



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Faculdade de Engenharia

José Ricardo da Silva Cerqueira Junior


**SIMULAÇÃO DE TRANSIENTES TÉRMICOS COM
CONDUTIVIDADE DEPENDENTE DA TEMPERATURA**

Rio de Janeiro

2022

José Ricardo da Silva Cerqueira Junior

**SIMULAÇÃO DE TRANSIENTES TÉRMICOS COM CONDUTIVIDADE
DEPENDENTE DA TEMPERATURA**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Orientador: Prof. Rogério Martins Saldanha da Gama, DSc

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

C416 Cerqueira Junior, José Ricardo da Silva.
Simulação de transientes térmicos com condutividade dependente da temperatura / José Ricardo da Silva Cerqueira Junior. – 2022.
62f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Transmissão - Teses. 3. Calor - Condução - Teses. 4. Teoria do transporte - Teses. I. Gama, Rogério Martins Saldanha da. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 536.54

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

José Ricardo da Silva Cerqueira Junior

**SIMULAÇÃO DE TRANSIENTES TÉRMICOS COM CONDUTIVIDADE
DEPENDENTE DA TEMPERATURA**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Aprovada em 28 de Setembro de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Rogério Martins Saldanha da Gama, DSc (Orientador)
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) - PPG-EM

Prof. Eduardo Dias Corrêa, D.Sc.
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) - PPG-EM

Prof. Maria Laura Martins Costa, D.Sc.
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Rio de Janeiro

2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que trouxe até aqui, aos meus pais José Ricardo e Valéria que me apoiaram e ao Professor Rogério pelos ensinamentos.

Se um general não é corajoso, não será capaz de afastar dúvidas e urdir grandes planos...

Sun Tzu, A Arte da Guerra

RESUMO

CERQUEIRA JUNIOR, José Ricardo da Silva. *Simulação de transientes térmicos com condutividade dependente da temperatura*. 2022. 62 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

Neste trabalho, simulações da equação do calor em regime transiente são conduzidas levando em consideração as variações da condutividade térmica e da difusividade térmica em função da temperatura. A transformada de Kirchhoff é usada para linearizar o termo associado à distribuição espacial de calor dentro do sistema levando em conta a variação da condutividade com a temperatura e fazendo a equação do calor assumir seu formato clássico porém com o termo transiente não linear. Um esquema semi-implícito é usado para aproximar uma solução numérica da equação com o valor da difusividade térmica sendo atualizado a cada passo de tempo, dessa forma, levando em conta a dependência da difusividade em relação à temperatura. Algumas simulações foram feitas para comprovar a validade do método utilizando os valores das propriedades do Carbetto de Silício (6H-SiC).

Palavras-chave: transferência de calor não linear. transformada de Kirchhoff.

condutividade térmica dependente da temperatura. equação do calor.

ABSTRACT

CERQUEIRA JUNIOR, José Ricardo da Silva. *Simulation of thermal transients with temperature-dependent conductivity*. 2022. 62 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

In this work, simulations of the transient-state heat equation are performed taking into account the variations of the thermal conductivity and the thermal diffusivity as functions of the temperature. The Kirchhoff transformation has been used to linearize the term associated with the spatial distribution of heat inside the system, taking into account the variation of the conductivity with the temperature and making the heat equation assume its classical form but, with a nonlinear transient term. A semi-implicit scheme is employed to approximate a numerical solution for the equation with the value of the diffusivity being updated at each time-step, consequently, taking into account the dependency of the diffusivity on the temperature. Some simulations have been performed in order to prove the validity of the method, using the values of the properties of the Silicon Carbide (6H-SiC).

Keywords: nonlinear heat transfer. Kirchhoff transformation. temperature-dependent thermal conductivity. heat equation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Um corpo Ω em dois instantes de tempo diferentes e suas respectivas configurações (GAMA, 2012)	12
Figura 2 - Um corpo rígido na configuração de referência e na configuração atual após um intervalo de tempo	25
Figura 3 - Um eixo sujeito a condições de contorno de temperatura constante . . .	31
Figura 4 - Temperatura adimensional ao longo do tempo adimensional.	34
Figura 5 - Distribuição espacial de temperaturas.	35
Figura 6 - Representação esquemática de discretizações do domínio do tempo e do espaço	37
Figura 7 - Condutividade térmica e difusividade térmica do Carbetto de Silício (6H-SiC) para temperaturas entre 250 K e 2500 K.	44
Figura 8 - Distribuição espacial da temperatura.	46
Figura 9 - Temperatura ao longo do tempo em algumas posições fixas.	47
Figura 10 - Temperatura ao longo do tempo.	48
Figura 11 - Esquema de uma aproximação constante por partes para a condutividade como função da temperatura e a Transformada de Kirchhoff (GAMA, 2017)	49
Figura 12 - Aproximação constante por partes para a condutividade térmica do Carbetto de Silício (6H-SiC) para temperaturas entre 250 K e 2500 K .	51
Figura 13 - Comparação entre as abordagens envolvendo condutividade dependente da temperatura e constante por partes.	52
Figura 14 - Comparação entre as abordagens envolvendo condutividade dependente da temperatura e constante por partes.	53
Figura 15 - Temperatura ao longo do tempo em algumas posições fixas.	55
Figura 16 - Temperatura ao longo do tempo em algumas posições fixas.	57
Figura 17 - Temperatura na superfície ao longo do tempo	58
Figura 18 - Temperatura ao longo do tempo em algumas posições fixas.	59
Figura 19 - Temperatura na superfície ao longo do tempo	60

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	CINEMÁTICA DE CORPOS CONTÍNUOS	11
1.1	Movimento	11
1.2	Gradientes de Velocidades e de Deformações	13
1.3	Tensores Vorticidade e Taxa de Deformação	15
2	EQUAÇÕES DE TRANSPORTE	17
2.1	Tensor Tensão	17
2.2	Teorema do Transporte	18
2.3	Equação da Continuidade	19
2.4	Conservação do Momentum Linear e do Momentum Angular	20
3	MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO	23
4	EQUAÇÃO DA ENERGIA	26
5	UM PROBLEMA DE CONDUÇÃO DA CALOR LINEAR	30
5.1	Separação de Variáveis	30
6	UM ALGORITMO SEMI-IMPLÍCITO	36
7	A TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF	41
7.1	Definições	41
7.2	O Exemplo do Carbetto de Silício (6H-SiC)	43
7.3	Aproximação Constante por Partes	48
7.4	Alguns Exemplos Unidimensionais	53
	CONCLUSÃO	61
	REFERÊNCIAS	62

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é simular problemas transientes de transferência de calor sujeitos a grandes variações de temperatura, condição na qual não é possível desprezar a dependência da condutividade térmica e da difusividade térmica em relação à temperatura.

A equação do calor é amplamente utilizada para calcular a temperatura interna de um material cuja fronteira é exposta a um fluxo de calor. Tal conhecimento é de grande valia em projetos térmicos como por exemplo o cálculo da integridade estrutural de um material sólido (cálculo de tensões térmicas), otimização da espessura de paredes isolantes, definição da microestrutura esperada para uma peça submetida a tratamento térmico, entre outros. A equação do calor, que é válida para sólidos rígidos isotrópicos em repouso, é dada por, (GAMA; CERQUEIRA; GAMA, 2020), (BERGMAN et al., 2014)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \nabla T) + \dot{q} \quad (1)$$

Uma hipótese que geralmente é empregada visando facilitar a obtenção da função $T(x, t)$ é linearizar o problema, definindo que a condutividade térmica e a difusividade térmica não dependem da temperatura, ou seja são constantes. Nesse caso, a distribuição de temperaturas ao longo do tempo em um corpo Ω inicialmente a uma temperatura T_0 e cuja fronteira $\partial\Omega$ é mantida a uma temperatura constante $T_S \neq T_0$, pode ser obtida resolvendo a equação (supondo que não há geração interna de calor),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} &= \text{div}(\nabla T) \\ T &= T_0 \text{ in } \Omega, \quad t = 0 \\ T &= T_S \text{ on } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Entretanto, sabemos que ambas as hipóteses são falsas, ambas as propriedades variam e desprezar esse fato pode levar a resultados equivocados, principalmente no regime não estacionário, no qual as temperaturas (e conseqüentemente a difusividade e a condutividade) são alteradas com o passar do tempo. Nesse caso, além de o tempo calculado para um determinado ponto atingir uma determinada temperatura ser impreciso, podemos dar origem a uma aproximação que se afasta da realidade conforme o tempo evolui.

Uma forma de tornar a equação (2) aproximadamente linear é usar a Transformada de Kirchoff para reescrevê-la em função de uma outra variável que inclua k e T eliminando

a não linearidade correspondente ao termo $div(k\nabla T)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \operatorname{div}(\nabla \omega) \\ \omega &= \omega_0 \text{ in } \Omega, \quad t = 0 \\ \omega &= \omega_S \text{ on } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

O passo seguinte é implementar um esquema numérico no qual o valor de α é atualizado constantemente, gerando resultados mais precisos, a seguir, alguns problemas serão resolvidos para testar o método proposto.

Durante a obtenção e manipulação das equações, todas as vezes em que for necessário empregar um sistema de coordenadas neste trabalho, usaremos o sistema retangular Cartesiano, como estamos trabalhando com materiais isotrópicos, os valores das propriedades consideradas são independentes da direção em que esteja sendo feita a análise.

Este trabalho foi dividido da seguinte forma:

O propósito do capítulo 1 é resumir alguns conceitos básicos de mecânica do contínuo que serão úteis no capítulos seguintes.

O capítulo 2, tem por objetivo mostrar algumas equações de transporte de massa e energia que serão usadas no modelo matemático do problema.

No capítulo 3, os conceitos apresentados nas seções anteriores serão utilizados para definir um corpo rígido.

O objetivo do capítulo 4 é demonstrar como obter a equação do transporte de calor dentro de um corpo rígido isotrópico em repouso.

O propósito do capítulo 5 é demonstrar as limitações do modelo linear que geralmente é empregado em problemas de condução de calor.

No capítulo 6 descreveremos o procedimento para aproximar a equação diferencial não linear mostrada nos capítulos anteriores como uma equação algébrica linear.

E no capítulo 7, descrevemos a Transformada de Kirchhoff, um método matemático empregado para superar a não linearidade da equação do calor causada pelo termo $div(k\nabla T)$.

1 CINEMÁTICA DE CORPOS CONTÍNUOS

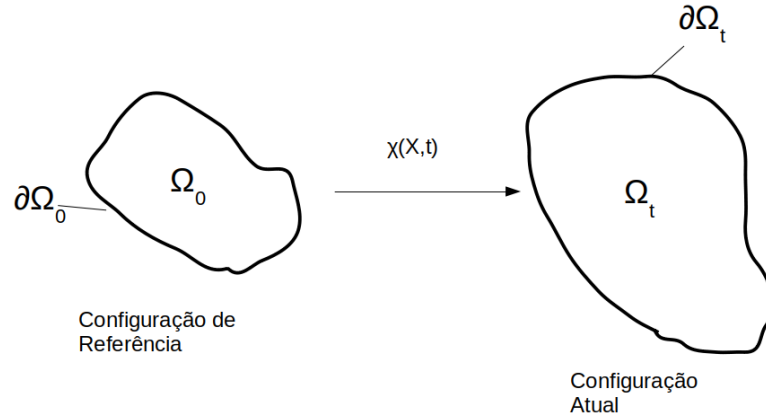
A Mecânica do Contínuo é uma ciência na qual um material é tratado como se fosse distribuído continuamente sobre o espaço que ocupa. Apesar do fato de que a matéria é formada por átomos ou moléculas, geralmente estamos interessados em analisar problemas físicos usando um ponto de vista macroscópico, ou seja, observando o efeito global do fenômeno considerado sobre a estrutura como um todo ao invés de estudar cada partícula que compõe o corpo. Esse tipo de abordagem é possível porque em geral, as distâncias interatômicas são muito pequenas se comparadas ao nosso ponto de vista experimental (BILLINGTON; TATE, 1981).

1.1 Movimento

Um corpo pode ser definido como um conjunto de partículas no qual cada uma pode ser associada em uma correspondência um para um a ponto em uma certa região no espaço. A região ocupada por um certo corpo em um instante de tempo, convenientemente escolhido (não precisa ser no instante inicial), e que será usada para comparações é chamada configuração de referência \mathbf{X} , enquanto a posição ocupada em qualquer outro instante t é a configuração atual \mathbf{x} . A configuração atual em qualquer instante está conectada à de referência através de uma dependência funcional, que define o movimento de um corpo, ou seja as mudanças de configuração ao longo do tempo, como vemos na equação (4) e está ilustrado na figura 1 (GAMA, 2012), (GURTIN, 1982), (BILLINGTON; TATE, 1981).

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \tag{4}$$

Figura 1 - Um corpo Ω em dois instantes de tempo diferentes e suas respectivas configurações (GAMA, 2012)



O campo de velocidades é a função que define a velocidade de qualquer partícula pertencente ao corpo. É dado pela derivada parcial no tempo da função posição, equação (4),

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}[\chi(\mathbf{X}, t)] = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (5)$$

Considerando que a velocidade de um único ponto material é uma função de sua posição que por sua vez é função do tempo, em outras palavras, é dada por uma função composta tal qual a seguinte,

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(x(t), y(t), z(t)) \quad (6)$$

Então o campo de acelerações é dado por,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (7)$$

Que é exatamente a derivada material da velocidade, Dv/Dt , ou seja, a variação da velocidade no tempo de qualquer ponto material pertencente ao corpo,

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (8)$$

1.2 Gradientes de Velocidades e de Deformações

Um tensor de segunda ordem \mathbf{S} , pode ser definido como uma transformação linear que conecta um vetor \mathbf{u} a um vetor $\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{u}$ de mesma dimensão, respeitando, (GAMA, 2017), (GURTIN, 1982)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{u} + \mathbf{b}) &= \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{S}\mathbf{b} \\ \mathbf{S}(\beta\mathbf{b}) &= \beta(\mathbf{S}\mathbf{b})\end{aligned}\tag{9}$$

O tensor de segunda ordem dado pelo produto tensorial ($\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$) é definido pelos vetores de mesma dimensão \mathbf{a} e \mathbf{b} através da seguinte relação,

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\tag{10}$$

Considerando que um tensor de segunda ordem pode ser expresso como uma soma de produtos tensoriais, o tensor gradiente de velocidades é dado por,

$$\begin{aligned}\text{grad } \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{k} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{i} + \\ &\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{k} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}\end{aligned}\tag{11}$$

E o tensor gradiente de deformações é expresso como,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} &= \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{k} + \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial Z}\right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{k} + \left(\frac{\partial z}{\partial X}\right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}\end{aligned}\tag{12}$$

Os tensores gradiente de velocidades e gradiente de deformações estão conectados de modo que,

$$\text{grad } \mathbf{v} = (\text{Grad } \mathbf{v}) \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}\tag{13}$$

A equação (13) pode ser facilmente verificada, primeiro, devemos considerar o tensor gradiente de deformações inverso que é dado por,

$$\mathbf{F}^{-1} = \text{grad } \mathbf{X} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{j} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{k} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} \\ + \left(\frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{k} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \quad (14)$$

A taxa de variação ao longo do tempo do tensor gradiente de deformações que é dada por,

$$\dot{\mathbf{F}} = \text{Grad } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial X} \right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial Y} \right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial Z} \right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{k} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial X} \right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial Y} \right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} \\ + \left(\frac{\partial v_y}{\partial Z} \right) \mathbf{j} \otimes \mathbf{k} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial X} \right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial Y} \right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial Z} \right) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \quad (15)$$

E a seguinte igualdade, válida para quaisquer vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} e \mathbf{d} (desde que tenham a mesma dimensão),

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}) \quad (16)$$

Além disso, considerando que o traço de um tensor $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ é igual ao produto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, observando a equação (11), é fácil ver que o traço do tensor gradiente de velocidades é o divergente do campo de velocidades, ou seja,

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{tr}(\text{grad } \mathbf{v}) = \text{tr}(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \quad (17)$$

Em mecânica, o determinante do tensor gradiente de deformações é sempre maior que zero, portanto o tensor é inversível. O determinante varia no tempo de acordo com a relação, (GAMA, 2012),

$$\dot{\det} \mathbf{F} = \det \mathbf{F} \text{ div } \mathbf{v} \quad (18)$$

1.3 Tensores Vorticidade e Taxa de Deformação

De acordo com o teorema da decomposição polar, o gradiente de deformações pode ser expresso em qualquer uma das duas seguintes formas,

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} \quad (19a)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (19b)$$

O significado físico das equações (19a) e (19b) é o seguinte, o tensor Rotação \mathbf{R} , é um tensor próprio ortogonal ($\det R = +1$) responsável por girar o corpo até sua posição final enquanto o tensor simétrico e positivo-definido \mathbf{U} ou o tensor simétrico e positivo-definido \mathbf{V} causa a deformação do corpo até seu formato final, (GAMA, 2012), (BILLINGTON; TATE, 1981).

