



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

**Centro de Tecnologia e Ciências**

**Faculdade de Engenharia**

Mariana dos Santos Vieitos

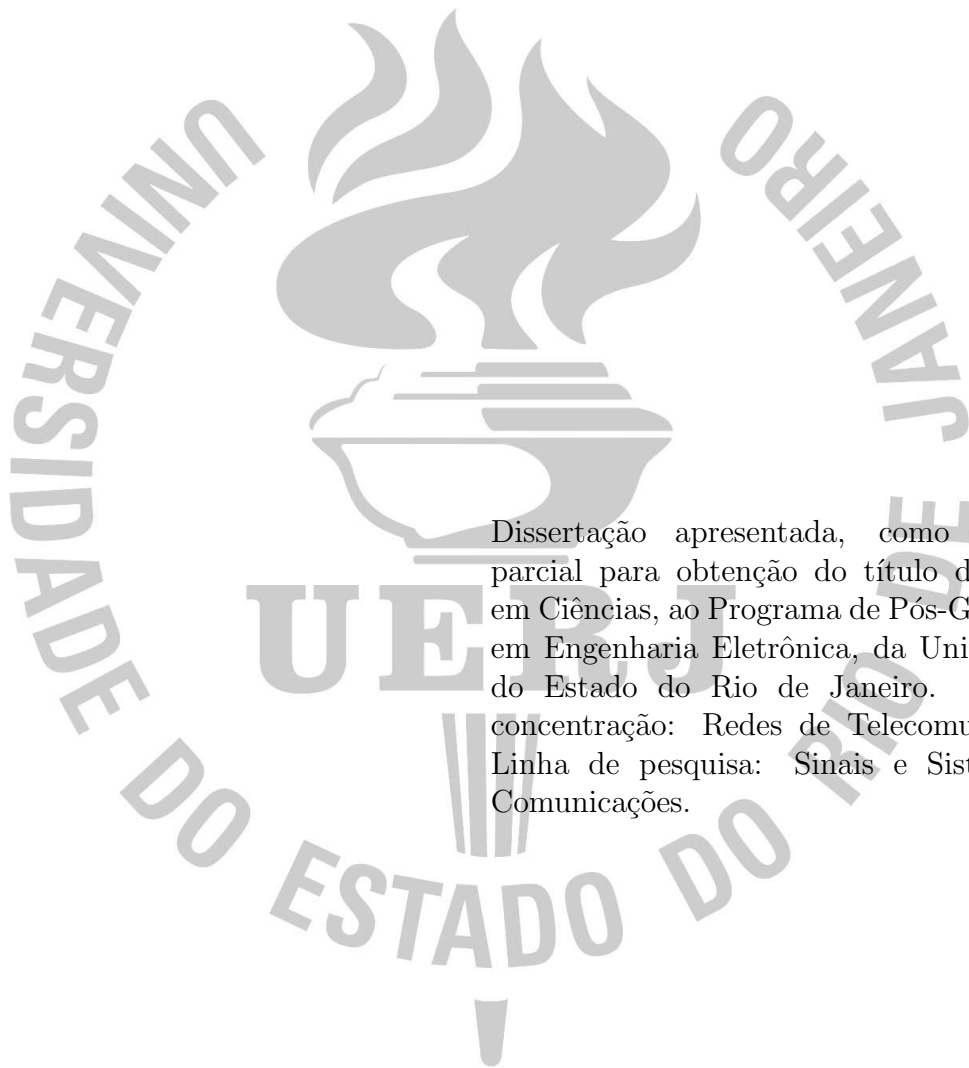
**Conformação de Feixe em Arranjos de Antenas por Meio de  
Filtros Adaptativos Proporcionais Linearmente Restritos**

Rio de Janeiro

2023

Mariana dos Santos Vieitos

**Conformação de Feixe em Arranjos de Antenas por Meio de Filtros  
Adaptativos Proporcionais Linearmente Restritos**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Redes de Telecomunicações. Linha de pesquisa: Sinais e Sistemas de Comunicações.

Orientador: Prof. Dr. Michel Pompeu Tcheou

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

V658 Vieitos, Mariana dos Santos.  
Conformação de feixe em arranjos de antenas por meio de  
filtros adaptativos proporcionais linearmente restritos / Marina dos  
Santos Vieitos. – 2023.  
76 f.

Orientador: Michel Pompeu Tcheou.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de  
Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Algoritmos - Teses. 3.  
Filtros adaptativos - Teses. 4. Sistemas de comunicação sem fio -  
Teses. I. Tcheou, Michel Pompeu. II. Universidade do Estado do  
Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 621.391:519.6

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou  
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Mariana dos Santos Vieitos

**Conformação de Feixe em Arranjos de Antenas por Meio de Filtros  
Adaptativos Proporcionalmente Linearmente Restritos**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sinais e Sistemas de Comunicações.

Aprovado em: 18 de Maio de 2023

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Michel Pompeu Tcheou, D.Sc. (Orientador)  
Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Dr. Diego B. Haddad  
CEFET-RJ, Campus Petrópolis

---

Prof. Dr. Tadeu N. Ferreira  
Escola de Engenharia - UFF

Rio de Janeiro

2023

## AGRADECIMENTO

A Deus, pela infinita graça, me permitiu chegar até aqui, guiando meus caminhos e me ajudando nas horas mais difíceis. A Ele toda honra e glória.

Ao meu marido, Breno, meu companheiro em todas as aventuras, que me incentiva a continuar estudando e me acolhe nos momentos de crise.

Aos meus pais, Alexandre e Marise, que sempre me incentivaram a buscar meu desenvolvimento profissional e pessoal, por serem meu abrigo e estarem comigo em todas as dúvidas que surgiram nesse caminho.

Ao meu orientador, Michel Tcheou, que topou mais essa jornada comigo, sendo compreensivo com minhas limitações e confiando que eu era capaz, me dando apoio e incentivo para não desistir. Por me motivar a continuar sempre em frente, mesmo quando o caminho ficava nebuloso. Por fazer parte da minha educação desde a graduação e ser um exemplo de professor e profissional.

Aos professores Diego Haddad e Tadeu Ferreira, por aceitarem fazer parte da banca examinadora. Sua disposição em dedicar seu tempo e conhecimento para avaliar meu trabalho é muito apreciada e valorizada por mim. Sua contribuição é fundamental para o sucesso deste trabalho.

Sê forte e corajoso; não temas, nem te espantes;  
porque o Senhor teu Deus é contigo, por onde quer que andares.

*Josué 1:9*

## RESUMO

VIEITOS, Mariana dos Santos. *Conformação de Feixe em Arranjos de Antenas por Meio de Filtros Adaptativos Proporcionalmente Linearmente Restritos*. 076 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2023.

A alternativa do princípio da distorção mínima (*minimum-disturbance description* em inglês) aplicado aos algoritmos de conformação de feixe adaptativos abre caminho para a derivação de novos métodos para configurações com restrições lineares. Nesse contexto, este trabalho propõe dois algoritmos, o IPCNLMS e o IPCNLMS- $\ell_0$ , e discute sua aplicação na formação de feixes adaptativos aplicados a três diferentes tipos de arranjos de sensores: SHA - *Standard Hexagonal Array*, URA - *Uniform Rectangular Array* e ULA - *Uniform Linear Array*. Esses algoritmos combinam estratégias de proporção e de restrição de norma inseridas no algoritmo CNLMS tradicional de maneira suave e rigorosa. A ideia de implementar conjuntamente os algoritmos CNLMS e IPNLMS é utilizada para obter uma convergência mais rápida e a capacidade de atenuar sinais interferentes provenientes de múltiplas direções ao utilizar a formação de feixe adaptativa. O IPCNLMS atualiza cada coeficiente do filtro independentemente, ajustando o tamanho do passo de convergência de forma proporcional à magnitude do coeficiente do filtro estimado. Ele é baseado na penalidade da norma  $\ell_1$  para explorar a velocidade de convergência e a esparsidade do sistema. Para levar essa ideia adiante, a penalidade da norma  $\ell_0$  também é considerada na proposição do IPCNLMS- $\ell_0$ . As simulações demonstram que os algoritmos propostos apresentam convergência mais rápida, sob condições equivalentes de desempenho assintótico.

Palavras-chave: *Beamforming*. Filtros Adaptativos. CNLMS. IPCNLMS. IPCNLMS- $\ell_0$ . Princípio do Distúrbio Mínimo.

## ABSTRACT

VIEITOS, Mariana dos Santos. *Beamforming in Antenna Arrays by Constrained Linearly Proportional Adaptive Filters*. 076 f. Dissertation (Master in Electronic Engineering) - Faculty of Engineering, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2023.

A minimum-disturbance description of adaptive beamforming algorithms opens up the derivation of novel methods for linearly constrained settings. Under this context, this paper proposes two algorithms, the IPCNLMS and the IPCNLMS- $\ell_0$ , and discusses their application in adaptive beamforming applied to three different types of sensor arrays: SHA – Standard Hexagonal Array, URA – Uniform Rectangular Array, and ULA - Uniform Linear Array. These algorithms combine both proportionate and norm constraint strategies that are inserted in the traditional CNLMS algorithm in a smooth and rigorous way. The idea of jointly implementing CNLMS and IPNLMS algorithms is used to achieve faster convergence and the ability to attenuate interfering signals from multiple directions while using adaptive beamforming. The IPCNLMS updates each filter coefficient independently by adjusting the adaptation step size proportionally to the magnitude of the estimated filter coefficient. It is based on the  $\ell_1$ -norm penalty to exploit the convergence speed and sparsity of the system. To take this idea further, the  $\ell_0$ -norm penalty is also considered in the IPCNLMS- $\ell_0$  proposition. Simulations demonstrate that the proposed algorithms present faster convergence, under equivalent conditions of asymptotic performance.

Keywords: Beamforming. Adaptive algorithms. CNLMS. IPCNLMS. IPCNLMS- $\ell_0$ . Minimum-disturbance Approach.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplo de um arranjo de antenas hexagonal de um satélite que utiliza reuso de frequência em feixes adjacentes .....	19
Figura 2 - Esquema básico de utilização dos UAVs em uma rede LTE .....	21
Figura 3 - Modelo de arranjo de sensores. ....	23
Figura 4 - Estrutura de <i>beamforming</i> adaptativo.....	26
Figura 5 - Configuração básica do filtro adaptativo. ....	27
Figura 6 - Distribuição dos sensores nos arranjos com espaçamento de $\frac{\lambda}{2}$ entre eles..	47
Figura 7 - Desempenho dos algoritmos em relação ao <i>Mean Output Error</i> (MOE) para o arranjo do tipo ULA.....	49
Figura 8 - Comparação de desempenho da razão sinal-interferência-mais-ruído (SINR) dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ em relação à sua aplicados à síntese do arranjo do tipo ULA.....	50
Figura 9 - Conformação de feixe resultante dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ em comparação com os algoritmos LCMV, CNLMS e RC-CNLMS aplicados à síntese do arranjo do tipo ULA.....	51
Figura 10- Distribuição de energia em cada elemento de antena do arranjo do tipo ULA. ....	52
Figura 11 - Comparação do desempenho da média da energia do erro de saída (MOE) dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ aplicados à síntese do arranjo do tipo URA.....	53
Figura 12 - Comparação do desempenho dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ em relação à sua razão sinal-interferência-mais-ruído (SINR) aplicados à síntese do arranjo do tipo URA. ....	54
Figura 13- Conformação de feixe adaptativo dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ em comparação com os algoritmos LCMV, CNLMS e RC-CNLMS aplicados à síntese do arranjo do tipo URA. ....	55
Figura 14- Distribuição de energia em cada elemento de antena do arranjo do tipo URA.....	56

Figura 15- Desempenho em termos de MOE dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, CAPA, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ para a simulação II do arranjo do tipo URA. ....	57
Figura 16- Desempenho em termos de SINR dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, CAPA, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ para a simulação II do arranjo do tipo URA. ....	58
Figura 17- Conformação de feixe resultante para o IPCNLMS em escala de cor para as determinadas direções $(\theta, \phi)$ dos sinais que chegam no arranjo do tipo URA. ....	59
Figura 18- Conformação de feixe resultante para o IPCNLMS- $\ell_0$ em escala de cor para as determinadas direções $(\theta, \phi)$ dos sinais que chegam no arranjo do tipo URA. ....	59
Figura 19- Distribuição de energia em cada elemento de antena do arranjo do tipo URA na simulação II. ....	60
Figura 20- Comparação do desempenho dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ feita em termos da média da energia do erro de saída (MOE) aplicada na síntese de um arranjo do tipo SHA. ....	61
Figura 21- Comparação do desempenho dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ em relação à sua razão sinal-interferência-mais-ruído (SINR) aplicados à síntese do arranjo do tipo SHA. ....	62
Figura 22- Conformação de feixe resultante dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ em comparação com os algoritmos LCMV, CNLMS e RC-CNLMS aplicados à síntese do arranjo do tipo SHA. ....	63
Figura 23- Distribuição de energia em cada elemento de antena do arranjo do tipo SHA. ....	64
Figura 24- Desempenho de MOE dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ comparados com CNLMS, RC-CNLMS e CAPA para a simulação II do arranjo do tipo SHA. ....	65
Figura 25- Desempenho de SINR dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ comparados com CNLMS, RC-CNLMS e CAPA para a simulação II do arranjo do tipo SHA. ....	66

Figura 26- Conformação de feixe resultante para o IPCNLMS em escala de cor para as determinadas direções $(\theta, \phi)$ dos sinais que chegam no arranjo do tipo SHA. ....	67
Figura 27- Conformação de feixe resultante para o IPCNLMS- $\ell_0$ em escala de cor para as determinadas direções $(\theta, \phi)$ dos sinais que chegam no arranjo do tipo SHA. ....	67
Figura 28- Distribuição de energia em cada elemento de antena do arranjo do tipo SHA na simulação II. ....	68

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Notação usada ao longo dissertação. ....	22
Tabela 2 - Parâmetro utilizados para simulação do arranjo linear uniforme (ULA)...	49
Tabela 3 - Parâmetros dos algoritmos utilizados na síntese do arranjo retangular uniforme (URA) na simulação I. ....	53
Tabela 4 - Parâmetros dos algoritmos utilizados na síntese do arranjo retangular uniforme (URA) na simulação II. ....	57
Tabela 5 - Parâmetros dos algoritmos utilizados na síntese do arranjo retangular uniforme (SHA) na simulação I.....	61
Tabela 6 - Parâmetros dos algoritmos utilizados na síntese do arranjo retangular uniforme (SHA) na simulação II.....	65

## LISTA DE SIGLAS

ULA	<i>Uniform Linear Array</i>
URA	<i>Uniform Rectangular Array</i>
LCAF	<i>Linearly Constrained Adaptive Filters</i>
SINR	<i>Signal-to-Interference-plus-Noise</i>
MOE	<i>Mean Output Error</i>
NLMS	<i>Normalized Least Mean Square</i>
CMA	<i>Constant Modulus Algorithm</i>
RLS	<i>Recursive Least-Squares</i>
APA	<i>Affine Projection Algorithm</i>
PNLMS	<i>Proportionate Normalized Least Mean Square</i>
IPNLMS	<i>Improved Proportionate Normalized Least Mean Square</i>
LCMV	<i>Linearly Constrained Minimum Variance</i>
CLMS	<i>Constrained Least Mean Square</i>
CNLMS	<i>Constrained Normalized Least Mean Square</i>
CAPA	<i>Constrained Affine Projection Algorithm</i>
SM-CAPA	<i>Set Membership Constrained Affine Projection Algorithm</i>
IPCNLMS	<i>Improved Proportionate Constrained Normalized Least Mean Square</i>
RC-CNLMS	<i>Reusing Coefficient Constrained Normalized Least Mean Square</i>
VRC-CNLMS	<i>Variable Reusing Coefficient Constrained Normalized Least Mean Square</i>
CIM-CNLMS	<i>Correntropy Induced Metric – Constrained Normalized Least Mean Square</i>
$\ell_1$ -CNLMS	<i><math>\ell_1</math>-norm Constrained Normalized Least Mean Square</i>
$\ell_1$ -WCNLMS	<i><math>\ell_1</math>-norm Weighted Constrained Normalized Least Mean Square</i>
MDP	<i>Minimum Distortion Principle</i>
SOI	<i>Signal of Interest</i>
DOA	<i>Direction of Arrivals</i>
DS-CDMA	<i>Direct Sequence Code Division Multiple Access</i>

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
	Objetivo .....	21
	Organização da Dissertação .....	21
	Notação .....	22
1	<b>ARRANJO DE SENSORES</b> .....	23
1.1	Modelagem do Sinal .....	23
1.2	Conformação Adaptativa de Feixe .....	25
1.3	Solução de Wiener .....	26
1.4	<i>Beamforming</i> de Mínima Variância .....	28
2	<b>ALGORITMOS DE CONFORMAÇÃO ADAPTATIVA DE FEIXE</b>	30
2.1	Os Algoritmos CLMS e CNLMS .....	30
2.2	O Algoritmo CAP .....	33
2.3	O Algoritmo RC-CLMS e RC-CNLMS .....	36
2.4	O Algoritmo IPCNLMS .....	40
2.5	O Algoritmo IPCNLMS- $\ell_0$ .....	45
3	<b>SIMULAÇÕES E RESULTADOS</b> .....	47
3.1	Arranjo Linear Uniforme .....	48
3.2	Arranjo Retangular Uniforme .....	52
3.3	Arranjo Hexagonal Padrão .....	60
3.4	Análise dos Resultados .....	68
	<b>CONCLUSÃO</b> .....	71
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	72
	<b>APÊNDICE A</b> .....	76

## INTRODUÇÃO

O avanço no projeto e desenvolvimento de circuitos digitais tem impulsionado e despertado um crescente interesse no campo do processamento de sinais digitais, tornando-o de suma importância em tecnologias presentes em sistemas de comunicações e sensoria-mento recentes [1–7].

Dentre as técnicas de processamento de sinais digitais, a filtragem adaptativa tem se mostrado uma solução cada vez mais presente em sistemas de comunicação, especi-almente em sistemas que envolvem antenas eficientes, como as comunicações celulares, sistemas multiusuário e comunicações móveis via satélite. Como esses sistemas têm na-tureza dinâmica, eles requerem uma solução que permita a reconfiguração dinâmica dos arranjos de sensores. Neste contexto, a filtragem adaptativa espacial emerge como uma opção atraente e flexível para atender a essa demanda. Esta técnica tem mostrado re-sultados promissores na melhoria da qualidade de sinal e no aumento da capacidade de transmissão em sistemas de comunicação [8].

A filtragem adaptativa é baseada em algoritmos que ajustam os coeficientes do filtro conforme as variações no sinal de entrada e nas condições do ambiente, e são projetados para minimizar a energia do erro entre o sinal de referência e o sinal filtrado, permitindo a adaptação contínua do filtro às mudanças nas condições do ambiente, garantindo a melhor qualidade de sinal possível [9]. A seleção do algoritmo tem um papel fundamental no processo adaptativo, uma vez que influencia aspectos cruciais como a possibilidade de haver soluções ótimas enviesadas e a complexidade computacional necessária para a implementação do algoritmo.

Os algoritmos adaptativos podem ser classificados como linearmente restritos ou irrestritos. Quando informações *a priori* sobre as soluções desejadas estão disponíveis, pode-se utilizar algoritmos com restrições, que impõem penalidades à função objetivo para incorporar essas informações. Os algoritmos com restrições lineares (LCAF - *Linearly-constrained adaptive filters*), incorporam às aplicações requisitos específicos traduzidos em um conjunto de equações lineares a serem satisfeitas pelos coeficientes [10]. Ao impor restrições lineares aos coeficientes, é possível melhorar a robustez da solução ou relaxar a necessidade de um sinal de treinamento. As soluções com restrições são obtidas por meio de projeções do vetor de coeficientes sem restrição sobre o hiperplano da restrição ou, quando existem várias restrições, sobre a interseção dos diversos hiperplanos de restrições

[9].

Quando comparados aos algoritmos convencionais sem restrições, os algoritmos LCAF exigem um mecanismo para garantir que as restrições impostas sejam satisfeitas em cada iteração. As duas principais abordagens para a derivação de algoritmos LCAF baseiam-se na estrutura *direct-form* e na estrutura de *Generalized Sidelobe Canceller* (GSC). A primeira utiliza o método dos multiplicadores de Lagrange durante a derivação do algoritmo de forma que as restrições sejam incorporadas no próprio algoritmo, resolvendo explicitamente um problema de otimização com restrições. A última transforma o problema de otimização com restrições em um problema livre de restrições a ser resolvido em um subespaço de dimensão reduzida, que é ortogonal ao subespaço definido pelas equações [10].

Pode-se citar alguns algoritmos sem restrições:

- *Least Mean Square* (LMS) [11, 12]: realiza a adaptação dos coeficientes do filtro para minimizar a energia do erro quadrático médio (MSE) entre o sinal filtrado e o sinal desejado. É um algoritmo simples e fácil de implementar, sendo amplamente utilizado em diversas aplicações de processamento de sinais.
- *Normalized Least Mean Square* (NLMS) [9, 13]: versão do LMS que normaliza os coeficientes do filtro pelo valor da energia do sinal de entrada. Isso permite que o algoritmo seja mais robusto a variações na amplitude do sinal de entrada.
- *Constant Modulus Algorithm* (CMA) [9, 13]: é um caso especial do algoritmo Godard, que visa minimizar a distância entre o módulo da saída do equalizador e alguns valores constantes prescritos, sem a utilização de um sinal de referência. Esses valores constantes estão relacionados ao módulo dos símbolos da constelação utilizados em modulações típicas de sistemas de comunicação digital.
- *Recursive Least-Squares* (RLS) [9, 13]: tem em vista minimizar a diferença entre o sinal desejado e a saída do filtro de modelo de forma recursiva. É conhecido por ter uma rápida convergência, mesmo em ambientes com variação temporal, mas com maior complexidade computacional e problemas de estabilidade. O objetivo é escolher os coeficientes do filtro adaptativo para que a saída do filtro corresponda ao mais próximo possível do sinal desejado em termos de mínimos quadrados. A



informação do sinal de entrada disponível até o momento é necessária e a função objetivo é determinística.

- *Affine Projection Algorithm* (APA) [14]: é uma alternativa para melhorar a convergência de algoritmos de filtragem adaptativa em situações onde o sinal de entrada é altamente correlacionado. Ele reutiliza dados antigos, resultando em uma convergência rápida e permite ajustar o compromisso entre a complexidade computacional e a velocidade de convergência. No entanto, o reuso de dados pode levar a um aumento do erro de ajuste do algoritmo, sendo necessário encontrar um equilíbrio entre o erro final de ajuste e a velocidade de convergência.
- *Proportionate Normalized Least-Mean-Squares* (PNLMS) [15]: é uma variação do algoritmo NLMS e é geralmente utilizado em canceladores de eco. Ele é projetado para ter uma convergência mais rápida, sem sacrificar a qualidade de estimação. Ele atribui diferentes tamanhos de passo (fatores de convergência) a cada coeficiente do filtro adaptativo, e esses fatores são proporcionais às suas respectivas magnitudes.
- *Improved Proportionate Normalized Least-Mean-Squares* (IPNLMS) [16]: é uma versão aprimorada do PNLMS, utilizando a norma  $\ell_1$  na matriz proporcional utilizada nesse tipo de algoritmo.

