Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

Renata Siqueira Reis

Por que o seno de 30° é ½? : uma proposta de investigação para uso em sala de aula

São Gonçalo

2023

Renata Siqueira Reis

Por que o seno de 30° é ½? : uma proposta de investigação para uso em sala de aula

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador(a): Prof.ª Dra. Daniela Mendes Vieira da Silva

São Gonçalo

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CEH/D

R375 TESE

Reis, Renata Siqueira.
Por que o seno de 30º é ½? : uma proposta de investigação para uso em sala de aula / Renata Siqueira Reis. – 2023.
81f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dra. Daniela Mendes Vieira da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.

1. Trigonometria plana – Teses. 2. Trigonometria – Estudo e ensino – Teses. 3. Triângulo – Teses. I. Silva, Daniela Mendes Vieira da. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. III. Título.

CRB/7 – 6150 CDU 514.116.2

Renata Siqueira Reis

Por que o seno de 30° é ½? : uma proposta de investigação para uso em sala de aula

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 18 de maio de 2023.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Daniela Mendes Vieira da Silva (Orientadora)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof.ª Dra. Priscila Cardoso Petito
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof.ª Dra. Fabiana Chagas de Andrade
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca - RJ

São Gonçalo
2023

DEDICATÓRIA

À minha filha Carolina e ao meu sobrinho Thiago, de modo que eu possa sempre ser uma inspiração para vocês, em seu crescimento pessoal, acadêmico e profissional.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, pois é Ele quem me guia, acalma e faz acreditar que tudo tem sua hora. Aos meus pais, Renato e Shirley, que sempre trabalharam para oportunizar conhecimento a mim e minha irmã Taís, mesmo com todas as dificuldades emocionais e financeiras. A professora Doutora Daniela Mendes Vieira da Silva que, desde o início foi paciente e assertiva em me orientar e a me colocar em meu lugar, quando a ansiedade me consumia. Aos meus professores do Profmat, que contribuíram para o meu crescimento profissional e pessoal. E, mais importante ainda, tiveram paciência com minhas inúmeras e infindáveis perguntas sobre o conteúdo das disciplinas. Em especial, à Professora Priscila que me acolhia quando tinha dúvidas sobre questões diversas. Aos meus colegas de curso, por compartilharem o conhecimento, mesmo que online, no difícil período da Pandemia do Covid-19.

Nunca será um bom matemático aquele que não for um pouco filósofo.

Albert Einstein

RESUMO

REIS, Renata Siqueira. *Por que seno 30° é ½?* : uma proposta de investigação para uso em sala de aula. 2023. 81f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2023.

Esta dissertação apresenta uma possibilidade pedagógica, investigativa e multissemiótica, criada com o objetivo de contribuir para o ensino aprendizagem de razões trigonométricas, no ensino fundamental anos finais e no ensino médio (na etapa em que for abordado esse conteúdo). O ponto de partida é o entendimento de que seno de 30º é sempre ½, independente das medidas dos lados de um triângulo retângulo. Isto ocorre devido à proporcionalidade existente entre os lados homólogos dos infinitos triângulos retângulos semelhantes, determinados por este ângulo. Visando promover tal contribuição, foi desenvolvido na presente dissertação, foi construído um conjunto de atividades~~.~~ Este estudo nasceu da inquietação da pesquisadora frente às dificuldades recorrentes de estudantes em relação ao tema e, também, do seu interesse em contribuir com a literatura para a superação desta dificuldade. Tal desenvolvimento teve como metodologia dois momentos: o primeiro, consistiu na elaboração de uma revisão de literatura, na qual foram apresentados os referenciais teóricos fundamentais à criação do conjunto de atividades, com o suporte de materiais concretos de baixo custo, que visa instigar a curiosidade do estudante e permitir um caminho, matematicamente fundamentado, para a aprendizagem do tema em foco. Buscou-se aqui, levantar estudos que versassem sobre curiosidade e investigação, ambos com fundamentação teórica Matemática sólida para o tema. O segundo momento consistiu na criação, a partir desta revisão, de cada uma das atividades que compõem o percurso pedagógico. No desenvolvimento, tal conjunto é discutido, a partir da literatura levantada. Como resultado apresenta-se um conjunto de 6 atividades, duas na Etapa 1 (atividades preparatórias) e quatro na Etapa 2 (atividades para produção de conhecimento específico). Este conjunto está disponibilizado para impressão ao final deste trabalho, facilitando o acesso aos docentes que o desejem vivenciar em suas turmas.

Palavras-chave: TRRS. Investigação matemática. Seno de 30°.

ABSTRACT

REIS, R.S. *Why is sine 30° ½?* : a research proposal for use in the classroom. 2023. 81f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2023.

This work presents a pedagogical, investigative and multisemiotic possibility, created with the objective of contributing to the teaching and learning of trigonometric ratios, in elementary school, final years and in high school (in the stage in which this content is addressed). The starting point is the understanding that sine of 30º is always ½, regardless of the measures of the sides of a right triangle. This occurs due to the existing proportionality between the homologous sides of the infinitely similar right triangles, determined by this angle. Aiming to promote such a contribution, a set of activities was developed in this dissertation. This study was born out of the researcher's concern with the recurrent difficulties of students in relation to the subject, and also from her interest in contributing to the literature to overcome this difficulty. This development had two moments as a methodology: the first consisted of the elaboration of a literature review, in which the fundamental theoretical references for the creation of the set of activities were presented, with the support of concrete low-cost materials, which aims to instigate curiosity of the student and allow a mathematically grounded path for learning the topic in focus. We sought here to raise studies that dealt with curiosity and investigation, both with a solid mathematical theoretical foundation for the theme. The second moment consisted of creating, based on this review, each of the activities that make up the pedagogical path. During development, such a set is discussed, based on the literature surveyed. As a result, a set of 6 activities is presented, two in Step 1 (preparatory activities) and four in Step 2 (activities for the production of specific knowledge). This set is available for printing at the end of this work, facilitating access to teachers who wish to experience it in their classes.

