Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Marcelo Kogut

Renormalização de uma teoria de Yang-Mills massiva no calibre abeliano maximal

Rio de Janeiro
2021

Marcelo Kogut

Renormalização de uma teoria de Yang-Mills massiva no calibre abeliano maximal

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Marcio André Lopes Capri

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

K78r Kogut, Marcelo.
Renormalização de uma teoria de Yang-Mills massiva no calibre abeliano maximal / Marcelo Kogut. – 2021.
57 f. : il.

Orientador: Marcio André Lopes Capri.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Renormalização (Física) – Teses. 2. Yang-Mills, Teoria de – Teses. 3. Campos de calibre (Física) - Teses. 4. Teoria quântica de campos – Teses. I. Capri, Marcio André Lopes. II Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Marcelo Kogut

Renormalização de uma teoria de Yang-Mills massiva no calibre abeliano maximal

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 05 de Julho de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcio André Lopes Capri (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães
Instituto de Física Armando Dias Tavares - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes
Instituto de Física Armando Dias Tavares - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro
Universidade Federal Fluminense - Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Dr. Antonio Duarte Pereira Junior
Universidade Federal Fluminense - Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2021

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação a todos que vieram antes de mim e contribuíram para o desenvolvimento da ciência e aos que estão por vir.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, minha mãe Marta, meu pai Alexandre e meu irmão Renan, por sempre terem se mostrado disponíveis a me ajudar desde sempre e terem me dado condições de estudar nos melhores lugares possíveis, fazendo com que eu me tornasse quem eu sou hoje.

Ao meu orientador Capri, que não só me guiou praticamente durante toda faculdade e mestrado, como também aturou meus momentos de procrastinação (que não foram poucos), se mostrando ser uma pessoa bastante compreensiva e sempre estando presente para ajudar e tirar eventuais dúvidas.

A UERJ, por ser um ambiente de inspiração e se tornado uma segunda casa para todos que estão ali presentes.

Aos meus amigos da faculdade que se eu tivesse que fazer um texto para cada um, a sessão de agradecimentos acabaria sendo maior do que a própria dissertação. Em especial agradeço a Roberta, uma das pessoas mais maravilhosas que já tive o prazer de conhecer, o Roberto que mora no meu coração, o Perrotta, meu amigo mais antigo da faculdade que me acompanhou nessa jornada não só acadêmica como social proporcionando ótimos momentos, o Jojo, uma das pessoas mais inteligentes que conheci durante a graduação e que possui um coração enorme, o Renan, um grande amigo e companheiro de jogatinas, a Sari e a Dfnae que são pessoas incríveis das quais palavras são difíceis de descrever, o Rosquinha que é uma pessoa extremamente disposta a ajudar os outros, o Bigod, meu parceiro bacharel e mestrado, o Felipe, meu companheiro de orientação, o Hack, meu veterano cuja risada é contagiante, se mostrando uma pessoa capaz de conversar sobre qualquer coisa.

Aos meus amigos do ORT que ainda estão presentes na minha vida, em especial devo mencionar o grupo “4 brasileiros e 1 kogut” que possui o PPS, Karina (que eu espero que me bote nos agradecimentos da dissertação dela - jamais esquecerei da monografia), Pava e Xande, e por último, mas não menos importantes, o Handel, Tamir e Danilo.

Agradeço também a todos os professores maravilhosos que tive durante minha formação que me ajudaram no acúmulo de conhecimentos. Entre eles estão o já mencionado Capri, Sorella, Oguri, Henrique, Aranha, Bruno Alho, Hamilton, Regina, Vinicius e Rudnei.

Aos funcionários da secretaria, em especial o Ronan, que não só está sempre disposto a ajudar quem precisa, como também se mostra um bom companheiro de bar, e aos funcionários da biblioteca.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

KOGUT, M. *Renormalização de uma teoria de Yang-Mills massiva no calibre abeliano maximal.* 2021. 57 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Essa dissertação tem como objetivo não só abordar os conceitos da renormalização algébrica, introduzindo os passos necessários para quantização de uma teoria e os procedimentos que devem ser tomados na escolha de um calibre específico, mas também mostrar que a ação escolhida no calibre maximal abeliano (MAG) com a adição de um termo massivo é renormalizável.

Palavras-chave: Renormalização algébrica. MAG. TQC.

ABSTRACT

KOGUT, M. *Renormalization of a massive Yang-Mills theory in the maximal abelian gauge*. 2021. 57 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

This dissertation has the objective of not only approach the algebraic renormalization, introducing the necessary steps for the quantization of a theory and the procedures that must be taken when choosing a specific gauge, but also show that the chosen action in the maximal abelian gauge (MAG) with the addition of a mass term is renormalizable.

Keywords: Algebraic renormalization. MAG. QFT.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Teoria Quântica de Campos (TQC) surgiu como uma linguagem para o estudo de interações entre partículas, embora encontre aplicações em outras áreas da física como, por exemplo, no estudo de fenômenos críticos em mecânica estatística (ZINN-JUSTIN, 1993), reunindo em uma única estrutura os conceitos de mecânica quântica e da relatividade restrita (SCHWINGER, 1958; GREINER; REINHARDT, 2013; GOMES, 2002; CAPRI, 2005)

Entretanto, associado a esta teoria, existe o problema das divergências na região ultravioleta, ou seja, singularidades em integrais no espaço de momentos causadas por mau comportamento de seus integrandos. A origem deste problema é atribuída à ocorrência de produtos de distribuições no mesmo ponto, que aparecem nos cálculos da teoria de perturbações (GOMES, 2002; PIGUET; SORELLA, 2008)

A solução do problema destas divergências veio com a chamada renormalização. O conceito básico de renormalização decorre do fato de que as massas e as cargas de partículas descritas por uma certa teoria são, em geral, modificadas pela interação. Em outras palavras, as interações têm o efeito de gerar correções quânticas sobre os parâmetros característicos de uma partícula (GOMES, 2002; PIGUET; SORELLA, 2008; BAILIN; LOVE, 1993)

No caso particular da quantização das teorias de calibre, o método de Faddeev-Popov, no qual se introduzem os campos de *ghost*, e a simetria de BRST, que é uma extensão da simetria de calibre, permitiram a utilização de métodos puramente algébricos na discussão da renormalizabilidade destas teorias, uma vez que, estas, a partir da simetria de BRST, ficam caracterizadas por um conjunto de invariâncias locais e/ou rígidas.

Apesar de todo o avanço no setor ultravioleta referente ao controle das divergências, o problema do infravermelho tem avançado muito mais lentamente (ALKOFER; SMEKAL, 2001). O tratamento deste problema é feito através da introdução de uma massa para os campos de calibre.

Contudo, historicamente, a introdução da massa gera uma dificuldade de renormalização. Uma solução para o problema de massa foi eventualmente encontrado através da introdução do mecanismo de quebra espontânea de simetria, chamado de mecanismo de Higgs. Desta forma, Weinberg e Salam estabeleceram o modelo unificado de sucesso para interações fracas e eletromagnéticas.

Porém o mecanismo de Higgs introduzido em uma teoria de campo de calibre, quebra a simetria de calibre devido à quebra espontânea de simetria do vácuo. Da mesma forma, quando fazemos o vácuo se tornar invariante de calibre por uma translação do campo escalar, a lagrangiana perderá a simetria de calibre original. Sendo assim, questiona-se se uma teoria de campo de calibre pode ser estabelecida com base no princípio da invariância de calibre sem depender de nenhum mecanismo de Higgs.

Várias tentativas de responder a esta questão foram realizadas ao longo das décadas. Dentre estas, podemos citar a prescrição de Stueckelberg, que garante a invariância de calibre do termo de massa na lagrangiana introduzindo um campo escalar adicional que leva o nome de Stueckelberg.

No entanto, os formalismos existentes apresentam alguns problemas e foram criticados por serem não renormalizáveis ou não unitários. Contudo, isto não significa que não haja possibilidade de construir uma teoria de campo de calibre massiva não abeliana razoável sem recorrer, necessariamente, ao mecanismo de Higgs.

Esta dissertação é organizada da seguinte maneira: No **capítulo 1**, introduzimos a teoria de Yang-Mills e o método de quantização de Faddeev-Popov, abordando um pouco do problema das *cópias de Gribov* e mostrando a nova simetria que rege a teoria, a simetria de BRST. No **capítulo 2**, escolhemos um calibre específico para trabalhar na teoria já quantizada (Calibre Abeliano Maximal - MAG), onde, primeiramente, mostramos algumas identidades importantes com a separação dos setores diagonais e não diagonais. Em seguida, mostramos como fica a ação diante do calibre de MAG e fazemos uma pequena abordagem histórica da introdução do termo massivo na teoria de Yang-Mills, falando um pouco do modelo de Proca e do modelo de Stueckelberg, que serviram de base para estabelecer a versão local do operador invariante A^2_{min}. Por fim, mostramos que a escolha do calibre do MAG quebra parcialmente a simetria rígida, nos permitindo separar as massas dos setores diagonal e não diagonal. No **capítulo 3**, discutimos como fica a ação mais geral possível com a adição dos termos de fonte e um termo extra que é necessário para as contas futuras. Apos definir a ação de partida mais geral possível, observamos seu conteúdo de simetrias, que correspondem às chamadas identidades de Ward e podemos então utilizá-las para provar a renormalizabilidade da ação de partida, de acordo com a técnica de renormalização algébrica. Finalmente, em **Conclusão**, destacamos os resultados obtidos, fazendo algumas observações e apontando outras possibilidades de trabalhos futuros.

1 INTRODUÇÃO À TEORIA DE YANG-MILLS

1.1 Construção da Ação de Yang-Mills

Como visto em cursos de Teoria de Campos em geral, a lagrangiana da eletrodinâmica quântica (QED[1]) é escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m)\psi\,, \tag{1}$$

em que $F_{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético, A_{μ}, dado por,

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}\,; \tag{2}$$

o par de campos ψ e $\overline{\psi}$ são os campos espinoriais de Diras; γ^{μ} são as matrizes de Dirac;

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu} \tag{3}$$

é a derivada covariante, com e sendo a constante de acoplamento da interação eletromagnética, ou seja, a carga elétrica fundamental; e, finalmente, m é um parâmetro massivo.

Uma forma simples de entender porque esta lagrangiana é tão bem aceita dentro da comunidade da física é analisar sua invariância pelas simetrias de calibre. As simetrias de calibre são simetrias associadas a transformações intrínsecas do campo, consideradas um principio fundamental que nos mostra as simetrias internas de uma dada teoria.

Podemos, inclusive, chegar na expressão (1) analisando justamente essa condição de invariância. Partindo-se do campo complexo de Dirac $\psi(x)$, estipulamos que a teoria seja invariante sob a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} \psi(x) \quad &\rightarrow \quad e^{ie\theta(x)}\psi(x)\,, \\ \overline{\psi}(x) \quad &\rightarrow \quad e^{-ie\theta(x)}\overline{\psi}(x)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

que é uma transformação local de fase por um ângulo $\theta(x)$. Se estivermos buscando termos que não dependem de derivadas, já conseguimos escrever o primeiro termo da lagrangiana; o termo de massa dos férmions, $m\overline{\psi}(x)\psi(x)$.

Agora, quando buscamos os termos com derivadas, a dificuldade começa a surgir. Como pode ser visto em (PESKIN, 2018), ele discute o problema de se olhar para a transformação de $\partial_{\mu}\psi$ e mostra que esta expressão é mal definida para o que queremos.

[1] Do inglês *quantum electrodynamics*.

A derivada subtrai dois campos que possuem transformações diferentes sob a simetria de rotação:

$$n^\mu \partial_\mu \psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[\psi(x + \epsilon n) - \psi(x)] \,. \tag{5}$$

Dessa forma, precisamos definir uma quantidade que compensa essa diferença de um ponto ao outro e colocamos no que chamamos de derivada covariante:

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[\psi(x + \epsilon n) - V(x + \epsilon n, x)\psi(x)] \,. \tag{6}$$

Escrevendo de forma infinitesimal, temos

$$V(x + \epsilon n, x) = 1 - ie\epsilon n^\mu A_\mu(x) + O(\epsilon^2) \,, \tag{7}$$

em que e surge como uma constante arbitrária finita (só posteriormente interpreta-se esta com a carga elétrica fundamental). Assim, a derivada covariante é dada por

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + ieA_\mu \psi(x) \,. \tag{8}$$

Além disso, tendo a transformação de $V(y, x)$,

$$V(y, x) \quad \to \quad e^{ie\theta(y)} V(y, x) e^{-ie\theta(x)} \,, \tag{9}$$

podemos obter a lei de transformação de $A_\mu(x)$ substituindo $V(y, x)$, na expressão acima, por sua forma infinitesimal (7). Isso resultará em:

$$A_\mu(x) \quad \to \quad A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \,. \tag{10}$$

Com isso, podemos verificar que a transformação da derivada covariante atuando no campo é dada por:

$$D_\mu \psi(x) \quad \to \quad e^{ie\alpha(x)} D_\mu \psi(x) \,, \tag{11}$$

que se assemelha a transformação de $\psi(x)$.

Portanto, agora fica fácil escrevermos mais um termo invariante pela transformação; que consiste em multiplicar a derivada covariante por $\overline{\psi}(x)$ e γ^μ para manter a invariância de Lorentz. Nos deparamos então com a seguinte expressão:

$$\overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \,, \tag{12}$$

que é a lagrangiana de Dirac com uma derivada covariante.

Percebemos então que a derivada covariante e a própria existência do campo A_μ surge como consequência do postulado da simetria de rotação. Porém, dado que temos a adição de um novo campo (A_μ), precisamos achar o termo cinético atrelado a este campo, ou seja, um termo que depende somente de A_μ e suas derivadas. Uma maneira simples de fazer isso é analisando o comutador de derivadas covariantes, pois se a derivada covariante de ψ se transforma da mesma forma que o campo, então o produto de derivadas covariantes também vai seguir a mesma transformação:

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \quad \rightarrow \quad e^{ie\theta(x)}[D_\mu, D_\nu]\psi(x)\,. \tag{13}$$

Portanto, o comutador das derivadas covariantes não é uma derivada:

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu]\psi(x) &= [\partial_\mu + ieA_\mu, \partial_\nu + ieA_\nu]\psi(x) \\ &= [\partial_\mu, \partial_\nu]\psi + ie([\partial_\mu, A_\nu] - [\partial_\nu, A_\mu])\psi - e^2[A_\mu, A_\nu]\psi \\ &= ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Assim, definimos o tensor $F_{\mu\nu}$ como sendo

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}\,, \tag{15}$$

e podemos perceber, através da transformação (13), que o comutador é invariante.

Finalmente, para mantermos a invariância de Lorentz da densidade lagrangiana, tomamos o quadrado de $F_{\mu\nu}$ e assim obtemos o termo cinético para o campo A_μ (dado pela lagrangiana de Maxwell) e, juntando com o outro termo que achamos na equação (12), geramos a conhecida langrangiana da QED[2] (1).

Apesar da QED descrever muito bem elétrons e fótons, ela não é suficiente para descrever todas as interações das partículas elementares. Isto se dá pois estamos lidando com transformações de calibre que comutam, em outras palavras, estamos lidando com o caso abeliano, ou seja,

$$e^{-ie\theta}e^{-ie\theta'} = e^{-ie\theta'}e^{-ie\theta}\,. \tag{16}$$

Porém, no caso mais geral, podemos ter transformações não comutantes (não abelianas):

$$\begin{aligned}\psi(x) \quad &\rightarrow \quad U(x)\psi(x)\,, \\ \overline{\psi}(x) \quad &\rightarrow \quad \overline{\psi}(x)U^\dagger(x)\,,\end{aligned} \tag{17}$$

[2] Com essa análise, também seria possível a adição de um termo proporcional a $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$, porém este termo não respeita as simetrias P (paridade) e T (inversão temporal), sendo então descartado.

em que, no caso do grupo SU(N), podemos escrever

$$U(x) = \exp(ig\theta^a(x)T^a), \quad [T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad UU^\dagger = 1\,, \tag{18}$$

sendo g uma constante de acoplamento, T^a os geradores do grupo e f^{abc} a constante de estrutura do grupo. Além disso, no caso do grupo SU(N), os índices a, b, c e etc vão de 1 até $N^2 - 1$.

Da mesma forma que fizemos com o caso abeliano, precisamos definir a derivada covariante. Tomando os devidos cuidados, podemos chegar nas seguintes relações:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = \partial_\mu - igT^aA^a_\mu\,, \tag{19}$$

$$A_\mu \quad \to \quad U^\dagger A_\mu U + \frac{i}{g}U^\dagger(\partial_\mu U)\,. \tag{20}$$

Ou então, a partir da forma infinitesimal:

$$\begin{aligned} A_\mu \quad &\to \quad (1 - ig\theta^aT^a)A^b_\mu T^b(1 + ig\theta^cT^c) + \frac{i}{g}(1 - ig\theta^aT^a)\partial_\mu(1 + ig\theta^bT^b) \\ &= A_\mu - (\partial_\mu\theta^a)T^a - gf^{abc}A^b_\mu\theta^cT^a\,, \\ A^a_\mu \quad &\to \quad A^a_\mu - (\partial_\mu\theta^a) - gf^{abc}A^b_\mu\theta^c\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Assim, podemos escrever o termo mais geral envolvendo o campo ψ que seja invariante de calibre:

$$\overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x)\,, \tag{22}$$

cuja forma é identica a (12), porém, com D_μ sendo dado por (19).

