



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Manuella Corrêa e Silva

**Transições de fase em sistemas de campos escalares complexos:
uma análise via teoria de perturbação otimizada**

Rio de Janeiro

2022

Manuella Corrêa e Silva

**Transições de fase em sistemas de campos escalares complexos: uma análise
via teoria de perturbação otimizada**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

S586t

Silva, Manuella Corrêa e.

Transições de fase em um sistema de campos escalares complexos: uma análise via teoria de perturbação otimizada / Manuella Corrêa e Silva. – 2022.
87 f. : il.

Orientador: Rudnei de Oliveira Ramos.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Transformações de fase (Física estatística) – Teses.
2. Simetria quebrada (Física) – Teses. 3. Perturbação (Dinâmica quântica) – Teses. 4. Teoria quântica de campos – Teses. I. Ramos, Rudnei de Oliveira. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 536.42

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Manuella Corrêa e Silva

**Transições de fase em sistemas de campos escalares complexos: uma análise
via teoria de perturbação otimizada**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 26 de agosto de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Ricardo Luciano Sonogo Farias
Universidade Federal de Santa Maria

Prof^a. Dra. Letícia Faria Domingues Palhares
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof^a. Dra. Dyana Cristine Duarte
Universidade Federal de Santa Maria

Rio de Janeiro

2022

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação a Deus e a meus pais, que estiveram ao meu lado em mais essa empreitada, me apoiando e acreditando em mim quando nem eu mesma acreditei.

Dedico este trabalho também a todo curso de física da UERJ, com toda admiração ao corpo docente e discente, me sentindo realizada por dele ter podido fazer parte.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, com toda honra e meritos devidos, sou grata a DEUS que neste nestes dois anos de pandemia, me sustentou com saúde física e mental em todo o tempo de isolamento.

Sou grata aos meus pais e avós maternos que foram pilares em minha vida e que, com tanta ternura, sempre estiveram presentes nessa caminhada. E agradeço pela amizade tão presente forjada numa época tão solitária, de meu colega e amigo de curso Matheus Curado, foi uma honra compartilhar dúvidas e soluções, momentos de ansiedade e descontração.

Serei eternamente grata ao meu orientador Rudnei de oliveira Ramos que em meio ao desafio das aulas virtuais, sempre me transmitiu confiança e que soube com muita sabedoria me ajudar a vencer a dificuldades de se aprender à distância.

Agradeço a minha família e amigos, tantos os que estiveram presentes, quanto aos que por algum motivo, não puderam estar.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Não te mandei Eu? Esforça-te, e tem bom ânimo; não temas, nem te espantes; porque o Senhor teu Deus é contigo, por onde quer que andares.

Josué 1:9

RESUMO

SILVA, M. C. *Transições de fase em sistemas de campos escalares complexos: uma análise via teoria de perturbação otimizada*. 2022. 87 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

É sabido que a maior parte de sistemas físicos adquirem uma simetria maior em temperaturas elevadas. No entanto, o intuito dessa dissertação é investigar as transições de fase em sistemas físicos que apresentam quebra inversa de simetria (ISB) e não-restauração de simetria (SNR). Desenvolvemos, primeiramente, a teoria com o uso do método da expansão perturbativa. No entanto, a teoria de perturbação quebra a altas temperaturas ou densidades quando as potências das constantes de acoplamento são excedidas pelas potências da temperatura. Desta forma, a ISB ou a SNR poderiam ser apenas uma consequência dessa quebra da teoria de perturbação. Uma alternativa para este problema é utilizar um método não-perturbativo. Aqui usaremos o método da Teoria de Perturbação Otimizada (OPT), que otimiza a teoria de perturbação convencional, utilizando o Princípio de Mínima Sensibilidade (PMS), fixando os parâmetros variacionais introduzidos pela OPT. Nesta dissertação trabalhamos com dois campos escalares complexos interagentes e com auto-interação, consideramos efeitos de temperatura e potencial químico finitos, comparando os resultados perturbativos e não-perturbativos e os efeitos de densidade finita que resultam do uso do método da OPT. Calculamos o potencial efetivo a 1-laço para o caso perturbativo e na OPT até primeira ordem. Analisamos tais efeitos na presença dos fenômenos de ISB e SNR.

Palavras-chave: Transições de fase. TQC. Temperatura Finita. Teoria de Perturbação Otimizada.

ABSTRACT

SILVA, M. C. *Phase transitions in complex scalar field systems: an analysis via optimized perturbation theory*. 2022. 87 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

It is known that most physical systems acquire greater symmetry at high temperatures. However, the aim of this dissertation is to investigate the phase transitions in physical systems that present inverse symmetry breaking (ISB) and symmetry non-restoration (SNR). We first developed the theory using perturbation theory. However, this method breaks at high temperatures or densities when the powers of the coupling constants are exceeded by the powers of temperatures. In this way, the ISB or the SNR might just be a consequence of this non-applicability of the perturbation theory. An alternative is to use a non-perturbative method. Here we will use the Optimized Perturbation Theory (OPT), with the Principle of Minimal Sensitivity (PMS), to fix the basic variational parameters that are required by the OPT method. In this dissertation we work with two interacting complex scalar fields and with interaction between them. We consider the effects of finite temperature and chemical potential, comparing the perturbative and non-perturbative results that the finite density effects can bring in both methods. We calculated the 1-loop effective potential effects in the perturbative case and in first order in OPT case and analyzed the ISB and SNR phenomena in the context of both methods.

Keywords: Phase Transitions. QFT. Finite Temperature. Optimized Perturbation Theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura	1 - $m_\phi^2 > 0$ e $m_\psi^2 > 0$	40
Figura	2 - $m_\phi^2 > 0$ e $m_\psi^2 < 0$	40
Figura	3 - $m_\phi^2 < 0$ e $m_\psi^2 > 0$	41
Figura	4 - $m_\phi^2 < 0$ e $m_\psi^2 < 0$	41
Figura	5 - Contribuições de todos os diagramas de vácuo do potencial termodinâmico à primeira ordem na OPT	48
Figura	6 - A temperatura crítica para ISB na direção do campo ϕ em função do potencial químico	60
Figura	7 - O Valor Esperado de Vácuo (VEV) $\tilde{\phi}$ para OPT e para a PT como função da temperatura (assumindo $\mu = 0$).	61
Figura	8 - O VEV $\tilde{\phi}$ para OPT como função da temperatura, mantendo fixos os diferentes valores de potencial químico.	61
Figura	9 - A temperatura crítica para ISB na direção do campo ϕ como função da constante de interacoplamento λ , mantendo fixos os valores de potencial químico, tanto para OPT quanto para a PT.	61
Figura	10 - Massas efetivas dos campos em função da temperatura	62
Figura	11 - Os VEVs $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ para OPT como função da temperatura, mantendo fixos os diferentes valores de potencial químico	63
Figura	12 - As massas efetivas dos campos como função da temperatura (assumindo $\mu = 0$)	64
Figura	13 - As figuras apresentam o portamento dos VEV's dos campos ϕ e ψ em função da temperatura. Ocorre ISB a densidade finita, para diferentes valores fixos de τ	65
Figura	14 - As figuras apresentam o portamento dos VEV's dos campos ϕ e ψ em função da temperatura. Ocorre SNR a densidade finita, para diferentes valores fixos de τ	65
Figura	15 - Diagrama de vácuo do campo ϕ . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(a)}$	84
Figura	16 - Diagrama de vácuo do campo ψ . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(b)}$	84
Figura	17 - Diagrama de vácuo com propagador do campo ϕ com a inserção do parâmetro de massa $\delta\eta_\phi^2$. Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(c)}$	84
Figura	18 - Diagrama de vácuo com propagador do campo ψ com a inserção do parâmetro de massa $\delta\eta_\psi^2$. Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(d)}$	84
Figura	19 - Contribuição de 1-laço do campo ϕ com a inserção do valor esperado de vácuo ϕ_0^2 . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(e)}$	85
Figura	20 - Contribuição de 1-laço do campo ψ com a inserção do valor esperado de vácuo ψ_0^2 . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(f)}$	85

Figura 21 - Diagrama de 1-laço para o campo ψ , com propagador do campo ϕ , e inserção do valor esperado de vácuo ψ_0^2 . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(g)}$	85
Figura 22 - Diagrama de 1-laço para o campo ψ , com propagador do campo ϕ , e inserção do valor esperado de vácuo ϕ_0^2 . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(h)}$	85
Figura 23 - Diagrama de vácuo a 2-laços com dois propagadores do campo ϕ acoplados (com a constante de acoplamento λ_ϕ). Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(i)}$	86
Figura 24 - Diagrama de vácuo a 2-laços com dois propagadores do campo ψ acoplados (com a constante de acoplamento λ_ψ). Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(j)}$	86
Figura 25 - Diagrama de vácuo a 2-laços, com laços de ϕ e ψ , com o propagador do campo ϕ , representado pelo diagrama de linha cheia, acoplado ao propagador do campo ψ , representado pelo diagrama de linha tracejada (constante de acoplamento λ). Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(k)}$	86
Figura 26 - Diagrama de vácuo com propagador do campo ϕ e a inserção da renormalização de massa do campo ϕ . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(l)}$	86
Figura 27 - Diagrama de vácuo com propagador do campo ψ e inserção da renormalização de massa do campo ψ . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(m)}$	87

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	15
1.1	Elementos de mecânica estatística quântica	15
1.2	Teoria quântica de campos à temperatura finita	17
1.3	Representação da função de partição como uma integral funcional	18
2	APLICAÇÕES	22
2.1	Campo escalar carregado	22
2.2	Dois campos escalares carregados	27
2.2.1	<u>Análise de fases</u>	39
3	TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA	43
3.1	Quebra de teoria de perturbação para altas temperaturas	43
3.2	Teoria de perturbação otimizada (OPT)	45
4	APLICANDO A OPT PARA O MODELO DE DOIS CAMPOS	47
5	RESULTADOS	59
5.1	ISB, $m_\phi^2 > 0$ e $m_\psi^2 > 0$	59
5.2	SNR, $m_\phi^2 < 0$ e $m_\psi^2 < 0$	63
5.3	Resultados utilizando a OPT, com temperatura e densidade finitas	64
6	CONDENSADO DE KÁONS	66
	CONCLUSÃO	68
	APÊNDICE A – Expansão em modos de Fourier	74
	APÊNDICE B – Aplicação de identidades algébricas	78
	APÊNDICE C – Massas Físicas	80
	APÊNDICE D – Diagramas de Feynman	81

INTRODUÇÃO

Em 1927, Dirac fez o primeiro uso "prático" da Teoria Quântica de Campos (TQC), calculando a taxa com a qual os átomos em estados excitados emitiam radiação eletromagnética e decaíam para estados de mais baixa energia. Embora, a própria ideia de que os elétrons poderiam oscilar entre frequências quantizadas já havia sido proposta por Planck. E a própria ideia de campo vinha sendo construída por Born, Heisenberg e Jordan. A história do nascimento da TQC, bem como os personagens que contribuíram para isso, se encontra na referência (1).

Algum tempo depois surge o formalismo de integrais de caminho de Feynman e seus diagramas, fornecendo uma ferramenta intuitiva para processos quânticos (2, 3). Temos também o desenvolvimento do princípio variacional de Schwinger, que traz uma análise dos processos quânticos com base nas funções de Green com fontes (4). No entanto, os trabalhos de Dyson (5) mostraram que as formulações de integrais de caminho e o princípio variacional são equivalentes, então surge um novo formalismo, agora unificado, o formalismo das integrais funcionais. Posteriormente, em 1955, surge o formalismo de tempo-imaginário de Matsubara (6) que descreveria um sistema quântico de várias partículas em equilíbrio termodinâmico. Logo depois, Fradkin traz um formalismo de integração funcional que descreve campos quânticos em equilíbrio termodinâmico (7).

Transições de fase são comuns na natureza, onde sistemas de partículas apresentando fases da matéria no equilíbrio termodinâmico sofrem uma mudança nesses estados. Transições de fase que envolvem calor latente, como a mudança de fase do gelo para a água líquida, por exemplo, são chamadas de transições de primeira ordem. Já as transições que não envolvem calor latente são as chamadas transições contínuas ou de segunda ordem (8). Podemos citar o ferro como um exemplo deste segundo tipo de transição. Este, à temperatura ambiente, é um material ferromagnético (que possui a característica de ser magnetizado). Depois de magnetizado, no entanto, com o aumento da temperatura, sua magnetização adquirida cai continuamente até desaparecer, o que acontece na chamada temperatura de Curie ($T = 770^{\circ}C$), e acima disso o ferro assume as características de um paramagneto.

O fenômeno das transições de fase é importante para o estudo das simetrias de um sistema. Em 1937, Landau propôs uma descrição para o fenômeno (9), onde a transição de fase pode ocorrer devido à existência de uma simetria, inerente ao sistema, que deixa de existir. Como no exemplo do ferromagneto, que em temperaturas acima da temperatura de Curie apresentaria um estado simétrico (simetria rotacional), e abaixo dessa temperatura de transição ou temperatura crítica, ele tem sua simetria quebrada, passando do estado paramagnético para o ferromagnético.

Normalmente espera-se que um sistema de partículas apresente características de

mais alta "ordem" à medida que a temperatura aumenta, como no exemplo supramencionado. Isto é, um sistema cuja simetria se encontra inicialmente quebrada, teria a mesma restaurada a temperaturas suficientemente altas.

O contexto de simetria adquiriu um significado mais profundo com o estudo da teoria quântica de campos, como a observação do fenômeno de quebra espontânea de simetria, a qual é associada a um deslocamento do estado de menor energia potencial da teoria (que chamamos de vácuo). A transição de fase ocorre quando o estado de vácuo apresenta degenerescência no potencial (10), em outras palavras, a quebra espontânea de simetria de um sistema se dá quando sua Lagrangeana possui uma simetria que não se manifesta no estado fundamental.

A quebra espontânea de simetria em TQC explica a geração de massa em partículas elementares por meio do mecanismo de Higgs. O mecanismo de Higgs na teoria eletrofraca, por exemplo, é responsável pelas massas dos bósons W^\pm e Z (11, 12) além dos férmions massivos.

As aplicações da teoria quântica de campos podem ser as mais diversas, vão desde sistemas de baixas energias até sistemas de altas energias como na Cromodinâmica Quântica (QCD). No entanto, nesta dissertação trataremos de TQC em um contexto mais geral, onde trabalharemos com teoria quântica de campos à temperatura finita (no decorrer deste trabalho analisaremos também os efeitos de densidade e potencial químico).

No formalismo de Matsubara ou formalismo de tempo-imaginário, aplicável no equilíbrio termodinâmico, a temperatura é tratada como uma dimensão temporal compactificada, obedecendo as condições de fronteira, de acordo com a natureza dos campos (sejam eles bosônicos ou fermiônicos) (13).

Teorias quânticas de campo a temperatura e densidades finitas têm as ferramentas teóricas necessárias para descrever um sistema físico extremo, como o plasma quark-glúon, que acredita-se ser a fase desconfiada da matéria e que este sistema físico ocorreu no Universo primordial. Nos dias de hoje, este é estudado experimentalmente realizando colisões de íons pesados, além de estudos teóricos de supercondutividade de cor na fase cor-sabor-fixos, ou do inglês *color-flavor-locked* (CFL) em altíssimas densidades (14). Este sistema físico é previsto em objetos cósmicos como estrelas de nêutrons (14, 15).

Como já foi mencionado, usualmente um sistema que apresenta quebra de simetria passa de um estado menos simétrico para um estado mais simétrico com o aumento da temperatura. No entanto, é possível que o oposto ocorra, isto é, um estado físico inicialmente simétrico, sofra uma transição de fase com o aumento da temperatura, indo para um estado menos simétrico. A isto chamamos quebra inversa de simetria, ou do inglês *Inverse Symmetry Breaking* (ISB). Outro fenômeno contra-intuitivo é a não-restauração de simetria, ou do inglês *Symmetry Nonrestoration* (SNR), onde um sistema não-simétrico não recupera sua simetria com o aumento da temperatura (16, 17, 18).

Sistemas exibindo esses fenômenos contra-intuitivos, primeiramente foram propos-

tos em 1974, por Weinberg, realizando uma análise da aproximação de um laço e primeira ordem em teoria de perturbação para o potencial efetivo termodinâmico do modelo de dois campos escalares reais interagentes, onde o sistema físico tem sua simetria quebrada, ou jamais restaurada, com o aumento da temperatura (12). Os fenômenos de ISB e SNR são comuns em sistemas de matéria condensada que apresentam fases intermediárias, isto é, mais de um ponto crítico (19). Um exemplo é o tartarato de sódio e potássio ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$), mas conhecido como Sal de Rochelle, que inicialmente apresenta uma estrutura simétrica cristalina ortorrômbica¹. Porém, entre $T = 255\text{K}$ e $T = 297\text{K}$ este apresenta um estado menos simétrico, uma estrutura cristalina monoclinica². Logo após ele retorna à fase simétrica até seu derretimento em $T = 348\text{K}$ (20).

Os fenômenos de ISB/SNR apresentam várias aplicações em áreas da física, como em Cosmologia, onde algumas dessas aplicações envolvem a violação carga-paridade e bariogênese, inflação, defeitos topológicos (este último será discutido no capítulo seguinte), etc. Algumas aplicações onde ISB/SNR são utilizadas se encontram nas referências (21-25).

Teorias quânticas de campo normalmente apresentam cálculos complexos que requerem o uso de métodos de aproximação para que essa teoria possa apresentar resultados coerentes. Um método apropriado pode ser fundamentado em teoria de perturbação, onde um parâmetro da teoria sofre uma expansão, geralmente, expande-se a constante de acoplamento (assumida ser muito menor que 1), e despreza-se seus termos de ordem mais alta na expansão.

Entretanto, o método perturbativo pode apresentar problemas em alguns sistemas físicos, assim como no nosso estudo de transições de fase, uma vez que teorias perturbativas apresentam divergências no infravermelho ao redor de pontos críticos, além dos problemas no regime de altas temperaturas (o qual também será explorado nesse trabalho), onde potências de acoplamento podem ser superadas pelas potências de temperatura (26, 27).

Isso posto, concluímos que se faz necessária a utilização de um método não-perturbativo para obtermos uma descrição completa do sistema físico apresentado neste trabalho, o qual, tem por objetivo estudar as transições de fase e os fenômenos de ISB/SNR que elas apresentam em um modelo de multicampos escalares carregados à temperatura e potenciais químicos finitos. Para isso, lançaremos mão de um método não-perturbativo,

¹ Entende-se por sistema cristalino o conjunto de cristais cujos eixos cristalográficos (que servem como referência na descrição da estrutura e simetria dos cristais) são iguais nas suas dimensões relativas, apresentando relações angulares gerais constantes. Ortorrômbico e monoclinico são dois dos sete sistemas cristalinos existentes. O sistema ortorrômbico possui três eixos cristalográficos mutuamente perpendiculares, cada um com um comprimento.

² O sistema monoclinico possui três eixos cristalográficos de comprimentos diferentes e dois ângulos entre estes têm 90° , já o terceiro ângulo possui um valor diferente.

chamado Teoria de Perturbação Otimizada, ou do inglês *Optimized Perturbation Theory* (OPT), também conhecida como Expansão Delta Linear (28, 29).

Uma das vantagens desse método está relacionada diretamente aos diagramas de Feynman, os quais são obtidos como em uma teoria de perturbação comum, usando um propagador modificado que depende de um parâmetro de massa arbitrário. Ao fixarmos este parâmetro através de um princípio variacional, obtemos resultados não perturbativos. Nessa dissertação usaremos como método variacional o princípio da sensibilidade mínima (PMS) (30).

Essa dissertação está dividida da seguinte forma: No segundo capítulo apresentamos todo o arcabouço teórico necessário para a compreensão dos conceitos utilizados durante o trabalho, e fazemos uma revisão de mecânica estatística quântica, teoria quântica de campos à temperatura finita e a representação da função de partição em termos de uma integral funcional sobre os campos. No terceiro capítulo demonstramos as aplicações para modelos de um e dois campos escalares complexos interagentes (e com interação mútua para o caso de dois campos). Fazemos uma breve análise de fases para o modelo de dois campos, onde investigamos os fenômenos de ISB/SNR. O quarto capítulo é responsável por descrever o método não-perturbativo que será implementado para o modelo de multicampos, a OPT. No quinto capítulo aplicamos a OPT ao nosso sistema de interesse, onde obtemos o potencial efetivo termodinâmico de forma não-perturbativa. O sexto capítulo apresenta os resultados numéricos obtidos pelas expressões analíticas do capítulo anterior. Nesse capítulo também mostramos como se dá cada transição de fase obtida, bem como os fenômenos de ISB/SNR de forma não-perturbativa. O sétimo capítulo apresenta um sistema físico que pode ser modelado pela teoria obtida neste trabalho, os mésons K. O oitavo capítulo é responsável por apresentar nossas conclusões e expectativas para o futuro do estudo apresentado. Posteriormente três apêndices detalham alguns cálculos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1.1 Elementos de mecânica estatística quântica

A Mecânica Estatística Clássica pode descrever microscopicamente um sistema termodinâmico próximo do equilíbrio. No entanto, a Mecânica Estatística Clássica não é capaz de lidar com problemas quânticos, requerendo para tal uma teoria quântica para a mesma.

É possível descrever um sistema termodinâmico por meio da construção de um ensemble, isto é, um conjunto de sistemas macroscopicamente idênticos, porém diferentes a nível microscópico. Podemos definir três tipos de ensembles no equilíbrio termodinâmico. O ensemble microcanônico é usado para descrever um sistema isolado com energia fixa E , número de partículas fixo N e volume fixo V . Já no ensemble canônico, temos a descrição de um sistema em contato com um reservatório térmico à temperatura T . O sistema pode trocar energia com o reservatório, porém mantendo fixos o volume e número de partículas. Por fim, no ensemble grande canônico, o sistema pode trocar energia e partículas com o reservatório. Neste ensemble, a temperatura, o volume e o potencial químico são quantidades fixas.

Neste trabalho, faremos a construção termodinâmica no ensemble grande canônico, já que em um sistema relativístico quântico, partículas podem ser criadas e destruídas, além do mais, estaremos interessados no efeito de potencial químico e efeitos de densidade finitos, portanto, o ensemble grande canônico torna-se o mais apropriado para esse estudo.

Também é importante ressaltar ao leitor, que principalmente o começo deste trabalho possui conceitos, notação e até parte da estrutura baseando-se no livro *Finite-temperature field theory: Principles and applications*, por Kapusta e Gale.

No contexto da mecânica estatística quântica, o operador densidade estatística $\hat{\rho}$, é o objeto fundamental na descrição do sistema no equilíbrio termodinâmico. Para um sistema descrito pelo operador Hamiltoniano \hat{H} e o conjunto de operadores número \hat{N}_i , onde μ_i é o potencial químico de cada operador número, o operador densidade $\hat{\rho}$ é definido por:

$$\hat{\rho} = e^{-\beta(\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i)}, \quad (1)$$

onde $\beta = 1/T$, uma vez que estamos utilizando, neste trabalho, unidades naturais $c = \hbar = k_B = 1$. Através do operador densidade podemos calcular a média sobre o ensemble de qualquer observável, representado pelo operador \hat{A} ,

$$A = \langle \hat{A} \rangle = \frac{\mathbf{Tr}(\hat{A}\hat{\rho})}{\mathbf{Tr}\hat{\rho}}, \quad (2)$$

onde \mathbf{Tr} representa a operação de traço. A função de grande partição é definida por

$$Z = Z(V, T, \mu_1, \mu_2, \dots) = \mathbf{Tr}\hat{\rho}. \quad (3)$$

Através da função de grande partição podemos determinar todas as propriedades termodinâmicas do sistema (31), tais como a energia interna U , pressão P e entropia S ,

$$U = \langle \hat{H} \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta, \mu_i), \quad (4)$$

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z(\beta, \mu_i), \quad (5)$$

$$S = -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta, \mu_i) \right). \quad (6)$$

Dessa construção no ensemble grande canônico podemos extrair um resultado importante. Seja $\hat{A}(t)$ um operador genérico na representação de Heisenberg,

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t}. \quad (7)$$

O valor médio do operador \hat{A} é, portanto,

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}(t) \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \mathbf{Tr}[e^{-\beta\hat{H}} \hat{A}(t)] \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \mathbf{Tr}[e^{-\beta\hat{H}} e^{i\hat{H}t} \hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t} e^{-\beta\hat{H}} e^{\beta\hat{H}}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Usando a propriedade de ciclicidade do traço temos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}(t) \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \mathbf{Tr}[e^{-\beta\hat{H}} e^{i\hat{H}(t-i\beta)} \hat{A}(0) e^{-i\hat{H}(t-i\beta)}] \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \mathbf{Tr}[e^{-\beta\hat{H}} \hat{A}(t-i\beta)] = \langle \hat{A}(t-i\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Logo vemos que a mudança $t \rightarrow t - i\beta$ no argumento do operador nos mostra que seu valor médio é periódico, relação essa conhecida como condição de Kubo-Martin-Schwinger. Tal propriedade é fundamental no contexto da descrição da quantização de campos quando em meio térmico, que descreveremos mais detalhes em seguida.