A seguir, são listados alguns exemplos de algoritmos com restrições:

- *Linearly Constrained Minimum Variance* (LCMV) [9, 13, 17]: é um algoritmo utilizado em conformação de feixe. Utiliza a restrição linear para garantir que o sinal de saída do filtro atenda a um requisito de potência mínima, enquanto maximiza a razão entre a potência do sinal de interesse e a potência do ruído. O objetivo é encontrar um filtro linear que minimize a variância do sinal de saída, sujeito a uma restrição linear. O LCMV é capaz de cancelar interferências e direcionar o lobo principal do feixe ao sinal de interesse, o que o torna uma técnica poderosa na recepção em sistemas de comunicação.
- *Constrained Least Mean Square* (CLMS) [10, 17]: é uma variante do LMS que utiliza restrições lineares e é considerado uma versão adaptativa estocástica do LCMV. Ele é derivado com a suposição de que os elementos da matriz podem ser ajustados em tempo real. É particularmente útil em sistemas de comunicação que envolvem a

transmissão de sinais em ambientes com muitos sinais interferentes e ruído. Assim como o LCMV, o CLMS é capaz de detectar a direção do sinal de interesse e, ao mesmo tempo, atenuar sinais que provêm de outras direções.

- *Constrained Normalized Least Mean Square (CNLMS)* [18]: é uma variante do CLMS que realiza a normalização dos coeficientes do filtro com base no valor da energia do sinal de entrada. Tal procedimento possibilita que o algoritmo apresente maior capacidade de adaptação a flutuações na amplitude do sinal de entrada, conferindo-lhe maior robustez.
- *Constrained Affine Projection Algorithm (CAPA)* [19]: é uma versão do APA que incorpora restrições lineares no processo de adaptação. O CAPA pode ser considerado como uma forma geral do algoritmo CNLMS, alterando-se apenas a quantidade de dados reutilizados do sinal de entrada utilizados.
- *Set Membership Constrained Affine Projection Algorithm (SM-CAPA)* [20]: é uma variação do algoritmo CAPA que utiliza a técnica de *Set Membership*, que especifica um limite superior para a estimativa de erro de saída, para melhorar a eficiência do algoritmo em aplicações de equalização de canal. Com o uso do *Set Membership*, o SM-CAPA pode restringir o conjunto de coeficientes do filtro a um conjunto pré-determinado, reduzindo a complexidade computacional do algoritmo e melhorando a sua robustez em ambientes com mudanças bruscas na resposta do canal.
- *Reuse Coefficient Constrained Normalized Least Mean Square (RC-CNLMS)* [21,22]: faz parte da família de algoritmos com base no CNLMS. Utiliza a técnica de reuso de coeficientes, o que permite a utilização de coeficientes anteriores em iterações posteriores, evitando uma nova estimativa desnecessária de parâmetros e, assim, aumenta-se a eficiência do algoritmo.
- *Variable Reuse Coefficient Constrained Normalized Least Mean Square (VRC-CNLMS)* [22]: é uma variante do RC-CNLMS que permite que os coeficientes do filtro variem ao longo do tempo. Ele adiciona um coeficiente de reuso variável que ajusta a quantidade de reutilização de coeficientes anteriores conforme a taxa de mudança do sistema que está sendo identificado. O VRC-CNLMS é capaz de melhorar a

eficiência da identificação do sistema e, assim, melhorar a qualidade do sinal transmitido ou recebido.

- *Correntropy Induced Metric - Constrained Normalized Least Mean Square* (CIM-CNLMS) [23]: foi desenvolvido para lidar com a esparsidade em arranjos de sensores e utiliza a teoria do correntropia induzida para aproximar a norma  $\ell_0$  e construir uma nova função de custo. O uso da norma  $\ell_0$  ajuda a aumentar a capacidade do algoritmo em promover a esparsidade no arranjo de sensores.
- *$\ell_1$ -norm Constrained Normalized Least Mean Square* ( $\ell_1$ -CNLMS) e  *$\ell_1$ -norm Weighted Constrained Normalized Least Mean Square* ( $\ell_1$ -WCNLMS) [24, 25]: pertencem à família de algoritmos CNLMS e utilizam a penalidade de norma  $\ell_1$  para gerar soluções esparsas. Enquanto o  $\ell_1$ -CNLMS tenta promover a esparsidade de maneira uniforme para todos os coeficientes, o  $\ell_1$ -WCNLMS incorpora o conceito de ponderação, sendo uma forma eficiente de melhorar o desempenho de algoritmos. A ponderação ajuda a distinguir os coeficientes esparsos dos não esparsos e, assim, melhora o rendimento do algoritmo em termos de MSE (*Mean Square Error*), especialmente quando o sistema é esparso. Esses algoritmos foram introduzidos na literatura com aplicação em conformação de feixe para arranjo de sensores.

Tipicamente, a derivação desses algoritmos é baseada no gradiente estocástico ou na minimização de erros *a posteriori*. No entanto, a alternativa do princípio de distorção mínima (MDP) fornece maior flexibilidade no projeto de novos algoritmos adaptativos [26]. Em [21], uma nova descrição da distorção mínima do algoritmo CLMS (Constrained Least Mean Square) foi proposta, o que permite que ele seja descrito de forma equivalente como um solucionador ótimo determinístico de um problema de otimização local, onde o fator de aprendizado é incorporado ao problema determinístico inicial, evitando inserções *ad hoc* posteriores.

Dentre as aplicações de algoritmos adaptativos, seu uso para conformação de feixe em matrizes de sensores está se tornando cada vez mais comum em sistemas de telecomunicações modernos [1, 2, 27]. Devido à natureza dinâmica dos ambientes em que sinais de interesse e sinais interferentes coexistem, os sinais interferentes podem causar problemas e limitações significativas para sistemas que não possuem dispositivos capazes de mitigar seus efeitos. Para isso, é comum utilizar algoritmos com restrições lineares, visto que a

direção de chegada do sinal de interesse na matriz de sensores é geralmente conhecida e a supressão de interferência ocorre por meio de filtragem espacial sem a necessidade de um sinal de treinamento. Como resultado, a característica de autocorreção dos algoritmos de conformação adaptativa de feixe se torna indispensável, sendo capazes de formar feixes na direção desejada e suprimir interferências em outras direções para melhorar a razão sinal-interferência-mais-ruído (SINR — *Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio*).

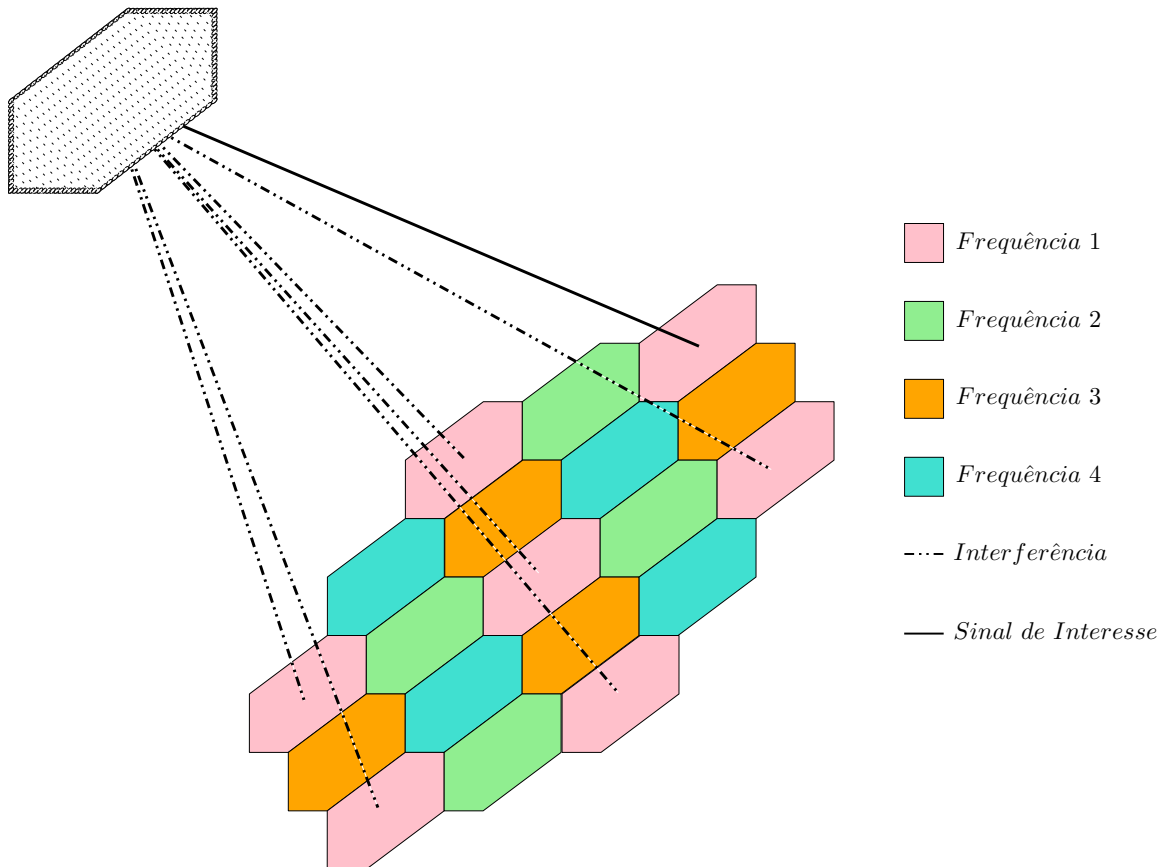


Figura 1: - Exemplo de um arranjo de antenas hexagonal de um satélite que utiliza reuso de frequência em feixes adjacentes

Uma aplicação dos algoritmos de conformação de feixe adaptativa é feita em [25], que apresenta um problema relacionado à interferência mútua entre os usuários de um sistema de satélites de comunicação geostacionários que empregam arranjos de antenas com ganhos altos. Esse sistema é baseado em um arranjo de antenas hexagonal de um satélite, que utiliza a técnica de reuso de frequências para evitar que feixes adjacentes compartilhem o mesmo grupo de frequências, conforme ilustrado na Figura 1. No entanto, sob certas condições de potência, ganho das antenas e ângulo de visada, pode ocorrer interferência mútua entre os usuários do sistema. Para solucionar esse problema, utilizam-

se os algoritmos  $\ell_1$ -CNLMS e  $\ell_1$ -WCNLMS, que são comparados em termos de MSE e diagramas de radiação, com o resultado obtido pelo algoritmo CNLMS. Os resultados mostram que os algoritmos propostos alcançam uma alta esparsidade com um diagrama de radiação e MSE aceitáveis, mesmo para o caso mais esparsos, mantendo o ganho unitário na direção de interesse e atenuando os sinais interferentes.

Em [28], discute-se a coexistência de múltiplos sistemas sem fio em uma rede 5G, que pode causar interferência na mesma banda de frequência e prejudicar o desempenho do sinal recebido. Visando solucionar o problema, um novo algoritmo que utiliza uma penalidade de soma logarítmica é proposto, baseando-se no CLMS. Simulações mostram que o novo método apresenta uma solução promissora para lidar com as interferências em sistemas 5G.

No artigo [29], é proposto um algoritmo híbrido que combina o LCMV com dados de geolocalização de GPS para solucionar o problema de interferência inter-célula (ICI - *inter-cell interference*) gerada pelos Veículos Aéreos Não Tripulados (UAVs - *Unmanned Aerial Vehicles*) que utilizam a rede LTE (*Long Term Evolution*). A Figura 2 ilustra a rede LTE com eNodeBs e equipamentos terrestres (*Ground UEs*), enquanto o UAV UE (*User Equipment*) sobrevoa a área e se conecta às eNodeBs conforme se desloca. As características únicas dos UAVs, como manipulação em alta altitude, mobilidade tridimensional e mudanças rápidas de velocidade, resultam em interferências inter-célula e dificuldades para estimar a direção de chegada (DOA - *Direction-of-Arrival*) do sinal de interesse. O autor propõe um novo algoritmo robusto de conformação de feixes que integra informações de canal e informações de voo dos UAVs para efetuar uma estimativa mais precisa em relação a DOA. Os resultados mostraram que o algoritmo proposto apresenta menor erro de estimação da direção de chegada do sinal de interesse e maior relação sinal-ruído mais interferência (SINR) de saída, o que indica seu potencial para melhorar o desempenho das redes LTE e possibilitar enlaces de comunicação confiáveis para aplicações de UAVs.

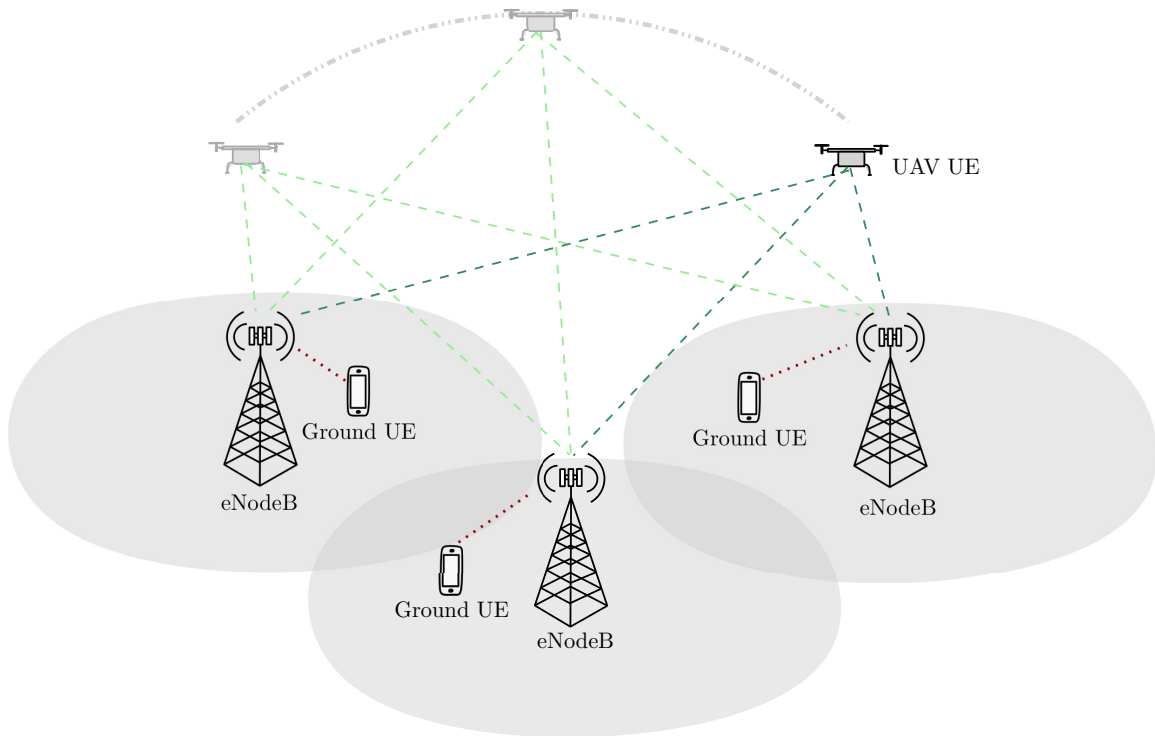


Figura 2: - Esquema básico de utilização dos UAVs em uma rede LTE

## Objetivo

Com o propósito de aprimorar o desempenho do algoritmo CNLMS, este trabalho propõe o algoritmo IPCNLMS (*Improved Proportionate Constrained Normalized Least Mean Square*), baseado no algoritmo IPNLMS (*Improved Proportionate Normalized Least Mean Square*) apresentado em [16]. O IPCNLMS atualiza cada coeficiente de filtro independentemente, ajustando o tamanho do passo de adaptação proporcionalmente à magnitude do coeficiente de filtro estimado. Ele é baseado na penalidade de norma- $\ell_1$  para explorar a velocidade de convergência e esparsidade do sistema. Levando essa ideia adiante, o algoritmo IPCNLMS- $\ell_0$  também é proposto, considerando a penalidade de norma- $\ell_0$ .

## Organização da Dissertação

A estrutura da dissertação está organizada da seguinte forma.

O Capítulo 1 apresenta os fundamentos matemáticos e conceitos necessários para a modelagem de um arranjo de sensores. Ele aborda desde o modelo do sinal de entrada até a obtenção da solução para o Conformador de Feixe de Variância Mínima com Restrições

Lineares (*Linearly Constrained Minimum Variance* — LCMV), por meio da solução de Wiener. Além disso, o capítulo explora conceitos importantes como a topologia planar, o diagrama de radiação (*beam pattern*) e a conformação adaptativa de feixe (*beamforming*).

O Capítulo 2 aborda os desenvolvimentos e deduções matemáticas mais relevantes que conduziram às expressões finais dos algoritmos CLMS, CNLMS, CAPA, RC-CLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ . Os algoritmos CLMS e CNLMS são essenciais para o entendimento e a dedução dos algoritmos propostos neste trabalho, já os algoritmos CAPA, RC-CLMS e RC-CNLMS foram abordados para fins de comparação com os algoritmos propostos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ .

No Capítulo 3, são apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação dos algoritmos para a síntese e solução de arranjos de sensores. Neste capítulo, também são realizadas comparações com base em *beam pattern*, MOE (*mean output energy*) e SINR. Os desempenhos dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  são comparados aos dos algoritmos CNLMS, CAPA e RC-CNLMS (*Reusing Coefficient Constrained Normalized Least Mean Square* [21]).

No último capítulo, são apresentadas as conclusões obtidas a partir deste trabalho e possíveis desdobramentos futuros que podem ser realizados com base nos resultados encontrados.

## Notação

Na Tabela 1, são descritas as notações e suas definições presentes neste trabalho.

Tabela 1: - Notação usada ao longo dissertação.

Notação	Definição
a	Escalares são representados por letras minúsculas
<b>a</b>	Vetores são representados por letras minúsculas em negrito
<b>A</b>	Matrizes são representados por letras maiúsculas em negrito
$(\cdot)^H$	Operador Hermitiano (matriz transposta conjugada)
$\mathbb{E}[\cdot]$	Operador para cálculo de valor esperado
$\mathbf{I}_{M \times M}$	Matriz identidade de $M \times M$ elementos
$\text{Re}\{\cdot\}$	Parte real de um escalar, vetor ou matriz complexo

## 1 ARRANJO DE SENSORES

Os arranjos de sensores são muito utilizados em técnicas de processamento de sinais, pois introduzem novas dimensões, em especial a espacial, ao sinal medido/observado de modo a melhorar o desempenho no processo de estimação do sinal desejado. As técnicas de amostragem temporal e espacial são empregadas aos arranjos de sensores visando gerar sinais nos domínios do tempo e espaço discretos.

A filtragem de sinais no domínio espaço-tempo é denominada como conformador de feixe ou *beamformer* em inglês, e permite obter um ajuste dinâmico do diagrama de radiação (*beam pattern*) do arranjo de sensores. Com essa técnica, é possível selecionar espacialmente sinais de interesse e suprimir sinais oriundos de fontes interferentes.

### 1.1 Modelagem do Sinal

A Figura 3 representa o modelo de um conjunto de antenas planares composto por  $M$  elementos (sensores) que recebem  $Q$  sinais de banda estreita de campo distante, incluindo sinais de fontes interferentes e o sinal de interesse (SOI — *Signal of Interest*), vindos de diferentes direções de zênites e azimutes,  $\phi_i$  e  $\theta_i$ .

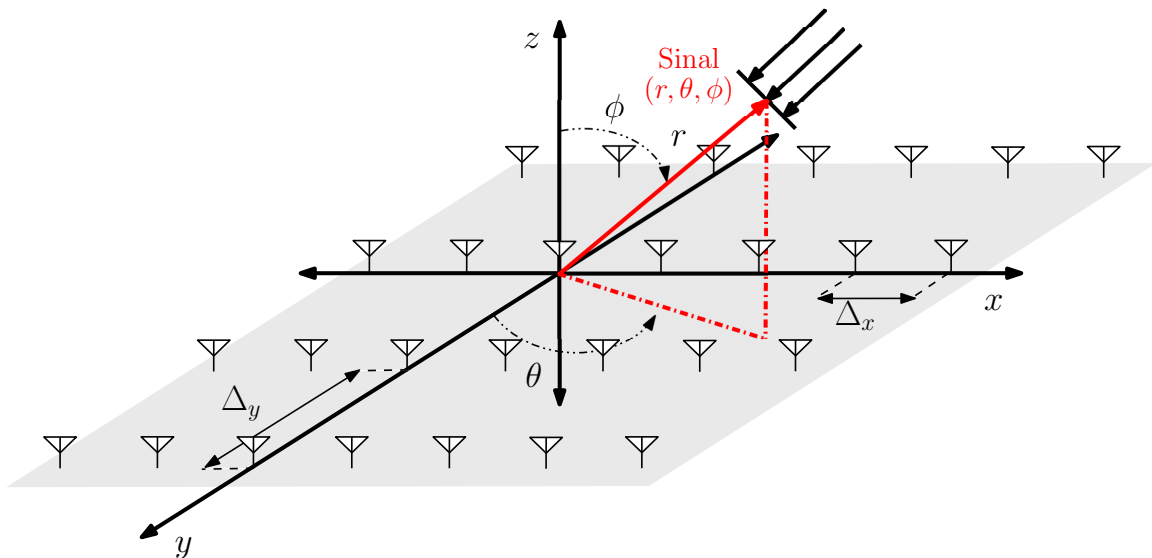


Figura 3: - Modelo de arranjo de sensores.

Os sinais observados pelos  $M$  sensores, durante  $K$  iterações, retratados por  $\mathbf{x}(k) \in$



$\mathbb{C}^M$ , são discretos no domínio do tempo e analíticos<sup>1</sup>, sendo descritos como [24]

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{i=1}^Q \mathbf{a}(\theta_i, \phi_i) \mathbf{s}_i(k) + \mathbf{n}(k), \quad (1)$$

onde  $k \in 1, 2, \dots, K$  e  $\mathbf{n}(k) \in \mathbb{C}^M$  denota o ruído aditivo com variância  $\sigma_n^2$ . O sinal  $\mathbf{s}_i(k)$  é a envoltória complexa do sinal de entrada proveniente da  $i$ -ésima fonte e das direções de chegada (DOA)  $(\theta_i, \phi_i)$  e  $\mathbf{a}(\theta_i, \phi_i)$  representa as colunas da matriz de direcionamento, definida como [24]

$$\mathbf{a}(\theta_i, \phi_i) = \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \cos(\theta_i) \sin(\phi_i) \mathbf{d}_x + \sin(\theta_i) \sin(\phi_i) \mathbf{d}_y \right] \right\}, \quad (2)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda do sinal e  $i \in 1, 2, \dots, Q$ . Os vetores  $\mathbf{d}_x \in \mathbb{R}^M$  e  $\mathbf{d}_y \in \mathbb{R}^M$  contêm as componentes da posição de cada sensor no plano cartesiano, espaçados por  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$ , respectivamente. A configuração planar do arranjo de sensores pode ser feita conforme a preferência do projetista, bastando implementar uma escolha adequada de coordenadas cartesianas, ou seja, ajustar os vetores  $\mathbf{d}_x$  e  $\mathbf{d}_y$  de acordo com as necessidades do projeto. Como exemplo, para um Arranjo Linear Uniforme (ULA — *Uniform Linear Array*),  $\mathbf{d}_y = \mathbf{0}$ ,  $\phi_i = 90^\circ$  e o espaçamento  $\Delta_x = \frac{\lambda}{2}$  entre os componentes de  $\mathbf{d}_x$ . Com isso, as colunas da matriz direcionamento para ULA podem ser definidas como

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \cos(\theta_i) \mathbf{d}_x \right] \right\}. \quad (3)$$

Para  $\mathbf{d}_x = [0, \Delta_x, 2\Delta_x, \dots, (M-1)\Delta_x]^\top$ ,  $\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{-j\pi \cos(\theta_i)}, \dots, e^{-j\pi(M-1)\cos(\theta_i)}]^\top$ .

