



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

**Centro de Educação e Humanidades**

**Faculdade de Formação de Professores**

**Bruna Silva dos Santos Moreira**

**Modelos Matemáticos e Educação Ambiental: Um olhar sobre a  
Lagoa de Maricá**

São Gonçalo

2020

Bruna Silva dos Santos Moreira

**Modelos Matemáticos e Educação Ambiental: Um olhar sobre a Lagoa de Maricá**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dra. Rosa María García Márquez  
Coorientador: Prof. Dr. Jorge Corrêa de Araújo

São Gonçalo  
2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CEH/D

---

M838      Moreira, Bruna Silva dos Santos  
            Modelos Matemáticos e Educação Ambiental: Um olhar sobre a Lagoa  
            de Maricá / Bruna Silva dos Santos Moreira. – 2020.  
            111 f.: il.

            Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dra. Rosa María García Márquez  
            Dissertação (Mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática em  
            Rede Nacional - PROFMAT – Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
            Faculdade de Formação de Professores.

            1. Modelagem matemática. 2. Meio ambiente. 3. Equações  
            diferenciais ordinárias. I. García Márquez, Rosa María. II. Universidade do  
            Estado do Rio de Janeiro. III. Faculdade de Formação de Professores. IV.  
            Título

CRB-7 - 4994

CDU 519.87

---

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta ,  
desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Bruna Silva dos Santos Moreira

**Modelos Matemáticos e Educação Ambiental: Um olhar sobre a Lagoa de Maricá**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 26 de Maio de 2020.

Banca Examinadora:

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Rosa María García Márquez (Orientadora)  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

---

Prof. Dr. Jorge Corrêa de Araújo (Coorientador)  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

---

Prof. Dr. Fábio Silva de Souza  
Faculdade de Formação de Professores - UERJ

---

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende  
Universidade Federal Fluminense

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe, aos meus filhos e ao meu marido por todo amor e suporte dados a mim para eu alcançar mais este objetivo.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter sido minha força nos momentos de fraqueza e minha luz quando tudo parecia escuridão.

Ao meu marido Edmar, por ser companheiro e incentivador em todas as etapas do curso.

A minha mãe Suely, pelos seus cuidados incessantes para comigo e com meus filhos.

Ao meu filho Kaynan e a minha filha Wendy, por terem dividido com o presente trabalho a atenção que deveria ter sido direcionada só a eles.

Às amigas Sílvia Lúcia e Júlia Sodré, pelo apoio e incentivo constantes no decorrer do curso.

Ao professor Fábio Vieira de Araújo (DCIEN-FFP) e sua equipe do projeto "Praia limpa e nossa praia!", pela palestra sobre a poluição de praias ministrada aos meus alunos do CIEP 259 do município de Maricá.

Aos orientadores Prof.<sup>a</sup> Rosa García e o Prof. Jorge Araújo, pela paciência, orientação e dedicação, muito importantes para a conclusão do trabalho.

Aos colegas e professores do PROFMAT-UERJ (FFP) que proporcionaram de maneira conjunta um aprendizado significativo para meu crescimento pessoal e profissional.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Para mim, a matemática é um mundo de aprendizagem, de descobertas fascinantes, uma fonte de desafios, cuja forma de expressão tangencia uma arte a ser apreciada por todos os profissionais e amadores de matemática."

*Lioudmila Bourchtein*

"A natureza está escrita em linguagem matemática."

*Galileu Galilei*

## RESUMO

MOREIRA, Bruna Silva dos Santos. *Modelos Matemáticos e Educação Ambiental: Um olhar sobre a Lagoa de Maricá*. 2020. 111 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

O crescimento populacional acelerado da cidade de Maricá nas últimas décadas, resultou na poluição da Lagoa de Maricá. Esta lagoa, que concentra em seu entorno o centro urbano da cidade, vem sofrendo com aterros clandestinos em sua orla e com lançamento de esgotos em suas águas. O presente trabalho tem como objetivo apresentar dois modelos matemáticos relacionados à representação da despoluição de lagoas a fim de aplicá-los na Lagoa de Maricá; e, também, colaborar com o processo de reflexão sobre o Ensino da Matemática na sociedade moderna tendo como foco a interdisciplinaridade com o Meio Ambiente, abordando a modelagem matemática com tópicos como: recursividade, progressão geométrica, função exponencial, função logarítmica, representações gráficas, entre outros. Para alcançar tais objetivos, são apresentadas as principais características do município de Maricá e de seu sistema lagunar onde se insere a própria lagoa objeto de estudo. A partir daí, é realizado um breve resumo sobre a importância do uso de modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem na representação da despoluição de lagoas. Assim, foi possível simular o comportamento da poluição na lagoa em função do tempo e, também a sua capacidade de autodepuração através do modelo simplificado de Streeter-Phelps. Por fim, uma reflexão sobre a modelagem matemática como instrumento de ação pedagógica na Educação Básica pôde ser estabelecida por meio de um relato de experiência envolvendo uma turma de Ensino Médio do CIEP-259, na cidade de Maricá, bem como, um experimento em escala reduzida reproduzindo a despoluição de uma lagoa fictícia. Isto evidenciou um maior interesse dos alunos pela matemática aplicada, assim como também colaborou com o processo de formação de cidadãos ecologicamente mais conscientes.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Meio Ambiente. Equações Diferenciais Ordinárias. Interdisciplinaridade. Modelo de Streeter-Phelps.

## ABSTRACT

MOREIRA, Bruna Silva dos Santos. *Mathematical Modeling and Environmental Education: A look at Maricá Lagoon*. 2020. 111 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

The accelerated population growth of the city of Maricá in recent decades has resulted in the pollution of the Maricá Lagoon. This lagoon, which concentrates the urban center of the city in its surroundings, has been suffering from clandestine landfills on its shore and from the discharge of sewage into its waters. The present work aims to present two mathematical models related to the representation of the depollution of lagoons in order to apply them in the Maricá Lagoon; and, also, collaborate with the reflection process on the Teaching of Mathematics in modern society, focusing on interdisciplinarity with the Environment, addressing mathematical modeling with topics such as: recursion, geometric progression, exponential function, logarithmic function, graphical representations, among others. To achieve these objectives, the main characteristics of the municipality of Maricá and its lagoon system were presented, where the lagoon that is object of study is inserted. Thereafter, is made a brief summary on the importance of using mathematical models involving first order linear ordinary differential equations in the representation of pond depollution. Thus, it was possible to simulate the behavior of pollution in the lagoon as a function of time and also its capacity for autodepuration through the simplified Streeter-Phelps model. Thus, it was possible to simulate the behavior of pollution in the lagoon as a function of time and also its capacity for autodepuration. Finally, a reflection on mathematical modeling as an instrument of pedagogical action in Basic Education could be established through an experience report involving a high school class and a small-scale experiment that represented the depollution of a fictitious lagoon. This evidenced a greater interest of students in applied mathematics, as well as collaborated with the process of forming ecologically more conscious citizens.

Keywords: Mathematical Modeling. Environment. Ordinary Differential Equation. Interdisciplinarity. Streeter-Phelps model.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Mapa do Estado do Rio de Janeiro com a localização de Maricá . . . . .	14
Figura 2	- Delimitação Distrital do Município de Maricá . . . . .	15
Figura 3	- Crescimento populacional do município de Maricá . . . . .	15
Figura 4	- Área de Proteção Ambiental de Maricá . . . . .	16
Figura 5	- Sistema Lagunar Maricá-Guarapina e entorno . . . . .	17
Figura 6	- Lagoa de Maricá ligada à Lagoa da Barra . . . . .	19
Figura 7	- Perfil da função linear $f(S(t))$ . . . . .	29
Figura 8	- Quantidade de poluentes com introdução contínua de detritos . . . . .	30
Figura 9	- Aspecto de $S(t)$ quando cessada a emissão de poluentes. . . . .	31
Figura 10	- Campo direcional da EDO (53) e perfil de algumas soluções. . . . .	32
Figura 11	- Seção transversal de um recurso hídrico . . . . .	35
Figura 12	- Perfil da poluição em relação ao tempo quando há introdução contínua de uma quantidade constante de poluente. . . . .	46
Figura 13	- Perfil da poluição quando cessa a introdução de poluentes. . . . .	47
Figura 14	- Perfil da representação da despoluição com diminuição de descarga con- tínua. . . . .	48
Figura 15	- Gráfico da variação da DBO na Lagoa de Maricá. . . . .	49
Figura 16	- Gráfico da Concentração de Oxigênio Dissolvido . . . . .	50
Figura 17	- Déficit de Oxigênio Dissolvido. . . . .	52
Figura 18	- Concentração de Oxigênio Dissolvido pelos dois métodos . . . . .	53
Figura 19	- Etapas envolvidas na modelagem matemática . . . . .	55
Figura 20	- Simulação da lagoa fictícia poluída. . . . .	60
Figura 21	- Simulação da primeira despoluição da lagoa fictícia. . . . .	60
Figura 22	- Aparência da água após o 2º processo de despoluição. . . . .	62
Figura 23	- Aparência da água da lagoa fictícia a cada número $n$ de troca. . . . .	63
Figura 24	- Gráfico da Função Maior Inteiro $f(x) = 100 \left(\frac{3}{4}\right)^{[x]}$ . . . . .	72
Figura 25	- Quantitativo de erros e acertos nas 15 questões propostas. . . . .	75

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Características do Sistema Lagunar de Maricá . . . . .	17
Tabela 2	- Média dos parâmetros sedimentares do Sistema Lagunar de Maricá . .	18
Tabela 3	- Constantes e variáveis utilizadas na modelagem . . . . .	27
Tabela 4	- Constantes e variáveis usadas no Modelo Streeter-Phelps . . . . .	37
Tabela 5	- Valores usuais de $k_r$ considerando a profundidade $H$ do corpo d'água. .	39
Tabela 6	- Concentração de Saturação Oxigênio ( $C_s$ ) ( $mg/l$ ) . . . . .	42
Tabela 7	- Nível de DBO e qualidade da água. . . . .	43
Tabela 8	- Nível de OD presente na água e sua classificação em relação a qualidade.	44
Tabela 9	- Classes de curso d'água doce. . . . .	44
Tabela 10	- Concentração permitida de poluentes, OD, DBO e qualidade da água de acordo com a Classe do curso d'água águas doces. . . . .	45
Tabela 11	- Dados da Lagoa de Maricá a serem considerados para o modelo de representação da despoluição de lagoas. . . . .	46
Tabela 12	- Dados da Lagoa de Maricá a serem considerados para o modelo de Streeter-Phelps . . . . .	49
Tabela 13	- Quantidade de poluente na lagoa fictícia. . . . .	64
Tabela 14	- Solução da Questão 6 . . . . .	64
Tabela 15	- Solução da Questão 8 . . . . .	66

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	11
1	<b>CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO</b> . . . . .	14
1.1	<b>O Município de Maricá</b> . . . . .	14
1.2	<b>Sistema lagunar Maricá-Guarapina</b> . . . . .	17
1.3	<b>A Lagoa de Maricá</b> . . . . .	18
2	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA</b> . . . . .	21
2.1	<b>A importância do uso de Modelos Matemáticos</b> . . . . .	21
2.2	<b>Equação diferencial ordinária linear de primeira ordem</b> . . . . .	22
2.2.1	<u>Soluções de equilíbrio</u> . . . . .	23
2.2.2	<u>Solução de uma equação diferencial linear de primeira Ordem</u> . . . . .	23
2.3	<b>O modelo para representação da despoluição de lagoas</b> . . . . .	26
2.4	<b>O modelo de Streeter-Phelps</b> . . . . .	34
2.4.1	<u>Formulação do modelo matemático simplificado de Streeter-Phelps</u> . . . . .	36
3	<b>ALGUMAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</b> . . . . .	43
3.1	<b>Qualidade da água e valores limites para preservação do ambiente aquático.</b> . . . . .	43
3.2	<b>Um modelo para representação da despoluição da Lagoa de Maricá</b> . . . . .	45
3.3	<b>Simulação do modelo de Streeter-Phelps na Lagoa de Maricá</b> . . . . .	49
4	<b>A MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA</b> . . . . .	54
4.1	<b>Modelagem matemática como instrumento de ação pedagógica</b> . . . . .	54
4.2	<b>Divisão didática das etapas da modelagem matemática</b> . . . . .	55
5	<b>A EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM NO ENSINO MÉDIO</b> . . . . .	57
5.1	<b>Atividades desenvolvidas com os alunos</b> . . . . .	57
5.1.1	<u>Etapa 1: Motivação e compreensão do problema.</u> . . . . .	58
5.1.2	<u>Etapa 2: Construção do Modelo Matemático</u> . . . . .	64
5.1.3	<u>Etapa 3: Resolução do Modelo Matemático</u> . . . . .	67
5.1.4	<u>Etapa 4: Validação do Modelo Matemático</u> . . . . .	73
5.2	<b>Análise geral da experiência com o modelo de representação da despoluição de lagoas no Ensino Médio</b> . . . . .	74
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	77
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	79
	<b>GLOSSÁRIO</b> . . . . .	83
	<b>APÊNDICE A – Roteiro do Experimento</b> . . . . .	84
	<b>APÊNDICE B – Termo de Consentimento</b> . . . . .	92
	<b>ANEXO A – Artigo - Matemática, meio ambiente e arte: transformando lixo em luxo!</b> . . . . .	93

## INTRODUÇÃO

A cidade de Maricá tem mais de 90% de sua população concentrada na área urbana (IBGE, 2010). Em 2010, o IBGE contabilizou que nesta área habitavam aproximadamente 125.491 habitantes, ou seja, 98,45% de uma população total de 127.461 habitantes. O processo de urbanização de Maricá gerou problemas ambientais, pois o crescimento acelerado da cidade não foi acompanhado por investimentos públicos em infraestrutura de saneamento, acarretando desse modo um processo de degradação ambiental acelerada.

Mas, e o que tudo isso tem a ver com a Matemática? Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997, p.19):

A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. [...] a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos.

Sendo assim, propomos aqui um enfoque matemático sobre a poluição na Lagoa de Maricá, que tem sido ocasionada pelo despejo indiscriminado de esgotos domésticos gerados pelo seu acelerado processo de crescimento populacional. Esta lagoa, que atualmente se encontra poluída, motivou o estudo ao qual este trabalho se propõe, o que possibilitou pensar em problemas relacionados à questão ambiental, onde a modelagem matemática pode ser uma forma de motivação para o comprometimento de alunos do Ensino Médio e da sociedade em geral com a questão ecológica da lagoa entre outras questões ambientais.

A tomada de consciência sobre a situação da Lagoa de Maricá surgiu quando em outubro de 2017 ocorreu uma mortandade de peixes em suas águas. Na ocasião, uma turma de sétimo ano do Ensino Fundamental do CIEP-259 em Maricá, mostrou-se bastante perplexa com o ocorrido. Tal perplexidade proporcionou a idealização de um projeto interdisciplinar, envolvendo em especial a Matemática, que resultou no planejamento de um trabalho contextualizado, para o ano seguinte, relacionando o lixo produzido no meio ambiente aos conteúdos que seriam desenvolvidos em sala de aula. O relato das atividades realizadas nesse projeto rendeu um artigo intitulado "Matemática, meio ambiente e arte: transformando lixo em luxo!"<sup>1</sup>, publicado pela revista REMAT.

O objetivo do presente trabalho é apresentar dois modelos matemáticos relacionados à despoluição de recursos hídricos, a fim de realizar simulações através de dados

---

<sup>1</sup> MOREIRA, B.; MÁRQUEZ, R.; DE ARAÚJO, J. Matemática, meio ambiente e arte: transformando lixo em luxo!. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, v. 6, n. 1, p. 1-18, 30 dez. 2019. (O referido artigo encontra-se no Anexo A)

referentes à Lagoa de Maricá; e, também, colaborar com o processo de reflexão sobre o Ensino da Matemática na sociedade atual.

Com vistas a tornar explícita a problemática da poluição na Lagoa de Maricá e estabelecer elos entre a Matemática do Ensino Médio e os problemas ambientais, os métodos de pesquisa selecionados para este trabalho foram: a pesquisa exploratória e a pesquisa ação. Segundo Gil (2002, p.41), a pesquisa exploratória visa “proporcionar maior familiaridade com o problema com vista a torná-lo explícito”. E, de acordo com Elliot (1997, p.15), a pesquisa-ação de interesse “permite superar as lacunas existentes entre a pesquisa educativa e a prática docente, ou seja, entre a teoria e a prática, e os resultados ampliam as capacidades de compreensão dos professores e suas práticas...”

Considerando o objetivo descrito, este trabalho está organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo é feita a apresentação da Lagoa de Maricá abordando algumas das principais características do município de Maricá, tais como: sua localização, delimitação distrital, crescimento populacional nos últimos 40 anos, área de proteção ambiental, economia e algumas características do seu sistema lagunar (área, perímetro, profundidade, volume, salinidade, entre outros).

No segundo capítulo é apresentada uma breve explicação acerca da importância do uso de modelos matemáticos; para isso foi feita uma abordagem sobre a definição de modelo matemático e sobre sua importância como ferramenta auxiliar no controle e proteção de recursos hídricos. Além disso, devido a importância da modelagem Matemática com equações diferenciais ordinárias para diversas áreas do conhecimento científico e em especial para o presente trabalho, este capítulo inclui um estudo sobre equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, assim como, a apresentação de um modelo para representação da despoluição de lagoas apresentado por alguns matemáticos como Bassanezi e Jr. (1988), Boyce e DiPrima (1985), e também do modelo Streeter-Phelps simplificado sobre qualidade da água de um recurso hídrico.

No terceiro capítulo são realizadas algumas simulações obtidas a partir da descrição da situação-problema que envolve a Lagoa de Maricá para a linguagem matemática. Além disso, encontra-se tabulados neste capítulo os valores limites permissíveis de poluentes, oxigênio dissolvido e demanda bioquímica de oxigênio para preservação do ambiente aquático.

O quarto capítulo é dedicado a uma reflexão sobre a modelagem matemática como instrumento de ação pedagógica no Ensino Médio, onde a importância dessa ação proporciona o trabalho com conceitos matemáticos aplicados a problemas da realidade. Esse capítulo inclui a apresentação de uma divisão didática das etapas da modelagem matemática para aplicação na sala de aula.

O quinto e último capítulo é dedicado ao relato da experiência vivenciada com os alunos de uma turma do segundo ano do Ensino Médio do CIEP-259 em Maricá. Tal vivência ocorreu durante a aplicação de uma proposta de ensino a partir da modelagem

matemática envolvendo um experimento em miniatura sobre representação da despoluição de lagoas utilizando a divisão didática das etapas da modelagem matemática abordadas no quarto capítulo.

## 1 CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO

Neste capítulo é realizada uma breve descrição da Lagoa de Maricá abordando algumas das principais características do município e do sistema lagunar nos quais ela está situada.

### 1.1 O Município de Maricá

Maricá é uma cidade localizada na região litorânea do estado do Rio de Janeiro. A principal via de acesso ao município é a Rodovia Amaral Peixoto (RJ-106), que faz a comunicação entre a Região Metropolitana e a Região dos Lagos. Segundo dados do IBGE (2019), essa área territorial é de  $361,572 \text{ km}^2$  sendo que o município possui limites à oeste com Niterói, ao norte com São Gonçalo, Itaboraí e Tanguá. À leste com Saquarema e ao sul com o Oceano Atlântico, como podemos ver na Figura 1.

Figura 1 - Mapa do Estado do Rio de Janeiro com a localização de Maricá



Fonte: Adaptado de CEPERJ (2013)

Atualmente Maricá divide-se em quatro distritos: Maricá (sede), Ponta Negra, Inoã e Itaipuaçu (MARICÁ, 1990). Cada distrito divide-se em subdistritos, equivalentes a uma divisão em bairros conforme mostra a Figura 2.

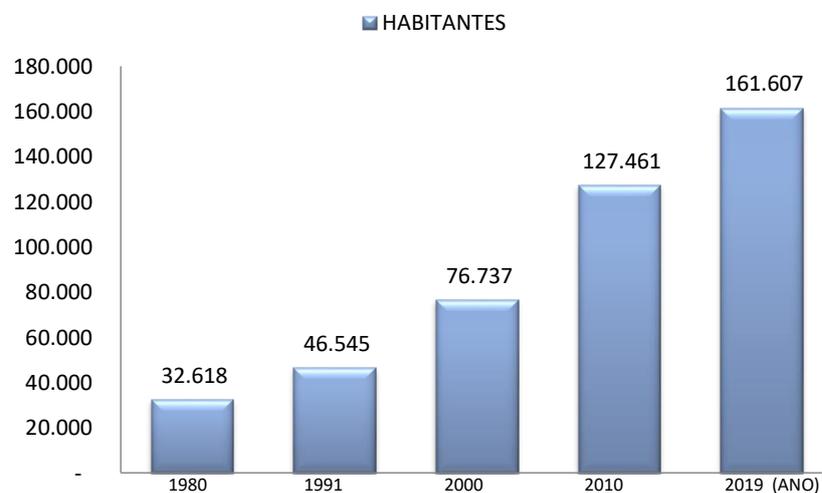
Figura 2 - Delimitação Distrital do Município de Maricá



Fonte: Extraído de MARICÁ (2015)

A partir da década de 1990, o município de Maricá teve um grande crescimento populacional de 42,69 % em relação à década anterior. De 1991 a 2000 foi possível observar um crescimento de 64,86 %, e mais de 66 % de 2000 a 2010 (IBGE, 2010). No último censo em 2010 o município contava com 127.461 habitantes, sendo 161.607 a estimativa populacional do IBGE para 2019. Como podemos observar na Figura 3, houve um grande aumento populacional no decorrer desses anos, devido em grande parte às obras de ampliação e de acessibilidade ao município influenciadas pelas instalações de novos empreendimentos ligados ao setor petrolífero.

Figura 3 - Crescimento populacional do município de Maricá



Fonte: IBGE, 2019

A cidade de Maricá possui uma Área de Proteção Ambiental (APA) que foi criada em 1984 sendo gerenciada pelo Instituto Estadual do Meio Ambiente (INEA), antiga Fundação Estadual de Engenharia do Meio Ambiente (FEEMA). É a APA mais antiga sob administração estadual com cerca de 496 hectares de vegetação de restinga em uma estreita faixa com aproximadamente 20 *km* que se estende no sentido leste-oeste, comprimindo-se entre o Oceano Atlântico e a Lagoa de Maricá, no sentido sul-norte (DINIZ et al., 2015).

Figura 4 - Área de Proteção Ambiental de Maricá



Fonte: Adaptado de Silva (2013)

Segundo Oliveira *et al.*(1955), a economia de Maricá no passado era baseada na agricultura e na atividade pesqueira. Esta última dava à cidade o título de maior produtora de pescados do estado do Rio de Janeiro, isso por conta de seu rico sistema lagunar. Entretanto, com a degradação ambiental deste sistema, em particular observado na Lagoa de Maricá, esta atividade foi perdendo cada vez mais importância na economia maricaense. Hoje em dia, Maricá é considerado um município produtor de petróleo, visto que seu litoral está em frente à Bacia de Santos<sup>2</sup>. Em 2017, de acordo com dados da Agência Nacional de Petróleo (ANP), Maricá se tornou a cidade do Estado do Rio de Janeiro que mais recebeu royalties (R\$ 271 milhões) e participações especiais do petróleo (R\$ 443 milhões).

<sup>2</sup> Bacia de Santos: Bacia sedimentar localizada na plataforma continental brasileira, produtora tanto de petróleo quanto de gás natural.

## 1.2 Sistema lagunar Maricá-Guarapina

O sistema lagunar Maricá-Guarapina, como pode ser visto na Figura 5, está inserido dentro do perímetro da cidade de Maricá, localizado a cerca de 50 km a leste da cidade do Rio de Janeiro. Ele é constituído, conforme registrado em SEMADS (2009), por quatro lagoas interligadas por canais formando um único sistema lagunar, cujas medidas totalizam 37,7 km<sup>2</sup>, distribuídas da seguinte forma: Lagoa de Maricá (19,5 km<sup>2</sup>), Lagoa da Barra (9,0 km<sup>2</sup>), Lagoa do Padre (2,7 km<sup>2</sup>) e Lagoa de Guarapina (6,5 km<sup>2</sup>). Este sistema é conectado ao oceano pelo canal de Ponta Negra que foi construído na Lagoa de Guarapina, em 1951, através de um programa governamental de saneamento (OLIVEIRA; KRAU, 1955).

Figura 5 - Sistema Lagunar Maricá-Guarapina e entorno



Fonte: Adaptado do Projetos Baías do Brasil/ COOPE (2019)

Na Tabela 1 podemos encontrar algumas das principais características do sistema lagunar de Maricá. Em particular, a Lagoa de Maricá possui a maior área e o maior volume em relação as outras lagoas que compõem o sistema Maricá-Guarapina.

Tabela 1 - Características do Sistema Lagunar de Maricá

Lagoa	Área (km <sup>2</sup> )	Perímetro (km)	Profundidade Média (m)	Volume (l)
Lagoa de Maricá	19,5	24	1,4	$2,4 \times 10^{10}$
Lagoa de Guarapina	6,5	11,7	1,0	$0,7 \times 10^{10}$
Lagoa do Padre	2,7	10,2	0,6	$0,2 \times 10^{10}$
Lagoa da Barra	9,0	30	1,4	$1,3 \times 10^{10}$

Fonte: Adaptado de SEMADS (2009)

Na Tabela 2, são apresentados os resultados da pesquisas de LAUT *et al.* (2019) em

relação à salinidade, temperatura, oxigênio dissolvido (OD) e o  $pH^3$ , no sistema lagunar de Maricá.

Tabela 2 - Média dos parâmetros sedimentares do Sistema Lagunar de Maricá

	Salinidade( <i>psu</i> )		Temperatura ( $^{\circ}C$ )*	OD ( <i>mg/l</i> )*	pH*
	1996*	2019**			
Lagoa de Maricá	0,03	0,5	29,9	6,9	8,9
Lagoa de Guarapina	7	17,2	28,4	5,8	9,1
Lagoa do Padre	3	4,9	30,2	13,6	9,3
Lagoa da Barra	0,02	2,3	29,4	8,5	8,7

Fonte: \* Extraído de KJERFVE *et al.* (1996)

\*\* Extraído de LAUT *et al.* (2019)

Em 2019, devido a um longo período de estiagem, o nível do sistema lagunar diminuiu aproximadamente quinze centímetros levando a autarquia Serviços de Obras de Maricá (SOMAR) a realizar a abertura de um canal ligando a praia à lagoa da Barra de Maricá. De acordo com informações disponíveis no *site* oficial da Prefeitura de Maricá (<https://marica.rj.gov.br>) a abertura teve o objetivo de renovar as águas da lagoa com o aumento de oxigênio em sua água e com a conseqüente diminuição da mortalidade de peixes, bem como, a restauração de plantas nativas. Entretanto, a prefeitura esclareceu que esta foi uma medida emergencial e que futuramente iria trabalhar na construção de estações de tratamento de esgoto nas saídas de rios da cidade, de modo a produzir efeitos positivos na despoluição das lagoas.

A abertura deste canal já ocorreu em períodos de alagamento, sendo que esta foi a primeira vez que ele foi aberto em um período de estiagem prolongada.

### 1.3 A Lagoa de Maricá

A Lagoa de Maricá, também conhecida como Lagoa de São José do Imbassaí, concentra ao seu redor o centro da cidade de Maricá. Ela é a maior e a mais interna entre todas as lagoas que formam o sistema lagunar de Maricá possuindo aproximadamente 6,3 *km* de extensão por 4,5 *km* de largura no trecho mais largo e com profundidade máxima de 2 *m* nesse trecho (SILVESTRE *et al.*, 2017). O principal rio da cidade, conhecido como rio Mumbuca, tem aproximadamente 20 metros de largura e deságua nesta lagoa, que por sua vez liga-se a Lagoa da Barra através do canal do Boqueirão conforme pode-

<sup>3</sup>  $pH$ : É uma escala numérica adimensional, utilizada para especificar a acidez de uma solução aquosa. Representa o potencial hidrogeniônico presente em uma mistura. Se  $pH < 4,5$  ou  $pH > 10,5$  pode ocorrer uma mortalidade significativa dos peixes. O ideal para mantê-los é  $6 \leq pH \leq 8,5$

mos observar na Figura 6. Sobre este canal, foi erguida na década de 1970, uma peça viária intitulada "Ponte do Boqueirão" que se tornou a principal ligação entre o Centro da cidade e o bairro Barra de Maricá.

Figura 6 - Lagoa de Maricá ligada à Lagoa da Barra



Fonte: Arquivo da autora.

De acordo com Cruz *et al.* (1996) entre as lagoas do sistema Maricá-Guarapina, a Lagoa de Maricá é a que apresenta a situação mais preocupante com relação a ocupação urbana de seu entorno, onde ocorre muitos aterros clandestinos em sua orla e o lançamento de esgotos em suas águas de baixa profundidade.

Guerra *et al.* (2011), em um estudo para avaliar a qualidade ambiental das águas superficiais do sistema lagunar de Maricá através da realização de exames físico-químicos, bioquímicos e microbiológicos, relataram que a Lagoa de Maricá apareceu como o subsistema mais impactado com descarga de esgoto não tratado, evidenciado pela presença de coliformes termotolerantes<sup>4</sup>, concentração de biopolímeros<sup>5</sup> e o predomínio do metabolismo bacteriano anaeróbio<sup>6</sup> nas águas superficiais.

No próximo capítulo discutiremos acerca da importância do uso de modelos matemáticos e sobre equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. Também

<sup>4</sup> Coliformes termotolerantes: são grupos de bactérias comumente chamados de coliformes fecais, cujos membros podem ser de origem fecal ou não fecal (SILVA *et al.*, 2017). Estas bactéria podem causar doenças como: infecções urinárias, pneumonias e meningites (PERES, 2011).

<sup>5</sup> Biopolímeros: são polímeros (*macromoléculas formadas a partir de unidades estruturais menores*) produzidos por seres vivos, como por exemplo: Celulose, amido e proteínas (BRITO *et al.*, 2011).