1.2 Teoria quântica de campos à temperatura finita

Ao falarmos do Universo primordial, nos remetemos a um tempo onde temperaturas e densidades era tão elevadas que nem mesmo as mais simples estruturas atômicas que conhecemos hoje podiam existir (32). Logo após o Big Bang (33) o Universo era composto por partículas elementares com altíssimas energias que interagem a fim de formar um estado de equilíbrio térmico. As interações dominantes, entre as partículas, eram as forças forte e eletrofraca, de forma que, para que possamos compreender as propriedades desse Universo, usamos teorias que possam descrever as interações fundamentais entre as partículas elementares, como a QED e a QCD. Uma ferramenta usada em tais teorias é a TQC.

O que hoje conhecemos como radiação cósmica de fundo em microondas é a radiação em forma de fótons vindos do Universo milhares de vezes mais quente e menor, de um tempo onde os fótons eram tão energéticos que criavam pares de elétron-pósitron em suas colisões. O próprio fato de a radiação cósmica de fundo ser uma distribuição térmica, mostra que, apesar da rápida expansão do Universo, a taxa de colisões de partículas foi suficiente para que, hoje, o Universo esteja em equilíbrio térmico.

As transições de fase são alvo de interesse para o estudo da história do Universo, uma vez que no Universo primordial as leis da física de partículas existiam em um estado unificado. A ideia é que a natureza tem um alto grau de simetria, que no entanto, através de uma série de transições de fase, é espontaneamente quebrada, o que resulta no espectro de partículas que conhecemos hoje (34).

No presente trabalho usaremos um formalismo de TQC à temperatura finita, uma vez que a formulação convencional para a predição teórica das partículas que, hoje, compõe o Modelo Padrão (35) é feita à temperatura zero, mas que, em sistemas reais envolvem altas temperaturas, como as que prevaleciam no Universo primordial, por exemplo.

Para além de efeitos de interações de partículas, as transições de fase podem resolver uma série de problemas cosmológicos. É possível que uma transição de fase tenha levado o Universo a um período de expansão acelerada, conhecida como inflação (36). A inflação pode explicar porque o Universo é homogêneo e isotrópico a grandes escalas. Há também a possibilidade de causar os chamados "defeitos topológicos" (37). Um defeito topológico pode ser entendido como uma região de transição entre dois possíveis estados de um sistema que detêm o mesmo valor de energia mínima (38). Eles podem ser en-

contrados em cosmologia, onde surgem naturalmente em transições de fase no Universo primordial (39) e em matéria condensada, para descrever interfaces em materiais (40). Estados simétricos em altas temperaturas apresentam apenas um vácuo possível (estado de potencial mínimo). Já para baixas temperaturas (abaixo da temperatura crítica, onde ocorre a transição de fase) podem aparecer vários vácuos possíveis. Após a transição de fase é impossível identificar qual vácuo é escolhido, logo temos que assumir que tal escolha é um resultado de inhomogeneidades nos campos. Não existe razão para supor que, em duas regiões bem separadas, o mesmo vácuo seja escolhido, e à medida que crescem e se encontram podem ocorrer fraturas ou defeitos entre eles. Esses defeitos topológicos, ou defeitos cósmicos, podem ter consequências na forma como o Universo se estruturou (41).

1.3 Representação da função de partição como uma integral funcional

Usaremos o formalismo do método de integrais funcionais, ou integrais de caminho (42) como abordagem para a teoria quântica de vários corpos. Neste capítulo vamos desenvolver o formalismo funcional, derivando sua representação de integral funcional da função de partição para teorias de campo relativísticas interagentes.

Seja $\hat{\phi}(x, 0)$ a representação de Schrödinger do operador campo no tempo zero e $\hat{\pi}(x, 0)$, seu operador momento conjugado. Os autoestados do operador campo são representadas por $|\phi\rangle$ e satisfarão a seguinte relação

$$\hat{\phi}(x, 0)|\phi\rangle = \phi(x)|\phi\rangle, \quad (10)$$

$\phi(x)$ é o auto valor. Temos também a relação de completeza usual

$$\int d\phi(x)|\phi\rangle\langle\phi| = 1, \quad (11)$$

e ortogonalidade

$$\langle\phi_a|\phi_b\rangle = \prod_x \delta(\phi_a(x) - \phi_b(x)). \quad (12)$$

Analogamente, temos também as mesmas relações satisfeitas para o momento conjugado do campo. Como sabemos da mecânica quântica que é possível trabalhar no espaço de coordenadas ou de momentos de forma completamente equivalente, aqui poderemos trabalhar no espaço do campo ou do momento conjugado, sabendo a relação

$$\langle \phi | \pi \rangle = e^{i \int d^3x \pi(x) \phi(x)}, \quad (13)$$

que representa uma generalização, indo do número discreto e incontável, porém finito, de graus de liberdade na mecânica quântica, para um número contínuo e infinito de graus de liberdade na teoria quântica de campos.

Para uma descrição da dinâmica, escrevemos o Hamiltoniano, que agora será um funcional do campo e de seu momento conjugado

$$\hat{H} = \int d^3x \mathcal{H}(\hat{\phi}, \hat{\pi}). \quad (14)$$

onde \mathcal{H} é o operador densidade de Hamiltoniana. Considere um sistema que evolui do estado $|\phi_a\rangle$, em $t = 0$ para $e^{-iHt}|\phi_a\rangle$ depois de um tempo t (onde o Hamiltoniano não depende do tempo explicitamente), de forma que a amplitude de transição para ir do estado $|\phi_a\rangle$ para o estado $|\phi_b\rangle$ depois de um tempo t será $\langle \phi_b | e^{-iHt} | \phi_a \rangle$. Para fins estratégicos, vamos analisar o caso onde o sistema, depois de um tempo t , volta ao seu estado inicial, então dividimos este tempo em N intervalos Δt de mesma duração. Para escrever essa amplitude de transição, colocamos, a cada intervalo de tempo, um conjunto completo de estados, alternando as relações de completudeza do campo e do momento conjugado. Uma vez que podemos obter intervalos de tempo cada vez menores ($\Delta t \rightarrow 0$), podemos escrever a seguinte expansão

$$\begin{aligned} \langle \pi_i | e^{-i\hat{H}_i \Delta t} | \phi_i \rangle &\approx \langle \pi_i | 1 - i\hat{H}_i \Delta t | \phi_i \rangle = \langle \pi_i | \phi_i \rangle (1 - iH_i \Delta t) \\ &= (1 - iH_i \Delta t) e^{i \int d^3x \pi(x) \phi(x)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Desta forma, usando também a condição de ortogonalidade,

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-iHt} | \phi_a \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^N \frac{d\phi_i d\pi_i}{2\pi} \delta(\phi_1 - \phi_a) \\ &\times e^{-i\Delta t \sum_{j=1}^N \int d^3x \left[\mathcal{H}(\phi_j, \pi_j) - \pi_j \frac{(\phi_{j+1} - \phi_j)}{\Delta t} \right]}, \end{aligned} \quad (16)$$

onde $\phi_{N+1} = \phi_1 = \phi_a$. Tomando o limite contínuo da equação acima, temos

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-iHt} | \phi_a \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(x,0)=\phi_a(x)}^{\phi(x,t)=\phi_a(x)} [d\phi] \\ &\times e^{i \int_0^t dt \int d^3x [\pi(x,t) \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} - \mathcal{H}(\phi(x,t), \pi(x,t))]}, \end{aligned} \quad (17)$$

onde os infinitesimais entre colchetes representam a medida de integração funcional. A integração sobre $\phi(x, t)$ é tal que o campo começa em $\phi_a(x)$ em $t_i = 0$ e termina em $\phi_a(x)$ em $t_f = t$. Sabendo disso, podemos reescrever a função de grande partição da forma

$$Z = \mathbf{Tr} e^{-\beta(H - \mu_i \hat{N}_i)} = \sum_a \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta(H - \mu_i \hat{N}_i)} | \phi_a \rangle, \quad (18)$$

onde a soma atua sobre todos os estados. Parte da expressão mais à direita é similar à amplitude de transição que calculamos, de forma que fazemos a associação $\beta = it = \tau$, o que nos permite interpretar a exponencial acima como um operador de evolução no tempo imaginário. Podemos também escrever a função de grande partição como uma integral sobre os campos e seus respectivos momentos conjugados. Para fazer a conexão entre as expressões (17) e (18) inserimos a variável de tempo imaginário. Logo, a equação acima fica da seguinte forma

$$Z = \int [d\pi] \int [d\phi] e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x (i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\phi, \pi) + \mu N(\phi, \pi))}. \quad (19)$$

A formulação da integral de caminho da função de partição representa um traço, onde o estado inicial precisa ser identificado com o estado final. Isso impõe que o campo deve satisfazer a condição de periodicidade no tempo imaginário (Euclidiano) com período β

$$\phi(x, 0) = \phi(x, \beta). \quad (20)$$

Logo, a periodicidade no formalismo de tempo imaginário é equivalente a formular a teoria em uma topologia toroidal do tipo $\Gamma_4^1 = (S^1) \times \mathbf{R}^3$, onde (S^1) é uma circunferência de comprimento proporcional ao inverso da temperatura (43, 44). A mudança para o tempo imaginário é análoga a uma rotação de Wick do tipo $t \rightarrow -i\tau$ o que causa a mudança do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano.

Com a mudança da variável temporal para o tempo imaginário, teremos uma alteração da coordenada temporal na métrica, ou seja, no espaço quadridimensional e no quadrimomento $p = (\omega_n, \mathbf{p})$, onde a frequência ω_n agora apresenta valores discretos

$\omega_n = 2\pi n/\beta$, $n \in \mathbb{Z}$, chamados frequências de Matsubara.

Além disso, a expressão acima para a função de grande partição pode, facilmente, ser generalizada para um número arbitrário de campos e suas cargas conservadas.

2 APLICAÇÕES

2.1 Campo escalar carregado

Ao falarmos de campo escalar carregado, obrigatoriamente nos referimos a um campo complexo ϕ , o que ficará mais claro no decorrer desta seção. Para uma teoria integrante, escrevemos a seguinte densidade de Lagrangeana para o campo escalar carregado

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - U_0(\phi\phi^*). \quad (21)$$

onde $U_0(\phi)$ é um potencial genérico proporcional a $\phi\phi^*$ e/ou $(\phi\phi^*)^2$. Essa densidade de Lagrangeana possui simetria $U(1)$ ³, dada por

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{i\alpha}, \quad (22)$$

onde α é uma constante real (45). Temos, portanto, uma simetria global, uma vez que o fator de fase não depende da posição. Pelo teorema de Noether, existe uma corrente que se conserva associada a cada simetria contínua da Lagrangeana (46). Para encontrar a "corrente de Noether" aplicamos a transformação de simetria $U(1)$ na densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + i\partial_\mu \alpha [\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi]. \quad (23)$$

Uma vez que as equações de Euler-Lagrange do movimento são satisfeitas, $\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial^\mu \alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \alpha} = 0$, obtemos a densidade de corrente de Noether $j_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial^\mu \alpha)}$, que será

$$j_\mu = i(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi), \quad (24)$$

já que $\partial^\mu j_\mu = 0$ (j_μ seria identicamente igual a zero se o campo ϕ fosse um campo real). Pela lei de conservação de carga temos a corrente $J_\mu = \int d^3x j_\mu$ e a componente temporal de j_μ que nos dá a carga conservada

³ O grupo $U(1)$ possui dimensão 1, um único gerador e os elementos do grupo são matrizes de ordem 1, ou seja, um número.

$$Q = \int d^3x j_0. \quad (25)$$

Como tratamos de um campo complexo, é conveniente dividi-lo em duas componentes, uma real e outra imaginária, na forma das flutuações ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2). \quad (26)$$

Usando as expressões (24) e (25), temos a densidade de carga conservada

$$Q = \phi_1\pi_2 - \phi_2\pi_1, \quad (27)$$

onde $\pi_1 = \frac{\partial\phi_1}{\partial t}$ e $\pi_2 = \frac{\partial\phi_2}{\partial t}$ são os momentos conjugados. Podemos então escrever a função de grande partição, partindo da definição (19), de forma que

$$Z = \int [d\pi_1][d\pi_2][d\phi_1][d\phi_2] e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x (i\pi_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} + i\pi_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} - \mathcal{H} + \mu Q)}, \quad (28)$$

onde a \mathcal{H} é composta pela densidade de Hamiltoniana usual

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[\pi_1^2 + \pi_2^2 + (\nabla\phi_1)^2 + (\nabla\phi_2)^2] + U_0(\phi), \quad (29)$$

onde $U_0(\phi)$ é um potencial genérico. Para integrar a equação (28) nos momentos conjugados fazemos uma manipulação algébrica simples de completar quadrados. Vemos, por exemplo, para π_1 ,

$$i\pi_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\pi_1^2 - \mu\phi_2\pi_1 = -\frac{1}{2} \left[\left(\pi_1 + \mu\phi_2 - i\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} \right)^2 - \left(\mu\phi_2 - i\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} \right)^2 \right] \quad (30)$$

a primeira parte do lado direito da equação acima pode sofrer uma substituição simples e ser facilmente integrada resultando num valor constante N . Enquanto a segunda parte não é função de π_1 , então

$$\int [d\pi_1] e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x (i\pi_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\pi_1^2 - \mu\phi_2\pi_1)} = N e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2}(\mu\phi_2 - i\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau})^2}. \quad (31)$$

O mesmo procedimento pode ser feito na integração de π_2 , o que gerará um outro valor constante que multiplicará N , no entanto, para fins de simplificação, manteremos a notação N ,

$$Z = N \int [d\phi_1][d\phi_2] e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2} \left((\mu\phi_2 - i\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau})^2 + (\mu\phi_1 + i\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau})^2 \right)} \times e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(\frac{1}{2} [(\nabla\phi_1)^2 + (\nabla\phi_2)^2] + U_0(\phi) \right)}. \quad (32)$$

Assim, podemos reescrever a função de grande partição acima em função da ação

$$Z = N \int [d\phi_1][d\phi_2] e^{-S[\phi_i]}, \quad (33)$$

onde a ação $S[\phi_i]$ pode ser escrita explicitamente como

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} \right)^2 + (\nabla\phi_1)^2 + (\nabla\phi_2)^2 \right) + i\mu \left(\phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - \phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} \right) - \frac{\mu^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + U_0 \right]. \quad (34)$$

Podemos expandir as componentes do campo em modos de Fourier em torno dos campos de fundo $\zeta/\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sqrt{2}\zeta \cos \theta + \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{1;n}(\mathbf{p}) \\ \phi_2 &= \sqrt{2}\zeta \sin \theta + \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{2;n}(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (35)$$

onde ζ e θ não dependem das coordenadas espaço-temporais. Sabendo que o ângulo não influenciará no resultado (47), definimos $\theta = 0$, e reescrever a função de grande partição

$$Z = N^2 \left(\prod_{n,\mathbf{p}} \int d\phi_{1;n}(\mathbf{p}) d\phi_{2;n}(\mathbf{p}) \right) e^{-S} \quad (36)$$

onde a ação S na equação (34) fica da seguinte forma (ver Apêndice A para mais detalhes)

$$\begin{aligned}
S = & \frac{\beta^2}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 - \mu^2) (\phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& + \mu\beta^2 \sum_{n,p} \omega_n (\phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) - \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& - \beta V \zeta^2 \mu^2 + \int_0^\beta d\tau \int d^3x U(\phi_{1,n}(\mathbf{p}), \phi_{2,n}(\mathbf{p})). \tag{37}
\end{aligned}$$

Até aqui trabalhamos com um potencial genérico, no entanto, se quisermos prosseguir com o método de expansão em modos de Fourier, precisamos defini-lo. Então definimos o seguinte potencial

$$U = m^2(\phi\phi^*) + \frac{\lambda}{6}(\phi\phi^*)^2 = \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \tag{38}$$

Usando a expansão (35) para os campos e trabalhando até a ordem quadrática nas flutuações dos campos $\phi_{1,2}$, em torno do valor do campo de fundo $\zeta/\sqrt{2}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
S = & \frac{\beta^2}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 - \mu^2) (\phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& + \mu\beta^2 \sum_{n,p} \omega_n (\phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) - \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& + \frac{\lambda}{6} \beta^2 \zeta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} (3\phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& - \beta V \zeta^2 \mu^2 + \beta V \zeta^2 m^2 + \frac{\lambda}{6} \beta V \zeta^4. \tag{39}
\end{aligned}$$

Com isto, podemos definir a matriz \mathcal{M} quadrática nas flutuações

$$\mathcal{M} = \beta^2 \begin{pmatrix} \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 + \lambda\zeta^2 & -2\mu\omega_n \\ 2\mu\omega_n & \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 + \frac{\lambda\zeta^2}{3} \end{pmatrix} \tag{40}$$

onde definimos $\omega^2 \equiv \mathbf{p}^2 + m^2$, de forma que a ação (39) pode ser reescrita agora como

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} (\phi_{1,-n}(-\mathbf{p}), \phi_{2,-n}(-\mathbf{p}),) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \\ \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\
& + \beta V \zeta^2 \left(m^2 - \mu^2 + \frac{\lambda\zeta^2}{6} \right). \tag{41}
\end{aligned}$$

Aplicamos, então a ação acima na função de grande partição (36), realizamos as integrais Gaussianas nos campos usando a identidade obtida a partir da fórmula para as integrais de Riemann com uma matrix M constante

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{-x_i M_{ij} x_j} = \pi^{\frac{n}{2}} (\det M)^{-\frac{1}{2}} \quad (42)$$

e tomando o logaritmo de Z , obtemos

$$\ln Z = \ln (\det \mathcal{M})^{-\frac{1}{2}} + \beta V \zeta^2 \left(\mu^2 - m^2 - \frac{\lambda \zeta^2}{6} \right), \quad (43)$$

onde

$$\det \mathcal{M} = \beta^4 \left[\prod_{n,\mathbf{p}} (\omega_n^2 + \omega^2 - \mu_\phi^2 + \lambda \zeta^2) (\omega_n^2 + \omega^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda \zeta^2}{3}) + 4\mu^2 \omega_n \right]. \quad (44)$$

Podemos escrever a equação acima em função de duas outras variáveis A e B , a serem definidas, tal que

$$\det \mathcal{M} \equiv \beta^4 \prod_{n,\mathbf{p}} (\omega_n^2 + A^2) (\omega_n^2 + B^2) \quad (45)$$

de forma que

$$\ln(\det \mathcal{M})^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln \prod_{n,\mathbf{p}} \beta^2 (\omega_n^2 + A^2) - \frac{1}{2} \ln \prod_{n,\mathbf{p}} \beta^2 (\omega_n^2 + B^2). \quad (46)$$

Das equações (44) e (45), podemos identificar as novas variáveis como

$$\begin{aligned} A^2 &= E^2 + \mu^2 + \sqrt{4\mu^2 E^2 + \frac{\lambda^2 \zeta^4}{9}}, \\ B^2 &= E^2 + \mu^2 - \sqrt{4\mu^2 E^2 + \frac{\lambda^2 \zeta^4}{9}}, \end{aligned} \quad (47)$$

onde $E^2 \equiv \omega^2 + \frac{2}{3} \lambda \zeta^2$.

Usando este resultado na equação (43), obtemos

$$\begin{aligned} \ln Z &= \beta V \zeta^2 \left(\mu^2 - m^2 - \frac{\lambda \zeta^2}{6} \right) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{p}} \ln \beta^2 (\omega_n^2 + A^2) - \frac{1}{2} \sum_{n, \mathbf{p}} \ln \beta^2 (\omega_n^2 + B^2), \end{aligned} \quad (48)$$

após os cálculos realizados no Apêndice B, obtemos

$$\begin{aligned} \ln Z &= \beta V \zeta^2 \left(\mu^2 - m^2 - \frac{\lambda \zeta^2}{6} \right) \\ &- V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} \beta (A + B) + \ln(1 - e^{-\beta A}) + \ln(1 - e^{-\beta B}) \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Como já conhecido da literatura (48), o potencial efetivo termodinâmico será dado por

$$\begin{aligned} V_{eff} &= -\frac{1}{\beta V} \ln Z = \zeta^2 \left(m^2 - \mu^2 + \frac{\lambda \zeta^2}{6} \right) \\ &+ \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} \beta (A + B) + \ln(1 - e^{-\beta A}) + \ln(1 - e^{-\beta B}) \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

A expressão (50) é o potencial efetivo termodinâmico, ou apenas potencial termodinâmico, na aproximação de um laço (ou ordem \hbar) (49). O que significa que, expandir em modos de Fourier, é, fisicamente fazer o campo realizar pequenas oscilações ao redor do campo de fundo, em ordem da constante de Planck sobre 2π . E tomar a aproximação de 1-laço foi o que fizemos ao reescrevermos a ação (39) considerando até apenas termos ao quadrado de flutuação.

2.2 Dois campos escalares carregados

Agora vamos estender os cálculos realizados no capítulo anterior para o modelo que vamos estudar nesta dissertação.

Usando o mesmo formalismo do capítulo anterior, tomamos a seguinte densidade de Lagrangeana Euclidiana, que possuirá, neste contexto, simetria $U(1) \times U(1)$, para dois campos complexos que serão representados por ϕ e ψ

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m_\phi^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda_\phi}{3!} (\phi^* \phi)^2 \\ &+ \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - m_\psi^2 \psi^* \psi - \frac{\lambda_\psi}{3!} (\psi^* \psi)^2 - \lambda (\phi^* \phi) (\psi^* \psi). \end{aligned} \quad (51)$$

onde λ_ϕ e λ_ψ são constantes de auto-interação dos campos ϕ e ψ , respectivamente, e λ é a constantes de interação entre esses campos. Teremos as condições $\lambda_\phi > 0$ e $\lambda_\psi > 0$, e para o caso de nosso interesse, $\lambda < 0$, onde há a necessidade da imposição da condição de estabilidade global, $\lambda_\phi \lambda_\psi > 9\lambda^2$ (50).

Por conveniência, decomposmos os campos em termos de componentes reais e complexas, também chamadas flutuações dos campos $\phi_{1,2}$ e $\psi_{1,2}$

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \\ \psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2).\end{aligned}\tag{52}$$

Substituindo as decomposições acima na densidade de Lagrangiana original, podemos escrever a função de grande partição

$$\begin{aligned}Z &= \int D\pi_{\phi_1} D\pi_{\phi_2} D\pi_{\psi_1} D\pi_{\psi_2} \int D\phi_1 D\phi_2 D\psi_1 D\psi_2 \\ &\times e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x (i\pi_{\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + i\pi_{\phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} + i\pi_{\psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} + i\pi_{\psi_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} - \mathcal{H} + \mu_\phi Q_\phi + \mu_\psi Q_\psi)},\end{aligned}\tag{53}$$

onde, analogamente ao capítulo anterior, $\pi_{\phi_{1,2}}$ e $\pi_{\psi_{1,2}}$ são os momenta conjugados dos campos ϕ e ψ , respectivamente,

$$\pi_{\phi_1} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t}, \quad \pi_{\phi_2} = \frac{\partial \phi_2}{\partial t}, \quad \pi_{\psi_1} = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \quad \pi_{\psi_2} = \frac{\partial \psi_2}{\partial t};\tag{54}$$

e Q_ϕ e Q_ψ são as densidades de carga conservadas dos campos ϕ e ψ , respectivamente,

$$Q_\phi = \phi_1 \pi_{\phi_2} - \phi_2 \pi_{\phi_1} \quad e \quad Q_\psi = \psi_1 \pi_{\psi_2} - \psi_2 \pi_{\psi_1}.\tag{55}$$

Então podemos escrever a densidade de Hamiltoniana como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}(\pi_{\phi_1}^2 + \pi_{\phi_2}^2 + \pi_{\psi_1}^2 + \pi_{\psi_2}^2) \\ &+ \frac{1}{2}(\nabla \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi_2)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \psi_1)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \psi_2)^2 + U,\end{aligned}\tag{56}$$

e a parte potencial U , é

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}m_\phi^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda_\phi}{4!}(\phi_1^4 + \phi_2^4 + 2\phi_1^2\phi_2^2) + \frac{1}{2}m_\psi^2(\psi_1^2 + \psi_2^2) \\
&+ \frac{\lambda_\psi}{4!}(\psi_1^4 + \psi_2^4 + 2\psi_1^2\psi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2\psi_1^2 + \phi_1^2\psi_2^2 + \phi_2^2\psi_1^2 + \phi_2^2\psi_2^2).
\end{aligned} \tag{57}$$

Analogamente à equação (32), integramos nos momentos conjugados para então obter a função de partição

$$Z = N \int [d\phi_1][d\phi_2][d\psi_1][d\psi_2] e^{-S[\phi_i, \psi_i]}, \tag{58}$$

onde a ação é escrita explicitamente como

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} \right)^2 \right) \right. \\
&+ \frac{1}{2} [(\nabla\phi_1)^2 + (\nabla\phi_2)^2 + (\nabla\psi_1)^2 + (\nabla\psi_2)^2] - \frac{\mu_\phi^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + U \\
&\left. - \frac{\mu_\psi^2}{2}(\psi_1^2 + \psi_2^2) + i\mu_\phi \left(\phi_1 \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} + \phi_2 \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} \right) + i\mu_\psi \left(\psi_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} + \psi_2 \frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} \right) \right].
\end{aligned} \tag{59}$$

Vale lembrar mais uma vez que a associação da integral funcional com a função de grande partição implica que a integral funcional é realizada sobre condições de periodicidade no tempo imaginário, $\phi_i(\tau, \mathbf{x}) = \phi_i(\tau + \beta, \mathbf{x})$, $\psi_i(\tau, \mathbf{x}) = \psi_i(\tau + \beta, \mathbf{x})$, onde $i = 1, 2$.