O sinal de saída  $y(k) \in \mathbb{C}$  é calculado como:

$$y(k) = \mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k), \quad (4)$$

onde  $(\cdot)^H$  denota o operador hermitiano (transposto conjugado) e  $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{C}^M$  representa o vetor de coeficientes adaptativos na  $k$ -ésima iteração.

---

<sup>1</sup>Cada elemento do arranjo recebe o sinal  $\mathbf{s}_i(k)$  em instantes de tempo diferentes, causando um atraso em  $\mathbf{x}(k)$ , relativo ao direcionamento  $\mathbf{a}(\theta_i, \phi_i)$ . Para que, na modelagem do sinal, um determinado atraso seja aplicado igualmente a todos os elementos do arranjo, se faz necessário que o sinal  $\mathbf{x}(k)$  seja analítico. Um sinal analítico é aquele sem componentes de frequência negativa na sua Transformada de Fourier no Tempo Discreto (DTFT). Sua parte real e imaginária são relacionadas pela transformada de Hilbert [30]. A prova desse conceito é desenvolvida no Apêndice A.

Usando a notação matricial, o sinal de entrada pode ser representado como

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N}, \quad (5)$$

onde  $\mathbf{X}$  é a matriz  $M \times K$  e  $\mathbf{S}$  é a matriz  $Q \times K$  que representa o envelope do sinal complexo,  $\mathbf{A}$  é a matriz de direcionamento  $M \times Q$  e  $\mathbf{N}$  é a matriz de ruído  $M \times K$ .

O diagrama de radiação em função dos ângulos  $(\theta, \phi)$ , definido em [31], é dado por

$$B(\theta, \phi) = \mathbf{w}^H(k) \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \cos(\theta) \sin(\phi) \mathbf{d}_x + \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{d}_y \right] \right\}. \quad (6)$$

A relação sinal-interferência-mais-ruído (SINR) média obtida na  $k$ -ésima iteração pode ser escrita como

$$\text{SINR}(k) = \mathbb{E} \left[ \frac{\sigma_1^2 \mathbf{w}^H(k) \mathbf{a}(\theta_1, \phi_1) \mathbf{a}^H(\theta_1, \phi_1) \mathbf{w}(k)}{\sum_{i=2}^Q \sigma_i^2 \mathbf{w}^H(k) \mathbf{a}(\theta_i, \phi_i) \mathbf{a}^H(\theta_i, \phi_i) \mathbf{w}(k) + \sigma_n^2} \right], \quad (7)$$

onde o par  $(\theta_1, \phi_1)$  se refere à direção de chegada do sinal de interesse e as demais direções referem-se aos sinais de fontes interferentes,  $\sigma_i^2$  denota a variância da  $i$ -ésima fonte e  $\sigma_n^2$  é a variância do ruído aditivo.

## 1.2 Conformação Adaptativa de Feixe

A técnica de conformação adaptativa de feixe, também conhecida como *adaptive beamforming* em inglês, é utilizada em arranjos de sensores para obter o máximo ganho em uma direção específica. Isso é alcançado estimando-se o sinal de chegada em meio ao ruído e atenuando sinais de interferência de outras direções, por meio do uso de algoritmos adaptativos [10] [32].

A Figura 4 apresenta a configuração de um *beamforming* adaptativo para um arranjo de sensores. Na  $k$ -ésima iteração, a saída do arranjo  $y(k)$ , dada pela equação (4), é a soma ponderada dos sinais recebidos (de fontes interferentes e SOI)  $\mathbf{s}_i(k)$  e de ruídos aditivos  $\mathbf{n}_i(k)$  com os pesos  $\mathbf{w}(k) = [w_1(k), w_2(k), \dots, w_M(k)]^T$ , computados para minimizar o erro  $e(k) = d(k) - y(k)$ . Geralmente, o sinal de referência  $d(k)$  não é conhecido, sendo considerado nulo, ou seja,  $d(k) = 0$ , nesses casos, a estratégia é minimizar a energia do sinal de saída  $y(k)$ , respeitando-se as restrições lineares.

O algoritmo LCMV, *Linearly Constrained Minimum Variance*, cuja solução visa

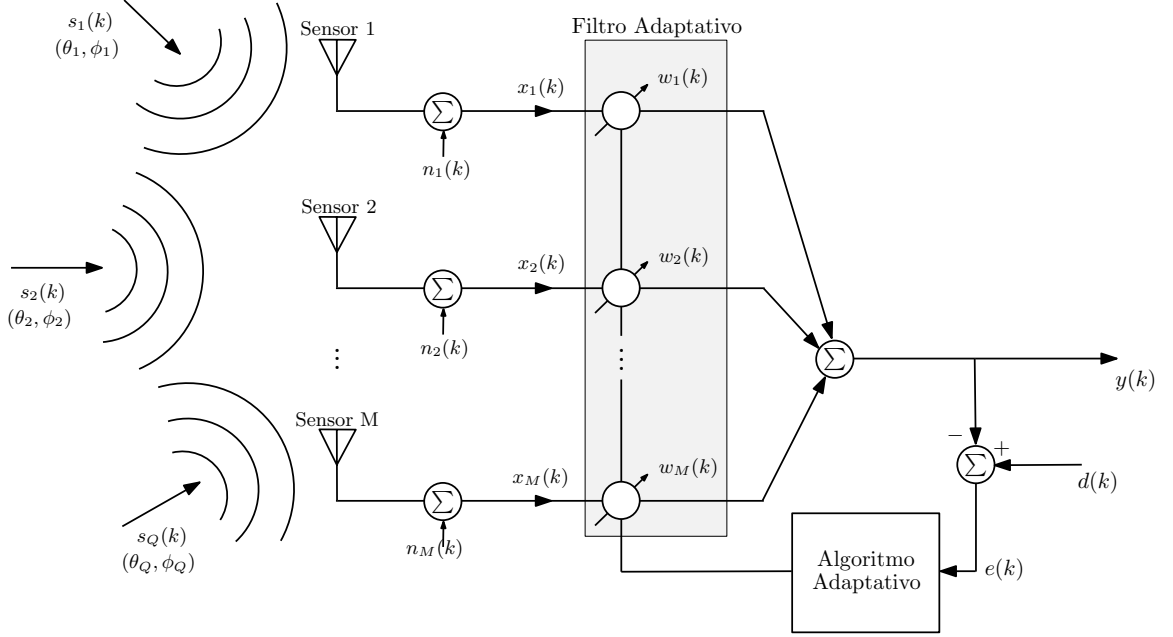


Figura 4: - Estrutura de *beamforming* adaptativo.

minimizar a variância da saída do filtro, sujeito a restrições lineares, pode ser utilizado para resolver o problema de filtragem adaptativa em casos em que o sinal de referência não é conhecido [33].

### 1.3 Solução de Wiener

A configuração básica de um filtro adaptativo é ilustrada na Figura 5. No instante  $k$ , o sinal de entrada é dado por  $\mathbf{x}(k)$ ,  $d(k)$  é o sinal de referência,  $y(k) = \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k)$  é a saída do filtro adaptativo e  $e(k) = d(k) - \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k)$  é o erro *a priori*, utilizado para ajustar o vetor de coeficientes do filtro  $\mathbf{w}(k)$ , através de um algoritmo adaptativo.

Para atualizar os coeficientes do filtro  $\mathbf{w}(k)$ , é necessário minimizar a função MSE (*Mean-Squared Error*) [9]. Para um filtro com coeficientes fixos, considera-se  $\mathbf{w}(k)$  como  $\mathbf{w}$ . Dessa forma, a função MSE em ambiente estacionário é dada por

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^2(k)] &= \mathbb{E}[e(k)e^*(k)] \\
 &= \mathbb{E}[d^2(k)] - 2\text{Re}\{\mathbf{w}^H\mathbb{E}[d^*(k)\mathbf{x}(k)]\} + \mathbf{w}^H\mathbb{E}[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)]\mathbf{w} \\
 &= \mathbb{E}[d^2(k)] - 2\text{Re}[\mathbf{w}^H\mathbf{p}] + \mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w},
 \end{aligned} \tag{8}$$

onde  $\mathbb{E}[\cdot]$  denota o operador valor esperado,  $\mathbf{p} = \mathbb{E}[d^*(k)\mathbf{x}(k)]$  é o vetor de correlação cruzada entre o sinal de referência e o sinal de entrada e  $\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)]$  é a matriz

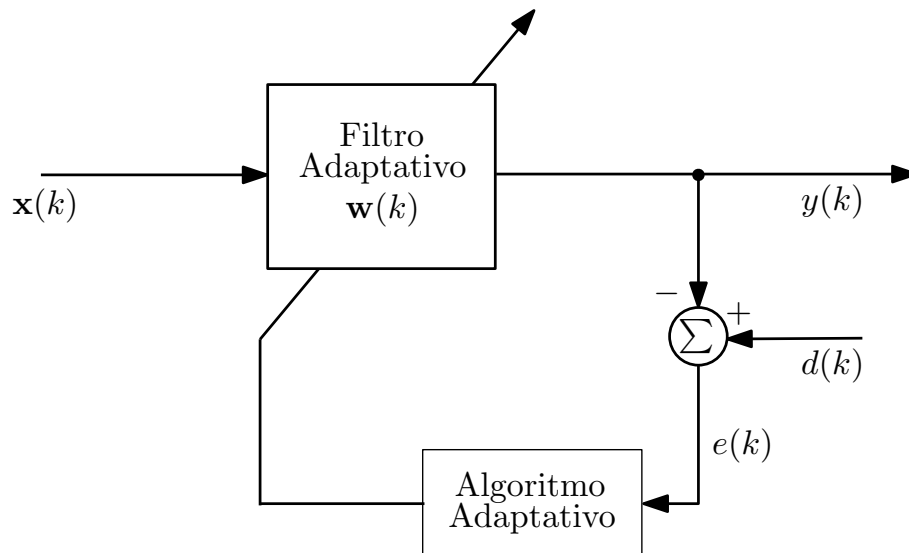


Figura 5: - Configuração básica do filtro adaptativo.

de autocorrelação do sinal  $\mathbf{x}(k)$ .

A função MSE é uma função quadrática dos coeficientes do filtro adaptativo, o que permite uma solução direta para  $\mathbf{w}$  que minimiza  $\mathbb{E}[e^2(k)]$ , se o vetor  $\mathbf{p}$  e a matriz  $\mathbf{R}$  forem conhecidos. A minimização de (8) é realizada zerando-se seu gradiente, isto é  $\frac{\partial \mathbb{E}[e^2(k)]}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{0}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}[e^2(k)]}{\partial \mathbf{w}} &= \left[ \frac{\partial \mathbb{E}[e^2(k)]}{\partial w_0} \quad \frac{\partial \mathbb{E}[e^2(k)]}{\partial w_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbb{E}[e^2(k)]}{\partial w_M} \right]^T \\ &= -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ao igualar-se o vetor gradiente a zero e assumindo que  $\mathbf{R}$  não é uma matriz singular, o valor ótimo de  $\mathbf{w}$  que minimiza a função MSE é dado por

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \quad (10)$$

o qual é a solução chamada de solução de Wiener.

Através da equação (5), é possível estimar  $\mathbf{R}$ , sabendo que  $\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)]$ :

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{X}\mathbf{X}^H = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^H\mathbf{A}^H + \mathbf{N}\mathbf{N}^H. \quad (11)$$

Na prática, é comum usar a média temporal para estimar  $\mathbf{R}$  da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k). \quad (12)$$

#### 1.4 *Beamforming* de Mínima Variância

A solução de Wiener apresentada na seção anterior apresenta valores para o filtro ótimo considerando o sinal de referência. Como explicado anteriormente,  $d(k)$  na maioria das vezes não está disponível. Uma solução para esse problema é minimizar o valor médio da energia do sinal de saída do *beamforming* adaptativo,  $\mathbb{E}[y^2(k)] = \mathbb{E}[\mathbf{w}^H \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{w}]$ , enquanto restrições lineares são aplicadas. O filtro ótimo que atende às restrições lineares é chamado de filtro de mínima variância linearmente restrito, em inglês, *Linearly Constrained Minimum Variance* (LCMV), e é obtido por meio da solução do seguinte problema de otimização

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbb{E}[\mathbf{w}^H \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{w}] = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad (13)$$

sendo  $\mathbf{R}$  a matriz de autocorrelação do sinal de entrada,  $\mathbf{C}$  a matriz de restrições de dimensão  $M \times p$  e  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^p$  o vetor correspondente com  $p$  elementos (números de restrições).

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, pode-se reescrever o problema de minimização descrito em (13) como

$$\mathcal{F}[\mathbf{w}] = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} + \text{Re}\{\boldsymbol{\lambda}^H [\underbrace{\mathbf{w}^H \mathbf{C}}_{=\mathbf{C}^H \mathbf{w}} - \mathbf{f}]\}. \quad (14)$$

Calculando-se o gradiente em relação a  $\mathbf{w}^*$  e igualando-o a zero, tem-se

$$\nabla_{\mathbf{w}^*} \mathcal{F}[\mathbf{w}] = \mathbf{R} \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{C}^H \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (15)$$

Para aplicar a restrição  $\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$  e encontrar  $\boldsymbol{\lambda}$ , é necessário fazer algumas manipulações

matemáticas

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{C}^H\boldsymbol{\lambda}\mathbf{R}^{-1} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{w}^H\mathbf{C} + \frac{1}{2}\mathbf{C}^H\boldsymbol{\lambda}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{C}^H\mathbf{w} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{f} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}) &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\lambda} &= -2(\mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{f}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Aplicando a equação (16) em (15), encontra-se a solução para o filtro ótimo

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{f}. \tag{17}$$

As colunas da matriz  $\mathbf{C}$ , no caso de uma ULA, são expressas como

$$c_i = \left[ 1, e^{-j\left[\frac{2\pi d}{\lambda}\cos(\theta_i)\right]}, \dots, e^{-j\left[\frac{2\pi d}{\lambda}(M-1)\cos(\theta_i)\right]} \right]. \tag{18}$$

O sinal de interesse e os sinais de interferência são indicados pela direção do ângulo  $\theta_i$ . Esses sinais são considerados restrições representadas pelas colunas da matriz de restrição  $\mathbf{C}$  e pelos elementos do vetor de restrições  $\mathbf{f}$ . Os valores dos elementos do vetor  $\mathbf{f}$  são 1 para as direções de interesse e 0 para as direções correspondentes aos sinais interferentes.

## 2 ALGORITMOS DE CONFORMAÇÃO ADAPTATIVA DE FEIXE

Neste capítulo, são apresentadas as deduções dos algoritmos CLMS (*Constrained Least Mean Square*), sua versão normalizada, o CNLMS (*Constrained Normalized Least Mean Square*), o CAPA (*Constrained Affine Projection Algorithm*), o RC-CLMS (*Reuse Coefficient Constrained Least Mean Square*) e sua versão normalizada, o RC-CNLMS (*Reuse Coefficient Constrained Normalized Least Mean Square*) bem como os algoritmos proporcionais propostos IPCNLMS (*Improved Proportionate Constrained Normalized Least Mean Square*) e IPCNLMS- $\ell_0$ , que utilizam as normas  $\ell_1$  e  $\ell_0$  na formulação da matriz diagonal, respectivamente.

Na literatura, é comum deduzir muitos algoritmos por meio de uma aproximação estocástica do vetor de gradiente ou por meio da minimização determinística do erro *a posteriori*. Neste trabalho, é utilizada a abordagem do princípio do distúrbio mínimo, apresentado em [26]. Essa abordagem expressa as funções-custo determinísticas como funções quadráticas do distúrbio mínimo dos coeficientes, sujeitas ou não a restrições.

### 2.1 Os Algoritmos CLMS e CNLMS

O algoritmo CLMS foi apresentado em [17] e sua maior importância para arranjos de antenas é a capacidade de atenuar sinais interferentes vindos de várias direções, enquanto consegue contemplar o sinal desejado. Quando o sinal de referência do sistema é zero, o algoritmo CLMS visa minimizar a energia do erro quadrático médio do sinal de saída sob algumas restrições, resolvendo o seguinte problema estocástico [21] [26]

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}(k+1)} [\mathbf{w}^H(k+1) - \mathbf{w}^H(k)] [\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)] \\ \text{s.t. } & \begin{cases} \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{x}(k) = (1 - \mu\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2)\mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{C}^H\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{f} \end{cases}, \end{aligned} \quad (19)$$

onde  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}^2 \triangleq \mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  é o vetor de coeficientes no instante  $k$ , e  $\mu \in \mathbb{R}_+$  é o fator de convergência. A matriz  $\mathbf{P} \triangleq \mathbf{I}_{M \times M} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H$  pode ser interpretada como uma projeção sobre o hiperplano especificado por  $\mathbf{C}^H\mathbf{w} = 0$ .

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange para funções de custo comple-

as, a equação (19) pode ser descrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)] &\triangleq \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{w}(k) - \mathbf{w}^H(k)\mathbf{w}(k+1) + \|\mathbf{w}(k)\|^2 \\ &\quad + \text{Re} \left\{ \lambda_0^* \left[ \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{x}(k) - (1 - \mu\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2)\mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) \right] \right\} \\ &\quad + \text{Re} \left\{ \boldsymbol{\lambda}_1^H \left[ \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k+1) - \mathbf{f} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

onde  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  e  $\boldsymbol{\lambda}_1 \in \mathbb{C}^p$  são os multiplicadores de Lagrange e  $p$  corresponde ao número de restrições.

A minimização de (19) é realizada zerando-se seu gradiente, isto é  $\frac{\partial \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)]}{\partial \mathbf{w}^*(k+1)} = \mathbf{0}$ , logo

$$\nabla_{\mathbf{w}^*(k+1)} \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)] = \mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k) + \frac{1}{2}\lambda_0^* \mathbf{x}(k) + \frac{1}{2}\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}_1 = \mathbf{0} \quad (21)$$

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \frac{1}{2}\lambda_0^* \mathbf{x}(k) - \frac{1}{2}\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}_1, \quad (22)$$

onde (22) é a equação de atualização.

Aplicando a segunda restrição de (19) em (22),  $\boldsymbol{\lambda}_1$  passa a ser descrito como

$$\mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) - \frac{1}{2}\lambda_0^* \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k) - \frac{1}{2}\mathbf{C}^H \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}_1 = \mathbf{f}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = 2(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) - \lambda_0^* (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k) - 2(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (23)$$

Substituindo (23) em (22), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) \\ &\quad + \frac{\lambda_0^*}{2} \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k) - \frac{\lambda_0^*}{2} \mathbf{x}(k) \\ &\quad + \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (24)$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^H(k+1) &= \mathbf{w}^H(k) - \mathbf{w}^H(k)\mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \\ &\quad + \frac{\lambda_0}{2} \mathbf{x}^H(k)\mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H - \frac{\lambda_0}{2} \mathbf{x}^H(k) \\ &\quad + \mathbf{f}^H (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H. \end{aligned} \quad (25)$$



Aplicando a primeira restrição de (19) em (25), é possível encontrar  $\lambda_0$ , sendo assim

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) - \mu\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2 \underbrace{\mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k)}_{=-e(k)} &= \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{w}^H(k)\mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{x}(k) \\
&+ \frac{\lambda_0}{2}\mathbf{x}^H(k)\mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{x}(k) \\
&- \frac{\lambda_0}{2}\mathbf{x}^H(k)\mathbf{x}(k) \\
&+ \underbrace{\mathbf{f}^H}_{=\mathbf{w}^H(k)\mathbf{C}}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{x}(k) \\
\mu\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2 e(k) &= \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) \\
&- \mathbf{w}^H(k)\mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{x}(k) \\
&+ \mathbf{w}^H(k)\mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{x}(k) \\
&- \frac{\lambda_0}{2}\mathbf{x}^H(k)\underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H]}_{=\mathbf{P}}\mathbf{x}(k) \\
\mu\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2 e(k) &= -\frac{\lambda_0}{2}\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2 \\
\frac{\lambda_0}{2} &= -\mu e(k) \tag{26}
\end{aligned}$$

Aplicando (26) em (24), encontra-se a equação de atualização

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{w}(k) \\
&+ \frac{1}{2}\mu e^*(k)\mathbf{x}(k) - \frac{1}{2}\mu e^*(k)\mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{x}(k) \\
&+ \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{f} \\
\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k)\underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H]}_{=\mathbf{P}} \\
&+ \frac{1}{2}\mu e^*(k)\underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H]}_{=\mathbf{P}}\mathbf{x}(k) \\
&+ \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{f} \\
\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{P}[\mathbf{w}(k) + \mu e^*(k)\mathbf{x}(k)] + \mathbf{z}, \tag{27}
\end{aligned}$$

onde  $e(k) = -y(k)$  e  $y(k) \triangleq \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k)$  e  $\mathbf{z} \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{f}$  é um vetor de tamanho  $N \times 1$ , que contém as restrições. O fator de convergência  $\mu$  estabelece um compromisso

entre taxa de convergência e desempenho em regime permanente.

É possível derivar o algoritmo CNLMS realizando uma simples modificação do problema apresentado em (19) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}(k+1)} & \left[ \mathbf{w}^H(k+1) - \mathbf{w}^H(k) \right] \left[ \mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k) \right] \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{x}(k) = (1 - \mu)\mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k+1) = \mathbf{f} \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

Seguindo os mesmos passos utilizados na derivação do CLMS, a equação de atualização para o algoritmo CNLMS pode ser descrita da seguinte maneira

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{P} \left[ \mathbf{w}(k) + \mu \frac{e^*(k)\mathbf{x}(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2 + \delta_{\text{CNLMS}}} \right] + \mathbf{z}, \quad (29)$$

onde  $\delta_{\text{CNLMS}}$  é um valor pequeno positivo, ou seja, um parâmetro de regularização, que é adicionado à equação para evitar *overflow* quando  $\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2$  se torna muito pequeno.

O CNLMS foi inicialmente apresentado em [18], sendo uma forma normalizada do CLMS, com o objetivo principal de realizar o cancelamento de interferências em sistemas de comunicações móveis que utilizam o Acesso Multiplexação por Divisão de Código com Sequência Direta (DS-CDMA - *Direct Sequence Code Division Multiple Access*).

