



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto Politécnico

Juan Diego dos Santos Heringer

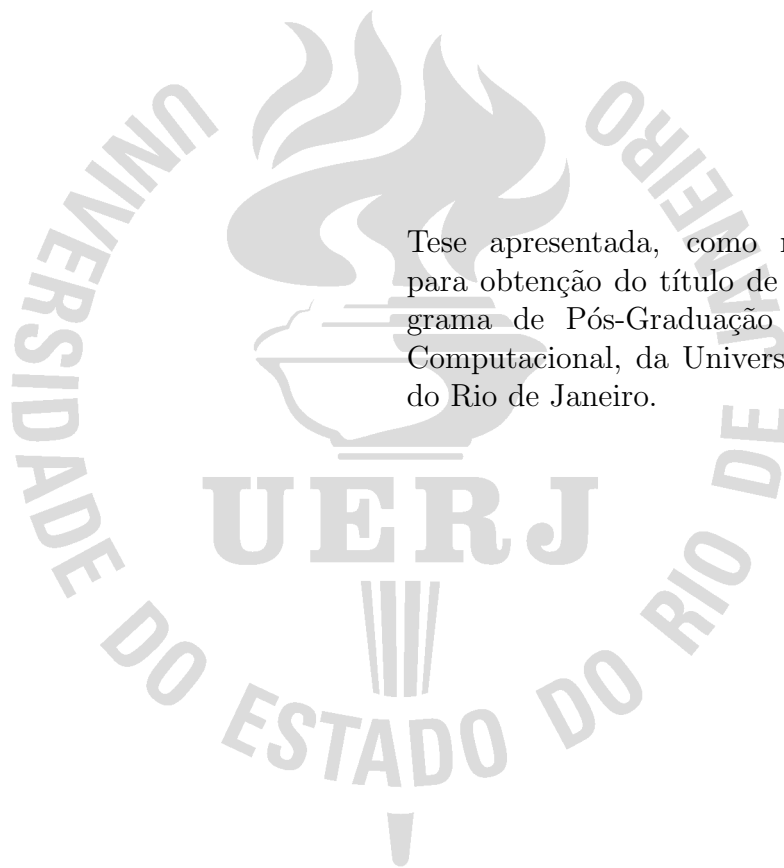
**Simulação de escoamentos bifásicos água-óleo tridimensionais
não-isotérmicos em reservatórios de petróleo**

Nova Friburgo

2022

Juan Diego dos Santos Heringer

**Simulação de escoamentos bifásicos água-óleo tridimensionais
não-isotérmicos em reservatórios de petróleo**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Helio Pedro Amaral Souto
Orientador: Prof. Dr. Grazione de Souza

Nova Friburgo
2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/E

H546 Heringer, Juan Diego dos Santos.
Simulação de escoamentos bifásicos água-óleo tridimensionais não-isotérmicos em reservatórios de petróleo/ Juan Diego dos Santos Heringer. - 2022.
109 f. : il.

Orientadores: Helio Pedro Amaral Souto
Grazione de Souza

Tese (doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

1. Escoamento bifásico – Teses. 2. Métodos de simulação - Teses. 3. Reservatórios – Teses. I. Souto, Helio Pedro Amaral. II. Souza, Grazione de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico. IV. Título.

CDU 532.546

Bibliotecária Pâmela Lisboa CRB7/ 5965

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese, desde que citada a fonte.



Assinatura

07/12/2022

Data

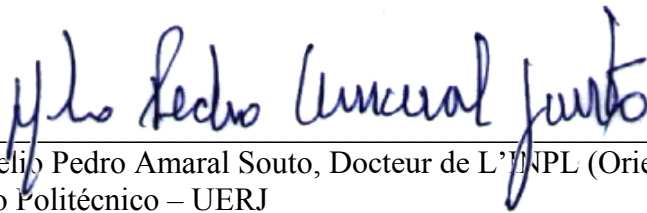
Juan Diego dos Santos Heringer

Simulação de escoamentos bifásicos água-óleo tridimensionais não-isotérmicos em reservatórios de petróleo

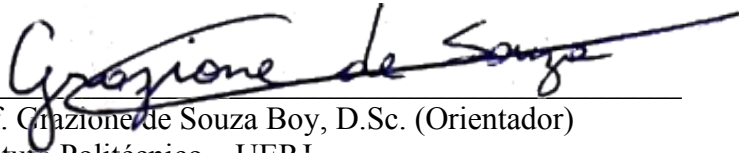
Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 12 de setembro de 2022.

Banca examinadora:



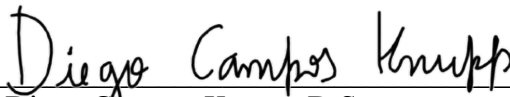
Prof. Hélio Pedro Amaral Souto, Docteur de L'INPL (Orientador)
Instituto Politécnico – UERJ



Prof. Grazielle de Souza Boy, D.Sc. (Orientador)
Instituto Politécnico – UERJ



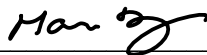
Prof. Alexandre Santos Francisco, D.Sc.
Universidade Federal Fluminense – UFF



Prof. Diego Campos Knupp, D.Sc.
Instituto Politécnico – UERJ



Prof. Fabrício Simeoni de Sousa, D.Sc.
Universidade de São Paulo - USP



Prof. Marcio Rentes Borges, D.Sc.
Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC

Nova Friburgo

2022

RESUMO

HERINGER, J. Diego dos Santos. *Simulação de escoamentos bifásicos água-óleo tridimensionais não-isotérmicos em reservatórios de petróleo*. 2022. 109 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2022.

Este trabalho trata da simulação numérica de escoamentos bifásicos não-isotérmicos em reservatórios de petróleo. Especificamente, foca-se no problema da recuperação de óleo pesado mediante o aquecimento do reservatório, visando a uma diminuição da sua viscosidade e ao aumento da sua mobilidade. Energia é transferida ao reservatório mediante a injeção de um fluido aquecido ou por meio de um poço aquecedor estático. Considera-se o escoamento bifásico água-óleo e as equações diferenciais parciais governantes são escritas em termos da pressão da fase não-molhante (óleo), da saturação da fase molhante (água) e da temperatura média do reservatório, sem se assumir a hipótese do equilíbrio térmico local. O Método dos Volumes Finitos foi escolhido para discretizar as equações governantes, resultando em equações algébricas que foram linearizadas via o método de Picard. Uma decomposição de operadores também é utilizada de modo que as equações discretizadas linearizadas são resolvidas sequencialmente para a obtenção da pressão, saturação e temperatura média. Os subsistemas de equações algébricas são resolvidos pelos métodos dos Gradientes Conjugados Precondicionado (pressão) e do Gradiente Biconjugado Estabilizado Precondicionado (saturação e temperatura). Após a validação dos resultados numéricos, simulações foram realizadas prevendo a injeção de água aquecida em um reservatório com geometria do tipo *Slab* e realizada uma análise de sensibilidade. Em se tratando da produção em um reservatório com um arranjo de poços injetores e produtores do tipo *Five-spot*, uma análise qualitativa foi empreendida e, além da injeção do fluido aquecido, simulou-se o escoamento na presença de um poço aquecedor estático. Os resultados demonstraram a pertinência dos modelos físico-matemáticos e das metodologias empregadas, além de comprovar o impacto positivo que o aquecimento do reservatório tem na recuperação de óleos pesados.

Palavras-chave: Escoamento bifásico. Escoamento não-isotérmico. Meios porosos.

Métodos avançados de recuperação térmica. Simulação de reservatórios.

ABSTRACT

HERINGER, J. Diego dos Santos. *Simulation of non-isothermal three-dimensional water-oil two-phase flows in oil reservoirs*. 2022. 109 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2022.

This work addresses the numerical simulation of non-isothermal two-phase flows in oil reservoirs. Specifically, it deals with the problem of recovering heavy oil by heating the reservoir, aiming to reduce its viscosity and increase its mobility. Energy is transferred to the reservoir by the injection of heated fluid or static heating well. We consider a two-phase water-oil flow, and we write the governing partial differential equations in terms of the non-wetting phase pressure (oil), the wetting phase saturation (water) and the average reservoir temperature without assuming the hypothesis of the local thermal equilibrium. We choose the Finite Volume Method to discretize the governing equations, leading to algebraic equation which are linearized via the Picard method. We also use an operator splitting, and the linearized discretized equations are solved sequentially to obtain pressure, saturation, and average temperature. We solve the algebraic equation subsystems using Preconditioned Conjugate Gradient (pressure) and Preconditioned Stabilized Biconjugate Gradient (saturation and temperature) methods. After validating the numerical results, we performed simulations predicting the injection of heated water into a reservoir with a Slab geometry and a sensitivity analysis. In the case of production in a reservoir with an arrangement of injection and production wells of the Five-spot type, we undertook a qualitative analysis. Besides the injection of the heated fluid, we simulated the flow in the presence of a well static heater. The results demonstrated the relevance of the physical-mathematical models and the methodologies applied. Further, they also showed the positive impact that the heating of the reservoir has on the recovery of heavy oils.

Keywords: Two-phase flow. Non-isothermal flow. Porous media. Enhanced thermal recovery methods. Reservoir simulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Aquecimento do reservatório usando um poço estático	12
Figura 2 - Malha tridimensional	32
Figura 3 - O volume finito	33
Figura 4 - Fluxograma do processo numérico	45
Figura 5 - Modelo de reservatório	47
Figura 6 - Condições de contorno	48
Figura 7 - Distribuição da pressão, na direção x , considerando diferentes malhas e tempos	50
Figura 8 - Distribuição da saturação, na direção x , considerando diferentes malhas e tempos	50
Figura 9 - Valor da temperatura ao longo do domínio $x=y$ e $z=1,0$, para o tempo $t=1,25$, $w=0,8$ e $w=0,1$	52
Figura 10 - Curvas de nível ao longo de $x=y$ e $z=1,0$, para $t=1,25$ e $w=0,1$	53
Figura 11 - Curvas de nível ao longo de $x=y$ e $z=1,0$, para $t=1,25$ e $w=0,8$	53
Figura 12 - Resultados numérico e analítico para a temperatura para $t=0,0625$	57
Figura 13 - Resultados numérico e analítico para a saturação para $t=0,0625$	58
Figura 14 - Distribuição da pressão na direção x , considerando diferentes valores de T_{inj} e $t=7000$ dias	62
Figura 15 - Distribuição da temperatura na direção x , considerando diferentes valores de T_{inj} e $t=7000$ dias	63
Figura 16 - Distribuição da saturação na direção x , considerando diferentes valores de T_{inj} e $t=7000$ dias	64
Figura 17 - Distribuição da viscosidade do óleo na direção x , considerando diferentes valores de T_{inj} e $t=7000$ dias	64
Figura 18 - Distribuição da pressão na direção x e $t=7000$ dias - efeitos da dispersão térmica	65
Figura 19 - Distribuição da temperatura na direção x e $t=7000$ dias - efeitos da dispersão térmica	66
Figura 20 - Distribuição da saturação na direção x e $t=7000$ dias - efeitos da dispersão térmica	67
Figura 21 - Distribuição da viscosidade do óleo na direção x e $t=7000$ dias - efeitos da dispersão térmica	67
Figura 22 - Distribuição da pressão na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores de a_n	68
Figura 23 - Distribuição da temperatura na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores de a_n	69

Figura 24 - Distribuição da saturação na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores de a_n	69
Figura 25 - Distribuição da viscosidade na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores de a_n	70
Figura 26 - Distribuição da pressão na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da permeabilidade absoluta	71
Figura 27 - Distribuição da temperatura na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da permeabilidade absoluta	72
Figura 28 - Distribuição da saturação na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da permeabilidade absoluta	72
Figura 29 - Distribuição da viscosidade na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da permeabilidade absoluta	73
Figura 30 - Distribuição da pressão na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da taxa de injeção	74
Figura 31 - Distribuição da temperatura na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da taxa de injeção	74
Figura 32 - Distribuição da saturação na direção x , $t=7000$ dias e valores da taxa de injeção	75
Figura 33 - Distribuição da viscosidade na direção x , $t=7000$ dias e valores da taxa de injeção	75
Figura 34 - Distribuição da pressão na direção x para diferentes tempos	76
Figura 35 - Distribuição da pressão na direção x para diferentes períodos de injeção	77
Figura 36 - Distribuição da temperatura na direção x para diferentes períodos de injeção	77
Figura 37 - Distribuição da saturação na direção x para diferentes períodos de injeção	78
Figura 38 - Distribuição da viscosidade na direção x para diferentes períodos de injeção	78
Figura 39 - Distribuição dos poços injetores e produtor para o arranjo <i>Five-spot</i> . .	79
Figura 40 - Distribuição dos poços para um quarto do arranjo <i>Five-spot</i>	80
Figura 41 - Saturação da fase molhante para diferentes instantes de tempo e o arranjo <i>Five-spot</i>	81
Figura 42 - Temperatura para diferentes instantes de tempo e o arranjo <i>Five-spot</i> .	82
Figura 43 - Saturação para diferentes instantes de tempo, o arranjo <i>Five-spot</i> e um poço aquecedor	83
Figura 44 - Temperatura para diferentes instantes de tempo, o arranjo <i>Five-spot</i> e um poço aquecedor	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros para a viscosidade da água	21
Tabela 2 - Parâmetros para o problema de Buckley-Leverett	49
Tabela 3 - Erro percentual absoluto médio para pressão	51
Tabela 4 - Erro percentual absoluto médio para saturação	51
Tabela 5 - Erro quadrático para $\Delta t=0,001$	54
Tabela 6 - Erro quadrático para $\Delta t=0,0001$	54
Tabela 7 - Erro quadrático para diferentes valores de Δt , considerando $n_c=225$	54
Tabela 8 - Parâmetros para o reservatório	59
Tabela 9 - Parâmetros para as simulações numéricas	60
Tabela 10 - Parâmetros para os fluidos	60
Tabela 11 - Parâmetros para a rocha	61

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	ESCOAMENTO NÃO-ISOTÉRMICO EM MEIOS POROSOS	17
1.1	Propriedades físicas	17
1.1.1	<u>Propriedades de rocha</u>	18
1.1.2	<u>Propriedades de fluidos</u>	20
1.2	Equações governantes para o escoamento e a transferência de calor em meios porosos	22
1.2.1	<u>Balancos de massa e da quantidade de movimento</u>	23
1.2.2	<u>Balanco de energia</u>	24
1.3	Condições iniciais e de contorno	28
2	METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA	31
2.1	Discretização	31
2.2	Decomposição de operadores e linearização	42
2.3	Métodos de resolução de sistemas lineares	44
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	46
3.1	Validação numérica	47
3.1.1	<u>O problema de Buckley-Leverett</u>	47
3.1.2	<u>Transferência de calor por advecção e difusão</u>	51
3.1.3	<u>Escoamento bifásico unidimensional não-isotérmico</u>	54
3.2	Análise de sensibilidade	58
3.2.1	<u>Efeito da variação da temperatura de injeção da água</u>	61
3.2.2	<u>Efeitos da tortuosidade e da dispersão hidrodinâmica</u>	64
3.2.3	<u>Efeito da variação da viscosidade do óleo</u>	67
3.2.4	<u>Efeito da variação da permeabilidade absoluta</u>	70
3.2.5	<u>Efeito da variação da taxa de injeção de água</u>	73
3.2.6	<u>Efeito da variação do tempo de injeção de água aquecida</u>	76
3.3	Análise do escoamento em um arranjo do tipo <i>Five-spot</i>	79
3.3.1	<u>Escoamento não-isotérmico em um arranjo <i>Five-spot</i></u>	80
3.3.2	<u>Escoamento não-isotérmico em um arranjo <i>Five-spot</i> com aquecedor estático</u>	82
	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	85
	REFERÊNCIAS	88
	APÊNDICE – Obtenção da Equação Governante Macroscópica para o Problema da Transferência de Calor	93

INTRODUÇÃO

O estudo do escoamento de fluidos em meios porosos tem importância para a ciência e a engenharia, visto que tais conhecimentos podem ser aplicados às áreas estratégicas da sociedade como, por exemplo, energia, meio ambiente, saúde e sistemas biológicos. Como algumas aplicações pode-se citar a exploração de óleo e gás, as células de combustível, as baterias, a mecânica dos solos e os sistemas cardiovasculares (DAS; MUKHERJEE; MURALIDHAR, 2018). No caso da indústria de óleo e gás, recursos expressivos são investidos na otimização de processos, que visa à redução de custos e de riscos e pode ser debatida via a realização de simulações computacionais. Na prática, elas podem fornecer, com certo grau de acurácia, as estimativas de produção e as condições de escoamento em reservatórios de petróleo.

De fato, uma maneira de identificar o comportamento do escoamento de hidrocarbonetos consiste na realização de experimentos, na escala de laboratório, com amostras retiradas do reservatório de interesse. Uma outra estratégia preconiza a produção dos chamados testes de pressão em poços, quando ocorre a produção/injeção de fluidos em um poço e os dados de pressão e temperatura são registrados e analisados com o uso de modelos físico-matemáticos, por exemplo. Já no caso do teste de vários cenários de produção, em contextos realísticos, a simulação numérica de reservatórios tornou-se uma ferramenta padrão para a indústria do petróleo (ISLAM et al., 2010). Este trabalho de tese se enquadra no âmbito dessa última proposta e visa ao uso de um método numérico para a solução de um problema de escoamento bifásico e não-isotérmico, sem que seja admitida a hipótese do equilíbrio térmico local. Aqui é feito o desenvolvimento matemático para a obtenção da equação de balanço de energia e se estabelece um modelo para o termo de difusão dessa equação. Para a solução das equações de balanço, utiliza-se uma metodologia sequencial que foi codificado em um simulador desenvolvido no Laboratório de Modelagem Multiescala e Transporte de Partículas (LABTRAN) do Instituto Politécnico (IPRJ) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Com essa ferramenta computacional, é possível testar diferentes métodos térmicos de recuperação de hidrocarbonetos em um reservatório de óleo pesado.

Simulação numérica do escoamento não-isotérmico

A simulação numérica de reservatórios de petróleo combina conhecimentos da física, da matemática, da engenharia de reservatórios e da programação, a fim de que se possa desenvolver ferramentas computacionais voltadas para a predição do desempenho de um reservatório de hidrocarbonetos, sob diferentes condições de operação (ERTEKIN; ABOU-

[KASSEM; KING, 2001](#)). Segundo [Islam et al. \(2010\)](#), a indústria de óleo e gás é reconhecida por ser a maior utilizadora de modelos computacionais. A dificuldade de se prever *in situ* o comportamento do escoamento nos reservatórios, aliada à impossibilidade de se ter acesso às propriedades físicas do mesmo em todas as regiões, torna muito importante o fato de que os cenários de produção sejam previstos via simulações numéricas. Assim sendo, será possível adotar uma estratégia de produção que maximizará a recuperação de hidrocarbonetos e otimizará o tempo empenhado, elevando dessa maneira os lucros.

Historicamente, a recuperação de hidrocarbonetos tem sido, usualmente, dividida em primária, secundária e terciária ([CHEN; HUAN; MA, 2006](#)). Na recuperação primária, o óleo é retirado do reservatório utilizando-se apenas a energia existente originalmente nele. Nesse caso, por exemplo, a produção ocorre pela descompressão dos fluidos e/ou da rocha. Por outro lado, na recuperação secundária uma quantidade adicional de óleo é obtida, em relação ao percentual recuperado na fase primária, por uma suplementação de energia transferida à jazida. Injeções de água ou gás, na ocorrência de um escoamento imiscível, são as técnicas tipicamente classificadas como de recuperação secundária. Já a categoria de métodos terciários de recuperação, ou especiais, abrange os métodos químicos, o deslocamento miscível, os biológicos e os térmicos ([MANICHAND, 2002](#)). Há uma variedade de métodos de recuperação terciária, sendo um dos objetivos principais desses métodos é atingir a miscibilidade dos fluidos e, então, reduzir a saturação residual do óleo ([CHEN; HUAN; MA, 2006](#)). A saturação de uma fase em um meio poroso se refere à fração do volume poroso ocupado por essa fase.

A simulação de reservatórios pode abarcar todos os tipos de técnicas anteriormente mencionadas, fazendo com que se possa avaliar os diversos estágios de recuperação. Para tanto, é necessário, em geral nas secundária e terciária, se simular o escoamento multifásico. A investigação pode ser tanto voltada para a injeção de água em reservatórios de óleo quanto para a aplicação de métodos térmicos em reservatórios contendo água e óleo. Portanto, o estudo do escoamento multifásico é relevante na engenharia de reservatório.

A recuperação de óleos convencionais, que possuem grau API acima de 25, é a mais comum no que diz respeito à exploração de óleo. Isso porque tais hidrocarbonetos podem ser recuperados favoravelmente e os custos associados são relativamente baixos ([PETIT-FRERE, 2014](#)). Contudo, como as reservas dos reservatórios que contém óleos mais leves estão se esaurindo ao longo das últimas décadas, alternativas foram propostas para a recuperação de óleos pesados, grau API entre 5 e 22, e eles ganharam um papel relevante no cenário mundial atual de recuperação de hidrocarbonetos. A alta viscosidade dos óleos pesados é uma razão crucial quando da sua exploração, tendo em vista que esse tipo de óleo possui uma mobilidade reduzida, fazendo com que a recuperação desse hidrocarboneto seja desafiadora e economicamente custosa ([CARRIZALES, 2010](#)). De acordo com [Aydin et al. \(2022\)](#), as técnicas de recuperação de óleos pesados são divididas em três: térmicas, não-térmicas, ou a frio, e à base de solventes.

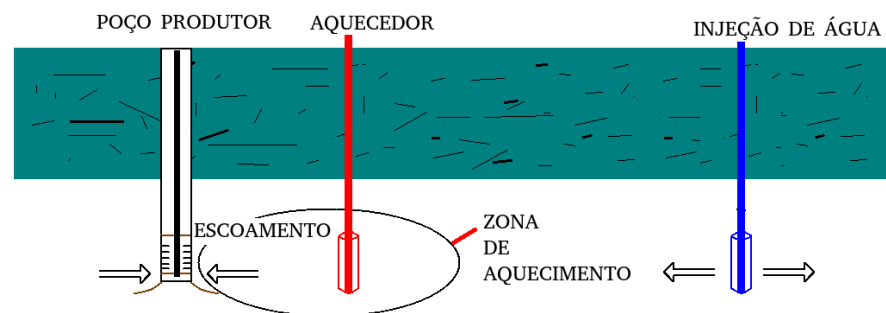
Uma das formas de se extrair os óleos pesados, como dito anteriormente, é mediante a aplicação de métodos térmicos, que formam um conjunto de alternativas para se aumentar a recuperação de óleo nos reservatórios a serem explorados. Um exemplo típico é a extração de óleo de alta viscosidade preconizando a instalação de elementos aquecedores estáticos no interior do reservatório. Como consequência, ter-se-á uma diminuição da viscosidade do óleo e, então, um aumento na sua fluidez que favorecerá o seu escoamento (AOUIZERATE; DURLOFSKY; SAMIER, 2011). Segundo Eduardo (2010), o escoamento não-isotérmico em meios porosos tem atraído a atenção de diversos pesquisadores, já que as propriedades do fluido e/ou da rocha dependem da variação da pressão e da temperatura (da rocha e do fluido). Logo, os reservatórios de óleos pesados podem ter a sua recuperação viabilizada mediante a utilização de métodos térmicos.

A recuperação avançada usando os métodos térmicos, nas suas diversas formas de aplicação, também pode ser simulada a fim de se investigar a sua viabilidade de utilização e as alterações que tais técnicas podem ocasionar no escoamento nos reservatórios (ROUSSET, 2010). A recuperação térmica envolve processos tais como a injeção de vapor e a combustão *in situ*. Segundo Aydin et al. (2022), essa última vem sendo aplicada no Canadá e é uma alternativa ao método de injeção de vapor, que necessita de uma quantidade expressiva de água esteja disponível, comparativamente a outros métodos. No que diz respeito à injeção de vapor, Lee e Babadagli (2021) menciona que esse tipo de técnica é comum e prática. Contudo, ela acarreta problemas ao meio ambiente, tendo em vista a quantidade significativa de gases do efeito estufa produzidos em razão da geração de vapor.

Além dessas técnicas, há uma nova que consiste em aquecer o reservatório usando a energia elétrica (CARRIZALES, 2010) e elementos aquecedores. Em termos da modelagem de reservatórios, os elementos de aquecimento são considerados como sendo uma fonte térmica estática, não injetando nenhum tipo de fluido. Eles apenas transferem calor ao fluido e a rocha (RANGEL-GERMAN et al., 2004). O aquecimento por eletromagnetismo também é um exemplo de aquecimento que utiliza a energia elétrica. Ele apresenta a vantagem de poder aquecer o reservatório de maneira localizada, além de poder transferir até 92% da energia eletromagnética gerada ao reservatório (SIVAKUMAR et al., 2020). Nele, o número de aquecedores presentes no reservatório pode variar, assim como o posicionamento dos mesmos. Portanto, é plausível que se investigue a influência do número e da disposição dos aquecedores no interior do reservatório com o intuito de maximizar a produção de óleo. Pode-se ainda considerar o efeito combinado do aquecimento localizado por parte dos aquecedores estáticos, bem como a injeção de água aquecida utilizando um poço injetor, como representado na Figura 1.

No caso do escoamento não-isotérmico, uma modelagem físico-matemática deve considerar o balanço de massa, da conservação da quantidade de movimento e de energia. Para a simulação do escoamento bifásico água-óleo, os efeitos da variação de temperatura

Figura 1 - Aquecimento do reservatório usando um poço estático



Fonte: O autor, 2022

devem ser analisados considerando tanto a matriz porosa, no caso a rocha, como os fluidos. Em função de como se aborda o processo de transferência de calor entre os fluidos e a rocha, diferentes modelos podem ser obtidos. Nos chamados modelos a uma equação para escoamentos monofásicos, como os utilizados por [Rousset \(2010\)](#), [Rousset et al. \(2014\)](#) e [Heringer et al. \(2017\)](#), considera-se que a rocha e o fluido possuem a mesma temperatura média, ou seja, a hipótese do equilíbrio térmico local. Em alguns outros modelos também a uma equação e para o escoamento monofásico, opta-se pelo uso de uma temperatura média do meio, definida a partir de uma média ponderada entre as temperaturas médias da rocha e do fluido (que não são iguais) e obtém-se a equação governante, que descreve a dinâmica da transferência de energia no escoamento, em termos dela ([MOYNE et al., 2000](#)). Já nos modelos a duas equações ([MOYNE; SOUTO, 2014a](#); [MOYNE; SOUTO, 2014b](#); [HERINGER et al., 2019](#)), ainda para o escoamento monofásico, a rocha e o fluido também são consideradas como possuindo temperaturas diferentes e uma equação governante é proposta para cada uma das fases. Nesse modelo, a transferência de calor entre o fluido e a rocha é contabilizada mediante um termo fonte que aparece explicitamente nas duas equações macroscópicas ([LAMPE, 2013](#)).

Apesar da importância do estudo do escoamento monofásico não-isotérmico, para se tentar simular mais realisticamente alguns fenômenos que ocorrem no reservatório, algumas vezes torna-se necessário considerar o escoamento bifásico. Tal fato se deve à possibilidade de haver regiões no reservatório onde mais de uma fase está presente como, por exemplo, a água e o óleo. Os estudos relacionados aos escoamentos multifásicos têm atraído diversos pesquisadores. Em [Siavashi et al. \(2014\)](#) foi realizada a simulação numérica de um escoamento bifásico não-isotérmico, imiscível, em um meio poroso totalmente saturado e foi assumido o equilíbrio térmico local. Nele, foi utilizado o método das linhas de corrente para simular a injeção de água aquecida em um reservatório de petróleo contendo óleo. Já em [Roy et al. \(2020\)](#), foi feito um estudo do escoamento bifásico não-

isotérmico, composicional, com reações químicas e também foi assumida a hipótese do equilíbrio térmico local. Para além dos estudos relacionados aos reservatórios de petróleo, pode-se citar trabalhos como o de [Lindner, Pfitzner e Mundt \(2016\)](#), onde foi abordado o problema do resfriamento através da mudança de fase e empregado um modelo de misturas, considerando um fluido multicomponente e sem que houvesse o equilíbrio térmico local. Tem-se ainda o estudo de [Kumar et al. \(2016\)](#), que tratou do processo de secagem em alimentos, via a aplicação de micro-ondas, no qual se utiliza um modelo de escoamento de fluido em um meio poroso com mudança de fase.

Nos trabalhos citados, que mostram a importância prática do escoamento multifásico e não-isotérmico, há uma preocupação com a mudança de fase que pode ocorrer devido ao aumento da temperatura no interior do meio poroso. Entretanto, aqui, o problema de mudança de fase não foi considerado e, portanto, realiza-se um monitoramento de modo a assegurar que as temperaturas máximas alcançadas nas simulações não resultem em tal situação. Na prática, esse monitoramento pode ser feito utilizando medidores de pressão e temperatura. Tal preocupação se deve ao fato de que a água, por exemplo, pode sofrer um processo de mudança de fase por conta do seu aquecimento, o que levaria a um problema contendo três fases. Não entanto, tal tipo de escoamento multifásico não se encontra no escopo deste trabalho.

Objetivo

Foca-se no estudo do escoamento tridimensional bifásico (água-óleo) não-isotérmico em um reservatório de petróleo e, para esse problema específico, as propriedades físicas dos fluidos são determinadas como sendo funções da pressão e da temperatura. Os objetivos principais foram a obtenção de uma equação macroscópica, sem admitir-se a hipótese do equilíbrio térmico local, que governa a transferência de energia na escala de laboratório; o desenvolvimento de um simulador numérico que considera uma metodologia sequencial para a solução das equações de balanço que são linearizadas utilizando o método de Picard; e o estudo da recuperação avançada de óleo pesado empregando a injeção de água aquecida e o uso de um poço aquecedor estático, sob diferentes cenários de injeção e aquecimento.

Este trabalho mostra o desenvolvimento de uma equação macroscópica de balanço de energia para um escoamento bifásico (água-óleo) em que se considera os efeitos combinados de tortuosidade e dispersão hidrodinâmica. Além disso, é feito o estudo da aplicação de métodos avançados de recuperação de óleo pesado utilizando um código numérico, que faz uso de um método sequencial, o Método dos Volumes Finitos e o método de Picard para a linearização das equações de balanço discretas. Dada a metodologia numérica utilizada bem como a equação de balanço de energia desenvolvida, o autor considera este trabalho único.

Vale ressaltar que o código numérico do simulador, desenvolvido no Laboratório de Modelagem Multiescala e Transporte de Partículas (LABTRAN) do Instituto Politécnico (IPRJ) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), voltado para a resolução do escoamento bifásico não-isotérmico tridimensional, não foi iniciado do zero. A sua construção teve como ponto de partida o trabalho de [Freitas \(2017\)](#), que já havia construído um simulador destinado à resolução do escoamento bifásico isotérmico tridimensional, empregando a linguagem de programação C e variantes do tipo totalmente implícita e sequencialmente implícita para o cálculo da pressão e da saturação. Ficando o autor responsável pela criação de de uma funcionalidade para o cálculo de temperatura.

Metodologia

Inicia-se pela escolha do modelo físico-matemático, com o intuito de se obter as equações que governam o escoamento bifásico não-isotérmico em um reservatório de petróleo. Como usualmente, essas equações são derivadas da aplicação dos balanços de massa, da quantidade de movimento e de energia, sendo todas válidas para a descrição do escoamento e da transferência de calor na escala macroscópica (ou de laboratório). Do balanço de massa, resultam duas equações que expressam a conservação de massa das fases óleo e água. Por outro lado, do balanço da quantidade de movimento origina-se a lei clássica de Darcy, que deve ser modificada para que ela possa ser utilizada no caso do escoamento bifásico. No que se refere ao balanço de energia, um modelo a uma equação, cuja variável dependente é a temperatura média do reservatório, descreverá o processo de troca térmica ao longo do reservatório, considerando as contribuições da rocha e dos fluidos. Ela é obtida sem que se imponha a igualdade das temperaturas médias da rocha e dos fluidos.

Em [Kaviany \(1991\)](#), o processo de transferência de calor em um meio poroso é revisado e são encontrados modelos apropriados para o escoamento monofásico a uma e a duas equações. Porém, o modelo a uma equação apresentado considera a hipótese do equilíbrio térmico local. Nessa mesma referência, um modelo para o escoamento multifásico também é proposto, embora ele também assuma o equilíbrio térmico local. Um modelo para o escoamento bifásico, com mudança de fase, é fornecido em [Duval, Fichot e Quintard \(2004\)](#). Nele, um modelo a três equações é desenvolvido e tanto o tensor efetivo de dispersão quanto os coeficientes de transferência de calor devem ser fornecidos. No presente trabalho, propõe-se um modelo a uma equação sem que se adote a hipótese do equilíbrio térmico local, sendo que a única simplificação introduzida é a não contabilização na transferência de calor, na escala microscópica, dos efeitos advindos da compressibilidade dos fluidos. Tal hipótese se baseia no fato de que considera-se que o escoamento seja ligeiramente compressível e que os efeitos da variação da massa específica em função da

temperatura possam ser desconsiderados.

Tendo sido apresentadas todas as equações governantes e introduzidas as relações para o cálculo das propriedades, o Método dos Volumes Finitos (LEVEQUE, 2002; MOKALLED; MANGANI; DARWISH, 2016) é utilizado na discretização das equações diferenciais parciais não-lineares. No que se refere à discretização temporal, o uso de esquemas explícitos trazem restrições severas no que diz respeito ao incremento de tempo, principalmente quando os problemas são mais complexos, e.g., o domínio é tridimensional e o meio é heterogêneo (JIANG; TCHELEPI, 2019). Por isso, preferência é dada aos métodos implícitos. Dentre eles, destaca-se dois dos principais que são o Método Totalmente Implícito (MTI) (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001) e o Método Sequencial Implícito (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). O último é preferível em alguns casos, em função da liberdade que se tem em aplicar estratégias de resoluções distintas para problemas de natureza diversa, além de se poder utilizar passos de tempo adequados a cada tipo de problema. Por exemplo, em se tratando do escoamento multifásico não-isotérmico, em um reservatório, as equações governantes podem ser resolvidas empregando-se diferentes métodos iterativos de resolução de sistemas de equações algébricas.

Conforme o disposto em Calle (2017), o Método Totalmente Implícito é, em geral, destinado a aplicações em reservatórios de larga escala, sendo esse um método incondicionalmente estável. Ele é utilizado em simulações que consideram que o reservatório irá produzir durante anos de operação, e o tempo total de execução pode montar a algumas horas. Entretanto, mesmo permitindo o uso de incrementos de tempos maiores, o MTI pode levar a sistemas de equações algébricas cuja matriz dos coeficientes possui uma grande dimensão, acarretando num aumento do custo computacional a cada passo de tempo. Além disso, a sua implementação pode ser relativamente complexa.