Expandindo, mais uma vez, os campos em modos de Fourier, analogamente ao que fizemos para um só campo, o que leva em conta a relação de periodicidade dos campos no tempo Euclidiano, temos que

$$\phi_1(\mathbf{x}, \tau) = \phi_0 \cos \theta_\phi + \sqrt{\frac{\beta}{\mathcal{V}}} \sum_n \sum_p e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \tag{60}$$

$$\phi_2(\mathbf{x}, \tau) = \phi_0 \sin \theta_\phi + \sqrt{\frac{\beta}{\mathcal{V}}} \sum_n \sum_p e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \tag{61}$$

$$\psi_1(\mathbf{x}, \tau) = \psi_0 \cos \theta_\psi + \sqrt{\frac{\beta}{\mathcal{V}}} \sum_n \sum_p e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \psi_{1,n}(\mathbf{p}) \tag{62}$$

$$\psi_2(\mathbf{x}, \tau) = \psi_0 \sin \theta_\psi + \sqrt{\frac{\beta}{\mathcal{V}}} \sum_n \sum_p e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \psi_{2,n}(\mathbf{p}) . \tag{63}$$

Tomaremos $\theta_\phi = \theta_\psi = 0$, uma vez que, aplicada a expansão na função de grande partição, o ângulo não interfere no resultado (47), logo reescrevemos (58) da seguinte forma

$$Z = N' \left(\prod_{n,\mathbf{p}} \int D\phi_{1,n}(\mathbf{p}) D\phi_{2,n}(\mathbf{p}) D\psi_{1,n}(\mathbf{p}) D\psi_{2,n}(\mathbf{p}) \right) e^{-S}, \quad (64)$$

onde a ação, por sua vez, também é reescrita, e onde mantemos somente termos de segunda ordem nas flutuações em torno dos valores de fundo ϕ_0 e ψ_0 , o que corresponde a trabalhar na aproximação de 1-laço, ou \hbar , tal que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n,\mathbf{p}} \frac{\beta^2}{2} (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2}) (\phi_{1,n}(\mathbf{p})\phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p})\phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\ &+ \sum_{n,\mathbf{p}} \beta^2 \mu_\phi \omega_n (\phi_{1,n}(\mathbf{p})\phi_{2,-n}(-\mathbf{p}) - \phi_{2,n}(\mathbf{p})\phi_{1,-n}(-\mathbf{p})) \\ &+ \sum_{n,\mathbf{p}} \frac{\beta^2}{2} (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \frac{\lambda\psi_0^2}{2}) (\psi_{1,n}(\mathbf{p})\psi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \psi_{2,n}(\mathbf{p})\psi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\ &+ \sum_{n,\mathbf{p}} \beta^2 \mu_\psi \omega_n (\psi_{1,n}(\mathbf{p})\psi_{2,-n}(-\mathbf{p}) - \psi_{2,n}(\mathbf{p})\psi_{1,-n}(-\mathbf{p})) \\ &+ \frac{\lambda_\phi}{12} \phi_0^2 \beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} (3\phi_{1,n}(\mathbf{p})\phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p})\phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\ &+ \left(\frac{m_\phi^2 \phi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\phi}{4!} \phi_0^4 - \frac{1}{2} \phi_0^2 \mu_\phi^2 + \frac{m_\psi^2 \psi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\psi}{4!} \psi_0^4 - \frac{1}{2} \psi_0^2 \mu_\psi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^2 \psi_0^2 \right) \beta \mathcal{V} \\ &+ \frac{\lambda_\psi}{12} \psi_0^2 \beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} (3\psi_{1,n}(\mathbf{p})\psi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \psi_{2,n}(\mathbf{p})\psi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\ &+ \lambda \phi_0 \psi_0 \beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} (\phi_{1,n}(\mathbf{p})\psi_{1,-n}(-\mathbf{p})), \end{aligned} \quad (65)$$

ou, de forma compacta

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} (\phi_{1,-n}(-\mathbf{p}), \phi_{2,-n}(-\mathbf{p}), \psi_{1,-n}(-\mathbf{p}), \psi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \\ \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \\ \psi_{1,n}(\mathbf{p}) \\ \psi_{2,n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\ &+ \left(\frac{m_\phi^2 \phi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\phi}{4!} \phi_0^4 - \frac{1}{2} \phi_0^2 \mu_\phi^2 + \frac{m_\psi^2 \psi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\psi}{4!} \psi_0^4 - \frac{1}{2} \psi_0^2 \mu_\psi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_0^2 \psi_0^2 \right) \beta \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (66)$$

onde, chamando

$$\begin{aligned}
U_{\phi_1} &\equiv m_\phi^2 + \mathbf{p}^2 + \frac{\lambda\psi_0^2}{2} + \frac{3}{6}\lambda_\phi\phi_0^2, \\
U_{\phi_2} &\equiv m_\phi^2 + \mathbf{p}^2 + \frac{\lambda\psi_0^2}{2} + \frac{1}{6}\lambda_\phi\phi_0^2, \\
U_{\psi_1} &\equiv m_\psi^2 + \mathbf{p}^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2} + \frac{3}{6}\lambda_\psi\psi_0^2, \\
U_{\psi_2} &\equiv m_\psi^2 + \mathbf{p}^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2} + \frac{1}{6}\lambda_\psi\psi_0^2,
\end{aligned} \tag{67}$$

podemos escrever a matriz \mathcal{M} da forma

$$\mathcal{M} = \beta^2 \begin{pmatrix} \omega_n^2 + U_{\phi_1} - \mu_\phi^2 & -2\mu_\phi\omega_n & 0 & 0 \\ 2\mu_\phi\omega_n & \omega_n^2 + U_{\phi_2} - \mu_\phi^2 & 0 & 0 \\ 2\lambda\phi_0\psi_0 & 0 & \omega_n^2 + U_{\psi_1} - \mu_\psi^2 & -2\mu_\psi\omega_n \\ 0 & 0 & 2\mu_\psi\omega_n & \omega_n^2 + U_{\psi_2} - \mu_\psi^2 \end{pmatrix}, \tag{68}$$

o Apêndice C demonstra como esta matriz pode ser útil no cálculo das massas físicas do sistema. Resolvendo as integrais (64), temos

$$\begin{aligned}
\ln Z &= \left(\frac{1}{2}\phi_0^2\mu_\phi^2 + \frac{1}{2}\psi_0^2\mu_\psi^2 - \frac{m_\phi^2\phi_0^2}{2} - \frac{\lambda_\phi}{4!}\phi_0^4 - \frac{m_\psi^2\psi_0^2}{2} - \frac{\lambda_\psi}{4!}\psi_0^4 - \frac{\lambda}{4}\phi_0^2\psi_0^2 \right) \beta\mathcal{V} \\
&+ \ln(\det \mathcal{M})^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{69}$$

onde

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{M} &= \prod_{n,p} \beta^8 \left((\omega_n^2 + U_{\phi_1} - \mu_\phi^2) (\omega_n^2 + U_{\phi_2} - \mu_\phi^2) + 4\mu_\phi^2\omega_n^2 \right) \\
&\times \left((\omega_n^2 + U_{\psi_1} - \mu_\psi^2) (\omega_n^2 + U_{\psi_2} - \mu_\psi^2) + 4\mu_\psi^2\omega_n^2 \right),
\end{aligned} \tag{70}$$

e escrevendo a equação acima em função das variáveis A , B , C e D , temos

$$\det \mathcal{M} = \prod_{n,p} \beta^8 (\omega_n^2 + A^2) (\omega_n^2 + B^2) (\omega_n^2 + C^2) (\omega_n^2 + D^2), \tag{71}$$

onde

$$\begin{aligned}
E_\phi^2 &\equiv \frac{1}{2}(U_{\phi_1} + U_{\phi_2}) = m_\phi^2 + \mathbf{p}^2 + \frac{\lambda\psi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\phi\phi_0^2}{3}, \\
E_\psi^2 &\equiv \frac{1}{2}(U_{\psi_1} + U_{\psi_2}) = m_\psi^2 + \mathbf{p}^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\psi\psi_0^2}{3}.
\end{aligned} \tag{72}$$

Usando as equações (71) e (72), definimos

$$\begin{aligned}
A^2 &\equiv E_\phi^2 + \mu_\phi^2 + \sqrt{4\mu_\phi^2 E_\phi^2 + \frac{1}{36}\lambda_\phi^2\phi_0^4}, \\
B^2 &\equiv E_\phi^2 + \mu_\phi^2 - \sqrt{4\mu_\phi^2 E_\phi^2 + \frac{1}{36}\lambda_\phi^2\phi_0^4}, \\
C^2 &\equiv E_\psi^2 + \mu_\psi^2 + \sqrt{4\mu_\psi^2 E_\psi^2 + \frac{1}{36}\lambda_\psi^2\psi_0^4}, \\
D^2 &\equiv E_\psi^2 + \mu_\psi^2 - \sqrt{4\mu_\psi^2 E_\psi^2 + \frac{1}{36}\lambda_\psi^2\psi_0^4}.
\end{aligned} \tag{73}$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\ln Z &= \left(\frac{1}{2}\phi_0^2\mu_\phi^2 + \frac{1}{2}\psi_0^2\mu_\psi^2 - \frac{m_\phi^2\phi_0^2}{2} - \frac{\lambda_\phi\phi_0^4}{4!} - \frac{m_\psi^2\psi_0^2}{2} - \frac{\lambda_\psi\psi_0^4}{4!} - \frac{\lambda}{4}\phi_0^2\psi_0^2 \right) \beta\mathcal{V} + \\
&- \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\ln(1 - e^{-\beta A}) + \ln(1 - e^{-\beta B}) + \ln(1 - e^{-\beta C}) + \ln(1 - e^{-\beta D})] \mathcal{V} \\
&- \frac{\mathcal{V}\beta}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (A + B + C + D).
\end{aligned} \tag{74}$$

Assim como em (50) calculamos o potencial termodinâmico na aproximação de 1-laço para o modelo de dois campos escalares complexos interagentes

$$\begin{aligned}
V_{eff} &= \left(-\frac{1}{2}\phi_0^2\mu_\phi^2 - \frac{1}{2}\psi_0^2\mu_\psi^2 + \frac{m_\phi^2\phi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\phi\phi_0^4}{4!} + \frac{m_\psi^2\psi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\psi\psi_0^4}{4!} + \frac{\lambda}{4}\phi_0^2\psi_0^2 \right) \\
&+ \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\ln(1 - e^{-\beta A}) + \ln(1 - e^{-\beta B}) + \ln(1 - e^{-\beta C}) + \ln(1 - e^{-\beta D})) \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (A + B + C + D),
\end{aligned} \tag{75}$$

onde as duas últimas linhas da equação acima são as contribuições térmica e quântica de 1-laço (ordem \hbar) para a energia livre.

Uma forma de encontrar resultados de forma analítica, para a equação (75), é

atravéz do regime de grandes cargas (49)

$$\mu_\phi^2 \gg \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{144 E_\phi^2} \quad ; \quad \mu_\psi^2 \gg \frac{\lambda_\psi^2 \psi_0^4}{144 E_\psi^2}. \quad (76)$$

Com isso, podemos escrever as seguintes aproximações

$$\begin{aligned} A &\simeq E_\phi + \mu_\phi + \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{288 E_\phi \mu_\phi (E_\phi + \mu_\phi)}, \\ B &\simeq E_\phi - \mu_\phi - \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{288 E_\phi \mu_\phi (E_\phi - \mu_\phi)}, \\ C &\simeq E_\psi + \mu_\psi + \frac{\lambda_\psi^2 \psi_0^4}{288 E_\psi \mu_\psi (E_\psi + \mu_\psi)}, \\ D &\simeq E_\psi - \mu_\psi - \frac{\lambda_\psi^2 \psi_0^4}{288 E_\psi \mu_\psi (E_\psi - \mu_\psi)}, \end{aligned} \quad (77)$$

onde

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (A + B + C + D) \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (E_\phi + E_\psi), \quad (78)$$

é o termo de energia de vácuo, ou seja, calculado a temperatura e potenciais químicos nulos, ($T = 0, \mu_\phi = \mu_\psi = 0$). E os termos de temperatura e potencial químico (ou termo de meio) fica dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta A}) &\simeq \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\beta \left(E_\phi + \mu_\phi + \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{288 E_\phi \mu_\phi (E_\phi + \mu_\phi)} \right)} \right] \\ &\simeq T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left(1 - e^{-\frac{E_\phi + \mu_\phi}{T}} \right) \\ &+ \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{288 \mu_\phi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_\phi (E_\phi + \mu_\phi) \left(e^{\frac{E_\phi + \mu_\phi}{T}} - 1 \right)} + \mathcal{O}^{superior} \end{aligned} \quad (79)$$

De forma similar, obtemos expressões análogas para B, C e D. As integrais de momento podem ser escritas usando a função $H_l(\bar{m}, r)$ que são muito bem explicadas por Haber e Weldon em (51)

$$H_l(\bar{m}, r) = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty dx \frac{x^{l-1}}{\sqrt{x^2 + \bar{m}^2}} \left[\frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + \bar{m}^2} - \bar{m}r} - 1} + (r \rightarrow -r) \right]. \quad (80)$$

Agora, definindo,

$$M_\phi^2 \equiv m_\phi^2 + \frac{\lambda\psi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\phi\phi_0^2}{3} \quad (81)$$

$$M_\psi^2 \equiv m_\psi^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\psi\psi_0^2}{3} \quad (82)$$

reescrevemos a primeira integral de momento

$$\begin{aligned} T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left(1 - e^{-\frac{E_\phi + \mu_\phi}{T}} \right) &= \frac{4\pi T^4}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dx_\phi x_\phi^2 \ln \left(1 - e^{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2} - r_\phi y_\phi} \right) \\ &= -\frac{4\pi T^4}{3(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dx_\phi x_\phi^4}{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2}} \frac{1}{\left(e^{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2} - r_\phi y_\phi} - 1 \right)}, \end{aligned} \quad (83)$$

onde $x_\phi = \frac{p}{T}$, $y_\phi = \frac{M_\phi}{T}$ e $r_\phi = \frac{\mu_\phi}{M_\phi}$, e da primeira para a segunda linha, fazemos uma integração por partes.

Sabendo então que a primeira integral de momento da parte de B será

$$T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left(1 - e^{-\frac{E_\phi - \mu_\phi}{T}} \right) \quad (84)$$

chamamos de J_ϕ a soma do resultado acima com (83), de forma que

$$\begin{aligned} J_\phi &\equiv -\frac{4\pi T^4}{3(2\pi)^3} \Gamma(5) \frac{1}{\Gamma(5)} \int_0^\infty dx_\phi \frac{x_\phi^4}{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2}} \left[\frac{1}{e^{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2} - y_\phi r_\phi} - 1} + (r_\phi \rightarrow -r_\phi) \right] \\ &= -\frac{4T^4}{\pi^2} H_5(y_\phi, r_\phi). \end{aligned} \quad (85)$$

Usamos a seguinte expansão de altas temperaturas ($T/m \gg 1$) da função $H_l(y, r)$ (ver Haber e Weldon (51) para mais detalhes)

$$H_l(y, r) = 2h_{2n+1}^e(y, r), \quad (86)$$

onde $h_{2n+1}^e(y, r)$ é definido por

$$\begin{aligned}
h_{2n+1}^e(y, r) &= \frac{\pi y^{2n-1}}{2\Gamma(2n+1)} (-1)^n (1-r^2)^{n-\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{(-1)^n}{2[\Gamma(n+1)]^2} \left(\frac{y}{2}\right)^{2n} \left[\ln\left(\frac{y}{4\pi}\right) + \frac{\gamma}{2} - \frac{\psi(n+1)}{2} + nr^2 {}_3F_2(1, 1, 1-n; \frac{3}{2}, 2; r^2) \right] \\
&+ \frac{(-1)^n}{2\Gamma(n+1)} \left(\frac{y}{2}\right)^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{y}{4\pi}\right)^{2k} \frac{\Gamma(2k+1) \zeta(2k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+n)} {}_2F_1(-k, -n-k; \frac{1}{2}; r^2) \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{y}{2}\right)^{2k} \frac{\Gamma(n-k) \zeta(2n-2k)}{\Gamma(k+1)} {}_2F_1(-k, n-k; \frac{1}{2}; r^2), \quad (87)
\end{aligned}$$

onde $\psi(n)$ é a função Digama (ou função Psi), ${}_2F_1(a, b; c; z)$ e ${}_3F_2(a, b, c; d, e; z)$ são funções hipergeométricas, $\zeta(n)$ é a função Zeta de Riemann, $\Gamma(n)$ é a função Gamma e γ é a constante de Euler-Mascheroni, $\gamma = 0,577$.

A fim de resolver a equação (85), precisamos encontrar $H_5(y, r)$, logo $n = 2$, de forma que obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
J_\phi &= \frac{M_\phi^4}{16\pi^2} \left[\ln\left(\frac{4\pi T}{M_\phi}\right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{\psi(3)}{2} - \frac{2\mu_\phi^2}{M_\phi^2} {}_3F_2(1, 1, -1; \frac{3}{2}, 2; \frac{\mu_\phi^2}{M_\phi^2}) \right] \\
&+ -\frac{T}{6\pi} (M_\phi^2 - \mu_\phi^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{T^4 \pi^2}{45} + \frac{M_\phi^2 T^2}{12} {}_2F_1(-1, 1; \frac{1}{2}; \frac{\mu_\phi^2}{M_\phi^2}). \quad (88)
\end{aligned}$$

Devemos, agora, voltar a segunda integral de momento na última linha da equação (79), que se refere a parte A e somá-la a mesma integral de momento da parte B , soma que chamaremos I_ϕ , analogamente ao que fizemos para o caso de J_ϕ

$$I_\phi \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_\phi} \left[\frac{1}{(E_\phi + \mu_\phi) \left(e^{\frac{E_\phi + \mu_\phi}{T}} - 1\right)} - \frac{1}{(E_\phi - \mu_\phi) \left(e^{\frac{E_\phi - \mu_\phi}{T}} - 1\right)} \right]. \quad (89)$$

Então percebemos a seguinte relação

$$T\partial_T I_\phi = 2\partial_{M_\phi^2} \partial_{\mu_\phi} J_\phi, \quad (90)$$

de forma que podemos encontrar a expansão de altas temperaturas ($T \gg m$) também para I_ϕ

$$I_\phi = \frac{T\mu_\phi}{2\pi\sqrt{M_\phi^2 - \mu_\phi^2}} + \frac{M_\phi^2\mu_\phi}{6\pi^2} - \frac{\mu_\phi}{2\pi^2} {}_3F_2(1, 1, -1; \frac{3}{2}, 2; \frac{\mu_\phi^2}{M_\phi^2}). \quad (91)$$

o mesmo procedimento se aplica de forma análoga para os termos C e D .

Teremos, então, o potencial termodinâmico térmico no regime de altas temperaturas. Considerando que os termos de temperatura são muito maiores que os demais, para a nossa análise de altas temperaturas, obtemos

$$\begin{aligned} V_{thermal} \simeq & -\frac{T}{6\pi}(M_\phi^2 - \mu_\phi^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{T^4\pi^2}{45} + \frac{M_\phi^2T^2}{12} - \frac{\mu_\phi^2T^2}{6} \\ & - \frac{T}{6\pi}(M_\psi^2 - \mu_\psi^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{T^4\pi^2}{45} + \frac{M_\psi^2T^2}{12} - \frac{\mu_\psi^2T^2}{6} + \frac{M_\phi^4}{16\pi^2} \ln\left(\frac{4\pi T}{M_\phi}\right) \\ & + \frac{T\lambda_\phi^2\phi_0^4}{256\pi\sqrt{M_\phi^2 - \mu_\phi^2}} + \frac{M_\psi^4}{16\pi^2} \ln\left(\frac{4\pi T}{M_\psi}\right) + \frac{T\lambda_\psi^2\psi_0^4}{256\pi\sqrt{M_\psi^2 - \mu_\psi^2}}. \end{aligned} \quad (92)$$

As informações sobre estrutura de fase e distribuição da carga são encontrados em dependências dos campos de fundo e dos potenciais químicos por meio do potencial termodinâmico,

$$V_{eff} = V_{tree} + V_{thermal}, \quad (93)$$

onde

$$V_{tree} = U(\phi_0, \psi_0) - \frac{1}{2}\mu_\phi^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\mu_\psi^2\psi_0^2. \quad (94)$$

Logo, o potencial termodinâmico no limite de altas temperaturas, a 1-laço, será

$$\begin{aligned} V_{eff} \simeq & \frac{\phi_0^2}{2} \left(m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{12}\phi_0^2 + \frac{\lambda\psi_0^2}{4} \right) + \frac{\psi_0^2}{2} \left(m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{12}\psi_0^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{4} \right) \\ & - \frac{2T^4\pi^2}{45} + \frac{M_\phi^2T^2}{12} - \frac{\mu_\phi^2T^2}{6} + \frac{M_\psi^2T^2}{12} - \frac{\mu_\psi^2T^2}{6}, \end{aligned} \quad (95)$$

onde M_ϕ^2 e M_ψ^2 são definidos segundo as expressões (81) e (82), respectivamente. Note que mantivemos apenas os termos de temperatura a partir de T^2 . A estrutura de fase depende do mínimo do potencial termodinâmico, que deve ser calculado com respeito aos campos de fundo ϕ_0 e ψ_0 pelas seguintes relações

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi_0} = \phi_0 \left(m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{6} \phi_0^2 + \frac{\lambda \psi_0^2}{2} + \frac{T^2}{12} \left(\frac{2\lambda_\phi}{3} + \lambda \right) \right) = 0, \quad (96)$$

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \psi_0} = \psi_0 \left(m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{6} \psi_0^2 + \frac{\lambda \phi_0^2}{2} + \frac{T^2}{12} \left(\frac{2\lambda_\psi}{3} + \lambda \right) \right) = 0. \quad (97)$$

Em cada equação acima existe dois mínimos triviais (sem quebra de simetria)

$$\phi_0 = 0 \quad ; \quad \psi_0 = 0 \quad (98)$$

e dois não triviais, onde há quebra de simetria

$$\phi_0^2 = \frac{6}{\lambda_\phi} \left[\mu_\phi^2 - m_\phi^2 - \frac{T^2}{12} \left(\frac{2\lambda_\phi}{3} + \lambda \right) - \frac{\lambda \psi_0^2}{2} \right], \quad (99)$$

$$\psi_0^2 = \frac{6}{\lambda_\psi} \left[\mu_\psi^2 - m_\psi^2 - \frac{T^2}{12} \left(\frac{2\lambda_\psi}{3} + \lambda \right) - \frac{\lambda \phi_0^2}{2} \right]. \quad (100)$$

A temperatura crítica no caso de cada campo é alcançada quando este vai a zero, ou seja, $\phi_0(T = T_c^\phi) = 0$ e $\psi_0(T = T_c^\psi) = 0$,

$$(T_c^\phi)^2 = \frac{36}{(2\lambda_\phi + 3\lambda)} \left(\mu_\phi^2 - m_\phi^2 - \frac{\lambda \psi_0^2}{2} \right), \quad (101)$$

$$(T_c^\psi)^2 = \frac{36}{(2\lambda_\psi + 3\lambda)} \left(\mu_\psi^2 - m_\psi^2 - \frac{\lambda \phi_0^2}{2} \right), \quad (102)$$

e ϕ_0 e ψ_0 como função de T podem ser expressos como

$$\phi_0^2 = \frac{(2\lambda_\phi + 3\lambda)}{6\lambda_\phi} [(T_c^\phi)^2 - T^2], \quad (103)$$

$$\psi_0^2 = \frac{(2\lambda_\psi + 3\lambda)}{6\lambda_\psi} [(T_c^\psi)^2 - T^2]. \quad (104)$$

de forma a termos uma quebra de simetria quando $T < T_c^{\phi,\psi}$, onde ϕ_0^2 e ψ_0^2 acabam assumindo valores diferentes de zero, enquanto a simetria é restaurada para $T \geq T_c^{\phi,\psi}$.