Mais uma vez, seguimos os passos da teoria abeliana e precisamos escrever o termo invariante de calibre que só depende de A^a_μ e suas derivadas. Para isso, construimos o análogo do tensor eletromagnético e montamos o comutador das derivadas covariantes:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\psi &= [\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu]\psi \\ &= [\partial_\mu, \partial_\nu]\psi - ig([\partial_\mu, A_\nu] - [\partial_\nu.A_\mu])\psi - g^2[A_\mu, A_\nu]\psi \\ &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]) \\ &= -ig(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu) = -igF^a_{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Vemos que agora na equação (23) o termo $[A_\mu, A_\nu]$ não zera pelo fato de estarmos lidando com teorias não-abelianas, porém, o comutador continua não sendo uma derivada e sim um fator multiplicativo atuando em ψ. Uma outra consequência da generalização não abeliana é que a lei de transformação do tensor $F_{\mu\nu}$ é agora dada por:

$$F_{\mu\nu} \quad \to \quad U^{\dagger} F_{\mu\nu} U \,. \tag{24}$$

Assim, para gerarmos o termo invariante de calibre e escalar de Lorentz, não podemos simplesmente fazer $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (inclusive pelo fato de $F_{\mu\nu}$ ser agora uma matriz). Precisamos então tirar o traço desta operação, pois,

$$\mathrm{tr}[ABC] = \mathrm{tr}[CAB] = \mathrm{tr}[BCA] \,, \tag{25}$$

logo,

$$\mathrm{tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \quad \to \quad \mathrm{tr}[U^{\dagger}F^{\mu\nu}UU^{\dagger}F_{\mu\nu}U] \;=\; \mathrm{tr}[U^{\dagger}UF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \;=\; \mathrm{tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \,. \tag{26}$$

Como podemos notar, temos agora o termo que só depende de A_{μ} e suas derivadas e é invariante de calibre. Reunindo tudo isto na lagrangiana, temos, então,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] + \overline{\psi}(x)(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m)\psi(x) \,, \tag{27}$$

em que o primeiro termo, quando integrado em todo o espaço-tempo, gera a chamada de *ação de Yang-Mills*[3] (YM),

$$S_{YM} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{a\mu\nu}F^{a}_{\mu\nu} \,, \tag{28}$$

sendo que, na última passagem, usamos a normalização

$$\mathrm{tr}[T^aT^b] = \frac{1}{2}\,\delta^{ab} \,. \tag{29}$$

1.2 Método de Faddeev-Popov

Quando vamos tratar da quantização de uma teoria de campos, podemos optar pela quantização por integração funcional dos campos (ou integrais de caminho de Feynman).

[3] A rigor, esta seria a chamada *ação de Yang-Mill pura*, por envolver apenas os campos de calibre, deixando de lado o setor de matéria. Porém, ao longo do texto, iremos nos referir a esta ação como, simplesmente, ação de Yang-Mill.

Trabalhando a partir de agora no espaço quadridimensional euclidiano[4], define-se, para um campo escalar, a seguinte função de partição:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int [d\phi] e^{-S[\phi]} \,. \tag{30}$$

Nesta, $[d\phi]$ a medida funcional que nos diz que a integração é feita sobre todas as configurações do campo ϕ; o termo exponencial, $e^{iS[\phi]}$, tem a função de um peso de Boltzmann; e $S[\phi]$ é a ação clássica do modelo. A partir da função de partição é possível extrair as funções de n-pontos, que são fundamentais em teoria de campos.

Porém, quando estamos lidando com a quantização de teorias de calibre (sejam elas abelianas ou não), não podemos fazer uma substituição ingênua do campo ϕ pelo campo de calibre A_μ na equação (30), ou seja,

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int [dA] e^{-S[A]} \,, \tag{31}$$

pois, como dito anteriormente, a integração em $[dA]$ nos diz que ela está sendo feita sobre todas as configurações do campo A_μ e existe um conjunto de transformções (20) que geram representações equivalentes, ou seja,

$$S[A^U] = S[A] \,, \tag{32}$$

em que

$$A^U_\mu = U^{-1} A_\mu U + \frac{i}{g} U^{-1} (\partial_\mu U) \,. \tag{33}$$

É natural introduzirmos então o conceito de órbita de calibre $\mathcal{O}_A$ de uma dada configuração A_μ:

$$\mathcal{O}_A = \left\{ U \,;\, A^U_\mu = U^{-1} A_\mu U + \frac{i}{g} U^{-1} (\partial_\mu U) \right\} \,, \tag{34}$$

que consiste justamente nas configurações equivalentes que podem ser obtidas com a transformação de calibre de A_μ. Em princípio, para eliminar essa supercontagem dos campos equivalentes, seria necessário selecionar apenas um representante de cada órbita. Esse procedimento restringe o espaço para o que chamamos de Região Modular Fundamental. Porém, não temos à nossa disposição uma maneira prática de implementar esta região à

[4] Neste espaço o tensor métrico é uma delta de Kronecker, $\delta_{\mu\nu}$, portanto, as quatro coordenadas deste espaço são, de fato, espaciais, não havendo assim uma coordenada temporal. Dessa forma, não há mais distinção entre vetores covariantes e contravariantes, logo, adota-se a notação com todos os índices subescritos. A passagem entre os espaços de Minkowski e Euclides se dá pela chamada rotação de Wick (GREINER; REINHARDT, 2013)

integral de trajetória. O método que temos para nos manter o mais perto possível desta região é o chamado método de Faddeev-Popov (FADDEEV; POPOV, 1967) que consiste em estabelecer uma fixação de calibre.

O que a fixação de calibre faz é impor uma condição adicional para o campo A_μ, ou seja, peguemos o exemplo do calibre de Landau:

$$\partial_\mu A^a_\mu = 0\,. \tag{35}$$

Para que esse calibre seja capaz de selecionar apenas um representante de cada órbita, significa que a seguinte equação

$$\partial_\mu A^U_\mu = \partial_\mu \left(U^{-1} A_\mu U + \frac{i}{g} U^{-1} (\partial_\mu U) \right) = 0 \tag{36}$$

não possui soluções para U (exceto as triviais; $U = constante$). Porém, um trabalho de Gribov (GRIBOV, 1978) mostrou que a equação (36) possui soluções não-triviais, chamadas de *cópias de Gribov*. Mais tarde, Singer conseguiu estabelecer que o problema de Gribov não era particular da escolha do calibre de Landau (SINGER, 1978), concluindo então que as cópias de Gribov são características do procedimento de fixação de calibre. A existência das cópias de Gribov ainda são um problema em aberto nas teorias de Yang-Mills no regime não-perturbativo. No entanto, no regime perturbativo (ultravioleta) elas não desempenham um papel relevante, por isso, para desenvolver o método de Faddeev-Popov, consideraremos esse regime.

Tendo toda essa discussão em mente, aplicamos o método de Faddev-Popov e reescrevemos (31) da seguinte forma:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int [dA] \delta(G^a[A]) \det \left(\frac{\delta G^a[A^U(x)]}{\delta \theta^b(x')} \right) e^{-S_{YM}}\,, \tag{37}$$

em que S_{YM} é a ação de Yang-Mills euclideana,

$$S_{YM} = \frac{1}{4} \int d^4x\, F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}\,; \tag{38}$$

$G^a[A]$ é um funcional relacionado ao campo A_μ; $\delta(G^a[A])$ é uma "função delta de Dirac funcional", que impõe a condição $G^a[A] = 0$ como um vínculo; e $\det \left(\frac{\delta G^a[A^U(x)]}{\delta \theta^b(x')} \right)$ está associado ao jacobiano das transformações de calibre quando é colocado a condição imposta pela delta funcional na integral de trajetória (SORELLA, 2020).

Dentre os calibres mais comuns podemos mencionar os seguintes (CAPRI, 2009):

- Calibre de Landau: $\partial_\mu A^a_\mu = 0$;
- Calibres lineares covariantes: $\partial_\mu A^a_\mu = h^a(x)$;

- Calibre de Coloumb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^a = 0$;
- Calibre Abeliano Maximal (MAG[5]): $\partial_\mu A^\alpha_\mu = g f^{\alpha\beta c} A^\beta_\mu A^c_\mu$; $\partial_\mu A^a_\mu = 0$.

Como podemos ver, o calibre de Landau é um caso particular dos calibres lineares covariantes quando $h^a(x) = 0$, para todo $a = 1, ..., N^2 - 1$. E, no último calibre mencionado (MAG), os índices gregos indicam as componentes não-diagonais e os índices latinos as componentes diagonais do grupo interno de simetria.

Todos estes calibres são bastante estudados por possuirem certas propriedades específicas interessantes. No caso dos calibres lineares covariantes (incluindo o de Landau), além das características de linearidade e covariância, indicadas pelo próprio nome, são também renormalizáveis. O calibre de Coloumb não é covariante, o que compromete sua renormalizabilidade, no entanto, este pode ser implementado na rede. Já o calibre denominado MAG é um calibre covariante e renormalizável, embora não seja linear; o grande interesse no MAG está no fato de este promover a separação das componentes abelianas do campo de calibre das demais, esta característica faz com que ele seja o calibre mais adequado ao estudo da chamada dominância abeliana.

O próximo passo na quantização do campo de calibre utilizando o método de Faddeev-Popov é "exponenciar" os termos delta e determinante. Para fazer isso, começamos escolhendo, por simplicidade, o calibre linear covariante:

$$G^a[A(x)] = \partial_\mu A^a_\mu(x) - h^a(x) \,. \tag{39}$$

Agora, multiplicamos (37) por

$$\int [dh] \, \exp\left(- \int d^4x \, \frac{1}{2\Lambda} (h^a)^2 \right) \,, \tag{40}$$

sendo Λ um parâmetro positivo constante, encontramos a seguinte expressão:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int [dA] \, \det\left(\frac{\delta G^a[A^U(x)]}{\delta\theta^b(x')} \right) \exp\left(-S_{YM} - \int d^4x \, \frac{1}{2\Lambda} (\partial_\mu A^a_\mu)^2 \right) \,. \tag{41}$$

Uma maneira alternativa de se fixar o calibre, porém equivalente a esta (que será adotada daqui pra frente) é introduzir o campo auxiliar de Nakanishi-Lautrup (NAKANISHI, 1966; LAUTRUP, 1967), $b^a(x)$, fazendo com que a ação de fixação de calibre fique da forma:

$$S^\Lambda[A, b] = - \int d^4x \left(i b^a \partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2} \Lambda (b^a)^2 \right) \,. \tag{42}$$

[5] Do inglês *Maximal Abelian Gauge*.

Assim, a eq. (41) fica:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int [dA][db] \det \left(\frac{\delta G^a[A^U(x)]}{\delta \theta^b(x')} \right) \exp \left[-S_{YM} - \int d^4x \left(b^a \partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\Lambda (b^a)^2 \right) \right] . \tag{43}$$

A equivalência de (43) com (41) é demonstrada em (GREINER; REINHARDT, 2013).

Agora, vamos para o termo do determinante; para exponenciar este termo precisamos recordar um resultado conhecido (BAILIN; LOVE, 1993) que é a integral funcional sobre as variáveis de Grassmann (anti-comutantes). Aqui iremos introduzir os campos c^a e $\overline{c}^a$, que são chamados de campos fantasmas (ou *ghosts*), pois estes não descrevem partículas físicas:

$$\int [d\overline{c}][dc] \exp \left(- \int d^4x\, d^4x'\, \overline{c}^a(x) M^{ac}(x,x') c^c(x') \right) = \det M^{ac}(x,x'). \tag{44}$$

Portanto, escrevemos M^{ac} (operador de Faddeev-Popov) lembrando que $(A^U)^a_\mu$ na forma infinitesimal é dado por (21):

$$\begin{aligned} M^{ac}(x,x') &= \frac{\delta G^a[A^U(x)]}{\delta \theta^c(x')} = \frac{\delta}{\delta \theta^c(x')} \left(\partial_\mu (A^U)^a_\mu(x) - h(x) \right) = \partial_\mu \frac{\delta (A^U)^a_\mu(x)}{\delta \theta^c(x')} \\ &= \partial_\mu \left[\left(\partial_\mu \delta^{ac} + g f^{abc} A^b_\mu \right) \delta(x - x') \right] = \partial_\mu \left(D^{ac}_\mu \delta(x-x') \right) \end{aligned} \tag{45}$$

e substituimos em (44). Dessa forma, obtemos que

$$\det \left(\frac{\delta G^a[A^U(x)]}{\delta \theta^b(x')} \right) = \int [d\overline{c}][dc] \exp \left(- \int d^4x\, \overline{c}^a(x) \partial_\mu D^{ab}_\mu c^b(x) \right) . \tag{46}$$

Logo, juntando estes resultados, a equação (37) se torna

$$\mathcal{Z} = \int [dA][db][d\overline{c}][dc] e^{-\Sigma[A,b,c,\overline{c}]} , \tag{47}$$

com

$$\Sigma[A,b,c,\overline{c}] = S_{YM} + \int d^4x \left(b^a \partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\Lambda (b^a)^2 + \overline{c}^a \partial_\mu D^{ab}_\mu c^b \right) . \tag{48}$$

Podemos destacar o segundo termo como sendo a ação de fixação de calibre[6]:

$$S_{gf} = \int d^4x \left(b^a \partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\Lambda (b^a)^2 + \overline{c}^a \partial_\mu D^{ab}_\mu c^b \right) . \tag{49}$$

Escolher o calibre de Landau (que costuma ser um calibre conveniente para se trabalhar por sua simplicidade) é o equivalente a escolher $\Lambda = 0$. Assim, a ação final, no

[6] Do inglês *gauge fixing* e por isso a sigla gf.

calibre de Landau, assume a seguinte forma:

$$\Sigma[A,b,c,\overline{c}]\Big|_{\Lambda=0} = S_{YM} + \int d^4x \left(b^a\partial_\mu A^a_\mu + \overline{c}^a\partial_\mu D^{ab}_\mu c^b\right). \tag{50}$$

1.3 Simetria BRST

Devido a adição dos *ghosts* e *antighosts* (c^a e $\overline{c}^a$, respectivamente) e do campo auxiliar de Nakanishi-Lautrup (b^a) pela quantização de Faddeev-Popov, vemos que a ação final (50) não é mais invariante pelas transformações de calibre (21), pois agora precisamos de leis de transformação para os novos campos. Essas novas leis de transformação são chamadas de transformações de BRST[7]:

$$sA^a_\mu = -D^{ac}_\mu c^c = -\partial_\mu c^a - gf^{abc}A^b_\mu c^c, \tag{51}$$
$$sc^a = \frac{g}{2}f^{abc}c^bc^c, \tag{52}$$
$$s\overline{c}^a = ib^a, \tag{53}$$
$$sb^a = 0, \tag{54}$$

em que s é o operador de BRST e tem a propriedade de ser nilpotente, ou seja, $s^2 = 0$.

Dessas leis de transformações alguns pontos interessantes podem ser analisados. Primeiramente, para checar a nilpotência do operador s basta aplicá-lo nas equações (51 – 54) e conferir que esta propriedade é consequência da identidade de Jacobi:

$$f^{abc}f^{cmn} + f^{amc}f^{cnb} + f^{anc}f^{cbm} = 0. \tag{55}$$

Outro aspecto interessante das transformações de BRST é observar que a transformação de A^a_μ, eq. (51), tem a mesma forma que a transformação de calibre (21), só que ao invés do parâmetro θ^a, agora usamos o ghost c^a. Essa mudança pode ser interpretada como se a partir de agora o parâmetro θ^a ganhasse dinâmica. Como a transformação de BRST do campo de calibre é idêntica à transformação de calibre, naturalmente $sS_{YM} = 0$.

Temos também que as tranformações dos campos b^a e $\overline{c}^a$, por terem suas transformações interligadas, elas formam o chamado "dubleto de BRST".

Outro ponto importante a ser mencionado é observar que podemos reescrever a ação S_{gf} de tal forma que esta seja a transformação de BRST de uma outra expressão:

$$s\left(\overline{c}^a\partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\Lambda\overline{c}^a b^a\right) = b^a\partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\Lambda(b^a)^2 + \overline{c}^a(x)\partial_\mu D^{ab}_\mu c^b, \tag{56}$$

[7] Bechi, Rouet, Stora e Tyutin

dessa forma, a invariância de $\Sigma[A,b,c,\overline{c}]$ pelas transformações de BRST pode ser observada de forma trivial, pois a ação agora pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Sigma[A,b,c,\overline{c}] = S_{YM} + s\int d^4x \left(\overline{c}^a\partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\Lambda\overline{c}^a b^a\right) . \tag{57}$$

Aplicando o operador s, temos:

$$s\Sigma[A,b,c,\overline{c}] = sS_{YM} + s^2\int d^4x \left(\overline{c}^a\partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\Lambda\overline{c}^a b^a\right) = 0\,, \tag{58}$$

lembrando da propriedade de nilpotência de s.

Uma forma conveniente de escrever o termo da ação de fixação de calibre é observar que a equação (56) pode ser escrita como:

$$s\left(\overline{c}^a\partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\Lambda\overline{c}^a b^a\right) = s\left[\overline{c}^a\left(\partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\Lambda b^a\right)\right] , \tag{59}$$

em que o termo que $\overline{c}^a$ está multiplicando é justamente a escolha do calibre (no caso, linear covariante), portanto, podemos escrever S_{gf} sendo:

$$S_{gf} = s\int d^4x\, \overline{c}^a G^a[A(x)]\,. \tag{60}$$

2 O CALIBRE ABELIANO MAXIMAL E A ADIÇÃO DO TERMO MASSIVO INVARIANTE

Como já mencionado no capítulo anterior, um calibre conhecido e bastante utilizado é o *calibre abeliano maximal* (MAG), sendo este de grande interesse por ser renormalizável e promover a separação das componentes abelianas do campo de calibre das demais, fazendo com que seja um calibre adequado para o estudo da chamada dominância abeliana (EZAWA; IWAZAKI, 1982; SUZUKI; YOTSUYANAGI, 1990; HIOKI et al., 1991). Esta última é um dos ingredientes principais para o mecanismo de supercondutividade dual para o confinamento de cor (MANDELSTAM, 1976; HOOFT, 1982), segundo o qual a teoria de Yang-Mills no regime de baixas energias deveria ser descrita por uma teoria abeliana efetiva na presença de monopolos (CAPRI et al., 2010). Além disso, o MAG foi o segundo calibre no qual se pode estudar o problema de Gribov, que comentamos no capítulo anterior. O primeiro foi calibre de Landau, através dos trabalhos de Gribov e Zwanziger. A razão disso, como veremos mais a frente, é que o operador de Faddeev-Popov é hermitiano no caso do MAG, tal como ocorre no calibre de Landau. O tratamento do problema de Gribov em outros calibres, como os lineares covariantes, só pode ser feito com a introdução de um campo composto invariante de calibre, $\mathcal{A}_\mu$, que também veremos no decorrer deste capítulo.

2.1 Introdução

Como mencionado anteriormente, o MAG estabelece uma distinção entre as componentes abelianas e não abelianas do grupo, portanto, antes de entendermos o calibre precisamos entender com se dá a decomposição do campo de $A_\mu(x)$ e os geradores do grupo:

$$A_\mu = A_\mu^A T^A = A_\mu^\alpha T^\alpha + A_\mu^b T^b \,, \tag{61}$$

em que T^A são todos os (N^2-1) geradores do $SU(N)$, enquanto T^α são os geradores não-diagonais e T^b os geradores diagonais. Aqui, fizemos uma mudança de notação em relação ao capítulo anterior. A partir de agora, os índices latinos maiúsculos $\{A, B, C, \dots\}$ vão de 1 até N^2-1, que são os índices da representação adjunta do grupo; os índices latinos minúsculos $\{a, b, c, \dots\}$ representam apenas as componentem diagonais; e, finalmente, os índices gregos $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ representam as componentes não diagonais[8].

