



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Filipe Cattete Alves

**Cosmologias não singulares com vácuo interagente**

Rio de Janeiro

2023

Filipe Cattete Alves

**Cosmologias não singulares com vácuo interagente**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Profa. Dra. Maria de Fátima Alves da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Maier

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

A474c Alves, Filipe Cattete.  
Cosmologias não singulares com vácuo interagente / Filipe Cattete Alves.  
- 2023.  
48 f. : il.

Orientadora: Maria de Fátima Alves da Silva.  
Coorientador: Rodrigo Maier.  
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Cosmologia – Teses. 2. Relatividade geral (Física) – Teses. I. Silva,  
Maria de Fátima Alves da. II. Maier, Rodrigo. III. Universidade do Estado do  
Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. IV. Título.

CDU 524.8

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Filipe Cattete Alves

## **Cosmologias não singulares com vácuo interagente**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 28 de Fevereiro de 2023.

Banca Examinadora:

---

Profa. Dra. Maria de Fátima Alves da Silva (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Rodrigo Maier (Coorientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Rafael Fernandes Aranha  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

2023

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe Bianca e ao meu pai Luiz por todo apoio, amor, carinho e cuidado. Dedico todas as minhas conquistas a vocês. Agradeço aos meus amigos pela força e palavras de confiança. Agradeço aos meus orientadores Fátima e Rodrigo pelas oportunidades, ensinamentos e apoio. Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro. Agradeço ao companheiro mais fiel e carinhoso, Scott, cujas lembranças sempre carregarei. Agradeço aos Deuses por me abençoarem com proteção, força, orientação e clareza.

Skål!

O homem tolo acredita que viverá para sempre se evitar a batalha; mas a velhice não lhe dará nenhuma paz, ainda que as lanças o poupem.

*Hávamál*

## RESUMO

ALVES, F. C. *Cosmologias não singulares com vácuo interagente*. 2023. 48 f.  
Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares,  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Neste trabalho procuramos estudar uma possível solução do problema da singularidade cosmológica analisando a dinâmica da cosmologia de FLRW onde uma componente de vácuo interage com um fluido perfeito através de uma troca de energia. Analisamos duas escolhas covariantes diferentes para a transferência de energia. No primeiro caso a dinâmica é integrável e a equação de Friedmann obtida tem um potencial efetivo com uma barreira que evita a formação da singularidade através de um *bounce*. No segundo caso, a energia de transferência é uma combinação não-linear do vácuo e da densidade de energia do fluido. Nesse caso, as equações dinâmicas podem ser parcialmente integradas, levando a uma integral primeira, e reduzindo o número de graus de liberdade do sistema. Para um domínio de valores dos parâmetros é possível encontrar soluções não singulares. Em ambos os casos a estrutura do espaço de fase permite órbitas não singulares que recuperam a dinâmica do modelo  $\Lambda$ CDM em um regime de baixas energias – após a última superfície de espalhamento.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Vácuo Interagente. Cosmologia.

## ABSTRACT

ALVES, F. C. *Nonsingular cosmologies from an interacting vacuum*. 2023. 48 f.  
Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares,  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

In this work we try to study a possible solution to the cosmological singularity problem by analyzing the dynamics of FLRW cosmology where a vacuum component interacts with a perfect fluid through an energy exchange. We analyzed two different covariant choices for energy transfer. In the first case the dynamics are integrable and the obtained Friedmann's equation has an effective potential with a barrier that prevents the formation of the singularity through a bounce. In the second case, the transfer energy is a non-linear combination of the vacuum and the energy density of the fluid. In this case, the dynamic equations can be partially integrated, leading to a first integral, and reducing the number of degrees of freedom of the system. For a domain of parameter values it is possible to find non-singular solutions. In both cases the phase space structure allows non-singular orbits that recover the dynamics of the  $\Lambda$ CDM model in a low energy regime – after the last scattering surface.

Keywords: General Relativity. Interacting Vacuum. Cosmology.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Ponto de sela centrado na origem. . . . .	28
Figura 2	- Centro na origem. . . . .	29
Figura 3	- Exemplo de centro na origem. . . . .	31
Figura 4	- Retrato de fase do sistema dinâmico $\dot{x} = y, \dot{y} = -x + x^2$ . . . . .	34
Figura 5	- Potencial $U(a)$ . . . . .	38
Figura 6	- Órbitas no plano $(a, H/H_0)$ . . . . .	38
Figura 7	- Retrato de fase para $(V, H)$ . . . . .	42
Figura 8	- Órbitas correspondentes para $(a, H)$ . . . . .	43

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	9
1	<b>A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL</b> . . . . .	11
1.1	Introdução tensorial . . . . .	11
1.2	Os princípios de equivalência e covariância geral . . . . .	14
1.3	As equações de campo de Einstein . . . . .	16
1.4	Limite newtoniano . . . . .	18
1.5	Equações de Friedmann com vácuo interagente . . . . .	20
1.6	Buracos negros não singulares com vácuo interagente . . . . .	23
2	<b>SISTEMAS DINÂMICOS</b> . . . . .	27
2.1	Sistemas lineares . . . . .	27
2.2	Sistemas não-lineares . . . . .	32
3	<b>EXTENSÃO PARA COSMOLOGIA</b> . . . . .	35
3.1	Caso 1 . . . . .	35
3.2	Caso 2 . . . . .	39
	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	44
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	46

## INTRODUÇÃO

A chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), nomeada em homenagem a Alexander Friedmann (FRIEDMANN, 1922)(FRIEDMANN, 1924), Georges Lemaître (LEMAÎTRE, 1931)(LEMAÎTRE, 1933), Howard Robertson (ROBERTSON, 1935)(ROBERTSON, 1936a)(ROBERTSON, 1936b) e Arthur Walker (WALKER, 1937), introduz um modelo de Universo homogêneo e isotrópico. Ao analisarmos a dinâmica da cosmologia de Friedmann, devemos ser capazes de descrever o Universo na sua forma mais primordial. Contudo, isso se torna um problema, visto que no começo da expansão encontramos uma métrica singular, cuja densidade é infinita. Esse é um dos maiores desafios da Cosmologia, o chamado problema da singularidade cosmológica.

Uma parte dos estudos que tentam solucionar esse problema focam em encontrar formas de evitar a formação da singularidade cosmológica através de um *bounce*, como é o caso do modelo cosmológico de Hořava–Lifshitz (CZUCHRY, 2023), ou, aplicando a teoria das cordas, buscam modificar as equações de Friedmann (MILLANO; JUSUFI; LEON, 2023). Outros trabalhos se preocupam em criar teorias alternativas da Relatividade Geral que evitam a singularidade cosmológica inicial, como é o caso de (KHODADI; NOZARI, 2018).

O modelo cosmológico padrão é conhecido como  $\Lambda$ CDM. Duas de suas principais características são dadas em seu nome: o modelo assume que o Universo possui uma componente de densidade de energia impulsionada pela constante cosmológica  $\Lambda$ , e o Universo é permeado pela chamada matéria escura fria (CDM). Essa componente de energia escura, que dá origem a uma força gravitacional repulsiva, é um ingrediente-chave das teorias do Universo em expansão acelerada, que indica que a componente de energia dominante no Universo é a chamada energia escura. A energia escura proporciona o surgimento da força gravitacional repulsiva e faz com que o processo de expansão se torne cada vez mais rápido. A constante cosmológica é o modelo mais simples de energia escura que poderia conduzir a expansão acelerada do Universo. A transferência de energia-momentum entre matéria e vácuo, cujo 4-vetor de transferência de energia-momentum é desconhecido, define soluções cosmológicas de um espaço-tempo com energia de vácuo espacialmente homogênea. É possível dar uma descrição consistente à dinâmica do vácuo interagente e, em particular, as equações relativísticas de movimento para perturbações heterogêneas, dada uma prescrição covariante da energia do vácuo (WANDS; DE-SANTIAGO; WANG, 2012). A interação com uma componente de vácuo traz resultados interessantes. (KAEONIKHOM et al., 2022) e (KAEONIKHOM et al., 2020) mostram que a interação entre matéria escura fria e o vácuo pode ser uma alternativa para reduzir a tensão entre valores locais do parâmetro de Hubble e os inferidos pela radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB). Além disso, modelos cosmológicos com vácuo interagente também podem

evitar a formação da singularidade, como mostra (BRUNI; MAIER; WANDS, 2021).

O primeiro tema abordado no Capítulo 1 é uma introdução ao formalismo tensorial, introduzindo elementos importantes como o tensor de Riemann-Christoffel, o tensor de curvatura de Ricci e o escalar de curvatura. Em seguida, discutimos os Princípios de Equivalência e Covariância Geral, ponto de partida para a formulação da RG. A partir das identidades de Bianchi, definimos o tensor de Einstein e apresentamos as equações de campo de Einstein, que descrevem como a matéria gera gravidade e como a gravidade afeta a matéria. Fazendo um paralelo com a teoria gravitacional de Newton, chegamos às equações de campo fraco da gravitação, fixando a constante de acoplamento  $8\pi G/c^4$ . A partir disso, apresentamos as equações de Friedmann com vácuo interagente. Usamos como motivação os artigos (MAIER, 2020) e (BRUNI; MAIER; WANDS, 2021), onde apresentamos um *ansatz* covariante, que representa a transferência de energia do vácuo para a matéria. A partir daí, no contexto da cosmologia, faz-se necessária a introdução de ferramentas para a análise do que chamamos de sistemas dinâmicos. O Capítulo 2 aborda a relação entre a estabilidade do sistema e seus autovalores, bem como o esboço de seus retratos de fase. No Capítulo 3 estendemos o estudo feito nas seções 1.5 e 1.6 para a Cosmologia e analisamos o modelo cosmológico de FLRW, onde o vácuo interage com um fluido perfeito. Para isso, consideramos dois sistemas dinâmicos, dados no artigo (BRUNI; MAIER; WANDS, 2021) e apresentamos as soluções para cada caso, analisando os diagramas dos retratos de fase. No último capítulo, apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras.

## 1 A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

A teoria da Relatividade Geral, formulada por Einstein, foi a primeira teoria da gravidade puramente geométrica. Para um estudo aprofundado da Cosmologia, que visa descrever a evolução de nosso Universo, é necessário estudarmos a Teoria da Relatividade Geral, que une a Relatividade Especial com Gravitação.

### 1.1 Introdução tensorial

Tensores são objetos matemáticos definidos pelas suas leis de transformação de um sistema de coordenadas para outro (DALARSSON; DALARSSON, 2005). Um tensor de ordem  $N$  em um espaço  $M$ -dimensional possui  $N$  índices e  $M^N$  componentes. Os tensores são generalizações de objetos matemáticos já conhecidos: escalares (tensores de ordem zero); vetores (tensores de ordem 1); matrizes (tensores de ordem 2).