Considerando a equação (19a), a taxa na qual o gradiente de deformações varia no tempo é,

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{U} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}} \quad (20)$$

Considerando a equação (13) temos,

$$\text{grad } \mathbf{v} = \left(\dot{\mathbf{R}} \mathbf{U} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}} \right) (\mathbf{R} \mathbf{U})^{-1} \quad (21)$$

Sabemos que \mathbf{R} é ortogonal ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$) e ambos \mathbf{R} e \mathbf{U} são inversíveis ($(\mathbf{R} \mathbf{U})^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^{-1}$), assim, resolvendo a multiplicação na equação (21) e organizando os termos obtemos o gradiente de velocidades decomposto em uma parcela anti-simétrica (primeiro termo no lado direito da equação (22)) e uma parcela simétrica (segundo termo), o tensor vorticidade e o tensor taxa de deformação respectivamente,

$$\text{grad } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^T \quad (22)$$

Portanto, o tensor vorticidade \mathbf{W} , é dado por,

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = \frac{1}{2} [\text{grad } \mathbf{v} - (\text{grad } \mathbf{v})^T] \quad (23)$$

E o tensor taxa de deformação é dado por,

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^T = \frac{1}{2} [\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T] \quad (24)$$

2 EQUAÇÕES DE TRANSPORTE

Em mecânica, um corpo em movimento pode transportar massa e energia. Neste capítulo mostraremos algumas equações de conservação as quais um corpo contínuo pode estar sujeito.

2.1 Tensor Tensão

Um corpo contínuo pode estar sujeito a dois tipos de força: forças de corpo (de campo), que atuam em cada partícula pertencente ao conjunto como a gravidade e, forças de contato (ou de superfície) que atuam apenas sobre as pontos materiais pertencentes à superfície, como a força de atrito.

A força de superfície agindo sobre a fronteira $\partial\Omega$ de um corpo contínuo é dada por,

$$\mathbf{F}_S = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \mathbf{n} dS \quad (25)$$

Sendo \mathbf{n} o vetor unitário exterior normal à superfície $\partial\Omega$ e \mathbf{T} o Tensor Tensão de Cauchy que pode ser expresso em forma matricial como,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Na equação (26), os elementos da diagonal principal indicados por σ_{ii} são as tensões normais, geradas por forças que tendem a esticar ou comprimir o corpo, dependendo do sentido da força aplicada. Os outros elementos, indicados por τ_{ij} são as tensões cisalhantes, geradas por forças que tendem a cisalhar (rasgar) a superfície do corpo.

O tensor tensão para um fluido Newtoniano incompressível, pode ser calculado usando a seguinte equação (GAMA, 2012),

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{1} + \mu [\text{grad} \mathbf{v} + (\text{grad} \mathbf{v})^T] \quad (27)$$

Onde, p é a pressão sobre o fluido e μ é sua viscosidade. Examinando a equação (27), podemos ver que para um fluido ideal (não viscoso) o Tensor Tensão é um múltiplo da matriz identidade e isso nos leva a entender a principal diferença entre fluidos e sólidos

no que diz respeito à resposta a tensões. Como o tensor \mathbf{T} é simétrico, um sólido rígido (não deformável) tende a resistir à deformação devido a tensões cisalhantes opostas que equilibram as forças aplicadas enquanto um fluido ideal tende a se deformar-se escoando. Entretanto, fluidos reais são viscosos e tendem a resistir em algum grau à tensões cisalhantes, enquanto sólidos elásticos sofrem deformação proporcional à tensão aplicada. Ainda que os dois casos sejam idealizações (sólido rígido e fluido ideal), eles servem para ilustrar a diferença entre um fluido real e um sólido elástico isotrópico devido à magnitude da resistência do material em cada caso.

2.2 Teorema do Transporte

Seja Ω_t a configuração atual de um corpo que transporta uma certa propriedade ϕ . Em qualquer instante de tempo, sendo a quantidade φ continuamente distribuída dentro da região Ω_t , a quantidade ϕ pode ser definida como,

$$\phi = \int_{\Omega_t} \varphi \, dV \quad (28)$$

Essa mesma quantidade pode ser expressa na configuração de referência como,

$$\phi = \int_{\Omega_0} \varphi \det \mathbf{F} \, dV = \int_{\Omega_t} \varphi \, dV \quad (29)$$

A taxa de variação de ϕ ao longo do tempo é obtida derivando a equação (28), entretanto, como a região Ω é arbitrária é conveniente reescrever a integral considerando a configuração de referência, dada pela região Ω_0 , que é fixa. Nesse caso, os limites de integração não dependeriam do tempo e a taxa de variação de ϕ poderia ser expressa como,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi \, dV = \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \det \mathbf{F}) \, dV \quad (30)$$

Resolvendo a derivada dentro da integral no lado direito, a equação (30) é reescrita como,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi \, dV = \int_{\Omega_0} [\dot{\varphi} \det \mathbf{F} + \varphi (\det \mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{v}] \, dV \quad (31)$$

A equação pode ser reescrita usando-se a definição de derivada material e, como os dois termos são multiplicados pelo determinante do gradiente de deformações, a equação pode ser expressa novamente considerando a configuração atual e dessa forma, obtemos o Teorema do Transporte de Reynolds,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi dV = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV \quad (32)$$

2.3 Equação da Continuidade

Seja M a massa de um corpo que ocupa a região Ω_t em qualquer instante de tempo. Considerando que a massa do corpo não varie no tempo, podemos dizer que,

$$\frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = 0 \quad (33)$$

Se o Teorema do Transporte (32) for aplicado na equação (33) temos,

$$\frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad (34)$$

Como a região Ω_t é arbitrária, a integral deve ser nula independentemente dos limites de integração, e através disso, obtemos a forma diferencial da equação da continuidade,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (35)$$

A forma integral dessa equação é obtida desconsiderando o princípio da conservação de massa. Aqui, a taxa de variação da massa contida dentro de uma região fixa R (volume de controle) é igual ao balanço de massa cruzando sua fronteira ∂R , ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho dV = - \int_{\partial R} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (36)$$

2.4 Conservação do Momentum Linear e do Momentum Angular

Os axiomas de Euler são utilizados para definir as condições de equilíbrio de um corpo estabelecendo as taxas de variação do momento linear e do momentum angular. De acordo com o primeiro axioma, a taxa na qual o momentum linear de um corpo varia no tempo em relação a um referencial fixo, é dada pela soma das forças de corpo e de contato atuando sobre o mesmo, ou seja (GAMA, 2012), (BILLINGTON; TATE, 1981),

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T} \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV \quad (37)$$

Se o Teorema do Transporte, equação (32), é usado no lado esquerdo da equação (37) temos o seguinte,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Omega_t} \left[\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right] dV \quad (38)$$

Em seguida, para satisfazer a forma diferencial da Equação da Continuidade, equação (35), o termo no lado direito entre parênteses deve ser igual a zero, portanto,

$$\int_{\Omega_t} \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dV = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T} \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV \quad (39)$$

Considerando a seguinte forma do teorema da divergência para tensores,

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T} \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{T} dV \quad (40)$$

A equação (39) se torna,

$$\int_{\Omega_t} \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dV = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{T} dV + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} dV \quad (41)$$

Como em um mesmo instante de tempo, as integrais devem ser calculadas considerando a mesma região Ω_t , podemos desconsiderar as integrações e assim, obtemos a forma diferencial da equação de balanço do momentum linear,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (42)$$

De acordo com o segundo axioma de Euler, a taxa de variação no tempo do momentum angular de um corpo em relação a um referencial fixo, é dada pelo somatório dos torques aplicados sobre o mesmo, ou seja, (GAMA, 2012),

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{r} \times (\mathbf{T} \mathbf{n}) dS + \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{g}) dV \quad (43)$$

Na equação (43) o vetor \mathbf{r} é a distância do ponto em que a força é aplicada a um ponto fixo convenientemente escolhido. Considerando a densidade constante e aplicando o Teorema do Transporte, equação (32), à integral no lado esquerdo obtemos,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Omega_t} \left(\rho \frac{D[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]}{Dt} + (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \frac{D\rho}{Dt} + (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV \quad (44)$$

Em seguida, a forma diferencial da Equação da Continuidade equação (35), deve ser satisfeita e como o vetor \mathbf{r} é a distância entre dois pontos fixos (módulo constante) podemos escrever,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Omega_t} \left(\rho \frac{D(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{Dt} \right) dV = \int_{\Omega_t} \left(\rho \mathbf{r} \times \frac{D(\mathbf{v})}{Dt} \right) dV \quad (45)$$

Consequentemente, a equação do balanço do momentum angular assume a forma,

$$\int_{\Omega_t} \left(\rho \mathbf{r} \times \frac{D(\mathbf{v})}{Dt} \right) dV = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{r} \times (\mathbf{T} \mathbf{n}) dS + \int_{\Omega_t} (\rho \mathbf{r} \times \mathbf{g}) dV \quad (46)$$

Reorganizando os termos, podemos utilizar a seguinte identidade, na qual \mathbf{a} é qualquer vetor arbitrário,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{a} \quad (47)$$

Assim, a equação (46) pode ser reescrita como,

$$\int_{\Omega_t} \left[\rho \mathbf{r} \otimes \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{g} \right) \right] - \left[\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{g} \right) \otimes \rho \mathbf{r} \right] dV = \int_{\partial\Omega_t} [\mathbf{r} \otimes (\mathbf{T} \mathbf{n}) - (\mathbf{T} \mathbf{n}) \otimes \mathbf{r}] dS \quad (48)$$

E se for utilizada a seguinte forma do teorema da divergência para tensores,

$$\int_{\partial R} \mathbf{r} \otimes (\mathbf{T} \mathbf{n}) dS = \int_R [\mathbf{r} \otimes \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T] dV \quad (49)$$

Podemos reescrever a equação (48) como,

$$\int_{\Omega_t} \left[\mathbf{r} \otimes \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{g} \right) \right] + \left[\left(-\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \rho \mathbf{g} \right) \otimes \mathbf{r} \right] dV = \int_{\Omega_t} [\mathbf{r} \otimes \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T - \operatorname{div} \mathbf{T} \otimes \mathbf{r} - \mathbf{T}] dV \quad (50)$$

Substituindo a equação (42) do balanço do momentum linear, na equação (50) obtemos,

$$\int_{\Omega_t} [\mathbf{T}^T - \mathbf{T}] dV = 0 \quad (51)$$

Portanto, como a região Ω_t é arbitrária, a integral deve ser sempre nula independentemente dos limites de integração e conseqüentemente o Tensor Tensão de Cauchy é igual ao seu transposto, o que assegura a sua já mencionada simetria.

3 MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO

Seja Ω um corpo contínuo que quando sujeito à ação de uma força, sofre uma deformação desprezível do ponto de vista macrocópico. Neste caso, podemos dizer que a distância entre dois pontos materiais pertencentes ao corpo permanece constante ao longo do tempo. Por exemplo, vamos imaginar que, se duas partículas que ocupam as posições \mathbf{X} e \mathbf{X}_0 na configuração de referência, após um intervalo de tempo t , ambas estarão nas posições \mathbf{x} e \mathbf{x}_0 respectivamente. Como o módulo do vetor distância entre os pontos deve permanecer o mesmo nas duas configurações, podemos dizer que, (GAMA, 2012),(BILLINGTON; TATE, 1981),

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \quad (52)$$

Podemos dizer que \mathbf{R} , um tensor ortogonal próprio ($\det \mathbf{R} = +1$) que não depende da posição, transforma esse vetor posição na configuração de referência de modo que,

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (53)$$

Se a distância entre \mathbf{X} e \mathbf{X}_0 é muito pequena, a seguinte igualdade é válida, (qualquer que seja o tensor gradiente de deformações \mathbf{F} desde que seja independente da posição).

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (54)$$

Comparando as equações (52) e (54) concluímos que,

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| = \mathbf{F}\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| \quad (55)$$

O que nos leva a concluir que o tensor gradiente de deformações \mathbf{F} assim como o tensor rotação \mathbf{R} deve ser ortogonal. Como o determinante do gradiente de deformações é constante, o movimento de corpo rígido é isocórico, ou seja o volume do corpo é independente do tempo, além disso, como o determinante é unitário, a configuração de referência coincide com a atual em algum instante de tempo. Dessa forma, considerando a equação (54), o movimento de um ponto genérico pertencente a um corpo rígido é dado por,

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{X} - \mathbf{R} \mathbf{X}_0 + \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}(t) \quad (56)$$

Como o tensor \mathbf{R} , é dependente do tempo, então, o função movimento para um corpo rígido tem a forma,

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) + \hat{\mathbf{R}}(t) \mathbf{X} \quad (57)$$

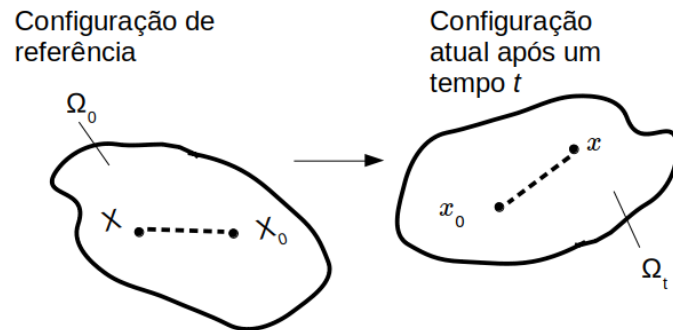
Adicionalmente, como o tensor \mathbf{F} é ortogonal ($\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^T$), combinando as equações (13) e (24), o tensor taxa de deformação é,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \left(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right)^T \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}} \dot{\mathbf{F}}^T \right) = \dot{\mathbf{i}} = \mathbf{0} \quad (58)$$

Portanto, em um movimento de corpo rígido, como o parte simétrica do gradiente de velocidades é nula, o tensor é formado apenas pela sua parcela anti-simétrica $grad v = \mathbf{W}$. Como o tensor \mathbf{R} é ortogonal ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$), se lembrarmos das equações (13), (22) e (58),

$$grad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (59)$$

Figura 2 - Um corpo rígido na configuração de referência e na configuração atual após um intervalo de tempo



O que prova que em um movimento de corpo rígido, o tensor rotação \mathbf{R} e o gradiente de deformações \mathbf{F} são iguais, além de confirmar a hipótese de o tensor \mathbf{R} ser ortogonal e próprio. Além do mais, se lembrarmos do teorema da decomposição polar, (19a) e (19b), vemos que os tensores \mathbf{U} e \mathbf{V} devem ser iguais ao tensor \mathbf{I} , e o significado físico disso é que um corpo rígido em movimento é girado até sua posição final porém mantém o seu formato (não sofre deformação). Um movimento de corpo rígido é esquematizado na figura 2, na qual temos um corpo em sua configuração de referência Ω_0 e sua configuração atual Ω_t após ser deslocado.

