente, é conveniente que os valores de temperatura e os valores de posição geométrica sejam normalizados através das seguintes relações:

$$\theta = \frac{T(r)}{T_b} \quad (29)$$

$$\xi = \frac{r}{R_{ext}} \quad (30)$$

Esta equação é considerada por estar sujeita às seguintes condições de contorno

$$\xi = R_{int} \rightarrow \theta = T_b = 1 \text{ (base)} \quad (31)$$

$$\xi = R_{ext} \rightarrow \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \text{ (topo)} \quad (32)$$

A partir dessas premissas, torna-se possível resolver a Equação Diferencial de Valor no Contorno, para qual será construída uma abordagem numérica para sua solução.

2.4 Sequência de problemas

Após as simplificações da Equação (26), conforme descrito até aqui, tem-se um modelo mais simples de ser analisado, que é descrito pela Equação (33).

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} - A[|\theta - T_\infty|(\theta - T_\infty)] - B[(|\theta|^3 \theta) - T_\infty^4] = 0 \quad (33)$$

Das diversas abordagens possíveis para o problema, buscou-se analisar o problema

não linear como uma sequência de problemas. Essa abordagem permite uma análise mais simples de cada elemento dessa sequência enquanto exige que a solução do problema original seja alcançada por métodos numéricos apropriados.

Busca-se neste estudo, analisar o perfil térmico que será gerado pelos valores de temperatura em cada ponto da aleta radial de corpo poroso, onde os valores das temperaturas adimensionalizados sejam descritos por θ .

Para buscar possíveis abordagens para o problema, assume-se que a solução θ do problema original descrito pela Equação é dada por

$$\theta = \lim_{i \rightarrow \infty} [\varphi^{(i)}] \quad (34)$$

Ou seja, a solução do problema analisado é dada pelo limite da sequência $[\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \dots]$. Essa sequência representa os resultados numéricos que serão obtidos pela iteração entre seus valores, que por sua vez representam a Equação Geral que rege o problema.

Portanto, o próximo passo é descobrir os elementos que compõe essa sequência. Os elementos da sequência cujo limite representa a solução do problema original são provenientes da Equação (35).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\varphi^{(i+1)}}{d\xi} \right) - \alpha \varphi^{(i+1)} + \alpha \varphi^{(i)} - \\ A |\varphi^{(i)} - T_\infty| (\varphi^{(i)} - T_\infty) - B [|\varphi^{(i)}|^3 \varphi^{(i)} - T_\infty^4] = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Considerando que $\varphi^{(i)}$ é conhecido, o problema descrito pela Equação (35) é um problema clássico de valor de contorno linear, que pode ser facilmente resolvido. Para isso, determina-se que

$$\begin{aligned} \varphi^{(i+1)}(\xi = 1) = 1 \\ \left(\frac{d\varphi^{(i+1)}}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_E} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Portanto, para garantir que a solução seja aplicável ao problema, devem ser apresentadas evidências de alguns aspectos do problema [67]. A constante α será discutida

com mais profundidade posteriormente.

2.4.1 Prova do não decrescimento

Como já foi mencionado, há dois fatores muito importantes a serem respeitados pelo modelo que é proposto: Os valores de temperatura são sempre não negativos para todos os pontos e as condições de contorno determinam que não pode haver valor de temperatura mais alta do que a temperatura prescrita na superfície primária.

A partir dessas premissas, pode-se dizer também que a sequência que descreve a solução do problema não pode ser decrescente em nenhum ponto, visto que o primeiro elemento da sequência é igual a zero, conforme descrito na Equação (37).

$$\varphi^{(0)} \equiv 0 \quad (37)$$

Para provar que a sequência de $\varphi^{(i)}$ é não descendente, considera-se a diferença entre dois termos consecutivos da sequência:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{d}{d\xi} (\varphi^{(i+1)} - \varphi^{(i)}) \right] - \alpha(\varphi^{(i+1)} - \varphi^{(i)}) + \alpha(\varphi^{(i)} - \varphi^{(i-1)}) - \\ & - A |\varphi^{(i)} - T_\infty| (\varphi^{(i)} - T_\infty) - B[|\varphi^{(i)}|^3 \varphi^{(i)} - T_\infty^4] + \\ & + A |\varphi^{(i-1)} - T_\infty| (\varphi^{(i-1)} - T_\infty) + B[|\varphi^{(i-1)}|^3 \varphi^{(i-1)} - T_\infty^4] = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

onde

$$\hat{\varphi}^{(i+1)}(1) - \hat{\varphi}^{(i)}(1) = 0 \quad (39)$$

$$\left. \frac{d}{d\xi} (\hat{\varphi}^{(i+1)} - \hat{\varphi}^{(i)}) \right|_{\xi=R} = 0 \quad (40)$$

Definindo a função $\varphi^{(1)}$ como a solução de

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{d}{d\xi} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(0)}) \right] - \alpha(\varphi^{(1)} - \varphi^{(0)}) = \\ & = A |\varphi^{(0)} - T_\infty| (\varphi^{(0)} - T_\infty) - B[|\varphi^{(0)}|^3 \varphi^{(0)} - T_\infty^4] \geq 0 \end{aligned} \quad (41)$$

com

$$\hat{\varphi}^{(1)}(1) = 1 \quad (42)$$

$$\left(\frac{d\hat{\varphi}^{(1)}}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=R_{ext}} = 0 \quad (43)$$

tem-se, desde $\varphi^0 \equiv 0$, que

$$\varphi^{(1)} - \varphi^{(0)} \geq 0 \Rightarrow \varphi^{(1)} \geq \varphi^{(0)} \equiv 0 \quad (44)$$

Então, pode-se escrever ($i = 1$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{d}{d\xi} (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) \right] - \alpha (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) + \alpha (\varphi^{(1)} - \varphi^{(0)}) - \\ & - A |\varphi^{(1)} - T_\infty| (\varphi^{(1)} - T_\infty) - B [|\varphi^{(1)}|^3 \varphi^{(1)} - T_\infty^4] + \\ & + A |\varphi^{(0)} - T_\infty| (\varphi^{(0)} - T_\infty) + B [|\varphi^{(0)}|^3 \varphi^{(0)} - T_\infty^4] = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

com

$$\hat{\varphi}^{(2)}(1) - \hat{\varphi}^{(1)}(1) = 0 \quad (46)$$

$$\frac{d}{d\xi} (\hat{\varphi}^{(2)} - \hat{\varphi}^{(1)}) \Big|_{\xi=R_{ext}} = 0 \quad (47)$$

Então, deve-se escolher α grande o suficiente para garantir que

$$\begin{aligned} \alpha (\varphi^{(1)} - \varphi^{(0)}) & \geq A |\varphi^{(1)} - T_\infty| (\varphi^{(1)} - T_\infty) + B [|\varphi^{(1)}|^3 \varphi^{(1)} - T_\infty^4] - \\ & - A |\varphi^{(0)} - T_\infty| (\varphi^{(0)} - T_\infty) - B [|\varphi^{(0)}|^3 \varphi^{(0)} - T_\infty^4] \end{aligned} \quad (48)$$

vale a seguinte desigualdade

$$\varphi^{(2)} \geq \varphi^{(1)} \geq \varphi^{(0)} \equiv 0 \quad (49)$$

Repetindo o procedimento acima tem-se

$$\dots \geq \varphi^{(i+1)} \geq \varphi^{(i)} \geq \varphi^{(i-1)} \geq \dots \geq \varphi^{(1)} \geq \varphi^{(0)} \equiv 0 \quad (50)$$

desde que a constante α seja grande o suficiente para garantir que

$$\alpha \geq \frac{A |\varphi^{(i+1)} - T_\infty| (\varphi^{(i+1)} - T_\infty) + B[|\varphi^{(i+1)}|^3 \varphi^{(i+1)} - T_\infty^4]}{\varphi^{(i+1)} - \varphi^{(i)}} - \frac{A |\varphi^{(i)} - T_\infty| (\varphi^{(i)} - T_\infty) - B[|\varphi^{(i)}|^3 \varphi^{(i)} - T_\infty^4]}{\varphi^{(i+1)} - \varphi^{(i)}} \quad (51)$$

É suficiente escolher α de tal forma que

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \left[\frac{d}{d\theta} A |\theta - T_\infty| (\theta - T_\infty) + B(|\theta|^3 \theta - T_\infty^4) \right]_{\theta=1} = \\ &= [2A |\theta - T_\infty| + 4B\theta^3]_{\theta=1} = 2A |T_\infty| + 4B \end{aligned} \quad (52)$$

E isso prova que com a escolha adequada de α , a sequência nunca será decrescente.

2.4.2 Limite superior

Como é necessário mostrar que a sequência não é negativa em nenhum trecho de sua extensão, pode-se presumir que haja um valor máximo da sequência, conhecido como Limite superior.

Esse valor é importante para o problema para colaborar com a garantia da convergência da solução do problema. Para isso, deve-se buscar um valor que seja o limite superior da sequência. E assim chega-se à Equação (53).

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{d}{d\xi} (\theta - \varphi^{(i+1)}) \right] + \alpha (\varphi^{(i+1)} - \varphi^{(i)}) - \\ &[-A |\theta - T_\infty| (\theta - T_\infty) + B[|\theta|^3 \theta - T_\infty^4]] - \\ &-A |\varphi^{(i)} - T_\infty| (\varphi^{(i)} - T_\infty) - B[|\varphi^{(i)}|^3 \varphi^{(i)} - T_\infty^4] = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

com as condições de contorno

$$\theta - \varphi^{(i+1)} = 0 \text{ em } \xi = 1 \quad (54)$$

$$\frac{d}{d\xi}(\theta - \varphi^{(i+1)}) = 0 \text{ em } \xi = R_{ext} \quad (55)$$

Agora, supõe-se que $(\theta - \varphi^{(i+1)})$ seja negativo em algum ponto. Portanto

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{d}{d\xi} (\theta - \varphi^{(i+1)}) \right] - \alpha (\theta - \varphi^{(i+1)}) - \\ & [-A |\theta - T_\infty| (\theta - T_\infty) + B [|\theta|^3 \theta - T_\infty^4] - \\ & -A |\varphi^{(i)} - T_\infty| (\varphi^{(i)} - T_\infty) - B [|\varphi^{(i)}|^3 \varphi^{(i)} - \theta_\infty^4]] = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

deve-se ter que

$$\begin{aligned} & \alpha (\theta - \varphi^{(i+1)}) - A |\theta - T_\infty| (\theta - T_\infty) + B [|\theta|^3 \theta - T_\infty^4] - \\ & - A |\varphi^{(i)} - T_\infty| (\varphi^{(i)} - T_\infty) - B [|\varphi^{(i)}|^3 \varphi^{(i)} - \theta_\infty^4] \leq 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Como $\theta \geq 0$, $\varphi^0 \equiv 0$ e como α é grande o suficiente, conclui-se que a desigualdade acima nunca é válida e, portanto, $(\theta - \varphi^{(1)})$ é não negativo em todos os pontos.

Repetindo este procedimento, pode-se concluir que $\theta \geq \varphi^{(i)}$, para qualquer i . Em outras palavras, θ é um limite superior para os elementos $\varphi^{(i)}$. Isso garante a existência do limite $\theta = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi^{(i)}$.

2.5 Solução exata

Na busca de se obter uma equação que descreva a solução exata do problema original, nota-se que as conclusões alcançadas de que a sequência de problemas tem um valor estabelecido como seu limite superior, bem como de que a função nunca é decrescente, para qualquer trecho da sequência, são bases fundamentais para se alcançar a solução exata do problema original.

Para isso, busca-se, portanto o ponto da sequência no qual haja um ponto de inflexão da sequência onde sua concavidade seja voltada para baixo. Isso é o mesmo que

buscar o valor do máximo de uma função, onde o teste da segunda derivada seja não positivo.

Dessa forma, busca-se o máximo de $\theta - \varphi^{(i+1)}$, o qual ocorre quando sua segunda derivada não é positiva. Então, esse máximo ocorre quando

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi^{(i+1)} - \varphi^{(i)}) \geq & [A|\theta - T_\infty|(\theta - T_\infty) + B[|\theta|^3\theta - T_\infty^4] - \\ & - A|\varphi^{(i)} - T_\infty|(\varphi^{(i)} - T_\infty) - B[|\varphi^{(i)}|^3\varphi^{(i)} - T_\infty^4]] \end{aligned} \quad (58)$$

Como a sequência $[\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}]$ tem um limite superior e $A|\theta - T_\infty|(\theta - T_\infty) + B[|\theta|^3\theta - T_\infty^4]$ é uma função estritamente crescente, pode-se concluir que o limite da sequência é a solução do problema original.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Uma vez de posse da modelagem alcançada neste trabalho, faz-se necessário aplicar o modelo a uma situação de dissipação de calor para se chegar a um perfil térmico e analisar como esse perfil pode ser aplicado a diversas situações de engenharia.

Para isso se recorre aos métodos iterativos, que são capazes de computar uma quantidade muito grande de valores e assim, alcançar um resultado que seja tão refinado quanto se deseje.

O problema é modelado como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\varphi^{(i+1)}}{d\xi} \right) - \alpha\varphi^{(i+1)} + \alpha\varphi^{(i)} - \\ A |\varphi^{(i)} - T_\infty| (\varphi^{(i)} - T_\infty) - B [|\varphi^{(i)}|^3 \varphi^{(i)} - T_\infty^4] = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

que tem como solução o limite da sequência $[\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \dots]$, onde i representa o elemento da sequência que está sendo avaliado na iteração atual.

Nota-se claramente na Equação (59), que há um grupo de fatores da sequência relacionados com a iteração atual, enquanto outro grupo de fatores está relacionado com a iteração seguinte dos elementos da sequência.

Por esse motivo, a Equação (59) pode ser reescrita aglutinando os elementos da iteração atual i em um único fator β , sendo explícito na Equação (60).

$$\beta^{(i)} = \alpha\varphi^{(i)} - A |\varphi^{(i)} - T_\infty| (\varphi^{(i)} - T_\infty) - B [|\varphi^{(i)}|^3 \varphi^{(i)} - T_\infty^4] \quad (60)$$

Dessa forma, a Equação (59) se torna a Equação (61).

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\varphi^{(i+1)}}{d\xi} \right) - \alpha\varphi^{(i+1)} + \beta^{(i)} = 0 \quad (61)$$

3.1 O Método de Diferenças Finitas

Uma vez que a Equação (61) é uma EDO de segunda ordem, a análise numérica do problema exige a aplicação de metodologia compatível, e optou-se por utilizar o Método das Diferenças Finitas.

O objetivo da utilização desse método é aproximar soluções para equações diferen-

ciais, ou seja, encontrar uma função ou alguma aproximação discreta dessa função que satisfaça uma dada relação entre suas derivadas em algum trecho da sequência.

O método de diferenças finitas se aplica substituindo as derivadas nas equações diferenciais por aproximações de diferenças finitas. Esse processo gera um grande sistema algébrico de equações.

Como se trata de um método numérico iterativo, já pressupõe-se que a cada iteração, um erro é propagado. Esse erro provém do truncamento do resultado de cada iteração, além da distância inevitável que cada resultado terá do seu valor real [68], [69].

O método pode ser aplicado na forma implícita ou explícita, onde a forma explícita é utilizada neste trabalho, sendo mais simples e, conseqüentemente mais fácil de ser implementada, cuja formulação provém de uma equação contínua que expressa uma variável em termos dos valores conhecidos.

Além disso deve-se caracterizar a malha utilizada, que no caso deste trabalho foi uma malha de nós igualmente espaçados, contendo 100 pontos nodais, onde o primeiro e o último nó apresentam as características das condições de contorno abordadas na Seção 2.3.

Para a implementação, exige-se que o modelo seja condicionalmente estável, propriedade essa que está ligada à análise do erro do sistema. Uma vez que se exige que o sistema seja condicionalmente estável, os parâmetros associados devem colaborar com a diminuição progressiva do erro à medida em que se avança na sequência [70].

A abordagem padrão para analisar o erro em uma aproximação de diferenças finitas é expandir cada um dos valores da função de uma série de Taylor em torno de um ponto, conforme descrito na Equação (62).

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + h) &= f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + \frac{h^2 f''(\bar{x})}{2} + \frac{h^3 f'''(\bar{x})}{6} + O(h^4) \\ f(\bar{x} - h) &= f(\bar{x}) - hf'(\bar{x}) + \frac{h^2 f''(\bar{x})}{2} - \frac{h^3 f'''(\bar{x})}{6} + O(h^4) \end{aligned} \quad (62)$$

A partir dessa análise, combinam-se as expressões descritas pela Equação (62) e em seguida evidencia-se o termo da segunda derivada da série, chegando assim à descrição aplicada da Equação (63).