É correto destacar que as equações acima são válidas apenas para os casos onde o valor esperado de vácuo (VEV) de um campo não interfere no outro. Caso contrário, é preciso desacoplar as equações (99) e (100) para encontrar novas temperaturas críticas.

Portanto, escrevemos ϕ_0^2 e ψ_0^2 de forma desacoplada

$$\phi_0^2 = \frac{6\lambda_\psi \left[\mu_\phi^2 - m_\phi^2 - \frac{T^2}{12} \left(\frac{2\lambda_\phi}{3} + \lambda \right) \right] - 18\lambda \left[\mu_\psi^2 - m_\psi^2 - \frac{T^2}{12} \left(\frac{2\lambda_\psi}{3} + \lambda \right) \right]}{(\lambda_\phi \lambda_\psi - 9\lambda^2)}, \quad (105)$$

$$\psi_0^2 = \frac{6\lambda_\phi \left[\mu_\psi^2 - m_\psi^2 - \frac{T^2}{12} \left(\frac{2\lambda_\psi}{3} + \lambda \right) \right] - 18\lambda \left[\mu_\phi^2 - m_\phi^2 - \frac{T^2}{12} \left(\frac{2\lambda_\phi}{3} + \lambda \right) \right]}{(\lambda_\psi \lambda_\phi - 9\lambda^2)}, \quad (106)$$

onde a temperatura crítica de cada campo, agora com os VEV's desacoplados, será

$$T_{c_\phi}^2 = \frac{36\lambda_\psi(\mu_\phi^2 - m_\phi^2) - 108\lambda(\mu_\psi^2 - m_\psi^2)}{2\lambda_\phi\lambda_\psi - 3\lambda\lambda_\psi - 9\lambda^2}, \quad (107)$$

$$T_{c_\psi}^2 = \frac{36\lambda_\phi(\mu_\psi^2 - m_\psi^2) - 108\lambda(\mu_\phi^2 - m_\phi^2)}{2\lambda_\psi\lambda_\phi - 3\lambda\lambda_\phi - 9\lambda^2}. \quad (108)$$

Como cada temperatura crítica precisa ser maior que zero, necessariamente teremos a condição $\mu_{\phi,\psi}^2 > m_{\phi,\psi}^2$, lembrando também que estamos considerando o caso $\lambda < 0$. Note que o valor esperado de vácuo (VEV) para cada campo ocorre em um regime onde a teoria de perturbação é cercada por divergências no infravermelho, fato muito bem discorrido no quinto capítulo do artigo referência (49). O artigo supramencionado mostra como a presença da carga faz com que a simetria seja quebrada mais rapidamente, o que faz sentido dada a interpretação convencional das transições de fase análogas ao condensado de Bose-Einstein. Isso nos diz que sempre que a carga não possa ser completamente acomodada por estados termicamente excitados, o campo condensa, então a carga pode ocupar fases excitadas de momento zero do VEV, isto é, os modos de Goldstone. Isso pode ser melhor estudado se olharmos para a densidade de carga $n_{\phi,\psi}$ para cada campo.

Podemos calcular a pressão a partir do potencial efetivo termodinâmico $P = -V_{eff}$ e dada a pressão, podemos calcular cada densidade pelas relações

$$n_\phi = \frac{\partial P}{\partial \mu_\phi} = \mu_\phi \phi_0^2 + \frac{\mu_\phi T^2}{3} = \mu_\phi \phi_0^2 - \frac{\partial V_{thermal}}{\partial \mu_\phi}, \quad (109)$$

$$n_\psi = \frac{\partial P}{\partial \mu_\psi} = \mu_\psi \psi_0^2 + \frac{\mu_\psi T^2}{3} = \mu_\psi \psi_0^2 - \frac{\partial V_{thermal}}{\partial \mu_\psi}. \quad (110)$$

Logo, é visível a base para a interpretação de Haber-Weldon (51), onde a derivada parcial da parte térmica do potencial termodinâmico em relação ao potencial químico, de cada campo, representa a densidade de carga criada pelas excitações térmicas para um gás de Bose de partículas e anti-partículas. Assim, a densidade de carga total é facilmente interpretada como a soma das densidades de carga portadas pelos banho de

modos térmicos, com a densidade de carga carregada pelos modos de Goldstone.

2.2.1 Análise de fases

Estudaremos a estrutura de fases do modelo investigando a possível presença de quebra inversa de simetria, ou do inglês, *Inverse Symmetry Breaking* (ISB) e da não restauração de simetria, *Symmetry Non-Restoration* (SNR).

Vamos fazer uma análise qualitativa das possíveis fases do potencial termodinâmico $V_{eff}(\phi_0, \psi_0)$, sem esquecer da condição de estabilidade $\lambda_\phi \lambda_\psi > 9\lambda^2$, onde usamos $\lambda_\phi > 0$, $\lambda_\psi > 0$ e $\lambda < 0$.

Utilizando os seguintes valores para as constantes de acoplamento: $\lambda_\phi = 0,018$, $\lambda_\psi = 0,6$ e $\lambda = -0,3$ (outros valores poderiam ser utilizados sem perda de generalidade, mantendo a condição de estabilidade supramencionada); o potencial termodinâmico, quando $m_\phi^2 > 0$ e $m_\psi^2 > 0$, apresentará um único ponto de mínimo, em $\phi_c = \psi_c = 0$, e o sistema apresenta uma simetria $U(1) \times U(1)$. Este comportamento é representado na figura 1. Já a figura 2 apresenta o comportamento do potencial termodinâmico em função dos campos ϕ e ψ para o caso onde $m_\phi^2 > 0$ e $m_\psi^2 < 0$. Neste caso, o potencial termodinâmico apresenta uma simetria $U(1)$ na direção do campo ϕ e quebra na direção do campo ψ .

A figura 3 mostra quebra de simetria na direção do campo ϕ enquanto o potencial termodinâmico permanece simétrico na direção do campo ψ (simetria $U(1)$), quando $m_\phi^2 < 0$ e $m_\psi^2 > 0$. Isso ocorre ao invertermos os valores das constantes de acoplamento, agora usamos: $\lambda_\phi = 0,6$, $\lambda_\psi = 0,018$ e $\lambda = -0,3$. No entanto, independente dos valores atribuídos às constantes de acoplamento serem estes invertidos ou os originais, quando temos que $m_\phi^2 < 0$ e $m_\psi^2 < 0$, como representado na figura 4, o potencial termodinâmico apresenta quebra de simetria em ambas as direções, dos campos ϕ e ψ .

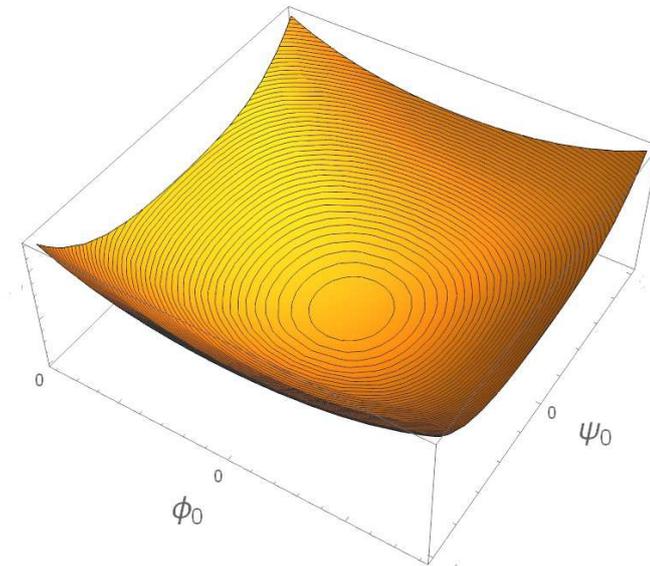
No limite de altas temperaturas, a soma das contribuições da densidade de carga (dadas pelos modos de banho térmico e pelos modos de Goldstone) pode ser representada da seguinte forma

$$n_\phi = \frac{6\mu_\phi}{\lambda_\phi}(\mu_\phi^2 - m_\phi^2) - \frac{\mu_\phi\lambda}{\lambda_\phi} \left(\frac{T^2}{2} + 3\psi_0^2 \right), \quad (111)$$

$$n_\psi = \frac{6\mu_\psi}{\lambda_\psi}(\mu_\psi^2 - m_\psi^2) - \frac{\mu_\psi\lambda}{\lambda_\psi} \left(\frac{T^2}{2} + 3\phi_0^2 \right), \quad (112)$$

ou, definindo $\tilde{m}_\phi^2 = m_\phi^2 + \frac{\lambda\psi_0^2}{2}$ e $\tilde{m}_\psi^2 = m_\psi^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2}$, podemos reescrever as densidades de carga da forma

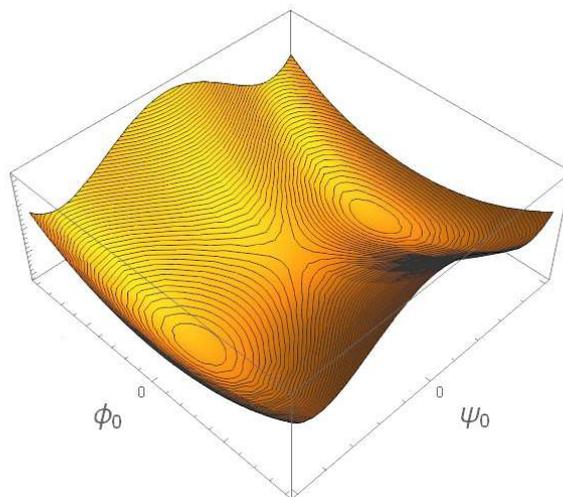
Figura 1 - $m_\phi^2 > 0$ e $m_\psi^2 > 0$



Legenda: O potencial apresenta apenas um ponto de mínimo, em $\phi_0 = \psi_0 = 0$.

Fonte: A autora, 2022.

Figura 2 - $m_\phi^2 > 0$ e $m_\psi^2 < 0$

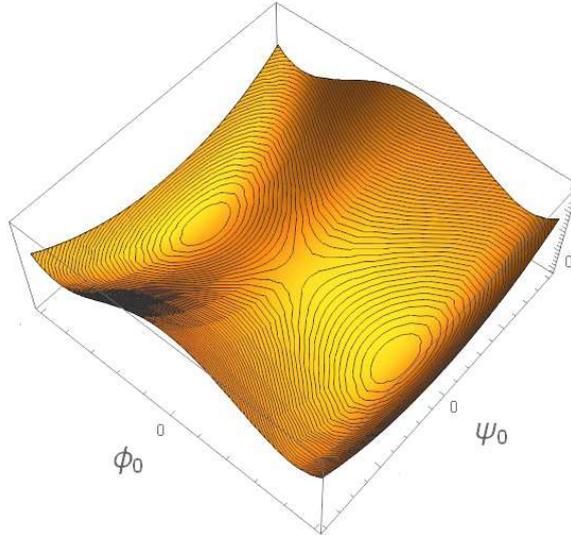


Legenda: O potencial apresenta quebra de simetria na direção de ψ , com os mínimos em

$\psi_0 \neq 0$ e $\phi_0 = 0$.

Fonte: A autora, 2022.

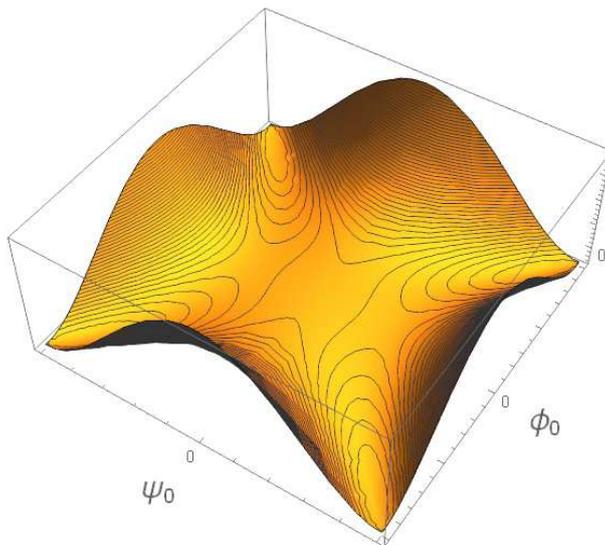
Figura 3 - $m_\phi^2 < 0$ e $m_\psi^2 > 0$



Legenda: O potencial efetivo apresenta quebra de simetria na direção de ϕ , com os mínimos em $\phi_0 \neq 0$ e $\psi_0 = 0$.

Fonte: A autora, 2022.

Figura 4 - $m_\phi^2 < 0$ e $m_\psi^2 < 0$



Legenda: O potencial apresenta quebra de simetria em ambas as direções, com os mínimos em $\psi_0 \neq 0$ e $\phi_0 \neq 0$.

Fonte: A autora, 2022.

$$n_\phi = \frac{6\mu_\phi}{\lambda_\phi} \left(\mu_\phi^2 - \tilde{m}_\phi^2 + \frac{\lambda T^2}{12} \right), \quad (113)$$

$$n_\psi = \frac{6\mu_\psi}{\lambda_\psi} \left(\mu_\psi^2 - \tilde{m}_\psi^2 + \frac{\lambda T^2}{12} \right). \quad (114)$$

Para isso, vamos analisar as expressões (113) e (114), elas são, em geral, difíceis de resolver, mas ficam mais simples quando estudadas nos limites de alta e baixa densidade, $\lambda_{\phi,\psi} n_{\phi,\psi} \gg \tilde{m}_{\phi,\psi}^3$ e $\lambda_{\phi,\psi} n_{\phi,\psi} \ll \tilde{m}_{\phi,\psi}^3$ (52), respectivamente. Tanto a ISB quanto a SNR consistem em alterações drásticas no quadro de simetria da teoria, logo vamos analisar apenas o limite de altas densidades. Nesse limite, as densidades e potenciais químicos são ambos grandes, produzindo efeitos extremos sobre evolução da teoria.

Um cenário no qual nossa teoria de quebra de simetria a baixas temperaturas pode aparecer é o cosmológico. A configuração da expansão do Universo a entropia constante determina que a razão $n_{\phi,\psi}/s$ seja constante, onde s é a densidade de entropia. Uma vez que a carga do Universo precisa permanecer constante à medida que este se expande, e a densidade de entropia pode ser obtida a partir do V_{eff} , ($s = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial T} \sim T^3$). Nesse caso, temos que

$$n_{\phi,\psi} = \tau_{\phi,\psi} T^3. \quad (115)$$

onde $\tau_{\phi,\psi}$ é uma constante de proporcionalidade. Tal relação entre densidade e temperatura, será útil para os resultados numéricos que obteremos mais a frente.

3 TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA

Atualmente sabemos que expansões perturbativas quebram em teoria de campos à temperatura finita (53). Quebra que pode ocorrer pelas divergências no infravermelho que aparecem ao redor da temperatura crítica, temperatura de transição de fase. Outro caso onde a teoria de perturbação apresenta quebra é na aproximação de altas temperaturas (54), onde os diagramas de Feynman de ordem mais alta nos acoplamento podem apresentar potências maiores de temperatura, do que em acoplamentos de mais baixa ordem.

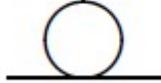
Para resolver este problema, são propostas técnicas de ressonância de termos da série perturbativa, como a ressonância de diagramas dos diagramas de daisy e super daisy (55) e a técnica de operador composto (56), por exemplo. Outros métodos são aplicados na tentativa de superar o problema da quebra de teoria de perturbação, como encontrados nas referências (57-59). Ainda assim, surgem outros problemas, a maior parte dessas técnicas não tem autoconsistência na ressonância de diagramas de ordem mais alta, além das dificuldades que aparecem durante a renormalização. Isto é bem discutido na referência (60).

Nessa dissertação lançaremos mão da Teoria de Perturbação Otimizada (OPT), ou expansão em delta linear. A escolha dessa técnica não é aleatória, a OPT é uma teoria bem conhecida (28, 61) onde temos exemplos de aplicações suas muito bem sucedidas na literatura (62, 63).

3.1 Quebra de teoria de perturbação para altas temperaturas

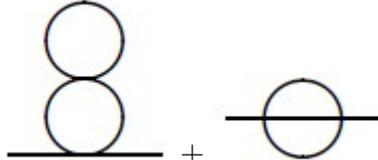
Nesta seção vamos discutir como a teoria de perturbação quebra em TQC à temperatura finita no limite de altas temperaturas. Até agora, calculamos o potencial termodinâmico em altas temperaturas na aproximação de 1-laço, expandindo perturbativamente até primeira ordem nos acoplamentos. No entanto, é preciso saber se a série perturbativa é bem comportada e, para isso, precisamos considerar termos de ordens superiores na expansão.

Para isso, vamos considerar alguns diagramas de laço à altas temperaturas. Faremos uma análise da mesma teoria $\lambda\phi^4$, mas para o caso de apenas um campo (nosso modelo de dois campos viria a ser apenas uma generalização dos resultados que analisaremos). Na ordem de 1-laço, temos a seguinte contribuição da massa térmica (53), dada pelo seguinte diagrama, em ordem λ



$$\simeq \frac{\lambda T^2}{24}, \quad (116)$$

onde $\bar{M}^2 = -m^2 + \frac{\lambda\phi^2}{2}$. Em ordem de 2-laços, com termos de ordem λ^2 , teremos contribuições dadas pelos seguintes dois diagramas (62), na aproximação de altas temperaturas



$$\simeq -\frac{\lambda^2 T^3}{384\pi m}. \quad (117)$$

Se compararmos esse resultado de contribuição térmica de massa em segunda ordem com o em primeira ordem, concluímos que, para a aproximação perturbativa ser confiável à temperatura finita, devemos ter

$$\left(\frac{\lambda^2 T^3}{384\pi m} \right) / \left(\frac{\lambda T^2}{24} \right) = \frac{\lambda T}{16\pi m} \ll 1, \quad (118)$$

juntamente com o requisito usual para expansão perturbativa, que é $\lambda \ll 1$. Esse resultado nos mostra que para temperaturas suficientemente altas, com valores de λ e m fixos, eventualmente a aproximação perturbativa quebrará. Outro problema surge na equação (117), onde esse resultado apresenta uma singularidade infravermelha quando $m \rightarrow 0$.

Uma tentativa de regularizar essa singularidade, com o uso, de um regulador de infravermelho, por exemplo, nos leva a um número infinito de diagramas contribuindo para a mesma ordem da constante de acoplamento. Porém, um método de ressonância pode ser aplicado de forma bem definida a este subconjunto infinito de diagramas. O que nos mostra que as divergências de infravermelho surgiriam devido à teoria de perturbação em temperatura finita.

Discussões como essa podem ser estendidas para problemas mais gerais em teorias de calibre (26), onde é preciso utilizar esquemas de ressonância ou métodos não-perturbativos para o estudo das transições de fase.

A seguir apresentamos o método não-perturbativo da OPT como uma solução dos problemas aqui apresentados.

3.2 Teoria de perturbação otimizada (OPT)

A utilização de métodos perturbativos na teoria quântica de campos à temperatura finita pode causar divergências de infravermelho em temperaturas próximas a temperatura crítica, aquela onde o sistema sofre uma transição de fase. Para resolver esse tipo de problema várias técnicas de ressonância de termos da série perturbativa vêm sendo utilizadas, alguns desses métodos são explorados nas referências (55-59) e (64). Existem, no entanto, dificuldades e desvantagens em seu uso. Um problema associado a alguns desses métodos está relacionado à implementação da renormalização, por exemplo (60).

A referência (65) usa um mecanismo no nível dos integrandos no modelo de auto-interação $\lambda\phi^4$ que faz uma expansão perturbativa de uma integral funcional divergente. Os autores do artigo mostram como a sequência de integrandos viola o teorema de convergência de Lebesgue ⁴.

Isto posto, faremos uso nesse trabalho da Teoria de Perturbação Otimizada, ou do inglês, *Optimized Perturbation Theory* (OPT) (60). As aplicações dessa alternativa não-perturbativa também conhecida como expansão em δ linear, vêm sendo bem sucedidas como já conhecido na literatura (62, 66) e resolvendo inúmeros problemas em diferentes áreas da física, como mecânica quântica (67) e estatística (68).

Usando o método de OPT os diagramas de Feynman aparecem de forma idêntica aos feitos na teoria de perturbação comum apresentando apenas um propagador modificado simples que depende de um parâmetro de massa arbitrário.

A aplicação padrão da OPT a uma teoria descrita por uma densidade Lagrangiana \mathcal{L} começa com uma interpolação definida por

$$\mathcal{L}^\delta = (1 - \delta)\mathcal{L}_0(\eta) + \delta\mathcal{L}, \quad (119)$$

onde \mathcal{L}_0 é a densidade Lagrangeana de uma teoria resolvível que pode conter um parâmetro de massa arbitrário (η) e δ é um parâmetro que usamos para construir a teoria de perturbação no contexto da OPT. A densidade Lagrangiana \mathcal{L}^δ interpola entre o solúvel $\mathcal{L}_0(\eta)$ (quando $\delta = 0$) e o \mathcal{L} original (quando $\delta = 1$).

O grande diferencial desse método está no parâmetro variacional η . Suponhamos uma certa quantidade \mathcal{P}_N até a ordem N em uma expansão em δ (onde o subscrito é a ordem de expansão) e tomamos $\delta = 1$. Truncamos a dada quantidade nessa ordem, o que nos diz que \mathcal{P}_N possui dependência sobre o parâmetro η que foi adicionado pelo método.

⁴ O teorema de Lebesgue estabelece as condições sob as quais se permite trocar uma integração e um limite, em particular a troca que ocorre na geração de séries de perturbação (65).

Logo, precisamos de um critério bem definido para determinar os melhores valores para o parâmetro η . Para isto, usaremos o Princípio de Mínima Sensibilidade (PMS) (30), onde escolhemos η estacionário no ponto em que a expansão é truncada, isto é, onde a dependência é mínima

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}_N}{\partial \eta} \right|_{\eta=\bar{\eta}} = 0, \quad (120)$$

onde $\bar{\eta}$ passa a ser uma função não trivial dos acoplamento, e por meio do qual as correções não perturbativas são geradas. Ou seja, uma vez que η é fixado por um princípio variacional apropriado, este passa a depender dos parâmetros (em especial, os acoplamentos) do modelo, carregando consigo informações não perturbativas.

4 APLICANDO A OPT PARA O MODELO DE DOIS CAMPOS

Vamos agora aplicar o método da OPT e o princípio variacional PMS para o modelo de interesse nesta dissertação.

Começamos fazendo as seguintes mudanças de acordo com a prescrição da OPT

$$\begin{aligned} m_\phi^2 &\rightarrow m_\phi^2 + \eta_\phi^2(1 - \delta), \\ m_\psi^2 &\rightarrow m_\psi^2 + \eta_\psi^2(1 - \delta), \end{aligned} \tag{121}$$

e os acoplamentos são modificados para

$$\begin{aligned} \lambda_\phi &\rightarrow \delta\lambda_\phi, \\ \lambda_\psi &\rightarrow \delta\lambda_\psi, \\ \lambda &\rightarrow \delta\lambda. \end{aligned} \tag{122}$$

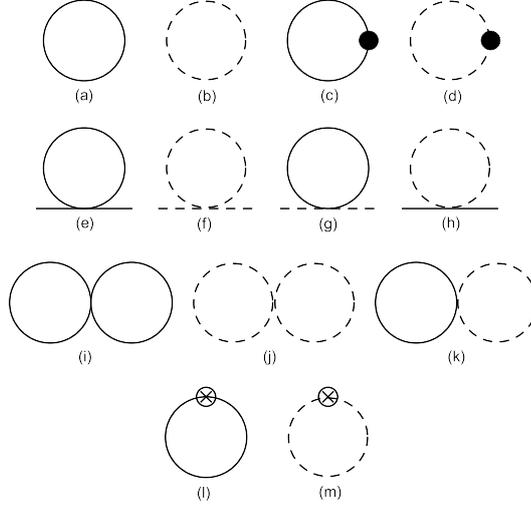
Expandindo em δ apenas até a primeira ordem, e realizando o procedimento de forma análoga ao método perturbativo, podemos expressar todas as contribuições para o potencial termodinâmico na forma da figura 5.

