



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto Politécnico

Iram Bárbaro Rivas Ortiz

**Desenvolvimento de um método numérico de matriz resposta linear para  
cálculos bidimensionais em geometria cartesiana de transporte de nêutrons  
na formulação de ordenadas discretas**

Nova Friburgo

2022

Iram Bárbaro Rivas Ortiz

**Desenvolvimento de um método numérico de matriz resposta linear para cálculos bidimensionais em geometria cartesiana de transporte de nêutrons na formulação de ordenadas discretas**



Tese apresentada, como requisito para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadores:

Prof.Dr. Ricardo Carvalho de Barros

Prof.Dr. Dany Sanchez Dominguez

Nova Friburgo

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/E

R616 Rivas Ortiz, Iram Bárbaro  
Desenvolvimento de um método numérico de matriz resposta linear para cálculos bidimensionais em geometria cartesiana de transporte de nêutrons na formulação de ordenadas discretas / Iram Bárbaro Rivas Ortiz. - 2022.  
213 f. : il.

Orientadores: Ricardo Carvalho de Barros e Dany Sanchez Dominguez.

Tese (doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

1. Análise espectral – Teses. 2. Otimização matemática – Teses. 3. Métodos de simulação – Teses. I. Barros, Ricardo Carvalho de II. Sanchez, Dany. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico. IV. Título.

CDU 517.956.227

Bibliotecária Pâmela Lisboa CRB7/ 5965

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Iram Bárbaro Rivas Ortiz

**Desenvolvimento de um método numérico de matriz resposta linear para cálculos bidimensionais em geometria cartesiana de transporte de nêutrons na formulação de ordenadas discretas**

Tese apresentada como requisito para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de julho de 2022.

Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Ricardo Carvalho de Barros (Orientador)  
Instituto Politécnico - UERJ

---

Prof. Dr. Dany Sanchez Dominguez (Orientador)  
Universidade Estadual de Santa Cruz

---

Prof. Dr. Hermes Alves Filho  
Instituto Politécnico - UERJ

---

Prof. Dr. Joaquim Teixeira de Assis  
Instituto Politécnico - IPRJ

---

Prof. Dr. Alessandro da Cruz Gonçalves  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Jesus Perez Curbelo  
University of Saskatchewan

Nova Friburgo

2022

## DEDICATÓRIA

À minha mãe e avó  
Gratidão Infinita

A persistência é o menor caminho do êxito.

*Charles Chaplin*

## RESUMO

RIVAS ORTIZ, Iram B. Desenvolvimento de um método numérico de matriz resposta linear para cálculos bidimensionais em geometria cartesiana de transporte de nêutrons na formulação de ordenadas discretas. 2022. 215 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2022.

Na tese é apresentado o método Matriz Resposta - Linear Linear Nodal (RM-LLN) para resolver problemas de transporte de partículas neutras de fonte fixa, um grupo de energia e espalhamento isotrópico com aproximação de ordenadas discretas e em geometria retangular Cartesiana. O método RM-LLN é baseado na análise espectral das equações nodais integradas transversalmente, em que os termos de dispersão são tratados analiticamente e os termos de fuga transversal são aproximados por polinômios de Legendre de primeira ordem. É desenvolvido um aplicativo web como ferramenta computacional que implementa o método RM-LLN e facilita a análise dos resultados numéricos gerados para diferentes problemas. A aplicação é baseada na arquitetura cliente - servidor - base de dados e pode ser acessada de qualquer dispositivo com conexão à internet. Os resultados numéricos demonstram o alto desempenho do método RM-LLN no que diz respeito à precisão e custo computacional quando comparados com as soluções numéricas geradas por outros métodos reportados na literatura.

Palavras-chave: Problemas de fonte fixa e espalhamento isotrópico. Método espectral do tipo matriz resposta. Aproximações lineares nos termos de fugas transversais.

## ABSTRACT

RIVAS ORTIZ, Iram B. Development of a matrix response numerical method with linear approximation for the transverse leakage terms for two-dimensional neutron transport calculations in the discrete ordinates formulation. 2022. 215 f. These (Doctorate in Computational Modeling) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2022.

In this thesis, the Response Matrix - Linear Linear Nodal (RM-LLN) method is presented to numerically solve fixed source neutron transport problems with isotropic scattering, one energy group and discrete ordinates approximation in rectangular Cartesian geometry. The RM-LLN method is based on the spectral analysis of the transverse integrated  $S_N$  nodal equations, in which the scattering terms are treated analytically and the leakage terms are approximated by first-order Legendre polynomials. A web application has been developed as a computational tool that implements the RM-LLN method and facilitates the analysis of numerical results generated for different problems. The application is based on the client - server - database architecture and can be accessed from any device with an internet connection. Numerical results demonstrate the high performance of the RM-LLN method in terms of accuracy and computational cost when compared to other methods reported in the literature.

Keywords: Fixed-source transport problems. Response matrix spectral nodal method. Linear approximations in the leakage terms.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$S_N$	Formulação de ordenadas discretas
RM-CN	Método Matriz Resposta - Constante Nodal
SGF-ExpN	Método Função Espectral de Green - Exponencial Nodal
SGF-LN	Método Função Espectral de Green - Linear Nodal
RM-LLN	Método Matriz Resposta - Linear Linear Nodal
$LQ_N$	Quadratura de Simetria de Nível
$P_l$	Polinômio de Legendre de grau $l$
DD	Método Diferença de Diamante
CD	Método Constante Discontínuo
LD	Método Linear Descontínuo
CCN	Método Constante Constante Nodal
LLN	Método Linear Linear Nodal
LN	Método Linear Nodal
SGF	Método Função Espectral de Green
SGF-CN	Método Função Espectral de Green - Constante Nodal
EDD	Método Diferença de Diamante Estendido
SI	Esquema iterativo de fonte
CBI	Esquema iterativo de inversão de células em bloco
NBI	Esquema iterativo nodal de inversão em bloco
FBI	Esquema iterativo de inversão em bloco completo

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Psi(\vec{R}, E, \hat{\Omega}, t)$	Fluxo angular de nêutrons
$\vec{R} = (x, y, z)$	Variável espacial (coordenadas cartesianas)
$E$	Energia cinética
$\hat{\Omega} = (\theta, \varphi)$	Variável angular ( $\theta$ ângulo polar, $\varphi$ ângulo azimutal)
$t$	Variável temporal
$\sigma_t(\vec{R}, E)$	Seção de choque macroscópica total
$f(E', \hat{\Omega}' \rightarrow E, \hat{\Omega})$	Função de probabilidade
$c(E')$	Coefficiente de multiplicidade
$Q(\vec{R}, E, \hat{\Omega}, t)$	Fonte interna
$\Psi(\vec{R}, \hat{\Omega})$	Fluxo angular de nêutrons (um grupo de energia)
$\sigma_t(\vec{R})$	Seção de choque macroscópica total (um grupo de energia)
$\sigma_s(\vec{R})$	Seção de choque macroscópica de espalhamento (um grupo de energia)
$Q(\vec{R}, \hat{\Omega})$	Fonte interna (um grupo de energia)
$\Psi_m(\vec{R}) = \Psi(\vec{R}, \hat{\Omega}_m)$	Fluxo angular (formulação $S_N$ )
$\hat{\Omega}_m = (\mu_m, \eta_m, \xi_m)$	Variável angular na formulação $S_N$ (ordenadas discretas)
$M$	Número total de direções (formulação $S_N$ )
$N$	Ordem da quadratura (formulação $S_N$ )
$\omega_n$	Pesos da quadratura (formulação $S_N$ )
$Q(\vec{R})$	Fuente interna isotrópica
$\Omega_{i,j}$	Célula de discretização espacial arbitrária
$\ell_i$	Largura duma célula de discretização espacial arbitrária
$h_j$	Altura duma célula de discretização espacial arbitrária

$\sigma_{t,i,j}$	Seção de choque macroscópica total no interior duma célula de discretização espacial arbitrária
$\sigma_{s,i,j}$	Seção de choque macroscópica de espalhamento no interior duma célula de discretização espacial arbitrária
$Q_{i,j}$	Fonte interna no interior duma célula de discretização espacial arbitrária
$c_{0,i,j}$	Razão de espalhamento isotrópico no interior duma célula de discretização espacial arbitrária
$\overline{\Psi}_{m,i,j}$	Fluxo angular médio no interior duma célula de discretização espacial arbitrária
$\hat{\Psi}_{m,j}(x)$	Momento espacial de ordem zero do fluxo angular na direção $x$
$\tilde{\Psi}_{m,i}(y)$	Momento espacial de ordem zero do fluxo angular na direção $y$
$\hat{\Phi}_{m,j}(x)$	Momento espacial de primeira ordem do fluxo angular na direção $x$
$\tilde{\Phi}_{m,i}(y)$	Momento espacial de primeira ordem do fluxo angular na direção $y$
$\overline{\Psi}_{m,i,j}^x$	Momento espacial de primeira ordem do fluxo angular médio no interior duma célula de discretização espacial na direção $x$
$\overline{\Psi}_{m,i,j}^y$	Momento espacial de primeira ordem do fluxo angular médio no interior duma célula de discretização espacial na direção $y$
$\hat{\Psi}_{m,i\pm 1/2,j}$	Momento espacial de ordem zero do fluxo angular na direção $x$ nos extremos direito e/ou esquerdo duma célula de discretização arbitrária
$\tilde{\Psi}_{m,i,j\pm 1/2}$	Momento espacial de ordem zero do fluxo angular na direção $y$ nos extremos superior e/ou inferior duma célula de discretização arbitrária
$\hat{\Phi}_{m,i\pm 1/2,j}$	Momento espacial de primeira ordem do fluxo angular na direção $x$ nos extremos direito e/ou esquerdo duma célula de discretização arbitrária
$\tilde{\Phi}_{m,i,j\pm 1/2}$	Momento espacial de primeira ordem do fluxo angular na direção $y$ nos extremos superior e/ou inferior duma célula de discretização arbitrária
$v_k$	Autovalor $k$ do espaço nulo das equações $S_N$ integradas transversalmente
$r(v_k)$	Multiplicidade dos autovalores

$\hat{a}_{ij}(v_k)$ 

Autovetor  $k$  do espaço nulo das equações  $S_N$  integradas transversalmente na direção  $x$

 $\tilde{a}_{ij}(v_k)$ 

Autovetor  $k$  do espaço nulo das equações  $S_N$  integradas transversalmente na direção  $y$

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	15
1	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	21
1.1	<b>Equação de transporte de nêutrons</b> .....	21
1.2	<b>Formulação de ordenadas discretas</b> .....	23
1.3	<b>Discretização espacial das equações <math>S_N</math> de transporte de nêutrons</b> .....	27
1.4	<b>Equações <math>S_N</math> integradas transversalmente e de balanço espacial</b> .....	28
1.5	<b>Métodos numéricos</b> .....	34
1.5.1	<u>Métodos numéricos de diferenças finitas</u> .....	34
1.5.2	<u>Métodos numéricos de elementos finitos</u> .....	35
1.5.3	<u>Métodos numéricos nodais</u> .....	37
1.5.4	<u>Métodos numéricos espectro nodais</u> .....	41
1.6	<b>Esquemas iterativos de varredura</b> .....	47
1.7	<b>Considerações finais</b> .....	52
2	<b>MÉTODO MATRIZ RESPOSTA - LINEAR LINEAR NODAL</b> .....	54
2.1	<b>Principais aproximações nas equações <math>S_N</math> integradas transversalmente</b>	54
2.2	<b>Análise espectral das equações <math>S_N</math> integradas transversalmente</b> .....	56
2.2.1	<u>Meios puramente absorvedores</u> .....	58
2.2.2	<u>Meios com espalhamento isotrópico</u> .....	62
2.2.2.1	Normalização a zero.....	63
2.2.2.2	Normalização a 1.....	67
2.2.3	<u>Solução homogêneas das equações <math>S_N</math> integradas transversalmente</u> .....	68
2.3	<b>Solução geral das equações <math>S_N</math> integradas transversalmente de ordem zero</b> .....	69
2.3.1	<u>Solução particular para fonte externa</u> .....	71
2.3.2	<u>Solução particular para fugas transversais</u> .....	71
2.3.3	<u>Solução geral</u> .....	74

2.4	<b>Solução geral das equações <math>S_N</math> integradas transversalmente de primeira ordem</b> .....	76
2.4.1	<u>Solução particular para componente homogênea</u> .....	78
2.4.1.1	Constantes auxiliares para um meio puramente absorvedor.....	80
2.4.1.2	Constantes auxiliares para meios com espalhamento isotrópico.....	81
2.4.1.2.1	Normalização a 0.....	81
2.4.1.2.2	Normalização a 1.....	84
2.4.1.2.3	Forma final da solução particular para componente homogênea.....	86
2.4.2	<u>Solução particular para fonte externa</u> .....	86
2.4.3	<u>Solução particular para fugas transversais 1</u> .....	87
2.4.4	<u>Solução particular para fugas transversais 2</u> .....	89
2.4.5	<u>Solução geral</u> .....	91
2.5	<b>Representação matricial das soluções das equações integradas transversalmente</b> .....	94
2.5.1	<u>Forma matricial das soluções de ordem zero na direção x</u> .....	97
2.5.2	<u>Forma matricial das soluções de ordem zero na direção y</u> .....	99
2.5.3	<u>Forma matricial das soluções de primeira ordem na direção x</u> .....	102
2.5.4	<u>Forma matricial das soluções de primeira ordem na direção y</u> .....	107
2.6	<b>Esquema matriz resposta</b> .....	112
2.6.1	<u>Equação de matriz resposta de ordem zero</u> .....	114
2.6.2	<u>Equação de matriz resposta de primeira ordem</u> .....	117
2.6.3	<u>Equação de matriz resposta</u> .....	120
2.7	<b>Esquema iterativo</b> .....	121
2.8	<b>Considerações finais</b> .....	123
3	<b>APLICATIVO WEB</b> .....	125
3.1	<b>Informações técnicas</b> .....	125
3.2	<b>Código fonte e link de acesso</b> .....	126
3.3	<b>Design responsivo</b> .....	126
3.4	<b>Sistema de autenticação</b> .....	127

3.5	<b>Documentação</b> .....	128
3.5.1	<u>Seção de perfil</u> .....	128
3.5.2	<u>Seção de configuração ou entrada de dados</u> .....	129
3.5.2.1	Parâmetros materiais.....	130
3.5.2.2	Regiões físicas.....	131
3.5.2.3	Mapeamento de zonas.....	132
3.5.2.4	Mapeamento de fonte.....	133
3.5.2.5	Condições de contorno.....	134
3.5.3	<u>Seção de solução</u> .....	135
3.5.4	<u>Seção de resultados</u> .....	136
3.5.4.1	Relatório de resultados.....	137
3.5.4.2	Gráficos de resultados.....	138
3.5.5	<u>Terminal do sistema</u> .....	138
3.6	<b>Considerações finais</b> .....	139
4	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	140
4.1	<b>Problema 1</b> .....	140
4.2	<b>Problema 2</b> .....	147
4.3	<b>Problema 3</b> .....	157
4.4	<b>Problema 4</b> .....	163
	<b>CONCLUSÕES</b> .....	170
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	172
	<b>APÊNDICE A</b> - Metodologia para obter a solução geral das equações $S_N$ integradas transversalmente de ordem zero na direção y.....	175
	<b>APÊNDICE B</b> - Metodologia para obter a solução geral das equações $S_N$ integradas transversalmente de primeira ordem na direção y.....	181
	<b>APÊNDICE C</b> - Definição das matrizes envolvidas na forma matricial das soluções das equações $S_N$ integradas transversalmente de ordem zero na direção x.....	196
	<b>APÊNDICE D</b> - Definição das matrizes envolvidas na forma matricial das soluções das equações $S_N$ integradas transversalmente de ordem zero na direção y.....	198

<b>APÊNDICE E</b> - Definição das matrizes envolvidas na forma matricial das soluções das equações $S_N$ integradas transversalmente de primeira ordem na direção $x$ .....	200
<b>APÊNDICE F</b> - Definição das matrizes envolvidas na forma matricial das soluções das equações $S_N$ integradas transversalmente de primeira ordem na direção $y$ .....	203
<b>APÊNDICE G</b> - Definição das matrizes envolvidas na equação de matriz resposta de ordem zero.....	206
<b>APÊNDICE H</b> - Definição das matrizes envolvidas na equação de matriz resposta de primeira ordem.....	210

## INTRODUÇÃO

A teoria de transporte de partículas originou-se na descrição de vários fenômenos físicos na área da dinâmica dos gases e, posteriormente, foi aplicada em diferentes áreas como difusão e transporte de partículas, teoria do plasma, proteção radiológica, entre outras. Do ponto de vista prático a teoria é baseada essencialmente na resolução da equação integro-diferencial de transporte de Boltzmann como modelo matemático. Na área de física de reatores nucleares, a equação de Boltzmann, ou também conhecida como equação de transporte de nêutrons, é frequentemente usada na determinação da distribuição de nêutrons e, conseqüentemente, para cálculos de velocidade de reações nucleares, estabilidade de reações em cadeia, cálculos de potência, de homogeneização de elementos combustíveis, colapso de grupos de energia, obtenção do fator de multiplicação efetivo, cálculos de blindagem, entre outros cálculos relevantes.

A solução analítica da equação de transporte de nêutrons está limitada somente para casos particulares, com geometria simples e assumindo diferentes aproximações (CASE E ZWEIFEL, 1967). Por outro lado, a equação de Boltzmann pode ser resolvida aproximadamente mediante diferentes técnicas computacionais onde a solução numérica está regida principalmente pelo grau de precisão de acordo com o esquema numérico usado. Os métodos numéricos operados para solução de problemas de transporte de nêutrons podem ser divididos em duas grandes escolas: escola probabilística e escola determinística. Os métodos vinculados à primeira são baseados na natureza estocástica das interações entre nêutrons e núcleos atômicos, enquanto que os métodos vinculados à segunda são caracterizados pela aplicação de várias aproximações na equação de Boltzmann e os principais processos físicos são conservados.

O uso de métodos determinísticos em problemas de transporte de nêutrons, onde se inclui a aproximação de ordenadas discretas ( $S_N$ ) (LEWIS E MILLER, 1984), tanto para

problemas de fonte fixa quanto para problemas de autovalores, está amplamente reportado na literatura científica (BARROS E LARSEN, 1990; YAVUZ, 1995; ANLI E GUNGOR, 1996; DOMINGUEZ E BARROS, 2007; MENEZES et al., 2014; PAZINATTO et al., 2016; CURBELO et al., 2018; OLIVA et al., 2018; ORTIZ et al., 2019; SILVA et al., 2020; ORTIZ et al., 2021). Devido aos altos custos computacionais, elevados tempos em CPU e capacidade de memória requerida na solução das equações  $S_N$  de transporte, muitas linhas de pesquisas têm tido como foco os métodos de malha grossa, os quais são caracterizados por baixos custos computacionais, dependência espacial e alta precisão. Entre os métodos de malha grossa destacamos os métodos nodais analíticos onde o problema original é separado em vários problemas unidimensionais usando a técnica de integração transversal e os termos resultantes de fonte de nêutrons e fuga transversal são aproximados mediante expansão em polinômios ortogonais de ordem finita (LAWRENCE, 1986; WALTERS, 1986; AZMY, 1988), e os métodos espectro nodais onde somente são aproximados os termos de fuga de nêutrons (LARSEN, 1986; ALVES et al., 2002; CURBELO et al., 2021). Entre os métodos espectro nodais podemos também mencionar o trabalho de Silva et al. (2020) onde é apresentado o método *Response Matrix - Constant Nodal* (RM-CN, por sua sigla em inglês) para problemas de transporte bidimensionais, formulação de ordenadas discretas ( $S_N$ ) e meios não multiplicativos, e sua maior contribuição caracteriza-se pela implementação da técnica de matriz resposta na solução das equações  $S_N$  de transporte integradas transversalmente. Essa técnica é caracterizada por sua baixa complexidade e não requer nenhum parâmetro auxiliar a ser determinado na implementação do esquema iterativo do método.

Por outro lado, a maioria dos métodos de malha grossa apresentam baixo desempenho na geração de soluções precisas para problemas de alta penetração onde as propriedades dos materiais são altamente absorvedoras e/ou existem altos gradientes de fluxo de nêutrons principalmente em meios não multiplicativos (BARROS et al., 1999; MELLO E BARROS,

2002; DOMINGUEZ et al., 2010). Esta limitação pode ser encontrada em problemas de blindagem, proteção radiológica, perfuração de poços de petróleo, entre outras áreas como a medicina nuclear, ciência dos materiais e estudos geológicos. Vários estudos têm sido levados a cabo com o objetivo de resolver essa desvantagem. No trabalho de Mello e Barros (2002) é proposto o método *Spectral Green's Function - Exponential Nodal* (SGF-ExpN, por sua sigla em inglês) onde os termos de fuga de nêutrons das equações  $S_N$  integradas transversalmente são aproximados mediante funções exponenciais análogas à lei de decaimento radioativa, e a constante de decaimento é estimada a partir dos parâmetros materiais do sistema. Por outro lado, no estudo de Dominguez et al. (2007) é desenvolvido o método *Spectral Green's Function - Linear Nodal* (SGF-LN, por sua sigla em inglês) onde os termos de fuga transversais são aproximados por polinômios de Legendre de primeira ordem aumentando a precisão nas soluções numéricas, principalmente em malhas grossas. No desenvolvimento do método, é apresentado um sistema altamente acoplado das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero e primeira ordem no qual são usadas aproximações adicionais para o desacoplamento do sistema de equações e simplificação das equações características do método.

O foco da presente tese é o desenvolvimento de um novo método de malha grossa, do tipo matriz resposta, da classe espectro nodal, para problemas de transporte bidimensionais na formulação de ordenadas discretas, fonte fixa, espalhamento isotrópico, e alta penetração com elevados gradientes do fluxo de nêutrons onde os termos de fonte de nêutrons nas equações  $S_N$  integradas transversalmente são tratados analiticamente e os termos de fuga transversal são representados mediante aproximações lineares por polinômios de Legendre de primeira ordem. O método numérico proposto, denominado método *Response Matrix - Linear Linear Nodal* (RM-LLN, por sua sigla em inglês), é implementado a partir da técnica de matriz resposta para resolver as equações integradas transversalmente, apresentada no estudo

de Silva et al. (2020) para o caso do método RM-CN, e as aproximações lineares associadas aos termos de fugas transversais usadas no trabalho de Dominguez e Barros (2007) no desenvolvimento do método SGF-LN. A principal diferença em relação ao método SGF-LN em relação ao método proposto RM-LLN está no uso da técnica de matriz resposta e na resolução direta do sistema acoplado das equações  $S_N$  integradas transversalmente.

### **Motivação científica**

Os métodos de malha grossa reportados na literatura científica para problemas bidimensionais de transporte de nêutrons de fonte fixa, na formulação  $S_N$ , para um grupo de energia, espalhamento isotrópico e alta penetração com elevados gradientes do fluxo de nêutrons apresentam baixo desempenho na geração de soluções precisas para problemas de alta penetração onde as propriedades dos materiais são altamente absorvedoras e/ou existem altos gradientes de fluxo de nêutrons principalmente em meios não multiplicativos.

### **Hipótese**

Com o desenvolvimento de um novo método espectro nodal de malha grossa matriz resposta com aproximações lineares nos termos de fuga de nêutrons nas equações  $S_N$  integradas transversalmente (RM-LLN) espera-se gerar resultados numéricos precisos e de baixo custo computacional na solução de problemas de transporte de nêutrons bidimensionais, na formulação  $S_N$ , fonte fixa, um grupo de energia, espalhamento isotrópico e alta penetração com elevados gradientes de fluxo de nêutrons.

## Objetivos

- Desenvolver a formulação matemática do novo método espectro nodal RM-LLN com foco na resolução de problemas de transporte bidimensionais na formulação  $S_N$ , monoenergética, de fonte fixa, espalhamento isotrópico e alta penetração.
- Descrever o esquema iterativo de varredura do novo método espectro nodal RM-LLN.
- Desenvolver uma ferramenta computacional que implemente o método RM-LLN e outros métodos reportados na literatura científica.
- Analisar as soluções numéricas geradas pelo método RM-LLN comparativamente a outros esquemas reportados na literatura para diferentes problemas-modelo.

No Capítulo 1 são apresentadas a equação de transporte linearizada de Boltzmann e a formulação  $S_N$ . É descrito o processo de discretização das variáveis espaciais e vários métodos numéricos clássicos usados na resolução de problemas de transporte de nêutrons em geometria bidimensional cartesiana. E são apresentados os principais esquemas iterativos de varredura implementados nos diferentes métodos numéricos e expomos as principais contribuições do novo método desenvolvido na presente tese. No Capítulo 2 é desenvolvida a metodologia do novo método denominado *Matriz Resposta - Linear Linear Nodal* (RM-LLN, por suas siglas em inglês). Primeiramente, são apresentadas as aproximações comumente usadas nas equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero e primeira ordem para os termos de fugas transversais e o sistema acoplado resultante é resolvido analiticamente. Em seguida, são definidas as equações de matriz resposta de ordem zero e primeira ordem, e desenvolvemos o novo método matriz resposta com aproximações lineares, com a descrição do esquema iterativo implementado no método RM-LLN. No Capítulo 3, é apresentado o aplicativo web desenvolvido na presente tese como ferramenta computacional para resolver

problemas de transporte de nêutrons de fonte fixa, espalhamento isotrópico, um grupo de energia e geometria bidimensional Cartesiana. Finalmente, no Capítulo 4, são modelados quatro problemas-modelo para testar o desempenho do método RM-LLN enquanto a precisão numérica e custo computacional quando comparados com outros métodos reportados na literatura.

## 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, são abordados os principais conceitos e definições usados ao longo desta tese. Apresentamos a equação de transporte de nêutrons e a formulação de ordenadas discretas ( $S_N$ ) como modelo matemático a resolver. É descrito o processo de discretização espacial e recorremos a vários métodos numéricos clássicos usados para resolver problemas de transporte de nêutrons em geometria bidimensional cartesiana. Por último, são apresentados os principais esquemas iterativos de varredura implementados pelos diferentes métodos abordados.

### 1.1 Equação de transporte de nêutrons

A equação linear de Boltzmann constitui um modelo matemático que descreve o comportamento médio da população de partículas que migram num meio hospedeiro (LEWIS E MILLER, 1984) e possui a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{R}, E, \hat{\Omega}, t) + \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{R}, E, \hat{\Omega}, t) + \sigma_t(\vec{R}, E) \Psi(\vec{R}, E, \hat{\Omega}, t) = \\ = \int_0^{\infty} dE' \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' f(\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) c(E') \sigma_t(\vec{R}, E') \Psi(\vec{R}, E', \hat{\Omega}', t) + Q(\vec{R}, E, \hat{\Omega}, t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

A Eq. (1.1) constitui uma equação integro-diferencial linear cuja variável dependente  $\Psi(\vec{R}, E, \hat{\Omega}, t)$  é o fluxo angular de nêutrons que é função distribuição de sete variáveis independentes: posição  $\vec{R} = (x, y, z)$ , energia cinética  $E$ , direção  $\hat{\Omega} = (\theta, \varphi)$ , e tempo  $t$ .

$\sigma_t(\vec{R}, E)$  constitui a seção de choque macroscópica total e está relacionada à probabilidade por unidade de comprimento que uma partícula com energia  $E$  sofrerá uma interação ao migrar uma distância unitária no meio hospedeiro.  $c(E')$  representa a multiplicidade total (número de nêutrons que aparecem como resultado de um evento) e a quantidade  $f(E', \hat{\Omega}' \rightarrow E, \hat{\Omega})c(E')\sigma_t(\vec{R}, E')$  constitui a probabilidade de ocorrência em que uma partícula precursora com energia  $E'$  e direção  $\hat{\Omega}'$  gere, resultado de um evento, uma partícula com energia  $E$  em  $dE$  e direção  $\hat{\Omega}$  em  $d\hat{\Omega}$ , onde  $f(\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}, E' \rightarrow E)$  representa uma função de probabilidade.

Para problemas estacionários e monoenergéticos, não há dependência temporal nem transferência de energia nas colisões dos nêutrons com os núcleos. Por outro lado, para problemas de transporte em meios não multiplicativos com espalhamento isotrópico a quantidade  $c(E)\sigma_t(\vec{R}, E) = c\sigma_t(\vec{R})$  constitui a seção de choque macroscópica de espalhamento  $\sigma_s(\vec{R})$  e a função de probabilidade é definida como  $f(\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) = 1/4\pi$ .

Assumindo essas considerações, a Eq. (1.1) pode ser reescrita como

$$\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\Psi(\vec{R}, \hat{\Omega}) + \sigma_t(\vec{R})\Psi(\vec{R}, \hat{\Omega}) = \frac{\sigma_s(\vec{R})}{4\pi} \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \Psi(\vec{R}, \hat{\Omega}') + Q(\vec{R}, \hat{\Omega}). \quad (1.2)$$

Para resolver a Eq. (1.2) é preciso especificar o sistema de coordenadas, as seções de choque macroscópicas total e de espalhamento, a fonte externa e as condições de contorno que prescrevem a incidência de nêutrons no contorno do domínio em questão. A solução analítica da Eq. (1.2) para o caso de um meio homogêneo unidimensional onde as seções de choque macroscópicas total e de espalhamento são consideradas constantes pode ser

encontrada em Case e Zweifel (1967). Para problemas heterogêneos onde exista dependência espacial nas seções de choque, a Eq. (1.2) não tem solução analítica ou sua obtenção é demasiadamente complexa.

## 1.2 Formulação de ordenadas discretas

A formulação de ordenadas discretas ( $S_N$ ) é amplamente utilizada na modelagem numérica da equação de transporte de nêutrons e consiste na discretização do domínio contínuo da variável angular  $\hat{\Omega}$  por um conjunto de valores discretos  $\hat{\Omega}_m$  denominados ordenadas discretas. O termo integral da fonte de espalhamento é aproximado por uma fórmula de quadratura da forma (LEWIS E MILLER, 1984):

$$\frac{\sigma_s(\vec{R})}{4\pi} \int_{4\pi} d\hat{\Omega} \Psi(\vec{R}, \hat{\Omega}) = \frac{\sigma_s(\vec{R})}{4} \sum_{n=1}^M \Psi(\vec{R}, \hat{\Omega}_n) \omega_n, \quad (1.3)$$

onde  $\omega_n$  representam os pesos da quadratura utilizada. As equações  $S_N$  de transporte de nêutrons, resultantes da discretização da variável angular na Eq. (1.2), podem ser escritas na forma:

$$\hat{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \Psi_m(\vec{R}) + \sigma_t(\vec{R}) \Psi_m(\vec{R}) = \frac{\sigma_s(\vec{R})}{4} \sum_{n=1}^M \Psi_n(\vec{R}) \omega_n + Q(\vec{R}), \quad m = 1:M, \quad (1.4)$$

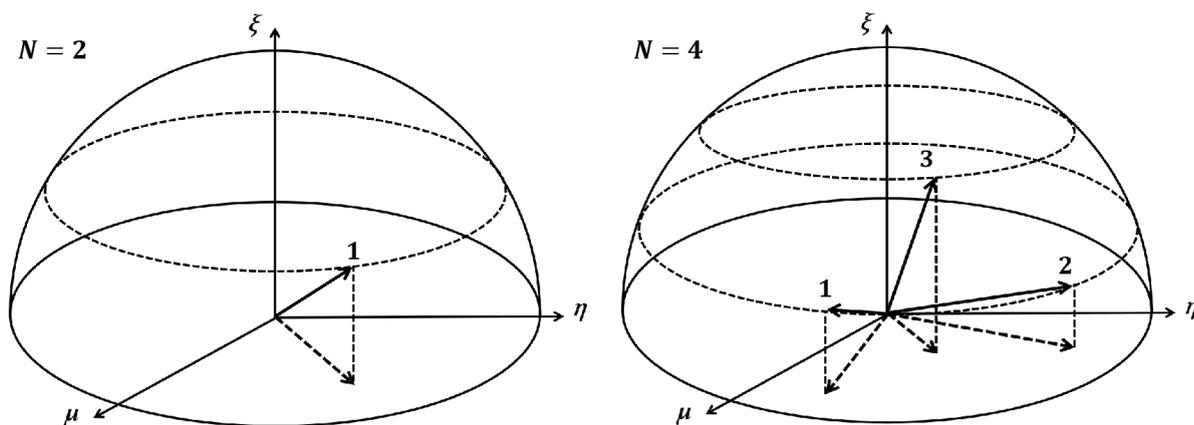
onde  $\Psi_m(\vec{R}) = \Psi(\vec{R}, \hat{\Omega}_m)$  e assumimos uma fonte externa isotrópica,  $Q(\vec{R}) = Q(\vec{R}, \hat{\Omega}_m)/4\pi$ .

A Eq. (1.4) representa um sistema de  $M$  equações diferenciais parciais de primeira ordem

acopladas pelo termo de espalhamento onde  $M = N(N + 2)/2$  constitui o número total de direções angulares de migração dos nêutrons obtido para geometria bidimensional retangular cartesiana, e  $N$  representa a ordem da quadratura.

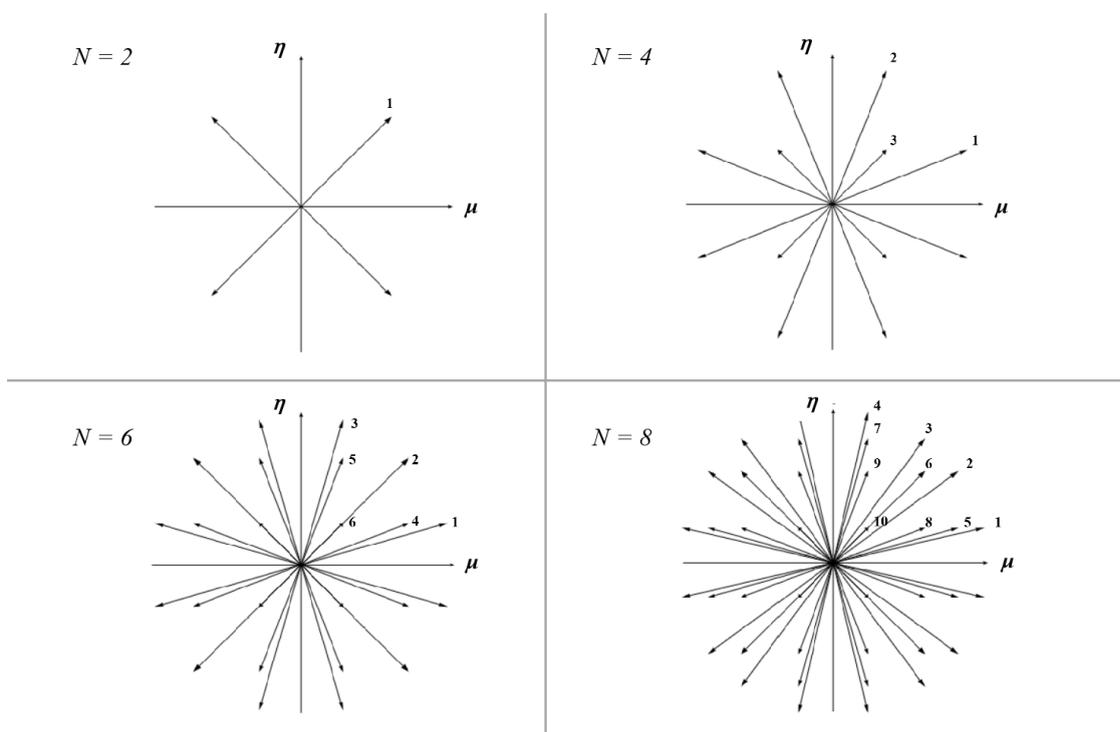
Em cálculos de transporte de nêutrons, uma das quadraturas usadas com mais frequência, tanto para problemas bidimensionais quanto para problemas tridimensionais, é a quadratura de simetria de nível ou *Level Symmetric Quadrature* ( $LQ_N$ , por sua sigla em inglês), e consiste numa distribuição simétrica de coordenadas angulares discretas no interior de uma esfera unitária onde os pesos da quadratura são obtidos de forma tal que a integral ao longo da referida esfera seja exatamente igual aos valores computados pela fórmula de quadratura (LEWIS E MILLER, 1984). Em problemas bidimensionais, as ordenadas discretas da quadratura  $LQ_N$  constituem as projeções das componentes angulares da esfera unitária no plano definido por  $\mu$  e  $\eta$ . Na Figura 1 são mostradas as direções dos nêutrons para os casos  $S_2$  e  $S_4$  no primeiro octante. As direções são ordenadas começando do anel inferior até o anel superior. Para o caso onde mais de uma direção concorra num anel, essas direções são ordenadas pelas magnitudes das componentes  $\mu$  ou  $\eta$ ; de maior para menor, ou de menor para maior, respetivamente. Para ordens de quadraturas  $N$  aparecem  $N/2$  anéis. No anel inferior concorrem  $N/2$  direções e nos anéis superiores temos uma direção menos em comparação com o anel localizado diretamente embaixo. Na Figura 2 são representadas as projeções das direções dos nêutrons usadas nas formulações  $S_2$ ,  $S_4$ ,  $S_6$  e  $S_8$  e na Tabela 1 reportamos os parâmetros das quadraturas angulares para os casos do primeiro quadrante.

Figura 1 - Direções angulares para as formulações  $N = 2$  e  $4$



Fonte: O autor, 2022

Figura 2 - Projeções das direções angulares para  $N = 2, 4, 6$  e  $8$



Fonte: O autor, 2022

Tabela 1 - Parâmetros da quadratura angular  $LQ_N$  para  $N = 2, 4, 6$  e  $8$ 

N	IQ <sup>a</sup>	$\mu$	$\eta$	$\omega$	M
2	1	0.577350	0.577350	1.000000	4
4	1	0.868890	0.350021	0.333333	12
	2	0.350021	0.868890	0.333333	
	3	0.350021	0.350021	0.333333	
6	1	0.926181	0.266636	0.176126	24
	2	0.681508	0.681508	0.157207	
	3	0.266636	0.926181	0.176126	
	4	0.681508	0.266636	0.157207	
	5	0.266636	0.681508	0.157207	
	6	0.266636	0.266636	0.176126	
8	1	0.951190	0.218218	0.120988	40
	2	0.786796	0.577350	0.090741	
	3	0.577350	0.786796	0.090741	
	4	0.218218	0.951190	0.120988	
	5	0.786796	0.218218	0.090741	
	6	0.577350	0.577350	0.092593	
	7	0.218218	0.786796	0.090741	
	8	0.577350	0.218218	0.090741	
	9	0.218218	0.577350	0.090741	
	10	0.218218	0.218218	0.120988	

Nota: (a) Direções angulares do primeiro quadrante mostrado na Figura 2.

Fonte: O autor, 2022

Na Tabela 1,  $\hat{\Omega}_m = (\mu_m, \eta_m)$  constituem as ordenadas discretas na formulação  $S_N$  da equação de transporte de nêutrons onde definimos  $\mu_m = \cos \theta_m$  e  $\eta_m = \sqrt{1 - \mu_m^2} \sin \varphi_m$  usando coordenadas cartesianas, onde  $\theta_m$  representa o ângulo polar e  $\varphi_m$  o ângulo azimutal.

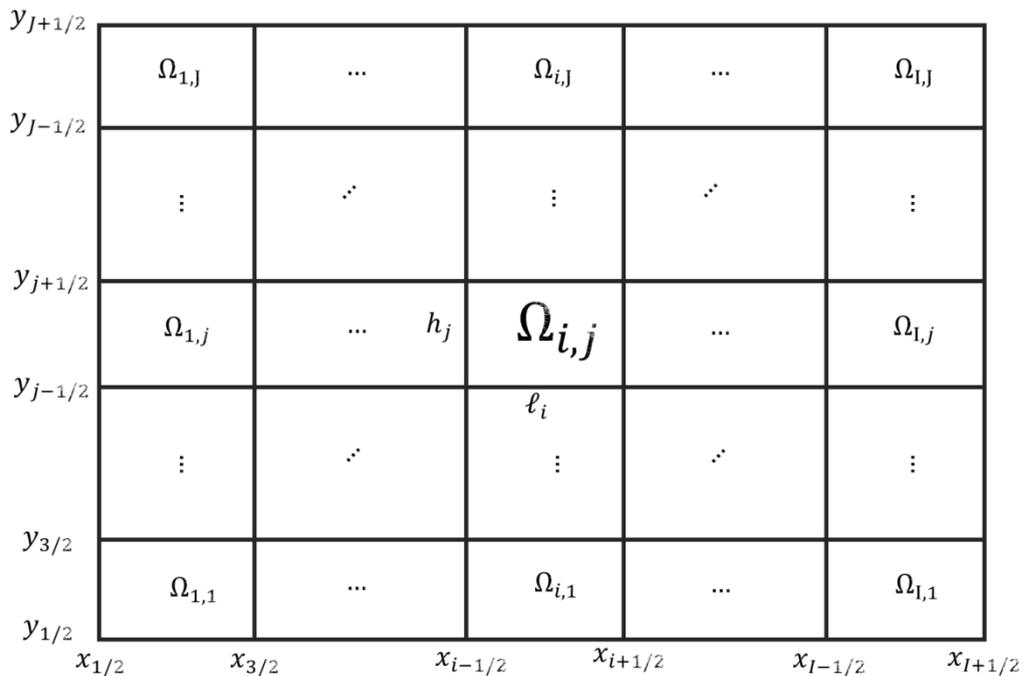
### 1.3 Discretização espacial das equações $S_N$ de transporte de nêutrons

Para resolver numericamente as equações  $S_N$  de transporte de nêutrons o seguinte passo seria o processo de discretização das variáveis espaciais. Para isso, é considerado o seguinte problema bidimensional de transporte num domínio retangular  $D$  com comprimento  $L$  e largura  $H$ :

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi_m(x, y) + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \Psi_m(x, y) + \sigma_t(x, y) \Psi_m(x, y) = \frac{\sigma_s(x, y)}{4} \sum_{n=1}^M \Psi_n(x, y) \omega_n + Q(x, y), \quad (1.5)$$

onde  $(x, y) \in D$  e  $m = 1, 2, \dots, M$ . O domínio é dividido em  $I \times J$  células espaciais de comprimento  $\ell_i$  e largura  $h_j$ , conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 - Discretização espacial



E a Eq. (1.5) é definida para cada uma das células  $\Omega_{i,j}$  na forma:

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi_m(x, y) + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \Psi_m(x, y) + \sigma_{t,i,j} \Psi_m(x, y) = \frac{\sigma_{s0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \Psi_n(x, y) \omega_n + Q_{i,j}, \quad (1.6)$$

onde  $(x, y) \in \Omega_{i,j}$ ,  $x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$ ,  $y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2}$ , e tanto as seções de choque macroscópicas total e de espalhamento quanto a fonte externa são consideradas constantes no interior de cada célula  $\Omega_{i,j}$  de discretização espacial.

#### 1.4 Equações $S_N$ integradas transversalmente e de balanço espacial

Na maioria dos esquemas numéricos usados na resolução de problemas de transporte de nêutrons reportados na literatura científica estão baseados tanto nas equações  $S_N$  integradas transversalmente quanto nas equações  $S_N$  de balanço espacial. No primeiro caso, é usada a técnica de integração transversal para simplificar o sistema de equações diferenciais parciais  $S_N$  num sistema de equações diferenciais ordinárias e problemas multidimensionais são transformados em dois ou mais problemas “unidimensionais” acoplados. No segundo caso, consiste na simplificação das equações  $S_N$  de transporte de nêutrons num sistema linear algébrico acoplado mediante o uso de operadores matemáticos. Na derivação tanto das equações  $S_N$  integradas transversalmente quanto das equações  $S_N$  de balanço espacial, é definido o operador matemático integral:

$$\frac{2l+1}{e_k} \int_{u_{k-1/2}}^{u_{k+1/2}} P_l \left[ \frac{2(u-u_k)}{e_k} \right] \cdot du, \quad (1.7)$$

onde  $P_l$  constitui o polinômio de Legendre de grau  $l$  e  $u_k = (u_{k+1/2} + u_{k-1/2})/2$ , onde  $(e, u, k) = (\ell, x, i)$  ou  $(h, y, j)$ .