4 EQUAÇÃO DA ENERGIA

Primeiramente vamos definir a primeira lei da termodinâmica como um axioma que estabelece o seguinte: A taxa na qual a quantidade de energia de um corpo (cinética + interna) varia no tempo é igual à taxa de trabalho mecânico realizado sobre este corpo no tempo (potência mecânica das forças atuando sobre o corpo) somada à taxa de energia transmitida em forma de calor (calor cruzando a fronteira + geração interna de calor) (GAMA, 2012), matematicamente,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left[u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (60)$$

O Teorema do Transporte, equação (32), pode ser usado para reescrever a integral do lado esquerdo da equação (60),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left[u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV &= \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{D}{Dt} \left[\rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} dV \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{D\rho}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] dV \quad (61) \end{aligned}$$

Como estamos trabalhando com um meio contínuo, a forma diferencial da Equação da Continuidade (35), é válida e por essa razão a Equação da Energia (61) se torna,

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left[u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] \right\} dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (62)$$

Devido à simetria do Tensor das Tensões a proposição $(\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{T} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$ é verdadeira. Conseqüentemente, o Teorema de Divergência para Tensores, equação (40), pode ser usado para transformar as integrais de superfície em integrais de volume,

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left[u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] \right\} dV = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} (\mathbf{T} \mathbf{v}) dV + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} (\mathbf{q}) dV + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (63)$$

Como todas as integrais devem ser calculadas considerando a mesma região Ω_t , os

limites de integração são os mesmos e a forma diferencial da Equação da Energia é dada por,

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \text{div}(\mathbf{T} \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} + \dot{q} \quad (64)$$

Através do uso das seguintes identidades,

$$\text{div}(\mathbf{T} \mathbf{v}) = (\text{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \quad (65a)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} \quad (65b)$$

A equação (64) pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} &= (\text{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} + \dot{q} \\ &= \rho \frac{Du}{Dt} + \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - (\text{div} \mathbf{T}) - \rho \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} + \dot{q} \end{aligned} \quad (66)$$

Por ser um corpo contínuo, a equação (42) do Balanço de Momentum Linear é válida, e a Equação da Energia é reescrita como,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} + \dot{q} \quad (67)$$

Levando em conta que,

$$\mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = \text{tr}(\mathbf{T}^T \cdot \text{grad} \mathbf{v}) \quad (68)$$

Lembrando do Tensor das Tensões é simétrico ($\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$),

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} &= \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v}) = \text{tr}[\mathbf{T} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{W})] = \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) + \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{W}) = \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{D} \end{aligned} \quad (69)$$

E usando a definição de derivada material, podemos reescrever a forma diferencial

da Equação da Energia (70) como,

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot \mathbf{v} \right) = -\text{div } \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \dot{q} \quad (70)$$

Uma vez que estamos trabalhando com corpos rígidos, o Tensor Taxa de Deformação \mathbf{D} é nulo bem como o campo de velocidades, este por o corpo estar em repouso. Por ser um corpo rígido, o determinante do Tensor Gradiente de Deformações \mathbf{F} é unitário, portanto, não há variação de volume independentemente de como a pressão interna varia, conseqüentemente, a energia interna depende apenas de temperatura, e sua variação ao longo do tempo pode ser expressa em função do calor específico a volume constante (que só depende da temperatura). Por último, podemos substituir o vetor fluxo de calor \mathbf{q} , usando a Lei de Fourier ($\mathbf{q} = -k \nabla T$),

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \nabla T) + \dot{q} \quad (71)$$

Dessa forma, obtemos a equação geral para a difusão de calor dentro de um corpo sólido rígido isotropico em repouso. É necessário que as condições iniciais e de contorno sejam corretamente definidas quando essa equação é utilizada em um problema físico (GAMA, 2012).

Podemos caracterizar matematicamente um problema de condução de calor não estacionário pela presença da derivada da temperatura com respeito ao tempo, não nula, no lado direito da equação (71), indicando mudanças de temperatura conforme o tempo evolui. Do ponto de vista da física, um problema não estacionário surge quando um corpo em equilíbrio térmico é exposto a um estímulo externo que altera a temperatura na superfície e cria uma tendência de mudança de temperatura (difusão de calor) dentro do corpo conforme o tempo avança. Com respeito ao domínio do tempo, o problema pode ser classificado como periódico (fluxo de calor periódico no contorno) ou transiente (BERGMAN et al., 2014), (ARPACI, 1966).

Como o instante inicial da análise de um problema transiente é convenientemente escolhido, podemos assumir que o estado do corpo Ω no início é conhecido e por essa razão podemos prescrever a temperatura como condição inicial. Portanto, no instante inicial $t = 0$ temos,

$$T = T_0 \text{ em } \Omega, \quad t = 0 \quad (72)$$

Nesse trabalho estamos lidando com problemas estacionários transientes e consideramos que o equilíbrio térmico é rompido antes que o tempo avance de $t = 0$ para $t + \Delta t$,

ou seja o corpo estava em equilíbrio antes do início da análise e a temperatura da fronteira é alterada ainda no instante inicial quando os novos dados no contorno (temperatura na superfície) são sobrepostos sobre os iniciais (temperatura inicial).

Existem três tipos de condição de contorno que geralmente são impostas a fronteira de problemas de difusão de calor transientes. A primeira, consiste em prescrever um valor constante T_S para a temperatura na superfície $\partial\Omega$ (problema de Dirichlet), ou seja,

$$T = T_S \text{ em } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (73)$$

A segunda possibilidade é prescrever um fluxo de calor constante \mathbf{q}_s , sobre a fronteira do corpo $\partial\Omega$ (problema de Neumann),

$$-(k \nabla T) \mathbf{n} = \mathbf{q}_s \text{ em } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (74)$$

E a terceira opção, consiste em empregar um fluxo de calor dependente da temperatura local na superfície (problema de Robin). Se a temperatura na superfície for alterada por um fluxo de calor convectivo, a lei do resfriamento de Newton ($q = h(T_s - T_\infty)$) pode ser usada para calcular o valor absoluto do vetor fluxo de calor \mathbf{q} , (GAMA, 2018)

$$-(k \nabla T) \mathbf{n} = h(T_s - T_\infty) \text{ on } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (75)$$

5 UM PROBLEMA DE CONDUÇÃO DA CALOR LINEAR

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar que mesmo que a abordagem linear para problemas de difusão de calor seja válida sob determinadas condições, caso exista um gradiente de temperaturas significativo, a solução obtida para o problema será dependente dos valores escolhidos para as propriedades (condutividade e difusividade).

5.1 Separação de Variáveis

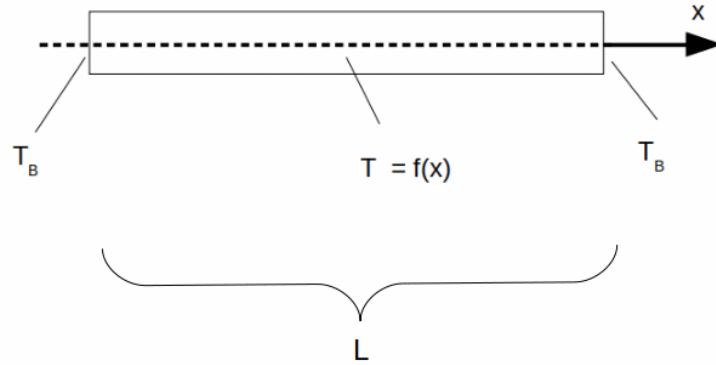
Separação de variáveis é um método matemático usado para resolver problemas modelados com a equação do calor, sujeita às condições iniciais e de contorno mostradas no capítulo anterior, se a condutividade térmica k e a difusividade térmica α forem assumidas como constantes.

Para exemplificar, considere o seguinte problema: Um eixo, de material homogêneo, com comprimento L , em equilíbrio térmico à uma temperatura T_0 , totalmente isolado da vizinhança ao longo de sua extensão, repentinamente tem a temperatura nas duas extremidades alterada para uma temperatura T_B e mantida constante ao longo do tempo.

Como o eixo não troca calor com a ambiente, podemos dizer que o gradiente de temperaturas atua apenas em uma direção, a axial e portanto a temperatura interna é dada por $T = f(x)$. O calor será difundido ao longo da direção x enquanto o tempo evolui e o nosso objetivo é encontrar a distribuição interna de temperaturas ao longo do tempo. Esse problema está ilustrado esquematicamente na figura 3. Sua formulação matemática é a seguinte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & 0 < x < L \\ T &= T_B, & \text{em } x = 0 \text{ e em } x = L \\ T &= f(x), & \text{para } t = 0 \end{aligned} \tag{76}$$

Figura 3 - Um eixo sujeito a condições de contorno de temperatura constante



É conveniente escrever esse problema na forma adimensional usando as seguintes quantidades, sendo $\bar{\alpha}$ a difusividade de referência,

$$X = \frac{x}{L} \quad (77a)$$

$$\tau = \frac{\bar{\alpha}t}{L^2} \quad (77b)$$

$$\theta = \frac{T - T_B}{T_B} \quad (77c)$$

$$\Lambda = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \quad (77d)$$

Portanto, a equação (76) se torna,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, & 0 < X < 1 \\ \theta &= 0, & \text{em } X = 0 \text{ e em } X = 1 \\ \theta &= \frac{f(LX) - T_B}{T_B}, & \text{para } t = 0 \end{aligned} \quad (78)$$

Cuja solução exata é uma função do tipo,

$$\theta(X, \tau) = p(X) \cdot g(\tau) \quad (79)$$

Substituindo a equação (79) na equação (78) e separando as variáveis, temos o

seguinte,

$$\frac{1}{\Lambda g(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} [g(\tau)] = \frac{1}{p(X)} \frac{\partial^2}{\partial X^2} [p(X)] = -\varphi^2 \quad (80)$$

O sinal negativo na constante φ é necessário para assegurar que a solução obtida para a equação diferencial atenderá às condições iniciais e de contorno impostas.

Se φ fosse nulo, teríamos o seguinte,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [g(\tau)] = 0 \quad (81a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} [p(X)] = 0 \quad (81b)$$

Nesse caso, teríamos $p(X) = aX + b$ e devido à condição de contorno, a única solução possível para a equação (81b), é a trivial (a e b iguais a zero) o que atenderia as extremidades mas não a região interna da barra. Além disso, a solução da equação (81a) impõe que a temperatura seja constante e nula ao longo do tempo.

Se o sinal de φ fosse positivo, as equações seriam,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [g(\tau)] - \varphi^2 \Lambda g(\tau) = 0 \quad (82a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} [p(X)] - \varphi^2 p(X) = 0 \quad (82b)$$

Nesse caso, a solução do problema temporal seria, $g(\tau) = \exp(\varphi^2 \Lambda \tau)$ o que significa que a temperatura cresceria conforme o tempo avança, entretanto, o comportamento esperado para a temperatura no problema proposto é que ela decresça quando o tempo tende ao infinito. Adicionalmente, a solução no espaço teria a forma, $p(X) = a \exp(\varphi X) + b \exp(-\varphi X)$ e novamente, as constantes a e b teriam que ser nulas.

Portanto, a única opção útil é trabalhar com as seguintes equações,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [g(\tau)] + \varphi^2 \Lambda g(\tau) = 0 \quad (83a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} [p(X)] + \varphi^2 p(X) = 0 \quad (83b)$$

Cujas soluções são,

$$g(\tau) = C_1 \exp(-\Lambda \tau \varphi^2) \quad (84a)$$

$$p(X) = C_2 \sin(\varphi X) + C_3 \cos(\varphi X) \quad (84b)$$

Como $p(0) = p(1) = 0$, a constante C_3 tem que ser nula e φ deve ser um múltiplo natural diferente de zero de π . Desse modo, como C_1 and C_2 são constantes arbitrárias, considerando a equação (79) e o princípio da superposição, a solução exata da equação diferencial parcial (78) é,

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\Lambda (n\pi)^2 \tau) \sin(n\pi X) \quad (85)$$

Na qual a_n é dada por,

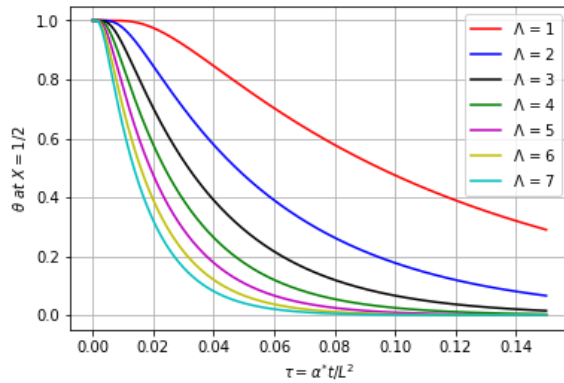
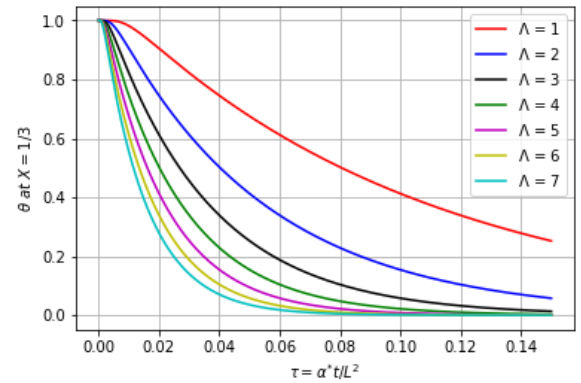
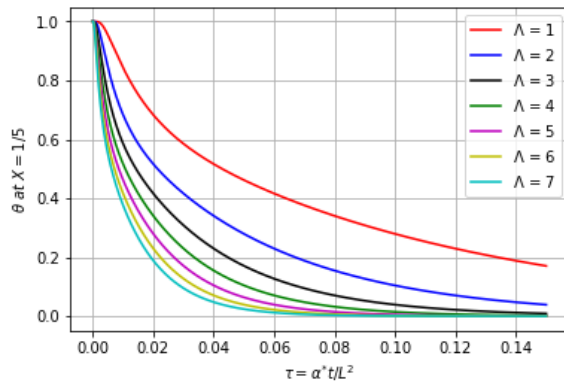
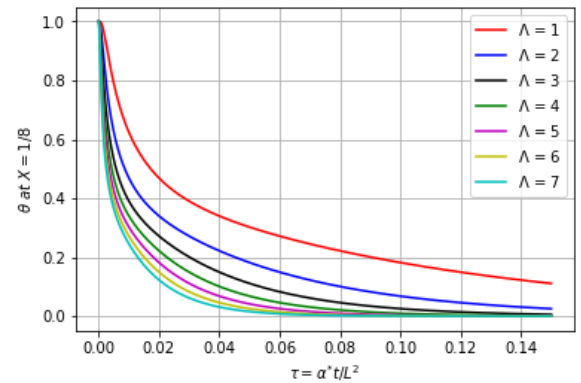
$$a_n = 2 \int_0^1 \left(\frac{f(LX) - T_B}{T_B} \right) \sin(n\pi X) dX \quad (86)$$

Consequentemente, as equações (85) e (86) podem ser modificadas para a forma dimensional e através disso obtemos a solução exata da equação diferencial parcial (72) (WYLIE, 1975),

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \left[\int_0^L (f(x) - T_B) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \exp\left(-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + T_B \quad (87)$$

A equação (85) deixa claro que as alterações na temperatura ao longo do tempo são influenciadas pelo valor da difusividade. Nesse casos seria necessário resolver n (infinitas) integrais, proceder as respectivas multiplicações para obter cada termo θ_n e somar o conjunto infinito de termos para obter $\theta(X, \tau)$. Essa tarefa não é prática ou possível de ser concluída e por essa razão simulações numéricas são largamente empregadas neste tipo de problema.