Consideremos uma transformação geral de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ . Chamamos de componentes de um tensor contravariante um objeto  $A^{\mu\nu\dots\sigma}$  que, sob uma transformação de coordenadas, segue a seguinte lei de transformação:

$$A'^{\mu\nu\dots\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \dots \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\gamma} A^{\alpha\beta\dots\gamma}. \quad (1)$$

Chamamos de componentes de um tensor covariante um objeto  $A_{\mu\nu\dots\sigma}$  que, sob uma transformação de coordenadas, segue a seguinte lei de transformação:

$$A'_{\mu\nu\dots\sigma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \dots \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma} A_{\alpha\beta\dots\gamma}. \quad (2)$$

Chamamos de componentes de um tensor misto um objeto  $A^{\mu\dots\sigma}_{\nu\dots\kappa}$  que, sob uma transformação de coordenadas, segue a seguinte lei de transformação:

$$A'^{\mu\dots\sigma}_{\nu\dots\kappa} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \dots \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \dots \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\kappa} A^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\varepsilon}. \quad (3)$$

Quando derivamos um tensor, seu resultado não necessariamente será outro tensor. De fato, consideremos as componentes de um vetor contravariante  $A^\mu$ , cuja lei de transformação é

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu.$$

Derivando a equação acima com relação à  $x'^\lambda$ :

$$\frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} A^\nu. \quad (4)$$

O primeiro termo do lado direito é o que se esperaria se  $\partial A^\mu / \partial x^\lambda$  fossem as componentes de um tensor. O segundo termo do lado direito da equação acima faz com que  $\partial A'^\mu / \partial x'^\lambda$  não se transforme como as componentes de um tensor. Neste ponto, podemos trazer à discussão um importante objeto, conhecido como conexão afim, definido por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu},$$

que tem sua lei de transformação dada por:

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}. \quad (5)$$

Das equações (4) e (5) obtemos:

$$\frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^{\mu}_{\lambda\kappa} A'^\kappa = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \left( \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\nu_{\rho\sigma} A^\sigma \right), \quad (6)$$

que nos leva a definir a derivada covariante de componentes de um tensor contravariante:

$$A'^\mu{}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^{\mu}_{\lambda\kappa} A'^\kappa. \quad (7)$$

De maneira análoga, definimos a derivada covariante de componentes de um tensor covariante:

$$A_{\mu;\nu} \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda. \quad (8)$$

Assim, de maneira geral, definimos a derivada covariante de componentes de um tensor como:

$$A_{\gamma\delta\dots;\rho}^{\alpha\beta\dots} \equiv \partial_\rho A_{\gamma\delta\dots}^{\alpha\beta\dots} + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha A_{\gamma\delta\dots}^{\mu\beta\dots} + \Gamma_{\mu\rho}^\beta A_{\gamma\delta\dots}^{\alpha\mu\dots} + \dots - \Gamma_{\gamma\rho}^\kappa A_{\kappa\delta\dots}^{\alpha\beta\dots} - \Gamma_{\delta\rho}^\kappa A_{\gamma\kappa\dots}^{\alpha\beta\dots} - \dots, \quad (9)$$

onde o novo tensor possui 1 ordem a mais, garantido através da conexão.

Em Relatividade Geral, tratamos do espaço-tempo sobre um espaço topológico que, localmente, se assemelha a um espaço euclidiano nas vizinhanças de cada ponto. Chamamos esse espaço de variedade na qual podemos utilizar diversas ferramentas como, por exemplo, definir funções, tomar suas derivadas ou parametrizar caminhos. Alguns outros conceitos como o comprimento de um caminho nos remetem à noção de métrica

(CARROLL, 1997). De maneira geral, uma distância infinitesimal - elemento de linha ou intervalo invariante - entre dois pontos, pode ser escrita como:

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (10)$$

onde o tensor métrico é definido como:

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(\xi). \quad (11)$$

Na expressão acima,  $\mu, \nu$  variam de 0 à 3, com  $x^0$  sendo a coordenada temporal e  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , as coordenadas espaciais. Esse tensor nos dá a informação de como calcular distâncias entre dois pontos baseado nas características de um espaço-tempo ou sistema de coordenadas arbitrário. Neste trabalho, usamos a assinatura  $(-, +, +, +)$ .

Sabemos que a derivada parcial da componente de um tensor não necessariamente resulta em uma componente de outro tensor. Dessa forma, se torna necessária a introdução do que chamamos de conexão afim, introduzida na Seção 2.1, que se relaciona com o tensor métrico da seguinte forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (12)$$

Seus elementos carregam informações sobre a geometria do espaço-tempo e descrevem como se caracteriza o transporte paralelo dos vetores ao longo de uma curva no espaço-tempo (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975).

Podemos construir, através das derivadas primeira e segunda das componentes do tensor métrico, as chamadas componentes do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel,

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \equiv \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda, \quad (13)$$

ou ainda,

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right], \quad (14)$$

no referencial onde os  $\Gamma$ 's são nulos.

Localmente, em uma região plana de uma variedade, podemos escolher um sistema de coordenadas Cartesianas que reduza o elemento de linha (10) para Minkowski. Nesse caso  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  e suas derivadas são zero e, conseqüentemente,  $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = 0$  em qualquer ponto. Do mesmo modo, se  $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = 0$  em todos os pontos de uma variedade, então a variedade é plana (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). Devido a simetria de seus índices, ao fazermos  $\lambda \equiv \nu$  na equação (13) obtemos o chamado tensor de Ricci, adotado para

descrever o campo gravitacional em um espaço vazio (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975), dado por:

$$R_{\mu\kappa} = \partial_\beta \Gamma_{\mu\kappa}^\beta - \partial_\kappa \Gamma_{\beta\mu}^\beta + \Gamma_{\beta\sigma}^\beta \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma - \Gamma_{\sigma\kappa}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\sigma. \quad (15)$$

A última forma contraída do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel que será apresentada é o chamado escalar de curvatura,

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}, \quad (16)$$

que atribui a cada ponto da variedade um único número real determinado pela geometria do espaço-tempo.

## 1.2 Os princípios de equivalência e covariância geral

O ponto de partida para diversas descobertas que, no fim, resultaram na formulação da Teoria da Relatividade Geral, foi o Princípio de Equivalência da Gravitação e Inércia, como denominado por Einstein. Uma das características mais distintas do campo gravitacional é que sua equação de movimento é totalmente independente das propriedades inerentes de uma partícula teste, como massa ou carga.

Consideremos dois objetos A e B compostos de materiais diferentes. Quando são abandonados em um campo gravitacional com aceleração  $\vec{g}$  eles obedecerão as equações de movimento:

$$\ddot{\vec{r}}_A = \left(\frac{m_G}{m_I}\right)_A \vec{g}, \quad \ddot{\vec{r}}_B = \left(\frac{m_G}{m_I}\right)_B \vec{g}.$$

Em suas observações, Galileo afirma que todos os corpos caem com a mesma aceleração, isto é,  $\ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{r}}_B$ , que nos leva à seguinte igualdade:

$$\left(\frac{m_G}{m_I}\right)_A = \left(\frac{m_G}{m_I}\right)_B.$$

A razão de massa, tendo sido considerada universal para todas as substâncias, pode então ser definida, por escolha apropriada de unidades, igual à unidade. Desta forma, podemos simplesmente dizer que

$$m_I = m_G.$$

A equação acima, restrita à Mecânica, é tida como a "versão fraca" do Princípio de Equivalência e nos indica que a equação de movimento de uma partícula em um campo gravi-



tacional newtoniano não depende de sua massa ou constituição.

Einstein, em 1907, enuncia aquilo que denominou ser seu "mais feliz pensamento": "Como todos os corpos aceleram da mesma maneira, um observador em um laboratório em queda livre não será capaz de detectar localmente qualquer efeito gravitacional neste referencial". Esta hipótese, parte do grande legado de Galileo Galilei, foi de elevada significância para que Einstein formulasse o Princípio de Equivalência: a Física de um referencial em queda livre em um campo gravitacional é equivalente, localmente, à de um referencial inercial sem gravidade. De maneira correspondente, a Física em um referencial sem aceleração com gravidade  $g$ , localmente, é a mesma de um referencial sem gravidade mas que acelera com  $\vec{a} = -\vec{g}$ . A partir disso também obtemos a definição física de um referencial inercial. Sejam os seguintes procedimentos gerais:

1. Consideremos um observador A dentro de uma nave espacial em queda livre em um campo gravitacional. De acordo com o Princípio de Equivalência, não há efeito gravitacional local neste referencial, então a Relatividade Especial se aplica localmente.

2. Consideremos a mesma situação, agora do ponto de vista de um observador B, em repouso em relação à A, do lado de fora da nave. Há a presença de um campo gravitacional, medido por B, e o observador A, em queda livre em relação à B, é visto acelerando nesse campo, ou seja, B é um referencial inercial.

A "versão forte" do Princípio de Equivalência afirma que em um laboratório em queda livre (sem rotação), ocupando uma pequena região do espaço-tempo, as leis da Física são as da Relatividade Especial.

Uma realização matemática importante do Princípio de Equivalência é a de que as equações da Relatividade Geral devem ser covariantes com respeito a uma transformação de coordenadas geral, ou seja, as leis da Física devem ser as mesmas, independentemente do observador. Assim, o chamado Princípio da Covariância Geral, é dividido em duas partes (D'INVERNO, 1998):

1. Equações de campo devem ser invariantes sob uma transformação de coordenadas geral, deixando a separação infinitesimal do espaço-tempo ( $ds^2$ ) invariante.

2. Equações físicas devem poder ser reduzidas à sua forma correta da Relatividade Especial em referenciais inerciais locais.

Isso fornece um caminho bem definido para, a partir das equações da Relatividade Especial, válidas nos referenciais locais sem gravidade, chegarmos às equações da Relatividade Geral, válidas em todos os sistemas de coordenadas de um espaço-tempo

curvo. O formalismo tensorial em espaço-tempo curvo difere do espaço-tempo plano em suas derivadas, ou seja, para passarmos de uma equação da Relatividade Especial para a sua correspondente na Relatividade Geral, basta substituímos as derivadas ordinárias ( $\partial$ ) por derivadas covariantes ( $D$ ):

$$\partial \rightarrow D = \partial + \Gamma,$$

onde os símbolos  $\Gamma$ , que serão vistos mais adiante, são construídos com derivadas do tensor métrico.

### 1.3 As equações de campo de Einstein

Seja um dado ponto  $x$  de um sistema de coordenadas em que os elementos  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  sejam nulos em  $x$ , mas suas derivadas não. A derivada covariante do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel (14),

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left( \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right), \quad (17)$$

nos permite encontrar uma identidade diferencial notável através da permutação dos índices  $\nu$ ,  $\kappa$  e  $\eta$ , chamadas de identidades de Bianchi:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \quad (18)$$

Contraindo  $\lambda$  com  $\nu$ , onde as derivadas covariantes de  $g^{\lambda\nu}$  se anulam, encontramos,

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R_{\mu\kappa\eta;\nu}^\nu = 0, \quad (19)$$

o qual podemos contrair novamente para obter

$$R_{;\eta} - R_{\eta;\mu}^\mu - R_{\eta;\nu}^\nu = \left( R_{\eta}^\mu - \frac{1}{2} \delta_{\eta}^{\mu} R \right)_{;\mu} = 0, \quad (20)$$

e assim chegarmos à forma final

$$\left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} = 0. \quad (21)$$

A equação (21) leva o nome de identidades de Bianchi. A expressão entre parênteses pode ser denotada como  $G^{\mu\nu}$ :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (22)$$

chamado tensor de Einstein.

