



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

João Marco Piccoli Cardoso

Supercondutividade na presença de interações multipolares

Rio de Janeiro

2022

João Marco Piccoli Cardoso

Supercondutividade na presença de interações multipolares



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

C268s Cardoso, João Marco Piccoli.
Supercondutividade na presença de interações multipolares / João
Marco Piccoli Cardoso. - 2022.
61 f. : il.

Orientador: Daniel Gustavo Barci.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Supercondutividade – Teses. 2. Interação partícula-partícula – Teses.
3. Transformações de fase (Física estatística) – Teses. 4. Férmions – Teses.
I. Barci, Daniel Gustavo. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 537.31

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

João Marco Piccoli Cardoso

Supercondutividade na presença de interações multipolares

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 01 de dezembro de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Marcelo Chiapparini
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Marcio André Lopes Capri
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Daniel Reyes López
Instituto Militar de Engenharia

Dr. Anderson Alves Tomaz
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2022

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação a todos aqueles que, pagando seus impostos, me deram a oportunidade de fazer uma graduação e uma pós-graduação numa universidade pública e de qualidade. Dedico também a todos os meus conterrâneos que sofreram, direta ou indiretamente, com a pandemia que assolou este mundo nos últimos anos. Espero que os próximos anos sejam bem melhores para todos nós.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Marco e Marcia, e meus irmãos, Jorge e Luis, que me deram todo o apoio necessário para que eu realizasse meus estudos e chegasse até essa fase de minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Daniel Gustavo Barci, pelos ensinamentos e pela paciência ao longo destes anos de mestrado. Ensinamentos estes que estão sendo colocados neste trabalho, e que tenho certeza que vão fazer parte de toda a minha vida daqui para frente.

Agradeço aos meus colegas do grupo de pesquisa, em especial ao Nei que foi um grande colaborador para a parte das soluções numéricas deste trabalho.

Agradeço a todas as outras pessoas da minha família, em especial as minhas avós Iracy e Eva, aos meus falecidos avôs Antonio e José. Agradeço em especial também as minhas cunhadas Bruna e Gabriela, e a minha sobrinha Aurora.

Agradeço aos bons amigos que tenho na minha cidade, meus melhores e mais antigos amigos.

Agradeço aos amigos que fiz ao longo dos meus anos dentro da universidade, na graduação e agora no mestrado.

Agradeço aos professores Marcelo Chiapparini, Marcio Capri, Daniel Reyes López e Anderson Tomaz que aceitaram fazer parte da banca avaliadora deste trabalho.

Agradeço aos professores que tive ao longo de toda minha vida, no mestrado, na graduação e na escola, tenho certeza que a passagem de conhecimento foi feita da melhor forma possível por todos. Agradeço em especial, e novamente, aos professores, Marcio André Lopes Capri, meu antigo orientador da época da graduação, e Anderson Alves Tomaz, meu professor, que foi minha principal inspiração na época da escola, para querer ingressar no curso de física.

Agradeço aos funcionários técnico-administrativos da UERJ, em especial aos da secretária da PPGF.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Nunca é tarde demais para parar de sonhar.

Daniel Furlan

RESUMO

CARDOSO, J. M. P. *Supercondutividade na presença de interações multipolares*. 2022. 61 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

Neste trabalho nós abordamos a introdução de interações multipolares, de ordem monopolar, dipolar e quadrupolar, aos modelos pré-existentes para a transição metal-supercondutor. E analisamos possíveis efeitos destas interações dentro das quantidades já conhecidas da supercondutividade. Duas abordagens são consideradas, a primeira é uma abordagem fenomenológica, que se baseia no modelo de Landau-Ginzburg para transições de segunda ordem, e essa abordagem será usada para considerar a ordem dipolar e quadrupolar. A segunda abordagem é a abordagem microscópica, que se baseia na teoria BCS, adicionando-se a esta, um novo termo interativo de ordem de densidade (monopolar). Conseguimos neste trabalho analisar graficamente alguns diferentes efeitos causados pela introdução dessas interações no sistema.

Palavras-chave: Supercondutividade. Férmions. Landau.

ABSTRACT

CARDOSO, J. M. P. *Superconductivity in the presence of multipolar interactions*. 2022. 61 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

In this work we address the introduction of multipolar interactions, of monopolar, dipolar and quadrupolar order, to pre-existing models for the metal-superconductor transition. And analyse possible effects in well known quantities of superconductivity, caused by these interactions. Two approaches were considered, the first one is a phenomenological approach, based on the Landau-Ginzburg model for second order phase transitions, and this was used to consider the dipolar and quadrupolar interactions. The second approach was the microscopic one, which was based on the BCS theory, adding a new interactive term, of density (monopolar) interaction, to the original hamiltonian. We were able to graphically analyze some curious effects caused by introducing those interactions to the system.

Keywords: Superconductivity. Fermions. Landau.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|----|--------------------|
| SC | Supercondutividade |
| LG | Landau-Ginzburg |
| LF | Líquidos de Fermi |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----------|---|----|
| Figura 1 | - Resistividade em termos da temperatura | 17 |
| Figura 2 | - Efeito Meissner | 18 |
| Figura 3 | - Magnetização em função do campo magnético aplicado em supercon- dutores do tipo I | 20 |
| Figura 4 | - Magnetização em função do campo magnético aplicado em supercon- dutores do tipo II | 20 |
| Figura 5 | - Densidade de energia-livre em função do parâmetro de ordem | 22 |
| Figura 6 | - Interface metal-supercondutor | 23 |
| Figura 7 | - Comprimento de coerência comparado, da equação (63) | 36 |
| Figura 8 | - Comprimento de London comparado, da equação (69) | 38 |
| Figura 9 | - Parâmetro de Abrikosov para $ \alpha = \beta = 0,1$ | 39 |
| Figura 10 | - Parâmetro de Abrikosov para $ \alpha = 0,1$ $ \beta = 0,5$ | 40 |
| Figura 11 | - Parâmetro de Abrikosov para $ \alpha = 0,5$ $ \beta = 0,1$ | 41 |
| Figura 12 | - ρ normalizado como função de $x = 4\pi m f_0$ | 48 |
| Figura 13 | - Δ_0 normalizado como função de $x = 4\pi m f_0$ | 49 |
| Figura 14 | - Solução numérica de Δ | 51 |
| Figura 15 | - Cortes em f_0 de $\Delta \times T$ | 51 |
| Figura 16 | - Solução numérica para ρ | 52 |
| Figura 17 | - Corte de ρ normalizado | 53 |
| Figura 18 | - Corte de Δ normalizado | 53 |
| Figura 19 | - Corte de T normalizado | 54 |

SUMÁRIO

| | | |
|-------|--|----|
| | INTRODUÇÃO | 11 |
| 1 | TRANSIÇÕES DE FASE | 13 |
| 1.1 | Conceitos básicos sobre transições de fase | 13 |
| 1.2 | Modelo de Landau para transições de fase de segunda ordem | 15 |
| 1.3 | Supercondutividade | 16 |
| 1.3.1 | <u>Supercondutividade</u> | 16 |
| 1.3.2 | <u>Efeito Meissner-Ochsenfeld</u> | 17 |
| 1.3.3 | <u>Equação de London (London-London)</u> | 18 |
| 1.3.4 | <u>Supercondutores tipo II</u> | 19 |
| 1.4 | Modelo Landau-Ginzburg para supercondutividade | 21 |
| 2 | INTERAÇÕES ENTRE FÉRMIONS | 25 |
| 2.1 | Teoria BCS | 25 |
| 2.1.1 | <u>Campo médio</u> | 25 |
| 2.2 | Líquidos de Fermi | 31 |
| 3 | MODELO LANDAU-GINZBURG NA PRESENÇA DE INTERAÇÕES MULTIPOLARES | 33 |
| 3.1 | Energia-Livre | 33 |
| 3.1.1 | <u>Comprimento de coerência</u> | 34 |
| 3.2 | Interação com campo magnético externo | 35 |
| 3.2.1 | <u>Resposta Linear: Comprimento de penetração de London</u> | 36 |
| 3.2.2 | <u>Parâmetro de Abrikosov</u> | 38 |
| 4 | BCS NA PRESENÇA DE INTERAÇÕES MULTIPOLARES | 42 |
| 4.1 | Interação de densidade (monopólo) | 44 |
| 4.2 | Interação de corrente (dipólo) | 55 |
| 4.3 | Interação nemática (quadrupólo) | 56 |
| | CONCLUSÃO | 58 |
| | REFERÊNCIAS | 60 |

INTRODUÇÃO

É só o começo.
Lenine

A supercondutividade foi um fenômeno observado pela primeira vez em 1911 por Heike Kamerlingh Onnes na medição da resistência de fios metálicos (mercúrio) em baixas temperaturas (em torno de $4K$). Ao medir a resistência destes fios, Kammerlingh Onnes observou que estas caíam subitamente para zero abaixo desta temperatura. Percebeu-se que esta nova propriedade do material se tratava de uma nova fase da matéria, e que aquilo que ocorrera com o metal, tratava-se de uma transição fase, que veio a ser chamada posteriormente de transição metal-supercondutor. Esta descoberta levou Kamerlingh Onnes a ser condecorado com o prêmio Nobel de 1913 (DELFT; KESS, 2010).

Entre a descoberta desta nova fase da matéria até os primeiros modelos bem sucedidos para descrever a supercondutividade foram mais de 20 anos. Em 1933, os físicos alemães Walther Meissner e Robert Ochsenfeld descobriram uma propriedade fundamental dos supercondutores que diz respeito ao diamagnetismo dos mesmos. Este efeito ficou conhecido como efeito Meissner-Ochsenfeld (TINKHAM, 1996). Após a descoberta, o primeiro modelo com sucesso a descrever a supercondutividade foi desenvolvido pelos irmãos London (1935). O modelo descreve, de forma diferente de modelos anteriores para condutividade, a relação de um campo magnético externo com a corrente dentro do material supercondutor. Descrevendo assim, pela primeira vez, o efeito Meissner (LONDON; LONDON, 1935).

Outros modelos posteriores surgiram para tentar descrever a transição metal-supercondutor. O modelo fenomenológico de Landau-Ginzburg descreve as propriedades termodinâmicas do material supercondutor em temperaturas próximas à temperatura crítica. Além disso, o modelo se mostrou bem-sucedido em reproduzir a equação proposta pelos irmãos London na introdução de uma interação com um campo magnético. Além de mostrar, com certa simplicidade, que a transição estudada é uma transição de segunda ordem (ANNETT, 2004).

Entre a equação proposta pelos irmãos London e o modelo de Landau até uma descrição microscópica do comportamento dos elétrons, foi novamente mais de uma década. Em 1956, Leon Cooper demonstrou que uma interação atrativa em um gás de férmions degenerado formava um estado ligado dos elétrons, o qual poderia descrever o comportamento destes dentro do material no estado supercondutor (COOPER, 1956). Este estado ligado dos elétrons veio a ser conhecido como par de Cooper.

Em 1957, Leon Cooper, John Bardeen e John R. Schrieffer descreveram com sucesso uma teoria microscópica para a transição metal-supercondutor (BARDEEN; COOPER;

SCHRIEFFER, 1957). A teoria se baseia em um gás de férmions no qual uma interação atrativa, mediada pelos fônons da rede do material, traria a proliferação dos estados ligados de singletos (pares de Cooper), e isto causaria então a transição de fase. Por causa desta descrição microscópica, Bardeen, Cooper e Schrieffer foram também condecorados com o prêmio Nobel de 1972. Sua teoria descrevia não só o comportamento microscópico de um supercondutor, como ainda respondia à pergunta sobre um efeito observado em supercondutores ainda não explicado teoricamente, o efeito isótopo. Este efeito é dado pelo fato de que a temperatura de transição para um dado material seria dependente da massa do isótopo do material usado (MAXWELL, 1950).

Em 1959, Lev Petrovich Gor'kov demonstrou a partir da descrição microscópica a validade das equações fenomenológicas, anteriormente propostas por Landau e Ginzburg, nas proximidades da criticalidade (GOR'KOV, 1959).

Como antes comentado, os modelos para supercondutividade partem de um modelo de um gás de férmions, cuja única interação considerada é uma interação atrativa, causada pelas vibrações da própria rede cristalina do material. São desconsideradas, assim, toda e qualquer interação de origem eletromagnética entre os elétrons do material.

Este trabalho tem como objetivo analisar, tanto no regime do modelo de Landau-Ginzburg, quanto na teoria BCS, possíveis efeitos e consequências da introdução destas interações. A introdução destas interações será feita a partir de termos aditivos e interativos nas equações originais.

No caso de Landau-Ginzburg, termos a mais serão adicionados a expansão da densidade de energia-livre, estes termos tem como objetivo reproduzir possíveis efeitos dos termos de interação nas proximidades da criticalidade do sistema. E por consequência, já neste limite, mostrar possíveis alterações nos resultados originais do modelo "puro".

No caso da teoria BCS, um novo termo interativo será adicionado a hamiltoniana da teoria, e pela mesma aproximação usada na teoria original (campo-médio) serão também analisados os possíveis efeitos causados por tais interações no gap de energia, e na temperatura crítica da transição.

As interações introduzidas no modelo microscópico se basearam em uma expansão multipolar da hamiltoniana de interação dos líquidos de Fermi, e esta parte do trabalho será limitada a análise apenas do termo monopolar (densidade). Os termos dipolares (corrente) e quadrupolares (nemático) serão expostos, mas sua solução é um objetivo para futuros trabalhos. As soluções realizadas nos termos de densidade serão tanto analíticas, as quais necessitam de aproximações para serem possíveis de realizar, quanto numéricas, as quais são mais "exatas" e que serviram tanto para análise quanto para comparação com as soluções analíticas.

1 TRANSIÇÕES DE FASE

Transições de fase são processos em materiais que se baseiam na alteração das propriedades macroscópicas e estruturais desse material, sem mudar a sua estrutura molecular ou atômica. Os exemplos mais simples, e talvez os mais conhecidos de transição de fase, são a fusão de um sólido (ou a solidificação de um líquido) e a ebulição de um líquido (ou a condensação de um gás). No primeiro exemplo: ao esquentarmos um sólido até sua temperatura de fusão é possível observar que este começa a fazer a transição (fusão) para o estado líquido e suas propriedades estruturais e macroscópicas mudam ao final da transição. Este novo estado da matéria que é alcançado tem uma nova densidade e por consequência, a mesma massa deste material ocupa um volume diferente, e diversas outras propriedades termodinâmicas deste material vão ser alteradas após a transição.

Os exemplos citados anteriormente são os exemplos mais conhecidos de uma transição de fase. Outro exemplo conhecido é a transição ferromagnética. Alguns outros exemplos menos conhecidos são: a transição isotrópica-nemática (cristais líquidos), a transição de superfluidos e a que será o foco principal deste trabalho, a transição metal-supercondutor.

1.1 Conceitos básicos sobre transições de fase

Transições de fase são caracterizadas na termodinâmica a partir de descontinuidades presentes nas derivadas dos potenciais termodinâmicos (YEOMANS, 1992). Considerando os seguintes potenciais

$$\begin{aligned}
 U(S, V, N), \\
 H(S, P, N) &= U + PV, \\
 F(T, V, N) &= U - TS, \\
 G(T, P, N) &= U + PV - TS, \\
 \Phi(T, V, \mu) &= U - TS - \mu N,
 \end{aligned} \tag{1}$$

que são chamados respectivamente de energia interna, entalpia, energia livre de Helmholtz, potencial de Gibbs e grande potencial termodinâmico (STANLEY, 1971). As suas primeiras derivadas têm a forma

$$\begin{aligned}
T &= \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{P,N}, \\
S &= - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,N} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{V,\mu}, \\
P &= - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T,\mu}, \\
V &= \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_{S,N} = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T,N}, \\
\mu &= \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right)_{S,P} = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,P}, \\
N &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{T,V},
\end{aligned} \tag{2}$$

sendo que T, S, P, V, μ e N são a temperatura, entropia, pressão, volume, potencial químico e número de partículas respectivamente. Descontinuidades nestas derivações caracterizam um tipo de transição de fase. No exemplo do congelamento da água há uma descontinuidade no volume antes e depois da transição. Esta primeira classe de transições de fase é chamada de transições de primeira ordem (justamente pela ordem da derivação na qual a descontinuidade está presente).

Além das primeiras derivadas, existem também as segundas derivadas dos potenciais, alguns exemplos destas derivadas são o coeficiente de expansão, as compressibilidades e o calor específico, como abaixo

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \\
\kappa_T &= - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \\
\kappa_S &= - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S, \\
C_V &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V,
\end{aligned} \tag{3}$$

e assim como antes, descontinuidades nestas derivações caracterizam uma outra classe de transições, estas são chamadas transições de segunda ordem.

Existem diferenças significativas entre transições de primeira e segunda ordem.

Talvez a mais notável destas diferenças seja a chamada coexistência de estados. Numa transição de primeira ordem é possível que, no momento em que a transição ocorre, os dois (ou mais) estados da matéria desta transição coexistam. Um exemplo claro disto é na fusão de um sólido, onde este transiciona para o estado líquido gradualmente, mantendo uma parte sólida enquanto "derrete".

A mesma coexistência não existe nas transições de segunda ordem. Nesta, ou o material está em um estado da matéria, ou no outro. Um bom exemplo disso é a transição ferromagnética. Nesta transição ou o material está magnetizado (tem campo magnético próprio), ou não está (não tem campo magnético próprio). A transição metal-supercondutor é uma transição de fase de segunda ordem, e por conta disto, o foco do trabalho vai estar neste tipo de transição.