As equações  $S_N$  integradas transversalmente para os momentos de ordem zero do fluxo angular na direção coordenada  $x$  é obtida mediante a aplicação do operador representado pela Eq. (1.7) nas equações  $S_N$  de transporte de nêutrons, Eq. (1.6), considerando  $e = h$ ,  $u = y$ ,  $k = j$  e  $l = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_{m,j}(x) + \hat{\Psi}_{m,j}(x) &= \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\Psi}_{n,j}(x) \omega_n + \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,ij}} - \\ &- \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} [\Psi_m(x, y_{j+1/2}) - \Psi_m(x, y_{j-1/2})], \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde  $c_{0,ij} = \sigma_{s0,ij} / \sigma_{t,ij}$  e o momento de ordem zero do fluxo angular na direção  $x$ ,  $\hat{\Psi}_{m,j}(x)$ , é definido como:

$$\hat{\Psi}_{m,j}(x) = \frac{1}{h_j} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \Psi_m(x, y) dy. \quad (1.9)$$

De igual maneira podemos obter as equações  $S_N$  integradas transversalmente para os momentos de ordem zero do fluxo angular na direção  $y$  usando o operador representado pela

Eq. (1.7) nas equações  $S_N$  de transporte de nêutrons, Eq. (1.6), considerando  $e = \ell$ ,  $u = x$ ,  $k = i$  e  $l = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) + \tilde{\Psi}_{m,i}(y) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\Psi}_{n,i}(y) \omega_n + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}} - \\ &- \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left[ \Psi_m(x_{i+1/2}, y) - \Psi_m(x_{i-1/2}, y) \right], \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde o momento de ordem zero do fluxo angular na direção  $y$ ,  $\tilde{\Psi}_{m,i}(y)$ , é definido como

$$\tilde{\Psi}_{m,i}(y) = \frac{1}{\ell_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Psi_m(x, y) dx. \quad (1.11)$$

e para obter as equações  $S_N$  de balanço espacial de ordem zero podemos aplicar o operador representado pela Eq. (1.7) nas equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $x$ , Eq. (1.8), considerando  $e = \ell$ ,  $u = x$ ,  $k = i$  e  $l = 0$ ; ou aplicar esse operador nas equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$ , Eq. (1.10), considerando  $e = h$ ,  $u = y$ ,  $k = j$  e  $l = 0$ . A equação obtida aparece como

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) + \bar{\Psi}_{m,i,j} &= \\ = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{m,i,j} \omega_n + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde  $\hat{\Psi}_{m,i\pm 1/2,j} = \hat{\Psi}_{m,j}(x_{i\pm 1/2})$ ,  $\tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} = \tilde{\Psi}_{m,i}(y_{j\pm 1/2})$  e o fluxo angular médio  $\bar{\Psi}_{m,i,j}$  em  $\Omega_{i,j}$  é definido como

$$\bar{\Psi}_{m,i,j} = \frac{1}{\ell_i h_j} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Psi_m(x, y) dx dy. \quad (1.13)$$

Por outro lado, as equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $x$  obtida mediante a aplicação do operador representado pela Eq. (1.7) nas equações  $S_N$  de transporte de nêutrons, Eq. (1.6), considerando  $e = h, u = y, k = j$  e  $l = 1$ , são

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\phi}_{m,j}(x) + \hat{\phi}_{m,j}(x) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\phi}_{n,j}(x) \omega_n + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \hat{\Psi}_{m,j}(x) - \\ &- \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} [\Psi_m(x, y_{j+1/2}) + \Psi_m(x, y_{j-1/2})], \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde o momento de primeira ordem do fluxo angular na direção coordenada  $x$ ,  $\hat{\phi}_{m,i,j}(x)$ , é definido como

$$\hat{\phi}_{m,j}(x) = \frac{6}{h_j^2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} (y - y_j) \Psi_m(x, y) dy. \quad (1.15)$$

De maneira similar podemos obter as equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $y$  aplicando o operador representado pela Eq. (1.7) nas equações  $S_N$  de transporte de nêutrons, Eq. (1.6), considerando  $e = \ell, u = x, k = i$  e  $l = 1$

$$\frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dy} \tilde{\varphi}_{m,i}(y) + \tilde{\varphi}_{m,i}(y) = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\varphi}_{n,i}(y) \omega_n + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) -$$

$$- \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} [\Psi_m(x_{i+1/2}, y) + \Psi_m(x_{i-1/2}, y)], \quad (1.16)$$

onde o momento de primeira ordem do fluxo angular na direção  $y$ ,  $\tilde{\varphi}_{m,i}(y)$ , é definido como

$$\tilde{\varphi}_{m,i}(y) = \frac{6}{\ell_i^2} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (x - x_i) \Psi_m(x, y) dx. \quad (1.17)$$

Para obter as equações  $S_N$  de balanço espacial para o momento de primeira ordem do fluxo angular médio na direção  $x$  podemos aplicar o operador representado pela Eq. (1.7) nas equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $x$ , Eq. (1.8), considerando  $e = \ell$ ,  $u = x$ ,  $k = i$  e  $l = 1$ ; ou aplicar esse operador nas equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $y$ , Eq. (1.16), considerando  $e = h$ ,  $u = y$ ,  $k = j$  e  $l = 0$ . A equação obtida aparece como

$$\frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} - 2\bar{\Psi}_{m,ij} \right) + \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) + \bar{\Psi}_{m,ij}^x =$$

$$= \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij}^x \omega_n, \quad (1.18)$$

onde  $\tilde{\varphi}_{m,i,j\pm 1/2} = \tilde{\varphi}_{m,i}(y_{j\pm 1/2})$  e o momento de primeira ordem do fluxo angular médio na direção  $x$ ,  $\bar{\Psi}_{m,ij}^x$ , é definido como

$$\overline{\Psi}_{m,i,j}^x = \frac{6}{\ell_i^2 h_j} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (x - x_i) \Psi_m(x, y) dx dy. \quad (1.19)$$

Concluindo, para obter as equações  $S_N$  de balanço espacial para o momento de primeira ordem do fluxo angular médio na direção  $y$  podemos aplicar o operador representado pela Eq. (1.7) nas equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $x$ , Eq. (1.14), considerando  $e = \ell$ ,  $u = x$ ,  $k = i$  e  $l = 0$ ; ou aplicar esse operador nas equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$ , Eq. (1.10), considerando  $e = h$ ,  $u = y$ ,  $k = j$  e  $l = 1$ . A equação obtida assume a forma

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\phi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} - 2\overline{\Psi}_{m,i,j} \right) + \overline{\Psi}_{m,i,j}^y = \\ & = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \overline{\Psi}_{n,i,j}^y \omega_n, \end{aligned} \quad (1.20)$$

onde  $\hat{\phi}_{m,i\pm 1/2,j} = \hat{\phi}_{m,j}(x_{i\pm 1/2})$  e o momento de primeira ordem do fluxo angular médio na direção  $y$ ,  $\overline{\Psi}_{m,i,j}^y$ , é definido como

$$\overline{\Psi}_{m,i,j}^y = \frac{6}{\ell_i h_j^2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (y - y_j) \Psi_m(x, y) dx dy. \quad (1.21)$$

Na sequência são apresentados diferentes esquemas numéricos aplicados na resolução de problemas  $S_N$  de transporte de nêutrons, os quais são baseados tanto nas equações de balanço, quanto nas equações integradas transversalmente descritas nesta seção.

## 1.5 Métodos numéricos

Dentro dos métodos numéricos reportados na literatura científica para resolver problemas de transporte de nêutrons, podemos definir dois grupos de acordo com a espessura das células de discretização espacial. São considerados como métodos de malha fina os métodos que geram resultados numéricos confiáveis em malhas onde o livre caminho médio dos nêutrons seja muito maior em comparação à espessura das células de discretização espacial. No escopo da presente pesquisa é definido como livre caminho médio a distância média percorrida por um nêutron entre duas colisões consecutivas e matematicamente é quantificado como o inverso da seção de choque macroscópica total. E, são entendidos como soluções numéricas confiáveis os resultados com desvios relativos percentuais menores que 1% quando comparados com os fluxos escalares nas soluções de referência. Por outro lado, são considerados métodos de malha grossa os métodos que geram resultados numéricos confiáveis em malhas onde a espessura das células de discretização espacial seja da mesma ordem ou maior do que o livre caminho médio dos nêutrons no meio hospedeiro.

### 1.5.1 Métodos numéricos de diferenças finitas

Um dos primeiros métodos de malha fina desenvolvidos para resolver numericamente as equações  $S_N$  de transporte de nêutrons foi o método *Diamond Difference* (DD, por sua sigla em inglês) e pertence ao grupo dos métodos de diferenças finitas (LEWIS E MILLER, 1984). Esse método utiliza as equações de balanço espacial de ordem zero, Eq. (1.12), junto com as

seguintes equações auxiliares que relacionam o fluxo angular médio de nêutrons com os fluxos nos extremos de cada célula de discretização espacial nas direções  $x$  e  $y$

$$\bar{\Psi}_{m,i,j} \cong \frac{\hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j}}{2}, \quad (1.22)$$

$$\bar{\Psi}_{m,i,j} \cong \frac{\tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}}{2}. \quad (1.23)$$

As Eqs. (1.22) e (1.23) junto com as equações de balanço espacial de ordem zero constituem as equações características do método DD e formam um sistema completo cujas incógnitas estão dadas pelo fluxo angular médio e os fluxos angulares emergentes nos extremos de cada célula espacial.

### 1.5.2 Métodos numéricos de elementos finitos

Em continuidade, outro grupo de métodos amplamente usados na resolução numérica de problemas de transporte de nêutrons são os métodos de elementos finitos. Dentro dos métodos de elementos finitos podemos encontrar o método *Constant Discontinuous* (CD, por sua sigla em inglês) e o método *Linear Discontinuous* (LD, por sua sigla em inglês) (COURTOT, 1981; WALTERS, 1986). As equações auxiliares dos métodos de elementos finitos são baseadas principalmente na expansão em polinômios de Legendre do fluxo angular de nêutrons. Para o caso do método CD, as equações auxiliares usam aproximações constantes nos momentos do fluxo angular de ordem zero

$$\hat{\Psi}_{m,j}(x) \cong \bar{\Psi}_{m,i,j}, \quad (1.24)$$

$$\tilde{\Psi}_{m,i}(y) \cong \bar{\Psi}_{m,i,j}. \quad (1.25)$$

Para o caso do método LD, as equações auxiliares utilizam polinômios de Legendre de primeira ordem para aproximar os momentos do fluxo angular de ordem zero

$$\hat{\Psi}_{m,j}(x) \cong \bar{\Psi}_{m,i,j} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \bar{\Psi}_{m,i,j}^x, \quad (1.26)$$

$$\tilde{\Psi}_{m,i}(y) \cong \bar{\Psi}_{m,i,j} + \frac{2(y-y_i)}{h_j} \bar{\Psi}_{m,i,j}^y. \quad (1.27)$$

Logo, as Eqs. (1.26) e (1.27) são usadas nas definições dos momentos dos fluxos angulares de primeira ordem, Eqs. (1.19) e (1.21) onde podemos obter as seguintes relações

$$\hat{\Phi}_{m,i\pm 1/2,j} = \bar{\Psi}_{m,i,j}^x, \quad (1.28)$$

$$\tilde{\Phi}_{m,i,j\pm 1/2} = \bar{\Psi}_{m,i,j}^y. \quad (1.29)$$

As equações  $S_N$  de balanço espacial de ordem zero, Eq. (1.12), junto às Eqs. (1.24) e (1.25) constituem as equações características do método CD, e as Eqs. (1.26) - (1.29), junto

com as equações  $S_N$  de balanço espacial de ordem zero e de primeira ordem, Eqs. (1.12), (1.18) e (1.20), constituem as equações características do método LD. Os métodos de elementos finitos oferecem melhores resultados que os métodos de diferenças finitas resultado das aproximações usadas como equações auxiliares e reportam menores custos computacionais (COURTOT, 1981).

De forma geral, os métodos de malha fina apresentam resultados numéricos consistentes para espessuras das células de discretização espacial suficientemente pequenas em relação às dimensões do problema em questão. Porém, tanto os métodos de diferença finita quanto os métodos de elementos finitos apresentam dificuldades para resolver problemas de alta penetração com fortes gradientes do fluxo angular e custos computacionais elevados.

### 1.5.3 Métodos numéricos nodais

Os primeiros métodos de malha grossa reportados na literatura científica para resolver problemas de transporte são os métodos nodais (LAWRENCE, 1986; AZMY, 1988). Esses métodos são os precursores do uso da técnica de integração transversal para transformar problemas multidimensionais em vários problemas unidimensionais mais simples e a principal característica ocorre na resolução analítica das equações  $S_N$  integradas transversalmente considerando diferentes aproximações tanto para os termos de fonte de espalhamento quanto para os termos de fuga transversal de nêutrons.

O primeiro método nodal desenvolvido por Walters e O'Dell (1981) foi o método *Constant Constant Nodal* (CCN, por sua sigla em inglês). O método é baseado em

aproximações constantes dos termos de fonte de espalhamento e dos fluxos angulares nos extremos das células de discretização espacial. Isto é,

$$\frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \Psi_n(x) \omega_n = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij} \omega_n, \quad (1.30)$$

$$\Psi_m(x, y_{j\pm 1/2}) \cong \tilde{\Psi}_{m,ij\pm 1/2}, \quad (1.31)$$

$$\Psi_m(x_{i\pm 1/2}, y) \cong \hat{\Psi}_{m,i\pm 1/2,j}. \quad (1.32)$$

Conseqüentemente, as equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero nas direções  $x$  e  $y$  Eqs. (1.8) e (1.10), tomam a forma

$$\frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_{m,j}(x) + \hat{\Psi}_{m,j}(x) = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij} \omega_n + \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,ij}} - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} (\tilde{\Psi}_{m,ij+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,ij-1/2}), \quad (1.33)$$

$$\frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dy} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) + \tilde{\Psi}_{m,i}(y) = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij} \omega_n + \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,ij}} - \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} (\hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j}). \quad (1.34)$$

As Eqs. (1.33) e (1.34) constituem equações diferenciais lineares ordinárias não homogêneas cuja solução analítica pode ser encontrada no trabalho de Walters e O'Dell (1981). As soluções das Eqs. (1.33) e (1.34) junto com as equações  $S_N$  de balanço espacial de ordem zero representam as equações características do método CCN.

Outro método nodal de malha grossa é o denominado método *Linear Linear Nodal* (LLN, por sua sigla em inglês) apresentado no trabalho de Walters (1986). Neste método são usadas expansões lineares dos polinômios de Legendre para aproximar os termos de fonte de espalhamento e os fluxos angulares nos extremos das células de discretização espacial

$$\begin{aligned} \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \Psi_n(x) \omega_n &\cong \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij} \omega_n + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij}^x \omega_n + \\ &+ \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij}^y \omega_n, \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\Psi_m(x, y_{j\pm 1/2}) \cong \tilde{\Psi}_{m,ij\pm 1/2} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \tilde{\Phi}_{m,ij\pm 1/2}, \quad (1.36)$$

$$\Psi_m(x_{i\pm 1/2}, y) \cong \hat{\Psi}_{m,i\pm 1/2,j} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \hat{\Phi}_{m,i\pm 1/2,j}. \quad (1.37)$$

A partir das aproximações representadas pelas Eqs. (1.35), (1.36) e (1.37), as equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero nas direções  $x$  e  $y$ , Eqs. (1.8) e (1.10), tomam a forma

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_{m,j}(x) + \hat{\Psi}_{m,j}(x) &= \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij} \omega_n + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij}^x \omega_n + \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,ij}} - \\ &- \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,ij+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,ij-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\Phi}_{m,ij+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,ij-1/2} \right), \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dy} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) + \tilde{\Psi}_{m,i}(y) &= \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij} \omega_n + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij}^y \omega_n + \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,ij}} - \\
&- \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right). \tag{1.39}
\end{aligned}$$

As equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem nas direções  $x$  e  $y$ , Eqs. (1.14) e (1.16), assumem a forma

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dx} \hat{\Phi}_{m,j}(x) + \hat{\Phi}_{m,j}(x) &= \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij}^y \omega_n + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \hat{\Psi}_{m,j}(x) - \\
&- \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2} \right), \tag{1.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dy} \tilde{\Phi}_{m,i}(y) + \tilde{\Phi}_{m,i}(y) &= \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,ij}^x \omega_n + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) - \\
&- \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right). \tag{1.41}
\end{aligned}$$

As soluções das Eqs. (1.38) - (1.41) junto com as equações  $S_N$  de balanço espacial de ordem zero e primeiras ordens, Eqs. (1.12), (1.18) e (1.20), representam as equações características do método LLN. No trabalho de Walters (1986), é desenvolvido outro método nodal denominado *Linear Nodal* (LN, por sua sigla em inglês) com o objetivo de simplificar o trabalho algébrico envolvido no método LLN desacoplando as equações  $S_N$  integradas transversalmente mediante duas aproximações adicionais introduzidas nas Eqs. (1.40) e (1.41). Essas aproximações não conservativas têm a forma

$$\hat{\Psi}_{m,j}(x) \cong \bar{\Psi}_{m,i,j} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \bar{\Psi}_{m,i,j}^x, \quad (1.42)$$

$$\tilde{\Psi}_{m,i}(y) \cong \bar{\Psi}_{m,i,j} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \bar{\Psi}_{m,i,j}^y. \quad (1.43)$$

As soluções analíticas do sistema desacoplado resultante junto com as equações de balanço de ordem zero e primeira ordem representam as equações características do método LN. Tanto o método LN quanto o método LLN, de malha grossa, têm-se mostrado satisfatórios na resolução de vários problemas de transporte. No entanto, os métodos apresentam dificuldades em problemas de alta penetração com elevados gradientes de fluxos angulares e é requerido um refinamento da malha de discretização espacial para gerar resultados numéricos satisfatórios (WALTERS E O'DELL, 1981; LAWRENCE, 1986).

#### 1.5.4 Métodos numéricos espectro nodais

Dentre os métodos de malha grossa pertencentes à classe dos métodos espectralnodais, é encontrado o método *Spectral Green's Function - Constant Nodal* (SGF-CN, por sua sigla em inglês) baseado na premissa do método *Spectral Green's Function* (SGF, por sua sigla em inglês) descrito no trabalho de Barros e Larsen (1990), que por sua vez, baseia-se na premissa do método *Extended Diamond Difference* (EDD, por sua sigla em inglês) introduzido por Larsen (1986). Neste estudo, Larsen desenvolve o primeiro método espectro nodal baseado no esquema DD onde apenas o autovalor dominante do espectro das equações  $S_N$  de transporte de

nêutrons é conservado gerando resultados numéricos mais precisos do que o método DD convencional. Baseado na mesma ideia, Barros e Larsen desenvolvem o método SGF para problemas unidimensionais onde todos os autovalores e autovetores do espectro das equações  $S_N$  de transporte são conservados e as soluções numéricas são livres de erros de truncamento. Claramente o método EDD gera soluções livres de erros de truncamento espacial apenas para o modelo  $S_2$  ( $N = 2$ ). A essência dos métodos espectralnodais está no uso do espectro das equações  $S_N$  de transporte, constituído pelos autovalores e autovetores, que formam uma base para o espaço nulo, na obtenção de esquemas numéricos precisos e de alto desempenho pelo uso de grades grossas de discretização espacial. No caso do método SGF-CN, os autovalores e autovetores da solução das equações  $S_N$  homogêneas integradas transversalmente de ordem zero são conservados. Ressaltamos que, ainda assim, os resultados numéricos não são livres de erros de truncamento, como resultado da aproximação constante nos termos de fuga de nêutrons. Essas aproximações podem ser representadas por:

$$\Psi_m(x, y_{j\pm 1/2}) \cong \tilde{\Psi}_{m,i,j\pm 1/2}, \quad (1.44)$$

$$\Psi_m(x_{i\pm 1/2}, y) \cong \hat{\Psi}_{m,i\pm 1/2,j}. \quad (1.45)$$

Consequentemente, as equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero nas direções  $x$  e  $y$ , Eqs. (1.8) e (1.10), podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_{m,j}(x) + \hat{\Psi}_{m,j}(x) = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\Psi}_{n,j}(x) \omega_n + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}} - \\ - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right), \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) + \tilde{\Psi}_{m,i}(y) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\Psi}_{n,i}(y) \omega_n + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}} - \\ &- \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right). \end{aligned} \quad (1.47)$$

O método SGF-CN utiliza equações auxiliares baseadas na função de Green, amplamente aplicadas em problemas de valor de contorno, para relacionar os fluxos angulares médios no interior das células de discretização espacial com os fluxos angulares incidentes nos extremos das mesmas. As equações auxiliares do método SGF-CN são:

$$\bar{\Psi}_{m,i,j} = \sum_{\mu_m > 0} \hat{\theta}_{m,n} \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} + \sum_{\mu_m < 0} \hat{\theta}_{m,n} \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} + \tilde{G}_{m,i,j}(Q), \quad (1.48)$$

$$\bar{\Psi}_{m,i,j} = \sum_{\eta_m > 0} \tilde{\theta}_{m,n} \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} + \sum_{\eta_m < 0} \tilde{\theta}_{m,n} \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} + \hat{G}_{m,i,j}(Q), \quad (1.49)$$

onde as constantes  $\hat{\theta}_{m,n}$ ,  $\tilde{\theta}_{m,n}$ ,  $\tilde{G}_{m,i,j}(Q)$  e  $\hat{G}_{m,i,j}(Q)$ , são calculadas de forma que as soluções analíticas das Eqs. (1.46) e (1.47) sejam preservadas no interior das células de discretização espacial. As Eqs. (1.48) e (1.49) junto com as equações  $S_N$  de balanço de ordem zero constituem as equações características do método SGF-CN.

Por outro lado, no trabalho de Silva et. al. (2020), é desenvolvido o método espectral nodal denominado *Response Matrix - Constant Nodal* (RM-CN, por sua sigla em inglês),

baseado no método *Response Matrix* (RM, por sua sigla em inglês) publicado em Silva et. al. (2013) para problemas unidimensionais, que apresenta a grande vantagem de simplificar o trabalho algébrico e computacional envolvido no método SGF-CN. O método usa, de igual maneira, as aproximações constantes para os termos de fuga transversal utilizadas no método SGF-CN e é baseado nas equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero nas direções coordenadas  $x$  e  $y$ , Eqs. (1.8) e (1.10). A principal diferença em relação ao método SGF-CN está no uso da técnica de matriz resposta onde os fluxos angulares emergentes das células de discretização espacial estão relacionados diretamente com os fluxos angulares de entrada nas mesmas mediante uma matriz denominada matriz resposta. O método não necessita de parâmetro auxiliar previamente calculado, nem de equações auxiliares envolvidas e gera resultados numéricos com o mesmo grau de precisão do que o método SGF-CN.

Outro método de malha grossa espectro nodal que ressaltamos é o método *Spectral Green 's Function - Linear Nodal* (SGF-LN, por sua sigla em inglês) desenvolvido por Dominguez e Barros (2007). Neste método os fluxos angulares nos extremos das células de discretização espacial são aproximados por expansões lineares em polinômios de Legendre:

$$\Psi_m(x, y_{j\pm 1/2}) \cong \tilde{\Psi}_{m,i,j\pm 1/2} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \tilde{\Phi}_{m,i,j\pm 1/2}, \quad (1.50)$$

$$\Psi_m(x_{i\pm 1/2}, y) \cong \hat{\Psi}_{m,i\pm 1/2,j} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \hat{\Phi}_{m,i\pm 1/2,j}. \quad (1.51)$$

Assim, podemos reescrever as equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero nas direções  $x$  e  $y$ , Eqs. (1.8) e (1.10), como

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_{m,j}(x) + \hat{\Psi}_{m,j}(x) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\Psi}_{n,j}(x) \omega_n + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}} - \\ &- \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right), \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) + \tilde{\Psi}_{m,i}(y) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\Psi}_{n,i}(y) \omega_n + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}} - \\ &- \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right), \end{aligned} \quad (1.53)$$

e as equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem nas direções  $x$  e  $y$ , Eqs. (1.14) e (1.16), como

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\varphi}_{m,j}(x) + \hat{\varphi}_{m,j}(x) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\varphi}_{n,j}(x) \omega_n + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \hat{\Psi}_{m,j}(x) - \\ &- \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right), \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \tilde{\varphi}_{m,i}(y) + \tilde{\varphi}_{m,i}(y) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\varphi}_{n,i}(y) \omega_n + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) - \\ &- \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right). \end{aligned} \quad (1.55)$$

As Eqs. (1.52) - (1.55) representam um sistema de equações diferenciais ordinárias não homogêneas fortemente acopladas. Com o objetivo de simplificar o trabalho algébrico do

método SGF-LN são implementadas duas aproximações nas Eqs. (1.54) e (1.55) nos termos do fluxo angular de ordem zero nas direções  $x$  e  $y$  representados no lado direito das mesmas para o desacoplamento do sistema. Maiores detalhes sobre essas aproximações podem ser encontrados no trabalho de Dominguez e Barros (2007).

Analogamente ao método SGF-CN, o método SGF-LN utiliza equações auxiliares baseadas na função de Green para relacionar os fluxos angulares médios de ordem zero e de primeira ordem no interior das células de discretização espacial com os fluxos angulares incidentes nos extremos das mesmas. As equações auxiliares do método SGF-LN podem ser escritas na forma:

$$\bar{\Psi}_{m,i,j} = \sum_{\mu_m > 0} \hat{Y}_{m,n}^0 \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} + \sum_{\mu_m < 0} \hat{Y}_{m,n}^0 \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} + \tilde{H}_{m,i,j}^0(Q) , \quad (1.56)$$

$$\bar{\Psi}_{m,i,j} = \sum_{\eta_m > 0} \tilde{Y}_{m,n}^0 \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} + \sum_{\eta_m < 0} \tilde{Y}_{m,n}^0 \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} + \hat{H}_{m,i,j}^0(Q) , \quad (1.57)$$

$$\bar{\Psi}_{m,i,j}^x = \sum_{\mu_m > 0} \hat{Y}_{m,n}^1 \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} + \sum_{\mu_m < 0} \hat{Y}_{m,n}^1 \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} + \tilde{H}_{m,i,j}^1(Q) , \quad (1.58)$$

$$\bar{\Psi}_{m,i,j}^y = \sum_{\eta_m > 0} \tilde{Y}_{m,n}^1 \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} + \sum_{\eta_m < 0} \tilde{Y}_{m,n}^1 \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} + \hat{H}_{m,i,j}^1(Q) , \quad (1.59)$$

onde as constantes  $\hat{Y}_{m,n}^{0,1}$ ,  $\tilde{Y}_{m,n}^{0,1}$ ,  $\tilde{H}_{m,i,j}^{0,1}$  e  $\hat{H}_{m,i,j}^{0,1}(Q)$  são calculadas de forma que as soluções analíticas do sistema representado pelas Eqs. (1.52) - (1.55), uma vez desacoplado, sejam preservadas no interior das células de discretização espacial. As Eqs. (1.56) - (1.59) junto com as equações  $S_N$  de balanço de ordem zero e de primeiras ordens constituem as equações características do método SGF-LN.

Os métodos espectralnodais apresentados nesta seção têm-se mostrado satisfatórios na geração de soluções numéricas confiáveis e de baixos custos computacionais em comparação aos métodos de diferenças finitas, de elementos finitos e os nodais clássicos para malhas grossas. Porém, para alguns casos com grades espaciais muito grossas e elevados gradientes do fluxo angular, não é satisfeito o critério de soluções numéricas confiáveis segundo a definição sustentada nesta tese e é requerido um refinamento das malhas de discretização espacial para se gerarem resultados numéricos satisfatórios comprometendo os custos computacionais associados (BARROS et. al., 1999; DOMINGUEZ E BARROS, 2007; DOMINGUEZ et. al., 2010). Por esse motivo, ainda persiste um nicho relacionado ao desempenho dos métodos espectro nodais para malhas grossas ao resolver problemas de transporte de alta penetração e elevados gradientes de fluxos angulares no meio hospedeiro onde viajam os nêutrons.

## 1.6 Esquemas iterativos de varredura

Uma vez definidas as equações constitutivas dos métodos numéricos, historicamente estabelece-se um esquema iterativo de varredura ao longo das células de discretização espacial que permita computar os fluxos angulares emergentes nos extremos das células a

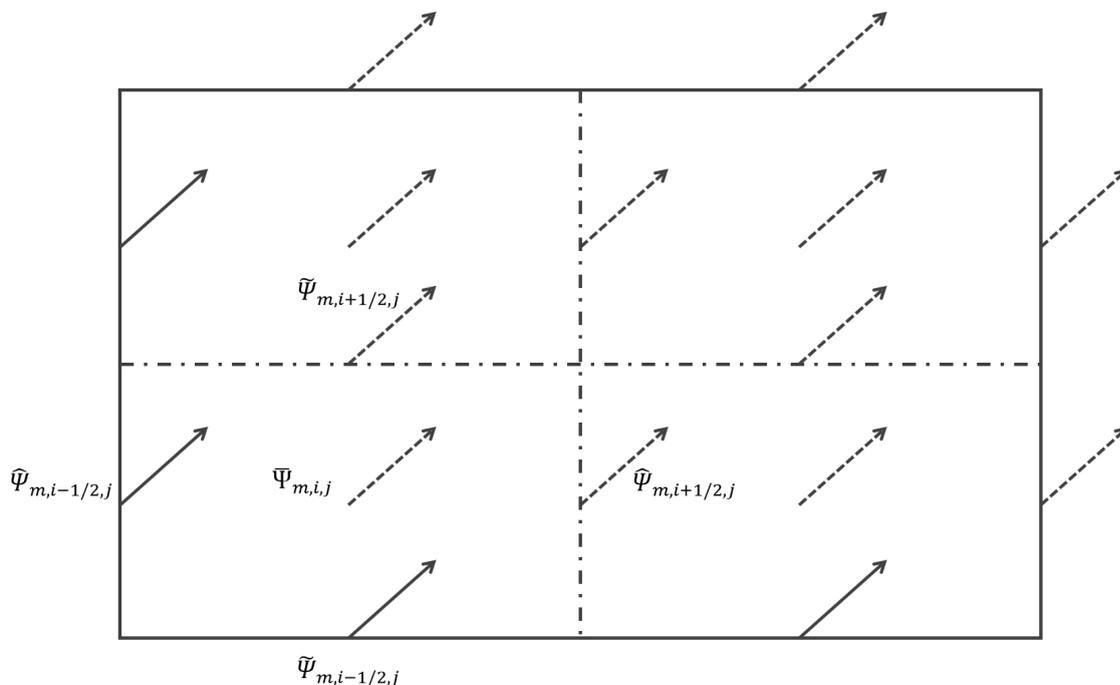
partir dos fluxos angulares médios e de entrada nas mesmas. Os esquemas iterativos de varredura em geometria cartesiana bidimensional apresentam um máximo de quatro direções de varredura, um por cada quadrante: varredura  $SO \rightarrow NE$  ( $\mu_m > 0, \eta_m > 0$ ), varredura  $SE \rightarrow NO$  ( $\mu_m < 0, \eta_m > 0$ ), varredura  $NE \rightarrow SO$  ( $\mu_m < 0, \eta_m < 0$ ) e varredura  $NO \rightarrow SE$  ( $\mu_m > 0, \eta_m < 0$ ).

Um dos primeiros esquemas de varredura reportados na literatura científica constitui o esquema *Source Iteration* (SI, por sua sigla em inglês) (LEWIS E MILLER, 1984). Esse esquema pode ser implementado a partir do grau do desacoplamento das equações auxiliares envolvidas nos diferentes métodos numéricos e é baseado num esquema simples onde as iterações são guiadas mediante uma série de atualizações dos termos de fonte de espalhamento que aparecem nas equações  $S_N$  de balanço espaciais em meios não multiplicativos. Na sequência enumeramos os principais passos do esquema SI:

1. Inicializar o processo iterativo estabelecendo uma estimativa inicial dos termos de fonte de espalhamento nas equações  $S_N$  de balanço espaciais.
2. Calcular os fluxos angulares médios no interior das células de discretização espacial e emergentes nos extremos das mesmas a partir dos fluxos angulares médios de entrada definidos pelas condições de contorno ou condições de continuidade de células adjacentes e usando a estimativa da fonte de espalhamento junto aos termos de fonte externa percorrendo as diferentes direções de varredura.
3. Atualizar o termo de fonte de espalhamento para a seguinte iteração uma vez finalizadas as varreduras nas diferentes direções ao longo da grade de discretização espacial.

4. Verificar se o critério de parada é satisfeito. Para o caso de ser satisfeito, encerra-se o processo iterativo; do contrário, procede-se com uma nova iteração retomando o esquema iterativo a partir do passo 2.

Figura 4 - Esquema iterativo SI (Varredura  $SO \rightarrow NE$ )



Fonte: O autor, 2022

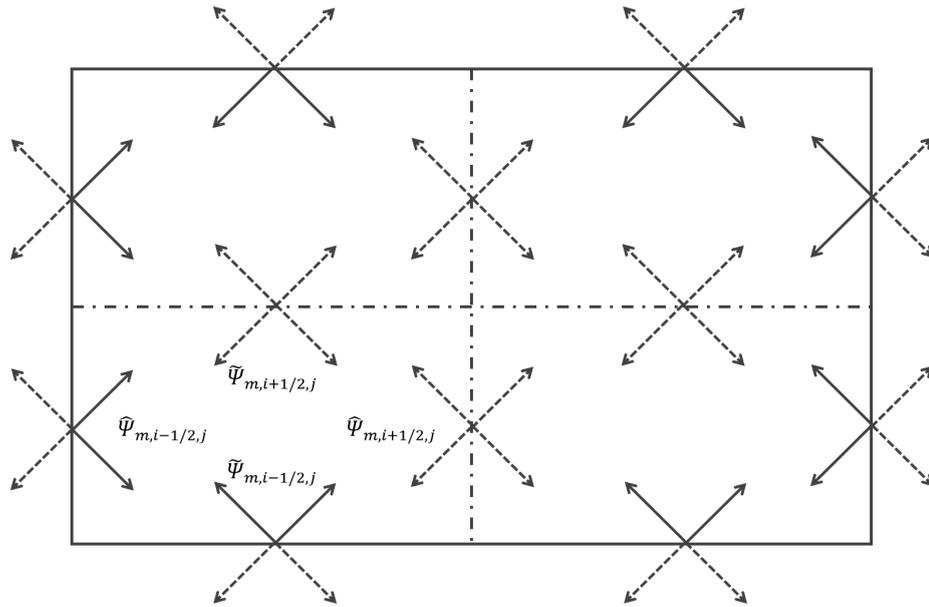
Na Figura 4 ilustramos o esquema iterativo SI para a varredura  $SO \rightarrow NE$ . As setas representadas por linhas contínuas representam os fluxos angulares médios incidentes pelos contornos e as setas tracejadas os fluxos angulares médios emergentes e no interior das células de discretização espacial computados durante o processo iterativo. Para cada direção de varredura os fluxos angulares médios emergentes são calculados a partir dos fluxos angulares médios de incidência e internos. Esses fluxos são usados como fluxos angulares médios de entrada nas células adjacentes para a obtenção dos novos fluxos angulares médios emergentes e assim, sucessivamente, até finalizar a varredura por todas as células de discretização espacial. O mesmo procedimento é feito para as restantes direções de varredura. O esquema

iterativo SI pode ser implementado nos métodos de diferenças finitas, de elementos finitos e nodais clássicos descritos na seção anterior pois envolvem equações auxiliares onde as direções nas quais migram as partículas são desacopladas.

Nos casos dos métodos espectro nodais geralmente os esquemas numéricos apresentam um forte acoplamento nas direções dos fluxos angulares e o esquema iterativo SI não pode ser implementado nestes casos. No trabalho de Barros e Larsen (1990) é descrito um esquema iterativo denominado *Cell Block Inversion* (CBI, por suas siglas em inglês) para o método SGF em problemas unidimensionais e, posteriormente modificado para problemas bidimensionais no trabalho de Barros et. al. (1999) com o nome de esquema *Node Block Inversion* (NBI, por suas siglas em inglês). A ideia principal do esquema iterativo NBI consiste na obtenção dos fluxos angulares médios emergentes a partir das mais recentes estimativas dos fluxos angulares incidentes numa célula arbitrária de discretização espacial. Para os casos dos métodos SGF é necessário o cálculo dos fluxos angulares médios no interior das células de discretização espacial como passo auxiliar na obtenção dos fluxos angulares médios emergentes nos extremos das mesmas. Os passos principais do esquema iterativo NBI são:

1. Inicializar o processo iterativo estabelecendo estimativas iniciais para os fluxos angulares de entrada nas células de discretização espacial.
2. Calcular os fluxos angulares médios emergentes a partir dos fluxos angulares médios de entrada definidos pelas condições de contorno ou condições de continuidade de células adjacentes percorrendo as diferentes direções de varredura.
3. Verificar se o critério de parada é satisfeito. Para o caso de ser satisfeito, encerra-se o processo iterativo; do contrário, procede-se com uma nova iteração retomando o esquema iterativo a partir do passo 2.

Figura 5 - Esquema iterativo NBI



Fonte: O autor, 2022

Na Figura 5 ilustramos o esquema iterativo NBI. As setas representadas por linhas contínuas representam os fluxos angulares médios de entrada pelos contornos e as setas tracejadas os fluxos angulares médios computados durante o processo iterativo. Para cada direção de varredura os fluxos angulares médios emergentes são calculados a partir dos fluxos angulares médios de incidência em todas as direções discretas do modelo  $S_N$ . Esses fluxos são usados como fluxos angulares médios de entrada nas células adjacentes para a obtenção dos novos fluxos angulares médios emergentes e assim sucessivamente até finalizar a varredura por todas as pelas células de discretização espacial. O procedimento é repetido para as quatro direções de varredura. O esquema iterativo NBI pode ser implementado em qualquer método numérico descrito na seção anterior; porém, o esforço algébrico para se obter as equações de varredura não justifica sua utilização nos métodos com equações auxiliares desacopladas em direções.

Por outro lado, existem duas variantes de implementação do esquema iterativo NBI. A primeira é a denominada NBI parcial usada no trabalho de Barros et. al. (1999) e consiste na obtenção parcial dos fluxos angulares médios emergentes nas células de discretização espacial de acordo com o sentido da varredura. Quando as direções de varredura é feita no sentido do primeiro quadrante, são computados somente os fluxos angulares médios emergentes nessas direções. Para as demais varreduras realiza-se o mesmo procedimento. A segunda variante é a utilizada nos trabalhos de Mello et. al., 2002, e Dominguez e Barros (2007) denominada FBI (Full Block Inversion, por suas siglas em inglês) e consiste principalmente na obtenção dos fluxos angulares médios emergentes em todas as direções. As duas variantes levam ao mesmo resultado e diferem principalmente no número de iterações envolvidas no processo iterativo.

### 1.7 Considerações finais

No capítulo seguinte é desenvolvido um novo método de malha grossa espectro nodal focado principalmente no nicho enquanto a desempenho que apresentam os diferentes métodos numéricos mencionados anteriormente para malhas grossas identificado para problemas de transporte de alta penetração e elevados gradientes de fluxos angulares. No novo método, denominado método *Response Matrix - Linear Linear Nodal* (RM-LLN, por sua sigla em inglês), os termos de fonte de nêutrons nas equações  $S_N$  integradas transversalmente são resolvidos analiticamente e os termos de fuga transversal são tratados mediante aproximações lineares em base aos polinômios de Legendre de primeira ordem. A dupla linearidade é resultado dessas aproximações nas direções  $x$  e  $y$ , formulada pelo método LLN, e os termos de fonte de espalhamento são tratados analiticamente, sem aproximações adicionais para a derivação das equações constitutivas do método.

O novo método traz como principais contribuições resolver analiticamente o sistema representado pelas equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero e de primeira ordem caracterizado pelo seu elevado grau de acoplamento sem a utilização de nenhuma aproximação adicional como as reportadas nos métodos LN e SGF-LN com o fim de sacrificar precisão dos resultados numéricos para o ganho na simplificação do trabalho algébrico. Além disso, outra contribuição de grande importância seria a utilização pela primeira vez da técnica de matriz resposta no método numérico para o sistema representado pelas equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero e primeira ordem, reduzindo consideravelmente o trabalho algébrico no desenvolvimento do novo método, em contraste com o método SGF que envolve o cálculo prévio de parâmetros nas equações auxiliares.

## 2 MÉTODO MATRIZ RESPOSTA - LINEAR LINEAR NODAL

Neste capítulo é apresentado um novo método de malha grossa, espectro nodal, matriz resposta, para problemas de transporte de nêutrons em geometria bidimensional cartesiana, denominado método *Response Matrix - Linear Linear Nodal* (RM-LLN, por sua sigla em inglês). O método é baseado principalmente nas equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero e primeira ordem nas direções  $x$  e  $y$  onde os termos de espalhamento são tratados analiticamente e os termos de fugas transversais são aproximados mediante expansões lineares baseados nos polinômios de Legendre de primeira ordem. As principais contribuições consistem na resolução do sistema fortemente acoplado representados por as equações  $S_N$  integradas transversalmente sem a necessidade do uso de nenhuma aproximação adicional que limitem sua capacidade de geração de soluções numéricas com elevado grau de precisão, e a implementação pela primeira vez da técnica de matriz resposta aplicada no desenvolvimento do método envolvendo aproximações lineares.

### 2.1 Principais aproximações nas equações $S_N$ integradas transversalmente

No Capítulo 1 foram apresentadas as equações  $S_N$  de transporte de nêutrons em geometria bidimensional cartesiana, Eq. (1.6), e foram deduzidas as equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero e primeira ordem nas direções  $x$  e  $y$ , Eqs. (1.8) e (1.10), e Eqs. (1.14) e (1.16), respetivamente. O método RM-LLN é baseado no formalismo descrito

acima onde os fluxos angulares nos extremos das células de discretização espacial são aproximados mediante expansões lineares usando polinômios de Legendre de primeira ordem

$$\Psi_m(x, y_{j\pm 1/2}) \cong \tilde{\Psi}_{m,i,j\pm 1/2} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \tilde{\Phi}_{m,i,j\pm 1/2} \quad (2.1)$$

$$\Psi_m(x_{i\pm 1/2}, y) \cong \hat{\Psi}_{m,i\pm 1/2,j} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \hat{\Phi}_{m,i\pm 1/2,j} \quad (2.2)$$

Conseqüentemente, as equações integradas transversalmente de ordem zero nas direções  $x$  e  $y$ , Eqs. (1.8) e (1.10) tomam a forma

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_{m,j}(x) + \hat{\Psi}_{m,j}(x) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\Psi}_{n,j}(x) \omega_n + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}} - \\ - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) &- \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) + \tilde{\Psi}_{m,i}(y) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\Psi}_{n,i}(y) \omega_n + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}} - \\ - \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) &- \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

e as equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem nas direções  $x$  e  $y$ , Eqs. (1.14) e (1.16), são reformuladas como

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\varphi}_{m,j}(x) + \hat{\varphi}_{m,j}(x) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\varphi}_{n,j}(x) \omega_n + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \hat{\Psi}_{m,j}(x) - \\ &- \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\Psi}_{m,i,j+1/2} + \hat{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i,j+1/2} + \hat{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \tilde{\varphi}_{m,i}(y) + \tilde{\varphi}_{m,i}(y) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\varphi}_{n,i}(y) \omega_n + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) - \\ &- \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

As Eqs. (2.3) - (2.6) constituem equações diferenciais lineares ordinárias de primeira ordem não homogêneas acopladas por os termos de espalhamento e fugas transversais. Nas seções seguintes são resolvidas essas equações primeiramente definindo as soluções do sistema homogêneo equivalente e posteriormente construindo as soluções particulares em cada caso.

## 2.2 Análise espectral das equações $S_N$ integradas transversalmente

As Eqs. (2.3) - (2.6) compartilham o mesmo sistema de equações diferenciais lineares ordinárias de primeira ordem homogêneo, e pode ser formulado na forma

$$\frac{\Upsilon_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dz} X_{m,p}(z) + X_{m,p}(z) = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M X_{n,p}(z) \omega_n, \quad (2.7)$$

onde  $(z, p, Y_m) = (x, i, \mu_m)$  ou  $(y, j, \eta_m)$ , e  $X_{m,p}(z)$  representa os momentos espaciais de ordem zero e primeira ordem do fluxo angular nas direções  $x$  e  $y$ . Para resolver a Eq. (2.7) é assumida uma estimativa da forma

$$X_{m,p}(z) = a_{m,i,j}(\nu) e^{\sigma_{i,p}(z-z_p)/\nu}, \quad (2.8)$$

onde  $a_{m,i,j}(\nu)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  representam as componentes dos autovetores associados ao autovalor  $\nu$  na célula  $\Omega_{i,j}$ . Na Eq. (2.8), foi adotada a formulação  $z - z_p$  nos expoentes das funções exponenciais para reduzir os erros associados na computação dos valores dessas funções. Substituindo a Eq. (2.8) em (2.7) e reagrupando termos, é possível obter que

$$Y_m a_{m,i,j}(\nu) + \nu a_{m,i,j}(\nu) = \frac{c_{0,i,j}}{4} \nu \sum_{n=1}^M a_{n,i,j}(\nu) \omega_n. \quad (2.9)$$

As formas dos autovalores e autovetores estão fortemente associadas às propriedades físicas do meio hospedeiro representadas pelo coeficiente de espalhamento  $c_{0,i,j}$ . Primeiramente, são construídas as formas dos autovalores e autovetores para meios absorvedores puros,  $c_{0,i,j} = 0$ , e posteriormente para meios com espalhamento isotrópico,  $c_{0,i,j} \neq 0$ .