## 2.2 O Algoritmo CAP

O algoritmo *Constrained Affine Projection* (CAP) foi desenvolvido em [19] e é uma técnica que visa melhorar a velocidade de convergência de sinais altamente correlacionados. O problema de baixa convergência do algoritmo CLMS motivou o desenvolvimento do algoritmo CAP, que reutiliza os dados do sinal de entrada a fim de obter um bom equilíbrio entre a velocidade de convergência e a complexidade computacional.

Além disso, o CAP pode ser visto como uma generalização do algoritmo CNLMS, incluindo um número adequado de reuso de dados passados do sinal de entrada na atualização dos coeficientes.

O CAP resolve o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}^H(k+1)} [\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}^H(k)] [\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)] \\ \text{s.t. } & \begin{cases} \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{X}(k) = (1 - \mu)\mathbf{w}^H(k)\mathbf{X}(k) \\ \mathbf{C}^H\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{f} \end{cases}, \end{aligned} \quad (30)$$

A matriz do sinal de entrada, representada por  $\mathbf{X}(k) \in \mathbb{C}^{M \times D}$  para um número arbitrário  $D$  de reuso de dados anteriores, é definida como

$$\mathbf{X}(k) = [\mathbf{x}(k) \ \mathbf{x}(k-1) \ \cdots \ \mathbf{x}(k-D)], \quad (31)$$

onde  $\mathbf{x}(k) = [x(k) \ x(k-1) \ \cdots \ x(k-M+1)]^T$  é o vetor do sinal de entrada.

O problema de minimização com restrição mostrado em (30) pode ser convertido na seguinte versão sem restrição de forma equivalente

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}(k+1)} \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)] &= \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{w}(k) \\ &\quad - \mathbf{w}^H(k)\mathbf{w}(k+1) + \mathbf{w}^H(k)\mathbf{w}(k) \\ &\quad + \text{Re} \{ \boldsymbol{\lambda}_0^H(k) [\mathbf{X}^T(k)\mathbf{w}^*(k+1) - (1 - \mu)\mathbf{X}^T(k)\mathbf{w}^*(k)] \} \\ &\quad + \text{Re} \{ \boldsymbol{\lambda}_1^H(k) [\mathbf{C}^H\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{f}] \}. \end{aligned} \quad (32)$$

Zerando-se o gradiente de (32) em relação a  $\mathbf{w}^*(k+1)$ , tem-se

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \frac{1}{2}\mathbf{X}(k)\boldsymbol{\lambda}_0^* - \frac{1}{2}\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}_1. \quad (33)$$

Usando (33) na segunda restrição de (30), tem-se

$$\mathbf{C}^H\mathbf{w}(k) - \frac{1}{2}\mathbf{C}^H\mathbf{X}(k)\boldsymbol{\lambda}_0^* - \frac{1}{2}\mathbf{C}^H\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}_1 = \mathbf{f}, \quad (34)$$

logo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_1 &= 2 [\mathbf{C}^H\mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H\mathbf{w}(k) - [\mathbf{C}^H\mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H\boldsymbol{\lambda}_0^* \\ &\quad - 2 [\mathbf{C}^H\mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (35)$$

Após substituir (35) em (33), é possível escrever

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) - \frac{1}{2}\mathbf{X}(k)\boldsymbol{\lambda}_0^* - \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{X}(k)\boldsymbol{\lambda}_0^* \\
&\quad + \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Para encontrar o valor de  $\boldsymbol{\lambda}_0$ , primeiro é necessário obter o conjugado de  $\mathbf{w}(k+1)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^*(k+1) &= \mathbf{w}^*(k) - \frac{1}{2}\mathbf{X}^*(k)\boldsymbol{\lambda}_0 - \left\{ \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \right\}^* \mathbf{w}^*(k) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \right\}^* \mathbf{X}^*(k)\boldsymbol{\lambda}_0 \\
&\quad + \left\{ \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f} \right\}^*,
\end{aligned} \tag{37}$$

Considerando que a restrição  $\mathbf{C}^H \mathbf{w}(k+1) = \mathbf{f}$  é imposta em todas as iterações, ou seja, essa igualdade ocorre tanto para a equação de atualização  $\mathbf{w}(k+1)$ , quanto para iteração anterior  $\mathbf{w}(k+1-1) = \mathbf{w}(k)$ . Dessa forma, pode-se considerar que  $\mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) = \mathbf{f}$ . Dessa forma, é possível substituir a primeira restrição de (30) na (37), tal que  $\mathbf{X}^T(k)\mathbf{w}^*(k+1) = (1-\mu)\mathbf{X}^T(k)\mathbf{w}^*(k)$ , então

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^T(k)\mathbf{w}^*(k) - \mu\mathbf{X}^T(k)\mathbf{w}^*(k) &= \mathbf{X}^T(k)\mathbf{w}^*(k) - \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(k)\mathbf{X}^*(k)\boldsymbol{\lambda}_0 \\
&\quad - \mathbf{X}^T(k) \left\{ \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \right\}^* \mathbf{w}^*(k) \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(k) \left\{ \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \right\}^* \mathbf{X}^*(k)\boldsymbol{\lambda}_0 \\
&\quad + \mathbf{X}^T(k) \left\{ \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \right\}^* \mathbf{w}^*(k) \\
-\mu\mathbf{X}^T(k)\mathbf{w}^*(k) &= -\frac{1}{2}\mathbf{X}^T(k) \left\{ \underbrace{\mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H}_{=\mathbf{P}} \right\}^* \mathbf{X}^*(k)\boldsymbol{\lambda}_0 \\
\frac{1}{2}\mathbf{X}^T(k)\mathbf{P}^* \mathbf{X}^*(k)\boldsymbol{\lambda}_0 &= \mu\mathbf{X}^T(k)\mathbf{w}^*(k),
\end{aligned} \tag{38}$$

Para encontrar a expressão  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}_0^*$ , deve-se encontrar o conjugado da equação (38), portanto

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}_0^* = \mu \left\{ \mathbf{X}^H(k)\mathbf{P}\mathbf{X}(k) + \delta_D \mathbf{I}_D \right\}^{-1} \mathbf{X}^H(k)\mathbf{w}(k), \tag{39}$$

onde  $\delta_D$  é um pequeno número positivo utilizado para regularizar o inverso de  $\left\{ \mathbf{X}^H(k)\mathbf{P}\mathbf{X}(k) \right\}^{-1}$

e  $\mathbf{I}_D$  é uma matriz identidade de  $D \times D$  elementos. Aplicando a equação (39) em (36), encontra-se a equação final de atualização

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) - \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) \\
&\quad - \mu \mathbf{X}(k) \{ \mathbf{X}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{X}(k) + \delta_D \mathbf{I}_D \}^{-1} \mathbf{X}^H(k) \mathbf{w}(k) \\
&\quad + \mu \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{X}(k) \{ \mathbf{X}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{X}(k) + \delta_D \mathbf{I}_D \}^{-1} \mathbf{X}^H(k) \mathbf{w}(k) \\
&\quad + \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f} \\
\mathbf{w}(k+1) &= \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H]}_{=\mathbf{P}} \mathbf{w}(k) \\
&\quad - \mu \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H]}_{=\mathbf{P}} \mathbf{X}(k) \{ \mathbf{X}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{X}(k) + \delta_D \mathbf{I}_D \}^{-1} \mathbf{X}^H(k) \mathbf{w}(k) \\
&\quad + \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f} \\
\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{P} \mathbf{w}(k) - \mu \mathbf{P} \mathbf{X}(k) \{ \mathbf{X}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{X}(k) + \delta_D \mathbf{I}_D \}^{-1} \mathbf{X}^H(k) \mathbf{w}(k) \\
&\quad + \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f} \\
\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{P} \left[ \mathbf{w}(k) - \mu \mathbf{X}(k) \{ \mathbf{X}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{X}(k) + \delta_D \mathbf{I}_D \}^{-1} \mathbf{X}^H(k) \mathbf{w}(k) \right] \\
&\quad + \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f} \tag{40}
\end{aligned}$$

Para o caso de  $D = 0$ , a equação de atualização do CAP recai na equação de atualização do algoritmo CNLMS.

### 2.3 O Algoritmo RC-CLMS e RC-CNLMS

O algoritmo RC-CNLMS foi introduzido em [21]. A técnica de reuso de coeficientes é útil em situações de baixa razão sinal-ruído (SNR) e pode melhorar o desempenho em estado estacionário dos algoritmos de filtragem adaptativa, reduzindo a variância dos coeficientes adaptativos, bem como a sua taxa de convergência, especialmente em situações de alto nível de ruído. No entanto, o método RC requer dois parâmetros ajustáveis: o número  $L$  de vetores de coeficientes passados a serem usados na adaptação e um parâmetro  $\rho \in (0, 1]$  que controla o peso relativo dos vetores de coeficientes mais recentes em relação aos mais antigos. Esse parâmetro pode ser usado para equilibrar o desempenho em estado estacionário e a taxa de convergência do algoritmo, mas a flexibilidade trazida pelo RC requer um maior custo computacional. O aumento no número de vetores de coeficientes passados a serem usados melhora a capacidade de reutilização de coeficientes e melhora

a robustez ao ruído.

O algoritmo RC-CLMS resolve o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}(k+1)} \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l [\mathbf{w}^H(k+1) - \mathbf{w}^H(k-l)] [\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k-l)] \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{x}(k) = (1 - \mu\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2)\bar{y}(k) \\ \mathbf{C}^H\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{f} \end{cases}, \end{aligned} \quad (41)$$

onde o parâmetro  $\rho$  modula o peso relativo dos vetores mais recentes de  $\mathbf{w}(k-l)$  em relação aos mais antigos, de modo que quando  $\rho \rightarrow 1$ , todas as distâncias relativas aos vetores  $\mathbf{w}(k-l)$ , para  $l \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ , têm o mesmo peso, enquanto um valor menor de  $\rho$  dá mais destaque aos vetores de coeficientes mais recentes. O parâmetro  $\bar{y}(k)$  é dado por

$$\bar{y}(k) \triangleq \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l)\mathbf{x}(k) \quad (42)$$

$$\xi \triangleq \frac{1}{\sum_{l=0}^{L-1} \rho^l} \triangleq \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{se } \rho = 1 \\ \frac{1-\rho}{1-\rho^L}, & \text{se } \rho \neq 1 \end{cases} \quad (43)$$

É possível converter o problema com restrições em um sem restrições por meio da técnica dos multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}(k+1)} \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)] &= \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{w}(k+1) - \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{w}(k-l) \\ &\quad - \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l)\mathbf{w}(k+1) + \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l)\mathbf{w}(k-l) \\ &\quad + \text{Re} [\lambda_0^* \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{x}(k)] \\ &\quad - \text{Re} \left[ \lambda_0^* (1 - \mu\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2) \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l)\mathbf{x}(k) \right] \\ &\quad + \text{Re} \{ \boldsymbol{\lambda}_1^H [\mathbf{C}^H \mathbf{w}(k+1) - \mathbf{f}] \} \end{aligned} \quad (44)$$

Calculando-se o gradiente de  $\mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)]$ , tem-se:

$$\nabla_{\mathbf{w}^*(k+1)} \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)] = \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k+1) - \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k-l) + \frac{\lambda_0^*}{2} \mathbf{x}(k) + \frac{1}{2} \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}_1, \quad (45)$$

o qual, para atender a minimização da (41), a equação (45) deve ser igualada ao vetor nulo, então

$$\mathbf{w}(k+1) = \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k-l) - \frac{\lambda_0^* \xi}{2} \mathbf{x}(k) - \frac{1}{2} \xi \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}_1. \quad (46)$$

Para atender a segunda restrição da equação (41), deve-se realizar a operação  $\mathbf{C}^H \mathbf{w}(k+1) = \mathbf{f}$ , sendo assim

$$\mathbf{f} = \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k-l) - \frac{\lambda_0^* \xi}{2} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k) - \frac{1}{2} \xi \mathbf{C}^H \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}_1. \quad (47)$$

Dessa forma,  $\boldsymbol{\lambda}_1$  é dado por

$$\frac{1}{2} \xi \boldsymbol{\lambda}_1 = \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k-l) - \frac{\lambda_0^* \xi}{2} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k) - (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (48)$$

Aplicando a equação (48) em (46), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) &= \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k-l) - \frac{\lambda_0^* \xi}{2} \mathbf{x}(k) + \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \\ &\quad - \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k-l) + \frac{\lambda_0^* \xi}{2} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (49)$$

Recorre-se à seguinte igualdade

$$\xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \underbrace{\mathbf{C}^H \mathbf{w}(k-l)}_{=\mathbf{f}} = \frac{1}{\sum_{l=0}^{L-1} \rho^l} \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{f} = \mathbf{f}, \quad (50)$$

então, a parcela  $\mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}$  da (49) pode ser reescrita como

$$\mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} = \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k-l). \quad (51)$$

Sendo assim, a (49) pode ser definida como

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(k+1) &= \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k-l) - \frac{\lambda_0^* \xi}{2} \mathbf{x}(k) + \frac{\lambda_0^* \xi}{2} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k) \\
&\quad + \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k-l) \\
&\quad - \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k-l) \\
\mathbf{w}(k+1) &= \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k-l) - \frac{\lambda_0^* \xi}{2} \mathbf{x}(k) + \frac{\lambda_0^* \xi}{2} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k), \quad (52)
\end{aligned}$$

Aplicando-se o operador  $(\cdot)^H$  na equação (52), tem-se

$$\mathbf{w}(k+1)^H = \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l) - \frac{\lambda_0 \xi}{2} \mathbf{x}^H(k) + \frac{\lambda_0 \xi}{2} \mathbf{x}^H(k) \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H. \quad (53)$$

Aplicando-se a segunda restrição da (41) em (53), tem-se

$$\begin{aligned}
(1 - \mu \|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2) \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l) \mathbf{x}(k) &= \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l) \mathbf{x}(k) - \frac{\lambda_0 \xi}{2} \mathbf{x}^H(k) \mathbf{x}(k) \\
&\quad + \frac{\lambda_0 \xi}{2} \mathbf{x}^H(k) \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k) \\
-\mu \|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2 \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l) \mathbf{x}(k) &= -\frac{\lambda_0 \xi}{2} \mathbf{x}^H(k) \underbrace{\{\mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H\}}_{=\mathbf{P}} \mathbf{x}(k) \\
-\mu \|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2 \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l) \mathbf{x}(k) &= -\frac{\lambda_0 \xi}{2} \mathbf{x}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \\
-\mu \|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2 \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l) \mathbf{x}(k) &= -\frac{\lambda_0 \xi}{2} \|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2 \\
\frac{\lambda_0 \xi}{2} &= \mu \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l) \mathbf{x}(k) \\
\frac{\lambda_0 \xi}{2} &= \bar{y}(k) \\
\frac{\lambda_0^* \xi}{2} &= \bar{y}^*(k). \quad (54)
\end{aligned}$$



Aplicando-se (54) em (52), após algumas manipulações, obtém-se

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{P} \left[ \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k-l) - \mu \bar{y}^*(k) \mathbf{x}(k) \right] + \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}, \quad (55)$$

Para a derivação do RC-CNLMS, basta modificar de forma simples o problema apresentado em (41) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}(k+1)} \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l [\mathbf{w}^H(k+1) - \mathbf{w}^H(k-l)] [\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k-l)] \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} \mathbf{w}^H(k+1) \mathbf{x}(k) = (1 - \mu) \bar{y}(k) \\ \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k+1) = \mathbf{f} \end{cases} \end{aligned} \quad (56)$$

Seguindo os mesmos passos do RC-CLMS, obtém-se a equação de atualização do RC-CNLMS dada por

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{P} \left[ \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}(k-l) - \frac{\mu \bar{y}^*(k) \mathbf{x}(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{P}}^2 + \delta_{\text{RC-CNLMS}}} \right] + \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}, \quad (57)$$

onde

$$\bar{y}(k) = \xi \sum_{l=0}^{L-1} \rho^l \mathbf{w}^H(k-l) \mathbf{x}(k) \quad (58)$$

sendo

$$\xi = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{se } \rho = 1 \\ \frac{1-\rho}{1-\rho^L}, & \text{se } \rho \neq 1 \end{cases} \quad (59)$$

## 2.4 O Algoritmo IPCNLMS

O algoritmo IPNLMS, proposto em [16], é capaz de reduzir o tempo de convergência, alcançando velocidades de convergência mais rápidas do que as dos algoritmos proporcionais, o IPNLMS atribui diferentes tamanhos de passo (fatores de convergência) a cada coeficiente do filtro adaptativo, e esses fatores são proporcionais às suas respectivas magnitudes. A distribuição da “atualização de energia” é implementada pela matriz diagonal  $\mathbf{G}(k)$ . Como resultado, os coeficientes com magnitudes maiores são ajustados mais rapidamente do que os menores.

Conjugando-se as estratégias do IPNLMS e do CNLMS, este trabalho propõe o IPCNLMS, capaz de resolver o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}(k+1)} \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|_{\mathbf{G}^{-1}(k)}^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{x}(k) = (1 - \mu) \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k+1) = \mathbf{f} \end{cases}, \end{aligned} \quad (60)$$

onde  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}^2 \triangleq \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}_+$  é o fator de convergência e a matriz diagonal  $\mathbf{G}(k) \in \mathbb{R}^{M \times M}$  é responsável pela distribuição da “atualização de energia” visando aumentar a taxa de convergência.

A estratégia da proporcionalidade, popular na área de filtragem adaptativa [34], não é comumente adotada em um cenário de conformação de feixe (*beamforming*) adaptativo. Isso se deve ao fato de que a derivação tradicional de algoritmos de conformação adaptativa de feixe, por via de uma aproximação estocástica do vetor de gradiente, não permite uma introdução direta da matriz de ponderação  $\mathbf{G}(k)$ . O problema (60) descreve uma minimização de distância ponderada com restrições que envolve tal questão.

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange para funções de custo complexas, a equação (60) pode ser descrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)] &= \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{G}^{-1}(k)\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{G}^{-1}(k)\mathbf{w}(k) \\ &\quad - \mathbf{w}^H(k)\mathbf{G}^{-1}(k)\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}^H(k)\mathbf{G}^{-1}(k)\mathbf{w}(k) \\ &\quad + \text{Re} \{ \lambda_0^* \mathbf{w}^H(k+1)\mathbf{x}(k) \} - \text{Re} \{ \lambda_0^* (1 - \mu) \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k) \} \\ &\quad + \text{Re} \{ \boldsymbol{\lambda}_1^H \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k+1) \} - \text{Re} \{ \boldsymbol{\lambda}_1^H \mathbf{f} \}, \end{aligned} \quad (61)$$

onde  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  e  $\boldsymbol{\lambda}_1 \in \mathbb{C}^p$  são os multiplicadores de Lagrange.

A matriz  $\mathbf{G}(k)$  permite que  $\mathbf{G}(k)\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{G}(k)\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{G}(k)$  e o mesmo vale para  $\mathbf{G}^{-1}(k)$ , que também é uma matriz diagonal. A minimização de (60) é realizada zerando-se seu gradiente, isto é  $\frac{\partial \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)]}{\partial \mathbf{w}^*(k+1)} = \mathbf{0}$ , dessa maneira

$$\nabla_{\mathbf{w}^*(k+1)} \mathcal{F}[\mathbf{w}(k+1)] = \mathbf{G}^{-1}(k)\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{G}^{-1}(k)\mathbf{w}(k) + \frac{1}{2}\lambda_0^* \mathbf{x}(k) + \frac{1}{2}\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}_1 = \mathbf{0} \quad (62)$$

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \frac{1}{2}\lambda_0^* \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) - \frac{1}{2}\mathbf{G}(k)\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}_1, \quad (63)$$

onde (63) é a equação de atualização. Aplicando a segunda restrição de (60) em (63), a última parcela da equação (63) pode ser calculada como

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) - \frac{1}{2} \lambda_0^* \mathbf{C}^H \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) - \frac{1}{2} \mathbf{G}(k) \mathbf{C}^H \mathbf{C} \lambda_1 \\
\frac{1}{2} \mathbf{G}(k) (\mathbf{C}^H \mathbf{C}) \lambda_1 &= \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) - \frac{1}{2} \lambda_0^* \mathbf{C}^H \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) - \mathbf{f} \\
\frac{1}{2} \mathbf{G}(k) \lambda_1 &= (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) - \frac{1}{2} \lambda_0^* (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) \\
&\quad - (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \\
\frac{1}{2} \mathbf{G}(k) \mathbf{C} \lambda_1 &= \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) - \frac{1}{2} \lambda_0^* \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) \\
&\quad - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}.
\end{aligned} \tag{64}$$

Aplicando (64) na equação de atualização (63), tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{w}(k) \\
&\quad - \frac{1}{2} \lambda_0^* \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) + \frac{1}{2} \lambda_0^* \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) \\
&\quad + \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \\
\mathbf{w}(k+1) &= \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H]}_{\mathbf{P}} \mathbf{w}(k) \\
&\quad - \frac{1}{2} \lambda_0^* \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H]}_{\mathbf{P}} \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) \\
&\quad + \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \\
\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{P} \mathbf{w}(k) - \frac{1}{2} \lambda_0^* \mathbf{P} \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}.
\end{aligned} \tag{65}$$

Para aplicar a segunda restrição da equação (60), é necessário que encontrar primeiramente  $\mathbf{w}^H(k+1)$ , portanto

$$\mathbf{w}^H(k+1) = \mathbf{w}^H(k) \mathbf{P}^H - \frac{1}{2} \lambda_0 \mathbf{x}^H(k) \mathbf{G}^H(k) \mathbf{P}^H + \mathbf{f}^H (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H, \tag{66}$$

sabendo-se que  $\mathbf{P}^H = \mathbf{P}$  e  $\mathbf{G}^H(k) = \mathbf{G}(k)$  e multiplicando por  $\mathbf{x}(k)$ ,

$$\mathbf{w}^H(k+1) \mathbf{x}(k) = \mathbf{w}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) - \frac{1}{2} \lambda_0 \mathbf{x}^H(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) + \mathbf{f}^H (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k). \tag{67}$$

Aplicando agora a segunda restrição da equação (60), obtém-se

$$\begin{aligned}
(1 - \mu) \mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k) &= \mathbf{w}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) - \frac{1}{2} \lambda_0 \mathbf{x}^H(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \\
&\quad + \mathbf{w}^H \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k) \\
\mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k) - \mu \mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k) &= \mathbf{w}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) - \frac{1}{2} \lambda_0 \mathbf{x}^H(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \\
&\quad + \mathbf{w}^H \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k) \\
\frac{1}{2} \lambda_0 \mathbf{x}^H(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) &= \mu \mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \\
&\quad - \mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}^H \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{x}(k) \\
\frac{1}{2} \lambda_0 \underbrace{\mathbf{x}^H(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k)}_{\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{G}(k)\mathbf{P}}^2} &= \mu \mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}^H(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \\
&\quad - \mathbf{w}^H(k) \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H]}_{\mathbf{P}} \mathbf{x}(k) \\
\frac{1}{2} \lambda_0 \|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{G}(k)\mathbf{P}}^2 &= \underbrace{\mu \mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k)}_{=-e(k)} \\
\frac{1}{2} \lambda_0^* &= \frac{-\mu e^*(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{G}(k)\mathbf{P}}^2}. \tag{68}
\end{aligned}$$

Substituindo-se (68) em (65), a equação de atualização passa a ser escrita como

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{P} \mathbf{w}(k) + \frac{\mu e^*(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{G}(k)\mathbf{P}}^2 + \delta_{\text{IPCNLMS}}} + \mathbf{z}, \tag{69}$$

onde  $\mathbf{z} \triangleq \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}$  e  $\delta_{\text{IPCNLMS}}$  é um parâmetro de regularização.