Keywords: TRRS. Mathematical investigation. Sine of 30°.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABRAFI	Associação Brasileira das Mantenedoras das Faculdades
ACER	Australian Council for Educational Research
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IREM	Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathematiques
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PISA	Programme for International Student Assessment
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática é a honra do espírito humano.

Platão

Apresentação

Este trabalho é parte avaliativa do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, oferecido pela Faculdade de Formação de Professores/Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Ele apresenta a criação de um conjunto de atividades e materiais multissemiótico e fundamentado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS)- de Duval (2009) e na Investigação Matemática em sala de aula de Oliveira e Brocardo e Da Ponte (2016), com intencionalidade Matemática e didática, para a compreensão de razões trigonométricas por meio da semelhança de triângulos, a partir do caso particular da classe de equivalência de triângulos retângulos semelhantes que compartilha um ângulo de 30º.

Neste estudo, foi utilizada a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval[1], em uma perspectiva investigativa, de modo que se pudesse criar um conjunto de atividades para que o docente utilize com o estudante, a fim de consolidar a compreensão de um conceito. Para este fim, este estudo de pesquisa de natureza bibliográfica analisou como a TRRS pode contribuir na compreensão do objeto matemático em foco, podendo servir de base para argumentos e provas, mesmo o estudante estando, ainda, no Ensino Médio.

Esta dissertação está estruturada em 5 capítulos, sendo eles: a introdução, no capítulo 1, onde estão descritas a apresentação, a justificativa e os objetivos; no capítulo 2, é feita a revisão de literatura sobre a Teoria de Representação dos Registros Semióticos, a Investigação Matemática na sala de aula e o estudo do seno no triângulo retângulo; no capítulo 3, que trata da metodologia, é feita uma pesquisa bibliográfica na primeira parte e a confecção do conjunto de atividades; no capítulo 4, cada uma das atividades é comentada e são explicados os tipos de registros utilizados

[1] O professor Duval é filósofo e psicólogo. Trabalhou no IREM (Instituto de Pesquisa em Educação Matemática) de 1970 a 1995 em Estrasburgo, França, onde desenvolveu estudos relevantes sobre Psicologia Cognitiva. Atualmente é professor emérito na Universidade du Litoral Côte d’Opale, França.

e qual a relação com a BNCC; finalizando o capítulo 5, são descritas as considerações finais.

Justificativa

A investigação desta pesquisadora foi motivada por, após trabalhar mais de 20 anos lecionando para adolescentes, a pesquisadora observar que seus estudantes não conseguiam compreender que, além de decorar a tabela de ângulos notáveis, poderiam observar a relação de semelhança entre triângulos retângulos, para concluir que o seno do ângulo de 30° sempre será ½, por exemplo (considerando-se ângulos de 0° a 90°).

No ensino tradicional vigente, o qual privilegia a memorização em detrimento da compreensão, está a raiz desta dificuldade observada e onde o conceito de seno é um exemplo e uma amostra. Baldino (1995, p.83) denuncia a fragilidade do aprendizado de Matemática baseado em memorização no Brasil

> Como resultado da transferência[2], o sujeito cultiva sua identificação simbólica com o sujeito-suposto-saber, desenvolvendo estratégias de assujeitamento: decorar é poder falar como aquele que sabe. [...]. De tanto brincar de parecer, ele termina sendo. Nesse sentido, o ensino tradicional vigente tem o estatuto da hipnose.

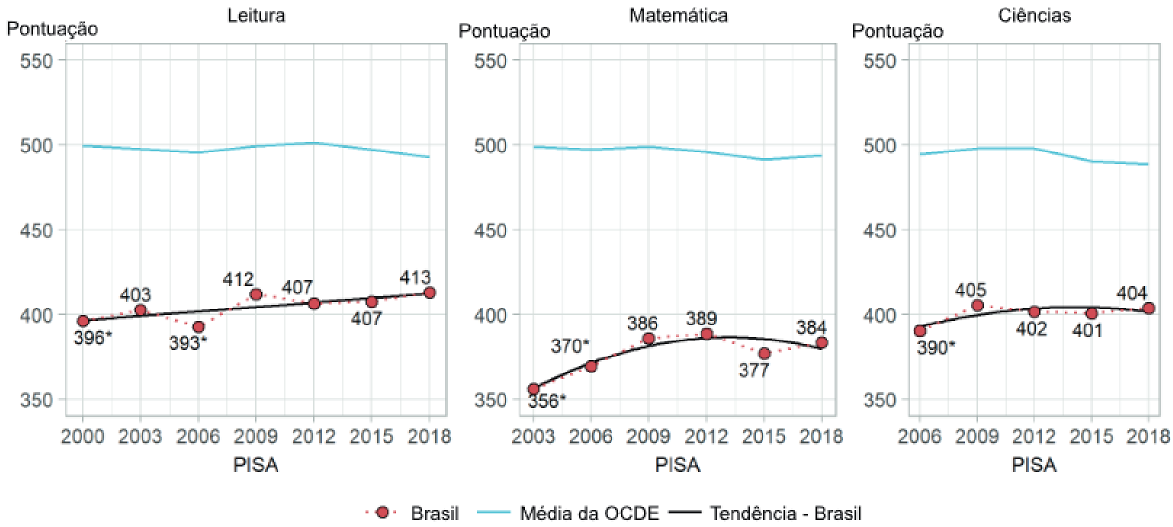
Esta fragilidade é apontada pelas avaliações de larga escala que abordamos na sequência.