Isso leva a uma modificação das quantidades que já definimos antes e que aparecem no potencial termodinâmico. Por exemplo, as funções definidas antes nas equações (72) e (77), ficam agora dadas por

$$\begin{aligned} A &= E_\phi + \mu_\phi, \\ B &= E_\phi - \mu_\phi, \\ C &= E_\psi + \mu_\psi, \\ D &= E_\psi - \mu_\psi, \end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned} E_\phi^2 &\equiv m_\phi^2 + \eta_\phi^2(1 - \delta) + \mathbf{p}^2 + \frac{\lambda\delta\psi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\phi\delta\phi_0^2}{3}, \\ E_\psi^2 &\equiv m_\psi^2 + \eta_\psi^2(1 - \delta) + \mathbf{p}^2 + \frac{\lambda\delta\phi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\psi\delta\psi_0^2}{3}, \end{aligned} \tag{124}$$

Figura 5 - Contribuições de todos os diagramas de vácuo do potencial termodinâmico à primeira ordem na OPT



Legenda: As linhas sólidas e tracejada representam os propagadores de ϕ e ψ respectivamente. Os pontos pretos representam a inserção de $\delta\eta_{\phi,\psi}^2$. Os pontos com cruzes representam a inserção da renormalização da massa. Linhas externas representam inserções dos valores esperados de vácuo ϕ_0^2 and ψ_0^2 .

Fonte: A autora, 2022.

$$\begin{aligned}
 E_\phi^2 &= m_\phi^2 + \eta_\phi^2 + \mathbf{p}^2 + \delta \left(\frac{\lambda_\phi \phi_0^2}{3} + \frac{\lambda_\psi \psi_0^2}{2} - \eta_\phi^2 \right), \\
 E_\phi &\simeq \sqrt{(\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2)} \left(1 + \frac{\delta}{12} \frac{(2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda_\psi \psi_0^2 - 6\eta_\phi^2)}{(\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2)} \right), \\
 E_\psi &\simeq \sqrt{(\Omega_\psi^2 + \mathbf{p}^2)} \left(1 + \frac{\delta}{12} \frac{(2\lambda_\psi \psi_0^2 + 3\lambda_\phi \phi_0^2 - 6\eta_\psi^2)}{(\Omega_\psi^2 + \mathbf{p}^2)} \right), \tag{125}
 \end{aligned}$$

onde $\Omega_{\phi,\psi}^2 \equiv m_{\phi,\psi}^2 + \eta_{\phi,\psi}^2$. Vamos, primeiramente, nos restringir às contribuições a nível de 1-laço mostradas na figura 5. Mais abaixo daremos o resultado para as contribuições de 2-laços obtidas via OPT, mas que ainda são de ordem δ . Vemos, então que as contribuições de 1-laço serão, começando com o termo (79)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta A}) = T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left(1 - e^{-\frac{E_\phi + \mu_\phi}{T}} \right) \\
& = T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\sqrt{\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2}}{T} + \frac{\delta}{12T} \frac{(2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda\psi_0^2 - 6\eta^2)}{\sqrt{\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2}} - \frac{\mu_\phi}{T} \right) \right] \\
& \simeq T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\frac{\sqrt{\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2}}{T} - \frac{\mu_\phi}{T}} \right] + \frac{\delta}{12} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda\psi_0^2 - 6\eta^2)}{\sqrt{\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2} \left(e^{\frac{\sqrt{\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2}}{T} + \frac{\mu_\phi}{T}} - 1 \right)}, \quad (126)
\end{aligned}$$

onde da segunda para a terceira lida da expressão acima, expandimos o log em δ e mantivemos até a ordem δ na expansão. Resolvendo a primeira parte da mesma expressão, usando $x_\phi = \frac{p}{T}$, $y_\phi = \frac{\Omega_\phi}{T}$ e $r_\phi = \frac{\mu_\phi}{\Omega_\phi}$, temos que

$$\begin{aligned}
& T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\frac{\sqrt{\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2}}{T} - \frac{\mu_\phi}{T}} \right] \\
& = \frac{4\pi T^4}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dx_\phi x_\phi^2 \ln \left[1 - e^{-\sqrt{y_\phi^2 + x_\phi^2} - y_\phi r_\phi} \right] \\
& = -\frac{4\pi T^4}{3(2\pi)^3} \int_0^\infty dx_\phi \frac{x_\phi^4}{\sqrt{y_\phi^2 + x_\phi^2} \left(e^{\sqrt{y_\phi^2 + x_\phi^2} + y_\phi r_\phi} - 1 \right)}, \quad (127)
\end{aligned}$$

onde foi feita uma integração por partes na passagem da segunda para a terceira linha na equação acima.

Teremos um novo J_ϕ , agora com a adição do parâmetro de massa η , onde J_ϕ é dado pela soma do resultado acima com a contribuição que depende de B

$$\begin{aligned}
J_\phi & \equiv T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\frac{\sqrt{\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2}}{T} - \frac{\mu_\phi}{T}} \right] + T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\frac{\sqrt{\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2}}{T} + \frac{\mu_\phi}{T}} \right] \\
& = -\frac{4\pi T^4 \Gamma(5)}{3(2\pi)^3 \Gamma(5)} \int_0^\infty dx_\phi \frac{x_\phi^4}{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2}} \left[\frac{1}{e^{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2} + y_\phi r_\phi} - 1} + (r_\phi \rightarrow -r_\phi) \right] \\
& = -\frac{4T^4}{\pi^2} H_5(y_\phi, r_\phi), \quad (128)
\end{aligned}$$

onde a função $H_5(y_\phi, r_\phi)$ é dada por

$$H_5(y_\phi, r_\phi) = \frac{1}{\Gamma(5)} \int_0^\infty dx_\phi \frac{x_\phi^4}{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2}} \left[\frac{1}{e^{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2} + y_\phi r_\phi} - 1} + (r_\phi \rightarrow -r_\phi) \right] \quad (129)$$

Analogamente, teremos um novo I_ϕ dado pela soma da segunda parte da equação (126) com a contribuição de B

$$\begin{aligned} I_\phi &\equiv \frac{\delta (2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda\psi_0^2 - 6\eta_\phi^2) T^2 \Gamma(3)}{24\pi^2 \Gamma(3)} \int_0^\infty \frac{dx_\phi x_\phi^2}{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2}} \left(\frac{1}{\left(e^{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2 + y_\phi r_\phi}} - 1 \right)} + (r_\phi \rightarrow -r_\phi) \right) \\ &= \frac{\delta (2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda\psi_0^2 - 6\eta_\phi^2) T^2}{12\pi^2} H_3(y_\phi, r_\phi), \end{aligned} \quad (130)$$

onde a função $H_3(y_\phi, r_\phi)$ é dada por

$$H_3(y_\phi, r_\phi) = \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^\infty \frac{dx_\phi x_\phi^2}{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2}} \left(\frac{1}{\left(e^{\sqrt{x_\phi^2 + y_\phi^2 + y_\phi r_\phi}} - 1 \right)} + (r_\phi \rightarrow -r_\phi) \right). \quad (131)$$

Logo, o resultado obtido, usando $A = +(E_\phi^2 + \mu_\phi^2)$ e $B = +(E_\phi^2 - \mu_\phi^2)$, fica

$$\begin{aligned} J_\phi + I_\phi &= \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\ln(1 - e^{-\beta A}) + \ln(1 - e^{-\beta B})) = \\ &= \frac{4T^4}{\pi^2} H_5(y_\phi, r_\phi) + \frac{\delta (2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda\psi_0^2 - 6\eta_\phi^2) T^2}{12\pi^2} H_3(y_\phi, r_\phi). \end{aligned} \quad (132)$$

Os termos com C e D são resolvidos de forma equivalente.

Considerando a parte divergente da energia livre (ou termos de vácuo)

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (A + B + C + D) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (E_\phi + E_\psi), \quad (133)$$

onde podemos escrever a em parte ϕ , e sabemos que para ψ teremos uma solução análoga,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_\phi &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{(\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2)} \left(1 + \frac{\delta (2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda\psi_0^2 - 6\eta_\phi^2)}{12 (\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2)} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{(\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2)} + \frac{\delta (2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda\psi_0^2 - 6\eta_\phi^2)}{12} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{(\Omega_\phi^2 + \mathbf{p}^2)}}. \end{aligned} \quad (134)$$

Usando a regularização dimensional no esquema de Mínima Subtração \overline{MS} modificada, fazemos a seguinte substituição (18)

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \rightarrow \left(\frac{e^{\gamma_E M^2}}{4\pi} \right)^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \quad (135)$$

onde M é a escala de renormalização em \overline{MS} e γ_E é a constante de Euler-Mascheroni, $\gamma_E = 0,577$. Introduzimos o fator $\left(\frac{e^{\gamma_E M^2}}{4\pi} \right)^\epsilon$ para que após a mínima subtração, dos polos em ϵ , devido a divergências no ultravioleta, M coincida com a escala de renormalização do esquema (69). E usamos a fórmula básica de regularização dimensional

$$\int d^d p \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + \Omega_\phi^2)^\beta} = \pi^{\frac{d}{2}} (\Omega_\phi^2)^{\frac{d}{2} + \alpha - \beta} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{d}{2}) \Gamma(\beta - \alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\beta)}, \quad (136)$$

onde aqui temos que $d = 3 - 2\epsilon$ e $\alpha = 0$.

Com isso, resolvemos integrais, onde $\beta = \frac{1}{2}$, no primeiro termo em (134) e $\beta = -\frac{1}{2}$, no segundo termo em (134), de forma que chegamos no resultado

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_\phi = -\frac{\Omega_\phi^4}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{\Omega_\phi^4}{32\pi^2} \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\Omega_\phi^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon) + \frac{\delta}{12} (2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda\psi_0^2 - 6\eta_\phi^2) \left\{ -\frac{1}{\epsilon} \frac{\Omega_\phi^2}{8\pi^2} - \frac{\Omega_\phi^2}{8\pi^2} \left[1 + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\Omega_\phi^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \right\}, \quad (137)$$

que é obtido quanto expandimos em ϵ , com $\epsilon \rightarrow 0$.

Desta forma, podemos escrever o potencial termodinâmico a 1-laço e ordem δ da seguinte forma

$$\begin{aligned} V_{eff}^{1-loop} &= U(\phi_0, \psi_0) - \frac{1}{2} \mu_\phi^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} \mu_\psi^2 \psi_0^2 - \frac{\Omega_\phi^4}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{\Omega_\phi^4}{32\pi^2} \left(\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\Omega_\phi^2} \right) \right) \\ &+ \frac{\delta}{12} (2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda\psi_0^2 - 6\eta_\phi^2) \left\{ -\frac{1}{\epsilon} \frac{\Omega_\phi^2}{8\pi^2} - \frac{\Omega_\phi^2}{8\pi^2} \left[1 + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\Omega_\phi^2} \right) \right] \right\} \\ &- \frac{\Omega_\psi^4}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{\Omega_\psi^4}{32\pi^2} \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\Omega_\psi^2} \right) \right] \\ &+ \frac{\delta}{12} (2\lambda_\psi \psi_0^2 + 3\lambda\phi_0^2 - 6\eta_\psi^2) \left\{ -\frac{1}{\epsilon} \frac{\Omega_\psi^2}{8\pi^2} - \frac{\Omega_\psi^2}{8\pi^2} \left[1 + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\Omega_\psi^2} \right) \right] \right\} \\ &- \frac{4T^4}{\pi^2} H_5(y_\phi, r_\phi) + \frac{\delta T^2}{12\pi^2} (2\lambda_\phi \phi_0^2 + 3\lambda\psi_0^2 - 6\eta_\phi^2) H_3(y_\phi, r_\phi) \\ &- \frac{4T^4}{\pi^2} H_5(y_\psi, r_\psi) + \frac{\delta T^2}{12\pi^2} (2\lambda_\psi \psi_0^2 + 3\lambda\phi_0^2 - 6\eta_\psi^2) H_3(y_\psi, r_\psi). \end{aligned} \quad (138)$$

Definimos os termos

$$Y(\Omega, T, \mu) \equiv \frac{\Omega^4}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Omega^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{4T^4}{\pi^2} H_5(y, r), \quad (139)$$

$$X(\Omega, T, \mu) \equiv \frac{\Omega^2}{(4\pi)^2} \left[\ln \left(\frac{\Omega^2}{\Lambda^2} \right) - 1 \right] + \frac{T^2}{2\pi^2} H_3(y, r), \quad (140)$$

de forma que o potencial termodinâmico até a ordem de 1-laço e primeira ordem em δ fica

$$\begin{aligned} V_{eff}^{1-loop} &= \frac{1}{2} \Omega_\phi^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} \Omega_\psi^2 \psi_0^2 - \frac{1}{2} \phi_0^2 \mu_\phi^2 - \frac{1}{2} \psi_0^2 \mu_\psi^2 - \frac{1}{2} \delta \eta_\phi^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} \delta \eta_\psi^2 \psi_0^2 \\ &+ \frac{1}{4!} \delta \lambda_\phi \phi_0^4 + \frac{1}{4!} \delta \lambda_\psi \psi_0^4 + \frac{1}{4} \delta \lambda \phi_0^2 \psi_0^2 + \mu_\phi n_\phi + \mu_\psi n_\psi \\ &- \frac{\Omega_\phi^4}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + Y(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) - \frac{\Omega_\psi^4}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + Y(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \\ &- \delta \eta_\phi^2 \left[-\frac{\Omega_\phi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \right] - \delta \eta_\psi^2 \left[-\frac{\Omega_\psi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right] \\ &+ \frac{1}{3} \delta \lambda_\phi \phi_0^2 \left[-\frac{\Omega_\phi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \right] + \frac{1}{3} \delta \lambda_\psi \psi_0^2 \left[-\frac{\Omega_\psi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \delta \lambda \psi_0^2 \left[-\frac{\Omega_\phi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \right] + \frac{1}{2} \delta \lambda \phi_0^2 \left[-\frac{\Omega_\psi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right]. \end{aligned} \quad (141)$$

A contribuição de 2-laços para o potencial termodinâmico é obtida diretamente das regras de Feynman na OPT, o que produz para os diagramas (i) , (j) , (k) , (l) e (m) da figura 5, dado por

$$\begin{aligned}
V_{eff}^{2-loop} &= \delta \frac{\lambda_\phi}{3} \left[\frac{\Omega_\phi^4}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\Omega_\phi^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) + 2 \frac{\Omega_\phi^4}{(4\pi)^4} W(\Omega_\phi) + X^2(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \right] \\
&+ \delta \frac{\lambda_\psi}{3} \left[\frac{\Omega_\psi^4}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\Omega_\psi^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) + 2 \frac{\Omega_\psi^4}{(4\pi)^4} W(\Omega_\psi) + X^2(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right] \\
&+ \delta \lambda \left\{ \frac{\Omega_\phi^2 \Omega_\psi^2}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon} \left[\Omega_\phi^2 X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) + \Omega_\psi^2 X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \right] \right. \\
&+ \left. \frac{\Omega_\phi^2 \Omega_\psi^2}{(4\pi)^4} [W(\Omega_\phi) + W(\Omega_\psi)] + X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right\} \\
&+ \left(\frac{2\delta\lambda_\phi}{3} \Omega_\phi^2 + \delta\lambda \Omega_\psi^2 \right) \left[-\frac{\Omega_\phi^2}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon} X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) - \frac{\Omega_\phi^2}{(4\pi)^4} W(\Omega_\phi) \right] \\
&+ \left(\frac{2\delta\lambda_\psi}{3} \Omega_\psi^2 + \delta\lambda \Omega_\phi^2 \right) \left[-\frac{\Omega_\psi^2}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon} X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) - \frac{\Omega_\psi^2}{(4\pi)^4} W(\Omega_\psi) \right], \tag{142}
\end{aligned}$$

onde a função $W(\Omega)$ é definida da seguinte forma

$$W(\Omega) = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{\Omega^2}{\Lambda^2} \right) - 1 \right]^2 + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{12}. \tag{143}$$

Podemos escrever cada diagrama representado na figura 5 explicitamente, esse resultado se encontra no Apêndice D.

Para cancelar as divergências em (138), definimos os contratermos de renormalização de vácuo e de massa

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \frac{\Omega_\phi^4 + \Omega_\psi^4}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{\delta(\eta_\phi^2 \Omega_\phi^2 + \eta_\psi^2 \Omega_\psi^2)}{(4\pi)^2} + \frac{\delta(\lambda_\phi \Omega_\phi^4 + \lambda_\psi \Omega_\psi^4 + 3\lambda \Omega_\phi^2 \Omega_\psi^2)}{3(4\pi)^4 \epsilon^2}, \\
\Delta \Omega_\phi^2 &= \frac{1}{16\pi^2 \epsilon} \left(\frac{2\delta\lambda_\phi}{3} \Omega_\phi^2 + \delta\lambda \Omega_\psi^2 \right), \\
\Delta \Omega_\psi^2 &= \frac{1}{16\pi^2 \epsilon} \left(\frac{2\delta\lambda_\psi}{3} \Omega_\psi^2 + \delta\lambda \Omega_\phi^2 \right). \tag{144}
\end{aligned}$$

Note que, em primeira ordem em δ , não precisamos de contratermos de renormalização para os acoplamentos. Estes só aparecem quando levamos os cálculos em segunda ordem em δ na OPT.

Adicionando, então os contratermos à densidade de Lagrangeana original, podemos escrever o potencial termodinâmico renormalizado, em ordem δ

$$\begin{aligned}
V_{eff,R}^{(\delta)} &= \frac{1}{2}\Omega_\phi^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}\Omega_\psi^2\psi_0^2 - \frac{1}{2}\phi_0^2\mu_\phi^2 - \frac{1}{2}\psi_0^2\mu_\psi^2 - \frac{1}{2}\delta\eta_\phi^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\delta\eta_\psi^2\psi_0^2 \\
&+ \frac{1}{4!}\delta\lambda_\phi\phi_0^4 + \frac{1}{4!}\delta\lambda_\psi\psi_0^4 + \frac{1}{4}\delta\lambda\phi_0^2\psi_0^2 + \mu_\phi n_\phi + \mu_\psi n_\psi \\
&+ Y(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) + Y(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) - \delta\eta_\phi^2 X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) - \delta\eta_\psi^2 X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \\
&+ \frac{1}{3}\delta\lambda_\phi\phi_0^2 X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) + \frac{1}{3}\delta\lambda_\psi\psi_0^2 X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \\
&+ \frac{1}{2}\delta\lambda\psi_0^2 X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) + \frac{1}{2}\delta\lambda\phi_0^2 X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \\
&+ \frac{\delta\lambda_\phi}{3} X^2(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) + \frac{\delta\lambda_\psi}{3} X^2(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \\
&+ \delta\lambda X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi).
\end{aligned} \tag{145}$$

Usamos o princípio da mínima sensibilidade (120),

$$\left. \frac{\partial V_{eff}^{(\delta)}}{\partial \eta_{\phi,\psi}} \right|_{\eta_{\phi,\psi}=\bar{\eta}_{\phi,\psi}, \delta=1} = 0, \tag{146}$$

podemos obter o valor das funções $\bar{\eta}_{\phi,\psi}$. Conhecidas as funções

$$I_B(\Omega, T, \mu) = \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{\Omega^2}{T^2}}} \left[\frac{1}{\left(e^{\sqrt{x^2 + \frac{\Omega^2}{T^2} + \frac{\mu}{T}} - 1 \right)} + (\mu \rightarrow -\mu) \right], \tag{147}$$

$$J_B(\Omega, T, \mu) = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \left[\ln \left(1 - e^{-\sqrt{x^2 + \frac{\Omega^2}{T^2} + \frac{\mu}{T}} \right) + (\mu \rightarrow -\mu) \right], \tag{148}$$

podemos reescrever as equações (139) e (140) da seguinte forma

$$Y(\Omega, T, \mu) = \frac{\Omega^4}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Omega^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{3}{2} \right] + J_B(\Omega, T, \mu), \tag{149}$$

$$X(\Omega, T, \mu) = \frac{\Omega^2}{(4\pi)^2} \left[\ln \left(\frac{\Omega^2}{\Lambda^2} \right) - 1 \right] + I_B(\Omega, T, \mu). \tag{150}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial V_{\text{eff,R}}^{(\delta)}}{\partial \eta_\phi} \right|_{\eta_\phi = \bar{\eta}_\phi, \delta=1} &= 2\bar{\eta}_\phi X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) - 2\bar{\eta}_\phi X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) - 2\bar{\eta}_\phi^3 \frac{\partial X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi)}{\partial \Omega_\phi} \\
&+ \frac{2}{3} \lambda_\phi \phi_0^2 \bar{\eta}_\phi \frac{\partial X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi)}{\partial \Omega_\phi} + \lambda \psi_0^2 \bar{\eta}_\phi \frac{\partial X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi)}{\partial \Omega_\phi} \\
&+ \frac{4\lambda_\phi}{3} X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \bar{\eta}_\phi \frac{\partial X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi)}{\partial \Omega_\phi} \\
&+ 2\lambda \bar{\eta}_\phi \frac{\partial X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi)}{\partial \Omega_\phi} X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \\
&= \bar{\eta}_\phi \frac{\partial X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi)}{\partial \Omega_\phi} \left(\frac{4\lambda_\phi}{3} X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) + 2\lambda X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right) \\
&+ \bar{\eta}_\phi \frac{\partial X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi)}{\partial \Omega_\phi} \left(-2\bar{\eta}_\phi^2 + \frac{2}{3} \lambda_\phi \phi_0^2 + \lambda \psi_0^2 \right) = 0, \tag{151}
\end{aligned}$$

e, em relação a η_ψ , obtemos analogamente que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial V_{\text{eff,R}}^{(\delta)}}{\partial \eta_\psi} \right|_{\eta_\psi = \bar{\eta}_\psi, \delta=1} &= \bar{\eta}_\psi \frac{\partial X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi)}{\partial \Omega_\psi} \left(\frac{4\lambda_\psi}{3} X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) + 2\lambda X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \right) \\
&+ \bar{\eta}_\psi \frac{\partial X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi)}{\partial \Omega_\psi} \left(-2\bar{\eta}_\psi^2 + \frac{2}{3} \lambda_\psi \psi_0^2 + \lambda \phi_0^2 \right) = 0. \tag{152}
\end{aligned}$$

Dessa forma podemos escrever as funções $\bar{\eta}_{\phi,\psi}^2$ como sendo dadas pelas soluções das equações (151) e (152)

$$\bar{\eta}_\phi^2 = \frac{1}{3} \lambda_\phi \tilde{\phi}^2 + \frac{1}{2} \lambda \tilde{\psi}^2 + \frac{2\lambda_\phi}{3} X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \Big|_{\eta_\phi = \bar{\eta}_\phi} + \lambda X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \Big|_{\eta_\phi = \bar{\eta}_\phi}, \tag{153}$$

e

$$\bar{\eta}_\psi^2 = \frac{1}{3} \lambda_\psi \tilde{\psi}^2 + \frac{1}{2} \lambda \tilde{\phi}^2 + \frac{2\lambda_\psi}{3} X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \Big|_{\eta_\psi = \bar{\eta}_\psi} + \lambda X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \Big|_{\eta_\psi = \bar{\eta}_\psi}. \tag{154}$$

Definindo os valores dos campos de fundo $\tilde{\phi}$ and $\tilde{\psi}$, obtidos a partir das equações de mínimo do potencial termodinâmico como

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff,R}}}{\partial \phi_0} \right|_{\phi_0 = \tilde{\phi}, \psi_0 = \tilde{\psi}} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_{\text{eff,R}}}{\partial \psi_0} \right|_{\phi_0 = \tilde{\phi}, \psi_0 = \tilde{\psi}} = 0, \tag{155}$$

temos então que, a partir das equações acima

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V_{\text{eff,R}}}{\partial \phi_0} \right|_{\phi_0=\tilde{\phi}, \psi_0=\tilde{\psi}} &= \Omega_\phi^2 \tilde{\phi} - \tilde{\phi} \mu_\phi^2 - \delta \eta_\phi^2 \tilde{\phi} + \frac{1}{6} \delta \lambda_\phi \tilde{\phi}^3 + \frac{1}{2} \delta \lambda \tilde{\phi} \tilde{\psi}^2 \\ &+ \frac{2}{3} \delta \lambda_\phi \tilde{\phi} X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) + \delta \lambda \tilde{\phi} X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) = 0, \end{aligned} \quad (156)$$

e, em função de ψ_0

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V_{\text{eff,R}}}{\partial \psi_0} \right|_{\phi_0=\tilde{\phi}, \psi_0=\tilde{\psi}} &= \Omega_\psi^2 \tilde{\psi} - \tilde{\psi} \mu_\psi^2 - \delta \eta_\psi^2 \tilde{\psi} + \frac{1}{6} \delta \lambda_\psi \tilde{\psi}^3 + \frac{1}{2} \delta \lambda \tilde{\psi} \tilde{\phi}^2 \\ &+ \frac{2}{3} \delta \lambda_\psi \tilde{\psi} X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) + \delta \lambda \tilde{\psi} X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) = 0. \end{aligned} \quad (157)$$