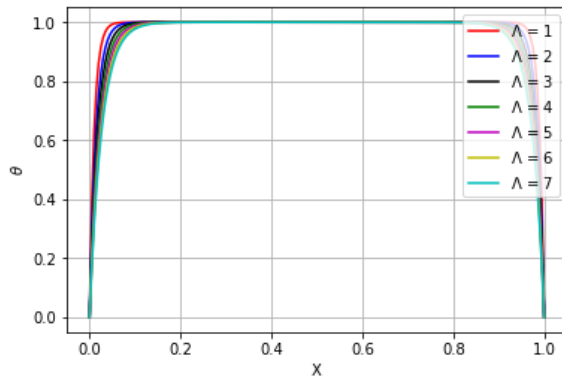
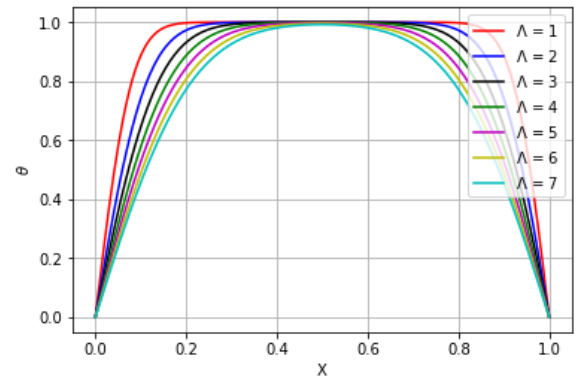
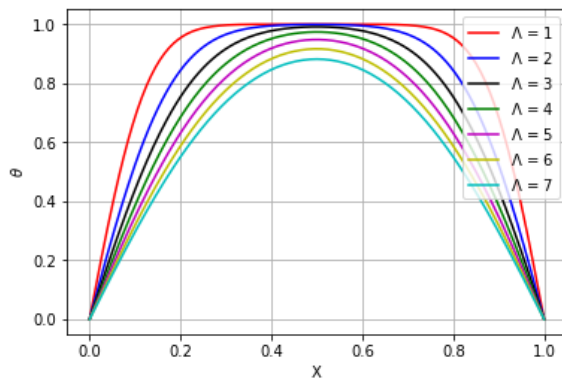
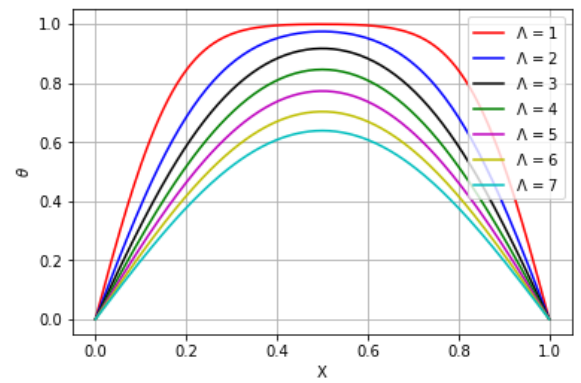
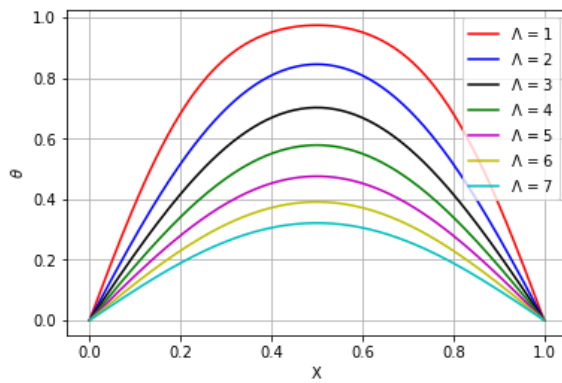
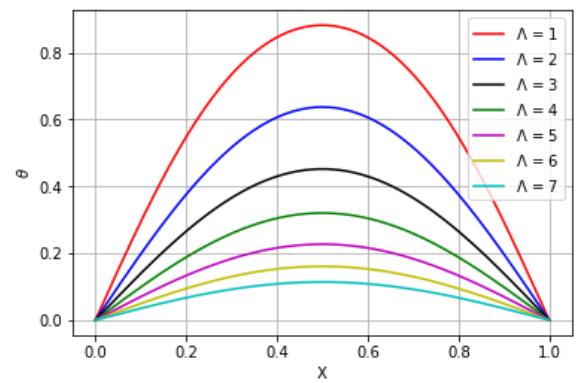
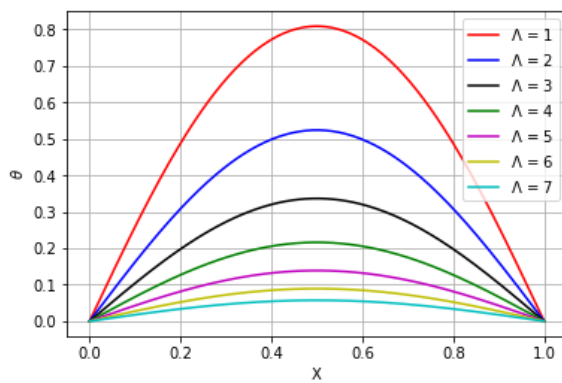
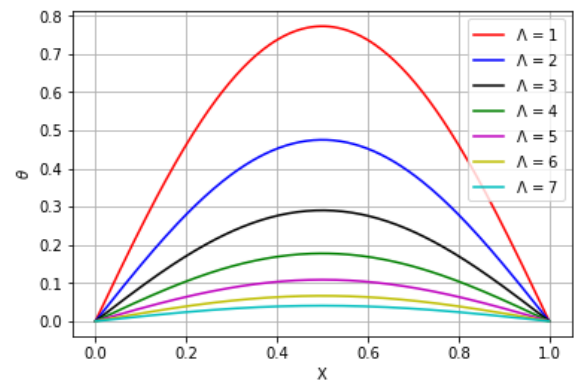
Figura 4 - Temperatura adimensional ao longo do tempo adimensional

(a) Em uma posição fixa $X = 1/2$ (b) Em uma posição fixa $X = 1/3$ (c) Em uma posição fixa $X = 1/5$ (d) Em uma posição fixa $X = 1/8$ 

A premissa de que a difusividade é dependente da temperatura pode ser apoiada pela figura 4, que mostra algumas soluções numéricas da equação (78). Nela temos a temperatura adimensional θ , variando ao longo do tempo adimensional τ em algumas posições fixas como $X = 1/2$, $X = 1/5$ e $X = 1/8$ considerando $f(x) = 2T_B$. Essas imagens nos levam a concluir que quanto maior o valor adotado para a difusividade, menor será o tempo necessário para atingir uma determinada temperatura.

Além disso, na figura 5 podemos ver como a temperatura varia em toda a extensão do eixo ao longo do tempo. Observando esses gráficos, fica evidente mais uma vez que as taxas de alteração da temperatura ao longo do tempo são fortemente influenciadas pelo valor da difusividade térmica e por essa razão, uma escolha arbitrária de um valor inadequado para a difusividade constante poderia invalidar todo um projeto.

Figura 5 - Distribuição espacial de temperaturas

(a) θ ao longo de X em $\tau = 0.0001$ (b) θ ao longo de X em $\tau = 0.002$ (c) θ ao longo de X em $\tau = 0.005$ (d) θ ao longo de X em $\tau = 0.01$ (e) θ ao longo de X em $\tau = 0.02$ (f) θ ao longo de X em $\tau = 0.035$ (g) θ ao longo de X em $\tau = 0.045$ (h) θ ao longo de X em $\tau = 0.05$ 

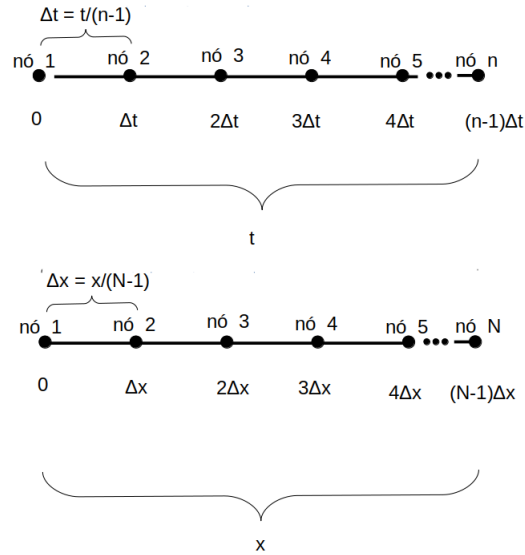
6 UM ALGORITMO SEMI-IMPLÍCITO

Neste capítulo mostraremos como aproximar adequadamente uma solução para equação do calor. Considere a forma clássica da equação do calor unidimensional sujeita a condições de contorno de temperatura prescrita,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \theta &= \text{conhecido em } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ \theta &= \text{conhecido em } \Omega, \quad t = 0 \end{aligned} \tag{88}$$

O primeiro passo é discretizar os domínios do tempo e do espaço. Ou seja dividir em $n - 1$ partes (ou elementos) o domínio do tempo, sendo n o número de nós (instantes nos quais o corpo terá sua temperatura avaliada), e dividir em $N - 1$ partes o domínio do espaço, sendo N o número de nós (pontos pertencentes ao corpo que terão sua temperatura calculada). Os número n e N , naturais diferentes de zero, são arbitrários e portanto podem ser iguais ou não. Uma representação esquemática de discretizações no domínio do tempo e do espaço é mostrada na figura 6.

Figura 6 - Representação esquemática de discretizações do domínio do tempo e do espaço



Em seguida, vamos usar a série de Taylor para expandir a quantidade θ em um instante de tempo arbitrário $j + 1$ indicado pelo sobrescrito à direita da variável.

$$\theta^{j+1} = \theta^j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^j \Delta t + \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)^j \frac{\Delta t^2}{2} + \left(\frac{\partial^3\theta}{\partial t^3}\right)^j \frac{\Delta t^3}{6} + \left(\frac{\partial^4\theta}{\partial t^4}\right)^j \frac{\Delta t^4}{24} + \dots \quad (89)$$

Reorganizando os termos obtemos,

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^j = \frac{\theta^{j+1} - \theta^j}{\Delta t} + \left[- \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)^j \frac{\Delta t}{2} - \left(\frac{\partial^3\theta}{\partial t^3}\right)^j \frac{\Delta t^2}{6} - \left(\frac{\partial^4\theta}{\partial t^4}\right)^j \frac{\Delta t^3}{24} - \dots \right] \quad (90)$$

No lado direito da equação (90) temos uma aproximação por diferenças finitas para a derivada de θ com respeito ao tempo em um instante j , somada ao erro de truncamento (entre colchetes), uma soma de infinitos termos que serão desprezados quando o esquema numérico for implementado.

A ordem de acurácia da aproximação é dominada pelo termo no erro de truncamento que multiplica o menor expoente de Δt , porque o erro tende a zero quando Δt tende a zero, (HIRSCH, 2007). Consequentemente, usar valores menores de Δt gera uma melhor aproximação da realidade.

Podemos utilizar mais de uma expansão para montar uma aproximação em dife-

renças finitas, e dessa forma geramos uma aproximação de ordem de acurácia mais alta. Por exemplo, considere a expansão de θ em um tempo $t = j - 1$,

$$\theta^{j-1} = \theta^j + \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^j (-\Delta t) + \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)^j \frac{\Delta t^2}{2} + \left(\frac{\partial^3\theta}{\partial t^3}\right)^j \left(-\frac{\Delta t^3}{6}\right) + \left(\frac{\partial^4\theta}{\partial t^4}\right)^j \frac{\Delta t^4}{24} + \dots \quad (91)$$

Combinando as equações (89) e (91), obtemos uma aproximação de segunda ordem para a derivada no tempo da quantidade θ em um tempo j ,

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^j = \frac{\theta^{j+1} - \theta^{j-1}}{2\Delta t} + \left[-\left(\frac{\partial^3\theta}{\partial t^3}\right)^j \frac{\Delta t^2}{6} - \left(\frac{\partial^5\theta}{\partial t^5}\right)^j \frac{\Delta t^4}{120} - \dots \right] \quad (92)$$

Usando o mesmo expediente de combinar expansões da temperatura em séries de Taylor, podemos aproximar a derivada de segunda ordem de temperatura no espaço em ponto arbitrário i , pertencente ao domínio (conjunto Ω), indicado pelo subscrito à direita de θ ,

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta x^2} + \left[-\left(\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4}\right)_i \frac{\Delta x^2}{12} - \dots \right] \quad (93)$$

Como os intervalos Δt e Δx devem tender a zero para atenuar os erros de truncamento, quanto maior o número de elementos em que um domínio limitado seja dividido maior precisão obtida na aproximação. Entretanto, valores de variáveis discretas tendendo a zero podem introduzir erros de arredondamento. Esse tipo de erro é causado porque computadores trabalham com um número limitado de dígitos para representar um valor, assim, em uma operação aritmética, um número muito pequeno, cujo valor absoluto seja tão próximo de zero que esteja abaixo da precisão de máquina do computador, seria arredondado para zero (HIRSCH, 2007). Portanto os valores de Δt e Δx não podem ser excessivamente pequenos.