As avaliações de sistema ou em larga escala são como um “[...] instrumento de acompanhamento global de redes de ensino com o objetivo de traçar séries históricas do desempenho dos sistemas [...], com a finalidade de reorientar políticas públicas.”, segundo Freitas (2009, p. 47).

Por meio de avaliações de larga escala, são observados desafios no aprendizado de Leitura, Ciências e, neste caso específico, Matemática, vide tendência do Pisa (2018), no quadro 1. Nesta avaliação, participam discentes do final do Ensino Fundamental 2 e, também, do Ensino Médio.

[2] A transferência (...) consiste na ilusão de que a significação de um certo elemento (retroativamente fixado pela intervenção do significante-mestre) estava presente desde o começo como sua essência imanente. O efeito retroativo (...) é percebido como algo que sempre existiu (ZIZEK,1991, p. 101)

Quadro 1 - Tendências de desempenho em Leitura, Matemática e Ciências[3]



Fonte: OCDE, 2018.

Deste modo, cita-se adiante documentos que servem para registrar o desempenho dos estudantes, para análises e criação de Políticas Públicas Educacionais. De acordo com (ARAÚJO e TENÓRIO, 2017) podemos consultar estas informações nos sites da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), Australian[4] for [5]Research (ACER) e Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Os resultados no Ideb[6] mostram, diretamente, como são afetadas a Língua Portuguesa e Matemática em nosso país. (INEP, 2021). De acordo com o resultado do PISA (2018), baseado na OCDE, os estudantes estão organizados, de modo crescente em porcentagem, somando Níveis abaixo de 2.

---

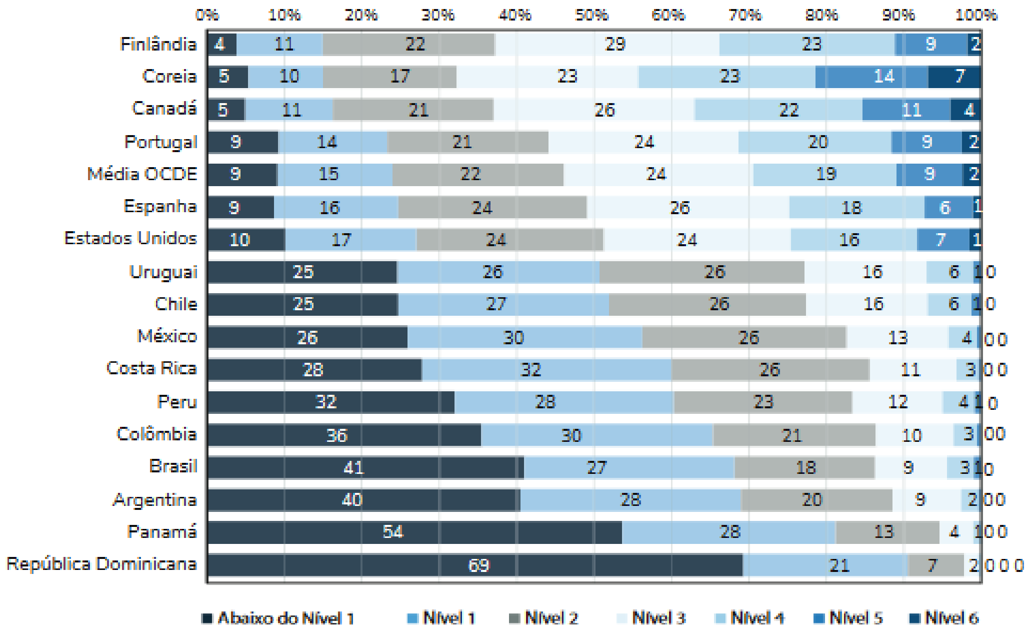
[3] Nota: *indica estimativas de desempenho médio que estão, no que tange à estatística, significativamente acima ou abaixo das estimativas do Pisa (2018). A linha azul indica o desempenho médio entre os países da OCDE com dados válidos em todas as avaliações do Pisa. A linha pontilhada vermelha indica o desempenho médio no Brasil. A linha preta representa a linha de tendência para o Brasil (linha de melhor ajuste).

[5] No Nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que inferências diretas. Conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um único modo de representação. Conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicas para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais de resultados. (PISA, 2018, p.116).