Para termos uma visão mais concreta dessa decomposição, tomemos como exemplo o grupo $SU(2)$. Neste, os geradores, na representação fundamental, são proporcionais às matrizes de Pauli:

$$T^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Logo, podemos perceber que duas matrizes são não diagonais e uma matriz é diagoal. Já na representação fundamental de $SU(3)$, os geradores são proporcionais às oito matrizes de Gell-Mann, dos quais apenas os geradores T^3 e T^8 são diagonais:

$$T^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \tag{63}$$

enquanto os outros seis são não-diagonais. Em $SU(5)$ há quatro geradores diagonais e vinte não-diagonais. Assim, podemos inferir que, em geral, o índice latino minúsculo (componente diagonal) vai de 1 até $N-1$ e o índice grego (componente não-diagonal) vai de 1 até $N(N-1)$, totalizando os N^2-1 geradores de $SU(N)$.

A respeito dos geradores do grupo, temos as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}
&[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C\,, \\
&[T^a, T^b] = 0\,, \\
&[T^\alpha, T^b] = -if^{\alpha\gamma b}T^\gamma\,, \\
&[T^\alpha, T^\beta] = if^{\alpha\beta\gamma}T^\gamma + if^{\alpha\beta c}T^c\,.
\end{aligned} \tag{64}$$

A segunda equação de (64) nos faz concluir que $f^{abc} = f^{ab\gamma} = 0$ para manter a comutação das matrizes diagonais. De fato, de acordo com (FERREIRA, 2018), a álgebra representada pela segunda equação de (64) é a chamada *subálgebra de Cartan* de $su(N)$ e sendo esta última uma álgebra semisimples (tal como o próprio grupo $SU(N)$) a álgebra de Cartan é a máxima subálgebra de $su(N)$. A dimensão da subálgebra de Cartan é igual ao *rank* da álgebra de $su(N)$, ou seja, $N-1$.

As constantes de estruturas restantes não nulas $f^{\alpha\beta\gamma}$ e $f^{\alpha\beta c}$ são totalmente antis-

[8] Notemos que os índices referentes às coordenadas no espaço euclideano também são índices gregos minúsculos. Porém, os índices espaciais estarão sempre subscritos, equanto que os índices das componentes não diagonais do grupo interno se simentria estarão sempre superescritos. Além disso, sempre que possível, vamos reservar os índices $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ para o setor não diagonal de $SU(N)$ e $\{\mu, \nu, \sigma, \rho\}$ para índices vetoriais

simétricas na troca dos índices e respeitam as seguintes identidades:

$$
\begin{aligned}
0 &= f^{\alpha\beta c} f^{\beta\gamma d} + f^{\alpha\beta d} f^{\beta c\gamma} \,, \\
0 &= f^{\alpha\beta\gamma} f^{\gamma\delta e} + f^{\alpha\delta\gamma} f^{\gamma e\beta} + f^{\alpha e\gamma} f^{\gamma\beta\delta} \,, \\
0 &= f^{\alpha\beta\gamma} f^{\gamma\delta\epsilon} + f^{\alpha\beta c} f^{c\delta\epsilon} + f^{\alpha\delta\gamma} f^{\gamma\epsilon\beta} + f^{\alpha\delta c} f^{c\epsilon\beta} + f^{\alpha\epsilon\gamma} f^{\gamma\beta\delta} + f^{\alpha\epsilon c} f^{c\beta\delta} \,.
\end{aligned}
\tag{65}
$$

O próximo passo é fazermos a separação dos setores para as transformações de BRST (51–54):

$$
\begin{aligned}
sA^a_\mu &= -(\partial_\mu c^a + g f^{\beta\gamma a} A^\beta c^\gamma) \,, \\
sA^\alpha_\mu &= -(D^{\alpha\beta}_\mu c^\beta + g f^{\alpha\beta c} A^\beta c^c + g f^{\alpha\beta\gamma} A^\beta c^\gamma) \,, \\
sc^a &= \frac{g}{2} f^{\beta\gamma a} c^\beta c^\gamma \,, \\
sc^\alpha &= g f^{\alpha\beta c} c^\beta c^c + \frac{g}{2} f^{\alpha\beta\gamma} c^\beta c^\gamma \,, \\
s\overline{c}^a &= ib^a \,, \\
s\overline{c}^\alpha &= ib^\alpha \,, \\
sb^a &= 0 \,, \\
sb^\alpha &= 0,
\end{aligned}
\tag{66}
$$

em que $D^{\alpha\beta}_\mu$ é uma derivada covariante com respeito à componente abeliana, isto é,

$$
D^{\alpha\beta}_\mu = \delta^{\alpha\beta}\partial_\mu - g f^{\alpha\beta c} A^c_\mu \,. \tag{67}
$$

E por último escrevemos a ação de Yang-Mills explicitando a forma do tensor $F_{\mu\nu}$ com a separação das partes diagonal e não-diagonal:

$$
S_{YM} = \frac{1}{4} \int d^4x \left(F^\alpha_{\mu\nu} F^\alpha_{\mu\nu} + F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} \right) \,, \tag{68}
$$

com

$$
\begin{aligned}
F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{a\alpha\beta} A^\alpha_\mu A^\beta_\nu \,, \\
F^\alpha_{\mu\nu} &= D^{\alpha\beta}_\mu A^\beta_\nu - D^{\alpha\beta}_\nu A^\beta_\mu + g f^{\alpha\beta\gamma} A^\beta_\mu A^\gamma_\nu \,.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

2.2 Calibre Abeliano Maximal

Como visto no primeiro capítulo, o método de Faddeev-Popov consiste em estabelecer uma fixação de calibre na função de partição para uma teoria de campos de calibre e, como mencionado na seção anterior, adotaremos o MAG como calibre a ser fixado de acordo com método de Faddeev-Popov. O MAG é construído de tal forma que cada setor (abeliano e não ableiano) grupo tem uma condição de calibre distinta. A condição imposta aos campos não diagonais é obtida através da extremização do funcional:

$$\mathcal{A}^2_{MAG}[A] = \int d^4x\, A^\alpha_\mu A^\alpha_\mu\,, \tag{70}$$

ou seja,

$$\delta \int d^4x\, A^\alpha_\mu A^\alpha_\mu = 0. \tag{71}$$

A expressão (71) acima nos dá que o setor não-diagonal respeita a seguinte equação:

$$\partial_\mu A^\alpha_\mu = g f^{\alpha\beta c} A^\beta_\mu A^c_\mu\,, \tag{72}$$

ou ainda,

$$D^{\alpha\beta}_\mu A^\beta_\mu = 0\,. \tag{73}$$

Para o setor diagonal, impomos a seguinte condição:

$$\partial_\mu A^a_\mu = 0. \tag{74}$$

A escolha dessa condição, que é idêntica a condição de calibre de Landau, é feita por esta ser a mais simples possível, não estando ligada à condição de extremo de nenhum funcional[9].

Se quisermos ir além e impor uma condição de mínimo, teríamos que impor a condição $\delta^2\mathcal{A}^2_{MAG}[A] > 0$, o que equivale a dizer que o operador

$$\mathcal{M}^{\alpha\beta} = -D^{\alpha\gamma}_\mu D^{\gamma\beta}_\mu - g f^{\alpha\gamma\delta} A^\gamma_\mu D^{\delta\beta}_\mu - g^2 f^{\alpha\gamma a} f^{\beta\delta a} A^\gamma_\mu A^\delta_\mu\,, \tag{75}$$

conhecido como operador de Faddeev-Popov no MAG, seja positivo, ou seja, que seus autovalores sejam positivos. Essa condição impõe uma restrição extra e define a chamada primeira região de Gribov, que pode ser implementada com a teoria definida num espaço euclideano, em que o operador acima é hermitiano. Estudos sobre as propriedades desse operador e do problema de Gribov no MAG foram feitos em (CAPRI et al., 2005; CAPRI et al., 2009; CAPRI et al., 2010).

Portanto, tendo agora especificadas as condições de calibre pelas equações (73) e

[9] A ausência de um funcinal auxiliar nos permite pensar em escolhas diferentes para o setor diagonal. Uma possibilidade é apresentada em (DUDAL et al., 2005), dando origem ao chamado *MAG modificado*.

(74), podemos escrever como fica a ação de fixação de calibre lembrando da equação (60):

$$\begin{aligned}
S_{MAG} &= s\int d^4x\,\overline{c}^A G^A[A] \\
&= s\int d^4x\,\left(\overline{c}^\alpha G^\alpha[A] + \overline{c}^a G^a[A]\right) \\
&= s\int d^4x\,\left[\overline{c}^\alpha\left(D^{\alpha\beta}_\mu A^\beta_\mu\right) + \overline{c}^a\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)\right],
\end{aligned} \tag{76}$$

sendo

$$G^\alpha[A] = D^{\alpha\beta}_\mu A^\beta_\mu\,, \qquad G^a[A] = \partial_\mu A^a_\mu\,. \tag{77}$$

Desenvolvendo a expressão de S_{MAG}, temos:

$$\begin{aligned}
S_{MAG} = \int d^4x &\Big[ib^\alpha D^{\alpha\beta}_\mu A^\beta_\mu - \overline{c}^\alpha \mathcal{M}^{\alpha\beta} c^\beta + g f^{\alpha\beta c}\overline{c}^\alpha\left(D^{\beta\gamma}_\mu A^\gamma_\mu\right)c^c \\
&+ ib^a\partial_\mu A^a_\mu + \overline{c}^a\partial_\mu\left(\partial_\mu c^a + g f^{\beta\gamma a}A^\beta_\mu c^\gamma\right)\Big].
\end{aligned} \tag{78}$$

Temos então que a ação de Yang-Mills no MAG se encontra da seguinte forma:

$$S_1 = S_{YM} + S_{MAG}\,, \tag{79}$$

porém, por razões de renormalizabilidade ligadas a não linearidade do calibre, precisamos adicionar mais um termo a esta ação:

$$\begin{aligned}
S_\alpha &= -\frac{\alpha}{2}s\int d^4x\left(i\overline{c}^\alpha b^\alpha - g f^{\alpha\beta c}\overline{c}^\alpha\overline{c}^\beta c^c - \frac{g}{2}f^{\alpha\beta\gamma}c^\alpha\overline{c}^\beta\overline{c}^\gamma\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}\int d^4x\Bigg(b^\alpha b^\alpha + 2igf^{\alpha\beta c}b^\alpha\overline{c}^\beta c^c + igf^{\alpha\beta\gamma}b^\alpha\overline{c}^\beta c^\gamma + \frac{g^2}{2}f^{\alpha\beta c}f^{\gamma\delta c}\overline{c}^\alpha\overline{c}^\beta c^\gamma c^\delta \\
&\qquad + \frac{g^2}{2}f^{\alpha\beta\gamma}f^{\alpha\delta c}\overline{c}^\beta\overline{c}^\gamma c^\delta c^c + \frac{g^2}{4}f^{\alpha\beta\gamma}f^{\alpha\delta\epsilon}\overline{c}^\beta\overline{c}^\gamma c^\delta c^\epsilon\Bigg),
\end{aligned} \tag{80}$$

em que α é um parâmetro de calibre que, ao final, pode ser tomado como zero, recuperando o calibre original. Assim, a ação então toma a seguinte forma:

$$S_2 = S_1 + S_\alpha = S_{YM} + S_{MAG} + S_\alpha\,. \tag{81}$$

Como veremos no próximo capítulo, devido às transformações de BRST não lineares, será necessário introduzir à ação S_2 termos com operadores compostos de campos através de fontes externas. Ademais, na próxima seção, vamos apresentar um termo massivo invariante de calibre que irá compor, juntamente com a ação S_2, o modelo final que iremos estudar nesta dissertação.

2.3 Operador composto de dimensão dois invariante de calibre

Para construir-se uma teoria de calibre para a interação fraca, ou, ainda mais geral, para a teoria eletrofraca, a massa dos bósons de calibre devem ser necessariamente introduzidas, apesar da simetria de calibre da teoria ser, em geral, destruída (GARCIA, 2021). Uma solução para o problema de massa foi eventualmente encontrado através da introdução do mecanismo de quebra espontânea de simetria, o chamado mecanismo de Higgs. Mesmo antes da descoberta experimental do bóson de Higgs, o mecanismo de Higgs era já bem difundido e aceito na comunidade acadêmica, porém, isso não significa que não haja possibilidade de se introduzir outros objetos massivos numa teoria de calibre que coexistam com o mecanismo de Higgs e que tenham relevância no estudo de teorias de calibre em baixas energias.

Tendo isso em mente, apresentaremos, nesta seção, um operador local composto invariante de calibre e que pode ser introduzido na ação com um parâmetro massivo. Antes, porém, faremos uma breve revisão histórica dos modelos de Proca e de Stueckelberg e do operador A^2_{min}, que é um operador não local invariante de calibre de dimensão dois. Como veremos, o trabalho de Stueckelberg serviu de inspiração para que fosse possível escrever o operador A^2_{min} em uma forma local e assim pudéssemos estudá-lo. Também veremos a importância do MAG nesse estudo, embora estejamos tratando de um objeto invariante de calibre.

2.3.1 Modelo de Proca

Para começarmos a falar a respeito da adição de um termo massivo nas teorias de calibre, precisamos começar pelo modelo de Proca (PROCA, 1936), pois este foi o primeiro modelo apresentado que visava dar massa a um campo vetorial, tendo então uma importância histórica muito grande. O modelo de Proca é uma modificação simples da teoria de Maxwell com o intuito de gerar uma teoria não interagente, ou seja, sem acoplamento com nenhuma corrente, de partículas de calibre massivas de spin 1, similar às teorias livres de Klein-Gordon e de Dirac, sendo definida, no espaço de Minkowski, por:

$$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \,, \tag{82}$$

em que m é um parâmetro massivo. A equação de movimento que se origina de (82) é:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \,. \tag{83}$$

Aplicando ∂_ν a equação acima, obtemos imediatamente que $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, pois trata-se de uma contração de um objeto simétricos $(\partial_\mu \partial_\nu)$ com um antissimétricos $(F^{\mu\nu})$. Assim, obtemos a condição adicional de transversalidade:

$$\partial_\mu A^\mu = 0\,. \tag{84}$$

Com a transformção de A_μ dada por (10) vemos que a adição do termo massivo quebra a simetria de calibre. Além disso, o propagador de Feynman desta teoria perde a covariância de Lorentz, embora isto possa ser contornado em cálculos perturbativos (GREINER; REINHARDT, 2013).

2.3.2 Modelo de Stueckelberg

Como continuação do modelo de Proca, temos o modelo de Stueckelberg (RUEGG; RUIZ-ALTABA, 2004) que conta com a introdução de um campo escalar de dimensão zero para escrever uma teoria de calibre abeliana massiva (a extensão não abeliana será descrita mais a frente) e, ao contrário do modelo de Proca, este é construído de tal forma que preserve a invariância de calibre:

$$\mathcal{L}_{Stueck} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} (A_\mu - \partial_\mu \xi)(A^\mu - \partial^\mu \xi), \tag{85}$$

onde $\xi(x)$ é o campo escalar de Stueckelberg de dimensão zero e se transforma da seguinte forma:

$$\xi \quad \rightarrow \quad \xi - \theta(x)\,, \tag{86}$$

garantindo a invariância do termo massivo.

Podemos ainda escrever (85) na forma de um modelo $U(1)$, introduzindo a variável:

$$h(x) = e^{ie\,\xi(x)}, \tag{87}$$

portanto, o termo de massa é agora reescrito como

$$\mathcal{L}_m = \frac{m^2}{2} \left(A_\mu + \frac{i}{e} h^\dagger (\partial_\mu h) \right) \left(A^\mu + \frac{i}{e} h^\dagger (\partial^\mu h) \right), \tag{88}$$

sendo

$$\begin{aligned} A_\mu \quad &\rightarrow \quad A_\mu + \frac{i}{e} U^\dagger (\partial_\mu U)\,, \\ h \quad &\rightarrow \quad U^\dagger h \end{aligned} \tag{89}$$

e

$$U = e^{ie\,\theta}. \tag{90}$$

Dessa forma, a generalização deste termo para o caso não-abeliano fica mais direta. Lembramos da equação de transformação de A_μ (20) e que agora temos os geradores em h e U, ou seja,

$$h = e^{ig\xi^A T^A}, \tag{91}$$

$$U(x) = \exp(ig\theta^A(x)T^A). \tag{92}$$

Notemos ainda que o termo $\left(A_\mu + \frac{i}{e}h^\dagger(\partial_\mu h)\right)$, que aparece na equação (88), deve ser reescrito, na sua versão não abeliana, como

$$A^h_\mu = h^\dagger A_\mu h + \frac{i}{g}h^\dagger(\partial_\mu h)\,, \tag{93}$$

no qual trocamos a constante de acoplamento e por g e fizemos a mudança

$$A_\mu \to h^\dagger A_\mu h\,, \tag{94}$$

que é redundante no caso abeliano. Assim, vejamos como fica a transformação de (93) em sua versão não abeliana:

$$\begin{aligned} h^\dagger A_\mu h + \frac{i}{g}h^\dagger(\partial_\mu h) \quad &\to \quad (h^\dagger U)\left(UA_\mu U^\dagger + \frac{1}{ig}U^\dagger(\partial_\mu U)\right)(U^\dagger h) + \frac{i}{g}(h^\dagger U)\partial_\mu(U^\dagger h) \\ &= h^\dagger A_\mu h + \frac{i}{g}h^\dagger(\partial_\mu U)U^\dagger h + \frac{i}{g}h^\dagger\partial_\mu h + \frac{i}{g}h^\dagger \underbrace{U(\partial_\mu U^\dagger)}_{-(\partial_\mu U)U^\dagger} h \\ &= h^\dagger A_\mu h + \frac{i}{g}h^\dagger(\partial_\mu h)\,. \end{aligned} \tag{95}$$

Ou seja, o termo A^h_μ, definido por (93), é invariante. Logo, o termo de massa pode ser escrito através de A^h_μ tomando-se o traço do produto matricial $A^h_\mu A^{h,\mu}$, isto é,

$$S_m = m^2\,\mathrm{tr}\int d^4x \left(h^\dagger A_\mu h + \frac{i}{g}h^\dagger(\partial_\mu h)\right)\left(h^\dagger A^\mu h + \frac{i}{g}h^\dagger(\partial^\mu h))\right)\,. \tag{96}$$

Percebe-se ainda que os campos h e $h^\dagger$ são expansões em série de potências de ξ^a, gerando então um número infinito de termos de interação envolvendo o campo escalar de Stueckelberg, fazendo com que o caso não abeliano se torne bem mais complicado. Apesar deste modelo garantir a invariância de calibre, a teoria não é renormalizável. No entanto, esse modelo será a inspiração para a localização do operador $A^2_{\min}$ que passaremos a descrever a seguir.