O que nos leva a

$$\tilde{\phi} \left(m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{6} \tilde{\phi}^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{\psi}^2 + \frac{2\lambda_\phi}{3} X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \Big|_{\eta_\phi=\bar{\eta}_\phi} + \lambda X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \Big|_{\eta_\psi=\bar{\eta}_\psi} \right) = 0, \quad (158)$$

e

$$\tilde{\psi} \left(m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{6} \tilde{\psi}^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{\phi}^2 + \frac{2\lambda_\psi}{3} X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \Big|_{\eta_\psi=\bar{\eta}_\psi} + \lambda X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \Big|_{\eta_\phi=\bar{\eta}_\phi} \right) = 0. \quad (159)$$

Podemos definir o quadrado das massas efetivas, ou melhor, a curvatura do potencial afetivo das direções de ϕ e ψ , dos campos a partir da segunda derivada do potencial termodinâmico renormalizado (145) em relação aos campos de fundo ϕ_0 e ψ_0 , representando $X(\Omega_{\phi,\psi}, T, \mu_{\phi,\psi})$ como apenas $X_{\phi,\psi}$,

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff,R}}}{\partial \phi_0^2} \right|_{\phi_0=\tilde{\phi}, \psi_0=\tilde{\psi}} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff,R}}}{\partial \psi_0^2} \right|_{\phi_0=\tilde{\phi}, \psi_0=\tilde{\psi}} = 0, \quad (160)$$

o que nos leva aos seguintes resultados

$$m_{\phi,eff}^2 = m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{\psi}^2 + \frac{2\lambda_\phi}{3} X_\phi \Big|_{\eta_\phi=\bar{\eta}_\phi} + \lambda X_\psi \Big|_{\eta_\psi=\bar{\eta}_\psi}, \quad (161)$$

$$m_{\psi,eff}^2 = m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{\phi}^2 + \frac{2\lambda_\psi}{3} X_\psi \Big|_{\eta_\psi=\bar{\eta}_\psi} + \lambda X_\phi \Big|_{\eta_\phi=\bar{\eta}_\phi}. \quad (162)$$

Note que as equações (161) e (162) descrevem a curvatura do potencial termodinâmico (145) nas direções dos campos ϕ e ψ , respectivamente, no entanto, é preciso destacar que, estas não devem ser confundidas com as massas físicas dos campos. O

cálculo das devidas massas físicas é realizado sobre as componentes reais ϕ_1 e ψ_1 e imaginárias ϕ_2 e ψ_2 de cada campo complexo ϕ e ψ , pela segunda derivada da energia potencial em relação a cada componente mencionada,

$$m_{H_\phi,eff}^2 \equiv m_{\phi_1,eff}^2 = m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{2} \tilde{\phi}^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{\psi}^2 + \frac{2\lambda_\phi}{3} X_\phi \Big|_{\eta_\phi = \bar{\eta}_\phi} + \lambda X_\psi \Big|_{\eta_\phi = \bar{\eta}_\phi}, \quad (163)$$

$$m_{G_\phi,eff}^2 \equiv m_{\phi_2,eff}^2 = m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{6} \tilde{\phi}^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{\psi}^2 + \frac{2\lambda_\phi}{3} X_\phi \Big|_{\eta_\phi = \bar{\eta}_\phi} + \lambda X_\psi \Big|_{\eta_\phi = \bar{\eta}_\phi}, \quad (164)$$

$$m_{H_\psi,eff}^2 \equiv m_{\psi_1,eff}^2 = m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{2} \tilde{\psi}^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{\phi}^2 + \frac{2\lambda_\psi}{3} X_\psi \Big|_{\eta_\psi = \bar{\eta}_\psi} + \lambda X_\phi \Big|_{\eta_\psi = \bar{\eta}_\psi}, \quad (165)$$

$$m_{G_\psi,eff}^2 \equiv m_{\psi_2,eff}^2 = m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{6} \tilde{\psi}^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{\phi}^2 + \frac{2\lambda_\psi}{3} X_\psi \Big|_{\eta_\psi = \bar{\eta}_\psi} + \lambda X_\phi \Big|_{\eta_\psi = \bar{\eta}_\psi}. \quad (166)$$

Devido a nossa escolha de mover os campos ao longo de suas componentes reais (o que foi feito em termos de ϕ_0 e ψ_0 , quando expandimos os campos em modos de Fourier), temos que $m_{\phi_1,eff}$ e $m_{\psi_1,eff}$ são identificadas como os modos de Higgs para os campos ϕ e ψ , respectivamente, enquanto $m_{\phi_2,eff}$ e $m_{\psi_2,eff}$ são identificados com os modos de Goldstone para os mesmos campos (70).

Note que, combinando as equações (153) e (154) com as equações (158) e (159), temos

$$\tilde{\phi}^2 = \frac{6}{\lambda_\phi} (m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \bar{\eta}_\phi^2) \quad ; \quad \tilde{\psi}^2 = \frac{6}{\lambda_\psi} (m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \bar{\eta}_\psi^2). \quad (167)$$

Isso nos mostra que no ponto crítico, na direção ϕ , $\tilde{\phi}(T_{\phi,c}, \mu_{\phi,c}) = 0$, e o potencial químico crítico assume o valor fixo

$$\mu_{\phi,c}^2 = m_\phi^2 + \bar{\eta}_\phi^2(T_{\phi,c}, \mu_{\phi,c}), \quad (168)$$

e, da mesma forma, na direção ψ , $\tilde{\psi}(T_{\psi,c}, \mu_{\psi,c}) = 0$, temos

$$\mu_{\psi,c}^2 = m_\psi^2 + \bar{\eta}_\psi^2(T_{\psi,c}, \mu_{\psi,c}). \quad (169)$$

As equações (168) e (169) generalizam para o presente problema a condição usual para a condensação de Bose-Einstein (BEC) para um gás ideal, $|\mu| = |m|$ na temperatura crítica para BEC. Observe que a contribuição das interações para o ponto de transição BEC entra nas funções OPT $\bar{\eta}_\phi^2$ e $\bar{\eta}_\psi^2$ nas equações (168) and (169), respectivamente.

Podemos calcular a pressão a partir do potencial efetivo termodinâmico

$$P(\mu_\phi, \mu_\psi, T) = -V_{\text{eff,R}}^{(\delta)} \Big|_{\bar{\eta}_\phi, \bar{\eta}_\psi, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}}, \quad (170)$$

e dada a pressão, podemos calcular as densidades

$$n_\phi = \frac{\partial P(\mu_\phi, \mu_\phi, T)}{\partial \mu_\phi} = \mu_\phi \tilde{\phi}^2 - \left. \frac{\partial Y(\Omega_\phi, \mu_\phi, T)}{\partial \mu_\phi} \right|_{\bar{n}_\phi}, \quad (171)$$

$$n_\psi = \frac{\partial P(\mu_\phi, \mu_\phi, T)}{\partial \mu_\psi} = \mu_\psi \tilde{\psi}^2 - \left. \frac{\partial Y(\Omega_\psi, \mu_\psi, T)}{\partial \mu_\psi} \right|_{\bar{n}_\psi}, \quad (172)$$

onde a função $Y(\Omega, \mu, T)$ é definida na equação (139).

No próximo capítulo faremos uso das expressões derivadas acima para uma análise de estrutura de fase do modelo. Ou seja, queremos investigar como os efeitos de temperatura e potencial químico afetam a diferentes fases do sistema na presença do intercoplamento entre os campos.

5 RESULTADOS

Para podermos analisar nossos resultados graficamente, usaremos os seguintes valores para as constantes de acoplamento: $\lambda_\phi = 0.018$, $\lambda_\psi = 0.4$ and $\lambda = -0.03$. Essa escolha de parâmetros satisfaz a condição de estabilidade para o potencial de dois campos carregados: $\lambda_\phi \lambda_\psi > 9\lambda^2$. Esperamos que o uso de valores diferentes de parâmetros não leve a resultados qualitativamente diferentes.

A correção térmica das massas é feita pelo cálculo das autoenergias (71) (analisando o caso de Teoria de Perturbação), para o sistema físico em questão, temos

$$m_{\phi,\psi}^2(T) = m_{\phi,\psi}^2(0) + \frac{T^2}{12} \Delta_{\phi,\psi} \quad , \quad \Delta_{\phi,\psi} = \frac{2\lambda_{\phi,\psi}}{3} + \lambda. \quad (173)$$

A temperatura crítica na qual a massa térmica muda de sinal é

$$T_c^{\phi,\psi} = \sqrt{-\frac{m_{\phi,\psi}^2(0)}{\Delta_{\phi,\psi}}} \quad (174)$$

Quando λ é negativo, há a possibilidade de $\Delta_{\phi,\psi}$ ser negativo mantendo-se a estabilidade da teoria. Nesse caso, se $m_{\phi,\psi}^2(0) < 0$, $m_{\phi,\psi}^2(T)$ será sempre negativo, caracterizando uma SNR, se $m_{\phi,\psi}^2(0) > 0$, $m_{\phi,\psi}^2(T)$ passará a ser negativo na temperatura crítica (174) e não voltará a ser positivo, caracterizando ISB.

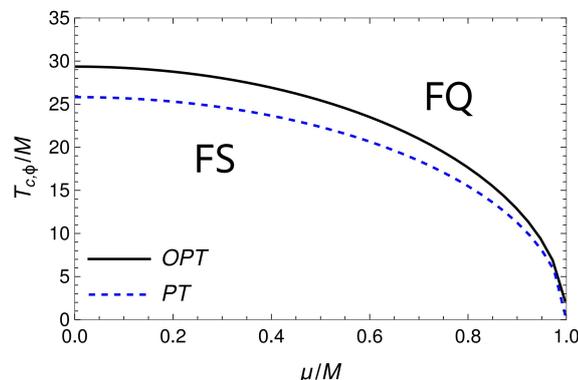
Quando as massas ao quadrado m_ϕ^2 e m_ψ^2 são positivas (voltando, agora, para a nossa análise no caso da OPT) na densidade Lagrangeana (51), existe a possibilidade de termos ISB na direção do campo ϕ a altas temperaturas, enquanto o campo ψ permanece na fase simétrica. Por outro lado, quando as mesmas massas ao quadrado são negativas na densidade Lagrangeana supramencionada, existe a possibilidade de termos SNR na direção do campo ϕ a altas temperaturas, enquanto o campo ψ tem sua simetria restaurada numa dada temperatura crítica T_{c_ψ} .

Por conveniência assumiremos que: $m_\phi^2 = m_\psi^2 = m^2$ e $\mu_\phi = \mu_\psi = \mu$. Todas as quantidades são assumidas serem normalizadas pela escala de regularização M , sem perda de generalidade.

5.1 ISB, $m_\phi^2 > 0$ e $m_\psi^2 > 0$

É possível perceber que o comportamento da função da temperatura crítica calculada pelo método perturbativo não difere significativamente da mesma calculada pelo

Figura 6 - A temperatura crítica para ISB na direção do campo ϕ em função do potencial químico



Legenda: A figura apresenta uma comparação entre a OPT e a teoria de perturbação, ou do inglês, *Perturbation Theory* (PT), ou seja, uma expansão nos acoplamentos e mantendo até primeira ordem λ_ϕ , λ_ψ e λ , ambos na aproximação de alta temperatura. Onde FQ e FS significam fase quebrada e fase simétrica, respectivamente.

Fonte: A autora, 2022.

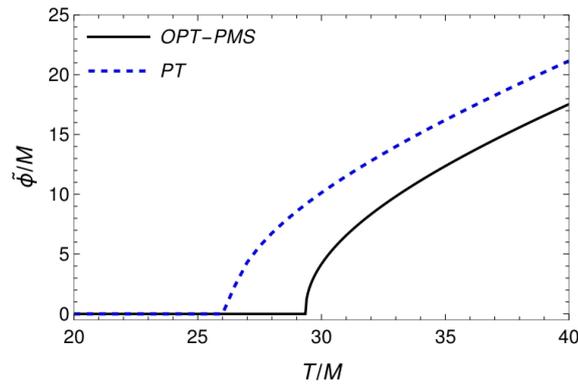
método de otimização utilizado, como pode ser visto na figura 6. Tais curvas traçam limites entre as fases simétrica e quebrada do sistema, onde para temperaturas abaixo da curva cheia, para o método da OPT (ou da tracejada, para o método perturbativo) o sistema físico está em um estado simétrico e acima, em um estado quebrado.

A situação ilustrada na figura 7 demonstra ISB na direção do campo ϕ enquanto o campo ψ permanece com sua simetria restaurada. A quebra da simetria em ϕ ocorre na temperatura crítica, que, como ilustrado, apresenta um valor menor pelo método perturbativo em comparação com a OPT, onde vemos que $T_{c_\phi}^{OPT} \approx 29,3$ e $T_{c_\phi}^{PT} \approx 26$, onde a unidade é dada pela escala de regularização dimensional M , que pode ser igualada a 1 sem perda de generalidade. Este resultado vem da escolha das massas m_ϕ^2 e m_ψ^2 positivas e dos valores definidos das constantes de acoplamento.

Já a figura 8 mostra que quanto maior o potencial químico, menor será o valor da temperatura crítica, isto é, demonstrando o que já foi mencionado na referência (49), que a presença de carga faz com que a simetria seja quebrada mais rapidamente.

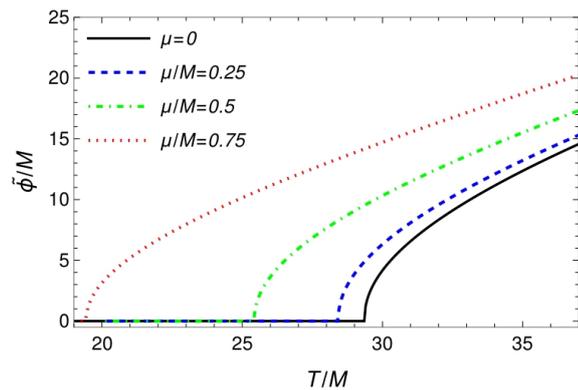
A figura 9 demonstra o comportamento da temperatura crítica do campo ϕ em função do acoplamento entre os campos ϕ e ψ . Neste caso vemos, mais uma vez, como a carga afeta a temperatura crítica, ou quando a simetria é quebrada, o que acontece mais rápido, tanto para o método perturbativo quanto para a OPT, além de ocorrer ISB em temperaturas cada vez mais altas durante a queda em módulo do acoplamento entre os campos, também em ambos os casos de PT e OPT.

Figura 7 - O Valor Esperado de Vácuo (VEV) $\tilde{\phi}$ para OPT e para a PT como função da temperatura (assumindo $\mu = 0$).



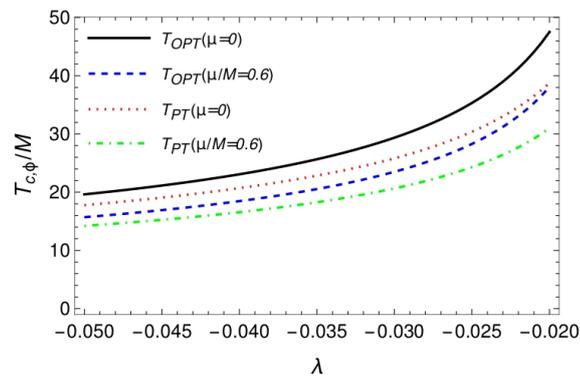
Fonte: A autora, 2022.

Figura 8 - O VEV $\tilde{\phi}$ para OPT como função da temperatura, mantendo fixos os diferentes valores de potencial químico.



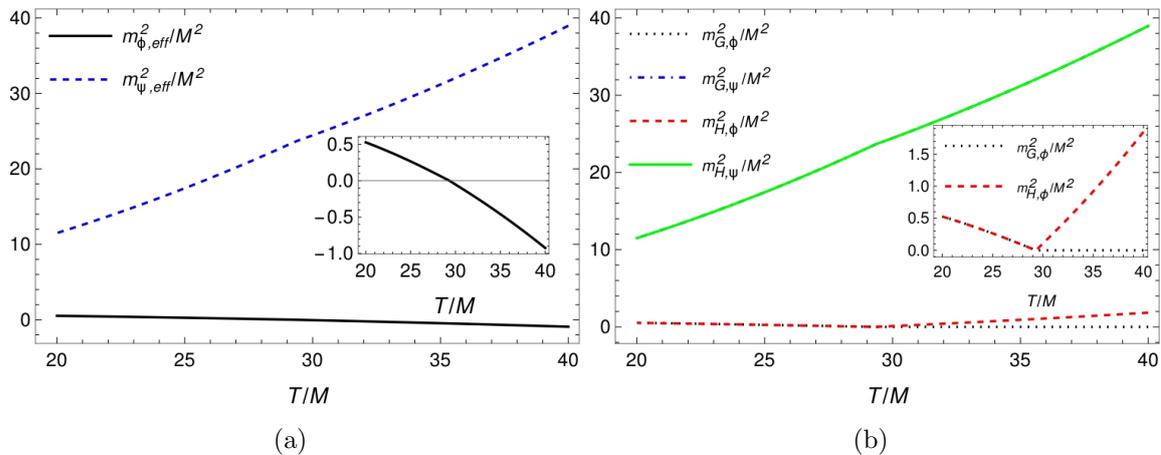
Fonte: A autora, 2022.

Figura 9 - A temperatura crítica para ISB na direção do campo ϕ como função da constante de interacoplamento λ , mantendo fixos os valores de potencial químico, tanto para OPT quanto para a PT.



Fonte: A autora, 2022.

Figura 10 - Massas efetivas dos campos em função da temperatura



Legenda: (a) Curvatura dos campos ϕ e ψ . (b) Modos de Higgs e de Goldstone.

A curva que representa $m_{G,\psi}^2$ está identificada com a curva que representa $m_{H,\psi}^2$.

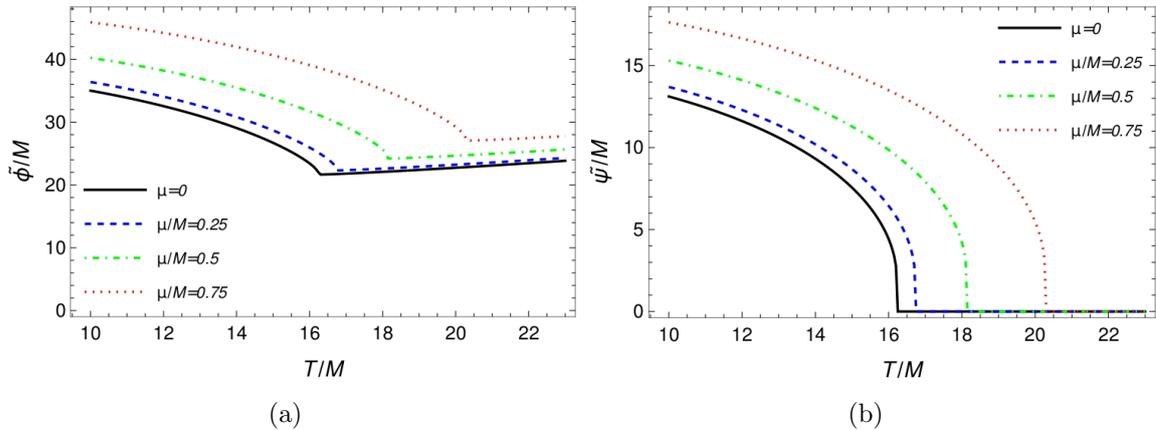
Fonte: A autora, 2022.

Mantendo as mesmas constantes de acoplamento e massas positivas, as figuras 10 (a) e (b) apresentam ISB na direção do campo ϕ mantendo o campo restaurado na direção do campo ψ . Nestas condições, temos o comportamento das massas efetivas, figura 10 (a), dos campos ϕ e ψ , dadas por (161) e (162), respectivamente, contraposto as massas físicas, dadas por (163), (164), (165) e (166), que, por sua vez, são identificadas com as massas de Higgs e de Goldstone.

Como já foi esclarecido no presente trabalho, as massas efetivas ilustradas na figura 10(a) descrevem a curvatura do potencial termodinâmico (145) na direção de cada campo ϕ e ψ . Desta forma, temos $m_{\phi,eff}^2$ sofrendo uma transição, saindo da parte positiva, ou simétrica, para a parte negativa, onde tem sua simetria quebrada, enquanto $m_{\psi,eff}^2$ permanece na parte positiva toda a faixa de temperatura apresentada, indicando que o campo ψ não sai de seu estado simétrico.

Já a figura 10(b) ilustra o teorema de Goldstone (70), apresentando o comportamento das chamadas massas físicas (163), (164), (165) e (166) identificadas com as massas de Higgs para os campos ϕ e ψ e as de Goldstone para os campos ϕ e ψ , respectivamente. Vemos como as massas de Higgs e Goldstone são idênticas na direção do campo ψ durante todo o intervalo apresentado, enquanto que na direção de ϕ , elas apresentam o mesmo comportamento somente até alcançarem o valor de temperatura crítica; após este ponto, a massa de Higgs assume valores crescentes com a temperatura enquanto a massa de Goldstone se anula, como deveria ser.

Figura 11 - Os VEVs $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ para OPT como função da temperatura, mantendo fixos os diferentes valores de potencial químico



Fonte: A autora, 2022.

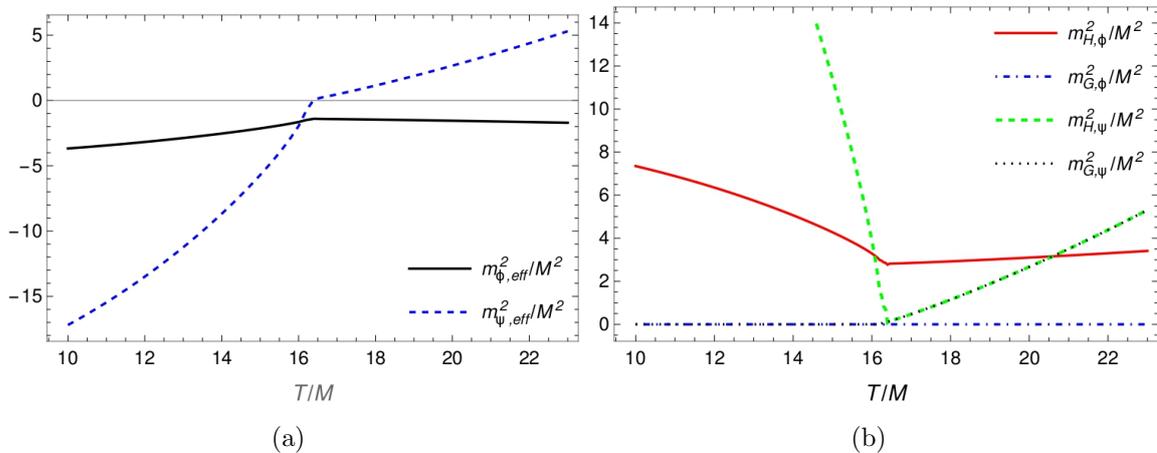
5.2 SNR, $m_\phi^2 < 0$ e $m_\psi^2 < 0$

Para um potencial que apresenta massas negativas, as figuras 11 representam o comportamento dos campos ϕ e ψ , em função da temperatura, nas figuras (a) e (b), respectivamente. Em ambas as figuras o potencial químico é fixado e fica claro como este influencia a temperatura crítica, quanto maior o potencial químico, mais "demora" para a simetria ser restaurada na direção de ψ .

As figuras 11 demonstram o fenômeno de SNR na direção do campo ϕ . Com suas massas negativas, o campo ψ tem sua simetria restaurada com o aumento da temperatura, no entanto, o campo ϕ não recupera a simetria em momento algum representado nesta figura.

As figuras 12 mostram, para um potencial que originalmente apresenta massas menores que zero, a curvatura do potencial termodinâmico nas direções dos campos ϕ (linha cheia) e ψ (linha tracejada), na figura (a); e as massas dos modos de Higgs e de Goldstone para os mesmos campos, como função da temperatura, figura (b). Podemos ver, na figura (b), que o teorema de Goldstone se aplica para cada direção dos campos. As massas físicas permanecem positivas. Depois que a simetria é restaurada na direção de ψ , onde $T \geq T_{c_\psi}$, ambos os modos, de Higgs e de Goldstone, assumem os mesmos valores, o que não ocorre na direção de ϕ , uma vez que este nunca estará na fase restaurada.