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \frac{\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}}{(\Delta r)^2} \quad (63)$$

Assim, o modelo numérico adotado torna-se

$$\varphi_n^{(i+1)} = \frac{l}{2 + \alpha l^2} \left[\frac{\varphi_{n+1}^{(i+1)} + \varphi_{n-1}^{(i+1)}}{l} + \frac{\varphi_{n+1}^{(i+1)} - \varphi_{n-1}^{(i+1)}}{2\xi_n} + \beta_n^{(i)} l \right] \quad (64)$$

onde

$$\beta_n^{(i)} = \alpha\varphi_n^{(i)} - [A|\varphi_n^{(i)} - T_\infty|(\varphi_n^{(i)} - T_\infty)] - [B(|\varphi_n^{(i)}|^3(\varphi_n^{(i)} - T_\infty^4))] \quad (65)$$

Portanto, pode-se entender que i é o índice que representa a iteração numérica que compreende cada elemento da sequência cujo limite é a solução do problema.

Enquanto isso, n é o índice que representa as iterações numéricas de cada ponto no espaço do domínio computacional ao longo da aleta radial.

Em todo método numérico aplicado, faz-se necessário investigar as condições de convergência do sistema para assegurar que a utilização do método é apropriada para a solução do problema. Contudo pode não ser tão simples demonstrar de forma genérica a convergência de um sistema.

Para fazer essa demonstração costuma-se recorrer ao Teorema de Equivalência de Lax, que consiste em uma técnica indireta, a qual determina que, se um método numérico iterativo for formado por uma discretização consistente e a estabilidade do método for assegurada, garante-se a convergência do método. [71]

3.2 Existência e unicidade da solução

É possível encontrar a solução do problema original abordado neste trabalho através do campo que minimiza um funcional que descreve o problema. Dessa forma, o problema estudado neste trabalho pode ser escrito na forma do funcional descrito pela Equação (66).

$$I[\omega] = \frac{1}{2} \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + \frac{A}{3} \int_1^{\xi_E} |\omega - \theta_\infty|^3 \xi d\xi + \frac{B}{5} \int_1^{\xi_E} [|\omega|^5 - 5\omega\theta_\infty^4] \xi d\xi \quad (66)$$

A primeira variação do funcional descrito pela Equação (66) é descrita na Equação

ção (67).

$$\delta I[\omega] = \delta \frac{1}{2} \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + \delta \frac{A}{3} \int_1^{\xi_E} |\omega - \theta_\infty|^3 \xi d\xi + \delta \frac{B}{5} \int_1^{\xi_E} [|\omega|^5 - 5\omega\theta_\infty^4] \xi d\xi \quad (67)$$

Sendo possível mostrar a convexidade e a coercividade do funcional descrito pela Equação, garante-se a existência e unicidade da solução na minimização do funcional.

3.2.1 Convexidade

A demonstração de convexidade será dividida em 3 termos funcionais:

- i $\frac{1}{2} \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi$
- ii $\frac{A}{3} \int_1^{\xi_E} |\omega - \theta_\infty^3| \xi d\xi$
- iii $\frac{B}{5} \int_1^{\xi_E} [|\omega|^5 - 5\omega\theta_\infty^4] \xi d\xi$

(i) No termo $\frac{1}{2} \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi$, tem-se que

$$I[\omega] = \frac{1}{2} \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi \quad (68)$$

A partir disso, deve-se demonstrar que $I_1[t\omega_1 + (1-t)\omega_2] \leq t\omega_1 I_1 + (1-t)\omega_2 I_1$ com $t \in (0; 1)$ e $\omega_1 \neq \omega_2$ no espaço de funções admissíveis.

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d(t\omega_1 + (1-t)\omega_2)}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi \leq t \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_1}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + \\
& \quad + (1-t) \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_2}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi \Rightarrow \\
& t + (1-t) \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_2}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi - t^2 \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_1}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi - \\
& \quad - 2t(t-1) \int_1^{\xi_E} \frac{d\omega_1}{d\xi} \cdot \frac{d\omega_2}{d\xi} \xi d\xi - \\
& \quad - (1-t)^2 \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_2}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi \geq 0 \Rightarrow \\
& (t-t^2) \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_1}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + [(1-t) - (1-t)^2] \dots \\
& \dots \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_2}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + 2(t-t^2) \int_1^{\xi_E} \frac{d\omega_1}{d\xi} \cdot \frac{d\omega_2}{d\xi} \xi d\xi \geq 0
\end{aligned} \tag{69}$$

Aplicando a condição ao funcional, tem-se a Equação (70).

$$\int_1^{\xi_E} \left(\frac{d[t\omega_1 + (1-t)\omega_2]}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi \leq t \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_1}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + (1-t) \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_2}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi \tag{70}$$

A Equação (70) pode ser reescrita convenientemente como

$$\begin{aligned}
& t + (1-t) \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_2}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi - t^2 \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_1}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi - \\
& \quad - 2t(t-1) \int_1^{\xi_E} \frac{d\omega_1}{d\xi} \cdot \frac{d\omega_2}{d\xi} \xi d\xi - (1-t)^2 \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_2}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi \geq 0
\end{aligned} \tag{71}$$

Ou mesmo como

$$\begin{aligned}
& (t-t^2) \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_1}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + [(1-t) - (1-t)^2] \dots \\
& \dots \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega_2}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + 2(t-t^2) \int_1^{\xi_E} \frac{d\omega_1}{d\xi} \cdot \frac{d\omega_2}{d\xi} \xi d\xi \geq 0
\end{aligned} \tag{72}$$

Como $t \in (0; 1)$, tem-se que $t - t^2 > 0$. Portanto a função $I_1[\omega]$ é não negativa.

(ii) O termo $\frac{A}{3} \int_1^{\xi_E} |\omega - \theta_\infty^3| \xi d\xi$ tem sua segunda variação como $\frac{A}{3} \int_1^{\xi_E} 6|\omega - \theta_\infty| \xi d\xi$,

que é estritamente positiva com ω diferente de uma constante.

(iii) O termo $\frac{B}{5} \int_1^{\xi_E} [|\omega|^5 - 5\omega\theta_\infty^4] \xi d\xi$ apresenta a segunda variação da primeira parcela igual a $\frac{B}{5} \int_1^{\xi_E} |20\omega|^3 \xi d\xi$, que é estritamente positiva com ω diferente de uma constante. A segunda porção é um termo linear que não influencia a convexidade do funcional.

Portanto, conclui-se, sobre a convexidade da solução, que $I[\omega]$ é convexo.

3.2.2 Coercividade

Para investigar a coercividade do funcional, pressupõe-se que o funcional descrito pela Equação (66) é coercivo se a Equação (73) for verdadeira.

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left(\frac{I[\gamma\omega]}{\gamma} \right) = +\infty \quad (73)$$

Tal premissa pode se ilustrada, conforme visto na Figura 9.

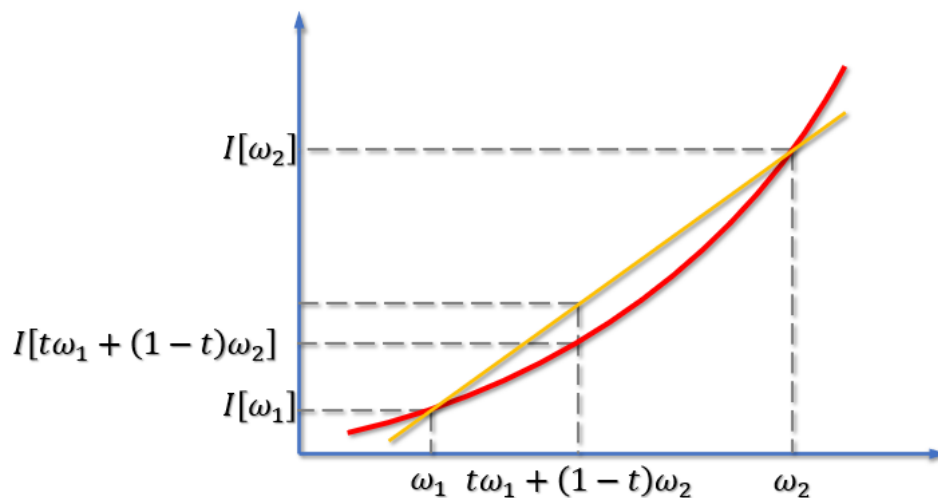


Figura 9: Ilustração gráfica de um funcional coercivo, onde, na região limitada, a curva em vermelho deve necessariamente estar abaixo da curva amarela.

Portanto, para investigar a coercividade, toma-se que $\|\omega\| = 1$, com $\omega \in H$. Dessa forma, tem-se que

$$\begin{aligned} I[\gamma\omega] &= \frac{1}{2} \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\gamma\omega}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + \frac{A}{3} \int_1^{\xi_E} |\gamma\omega - \theta_\infty|^3 \xi d\xi + \\ &+ \frac{B}{5} \int_1^{\xi_E} (|\gamma\omega|^5 - 5\gamma\omega\theta_\infty^4) \xi d\xi \end{aligned} \quad (74)$$

E a Equação (74) pode ser reescrita para facilitar a análise, no formato da Equação (75).

$$I[\gamma\omega] = \frac{\gamma^2}{2} \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + \frac{A}{3} |\gamma|^3 \int_1^{\xi_E} \left| \omega - \frac{\theta_\infty}{\gamma} \right|^3 \xi d\xi + \frac{B}{5} |\gamma|^5 \int_1^{\xi_E} \left(|\omega|^5 - \frac{\omega\theta_\infty^4}{|\gamma|^4} \right) \xi d\xi \quad (75)$$

E a Equação (75) ainda pode mais convenientemente escrita como a Equação (76)

$$\frac{I[\gamma\omega]}{\gamma} = \frac{\gamma}{2} \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi + \frac{A}{3} |\gamma|^2 \int_1^{\xi_E} \left| \omega - \frac{\theta_\infty}{\gamma} \right|^3 \xi d\xi + \frac{B}{5} |\gamma|^4 \int_1^{\xi_E} \left(|\omega|^5 - \frac{\omega\theta_\infty^4}{|\gamma|^4} \right) \xi d\xi \quad (76)$$

onde

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left(\frac{A}{3} |\gamma|^2 \int_1^{\xi_E} \left| \omega - \frac{\theta_\infty}{\gamma} \right|^3 \xi d\xi \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \omega \neq \text{constante} \\ +\infty, & \text{se } \omega = \text{constante} \end{cases} \quad (77)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left(\frac{\gamma}{2} \int_1^{\xi_E} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 \xi d\xi \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \omega \neq \text{constante} \\ 0, & \text{se } \omega = \text{constante} \end{cases} \quad (78)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left(\frac{B}{5} |\gamma|^4 \int_1^{\xi_E} \left(|\omega|^5 - \frac{\omega\theta_\infty^4}{|\gamma|^4} \right) \xi d\xi \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \omega \neq \text{constante} \\ 0, & \text{se } \omega = \text{constante} \end{cases} \quad (79)$$

Portanto, estabelece-se que a Equação (73) é verdadeira.

De posse das provas de que o modelo pode ser descrito por um funcional que é convexo e coercivo, é possível afirmar que a solução do problema apresenta existência e unicidade. Tal conclusão é fundamental para aplicações como a investigada por este trabalho, visto que busca-se propor um modelo com abordagem de solução analítica e numérica que seja capaz de gerar um perfil de temperaturas realista de um problema típico de engenharia.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O objetivo deste estudo é propor um modelo matematicamente viável que represente corretamente uma situação de dissipação de calor em superfícies estendidas, investigando as influências da porosidade como meio de transferência de calor, bem como a radiação térmica no perfil de temperaturas. Contudo também busca-se uma avaliação sobre os métodos numéricos utilizados para resolver o modelo e como tal abordagem numérica se comporta na variação de parâmetros físicos inerentes ao problema.

A construção do perfil térmico deve corresponder à influência dos fenômenos que são considerados, para os quais nota-se que negligenciá-los altera consideravelmente o perfil térmico e, portanto, o resultado analisado.

As análises propostas neste trabalho, embora não exaustivas, são suficientes para defender a importância de se considerar os parâmetros estudados, bem como a utilização das abordagens analítica e numérica empregadas.

4.1 Análise da sequência

O parâmetro α , embora não possua um significado físico para o problema, é o parâmetro mais importante a ser analisado, visto que representa um parâmetro variável que permite alcançar a solução do problema. A sequência, conforme visto no Capítulo 2, é regida pelo parâmetro α , o qual determina, inclusive, se a sequência é convergente ou não.

Portanto, investigar a influência do parâmetro mostra-se crucial para que o modelo proposto seja validado. A convergência da sequência é investigada para observar se as iterações processadas para cada elemento da sequência atendem ao critério de parada estabelecido em qualquer trecho da sequência.

Deve-se ter em mente que o valor escolhido para α deve atender um requisito de valor mínimo, descrito na Equação (80).

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \left[\frac{d}{d\theta} A |\theta - T_\infty| (\theta - T_\infty) + B (|\theta|^3 \theta - T_\infty^4) \right]_{\theta=1} = \\ &= [2A |\theta - T_\infty| + 4B\theta^3]_{\theta=1} = 2A |T_\infty| + 4B \end{aligned} \quad (80)$$

Contudo, ressalta-se também que, para essa análise, um estudo mais aprofundado de α demonstra que quanto maior o seu valor, maior será a quantidade de iterações necessárias para garantir a convergência da sequência, como pode ser visto na Figura 10.

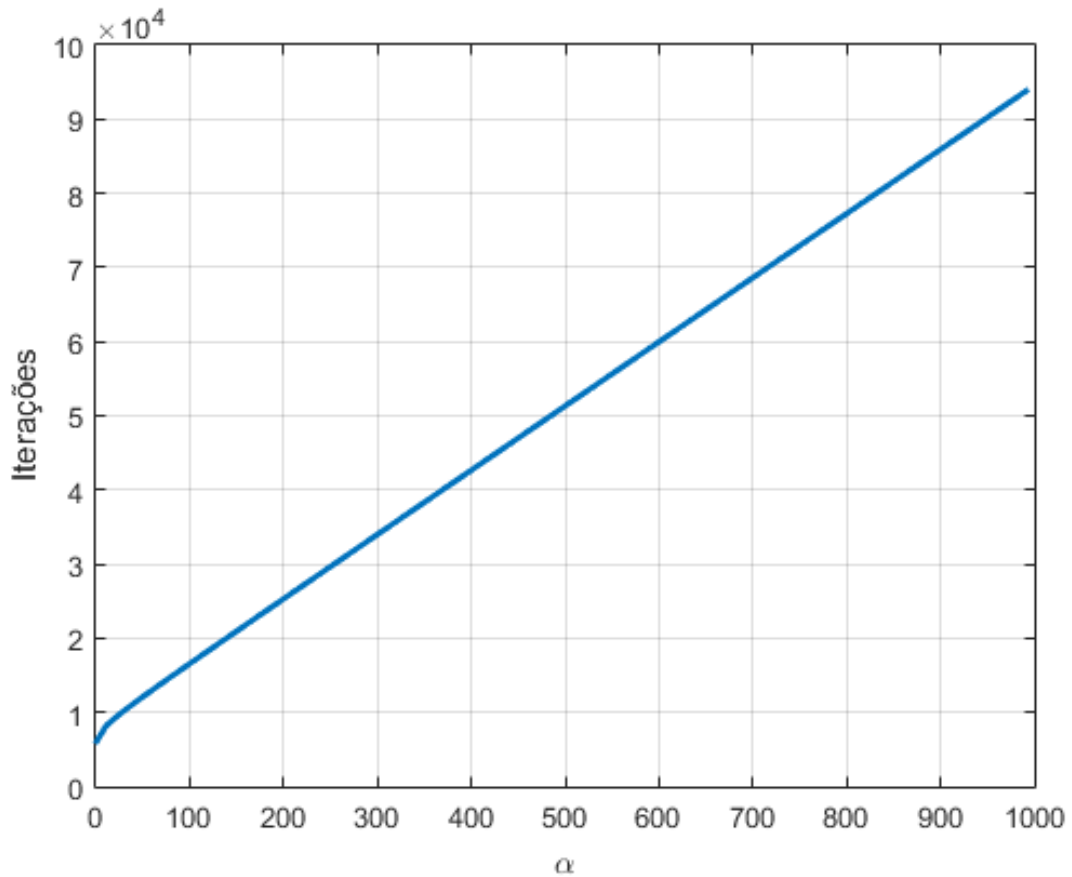


Figura 10: Quantidade de iterações requeridas para diversos valores de α .

A Figura 10 também mostra que tal aumento na quantidade de iterações é linear ao aumento no valor de α , porém esta linearidade é válida na região onde α é suficientemente grande.

Sendo assim, pressupõe-se que exista algum valor de α abaixo do qual a sequência não converge, valor esse que notadamente é próximo de zero.

Para valores de α próximos de zero, pode-se notar que o número de iterações varia, buscando aproximar-se da linearidade à medida que se afasta de valores próximos de zero, como pode ser visto na Figura 11.