Os elementos ajustáveis da matriz  $\mathbf{G}(k)$  em (69) fornecem mais flexibilidade ao projetista. A fim de melhorar a taxa de convergência, foi adotada a seguinte escolha, conforme indicado em [16]

$$g_i(k) = \frac{1 - \alpha}{2M} + (1 + \alpha) \frac{|w_i(k)|}{2\|\mathbf{w}(k)\|_1 + \varepsilon}, \tag{70}$$

onde  $i \in 0, 1, 2, \dots, M$ , sendo  $M$  a quantidade de sensores,  $\|\mathbf{w}(k)\|_1$  é a norma  $\ell_1$ ,  $\varepsilon$  é um número positivo pequeno adicionado para fins de regularização e  $\alpha$  é um parâmetro ajustável. Quando  $\mathbf{G}(k) = \mathbf{I}$ , o algoritmo IPNLMS se transforma no algoritmo NLMS. A técnica pode ser facilmente estendida para os algoritmos IPCNLMS e CNLMS.

Como explicado em [16], há uma relação entre os parâmetros de regularização dos

algoritmos IPNLMS e NLMS, que também pode ser usada para os algoritmos IPCNLMS e CNLMS

$$\delta_{\text{IPCNLMS}} = \left[ \frac{(1-\alpha)}{2M} \right] \delta_{\text{CNLMS}}, \quad (71)$$

onde  $-1 \leq \alpha \leq 1$ . Boas escolhas de  $\alpha$  são 0 ou  $-0.5$  [16, 35]. Essa relação pode ser verificada ao observar o comportamento do algoritmo no instante zero, quando  $\mathbf{w}(k) = 0$ .

Em [36], algumas características importantes do chamado algoritmo Pt-NLMS são demonstradas. Essas propriedades também são aplicáveis ao algoritmo IPCNLMS. A matriz  $\mathbf{G}(k)$  cria uma proporcionalidade entre o fator de convergência  $\mu$  e as magnitudes dos coeficientes adaptativos. Isso leva a uma taxa de convergência lenta para coeficientes de baixa magnitude e uma taxa de convergência mais rápida para coeficientes maiores. Portanto, em [36] sugere-se que o algoritmo Pt-NLMS explora a grande diferença de magnitude entre os coeficientes adaptativos e não necessariamente a esparsidade do sistema.

O IPCNLMS é expresso, resumidamente, no Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo IPCNLMS

---

**Dados de entrada:**  $\mu, \alpha, K, M$

**Inicialização:**

$$\delta_{\text{CNLMS}} = 1 \times 10^{-4}$$

$$\delta_{\text{IPCNLMS}} \leftarrow \left[ \frac{(1-\alpha)}{2M} \right] \delta_{\text{CNLMS}}$$

$$\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$$

$$\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H$$

$$\mathbf{w}(1) \leftarrow \mathbf{z}$$

**while** ( $k < K$ ) **do**

**while** ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) **do**

$$\quad \left| \quad g(i, i) = \frac{1-\alpha}{2M} + (1+\alpha) \frac{|w_i(k)|}{2\|\mathbf{w}(k)\|_1 + \varepsilon} \right.$$

**end**

$$\quad e(k) = -\mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k)$$

$$\quad \mathbf{w}(k+1) = \mathbf{P} \mathbf{w}(k) + \frac{\mu e^*(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{G}(k) \mathbf{P}}^2 + \delta_{\text{IPCNLMS}}} + \mathbf{z}$$

**end**

---

## 2.5 O Algoritmo IPCNLMS- $\ell_0$

Para acelerar a convergência e explorar a esparsidade do sistema, é possível modificar a matriz diagonal  $\mathbf{G}(k)$  usando a norma  $\ell_0$ , como descrito em [35]. A norma  $\ell_0$  identifica a quantidade de elementos não nulos do vetor e usualmente utiliza-se a seguinte aproximação [37]

$$\|\mathbf{w}(k)\|_0 \approx \sum_{i=1}^{M-1} 1 - e^{-\beta|w_i(k)|}, \quad (72)$$

onde  $\beta$  é o fator de atração zero. Para reduzir a complexidade computacional, especialmente referente ao termo  $e^{-\beta|w_i(k)|}$ , considera-se a expansão da série de Taylor de primeira ordem das funções exponenciais [37], tal que:

$$e^{-\beta|w_i(k)|} = \begin{cases} 1 - \beta|w_i(k)| & \text{para } |w_i(k)| \leq \frac{1}{\beta} \\ 0 & \text{para } |w_i(k)| > \frac{1}{\beta} \end{cases}. \quad (73)$$

Dessa forma, o intervalo de atuação do fator de atração para zero nos coeficientes do filtro é entre  $[-\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta}]$ . Em [35], [37] e [38], discute-se que um  $\beta$  maior significa uma atração mais forte para zero e uma convergência rápida para coeficientes pequenos. Ao reduzir o valor de  $\beta$ , aumenta-se o intervalo no qual os coeficientes que podem ser atraídos a zero, mas afeta a sua convergência, tornando-a mais lenta.

Com a aplicação da norma  $\ell_0$ , os elementos de  $\mathbf{G}(k)$ , apresentados em [35], podem ser definidos como

$$g_i(k) = \frac{1 - \alpha}{2M} + (1 + \alpha) \frac{1 - e^{-\beta|w_i(k)|}}{2\|\mathbf{w}(k)\|_0 + \varepsilon}, \quad (74)$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, M$ , onde a pequena constante positiva  $\varepsilon$  desempenha o mesmo papel que na equação (70).

O IPCNLMS- $\ell_0$  é expresso, resumidamente, no Algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2:** Algoritmo IPCNLMS- $\ell_0$ 


---

**Dados de entrada:**  $\mu, \alpha, K, M$

**Inicialização:**

$$\delta_{\text{CNLMS}} = 1 \times 10^{-4}$$

$$\delta_{\text{IPCNLMS}} \leftarrow \left\lceil \frac{(1-\alpha)}{2M} \right\rceil \delta_{\text{CNLMS}}$$

$$\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$$

$$\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H$$

$$\mathbf{w}(1) \leftarrow \mathbf{z}$$

**while** ( $k < K$ ) **do**

**while** ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) **do**

$$\quad \left| \quad g(i, i) = \frac{1-\alpha}{2M} + (1 + \alpha) \frac{1 - e^{-\beta |w_i(k)|}}{2 \|\mathbf{w}(k)\|_0 + \varepsilon}$$

**end**

$$e(k) = -\mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{P} \mathbf{w}(k) + \frac{\mu e^*(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k)}{\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{G}(k) \mathbf{P}}^2 + \delta_{\text{IPCNLMS}}} + \mathbf{z}$$

**end**

---

### 3 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados das simulações para avaliar o desempenho dos algoritmos propostos para conformação de feixe adaptativo utilizando três tipos de arranjo: ULA (*Uniform Linear Array*) com 15 sensores, URA (*Uniform Rectangular Array*) contemplando 7 colunas e 9 linhas, totalizando 63 elementos e SHA (*Standard Hexagonal Array*) com 6 sensores por aresta do hexágono, chegando a um total de 91 elementos, conforme se observa na Figura 6.

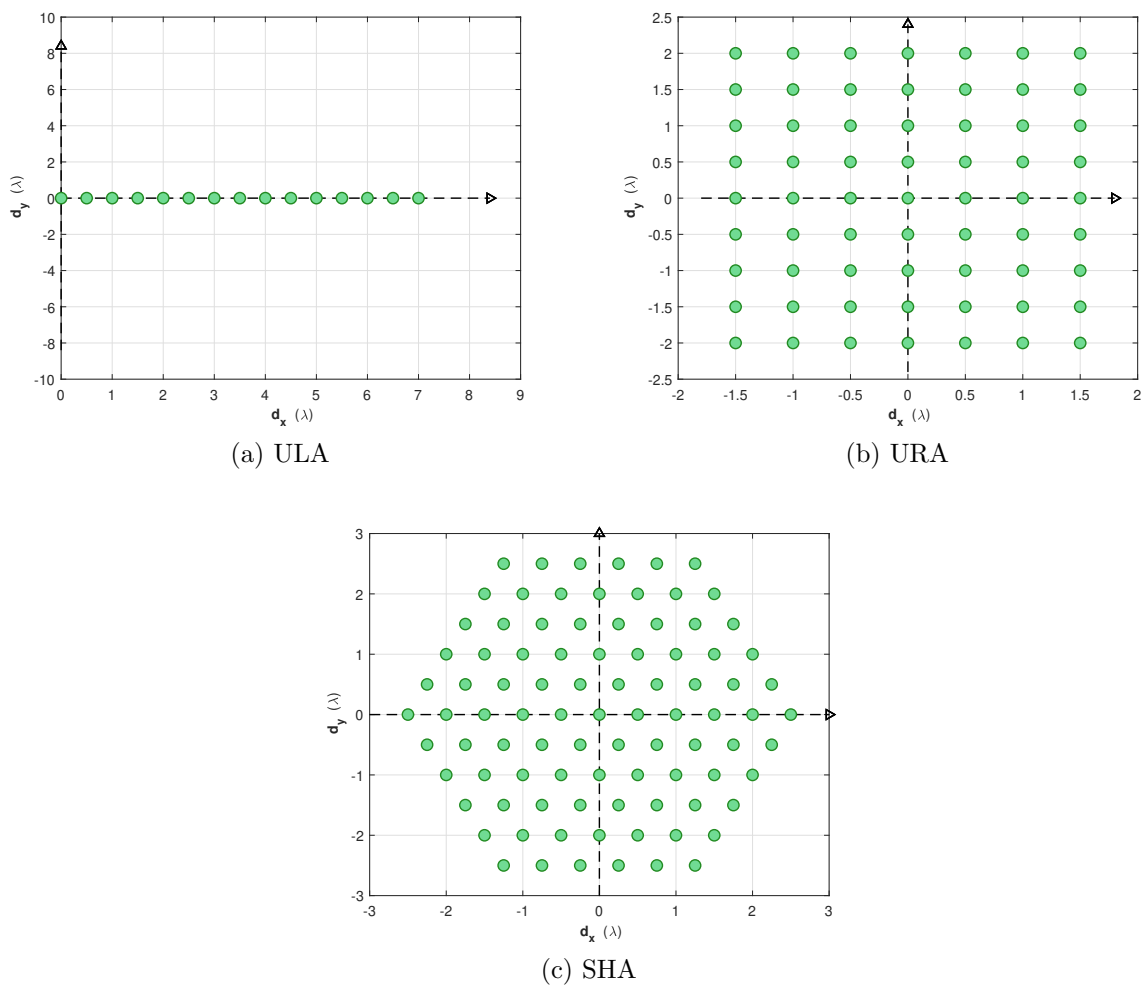


Figura 6: - Distribuição dos sensores nos arranjos com espaçamento de  $\frac{\lambda}{2}$  entre eles.

Para todas as simulações citadas acima, os elementos dos arranjos são espaçados em um comprimento de meia onda, ou seja,  $\Delta_x = \Delta_y = \frac{\lambda}{2}$ . Os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  foram comparados com o CNLMS, CAPA e o RC-CNLMS para avaliar seu potencial de melhoria.



O objetivo das simulações é garantir um conformador de feixe que atinja um ganho de 0 dB na direção de interesse e que os sinais oriundos de fontes interferentes sejam atenuados. Para os arranjos URA e SHA, nos quais os ângulos de zênite podem diferir de  $90^\circ$ , foram realizados dois tipos de simulação, um levando em consideração um zênite fixado para todas as direções de azimute e outro alterando os valores de  $\phi$  para cada  $\theta$ , de maneira a simular um caso mais real, onde os ângulos de elevação não são fixos. Na primeira simulação, o diagrama de radiação é apresentado da forma habitual, com as variações dos ângulos de azimute para um dado zênite fixo e o ganho em cada direção. Na segunda, utiliza-se um gráfico de superfície, demonstrando seu ganho em cada par de direção  $(\theta_i, \phi_i)$ , sendo que, para isso, utiliza-se uma escala de cores.

Neste trabalho, o desempenho de cada um dos algoritmos é verificado pela sua velocidade de convergência através da média da energia do erro de saída (*Mean Output Error*) do filtro adaptativo e sua capacidade de atenuar sinais interferentes enquanto possibilita obter o máximo de ganho na direção desejada. A qualidade do sinal de interesse foi avaliado através de seu SINR (*Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio*).

Um ponto importante a ser mencionado é que a escolha do passo de convergência,  $\mu$ , foi baseada no intuito de atingir o mesmo nível de MOE (*Mean Output Energy* em inglês) em estado estacionário para todos os algoritmos simulados. Todas as simulações foram feitas utilizando 500 experimentos independentes de Monte Carlo, com 800 iterações em cada um deles e a variância do ruído aditivo foi definida como  $\sigma_n^2 = 10^{-6}$  e a energia do SOI foi definida como 40 dB abaixo da energia dos *jammers*/interferidores.

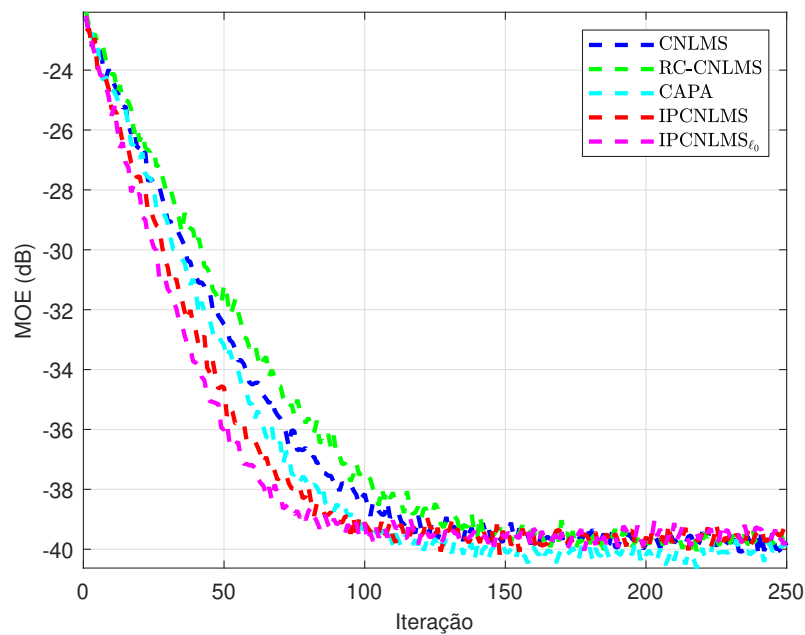
### 3.1 Arranjo Linear Uniforme

O arranjo linear uniforme com 15 sensores ( $M = 15$ ), conforme apresentado na Figura 6a, recebe cinco sinais analíticos, sendo um sinal de interesse e quatro sinais de fontes interferentes. O sinal de interesse (SOI) incide em  $\theta_1 = 90^\circ$  e as quatro fontes interferentes chegam em  $\theta_2 = 35^\circ$ ,  $\theta_3 = 67^\circ$ ,  $\theta_4 = 123^\circ$  e  $\theta_5 = 148^\circ$ . O zênite para todas as direções é  $\phi = 90^\circ$ .

Os parâmetros considerados para cada algoritmo são dados pela Tabela 2.

Tabela 2: - Parâmetro utilizados para simulação do arranjo linear uniforme (ULA).

Parâmetro	CNLMS	RC-CNLMS	CAPA	IPCNLMS	IPCNLMS- $\ell_0$
$\mu$	0.1000	0.2200	0.0545	0.1300	0.1480
$\alpha$	-	-	-	-0.5	-0.5
$D$	-	-	2	-	-
$\rho$	-	0.60	-	-	-
$L$	-	15	-	-	-
$\beta$	-	-	-	-	20

Figura 7: - Desempenho dos algoritmos em relação ao *Mean Output Error* (MOE) para o arranjo do tipo ULA.

A Figura 7 representa a comparação de desempenho dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, CAPA, IPCNLMS, IPCNLMS- $\ell_0$  em relação à média de energia do erro do sinal de saída do arranjo durante as primeiras 250 iterações. Os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  conseguem garantir o mesmo nível de MOE quando comparados com os outros algoritmos, porém ambos convergem mais rapidamente, sendo que o IPCNLMS- $\ell_0$  obtém uma convergência mais rápida, pela utilização da norma  $\ell_0$ . Pode-se observar que na iteração  $k = 150$  todos os algoritmos já atingiram o regime permanente. Devido à sua rápida convergência, os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  atingem o regime permanente na iteração  $k = 120$ .

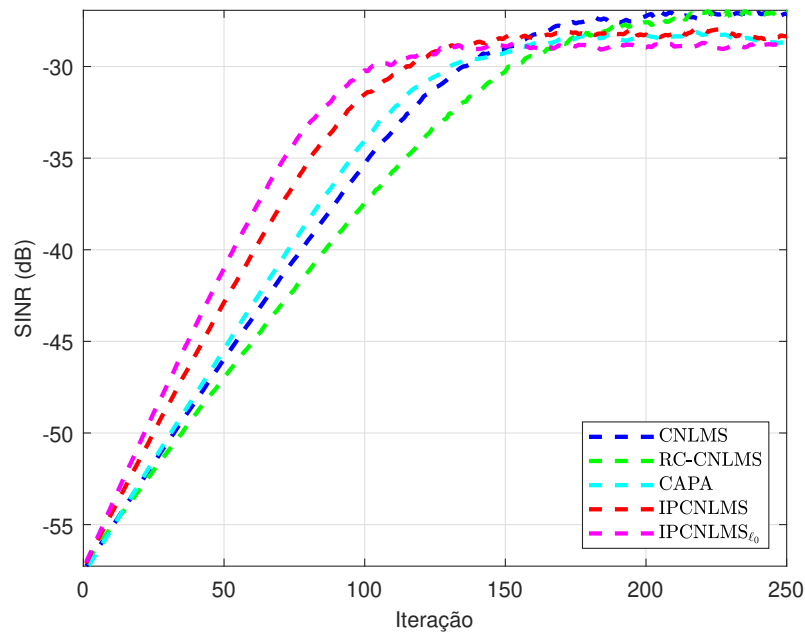


Figura 8: - Comparação de desempenho da razão sinal-interferência-mais-ruído (SINR) dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  em relação à sua aplicação à síntese do arranjo do tipo ULA.

A Figura 8 ilustra a relação sinal-interferência-mais-ruído (SINR) dos algoritmos propostos em comparação com o CNLMS, CAPA e RC-CNLMS. Todos os algoritmos atingem valores próximos a -28 dB, embora os níveis dos algoritmos CNLMS e RC-CNLMS sejam ligeiramente mais elevados. Em regime permanente, os desempenhos dos algoritmos CAPA com  $D=2$  e IPCNLMS são bastante semelhantes, sendo que o IPCNLMS apresenta uma curva mais inclinada e atinge o nível constante mais rapidamente. Embora o IPCNLMS- $\ell_0$  chegue ao regime permanente mais rapidamente, o nível de SINR é um pouco menor. Os resultados mostram que apenas o IPCNLMS- $\ell_0$  alcança seu nível final por volta de  $k = 125$ , enquanto o IPCNLMS atinge o regime permanente por volta de  $k = 150$ . Em contrapartida, os demais algoritmos alcançam seus valores constantes antes de  $k = 200$ . Embora tenham sido utilizadas 800 iterações para gerar os gráficos, apenas as primeiras 250 foram exibidas para apresentar os resultados de forma mais clara.

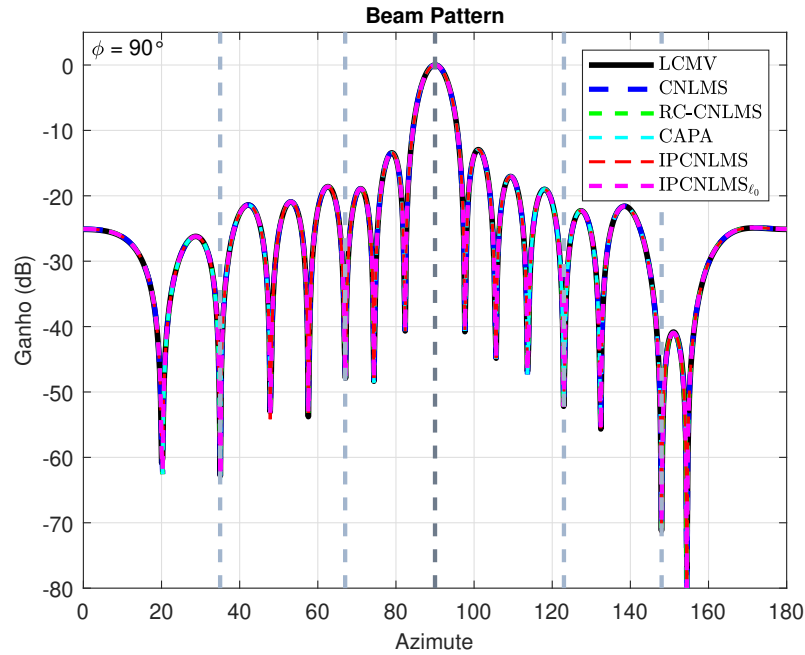


Figura 9: - Conformação de feixe resultante dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  em comparação com os algoritmos LCMV, CNLMS e RC-CNLMS aplicados à síntese do arranjo do tipo ULA.

O diagrama de radiação do arranjo para todos os algoritmos, incluindo o LCMV, que mostra a solução ótima para a simulação, é exibida na Figura 9, demonstrando o resultado do conformador de feixe adaptativo. No gráfico, a linha vertical mais escura indica o azimute da direção de interesse, enquanto as linhas verticais mais claras representam os azimutes das direções das fontes interferentes. É possível observar que a curva de todos os algoritmos alcança um ganho de 0 dB para a direção de interesse e atenua os sinais das fontes interferentes.