Exite ainda um tipo de transição que não se enquadra em nenhuma das definições dadas anteriormente, estas transições são chamadas de transições topológicas e não estão relacionadas com descontinuidades nas quantidades termodinâmicas, e sim com a topologia do material. O trabalho não vai ter nenhum exemplo nem explicação destas, pois fugiria completamente do escopo de estudos realizados para o mesmo.

1.2 Modelo de Landau para transições de fase de segunda ordem

O modelo de Landau para transições de fase se baseia em princípios razoavelmente básicos. Considerando as simetrias presentes num dado sistema no qual ocorre a transição, escreve-se um funcional de energia-livre em termos de um, ou mais, parâmetros de ordem e da temperatura (OLMSTED, 2015)

$$F[\phi_i] = \int d^d x \mathcal{F}(\phi_i), \quad (4)$$

sendo que \mathcal{F} é a densidade de energia-livre, e é uma expansão polinomial (até a ordem adequada) em torno de ϕ_i , que é o(s) parâmetro(s) de ordem.

Um exemplo bem conhecido é o ferromagnetismo uniaxial, a simetria considerada é a Z_2 , o parâmetro de ordem é a própria magnetização do sistema, sendo assim a energia-livre fica na forma (RIED et al., 1991)

$$F[M] = \int dx \left[\frac{a(T)}{2} M^2 + \frac{b}{4} M^4 \right], \quad (5)$$

sendo a e b são parâmetros fenomenológicos.

A forma matemática do parâmetro é dada pela minimização da energia livre com

relação ao mesmo, ou seja,

$$\frac{\delta F}{\delta \phi_i} = 0. \quad (6)$$

Se o valor de ϕ_i após a minimização for nulo ($\phi = 0$) isto quer dizer que o sistema está numa fase desordenada (a transição ainda não ocorreu). No caso do ferromagnetismo, a fase desordenada ($M = 0$) é uma fase não magnética.

Caso a transição ocorra, há uma quebra espontânea na simetria do sistema e os mínimos são deslocados ($\phi_i \neq 0$). Com isto o sistema vai para uma fase ordenada. No caso do ferromagnetismo ($M \neq 0$), há magnetização espontânea do sistema. Esta magnetização ocorre abaixo de uma certa temperatura crítica (T_C).

Para introduzir uma possível dependência da posição, que diz respeito a mudanças locais dentro do sistema, é necessário adicionar um termo de expansão nas derivadas, ao modelo de Landau. Este termo em geral é adicionado da forma

$$F[\phi] = \int d^d x \left[\mathcal{F}(\phi) + \alpha |\vec{\nabla} \phi|^2 \right], \quad (7)$$

sendo α um novo parâmetro fenomenológico. Com essa extensão é possível obter novas quantidades do modelo, como, por exemplo, a função de correlação de um dado sistema.

O modelo de Landau é muito útil e importante na descrição de transições de fase de segunda ordem. Aplicado da forma correta, muitos resultados de uma dada transição podem ser obtidos. Sua limitação está no fato de que este é uma expansão em torno da criticalidade do sistema, ou seja, o limite de sua validade está nas proximidades da transição de fase ($T \rightarrow T_C$).

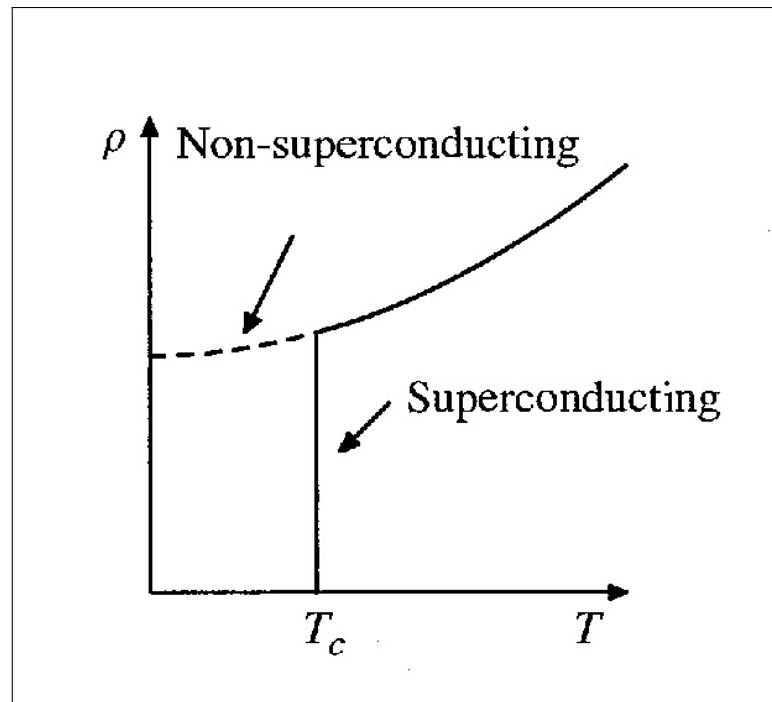
1.3 Supercondutividade

1.3.1 Supercondutividade

Em 1911, Heike Kammerlingh Onnes fazendo experimentos com fios de mercúrio em baixas temperaturas, percebeu que ao resfriar o mercúrio a uma temperatura de aproximadamente $4K$ a resistência do fio (ou seja, a resistividade do material) caía subitamente para 0, ao contrário do que seria esperado pelo modelo de Drude (ANNETT, 2004).

Na figura 1, a linha tracejada é o que seria esperado pelo modelo de Drude, que descrevia a condutividade de materiais. A linha sólida é aproximadamente o que foi observado.

Figura 1 - Resistividade em termos da temperatura



Fonte: ANNETT, 2004, p. 49.

Este evento foi a primeira vez que um supercondutor foi observado. Com isto foi a descoberta desta nova transição de fase da matéria. Esta transição que é atualmente chamada de metal-supercondutor.

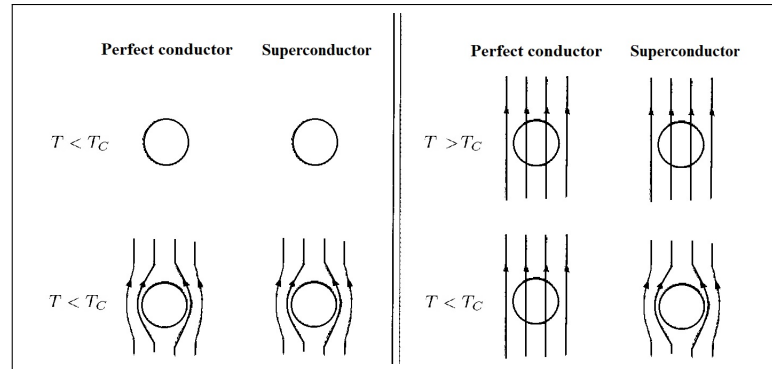
1.3.2 Efeito Meissner-Ochsenfeld

Em 1933, Walther Meissner e Robert Ochsenfeld observaram que na interação de supercondutores com um campo magnético, estes apresentavam um diamagnetismo perfeito. De forma que independente se o campo fosse aplicado antes ou depois da transição, quando o material estava na fase supercondutora o campo era imediatamente expulso do seu interior. Diferentemente do caso de condutores ideais de modelos anteriores tal como mostrado na figura 2 (KETTERSON; SONG, 1999)

Este novo comportamento descoberto nos supercondutores é conhecido como efeito Meissner (ou efeito Meissner-Ochsenfeld). E ele é um comportamento fundamental em supercondutores.

"Hoje em dia o fato da resistividade ser zero, $\rho = 0$, não é considerada a verdadeira definição de supercondutividade. A prova fundamental que a supercondutividade ocorre em um dado material é a demonstração do efeito Meissner-Ochsenfeld."(ANNETT, 2004)

Figura 2 - Efeito Meissner



Fonte: KETTERSON; SONG, 1999, p. 2.

1.3.3 Equação de London (London-London)

Dois anos após a descoberta do efeito Meissner em 1935, os irmãos Fritz e Heinz London propuseram uma equação fenomenológica para o efeito Meissner (e por consequência supercondutores). Eles consideram que num supercondutor uma parte dos elétrons do material seria responsável pela "supercondução", e outra parte seriam elétrons normais que sofreriam efeitos de uma resistência do material. Como parte dos elétrons se moveriam dentro do material (gerando corrente) sem sofrer efeito de uma resistividade, estes seriam os únicos responsáveis por qualquer corrente.

Além disso, a equação dos irmãos London mudava a ideia dos modelos antigos em que a densidade de corrente seria sempre proporcional ao campo elétrico (implicando numa corrente proporcional a uma diferença de potencial elétrico) aplicado ao material. Esses propõem que a densidade de corrente fosse proporcional ao potencial vetor magnético \vec{A} . A equação de London, na forma explicada, é escrita (LONDON; LONDON, 1935)

$$\vec{J} = -\frac{n_s e^2}{m_e} \vec{A}, \quad (8)$$

sendo e a carga do elétron, n_s a densidade de elétrons que superconduzem e m_e a massa do elétron.

Essa equação pode gerar a princípio uma certa estranheza, pois esta aparentemente quebraria a simetria de calibre proveniente do eletromagnetismo. Isto porque o lado esquerdo da equação é uma quantidade física observável, densidade de corrente, e o lado direito é proporcional ao campo \vec{A} que é definido no eletromagnetismo a menos de um gradiente de uma função contínua (transformação de calibre). Na próxima seção será demonstrado que a equação de London de uma forma mais geral é, na verdade, invariante de calibre, e que esta versão da equação está o calibre fixado (calibre de Coulomb).

Usando a equação (8) e a lei de Ampère é possível mostrar que essa se torna

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}, \quad (9)$$

sendo que $\lambda = \sqrt{m_e / \mu_0 n_s e^2}$, que é conhecido como comprimento de penetração de London. No caso mais simples possível, com um campo magnético na forma $\vec{B} = B_y(x) \hat{j}$, é possível mostrar que a solução convergente para essa equação é na forma,

$$B_y(x) = B_y(0) e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad (10)$$

esta solução mostra que λ define o quanto o campo consegue "penetrar" o supercondutor antes de tender a nulidade, e daí vem o nome da quantidade.

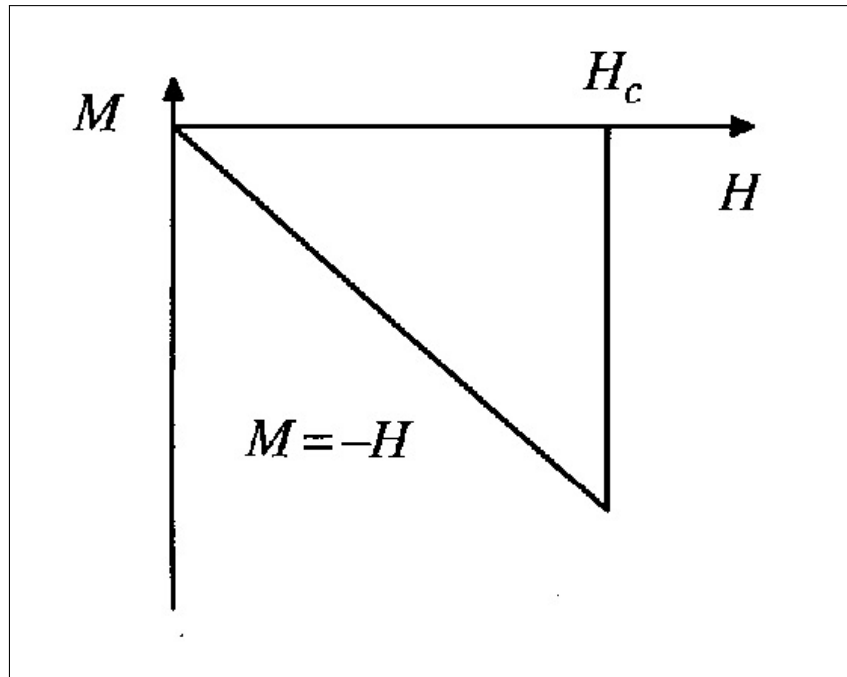
1.3.4 Supercondutores tipo II

O efeito Meissner é observado em supercondutores num certo limite de campo magnético externo aplicado. A partir de uma certa intensidade de campo magnético a supercondutividade é quebrada e o material volta ao estado metálico (resistividade não nula) mesmo em baixas temperaturas. Supercondutores que apresentam apenas o diamagnetismo até o campo limite e, para campos mais intensos, saem do estado supercondutor são chamados de supercondutores do tipo I. A magnetização de um supercondutor tipo I pelo campo é descrita por uma função vetorial $\vec{H} = -\vec{M}$, sendo \vec{H} o campo magnético externo aplicado e \vec{M} a magnetização do material. Gráficamente, esse comportamento fica na forma da figura 3, sendo H_C a intensidade máxima de campo magnético do campo suportado pelo supercondutor (campo crítico) (ANNETT, 2004).

Porém, uma parte dos supercondutores não apresentam esse comportamento com campo externo. Esta outra parte permite, a partir de uma certa intensidade de campo (H_{C1}), um certo nível de penetração do campo magnético. Até que, a supercondutividade é quebrada em um segundo valor crítico de campo magnético (H_{C2}). Esse segundo tipo de supercondutor é chamado de tipo II, e o comportamento gráfico da magnetização desse tipo é ilustrado na figura 4. Como é possível observar, estes supercondutores tipo II não apresentam diamagnetismo perfeito (efeito Meissner) da mesma forma.

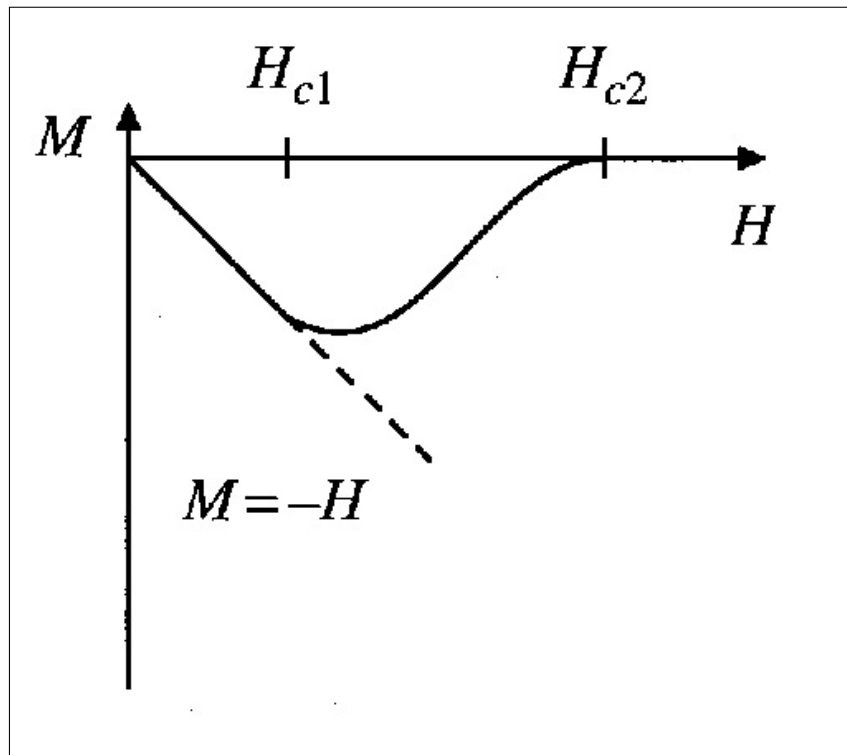
Posteriormente Alexei Abrikosov conseguiu explicar este efeito de penetração de campo magnético em supercondutores. Ele demonstrou que esta penetração se dá na forma de vórtices, e que o fluxo de campo magnético é quantizado a partir de um quanta

Figura 3 - Magnetização em função do campo magnético aplicado em supercondutores do tipo I



Fonte: ANNETT, 2004, p. 57.

Figura 4 - Magnetização em função do campo magnético aplicado em supercondutores do tipo II



Fonte: ANNETT, 2004, p. 57.

de fluxo $\Phi_0 = h/2e$. Estes vórtices são uma região de estado metálico comum dentro do supercondutor que permite esta penetração do campo (ABRIKOSOV, 2004).

1.4 Modelo Landau-Ginzburg para supercondutividade

Para um supercondutor homogêneo, a energia-livre de Landau vai ser na forma

$$F[\psi, \psi^*] = \int d^d x \left[\dot{a}(T - T_C)\psi\psi^* + \frac{b}{2}(\psi\psi^*)^2 \right], \quad (11)$$

o parâmetro de ordem neste caso é ψ que é complexo, e a simetria presente nesta energia livre é a simetria de calibre global. As outras quantidades T e T_C são a temperatura e a temperatura crítica respectivamente, e \dot{a} e b são os parâmetros fenomenológicos do modelo.

Graficamente a densidade de energia-livre é ilustrada pela figura 5 para regimes diferentes da temperatura. A quebra espontânea de simetria ocorre exatamente quando $T < T_C$, no caso de uma transformação de calibre (mudança de fase) $\psi \rightarrow \psi e^{i\theta}$ o valor do parâmetro de ordem, e por consequência o estado, difere, mesmo que o valor da energia-livre não tenha sido alterado.

A equação que minimiza a energia livre (11) é $\delta F/\delta\psi^* = 0$ que fica

$$\dot{a}(T - T_C)\psi + b|\psi|^2\psi = 0 \quad (12)$$

resolvendo esta equação para $|\psi| = \psi_0$ é possível mostrar que

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\dot{a}(T_C - T)}{b}}, \quad (13)$$

para $T < T_C$. No caso de $T \geq T_C$ então $\psi_0 = 0$ é a única solução real.