Uma aproximação em diferenças finitas para a equação (88) é obtida se substituirmos as derivadas no tempo e no espaço por equações como a (91) e a (93) respectivamente, desprezando os erros de truncamento. Para cada instante j no tempo teríamos a seguinte equação a ser aplicada em cada ponto i (excluindo-se os nós das extremidade que tem seu

valor prescrito pela condição de contorno),

$$\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\alpha \Delta t} = \left(\frac{\theta_{i+1}^{j+1} - 2\theta_i^{j+1} + \theta_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (94)$$

$$\theta^{j+1} = \text{conhecido} , \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0$$

$$\theta^j = \text{conhecido} , \quad x \in \Omega, \quad t = 0$$

Podemos aumentar a acurácia do esquema levando em conta as variações da difusividade térmica α com a temperatura. Uma modo de fazer isso é calculando o valor de α , em cada ponto em função da temperatura inicial que é conhecida e atualizando esses valores a cada passo de tempo com base nas novas temperaturas calculadas. Nessa aproximação, como o valor prescrito da difusividade térmica não varia em um mesmo ponto durante o intervalo de tempo considerado, evitamos que exista um produto de variáveis no lado direito da equação que tornaria o sistema não linear. Conseqüentemente, a equação (94) pode ser reescrita na seguinte forma,

$$-\frac{\theta_i^j}{\alpha_i^j \Delta t} = \frac{\theta_{i+1}^{j+1}}{\Delta x^2} + \left(-\frac{1}{\alpha_i^j \Delta t} - \frac{2}{\Delta x^2} \right) \theta_i^{j+1} + \frac{\theta_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} \quad (95)$$

$$\theta^{j+1} = \text{conhecido} , \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0$$

$$\theta^j = \text{conhecido} , \quad x \in \Omega, \quad t = 0$$

O sistema linear gerado a partir da aplicação da equação (95) nos pontos internos do corpo, pode ser convenientemente escrito em forma matricial, na qual temos um vetor ($n \times 1$) de temperaturas conhecidas no instante inicial, uma matriz $n \times n$ de coeficientes conhecidos e um vetor de incógnitas ($n \times 1$) formado pelas temperaturas a serem calculadas após o intervalo de tempo,

$$\begin{bmatrix} \theta_1^j \\ \theta_2^j \\ \theta_3^j \\ \vdots \\ \theta_{n-2}^j \\ \theta_{n-1}^j \\ \theta_n^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \left(\frac{-\alpha_2^j \Delta t}{\Delta x^2} \right) & \left(1 + \frac{2\alpha_2^j \Delta t}{\Delta x^2} \right) & \left(\frac{-\alpha_2^j \Delta t}{\Delta x^2} \right) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{-\alpha_{n-1}^j \Delta t}{\Delta x^2} \right) & \left(1 + \frac{2\alpha_{n-1}^j \Delta t}{\Delta x^2} \right) & \left(\frac{-\alpha_{n-1}^j \Delta t}{\Delta x^2} \right) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^{j+1} \\ \theta_2^{j+1} \\ \theta_3^{j+1} \\ \vdots \\ \theta_{n-2}^{j+1} \\ \theta_{n-1}^{j+1} \\ \theta_n^{j+1} \end{bmatrix} \quad (96)$$

Sabemos que se,

$$\mathbf{A}_{(n \times 1)} = \mathbf{M}_{(n \times n)} \mathbf{B}_{(n \times 1)} \quad (97)$$

É verdadeira a igualdade,

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{B} = \mathbf{I} \mathbf{B} = \mathbf{B} \quad (98)$$

Em outras palavras, resolver esse sistema é uma tarefa relativamente simples, basta multiplicar o vetor de temperaturas iniciais pela matriz de coeficientes inversa para encontrar as temperaturas ao final do intervalo de tempo.

Esse procedimento pode ser aplicado a problemas nos quais o gradiente de temperaturas é significativo em mais de uma direção. Por exemplo o problema tridimensional a seguir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \\ \Theta &= 0, \quad (X, Y, Z) \in \partial\Omega, \quad \tau \geq 0 \\ \Theta &= 1, \quad (X, Y, Z) \in \Omega, \quad \tau = 0 \end{aligned} \quad (99)$$

Pode ser aproximado como,

$$\begin{aligned} \frac{\Theta^{j+1} - \Theta^j}{\Lambda^j \Delta t} &= \left(\frac{\Theta_{i+1}^{j+1} - 2\Theta_i^{j+1} + \Theta_{i-1}^{j+1}}{\Delta X^2} \right) + \left(\frac{\Theta_{i+1}^{j+1} - 2\Theta_i^{j+1} + \Theta_{i-1}^{j+1}}{\Delta Y^2} \right) + \left(\frac{\Theta_{i+1}^{j+1} - 2\Theta_i^{j+1} + \Theta_{i-1}^{j+1}}{\Delta Z^2} \right) \\ \Theta^{j+1} &= 0, \quad (X, Y, Z) \in \partial\Omega, \quad \tau \geq 0 \\ \Theta^j &= 1, \quad (X, Y, Z) \in \Omega, \quad \tau = 0 \end{aligned} \quad (100)$$

7 A TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF

Neste capítulo mostraremos a Transformada de Kirchhoff. Nos casos em que a dependência da condutividade térmica em relação à temperatura não pode ser desprezada, tal transformação pode ser usada para reescrever a equação diferencial com essa dependência embutida em uma nova variável, eliminando dessa forma a não-linearidade associada ao termo $div(k\nabla T)$ (GAMA; CERQUEIRA; GAMA, 2020), (GAMA, 2017), (ARPACI, 1966) .

7.1 Definições

Seja a Transformada de Kirchhoff definida como a função ω tal que,

$$\omega = \int_{T_{ref}}^T \hat{k}(\xi) d\xi, \quad k = \hat{k}(T) \quad (101)$$

Se \hat{k} é uma função integrável no intervalo $[T_{ref}, T]$, podemos dizer que,

$$\frac{d\omega}{dT} = \hat{k}(T) \quad (102)$$

E se o material é isotrópico, podemos escrever (em um sistema Cartesiano retangular),

$$\begin{aligned} div(k \nabla T) &= div \left(k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = div(\nabla \omega) \end{aligned} \quad (103)$$

As equações (101), (102) and (103) para reescrever a equação do calor e suas condições iniciais e de contorno na sua forma clássica. Por exemplo, a equação diferencial abaixo,

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= div(k \nabla T) + \dot{q} \\ T &= \text{conhecido em } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ T &= \text{conhecido em } \Omega, \quad t = 0 \end{aligned} \quad (104)$$

É transformada em,

$$\begin{aligned}
 \rho c \frac{dT}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \operatorname{div}(\nabla \omega) + \dot{q} \\
 \omega &= \int_{T_{ref}}^T \hat{k}(\xi) d\xi = \text{conhecido em } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\
 \omega &= \int_{T_{ref}}^T \hat{k}(\xi) d\xi = \text{conhecido em } \Omega, \quad t = 0
 \end{aligned} \tag{105}$$

Simplificando a equação acima temos,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \operatorname{div}(\nabla \omega) + \dot{q} \\
 \omega &= \text{conhecido em } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\
 \omega &= \text{conhecido em } \Omega, \quad t = 0
 \end{aligned} \tag{106}$$

A difusividade térmica a exemplo da condutividade também é dependente da temperatura, e por essa razão pode ser expressa em função de ω ,

$$\alpha = \hat{\alpha}(T) = \tilde{\alpha}(\omega) \tag{107}$$

Semelhantemente, um problema submetido a condição de fluxo térmico constante prescrito na superfície, poderia ser esposto como,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \operatorname{div}(\nabla \omega) + \dot{q} \\
 -\nabla \omega \cdot \mathbf{n} &= \text{conhecido em } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\
 \omega &= \text{conhecido em } \Omega, \quad t = 0
 \end{aligned} \tag{108}$$

Nesse caso, um vetor fluxo térmico é prescrito na superfície. O módulo de tal vetor pode ser usado para calcular o valor local da Transformada de Kirchhoff com o auxílio da equação (103).

Por último, um problema sujeito a condições de contorno de fluxo dependente da

temperatura poderia ser expresso como,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \text{div}(\nabla \omega) + \dot{q} \\ -\nabla \omega \cdot \mathbf{n} &= h(\kappa^{-1}[\omega] - T_\infty) \cdot \mathbf{n} \text{ em } \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ \omega &= \text{conhecido em } \Omega, \quad t = 0 \end{aligned} \tag{109}$$

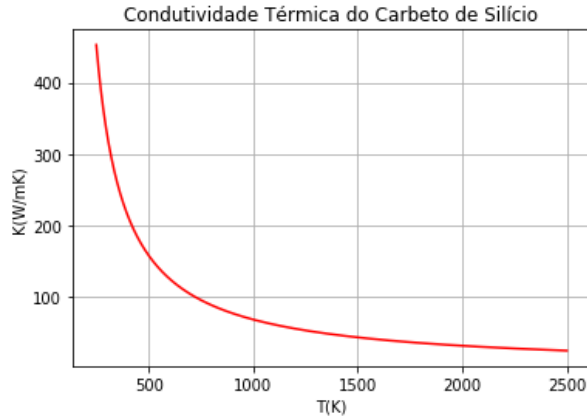
Mais uma vez, a intensidade do vetor fluxo térmico na superfície é dada pela equação (103) entretanto, nesse caso, como estamos trabalhando com um fluxo convectivo sobre a superfície, a intensidade do vetor fluxo térmico pode ser calculada a cada instante usando a lei do resfriamento de Newton com o coeficiente convectivo h e a temperatura do fluido T_∞ conhecidos.

7.2 O Exemplo do Carbetto de Silício (6H-SiC)

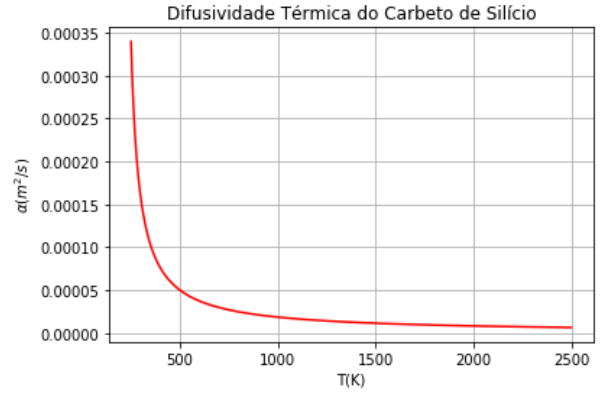
Se observarmos a figura 7, que mostra a condutividade térmica e difusividade térmica do Carbetto de Silício, fica evidente que existe uma relação de dependência entre cada uma dessas quantidades e a temperatura, de fato, as duas quantidades podem ser aproximadamente calculada pelas equações (110a) e (110b) (NILSSON et al., 1997),

Figura 7 - Condutividade térmica e difusividade térmica do Carbetto de Silício (6H-SiC) para temperaturas entre 250 K e 2500 K

(a) Condutividade térmica



(b) Difusividade térmica



$$k = \frac{61100}{T - 115}, \quad 2500K \geq T \geq 250K \quad (W/mK) \quad (110a)$$

$$\alpha = \frac{0.0146}{T - 207}, \quad 2500K \geq T \geq 250K \quad (W/mK) \quad (110b)$$

Vamos supor que as relações de dependência da condutividade térmica e da difusividade térmica com a temperatura de um dado material sejam equações semelhantes a,

$$k = \frac{A}{T - B} \quad (111a)$$

$$\alpha = \frac{\bar{A}}{T - \bar{B}} \quad (111b)$$

Portanto, a Transformada de Kirchhoff ω é dada por,

$$\kappa[T] = \omega = \int_{T_{ref}}^T \frac{A}{\phi - B} d\phi = A \left[\ln \left(\frac{T - B}{T_{ref} - B} \right) \right] \quad (112)$$

E a Transformada inversa $\kappa^{-1}[\omega]$ é,

$$\kappa^{-1}[\omega] = T = B + (T_{ref} - B) \exp \left(\frac{\omega}{A} \right) \quad (113)$$

Usando a equação (113) na equação (111b) obtemos α em função ω ,

$$\alpha = \frac{\bar{A}}{B - \bar{B} + (T_{ref} - B) \exp(\omega/A)} \quad (114)$$

Considerando o caso do Carbetto de Silício com $T_{ref} = 250K$, as equações (112), (113) e (114), tornam-se respectivamente,

$$\omega = 61100 \left[\ln \left(\frac{T - 115}{T_{ref} - 135} \right) \right] \quad (115a)$$

$$T = 115 + 135 \exp \left(\frac{\omega}{61100} \right) \quad (115b)$$

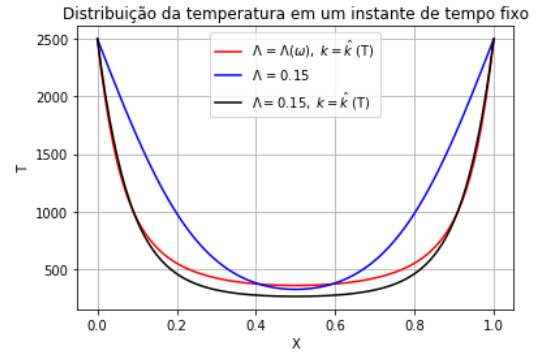
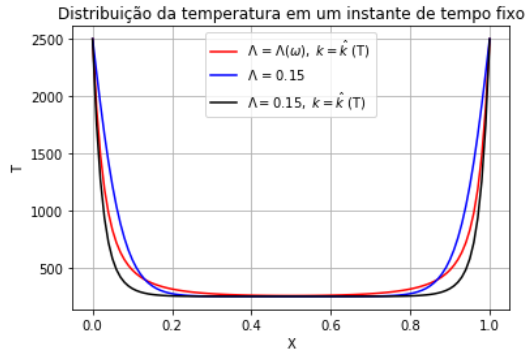
$$\alpha = \frac{0.0146}{-92 + 135 \exp(\omega/61100)} \quad (115c)$$

Vamos resolver um problema para ilustrar a diferença de algumas possíveis soluções de um problema de transferência de calor tratando a difusividade e a condutividade como constantes e a abordagem na qual a dependência de ambas em relação à temperatura é considerada e o caso em que é considerada apenas a variação da condutividade com a temperatura. Neste problema, uma barra de comprimento igual a $1.89m$ mantida a $250K$ tem a temperatura em suas extremidades repentinamente alterada para $2500K$ e mantida constante por $5775s$. Os resultados foram obtidos usando uma discretização com $n = 101$ nós.

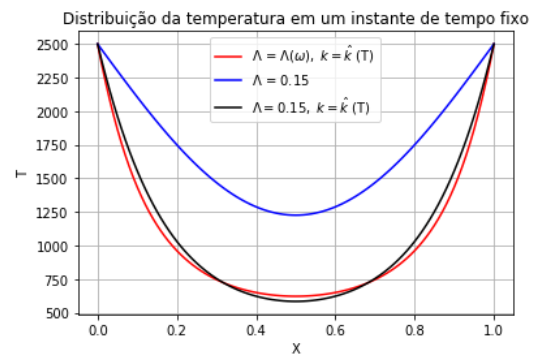
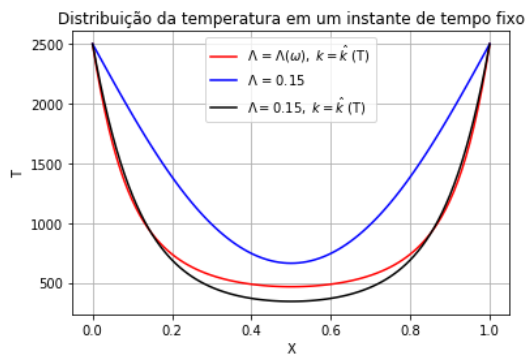
Uma situação na qual a difusividade e a condutividade variam em função da temperatura (curva vermelha) é comparada a uma na qual a Transformada de Kirchhoff é aplicada porém a difusividade adimensional é mantida incondicionalmente constante e igual a 0.15 (curva preta) e, uma terceira situação na qual ambas as propriedades são constantes, nesse caso, a difusividade novamente é igual a 0.15 . As temperaturas em toda a extensão do corpo em alguns instantes de tempo são mostradas na figura 8.