### 2.2.1 Meios puramente absorvedores

Para o caso de um meio puramente absorvedor,  $c_{0,ij} = 0$ , a Eq. (2.9) toma a forma

$$Y_m a_{m,ij}(v) + v a_{m,ij}(v) = 0, \quad (2.10)$$

e, conseqüentemente, a forma dos autovalores  $v$  é definida como

$$v = -Y_s, \quad s = 1:N. \quad (2.11)$$

Na Eq. (2.11) são obtidos  $N$  autovalores com diferentes multiplicidades. Se o ordenamento decrescente das ordenadas discretas  $Y_s$  é adoptado mediante as fórmulas

$$Y_1 > Y_2 > \dots > Y_{N-1} > Y_N, \quad (2.12)$$

$$Y_s = -Y_{N+1-s}, \quad (2.13)$$

é possível definir a multiplicidade dos autovalores como

$$r(\pm Y_s) = 2s, \quad s = 1:N/2, \quad (2.14)$$

onde  $r(Y_s)$  representa a multiplicidade do autovalor  $Y_s$ . Somando as multiplicidades associadas para cada autovalor resulta que

$$\sum_{s=1}^N r(Y_s) = 2 \sum_{s=1}^{N/2} r(Y_s) = 4 \sum_{s=1}^{N/2} s = M. \quad (2.15)$$

Logo, as componentes dos autovetores  $a_{m,i,j}(\mathbf{v}_k)$  associados aos autovalores  $\mathbf{v}_k$  podem ser representados como

$$a_{m,i,j}(\mathbf{v}_k) = \delta_{m,k}, \quad k = 1:M, \quad (2.16)$$

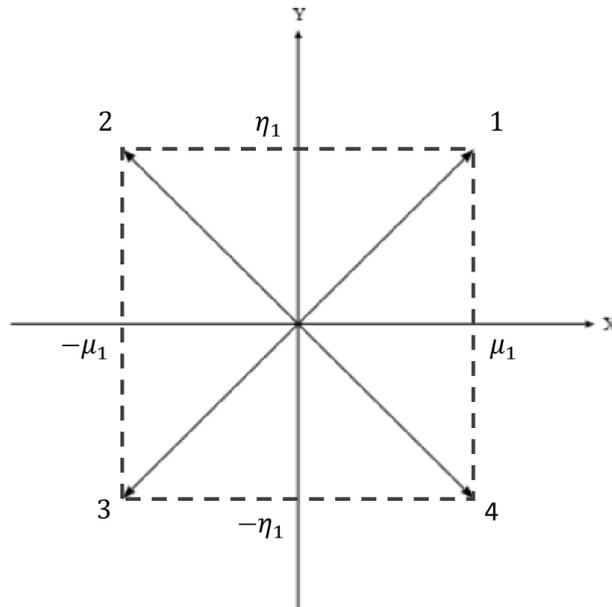
onde  $\delta_{m,k}$  representa a Delta de Kronecker. Nas Tabelas 2 e 3 são apresentados autovetores  $a_{i,j}(\mathbf{v}_k)$  associados aos autovalores  $\mathbf{v}_k$  e multiplicidades  $r(\mathbf{v}_k)$  nas direções  $x$  e  $y$ , para as formulações  $S_2$  e  $S_4$ , respectivamente. Nas tabelas é usada a notação  $\hat{a}_{i,j}(\mathbf{v}_k)$  para os autovetores associados aos autovalores na direção  $x$ , e  $\tilde{a}_{i,j}(\mathbf{v}_k)$  para os autovetores correspondentes aos autovalores na direção  $y$ . Os índices das componentes dos autovetores foram definidos de modo que coincidissem com as direções dos pares ordenados como mostrado nas Figuras 6 e 7 para as formulações  $S_2$  e  $S_4$ , respectivamente. Nas figuras, as setas indicam as direções dos nêutrons definidas pelas ordenadas discretas da quadratura, as linhas verticais representam os autovalores na direção  $x$  e as linhas horizontais os autovalores na direção  $y$ . Resultado das propriedades simétricas das quadraturas  $LQ_N$  os autovalores nas direções  $x$  e  $y$  são iguais.

Tabela 2 - Autovalores e autovetores para um meio puramente absorvedor na formulação  $S_2$ 

$z$	$v_k$	$r(v_k)$	$a_{i,j}(v_k)$	M
x	$-\mu_1$	2	$\hat{a}_{i,j}(-\mu_1) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $\hat{a}_{i,j}(-\mu_1) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$	4
	$\mu_1$	2	$\hat{a}_{i,j}(\mu_1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ $\hat{a}_{i,j}(\mu_1) = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$	
y	$-\eta_1$	2	$\tilde{a}_{i,j}(-\eta_1) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $\tilde{a}_{i,j}(-\eta_1) = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$	4
	$\eta_1$	2	$\tilde{a}_{i,j}(\eta_1) = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ $\tilde{a}_{i,j}(\eta_1) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$	

Fonte: O autor, 2022

Figura 6 - Esquema auxiliar para as componentes dos autovetores  $a_{i,j}(v_k)$  associados aos autovalores  $v_k$  representados ao longo das direções  $x$  e  $y$  na formulação  $S_2$



Fonte: O autor, 2022

Tabela 3 - Autovalores e autovetores para um meio puramente absorvedor na formulação  $S_4$ 

$z$	$v_k$	$r(v_k)$	$a_{ij}(v_k)$	$M$
x	$-\mu_1$	2	$\hat{a}_{ij}(-\mu_1) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(-\mu_1) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$	12
	$-\mu_2$	4	$\hat{a}_{ij}(-\mu_2) = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(-\mu_2) = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(-\mu_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(-\mu_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]^T$	
	$\mu_2$	4	$\hat{a}_{ij}(\mu_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(\mu_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(\mu_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(\mu_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$	
	$\mu_1$	2	$\hat{a}_{ij}(\mu_1) = [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(\mu_1) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$	
	y	$-\eta_1$	2	
$-\eta_2$		4	$\tilde{a}_{ij}(-\eta_2) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\tilde{a}_{ij}(-\eta_2) = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\tilde{a}_{ij}(-\eta_2) = [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\tilde{a}_{ij}(-\eta_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$	
$\eta_2$		4	$\tilde{a}_{ij}(\eta_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ $\tilde{a}_{ij}(\eta_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$ $\tilde{a}_{ij}(\eta_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$ $\tilde{a}_{ij}(\eta_2) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]^T$	
$\eta_1$		2	$\tilde{a}_{ij}(\eta_1) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$ $\tilde{a}_{ij}(\eta_1) = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$	

Fonte: O autor, 2022



$$\sum_{n=1}^M a_{n,i,j}(\nu)\omega_n = 1 . \quad (2.18)$$

### 2.2.2.1 Normalização a zero

Substituindo a Eq. (2.17) em (2.9) é obtido que

$$(Y_m + \nu)a_{m,i,j}(\nu) = 0 \quad (2.19)$$

e, conseqüentemente, é definida a forma dos autovalores  $\nu$  como

$$\nu = -Y_s, \quad s = 1:N . \quad (2.20)$$

Na Eq. (2.20) é possível obter  $N$  autovalores com multiplicidade

$$r(\pm Y_s) = 2s - 1, \quad s = 1:N/2 . \quad (2.21)$$

As multiplicidades associadas para cada autovalor são somadas para obter um total de  $M - N$  autovalores

$$\sum_{s=1}^N r(Y_s) = 2 \sum_{s=1}^{N/2} r(Y_s) = 4 \sum_{s=1}^{N/2} s - N = M - N . \quad (2.22)$$

As componentes dos autovetores associados aos autovalores  $v_k$  com  $k = 1: M - N$  são obtidos resolvendo o sistema representado pela Eq. (2.19). Para  $v_k = -Y_m$  tem-se que

$$a_{m,i,j}(v) \neq 0 \quad , \quad (2.23)$$

e para valores  $v_k \neq -Y_m$  tem-se que

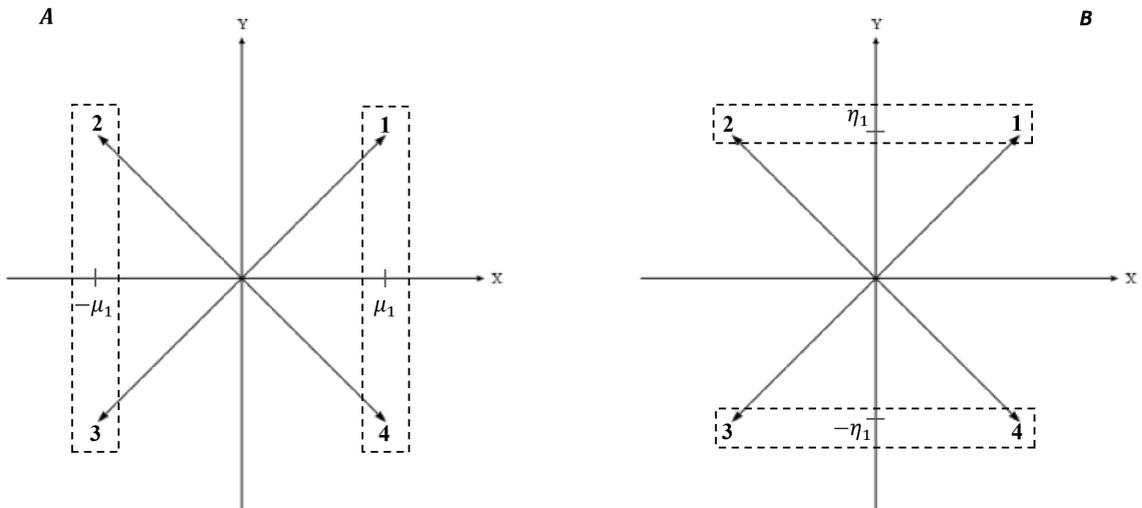
$$a_{m,i,j}(v) = 0 \quad . \quad (2.24)$$

Nas Tabelas 4 e 5 são reportados os sistemas característicos resultantes representados pelas Eqs. (2.17), (2.23) e (2.24), nas direções  $x$  e  $y$  e para as formulações  $S_2$  e  $S_4$ . Nas tabelas são mostrados os autovalores  $v_k$ , as multiplicidades  $r(v_k)$  associadas a cada autovalor, e os autovetores  $a_{i,j}(v_k)$  que representam uma base na geração da solução do sistema característico. Os índices das componentes dos autovetores são estabelecidos de modo que coincidam com as direções dos pares ordenados da quadratura  $LQ_N$  como mostrado nas Figuras 8 e 9 para as formulações  $S_2$  e  $S_4$ , respectivamente. Nas figuras, as setas representam as direções dos pares ordenados usando a quadratura  $LQ_N$ , e os retângulos agrupam as componentes dos autovetores não nulos para  $v_k = -Y_m$  na geração dos sistemas característicos nas direções  $x$  (lado esquerdo) e  $y$  (lado direito).

Tabela 4 - Sistema de equações características e autovetores na formulação  $S_2$ 

$z$	$v_k$	$r(v_k)$	Sistema característico	$a_{ij}(v_k)$
x	$-\mu_1$	1	$\omega_1 \hat{a}_1 + \omega_4 \hat{a}_4 = 0$ $\hat{a}_2 = \hat{a}_3 = 0$	$\hat{a}_{ij}(-\mu_1) = [-\omega_4/\omega_1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$
	$\mu_1$	1	$\omega_2 \hat{a}_2 + \omega_3 \hat{a}_3 = 0$ $\hat{a}_1 = \hat{a}_4 = 0$	$\hat{a}_{ij}(\mu_1) = [0 \ -\omega_3/\omega_2 \ 1 \ 0]^T$
y	$-\eta_1$	1	$\omega_1 \tilde{a}_1 + \omega_2 \tilde{a}_2 = 0$ $\tilde{a}_3 = \tilde{a}_4 = 0$	$\tilde{a}_{ij}(-\eta_1) = [-\omega_2/\omega_1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$
	$\eta_1$	1	$\omega_3 \tilde{b}_3 + \omega_4 \tilde{b}_4 = 0$ $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = 0$	$\tilde{a}_{ij}(\eta_1) = [0 \ 0 \ -\omega_4/\omega_3 \ 1]^T$

Fonte: O autor, 2022

Figura 8 - Esquema auxiliar para a construção do sistema característico associado aos autovalores  $v_k$  representados ao longo das direções  $x$  (A) e  $y$  (B) na formulação  $S_2$ 

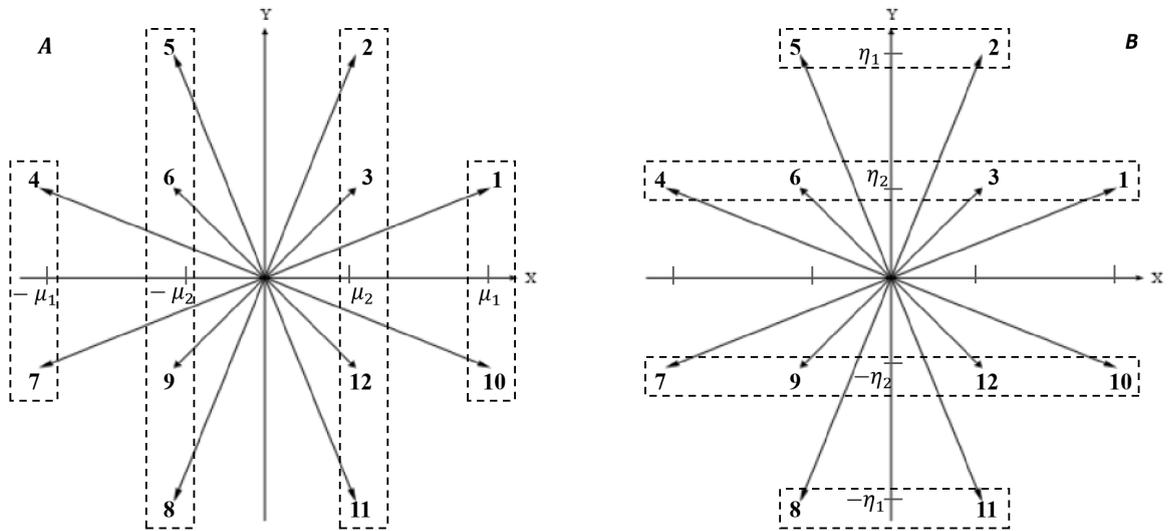
Fonte: O autor, 2022

Tabela 5 - Sistema de equações características e autovetores na formulação S<sub>4</sub>

$z$	$v_k$	$r(v_k)$	Sistema característico	$a_{ij}(v_k)$
x	$-\mu_1$	1	$\omega_1 \hat{a}_1 + \omega_{10} \hat{a}_{10} = 0$ $\hat{a}_2 = \hat{a}_3 = \hat{a}_{12} = \hat{a}_{11} = 0$ $\hat{a}_5 = \hat{a}_6 = \hat{a}_9 = \hat{a}_8 = 0$ $\hat{a}_4 = \hat{a}_7 = 0$	$\hat{a}_{ij}(-\mu_1) = [-\omega_4/\omega_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$
	$-\mu_2$	3	$\hat{a}_1 = \hat{a}_{10} = 0$ $\omega_2 \hat{a}_2 + \omega_3 \hat{a}_3 + \omega_{12} \hat{a}_{12} + \omega_{11} \hat{a}_{11} = 0$ $\hat{a}_5 = \hat{a}_6 = \hat{a}_9 = \hat{a}_8 = 0$ $\hat{a}_4 = \hat{a}_7 = 0$	$\hat{a}_{ij}(-\mu_2) = [0 \ -\omega_3/\omega_2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(-\mu_2) = [0 \ -\omega_{12}/\omega_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ $\hat{a}_{ij}(-\mu_2) = [0 \ -\omega_{11}/\omega_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$
	$\mu_2$	3	$\hat{a}_1 = \hat{a}_{10} = 0$ $\hat{a}_2 = \hat{a}_3 = \hat{a}_{12} = \hat{a}_{11} = 0$ $\omega_5 \hat{a}_5 + \omega_6 \hat{a}_6 + \omega_9 \hat{a}_9 + \omega_8 \hat{a}_8 = 0$ $\hat{a}_4 = \hat{a}_7 = 0$	$\hat{a}_{ij}(\mu_2) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_6/\omega_5 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(\mu_2) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_9/\omega_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $\hat{a}_{ij}(\mu_2) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_8/\omega_5 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
	$\mu_1$	1	$\hat{a}_1 = \hat{a}_{10} = 0$ $\hat{a}_2 = \hat{a}_3 = \hat{a}_{12} = \hat{a}_{11} = 0$ $\hat{a}_5 = \hat{a}_6 = \hat{a}_9 = \hat{a}_8 = 0$ $\omega_4 \hat{a}_4 + \omega_7 \hat{a}_7 = 0$	$\hat{a}_{ij}(\mu_1) = [0 \ 0 \ 0 \ -\omega_7/\omega_4 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
y	$-\eta_1$	1	$\omega_2 \tilde{a}_2 + \omega_5 \tilde{a}_5 = 0$ $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_6 = \tilde{a}_4 = 0$ $\tilde{a}_{10} = \tilde{a}_{12} = \tilde{a}_9 = \tilde{a}_7 = 0$ $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_8 = 0$	$\tilde{a}_{ij}(-\eta_1) = [0 \ -\omega_5/\omega_2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
	$-\eta_2$	3	$\tilde{a}_2 = \tilde{a}_5 = 0$ $\omega_1 \tilde{a}_1 + \omega_3 \tilde{a}_3 + \omega_6 \tilde{a}_6 + \omega_4 \tilde{a}_4 = 0$ $\tilde{a}_{10} = \tilde{a}_{12} = \tilde{a}_9 = \tilde{a}_7 = 0$ $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_8 = 0$	$\tilde{a}_{ij}(-\eta_2) = [-\omega_3/\omega_1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $\tilde{a}_{ij}(-\eta_2) = [-\omega_6/\omega_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $\tilde{a}_{ij}(-\eta_2) = [-\omega_4/\omega_1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
	$\eta_2$	3	$\tilde{a}_2 = \tilde{a}_5 = 0$ $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_6 = \tilde{a}_4 = 0$ $\omega_{10} \tilde{a}_{10} + \omega_{12} \tilde{a}_{12} + \omega_9 \tilde{a}_9 + \omega_7 \tilde{a}_7 = 0$ $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_8 = 0$	$\tilde{a}_{ij}(\eta_2) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_{10}/\omega_7 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ $\tilde{a}_{ij}(\eta_2) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_{12}/\omega_7 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ $\tilde{a}_{ij}(\eta_2) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_9/\omega_7 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
	$\eta_1$	1	$\tilde{a}_2 = \tilde{a}_5 = 0$ $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_6 = \tilde{a}_4 = 0$ $\tilde{a}_{10} = \tilde{a}_{12} = \tilde{a}_9 = \tilde{a}_7 = 0$ $\omega_{11} \tilde{a}_{11} + \omega_8 \tilde{a}_8 = 0$	$\tilde{a}_{ij}(\eta_1) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_{11}/\omega_8 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$

Fonte: O autor, 2022

Figura 9 - Esquema auxiliar para a construção do sistema característico associado aos autovalores  $v_k$  representados ao longo das direções  $x$  (A) e  $y$  (B) na formulação  $S_4$



Fonte: O autor, 2022

#### 2.2.2.2 Normalização a 1

Os restantes  $N$  autovalores e autovetores para meios com espalhamento isotrópico são obtidos usando a normalização representada na Eq. (2.18) em (2.9). A equação resultante toma a forma

$$Y_m a_{m,i,j}(v) + v a_{m,i,j}(v) = \frac{c_{0,i,j}}{4} v. \quad (2.25)$$

As componentes do autovetor associado ao autovalor  $v$  pode ser obtido explicitando  $a_{m,i,j}(v)$  na Eq. (2.25)

$$a_{m,i,j}(\nu) = \frac{c_{0,i,j}}{4} \frac{\nu}{(Y_m + \nu)} . \quad (2.26)$$

Multiplicando a Eq. (2.26) por  $\omega_m$  e somando pelas direções  $m$ , é obtido que

$$\sum_{m=1}^M a_{m,i,j}(\nu) \omega_m = \frac{c_{0,i,j}}{4} \nu \sum_{m=1}^M \frac{\omega_m}{(Y_m + \nu)} \quad (2.27)$$

e, substituindo a Eq. (2.18) em (2.27) é possível obter a denominada lei de dispersão

$$\frac{c_{0,i,j}}{4} \nu \sum_{m=1}^M \frac{\omega_m}{(Y_m + \nu)} = 1 . \quad (2.28)$$

A Eq. (2.28) é satisfeita para  $N$  valores de  $\nu$ . Esses valores representam os  $N$  autovalores restantes para meios com espalhamento isotrópico e, para quadraturas  $LQ_N$ , aparecem em pares com sinais opostos e multiplicidade 1 (LARSEN, 1986). Os cálculos das raízes da Eq. (2.28) podem ser realizados usando qualquer método clássico. Nesta tese foi implementado o método de bissecção de convergência absoluta para cálculos de raízes.

### 2.2.3 Solução homogêneas das equações $S_N$ integradas transversalmente

Uma vez determinado o conjunto de autovalores e autovetores característicos da Eq. (2.7) para meios absorvedores puros e meios com espalhamento isotrópico é possível construir a solução geral mediante uma combinação linear da forma

$$X_{m,i,j}(z) = \sum_{k=1}^M \alpha_k a_{m,i,j}(v_k) e^{\sigma_{t,i,j}(z-z_p)/v_k}, \quad (2.29)$$

onde  $\alpha_k$  constituem constantes arbitrárias determinadas pelas condições de contorno do problema em questão. A Eq. (2.29) representa as soluções homogêneas compartilhadas pelas Eqs. (2.3) - (2.6) para os momentos de ordem zero e primeira ordem do fluxo angular nas direções  $x$  e  $y$  apresentadas na seção anterior. Em prosseguimento, é apresentada a metodologia para obter as soluções gerais das equações integradas transversalmente de ordem zero e primeira ordem nas direções  $x$  e  $y$ , usando aproximações lineares nos termos de fuga transversal.

### 2.3 Solução geral das equações $S_N$ integradas transversalmente de ordem zero

A solução geral das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $x$  com aproximação linear nos termos de fuga, Eq. (2.3) pode ser obtida separando as componentes homogêneas e particulares da solução mediante

$$\hat{\Psi}_{m,j}(x) = \hat{\Psi}_{m,j}^h(x) + \hat{\Psi}_{m,j}^p(x), \quad (2.30)$$

onde  $\hat{\Psi}_{m,j}^h(x)$  e  $\hat{\Psi}_{m,j}^p(x)$  constituem as soluções homogêneas e particulares, respectivamente.

A forma da solução homogênea pode ser obtida a partir da Eq. (2.29) como

$$\hat{\Psi}_{m,j}^h(x) = \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k \hat{a}_{m,i,j}^0(v_k) e^{\sigma_{t,i,j}(x-x_i)/v_k}, \quad (2.31)$$

onde  $\hat{\alpha}_k^0$  representam constantes arbitrárias determinadas pelas condições de contorno. Para obter as soluções particulares, os termos independentes que conformam a Eq. (2.3) são tratados por separado considerando as seguintes equações

$$\frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_{m,j}^{p1}(x) + \hat{\Psi}_{m,j}^{p1}(x) = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\Psi}_{m,j}^{p1}(x) \omega_n + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}}, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_{m,j}^{p2}(x) + \hat{\Psi}_{m,j}^{p2}(x) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\Psi}_{m,j}^{p2}(x) \omega_n - \\ &- \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2} \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

e a solução particular da Eq. (2.3) é representada pela soma das soluções particulares das Eqs. (2.30) e (2.31). Em continuação, as Eqs. (2.32) e (2.33) são resolvidas analiticamente para obter a solução geral da Eq. (2.3) a partir das formas finais das componentes homogêneas e particulares.

### 2.3.1 Solução particular para fonte externa

A solução particular da Eq. (2.32) tem a forma

$$\hat{\Psi}_{m,j}^{p1}(x) = \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})}. \quad (2.34)$$

### 2.3.2 Solução particular para fugas transversais

A solução particular da Eq. (2.33) é obtida usando a técnica de coeficientes indeterminados considerando uma estimativa da forma

$$\hat{\Psi}_{m,j}^{p2}(x) = A_{m,i,j} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} B_{m,i,j}, \quad (2.35)$$

onde  $A_{m,i,j}$  e  $B_{m,i,j}$  são constantes por determinar. Substituindo a Eq. (2.35) em (2.33) e agrupando termos semelhantes obtém-se que

$$\frac{2\mu_m}{\sigma_{t,i,j}\ell_i} B_{m,i,j} + A_{m,i,j} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M A_{n,i,j} \omega_n - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right), \quad (2.36)$$

$$\frac{2(x-x_i)}{\ell_i} B_{m,i,j} = \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M B_{n,i,j} \omega_n - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}h_j} \left( \tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2} \right). \quad (2.37)$$

E explicitando  $B_{m,i,j}$  na Eq. (2.37)

$$B_{m,i,j} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M B_{n,i,j} \omega_n - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right). \quad (2.38)$$

Multiplicando a Eq. (2.38) por  $\omega_m$ , somando pelas direções  $m$  e agrupando termos, é

$$\text{possível obter a forma do termo } \sum_{m=1}^M B_{m,i,j} \omega_m$$

$$\sum_{m=1}^M B_{m,i,j} \omega_m = - \frac{1}{(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right), \quad (2.39)$$

e, substituindo a Eq. (2.39) no lado direito da Eq. (2.38), é obtida a forma final para  $B_{m,i,j}$

$$B_{m,i,j} = - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right). \quad (2.40)$$

Substituindo a Eq. (2.40) em (2.36) e agrupando termos, é obtida a forma do termo

$A_{m,i,j}$

$$A_{m,i,j} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M A_{n,i,j} \omega_n - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) + \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) +$$

$$+ \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right). \quad (2.41)$$

Multiplicando a Eq. (2.41) por  $\omega_m$ , somando pelas direções  $m$ , usando a propriedade

$\sum_{m=1}^M \mu_m \omega_m = 0$  para quadraturas simétricas e agrupando termos, é possível obter a forma do

$$\begin{aligned} \text{termo } \sum_{m=1}^M A_{m,i,j} \omega_m \\ \sum_{m=1}^M A_{m,i,j} \omega_m = - \frac{1}{(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\ + \frac{1}{(1-c_{0,i,j})} \frac{2}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} \right), \end{aligned} \quad (2.42)$$

e, finalmente, substituindo a Eq. (2.42) no lado direito da Eq. (2.41) é obtida a forma final das constantes  $A_{m,i,j}$

$$\begin{aligned} A_{m,i,j} = - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\ + \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2} \right) + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\ + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Logo, a solução particular da Eq. (2.33) é resultado da substituição das Eqs. (2.40) e (2.43) em (2.35)

$$\hat{\Psi}_{m_j}^{p2}(x) = - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) - \\
& - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right). \tag{2.44}
\end{aligned}$$

### 2.3.3 Solução geral

Uma vez obtidas as formas finais da solução homogênea e soluções particulares das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $x$ , representadas pelas Eqs. (2.31), (2.34) e (2.44), é possível escrever a solução geral da Eq. (2.3) na forma

$$\begin{aligned}
\hat{\Psi}_{m,j}(x) & = \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^0 \hat{a}_{m,i,j}(\nu_k) e^{\sigma_{t,i,j}(x-x_i)/\nu_k} + \frac{Q_{t,j}}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})} - \\
& - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) - \\
& - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right). \tag{2.45}
\end{aligned}$$

De maneira semelhante à descrita na seção anterior, é possível obter a solução geral das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$  com aproximação linear nos termos de fuga transversal, Eq. (2.4)

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_{m,i}(y) = & \sum_{k=1}^M \alpha_k^{\sim 0} a_{m,i,j}(v_k) e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_j)/v_k} + \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})} - \\
& - \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right). \tag{2.46}
\end{aligned}$$

A metodologia para obter a forma da Eq. (2.46) pode ser encontrada no Apêndice A. Nas Eqs. (2.45) e (2.46), as componentes homogêneas que conformam as soluções gerais compartilham os mesmos autovalores  $v_k$ , resultado do uso da quadratura  $LQ_N$ . Porém, as componentes dos autovetores são diferentes. As constantes  $\alpha_k^{\wedge 0}$  e  $\alpha_k^{\sim 0}$  são obtidas a partir das condições de contorno do problema.

## 2.4 Solução geral das equações $S_N$ integradas transversalmente de primeira ordem

As equações  $S_N$  integrada transversalmente de primeira ordem na direção coordenada  $x$  com aproximação linear nos termos de fuga, Eq. (2.5), estão acopladas com as equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $x$ , mediante os momentos espaciais de ordem zero do fluxo angular. Primeiramente, a Eq. (2.45) é substituída em (2.5) para obter

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dx} \hat{\varphi}_{m,j}(x) + \hat{\varphi}_{m,j}(x) &= \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\varphi}_{n,j}(x) \omega_n + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \alpha_k^0 \hat{a}_{m,ij}(v_k) e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} + \\
&+ \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,ij}(1-c_{0,ij})} - \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} (\tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}) - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n (\tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2}) + \\
&+ \frac{12\mu_m \eta_m^2}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} (\tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2}) + \frac{3c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n (\tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2}) + \\
&+ \frac{3c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n (\tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2}) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} (\tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2}) - \\
&- \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n (\tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2}) - \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} (\tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}) - \\
&- \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} (\tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2}) . \tag{2.47}
\end{aligned}$$

A solução geral da Eq. (2.47) pode ser representada como

$$\hat{\varphi}_{m,j}(x) = \hat{\varphi}_{m,j}^h(x) + \hat{\varphi}_{m,j}^p(x) , \tag{2.48}$$

onde  $\hat{\varphi}_{m,j}^h(x)$  e  $\hat{\varphi}_{m,j}^p(x)$  constituem as soluções homogêneas e particulares, respectivamente.

Da Eq. (2.29) é possível representar a forma das soluções homogêneas como

$$\hat{\varphi}_{m,j}^h(x) = \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^1 \hat{a}_{m,i,j}^1(v_k) e^{\sigma_{t,i,j}(x-x_i)/v_k}, \quad (2.49)$$

onde  $\hat{\alpha}_k^1$  representam constantes arbitrárias determinadas pelas condições de contorno e as componentes dos autovetores  $\hat{a}_{m,i,j}^1(v_k)$  são os mesmos que os reportados na Eq. (2.45). Por outro lado, para obter as soluções particulares, os termos independentes do lado direito da Eq. (2.47) são isolados mediante as equações

$$\frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\varphi}_{m,j}^{p1}(x) + \hat{\varphi}_{m,j}^{p1}(x) = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\varphi}_{n,j}^{p1}(x) \omega_n + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^0 \hat{a}_{m,i,j}^0(v_k) e^{\sigma_{t,i,j}(x-x_i)/v_k}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\varphi}_{m,j}^{p2}(x) + \hat{\varphi}_{m,j}^{p2}(x) = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\varphi}_{n,j}^{p2}(x) \omega_n + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j} (1-c_{0,i,j})}, \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dx} \hat{\varphi}_{m,j}^{p3}(x) + \hat{\varphi}_{m,j}^{p3}(x) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\varphi}_{n,j}^{p3}(x) \omega_n - \\ &- \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\ &+ \frac{12\mu_m \eta_m^2}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2} \right) + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,ij-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right) - \\
& - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,ij-1/2} \right), \tag{2.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dx} \hat{\varphi}_{m,j}^{p4}(x) + \hat{\varphi}_{m,j}^{p4}(x) & = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \hat{\varphi}_{n,j}^{p4}(x) \omega_n - \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,ij+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,ij-1/2} \right) - \\
& - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right), \tag{2.53}
\end{aligned}$$

e a solução particular da Eq. (2.47) é construída a partir da soma das soluções particulares das mesmas. Em prosseguimento, as Eqs. (2.50) - (2.53) são resolvidas para obter uma expressão matemática para a solução particular da Eq. (2.47).

#### 2.4.1 Solução particular para componente homogênea

A solução particular da Eq. (2.50) pode ser representada na forma

$$\hat{\varphi}_{m,j}^{p1}(x) = \sum_{k=1}^M \hat{\lambda}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \sum_{k=1}^M \hat{\Upsilon}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k}, \tag{2.54}$$

onde  $\hat{\lambda}_{m,k}$  e  $\hat{\Upsilon}_{m,k}$  são constantes a determinar. A Eq. (2.54) é substituída em (2.50) para obter

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^M \left[ \frac{\mu_m \hat{\lambda}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k}}{v_k} + \frac{2\mu_m \hat{Y}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k}}{\sigma_{t,ij} \ell_i} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{\mu_m \hat{Y}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k}}{v_k} \right] + \\
& + \sum_{k=1}^M \left[ \hat{\lambda}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \hat{Y}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} \right] = \\
& = \sum_{k=1}^M \left[ \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{\lambda}_{n,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{Y}_{n,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} \right] + \\
& + \sum_{k=1}^M \left[ \frac{6\eta_m \hat{\alpha}_k^0 \hat{a}_{m,ij}(v_k)}{\sigma_{t,ij} h_j} e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} \right]. \tag{2.55}
\end{aligned}$$

A Eq. (2.55) é satisfeita se, para cada valor de  $k$ , é satisfeita a equação

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_m \hat{\lambda}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k}}{v_k} + \frac{2\mu_m \hat{Y}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k}}{\sigma_{t,ij} \ell_i} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{\mu_m \hat{Y}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k}}{v_k} + \\
& + \hat{\lambda}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \hat{Y}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{\lambda}_{n,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} + \\
& + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{Y}_{n,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k} + \frac{6\eta_m \hat{\alpha}_k^0 \hat{a}_{m,ij}(v_k)}{\sigma_{t,ij} h_j} e^{\sigma_{t,ij}(x-x_i)/v_k}. \tag{2.56}
\end{aligned}$$

As seguintes identidades são obtidas logo depois de simplificar e agrupar termos semelhantes na Eq. (2.56)

$$\frac{\mu_m \hat{\lambda}_{m,k}}{v_k} + \frac{2\mu_m \hat{Y}_{m,k}}{\sigma_{t,ij} \ell_i} + \hat{\lambda}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{\lambda}_{n,k} + \frac{6\eta_m \hat{a}_{m,ij}(v_k)}{\sigma_{t,ij} h_j}, \tag{2.57}$$

$$\frac{\mu_m \hat{Y}_{m,k}}{v_k} + \hat{Y}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{Y}_{m,k} . \quad (2.58)$$

As componentes das constantes  $\hat{\lambda}_{m,k}$  e  $\hat{Y}_{m,k}$  são obtidas atendendo às propriedades dos materiais no meio hospedeiro. Primeiramente, as formas destas constantes serão obtidas para  $c_{0,ij} = 0$  e logo para  $c_{0,ij} \neq 0$ .

#### 2.4.1.1 Constantes auxiliares para um meio puramente absorvedor

Para meios absorvedores puros,  $c_{0,ij} = 0$ , o sistema representado pelas Eqs. (2.57) e (2.58) toma a forma

$$\frac{\mu_m \hat{\lambda}_{m,k}}{v_k} + \frac{2\mu_m}{\sigma_{t,ij} \rho_i} \hat{Y}_{m,k} + \hat{\lambda}_{m,k} = \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \hat{a}_{m,ij}(v_k) , \quad (2.59)$$

$$\frac{\mu_m \hat{Y}_{m,k}}{v_k} + \hat{Y}_{m,k} = 0 , \quad (2.60)$$

onde, atendendo à forma das componentes dos autovetores  $\hat{a}_{m,ij}(v_k)$  para  $c_{0,ij} = 0$ , as constantes  $\hat{\lambda}_{m,k}$  e  $\hat{Y}_{m,k}$  são definidas como

$$\hat{\lambda}_{m,k} = 0 , \quad (2.61)$$

$$\hat{Y}_{m,k} = \frac{3\sigma_{t,ij} \ell_i}{\sigma_{t,ij} h_j} \frac{\eta_m}{\mu_m} \hat{a}_{m,ij}(\mathbf{v}_k). \quad (2.62)$$

#### 2.4.1.2 Constantes auxiliares para meios com espalhamento isotrópico

Para obter as formas das constantes  $\hat{\lambda}_{m,k}$  e  $\hat{Y}_{m,k}$  para meios com espalhamento isotrópico,  $c_{0,ij} \neq 0$ , é preciso separar o procedimento em dois casos atendendo nas formas dos autovalores e autovetores. Primeiramente, o sistema representado pelas Eqs. (2.57) e (2.58) é resolvido para as constantes  $\hat{\lambda}_{m,k}$  e  $\hat{Y}_{m,k}$  onde o par de autovalores e autovetores foram determinados usando a normalização  $\sum_{m=1}^M \omega_m \hat{a}_{m,ij}(\mathbf{v}_k) = 0$ . Seguidamente, são obtidas as formas das constantes  $\hat{\lambda}_{m,k}$  e  $\hat{Y}_{m,k}$  onde o par de autovalores e autovetores foram determinados usando a normalização  $\sum_{m=1}^M \omega_m \hat{a}_{m,ij}(\mathbf{v}_k) = 1$ .

##### 2.4.1.2.1 Normalização a 0

No primeiro caso, usando o par de autovalores e autovetores obtidos a partir da normalização  $\sum_{m=1}^M \omega_m \hat{a}_{m,ij}(\mathbf{v}_k) = 0$  na seção 2.2.2.1, o sistema representado pelas Eqs. (2.57)

e (2.58) toma a forma

$$\frac{2\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \hat{Y}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{\lambda}_{n,k} + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \hat{a}_{m,ij}(\mathbf{v}_k), \quad \mathbf{v}_k = -\mu_m, \quad (2.63)$$

$$\frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{Y}_{n,k} = 0, \quad \mathbf{v}_k = -\mu_m, \quad (2.64)$$

$$\frac{\mu_m}{\mathbf{v}_k} \hat{\lambda}_{m,k} + \frac{2\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \hat{Y}_{m,k} + \hat{\lambda}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{\lambda}_{n,k}, \quad \mathbf{v}_k \neq -\mu_m, \quad (2.65)$$

$$\frac{\mu_m}{\mathbf{v}_k} \hat{Y}_{m,k} + \hat{Y}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \hat{Y}_{n,k}, \quad \mathbf{v}_k \neq -\mu_m. \quad (2.66)$$

E o sistema formado pelas Eqs. (2.63) - (2.66) é resolvido usando a normalização

$$\sum_{n=1}^M \omega_n \hat{\lambda}_{n,k} = C_k. \quad (2.67)$$

Substituindo a Eq. (2.67) em (2.63) é obtido que

$$\frac{2\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \hat{Y}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{4} C_k + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \hat{a}_{m,ij}(\mathbf{v}_k), \quad \mathbf{v}_k = -\mu_m. \quad (2.68)$$

Resolvendo o sistema formado pelas Eqs. (2.64), (2.66), e as restrições representadas pela Eq. (2.68) é possível obter as formas das constantes  $\hat{Y}_{m,k}$  e  $C_k$

$$C_k = \frac{8}{c_{0,ij}} \frac{\mu_{p1}}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \hat{Y}_{p1,k} - \frac{24}{c_{0,ij}} \frac{\eta_{p1}}{\sigma_{t,ij} h_j} \hat{a}_{p1,ij}(v_k), \quad v_k = -\mu_m, \quad (2.69)$$

$$\hat{Y}_{p1,k} = \frac{3\sigma_{t,ij} \ell_i}{\sigma_{t,ij} h_j} \frac{\eta_{p1}}{\mu_{p1}} \left( 1 - \frac{\omega_{p1}}{\sum_{n=1, v_k=-\mu_n}^M \omega_n} \right) \hat{a}_{p1,ij}(v_k) - \frac{3\sigma_{t,ij} \ell_i}{\sigma_{t,ij} h_j} \frac{\eta_{p2}}{\mu_{p2}} \frac{\omega_{p2}}{\sum_{n=1, v_k=-\mu_n}^M \omega_n} \hat{a}_{p2,ij}(v_k), \quad (2.70)$$

$$\hat{Y}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{8} \frac{\sigma_{t,ij} \ell_i}{\mu_m} C_k + \frac{3\sigma_{t,ij} \ell_i}{\sigma_{t,ij} h_j} \frac{\eta_m}{\mu_m} \hat{a}_{m,ij}(v_k), \quad m \neq p1, \quad v_k = -\mu_m, \quad (2.71)$$

$$\hat{Y}_{m,k} = 0, \quad v_k \neq -\mu_m, \quad (2.72)$$

onde  $C_k$  é obtido de modo que a Eq. (2.68) seja satisfeita para  $m = p1$ , onde  $p1$  representa a direção referente ao primeiro valor não nulo de  $\hat{a}_{m,ij}(v_k)$ , e  $p2$  a direção referente ao segundo valor não nulo de  $\hat{a}_{m,ij}(v_k)$ . As constantes  $\hat{Y}_{m,k}$  são obtidas a partir das Eqs. (2.70), (2.71), e (2.72). Finalmente, as constantes  $\hat{\lambda}_{m,k}$  podem ser obtidas a partir da Eq. (2.65) e usando as

constantes  $\hat{Y}_{m,k}$  e  $C_k$

$$\hat{\lambda}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{4} \frac{v_k}{(\mu_m + v_k)} C_k, \quad v_k \neq -\mu_m, \quad (2.73)$$

e as constantes  $\hat{\lambda}_{m,k}$  para  $v_k = -\mu_m$  são determinados de modo que a Eq. (2.67) seja satisfeita

$$\hat{\lambda}_{m,k} = \frac{C_k - \sum_{n=1, v_k \neq -\mu_n}^M \omega_n A_{n,k}}{\sum_{n=1, v_k = -\mu_n}^M \omega_n}, v_k = -\mu_m. \quad (2.74)$$

#### 2.4.1.2.2 Normalização a 1

No segundo caso, usando o par de autovalores e autovetores obtidos a partir da

normalização  $\sum_{m=1}^M \omega_m \hat{a}_{m,i,j}(v_k) = 1$  na seção 2.2.2.2, o sistema representado pelas Eqs. (2.57)

e (2.58) não sofre nenhuma modificação. Resolvendo a Eq. (2.58) é possível obter que

$$\hat{Y}_{m,k} = D_k \hat{a}_{m,i,j}(v_k), \quad (2.75)$$

onde  $D_k$  são constantes arbitrariamente definidas para que o sistema não homogêneo

representado pela Eq. (2.57) seja soluble. Substituindo a Eq. (2.75) em (2.57), usando a

normalização  $\sum_{n=1}^M \omega_n \hat{\lambda}_{n,k} = 1$  e reagrupando termos é obtido que

$$\hat{\lambda}_{m,k} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \frac{v_k}{(\mu_m + v_k)} + \frac{v_k}{(\mu_m + v_k)} \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \hat{a}_{m,i,j}(v_k) - \frac{v_k}{(\mu_m + v_k)} \frac{2\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} D_k \hat{a}_{m,i,j}(v_k). \quad (2.76)$$

Usando a Eq. (2.26) que define a forma das componentes dos autovetores  $\hat{a}_{m,i,j}(v_k)$  na

Eq. (2.76), é obtido que

$$\hat{\lambda}_{m,k} = \hat{a}_{m,ij}(v_k) + \frac{24}{c_{0,ij}} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \hat{a}_{m,ij}^2(v_k) - \frac{8}{c_{0,ij}} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} D_k \hat{a}_{m,ij}^2(v_k). \quad (2.77)$$

Multiplicando a Eq. (2.77) por  $\omega_m$  e somando pelas direções  $m$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \omega_m \hat{\lambda}_{m,k} &= \sum_{m=1}^M \omega_m \hat{a}_{m,ij}(v_k) + \frac{24}{c_{0,ij}} \frac{1}{\sigma_{t,ij} h_j} \sum_{m=1}^M \omega_m \eta_m \hat{a}_{m,ij}^2(v_k) - \\ &- \frac{8}{c_{0,ij}} \frac{D_k}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m \hat{a}_{m,ij}^2(v_k), \end{aligned} \quad (2.78)$$

e usando as normalizações  $\sum_{m=1}^M \omega_m \hat{a}_{m,ij}(v_k) = 1$  e  $\sum_{m=1}^M \omega_m \hat{\lambda}_{m,k} = 1$  é possível obter as

formas das constantes  $D_k$  que garantem que o sistema não homogêneo representado pela Eq.