<sup>6</sup> Anaeróbio: condição de todo microrganismo que cresce em ambiente isento de oxigênio e que realiza suas funções metabólicas vitais utilizando compostos diferentes do  $O_2$ , tais como sulfatos, carbonatos e nitratos (PRESCOTT; HARLEY; KLEIN, 1996).

veremos a apresentação dos modelos matemáticos que usaremos para estudar o comportamento da poluição na Lagoa de Maricá em função do tempo e para entender seu processo de autodepuração.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo é apresentada uma breve discussão sobre a importância do uso de modelos matemáticos para a representação de problemas de interesse prático que envolvem equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. São apresentados dois modelos com objetivos distintos, o primeiro descreve o comportamento da quantidade de poluentes em um recurso hídrico em relação ao tempo e o segundo modelo, conhecido como modelo de Streeter-Phelps que relaciona as concentrações de oxigênio dissolvido e a demanda bioquímica de oxigênio.

### 2.1 A importância do uso de Modelos Matemáticos

Tucci (2005) define o modelo matemático como sendo "a representação de algum objeto ou sistema, numa linguagem ou forma de fácil acesso e uso, com o objetivo de entendê-lo e buscar suas respostas para diferentes entradas."

De uma forma geral, a modelagem matemática é importante porque viabiliza a compreensão de fenômenos que cercam os indivíduos possibilitando uma intervenção em seu processo de construção, caso necessário. Mesmo sendo apenas uma idealização de uma situação real, os modelos são capazes de conduzir a soluções muito próximas da realidade. Segundo Bassanezi e Jr. (1988),

[...] um problema real não pode ser representado de maneira exata, em toda sua complexidade, por uma equação matemática ou um sistema de equações. No entanto, se trabalharmos com as variáveis *essenciais* do fenômeno observado, o modelo matemático que simula tal fenômeno poderá levar a soluções bastante próximas daquelas observadas na realidade.

Em virtude disso, a modelagem Matemática com equações diferenciais ordinárias é considerada uma ferramenta de grande importância em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo: na Biologia, na Economia, na Física, na Astronomia, na Engenharia, na Demografia, entre outras.

Os modelos de interesse neste trabalho são capazes de representar a despoluição de corpos d'água<sup>7</sup> no decorrer do tempo; tais modelos são importantes ferramentas auxiliares no controle e proteção dos recursos hídricos, pois possibilitam a análise e previsões comportamentais da poluição nesses corpos d'água. Nestes modelos é fácil variar os parâmetros de interesse com suposições e simulações que demandariam tempo e recursos em laboratórios apropriados para esse fim.

---

<sup>7</sup> Corpo d'água: Nome que se dá a um grande acúmulos de água, como: oceano, lago e lagoa

## 2.2 Equação diferencial ordinária linear de primeira ordem

Para melhor compreensão das equações diferenciais ordinárias, segue abaixo a definição matemática de derivada de uma função real em um ponto.

**Definição** (STEWART, 2002): Seja  $I$  um intervalo aberto não-vazio e seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , uma função de  $I$  em  $\mathbb{R}$ . Diz-se que a função  $f(x)$  é derivável no ponto  $a \in I$  se existir o seguinte limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (1)$$

Equivalentemente, fazendo  $h = x - a$ , podemos escrever

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad (2)$$

Desta forma, define-se a função derivada de  $f(x)$  por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \quad (3)$$

Para a derivada de uma função  $f(x) = y$  são equivalentes as seguintes notações:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}.$$

Feita a definição de derivada de uma função para  $x \in I$ , seguimos com a abordagem sobre equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. Chamamos de Equação Diferencial à equação cuja incógnita é uma função sob a forma de suas derivadas. E, se esta função depende de uma só variável independente, então a equação diferencial é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO).

Segundo Araújo *et al.* (2016), uma EDO é dita linear se a função incógnita  $y = y(x)$  e suas derivadas aparecem de ‘forma linear’, ou seja, podem ser escritas como

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x), \quad (4)$$

onde  $a_n(x)$ ,  $a_{n-1}(x)$ ,  $\dots$ ,  $a_0(x)$  e  $g(x)$  são funções reais de  $x$ , com  $x \in I$  e  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Se a ordem da mais alta derivada da Eq.(4) for 1 (um), então esta será chamada de Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem, e ela pode ser escrita a partir da Eq.(4) na forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (5)$$

onde  $y' = y'(x)$  é a primeira derivada da função incógnita  $y = y(x)$  e  $a_1 \neq 0$ . E assim,

temos que:

- Se  $g(x) = 0$ , a Eq.(5) é chamada de EDO homogênea.
- Se  $g(x) \neq 0$ , a Eq.(5) é chamada de EDO não-homogênea.

Por exemplo, as equações

$$y' - y = 0 \quad (6)$$

e

$$y' - e^x y = 5 \cos x \quad (7)$$

são EDOs lineares de primeira ordem, sendo a Eq.(6) homogênea e a Eq.(7) não-homogênea.

### 2.2.1 Soluções de equilíbrio

Um ponto de equilíbrio (ou ponto crítico) de uma equação diferencial autônoma<sup>8</sup>  $y' = f(y)$  é um ponto  $y_0$  tal que  $f(y_0) = 0$ . Tais pontos determinam soluções constantes  $y(x) = y_0$  que significa que não há variação de  $y$  quando  $x$  varia, visto que  $y' = 0$ . Por essa razão, para cada ponto crítico  $y_0$ , a função  $y(x) = y_0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é chamada de **solução de equilíbrio** da equação diferencial autônoma  $y' = f(y)$  (ARAÚJO; MÁRQUEZ; HUAROTO, 2016).

### 2.2.2 Solução de uma equação diferencial linear de primeira Ordem

Nesta subseção apresentamos o clássico método de separação de variáveis e um método para resolução de uma EDO linear de primeira ordem não-homogêneas.

#### Método de separação de variáveis

Este é um método usual para resolução de EDOs lineares de primeira ordem **homogênea** quando ela pode ser reduzida à forma

$$A(x)dx + B(y)dy = 0, \quad (8)$$

---

<sup>8</sup> "As equações autônomas são equações diferenciais da forma  $\frac{dy}{dx} = f(y)$ , onde  $f$  é uma função real, diferenciável e que depende somente da variável  $y$  e não depende explicitamente da variável independente  $x$ ." (ARAÚJO; MÁRQUEZ; HUAROTO, 2016)

onde  $A$  é uma função de  $x$  e  $B$  uma função de  $y$ . Integrando diretamente a Eq.(8), temos as soluções

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c, \quad (9)$$

onde  $c$  é uma constante qualquer.

**Exemplo:**

Encontrar a solução geral da seguinte EDO

$$y' = xy \quad (10)$$

Se  $y$  é igual a zero, então  $y(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é uma solução trivial da Eq.(10). Se  $y$  é diferente de zero, separando as variáveis da Eq.(10) podemos reduzi-la a seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{y}\right) dy - xdx = 0. \quad (11)$$

Integrando diretamente a Eq.(11) temos

$$\ln |y| - \frac{x^2}{2} = c, \quad (12)$$

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + c, \quad (13)$$

Portanto, a solução explícita da Eq.(10) é dada por

$$y = e^{\frac{x^2}{2} + c}, \quad (14)$$

onde  $c$  é uma constante real.

### Método de resolução de EDOs lineares de primeira ordem não-homogênea

O fator integrante é uma função que usamos a fim de facilitar a resolução de uma EDO linear de primeira ordem **não-homogênea**.

Multiplicando a Eq.(5) por  $\left(\frac{1}{a_1(x)}\right)$ ,  $a_1(x) \neq 0$ ,  $x \in I$ , a EDO pode ser escrita como

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (15)$$

onde  $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$  e  $q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$ .

Multiplicando a EDO (15) por uma função real, não nula,  $\mu(x)$  ainda indeterminada, que será nosso fator integrante, obtemos

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x). \quad (16)$$

Considerando

$$\mu(x)p(x) = \mu'(x). \quad (17)$$

Segue que

$$\mu(x)y' + \mu(x)'y = \mu(x)q(x), \quad (18)$$

A Eq.(18) pode ser escrita como

$$(\mu(x) y)' = \mu(x)q(x). \quad (19)$$

Integrando ambos os lados da Eq.(19), segue

$$\mu(x) y = \int \mu(x) q(x)dx + c, \quad (20)$$

onde  $c$  é uma constante qualquer. Da Eq.(20) segue que

$$y = \frac{\int \mu(x) q(x)dx + c}{\mu(x)}. \quad (21)$$

O fator de integração  $\mu(x)$  é obtido da Eq.(17), podemos reescrever esta equação da seguinte maneira:

$$\frac{d \mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x). \quad (22)$$

Usando o método de separação de variável na Eq.(22) , temos:

$$\frac{d \mu(x)}{\mu(x)} = p(x)dx, \quad (23)$$

$$\ln \mu(x) = \int p(x)dx + k, \quad (24)$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx+k}. \quad (25)$$

Assim, tomando  $k = 0$ , sem perda de generalidade, temos que o fator integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \quad (26)$$

Portanto, a solução geral da Eq.(15) é:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int \mu(x)q(x)dx + c \right), \quad (27)$$

com  $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$  e  $c$  uma constante arbitrária.

**Exemplo:**

Encontrar a solução geral da EDO

$$y' = -\frac{y}{2} + x + 2. \quad (28)$$

Podemos reescrever a Eq.(28) da seguinte forma

$$y' + \frac{y}{2} = x + 2, \quad (29)$$

denotando por  $p(x) = \frac{1}{2}$  e  $q(x) = x + 2$ , vemos que estas funções são contínuas para todo  $x$  real. Um fator de integração é dado por  $\mu(x) = e^{\frac{x}{2}}$ , usando a Eq.(27) temos que

$$y = \frac{\int e^{\frac{x}{2}}(x + 2)dx}{e^{\frac{x}{2}}}, \quad (30)$$

integrando por partes,

$$y = \frac{2xe^{\frac{x}{2}} + c}{e^{\frac{x}{2}}}. \quad (31)$$

Portanto, a solução da Eq.(28) é:

$$y = 2x + ce^{-\frac{x}{2}}, \quad (32)$$

para todo  $x$  real e onde  $c$  é uma constante arbitrária.

### 2.3 O modelo para representação da despoluição de lagoas

O processo de despoluição ao qual se refere o modelo aqui estudado consiste na substituição natural e gradual da água poluída de uma lagoa, por água limpa procedente de um riacho. Bassanezi e Jr. (1988) afirmam que este é um processo lento, porém de possível efetivação caso a lagoa já não esteja "morta"(isto é, com danos extremos que a impeça de autorrecuperar-se). Neste modelo simplificado, considera-se o fluxo da água na lagoa como um problema de diluição de substâncias, não levando em consideração a sedimentação dos poluentes ou sua ação biológica. Com esse modelo é possível estimar

o tempo necessário para que uma lagoa se autorrecupere após o lançamento de uma determinada quantidade de poluente durante um determinado período. Este modelo adota as seguintes hipóteses:

1. Há um fluxo de água vindo de um rio que entra na lagoa e uma vazão<sup>9</sup> para um outro rio. As vazões, tanto de entrada como de saída, são iguais e constantes, valendo  $r$  litros por dia.
2. A água que entra na lagoa mistura-se de forma rápida e homogênea, resultando em uma distribuição uniforme de poluentes.
3. O volume ( $V_0$ ) da água da lagoa é constante.
4. Os poluentes saem da lagoa apenas pelo fluxo de saída.
5. A poluição provém dos esgotos não tratados da população que vive no entorno da mesma.

Na Tabela 4 temos, resumidamente, as constantes e variáveis que são utilizadas neste modelo.

Tabela 3 - Constantes e variáveis utilizadas na modelagem

Constante/Variáveis	Unidade de medida
$V_0$ : Volume da lagoa (em litros)	$l$
$r$ : Vazão (entrada/saída) dos rios	$l/dia$
$S_0$ : Quantidade inicial de poluentes	$mg/l$
$S_{i0}$ : Quantidade de poluentes despejado	$mg/l$
$t$ : Tempo	$dia$

Seja  $S(t)$  a quantidade de poluentes dissolvidos em uma lagoa no instante  $t$ . Suponhamos que em  $t = 0$  a lagoa em estudo contenha  $S_0$   $mg/l$  de poluentes dissolvidos, isto é,  $S(0) = S_0$ . Suponhamos também, que a água desta lagoa escoar à razão de  $r$  litros por dia ( $r > 0$ ) e que, simultaneamente e à mesma razão, exista um fluxo de água proveniente de um rio que entra na lagoa misturando-se rapidamente e de forma homogênea com o corpo d'água.

A quantidade de poluentes no instante  $t$  é igual a quantidade de poluentes que entra  $S_i(t)$  menos a que se escoar  $S_{sai}(t)$ , ou seja,

$$S_i(t) - S_{sai}(t), \quad (33)$$

---

<sup>9</sup> Vazão: É a quantidade de um determinado fluido que passa por uma seção de escoamento.

onde  $S_i(t)$  é o produto da vazão de escoamento pela quantidade de poluentes que entra e  $S_{sai}(t)$  é dado por

$$S_{sai} = r C(t), \quad (34)$$

onde  $C(t)$  é a concentração de poluentes na lagoa no instante  $t$ , por tanto a variação da quantidade de poluentes é dado por

$$S'(t) = S_i(t) - rC(t). \quad (35)$$

Por outro lado, segundo as hipóteses simplificadoras, o volume da lagoa é constante, logo a concentração de poluentes na lagoa, em qualquer instante é dado por:

$$C(t) = \frac{S(t)}{V_0}. \quad (36)$$

Substituindo a relação (36) na Eq.(35) tem-se

$$S'(t) = S_i(t) - S(t) \frac{r}{V_0}. \quad (37)$$

Da Eq.(37) e considerando a condição inicial  $S(0) = S_0$  temos um modelo para representação da despoluição para uma lagoa com volume constante é dado pelo PVI (Problema de valor inicial)

$$\begin{cases} S'(t) = S_i(t) - \frac{r}{V_0} S(t), & t > 0 \\ S(0) = S_0. \end{cases} \quad (38)$$

Na Eq.(38) temos uma equação diferencial linear, onde podemos considerar dois casos particulares, no primeiro consideramos uma entrada de poluentes constante e no segundo supomos um controle ambiental, tal que a entrada de poluentes vai diminuindo com o tempo.

(I) Suponhamos que haja uma introdução contínua de uma quantidade constante de poluentes na lagoa, ou seja,  $S_i(t) = S_{i0}$  é constante, então a Eq.(38) é do tipo malthusiano, ou seja,

$$S'(t) = S_{i0} - \frac{r}{V_0} S(t). \quad (39)$$

Denotando por  $f(S(t)) = S_{i0} - \frac{r}{V_0} S(t)$ , esta função é decrescente, pois  $f'(t) < 0$  e  $f(S(t)) = 0$  se, e somente se,  $S(t) = \frac{V_0}{r} S_{i0}$ . Indiquemos por  $S_e$  a este único ponto de

equilíbrio da Eq.(39), então

$$S_e = \frac{V_0}{r} S_{i0}, \quad (40)$$

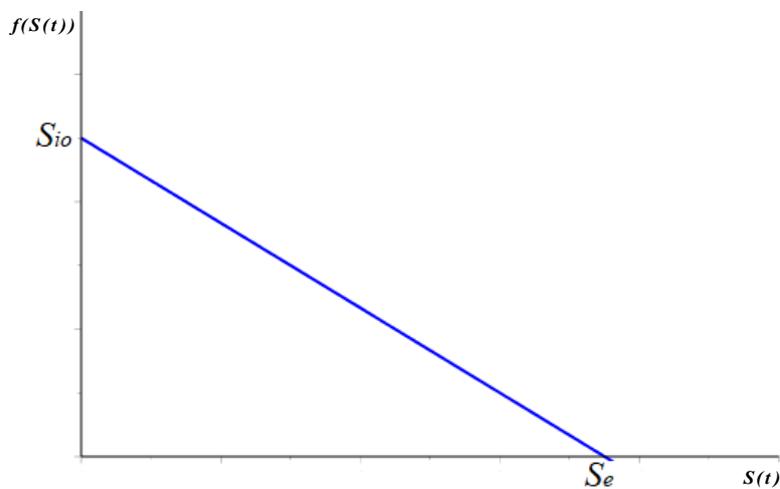
Portanto a solução de equilíbrio da Eq.(39) é

$$S_e(t) = \frac{V_0}{r} S_{i0}, \quad (41)$$

para todo  $t \geq 0$ .

A Figura 7 mostra o gráfico de  $f(S(t))$  contra  $S(t)$ .

Figura 7 - Perfil da função linear  $f(S(t))$



Fonte: A autora, 2019.

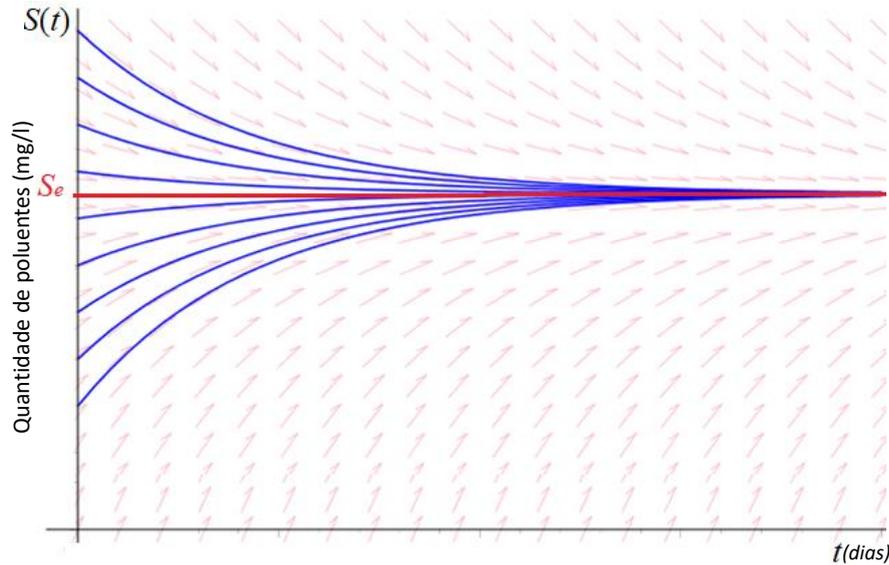
A Eq.(39) pode ser escrita como  $S'(t) = \frac{r}{V_0}(S_e - S(t))$ , daqui obtemos as seguintes informações:

- Se a quantidade de poluentes  $S(t) > S_e$ , então  $S'(t) < 0$  e  $S''(t) = -\frac{r}{V_0} S'(t) > 0$ . Logo,  $S(t)$  é uma função decrescente com concavidade voltada para cima e pelo Teorema de Existência e Unicidade (ARAÚJO; MÁRQUEZ; HUAROTO, 2016),  $S(t)$  tende a  $S_e$ .
- Se a quantidade de poluentes  $S(t) < S_e$ , então  $S'(t) > 0$  e  $S''(t) = -\frac{r}{V_0} S'(t) < 0$ . Logo,  $S(t)$  é uma função crescente com concavidade voltada para baixo e pelo Teorema e Existência e Unicidade,  $S(t)$  tende a  $S_e$ .

Na Figura 8 temos o campo direcional da EDO (39) e o perfil de algumas soluções de  $S(t)$ , onde  $S_e = \frac{V_0}{r} S_{i0}$  é uma solução trivial assintoticamente estável, isto é, a quantidade de poluentes permanece constante. Se este valor  $S_e$  é maior que as normas estipuladas pelo meio ambiente pode ocorrer um processo de eutrofização, que implica o crescimento excessivo de bactérias aeróbicas, porém aumentam as algas afetando o nível

de oxigênio necessário para preservação de peixes, entre outros.

Figura 8 - Quantidade de poluentes com introdução contínua de detritos



Fonte: A autora, 2019.

A Eq.(39) é uma EDO linear de primeira ordem que pode ser reescrita na forma

$$S'(t) + \frac{r}{V_0} S(t) = S_{i0}, \quad (42)$$

e pode ser resolvida mediante o fator de integração

$$\mu(t) = e^{\int \frac{r}{V_0} dt} = e^{\frac{r}{V_0} t}. \quad (43)$$

Multiplicando a Eq.(42) pelo fator de integração (43), tem-se

$$\mu(t) S'(t) + \frac{r}{V_0} \mu(t) S(t) = S_{i0} \mu(t). \quad (44)$$

Reescrevendo a Eq.(44) tem-se

$$(\mu(t) S(t))' = S_{i0} \mu(t), \quad (45)$$

$$\mu(t) S(t) = \int \mu(t) S_{i0} dt + c. \quad (46)$$

Como  $\mu(t) = e^{\frac{r}{V_0} t}$ , temos que

$$S(t) = \frac{1}{e^{\frac{r}{V_0} t}} \left[ \frac{S_{i0} e^{\frac{r}{V_0} t}}{r} V_0 + c \right]. \quad (47)$$

Logo, a solução geral da Eq.(39) é dada por

$$S(t) = \frac{V_0}{r} S_{i0} + c e^{-\frac{r}{V_0} t}, \quad (48)$$

onde  $c$  é uma constante real, a qual é obtida ao considerar a condição inicial  $S(0) = S_0$  na Eq.(48), então

$$S(0) = \frac{V_0}{r} S_{i0} + c = S_0. \quad (49)$$

Assim, temos que:

$$c = S_0 - \frac{V_0}{r} S_{i0}. \quad (50)$$

Portanto a quantidade de poluentes no instante  $t$ ,  $t \geq 0$ , é dada por

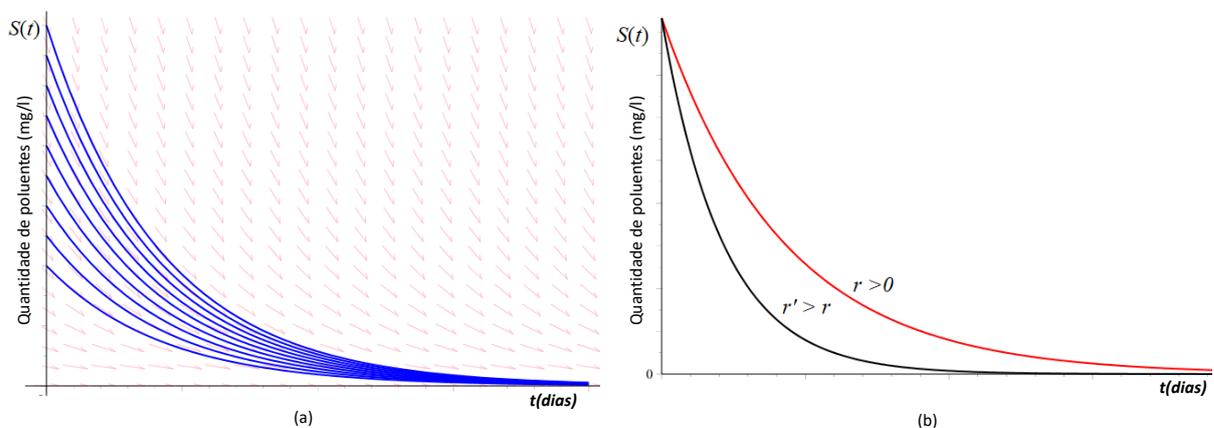
$$S(t) = \frac{V_0}{r} S_{i0} + \left( S_0 - \frac{V_0}{r} S_{i0} \right) e^{-\frac{r}{V_0} t}. \quad (51)$$

Observação: Vamos supor que filtros são instalados na entrada da lagoa e a poluição seja residual, isto é,  $S_{i0} = 0$ , então a única solução de equilíbrio é  $S_e = 0$  e substituindo o valor de  $S_{i0}$  na Eq.(51) tem-se

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{r}{V_0} t}. \quad (52)$$

A Figura 9.(a) mostra o perfil de  $S(t)$  dado pela Eq.(52) para diferentes condições iniciais, onde podemos observar que para todas elas a quantidade de poluentes tende a zero a medida que o tempo passa. Na Figura 9.(b) temos também o perfil  $S(t)$  para mesma equação, contudo considerou-se uma única condição inicial e duas vazões diferentes, evidenciando assim que  $S(t)$  tende mais rapidamente a zero quando  $r$  aumenta. Dito de outro modo, a despoluição da lagoa pode ser acelerada com o aumento da vazão  $r$ .

Figura 9 - Aspecto de  $S(t)$  quando cessada a emissão de poluentes.



Fonte: A autora, 2019

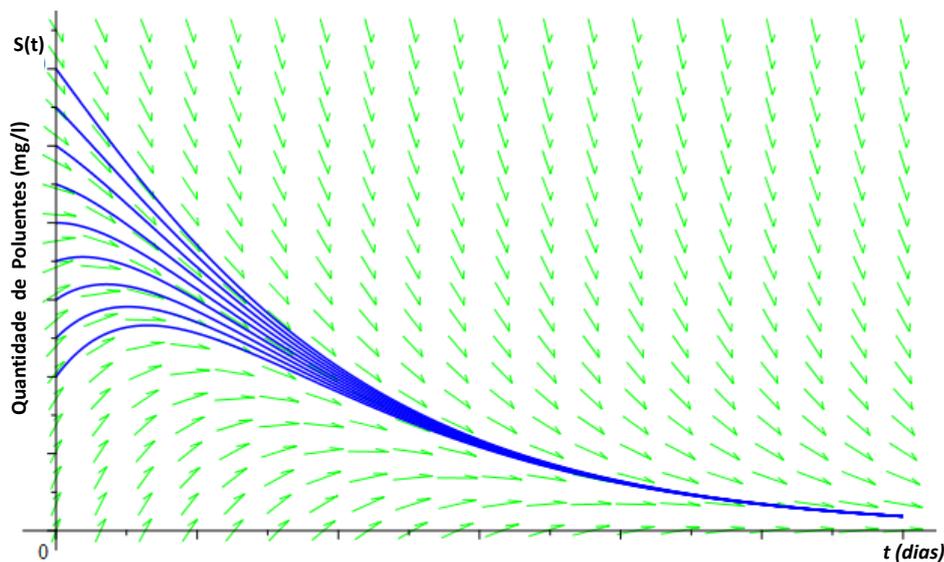
(II) Suponhamos que a lagoa continua sendo poluída, mas agora a um ritmo de-

crecente que pode ser representado pela equação  $S_i(t) = S_{i0} e^{-bt}$ ,  $b > 0$ , substituindo na Eq.(38), a equação resultante é uma equação diferencial linear da forma

$$S'(t) + \frac{r}{V_0} S(t) = S_{i0} e^{-bt}. \quad (53)$$

A Figura 10 apresenta o campo direcional da EDO (53), assim como o perfil de algumas soluções de  $S(t)$  para o referido lançamento de poluentes. Podemos observar que  $S(t)$  tende a zero quando  $t$  cresce e, portanto, a lagoa será despoluída passado algum tempo.

Figura 10 - Campo direcional da EDO (53) e perfil de algumas soluções.



Fonte: A autora, 2019.

A solução da equação (53) é dada da seguinte forma:

- Se  $b \neq \frac{r}{V_0}$ , então temos a equação

$$S'(t) + \frac{r}{V_0} S(t) = S_{i0} e^{-bt}, \quad (54)$$

que é uma EDO linear de primeira ordem que pode ser resolvida por meio do seguinte fator de integração

$$\mu(t) = e^{\int \frac{r}{V_0} t} = e^{\frac{r}{V_0} t}. \quad (55)$$

Multiplicando a Eq.(54) pelo fator de integração (55) obtido na Eq.(55), tem-se

$$\mu(t) S'(t) + \mu(t) \frac{r}{V_0} S(t) = \mu(t) S_{i0} e^{-bt} \quad (56)$$

ou ainda

$$(\mu(t) S(t))' = \mu(t) S_{i0} e^{-bt}. \quad (57)$$

Integrando a Eq.(101) na variável t tem-se

$$\mu(t) S(t) = \int \mu(t) S_{i0} e^{-bt} dt + c, \quad (58)$$

onde c é uma constante qualquer. Segue que

$$S(t) = \frac{\int \mu(t) S_{i0} e^{-bt} dt + c}{\mu(t)}, \quad (59)$$

$$S(t) = \frac{\int e^{\frac{r}{V_0}t} S_{i0} e^{-bt} dt}{e^{\frac{r}{V_0}t}} = \frac{S_{i0} \int e^{(\frac{r-bV_0}{V_0})t} dt + c}{e^{\frac{r}{V_0}t}}. \quad (60)$$

Portanto,

$$S(t) = S_{i0} \left( \frac{V_0}{r - b V_0} \right) e^{-bt} + c e^{-\frac{r}{V_0}t}. \quad (61)$$

Como  $S(0) = S_0$ , temos

$$S(0) = S_{i0} \left( \frac{V_0}{r - b V_0} \right) + c = S_0, \quad (62)$$

de onde obtemos o valor da constante

$$c = S_0 - S_{i0} \left( \frac{V_0}{r - b V_0} \right). \quad (63)$$

Substituindo a Eq.(63) na Eq.(61) segue que

$$S(t) = S_{i0} \left( \frac{V_0}{r - b V_0} \right) e^{-bt} + \left[ S_0 - S_{i0} \left( \frac{V_0}{r - b V_0} \right) \right] e^{-\frac{r}{V_0}t}. \quad (64)$$

- Se  $b = \frac{r}{V_0}$ , então temos a seguinte EDO linear de primeira ordem

$$S'(t) + \frac{r}{V_0} S(t) = S_{i0} e^{-\frac{r}{V_0}t} \quad (65)$$

que também pode ser resolvida mediante o fator de integração (55). Segue que,

$$S(t) = \frac{\int \mu(t) S_{i0} e^{-\frac{r}{V_0}t} dt + c}{\mu(t)} \quad (66)$$

$$S(t) = \frac{\int e^{\frac{r}{V_0}t} S_{i0} e^{-\frac{r}{V_0}t} dt + c}{e^{\frac{r}{V_0}t}} = \frac{S_{i0} \int dt + c}{e^{\frac{r}{V_0}t}} \quad (67)$$

Portanto,

$$S(t) = (S_{i0} t + c) e^{-\frac{r}{V_0} t} \quad (68)$$

Como  $S(0) = S_0$ , temos que

$$S(0) = c = S_0 \quad (69)$$

Logo, a solução da Eq.(65) é dada por

$$S(t) = (S_{i0} t + S_0) e^{-\frac{r}{V_0} t} \quad (70)$$

Assim temos que a solução da Eq.(53) é:

$$S(t) = \begin{cases} S_{i0} \left( \frac{V_0}{r-b V_0} \right) e^{-bt} + \left[ S_0 - S_{i0} \left( \frac{V_0}{r-b V_0} \right) \right] e^{-\frac{r}{V_0} t}, & \text{se } b \neq \frac{r}{V_0}, \\ \text{ou} \\ (S_0 + S_{i0} t) e^{-bt}, & \text{se } b = \frac{r}{V_0}. \end{cases} \quad (71)$$

O modelo estudado nesta seção foi reportado por Bassanezi e Jr. (1988), mas no presente trabalho ele foi discutido mais detalhadamente em relação a forma concisa apresentada pelos autores.