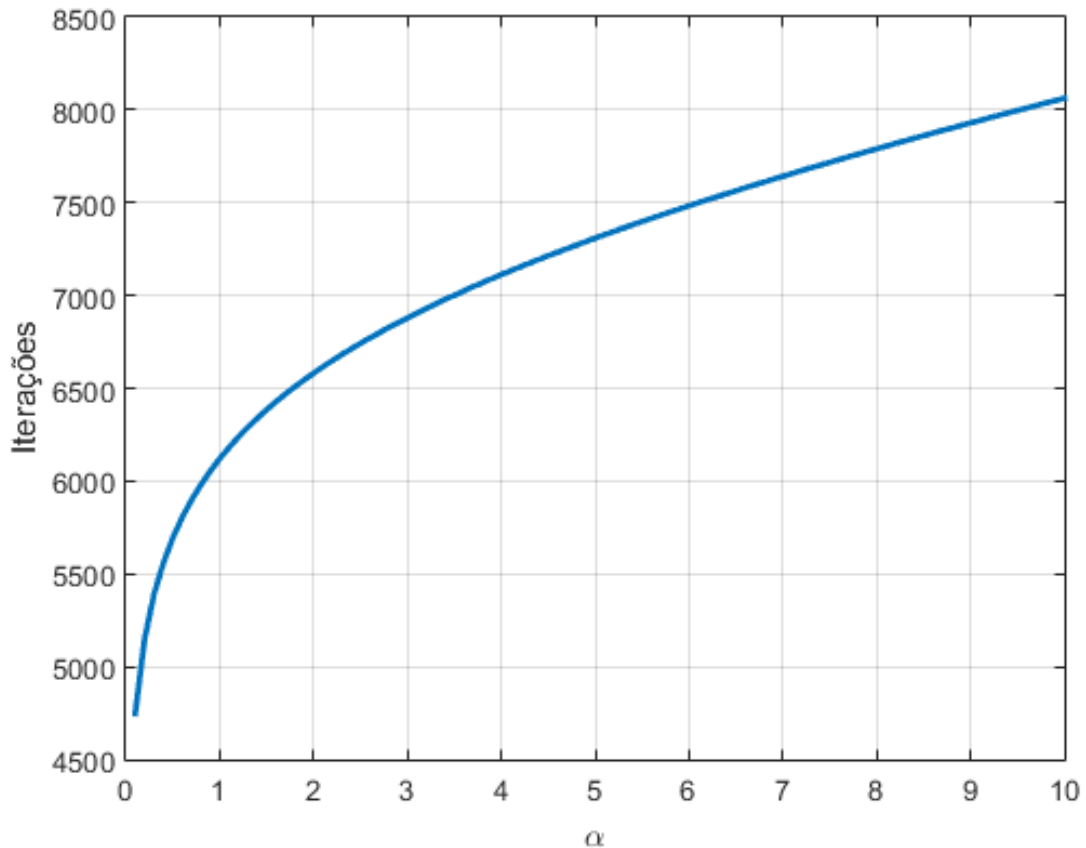


Figura 11: Quantidade de iterações requeridas para pequenos valores de α .

Vale ressaltar também que, para valores muito altos de α , o esforço computacional utilizado até a convergência de toda a sequência é demasiadamente alto.

Desconsiderando, contudo, a variação no esforço computacional para cada α devido ao aumento do número de iterações, o perfil térmico da aleta é o mesmo para qualquer α .

4.2 Convergência da sequência

Como no parâmetro α se investiga a capacidade de convergência da sequência, deve-se analisar como os pontos nodais espaciais da aleta convergem para algum valor, trazendo uma perspectiva sobre a influência da distância da superfície primária à velocidade de convergência da sequência.

A convergência da sequência numérica pode ser notada, de acordo com os parâmetros adotados, através da visualização de uma curva bem comportada, onde a partir de um determinado ponto, não há mais diferença considerável entre os valores anteriores.

É interessante analisar o comportamento da convergência numérica de pontos es-

pecíficos na aleta, pois, para fins comparativos, nota-se a variação na velocidade de convergência.

Para isso foram analisados pontos nodais na superfície da aleta que diferem entre si da distância que apresentam em relação à superfície primária. Os pontos escolhidos para análise foram: 0,25; 0,5; 0,75 e 1,0, conforme ilustrado na Figura 12.

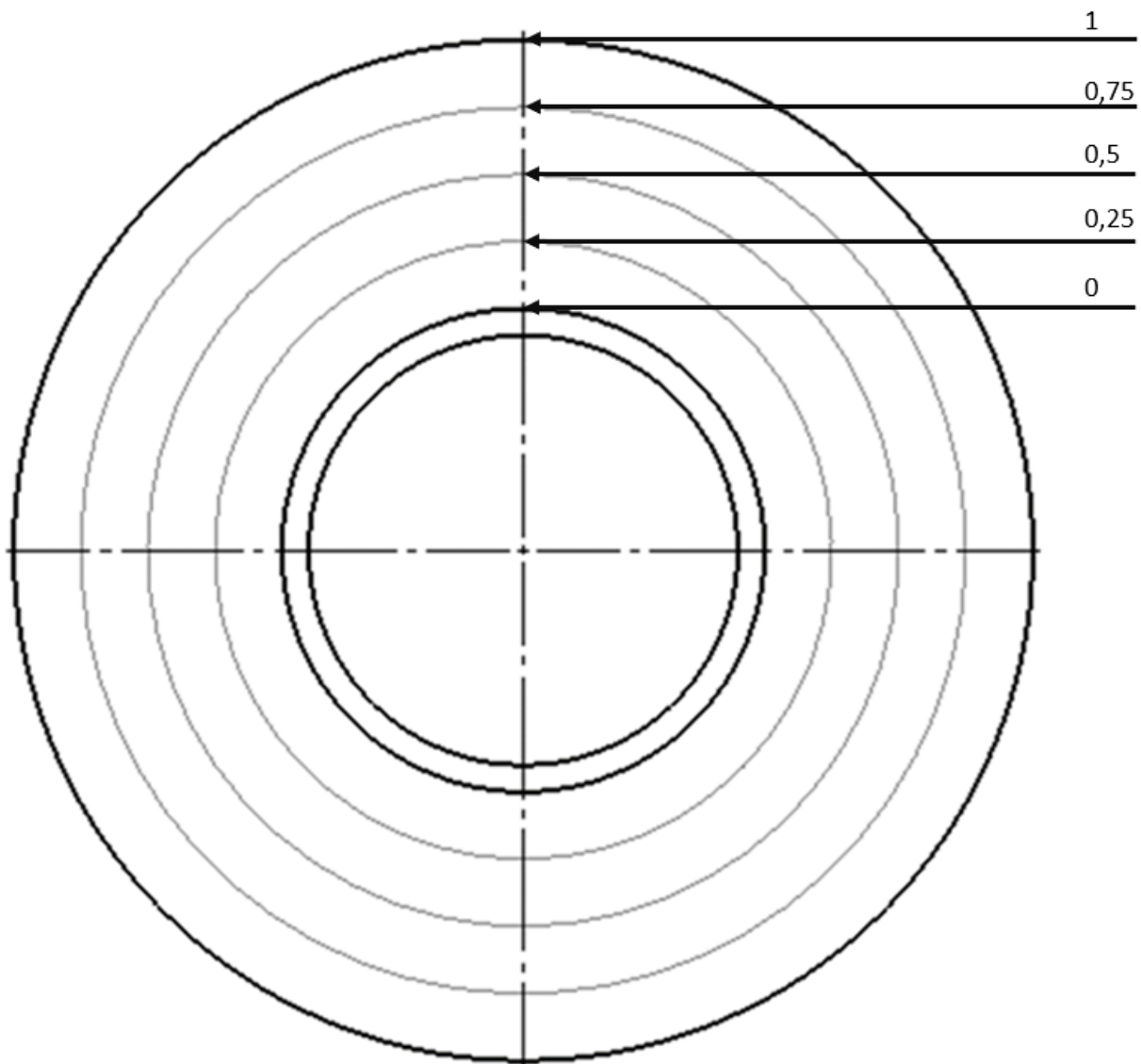


Figura 12: Ilustração da segmentação da aleta em vista frontal, mostrando os pontos nodais que serão analisados.

Assim sendo, pode-se verificar através da Figura 13 o comportamento da sequência nos pontos selecionados, isto é, a quantidade de iterações requeridas em cada caso para que sejam alcançados valores de temperatura para o nó referente.

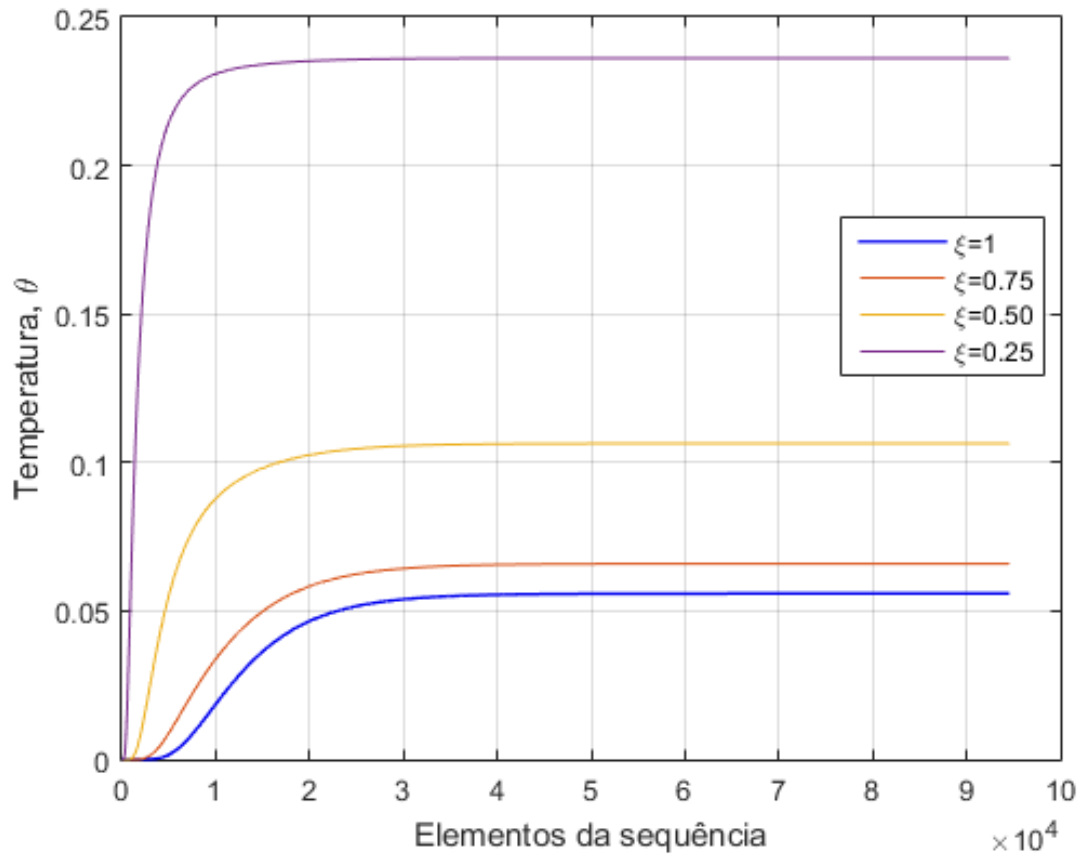


Figura 13: Comportamento da sequência em pontos da superfície da aleta igualmente espaçados.

A primeira análise realizada é do ponto selecionado que está mais próximo à superfície primária, estando 25% distante da base e, por isso, espera-se que os valores de temperatura desse ponto sejam mais elevados, quando comparados aos demais pontos que serão analisados. O comportamento da sequência nesse ponto está ilustrado na Figura 14.

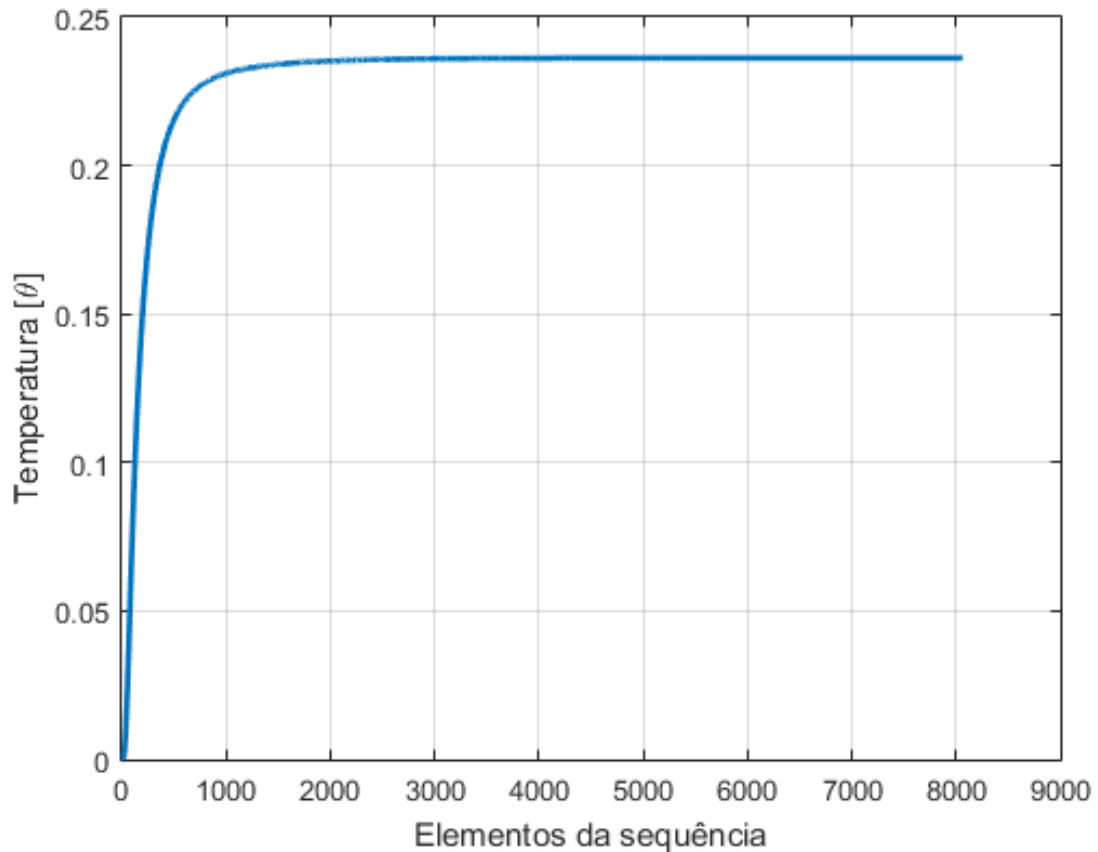


Figura 14: Comportamento da sequência, mostrando a quantidade de elementos requeridos na sequência para a estabilização da temperatura no ponto 0,25.

Inicialmente já é possível notar que a convergência da sequência nesse ponto é muito rápida, acontecendo logo no início da sequência.

Essa circunstância se dá pelo fato de que, como esse ponto está muito próximo da base, logo a estabilização da temperatura em um valor definido precisa acontecer antes dos pontos mais afastados.

Deve-se ter em mente que o Método de Diferenças Finitas (MDF) que foi aplicado depende das condições de contorno utilizadas. Inicialmente estabelece-se que toda a aleta se encontra na temperatura da base, e como neste problema considerou-se que a aleta é estritamente um dissipador de calor, conclui-se que a temperatura da base é a maior temperatura do sistema.

Portanto, como inicialmente toda a aleta está na temperatura mais alta, as iterações do MDF processam matematicamente os mecanismos de rejeição de calor que foram expostos e, por consequência, diminuem os valores de temperatura até convergirem para o valor real do ponto.

Como esse ponto está muito próximo da base, já se espera que a temperatura não diminua tanto e por isso sua convergência é tão mais rápida do que nos demais pontos que serão investigados.

Em seguida, progredindo um pouco mais em direção ao topo da aleta, o ponto 0,5 fica na metade do comprimento e, conseqüentemente apresentará convergência exigindo maior quantidade de iterações e, conseqüentemente, maior esforço computacional do que o ponto que o precedeu na análise.

A Figura 15 representa o valor de temperatura para qual a seqüência convergiu.