O método IMPES, que segundo Jiang e Tchelepi (2019) é um método sequencial, resolve a equação da pressão implicitamente e da saturação de maneira explícita. Esse método é muito utilizado na simulação de diversos problemas relacionados ao escoamento em reservatórios. Ele é de simples implementação e implica a resolução de sistemas algébricos de menor porte quando comparado aos métodos simultâneos ou totalmente implícitos. A grande desvantagem desse método é ele ser somente condicionalmente estável, devido ao cálculo explícito da saturação, e uma restrição deve ser imposta ao tamanho do passo de tempo (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; GHAFOURI, 2016; CALLE, 2017; FREITAS, 2017). No entanto, ainda é um método relevante e diversos pesquisadores vêm trabalhando no sentido de contribuir com o seu aperfeiçoamento (GHAFOURI, 2016).

Em função da restrição associada ao método IMPES, neste trabalho é utilizado o Método Sequencial Implícito na determinação da solução dos problemas relacionados ao escoamento bifásico não-isotérmico. Como o nome já diz, ele é um método sequencial que

permite que diferentes estratégias de resolução possam ser pensadas para cada uma das equações governantes escritas em termos da pressão do óleo, da saturação da água e da temperatura média do reservatório.

Dois métodos de resolução de sistemas de equações algébricas são empregados, o método dos Gradientes Conjugados preconditionado em se tratando do problema parabólico para a determinação da pressão do óleo e o método do Gradiente Biconjugado Estabilizado Precondicionado para o cálculo implícito da saturação da água e da temperatura média. São dois métodos diferentes visto que somente no primeiro problema a matriz dos coeficientes é simétrica definida positiva, condição necessária para o uso do primeiro método.

Organização do trabalho

Nesta introdução, discorreu-se sobre a simulação numérica de reservatórios, a recuperação de hidrocarbonetos, a aplicação de métodos térmicos de recuperação avançada, assim como foi enunciado o objetivo desta tese e apresentada a metodologia utilizada.

Na sequência, o Capítulo 1 contém uma revisão das principais propriedades de fluidos e de rocha, utilizadas na construção dos modelos de transporte para o escoamento não-isotérmico em reservatórios. Nele, também, introduz-se as equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia, que quando combinadas formam as EDPs que governam o escoamento e a transferência de calor no reservatório. Na modelagem do problema térmico, conforme já ressaltado, é utilizado um modelo a uma equação contendo termos fontes destinados à incorporação dos efeitos advindos da presença de aquecedores estáticos e poços injetores/produtores.

Discute-se, no Capítulo 2, como as equações diferenciais parciais, cujas variáveis dependentes são a pressão, saturação e a temperatura média, podem ser resolvidas numericamente por meio do Método dos Volumes Finitos, de uma decomposição de operadores, da linearização das equações discretizadas e dos métodos dos Gradientes Conjugados Precondicionado e Gradiente Biconjugado Estabilizado Precondicionado.

Os resultados numéricos são apresentados no Capítulo 3. As verificações numéricas, a análise de sensibilidade (reservatório com geometria do tipo *Slab*) englobando as variações na estratégia de aquecimento, e o estudo inicial considerando o uso de um poço aquecedor estático (arranjo de injeção/produção do tipo *Five-spot*) são aqui discutidos em pormenores.

Finalmente, são apresentadas as principais conclusões que puderam ser extraídas do presente trabalho, bem com as perspectivas sugeridas para a possível realização de futuros trabalhos.

1 ESCOAMENTO NÃO-ISOTÉRMICO EM MEIOS POROSOS

O escoamento bifásico (água-óleo) e não-isotérmico em um reservatório é descrito por equações diferenciais parciais não-lineares que, quando resolvidas, fornecem a pressão e a temperatura no interior do meio poroso. As propriedades dos fluido e de rocha, que aparecem nos coeficientes presentes nas EDPs, podem ser dependentes da pressão da fase não-molhante, da saturação da fase molhante e da temperatura, que são as variáveis dependentes.

Neste capítulo, revisam-se as propriedades físicas necessárias para a modelagem do escoamento não-isotérmico, em um meio poroso, e discute-se como são obtidas as propriedades dependentes da pressão, da temperatura dos fluidos e da temperatura da rocha. Além disso, são introduzidas as equações governantes. A Seção 1.1, trata de uma breve revisão das propriedades necessárias quando da solução das equações de balanço consideradas na Seção 1.2. Nessa seção, são apresentadas as equações diferenciais parciais que expressam a conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia. Finalmente, a Seção 1.3 é dedicada às condições iniciais e de contorno impostas, necessárias na obtenção das soluções das EDPs.

1.1 Propriedades físicas

Na simulação numérica de reservatórios é necessário determinar as propriedades físicas da rocha e do fluido e compreender os fenômenos físicos que regem o escoamento dos fluidos na formação rochosa. Como se trata do escoamento bifásico não-isotérmico em um meio poroso, as equações utilizadas são a equação da continuidade e as equações resultantes da aplicação dos balanços da conservação da quantidade de movimento e da energia. Destaca-se que a equação da energia é obtida sem que a hipótese do equilíbrio térmico local entre a rocha e os fluidos seja admitida, ou seja, a rocha e os fluidos têm temperaturas diferentes.

Antes de dar início às definições das propriedades propriamente ditas, é preciso estabelecer as características do meio poroso. Portanto, considera-se que os fluidos são imiscíveis e que não há transferência de massa entre eles. Uma fase, a água, é a fase molhante (subscrito w) e o óleo é a fase não-molhante, subscrito n .

1.1.1 Propriedades de rocha

A porosidade da rocha fornece a relação entre o volume poroso, onde há a ausência de rocha, e o volume de material sólido. Essa relação é relevante para o estudo do escoamento não-isotérmico e multifásico, visto que a porosidade fornece uma medida da quantidade de fluido armazenado no meio poroso. Levando-se em consideração que o volume dos poros é V_p e que o volume da matriz porosa é V_m , a porosidade ϕ é dada por

$$\phi = \frac{V_p}{V_p + V_m}.$$

Existem dois tipos de porosidade: a absoluta e a efetiva. A primeira, se refere à relação entre o volume total dos poros da rocha e o volume total (sólido e poros) do reservatório. Já a porosidade efetiva é a relação entre os espaços vazios interconectados da matriz porosa e o volume total do reservatório. Neste trabalho, salvo menção em contrário, a porosidade será entendida como sendo a porosidade efetiva, que é a que importa em termos da produção de hidrocarbonetos. Aqui, considera-se que a porosidade depende da pressão do óleo, p_o , e da temperatura média do reservatório (introduzida na Seção 1.2.2), T , na forma

$$\phi = \phi(p, T) = \phi^0 [1 + c_\phi (p_o - p^0) - c_{\phi T} (T - T^0)],$$

onde ϕ^0 é a porosidade de referência, determinada nas pressão e temperatura de referência, p^0 e T^0 respectivamente, c_ϕ é o coeficiente de compressibilidade da rocha, $c_{\phi T}$ representa o coeficiente de expansividade térmica da rocha e p_o é a pressão da fase não-molhante.

Outra propriedade de rocha é a permeabilidade absoluta. Ela é uma propriedade tensorial, \mathbf{k} , que fornece uma medida da capacidade de um meio poroso em transportar fluidos através de seus poros interconectados. A permeabilidade é uma característica que depende do número, da geometria e do grau de conectividade dos poros. Ela varia de um ponto ao outro e também pode depender da direção do escoamento (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Em muitas aplicações práticas é razoável considerar que a permeabilidade pode ser representada por um tensor diagonal (CHEN; HUAN; MA, 2006), cujos elementos da diagonal principal são k_x , k_y e k_z , correspondentes às três direções espaciais principais x , y e z , respectivamente, conduzindo a

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}.$$

Caso o meio seja considerado anisotrópico, seus valores nas direções x , y e z serão diferentes. Por outro lado, se o meio for isotrópico, os valores das permeabilidades serão iguais e não dependerão das direções espaciais.

Quando se considera escoamentos multifásicos, além da resistência ao escoamento advinda da rocha tem-se também a resistência proveniente da influência de um fluido no escoamento do outro. Essa resistência é traduzida via a introdução da permeabilidade relativa, que pode variar entre zero e um (CHEN; HUAN; MA, 2006). Quando se considera o conjunto dos efeitos que exercem resistência ao escoamento de uma dada fase α , pode-se definir a permeabilidade efetiva, $k_{r\alpha}$. Então, a permeabilidade relativa é dada por

$$k_{r\alpha} = \frac{k_{\alpha}}{k},$$

onde considerou-se o caso de um meio isotrópico para essa permeabilidade.

Em geral, para escoamentos bifásicos, as permeabilidades relativas são fornecidas como funções da saturação da fase molhante, que é fase fluida que preferencialmente tem contato com a fase sólida. As curvas de permeabilidades relativas podem ser determinadas empiricamente para cada meio poroso considerado ou por expressões analíticas (correlações). Elas são, na maioria dos casos, obtidas a partir de modelos simplificados, tais como um feixe de tubos capilares ou redes de tubos capilares (CHEN; HUAN; MA, 2006).

É importante salientar que tais modelos são empregados quando das simulações de escoamentos bifásicos, água-óleo, em reservatórios de petróleo. Em se tratando da permeabilidade relativa, usualmente utiliza-se modelos isotérmicos (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; FREITAS, 2017; CALLE, 2017), que correspondem ao modelo de Corey modificado, que para a fase molhante é dado por:

$$k_{rw}(S_w) = k_{rw_{max}} \left(\frac{S_w - S_{iw}}{1 - S_{iw} - S_{nrw}} \right)^{ew},$$

enquanto que, para a fase não-molhante,

$$k_{rn}(S_w) = k_{rn_{max}} \left(\frac{1 - S_w - S_{nrw}}{1 - S_{iw} - S_{nrw}} \right)^{eow},$$

onde S_w e S_{iw} são a saturação e a saturação irreduzível da fase molhante, respectivamente, ew e eow são expoentes que podem ser determinados utilizando dados experimentais e S_{nrw} é a saturação residual da fase não-molhante.

Ainda em relação à permeabilidade relativa, quando se considera um escoamento multifásico não-isotérmico, os seus valores também podem variar com a temperatura.

Ainda não há um consenso quanto à necessidade de se considerar ou não a permeabilidade relativa como uma função da temperatura (QIN et al., 2018). Dada a importância desse debate, neste trabalho decidiu-se considerar a influência da temperatura no escoamento bifásico na sua determinação.

Como visto em Esmaeili et al. (2020), um elemento chave para o sucesso de tais simulações é a necessidade do uso de curvas de permeabilidade relativa que sejam adequadas para descrever o escoamento não-isotérmico no reservatório. As permeabilidades relativas, então, são calculadas utilizando-se (ESMAEILI et al., 2020):

$$k_{rw}(S_w, T) = \exp[-0,08832T + 15,38 \ln(T) - 64,87] \cdot \left[\frac{S_w - 2,673 \cdot 10^{-4}T - 0,0382}{1 - 2,673 \cdot 10^{-4}T + 0,1036 \ln(T) - 0,7623} \right]^{(-5,578 \cdot 10^{-3}T + 2,995)}$$

para a fase molhante. No caso da fase não-molhante,

$$k_{rn}(S_o, T) = [0,4947 \ln(T) - 1,6666] \cdot \left[1 - \frac{S_o - 2,673 \cdot 10^{-4}T - 0,0382}{1 - 2,673 \cdot 10^{-4}(T) + 0,1036 \ln(T) - 0,7623} \right]^{(-9,885 \cdot 10^{-4}T + 1,349)}$$

onde S_w é a saturação da fase molhante, S_o é a saturação da fase não-molhante e a temperatura T deve ser dada em °C. Essas curvas de permeabilidade relativa foram obtidas para o caso no qual um óleo betuminoso era a fase não-molhante (ESMAEILI et al., 2020). No entanto, admitiu-se a pertinência da verificação do comportamento do escoamento bifásico utilizando-se os modelos de permeabilidade relativa aqui reportados.

1.1.2 Propriedades de fluidos

A massa específica de um fluido é expressa pela razão entre a sua massa e o volume que ela ocupa (kg/m^3). Levando-se em conta que o fluido pode ser considerado ligeiramente compressível, o seu volume pode ser alterado em função da variação da pressão e da contração/expansão térmica. Isso é válido tanto para a fase molhante quanto para a fase não-molhante. O modelo utilizado para o cálculo da massa específica do óleo é dado por (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$\rho_o = \rho_o^0 [1 + c_o (p_o - p^0) - c_{oT} (T - T^0)] ,$$

onde ρ_o^0 é a massa específica nas condições de referência para o óleo, c_o é a compressibilidade do óleo, c_{oT} é o coeficiente de expansão térmica do óleo e T é a temperatura média do reservatório. No caso da água, tem-se que (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$\rho_w = \rho_w^0 [1 + c_w (p_o - p^0) - c_{wT} (T - T^0)] ,$$

onde ρ_w^0 é a massa específica nas condições de referência para a água, c_{wT} é a compressibilidade da água e c_{wT} é o coeficiente de expansão térmica da água.

A viscosidade está relacionada à medida da resistência que um fluido oferece ao escoamento quando submetido a uma tensão, tendo em vista a existência do atrito entre as suas camadas quando do escoamento. Na realidade, a viscosidade é uma função tanto da pressão quanto da temperatura. Porém, neste trabalho, é considerada, somente, a sua dependência em relação à temperatura (ROUSSET, 2010),

$$\mu_o = a_n \exp \left(\frac{b_n}{T - T_{ref}} \right) , \quad (1)$$

onde a_n e b_n são constantes a serem definidas e T_{ref} é a temperatura de referência para o cálculo da viscosidade.

Com relação à viscosidade da água, tem-se que (ROY et al., 2020)

$$\mu_w = \frac{A}{-1 + BT + CT^2} ,$$

onde a temperatura é dada em °F e os coeficientes A , B e C são determinados seguindo Roy et al. (2020), como pode ser visto na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros para a viscosidade da água

A	B	C
2,1850	0,04012	5,1547 10 ⁻⁶

Fonte: O autor, 2022.

Uma massa fixa de fluido, contido no reservatório, ocupa um volume diferente dependendo da pressão e da temperatura reinantes no seu interior. Assim sendo, o Fator

Volume Formação (FVF), B_α , é usado a fim de converter os volumes determinados nas condições de pressão e temperatura do reservatório para os seus equivalentes em condições padrão (ISLAM et al., 2010):

$$B_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_{\alpha_{sc}}},$$

onde V_α é o volume do fluido α no reservatório e $V_{\alpha_{sc}}$ é o volume desse fluido nas condições padrão. Considerando a relação entre o volume e massa específica, obtém-se, para as duas fases (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001):

$$B_\alpha = \frac{B_\alpha^0}{1 + c_\alpha (p_\alpha - p^0) - c_{\alpha T} (T - T^0)},$$

onde B_α se refere ao FVF da fase α , B_α^0 é um valor de referência, c_α é o coeficiente de compressibilidade do fase α e $c_{\alpha T}$ é o coeficiente de expansão térmica da fase.

1.2 Equações governantes para o escoamento e a transferência de calor em meios porosos

As propriedades materiais da rocha e dos fluidos assumem um papel fundamental na simulação computacional, tendo em vista que elas influenciarão no escoamento e na transferência de calor na recuperação de hidrocarbonetos. Tendo, então, estabelecido como calcular essas propriedades, inicia-se o desenvolvimento que resultará nas equações governantes para o escoamento e a transferência de energia. As seguintes hipóteses são consideradas:

- a) a formação rochosa é anisotrópica em termos da permeabilidade absoluta;
- b) a compressibilidade da rocha é pequena e constante;
- c) os fluidos são newtonianos;
- d) não ocorrem reações químicas;
- e) o escoamento ocorre a baixas velocidades;
- f) os fluidos têm uma composição química constante;
- g) o escoamento é não-isotérmico, bifásico e tridimensional;
- h) os fluidos são ligeiramente compressíveis;

- i) as condutividades térmicas da rocha e dos fluidos são constantes;
- j) não se considera a hipótese do equilíbrio térmico local.

1.2.1 Balanços de massa e da quantidade de movimento

A equação da conservação de massa, no escoamento bifásico em meios porosos, pode ser escrita como (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_\alpha S_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) - q_{m\alpha} = 0, \quad (2)$$

onde \mathbf{v}_α é a velocidade superficial da fase α , S_α é a saturação da fase α , $q_{m\alpha}$ é o termo fonte associado à fase α .

No caso monofásico, a conservação da quantidade de movimento geralmente é representada pela lei de Darcy clássica (AZIZ; SETTARI, 1979). Para escoamentos multifásicos, a lei de Darcy clássica deve ser modificada para levar em conta a resistência ao escoamento devido à existência de mais de uma fase. A alteração é feita mediante a introdução da permeabilidade relativa ($k_{r\alpha}$)

$$\mathbf{v}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \mathbf{k} (\nabla p_\alpha - \gamma_\alpha \nabla Z), \quad (3)$$

onde μ_α é a viscosidade da fase α , \mathbf{k} é o tensor de permeabilidade absoluta, p_α é a pressão da fase α , $\gamma_\alpha = \rho_\alpha g$, sendo g a magnitude da aceleração da gravidade, e Z é a profundidade. A lei de Darcy tem validade para escoamentos viscosos e laminares.

Combinando-se as Equações (2) e (3), tem-se, para cada fase,

$$\nabla \cdot \left[\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \mathbf{k} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla Z) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] - q_{sco} \quad (4)$$

e

$$\nabla \cdot \left[\frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \mathbf{k} (\nabla p_w - \gamma_w \nabla Z) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_w}{B_w} \right] - q_{scw}, \quad (5)$$

onde $q_{scw} = q_{mw}/\rho_{scw}$ e $q_{sco} = q_{mo}/\rho_{sco}$, sendo ρ_{scw} e ρ_{sco} as massas específicas em condições padrão (constantes) da fase molhante e da fase não-molhante, respectivamente.

Supõe-se que o meio esteja totalmente saturado, ou seja,

$$S_w + S_o = 1. \quad (6)$$

Além disso, por conta da curvatura e da tensão superficial existente na interface das fases, a pressão no fluido da fase não-molhante é maior que a pressão do fluido da fase molhante. Essa diferença na pressão das fases é dada por (CHEN; HUAN; MA, 2006)

$$p_c = p_o - p_w, \quad (7)$$

onde p_c é a pressão capilar. Neste trabalho, a curva de pressão capilar é calculada mediante o uso de modelos de potência ou leis de potência (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006)

$$p_c(S_w) = p_{c_{max}} \left(\frac{1 - S_w - S_{nrw}}{1 - S_{iw} - S_{nrw}} \right)^{epc},$$

onde $p_{c_{max}}$ é a pressão capilar máxima e o expoente epc deve ser fornecido.

A partir das Equações (4), (5), (6) e (7), é possível obter duas equações de balanço de massa, que servirão de base para o processo de discretização que deverá ser feito posteriormente. Elas são obtidas substituindo-se a lei da Darcy, para cada fase, na respectiva equação de conservação de massa. Em seguida, a pressão da água é substituída pela pressão capilar, enquanto que a saturação da fase óleo é escrita em termos da saturação da fase água. Portanto, como resultado tem-se:

$$\nabla \cdot \left[\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \mathbf{k} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla Z) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi(1 - S_w)}{B_o} \right] - q_{sco} \quad (8)$$

e

$$\nabla \cdot \left[\frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \mathbf{k} (\nabla p_o - \nabla p_c - \gamma_w \nabla Z) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) - q_{scw}. \quad (9)$$

1.2.2 Balanço de energia

A hipótese de equilíbrio térmico local já foi utilizada em diversos trabalhos, tais como em Bortolozzi e Deiber (2001), Roy et al. (2019) e Roy et al. (2020). Essa consideração implica a igualdade entre as temperaturas do sólido e dos fluidos. Entretanto, em algumas situações isso pode não ser verdade, principalmente quando se considera mate-

riais com propriedades térmicas muito distintas ou quando as condições térmicas variam rapidamente (BANNACH, 2020). Portanto, alternativas foram pensadas para a proposição de modelos a uma equação que não assumem a hipótese do equilíbrio térmico local (MOYNE et al., 2000). Por outro lado, também existem os modelos de balanço de energia a duas (MOYNE; SOUTO, 2014a; MOYNE; SOUTO, 2014b) ou três equações, com mudança de fase (DUVAL; FICHOT; QUINTARD, 2004) ou sem mudança de fase (PETIT; FICHOT; QUINTARD, 1999). Apesar desses modelos serem mais completos, o modelo a uma equação é o mais simples de ser implementado. No presente trabalho, não se considera a mudança de fase, e optou-se pelo uso de um modelo a uma equação onde a variável dependente é a temperatura média representativa do meio poroso como um todo (fases e matriz porosa). Supõe-se, também, que o aquecimento da jazida é modelado via a introdução de termos fonte (ROUSSET, 2010).

Considerando que a capacidade térmica das fases sejam constantes, a equação macroscópica que governa a transferência de calor é dada por (Apêndice ??):

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\rho c_p)T] + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{v}_o h_o + \rho_w \mathbf{v}_w h_w) - \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla T) - \frac{q_H}{V_b} - \frac{\rho_o h_o q_{sc_o}}{V_b} - \frac{\rho_w h_w q_{sc_w}}{V_b} = 0, \quad (10)$$

onde \mathbf{K} representa o tensor efetivo de dispersão térmica, h_o e h_w são as entalpias do óleo e da água, q_H representa uma fonte térmica volumétrica (aquecedores), q_{sc_o} e q_{sc_w} representam as vazões mássicas volumétricas quando da presença de poços injetores/produtores e a temperatura média do meio poroso, considerando ambas as fases e a rocha, é dada por:

$$(\rho c_p) T = \phi (1 - S_w) (\rho c_p)_o T_o + \phi S_w (\rho c_p)_w T_w + (1 - \phi) (\rho c_p)_r T_r,$$

onde c_{p_o} , c_{p_w} , T_o e T_w são respectivamente as capacidades térmicas e as temperaturas do óleo e da água e T representa a temperatura média do reservatório. Ademais,

$$(\rho c_p) = \phi (1 - S_w) (\rho c_p)_o + \phi S_w (\rho c_p)_w + (1 - \phi) (\rho c_p)_r$$

representa a capacidade térmica média. As entalpias dos fluidos são calculadas conhecida a temperatura média do reservatório: $h_o = c_{p_o} T$ e $h_w = c_{p_w} T$ (Apêndice ??).

Introduzindo a lei de Darcy na Equação (10), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\rho c_p)T] - \nabla \cdot \left[\rho_o h_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \mathbf{k} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla_n Z) \right] - \nabla \cdot \left[\rho_w h_w \frac{k_{rw}}{\mu_w} \mathbf{k} (\nabla p_o - \nabla p_c - \gamma_w \nabla_w Z) \right]$$

$$= \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla T) + \frac{q_H}{V_b} + \frac{\rho_o h_o q_{sc_o}}{V_b} + \frac{\rho_w h_w q_{sc_w}}{V_b}. \quad (11)$$

O tensor efetivo de dispersão térmica tem um significado relevante para a análise do comportamento térmico dos fluidos e da rocha. Diversos autores têm estudado quais os principais fatores que influenciam esse tensor, como pode ser visto em [Kaviany \(1991\)](#), [Moyne et al. \(2000\)](#) e [D'Hueppe \(2011\)](#). Em [Moyne et al. \(2000\)](#) o tensor efetivo de dispersão térmica é obtido, via a aplicação do Método da Média Volumétrica, e um problema de fechamento é proposto supondo-se que o meio poroso é espacialmente periódico. Esse tensor contém a contribuição de três termos, relacionados à condução térmica, à tortuosidade e à dispersão hidrodinâmica. A dispersão térmica efetiva, observada na escala macroscópica, é o resultado dos processos conjuntos de condução de calor e de transporte de energia por advecção que têm lugar na escala dos poros ([ÖZGÜMÜS et al., 2013](#)).

Na escala macroscópica, além da condução de calor, existe uma dispersão térmica em decorrência dos caminhos tortuosos percorridos pelos fluidos, além da parcela devida à flutuação de velocidade do escoamento em torno do seu valor médio (dispersão hidrodinâmica). Em [Yang e Nakayama \(2010\)](#), o tensor efetivo é obtido através da aplicação de métodos analíticos. Já em [Kuwahara, Shiota e Nakayama \(2001\)](#), o tensor é obtido via um ajuste de curvas de dados experimentais, obtidos para um meio poroso com características específicas para a fase sólida. Além disso, em [Wei, Bao e Ruan \(2020\)](#) utilizam-se métodos de aprendizagem de máquina para a obtenção de correlações que relacionam a morfologia do meio poroso e a condução térmica efetiva.

De fato, o tensor efetivo de dispersão térmica tem um papel relevante no que diz respeito à troca térmica entre o sólido e os fluidos. A condução térmica é a contribuição que tem o maior peso quando se considera escoamentos a baixos números de Reynolds. O tensor efetivo de dispersão térmica é o resultado da contribuição dos três mecanismos mencionados. Segundo [Pedras e Lemos \(2008\)](#), a tortuosidade e a dispersão hidrodinâmica são mecanismos que surgem quando são tomadas as médias volumétricas das equações microscópicas sobre o Volume Elementar Representativo (VER) ([WHITAKER, 1999](#)) e introduzidas as decomposições espaciais e os problemas de fechamento. Por isso elas não são definidas na escala dos poros e têm representatividade somente na escala macroscópica de Darcy (ou de laboratório). O tensor efetivo de dispersão térmica é, então, dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\phi(1 - S_w) \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1 - \phi) \kappa_r] \mathbf{I} \\ &+ [\phi(1 - S_w) \kappa_o + \phi S_w \kappa_w + (1 - \phi) \kappa_r] \boldsymbol{\tau} + \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (12)$$

onde κ_o , κ_w e κ_r são as condutividades térmicas do óleo, da água e da rocha, respectivamente, \mathbf{I} é o tensor identidade, $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor de tortuosidade e \mathbf{D} é o tensor de dispersão

hidrodinâmica.

Os tensores de condutividade térmica $\kappa_o\mathbf{I}$ e $\kappa_w\mathbf{I}$ são obtidos relativamente sem maiores dificuldades. Uma vasta gama de referências mostra os valores estimados dessas condutividades para o óleo e a água. Já no caso da tortuosidade, diversos autores negligenciam esse efeito, tendo em vista que a sua estimativa é altamente dependente do conhecimento da geometria das partículas do meio poroso, na escala microscópica. Portanto, uma análise a diferentes escalas deveria ser feita, para que houvesse uma captura da geometria do reservatório, fazendo com que o termo de tortuosidade pudesse ser determinado de maneira mais acurada.

Juntamente com os termos de condutividade térmica, o termo de tortuosidade forma o que alguns autores chamam de tensor efetivo de condutividade térmica, ou tensor efetivo de condutividade térmica de estagnação (KAVIANY, 1991; ÖZGÜMÜS et al., 2013), que muitas vezes é obtido experimentalmente. Uma revisão efetiva sobre os modelos do tensor efetivo de dispersão térmica é encontrada em Özgümüs et al. (2013), onde os autores desconsideram o efeito da tortuosidade, mantendo as contribuições das condutividades térmicas e da dispersão hidrodinâmica. Entretanto, aqui, leva-se em consideração todos os termos da Equação (12). Logo, é necessário encontrar um modelo para os tensores de tortuosidade e dispersão hidrodinâmica.

Com referência à tortuosidade, diversos autores têm buscado encontrar um modelo que possa ser utilizado no maior número de casos possíveis, ou seja, tenta-se propor uma forma geral, dependente da geometria do meio poroso na escala microscópica (dos poros). Fu, Thomas e Li (2021) revisaram diferentes modelos, além de atestar a sua representatividade em diferentes fenômenos físicos. Nesse trabalho, é fornecido o modelo aqui utilizado, dado pela função escalar

$$\tau = 1,23 \frac{(1 - \phi)^{4/3}}{\phi}, \quad (13)$$

sabendo-se que o tensor de tortuosidade é representado na forma

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_x & 0 & 0 \\ 0 & \tau_y & 0 \\ 0 & 0 & \tau_z \end{bmatrix},$$

que é um tensor diagonal. Devido à consideração da hipótese de isotropia, as componentes da diagonal principal serão iguais e determinadas via a Equação (13).

O tensor de dispersão hidrodinâmica também é considerado diagonal e é dado por

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{ax} + \mathbf{D}_{tr} = \begin{bmatrix} D_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{tr} & 0 \\ 0 & 0 & D_{tr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & D_{tr} & 0 \\ 0 & 0 & D_{tr} \end{bmatrix},$$

onde \mathbf{D}_{ax} é o tensor que contém a componente axial enquanto que \mathbf{D}_{tr} leva em conta as contribuições das componentes transversais. Essas contribuições são obtidas em função da direção principal do escoamento, que é a direção axial, e as outras direções são descritas como transversais. A equação para a determinação da componente axial é dada por (KAVIANY, 1991)

$$D_{ax} = \phi(1 - S_w) \kappa_n 0,7Pe_o^{1,1} + \phi S_w \kappa_w 0,7Pe_w^{1,1},$$

enquanto que para a direção transversal (KAVIANY, 1991)

$$D_{tr} = \phi(1 - S_w) \kappa_n 0,2Pe_o + \phi S_w \kappa_w 0,2Pe_w,$$

onde $Pe_\alpha = Re_\alpha Pr_\alpha$ é o número de Péclet e os números de Reynolds (Re) e Prandtl (Pr) são definidos para as fases móveis (água e óleo) por

$$Re_\alpha = \frac{\rho_\alpha v_\alpha d_p}{\mu_\alpha}, \quad Pr = \frac{c_p \mu_\alpha}{\kappa_\alpha}.$$

1.3 Condições iniciais e de contorno

O modelo físico-matemático levando às Equações (8), (9) e (10), que governam o escoamento bifásico não-isotérmico em meios porosos, não estará completo a menos que sejam especificadas as condições inicial e de contorno apropriadas.

A condição inicial é fornecida para um instante de tempo arbitrário t_0 . Por exemplo,

$$p(x, y, z, t_0) = p_0(x, y, z),$$

$$S_w(x, y, z, t_0) = S_{w0}(x, y, z)$$

e

$$T(x, y, z, t_0) = T_0(x, y, z),$$

onde p_0 , S_{w0} e T_0 representam os valores da pressão da fase molhante, saturação da fase molhante e temperatura média, em todo o domínio, no instante arbitrário t_0 considerado, em geral, o tempo inicial.

Para problemas de simulação em reservatórios de petróleo, geralmente, as pressões iniciais são prescritas a uma dada profundidade de referência, e os gradientes hidrostáticos são usados para se determinar os respectivos valores iniciais nas demais profundidades (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

No caso da distribuição inicial de temperatura, é importante ter em mente o conceito de energia geotérmica, ou seja, a quantidade de energia armazenada nas camadas mais profundas da Terra. Na base da crosta terrestre, as temperaturas podem variar de 200 a 1.000 °C e, no centro da Terra, a temperatura pode variar de 3.500 a 4.500 °C. O calor é transferido do centro da Terra para a superfície principalmente por condução, e esse fluxo térmico faz com que a taxa de variação de temperatura seja da ordem de 25-30 K/km para a região da crosta terrestre (INGVAR et al., 2008).

Em se tratando das condições de contorno, quando a pressão, a saturação ou a temperatura são especificadas, em toda a fronteira $\partial\Omega$ ou em parte dela (CHEN; HUAN; MA, 2006), tem-se uma condição de contorno do tipo de Dirichlet:

$$p = p_{esp}(x, y, z, t),$$

$$S_w = S_{w,esp}(x, y, z, t)$$

e

$$T = T_{esp}(x, y, z, t).$$

Para os poços de injeção ou produção utiliza-se, basicamente, condições de contorno internas. Nesse caso, a especificação de uma condição de pressão prescrita implica o fato de que um poço produtor/injetor produz/injeta fluido a uma pressão prescrita na face da formação. Por outro lado, nas fronteiras externas, uma especificação desse tipo resulta em uma pressão constante na fronteira. Esse tipo de condição de contorno ocorre em

reservatórios constantemente alimentados por um forte influxo devido à existência de um aquífero, de forma que a pressão na interface, entre o reservatório e o aquífero, permaneça aproximadamente constante por um dado período (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001).

Quando conhece-se e prescreve-se o fluxo através da fronteira (CHEN; HUAN; MA, 2006) tem-se uma condição do tipo Neumann. Por exemplo, para o fluxo mássico, em toda a superfície $\partial\Omega$ ou em parte dela,

$$\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = f(x, y, z, t)$$

onde \mathbf{n} indica o vetor normal unitário apontando para fora da fronteira $\partial\Omega$.

Para uma fronteira impermeável, faz-se $f(x, y, z, t) = 0$. A especificação de um fluxo mássico normal à fronteira corresponde à prescrição de um gradiente de pressão normal à fronteira (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Um caso, frequente, na engenharia de reservatórios é o de uma fronteira selada (fronteira impermeável), na qual não há fluxo mássico. Se não ocorre fluxo na fronteira, o gradiente de pressão é nulo no contorno (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001). Fluxos térmicos também podem ser prescritos de forma similar.

Além das condições de contorno de primeiro, Dirichlet, e de segundo tipo, Neumann, há uma outra condição que é uma combinação desses dois tipos, a condição de terceiro tipo, ou condição de contorno de Robin. Nessa condição de contorno, tem-se tanto os termos de fluxo quanto o prescrito,

$$g_p p + g_v \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = g(x, y, z, t)$$

onde os coeficientes g_p , g_v e g são funções conhecidas.

A condição de contorno de Robin é muito útil na modelagem computacional de problemas físicos porque ela permite, a partir da implementação de um modelo mais geral, a imposição das condições de primeiro e segundo tipos mudando apenas os valores dos seus coeficientes. Como exemplo, se for zerada a função g_p , tem-se uma condição do tipo Neumann. Por outro lado, se g_v for nula, então, obtém-se a condição do tipo Dirichlet.

2 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA

As equações diferenciais parciais introduzidas no Capítulo 1 não possuem solução analítica, salvo em alguns casos simplificados, devido, entre outros, ao fato de serem não-lineares. Deseja-se, então, empregar um método para que possa se obter as soluções aproximadas (numéricas) dessas equações. Basicamente, nos métodos numéricos, voltados para a solução de equações diferenciais parciais, utiliza-se um processo de discretização que resulta no particionamento do domínio de resolução e na obtenção de equações algébricas. Segundo [Moukalled, Mangani e Darwish \(2016\)](#), a discretização engloba: a definição do domínio; o particionamento do domínio de resolução utilizando uma malha computacional; a conversão do sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações algébricas. Portanto, esse processo permite a resolução das equações governantes válidas no domínio contínuo mediante a substituição delas por equações algébricas cujas variáveis assumem valores discretos, tanto no espaço quanto no tempo. Neste trabalho, optou-se por adotar o Método dos Volumes Finitos (*Finite Volume Method* (FVM)), que será abordado na Seção 2.1. Já na Seção 2.2, foca-se na escolha de uma técnica de linearização e da decomposição de operadores utilizadas na obtenção das soluções das equações algébricas. Por fim, a Seção 2.3 é dedicada à solução numérica dos sistemas de equações algébricas linearizadas.