(2.57) seja soluble

$$D_k = \frac{3\sigma_{t,ij} \ell_i}{\sigma_{t,ij} h_j} \frac{\sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \hat{a}_{n,ij}^2(v_k)}{\sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \hat{a}_{n,ij}^2(v_k)}. \quad (2.79)$$

Logo, a Eq. (2.79) é substituída em (2.77) para obter a forma das constantes  $\hat{\lambda}_{m,k}$

$$\hat{\lambda}_{m,k} = \hat{a}_{m,ij}(v_k) + \frac{24}{c_{0,ij}} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \hat{a}_{m,ij}^2(v_k) - \frac{24}{c_{0,ij}} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \hat{a}_{m,ij}^2(v_k) \frac{\sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \hat{a}_{n,ij}^2(v_k)}{\sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \hat{a}_{n,ij}^2(v_k)}, \quad (2.80)$$

e, a Eq. (2.79) é substituída em (2.75) para obter a forma das constantes  $\hat{Y}_{m,k}$

$$\hat{Y}_{m,k} = \hat{a}_{m,i,j}(v_k) \frac{3\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}}{\sigma_{t,i,j} h_j} \frac{\sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n^{\wedge 2} a_{n,i,j}(v_k)}{\sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^{\wedge 2} a_{n,i,j}(v_k)} . \quad (2.81)$$

#### 2.4.1.2.3 Forma final da solução particular para componente homogênea

Uma vez determinadas as formas das constantes  $\hat{\lambda}_{m,k}$  e  $\hat{Y}_{m,k}$  para meios absorvedores puros e meios com espalhamento isotrópico, é possível representar a solução particular da Eq. (2.50) como

$$\hat{\varphi}_{m,j}^{p1}(x) = \sum_{k=1}^M \hat{\lambda}_{m,k} \hat{\alpha}_k^{\wedge 0} e^{\sigma_{t,i,j}(x-x_i)/v_k} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \sum_{k=1}^M \hat{Y}_{m,k} \hat{\alpha}_k^{\wedge 0} e^{\sigma_{t,i,j}(x-x_i)/v_k} . \quad (2.82)$$

#### 2.4.2 Solução particular para fonte externa

A solução particular da Eq. (2.51) tem a forma

$$\hat{\varphi}_{m,j}^{p2}(x) = \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \frac{Q}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})} . \quad (2.83)$$

### 2.4.3 Solução particular para fugas transversais 1

Para obter a solução particular da Eq. (2.52) é usada a técnica de coeficientes indeterminados considerando uma estimativa inicial da forma

$$\hat{\varphi}_{m,j}^{p3}(x) = A_{m,i,j} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} B_{m,i,j} . \quad (2.84)$$

Substituindo a Eq. (2.84) em (2.52) e agrupando termos semelhantes

$$\begin{aligned} \frac{2\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i} B_{m,i,j} + A_{m,i,j} &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M A_{n,i,j} \omega_n - \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \\ &- \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) + \frac{12\mu_m \eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) + \\ &+ \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\ &+ \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) , \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} B_{m,i,j} &= \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M B_{n,i,j} \omega_n - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) - \\ &- \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) . \end{aligned} \quad (2.86)$$

As constantes  $B_{m,i,j}$  são obtidas resolvendo a Eq. (2.86)

$$\begin{aligned}
B_{m,i,j} = & -\frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n^2 \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right), \tag{2.87}
\end{aligned}$$

E as constantes  $A_{m,i,j}$  são obtidas depois de substituir a Eq. (2.87) em (2.85) e resolver as equações resultantes

$$\begin{aligned}
A_{m,i,j} = & -\frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n^2 \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) + \frac{24\mu_m \eta_m^2}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n^2 \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n^2 \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right). \tag{2.88}
\end{aligned}$$

Logo, é possível expressar a solução particular da Eq. (2.52) como

$$\begin{aligned}
\hat{p}^3 \Phi_{m,j}(x) = & -\frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n^2 \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) + \frac{24\mu_m \eta_m^2}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n^2 \left( \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n^2 \left( \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2} \right) - \\
& - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} \right) - \\
& - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n^2 \left( \tilde{\Phi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{n,i,j-1/2} \right) . \tag{2.89}
\end{aligned}$$

#### 2.4.4 Solução particular para fugas transversais 2

De maneira semelhante, para obter a solução particular da Eq. (2.53) é usada a técnica de coeficientes indeterminados, considerando novamente uma estimativa da forma

$$\hat{p}^4 \Phi_{m,j}(x) = A_{m,i,j} + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} B_{m,i,j} . \tag{2.90}$$

Substituindo a Eq. (2.90) em (2.53) e agrupando termos semelhantes

$$\frac{2\mu_m}{\sigma_{t,i,j}\ell_i}B_{m,i,j} + A_{m,i,j} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M A_{n,i,j} \omega_n - \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j}h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right), \quad (2.91)$$

$$\frac{2(x-x_i)}{\ell_i}B_{m,i,j} = \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M B_{n,i,j} \omega_n - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j}h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right). \quad (2.92)$$

E das Eqs. (2.91) e (2.92) é possível obter as formas das constantes  $A_{m,i,j}$  e  $B_{m,i,j}$

$$\begin{aligned} A_{m,i,j} = & -\frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j}h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\ & + \frac{6\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}\ell_i \sigma_{t,i,j}h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) + \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}\ell_i \sigma_{t,i,j}h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\ & + \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}\ell_i \sigma_{t,i,j}h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right), \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$B_{m,i,j} = -\frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j}h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right). \quad (2.94)$$

Logo, a solução particular da Eq. (2.53) é representada como

$$\hat{\varphi}_{m,j}^{p4}(x) = -\frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j}h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) + \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) - \\
& - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} + \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right). \tag{2.95}
\end{aligned}$$

#### 2.4.5 Solução geral

Finalmente, a solução geral das equações  $S_N$  integrada transversalmente de primeira ordem na direção  $x$  usando aproximações lineares para os termos de fuga de nêutrons é formulada a partir das soluções homogêneas e particulares representadas pela Eq. (2.48) e as Eqs. (2.82), (2.83), (2.89) e (2.95)

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{m,j}(x) & = \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^1 \hat{a}_{m,i,j}(v_k) e^{\sigma_{t,i,j}(x-x_i)/v_k} + \sum_{k=1}^M \hat{\lambda}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,i,j}(x-x_i)/v_k} + \\
& + \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \sum_{k=1}^M \hat{\gamma}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,i,j}(x-x_i)/v_k} + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \frac{Q}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})} - \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n^2 \left( \tilde{\Psi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{24\mu_m \eta_m^2}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n^2 \left( \tilde{\varphi}_{n,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,i,j-1/2} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{6c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n^2 \left( \tilde{\varphi}_{n,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,ij-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right) - \\
& - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,ij-1/2} \right) - \\
& - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n^2 \left( \tilde{\varphi}_{n,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{n,ij-1/2} \right) - \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,ij+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,ij-1/2} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\Psi}_{n,ij+1/2} + \tilde{\Psi}_{n,ij-1/2} \right) + \frac{6\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{n,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{n,ij-1/2} \right) - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right) - \\
& - \frac{2(x-x_i)}{\ell_i} \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{n,ij-1/2} \right). \tag{2.96}
\end{aligned}$$

De maneira semelhante, é possível obter a solução geral das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$ , Eq. (2.6)

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_{m,i}(y) &= \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k \tilde{a}_{m,ij}(\nu_k) e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/\nu_k} + \sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/\nu_k} + \\
& + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \sum_{k=1}^M \tilde{\Upsilon}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/\nu_k} + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \frac{Q}{\sigma_{t,ij}(1-c_{0,ij})} - \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,ij}^2 h_i^2} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{24\mu_m^2 \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \eta_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \frac{6\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right). \tag{2.97}
\end{aligned}$$

A metodologia para obter a forma da Eq. (2.97) pode ser encontrada no Apêndice B. Nas Eqs. (2.44), (2.45), (2.96) e (2.97) as componentes homogêneas que conformam as soluções gerais compartilham os mesmos autovalores  $v_k$ , resultado do uso da quadratura LQ<sub>N</sub>. Porém, as

componentes dos autovetores somente são iguais para as Eqs. (2.45) e (2.97). As constantes

$\alpha_k^{\sim 0}$  e  $\alpha_k^{\sim 1}$  são obtidas a partir das condições de contorno impostas pelo problema.

## 2.5 Representação matricial das soluções das equações integradas transversalmente

O novo método é baseado nas soluções gerais das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero e primeira ordem nas direções  $x$  e  $y$  obtidas nas seções anteriores, Eqs. (2.45), (2.46), (2.96) e (2.97). Essas equações podem ser representadas em termos dos fluxos angulares médios emergentes e de incidência nas células de discretização espacial. Com esse propósito são definidos os vetores dos momentos espaciais de ordem zero do fluxo angular médio de entrada e emergentes nas células de discretização espacial como

$$\hat{\Psi}^{in} = \left[ \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j}^{IQ} \quad \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j}^{IIQ} \quad \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j}^{IIIQ} \quad \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j}^{IVQ} \right]^T, \quad (2.98)$$

$$\hat{\Psi}^{out} = \left[ \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j}^{IQ} \quad \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j}^{IIQ} \quad \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j}^{IIIQ} \quad \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j}^{IVQ} \right]^T, \quad (2.99)$$

$$\tilde{\Psi}^{in} = \left[ \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}^{IQ} \quad \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}^{IIQ} \quad \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2}^{IIIQ} \quad \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2}^{IVQ} \right]^T, \quad (2.100)$$

$$\tilde{\Psi}^{out} = \left[ \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2}^{IQ} \quad \tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2}^{IIQ} \quad \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}^{IIIQ} \quad \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}^{IVQ} \right]^T, \quad (2.101)$$

e os vetores dos momentos espaciais de primeira ordem do fluxo angular médio de entrada e emergentes como

$$\hat{\Phi}^{in} = \begin{bmatrix} \hat{IQ} & \hat{IIQ} & \hat{IIIQ} & \hat{IVQ} \\ \Phi_{m,i-1/2,j} & \Phi_{m,i+1/2,j} & \Phi_{m,i+1/2,j} & \Phi_{m,i-1/2,j} \end{bmatrix}^T, \quad (2.102)$$

$$\hat{\Phi}^{out} = \begin{bmatrix} \hat{IQ} & \hat{IIQ} & \hat{IIIQ} & \hat{IVQ} \\ \Phi_{m,i+1/2,j} & \Phi_{m,i-1/2,j} & \Phi_{m,i-1/2,j} & \Phi_{m,i+1/2,j} \end{bmatrix}^T, \quad (2.103)$$

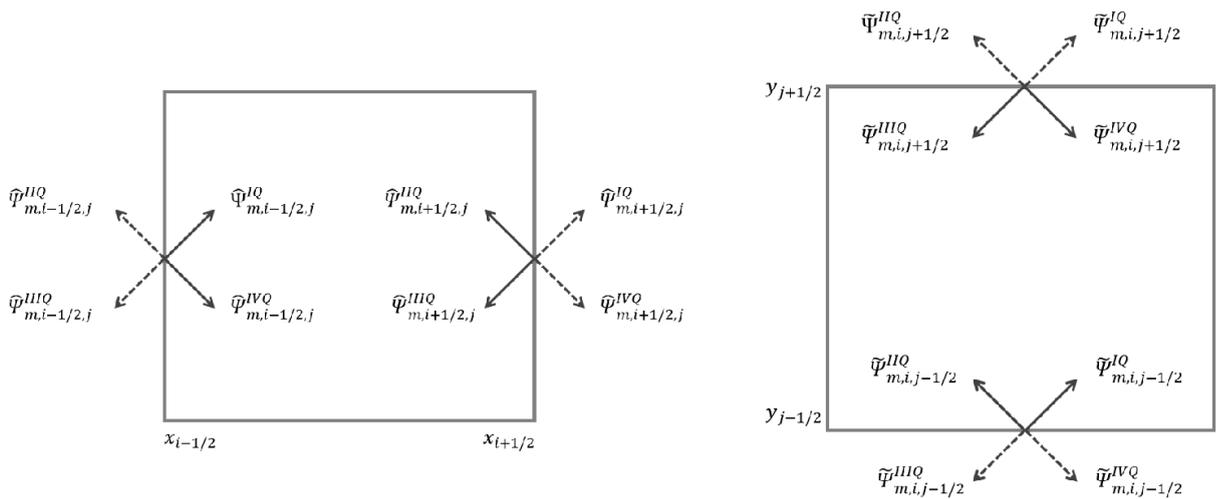
$$\tilde{\Phi}^{in} = \begin{bmatrix} \tilde{IQ} & \tilde{IIQ} & \tilde{IIIQ} & \tilde{IVQ} \\ \Phi_{m,i,j-1/2} & \Phi_{m,i,j-1/2} & \Phi_{m,i,j+1/2} & \Phi_{m,i,j+1/2} \end{bmatrix}^T, \quad (2.104)$$

$$\tilde{\Phi}^{out} = \begin{bmatrix} \tilde{IQ} & \tilde{IIQ} & \tilde{IIIQ} & \tilde{IVQ} \\ \Phi_{m,i,j+1/2} & \Phi_{m,i,j+1/2} & \Phi_{m,i,j-1/2} & \Phi_{m,i,j-1/2} \end{bmatrix}^T, \quad (2.105)$$

onde  $\hat{\Psi}_{m,i-1/2,j}^{IQ}$  representam os momentos espaciais de ordem zero do fluxo angular médio na direção  $x$  de incidência no extremo esquerdo da célula de discretização espacial  $\Omega_{i,j}$  e nas direções  $m$  do primeiro quadrante. De igual maneira, são definidos os momentos espaciais de primeira ordem do fluxo angular médio de nêutrons  $\tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2}^{IQ}$  nos extremos inferiores de uma célula de discretização espacial arbitrária nas direções do primeiro quadrante. Na Figura 10 são apresentados os momentos espaciais de ordem zero do fluxo angular médio de entrada e

emergentes nos extremos de uma célula de discretização espacial arbitrária. As setas constituem as direções representativas de cada quadrante. O conjunto de setas contínuas representa o vetor dos momentos espaciais de ordem zero do fluxo angular médio de entrada,  $\hat{\Psi}^{\wedge in}$  e  $\tilde{\Psi}^{\sim in}$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respetivamente; e o conjunto de setas tracejadas representam o vetor dos momentos espaciais de ordem zero do fluxo angular médio emergentes,  $\hat{\Psi}^{\wedge out}$  e  $\tilde{\Psi}^{\sim out}$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respetivamente.

Figura 10 - Representação dos momentos de ordem zero do fluxo angular médio de entrada e emergentes nos extremos de uma célula arbitrária



Fonte: O autor, 2022

Em continuação, são desenvolvidas as formas matriciais das soluções das equações integradas transversalmente de ordem zero e primeira ordem nas direções  $x$  e  $y$  em função dos vetores de entrada e emergentes dos fluxos angulares médios de ordem zero e primeira ordem mencionados anteriormente.

### 2.5.1 Forma matricial das soluções de ordem zero na direção $x$

Na derivação da forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $x$  usamos a Eq. (2.45). Para  $x = x_{i-1/2}$  é obtido que

$$\begin{aligned}
\hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} &= \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^0 \hat{a}_{m,i,j}(v_k) e^{-\sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k} + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})} - \\
&- \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} (\tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}) - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k (\tilde{\Psi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{k,i,j-1/2}) + \\
&+ \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} (\tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2}) + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k (\tilde{\Phi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{k,i,j-1/2}) + \\
&+ \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k (\tilde{\Phi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{k,i,j-1/2}) + \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} (\tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2}) - \\
&+ \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k (\tilde{\Phi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{k,i,j-1/2}), \tag{2.106}
\end{aligned}$$

e para  $x = x_{i+1/2}$  é obtido que

$$\begin{aligned}
\hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} &= \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^0 \hat{a}_{m,i,j}(v_k) e^{\sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k} + \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})} - \\
&- \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} (\tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}) - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k (\tilde{\Psi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{k,i,j-1/2}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{k,i,j-1/2} \right) + \\
& + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{k,i,j-1/2} \right) - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} \right) - \\
& - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\varphi}_{k,i,j-1/2} \right) . \tag{2.107}
\end{aligned}$$

As Eqs. (2.106) e (2.107) podem ser representadas em notação matricial em função dos momentos espaciais de ordem zero e primeira ordem do fluxo angular médio nos extremas das células de discretização espacial na forma

$$\hat{\Psi}^{in} = \overline{RX}^{in} \hat{\alpha}^0 + \overline{LX0} \left( \tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in} \right) + \overline{LX1}^{in} \left( \tilde{\varphi}^{out} - \tilde{\varphi}^{in} \right) + \hat{S}^0 , \tag{2.108}$$

$$\hat{\Psi}^{out} = \overline{RX}^{out} \hat{\alpha}^0 + \overline{LX0} \left( \tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in} \right) + \overline{LX1}^{out} \left( \tilde{\varphi}^{out} - \tilde{\varphi}^{in} \right) + \hat{S}^0 . \tag{2.109}$$

As componentes das matrizes envolvidas nas Eqs. (2.108) e (2.109) podem ser encontradas no Apêndice C. Resolvendo a Eq. (2.108) para  $\hat{\alpha}^0$  tem-se que

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}^0 & = \overline{RX}^{in-1} \hat{\Psi}^{in} - \overline{RX}^{in-1} \overline{LX0} \left( \tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in} \right) - \overline{RX}^{in-1} \overline{LX1}^{in} \left( \tilde{\varphi}^{out} - \tilde{\varphi}^{in} \right) - \\
& - \overline{RX}^{in-1} \hat{S}^0 \tag{2.110}
\end{aligned}$$

e, substituindo a Eq. (2.110) em (2.109)

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^{out} &= \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \hat{\Psi}^{in} + \left( I - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \right) \overline{LX0} \left( \tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in} \right) + \\ &+ \left( \overline{LX1}^{out} - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \overline{LX1}^{in} \right) \left( \tilde{\varphi}^{out} - \tilde{\varphi}^{in} \right) + \left( I - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \right) \hat{S}^0, \end{aligned} \quad (2.111)$$

onde  $I$  representa a matriz identidade. Finalmente, é possível expressar as soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $x$ , representada pela Eq. (2.111), na forma

$$\hat{\Psi}^{out} = \overline{MX1} \hat{\Psi}^{in} + \overline{MX2} \left( \tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in} \right) + \overline{MX3} \left( \tilde{\varphi}^{out} - \tilde{\varphi}^{in} \right) + \overline{SX}. \quad (2.112)$$

### 2.5.2 Forma matricial das soluções de ordem zero na direção $y$

De modo semelhante, na derivação da forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$  é usada a Eq. (2.46). Para  $y = y_{j-1/2}$  tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2} &= \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k \tilde{a}_{m,i,j}(\nu_k) e^{-\sigma_{t,i,j} h_j / 2 \nu_k} + \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,i,j} (1-c_{0,ij})} - \\ &- \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\Psi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\ &+ \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i} \sigma_{t,ij}^{\ell_j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) + \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i}} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& + \frac{c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i}} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right), \tag{2.113}
\end{aligned}$$

e para  $y = y_{j+1/2}$  tem-se que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} &= \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k \tilde{a}_{m,i,j}(\mathbf{v}_k) e^{\sigma_{t,ij} h_j / 2 \nu_k} + \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,ij} (1-c_{0,ij})} - \\
& - \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i}} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i}} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\Psi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i} \sigma_{t,ij}^{\ell_j} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i} \sigma_{t,ij}^{\ell_j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i} \sigma_{t,ij}^{\ell_j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) - \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i}} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i}} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right). \tag{2.114}
\end{aligned}$$

As Eqs. (2.113) e (2.114) podem ser representadas em notação matricial em termos dos momentos espaciais de ordem zero e primeira ordem dos fluxo angular médios nos extremos das células de discretização espacial mediante as equações

$$\tilde{\Psi}^{in} = \overline{RY} \tilde{\alpha}^{in\sim 0} + \overline{LY0} \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) + \overline{LY1} \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \tilde{S}^0, \tag{2.115}$$

$$\tilde{\Psi}^{out} = \overline{RY}^{out} \tilde{\alpha}^0 + \overline{LY0} \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) + \overline{LY1}^{out} \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \tilde{S}^0. \quad (2.116)$$

As matrizes envolvidas nas Eqs. (2.115) e (2.116) são definidas no Apêndice D. Logo, resolvendo a Eq. (2.115) é possível obter a forma para  $\tilde{\alpha}^0$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^0 = & \overline{RY}^{in^{-1}} \tilde{\Psi}^{in} - \overline{RY}^{in^{-1}} \overline{LY0} \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) - \overline{RY}^{in^{-1}} \overline{LY1}^{in} \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) - \\ & - \overline{RY}^{in^{-1}} \tilde{S}^0. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Substituindo a Eq. (2.117) em (2.116) e reagrupando termos tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{out} = & \left( I - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}} \right) \overline{LY0} \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) + \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}} \tilde{\Psi}^{in} + \\ & + \left( \overline{LY1}^{out} - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}} \overline{LY1}^{in} \right) \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \left( I - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}} \right) \tilde{S}^0. \end{aligned} \quad (2.118)$$

A forma final das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$  toma a forma

$$\tilde{\Psi}^{out} = \overline{MY1} \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) + \overline{MY2} \tilde{\Psi}^{in} + \overline{MY3} \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \overline{SY}. \quad (2.119)$$

### 2.5.3 Forma matricial das soluções de primeira ordem na direção $x$

Por outro lado, na derivação da forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $x$  usamos a Eq. (2.96). Para  $x = x_{i-1/2}$  tem-se que

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} &= \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k \hat{a}_{m,i,j}^{(v_k)} e^{-\sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k} + \sum_{k=1}^M \hat{\lambda}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{-\sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k} - \\
&- \sum_{k=1}^M \hat{Y}_{m,k} \hat{\alpha}_k^0 e^{-\sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k} + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \frac{Q}{\sigma_{t,i,j} (1-c_{0,i,j})} - \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} (\tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}) - \\
&- \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k (\tilde{\Psi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{k,i,j-1/2}) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k^2 (\tilde{\Psi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{k,i,j-1/2}) + \\
&+ \frac{24\mu_m \eta_m^2}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} (\tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2}) + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k (\tilde{\Phi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{k,i,j-1/2}) + \\
&+ \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k^2 (\tilde{\Phi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{k,i,j-1/2}) + \\
&+ \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k (\tilde{\Phi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{k,i,j-1/2}) + \\
&+ \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k^2 (\tilde{\Phi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{k,i,j-1/2}) + \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} (\tilde{\Phi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{m,i,j-1/2}) + \\
&+ \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k (\tilde{\Phi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{k,i,j-1/2}) + \\
&+ \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k^2 (\tilde{\Phi}_{k,i,j+1/2} - \tilde{\Phi}_{k,i,j-1/2}) - \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} (\tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k \left( \tilde{\Psi}_{k,ij+1/2} + \tilde{\Psi}_{k,ij-1/2} \right) + \frac{6\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \left( \tilde{\varphi}_{n,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{n,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right) + \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right), \tag{2.120}
\end{aligned}$$

e para  $x = x_{i+1/2}$  tem-se que

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} & = \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_{m,ij} (v_k) e^{\sigma_{t,ij} \ell_i / 2v_k} + \sum_{k=1}^M \hat{\lambda}_{m,k} \hat{\alpha}_k e^{\sigma_{t,ij} \ell_i / 2v_k} + \\
& + \sum_{k=1}^M \hat{Y}_{m,k} \hat{\alpha}_k e^{\sigma_{t,ij} \ell_i / 2v_k} + \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \frac{Q}{\sigma_{t,ij} (1-c_{0,ij})} - \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \left( \tilde{\Psi}_{m,ij+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,ij-1/2} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k \left( \tilde{\Psi}_{k,ij+1/2} - \tilde{\Psi}_{k,ij-1/2} \right) - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k^2 \left( \tilde{\Psi}_{k,ij+1/2} - \tilde{\Psi}_{k,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{24\mu_m \eta_m^2}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right) + \frac{6c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k^2 \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{6c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k^2 \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right) - \frac{6\eta_m^2}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 h_j^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k^2 \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} - \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right) - \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\Psi}_{m,ij+1/2} + \tilde{\Psi}_{m,ij-1/2} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k \left( \tilde{\Psi}_{k,ij+1/2} + \tilde{\Psi}_{k,ij-1/2} \right) + \frac{6\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right) - \frac{3\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \left( \tilde{\varphi}_{m,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{m,ij-1/2} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \eta_k \left( \tilde{\varphi}_{k,ij+1/2} + \tilde{\varphi}_{k,ij-1/2} \right). \tag{2.121}
\end{aligned}$$

As Eqs. (2.120) e (2.121) podem ser representadas usando notação matricial na forma

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^{in} &= \overline{RX} \hat{\alpha}^{in} + \left( \overline{X\lambda} + \overline{XY} \right) \hat{\alpha}^{in} + \overline{LXX0} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}^{out} \\ \tilde{\Psi}^{in} \end{pmatrix} + \overline{LXX1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{out} \\ \tilde{\varphi}^{in} \end{pmatrix} + \\
& + \overline{LXX2} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}^{out} \\ \tilde{\Psi}^{in} \end{pmatrix} + \overline{LXX3} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{out} \\ \tilde{\varphi}^{in} \end{pmatrix} + \hat{S}^1, \tag{2.122}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^{out} &= \overline{RX} \hat{\alpha}^{out} + \left( \overline{X\lambda} + \overline{XY} \right) \hat{\alpha}^{out} + \overline{LXX0} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}^{out} \\ \tilde{\Psi}^{in} \end{pmatrix} + \overline{LXX1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{out} \\ \tilde{\varphi}^{in} \end{pmatrix} + \\
& + \overline{LXX2} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}^{out} \\ \tilde{\Psi}^{in} \end{pmatrix} + \overline{LXX3} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{out} \\ \tilde{\varphi}^{in} \end{pmatrix} + \hat{S}^1. \tag{2.123}
\end{aligned}$$

As matrizes envolvidas nas Eqs. (2.122) e (2.123) são apresentadas no Apêndice E.

Usando a Eq. (2.112), a qual define  $\hat{\alpha}^0$ , nas Eqs. (2.122) e (2.123) e reagrupamos os termos semelhantes é possível obter que

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^{in} &= \overline{RX}^{in} \hat{\alpha}^1 + (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \overline{RX}^{in-1} \hat{\Psi}^{in} + \\
&+ \left[ \overline{LXX0} - (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \overline{RX}^{in-1} \overline{LX0} \right] (\tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in}) + \\
&+ \left[ \overline{LXX1}^{in} - (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \overline{RX}^{in-1} \overline{LX1} \right] (\tilde{\varphi}^{out} - \tilde{\varphi}^{in}) + \overline{LXX2} (\tilde{\Psi}^{out} + \tilde{\Psi}^{in}) + \\
&+ \overline{LXX3}^{in} (\tilde{\varphi}^{out} + \tilde{\varphi}^{in}) + \hat{S}^1 - (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \overline{RX}^{in-1} \hat{S}^0,
\end{aligned} \tag{2.124}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^{out} &= \overline{RX}^{out} \hat{\alpha}^1 + (\overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out}) \overline{RX}^{out-1} \hat{\Psi}^{in} + \\
&+ \left[ \overline{LXX0} - (\overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out}) \overline{RX}^{out-1} \overline{LX0} \right] (\tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in}) + \\
&+ \left[ \overline{LXX1}^{out} - (\overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out}) \overline{RX}^{out-1} \overline{LX1} \right] (\tilde{\varphi}^{out} - \tilde{\varphi}^{in}) + \overline{LXX2} (\tilde{\Psi}^{out} + \tilde{\Psi}^{in}) + \\
&+ \overline{LXX3}^{out} (\tilde{\varphi}^{out} + \tilde{\varphi}^{in}) + \hat{S}^1 - (\overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out}) \overline{RX}^{out-1} \hat{S}^0.
\end{aligned} \tag{2.125}$$

Logo, resolvendo a Eq. (2.124) para  $\hat{\alpha}^1$  tem-se que

$$\hat{\alpha}^1 = \overline{RX}^{in-1} \hat{\varphi}^{in} - \overline{RX}^{in-1} (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \overline{RX}^{in-1} \hat{\Psi}^{in} -$$

$$\begin{aligned}
& - \overline{RX}^{in-1} \left[ \overline{LXX0} - (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \overline{RX}^{in-1} \overline{LX0} \right] (\tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in}) - \\
& - \overline{RX}^{in-1} \left[ \overline{LXX1}^{in} - (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \overline{RX}^{in-1} \overline{LX1}^{in} \right] (\tilde{\varphi}^{out} - \tilde{\varphi}^{in}) - \overline{RX}^{in-1} \overline{LXX2} (\tilde{\Psi}^{out} + \tilde{\Psi}^{in}) - \\
& - \overline{RX}^{in-1} \overline{LXX3}^{in} (\tilde{\varphi}^{out} + \tilde{\varphi}^{in}) - \overline{RX}^{in-1} \left[ \hat{S}^1 - (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \overline{RX}^{in-1} \hat{S}^0 \right], \tag{2.126}
\end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (2.126) em (2.125) e reagrupando termos é obtido que

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^{out} & = \left[ (\overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out}) - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in-1} (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \right] \overline{RX}^{in-1} \hat{\Psi}^{in} + \\
& + \left( I - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in-1} \right) \overline{LXX0} (\tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in}) - \\
& - \left[ (\overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out}) - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in-1} (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \right] \overline{RX}^{in-1} \overline{LX0} (\tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in}) + \\
& + \left( I - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in-1} \right) \overline{LXX2} (\tilde{\Psi}^{out} + \tilde{\Psi}^{in}) + \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in-1} \hat{\varphi}^{in} + \\
& + \left( \overline{LXX1}^{out} - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in-1} \overline{LXX1}^{in} \right) (\tilde{\varphi}^{out} - \tilde{\varphi}^{in}) - \\
& - \left[ (\overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out}) - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in-1} (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \right] \overline{RX}^{in-1} \overline{LX1}^{in} (\tilde{\varphi}^{out} - \tilde{\varphi}^{in}) + \\
& + \left( \overline{LXX3}^{out} - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in-1} \overline{LXX3}^{in} \right) (\tilde{\varphi}^{out} + \tilde{\varphi}^{in}) + \\
& + \left( I - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in-1} \right) \hat{S}^1 - \left[ (\overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out}) - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in-1} (\overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in}) \right] \overline{RX}^{in-1} \hat{S}^0. \tag{2.127}
\end{aligned}$$

Finalmente, expressamos as soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $x$  em termos dos fluxos de entrada e salientes nas células de discretização espacial na forma

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^{out} = & \overline{MXX1} \hat{\Psi}^{in} + \overline{MXX2} \left( \tilde{\Psi}^{out} - \tilde{\Psi}^{in} \right) + \overline{MXX3} \left( \tilde{\Psi}^{out} + \tilde{\Psi}^{in} \right) + \overline{MXX4} \hat{\varphi}^{in} + \\ & + \overline{MXX5} \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \overline{MXX6} \left( \hat{\varphi}^{out} + \hat{\varphi}^{in} \right) + \overline{SXX} . \end{aligned} \quad (2.128)$$

#### 2.5.4 Forma matricial das soluções de primeira ordem na direção $y$

Na derivação da forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $y$  usamos a Eq. (2.97). Para  $y = y_{i-1/2}$  tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{m,i,j-1/2} = & \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k^1 \tilde{a}_{m,i,j} \tilde{v}_k e^{-\sigma_{t,i,j} h_j / 2v_k} + \sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{-\sigma_{t,i,j} h_j / 2v_k} - \\ & - \sum_{k=1}^M \tilde{\gamma}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{-\sigma_{t,i,j} h_j / 2v_k} + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \frac{Q}{\sigma_{t,i,j} (1-c_{0,i,j})} - \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\ & - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\Psi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{k,i-1/2,j} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k^2 \left( \hat{\Psi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\ & + \frac{24\mu_m^2 \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k^2 \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{6c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k^2 \eta_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) + \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k^2 \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) - \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\Psi}_{k,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{k,i-1/2,j} \right) + \frac{6\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right) + \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\varphi}_{k,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{k,i-1/2,j} \right), \tag{2.129}
\end{aligned}$$

e para  $y = y_{i+1/2}$  tem-se que

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_{m,i,j+1/2} & = \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k^1 a_{m,i,j}(\nu_k) e^{\sigma_{t,ij} h_j / 2\nu_k} + \sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_{m,k}^0 \alpha_k^0 e^{\sigma_{t,ij} h_j / 2\nu_k} + \\
& + \sum_{k=1}^M \tilde{\Upsilon}_{m,k}^0 \alpha_k^0 e^{\sigma_{t,ij} h_j / 2\nu_k} + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \frac{Q}{\sigma_{t,ij} (1-c_{0,ij})} - \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\Psi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{k,i-1/2,j} \right) - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k^2 \left( \hat{\Psi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{24\mu_m^2 \eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij}^2 h_j} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{6c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij}^2 h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\Phi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij}^2 h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k^2 \left( \hat{\Phi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij}^2 h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k \left( \hat{\Phi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{6c_{0,ij}}{(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij}^2 h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k^2 \eta_k \left( \hat{\Phi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{k,i-1/2,j} \right) - \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\Phi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{k,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k^2 \left( \hat{\Phi}_{k,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{k,i-1/2,j} \right) - \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\Psi}_{k,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{k,i-1/2,j} \right) + \frac{6\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\Phi}_{k,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{k,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i \sigma_{t,ij}^2 h_j} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \eta_k \left( \hat{\Phi}_{k,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{k,i-1/2,j} \right) - \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i} \sum_{k=1}^M \omega_k \mu_k \left( \hat{\Phi}_{k,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{k,i-1/2,j} \right). \tag{2.130}
\end{aligned}$$

As Eqs. (2.129) e (2.130) podem ser representadas em notação matricial mediante as equações

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^{in} &= \overline{RY}^{in\sim 1} \alpha + (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in}) \tilde{\alpha}^0 + \overline{LYY0} \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) + \overline{LYY1}^{in} \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \\
&+ \overline{LYY2} \left( \hat{\Psi}^{out} + \hat{\Psi}^{in} \right) + \overline{LYY3}^{in} \left( \hat{\varphi}^{out} + \hat{\varphi}^{in} \right) + \tilde{S}^1, \tag{2.131}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^{out} &= \overline{RY}^{out\sim 1} \alpha + (\overline{Y\lambda}^{out} + \overline{YY}^{out}) \tilde{\alpha}^0 + \overline{LYY0} \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) + \overline{LYY1}^{out} \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \\
&+ \overline{LYY2} \left( \hat{\Psi}^{out} + \hat{\Psi}^{in} \right) + \overline{LYY3}^{out} \left( \hat{\varphi}^{out} + \hat{\varphi}^{in} \right) + \tilde{S}^1. \tag{2.132}
\end{aligned}$$

As componentes das matrizes envolvidas nas Eqs. (2.131) e (2.132) são definidas no

Apêndice F. Logo, a Eq. (2.117) para  $\tilde{\alpha}^0$  é usada nas Eqs. (2.131) e (2.132) para obter que

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^{in} &= \overline{RY}^{in\sim 1} \alpha + (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in}) \overline{RY}^{in-1} \tilde{\Psi}^{in} + \\
&+ \left[ \overline{LYY0} - (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in}) \overline{RY}^{in-1} \overline{LY0} \right] \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) + \\
&+ \left[ \overline{LYY1}^{in} - (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in}) \overline{RY}^{in-1} \overline{LY1}^{in} \right] \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \overline{LYY2} \left( \hat{\Psi}^{out} + \hat{\Psi}^{in} \right) + \\
&+ \overline{LYY3}^{in} \left( \hat{\varphi}^{out} + \hat{\varphi}^{in} \right) + \tilde{S}^1 - (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in}) \overline{RY}^{in-1} \tilde{S}^0, \tag{2.133}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^{out} &= \overline{RY}^{out\sim 1} \alpha + (\overline{Y\lambda}^{out} + \overline{YY}^{out}) \overline{RY}^{out-1} \tilde{\Psi}^{out} + \\
&+ \left[ \overline{LYY0} - (\overline{Y\lambda}^{out} + \overline{YY}^{out}) \overline{RY}^{out-1} \overline{LY0} \right] \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \overline{LYY1}^{out} - (\overline{Y\lambda}^{out} + \overline{Y\Upsilon}^{out}) \overline{RY}^{in^{-1}} \overline{LY1}^{in} \right] \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \overline{LYY2} \left( \hat{\Psi}^{out} + \hat{\Psi}^{in} \right) + \\
& + \overline{LYY3}^{out} \left( \hat{\varphi}^{out} + \hat{\varphi}^{in} \right) + \tilde{S}^1 - (\overline{Y\lambda}^{out} + \overline{Y\Upsilon}^{out}) \overline{RY}^{in^{-1}} \tilde{S}^0, \tag{2.134}
\end{aligned}$$

e resolvendo a Eq. (2.133) para  $\tilde{\alpha}^1$  tem-se que

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}^1 & = \overline{RY}^{in^{-1}} \tilde{\varphi}^{in} - \overline{RY}^{in^{-1}} (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{Y\Upsilon}^{in}) \overline{RY}^{in^{-1}} \tilde{\Psi}^{in} - \\
& - \overline{RY}^{in^{-1}} \left[ \overline{LYY0} - (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{Y\Upsilon}^{in}) \overline{RY}^{in^{-1}} \overline{LY0} \right] \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) - \\
& - \overline{RY}^{in^{-1}} \left[ \overline{LYY1}^{in} - (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{Y\Upsilon}^{in}) \overline{RY}^{in^{-1}} \overline{LY1}^{in} \right] \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) - \overline{RY}^{in^{-1}} \overline{LYY2} \left( \hat{\Psi}^{out} + \hat{\Psi}^{in} \right) - \\
& - \overline{RY}^{in^{-1}} \overline{LYY3}^{in} \left( \hat{\varphi}^{out} + \hat{\varphi}^{in} \right) - \overline{RY}^{in^{-1}} \left[ \tilde{S}^1 - (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{Y\Upsilon}^{in}) \overline{RY}^{in^{-1}} \tilde{S}^0 \right]. \tag{2.135}
\end{aligned}$$

Por último, substituindo a Eq. (2.135) em (2.134) e reagrupando termos na equação resultante é possível obter que

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^{out} & = \left( I - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}} \right) \overline{LYY0} \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) - \\
& - \left[ (\overline{Y\lambda}^{out} + \overline{Y\Upsilon}^{out}) - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}} (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{Y\Upsilon}^{in}) \right] \overline{RY}^{in^{-1}} \overline{LY0} \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) + \\
& + \left( I - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}} \right) \overline{LYY2} \left( \hat{\Psi}^{out} + \hat{\Psi}^{in} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ (\overline{Y\lambda}^{out} + \overline{YY}^{out}) - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in}) \right] \overline{RY}^{in-1} \tilde{\Psi}^{in} + \\
& + \left( \overline{LYY1}^{out} - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \overline{LYY1}^{in} \right) \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) - \\
& - \left[ (\overline{Y\lambda}^{out} + \overline{YY}^{out}) - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in}) \right] \overline{RY}^{in-1} \overline{LY1} \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \\
& + \left( \overline{LYY3}^{out} - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \overline{LYY3}^{in} \right) \left( \hat{\varphi}^{out} + \hat{\varphi}^{in} \right) + \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \tilde{\varphi}^{in} + \\
& + \left( I - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \right) \tilde{S}^1 - \left[ (\overline{Y\lambda}^{out} + \overline{YY}^{out}) - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} (\overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in}) \right] \overline{RY}^{in-1} \tilde{S}^0 . \quad (2.136)
\end{aligned}$$

Finalmente, as soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $y$  são expressadas em termos dos fluxos angulares de entrada e salientes na forma

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^{out} & = \overline{MYY1} \left( \hat{\Psi}^{out} - \hat{\Psi}^{in} \right) + \overline{MYY2} \left( \hat{\Psi}^{out} + \hat{\Psi}^{in} \right) + \overline{MYY3} \tilde{\Psi}^{in} + \overline{MYY4} \left( \hat{\varphi}^{out} - \hat{\varphi}^{in} \right) + \\
& + \overline{MYY5} \left( \hat{\varphi}^{out} + \hat{\varphi}^{in} \right) + \overline{MYY6} \tilde{\varphi}^{in} + \overline{SYY} . \quad (2.137)
\end{aligned}$$

## 2.6 Esquema matriz resposta

Na construção do esquema matriz resposta precisamos representar os fluxos angulares médios emergentes em função dos fluxos angulares médios de incidência nas células de

discretização espacial. Com esse propósito são usadas as formas matriciais das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero e primeira ordem nas direções  $x$  e  $y$ , representadas pelas Eqs. (2.112), (2.119), (2.128) e (2.137), para obter as equações que serão denominadas como equações de matriz resposta. Primeiramente, são definidos os vetores de fluxo angular médios de incidência e emergente de ordem zero numa célula de discretização espacial arbitrária da forma

$$\Psi^{in} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}^{in} & \tilde{\Psi}^{in} \end{bmatrix}^T, \quad (2.138)$$

$$\Psi^{out} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}^{out} & \tilde{\Psi}^{out} \end{bmatrix}^T, \quad (2.139)$$

e os vetores de fluxo angular médios de incidência e emergentes de primeira ordem como

$$\Phi^{in} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}^{in} & \tilde{\Phi}^{in} \end{bmatrix}^T, \quad (2.140)$$

$$\Phi^{out} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}^{out} & \tilde{\Phi}^{out} \end{bmatrix}^T. \quad (2.141)$$

A partir desses vetores é possível definir os vetores de fluxo angular médios de incidência e emergente numa célula de discretização espacial arbitrária como

$$F^{in} = \begin{bmatrix} \Psi^{in} & \Phi^{in} \end{bmatrix}^T, \quad (2.142)$$

$$F^{out} = \left[ \Psi^{out} \quad \varphi^{out} \right]^T . \quad (2.143)$$

### 2.6.1 Equação de matriz resposta de ordem zero

Para obter a equação de matriz resposta de ordem zero é usada a forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $x$ , representada pela Eq. (2.112). Na equação, os termos associados aos vetores emergentes e de entrada nas células de discretização espacial são separados da forma

$$\hat{\Psi}^{out} - \overline{MX2} \tilde{\Psi}^{out} - \overline{MX3} \varphi^{out} = \overline{MX1} \hat{\Psi}^{in} - \overline{MX2} \tilde{\Psi}^{in} - \overline{MX3} \varphi^{in} + \overline{SX} . \quad (2.144)$$

Usando as Eqs. (2.119), (2.128) e (2.137) é possível obter as seguintes equações

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{out} = & \overline{M12}^{-1} \left[ \overline{MY1} + \overline{MY3} \overline{M11}^{-1} (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \right] \hat{\Psi}^{out} + \\ & + \overline{M12}^{-1} \left( \overline{MY3} \overline{M11}^{-1} [\overline{MXX1} - (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) (\overline{MYY1} - \overline{MYY2})] - \overline{MY1} \right) \hat{\Psi}^{in} + \\ & + \overline{M12}^{-1} \left( \overline{MY3} \overline{M11}^{-1} [(\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{MYY3} - (\overline{MXX2} - \overline{MXX3})] + \overline{MY2} \right) \tilde{\Psi}^{in} + \\ & + \overline{M12}^{-1} \left( \overline{MY3} \overline{M11}^{-1} [\overline{MXX4} - (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) (\overline{MYY4} - \overline{MYY5})] - \overline{MY3} \right) \hat{\varphi}^{in} + \\ & + \overline{M12}^{-1} \overline{MY3} \overline{M11}^{-1} [(\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{MYY6} - (\overline{MXX5} - \overline{MXX6})] \tilde{\varphi}^{in} + \\ & + \overline{M12}^{-1} \left( \overline{MY3} \overline{M11}^{-1} [(\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{SY} + \overline{SXX}] + \overline{SY} \right) , \end{aligned} \quad (2.145)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^{out} &= \overline{M14}^{-1} \left[ (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) + (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M13}^{-1} (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{MY1} \right] \hat{\Psi}^{out} + \\
&+ \overline{M14}^{-1} \left( (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M13}^{-1} [\overline{MXX1} - (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{MY1}] - (\overline{MYY1} - \overline{MYY2}) \right) \hat{\Psi}^{in} + \\
&+ \overline{M14}^{-1} \left( (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M13}^{-1} [(\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{MY2} - (\overline{MXX2} - \overline{MXX3})] + \overline{MYY3} \right) \tilde{\Psi}^{in} + \\
&+ \overline{M14}^{-1} \left( (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M13}^{-1} [\overline{MXX4} - (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{MY3}] - (\overline{MYY4} - \overline{MYY5}) \right) \hat{\varphi}^{in} + \\
&+ \overline{M14}^{-1} \left[ \overline{MYY6} - (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M13}^{-1} (\overline{MXX5} - \overline{MXX6}) \right] \tilde{\varphi}^{in} \\
&+ \overline{M14}^{-1} \left( (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M13}^{-1} [(\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{SY} + \overline{SXX}] + \overline{SYY} \right) , \tag{2.146}
\end{aligned}$$