[6] IDEB é o indicador sintético que relaciona as taxas de aprovação escolar, obtidas no Censo Escolar, com as médias de desempenho em Língua Portuguesa e Matemática dos estudantes no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) (PISA, 2018)

No Nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que inferências diretas. Conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um único modo de representação. Conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicas para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais de resultados. (PISA, 2018, p.116)

Quadro 2 - Percentual de estudantes por nível de proficiência nos países selecionados – MATEMÁTICA



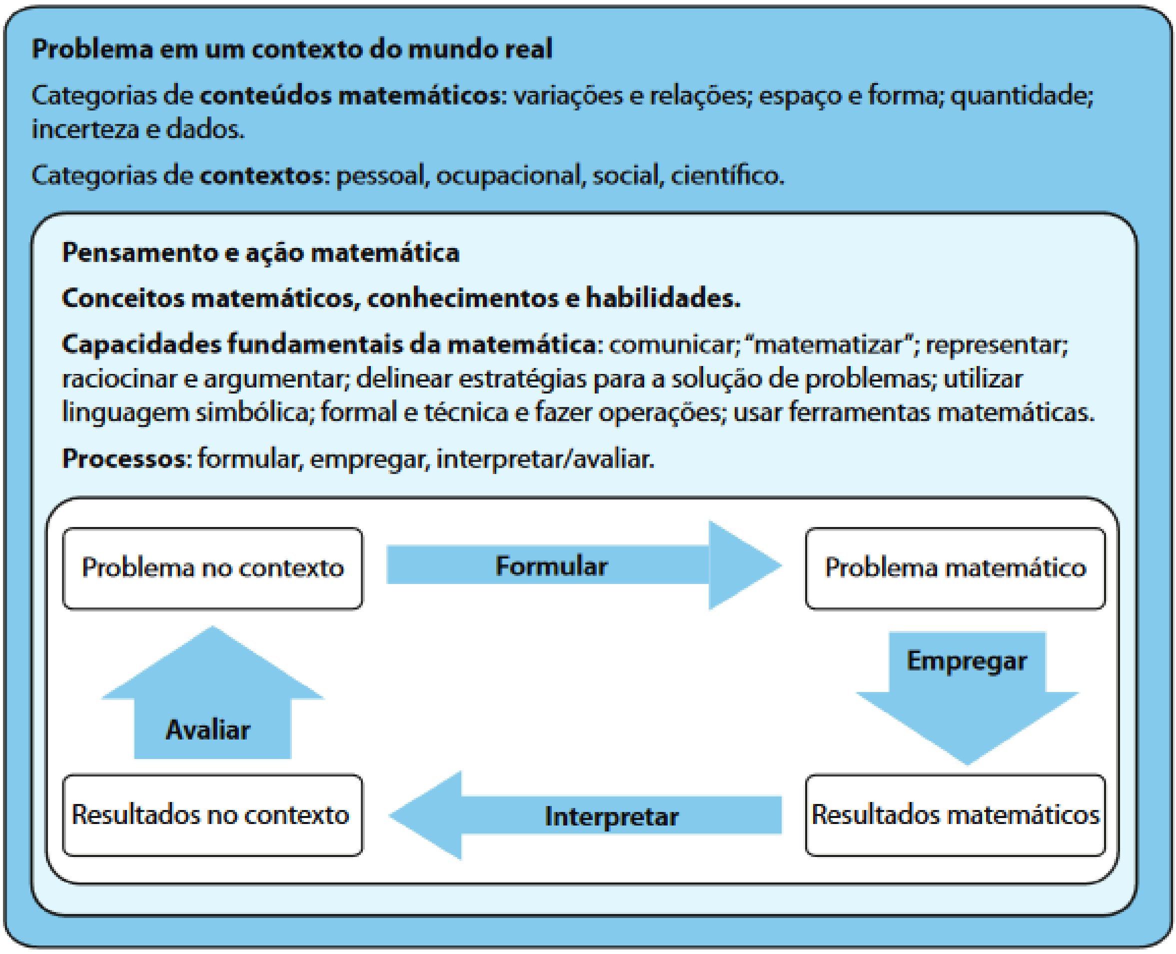
Fonte: INEP, 2022.

Estas análises do Pisa, são feitas, não apenas sobre o conteúdo específico, como também, sobre características pessoais (gênero e atividades socioeconômicos), segregação escolar de estudantes de baixa proficiência em relação a sua situação econômica, carência de material ou de pessoal nas escolas, além da vida escolar (estudantes que sofrem bullying, agitados em sala de aula, faltas constantes às aulas, atrasos, falta de apoio psicológico, entre outros fatores).

Em se tratando do PISA, especificamente de Matemática, a avaliação realizada é de Letramento Matemático[7], que funciona segundo o quadro 3.

[7] Letramento matemático é a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos

Quadro 3 - Modelo de letramento matemático na prática



Fonte: OCDE, 2019a.

De acordo com o PISA (2022), o quadro conceitual 5 analisa os fundamentos do letramento matemático, relacionando o raciocínio matemático e três processos do ciclo de resolução de problemas (modelagem Matemática). Também organiza o conhecimento matemático em quatro categorias de conteúdos e desafios sobre as quatro dimensões de contextos que os estudantes estarão inseridos fenômenos de crescimento (variações e relações); aproximação geométrica (espaço e forma), simulações de computador (grandeza), e tomada de decisão condicionada (incerteza e dados). Além do conhecimento matemático ser organizado nas categorias descritas anteriormente, cada educando é preparado para a cidadania do século XXI, em suas vidas pessoais, cívicas e profissionais, usando a Matemática de modo reflexivo.

---

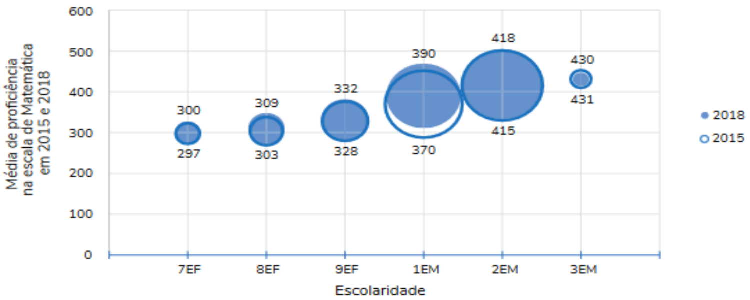
e ferramentas matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso ajuda os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática desempenha no mundo e faz com que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. (OCDE, 2019a).