Cabe ressaltar que para evitar um processo de eutrofização é necessário medir a quantidade de oxigênio dissolvido no recurso hídrico, a fim de fazer as intervenções de controle cabíveis.

## 2.4 O modelo de Streeter-Phelps

O modelo de Streeter-Phelps foi idealizado no ano 1925 pelo engenheiro sanitário Harold Warner Streeter (1884 – 1961) e pelo químico especialista em saneamento Earle Bernard Phelps (1876 – 1953). Este modelo foi uma das primeiras formulações matemáticas utilizadas para o cálculo do perfil de oxigênio dissolvido (*OD*) após o lançamento de matéria orgânica em um corpo hídrico (ANDRADE, 2010), tendo sido baseado nos processos de autodepuração<sup>10</sup> e de reaeração atmosférica (BRIAN; JR, 2002). Sua primeira aplicação foi em um estudo no Rio Ohio nos Estados Unidos com o objetivo de aumentar

---

<sup>10</sup> Autodepuração: Processo natural, no qual cargas poluidoras, de origem orgânica, lançadas em um corpo d'água são neutralizadas (ANDRADE, 2010).

a eficiência das ações a serem tomadas no controle da poluição (PHELPS; STREETER, 1958).

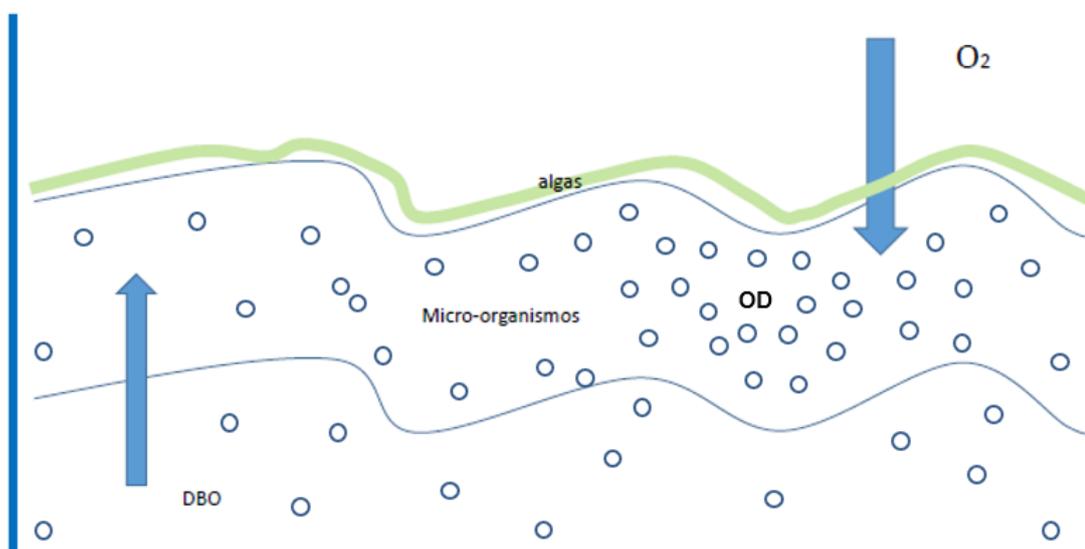
Com o avanço tecnológico foram desenvolvidos outros modelos de estudo da qualidade da água, tais como QUAL2E (BROWN BARNWELL, 1987), DoSag (BURKE, 2004), WASP (WOOL *et al.*, 2001) e QUAL-2K (CHAPRA *et al.*, 2006) que simulam uma maior variedade de processos e parâmetros. No entanto, Gotovtsev (2010) relata que mesmo com o surgimento de modelos muito mais complexos, as equações de Streeter-Phelps formam a base dos modelos modernos.

Um corpo d'água pode ser visto como um sistema biorreator contínuo (reator bioquímico ou biológico) nos quais ocorrem uma série de reações químicas catalisadas por biocatalizadores (células vivas) (RUEDA, 2010). Entretanto, uma descrição minuciosa resulta ser difícil de modelar e fazer previsões, então são desconsiderados vários fatores, conforme afirmam Bassanezi e Jr. (1988).

Nas equações de Streeter-Phelps (1958) aparecem o parâmetro **Oxigênio Dissolvido (OD)** que é a concentração de oxigênio a qual vai medir a qualidade da água, isto é, quanto mais alta seja a oxigenação, melhor será a qualidade da água, caso contrário os peixes e outros organismos não sobreviriam; e o parâmetro **Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO)** que indica a quantidade de OD consumido pelas bactérias (micro-organismos) para a decomposição da matéria orgânica presente na água (ANDRADE, 2010), se a demanda é alta, então o nível de DBO será alto.

Na Figura 11 temos a ilustração da seção transversal de um recurso hídrico mostrando o mecanismo de entrada e saída de oxigênio na água.

Figura 11 - Seção transversal de um recurso hídrico



Fonte: A autora, 2020.

## Modelo Matemático de Streeter-Phelps

O modelo de Streeter-Phelps considera no balanço do oxigênio apenas os seguintes processos:

(I) A Cinética de Desoxigenação que consiste no consumo do oxigênio pelas bactérias existentes no meio fluido para a decomposição da matéria orgânica.

(II) A Cinética de Reaeração (ou Reoxigenação), que consiste na produção de oxigênio pela reaeração atmosférica, ou seja, pela troca de gases entre o meio líquido e a atmosfera (MELO, 2006).

Sperling (2007) ressalta que estas equações são válidas apenas para condições aeróbias, ou seja, enquanto a disponibilidade de oxigênio for igual ou maior que o seu consumo. Ele ressalta também, que para este modelo, adota-se as seguintes simplificações:

- Sistema unidimensional<sup>11</sup>;
- Regime permanente de escoamento<sup>12</sup> com vazão e seção constante;
- Lançamento do efluente<sup>13</sup> pontual e constante.

### 2.4.1 Formulação do modelo matemático simplificado de Streeter-Phelps

As equações matemáticas do modelo de Streeter-Phelps permitem calcular a concentração da Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO), o déficit de Oxigênio Dissolvido (OD) e a concentração de OD presente na água (THOMANN, 1989).

Abaixo segue a explicação dessas equações, antecedida pela Tabela 4 que contém a notação das Constantes/Variáveis a serem consideradas no modelo simplificado e suas unidades de medidas.

---

<sup>11</sup> Sistema unidimensional: Sistema que envolve uma só dimensão.

<sup>12</sup> Regime permanente de escoamento: É quando as propriedades de um determinado fluido em uma dada seção do escoamento não se alteram com o decorrer do tempo, como por exemplo a viscosidade, a densidade, etc.

<sup>13</sup> Efluente: Resíduo, proveniente da atividade humana, lançado no ambiente na forma de líquidos ou de gases. O efluente é considerado pontual quando seu foco é facilmente identificável como emissor de poluentes (Exemplos: águas residuais e/ou industriais); e difuso, quando não existe precisamente um foco de poluição (Exemplo: drenagens agrícolas e chorume.).

Tabela 4 - Constantes e variáveis usadas no Modelo Streeter-Phelps

Constante/Variáveis	Unidade de medida
$L(t)$ : Concentração de DBO em relação ao tempo	$mg/l$
$L_0$ : DBO inicial	$mg/l$
$D(t)$ : Déficit de OD em relação ao tempo	$mg/l$
$D_0$ : Déficit inicial de OD	$mg/l$
$C(t)$ : Concentração de OD em relação ao tempo	$mg/l$
$C_0$ : Concentração inicial de OD	$mg/l$
$C_s$ : Concentração de Saturação de OD	$mg/l$
$k_d$ : Coeficiente de Desoxigenação	$dia^{-1}$
$k_r$ : Coeficiente de Reoxigenação	$dia^{-1}$
$H$ : Profundidade do corpo d'água	$m$
$T$ : Temperatura do corpo d'água	$^{\circ}C$
$t$ : Tempo	$dias$

### (I) Cinética de Desoxigenação

De acordo com o modelo de Streeter-Phelps, a demanda bioquímica de oxigênio (DBO), ou em outras palavras a taxa de desoxigenação  $dL/dt$ , é proporcional à concentração da matéria orgânica presente em um dado instante de tempo. Portanto, a variação de concentração da DBO é dada pela seguinte equação

$$\frac{dL}{dt} = -k_d L, \quad (72)$$

onde  $L$  é a DBO em  $mg/l$ ,  $k_d$  é o coeficiente de desoxigenação em  $dia^{-1}$  e  $t$  é o tempo em  $dias$ .

A Eq.(72) é uma equação diferencial de variáveis separáveis. Considerando que a descarga inicial dos efluentes corresponde a  $L_0$  ( $mg/l$ ), com  $L_0 > 0$ , então temos o PVI

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -k_d L, \\ L(0) = L_0. \end{cases} \quad (73)$$

Resolvendo o PVI (73), tem-se a quantidade de oxigênio dissolvido consumido pelas bactérias presentes no meio no tempo  $t$

$$L(t) = L_0 e^{-k_d t}, \quad (74)$$

onde  $L_0$  é a concentração do DBO em  $t = 0$ , em  $mg/l$ .

Observe na Eq.(74) que o limite de  $L(t)$  quando o tempo  $t$  aumenta tende a zero,

ou seja, a quantidade de oxigênio dissolvido consumido vai desaparecendo à medida que o tempo passa.

O **coeficiente de desoxigenação**  $k_d$ , segundo as normas da EPA<sup>14</sup> (1985), apud Sperling (1996), Thomann e Mueller (1987) pode ser calculado em função da profundidade do corpo d'água  $H$ , se  $H \leq 2,5m$ , dado pela Eq.(75)

$$k_d = 0,3 (H/2,5)^{-0,434}, \quad (75)$$

para  $H \leq 2,5 m$ .

## (II) Cinética de Reaeração (ou Reoxigenação)

O consumo de oxigênio dissolvido no meio líquido ocorre simultaneamente à reação de reoxigenação desse meio através de reações exógenas<sup>15</sup> onde o oxigênio passa da atmosfera para água (ANDRADE, 2010). De acordo com Streeter e Phelps (1958), esta cinética de reaeração é representada pela seguinte Eq.(76)

$$\frac{dL(t)}{dt} = -k_r D(t), \quad (76)$$

onde  $k_r$  é o coeficiente de reaeração (ou reoxigenação), em  $dia^{-1}$ , e  $D(t)$  é a diferença entre a concentração de saturação de oxigênio<sup>16</sup> ( $C_s$ ) no corpo d'água e a concentração de oxigênio ( $C(t)$ ) existente no tempo  $t$ , ou seja:

$$D(t) = C_s - C(t), \quad (77)$$

em outras palavras,  $D(t)$  é o déficit de oxigênio dissolvido, em  $mg/l$ .

Segundo Sperling (2007), o coeficiente de reoxigenação  $k_r$  depende da característica do corpo d'água. Na Tabela 5 são apresentados os valores usuais de  $k_r$ , que são determinados experimentalmente.

---

<sup>14</sup> EPA: Agência de Proteção Ambiental dos Estados Unidos (Environmental Protection Agency, EPA ou às vezes USEPA) é uma agência federal do governo dos Estados Unidos da América, encarregada de proteger a saúde humana e o meio ambiente: ar, água e terra.

<sup>15</sup> Exógeno: Que é característico do exterior, que provém do exterior (lado de fora).

<sup>16</sup> A expressão "*saturação de oxigênio*" refere a quantidade de oxigênio presente na água limpa, ou seja, sem a poluição (HUBER, 1993).

Tabela 5 - Valores usuais de  $k_r$  considerando a profundidade  $H$  do corpo d'água.

Corpo d'água	$k_r$	
	Profundo ( $H > 1,5m$ )	Raso ( $H < 1,5m$ )
Pequenas lagoas	0,12	0,23
Rios vagarosos, grandes lagos	0,23	0,37
Grandes rios com baixas velocidades	0,37	0,46
Grandes rios com velocidade normal	0,46	0,69
Rios rápidos	0,69	1,15
Corredeiras e quedas d'água	$> 1,15$	$> 1,61$

Fonte: Adaptado de Von Sperling(2007)

### ***Déficit de Oxigênio Dissolvido***

Andrade (2010) ressalta que o déficit de oxigênio dissolvido corresponde a resultante da soma dos efeitos de desoxigenação e reaeração. Sendo assim, considerando-se apenas os mecanismos de consumo de oxigênio pela DBO devida a um carga poluidora (cinética de desoxigenação) e a difusão do oxigênio da atmosfera do ar para água (cinética de reaeração), obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{dD}{dt} = k_d L - k_r D. \quad (78)$$

Substituindo a Eq.(74) na Eq.(78) temos a EDO linear não homogênea de 1ª ordem

$$\frac{dD}{dt} = k_d (L_0 e^{-k_d t}) - k_r D. \quad (79)$$

Considerando a condição  $D(0) = D_0$ , onde  $D_0$  é o déficit de oxigênio no instante  $t = 0$ , resulta o PVI

$$\begin{cases} \frac{dD}{dt} + k_r D = k_d L_0 e^{-k_d t}, \\ D(0) = D_0, \end{cases} \quad (80)$$

onde a Eq.(80) é uma EDO de primeira ordem e pode portanto, ser resolvida usando o método do fator integrante dado por  $e^{\int k_r dt} = e^{k_r t}$ . Assim, temos

$$\frac{dD}{dt} e^{k_r t} + k_r D e^{k_r t} = k_d L_0 e^{-k_d t} e^{k_r t}, \quad (81)$$

ou

$$\frac{dD}{dt} e^{k_r t} + D k_r e^{k_r t} = k_d L_0 e^{(k_r - k_d) t}. \quad (82)$$

Como  $\frac{d[D e^{k_r t}]}{dt} = \frac{dD}{dt} e^{k_r t} + D k_r e^{k_r t}$  a Eq.(82) pode ser escrita como

$$\frac{d[D e^{k_r t}]}{dt} = k_d L_0 e^{(k_r - k_d) t}. \quad (83)$$

Daí, temos:

- Se  $k_r \neq k_d$

Integrando ambos os lados da Eq.(83) na variável  $t$ , tem-se

$$\int d[D e^{k_r t}] = k_d L_0 \int e^{(k_r - k_d) t} dt, \quad (84)$$

ou ainda,

$$D e^{k_r t} = \left( \frac{k_d L_0}{k_r - k_d} \right) e^{(k_r - k_d) t} + c. \quad (85)$$

Considerando a condição inicial  $D(0) = D_0$ , na Eq.(85)

$$D_0 e^0 = \left( \frac{k_d L_0}{k_r - k_d} \right) e^0 + c, \quad (86)$$

onde, o valor da constante  $c$  pode ser dado diretamente da Eq.(86) como

$$c = D_0 - \left( \frac{k_d L_0}{k_r - k_d} \right). \quad (87)$$

Substituindo a Eq.(87) na Eq.(85), obtemos o déficit de oxigênio dissolvido dado pela equação

$$D(t) = \left( \frac{k_d L_0}{k_r - k_d} \right) e^{-k_d t} - \left( \frac{k_d L_0}{k_r - k_d} - D_0 \right) e^{-k_r t}, \quad (88)$$

para  $t \geq 0$ .

- Se  $k_r = k_d$

Nesse caso a Eq.(83) pode ser posta na forma

$$d [D e^{k_d t}] = k_d L_0 dt. \quad (89)$$

Integrando ambos os lados da Eq.(89) na variável  $t$ , tem-se:

$$D e^{k_d t} = k_d L_0 t + c. \quad (90)$$

Considerando a condição inicial na Eq.(90) obtemos que  $D_0 = c$ , portanto o déficit de oxigênio dissolvido é dado pela seguinte equação

$$D(t) = (k_d L_0 t + D_0) e^{-k_d t}; \quad \text{para } t \geq 0. \quad (91)$$

Assim temos que a solução da Eq.(83) é

$$D(t) = \begin{cases} \left( \frac{k_d L_0}{k_r - k_d} \right) e^{-k_d t} - \left( \frac{k_d L_0}{k_r - k_d} - D_0 \right) e^{-k_r t}, & \text{se } k_r \neq k_d, \\ \text{ou} \\ (k_d L_0 t + D_0) e^{-k_d t}, & \text{se } k_r = k_d. \end{cases} \quad (92)$$

### ***Concentração de Oxigênio Dissolvido***

Da Eq.(77) obtém-se a Concentração de Oxigênio Dissolvido no tempo  $C(t)$  dada por

$$C(t) = C_s - D(t). \quad (93)$$

Substituindo a Eq.(92) na Eq.(93) obtemos a concentração de oxigênio dissolvido no tempo  $t$ , dada por

$$C(t) = \begin{cases} C_s - \left( \frac{k_d L_0}{k_r - k_d} \right) e^{-k_d t} + \left( \frac{k_d L_0}{k_r - k_d} - D_0 \right) e^{-k_r t}, & \text{para } k_r \neq k_d, \\ \text{ou} \\ C_s - (k_d L_0 t + D_0) e^{-k_d t}, & \text{para } k_r = k_d. \end{cases} \quad (94)$$

Segundo Sperling (2007), a concentração de saturação de oxigênio  $C_s$  depende da altitude e da temperatura da água. A Tabela 6 apresenta valores usuais da concentração de saturação de oxigênio levando em conta esses parâmetros.

Tabela 6 - Concentração de Saturação Oxigênio ( $C_s$ ) ( $mg/l$ )

Concentração de Saturação de Oxigênio ( $mg/l$ )				
Altitude \ Temperatura da água	0 m	500 m	1000 m	1500 m
10 °C	11,3	10,7	10,1	9,5
11 °C	11,1	10,5	9,9	9,3
12 °C	10,8	10,2	9,7	9,1
13 °C	10,6	10	9,5	8,9
14 °C	10,4	9,8	9,3	8,7
15 °C	10,2	9,7	9,1	8,6
16 °C	10	9,5	8,9	8,4
17 °C	9,7	9,2	8,7	8,2
18 °C	9,5	9	8,5	8
19 °C	9,4	8,9	8,4	7,9
20 °C	9,2	8,7	8,2	7,7
21 °C	9	8,5	8	7,6
22 °C	8,8	8,3	7,9	7,4
23 °C	8,7	8,2	7,8	7,3
24 °C	8,5	8,1	7,6	7,1
25 °C	8,4	8	7,5	7,1
26 °C	8,2	7,8	7,3	6,9
27 °C	8,1	7,7	7,2	6,8
28 °C	7,9	7,5	7,1	6,6
29 °C	7,8	7,4	7	6,6
30 °C	7,6	7,2	6,8	6,4

Fonte: Adaptado de Sperling(2007)

No próximo capítulo estão registrados os resultados de algumas simulações numéricas com os dados da Lagoa de Maricá considerando os modelos de despoluição anteriormente descritos nesse capítulo. Mas, antes das simulações, fez-se necessário conhecer os valores limites de poluentes, oxigênio dissolvido e demanda bioquímica de oxigênio para a preservação do ambiente aquático.

### 3 ALGUMAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo são apresentados algumas simulações numéricas para a representação da despoluição de lagoas considerando dados reais da Lagoa de Maricá e dados fictícios para a análise da modelagem.

As simulações levam em conta os valores limites para preservação do meio ambiente aquático estipulados pela Resolução 357/2005 da Comissão Nacional do Meio Ambiente (CONAMA) para as classes de cursos de água doce, assim como, os critérios de qualidade da água descritos por Regalado; Peralta e González (2008). Estes dados foram tabulados e apresentados na Seção 3.1. Na Seção 3.2 encontra-se os resultados da simulação da despoluição da Lagoa de Maricá em função do tempo pelos modelos descritos pelas equações (51), (52) e (71), enquanto na Seção 3.3 consta os resultados da análise da capacidade de autodepuração da Lagoa de Maricá a partir do modelo de Streeter-Phelps representado pelas equações (74) e (94).

#### 3.1 Qualidade da água e valores limites para preservação do ambiente aquático

A qualidade da água de um recurso hídrico pode ser classificada de acordo com o nível da Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO) e do Oxigênio Dissolvido (OD) presente nela, como podemos observar na Tabela 7 e na Tabela 8, respectivamente.

Na Tabela 7 podemos observar que quanto menor for o nível de DBO da água melhor será sua qualidade. Uma baixa demanda bioquímica de oxigênio indica que pouco oxigênio dissolvido na água foi consumido por bactérias existentes na degradação de resíduos orgânicos, ou seja, há pouco material orgânico na água.

Tabela 7 - Nível de DBO e qualidade da água

NÍVEL DBO ( <i>mg/l</i> )	QUALIDADE DA ÁGUA
1,0 – 2,0	Muito Bom: Os resíduos orgânicos presentes na amostra de água é quase nulo.
3,0 – 5,0	Aceitável: Moderadamente limpa.
6,0 – 9,0	Ruim: algo contaminado, indica que há matéria orgânica na água e que as bactérias estão fazendo decomposição.
10,0 ou mais.	Muito ruim: muito contaminado, contém resíduos orgânicos.

Fonte: Regalado; Peralta e González (2008)

Já na Tabela 8 vemos que quanto menor o nível de OD pior é a qualidade da água. Quando existe muita matéria orgânica na água há um grande consumo de oxigênio pelas

bactérias para decomposição, isto resulta baixos níveis de oxigênio dissolvido na água.

Tabela 8 - Nível de OD presente na água e sua classificação em relação a qualidade.

NÍVEL OD ( <i>mg/l</i> )	QUALIDADE DA ÁGUA
0,0 – 4,0	Ruim: algumas populações de peixes e macroinvertebrados começarão a diminuir.
4,1 – 7,9	Aceitável.
8,0 – 12,0	Bom.
12,0 ou mais	Repita o teste: a água pode estar aerada artificialmente.

Fonte: Regalado; Peralta e González (2008)

A CONAMA (2005) classifica os corpos de água doce de acordo com a finalidade a qual ela pode ser destinada sendo que algumas classes podem ser destinadas ao consumo humano enquanto outras, apenas à navegação e harmonia paisagística como pode ser observado na Tabela 9.

Tabela 9 - Classes de curso d'água doce

Classe	As águas que podem ser destinadas:
1	<ul style="list-style-type: none"> <li>a) ao abastecimento para consumo humano, após tratamento simplificado;</li> <li>b) à proteção das comunidades aquáticas;</li> <li>c) à recreação de contato primário, tais como natação, esqui aquático e mergulho, conforme Resolução CONAMA no 274, de 2000;</li> <li>d) à irrigação de hortaliças que são consumidas cruas e de frutas que se desenvolvam rentes ao solo e que sejam ingeridas cruas sem remoção de película; e</li> <li>e) à proteção das comunidades aquáticas em Terras Indígenas.</li> </ul>
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>a) ao abastecimento para consumo humano, após tratamento convencional;</li> <li>b) à proteção das comunidades aquáticas;</li> <li>c) à recreação de contato primário, tais como natação, esqui aquático e mergulho;</li> <li>d) à irrigação de hortaliças, plantas frutíferas e de parques, jardins, campos de esporte e lazer, com os quais o público possa vir a ter contato direto; e</li> <li>e) à aquicultura e à atividade de pesca.</li> </ul>
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>a) ao abastecimento para consumo humano, após tratamento convencional ou avançado;</li> <li>b) à irrigação de culturas arbóreas, cerealíferas e forrageiras;</li> <li>c) à pesca amadora;</li> <li>d) à recreação de contato secundário; e</li> <li>e) à dessedentação de animais.</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>a) à navegação; e</li> <li>b) à harmonia paisagística.</li> </ul>

Fonte: (CONAMA, 2005)

Na Tabela 10 temos a concentração máxima de poluentes permitida num curso d'água de acordo com a CONAMA (2005), assim como o mínimo permitido para OD e o máximo para DBO. Além disso, considerando o OD e a DBO permissível para cada classe foi possível classificar a qualidade da água dentro das classes.

Tabela 10 - Concentração permitida de poluentes, OD, DBO e qualidade da água de acordo com a Classe do curso d'água águas doces.

Classe* (Águas Doces)	Sólidos dissolvidos totais*: ( <i>Poluentes</i> ) <sub>Máx</sub> (mg/l)	OD* <sub>Mín</sub> (mg/l)	DBO* <sub>Máx</sub> (mg/l)	Qualidade da água**.
1	500	6	3	Aceitável
2	500	5	5	Aceitável
3	500	4	10	Ruim
4	-	2	10	Ruim

Fonte: \*(CONAMA, 2005)

\*\* (REGALADO; PERALTA; GONZÁLEZ, 2008)

### 3.2 Um modelo para representação da despoluição da Lagoa de Maricá

Para adaptar o modelo para representação da despoluição de lagoas dado pela Eq.(52) à Lagoa de Maricá, são considerados os dados registrados por Rosman (2007), Guerra *et al.* (2011) e SEMADS (2009).

Rosman (2007) considera que o valor da vazão média ao norte da Lagoa de Maricá é de  $0,6525 \text{ m}^3/\text{s}$ , o que equivale<sup>17</sup> a  $5,6376 \cdot 10^7 \text{ l}/\text{dia}$ . Além disso, no mesmo trabalho, o balanço hídrico do sistema lagunar de Maricá foi considerado nulo, ou seja, os valores da vazão da água saindo do sistema e o valor da vazão da água entrando no sistema eram iguais o que de fato, constitui uma simplificação da realidade, mas que em algumas épocas do ano essa diferença pode ser mesmo negligenciável. Com base nestas informações, consideraremos que as vazões de entrada e saída da água na Lagoa de Maricá são iguais à  $r = 5,6376 \cdot 10^7 \text{ l}/\text{dia}$ .

A partir daí, ficam estabelecidas as condições simplificadoras descritas na seção 2.3 em relação ao modelo para representação da despoluição de lagoas, com exceção da hipótese número 2 (dois):

1. Existe um fluxo de água que entra na lagoa, proveniente do rio Mombuca, e uma vazão para a Lagoa da Barra através do canal do Boqueirão. As vazões de entrada e saída são iguais e constantes, valendo  $r = 5,6376 \cdot 10^7 \text{ l}/\text{dia}$  (ROSMAN, 2007);

<sup>17</sup>  $1 \text{ m}^3/\text{s} = 10^3 \text{ l}/\text{s} \Rightarrow 0,6525 \text{ m}^3/\text{s} = 652,5 \text{ l}/\text{s}$

$1 \text{ dia} = 24 \text{ h} = 1440 \text{ min} = 86400 \text{ s} \Rightarrow \text{Para } 1 \text{ dia} \text{ temos } (86400) \cdot 652,5 \text{ l} = 5,6376 \cdot 10^7 \text{ l}$

2. Quando a água do rio Mumbuca entra na Lagoa de Maricá supõe-se que ela mistura-se de maneira homogênea com a água da lagoa, havendo uma distribuição uniforme dos poluentes;
3. O volume da água da Lagoa de Maricá é constante e igual a  $2,4 \cdot 10^{10} l$  (Tabela 1);
4. Os poluentes saem da Lagoa de Maricá apenas pelo fluxo de saída que é o canal do Boqueirão;
5. A poluição provém dos esgotos não tratados da população que vive no entorno da Lagoa de Maricá. (GUERRA et al., 2011)

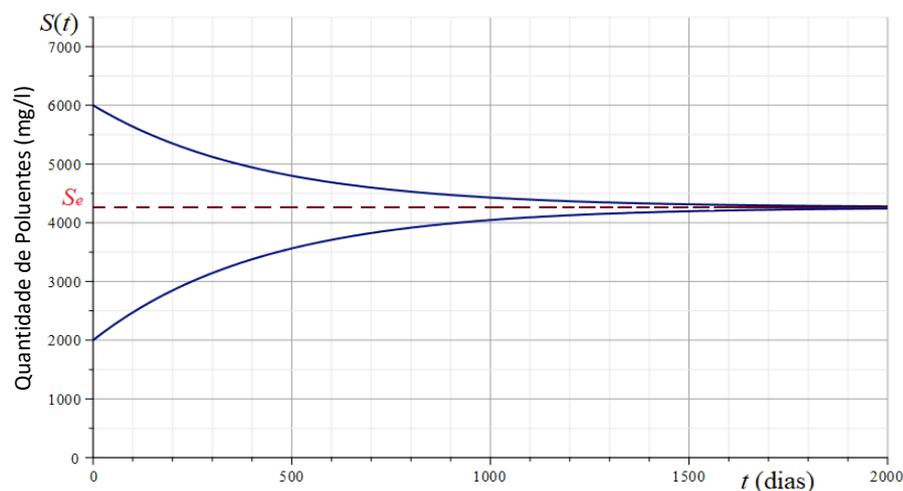
A Tabela 11 mostra os dados da Lagoa de Maricá a serem considerados na simulação do modelo de representação da despoluição de lagoas dado pela Eq.(38).

Tabela 11 - Dados da Lagoa de Maricá a serem considerados para o modelo de representação da despoluição de lagoas

DADOS DA LAGOA	FONTE
$V_0 = 2,4 \cdot 10^{10} l$	SEMADS (2009).
$r = 5,6376 \cdot 10^7 l/dia$	ROSMAN (2007).
$S_0 = 2000 mg/l$	Valor fictício.
$S_{i0} = 10 mg/l$	Valor fictício.

A Figura 12 mostra o perfil da representação da despoluição da Lagoa de Maricá considerando a Eq.(51) com os dados da Tabela 11 incluindo a condição inicial  $S_0 = 6000 mg/l$  para simularmos um resultado também para  $S_0 > S_e = 4257 mg/l$ .

Figura 12 - Perfil da poluição em relação ao tempo quando há introdução contínua de uma quantidade constante de poluente



Fonte: A autora, 2019.

Como podemos observar na Figura 12, ao passar aproximadamente 1600 *dias* ( $\approx 4,5$  *anos*)  $S(t)$  tende a se estabilizar na solução de equilíbrio  $S_e = 4257$  *mg/l*. Entretanto, de acordo com a Resolução 357/2005 do Conselho Nacional do Meio Ambiente (CONAMA), para se garantir a preservação das comunidades aquáticas e atividades de recreação (Classes 1, 2 e 3) o valor máximo de poluentes permitido é 500 *mg/l* (Tabela 10). Ou seja, a vida aquática da Lagoa de Maricá não poderá ser restaurada com o passar do tempo caso haja essa introdução de uma quantidade constante de poluentes na lagoa. Neste caso ocorre um processo de eutrofização.