Figura 8 - Distribuição espacial da temperatura.

- (a) Distribuição de temperaturas ao longo da barra em um instante de tempo $\tau = 0.0163 (t = 171.53 \text{ s})$
- (b) Distribuição de temperaturas ao longo da barra em um instante de tempo $\tau = 0.1413 (t = 1486.63 \text{ s})$



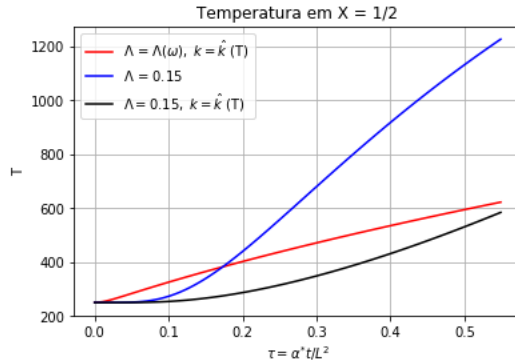
- (c) Distribuição de temperaturas ao longo da barra em um instante de tempo $\tau = 0.2935 (t = 3087.62 \text{ s})$
- (d) Distribuição de temperaturas ao longo da barra em um instante de tempo $\tau = 0.5489 (t = 5775.0 \text{ s})$



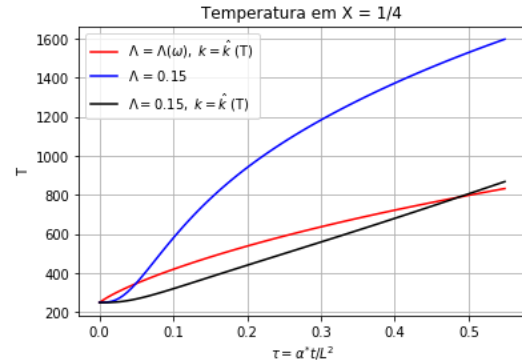
E na figura 9 vemos a evolução da temperatura no tempo em algumas posições fixas.

Figura 9 - Temperatura ao longo do tempo em algumas posições fixas.

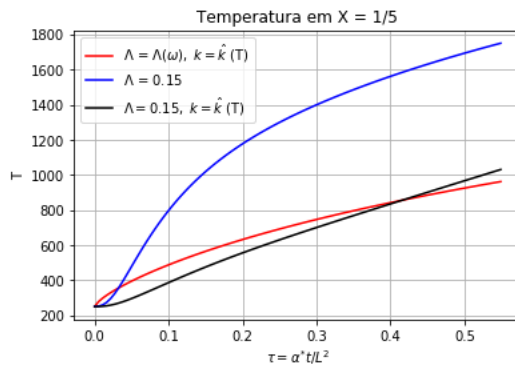
(a) Distribuição de temperaturas em um ponto fixo $X = 1/2 (x = 0.945 \text{ m})$



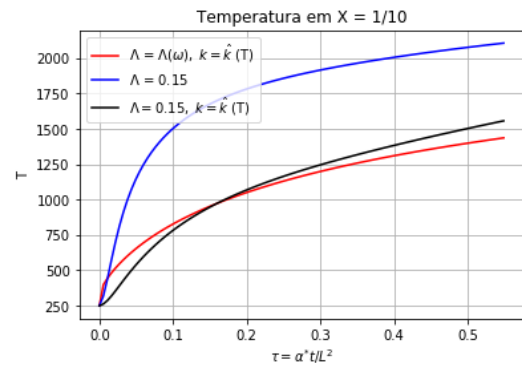
(b) Distribuição de temperaturas em um ponto fixo $X = 1/4 (x = 0.4725 \text{ m})$



(c) Distribuição de temperaturas em um ponto fixo $X = 1/5 (x = 0.378 \text{ m})$

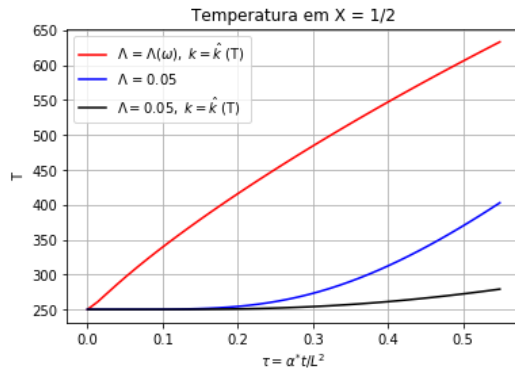
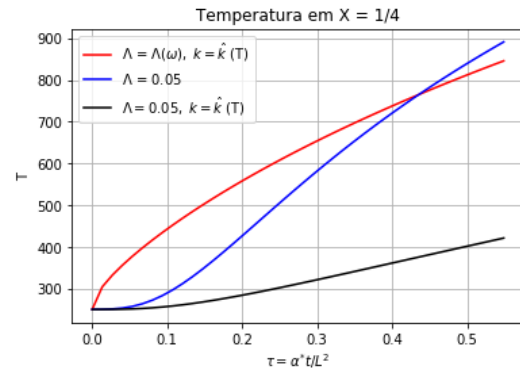
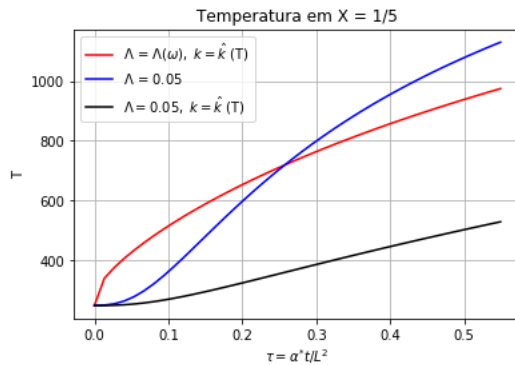
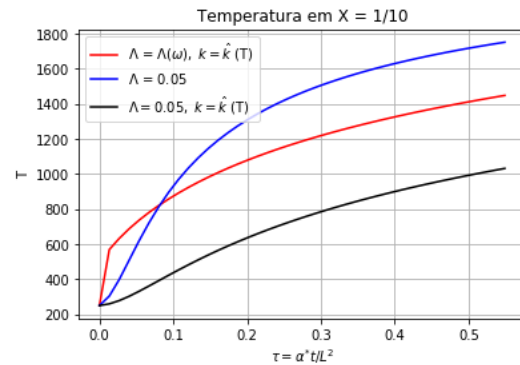


(d) Distribuição de temperaturas em um ponto fixo $X = 1/10 (x = 0.189 \text{ m})$



Na figura 10 alguns resultados para temperatura ao longo do tempo em posições fixas, obtidos usando $n = 41$ nós, são mostrados. Aqui alteramos a difusividade adimensional constante para 0.05. Considerando todo o domínio (range de temperaturas) das equações (110a) e (110b) a difusividade adimensional pode variar de aproximadamente 0.0188 até 1, ou seja de um valor até outro mais de 50 vezes maior. Justamente devido a tal variação (causada pelo grande gradiente de temperaturas nesse problema) é uma tarefa muito complicada escolher arbitrariamente um valor para a difusividade constante que possa ser usado para aproximar corretamente α em diferentes instantes. Eventualmente, conforme avançamos no tempo, o valor escolhido para α será tão diferente do valor real em um dado ponto do espaço (ou em vários), que distorcerá as taxas de transferência de calor calculadas gerando valores de temperatura divergentes da realidade.

Figura 10 - Temperatura ao longo do tempo

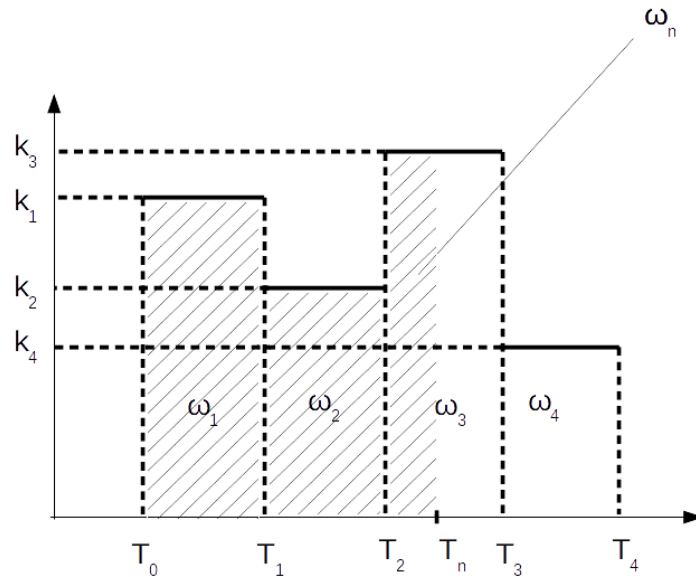
(a) Distribuição de temperaturas em um ponto fixo $X = 1/2(x = 0.945 \text{ m})$ (b) Distribuição de temperaturas em um ponto fixo $X = 1/4(x = 0.4725 \text{ m})$ (c) Distribuição de temperaturas em um ponto fixo $X = 1/5(x = 0.378 \text{ m})$ (d) Distribuição de temperaturas em um ponto fixo $X = 1/10(x = 0.189 \text{ m})$ 

Adicionalmente, ainda que em alguns casos, a dependência da difusividade em relação à temperatura possa ser desprezada se comparada com a da condutividade, (ARPACI, 1966), como poderia ocorrer na figura 8 por exemplo, dependendo do grau de precisão desejado, podemos concluir olhando a figura 10 que devido ao grande gradiente de temperaturas as dependências de ambas as propriedades devem ser levadas em consideração, caso contrário o método numérico pode dar origem a uma representação inexata da realidade. Nesse exemplo, quando $\Lambda = 0.05$ usar a Transformada de Kirchhoff em $div(k\nabla T)$ e manter a difusividade constante gera uma aproximação pior que o método linear largamente empregado.

7.3 Aproximação Constante por Partes

No exemplo apresentado na última seção, a Transformada de Kirchhoff ω e sua inversa $\kappa^{-1}(\omega)$ foram facilmente obtidas, entretanto, em alguns casos, devido à uma má

Figura 11 - Esquema de uma aproximação constante por partes para a condutividade como função da temperatura e a Transformada de Kirchoff (GAMA, 2017)



escolha para a representação da dependência funcional da condutividade com a temperatura, algumas dificuldades podem surgir, como por exemplo uma função $\hat{k}(\xi)$ na equação (101) cuja integração seja extremamente trabalhosa ou cuja Transformada inversa não seja possível devido a restrições matemáticas. Em casos como esse, para fornecer facilmente a Transformada ω e assegurar a existência e unicidade da inversa $\kappa^{-1}(\omega)$ é interessante utilizar uma aproximação constante por partes para a condutividade térmica dependente da temperatura, como a esquematizada na figura 11 e representada matematicamente na equação (116), (GAMA, 2017).

$$\hat{k}(T) = \begin{cases} k_1, & T_0 \leq T < T_1 \\ k_2, & T_1 \leq T < T_2 \\ k_3, & T_2 \leq T < T_3 \\ k_4, & T_3 \leq T < T_4 \end{cases} \quad (116)$$

Considere a aproximação constante por partes esboçada na figura 11. Em casos como esse, a Transformada de Kirchhoff (considerando todo o domínio da função), ω pode ser encontrada calculando-se a área sob a curva, como uma integração numérica da função, obviamente, quanto mais partes forem usadas para aproximar a função $k(T)$, maior a precisão do cálculo, enquanto a Transformada de Kirchhoff ω_n em uma temperatura específica n , é encontrada calculando a área hachurada.

Esse procedimento é conveniente uma vez que, em geral, os valores da condutividade térmica de um material são obtidos de forma empírica em diferentes temperaturas e ajustados em uma relação funcional. Nesse caso os valores conhecidos podem ser usados para aproximar a função constante por partes, pulando essa etapa de ajuste da função.

Equações gerais para a Transformada de Kirchhoff, o valor de ω em uma certa temperatura e a para a Transformada inversa em casos deste tipo são dadas respectivamente pelas equações seguintes, onde N indica o número de partes usadas para aproximar a função $k(\hat{T})$, (GAMA, 2017)

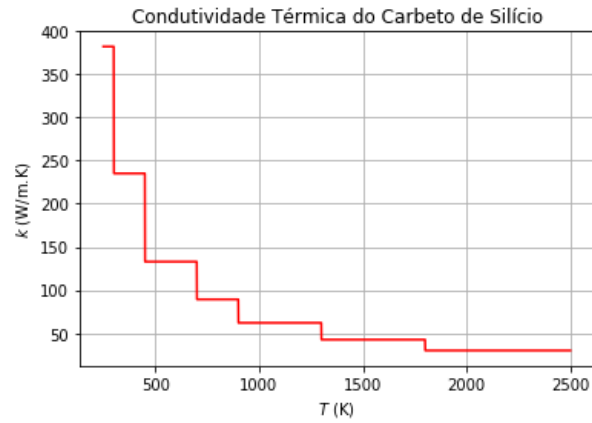
$$\omega = \frac{1}{2} \left((k_1 + k_N)T + \sum_{i=2}^N (k_i - k_{i-1})(|T - T_{i-1}| - T_{i-1}) \right) \quad (117a)$$

$$\omega_i = \sum_{j=1}^i k_j(T_j - T_{j-1}), \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad T_0 = 0 \quad (117b)$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_N} \right) \omega + \sum_{i=2}^N \left(\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_{i-1}} \right) (|\omega - \omega_{i-1}| - \omega_{i-1}) \right) \quad (117c)$$

Considere o exemplo a seguir no qual a aproximação constante por partes com $N = 7$ representada na figura 12, foi usada para resolver o mesmo problema resolvido na seção anterior. Essa aproximação foi feita usando os valores obtidos da equação (110a) e da equação (110b). Alguns resultados são mostrados nas figuras 13 e 14.

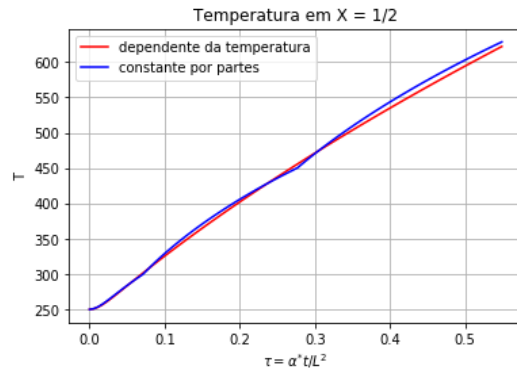
Figura 12 - Aproximação constante por partes para a condutividade térmica do Carbetto de Silício (6H-SiC) para temperaturas entre 250 K e 2500 K



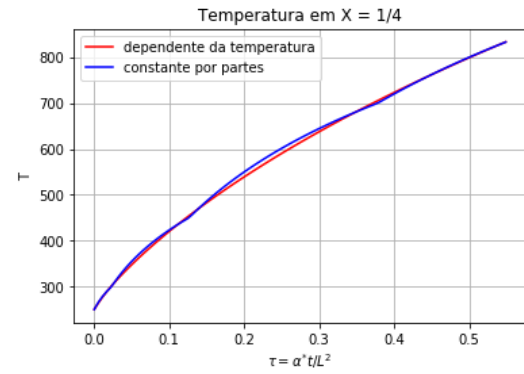
A figura 13 mostra a temperatura ao longo do tempo em algumas posições fixas, comparando a abordagem na qual a condutividade é constante por partes com o caso em que é dependente da temperatura.