Na Relatividade Especial temos a geometria de um espaço-tempo plano onde as componentes do tensor métrico, em coordenadas cartesianas, são dadas por  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . A Relatividade Geral, como uma teoria geométrica da gravidade, postula que matéria e energia causam uma deformação do espaço-tempo ( $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ ) e fenômenos gravitacionais, como apresentados a seguir, são efeitos de um espaço-tempo curvo em um objeto.

O Princípio de Equivalência sugere que os relógios funcionam de maneira diferente para valores do potencial gravitacional  $\phi(\vec{x})$  diferentes. Este fenômeno é chamado de dilatação temporal gravitacional. Podemos comparar os intervalos de tempo  $d\tau(\vec{x})$  medidos por relógios localizados em diferentes posições com o intervalo  $dt$ :

$$d\tau(\vec{x}) = \left(1 + \frac{\phi(\vec{x})}{c^2}\right) dt.$$

Nesse caso,

$$g_{00} = - \left(1 + \frac{\phi(\vec{x})}{c^2}\right)^2 \approx - \left(1 + \frac{2\phi(\vec{x})}{c^2}\right).$$

Dessa maneira podemos dizer que  $ds^2 = g_{00}dx^0dx^0$ , para  $d\vec{x} = 0$ , levando a afirmar que o intervalo invariante é o intervalo de tempo próprio  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ :

$$(d\tau)^2 = -g_{00}(dt)^2.$$

O resultado acima afirma que  $g_{00}$ , na presença de gravidade, é diferente do valor para um espaço-tempo plano ( $\eta_{00} = -1$ ) justamente pela presença de gravidade.

A interpretação geométrica desse fenômeno dada pelo Princípio de Equivalência é que a gravidade muda o elemento  $g_{00}$  do tensor métrico de  $-1$  para uma função dependente das coordenadas espaciais. Nesse caso, a deformação do espaço-tempo é dada na "direção temporal" (TA-PEI, 2005).

A intuição fundamental de Einstein era de que a curvatura do espaço-tempo está relacionada ao conteúdo de matéria presente nele:

$$\nabla^2\phi \propto \rho. \tag{23}$$

Esta consideração sugere que as equações de campo gravitacional devem ter a seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}, \tag{24}$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é um tensor simétrico chamado de tensor energia-momentum que descreve a

variação do 4-momentum em relação a um elemento de área. O tensor  $T_{\mu\nu}$  possui um elemento  $T_{tt} = \rho c^2$ , ligado à densidade de energia, três elementos  $T_{ti}$  ligados ao fluxo de calor, e doze elementos  $T_{ij}$  referentes às componentes de pressão isotrópica e anisotrópica. Assim, reescrevemos a equação (24) como:

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (25)$$

onde  $\kappa$  é uma constante de proporcionalidade. A partir disso, as chamadas equações de campo de Einstein são escritas como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (26)$$

#### 1.4 Limite newtoniano

Vamos retornar à ideia de Newton e considerar o caso de uma partícula se movendo lentamente em um campo gravitacional fraco estático. Se a partícula for suficientemente lenta, podemos ignorar o termo  $dx/d\tau$  com respeito a  $dt/d\tau$ . Nesse caso, sua equação de movimento é (WEINBERG, 1972):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{tt}^\mu \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (27)$$

Como o campo é estático, todas as derivadas temporais de  $g_{\mu\nu}$  se anulam, restando,

$$\Gamma_{tt}^\mu = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{tt} \quad (28)$$

como o único componente não nulo do símbolo de Christoffel.

Pela condição de campo fraco, podemos adotar um sistema de coordenadas Cartesianas em que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \quad (29)$$

Em primeira ordem de  $h_{\alpha\beta}$ , temos

$$\Gamma_{tt}^\alpha = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta h_{tt}. \quad (30)$$

Usando a conexão afim (30) na equação de movimento (27):

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \vec{\nabla} h_{tt}, \\ \frac{d^2t}{d\tau^2} &= 0.\end{aligned}$$

É imediato dizer que a solução da segunda equação é  $dt/d\tau = \text{constante}$ . Multiplicando ambos os lados da primeira equação por  $(d\tau/dt)^2$  obtemos:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{tt}, \quad (31)$$

cujo correspondente resultado newtoniano é

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (32)$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional. Ao compararmos as equações (31) e (32) concluímos que

$$h_{tt} = -2\phi + \text{constante}.$$

Em grandes distâncias assumimos o sistema de coordenadas de Minkowski, fazendo com que  $h_{tt}$  se anule no infinito. Ao definirmos que  $\phi$  também se anule no infinito e tomarmos a constante igual a zero, ficamos com  $h_{tt} = -2\phi$ . Retornando à equação (29), e sabendo que  $\eta_{tt} = -1$ , podemos dizer que:

$$g_{tt} \simeq -(1 + 2\phi), \quad (33)$$

que representa a componente tempo-tempo do tensor métrico de um campo gravitacional fraco estático, produzido por uma densidade de massa não-relativística  $\rho$ . Nesse caso,  $\phi$  é o potencial newtoniano, determinado pela equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (34)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional de Newton ( $G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ ).

A densidade de energia  $T_{tt}$  para matéria não-relativística é aproximadamente a sua densidade de massa  $\rho$ . Aplicando o operador laplaciano em ambos os lados da equação (33), e comparando com a equação (34), obtemos:

$$\nabla^2 g_{tt} = -8\pi G T_{tt}. \quad (35)$$

Essa equação de campo supostamente é válida para campos fracos estáticos gerados por matéria não-relativística. Contudo, ela também nos induz a dizer que as equações de campo fraco para uma distribuição de energia-momentum  $T_{\alpha\beta}$  tomam a forma:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta},$$

e assim, seguindo o Princípio de Equivalência, a equação que governa um campo gravitacional de intensidade arbitrária deve ter a forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (36)$$

Das equações (25) e (36) tiramos que  $\kappa^2 = 8\pi G$ , chamada de constante gravitacional de Einstein. Vemos que a equação (36) é consistente pelo fato de que tanto o tensor de Einstein quanto o tensor energia-momentum possuem divergência covariante nula.

Por razões filosóficas, Einstein introduz um novo elemento à equação (26) que satisfaz as propriedades de  $G_{\mu\nu}$  (EINSTEIN, 1917). O motivo é que essa constante deveria ser muito pequena para se obter um modelo de universo estático - que depois se demonstrou ser instável. Assim,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (37)$$

onde  $\Lambda$  é chamada de constante cosmológica.

## 1.5 Equações de Friedmann com vácuo interagente

Seja a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (38)$$

de assinatura  $(-, +, +, +)$ , onde  $a(t)$  é o fator de escala e  $k$  é a tri-curvatura.

As componentes do tensor métrico e sua inversa são representados como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Os termos não nulos da conexão afim podem ser organizados em matrizes, a partir da equação (12), da seguinte forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^t \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{a}a}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{a}ar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{a}ar^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^r \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{kr}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r(kr^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin^2 \theta (kr^2 - 1) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\theta \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\varphi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot \theta \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Os termos não nulos do tensor de Ricci, dados pela equação (15), são:

$$R_{tt} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{rr} = \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}, \quad R_{\theta\theta} = r^2 (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (45)$$

O escalar de curvatura de Ricci, calculado a partir da equação (16), resulta em:

$$R = \frac{6}{a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k). \quad (46)$$

Com as informações acima, podemos calcular as componentes do tensor de Einstein. A componente  $tt$  fica:

$$G_{tt} = R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R = \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + k). \quad (47)$$

As equações de campo de Einstein (37) para  $\mu, \nu \equiv t$  ficam:

$$G_{tt} + \Lambda g_{tt} = \kappa^2 T_{tt},$$

obtendo assim uma importante equação dinâmica, dada por

$$H^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{\kappa^2}{3} (\rho + \Lambda), \quad (48)$$

onde  $a = a(t)$  é o chamado fator de escala e  $H = \dot{a}/a$  é o parâmetro de Hubble.

Para as componentes  $ij$  do tensor de Einstein, obtemos:

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -\left(2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k\right) \left(\frac{1}{1 - kr^2} + r^2 + r^2 \sin^2 \theta\right). \quad (49)$$

As equações de campo de Einstein (37) para  $\mu \equiv i$  e  $\nu \equiv j$  ficam:

$$G_{ij} + \Lambda g_{ij} = \kappa^2 T_{ij}, \quad (50)$$

obtendo a forma padrão da equação de Raychaudhuri:

$$\dot{H} = -\frac{k}{2a^2} - \frac{3H^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2} (\Lambda - \omega\rho). \quad (51)$$

Consideremos as equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 (T_{\mu\nu} - Vg_{\mu\nu}), \quad (52)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein,  $\kappa^2 = -8\pi G$  é a constante de Einstein e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momentum de um fluido perfeito, dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu}, \quad (53)$$

em que  $u^\mu$  é a 4-velocidade do fluido,  $P$  é a pressão e  $\rho = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$  é a densidade de energia de repouso.



A interação matéria-vácuo será descrita pelo vetor de transferência de energia-momentum  $Q_\nu$ . Submetendo as equações de campo de Einstein às identidades de Bianchi:

$$\kappa^2 \nabla_\mu (T^\mu_\nu - V \delta^\mu_\nu) = 0, \quad (54)$$

que resulta nas seguintes equações de conservação:

$$\nabla_\mu (T^\mu_\nu) = -Q_\nu \quad (55)$$

$$-\nabla_\nu V = Q_\nu. \quad (56)$$

Podemos decompor o 4-vetor  $Q_\nu$  em duas partes, paralela e ortogonal à 4-velocidade do fluido:  $Q^\mu = Qu^\mu + q^\mu$ .  $Q$  representa o fluxo de energia no referencial de repouso do fluido, enquanto que  $q^\mu$  está conectado à troca de momentum entre matéria e vácuo. No caso em que  $q^\mu = 0$  consideramos que haja apenas troca de energia, pois estamos focados em modelos homogêneos-isotrópicos. Dessa maneira, a partir daqui, escrevemos que

$$Q^\nu = Qu^\nu = Q\delta^\nu_t. \quad (57)$$

## 1.6 Buracos negros não singulares com vácuo interagente

Uma das formas de analisarmos a cosmologia de Friedmann com interação é através do colapso gravitacional de um fluido perfeito de poeira, não relativístico e carregado, que interage com uma componente da energia escura (MAIER, 2020).

Calculamos separadamente as equações de conservação para a distribuição de matéria e para a radiação. O tensor energia-momentum do sistema é dado por:

$$T_{\mu\nu} = {}^{(d)}T_{\mu\nu} + {}^{(\gamma)}T_{\mu\nu}, \quad (58)$$

onde  ${}^{(d)}T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momentum da distribuição de matéria e  ${}^{(\gamma)}T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momentum da radiação.