Em contrapartida, caso não haja mais introdução de poluentes na lagoa, na Eq.(52) obtivemos

$$S(t) = 2000 e^{-0,002349t}. \quad (95)$$

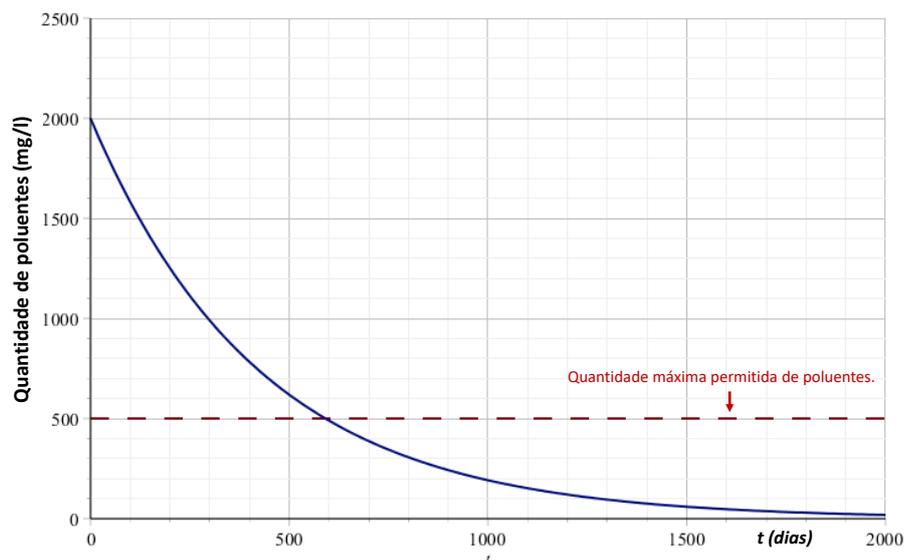
Tomando  $S(t) = 500$  *mg/l*, nível máximo de poluentes permitido para garantir a preservação da vida aquática (CONAMA, 2005), obtemos da Eq.(95) que este valor é alcançado depois de transcorridos aproximadamente  $t = 590$  *dias* ( $\approx 1,6$  *anos*).

$$2000 e^{-0,002349t} = 500, \quad (96)$$

$$t = -\frac{\ln \frac{1}{4}}{0,002349} \approx 590 \text{ dias}. \quad (97)$$

A Figura 13 mostra o comportamento da poluição em função do tempo dado na Eq.(95). Como se pode notar a medida que o tempo passa a poluição tende a zero. Isto indica que o problema de poluição na Lagoa de Maricá pode ser contornado caso cesse o lançamento de poluentes em suas águas.

Figura 13 - Perfil da poluição quando cessa a introdução de poluentes



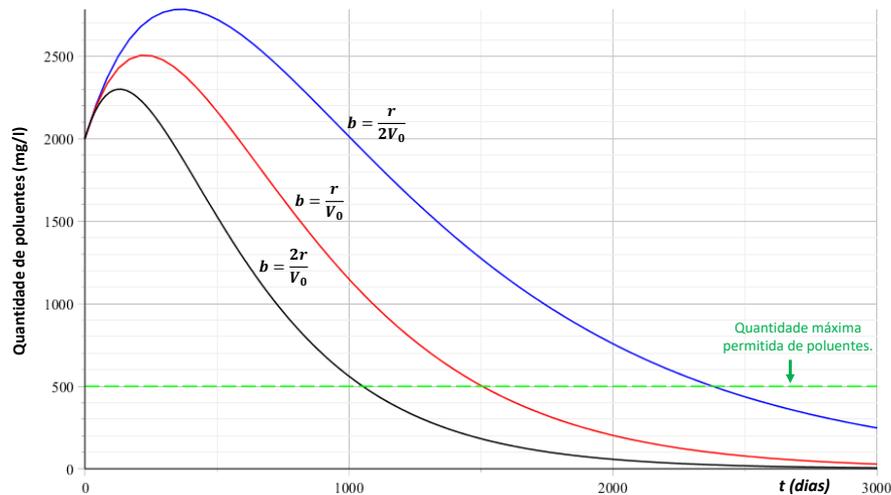
Fonte: A autora, 2019.

Consideremos agora que o lançamento de poluentes na Lagoa de Maricá não seja encerrado, mas que vá diminuindo com o decorrer do tempo. Neste caso, temos que o perfil da representação da despoluição da Lagoa de Maricá é dado pela Eq.(71) com as condições dadas na Tabela 11, ou seja,

$$S(t) = \begin{cases} \left( \frac{2,4 \cdot 10^4}{5,6376 - 2,4 \cdot 10^3 b} \right) e^{-bt} + \left[ 2000 - \left( \frac{2,4 \cdot 10^4}{5,6376 - 2,4 \cdot 10^3 b} \right) \right] e^{-0,002349t}, & \text{se } b \neq 0,002349, \\ \text{ou} \\ (2000 + 10t) e^{-0,002349t}, & \text{se } b = 0,002349. \end{cases} \quad (98)$$

A partir desta Eq.(98) foi possível gerar o gráfico representado na Figura 14, onde apresentamos também a simulação da despoluição da lagoa para uma vazão menor (curva azul) e para uma vazão maior (curva preta) que a dada na Tabela 11.

Figura 14 - Perfil da representação da despoluição com diminuição de descarga contínua



Fonte: A autora, 2019.

Podemos observar que inicialmente há um acúmulo de poluentes na lagoa. Contudo, esta acumulação atinge um ponto máximo e decresce tendendo a zero com o passar do tempo. Além disso, notamos que passados 1500 dias ( $\approx 4$  anos) o nível de poluentes alcança o estabelecido pela legislação (CONAMA, 2005). Nessa simulação constatamos que fazendo  $b > \frac{r}{V_0}$  na Eq.(71) a curva do gráfico decresce mais rapidamente, ou seja, a quantidade de poluentes diminui mais rapidamente caso haja o aumento da vazão da lagoa.

### 3.3 Simulação do modelo de Streeter-Phelps na Lagoa de Maricá

De acordo com as informações contidas no site oficial da Prefeitura de Maricá, está no planejamento da atual gestão a construção de estações de tratamento de esgoto nas saídas dos rios da cidade. Nesse sentido, supomos para esta simulação que o lançamento de poluentes na Lagoa de Maricá foi totalmente cessado. De acordo com Bassanezzi e Jr. (1988) isto é possível colocando filtros especiais existentes no mercado.

Os dados considerados para a simulação estão apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 - Dados da Lagoa de Maricá a serem considerados para o modelo de Streeter-Phelps

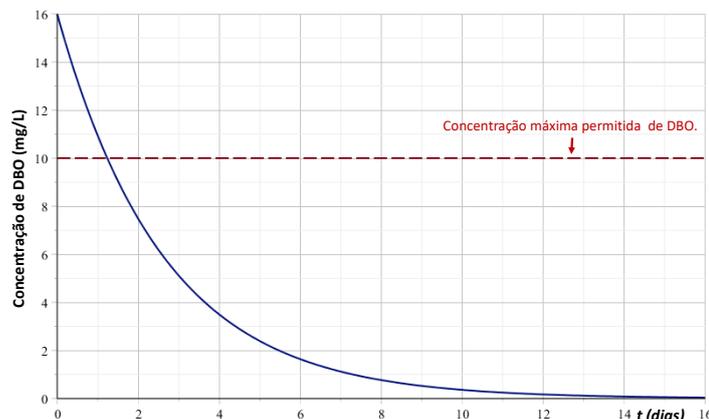
Dados da Lagoa de Maricá	Fonte
$H = 1,4 \text{ m}$	SEMADS (2009)
$L_0 = 16 \text{ mg/l}$	Carvalho e Tavares (2018)
$C_0 = 6,9 \text{ mg/l}$	Laut <i>et al.</i> (2019)
$C_s = 7,6 \text{ mg/l}$	Sperling (2007)
$D_0 = 0,7 \text{ mg/l}$	Subst. o valor de $C_0$ e $C_s$ na Eq.(77)
$k_d = 0,38 \text{ dia}^{-1}$	Subst. $H = 1,4 \text{ m}$ na Eq.(75)
$k_r = 0,23 \text{ dia}^{-1}$	Sperling (2007)
$T = 29,9 \text{ }^\circ\text{C} (\approx 30 \text{ }^\circ\text{C})$	Laut <i>et al</i> (2019)

Considerando estes dados tabulados, analisou-se o comportamento da DBO em função do tempo através da Eq.(74):  $L(t) = L_0 e^{-k_d t}$ , que após substituição dos dados tomou a seguinte forma

$$L(t) = 16 e^{-0,38 t} \quad (99)$$

E assim, obteve-se o perfil da variação de DBO na Lagoa de Maricá, como podemos observar na Figura 15.

Figura 15 - Gráfico da variação da DBO na Lagoa de Maricá



Fonte: A autora, 2019.

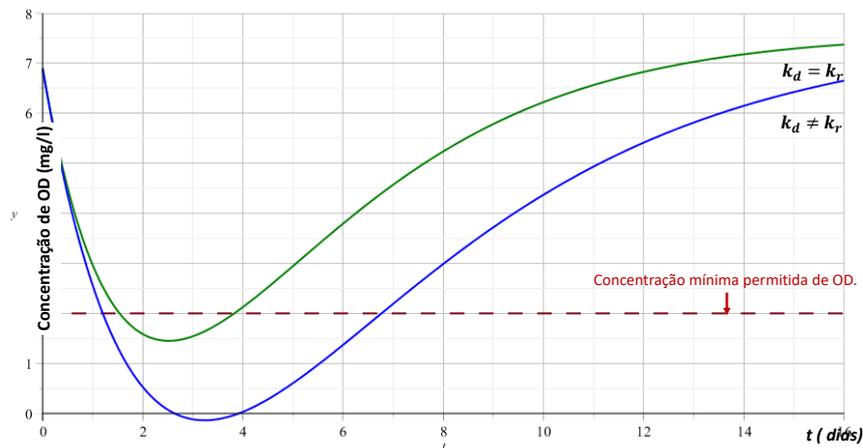
A Figura 15 mostra que a concentração de *DBO* vai sendo reduzida primeiramente de forma muito rápida e depois mais lentamente, isto porque como consideramos que cessou o lançamento de efluentes no tempo  $t = 0$ , com o passar do tempo a matéria orgânica tende a diminuir devido a ação de micro-organismos. Assim, uma menor quantidade de *DBO* na água indica uma diminuição de oxigênio consumido por essas bactérias na degradação de material orgânico. Segundo o modelo adotado, depois de apenas um dia cessado a poluição de dejetos orgânicos a *DBO* atingiria o limite de  $10 \text{ mg/l}$  exigido pela legislação (Veja Tabela 10) para um curso d'água de Classe 3.

Uma vez analisado o comportamento da *DBO*, estudou-se a variação da concentração de *OD*, em função do tempo, decorrente do lançamento anteriormente definido. Com o conhecimento dos dados de entrada necessários para aplicação do modelo, por meio da Eq.(94) obtemos a seguinte equação

$$C(t) = \begin{cases} 7,6 + 40,53 e^{-0,38t} - 41,23 e^{-0,23t} & \text{se } k_d \neq k_r, \\ \text{ou} \\ 7,6 - (6,08t + 0,7) e^{-0,38t} & \text{se } k_r = k_d. \end{cases} \quad (100)$$

que gerou os resultados expressos pela Figura 16.

Figura 16 - Gráfico da Concentração de Oxigênio Dissolvido



Fonte: A autora, 2019.

De acordo com a Figura 16 há inicialmente um consumo do oxigênio dissolvido nos primeiros dias. Isto já era de se esperar devido à decomposição da matéria orgânica presente no esgoto lançado no sistema. Além disso, é possível notar que a concentração mínima de oxigênio é menor que a mínima permissível, estabelecida pela Resolução 357/2005 CONAMA, para corpos de água doce de Classe 4 (corpo d'água cuja as águas podem ser destinadas apenas à navegação e à harmonia paisagística) que é  $2 \text{ mg/l}$ . De acordo com a Tabela 8, a qualidade da água nessa condição ( $0 \leq OD \leq 4$ ) é ruim, o que

implica na diminuição de algumas populações de peixes e macroinvertebrados<sup>18</sup>.

Ainda observando o gráfico na Figura 16, percebe-se que se  $k_r = k_d (= 0,38)$  a concentração de oxigênio passa dos 2  $mg/l$  após o 4º dia. Se  $k_r \neq k_d$ , observamos que entre o 3º e 4º dia a concentração do oxigênio dissolvido tem-se o valor mínimo  $C(3, 233) = -0,1376 mg/l$ , isto é, após 3 dias e 5,6 horas a concentração é negativa, isto não é aceitável fisicamente, mas se consideramos um erro percentual de 5 % nos cálculos das constantes  $k_r$  (coef. de reação) e  $k_d$  (coef. de desoxidação), esta falha encontra-se dentro da margem de erro.

Como podemos observar na Figura 16, quando  $k_d = k_r$  (consumo de oxigênio igual à entrada de oxigênio no meio) a concentração de oxigênio aumenta mais rapidamente. Isso porque substituímos na Eq.(94), para o caso  $k_d \neq k_r$ , os dados da Tabela 12 que fornece  $k_d > k_r$ . Isso significa que inicialmente o consumo de oxigênio dissolvido na lagoa estava superior à entrada de oxigênio na mesma. O ideal seria o inverso, o que implicaria  $k_d < k_r$ . Contudo, é possível observar na Figura 16 que as concentrações de  $OD$  voltam a se elevar e ultrapassam o nível mínimo estabelecido pela legislação (2  $mg/l$ ), indicando assim, que a reatuação se tornou dominante no processo de recuperação natural da Lagoa de Maricá, ou seja, houve autodepuração.

Da mesma forma, vemos o ocorrido na análise do gráfico na Figura 17 que representa o perfil do déficit de  $OD$  descrito pela Eq.(101)

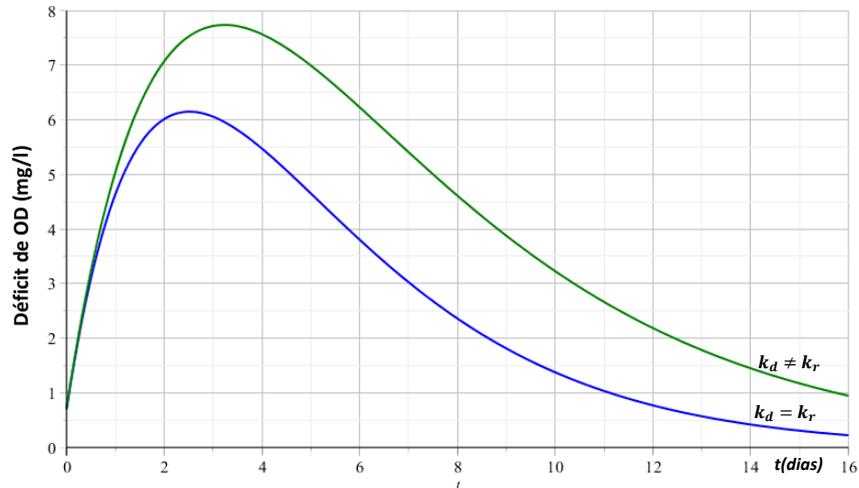
$$D(t) = \begin{cases} -40,53 e^{-0,38t} + 41,23 e^{-0,23t} & \text{se } k_d \neq k_r, \\ \text{ou} & \\ (6,08t + 0,7) e^{-0,38t} & \text{se } k_r = k_d. \end{cases} \quad (101)$$

obtida através da entrada dos dados da Tabela (12) na Eq.(92). Podemos ver como o déficit se comporta de maneira exatamente oposta à concentração de  $OD$ , com um claro aumento inicial no déficit e uma leve diminuição com o passar dos dias.

---

<sup>18</sup> Macroinvertebrados: Importante fonte alimentar para os peixes, são valiosos indicadores da degradação ambiental, além de influenciarem na ciclagem de nutrientes, na produtividade primária e na decomposição (WALLACE; WEBSTER, 1996).

Figura 17 - Déficit de Oxigênio Dissolvido



Fonte: A autora, 2019.

Desta forma, pode-se concluir que uma vez que se encerre o lançamento de efluentes, a Lagoa de Maricá tem efetiva capacidade de autodepuração, visto que com o passar do tempo, considerada as condições iniciais utilizadas no modelo de Streeter-Phelps, a Demanda Bioquímica de Oxigênio ( $DBO$ ) e o déficit de  $OD$  diminuem e a concentração de  $OD$  aumenta, ou seja, com o passar do tempo diminui a desoxigenação e há maior transferência de oxigênio para água, contribuindo assim para a despoluição da lagoa.

Segundo Gotovtsev (2010) as soluções do modelo clássico de Streeter-Phelps (Eq. (72), Eq.(78)) para a determinação da concentração de oxigênio dissolvido na água, em geral, são incorretas. Isso pode ser visto na Figura 16 com o aparecimento de uma concentração negativa entre o primeiro e o quarto dia.

De acordo com Gotovtsev (2010) esse erro pode ser atribuído à estimativa do coeficiente de desoxidação  $k_d$ . Desta forma, uma alternativa é a incorporação de uma equação adicional dada por

$$k_d = k_0 \left(1 - \frac{D}{C_s}\right) \quad (102)$$

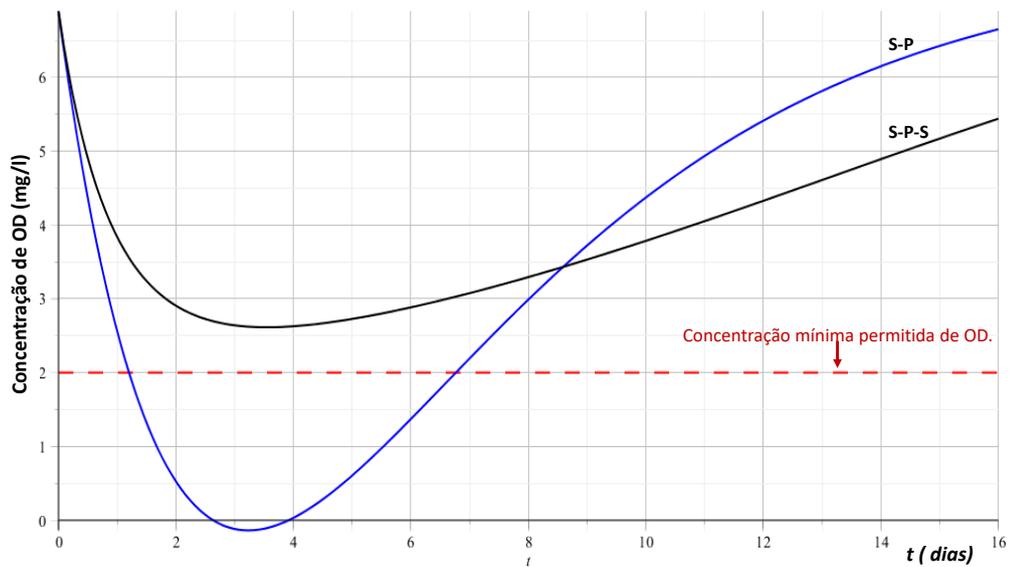
onde o  $k_d$  é função da concentração de oxigênio dissolvido na água e  $k_0$  é a taxa limite de oxidação da matéria orgânica, pois evita valores negativos para a concentração  $OD$ .

O sistema (103) formado pelas equações (72), (78) e (102) é conhecido como modelo de Streeter-Phelps-Shishkin (S-P-S).

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -k_d L, \\ \frac{dD}{dt} = k_d L - k_r D, \\ k_d = k_0 \left(1 - \frac{D}{C_s}\right). \end{cases} \quad (103)$$

O sistema de EDOs dado pela Eq.(103) é não linear. Desse modo, obter sua solução analítica, caso exista, pode ser uma tarefa complicada, e nesse sentido, uma opção é o uso de métodos numéricos. Utilizando o *software* Maple, e com os dados da Tabela 12 obtém-se a solução numérica. Na Figura 18, podem ser vistos os perfis das concentrações de oxigênio dissolvido dados pelos dois métodos, Streeter-Phelps (S-P) e Streeter-Phelps-Shishkin (S-P-S). Nessa figura usando o modelo de Streeter-Phelps-Shishkin obtém-se uma concentração sempre positiva.

Figura 18 - Concentração de Oxigênio Dissolvido pelos dois métodos



Fonte: A autora, 2019.

Como foi dito anteriormente, o modelo de Streeter-Phelps Eq.(72) e Eq.(78) produzem soluções incorretas. Isso pode ser devido a estimativa dos parâmetros  $k_r$  e  $k_d$ . Considerando-se um desvio padrão de 5%, o que é aceitável para medidas experimentais, pode-se usar esse fator de desvio para obter outras estimativas para os mesmos parâmetros onde soluções com valores negativos não apareçam.

No próximo capítulo temos uma breve abordagem sobre a modelagem matemática como instrumento de ação pedagógica.

## 4 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Este capítulo dedica-se a uma reflexão sobre a modelagem matemática como instrumento de ação pedagógica, abordando sua importância e a oportunidade que ela proporciona de mostrar conceitos matemáticos aplicados a problemas da realidade. Além disso, apresenta uma divisão didática das etapas da modelagem matemática para aplicação na sala de aula no Ensino Médio.

### 4.1 Modelagem matemática como instrumento de ação pedagógica

O professor Leite (2008, p.5) afirma que “A modelagem matemática é um importante instrumento pedagógico porque envolve: pesquisa, coleta e análise de dados e atividades em equipe.”

Na visão de Almeida e Dias (2004, p.4),

A Modelagem Matemática em sala de aula pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa, onde a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm um papel importante na construção do conhecimento. Por outro lado, a relação com a sociedade também pode ser fortemente estimulada, uma vez que o problema investigado pelo aluno tem nela a sua origem.

Ao aplicar a modelagem matemática na sala de aula tem-se a oportunidade de motivar os alunos a aplicarem seus conhecimentos, pois esta estratégia possibilita trabalhar vários conceitos matemáticos na resolução de problemas de interesse prático. Por meio dessa técnica os estudantes são levados a uma prática de seus conhecimentos e mesmo com ampliação dos mesmos em contextualizações de interesse prático. Segundo Biembengut e Hein (2002, p.18):

[...] há um consenso no que diz respeito ao ensino de matemática precisar voltar-se para a promoção do conhecimento matemático e da habilidade em utilizá-lo. O que significa ir além das simples resoluções de questões matemáticas, muitas vezes sem significado para o aluno, e levá-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria matemática quanto da natureza do problema a ser modelado.

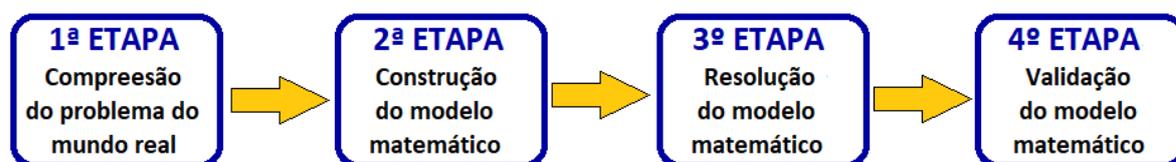
Assim, é possível encarar a modelagem matemática na sala de aula, como uma oportunidade para que os alunos percebam que ela é uma valiosa ferramenta para a compreensão de problemas da realidade, além de:

- ✓ Desenvolver a habilidade (dos alunos) para resolver problemas;
  - ✓ Melhorar a apreensão (dos alunos) de conceitos matemáticos;
  - ✓ Aproximar (outras) áreas de conhecimento da matemática;
  - ✓ Enfatizar a importância da matemática para a formação do aluno;
  - ✓ Despertar o interesse pela Matemática e sua aplicabilidade; e,
  - ✓ Estimular a criatividade (dos alunos).
- (BIEMBENGUT; HEIN, 2002, p. 37-38)

## 4.2 Divisão didática das etapas da modelagem matemática

Como “a modelagem matemática é um processo dinâmico no qual queremos estudar um problema real utilizando ferramentas matemáticas adequada” (MALAGUTTI; GIRALDO, 2013, p.28), na hora de aplicá-la na sala de aula é recomendado seguir um protocolo envolvendo algumas etapas (BASSANEZI, 2002), tais como podemos observar na Figura 19.

Figura 19 - Etapas envolvidas na modelagem matemática



Fonte: Adaptado de Malagutti e Giraldo (2013)

Segue abaixo um resumo sobre cada uma dessas etapas que constituem o processo de modelagem matemática .

### 1ª ETAPA: Compreensão do problema

Nesta etapa é preciso despertar nos alunos o interesse pelo assunto a ser estudado. Isto pode ser feito através de pesquisas e/ou simulações, onde para se entender efetivamente o problema torna-se necessário investigar, analisar dados, experimentar etc. Neste momento processa-se a obtenção de dados através de métodos que dependem da natureza do experimento e do objetivo da pesquisa (ARAÚJO; MÁRQUEZ; HUAROTO, 2016).

### 2ª ETAPA: Construção do modelo matemático

Nessa fase o problema é traduzido para a linguagem matemática ( equações, fórmulas,...). Entretanto, normalmente isto ocorre após o que chamamos de hipóteses simplificadoras. Como explicita Malagutti e Giraldo (2013, p.26), “estas hipóteses buscam substituir as relações complexas que ocorrem no problema real por outras mais simples, que aproximam a situação real”.

### 3ª ETAPA: A resolução do modelo matemático

Para a resolução das equações que aparecem no modelo matemático há uma variedade de ferramentas matemáticas que podem ser utilizadas, tais como, as operações

algébricas e geométricas entre outros tópicos de matemática. Uma boa parte desses conhecimentos são geralmente apresentados durante a Educação Básica.

#### **4ª ETAPA: A validação do modelo matemático**

Uma vez obtido o modelo para a representação do fenômeno de interesse é preciso validá-lo, ou seja, comparar os resultados apresentados com os esperados para a realidade observável. Isto é feito para garantir que as hipóteses simplificadoras não tenham se distanciado muito do modelo do problema real. Caso o modelo não tenha correspondência como a realidade, então é preciso reformulá-lo acrescentando ou retirando exigências para melhor adequá-lo (ARAÚJO; MÁRQUEZ; HUAROTO, 2016).

É adequado esclarecer aos alunos do Ensino Médio que um modelo pode ser modificado de tempos em tempos para se ajustar as novas realidades do problema, ou simplesmente para melhorá-lo.

No capítulo seguinte temos o relato de uma experiência envolvendo a modelagem matemática no Ensino Médio seguindo as quatro etapas descritas.

## 5 A EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM NO ENSINO MÉDIO

Este capítulo é dedicado ao relato de experiência de uma proposta pedagógica que foi desenvolvida em uma turma de 35 alunos do segundo ano do Ensino Médio vespertino do CIEP-259, na cidade de Maricá, RJ. Tal proposta envolve um experimento sobre despoluição de lagoas adaptado de Malagutti e Giraldo (2013). Para fins de fundamentação inicial do projeto, foram trabalhadas as conceituações teóricas sobre recursividade, progressão geométrica, função exponencial, função logarítmica e representações gráficas no plano cartesiano bidimensional.

As atividades desenvolvidas pelos autores Malagutti e Giraldo (2013) foram, sempre que possível, adaptadas a realidade da turma. Além disso, vale ressaltar que os alunos trabalharam em grupos de cinco componentes, totalizando assim sete grupos.

Durante as atividades o uso da calculadora simples foi permitido como ferramenta facilitadora dos cálculos. Segundo a *National Council of Teachers of Mathematics*, as calculadoras permitem

a exploração de ideias numéricas e de regularidades, a realização de experiências importantes para o desenvolvimento de conceitos e a investigação de aplicações realistas, ao mesmo tempo que colocam a ênfase nos processos de resolução de problemas. O uso inteligente das calculadoras pode aumentar, quer a qualidade do currículo, quer a qualidade da aprendizagem (NCTM, 1991).

Além disso, após o término de cada atividade discussões sobre os resultados foram abertas para que cada grupo refletisse sobre o problema e reconstruísse seus pensamentos acerca da problemática em questão. Cada erro foi uma oportunidade de crescimento que muito colaborou para o processo de aprendizagem, visto que, como afirma Aquino (1997, p. 36) se o aluno “[...] errar, sua tendência será a de refletir mais sobre o problema e sobre as ações que empregou para resolvê-lo. Vale dizer que o erro pode levar o sujeito a modificar seus esquemas, enriquecendo-os.”

### 5.1 Atividades desenvolvidas com os alunos

Nesta seção são apresentadas as atividades que foram adaptadas de Malagutti e Giraldo (2013) com objetivo de criar conexões entre a Matemática do Ensino Médio e os problemas ambientais, em especial a poluição na Lagoa de Maricá.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

A compreensão das questões ambientais pressupõe um trabalho interdisciplinar em que a Matemática está inserida. A quantificação de aspectos envolvidos em problemas ambientais favorece uma visão mais clara deles,

ajudando na tomada de decisões e permitindo intervenções necessárias. (BRASIL, 1998, p. 38).

No decorrer das atividades foram seguidas as 4 (quatro) etapas da modelagem matemática (seção 4.2) buscando a interdisciplinaridade com a Ecologia. Desse modo, foram trabalhados os seguintes conceitos matemáticos:

- Recursividade;
- Progressão Geométrica;
- Função Exponencial;
- Função Logarítmica;
- Representações Gráficas.

Para a aplicação desses conceitos foi previamente apresentada a parte teórica e exercícios de cada assunto em aulas anteriores.

Respeitando as diferentes etapas do processo de modelagem matemática, esta proposta pedagógica foi realizada em três dias, subdivididos da seguinte maneira:

DIA	ATIVIDADE	DURAÇÃO
1º dia	Texto motivacional	30 <i>min.</i>
	Compreensão do Problema: O Experimento	1 <i>h</i>
2º dia	Construção do Modelo Matemático	1 <i>h</i>
	Resolução do Modelo Matemático	1 <i>h</i>
3º dia	Validação do Modelo Matemático	30 <i>min</i>

Nas próximas subseções seguem descritas estas atividades.

### 5.1.1 Etapa 1: Motivação e compreensão do problema

A fim de motivar uma discussão sobre o problema real de poluição na Lagoa de Maricá foi apresentado o seguinte texto motivacional abaixo, adaptado de Malagutti e Giraldo (2013).