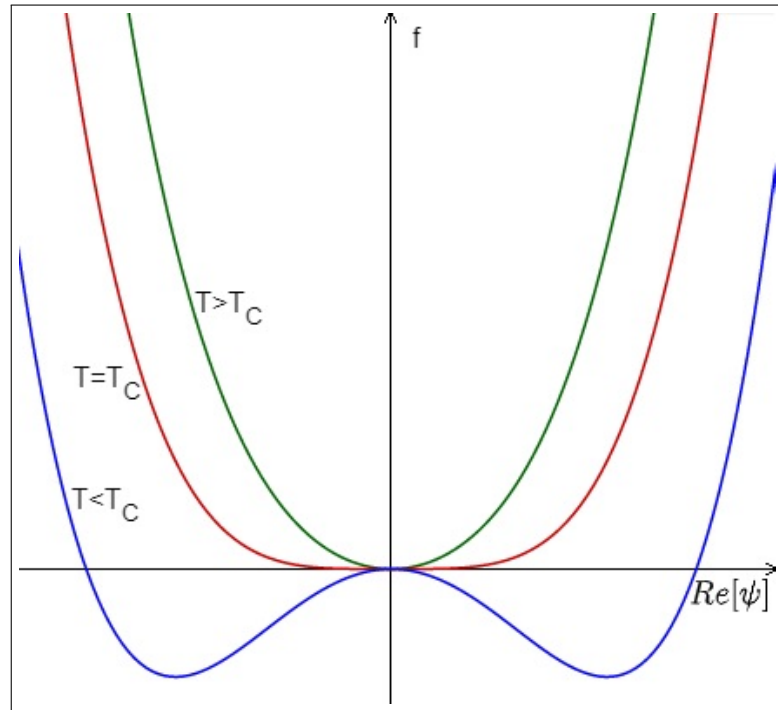
A solução apresentada pela equação (13) é a solução mais simples possível de ser encontrada no modelo e é válida para um caso de um supercondutor homogêneo.

Considerando um caso não homogêneo é necessário introduzir um termo dependente das derivadas do parâmetro de ordem, neste caso a energia-livre vai ficar

$$F[\psi, \psi^*] = \int d^d x \left[\frac{\hbar^2}{2m^*} |\vec{\nabla}\psi|^2 + \dot{a}(T - T_C)\psi\psi^* + \frac{b}{2}(\psi\psi^*)^2 \right], \quad (14)$$

onde a escolha dos parâmetros é feita de forma proposital, e m^* é um parâmetro com unidade de massa.

Figura 5 - Densidade de energia-livre em função do parâmetro de ordem



Fonte: O autor, 2022.

Neste caso é possível mostrar, com a minimização da energia-livre, que a equação para o parâmetro de ordem vai ser

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi + (\dot{a}(T - T_C) + b|\psi|^2)\psi = 0, \quad (15)$$

que é uma equação diferencial parcial não linear, que está acoplada com a sua conjugada complexa. Encontrar uma solução analítica e exata da equação acima seria extremamente complicado, porém, um caso específico pode ser útil para se estudar o modelo.

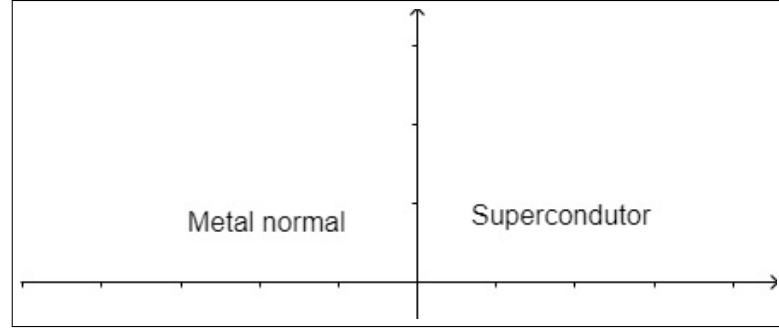
Considerando um sistema de interface unidimensional metal-supercondutor, tal que a fase é metálica se $x < 0$ e supercondutora se, $x > 0$ como mostra de forma ilustrativa a figura 6.

A solução de $|\psi(x)| = \psi(x)$ para este caso unidimensional pode ser escrita como

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh \left[\frac{x}{\sqrt{2}\xi(T)} \right], \quad (16)$$

sendo $\xi(T) = (\hbar^2/2m^*\dot{a}(T_C - T))^{1/2}$ Esta quantidade ξ é conhecida como comprimento de coerência (ou correlação) do supercondutor. Este comprimento de coerência é uma

Figura 6 - Interface metal-supercondutor



Fonte: O autor, 2022.

importante quantidade do modelo, que será discutida novamente mais a frente no trabalho.

Para se analisar um supercondutor na presença de um campo magnético é necessário introduzir a interação com o campo via acoplamento mínimo, isto é $\vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} - ie^*/\hbar\vec{A}$ e, além disso, um termo de energia do próprio campo magnético, com isto a energia livre fica

$$F[\psi, \psi^*, \vec{A}] = \int d^d x \left[\frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\vec{\nabla} - \frac{ie^*}{\hbar} \vec{A} \right) \psi \right|^2 + \dot{a}(T - T_C)\psi\psi^* + \frac{b}{2}(\psi\psi^*)^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right]. \quad (17)$$

Aqui, a simetria de calibre global é trocada pela simetria de calibre local, logo, as transformações que deixam a energia-livre invariante são da forma $\phi \rightarrow e^{i\theta(x)}\phi$ e $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \frac{\hbar}{e^*}\vec{\nabla}\theta(x)$. Além da equação (15) que neste caso fica

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\vec{\nabla} - \frac{ie^*}{\hbar} \vec{A} \right)^2 \psi + (\dot{a}(T - T_C) + b|\psi|^2)\psi = 0, \quad (18)$$

tem-se, também, outra equação de minimização, que é $\delta F/\delta \vec{A} = 0$, esta equação tem a forma

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{(2e)^2}{m^*} |\psi|^2 \vec{A} - \frac{ie\hbar}{m^*} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*). \quad (19)$$

Considerando apenas a lei de Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ do lado esquerdo da equação e o primeiro termo do lado direito, esta fica semelhante à equação de London com as relações $m^* = 2m$, $|\psi|^2 = n_s/2$ e a carga é $e^* = 2e$. Estas relações entre constantes, vindas das escolhas bem direcionadas dos parâmetros fenomenológicos, não são por acaso. Isto porque, como será comentado posteriormente, o estado supercondutor vem da proliferação dos chamados pares de Cooper (pares de elétrons interagentes), e as quantidades relacionadas são exatamente a massa, a densidade e a carga dos pares de Cooper respectivamente.

Considerando ψ no estado de mínimo do potencial e que a interação com o campo

altera a fase do parâmetro supercondutor, isto é, um parâmetro de ordem na forma $\psi = \psi_0 e^{i\Theta(x)}$, a equação (19) fica

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{(2e)^2}{m^*} \psi_0^2 \vec{A} + \frac{2e\hbar}{m^*} \psi_0^2 \vec{\nabla} \Theta(x), \quad (20)$$

se considerarmos o calibre de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ a equação fica

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{(2e)^2}{m^*} \psi_0^2 \vec{A}, \quad (21)$$

sendo que agora a "igualdade" com a equação de London é bem mais clara. E neste caso o comprimento de penetração de London tem a forma em termo dos parâmetros fenomenológicos $\lambda = (m^* b / (2e)^2 \mu_0 \dot{a} (T_C - T))^{1/2}$.

Considerando a equação (20), ao se integrar toda a equação numa linha fechada qualquer bem interna ao supercondutor é possível mostrar que a integração fica

$$\frac{1}{\mu_0} \oint (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{(2e)^2}{m^*} \psi_0^2 \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} + \frac{2e\hbar}{m^*} \psi_0^2 \oint (\vec{\nabla} \Theta) \cdot d\vec{l}. \quad (22)$$

O primeiro termo, por depender apenas do campo magnético interno ao supercondutor vai a zero, no segundo usa-se o teorema de Stokes e o fato de $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, e o último termo é a integral numa linha fechada do gradiente de uma fase, como fases são funções multi-avaluadas (são definidas a menos de um múltiplo inteiro de 2π) é possível mostrar que a equação (22) fica

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = n \frac{h}{2e}, \quad (23)$$

isto é, o fluxo de campo magnético pelo supercondutor é quantizado como foi demonstrado por Abrikosov.

A partir das quantidades ξ e λ , é possível definir uma constante adimensional $\kappa = \lambda/\xi$, esta constante é conhecida como parâmetro de Abrikosov e define qual o tipo do supercondutor, isto é, o supercondutor vai ser do tipo I se $\kappa < 1/\sqrt{2}$ e do tipo II se $\kappa > 1/\sqrt{2}$ (ABRIKOSOV, 2004).

Isto é o que precisaremos do modelo Landau-Ginzburg para o prosseguimento deste trabalho. No capítulo 3 uma alteração neste modelo vai ser feita para introduzir de forma fenomenológica as interações que não são consideradas no modelo microscópico (BCS).

2 INTERAÇÕES ENTRE FÉRMIONS

2.1 Teoria BCS

A teoria microscópica que explica a supercondutividade é conhecida Teoria BCS, nomeada a partir dos físicos que a desenvolveram John Bardeen, Leon Cooper e John Robert Schrieffer. A teoria associa o estado supercondutor a proliferação de estados ligados de pares de elétrons interagentes (COOPER, 1956). Estes pares de elétrons estão em um estado de duplete, $|\uparrow, \downarrow\rangle$, e sofrem uma interação atrativa mediada pelos fônons (vibrações da rede) do material supercondutor. Estes estados ligados são conhecidos como pares de Cooper.

A hamiltoniana da teoria BCS é uma hamiltoniana interativa de férmions que considera a interação atrativa entre os pares de elétrons com momenta opostos, a forma desta hamiltoniana é (FERNANDES, 2015)

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\sigma} \left(\frac{k^2}{2m_e} - \mu \right) c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow}, \quad (24)$$

sendo que k é a coordenada de momentum, σ spin, μ é o potencial químico do sistema, que define a superfície de Fermi $\mu = \epsilon_F = k_F^2/2m_e$, N é um fator de normalização, m_e é a massa dos elétrons, c e c^\dagger são respectivamente os operadores de aniquilação e criação dos elétrons. A intensidade da interação entre os elétrons é representado pelo termo $V_{\vec{k}\vec{k}'}$, que é o parâmetro de acoplamento da interação.

Como é possível perceber, a hamiltoniana (24) é aquela de um gás de elétrons com a adição de uma interação. Esta interação é devida às vibrações da rede do próprio material. As interações usuais provenientes, por exemplo, da repulsão eletrostática entre os elétrons não são consideradas, pois se assume que estas são suficientemente fracas em um supercondutor.

2.1.1 Campo médio

A hamiltoniana (24) é quártica nos operadores dos elétrons, trazendo um impedimento de encontrar soluções analíticas para uma equação de autovalor e autoestado do tipo

$$\hat{H}|BCS\rangle = \lambda|BCS\rangle, \quad (25)$$

onde $|BCS\rangle$ é a função de onda do estado BCS. Para contornar esta situação a aproximação que será usada é uma aproximação conhecida como, campo médio o (CHAIKIN; LUBENSKY, 1995).

A aproximação de campo médio se baseia na ideia de que o valor de um dado operador (neste caso o operador dos pares de Cooper) é uma flutuação do valor esperado deste mesmo operador no vácuo da teoria, isto é neste caso representado na forma

$$c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rightarrow \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} + c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle - \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle, \quad (26)$$

com esta aproximação, e aplicando a mesma à hamiltoniana (24), o operador \hat{H} fica na forma

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\vec{k}\sigma} \left(\frac{k^2}{2m_e} - \mu \right) c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \left(\langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} + c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle + \right. \\ & \left. - \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Aqui, os novos termos que surgem do tipo $\langle \hat{P} \rangle$ são médias dos operadores, isto é, são números e não atuam mais sobre o estado BCS na equação (25).

A nova hamiltoniana obtida é quadrática, e a princípio agora pode ser resolvida. A maneira que vamos resolver esta equação é primeiro renomeando os termos cujo valor esperado está presente, isto é

$$\Delta_k = -\frac{1}{N} \sum_{k'} V_{kk'} \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle, \quad (28)$$

esta nova quantidade vai ser chamada daqui para frente de gap de energia (o motivo disto vai ser explicado ainda nesta seção), ou então de parâmetro de ordem, pois esta nova quantidade tem relação direta com o parâmetro de ordem ψ do modelo Landau-Ginzburg, apresentado no capítulo anterior.

Assim, a hamiltoniana pode ser reescrita como

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\sigma} \left(\frac{k^2}{2m_e} - \mu \right) c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} - \sum_{\vec{k}} \left(\Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger + \Delta_{\vec{k}}^* c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow} \right) + \sum_{\vec{k}} \Delta_{\vec{k}} \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle, \quad (29)$$

e como é possível notar de forma mais simples nesta equação, o operador \hat{H} depende de diferentes composições dos operadores de criação e aniquilação de elétrons, isto é, ele não é diagonalizado na base dos operadores. A diagonalização deste operador é um passo essencial para encontrar uma solução para a equação (25), então o próximo passo será diagonalizar \hat{H} .

O processo de diagonalização do sistema começa pela seguinte ideia, o primeiro passo é fazer uma transformação linear nos operadores c e c^\dagger , conhecida como transfor-

mação de Bogoliubov (OKABAYASHI; TANABE; YAMADA, 1964)

$$\begin{aligned} c_{\vec{k}\sigma} &= u_{\vec{k}}^* \gamma_{\vec{k}\sigma} + v_{\vec{k}} \gamma_{-\vec{k}-\sigma}^\dagger \\ c_{\vec{k}\sigma}^\dagger &= u_{\vec{k}} \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger + v_{\vec{k}}^* \gamma_{-\vec{k}-\sigma}, \end{aligned} \quad (30)$$

onde $u_{\vec{k}} = u_{-\vec{k}}$ e $v_{\vec{k}} = -v_{-\vec{k}}$ são os parâmetros da transformação que vão ser fixados a partir das condições necessárias para a diagonalização do operador \hat{H} . Além disso, para que a transformação seja linear, e mantenha as relações de anticomutação de operadores fermiônicos, uma condição tem que ser respeitada, isto é, sendo T a matriz de transformação, então $T^\dagger T = I$ (identidade), isto significa $\det(T^\dagger T) = 1$, esta condição se traduz em termos dos parâmetros

$$|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 = 1. \quad (31)$$

Esta equação é um vínculo entre os parâmetros e será necessária na hora de determinar relações úteis entre os mesmos.

Aplicando esta transformação em (29), a nova hamiltoniana fica

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\vec{k}\sigma} \left[\left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) (|u_{\vec{k}}|^2 - |v_{\vec{k}}|^2) - \Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^* - \Delta_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} \right] \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma} + \\ & + \sum_{\vec{k}} \left[2 \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} - \Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}}^2 \right] \gamma_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger + \\ & + \left(2 \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}}^* - \Delta_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}}^{*2} + \Delta_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^{*2} \right) \gamma_{-\vec{k}\downarrow} \gamma_{\vec{k}\uparrow} \\ & + 2 \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) |v_{\vec{k}}|^2 - \Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^* - \Delta_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} + \Delta \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle \Big]. \end{aligned} \quad (32)$$

É possível observar que, a primeira linha da hamiltoniana acima é diagonal e a quarta linha é constante (logo também é diagonal), a segunda e terceira linhas são a parte não diagonal do operador. Impondo que este operador seja diagonal, ou seja, que as linhas centrais sejam nulas leva a

$$2 \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} - \Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}}^2 = 0, \quad (33)$$

utilizando esta condição e o vínculo (31) as relações necessárias entre os parâmetros da

transformação ficam

$$\begin{aligned}
\frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}} &= \frac{\sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2} - \left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)}{\Delta_{\vec{k}}^*}, \\
|u_{\vec{k}}|^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)}{\sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}}, \\
|v_{\vec{k}}|^2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)}{\sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Com a hamiltoniana (32) e com as relações (34) é possível então, com as manipulações algébricas adequadas, mostrar que

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2} \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma} + \\
&+ \sum_{\vec{k}} \left[\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right) - \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2} + \Delta_{\vec{k}} \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\uparrow}^\dagger \rangle \right],
\end{aligned} \tag{35}$$

o que mostra que, após a aproximação do campo médio e a diagonalização, a hamiltoniana BCS se torna uma hamiltoniana de um gás de férmions (Bogoliubons) com dispersão $\epsilon_{\vec{k}} = \sqrt{(k^2/2m - \mu)^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}$. Aqui é possível notar que, mesmo no nível de Fermi $k^2/2m = \mu = \epsilon_F$, o espectro de energia do supercondutor tem um gap de energia de valor $|\Delta_{\vec{k}}|$ e daí vem a razão de chamarmos esta de função de gap.