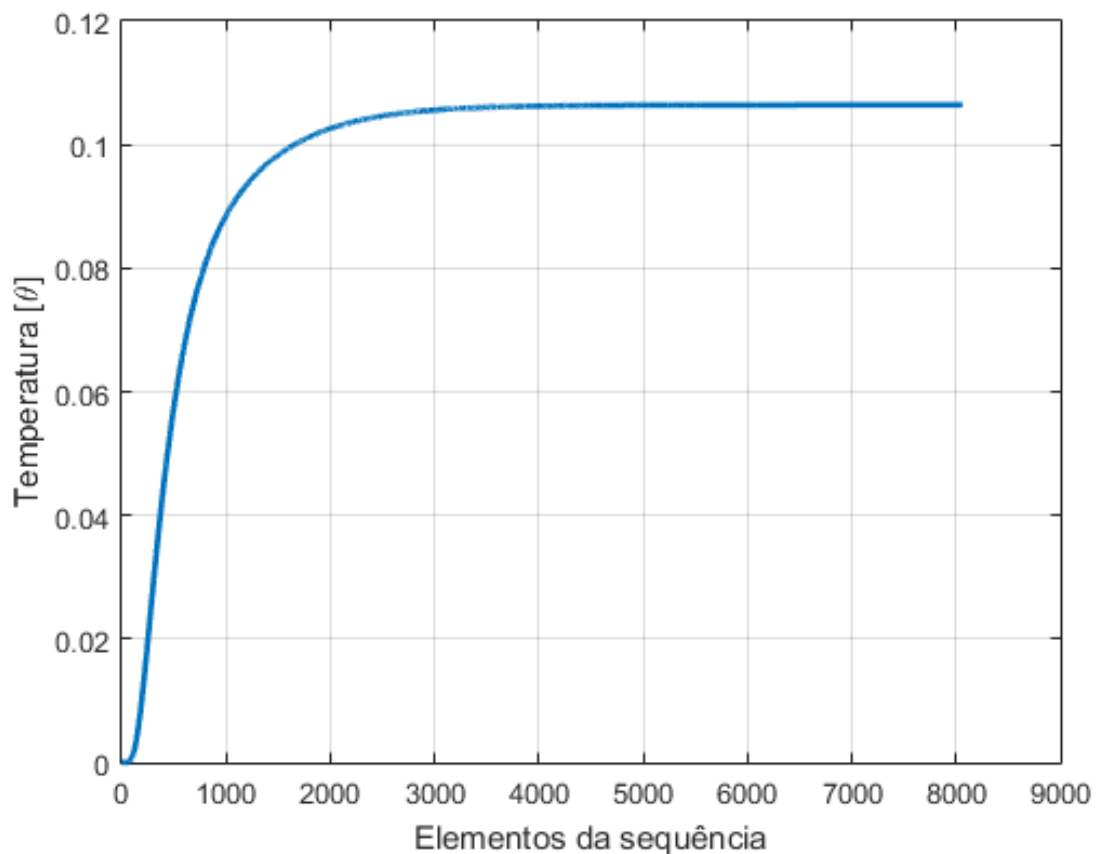


Figura 15: Comportamento da seqüência, mostrando a quantidade de elementos requeridos na seqüência para a estabilização da temperatura no ponto 0,5.

O primeiro fato que chama a atenção é o valor de temperatura para o qual houve convergência, que é consideravelmente mais baixo do que seu predecessor, além do fato de que o modelo alcança a convergência exigindo mais elementos na seqüência do que quando se tratava de um ponto da aleta mais próximo da superfície primária.

Deve-se observar que a dissipação de calor analisada considera os efeitos de rejeição de calor por radiação, o que faz com que o perfil térmico gerado alcance temperaturas

muito mais baixas do que aquelas que seriam alcançadas se o único mecanismo de dissipação de calor fosse a convecção térmica.

Prosseguindo na análise de convergência dos pontos nodais selecionados, a Figura 16 traz o comportamento do modelo ao analisar o ponto que fica 75% distante da superfície primária, ou seja, já muito próximo do topo da aleta.

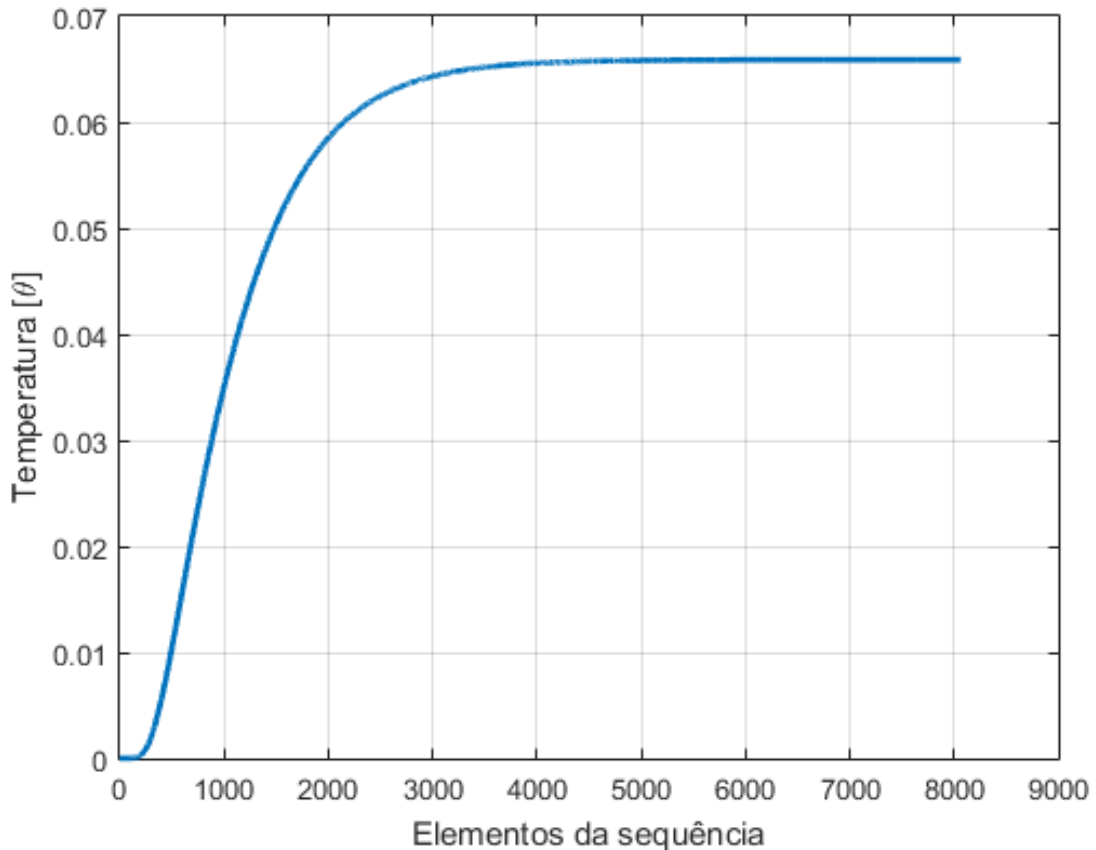


Figura 16: Comportamento da sequência, mostrando a quantidade de elementos requeridos na sequência para a estabilização da temperatura no ponto 0,75.

Observa-se que já fica muito mais evidente a maior quantidade de interações requeridas para alcançar a convergência quando comparado aos casos anteriores. Como este nó está muito mais distante da base com temperatura prescrita, a superfície da aleta já dissipou grande parte do calor proveniente de sua superfície primária.

Isso resulta em um valor de convergência da temperatura muito mais baixo do que nos casos anteriores, além de se necessitar de quase que o dobro de elementos na sequência para alcançar a convergência a um valor.

Vale mencionar que a todos os casos estudados foi aplicado o mesmo valor de α , a fim de garantir uma comparação adequada entre a quantidade de elementos necessários

para a convergência em cada um dos nós investigados.

Para finalizar a análise da convergência do modelo, observa-se o comportamento do último nó da aleta. A representação da convergência através da análise de quantos elementos são necessários à sequência para que haja uma estabilização da temperatura adimensional em um determinado valor é visto na Figura 17.

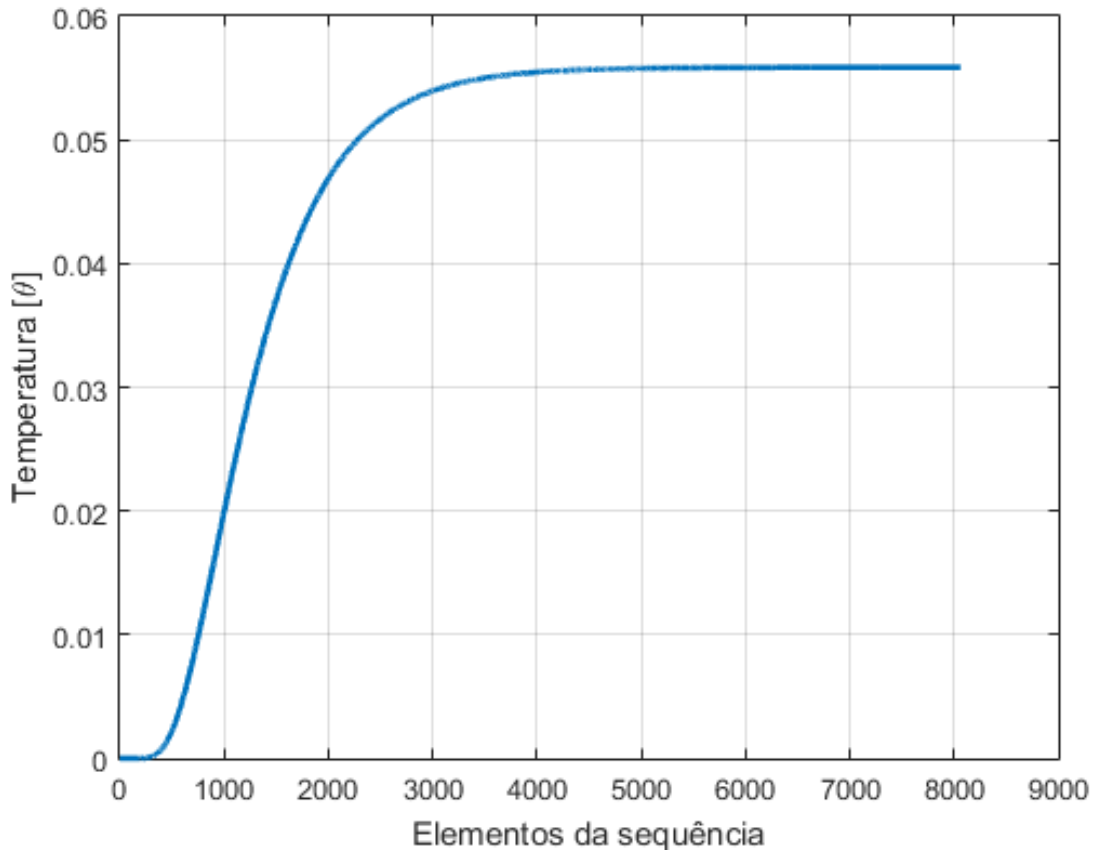


Figura 17: Comportamento da sequência, mostrando a quantidade de elementos requeridos na sequência para a estabilização da temperatura no ponto 1,0.

Nota-se, nesse caso, que a temperatura é muito mais baixa do que em qualquer outro caso e que a convergência exigiu uma quantidade muito maior de elementos na sequência. Isso se deve, além dos fatos já mencionados, às condições de contorno aplicadas.

É válido ratificar que o último ponto nodal da aleta está submetido à condição de contorno de Neumann, ou seja, considera-se que ali, que é o topo da aleta, não há troca de calor através de nenhum mecanismo experimentado pela superfície da aleta. Isso faz com que o valor alcançado na convergência represente também a temperatura mais baixa que o sistema experimentará.

Observa-se também que, quando há poucos elementos na sequência, o valor de

temperatura do nó fica muito baixo, ainda não sendo atualizado a fim de se buscar a convergência ao valor que é alcançado no fim.

Essa região em que essa situação computacional acontece será chamada de *iterações mortas*, que representa uma determinada quantidade de iterações que ainda não são capazes de afetar o valor da temperatura no ponto nodal do perfil mais alto.

Nas análises de superfícies estendidas, geralmente o ponto da aleta que é avaliado mais comumente é o topo, visto que o objetivo é encontrar uma aleta de comprimento suficiente para dissipar calor de um sistema até um valor determinado em projeto. A região pode ser facilmente visualizada no destaque feita pela Figura 18.

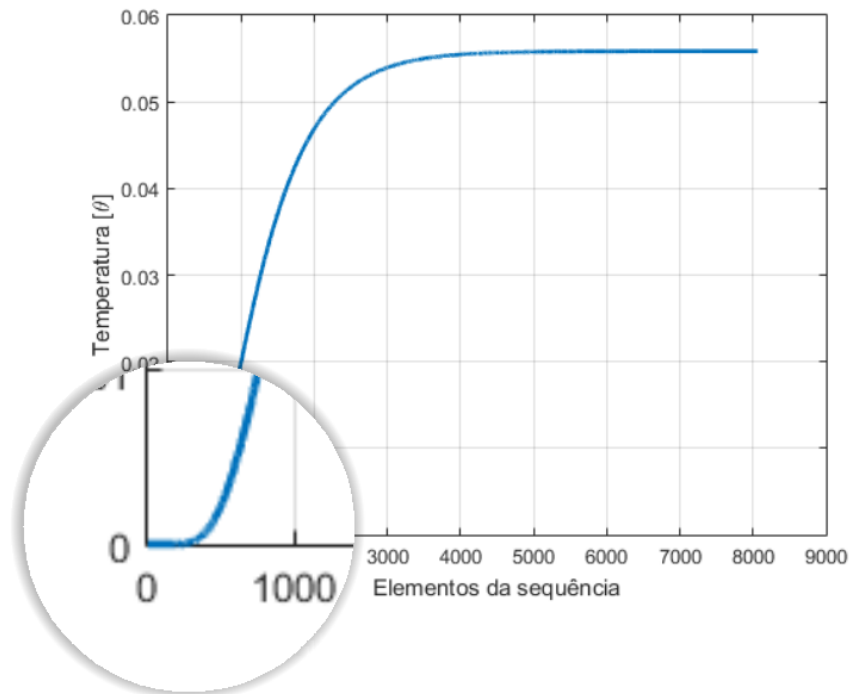


Figura 18: Avaliação da quantidade de iterações que não provocam mudança considerável no perfil térmico no ponto 1,0, em detalhe.

Dessa forma, no caso de se avaliar as variações térmicas e, conseqüentemente, a dissipação do calor no topo da aleta, é relevante compreender a quantidade mínima de elementos da sequência proposta para a qual o topo da aleta busque a convergência para um certo valor de temperaturas.

Foi estabelecido como para definir as iterações mortas, que quando $\theta^i - \theta^{i-1} < 10^{-4}$, as iterações até i são consideradas "mortas", por não representarem alteração significativa no perfil de temperaturas no nó em questão.

Nessa perspectiva, foi estudado para cada ponto nodal, a quantidade de iterações

mortas do perfil, que está representada na Tabela 1.

Tabela 1: Iterações mortas

Nó	Iterações mortas
0,25	10
0,50	65
0,75	167
1,00	289

Deve-se, contudo, ter em mente que a quantidade de iterações mortas em um ponto nodal também é dependente do valor de α que for utilizado. Portanto agora deve-se passar ao estudo da análise desse parâmetro.

4.2.1 Análise de α

Para expandir a análise de maneira que seja possível compreender a influência do valor de α no modelo, é feita uma superposição de várias curvas, em que cada uma delas representa a convergência do valor de temperatura adimensionalizado para um determinado ponto nodal da aleta.

Ao escolher um ponto nodal da aleta, pode-se permitir a variação do valor de α , onde guardam-se as curvas geradas que representam a quantidade de elementos da sequência que são necessários até que aquele ponto nodal se estabilize em um valor específico.

O valor para o qual a temperatura converge em algum ponto não é relevante para essa análise, visto que cada ponto nodal converge para um valor e tais valores são dependentes dos parâmetros físicos e computacionais expostos até aqui.

De acordo com a Figura 19, analisando o ponto médio da aleta, nota-se que, embora para qualquer α aplicado, o valor da temperatura alcance o mesmo valor, cada uma das dez curvas geradas demanda uma diferente quantidade de elementos da sequência.

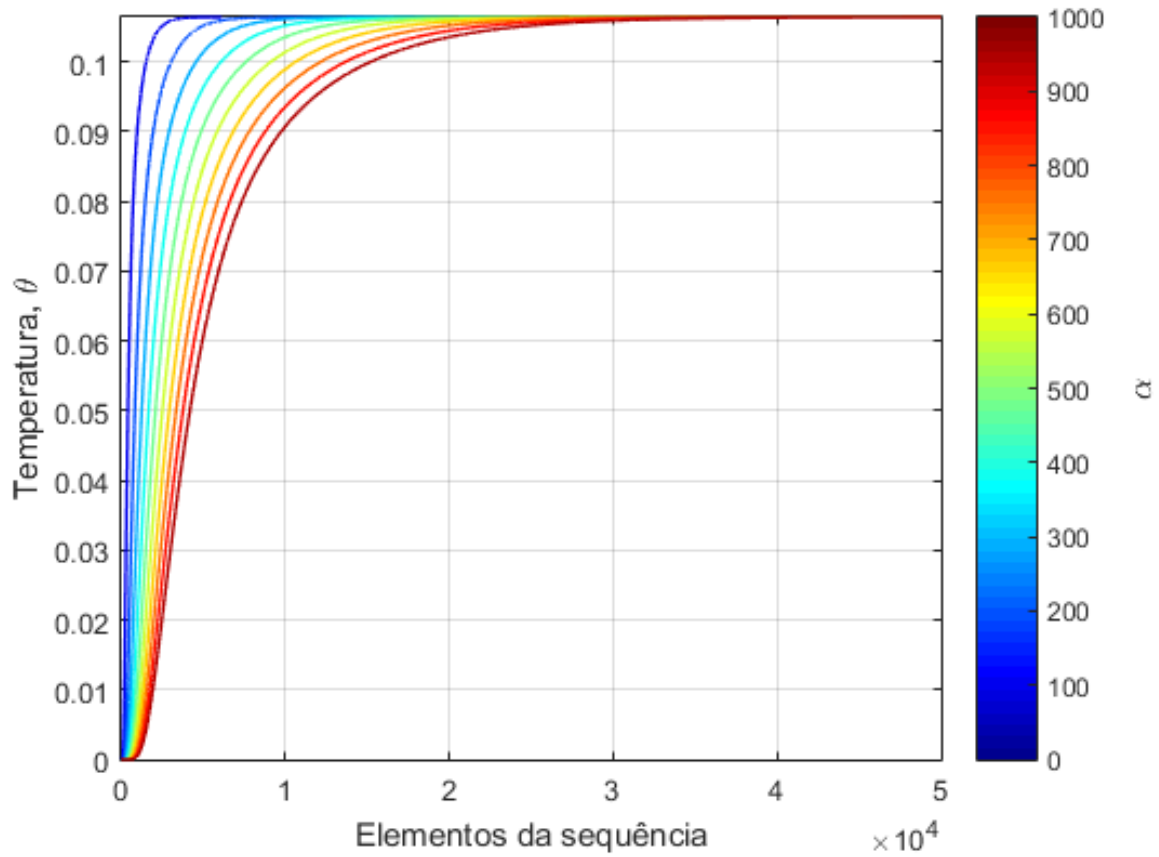


Figura 19: Comportamento da sequência no meio da aleta (ponto 0,5) para diferentes α .