2.1 Discretização

O método dos volumes finitos garante que a conservação integral da massa, da quantidade de movimento e da energia sejam preservadas sobre qualquer grupo de volumes de controle e, claro, sobre todo o domínio ([ISLAM et al., 2010](#)). Esse método está intrinsecamente ligado ao conceito da troca de fluxo entre regiões, ou volumes finitos, adjacentes ([FORTUNA, 2000](#)).

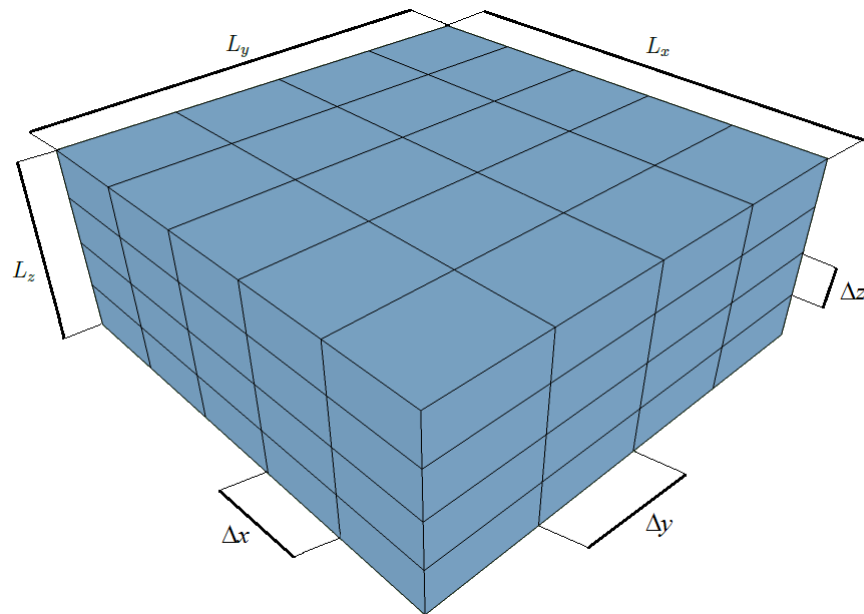
A interpretação física direta, das equações resultantes da aplicação do método dos volumes finitos, e a possibilidade do uso de malhas computacionais não-estruturadas e não-uniformes são duas das principais razões que explicam a sua popularidade ([FORTUNA, 2000](#)). Na construção da malha, volumes ou blocos, os volumes de controle, são introduzidos de modo a preencherem todo o domínio computacional. O número e o tamanho dos blocos dependem do tipo de problema, do custo computacional e da capacidade de computação disponível. Por exemplo, para o caso de um escoamento em um meio poroso fraturado, [Bosma et al. \(2017\)](#) utilizou o Método dos Volumes Finitos Multiescala e uma malha não-estruturada. Há também situações onde malhas estruturadas são utilizadas, em diferentes escalas, para modelar problemas de escoamentos multifásicos, o que

permite a captura dos fenômenos físicos em diferentes escalas espaciais, como pode ser visto em [Klemetsdal, Moyner e Lie \(2019\)](#).

Considera-se, aqui, o uso da geometria cartesiana tridimensional. Após a definição das dimensões do domínio, células (volumes finitos) são gerados e posicionados, sem sobreposição, no interior do domínio de modo a preenchê-lo. No método dos volumes finitos considera-se que as variáveis dependentes, como a pressão, a saturação e a temperatura, são determinadas no centroide de cada volume finito.

No procedimento de construção da malha, utilizado no caso tridimensional, cada volume será representado por um prisma retangular de dimensões Δx , Δy e Δz nas direções x , y e z , respectivamente, conforme mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Malha tridimensional



Nota: Domínio discretizado do reservatório.

Fonte: [FREITAS, 2017](#)

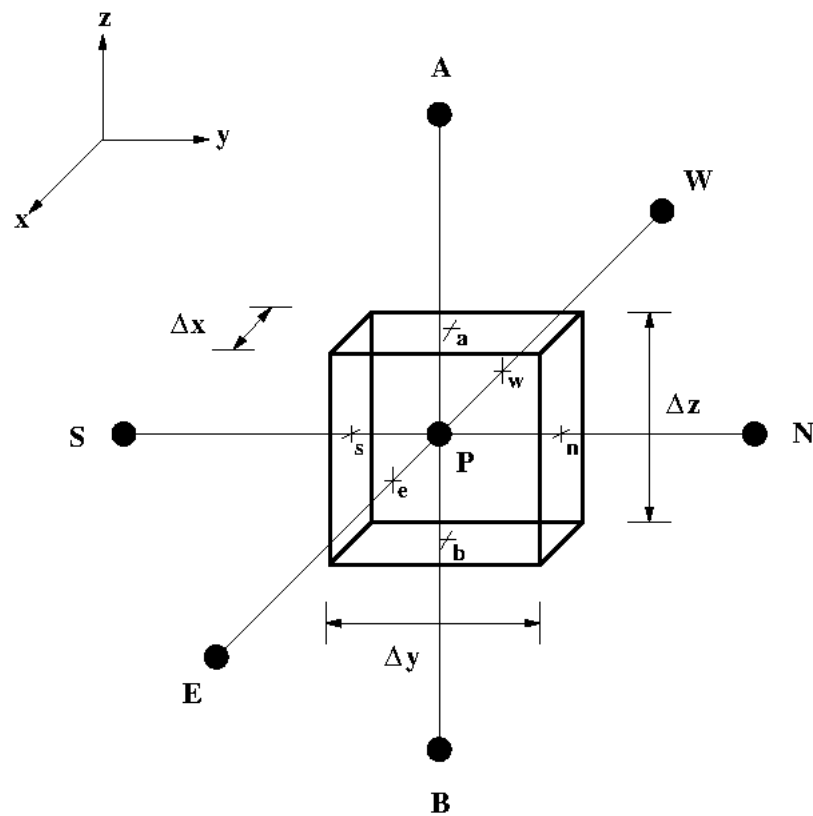
O domínio de dimensões L_x , L_y e L_z é, então, discretizado empregando-se n_x , n_y e n_z blocos nas direções x , y e z , de forma que,

$$\sum_{i=1}^{n_x} \Delta x_i = L_x, \quad \sum_{j=1}^{n_y} \Delta y_j = L_y, \quad \sum_{k=1}^{n_z} \Delta z_k = L_z,$$

onde os índices i , j e k indicam os blocos nas direções x , y e z , respectivamente. Nesse sistema, as fronteiras (faces) dos blocos são referenciadas via a notação $i + 1/2, j, k$, por exemplo, para a fronteira comum às células i, j, k e $i + 1, j, k$. De modo análogo, são

indicadas as faces dos volumes nas demais direções espaciais. As fronteiras dos volumes constituem os limites de integração quando aplica-se o método dos volumes finitos. Portanto, o domínio do reservatório é dividido usando os volumes finitos, como aquele exibido na Figura 3. As faces dos volumes finitos são indicadas por: $(i - 1/2, j, k) = w$, $(i + 1/2, j, k) = e$, $(i, j - 1/2, k) = n$, $(i, j + 1/2, k) = s$, $(i, j, k - 1/2) = b$ e $(i, j, k + 1/2) = a$, onde w , e , n , s , b e a vêm do inglês: *west*, *east*, *north*, *south*, *above* e *below*. O centro do volume é designado por $P(i, j, k)$ (letras maiúsculas) e os centros dos volumes vizinhos são representados por: $(i - 1, j, k) = W$, $(i + 1, j, k) = E$, $(i, j - 1, k) = N$, $(i, j + 1, k) = S$, $(i, j, k - 1) = A$ e $(i, j, k + 1) = B$ (Figura 3).

Figura 3 - O volume finito



Nota: Nomenclatura empregada para a designação dos nós e das faces no volume finito.

Fonte: O autor, 2022

Tendo sido gerada a malha computacional, é preciso integrar as Equações (8), (9) e (11), em cada célula do domínio, em relação ao espaço e ao tempo. O processo de integração, então, é feito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi(1-S_w)}{B_o} \right] dV dt &= \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \nabla \cdot \left[\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \mathbf{k} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla Z) \right] dV dt \\
&\quad + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} q_{sco} dV dt, \\
\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) dV dt &= \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \nabla \cdot \left[\frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \mathbf{k} (\nabla p_o - \nabla p_c - \gamma_w \nabla Z) \right] dV dt \\
&\quad + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} q_{scw} dV dt
\end{aligned} \tag{14}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p) T] dV dt &= \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \nabla \cdot \left[\rho_o h_o \frac{k_{ro}}{\mu_o} \mathbf{k} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla Z) \right] dV dt \\
&\quad + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \nabla \cdot \left[\rho_w h_w \frac{k_{rw}}{\mu_w} \mathbf{k} (\nabla p_o - \nabla p_c - \gamma_w \nabla Z) \right] dV dt \\
&\quad + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla T) dV dt \\
&\quad + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{q_H}{V_b} dV dt,
\end{aligned}$$

onde Δt é o incremento de tempo e o subscrito VC indica que o domínio de integração é o volume de controle.

Em função da extensão de todo o desenvolvimento e como o Método dos Volumes Finitos já é bastante conhecido, não será apresentado todo o detalhamento das etapas envolvidas na obtenção das formas discretizadas das equações governantes. Far-se-á somente uma descrição do procedimento realizado para cada termo de maneira resumida.

A integração dos termos advectivos e difusivos, considerando a formulação implícita, é realizada adotando-se a seguinte forma geral:

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \nabla \cdot (\alpha \mathbf{T} \nabla \Phi) dV dt \approx & \left[\left(A_x \alpha_x T_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e^{n+1} - \left(A_x \alpha_x T_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w^{n+1} \right] \Delta t \\
& + \left[\left(A_y \alpha_y T_{yy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n^{n+1} - \left(A_y \alpha_y T_{yy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s^{n+1} \right] \Delta t \\
& + \left[\left(A_z \alpha_z T_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_a^{n+1} - \left(A_z \alpha_z T_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_b^{n+1} \right] \Delta t \quad (15)
\end{aligned}$$

onde \mathbf{T} é um tensor diagonal, Φ representa as variáveis dependentes, α se refere aos diferentes coeficientes presentes nas equações governantes e A_d é definida como sendo a área de uma dada face do volume finito. Ademais, a Equação (15) deve ser melhor explicada no que tange às aproximações das derivadas espaciais nas interfaces das células. Um esquema do tipo diferenças centradas é utilizado com tal finalidade. Por exemplo, em se tratando da direção x , podendo o procedimento ser estendido para as demais direções, obtém-se

$$\left(A_x \alpha_x T_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e = A_{x_e} \alpha_{x_e} T_{x x_e} \left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta x_{PE}} \right) = \mathbb{T}_e (\Phi_E - \Phi_P),$$

$$\left(A_x \alpha_x T_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w = A_{x_w} \alpha_{x_w} T_{x x_w} \left(\frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta x_{WP}} \right) = \mathbb{T}_w (\Phi_P - \Phi_W),$$

onde

$$\mathbb{T}_e = \left(\frac{A_x \alpha_x T_{xx}}{\delta x_{PE}} \right)_e, \quad \mathbb{T}_w = \left(\frac{A_x \alpha_x T_{xx}}{\delta x_{WP}} \right)_w$$

e os subscritos e e w se referem aos valores que devem ser avaliados nas faces *leste* e *oeste*. Já os termos δx_{PE} e δx_{WP} representam as distâncias entre os centros das células vizinhas ao volume finito considerado. Por último, introduziu-se a transmissibilidade \mathbb{T} que deve também deve ser determinada nas interfaces dos volumes finitos.

Em seguida, volta-se a atenção para a discretização da Equação (14) que contém o gradiente da pressão capilar. O desenvolvimento apresentado também está restrito ao caso de uma única direção espacial e a regra da cadeia é empregada de modo que gradiente seja escrito em termos da saturação. Portanto,

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha T_{xx} \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) \right] dV dt \approx \left(A_x \alpha_x T_{xx} \frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} \right)_e^{n+1} \Delta t$$

$$- \left(A_x \alpha_x T_{xx} \frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} \right)_w^{n+1} \Delta t,$$

sabendo-se que um procedimento análogo pode ser empregado para as demais direções especiais.

Um outro ponto de fundamental importância é a aproximação das transmissibilidades nas interfaces dos volumes de controle. Esses termos podem ser altamente não-lineares, em função da sua dependência em termos das incógnitas do problema. Tal fato pode gerar problemas no que diz respeito à convergência, como relatado em [Jiang e Tchelepi \(2019\)](#), e à estabilidade do método numérico. Tendo conhecimento desse contexto e lembrando que as propriedades são definidas no centroide do volume finito, as aproximações devem ser feitas a fim de contornar essas questões. Primeiramente, \mathbb{T} deve ser calculado a partir do produto entre um termo geométrico, G , e um dependente das variáveis dependentes, F . Então,

$$\mathbb{T} = GF.$$

Os termos geométricos, que aparecem nas três equações de balanço, são aproximados por exemplo, na face leste e , por

$$G_{xe} = \left(\frac{k_x A_x}{\Delta x} \right)_e = \frac{k_{xe} A_{xe}}{\Delta x_e},$$

sendo que a permeabilidade, por sua vez, é determinada via uma média harmônica

$$k_{xe} = \frac{k_{xP} k_{xE} (\Delta x_P + \Delta x_E)}{k_{xP} \Delta x_E + k_{xE} \Delta x_P},$$

sendo que o mesmo tipo de aproximação é empregado para as condutividades térmicas que aparecem no termo de difusão da equação de energia.

Já os termos F podem ser computados de duas maneiras distintas. Para os que são dependentes da pressão e da temperatura, utiliza-se um esquema do tipo diferenças centradas

$$F(p_\alpha, T)_e = \frac{F(p_\alpha, T)_E + F(p_\alpha, T)_P}{2},$$

enquanto que para os termos dependentes da saturação, com fortes não linearidades, ela é feita empregando-se um esquema do tipo *upwind* de primeira ordem,

$$F(p_c, S_w)_e = \begin{cases} k_{rl_P}, & \text{se } v_e \geq 0 \\ k_{rl_E}, & \text{se } v_e < 0 \end{cases},$$

onde verifica-se que trata-se do cálculo das permeabilidades relativas nas faces dos volumes finitos.

Dando prosseguimento à integração das equações governantes, aborda-se agora os termos:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} q dV dt = Q^{n+1} \Delta t,$$

onde q é o termo fonte, em geral fornecido por unidade de volume. O termo Q representa o valor médio do termo fonte no interior do volume finito, que não varia no seu interior e é conhecido no centroide.

Considera-se, agora, a discretização dos termos de acúmulo. Inicia-se a discussão levando em conta a representação geral dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} (UVY),$$

onde U , V e Y são as diferentes funções que aparecem nas equações governantes. Como exemplo, eles assumem os seguintes valores

$$U = \phi, \quad V = 1/B_o, \quad Y = (1 - S_w),$$

em se tratando da Equação (8),

$$U = \phi, \quad V = 1/B_w, \quad Y = S_w,$$

para a Equação (9) e

$$U = \rho c_p, \quad V = T, \quad Y = 1,$$

na Equação (11).

De acordo com [Ertekin, Abou-Kassem e King \(2001\)](#), a expansão dos termos de acúmulo é um processo em que o operador de diferenças do tempo, que é aplicado a uma função ξ , é expresso em termos de diferenças das incógnitas de modo a preservar a conservação da massa. Esse processo é utilizado com a intenção de evitar a indução de instabilidades e de grandes erros de balanço material. O esquema de expansão da função ξ é dado por

$$\Delta_t \xi = \xi^{n+1} - \xi^n$$

onde a função ξ é dada por $\xi = UVY$.

O processo de obtenção de um modelo de aplicação do operador de diferenças no tempo é desenvolvido em [Ertekin, Abou-Kassem e King \(2001\)](#), e envolve sucessivas expansões dos termos contidos na função ξ a ser tratada. O modelo final da equação que representa a expansão conservativa é dado por

$$\Delta_t (UVY) = (VY)^n \Delta_t U + U^{n+1} (Y)^n \Delta_t V + (UV)^{n+1} \Delta_t Y,$$

que se assemelha à aplicação da regra do produto em uma diferenciação no tempo de um produto de funções.

Então, da integração no tempo e no espaço dos termos de acúmulo das Equações (8), (9) e (11), respectivamente, tem-se ([ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001](#))

$$\begin{aligned} \int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi(1-S_w)}{B_w} \right] dt dV &\approx V_b \left[(1-S_w)^n \left(\frac{c_\phi \phi^0}{B_o^n} + \frac{\phi^{n+1} c_n}{B_o^0} \right) \right] (p_o^{n+1} - p_o^n) \\ &- V_b \left[(1-S_w)^n \left(\frac{c_{\phi T} \phi^0}{B_o^n} + \frac{\phi^{n+1} c_{oT}}{B_o^0} \right) \right] (T^{n+1} - T^n) \\ &- V_b \left(\frac{\phi}{B_o} \right)^{n+1} (S_w^{n+1} - S_w^n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) dt dV &\approx V_b \left[\left(\frac{S_w}{B_w} \right)^n c_\phi \phi^0 + \frac{\phi^{n+1} c_w S_w^n}{B_w^0} \right] (p_o^{n+1} - p_o^n) \\
&- V_b \left[\left(\frac{S_w}{B_w} \right)^n c_{\phi T} \phi^0 + \frac{\phi^{n+1} c_w T S_w^n}{B_w^0} \right] (T^{n+1} - T^n) \\
&+ V_b \left(\frac{\phi}{B_w} \right)^{n+1} (S_w^{n+1} - S_w^n),
\end{aligned}$$

$$\int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p T)] dt dV \approx V_b [(\rho c_p T)^{n+1} - (\rho c_p T)^n].$$

Finalizando, tendo em vista os resultados obtidos, a equação resultante do processo de discretização da fase não-molhante é escrita na forma compacta

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{d \in \Omega_{face}} \mathbb{T}_{o_d} + M_{o_P} \right) p_{o_P}^{n+1} - (\mathbb{T}_{o_P})_{Tot}^{n+1} - I_{ograv} &= M_{o_P} p_{o_P}^n - M_{o_T} (T^{n+1} - T^n) \\
&- (S_w^{n+1} - S_w^n) M_{o_S} + q_{sc_o}^{n+1}
\end{aligned} \tag{16}$$

onde Ω_{face} se refere ao conjunto das faces do volume finito, o termo $(\mathbb{T}_{o_P})_{Tot}^{n+1}$ é dado por

$$\begin{aligned}
(\mathbb{T}_{o_P})_{Tot}^{n+1} &= (\mathbb{T}_{o_e} p_{o_E})^{n+1} + (\mathbb{T}_{o_w} p_{o_W})^{n+1} + (\mathbb{T}_{o_s} p_{o_S})^{n+1} \\
&+ (\mathbb{T}_{o_n} p_{o_N})^{n+1} + (\mathbb{T}_{o_b} p_{o_B})^{n+1} + (\mathbb{T}_{o_a} p_{o_A})^{n+1},
\end{aligned}$$

e aquele associado aos efeitos da gravidade é dado por

$$I_{ograv} = \mathbb{T}_{o_A}^{n+1} \gamma_{o_A}^{n+1} (Z_P - Z_A) + \mathbb{T}_{o_B}^{n+1} \gamma_{o_B}^{n+1} (Z_B - Z_P).$$

Os parâmetros provenientes do termo de acúmulo são

$$M_{o_P} = \frac{V_b}{\Delta t} \left[(1 - S_w)^n \left(\frac{c_\phi \phi^0}{B_o^n} + \frac{\phi^{n+1} c_n}{B_o^0} \right) \right],$$

$$M_{oT} = -\frac{V_b}{\Delta t} \left[(1 - S_w)^n \left(\frac{c_{\phi T} \phi^0}{B_o^n} + \frac{\phi^{n+1} c_{oT}}{B_o^0} \right) \right],$$

e

$$M_{oS} = -\frac{V_b}{\Delta t} \left(\frac{\phi}{B_o} \right)^{n+1}.$$

Na sequência, apresenta-se a forma final discretizada da equação governante escrita em termos da saturação da fase molhante

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{d \in \Omega_{face}} \mathbb{T}_{w_d} \frac{dp_{c_d}}{dS_{w_d}} - M_{wP} \right)^{n+1} S_{wP}^{n+1} - \left(\sum_{\substack{d \in \Omega_{face} \\ D \in \Omega_{vizinho}}} S_{w_D} \mathbb{T}_{w_d} \frac{dp_{c_d}}{dS_{w_d}} \right)^{n+1} = M_{wS} S_w^n + q_{scw}^{n+1} \\ & - \left(\sum_{d \in \Omega_{face}} \mathbb{T}_{w_d} \right)^{n+1} p_{oP}^{n+1} + \left(\sum_{\substack{d \in \Omega_{face} \\ D \in \Omega_{vizinho}}} \mathbb{T}_{w_d} p_{oD} \right)^{n+1} - (T^{n+1} - T^n) M_{wT} \\ & - (p_o^{n+1} - p_o^n) M_{wS} + I_{wgrav}, \end{aligned} \quad (17)$$

onde $\sum_{\substack{d \in \Omega_{face} \\ D \in \Omega_{vizinho}}}$ se refere ao somatório em cada face d e, ao mesmo tempo, em cada célula vizinha D , para uma mesma direção espacial. Além disso, o termo da gravidade é dado por

$$I_{wgrav} = \mathbb{T}_{w_b}^{n+1} \gamma_{w_b}^{n+1} (Z_B - Z_P) + \mathbb{T}_{w_a}^{n+1} \gamma_{w_a}^{n+1} (Z_A - Z_P),$$

e os demais parâmetros são

$$M_{wP} = \frac{V_b}{\Delta t} \left[S_w^n \left(\frac{c_{\phi} \phi^0}{B_w^n} + \frac{\phi^{n+1} c_w}{B_w^0} \right) \right],$$

$$M_{wT} = -\frac{V_b}{\Delta t} \left[S_w^n \left(\frac{c_{\phi T} \phi^0}{B_w^n} + \frac{\phi^{n+1} c_{wT}}{B_w^0} \right) \right],$$

e

$$M_{w_S} = \frac{V_b}{\Delta t} \left(\frac{\phi}{B_w} \right)^{n+1}.$$

Por outro lado, a equação resultante do processo de discretização da equação de energia é

$$\begin{aligned} & \left[(\rho c_p) \frac{V_b}{\Delta t} + \Gamma^* \right]^{n+1} T_P^{n+1} - \Gamma_e^{n+1} T_E^{n+1} - \Gamma_w^{n+1} T_W^{n+1} - \Gamma_s^{n+1} T_S^{n+1} \\ & - \Gamma_n^{n+1} T_N^{n+1} - \Gamma_b^{n+1} T_B^{n+1} - \Gamma_a^{n+1} T_A^{n+1} = I_{advec}^{n+1} - I_{grav}^{n+1} + I_{fonte}^{n+1} + \frac{V_b}{\Delta t} (\rho c_p)^n T_P^n \end{aligned} \quad (18)$$

onde

$$\Gamma^* = \sum_{d \in \Omega_{face}} \Gamma_d, \quad \Gamma_d = \frac{A_d K_d}{\delta x_d}.$$

Ademais, os termos advectivo, de gravidade e de fonte são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} I_{advec}^{n+1} = & \left[\left(\sum_{d \in \Omega_{face}} \rho_{sc_w} h_{w_d} \mathbb{T}_{w_d} \right) p_{c_P} - \left(\sum_{d \in \Omega_{face}} \rho_{sc_o} h_{o_d} \mathbb{T}_{o_d} + \rho_{sc_w} h_{w_d} \mathbb{T}_{w_d} \right) p_{o_P} \right]^{n+1} \\ & + \left[\sum_{\substack{d \in \Omega_{face} \\ D \in \Omega_{vizinho}}} (\rho_{sc_o} h_{o_d} \mathbb{T}_{o_d} + \rho_{sc_w} h_{w_d} \mathbb{T}_{w_d}) p_{n_D} - \rho_{sc_w} h_{w_d} \mathbb{T}_{w_d} p_{c_P} \right]^{n+1}, \end{aligned}$$

$$I_{grav}^{n+1} = (\gamma_{n_b} \mathbb{T}_{n_b} \rho_{sc_n} + \gamma_{w_b} \mathbb{T}_{w_b} \rho_{sc_w})^{n+1} (Z_B - Z_P) + (\gamma_{n_a} \mathbb{T}_{n_a} \rho_{sc_n} + \gamma_{w_a} \mathbb{T}_{w_a} \rho_{sc_a})^{n+1} (Z_A - Z_P)$$

e

$$I_{fonte}^{n+1} = Q_H + (\rho_o h_o Q_{sc_o})^{n+1} + (\rho_w h_w Q_{sc_w})^{n+1}.$$

Assim sendo, conclui-se os processos de integração espacial e temporal preconizados pelo método dos volumes finitos. Ressalta-se que essas três equações não-lineares discretizadas estão acopladas, tendo em vista que as três variáveis dependentes, a pressão do óleo, a saturação da água e a temperatura média, aparecem em cada uma das delas.

2.2 Decomposição de operadores e linearização

O primeiro passo na estratégia de resolução estabelecida consiste na linearização das equações discretizadas. A linearização é realizada mediante o emprego do método de Picard (NICK et al., 2013), no qual os termos dependentes das variáveis primitivas são aproximados por

$$\mathbb{T}^{n+1} \approx \mathbb{T}^{n+1,v},$$

onde $\mathbb{T}^{n+1,v}$ representa, por exemplo, a transmissibilidade avaliada no tempo $n + 1$, mas no nível iterativo anterior v . Por outro lado, as variáveis dependentes são calculadas em $n + 1, v + 1$, onde $v + 1$ é o nível iterativo posterior. Dentro da estratégia de solução adotada, dois processos iterativos devem ser realizados, um processo externo associado ao método de Picard e um interno onde os sistemas linearizados de equações algébricas são resolvidos.

Em seguida, define-se o procedimento de resolução das três equações discretizadas. Escolheu-se utilizar uma decomposição de operadores (VENNEMO, 2016), de modo que as equações possam ser resolvidas sequencialmente, considerando os três subsistemas correspondentes a essas três equações. Essa separação garante uma maior flexibilidade na escolha de como cada um desses subsistemas pode ser resolvido (JIANG; TCHELEPI, 2019).

Os subsistemas são resolvidos seguindo uma ordem preestabelecida:

- a) primeiro, resolve-se o subsistema que fornecerá a pressão da fase não-molhante;
- b) na sequência, obtém-se a saturação da fase molhante;
- c) por último, determina-se a temperatura média do reservatório.

Agora, ao se analisar as equações resultantes do processo de discretização e de linearização, nota-se que a primeira equação contém as variáveis $p_o^{n+1,v+1}$, $S_w^{n+1,v+1}$ e $T^{n+1,v+1}$, ou seja, três incógnitas e uma única equação. Então, elimina-se $S_w^{n+1,v+1}$ nela, multiplicando-se a equação derivada da Equação (16) por $B_{nP}^{n+1,v}$ e multiplicando-se a equação derivada da Equação (16) por $B_{wP}^{n+1,v}$ e adicionando-se ambas as equações. Como

resultado, tem-se uma equação cuja única variável dependente é $p_n^{n+1,v+1}$ e ela é resolvida conhecendo-se os valores de $S_w^{n+1,v}$ e $T^{n+1,v}$ da iteração anterior.

No caso da segunda equação, ou seja, o segundo subsistema de equações, precisa-se calcular $S_w^{n+1,v+1}$ sabendo-se que já é conhecido o valor de $p_o^{n+1,v+1}$ a partir da resolução do primeiro subsistema e que os valores de temperatura que devem ser utilizados são aqueles oriundos da iteração precedente, $T^{n+1,v}$.

Completando o ciclo, o último subsistema pode ser resolvido utilizando os valores atualizados de $p_n^{n+1,v+1}$ e $S_w^{n+1,v+1}$, a fim de se obter $T^{n+1,v+1}$.

Após uma verificação da convergência, se mais resoluções dos subsistemas forem necessárias, recomeça-se os cálculos com $p_n^{n+1,v+1}$, $S_w^{n+1,v+1}$ e $T^{n+1,v+1}$ a fim de se determinar os coeficientes e os termos das equações algébricas, com o objetivo de se calcular $p_n^{n+1,v+2}$, $S_w^{n+1,v+2}$ e $T^{n+1,v+2}$. Na sequência de iterações v , o processo iterativo, para um passo de tempo, é interrompido quando a pressão, a saturação e a temperatura convergirem, tomando-se por base as tolerâncias numéricas estabelecidas para cada uma delas. Posteriormente, verifica-se se houve convergência do processo iterativo externo, método de Picard, e avança-se para o próximo nível de tempo. Todo esse processo resumido pode ser visto no fluxograma contido na Figura 4.

Então, recapitulando, o processo de linearização e a quebra de operadores resultou na resolução sequencial dos subsistemas representados pela Equação (16), obtenção dos valores da pressão da fase não-molhante, pela Equação (17), determinação da saturação da fase molhante, e pela Equação (18), cálculo da temperatura média do reservatório.

No intuito de se introduzir o método iterativo de resolução dos subsistemas, eles são reescritos na forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (19)$$

onde \mathbf{A} é a matriz dos coeficientes, \mathbf{x} representa o vetor de incógnitas e \mathbf{b} é o vetor contendo os termos conhecidos. Portanto, para cada um dos subsistemas tem-se respectivamente para a determinação da pressão do óleo, da saturação da água e da temperatura média:

$$\begin{aligned} & A_{oP} p_{oP}^{n+1,v+1} - A_{oE} p_{oE}^{n+1,v+1} - A_{oW} p_{oW}^{n+1,v+1} - A_{oS} p_{oS}^{n+1,v+1} \\ & - A_{oN} p_{oN}^{n+1,v+1} - A_{oB} p_{oB}^{n+1,v+1} - A_{oA} p_{oA}^{n+1,v+1} = B_o, \end{aligned} \quad (20)$$

$$A_{wP} S_{wP}^{n+1,v+1} - A_{wE} S_{wE}^{n+1,v+1} - A_{wW} S_{wW}^{n+1,v+1} - A_{wS} S_{wS}^{n+1,v+1}$$

$$-A_{w_N} S_{w_N}^{n+1,v+1} - A_{w_B} S_{w_B}^{n+1,v+1} - A_{w_P} S_{w_P}^{n+1,v+1} = B_w,$$

$$A_{T_P} T_P^{n+1,v+1} - A_{T_E} T_E^{n+1,v+1} - A_{T_W} T_W^{n+1,v+1} - A_{T_S} T_S^{n+1,v+1}$$

$$-A_{T_N} T_N^{n+1,v+1} - A_{T_B} T_B^{n+1,v+1} - A_{T_A} T_A^{n+1,v+1} = B_T.$$

Cabe salientar que quando resolvido o subsistema (20) serão encontrados os valores da pressão no reservatório e no poço produtor.

2.3 Métodos de resolução de sistemas lineares

Conhecidos os três subsistemas, faz-se necessário um método de resolução de sistemas algébricos lineares, Equação (19), cuja matriz dos coeficientes pode ser esparsa e possuir uma grande dimensão. A solução desses sistemas demanda o maior esforço no que diz respeito ao processamento computacional (ERTEKIN; ABOU-KASSEM; KING, 2001; WERNECK et al., 2019).

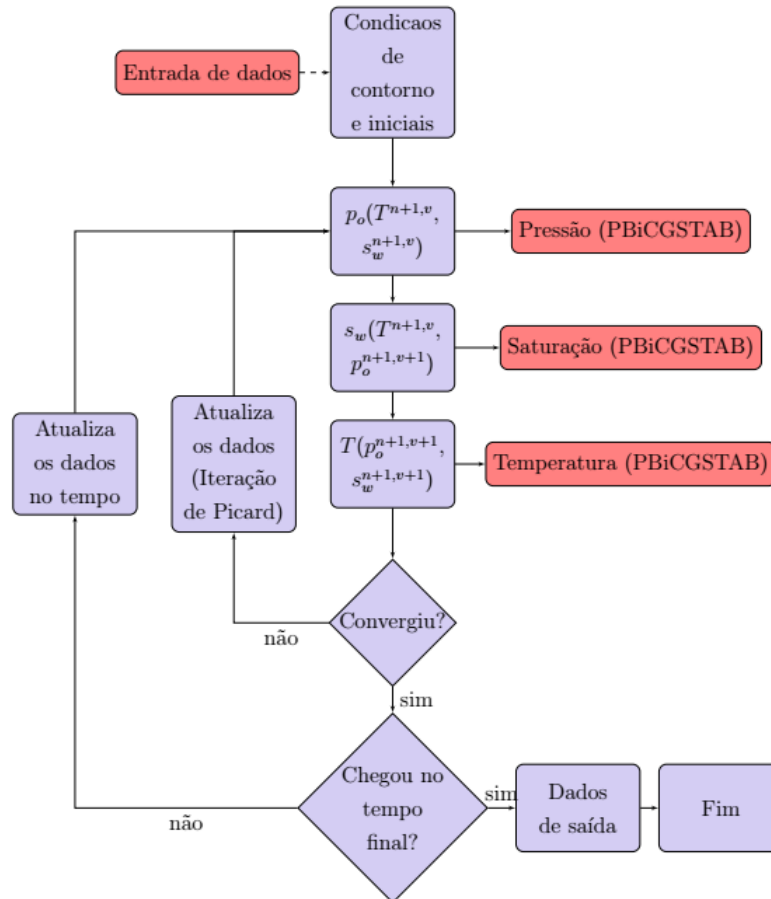
Neste trabalho, em função da estratégia de resolução segregada das equações discretizadas, resolveu-se empregar o Método dos Gradientes Conjugados Precondicionado (CHEN; HUAN; MA, 2006) na resolução do subsistema linearizado que fornecerá a pressão, enquanto que o Método do Gradiente Biconjugado Estabilizado Precondicionado (SAAD, 2003) é empregado para se obter a saturação e a temperatura média.

Como visto em Chen, Huan e Ma (2006), o método Método dos Gradientes Conjugados foi introduzido por Hestenes e Stiefel em 1952 como um método direto. Porém, esse método tem sido usado como um algoritmo iterativo. Ele pode ser empregado quando a matriz dos coeficientes for simétrica e positiva definida. Por outro lado, o Método dos Gradientes Biconjugados Estabilizado também é considerado um método da família de algoritmos do espaço de Krylov definidos pelo processo de biortogonalização Chen, Huan e Ma (2006).