Considerando o estado $|BCS\rangle$ como o estado de vácuo da nova hamiltoniana, é possível então resolver a equação (25), a solução pode ser obtida de uma equação mais simples que é

$$\gamma_{\vec{k}\sigma} |BCS\rangle = 0, \tag{36}$$

e essa equação tem solução em termos do vácuo dos elétrons $|0\rangle$. A solução para esta equação se baseia que o estado BCS seja na forma

$$|BCS\rangle = \mathcal{N} \prod_{\vec{k}} e^{a_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger} |0\rangle, \tag{37}$$

ou seja, na criação de pares de Cooper sobre o vácuo de elétrons, sendo que \mathcal{N} é um parâmetro de normalização. Com isto é possível mostrar, após certas manipulações (utilizando as relações de anticomutação de férmions, e o princípio de exclusão de Pauli), que o estado BCS tem a forma

$$|BCS\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (38)$$

O que vai ser mais importante para o desenvolvimento deste trabalho, na verdade, é as soluções existentes da equação (28), pois esta informa se no sistema analisado existe, ou não, supercondutividade. Considerando o caso em que os férmions do sistema estão a uma temperatura não nula T , e que o valor esperado de termos não diagonais compostos por γ e γ^\dagger são nulos (por conta do processo de diagonalização), é possível então mostrar que a equação de gap fica

$$\Delta_{\vec{k}} = -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \left(1 - \langle \gamma_{-\vec{k}'\downarrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}'\downarrow} \rangle - \langle \gamma_{\vec{k}'\uparrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}'\uparrow} \rangle \right), \quad (39)$$

como a dispersão para $-\vec{k}$ e \vec{k} são iguais e não dependem do spin, substitui-se os valores esperados pela distribuição de Fermi-Dirac para os bogoliubons e os dois termos são iguais. Com isto é possível mostrar que a equação do gap fica na forma

$$\Delta_{\vec{k}} = -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} \frac{V_{\vec{k}\vec{k}'} \Delta_{\vec{k}'}}{2\sqrt{(k^2/2m - \mu)^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \mu)^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}}{2k_B T} \right), \quad (40)$$

as soluções para esta equação diz como se comporta o parâmetro de ordem como uma função da temperatura. O primeiro passo necessário para solucionar esta equação é escolher o tipo de potencial atrativo que será usado. Usualmente escolhe-se o potencial atrativo mais simples $V_{\vec{k}\vec{k}'} = -V_0$ nas proximidades da superfície de Fermi (entre os valores $\epsilon_F \pm \hbar\omega_D$) e nulo para regiões mais distantes, e como será observado esta escolha será mantida nos passos futuros deste trabalho. Além disso, outra escolha é de um parâmetro de ordem real que não muda com a direção de \vec{k} , e com isto $\Delta_{\vec{k}} = \Delta$. fazendo estas escolhas é possível mostrar que a equação acima fica na forma

$$1 = \frac{V_0}{2N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{(k^2/2m - \mu)^2 + \Delta^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \mu)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right). \quad (41)$$

Apesar da clara simplificação causada na equação com as escolhas do potencial e do parâmetro de ordem, esta ainda não tem uma solução exata para qualquer valor de T . As soluções que são possíveis de serem encontradas de forma analítica para esta equação são soluções para dados valores da temperatura.

Para encontrar as soluções analíticas possíveis da equação do gap são considerados dois extremos, estes sendo $T \rightarrow 0$ e $T \rightarrow T_C$, e é considerado também o limite termodinâmico $1/N \sum_k \rightarrow \int d^d k$. Além disso, existe um porém, com relação à região de integração. Sabendo-se que o potencial químico μ define a superfície de Fermi $\mu = \epsilon_F = k_F^2/2m$, sendo ϵ_F a energia de Fermi e k_F o momentum de Fermi, a região de integração vai ser uma pequena faixa no entorno desta superfície, sendo que a variação entorno desta superfície vai ser dada pela excitação às partículas causada pelos fônons (vibrações da rede) isto é, em termos da energia os limites de integração vão de $\epsilon_F - \hbar\omega_D$ e $\epsilon_F + \hbar\omega_D$, onde ω_D é a frequência de Debye que tem justamente a ver com as vibrações da rede do próprio material. Colocando a situação em temperatura $T \rightarrow 0$ na forma integral a equação fica

$$1 = \frac{V_0}{2} \int d^d k \frac{1}{\sqrt{(k^2/2m - \mu)^2 + \Delta_0^2}}, \quad (42)$$

fazendo a transformação de coordenadas de integração de $\vec{k} \rightarrow \epsilon = k^2/2m$, e sendo o Jacobiano da transformação a densidade de estados nas proximidades da superfície de Fermi ρ_F , é possível mostrar que a equação acima tem solução, com boa aproximação, para Δ_0 que é

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{V_0\rho_F}}. \quad (43)$$

No caso do limite $T \rightarrow T_C$ é esperado que a supercondutividade do sistema acabe, ou seja, que o parâmetro de ordem seja nulo. Considerando então o caso $\Delta \rightarrow 0$ a equação fica

$$1 = \frac{V_0}{2} \int d^d k \frac{1}{k^2/2m - \mu} \tanh\left(\frac{k^2/2m - \mu}{2k_B T_C}\right), \quad (44)$$

usando novamente a transformação de coordenadas para energia é possível solucionar esta equação, com boas aproximações, para T_C , sendo assim a solução desta equação para a temperatura crítica fica

$$k_B T_C = 2\hbar\omega_D \frac{e^{\gamma_E}}{\pi} e^{-\frac{1}{V_0\rho_F}}. \quad (45)$$

Esta solução depende como pode ser observado de um novo valor $\gamma_E \approx 0,577$, este valor é conhecido como constante de Euler-Mascheroni.

A partir destas duas soluções nos limites é possível mostrar que existe (para supercondutores BCS) uma relação fundamental

$$\frac{\Delta_0}{k_B T_C} \approx 1,76\dots \quad (46)$$

Os cálculos, que serão feitos na seção posteriores deste trabalho, serão baseados nos cálculos feitos até aqui na teoria BCS. Outras quantidades importantes podem ser deduzidas a partir da teoria BCS, como, por exemplo, o gap do calor específico (transição de segunda ordem), ou até mesmo o efeito Meissner-Ochsenfeld na inclusão de um campo magnético interagindo com a teoria. Estes cálculos não serão reproduzidos aqui.

2.2 Líquidos de Fermi

A hamiltoniana que se propõe em reproduzir as outras interações (provenientes do eletromagnetismo, por exemplo) presentes dentro de um material é também uma interação de quatro férmions da seguinte forma (BAYM; PETHICK, 1991)

$$H_{int} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}'\sigma'}, \quad (47)$$

neste caso, a quantidade que "computa" a interação é o parâmetro $f_{\vec{k}\vec{k}'}$. Um exemplo seria considerar uma interação do tipo Coulomb de longo alcance, esta interação pode ser representada pelo parâmetro de acoplamento na forma de

$$f_{\vec{k}\vec{k}'} = \frac{e^2}{|\vec{k} - \vec{k}'|}, \quad (48)$$

para o desenvolvimento deste trabalho esta interação não será usada. Porém, a maneira de considerar novas interações dentro deste trabalho vai ser a conhecida expansão multipolar do parâmetro $f_{\vec{k}\vec{k}'}$.

A expansão multipolar, nos que são conhecidos como parâmetros de Landau nos líquidos de fermi, é feita da seguinte forma

$$f_{\vec{k}\vec{k}'} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l e^{l\theta}, \quad (49)$$

sendo θ o ângulo entre os momenta \vec{k} e \vec{k}' (HAVENS-SACCO; WIDOM, 1980). Pode se notar já aqui que a expansão está sendo feita em 2D, isto é dado ao fato que a escolha das análises realizadas por este trabalho foi a de um supercondutor bidimensional. Caso a escolha de 3D fosse feita, esta expansão poderia ser feita em harmônicos esféricos.

Considerando o caso simétrico $f_l = f_{-l}$ (Landau), a expansão fica

$$f_{\vec{k}\vec{k}'} = f_0 + \sum_{l=1}^{\infty} 2f_l \cos(l\theta). \quad (50)$$

A expansão acima incluí, no infinito, todas as possibilidades da expansão multipolar, f_0 representa o monopólo (ou interação de densidade, como será chamada ao longo deste trabalho), f_1 o dipólo (ou interação de corrente), f_2 o quadrupólo (ou interação nemática). Este trabalho está limitado a considerar estas três interações, porém outras poderiam ser consideradas, mas não serão, dadas as complexidades dos termos que seriam incluídos na hamiltoniana.

Considerando então os três termos que serão analisados, o termo de interação da hamiltoniana fica

$$H_{int} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} (f_0 + 2f_1 \cos(\theta) + 2f_2 \cos(2\theta)) c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'}, \quad (51)$$

como na seção 2.1, os elétrons que são excitados são aqueles com energia mais próxima a de Fermi (aproximadamente ϵ_F) sendo assim a função cosseno pode ser reescrita como $\cos(\theta) = \vec{k} \cdot \vec{k}' / k_F^2$ com esta consideração é possível, com manipulação algébrica, mostrar que o termo quadrupolar vai ficar

$$2f_2 \cos(2\theta) = 4f_2 \frac{1}{k_F^2} \left(k_i k_j - \frac{k_F^2}{2} \delta_{ij} \right) \frac{1}{k_F^2} \left(k'_i k'_j - \frac{k_F^2}{2} \delta_{ij} \right), \quad (52)$$

o termo dipolar é mais simples e é tirado diretamente da relação do cosseno com os momenta. Com isto os termos separadamente ficam

$$\begin{aligned} H_{mon} &= \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_0 c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'}, \\ H_{dip} &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_1 c_{\vec{k}\sigma}^\dagger \frac{\vec{k}}{k_F} c_{\vec{k}\sigma} \cdot c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger \frac{\vec{k}'}{k_F} c_{\vec{k}'\sigma'}, \\ H_{quad} &= \frac{2}{N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_2 c_{\vec{k}\sigma}^\dagger \frac{1}{k_F^2} \left(k_i k_j - \frac{k_F^2}{2} \delta_{ij} \right) c_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger \frac{1}{k_F^2} \left(k'_i k'_j - \frac{k_F^2}{2} \delta_{ij} \right) c_{\vec{k}'\sigma'}. \end{aligned} \quad (53)$$

Estes serão os termos utilizados ao se tentar incorporar interações não BCS, no modelo, como será visto no capítulo 4.

3 MODELO LANDAU-GINZBURG NA PRESENÇA DE INTERAÇÕES MULTIPOLARES

A primeira abordagem que vai ser usada neste trabalho para analisar possíveis efeitos das interações multipolares, introduzidas na seção 2.2, é adicionar termos fenomenológicos no modelo Landau-Ginzburg estudado na seção 1.4. A forma matemática destes novos termos vai ser escolhida de forma que estes respeitem a simetria da energia livre, mas que tenham as formas equivalentes às hamiltonianas mostradas no capítulo anterior.

3.1 Energia-Livre

O começo então será pela energia-livre. Os novos termos que serão adicionados serão termos que visam estudar já na fenomenologia, os possíveis efeitos das interações. A interação de monopólo não será considerada neste capítulo já que essa não traz diferença na quantidade de parâmetros.

O termo que vai representar o dipólo na energia-livre vai ser um termo vetorial, da forma $(c/2)\vec{J} \cdot \vec{J}$, sendo que (NG; TSE, 2007)

$$\vec{J} = \frac{i}{2}(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*), \quad (54)$$

e o termo que vai representar a interação de quadrupólo vai ser um termo nemático na forma $(d/2)Q_{ij}Q_{ij}$, e o tensor pode ser escrito de duas formas (AQUINO; BARCI, 2020)

$$Q_{ij} = \psi^* \left(\nabla_i \nabla_j - \frac{\delta_{ij}}{2} \nabla^2 \right) \psi, \quad (55)$$

ou então

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \psi \nabla_j \psi^* + \nabla_i \psi^* \nabla_j \psi - 2\delta_{ij} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi^*). \quad (56)$$

Os cálculos realizados foram feitos com ambas as formas do tensor, e os dois deram o mesmo resultado, então por praticidade os cálculos vão seguir com o tensor escrito na forma da equação (56). As escolhas foram feitas desta forma, pois, o momento de quadrupólo, como os termos mostrados na equação (53), são um tensor simétrico de traço nulo e tem que ser invariante de calibre.

Com estas informações a energia-livre de Landau-Ginzburg é então reescrita na forma

$$F[\psi, \psi^*] = \int d^2x \left[\frac{\hbar^2}{2m^*} |\vec{\nabla}\psi|^2 + \dot{a}(T - T_C)\psi\psi^* + \frac{b}{2}(\psi\psi^*)^2 + \frac{c}{2}\vec{J}\cdot\vec{J} + \frac{d}{2}Q_{ij}Q_{ij} \right]. \quad (57)$$

Onde c e d são os parâmetros fenomenológicos relacionados as interações dipolar e quadrupolar, respectivamente. Como comentado anteriormente, toda análise deste trabalho será feita em supercondutores bidimensionais, daí a integral em d^2x . Utilizando a minimização (6) é possível mostrar que a equação fica

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\psi + (\dot{a}(T - T_C) + b|\psi|^2)\psi - \frac{c}{4}[\vec{J}\cdot\vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{J})] - d\nabla_i[(\nabla_j\psi)Q_{ij}] = 0. \quad (58)$$

A nova equação para o parâmetro de ordem é bem complicada, e com novas não-linearidades, que trazem uma grande complexidade para obtenção de soluções analíticas. Com isso, a tentativa direta de obtenção de uma solução não é viável. O método que será utilizado para a obtenção de uma solução será uma aproximação. Sendo claro que, mesmo com os novos termos, a solução homogênea (13) permanece inalterada pelas novas interações.

3.1.1 Comprimento de coerência

Para calcular o comprimento de coerência o método que vai ser usado vai ser um método de "aproximação variacional". Considerando a nova energia-livre (57), e uma solução da mesma forma da solução (16)

$$\psi = \psi_0 \tanh \left[\frac{x}{\sqrt{2}\xi'(T)} \right], \quad (59)$$

coloca-se então esta solução dentro da nova energia-livre e integra-se

$$F[\psi, \psi^*] = F \left[\psi_0 \tanh \left[\frac{x}{\sqrt{2}\xi'(T)} \right] \right], \quad (60)$$

com isso, o funcional de energia-livre vira uma função do novo comprimento de coerência $\xi'(T)$, logo $F(\xi'(T))$. A partir da nova expressão, minimiza-se a nova energia-livre em termos do comprimento de coerência

$$\frac{dF}{d\xi'} = 0. \quad (61)$$

Ao seguir os passos anteriores é possível mostrar que o novo comprimento de coe-

rência pode ser escrito em termos do original da seguinte forma

$$\xi'^2 = \frac{\xi^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{36 dm^* \psi_0^2}{35 \hbar^2 \xi^2}} \right), \quad (62)$$

como é possível ver a interação dipolar não traz efeitos no novo comprimento de coerência. Este é representado por uma "renormalização" do comprimento de coerência original ξ causada pela interação nemática.

O novo comprimento de coerência, como pode ser observado, é uma nova função um pouco mais complicada da temperatura, já que, ψ_0 e ξ são funções de T . Porém, é possível observar de forma razoavelmente simples que no limite $T \rightarrow T_C$ o comprimento $\xi' \rightarrow \xi$, isto é, nas proximidades da criticalidade as interações tendem a zero.

Reescrevendo a equação (62) de forma apropriada, é possível mostrar que

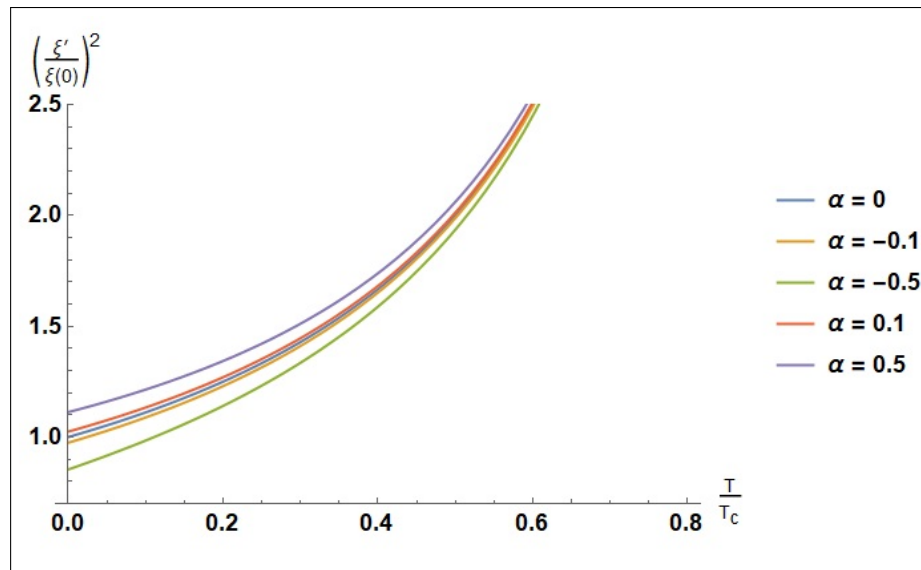
$$\frac{\xi'(T)^2}{\xi(0)^2} = \frac{1}{2(1 - T/T_C)} \left(1 + \sqrt{1 + \alpha(1 - T/T_C)^2} \right), \quad (63)$$

sendo $\alpha = (72 dm^* a^2 T_C^2) / (35 b \hbar^4)$. Como é possível notar, para valores de $\alpha < -1$ problemas começariam a aparecer nas soluções do comprimento de coerência, já que para certos valores de temperatura este seria um número complexo, o que não faz sentido. Logo, a escolha dos valores de α vai ser limitada. A partir desta equação, é possível fazer uma análise gráfica do comportamento do novo comprimento de coerência em termos da temperatura para diferentes valores de α . Considerando valores $-0,5 < \alpha < 0,5$, a forma gráfica desta função fica na forma da figura 7, e como é possível perceber, uma interação quadrupolar repulsiva $\alpha > 0$ causa um leve aumento no valor do comprimento de coerência, isto é uma supercondutividade "mais forte" com relação à original. E o contrário também é verdade, uma interação quadrupolar atrativa $\alpha < 0$ traz ao modelo um comprimento de coerência com valor menor que o original, ou seja, um "enfraquecimento" da supercondutividade. Este conceito da "força" da supercondutividade fica mais clara ao analisar o parâmetro de Abrikosov na interação com campos magnéticos.