Logo depois de substituir as Eqs. (2.145) e (2.146) em (2.144) tem-se que

$$\hat{\Psi}^{out} = \overline{R11} \hat{\Psi}^{in} + \overline{R12} \tilde{\Psi}^{in} + \overline{R13} \hat{\varphi}^{in} + \overline{R14} \tilde{\varphi}^{in} + \overline{S1} . \tag{2.147}$$

Por outro lado, usando a forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$ , Eq. (2.119), e separando os termos associados aos vetores salientes e de entrada nas células de discretização espacial é obtido que

$$-\overline{MY1} \hat{\Psi}^{out} + \tilde{\Psi}^{out} - \overline{MY3} \hat{\varphi}^{out} = -\overline{MY1} \hat{\Psi}^{in} + \overline{MY2} \tilde{\Psi}^{in} - \overline{MY3} \hat{\varphi}^{in} + \overline{SY} . \tag{2.148}$$

Usando as Eqs. (2.112), (2.128) e (2.137) é possível obter as seguintes equações

$$\begin{aligned}
\hat{\Psi}^{out} &= \overline{M22}^{-1} \left[ \overline{MX2} + \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \right] \tilde{\Psi}^{out} + \\
&+ \overline{M22}^{-1} \left( \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} [(\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{MXX1} - (\overline{MYY1} - \overline{MYY2})] + \overline{MX1} \right) \hat{\Psi}^{in} + \\
&+ \overline{M22}^{-1} \left( \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} [\overline{MYY3} - (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) (\overline{MXX2} - \overline{MXX3})] - \overline{MX2} \right) \tilde{\Psi}^{in} \\
&+ \overline{M22}^{-1} \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} [(\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{MXX4} - (\overline{MYY4} - \overline{MYY5})] \hat{\varphi}^{in} + \\
&+ \overline{M22}^{-1} \left( \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} [\overline{MYY6} - (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) (\overline{MXX5} - \overline{MXX6})] - \overline{MX3} \right) \tilde{\varphi}^{in} + \\
&+ \overline{M22}^{-1} \left( \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} [(\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{SXX} + \overline{SY\bar{Y}}] + \overline{S\bar{X}} \right) , \tag{2.149}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^{out} &= \overline{M24}^{-1} \left[ (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) + (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{MX2} \right] \tilde{\Psi}^{out} + \\
&+ \overline{M24}^{-1} \left( (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} [(\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{MX1} - (\overline{MYY1} - \overline{MYY2})] + \overline{MXX1} \right) \hat{\Psi}^{in} + \\
&+ \overline{M24}^{-1} \left( (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} [\overline{MYY3} - (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{MX2}] - (\overline{MXX2} - \overline{MXX3}) \right) \tilde{\Psi}^{in} + \\
&+ \overline{M24}^{-1} \left[ \overline{MXX4} - (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} (\overline{MYY4} - \overline{MYY5}) \right] \hat{\varphi}^{in} + \\
&+ \overline{M24}^{-1} \left( (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} [\overline{MYY6} - (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{MX3}] - (\overline{MXX5} - \overline{MXX6}) \right) \tilde{\varphi}^{in} + \\
&+ \overline{M24}^{-1} \left( (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} [(\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{S\bar{X}} + \overline{SY\bar{Y}}] + \overline{SXX} \right) , \tag{2.150}
\end{aligned}$$

Logo depois de substituir as Eqs. (2.149) e (2.150) em (2.148) tem-se que

$$\tilde{\Psi}^{out} = \overline{R21} \hat{\Psi}^{in} + \overline{R22} \tilde{\Psi}^{in} + \overline{R23} \hat{\varphi}^{in} + \overline{R24} \tilde{\varphi}^{in} + \overline{S2} . \tag{2.151}$$

As formas das matrizes envolvidas nas Eqs. (2.147) e (2.151) podem ser encontradas no Apêndice G. Finalmente, através das Eqs. (2.147) e (2.151), e usando as definições dos vetores de fluxo angular médios de incidência e emergente de ordem zero e primeira ordem é possível construir a equação de matriz resposta de ordem zero

$$\Psi^{out} = \overline{RM1}\Psi^{in} + \overline{RM2}\varphi^{in} + \overline{P1} . \quad (2.152)$$

### 2.6.2 Equação de matriz resposta de primeira ordem

Para obter a equação de matriz resposta de primeira ordem é usada a forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $x$ , representada pela Eq. (2.128). Na equação, os termos associados aos vetores salientes e de entrada nas células de discretização espacial são separados na forma

$$\begin{aligned} - (\overline{MXX2} + \overline{MXX3})\tilde{\Psi}^{out} + \hat{\varphi}^{out} - (\overline{MXX5} + \overline{MXX6})\tilde{\varphi}^{out} &= \overline{MXX1}\hat{\Psi}^{in} - \\ - (\overline{MXX2} - \overline{MXX3})\tilde{\Psi}^{in} + \overline{MXX4}\hat{\varphi}^{in} - (\overline{MXX5} - \overline{MXX6})\tilde{\varphi}^{in} + \overline{SXX} & \end{aligned} \quad (2.153)$$

Usando as Eqs. (2.112), (2.119) e (2.137) é possível obter as seguintes equações

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{out} &= \overline{M32}^{-1} \left[ \overline{MY3} + \overline{MY1} \overline{M31}^{-1} \overline{MX3} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \right] \hat{\varphi}^{out} + \\ + \overline{M32}^{-1} \overline{MY1} \left( \overline{M31}^{-1} [\overline{MX1} - \overline{MX3} (\overline{MYY1} - \overline{MYY2})] - I \right) \hat{\Psi}^{in} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{M32}^{-1} \left[ \overline{MY1} \overline{M31}^{-1} (\overline{MX3} \overline{MYY3} - \overline{MX2}) + \overline{MY2} \right] \tilde{\Psi}^{in} - \\
& - \overline{M32}^{-1} \left[ \overline{MY1} \overline{M31}^{-1} \overline{MX3} (\overline{MYY4} - \overline{MYY5}) + \overline{MY3} \right] \hat{\varphi}^{in} + \\
& + \overline{M32}^{-1} \overline{MY1} \overline{M31}^{-1} \overline{MX3} (\overline{MYY6} - I) \tilde{\varphi}^{in} + \\
& + \overline{M32}^{-1} \left[ \overline{MY1} \overline{M31}^{-1} (\overline{MX3} \overline{SY} + \overline{SX}) + \overline{SY} \right], \tag{2.154}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}^{out} & = \overline{M34}^{-1} \left[ (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) + (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M33}^{-1} \overline{MX2} \overline{MY3} \right] \hat{\varphi}^{out} + \\
& + \overline{M34}^{-1} \left[ (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M33}^{-1} (\overline{MX1} - \overline{MX2} \overline{MY1}) - (\overline{MYY1} - \overline{MYY2}) \right] \hat{\Psi}^{in} + \\
& + \overline{M34}^{-1} \left[ (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M33}^{-1} \overline{MX2} (\overline{MY2} - I) + \overline{MYY3} \right] \tilde{\Psi}^{in} - \\
& - \overline{M34}^{-1} \left[ (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M33}^{-1} \overline{MX2} \overline{MY3} + (\overline{MYY4} - \overline{MYY5}) \right] \hat{\varphi}^{in} + \\
& + \overline{M34}^{-1} \left[ \overline{MYY6} - (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M33}^{-1} \overline{MX3} \right] \tilde{\varphi}^{in} + \\
& + \overline{M34}^{-1} \left[ (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M33}^{-1} (\overline{MX2} \overline{SY} + \overline{SX}) + \overline{SY} \right], \tag{2.155}
\end{aligned}$$

Logo depois de substituir as Eqs. (2.154) e (2.155) em (2.153) tem-se que

$$\hat{\varphi}^{out} = \overline{R31} \hat{\Psi}^{in} + \overline{R32} \tilde{\Psi}^{in} + \overline{R33} \hat{\varphi}^{in} + \overline{R34} \tilde{\varphi}^{in} + \overline{S3} . \tag{2.156}$$

Por outro lado, usando a forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $y$ , Eq. (2.137), e separando os termos associados aos vetores salientes e de entrada nas células de discretização espacial é obtido que

$$\begin{aligned}
 & - (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \hat{\Psi}^{out} - (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \hat{\varphi}^{out} + \tilde{\varphi}^{out} = - (\overline{MYY1} - \overline{MYY2}) \hat{\Psi}^{in} + \\
 & + \overline{MYY3} \tilde{\Psi}^{in} - (\overline{MYY4} - \overline{MYY5}) \hat{\varphi}^{in} + \overline{MYY6} \tilde{\varphi}^{in} + \overline{SY} . \tag{2.157}
 \end{aligned}$$

Usando as Eqs. (2.112), (2.119) e (2.128) é possível obter as seguintes equações

$$\begin{aligned}
 \hat{\Psi}^{out} &= \overline{M42}^{-1} \left[ \overline{MX3} + \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} \overline{MY3} (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \right] \tilde{\varphi}^{out} + \\
 & + \overline{M42}^{-1} \left[ \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} (\overline{MY3} \overline{MXX1} - \overline{MY1}) + \overline{MX1} \right] \hat{\Psi}^{in} + \\
 & + \overline{M42}^{-1} \overline{MX2} \left( \overline{M41}^{-1} [\overline{MY2} - \overline{MY3} (\overline{MXX2} - \overline{MXX3})] - I \right) \tilde{\Psi}^{in} + \\
 & + \overline{M42}^{-1} \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} \overline{MY3} (\overline{MXX4} - I) \hat{\varphi}^{in} - \\
 & - \overline{M42}^{-1} \left[ \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} \overline{MY3} (\overline{MXX5} - \overline{MXX6}) + \overline{MX3} \right] \tilde{\varphi}^{in} + \\
 & + \overline{M42}^{-1} \left[ \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} (\overline{MY3} \overline{SXX} + \overline{SY}) + \overline{SX} \right] , \tag{2.158}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}^{out} &= \overline{M44}^{-1} \left[ (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) + (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} \overline{MY1} \overline{MX3} \right] \tilde{\varphi}^{out} + \\
 & + \overline{M44}^{-1} \left[ (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} \overline{MY1} (\overline{MX1} - I) + \overline{MXX1} \right] \hat{\Psi}^{in} + \\
 & + \overline{M44}^{-1} \left[ (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} (\overline{MY2} - \overline{MY1} \overline{MX2}) - (\overline{MXX2} - \overline{MXX3}) \right] \tilde{\Psi}^{in} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{M44}^{-1} \left[ \overline{MXX4} - (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} \overline{MY3} \right] \hat{\varphi}^{in} - \\
& - \overline{M44}^{-1} \left[ (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} \overline{MY1} \overline{MX3} + (\overline{MXX5} - \overline{MXX6}) \right] \tilde{\varphi}^{in} \\
& + \overline{M44}^{-1} \left[ (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} (\overline{MY1} \overline{SX} + \overline{SY}) + \overline{SXX} \right], \tag{2.159}
\end{aligned}$$

Logo depois de substituir as Eqs. (2.158) e (2.159) em (2.157) tem-se que

$$\tilde{\varphi}^{out} = \overline{R41} \hat{\Psi}^{in} + \overline{R42} \tilde{\Psi}^{in} + \overline{R43} \hat{\varphi}^{in} + \overline{R44} \tilde{\varphi}^{in} + \overline{S4}. \tag{2.160}$$

As formas das matrizes envolvidas nas Eqs. (2.156) e (2.160) podem ser encontradas no Apêndice H. Finalmente, através das Eqs. (2.156) e (2.160), e usando as definições dos vetores de fluxo angular médios de incidência e emergente de ordem zero e primeira ordem é possível construir a equação de matriz resposta de primeira ordem

$$\varphi^{out} = \overline{RM3} \Psi^{in} + \overline{RM4} \varphi^{in} + \overline{P2}. \tag{2.161}$$

### 2.6.3 Equação de matriz resposta

O esquema matriz resposta do método RM-LLN é baseado nas equações de matriz resposta de ordem zero e primeira ordem obtidas anteriormente e representadas pelas Eqs. (2.153) e (2.163), respetivamente. A partir dessas equações, é possível construir a equação de matriz resposta usando a notação dos vetores de entrada e salientes nas células de discretização espacial representada pelas Eqs. (2.142) e (2.143)

$$F^{out} = \overline{RM}F^{in} + \overline{P} . \quad (2.162)$$

onde  $\overline{RM}$  representa a matriz resposta e  $\overline{P}$  o vetor independente relacionado com a fonte externa.

## 2.7 Esquema iterativo

Para os cálculos dos fluxos angulares médios nos extremos das células de discretização espacial é preciso a implementação dum esquema iterativo de varredura. O método RM-LLN é baseado no esquema iterativo NBI apresentado no Capítulo 1 onde a Eq. (2.162) é computada em cada célula espacial para obter os fluxos angulares médios emergentes a partir das melhores estimativas dos fluxos angulares médios incidentes. Na presente tese é usado a variante FBI utilizada no trabalho de Dominguez e Barros (2007) devido ao baixo grau de complexidade que apresenta e alto desempenho envolvido no processo iterativo. O esquema iterativo FBI usado pelo método RM-LLN é baseado nos seguintes passos:

1. Inicializar o vetor do fluxo angular médio incidente, representado pela Eq. (2.136), nas células de discretização espacial usando as condições de contorno do problema e fluxos angulares médios nulos para células internas.
2. Percorrer as quatro direções de varredura ao longo das células de discretização espacial calculando o vetor do fluxo angular médio emergente, representado pela Eq. (2.137),

usando a Eq. (2.162) a partir da melhor estimativa existente do vetor do fluxo angular médio incidente em cada célula espacial.

3. Calcular os fluxos angulares médios no interior das células de discretização espacial a partir das equações  $S_N$  de balanço espaciais de ordem zero, Eq. (1.12), usando as melhores estimativas dos vetores do fluxo angular médios incidentes e emergentes na iteração atual.
4. Calcular os fluxos escalares médios no interior das células de discretização espacial a partir dos fluxos angulares médios no interior dos nodos previamente calculados no passo 3 na iteração atual.
5. Verificar se o critério de parada é satisfeito e finalizar o processo iterativo. No caso contrário, proceder com a seguinte iteração a partir do passo 2 até atingir as condições requeridas pelo critério de parada.

O cálculo do fluxo escalar médio no interior duma célula de discretização espacial  $\Omega_{i,j}$  usado no Passo 4 do processo iterativo a partir dos fluxos angulares médios dos nodos é realizado a partir da equação

$$\bar{\Phi}_{i,j} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \bar{\Psi}_{n,i,j}. \quad (2.163)$$

Na presente tese o critério de parada usado no processo iterativo é baseado no desvio relativo dos fluxos escalares médios no interior das células de discretização espacial entre duas iterações consecutivas e tem a forma

$$\left| 1 - \frac{\bar{\phi}_{i,j}^{k+1}}{\bar{\phi}_{i,j}^k} \right| < \varepsilon(n) \quad , \quad (2.164)$$

onde  $\bar{\phi}_{i,j}^k$  representa o fluxo escalar médio da célula de discretização espacial  $\Omega_{i,j}$  na iteração  $k$  do processo iterativo, e  $\varepsilon(n)$  representa a tolerância da qual é garantido um número  $n$  de cifras significativas nos resultados numéricos. Na presente tese é utilizado uma tolerância de  $10^{-5}$  nos diferentes esquemas iterativos usados, garantindo quatro cifras significativas nos valores numéricos.

## 2.8 Considerações finais

Neste capítulo foi desenvolvido um novo método de malha grossa, espectralnodal, matriz resposta, para problemas de transporte de nêutrons em geometria bidimensional cartesiana, denominado método RM-LLN. O método propõe aproximações lineares baseados na expansão linear em polinômios de Legendre dos fluxos angulares nos extremos das células de discretização espacial presentes nos termos de fugas de nêutrons das equações  $S_N$  integradas transversalmente e os termos de fonte de espalhamento são tratados analiticamente. O sistema acoplado resultante é resolvido analiticamente e um novo esquema de matriz resposta linear é proposto no desenvolvimento das equações características do método. Por último, é descrito o esquema iterativo usado nos cálculos internodais. O método preserva as soluções gerais analíticas das equações  $S_N$  integradas transversalmente, as soluções numéricas são contínuas nas interfaces entre nodos e satisfazem as condições de contornos prescritas do problema em análise. Das principais bases apresentadas neste capítulo é esperado que o

método RM-LLN apresente altos desempenhos, enquanto a precisão e custo computacional, em problemas bidimensionais de malha grossa de alta penetração e com altos gradientes de fluxos angulares quando comparado com os métodos de diferenças finitas, de elementos finitos, nodais clássicos e espectralnodais apresentados no Capítulo 1.

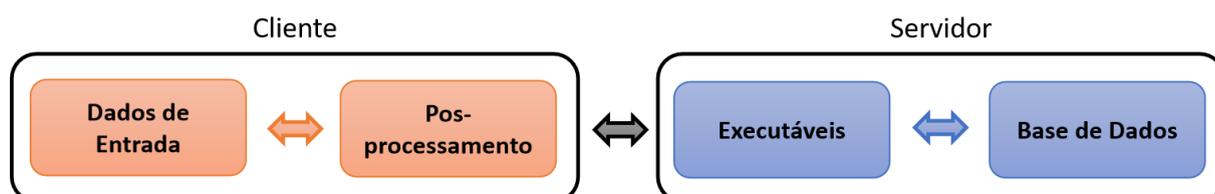
### 3 APLICATIVO WEB

Neste capítulo é apresentado um aplicativo web como ferramenta computacional desenvolvida na presente tese para modelar problemas de transporte de nêutrons de fonte fixa, espalhamento isotrópico, um grupo de energia e geometria bidimensional cartesiana em meios não multiplicativos.

#### 3.1 Informações técnicas

Neutron Transport Simulator (NTS) constitui uma ferramenta computacional implementada usando Python com linguagem de programação de alto nível, Django como framework no desenvolvimento web, e Heroku como PAAS (Platform As A Service). A interface gráfica foi desenvolvida usando HTML5 (HyperText Markup Language 5) e CSS3 (Cascade Style Sheet 3) e, no lado do servidor, são armazenados os códigos binários que implementam os diferentes métodos numéricos disponíveis. O aplicativo comunica-se diretamente com uma base de dados baseada em PostgreSQL (Postgres Structured Query Language) onde os resultados numéricos são guardados em forma de tabelas relacionadas e acessíveis desde o lado do cliente. Na Figura 11 é mostrada a arquitetura do aplicativo web.

Figura 11 - Arquitetura do aplicativo



Fonte: O autor, 2022

### 3.2 Código fonte e link de acesso

O código fonte do aplicativo é de público acesso sob licença de código aberto para qualquer uso, modificação, compartilhamento e comercialização. O link de acesso, vídeo tutorial e repositório na plataforma do GitHub são listados na Tabela 6.

Tabela 6 - Links de acesso, vídeo tutorial e repositório do aplicativo web

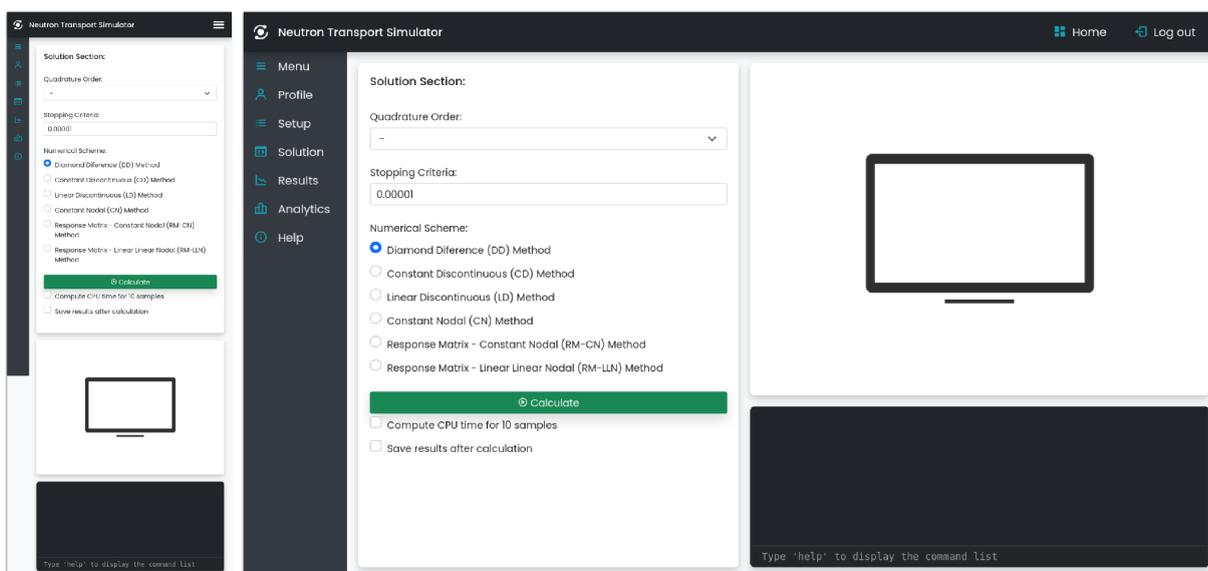
Link de acesso	<a href="https://nts-webapp.herokuapp.com">https://nts-webapp.herokuapp.com</a>
Vídeo tutorial	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=AtY52V7GDaI">https://www.youtube.com/watch?v=AtY52V7GDaI</a>
Repositório	<a href="https://github.com/ibrivasortiz92/NTS-WEB-APP">https://github.com/ibrivasortiz92/NTS-WEB-APP</a>

Fonte: O autor, 2022

### 3.3 Design responsivo

A aplicação web segue as regras de design responsivo, pode ser acessada desde qualquer dispositivo, de dispositivos móveis até desktops, e é compatível com quase todos os navegadores modernos. Na Figura 12 é mostrada a interface gráfica do sistema para dispositivos móveis e notebooks.

Figura 12 - Design responsivo do aplicativo

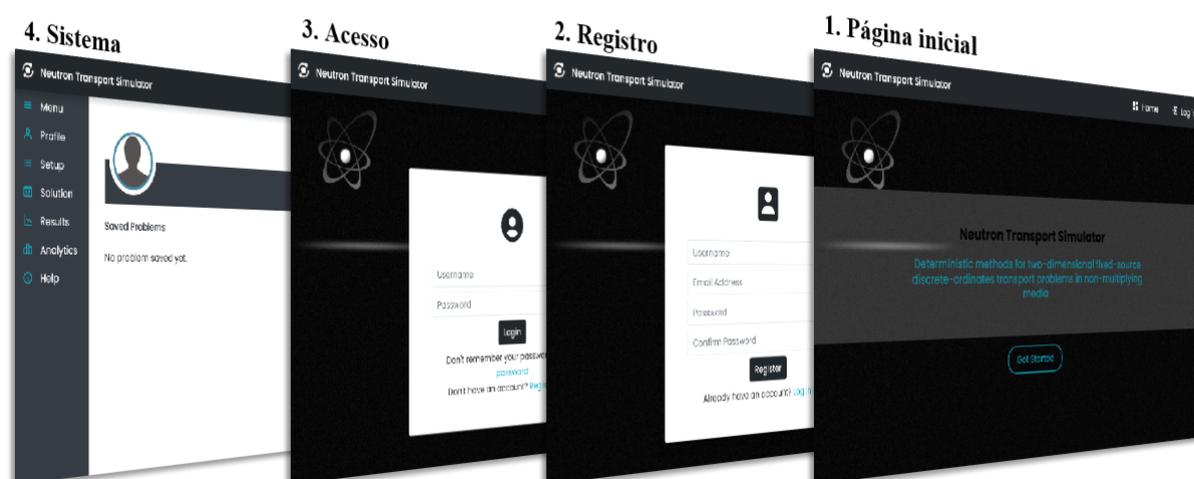


Fonte: O autor, 2022

### 3.4 Sistema de autenticação

O aplicativo conta com um sistema de autenticação próprio onde o usuário precisa de completar um cadastro para obter completo acesso às funcionalidades do sistema. Uma vez registrado, o servidor enviará um email de ativação da conta e o usuário poderá acessar ao sistema com as credenciais corretas na página de acesso. Na Figura 13 é mostrado as diferentes etapas do sistema de autenticação do aplicativo web.

Figura 13 - Sistema de autenticação



Fonte: O autor, 2022

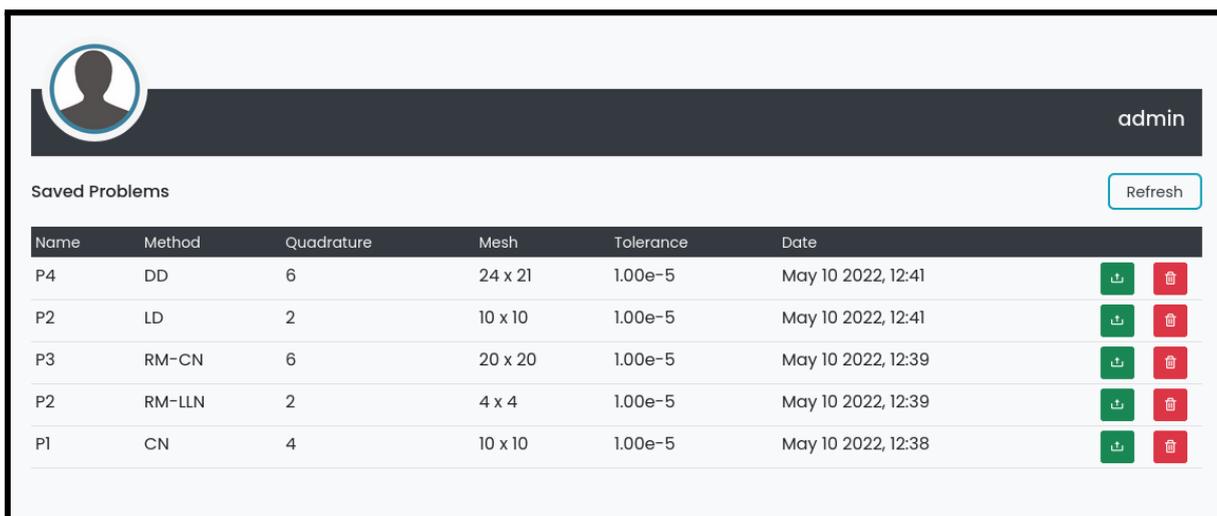
### 3.5 Documentação

O sistema é estruturado em diferentes seções pelas quais o usuário pode navegar pelos links de acesso na barra lateral da tela. Em continuação, são descritas as diferentes seções e funcionalidades do aplicativo.

#### 3.5.1 Seção de perfil

Na Figura 14 é mostrado um corte da seção de perfil onde os resultados numéricos salvos pelo usuário na base de dados do sistema são mostrados. No lado superior direito aparece o botão de atualizar para carregar os novos resultados. Cada registro conta com os campos de nome, método usado, ordem da quadratura, grade espacial, tolerância, data de criação, e duas opções para carregar ou deletar a entrada.

Figura 14 - Seção de perfil



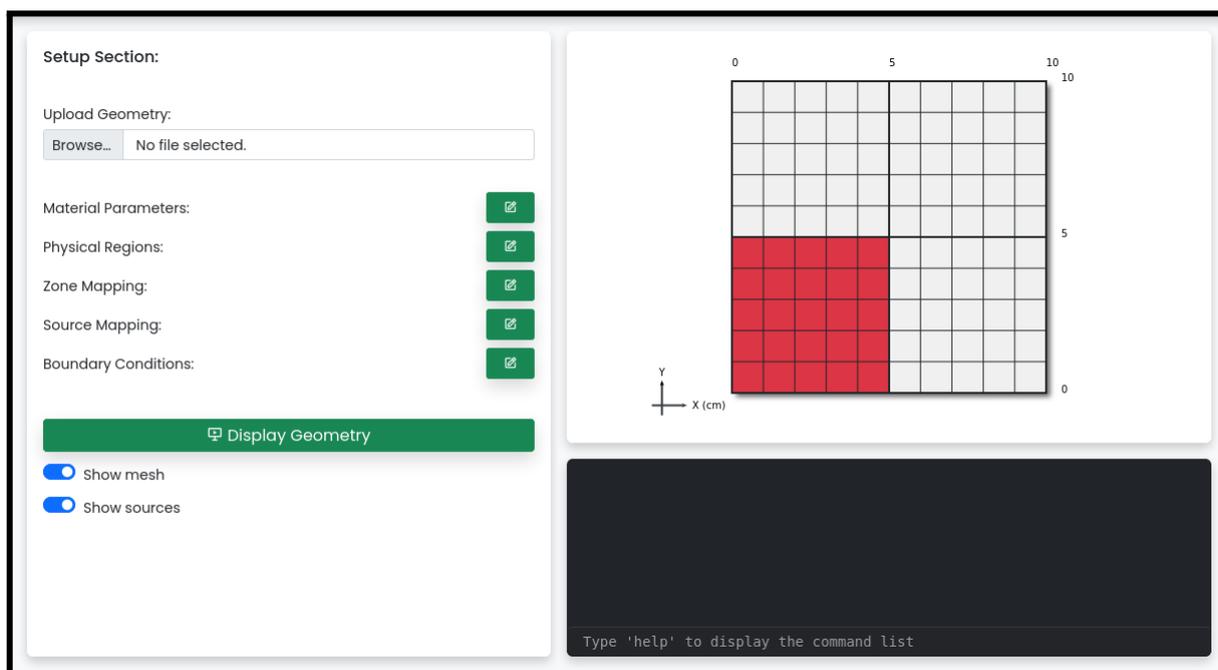
Name	Method	Quadrature	Mesh	Tolerance	Date		
P4	DD	6	24 x 21	1.00e-5	May 10 2022, 12:41	Download	Delete
P2	LD	2	10 x 10	1.00e-5	May 10 2022, 12:41	Download	Delete
P3	RM-CN	6	20 x 20	1.00e-5	May 10 2022, 12:39	Download	Delete
P2	RM-LLN	2	4 x 4	1.00e-5	May 10 2022, 12:39	Download	Delete
P1	CN	4	10 x 10	1.00e-5	May 10 2022, 12:38	Download	Delete

Fonte: O autor, 2022

### 3.5.2 Seção de configuração ou entrada de dados

Na Figura 15 é mostrada uma vista geral da seção de configuração ou entrada de dados no sistema. O usuário pode recarregar diretamente a configuração do problema a partir de um arquivo externo gerado pelo próprio sistema na seção de resultados ou pode criar a sua própria configuração navegando pelas diferentes opções de entrada de dados. O usuário pode visualizar a configuração geométrica do problema a resolver clicando no botão de display que conta com duas opções: uma para mostrar a grade de discretização espacial e a outra para visualizar a fonte de nêutrons.

Figura 15 - Seção de entrada de dados

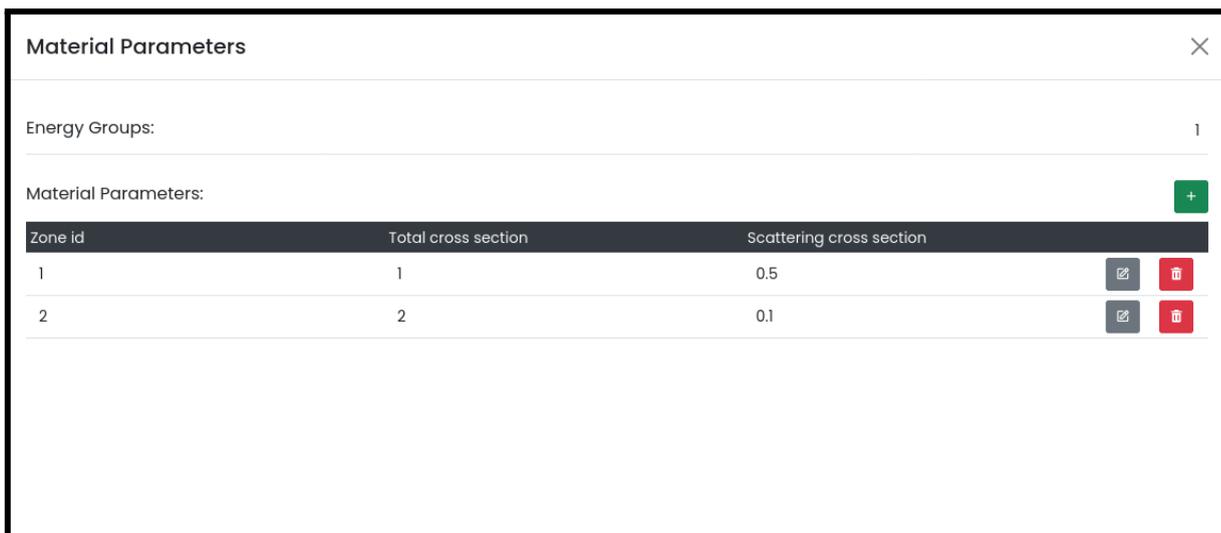


Fonte: O autor, 2022

### 3.5.2.1 Parâmetros materiais

Na Figura 16 é mostrado um corte do modal que aparece após clicar na opção de parâmetros materiais. O modal permite adicionar novos materiais clicando no botão “+” no extremo superior direito, editar ou deletar parâmetros materiais existentes. Para cada zona material é necessário preencher os campos de seção macroscópica total e seção macroscópica de espalhamento isotrópico. O campo de “id” é gerado automaticamente pelo sistema. Os campos apresentam um sistema de validação onde uma mensagem será gerada caso seja identificado algum erro na entrada de dados. Todas as entradas devem ser salvas após a criação ou edição do parâmetro material usando o botão de salvar no extremo direito. A seção macroscópica total e de espalhamento não podem ser nulas nem apresentar valores negativos, e esta última deve ser menor ou igual à primeira.

Figura 16 - Parâmetros materiais



Zone id	Total cross section	Scattering cross section		
1	1	0.5		
2	2	0.1		

Fonte: O autor, 2022

### 3.5.2.2 Regiões físicas

Na Figura 17 é mostrado um corte do modal que aparece após clicar na opção de regiões físicas. De igual maneira, o modal permite adicionar novas regiões para as direções X e Y do problema clicando no botão “+”, editar ou deletar as diferentes regiões a partir das opções das entradas em cada tabela. Para cada região é necessário preencher os campos de comprimento e número de células da região. Todas as entradas devem ser salvas após a criação ou edição de uma região usando o botão de salvar no extremo direito e os campos de comprimento e número de células não podem ser nulos nem apresentar valores negativos.

Figura 17 - Regiões físicas

Physical Regions

Regions in X: +

Region id	Length [cm]	Number of cells
1	5	5
2	<input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="5"/>

Regions in Y: +

Region id	Length [cm]	Number of cells
1	5	5
2	5	5

Fonte: O autor, 2022

### 3.5.2.3 Mapeamento de zonas

Após completar as entradas de dados para parâmetros materiais e regiões do problema, o usuário deve completar a etapa de mapeamento das zonas por região. Caso contrário, uma mensagem de erro aparecerá no terminal. Na Figura 18 é mostrado o modal que aparece após clicar na opção de mapeamento de zonas. Uma tabela será gerada automaticamente pelo sistema em função da configuração das regiões do problema. Todas as entradas são preenchidas inicialmente pela última zona disponível na entrada de parâmetros materiais. Caso não exista nenhuma zona, uma mensagem de erro será gerada pelo sistema. O usuário poderá realizar o mapeamento das zonas por região selecionando entre as diferentes zonas disponíveis. As zonas são identificadas a partir do seu “id” gerado automaticamente e de maneira ascendente pelo sistema na seção de parâmetros materiais.

Figura 18 - Mapeamento de zonas por região

**Zone Mapping** ✕

Mapping of zones by regions:

2	Zone 2	▼	Zone 2	▼
1	Zone 1	▼	Zone 2	▼
RY \ RX	1		2	

Fonte: O autor, 2022

#### 3.5.2.4 Mapeamento de fonte

Antes de realizar o mapeamento da fonte de nêutrons do problema, é necessário haver completado a entrada de dados das regiões físicas. Caso contrário, uma mensagem de erro será gerada pelo sistema do terminal. Na Figura 19 é mostrado o modal que aparece após clicar na opção de mapeamento de fonte. De igual maneira à seção anterior, uma tabela será gerada automaticamente pelo sistema em função da configuração das regiões do problema. Todas as entradas são preenchidas inicialmente com valores de fonte nulos. O usuário poderá realizar o mapeamento das fontes de nêutrons por região preenchendo as diferentes entradas com valores não negativos.

Figura 19 - Mapeamento de fonte de nêutrons

RY \ RX	1	2
2	0	0
1	1.0	0

Fonte: O autor, 2022

### 3.5.2.5 Condições de contorno

Na Figura 20 é mostrado um corte do modal que aparece após clicar na opção de condições de contorno. O usuário poderá especificar o tipo de condição de contorno para cada extremo do problema. Os tipos de condições de contorno disponíveis são vácuo, reflexivo e prescrito. Este último permite adicionar um valor não nulo.

Figura 20 - Condições de contorno

Boundary conditions:	
Left:	Reflective
Right:	Vacuum
Top:	Vacuum
Bottom:	Reflective

Fonte: O autor, 2022

### 3.5.3 Seção de solução

Na Figura 21 é mostrado uma vista geral da seção de solução do sistema. Na primeira opção aparece a ordem de quadratura usada para resolver o problema carregado na seção de configuração. A quadratura por defeito usada no sistema é a  $LQ_N$  (Level Symmetric Quadrature) e as ordens disponíveis ficam no rango de 2 até 12 do subconjunto dos números pares. Após selecionar a ordem de quadratura será gerada automaticamente pelo sistema uma figura mostrando as direções do fluxo angular de nêutrons a serem resolvidas. Como segunda opção está o critério de parada usado no esquema iterativo e o valor por defeito é de  $10^{-5}$ . Logo, o usuário poderá selecionar entre os métodos numéricos a ser usado para resolver o problema carregado na seção anterior. Os métodos disponíveis são: Diamond Difference (DD), Step ou Constante Descontínuo (CD), Linear Descontínuo (LD), Constante Nodal (CN), Matriz Resposta - Constante Nodal (RM-CN) e o novo método Matrix Resposta - Linear Linear Nodal (RM-LLN).

Para resolver o problema é necessário clicar no botão calcular. O sistema recopila todos os dados de entrada e, se não for identificado nenhum erro, envia uma requisição ao servidor para proceder com os cálculos. No lado do servidor são validados os dados de entrada e chamado o respectivo executável para resolver o problema carregado. Os executáveis são os códigos binários que implementam os métodos numéricos disponíveis e compilados em C. Uma vez finalizada a corrida, os resultados são enviados para o cliente para o pós-processamento. O usuário tem opções adicionais que podem ser enviadas ao servidor junto com os dados do problema como a opção de computar o tempo em CPU médio para dez simulações, salvar os resultados com um nome específico na base de dados do sistema ou enviar um email de notificação uma vez finalizados os cálculos.

Figura 21 - Seção de solução do sistema

**Solution Section:**

Quadrature Order:  
6

Stopping Criteria:  
0.00001

Numerical Scheme:

- Diamond Diference (DD) Method
- Constant Discontinuous (CD) Method
- Linear Discontinuous (LD) Method
- Constant Nodal (CN) Method
- Response Matrix - Constant Nodal (RM-CN) Method
- Response Matrix - Linear Linear Nodal (RM-LLN) Method

Compute CPU time for 10 samples

Save results after calculation

Name:

Enable notification via e-mail

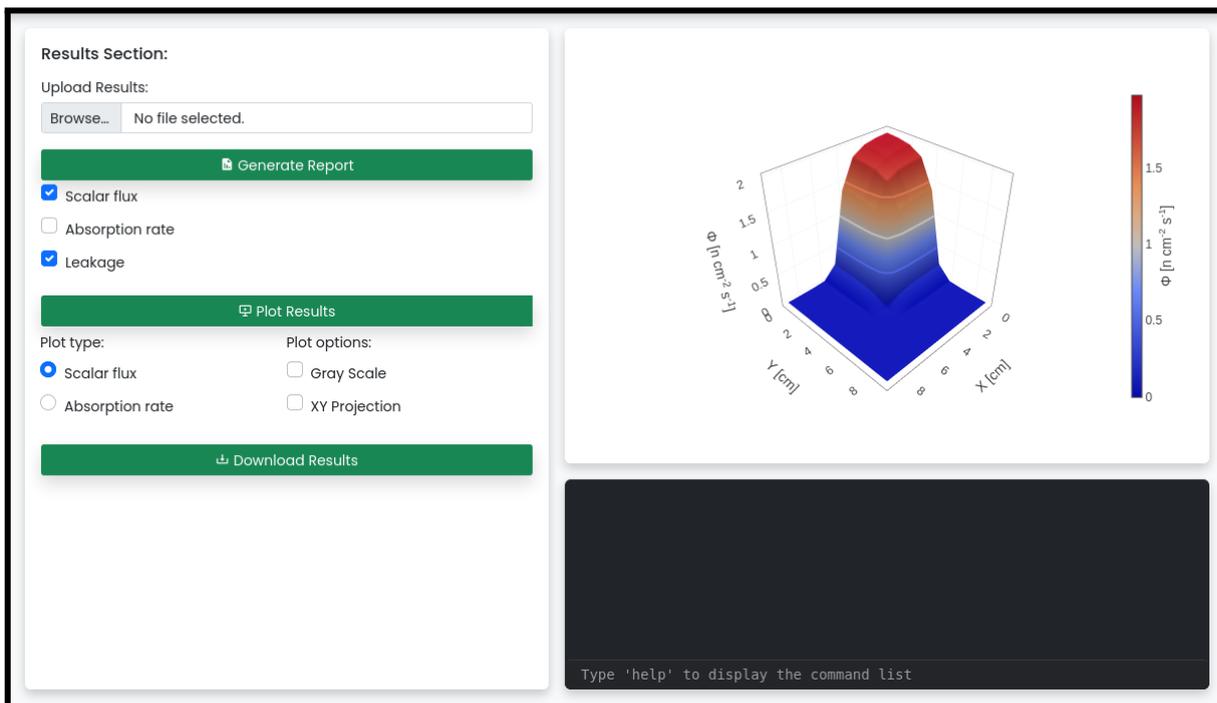
Type 'help' to display the command list

Fonte: O autor, 2022

### 3.5.4 Seção de resultados

Na Figura 22 é mostrado a tela da seção de resultados onde o pós processamento dos dados enviados pelo servidor é feito. O usuário pode gerar um relatório dos resultados do problema, criar gráficas da distribuição do fluxo escalar e baixar o arquivo de resultados em formato JSON que pode ser usado na seção de configuração.

Figura 22 - Seção de resultados



Fonte: O autor, 2022

### 3.5.4.1 Relatório de resultados

O usuário tem a opção de gerar um relatório de resultados clicando no botão de gerar relatório. O relatório pode incluir medidas de fluxo escalar de nêutrons, taxa de absorção e fuga pelos contornos do problema. Na Figura 23 é mostrado um corte do modal que aparece após clicar na opção de gerar relatório. O modal mostra o número de iterações da simulação, o tempo em CPU requerido, o fluxo escalar de nêutrons por região, a taxa de absorção por região e a fuga de nêutrons pelo contorno. Caso o usuário tenha incluído a opção de computar o tempo em CPU médio para dez simulações na seção de solução, o repórter incluiria esse valor no respectivo campo.

Figura 23 - Relatório de resultados

Results			
Number of Iterations: 10			
CPU Time (s): 1.71225e-2			
Scalar flux per region [n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]:			
2	4.14916e-2	2.05838e-3	
1	1.67684e+0	4.14916e-2	
RY \ RX	1	2	
Leakages at the boundaries [n cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]:			
Left	Bottom	Right	Top
-	-	2.72801e-5	2.72801e-5

Fonte: O autor, 2022

#### 3.5.4.2 Gráficos de resultados

O usuário pode gerar diferentes gráficos dos resultados a partir da distribuição do fluxo escalar de nêutrons ou taxa de absorção clicando no botão de graficar resultados. Entre as opções está gerar gráficas em 2D ou 3D, coloridas ou em escala gris. As gráficas podem ser analisadas, manipuladas e baixadas através da ferramenta de edição disponível no extremo superior direito das figuras.