Nota-se, contudo, que quando o valor de α é muito pequeno, não é possível garantir a convergência da sequência. A Figura 20 isola uma das curvas, que é construída usando $\alpha = 0,01$, para que seja possível visualizar que a sequência ainda alcançou um valor de θ específico, fato esse que é evidenciado pela ausência de um platô no gráfico.

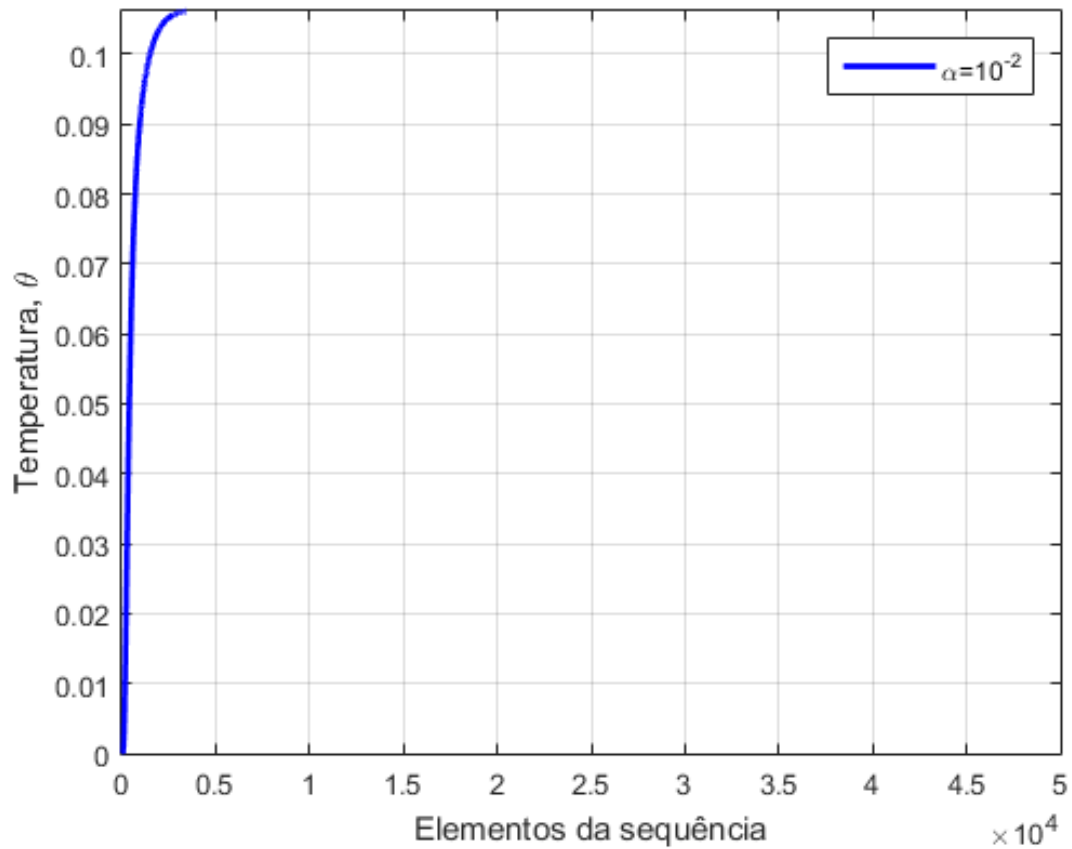


Figura 20: Comportamento da sequência no meio da aleta (ponto 0,5) para $\alpha = 0,01$.

O que se percebe nessa análise de pequenos valores de α é que o critério de parada da simulação interrompe a sequência muito antes dela conseguir encontrar o valor para o qual a sequência deveria convergir.

Em valores ainda menores de α e visualizando apenas a curva gerada, verifica-se com maior facilidade, em que a Figura 21 mostra a quantidade requerida de elementos da sequência quando $\alpha = 0,0001$.

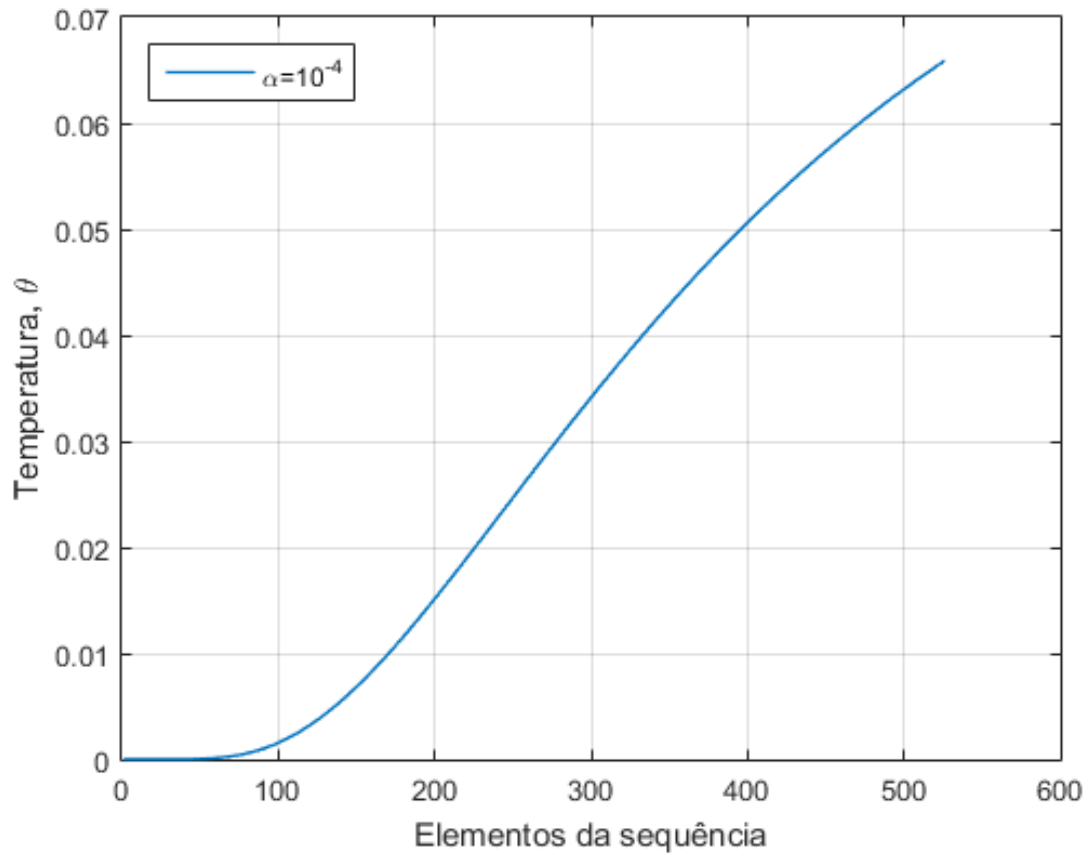


Figura 21: Comportamento da sequência no meio da aleta (ponto 0,5) para $\alpha = 0,0001$.

Portanto, escolhendo o ponto nodal do topo da aleta, percebe-se que ali é o ponto onde a maior quantidade de calor foi dissipada, visto que o calor que percorre a aleta é oriundo da superfície primária, que se encontra oposta ao topo. Por isso esse ponto torna a análise do α mais visualmente evidente, conforme visto na Figura 22.

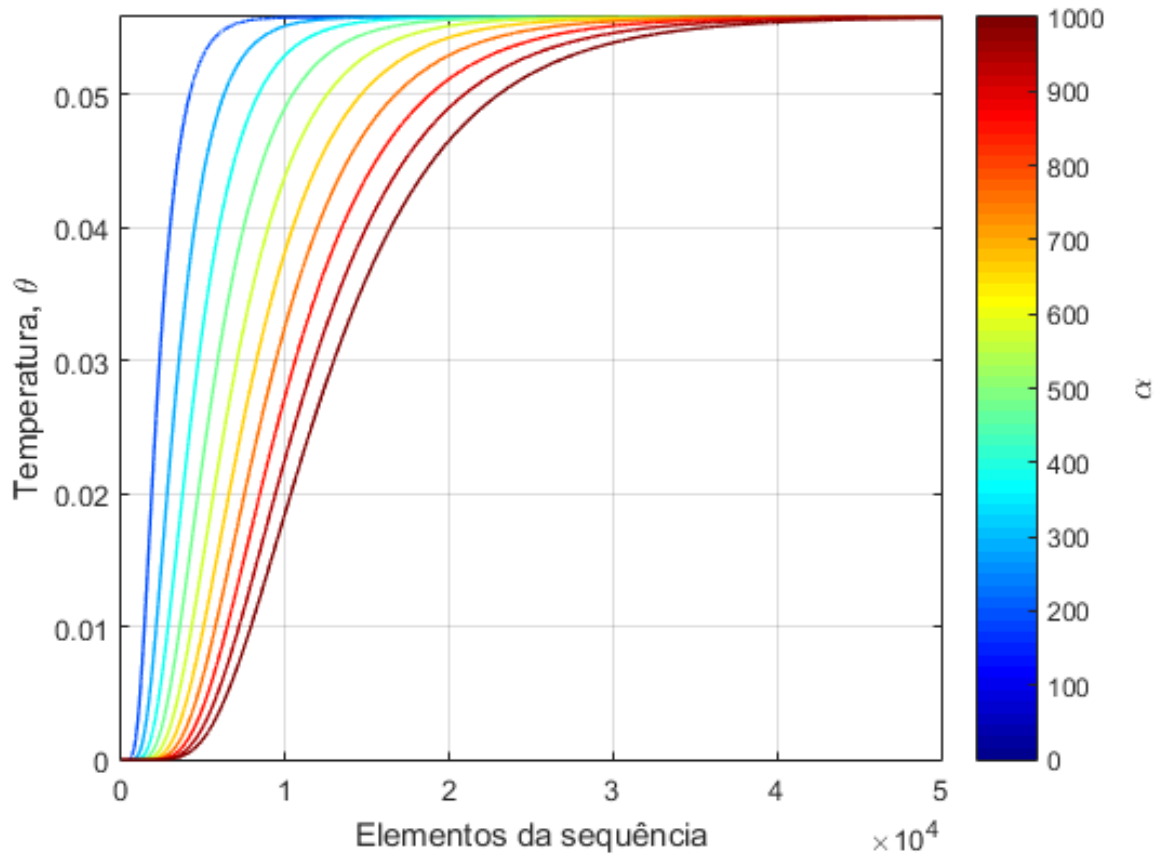


Figura 22: Comportamento da sequência no topo da aleta (ponto 1,0) para diferentes α .

Essa análise fundamenta a importância de uma seleção adequada do valor de α em que o modelo numérico seja capaz de alcançar os valores de temperatura do perfil após a convergência ao valor correto. Isso significa dizer que, dependendo do valor de α escolhido, é possível que a simulação seja interrompida pelo critério de parada antes que o modelo chegue no valor de temperatura correto para aquele nó que está sendo analisado.

Dessa forma, pode-se perceber que há uma variação da quantidade de elementos na sequência para que o perfil alcance a convergência. Vale ressaltar, portanto, que o gráfico da Figura 22 vale para valores em que se considera o critério de parada em 10^{-8} , o que significa que a sequência só é interrompida quando a diferença de dois valores próximos $\theta^i - \theta^{i-1} < 10^{-8}$. Portanto, para que seja possível quantificar o que foi exposto acima, a Tabela 2 mostra quantos elementos foram necessários para alcançar a convergência do último nó da aleta para diferentes valores de α .

Tabela 2: Quantidade de elementos requeridos para convergência do último nó

α	Elementos
100	16565
200	23308
300	33991
400	42656
500	51313
600	59967
700	68618
800	77267
900	85915
1000	94563

Também é interessante notar que os valores obtidos na Tabela 2 descrevem entre si uma tendência linear crescente para a quantidade de elementos. Isso pode ser visto na Figura 23.

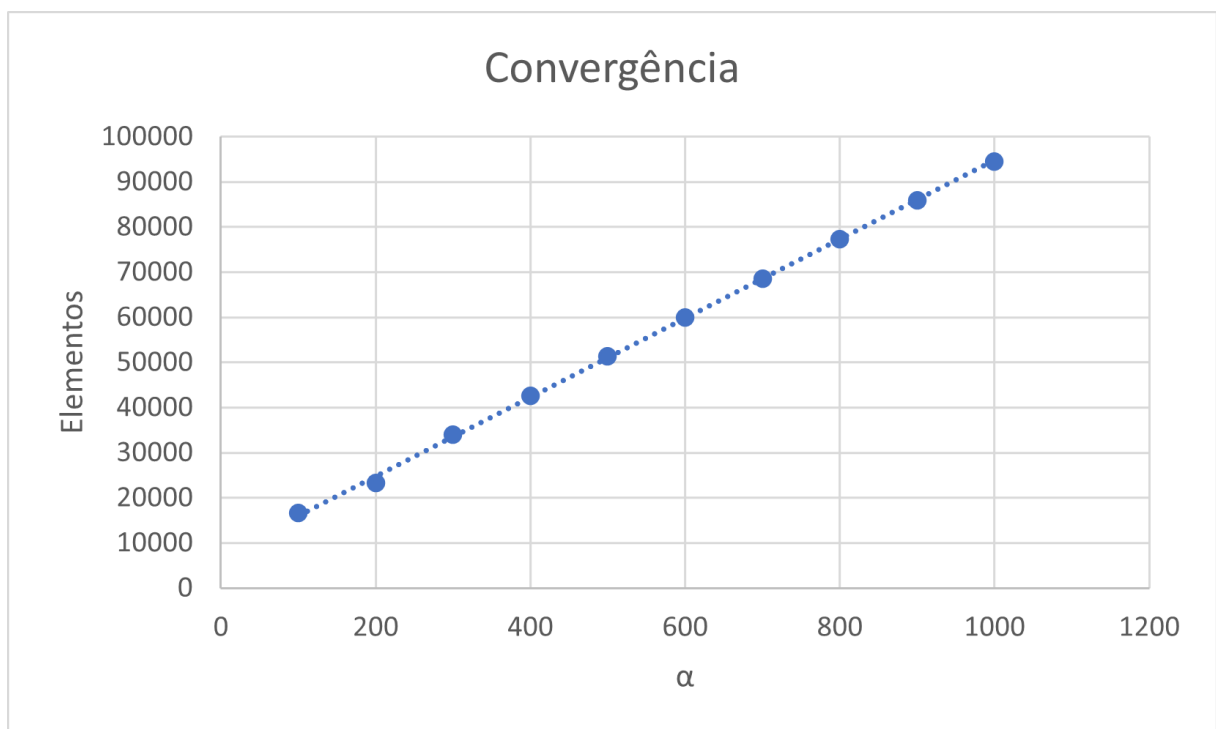


Figura 23: Quantidade de elementos requeridos para convergência do último nó (ponto 1,0), descrevendo uma tendência da convergência.

Essa tendência é descrita pela Equação (81), que apresenta coeficiente de determinação de $r^2 = 0,9995$.

$$y = 87,464x + 7311,3 \quad (81)$$

De posse de toda essa análise realizada nos pontos nodais selecionados, pode-se, finalmente investigar os valores de temperatura em cada ponto nodal depois de alcançada a convergência em cada um desses pontos.

4.3 Perfil Térmico

O objetivo central deste trabalho é propor e analisar um método que seja capaz de descrever o fenômeno de troca de calor entre uma determinada superfície tubular através de seus mecanismos de transferência de calor.

Para isso, faz-se necessário que haja uma aprofundada discussão matemática que prova que o modelo é válido e que ele descreve corretamente os fenômenos envolvidos, bem como as etapas e as influências no processo.

Uma vez que os aspectos que concernem ao parâmetro α foram amplamente discutidos, foi visto como que ele impacta diretamente a convergência do modelo, sendo, portanto um importante fator na modelagem matemática.

Contudo, para que a análise possua relevância prática em aplicações de engenharia, faz-se necessário simular uma situação real, onde a aleta seja acoplada a uma superfície primária cilíndrica e assim pode-se investigar todos os aspectos que envolvem o fenômeno de troca de calor no sistema.