*Era uma vez uma lagoa chamada “Lagoa de Maricá” e um povo que vivia em seu entorno, os maricaenses. Nela, as crianças brincavam, os adultos nadavam e todos viviam muito bem com a fauna e com a flora que havia ali. Inclusive, muitos pescavam e da lagoa tiravam seu sustento, mas o progresso chegou e a cidade em torno da lagoa cresceu desordenadamente. E, onde foi parar o esgoto de todo esse povo? Tomou o caminho mais fácil e foi parar na Lagoa de Maricá! O tempo foi passando e a situação da*

*lagoa foi piorando. Ninguém podia mais nadar ou pescar. Assim, biólogos, engenheiros e arquitetos formaram uma equipe para contornar o problema e propor soluções. Então, a lagoa começou a receber os cuidados necessários para sua revitalização. Será que a Lagoa de Maricá poderá voltar a ser exatamente como era antes?*

Após a leitura do texto os alunos passaram a indagar o que isso teria haver com a matemática. Foi esclarecido que a matemática poderia ajudar muito na solução de problemas ecológicos, e que isto seria melhor compreendido através de um experimento que realizaríamos sobre a despoluição de uma lagoa fictícia em escala diminuta.

Logo a seguir foi realizada a parte experimental, que consistiu em simular cinco dias de um processo de despoluição natural de uma lagoa. Esta simulação teve o intuito de ajudar na compreensão de elementos naturais e no desenvolvimento de habilidades que possibilitam atribuir um significado a equações, dados e gráficos (MALAGUTTI; GIRALDO, 2013).

A realização do experimento ocorreu no laboratório de Ciências, onde para cada grupo havia previamente separados uma mesa com o material e o roteiro<sup>19</sup> necessários para a realização do experimento. A utilização do laboratório proporcionou uma melhor logística quanto a obtenção e descarte das águas utilizadas durante o experimento. Vale lembrar que a turma piloto foi dividida em sete grupos, cada um destes constituídos por cinco alunos.

O material disponibilizados, para cada grupo realizar o seu experimento, foi:

- 1 garrafa PET transparente de 3 l;
- 1 jarra graduada;
- 1 dose de Poluente (100 mg de *Permanganato de Potássio*<sup>20</sup>);
- 1 funil

O roteiro para realização do experimento foi dividido em três etapas. Ao final de cada uma eram propostas questões relacionadas a esta parte específica do experimento.

Segue abaixo a descrição de cada uma destas etapas, assim como, as questões propostas, suas respectivas soluções e o relato acerca do desenvolvimento dos grupos em cada uma delas.

Para a primeira etapa, como podemos ver abaixo, o desafio foi simular uma lagoa fictícia poluída e o primeiro processo de despoluição.

---

<sup>19</sup> O roteiro encontra-se disponível no Anexo I.

<sup>20</sup> *Permanganato de Potássio* é um composto formado por íons de potássio e permanganato. Ele possui propriedades antibacterianas, antifúngicas e cicatrizantes. É encontrado à venda em farmácias; uma caixa com 10 doses de 100 mg custa em média R\$ 2,00.

- 1ª parte do experimento

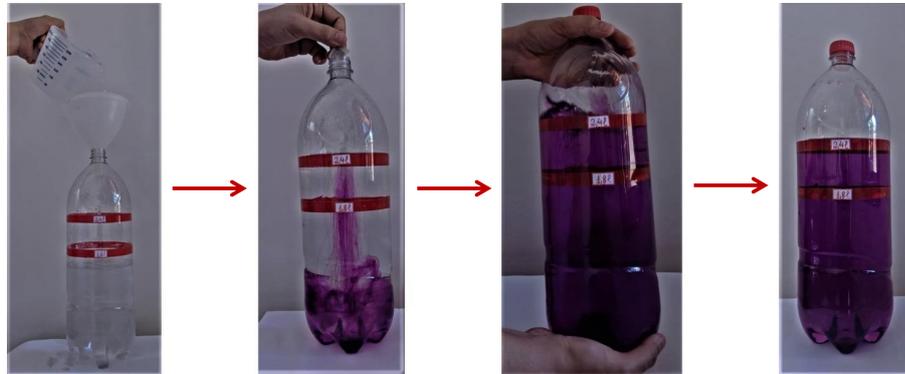
▷▷ **Simulação de uma lagoa fictícia poluída.** (Figura 20):

Em cada garrafa foi colocado 2,4 litros de água limpa e em seguida uma dose de poluente, ou seja, 100 mg de Permanganato de Potássio. Depois disso, a garrafa foi devidamente tampada e agitada até que a mistura apresentasse visualmente um grau de homogeneidade.

▷▷ **Simulação do primeiro processo de despoluição da lagoa fictícia.** (Figura 21):

Retirou-se 600 ml de água de cada lagoa fictícia e substituiu-se por 600 ml de água limpa. (Atenção: Com este procedimento simulou-se a despoluição da lagoa num período de 24h.)

Figura 20 - Simulação da lagoa fictícia poluída



Fonte: A autora, 2019

Figura 21 - Simulação da primeira despoluição da lagoa fictícia



Fonte: A autora, 2019.

Uma vez finalizada a primeira parte do experimento, foram propostas as questões 1 e 2, como podemos acompanhar abaixo.

**QUESTÃO 1:** Considerando que a mistura de água com *Permanganato de Potássio* é perfeitamente homogênea, quantos miligramas de poluente foram retirados da lagoa fictícia neste procedimento de despoluição?

(a) 25 mg

- (b) 50 mg
- (c) 100 mg
- (d) 125 mg

### ***Solução da Questão 1***

Como a mistura é homogênea qualquer porção de líquido da lagoa fictícia deverá conter a mesma fração de poluente, esta dedução é fundamental para descrever o fenômeno objeto de análise. Esta fração é de  $\frac{1}{24} \text{ mg/ml}$ , pois para representação da lagoa fictícia poluída foram colocados 100 mg de poluente (permanganato de potássio) e 2,4 l (2400 ml) de água limpa. Em seguida, foram retirados da lagoa 600 ml de líquido. Como a mistura é homogênea, esses 600 ml contêm  $\frac{1}{24}$  de poluente. Assim, foram retirados  $\frac{1}{24} \times 600 = 25 \text{ mg}$  de poluente, ou seja, a resposta correta está na alternativa A.

#### Comentários:

Os sete grupos de alunos responderam corretamente à questão, entretanto foi necessária a mediação da professora para reforçar o fato de que qualquer porção do líquido da lagoa poluída continha a mesma fração de poluente.

**QUESTÃO 2:** Após este procedimento, que simulou a despoluição num período de 24 h, quantos miligramas de poluente ainda ficaram na lagoa fictícia?

- (a) 25 mg
- (b) 50 mg
- (c) 75 mg
- (d) 100 mg
- (e) Nenhum

### ***Solução da Questão 2***

Se foram retirados 25 mg de poluente, restaram na lagoa fictícia,  $100 \text{ mg} - 25 \text{ mg} = 75 \text{ mg}$  de poluente. Assim, a resposta correta é a alternativa C.

#### Comentários:

Os sete grupos de alunos chegaram a solução correta desta questão sem grandes dificuldades.

Finalizando a questão 2, deu-se início a segunda parte do experimento que se refere ao segundo período de despoluição da lagoa fictícia, como podemos ver abaixo.

- 2ª parte do experimento

▷▷ **Simulação do segundo processo de despoluição da lagoa fictícia:**

Foram retirados mais 600 *ml* de água da lagoa fictícia e acrescentado 600 *ml* de água limpa.

Realizada essa parte do experimento foram propostas as questões 3 e 4.

**QUESTÃO 3:** A água tornou-se límpida?

***Solução da Questão 3***

Não, pois o que é constante no experimento não é a quantidade de poluente retirada, mas a razão desta quantidade com a quantidade total de poluente presente na mistura.

*Comentários:*

Nesta questão houve 100% de acerto visto que, trata-se de uma questão que pode ser respondida através de simples observação e, de fato, neste passo do experimento a água não tinha aparência límpida como pode ser observado na Figura 22

Figura 22 - Aparência da água após o 2º processo de despoluição



Fonte: A autora, 2019.

**QUESTÃO 4:** Calcule a quantidade de poluente restante na lagoa fictícia após esta segunda troca de água.

***Solução da Questão 4***

Ao retirar 600 *ml* de líquido da lagoa fictícia, retira-se  $\frac{600}{2400} = \frac{1}{4}$  de seu volume total. Como este líquido é uma mistura homogênea de água mais poluente, tem-se que a quantidade de poluente retirada é também  $\frac{1}{4}$  da quantidade presente, assim temos que:  $75 - (\frac{1}{4}) \times 75 = 75 - 18,75 = 56,25$  *mg* é a quantidade de poluente restante após a segunda troca, já que 75 *mg* era o total de poluente que restou após a primeira troca.

*Comentários:*

Apenas dois dos sete grupos chegaram a resposta correta nesta questão. Os outros 5 grupos responderam que a quantidade de poluente restante era 50 *mg*. Isto ocorreu

porque equivocaram-se calculando como se a quantidade de poluente retirada em cada etapa fosse constante (igual a  $25\text{ mg}$ ). Neste momento, foi preciso “frear” a atividade e reforçar que a quantidade de poluente retirada é  $\frac{1}{4}$  da quantidade presente, ou seja  $\frac{1}{4}$  de  $75\text{ mg}$ .

Uma vez resolvida a questão 4, partiu-se para a última parte do experimento.

- 3ª parte do experimento

▷▷ **Simulação do terceiro processo de despoluição da lagoa fictícia:**

Retirou-se pela terceira vez mais  $600\text{ ml}$  de água da lagoa fictícia e completou-se com  $600\text{ ml}$  de água limpa.

▷▷ **Simulação do quarto e quinto processos de despoluição da lagoa fictícia:**

Repetiu-se o mesmo procedimento por mais duas vezes.

Após este último procedimento, a proposta foi a questão 5, que exigia apenas uma simples observação do fenômeno.

**QUESTÃO 5:** Depois de todas essas trocas, o que você observa? A lagoa fictícia encontra-se totalmente límpida?

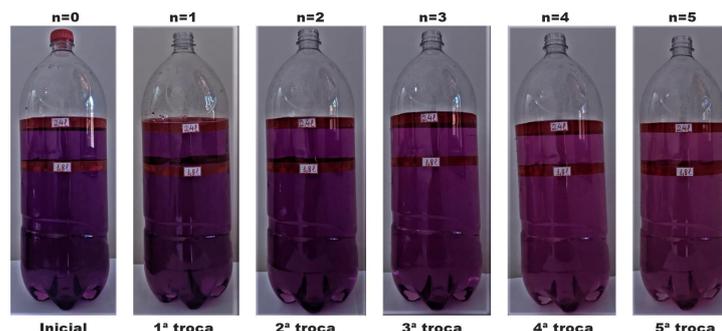
**Solução da Questão 5**

Após cinco trocas sucessivas, observa-se que a lagoa fictícia ainda não está despoluída. Isso acontece porque, como já foi mencionado, o que é constante no experimento não é a quantidade de poluente retirada, mas a razão desta quantidade com a quantidade total de poluente presente na mistura.

Comentários:

Nesta questão todos os grupos obtiveram sucesso, visto que a simples observação do fenômeno estudado garantia este resultado, conforme podemos observar na Figura 23, onde está registrado a aparência da água da lagoa fictícia a cada número  $n$  de troca de água.

Figura 23 - Aparência da água da lagoa fictícia a cada número  $n$  de troca



Fonte: A autora, 2019.

### 5.1.2 Etapa 2: Construção do Modelo Matemático

Uma vez finalizado o experimento, onde foi possível calcular a quantidade restante de poluente na lagoa fictícia após cada troca de água de volume constante, iniciou-se a etapa de modelar matematicamente este processo.

Também foram lembradas as hipóteses simplificadoras que nortearam a simulação, a saber: a poluição pode ser eliminada naturalmente pela lagoa através da entrada de uma quantidade fixa de água pura por um determinado tempo, a concentração de poluentes na água é homogênea, a taxa de despoluição é constante ( $= \frac{1}{4}$ ) em relação ao tempo e a despoluição ocorre em períodos discretos de tempo, isto é, dia após dia.

A partir desse momento foi proposto o uso de conceitos matemáticos que poderiam ser úteis na descrição do experimento e foram propostas novas questões.

**QUESTÃO 6:** Organize os dados na tabela abaixo, calculando a quantidade de poluente restante em cada período de 24 horas até o 5º dia do nosso experimento.

Tabela 13 - Quantidade de poluente na lagoa fictícia

Número de trocas $[n]$		Quantidade de poluente na lagoa fictícia $[p(n)]$
Início	$n = 0$	$p(0) =$
1ª Troca	$n = 1$	$p(1) =$
2ª Troca	$n = 2$	$p(2) =$
3ª Troca	$n = 3$	$p(3) =$
4ª Troca	$n = 4$	$p(4) =$
5ª Troca	$n = 5$	$p(5) =$

### Solução da Questão 6

Tabela 14 - Solução da Questão 6

Número de trocas $[n]$		Quantidade de poluente na lagoa fictícia $[p(n)]$
Início	$n = 0$	$p(0) = 100 \text{ mg}$
1ª Troca	$n = 1$	$p(1) = 100 - \left(\frac{1}{4}\right) 100 = 75 \text{ mg}$
2ª Troca	$n = 2$	$p(2) = 75 - \left(\frac{1}{4}\right) 75 = 56,25 \text{ mg}$
3ª Troca	$n = 3$	$p(3) = 56,25 - \left(\frac{1}{4}\right) 56,25 \approx 42,19 \text{ mg}$
4ª Troca	$n = 4$	$p(4) = 42,19 - \left(\frac{1}{4}\right) 42,19 \approx 31,64 \text{ mg}$
5ª Troca	$n = 5$	$p(5) = 31,64 - \left(\frac{1}{4}\right) 31,64 = 23,73 \text{ mg}$

Comentários:

A maioria dos grupos não apresentou dificuldades na Questão 6. Apenas um grupo não respondeu corretamente, pois ainda considerou constante (igual a 25 mg) a quantidade de poluente retirada em cada troca.

**QUESTÃO 7:** A lagoa fictícia ficará totalmente isenta de poluição em algum momento? Reflita sobre a resposta desta questão, com base nos dados da tabela da Questão 6.

***Solução da Questão 7***

No nosso modelo de despoluição, foi observado que a quantidade poluente foi diminuindo a uma taxa constante, ou seja, a quantidade de poluentes retirada era sempre  $\frac{1}{4}$  do que se tinha anteriormente. Assim, percebeu-se que a lagoa fictícia nunca ficaria totalmente despoluída, pois a quantidade de poluente nunca chegaria a zero e isso estava dentro da realidade observável!

Comentários:

Apenas um grupo respondeu erroneamente esta questão, pois cometeram erros no preenchimento da tabela da Questão 6 ao considerar constante a quantidade de poluentes retirada em cada troca, o que resultou numa quantidade de poluente igual a zero no 4º dia. Neste momento, foi preciso a intervenção e maior atenção da professora a este grupo a fim de que o equívoco não perdurasse levando assim a conclusões errôneas futuramente.

É importante ressaltar que esta questão proporcionou um momento de sensibilização ecológica nos alunos, visto que foi notória a preocupação acerca da dificuldade de se despoluir um recurso hídrico.

**QUESTÃO 8:** Quantos dias, no mínimo, deverão se passar para que a concentração de poluente na lagoa fictícia seja inferior a 10 mg (Supondo que seja o aceitável!)?

- (a) 1 dia
- (b) 7 dia
- (c) 8 dias
- (d) 9 dias
- (e) 10 dias

***Solução da Questão 8***

A resposta correta é a alternativa D. Completando a Tabela 13 da Questão 6 até a 10º troca podemos observar que a concentração de poluentes na lagoa fictícia começa a ser inferior a 10 mg somente a partir do 9º dia.

Tabela 15 - Solução da Questão 8

Número de Trocas $[n]$		Quantidade de poluente na lagoa fictícia $[p(n)]$
Início	$n = 0$	$p(0) = 100 \text{ mg}$
1ª Troca	$n = 1$	$p(1) = 100 - \left(\frac{1}{4}\right) 100 = 75 \text{ mg}$
2ª Troca	$n = 2$	$p(2) = 75 - \left(\frac{1}{4}\right) 75 = 56,25 \text{ mg}$
3ª Troca	$n = 3$	$p(3) = 56,25 - \left(\frac{1}{4}\right) 56,25 \approx 42,19 \text{ mg}$
4ª Troca	$n = 4$	$p(4) = 42,19 - \left(\frac{1}{4}\right) 42,19 \approx 31,64 \text{ mg}$
5ª Troca	$n = 5$	$p(5) = 31,64 - \left(\frac{1}{4}\right) 31,64 = 23,73 \text{ mg}$
6ª Troca	$n = 6$	$p(6) = 23,73 - \left(\frac{1}{4}\right) 23,73 \approx 17,80 \text{ mg}$
7ª Troca	$n = 7$	$p(7) = 17,80 - \left(\frac{1}{4}\right) 17,80 = 13,35 \text{ mg}$
8ª Troca	$n = 8$	$p(8) = 13,35 - \left(\frac{1}{4}\right) 13,35 \approx 10,01 \text{ mg}$
9ª Troca	$n = 9$	$p(9) = 10,01 - \left(\frac{1}{4}\right) 10,01 \approx 7,51 \text{ mg}$
10ª Troca	$n = 10$	$p(10) = 7,51 - \left(\frac{1}{4}\right) 7,51 \approx 5,63 \text{ mg}$

Comentários:

Em virtude de um momento de desatenção no preenchimento da tabela, um grupo repetiu todos os dados da 4ª troca no local referente a 5ª troca, o que prejudicou no desenvolvimento correto da questão. O restante dos grupos realizaram esta atividade sem problemas.

**QUESTÃO 9:** Com base nas variáveis registradas na Tabela 15 acima escreva uma equação para quantidade de poluente  $p(n)$  em função do período  $n$ .

**Solução da Questão 9**

$$p(n) = p(n - 1) - \frac{1}{4} p(n - 1) = \frac{3}{4} p(n - 1)$$

Assim, obtemos como resposta, a equação recursiva

$$p(n) = \frac{3}{4} p(n - 1). \quad (104)$$

Comentários:

Nas aulas anteriores, intencionalmente, já se havia trabalhado processos de recursividade, então os grupos não tiveram grandes dificuldades para resolver esta questão. Com exceção de um grupo que se equivocou na operação com a fração e respondeu da seguinte forma:  $p(n) = p(n - 1) - \frac{1}{4} p(n - 1) = \frac{1}{4} p(n - 1)$ .

**QUESTÃO 10:** Abaixo temos o desenvolvimento passo a passo da equação recursiva obtida na Questão 9. Observe a sequência de cálculos dos cinco primeiros períodos de tempo

do experimento que realizamos e deduzamos uma nova fórmula que possa expressar a quantidade restante de poluente em função da quantidade existente no início do experimento  $p(0)$ .

$$p(0) = 100 \text{ mg}$$

$$p(1) = (3/4)p(0) = 75 \text{ mg}$$

$$p(2) = (3/4)p(1) = (3/4)[(3/4)p(0)] = (3/4)^2 p(0) = 56,25 \text{ mg}$$

$$p(3) = (3/4)p(2) = (3/4)[(3/4)^2 p(0)] = (3/4)^3 p(0) = 42,19 \text{ mg}$$

$$p(4) = (3/4)p(3) = (3/4)[(3/4)^3 p(0)] = (3/4)^4 p(0) = 31,64 \text{ mg}$$

$$p(5) = (3/4)p(4) = (3/4)[(3/4)^4 p(0)] = (3/4)^5 p(0) = 23,73 \text{ mg}$$

### ***Solução da Questão 10***

Na sequência de cálculos as expressões se “aninham” umas dentro das outras resultando assim numa Progressão Geométrica de razão  $3/4$  e termo inicial  $p(0) = 100 \text{ mg}$ . Assim, a nova fórmula nas condições exigidas é:

$$p(n) = 100 \left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (105)$$

#### Comentários:

A Questão 10 foi resolvida com êxito por todos os grupos. A exposição do desenvolvimento do passo a passo da equação recursiva deu celeridade a resolução.

A solução desta questão oportunizou uma discussão acerca da resolução da questão 8, visto que aplicando logaritmo a esta Eq.(105), a questão 8 poderia ser resolvida sem a necessidade de se completar a tabela.

### 5.1.3 Etapa 3: Resolução do Modelo Matemático

Para resolver e explorar a equação que aparece no nosso modelo utilizou-se os conhecimentos matemáticos já conhecidos pelos alunos.

**QUESTÃO 11:** Imagine que em nosso experimento a lagoa fictícia só poderá ser considerada despoluída quando a quantidade de poluente for inferior a  $1 \text{ mg}$ . Nestas condições, quantos dias no mínimo deverão se passar a partir da mesma situação inicial ( $100 \text{ mg}$  de poluente) para que esse patamar seja atingido?

- (a) 10 dia
- (b) 12 dia
- (c) 14 dias

(d) 17 dias

(e) 25 dias

**Solução da Questão 11**

Usando a fórmula  $p(n) = p(0) (3/4)^n$ , onde  $p(0) = 100$ , temos:  $p(n) = 100 (3/4)^n$ , que é a progressão geométrica de razão  $3/4$  e termo inicial  $p(0) = 100 \text{ mg}$ . Para que a quantidade de poluente seja inferior a  $1 \text{ mg}$ , devemos-se ter

$$p(n) = (3/4)^n 100 < 1. \quad (106)$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por  $(1/100)$ , tem-se

$$(3/4)^n < 1/100. \quad (107)$$

Como a variável  $n$  aparece no expoente de  $3/4$ , para encontrar seu valor aplicaremos o logaritmo decimal. Desde que a função logarítmica é monótona, tem-se da Eq.(107) que

$$\log \left( \frac{3}{4} \right)^n < \log \frac{1}{100}. \quad (108)$$

Da Eq.(108) tem-se

$$n \log \frac{3}{4} < \log \frac{1}{100}. \quad (109)$$

Como  $\log(\frac{3}{4}) < 0$

$$\frac{n \log \frac{3}{4}}{\log(\frac{3}{4})} > \frac{\log \frac{1}{100}}{\log(\frac{3}{4})}. \quad (110)$$

Ou seja,

$$n > \frac{\log \frac{1}{100}}{\log \frac{3}{4}}. \quad (111)$$

Da Eq.(111) e com o uso de uma calculadora, chega-se ao seguinte resultado aproximado

$$n > 16,01. \quad (112)$$

Desse modo, a alternativa correta é a letra D, ou seja, a quantidade de poluente será inferior a  $1 \text{ mg}$  somente depois de 17 dias.

Comentários:

A Questão 11 foi a que apresentou maior índice de erros. Apenas um grupo a acertou completamente. Os erros mais comuns foram: equívoco na aplicação de propriedades

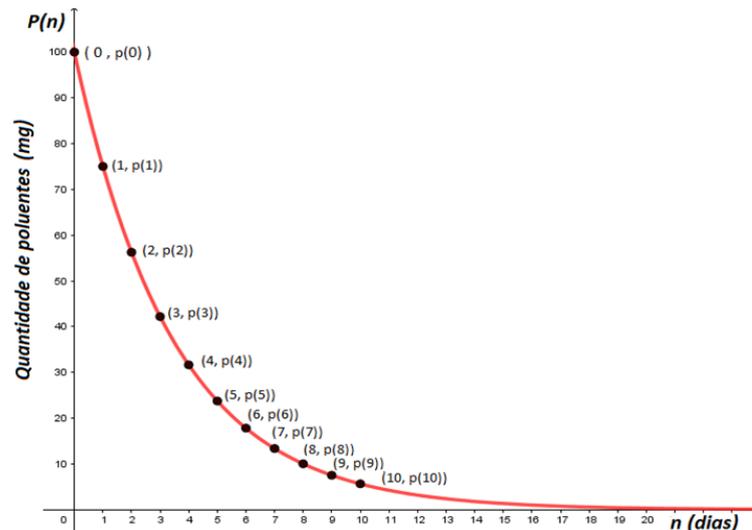
do logaritmo, erros na manipulação da inequação e equívocos nas aproximações.

**QUESTÃO 12:** A equação  $p(n) = 100 (3/4)^n$ , referente ao nosso modelo matemático, permite-nos escrever diretamente a quantidade de poluente  $p(n)$  em miligramas existentes em uma mistura de volume constante em função do período de tempo  $n$  em *dias*. Essa equação dá origem a pares ordenados  $(1, p(1)), (2, p(2)), (3, p(3)), \dots, (n, p(n)), \dots$  onde a partir deles é possível fazer um esboço gráfico desse experimento. Assim sendo, preencha a tabela abaixo e esboce o gráfico da função exponencial ao qual esses pares ordenados pertencem.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(n)											

**Solução da Questão 12**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(n)	100	75	56,25	42,19	31,64	23,73	17,80	13,35	10,01	7,51	5,63



**Comentários:**

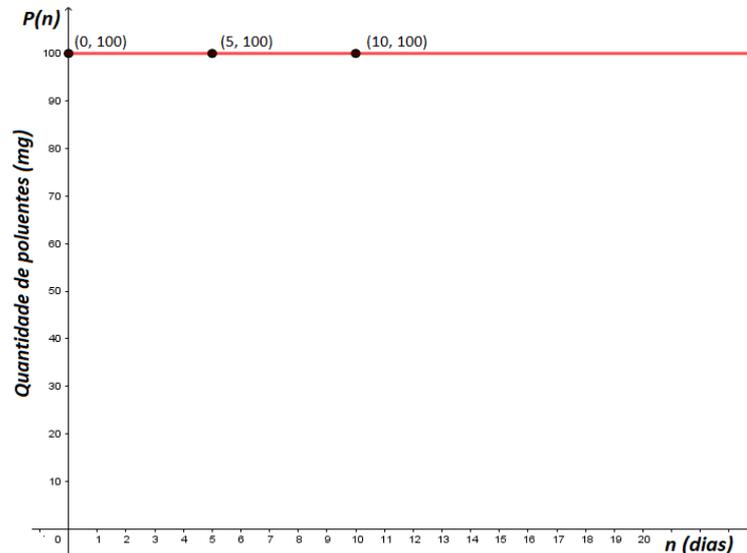
Todos os grupos resolveram esta questão de forma correta, onde a professora foi consultada por poucos alunos sobre a finalização do gráfico.

Com o perfil gráfico da representação do processo de despoluição da lagoa fictícia os participantes puderam ter uma percepção mais clara de como se dava o seu decaimento. Com isso, foi muito valorizado a importância de uso de gráficos para uma informação rápida de um fenômeno de interesse.

**QUESTÃO 13:** Como seria o esboço do gráfico se o tempo apenas passasse e não houvesse nenhum tipo de troca de água poluída por água limpa?

### ***Solução da Questão 13***

Se, depois de poluído, não houvesse troca de água poluída por água limpa na lagoa fictícia, a quantidade de poluente se manteria constante. Os pares ordenados deste fenômeno pertenceria ao gráfico de uma função constante:



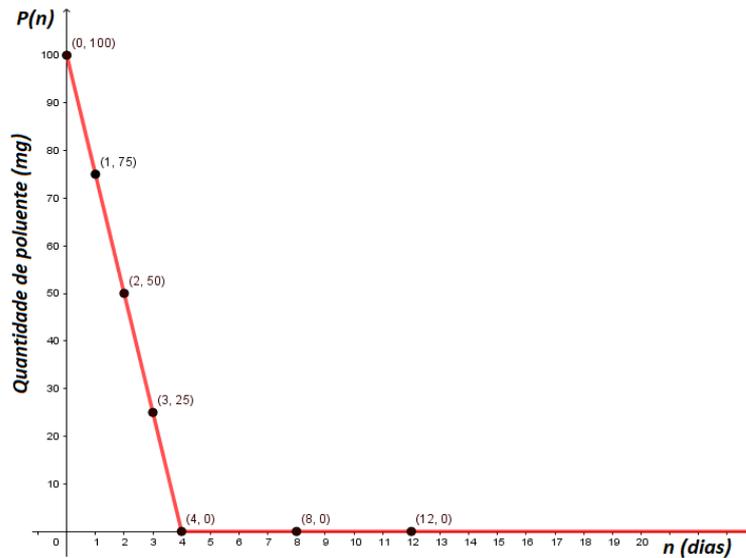
### ***Comentários:***

Na Questão 13, dois grupos apresentaram o esboço do gráfico de uma função afim crescente, ou seja, uma reta oblíqua crescente. Esses grupos deduziram que a poluição aumentaria se não houvesse nenhum tipo de troca de água poluída por água limpa. Entretanto, não há no enunciado nenhum indício de que seria lançado mais poluentes com o passar do tempo.

**QUESTÃO 14:** E como seria esse esboço se a quantidade de poluente retirada fosse sempre a mesma, isto é, 25 mg?

### ***Solução da Questão 14***

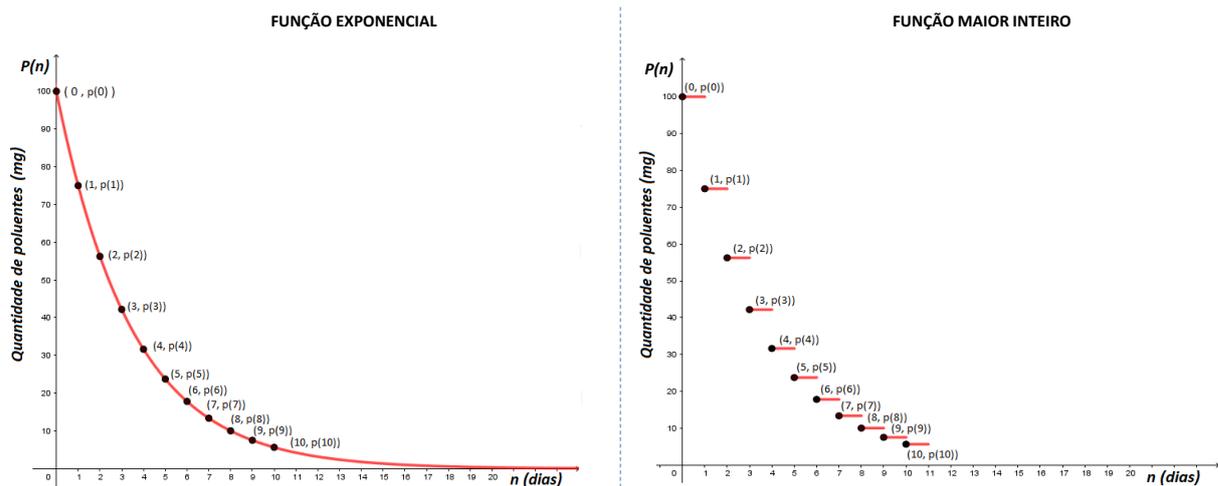
Se a quantidade de poluente retirada da lagoa fictícia em cada troca fosse sempre a mesma, haveria um decaimento linear. Nesse caso, depois de certo tempo, todo poluente teria sido retirado e a lagoa fictícia ficaria completamente “despoluída”. Assim, os pares ordenados deste fenômeno pertenceria a um gráfico que teria o seguinte aspecto:



### Comentários:

Na Questão 14 todos os grupos apresentaram um esboço que representava um decaimento linear da poluição, mas apenas dois deles representaram também, com uma reta constante sobre o eixo das abscissas, o momento em que a lagoa fictícia estaria completamente isenta de poluente. Portanto, apenas dois grupos apresentaram corretamente a representação gráfica do fenômeno em questão.