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (58) será dado por:

$${}^{(d)}T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + \sigma M_{\mu\nu}, \quad (59)$$

onde  $\sigma$  é uma constante de acoplamento negativa e

$$M_{\mu\nu} = F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (60)$$

com  $F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu$ .

O tensor energia-momentum para a radiação será:

$${}^{(\gamma)}T_{\mu\nu} = \frac{4}{3}\rho_\gamma u_\mu u_\nu + \frac{\rho_\gamma}{3}g_{\mu\nu}. \quad (61)$$

Vamos considerar a geometria interior de FLRW, com coordenadas comóveis  $(r, \theta, \varphi)$ , dada pela equação (38). As equações de conservação para a radiação, impõem,

$$\nabla_\mu^{(\gamma)}T^\mu_\nu = 0 \quad (62)$$

e resultam na seguinte equação diferencial:

$$\dot{\rho}_\gamma + 4\rho_\gamma \frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (63)$$

que tem como solução geral,

$$\rho_\gamma = \frac{E_\gamma}{a^4}, \quad (64)$$

onde  $E_\gamma$  é uma constante de integração positiva ligada à densidade de energia da radiação.

Neste ponto, assumimos que a energia de transferência do vácuo para a matéria seja dada pelo seguinte *ansatz* covariante:

$$Q_\nu = \mathcal{Q}_\nu + J_\alpha F_\nu^\alpha, \quad (65)$$

onde  $J^\alpha = \epsilon u^\alpha$  é a 4-corrente, com  $\epsilon$  sendo a densidade de carga elétrica.

Assim, as equações de conservação para a distribuição de matéria ficam:

$$\nabla_\mu^{(d)}T^\mu_\nu = \nabla_\mu(\rho_d u^\mu u_\nu) + \sigma \nabla_\mu M^\mu_\nu = Q_\nu. \quad (66)$$

Através das equações de Maxwell, obtemos:

$$\sigma \nabla_\mu M^\mu_\nu = \sigma \nabla_\mu (F^\mu_\alpha) F_\nu^\alpha = J_\alpha F_\nu^\alpha \quad (67)$$

que, fazendo  $\nu \equiv t$ , obtém-se,

$$N(t) = \frac{N_0}{a}, \quad (68)$$

onde  $N_0$  é uma constante, insignificamente pequena para que as equações de conservação sejam satisfeitas. Para  $\nu \equiv r$ , a equação (67) fornece,

$$\epsilon(t, r) = 2\sigma N_0 \left( \sqrt{\frac{\sqrt{1 - kr^2}}{ra^3}} \right). \quad (69)$$

Como o raio físico  $R$  da distribuição de matéria é proporcional ao fator de escala  $a$  para um raio comóvel constante  $r$ , como visto acima, notamos que  $\epsilon$  escala com  $R^{-3}$ , como seria de se esperar. No entanto, pode-se identificar um problema no perfil de densidade de carga acima, uma vez que diverge com  $r \rightarrow \infty$ . Porém, dada a simetria esférica de tal distribuição de matéria, deve-se esperar que a carga total seja espalhada apenas em uma pequena vizinhança da superfície. Para prosseguir, a fim de garantir que a distribuição de matéria interna tenha um bounce quando um 3-volume mínimo for atingido, vamos assumir que o 4-vetor energia-momento  $\mathcal{Q}_\nu$  tem a seguinte prescrição covariante (MAIER, 2023),

$$\mathcal{Q}^\mu = \frac{4}{3} (V_0 - V_I) (\nabla_\alpha u^\alpha) u^\mu, \quad (70)$$

onde  $V_0$  é uma constante positiva. A troca de energia deve depender do fator de expansão. Por esta razão é utilizado o termo  $(\nabla_\alpha u^\alpha) u^\mu$ , que preserva a covariância das equações. Substituindo a equação (70) na (66):

$$\nabla_\mu (\rho_d u^\mu u_\nu) = \nabla_\mu V_I = \frac{4}{3} (V_0 - V_I) (\nabla_\alpha u^\alpha) u^\mu. \quad (71)$$

Uma integração direta das equações acima resulta em:

$$V_I = V_0 + \frac{\lambda}{a^4}, \quad (72)$$

$$\rho_d = \frac{E_d}{a^3} - \frac{4\lambda}{a^4}, \quad (73)$$

onde  $\lambda$  e  $E_d$  são constantes de integração positivas. As equações de campo de Einstein têm sua primeira integral dada por:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} + V(a) = 0, \quad (74)$$

onde

$$V(a) \equiv \frac{k}{2} - \frac{1}{6} \left[ V_0 a^2 + \kappa^2 \left( \frac{E_d}{a} + \frac{E_\gamma}{a^2} \right) \right] + \frac{\kappa^2 \lambda}{2a^2}. \quad (75)$$

A solução interior corresponde, assintoticamente, a uma geometria exterior dada pelo espaço-tempo de Reissner-Nordström-de Sitter (REISSNER, 1916)(WYEL, 1917)(NORDSTRÖM, 1918), e a métrica exterior assume a seguinte forma:

$$ds^2 = -F(\bar{r}) d\bar{t}^2 + \frac{1}{F(\bar{r})} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\bar{\theta}^2 + \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\varphi}^2), \quad (76)$$

onde  $M \equiv 4\pi\gamma^3 E_d/3$  e

$$F(\bar{r}) = 1 - \frac{2GM}{\bar{r}} + \frac{\beta_q^2}{\bar{r}^2} - \frac{\kappa^2 V_0}{3} \bar{r}^2, \quad (77)$$

onde  $\beta_q^2 \equiv q^2 G/4\pi\epsilon_0$  e  $q$  é a carga efetiva do buraco negro formado.

Na equação acima, notamos que  $V_0$  desempenha o mesmo papel de uma constante cosmológica. Assumindo que  $\kappa^2 V_0$  é suficientemente pequeno, vemos que  $d^2 a/dt^2 \approx 0$  quando  $a \rightarrow +\infty$ . Logo, no regime assintótico a ejeção de radiação cessa completamente tornando o espaço-tempo exterior estático, como esperamos.

Esse estudo pode ser estendido para a Cosmologia, como mostra o Capítulo 3, necessitando do uso das ferramentas que estão apresentadas no próximo capítulo.

## 2 SISTEMAS DINÂMICOS

Neste capítulo, apresentamos brevemente o arcabouço necessário para explorarmos a estabilidade de pontos fixos de sistemas dinâmicos arbitrários. Isso torna possível a construção dos seus diagramas no espaço de fase, permitindo estudar o seu comportamento. Tomamos como base o livro (PERKO, 2000). Tais ferramentas serão de extrema utilidade no Capítulo 3.

Sistemas dinâmicos descrevem o movimento dos pontos no espaço de fase, ao longo das curvas integrais, definidas por um sistema de equações diferenciais.

### 2.1 Sistemas lineares

Seja o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{onde } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad A \text{ é uma matriz } n \times n \text{ e } \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}. \quad (78)$$

O sistema linear (78), junto à condição inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , possui solução  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ , também chamadas de curvas integrais. Para um dado  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , o problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (79)$$

possui uma única solução dada por  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ . Os autovalores da matriz  $A$  podem ser calculados a partir de:

$$\lambda = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{(\text{Tr}(A))^2 - 4\det(A)}}{2}. \quad (80)$$

Se os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , são reais e diferentes, então um conjunto de autovetores correspondentes  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  formam uma base em  $\mathbb{R}^n$ , a matriz  $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$  é invertível e  $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ . Para reduzir o sistema linear (78) a um sistema linear desacoplado, vamos definir a mudança de coordenadas  $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ . Assim,

$$\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}A\mathbf{P}\mathbf{y} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]\mathbf{y}, \quad (81)$$

cuja solução geral é  $\mathbf{y}(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]\mathbf{y}(0)$ .

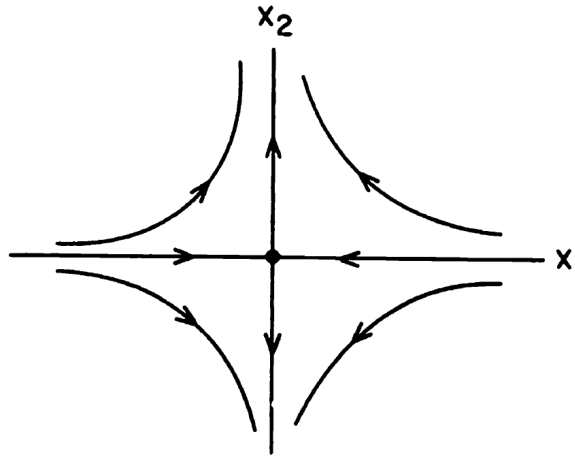
O retrato de fase de um sistema de equações diferenciais (78) com  $x \in R^n$  é o conjunto de curvas de solução do sistema no espaço de fase  $R^n$ . Seja o sistema linear

$$\dot{x} = Bx, \quad (82)$$

onde  $x \in R^2$ ,  $B = P^{-1}AP$  e  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$ . O retrato de fase do sistema linear (78) pode ser obtido do retrato de fase do sistema linear (82) através da transformação linear de coordenadas  $x = Py$ . No caso em que

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \lambda < 0 < \mu, \quad (83)$$

Figura 1 - Ponto de sela centrado na origem.



Legenda: Exemplo de ponto de sela centrado na origem.

Fonte: PERKO, 2000, p.21.

é dito que o sistema possui um ponto de sela na origem, como ilustra a Figura 1. As quatro curvas integrais que se aproximam do ponto de equilíbrio na origem são chamadas de separatrizes. Sempre que  $A$  possuir um par de autovalores reais e de sinais opostos,  $\lambda < 0 < \mu$ , o retrato de fase do sistema linear (78) será equivalente ao da Figura 1. A estabilidade dos subespaços do sistema linear (78) será determinada pelos autovetores de  $A$ . A exponencial do operador linear, nesse caso, é

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}.$$

Como exemplo, seja o sistema linear

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 0 \end{bmatrix},$$

que possui autovalores  $\lambda_1 = 9$  e  $\lambda_2 = -4$ . A matriz invertível

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \end{bmatrix},$$

reduz  $A$  à matriz

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{13}{9} \end{bmatrix}.$$

A solução geral do sistema linear será dada por

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{\frac{13}{4}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{13}{9}t} \end{bmatrix} P^{-1}C,$$

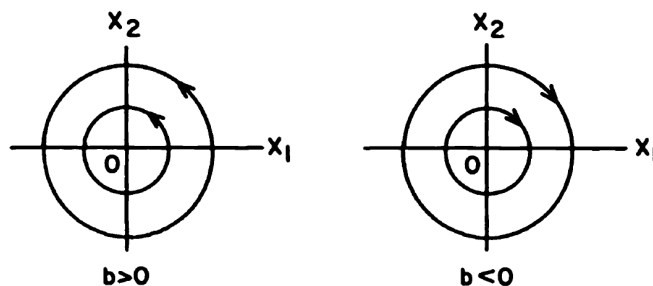
que resulta em

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{\frac{13}{4}t}, \\ x_2(t) &= c_2 e^{-\frac{13}{9}t}. \end{aligned}$$

Já no caso em que os autovalores são imaginários puros, e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}, \tag{84}$$

Figura 2 - Centro na origem.