#### 3.5.5 Terminal do sistema

O sistema tem integrado um terminal com diferentes comandos disponíveis. O mesmo é utilizado para mostrar informações importantes entre as diferentes seções do sistema e identificar erros no processo de entrada de dados pelo usuário. Na Tabela 7 é descrito o uso dos comandos do aplicativo .

Tabela 7 - Lista de comandos disponíveis desde o terminal do sistema

Comandos	Descrição
help	Mostra lista de comandos
clear	Limpa a terminal
setup	Mostra a configuração do problema
solution	Mostra as opções seleccionadas para gerar os resultados numéricos
results	Mostra os resultados numéricos do problema
all	Mostra as configurações dos comandos 'setup', 'solution' e 'results'
reset	Limpa o cache dos dados do sistema
about	Informação do sistema

Fonte: O autor, 2022

### 3.6 Considerações finais

O aplicativo web apresentado brinda grande flexibilidade de uso através de uma interface gráfica amigável para o usuário. A ferramenta não está sujeita às características do hardware, nem dependências no lado do cliente e pode ser acessível em qualquer desktop, laptop, tablet ou dispositivo móvel com acesso à internet. O código fonte foi desenvolvido seguindo os paradigmas de programação modular garantindo um isolamento eficiente entre as principais componentes do sistema com capacidade de modificação, portabilidade e extensibilidade.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são modelados quatro problemas reportados na literatura científica para testar o desempenho do método RM-LLN enquanto a precisão numérica e custo computacional quando comparados com outros métodos. Dentro das classes dos métodos de diferenças finitas, elementos finitos, nodais e espectro nodais, foram seleccionados os métodos DD, LD, CN e RM-CN como representativos na resolução dos diferentes experimentos numéricos. Os primeiros dois problemas foram escolhidos para ressaltar o desempenho do método RM-LLN em meios homogêneos e heterogêneos, e analisar a influência da instabilidade numérica nos resultados. No terceiro problema são exploradas as limitações do método proposto para condições materiais mais complexas e, no último experimento, é resolvido um caso real de perfilagem de poços de petróleo.

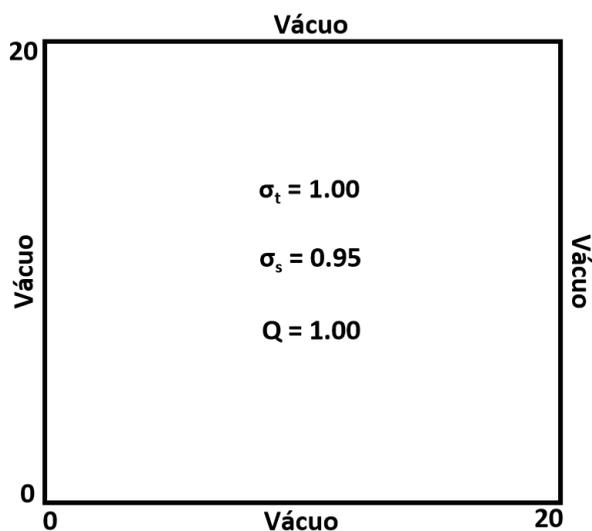
Todas as simulações foram realizadas num computador com processador Intel® Core™ i5-10300 H CPU @ 2.50GHz × 4, 7.6 GB de memória RAM e Linux Mint (distribuição baseada em Debian) como sistema operativo. O custo computacional foi computado com base no tempo em CPU (em segundos) e os valores reportados nos resultados foram mediados a partir de dez execuções em cada caso.

### 4.1 Problema 1

Nosso primeiro problema, reportado por Dominguez (2010), consiste num domínio quadrado homogêneo de 20 x 20 cm. Secção macroscópica total de  $1.00 \text{ cm}^{-1}$ , secção macroscópica de espalhamento de  $0.95 \text{ cm}^{-1}$ , fonte interna unitária e condições de vácuo nos

extremos. Na Figura 24, são mostradas as características geométricas, parâmetros materiais e condições de contorno do problema.

Figura 24 - Geometria, parâmetros materiais e condições de contorno do problema 1



Fonte: O autor, 2022

Nas Tabelas 8, 9 e 10, são reportados os resultados numéricos obtidos pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN considerando diferentes grades de discretização espacial e usando as quadraturas  $LQ_2$ ,  $LQ_4$  e  $LQ_6$ , respectivamente. O fluxo escalar médio é computado ao longo do domínio espacial do problema e a fuga de nêutrons corresponde aos valores registrados nos extremos do sistema. Os desvios relativos tanto do fluxo escalar médio quanto para a fuga de nêutrons são calculados a partir da solução de referência obtida com o método RM-CN para uma grade espacial de 500 x 500 nodos para cada quadratura.

Tabela 8 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_2$  para o problema 1

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )	Fuga (n cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> )
500 x 500	Ref.	51	2.4522E+01	1.2825E+01	7.1751E+01
2 x 2	DD	123	1.9650E-04	1.4014E+01	5.9833E+01
				(9.27%)	(16.61%)
	LD	133	4.5710E-04	1.2007E+01	7.9904E+01
				(6.37%)	(11.36%)
	CN	85	4.3300E-04	9.1401E+00	1.0858E+02
				(28.73%)	(51.33%)
RM-CN	5	1.5090E-04	1.3068E+01	6.9324E+01	
			(1.89%)	(3.38%)	
RM-LLN	5	3.9410E-04	1.2863E+01	7.1367E+01	
			(0.3%)	(0.54%)	
4 x 4	DD	133	9.8050E-04	1.2822E+01	7.1756E+01
				(0.02%)	(0.01%)
	LD	136	1.0974E-03	1.2559E+01	7.4396E+01
				(2.08%)	(3.69%)
	CN	97	1.8832E-03	9.8507E+00	1.0148E+02
				(23.19%)	(41.43%)
RM-CN	7	5.6900E-04	1.2940E+01	7.0601E+01	
			(0.9%)	(1.6%)	
RM-LLN	7	2.5789E-03	1.2829E+01	7.1714E+01	
			(0.03%)	(0.05%)	
10 x 10	DD	137	3.5379E-03	1.2823E+01	7.1759E+01
				(0.02%)	(0.01%)
	LD	138	5.9064E-03	1.2803E+01	7.1958E+01
				(0.17%)	(0.29%)
	CN	123	2.6991E-03	1.1579E+01	8.4197E+01
				(9.72%)	(17.35%)
RM-CN	13	3.5232E-03	1.2852E+01	7.1476E+01	
			(0.21%)	(0.38%)	
RM-LLN	13	9.3174E-03	1.2825E+01	7.1753E+01	
			(0%)	(0%)	

Fonte: O autor, 2022

Tabela 9 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_4$  para o problema 1

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )	Fuga (n cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> )
500 x 500	Ref.	50	1.5767E+02	1.3035E+01	6.9654E+01
2 x 2	DD	124	2.9220E-04	1.4200E+01	5.7971E+01
				(8.94%)	(16.77%)
	LD	133	5.7370E-04	1.2225E+01	7.7726E+01
				(6.21%)	(11.59%)
	CN	89	1.3793E-03	9.6303E+00	1.0368E+02
				(26.12%)	(48.85%)
RM-CN	5	5.6090E-04	1.3255E+01	6.7448E+01	
			(1.69%)	(3.17%)	
RM-LLN	5	1.9602E-03	1.3074E+01	6.9264E+01	
			(0.3%)	(0.56%)	
4 x 4	DD	134	2.0567E-03	1.3081E+01	6.9169E+01
				(0.36%)	(0.7%)
	LD	137	2.6437E-03	1.2756E+01	7.2425E+01
				(2.14%)	(3.98%)
	CN	101	3.0788E-03	1.0321E+01	9.6778E+01
				(20.82%)	(38.94%)
RM-CN	7	3.5234E-03	1.3141E+01	6.8588E+01	
			(0.82%)	(1.53%)	
RM-LLN	7	6.5941E-03	1.3040E+01	6.9600E+01	
			(0.04%)	(0.08%)	
10 x 10	DD	138	7.4811E-03	1.3032E+01	6.9664E+01
				(0.02%)	(0.01%)
	LD	138	1.4060E-02	1.3005E+01	6.9938E+01
				(0.23%)	(0.41%)
	CN	126	1.0456E-02	1.1968E+01	8.0305E+01
				(8.18%)	(15.29%)
RM-CN	12	1.8258E-02	1.3062E+01	6.9377E+01	
			(0.21%)	(0.4%)	
RM-LLN	12	5.7504E-02	1.3035E+01	6.9654E+01	
			(0%)	(0%)	

Fonte: O autor, 2022

Tabela 10 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_6$  para o problema 1

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi$ ( $n \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )	Fuga ( $n \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ )
500 x 500	Ref.	50	5.7425E+02	1.3060E+01	6.9403E+01
2 x 2	DD	124	1.6204E-03	1.4210E+01	5.7871E+01
				(8.81%)	(16.62%)
	LD	133	1.4538E-03	1.2266E+01	7.7319E+01
				(6.08%)	(11.41%)
	CN	90	1.3310E-03	9.7243E+00	1.0274E+02
				(25.54%)	(48.03%)
RM-CN	5	2.0481E-03	1.3276E+01	6.7236E+01	
			(1.66%)	(3.12%)	
RM-LLN	5	5.7634E-03	1.3098E+01	6.9018E+01	
			(0.29%)	(0.56%)	
4 x 4	DD	134	2.8140E-03	1.3112E+01	6.8856E+01
				(0.4%)	(0.79%)
	LD	137	5.4328E-03	1.2786E+01	7.2120E+01
				(2.09%)	(3.92%)
	CN	102	3.8589E-03	1.0411E+01	9.5871E+01
				(20.28%)	(38.14%)
RM-CN	7	8.2023E-03	1.3164E+01	6.8362E+01	
			(0.8%)	(1.5%)	
RM-LLN	7	2.4738E-02	1.3065E+01	6.9349E+01	
			(0.04%)	(0.08%)	
10 x 10	DD	138	1.2879E-02	1.3057E+01	6.9411E+01
				(0.02%)	(0.01%)
	LD	138	2.3364E-02	1.3029E+01	6.9693E+01
				(0.24%)	(0.42%)
	CN	126	1.5121E-02	1.2046E+01	7.9521E+01
				(7.76%)	(14.58%)
RM-CN	12	6.5889E-02	1.3087E+01	6.9133E+01	
			(0.21%)	(0.39%)	
RM-LLN	12	2.1737E-01	1.3060E+01	6.9403E+01	
			(0%)	(0%)	

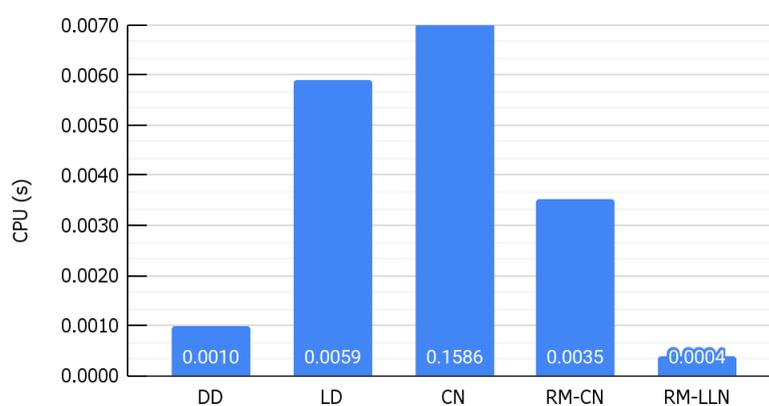
Fonte: O autor, 2022

Nos resultados numéricos reportados para as quadraturas  $LQ_2$  (Tabela 8),  $LQ_4$  (Tabela 9) e  $LQ_6$  (Tabela 10) é observado o alto desempenho do método RM-LLN enquanto a precisão atingindo desvios relativos inferiores a 1% inclusive para uma grade espacial de  $2 \times 2$  nodos. O elevado desempenho neste sentido do método RM-LLN para problemas homogêneos com baixas seções macroscópicas de absorção como este problema é resultado da aproximação linear sostenida nos termos de fuga de nêutrons nas equações  $S_N$  integradas transversalmente. Os métodos DD, LD e CN reportam um maior número de iterações quando comparados com os métodos RM-CN e RM-LLN na geração dos resultados numéricos devido ao esquema iterativo usado. Nos primeiros é usado o esquema iterativo SI e nos métodos de matriz resposta é implementado o esquema iterativo FBI. Os piores desvios relativos percentuais são reportados usando o método CN em todos os casos. Na medida que a grade espacial é refinada os resultados são mais precisos e as soluções numéricas são consistentes com os resultados reportados por Dominguez (2010) para este problema.

Nas Figuras 25, 26 e 27 são reportados os tempos em CPU (em segundos) registrados pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN na geração de soluções numéricas e considerando as quadraturas  $LQ_2$ ,  $LQ_4$  e  $LQ_6$ , respectivamente. Nas gráficos, foi tomado como referência os desvios relativos reportados pelo método RM-LLN para uma grade espacial com  $2 \times 2$  nodos e são registrados os diferentes tempos em CPU dos métodos para resultados numéricos com desvios relativos iguais ou inferiores aos valores de referência. Os melhores tempos são registrados para o método RM-LLN com 0.0004, 0.002 e 0.0058 segundos seguido do método DD com 0.001, 0.004 e 0.007 segundos para ordens de quadratura 2, 4 e 6, respectivamente. Os piores resultados são registrados para o método CN para este problema. O alto desempenho em quando a custo computacional do método RM-LLN está diretamente relacionado com o alto grau de precisão dos resultados numéricos para grades grossas. Enquanto que o método proposto gera soluções válidas para uma grade espacial com

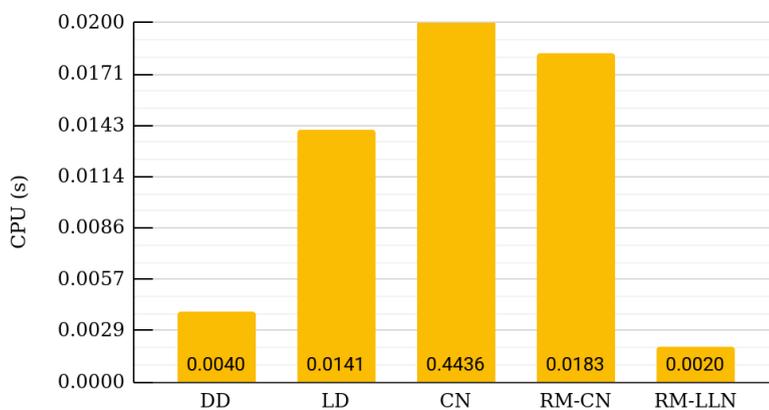
2 x 2 nodos, os métodos DD, LD, CN e RM-CN requerem de grades mais finas para atingir desvios relativos percentuais iguais ou inferiores aos reportados pelo método RM-LLN para as quadraturas selecionadas para este problema.

Figura 25 - Tempo em CPU dos resultados numéricos obtidos com os métodos DD (4 x 4 nodos), LD (10 x 10 nodos), CN (80 x 80 nodos), RM-CN (10 x 10 nodos) e RM-LLN (2 x 2 nodos) e quadratura  $LQ_2$  para o Problema 1



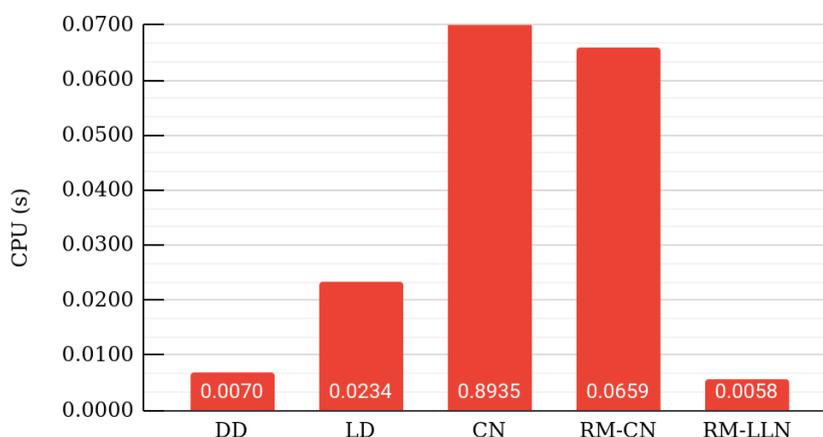
Fonte: O autor, 2022

Figura 26 - Tempo em CPU dos resultados numéricos obtidos com os métodos DD (6 x 6 nodos), LD (10 x 10 nodos), CN (80 x 80 nodos), RM-CN (10 x 10 nodos) e RM-LLN (2 x 2 nodos) e quadratura  $LQ_4$  para o Problema 1



Fonte: O autor, 2022

Figura 27 - Tempo em CPU dos resultados numéricos obtidos com os métodos DD (6 x 6 nodos), LD (10 x 10 nodos), CN (80 x 80 nodos), RM-CN (10 x 10 nodos) e RM-LLN (2 x 2 nodos) e quadratura  $LQ_6$  para o Problema 1

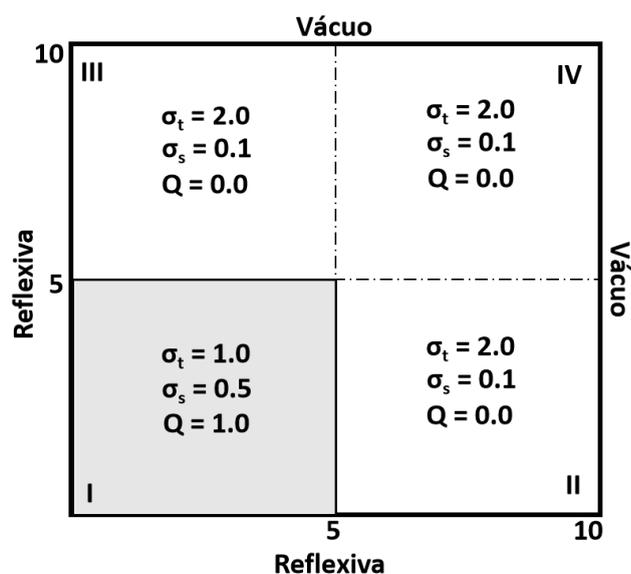


Fonte: O autor, 2022

## 4.2 Problema 2

O segundo problema modelo constitui um problema de blindagem proposto por Azmy (1988), e consiste num domínio quadrado com  $100 \text{ cm}^2$  de área, altamente absorvente, dividido simetricamente em quatro regiões. Uma fonte de nêutrons unitária é simulada no interior da região I localizada no extremo inferior esquerdo do domínio com seção macroscópica total de  $1 \text{ cm}^{-1}$  e seção macroscópica de espalhamento de  $0.5 \text{ cm}^{-1}$ . Para o resto das regiões (II, III e IV) são definidas secções macroscópicas totais de  $2 \text{ cm}^{-1}$  e secções macroscópicas de espalhamento de  $0.1 \text{ cm}^{-1}$ . Nos contornos esquerdo e inferior são prescritas condições de contorno simétricas, e para os extremos direito e superior condições de contorno de vácuo. Na Figura 28 é mostrada a configuração geométrica do problema, junto com as propriedades físicas de cada região e condições de contorno.

Figura 28 - Geometria, parâmetros materiais e condições de contorno do problema 2



Fonte: O autor, 2022

Nas Tabelas 11, 12 e 13, são reportados os resultados numéricos obtidos pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN considerando diferentes grades de discretização espacial e usando as quadraturas  $LQ_2$ ,  $LQ_4$  e  $LQ_6$ , respetivamente. O fluxo escalar médio é computado ao longo das regiões I, II e IV do problema (região III reporta resultados idênticos à região II pela simetria do problema). Os desvios relativos do fluxo escalar médio são calculados a partir da solução de referência obtida com o método RM-CN para uma grade espacial de 500 x 500 nodos para cada quadratura.

Tabela 11 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_2$  para o problema 2

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi[I]$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\Phi[II]$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\Phi[IV]$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )
500 x 500	Ref.	88	4.1689E+01	1.6712E+00	4.1957E-02	2.6211E-03
2 x 2	DD	20	2.5100E-05	1.7541E+00	5.6270E-02	6.2151E-03
				(4.96%)	(34.11%)	(137.12%)
	LD	19	6.2100E-05	1.6381E+00	4.9731E-02	3.4435E-03
				(1.98%)	(18.53%)	(31.38%)
	CN	16	1.9170E-04	1.6080E+00	4.9951E-02	3.1110E-03
				(3.78%)	(19.05%)	(18.69%)
RM-CN	8	2.7550E-04	1.6728E+00	4.1891E-02	2.3339E-03	
			(0.1%)	(0.16%)	(10.96%)	
RM-LLN	8	1.4805E-03	1.6712E+00	4.1936E-02	2.6778E-03	
			(0%)	(0.05%)	(2.17%)	
4 x 4	DD	20	1.3300E-04	1.6542E+00	2.6481E-02	2.1813E-03
				(1.01%)	(36.89%)	(16.78%)
	LD	20	2.0780E-04	1.6456E+00	4.4699E-02	2.9414E-03
				(1.53%)	(6.53%)	(12.22%)
	CN	20	5.9600E-04	1.6216E+00	4.8241E-02	3.0974E-03
				(2.97%)	(14.98%)	(18.17%)
RM-CN	8	8.7680E-04	1.6721E+00	4.1895E-02	2.5103E-03	
			(0.05%)	(0.15%)	(4.23%)	
RM-LLN	9	2.7735E-03	1.6707E+00	4.2054E-02	2.5451E-03	
			(0.03%)	(0.23%)	(2.9%)	
10 x 10	DD	24	7.9140E-04	1.6534E+00	4.4307E-02	2.7315E-03
				(1.07%)	(5.6%)	(4.21%)
	LD	21	9.9750E-04	1.6522E+00	4.4378E-02	2.7812E-03
				(1.14%)	(5.77%)	(6.11%)
	CN	23	1.3927E-03	1.6424E+00	4.5640E-02	2.8331E-03
				(1.72%)	(8.78%)	(8.09%)
RM-CN	10	4.1123E-03	1.6713E+00	4.1973E-02	2.5519E-03	
			(0.01%)	(0.04%)	(2.64%)	
RM-LLN	91	6.0786E-02	1.6715E+00	4.1966E-02	2.5160E-03	
			(0.02%)	(0.02%)	(4.01%)	

Fonte: O autor, 2022

Tabela 12 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_4$  para o problema 2

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi[\text{I}]$ ( $\text{n cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )	$\Phi[\text{II}]$ ( $\text{n cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )	$\Phi[\text{IV}]$ ( $\text{n cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )
500 x 500	Ref.	17	5.5642E+01	1.6763E+00	4.1591E-02	1.9920E-03
2 x 2	DD	20	2.7790E-04	1.7683E+00	5.2382E-02	3.7377E-03
				(5.49%)	(25.95%)	(87.64%)
	LD	18	3.6610E-04	1.6617E+00	4.6769E-02	2.5365E-03
				(0.87%)	(12.45%)	(27.34%)
	CN	16	2.3870E-04	1.6377E+00	4.6453E-02	2.3107E-03
				(2.31%)	(11.69%)	(16%)
RM-CN	8	1.6385E-03	1.6785E+00	4.1286E-02	2.0311E-03	
RM-LLN	8	2.9627E-03	1.6770E+00	4.1426E-02	2.1646E-03	
			(0.04%)	(0.4%)	(8.67%)	
4 x 4	DD	20	7.4590E-04	1.6825E+00	2.5570E-02	1.2322E-03
				(0.37%)	(38.52%)	(38.14%)
	LD	19	5.5810E-04	1.6687E+00	4.2159E-02	2.1923E-03
				(0.46%)	(1.36%)	(10.05%)
	CN	22	9.6580E-04	1.6488E+00	4.5057E-02	2.3088E-03
				(1.64%)	(8.33%)	(15.9%)
RM-CN	8	3.2316E-03	1.6778E+00	4.1338E-02	2.1173E-03	
RM-LLN	9	9.8732E-03	1.6765E+00	4.1566E-02	2.0079E-03	
			(0.01%)	(0.06%)	(0.8%)	
10 x 10	DD	26	2.1422E-03	1.6763E+00	4.2060E-02	1.9358E-03
				(0%)	(1.13%)	(2.82%)
	LD	22	2.7178E-03	1.6749E+00	4.1744E-02	2.0588E-03
				(0.08%)	(0.37%)	(3.36%)
	CN	20	2.0352E-03	1.6654E+00	4.2969E-02	2.1145E-03
				(0.65%)	(3.31%)	(6.15%)
RM-CN	10	1.7123E-02	1.6768E+00	4.1492E-02	2.0584E-03	
RM-LLN	10	5.1697E-02	1.6763E+00	4.1590E-02	1.9931E-03	
			(0%)	(0%)	(0.05%)	

Fonte: O autor, 2022

Tabela 13 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_6$  para o problema 2

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi[I]$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\Phi[II]$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\Phi[IV]$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )
500 x 500	Ref.	17	2.0291E+02	1.6802E+00	4.1140E-02	1.8905E-03
2 x 2	DD	20	1.8870E-04	1.7693E+00	5.2098E-02	3.5532E-03
				(5.3%)	(26.63%)	(87.95%)
	LD	18	2.4170E-04	1.6662E+00	4.6227E-02	2.4056E-03
				(0.83%)	(12.36%)	(27.25%)
	CN	16	4.0410E-04	1.6432E+00	4.5793E-02	2.1837E-03
				(2.2%)	(11.31%)	(15.51%)
RM-CN	8	3.2908E-03	1.6822E+00	4.0851E-02	1.9261E-03	
			(0.12%)	(0.7%)	(1.88%)	
RM-LLN	8	1.1276E-02	1.6808E+00	4.0981E-02	2.0571E-03	
			(0.04%)	(0.39%)	(8.81%)	
4 x 4	DD	20	9.5570E-04	1.6875E+00	2.5716E-02	1.1818E-03
				(0.44%)	(37.49%)	(37.49%)
	LD	19	1.1397E-03	1.6728E+00	4.1673E-02	2.0816E-03
				(0.44%)	(1.3%)	(10.11%)
	CN	21	1.3606E-03	1.6540E+00	4.4431E-02	2.1853E-03
				(1.56%)	(8%)	(15.6%)
RM-CN	9	1.0964E-02	1.6815E+00	4.0901E-02	2.0089E-03	
			(0.08%)	(0.58%)	(6.26%)	
RM-LLN	9	3.7412E-02	1.6803E+00	4.1115E-02	1.9063E-03	
			(0.01%)	(0.06%)	(0.83%)	
10 x 10	DD	21	3.9181E-03	1.6801E+00	4.1810E-02	1.8556E-03
				(0%)	(1.63%)	(1.85%)
	LD	21	4.5791E-03	1.6787E+00	4.1295E-02	1.9555E-03
				(0.09%)	(0.38%)	(3.44%)
	CN	20	4.1632E-03	1.6696E+00	4.2468E-02	2.0080E-03
				(0.63%)	(3.23%)	(6.22%)
RM-CN	10	5.9087E-02	1.6806E+00	4.1044E-02	1.9538E-03	
			(0.03%)	(0.24%)	(3.35%)	
RM-LLN	10	2.0095E-01	1.6802E+00	4.1138E-02	1.8920E-03	
			(0%)	(0.01%)	(0.08%)	

Fonte: O autor, 2022

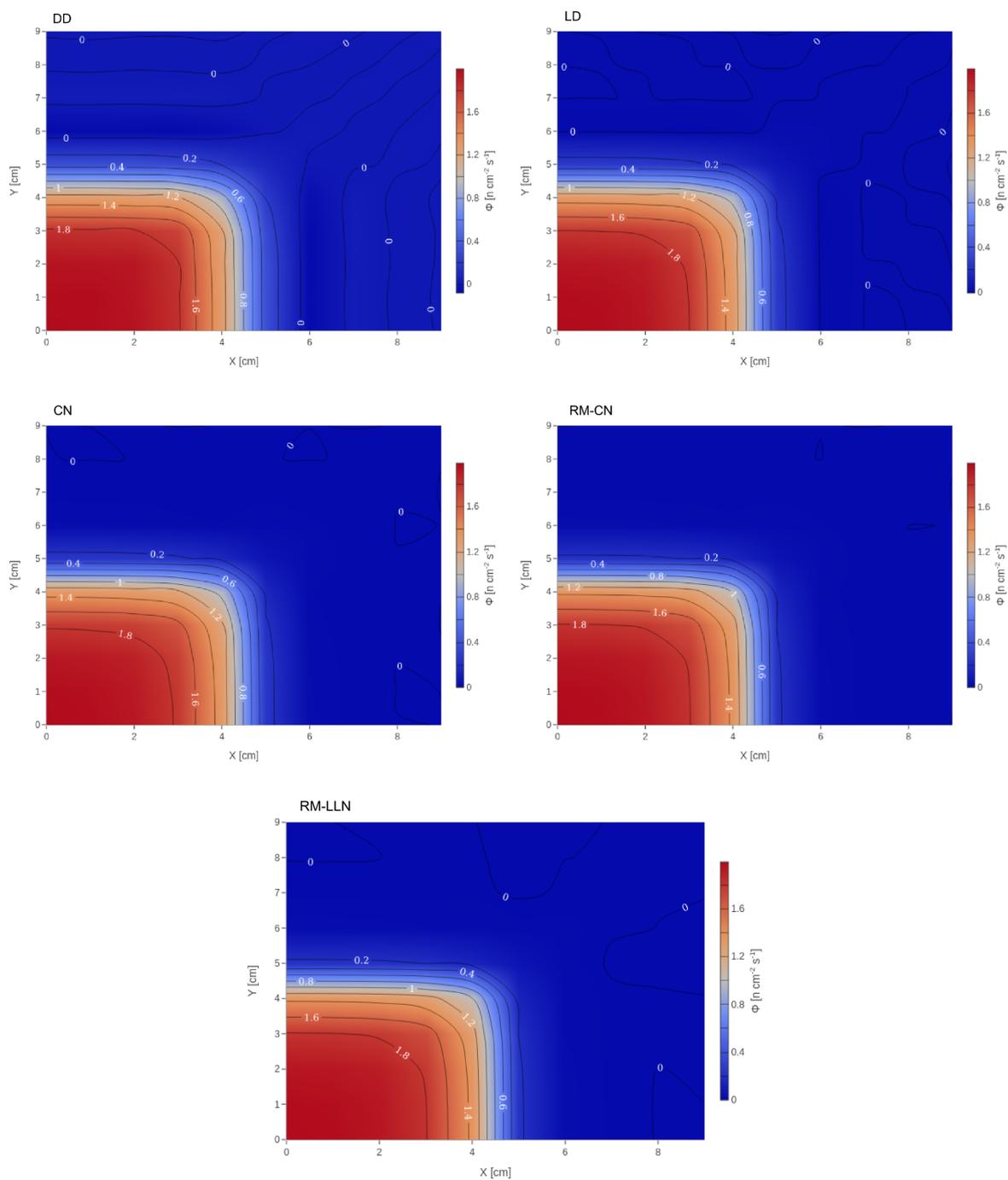
Nos resultados numéricos reportados para as quadraturas  $LQ_4$  (Tabela 12) e  $LQ_6$  (Tabela 13) é observado novamente o alto desempenho do método RM-LLN enquanto a precisão atingindo desvios relativos inferiores a 1% para grades espaciais de  $4 \times 4$  nodos em problemas heterogêneos com elevada absorção como este problema. Para problemas com alta absorção deste tipo é registrado um alto grau de convergência nos métodos na geração dos resultados numéricos reportando um número de iterações relativamente baixo quando comparados com problemas mais difusivos como o nosso primeiro problema-modelo. Neste caso, o número de iterações nos esquemas iterativos SI e FBI mantém a mesma ordem. Os resultados registrados na Tabela 12 são consequentes com os valores reportados para este problema no trabalho de Domiguez (2006) onde foi desenvolvido o método SGF-LN. Considerando os desvios relativos do método SGF-LN de 0.02%, 0.09% e 0.05% para as regiões I, II e IV, recalculados usando a solução de referência deste problema, o método RM-LLN registra melhores resultados para as regiões I e II, e mantém o mesmo desvio para a região IV do problema. Nos resultados para a quadratura  $LQ_2$  (Tabelas 11) são reportados os piores desvios relativos quando comparados com quadraturas superiores em todos os casos. Esse comportamento é possivelmente justificado por problemas de instabilidade numérica dos métodos onde as soluções numéricas apresentam um patrón oscilatório do fluxo angular entre nodos adjacentes (Larsen, 1986; Ortiz et al., 2021).

Na Figura 29 é mostrado o fluxo escalar obtido pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN para uma grade espacial com  $10 \times 10$  nodos e quadratura  $LQ_2$ . Podemos observar que os resultados numéricos obtidos pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN apresentam fluxos escalares negativos nas regiões II, III e IV. O mesmo comportamento é estudado por Larsen (1986) onde é realizado uma análise espectral do método DD em geometria unidimensional e é demonstrado que a partir de uma espessura da grade de discretização espacial aparecem autovalores complexos no sistema característico e os fluxos

angulares trocam de sinal entre nodos consecutivos gerando valores negativos sem sentido físico. Este problema de instabilidade numérica apresentado pelos métodos é difícil de quantificar porque os valores negativos podem ser compensados com os valores positivos do fluxo angular durante os cálculos do fluxo escalar médio no interior dos nodos.

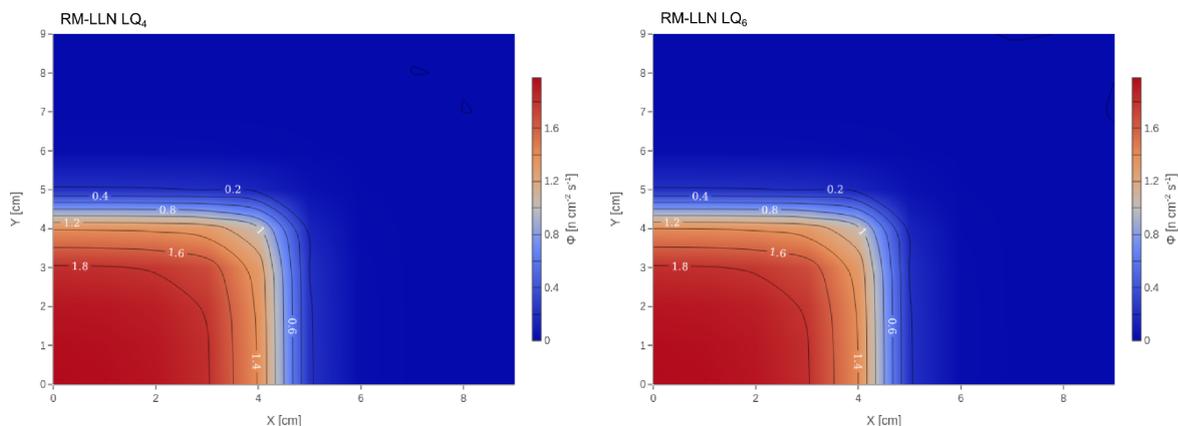
Por outro lado, os métodos espectro nodais não deveriam apresentar este tipo de instabilidade numérica pois os autovalores e autovetores do sistema original conformado pelas equações  $S_N$  nodais integradas transversalmente são conservados. Para estes casos, caberia pensar num componente adicional de instabilidade a partir das aproximações nos termos de fuga de nêutrons sustentadas nesses métodos. Neste sentido, os métodos RM-CN e RM-LLN apresentam instabilidades numéricas, mas em menor quantidade quando comparadas com os métodos DD, LD e CN. Na Figura 30 é mostrado o fluxo escalar obtido pelo método RM-LLN para uma grade espacial com  $10 \times 10$  nodos e sendo usadas ordens de quadraturas 4 e 6. Na figura observamos que na medida que a ordem da quadratura aumenta a componente de instabilidade adicional diminui usando a mesma grade espacial e para a quadratura  $LQ_6$  não são registrados valores negativos do fluxo escalar para este problema. Fora da figura, o mesmo comportamento é registrado para o método RM-CN e, para os restantes métodos ainda persiste a instabilidade numérica aumentando a ordem da quadratura.

Figura 29 - Distribuição do fluxo escalar obtido pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN para uma grade espacial com 10 x 10 nodos, quadratura LQ<sub>2</sub> e Problema 2



Fonte: O autor, 2022

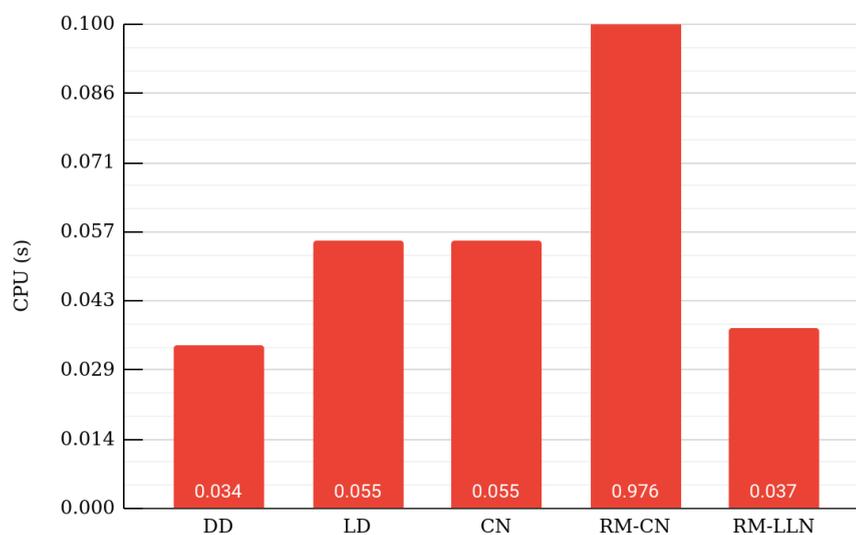
Figura 30 - Fluxo escalar obtido pelo método RM-LLN para uma grade espacial com 10 x 10 nodos, quadraturas LQ<sub>4</sub> e LQ<sub>6</sub>, e Problema 2



Fonte: O autor, 2022

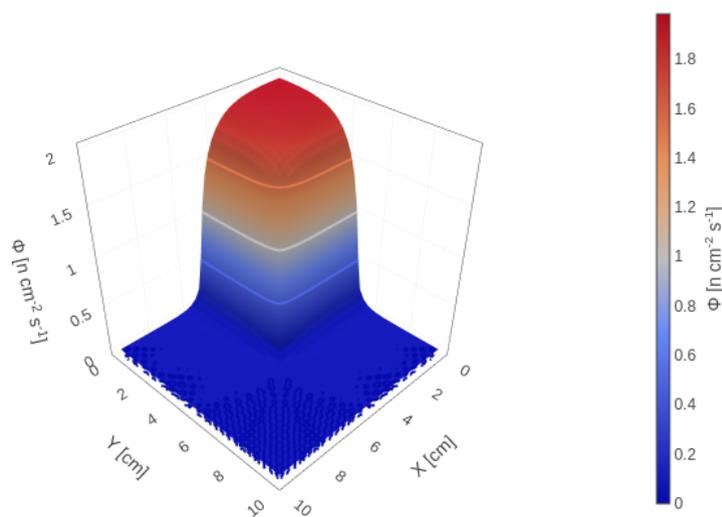
Na Figura 31 é mostrado o custo computacional baseado no tempo em CPU (em segundos) consumido pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN na geração de soluções numéricas com desvios relativos inferiores a 1% e considerando a quadratura LQ<sub>6</sub>. Os melhores tempos são os reportados pelo método DD seguido do método RM-LLN com 0.034 e 0.037 segundos, respectivamente. No entanto, o método DD ainda reporta alto grau de instabilidade nas regiões II, III e IV do problema, como mostrado na Figura 32. Enquanto que o método RM-LLN requer de uma grade espacial com 4 x 4 nodos, os métodos DD, LD, CN e RM-CN requerem de uma grade espacial com 40 x 40 nodos para atingir soluções com desvios relativos semelhantes. O pior tempo em CPU corresponde ao método RM-CN reportando valores de 0.976 segundos. Enquanto os métodos DD, LD e CN usam o esquema iterativo SI, os métodos RM-CN e RM-LLN utilizam o esquema iterativo FBI. Porém, é esperado menores tempos em CPU para os primeiros em relação aos métodos de matriz resposta para uma grade de discretização espacial fixa e problemas com alta absorção.

Figura 31 - Tempo em CPU (segundos) dos resultados numéricos obtidos com os métodos DD (40 x 40 nodos), LD (40 x 40 nodos), CN (40 x 40 nodos), RM-CN (40 x 40 nodos) e RM-LLN (4 x 4 nodos), quadratura  $LQ_6$  e Problema 2



Fonte: O autor, 2022

Figura 32 - Distribuição do fluxo escalar obtido pelo método DD para uma grade espacial com 40 x 40 nodos, quadraturas  $LQ_6$  e Problema 2

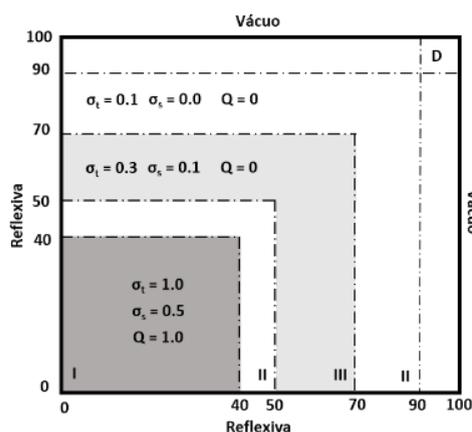


Fonte: O autor, 2022

### 4.3 Problema 3

O Problema 3 corresponde a um problema de blindagem, reportado por Azmy (1988), para uma fonte de nêutrons de alta intensidade (região I), onde a região de blindagem é constituída de camadas de materiais diferentes (regiões II e III), caracterizando um alto grau de heterogeneidade. No extremo superior direito é localizado um detector de  $10 \times 10 \text{ cm}^2$  com seção macroscópica de absorção de  $0.1 \text{ cm}^{-1}$ . Na Figura 33 são mostradas a configuração geométrica, parâmetros materiais das regiões e condições de contorno do problema.

Figura 33 - Geometria, parâmetros materiais e condições de contorno do problema modelo 3



Fonte: O autor, 2022

Nas Tabelas 14, 15 e 16, são reportados os resultados numéricos obtidos pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN considerando diferentes grades de discretização espacial e usando as quadraturas  $LQ_2$ ,  $LQ_4$  e  $LQ_6$ , respectivamente. O fluxo escalar médio é computado no detector localizado no extremo superior direito do domínio e reportamos a fuga de nêutrons no contorno direito do sistema. Os desvios relativos do fluxo escalar e fuga são calculados a partir da solução de referência obtida com o método RM-CN para uma grade espacial de  $500 \times 500$  nodos para cada quadratura.