**QUESTÃO 15:** Compare as duas representações gráficas associadas ao nosso modelo de despoluição e responda:



- Qual dos gráficos representa mais fielmente o processo de despoluição natural realizado por micro-organismos vivos? Por quê?
- E qual deles representa mais fielmente a simulação da lagoa fictícia com água e *Permanganato de Potássio* que realizamos? Por quê?

### Solução da Questão 15

(a) No processo de despoluição natural os organismos trabalham continuamente na despoluição, com isso a quantidade de poluente muda de forma contínua, e não apenas em períodos discretos. Esta situação é melhor descrita no decaimento contínuo do gráfico da função exponencial, no qual  $t$  é uma variável no conjunto dos números reais ( $t$  representa o tempo).

(b) Quando realizamos a simulação da despoluição da lagoa, a despoluição ocorreu somente quando fizemos a troca de líquido poluído por água limpa. A quantidade de poluente ficou constante durante todo o tempo compreendido entre dois números naturais  $t = n$  e  $t = n + 1$ . Por isso, o decaimento em escada do gráfico da função maior inteiro representa melhor a simulação realizada.

#### Comentários:

A princípio, a Questão 15 causou grande discussão dentro dos grupos, pois muitos achavam que o gráfico com decaimento exponencial serviria tanto para representar o processo de despoluição natural realizado por micro-organismos vivos como para representar a simulação que fizeram no laboratório. Entretanto, após um consenso, todos compreenderam e apresentaram o decaimento em escada, que representa a função maior inteiro, como resposta correta.

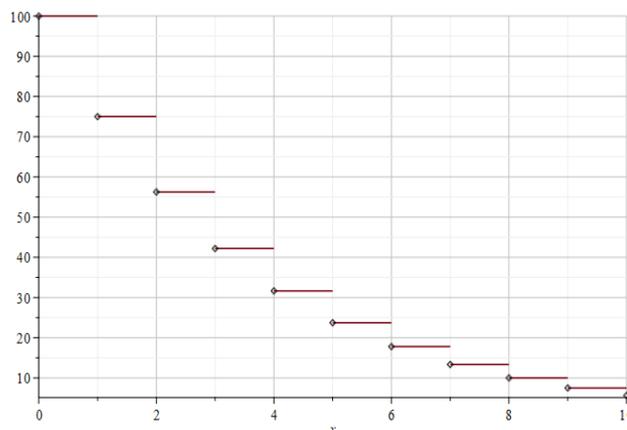
A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por

$$f(x) = n, \quad n \leq x < n + 1; \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (113)$$

denomina-se função maior inteiro, sendo comumente denotada por  $\lceil x \rceil$ .

A função maior inteiro é uma função matemática que não têm um gráfico contínuo. Muito pelo contrário, como podemos ver na Figura (24), ele contém avanços e interrupções.

Figura 24 - Gráfico da Função Maior Inteiro  $f(x) = 100 \left(\frac{3}{4}\right)^{\lceil x \rceil}$ .



Fonte: A autora, 2019.

Sabemos que a função maior inteiro não é um assunto abordado no Ensino Médio, entretanto nada impede de ser apresentada tendo em vista suas aplicabilidades e da razoável facilidade de compreensão nessa faixa de estudo. Quando os alunos da turma piloto entraram em contato com a situação-problema que abordou tal função eles demonstraram alcançar o entendimento de sua estrutura. Obviamente não foi explorada sua formalização, mas foi possível a compreensão de que o gráfico deste tipo de função era o mais adequado para descrever a simulação em questão.

#### 5.1.4 Etapa 4: Validação do Modelo Matemático

A validação do modelo matemático dado pela Eq.(105) ocorreu durante um estudo dirigido. Isto foi possível porque, como afirma Malagutti e Giraldo (2013), trabalhamos com uma simulação, e portanto a validação pode ser direta; o que não seria possível em um ambiente real, pois exigiria um processo muito mais elaborado.

Os alunos foram direcionados a uma discussão onde foi explicado que para validar o modelo matemático era preciso verificar se as fórmulas que foram escritas e as representações gráficas que foram construídas correspondiam ao que estava ocorrendo na lagoa fictícia do experimento.

Durante a discussão, relembramos que os cálculos realizados e as abordagens gráficas vistas anteriormente indicavam que com o passar do tempo a concentração de poluente na lagoa tendia a zero, isto é, já foi possível introduzir a ideia intuitiva de limite da função. De fato, foi isto que ocorreu na prática quando efetuamos as sucessivas trocas de água poluída por água limpa. Sendo assim, foi validado o modelo, ou seja, a validação se deu por método direto da observação da clareza da solução no recipiente em relação ao decorrer do tempo. Desse modo, após 17 trocas sucessivas o recipiente estava aparentemente limpo, coincidindo desse modo com o tempo obtido pelo modelo para que essa despoluição ficasse residual.

A validação desse modelo pela quantificação da quantidade de poluentes existentes após cada troca exigiria medições experimentais de quantidade de poluentes após cada troca para verificar a homogeneidade da mistura. Entretanto, o modo direto de observação não deixa dúvidas de que as estimativas da quantidade de poluentes após cada troca devem estar em concordância com os resultados obtidos pelo modelo.

É importante enfatizar que a despoluição quase total de uma lagoa na verdade irá depender de outros fatores tais como, sedimentação, erosão, etc. e que o modelo pela sua simplicidade não pode contemplar tais parâmetros que tornariam mais complexo e impossibilitados de ser tratado no nível do Ensino Médio.

## 5.2 Análise geral da experiência com o modelo de representação da despoluição de lagoas no Ensino Médio

Nesta seção é apresentada a análise geral da experiência vivenciada através da proposta de ação pedagógica envolvendo um modelo matemático simplificado para representação de despoluição de lagoas.

A Lagoa de Maricá foi a motivação para a abordagem da educação ambiental na sala de aula desta classe de Ensino Médio, visto que todos os participantes a conhecem e vivenciam as situações relacionadas aos efeitos da poluição da mesma, como por exemplo, seu odor produzido no processo de eutrofização, falta de peixes, impossibilidade de banho, etc.

A proposta das atividades envolvendo a modelagem matemática foi uma experiência de grande valia e que trouxe a oportunidade dos participantes perceberem na prática que a matemática é fundamental para a representação de uma série de situações de interesse prático (ou não) que ocorrem na nossa vida e no ambiente que nos cerca, e que, através dela pode ser possível fazer previsões de tendências para as quais seriam necessários observações e experimentos que levariam tempo e consumiriam recursos na obtenção dessas mesmas respostas ou informações fornecidas pelo modelo.

No início da proposta pedagógica ao ler o texto motivacional os alunos ficaram intrigados, pois não viam relação do texto com a disciplina de Matemática. Desta parte da experiência surgiram questionamentos do tipo: *"Mas o que isso tem a ver com a Matemática?"*.

Este desconforto inicial foi aproveitado para introduzirmos a Matemática no contexto ecológico e darmos início ao experimento. Durante a realização do experimento, os alunos ficaram atentos às instruções do roteiro e às mediações da professora. Alguns deles filmaram a experiência e as divulgaram em suas redes sociais com expressão de puro encantamento!

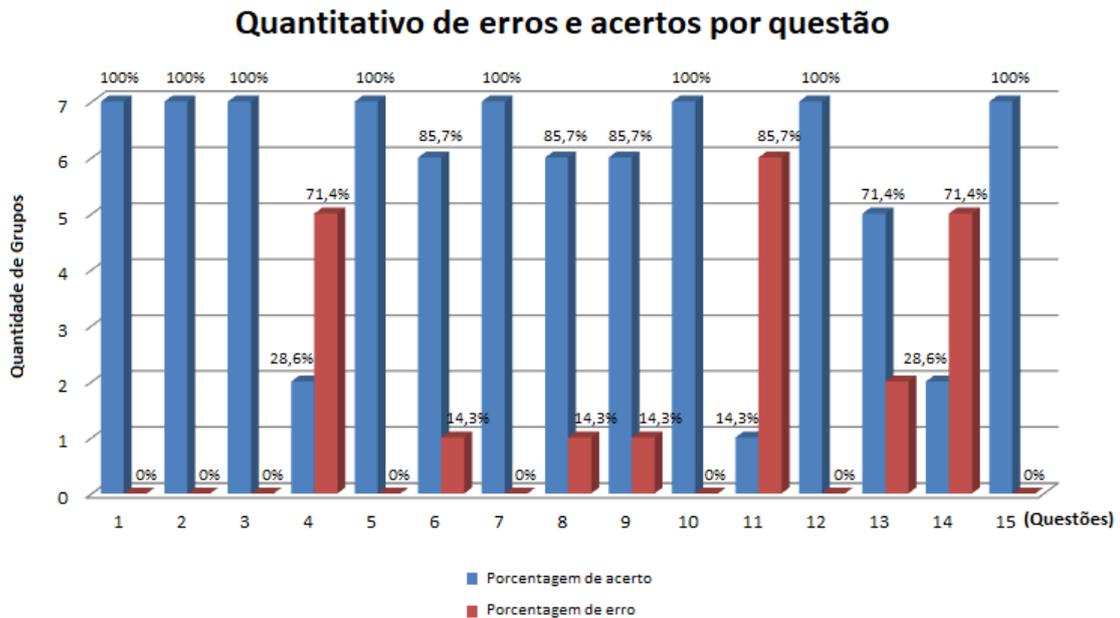
Durante a simulação da despoluição da lagoa fictícia alguns participantes relacionaram este processo aos episódios de abertura do canal na Lagoa da Barra ligando-a ao Oceano Atlântico ocasionando a troca de água entre esta lagoa e o mar. Entretanto, concordamos que em nossa simulação propusemos hipóteses simplificadoras que se distanciavam dessa realidade, e que a abertura deste canal, além de um possível aumento na salinidade da lagoa, implicaria reações diversas no ecossistema do sistema lagunar.

Em relação as questões numeradas de 1 a 15, mais da metade delas alcançou 100% de acerto sendo que em 3 (três) questões, ou seja, em 20% das questões o número de erros superou o de acertos. Estes erros foram ocasionados por alguns descuidos no momento de interpretar as questões e/ou usar conhecimentos matemáticos já abordados anteriormente, como por exemplo: operações com frações, propriedades de logaritmos e desigualdades. Isto indica que esses tópicos da Matemática devem ser objeto de mais atenção quando

forem abordados em sala de aula.

No geral, como podemos observar na Figura 25 houve mais grupos acertando as questões do que errando.

Figura 25 - Quantitativo de erros e acertos nas 15 questões propostas



Fonte: A autora, 2019.

Durante a realização da atividade foi possível notar um desenvolvimento significativo no processo de ensino-aprendizado constatado pelas atitudes dos alunos durante as discussões sobre as soluções das questões, pois a maioria foi capaz de identificar suas falhas através da socialização dos resultados com os demais grupos envolvidos.

O projeto desenvolvido também proporcionou aos alunos o trabalho com diferentes unidades de medida, tais como, litros e miligramas. Outra situação que vale a pena ressaltar foi o primeiro contato dos alunos com o gráfico da função maior inteiro, visto que não é um assunto comumente apresentado nesse nível de estudo quando mesmo assim, conseguiram compreender sua representação na forma de escada em função do tempo. Além disso, analisando o modelo matemático que representou a despoluição da lagoa fictícia, percebe-se que a Eq.(105) à qual a turma piloto chegou pode ser reescrita da seguinte forma

$$p(n) = 100 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 100 e^{n \ln \frac{3}{4}}, \quad (114)$$

Ou equivalentemente,

$$p(n) = 100 e^{-0,287n}. \quad (115)$$

Generalizando, para qualquer  $t \geq 0$ , temos

$$p(t) = 100 e^{-0,287t}, \quad (116)$$

Esta Eq.(116) é semelhante a Eq.(52) referente ao modelo de representação da despoluição de uma lagoa estudado no Capítulo 2 (Seção 2.3). Identificando a Eq.(52):  $S(t) = S_0 e^{-\frac{r}{V_0}t}$  com a Eq.(116), temos  $S_0 = 100$  e  $\frac{r}{V_0} = 0,287$ . Como  $V_0 = 2,4 l$  (volume da lagoa fictícia) temos  $r = 0,688$ , ou seja, a despoluição da lagoa fictícia ocorreu com uma taxa  $r = 0,688 l/dia$ . Vale lembrar que cada troca de água poluída por água limpa representava a despoluição da lagoa em um período de 24 h, ou seja, 1 dia.

Enfim, o mais notável durante a experiência de ação pedagógica foi o ambiente de aprendizado proporcionado pela modelagem do problema proposto. Durante a prática os alunos comentavam que agora fazia sentido o porquê de se estudar assuntos matemáticos como funções logarítmicas e progressões geométricas.

Durante a realização das atividades, surgiram comentários do tipo:

*"Tem Matemática até na Lagoa de Maricá."*

*"Nem a poluição escapa da Matemática."*

*"Meu avô era pescador e agora não tem peixe nem para comer."*

*"Tô me sentindo uma cientista, fazendo experimentos, calculando, ...."(sic)*

*"Professora, quero trabalhar com Matemática e Meio Ambiente..."*

*"Professora, vamos levar essas contas para o Prefeito, aí a gente avisa a ele que tem jeito de salvar a Lagoa de Maricá."*

À medida que esses comentários iam surgindo, os participantes eram estimulados a perceberem que a Matemática está inserida em quase todos os contextos à nossa volta, inclusive em assuntos relacionados ao meio ambiente. Através dessas falas dos alunos e de toda a experiência vivenciada no processo de ensino e aprendizagem por meio da modelagem matemática ratifica-se a importância de uma educação matemática que possa contribuir para formar cidadãos mais conscientes em suas ações em relação ao meio ambiente. Como afirmam Groenwald e Filippsen (2003, p.1),

[...] entende-se que há necessidade de uma proposta de educação matemática que se torna formadora de hábitos, atitudes e comportamentos que devem identificar problemas, formular propostas e atuar no sentido da preservação do meio ambiente, bem como, desenvolver e aprofundar os conteúdos de matemática, com compreensão e com uma visão crítica, formadora da cidadania.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Demograficamente Maricá apresenta um grande e desordenado crescimento populacional, com incremento de mais de 66% no número de habitantes entre 2000 e 2010, e de aproximadamente 27% entre o ano 2010 e as projeções do IBGE para 2019. Este crescimento foi influenciado significativamente pelos empreendimentos ligados ao setor petrolífero que contribuiu para o agravamento da “saúde” da Lagoa de Maricá caracterizada pela lenta e pequena renovação de suas águas. Esse fato contribui para sua degradação ambiental decorrente dos aterros em sua orla e do lançamento de esgotos domésticos sem tratamento.

Sabemos que a Lagoa de Maricá é um recurso hídrico de vital importância para os moradores locais (lazer e pesca) e também de várias espécies vivas (flora e fauna). Por isso consideramos muito relevante estudos que despertem o interesse acerca da qualidade de suas águas.

Com o objetivo de discutir a qualidade da água da Lagoa de Maricá foi realizado um levantamento de dados reais, passando essa fase difícil foram analisados dois modelos matemáticos: um modelo linear baseado no modelo de Malthus e o modelo de Streeter-Phelps, respectivamente.

O primeiro modelo aplicado aos dados da Lagoa de Maricá indicou que se houver lançamento contínuo de uma quantidade constante de poluente na lagoa sua vida aquática não poderá se recuperar com o passar do tempo, pois decorridos aproximadamente 4,5 anos a poluição se estabilizaria num ponto de equilíbrio cerca de 85 vezes maior que 500 mg/l (limite estabelecido pelo Conselho Nacional de Meio Ambiente (CONAMA) para preservação das comunidades aquáticas e atividades de recreação). Neste caso, como há aumento da disponibilidade de matéria orgânica, ocorre conseqüentemente a eutrofização. Assim, diversos organismos da flora e da fauna morrem, ocasionando grande dano ambiental.

Em contrapartida, se forem tomadas medidas de uso de filtros especiais para a introdução cada vez menor de poluentes por unidades de tempo, depois de aproximadamente 4 anos o limite estabelecido pelo CONAMA é alcançado. E, caso fosse cessada totalmente a emissão de poluentes na lagoa, este limite seria alcançado quando passados aproximadamente 1,6 anos. Em ambos os casos, foi possível observar que a poluição da lagoa poderia ser mitigada de forma bastante aceitável.

A simulação da capacidade de autodepuração da Lagoa de Maricá a partir do modelo de Streeter-Phelps permitiu verificar o impacto do lançamento de efluentes na qualidade de sua água. Os resultados apontaram que uma vez que se encerre o lançamento de efluentes a Lagoa de Maricá teria suposta capacidade de autodepuração, visto que com o passar do tempo considerada as condições iniciais a desoxigenação diminui e há maior

transferência de oxigênio para água, contribuindo assim para a despoluição da lagoa.

As simulações realizadas por meio dos modelos descritos foram feitas a partir de uma descrição simplificada da realidade da Lagoa de Maricá, com dados reais e alguns dados fictícios, o que aponta desvantagens em relação um *feedback* para sua validação. Entretanto, vale ressaltar que essa desvantagem é ao mesmo tempo uma vantagem, pois a ausência de esse *feedback* permitiu obter soluções analíticas para o sistema inicial e serve como base para outros modelos melhorados. Futuramente, abordaremos o modelo matemático de Streeter-Phelps-Shishkin com mais detalhes.

A utilização da modelagem matemática em sala de aula com alunos do Ensino Médio possibilitou a obtenção de uma equação recursiva de processos de questionamentos e investigação que tornaram o processo educativo muito mais atraente e significativo. Além disso, o trabalho desenvolvido com interpretação e construção de gráficos de funções e tabelas permitiu que a turma piloto percebesse a importância dos conteúdos matemáticos para interpretação de informações obtidas nestes formatos.

O resultado da aplicação das atividades experimentais e teóricas pode ser considerado satisfatório, uma vez que o objetivo geral de colaborar com o processo de reflexão sobre o ensino da matemática na sociedade atual, explicitando a poluição de lagoas e norteado pelo ensino através de modelagem da modelagem matemática foi alcançado. E, mais ainda, os alunos demonstraram grande interesse durante o desenvolvimento da proposta de investigação, desde a realização do experimento até a validação dos resultados encontrados pelo nosso modelo matemático.

Ao término das atividades, os alunos relataram as suas impressões acerca da proposta de ação pedagógica e, dentre elas, cabe-se destacar a surpresa dos alunos em saber que o conhecimento matemático pode ser aplicado em situações relacionadas a despoluição e, conseqüentemente, ao meio ambiente. Além disso, puderam observar através do experimento (da garrafa com o permanganato) que não é simples, nem rápida a despoluição de um recurso hídrico.

Enfim, a temática interdisciplinar envolvendo modelos matemáticos e a Lagoa de Maricá permitiu estabelecer uma relação entre Matemática e Meio Ambiente envolvendo conceito matemáticos e informações sobre ecologia abordados em estudos sobre qualidade da água e poluição de corpos hídricos, assim como também colaborou desta forma com o processo da formação de cidadãos ecologicamente mais conscientes.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Lourdes Marai Werle; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 17, n. 22, p. 19–35, 2004.
- ANDRADE, Larice Nogueira de. Autodepuração dos corpos d'água. *Revista da Biologia*, v. 5, p. 16–19, 2010.
- AQUINO, Julio Groppa. *Erro e fracasso na escola*. [S.l.]: Grupo Editorial Summus, 1997.
- ARAÚJO, Jorge Corrêa de; MÁRQUEZ, Rosa García; HUAROTO, Yrma. Raymundo. *Equações Diferenciais Ordinárias: Teoria Básica e aplicações com o uso do Maple*. [S.l.]: Clube dos Autores, 2016.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002.
- BASSANEZI, Rodney Carlos; JR WILSON CASTRO, Ferreira. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988.
- BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. 18 p.
- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.
- \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRIAN, J McCartin; JR, B Forrester Sydney. A fractional step-exponentially fitted hopscotch scheme for the streeter-phelps equations of river self-purification the authors would like to express their heartfelt thanks to mrs. barbara mccartin for her invaluable assistance in the production of this paper. *Engineering Computations*, Emerald Group Publishing Limited, v. 19, n. 2, p. 177–189, 2002.
- BRITO, GF et al. Biopolímeros, polímeros biodegradáveis e polímeros verdes. *Revista eletrônica de materiais e Processos*, v. 6, n. 2, p. 127–139, 2011.
- CARVALHO, Julia Pinheiro de; TAVARES, Doralice Chagas. Tratamento de Águas residuárias-situação atual do município de maricá/rj. 2018.
- CEPERJ, Dados. *Mapa de localização de Maricá – região metropolitana do Rio de Janeiro*. 2013. Disponível em: <[http://www.ceperj.rj.gov.br/ceep/info\\_territorios/RMRJ2013.pdf](http://www.ceperj.rj.gov.br/ceep/info_territorios/RMRJ2013.pdf)>. Acesso em: 15 abril 2015.
- CONAMA, Resolução. 357, de 17 de março de 2005. *Conselho Nacional do Meio Ambiente-CONAMA*, v. 357, 2005.

COOPE, UFRJ. *PROJETOS BAÍAS DO BRASIL: /Sistema Lagunar Maricá-Guarapina-RJ*. 2019. Disponível em: <[http://baiasdobrasil.ivig.coppe.ufrj.br/assets/relatorios/rel\\_sistema\\_lagunar\\_marica\\_guarapina.html](http://baiasdobrasil.ivig.coppe.ufrj.br/assets/relatorios/rel_sistema_lagunar_marica_guarapina.html)>. Acesso em: 20 agosto 2019.

CRUZ, Carla Bernadete Madureira et al. Impactos ambientais no sistema lagunar de Maricá-Guarapina. *Anais do Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto*. Salvador, p. 137–141, 1996.

DINIZ, Fernanda Kreischer Bandeira et al. Levantamento de pesquisas realizadas na APA de Maricá-RJ. *Uso Público em Unidades de Conservação*, v. 3, n. 5, p. 94–103, 2015.

ELLIOT, John. La investigación–acción en educación.(3ra). *Madrid: Morata, SL*, 1997.

GIL, Antonio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. *São Paulo*, v. 5, n. 61, p. 16–17, 2002.

GOTOVTSEV, AV. Modification of the Streeter-Phelps system with the aim to account for the feedback between dissolved oxygen concentration and organic matter oxidation rate. *Water resources*, Springer, v. 37, n. 2, p. 245–251, 2010.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; FILIPPSEN, Rosane Maria Jardim. Educação matemática e educação ambiental: educando para o desenvolvimento sustentável. *Atas do IV Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*. Baurú, SP, 2003.

GUERRA, L V et al. Biochemical and microbiological tools for the evaluation of environmental quality of a coastal lagoon system in southern brazil. *Brazilian journal of biology = Revista brasleira de biologia*, v. 71, p. 461–8, 05 2011.

HUBER, W. C. *Contaminant transport in surface water*. [S.l.]: In: MAIDMENT, D. R. (editor) *Handbook of Hydrology*. McGraw-Hill, 1993.

IBGE. Censo demográfico 2010. Rio de Janeiro, 2010.

\_\_\_\_\_. Área territorial brasileira. Rio de Janeiro, 2019.

KJERFVE, Björn et al. Hydrology and salt balance in a large, hypersaline coastal lagoon: Lagoa de Araruama, Brazil. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, Elsevier, v. 42, n. 6, p. 701–725, 1996.

LAUT, Lazaro et al. Organic compounds as proxies of the sedimentary environmental quality of the maricá-guarapina lagoon system (se, brazil). *Journal of Sedimentary Environments*, v. 4, n. 2, p. 159–173, 2019.

LEITE, Kécio Gonçalves. Modelagem matemática “para” sala de aula: Uma experiência com professores do ensino médio. *III Fórum de Educação e Diversidade*, 2008.

MALAGUTTI, Pedro Luiz Aparecido; GIRALDO, V. Modelo de despoluição: Módulo I. *Cuiabá, MT: Central de Texto*, 2013.

MARICÁ. *Lei Orgânica Municipal de Maricá*. 1990. Disponível em: <<http://www.marica.rj.gov.br/download/downloads.htm>>. Acesso em: 15 abril 2019.

- MARICÁ, PMM.PREFEITURA MUNICIPAL DE. *Secretaria Municipal de Urbanismo e Meio Ambiente*. 2015. Disponível em: <<http://www.marica.rj.gov.br/urbanismo/>>. Acesso em: 20 abril 2015.
- MELO, Marilia Carvalho de. Avaliação e proposição de critérios de outorga para lançamento de efluentes em corpos d'água. UFMG, 2006.
- NCTM. Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. National Council of Teachers of Mathematics, Lisboa, 1991.
- OLIVEIRA, Lejeune de; KRAU, Luiza. Observações biogeográficas durante a abertura da barra da lagoa de Saquarema. *Memórias do Instituto Oswaldo Cruz*, SciELO Brasil, v. 53, n. 2-3-4, p. 435-449, 1955.
- OLIVEIRA, Lejeune de et al. Observações biogeográficas e hidrobiológicas sobre a Lagoa de Maricá. *Mem. Inst. Oswaldo Cruz*, v. 53, n. 2, p. 3, 1955.
- PERES, Bianca de Miranda. *Bactérias indicadoras e patogênicas em biofilmes de sistemas de tratamento de água, sistemas contaminados e esgoto*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.
- PHELPS, Earle B; STREETER, Harold W. A study of the pollution and natural purification of the ohio river. US Department of Health, Education, & Welfare, 1958.
- PRESCOTT, LM; HARLEY, JP; KLEIN, DA. *Microbiology*. 3ª Edição. Wm. C. [S.l.]: Brower Publishers, 1996.
- REGALADO, Alejandro; PERALTA, Ever; GONZÁLEZ, Carlos alberto. Cómo hacer un modelo matemático. *Temas de Ciencia y Tecnología*, v. 12, p. 9-18, 05 2008.
- ROSMAN, PC. Estudos de hidrodinâmica ambiental para desenvolvimentos na apa do sistema lagunar de maricá. *Relatório Final da Coppetec para a IDB Brasil Ltda, Rio de Janeiro*, 2007.
- RUEDA, F. Autodepuración y vertidos en cursos fluviales. *Universidad de Granada*, 2010.
- SEMADS. Bacias hidrográficas e Rios Fluminenses - síntese informativa por macrorregião ambiental. *Projeto Planágua Semads/GTZ*, Rio de Janeiro, 2009.
- SILVA, André Luiz Carvalho da. Estrutura interna da restinga no litoral de Maricá (RJ-Brasil) através do georadar. In: . [S.l.: s.n.], 2013.
- SILVA, Neusely da et al. *Manual de métodos de análise microbiológica de alimentos e água*. [S.l.]: Editora Blucher, 2017.
- SILVESTRE, Carolina Pereira et al. Geomorfologia, sedimentação e processos atuantes na lagoa de Maricá, rio de janeiro. *Revista Brasileira de Geomorfologia*, v. 18, n. 2, 2017.
- SPERLING, Marcos von. Princípios do tratamento biológico de águas residuárias. In: *Princípios básicos do tratamento de esgotos*. [S.l.]: Universidade Federal de Minas Gerais, 1996.

SPERLING, Marcos Von. *Estudos e modelagem da qualidade da água de rios*. [S.l.]: DESA/UFGM, 2007.

STEWART, James. *Curso de cálculo volume 1*. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2002.

THOMANN, Robert V. Bioaccumulation model of organic chemical distribution in aquatic food chains. *Environmental science & technology*, ACS Publications, v. 23, n. 6, p. 699–707, 1989.

THOMANN, Robert V; MUELLER, John A. *Principles of surface water quality modeling and control*. [S.l.]: Harper & Row Publishers, 1987.

TUCCI, Carlos E. M. *Modelos Hidrológicos. Colaboração da Associação Brasileira de Recursos Hídrico/ABRH*. 2ª ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2005. 678 p p.

WALLACE, J Bruce; WEBSTER, Jackson R. The role of macroinvertebrates in stream ecosystem function. *Annual review of entomology*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 41, n. 1, p. 115–139, 1996.

## GLOSSÁRIO

Autodepuração	Processo natural, no qual a matéria orgânica lançada num corpo hídrico é decomposta por micro-organismos presentes na água.
Biocatalisadores	Catalisadores das reações bioquímicas dos seres vivos. Exemplo: as enzimas, os hormônios e as vitaminas.
Bioquímico	Processos químicos que ocorrem nos organismos vivos.
Catalisadores	Substâncias que aumentam a velocidade de uma reação química sem estarem sendo consumidas por ela.
DBO	Demanda Bioquímica de Oxigênio: indicador da quantidade de oxigênio dissolvido consumido pelos micro-organismos para a decomposição da matéria orgânica presente na água.
Eutrofização	Crescimento excessivo de algas induzido pela quantidade excessiva de minerais na água devido ao acúmulo de matéria orgânica nos ambientes aquáticos.
Lagoa morta	Lagoa com danos extremos que a impeça de autorrecuperar-se.
OD	Oxigênio Dissolvido: medida relativa da quantidade de oxigênio que está dissolvido num determinado fluido.
Reaeração atmosférica	Troca de gases entre a atmosfera e o meio líquido.
Reator biológico	Sistema de filtragem por meio de microrganismos capazes de consumir os poluentes contidos na água.