Uma vez ciente do comportamento térmico esperado na aleta, parte-se, portanto, para a investigação analítica e numérica do perfil de temperaturas.

Conforme já mencionado na Seção 4.1, independentemente da escolha do valor de α (desde que se garanta a escolha de um valor que permita a sequência convergir), o perfil térmico gerado será o mesmo. Isso significa dizer que o parâmetro α não afeta o perfil, mas sim a capacidade da sequência em alcançar a convergência.

O perfil térmico gerado pelo modelo é dado pela Figura 24

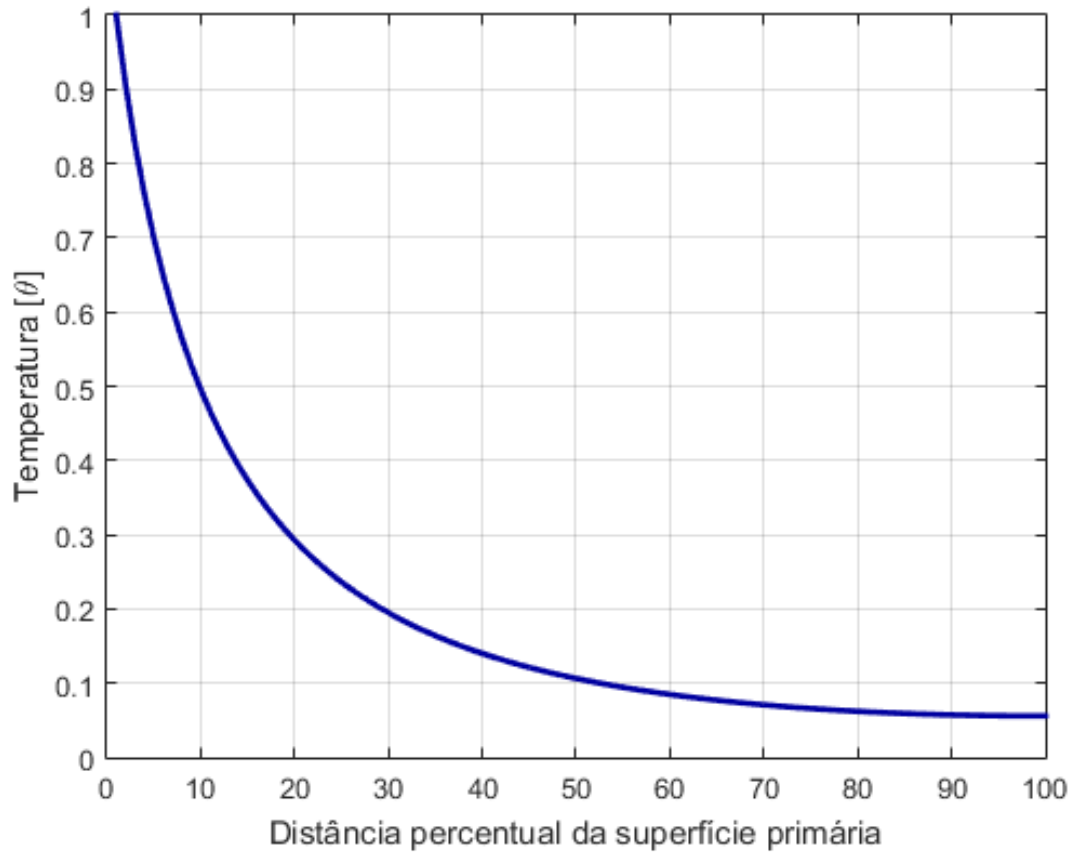


Figura 24: Perfil Térmico gerado com $\alpha = 10$, $A = 1$ e $B = 1$.

Assim, como esperado, nota-se que a convergência ocorre mais rapidamente nos pontos mais próximos da base.

Por fim, torna-se interessante avaliar as variações do perfil térmico e da sequência gerada, observando como a quantidade de elementos requeridos na sequência afeta os perfis térmicos gerados pela dissipação do calor através da superfície da aleta.

A Figura 25 traz uma ilustração que combina as influências dos fatores simultaneamente através de uma superfície gerada com a quantidade requerida de elementos da sequência, os valores normalizados de temperatura e a distância de cada ponto nodal em relação à superfície primária.

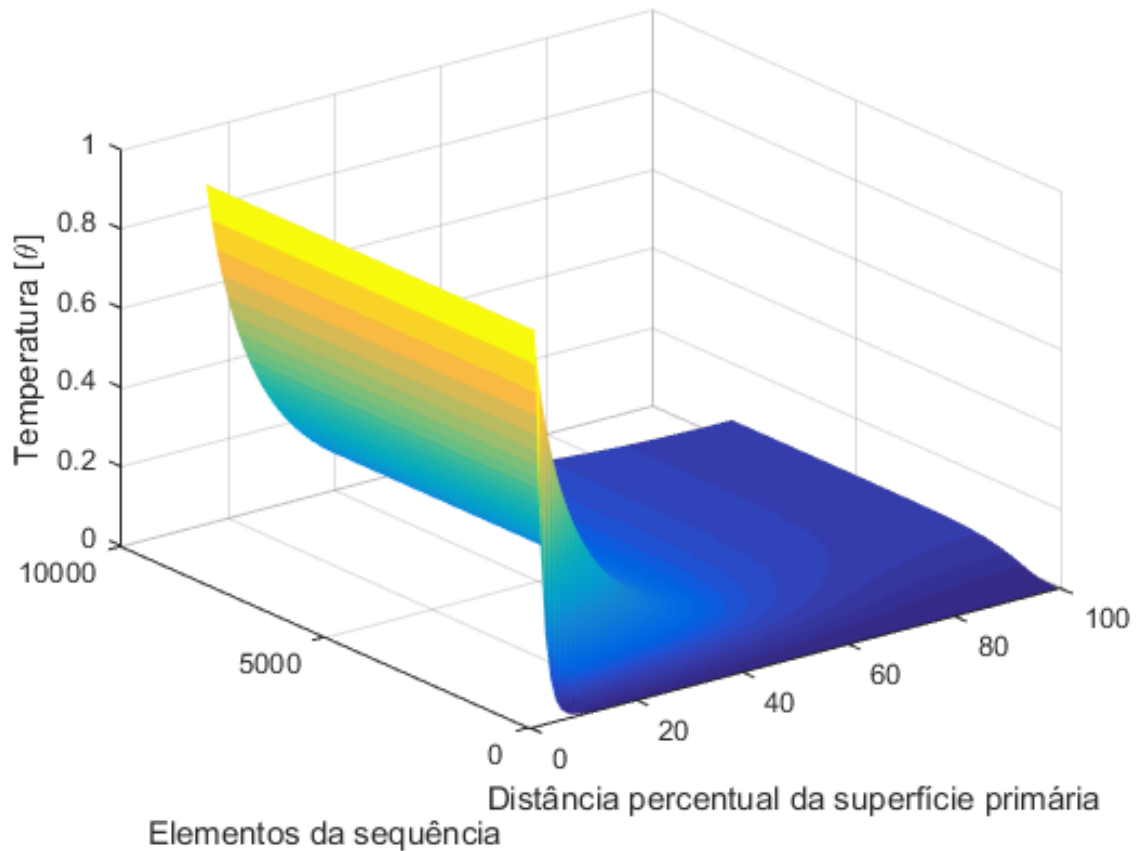


Figura 25: Superfície resultante da análise dos perfis térmicos gerados com diferentes quantidades de elementos na sequência.

Essa análise mostra que, quando se utilizam poucos elementos na sequência, a convergência do modelo não acontece, o que gera perfis térmicos não condizentes com a realidade da situação analisada. Contudo, avançando logo com alguns elementos na sequência, ela se estabiliza rapidamente, gerando perfis térmicos aproximadamente constantes para mais elementos.

Ressalta-se novamente que há diversos parâmetros que podem influenciar significativamente o perfil térmico gerado. Como trata-se de um modelo que considera uma geometria específica, com um meio de transferência de calor específico, com mecanismos próprios que dependem, por sua vez, de outros fatores, sabe-se que é inviável investigar cada fator em separado. Por isso, como o modelo agrupa coeficientes dentro de parâmetros estabelecidos, deve-se, ao menos, investigar a influência desses parâmetros.

4.3.1 Parâmetro A

Tal como foi mencionado na Seção 2.1, a porosidade do meio que dissipa o calor está intimamente relacionada à convecção natural do sistema, visto que foi considerado que não há troca de calor por radiação interna à aleta.

A porosidade, em si mesma, não influencia diretamente o perfil térmico, visto que esse depende das características dos mecanismos de troca de calor. Contudo sabe-se que a variação da taxa de porosidade pode afetar o meio físico do sistema e, conseqüentemente influenciará indiretamente como os mecanismos de dissipação de calor irão funcionar.

De tal forma, conclui-se que quanto maior for a taxa de porosidade do meio que constitui a aleta, maior será a dissipação de calor para o meio, visto que essa maior taxa de porosidade representa maior quantidade de vazios no interior da aleta, aumentando a permeabilidade do fluido que envolve a superfície.

Espera-se, portanto, em uma análise dos fatores associados à porosidade, que haja uma relação matemática direta entre a taxa de porosidade e o perfil térmico, onde o aumento daquela implicaria a diminuição deste. Isso significa que a maior porosidade permite maior permeabilidade do fluido, que por sua vez carregará consigo maior parte do calor dissipado pela aleta, conforme visto na Figura 26.

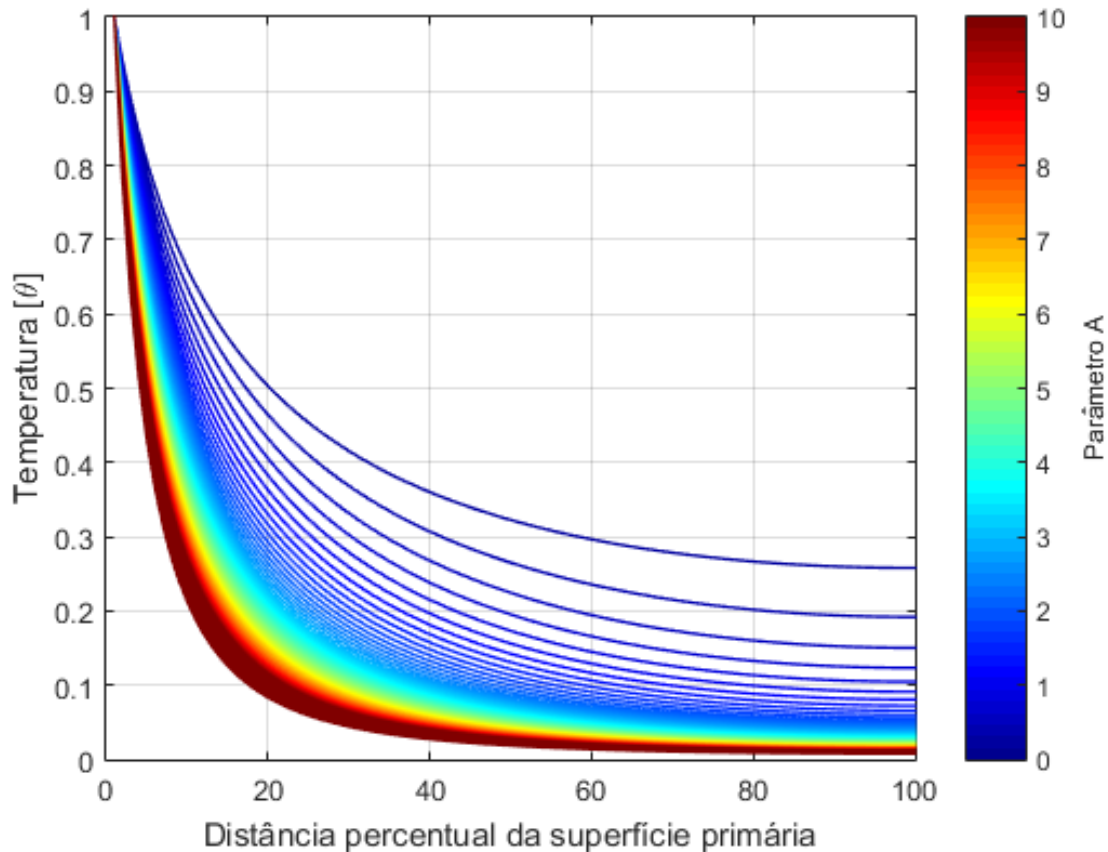


Figura 26: Diversos perfis térmicos gerados por diferentes valores de taxa de porosidade, com $\alpha = 10$ e $B = 1$

É possível notar na Figura 26 que quando o parâmetro A é igual a zero, o perfil de temperaturas apresenta valores mais altos em todos os pontos em que se analisa a dissipação.

Ressalta-se, no entanto que, como nesta análise optou-se por agrupar coeficientes relativos ao meio analisado e à mecânica de transferência de calor, o parâmetro A também leva consigo toda a dissipação de calor por convecção térmica.

Tal premissa leva à conclusão de que, ao zerar o parâmetro A, também anula-se toda dissipação de calor por convecção, permitindo apenas a dissipação por radiação térmica.

Ao tomar como referência um ponto fixo na geometria da aleta, utiliza-se preferencialmente o ponto mais afastado da base tubular. Isso acontece pelo motivo já exposto de que o processo de transferência de calor ali já se desenvolveu o máximo possível, o que faz com que as discrepâncias dos valores de θ do perfil fiquem mais evidentes ali. Por essa razão a Tabela 3 foi feita para verificar quantitativamente a influencia da variação

do parâmetro A nos valores do perfil de temperaturas da aleta.

Tabela 3: Discrepância do valor de θ 100% afastado da base da aleta (ponto nodal 1,0) para vários A

A	θ_{100}
0	0,257982
1	0,055855
2	0,032156
3	0,022804
4	0,017744
5	0,014556
6	0,012357
7	0,010746
8	0,009513
9	0,008538
10	0,007748

De posse dos valores expostos na Tabela 3, nota-se que os pontos descrevem uma tendência exponencial, como pode ser vista na Figura 27.

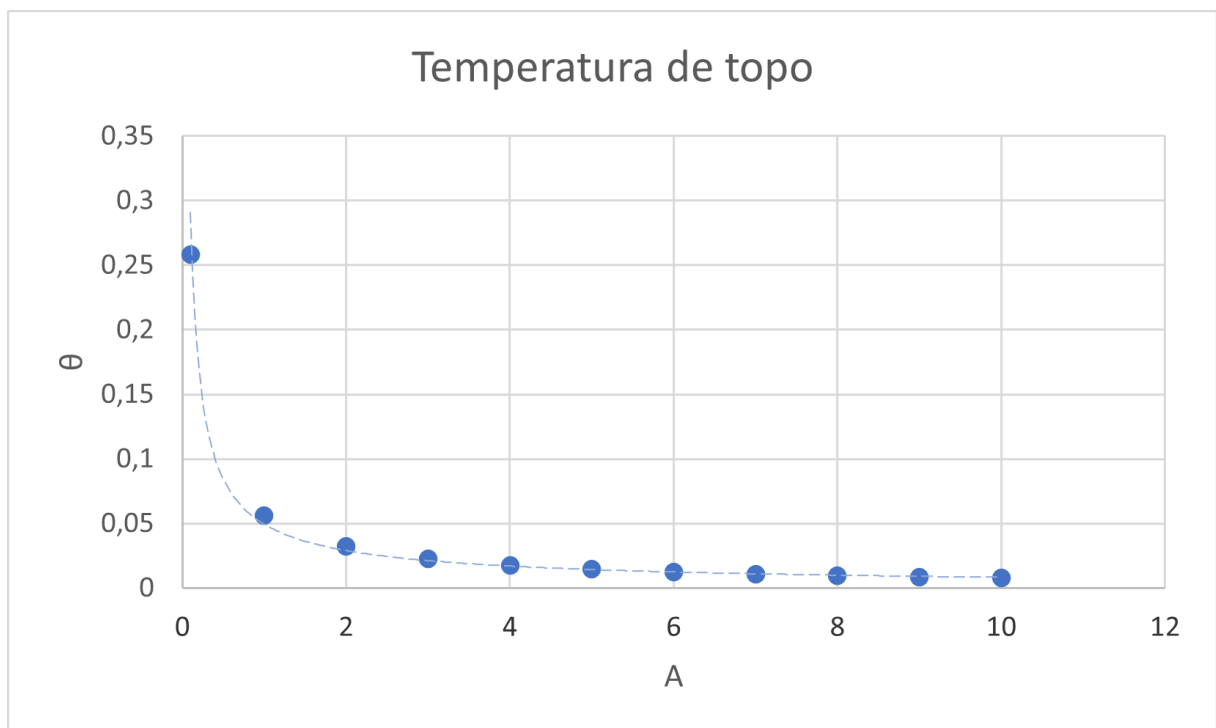


Figura 27: Valores de temperatura normalizados para os quais a sequência converge do último nó (ponto 1,0), descrevendo uma tendência de variação de A.