Figura 12 - As massas efetivas dos campos como função da temperatura (assumindo $\mu = 0$)



Legenda: (a) Curvatura dos campos ϕ e ψ . (b) Modos de Higgs e de Goldstone.

A curva que representa $m_{G, \psi}^2$ está identificada com a curva que representa $m_{H, \psi}^2$.

Fonte: A autora, 2022.

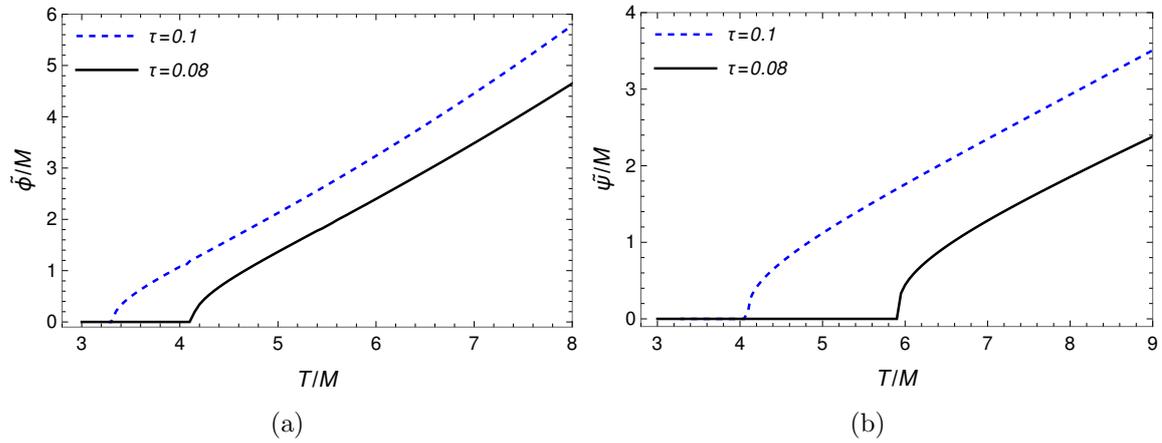
5.3 Resultados utilizando a OPT, com temperatura e densidade finitas

Aqui faremos uma análise para o caso onde a densidade é finita. Veremos os fenômenos de ISB/SNR ocorrerem na direção dos campos. Lembrando da equação (115), que define a relação: $n_i = \tau_i T^3$, onde i representa os campos ϕ e ψ . Por simplicidade assumimos $\tau_\phi = \tau_\psi = \tau$.

As figuras 13 representam a quebra inversa de simetria, que acontece quando o potencial original apresenta massas positivas. Vemos que ambos os campos apresentam um comportamento de ISB em função da temperatura, para valores de densidade fixos. Tanto na direção de ϕ quanto de ψ , o sistema físico apresenta simetria até certa temperatura, a temperatura crítica. A densidade nas duas situações influencia no valor da temperatura crítica, mas eventualmente, a simetria é quebrada nas duas direções.

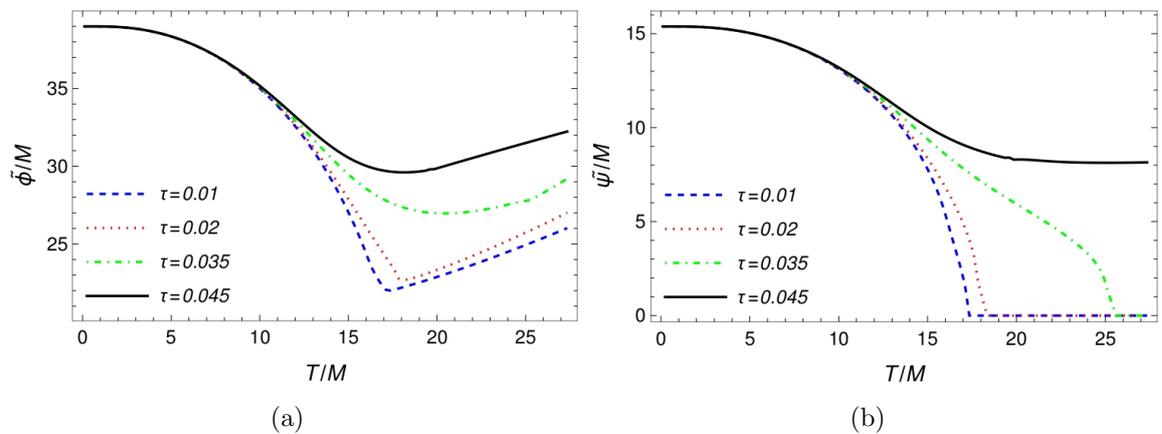
Já as figuras 14 representam os campos ϕ e ψ em função da temperatura, para vários valores de τ fixos. Neste caso, o potencial original apresenta massas negativas, o que causa o fenômeno de SNR, o qual se dá para todos os valores de τ apresentados na figura (a). Porém, a figura (b) mostra que a simetria pode ser restaurada para valores baixos da razão densidade de carga por densidade de entropia, ou τ , na direção de ψ .

Figura 13 - As figuras apresentam o portamento dos VEV's dos campos ϕ e ψ em função da temperatura. Ocorre ISB a densidade finita, para diferentes valores fixos de τ



Fonte: A autora, 2022.

Figura 14 - As figuras apresentam o portamento dos VEV's dos campos ϕ e ψ em função da temperatura. Ocorre SNR a densidade finita, para diferentes valores fixos de τ



Fonte: A autora, 2022.

6 CONDENSADO DE KÁONS

Neste capítulo apresentamos um exemplo de possível aplicação física do sistema estudado nessa dissertação. Ele reproduzirá alguns trechos do trabalho de Andersen e Leganger, sobre condensado kaônico (72).

Teorias quânticas de campo à temperatura e densidades finitas têm as ferramentas teóricas necessárias para descrever sistemas físicos extremos, como os estudos de supercondutividade de cor na fase cor-sabor-fixos (CFL), que é a fase que a QCD apresenta em altíssimas densidades (cerca de três vezes a densidade nuclear) (15) e (73). Este sistema físico é previsto em objetos cósmicos como estrelas de nêutrons. A fase CFL é um estado supercondutor de cor, e assim como elétrons em um supercondutor comum, os quarks formam pares de Cooper. A troca de glúons que se dá pela interação forte, entre os quarks, torna a superfície de Fermi instável contra a formação de pares de Cooper.

Em densidades “assintoticamente” altas, pode-se ignorar a massa de quarks strange e quarks de todas as três cores e sabores participam de maneira simétrica no emparelhamento. O grupo de simetria original $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B$ é quebrado em $SU(3)_{c+L+R}$, que é uma combinação linear dos geradores do grupo original. Essa combinação linear fixa a rotação no espaço de cor com as rotações no espaço de sabor, o que levou ao nome da fase. Na fase CFL há um octeto de modos de Goldstone que surge da quebra da simetria quiral e um singlete que surge da quebra do grupo de números bariônicos $U(1)_B$, este é o modo responsável pela superfluidade na fase CFL. O comportamento é análogo à superfluidade encontrada nas fases condensadas de Bose-Einstein em sistemas de matéria condensada.

Nas mesmas condições de altas densidades, nenhum dos nove modos possui massa, pois pode-se ignorar as massas dos quarks. Em densidades moderadas, isso não é mais o caso, as massas dos quarks não podem ser desprezadas e a simetria quiral é explicitamente quebrada. Isso implica que apenas o modo superfluido é exatamente sem massa, enquanto os outros modos mesônicos adquirem massas. Isso é relevante para o interior de uma estrela de nêutrons. Neste caso, o potencial químico do quark é da ordem de 500 MeV, enquanto a massa do quark strange está entre 100 e 500 MeV (74). Espera-se que na fase CFL os modos massivos mais leves sejam os kaons carregados e neutros. Além disso, se o potencial químico associado a um dos bósons for maior que sua massa de vácuo, ele formará um condensado de Bose. Vários aspectos da condensação de kaons na fase CFL foram estudados nos modelos Nambu-Jona-Lasinio (75-78).

Algumas das propriedades dos káons na fase CFL foram estudadas usando teorias de campo escalar efetivas. Assim como a quebra da simetria $SU(2) \times U(1)$ que acompanha a condensação de Bose de káons e dá origem a bósons de Goldstone não convencionais (79, 80).

A matéria kaônica é apresentada a partir do modelo sigma linear em densidade finita, assim como mostrado nas referências (81, 82), e pode ser representado pela seguinte densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_0 + i\mu)\Phi^+(\partial_0 - i\mu)\Phi - (\partial_a\Phi)^+(\partial_a\Phi) - m^2\Phi^+\Phi - \lambda(\Phi^+\Phi)^2, \quad (175)$$

onde Φ é um dubleto de campo complexo, que denota o dubleto de káon (K^+, K^0), μ e m são o potencial químico e a massa do káon e λ é a constante de acoplamento.

Consideremos o caso geral, em que os kaons têm massas e potenciais químicos diferentes e, além disso, ambos são condensados, então a densidade de Lagrangeana correspondente pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial_0 + i\mu_k)\Phi_k^*(\partial_0 - i\mu_k)\Phi_k - (\partial_a\Phi_k)^*(\partial_a\Phi_k) \\ & - m_k^2\Phi_k^*\Phi_k - \lambda_k(\Phi_k^*\Phi_k)^2 - 2\lambda(\Phi_1^*\Phi_1)(\Phi_2^*\Phi_2), \end{aligned} \quad (176)$$

onde $a = 1, 2, 3$ e $k = 1, 2$. Podemos notar a semelhança da densidade de Lagrangeana acima com o modelo de dois campos (51) estudado nesta dissertação. Como apresentamos neste trabalho, campos escalares complexos interagentes apresentam fenômenos de ISB/SNR, fato que, sem perda de generalidade, pode também ocorrer neste modelo de condensado de Káons. Os parâmetros do modelo de dois campos complexos estudados no presente trabalho, ou seja, m_ϕ , m_ψ , λ_ϕ , λ_ψ e λ , podem ser associados aos respectivos parâmetros que aparecem na densidade Lagrangeana efetiva para os Káons (81). Com isso, podemos estender nossos estudos para esse problema. Esta é uma aplicação física do modelo formulado no corpo desta dissertação, que vai ser investigado em detalhes como uma aplicação futura deste trabalho.

CONCLUSÃO

Considerando os efeitos de temperatura e potencial químico finitos, analisamos o comportamento de um sistema composto por dois campos escalares carregados. Calculamos a função de grande partição do sistema de modo a encontrarmos o potencial termodinâmico do mesmo. Para um bom resultado analítico, foram feitas aproximações em altas temperaturas e densidades. Os cálculos, à priori, foram realizados com a utilização do método de teoria de perturbação na aproximação de 1-laço. No entanto, vimos que, pelo fato da teoria de perturbação quebrar à altas temperaturas, seus resultados não eram inteiramente confiáveis. Então, lançamos mão da OPT, uma teoria não perturbativa, e calculamos o potencial termodinâmico a 1-laço na aproximação de primeira ordem em δ . Investigamos a presença de ISB e SNR em nosso sistema, comparamos alguns resultados perturbativos aos não-perturbativos advindos do método da OPT. Vimos como a presença da carga afeta a transição de fase. Vimos também como o sistema pode apresentar tanto ISB quanto SNR com a variação das constantes de acoplamento. Os resultados alcançados indicam que o comportamento do sistema quando analisado pelo método perturbativo diferirá cada vez mais do não-perturbativo, não só com o aumento das constantes de acoplamento, mas também nos regimes de altas temperaturas, onde é sabido que teoria de perturbação se torna não aplicável.

REFERÊNCIAS

- 1 WEINBERG, S. The search for unity: notes for a history of quantum field theory. *Daedalus*, [s. l.], v. 106, n. 4, p. 17–35, 1977.
- 2 DIRAC, P. The lagrangian in quantum mechanics. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, [s. l.], v. 3, p. 312–320, 1933.
- 3 FEYNMAN, R. *A new approach to quantum theory*. [S. l.: s. n.], 1949.
- 4 SCHWINGER, J.; ENGLERT, B. *Symbolism of atomic measurements*. New York: Springer, 2001.
- 5 DYSON, F. J. The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. *Physical Review*, [s. l.], v. 75, n. 3, p. 486, 1949.
- 6 MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progress of Theoretical Physics*, [s. l.], v. 14, n. 4, p. 351–378, 1955.
- 7 BATALIN, I. A.; FRADKIN, E. S. A generalized canonical formalism and quantization of reducible gauge theories. *Physics Letters B*, [s. l.], v. 122, n. 2, p. 157–164, 1983.
- 8 BELLAC, M. L. *Quantum and statistical field theory*. Oxford: Clarendon Press, 1991.
- 9 LANDAU LD; LIFSHITZ, E. *Statistical physics, part I*. Oxford: Pergamon, 1980.
- 10 NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Physical Review*, [s. l.], v. 122, n. 1, p. 345, 1961.
- 11 GLASHOW S; WEINBERG, S. S. A. Elementary particle theory. *Nucl. Phys.*, [s. l.], v. 22, n. 8, p. 579, 1961.
- 12 HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, [s. l.], v. 13, n. 16, p. 508, 1964.
- 13 KUBO, R. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. i. general theory and simple applications to magnetic and conduction problems. *Journal of the Physical Society of Japan*, [s. l.], v. 12, n. 6, p. 570–586, 1957.
- 14 ALFORD, M. G. et al. Color superconductivity in dense quark matter. *Reviews of Modern Physics*, [s. l.], v. 80, n. 4, p. 1455, 2008.
- 15 ALFORD, M.; RAJAGOPAL, K.; WILCZEK, F. Color-flavor locking and chiral symmetry breaking in high density qcd. *Nuclear Physics B*, [s. l.], v. 537, n. 1-3, p. 443–458, 1999.
- 16 PHAT, T. H. et al. Bose–einstein condensation in binary mixture of bose gases. *Annals of Physics*, [s. l.], v. 324, n. 10, p. 2074–2094, 2009.

- 17 VARTULI, R.; RAMOS, R.; SONEGO, R. Non-perturbative approach to investigation of isb/snr in a scalar field theory. In: NATIONAL MEETING ON PHYSICS OF PARTICLES AND FIELDS, 32., = ENCONTRO NACIONAL DE FISICA DE PARTICULAS E CAMPOS, 32., Foz do Iguacu, PR, 2011. [*Proceedings...*]. Foz do Iguacu, 2011.
- 18 PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. Nonperturbative study of inverse symmetry breaking at high temperatures. *Physical Review D*, [s. l.], v. 61, n. 12, p. 125016, 2000.
- 19 KAO, K. C. *Dielectric phenomena in solids*. [S.l.]: Elsevier, 2004.
- 20 FRANCO, J.; SHIRANE, G. *Ferroelectric crystals*. Oxford: Pergamon Press, 1962.
- 21 DODELSON, S.; GREENE, B. R.; WIDROW, L. M. Baryogenesis, dark matter and the width of the z. *Nuclear Physics B*, [s. l.], v. 372, n. 1-2, p. 467–493, 1992.
- 22 MOHAPATRA, R. N.; SENJANOVIC, G. Soft cp-invariance violation at high temperature. *Physical Review Letters*, [s. l.], v. 42, n. 25, p. 1651, 1979.
- 23 MELFO, A.; SENJANOVIC, G. *Broken symmetries in the early universe*. arXiv preprint hep-ph/9605284, 1996.
- 24 LEE, J.-w.; KOH, I.-g. Inflation and inverse symmetry breaking. *Physical Review D*, [s. l.], v. 54, n. 12, p. 7153, 1996.
- 25 BAJC, B. High temperature symmetry nonrestoration, *Cosmo-99*, [s. l.], p. 247–253, 2000.
- 26 BELLAC, M. L. *Thermal field theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 27 GLEISER, M.; RAMOS, R. O. Thermal fluctuations and validity of the 1-loop effective potential. *Physics Letters B*, [s. l.], v. 300, n. 3, p. 271–277, 1993.
- 28 DUNCAN, A.; MOSHE, M. Nonperturbative physics from interpolating actions. *Physics Letters B*, [s. l.], v. 215, n. 2, p. 352–358, 1988.
- 29 JONES, H.; MOSHE, M. Renormalization of the linear σ expansion. the gross-neveu model. *Physics Letters B*, [s. l.], v. 234, n. 4, p. 492–496, 1990.
- 30 STEVENSON, P. M. Optimized perturbation theory. *Physical Review D*, [s. l.], v. 23, n. 12, p. 2916, 1981.
- 31 KAPUSTA, J. I.; LANDSHOFF, P. Finite-temperature field theory. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, [s. l.], v. 15, n. 3, p. 267, 1989.
- 32 LEPP, S.; STANCIL, P.; DALGARNO, A. Atomic and molecular processes in the early universe. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, [s. l.], v. 35, n. 10, p. R57, 2002.
- 33 SARKAR, S. Big bang nucleosynthesis and physics beyond the standard model. *Reports on Progress in Physics*, [s. l.], v. 59, n. 12, p. 1493, 1996.
- 34 LINDE, A. *Particle physics and inflationary cosmology*. [S.l.]: CRC Press, 1990. V. 5.
- 35 GAILLARD, M. K.; GRANNIS, P. D.; SCIULLI, F. J. The standard model of particle physics. *Reviews of Modern Physics*, [s. l.], v. 71, n. 2, p. S96, 1999.

- 36 LINDE, A. D. Phase transitions in gauge theories and cosmology. *Reports on Progress in Physics*, [s. l.], v. 42, n. 3, p. 389, 1979.
- 37 KIBBLE, T. W. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, [s. l.], v. 9, n. 8, p. 1387, 1976.
- 38 VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- 39 ZELDOVICH, Y. B.; KOBZAREV, I. Y.; OKUN, L. Cosmological consequences of the spontaneous breakdown of a discrete symmetry. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, [s. l.], v. 67, p. 3-11, 1974; *Sov. Phys. JETP*, [s. l.], v. 40, p. 1-5, 1974.
- 40 EMMERICH, H. Advances of and by phase-field modelling in condensed-matter physics. *Advances in Physics*, [s. l.], v. 57, n. 1, p. 1–87, 2008.
- 41 FIGUEROA, D. G.; HINDMARSH, M.; URRESTILLA, J. Exact scale-invariant background of gravitational waves from cosmic defects. *Physical Review Letters*, [s. l.], v. 110, n. 10, p. 101302, 2013.
- 42 DAS, A. *Field theory: a path integral approach*. [S.l.]: World Scientific, 2019. V. 83.
- 43 DAS, A. *Finite temperature field theory*. [S.l.]: World Scientific, 1997.
- 44 KHANNA, F. C. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications*. [S.l.]: World Scientific, 2009.
- 45 WEBER, H. J.; ARFKEN, G. B. *Essential mathematical methods for physicists, ISE*. [S.l.]: Elsevier, 2003.
- 46 RYDER, L. H. *Quantum field theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- 47 KAPUSTA, J. I.; GALE, C. *Finite-temperature field theory: principles and applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- 48 PINTO, M. B.; RAMOS, R. O.; CRUZ, F. F. de S. Effective potential and thermodynamics for a coupled two-field bose-gas model. *Physical Review A*, [s. l.], v. 74, n. 3, p. 033618, 2006.
- 49 BENSON, K. M.; BERNSTEIN, J.; DODELSON, S. Phase structure and the effective potential at fixed charge. *Physical Review D*, [s. l.], v. 44, n. 8, p. 2480, 1991.
- 50 GAMBOA, J.; LOPEZ-SARRION, J. Nonperturbative aspects of spontaneous symmetry breaking. *International Journal of Modern Physics A*, [s. l.], v. 36, n. 13, p. 2150074, 2021.
- 51 HABER, H. E.; WELDON, H. A. On the relativistic Bose–Einstein integrals. *Journal of Mathematical Physics*, [s. l.], v. 23, n. 10, p. 1852–1858, 1982.
- 52 BERNSTEIN, J.; DODELSON, S. Relativistic Bose gas. *Physical Review Letters*, [s. l.], v. 66, n. 6, p. 683, 1991.
- 53 SENAHA, E. Symmetry restoration and breaking at finite temperature: an introductory review. *Symmetry*, [s. l.], v. 12, n. 5, p. 733, 2020.
- 54 DOLAN, L.; JACKIW, R. Symmetry behavior at finite temperature. *Physical Review D*, [s. l.], v. 9, n. 12, p. 3320, 1974.

- 55 ARAFUNE, J.; OGURE, K.; SATO, J. Non-perturbative evaluation of the effective potential of $\lambda\phi^4$ theory at finite temperature in the super-daisy approximation. *Progress of Theoretical Physics*, [s. l.], v. 99, n. 1, p. 119–127, 1998.
- 56 AMELINO-CAMELIA, G.; PI, S.-Y. Self-consistent improvement of the finitetemperature effective potential. *Physical Review D*, APS, v. 47, n. 6, p. 2356, 1993.
- 57 PARWANI, R. R. Resummation in a hot scalar field theory. *Physical Review D*, [s. l.], v. 45, n. 12, p. 4695, 1992.
- 58 BANERJEE, N.; MALLIK, S. Critical temperature in a higgs scalar field theory. *Physical Review D*, [s. l.], v. 43, n. 10, p. 3368, 1991.
- 59 CALDAS, H. de G. Symmetry nonrestoration in a resummed renormalized theory at high temperature. *Physical Review D*, [s. l.], v. 66, n. 10, p. 105015, 2002.
- 60 CHIKU, S.; HATSUDA, T. Optimized perturbation theory at finite temperature. *Physical Review D*, [s. l.], v. 58, n. 7, p. 076001, 1998.
- 61 SEZNEC, R.; ZINN-JUSTIN, J. Summation of divergent series by order dependent mappings: Application to the anharmonic oscillator and critical exponents in field theory. *Journal of Mathematical Physics*, [s. l.], v. 20, n. 7, p. 1398–1408, 1979.
- 62 PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. High temperature resummation in the linear δ expansion. *Physical Review D*, [s. l.], v. 60, n. 10, p. 105005, 1999.
- 63 KNEUR, J.-L.; PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. Thermodynamics and phase structure of the two-flavor nambu–jona-lasinio model beyond large n c. *Physical Review C*, [s. l.], v. 81, n. 6, p. 065205, 2010.
- 64 KNEUR, J.-L.; PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. The 2d gross-neveu model at finite temperature and density with finite n corrections. *Brazilian Journal of Physics*, [s. l.], v. 37, p. 258–264, 2007.
- 65 PERNICE, S. A.; OLEAGA, G. Divergence of perturbation theory: Steps towards a convergent series. *Physical Review D*, [s. l.], v. 57, n. 2, p. 1144, 1998.
- 66 JONES, H. F.; PARKIN, P. The renormalized thermal mass and critical temperature of a complex scalar field theory with non-zero charge density. *Nuclear Physics B*, [s. l.], v. 594, n. 1-2, p. 518–532, 2001.
- 67 GUIDA, R.; KONISHI, K.; SUZUKI, H. Improved convergence proof of the delta expansion and order dependent mappings. *Annals of Physics*, [s. l.], v. 249, n. 1, p. 109–145, 1996.
- 68 GANDHI, S.; MCKANE, A. Critical exponents in the δ -expansion. *Nuclear Physics B*, [s. l.], v. 419, n. 3, p. 424–436, 1994.
- 69 FARIAS, R.; KREIN, G.; RAMOS, R. O. Applicability of the linear δ expansion for the $\lambda\phi^4$ field theory at finite temperature in the symmetric and broken phases. *Physical Review D*, [s. l.], v. 78, n. 6, p. 065046, 2008.
- 70 DUARTE, D.; FARIAS, R.; RAMOS, R. O. Optimized perturbation theory for charged scalar fields at finite temperature and in an external magnetic field. *Physical Review D*, [s. l.], v. 84, n. 8, p. 083525, 2011.