Figura 13 - Comparação entre as abordagens envolvendo condutividade dependente da temperatura e constante por partes

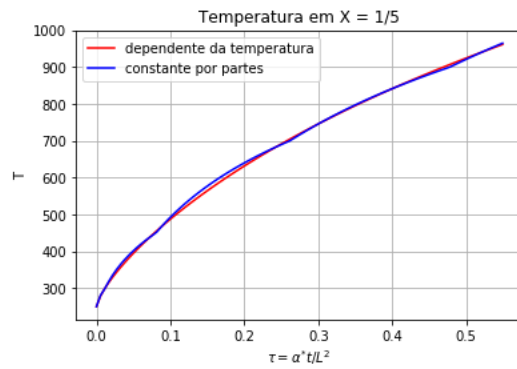
(a) Posição fixa $X = 1/2$



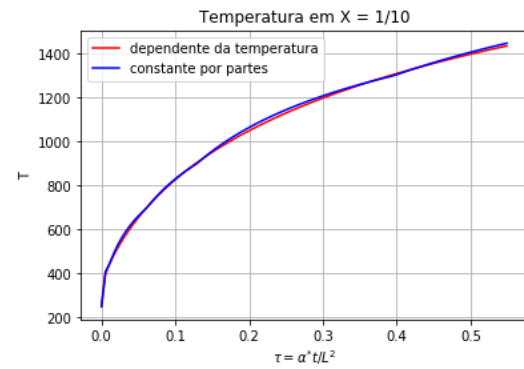
(b) Posição fixa $X = 1/4$



(c) Posição fixa $X = 1/5$



(d) Posição fixa $X = 1/10$



E a figura 14 apresenta a distribuição da temperatura em função da posição em alguns instantes de tempo.

Figura 14 - Comparação entre as abordagens envolvendo condutividade dependente da temperatura e constante por partes

(a) Tempo fixo $\tau = 0.0109$



(b) Tempo fixo $\tau = 0.0247$



(c) Tempo fixo $\tau = 0.0410$



(d) Tempo fixo $\tau = 0.0499$



Observando a figuras 13 e a figura 14, vemos que os pontos que formam as duas curvas em cada gráfico são muito próximos, ainda que tenhamos utilizado uma aproximação grosseira para condutividade térmica ($N = 7$), o que fornece evidências de que a aproximação constante por partes é uma aproximação válida da realidade (condutividade dependente da temperatura).

7.4 Alguns Exemplos Unidimensionais

Para ilustrar como é vantajoso utilizar a Transformada de Kirchhoff em problemas de difusão de calor, vamos considerar o seguinte problema adimensionalizado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \dot{q} \\ \Theta_B &= 0, \text{ em } X = 0 \text{ e } X = 1, \quad \tau \geq 0 \\ \Theta &= 1 \text{ em } 0 < X < 1, \quad \tau = 0 \end{aligned} \tag{118}$$

Se a quantidade \dot{q} for conhecida e independente do tempo, esse mesmo problema no regime estacionário (se o termo transiente fosse nulo), teria a seguinte solução,

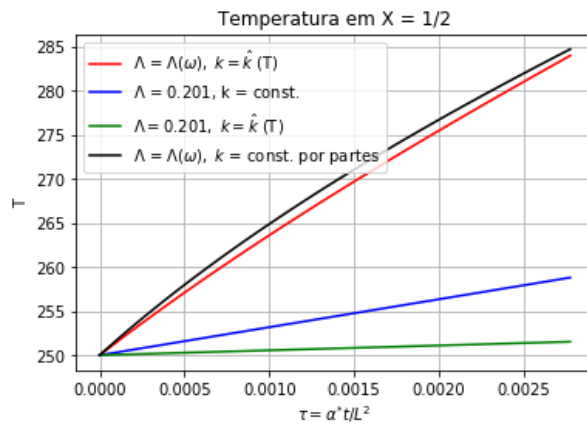
$$\Theta = \frac{\dot{q}}{2} (X - X^2) \quad (119)$$

Vamos usar a equação (119) como uma função geração de calor e obter as temperaturas ao longo de uma barra de 11 *m* cujo interior está a 250 *K* quando a superfície tem a temperatura subitamente alterada para 2500 *K* e mantida constante por 5400 *s*. A temperatura de referência arbitrariamente adotada aqui é igual a 442 *K*. Os resultados para algumas posições fixas ao longo do tempo são mostrados na figura 15 onde são comparadas as soluções do problema utilizando a difusividade adimensional constante e igual a 0.201 e a difusividade adimensional dependente de ω .

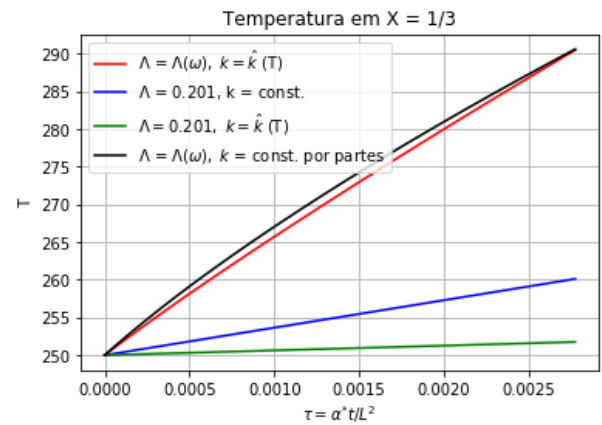
Esse exemplo ressalta a importância de levar em consideração a variação de ambas as propriedades com a temperatura. O caso em que apenas a dependência da difusividade térmica é desprezada (curva verde) fornece uma aproximação pior que abordagem linear usual (curva azul).

Figura 15 - Temperatura ao longo do tempo em algumas posições fixas

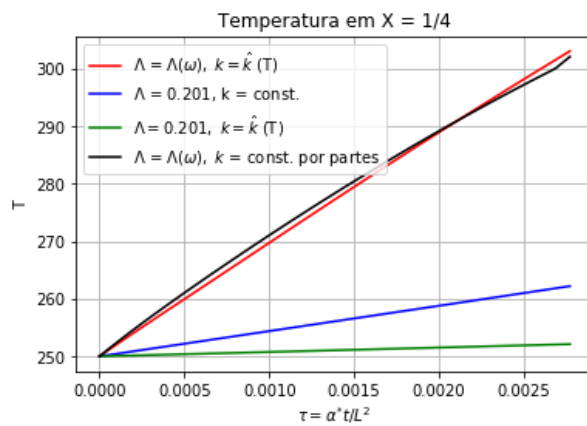
(a) Em uma posição fixa $X = 1/2$



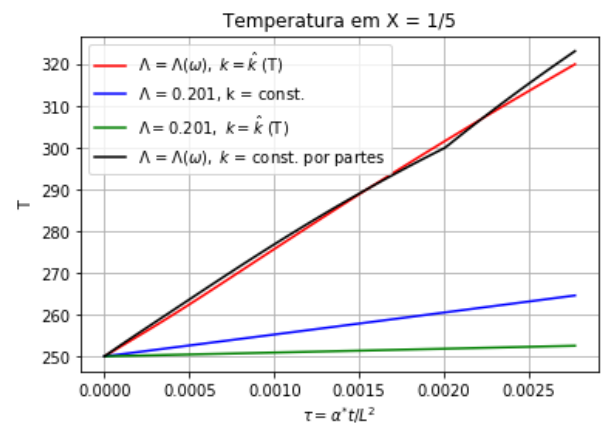
(b) Em uma posição fixa $X = 1/3$



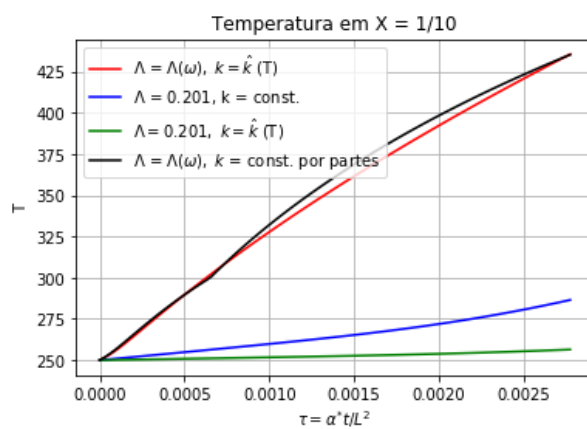
(c) Em uma posição fixa $X = 1/4$



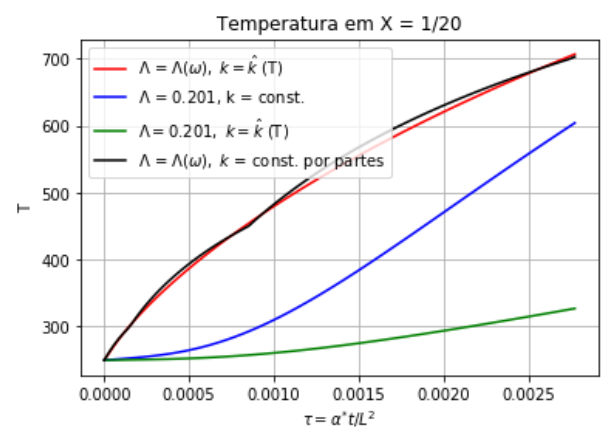
(d) Em uma posição fixa $X = 1/5$



(e) Em uma posição fixa $X = 1/10$



(f) Em uma posição fixa $X = 1/20$



Vamos resolver um problema agora com outras condições de contorno. Considere que uma barra de 12.34 m em equilíbrio térmico a 250 K seja atingida por um fluxo de calor constante de intensidade $q = 70\text{ W/m}^2$ nas duas extremidades fazendo a temperatura da superfície mudar. Tal fluxo é mantido durante 1 h após o instante inicial. Não há troca de calor ao longo da barra apenas nas extremidades. Este é um problema de Neumann. Usando a lei de Fourier ($q = -k\nabla T$), a cada instante de tempo a temperatura T_S em ambas as superfícies é dada aproximadamente por:

$$T_S = \frac{q\Delta x}{k} + T_1 \quad (120)$$

Sendo Δx a distância entre o nó da superfície e o segundo nó da discretização, e T_1 a temperatura do segundo nó. A temperatura de referência é arbitrariamente definida como 550 K . A curva com difusividade variável é comparada a uma difusividade adimensional constante de igual a 7.97 . Os resultados em algumas posições fixas são mostrados na figura 16.

Figura 16 - Temperatura ao longo do tempo em algumas posições fixas

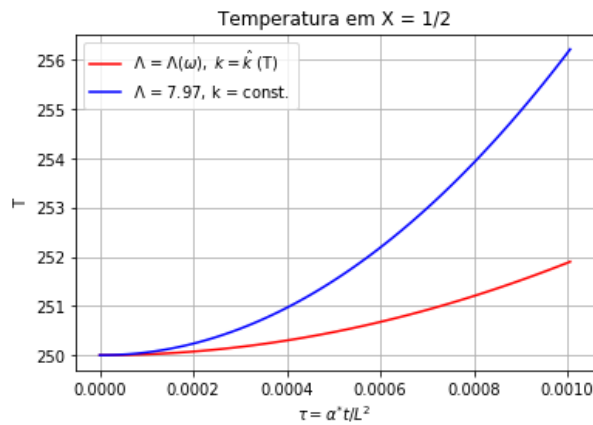
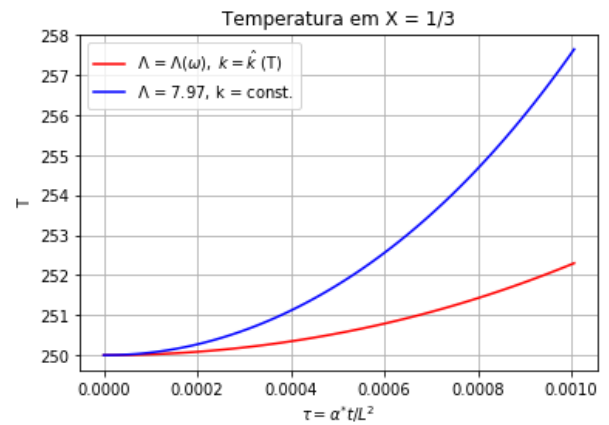
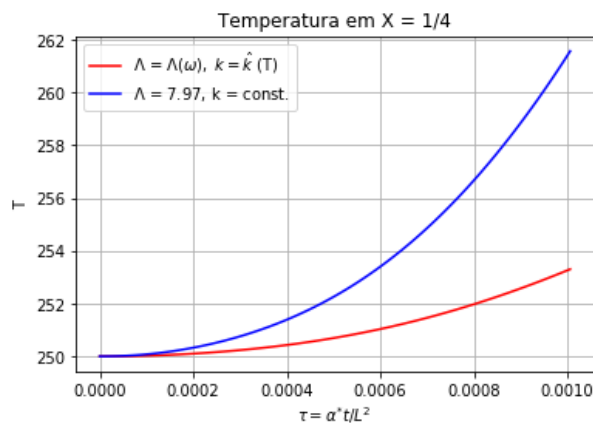
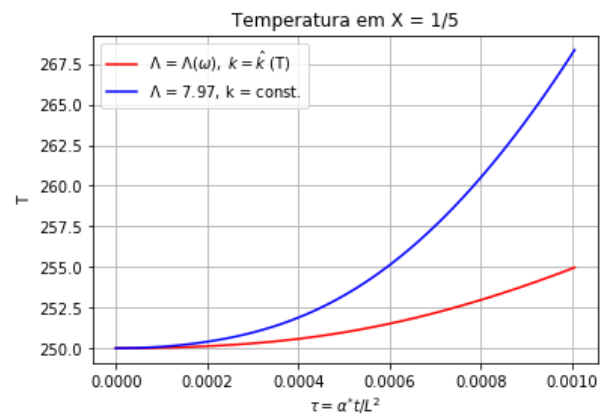
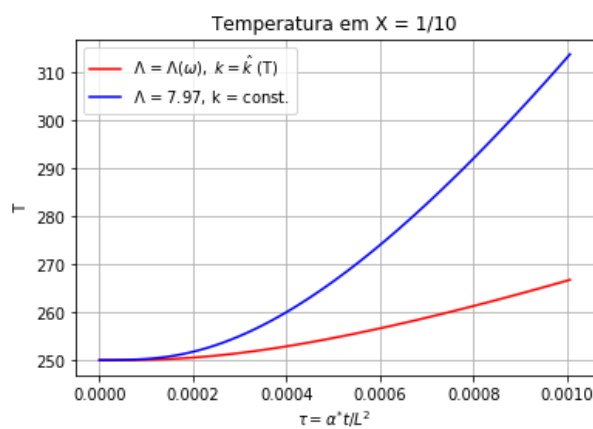
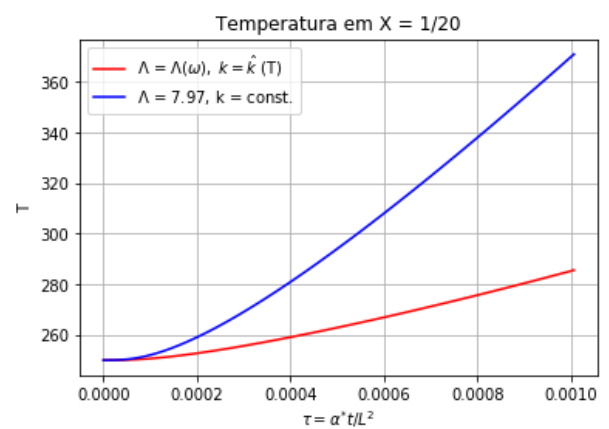
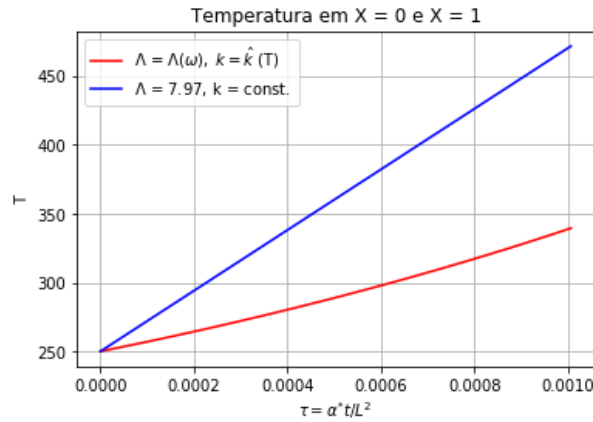
(a) Em uma posição fixa $X = 1/2$ (b) Em uma posição fixa $X = 1/3$ (c) Em uma posição fixa $X = 1/4$ (d) Em uma posição fixa $X = 1/5$ (e) Em uma posição fixa $X = 1/10$ (f) Em uma posição fixa $X = 1/20$ 