De modo a se melhorar o desempenho de algoritmos iterativos utiliza-se preconditionadores. Segundo Chen, Huan e Ma (2006), o preconditionamento foi primeiramente utilizado por Turing para reduzir os erros de arredondamento quando do uso de algoritmos diretos. Então, trata-se de uma técnica utilizada para se acelerar a convergência do processo iterativo, mediante a mudança o condicionamento da matriz dos coeficientes. Em função dessa vantagem, utiliza-se preconditionadores construídos a partir do processo de Fatoração LU incompleto (FREITAS, 2017).

Então, tendo estabelecido os diferentes métodos numéricos que foram utilizados, mostra-se, na Figura um fluxograma que sintetiza os passos seguidos durante uma simulação.

Figura 4 - Fluxograma



Fonte: O autor, 2022.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo tem como finalidade apresentar e discutir os resultados obtidos, que são os valores calculados para as variáveis dependentes pressão do óleo, saturação da água e temperatura média do reservatório. Antes de se iniciar a discussão propriamente dita, primeiramente, faz-se uma validação dos métodos numéricos utilizados. Nesse processo, tanto a formulação numérica utilizada para a resolução das equações dos balanços de massa e *momentum*, empregadas na obtenção da pressão e da saturação, quanto a usada no caso do balanço de energia (determinação da temperatura média do meio) são avaliadas. Vale ressaltar que as equações são resolvidas separadamente e sequencialmente. Assim sendo, é possível pensar em problemas específicos para validá-las separadamente, o que será fundamental para essa etapa inicial. Os valores de pressão e saturação são verificados mediante a sua comparação com os valores conhecidos da solução analítica do problema de Buckley-Leverett. Já no caso da temperatura, essa validação é feita via a confrontação dos valores numéricos com aqueles obtidos com a solução analítica de um problema de transferência de calor por advecção e condução. Por último, considera-se um problema de injeção de líquido aquecido em um meio poroso saturado, para o qual é conhecida a solução analítica sob certas hipóteses.

Tendo sido concluída a validação do simulador, inicia-se a obtenção dos resultados inerentes a este trabalho. Para tanto, em um primeiro momento, o escoamento bifásico tem lugar em um reservatório cuja geometria é do tipo *Slab* e estuda-se a evolução temporal e espacial da pressão, saturação e pressão. De maneira geral, os problemas tratados serão simples e servirão para que seja feita uma análise de sensibilidade, que mostrará quais são os efeitos resultantes da variação de diferentes parâmetros sabidamente importantes para o escoamento bifásico não-isotérmico em um reservatório.

Prosseguindo, passa-se ao caso do escoamento bifásico não-isotérmico na presença de poços injetor e produtor e um aquecedor estático, envolvendo a injeção de água aquecida em um reservatório tridimensional e considerando um arranjo do tipo *Five-spot*.

O simulador desenvolvido neste trabalho, conforme já mencionado, teve como antecedentes os códigos elaborados para a resolução do escoamento bifásico isotérmico e do escoamento monofásico não-isotérmico. As codificações foram realizadas em linguagem C padrão usando a IDE (*Integrated Development Enviroment*) ECLIPSE e o sistema de controle de versões GIT.

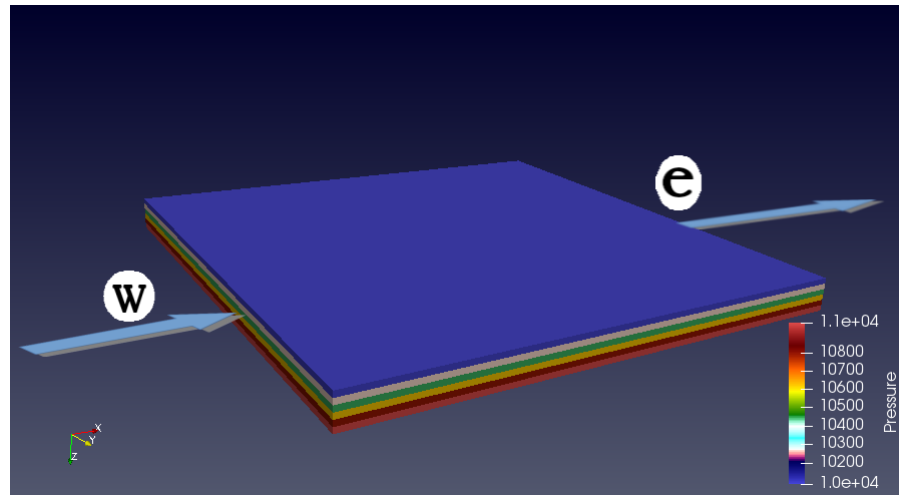
3.1 Validação numérica

Inicia-se a validação dos resultados numéricos considerando a resolução do problema de Buckley-Leverett, que aborda o escoamento bifásico isotérmico de fluidos incompressíveis, não miscíveis, sem os efeitos de capilaridade, em um meio poroso homogêneo. Na sequência, mostra-se os valores numéricos calculados para os problemas de transferência de calor tridimensional e para o escoamento bifásico unidimensional não-isotérmico.

3.1.1 O problema de Buckley-Leverett

Utiliza-se uma geometria do tipo *Slab* para representar o reservatório, no qual há injeção de água na fronteira w e produção de água e óleo na fronteira e . Isso é feito estabelecendo condições de Neumann para a pressão em w e condição de Dirichlet em e , além de condições de fluxo nulo nas outras duas fronteiras, conforme pode ser visto na Figura 5.

Figura 5 - Modelo de reservatório



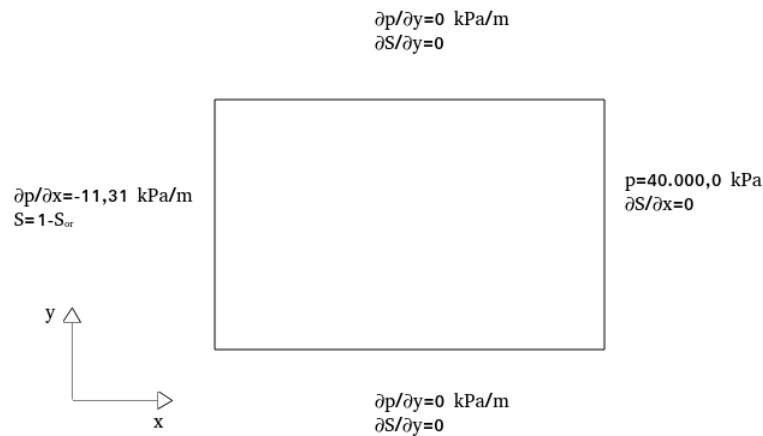
Nota: Geometria do tipo Slab para o escoamento bifásico na direção x .

Fonte: O autor, 2022.

Tomou-se por base o problema de Buckley-Leverett tratado em Freitas (2017). Portanto, faz-se uma comparação entre as soluções numérica e analítica (WU, 2016). Para tanto, utiliza-se um reservatório de comprimento igual a 609,6 m, que possui uma saturação da fase molhante inicial $S_{w_0}=0,2$, uma seção transversal $L_y=304,8$ m e $L_z=30,48$ m.

Além disso, na fronteira esquerda, há a injeção de água que é imposto um gradiente de pressão, $\partial p/\partial x = -11,31$ kPa/m, e uma saturação prescrita de 1,0. Já na fronteira direita, tem-se uma pressão prescrita de 40.000 kPa. A Figura 6 contém esquematicamente as informações das condições de contorno, para uma representação da vista superior do reservatório. Os demais parâmetros utilizados nesse caso podem ser encontrados na Tabela 2.

Figura 6 - Condições de contorno



Nota: Geometria do tipo Slab e suas condições de contorno para o escoamento bifásico na direção x .

Fonte: O autor, 2022.

Os resultados dessa comparação podem ser vistos nas Figuras 7 e 8, campos de pressão e saturação, respectivamente, e foram utilizadas três malhas computacionais distintas e os valores são mostrados para três diferentes tempos: 800, 1600 e 2400 dias. Como pode ser observado na Figura 7, os melhores resultados são obtidos com as malhas mais refinadas. Além disso, é possível afirmar que os valores numéricos convergem para os valores exatos, o que também pode ser reiterado pelos resultados obtidos para o erro percentual médio absoluto para pressão e para saturação nas Tabelas 3 e 4, respectivamente. Nessas duas tabelas são mostrados os erros absolutos percentuais médios para os tempos $t_f = 800, 1600$ e 2400 dias e uma malha com número de células em x igual a 125, 250 e 500. A equação que descreve o valor do erro absoluto médio é dada por

$$M = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{A_t - N_t}{A_t} \right|,$$

onde n é o número de pontos analisados, A_t é o valor analítico e N_t é o valor numérico.

Então, quanto mais refinada for a malha, mais próximos os resultados numéricos de pressão e saturação estarão dos resultados analíticos. Tendo em vista a convergência numérica e a redução do tempo de simulação, o autor decidiu utilizar a malha com 250 volumes finitos, na direção x , para as simulações futuras com a geometria do tipo *Slab*.

Tabela 2 - Parâmetros para o problema de Buckley-Leverett

Parâmetro	Valor	Unidade
c_{pr}	25,72	$J.K^{-1}.kg^{-1}$
$ew = eow$	4	-
$k_{ro_{max}}$	0,9	-
$k_{rw_{max}}$	0,4	-
$k_x = k_y$	$2,96 \cdot 10^{-2}$	μm^2
k_z	$7,4 \cdot 10^{-3}$	μm^2
p_{ref}	$4,0 \cdot 10^4$	kPa
S_{iw}	0,15	-
S_{orw}	0,15	-
S_{w0}	0,2	-
T_{ref}	338,7	K
μ_o	$1,69 \cdot 10^{-3}$	Pa.s
μ_w	$0,69 \cdot 10^{-3}$	Pa.s
ρ_w	999,0	kg/m^3

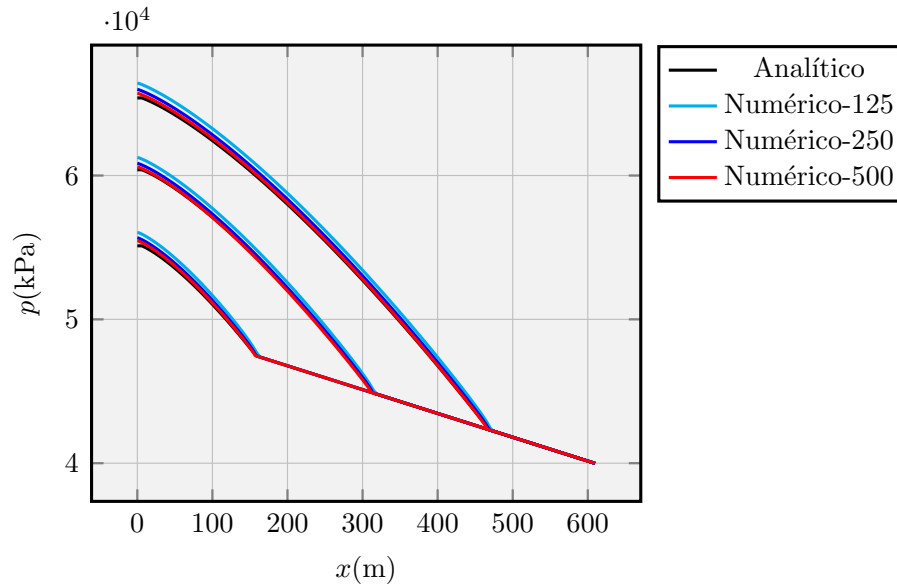
Fonte: O autor, 2022.

Além disso, na Figura 7 é possível perceber que há uma evidente elevação na pressão na região de injeção de água, seguido de uma mudança de perfil exatamente no ponto onde a frente de avanço se encontra, o que é notório para os três instantes de tempo considerados. Essa mudança repentina se deve à variação da saturação que, por sua vez, tem impacto direto na permeabilidade relativa, que irá interferir na distribuição de pressão.

Já na Figura 8, as curvas de saturação da fase molhante obtidas seguem os mesmos padrões que as analíticas para os três tempos. A saturação da fase molhante apresenta um valor elevado na fronteira esquerda, onde ela é mantida constante, e o valor vai decrescendo à medida que se aproxima da fronteira direita. Verifica-se, também, que há uma brusca redução do seu valor, na chamada frente de avanço. Ela mostra até onde a água injetada avançou no meio poroso, sabendo que à direita existe uma quantidade residual de água enquanto que à esquerda uma quantidade residual de óleo, que não foi varrido, permanece

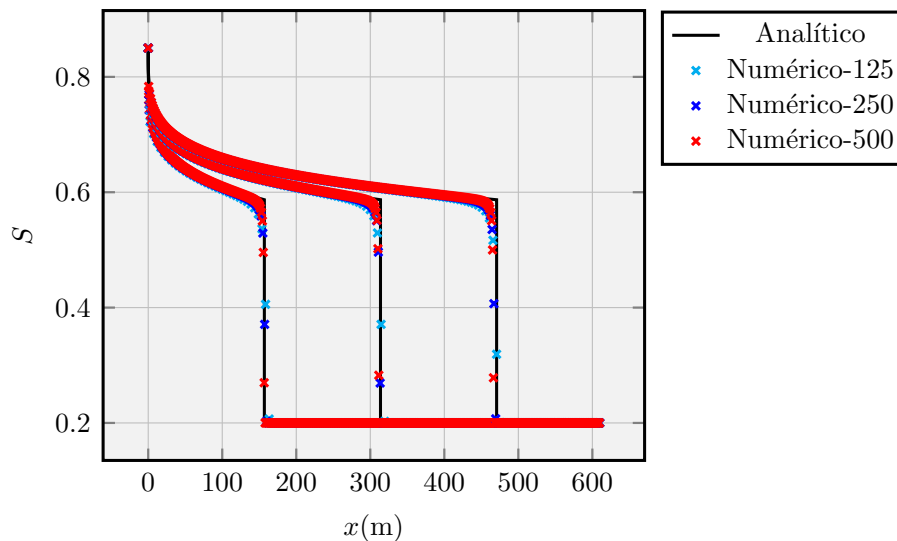
no reservatório.

Figura 7 - Distribuição da pressão, na direção x , considerando diferentes malhas e tempos



Fonte: O autor, 2022.

Figura 8 - Distribuição da saturação, na direção x , considerando diferentes malhas e tempos



Fonte: O autor, 2022.

A partir dos resultados apresentados, julga-se que os valores numéricos (pressão e saturação) foram suficientemente acurados para o problema em questão, reproduzindo corretamente o padrão de comportamento. Portanto, a questão agora é a de saber se a

Tabela 3 - Erro percentual absoluto médio para pressão

nx	Erro M		
	$t_f=800$ dias	$t_f=1600$ dias	$t_f=2400$ dias
125	$5,134 \cdot 10^{-3}$	$9,144 \cdot 10^{-3}$	$1,264 \cdot 10^{-2}$
250	$2,186 \cdot 10^{-3}$	$3,677 \cdot 10^{-3}$	$6,534 \cdot 10^{-3}$
500	$1.042 \cdot 10^{-3}$	$2,025 \cdot 10^{-3}$	$2,144 \cdot 10^{-3}$

Tabela 4 - Erro percentual absoluto médio para saturação

nx	Erro M		
	$t_f=800$ dias	$t_f=1600$ dias	$t_f=2400$ dias
125	$4,125 \cdot 10^{-3}$	$7,642 \cdot 10^{-3}$	$9,142 \cdot 10^{-3}$
250	$1,942 \cdot 10^{-3}$	$2,665 \cdot 10^{-3}$	$4,298 \cdot 10^{-3}$
500	$9.360 \cdot 10^{-4}$	$1,782 \cdot 10^{-3}$	$1,036 \cdot 10^{-3}$

modelagem físico-matemática e a implementação numérica são capazes de gerar resultados acurados quando da resolução de um problema envolvendo o transporte de energia.

3.1.2 Transferência de calor por advecção e difusão

Então, de modo a prosseguir com o processo de validação, utiliza-se o procedimento numérico na resolução de um problema de transferência de calor tridimensional em um domínio com uma geometria correspondendo a um paralelepípedo. Este problema, empregado na comparação entre os valores numérico e analítico, também foi considerado com a mesma finalidade pelos autores [Campos e Romão \(2014\)](#) e [Dehghan \(2004\)](#). Trata-se de um problema adimensional de transferência de calor por advecção e difusão e a distribuição de temperatura é governada pela equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

onde u , v e w são as componentes do vetor velocidade, D_x , D_y e D_z são os coeficientes de difusão nas direções x , y e z , respectivamente, e o domínio é dado por $0 \leq x, y, z \leq 2$. Além disso, as condições de contorno e iniciais são estabelecidas a partir da própria solução analítica,

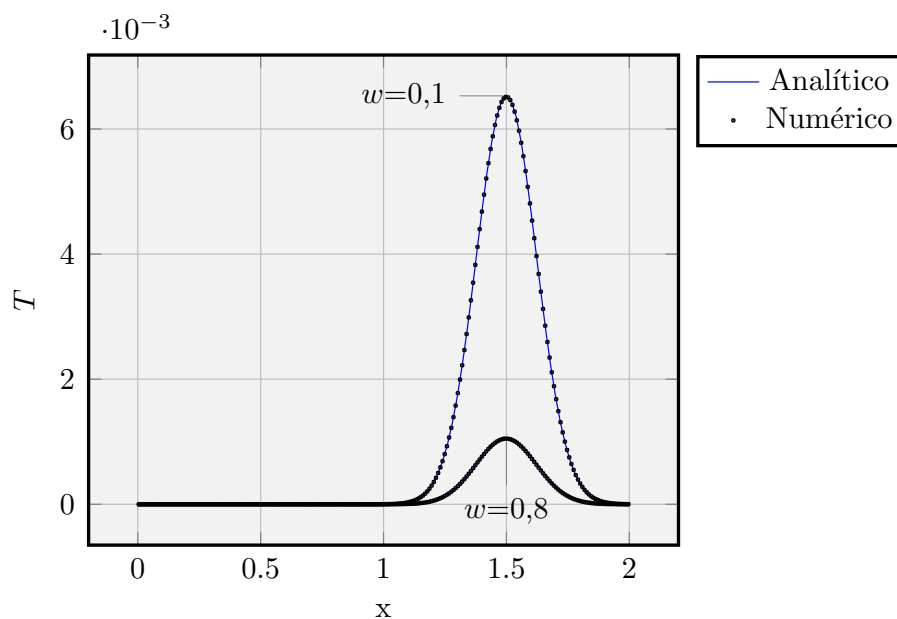
$$T(x, y, z, t) = (4t + 1)^{-\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{(x - ut - 0,5)^2}{D_x(4t + 1)} - \frac{(y - vt - 0,5)^2}{D_y(4t + 1)} - \frac{(z - wt - 0,5)^2}{D_z(4t + 1)} \right]$$

Com a finalidade de se comparar os resultados analítico e numérico, determinou-se a solução para o tempo $t=1,25$. Dois problemas básicos foram considerados, o primeiro assume que $u = v = w = 0,8$ e $D_x = D_y = D_z = 0,01$. Por outro lado, o segundo considera $u = v = 0,8$, $w = 0,1$ e $D_x = D_y = D_z = 0,01$. Ambos os problemas foram utilizados na validação do módulo do código dedicado à determinação da temperatura.

Os resultados gerados para a temperatura podem ser vistos na Figura 9, obtidos com uma malha com $n_x=225$, $n_y=225$ e $n_z=225$, um $\Delta t=0,0001$ e para um tempo final $t=1,25$. Nessa figura, atesta-se que os resultados analíticos e numéricos estão praticamente sobrepostos, de modo que pode-se dizer que a metodologia numérica foi eficaz para esse tipo de problema.

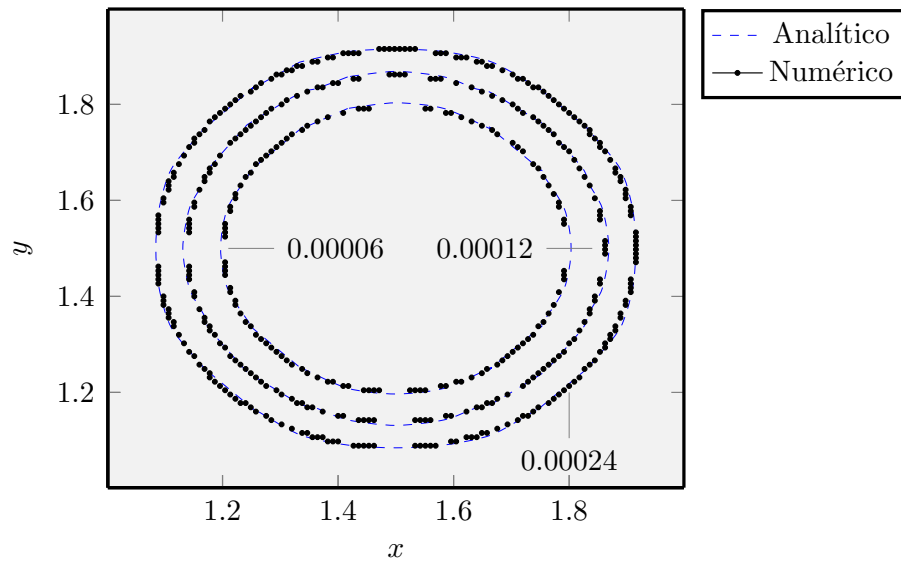
Além dos perfis de temperatura já apresentados, criou-se também os gráficos com as respectivas curvas de nível para os resultados analíticos e numéricos, Figuras 10 e 11. São mostrados somente três diferentes níveis de temperatura (0,0006, 0,0012 e 0,0024) tanto para $w=0,1$ quanto para $w=0,8$. Uma vez mais, verifica-se que os resultados numéricos reproduziram acuradamente a solução exata.

Figura 9 - Valor da temperatura ao longo do domínio $x=y$ e $z=1,0$, para o tempo $t=1,25$, $w=0,8$ e $w=0,1$



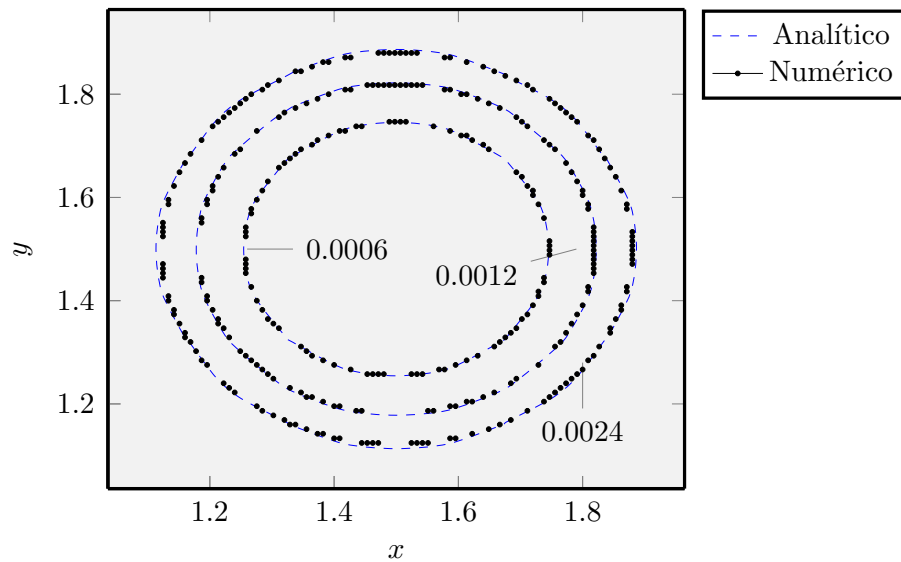
Fonte: O autor, 2022.

Figura 10 - Curvas de nível ao longo de $x=y$ e $z=1,0$, para $t=1,25$ e $w=0,1$



Fonte: O autor, 2022.

Figura 11 - Curvas de nível ao longo de $x=y$ e $z=1,0$, para $t=1,25$ e $w=0,8$



Fonte: O autor, 2022.

Apesar dos resultados apresentados nas Figuras 9, 10 e 11 estarem em conformidade com os valores analíticos esperados, decidiu-se investigar qual seria a faixa de erro (baseado na norma L_2) para diferentes malhas computacionais e valores do incremento de tempo. Assim, realizou-se um estudo empregando apenas dois passos de tempo: $\Delta t=0,001$ e $\Delta t=0,0001$, e três malhas computacionais: $n_c=n_x=n_y=n_z=25$, $n_c=75$ e $n_c=225$, onde n_c

representa o número total de volumes finitos segundo as três direções espaciais. Findas as simulações, as Tabelas 5 e 6 contêm os erros médios quadráticos para passos de tempo $\Delta t=0,001$ e $\Delta t=0,0001$, respectivamente. Por último, a Tabela 7 apresenta os valores do erro para uma malha com $n_c=225$ e três distintos incrementos de tempo. De modo satisfatório, verifica-se que os valores dos erros variam da ordem de 10^{-4} a 10^{-5} .

Tabela 5 - Erro quadrático para $\Delta t=0,001$

n_c	Erro L_2	
	$w=0,1$	$w=0,8$
25	$5,702 \cdot 10^{-4}$	$7,055 \cdot 10^{-4}$
75	$1,097 \cdot 10^{-4}$	$1,545 \cdot 10^{-4}$
225	$9,308 \cdot 10^{-5}$	$1,359 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6 - Erro quadrático para $\Delta t=0,0001$

n_c	Erro L_2	
	$w=0,1$	$w=0,8$
25	$5,448 \cdot 10^{-4}$	$6,692 \cdot 10^{-4}$
75	$5,023 \cdot 10^{-5}$	$6,182 \cdot 10^{-5}$
225	$1,066 \cdot 10^{-5}$	$1,533 \cdot 10^{-5}$

Tabela 7 - Erro quadrático para diferentes valores de Δt , considerando $n_c=225$.

Δt	Erro L_2	
	$w=0.1$	$w=0.8$
10^{-4}	$1,066 \cdot 10^{-5}$	$1,533 \cdot 10^{-5}$
10^{-3}	$9,308 \cdot 10^{-5}$	$1,359 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	$7,280 \cdot 10^{-4}$	$9,679 \cdot 10^{-4}$

3.1.3 Escoamento bifásico unidimensional não-isotérmico

De modo a verificar novamente a acurácia dos resultados para o escoamento bifásico, volta-se agora para o problema do escoamento unidimensional não-isotérmico. Para tanto, tomou-se por base a solução analítica de um problema adimensional simplificado (MOYLES, 2011). Nesse trabalho, é feito um estudo do processo de remediação do solo, que consiste na injeção de água líquida em um meio poroso com a finalidade de retirar o óleo

que se encontra no solo. Os fluidos são imiscíveis e não é levado em consideração o efeito da capilaridade sobre o escoamento.

Inicia-se com a injeção da água aquecida e autor considera que, além de desprezar os efeitos da pressão capilar, os fluidos possuem aproximadamente a mesma capacidade térmica e que o transporte de energia por difusão pode ser negligenciado. Portanto, após serem introduzidas as simplificações (MOYLES, 2011)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

sujeita a uma condição inicial do tipo Riemann

$$T(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Trata-se de uma equação hiperbólica, a equação de advecção, e sabe-se que a solução exata representa a propagação do perfil inicial sem deformação para a direita (LEVEQUE, 2002), visto que a velocidade de propagação é unitária e positiva,

$$T(x, t) = \begin{cases} 1, & x < t, \\ 0, & x > t, \end{cases}$$

que apresenta como desafio a correta captura da descontinuidade, dependendo do método numérico utilizado.

Então, a solução da temperatura é uma descontinuidade que avança pela região porosa. É importante salientar que o escoamento é influenciado pela variação da viscosidade, visto que ela é uma propriedade dependente da temperatura

$$\mu_o(T) = (1 - \delta) \exp(T - 1) + \delta,$$

onde μ_o é a viscosidade da fase não-molhante e δ é a relação entre as viscosidades da fase molhante e não-molhante, que para o caso em questão vale 1/523. A viscosidade da fase molhante é assumida como sendo igual a 1.

Para a determinação da saturação, deve-se considerar o estabelecimento de duas regiões separadas pela interface de descontinuidade da temperatura, uma à esquerda (maior temperatura) e outra à direita (menor temperatura)

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < t, \quad (21)$$

para a primeira região, subscripto 1, e

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad t < x < \infty, \quad (22)$$

para a segunda região, subscripto 2, e elas devem ser resolvidas considerando a seguinte condição inicial

$$s(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Nas Equações (24) e (22), f_1 e f_2 representam as respectivas funções de fluxo que, para as hipóteses adotadas (MOYLES, 2011), são dadas por

$$f_1 = \frac{s^3}{s^3 + \delta(1-s)^3}, \quad x < t, \quad (23)$$

para a primeira região, e

$$f_2 = \frac{s^3}{s^3 + \delta \exp(1)(1-s)^3}, \quad x > t, \quad (24)$$

para a segunda região.

Moyles (2011) resolveu o problema descrito de forma analítica, via o método das características (LEVEQUE, 2002), e numérica. De posse desses resultados, gerou-se os gráficos de temperatura e saturação que serviram para que os resultados aqui obtidos pudessem ser comparados.

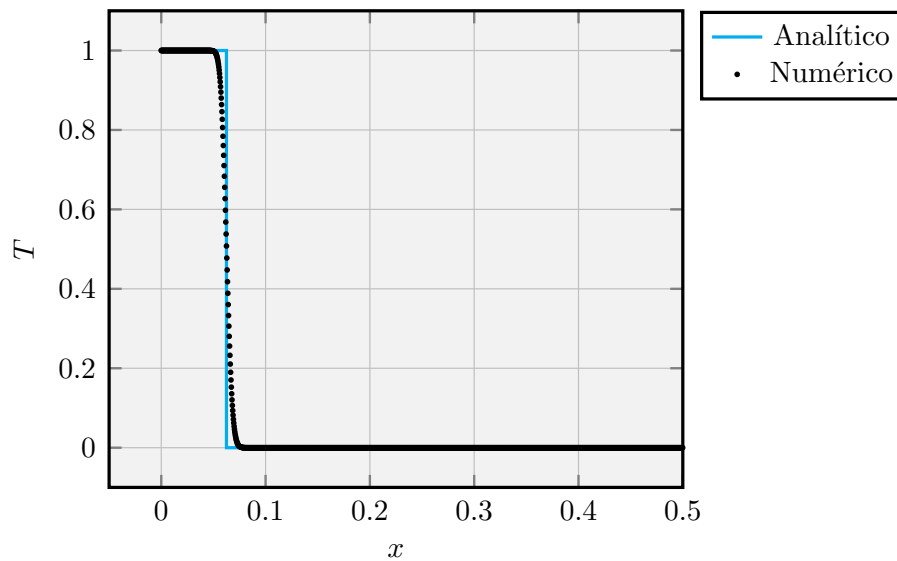
Os perfis de saturação e temperatura podem ser observados nas Figuras 12 e 13, respectivamente. Nas figuras também encontram-se representadas as soluções analíticas determinadas por Moyles (2011) para $t=0,0625$.

No caso da temperatura, a comparação do resultado numérico com o analítico mostra que o simulador capturou de forma correta o salto que ocorre em $x = t$, com um erro quadrático $L_2 = 1,027 \cdot 10^{-5}$. É verdade que é perceptível que há um efeito devido à difusão numérica, mas não estão presentes oscilações espúrias o que, segundo Pletcher, Tannehill e Anderson (2013), é muito desejável quando descontinuidades são calculadas

como parte da solução. Os valores da temperatura são independentes dos da saturação, mas os modificam uma vez que a viscosidade varia com a temperatura.

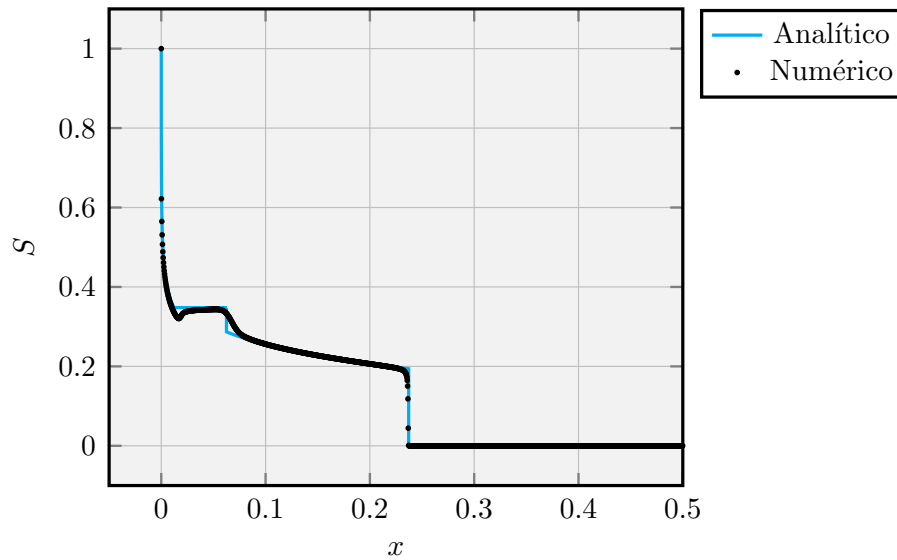
No que diz respeito ao perfil de saturação, é possível perceber que, de uma maneira geral, o mesmo comportamento é observado tanto para os valores numéricos quanto analíticos. De forma a quantificar a diferença entre o resultado analítico e o numérico, utilizou-se o erro quadrático $L_2 = 1,839 \cdot 10^{-5}$. Na primeira rarefação eles encontram-se sobrepostos. Todavia, ao final da mesma percebe-se que há um desvio e o resultado numérico encontra-se abaixo do previsto, de maneira semelhante ao que ocorre numericamente em [Moyles \(2011\)](#). Após a primeira rarefação, o valor da saturação permanece constante até o aparecimento do primeiro choque. No caso da solução analítica, pode-se ver claramente a descontinuidade, mas no caso da solução numérica ela é suavizada em função da difusão numérica. Vale salientar que o aparecimento do choque se deve à mudança de viscosidade do fluido, mostrando a existência do acoplamento das equações. Após a formação do primeiro choque, tem-se o início de uma segunda rarefação seguida do surgimento do último choque.

Figura 12 - Resultados numérico e analítico para a temperatura para $t=0,0625$



Fonte: O autor, 2022.

Figura 13 - Resultados numérico e analítico para a saturação para $t=0,0625$



Fonte: O autor, 2022.