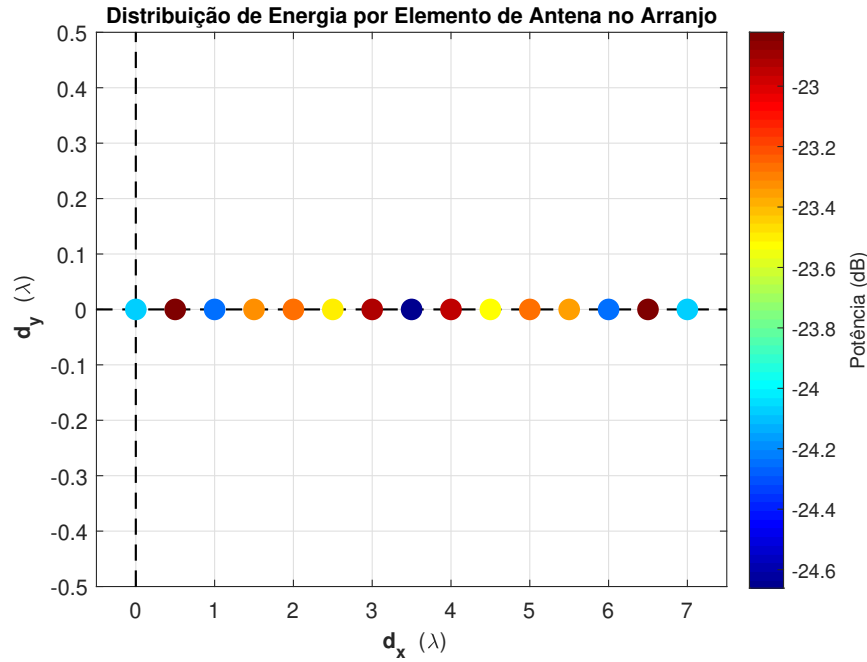


Figura 10: - Distribuição de energia em cada elemento de antena do arranjo do tipo ULA.

Conforme evidenciado pelo diagrama de radiação, todos os algoritmos apresentam desempenho semelhante à solução ótima do LCMV, sugerindo que os vetores de pesos  $\mathbf{w}(k)$  atingem valores praticamente idênticos para todos os algoritmos em regime permanente. Portanto, é provável que a distribuição de energia desses vetores também seja essencialmente a mesma. Sendo assim, a Figura 10 apresenta a distribuição de energia do vetor de pesos  $\mathbf{w}(k)$  ao longo da ULA. É possível observar que o elemento central do arranjo apresenta o menor nível de energia concentrada, enquanto os dois elementos adjacentes a ele possuem os maiores valores. A energia é distribuída pelo arranjo de forma espelhada a partir do elemento central, seguindo um padrão que faz com que o primeiro elemento apresente níveis de energia muito próximos ao do último elemento. Neste gráfico, é possível observar que o intervalo entre a energia máxima e a mínima não é grande, indicando assim, que os algoritmos proporcionais exploram a diferença de magnitude entre os coeficientes de  $\mathbf{w}(k)$  e não necessariamente a esparsidade do sistema.

### 3.2 Arranjo Retangular Uniforme

Para a URA, foram realizadas duas simulações que contemplam um arranjo com 7 colunas e 9 linhas, totalizando 63 sensores ( $M = 63$ ), conforme ilustrado na Figura 6b.

A primeira simulação apresenta o desempenho dos algoritmos para sinais advindos

de direções com zênite fixado em  $45^\circ$ , variando apenas o azimute. A segunda, foi realizada variando-se também o zênite para cada direção nas quais os sinais chegam no arranjo.

Para a primeira simulação, os parâmetros considerados para cada algoritmo são dados pela Tabela 3. O arranjo recebe cinco sinais analíticos, sendo um sinal de interesse e quatro sinais de fontes interferentes. O sinal de interesse (SOI) incide em  $\theta_1 = 90^\circ$  e as quatro fontes interferentes chegam em  $\theta_2 = 23^\circ$ ,  $\theta_3 = 52^\circ$ ,  $\theta_4 = 115^\circ$  e  $\theta_5 = 163^\circ$ . O zênite para todas as direções é  $\phi = 45^\circ$ .

Tabela 3: - Parâmetros dos algoritmos utilizados na síntese do arranjo retangular uniforme (URA) na simulação I.

Parâmetro	CNLMS	RC-CNLMS	CAPA	IPCNLMS	IPCNLMS- $\ell_0$
$\mu$	0.1280	0.2480	0.0700	0.1580	0.1800
$\alpha$	-	-	-	-0.5	-0.5
$D$	-	-	2	-	-
$\rho$	-	0.55	-	-	-
$L$	-	15	-	-	-
$\beta$	-	-	-	-	20

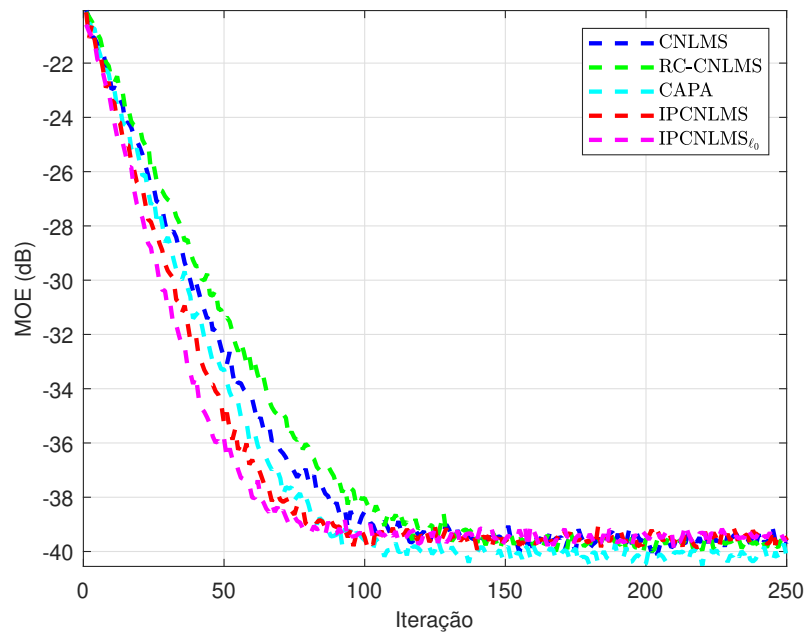


Figura 11: - Comparação do desempenho da média da energia do erro de saída (MOE) dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  aplicados à síntese do arranjo do tipo URA.

A Figura 11 apresenta a comparação de desempenho dos cinco algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, CAPA, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ , em relação à média de energia do erro do

sinal de saída (MOE) durante as primeiras 250 iterações. Os resultados mostram que os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  apresentam desempenhos equivalentes dos outros algoritmos, porém convergem mais rapidamente, com destaque para o IPCNLMS- $\ell_0$ , que utiliza a norma  $\ell_0$ . É possível notar que por volta da iteração  $k = 100$  os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  alcançam o regime permanente, enquanto os outros algoritmos demoram mais tempo, por exemplo o RC-CNLMS, que apenas chega ao regime permanente por volta da iteração  $k = 150$ .

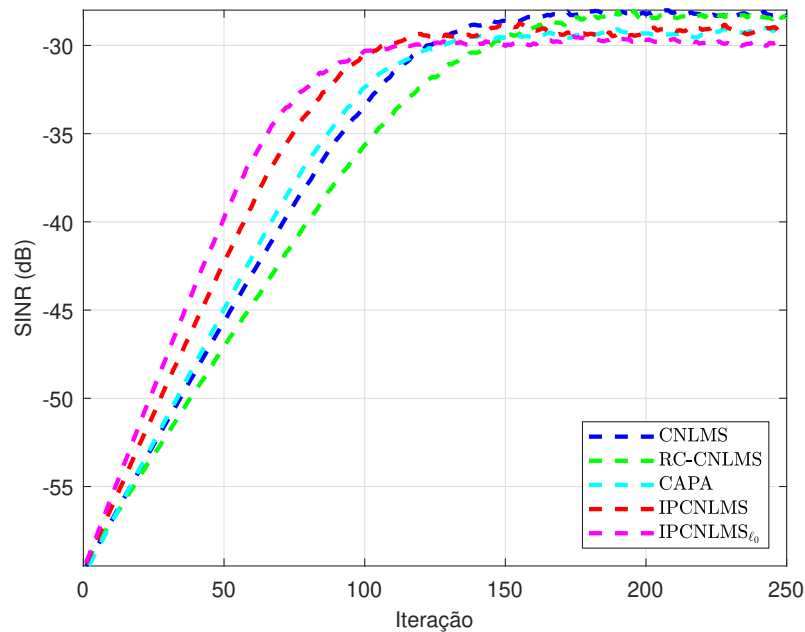


Figura 12: - Comparação do desempenho dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  em relação à sua razão sinal-interferência-mais-ruído (SINR) aplicados à síntese do arranjo do tipo URA.

Na Figura 8, observa-se uma comparação da razão sinal-interferência-mais-ruído (SINR) entre os algoritmos CNLMS, CAPA, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ . Constatou-se que todos os algoritmos obtiveram valores próximos a -29 dB, sendo que os algoritmos CNLMS e RC-CNLMS apresentaram valores levemente superiores. Mesmo assim, ao se analisar o desempenho em regime permanente, notou-se que os IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  alcançam sua estabilidade de forma mais rápida, por volta da iteração  $k = 100$ , enquanto o CNLMS e o RC-CNLMS convergem a partir da iteração  $k = 150$  aproximadamente. O CAPA, inicialmente, segue próximo ao CNLMS, mas por volta da iteração  $k = 120$ , ele já consegue atingir o regime permanente.

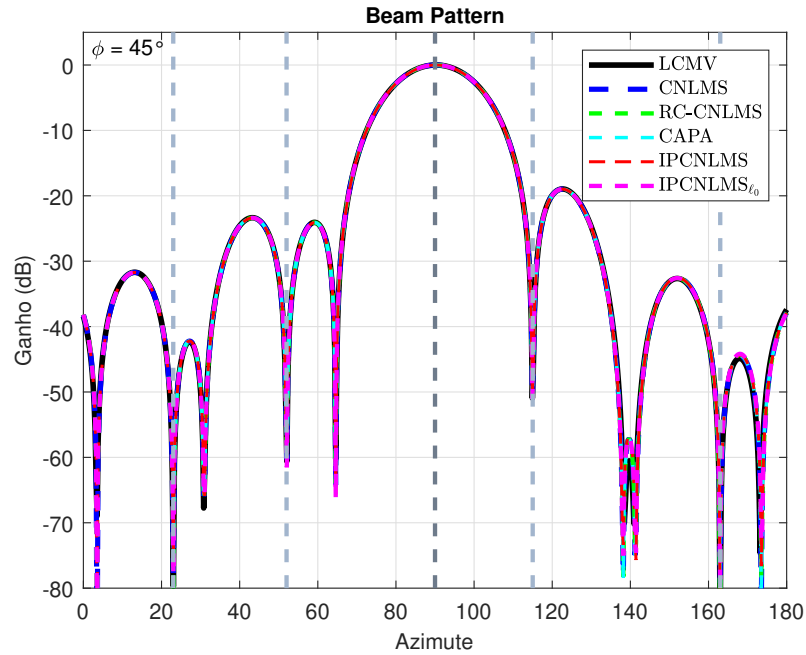


Figura 13: - Conformação de feixe adaptativo dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  em comparação com os algoritmos LCMV, CNLMS e RC-CNLMS aplicados à síntese do arranjo do tipo URA.

A Figura 13 ilustra o diagrama de radiação do arranjo do tipo URA através de um conformador de feixe adaptativo para todos os algoritmos, incluindo a solução ótima dada pelo LCMV. O lóbulo principal atinge seu valor máximo de 0 dB na direção do ângulo de interesse e os “nulos” dos lóbulos laterais conseguem atingir valores mínimos nas direções provenientes de fontes interferentes, indicadas pelas linhas verticais mais claras do gráfico.



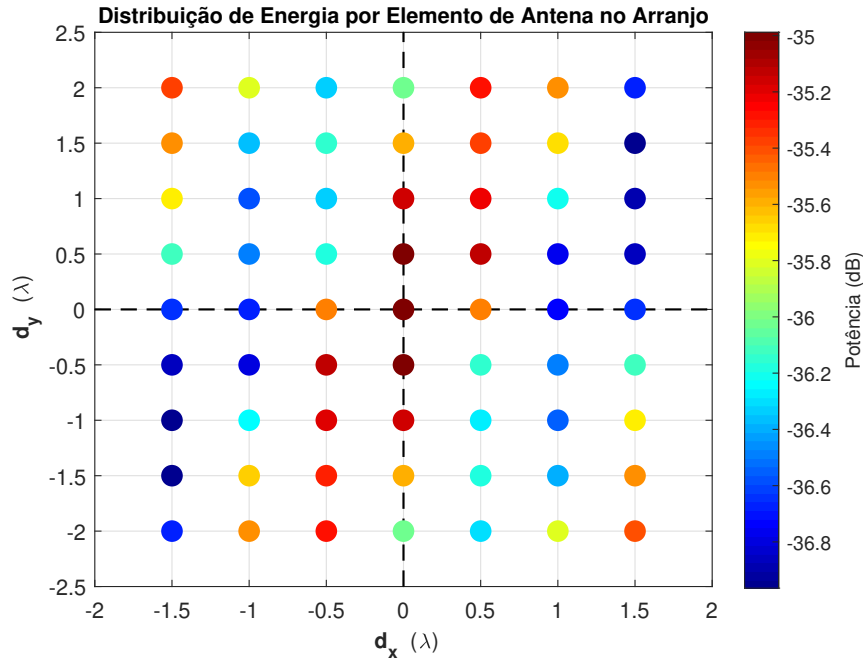


Figura 14: - Distribuição de energia em cada elemento de antena do arranjo do tipo URA

Como apresentado no diagrama de radiação, os algoritmos apresentam um desempenho muito próximo à solução ótimo do LCMV, dessa forma pode-se chegar à conclusão em que, no regime permanente, os vetores de pesos  $\mathbf{w}(k)$  obtêm praticamente os mesmos valores independentemente do algoritmo simulado. Dessa forma, a distribuição de energia dos vetores  $\mathbf{w}(k)$  serão basicamente as mesmas. Sendo assim, a Figura 14 pode ser considerada para qualquer um dos algoritmos testados. Por ela, é possível perceber que a energia se concentra no centro do arranjo e menos nas arestas dos quadrantes inferior esquerdo e superior direito. Uma certa simetria é observada, sendo possível perceber que a concentração de energia nos sensores da primeira coluna é a mesma que da última, porém de forma invertida, sendo que o primeiro sensor da primeira linha equivale ao nível de energia do último sensor da última linha. Isso ocorre para as demais colunas do arranjo. A diferença de potência entre o valor máximo e mínimo é de 1,8 dB, evidenciando que os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  não exploram a esparsidade do sistema, mas sim a discrepância de magnitude entre os coeficientes do vetor  $\mathbf{w}(k)$ .

Para a segunda simulação, os parâmetros considerados para cada algoritmo são dados pela Tabela 4. O arranjo recebe cinco sinais analíticos, sendo um sinal de interesse e quatro sinais de fontes interferentes. O sinal de interesse (SOI) incide em  $(\theta_1, \phi_1) = (110^\circ, -30^\circ)$  e as quatro fontes interferentes chegam em  $(\theta_2, \phi_2) = (20^\circ, 25^\circ)$ ,  $(\theta_3, \phi_3) =$

$(33^\circ, -20^\circ)$ ,  $(\theta_4, \phi_4) = (123^\circ, 80^\circ)$  e  $(\theta_5, \phi_5) = (148^\circ, -5^\circ)$ .

Tabela 4: - Parâmetros dos algoritmos utilizados na síntese do arranjo retangular uniforme (URA) na simulação II.

Parâmetro	CNLMS	RC-CNLMS	CAPA	IPCNLMS	IPCNLMS- $\ell_0$
$\mu$	0.1270	0.2470	0.0700	0.1580	0.1780
$\alpha$	-	-	-	-0.5	-0.5
$D$	-	-	2	-	-
$\rho$	-	0.55	-	-	-
$L$	-	15	-	-	-
$\beta$	-	-	-	-	20

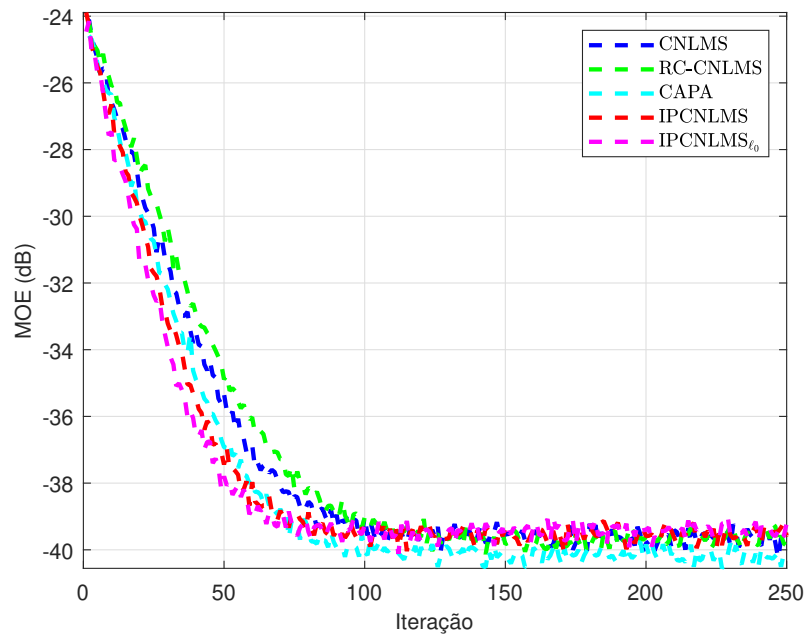


Figura 15: - Desempenho em termos de MOE dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, CAPA, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  para a simulação II do arranjo do tipo URA.

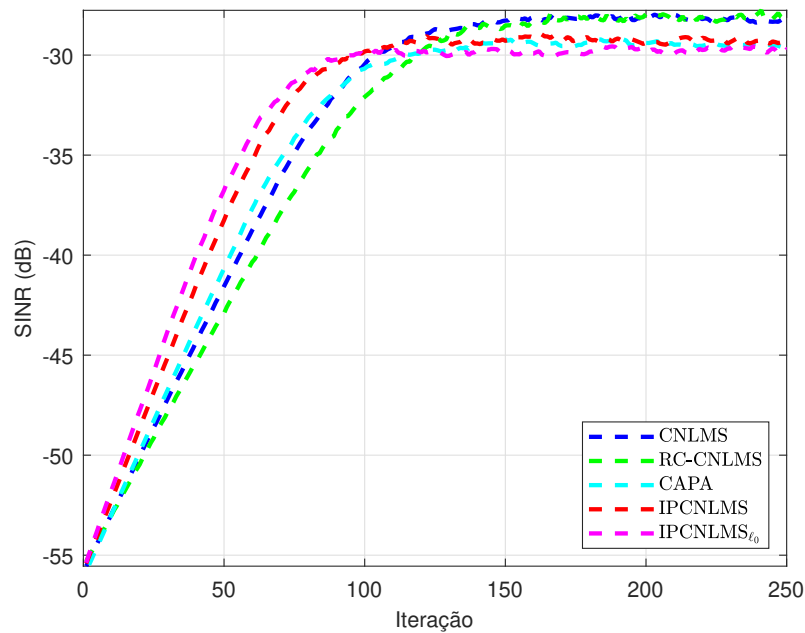


Figura 16: - Desempenho em termos de SINR dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, CAPA, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  para a simulação II do arranjo do tipo URA.

A mesma análise realizada anteriormente se aplica para os gráficos da Figura 15 e da Figura 16. Todos os algoritmos alcançam o regime permanente praticamente no mesmo nível de MOE e em níveis próximos de SINR. O RC-CNLMS apresenta uma convergência mais lenta quando comparado aos outros algoritmos em termos de MOE, mas garante uma melhor razão sinal-interferência-mais-ruído. O contrário ocorre com os algoritmos propostos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ , que apresentam uma convergência mais rápida, porém níveis de SINR levemente mais baixos. Portanto, mesmo alterando-se as direções de chegada do sinal, os desempenhos dos algoritmos se mantêm equivalentes.

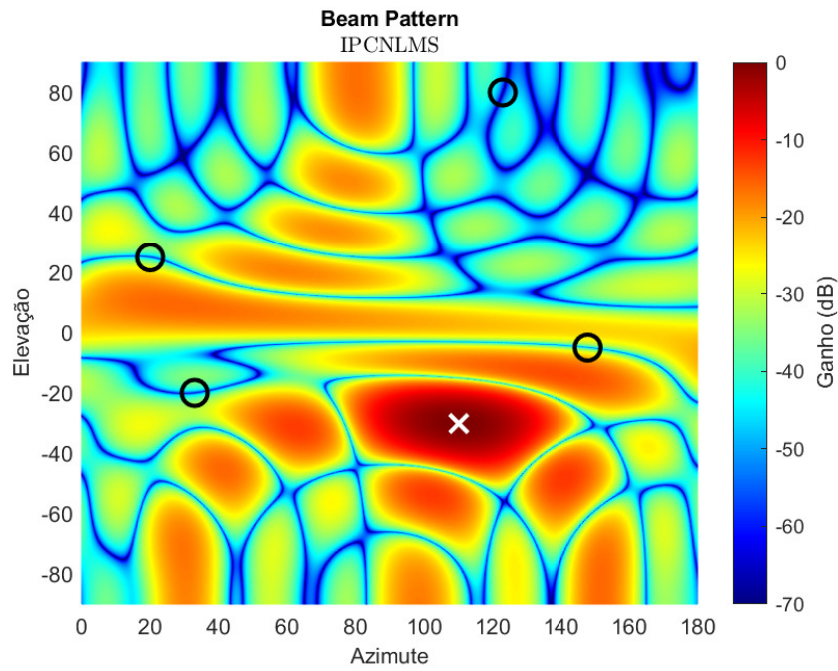


Figura 17: - Conformação de feixe resultante para o IPCNLMS em escala de cor para as determinadas direções  $(\theta, \phi)$  dos sinais que chegam no arranjo do tipo URA.

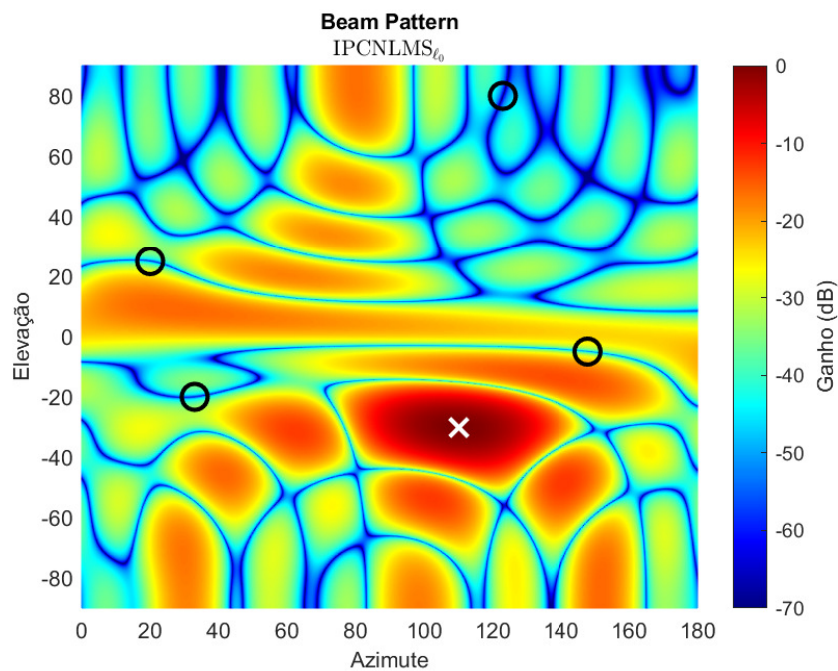


Figura 18: - Conformação de feixe resultante para o IPCNLMS- $l_0$  em escala de cor para as determinadas direções  $(\theta, \phi)$  dos sinais que chegam no arranjo do tipo URA.