3.2 Interação com campo magnético externo

A interação com o campo magnético pode ser introduzida na energia-livre, assim como no primeiro capítulo, a partir da troca $\vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} - i2e/\hbar \vec{A}$. Tomando o cuidado que todas as derivadas dentro dos novos termos também sejam trocadas. Assim a energia

Figura 7 - Comprimento de coerência comparado, da equação (63)



Fonte: O autor, 2022.

livre fica

$$F[\psi, \psi^*, \vec{A}] = \int d^2x \left[\frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\vec{\nabla} - \frac{i2e}{\hbar} \vec{A} \right) \psi \right|^2 + a(T - T_C) |\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 + \frac{c}{2} \vec{J}(\vec{A}) \cdot \vec{J}(\vec{A}) + \frac{d}{2} Q_{ij}(\vec{A}) Q_{ij}(\vec{A}) + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right], \quad (64)$$

a minimização desta energia em termos do potencial vetor dá a equação equivalente à equação de London. Esta equação tem a forma

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = - \left[\frac{(2e)^2}{m^*} \psi_0^2 - \frac{c(2e)^2}{\hbar^2} \psi_0^4 \right] \vec{A} + \frac{d(2e)^4}{\hbar^2} \psi_0^4 |\vec{A}|^2 \vec{A}. \quad (65)$$

Como é possível perceber, a equação acima é, na verdade, duas equações diferenciais parciais, não lineares e acopladas sem nenhum tipo de solução analítica aparente. Todas essas características dificultam qualquer tipo de análise direta. Por isso será necessário fazer considerações para extrair algum tipo de informação desta equação.

3.2.1 Resposta Linear: Comprimento de penetração de London

A consideração que será feita para uma análise da equação (65) vai ser que os termos não lineares não fazem diferença no comportamento do campo magnético. Isto se dá, inevitavelmente, por conta da incapacidade de achar soluções analíticas a equação

de London não linear. As soluções "analíticas" encontradas para essa equação foram soluções perturbativas, que além de extremamente complicadas, não aparentavam nenhum tipo de novo comportamento do campo magnético. Talvez porque o fato da solução ser perturbativa já traz a necessidade de considerar o termo $(d(2e)^4/\hbar^2)\psi_0^4$ suficientemente pequeno.

Então, desconsiderando o termo não linear na equação (65) é possível reescrever a equação de London como

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = - \left[\frac{(2e)^2}{m^*} \psi_0^2 - \frac{c(2e)^2}{\hbar^2} \psi_0^4 \right] \vec{A}, \quad (66)$$

aplicando o operador rotacional nesta equação, é possível então chegar a

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = - \frac{1}{\lambda'^2} \vec{B}. \quad (67)$$

Como é possível notar, a equação acima é exatamente a mesma que a equação (9), só que com um novo comprimento de penetração, este novo comprimento sendo, em termos do "original"

$$\lambda'^2 = \lambda^2 \left(1 - \frac{cm^*}{\hbar^2} \psi_0^2 \right)^{-1}, \quad (68)$$

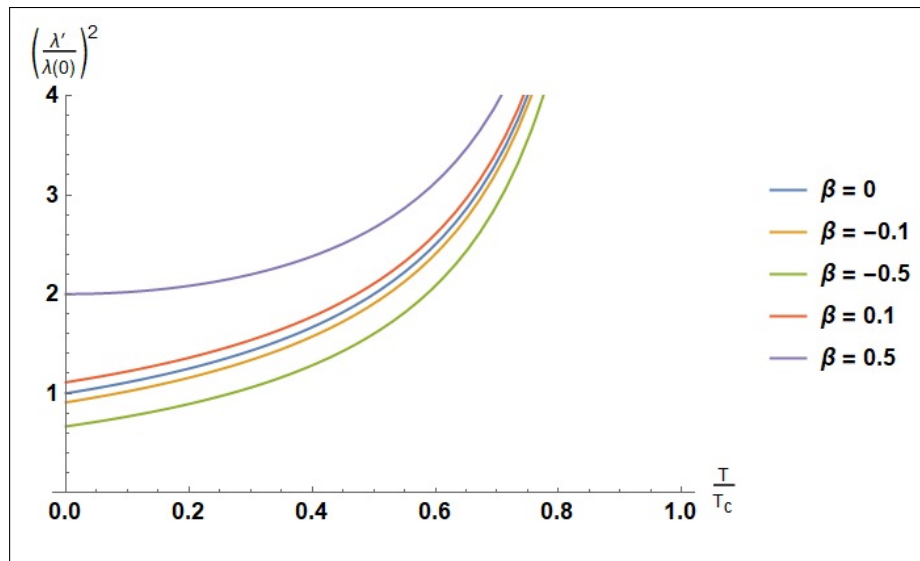
ou seja, na resposta linear, a interação dipolar "renormaliza" o comprimento de penetração de London, e traz uma nova dependência da temperatura para o mesmo. Reescrevendo (68) da mesma forma que foi feito com (63) é possível mostrar que

$$\frac{\lambda'^2(T)}{\lambda^2(0)} = \frac{1}{1 - T/T_C} (1 - \beta(1 - T/T_C))^{-1}, \quad (69)$$

sendo $\beta = (cm^*aT_C/\hbar^2b)$. Assim como no caso do comprimento de coerência, valores de $\beta > 1$ trazem problemas para a solução do comprimento de penetração, já que em certas temperaturas este será negativo ou até mesmo vai divergir, fora da criticalidade (onde a divergência deste já é esperada). Então, a análise vai ser limitada a valores semelhantes ao caso do comprimento de coerência (63).

O comportamento gráfico da equação (69) para diferentes valores de β é demonstrado pela figura 8. Como é possível perceber, o comportamento da interação dipolar é "contrário" ao comportamento da interação quadrupolar, tendo em vista que interações dipolares atrativas, isto é $\beta < 0$ fortalecem a supercondutividade, ou seja, permitem menos penetração de campo magnético no supercondutor. Já interações dipolares repulsivas $\beta > 0$ enfraquecem o supercondutor, permitindo cada vez mais a penetração de campo

Figura 8 - Comprimento de London comparado, da equação (69)



Fonte: O autor, 2022.

magnético.

Com a equação (66) é possível também, incluindo os termos de fase, calcular o fluxo de campo, isto é

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = - \left[\frac{(2e)^2}{m^*} \psi_0^2 - \frac{c(2e)^2}{\hbar^2} \psi_0^4 \right] \vec{A} + \left[\frac{2e\hbar}{m^*} - \frac{c(2e)}{\hbar} \psi_0^2 \right] \vec{\nabla} \Theta, \quad (70)$$

e realizar uma integração em uma linha fechada interna ao supercondutor, da mesma forma que (22), fazendo as mesmas considerações. Assim, o fluxo de campo magnético fica

$$\Phi = n \frac{h}{2e}. \quad (71)$$

Ou seja, permanece inalterado pela presença da interação dipolar.

Com o que foi descrito até aqui, é possível então saber possíveis efeitos causados pela interação dipolar em um supercondutor, ao menos nas proximidades da criticalidade.

3.2.2 Parâmetro de Abrikosov

Conhecendo os efeitos das interações analisadas no comprimento de coerência de um supercondutor, e no comprimento de penetração do campo magnético, é possível então analisar também o que estas interações causam no parâmetro de Abrikosov dos supercondutores.

As análises vão ser feitas nos mesmos valores de α e β das seções 3.1.1 e 3.2.1. Isto é, os valores analisados serão primeiramente $|\alpha| = |\beta| = 0,1$. Depois o caso de uma interação dipolar dominante, isto é $|\beta| = 0,5$ e $|\alpha| = 0,1$. Por último, uma interação quadrupolar dominante $|\alpha| = 0,5$ e $|\beta| = 0,1$.

A equação geral para o parâmetro de Abrikosov vai ser então

$$\kappa'^2 = \frac{\lambda'^2}{\xi'^2} = 2\kappa^2 \left(1 + \sqrt{1 + \alpha(1 - T/T_C)^2}\right)^{-1} \left(1 - \beta(1 - T/T_C)\right)^{-1}, \quad (72)$$

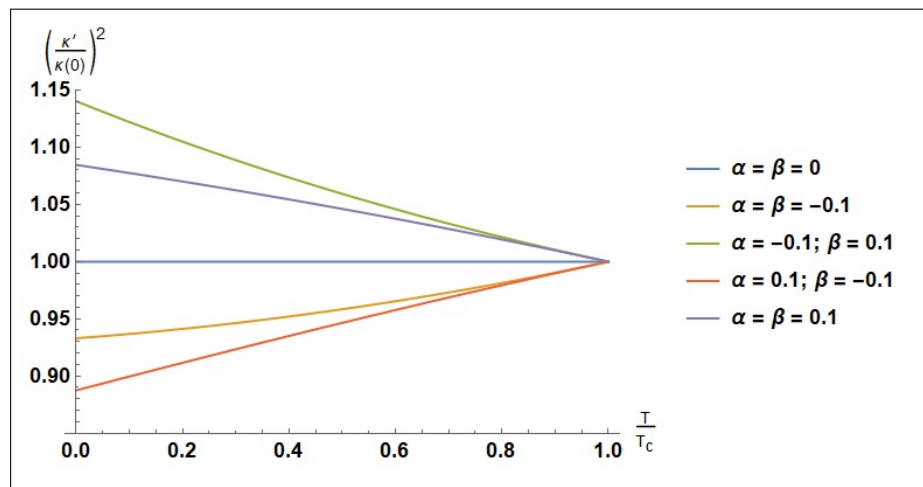
sendo κ o parâmetro original do modelo de Landau-Ginzburg. Sendo assim o é possível plotar o gráfico da seguinte função

$$\frac{\kappa'^2}{\kappa^2} = 2 \left(1 + \sqrt{1 + \alpha(1 - T/T_C)^2}\right)^{-1} \left(1 - \beta(1 - T/T_C)\right)^{-1}, \quad (73)$$

para os diferentes valores dos parâmetros α e β .

O primeiro caso que será analisado será o caso de parâmetros iguais. Neste caso, o plot fica como na figura 9, e é possível perceber que a interação dipolar é fundamental-

Figura 9 - Parâmetro de Abrikosov para $|\alpha| = |\beta| = 0,1$



Fonte: O autor, 2022.

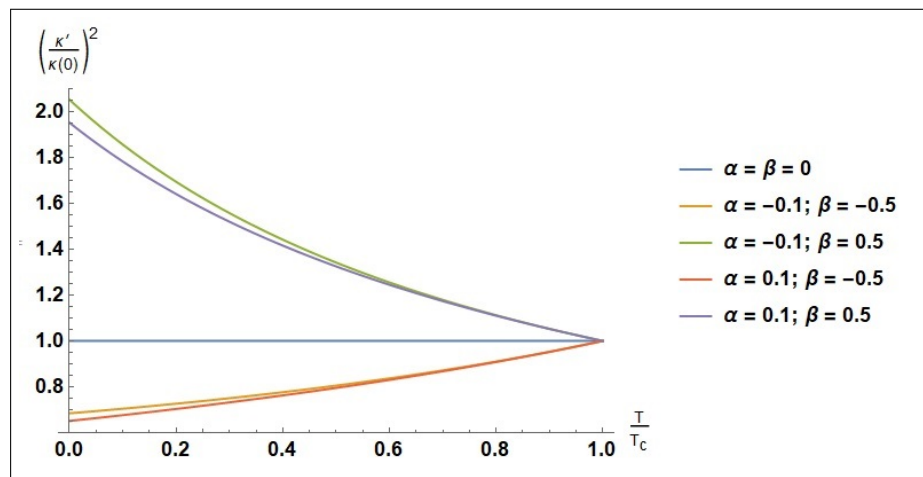
mente dominante, ainda que os parâmetros estejam iguais em módulo. De forma que uma interação dipolar repulsiva ($\beta > 0$) faz o supercondutor tender mais a um supercondutor do tipo II. Enquanto a interação quadrupolar repulsiva segura um pouco esta tendência e a atrativa colabora com esta tendência. Já uma interação dipolar atrativa ($\beta < 0$) faz com que o supercondutor tenda mais ao tipo I. A interação quadrupolar repulsiva, neste caso, colabora com a tendência, reduzindo o valor do parâmetro ainda mais, enquanto quando atrativa, esta segura um pouco esta tendência ao tipo I.

Aqui já é possível perceber que as interações dipolares e quadrupolares trazem

comportamentos inversos ao parâmetro de Abrikosov. Quanto menor o valor de um parâmetro de Abrikosov mais "forte" é a supercondutividade, e mais esta tende a apresentar unicamente o efeito Meissner-Ochsenfeld. Logo, interações dipolares atrativas reduzem o valor do parâmetro de Abrikosov, enquanto repulsivas aumentam os valores do mesmo. Já as interações quadrupolares atrativas aumentam o valor do parâmetro, "enfraquecendo" a supercondutividade, enquanto as repulsivas diminuem este valor.

Seguindo para o segundo caso, que é de uma interação dipolar dominante sobre a quadrupolar, já é esperado que o comportamento geral não mude e continue como o da figura 9. O que muda neste caso são os valores do parâmetro de Abrikosov comparado com o original. O comportamento é mostrado na figura 10.

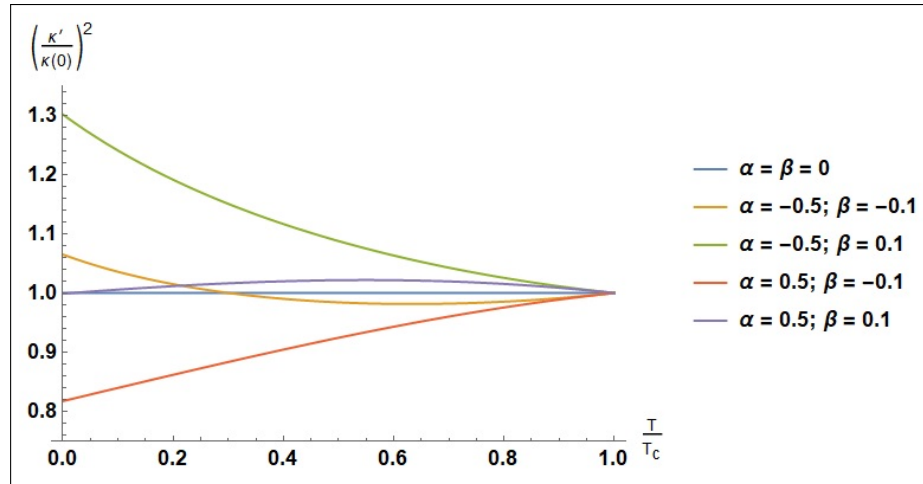
Figura 10 - Parâmetro de Abrikosov para $|\alpha| = 0,1$ $|\beta| = 0,5$



Fonte: O autor, 2022.

O último dos casos a ser analisado é então o caso de uma interação quadrupolar "dominante" sobre a dipolar. Apesar de dominante significar, neste caso, uma interação quadrupolar cujo módulo do parâmetro é maior que o módulo do parâmetro dipolar, é possível ver que o comportamento não reflete uma dominância da interação quadrupolar, isto é, se comporta como na figura 11. Neste caso, apesar de o comportamento do parâmetro de Abrikosov ser muito estranho em baixas temperaturas, é necessário se lembrar que o modelo de Landau-Ginzburg, do qual estes resultados são provenientes, só é aplicável nas proximidades da criticalidade. Analisando então o gráfico em temperatura próximas à temperatura crítica, é possível notar que o comportamento gráfico continua semelhante aos casos anteriores, o que diferencia são as inclinações das curvas que levam ao ponto crítico.

Então, mesmo com uma interação quadrupolar "dominante", é possível perceber que a interação dipolar é verdadeiramente mais significativa nos efeitos causados pelas interações nos supercondutores.

Figura 11 - Parâmetro de Abrikosov para $|\alpha| = 0,5$ $|\beta| = 0,1$ 

Fonte: O autor, 2022.

Os valores escolhidos para a análise estão na forma mostrada, pois, como comentado anteriormente, valores com módulos maiores que estes podem causar problemas nas soluções do comprimento de coerência e penetração. Estes problemas podem ser desde divergências fora da criticalidade, ou até mesmo no caso do comprimento de coerência, valores complexos para este em determinadas temperaturas. Por isto estes valores pequenos para tais interações foram escolhidos.

O próximo passo agora é estudar o modelo microscópico da supercondutividade, incluindo nele as interações comentadas. No caso do modelo Landau-Ginzburg a interação de densidade (monopolo) não foi considerada, pois esta, que teria a forma $|\psi|^4$, não traria diferenças notáveis para energia-livre. (NG; TSE, 2007) Por consequência, não conhecendo a relação do parâmetro fenomenológico da interação de densidade com os parâmetros microscópicos, não seria possível obter resultados diferentes do modelo original provenientes desta interação. Mas, esta interação será estudada no próximo capítulo.

4 BCS NA PRESENÇA DE INTERAÇÕES MULTIPOLARES

Neste capítulo parte-se então de uma nova hamiltoniana, que é a soma da hamiltoniana (24) e dos novos termos de interação (47). Esta soma serve para incluir, no modelo BCS original, as interações provenientes de outras fontes. Neste caso a hamiltoniana vai ficar na forma

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\sigma} \left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F \right) c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} + \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'}, \quad (74)$$

onde já foi considerado o fato de que $\mu = \epsilon_F$. Como é possível notar, assim como antes, esta hamiltoniana é uma hamiltoniana interativa com termos quárticos. Qualquer tentativa de solução da equação de onda com esta hamiltoniana seria provavelmente mal sucedida. Para lidar com este empecilho é útil utilizar as mesmas técnicas descritas no capítulo 2.