3.2 Análise de sensibilidade

Dando continuidade, passa-se ao estudo do processo de recuperação térmica. Considera-se o problema da injeção de água aquecida em um reservatório com geometria do tipo *Slab*. Tal procedimento tem por finalidade varrer o óleo que ainda se encontra no reservatório, em direção à região de produção, além de reduzir a sua viscosidade, facilitando o escoamento dos fluidos nessa região. Esse é um caso fundamental para a análise de sensibilidade e possui uma relevância significativa no processo de recuperação de hidrocarbonetos, ressaltando a contribuição dos efeitos do aquecimento na recuperação, por exemplo, de óleo pesado.

De fato, esse tipo de estudo permite que se adquira conhecimentos sobre o que acontece em um processo complexo de injeção de água aquecida em um reservatório de óleo pesado. Portanto, com a finalidade de se compreendê-lo melhor, foca-se no entendimento da influência do efeito da variação:

- a) da temperatura de injeção da água;
- b) da tortuosidade e da dispersão hidrodinâmica;
- c) da permeabilidade;
- d) da viscosidade do óleo;
- e) da taxa de injeção de água;

f) do tempo de injeção de água.

Os aspectos listados serão utilizados como forma integrante do processo de análise de sensibilidade. O modelo padrão para as simulações contempla um reservatório contendo água e óleo, com uma geometria tridimensional na forma de um paralelepípedo, cujas dimensões são definidas pelos valores do seu comprimento, largura e altura, respectivamente L_x , L_y e L_z fornecidos na Tabela 8. As Tabelas 9, 10 e 11 contêm, ainda, diversos parâmetros utilizados nas simulações, caso padrão de simulação, além das propriedades dos fluidos e da rocha. A menos quando explicitamente mencionado, estes foram os valores usados em todas as simulações. Na Tabela 9, Δt_i é o passo de tempo inicial, Δt_f é o passo de tempo final e $F_{\Delta t}$ é a razão de aumento do incremento de tempo ($\Delta t^{n+1} = F_{\Delta t} \Delta t^n$). Além do mais, P_{init} indica a pressão inicial no topo do reservatório.

Tabela 8 - Parâmetros para o reservatório

Parâmetro	Valor	Unidade
$k_x = k_y$	$2,9 \cdot 10^{-15}$	μm^2
k_z	$7,35 \cdot 10^{-16}$	μm^2
L_x	609,6	m
L_y	304,0	m
L_z	30,4	m
$p _{x=L_x}$	$4,0 \cdot 10^4$	kPa
$\phi_{init} = \phi^0$	0,2	-
$\partial p / \partial x _{x=0}$	-11,31	kPa/m

Fonte: O autor, 2022.

Tabela 9 - Parâmetros para as simulações numéricas

Parâmetro	Valor	Unidade
$F_{\Delta t}$	1,1	-
n_x	250	-
n_y	50	-
n_z	5	-
p_0	$4,0 \cdot 10^4$	kPa
S_{w0}	0,2	-
$S_w _{x=0}$	1,0	-
$S_w _{x=L_x}$	0,2	-
t_{max}	7000	dia
T_{rini}	340	K
Δt_i	$1,0 \cdot 10^{-2}$	dia
Δt_f	10	dia

Fonte: O autor, 2022.

Tabela 10 - Parâmetros para os fluidos

Parâmetro	Valor	Unidade
a_n	$1,0 \cdot 10^{-5}$	Pa.s
b_n	444,4	K
B_o^0	1,13	-
B_w^0	1,022	-
c_o	$7,25 \cdot 10^{-7}$	kPa ⁻¹
c_{oT}	$1,2 \cdot 10^{-3}$	K ⁻¹
c_{p_o}	1700	J.K ⁻¹ .Kg ⁻¹
c_{p_w}	4128,18	J.K ⁻¹ .Kg ⁻¹
c_w	$2,61 \cdot 10^{-6}$	kPa ⁻¹
c_{wT}	$2,07 \cdot 10^{-5}$	K ⁻¹
p_{sc}	$4,0 \cdot 10^4$	kPa
κ_o	0,1225	W.m ⁻¹ .K ⁻¹
κ_w	0,6	W.m ⁻¹ .K ⁻¹
ρ_n^0	959	kg/m ³
ρ_w^0	1000	kg/m ³

Fonte: O autor, 2022.

Tabela 11 - Parâmetros para a rocha

Parâmetro	Valor	Unidade
c_{pr}	1200	$J.K^{-1}.Kg^{-1}$
c_{rT}	$1,8 \cdot 10^{-5}$	K^{-1}
c_{ϕ}	$5,8 \cdot 10^{-7}$	kPa^{-1}
d_p	60	m
epc	2	-
$ew = eow$	4	-
$k_{ro_{max}}$	0,9	-
$k_{rw_{max}}$	0,4	-
$p_{c_{max}}$	39,98	kPa
S_{iw}	0,15	-
S_{orw}	0,15	-
κ_r	4,5	$W.m^{-1}.K^{-1}$
ρ_r	2500	kg/m^3
$ \nabla G $	30	K/km

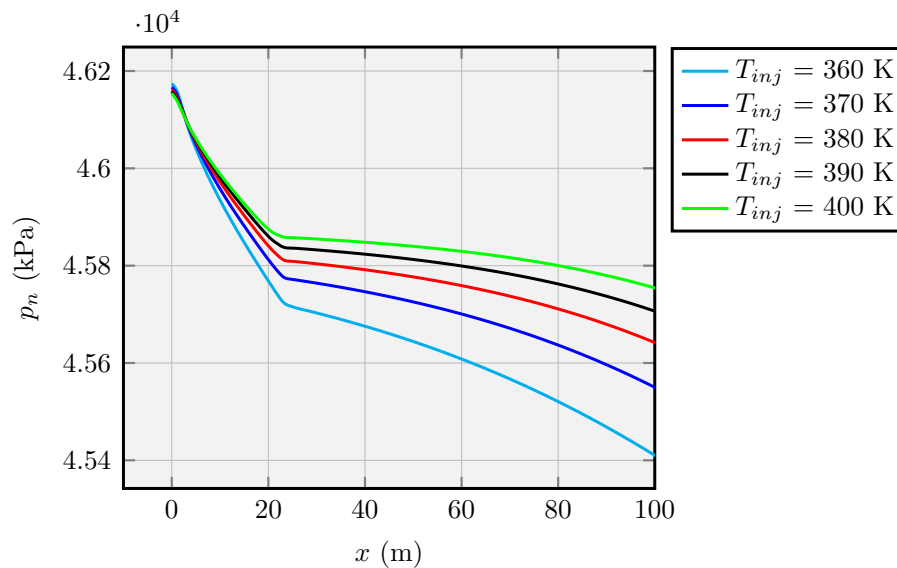
Fonte: O autor, 2022.

Os valores das temperaturas iniciais são definidos considerando a magnitude do gradiente geotérmico especificado ($|\nabla G|$) e, em consequência, a temperatura do reservatório aumentará à medida que a profundidade for maior. $T_{r_{ini}}$ é o valor da temperatura do reservatório no seu topo. Impõem-se também condições de contorno de fluxo nulo, mássico e térmico, nas fronteiras externas do reservatório aonde não ocorrem a injeção e nem a produção dos fluidos (caso padrão).

3.2.1 Efeito da variação da temperatura de injeção da água

Conforme já dito ao longo do texto, a elevação da temperatura do óleo pesado faz com que a sua viscosidade seja reduzida. Na Seção 3.1.3, foi visto que a mudança de temperatura provoca também a modificação da curva de saturação. Então, visando a verificar o comportamento da pressão, da saturação, da temperatura e da viscosidade, simulações foram empreendidas com diferentes valores da temperatura de injeção da água. A Figura 14 contém os valores da pressão ao longo do eixo x , obtidos injetando-se água a diferentes temperaturas e para um tempo final de produção de 7000 dias.

Figura 14 - Distribuição da pressão na direção x , considerando diferentes valores de T_{inj} e $t=7000$ dias



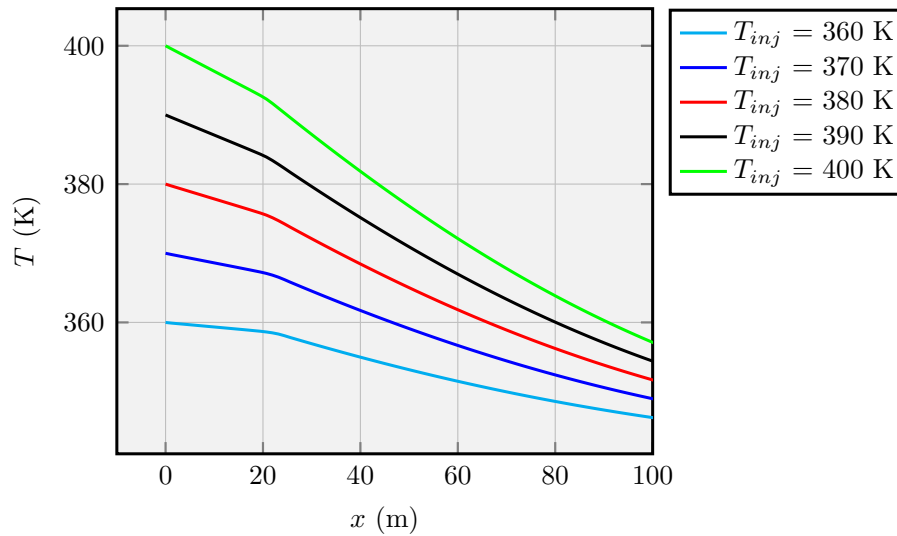
Fonte: O autor, 2022.

Na Figura 14 é possível perceber que quanto maior a temperatura de injeção maior é a pressão no reservatório. Isso acontece por conta da redução da viscosidade do óleo que permite que uma maior quantidade de água seja introduzida, o que faz com que a pressão do reservatório aumente. Vale salientar que na região de entrada, à esquerda, a pressão na face de injeção terá valores bem próximos, em consequência do mesmo valor da saturação, o que significa uma mesma permeabilidade relativa equivalente para cada valor da temperatura. Ao mesmo tempo, percebe-se que ainda sim há uma diferença entre esses valores, pressões ligeiramente maiores para as temperaturas menores. Tal fato se deve ao fato de haver uma maior resistência à entrada da água, resultando na consequente elevação na pressão de entrada para que o gradiente de pressão seja mantido.

Em se tratando da temperatura, Figura 15, conforme esperado, à medida que a água é injetada a temperaturas mais elevadas, a temperatura do reservatório aumentará em todas as regiões, embora haja um decréscimo em função da distância em relação à região de injeção, acarretando em um aumento da ordem de 12 K entre os valores mínimos e máximos para as regiões que se encontram a 100 m distantes da fronteira de injeção.

Em seguida, a partir da análise dos resultados mostrados na Figura 16, verifica-se que em função do aumento da temperatura do fluido de injeção, uma maior quantidade de óleo será recuperada e a água estará presente em maior quantidade na região próxima da fronteira de injeção. Sabe-se que esta é uma consequência direta da diminuição da viscosidade do óleo, em função do aumento da sua temperatura como resultado da transferência de energia proveniente da fase molhante. Em última instância, esse é o resultado prática da recuperação térmica via a injeção de um fluido aquecido no reservatório. É

Figura 15 - Distribuição da temperatura na direção x , considerando diferentes valores de T_{inj} e $t=7000$ dias

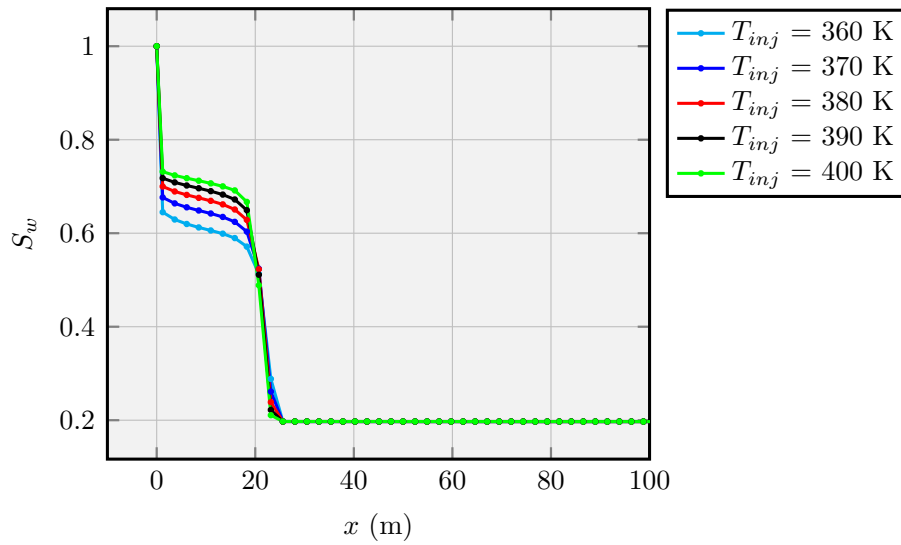


Fonte: O autor, 2022.

exatamente aqui que se pode atestar a importância da utilização dos métodos térmicos na recuperação de reservatórios de óleo pesado, em função da redução da viscosidade do óleo proporcionada pelo aquecimento do meio poroso e do conseqüente aumento da eficiência de varrido.

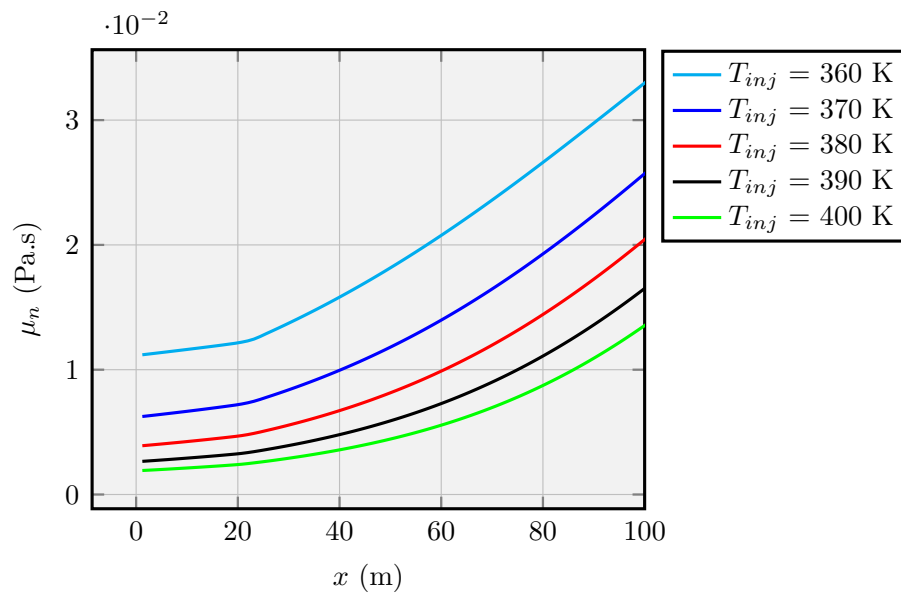
Por último, da variação da viscosidade do óleo em função da variação da temperatura do fluido injetado (Figura 17), pode-se confirmar as assertivas feitas anteriormente. O fluido aquecido vai provocar uma diminuição da viscosidade do óleo em decorrência do aumento da sua temperatura. Como a água injetada ficará confinada em uma região que dista menos do que 20 m da fronteira de injeção, a diminuição da viscosidade do óleo também será maior nessa região e aumentará progressivamente conforme a distância aumenta. A diminuição da viscosidade aumentará a mobilidade do óleo no interior do reservatório.

Figura 16 - Distribuição da saturação na direção x , considerando diferentes valores de T_{inj} e $t=7000$ dias



Fonte: O autor, 2022.

Figura 17 - Distribuição da viscosidade do óleo na direção x , considerando diferentes valores de T_{inj} e $t=7000$ dias



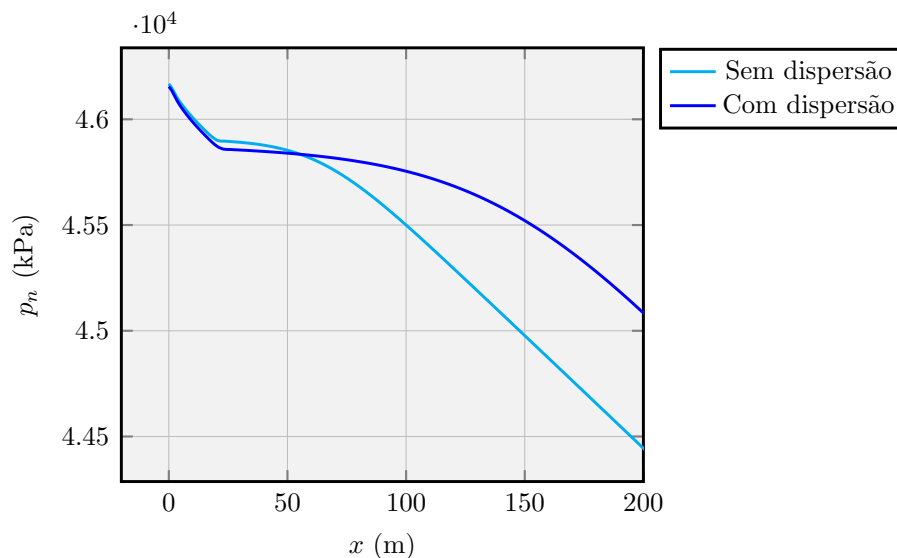
Fonte: O autor, 2022.

3.2.2 Efeitos da tortuosidade e da dispersão hidrodinâmica

Uma série de simulações foram realizadas destinadas a quantificar os efeitos de dispersão térmica quando a contribuição da tortuosidade e da dispersão hidrodinâmica

não são desprezadas. Como pode ser visto na Figura 18, o comportamento da curva mostra que há um aumento da pressão na região de injeção assim como nas demais regiões em comparação ao caso no qual despreza-se os seus efeitos. Então, esse maior gradiente de pressão aumentará o fluxo de massa e a quantidade de energia transportada. Mais que isso, quando se considera a contribuição combinada desse efeito, os valores de pressão ao longo do reservatório serão maiores, o que já era esperado tendo em vista que a temperatura na região de injeção irá variar em decorrência do aumento da dispersão térmica. Isso é causado pela mudança na distribuição de temperatura, que tem impacto nos valores de diferentes propriedades, tais como a porosidade, o FVF, a viscosidade e a massa específica, causando, por consequência, alterações na pressão. Essa foi a mesma tendência observada em relação à variação da temperatura de injeção: quanto maior a temperatura da água, maior será o valor da pressão.

Figura 18 - Distribuição da pressão na direção x e $t=7000$ dias - efeitos da dispersão térmica

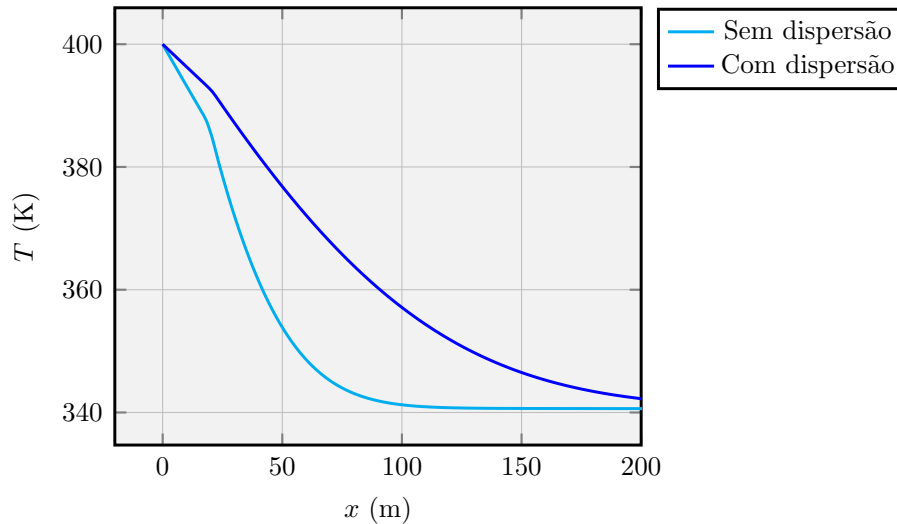


Fonte: O autor, 2022.

Olhando para a Figura 19, pode-se perceber que há uma diferença aparente nos valores de temperatura na região de injeção, onde os valores da temperatura são maiores quando se leva em conta os efeitos combinados, apesar da variação absoluta ser pequena. Essa diferença é justificada quando se considera o tensor efetivo de dispersão, onde dois termos adicionais são levados em conta quando considera-se a contribuição da tortuosidade e da dispersão hidrodinâmica. Assim, o efeito macroscópico do termo difusivo ganha uma maior importância no computo da transferência de calor. Pode-se interpretar que seria como se os valores da condutividade térmica efetiva fossem aumentados, acarretando em uma condução mais eficiente. Ademais, com a injeção de água aquecida há um aumento gradual da temperatura na região da fronteira esquerda. Tendo em vista a contribuição

da transferência de calor por condução e advecção, haverá também um aumento do fluxo de calor da região de injeção em direção à região de produção, à direita do reservatório.

Figura 19 - Distribuição da temperatura na direção x e $t=7000$ dias - efeitos da dispersão térmica

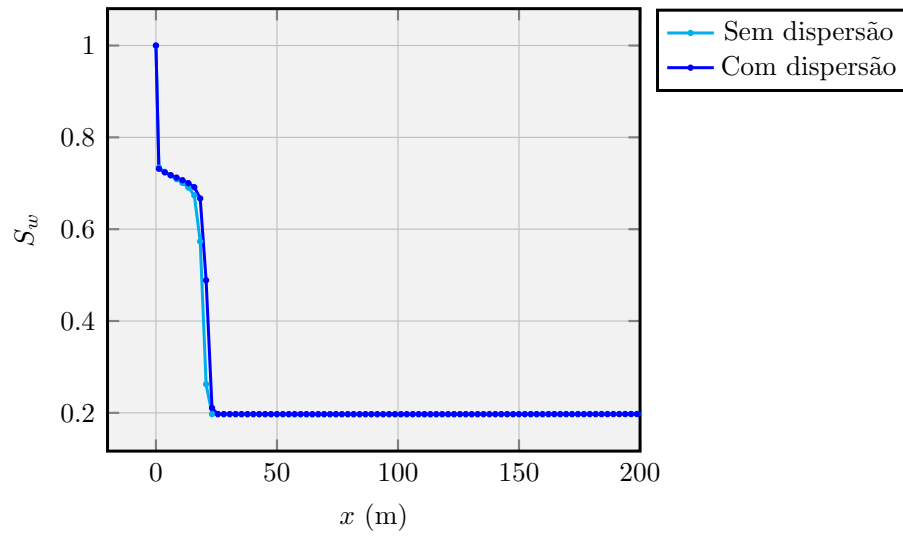


Fonte: O autor, 2022.

A variação da saturação do fluido injetado, ao longo do eixo x , é mostrada na Figura 20. Apesar da diferença ser perceptível, os valores da saturação são praticamente os mesmos. Entende-se que esse comportamento é decorrente da pequena variação absoluta dos valores da temperatura na região de injeção, quando a contribuição da tortuosidade e da dispersão hidrodinâmica são considerados. No caso da variação dos valores da temperatura do fluido injetado, Figura 15, a diferença é da ordem de 40 K, enquanto que agora ela é apenas de aproximadamente 6,5 K.

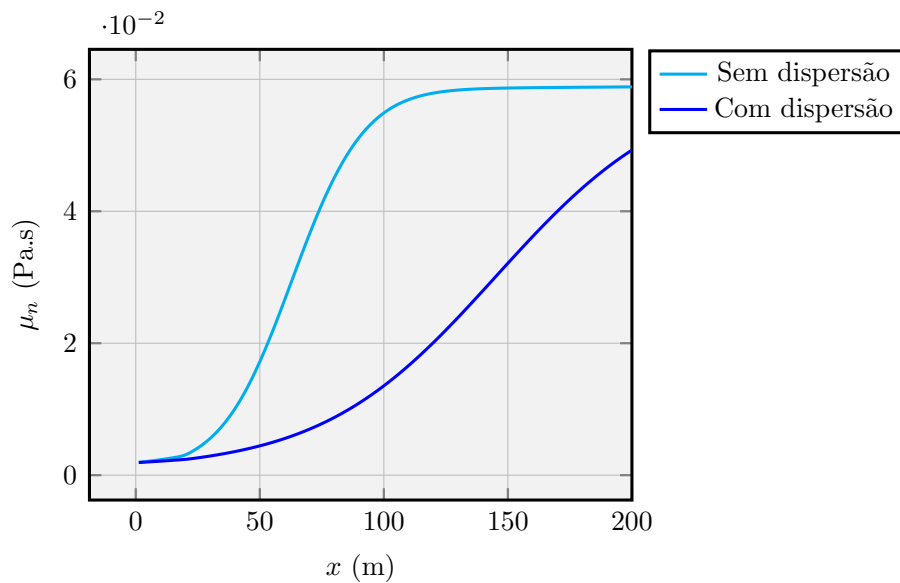
Diferentemente, os efeitos combinados da tortuosidade e da dispersão hidrodinâmica afetam de forma mais pronunciada os valores da viscosidade do óleo, conforme pode-se constatar da observação da Figura 21. Eles são capazes de produzir uma diminuição dos valores mesmo nas regiões afastadas da fronteira de injeção, o que não é verificado quando não se leva em conta o decorrente acréscimo da transferência de calor devida à difusão térmica. Deve-se lembrar que o transporte por advecção está presente nos dois casos e, portanto, estima-se que os efeitos são devidos principalmente à atuação da difusão térmica, embora a variação de pressão e temperatura levem a uma alteração nos valores da velocidade de escoamento e da entalpia dos fluidos.

Figura 20 - Distribuição da saturação na direção x e $t=7000$ dias - efeitos da dispersão térmica



Fonte: O autor, 2022.

Figura 21 - Distribuição da viscosidade do óleo na direção x e $t=7000$ dias - efeitos da dispersão térmica



Fonte: O autor, 2022.

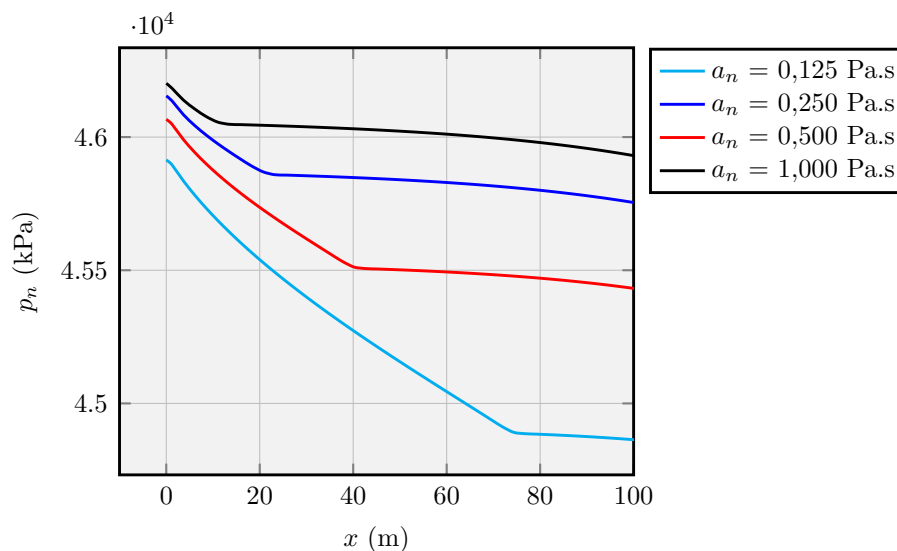
3.2.3 Efeito da variação da viscosidade do óleo

O efeito da variação do parâmetro a_n da Equação (1) afeta diretamente no valor da viscosidade do óleo. Consequentemente, compreendeu-se que seria importante estudar a

sua influência na determinação das curvas de pressão, de saturação, de temperatura, assim como da própria viscosidade do óleo. Quatro valores distintos de a_n foram escolhidos e as mesmas tendências foram observadas, quando comparadas aos resultados anteriores.

Inicia-se com a análise das curvas de pressão, vide a Figura 22. Pode-se perceber que o aumento da viscosidade causa uma considerável elevação na pressão na região de injeção assim como no restante do reservatório. Isso pode ser explicado por meio da percepção de que a mobilidade do fluido é reduzida em função do aumento da viscosidade, requerendo um aumento da pressão de injeção para que se mantenha o mesmo gradiente de pressão. Portanto, quando menor for a viscosidade o óleo, menor será a resistência ao escoamento e maiores serão os valores da pressão.

Figura 22 - Distribuição da pressão na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores de a_n



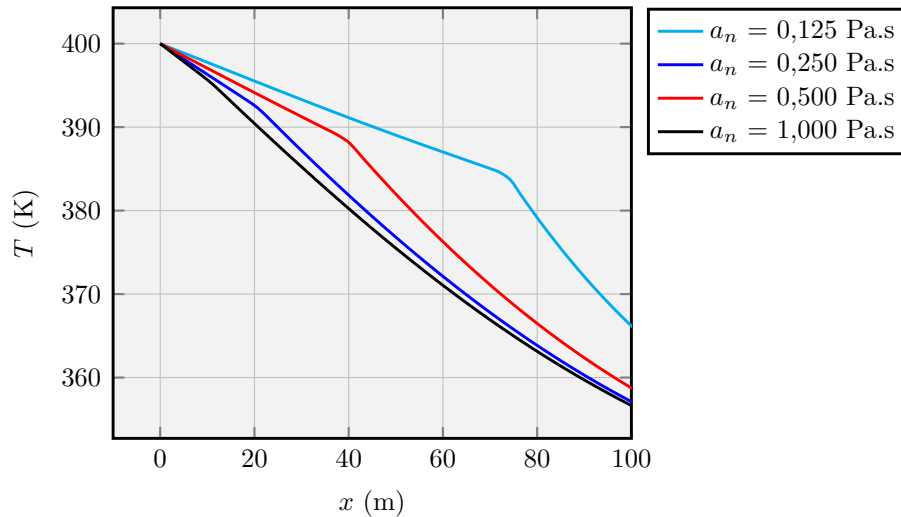
Fonte: O autor, 2022.

Já no que se refere aos resultados da temperatura, Figura 23, quanto maior a viscosidade, menor será a temperatura do meio. Tal fato também pode ser explicado em decorrência da redução da mobilidade do fluido que, por consequência, leva à diminuição da velocidade e do número de Péclet. Assim, o mecanismo de transferência de calor por advecção fica prejudicado em se tratando dos escoamentos de fluidos mais viscosos, em comparação aos casos onde eles apresentam uma menor viscosidade.

Além disso, pode-se ver na Figura 24 que há uma maior quantidade de óleo residual quando o óleo é mais viscoso, o que é explicado devido à maior resistência ao escoamento experimentada pelo fluido mais viscoso, quando comparada a dos óleos mais leves. Ainda no que concerne à análise da variação da saturação, observa-se, conforme o esperado, que para os casos do escoamento dos fluidos mais viscosos a frente de avanço do fluido injetado não progride tanto quanto em se tratando dos fluidos menos viscosos. Em consequência, o avanço da frente é mais lento em se tratando dos óleos mais viscosos, em contraste

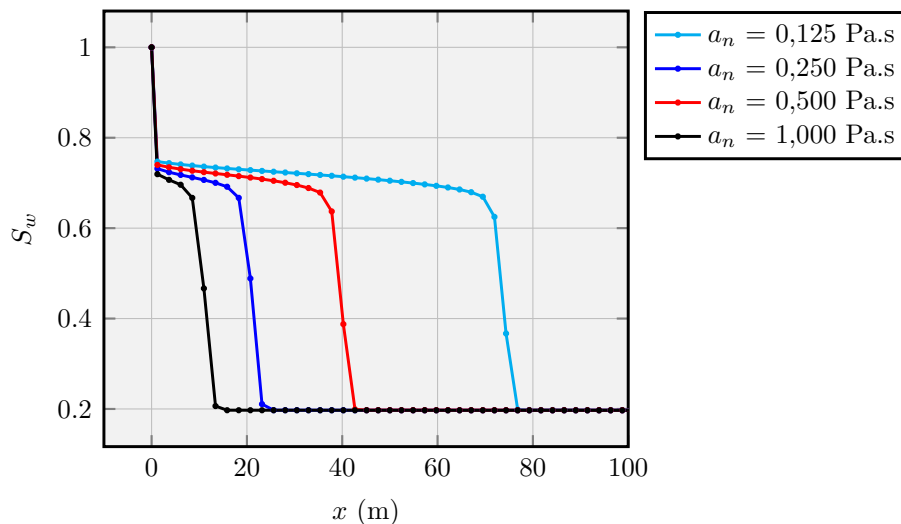
com o caso dos menos viscosos onde as regiões mais distantes serão alcançadas pelo fluido injetado no mesmo período de tempo.

Figura 23 - Distribuição da temperatura na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores de a_n



Fonte: O autor, 2022.

Figura 24 - Distribuição da saturação na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores de a_n

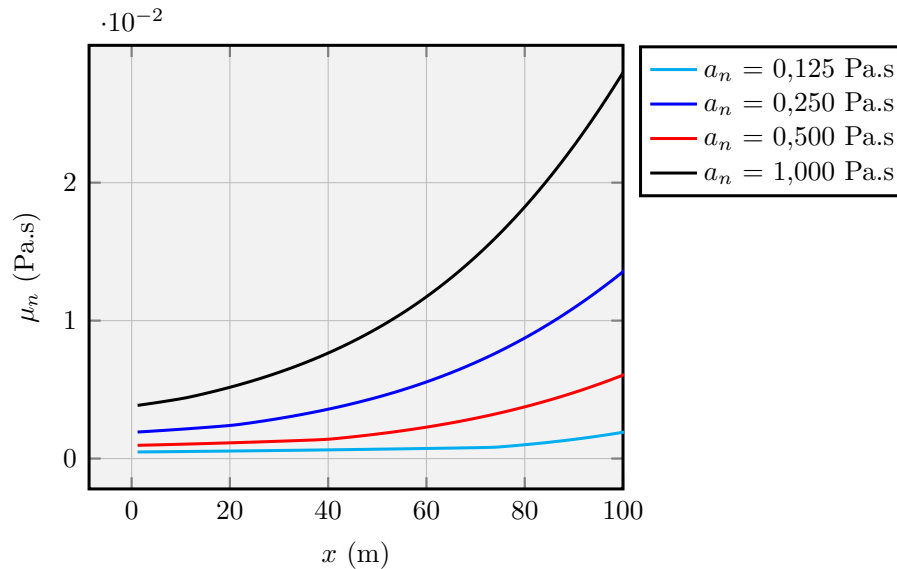


Fonte: O autor, 2022.

Os resultados da Figura 25 confirmam os efeitos que a variação do parâmetro a_n provoca nos valores da viscosidade do óleo. Fica claro que quanto maior for o seu valor, maior serão os valores da viscosidade do fluido ao longo de todo o reservatório. Entretanto, devido ao aquecimento do fluido injetado, perto da região de injeção eles assumirão os

valores mais baixos e eles aumentarão conforme o fluido se encontra mais distante da fronteira esquerda esquerda do reservatório.