Conforme analisado na simulação I, os diagramas de radiação se igualam à solução ótima do LCMV, sendo assim, para a simulação II, só foi necessário considerar os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $l_0$ . Tanto a Figura 17 quanto a Figura 18 apresentam

diagramas de radiação do arranjo de antenas, levando em conta ângulos de elevação variados. Nos gráficos, a marcação em “x” simboliza a direção do sinal de interesse e as com símbolo ”o”, as direções dos sinais provenientes de fontes interferentes. É possível notar que o maior ganho está na direção de interesse, chegando a 0 dB e que os sinais interferentes são atenuados.

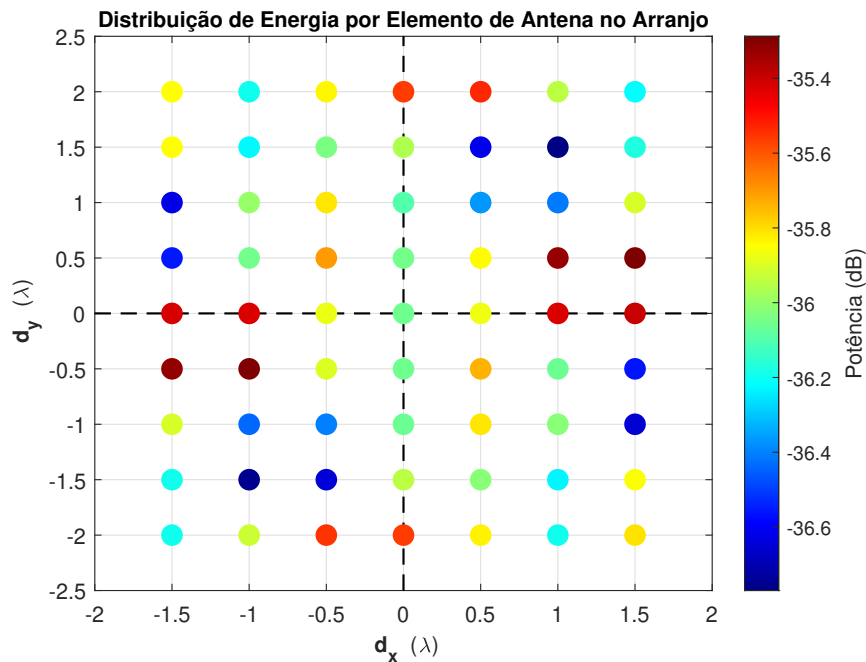


Figura 19: - Distribuição de energia em cada elemento de antena do arranjo do tipo URA na simulação II.

Na Figura 19, é possível visualizar a distribuição de energia dos coeficientes do vetor de pesos  $\mathbf{w}(k)$ . A simetria observada na simulação I também é evidente aqui, porém, em contraste com a figura Figura 14, a concentração de energia não está no centro do arranjo, mas sim mais concentrada nos centros da primeira e última colunas. A diferença entre potência máxima e mínima distribuída pelo arranjo é de, aproximadamente, 1,2 dB. Sendo assim, essa simulação mostra que o vetor  $\mathbf{w}(k)$  não pode ser considerado esparsos.

### 3.3 Arranjo Hexagonal Padrão

Para o arranjo do tipo SHA, também foram realizadas duas simulações que contemplam um arranjo com 6 sensores por aresta, totalizando 91 sensores ( $M = 91$ ), conforme apresentado na Figura 6c.

Da mesma maneira como foi realizado para o arranjo do tipo URA, a primeira

simulação apresenta o desempenho dos algoritmos para sinais provenientes de direções com um ângulo de zênite fixo em  $45^\circ$ , variando-se apenas o azimute. Já a segunda simulação, além de variar-se o azimute, também considerou-se a variação do ângulo de zênite para cada direção de chegada dos sinais no arranjo do tipo SHA.

Na simulação I, a Tabela 5 fornece os parâmetros considerados para cada algoritmo utilizado. O arranjo recebe um total de cinco sinais analíticos, sendo um sinal de interesse e quatro sinais de fontes interferentes. O sinal de interesse (SOI) é incidente na direção com ângulo de azimute de  $\theta_1 = 90^\circ$ , enquanto as quatro fontes interferentes chegam em direções com ângulos de azimute de  $\theta_2 = 42^\circ$ ,  $\theta_3 = 71^\circ$ ,  $\theta_4 = 132^\circ$  e  $\theta_5 = 155^\circ$ . Para todas as direções consideradas, o ângulo de zênite é fixado em  $\phi = 45^\circ$ .

Tabela 5: - Parâmetros dos algoritmos utilizados na síntese do arranjo retangular uniforme (SHA) na simulação I.

Parâmetro	CNLMS	RC-CNLMS	CAPA	IPCNLMS	IPCNLMS- $\ell_0$
$\mu$	0.1250	0.2950	0.0660	0.1600	0.1800
$\alpha$	-	-	-	-0.5	-0.5
$D$	-	-	2	-	-
$\rho$	-	0.61	-	-	-
$L$	-	15	-	-	-
$\beta$	-	-	-	-	20

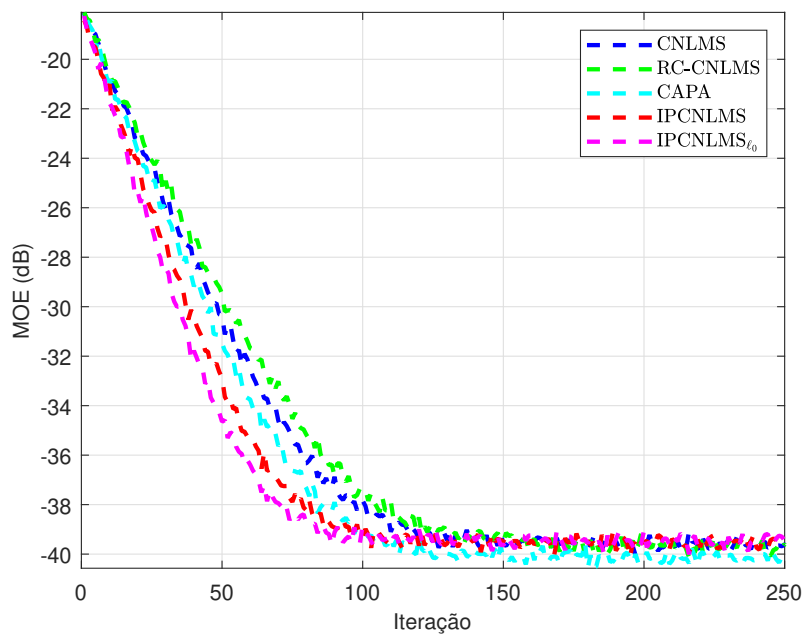


Figura 20: - Comparação do desempenho dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  feita em termos da média da energia do erro de saída (MOE) aplicada na síntese de um arranjo do tipo SHA.

A Figura 20 apresenta uma análise comparativa de desempenho dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  em relação aos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS e CAPA, considerando a média de energia do erro do sinal de saída (MOE) durante as 250 primeiras iterações. Os resultados mostram que os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  convergem mais rapidamente do que os outros algoritmos, alcançando desempenho equivalente. O algoritmo proposto IPCNLMS- $\ell_0$  se destaca por usar a norma  $\ell_0$  e, como consequência, conseguir alcançar mais rapidamente a convergência. É possível observar que os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  atingem o regime permanente por volta da iteração  $k = 110$ , enquanto os outros algoritmos exigem mais iterações para se chegar ao regime permanente. O CNLMS e o RC-CNLMS, por exemplo, só alcançam o regime permanente por volta da iteração  $k = 150$ .

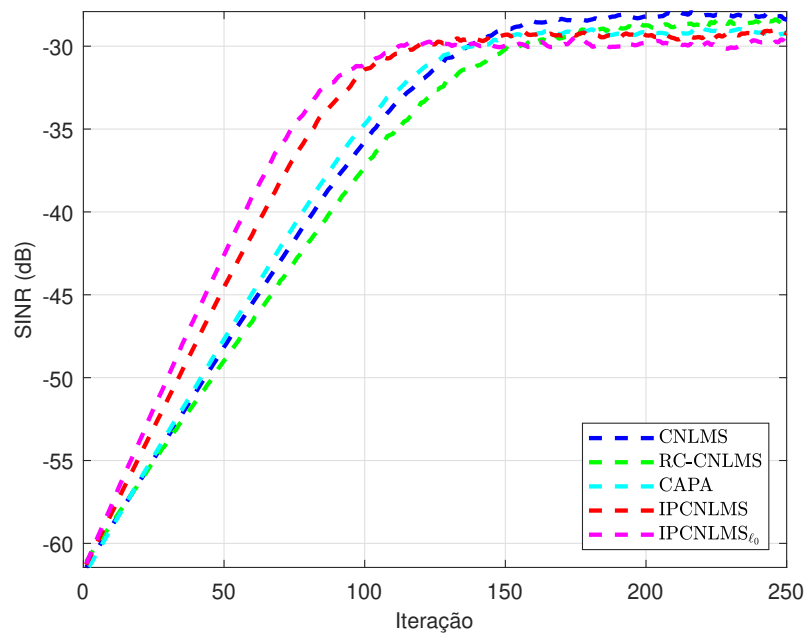


Figura 21: - Comparação do desempenho dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  em relação à sua razão sinal-interferência-mais-ruído (SINR) aplicados à síntese do arranjo do tipo SHA.

Na Figura 21, foi realizada uma comparação da razão sinal-interferência-mais-ruído (SINR) entre os algoritmos CNLMS, CAPA, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ . Foi constatado que todos os algoritmos obtiveram valores próximos a -29,5 dB, sendo que CNLMS e RC-CNLMS apresentaram valores levemente superiores. No entanto, quando analisado o desempenho em regime permanente, notou-se que os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  alcançam a convergência mais rapidamente, em torno da iteração  $k = 100$ ,

enquanto CNLMS, CAPA e RC-CNLMS demoram mais tempo, atingindo apenas após a iteração  $k = 150$ , aproximadamente. Dentre eles, o CAPA é um pouco mais rápido, embora alcance um nível de SINR ligeiramente mais baixo do que o RC-CNLMS e o CNLMS.

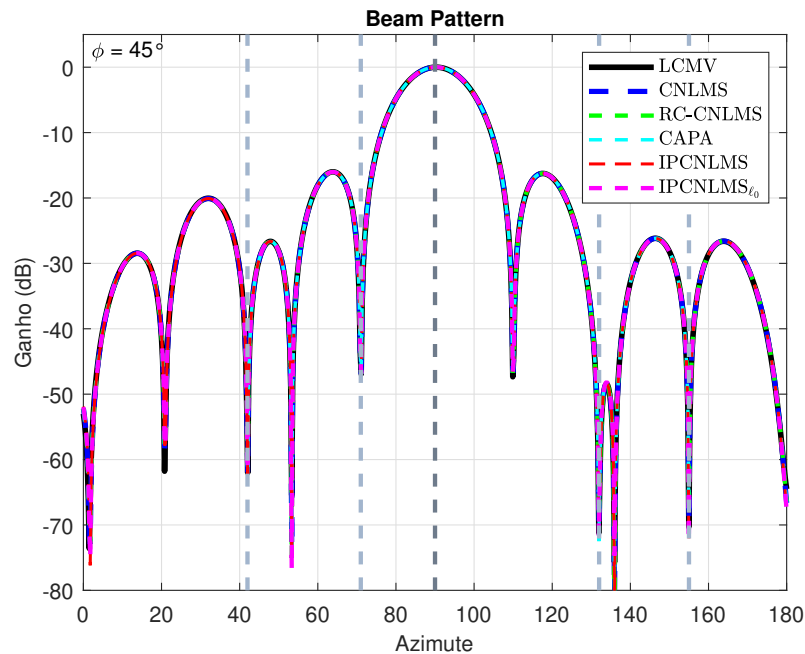


Figura 22: - Conformação de feixe resultante dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  em comparação com os algoritmos LCMV, CNLMS e RC-CNLMS aplicados à síntese do arranjo do tipo SHA.

A Figura 22 mostra o diagrama de radiação do arranjo SHA com conformador de feixe adaptativo para todos os algoritmos, incluindo a solução ideal LCMV. O lóbulo principal atinge o seu valor máximo de 0 dB na direção do ângulo de interesse, que é indicado pela linha vertical mais escura, enquanto os nulos dos lóbulos laterais conseguem atenuar os sinais advindas das direções das fontes interferentes, que são indicadas pelas linhas verticais mais claras no gráfico.



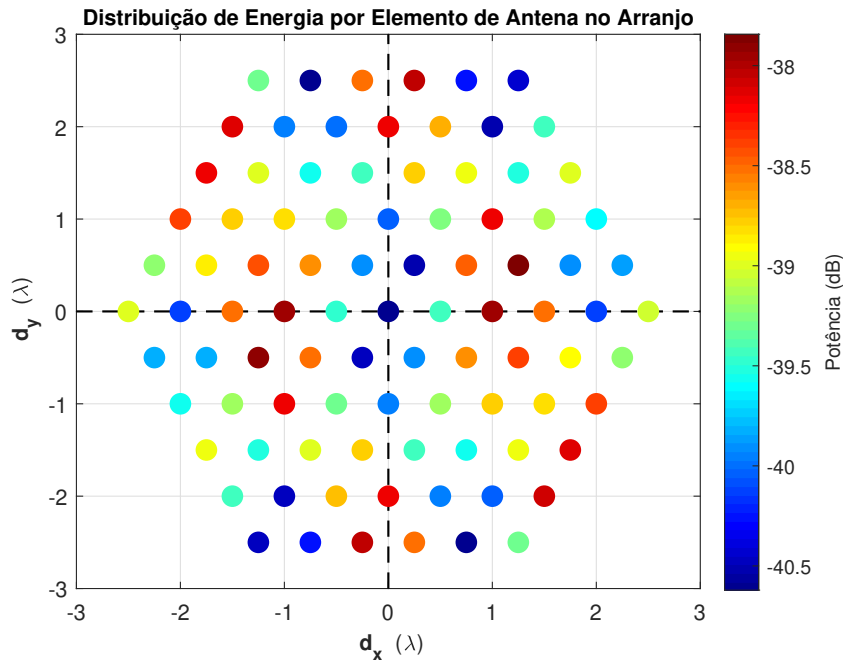


Figura 23: - Distribuição de energia em cada elemento de antena do arranjo do tipo SHA.

Conforme evidenciado no diagrama de radiação, todos os algoritmos apresentam soluções muito próximas à solução ideal do LCMV. Isso significa que, no estado estacionário, os coeficientes dos vetores de peso  $\mathbf{w}(k)$  obtêm praticamente os mesmos valores, independentemente do algoritmo utilizado. Consequentemente, a distribuição de energia dos vetores  $\mathbf{w}(k)$  será basicamente a mesma para todos os algoritmos. Portanto, a Figura 23 pode ser utilizada para qualquer algoritmo testado. A figura mostra que a concentração de energia está espalhada pelo arranjo, não tendo em foco principal. Tal como nas simulações anteriores, também ocorre uma reflexão na maneira como a energia é distribuída pelo arranjo, com a primeira linha se comportando de forma muito semelhante à última, porém a energia do primeiro sensor da primeira linha é igual à do último sensor da última linha. O intervalo entre o valor máximo de energia do arranjo e mínimo é de, aproximadamente, 2,5 dB, sendo o valor mais alto das simulações apresentadas até aqui. A potência no elemento de menor valor não chega a ser metade da potência do elemento que apresenta o maior valor. Mesmo com essa diferença, não é possível caracterizar o sistema como esparsos, visto que nenhum elemento de antena atingiu valores de coeficientes de  $\mathbf{w}(k)$  nulos ou apresentou um valor tão pequeno que poderia ter sido desconsiderado.

Na simulação II, para cada um dos algoritmos CNLMS, RC-CNLMS, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ , os parâmetros considerados são apresentados na Tabela 6. O arranjo

utilizado recebe um total de cinco sinais analíticos, sendo um sinal de interesse e quatro sinais de fontes interferentes. O sinal de interesse (SOI) incide em uma direção com ângulos de azimute e de elevação de  $(\theta_1, \phi_1) = (30^\circ, -45^\circ)$ , enquanto as quatro fontes interferentes se situam em direções com ângulos de azimute e de elevação de  $(\theta_2, \phi_2) = (40^\circ, 77^\circ)$ ,  $(\theta_3, \phi_3) = (90^\circ, 5^\circ)$ ,  $(\theta_4, \phi_4) = (123^\circ, 43^\circ)$  e  $(\theta_5, \phi_5) = (165^\circ, -65^\circ)$ .

Tabela 6: - Parâmetros dos algoritmos utilizados na síntese do arranjo retangular uniforme (SHA) na simulação II.

Parâmetro	CNLMS	RC-CNLMS	CAPA	IPCNLMS	IPCNLMS- $\ell_0$
$\mu$	0.0930	0.2030	0.0500	0.1200	0.1400
$\alpha$	-	-	-	-0.5	-0.5
$D$	-	-	2	-	-
$\rho$	-	0.61	-	-	-
$L$	-	15	-	-	-
$\beta$	-	-	-	-	20

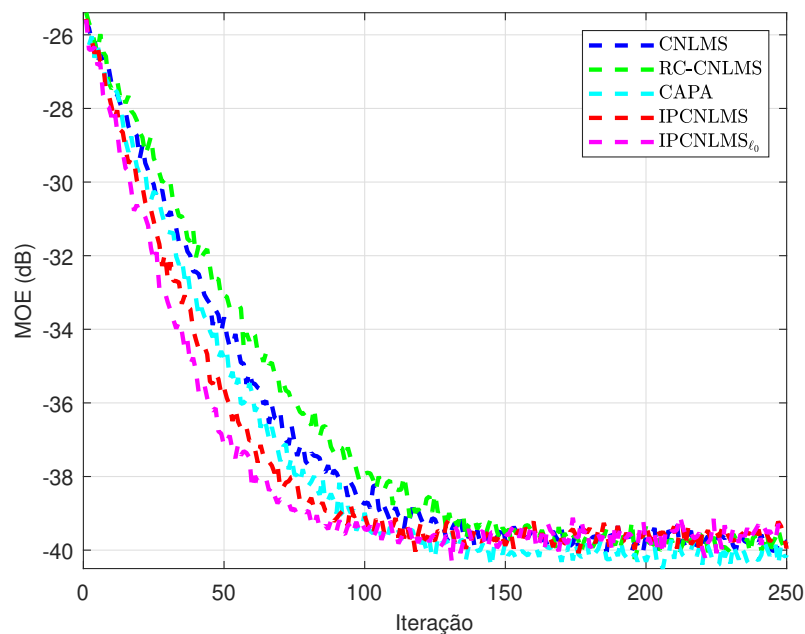


Figura 24: - Desempenho de MOE dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  comparados com CNLMS, RC-CNLMS e CAPA para a simulação II do arranjo do tipo SHA.

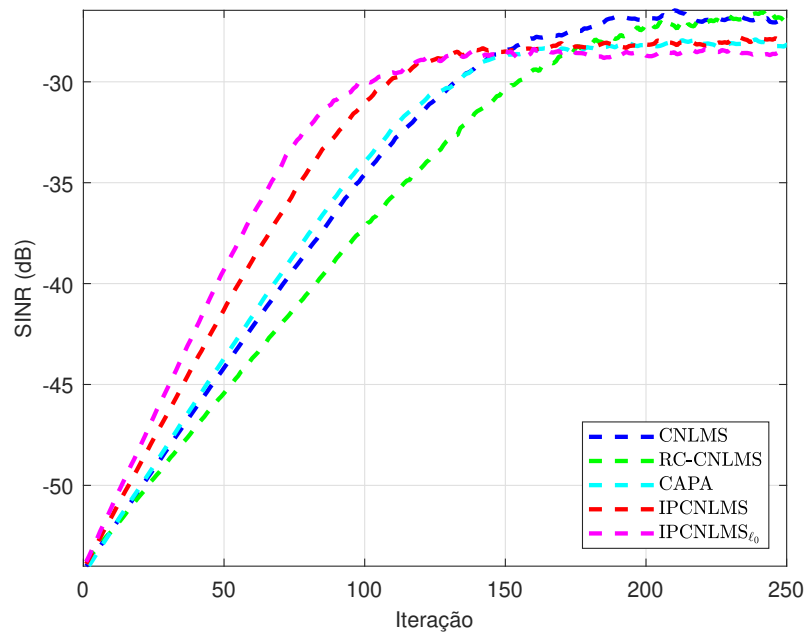


Figura 25: - Desempenho de SINR dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  comparados com CNLMS, RC-CNLMS e CAPA para a simulação II do arranjo do tipo SHA.

A análise anteriormente realizada pode ser aplicada aos gráficos apresentados na Figura 24 e na Figura 25. Todos os algoritmos atingem o regime permanente praticamente com o mesmo nível de erro médio quadrático (MOE) e níveis próximos de razão sinal-ruído-interferência (SINR). Os algoritmos CAPA, CNLMS e RC-CNLMS têm uma taxa de convergência mais lenta em comparação com o IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  em termos de MOE, mas oferecem uma melhor robustez ao ruído. Em contrapartida, os algoritmos propostos, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ , possuem uma convergência mais rápida, porém atingem níveis ligeiramente mais baixos de SINR. Isso reforça que, mesmo com alterações nas direções de chegada do sinal, os algoritmos apresentam desempenho consistente.

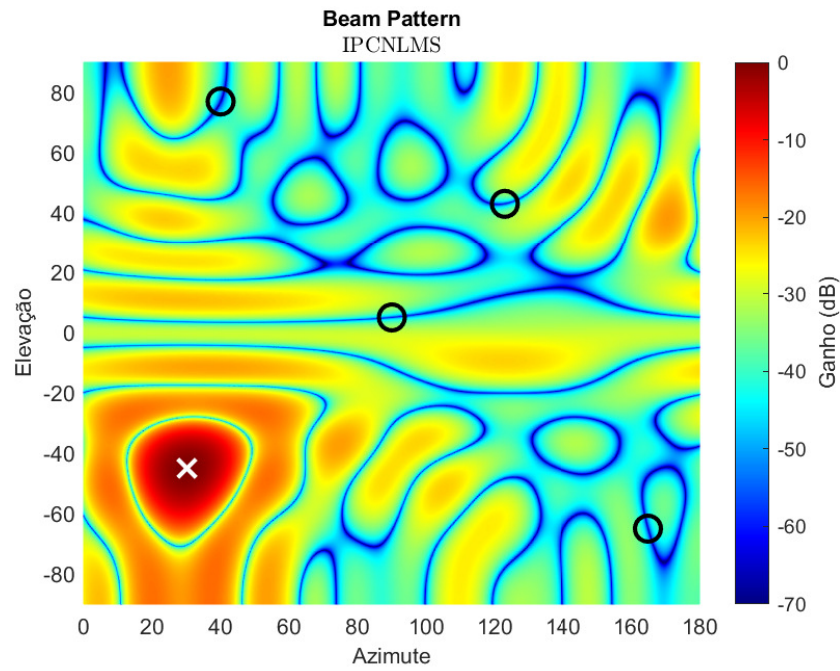


Figura 26: - Conformação de feixe resultante para o IPCNLMS em escala de cor para as determinadas direções  $(\theta, \phi)$  dos sinais que chegam no arranjo do tipo SHA.