Legenda: Exemplo de centro na origem.

Fonte: PERKO, 2000, p.23.

é dito que o sistema possui um centro na origem, como ilustra a Figura 2. Sempre que  $A$  possuir um par de autovalores complexos conjugados imaginários puros,  $\pm ib$ , o retrato de fase do sistema linear (78) será equivalente ao da Figura 2. A exponencial do operador linear, nesse caso, é dada por

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}.$$

Como exemplo, seja o sistema linear

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{com } A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que possui autovalores  $\lambda = \pm 2i$ . A matriz invertível

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{com } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

reduz  $A$  à matriz

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A solução geral do sistema linear será dada por:

$$x(t) = P \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} P^{-1}C,$$

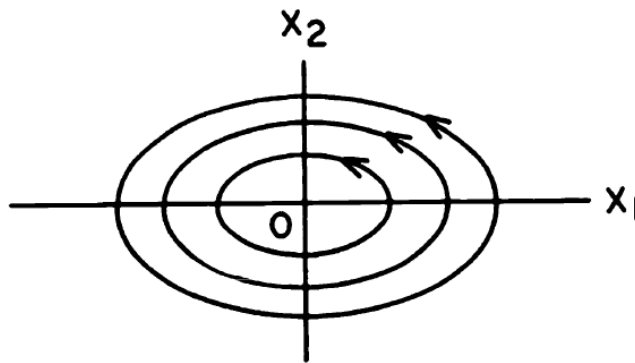
que resulta em

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cos 2t - 2c_2 \sin 2t \\ x_2(t) &= \frac{c_1}{2} \sin 2t + c_2 \cos 2t. \end{aligned}$$

As soluções satisfazem  $x_1^2(t) + 4x_2^2(t) = c_1^2 + 4c_2^2$  para todo  $t \in R$ . A Figura 3 (a seguir) mostra o retrato de fase desse sistema linear.



Figura 3 - Exemplo de centro na origem.



Legenda: Exemplo de um conjunto de curvas integrais com centro na origem.

Fonte: PERKO, 2000, p.24.

Se uma matriz real  $2n \times 2n$  possui  $2n$  autovalores complexos distintos,  $\lambda_j = a_j + ib_j$  e  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ , e autovetores correspondentes  $w_j = u_j + iv_j$  e  $\bar{w}_j = u_j - iv_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , então  $\{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\}$  é uma base de  $R^{2n}$ . A matriz  $Q = [v_1 \ u_1 \ v_2 \ u_2 \ \dots \ v_n \ u_n]$  é invertível e

$$Q^{-1}AQ = \text{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Seja  $\lambda$  um autovalor da matriz  $A$ ,  $n \times n$  de multiplicidade  $m \leq n$ . Para  $k = 1, \dots, m$ , qualquer solução não-nula  $v$  de

$$(A - \lambda)^k v = 0, \quad (86)$$

é chamado de autovetor generalizado de  $A$ . Suponha que  $w_j = u_j + iv_j$  seja um autovetor generalizado da matriz real  $A$ , correspondente ao autovalor  $\lambda_j = a_j + ib_j$ , e

$$B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}$$

seja uma base de  $R^n$  (com  $n = 2m - k$ ). Então,

$$E^s = \text{Span}\{u_j, v_j \mid a_j < 0\},$$

$$E^c = \text{Span}\{u_j, v_j \mid a_j = 0\},$$

$$E^u = \text{Span}\{u_j, v_j \mid a_j > 0\},$$

onde " $\text{Span}\{S\}$ " denota o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores em  $S$ . Os índices superiores  $s, c, u$  denotam um subespaço, respectivamente, estável, instável e com centro.

## 2.2 Sistemas não-lineares

Seja o seguinte sistema não-linear:

$$\dot{x} = f(x). \quad (87)$$

Denotamos o intervalo maximal de existência  $(\alpha, \beta)$  da solução  $\phi(t, x_0)$  do problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (88)$$

como sendo  $I(x_0)$ , uma vez que os pontos  $\alpha$  e  $\beta$  do intervalo maximal dependem de  $x_0$ . Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $R^n$  e  $f \in C^1(E)$ . Para  $x_0 \in E$ , deixemos que  $\phi(t, x_0)$  seja a solução do problema de valor inicial (88) definido no seu intervalo maximal de existência  $I(x_0)$ . Então, para  $t \in I(x_0)$ , o conjunto dos mapeamentos  $\phi_t$  definidos por

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0), \quad (89)$$

são chamados de fluxo da equação diferencial (87), referente ao fluxo do campo vetorial  $f(x)$ .

Um ponto  $x_0 \in R^n$  é chamado de ponto crítico do sistema não-linear (87) se  $f(x_0) = 0$ . Além disso, um ponto crítico  $x_0$  é chamado de ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema não-linear (87) se nenhum dos autovalores da matriz de linearização possui parte real nula. O comportamento local de um sistema não-linear (87), próximo a um ponto de equilíbrio hiperbólico  $x_0$ , é determinado pelo comportamento do sistema linear (78), onde a matriz  $A$ , agora chamada matriz de linearização, possui a seguinte forma:

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_0} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{x_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{x_0} & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{x_0} \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Próximo a um ponto de equilíbrio hiperbólico  $x_0$ , o sistema não-linear (87) possui variedades estáveis ( $S$ ) e instáveis ( $U$ ) tangentes aos subespaços estáveis ( $E^s$ ) e instáveis ( $E^u$ ) do sistema linearizado  $\dot{x} = Df(x_0)x$ .

Sejam  $x = (x, y)^T$ ,  $f_1(x) = P(x, y)$  e  $f_2(x) = Q(x, y)$ . Vamos assumir que  $x_0 \in R^2$  é um ponto de equilíbrio do sistema não-linear (87). Assim, podemos reescrevê-lo como:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (91)$$

A origem é chamada de centro do sistema não-linear (91) se existe um  $\det(Df(x_0)) > 0$

tal que todas as curvas integrais de (91) são curvas fechadas. A origem é chamada de sela topológica do sistema não-linear (91) se existem duas trajetórias  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  que se aproximam de 0 até  $t \rightarrow \infty$  e duas trajetórias  $\Sigma_3$  e  $\Sigma_4$  que se aproximam de 0 até  $t \rightarrow -\infty$ . As trajetórias  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4$  são chamadas de separatrizes.  $S = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \{0\}$  denota a variedade estável e  $U = \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \{0\}$  denota a variedade instável do sistema não-linear (91).

Variedades globais estáveis e instáveis  $\Sigma$  são definidas como

$$W^s(\Sigma) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S(\Sigma)), \quad (92)$$

$$W^u(\Sigma) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U(\Sigma)). \quad (93)$$

Essas variedades são invariantes sobre o fluxo do sistema não-linear (87). Órbitas com condições iniciais em uma subvariedade invariante do espaço de fase, permanecem nesta subvariedade durante toda evolução do sistema dinâmico.

Vamos ilustrar a construção de um retrato de fase que tenha um centro e um ponto de sela com o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + x^2. \end{aligned}$$

Fazendo  $f(\mathbf{x}_0) = 0$ , encontramos os pontos críticos  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . A matriz de linearização,

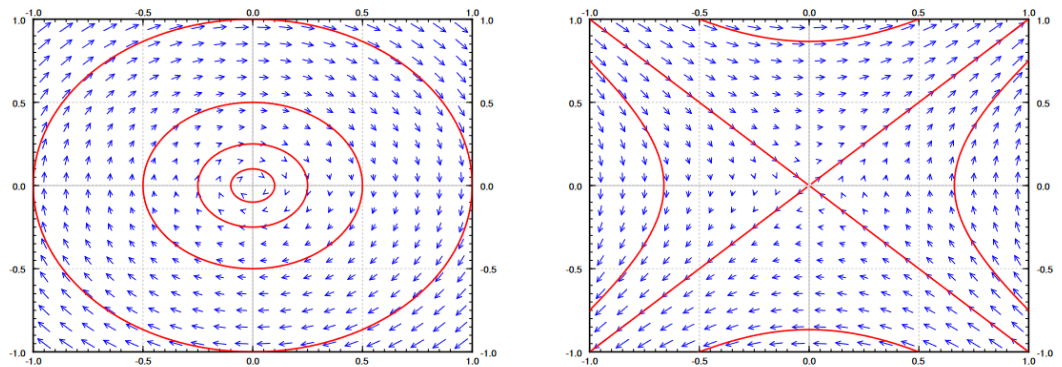
$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x - 1 & 0 \end{bmatrix},$$

avaliada nos pontos críticos, resulta em:

$$Df(\mathbf{x}_0)_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad Df(\mathbf{x}_0)_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores, calculados a partir da equação (80), são:  $\lambda_{0,0} = \pm i$  e  $\lambda_{1,0} = \pm 1$ . Os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_{0,0}$  são  $v_1 = [i \ 1]$  e  $v_2 = [1 \ i]$ , enquanto que os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_{1,0}$  são  $u_1 = [-1 \ 1]$  e  $u_2 = [1 \ 1]$ . Portanto, o ponto crítico  $(0, 0)$  fornece um centro, enquanto que o ponto crítico  $(1, 0)$  fornece um ponto de sela. O retrato de fase (LEBL, 2022) será dado por:

Figura 4 - Retrato de fase do sistema dinâmico  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x + x^2$ .



Legenda: Exemplo de retrato de fase de um sistema não-linear.

Fonte: LEBL, 2022, p.304.

### 3 EXTENSÃO PARA COSMOLOGIA

Podemos estender o estudo anterior para examinarmos a dinâmica da cosmologia FLRW seguindo uma metodologia similar (BRUNI; MAIER; WANDS, 2021). Examinamos as duas seguintes escolhas covariantes para a transferência de energia entre a componente de vácuo e um fluido perfeito:

$$Q_1 = \xi (V_\Lambda - V) (\nabla_\mu u^\mu), \quad (94)$$

$$Q_2 = \chi \left(1 - \frac{V}{V_\Lambda}\right) (\nabla_\mu u^\mu) \rho, \quad (95)$$

como apresentado nas equações (54)–(57).  $Q_1$  e  $Q_2$  estão associados a um 4-vetor de transferência de energia,  $\nabla_\mu u^\mu$  é o escalar de expansão e  $\xi, \chi$  são parâmetros de acoplamento adimensionais. Em ambos os casos,  $V_\Lambda$  exerce o papel de uma constante cosmológica efetiva, um valor assintótico de  $V \rightarrow V_\Lambda$ . Isso quer dizer que não há um termo  $\Lambda$  nas equações de campo de Einstein e uma constante cosmológica aparece como ponto fixo da dinâmica do vácuo. O fluido tem equação de estado dada por  $P = \omega\rho$ , onde  $\omega$  é constante.