Tabela 14 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_2$  para o Problema 3

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi[D]$ ( $n \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )	Fuga ( $n \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ )
500 x 500	Ref.	14	7.0552E+00	6.8503E-08	7.7283E-06
10 x 10	DD	22	1.1156E-03	2.8200E-03	-6.9509E-03
				(>1000%)	(>1000%)
	LD	21	2.8735E-03	1.0602E-05	8.5150E-05
				(>1000%)	(>1000%)
	CN	23	9.4100E-04	2.8582E-06	1.0026E-04
				(>1000%)	(>1000%)
RM-CN	8	6.1721E-03	2.7438E-06	2.1347E-06	
			(>1000%)	(72.38%)	
RM-LLN	8	8.1095E-03	3.7854E-07	2.5823E-06	
			(452.59%)	(66.59%)	
40 x 40	DD	34	8.1127E-03	4.8609E-06	-1.8564E-05
				(>1000%)	(340.21%)
	LD	25	1.3322E-02	1.0467E-07	6.8659E-06
				(52.8%)	(11.16%)
	CN	22	8.3708E-03	1.1350E-07	1.0255E-05
				(65.69%)	(32.69%)
RM-CN	9	3.4022E-02	1.0284E-07	7.6477E-06	
			(50.12%)	(1.04%)	
RM-LLN	9	9.6817E-02	8.4149E-08	7.6723E-06	
			(22.84%)	(0.72%)	
80 x 80	DD	38	3.6061E-02	2.6024E-07	4.9434E-06
				(279.9%)	(36.04%)
	LD	25	4.9354E-02	7.5178E-08	7.6232E-06
				(9.74%)	(1.36%)
	CN	22	2.9532E-02	7.8693E-08	8.4513E-06
				(14.88%)	(9.35%)
RM-CN	10	1.4070E-01	7.5329E-08	7.7117E-06	
			(9.96%)	(0.21%)	
RM-LLN	10	4.0505E-01	7.0255E-08	7.7217E-06	
			(2.56%)	(0.09%)	

Fonte: O autor, 2022

Tabela 15 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_4$  para o Problema 3

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi[D]$ ( $n \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )	Fuga ( $n \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ )
500 x 500	Ref.	13	4.3658E+01	1.3279E-08	3.5725E-04
10 x 10	DD	25	2.3839E-03	-1.4380E-03	1.6520E-02
				(>1000%)	(>1000%)
	LD	21	3.5569E-03	-1.6126E-06	5.2775E-05
				(>1000%)	(85.23%)
	CN	23	3.7275E-03	9.2604E-09	7.7810E-04
				(30.26%)	(117.81%)
RM-CN	7	1.5264E-02	-2.0810E-07	3.5599E-04	
			(>1000%)	(0.35%)	
RM-LLN	7	5.3213E-02	1.6211E-08	3.5679E-04	
			(22.08%)	(0.13%)	
20 x 20	DD	25	4.7127E-03	-3.6608E-05	4.3880E-04
				(>1000%)	(22.83%)
	LD	22	8.2485E-03	9.6386E-09	2.7241E-04
				(27.41%)	(23.75%)
	CN	26	8.3684E-03	5.7324E-08	4.5966E-04
				(331.69%)	(28.67%)
RM-CN	7	5.0123E-02	3.0359E-08	3.5729E-04	
			(128.63%)	(0.01%)	
RM-LLN	7	1.6726E-01	-1.2202E-07	3.5756E-04	
			(>1000%)	(0.09%)	
30 x 30	DD	34	1.3482E-02	-3.2524E-05	3.0895E-04
				(>1000%)	(13.52%)
	LD	21	1.7290E-02	1.5340E-08	3.3286E-04
				(15.52%)	(6.83%)
	CN	22	1.3934E-02	2.4425E-08	4.1221E-04
				(83.94%)	(15.39%)
RM-CN	7	1.0489E-01	1.6335E-08	3.5723E-04	
			(23.02%)	(0%)	
RM-LLN	16	7.4133E-01	1.2490E-04	-2.6779E-03	
			(>1000%)	(849.6%)	

Fonte: O autor, 2022

Tabela 16 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_6$  para o Problema 3

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi[D]$ ( $n \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )	Fuga ( $n \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ )
500 x 500	Ref.	13	1.5942E+02	6.2856E-08	3.9007E-04
10 x 10	DD	28	3.0058E-03	-2.1132E-04	3.4599E-02
				(>1000%)	(>1000%)
	LD	20	5.6950E-03	3.2538E-06	5.7902E-05
				(>1000%)	(85.16%)
	CN	19	7.4146E-03	1.4902E-06	8.0261E-04
				(>1000%)	(105.76%)
RM-CN	7	5.9107E-02	1.2742E-06	3.8569E-04	
			(>1000%)	(1.12%)	
RM-LLN	7	2.0554E-01	-9.2986E-08	3.8267E-04	
			(247.93%)	(1.9%)	
20 x 20	DD	26	9.1858E-03	1.7760E-05	-7.3763E-05
				(>1000%)	(118.91%)
	LD	21	1.7722E-02	2.5864E-07	3.0657E-04
				(311.48%)	(21.41%)
	CN	20	1.5304E-02	2.3884E-07	4.9133E-04
				(279.98%)	(25.96%)
RM-CN	7	1.8897E-01	2.1223E-07	3.8970E-04	
			(237.64%)	(0.09%)	
RM-LLN	52	4.3936E+00	2.8933E-01	-7.6725E+00	
			(>1000%)	(>1000%)	
30 x 30	DD	26	2.1148E-02	-2.2893E-06	2.1152E-04
				(>1000%)	(45.77%)
	LD	20	3.3666E-02	1.0357E-07	3.6630E-04
				(64.77%)	(6.09%)
	CN	19	2.4322E-02	1.1698E-07	4.4486E-04
				(86.11%)	(14.05%)
RM-CN	7	3.9069E-01	1.0609E-07	3.8985E-04	
			(68.79%)	(0.06%)	
RM-LLN	-	-	-	-	
			-	-	

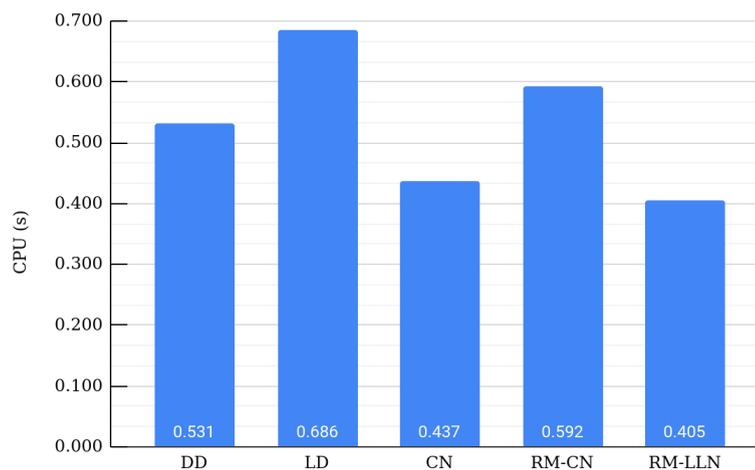
Fonte: O autor, 2022

Na Tabela 14 é mostrado que os melhores resultados são reportados pelo método RM-LLN para a quadratura  $LQ_2$ . Para esta quadratura não são observados grandes problemas de instabilidade numérica quando comparados com os resultados gerados para as quadraturas  $LQ_4$  e  $LQ_6$ . Nas Tabelas 15 e 16 é observado uma grande incongruência nos resultados numéricos entre as diferentes grades espaciais devido a elevada instabilidade numérica apresentada para este problema. São reportados elevados desvios relativos e valores negativos do fluxo escalar na maioria dos casos para a grade espacial com  $10 \times 10$  nodos. Neste caso, o método RM-LLN registra os melhores resultados quando comparados com os métodos DD, LD, CN e RM-CN. No entanto, para grades espaciais superiores, o método RM-LLN reporta grande instabilidade numérica e problema de convergência para a grade espacial com  $30 \times 30$  nodos e quadratura  $LQ_6$ . Esse comportamento é possivelmente justificado pela presença do mal condicionamento das equações características resultado do uso de aproximações lineares nos termos de fuga no desenvolvimento do método RM-LLN. Para ordens de quadraturas superiores e grades espaciais relativamente finas são introduzidas pequenas variações na geração das matrizes de resposta usadas no processo iterativo e gerando grande instabilidade numérica nos cálculos internodais. Porém, é requerido um maior número de iterações para lograr a convergência e, para instabilidades superiores, os resultados numéricos podem não convergir, como mostrado no caso de uma grade espacial com  $30 \times 30$  nodos e quadratura  $LQ_6$ .

Por outro lado, na Figura 34 é reportado o custo computacional baseado no tempo em CPU (em segundos) consumido pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN na geração de soluções numéricas com desvios relativos inferiores a 5% e considerando a quadratura  $LQ_2$  onde não são reportados problemas de instabilidade numérica. O melhor tempo é reportado pelo método RM-LLN seguido do método CN com 0.405 e 0.437 segundos, respectivamente. O método DD ainda reporta instabilidade numérica como mostrado na Figura 35 onde são

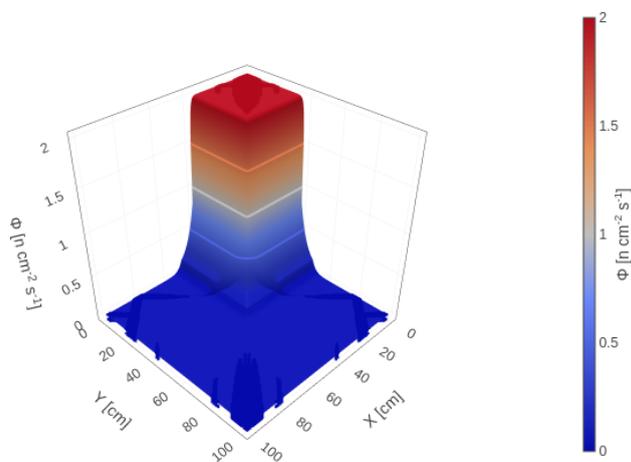
reportados pequenas oscilações na região da fonte interna e valores negativos do fluxo escalar na região de alta absorção.

Figura 34 - Tempo em CPU (segundos) dos resultados numéricos obtidos com os métodos DD (320 x 320 nodos), LD (320 x 320 nodos), CN (320 x 320 nodos), RM-CN (160 x 160 nodos) e RM-LLN (80 x 80 nodos) com desvios relativos inferiores a 5%, quadratura  $LQ_2$  e Problema 3



Fonte: O autor, 2022

Figura 35 - Fluxo escalar obtido pelo método DD para uma grade espacial com 320 x 320 nodos, quadraturas  $LQ_2$  e Problema 3

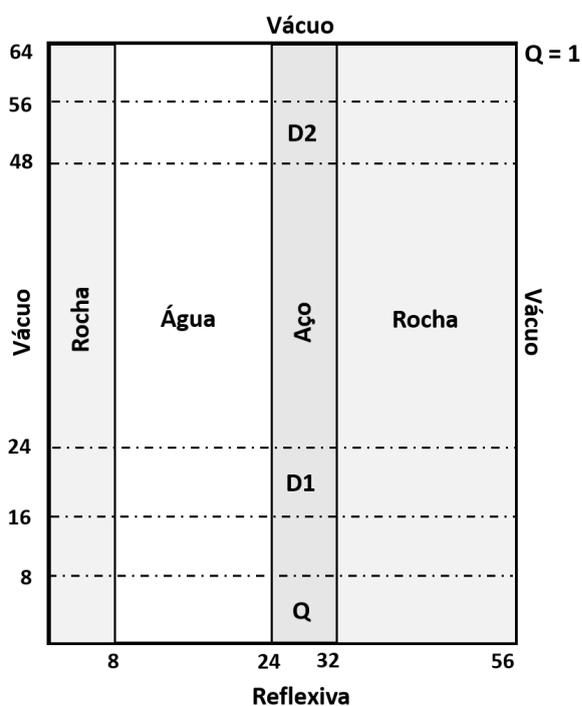


Fonte: O autor, 2022

#### 4.4 Problema 4

O nosso quarto problema, reportado por Silva et. Al., (2020), consiste num problema de perfuração de poço de petróleo onde uma sonda de aço com uma fonte de nêutrons e dois detectores são introduzidas no subsolo para análises geofísicas. Na Figura 36 é mostrado a configuração geométrica do problema, localização dos detectores, condições de contorno e mapeamento de materiais. As propriedades físicas dos materiais são reportadas na Tabela 17.

Figura 36 - Geometria, parâmetros materiais e condições de contorno do Problema 4



Fonte: O autor, 2022

Tabela 17 - Parâmetros materiais do Problema 4.

Material	$\sigma_t$	$\sigma_{s0}$
Rocha	0.330263	0.314419
Aço	0.499122	0.494460
Água	0.694676	0.634833

Fonte: O autor, 2022

Nas Tabelas 18, 19 e 20, são reportados os resultados numéricos obtidos pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN considerando diferentes grades de discretização espacial e usando as quadraturas  $LQ_2$ ,  $LQ_4$  e  $LQ_6$ , respectivamente. O fluxo escalar médio é computado no interior dos detectores localizados dentro da barra de aço. Os desvios relativos do fluxo escalar e fuga são calculados a partir da solução de referência obtida com o método RM-CN para uma grade espacial de  $224 \times 256$  nodos para cada quadratura.

Nos resultados numéricos reportados para as quadraturas  $LQ_2$  (Tabela 4.11),  $LQ_4$  (Tabela 4.12) e  $LQ_6$  (Tabela 4.13) é observado o alto desempenho do método RM-LLN mantendo os melhores desvios relativos associados aos fluxos escalares registrados nos detectores D1 e D2 em todos os casos. Considerando os resultados numéricos do método SGF-LN, reportados por Dominguez (2006), são registrados desvios relativos de 1.40% e 3.47% no interior dos mesmos detectores para uma grade espacial com  $7 \times 8$  nodos e quadratura  $LQ_6$ , respectivamente. Para este caso, o método RM-LLN reportou desvios de 0.19% e 0.3% registrando melhores resultados quando comparado com o método SGF-LN. Para este problema não são reportados grandes problemas de instabilidade numérica. Porém, o método RM-LLN reporta problemas de convergência para uma grade espacial com  $21 \times 24$  nodos e quadratura  $LQ_6$ . A partir destes e dos resultados analisados no problema anterior, caberia pensar que o método RM-LLN é problema dependente e, a instabilidade numérica está fortemente relacionada com a grade de discretização espacial e a ordem da quadratura usada.

Tabela 18 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_2$  para o Problema 4

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi[D1]$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\Phi[D2]$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )
224 x 256	Ref.	122	1.3346E+01	1.5491E+00	1.0172E-02
7 x 8	DD	354	4.9109E-03	7.3953E-01	1.5082E-03
				(52.26%)	(85.17%)
	LD	474	1.2620E-02	8.6065E-01	5.1424E-03
				(44.44%)	(49.44%)
	CN	204	5.8339E-03	1.6371E+00	4.6436E-02
				(5.68%)	(356.51%)
RM-CN	32	6.8383E-03	1.1542E+00	7.3389E-03	
			(25.49%)	(27.85%)	
RM-LLN	32	1.7358E-02	1.5674E+00	1.0219E-02	
			(1.18%)	(0.47%)	
14 x 16	DD	331	1.2010E-02	1.3896E+00	8.2074E-03
				(10.3%)	(19.31%)
	LD	330	2.5519E-02	1.3937E+00	8.7981E-03
				(10.03%)	(13.5%)
	CN	260	1.8712E-02	1.5744E+00	2.0035E-02
				(1.63%)	(96.97%)
RM-CN	43	2.3353E-02	1.4360E+00	9.2408E-03	
			(7.31%)	(9.15%)	
RM-LLN	43	6.6785E-02	1.5505E+00	1.0177E-02	
			(0.09%)	(0.05%)	
21 x 24	DD	369	2.9322E-02	1.4763E+00	9.2799E-03
				(4.7%)	(8.77%)
	LD	333	4.9739E-02	1.4809E+00	9.5657E-03
				(4.41%)	(5.96%)
	CN	289	3.9538E-02	1.5561E+00	1.4466E-02
				(0.45%)	(42.22%)
RM-CN	54	6.2482E-02	1.4949E+00	9.7210E-03	
			(3.5%)	(4.43%)	
RM-LLN	54	1.7680E-01	1.5499E+00	1.0176E-02	
			(0.05%)	(0.04%)	

Fonte: O autor, 2022

Tabela 19 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_4$  para o Problema 4

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi[D1]$ ( $n\text{ cm}^{-2}\text{ s}^{-1}$ )	$\Phi[D2]$ ( $n\text{ cm}^{-2}\text{ s}^{-1}$ )
224 x 256	Ref.	118	8.5890E+01	1.7096E+00	1.2414E-02
7 x 8	DD	307	1.2470E-02	8.7650E-01	-3.9502E-03
				(48.73%)	(131.82%)
	LD	319	1.8583E-02	9.9182E-01	6.7988E-03
				(41.98%)	(45.23%)
	CN	212	1.8153E-02	1.7291E+00	4.6393E-02
				(1.14%)	(273.72%)
RM-CN	30	3.4365E-02	1.3355E+00	9.3063E-03	
			(21.88%)	(25.03%)	
RM-LLN	29	1.1598E-01	1.7139E+00	1.2459E-02	
			(0.25%)	(0.37%)	
14 x 16	DD	376	3.8356E-02	1.5432E+00	1.0157E+03
				(9.73%)	(>1000%)
	LD	331	6.5945E-02	1.5442E+00	1.0828E-02
				(9.67%)	(12.78%)
	CN	265	5.2083E-02	1.6653E+00	2.1684E-02
				(2.59%)	(74.67%)
RM-CN	40	1.4842E-01	1.5939E+00	1.1358E-02	
			(6.77%)	(8.5%)	
RM-LLN	40	4.9828E-01	1.7101E+00	1.2419E-02	
			(0.03%)	(0.04%)	
21 x 24	DD	387	8.2964E-02	1.6293E+00	1.1354E-02
				(4.69%)	(8.54%)
	LD	334	1.4191E-01	1.6347E+00	1.1702E-02
				(4.38%)	(5.73%)
	CN	292	1.0606E-01	1.6627E+00	1.6475E-02
				(2.74%)	(32.71%)
RM-CN	49	3.7416E-01	1.6516E+00	1.1888E-02	
			(3.39%)	(4.23%)	
RM-LLN	50	1.2685E+00	1.7101E+00	1.2419E-02	
			(0.03%)	(0.04%)	

Fonte: O autor, 2022

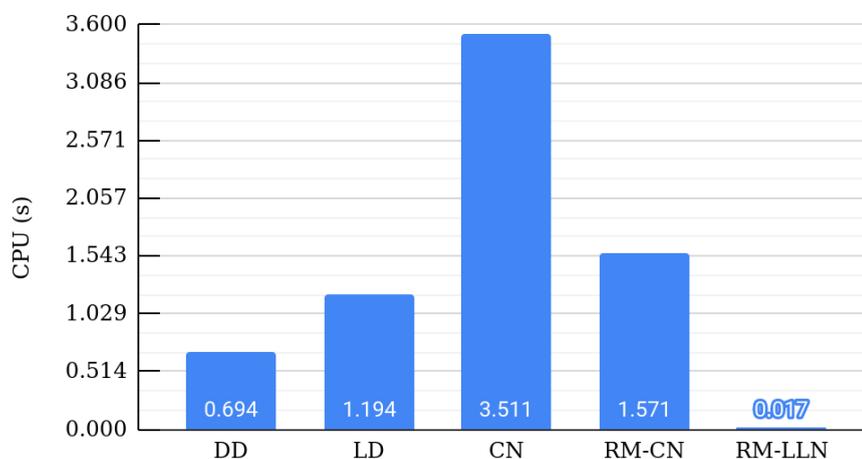
Tabela 20 - Resultados numéricos obtidos com os métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN, considerando a quadratura  $LQ_6$  para o Problema 4

Malha	Método	Iterações	CPU(s)	$\Phi[D1]$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )	$\Phi[D2]$ (n cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )
224 x 256	Ref.	116	3.0876E+02	1.7161E+00	1.2458E-02
7 x 8	DD	337	1.9455E-02	8.8692E-01	-2.9296E-03
				(48.32%)	(123.51%)
	LD	319	3.7178E-02	1.0085E+00	6.9100E-03
				(41.23%)	(44.53%)
	CN	214	3.0871E-02	1.7455E+00	4.5997E-02
				(1.72%)	(269.21%)
RM-CN	29	1.3283E-01	1.3485E+00	9.3858E-03	
			(21.42%)	(24.66%)	
RM-LLN	29	4.6242E-01	1.7193E+00	1.2496E-02	
			(0.19%)	(0.3%)	
14 x 16	DD	375	6.9653E-02	1.5484E+00	1.0285E-02
				(9.77%)	(17.44%)
	LD	331	1.2419E-01	1.5527E+00	1.0888E-02
				(9.52%)	(12.61%)
	CN	266	9.9789E-02	1.6743E+00	2.1536E-02
				(2.44%)	(72.86%)
RM-CN	39	5.5480E-01	1.6026E+00	1.1421E-02	
			(6.61%)	(8.33%)	
RM-LLN	39	1.9218E+00	1.7165E+00	1.2463E-02	
			(0.03%)	(0.04%)	
21 x 24	DD	361	1.4471E-01	1.6347E+00	1.1399E-02
				(4.74%)	(8.5%)
	LD	334	2.7899E-01	1.6422E+00	1.1754E-02
				(4.3%)	(5.65%)
	CN	293	2.0561E-01	1.6712E+00	1.6478E-02
				(2.62%)	(32.26%)
RM-CN	48	1.3896E+00	1.6592E+00	1.1941E-02	
			(3.32%)	(4.15%)	
RM-LLN	-	-	-	-	
			-	-	

Fonte: O autor, 2022

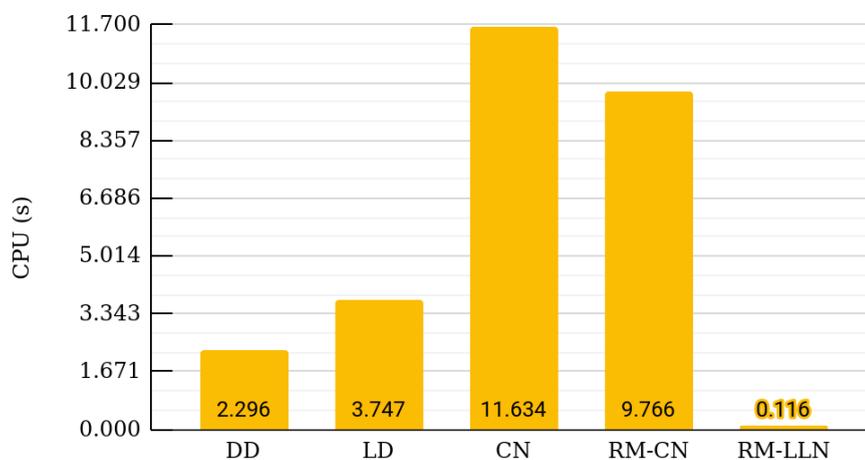
Nas Figuras. 37, 38 e 39 são reportados os tempos em CPU (em segundos) registrados pelos métodos DD, LD, CN, RM-CN e RM-LLN na geração de soluções numéricas e considerando as quadraturas  $LQ_2$ ,  $LQ_4$  e  $LQ_6$ , respectivamente. Nas figuras, tomamos como referência os desvios relativos reportados pelo método RM-LLN para uma grade espacial com  $7 \times 8$  nodos e reportamos os diferentes tempos em CPU registrados pelos métodos para resultados numéricos com precisão igual ou inferior aos valores de referência. Os melhores tempos são registrados para método RM-LLN nas três quadraturas usadas e, para atingir desvios relativos iguais ou inferiores às soluções de referência, são requeridas grades de 15, 15, 32 e 12 vezes maior para os métodos DD, LD, CN e RM-CN quando comparadas com a grade espacial de referência do método RM-LLN.

Figura 37 - Tempo em CPU dos resultados numéricos obtidos com os métodos DD (105 x 120 nodos), LD (105 x 120 nodos), CN (224 x 256 nodos), RM-CN (84 x 96 nodos) e RM-LLN (7 x 8 nodos), quadratura  $LQ_2$  e Problema 4



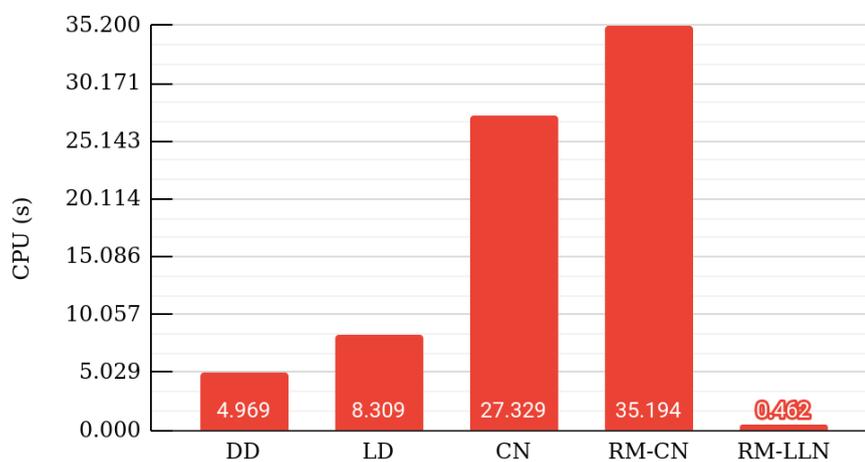
Fonte: O autor, 2022

Figura 38 - Tempo em CPU dos resultados numéricos obtidos com os métodos DD (105 x 120 nodos), LD (105 x 120 nodos), CN (224 x 256 nodos), RM-CN (84 x 96 nodos) e RM-LLN (7 x 8 nodos), quadratura  $LQ_4$  e Problema 4



Fonte: O autor, 2022

Figura 39 - Tempo em CPU dos resultados numéricos obtidos com os métodos DD (105 x 120 nodos), LD (105 x 120 nodos), CN (224 x 256 nodos), RM-CN (84 x 96 nodos) e RM-LLN (7 x 8 nodos), quadratura  $LQ_6$  e Problema 4



Fonte: O autor, 2022

## CONCLUSÕES

Na presente pesquisa foi desenvolvido um novo método de malha grossa, espectro nodal, matriz resposta, para problemas de transporte de nêutrons em geometria bidimensional cartesiana, denominado método RM-LLN. O método resolve analiticamente o sistema formado pelas equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero e primeira ordem acoplado pelos termos de espalhamento e fugas transversais usando aproximações lineares nestes últimos com polinômios de Legendre. Apresentamos um novo esquema matriz resposta, de tipo linear, onde os fluxos angulares médios emergentes são computados como resultado de uma transformação linear dos fluxos angulares médios de incidência nas células de discretização espacial. O método implementa o esquema iterativo FBI para cálculos internodais onde são preservadas as soluções gerais analíticas das equações  $S_N$  integradas transversalmente, as soluções numéricas são contínuas nas interfaces entre nodos e satisfazem as condições de contorno prescritas dos problemas.

É apresentado também um aplicativo web como ferramenta computacional desenvolvida na presente tese para resolver problemas de transporte de nêutrons de fonte fixa, espalhamento isotrópico, um grupo de energia e geometria bidimensional cartesiana. A aplicação oferece grande flexibilidade de uso através de uma interface gráfica amigável para o usuário. A ferramenta não está sujeita às características do hardware, nem às dependências no lado do cliente e pode ser acessível em qualquer desktop, laptop, tablet ou dispositivo móvel com acesso à internet. O código fonte foi desenvolvido seguindo os paradigmas de programação modular garantindo um isolamento eficiente entre as principais componentes do sistema com capacidade de modificação, portabilidade e extensibilidade.

O método RM-LLN demonstra ter um alto desempenho para malhas grossas quanto a precisão e custo computacional para resolver numericamente problemas homogêneos,

heterogêneos, de alta penetração e/ou elevados gradientes de fluxo angular, como os problemas abordados, quando comparados com métodos clássicos de diferenças finitas, de elementos finitos, nodais e inclusivos espectralnodais. O desempenho no que diz respeito à precisão é resultado da aproximação linear nos termos de fuga de nêutrons nas equações  $S_N$  integradas transversalmente. Para uma grade de discretização espacial fixa, o método requer um maior número de operações de ponto flutuante quando comparados com outros métodos. Porém, o método reporta baixo custo computacional, resultado do uso de grades espaciais mais grossas para atingir desvios relativos percentuais próximos à solução de referência, registrando um menor tempo em CPU e menor consumo de memória em relação a outros métodos. Não são apresentados grandes problemas de instabilidade numérica para grades de discretização espacial grossas e na medida que a ordem da quadratura aumenta a instabilidade é mitigada. No entanto, identificamos um componente adicional de instabilidade para grades finas e ordens de quadraturas elevadas, associado principalmente à condicionalidade do sistema.

A componente de instabilidade apresentada, resultado de um mal condicionamento do sistema, é resultado direto dos erros de representação e propagação associados ao processamento de dados do sistema operacional usado. Uma possível solução seria destinar mais recursos computacionais na representação numérica dos dados ou o uso de bibliotecas com precisão variável na aritmética computacional. Outra alternativa seria a construção de um bloco de controle iterativo para cálculos internodais para mitigar, no possível, os erros de propagação. Em todos os casos, seria afetada diretamente o desempenho enquanto a custo computacional do método e seria necessário um análise de factibilidade neste sentido. Finalmente, propomos para futuros trabalhos a extensão do método para problemas multigrupo de energia, espalhamento anisotrópico e/ou geometria tridimensional cartesiana.

## REFERÊNCIAS

ALVES, H.F.; SILVA, F.C.; BARROS, R.C. A course-mesh numerical method for one-speed neutron transport eigenvalue problems in two-dimensional Cartesian geometry. Applied Numerical mathematics, v. 40, p. 167-177, 2002

ANLI, F.; GUNGOR, S.A. A spectral nodal method for one-group X, Y, Z - Cartesian geometry discrete ordinates problems. Annals of Nuclear Energy, v. 23, p. 669-680, 1996

AZMY, Y.Y. Comparison of three approximations to the linear-linear nodal transport method in weighted diamond-difference form. Nuclear Science and Engineering, v. 100, p. 190-200, 1988

BARROS, R.C.; LARSEN, E.W. A numerical method for one-group slab-geometry discrete-ordinates problems with no spatial truncation error. Nuclear Science and Engineering, v. 104, p. 199-208, 1990

BARROS, R.C.; SILVA, F.C.; ALVES, H.F. Recent advances in spectral nodal methods for X, Y - geometry discrete-ordinates deep penetration and eigenvalue problems. Progress in Nuclear Energy, v. 35, p. 293-331, 1999

CASE, K.M.; ZWEIFEL, P.F. Linear transport theory. 2.ed. Canada: Addison-Wesley, 1967. 350 p.

COURTOT, M. Study of some numerical schemes for solving the three-dimensional transport equation. Advances in Mathematical Methods for the Solution of Nuclear Engineering Problems, v. 1, p. 115-129, 1981

CURBELO, J.P.; SILVA, O.P.; BARROS, R.C. On the generalization of the response matrix spectral nodal method for neutral particle  $S_N$  source-detector problems in slab geometry. Journal of Computational and Theoretical Transport, v. 50, p. 67-86, 2021

CURBELO, J.P.; SILVA, O.P.; BARROS, R.C. Application of the adjoint technique to one-speed X, Y - geometry source-detector transport problems in the discrete-ordinates formulation using a spectral nodal method. Progress in Nuclear Energy, v. 108, p. 445-453, 2018

DOMINGUEZ, D.S. et al. Composite spatial grid spectral nodal method for one-speed discrete-ordinates deep penetration problems in x,y-geometry. Progress in Nuclear Energy, v. 52, p. 298-303, 2010

DOMINGUEZ, D.S.; BARROS, R.C. The spectral green's function linear-nodal method for one-speed X, Y - geometry discrete-ordinates deep penetration problems. Annals of Nuclear Energy, v. 34, p. 958-966, 2007

LARSEN, E.W. Spectral analysis of numerical methods for discrete-ordinates problems I. Transport Theory and Statistical Physics, v. 15, p. 93-116, 1986

LAWRENCE, R.D. Progress in nodal methods for the solution of the neutron diffusion and transport equation. Progress in Nuclear Energy, v.17, p. 271-301, 1986

LEWIS, E.E.; MILLER, J.W.F. Computational methods of neutron transport. 1.ed. New York: John Wiley & Sons, 1984. 416 p.

MELLO, J.A.M.; BARROS, R.C. An exponential spectral nodal method for one-speed X, Y - geometry deep penetration discrete-ordinates problems. Annals of nuclear Energy, v. 29, p. 1855-1869, 2002

MENEZES, W.A.; ALVES, H.F.; BARROS, R.C. Spectral green's function nodal method for multigroup  $S_N$  problems with anisotropic scattering in slab-geometry non-multiplying media. Annals of Nuclear Energy, v. 64, p. 270-275, 2014

OLIVA, A.M. et al. The spectral nodal method applied to multigroup  $S_N$  neutron transport problems in one-dimensional geometry with fixed-source. Progress in Nuclear Energy, v. 105, p. 106-113, 2018

ORTIZ, I.B.R. et al. Spectral analysis of the extended linear discontinuous method for one-dimensional monoenergetic discrete-ordinates transport problems in non-multiplying media. Annals of Nuclear Energy, v. 155, 108172, 2021

ORTIZ, I.B.R. et al. A multi-group extended linear discontinuous method for fixed-source discrete-ordinates problems in slab geometry. International Journal of Nuclear Energy Science and Technology, v. 13, p. 70-86, 2019

PAZINATTO, C.B.; BARROS, R.C.; BARICHELLO, L.B. Analytical adjoint discrete-ordinates formulation for monoenergetic slab-geometry source-detector calculations International Journal of Nuclear Energy Science and Technology, v. 10, p. 107-122, 2016

SILVA, O.P. et al. A response matrix spectral nodal method for energy multigroup x,y-geometry discrete-ordinates problems in non-multiplying media. Progress in Nuclear Energy, v. 125, 103288, 2020

SILVA, D.M. et al. Analytical methods for computational modeling of fixed-source slab-geometry discrete ordinates transport problems: response matrix and hybrid  $S_N$ . Progress in Nuclear Energy, v. 69, p. 77-84, 2013

WALTERS, W.F. The relation between finite element methods and nodal methods in transport theory. Progress in Nuclear energy, v. 18, p. 21-26, 1986

WALTERS, W.F.; O'DELL, R.D. Nodal methods for discrete ordinates transport problems in (x,y) geometry. Conference: ANS/ENS joint topical meeting on mathematical methods in nuclear engineering, Munich, F.R. Germany, 27 Apr 1981

YAVUZ, M. A one-d simplified discrete-ordinates method with no spatial truncation error. Annals of Nuclear Energy, v. 22, p. 203-214, 1995

## APÊNDICES

**APÊNDICE A** - Metodologia para obter a solução geral das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$

A solução geral das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$  com aproximação linear nos termos de fuga, Eq. (2.4) pode ser obtida separando as componentes homogêneas e particulares da solução mediante:

$$\tilde{\Psi}_{m,i}(y) = \tilde{\Psi}_{m,i}^h(y) + \tilde{\Psi}_{m,i}^p(y) , \quad (\text{A.1})$$

onde  $\tilde{\Psi}_{m,i}^h(y)$  e  $\tilde{\Psi}_{m,i}^p(y)$  constituem as soluções homogêneas e particulares, respectivamente.

A forma das soluções homogêneas pode ser obtida a partir da Eq. (2.29) como

$$\tilde{\Psi}_{m,i}^h(y) = \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k \tilde{a}_{m,i,j}(\nu_k) e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_i)/\nu_k} , \quad (\text{A.2})$$

onde  $\tilde{\alpha}_k$  representam constantes arbitrária determinadas pelas condições de contorno. Tanto a Eq. (2.31) quanto a Eq. (A.2) compartilham os mesmos autovalores do espectro das soluções homogêneas em ambos sistemas. Porém, as componentes dos autovetores são diferentes. Para obter as soluções particulares, tratamos os termos independentes que conformam a Eq. (2.4) por separado considerando as equações:

$$\frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dy} \tilde{\Psi}_{m,i}^{p1}(y) + \tilde{\Psi}_{m,i}^{p1}(y) = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\Psi}_{m,i}^{p1}(y) \omega_n + \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,ij}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}} \frac{d}{dy} \tilde{\Psi}_{m,i}^{p2}(y) + \tilde{\Psi}_{m,i}^{p2}(y) &= \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\Psi}_{m,i}^{p2}(y) \omega_n - \\ &- \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

e representamos a solução particular da Eq. (2.4) pela soma das soluções particulares das Eqs. (A.3) e (A.4):

$$\tilde{\Psi}_{m,i}^p(y) = \tilde{\Psi}_{m,i}^{p1}(y) + \tilde{\Psi}_{m,i}^{p2}(y) \quad (\text{A.5})$$

### A.1 Solução particular para fonte externa

A solução particular da Eq. (A.3) tem a forma:

$$\tilde{\Psi}_{m,i}^{p1}(y) = \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,ij}(1-c_{0,ij})}. \quad (\text{A.6})$$

### A.2 Solução particular para fugas transversais

Para obter a solução particular da Eq. (A.4) usamos a técnica de coeficientes indeterminados onde consideramos uma estimativa inicial da forma:

$$\tilde{\Psi}_{m,i}^{p2}(y) = A_{m,i,j} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} B_{m,i,j}. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a Eq. (A.7) em (A.4) e agrupando termos semelhantes obtemos:

$$\frac{2\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} B_{m,i,j} + A_{m,i,j} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M A_{n,i,j} \omega_n - \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{2(y-y_j)}{h_j} B_{m,i,j} = \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M B_{n,i,j} \omega_n - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right). \quad (\text{A.9})$$

Explicitando  $B_{m,i,j}$  na Eq. (A.9) obtemos:

$$B_{m,i,j} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M B_{n,i,j} \omega_n - \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right). \quad (\text{A.10})$$

Multiplicando a Eq. (A.10) por  $\omega_m$ , somando pelas direções  $m$  e agrupando termos

podemos obter a forma do termo  $\sum_{m=1}^M B_{m,i,j} \omega_m$ :

$$\sum_{m=1}^M B_{m,i,j} \omega_m = - \frac{1}{(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right), \quad (\text{A.11})$$

e, substituindo a Eq. (A.11) no lado direito da Eq. (A.10), obtemos a forma final para  $B_{m,i,j}$ :

$$B_{m,i,j} = -\frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right). \quad (\text{A.12})$$

Para obter a forma do termo  $A_{m,i,j}$  substituímos a Eq. (A.12) em (A.8) e agrupando termos obtemos:

$$\begin{aligned} A_{m,i,j} &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M A_{n,i,j} \omega_n - \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \\ &+ \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando a Eq. (A.13) por  $\omega_m$ , somando pelas direções  $m$ , usando a propriedade

$\sum_{m=1}^M \eta_m \omega_m = 0$  para quadraturas simétricas e agrupando termos podemos obter a forma do

termo  $\sum_{m=1}^M A_{m,i,j} \omega_m$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M A_{m,i,j} \omega_m &= -\frac{1}{(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\ &+ \frac{1}{(1-c_{0,i,j})} \frac{2}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

e, substituindo a Eq. (A.14) no lado direito da Eq. (A.13), podemos obter a forma final das constantes  $A_{m,i,j}$ :

$$\begin{aligned}
A_{m,i,j} = & -\frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i} \sigma_{t,i,j}^{\ell_i} h_j} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i} \sigma_{t,i,j}^{\ell_i} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i} \sigma_{t,i,j}^{\ell_i} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right). \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Logo, podemos expressar a solução particular da Eq. (A.4) substituindo as Eqs. (A.12) e (A.15) em (A.7):

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_{m,i}^{p2}(y) = & -\frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i} \sigma_{t,i,j}^{\ell_i} h_j} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i} \sigma_{t,i,j}^{\ell_i} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i} \sigma_{t,i,j}^{\ell_i} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right). \tag{A.16}
\end{aligned}$$

### A.3 Solução geral

A solução geral das equações  $S_N$  integrada transversalmente de ordem zero na direção  $y$  usando aproximações lineares para os termos de fuga de nêutrons, Eq. (2.4), pode ser formulada agrupando a componente homogênea, Eq. (A.2), e as componentes particulares, Eqs (A.6) e (A.16):

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_{m,i}(y) &= \sum_{k=1}^M \alpha_k \tilde{a}_{m,i,j}(\mathbf{v}_k) e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_j)/v_k} + \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,ij})} - \\
&- \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
&+ \frac{2\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i} \sigma_{t,i,j}^{\ell_j} h_j} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i} \sigma_{t,i,j}^{\ell_j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
&+ \frac{c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i} \sigma_{t,i,j}^{\ell_j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
&- \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^{\ell_i}} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right). \tag{A.17}
\end{aligned}$$

**APÊNDICE B** - Metodologia para obter a solução geral das equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $y$

As equações  $S_N$  integrada transversalmente de primeira ordem na direção  $y$  com aproximação linear nos termos de fuga, Eq. (2.6), estão acopladas com as equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$  mediante o momento de ordem zero do fluxo angular. Para resolver essas equações, primeiramente substituímos a Eq. (2.46) em (2.6):

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \tilde{\varphi}_{m,i}(y) + \tilde{\varphi}_{m,i}(y) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\varphi}_{n,i}(y) \omega_n + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{k=1}^M \tilde{\beta}_k^0 \tilde{b}_{m,i,j}(v_k) e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_j)/v_k} + \\
&+ \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})} - \frac{\mu_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
&+ \frac{12\mu_m^2 \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
&+ \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
&- \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
&- \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right). \tag{B.1}
\end{aligned}$$

A solução geral da Eq. (B.1) pode ser representada por:

$$\tilde{\varphi}_{m,i}(y) = \tilde{\varphi}_{m,i}^h(y) + \tilde{\varphi}_{m,i}^p(y), \tag{B.2}$$

onde  $\tilde{\varphi}_{m,i}^{\sim h}(y)$  e  $\tilde{\varphi}_{m,i}^{\sim p}(y)$  constituem as soluções homogêneas e particulares, respectivamente.

Da Eq. (2.27) podemos representar a forma das soluções homogêneas como:

$$\tilde{\varphi}_{m,i}^{\sim h}(y) = \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k^{\sim 1} a_{m,i,j}^{\sim 1}(v_k) e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_j)/v_k}, \quad (\text{B.3})$$

onde  $\tilde{\alpha}_k^{\sim 1}$  representam constantes arbitrária determinadas pelas condições de contorno e as componentes dos autovetores  $\tilde{a}_{m,i,j}^{\sim 1}(v_k)$  são os mesmos aos reportados na Eq. (2.46). Por outro lado, para obter as soluções particulares, isolamos os termos independentes do lado direito da Eq. (B.1) mediante as equações:

$$\frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \tilde{\varphi}_{m,i}^{\sim p1}(y) + \tilde{\varphi}_{m,i}^{\sim p1}(y) = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\varphi}_{n,i}^{\sim p1}(y) \omega_n + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2} \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k^{\sim 0} a_{m,i,j}^{\sim 0}(v_k) e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_j)/v_k}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \tilde{\varphi}_{m,i}^{\sim p2}(y) + \tilde{\varphi}_{m,i}^{\sim p2}(y) = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\varphi}_{n,i}^{\sim p2}(y) \omega_n + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2} \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})}, \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \tilde{\varphi}_{m,i}^{\sim p3}(y) + \tilde{\varphi}_{m,i}^{\sim p3}(y) &= \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \tilde{\varphi}_{n,i}^{\sim p3}(y) \omega_n - \\ &- \frac{\mu_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{12\mu_m^2 \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right), \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}} \frac{d}{dy} \overset{\sim p4}{\varphi}_{m,i}(y) + \overset{\sim p4}{\varphi}_{m,i}(y) & = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \overset{\sim p4}{\varphi}_{n,i}(y) \omega_n - \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right), \tag{B.7}
\end{aligned}$$

e a solução particular da Eq. (B.1) está representada por:

$$\overset{\sim p}{\varphi}_{m,i}(y) = \overset{\sim p1}{\varphi}_{m,i}(y) + \overset{\sim p2}{\varphi}_{m,i}(y) + \overset{\sim p3}{\varphi}_{m,i}(y) + \overset{\sim p4}{\varphi}_{m,i}(y). \tag{B.8}$$

Em continuidade, resolvemos as Eqs. (B.4) - (B.7) para obter uma expressão matemática para a solução particular da Eq. (B.1).

### B.1 Solução particular para componente homogênea

A solução particular da Eq. (B.4) pode ser representada na forma:

$$\varphi_{m,i}^{\sim p1}(y) = \sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \sum_{k=1}^M \tilde{\Upsilon}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k}, \quad (\text{B.9})$$

onde  $\tilde{\lambda}_{m,k}$  e  $\tilde{\Upsilon}_{m,k}$  são constantes a determinar. Substituindo a Eq. (B.9) em (B.4) obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \left[ \frac{\eta_m}{v_k} \tilde{\lambda}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \frac{2\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \tilde{\Upsilon}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{\eta_m}{v_k} \tilde{\Upsilon}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} \right] + \\ & + \sum_{k=1}^M \left[ \tilde{\lambda}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \tilde{\Upsilon}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} \right] = \\ & = \sum_{k=1}^M \left[ \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{\lambda}_{n,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{\Upsilon}_{n,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} \right] + \\ & + \sum_{k=1}^M \left[ \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \tilde{\alpha}_k^0 a_{m,ij}(v_k) e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} \right]. \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

A Eq. (B.10) é satisfeita se, para cada valor de  $k$ , é satisfeita a equação:

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_m}{v_k} \tilde{\lambda}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \frac{2\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \tilde{\Upsilon}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{\eta_m}{v_k} \tilde{\Upsilon}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \\ & + \tilde{\lambda}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \tilde{\Upsilon}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{\lambda}_{n,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{Y}_{n,k} \tilde{\alpha}_k e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \tilde{\alpha}_k \tilde{a}_{m,ij}(v_k) e^{\sigma_{t,ij}(y-y_j)/v_k} . \quad (\text{B.11})$$

As seguintes identidades são obtidas logo depois de simplificar e agrupar termos semelhantes na Eq. (B.11):

$$\frac{\eta_m}{v_k} \tilde{\lambda}_{m,k} + \frac{2\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \tilde{Y}_{m,k} + \tilde{\lambda}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{\lambda}_{n,k} + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \tilde{a}_{m,ij}(v_k) , \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\eta_m}{v_k} \tilde{Y}_{m,k} + \tilde{Y}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{Y}_{n,k} . \quad (\text{B.13})$$

As componentes das constantes  $\tilde{\lambda}_{m,k}$  e  $\tilde{Y}_{m,k}$  são obtidas atendendo às propriedades dos materiais no meio hospedeiro. Primeiramente, obtemos as formas destas constantes para  $c_{0,ij} = 0$  e logo procedemos para  $c_{0,ij} \neq 0$ .