2.3.3 Operador Invariante A^2_{min}

Continuando pela busca de um termo massivo que pode ser adicionado na ação, iremos falar agora do chamado operador A^2_{min}. Este operador foi amplamente analisado ao longo dos últimos 30 anos em (ZWANZIGER, 1990; DELL'ANTONIO; ZWANZIGER, 1989; DELL'ANTONIO; ZWANZIGER, 1991; BAAL, 1992; CAPRI et al., 2005; CAPRI et al., 2016; CAPRI et al., 2017) e será um dos principais objetos de estudo desta dissertação.

A importância desse operador surge dentro do contexto do estudo das teorias de Yang-Mills em baixas energias, com o intuito de se obter algum entendimento dessas teorias num regime dito não perturbativo[10], no qual ocorre o fenômeno do confinamento. Dito isto, começamos definindo o funcional $f_A[U]$ num espaço euclideano:

$$f_A[U] := \text{tr} \int d^4x \, A^U_\mu A^U_\mu = \text{tr} \int d^4x \left(U^\dagger A_\mu U + \frac{i}{g} U^\dagger (\partial_\mu U) \right) \left(U^\dagger A_\mu U + \frac{i}{g} U^\dagger (\partial_\mu U) \right) . \tag{97}$$

Para uma determinada configuração A_μ do campo de calibre, $f_A[U]$ é um funcional definido na órbita de calibre de A_μ. Seja $\mathcal{A}$ o espaço de conexões A^a_μ com a norma de Hilbert finita, ou seja:

$$\|A\|^2 = \text{tr} \int d^4x \, A_\mu A_\mu = \frac{1}{2} \int d^4x \, A^A_\mu A^A_\mu < +\infty \tag{98}$$

e seja $\mathcal{U}$ o espaço das transformações de calibre local de U de forma que a norma de Hilbert $\|U^\dagger \partial U\|$ também seja finita, ou seja,

$$\|U^\dagger \partial U\|^2 = tr \int d^4x \, (U^\dagger \partial_\mu U)(U^\dagger \partial_\mu U) < +\infty \, . \tag{99}$$

Isto garante que, para $A_\mu \in \mathcal{A}$ e $U \in \mathcal{U}$, $f_A[U]$ é convergente. Nessas condições, é possível mostrar que o funcional $f_A[U]$ atinge seu mínimo absoluto na órbita de calibre de A_μ. Isso foi mostrado em (ZWANZIGER, 1990; DELL'ANTONIO; ZWANZIGER, 1989; DELL'ANTONIO; ZWANZIGER, 1991; BAAL, 1992), indicando que existe um $h \in \mathcal{U}$

[10] Embora se esteja interessado no regime não-perturbativo, a questão da renormalização, que é um problema de correção de divergências em cálculos perturbativos, ainda é importante, pois é esperado que um teoria fundamental tenha como pré-requisito ser renormalizável. Além disso, eventualmente podemos estar interessados em uma certa escala de energia na qual a teoria de perturbação ainda é válida.

tal que

$$\delta f_A[h] = 0 \qquad \text{(condição de extremo)}, \tag{100}$$

$$\delta^2 f_A[h] > 0 \qquad \text{(condição de mínimo)}, \tag{101}$$

$$f_A[h] \leq f_A[U], \quad \forall U \in \mathcal{U} \qquad \text{(condição de mínimo absoluto)}. \tag{102}$$

Define-se então o operador A^2_{min} a partir do funcional $f_A[U]$ quando este atinge seu mínimo absoluto, ou seja, para $U = h$:

$$A^2_{min} := f_A[h] = \mathrm{tr} \int d^4x \, A^h_\mu A^h_\mu = \min_{\{U\}} \mathrm{tr} \int d^4x \, A^U_\mu A^U_\mu \,. \tag{103}$$

Como uma transformação de calibre, a partir de uma configuração de partida A_μ, é uma transformação que leva A_μ a uma outra confirguração pertencente a própria órbita de A_μ, essa transformação, quando feita sobre A^2_{min}, recai no mesmo mínimo absoluto da órbita de A_μ e, portanto, este operador é, por construção, invariante por transformações de calibre.

Notemos ainda a semenhança entre o operador $A^2_{\rm min}$, eq. (103), e o termo massivo invariante do modelo de Stueckelberg (96), inclusive a notação adotada já sugere isso. Porém, no modelo de Stueckelberg não se leva em conta as condições de extremo (100), mínimo (101) e mínimo absoluto (102). Além disso, o termo massivo de Stueckelberg é local, enquanto que o operador $A^2_{\rm min}$ é, a princípio, um operador não local em A_μ.

A condição de extremo (100) implica que A^h_μ é transverso, ou seja,

$$\partial_\mu A^h_\mu = 0, \tag{104}$$

enquanto a condição de minimo relativo (101) implica que

$$-\partial_\mu D_\mu(A^h) > 0 \,. \tag{105}$$

As demonstrações de (104) e (105) podem ser encontradas em (CAPRI et al., 2005). O vínculo de transversalidade é satisfeito para

$$A^h_\mu = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2}\right) \left(A_\nu - ig\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A \,,\, A_\nu\right] + \frac{ig}{2}\left[\frac{1}{\partial^2}\partial A \,,\, \partial_\nu \frac{1}{\partial^2}\partial A\right] + O(A^3)\right) \,, \tag{106}$$

ou seja, uma série infinita e não local em A_μ. É possível mostrar ainda que o operador A^h_μ dado por (106) é invariante de calibre ordem a ordem. Assim, para introduzir o operador $A^2_{\rm min}$ na ação, devemos escrevê-lo numa versão local. Para isso, podemos primeiramente localizar A^h_μ e, por conseguinte, $A^2_{\rm min}$, lançando mão do campo de Stueckelberg e introduzir o vínculo de transversalidade na ação de maneira *off-shell*, de uma forma muito similar ao que é feito na introdução do vínculo de fixação de calibre no método de Faddeev-Popov através do campo de Nakanishi-Lautrup.

Dessa forma, consideremos a seguinte ação invariante

$$S_{inv} = S_{YM+gf}[A,b,c,\bar{c}] + m^2 A^2_{min}[\mathcal{A}[A,\xi]] + \int d^4x \, \left(\tau^A \, \partial_\mu \mathcal{A}^A_\mu + \bar{\eta}^A \, \partial_\mu D^{AB}_\mu[\mathcal{A}]\eta^B \right) \, , \tag{107}$$

em que $S_{YM+gf}[A,b,c,\bar{c}]$ é a ação de Yang-Mills com o calibre fixado, que é, portanto, um funcional do campo de calibre (A_μ), do campo de Nakanishi-Lautrup (b) e dos *ghosts* de Faddeev-Popov ($c, \bar{c}$); o operador local composto $A^2_{min}[\mathcal{A}[A,\xi]]$ é a versão local de (106), dada por

$$A^2_{min}[\mathcal{A}[A,\xi]] = \mathrm{tr} \int d^4x \, \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2} \, \mathrm{tr} \int d^4x \, \mathcal{A}^A_\mu \mathcal{A}^A_\mu \tag{108}$$

com

$$\mathcal{A}_\mu[A,\xi] = \mathcal{A}^A_\mu[A,\xi] T^A = h^\dagger A_\mu h + \frac{i}{g} h^\dagger \partial_\mu h \tag{109}$$

e

$$h = \exp(ig \, \xi^A T^A) \, , \qquad h^\dagger = \exp(-ig \, \xi^A T^A) \, ; \tag{110}$$

e, finalmente, os campos $(\tau, \eta, \bar{\eta})$ promovem a introdução do vínculo de transversalidade de $\mathcal{A}_\mu$, sendo τ análogo ao campo de Nakanishi-Lautrup (b) e os campos grassmannianos $(\eta, \bar{\eta})$ análogos ao *ghost* (c) e ao *anti-ghost* ($\bar{c}$) de Faddeev-Popov, respectivamente. De fato, este último termo é uma inovação em relação ao modelo de Stueckelberg exercendo um papel fundamental na renormalização. Naturalmente, o operador local composto $A^2_{min}[\mathcal{A}[A,\xi]]$ é invariante pelo conjunto de transformações de calibre

$$\begin{aligned} A_\mu \quad &\to \quad U^\dagger A_\mu U + \frac{i}{g} U^\dagger (\partial_\mu U) \, , \\ h \quad &\to \quad U^\dagger h \, , \\ h^\dagger \quad &\to \quad h^\dagger U \, . \end{aligned} \tag{111}$$

Por outro lado, uma vez que a ação S_{inv} tenha já o calibre fixado (embora não tenhamos especificado qual calibre), esta perde a invariância de calibre, porém, é ainda invariante pelas transformações de BRST, que agora devem estender-se aos campos recém introduzidos $(\xi, \tau, \eta, \bar{\eta})$. Então, podemos escrever que

$$sS_{inv} = 0 \, , \tag{112}$$

com

$$
\begin{aligned}
sA^A &= -D_\mu^{AB} c^B \,, \\
sc^A &= \frac{g}{2} f^{ABC} c^B c^C \,, \\
s\bar{c}^A &= i b^A \,, \\
s b^A &= 0 \,, \\
s h_{ij} &= -i g c^A T^A_{ik} h_{kj} \,, \\
s h^\dagger_{ij} &= i g h^\dagger_{ik} c^A T^A_{kj} \,, \\
s \xi^A &= g^{AB}[\xi]\, c^B \,, \\
s \tau^A &= 0 \,, \\
s \eta^A &= 0 \,, \\
s \bar{\eta}^A &= 0 \,,
\end{aligned}
\tag{113}
$$

em que os índices (i, j, k) que aparecem nas transformações de h e $h^\dagger$ são da representação fundamental de $SU(N)$, indo de 1 até N e o funcional $g^{AB}[\xi]$, que aparece na transformação do campo tipo Stueckelberg ξ^A, é uma série infinita am ξ, cujos primeiros termos são:

$$
g^{AB}[\xi] = -\delta^{AB} + \frac{g}{2} f^{ABC} \xi^C - \frac{g^2}{12} f^{ACD} f^{CBE} \xi^D \xi^E + O(\xi^3) \,. \tag{114}
$$

De fato, o operador local composto $\mathcal{A}_\mu$ é também uma série infinita em ξ:

$$
\mathcal{A}_\mu = A_\mu - D_\mu \xi - \frac{ig}{2} \left[D_\mu \xi, \xi \right] + \frac{g^2}{6} \left[\left[D_\mu \xi, \xi \right], \xi \right] + \frac{ig^3}{4!} \left[\left[\left[D_\mu \xi, \xi \right], \xi \right], \xi \right] + O(\xi^5) \,, \tag{115}
$$

ou ainda, em componentes da representação adjunta do grupo,

$$
\mathcal{A}^A_\mu = A^A_\mu - D^{AB}_\mu \xi^B - \frac{g}{2} f^{ACD} \xi^C D^{DB}_\mu \xi^B - \frac{g^2}{6} f^{AED} f^{CEN} \xi^C \xi^D D^{NB}_\mu \xi^B + O(\xi^4) \,. \tag{116}
$$

A discussão que apresentamos nesta seção nos levou a ação BRST invariante S_{inv}, dada por (107), porém, não nos preocupamos em especificar qual o calibre adotado. A partir da próxima seção, adotaremos explicitamente o MAG e veremos o que este calibre pode nos oferecer de interessante para essa discussão.

2.4 Ação massiva invariante no MAG

Uma propriedade importante do operador $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}^A_\mu T^A$ é que todas as suas componentes são invariantes de calibre independentemente, ou seja,

$$s\mathcal{A}^A_\mu = 0\,, \qquad \forall\, A \in \{1,\ldots,N^2-1\}\,. \tag{117}$$

Isto significa que cada termo da soma $\mathcal{A}^A_\mu\mathcal{A}^A_\mu$ é invariante independente dos demais, ou seja,

$$\begin{aligned} s(\mathcal{A}^A_\mu\mathcal{A}^A_\mu) &\equiv s\left(\sum_{A=1}^{N^2-1}\mathcal{A}^A_\mu\mathcal{A}^A_\mu\right) \\ &= \sum_{A=1}^{N^2-1} s(\mathcal{A}^A_\mu\mathcal{A}^A_\mu) = \underbrace{s(\mathcal{A}^1_\mu\mathcal{A}^1_\mu)}_{=0} + \underbrace{s(\mathcal{A}^2_\mu\mathcal{A}^2_\mu)}_{=0} + \cdots + \underbrace{s(\mathcal{A}^{N^2-1}_\mu\mathcal{A}^{N^2-1}_\mu)}_{=0} \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{118}$$

Dessa forma, poderíamos escrever o termo de massa de uma maneria bem geral,

$$\sum_{A=1}^{N^2-1} m^2_A\,\mathcal{A}^A_\mu\mathcal{A}^A_\mu = m^2_1\,\mathcal{A}^1_\mu\mathcal{A}^1_\mu + m^2_2\,\mathcal{A}^2_\mu\mathcal{A}^2_\mu + \cdots + m^2_{N^2-1}\,\mathcal{A}^{N^2-1}_\mu\mathcal{A}^{N^2-1}_\mu\,, \tag{119}$$

com N^2-1 parâmetros massivos m^2_A diferentes entre si. Porém, para um calibre que preserva a covariância do grupo interno de simetria (como o calibre de Landau, ou os calibres lineares covariantes, ou o de Curci-Ferrari e etc), a ação é invariante pela atuação do operador

$$\mathcal{W}^A = \int d^4x\, f^{ABC} \sum_{\Phi\,\in\,\mathcal{F}} \Phi^B \cdot \frac{\delta}{\delta\Phi^C}\,, \tag{120}$$

com $\mathcal{F}$ sendo o conjunto de todos os campos envolvidos na teoria:

$$\mathcal{F} = \{A_\mu, b, c, \bar{c}, \xi, \tau, \eta, \bar{\eta}\}\,. \tag{121}$$

E, nesse caso, o termo de massa generalizado é invariante apenas se as massas m^2_A forem todas iguais. Esta invariância da ação é a chamada *simetria rígida* e significa, simplesmente, que mantem-se a covariância na contração dos índices do grupo interno de simetria.

De fato, pode-se verificar ordem a ordem que[11]

$$\mathcal{W}^A \mathcal{A}_\mu^B = f^{ABC} \mathcal{A}_\mu^C \,, \tag{122}$$

logo,

$$\mathcal{W}^A (\mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\mu^B) = 0 \,, \tag{123}$$

ou ainda,

$$\mathcal{W}^A \left(\sum_{B=1}^{N^2-1} m_B^2 \, \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\mu^B \right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m_1^2 = m_2^2 = \cdots = m_{N^2-1}^2 \,. \tag{124}$$

Nesse contexto, o MAG surge justamente como um contraexemplo de calibre no qual a simetria rígida é quebrada. No entanto, esta é apenas parcialmente quebrada, pois nesse calibre ocorre a chamada *simetria* $U(1)^{N-1}$ *residual*. Dessa maneira, a ação fixada no MAG é invariante pela atuação do operador diagonal

$$\mathcal{W}^a = \int d^4x \, f^{a\alpha\beta} \sum_{\Phi \in \mathcal{F}} \Phi^\alpha \cdot \frac{\delta}{\delta \Phi^\beta} \,. \tag{125}$$

Dadas as componentes diagonais e não diagonais de $\mathcal{A}_\mu^A$,

$$\mathcal{A}_\mu^a = A_\mu^a - N_\mu^a - \frac{g}{2} f^{a\alpha\beta} \xi^\alpha M_\mu^\beta + O(\xi^3) \,, \tag{126}$$

$$\mathcal{A}_\mu^\alpha = A_\mu^\alpha - M_\mu^\alpha + \frac{g}{2} f^{a\alpha\beta} \xi^a M_\mu^\beta - \frac{g}{2} f^{\alpha\beta\gamma} \xi^\beta M_\mu^\gamma - \frac{g}{2} f^{\alpha\beta a} \xi^\beta N_\mu^a + O(\xi^3) \,, \tag{127}$$

sendo

$$M_\mu^\alpha = D_\mu^{\alpha\beta} \xi^\beta - g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma \xi^\beta + g f^{a\alpha\beta} A_\mu^\beta \xi^a \,, \tag{128}$$

$$N_\mu^a = \partial_\mu \xi^a - g f^{a\alpha\beta} A_\mu^\beta \xi^\alpha \,, \tag{129}$$

pode-se mostrar ordem a ordem[12] que

$$\mathcal{W}^a \mathcal{A}_\mu^\alpha = f^{a\alpha\beta} \mathcal{A}_\mu^\beta \,, \tag{130}$$

$$\mathcal{W}^a \mathcal{A}_\mu^b = 0 \,, \tag{131}$$

[11] Conferimos explicitamente até a ordem ξ^3.

[12] Conferimos explicitamente até a ordem ξ^2.

portanto,

$$\mathcal{W}^a(\mathcal{A}^\alpha_\mu \mathcal{A}^\alpha_\mu) = 2f^{a\alpha\beta}\mathcal{A}^\alpha_\mu A^\beta_\mu = 0\,, \tag{132}$$

$$\mathcal{W}^a(\mathcal{A}^b_\mu \mathcal{A}^b_\mu) = 0 \quad \text{(automaticamente)}. \tag{133}$$

Tais resultados nos indicam que as massas das componentes não diagonais devem ser todas iguais. As massas das componentes diagonais podem, a princípio, ser diferentes, pelo menos pelo critério de invariância pela simetria $U(1)^{N-1}$ residual, porém, iremos considerá-las iguais e, com isso, o termo de massa que iremos considerar será

$$S_{mass} = \frac{m^2_{diag}}{2}\int d^4x\, \mathcal{A}^a_\mu \mathcal{A}^a_\mu + \frac{m^2_{off}}{2}\int d^4x\, \mathcal{A}^\alpha_\mu \mathcal{A}^\alpha_\mu\,, \tag{134}$$

assumindo, a princípio,

$$m^2_{diag} \neq m^2_{off}\,. \tag{135}$$

Assim, como resultado dessa discussão, chegamos a seguinte ação massiva no MAG:

$$S_3 = S_2 + S_{mass} + \int d^4x\, \left(\tau^A\, \partial_\mu \mathcal{A}^A_\mu + \bar{\eta}^A\, \partial_\mu D^{AB}_\mu[\mathcal{A}]\eta^B\right)\,, \tag{136}$$

com S_2 e S_{mass} dadas, respectivamente, por (81) e (134). No próximo capítulo, vamos fazer uma análise das simetrias da ação S_3 e dos operadores locais compostos que devem ser levados am conta e então poderemos determinar o contratermo mais geral compatível com o conjunto de simetrias da ação e como absorvê-lo através da renormalização de campos e parâmetros.