Essas técnicas, utilizadas anteriormente para o caso BCS "puro", vão ser utilizadas para cada uma das interações neste caso. A aproximação de campo médio (26) vai ser reutilizada no termo BCS e, além disso, uma nova aproximação de campo médio será feita no terceiro termo da hamiltoniana (74), sendo esta aproximação na forma

$$c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rightarrow c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rangle + \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} - \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rangle. \quad (75)$$

Sendo assim, considerando a aproximação acima e renomeando os valores esperados $\langle c^\dagger c^\dagger \rangle$ e $\langle cc \rangle$ igual à (28) é possível mostrar que a hamiltoniana fica

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\vec{k}\sigma} \left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F \right) c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} - \sum_{\vec{k}} (\Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger + \Delta_{\vec{k}}^* c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow}) + \\ & + \sum_{\vec{k}} \Delta_{\vec{k}} \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rangle + \\ & - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rangle. \end{aligned} \quad (76)$$

É ainda possível reescrever esta hamiltoniana, separando os somatórios de forma a ficar mais claro o que cada termo está fazendo, após a separação de tais somatórios é possível

mostrar que a hamiltoniana fica na forma

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \sum_{\vec{k}\sigma} \left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F + \sum_{\vec{k}'\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right) c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} + \\
& - \sum_{\vec{k}} (\Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger + \Delta_{\vec{k}}^* c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow}) + \sum_{\vec{k}} \Delta_{\vec{k}} \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle + \\
& - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rangle. \tag{77}
\end{aligned}$$

A partir desta separação dos somatórios, fica perceptível que, após a aproximação de campo médio, as interações que de líquidos de Fermi fazem um papel aditivo no termo de dispersão e potencial químico do gás de elétrons. Este fato faz com que a diagonalização da teoria fique muito semelhante ao caso BCS, apenas trocando o potencial químico por $\mu + \text{interação}$.

O próximo passo então é diagonalizar a hamiltoniana (77). Seguindo exatamente os mesmos passos que o capítulo 2, começando pela mudança de variáveis (30), sendo que os parâmetros $u_{\vec{k}}$ e $v_{\vec{k}}$ seguem as mesmas condições que anteriormente, como, por exemplo, o vínculo (31) é possível realizar a diagonalização da hamiltoniana. Sendo assim, a hamiltoniana já diagonalizada fica na forma

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F + (1/N) \sum_{\vec{k}'\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right)^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2 \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma}} + \sum_{\vec{k}} \Delta_{\vec{k}} \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle + \\
& - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rangle. \tag{78}
\end{aligned}$$

Como é possível perceber, a dispersão dos bogoliubons (férmions γ) foi alterada pelas interações e, por consequência, a equação do gap (28) também será alterada, e terá termos que incluem essas interações que podem, ou não depender da coordenada de momentum \vec{k} .

Fazendo as considerações feitas no capítulo 2, isto é $|\Delta_{\vec{k}}| = \Delta$ e $V_{\vec{k}\vec{k}'} = -V_0$ é possível reescrever a hamiltoniana na forma

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F + \sum_{\vec{k}'\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right)^2 + \Delta^2 \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma}} + \frac{\Delta^2 N}{V_0} + \\
& - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rangle. \tag{79}
\end{aligned}$$

A equação de gap para este caso é alterada, e pode ser reescrita de forma bem

semelhante à (41)

$$1 = \frac{V_0}{2N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + 1/N \sum_{\vec{k}'\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}'\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle)^2 + \Delta^2}} \times$$

$$\times \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + 1/N \sum_{\vec{k}'\sigma'} f_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}'\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right), \quad (80)$$

e como é possível perceber, na hamiltoniana (79) e na equação (80) um novo valor esperado surge dentro destas equações. A partir daqui, a análise vai ser feita caso a caso, considerando os termos da expansão (53).

4.1 Interação de densidade (monopólo)

Considerando apenas o termo de monopolo da expansão (53), é possível mostrar que a hamiltoniana (79) e a equação (80) podem ser reescritas como

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'\sigma'} f_0 \langle c_{\vec{k}'\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right)^2 + \Delta^2} \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma} + \frac{\Delta^2 N}{V_0} +$$

$$- \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_0 \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rangle, \quad (81)$$

e

$$1 = \frac{V_0}{2N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + 1/N \sum_{\vec{k}'\sigma'} f_0 \langle c_{\vec{k}'\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle)^2 + \Delta^2}} \times$$

$$\times \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + 1/N \sum_{\vec{k}'\sigma'} f_0 \langle c_{\vec{k}'\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right). \quad (82)$$

Assim como foi feito em (28), neste caso é possível renomear os termos da equação para resolver o novo valor esperado que surge dentro das equações, de forma que

$$\rho = \frac{f_0}{N} \sum_{\vec{k}\sigma} \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle. \quad (83)$$

Novamente, ao se escrever c e c^\dagger em termos dos bogoliubons e fazer a consideração de temperatura finita e distribuição de Fermi-Dirac. Assim, é possível mostrar que a equação (83) fica na forma

$$\rho = \frac{f_0}{N} \sum_{\vec{k}\sigma} \left[1 - \frac{k^2/2m - \epsilon_F + \rho}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \rho)^2 + \Delta^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \rho)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right) \right], \quad (84)$$

e que a equação (82) é reescrita como

$$1 = \frac{V_0}{2N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \rho)^2 + \Delta^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \rho)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right). \quad (85)$$

Além disso, a nova hamiltoniana pode ser reescrita como

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F + \rho \right)^2 + \Delta^2} \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma} + \frac{\Delta^2 N}{V_0} - \frac{\rho^2 N}{f_0}. \quad (86)$$

Com as equações (85) e (84), é possível então começar a tentativa de solução para este conjunto de equações acopladas.

Os limites de integração aqui serão semelhantes aos limites da seção 2.1. Com o adendo de que o termo da interação monopolar ρ não pode superar o valor de $\hbar\omega$, isto fica mais claro ao se realizar as integrais. Com isto as equações (84) e (85) ficam

$$1 = \frac{V_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2m(\epsilon_F - \hbar\omega)}}^{\sqrt{2m(\epsilon_F + \hbar\omega)}} dk \frac{k}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \rho)^2 + \Delta^2}} \times \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \rho)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right), \quad (87)$$

e

$$\rho = f_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2m(\epsilon_F - \hbar\omega)}}^{\sqrt{2m(\epsilon_F + \hbar\omega)}} dk k \left[1 + \frac{k^2/2m - \epsilon_F + \rho}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \rho)^2 + \Delta^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \rho)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right) \right], \quad (88)$$

sendo que aqui, diferentemente da seção 3.1, as integrais estão sendo feitas diretamente no espaço de momentum, mas os limites de integração são os mesmos. Estas são equações autoconsistentes acopladas, e suas soluções são o principal objetivo desta seção. A partir de soluções para equação (87) é possível obter o parâmetro de ordem superconductor e a temperatura crítica, de forma semelhante às obtidas no caso BCS, no capítulo 2. Já a equação (88) é proveniente da interação introduzida neste capítulo, e a solução desta traz como ρ depende da temperatura e do acoplamento da interação f_0 , além de tornar possível posteriormente determinar o comportamento de Δ como função de f_0 , utilizando a solução de ρ .

Começando pela solução de ρ , tem-se que a integração é possível de ser realizada analiticamente e a mesma fica

$$\rho = 2\pi m f_0 \left[2\hbar\omega - 2k_B T \left(\ln \cosh \frac{\sqrt{(\hbar\omega + \rho)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} - \ln \cosh \frac{\sqrt{(\hbar\omega - \rho)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right) \right]. \quad (89)$$

Alguns limites aqui devem ser tomados para um resultado final desta equação, os primeiros limites são o limite $|\hbar\omega \pm \rho| \gg \Delta$, e $|\hbar\omega \pm \rho| \gg k_B T$ que devem ser tomados já na equação de BCS, mas sem o termo interativo ρ . Com estes limites, é possível fazer as aproximações $\Delta^2/(\hbar\omega \pm \rho)^2 \rightarrow 0$ e $\cosh x = \exp(x/2)$ caso $x \gg 1$, e assim a equação fica

$$\rho = 2\pi m f_0 [2\hbar\omega - (|\hbar\omega + \rho| - |\hbar\omega - \rho|)], \quad (90)$$

aqui é necessário escolher $\hbar\omega > \rho$, pois, outra escolha traz problemas nas soluções posteriores. Assim, o resultado da integral (88) para estes limites, fica na forma

$$\rho = \hbar\omega \frac{4\pi m f_0}{1 + 4\pi m f_0}. \quad (91)$$

A solução (91) não é válida para regiões onde $4\pi m f_0 \rightarrow -0,5$. Isto se dá, pois, nesta região $|\hbar\omega + \rho| \rightarrow 0$, o que está em desacordo com o limite tomado para a equação (90). Com isso, a divergência que ocorre em $4\pi m f_0 \rightarrow -1$ não se torna uma preocupação. Como será mostrado, a supercondutividade para a região $4\pi m f_0 \leq -0,5$ é completamente suprimida, e esta região não é de interesse para análise.

Com o resultado e as considerações feitas para ρ é possível então encontrar soluções para a integral (87), o primeiro limite que será considerado será o de $T \rightarrow 0$ assim como no caso BCS. Neste caso a equação para Δ fica

$$1 = \frac{V_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2m(\epsilon_F - \hbar\omega)}}^{\sqrt{2m(\epsilon_F + \hbar\omega)}} dk \frac{k}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \rho)^2 + \Delta_0^2}}. \quad (92)$$

Esta integral tem solução exata e fica na forma

$$1 = m\pi V_0 \left[\sinh^{-1} \left(\frac{\rho + \hbar\omega}{\Delta_0} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\rho - \hbar\omega}{\Delta_0} \right) \right], \quad (93)$$

para solucionar esta equação para Δ_0 é necessário tomar os mesmos limites tomados no caso da equação de ρ , e assim é possível mostrar que $\sinh^{-1}(x) = \ln(2x)$, com isto é possível mostrar que

$$\Delta_0 = 2\sqrt{\hbar^2\omega^2 - \rho^2} e^{-\frac{1}{2\pi m V_0}}, \quad (94)$$

considerando então a solução (91) é possível mostrar que a solução para Δ_0 em termos da interação de monopólo fica

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega \frac{\sqrt{1 + 2(4\pi m f_0)}}{1 + 4\pi m f_0} e^{-\frac{1}{2\pi m V_0}}. \quad (95)$$

É possível perceber que existem dois limites para os quais Δ_0 é nulo, estes são os limites

$4\pi m f_0 \rightarrow -0,5$ e $4\pi m f_0 \rightarrow +\infty$. Para valores de $4\pi m f_0 < -0,5$ os termos dentro da raiz de (95) ficam negativos, e por consequência a raiz fica imaginária, e como Δ_0 é uma solução para o módulo do parâmetro de ordem, valores imaginários não representam uma possibilidade.

Para o limite $T \rightarrow T_C$, isto é $\Delta \rightarrow 0$, a equação fica na forma

$$1 = \frac{V_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2m(\epsilon_F - \hbar\omega)}}^{\sqrt{2m(\epsilon_F + \hbar\omega)}} dk \frac{k}{k^2/2m - \epsilon_F + \rho} \tanh\left(\frac{k^2/2m - \epsilon_F + \rho}{2k_B T_C}\right), \quad (96)$$

esta integral tem uma solução (com as aproximações) muito semelhante à BCS original (FERNANDES, 2015), mas novamente $\hbar\omega \rightarrow \sqrt{\hbar^2\omega^2 - \rho^2}$, sendo assim a equação para temperatura crítica fica

$$k_B T_C = 2\sqrt{\hbar^2\omega^2 - \rho^2} \frac{e^{\gamma_E}}{\pi} e^{-\frac{1}{2\pi m V_0}}. \quad (97)$$

Colocando então a solução (91) dentro da raiz, a solução para a temperatura crítica fica

$$k_B T_C = 2\hbar\omega \frac{e^{\gamma_E}}{\pi} \frac{\sqrt{1 + 2(4\pi m f_0)}}{1 + 4\pi m f_0} e^{-\frac{1}{2\pi m V_0}}, \quad (98)$$

e aqui é mais claro que valores menores que $-0,5$ resultariam em uma temperatura crítica imaginária, o que não faz sentido. Com isto é possível observar que, para interações atrativas para valores do acoplamento $4\pi m f_0 < -0,5$, a supercondutividade é suprimida.

É possível, então, mostrar que a relação (46) continua intacta, ou seja, não é alterada pela interação monopolar.

Com as soluções para gap, temperatura e a interação é possível fazer uma análise gráfica das soluções acima. Considerando a primeira solução normalizada, isto é

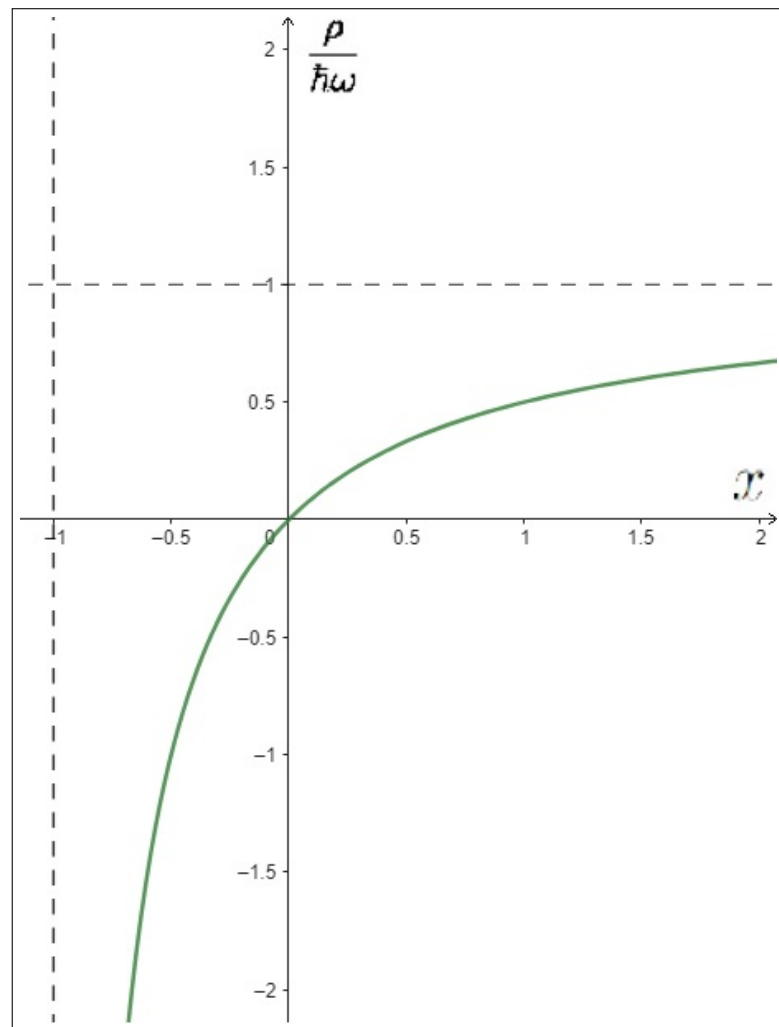
$$\frac{\rho}{\hbar\omega} = \frac{x}{1+x}, \quad (99)$$

sendo $x = 4\pi m f_0$. Sendo assim a forma gráfica desta solução fica na forma da figura 12 sendo que, na figura, as linhas retas representam as assintotas vertical e horizontal da solução (99). A equação tem valor limitado para interações repulsivas $f_0 > 0$, sendo que esse valor nunca ultrapassa o valor da excitação $\hbar\omega$.

As soluções que dizem mais a respeito da supercondutividade são as (95) e (98). Na forma normalizada

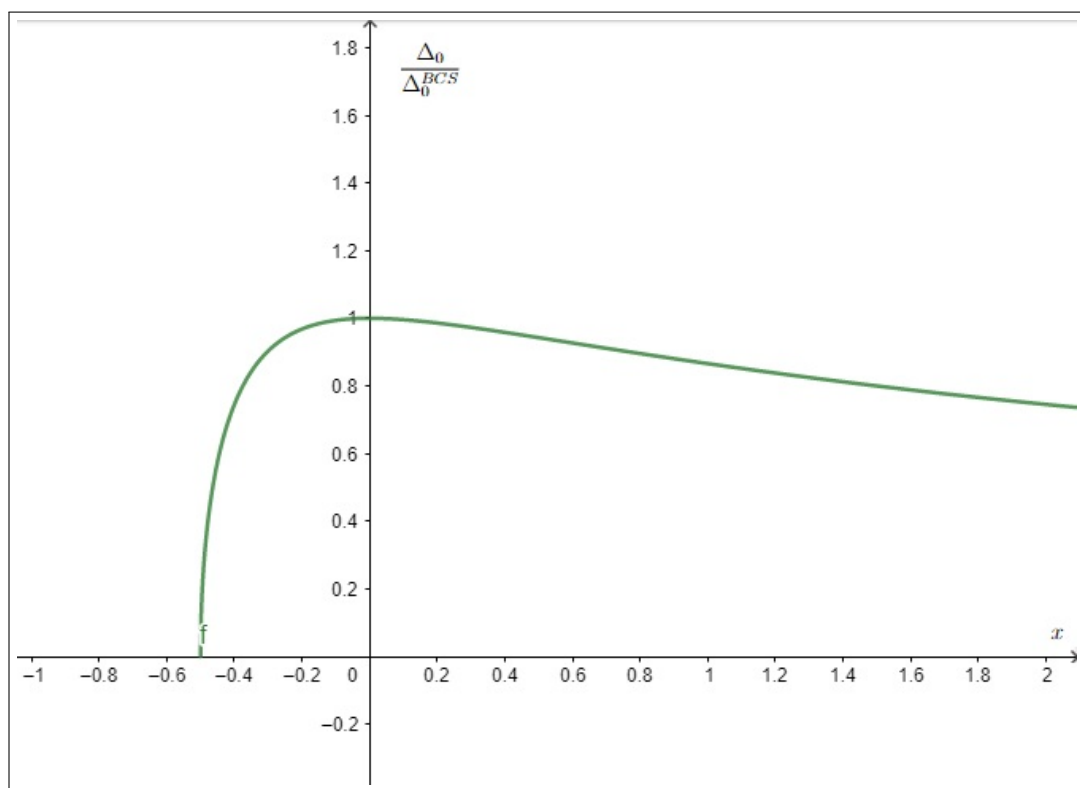
$$\frac{\Delta_0}{\Delta_0^{BCS}} = \frac{\sqrt{1+2x}}{1+x}, \quad (100)$$

neste caso, a forma gráfica desta é descrita pela figura 13 como é possível perceber, e já havia sido comentado antes, o parâmetro de ordem é nulo para valores de $x < -0,5$.