Essa tendência notada pode ser descrita pela Equação (82) com coeficiente de determinação no valor de $r^2 = 0,9924$.

$$y = 0,2559509x^{-1,903454} \quad (82)$$

A fim de embasar a análise, são expostas em formato de Tabelas os valores de temperatura adimensionalizadas θ para alguns nós selecionados na malha. A Tabela 4 mostra como que a adição do parâmetro A para a análise do sistema de dissipação influencia a construção do perfil de temperaturas.

Tabela 4: Comparação de valores de θ entre porosidade $A = 2$ e $A = 0$.

Nó	$A = 0$	$A = 2$	$A_0 - A_2$	%
1	1	1	0,0000	0,00%
2	0,9413	0,8819	0,0594	6,31%
5	0,8066	0,6376	0,1690	20,95%
10	0,6621	0,4145	0,2476	37,40%
20	0,5029	0,2181	0,2849	56,64%
30	0,4155	0,1348	0,2807	67,56%
40	0,3602	0,0918	0,2683	74,50%
50	0,3227	0,0670	0,2556	79,22%
60	0,2965	0,0518	0,2447	82,54%
70	0,2785	0,0422	0,2363	84,85%
80	0,2666	0,0363	0,2304	86,39%
90	0,2600	0,0331	0,2269	87,27%
100	0,2580	0,0322	0,2258	87,54%

Nota-se, portanto, que a diferença entre os valores de temperatura ao longo dos pontos da aleta é mais evidente no topo da aleta, onde a dissipação do calor já ocorreu de forma plena.

Enquanto isso a análise do perfil quando $A = 5$, descrito pela Tabela 5, quando comparado aos valores do perfil com $A = 2$ mostra que a diferença máxima, que ocorre no topo da aleta é sensivelmente menor do que no caso anterior.

Tabela 5: Comparação de valores de θ entre porosidade $A = 5$ e $A = 2$

Nó	$A = 2$	$A = 5$	$A_2 - A_5$	%
1	1	1	0,0000	0,00%
2	0,8819	0,83349	0,1078	5,49%
5	0,6376	0,528142	0,2785	17,17%
10	0,4145	0,296203	0,3659	28,53%
20	0,2181	0,131666	0,3713	39,62%
30	0,1348	0,074106	0,3414	45,02%
40	0,0918	0,047538	0,3126	48,23%
50	0,0670	0,033256	0,2894	50,39%
60	0,0518	0,024876	0,2717	51,97%
70	0,0422	0,019758	0,2587	53,16%
80	0,0363	0,016679	0,2500	54,03%
90	0,0331	0,015039	0,2450	54,56%
100	0,0322	0,014556	0,2434	54,73%

Avançando mais na análise, a Tabela 6 mostra que as diferenças entre os valores de θ entre os perfis gerados por $A = 5$ e $A = 8$ são ainda menores.

Tabela 6: Comparação de valores de θ entre porosidade $A = 8$ e $A = 5$

Nó	$A = 5$	$A = 8$	$A_5 - A_8$	%
1	1	1	0,0000	0,00%
2	0,83349	0,799975	0,0335	4,02%
5	0,528142	0,463915	0,0642	12,16%
10	0,296203	0,238392	0,0578	19,52%
20	0,131666	0,097203	0,0345	26,17%
30	0,074106	0,052424	0,0217	29,26%
40	0,047538	0,032778	0,0148	31,05%
50	0,033256	0,022535	0,0107	32,24%
60	0,024876	0,016641	0,0082	33,10%
70	0,019758	0,013088	0,0067	33,76%
80	0,016679	0,010968	0,0057	34,24%
90	0,015039	0,009844	0,0052	34,55%
100	0,014556	0,009513	0,0050	34,64%

Por fim a Tabela 7 evidencia o fato de que as diferenças entre os perfis se tornam cada vez menores ao se aumentar o valor de A e isso leva a crer que a diminuição entre as diferenças podem representar uma certa convergência dos perfis.

Tabela 7: Comparação de valores de θ entre porosidade $A = 10$ e $A = 8$

Nó	$A = 8$	$A = 10$	$A_8 - A_{10}$	%
1	1	1	0,0000	0,00%
2	0,799975	0,781846	0,0181	2,27%
5	0,463915	0,432517	0,0314	6,77%
10	0,238392	0,212822	0,0256	10,73%
20	0,097203	0,083385	0,0138	14,22%
30	0,052424	0,044138	0,0083	15,81%
40	0,032778	0,027297	0,0055	16,72%
50	0,022535	0,01863	0,0039	17,33%
60	0,016641	0,013685	0,0030	17,77%
70	0,013088	0,010719	0,0024	18,10%
80	0,010968	0,008955	0,0020	18,35%
90	0,009844	0,008022	0,0018	18,50%
100	0,009513	0,007748	0,0018	18,55%

Tanto a análise das Tabelas acima, quanto da Figura 26 mostram que incrementar ainda mais o valor do Parâmetro A pode ser irrelevante a partir de determinado valor, levando a crer que haja um valor ótimo de A para o qual a dissipação de calor ocorre de forma plena e o esforço computacional é limitado na geração dos perfis térmicos.

4.3.2 Parâmetro B

Para melhor analisar a influência da radiação no perfil térmico modelado neste trabalho, estudou-se como a variação do parâmetro B afeta a distribuição de temperatura ao longo de uma aleta radial porosa. Para isso, tomou-se o parâmetro B com diferentes valores, onde tais valores foram comparados com a situação em que $B = 0$. A consideração de $B = 0$ implica uma situação em que a radiação térmica não é considerada, ou seja, o termo de temperatura não linear devido à radiação é retirado da modelagem. Ressalta-se que desconsiderar os efeitos da radiação térmica altera muito o problema analisado, pois a radiação emitida pela aleta através de sua superfície afeta consideravelmente a forma como a temperatura é dissipada no corpo.

A Figura 28 mostra alguns perfis de temperatura sobrepostos, nos quais o valor do parâmetro B varia de $B = 0$ (situação que desconsidera os efeitos da radiação térmica), aumentando o valor de B , até o valor de $B = 500$.

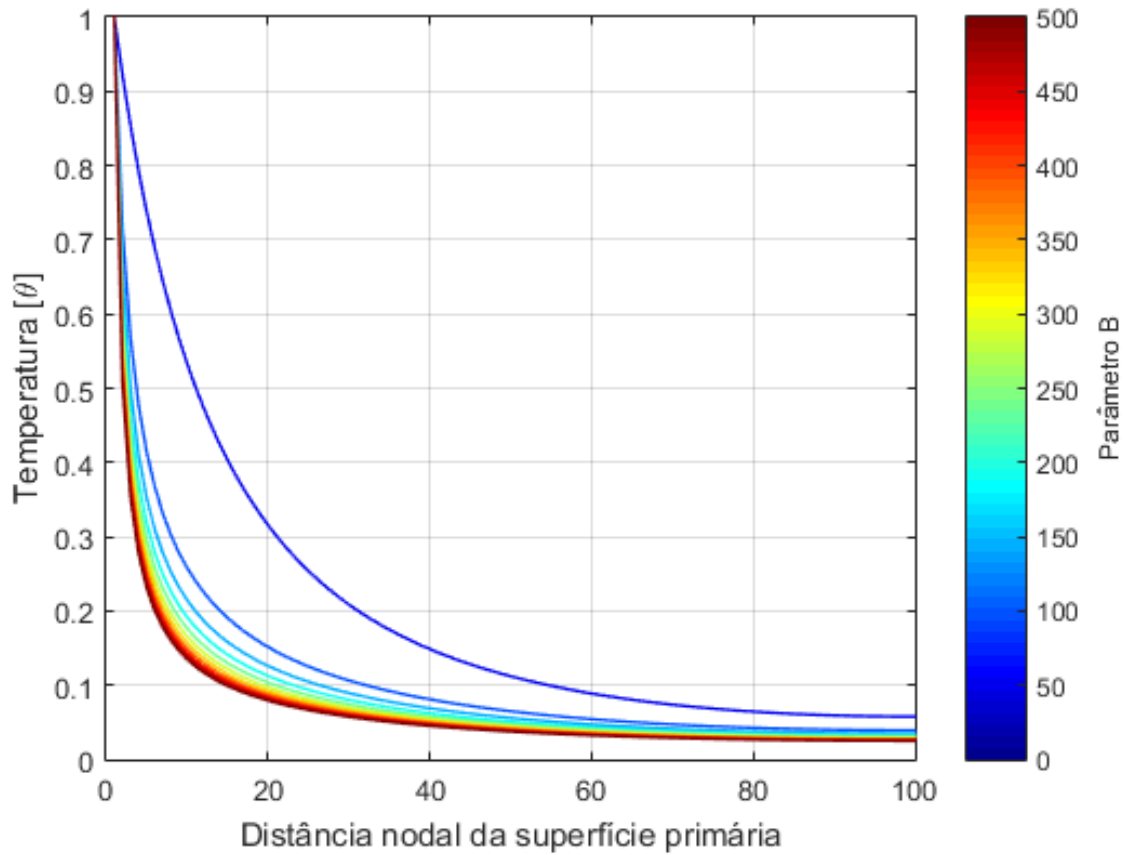


Figura 28: Diversos perfis térmicos gerados por diferentes valores de taxa de Radiação Térmica, com $\alpha = 10$ e $A = 1$

Para uma melhor análise, a Tabela 8 mostra os valores adimensionais da temperatura em alguns nós selecionados, comparando tais valores para as situações em que $B = 0$ com $B = 20$.

Tabela 8: Comparação de valores de θ entre radiação $B = 20$ e $B = 0$.

Nó	$B = 0$	$B = 20$	$B_{20} - B_0$	%
1	1,0000	1,0000	0,0000	0,00%
2	0,9228	0,7862	0,1366	14,80%
5	0,7381	0,4996	0,2385	32,31%
10	0,5334	0,3219	0,2115	39,65%
20	0,3157	0,1889	0,1268	40,16%
30	0,2087	0,1308	0,0779	37,33%
40	0,1486	0,0979	0,0507	34,12%
50	0,1121	0,0773	0,0348	31,07%
60	0,0888	0,0637	0,0252	28,32%
70	0,0738	0,0546	0,0191	25,94%
80	0,0644	0,0489	0,0155	24,07%
90	0,0593	0,0457	0,0136	22,88%
100	0,0578	0,0448	0,0130	22,49%

Aumentar o valor de B significa aumentar a influência dos efeitos da radiação térmica. É interessante tomar esse incremento gradativamente, para que seja possível analisar o comportamento térmico da aleta à medida que a radiação se torna considerável. Assim, analisando o perfil térmico para o valor de $B = 40$, tem-se a Tabela 9.

Tabela 9: Comparação de valores de θ entre radiação $B = 40$ e $B = 0$.

Nó	$B = 0$	$B = 40$	$B_{40} - B_0$	%
1	1,0000	1,0000	0,0000	0,00%
2	0,9228	0,7343	0,1885	20,43%
5	0,7381	0,4348	0,3033	41,09%
10	0,5334	0,2731	0,2603	48,80%
20	0,3157	0,1603	0,1555	49,24%
30	0,2087	0,1122	0,0965	46,24%
40	0,1486	0,0851	0,0636	42,76%
50	0,1121	0,0680	0,0441	39,38%
60	0,0888	0,0566	0,0322	36,27%
70	0,0738	0,0490	0,0247	33,54%
80	0,0644	0,0442	0,0202	31,38%
90	0,0593	0,0415	0,0178	29,99%
100	0,0578	0,0407	0,0171	29,54%

Pode-se notar, analisando a Tabela 8 e a Tabela 9, que a maior discrepância entre os valores de temperatura ocorre entre os nós 10 e 20. À medida que a análise avança, os valores de temperatura para $B = 60$ são tomados, como visto na Tabela 10.

Tabela 10: Comparação de valores de θ entre radiação $B = 60$ e $B = 0$.

Nó	$B = 0$	$B = 60$	$B_{60} - B_0$	%
1	1,0000	1,0000	0,0000	0,00%
2	0,9228	0,7006	0,2222	24,08%
5	0,7381	0,3975	0,3406	46,15%
10	0,5334	0,2462	0,2873	53,85%
20	0,3157	0,1445	0,1713	54,24%
30	0,2087	0,1018	0,1069	51,22%
40	0,1486	0,0778	0,0709	47,69%
50	0,1121	0,0625	0,0496	44,21%
60	0,0888	0,0524	0,0364	40,97%
70	0,0738	0,0457	0,0281	38,11%
80	0,0644	0,0413	0,0231	35,84%
90	0,0593	0,0389	0,0204	34,36%
100	0,0578	0,0382	0,0196	33,89%

Avançando na análise da influência da radiação térmica, já se nota que, daqui para

frente, grandes incrementos no valor de B alteram pouco o perfil, como pode ser visto na Tabela 11.

Tabela 11: Comparação de valores de θ entre radiação $B = 80$ e $B = 0$.

Nó	$B = 0$	$B = 80$	$B_{80} - B_0$	%
1	1,0000	1,0000	0,0000	0,00%
2	0,9228	0,6756	0,2472	26,79%
5	0,7381	0,3717	0,3664	49,64%
10	0,5334	0,2281	0,3054	57,24%
20	0,3157	0,1339	0,1819	57,60%
30	0,2087	0,0947	0,1140	54,61%
40	0,1486	0,0727	0,0759	51,08%
50	0,1121	0,0588	0,0533	47,57%
60	0,0888	0,0495	0,0393	44,28%
70	0,0738	0,0433	0,0305	41,36%
80	0,0644	0,0393	0,0251	39,03%
90	0,0593	0,0371	0,0222	37,51%
100	0,0578	0,0364	0,0214	37,02%

A análise termina com os valores de temperatura para $B = 100$, onde se percebe que o perfil térmico varia pouco em relação a valores de B um pouco menores. A maior discrepância entre os valores de temperatura para $B = 100$ e $B = 80$ são menores que 6%, trazendo a hipótese de variação desprezível de valores muito maiores em B .

Esse fato também pode ser facilmente visualizado na Figura 28, visto que, ao aumentar o valor do Parâmetro B, nota-se uma tendência a se ter uma distância muito pequena entre as curvas, deixando claro que um grande aumento não gera perfis muito discrepantes entre si.

Portanto essa análise se encerra na Tabela 12, apresentando os valores comparativos com $B = 100$ e $B = 0$.

Tabela 12: Comparação de valores de θ entre radiação $B = 100$ e $B = 0$.

Nó	$B = 0$	$B = 100$	$B_{100} - B_0$	%
1	1,0000	1,0000	0,0000	0,00%
2	0,9228	0,6557	0,2671	28,95%
5	0,7381	0,3523	0,3858	52,27%
10	0,5334	0,2146	0,3188	59,76%
20	0,3157	0,1260	0,1897	60,09%
30	0,2087	0,0895	0,1192	57,14%
40	0,1486	0,0689	0,0797	53,63%
50	0,1121	0,0559	0,0562	50,12%
60	0,0888	0,0472	0,0416	46,81%
70	0,0738	0,0414	0,0324	43,87%
80	0,0644	0,0377	0,0267	41,50%
90	0,0593	0,0356	0,0237	39,97%
100	0,0578	0,0350	0,0228	39,47%

Pode-se perceber, através desta análise, que o parâmetro que carrega o efeito da radiação térmica tem grande influência no perfil térmico, pois a discrepância nos valores de temperatura entre perfis com valores maiores de B chega a mais de 60% (comparação entre os casos $B = 0$ e $B = 100$).

Fisicamente o fato de que os perfis com B muito grandes serem próximos entre si aponta para o fato de que a análise e até mesmo um projeto de dissipação de calor em superfícies estendidas deve necessariamente considerar os efeitos da radiação térmica.

Ainda analisando a Figura 28, nota-se que em todos os perfis em que $B \neq 0$, as temperaturas no topo da aleta apresentam valores muito próximos, enquanto que o perfil com $B = 0$, ou seja, aquele que desconsidera a atuação da radiação térmica, apresenta um comportamento muito discrepante dos demais, deixando evidente, assim, a necessidade de se considerar esse mecanismo em projetos de engenharia.

CONCLUSÃO

Embora o assunto de dissipação de calor por superfícies estendidas seja de amplo conhecimento, as diversas abordagens existentes não são capazes de contemplar todos os aspectos que envolvem o tema. Isso pode ser notado na literatura sobre o assunto, visto que diversos aspectos são comumente negligenciados, ou mesmo quando são contemplados, não são tratados com métodos de análise simples ou suficiente para que haja uma análise satisfatória do tema.

Este trabalho fornece uma abordagem abrangente da dissipação de calor em superfícies estendidas, onde diversos parâmetros foram considerados, entre os quais se destacam a aplicação dos efeitos da radiação térmica e a porosidade do material da aleta.

Este trabalho busca uma solução adequada ao problema, aplicando uma geometria cilíndrica, que é amplamente utilizada em situações de engenharia, principalmente na dissipação de calor em tubulações industriais.

A descrição matemática da solução comprova que o modelo utilizado neste trabalho possui uma solução exata, que foi apresentada, desde que atendido um critério específico de não diminuição do perfil térmico, o que também foi comprovado matematicamente.