3 RENORMALIZAÇÃO DA AÇÃO

3.1 Ação de partida

Antes de começarmos o processo de renormalização e análise das simetrias do modelo, precisamos definir a nossa ação de partida. Neste modelo temos as transformaçãoes não lineares de BRST dos campos (A^A_μ, c^A, ξ^A), que são operadores compostos de campos, e temos ainda a introdução de outros operadores locais compostos, em particular, o operador $\mathcal{A}^A_\mu$, equação (116). Para que possamos escrever a identidade de Slavnov-Taylor e outras identidades de Ward não lineares, precisamos introduzir esses elementos na ação de partida. Isso é feito através de fontes externas associadas a esses operadores. De um modo geral, podemos escrever o seguinte termo de fonte externa:

$$S_{ext}[J] = \int d^4x \sum_{n=1}^{5} J^A_n \cdot \mathcal{O}^A_n\,, \tag{137}$$

em que J_n são as fontes externas e $\mathcal{O}^A_n$ os operadores compostos definidos por:

$$\Big(\mathcal{O}^A_{1,\mu}\,,\, \mathcal{O}^A_2\,,\, \mathcal{O}^A_3\,,\, \mathcal{O}^A_{4,\mu}\,,\, \mathcal{O}^A_{5,\mu} \Big) := \Big(sA^A_\mu\,,\, sc^A\,,\, s\xi^A\,,\, \mathcal{A}^A_\mu\,,\, D^{AB}_\mu[\mathcal{A}]\eta^B \Big)\,. \tag{138}$$

Todos estes operadores são BRST invariantes, portanto as fontes J^A_n também serão, ou seja, $sJ^A_n = 0$. Ajustando à notação usual que se encontra na literatura referente ao assunto, vamos renomear as fontes J^A_n da seguinte maneira:

$$\Big(J^A_{1,\mu}\,,\, J^A_2\,,\, J^A_3\,,\, J^A_{4,\mu}\,,\, J^A_{5,\mu} \Big) \equiv \Big(\Omega^a_\mu\,,\, L^A\,,\, K^A\,,\, \mathcal{J}^A_\mu, \Xi^A_\mu \Big) \tag{139}$$

e dessa forma o termo de fontes externas escreve-se como:

$$\begin{aligned}
S_{ext} &= \int d^4x \Big[\Omega^A_\mu (sA^A_\mu) + L^A(sc^A) + K^A(s\xi^A) + \mathcal{J}^A_\mu \mathcal{A}^A_\mu + \Xi^A_\mu\, D^{AB}_\mu[\mathcal{A}]\eta^B \Big] \\
&= \int d^4x \Big[\Omega^a_\mu (sA^a_\mu) + \Omega^\alpha_\mu (sA^\alpha_\mu) + L^a(sc^a) + L^\alpha(sc^\alpha) + K^A(s\xi^A) \\
&\quad + \mathcal{J}^A_\mu \mathcal{A}^A_\mu + \Xi^A_\mu\, D^{AB}_\mu[\mathcal{A}]\eta^B \Big] \\
&= \int d^4x \Big[-\Omega^a_\mu\,(\partial_\mu c^a + g f^{\beta\gamma a} A^\beta_\mu c^\gamma) - \Omega^\alpha_\mu\,(D^{\alpha\beta}_\mu c^\beta + g f^{\alpha\beta c} A^\beta_\mu c^c + g f^{\alpha\beta\gamma} A^\beta_\mu c^\gamma) \\
&\quad + \frac{g}{2} f^{\beta\gamma a} L^a c^\beta c^\gamma + L^\alpha \Big(g f^{\alpha\beta c} c^\beta c^c + \frac{g}{2} f^{\alpha\beta\gamma} c^\beta c^\gamma \Big) + K^A\, g^{AB}[\xi]\, c^B \\
&\quad + \Xi^A_\mu\, D^{AB}_\mu[\mathcal{A}]\eta^B \Big]\,.
\end{aligned} \tag{140}$$

Um ponto que devemos destacar aqui é que os operadores compostos que devem ser levados em conta na ação de partida é definido pelas identidades que podemos escrever, ou seja, não são definidos *a priori*, mas sim depois de uma análise prévia da ação, ainda sem a introdução das fontes externas. Isto constitui uma tarefa que exige observação e certa experiência, não sendo de forma alguma um trabalho óbvio ou automático. Um exemplo disso, é o operador $D^{AB}_{\mu}[\mathcal{A}]\eta^B$, cuja introdução é, a princípio, contraintuitiva, porém, sua introdução é fundamental para se estabelecer a equação do *antighost* $\bar{\eta}^A$ como uma identidade de Ward, como iremos ver mais adiante.

Então, até o presente momento, temos a seguinte ação:

$$S_4 = S_3 + S_{ext}\,. \tag{141}$$

No entanto, existe ainda um termo extra a ser considerado. Tal termo foi "descoberto" no decorrer dos cálculos do contratermo mais geral, que só apresentaremos na próxima seção. Porém, concluimos que apresentá-lo aqui nesta seção, durante a construção da ação de partida mais geral, deixaria nossa exposição mais clara. O referido termo surge da não linearidade da condição de calibre não diagonal, sendo dado então por

$$\begin{aligned} S_{extra} =& s\int d^4x\,\left(m^2_{diag}\,\psi^{\alpha}[\xi]\,\bar{c}^{\alpha} + m^2_{off}\,\phi^{\alpha}[\xi]\,\bar{c}^{\alpha}\right) \\ =& \int d^4x\,\Bigg(m^2_{diag}\,\frac{\partial\psi^{\alpha}[\xi]}{\partial\xi^A}\,g^{AB}[\xi]c^B\bar{c}^{\alpha} + im^2_{diag}\,\psi^{\alpha}[\xi]b^{\alpha} \\ &+ m^2_{off}\,\frac{\partial\phi^{\alpha}[\xi]}{\partial\xi^A}\,g^{AB}[\xi]c^B\bar{c}^{\alpha} + im^2_{off}\,\phi^{\alpha}[\xi]b^{\alpha}\Bigg)\,, \end{aligned} \tag{142}$$

em que $\psi^{\alpha}[\xi]$ e $\phi^{\alpha}[\xi]$ são funcionais de ξ^A:

$$\psi^{\alpha}[\xi] = \gamma_1\,\xi^{\alpha} + \gamma_2\,f^{\alpha\beta a}\xi^{\beta}\xi^{a} + \gamma_3^{\alpha ABC}\xi^A\xi^B\xi^C + \gamma_4^{\alpha ABCD}\xi^A\xi^B\xi^C\xi^D + \dots\,, \tag{143}$$
$$\phi^{\alpha}[\xi] = \beta_1\,\xi^{\alpha} + \beta_2\,f^{\alpha\beta a}\xi^{\beta}\xi^{a} + \beta_3^{\alpha ABC}\xi^A\xi^B\xi^C + \beta_4^{\alpha ABCD}\xi^A\xi^B\xi^C\xi^D + \dots\,. \tag{144}$$

Os coeficientes $\{\gamma_3^{\alpha ABC}, \gamma_4^{\alpha ABCD}, \dots, \gamma_n^{\alpha A_1A_2\dots A_n}, \dots\}$, assim como os β's, não são completamente livres, mas obedecem a identidades de Jacobi generalizadas devido a simetria $U(1)^{N-1}$ residual. Algumas dessas identidades são[13]:

$$0 = f^{\alpha\beta a}\gamma_3^{\beta\gamma\delta\epsilon} + f^{\gamma\beta a}\gamma_3^{\alpha\beta\delta\epsilon} + f^{\delta\beta a}\gamma_3^{\alpha\gamma\delta\epsilon} + f^{\epsilon\beta a}\gamma_3^{\alpha\gamma\delta\beta}\,, \tag{145}$$
$$0 = f^{\alpha\beta a}\gamma_3^{\beta\gamma\delta b} + f^{\gamma\beta a}\gamma_3^{\alpha\beta\delta b} + f^{\delta\beta a}\gamma_3^{\alpha\gamma\beta b}\,, \tag{146}$$
$$0 = f^{\alpha\beta a}\gamma_3^{\beta\gamma bc} + f^{\gamma\beta a}\gamma_3^{\alpha\beta bc}\,, \tag{147}$$
$$0 = f^{\alpha\beta a}\gamma_3^{\beta abc}\,, \tag{148}$$

[13] Em (CAPRI; TERIN; TOLEDO, 2019) ocorre algo muito similar no contexto de supersimetria.

$$0 = f^{\alpha\beta a}\gamma_4^{\beta\gamma\delta\epsilon\pi} + f^{\gamma\beta a}\gamma_4^{\alpha\beta\delta\epsilon\pi} + f^{\delta\beta a}\gamma_4^{\alpha\gamma\beta\epsilon\pi} + f^{\epsilon\beta a}\gamma_4^{\alpha\gamma\delta\beta\pi} + f^{\pi\beta a}\gamma_4^{\alpha\gamma\delta\epsilon\beta}, \tag{149}$$

$$0 = f^{\alpha\beta a}\gamma_4^{\beta\gamma\delta\epsilon b} + f^{\gamma\beta a}\gamma_4^{\alpha\beta\delta\epsilon b} + f^{\delta\beta a}\gamma_4^{\alpha\gamma\beta\epsilon b} + f^{\epsilon\beta a}\gamma_4^{\alpha\gamma\delta\beta b}, \tag{150}$$

$$0 = f^{\alpha\beta a}\gamma_4^{\beta\gamma\delta bc} + f^{\gamma\beta a}\gamma_4^{\alpha\beta\delta bc} + f^{\delta\beta a}\gamma_4^{\alpha\gamma\beta bc}, \tag{151}$$

$$0 = f^{\alpha\beta a}\gamma_4^{\beta\gamma bcd} + f^{\gamma\beta a}\gamma_4^{\alpha\beta bcd}, \tag{152}$$

$$0 = f^{\alpha\beta a}\gamma_4^{\beta bcde} \tag{153}$$

e assim por diante. A título de exemplo, tomemos os coeficientes $\gamma_3^{\alpha ABC}$ e vejamos algumas possibilidades que eles representam:

$$\gamma_3^{\alpha ABC} \longrightarrow \begin{cases} \gamma_3^{\alpha\beta\gamma\delta} & \longrightarrow \quad \delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta}\,,\ \delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta},\ \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma}\,; \\ \gamma_3^{\alpha\beta\gamma a} & \longrightarrow \quad f^{\alpha\beta\delta}f^{\delta\gamma a}\,,\ f^{\alpha\beta b}f^{b\gamma a}\,, \ldots\,; \\ \gamma_3^{\alpha\beta ab} & \longrightarrow \quad \delta^{\alpha\beta}\delta^{ab}\,; \\ \gamma_3^{\alpha abc} & \longrightarrow \quad f^{\alpha\beta\gamma}f^{\beta a\delta}f^{\delta b\epsilon}f^{c\epsilon\gamma}, \ldots\,. \end{cases} \tag{154}$$

Assim, combinações lineares de todas essas possibilidades formam os coeficientes da série $\psi^\alpha[\xi]$ e o mesmo argumento vale para os coeficientes $\beta_n^{\alpha ABCD\ldots}$ da série $\phi^\alpha[\xi]$.

Considerando este termo extra, nossa ação fica agora da seguinte maneira:

$$S_5 = S_4 + S_{extra}\,. \tag{155}$$

Finalmente, faremos uma redefinição conveniente de certos campos e parâmetros da teoria:

$$\begin{aligned} &\Big(A_\mu, b, \xi, \alpha, \tau, m^2_{diag}, m^2_{off}, \gamma_n, \beta_n\Big) \\ &\longrightarrow \Big(g^{-1}A_\mu\,,\ gb\,,\ g^{-1}\xi\,,\ g^{-2}\alpha\,,\ g\tau\,,\ g^2m^2_{diag}\,,\ g^2m^2_{off}\,,\ g^{n-3}\gamma_n\,,\ g^{n-3}\beta_n\Big)\,. \end{aligned} \tag{156}$$

Esta redefinição nos permite escrever o contratermo na chamada forma paramétrica. Assim, obtemos definitivamente nossa ação de partida completa com todos os termos necessários ao estudo das identidades de Ward:

$$\Sigma \equiv S_5\big|_{\text{redefinida pelas transformações (156)}}\,, \tag{157}$$

o que é equivalente a

$$\Sigma = S_5\big|_{g=1} + \frac{1-g^2}{4g^2}\int d^4x\,(F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + F^\alpha_{\mu\nu}F^\alpha_{\mu\nu})\big|_{g=1}\,, \tag{158}$$

ou ainda, mais explicitamente,

$$
\begin{aligned}
\Sigma = \int d^4x \Bigg[& \frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{4g^2} F^\alpha_{\mu\nu} F^\alpha_{\mu\nu} + i b^a \partial_\mu A^a_\mu + \overline{c}^a \partial_\mu (\partial_\mu c^a + f^{\beta\gamma a} A^\beta_\mu c^\gamma) \\
& + i b^\alpha D^{\alpha\beta}_\mu A^\beta_\mu + \overline{c}^\alpha D^{\alpha\beta}_\mu D^{\beta\gamma}_\mu c^\gamma - f^{\alpha\beta c} f^{\gamma\delta c} \overline{c}^\alpha c^\delta A^\beta_\mu A^\gamma_\mu + \overline{c}^\alpha D^{\alpha\beta}_\mu \left(f^{\beta\gamma\delta} A^\delta_\mu c^\gamma \right) \\
& + f^{\alpha\beta c} \overline{c}^\alpha \left(D^{\beta\gamma}_\mu A^\gamma_\mu \right) c^c + \frac{\alpha}{2} \Bigg(b^\alpha b^\alpha + 2i f^{\alpha\beta c} b^\alpha \overline{c}^\beta c^c + i f^{\alpha\beta\gamma} b^\alpha \overline{c}^\beta c^\gamma \\
& + \frac{1}{2} f^{\alpha\beta c} f^{\gamma\delta c} \overline{c}^\alpha \overline{c}^\beta c^\gamma c^\delta + \frac{1}{2} f^{\alpha\beta\gamma} f^{\alpha\delta c} \overline{c}^\beta \overline{c}^\gamma c^\delta c^c + \frac{1}{4} f^{\alpha\beta\gamma} f^{\alpha\delta\epsilon} \overline{c}^\beta \overline{c}^\gamma c^\delta c^\epsilon \Bigg) \\
& + \frac{m^2_{diag}}{2} \mathcal{A}^a_\mu \mathcal{A}^a_\mu + \frac{m^2_{off}}{2} \mathcal{A}^\alpha_\mu \mathcal{A}^\alpha_\mu + \tau^A \partial_\mu \mathcal{A}^A_\mu + \overline{\eta}^A \partial_\mu D^{AB}_\mu [\mathcal{A}] \eta^B \\
& - \Omega^a_\mu (\partial_\mu c^a + f^{\beta\gamma a} A^\beta_\mu c^\gamma) - \Omega^\alpha_\mu (D^{\alpha\beta}_\mu c^\beta + f^{\alpha\beta c} A^\beta_\mu c^c + f^{\alpha\beta\gamma} A^\beta_\mu c^\gamma) \\
& + \frac{1}{2} f^{\beta\gamma a} L^a c^\beta c^\gamma + L^\alpha \left(f^{\alpha\beta c} c^\beta c^c + \frac{1}{2} f^{\alpha\beta\gamma} c^\beta c^\gamma \right) + K^A g^{AB}[\xi] c^B \\
& + \mathcal{J}^A_\mu \mathcal{A}^A_\mu + \Xi^A_\mu D^{AB}_\mu [\mathcal{A}] \eta^B + m^2_{diag} \frac{\partial \psi^\alpha[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^\alpha + i m^2_{diag} \psi^\alpha[\xi] b^\alpha \\
& + m^2_{off} \frac{\partial \phi^\alpha[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^\alpha + i m^2_{off} \phi^\alpha[\xi] b^\alpha \Bigg] ,
\end{aligned} \tag{159}
$$

com

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha\beta}_\mu &= \delta^{\alpha\beta} \partial_\mu - f^{\alpha\beta a} A^a_\mu , \\
F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{a\alpha\beta} A^\alpha_\mu A^\beta_\nu , \\
F^\alpha_{\mu\nu} &= D^{\alpha\beta}_\mu A^\beta_\nu - D^{\alpha\beta}_\nu A^\beta_\mu + f^{\alpha\beta\gamma} A^\beta_\mu A^\gamma_\nu , \\
D^{AB}_\mu [\mathcal{A}] &= \delta^{AB} \partial_\mu - f^{ABC} \mathcal{A}^C_\mu , \\
\mathcal{A}^A_\mu &= A^A_\mu - D^{AB}_\mu \xi^B - \frac{1}{2} f^{ACD} \xi^C D^{DB}_\mu \xi^B - \frac{1}{6} f^{AED} f^{CEN} \xi^C \xi^D D^{NB}_\mu \xi^B + O(\xi^4) , \\
g^{AB}[\xi] &= -\delta^{AB} + \frac{1}{2} f^{ABC} \xi^C - \frac{1}{12} f^{ACD} f^{CBE} \xi^D \xi^E + O(\xi^3) .
\end{aligned} \tag{160}
$$

Para análise futura, encontra-se na Tabela 1 os chamados *números quânticos* (dimensão de massa e números de *ghost*) e a natureza (comutante ou anticomutante) dos campos e fontes envolvidos na ação (159).

Campos e fontes / N.os quânticos	A	b	c	$\bar{c}$	ξ	τ	η	$\bar{\eta}$	Ω	L	K	$\mathcal{J}$	Ξ
Dimensão de massa	1	2	0	2	0	2	0	2	3	4	4	3	3
N.º de *ghost* c	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	-2	-1	0	0
N.º de *ghost* η	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1
Natureza	C	C	A	A	C	C	A	A	A	C	A	C	A

Tabela 1 - Números quânticos e natureza, comutante (C) ou anticomutante (A), de campos e fontes.
Fonte: O autor, 2021

3.2 Identidades de Ward

Agora vamos estudar uma maneira conveniente de escrever as simetrias da ação sob a forma de equações funcionais de vínculo compatíveis com o *princípio de ação quântica*[14] (VANDERSICKEL, 2011). Estes vínculos irão corresponder às chamadas identidades de Ward[15] na aproximação ao nível árvore, ou seja, à ordem zero na expansão em *loops* da ação efetiva. Em particular, estamos interessados em uma identidade denominada identidade de Slavnov-Taylor que representa a simetria de BRST.