Figura 25 - Distribuição da viscosidade na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores de a_n



Fonte: O autor, 2022.

Entende-se que seja importante destacar o fato que a variação da viscosidade em função da temperatura é uma característica associada a cada óleo específico. Então, diferentemente da temperatura de injeção da água, não se pode alterar a maneira como a viscosidade varia, a menos que se altere as propriedades físicas do óleo mediante a injeção de produtos específicos para tal finalidade.

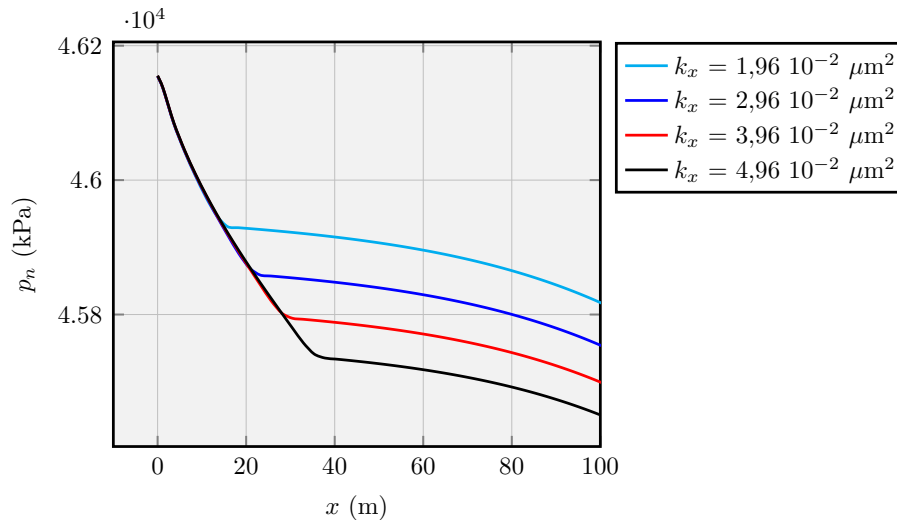
3.2.4 Efeito da variação da permeabilidade absoluta

Uma outra questão relevante diz respeito à variação da permeabilidade absoluta, Figuras 26-29. A partir dela, pode-se confirmar que o escoamento do fluido em reservatórios de baixa e alta permeabilidade assume comportamentos distintos. Na prática, esse tipo de estudo pode auxiliar no trabalho de engenheiros e cientistas quando do monitoramento do escoamento de água e óleo em reservatórios apresentando diferentes permeabilidades.

Pode-se ver, na Figura 26, como esperado, que quanto maior for a permeabilidade absoluta, maior será o avanço da frente de saturação da fase molhante, ou seja, mais afastada se encontrará a posição que indica a mudança de comportamento na curva de pressão em relação à região de injeção. Vale ressaltar que a tendência aqui observada, decorrente da variação da permeabilidade absoluta, contrasta com o comportamento verificado para

a distribuição da pressão quando variou-se os valores da viscosidade do fluido. Isso acontece pois ambas as propriedades estão presentes na equação modificada de Darcy, que fornece a velocidade de fluido, embora os seus efeitos sejam inversamente proporcionais. Quanto maior for a permeabilidade absoluta maior será velocidade de escoamento, para o mesmo gradiente de pressão, e o contrário se dará no caso da variação da viscosidade.

Figura 26 - Distribuição da pressão na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da permeabilidade absoluta

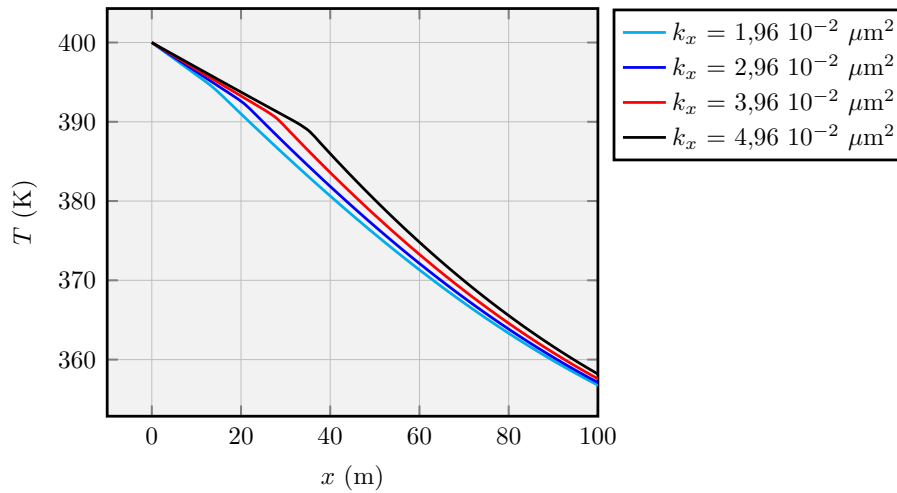


Fonte: O autor, 2022.

Em se tratando da distribuição de temperatura, Figura 27, fica evidenciado o fato de que quanto maior for a permeabilidade absoluta, maior será a temperatura na região próxima da fronteira de injeção. A razão para que isto aconteça é devida à maior quantidade de fluido aquecido que entra no reservatório, o que significa que uma maior quantidade de energia térmica é adicionada com o conseqüente aumento da temperatura. Além disso, como apresentado na figura, a inflexão na curva de temperatura ocorre para uma posição mais avançada, para os casos com maior permeabilidade. Novamente, a explicação reside no fato do aumento da velocidade do escoamento, que permite que uma maior quantidade de calor seja transferida para o interior do reservatório.

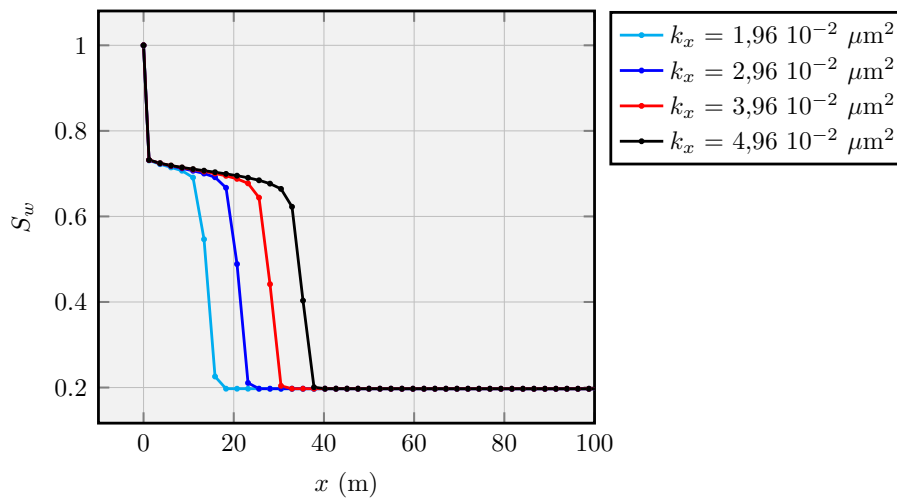
As curvas de saturação, vistas na Figura 28, apresentam como particularidade o fato de percorrerem uma maior distância no interior de reservatório à medida que os valores da permeabilidade absoluta são aumentados. Uma vez mais, trata-se de uma consequência direta do que é previsto na lei de Darcy modificada. Quanto maior for o valor da permeabilidade, menor será a resistência imposta ao avanço da água injetada para o mesmo gradiente de pressão. Embora a frente penetre mais rapidamente no reservatório, não há um aumento significativo da eficiência de varrido, uma vez que ela depende diretamente da razão entre as viscosidades dos fluidos injetados e produzidos. No caso em questão, conforme visto a seguir, a viscosidade do óleo variou ligeiramente.

Figura 27 - Distribuição da temperatura na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da permeabilidade absoluta



Fonte: O autor, 2022.

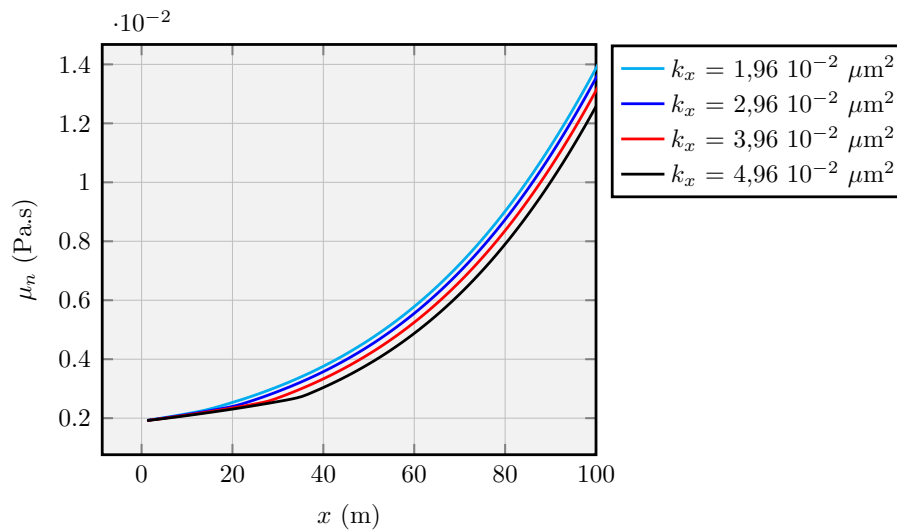
Figura 28 - Distribuição da saturação na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da permeabilidade absoluta



Fonte: O autor, 2022.

A Figura 29 mostra a distribuição da viscosidade em função da coordenada x na região de injeção e distante dela. Entretanto, essa variação não foi significativa em termos absolutos. Também é evidente que quanto mais perto da zona de injeção, maior é a tendência dos valores de viscosidade serem os mesmos, tendo em vista que a temperatura de injeção da água é constante (prescrita) e que a viscosidade é uma função da temperatura.

Figura 29 - Distribuição da viscosidade na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da permeabilidade absoluta



Fonte: O autor, 2022.

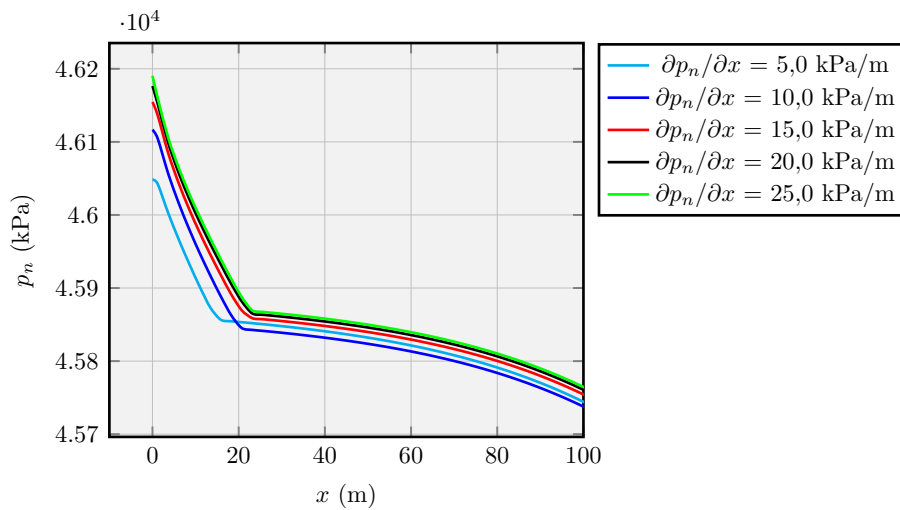
3.2.5 Efeito da variação da taxa de injeção de água

A taxa de injeção de água é outro parâmetro fundamental para este estudo, visto que ele define a quantidade de água injetada no reservatório. As respectivas curvas obtidas alterando-se a taxa de injeção podem ser encontradas nas Figuras 30-33, respectivamente para a variação de pressão, temperatura, saturação e viscosidade.

Quando se considera o comportamento das curvas de pressão, Figura 30, para diferentes valores do gradiente de pressão imposto na fronteira de injeção, percebe-se que as curvas tendem a se aproximar uma das outras à medida que aumenta-se a taxa de injeção. Portanto, verifica-se que em razão dos valores das propriedades do reservatório e do fluido, como a permeabilidade absoluta, a porosidade e a viscosidade, existe um limite para o aumento da taxa de injeção em termos práticos, lembrando-se que a pressão é prescrita e mantida constante na fronteira de produção. Entretanto, percebe-se uma influência na região próxima à fronteira de injeção em função do aumento da taxa de injeção, que deixa de ser relevante à medida que a taxa é aumentada.

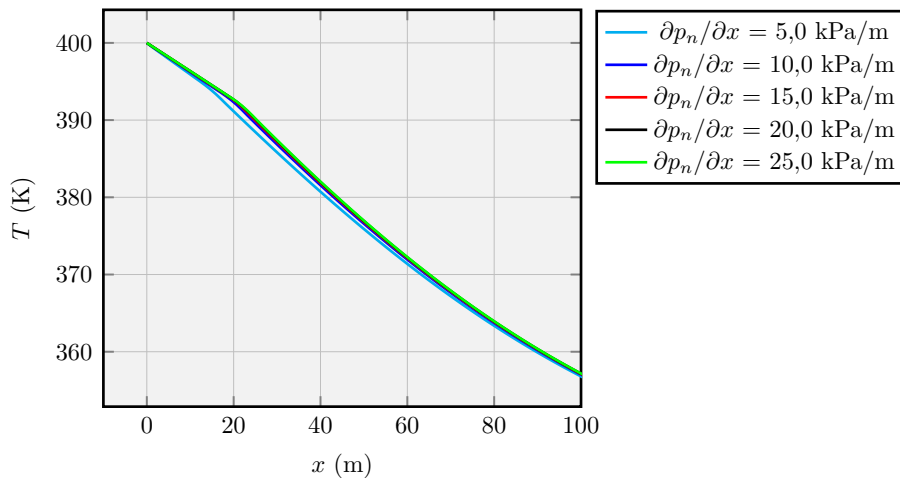
Da Figura 31, que diz respeito às curvas de temperatura, não é difícil concluir que a variação da taxa de injeção do fluido aquecido não provocou mudanças significativas, nos testes, nos valores da temperatura média no interior do reservatório. Assim sendo, não se deve esperar que haja alguma mudança efetiva dos valores da viscosidade do óleo.

Figura 30 - Distribuição da pressão na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da taxa de injeção



Fonte: O autor, 2022.

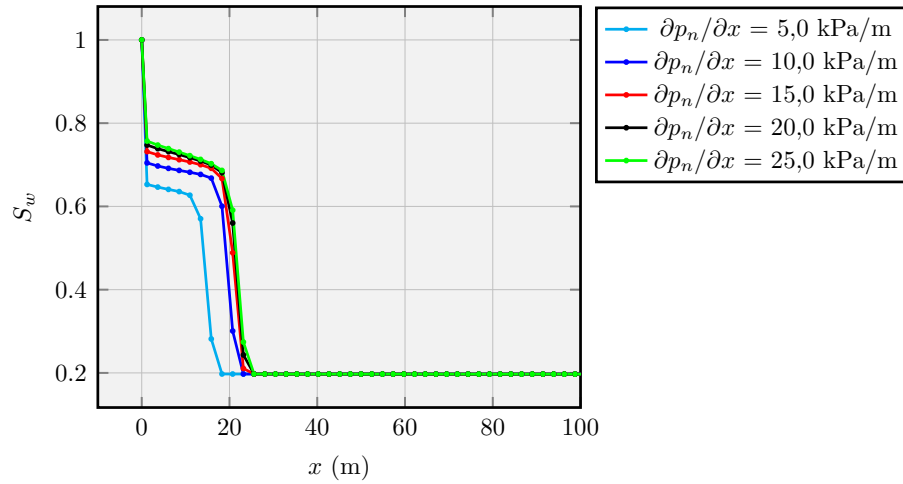
Figura 31 - Distribuição da temperatura na direção x , $t=7000$ dias e diferentes valores da taxa de injeção



Fonte: O autor, 2022.

Quando se analisa os resultados referentes às curvas de saturação, Figura 32, fica evidente o efeito benéfico do aumento inicial da taxa de injeção, com o consequente aumento da eficiência de varrido. No entanto, conforme já dito, esse efeito vê-se que a partir de um gradiente correspondente a 15 kPa/m as curvas de saturação ficam cada vez mais próximas uma das outras. Logo, a quantidade de óleo residual na região varrida tende ao mesmo valor para os valores superiores da taxa de injeção.

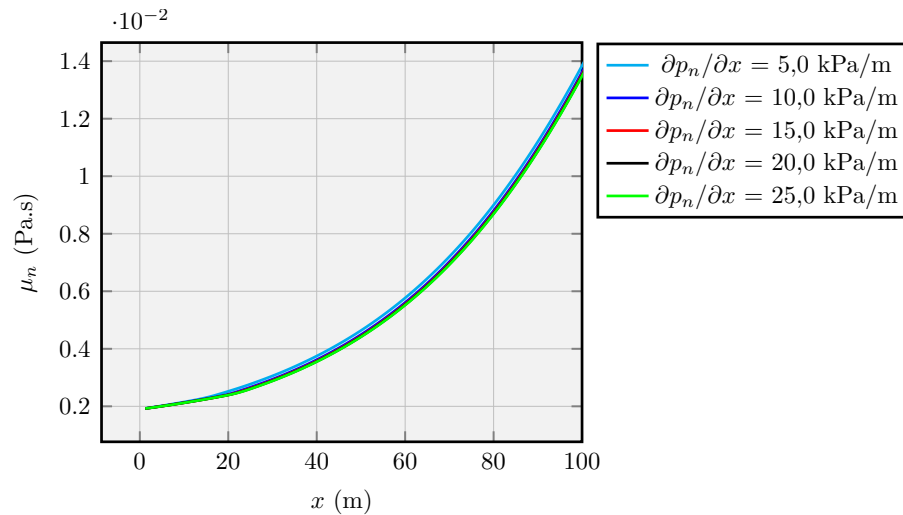
Figura 32 - Distribuição da saturação na direção x , $t=7000$ dias e valores da taxa de injeção



Fonte: O autor, 2022.

Em função do já exposto em relação à variação da temperatura no interior do reservatório, constata-se que as curvas de viscosidade são praticamente as mesmas independentemente dos valores das taxas de injeção, vide a Figura 33.

Figura 33 - Distribuição da viscosidade na direção x , $t=7000$ dias e valores da taxa de injeção



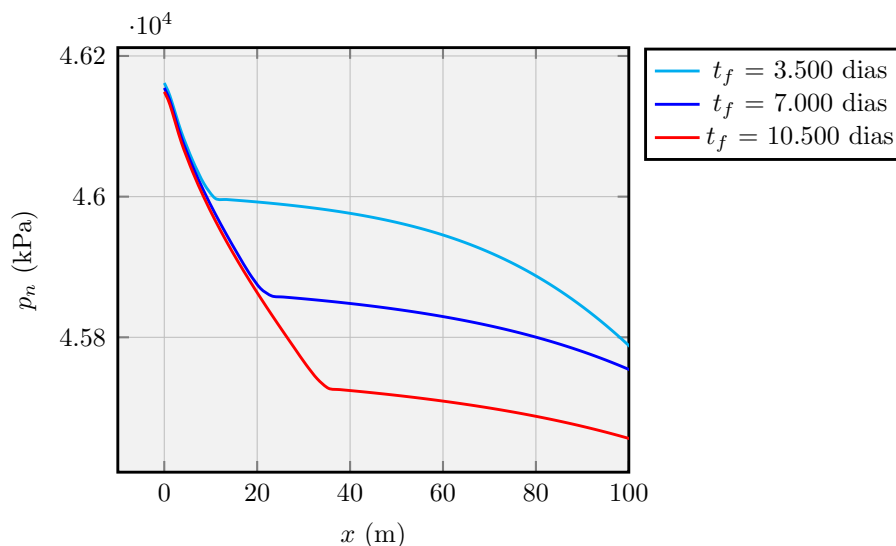
Fonte: O autor, 2022.

3.2.6 Efeito da variação do tempo de injeção de água aquecida

Terminando as simulações relacionadas ao estudo da injeção de água aquecida em um reservatório como uma geometria do tipo *Slab*, investiga-se a influência no escoamento do período de injeção de água aquecida. Levou-se em conta três diferentes períodos de duração de tempo: $t=3.500$, 7.000 e 10.500 dias. Transcorridos esses intervalos de tempo, a fase molhante continua sendo injetada no reservatório, porém, sem ser aquecida.

É possível identificar, na Figura 34, que as curvas de pressão possuem valores mais elevados para os casos nos quais os períodos de injeção são os mais curtos. Para que fosse exequível uma melhor visualização dos resultados, mostrou-se apenas os valores correspondentes a $x \leq 100$ m. Tal fato se dá, nos tempos iniciais, em função da água injetada ter que enfrentar uma maior resistência ao escoamento na região próxima à fronteira de injeção, que inicialmente possui uma saturação da fase molhante reduzida.

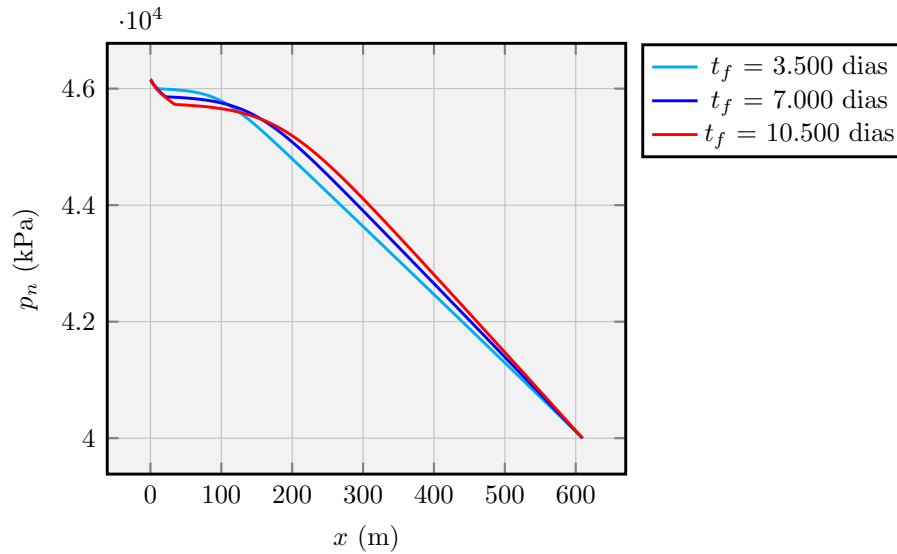
Figura 34 - Distribuição da pressão na direção x para diferentes tempos



Fonte: O autor, 2022.

A Figura 35 mostra, agora, a variação da pressão considerando toda a extensão do reservatório. Nesta figura, verifica-se que para regiões que se encontram mais afastadas da fronteira de injeção a tendência é invertida e os maiores valores de pressão estão associados aos períodos mais longos. No entanto, como na fronteira de produção tem-se que a pressão é imposta, todas as curvas convergem para o mesmo valor. Entende-se que o aumento de pressão para os períodos mais prolongados de injeção de fluido aquecido seja resultante da maior energia fornecida ao reservatório, com o subsequente aumento de temperatura.

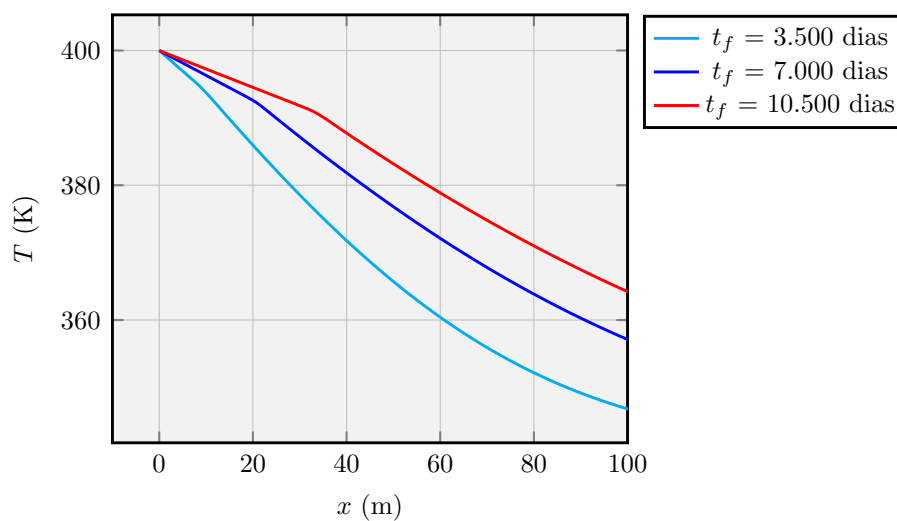
Figura 35 - Distribuição da pressão na direção x para diferentes períodos de injeção



Fonte: O autor, 2022.

É natural se esperar que a temperatura média do reservatório será mais elevada quando uma maior quantidade de fluido aquecido for inserido nele. Logo, as curvas de temperatura apresentando os maiores valores são aquelas correspondentes aos períodos mais longos de injeção do fluido aquecido. Isso pode ser constatado na Figura 36, onde percebe-se que houve uma diferença da ordem de 20 K entre as temperaturas mínima e máxima para $x=100$ m.

Figura 36 - Distribuição da temperatura na direção x para diferentes períodos de injeção

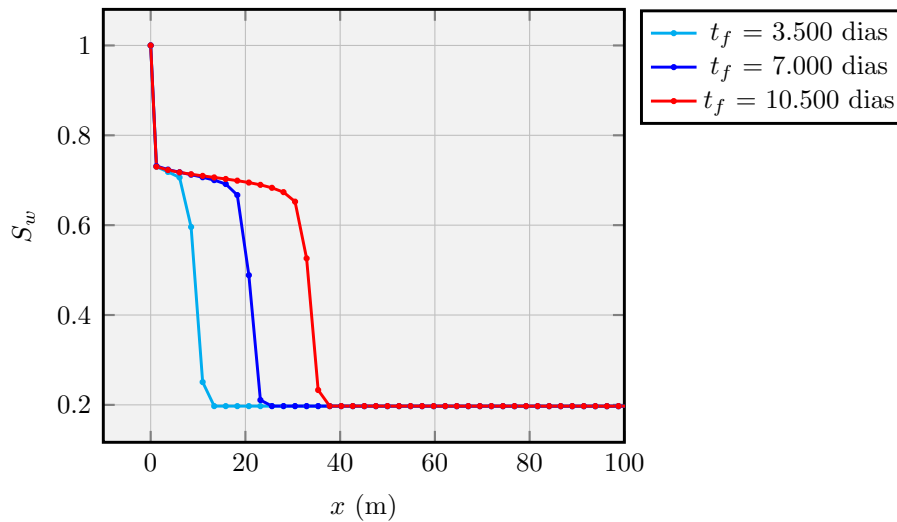


Fonte: O autor, 2022.

O efeito prático da variação do período de injeção com aquecimento e o de diminuir a resistência ao escoamento da fase molhante, Figura 37. Assim, pode-se apurar que

quanto maior for a duração, mais avançada se encontrará a frente de saturação da água. No que diz respeito à eficiência de varrido, o melhor resultado é obtido quando varia-se a temperatura do fluido injetado.

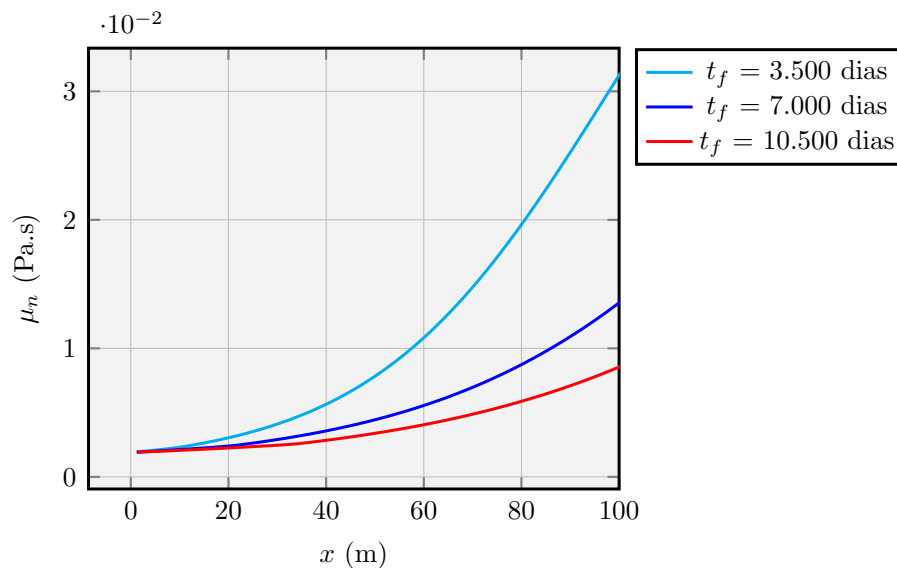
Figura 37 - Distribuição da saturação na direção x para diferentes períodos de injeção



Fonte: O autor, 2022.

Em se tratando da viscosidade do óleo, sabe-se que o aumento da temperatura do reservatório leva a uma diminuição do seu valor. Assim sendo, próximo da fronteira à esquerda, para os maiores períodos de injeção de água aquecida corresponderá às maiores reduções nos seus valores, uma vez que as maiores temperaturas são obtidas com eles, vide a Figura 38.

Figura 38 - Distribuição da viscosidade na direção x para diferentes períodos de injeção



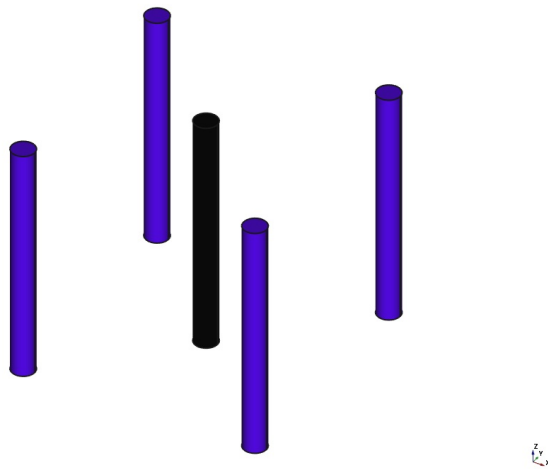
Fonte: O autor, 2022.

3.3 Análise do escoamento em um arranjo do tipo *Five-spot*

O arranjo de injeção denominado *Five-spot* é utilizado com frequência na literatura para avaliar os resultados das simulações envolvendo os escoamentos multifásicos em reservatórios de petróleo, em função dele representar mais realisticamente o que é feito na prática. Esse arranjo, antes de tudo, é uma estratégia utilizada para retirar uma quantidade adicional de óleo do reservatório, que ainda existe após a etapa de recuperação primária, ou pode mesmo ser considerado como uma técnica complementar para a recuperação de óleos pesados e ao aquecimento do reservatório quando do escoamento monofásico.

Conforme exposto na Figura 39, para esse arranjo, quatro poços injetores são posicionados nos vértices de uma configuração retangular posicionada em volta do poço produtor, que fica localizado no seu centro. Tal disposição foi pensada com o intuito de aumentar a pressão na região aonde se encontra o poço produtor.

Figura 39 - Distribuição dos poços injetores e produtor para o arranjo *Five-spot*

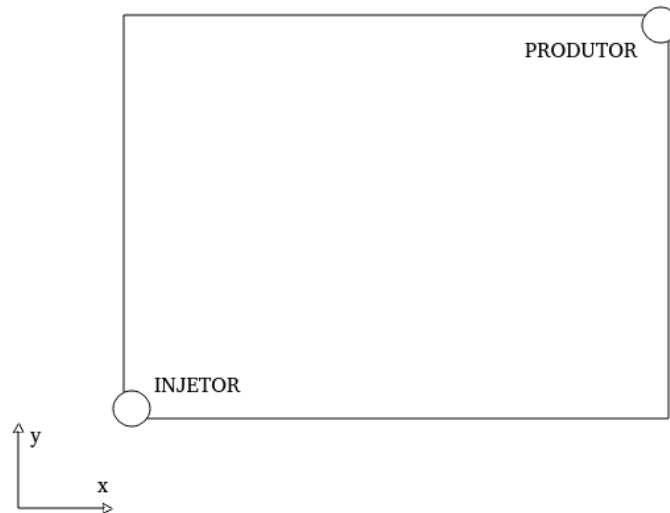


Legenda: em azul os poços injetores e em preto o poço produtor.

Fonte: O autor, 2022.

De modo a se reduzir o esforço computacional e considerando-se as propriedades dos fluidos e do reservatório, além do fato de haver uma simetria em função da distribuição espacial desses poços, utiliza-se somente um quarto dessa configuração nas simulações, como pode ser visto na Figura 40. Para o caso aqui simulado, empregou-se os mesmos parâmetros que os contidos em Freitas (2017), sendo que as taxas de produção e de injeção são, respectivamente, $q_{sc_{sp}} = -32 \text{ m}^3/\text{s}$ e $q_{sc_{sp}} = 32 \text{ m}^3/\text{s}$.

Figura 40 - Distribuição dos poços para um quarto do arranjo *Five-spot*



Fonte: O autor, 2022.

Para um meio homogêneo e o escoamento bifásico isotérmico, a frente de avanço do fluido injetado, a água, pode ser vista se deslocando no interior do reservatório na Figura 41, que apresenta os valores da saturação da fase molhante para diferentes instantes de tempo.