Figura 17 - Temperatura na superfície ao longo do tempo



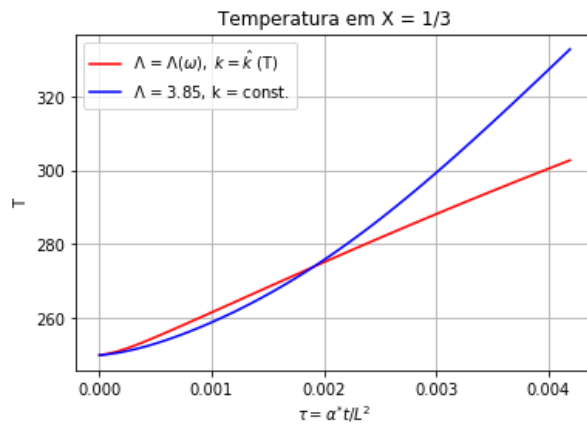
A evolução no tempo da temperatura superficial é mostrada na figura 17, com a condutividade térmica constante (curva azul) avaliada à temperatura de referência e aproximadamente igual a $104,46 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$. Para o problema dependente da temperatura, a condutividade térmica na superfície é dada pela equação (110a) e atualizada a cada passo de tempo.

Por último, vamos resolver um problema de Robin, ou seja com condições de contorno dependente da temperatura local. A mesma barra do problema anterior, a 250K tem seu equilíbrio rompido por um fluxo de calor de convecção livre gerado pelo movimento microscópico do fluido, alterando a temperatura nas duas extremidades a cada passo de tempo.

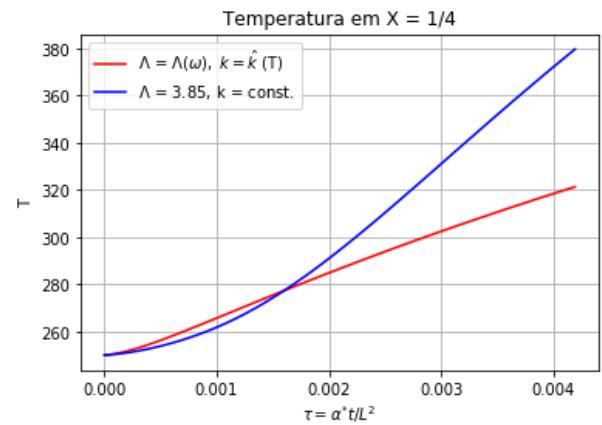
A lei do resfriamento de Newton ($q = h(T_S - T_\infty)$) pode ser usada para calcular o fluxo térmico, com o coeficiente convectivo h e a temperatura do fluido T_∞ conhecidos enquanto a temperatura na superfície é encontrada pela equação (120). Neste problema usamos $h = 200 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ e $T_\infty = 775 \text{ K}$. A difusividade adimensional é igual 3.85. Os resultados são mostrados na figura 18

Figura 18 - Temperatura ao longo do tempo em algumas posições fixas

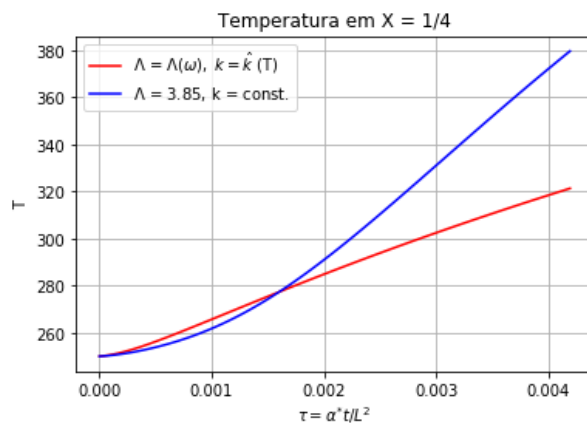
(a) Em uma posição fixa $X = 1/2$



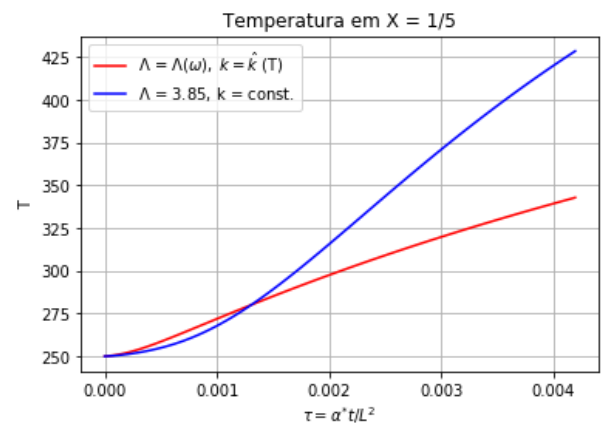
(b) Em uma posição fixa $X = 1/3$



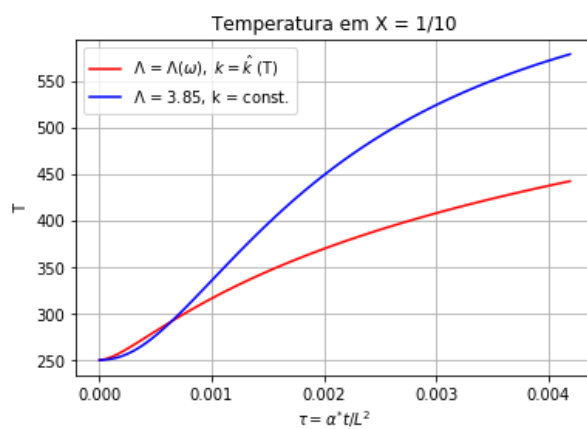
(c) Em uma posição fixa $X = 1/4$



(d) Em uma posição fixa $X = 1/5$



(e) Em uma posição fixa $X = 1/10$



(f) Em uma posição fixa $X = 1/20$

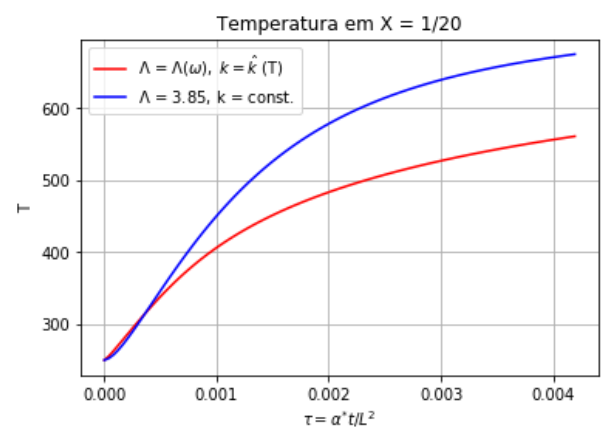
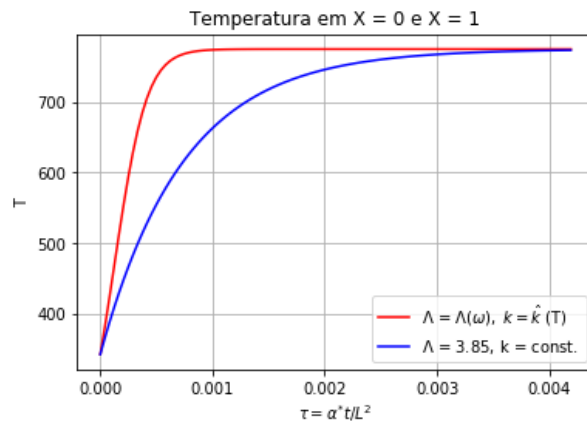


Figura 19 - Temperatura na superfície ao longo do tempo



Vale a pena fazer uma ressalva nesse caso, como a equação do calor é válida apenas para objetos estáticos não poderia haver convecção uma vez que o coeficiente convectivo é em geral fortemente influenciado pela velocidade do fluido e nesse caso, para não desprezar a física, a velocidade do fluido em relação ao corpo deve ser nula. Entretanto, embora fisicamente impreciso, esse problema é interessante para demonstrar matematicamente como é importante levar em conta as variações da difusividade e da condutividade neste tipo de equação, em outras palavras aproximar uma variável como constante pode levar a resultados imprecisos.

Na figura 19 vemos que há um limite para a temperatura da superfície do corpo: a temperatura do fluido, entretanto, há uma diferença nas duas abordagens, o tempo necessário para que tal equilíbrio seja atingido. Este gráfico assim como o da figura 17 demonstram a importância de usar o valor correto para a condutividade térmica em problemas de condução de calor.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, o método de diferenças finitas foi usado para aproximar um sistema de equações diferenciais não lineares, gerado a partir da equação do calor, como um sistema de equações algébricas lineares muito mais fácil de ser resolvido. Foi provado que na presença de gradientes de temperatura significativos, o tempo calculado para que uma região atinja uma determinada temperatura não corresponde à realidade, o que torna inadequado o procedimento usual de linearização (aproximar a condutividade e a difusividade arbitrariamente como constantes) que visa facilitar a implementação de esquemas numéricos.

Através do uso da Transformada de Kirchhoff a equação do calor foi alterada de modo que levasse em conta a dependência da condutividade térmica em relação à temperatura, superando a não linearidade causada pelo termo $div(k\nabla T)$. Se trabalhássemos no regime estacionário este procedimento seria o suficiente para linearizar a equação, entretanto, como estamos lidando com problemas transientes, o termo na esquerda da equação do calor é não nulo e é formado pelo produto de por $\alpha(\omega)$ e $(\partial\omega/\partial t)$, duas quantidades dependentes de ω , uma incógnita, o que causa outra não linearidade e dificulta a solução do problema.

Simulação numérica é uma boa opção para aproximar uma solução para problemas térmicos superando a não linearidade do termo transiente. Nesse caso utilizamos um esquema semi-ímplicito no qual os valores de difusividade térmica são atualizados a cada passo de tempo com base nos valores da Transformada de Kirchhoff obtidos no instante anterior. Desse modo, temos uma aproximação melhor do que randomicamente escolher um valor constante para a propriedade, uma vez que a difusividade térmica varia com a temperatura (e conseqüente com a Transformada de Kirchhoff) e tratá-la como constante distorceria as taxas de transferência de calor.

Esse método deveria ser amplamente utilizado uma vez que soluções numéricas e analíticas para esse tipo de problema, encontradas na literatura, são obtidas considerando a difusividade e a condutividade incondicionalmente constantes, o que não ocorre na vida real. O uso da Transformada de Kirchhoff aliada a métodos numéricos torna possível a aquisição mais veloz de dados mais próximos da realidade, o que pode acelerar e diminuir o custo do desenvolvimento de projetos térmicos.

Trabalhos futuros podem ser desenvolvidos com o objetivo de calcular a distribuição interna de temperaturas de corpos deformáveis, anisotrópicos, em movimento, com geometrias não-regulares e sujeitos a condições de contorno dependentes da temperatura local estimuladas por radiação térmica ou convecção na superfície.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, D. A.; TANEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H. *Computational fluid dynamics and heat transfer*. [S.l.]: CRC Press, 2012.
- ARPACI, V. *Conduction Heat Transfer*. [S.l.]: Addison Wesley Publishing Company, 1966.
- BERGMAN, T. L. et al. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. [S.l.]: LTC, 2014.
- BILLINGTON, E. W.; TATE, A. *The physics of deformation and flow*. [S.l.]: Mc-Graw Hill, 1981.
- GAMA, R. Closed-form formulae for the kirchhoff transformation assuming a piecewise constant temperature dependent thermal conductivity. *Latin American Applied Research*, v. 47, n. 2, p. 53–57, 2017.
- GAMA, R. A general minimum principle for steady-state conduction heat transfer with temperatura-dependent thermal conductivity subjected to linear robin boundary conditions. *Heat Transfer Research*, v. 49, n. 5, p. 413–422, 2018.
- GAMA, R.; CERQUEIRA, J.; GAMA, R. A note on transient heat transfer problems with temperature-dependent thermal conductivity and thermal diffusivity. *Engenharia Térmica (Thermal Engineering)*, v. 19, n. 1, p. 89–95, 2020.
- GAMA, R. M. S. *Elementos de cinemática dos meios contínuos*. [S.l.]: EdUERJ, 2005.
- GAMA, R. M. S. *Matemática básica para mecânica dos meios contínuos (um texto para engenheiros)*. [S.l.]: EdUERJ, 2011.
- GAMA, R. M. S. *Fundamentos de mecânica dos fluidos*. [S.l.]: EdUERJ, 2012.
- GURTIN, M. E. *An Introduction to Continuum Mechanics*. [S.l.]: Academic press, 1982.
- HIRSCH, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The fundamentals of Computational Fluid dynamics*. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- HOLMAN, J. *Heat Transfer*. [S.l.]: McGraw Hill Higher Education, 2010.
- NILSSON, O. et al. Determination of the thermal diffusivity and conductivity of monocrystalline silicon carbide. *High Temperatures-High Pressures*, v. 29, p. 73–79, 1997.
- WYLIE, C. *Advanced Engineering Mathematics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1975.
- ZILL, D. G. *Advanced Engineering Mathematics*. [S.l.]: Jones & Bartlett Publishers, 2014.