Figura 12 - ρ normalizado como função de $x = 4\pi m f_0$ 

Fonte: O autor, 2022.

Figura 13 - Δ_0 normalizado como função de $x = 4\pi m f_0$



Fonte: O autor, 2022.

Isto implica que para estes valores a supercondutividade é completamente suprimida pela interação monopolar.

Onde é possível perceber este mesmo comportamento é observado, como esperado, na temperatura crítica. A forma normalizada da solução para temperatura crítica é

$$\frac{T_C}{T_C^{BCS}} = \frac{\sqrt{1+2x}}{1+x}, \quad (101)$$

neste caso, o gráfico é exatamente o mesmo que na figura 13, com o eixo vertical renomeado pela temperatura.

Estas soluções trazem um estranho comportamento para diferentes valores da interação monopolar. Implicando que, possivelmente, materiais com interações de monopolo atrativas $f_0 < 0$ muito fortes em baixas temperaturas, não poderiam apresentar a transição metal-supercondutor.

Apesar da importância de todas as soluções analisadas até aqui, todas elas dependem fortemente de aproximações consideráveis para poderem ser realizadas, e não é possível em nenhum caso encontrar uma solução analítica dependente da temperatura para Δ . Logo, é útil partir para análises numéricas, tanto pela questão comparativa, quando para questão de possíveis análises. (LOPES et al., 2021)

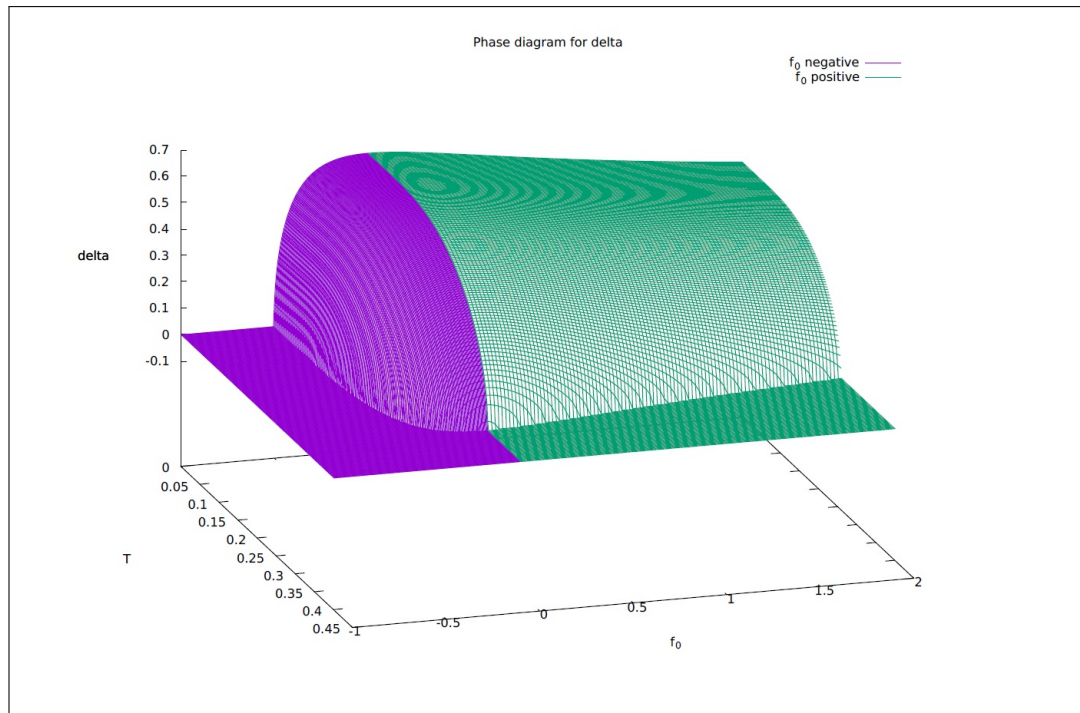
Para solucionar as equações integrais (87) e (88) numericamente é necessário algumas considerações com relação aos parâmetros das equações. As considerações feitas para tal método são $V_0 = 1$, $m = 1$, $\epsilon_F = 1$ e $k_B T = T$ e por fim deve-se definir uma região de integração, para isto usou-se $\hbar\omega = 0, 1$. Com estas considerações é possível realizar uma análise numérica das equações.

Utilizando um método de solução iterativo para equações autoconsistentes, é possível então encontrar a solução de Δ e ρ como função da temperatura.

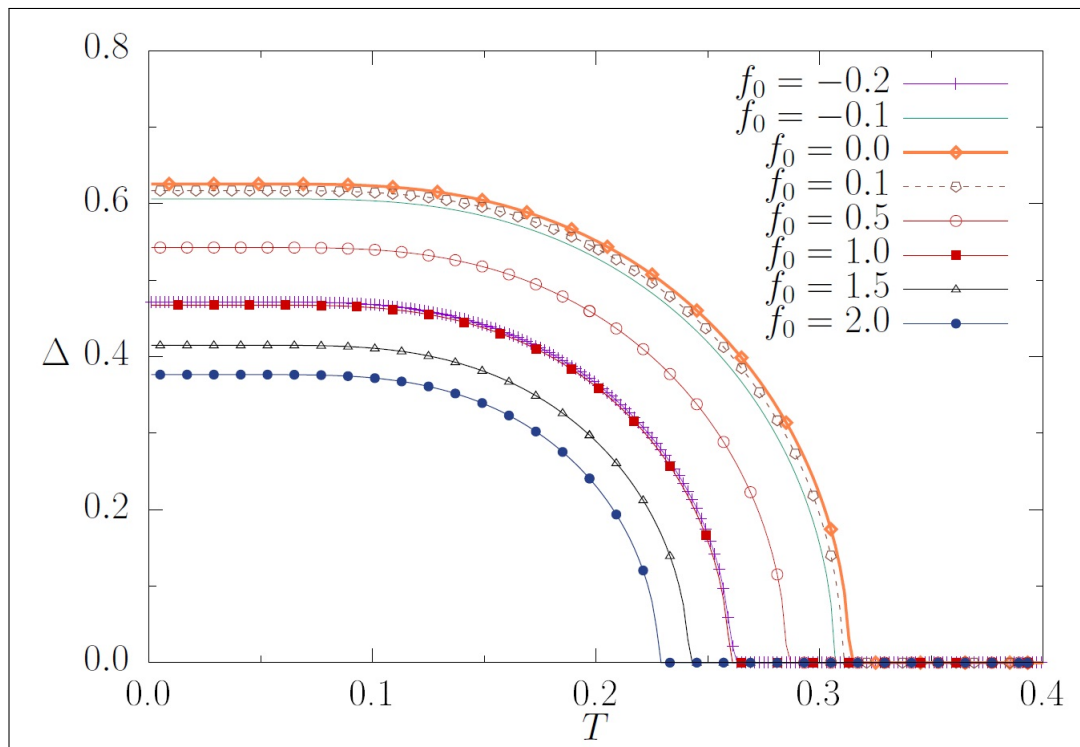
A solução geral para Δ fica na forma da figura 14. A separação de cores dada na figura é a separação entre a região atrativa e repulsiva da interação monopolar. A curva formada pela parte superior do diagrama, no corte $T = 0$, representa a solução equivalente à (100), enquanto o corte em $\Delta = 0$ equivale a (101). Mas para fazer a comparação de forma mais direta é necessário analisar os cortes normalizados.

Diferentes cortes de f_0 podem ser feitos na solução 14. O gráfico destes diferentes cortes fica na maneira da figura 15 e assim como na solução (100) é possível observar que a interação monopolar abaixa os valores do gap e da temperatura crítica, "enfraquecendo" a supercondutividade, sendo atrativa ou repulsiva.

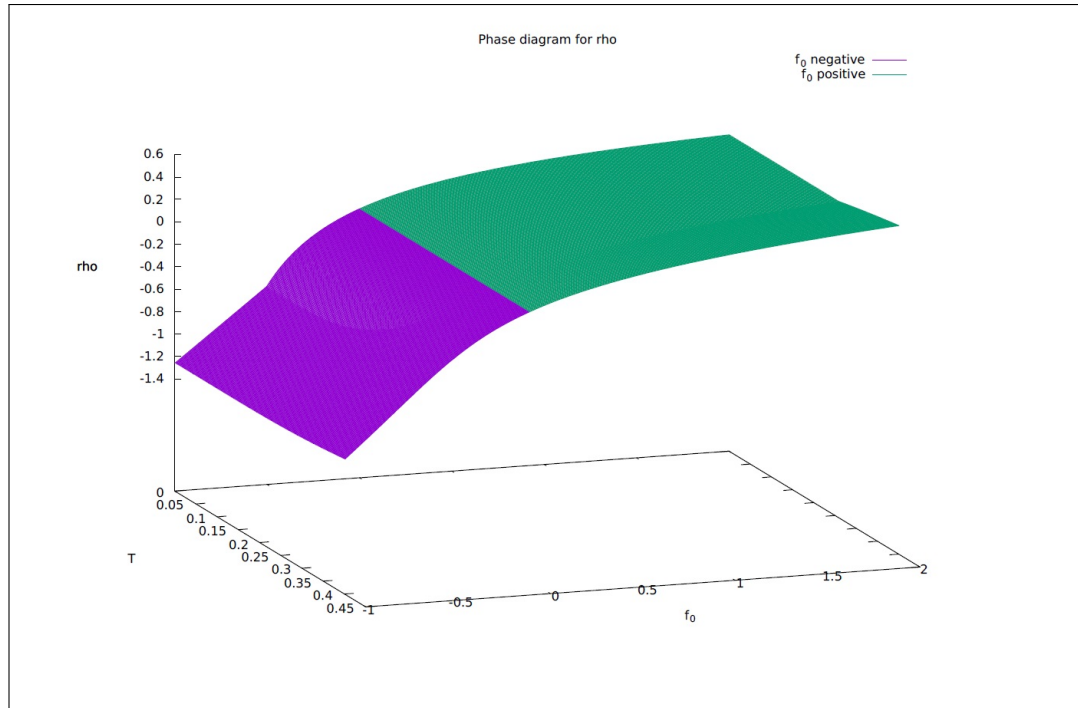
Outra solução possível é a de ρ , esta tem a forma da figura 16. A forma de ρ para interação repulsiva é bem próxima da solução analítica anteriormente descrita. Porém, é possível observar o surgimento de uma ponta no gráfico, esta surge exatamente nos limites em que $\Delta \rightarrow 0$. Como vai ser possível ver no corte de Δ , valores nestas regiões não são importantes para a supercondutividade, já que esta não é mais existente nessas regiões,

Figura 14 - Solução numérica de Δ 

Fonte: LOPES, 2022.

Figura 15 - Cortes em f_0 de $\Delta \times T$ 

Fonte: LOPES, 2022.

Figura 16 - Solução numérica para ρ 

Fonte: LOPES, 2022.

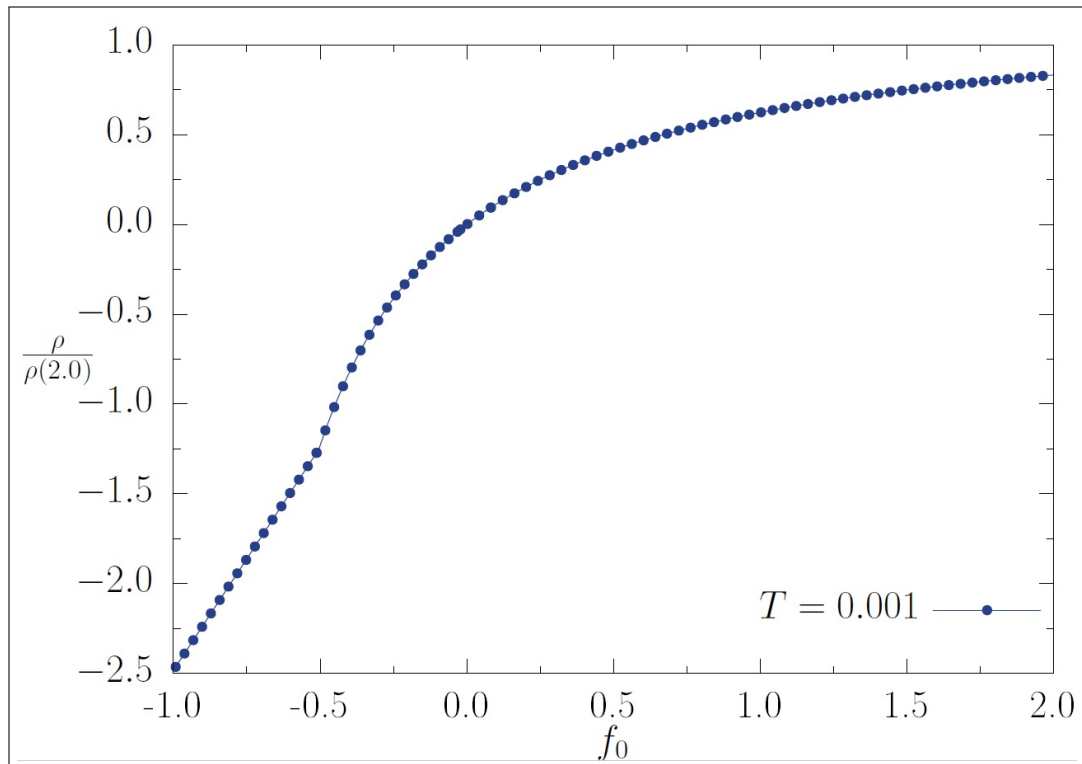
assim como observado nos resultados analíticos.

Para comparação com os resultados analíticos anteriores, os gráficos 14 e 16 podem ser normalizados e os devidos cortes devem ser retirados dos mesmos. Assim, o primeiro corte que será analisado será o de ρ normalizado. Este gráfico é representado na figura 17. Nesta figura f_0 é equivalente a x nas equações (99), (100) e (101). Como é possível perceber, no momento que $f_0 \approx -0,5$ aparece uma ponta no gráfico. A região $-1 < f_0 < -0,5$ é a região na qual a supercondutividade é suprimida, dada pelo fato que abaixo deste valor $\Delta = 0$.

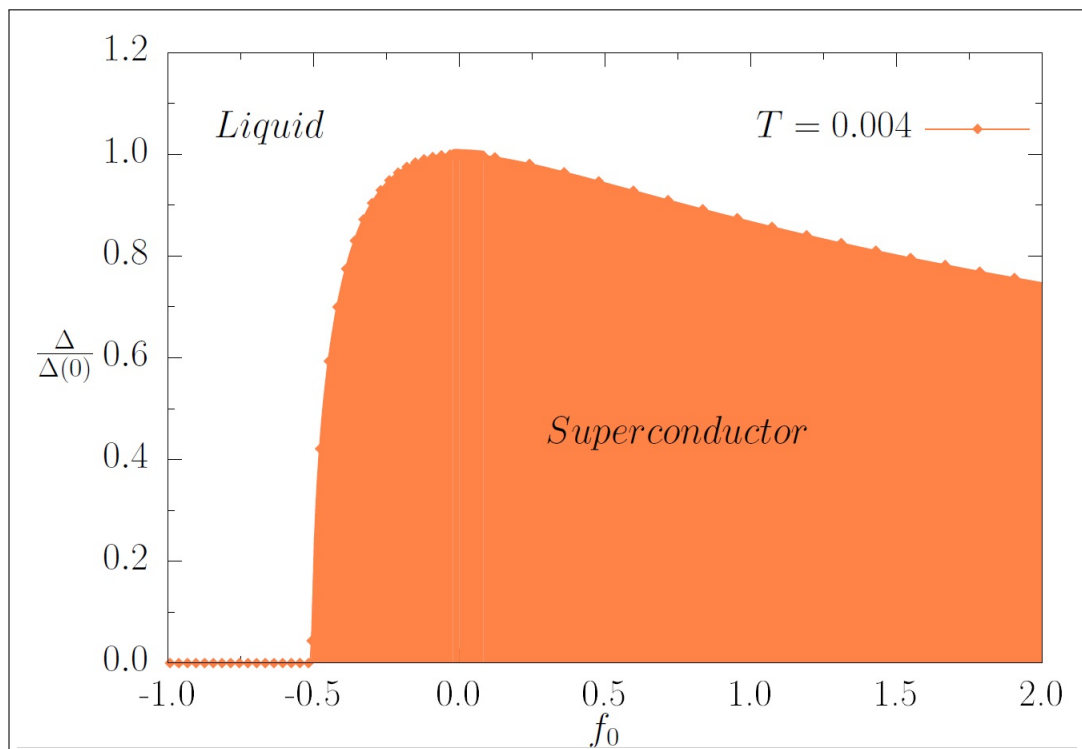
O comportamento do gráfico 17 é, pelo menos na região "útil" para análise, semelhante ao comportamento analítico descrito pela função (99).