Além disso, este trabalho apresenta uma solução numérica utilizando métodos simples que podem ser replicados para outras análises no futuro, onde fatores como o parâmetro de porosidade, outras geometrias das aletas, ou mesmo a variação nos fenômenos térmicos utilizados podem ser estudados com maior profundidade.

Notou-se, portanto, que os parâmetros analisados podem alterar consideravelmente um projeto que busque utilizar os mecanismos de troca de calor abordados. Isso se percebe quando se analisam os parâmetros A e B explicados com profundidade neste texto.

O parâmetro A , que carrega consigo os efeitos da porosidade do material na troca térmica se mostrou muito influente em todos os pontos nodais da aleta, o que significa que a presença da porosidade afeta a análise num nível onde, se for desprezado, ou tratado como uma constante arbitrária, pode gerar uma análise não condizente com a realidade.

Pode-se afirmar, também, que aplicações com aletas constituídas de meio poroso percebem um incremento significativo na dissipação de calor, antes mesmo de se analisar outros fatores influentes no sistema de troca de calor.

Por fim este trabalho propôs de forma contundente uma modelagem matemática

para o problema de aletas porosas em cuja análise são verificados e considerados fenômenos que tornam o problema de contorno não linear. De tal forma foi provado que a sequência de problemas lineares proposta como método de solução e, de fato, a solução exata do problema original.

TRABALHOS FUTUROS

De posse dos resultados obtidos por este trabalho, é possível conceber diversas análises e estudos que possam contribuir para o avanço deste estudo, ou mesmo a criação de novas linhas de pesquisa derivadas desta análise. Como sugestões para futuras pesquisas inspiradas neste trabalho, propõe-se:

- Avaliação de eficiência na dissipação de calor comparando com outras geometrias de aletas.
- Análise computacional do método numérico utilizado visando a otimização do código.
- Utilização de outros métodos computacionais para análise numérica, como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos.
- Estudo aprofundado da otimização da taxa de porosidade, avaliando a velocidade do fluido no interior da aleta e o incremento de área superficial devido aos vazios internos.
- Investigações de possibilidade de implementação de múltiplas aletas porosas, partindo de um estudo aprofundado do fator de forma aplicado.
- Implementação da geração interna de calor na análise da abordagem matemática.
- Consideração do transiente térmico e sua influência na taxa de ocupação dos vazios do meio poroso.
- Determinação do valor da taxa de porosidade ótima.

REFERÊNCIAS

- [1] A. J. Magana and T. de Jong, “Modeling and simulation practices in engineering education,” *Computer Applications in Engineering Education*, vol. 26, no. 4, pp. 731–738, 2018.
- [2] N. A. Gershenfeld and N. Gershenfeld, *The nature of mathematical modeling*. Cambridge university press, 1999.
- [3] X. Yang, J. Guo, B. Yang, H. Cheng, P. Wei, and Y.-L. He, “Design of non-uniformly distributed annular fins for a shell-and-tube thermal energy storage unit,” *Applied Energy*, vol. 279, p. 115772, 2020.
- [4] A. Maji and G. Choubey, “Improvement of heat transfer through fins: A brief review of recent developments,” *Heat Transfer*, vol. 49, no. 3, pp. 1658–1685, 2020.
- [5] M. H. Ahmadi, M. Ramezanizadeh, M. A. Nazari, G. Lorenzini, R. Kumar, and R. Jilte, “Applications of nanofluids in geothermal: A review,” *Mathematical Modeling of Engineering Problems*, vol. 5, no. 4, pp. 281–285, 2018.
- [6] H. Li, X. Zhang, L. Liu, R. Zeng, and G. Zhang, “Exergy and environmental assessments of a novel trigeneration system taking biomass and solar energy as co-feeds,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 104, pp. 697–706, 2016.
- [7] T. Rajabloo, P. Iora, and C. Invernizzi, “Mixture of working fluids in orc plants with pool boiler evaporator,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 98, pp. 1–9, 2016.
- [8] A. Mostafavi, M. Parhizi, and A. Jain, “Semi-analytical thermal modeling of transverse and longitudinal fins in a cylindrical phase change energy storage system,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 153, p. 106352, 2020.
- [9] S. Liu, Y. Huang, and J. Wang, “Theoretical and numerical investigation on the fin effectiveness and the fin efficiency of printed circuit heat exchanger with straight channels,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 132, pp. 558–566, 2018.

- [10] M. Mhlongo and R. Moitsheki, "Some exact solutions of nonlinear fin problem for steady heat transfer in longitudinal fin with different profiles," *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2014, 2014.
- [11] A.-R. Khaled, "Mathematical extrapolating of highly efficient fin systems," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2011, 2011.
- [12] C. Harley, "Asymptotic and dynamical analyses of heat transfer through a rectangular longitudinal fin," *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2013, 2013.
- [13] W. Chen, K. Hui, B. Wang, Q. Zhao, D. Chong, and J. Yan, "Review of the tube external condensation heat transfer characteristic of the passive containment cooling system in nuclear power plant," *Annals of Nuclear Energy*, vol. 157, p. 108226, 2021.
- [14] A. Durmayaz and O. S. Sogut, "Influence of cooling water temperature on the efficiency of a pressurized-water reactor nuclear-power plant," *International Journal of Energy Research*, vol. 30, no. 10, pp. 799–810, 2006.
- [15] S. I. Attia, "The influence of condenser cooling water temperature on the thermal efficiency of a nuclear power plant," *Annals of Nuclear Energy*, vol. 80, pp. 371–378, 2015.
- [16] A. Arulselvan, V. Pandiyarajan, and R. Velraj, "Experimental investigation of the thermal performance of a heat pipe under various modes of condenser cooling," *Heat Transfer Research*, vol. 48, no. 13, 2017.
- [17] M. H. Elnaggar, M. Abdullah, and M. A. Mujeebu, "Experimental analysis and fem simulation of finned u-shape multi heat pipe for desktop pc cooling," *Energy Conversion and Management*, vol. 52, no. 8-9, pp. 2937–2944, 2011.
- [18] G. Righetti, C. Zilio, S. Mancin, and G. A. Longo, "Heat pipe finned heat exchanger for heat recovery: results and modeling," *Heat Transfer Engineering*, vol. 39, no. 12, pp. 1011–1023, 2018.
- [19] F. Mabood, W. A. Khan, and A. I. Md Ismail, "Series solution for steady heat transfer in a heat-generating fin with convection and radiation," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, 2013.

- [20] J. M. Quirino, E. D. Correa, R. L. Sobral, and R. M. S. da Gama, “The kirchhoff transformation for convective-radiative thermal problems in fins,” *International Journal of Mechanics*, vol. 15, pp. 12–21, 2021.
- [21] I. Ahmad, H. Zahid, F. Ahmad, M. A. Z. Raja, and D. Baleanu, “Design of computational intelligent procedure for thermal analysis of porous fin model,” *Chinese Journal of Physics*, vol. 59, pp. 641–655, 2019.
- [22] M. Darvishi, R. Gorla, and F. Khani, “Natural convection and radiation in porous fins,” *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2013.
- [23] I. Pop, J. Sunada, P. Cheng, and W. Minkowycz, “Conjugate free convection from long vertical plate fins embedded in a porous medium at high rayleigh numbers,” *International journal of heat and mass transfer*, vol. 28, no. 9, pp. 1629–1636, 1985.
- [24] P. Huang and K. Vafai, “Analysis of forced convection enhancement in a channel using porous blocks,” *Journal of thermophysics and heat transfer*, vol. 8, no. 3, pp. 563–573, 1994.
- [25] S. Kim, J. Paek, and B. Kang, “Flow and heat transfer correlations for porous fin in a plate-fin heat exchanger,” *J. Heat Transfer*, vol. 122, no. 3, pp. 572–578, 2000.
- [26] S. Kiwan, “Thermal analysis of natural convection porous fins,” *Transport in porous media*, vol. 67, no. 1, pp. 17–29, 2007.
- [27] B. Kundu and D. Bhanja, “An analytical prediction for performance and optimum design analysis of porous fins,” *International Journal of Refrigeration*, vol. 34, no. 1, pp. 337–352, 2011.
- [28] R. S. R. Gorla and A. Bakier, “Thermal analysis of natural convection and radiation in porous fins,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 38, no. 5, pp. 638–645, 2011.
- [29] M. Darvishi, R. S. R. Gorla, and F. Khani, “Unsteady thermal response of a porous fin under the influence of natural convection and radiation,” *Heat and Mass Transfer*, vol. 50, no. 9, pp. 1311–1317, 2014.

- [30] M. Darvishi, R. S. R. Gorla, F. Khani, and B. Giresha, “Thermal analysis of natural convection and radiation in a fully wet porous fin,” *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2016.
- [31] G. Sobamowo, “Analysis of heat transfer in porous fin with temperature-dependent thermal conductivity and internal heat generation using chebychev spectral collocation method,” *Journal of Computational Applied Mechanics*, vol. 48, no. 2, pp. 271–284, 2017.
- [32] R. Jooma and C. Harley, “Heat transfer in a porous radial fin: Analysis of numerically obtained solutions,” *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2017, 2017.
- [33] G. Sowmya, B. Giresha, and H. Berrehal, “An unsteady thermal investigation of a wetted longitudinal porous fin of different profiles,” *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, vol. 143, no. 3, pp. 2463–2474, 2021.
- [34] S. Hoseinzadeh, P. S. Heyns, A. Chamkha, and A. Shirkhani, “Thermal analysis of porous fins enclosure with the comparison of analytical and numerical methods,” *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, vol. 138, no. 1, pp. 727–735, 2019.
- [35] L. El Moutaouakil, M. Boukendil, Z. Zrikem, and A. Abdelbaki, “Natural convection and surface radiation heat transfer in a cavity with vertically oriented fins,” *Materials Today: Proceedings*, vol. 27, pp. 3051–3057, 2020.
- [36] R. Granero-Belinchón and S. Scrobogna, “On an asymptotic model for free boundary darcy flow in porous media,” *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 52, no. 5, pp. 4937–4970, 2020.
- [37] G. A. Oguntala, R. A. Abd-Alhameed, G. M. Sobamowo, and N. Eya, “Effects of particles deposition on thermal performance of a convective-radiative heat sink porous fin of an electronic component,” *Thermal Science and Engineering Progress*, vol. 6, pp. 177–185, 2018.
- [38] S. Padmanabhan, S. Thiagarajan, A. D. R. Kumar, D. Prabhakaran, and M. Raju, “Investigation of temperature distribution of fin profiles using analytical and cfd analysis,” *Materials Today: Proceedings*, vol. 44, pp. 3550–3556, 2021.

- [39] A. Tariq, K. Altaf, S. W. Ahmad, G. Hussain, and T. Ratlamwala, “Comparative numerical and experimental analysis of thermal and hydraulic performance of improved plate fin heat sinks,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 182, p. 115949, 2021.
- [40] C. Schuster, H. d. L. Gonzalez, J. Büchle, and C. D. Timm, “Avaliação de equipamento alternativo para pasteurização lenta de leite previamente envasado,” *Food Science and Technology*, vol. 26, pp. 828–831, 2006.
- [41] H. F. Gumerato and F. L. Schmidt, “Introduzindo o conceito de fo crítico no processamento térmico em batelada,” *Food Science and Technology*, vol. 29, no. 4, pp. 847–856, 2009.
- [42] A. D. Torre, C. Montenegro, A. Onorati, S. Khadilkar, and R. Icarelli, “Multi-scale cfd modeling of plate heat exchangers including offset-strip fins and dimple-type turbulators for automotive applications,” *Energies*, vol. 12, no. 15, pp. 1–20, 2019.
- [43] T. Bouhal, Z. Meghari, T. El Rhafiki, T. Kousksou, A. Jamil, E. B. Ghoulam, *et al.*, “Parametric cfd analysis and impact of pcm intrinsic parameters on melting process inside enclosure integrating fins: Solar building applications,” *Journal of Building Engineering*, vol. 20, pp. 634–646, 2018.
- [44] P. C. da Silva Telles, *Tubulações industriais: materiais, projeto e montagem*. Livros Técnicos e Científicos, 2001.
- [45] D.-S. Huang, T.-C. Chen, L.-T. Tsai, and M.-T. Lin, “Design of fins with a grooved heat pipe for dissipation of heat from high-powered automotive led headlights,” *Energy conversion and management*, vol. 180, pp. 550–558, 2019.
- [46] C. Abeykoon, “Compact heat exchangers—design and optimization with cfd,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 146, p. 118766, 2020.
- [47] A. Sadeghianjahromi and C.-C. Wang, “Heat transfer enhancement in fin-and-tube heat exchangers—a review on different mechanisms,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 137, p. 110470, 2021.
- [48] J. Zhang, X. Zhu, M. E. Mondejar, and F. Haglind, “A review of heat transfer enhancement techniques in plate heat exchangers,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 101, pp. 305–328, 2019.

- [49] C.-C. Wang, Y.-c. Hsieh, and Y.-t. Lin, “Performance of plate finned tube heat exchangers under dehumidifying conditions,” 1997.
- [50] R. Z. Homod, F. A. Abood, S. M. Shrama, and A. K. Alshara, “Empirical correlations for mixed convection heat transfer through a fin array based on various orientations,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 137, pp. 627–639, 2019.
- [51] P. Ndlovu and R. Moitsheki, “Thermal analysis of natural convection and radiation heat transfer in moving porous fins,” *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, vol. 12, 2018.
- [52] J. Fourier, *Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier*. Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.
- [53] T. Deshamukhya, S. A. Hazarika, D. Bhanja, and S. Nath, “An optimization study to investigate non-linearity in thermal behaviour of porous fin having temperature dependent internal heat generation with and without tip loss,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 67, pp. 351–365, 2019.
- [54] M. Alkasasbeh, Z. Omar, F. Mebarek-Oudina, J. Raza, and A. Chamkha, “Heat transfer study of convective fin with temperature-dependent internal heat generation by hybrid block method,” *Heat Transfer-Asian Research*, vol. 48, no. 4, pp. 1225–1244, 2019.
- [55] K. K. Ferster, K. L. Kirsch, and K. A. Thole, “Effects of geometry, spacing, and number of pin fins in additively manufactured microchannel pin fin arrays,” *Journal of Turbomachinery*, vol. 140, no. 1, p. 011007, 2018.
- [56] M. S. Mahdi, A. A. Khadom, H. B. Mahood, M. A. R. Yaqup, J. M. Hussain, K. I. Salih, and H. A. Kazem, “Effect of fin geometry on natural convection heat transfer in electrical distribution transformer: numerical study and experimental validation,” *Thermal Science and Engineering Progress*, vol. 14, p. 100414, 2019.
- [57] S. Feng, M. Shi, H. Yan, S. Sun, F. Li, and T. J. Lu, “Natural convection in a cross-fin heat sink,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 132, pp. 30–37, 2018.

- [58] J. Stefan, “Über die beziehung zwischen der wärmestrahlung und der temperatur, sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen classe der kaiserlichen,” *Akademie der Wissenschaften*, vol. 79, pp. S–391, 1879.
- [59] L. Boltzmann, “Ueber eine von hrn. bartoli entdeckte beziehung der wärmestrahlung zum zweiten hauptsatze,” *Annalen der Physik*, vol. 258, no. 5, pp. 31–39, 1884.
- [60] M. Planck, “On the law of distribution of energy in the normal spectrum,” *Annalen der physik*, vol. 4, no. 553, p. 1, 1901.
- [61] J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, vol. 1. Clarendon press, 1873.
- [62] G. Montambaux, “Generalized stefan–boltzmann law,” *Foundations of Physics*, vol. 48, no. 4, pp. 395–410, 2018.
- [63] H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application...* Victor Dalmont, 1856.
- [64] J. Ke, N. Williamson, S. Armfield, A. Komiya, and S. Norris, “High grashof number turbulent natural convection on an infinite vertical wall,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 929, 2021.
- [65] P. Mayeli and G. J. Sheard, “Buoyancy-driven flows beyond the boussinesq approximation: A brief review,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 125, p. 105316, 2021.
- [66] R. M. S. da Gama, “Existence uniqueness and construction of the solution of the energy transfer problem in a rigid and nonconvex black body,” *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, vol. 42, no. 3, pp. 334–347, 1991.
- [67] E. Correa, J. Quirino, R. Sobral, J. Corrêa, and R. Gama, “An analytical and a numerical method for nonlinear convection-radiation problems in porous fins,” *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2022, 2022.
- [68] D. Calvetti, S. Morigi, L. Reichel, and F. Sgallari, “An iterative method with error estimators,” *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 127, no. 1-2, pp. 93–119, 2001.

- [69] M. Al-Jawary and S. Hatif, "A semi-analytical iterative method for solving differential algebraic equations," *Ain Shams Engineering Journal*, vol. 9, no. 4, pp. 2581–2586, 2018.
- [70] R. Sobral, J. Quirino, E. Correa, and R. Gama, "Numerical study of heat transfer in extended surfaces with mutual radiation between parallel fins," *Revista de Engenharia Térmica*, vol. 17, no. 1, pp. 80–85, 2018.
- [71] S. Wang, "Lax equivalence theorem," *Student's Book Numerical Functional Analysis*, p. 15, 2014.