A média de proficiência dos jovens brasileiros em Matemática no Pisa em 2018, foi de 384 pontos, 108 pontos abaixo da média dos estudantes dos países da OCDE (492) (INEP, 2020, p.109).

Neste contexto, o domínio da Matemática está relacionado à como os indivíduos reagem aos processos matemáticos para resolver um problema.

Como este trabalho destina-se ao Ensino Médio, a seguir é apresentado um quadro comparativo desta etapa relacionando-a ao Ensino Fundamental. É verificado que a quantidade de participantes do 1° e 2° anos do Ensino Médio é bem maior, não só comparada ao 3° ano desta mesma etapa, mas também, em relação às séries finais do Ensino Fundamental, tanto em 2015 quanto em 2018 (quadro 4).

Quadro 4 - Evolução da média de proficiência por ano de escolaridade entre 2015 e 2018 - Matemática[8]

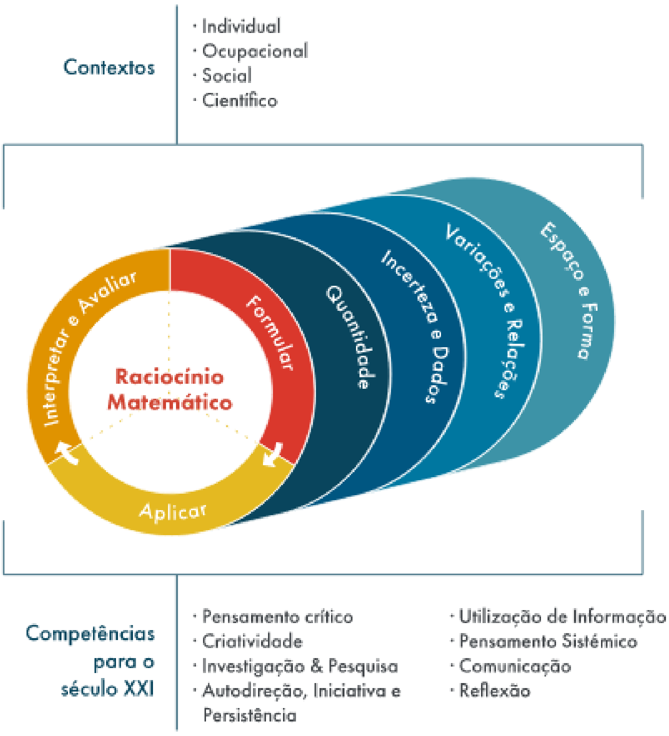


Fonte: INEP, 2022.

No ano de 2022, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) realizou a versão de avaliação internacional de Estudantes (Pisa), que ocorreu de modo eletrônico, devido à pandemia do Covid-19. Segundo a ABRAFI (Associação Brasileira das Mantenedoras das Faculdades), a avaliação foi aplicada a 14.017 estudantes de faixa etária de 15 anos, matriculados a partir do 7º ano do Ensino Fundamental. E o resultado está previsto para ser divulgado em dezembro de 2023, conforme estudos da OCDE.

[8] Nota: Neste gráfico, a área de cada círculo é proporcional ao percentual que cada ano de escolaridade representou da amostra, conforme os dados da Tabela 17. O número acima de cada círculo é a média de proficiência em 2018 e o número abaixo é a média de proficiência em 2015.

Quadro 5 - Quadro conceitual de Matemática 2022



Fonte: PISA, 2022.

Neste quadro conceitual é valorizado o modo de raciocinar logicamente e apresentar argumentos para obter conclusões acertadas e imparciais, de modo que o estudante possa levantar hipóteses para chegar a resultados confiáveis.

Portanto, o baixo desempenho em Matemática dos alunos brasileiros no PISA justifica a importância de se pensar em atividades pedagógicas que favoreçam a aprendizagem.

Objetivos

Objetivo geral

Desenvolver um percurso pedagógico multissemiótico e investigativo para a construção da ideia do seno a partir da proporcionalidade de lados homólogos em triângulos retângulos semelhantes.

Objetivos específicos

- Criar um conjunto de atividades visando atender ao objetivo geral.
- Selecionar um conjunto de material concreto para ser o suporte do conjunto de atividades supracitado.

1 REVISÃO DE LITERATURA

Esta pesquisa bibliográfica foi realizada com o objetivo de estudar as diferentes formas de representação semiótica, nos diferentes contextos, verificando que a demonstração é um caminho que deve ser exercitado, desde os anos iniciais, em Matemática. Para Duval (1988, p.57)

> [...] favorecer o desenvolvimento das funções cognitivas, organizando problemas de geometria matematicamente próximos que solicitem os mesmos conhecimentos, determina uma categorização cognitiva indispensável ao aprendizado da demonstração.

A perspectiva pedagógica para desenvolvimento do percurso foi baseada na Investigação Matemática em Sala de Aula, em que os estudantes precisam desenvolver suas potencialidades e fazer suas descobertas, a partir do estímulo do professor. Segundo Machado (2008, p.131),

> [...] as propostas e estratégias de ensino não parecem proporcionar aos alunos condições para: a) compreender a mudança do estatuto da figura, os estatutos da definição e os teoremas geométricos, das hipóteses (dados do problema) e da conclusão (ou tese); b) saber utilizar as mudanças de registros de representações; c) apropriar-se do raciocínio lógico-dedutivo.