Se um determinado funcional $\mathcal{F}[\varphi]$ é invariante sob a transformação $\delta\varphi(x)$ do campo $\varphi(x)$, podemos então escrever que

$$\delta\mathcal{F}[\varphi] = \int d^4x\, \delta\varphi(x)\frac{\delta\mathcal{F}[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = 0\,, \tag{161}$$

que podemos também pensar da seguinte maneira:

$$\int d^4x\, \delta\varphi(x)\frac{\delta\mathcal{F}[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \equiv \left(\int d^4x\, \delta\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\right)\mathcal{F}[\varphi] = \mathcal{W}\mathcal{F}[\varphi] = 0\,, \tag{162}$$

[14] Em poucas palavras, estabeleceremos identidades em termos do funcional gerador 1PI, que a ordem zero corresponde à ação. Essas identidades podem eventualmente ser não lineares, como é o caso da simetria BRST. Porém, as equações compatíveis com esse princípio devem ser lineares quando escritas em termos de algum funcional gerador. Assim, as identidades não lineares em termos do funcional 1PI apresentam-se lineares em termos de outro funcional, como o funcional gerador das funções de Green conexas, obtido por uma transformação de Legendre.

[15] As identidades de Ward são comumente conhecidas como relações entre funções n-pontos da teoria. Aqui elas serão apresentadas de uma outra forma, que também é conhecida na literatura. A partir das relações que serão apresentadas aqui, é possível extrair as relações entre as funções de correlação da teoria.

ou seja, como a atuação de um operador funcional

$$\mathcal{W} := \int d^4x\, \delta\varphi(x) \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \tag{163}$$

sobre o funcional $\mathcal{F}[\varphi]$, que nada mais é que uma simetria deste funcional escrita sob a forma de uma equação funcional, ou seja, como uma identidade de Ward.

No caso da ação (159) existe a simetria associada à invariância com relação às transformçaões de BRST e assim, podemos escrever que

$$S(\Sigma) = \int d^4x \sum_{\varphi} (s\varphi) \cdot \frac{\delta\Sigma}{\delta\varphi} = 0\,, \tag{164}$$

em que a soma se estende a todos os campos e fontes envolvidos na teoria, ver Tabela 1, ou seja, $\varphi \equiv A_\mu, b, c, \overline{c}, \ldots$. Esta identidade é conhecida como identidade de Slavnov-Taylor e traduz a simetria de BRST numa linguagem funcional. No entando, a maneira que escrevemos não está ainda completa, devido às transformações não lineares. Porém, a maneira como construímos a ação Σ nos permite escrever

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^a_\mu} = sA^a_\mu\,, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^\alpha_\mu} = sA^\alpha_\mu\,, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} = sc^a\,, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta L^\alpha} = sc^\alpha\,, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta K^A} = s\xi^A \tag{165}$$

e assim, substituindo as transformações não lineares pelas derivadas funcionais da ação com relação às fontes correspondentes, escrevemos a expressão (164) de forma explícita como[16]

$$\begin{aligned} S(\Sigma) := \int d^4x \bigg(& \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^a_\mu}\frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^\alpha_\mu}\frac{\delta\Sigma}{\delta A^\alpha_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a}\frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta L^\alpha}\frac{\delta\Sigma}{\delta c^\alpha} + ib^a\frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{c}^a} + ib^\alpha\frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{c}^\alpha} + \frac{\delta\Sigma}{\delta K^A}\frac{\delta\Sigma}{\delta\xi^A}\bigg) \\ = 0\,. \end{aligned} \tag{166}$$

São também compatíveis com o princípio de ação quântica, equações funcionais que tenham quebras lineares nos campos, as chamadas *quebras clássicas*. Dessa forma, a equação de movimento do campo auxiliar $b^a(x)$, que dá a condição de calibre do setor diagonal, é também uma identidade de Ward:

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} = i\partial_\mu A^a_\mu\,. \tag{167}$$

Esta identidade irá garantir que o contratermo será independente do campo $b^a(x)$.

Além dessa última, temos ainda outras equações de movimento que podem, com o auxílio das fontes externa previamente introduzidas, ser escritas como identidades de

[16] Note-se que, assim escrita, essa identidade seria linear em termos do funcional conexo.

Ward locais. Vejamos, primeiramente, a equação de movimento do campo de *antighost* diagonal $\overline{c}^a$, que pode, facilmente, ser escrita como

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^a_\mu} = 0\,, \tag{168}$$

que implica que o campo $\overline{c}^a$ e a fonte Ω^a_μ só aparecem na ação (e consequentemente no contratermo) através da combinação

$$\widehat{\Omega}^a_\mu \equiv \Omega^a_\mu + \partial_\mu \overline{c}^a\,. \tag{169}$$

Analogamente, para o campo auxiliar τ^A, temos,

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\tau^A} - \partial_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\mathcal{J}^A_\mu} = 0\,, \tag{170}$$

assegurando que o campo τ^A e a fonte $\mathcal{J}^A$ se combinam através da relação

$$\widehat{\mathcal{J}}^A_\mu \equiv \mathcal{J}^A_\mu - \partial_\mu \tau^A\,. \tag{171}$$

E da mesma forma, temos a equação de movimento do *antighost* $\overline{\eta}^A$:

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\eta}^A} - \partial_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\Xi^A_\mu} = 0\,, \tag{172}$$

que expressa uma relação entre o campo $\overline{\eta}^A$ e a fonte Ξ^A_μ:

$$\widehat{\Xi}^A \equiv \Xi^A - \partial_\mu \overline{\eta}^A\,. \tag{173}$$

Também temos a equação integrada do *ghost* η^A:

$$\int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\eta^A} + f^{ABC}\,\overline{\eta}^B \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau^C} + f^{ABC}\,\Xi^B_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\mathcal{J}^C_\mu} \right) = 0\,. \tag{174}$$

Por fim, não podemos esquecer de listar a simetria $U(1)^{N-1}$ residual, da qual tratamos no capítulo anterior:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^a(\Sigma) :=& f^{a\alpha\beta} \int d^4x \left(A^\alpha_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta A^\beta_\mu} + b^\alpha \frac{\delta\Sigma}{\delta b^\beta} + c^\alpha \frac{\delta\Sigma}{\delta c^\beta} + \overline{c}^\alpha \frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{c}^\beta} + \xi^\alpha \frac{\delta\Sigma}{\delta\xi^\beta} + \tau^\alpha \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau^\beta} + \eta^\alpha \frac{\delta\Sigma}{\delta\eta^\beta} \right.\\ &\left. + \overline{\eta}^\alpha \frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\eta}^\beta} + \Omega^\alpha_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^\beta_\mu} + L^\alpha \frac{\delta\Sigma}{\delta L^\beta} + K^\alpha \frac{\delta\Sigma}{\delta K^\beta} + \mathcal{J}^\alpha_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\mathcal{J}^\beta_\mu} + \Xi^\alpha_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\Xi^\beta_\mu} \right) = 0\,.\end{aligned} \tag{175}$$

Na teoria original de Yang-Mills fixada no MAG, temos ainda a equação local do *ghost* diagonal c^a e a simetria $U(1)^{N-1}$ residual apresenta-se na forma local. Até o momento, não conseguimos mostrar essas identidades para a ação Σ, embora a possibilidade de que elas, de fato, existam não esteja ainda descartada. Para tal, é provável que outros operadores locais compostos tenham que ser levados em consideração. No entanto, o conjunto de identidades que temos a disposição é suficiente para provar a renormalizabilidade do modelo.

3.3 Renormalização da Ação

Agora que temos as simetrias estabelecidas, nosso objetivo é perturbar a ação clássica adicionando a esta o contratermo mais geral compatível com o conjunto de identidades[17] Σ_{CT}; que é um polinômio local nos campos e nas fontes de dimensão canônica 4, números de ghosts 0 e integrado no volume quadridimensional euclideano $\mathbb{R}^4$:

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)} \,, \tag{176}$$

$$\Gamma = \Sigma + \hbar\Sigma_{CT} + O(\hbar^2) \,, \tag{177}$$

sendo Γ o funcional gerador 1PI, ou *ação quântica*, $\Gamma^{(0)} = \Sigma$ e $\Gamma^{(1)} = \Sigma_{CT}$.

Como as identidades (166-174) precisam se manter a todas as ordens[18], temos:

$$S(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT}) = O(\hbar^2) \,. \tag{178}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&S(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT}) = \\
&\int d^4x \Bigg[\left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta\Omega^a_\mu}\right)\left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta A^a_\mu}\right) + \left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta\Omega^\alpha_\mu}\right)\left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta A^\alpha_\mu}\right) \\
&+ \left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta L^a}\right)\left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta c^a}\right) + \left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta L^\alpha}\right)\left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta c^\alpha}\right) \\
&+ ib^a \left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta \bar{c}^a}\right) + ib^\alpha \left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta \bar{c}^\alpha}\right) \\
&+ \left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta K^A}\right)\left(\frac{\delta(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT})}{\delta \xi^A}\right) \Bigg] = O(\hbar^2)
\end{aligned} \tag{179}$$

[17] Embora tenhamos adicionado o contratermo à ordem zero, como uma correção de ordem $\hbar$, este pode ser introduzido à todas as ordem na série perturbativa, pois o método de renormalização algébrica é recursivo. Assim, se absovermos as divergências até a ordem $\hbar^n$, podemos introduzir o contratermo para absorver as divergências até a ordem $\hbar^{n+1}$ e assim sucessivamente.

[18] Não havendo anomalias.

e portanto,

$$S(\Sigma + \hbar\Sigma_{CT}) = S(\Sigma) + \hbar\beta_{\Sigma}(\Sigma_{CT}) + \mathcal{O}(\hbar^2) \tag{180}$$

em que

$$\begin{aligned}
\beta_{\Sigma} := \int d^4x \Bigg[& \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^a_\mu}\right)\frac{\delta}{\delta A^a_\mu} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu}\right)\frac{\delta}{\delta\Omega^a_\mu} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^\alpha_\mu}\right)\frac{\delta}{\delta A^\alpha_\mu} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^\alpha_\mu}\right)\frac{\delta}{\delta\Omega^\alpha_\mu} \\
& + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta L^a}\right)\frac{\delta}{\delta c^a} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta c^a}\right)\frac{\delta}{\delta L^a} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta L^\alpha}\right)\frac{\delta}{\delta c^\alpha} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta c^\alpha}\right)\frac{\delta}{\delta L^\alpha} \\
& + ib^a\frac{\delta}{\delta\overline{c}^a} + ib^\alpha\frac{\delta}{\delta\overline{c}^\alpha} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta K^A}\right)\frac{\delta}{\delta\xi^A} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\xi^A}\right)\frac{\delta}{\delta K^A}\Bigg],
\end{aligned} \tag{181}$$

que é chamado de operador linearizado e possui a propriedade de ser nilpotente, ou seja, $(\beta_\Sigma)^2 = 0$, tal como o próprio operador de BRST.

Nosso problema então, resume-se a resolver a equação

$$\beta_\Sigma(\Sigma_{CT}[A, b, c, \overline{c}, \tau, \eta, \overline{\eta}, \Omega, L, K, \mathcal{J}, \Xi]) = 0\,, \tag{182}$$

dados os vincúlos (168 – 174) que se estedem automaticamente para Σ_{CT} e a equação de fixação de calibre diagonal (167) que implica em

$$\frac{\delta\Sigma_{CT}}{\delta b^a} = 0\,. \tag{183}$$

A solução da equação (182) é a cohomolgia do operadro linearizado para um espaço dos polinômios integrados de dimensão quatro e números de *ghost* iguais a zero. O contratermo Σ_{CT} poderá ser escrito em duas partes:

$$\Sigma_{CT} = \Delta + \beta_\Sigma\Delta^{(-1)}\,, \tag{184}$$

devido a propriedade de nilpotência de β_Σ. O primeiro setor, denotado por Δ, é chamado de setor não trivial da cohomologia, não podendo ser escrito como a atuação do linearizado sobre um determinado funcional. O segundo setor é dito como o setor trivial da cohomologia, pois resume-se a atuação do operador linearizado sobre $\Delta^{(-1)}$ (um polinômio integrado nos campos de dimensão quatro e número de *ghost* c igual a -1) e assim, este setor é evidentemente uma solução de (182). Como podemos perceber, Δ possui as mesmas dimensões de Σ_{CT}, portanto, montamos uma expressão para ele com as combinações que respeitam suas dimensões e levando em consideração as equações (169, 171, 173):

$$\Delta = \int d^4x \Bigg[\frac{a_0}{4g^2} F^A_{\mu\nu} F^A_{\mu\nu} + b_1\,(\partial_\mu \mathcal{A}^A_\mu)(\partial_\nu \mathcal{A}^A_\nu) + b_2\,(\partial_\mu \mathcal{A}^A_\nu)(\partial_\mu \mathcal{A}^A_\nu)
+ b_3\, f^{ABC}(\partial_\mu \mathcal{A}^A_\mu)\mathcal{A}^B_\nu \mathcal{A}^C_\nu + b_4^{ABCD} \mathcal{A}^A_\mu \mathcal{A}^B_\mu \mathcal{A}^C_\nu \mathcal{A}^D_\nu + b_5\, \widehat{\Xi}^A_\mu\, \partial_\mu \eta^A
+ f^{ABC}\, \widehat{\Xi}^A_\mu \eta^B F^C_\mu[A,\xi] + \widehat{\mathcal{J}}^A_\mu G^A_\mu[A,\xi] + \frac{m^2_{off}}{2} H[A,\xi] + \frac{m^2_{diag}}{2} I[A,\xi]\Bigg]\,, \tag{185}$$

em que $\{a_0, b_1, b_2, b_3, b_4^{ABCD}, b_5\}$ são coeficientes constantes e $F^A_\mu[A,\xi]$, $G^A_\mu[A,\xi]$, $H[A,\xi]$ e $I[A,\xi]$ são funcionais de A_μ e ξ com dimensões de massa iguais a 1, 1, 2 e 2, respectivamente. Mas, como $\beta_\Sigma \Delta = 0$, vemos que

$$\beta_\Sigma F^A_\mu[A,\xi] = \beta_\Sigma G^A_\mu[A,\xi] = \beta_\Sigma H[A,\xi] = \beta_\Sigma I[A,\xi] = 0\,, \tag{186}$$

cujas soluções são encontradas em (CAPRI - a local and renormalizable framework for the gauge...) e são dadas por

$$F^C_\mu[A,\xi] = b_6\, \mathcal{A}^C_\mu\,, \tag{187}$$

$$G^A_\mu[A,\xi] = b_7\, \mathcal{A}^A_\mu\,, \tag{188}$$

$$H[A,\xi] = b_8\, \mathcal{A}^a_\mu \mathcal{A}^a_\mu + b_9\, \mathcal{A}^\alpha_\mu \mathcal{A}^\alpha_\mu\,, \tag{189}$$

$$I[A,\xi] = b_{10}\, \mathcal{A}^a_\mu \mathcal{A}^a_\mu + b_{11}\, \mathcal{A}^\alpha_\mu \mathcal{A}^\alpha_\mu\,, \tag{190}$$

com $\{b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11}\}$ sendo coeficientes constantes.

Com relação ao termo dito trivial da cohomologia $\beta_\Sigma \Delta^{(-1)}$, podemos construir $\Delta^{(-1)}$ levando em conta que este deve ser independente de b^a devido ao vínculo (183) e deve respeitar as combinações entre campos e fontes estabelecida pelos vínculos (168 − 174). Assim, o termo mais geral dadas essas restrições é:

$$\Delta^{(-1)} = \int d^4x \Bigg(f_1^{ab}[\xi] L^a c^b + f_2^{a\beta}[\xi] L^a c^\beta + f_3^{\alpha b}[\xi] L^\alpha c^b + f_4^{\alpha\beta}[\xi] L^\alpha c^\beta + f_5^A[\xi] K^A
+ f_6^{ab}[\xi] \widehat{\Omega}^a_\mu A^b_\mu + f_7^{a\beta}[\xi] \widehat{\Omega}^a_\mu A^\beta_\mu + f_8^{\alpha b}[\xi] \Omega^\alpha_\mu A^b_\mu + f_9^{\alpha\beta}[\xi] \Omega^\alpha_\mu A^\beta_\mu
+ f^a_{10,\mu}[\partial,\xi] \widehat{\Omega}^a_\mu + f^\alpha_{11,\mu}[\partial,\xi] \Omega^\alpha_\mu + f_{12}^{ab\gamma}[\xi] A^a_\mu A^b_\mu \overline{c}^\gamma + f_{13}^{a\beta\gamma}[\xi] A^a_\mu A^\beta_\mu \overline{c}^\gamma
+ f_{14}^{\alpha\beta\gamma}[\xi] A^\alpha_\mu A^\beta_\mu \overline{c}^\gamma + f^{a\beta}_{15,\mu}[\partial,\xi] A^a_\mu \overline{c}^\beta + f^{\alpha\beta}_{16,\mu}[\partial,\xi] A^\alpha_\mu \overline{c}^\beta + f_{17}^{a\beta}[\xi](\partial_\mu A^a_\mu)\overline{c}^\beta
+ f_{18}^{\alpha\beta}[\xi](\partial_\mu A^\alpha_\mu)\overline{c}^\beta + f_{19}^{a\beta}[\xi] A^a_\mu(\partial_\mu \overline{c}^\beta) + f_{20}^{\alpha\beta}[\xi] A^\alpha_\mu(\partial_\mu \overline{c}^\beta)
+ f_{21}^{\alpha b}[\xi] b^\alpha \overline{c}^b + f_{22}^{\alpha\beta}[\xi] b^\alpha \overline{c}^\beta + f_{23}^{\alpha\beta c}[\xi] \overline{c}^\alpha \overline{c}^\beta c^c
+ f_{24}^{\alpha\beta\gamma}[\xi] \overline{c}^\alpha \overline{c}^\beta c^\gamma + f^\alpha_{25,\mu}[\partial,\xi] \partial_\mu \overline{c}^\alpha + f^\alpha_{26}[\partial^2,\xi] \overline{c}^\alpha
+ m^2_{off} f^\alpha_{27}[\xi] \overline{c}^\alpha + m^2_{diag} f^\alpha_{28}[\xi] \overline{c}^\alpha \Bigg)\,. \tag{191}$$

Resta-nos ainda atuar a equação de *ghost* η (174):