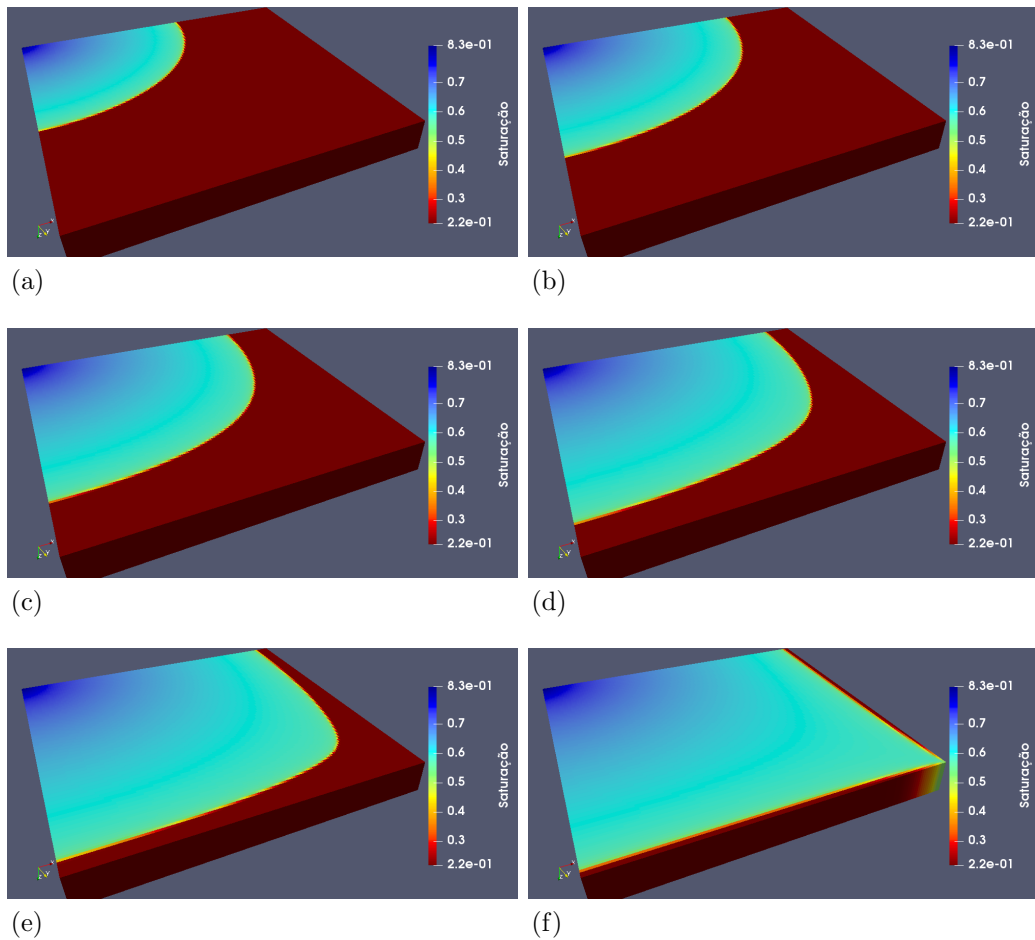
Após confrontação com as correspondentes curvas de saturação determinadas no trabalho de Freitas (2017), pôde-se chegar à conclusão de que o escoamento é qualitativamente semelhante. Tal constatação foi um incentivo para que se prosseguisse com o estudo dos efeitos do escoamento bifásico não-isotérmico na recuperação avançada de óleos pesados.

3.3.1 Escoamento não-isotérmico em um arranjo *Five-spot*

Agora, ainda considerando o arranjo *Five-spot*, é feito um estudo focando no escoamento bifásico não-isotérmico. São mantidas as mesmas condições presentes no problema anterior, no que diz respeito à geometria e propriedades de rocha e fluidos, porém, agora, considera-se a injeção de água aquecida a 400 K através do poço injetor. A temperatura de injeção foi estabelecida considerando-se os resultados obtidos na Seção 3.2, onde, dentre outros fatores, se investigou o efeito do aumento da temperatura da água injetada, que mostrou foi alcançada uma maior redução da quantidade de óleo residual no reservatório quando a temperatura era de 400 K. Entretanto, gostaria-se de chamar a atenção do leitor para o fato de que as simulações envolvendo o arranjo *Five-spot* são iniciais e trataram somente dos aspectos qualitativos e não quantitativos.

Como pode ser visto na Figura 42, comprova-se a existência de um comporta-

Figura 41 - Saturação da fase molhante para diferentes instantes de tempo e o arranjo *Five-spot*

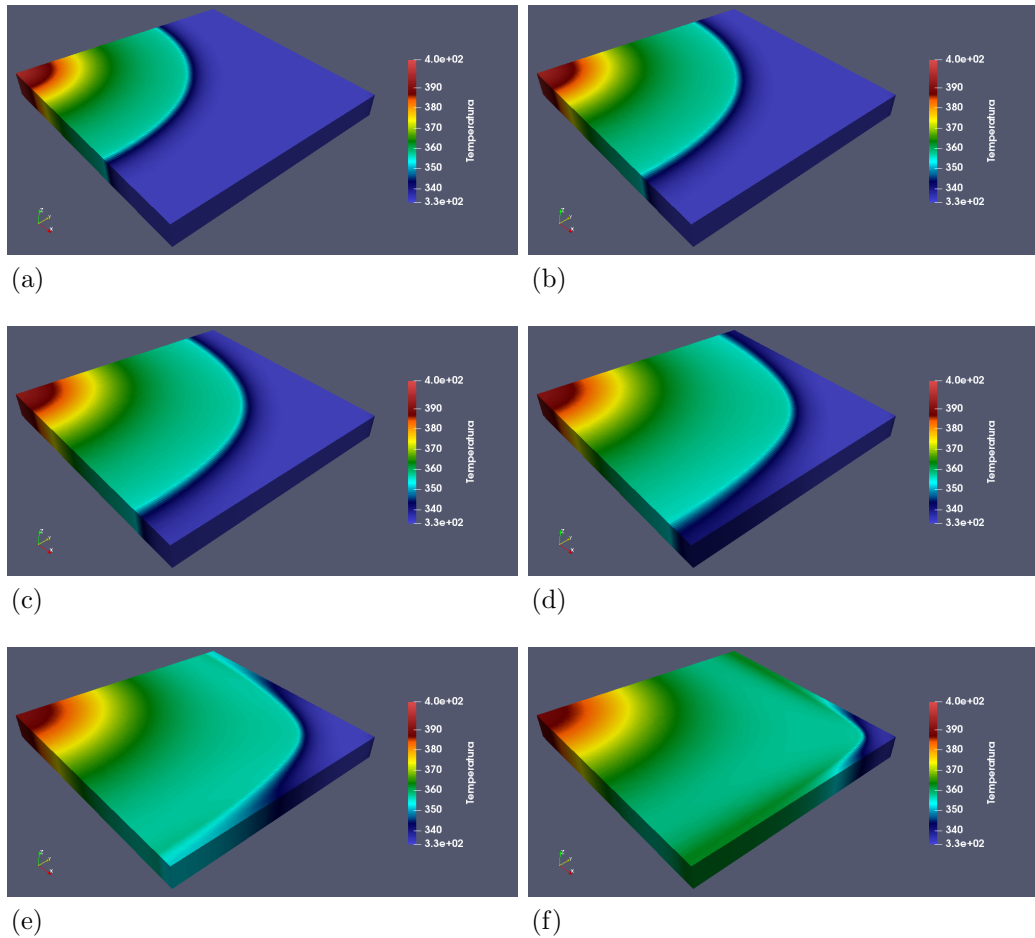


Legenda: perfis de saturação da água: (a) - $t \cong 2000$ dias; (b) - $t \cong 3000$ dias; (c) - $t \cong 4000$ dias; (d) - $t \cong 5000$ dias; (e) - $t \cong 6000$ dias; (f) - $t \cong 7000$ dias.

Fonte: O autor, 2022.

mento similar ao que foi visto para a frente de saturação no caso do escoamento bifásico isotérmico, Figura 41. A frente de temperatura avança simetricamente mantendo um perfil circular no início da injeção. Entretanto, para tempos mais avançados, constata-se que ela avança mais rapidamente na região central em função da proximidade do poço produtor, o que faz com que o perfil de temperatura se afunile. Isso ocorre por conta de um efeito combinado da redução da pressão promovida pelo poço produtor e do aumento da pressão na região de injeção, o que promove um maior gradiente de pressão e, portanto, uma maior velocidade de propagação.

Figura 42 - Temperatura para diferentes instantes de tempo e o arranjo *Five-spot*



Legenda: Perfis de temperatura: (a) - $t \cong 2400$ dias; (b) - $t \cong 3200$ dias; (c) - $t \cong 4000$ dias; (d) - $t \cong 4800$ dias; (e) - $t \cong 5600$ dias; (f) - $t \cong 6400$ dias.

Fonte: O autor, 2022.

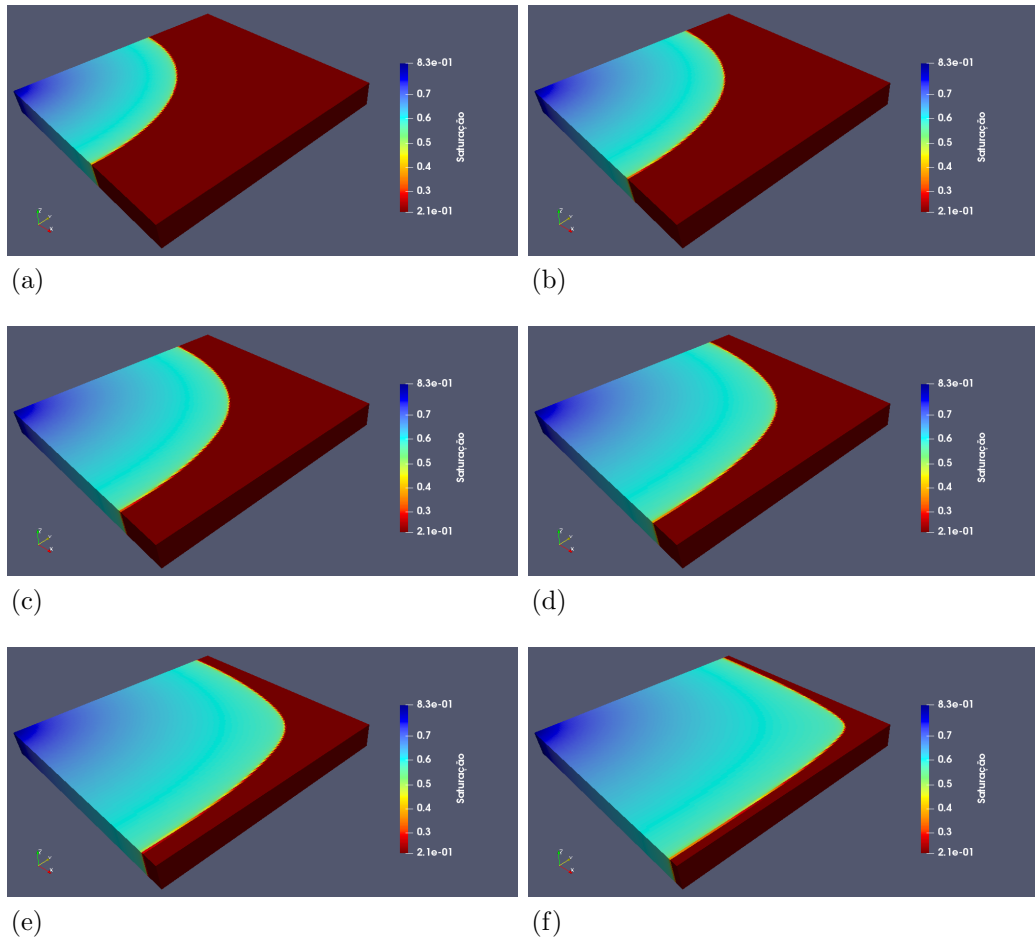
3.3.2 Escoamento não-isotérmico em um arranjo *Five-spot* com aquecedor estático

Por último, focou-se também em uma simulação que englobava os efeitos combinados da injeção de água aquecida através do poço injetor e da presença de um poço aquecedor estático posicionado próximo ao poço produtor. A ideia é a se ter, para os tempos iniciais, nos quais a frente de água aquecida ainda não tenha alterado as condições de temperatura na região próxima ao poço produtor, um aquecedor estático que viabilize o aumento da mobilidade do óleo que se encontra na região vizinha a ele, de modo a facilitar a retirada de óleo. O aquecedor encontra-se posicionado em $x = 290$ m, $y = 290$ m e a sua altura equivale à espessura do reservatório na direção z , $L_z \approx 30,5$ m). Uma potência equivalente a 1 kW/m, geralmente utilizada na prática, é adicionada ao reservatório, ou seja, aproximadamente 30,5 kW.

Na Figura 43, percebe-se um comportamento similar ao do avanço da frente de

saturação da água como no escoamento bifásico não-isotérmico sem a presença do poço aquecedor, vide a Figura 41, praticamente o mesmo perfil qualitativo é reproduzido, com a respectiva mudança de formato por conta do efeito de redução da pressão causado pelo poço produtor.

Figura 43 - Saturação para diferentes instantes de tempo, o arranjo *Five-spot* e um poço aquecedor

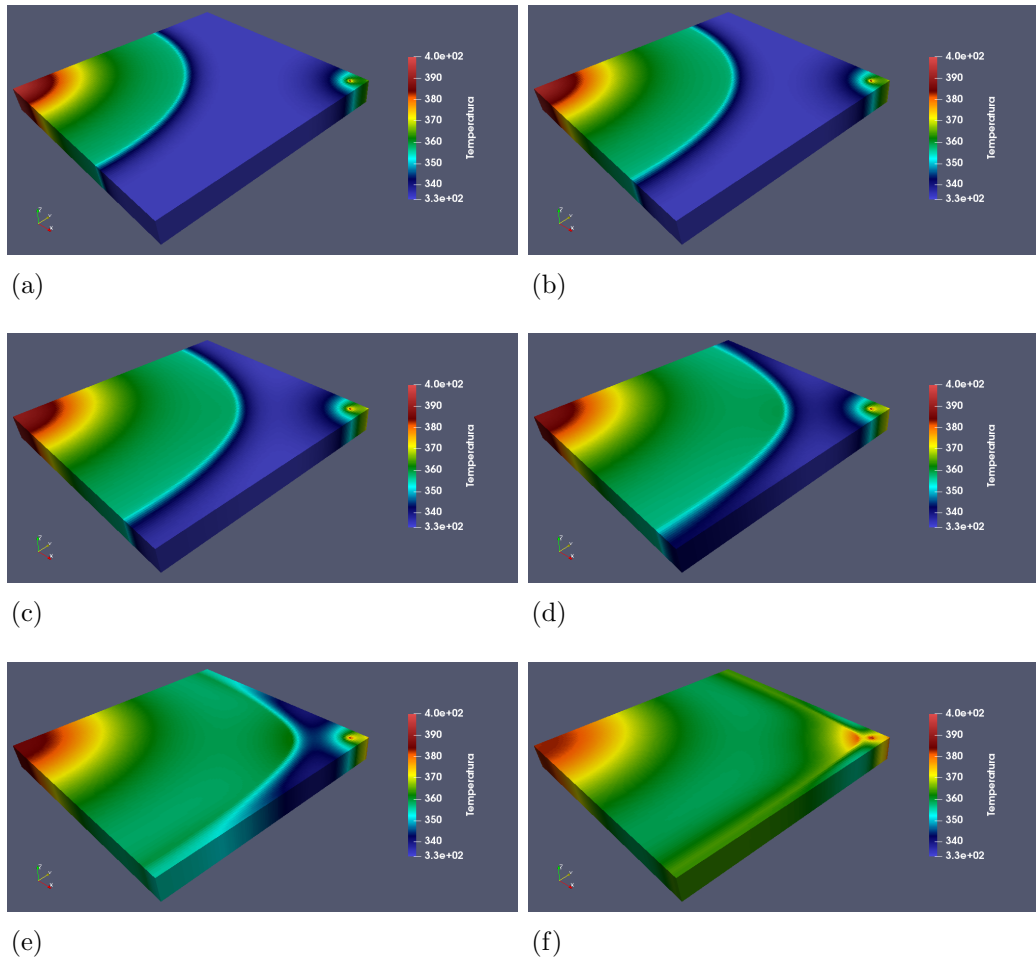


Legenda: Perfis de saturação: (a) - $t \cong 2400$ dias; (b) - $t \cong 3200$ dias; (c) - $t \cong 4000$ dias; (d) - $t \cong 4800$ dias; (e) - $t \cong 5600$ dias; (f) - $t \cong 6400$ dias.

Fonte: O autor, 2022.

Agora, na Figura 44 pode-se acompanhar o deslocamento da frente de temperatura e se perceber os efeitos do poço aquecedor na região adjacente ao poço produtor, para diferentes tempos de produção. Observa-se claramente um aumento da temperatura na região próxima ao poço produtor que, conforme sabido, é ocasionado pela energia adicionada ao reservatório pelo aquecedor estático. Nessa mesma região, é possível ver o aumento da temperatura por conta do transporte advectivo, uma vez que a redução de pressão nessa região acarreta no aumento de velocidade da frente de temperatura.

Figura 44 - Temperatura para diferentes instantes de tempo, o arranjo *Five-spot* e um poço aquecedor



Legenda: Perfis de temperatura: (a) - $t \cong 2400$ dias; (b) - $t \cong 3200$ dias; (c) - $t \cong 4000$ dias; (d) - $t \cong 4800$ dias; (e) - $t \cong 5600$ dias; (f) - $t \cong 6400$ dias.

Fonte: O autor, 2022.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese, foi desenvolvido um simulador numérico para a solução do problema do escoamento tridimensional bifásico não-isotérmico em um reservatório de óleo. A metodologia numérica consiste em resolver os subsistemas obtidos para pressão do óleo, saturação da água e temperatura média de maneira sequencial. Os coeficientes das equações que aparecem nesses subsistemas são linearizados utilizando o método de Picard. A equação da pressão é obtida de maneira similar a do método IMPES, proveniente da equação de balanço de massa da fase não-molhante, e a pressão é obtida como usualmente nesse método. Por outro lado, diferentemente, a saturação da água é calculada implicitamente. No cálculo da temperatura média, não considerando-se a hipótese do equilíbrio térmico local, também se aplica uma formulação implícita e são considerados os efeitos da tortuosidade e da dispersão hidrodinâmica. Os resultados numéricos foram validados realizando-se diferentes testes e comparando-os com os respectivos valores analíticos conhecidos na literatura. Por último, foram empreendidos uma análise de sensibilidade em um reservatório com geometria do tipo *Slab* e um estudo qualitativo no caso da injeção/produção em um arranjo do tipo *Five-spot*.

Conclusões

A validação do código numérico foi feita a partir de problemas já estabelecidos na literatura e que possuem soluções analíticas conhecidas. Foram realizadas simulações considerando o problema de Buckley-Leverett e comparou-se os resultados numéricos e analíticos tanto para o caso isotérmico, pressão e saturação, quanto para o não isotérmico, temperatura e saturação. A partir desses dois problemas, foi possível constatar a convergência numérica e que os resultados numéricos reproduziram acuradamente os fornecidos pelas soluções analíticas. Além disso, para os dois casos, a saturação apresentou o comportamento esperado mas, porém, verificou-se o aparecimento da difusão numérica devida à utilização do esquema *upwind* de primeira ordem. No que diz respeito à transferência de calor, a solução analítica da equação tridimensional de advecção-difusão, em regime transiente, foi utilizada e confirmou-se a acurácia dos resultados numéricos quando confrontados àqueles oriundos da previsão teórica.

A maior parte dos resultados foi obtida para o escoamento em um reservatório com uma geometria do tipo *Slab*. Foram simuladas a injeção de água na fronteira esquerda e a produção na fronteira direita do reservatório, caracterizando um escoamento bifásico não-isotérmico ao longo do eixo x . Tal procedimento permitiu que fosse possível verificar a evolução da pressão do óleo, saturação da água e temperatura média, além de se verificar a

influência da variação da temperatura de injeção da água; da tortuosidade e da dispersão hidrodinâmica; da viscosidade do óleo; da permeabilidade absoluta; da taxa de injeção; e do período de injeção do fluido aquecido.

Sem dúvida, a variação da temperatura de injeção se mostrou uma técnica mais eficiente no que diz respeito à recuperação de óleo. Para temperaturas mais elevadas, há uma redução da viscosidade e da quantidade de óleo que se encontra na região varrida pela água aquecida. Nos demais casos, não houve ganhos práticos comparáveis, apesar da redução da viscosidade do óleo, em termos da eficiência de varrido. Uma exceção seria o caso da variação do parâmetro a_n (viscosidade), embora para os valores testados o ganho em eficiência de varrido não tenha sido significativo como no primeiro caso. Como a eficiência de varrido depende da relação entre as viscosidades do fluido injetado e produzido, essa seria uma alternativa viável. Por outro lado, percebeu-se um aumento da velocidade de deslocamento da frente de saturação da água quando variou-se a viscosidade do óleo, a permeabilidade absoluta, a taxa e o período de injeção do fluido aquecido. Como consequência, uma maior quantidade de óleo seria produzida em um mesmo intervalo de tempo, mas a quantidade de óleo na região varrida ainda permaneceria elevada.

Além disso, atestou-se a diferença de comportamento entre as curvas de temperatura média quando se comparou o escoamento sem e com as contribuições da tortuosidade e da dispersão hidrodinâmica. Esse resultado já era esperado, pois quando se considera o efeito conjunto desses mecanismos aumenta-se a dispersão térmica macroscópica. Isso mostra a importância de se considerar a contribuição hidrodinâmica em escoamentos com número de Péclet elevado.

Apesar da utilização da geometria do tipo *Slab* tenha servido para se mostrar a influência da variação de algumas das propriedades e das condições de injeção/produção na distribuição de pressão, saturação e temperatura média ao longo do reservatório, visando a se utilizar modelos mais realísticos, decidiu-se simular o escoamento bifásico não-isotérmico em um quarto do arranjo do tipo *Five-spot* que, sabidamente, contém um poço injetor e outro produtor.

No entanto, deve-se ressaltar que este se refere a um estudo qualitativo inicial. Não houve tempo hábil para que uma análise aprofundada fosse realizada. Os resultados produzidos para o caso isotérmico são similares aos obtidos na literatura e, portanto, encontram-se em conformidade com o comportamento físico esperado. Foram feitas, então, outras simulações utilizando esse mesmo arranjo de injeção/produção mas, agora, considerando o escoamento não-isotérmico.

No primeiro caso, água aquecida era injetada através do poço injetor. Da observação do avanço da frente de saturação da fase não-molhante pôde-se constatar o mesmo padrão de escoamento que aquele do escoamento isotérmico. No que diz respeito à frente de temperatura, na região de injeção, há um aumento nos valores da saturação e da temperatura média, como previsto, e, decorrido um maior intervalo de tempo, observa-

se o aumento da velocidade de propagação das frentes de avanço da saturação da água e da temperatura média em direção ao poço produtor.

Um segundo caso foi estudado, para o mesma distribuição espacial dos poços injetor e produtor e injeção de água aquecida. Entretanto, para esse problema específico posicionou-se um aquecedor estático na região próxima ao poço produtor. A frente de avanço da temperatura seguiu inicialmente o mesmo padrão do caso sem o aquecedor estático. Porém, na região vizinha ao poço produtor, ficou evidente que a energia proveniente do poço aquecedor provocou um significativo aumento de temperatura. Outrossim, observou-se também o efeito do transporte por advecção na distribuição de temperatura nas proximidades do poço produtor, onde fica clara que há uma maior taxa de transferência de calor.

Por fim, conclui-se que o método sequencial e as outras metodologias de discretização, linearização e de solução de sistemas algébricos, quando aplicados ao problema do escoamento bifásico não-isotérmico, se mostraram eficazes. Como consequência, dispõe-se de um código computacional que comporá parte da biblioteca de métodos existentes no LABTRAN, destinados à simulação de reservatórios.

Perspectivas futuras

Em termos de trabalhos futuros, sugere-se o estudo detalhado do efeito combinado da injeção de água aquecida e dos aquecedores térmicos sobre as curvas de pressão de poço, levando em conta os gráficos diagnóstico e o especializado (BOURDET, 2002). Além disso, seria de grande interesse avaliar os efeitos do acoplamento poço-reservatório não só no contexto da pressão, mas também no da temperatura. Dessa forma, poderia ser possível caracterizar os diferentes regimes de escoamento em reservatórios utilizando esses gráficos, tanto para a pressão quanto para a temperatura. Essas análises poderiam ser feitas não somente para os poços verticais, mas também para os horizontais.

Ademais, seguindo uma tendência natural, seria interessante a previsão da realização de simulações em reservatórios de petróleo heterogêneos, onde se levaria em conta não somente as heterogeneidades provenientes dos campos de permeabilidade e porosidade, mas também a anisotropia no que diz respeito à condutividade térmica.

Por fim, seria de interesse avaliar a possibilidade de substituição do esquema *upwind* de primeira ordem, por métodos de ordem superior do tipo TVD (*Total Variation Diminishing*).

REFERÊNCIAS

- AOUIZERATE, G.; DURLOFSKY, L. J.; SAMIER, P. New models for heater wells in subsurface simulations, with application to the in situ upgrading of oil shale. *Computational Geoscience*, 2011.
- AYDIN, H. et al. Heavy oil reservoir management - latest technologies and workflows. In: . Bakersfield, California, USA: SPE Western Regional Meeting, 2022. SPE 209328.
- AZIZ, M.; SETTARI, A. *Petroleum Reservoir Simulation*. New York, USA: Elsevier Applied Science, 1979.
- BANNACH, N. *Thermal Equilibrium and Nonequilibrium Heat Transfer in Porous Media*. 2020. Disponível em: (<https://www.comsol.com/blogs/thermal-equilibrium-and-nonequilibrium-heat-transfer-in-porous-media/>).
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena*. Second edition. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- BORTOLOZZI, H.; DEIBER, J. Comparison between two- and one-field models for natural convection in porous media. *Chemical Engineering Science*, v. 56, p. 157–172, 2001.
- BOSMA, S. et al. Multiscale finite volume method for discrete fracture modeling on unstructured grids (ms-dfm). *Journal of Computational Physics*, v. 351, p. 145–164, 2017.
- BOURDET, D. *Well Test Analysis: the use of advanced interpretation models*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2002.
- CALLE, C. R. *A fast IMPES multiphase flow solver in porous media for reservoir simulation*. Tese (Doutorado) — Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, 2017.
- CAMPOS, M. D.; ROMÃO, E. C. High-order finite difference method applies to the solution of the three-dimensional heat transfer equation and to the study of heat exchangers. *Engenharia Térmica (Thermal Engineering)*, v. 13, n. 2, p. 67–73, 2014.
- CARRIZALES, M. A. *Recovery of Stranded Heavy Oil by Electromagnetic Heating*. Tese (Doutorado) — The University of Texas at Austin, 2010.
- CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Philadelphia, USA: Society of Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- DAS, K. M.; MUKHERJEE, P. P.; MURALIDHAR, K. *Modeling Transport Phenomena in Porous Media with Applications*. Switzerland: Springer International Publishing AG, 2018.
- DEHGHAN, M. Numerical solution of the three-dimensional advection–diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, v. 150, n. 1, p. 5–19, 2004.

- D'HUEPPE, A. *Heat transfer modeling at an interface between a porous medium and a free region*. Tese (Doutorado) — Ecole Centrale Paris, 2011.
- DUVAL, F.; FICHOT, F.; QUINTARD, M. A local thermal non-equilibrium model for two-phase flows with phase-change in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, p. 613–639, 2004.
- EDUARDO, R. *A comprehensive model describing temperature behavior in horizontal wells: Investigation of potential benefits of using downhole distributed temperature measurement system*. Tese (Doutorado) — The Pennsylvania State University, 2010.
- ERTEKIN, T.; ABOU-KASSEM, J.; KING, G. *Basic Applied Reservoir Simulation*. Richardson, USA: Society of Petroleum Engineers, 2001.
- ESMAEILI, S. et al. Effect of temperature on bitumen/water relative permeability in oil sands. *Energy & Fuels*, v. 34, n. 10, p. 12314–12329, 2020.
- FORTUNA, O. A. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos fluidos*. São Paulo, Brasil: Ed. USP, 2000.
- FREITAS, M. M. *Estudo Comparativo das Estratégias de Solução Numérica para Escoamentos Bifásicos em Reservatórios de Petróleo*. Tese (Doutorado) — UERJ, 2017.
- FU, J.; THOMAS, H. R.; LI, C. Tortuosity of porous media: Image analysis and physical simulation. *Earth-Science Reviews*, v. 212, p. 103439, 2021.
- GHAFOURI, M. J. H. A novel discontinuous galerkin model for two-phase flow in porous media using an improved IMPES method. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, v. 26, n. 1, p. 284–306, 2016.
- HERINGER, J. D. S. et al. Simulação numérica de escoamento não-isotérmico em reservatórios de petróleo. Encontro Nacional de Modelagem Computacional, 2017.
- HERINGER, J. D. S. et al. Numerical simulation of non-isothermal flow in oil reservoirs using a two-equation model. *Coupled Systems Mechanics an International Journal*, v. 8, n. 2, p. 147–168, 2019.
- INGVAR, B. F. et al. The possible role and contribution of geothermal energy to the mitigation of climate change. In: . Lübeck, Germany: IPCC Scoping Meeting on Renewable Energy Sources, 2008.
- ISLAM, M. R. et al. *Advanced Petroleum Reservoir Simulation*. Trondheim, Norway: Wiley, 2010.
- JIANG, J.; TCHELEPI, H. Nonlinear acceleration of sequential fully implicit (sfi) method for coupled flow and transport in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 352, p. 246–275, 2019.
- KAVIANY, M. *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. New York, USA: Springer-Verlag New York Inc., 1991.
- KLEMETSDAL, O. S.; MOYNER, O.; LIE, K. L. Accelerating multiscale simulation of complex geomodels by use of dynamically adapted basis functions. *Computational Geosciences*, v. 24, p. 459–476, 2019.

- KUMAR, C. et al. Multiphase porous media model for intermittent microwave convective drying (IMCD) of food. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 104, p. 304–314, 2016.
- KUWAHARA, F.; SHIROTA, M.; NAKAYAMA, A. A numerical study of interfacial convective heat transfer coefficient in two-energy equation model for convection in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 44, n. 6, p. 1153–1159, 2001.
- LAMPE, V. *Modelling Fluid Flow and Heat Transport in Fractured Porous Media*. Dissertação (Mestrado) — University of Bergen, Noruega, 2013.
- LEE, J.; BABADAGLI, T. Mitigating greenhouse gas intensity through new generation techniques during heavy oil recovery. *Journal of Cleaner Production*, v. 286, p. 124980, 2021.
- LEVEQUE, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2002.
- LINDNER, F.; PFITZNER, M.; MUNDT, C. Multiphase, multicomponent flow in porous media with local thermal non-equilibrium in a multiphase mixture model. *Transport in Porous Media*, v. 112, p. 313–332, 2016.
- MANICHAND, R. *Análise do Desempenho do Aquecimento Eletromagnético na Recuperação de Reservatórios de Petróleo*. Dissertação (Mestrado) — UFRN, Natal/RN, Brasil, 2002.
- MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction With OpenFOAM and Matlab*. Switzerland: Springer, 2016.
- MOYLES, I. *Thermo-Viscous Fingering in Porous Media and In-Situ Soil Remediation*. Dissertação (Mestrado) — The Faculty of Graduate Studies, The University of British Columbia, 2011.
- MOYNE, C. et al. Thermal dispersion in porous media: one-equation model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 43, n. 20, p. 3853–3867, 2000.
- MOYNE, C.; SOUTO, H. A. Multi-scale approach for conduction heat transfer: one- and two-equation models. Part 1: theory. *Computational and Applied Mathematics*, v. 33, n. 1, p. 257–274, 2014.
- MOYNE, C.; SOUTO, H. A. Multi-scale approach for conduction heat transfer: one- and two-equation models. Part 2: results for a stratified medium. *Computational and Applied Mathematics*, v. 33, n. 2, p. 433–449, 2014.
- NICK, H. M. et al. Reactive dispersive contaminant transport in coastal aquifers: Numerical simulation of a reactive Henry problem. *Journal of Contaminant Hydrology*, v. 145, p. 90–104, 2013.
- ÖZGÜMÜS, T. et al. Thermal dispersion in porous media—a review on the experimental studies for packed beds. *Applied Mechanics Reviews*, v. 65, n. 3, 2013.

- PEDRAS, M. H. J.; LEMOS, M. J. S. de. Thermal dispersion in porous media as a function of the solid–fluid conductivity ratio. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 51, p. 5359–5367, 2008.
- PETIT, F.; FICHOT, F.; QUINTARD, M. Écoulement diphasique en milieu poreux : modèle à non-équilibre local. *International Journal of Thermal Science*, v. 38, p. 239–249, 1999.
- PETITFRERE, M. *EOS based simulations of thermal and compositional flows in porous media*. Tese (Doutorado) — Université de Pau et des Pays de l'Adours, 2014.
- PLETCHER, R.; TANNEHILL, J.; ANDERSON, D. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. New York, USA: 3rd ed., CRC Press, 2013.
- QIN, Y. et al. Experimental studies on effects of temperature on oil and water relative permeability in heavy-oil reservoirs. *Scientific Reports*, v. 8, n. 12530, 2018.
- QUINTARD, M.; WHITAKER, S. Two-phase flow in heterogeneous porous media: The method of large-scale averaging. *Transport in Porous Media*, v. 3, p. 357–413, 1988.
- RANGEL-GERMAN, E. R. et al. Electrical-heating-assisted recovery for heavy oil. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 45, p. 213–231, 2004.
- ROSA, A.; CARVALHO, R.; XAVIER, J. *Engenharia de reservatórios de petróleo*. [S.l.]: Interciência, 2006.
- ROUSSET, M. *Reduced-order modeling for thermal simulation*. Dissertação (Mestrado) — University of Stanford, Stanford, USA, 2010.
- ROUSSET, M. A. H. et al. Reduced-order modeling for thermal recovery processes. *Computational Geosciences*, p. 401–415, 2014.
- ROY, T. et al. A block preconditioner for non-isothermal flow in porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 395, p. 636–652, 2019.
- ROY, T. et al. A constrained pressure-temperature residual (CPTR) method for non-isothermal multiphase flow in porous media. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 42, n. 4, p. B1014–B1040, 2020.
- SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2. ed. Philadelphia: SIAM, 2003.
- SIYAVASHI, M. et al. Three-dimensional streamline-based simulation of non-isothermal two-phase flow in heterogeneous porous media. *Computers & Fluids*, v. 103, n. 2, p. 116–131, 2014.
- SIVAKUMAR, P. et al. Electromagnetic heating, an eco-friendly method to enhance heavy oil production: A review of recent advancements. *Environmental Technology & Innovation*, v. 20, p. 101100, 2020.
- VENNEMO, S. B. *Multiscale Simulation of Thermal Flow in Porous Media*. Dissertação (Mestrado) — Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway, 2016.

WEI, H.; BAO, H.; RUAN, X. Machine learning prediction of thermal transport in porous media with physics-based descriptors. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 160, p. 120176, 2020.

WERNECK, L. F. et al. An OpenMP parallel implementation using a coprocessor for numerical simulation of oil reservoirs. *Computational and Applied Mathematics*, v. 38, n. 33, 2019.

WHITAKER, S. *The Method of Volume Average. Theory and Applications of Transport in Porous Media*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1999.

WU, Y. *Multiphase Fluid Flow in Porous and Fractured Reservoirs*. USA: Gulf Professional Publishing - Elsevier, 2016.

YANG, C.; NAKAYAMA, A. A synthesis of tortuosity and dispersion in effective thermal conductivity of porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 53, p. 3222–3230, 2010.