#### 3.1 Caso 1

No caso da interação (94), as equações (55) e (56) podem ser escritas como:

$$\dot{\rho} = -3H [(1 + \omega)\rho + \xi(V_\Lambda - V)], \quad (96)$$

$$\dot{V} = 3H\xi(V_\Lambda - V). \quad (97)$$

As equações (96) e (97) correspondem a um sistema linear acoplado de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem das funções  $\rho$  e  $V$ . A solução geral desse sistema é:

$$\rho = \frac{E_1}{a^{3(1+\omega)}} + \frac{E_2}{a^{3\xi}}, \quad (98)$$

$$V = V_\Lambda + \frac{E_2}{a^{3\xi}} \frac{(1 + \omega - \xi)}{\xi}, \quad (99)$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são constantes de integração. O primeiro termo da equação (98) representa a componente de densidade do fluido convencional para  $E_1 > 0$ . Os segundos termos das equações (98) e (99), por outro lado, são devidos à interação da matéria com o vácuo.

Substituindo as equações (98) e (99) na equação de Friedmann (48), obtemos:

$$H^2 + U(a) = \kappa^2 \frac{V_\Lambda}{3}, \quad (100)$$

onde o potencial  $U(a)$  é dado por,

$$U(a) = \frac{k}{a^2} - \frac{\kappa^2}{3} \left[ \frac{E_1}{a^{3(1+\omega)}} + \frac{E_2(1+\omega)}{\xi a^{3\xi}} \right]. \quad (101)$$

Além disso, ao tomarmos

$$\dot{a} = aH, \quad (102)$$

junto com a derivada temporal de (100),

$$\dot{H} = -\frac{a}{2} \frac{dU}{da}, \quad (103)$$

temos um sistema dinâmico bidimensional para  $a$  e  $H$ . Definimos  $p_c = (a_c, H_c)$  como soluções estacionárias - pontos críticos - das equações (102) e (103).

Podemos examinar o domínio dos parâmetros  $\omega$  e  $\xi$  através das equações (100) e (101). Para  $0 \leq \omega \leq 1$ , vemos que a condição suficiente para obter um *bounce* não-singular para  $E_1 > 0$  é

$$\frac{E_2(1+\omega)}{\xi} < 0 \text{ e } \xi > (1+\omega). \quad (104)$$

Nesse caso, uma barreira de potencial infinito impede a singularidade clássica encontrada no caso não-interagente.

Para apresentar uma ilustração numérica, vamos considerar o caso de um fluido perfeito não-relativístico (com  $\omega = 0$ ),  $a(t_0) = a_0 = 1$ , o fator de escala normalizado para a era atual, e fixar  $\xi = 4/3$ . Vemos dos trabalhos (MAIER, 2020) e (MAIER, 2023) que  $\xi = 4/3$  é a única escolha possível para que a solução interior de uma nuvem de poeira com carga e esfericamente simétrica seja conectada com espaço-tempo exterior, que seja solução das equações de campo de Einstein – Reissner-Nordström-de Sitter. Assim, o potencial (101) se torna,

$$U(a) = -H_0^2 \left( \frac{\Omega_{k0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \frac{\Omega_{I0}}{a^4} \right), \quad (105)$$

onde

$$\Omega_{k0} = -\frac{k}{H_0^2}, \quad \Omega_{m0} = \frac{\kappa^2 E_1}{3H_0^2}, \quad \Omega_{I0} = \frac{\kappa^2 E_2}{4H_0^2}. \quad (106)$$

$\Omega_{k0}$  é a densidade de curvatura da era atual,  $\Omega_{m0}$  é a densidade de matéria da era atual e  $\Omega_{I0}$  se comporta como um fluido de radiação, devido à potência do fator de escala -  $a^4$  - que se deve única e exclusivamente pela interação da poeira com o vácuo. É importante notar que  $-10^{-38} \lesssim \Omega_{I0} \lesssim -10^{-10}$ , um valor muito pequeno que domina altas energias. Nos restringindo ao caso em que  $\Omega_{I0} < 0$  (ou  $E_2 < 0$ ), vemos que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} U(a) = +\infty, \quad (107)$$

de modo que uma barreira de potencial infinito impede a singularidade clássica. Para  $\Omega_{k0} \neq 0$  podemos mostrar que o potencial (105) possui no máximo dois extremos,  $a_{c\pm} > 0$ , conectados aos pontos críticos das equações (102) e (103). Para os pontos críticos  $p_c = (a_{c\pm}, 0)$ , temos que,

$$a_{c\pm} = \frac{-3\Omega_{m0} \pm \sqrt{-32\Omega_{I0}\Omega_{k0} + 9\Omega_{m0}^2}}{4\Omega_{k0}}. \quad (108)$$

A condição para que os dois pontos extremos sejam reais e positivos é

$$\bar{\Omega}_{k0} \equiv \frac{9\Omega_{m0}^2}{32\Omega_{I0}} < \Omega_{k0} < 0. \quad (109)$$

Não existe extremo para  $\Omega_{k0} < \bar{\Omega}_{k0}$ , enquanto que para  $\Omega_{k0} \geq 0$  existe apenas um extremo positivo,  $a_{c+} > 0$ , e o potencial (105) possui um mínimo global no domínio  $a > 0$ . Vemos que existem modelos de *bounce* devidos à interação do termo  $\Omega_{I0} < 0$ , que provoca uma barreira de potencial em  $U(a)$ .

Para examinar a estrutura do espaço de fase para modelos não-singulares, vamos considerar as equações (102) e (103) – junto com o potencial (105) – sujeitas ao vínculo integral (100). A matriz de linearização é escrita como:

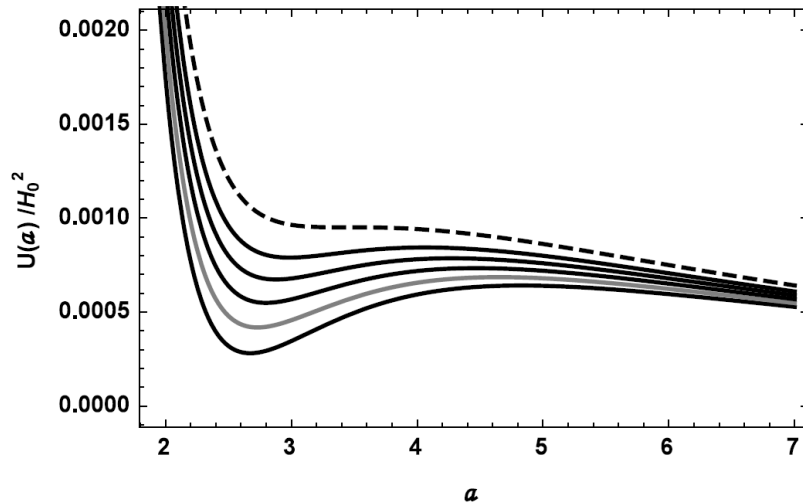
$$L_{ij}(a, H) \rightarrow \begin{bmatrix} H & a \\ \frac{H_0^2}{a^3} \left( 2\Omega_{k0} + \frac{9\Omega_{m0}}{2a} + \frac{8\Omega_{I0}}{a^2} \right) & 0 \end{bmatrix}, \quad (110)$$

e seus autovalores, calculados em  $p_c = (a_c, 0)$ , são

$$\gamma_{\pm} = \pm \frac{H_0}{a_c^2} \sqrt{2(4\Omega_{I0} + a_c^2\Omega_{k0}) + \frac{9a_c\Omega_{m0}}{2}}. \quad (111)$$

O comportamento do potencial (105) está ilustrado na figura abaixo, focando no caso de modelos fechados ( $\Omega_{k0} < 0$ ), e fixando os parâmetros  $\Omega_{m0} = 0,31$  e  $\Omega_{I0} = -0,40$ .

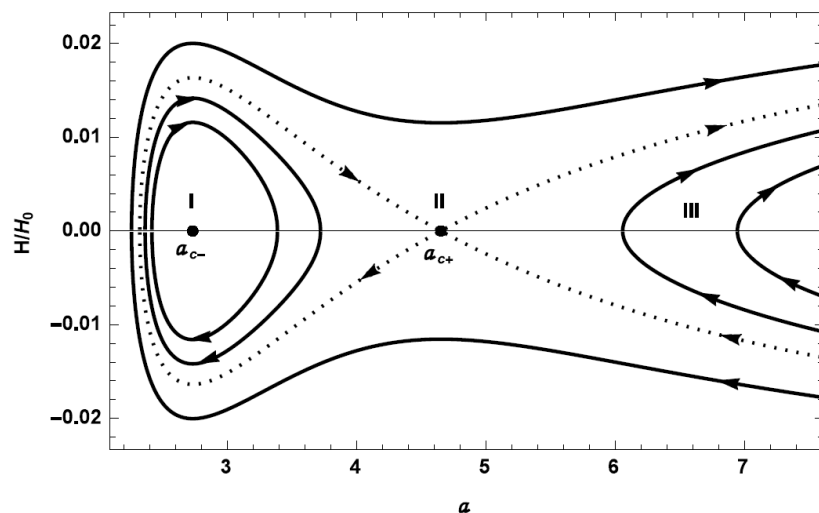
Figura 5 - Potencial  $U(a)$ .



Legenda: Potencial  $U(a)$  para  $\Omega_{m0} = 0, 31$  e  $\Omega_{I0} = -0, 40$  para diferentes valores de  $\Omega_{k0} < 0$ .  
Fonte: BRUNI; MAIER; WANDS; 2021, p.6.

Na Figura 5, a curva tracejada do topo corresponde ao limite superior  $\Omega_{k0} = \bar{\Omega}_{k0} \simeq -0, 067$ . Para fins de ilustração, fixamos  $\Omega_{k0} = -0, 063$ , representado pela curva cinza da Figura 5. Dessa forma, podemos apresentar as órbitas no plano  $(a, H/H_0)$ :

Figura 6 - Órbitas no plano  $(a, H/H_0)$ .



Legenda: Órbitas no plano  $(a, H/H_0)$  para  $\Omega_{k0} = -0, 063$ .  
Fonte: BRUNI; MAIER; WANDS, 2021, p.6.

Os pontos fixos  $a_{c-} \simeq 2, 730$  (centro) e  $a_{c+} \simeq 4, 650$  (sela), correspondem aos extremos do potencial. Para  $V_{\Lambda} < 3U(a_{c+})/\kappa^2$  obtemos universos cíclicos em uma vizinhança



finita de  $a_{c-}$  (região I) e órbitas de *bounce* (região III). Para  $V_\Lambda = 3U(a_{c+})/\kappa^2$ , surge a separatriz do ponto fixo de sela  $a_{c+}$  que define um escape para o atrator de de Sitter até o infinito. Por fim, para  $V_\Lambda > 3U(a_{c+})/\kappa^2$ , obtemos órbitas de *bounce* na região II.