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta\eta^K} + f^{KLM}\Xi^L_\mu \frac{\delta}{\delta\mathcal{J}^M_\mu} + f^{KLM}\overline{\eta}^L \frac{\delta}{\delta\tau^M} \right) \Sigma_{CT} \\
&\quad = \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta\eta^K} + f^{KLM}\Xi^L_\mu \frac{\delta}{\delta\mathcal{J}^M_\mu} + f^{KLM}\overline{\eta}^L \frac{\delta}{\delta\tau^M} \right) \left(\Delta + \beta_\Sigma \Delta^{(-1)} \right) \\
&\quad = \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta\eta^K} + f^{KLM}\Xi^L_\mu \frac{\delta}{\delta\mathcal{J}^M_\mu} + f^{KLM}\overline{\eta}^L \frac{\delta}{\delta\tau^M} \right) \Delta \\
&\quad = \int d^4x (b_6 + b_7) f^{ABC} \widehat{\Xi}^B_\mu \mathcal{A}^C_\mu = 0\,,
\end{aligned}
\tag{192}
$$

da qual tiramos que:

$$
b_7 = -b_6\,. \tag{193}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\Delta = \int d^4x \Bigg[& \frac{a_0}{4g^2} F^A_{\mu\nu} F^A_{\mu\nu} + b_1\, (\partial_\mu \mathcal{A}^A_\mu)(\partial_\nu \mathcal{A}^A_\nu) + b_2\, (\partial_\mu \mathcal{A}^A_\nu)(\partial_\mu \mathcal{A}^A_\nu) \\
& + b_3\, f^{ABC} (\partial_\mu \mathcal{A}^A_\mu) \mathcal{A}^B_\nu \mathcal{A}^C_\nu + b_4^{ABCD} \mathcal{A}^A_\mu \mathcal{A}^B_\mu \mathcal{A}^C_\nu \mathcal{A}^D_\nu + b_5\, \widehat{\Xi}^A_\mu\, \partial_\mu \eta^A \\
& - b_7\, f^{ABC}\, \widehat{\Xi}^A_\mu \eta^B \mathcal{A}^C_\mu + b_7 \widehat{\mathcal{J}}^A_\mu \mathcal{A}^A_\mu + \frac{m^2_{off}}{2} \left(b_8 \mathcal{A}^a_\mu \mathcal{A}^a_\mu + b_9 \mathcal{A}^\alpha_\mu \mathcal{A}^\alpha_\mu \right) \\
& + \frac{m^2_{diag}}{2} \left(b_{10} \mathcal{A}^a_\mu \mathcal{A}^a_\mu + b_{11} \mathcal{A}^\alpha_\mu \mathcal{A}^\alpha_\mu \right) \Bigg]\,.
\end{aligned}
\tag{194}
$$

Quando fizermos o limite $m^2_{off} = m^2_{diag} = \mathcal{J}^A = \Xi^A_\mu = K^A = 0$, devemos recuperar a teoria de Yang-Mills no MAG, assim como suas simetrias. Com isso, podemos comparar o contratermo que obtivemos com o da teoria original no MAG. O setor não trivial é, simplesmente,

$$
\Delta_{MAG} = \frac{a_0}{4g^2} \int^4 x\, F^A_{\mu\nu} F^A_{\mu\nu}\,. \tag{195}
$$

Já o setor trivial da teoria usual sem massa pode ser encontrado em (DUDAL et al., 2004)[19]:

$$
\begin{aligned}
\Delta^{(-1)}_{MAG} = \int d^4x \Bigg(& a_1 L^\alpha c^\alpha + a_2 \Omega^\alpha_\mu A^\alpha_\mu + \alpha a_4\, \overline{c}^\alpha (b^\alpha + i f^{\alpha\beta c} \overline{c}^\beta c^c) + a_3 \overline{c}^\alpha D^{\alpha\beta}_\mu A^\beta_\mu + \\
& + i \frac{a_4}{2} f^{\alpha\beta\gamma} \overline{c}^\alpha \overline{c}^\beta c^\gamma \Bigg)\,.
\end{aligned}
\tag{196}
$$

[19] Equação (38) dessa referência fazendo $\lambda = 0$ e $g = 1$.

Assim, comparando os termos temos, para o setor não trivial,

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4^{ABCD} = 0 \tag{197}$$

e ainda devemos fixar

$$b_5 = b_7\,, \tag{198}$$

para que se possa integrar os campos $\{\tau, \eta, \bar{\eta}\}$ na teoria sem massa. Já para o setor trivial, temos,

$$\begin{aligned} 0 &= f_1^{ab}[\xi] = f_2^{a\beta}[\xi] = f_3^{\alpha b}[\xi] = f_6^{ab}[\xi] = f_7^{\beta a}[\xi] = f_8^{\alpha b}[\xi] = f_{10,\mu}^{a}[\partial, \xi] = f_{11,\mu}^{\alpha}[\partial, \xi] \\ &= f_{12}^{ab\gamma}[\xi] = f_{14}^{\alpha\beta\gamma}[\xi] = f_{15,\mu}^{a\beta}[\partial, \xi] = f_{16,\mu}^{\alpha\beta}[\partial, \xi] = f_{17}^{a\beta}[\xi] = f_{19}^{a\beta}[\xi] \\ &= f_{20}^{\alpha\beta}[\xi] = f_{21}^{a\beta}[\xi] = f_{25,\mu}^{\alpha}(\partial, \xi) = f_{26}^{\alpha}[\xi] \end{aligned} \tag{199}$$

e

$$f_4^{\alpha\beta}[\xi] = a_1 \delta^{\alpha\beta}\,, \tag{200}$$
$$f_9^{\alpha\beta}[\xi] = a_2 \delta^{\alpha\beta}\,, \tag{201}$$
$$f_{22}^{\alpha\beta}[\xi] = \alpha a_4 \delta^{\alpha\beta}\,, \tag{202}$$
$$f_{23}^{\alpha\beta c}[\xi] = i\alpha a_4 f^{\alpha\beta c}\,, \tag{203}$$
$$f_{18}^{\alpha\beta}[\xi] = a_3 \delta^{\alpha\beta}\,, \tag{204}$$
$$f_{13}^{\alpha\beta\gamma}[\xi] = a_3 g f^{a\beta\gamma}\,, \tag{205}$$
$$f_{24}^{\alpha\beta\gamma}[\xi] = \frac{i\alpha a_4}{2} f^{\alpha\beta\gamma}\,. \tag{206}$$

Portanto, Δ e $\Delta^{(-1)}$ agora são escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta = \int d^4x \bigg[& \frac{a_0}{4g^2} F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A + b_5 \Big(\overline{\eta}^A \partial_\mu (D_\mu^{AB}[\mathcal{A}]\eta^B) + \Xi_\mu^A D_\mu^{AB}[\mathcal{A}]\eta^B + \mathcal{J}_\mu^A \mathcal{A}_\mu^A + \\ & + \tau^A \partial_\mu \mathcal{A}_\mu^A \Big) + \frac{m_{off}^2}{2} \Big(b_8 \mathcal{A}_\mu^a \mathcal{A}_\mu^a + b_9 \mathcal{A}_\mu^\alpha \mathcal{A}_\mu^\alpha \Big) + \frac{m_{diag}^2}{2} \Big(b_{10} \mathcal{A}_\mu^a \mathcal{A}_\mu^a + \\ & + b_{11} \mathcal{A}_\mu^\alpha \mathcal{A}_\mu^\alpha \Big) \bigg] \end{aligned} \tag{207}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta^{(-1)} = \int d^4x \bigg[& a_1 L^\alpha c^\alpha + a_2 \Omega_\mu^\alpha A_\mu^\alpha + a_3 \overline{c}^\alpha D_\mu^{\alpha\beta} A_\mu^\beta + \alpha a_4 \Big(b^\alpha \overline{c}^\alpha + igf^{\alpha\beta c} \overline{c}^\alpha \overline{c}^\beta c^c + \\ & + i\frac{g}{2} f^{\alpha\beta\gamma} \overline{c}^\alpha \overline{c}^\beta c^\gamma \Big) + f_5^A[\xi]\, K^A + m_{off}^2 f_{27}^\alpha[\xi]\, \overline{c}^\alpha + m_{diag}^2 f_{28}^\alpha[\xi]\, \overline{c}^\alpha \bigg]. \end{aligned} \tag{208}$$

Com isso, podemos escrever a ação dos contratermos Σ_{CT} da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{CT} =& - a_0 g^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial g^2} + 2\,(a_4 - a_3)\,\alpha \frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha} + \left(b_8 \frac{m^2_{off}}{2} + b_{10} \frac{m^2_{diag}}{2} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial m^2_{diag}} \\
& + \left(b_9 \frac{m^2_{off}}{2} + b_{11} \frac{m^2_{diag}}{2} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial m^2_{off}} + \int d^4x \Bigg(- b_5 \overline{\eta}^A \frac{\delta \Sigma}{\delta \overline{\eta}^A} - b_5 \Xi^A_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta \Xi^A_\mu} \\
& - b_5 \tau^A \frac{\delta \Sigma}{\delta \tau^A} - b_5 \mathcal{J}^A_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta \mathcal{J}^A_\mu} - a_1 c^\alpha \frac{\delta \Sigma}{\delta c^\alpha} - \frac{\partial f^A_5[\xi]}{\partial \xi^B} K^A \frac{\delta \Sigma}{\delta K^B} + f^A_5[\xi] \frac{\delta \Sigma}{\delta \xi^A} \\
& + a_1 L^\alpha \frac{\delta \Sigma}{\delta L^\alpha} - a_2 \Omega^\alpha_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega^\alpha_\mu} + a_2 A^\alpha_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta A^\alpha_\mu} + a_3 b^\alpha \frac{\delta \Sigma}{\delta b^\alpha} + a_3 \overline{c}^\alpha \frac{\delta \Sigma}{\delta \overline{c}^\alpha} \Bigg) \\
& + \int d^4x \Bigg[m^2_{off} \frac{\partial f^\alpha_{27}[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^\alpha + i m^2_{off} f^\alpha_{27}[\xi] b^\alpha + m^2_{diag} \frac{\partial f^\alpha_{28}[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^\alpha \\
& + i m^2_{diag} f^\alpha_{28}[\xi] b^\alpha - a_3 m^2_{off} \frac{\partial \phi^\alpha[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^\alpha - a_3 i m^2_{off} \phi^\alpha(\xi) b^\alpha \\
& - a_3 m^2_{diag} \frac{\partial \psi^\alpha[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^\alpha - a_3 i m^2_{diag} \psi^\alpha[\xi] b^\alpha \\
& + \left(b_8 m^2_{off} + b_{10} m^2_{diag} \right) \left(- \frac{\partial \phi^\alpha[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^\alpha - i \phi^\alpha[\xi] b^\alpha \right) \\
& + \left(b_9 m^2_{off} + b_{11} m^2_{diag} \right) \left(- \frac{\partial \psi^\alpha[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^\alpha - i \psi^\alpha[\xi] b^\alpha \right) \Bigg],
\end{aligned} \tag{209}$$

que é quase a forma paramétrica que desejamos obter. Ainda nos falta escrever a última integral em (209) através das derivadas dos coeficientes das séries $\psi^\alpha[\xi]$ e $\phi^\alpha[\xi]$, dadas por (143) e (144), respectivamente. Para tanto, vamos, primeiramente escrever $f^\alpha_{27}[\xi]$ e $f^\alpha_{28}[\xi]$ como séries:

$$f^\alpha_{27}[\xi] = c_1\, \xi^\alpha + c_2\, f^{\alpha\beta a} \xi^\beta \xi^a + c_3^{\alpha ABC} \xi^A \xi^B \xi^C + \ldots \tag{210}$$

$$f^\alpha_{28}[\xi] = d_1\, \xi^\alpha + d_2\, f^{\alpha\beta a} \xi^\beta \xi^a + d_3^{\alpha ABC} \xi^A \xi^B \xi^C + \ldots \tag{211}$$

e assim, a última integral em (209) poderá ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\int d^4x \Bigg[& m_{off}^2 \frac{\partial f_{27}^{\alpha}[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi]] c^B \overline{c}^{\alpha} + i m_{off}^2 f_{27}^{\alpha}[\xi] b^{\alpha} + m_{diag}^2 \frac{\partial f_{28}^{\alpha}[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^{\alpha} \\
& + i m_{diag}^2 f_{28}^{\alpha}[\xi] b^{\alpha} - a_3 m_{off}^2 \frac{\partial \phi^{\alpha}[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^{\alpha} - a_3 i m_{off}^2 \phi^{\alpha}[\xi] b^{\alpha} \\
& - a_3 m_{diag}^2 \frac{\partial \psi^{\alpha}[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB} c^B \overline{c}^{\alpha} - a_3 i m_{diag}^2 \psi^{\alpha}[\xi] b^{\alpha} \\
& + \left(b_8 m_{off}^2 + b_{10} m_{diag}^2 \right) \left(- \frac{\partial \phi^{\alpha}[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^{\alpha} - i \phi^{\alpha}[\xi] b^{\alpha} \right) \\
& + \left(b_9 m_{off}^2 + b_{11} m_{diag}^2 \right) \left(- \frac{\partial \psi^{\alpha}[\xi]}{\partial \xi^A} g^{AB}[\xi] c^B \overline{c}^{\alpha} - i \psi^{\alpha}[\xi] b^{\alpha} \right) \Bigg] = \\
& = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left[c_i - (a_3 + b_8) \beta_i - b_9 \gamma_i \right] \frac{\partial \Sigma}{\partial \beta_i} + \left[d_i - b_{10} \beta_i - (a_3 + b_{11}) \gamma_i \right] \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma_i} \right\} \qquad (212) \\
& + \sum_{i=3}^{\infty} \left\{ \left[c_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - (a_3 + b_8) \beta_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - b_9 \gamma_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} \right] \frac{\partial \Sigma}{\partial \beta_i^{A_1 A_2 \ldots A_i}} \right. \\
& \left. + \left[d_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - b_{10} \beta_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - (a_3 + b_{11}) \gamma_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} \right] \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma_i^{A_1 A_2 \ldots A_i}} \right\} . \qquad (213)
\end{aligned}$$

Logo, o contratermo em sua forma paramétrica é escrito como:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{CT} = & - a_0 g^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial g^2} + 2 (a_4 - a_3) \alpha \frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha} + \left(b_8 \frac{m_{off}^2}{2} + b_{10} \frac{m_{diag}^2}{2} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial m_{diag}^2} \\
& + \left(b_9 \frac{m_{off}^2}{2} + b_{11} \frac{m_{diag}^2}{2} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial m_{off}^2} + \int d^4x \Bigg(- b_5 \overline{\eta}^A \frac{\delta \Sigma}{\delta \overline{\eta}^A} - b_5 \Xi_{\mu}^A \frac{\delta \Sigma}{\delta \Xi_{\mu}^A} \\
& - b_5 \tau^A \frac{\delta \Sigma}{\delta \tau^A} - b_5 \mathcal{J}_{\mu}^A \frac{\delta \Sigma}{\delta \mathcal{J}_{\mu}^A} - a_1 c^{\alpha} \frac{\delta \Sigma}{\delta c^{\alpha}} - \frac{\partial f_5^A[\xi]}{\partial \xi^B} K^A \frac{\delta \Sigma}{\delta K^B} + f_5^A[\xi] \frac{\delta \Sigma}{\delta \xi^A} \\
& + a_1 L^{\alpha} \frac{\delta \Sigma}{\delta L^{\alpha}} - a_2 \Omega_{\mu}^{\alpha} \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_{\mu}^{\alpha}} + a_2 A_{\mu}^{\alpha} \frac{\delta \Sigma}{\delta A_{\mu}^{\alpha}} + a_3 b^{\alpha} \frac{\delta \Sigma}{\delta b^{\alpha}} + a_3 \overline{c}^{\alpha} \frac{\delta \Sigma}{\delta \overline{c}^{\alpha}} \Bigg) \\
& + \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left[c_i - (a_3 + b_8) \beta_i - b_9 \gamma_i \right] \frac{\partial \Sigma}{\partial \beta_i} + \left[d_i - b_{10} \beta_i - (a_3 + b_{11}) \gamma_i \right] \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma_i} \right\} \qquad (214) \\
& + \sum_{i=3}^{\infty} \left\{ \left[c_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - (a_3 + b_8) \beta_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - b_9 \gamma_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} \right] \frac{\partial \Sigma}{\partial \beta_i^{A_1 A_2 \ldots A_i}} \right. \\
& \left. + \left[d_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - b_{10} \beta_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - (a_3 + b_{11}) \gamma_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} \right] \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma_i^{A_1 A_2 \ldots A_i}} \right\} . \qquad (215)
\end{aligned}$$

Esta última expressão para o contratermo também pode ser vista como

$$\Sigma^{CT} = \mathcal{R} \Sigma \, , \qquad (216)$$

em que $\mathcal{R}$ é um operador linear atuando em Σ,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} = &- a_0 g^2 \frac{\partial}{\partial g^2} + 2\,(a_4 - a_3)\,\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left(b_8 \frac{m^2_{off}}{2} + b_{10} \frac{m^2_{diag}}{2} \right) \frac{\partial}{\partial m^2_{diag}} \\
&+ \left(b_9 \frac{m^2_{off}}{2} + b_{11} \frac{m^2_{diag}}{2} \right) \frac{\partial}{\partial m^2_{off}} + \int d^4x \bigg(- b_5 \overline{\eta}^A \frac{\delta}{\delta \overline{\eta}^A} - b_5 \Xi^A_\mu \frac{\delta}{\delta \Xi^A_\mu} \\
&- b_5 \tau^A \frac{\delta}{\delta \tau^A} - b_5 \mathcal{J}^A_\mu \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}^A_\mu} - a_1 c^\alpha \frac{\delta}{\delta c^\alpha} - \frac{\partial f^A_5[\xi]}{\partial \xi^B} K^A \frac{\delta}{\delta K^B} + f^A_5[\xi] \frac{\delta}{\delta \xi^A} \\
&+ a_1 L^\alpha \frac{\delta}{\delta L^\alpha} - a_2 \Omega^\alpha_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega^\alpha_\mu} + a_2 A^\alpha_\mu \frac{\delta}{\delta A^\alpha_\mu} + a_3 b^\alpha \frac{\delta}{\delta b^\alpha} + a_3 \overline{c}^\alpha \frac{\delta}{\delta \overline{c}^\alpha} \bigg) \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \left\{ [c_i - (a_3 + b_8)\,\beta_i - b_9 \gamma_i] \frac{\partial}{\partial \beta_i} + [d_i - b_{10} \beta_i - (a_3 + b_{11})\,\gamma_i] \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \right\} \qquad (217) \\
&+ \sum_{i=3}^{\infty} \bigg\{ \left[c_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - (a_3 + b_8)\,\beta_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - b_9 \gamma_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} \right] \frac{\partial}{\partial \beta_i^{A_1 A_2 \ldots A_i}} \\
&+ \left[d_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - b_{10} \beta_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} - (a_3 + b_{11})\,\gamma_i^{A_1 A_2 \ldots A_i} \right] \frac{\partial}{\partial \gamma_i^{A_1 A_2 \ldots A_i}} \bigg\} \,. \qquad (218)
\end{aligned}
$$