Para o estudo da trigonometria no triângulo retângulo, dentro do recorte elencado, foram pesquisados trabalhos que relacionassem os conceitos trigonométricos com os de semelhança de triângulos.

1.1 Estudo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Na introdução deste trabalho, foram descritas as dificuldades dos estudantes, em Matemática, de acordo com as avaliações internacionais e nacionais, além da observação desta pesquisadora.

Portanto, de modo a minimizar as dificuldades encontradas no aprendizado em Matemática, será utilizada uma das abordagens sobre a apreensão e criação de objetos matemáticos, parte da Teoria de Registros de Representação Semiótica, que chamaremos daqui em diante de TRRS, desenvolvida por Raymond Duval, em seu livro Semiósis e Pensamento Humano (2009). A relevância de seus estudos serve de base para muitos autores/pesquisadores da Educação Matemática, de vários locais do mundo.

Segundo De Freitas e Rezende (2013, p.10), Raymond Duval~~,~~ desenvolve pesquisa em Psicologia Cognitiva desde os anos 1970, contribuindo de forma particular para a Educação Matemática, onde são utilizados os Registros de Representação Semiótica para o desenvolvimento da apreensão Matemática.

Em entrevista concedida à Revista Paranaense de Educação Matemática (2013), Duval desenvolveu duas linhas de pesquisa baseadas na sua tese, das quais nos baseamos na segunda, que foi trabalhada para explicar sua motivação no desenvolvimento da TRRS, após conclusão de sua tese para desenvolvimento de noções físicas e Matemáticas em crianças e adolescentes, baseada na epistemologia genética de Piaget. A partir daí, começou a desenvolver duas linhas de pesquisas. Na qual suas conclusões eram as mesmas de Piaget, onde as crianças de 12-15 anos demonstraram dificuldade de demonstração, e a segunda sobre a importância e variedade nas formas de linguagens das atividades Matemáticas.

A primeira linha de pesquisa foi abandonada não só pela discordância com Piaget, como também, na ocasião, pela linguagem Matemática utilizada ser resumida a códigos e codificações, além de questões. A segunda foi trabalhada para todas as disciplinas, devido às mesmas dificuldades de leitura e interpretação dos enunciados. Ou seja, precisava definir que tipo de representação poderia ser feita para um raciocínio dedutivo, uma escrita simbólica, para além de uma argumentação e um texto. De acordo com Duval, eram exigidas “engenharias didáticas”[9] como raciocínio dedutivo e argumentativo em língua natural, compreensão de enunciados, uso de letras, construção de figuras, leitura e interpretação de gráficos cartesianos, uso de diagramas, tabelas, tudo isso como se fosse algo habitual para os estudantes.

Existem diferentes modelos de registros de representação semiótica utilizados em Matemática. No quadro 6, são mostrados diferentes registros de representação, observando suas diferenças.

---

[9] Segundo Carneiro (2005, p.89), o termo Engenharia Didática (ARTIGUE, 1994, 1996), criado na área de Didática das Matemáticas, na França, na década de 80, tem inspiração no trabalho do engenheiro, cuja produção exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia — momentos em que é preciso construir soluções.

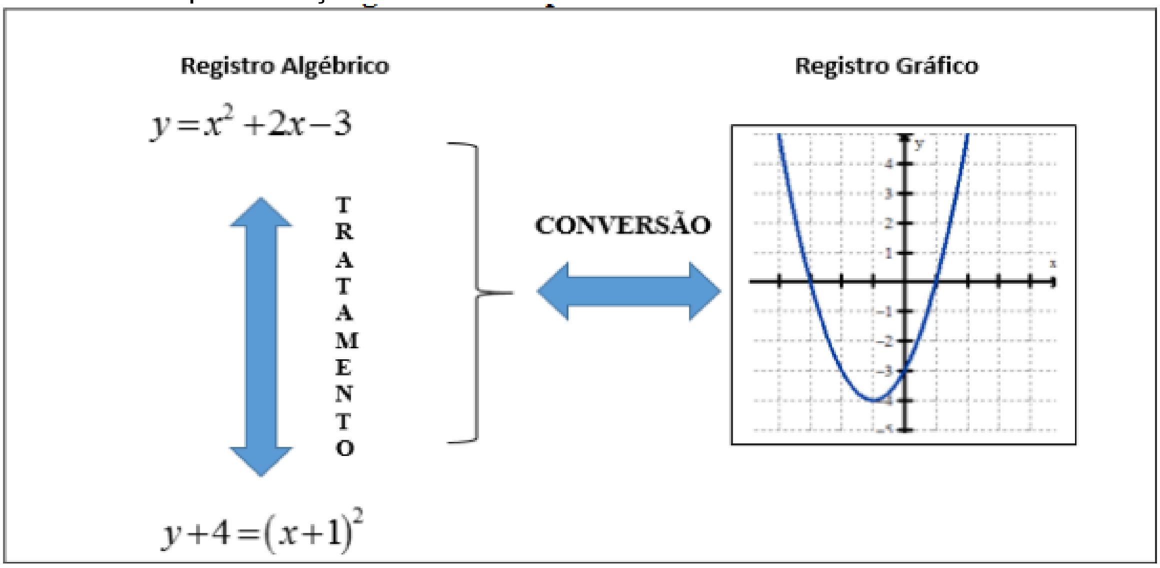
Quadro 6 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: MACHADO, 2008, p. 14.