### 3.2 Caso 2

Substituindo a interação não-linear nas equações de conservação (55) e (56):

$$\dot{\rho} = -3H\rho \left[ 1 + \omega + \chi \left( 1 - \frac{V}{V_\Lambda} \right) \right], \quad (112)$$

$$\dot{V} = 3\chi H\rho \left( 1 - \frac{V}{V_\Lambda} \right). \quad (113)$$

Além disso, essas equações são acopladas com a equação de Raychaudhuri,

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{\kappa^2}{6} [\rho(1 + 3\omega) - 2V]. \quad (114)$$

Dessa forma, obtemos três equações acopladas que descrevem a dinâmica de um sistema tridimensional  $(\rho, V, H)$ .

No caso em que estamos tratando de uma subvariedade que corresponde a cosmologias de vácuo ( $\rho = 0$ ), a interação (95) se anula e ficamos com  $\dot{V} = 0$ . Assim, a energia de vácuo é dada por uma constante de integração,  $V = V_{dS}$ . A única equação dinâmica que resta é a (114), que se reduz à,

$$\dot{H} = -H^2 + \frac{\kappa^2}{3} V_{dS}, \quad (115)$$

que é a equação de evolução do espaço-tempo de de Sitter na representação de FLRW. Os pontos críticos nessa subvariedade correspondem ao modelo espacialmente plano de de Sitter,  $(\rho, V, H) = (0, V_{dS}, H_{dS})$ , onde

$$H_{dS} = \pm \kappa \sqrt{\frac{V_{dS}}{3}}, \quad (116)$$

representa as versões de contração e expansão do modelo, e  $\kappa^2 V_{dS}$  é uma constante cosmológica.

A equação (113) nos diz que quando  $V = V_\Lambda$ ,  $V_\Lambda$  é uma constante cosmológica, e a igualdade define outra subvariedade invariante no espaço de fase. Nesse caso, obtém-se a cosmologia não interagente convencional ( $\Lambda$ CDM quando  $\omega = 0$ ) descrita pelo sistema

dinâmico bidimensional,

$$\dot{\rho} = -3(1 + \omega)H\rho, \quad (117)$$

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{\kappa^2}{6}[\rho(1 + 3\omega) - 2V_\Lambda]. \quad (118)$$

O sistema acima possui pontos críticos assumindo  $\omega > -1/3$ . Os primeiros surgem para  $H = 0$ , os quais chamamos de pontos fixos de Einstein, pois representam modelos estáticos de Einstein com

$$\rho_E = \frac{2V_E}{1 + 3\omega}. \quad (119)$$

Outros dois pontos críticos correspondem à  $\rho = 0$ , onde essa subvariedade intercepta a subvariedade de vácuo, e são dados por  $(\rho, V, H) = (0, V_\Lambda, H_{\Lambda\pm})$ . Da equação (118), obtemos,

$$H_{dS} = H_{\Lambda\pm} = \pm\kappa\sqrt{\frac{V_\Lambda}{3}}, \quad (120)$$

que representa modelos de de Sitter, um contraindo e um expandindo, com curvatura espacial zero.

De maneira geral, para  $\rho \neq 0$  e  $V \neq V_\Lambda$ , a integração das equações (112) e (113) se torna mais complicada do que no caso linear. Eliminando  $H$  de ambas as equações, obtemos,

$$\dot{\rho} + \left[1 + \frac{4 + \omega}{\chi(1 - V/V_\Lambda)}\right]\dot{V} = 0, \quad (121)$$

cuja integral primeira é

$$\rho = \rho_* - (V - V_*) + \frac{V_\Lambda(1 + \omega)}{2\chi} \ln \left[ \left( \frac{1 - V/V_\Lambda}{1 - V_*/V_\Lambda} \right)^2 \right], \quad (122)$$

onde  $\rho_*$  e  $V_*$  correspondem aos valores iniciais em  $t = t_*$ . Em geral, cada par de condições iniciais  $\rho_*$  e  $V_*$  define uma superfície bidimensional  $\Sigma$  no espaço de fase tridimensional,  $(\rho, V, H)$ , caracterizado pela primeira integral

$$\mathcal{K}_\Sigma = \rho + V - \frac{V_\Lambda(1 + \omega)}{2\chi} \ln \left[ \left( 1 - \frac{V}{V_\Lambda} \right)^2 \right]. \quad (123)$$

Substituindo a equação (122) nas equações (113) e (114), para eliminar  $\rho$ , obtemos:

$$\dot{V} = 3H \left(1 - \frac{V}{V_\Lambda}\right) \left\{ \chi(\rho_* + V_* - V) + \frac{V_\Lambda(1+\omega)}{2} \ln \left[ \left( \frac{1 - V/V_\Lambda}{1 - V_*/V_\Lambda} \right)^2 \right] \right\}, \quad (124)$$

$$\dot{H} = -H^2 + \frac{\kappa^2}{6} \left\{ 3V(1+\omega) - (\rho_* + V_*)(1+3\omega) - \frac{V_\Lambda(1+\omega)(1+3\omega)}{2\chi} \ln \left[ \left( \frac{1 - V/V_\Lambda}{1 - V_*/V_\Lambda} \right)^2 \right] \right\}. \quad (125)$$

O sistema dinâmico também admite pontos críticos em  $H = 0$ , condição suficiente para garantir que  $\rho$  e  $V$  sejam constantes. Denotamos os pontos  $(\rho, V, H) = (\rho_E, V_E, 0)$ . Dessa forma, a equação (114) fornece a relação entre matéria e densidade de energia do vácuo (119). Substituindo (119) em (123) obtemos,

$$\mathcal{K}_\Sigma = (1+\omega) \left\{ \frac{3V_E}{1+3\omega} - \frac{V_\Lambda}{2\chi} \ln \left[ \left( 1 - \frac{V_E}{V_\Lambda} \right)^2 \right] \right\}, \quad (126)$$

que é uma equação transcendental que não pode ser analiticamente resolvida para  $V_E$ . Os autovalores avaliados nos pontos críticos estáticos de Einstein são dados por:

$$\bar{\gamma}_\pm = \pm \kappa \sqrt{\frac{(1+\omega)V_E[(1+3\omega+3\chi)V_\Lambda - 3\chi V_E]}{(1+3\omega)V_\Lambda}}. \quad (127)$$

Dessa forma, vemos que os pontos críticos estáticos de Einstein são pontos de sela (autovalores reais) ou centros (autovalores imaginários).

Para se obter configurações de interesse (como as da Figura 5), vamos fixar  $\omega = 0$  e procurar por um domínio próprio de  $\chi$  onde esses modelos não-singulares podem ser obtidos. Da equação (126), podemos escrever  $\chi$  como função de  $V_E$ :

$$\chi = \frac{V_\Lambda}{2(3V_E - \mathcal{K}_\Sigma)} \ln \left[ \left( 1 - \frac{V_E}{V_\Lambda} \right)^2 \right]. \quad (128)$$

Da equação acima vemos que  $\chi \rightarrow 0$  quando  $V_E/V_\Lambda \rightarrow +\infty$ .  $\chi$  possui raízes em  $V_E = 2V_\Lambda$  e diverge quando  $V_E \rightarrow V_\Lambda$ . Para simplificar a análise, vamos considerar que  $V_E > V_\Lambda$ . Nesse domínio,  $\chi$  como função de  $V_E$  possui um extremo global, localizado em  $V_{Emax}$ , que satisfaz a relação

$$\frac{V_{Emax}}{V_\Lambda} = \frac{1 + 3\chi_{max}}{3\chi_{max}}. \quad (129)$$

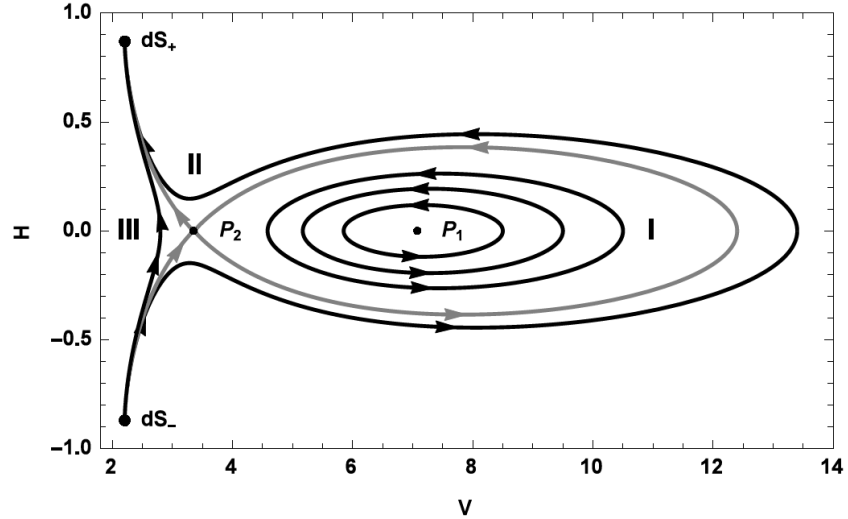
A fim de examinarmos a estrutura local do espaço de fase em uma vizinhança dos

pontos críticos de Einstein, para  $\omega = 0$ , a equação (127) se reduz a

$$\bar{\gamma}_{\pm} = \pm \kappa \sqrt{\frac{V_E[(1 + 3\chi)V_{\Lambda} - 3\chi V_E]}{V_{\Lambda}}}. \quad (130)$$

Para  $V_{\Lambda} > 0$ ,  $\bar{\gamma}_{\pm}$  fornece um par de autovalores imaginários puros para  $V_E > V_{Emax}$ , ou seja, o ponto fixo é um centro. Para  $V_{\Lambda} < V_E < V_{Emax}$ ,  $\bar{\gamma}_{\pm}$  fornece um par de autovalores reais, nesse caso, um ponto de sela. No limite em que  $V_E \rightarrow V_{Emax}$ , os dois pontos críticos (de centro e de sela) se coalescem em um único ponto fixo com autovalores nulos, acarretando uma bifurcação na estabilidade. As ilustrações dos retratos de fase, para  $V_{\Lambda} = \kappa^2 = 1$ , são as seguintes:

Figura 7 - Retrato de fase para  $(V, H)$ .