**APÊNDICE A – Roteiro do Experimento****CIEP 259 - C.E. PROF<sup>a</sup> MARIA DO AMPARO RANGEL DE SOUZA****DISCIPLINA: MATEMÁTICA****SÉRIE: 2º ANO DO ENSINO MÉDIO****PROFESSORA: BRUNA MOREIRA****GRUPO: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_****ALUNOS:**

---

---

---

---

---

**SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE DESPOLUIÇÃO  
DE UMA LAGOA****Instruções:**

Seu grupo irá construir uma lagoa poluída e em seguida simulará seu processo de despoluição. Este processo se dará trocando-se a água poluída da “lagoa” por água limpa. Esta troca representará a ação dos microrganismos no ambiente em um período de 24h. *(Na natureza o processo de despoluição é promovido pelos microrganismos presentes no ecossistema.)*

Confira se sobre a sua mesa encontra-se os seguintes materiais para realização do experimento:

- 1 garrafa PET transparente de 3l
- 1 jarra graduada;
- 1 dose de Poluente (100 mg de Permanganato de Potássio);
- 1 funil.

<b>1ª ETAPA</b>	
<b>Construção da Lagoa Poluída.</b>	Na garrafa PET coloque 2,4 litros de água limpa, acrescente 1 dose de Poluente (100 mg de Permanganato de Potássio), tampe a garrafa e agite-a até que a mistura esteja visualmente homogênea.
<b>Simulação do primeiro processo de despoluição da lagoa fictícia.</b>	Retire 600 ml de água da lagoa fictícia e substitua por 600ml de água limpa. <i>(Atenção: Com esse procedimento estamos simulando a despoluição da lagoa num período de 24h.)</i>

### QUESTÃO 1

Considerando que a mistura de água com *Permanganato de Potássio* é perfeitamente homogênea, quantos miligramas de poluente foram retirados da lagoa fictícia neste procedimento de despoluição?

- (a) 25 mg
- (b) 50 mg
- (c) 100 mg
- (d) 125 mg

### QUESTÃO 2

Após este procedimento, que simulou a despoluição num período de 24 h, quantos miligramas de poluente ainda ficaram na lagoa fictícia?

- (a) 25 mg
- (b) 50 mg
- (c) 75 mg
- (d) 100 mg
- (e) Nenhum

<b>2ª ETAPA</b>	
<b>Simulação do segundo processo de despoluição da lagoa fictícia.</b>	Retire mais 600 ml de água da lagoa fictícia e acrescente 600 ml de água limpa.

### QUESTÃO 3

A água tornou-se límpida?

---



---

### QUESTÃO 4

Calcule a quantidade de poluente restante na lagoa fictícia, após esta segunda troca de água.

---



---



---

<b>3ª ETAPA</b>	
<b>Simulação do terceiro processo de despoluição da lagoa fictícia.</b>	Retire pela terceira vez mais 600 ml de água da lagoa fictícia e complete com 600 ml de água limpa.
<b>Simulação do quarto e quinto processos de despoluição da lagoa fictícia.</b>	Repita este procedimento por mais duas vezes.

### QUESTÃO 5

Depois de todas essas trocas, o que você observa? A lagoa fictícia encontra-se totalmente límpida?

---



---



---

### QUESTÃO 6

Organize os dados na tabela abaixo, calculando a quantidade de poluente restante em cada período de 24 horas até o 5º dia do nosso experimento.

Número de trocas $[n]$		Quantidade de poluente na lagoa fictícia $[p(n)]$
Início	$n = 0$	$p(0) =$
1ª Troca	$n = 1$	$p(1) =$
2ª Troca	$n = 2$	$p(2) =$
3ª Troca	$n = 3$	$p(3) =$
4ª Troca	$n = 4$	$p(4) =$
5ª Troca	$n = 5$	$p(5) =$

### QUESTÃO 7

A lagoa fictícia ficará totalmente isenta de poluição em algum momento? Reflita sobre a resposta desta questão, com base nos dados da tabela da Questão 6.

---



---



---

### QUESTÃO 8

Quantos dias, no mínimo, deverão se passar para que a concentração de poluente na lagoa fictícia seja inferior a  $10 \text{ mg}$  (Supondo que seja o aceitável!)?

- (a) 1 dia
- (b) 7 dia
- (c) 8 dias
- (d) 9 dias
- (e) 10 dias

### QUESTÃO 9

Com base nas variáveis registradas na Tabela 15 acima escreva uma equação para quantidade de poluente  $p(n)$  em função do período  $n$ .

---



---



---

### QUESTÃO 10

Abaixo temos o desenvolvimento passo a passo da equação recursiva obtida na Questão 9. Observe a sequência de cálculos dos cinco primeiros períodos de tempo do experimento que realizamos e deduza uma nova fórmula que possa expressar a quantidade restante de poluente em função da quantidade existente no início do experimento  $p(0)$ .

$$p(0) = 100 \text{ mg}$$

$$p(1) = (3/4)p(0) = 75 \text{ mg}$$

$$p(2) = (3/4)p(1) = (3/4)[(3/4)p(0)] = (3/4)^2 p(0) = 56,25 \text{ mg}$$

$$p(3) = (3/4)p(2) = (3/4)[(3/4)^2 p(0)] = (3/4)^3 p(0) = 42,19 \text{ mg}$$

$$p(4) = (3/4)p(3) = (3/4)[(3/4)^3 p(0)] = (3/4)^4 p(0) = 31,64 \text{ mg}$$

$$p(5) = (3/4)p(4) = (3/4)[(3/4)^4 p(0)] = (3/4)^5 p(0) = 23,73 \text{ mg}$$

---



---



---

### QUESTÃO 11

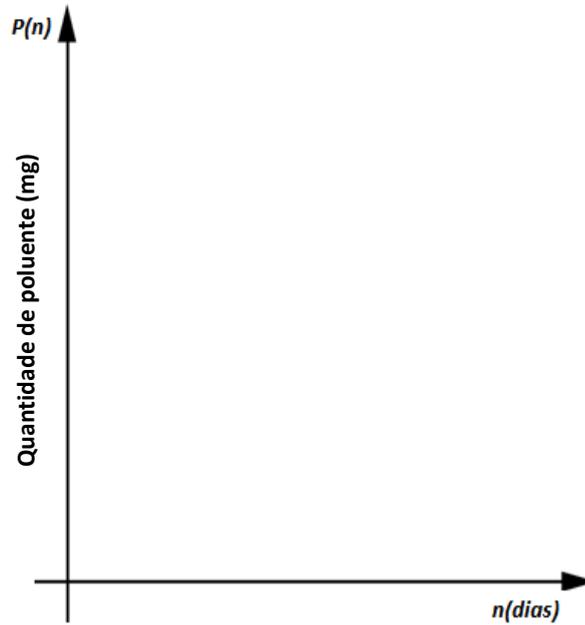
Imagine que em nosso experimento a lagoa fictícia só poderá ser considerada despoluída quando a quantidade de poluente for inferior a 1 mg. Nestas condições, quantos dias no mínimo deverão se passar a partir da mesma situação inicial (100 mg de poluente) para que esse patamar seja atingido?

- (a) 10 dia
- (b) 12 dia
- (c) 14 dias
- (d) 17 dias
- (e) 25 dias

### QUESTÃO 12

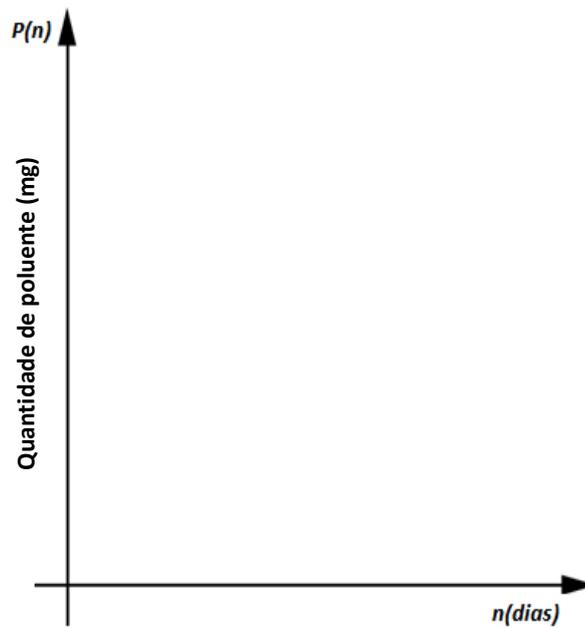
A equação  $p(n) = 100 (3/4)^n$ , referente ao nosso modelo matemático, permite-nos escrever diretamente a quantidade de poluente  $p(n)$  em miligramas existentes em uma mistura de volume constante em função do período de tempo  $n$  em *dias*. Essa equação dá origem a pares ordenados  $(1, p(1)), (2, p(2)), (3, p(3)), \dots, (n, p(n)), \dots$  onde a partir deles é possível fazer um esboço gráfico desse experimento. Assim sendo, preencha a tabela abaixo e esboce o gráfico da função exponencial ao qual esses pares ordenados pertencem.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(n)											



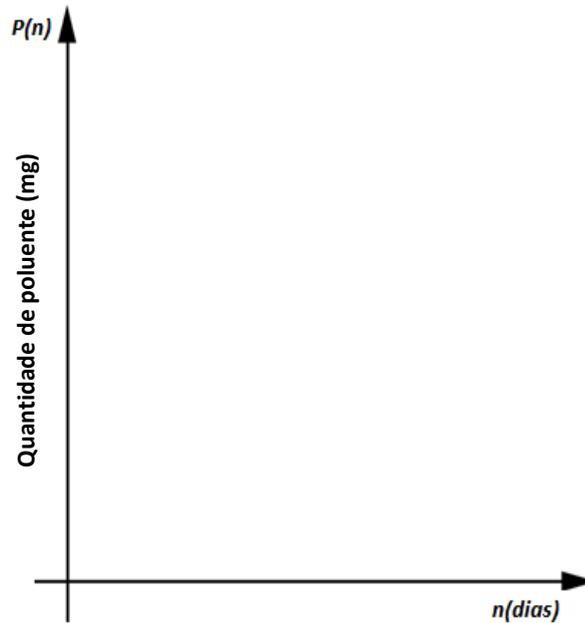
### QUESTÃO 13

Como seria o esboço do gráfico se o tempo apenas passasse e não houvesse nenhum tipo de troca de água poluída por água limpa?



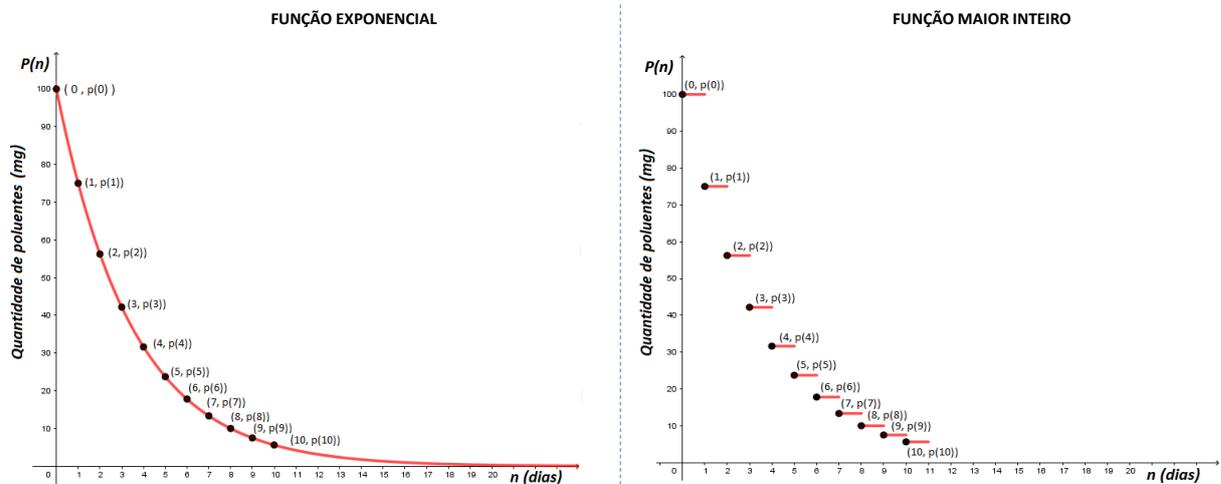
### QUESTÃO 14

E como seria esse esboço se a quantidade de poluente retirada fosse sempre a mesma, isto é, 25 mg?



### QUESTÃO 15

Compare as duas representações gráficas associadas ao nosso modelo de despoluição e responda:



- a) Qual dos gráficos representa mais fielmente o processo de despoluição natural realizado por micro-organismos vivos? Por quê?

---

---

---

- b) E qual deles representa mais fielmente a simulação da lagoa fictícia com água e *Permanganato de Potássio* que realizamos? Por quê?

---

---

---

**APÊNDICE B** – Termo de Consentimento

Obs.: O responsável por cada aluno participante mencionado ou cuja imagem está nesta pesquisa assinaram este termo.

**TERMO DE CONSENTIMENTO**

Eu, \_\_\_\_\_, por meio deste termo, declaro que concordo com a participação na pesquisa de dissertação de Mestrado da Professora Bruna Silva dos Santos Moreira do(a) aluno(a) \_\_\_\_\_, com temática sobre a Lagoa de Maricá, para o Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, sob a orientação da Professora Dra. Rosa María García Márquez e coorientação do Professor Dr. Jorge Corrêa de Araújo. Estou ciente de que esta pesquisa tem finalidade acadêmica e suas conclusões poderão contribuir para o aperfeiçoamento de estudos sobre o ensino de matemática e para melhoria na qualidade da educação nas instituições de ensino. O uso das informações e imagens são apenas para fins de pesquisa acadêmica (seminários, artigos, palestras, etc.).

Rio de Janeiro, 01 de agosto de 2019.

---

Assinatura do(a) Responsável do aluno

---

Assinatura da Pesquisadora

---

Assinatura da Orientadora

---

Assinatura do Coorientador

**ANEXO A** – Artigo - Matemática, meio ambiente e arte: transformando lixo em luxo!

Disponível no site da Revista Eletrônica da Matemática (e-ISSN 2447-2689) através do link: <<http://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/3513/2568>>.

# Matemática, meio ambiente e arte: transformando lixo em luxo!

## Matemáticas, medio ambiente y arte: ¡transformando basura em lujo!

Bruna Silva dos Santos Moreira  
Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC-RJ), Maricá, RJ, Brasil  
<https://orcid.org/0000-0003-4879-8528>, [supramor@yahoo.com.br](mailto:supramor@yahoo.com.br)

Rosa María García Márquez  
Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ), Faculdade de Formação de Professores  
Departamento de Matemática, São Gonçalo, RJ, Brasil  
<https://orcid.org/0000-0003-3465-569X>, [rosagmarquez@yahoo.com.br](mailto:rosagmarquez@yahoo.com.br)

Jorge Corrêa de Araújo  
Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ), Faculdade de Formação de Professores  
Departamento de Matemática, São Gonçalo, RJ, Brasil  
<https://orcid.org/0000-0002-1015-6311>, [jcaraujo@iprj.uerj.br](mailto:jcaraujo@iprj.uerj.br)

### Informações do Artigo

#### Como citar este artigo

MOREIRA, Bruna Silva dos Santos; MÁRQUEZ, Rosa María García; ARAÚJO, Jorge Corrêa de. Matemática, meio ambiente e arte: transformando lixo em luxo!. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 1, p. 01-18, jan. 2020. DOI: <https://doi.org/10.35819/remat2020v6i1id3513>



#### Histórico do Artigo

Submissão: 29 de junho de 2019.  
Aceite: 12 de novembro de 2019.

#### Palavras-chave

Ensino de Matemática  
Arte  
Meio Ambiente  
Lixo

#### Palabras clave

Enseñanza de Matemáticas  
Arte  
Medio Ambiente  
Basura

### Resumo

Devido ao crescente aumento da população e, conseqüentemente, do uso exagerado dos recursos naturais e da produção industrial, existe atualmente uma constante preocupação de organizações governamentais e não governamentais com a preservação do meio ambiente e com a qualidade de vida das futuras gerações. Neste sentido, é fundamental envolver o jovem estudante com as preocupações ambientais trabalhando de forma contextualizada e relacionando o meio ambiente aos conteúdos desenvolvidos em sala de aula, possibilitando a interação entre diferentes ciências, em especial a Matemática, por meio da interdisciplinaridade. O presente trabalho apresenta um relato de experiência realizada com uma turma piloto de oitavo ano do Ensino Fundamental, em uma escola na cidade de Maricá, no Estado do Rio de Janeiro. Foram abordados tópicos de Matemática com ênfase em estatística, de modo a quantificar a produção de lixo ambiental de uma amostra recolhida dentro do perímetro urbano da cidade. Durante este processo, foram propostas atividades interdisciplinares de modo a relacioná-las com as etapas de produção e a destinação do lixo ambiental. Tal experiência foi vivenciada em diferentes momentos, entre os quais se pode destacar: palestra, uso da sala de recursos, oficina de Arte e Matemática, bem como produção textual. A interação e a colaboração em cada etapa das atividades realizadas pela turma mostram que a interdisciplinaridade é uma grande aliada para uma aprendizagem significativa, ou seja, colabora para a formação de alunos críticos, reflexivos e criativos, capazes de entenderem a importância da Matemática como uma aliada na preservação ambiental.

### Resumen

Debido al creciente aumento de la población y, conseqüentemente del uso exagerado de los recursos naturales y de la producción industrial, existe actualmente una constante preocupación de organizaciones gubernamentales y no gubernamentales con la preservación del medio ambiente y con la calidad de vida de las futuras generaciones. En este sentido, es fundamental involucrar al joven estudiante con las preocupaciones ambientales, trabajando de forma contextualizada y relacionando el medio ambiente a los contenidos desarrollados en el aula, posibilitando la interacción entre diferentes ciencias, en especial la Matemática

---

a través de la interdisciplinariedad. Este trabajo presenta un relato de experiencia realizada con una clase piloto de octavo grado, en una escuela en la ciudad de Maricá en el estado de Rio de Janeiro. Fueron abordados temas matemáticos, con énfasis en estadística, para cuantificar la producción de residuos ambientales de una muestra recolectada dentro del perímetro urbano de la ciudad. Durante este proceso, se propusieron actividades interdisciplinarias para relacionarlas con las etapas de producción y la eliminación de los desechos ambientales. Esta experiencia fue vivenciada en diferentes momentos, entre los cuales se puede destacar: charla, sala de recursos, sala de informática, taller de Arte y Matemática, así como producción textual. La interacción y colaboración en cada etapa de las actividades realizadas por la clase, muestran que la interdisciplinariedad es una gran aliada para un aprendizaje significativo, o sea, contribuye en la formación de alumnos críticos, reflexivos y creativos, capaces de entender la importancia de las Matemáticas como una aliada a la preservación ambiental.

---

## 1. Introdução

O crescimento populacional mundial a taxas geométricas e o consumismo exagerado desta mesma população pressionam o meio ambiente com a ampliação das áreas de plantio, bem como com o aumento da produção industrial para a produção de bens decorrente do consumo. Estes problemas foram abordados pela ONU, na Suécia, em 1972, durante a Conferência das Nações Unidas sobre o Meio Ambiente Humano, a qual deu origem à Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Paralelamente a este evento, surgiram diversas instituições não governamentais como a Greenpeace.

O crescimento populacional mundial observado a partir do meado do século XX até início do século XXI, aliado ao ritmo crescente de produção de alimentos e bens materiais modificáveis de baixo custo nesse mesmo período, permitiu à grande maioria dessa mesma população, o consumo quase irrestrito desses bens de produção. Em decorrência desse “consumismo”, problemas ambientais em larga escala começaram a ocorrer como, por exemplo, a poluição em lagoas, rios e oceanos.

Neste sentido, cabe aos educadores proporem uma nova pedagogia de educação que contemple a discussão sobre o meio ambiente e suas formas de manejo. Conforme Tajra (2007, p. 12), “cabe principalmente à escola e aos educadores junto aos familiares prepararem cidadãos conscientes, criativos e intelectualmente capazes para viverem em um mundo cada vez mais competitivo e em completa transformação”.

Por isso, cabe, em especial, aos professores despertarem a consciência ecológica dos alunos, motivando-os a se ocuparem com as questões ambientais, trabalhando-as de forma contextualizada de modo a possibilitar a interação entre as diferentes ciências, nas quais a Matemática é essencial.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

A compreensão das questões ambientais pressupõe um trabalho interdisciplinar em que a Matemática está inserida. A quantificação de aspectos envolvidos em

problemas ambientais favorece uma visão mais clara deles, ajudando na tomada de decisões e permitindo intervenções necessárias (reciclagem e reaproveitamento de materiais, por exemplo). (BRASIL, 1998, p. 38).

O objetivo desse trabalho é utilizar atividades interdisciplinares envolvendo, em especial, a Matemática, de modo a relacioná-las com as etapas da produção e a destinação, em particular, do lixo ambiental, de modo a conscientizar os discentes da importância do tema tratado e alertando-os de que todos nós somos impactados por atitudes negativas junto ao meio ambiente.

Segundo Siqueira (2001), a interdisciplinaridade pode ser caracterizada como nível em que a colaboração entre as disciplinas conduz a interações propriamente ditas, de tal forma que, no final do processo interativo, cada disciplina saia enriquecida. Desta forma, a escolha de um projeto interdisciplinar com o objetivo de produzir alertas quanto à necessidade dos cuidados com o meio ambiente envolveu as disciplinas de Matemática, Ciências, Artes e Português.

## 2. Relato de Experiência

A experiência que aqui será relatada utilizou uma turma de 8º ano localizada no município de Maricá – Rio de Janeiro. Houve a participação dos 35 alunos que integram a turma, com idades entre doze e quatorze anos, além da valiosa colaboração dos professores: Edson Cavalcanti (Português, SEEDUC, RJ<sup>1</sup>), Elisângela da Rocha (Artes, PMRO<sup>2</sup>) e Fábio Araújo (Biologia, UERJ<sup>3</sup>). Tal experiência foi dividida em seis atividades: palestra, sala de recursos, sala de informática, oficina de Arte e Matemática, atividade matemática e produção textual. Estas atividades foram realizadas em um período de cinco dias, sempre pela manhã e com duração máxima de duas horas diárias.

Os métodos de pesquisa selecionados para compor este trabalho foram a pesquisa-ação e o estudo de caso descritivo. Segundo Elliot (1997), a pesquisa-ação permite superar as lacunas existentes entre a pesquisa educativa e a prática docente. Com os resultados desta prática, são ampliadas as capacidades de compreensão dos professores para o fenômeno de interesse. Segundo Ponte (1994, p. 55), os estudos de caso “podem ser fundamentalmente descritivos, tendo como propósito essencial descrever, isto é, dizer simplesmente ‘como é’ o caso em apreço”. Nesse sentido, esta pesquisa aqui desenvolvida tem caráter tanto quantitativo como qualitativo, pois reúne dados que podem ser interpretados de forma numérica, dando-lhes significado qualitativo.

### 2.1. Palestra com organizadores do Projeto “Praia Limpa é a minha Praia”

Para abertura das atividades, foi convidada a equipe do Projeto “Praia Limpa é a minha Praia” (ARAÚJO *et al.*, 2014) para a realização de uma palestra que teve por objetivo principal

<sup>1</sup> SEEDUC, RJ: Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro.

<sup>2</sup> PMRO: Prefeitura Municipal de Rio das Ostras.

<sup>3</sup> UERJ: Universidade Estadual do Rio de Janeiro.

estimular a mudança de hábitos e atitudes dos alunos em relação à conservação do meio ambiente, particularmente em praias. A Figura 1 mostra a palestra proferida pelo professor Fábio Viera de Araújo do Projeto “Praia Limpa é a minha Praia”.

Figura 1 – Palestra do Projeto “Praia Limpa é a minha Praia”.



Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2018).

Este momento, com duração de aproximadamente uma hora, proporcionou um contato especial sobre o assunto, pois a abordagem do tema por meio de um profissional da área tornou mais impactante a problemática sobre preservação do meio ambiente. Foi forte o impacto causado nos participantes do encontro, como é relatado a seguir.

As informações sobre microplástico (fragmentos de plástico com medidas de 1 a 5 *mm*), conforme mostra a Figura 2, e as alterações ambientais causadas por resíduos de plástico foram os aspectos que mais causaram perplexidade na plateia, pois os participantes não imaginavam que atitudes habituais e aparentemente inofensivas, poderiam causar efeitos tão perniciosos ao meio ambiente.

Figura 2 – Microesferas de polietileno em esfoliantes e sabonetes.



Fonte: Elaboração dos autores (2018).

Durante o encontro, houve contestações um tanto curiosas, como, por exemplo, em determinado momento o palestrante, professor Araújo, sugeriu alguns hábitos ecologicamente corretos, tais como: utilizar sacolas retornáveis, não usar cremes dentais e sabonetes que possuam micro plástico em sua composição, recusar produtos descartáveis em geral, bem como outros procedimentos simples e bem conhecidos. Em seguida, um participante pediu a palavra e perguntou: “O que adianta eu fazer isso, se as outras pessoas não vão fazer o mesmo?”. O

palestrante explicou calmamente que cada um deveria fazer a sua parte e que o planeta depende da colaboração de cada um de nós para a conservação de recursos vitais. Explicou também que esse processo de conscientização pode parecer lento, mas é de extrema importância, já que a mudança de postura de cada um de nós pode desencadear uma corrente crescente de atitudes positivas com relação ao meio ambiente de forma geral, e nada melhor do que sermos exemplo dessas práticas.

Ao final desse encontro, foi possível notar uma inquietude em relação a certas atitudes erradas antes praticadas de modo comum, bem como a conscientização dos participantes quanto a essas práticas, o que nos leva a inferir que tal atividade deveria ser realizada com maior frequência nas escolas, visto que as mesmas causaram reflexões quanto ao comportamento diário com o lixo, podendo promover mudanças de hábito com respeito ao meio ambiente e a sua conservação.

## 2.2. Sala de recursos: vídeo “Vamos cuidar do meio ambiente”

No segundo dia de atividades, a turma piloto foi levada a assistir o vídeo “Vamos cuidar do meio ambiente”. Nele, a “Turma da Mônica”, do artista e desenhista Maurício de Souza, destaca a conservação do meio ambiente e falam sobre a regra dos 3R's: Reduzir, Reutilizar e Reciclar. Atualmente, são considerados 5R's: Repensar, Recusar, Reduzir, Reutilizar e Reciclar (GONÇALVES *et al.*, 2016). Neste momento, a professora de Matemática, Bruna Moreira, fez uma abordagem sobre a temática em questão, buscando informações a respeito do conhecimento prévio dos alunos sobre o assunto a fim de incorporar vivências e trazer sentido às atividades matemáticas que seriam desenvolvidas posteriormente.

O vídeo com duração aproximada de vinte e cinco minutos conseguiu prender a atenção de todos, e foi possível notar uma comoção em relação ao fato relatado no vídeo sobre os animais marinhos, como golfinhos e tartarugas, que ao ingerirem o lixo industrial presente em seus habitats naturais, acabam por serem feridos ou mesmo vindos a morrer.

Outro momento marcante, foram os comentários sobre o Ribeirão do Chico Bento, um rio fictício, no qual o Chico Bento costumava pescar peixes e agora já não pode porque só consegue pescar lixo. Essa história é baseada nas boas lembranças da infância do autor Mauricio de Souza sobre a pesca nas águas do Rio Tietê em São Paulo (SOUZA, 1996). Um aluno relatou que seus avós, que viviam da pesca em Maricá, por diversas vezes recolhiam redes “*recheadas com mais lixo do que peixe*”.

No momento que a personagem Mônica fala sobre o óleo de cozinha que é descartado na pia, indo parar em rios e mares, contribuindo com a poluição e provocando a morte dos peixes, um grupo de alunos moradores do bairro São José do Imbassaí, em Maricá, fizeram analogia com um fato que ocorreu em outubro de 2017, quando uma grande mortandade de peixes apareceu na lagoa do referido bairro.

Sobre a regra dos 3R's apresentada pelo personagem Franjinha da turma da Mônica, alguns relataram que vivenciam algumas dessas atitudes em suas casas, como:

- Reduzir: o uso da energia elétrica, o consumo de sacolas plásticas e o tempo no banho.
- Reutilizar: as sucatas para fazer brinquedos, os copos de vidro de geleia, os potes de sorvete para armazenar feijão e o óleo de cozinha para fazer sabão.
- Reciclar: as latas, as garrafas PET e utilizar as cascas de legumes e frutas para adubar hortas.

Segundo Luiz *et al.* (2013, p. 117),

[...] uma das maneiras mais eficazes de contribuir para a preservação do meio ambiente é aderir no cotidiano ao Princípio dos 5R's, uma política que, além de tratar a questão da destinação dos resíduos sólidos, induz a uma reflexão crítica sobre o consumismo exagerado.

Ao término dessa etapa, foi visível a mudança de atitude dos participantes em relação ao lixo produzido por eles e ao redor deles.

Este período na sala de recursos durou cerca de cinquenta minutos.

### 2.3. Sala de informática: pesquisas e “Jogo da Reciclagem”

Após assistirem ao vídeo e aos debates que se seguiram, os participantes foram levados à sala de informática e orientados a pesquisar sobre os diversos tipos de lixo como, por exemplo, os materiais recicláveis e os danos causados pelo descarte inadequado de resíduos sólidos.

Durante essa etapa, algumas figuras foram destacadas. A Figura 3 mostra uma ave envolvida por uma sacola plástica na natureza.

Figura 3 – Impacto do plástico na natureza.

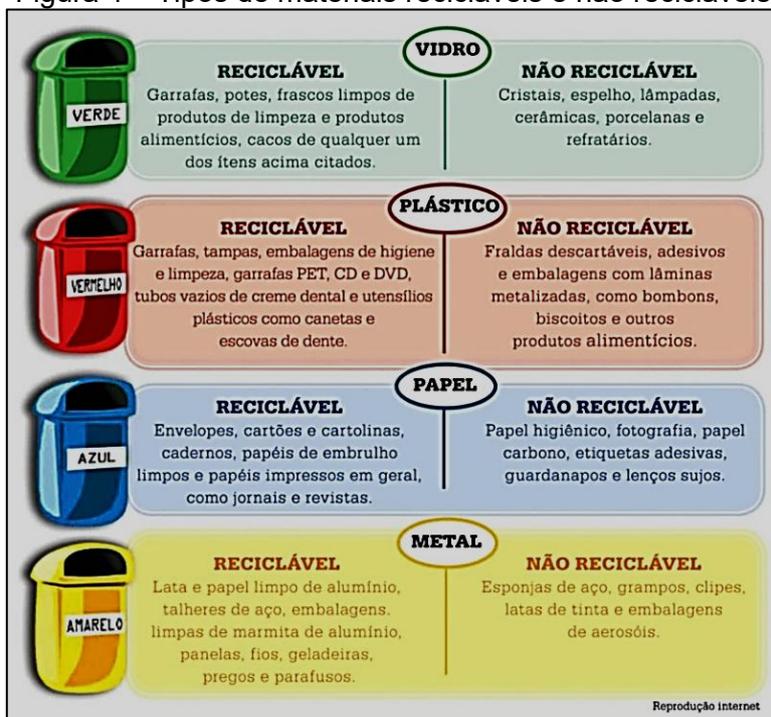


Fonte: Disponível em: <http://www.aguasdepontal.com/2018/05/iniciativa-da-nat-geo-mostra-impactos.html>.