Após questionário aplicado por Duval a estudantes de 15-16 anos, em um nível do sistema de ensino francês correspondente aos anos finais do Ensino Fundamental brasileiro, sobre Funções Afins, verificou-se que a atividade Matemática deveria ser analisada em relação às transformações de representações semióticas e não, apenas, de conceitos mentais (quadro 7).

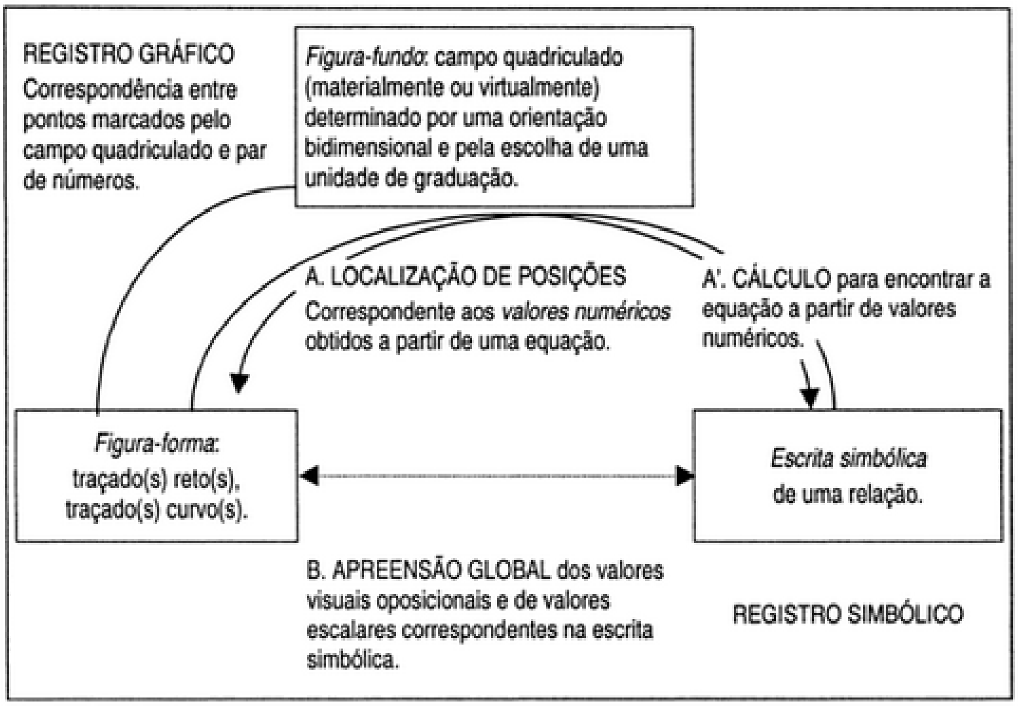
Quadro 7 - A distinção decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão - dois tipos radicalmente diferentes de transformação de representações semióticas



Fonte: DENARDI, 2017, p. 7.

Reiterando que o acesso aos objetos matemáticos e os processos cognitivos e epistemológicos do tratamento dado à Matemática são parte integrante da TRRS, percebeu-se que a dificuldade de compreensão da Matemática está intimamente ligada à diversidade e ao confuso uso de suas representações semióticas (HENRIQUES, 2006). Por exemplo, há um tratamento dado à equação do 2º grau representada no quadro, quando a reescrevemos na forma fatorada, ou seja, dentro do registro algébrico, mudamos a escrita para diversificar a compreensão. Já a passagem de uma equação para um gráfico cartesiano precisa ter uma articulação entre as variáveis cognitivas relacionadas aos registros de cada uma, assim como a conversão dos diferentes registros de representação (MACHADO, 2008). Esta situação está representada no quadro 8.

Quadro 8 - Esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas



Fonte: MACHADO, 2008, p.18.

Esta organização permite três tipos de tratamento (isto é, de operações internas aos gráficos) e dois tipos de conversão com o registro simbólico. As ligações A e A' permitem somente uma leitura pontual dos gráficos. Somente a coordenação B permite uma apreensão global qualitativa. Mas será que somente essa coordenação permite reconhecer a forma de uma equação (ou de uma inequação), olhando a forma e a posição de retas e curvas (em um gráfico não-quadriculado)? Ora, para a maioria dos alunos, essa coordenação não é jamais efetuada, mesmo ao fim do Ensino Médio (com aproximadamente, 18 anos), segundo Machado (2008).

De acordo com Duval (2009, p.17), “não há noésis sem semiósis, é a semiósis que determina as condições de possibilidade e de exercício da noésis”. Ou seja, semiósis é a apreensão ou produção de uma representação semiótica e noésis são os atos cognitivos como apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência, parecendo que a noésis é independente da semiósis. Assim,

> [...] na Matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida etc.). O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. (MACHADO, 2008, p.21)