### B.1.1 Formas das constantes $\tilde{\lambda}_{m,k}$ e $\tilde{Y}_{m,k}$ para um meio puramente absorvedor

Para meios absorvedores puros,  $c_{0,ij} = 0$ , o sistema representado pelas Eqs. (B.12) e (B.13) toma a forma:

$$\frac{\eta_m}{v_k} \tilde{\lambda}_{m,k} + \frac{2\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \tilde{Y}_{m,k} + \tilde{\lambda}_{m,k} = \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \tilde{a}_{m,ij}(v_k) , \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\eta_m \tilde{\Upsilon}_{m,k}}{v_k} + \tilde{\Upsilon}_{m,k} = 0 , \quad (\text{B.15})$$

onde, atendendo à forma das componentes dos autovetores  $\tilde{a}_{m,i,j}(v_k)$  para  $c_{0,i,j} = 0$ , as constantes  $\tilde{\lambda}_{m,k}$  e  $\tilde{\Upsilon}_{m,k}$  são definidas como:

$$\tilde{\lambda}_{m,k} = 0 , \quad (\text{B.16})$$

$$\tilde{\Upsilon}_{m,k} = \frac{3\sigma_{t,i,j} h_j}{\sigma_{t,i,j} h_i} \frac{\mu_m}{\eta_m} \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) . \quad (\text{B.17})$$

### B.1.2 Formas das constantes $\tilde{\lambda}_{m,k}$ e $\tilde{\Upsilon}_{m,k}$ para meios com espalhamento isotrópico

Para obter as formas das constantes  $\tilde{\lambda}_{m,k}$  e  $\tilde{\Upsilon}_{m,k}$  para meios com espalhamento isotrópico,  $c_{0,i,j} \neq 0$ , precisamos separar o procedimento em dois casos atendendo nas formas dos autovalores e autovetores. Primeiramente, resolvemos o sistema representado pelas Eqs.

(B.12) e (B.13) para as constantes  $\tilde{\lambda}_{m,k}$  e  $\tilde{\Upsilon}_{m,k}$  onde o par de autovalores e autovetores foram

determinados usando a normalização  $\sum_{m=1}^M \omega_m \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) = 0$ . Seguidamente, obtemos as

formas das constantes  $\tilde{\lambda}_{m,k}$  e  $\tilde{\Upsilon}_{m,k}$  onde o par de autovalores e autovetores foram determinados

usando a normalização  $\sum_{m=1}^M \omega_m \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) = 1$ .

### B.1.2.1 Normalização a 0

No primeiro caso, onde usamos o par de autovalores e autovetores obtidos a partir da normalização  $\sum_{m=1}^M \omega_m \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) = 0$  na seção 2.2.2.1, o sistema representado pelas Eqs.

(B.12) e (B.13) tomam a forma:

$$\frac{2\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \tilde{Y}_{m,k} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{\lambda}_{n,k} + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \tilde{a}_{m,i,j}(v_k), \quad v_k \neq -\eta_m, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{Y}_{n,k} = 0, \quad v_k \neq -\eta_m, \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\eta_m}{v_k} \tilde{\lambda}_{m,k} + \frac{2\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \tilde{Y}_{m,k} + \tilde{\lambda}_{m,k} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{\lambda}_{n,k}, \quad v_k \neq -\eta_m, \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\eta_m}{v_k} \tilde{Y}_{m,k} + \tilde{Y}_{m,k} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{Y}_{n,k}, \quad v_k \neq -\eta_m. \quad (\text{B.21})$$

Para resolver o sistema conformado pelas Eqs. (B.18) - (B.21) definimos a normalização:

$$\sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{\lambda}_{n,k} = C_k . \quad (\text{B.22})$$

Substituindo a Eq. (B.22) em (B.18) obtemos que:

$$\frac{2\eta_m}{\sigma_{t,ij} h_j} \tilde{Y}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{4} C_k + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \tilde{a}_{m,ij}(v_k), \quad v_k = -\eta_m . \quad (\text{B.23})$$

Resolvendo o sistema conformado pelas Eqs. (B.19), (B.21), e as restrições representadas pela Eq. (B.23) podemos obter as formas das constantes  $\tilde{Y}_{m,k}$  e  $C_k$ :

$$C_k = \frac{8}{c_{0,ij}} \frac{\eta_{p1}}{\sigma_{t,ij} h_j} \tilde{Y}_{p1,k} - \frac{24}{c_{0,ij}} \frac{\mu_{p1}}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \tilde{a}_{p1,ij}(v_k), \quad v_k = -\eta_m , \quad (\text{B.24})$$

$$\tilde{Y}_{p1,k} = \frac{3\sigma_{t,ij} h_j}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \frac{\mu_{p1}}{\eta_{p1}} \left( 1 - \frac{\omega_{p1}}{\sum_{n=1, v_k = -\eta_n}^M \omega_n} \right) \tilde{a}_{p1,ij}(v_k) - \frac{3\sigma_{t,ij} h_j}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \frac{\mu_{p2}}{\eta_{p2}} \frac{\omega_{p2}}{\sum_{n=1, v_k = -\eta_n}^M \omega_n} \tilde{a}_{p2,ij}(v_k) , \quad (\text{B.25})$$

$$\tilde{Y}_{m,k} = \frac{c_{0,ij}}{8} \frac{\sigma_{t,ij} h_j}{\eta_m} C_k + \frac{3\sigma_{t,ij} h_j}{\sigma_{t,ij} \ell_i} \frac{\mu_m}{\eta_m} \tilde{a}_{m,ij}(v_k), \quad m \neq p1, \quad v_k = -\eta_m , \quad (\text{B.26})$$

$$\tilde{Y}_{m,k} = 0, \quad v_k \neq -\eta_m , \quad (\text{B.27})$$

onde  $C_k$  é obtido de modo que a Eq. (B.23) seja satisfeita para  $m = p1$ , onde  $p1$  representa a direção referente ao primeiro valor não nulo de  $\tilde{a}_{m,i,j}(v_k)$ , e  $p2$  a direção referente ao segundo valor não nulo de  $\tilde{a}_{m,i,j}(v_k)$ . As constantes  $\tilde{Y}_{m,k}$  são obtidas a partir das Eqs. (B.25), (B.26), e (B.27). Finalmente, obtemos as constantes  $\tilde{\lambda}_{m,k}$  a partir da Eq. (B.20) e usando as constantes  $\tilde{Y}_{m,k}$  e  $C_k$  obtidas anteriormente:

$$\tilde{\lambda}_{m,k} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \frac{v_k}{(\eta_m + v_k)} C_k, \quad v_k \neq -\eta_m, \quad (\text{B.28})$$

e as constantes  $\tilde{\lambda}_{m,k}$  para  $v_k = -\eta_m$  são determinados de modo que a Eq. (B.22) seja satisfeita

$$\tilde{\lambda}_{m,k} = \frac{C_k - \sum_{n=1, v_k \neq -\eta_n}^M \omega_n A_{n,k}}{\sum_{n=1, v_k = -\eta_n}^M \omega_n}, \quad v_k = -\eta_m. \quad (\text{B.29})$$

### B.1.2.2 Normalização a 1

No segundo caso, onde usamos o par de autovalores e autovetores obtidos a partir da normalização  $\sum_{m=1}^M \omega_m \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) = 1$  na seção 2.2.2.2, o sistema representado pelas Eqs.

(B.12) e (B.13) não sofre nenhuma modificação. Resolvendo a Eq. (B.13) obtemos que:

$$\tilde{Y}_{m,k} = D_k \tilde{a}_{m,i,j}(v_k), \quad (\text{B.30})$$

onde  $D_k$  são constantes arbitrariamente definidas para que o sistema não homogêneo representado pela Eq. (B.12) seja soluble. Substituindo a Eq. (B.30) em (B.12), usando a

normalização  $\sum_{n=1}^M \omega_n \tilde{\lambda}_{n,k} = 1$  e reagrupando termos obtemos:

$$\tilde{\lambda}_{m,k} = \frac{c_{0,i,j}}{4} \frac{v_k}{(\eta_m + v_k)} + \frac{v_k}{(\eta_m + v_k)} \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) - \frac{v_k}{(\eta_m + v_k)} \frac{2\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} D_k \tilde{a}_{m,i,j}(v_k). \quad (\text{B.31})$$

Usando a Eq. (2.26) que define a forma das componentes dos autovetores  $\tilde{a}_{m,i,j}(v_k)$  na Eq. (B.31), temos que:

$$\tilde{\lambda}_{m,k} = \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) + \frac{24}{c_{0,i,j}} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \tilde{a}_{m,i,j}^2(v_k) - \frac{8}{c_{0,i,j}} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} D_k \tilde{a}_{m,i,j}^2(v_k). \quad (\text{B.32})$$

Multiplicando a Eq. (B.32) por  $\omega_m$  e somando pelas direções  $m$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \omega_m \tilde{\lambda}_{m,k} &= \sum_{m=1}^M \omega_m \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) + \frac{24}{c_{0,i,j}} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m \tilde{a}_{m,i,j}^2(v_k) - \\ &- \frac{8}{c_{0,i,j}} \frac{D_k}{\sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{m=1}^M \omega_m \eta_m \tilde{a}_{m,i,j}^2(v_k), \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

e usando as normalizações  $\sum_{m=1}^M \omega_m \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) = 1$  e  $\sum_{m=1}^M \omega_m \tilde{\lambda}_{m,k} = 1$  podemos obter as formas

das constantes  $D_k$  que garantem que o sistema não homogêneo representado pela Eq. (B.12)

seja soluble:

$$D_k = \frac{3\sigma_{t,i,j} h_j}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \frac{\sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \tilde{a}_{n,i,j}(v_k)}{\sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \tilde{a}_{n,i,j}(v_k)} . \quad (\text{B.34})$$

Logo depois de substituir a Eq. (B.34) em (B.32) obtemos a forma das constantes  $\tilde{\lambda}_{m,k}$ :

$$\tilde{\lambda}_{m,k} = \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) + \frac{24}{c_{0,i,j}} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) - \frac{24}{c_{0,i,j}} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) \frac{\sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \tilde{a}_{n,i,j}(v_k)}{\sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \tilde{a}_{n,i,j}(v_k)} , \quad (\text{B.35})$$

substituindo a Eq. (B.34) em (B.30) obtemos a forma das constantes  $\tilde{Y}_{m,k}$ :

$$\tilde{Y}_{m,k} = \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) \frac{3\sigma_{t,i,j} h_j}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \frac{\sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \tilde{a}_{n,i,j}(v_k)}{\sum_{n=1}^M \omega_n \eta_n \tilde{a}_{n,i,j}(v_k)} . \quad (\text{B.36})$$

### B.1.2.3 Forma final da solução particular para componente homogênea

Uma vez determinadas as formas das constantes  $\tilde{\lambda}_{m,k}$  e  $\tilde{Y}_{m,k}$  para meios absorventes puros e meios com espalhamento isotrópico podemos representar a solução particular da Eq. (B.4) como:

$$\tilde{\varphi}_{m,i}^{p1}(y) = \sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_j)/v_k} + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \sum_{k=1}^M \tilde{Y}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_j)/v_k} . \quad (\text{B.37})$$

## B.2 Solução particular para fonte interna

A solução particular da Eq. (B.5) tem a forma:

$$\overset{\sim}{\varphi}_{m,i}^{p2}(\mathbf{y}) = \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \frac{Q}{\sigma_{t,i,j} (1-c_{0,i,j})} . \quad (\text{B.38})$$

## B.3 Solução particular para fugas transversais 1

A solução particular da Eq. (B.6) é obtida usamos a técnica de coeficientes indeterminados:

$$\begin{aligned} \overset{\sim}{\varphi}_{m,i}^{p3}(\mathbf{y}) = & -\frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) - \\ & - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \frac{24\mu_m^2 \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) + \\ & + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\ & + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\ & + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\ & + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \eta_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right). \tag{B.39}
\end{aligned}$$

#### B.4 Solução particular para fugas transversais 2

De igual maneira, para obter a solução particular da Eq. (B.7) usamos a técnica de coeficientes:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_{m,i}^{p4}(y) = & - \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{6\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i \sigma_{t,ij} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^2 \ell_i} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right). \tag{B.40}
\end{aligned}$$

#### B.5 Solução geral

Finalmente, podemos formular a solução geral das equações  $S_N$  integrada transversalmente de primeira ordem na direção  $y$  usando aproximações lineares para os

termos de fuga de nêutrons a partir das soluções homogêneas e particulares representadas pela Eq. (B.3) e as Eqs. (B.37), (B.38), (B.39) e (B.40):

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_{m,i}(y) = & \sum_{k=1}^M \tilde{\alpha}_k \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_j)/v_k} + \sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_j)/v_k} + \\
& + \frac{2(y-y_j)}{h_j} \sum_{k=1}^M \tilde{Y}_{m,k} \tilde{\alpha}_k^0 e^{\sigma_{t,i,j}(y-y_j)/v_k} + \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \frac{\rho}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})} - \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{24\mu_m^2 \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{6c_{0,i,j}}{(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \eta_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{6\mu_m^2}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j}^2 \ell_i^2} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n^2 \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} - \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \left( \hat{\Psi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{3c_{0,i,j}}{4(1-c_{0,i,j})} \frac{1}{\sigma_{t,i,j} \ell_i} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Psi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\Psi}_{n,i-1/2,j} \right) + \frac{6\mu_m \eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \left( \hat{\Phi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{m,i-1/2,j} \right) + \\
& + \frac{3c_{0,i,j}}{2(1-c_{0,i,j})} \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\Phi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\Phi}_{n,i-1/2,j} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3c_{0,ij}}{2(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i} \sigma_{t,ij}^{\ell_j} h_j} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \eta_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right) - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3\mu_m}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i}} \left( \hat{\varphi}_{m,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{m,i-1/2,j} \right) - \\
& - \frac{2(y-y_j)}{h_j} \frac{3c_{0,ij}}{4(1-c_{0,ij})} \frac{1}{\sigma_{t,ij}^{\ell_i}} \sum_{n=1}^M \omega_n \mu_n \left( \hat{\varphi}_{n,i+1/2,j} + \hat{\varphi}_{n,i-1/2,j} \right). \tag{B.41}
\end{aligned}$$

**APÊNDICE C** - Definição das matrizes envolvidas na forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $x$

$$\overline{RX}_{m,k}^{in} = \hat{a}_{m,i,j}(v_k) e^{\mp \sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k}, \mu_m \geq 0, \quad (C.1)$$

$$\overline{RX}_{m,k}^{out} = \hat{a}_{m,i,j}(v_k) e^{\pm \sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k}, \mu_m \geq 0, \quad (C.2)$$

$$\overline{LX0} = \frac{-|\eta_k| [4(1-c_{0,i,j})\delta_{m,k} + c_{0,i,j}\omega_k]}{4\sigma_{t,i,j} h_j (1-c_{0,i,j})}, \quad (C.3)$$

$$\overline{LX1}_{m,k}^{in} = \frac{|\eta_k| [4(1-c_{0,i,j})(2\mu_m \pm \sigma_{t,i,j} \ell_i)\delta_{m,k} + c_{0,i,j}\omega_k(2\mu_m + 2\mu_k \pm \sigma_{t,i,j} \ell_i)]}{4\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j (1-c_{0,i,j})}, \mu_m \geq 0, \quad (C.4)$$

$$\overline{LX1}_{m,k}^{out} = \frac{|\eta_k| [4(1-c_{0,i,j})(2\mu_m \mp \sigma_{t,i,j} \ell_i)\delta_{m,k} + c_{0,i,j}\omega_k(2\mu_m + 2\mu_k \mp \sigma_{t,i,j} \ell_i)]}{4\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j (1-c_{0,i,j})}, \mu_m \geq 0, \quad (C.5)$$

$$S_{m,i,j}^{\wedge 0} = \frac{Q_{ij}}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})}, \quad (C.6)$$

$$\overline{MX1} = \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}}, \quad (C.7)$$

$$\overline{MX2} = \left( I - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \right) \overline{LX0}, \quad (C.8)$$

$$\overline{MX3} = \overline{LX1}^{out} - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \overline{LX1}^{in}, \quad (C.9)$$

$$\overline{SX} = \left( I - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \right) \hat{S}^0 . \quad (\text{C.10})$$

**APÊNDICE D** - Definição das matrizes envolvidas na forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de ordem zero na direção  $y$

$$\overline{RY}_{m,k}^{in} = \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) e^{\mp \sigma_{t,i,j} h_j / 2v_k}, \eta_m \geq 0, \quad (D.1)$$

$$\overline{RY}_{m,k}^{out} = \tilde{a}_{m,i,j}(v_k) e^{\pm \sigma_{t,i,j} h_j / 2v_k}, \eta_m \geq 0, \quad (D.2)$$

$$\overline{LY0} = \frac{-|\mu_k| [4(1-c_{0,i,j})\delta_{m,k} + c_{0,i,j}\omega_k]}{4\sigma_{t,i,j} \ell_i (1-c_{0,i,j})}, \quad (D.3)$$

$$\overline{LY1}_{m,k}^{in} = \frac{|\mu_k| [4(1-c_{0,i,j})(2\eta_m \pm \sigma_{t,i,j} h_j)\delta_{m,k} + c_{0,i,j}\omega_k(2\eta_m + 2\eta_k \pm \sigma_{t,i,j} h_j)]}{4\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j (1-c_{0,i,j})}, \eta_m \geq 0, \quad (D.4)$$

$$\overline{LY1}_{m,k}^{out} = \frac{|\mu_k| [4(1-c_{0,i,j})(2\eta_m \mp \sigma_{t,i,j} h_j)\delta_{m,k} + c_{0,i,j}\omega_k(2\eta_m + 2\eta_k \mp \sigma_{t,i,j} h_j)]}{4\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j (1-c_{0,i,j})}, \eta_m \geq 0, \quad (D.5)$$

$$\tilde{S}_{m,i,j}^0 = \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{t,i,j}(1-c_{0,i,j})}, \quad (D.6)$$

$$\overline{MY1} = \left( I - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \right) \overline{LY0}, \quad (D.7)$$

$$\overline{MY2} = \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1}, \quad (D.8)$$

$$\overline{MY3} = \overline{LY1}^{out} - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \overline{LY1}^{in}, \quad (D.9)$$

$$\overline{SY} = \left( I - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}} \right) \tilde{S}^0 . \quad (\text{D.10})$$

**APÊNDICE E** - Definição das matrizes envolvidas na forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $x$

$$\overline{X\lambda}_{m,k}^{in} = \hat{\lambda}_{m,k} e^{\mp \sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k}, \mu_m \geq 0, \quad (E.1)$$

$$\overline{X\lambda}_{m,k}^{out} = \hat{\lambda}_{m,k} e^{\pm \sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k}, \mu_m \geq 0, \quad (E.2)$$

$$\overline{XY}_{m,k}^{in} = \mp \hat{Y}_{m,k} e^{\mp \sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k}, \mu_m \geq 0, \quad (E.3)$$

$$\overline{XY}_{m,k}^{out} = \pm \hat{Y}_{m,k} e^{\pm \sigma_{t,i,j} \ell_i / 2v_k}, \mu_m \geq 0, \quad (E.4)$$

$$\overline{LXX0} = \frac{-3|\eta_k| [4(1-c_{0,i,j})\eta_m \delta_{m,k} + c_{0,i,j} \omega_k (\eta_m + \eta_k)]}{2\sigma_{t,i,j}^2 h_j^2 (1-c_{0,i,j})}, \quad (E.5)$$

$$\overline{LXX1}_{m,k}^{in} = \frac{3|\eta_k| [4(1-c_{0,i,j})(4\mu_m \pm \sigma_{t,i,j} \ell_i) \eta_m \delta_{m,k} + c_{0,i,j} \omega_k (\eta_m [2(2\mu_m + \mu_k) \pm \sigma_{t,i,j} \ell_i] + \eta_k [2(\mu_m + 2\mu_k) \pm \sigma_{t,i,j} \ell_i])]}{2\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2 (1-c_{0,i,j})}, \mu_m \geq 0, \quad (E.6)$$

$$\overline{LXX1}_{m,k}^{out} = \frac{3|\eta_k| [4(1-c_{0,i,j})(4\mu_m \mp \sigma_{t,i,j} \ell_i) \eta_m \delta_{m,k} + c_{0,i,j} \omega_k (\eta_m [2(2\mu_m + \mu_k) \mp \sigma_{t,i,j} \ell_i] + \eta_k [2(\mu_m + 2\mu_k) \mp \sigma_{t,i,j} \ell_i])]}{2\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j}^2 h_j^2 (1-c_{0,i,j})}, \mu_m \geq 0, \quad (E.7)$$

$$\overline{LXX2} = \frac{-3\eta_k [4(1-c_{0,i,j})\delta_{m,k} + c_{0,i,j} \omega_k]}{4\sigma_{t,i,j} h_j (1-c_{0,i,j})}, \quad (E.8)$$

$$\overline{LXX3}_{m,k}^{in} = \frac{3 \eta_k (4(1-c_{0,i,j}) (2\mu_m \pm \sigma_{t,i,j} \ell_i) \delta_{m,k} + c_{0,i,j} \omega_k [2(\mu_m + \mu_k) \pm \sigma_{t,i,j} \ell_i])}{4 \sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j (1-c_{0,i,j})}, \quad \mu_m \geq 0, \quad (\text{E.9})$$

$$\overline{LXX3}_{m,k}^{out} = \frac{3 \eta_k (4(1-c_{0,i,j}) (2\mu_m \mp \sigma_{t,i,j} \ell_i) \delta_{m,k} + c_{0,i,j} \omega_k [2(\mu_m + \mu_k) \mp \sigma_{t,i,j} \ell_i])}{4 \sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j (1-c_{0,i,j})}, \quad \mu_m \geq 0, \quad (\text{E.10})$$

$$\hat{S}_{m,i,j}^1 = \frac{6\eta_m}{\sigma_{t,i,j} h_j} \frac{Q}{\sigma_{t,i,j} (1-c_{0,i,j})}, \quad (\text{E.11})$$

$$\overline{MXX1} = \left[ \left( \overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out} \right) - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \left( \overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in} \right) \right] \overline{RX}^{in^{-1}}, \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} \overline{MXX2} &= \left( I - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \right) \overline{LXX0} - \\ &- \left[ \left( \overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out} \right) - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \left( \overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in} \right) \right] \overline{RX}^{in^{-1}} \overline{LX0}, \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$\overline{MXX3} = \left( I - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \right) \overline{LXX2}, \quad (\text{E.14})$$

$$\overline{MXX4} = \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}}, \quad (\text{E.15})$$

$$\begin{aligned} \overline{MXX5} &= \overline{LXX1}^{out} - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \overline{LXX1}^{in} - \\ &- \left[ \left( \overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out} \right) - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \left( \overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in} \right) \right] \overline{RX}^{in^{-1}} \overline{LX1}^{in}, \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

$$\overline{MXX6} = \overline{LXX3}^{out} - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \overline{LXX3}^{in}, \quad (\text{E.17})$$

$$\overline{SXX} = \left( I - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \right) \hat{S}^1 - \left[ \left( \overline{X\lambda}^{out} + \overline{XY}^{out} \right) - \overline{RX}^{out} \overline{RX}^{in^{-1}} \left( \overline{X\lambda}^{in} + \overline{XY}^{in} \right) \right] \overline{RX}^{in^{-1}} \hat{S}^0. \quad (\text{E.18})$$

**APÊNDICE F** - Definição das matrizes envolvidas na forma matricial das soluções das equações  $S_N$  integradas transversalmente de primeira ordem na direção  $y$

$$\overline{Y\lambda}_{m,k}^{in} = \tilde{\lambda}_{m,k} e^{\mp\sigma_{t,ij} h_j/2v_k}, \eta_m \geq 0, \quad (F.1)$$

$$\overline{Y\lambda}_{m,k}^{out} = \tilde{\lambda}_{m,k} e^{\pm\sigma_{t,ij} h_j/2v_k}, \eta_m \geq 0, \quad (F.2)$$

$$\overline{YY}_{m,k}^{in} = \mp \tilde{Y}_{m,k} e^{\mp\sigma_{t,ij} h_j/2v_k}, \eta_m \geq 0, \quad (F.3)$$

$$\overline{YY}_{m,k}^{out} = \pm \tilde{Y}_{m,k} e^{\pm\sigma_{t,ij} h_j/2v_k}, \eta_m \geq 0, \quad (F.4)$$

$$\overline{LYY0} = \frac{-3|\mu_k| [4(1-c_{0,ij})\mu_m \delta_{m,k} + c_{0,ij} \omega_k (\mu_m + \mu_k)]}{2\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 (1-c_{0,ij})}, \quad (F.5)$$

$$\overline{LYY1}_{m,k}^{in} = \frac{3|\mu_k| [4(1-c_{0,ij}) (4\eta_m \pm \sigma_{t,ij} h_j) \mu_m \delta_{m,k} + c_{0,ij} \omega_k (\mu_m [2(2\eta_m + \eta_k) \pm \sigma_{t,ij} h_j] + \mu_k [2(\eta_m + 2\eta_k) \pm \sigma_{t,ij} h_j])]}{2\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij} h_j (1-c_{0,ij})}, \eta_m \geq 0, \quad (F.6)$$

$$\overline{LYY1}_{m,k}^{out} = \frac{3|\mu_k| [4(1-c_{0,ij}) (4\eta_m \mp \sigma_{t,ij} h_j) \mu_m \delta_{m,k} + c_{0,ij} \omega_k (\mu_m [2(2\eta_m + \eta_k) \mp \sigma_{t,ij} h_j] + \mu_k [2(\eta_m + 2\eta_k) \mp \sigma_{t,ij} h_j])]}{2\sigma_{t,ij}^2 \ell_i^2 \sigma_{t,ij} h_j (1-c_{0,ij})}, \eta_m \geq 0, \quad (F.7)$$

$$\overline{LYY2} = \frac{-3\mu_k [4(1-c_{0,ij}) \delta_{m,k} + c_{0,ij} \omega_k]}{4\sigma_{t,ij} \ell_i^2 (1-c_{0,ij})}, \quad (F.8)$$

$$\overline{LYY3}_{m,k}^{in} = \frac{3\mu_k(4(1-c_{0,i,j})(2\eta_m \pm \sigma_{t,i,j} h_j) \delta_{m,k} + c_{0,i,j} \omega_k [2(\eta_m + \eta_k) \pm \sigma_{t,i,j} h_j])}{4\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j (1-c_{0,i,j})}, \quad \eta_m \geq 0, \quad (\text{F.9})$$

$$\overline{LYY3}_{m,k}^{out} = \frac{3\mu_k(4(1-c_{0,i,j})(2\eta_m \mp \sigma_{t,i,j} h_j) \delta_{m,k} + c_{0,i,j} \omega_k [2(\eta_m + \eta_k) \mp \sigma_{t,i,j} h_j])}{4\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} h_j (1-c_{0,i,j})}, \quad \eta_m \geq 0, \quad (\text{F.10})$$

$$\tilde{S}_{m,i,j}^1 = \frac{6\mu_m}{\sigma_{t,i,j} \ell_i \sigma_{t,i,j} (1-c_{0,i,j})} Q, \quad ,$$

(F.11)

$$\begin{aligned} \overline{MYY1} &= \left( I - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \right) \overline{LYY0} - \\ &- \left[ \left( \overline{Y\lambda}^{out} + \overline{YY}^{out} \right) - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \left( \overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in} \right) \right] \overline{RY}^{in-1} \overline{LY0}, \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

$$\overline{MYY2} = \left( I - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \right) \overline{LYY2}, \quad (\text{F.13})$$

$$\overline{MYY3} = \left[ \left( \overline{Y\lambda}^{out} + \overline{YY}^{out} \right) - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \left( \overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in} \right) \right] \overline{RY}^{in-1}, \quad (\text{F.14})$$

$$\begin{aligned} \overline{MYY4} &= \overline{LYY1}^{out} - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \overline{LYY1}^{in} - \\ &- \left[ \left( \overline{Y\lambda}^{out} + \overline{YY}^{out} \right) - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \left( \overline{Y\lambda}^{in} + \overline{YY}^{in} \right) \right] \overline{RY}^{in-1} \overline{LY1}^{in}, \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

$$\overline{MYY5} = \overline{LYY3}^{out} - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in-1} \overline{LYY3}^{in}, \quad (\text{F.16})$$

$$\overline{MYY6} = \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}}, \quad (F.17)$$

$$\overline{SYY} = \left( I - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}} \right) \tilde{S}^1 - \left[ \left( \overline{Y\lambda}^{out} + \overline{Y\gamma}^{out} \right) - \overline{RY}^{out} \overline{RY}^{in^{-1}} \left( \overline{Y\lambda}^{in} + \overline{Y\gamma}^{in} \right) \right] \overline{RY}^{in^{-1}} \tilde{S}^0. \quad (F.18)$$

**APÊNDICE G** - Definição das matrizes envolvidas na equação de matriz resposta de ordem zero

$$\overline{M11} = I - (\overline{MXX5} + \overline{MXX6})(\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) , \quad (G.1)$$

$$\overline{M12} = I - \overline{MY3} \overline{M11}^{-1} (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) , \quad (G.2)$$

$$\overline{M13} = I - (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{MY3} , \quad (G.3)$$

$$\overline{M14} = I - (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M13}^{-1} (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) , \quad (G.4)$$

$$\begin{aligned} \overline{M15} = I - \overline{MX2} \overline{M12}^{-1} & \left[ \overline{MY1} + \overline{MY3} \overline{M11}^{-1} (\overline{MXX5} + \overline{MXX6})(\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \right] - \\ - \overline{MX3} \overline{M14}^{-1} & \left[ (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) + (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M13}^{-1} (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{MY1} \right] , \end{aligned} \quad (G.5)$$

$$\begin{aligned} \overline{R11} = \overline{M15}^{-1} \overline{MX1} + \\ + \overline{M15}^{-1} \overline{MX2} \overline{M12}^{-1} & \left( \overline{MY3} \overline{M11}^{-1} [\overline{MXX1} - (\overline{MXX5} + \overline{MXX6})(\overline{MYY1} - \overline{MYY2})] - \overline{MY1} \right) + \\ + \overline{M15}^{-1} \overline{MX3} \overline{M14}^{-1} & (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M13}^{-1} [\overline{MXX1} - (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{MY1}] - \\ - \overline{M15}^{-1} \overline{MX3} \overline{M14}^{-1} & (\overline{MYY1} - \overline{MYY2}) , \end{aligned} \quad (G.6)$$

$$\begin{aligned}
\overline{R12} = & -\overline{M15}^{-1}\overline{MX2} + \\
& + \overline{M15}^{-1}\overline{MX2}\overline{M12}^{-1}\left(\overline{MY3}\overline{M11}^{-1}\left[(\overline{MXX5} + \overline{MXX6})\overline{MYY3} - (\overline{MXX2} - \overline{MXX3})\right] + \overline{MY2}\right) + \\
& + \overline{M15}^{-1}\overline{MX3}\overline{M14}^{-1}\left(\overline{MYY4} + \overline{MYY5}\right)\overline{M13}^{-1}\left[(\overline{MXX2} + \overline{MXX3})\overline{MY2} - (\overline{MXX2} - \overline{MXX3})\right] + \\
& + \overline{M15}^{-1}\overline{MX3}\overline{M14}^{-1}\overline{MYY3}, \tag{G.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R13} = & \overline{M15}^{-1}\overline{MX2}\overline{M12}^{-1}\overline{MY3}\overline{M11}^{-1}\left[\overline{MXX4} - (\overline{MXX5} + \overline{MXX6})(\overline{MYY4} - \overline{MYY5})\right] - \\
& - \overline{M15}^{-1}\overline{MX2}\overline{M12}^{-1}\overline{MY3} + \\
& + \overline{M15}^{-1}\overline{MX3}\overline{M14}^{-1}\left(\overline{MYY4} + \overline{MYY5}\right)\overline{M13}^{-1}\left[\overline{MXX4} - (\overline{MXX2} + \overline{MXX3})\overline{MY3}\right] - \\
& - \overline{M15}^{-1}\overline{MX3}\overline{M14}^{-1}\left(\overline{MYY4} - \overline{MYY5}\right), \tag{G.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R14} = & -\overline{M15}^{-1}\overline{MX3} + \overline{M15}^{-1}\overline{MX2}\overline{M12}^{-1}\overline{MY3}\overline{M11}^{-1}\left(\overline{MXX5} + \overline{MXX6}\right)\overline{MYY6} - \\
& - \overline{M15}^{-1}\overline{MX2}\overline{M12}^{-1}\overline{MY3}\overline{M11}^{-1}\left(\overline{MXX5} - \overline{MXX6}\right) + \\
& + \overline{M15}^{-1}\overline{MX3}\overline{M14}^{-1}\left[\overline{MYY6} - (\overline{MYY4} + \overline{MYY5})\overline{M13}^{-1}\left(\overline{MXX5} - \overline{MXX6}\right)\right], \tag{G.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S1} = & \overline{M15}^{-1}\overline{SX} + \overline{M15}^{-1}\overline{MX2}\overline{M12}^{-1}\left(\overline{MY3}\overline{M11}^{-1}\left[(\overline{MXX5} + \overline{MXX6})\overline{SY} + \overline{SXX}\right] + \overline{SY}\right) + \\
& + \overline{M15}^{-1}\overline{MX3}\overline{M14}^{-1}\left(\overline{MYY4} + \overline{MYY5}\right)\overline{M13}^{-1}\left[(\overline{MXX2} + \overline{MXX3})\overline{SY} + \overline{SXX}\right] + \overline{SYY}, \tag{G.10}
\end{aligned}$$

$$\overline{M21} = I - (\overline{MYY4} + \overline{MYY5})(\overline{MXX5} + \overline{MXX6}), \quad (\text{G.11})$$

$$\overline{M22} = I - \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}), \quad (\text{G.12})$$

$$\overline{M23} = I - (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{MX3}, \quad (\text{G.13})$$

$$\overline{M24} = I - (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}), \quad (\text{G.14})$$

$$\begin{aligned} \overline{M25} = I - \overline{MY1} \overline{M22}^{-1} & \left[ \overline{MX2} + \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5})(\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \right] - \\ & - \overline{MY3} \overline{M24}^{-1} \left[ (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) + (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{MX2} \right], \quad (\text{G.15}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{R21} = & - \overline{M25}^{-1} \overline{MY1} + \\ & + \overline{M25}^{-1} \overline{MY1} \overline{M22}^{-1} \left( \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} [(\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{MXX1} - (\overline{MYY1} - \overline{MYY2})] + \overline{MX1} \right) + \\ & + \overline{M25}^{-1} \overline{MY3} \overline{M24}^{-1} (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} [(\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{MX1} - (\overline{MYY1} - \overline{MYY2})] + \\ & + \overline{M25}^{-1} \overline{MY3} \overline{M24}^{-1} \overline{MXX1}, \quad (\text{G.16}) \end{aligned}$$

$$\overline{R22} = \overline{M25}^{-1} \overline{MY2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{M25}^{-1} \overline{MY1} \overline{M22}^{-1} \left( \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} [\overline{MYY3} - (\overline{MYY4} + \overline{MYY5})(\overline{MXX2} - \overline{MXX3})] - \overline{MX2} \right) + \\
& + \overline{M25}^{-1} \overline{MY3} \overline{M24}^{-1} (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} [\overline{MYY3} - (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{MX2}] - \\
& - \overline{M25}^{-1} \overline{MY3} \overline{M24}^{-1} (\overline{MXX2} - \overline{MXX3}), \tag{G.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R23} = & - \overline{M25}^{-1} \overline{MY3} + \overline{M25}^{-1} \overline{MY1} \overline{M22}^{-1} \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{MXX4} - \\
& - \overline{M25}^{-1} \overline{MY1} \overline{M22}^{-1} \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} (\overline{MYY4} - \overline{MYY5}) + \\
& + \overline{M25}^{-1} \overline{MY3} \overline{M24}^{-1} \left[ \overline{MXX4} - (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} (\overline{MYY4} - \overline{MYY5}) \right], \tag{G.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R24} = & \overline{M25}^{-1} \overline{MY1} \overline{M22}^{-1} \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} [\overline{MYY6} - (\overline{MYY4} + \overline{MYY5})(\overline{MXX5} - \overline{MXX6})] - \\
& - \overline{M25}^{-1} \overline{MY1} \overline{M22}^{-1} \overline{MX3} + \\
& + \overline{M25}^{-1} \overline{MY3} \overline{M24}^{-1} (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} [\overline{MYY6} - (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{MX3}] - \\
& - \overline{M25}^{-1} \overline{MY3} \overline{M24}^{-1} (\overline{MXX5} - \overline{MXX6}), \tag{G.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S2} = & \overline{M25}^{-1} \overline{SY} + \overline{M25}^{-1} \overline{MY1} \overline{M22}^{-1} \left( \overline{MX3} \overline{M21}^{-1} [(\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{SXX} + \overline{SY Y}] + \overline{SX} \right) \\
& + \overline{M25}^{-1} \overline{MY3} \overline{M24}^{-1} \left( (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M23}^{-1} [(\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{SX} + \overline{SY Y}] + \overline{SXX} \right), \tag{G.20}
\end{aligned}$$

**APÊNDICE H** - Definição das matrizes envolvidas na equação de matriz resposta de primeira ordem

$$\overline{M31} = I - \overline{MX3}(\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) , \quad (\text{H.1})$$

$$\overline{M32} = I - \overline{MY1} \overline{M31}^{-1} \overline{MX2} , \quad (\text{H.2})$$

$$\overline{M33} = I - \overline{MX2} \overline{MY1} , \quad (\text{H.3})$$

$$\overline{M34} = I - (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M33}^{-1} \overline{MX3} , \quad (\text{H.4})$$

$$\begin{aligned} \overline{M35} = I - (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M32}^{-1} & \left[ \overline{MY3} + \overline{MY1} \overline{M31}^{-1} \overline{MX3} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \right] - \\ - (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M34}^{-1} & \left[ (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) + (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M33}^{-1} \overline{MX2} \overline{MY3} \right] , \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

$$\begin{aligned} \overline{R31} = \overline{M35}^{-1} \overline{MXX1} + \\ + \overline{M35}^{-1} (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M32}^{-1} \overline{MY1} & \left( \overline{M31}^{-1} [\overline{MX1} - \overline{MX3} (\overline{MYY1} - \overline{MYY2})] - I \right) + \\ + \overline{M35}^{-1} (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M34}^{-1} & (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M33}^{-1} (\overline{MX1} - \overline{MX2} \overline{MY1}) - \\ - \overline{M35}^{-1} (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \overline{M34}^{-1} & (\overline{MYY1} - \overline{MYY2}), \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

$$\begin{aligned}
\overline{R32} = & -\overline{M35}^{-1}(\overline{MXX2} - \overline{MXX3}) + \\
& + \overline{M35}^{-1}(\overline{MXX2} + \overline{MXX3})\overline{M32}^{-1}\left[\overline{MY1}\overline{M31}^{-1}(\overline{MX3}\overline{MYY3} - \overline{MX2}) + \overline{MY2}\right] + \\
& + \overline{M35}^{-1}(\overline{MXX5} + \overline{MXX6})\overline{M34}^{-1}\left[(\overline{MYY1} + \overline{MYY2})\overline{M33}^{-1}\overline{MX2}(\overline{MY2} - I) + \overline{MYY3}\right], \quad (H.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R33} = & \overline{M35}^{-1}\overline{MXX4} - \overline{M35}^{-1}(\overline{MXX2} + \overline{MXX3})\overline{M32}^{-1}\overline{MY1}\overline{M31}^{-1}\overline{MX3}(\overline{MYY4} - \overline{MYY5}) - \\
& - \overline{M35}^{-1}(\overline{MXX2} + \overline{MXX3})\overline{M32}^{-1}\overline{MY3} - \\
& - \overline{M35}^{-1}(\overline{MXX5} + \overline{MXX6})\overline{M34}^{-1}(\overline{MYY1} + \overline{MYY2})\overline{M33}^{-1}\overline{MX2}\overline{MY3} - \\
& - \overline{M35}^{-1}(\overline{MXX5} + \overline{MXX6})\overline{M34}^{-1}(\overline{MYY4} - \overline{MYY5}), \quad (H.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R34} = & -\overline{M35}^{-1}(\overline{MXX5} - \overline{MXX6}) + \\
& + \overline{M35}^{-1}(\overline{MXX2} + \overline{MXX3})\overline{M32}^{-1}\overline{MY1}\overline{M31}^{-1}\overline{MX3}(\overline{MYY6} - I) + \\
& + \overline{M35}^{-1}(\overline{MXX5} + \overline{MXX6})\overline{M34}^{-1}\left[\overline{MYY6} - (\overline{MYY1} + \overline{MYY2})\overline{M33}^{-1}\overline{MX3}\right], \quad (H.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S3} = & \overline{M35}^{-1}\overline{SXX} + \overline{M35}^{-1}(\overline{MXX2} + \overline{MXX3})\overline{M32}^{-1}\left[\overline{MY1}\overline{M31}^{-1}(\overline{MX3}\overline{SY} + \overline{SX}) + \overline{SY}\right] + \\
& + \overline{M35}^{-1}(\overline{MXX5} + \overline{MXX6})\overline{M34}^{-1}\left[(\overline{MYY1} + \overline{MYY2})\overline{M33}^{-1}(\overline{MX2}\overline{SY} + \overline{SX}) + \overline{SYY}\right], \quad (H.10)
\end{aligned}$$

$$\overline{M41} = I - \overline{MY3}(\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) , \quad (\text{H.11})$$

$$\overline{M42} = I - \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} \overline{MY1} , \quad (\text{H.12})$$

$$\overline{M43} = I - \overline{MY1} \overline{MX2} , \quad (\text{H.13})$$

$$\overline{M44} = I - (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} \overline{MY3} , \quad (\text{H.14})$$

$$\begin{aligned} \overline{M45} = I - (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M42}^{-1} & \left[ \overline{MX3} + \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} \overline{MY3} (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) \right] - \\ - (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M44}^{-1} & \left[ (\overline{MXX5} + \overline{MXX6}) + (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} \overline{MY1} \overline{MX3} \right] , \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

$$\begin{aligned} \overline{R41} = - \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY1} - \overline{MYY2}) + \\ + \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M42}^{-1} & \left[ \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} (\overline{MY3} \overline{MXX1} - \overline{MY1}) + \overline{MX1} \right] + \\ + \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M44}^{-1} & \left[ (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} \overline{MY1} (\overline{MX1} - I) + \overline{MXX1} \right] , \end{aligned} \quad (\text{H.16})$$

$$\begin{aligned} \overline{R42} = \overline{M45}^{-1} \overline{MYY3} + \\ + \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M42}^{-1} \overline{MX2} & \left( \overline{M41}^{-1} [\overline{MY2} - \overline{MY3} (\overline{MXX2} - \overline{MXX3})] - I \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M44}^{-1} (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} (\overline{MY2} - \overline{MY1} \overline{MX2}) - \\
& - \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M44}^{-1} (\overline{MXX2} - \overline{MXX3}), \tag{H.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R43} = & - \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY4} - \overline{MYY5}) + \\
& + \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M42}^{-1} \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} \overline{MY3} (\overline{MXX4} - I) + \\
& + \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M44}^{-1} \left[ \overline{MXX4} - (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} \overline{MY3} \right], \tag{H.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R44} = & \overline{M45}^{-1} \overline{MYY6} - \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M42}^{-1} \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} \overline{MY3} (\overline{MXX5} - \overline{MXX6}) - \\
& - \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M42}^{-1} \overline{MX3} - \\
& - \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M44}^{-1} (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} \overline{MY1} \overline{MX3} - \\
& - \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M44}^{-1} (\overline{MXX5} - \overline{MXX6}), \tag{H.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S4} = & \overline{M45}^{-1} \overline{SYY} + \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY1} + \overline{MYY2}) \overline{M42}^{-1} \left[ \overline{MX2} \overline{M41}^{-1} (\overline{MY3} \overline{SXX} + \overline{SY}) + \overline{SX} \right] + \\
& + \overline{M45}^{-1} (\overline{MYY4} + \overline{MYY5}) \overline{M44}^{-1} \left[ (\overline{MXX2} + \overline{MXX3}) \overline{M43}^{-1} (\overline{MY1} \overline{SX} + \overline{SY}) + \overline{SXX} \right]. \tag{H.20}
\end{aligned}$$