APÊNDICE – Obtenção da Equação Governante Macroscópica para o Problema da Transferência de Calor

Equações Governantes Microscópicas

O ponto de partida para a obtenção da equação macroscópica que descreve a transferência de calor no meio poroso, na escala de laboratório, são as equações que governam o fenômeno físico na escala microscópica (ou dos poros). Em se tratando da transferência de calor, desprezando-se o termo de dissipação viscosa, a equação de energia escrita em termos da temperatura é dada por (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002)

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt}$$

onde ρ é massa específica, c_p a capacidade térmica a pressão constante e k a condutividade térmica. Para um escoamento incompressível, a massa específica é constante e o último termo é nulo. Entretanto, como considera-se o caso de um escoamento ligeiramente compressível, também é admitido que ele possa ser desconsiderado em relação aos demais.

Portanto, a transferência de calor na escala dos poros, para as três fases, será governada pelas seguintes equações:

$$(\rho c_p)_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial t} + (\rho c_p)_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla T_\beta = \nabla \cdot (k_\beta \nabla T_\beta)$$

$$(\rho c_p)_\gamma \frac{\partial T_\gamma}{\partial t} + (\rho c_p)_\gamma \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla T_\gamma = \nabla \cdot (k_\beta \nabla T_\gamma)$$

$$(\rho c_p)_\sigma \frac{\partial T_\sigma}{\partial t} = \nabla \cdot (k_\sigma \nabla T_\sigma)$$

e as condições de contorno impostas nas interfaces das fases são, em termos das temperaturas,

$$T_\beta = T_\gamma \quad \text{em } A_{\beta\gamma}$$

$$T_\beta = T_\sigma \quad \text{em } A_{\beta\sigma}$$

$$T_\gamma = T_\sigma \quad \text{em } A_{\gamma\sigma}$$

enquanto que, para os fluxos de calor,

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot k_\beta \nabla T_\beta = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot k_\gamma \nabla T_\gamma \quad \text{em } A_{\beta\gamma}$$

$$\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot k_\beta \nabla T_\beta = \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot k_\sigma \nabla T_\sigma \quad \text{em } A_{\beta\sigma}$$

$$\mathbf{n}_{\gamma\sigma} \cdot k_\gamma \nabla T_\gamma = \mathbf{n}_{\gamma\sigma} \cdot k_\sigma \nabla T_\sigma \quad \text{em } A_{\gamma\sigma}$$

onde $A_{\beta\sigma}$, $A_{\gamma\sigma}$ representam a superfície de separação entre as fases fluidas β e γ e a superfície da fase sólida (σ) e $A_{\beta\gamma}$ a superfície de separação entre as fases fluidas. Além dessas condições, devem ser fornecidas também as condições iniciais para as temperaturas das fases e de contorno nas fronteiras de entrada e saída $A_{\beta e}$ e $A_{\gamma e}$ do Volume Elementar Representativo (VER) (WHITAKER, 1999).

Entretanto, no caso da capacidade térmica ser constante, as equações governantes para as fases fluidas podem ser reescritas na forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\beta c_{p\beta} T_\beta) + \nabla \cdot (\rho_\beta c_{p\beta} T_\beta \mathbf{v}_\beta) = \nabla \cdot (k_\beta \nabla T_\beta)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\gamma c_{p\gamma} T_\gamma) + \nabla \cdot (\rho_\gamma c_{p\gamma} T_\gamma \mathbf{v}_\gamma) = \nabla \cdot (k_\beta \nabla T_\gamma)$$

em função da conservação da massa, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\beta c_{p\beta} T_\beta) + \nabla \cdot (\rho_\beta c_{p\beta} T_\beta \mathbf{v}_\beta) = c_{p\beta} T_\beta \underbrace{\left[\frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\beta \mathbf{v}_\beta) \right]}_{=0}$$

$$\begin{aligned}
& +\rho_\beta \left[\frac{\partial}{\partial t}(c_{p\beta}T_\beta) + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla(c_{p\beta}T_\beta) \right] \\
& =(\rho c_p)_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial t} + (\rho c_p)_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla T_\beta
\end{aligned}$$

e, de forma similar,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\gamma c_{p\gamma}T_\gamma) + \nabla \cdot (\rho_\gamma c_{p\gamma}T_\gamma \mathbf{v}_\gamma) & =c_{p\gamma}T_\gamma \left[\underbrace{\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\gamma \mathbf{v}_\gamma)}_{=0} \right] \\
& +\rho_\gamma \left[\frac{\partial}{\partial t}(c_{p\gamma}T_\gamma) + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla(c_{p\gamma}T_\gamma) \right] \\
& =(\rho c_p)_\gamma \frac{\partial T_\gamma}{\partial t} + (\rho c_p)_\gamma \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla T_\gamma
\end{aligned}$$

O Método da Média Volumétrica

Inicia-se o desenvolvimento pela introdução das definições da média volumétrica ([WHITAKER, 1999](#))

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \psi_\beta dV$$

e da média volumétrica intrínseca

$$\langle \psi \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{V_\beta} \psi_\beta dV$$

de uma dada função ψ .

Em seguida, aborda-se um resultado fundamental para a aplicação do Método da Média Volumétrica que são as duas versões do teorema da média volumétrica para um sistema trifásico ([KAVIANY, 1991](#))

$$\langle \nabla \psi_\beta \rangle = \nabla \langle \psi_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \psi_\beta \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \psi_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA$$

ou ainda,

$$\langle \nabla \cdot \psi_\beta \rangle = \nabla \cdot \langle \psi_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \psi_\beta \cdot \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \psi_\beta \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA$$

Temperatura média do meio

A partir da definição da entalpia por unidade de massa pode-se definir uma entalpia média para o meio na forma (MOYNE et al., 2000)

$$\langle \rho H \rangle = \epsilon_\beta \rho_\beta \langle H \rangle^\beta + \epsilon_\gamma \rho_\gamma \langle H \rangle^\gamma + \epsilon_\sigma \rho_\sigma \langle H \rangle^\sigma$$

onde ϵ_α ($\alpha = \beta, \gamma$ ou σ) representa a respectiva porosidade da fase e

$$\langle \rho \rangle = \epsilon_\beta \rho_\beta + \epsilon_\gamma \rho_\gamma + \epsilon_\sigma \rho_\sigma$$

Agora, da relação termodinâmica $H = c_p T$ pode-se chegar a uma equação para a temperatura média do meio

$$\langle \rho c_p \rangle \langle T \rangle = \epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle T_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle T_\gamma \rangle^\gamma + \epsilon_\sigma (\rho c_p)_\sigma \langle T_\sigma \rangle^\sigma \quad (25)$$

Como no caso do equilíbrio térmico local (não assumido no presente desenvolvimento) tem-se que $\langle T \rangle^\beta = \langle T \rangle^\gamma = \langle T \rangle^\sigma$, chega-se a uma expressão para a capacidade térmica média do meio na forma

$$\langle \rho c_p \rangle = \epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma + \epsilon_\sigma (\rho c_p)_\sigma$$

Equações macroscópicas

Aplicando o método da média volumétrica às equações que governam a transferência de calor entre as três fases, considerando-se que a massa específica não varia para distâncias da ordem do diâmetro do VER (embora ela varie espacialmente na escala macroscópica), que o meio é homogêneo e o Teorema Geral de Transporte ([QUINTARD; WHITAKER, 1988](#))

$$\left\langle \frac{\partial \psi_\beta}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_\beta \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \psi_\beta \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA$$

onde o vetor \mathbf{w} indica a velocidade da interface de separação, obtém-se para a fase β

$$\begin{aligned} \epsilon_\beta \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\beta \langle T_\beta \rangle^\beta] + \nabla \cdot [(\rho c_p)_\beta \langle T_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle] &= \nabla \cdot (\epsilon_\beta k_\beta \nabla \langle T_\beta \rangle^\beta) \\ &- \frac{(\rho c_p)_\beta}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta (\mathbf{w} - \mathbf{v}_\beta) \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \\ &+ \nabla \cdot \left[k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} T_\beta \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right) \right] \\ &+ k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla T_\beta dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \nabla T_\beta dA \right) \end{aligned}$$

enquanto que para a fase γ tem-se

$$\begin{aligned} \epsilon_\gamma \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\gamma \langle T_\gamma \rangle^\gamma] + \nabla \cdot [(\rho c_p)_\gamma \langle T_\gamma \mathbf{v}_\gamma \rangle] &= \nabla \cdot (\epsilon_\gamma k_\gamma \nabla \langle T_\gamma \rangle^\gamma) \\ &- \frac{(\rho c_p)_\gamma}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} T_\gamma (\mathbf{w} - \mathbf{v}_\gamma) \cdot \mathbf{n}_{\gamma\beta} dA \\ &+ \nabla \cdot \left[k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} T_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} T_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\beta} dA \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \mathbf{n}_{\gamma\sigma} \cdot \nabla T_\gamma dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot \nabla T_\gamma dA \right)$$

e, finalmente, para a fase σ

$$\begin{aligned} \epsilon_\sigma \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\sigma \langle T_\sigma \rangle^\sigma] &= \nabla \cdot (\epsilon_\sigma k_\sigma \nabla \langle T_\sigma \rangle^\sigma) \\ &+ \nabla \cdot \left[k_\sigma \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\beta}} T_\sigma \mathbf{n}_{\sigma\beta} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} T_\sigma \mathbf{n}_{\sigma\gamma} dA \right) \right] \\ &+ k_\sigma \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\beta}} \mathbf{n}_{\sigma\beta} \cdot \nabla T_\sigma dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} \mathbf{n}_{\sigma\gamma} \cdot \nabla T_\sigma dA \right) \end{aligned}$$

Na sequência, introduz-se a decomposição espacial para as velocidades

$$\mathbf{v}_\beta = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta$$

$$\mathbf{v}_\gamma = \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle + \tilde{\mathbf{v}}_\gamma$$

Portanto, considerando a incompressibilidade dos fluidos, a condição de não deslizamento na superfície sólida e que $\langle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \rangle = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ e $\langle \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \rangle = \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma$, pode-se reescrever os termos advectivos como:

$$\begin{aligned} \epsilon_\beta \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\beta \langle T_\beta \rangle^\beta] &+ \nabla \cdot \left[\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \left(\langle T_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \langle T_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) \right] = \nabla \cdot (\epsilon_\beta k_\beta \nabla \langle T_\beta \rangle^\beta) \\ &- \frac{(\rho c_p)_\beta}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta (\mathbf{w} - \mathbf{v}_\beta) \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA + \nabla \cdot \left[k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} T_\beta \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right) \right] \\ &+ k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla T_\beta dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \nabla T_\beta dA \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \epsilon_\gamma \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\gamma \langle T_\gamma \rangle^\gamma] + \nabla \cdot [\epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma (\langle T_\gamma \rangle^\gamma \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + \langle T_\gamma \tilde{\mathbf{v}}_\gamma \rangle^\gamma)] = \nabla \cdot (\epsilon_\gamma k_\gamma \nabla \langle T_\gamma \rangle^\gamma) \\
& - \frac{(\rho c_p)_\gamma}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} T_\gamma (\mathbf{w} - \mathbf{v}_\gamma) \cdot \mathbf{n}_{\gamma\beta} dA + \nabla \cdot \left[k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} T_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} T_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\beta} dA \right) \right] \\
& + k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \mathbf{n}_{\gamma\sigma} \cdot \nabla T_\gamma dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot \nabla T_\gamma dA \right)
\end{aligned}$$

Prosseguindo, define-se as flutuações espaciais da temperatura em relação à temperatura média do meio

$$T_\beta = \langle T \rangle + \tilde{T}_\beta$$

$$T_\gamma = \langle T \rangle + \tilde{T}_\gamma$$

$$T_\sigma = \langle T \rangle + \tilde{T}_\sigma$$

que resulta na seguinte igualdade, levando-se em conta a Equação (25),

$$\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle \tilde{T}_\gamma \rangle^\gamma + \epsilon_\sigma (\rho c_p)_\sigma \langle \tilde{T}_\sigma \rangle^\sigma = 0$$

Considerando-se, inicialmente, o caso da fase β e substituindo-se a decomposição espacial para a temperatura na sua correspondente equação média

$$\begin{aligned}
& \epsilon_\beta \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\beta \langle T \rangle] + \nabla \cdot [\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta] = \nabla \cdot (\epsilon_\beta k_\beta \nabla \langle T \rangle) \\
& - \frac{(\rho c_p)_\beta}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta (\mathbf{w} - \mathbf{v}_\beta) \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \nabla \cdot \left[k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \langle T \rangle \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \langle T \rangle \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right) \right] \\
& + \nabla \cdot \left[k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \tilde{T}_\beta \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \tilde{T}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right) \right] \\
& + k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \langle T \rangle dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \nabla \langle T \rangle dA \right) \\
& + k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \tilde{T}_\beta dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \nabla \tilde{T}_\beta dA \right) \\
& - \nabla \cdot \left[\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \left(\langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \langle \tilde{T}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) \right] - \epsilon_\beta \frac{\partial}{\partial t} \left[(\rho c_p)_\beta \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta \right] + \nabla \cdot \left(\epsilon_\beta k_\beta \nabla \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta \right)
\end{aligned}$$

Em seguida, algumas simplificações podem ser feitas sabendo-se que $\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta = 0$, o meio é homogêneo e que $\langle T \rangle$ e $\nabla \langle T \rangle$ podem ser considerados constantes em relação às integrações sobre $A_{\beta\sigma}$ e $A_{\beta\gamma}$

$$\begin{aligned}
\epsilon_\beta \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\beta \langle T \rangle] + \nabla \cdot \left[\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right] &= \nabla \cdot (\epsilon_\beta k_\beta \nabla \langle T \rangle) \\
& - \frac{(\rho c_p)_\beta}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta (\mathbf{w} - \mathbf{v}_\beta) \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \\
& + \nabla \cdot \left[k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \tilde{T}_\beta \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \tilde{T}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right) \right] \\
& + k_\beta \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \tilde{T}_\beta dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \nabla \tilde{T}_\beta dA \right) \\
& - \epsilon_\beta \nabla \cdot \left[(\rho c_p)_\beta \langle \tilde{T}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right]
\end{aligned}$$

$$-\epsilon_\beta \frac{\partial}{\partial t} \left[(\rho c_p)_\beta \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta \right] + \nabla \cdot \left(\epsilon_\beta k_\beta \nabla \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta \right)$$

Procedimentos similares podem ser aplicados às demais fases

$$\epsilon_\gamma \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\gamma \langle T \rangle] + \nabla \cdot [\epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma] = \nabla \cdot (\epsilon_\gamma k_\gamma \nabla \langle T \rangle)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{(\rho c_p)_\gamma}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} T_\gamma (\mathbf{w} - \mathbf{v}_\gamma) \cdot \mathbf{n}_{\gamma\beta} dA \\ & + \nabla \cdot \left[k_\gamma \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \tilde{T}_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} \tilde{T}_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\beta} dA \right) \right] \\ & + k_\gamma \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \mathbf{n}_{\gamma\sigma} \cdot \nabla \tilde{T}_\gamma dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot \nabla \tilde{T}_\gamma dA \right) \\ & - \nabla \cdot [\epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle \tilde{T}_\gamma \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma] \\ & - \epsilon_\gamma \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\gamma \langle \tilde{T}_\gamma \rangle^\gamma] + \nabla \cdot (\epsilon_\gamma k_\gamma \nabla \langle \tilde{T}_\gamma \rangle) \end{aligned}$$

e

$$\epsilon_\sigma \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\sigma \langle T \rangle] = \nabla \cdot (\epsilon_\sigma k_\sigma \nabla \langle T \rangle)$$

$$\begin{aligned} & + \nabla \cdot \left[k_\sigma \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} \tilde{T}_\sigma \mathbf{n}_{\sigma\gamma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\beta}} \tilde{T}_\sigma \mathbf{n}_{\sigma\beta} dA \right) \right] \\ & + k_\sigma \left(\frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} \mathbf{n}_{\sigma\gamma} \cdot \nabla \tilde{T}_\sigma dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\beta}} \mathbf{n}_{\sigma\beta} \cdot \nabla \tilde{T}_\sigma dA \right) \\ & - \epsilon_\sigma \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\sigma \langle \tilde{T}_\sigma \rangle^\sigma] + \nabla \cdot (\epsilon_\sigma k_\sigma \nabla \langle \tilde{T}_\sigma \rangle) \end{aligned}$$

Concluindo o desenvolvimento, adiciona-se essas últimas três equações, levando-se

em consideração as condições de contorno impostas nas interfaces das três fases,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho c_p \rangle \langle T \rangle] + \nabla \cdot \left(\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \\
&= \nabla \cdot [(\epsilon_\beta k_\beta + \epsilon_\gamma k_\gamma + \epsilon_\sigma k_\sigma) \nabla \langle T \rangle] \\
& - \frac{(\rho c_p)_\beta}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta (\mathbf{w} - \mathbf{v}_\beta) \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA - \frac{(\rho c_p)_\gamma}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} T_\gamma (\mathbf{w} - \mathbf{v}_\gamma) \cdot \mathbf{n}_{\gamma\beta} dA \\
& + \nabla \cdot \left(\frac{k_\beta - k_\sigma}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \tilde{T}_\beta \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA \right) + \nabla \cdot \left(\frac{k_\gamma - k_\sigma}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \tilde{T}_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\sigma} dA \right) \\
& + \nabla \cdot \left(\frac{k_\beta - k_\gamma}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \tilde{T}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right) - \epsilon_\beta \nabla \cdot \left[(\rho c_p)_\beta \langle \tilde{T}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right] - \epsilon_\gamma \nabla \cdot \left[(\rho c_p)_\gamma \langle \tilde{T}_\gamma \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle \tilde{T}_\gamma \rangle^\gamma + \epsilon_\sigma (\rho c_p)_\sigma \langle \tilde{T}_\sigma \rangle^\sigma \right) \\
& + \nabla \cdot \left(\epsilon_\beta k_\beta \nabla \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma k_\gamma \nabla \langle \tilde{T}_\gamma \rangle^\gamma + \epsilon_\sigma k_\sigma \nabla \langle \tilde{T}_\sigma \rangle^\sigma \right)
\end{aligned}$$

Agora, sabendo-se que $\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle \tilde{T}_\gamma \rangle^\gamma + \epsilon_\sigma (\rho c_p)_\sigma \langle \tilde{T}_\sigma \rangle^\sigma = 0$ e que não há transporte de massa através das interfaces das fases (fluidos imiscíveis), $(\mathbf{w} - \mathbf{v}_\beta) \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = (\mathbf{w} - \mathbf{v}_\gamma) \cdot \mathbf{n}_{\gamma\beta} = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho c_p \rangle \langle T \rangle] + \nabla \cdot \left(\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \\
&= \nabla \cdot [(\epsilon_\beta k_\beta + \epsilon_\gamma k_\gamma + \epsilon_\sigma k_\sigma) \nabla \langle T \rangle] \\
& + \nabla \cdot \left(\frac{k_\beta - k_\sigma}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \tilde{T}_\beta \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA \right) + \nabla \cdot \left(\frac{k_\gamma - k_\sigma}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \tilde{T}_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\sigma} dA \right) \\
& + \nabla \cdot \left(\frac{k_\beta - k_\gamma}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \tilde{T}_\gamma \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right) - \epsilon_\beta \nabla \cdot \left[(\rho c_p)_\beta \langle \tilde{T}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right] - \epsilon_\gamma \nabla \cdot \left[(\rho c_p)_\gamma \langle \tilde{T}_\gamma \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right]
\end{aligned}$$

$$+\nabla \cdot \left(\epsilon_\beta k_\beta \nabla \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma k_\gamma \nabla \langle \tilde{T}_\gamma \rangle^\gamma + \epsilon_\sigma k_\sigma \nabla \langle \tilde{T}_\sigma \rangle^\sigma \right) \quad (26)$$

Problema de fechamento

Deriva-se, em seguida, as equações que governam as variações das flutuações de temperatura. Trata-se, inicialmente, do problema associado à fase β e ele é obtido mediante a substituição da decomposição espacial nas equações governantes e de contorno apresentadas anteriormente para a escala dos poros, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\beta \tilde{T}_\beta] + \nabla \cdot [(\rho c_p)_\beta \tilde{T}_\beta \mathbf{v}_\beta] - \nabla \cdot (k_\beta \nabla \tilde{T}_\beta) = & - \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\beta \langle T \rangle] - \nabla \cdot [(\rho c_p)_\beta \langle T \rangle \mathbf{v}_\beta] \\ & + \nabla \cdot (k_\beta \nabla \langle T \rangle) \end{aligned}$$

acrescida das condições de contorno

$$\tilde{T}_\beta = \tilde{T}_\gamma \quad \text{em } A_{\beta\gamma}$$

$$\tilde{T}_\beta = \tilde{T}_\sigma \quad \text{em } A_{\beta\sigma}$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot k_\beta \nabla \tilde{T}_\beta = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot k_\gamma \nabla \tilde{T}_\gamma + \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (k_\gamma - k_\beta) \nabla \langle T \rangle \quad \text{em } A_{\beta\gamma}$$

$$\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot k_\beta \nabla \tilde{T}_\beta = \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot k_\sigma \nabla \tilde{T}_\sigma + \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (k_\sigma - k_\beta) \nabla \langle T \rangle \quad \text{em } A_{\beta\sigma}$$

Aqui, considera-se que a escala de tempo associada às variações das flutuações é muito inferior àquela associada às variações temporais na escala macroscópica. Como de costume, a separação das escalas espaciais também é válida: as escalas microscópicas características ℓ_β , ℓ_γ e ℓ_σ são muito menores que o comprimento macroscópico característico L (WHITAKER, 1999).

Portanto, em função da hipótese da separação de escalas, admite-se o problema de

fechamento em regime permanente,

$$\nabla \cdot [(\rho c_p)_\beta \tilde{T}_\beta \mathbf{v}_\beta] - \nabla \cdot (k_\beta \nabla \tilde{T}_\beta) = -\frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_\beta \langle T \rangle] - \nabla \cdot [(\rho c_p)_\beta \langle T \rangle \mathbf{v}_\beta] + \nabla \cdot (k_\beta \nabla \langle T \rangle)$$

Dando continuidade, utiliza-se a Equação (26) para se substituir o termo contendo a derivada parcial em relação ao tempo

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\rho c_p)_\beta \tilde{T}_\beta \mathbf{v}_\beta] &= \nabla \cdot (k_\beta \nabla \tilde{T}_\beta) \\ &+ \frac{(\rho c_p)_\beta}{\langle \rho c_p \rangle} \left[\nabla \cdot \left(\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \right] \\ &- \frac{(\rho c_p)_\beta}{\langle \rho c_p \rangle} \left\{ \nabla \cdot [(\epsilon_\beta k_\beta + \epsilon_\gamma k_\gamma + \epsilon_\sigma k_\sigma) \nabla \langle T \rangle] \right\} \\ &- \frac{(\rho c_p)_\beta}{\langle \rho c_p \rangle} \left[\nabla \cdot \left(\frac{k_\beta - k_\sigma}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \tilde{T}_\beta \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA \right) \right] \\ &- \frac{(\rho c_p)_\beta}{\langle \rho c_p \rangle} \left[\nabla \cdot \left(\frac{k_\gamma - k_\sigma}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \tilde{T}_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\sigma} dA \right) \right] \\ &- \frac{(\rho c_p)_\beta}{\langle \rho c_p \rangle} \left[\nabla \cdot \left(\frac{k_\beta - k_\gamma}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \tilde{T}_\gamma \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right) \right] \\ &+ \frac{(\rho c_p)_\beta}{\langle \rho c_p \rangle} \left[\epsilon_\beta \nabla \cdot (\rho c_p)_\beta \langle \tilde{T}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \epsilon_\gamma \nabla \cdot (\rho c_p)_\gamma \langle \tilde{T}_\gamma \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right] \\ &- \frac{(\rho c_p)_\beta}{\langle \rho c_p \rangle} \left[\nabla \cdot \left(\epsilon_\beta k_\beta \nabla \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\gamma + \epsilon_\gamma k_\gamma \nabla \langle \tilde{T}_\gamma \rangle^\gamma + \epsilon_\sigma k_\sigma \nabla \langle \tilde{T}_\sigma \rangle^\sigma \right) \right] \\ &- \nabla \cdot [(\rho c_p)_\beta \mathbf{v}_\beta \langle T \rangle] + \nabla \cdot (k_\beta \nabla \langle T \rangle) \end{aligned}$$

Agora, da análise da estimativa da ordem de grandeza dos diferentes termos presentes nessa equação, mostra-se que, sendo válida a hipótese da separação de escalas, vários termos podem ser negligenciados (MOYNE et al., 2000), de forma que obtém-se

$$\begin{aligned}
(\rho c_p)_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{T}_\beta &= \nabla \cdot (k_\beta \nabla \tilde{T}_\beta) \\
&\quad - \nabla \cdot \left\{ (\rho c_p)_\beta \left[\mathbf{v}_\beta - \frac{1}{\langle \rho c_p \rangle} \left(\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \right] \langle T \rangle \right\}
\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\tilde{T}_\beta = \tilde{T}_\gamma \quad \text{em } A_{\beta\gamma}$$

$$\tilde{T}_\beta = \tilde{T}_\sigma \quad \text{em } A_{\beta\sigma}$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot k_\beta \nabla \tilde{T}_\beta = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot k_\gamma \nabla \tilde{T}_\gamma + \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (k_\gamma - k_\beta) \nabla \langle T \rangle \quad \text{em } A_{\beta\gamma}$$

$$\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot k_\beta \nabla \tilde{T}_\beta = \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot k_\sigma \nabla \tilde{T}_\sigma + \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (k_\sigma - k_\beta) \nabla \langle T \rangle \quad \text{em } A_{\beta\sigma}$$

Um raciocínio semelhante pode ser aplicado à fase γ , de modo que

$$\begin{aligned}
(\rho c_p)_\gamma \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \tilde{T}_\gamma &= \nabla \cdot (k_\gamma \nabla \tilde{T}_\gamma) \\
&\quad - \nabla \cdot \left\{ (\rho c_p)_\gamma \left[\mathbf{v}_\gamma - \frac{1}{\langle \rho c_p \rangle} \left(\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \right] \langle T \rangle \right\}
\end{aligned}$$

além das condições de contorno nas interfaces

$$\tilde{T}_\gamma = \tilde{T}_\beta \quad \text{em } A_{\gamma\beta}$$

$$\tilde{T}_\gamma = \tilde{T}_\sigma \quad \text{em } A_{\gamma\sigma}$$

$$\mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot k_\gamma \nabla \tilde{T}_\gamma = \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot k_\beta \nabla \tilde{T}_\beta + \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot (k_\beta - k_\gamma) \nabla \langle T \rangle \quad \text{em } A_{\gamma\beta}$$

$$\mathbf{n}_{\gamma\sigma} \cdot k_\gamma \nabla \tilde{T}_\gamma = \mathbf{n}_{\gamma\sigma} \cdot k_\sigma \nabla \tilde{T}_\sigma + \mathbf{n}_{\gamma\sigma} \cdot (k_\sigma - k_\gamma) \nabla \langle T \rangle \quad \text{em } A_{\gamma\sigma}$$

Procedendo-se de forma análoga em relação à fase σ

$$0 = \nabla \cdot (k_\gamma \nabla \tilde{T}_\gamma) + \frac{(\rho c_p)_\sigma}{\langle \rho c_p \rangle} \left[\nabla \cdot \left(\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \langle T \rangle \right]$$

No trabalho de [Moyné et al. \(2000\)](#), que considerou o problema monofásico e incompressível, pode-se ver que nesse caso os termos fonte volumétricos e superficiais são proporcionais a $\nabla \langle T \rangle$. Então, supondo o meio poroso como sendo espacialmente periódico, as seguintes proposições são feitas:

$$\tilde{T}_\beta = \mathbf{f} \cdot \nabla \langle T \rangle$$

$$\tilde{T}_\gamma = \mathbf{g} \cdot \nabla \langle T \rangle$$

$$\tilde{T}_\sigma = \mathbf{h} \cdot \nabla \langle T \rangle$$

Modelo a Uma Equação

Antes de se obter a forma final da equação macroscópica para o modelo a uma equação, sem impor o equilíbrio térmico local, desconsidera-se as contribuições dos termos de terceira ordem ([MOYNE et al., 2000](#)),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho c_p \rangle \langle T \rangle + \nabla \cdot \left(\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \\ & = \nabla \cdot [(\epsilon_\beta k_\beta + \epsilon_\gamma k_\gamma + \epsilon_\sigma k_\sigma) \nabla \langle T \rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \nabla \cdot \left(\frac{k_\beta - k_\sigma}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \tilde{T}_\beta \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA \right) + \nabla \cdot \left(\frac{k_\gamma - k_\sigma}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \tilde{T}_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\sigma} dA \right) \\
& + \nabla \cdot \left(\frac{k_\beta - k_\gamma}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \tilde{T}_\gamma \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right) - \epsilon_\beta \nabla \cdot \left[(\rho c_p)_\beta \langle \tilde{T}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right] - \epsilon_\gamma \nabla \cdot \left[(\rho c_p)_\gamma \langle \tilde{T}_\gamma \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right]
\end{aligned}$$

Em seguida, substitui-se as soluções propostas para os problemas de fechamento nessa equação macroscópica. Feitas todas as contas e tendo sido introduzido os tensores efetivos,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho c_p \rangle \langle T \rangle] + \nabla \cdot \left(\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \langle T \rangle \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) = \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \langle T \rangle)$$

onde \mathbf{K} é o tensor efetivo de dispersão térmica dado por

$$\mathbf{K} = (\epsilon_\beta k_\beta + \epsilon_\gamma k_\gamma + \epsilon_\sigma k_\sigma) \mathbf{I} + \epsilon_\beta k_\beta \boldsymbol{\tau}_\beta + \epsilon_\gamma k_\gamma \boldsymbol{\tau}_\gamma + \epsilon_\sigma k_\sigma \boldsymbol{\tau}_\sigma + \epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \mathbf{D}_\beta + \epsilon_\gamma (\rho c_p)_\gamma \mathbf{D}_\gamma$$

e ela representa a forma final utilizada neste trabalho. Nessa última equação, foram definidos os tensores de segunda ordem tortuosidade

$$\boldsymbol{\tau}_\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \otimes \mathbf{f} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \otimes \mathbf{g} dA$$

$$\boldsymbol{\tau}_\gamma = \frac{1}{V_\gamma} \int_{A_{\gamma\sigma}} \mathbf{n}_{\gamma\sigma} \otimes \mathbf{g} dA + \frac{1}{V_\gamma} \int_{A_{\gamma\beta}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \otimes \mathbf{g} dA$$

$$\boldsymbol{\tau}_\sigma = \frac{1}{V_\sigma} \int_{A_{\sigma\beta}} \mathbf{n}_{\sigma\beta} \otimes \mathbf{f} dA + \frac{1}{V_\sigma} \int_{A_{\sigma\gamma}} \mathbf{n}_{\sigma\gamma} \otimes \mathbf{g} dA$$

e de dispersão hidrodinâmica

$$\mathbf{D}_\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{V_\beta} \mathbf{v}_\beta \otimes \mathbf{f} dV$$

$$\mathbf{D}_\gamma = \frac{1}{V_\gamma} \int_{V_\gamma} \mathbf{v}_\gamma \otimes \mathbf{g} \, dV$$

Escoamento monofásico

Os tensores de tortuosidade e dispersão foram escritos de modo a se obter diretamente o modelo a uma equação para o problema do escoamento monofásico quando tomamos $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v}_\gamma = \mathbf{0}$. Assim sendo, antes de se concluir, mostra-se que fazendo $T_\gamma=0$, $\mathbf{v}_\gamma=0$, $\epsilon_\gamma=0$, $(\rho c_p)_\gamma=0$ e $k_\gamma=0$, nas equações apresentadas anteriormente, obtém-se para a equação efetiva para um escoamento monofásico incompressível

$$\begin{aligned} \langle \rho c_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \nabla \langle T \rangle &= \nabla \cdot [(\epsilon_\beta k_\beta + \epsilon_\sigma k_\sigma) \nabla \langle T \rangle] \\ &+ \nabla \cdot \left(\frac{k_\beta - k_\sigma}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \tilde{T}_\beta \mathbf{n}_{\beta\sigma} \, dA \right) \\ &- \epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \nabla \cdot \langle \tilde{T}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ &+ \nabla \cdot \left(\epsilon_\beta k_\beta \nabla \langle \tilde{T}_\beta \rangle^\beta + \epsilon_\sigma k_\sigma \nabla \langle \tilde{T}_\sigma \rangle^\sigma \right) \end{aligned}$$

enquanto que dos problemas de fechamento resulta, respectivamente,

$$\begin{aligned} (\rho c_p)_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{T}_\beta &= \nabla \cdot (k_\beta \nabla \tilde{T}_\beta) - (\rho c_p)_\beta \left[\mathbf{v}_\beta - \frac{1}{\langle \rho c_p \rangle} (\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) \right] \cdot \nabla \langle T \rangle \\ 0 &= \nabla \cdot (k_\gamma \nabla \tilde{T}_\gamma) + \frac{(\rho c_p)_\sigma}{\langle \rho c_p \rangle} \left[\epsilon_\beta (\rho c_p)_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right] \cdot \nabla \langle T \rangle \end{aligned}$$

e, ainda, tem-se como condições de contorno nas interfaces,

$$\tilde{T}_\beta = \tilde{T}_\sigma \quad \text{em } A_{\beta\sigma}$$

$$\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot k_{\beta} \nabla \tilde{T}_{\beta} = \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot k_{\sigma} \nabla \tilde{T}_{\sigma} + \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (k_{\sigma} - k_{\beta}) \nabla \langle T \rangle \quad \text{em } A_{\beta\sigma}$$

Por último, mas não menos importante, a forma final do tensor efetivo de dispersão fica reduzida a

$$\mathbf{K} = (\epsilon_{\beta} k_{\beta} + \epsilon_{\sigma} k_{\sigma}) \mathbf{I} + \epsilon_{\beta} k_{\beta} \boldsymbol{\tau}_{\beta} + \epsilon_{\sigma} k_{\sigma} \boldsymbol{\tau}_{\sigma} - \epsilon_{\beta} (\rho c_p)_{\beta} \mathbf{D}_{\beta}$$

Nessa última equação, estão presentes os tensores de segunda ordem tortuosidade

$$\boldsymbol{\tau}_{\beta} = \frac{1}{V_{\beta}} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \otimes \mathbf{f} \, dA$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\sigma} = \frac{1}{V_{\sigma}} \int_{A_{\sigma\beta}} \mathbf{n}_{\sigma\beta} \otimes \mathbf{f} \, dA$$

e de dispersão hidrodinâmica

$$\mathbf{D}_{\beta} = \frac{1}{V_{\beta}} \int_{V_{\beta}} \mathbf{v}_{\beta} \otimes \mathbf{f} \, dV$$

que correspondem, exatamente, aos resultados obtidos para o modelo a uma equação desenvolvido em [Moyne et al. \(2000\)](#).