- 71 PARREIRA, J. E. et al. *Análise dos efeitos da temperatura nos acoplamentos de modelos escalares $o(n) \times o(n)$* . 2013. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- 72 ANDERSEN, J. O.; LEGANGER, L. E. Kaon condensation in the color-flavor-locked phase of quark matter, the goldstone theorem, and the 2π hartree approximation. *Nuclear Physics A*, [s. l.], v. 828, n. 3-4, p. 360–389, 2009.
- 73 RAJAGOPAL, K.; WILCZEK, F. The condensed matter physics of QCD. In: SHIFMAN, M. (Ed.). *At the frontier of particle physics: handbook of QCD*. [S. l.]: World Scientific, 2001. p. 2061–2151. Disponível em: https://doi.org/10.1142/F9789812810458_0043.
- 74 ALFORD, M.; BRABY, M.; SCHMITT, A. Adachi t: see fujita y 014041 adare a: High-pt jet fragmentation in $au^+ au$ collisions 104089 aerts g: see domingo-pardo c 014020 aerts g: see mosconi m 014015. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys*, [S. l.], v. 35, n. 129901, p. 25, 2008.
- 75 BUBALLA, M. Njl-model description of goldstone boson condensation in the color-flavor locked phase. *Physics Letters B*, [S. l.], v. 609, n. 1-2, p. 57–67, 2005.
- 76 FORBES, M. M. Kaon condensation in a nambu-jona-lasinio model at high density. *Physical Review D*, [S. l.], v. 72, n. 9, p. 094032, 2005.
- 77 EBERT, D.; KLIMENKO, K. Diquarks in the color-flavor locked phase of dense quark matter. *Physical Review D*, [S. l.], v. 75, n. 4, p. 045005, 2007.
- 78 EBERT, D.; KLIMENKO, K.; YUDICHEV, V. Mass spectrum of diquarks and mesons in the color-flavor locked phase of dense quark matter. *The European Physical Journal C*, [S. l.], v. 53, n. 1, p. 65–76, 2008.
- 79 SCHAFER, T. et al. Kaon condensation and goldstone's theorem. *Physics Letters B*, [S. l.], v. 522, n. 1-2, p. 67–75, 2001.
- 80 MIRANSKY, V.; SHOVKOVY, I. Spontaneous symmetry breaking with abnormal number of nambu-goldstone bosons and kaon condensate. *Physical Review Letters*, [S. l.], v. 88, n. 11, p. 111601, 2002.
- 81 IVANOV, Y. B.; RIEK, F.; KNOLL, J. Gapless hartree-fock resummation scheme for the $o(n)$ model. *Physical Review D*, [S. l.], v. 71, n. 10, p. 105016, 2005.
- 82 PHAT, T. H.; ANH, N. T.; HOA, L. V. On the chiral phase transition in the linear sigma model. *The European Physical Journal A-Hadrons and Nuclei*, [S. l.], v. 19, n. 3, p. 359–365, 2004.

APÊNDICE A – Expansão em modos de Fourier

Aqui vamos calcular a ação (34) expandida em modos de Fourier, passo a passo.

A primeira integral a ser resolvida será o quadrado da derivada temporal da componente ϕ_1 do campo ϕ ,

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} \right)^2 &= \frac{\beta}{V} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \sum_{n,n',\mathbf{p},\mathbf{p}'} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\omega_n\tau)} \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \right) \\
&\times \left(\frac{\partial}{\partial \tau} e^{i(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}+\omega_{n'}\tau)} \phi_{1,n'}(\mathbf{p}') \right) \\
&= \frac{\beta}{V} \sum_{n,n',\mathbf{p},\mathbf{p}'} (i\omega_n)(i\omega_{n'}) \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,n'}(\mathbf{p}') \\
&\times \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n+\omega_{n'})\tau} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \\
&= \frac{\beta}{V} \sum_{n,n',\mathbf{p},\mathbf{p}'} (-\omega_n\omega_{n'}) \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,n'}(\mathbf{p}') (\beta\delta_{n,-n'}) (V\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'}) \\
&= \beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} \omega_n^2 \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}), \tag{177}
\end{aligned}$$

usando a propriedade $-\omega_n = \omega_{-n}$. O resultado para a componente ϕ_2 será análogo, assim como acontecerá para a próxima integral da ação (34),

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau \int d^3x (\nabla \phi_1)^2 &= \frac{\beta}{V} \sum_{n,n',\mathbf{p},\mathbf{p}'} (i\mathbf{p})(i\mathbf{p}') \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n+\omega_{n'})\tau} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,n'}(\mathbf{p}') \\
&= \beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} (\mathbf{p}^2) \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}). \tag{178}
\end{aligned}$$

A próxima integral será

$$\begin{aligned}
i\mu_\phi \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} &= \frac{i\mu_\phi\beta}{V} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \sum_{n,n',\mathbf{p},\mathbf{p}'} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\omega_n\tau)} \phi_{2,n}(\mathbf{p}) (i\omega_{n'}) e^{i(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}+\omega_{n'}\tau)} \phi_{1,n'}(\mathbf{p}') \\
&= \mu\beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} \omega_n \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}), \tag{179}
\end{aligned}$$

esta é seguida pela integral do termo

$$\begin{aligned}
i\mu \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} &= i\mu \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(\sqrt{2}\zeta + \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{1;n}(\mathbf{p}) \right) \\
&\times (i\omega_{n'}) \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n',\mathbf{p}'} e^{i(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x} + \omega_{n'}\tau)} \phi_{2;n'}(\mathbf{p}') \\
&= i\mu \frac{\beta}{V} \sum_{n,n',\mathbf{p},\mathbf{p}'} (i\omega_{n'}) \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n + \omega_{n'})\tau} \int d^3x e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \phi_{1;n}(\mathbf{p}) \phi_{2;n'}(\mathbf{p}') \\
&= \mu\beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} \omega_n \phi_{1;n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p}). \tag{180}
\end{aligned}$$

As últimas integrais serão dadas por

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mu^2 \phi_1^2 &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mu^2 \left(\sqrt{2}\zeta + \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{1;n}(\mathbf{p}) \right)^2 \\
&= \mu^2 \frac{\beta}{V} \sum_{n,n',\mathbf{p},\mathbf{p}'} \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n + \omega_{n'})\tau} \int d^3x e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \phi_{1;n}(\mathbf{p}) \phi_{1;n'}(\mathbf{p}') \\
&+ \int_0^\beta d\tau \int d^3x (2\zeta^2 \mu^2) \\
&+ 2\sqrt{2}\zeta\mu^2 \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,\mathbf{p}} \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n + 0)\tau} \int d^3x e^{i(\mathbf{p} + 0)\cdot\mathbf{x}} \phi_{1;n}(\mathbf{p}) \\
&= \mu^2\beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} \phi_{1;n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + 2\beta V \zeta^2 \mu^2, \tag{181}
\end{aligned}$$

e por

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mu^2 \phi_2^2 &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mu^2 \left(\sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{2;n}(\mathbf{p}) \right)^2 \\
&= \mu^2 \frac{\beta}{V} \sum_{n,n',\mathbf{p},\mathbf{p}'} \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n + \omega_{n'})\tau} \int d^3x e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \phi_{2;n}(\mathbf{p}) \phi_{2;n'}(\mathbf{p}') \\
&= \mu^2\beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} \phi_{2;n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p}). \tag{182}
\end{aligned}$$

Esta ação assume um potencial U_0 genérico, no entanto, este trabalho adotará o potencial dado por (38), esse por sua vez dentro da mesma ação (34), será representado em partes pelas seguintes integrais

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m^2 \int_0^\beta d\tau \int d^3x (\phi_1^2 + \phi_2^2) &= \frac{\beta^2}{2}m^2 \sum_{n,\mathbf{p}} (\phi_{1,n}(\mathbf{p})\phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p})\phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\ &+ \beta V \zeta^2 m^2. \end{aligned} \quad (183)$$

A última parte de U , que apresenta a forma $(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 = \phi_1^4 + \phi_2^4 + 2\phi_1^2\phi_2^2$, será separada e representada a seguir

$$\begin{aligned} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi_1^4 &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(\sqrt{2}\zeta + \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,p} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \right)^4 \\ &= \beta V (\sqrt{2}\zeta)^4 + 6 \int_0^\beta d\tau \int d^3x 2\zeta^2 \left(\sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,p} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \right)^2 \\ &= 4\beta V \zeta^4 + 12\beta^2 \zeta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} \phi_{1,n}(\mathbf{p})\phi_{1,-n}(-\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (184)$$

trabalhamos somente até a ordem quadrática nas flutuações, pelo mesmo motivos a seguinte integral é nula

$$\int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi_2^4 = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(\sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,p} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \right)^4 = 0. \quad (185)$$

A última integral é dada por

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi_1^2 \phi_2^2 &= 2 \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(\sqrt{2}\zeta + \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,p} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \right)^2 \\ &\quad \times \left(\sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n,p} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \right)^2 \\ &= 4\beta^2 \zeta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} \phi_{2,n}(\mathbf{p})\phi_{2,-n}(-\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (186)$$

Unindo os resultados desta última parte do potencial (38),

$$\begin{aligned} \int_0^\beta d\tau \int d^3x (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 &= 4\beta^2 \zeta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} (3\phi_{1,n}(\mathbf{p})\phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p})\phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\ &+ 4\beta V \zeta^4. \end{aligned} \quad (187)$$

Agora, então, podemos juntar os resultados obtidos neste Apêndice, incluindo o potencial (38), para apresentarmos a ação (34) de um campo escalar carregado, expandida em modos de Fourier,

$$\begin{aligned}
S = & \frac{\beta^2}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} \omega_n^2 (\phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& + \frac{\beta^2}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} \mathbf{p}^2 (\phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& + \frac{\beta^2}{2} m^2 \sum_{n,\mathbf{p}} (\phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& + \mu \beta^2 \sum_{n,p} \omega_n (\phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) - \phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& + \frac{\lambda}{6} \beta^2 \zeta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} (3\phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& - \frac{1}{2} \mu^2 \beta^2 \sum_{n,\mathbf{p}} (\phi_{1,n}(\mathbf{p}) \phi_{1,-n}(-\mathbf{p}) + \phi_{2,n}(\mathbf{p}) \phi_{2,-n}(-\mathbf{p})) \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{\lambda}{6} \beta V \zeta^4 + \beta V \zeta^2 m^2 - \beta V \zeta^2 \mu^2.
\end{aligned} \tag{188}$$

A ação acima é apresentada no texto em (39), de forma fatorada.

APÊNDICE B – Aplicação de identidades algébricas

Aqui vamos realizar a soma sobre as frequências de Matsubara sobre a seguinte parte da equação (48) apresentada no texto, que chamaremos de $\ln Z_{soma,A}$

$$\ln Z_{soma,A} = -\frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} \ln \beta^2(\omega_n^2 + A^2), \quad (189)$$

usando as identidades

$$\int_1^{\beta^2 A^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} = \ln[(2\pi n)^2 + \beta^2 A^2] - \ln[1 + (2\pi n)^2] \quad (190)$$

e

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\theta}{\theta^2 + (2\pi n)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1}, \quad (191)$$

com alguma álgebra, notamos que

$$\int_1^{\beta^2 A^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} = 2 \int_1^{\beta A} \frac{\theta d\theta}{\theta^2 + (2\pi n)^2}. \quad (192)$$

Integramos os dois lados de (191) em θ e multiplicando por 2, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \int_1^{\beta A} \frac{\theta d\theta}{\theta^2 + (2\pi n)^2} &= \int_1^{\beta A} d\theta \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln[(2\pi n)^2 + \beta^2 A^2] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln[1 + (2\pi n)^2]. \end{aligned} \quad (193)$$

Tirando o termo independente da temperatura de (193), obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln[(2\pi n)^2 + \beta^2 A^2] &= \int_1^{\beta A} d\theta \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right) \\ &= [2 \ln(1 - e^\theta) - \theta] \Big|_1^{\beta A}. \end{aligned} \quad (194)$$

Lembrando do termo (189), esse pode então ser reescrito como

$$-\frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} \ln \beta^2 (\omega_n^2 + A^2) = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \int_1^{\beta A} d\theta \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right). \quad (195)$$

Após integrarmos, novamente tiramos os termos independentes da temperatura e obtemos finalmente que

$$-\frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} \ln \beta^2 (\omega_n^2 + A^2) = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[-\frac{1}{2} \beta A - \ln(1 - e^{-\beta A}) \right]. \quad (196)$$

APÊNDICE C – Massas Físicas

Diagonalizando a matriz 4×4 , \mathcal{M} , temos os seguintes autovalores de massa, quando $\omega_n = \mathbf{p} = 0$, que são as massas físicas do sistema sem a adição do auto-valor de energia

$$\mathcal{M}_1 = m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda\psi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\phi\phi_0^2}{2}, \quad (197)$$

$$\mathcal{M}_2 = m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda\psi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\phi\phi_0^2}{6}, \quad (198)$$

$$\mathcal{M}_3 = m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\psi\psi_0^2}{2}, \quad (199)$$

$$\mathcal{M}_4 = m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \frac{\lambda\phi_0^2}{2} + \frac{\lambda_\psi\psi_0^2}{6}, \quad (200)$$

quando substituimos os valores dos campos de fundo, pelos valores esperados de vácuo no nível da árvore, a seguir, nos autovalores acima

$$\begin{aligned} \phi_0^2 &= \frac{6\lambda_\psi(\mu_\phi^2 - m_\phi^2) - 18\lambda(\mu_\psi^2 - m_\psi^2)}{\lambda_\phi\lambda_\psi - 9\lambda^2}, \\ \psi_0^2 &= \frac{6\lambda_\phi(\mu_\psi^2 - m_\psi^2) - 18\lambda(\mu_\phi^2 - m_\phi^2)}{\lambda_\phi\lambda_\psi - 9\lambda^2}, \end{aligned} \quad (201)$$

podemos reconhecer os autovalores \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_3 como sendo os modos de Higgs, que são os campos massivos, associados às componentes reais ϕ_1 e ψ_1 dos campos ϕ e ψ . Enquanto os autovalores \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_4 estão associados aos modos de Goldstone, uma vez que estes vão a zero durante a fase de quebra de simetria.

APÊNDICE D – Diagramas de Feynman

Os diagrama de Feynman em ordem δ (ou \hbar), como representado na equação (141), são extraídos da expansão do potencial termodinâmico a 1-laço. Neste apêndice vamos escrever as correções quânticas representadas pelos diagramas de Feynman na figura 5, que representam expansões do potencial termodinâmico para um e dois laços, utilizando as regras de Feynman.

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}} = & V_{\text{eff}}^{(0)} + \int_{\mathcal{P}} \ln (P^2 + \Omega_\phi^2) + \int_{\mathcal{P}} \ln (P^2 + \Omega_\psi^2) - \delta\eta_\phi^2 \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\phi^2} - \delta\eta_\psi^2 \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\psi^2} \\
& + \delta \frac{\lambda_\phi}{3} \phi_0^2 \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\phi^2} + \delta \frac{\lambda_\psi}{3} \psi_0^2 \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\psi^2} \\
& + \delta \frac{\lambda}{2} \psi_0^2 \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\phi^2} + \delta \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\psi^2} \\
& + \delta \frac{\lambda_\phi}{3} \left[\int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\phi^2} \right]^2 + \delta \frac{\lambda_\psi}{3} \left[\int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\psi^2} \right]^2 \\
& + \delta \lambda \left[\int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\phi^2} \right] \left[\int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\psi^2} \right] \\
& + \frac{1}{16\pi^2\epsilon} \left(\frac{2\delta\lambda_\phi}{3} \Omega_\phi^2 + \delta\lambda \Omega_\psi^2 \right) \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\phi^2} \\
& + \frac{1}{16\pi^2\epsilon} \left(\frac{2\delta\lambda_\psi}{3} \Omega_\psi^2 + \delta\lambda \Omega_\phi^2 \right) \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega_\psi^2}, \tag{202}
\end{aligned}$$

onde a contribuição do nível da árvore (ou *tree level*) é dada por

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}^{(0)} = & \frac{1}{2} \Omega_\phi^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} \Omega_\psi^2 \psi_0^2 - \frac{1}{2} \delta\eta_\phi^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} \delta\eta_\psi^2 \psi_0^2 \\
& + \frac{1}{4!} \delta\lambda_\phi \phi_0^4 + \frac{1}{4!} \delta\lambda_\psi \psi_0^4 + \frac{1}{4} \delta\lambda \phi_0^2 \psi_0^2 \\
& - \frac{1}{2} \mu_\phi^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} \mu_\psi^2 \psi_0^2. \tag{203}
\end{aligned}$$

Na notação usada na equação (202), as integrais de momento são expressadas no espaço Euclidiano, com $P^2 = p_4^2 + \mathbf{p}^2$, e a regularização dimensional é dada pelo esquema $\overline{\text{MS}}$, assim como utilizado no texto. No entanto, no contexto utilizado neste Apêndice as contribuições de laço à temperatura e potencial químico finitos são representadas da seguinte forma

$$\sum_{\not{P}} \equiv T \sum_{p_4 = \omega_n + i\mu_i} \left(\frac{e^{\gamma_E \Lambda^2}}{4\pi} \right)^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}, \quad (204)$$

onde $\mu_i \equiv \mu_{\phi(\psi)}$ é o potencial químico associado ao campo $\phi(\psi)$, os termos divergentes são regularizados da mesma forma como vimos no texto desta dissertação, com $d = 3 - 2\epsilon$, sendo γ_E a constante de Euler-Mascheroni e Λ , a escala de regularização. A soma na equação (204) é dada sobre as frequências de Matsubara para bósons, $\omega_n = 2\pi nT$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dessa forma, após realizarmos a soma sobre as frequências de Matsubara na equação (202), teremos que

$$\sum_{\not{P}} \ln(P^2 + \Omega^2) = -\frac{\Omega^4}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + Y(\Omega, T, \mu), \quad (205)$$

e

$$\sum_{\not{P}} \frac{1}{P^2 + \Omega^2} = -\frac{\Omega^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega, T, \mu), \quad (206)$$

onde $Y(\Omega, T, \mu)$ e $X(\Omega, T, \mu)$ são dados pelas equações (149) e (150), respectivamente.

Com isso, podemos escrever cada diagrama representado na figura 5, individualmente

$$V_{\text{eff}}^{(a)} = -\frac{\Omega_\phi^4}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + Y(\Omega_\phi, T, \mu_\phi), \quad (207)$$

$$V_{\text{eff}}^{(b)} = -\frac{\Omega_\psi^4}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + Y(\Omega_\psi, T, \mu_\psi), \quad (208)$$

$$V_{\text{eff}}^{(c)} = -\delta\eta_\phi^2 \left[-\frac{\Omega_\phi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \right], \quad (209)$$

$$V_{\text{eff}}^{(d)} = -\delta\eta_\psi^2 \left[-\frac{\Omega_\psi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right], \quad (210)$$

$$V_{\text{eff}}^{(e)} = \frac{1}{3} \delta\lambda_\phi \phi_0^2 \left[-\frac{\Omega_\phi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \right], \quad (211)$$

$$V_{\text{eff}}^{(f)} = \frac{1}{3} \delta \lambda \psi_0^2 \left[-\frac{\Omega_\psi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right], \quad (212)$$

$$V_{\text{eff}}^{(g)} = \frac{1}{2} \delta \lambda \psi_0^2 \left[-\frac{\Omega_\phi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \right], \quad (213)$$

$$V_{\text{eff}}^{(h)} = \frac{1}{2} \delta \lambda \phi_0^2 \left[-\frac{\Omega_\psi^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right], \quad (214)$$

$$V_{\text{eff}}^{(i)} = \delta \frac{\lambda_\phi}{3} \left[\frac{\Omega_\phi^4}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\Omega_\phi^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) + 2 \frac{\Omega_\phi^4}{(4\pi)^4} W(\Omega_\phi) + X^2(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) \right], \quad (215)$$

$$V_{\text{eff}}^{(j)} = \delta \frac{\lambda_\psi}{3} \left[\frac{\Omega_\psi^4}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\Omega_\psi^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) + 2 \frac{\Omega_\psi^4}{(4\pi)^4} W(\Omega_\psi) + X^2(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right], \quad (216)$$

$$V_{\text{eff}}^{(k)} = \delta \lambda \left\{ \frac{\Omega_\phi^2 \Omega_\psi^2}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon} [\Omega_\phi^2 X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) + \Omega_\psi^2 X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi)] \right. \\ \left. + \frac{\Omega_\phi^2 \Omega_\psi^2}{(4\pi)^4} [W(\Omega_\phi) + W(\Omega_\psi)] + X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) \right\}, \quad (217)$$

$$V_{\text{eff}}^{(l)} = \left(\frac{2\delta\lambda_\phi}{3} \Omega_\phi^2 + \delta\lambda \Omega_\psi^2 \right) \left[-\frac{\Omega_\phi^2}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon} X(\Omega_\phi, T, \mu_\phi) - \frac{\Omega_\phi^2}{(4\pi)^4} W(\Omega_\phi) \right], \quad (218)$$

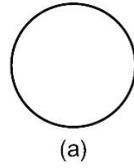
and

$$V_{\text{eff}}^{(m)} = \left(\frac{2\delta\lambda_\psi}{3} \Omega_\psi^2 + \delta\lambda \Omega_\phi^2 \right) \left[-\frac{\Omega_\psi^2}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon} X(\Omega_\psi, T, \mu_\psi) - \frac{\Omega_\psi^2}{(4\pi)^4} W(\Omega_\psi) \right], \quad (219)$$

onde a função $W(\Omega)$ é definida pela equação (143).

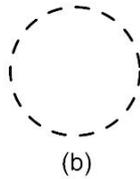
As contribuições (i) , (j) , (k) , (l) e (m) do potencial termodinâmico (202) a ordem \hbar , que são representadas pelos diagramas nas figuras 23, 24, 25, 26 e 27, respectivamente, são contribuições de 2-laços.

Figura 15 - Diagrama de vácuo do campo ϕ . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(a)}$



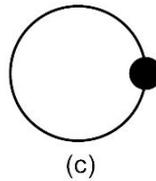
Fonte: A autora, 2022.

Figura 16 - Diagrama de vácuo do campo ψ . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(b)}$



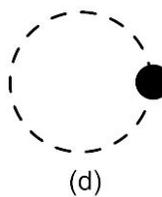
Fonte: A autora, 2022.

Figura 17 - Diagrama de vácuo com propagador do campo ϕ com a inserção do parâmetro de massa $\delta\eta_\phi^2$. Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(c)}$



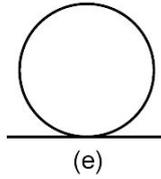
Fonte: A autora, 2022.

Figura 18 - Diagrama de vácuo com propagador do campo ψ com a inserção do parâmetro de massa $\delta\eta_\psi^2$. Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(d)}$



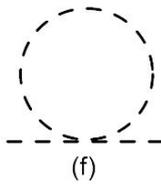
Fonte: A autora, 2022.

Figura 19 - Contribuição de 1-laço do campo ϕ com a inserção do valor esperado de vácuo ϕ_0^2 . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(e)}$



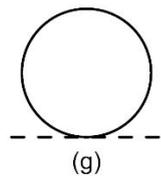
Fonte: A autora, 2022.

Figura 20 - Contribuição de 1-laço do campo ψ com a inserção do valor esperado de vácuo ψ_0^2 . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(f)}$



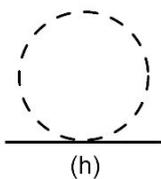
Fonte: A autora, 2022.

Figura 21 - Diagrama de 1-laço para o campo ψ , com propagador do campo ϕ , e inserção do valor esperado de vácuo ψ_0^2 . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(g)}$



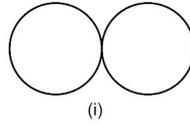
Fonte: A autora, 2022.

Figura 22 - Diagrama de 1-laço para o campo ψ , com propagador do campo ϕ , e inserção do valor esperado de vácuo ϕ_0^2 . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(h)}$



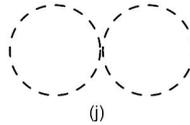
Fonte: A autora, 2022.

Figura 23 - Diagrama de vácuo a 2-laços com dois propagadores do campo ϕ acoplados (com a constante de acoplamento λ_ϕ). Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(i)}$



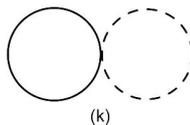
Fonte: A autora, 2022.

Figura 24 - Diagrama de vácuo a 2-laços com dois propagadores do campo ψ acoplados (com a constante de acoplamento λ_ψ). Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(j)}$



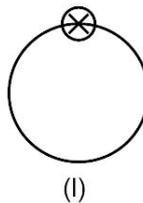
Fonte: A autora, 2022.

Figura 25 - Diagrama de vácuo a 2-laços, com laços de ϕ e ψ , com o propagador do campo ϕ , representado pelo diagrama de linha cheia, acoplado ao propagador do campo ψ , representado pelo diagrama de linha tracejada (constante de acoplamento λ). Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(k)}$



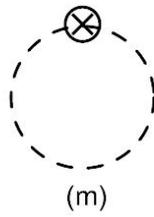
Fonte: A autora, 2022.

Figura 26 - Diagrama de vácuo com propagador do campo ϕ e a inserção da renormalização de massa do campo ϕ . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(l)}$



Fonte: A autora, 2022.

Figura 27 - Diagrama de vácuo com propagador do campo ψ e inserção da renormalização de massa do campo ψ . Diagrama correspondente a $V_{\text{eff}}^{(m)}$



Fonte: A autora, 2022.