Com isto, será possível escrever de maneira relativamente simples as renormalizações de campos, fontes e parâmetros da teoria. Porém, vamos inicialmente definir uma variável Φ representando todas essas quantidades, isto é,

$$
\Phi \equiv A, b, c, \bar{c}, \xi, \tau, \eta, \bar{\eta}, \Omega, L, K, \mathcal{J}, \Xi, g, \alpha, m^2_{diag}, m^2_{off}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_n^{A_1 \ldots A_n}, \beta_1, \beta_2, \beta_n^{A_1 \ldots A_n} \,. \qquad (219)
$$

Assim, as quantidades "nuas" Φ_0 (não renormalizadas) estão relacionadas com aquelas renormalizadas Φ através da seguinte relação

$$
\Phi_0 = \Phi + \hbar\, \zeta_\Phi + O(\hbar^2) \,, \qquad (220)
$$

em que ζ_Φ é, de um modo geral, tomado como um funcional local nos campos. Essa consideração é necessária em vista da possibilidade de renormalizações não lineares e/ou matriciais. A partir disto, a ação clássica nua $\Sigma[\Phi_0]$ relaciona-se com a renormalizada $\Sigma[\Phi]$ como

$$
\Sigma[\Phi_0] = \Sigma[\Phi + \hbar\, \zeta_\Phi] = \Sigma[\Phi] + \hbar\, \zeta_\Phi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Phi} + O(\hbar^2) \,, \qquad (221)
$$

em que a "derivada" $\mathrm{d}/\mathrm{d}\Phi$ é uma derivada parcial quando Φ representa um parâmetro $(\partial/\partial g)$ e é uma derivada funcional integrada quando Φ representa um campo ou uma fonte $(\int d^4x\, \delta/\delta\varphi)$. Esta última expressão pode ser comparada com

$$
\Sigma[\Phi_0] = \Sigma[\Phi] + \hbar\, \Sigma_{CT} + O(\hbar^2) = \Sigma[\Phi] + \hbar\, \mathcal{R}\Sigma + O(\hbar^2) \,, \qquad (222)
$$

que vem de (216). Como resultado desta comparação, conclui-se que

$$\mathcal{R} \equiv \zeta_\Phi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Phi}\,. \tag{223}$$

Logo, o contratermo (215) pode ser absorvido na ação de partida (159) pelas renormalizações[20]

$$\Phi_0 = (1 + \hbar\,\mathcal{R})\Phi + O(\hbar^2)\,. \tag{224}$$

Explicitamente, temos:

- Componetes diagonais

$$(A_0)^a_\mu = A^a_\mu\,, \tag{225}$$
$$b^a_0 = b^a\,, \tag{226}$$
$$c^a_0 = c^a\,, \tag{227}$$
$$\bar{c}^a_0 = \bar{c}^a\,, \tag{228}$$
$$(\Omega_0)^a_\mu = \Omega^a_\mu\,, \tag{229}$$
$$L^a_0 = L^a\,. \tag{230}$$

- Componentes não diagonais

$$(A_0)^\alpha_\mu = (1 + \hbar\,a_2)A^\alpha_\mu\,, \tag{231}$$
$$b^\alpha_0 = (1 + \hbar\,a_3)b^\alpha\,, \tag{232}$$
$$c^\alpha_0 = (1 - \hbar\,a_1)c^\alpha\,, \tag{233}$$
$$\bar{c}^\alpha_0 = (1 + \hbar\,a_3)\bar{c}^\alpha\,, \tag{234}$$
$$(\Omega_0)^\alpha_\mu = (1 - \hbar\,a_2)\Omega^\alpha_\mu\,, \tag{235}$$
$$L^\alpha_0 = (1 + \hbar\,a_1)L^\alpha\,. \tag{236}$$

[20] Uma análise muito parecida é feita em (CAPRI; TERIN; TOLEDO, 2019).

- Campos ligados a localização de $\mathcal{A}_\mu$

$$\xi_0^A = \xi^A + \hbar\, f_5^A[\xi]\,, \tag{237}$$
$$\eta_0^A = \eta^A\,, \tag{238}$$
$$\bar{\eta}_0^A = (1 - \hbar\, b_5)\bar{\eta}^A\,, \tag{239}$$
$$\tau_0^A = (1 - \hbar\, b_5)\tau^A\,, \tag{240}$$
$$K_0^A = \left(\delta^{AB} - \hbar\,\frac{\partial f_5^B[\xi]}{\partial \xi^A}\right) K^B\,, \tag{241}$$
$$(\mathcal{J}_0)_\mu^A = (1 - \hbar\, b_5)\mathcal{J}_\mu^A\,, \tag{242}$$
$$(\Xi_0)_\mu^A = (1 - \hbar\, b_5)\Xi_\mu^A\,. \tag{243}$$

- Parâmetros

$$g_0 = (1 - \hbar\, a_0)g\,, \tag{244}$$
$$\alpha_0 = [1 - 2\hbar\,(a_4 - a_3)]\alpha\,, \tag{245}$$
$$(m^2_{diag})_0 = m^2_{diag} + \frac{\hbar}{2}\,(b_8\, m^2_{off} + b_{10}\, m^2_{diag})\,, \tag{246}$$
$$(m^2_{off})_0 = m^2_{off} + \frac{\hbar}{2}\,(b_9\, m^2_{off} + b_{11}\, m^2_{diag})\,, \tag{247}$$
$$(\beta_0)_i = \beta_i + \hbar\,\left[c_i - (a_3 + b_8)\,\beta_i - b_9\gamma_i\right]\,, \quad (i = 1, 2) \tag{248}$$
$$(\gamma_0)_i = \gamma_i + \hbar\,\left[d_i - (a_3 + b_{11})\,\gamma_i - b_{10}\beta_i\right]\,, \quad (i = 1, 2) \tag{249}$$
$$(\beta_0)_i^{A_1\ldots A_i} = \beta_i^{A_1\ldots A_i} + \hbar\,\left[c_i^{A_1\ldots A_i} - (a_3 + b_8)\,\beta_i^{A_1\ldots A_i} - b_9\gamma_i^{A_1\ldots A_i}\right]\,, \quad (i > 2) \tag{250}$$
$$(\gamma_0)_i^{A_1\ldots A_i} = \gamma_i^{A_1\ldots A_i} + \hbar\,\left[d_i^{A_1\ldots A_i} - b_{10}\beta_i^{A_1\ldots A_i} - (a_3 + b_{11})\,\gamma_i^{A_1\ldots A_i}\right]\,, \quad (i > 2)\,. \tag{251}$$

Nesta parametrização alguns campos não se renormalizam, como é o caso das componentes diagonais de $(A, b, c, \bar{c})$. Algumas renormalizações são não lineares, como a do campo tipo Stueckelberg ξ^A e da fonte K^A. Este é um resultado esperado devido a dimensão zero desse campo. Ocorrem também algumas renormalizações matriciais entre alguns parâmetros.

Por fim, podemos ainda estabelecer algumas relações entre os "fatores Z" de renormalização. Definindo as renormalizações de campos (ϕ_0), fontes (ρ_0) e parâmetros (λ_0) respectivamente como:

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2}\phi\,, \tag{252}$$
$$\rho_0 = Z_\rho\,\rho\,, \tag{253}$$
$$\lambda_0 = Z_\lambda\,\lambda\,, \tag{254}$$

em que $\phi \equiv \{A^A_\mu, b^A, c^A, \bar{c}^A, \tau^A, \eta^A, \overline{\eta}^A\}$, $\rho \equiv \{\Omega^A_\mu, L^A, \mathcal{J}^A, \Xi^A_\mu\}$, $\lambda \equiv \{g, \alpha\}$,

$$\begin{pmatrix} m^2_{off0} \\ m^2_{diag0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{m_{off}m_{off}} & Z_{m_{off}m_{diag}} \\ Z_{m_{diag}m_{off}} & Z_{m_{diag}m_{diag}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2_{off} \\ m^2_{diag} \end{pmatrix} \tag{255}$$

e

$$\begin{pmatrix} \beta_{i0} \\ \gamma_{i0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\beta_i\beta_i} & Z_{\beta_i\gamma_i} \\ Z_{\gamma_i\beta_i} & Z_{\gamma_i\gamma_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)\,, \tag{256}$$

estabelecemos as seguintes relações:

$$Z^{1/2}_{A^\alpha} = Z^{-1}_{\Omega^\alpha} = 1 + \hbar\, a_2\,, \tag{257}$$

$$Z_g = 1 - \hbar\, a_0\,, \tag{258}$$

$$Z_\alpha = 1 + 2\hbar\,(a_4 - a_3)\;, \tag{259}$$

$$Z^{1/2}_{b^\alpha} = Z^{1/2}_{\bar{c}^\alpha} = 1 + \hbar\, a_3\,, \tag{260}$$

$$Z^{1/2}_{c^\alpha} = Z^{-1}_{L^\alpha} = 1 - \hbar\, a_1\,, \tag{261}$$

$$Z^{1/2}_{\tau^A} = Z^{1/2}_{\overline{\eta}^A} = Z_{\Xi^A} = Z_{\mathcal{J}^A} = 1 - \hbar\, b_5\,, \tag{262}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{m_{off}m_{off}} & Z_{m_{off}m_{diag}} \\ Z_{m_{diag}m_{off}} & Z_{m_{diag}m_{diag}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \hbar\, b_8/2 & \hbar\, b_{10}/2 \\ \hbar\, b_9/2 & 1 + \hbar b_{11}/2 \end{pmatrix}, \tag{263}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{\beta_i\beta_i} & Z_{\beta_i\gamma_i} \\ Z_{\gamma_i\beta_i} & Z_{\gamma_i\gamma_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + h(-a_3 - b_8 + c_i/\beta_i) & -hb_9 \\ -hb_{10} & 1 + h(-a_3 - b_{11} + d_i/\gamma_i) \end{pmatrix}. \tag{264}$$

CONCLUSÃO

Foi abordada nesta dissertação os procedimentos necessários para a renormalização algébrica de uma teoria. Fizemos uma abordagem em que começamos apresentando a quantização da teoria de Yang-Mills utilizando o método de Faddeev-Popov, mostrando que a teoria passa a respeitar a chamada simetria de BRST

No capítulo 2 escolhemos um calibre específico que promove a separação das componentes abelianas do campo de calibre das demais (Calibre Abeliano Maximal - MAG), fazendo com que este seja adequado para o estudo da dominância abeliana. Fizemos uma breve contextualização histórica da introdução do termo de massa à teoria para podermos falar do operador invariante A^2_{min}. Ao final do capítulo vemos como o calibre de MAG quebra parcialmente a simetria rígida nos permitindo separar as massas diagonais e não diagonais.

Por fim, no útlimo capítulo conseguimos demonstrar a renormalização da ação. Para isso, tivemos que construir a ação completa, tendo que adicionar os termos de fontes externas, operadores compostos e um termo extra devido a não linearidade da condição de calibre não diagonal. Em seguida os campos foram redefinidos de forma conveniente em que o parâmetro g fosse absorvido, para mais tarde podermos escrever a ação do contratermo na forma paramétrica. Por último, fizemos as análises das simetrias e seguimos os passos da renormalização algébrica para construção da ação dos contratermos e eventual análise de seus coeficientes. Percebemos que no final tivemos uma renormalização matricial e uma renormalização não linear dado que o campo de Stueckelberg possui uma peculiaridade de poder se renormalizar consigo mesmo pelo fato de ser um campo de dimensão zero.

Futuramente alguns trabalhos podem ser feitos a partir deste; em primeiro lugar, é importante ressaltar que o trabalho feito nesta dissertação foi feito sem levar em consideração a região de Gribov, apenas utilizamos da condição de extremo do operador do A^2_{min}, o que significa que trabalhos implimentando a região de Gribov com uma função horizonte podem ser feitos. Em segundo lugar, um estudo sobre a equação de movimento do *ghost* c como uma identidade de Ward poderia ainda ser feito, uma vez que esta identidade existe no caso da teoria de Yang-Mills pura no MAG.

É importante destacar que esse modelo de adição de massa não é uma alternativa à teoria de Higgs, mas sim um modelo que pode ser estudado em conjunto com o de Higgs. Uma outra ideia seria generalizar este trabalho no superespaço, uma vez que existem as versões supersimétricas tanto do MAG quanto do operador composto $\mathcal{A}[A, \xi]$, ver (CAPRI; TERIN; TOLEDO, 2019) e (CAPRI et al., 2018). Outro possível desdobramento seria utilizar os resultados na rede e eventualmente dar uma estimativa para os valores das massas.

REFERÊNCIAS

ALKOFER, Reinhard; SMEKAL, Lorenz Von. The infrared behaviour of qcd green's functions: confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Physics Reports*, Elsevier, v. 353, n. 5-6, p. 281–465, 2001.

BAAL, Pierre van. More (thoughts on) gribov copies. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 369, n. 1-2, p. 259–275, 1992.

BAILIN, David; LOVE, Alexander. *Introduction to Gauge Field Theory Revised Edition*. [S.l.]: CRC Press, 1993.

CAPRI, Marcio. *Aplicação do Mecanismo de Geração Dinâmica de Massa no Problema de Dualidade Quantica em (2+1) Dimensões*. [S.l.]: Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2005.

CAPRI, Marcio André Lopes. Aspectos não perturbativos das teorias de yang-mills no calibre abeliano maximal. *Tese (Doutorado em Física)*, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2009.

CAPRI, Marcio André Lopes et al. Study of the gauge invariant, nonlocal mass operator tr d 4 x f μ ν (d 2)- 1 f μ ν in yang-mills theories. *Physical Review D*, APS, v. 72, n. 10, p. 105016, 2005.

CAPRI, Marcio Andre Lopes et al. Renormalizability of $\mathcal{N} = 1$ super Yang-Mills theory in Landau gauge with a Stueckelberg-like field. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 10, p. 797, 2018.

CAPRI, Marcio André Lopes et al. Local and renormalizable framework for the gauge-invariant operator a min 2 in euclidean yang-mills theories in linear covariant gauges. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 6, p. 065009, 2016.

_____. Renormalizability of the refined gribov-zwanziger action in linear covariant gauges. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 5, p. 054022, 2017.

_____. Study of the properties of the gribov region in su (n) euclidean yang–mills theories in the maximal abelian gauge. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 43, n. 24, p. 245402, 2010.

_____. Study of the gribov region in euclidean yang-mills theories in the maximal abelian gauge. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 2, p. 025019, 2009.

CAPRI, Marcio Andre Lopes; TERIN, R. C.; TOLEDO, H. C. Renormalization of a generalized supersymmetric version of the maximal Abelian gauge. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 2, p. 025015, 2019.

DELL'ANTONIO, Gianfausto; ZWANZIGER, Daniel. Ellipsoidal bound on the gribov horizon contradicts the perturbative renormalization group. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 326, n. 2, p. 333–350, 1989.

_____. Every gauge orbit passes inside the gribov horizon. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 138, n. 2, p. 291–299, 1991.

DUDAL, David et al. Analytic study of the off-diagonal mass generation for yang-mills theories in the maximal abelian gauge. *Physical Review D*, APS, v. 70, n. 11, p. 114038, 2004.

______. Remarks on a class of renormalizable interpolating gauges. *JHEP*, v. 07, p. 059, 2005.

EZAWA, Zyun Francis; IWAZAKI, A. Abelian dominance and quark confinement in yang-mills theories. *Physical Review D*, APS, v. 25, n. 10, p. 2681, 1982.

FADDEEV, Ludvig D; POPOV, Victor N. Feynman diagrams for the yang-mills field. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 25, n. 1, p. 29–30, 1967.

FERREIRA, Luiz Agostinho. *Lecture Notes on Lie Algebras and Lie Groups*. 2018.

GARCIA, F. F. *A Evolução dos Mecanismos de Geração de Massa em Teorias de Calibre*. [S.l.]: Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2021.

GOMES, Marcelo Otávio Caminha. *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. [S.l.]: Edusp, 2002.

GREINER, Walter; REINHARDT, Joachim. *Field quantization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

GRIBOV, Vladimir Naumovich. Quantization of non-abelian gauge theories. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 139, n. 1-2, p. 1–19, 1978.

HIOKI, Shinji et al. Abelian dominance in su (2) color confinement. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 272, n. 3-4, p. 326–332, 1991.

HOOFT, Gerard 't. The topological mechanism for permanent quark confinement in a non-abelian gauge theory. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 25, n. 1B, p. 133, 1982.

LAUTRUP, Benny. Canonical quantum electrodynamics in covariant gauges. Kbh. : Munksgaard i komm, 1967.

MANDELSTAM, Stanley. Vortices and quark confinement in non-abelian gauge theories. *Physics Reports*, v. 23, n. 3, p. 245–249, 1976.

NAKANISHI, Noboru. Covariant quantization of the electromagnetic field in the landau gauge. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 35, n. 6, p. 1111–1116, 1966.

PESKIN, Michael E. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC press, 2018.

PIGUET, Olivier; SORELLA, Silvio P. *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 28.

PROCA, Alexandru. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *Journal de Physique et le Radium*, Société Française de Physique, v. 7, n. 8, p. 347–353, 1936.

RUEGG, Henri; RUIZ-ALTABA, Marti. The stueckelberg field. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 19, n. 20, p. 3265–3347, 2004.

SCHWINGER, Julian. *Selected papers on quantum electrodynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1958.

SINGER, Isadore M. Some remarks on the gribov ambiguity. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 60, n. 1, p. 7–12, 1978.

SORELLA, Silvio Paolo. *Introdução à simetria BRST e renormalização algébrica*. [s.n.], 2020. Disponível em: <https://youtu.be/4HGCgs-XF8w>. Acesso em: 16 nov. 2021.

SUZUKI, Tsuneo; YOTSUYANAGI, Ichiro. Possible evidence for abelian dominance in quark confinement. *Physical Review D*, APS, v. 42, n. 12, p. 4257, 1990.

VANDERSICKEL, Nele. A study of the gribov-zwanziger action: from propagators to glueballs. *arXiv preprint arXiv:1104.1315*, 2011.

ZINN-JUSTIN, Jean. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. [S.l.]: Clarendon Press, Oxford University Press, 1993.

ZWANZIGER, Daniel. Quantization of gauge fields, classical gauge invariance and gluon confinement. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 345, n. 2-3, p. 461–471, 1990.