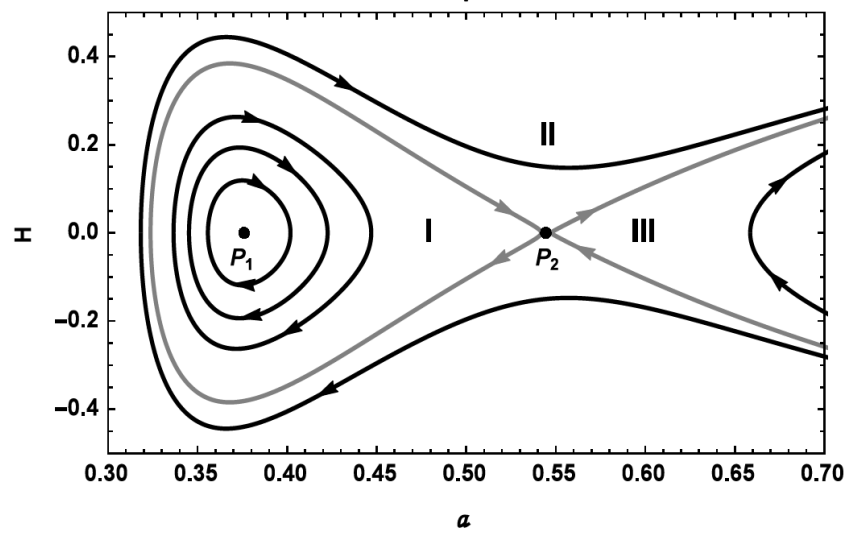


Legenda: Retrato de fase para  $(V, H)$  com parâmetro de acoplamento  $\chi = 0,085$ , para diferentes condições iniciais com integral primeira  $\mathcal{K}_{\Sigma} = 0$ .

Fonte: BRUNI; MAIER; WANDS, 2021, p.10.

Uma separatriz, representada pela curva cinza nas Figuras 7 e 8, surge do ponto fixo de sela,  $P_2$ , dividindo o espaço de fase em duas regiões distintas: uma com órbitas perpetuamente cíclicas (região I nas vizinhanças do ponto fixo  $P_1$ ), e uma região com um *bounce* (regiões II e III).

Figura 8 - Órbitas correspondentes para  $(a, H)$ .



Legenda: Órbitas correspondentes para  $(a, H)$  de mesmas condições iniciais, para o caso em que  $k > 0$ .

Fonte: BRUNI; MAIER; WANDS, 2021, p.10.

As órbitas na região II são de grande interesse, visto que mostram a transição de uma fase inicial, de altas energias, para uma era com matéria em desaceleração, junto com um escape para o regime de expansão acelerada da era atual.

## CONCLUSÃO

Nesse estudo, consideramos modelos cosmológicos de FLRW em que o vácuo interage com um fluido perfeito através de uma troca de energia. O primeiro caso leva a uma evolução não-singular do universo em algumas regiões no espaço de parâmetros. A interação pode fazer surgir um termo na energia do vácuo da era atual que atua como uma densidade de energia negativa, podendo produzir uma barreira  $U(a)$  que evita a singularidade cosmológica, gerando um *bounce*. No segundo caso, obtemos a primeira integral das equações de conservação, que possibilita investigar a existência de cosmologias não-singulares. Novamente, para um certo intervalo de valores dos parâmetros, encontramos soluções não-singulares. Em ambos os acoplamentos as condições para a existência de um *bounce* dão a mesma topologia no espaço de fase  $(a, H)$ , como vemos nas Figuras 6 e 8. O espaço de fase mostra a existência de órbitas não-singulares com duas fases de aceleração, separadas por uma transição suave, correspondente à expansão desacelerada. Em geral, os acoplamentos se restringem a valores muito pequenos na era atual, onde o modelo  $\Lambda$ CDM fornece um bom ajuste aos dados observacionais (WANG et al., 2013)(WANG et al., 2015)(SOLA; GOMEZ-VALENT; PEREZ, 2017). Além disso, podemos recuperar a expansão acelerada assintótica de de Sitter, visto que, na era atual, a interação é naturalmente suprimida.

Até aqui temos explorado a dinâmica da cosmologia FLRW para o caso em que o vácuo interage com um fluido perfeito através de uma troca de energia, incluindo modelos cíclicos e de *bounce*. Exploramos escolhas não lineares, visto que trocas de energia deste tipo não são comumente exploradas na literatura. De acordo com nossos resultados preliminares, outras escolhas não lineares são capazes de reproduzir a topologia de órbitas não singulares presentes neste trabalho.

Como continuidade deste trabalho podemos estudar a estabilidade destes modelos cosmológicos não singulares através de perturbações escalares conectadas à formação de estrutura em nosso Universo. Em uma primeira análise pretendemos realizar uma descrição efetiva, ignorando os aspectos quânticos das interações da matéria. Os efeitos de flutuações quânticas da métrica são importantes quando a curvatura do espaço-tempo se torna comparável com a curvatura de Planck ( $\mathcal{R}_{Pl} \approx 3,829 \times 10^{65} \text{ cm}^{-2}$ ), ou quando consideramos regiões do espaço comparáveis com o comprimento de Planck ( $l_{Pl} \approx 1,616 \times 10^{-33} \text{ cm}$ ) e intervalos de tempo comparáveis com o tempo de Planck ( $t_{Pl} \approx 5,591 \times 10^{-44} \text{ s}$ ) (FROLOV; NOVIKOV, 1998).

Como perspectiva futura pretendemos examinar o papel do ricochete - com relação a perturbações escalares - para o caso no qual os parâmetros cosmológicos observados sejam levado em consideração. Para este fim, uma generalização da equação de Mukhanov-Sasaki (MUKHANOV; FELDMAN; BRANDENBERGER, 1992) pode ser uma poderosa

ferramenta para simplificar as equações dinâmicas – e suas soluções numéricas – que governam a evolução de perturbações escalares. Neste caso, também pretendemos implementar um melhor código numérico para aumentar a precisão sobre os modos dos harmônicos esféricos sobre  $S^3$ , que utilizaremos para expandir as perturbações em modelos de 3-curvatura não nula.

## REFERÊNCIAS

- ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. *Introducing to General Relativity*. 2. ed. New York: Kingsport Press Inc., 1975. 549 p.
- BRUNI, M.; MAIER, R.; WANDS, D. *Nonsingular Cosmology from an Interacting Vacuum*. *Physical Review D*, [S.l.], v. 105, p. 063532, Nov 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2111.01765>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- CARROLL, S. M. *Lecture Notes on General Relativity*. Dec 1997. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- CZUCHRY, E. *Resolution of Cosmological Singularity in Hořava–Lifshitz Cosmology*. Jan 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2301.10867>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- DALARSSON, M.; DALARSSON, N. *Tensor Calculus, Relativity and Cosmology: A first course*. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2005. 280 p.
- D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. 5. ed. New York: Oxford University Press Inc., 1998. 383 p.
- EINSTEIN, A. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie. *Max Planck Institute for the History of Science*, [S.l.], Aug 1917. Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:H428RSAN>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- FRIEDMANN, A. Über die krümmung des raumes. *Z. Physik*, v. 10, p. 377–386, [S.l.], Jun 1922. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01332580#citeas>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- FRIEDMANN, A. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. *Z. Physik*, v. 21, p. 326–332, [S.l.], [S.l.], Jan 1924. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01328280>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- FROLOV, V. P.; NOVIKOV, I. D. *Black Hole Physics:: Basic concepts and new developments*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998. 770 p.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G.; LASENBY, A. N. *General Relativity: An introduction for physicists*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 572 p.
- KAEONIKHOM, C. et al. *Observational Constraints on Interacting Vacuum Energy with Linear Interactions*. Oct 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2210.05363>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- KAEONIKHOM, C. et al. Qualitative dynamics of interacting vacuum cosmologies. *Phys. Rev. D* 102, 123519 (2020), [S.l.], Jul 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2007.12181>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- KHODADI, M.; NOZARI, K. Non-singular model universe from a perfect fluid scalar-metric cosmology. *Gen. Rel. Grav.*, [S.l.], v. 50, p. 88, Jun 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1806.07246>>. Acesso em: 20 mar. 2023.



- LEBL, J. *Nonlinear Systems: Notes on diffy qs: differential equations for engineers*. [S.l.]: Amazon KDP, 2022. 301-346 p. Disponível em: <<https://www.jirka.org/diffyqs/nlinchap-draft.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- LEMAÎTRE, G. A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [S.l.], v. 91, Issue 5, Mar 1931. Disponível em: <<https://academic.oup.com/mnras/article/91/5/483/985165?login=false>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- LEMAÎTRE, G. L'univers en expansion. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, [S.l.], v. A53, p. 51, Jan 1933. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1933ASSB...53...51L>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- MAIER, R. *Nonsingular black holes from charged dust collapse: A concrete mechanism to evade interior singularities in general relativity*. May 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2005.09576>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- MAIER, R. *Stellar Instability from Parametric Resonance*. Jan 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2301.01329>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- MILLANO, A. D.; JUSUFI, K.; LEON, G. *Phase Space Analysis of the Bouncing Universe with Stringy Effects*. Feb 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2302.00223>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H. A.; BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, [S.l.], v. 215, Issues 5-6, p. 203-333, Jun 1992. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/037015739290044Z>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- NORDSTRÖM, G. On the energy of the gravitation field in einstein's theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, [S.l.], v. 20, Jan 1918. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1918KNAB...20.1238N>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- PERKO, L. *Texts in Applied Mathematics 7: Differential equations and dynamical systems*. Third. [S.l.]: Springer, 2000. 555 p.
- REISSNER, H. Über die eigengravitation des elektrischen felde nach der einsteinschen theorie. *Ann. Phys.*, [S.l.], v. 355, p. 106-120, 1916. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19163550905>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure. *Astrophysical Journal*, [S.l.], v. 82, p. 284, Nov 1935. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1935ApJ...82..284R/abstract>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure ii. *Astrophysical Journal*, [S.l.], v. 83, p. 187, Apr 1936a. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1936ApJ...83..187R/abstract>>. Acesso em: 20 mar. 2023.
- ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure iii. *Astrophysical Journal*, [S.l.], v. 83, p. 257, May 1936b. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1936ApJ...83..257R/abstract>>. Acesso em: 20 mar. 2023.

SOLA, J.; GOMEZ-VALENT, A.; PEREZ, J. Vacuum dynamics in the universe versus a rigid  $\lambda = \text{const}$ . *Int. J. Mod. Phys., [S.l.]*, v. A32, p. 1730014, Sep 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1709.07451>>. Acesso em: 20 mar. 2023.

TA-PEI, C. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A basic introduction*. Singapore: Oxford University Press, 2005. 340 p.

WALKER, A. G. On milne's theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society, [S.l.]*, v. s2-42, p. 90-127, 1937. Disponível em: <<https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-42.1.90>>. Acesso em: 20 mar. 2023.

WANDS, D.; DE-SANTIAGO, J.; WANG, Y. Inhomogeneous vacuum energy. *Class. Quantum Grav., [S.l.]*, v. 29, p. 145017, Mar 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1203.6776v2>>. Acesso em: 20 mar. 2023.

WANG, Y. et al. Cosmological constraints on a decomposed chaplygin gas. *Phys. Rev. D, [S.l.]*, v. 87, p. 083503, Apr 2013. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1301.5315>>. Acesso em: 20 mar. 2023.

WANG, Y. et al. Reconstruction of the dark matter-vacuum energy interaction. *Phys. Rev. D* 92, 103005 (2015), [S.l.], Dec 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1505.01373>>. Acesso em: 20 mar. 2023.

WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1972. 657 p.

WYEL, H. Zur gravitationstheorie. *Ann. Phys., [S.l.]*, v. 359, p. 117-145, 1917. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19173591804>>. Acesso em: 20 mar. 2023.