O próximo gráfico a ser analisado é o gráfico do corte de Δ_0 , este gráfico é representado na figura 18, comparando o comportamento gráfico com o da função (100), é possível perceber que os resultados numéricos e o resultado analítico tem comportamento funcional semelhante, com a supercondutividade sendo suprimida para valores da interação $f_0 \approx -0,5$ no caso numérico, e com o maior valor sendo no ponto $f_0 = 0$ que é o caso BCS puro. As bordas da região colorida neste gráfico representam os valores do gap para diferentes valores da interação.

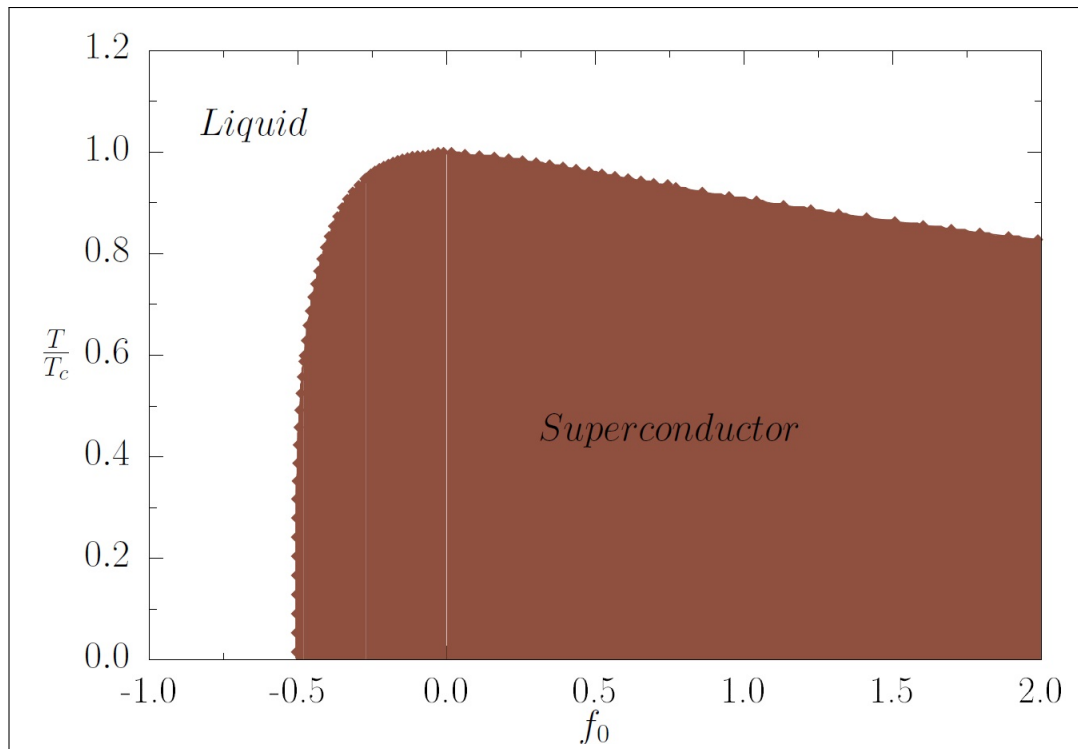
O gráfico da temperatura, representado na figura 19 também tem o mesmo comportamento, indicado pelas soluções analíticas anteriormente demonstradas. Este gráfico é também um diagrama de fase, no qual a região colorida é a região que o material está no

Figura 17 - Corte de ρ normalizado

Fonte: LOPES, 2022.

Figura 18 - Corte de Δ normalizado

Fonte: LOPES, 2022.

Figura 19 - Corte de T normalizado

Fonte: LOPES, 2022.

estado supercondutor (o pareamento de Cooper é possível) enquanto a região externa é a região na qual o material se comporta como um metal (os elétrons se comportam como um líquido fermiônico, sem pareamento de Cooper).

Uma diferença essencial entre os gráficos da temperatura e do gap, é que para valores maiores de f_0 , apesar de o comportamento ser semelhante ao caso analítico em ambos os casos, o gráfico numérico do gap normalizado cai de forma mais rápida do que o gráfico da temperatura crítica. Fazendo uma análise rápida da solução analítica (100) para $x = 2$ é possível notar que o gráfico do gap se assemelha mais aos valores encontrados na solução analítica.

Consegue-se analisar a partir das soluções analíticas e numéricas encontradas, que a presença de uma interação de densidade (monopólo), muda consideravelmente as quantidades associadas ao supercondutor, podendo alterar desde a temperatura crítica e o diagrama de fase da supercondutividade, mas também alterando o gap de energia que surge, na transição de um metal para um supercondutor.

Como foi observado nas soluções analíticas, a relação fundamental entre o gap e a temperatura crítica (46), não era alterada ao nível das aproximações utilizadas. Porém, a diferença de comportamento das soluções numéricas 18 e 19 faz com que esta relação se mantenha apenas para valores f_0 próximos da nulidade. Para interações repulsivas mais fortes, por exemplo, este valor deve ser reduzido do original de acordo com as so-

luções encontradas, já que a relação $T_C(f_0)/T_C^{BCS}$ é numericamente maior que a relação $\Delta_0(f_0)/\Delta_0^{BCS}$.

A alteração de valores, como a temperatura crítica e o gap de energia causada pela interação, causam mudanças também nas quantidades termodinâmicas da teoria BCS original. Um exemplo, ao se calcular o gap do calor específico de um supercondutor na teoria BCS, é possível mostrar que este gap possui uma dependência no valor da temperatura crítica do supercondutor. Com a alteração desta temperatura crítica, causada pelas interações, é esperado que o valor deste gap seja alterado ao se comparar com a teoria BCS original, se é que a dependência do gap de calor específico com T_C continuaria da mesma forma após a introdução de termos interativos. Cálculos relacionados a isto não foram feitos para este trabalho, mas podem vir a ser incluídos em outros trabalhos futuros.

4.2 Interação de corrente (dipólo)

Assim como no caso do monopólo, aqui será considerada apenas a interação dipolar. Como é possível ver pela equação (53) a interação dipolar envolve termos vetoriais, o que, como será observado, dificulta consideravelmente a tentativa de qualquer tipo de solução analítica do sistema.

No caso da interação dipolar a hamiltoniana fica na forma

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F + (2f_1/Nk_F^2) \sum_{\vec{k}'\sigma'} \vec{k} \cdot \vec{k}' \langle c_{\vec{k}'\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \right) + \Delta^2 \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma} + \frac{\Delta^2 N}{V_0} +} \\ & - \frac{f_1}{Nk_F^2} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} \vec{k} \cdot \vec{k}' \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rangle, \end{aligned} \quad (102)$$

assim como no caso no monopolo é possível definir

$$\vec{J} = \frac{2f_1}{Nk_F} \sum_{\vec{k}\sigma} \vec{k} \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle, \quad (103)$$

e por consequência as equações (85) e (86) ficam

$$1 = \frac{V_0}{2N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \vec{k} \cdot \vec{J}/k_F)^2 + \Delta^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \vec{k} \cdot \vec{J}/k_F)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right) \quad (104)$$

e

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F + \vec{k} \cdot \vec{J}/k_F \right)^2 + \Delta^2} \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma} + \frac{\Delta^2 N}{V_0} - \frac{J^2 N}{4f_1}. \quad (105)$$

E a equação para \vec{J} fica na forma

$$\begin{aligned} \vec{J} = & \frac{2f_1}{Nk_F} \sum_{\vec{k}\sigma} \vec{k} \left[1 - \frac{k^2/2m - \epsilon_F + \vec{k}\cdot\vec{J}/k_F}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \vec{k}\cdot\vec{J}/k_F)^2 + \Delta^2}} \times \right. \\ & \left. \times \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + \vec{k}\cdot\vec{J}/k_F)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (106)$$

Neste ponto já fica evidente que o novo termo $\vec{k}\cdot\vec{J}$ dentro da equação de gap (104) acaba com a simetria rotacional da integral. Este fato faz com que possíveis soluções analíticas para esta equação sejam muito difíceis, ou até mesmo impossíveis, de serem encontradas, mesmo com várias aproximações consecutivas sobre a equação. As soluções numéricas para o caso do dipolo na teoria microscópica não serão abordadas neste trabalho. As possíveis soluções para as equações acima serão deixadas para futuros desenvolvimentos, devido à dificuldade de trabalhar com as integrais.

4.3 Interação nemática (quadrupólo)

Assim como no caso do dipolo, as equações incluindo as interações nemáticas na microscopia também não terão solução exposta aqui neste trabalho, e são um objetivo para projetos futuros. Mas por questão de expor a razão da dificuldade que impede simples soluções destas equações, aqui serão expostas estas na forma de somatório.

Considerando a equação (80) e a hamiltoniana (79), e apenas o termo quadripolar da parte interativa (53) as equações ficam na forma

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \epsilon_F + Q_{ij}q_{ij}(\vec{k}) \right)^2 + \Delta^2} \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma} + \frac{\Delta^2 N}{V_0} + \\ & - \frac{4}{N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'\sigma\sigma'} f_2 q_{ij}(\vec{k}) \langle c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} \rangle q_{ij}(\vec{k}') \langle c_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger c_{\vec{k}'\sigma'} \rangle, \end{aligned} \quad (107)$$

e a equação para o gap fica em uma temperatura finita

$$1 = \frac{V_0}{2N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + Q_{ij}q_{ij}(\vec{k}))^2 + \Delta^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + Q_{ij}q_{ij}(\vec{k}))^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right) \quad (108)$$

sendo

$$q_{ij}(\vec{k}) = \frac{1}{k_F^2} \left(k_i k_j - \frac{\delta_{ij}}{2} k_F^2 \right), \quad (109)$$

e

$$\begin{aligned}
 Q_{ij} = & \frac{2f_2}{N} \sum_{\vec{k}} q_{ij}(\vec{k}) \left[1 - \frac{k^2/2m - \epsilon_F + Q_{ij}q_{ij}}{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + Q_{ij}q_{ij})^2 + \Delta^2}} \times \right. \\
 & \left. \times \tanh \left(\frac{\sqrt{(k^2/2m - \epsilon_F + Q_{ij}q_{ij})^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right) \right]. \tag{110}
 \end{aligned}$$

Apesar de os novos termos tensoriais complicados, internos a integral, as dificuldades de se tentar encontrar uma solução para as equações que incluem a interação quadrupolar são semelhantes a do caso dipolar. E, como comentado anteriormente, encontrar estas soluções é um objetivo para futuros trabalhos de continuação deste.

CONCLUSÃO

Aqui chegamos, enfim.

Lenine

No primeiro capítulo foi descrito desde a definição da transição de fase, tanto de primeira, quanto de segunda ordem, de um ponto de vista dos potenciais termodinâmicos. Foi descrito também o modelo de Landau para transições de segunda ordem, que se baseia na expansão entorno de uma quantidade, chamada parâmetro de ordem, que indica em qual fase o material está. Depois foi introduzido o conceito de supercondutividade e citadas as descobertas e modelos fenomenológicos referentes a essa nova transição. Um desses modelos é o modelo de Landau-Ginzburg para a supercondutividade. Este modelo tem a capacidade de reproduzir a equação proposta pelos irmãos London (e por consequência o efeito Meissner), além de deduzir quantidades importantes nas proximidades da criticalidade.

No segundo capítulo o foco foi expor a maneira na qual, na microscopia, é descrita a interação entre férmions. Primeiro expondo a interação responsável pela supercondutividade, na hamiltoniana de BCS. A hamiltoniana de BCS descreve uma interação atrativa entre os elétrons do material, esta interação sendo consequência dos fônons, ou seja, é proveniente da própria rede cristalina do material. Depois, é descrito a partir de um novo termo interativo as interações desprezadas em BCS, interações de origem eletromagnética. Após isto, é exposto uma maneira de expandir os novos termos interativos, esta é a expansão multipolar, que no capítulo 4 traz a possibilidade de uma análise, pelo menos na primeira ordem de expansão.

O terceiro capítulo parte de uma modificação do modelo fenomenológico LG, para se conseguir, assim, analisar, nas proximidades da criticalidade, os efeitos que as novas interações podem exercer sobre a supercondutividade. Neste capítulo é mostrado como diferentes regimes das interações de dipolo e quadrupolo podem mudar o comportamento das quantidades associadas ao supercondutor. Essas alterações são sempre dependentes da temperatura, e tendem a nulidade no limite $T \rightarrow T_C$. Além disso, fica claro a partir das análises gráficas feitas no capítulo que a interação dipolar tem um certa dominância sobre a quadrupolar quando consideradas juntas. De forma que, na proximidade da criticalidade, mesmo que a interação dipolar seja mais "fraca" que a quadrupolar, ela rege o aumento ou a diminuição do valor do parâmetro de Abriskosov κ , enquanto a interação quadrupolar pode exercer um auxílio neste aumento ou nesta diminuição do valor.

No quarto capítulo é feita uma abordagem microscópica para as interações, adicionando os novos termos de interação na hamiltoniana BCS é possível a partir da aproximação de campo médio mostrar que, para uma interação qualquer, as interações fazem

um papel aditivo na dispersão. Ao se fazer a expansão multipolar, uma nova equação surge para cada uma das interações, além da equação de gap de BCS. É possível então se encontrar tanto soluções analíticas aproximadas para o caso monopolar, como soluções numéricas.

As soluções para o caso do monopolo mostram que a interação tem papel de reduzir os valores do gap e da temperatura crítica da supercondutividade. E nos limites $\rho \approx \pm \hbar\omega$, sendo que estes limites equivalem em termos do acoplamento aos limites $4\pi m f_0 \rightarrow +\infty$ e $4\pi m f_0 \rightarrow -0,5$ a supercondutividade é completamente suprimida. Ou seja, no caso de materiais com ordem de densidade muito "fortes" é possível que tais materiais não possam apresentar a transição metal-supercondutor.

Os casos microscópicos da ordem dipolar e quadrupolar são um interesse para futuros estudos. Provavelmente as quebras na simetria de rotação nas equações de gap e interação para ambos os casos poderão gerar resultados novos curiosos, mas a dificuldade analítica referente a esses dois casos traz a necessidade de um estudo imediatamente numérico dessas interações.

REFERÊNCIAS

ABRIKOSOV, A. A. Nobel lecture: Type-II superconductors and the vortex lattice. *Reviews of modern physics*, v. 76, 2004.

ANNETT, J. F. *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. [S.l.]: Oxford University Press, 2004. ISBN 0198507569.

AQUINO, R.; BARCI, D. G. Exceptional points in fermi liquids with quadrupolar interactions. *Physical Review B*, v. 102, 2020.

BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. *Physical Review*, v. 108, 1957.

BAYM, G.; PETHICK, C. *Landau Fermi-Liquid Theory*. [S.l.]: Wiley-VCH, 1991. ISBN 3527617167.

CHAIKIN, P. M.; LUBENSKY, T. C. *Principles of condensed matter physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. ISBN 0521794501.

COOPER, L. N. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Physical Review*, v. 104, 1956.

DELFT, D.; KESS, P. The discovery of superconductivity. *Physics Today*, v. 63, 2010.

FERNANDES, R. M. *Lecture Notes: BCS theory of superconductivity*. 2015. Disponível em: <https://portal.ifi.unicamp.br/images/files/graduacao/aulas-on-line/fen-emerg/lecture_notes_BCS.pdf>. Acesso em: 15. out. 2020

GOR'KOV, L. P. Microscopic derivation of the ginzburg-landau equations in the theory of superconductivity. *Soviet Physics JETP*, v. 36, 1959.

HAVENS-SACCO, S. M.; WIDOM, A. Two-dimensional fermi liquids. *Journal of Low Temperature Physics*, v. 40, 1980.

KETTERSON, J. B.; SONG, S. N. *Superconductivity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. ISBN 9781139171090.

LONDON, F.; LONDON, H. The electromagnetic equations of the superconductor. *The Royal Society*, v. 149, 1935.

LOPES, N. Figuras desenhadas especialmente para esta dissertação. 2022.

LOPES, N. et al. Interplay between charge density wave and superconductivity in multi-band systems with inter-band coulomb interaction. *Physical Review B*, v. 103, 2021.

MAXWELL, E. Isotope effect in the superconductivity of mercury. *Physical Review*, v. 78, 1950.

NG, T.; TSE, W. Ginzburg–landau equation and vortex liquid phase of fermi liquid superconductors. *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 19, 2007.

OKABAYASHI, T.; TANABE, K.; YAMADA, M. The bogoliubov transformation in the field theory. *Progress of Theoretical Physics*, v. 32, 1964.

OLMSTED, P. D. *Lectures on Landau Theory of Phase Transitions*. 2015. Disponível em: <https://site.physics.georgetown.edu/~pdo7/ps_files/landau.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2020.

RIED, K. et al. Phenomenological theory of the phase transition in uniaxial ferromagnetic materials. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 109, 1991.

STANLEY, H. E. *Introduction to phase transitions and critical phenomena*. [S.l.]: Clarendon Press, 1971. ISBN 0195053168.

TINKHAM, M. *Introduction to Superconductivity*. 2. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 1996. ISBN 9780070648784.

YEOMANS, J. M. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. ISBN 0198517300.