Acesso em: 7 ago. 2017.

A Figura 4 apresenta, para um mesmo material, os tipos recicláveis e os não recicláveis. Erroneamente, os alunos haviam subentendido que todo vidro, plástico, papel e metal eram recicláveis.

Figura 4 – Tipos de materiais recicláveis e não recicláveis.



Fonte: Disponível em: <http://chpdesigner.blogspot.com/2013/05/reciclar6.html>. Acesso em: 7 ago. 2017.

A Figura 5 apresenta outras lixeiras para a coleta seletiva, além das convencionais. A lixeira destinada à madeira lhes causou grande curiosidade, levando-os a aprofundarem a pesquisa sobre o assunto. Assim, aprenderam que a madeira pode ser reutilizada na fabricação de papéis e celulose, além de poder ser triturada para o reuso na fabricação de placas aglomeradas que são utilizadas por indústrias de móveis e fabricantes de caixas e embalagens.

Figura 5 – Coleta seletiva.



Fonte: Disponível em: <http://blog.bemol.com.br/blog/2012/12/257/>. Acesso em: 7 ago. 2017.

Após a etapa das pesquisas sobre as principais lixeiras existentes, foi proposto o acesso ao site da TECHTUDO para jogarem o Jogo da Reciclagem, representado na Figura 6, desenvolvido pela Devworks Game Technology e lançado em treze de abril de 2010 (TECHTUDO, 2018). Este jogo, além de trabalhar a organização do lixo, trabalha a coordenação motora, a atenção, a concentração e o conceito de adição de números inteiros relativos, entre outras habilidades. Nessa atividade, o jogador precisa ajudar os condôminos a separarem corretamente o lixo reciclável nos compartimentos próprios de cada tipo. Usando o mouse para controlar a tampa do lixo, deixa-se passar apenas os lixos nas lixeiras corretas e rebatem-se os arremessos errados. Lixo no lugar certo ganha um ponto, lixo no lugar errado perde dois pontos.

Figura 6 – Jogo da Reciclagem.



Fonte: Disponível em: <https://www.techtudo.com.br/tudo-sobre/reciclagem.html>. Acesso em: 7 ago. 2017.

Este jogo conseguiu tornar o conteúdo de operações com números relativos mais atraente e dinâmico. Conforme afirma Nascimento (2017, p. 95): “a aplicação de problemas matemáticos em forma de jogos tem oportunizado a conquista dos alunos, que podem ser atraídos por diversas formas de aprendizagem e interação”.

Uma aluna se expressou dizendo que “*nunca foi tão maneiro estudar Matemática e lixo*” (sic). Isto reafirma o que ressaltam Smole, Diniz e Milani (2007, p. 10): “[...] todo jogo por natureza desafia, encanta, traz movimento, barulho e certa alegria para o espaço no qual normalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis”.

Além da memorização das cores destinadas a cada tipo de lixo na reciclagem, foi possível notar que, a partir de certo momento, os alunos passaram a contabilizar sua pontuação rapidamente e em voz alta. Esta situação corrobora o que afirmam Pffifer e Baier (2014, p. 6): “[...] os jogos auxiliam o estudante a superar seus próprios obstáculos, controlando seus pontos e os do seu adversário”. Estas atividades na sala de informática tiveram a duração de uma hora e dez minutos.

## 2.4. Oficina de Artes e Matemática com reaproveitamento de materiais: transformando lixo em luxo!

A proposta para a oficina de Artes e Matemática foi reaproveitar materiais recicláveis para a confecção de outros produtos, explorando formas geométricas e conceitos matemáticos em relação a medidas de massa, área e volume.

Para esta atividade, que foi realizada no terceiro dia, os alunos foram instruídos previamente a coletarem em suas casas os materiais recicláveis ou reutilizáveis como garrafas PET, potes de sorvete, garrafas de vidro, filtro de café usado e papel, os quais seriam utilizados na oficina. Os materiais coletados por cada grupo foram separados, classificados e pesados em balança para posterior aproveitamento destes dados na aula de Matemática. Além disso, ficou estabelecido que durante a prática fosse usado predominantemente o linguajar matemático com o objetivo de sua verbalização durante a prática pedagógica.

A oficina teve início com uma rodada de discussão sobre o desperdício de materiais, alimentos, vestuários e outros itens de consumo humano. A turma toda concordou que diversos produtos poderiam ser reutilizados antes de serem descartados, seja na sua função original ou criando novas formas de utilização, por exemplo, poderiam doar roupas que ficaram pequenas, levar sacolas retornáveis ao fazer compras, produzir húmus com os restos de material orgânico, entre outros.

Alguns alunos falaram que seus pais já tinham algumas práticas de reutilização de materiais, entre os quais citaram que: os potes de sorvete são utilizados para congelar feijão, as garrafas de vidro para armazenamento de água, as sacolas de plástico para ensacar lixo, as garrafas PET e caixas de papelão utilizadas para artesanato, entre outras finalidades semelhantes.

Para a confecção dos puxa-sacos, porta papel higiênico, porta trecos e caixas multiuso, foram utilizadas: garrafas PET, latas vazias de leite em pó, potes vazios de sorvete, garrafas vazias de vidro, caixas de sapato, filtros de café usados, materiais de papelaria (cola, tesoura, régua), assim como recortes e sobras de materiais que eventualmente seriam descartados. A confecção seguiu a ordem descrita abaixo.

1. Com as garrafas PET: o puxa saco e o porta papel higiênico representados na Figura 7.
2. Com as latas de leite: o porta trecos representado na Figura 8a.
3. Com os filtros de café: *decoupage* em caixas de papelão, conforme a Figura 8b.
4. Com os potes de sorvete: a caixa de costura representada na Figura 8c.
5. Com as garrafas de vidro: os vasos ornamentados com barbantes representados na Figura 9.

Figura 7 – Confeccionando (a) puxa-saco e (b) porta papel higiênico com garrafas PET.



(a)

(b)

Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2018).

Figura 8 – Fazendo (a) porta-trecos com latas de leite, (b) decoupage com filtro de café, (c) caixa de costura com pote de sorvete.



(a)

(b)

(c)

Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2018).

Figura 9 – Confeccionando vasos ornamentais com garrafas de vidro.



Fonte: Arquivo pessoal dos autores (2018).

Durante a produção desses objetos, os alunos mostraram-se interessados e participativos. Esta oficina conseguiu despertar a consciência para o reaproveitamento de materiais que antes eles não tinham. Uma das alunas disse que a partir de agora iria “*pensar duas vezes antes de jogar qualquer coisa fora*”. Outro aluno relatou que isso já era prática em sua casa, pois seus pais

trabalham com artesanato e reaproveitam muitas coisas, inclusive trouxe para a aula alguns artefatos feitos por sua mãe (porta papel higiênico e puxa saco).

Vale ressaltar que, constantemente, os alunos foram estimulados a usarem os conceitos matemáticos até então aprendidos em sala de aula, de modo a aplicá-los em cada passo da solução dos problemas propostos, bem como verbalizar os entes geométricos e as grandezas que foram objetos de estudo, como: “*Pega pra mim este material de forma cilíndrica*”, “[...] *a caixa cúbica?*” “[...] *não, a que tem formato de paralelepípedo*”, “[...] *preciso de 50 cm do barbante, mas meio metro serve*”. O último exemplo foi “piada” de um aluno mais extrovertido.

Esta oficina possibilitou a reflexão sobre a ideia de que reutilizar um objeto é uma atitude positiva frente ao desperdício generalizado observado em pessoas consumistas. Além disso, foi possível observar a Matemática nos pequenos detalhes.

#### 2.4. Atividade de Matemática na sala de aula

A atividade de Matemática deu-se no quarto dia, na sala de aula, com a turma piloto organizada em sete grupos.

Antes de confeccionar as utilidades domésticas, os participantes separaram, classificaram e pesaram os materiais coletados, o que permitiu a produção da Tabela 1 pelos próprios participantes.

Tabela 1 – Separação, classificação e pesagem do lixo coletado.

<b>Tipos de Lixo/ Grupos</b>	<b>Plástico (g)</b>	<b>Papel (g)</b>	<b>Metal (g)</b>	<b>Vidro (g)</b>	<b>Total (g)</b>
Grupo 1	420	200	200	800	1.620
Grupo 2	680	400	350	700	2.130
Grupo 3	280	150	100	550	1.080
Grupo 4	350	120	400	100	970
Grupo 5	500	340	150	1.200	2.190
Grupo 6	150	410	500	280	1.340
Grupo 7	450	100	450	630	1.630
<b>Total (g)</b>	<b>2.830</b>	<b>1.720</b>	<b>2.150</b>	<b>4.260</b>	<b>10.960</b>

Fonte: Elaboração dos autores (2018).

Este momento proporcionou lições matemáticas interessantes, bem como uma visão diferenciada sobre alguns materiais que são conhecidos como lixo.

Os participantes separaram o lixo por tipos, a saber: plástico, papel, metal e vidro. Depois dessa etapa, o lixo de cada tipo foi pesado usando uma balança comum, sendo os resultados registrados.

Assim, na aula de Matemática, os alunos foram convidados a criar problemas matemáticos usando os dados coletados. Surgiram questões como:

1. Se em dois dias coletamos vinte garrafas PET, quantos dias são necessários para coletarmos mil garrafas PET?

Comentário: Por meio de Regra de Três Simples, obtiveram que seriam necessários 100 dias para coletarem mil garrafas PET.

2. O Grupo 3 coletou vinte garrafas de vidro. Se cada garrafa tem 250 g de massa, qual é a massa total das 20 garrafas?

Comentário: Por meio de uma simples multiplicação, seguida da transformação de gramas para quilogramas, obtiveram o resultado igual a 5 kg.

3. Qual é a massa média de lixo coletado por grupo?

Comentário: Somando o total de lixo coletado por cada grupo e dividindo pela quantidade de grupos, obtiveram massa média igual aproximadamente 1,6 kg.

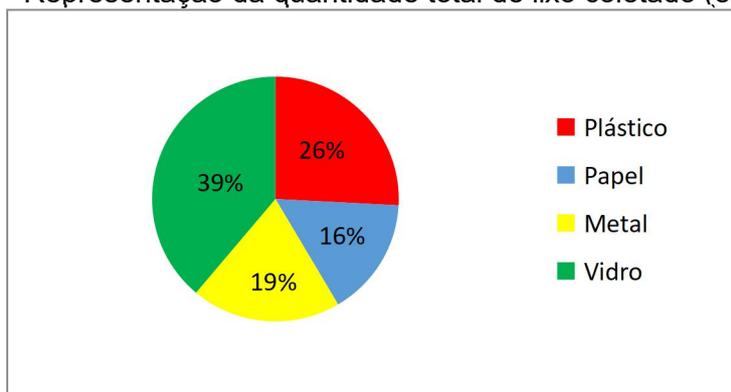
Este foi um momento muito interessante, pois criar problemas relacionados ao lixo coletado se tornou uma amigável competição.

Os seguintes problemas foram elaborados pela professora de Matemática e entregues aos grupos para que resolvessem:

1. Dentre os tipos de lixo recolhido, podemos afirmar que os que ocupavam maior espaço eram os mais pesados?

Comentário: Todos chegaram à conclusão de que não, pois os resíduos de plástico ocupavam o maior volume na sala, entretanto o lixo vítreo tinha a maior massa, conforme mostra o Gráfico 1. Assim, trabalhou-se as noções de medida de massa e de espaço.

Gráfico 1 – Representação da quantidade total de lixo coletado (em gramas).



Fonte: Elaboração dos autores (2018).

2. Construa um Gráfico de Colunas representando a quantidade de plástico em gramas coletada pelos grupos e sua média aritmética.

Comentário: Os alunos entenderam o conceito de média aritmética simples definida por

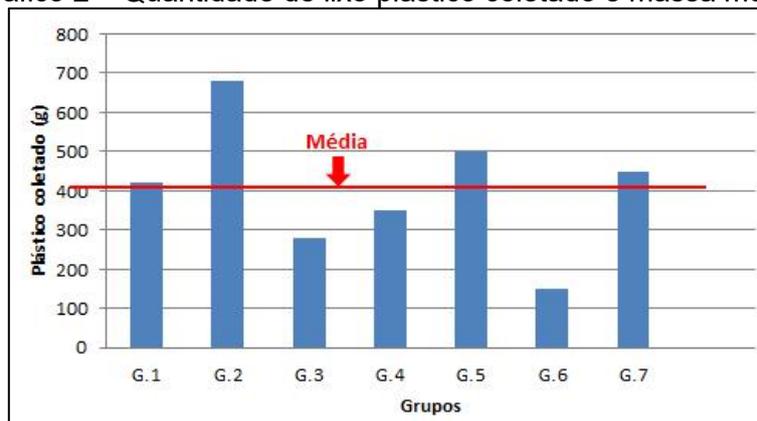
$$Média = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n},$$

onde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são números reais e  $n$  é o número total de elementos do conjunto. Os participantes calcularam a média aritmética das quantidades de plástico levadas pelos grupos, encontrando assim o valor aproximado:

$$Média = \frac{420 + 680 + 280 + 350 + 500 + 150 + 450}{7} \cong 404,28 \text{ g.}$$

Em seguida foram orientados a representá-la como uma reta horizontal no gráfico de colunas, conforme mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2 – Quantidade de lixo plástico coletado e massa média.



Fonte: Elaboração dos autores (2018).

Desta forma, foi trabalhada a média aritmética com os dados disponíveis.

Por meio da problemática trazida pelo Projeto “Praia Limpa é minha Praia” foi possível trabalhar conceitos de proporcionalidade e sistema métrico decimal, como:

1. Suponhamos que por meio do Projeto “Praia Limpa é minha Praia” foram recolhidos 50 kg de lixo na Lagoa de Maricá. Caso o Projeto fosse realizado mensalmente e a quantidade de lixo retirada se mantivesse constante, quantos quilos de lixo seriam recolhidos ao final de um ano?

Comentários: Trabalhou-se aqui o conceito de proporcionalidade. Multiplicando 50 kg por 12 (quantidade de meses que um ano possui) obtiveram 600 kg como resultado.

2. Durante a palestra da equipe do projeto “Praia Limpa é minha Praia” pode ser constatado que o material esfoliante utilizado em muitos sabonetes é o micro plástico. Considerando que a medida do micro plástico seja igual a 1 mm, represente essa mesma medida em centímetros e em metros.

Comentário: Dividindo 1 por 10, obtiveram 0,1 cm e dividindo 1 por 1000 obtiveram 0,001 m. Assim, foi abordado o tema sistema métrico decimal.

Usando a lógica do “Jogo da Reciclagem” foi possível desenvolver problemas abordando números inteiros, como:

1. Em certo momento do jogo um aluno estava com -5 pontos. Então, deixou passar 5 lixos para as lixeiras corretas e 6 para as lixeiras erradas, e o jogo finalizou. Qual foi a pontuação deste aluno?

Comentário: Considerando a lógica do jogo e utilizando operações básicas com números inteiros, os grupos chegaram à seguinte expressão numérica  $-5 + 1 \cdot (5) - 2 \cdot (6)$ . Daí, solucionando-a como se segue:  $-5 + 1 \cdot (5) - 2 \cdot (6) = -5 + 5 - 12 = 0 - 12 = -12$ , obtiveram como resultado 12 pontos. Com isso, foram trabalhados os conceitos de adição e multiplicação de números inteiros relativos.

- Um jogador deixou passar 2 plásticos para a lixeira vermelha, 4 metais para a lixeira amarela, 5 vidros para a lixeira azul e 6 papéis para a lixeira cinza. Admitindo que não houve mais arremessos, qual foi a pontuação desse jogador?

Comentário: Considerando as cores corretas para cada tipo de lixo, temos 6 lixos arremessados na lixeira correta (2 plásticos na lixeira vermelha e 4 metais na lixeira amarela) e 11 arremessados na lixeira errada (5 vidros na lixeira azul (papel) e 6 papéis na lixeira cinza (outros)). Desta forma, chegou-se a expressão numérica:  $1 \cdot (6) - 2 \cdot (11) = 6 - 22 = -16$ . Assim, concluiu-se que a pontuação do jogador foi -16 pontos. E, então, mais uma vez, trabalhou-se os conceitos de adição e multiplicação de números inteiros relativos.

A partir da propaganda de um cartaz da *Waste Expo Brasil* que dizia: “Nova regra: toda vez que você for à praia, colete ao menos 3 plásticos da areia” foi abordado o conceito de proporcionalidade e regra de três.

- Considere que você e sua turma decidiram seguir a nova regra da *Waste Expo Brasil*. Sendo assim, em uma visita à lagoa de Maricá quantos plásticos no mínimo seriam coletados?

Comentário: Chamando de  $x$  o número de plásticos coletados e considerando que a turma tinha 35 alunos, por meio de uma Regra de Três Simples, obtemos:  $x = (35)(3) = 105$ , chegando-se à conclusão de que seriam coletados, no mínimo, 105 plásticos.

- Suponhamos que a cada 3 plásticos coletados, 2 peixes deixem de morrer. Considerando que cada pessoa colete exatamente 3 plásticos, quantas pessoas seriam necessárias para evitar a morte de 360 peixes?

Comentário: Considerando que cada pessoa coleta exatamente 3 plásticos, tem-se que 1 pessoa evitaria a morte de 2 peixes. Assim, denotando por  $N$  a quantidade mínima de pessoas para a coleta de plásticos, a fim de se evitar a mortandade dos 360 peixes. Deste modo, utilizando-se de uma Regra de Três simples obtém-se:  $x = \frac{(360)(3)}{2} = 540$  plásticos e  $N = \frac{540}{3} = 180$  pessoas. Concluindo-se assim que são necessárias 180 pessoas para evitar a morte de 360 peixes.

Para finalizar, retomando a vivência na oficina “Transformando Lixo em Luxo!”, foi possível trabalhar conceitos de sistema métrico decimal e noções de área.

1. Durante a oficina “Transformando Lixo em Luxo!”, suponha que foram utilizados 160 *cm* de barbante para decorar certa garrafa de vidro. Quantas garrafas como esta é possível decorar, sabendo que dispomos de 10 *m* de barbante?

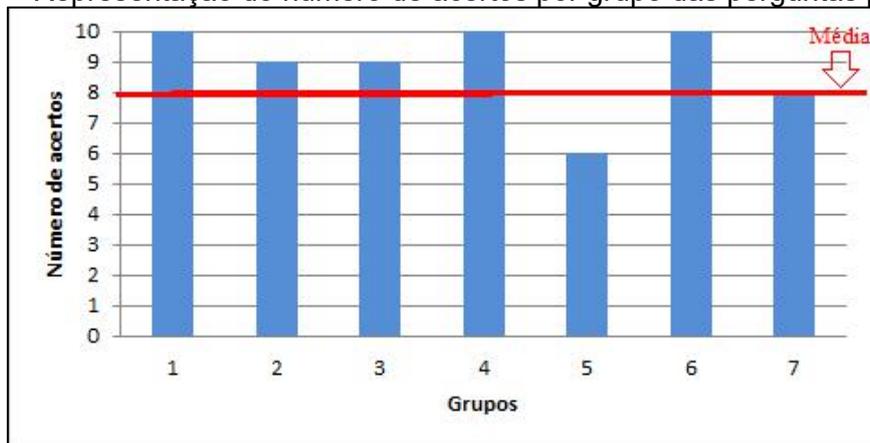
Comentário: Transferindo a unidade de medida de metros para centímetros, encontra-se  $10\text{ m} = 10000\text{ cm}$  e dividindo esse resultado por 160 *cm*, obtém-se 62,5. Desse modo, alguns grupos concluíram que seria possível decorar 62 garrafas e outros consideraram que seriam 63 garrafas decoradas, visto que teria uma decorada pela metade.

2. Ainda em relação à oficina, suponhamos que na *decoupage* de 3 caixas foram utilizados 15 filtros de café. Se cada filtro tem aproximadamente 21 *cm*<sup>2</sup> de área, qual a área coberta em cada caixa, aproximadamente?

Comentário: Por uma divisão simples, todos concluíram que, para cada caixa, foram utilizados 5 filtros. Daí, multiplicando por 21, obtiveram como resultado 105 *cm*<sup>2</sup>. E, assim, foi trabalhada a noção básica de área plana.

Em relação ao desempenho nestes problemas matemáticos propostos pela professora de Matemática, a maioria dos grupos teve um resultado satisfatório, com número de acertos maior ou igual à média de acertos por grupo (aproximadamente 8); entretanto o grupo 5 obteve um número de acertos inferior à média, como pode ser observado no Gráfico 3, mas este desenvolvimento abaixo da média pode ser atribuído a distrações em sala de aula, dificuldade de leitura e interpretação de texto.

Gráfico 3 – Representação do número de acertos por grupo das perguntas propostas.



Fonte: Elaboração dos autores (2018).

Contudo, foi notório o desenvolvimento da maior parte dos grupos em relação à capacidade de refletir com autonomia acerca da compreensão de cada problema analisado. Isto é importante, pois o processo de ensino e aprendizagem em educação Matemática não se restringe a simples cálculos de fórmulas, mas sim capacitar o indivíduo por meio da Matemática e Ciências afins a refletir sobre como deve intervir, a pensar sobre suas intervenções e práticas de vida que impliquem em um menor impacto ambiental.

## 2.5. Produção textual

O quinto e último dia de atividade se deu por meio de uma produção textual orientada pelo professor de Português, Edson Cavalcanti, com duração de cerca de cinquenta minutos.

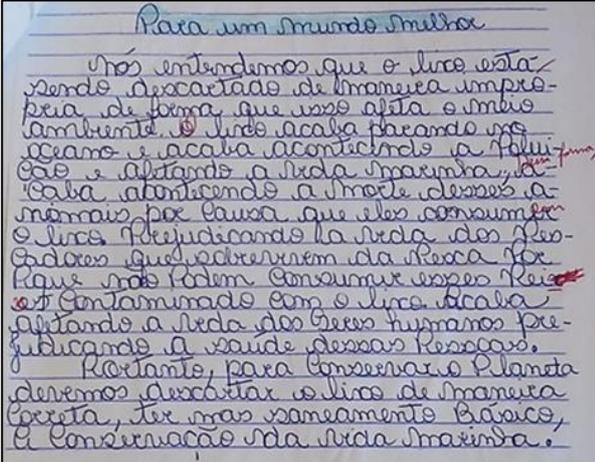
A partir das redações individuais dos alunos envolvidos no projeto, pôde-se notar uma propensão à mudança de atitude e mentalidade dos mesmos para com alguns dos graves problemas ambientais decorrentes do consumo humano exagerado, tais como a não reutilização de materiais recicláveis e o descarte irregular de lixo em rios, lagoas e mares.

No decurso da produção textual, percebeu-se uma grande preocupação com a poluição, em particular na lagoa de Maricá, que é muito utilizada por pescadores da localidade. Igualmente, manifestaram suas preocupações com a “saúde” do planeta que ganharam força depois das atividades em que participaram.

Além disso, houve relatos sobre o fato de poderem usar a Matemática “da sala de aula”, como média aritmética, construção de gráficos e unidade de medidas, em situações do cotidiano. As atividades mais comentadas foram o “Jogo da Reciclagem” e a oficina “Transformando Lixo em Luxo!”.

O professor Edson ressaltou que, apesar de alguns erros de separação silábica, de gramática e de concordâncias, foi possível perceber que os alunos estavam motivados a escrever sobre o tema, redigindo seus respectivos textos com zelo e desenvoltura. Segue abaixo uma das produções textuais realizadas em sala (Figura 10).

Figura 10 – Produção textual de uma aluna, enunciado e transcrito.

 <p><u>Para um mundo melhor</u></p> <p>Nós entendemos que o lixo está sendo descartado de maneira imprópria de forma que isso afeta o meio ambiente. O lixo acaba parando no oceano e acaba acontecendo a poluição e afetando a vida marinha, dessa forma acaba acontecendo a morte desses animais por causa que eles consomem o lixo. Prejudicando a vida dos pescadores que sobrevivem da pesca porque não podem consumir esses peixes contaminados com o lixo. Acaba afetando a vida dos seres humanos prejudicando a saúde dessas pessoas.</p> <p>Portanto, para conservar o planeta devemos descartar o lixo de maneira correta, ter mais saneamento básico, a conservação da vida marinha.</p>		<p><b>Para um mundo melhor</b></p> <p>Nós entendemos que o lixo está sendo descartado de maneira imprópria de forma que isso atrapalha o meio ambiente. O lixo acaba parando no oceano e acaba acontecendo a poluição e afetando a vida marinha, dessa forma acaba acontecendo a morte desses animais por causa que eles consomem o lixo. Prejudicando a vida dos pescadores que sobrevivem da pesca porque não podem consumir esses peixes contaminados com lixo. Acaba afetando a vida dos seres humanos prejudicando a saúde dessas pessoas.</p> <p>Portanto, para conservar o planeta devemos descartar o lixo de maneira correta, ter mais saneamento básico, a conservação da vida marinha.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

## 3. Considerações Finais

Durante a realização das atividades descritas, foi possível notar o interesse de aproximadamente 90% do público alvo, assim como a real intenção de fazerem mudanças de atitudes para com o meio ambiente, como, por exemplo, o descarte e reaproveitamento de materiais. Além disso, de maneira geral, demonstraram ter entendido que a Matemática pode ser uma forte aliada à tomada de decisões e intervenções relacionadas a problemas ambientais,

como nos resultados quantitativos e qualitativos de produção de lixo semanal em uma residência típica de uma cidade.

A expressiva participação dos alunos nas atividades realizadas nas oficinas de Matemática e Artes: “Transformando Lixo em Luxo!” demonstraram que o objetivo de despertar a consciência ecológica nos jovens participantes foi atingido; eles ficaram cientes e preocupados com o meio ambiente. Além disso, fixaram diversos conceitos de Matemática, tais como regra de três simples, média aritmética, sistemas de medidas e noções de estatística, por meio de problemas interdisciplinares.

Os participantes mostraram interesse pelo reaproveitamento de materiais, colaborando assim para a consciência de preservação do meio ambiente. Além disso, ficaram impactados ao quantificarem a massa total de lixo que deixaram de produzir por conta do reaproveitamento de materiais recicláveis.

Os alunos participantes do projeto estiveram envolvidos com a resolução de problemas oriundos da prática pedagógica voltada para a conscientização do meio ambiente e do descarte do lixo produzido. Um dos exemplos foi o uso de balanças proporcionando aos mesmos a experiência com unidades de medida de massa e capacidade, na qual, a partir dos dados coletados, puderam ser obtidas representações gráficas quantitativas sobre esses mesmos dados.

Participar dessas atividades tornou-se uma oportunidade ímpar para o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar envolvendo a Matemática como ferramenta para analisar problemas produzidos por questões ambientais. De fato, a interação e a colaboração dos alunos em cada etapa das atividades reafirmam o fato de que a interdisciplinaridade para a análise de questões como as que foram aqui trabalhadas colabora fortemente para a formação de alunos críticos, reflexivos e criativos, capazes de entenderem a importância da preservação do meio ambiente como um bem material intangível.

## Referências

ARAÚJO, F.; SILVA, M.; CASTRO, R.; SALES, A.; PERES, F.; TIMBÓ, M. Projeto “Praia limpa é a minha praia”: uma contribuição para a preservação dos ambientes aquáticos. **Revista Interagir: pensando a extensão**, Rio de Janeiro, n. 17/18/19, p. 81-89, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – Ensino de quinta à oitava série**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

ELLIOT, J. **La investigación-acción en educación**. Tradução de Pablo Manzano. 3. ed. Madrid: Morata, 1997.

GONÇALVES, F.; LEMES, D.; PROCHNOW, T.; DAL-FARRA, R. Problemáticas Ambientais: Conhecimentos e Concepções de Futuros Educadores e Comunidades. **Revista de Ensino e Educação em Ciências Humanas**, Londrina, v. 17, n. 1, p.13-18, 2016.

LUIZ, L. C.; RAU, K.; DE FREITAS, C. L.; PFITSCHER, E. D. Agenda Ambiental na Administração Pública (A3P) e práticas de sustentabilidade: estudo aplicado em um instituto federal de educação,

ciência e tecnologia. **Administração Pública e Gestão Social**, Viçosa, v. 5, n. 2, p. 114-134, 2013.

NASCIMENTO, R. A. Uma compreensão matemática dos Jogos de Somatórios. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 3, n. 1, p. 93-106, jul. 2017.

PIFFER, C. S.; BAIER, T. Jogos para o estudo da matemática no ensino fundamental. **Revista Dynamis**, Blumenau, v. 20, n. 1, p. 3-16, 2014.

PONTE, J. P. O estudo de caso na investigação em educação matemática. **Quadrante**, v. 3, n. 1, p. 3-18, 1994.

SIQUEIRA, A. Práticas interdisciplinares na educação básica: uma revisão bibliográfica - 1970-2000. **ETD - Educação Temática Digital**, Campinas, v. 3, n.1, jul./dez. 2001. DOI: <https://doi.org/10.20396/etd.v3i1.684>.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. S. V.; MILANI, E. **Jogos de matemática do 6º ao 9º ano**. 1. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

SOUZA, Mauricio. **Crônica: Revivendo Chico Bento**. 19 nov. 1996. Disponível em: <http://turmadamonica.uol.com.br/cronicas/revivendo-chico-bento/>. Acesso em: 15 jan. 2019.

TAJRA, Sanmya Feitosa. **Informática na educação**. 7. ed. São Paulo: Érica, 2007.

TECHTUDO. **Jogo da Reciclagem**. Disponível em: <https://www.techtudo.com.br/tudo-sobre/reciclagem.html>. Acesso em: 01 ago. 2018.