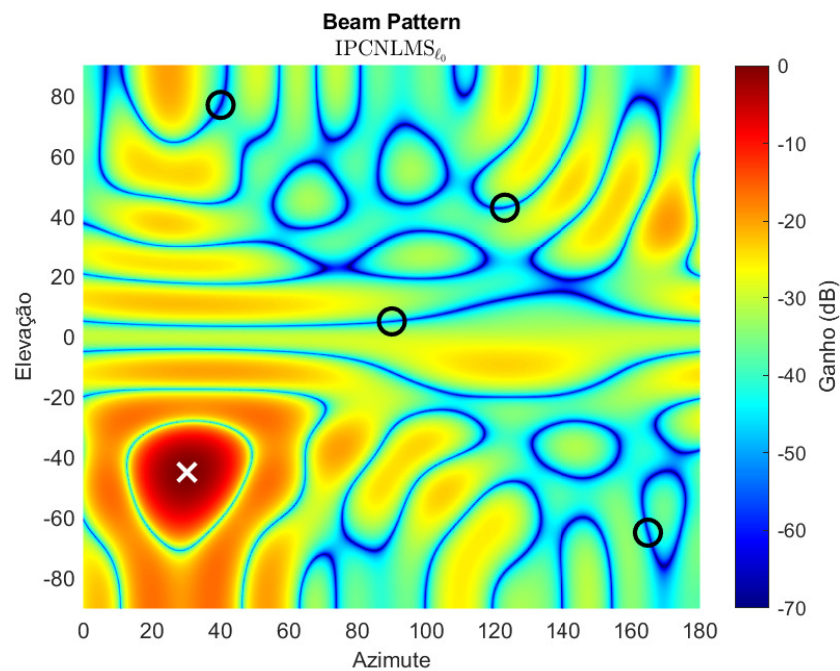


Figura 27: - Conformação de feixe resultante para o IPCNLMS- $l_0$  em escala de cor para as determinadas direções  $(\theta, \phi)$  dos sinais que chegam no arranjo do tipo SHA.

Ao analisar a simulação I, foi observado que os diagramas de radiação se igualam à solução ótima do LCMV. Portanto, na simulação II, só foram considerados os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $l_0$ . A Figura 26 e a Figura 27 mostram os diagramas de radiação

do arranjo de antenas para diferentes ângulos de elevação. Os marcadores “x” representam a direção do sinal de interesse, enquanto os marcadores “o” representam as direções dos sinais provenientes de fontes interferentes. É possível notar que o maior ganho é alcançado na direção do sinal de interesse  $(\theta_1, \phi_1) = (30^\circ, -45^\circ)$ , chegando a 0 dB, enquanto os sinais interferentes são atenuados nas direções  $(\theta_2, \phi_2) = (40^\circ, 77^\circ)$ ,  $(\theta_3, \phi_3) = (90^\circ, 5^\circ)$ ,  $(\theta_4, \phi_4) = (123^\circ, 43^\circ)$  e  $(\theta_5, \phi_5) = (165^\circ, -65^\circ)$ .

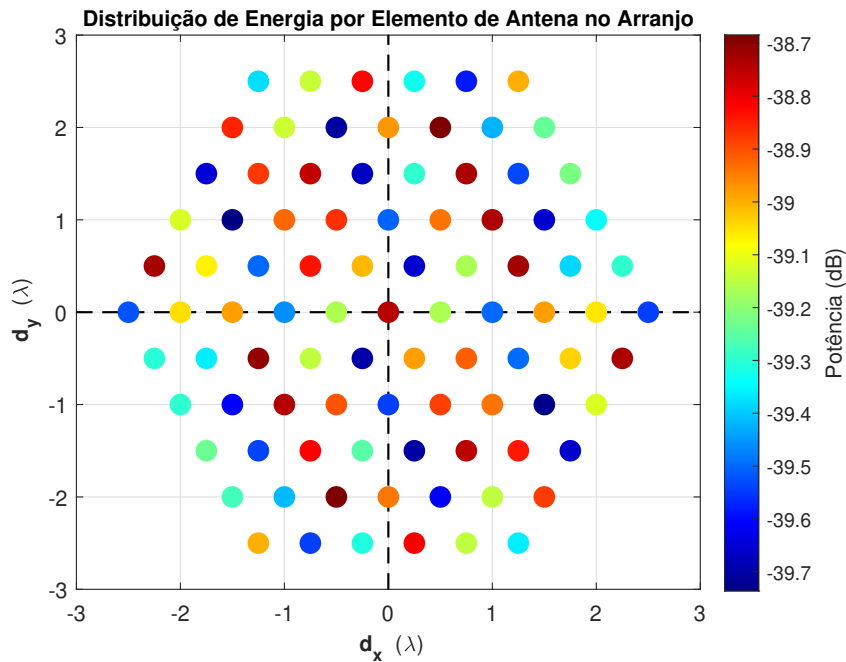


Figura 28: - Distribuição de energia em cada elemento de antena do arranjo do tipo SHA na simulação II.

A Figura 28 ilustra a distribuição de energia dos coeficientes do vetor de pesos  $\mathbf{w}(k)$ . Assim como na simulação I, a figura evidencia a simetria, sem uma área específica onde a energia esteja mais concentrada. A diferença entre o valor máximo e mínimo de energia é de 1 dB, o que mostra que os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  exploram a diferença de magnitude entre os coeficientes do vetor  $\mathbf{w}(k)$  e não a esparsidade do sistema.

### 3.4 Análise dos Resultados

Observando os resultados das simulações, pode-se constatar que o desempenho da média da energia do erro de saída (MOE) dos algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  é superior em relação aos algoritmos CNLMS, CAPA com  $D = 2$  e RC-CNLMS. Em todas as simulações realizadas, foi possível notar que o IPCNLMS apresentou uma convergência

mais rápida quando comparado com o CNLMS, CAPA com  $D = 2$  o RC-CNLMS. Por outro lado, o IPCNLMS- $\ell_0$  superou o IPCNLMS nesse quesito, devido à inclusão da norma  $\ell_0$  na matriz diagonal  $\mathbf{G}(k)$ . Essa abordagem utiliza o fator de atração para zero,  $\beta$ , para alcançar uma convergência mais rápida dos coeficientes do filtro que estão na faixa entre  $[-\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta}]$ .

Foi constatado que todos os algoritmos obtiveram níveis de SINR próximos, mostrando a capacidade de obter um sinal de interesse de qualidade em meio a interferências causadas por outras fontes e ruído aditivo. Embora os algoritmos CNLMS, CAPA com  $D = 2$  e RC-CNLMS tenham alcançado níveis ligeiramente mais elevados do que IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ , estes últimos atingiram seu nível máximo de desempenho de forma mais rápida.

Um ponto importante a ser levado em consideração é que as análises do algoritmo CAPA foram feitas para um reuso de dados do sinal de entrada com apenas  $D = 2$ . No caso de aumentar-se essa quantidade, os algoritmos IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$  não conseguem ser mais eficientes, portanto, para projetos que definem  $D = 2$  como uma limitação, os algoritmos propostos nesse trabalho conseguem ser mais eficientes em termos velocidade de convergência e atingem níveis igualmente aceitáveis de SINR.

A análise de distribuição de energia nos sensores simulados mostrou uma certa simetria. Na URA, foi possível ver mais claramente onde a energia estava mais concentrada. No SHA, não houve uma área específica tão definida, mas ainda era possível ver qual sensor demonstrava uma concentração de energia maior. Na ULA, foi possível ver que a energia estava concentrada no centro do arranjo. Também foi possível observar que o intervalo entre a energia máxima e a mínima dos coeficientes de  $\mathbf{w}(k)$  não é grande, indicando assim, que os algoritmos proporcionais exploram a diferença de magnitude entre os coeficientes de  $\mathbf{w}(k)$  e não necessariamente a esparsidade do sistema.

Vale ressaltar que esses resultados podem ser alterados conforme o projeto, visto que a direção de chegada dos sinais provenientes das fontes de interesse e interferentes podem mudar, alterando assim o resultado.

Foram realizadas comparações entre todos os algoritmos e a solução ótima obtida pelo algoritmo LCMV para sinais com elevação fixa e azimutes variados, além de análises dos diagramas de radiação para arranjos planares como URA e SHA com variação nos ângulos de elevação e azimute para simular um cenário mais realista de múltiplas direções

de sinal. Os resultados mostraram que todos os algoritmos apresentaram padrões de feixe muito similares no lóbulo principal e nulos nos lobos laterais, indicando que são capazes de maximizar o ganho na direção do sinal de interesse e atenuar sinais interferentes em outras direções.

## CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a aplicação de técnicas proporcionais em algoritmos de conformação adaptativa de feixe, que se baseiam no princípio de distorção mínima (MDP). Como consequência e prova de conceito, dois novos algoritmos, IPCNLMS e IPCNLMS- $\ell_0$ , são propostos para conformação adaptativa de feixe.

Os algoritmos propostos conseguem convergir mais rapidamente quando comparados aos algoritmos CNLMS e RC-CNLMS e também para o CAPA com fator de reuso de dados igual a dois ( $D = 2$ ). No caso de uma quantidade maior de pares de dados, o CAPA tem capacidade de ser mais eficiente.

Ao aplicar-se a penalidade da norma  $\ell_0$  na matriz diagonal  $\mathbf{G}(k)$  do algoritmo IPCNLMS- $\ell_0$ , é possível alcançar um desempenho ainda melhor em termos de velocidade de convergência, sem uma degradação notável do desempenho assintótico. A questão da esparsidade foi levada em consideração nas análises de distribuição de energia nos arranjos. Nas simulações feitas, não se atingiu esparsidade, apenas verificou-se que os algoritmos proporcionais exploram a diferença de magnitude entre os coeficientes e não necessariamente a esparsidade em si.

A área de filtragem adaptativa aplicada a arranjos de sensores é um campo vasto de possibilidades. O conceito de proporcionalidade aplicados a algoritmos com restrições lineares é inovador e abre caminho para futuros trabalhos, visto que tem a capacidade de melhorar a robustez da solução sem a necessidade de um sinal de treinamento, além de aumentar a velocidade de convergência com níveis aceitáveis de tolerância às interferências do sistema. Essa ideia pode ser empregada com o conceito de reuso de coeficientes ou reuso de dados do sinal de entrada. Além disso, pode-se aplicar a penalidade de norma  $\ell_0$ , a fim de aumentar a velocidade de convergência.



## REFERÊNCIAS

- [1] WILD, T.; BRAUN, V.; VISWANATHAN, H. Joint Design of Communication and Sensing for Beyond 5G and 6G Systems. *IEEE Access*, v. 9, p. 30845–30857, 2021.
- [2] RUAN, N. et al. DOA Estimation in B5G/6G: Trends and Challenges. *Sensors*, v. 22, n. 14, 2022. ISSN 1424-8220. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1424-8220/22/14/5125>>.
- [3] CLERCKX, B. et al. Wireless power transfer for future networks: Signal processing, machine learning, computing, and sensing. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, v. 15, n. 5, p. 1060–1094, 2021.
- [4] NIU, S. Research on the application of machine learning big data mining algorithms in digital signal processing. In: *2021 IEEE Asia-Pacific Conference on Image Processing, Electronics and Computers (IPEC)*. [S.l.: s.n.], 2021. p. 776–779.
- [5] GRIGORYAN, N.; MATUS, E.; FETTWEIS, G. P. Scalable 5g signal processing on multiprocessor system: A clustering approach. In: *2020 IEEE 3rd 5G World Forum (5GWF)*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 389–394.
- [6] JAGANNATH, A.; JAGANNATH, J.; MELODIA, T. Redefining wireless communication for 6g: Signal processing meets deep learning with deep unfolding. *IEEE Transactions on Artificial Intelligence*, v. 2, n. 6, p. 528–536, 2021.
- [7] MANSOORI, E.; SIAVASHI, A.; MAJIDI, M. Sensing, wireless transmission, and smart processing of heart signals. In: *2021 5th International Conference on Internet of Things and Applications (IoT)*. [S.l.: s.n.], 2021. p. 1–6.
- [8] VEEN, B. V.; BUCKLEY, K. Beamforming: a versatile approach to spatial filtering. *IEEE ASSP Magazine*, v. 5, n. 2, p. 4–24, 1988.
- [9] DINIZ, P. S. R. *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*. 5. ed. Cham, Switzerland: Springer Nature, 2020.
- [10] CHANDRAN, S. (Ed.). *Adaptive antenna arrays*. Berlin, Germany: Springer, 2011. (Signals and Communication Technology).

- [11] WIDROW, B.; HOFF, M. E. *Adaptive switching circuits*. [S.l.], 1960.
- [12] WIDROW, B.; MCCOOL, J.; BALL, M. The Complex LMS Algorithm. *Proceedings of the IEEE*, v. 63, n. 4, p. 719–720, 1975.
- [13] HAYKIN, S. *Adaptive Filter Theory : International Edition*. 5. ed. London, England: Pearson Education, 2013.
- [14] CAMPOS, M. de; DINIZ, P.; APOLINARIO, J. On normalized data-reusing and affine-projections algorithms. In: *ICECS'99. Proceedings of ICECS '99. 6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (Cat. No.99EX357)*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 2, p. 843–846 vol.2.
- [15] DUTTWEILER, D. Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, v. 8, n. 5, p. 508–518, 2000.
- [16] BENESTY, J.; GAY, S. L. An improved PNLMS algorithm. In: *2002 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 2, p. II–1881–II–1884.
- [17] FROST, O. An Algorithm for Linearly Constrained Adaptive Array Processing. *Proceedings of the IEEE*, v. 60, n. 8, p. 926–935, 1972.
- [18] APOLINARIO, J. A. et al. Constrained normalized adaptive filters for CDMA mobile communications. In: *9th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 1998)*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 1–4.
- [19] CAMPOS, M. L. de; JR, J. A. A.; DINIZ, P. The Constrained Affine Projection Algorithm - Development and Convergence Issues. In: *Proc. of the First Balkan Conf. on Signal Processing, Communications, Circuits, and Systems*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 4.
- [20] WERNER, S.; APOLINARIO, J.; CAMPOS, M. D. The data-selective constrained affine-projection algorithm. In: *2001 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings (Cat. No.01CH37221)*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 6, p. 3745–3748 vol.6.

- [21] JUNIOR, V. S. N. et al. Constrained Least Mean Square Algorithm with Coefficient Reusing. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, v. 40, n. 11, p. 5705–5717, Nov 2021. ISSN 1531-5878. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00034-021-01721-w>>.
- [22] NOGUEIRA, V. S. et al. Constrained NLMS Algorithm with Variable Coefficient Reusing. In: *2021 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)*. [S.l.: s.n.], 2021. p. 1–3.
- [23] DAI, Z. et al. Adaptive Sparse Array Beamforming Using Correntropy Induced Metric Constrained Normalized LMS Algorithm. *The Applied Computational Electromagnetics Society Journal (ACES)*, v. 35, n. 4, p. 430–436, Apr. 2020. Disponível em: <<https://journals.riverpublishers.com/index.php/ACES/article/view/7897>>.
- [24] JUNIOR, J. F. de A. *Filtragem Adaptativa com Solução Esparsa para Arranjos de Sensores*. 96 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- [25] ANDRADE, J. F. de; CAMPOS, M. L. R. de; APOLINÁRIO, J. A. An L1-Constrained Normalized LMS Algorithm and its Application to Thinned Adaptive Antenna Arrays. In: *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 3806–3810.
- [26] CASTOLDI, F. T.; CAMPOS, M. L. R. de. Application of a Minimum-Disturbance Description to Constrained Adaptive Filters. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 20, n. 12, p. 1215–1218, 2013.
- [27] AHN, Y. et al. Towards intelligent millimeter and terahertz communication for 6G: Computer vision-aided beamforming. *IEEE Wireless Communications*, IEEE, 2022.
- [28] LI, C.; WANG, S. An improved adaptive beamforming algorithm for 5g interference-coexistence communication. In: *2019 IEEE/CIC International Conference on Communications Workshops in China (ICCC Workshops)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 257–261.
- [29] MIAO, W. et al. Position-based beamforming design for uav communications in lte networks. In: *ICC 2019 - 2019 IEEE International Conference on Communications (ICC)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 1–6.

- [30] SMITH, J. O. *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT)*. Stanford, California: W3K Publishing - <http://www.w3k.org/books/>, 2007. ISBN 978-0-9745607-4-8.
- [31] IOANNIDES, P.; BALANIS, C. Uniform Circular and Rectangular Arrays for Adaptive Beamforming Applications. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, v. 4, p. 351–354, 2005.
- [32] DINIZ, P. S. R. *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*. 3. ed. New York, NY: Springer, 2011.
- [33] L., V. T. H. *Optimum Array Processing (Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV)*. [S.l.]: John Wiley and Sons, March 2002. ISBN 9780471221104.
- [34] SOUZA, J. V. G. de et al. Novel Proportionate Adaptive Filters with Coefficient Vector Reusing. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Springer Science and Business Media LLC, v. 39, n. 5, p. 2473–2488, set. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00034-019-01266-z>>.
- [35] PALEOLOGU, C.; BENESTY, J.; CIOCHINA, S. An Improved Proportionate NLMS Algorithm based on the  $\ell_0$  norm. In: *2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 309–312.
- [36] LIMA, M. V. S. et al. *Do Proportionate Algorithms Exploit Sparsity?* arXiv. 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2108.06846>>.
- [37] GU, Y.; JIN, J.; MEI, S.  $\ell_0$ -Norm Constraint LMS Algorithm for Sparse System Identification. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 16, n. 9, p. 774–777, 2009.
- [38] SHI, W. et al. Controllable Sparse Antenna Array for Adaptive Beamforming. *IEEE Access*, v. 7, p. 6412–6423, 2019.
- [39] APOLINARIO, J.; CAMPOS, M. D. *Microphone-Array Signal Processing*. <https://www.ime.eb.br/~apolin/MicArray/>, SBrT 2011.

## APÊNDICE A

### Por que o sinal de recebido no arranjo deve ser analítico?

Conforme apresentado no Capítulo 1, o sinal  $\mathbf{x}(k)$  observado pelos sensores apresenta um atraso relativo ao direcionamento  $\mathbf{a}(\theta_i, \phi_i)$  proveniente da  $i$ -ésima fonte. Para um determinado atraso ser aplicado igualmente a todos os elementos do arranjo, se faz necessário que o sinal  $\mathbf{x}(k)$  seja analítico. Isso pode ser demonstrado matematicamente, conforme foi desenvolvido em [39].

Um sinal atrasado é geralmente representado pela multiplicação de uma exponencial do tipo  $e^{-j\omega_0\tau}$ . Supondo que  $x(n)$  é um sinal discreto, tal que

$$x(n) = s(n)e^{j\omega_0 n}, \quad (75)$$

onde  $s(n)$  é um sinal de banda base e  $\omega_0$  é a frequência central. Ao causar-se um atraso de  $\tau$  unidades, tem-se

$$x(n)e^{-j\omega_0\tau} = s(n)e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega_0\tau} = s(n)e^{j\omega_0(n-\tau)}, \quad (76)$$

se o valor de  $\tau$  for pequeno, considera-se que

$$s(n)e^{j\omega_0(n-\tau)} \approx x(n - \tau), \quad (77)$$

Assim, a premissa em que basta multiplicar um sinal qualquer pela exponencial  $e^{-j\omega_0\tau}$  para considerá-lo atrasado é verdadeira. Porém, considerando agora que  $x(n)$  é um sinal real do tipo

$$x(n) = s(n) \cos(\omega_0 n), \quad (78)$$

multiplicando por  $e^{-j\omega_0\tau}$

$$x(n)e^{-j\omega_0\tau} \neq x(n - \tau). \quad (79)$$

Sabendo que  $\cos(\omega_0 n) = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}$ , pode-se reescrever a (78),

$$s(n) \cos(\omega_0 n) = \underbrace{\frac{s(n)}{2} e^{j\omega_0 n}}_{x_+(n)} + \underbrace{\frac{s(n)}{2} e^{-j\omega_0 n}}_{x_-(n)}, \quad (80)$$

onde  $x_+(n)$  é considerado como a parcela de frequência positiva e  $x_-(n)$  a parcela de frequência negativa de  $x(n)$ . Dessa forma,

$$x(n - \tau) = x_+(n)e^{-j\omega_0\tau} + x_-(n)e^{+j\omega_0\tau} = s(n) \cos(\omega_0(n - \tau)) \quad (81)$$

que prova que a premissa inicial não pode ser considerada para qualquer sinal  $x(n)$ .

Fazendo o uso da transformada de Hilbert  $x_H(n) = \mathcal{H}\{x(n)\}$ , onde

$$X_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} jX(e^{j\omega}) & \text{para } -\pi < \omega < 0 \\ X(e^{j\omega}) & \text{para } \omega = 0 \\ -jX(e^{j\omega}) & \text{para } 0 < \omega < \pi \end{cases} \quad (82)$$

ou seja, a transformada de Hilbert converte o sinal  $X(e^{j\omega})$  em  $jX(e^{j\omega})$  para a parte do espectro em que há frequências negativas e em  $-jX(e^{j\omega})$  quando há frequências positivas.

Reescrevendo a equação (80) como uma transformada inversa de Fourier, tal como

$$x(n) = x_+(n) + x_-(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X_+(e^{j\omega}) + X_-(e^{j\omega})\} \quad (83)$$

e usando a definição de um sinal analítico

$$x_a(n) = x(n) + jx_H(n), \quad (84)$$

demonstra-se que

$$\begin{aligned} x_a(n) &= x(n) + jx_H(n) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{X_+(e^{j\omega}) + X_-(e^{j\omega}) + j[-jX_+(e^{j\omega}) + jX_-(e^{j\omega})]\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{X_+(e^{j\omega}) + X_-(e^{j\omega}) + X_+(e^{j\omega}) - X_-(e^{j\omega})\} \\ &= 2\mathcal{F}^{-1}\{X_+(e^{j\omega})\} \\ x_a(n) &= 2s(n)e^{j\omega_0 n} \end{aligned} \quad (85)$$

Verificando o que foi provado pelas equações (77) e (85), o sinal recebido pelos sensores deve ser analítico para ser modelado de forma que todos os elementos do arranjo sofram igualmente pelo atraso relativo ao direcionamento de  $\mathbf{a}(\theta_i, \phi_i)$ , proveniente da  $i$ -ésima fonte.