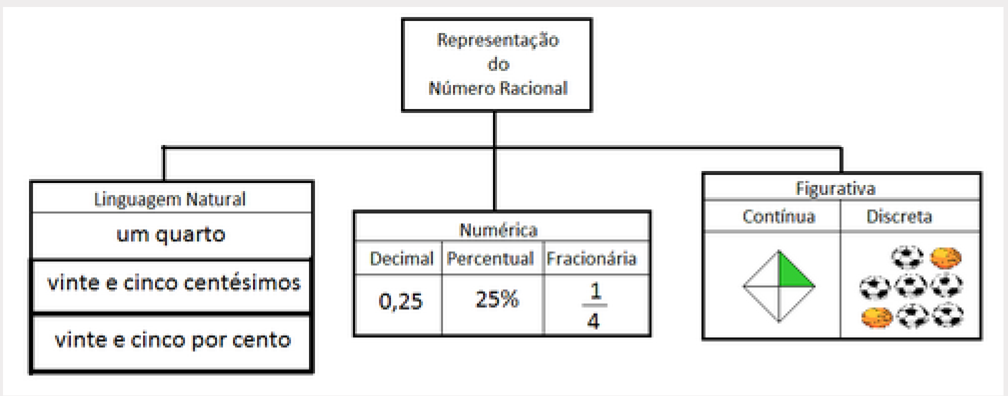
As representações mentais não são suficientes para o aprendizado matemático, necessitando de diferentes e específicos registros semióticos, sem que um descaracterize o outro. Para que os registros semióticos sejam funcionais, eles precisam ser tarefas construídas de modo a desenvolver o pensamento humano. E para que aconteça a transposição de uma representação semiótica a outra, de modo congruente, são necessárias três condições:

> [...] correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada. (DUVAL, 2009, p.18)

Por exemplo, a passagem da escrita algébrica da expressão “$XY \geqslant 0$” para a representação gráfica cartesiana dos dois quadrantes determinados respectivamente pelos semieixos Y e X positivos e X e Y negativos, são congruentes; entretanto, a passagem inversa não é. (DUVAL, 2009, p.19). E, quando essa passagem é não congruente, o aprendizado pode ficar prejudicado. Ou seja, a transformação de uma linguagem algébrica para a linguagem gráfica pode ser bem-sucedida, porém, a passagem inversa nem sempre é compreendida. Em geral, quando algo é ensinado, é privilegiado um dos sentidos de conversão.

Como as representações semióticas não realizam apenas as representações mentais, mas sim as diferentes formas de funções cognitivas e discursivas, é necessário a pluralidade dos registros de representação semiótica do mesmo objeto matemático, de determinado conteúdo. Um exemplo é a diversidade de representações do número racional ¼ (quadro 9).

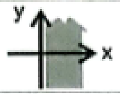
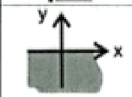
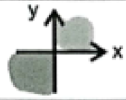
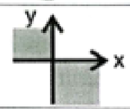
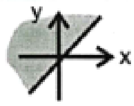
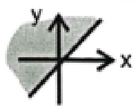
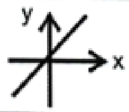
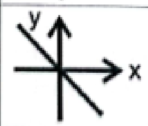
Quadro 9 - Esquema de representações para o número racional “¼”



Fonte: MELO, 2019, p. 6.

O reconhecimento do estudante, autonomamente, das modificações ou diferentes formulações de representações semióticas, demonstra a compreensão dos objetos matemáticos com seus respectivos conteúdos. Entretanto, o desenvolvimento dos conteúdos e a representação dos registros encontram dificuldades na compreensão: a princípio, era feita uma oposição entre linguagem e imagens, evitando a complexidade, de modo que não fossem entendidos como o mesmo registro; o segundo desafio é associar a representação ao representado e, assim, desenvolver outros modos de registros do mesmo representado e, por último, a dificuldade em coordenar dois sistemas semióticos diferentes não ser garantia de compreensão de determinado conteúdo. Apresentamos no quadro 10, a pesquisa de Duval (1988c, p.247-249) sobre a tarefa de conversão entre escrita algébrica de relações e gráficos cartesianos.

Quadro 10 - Conversão entre escrita algébrica
de relações e gráficos cartesianos

I	II	III	I → III: hachurar	III → II: escolher a expressão
1... o conjunto dos pontos que têm uma abscissa positiva	$x > 0$		67%	51%
2... o conjunto dos pontos que têm uma ordenada negativa	$y < 0$		67%	61%
3... o conjunto dos pontos cuja abscissa e ordenada são de mesmo sinal	$xy \geq 0$		56%	25%
4.	$xy \leq 0$			23%
5... o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa (reta y = x estando traçada)	$y > x$		38%	38%
6... o conjuntos dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa (reta y = x não estando traçada)	$y > x$		19%	25%
7... o conjunto dos pontos cuja ordenada é igual à abscissa	$y = x$		60%	75%
8... o conjunto dos pontos cuja ordenada é oposta à abscissa	$y = -x$		34%	58%

Fonte: DUVAL, 2009, p. 73-74.

Neste gráfico, estão representadas as porcentagens da quantidade de estudantes que conseguem fazer a conversão da linguagem natural (I) para o gráfico (III) e, ao contrário, dos que conseguem fazer a conversão do gráfico (III) para as expressões algébricas (II).

E o que a representação semiótica tem a ver com a aprendizagem?

Segundo Duval (2009, p.42), “[...] as representações externas preenchem então uma função de comunicação [...] a função de objetivação (para si) é quase sempre assimilada àquela de expressão (para outro), apesar de ser independente dela”. Vide tabela1.

Tabela 1 - Tipos e funções de representações

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	mental função de objetivação	semiótica função de objetivação função de expressão função de tratamento intencional
NÃO-CONSCIENTE	computacional função de tratamento automático ou quase instantâneo	

Fonte: DUVAL, 2009, p.43.

Portanto, ao levar em consideração a TRRS, o percurso pedagógico teve como base a conversão, tratamento e a coordenação. Ou seja, mesmo que alguém já tenha interiorizado um determinado conceito, não significa que, apenas reproduzindo-o, o outro irá compreender da mesma forma. Assim, as limitações semióticas e sociais devem ser levadas em consideração, de modo que cada sujeito possa decidir e escolher uma representação objetiva.

1.2 **Investigação matemática em sala de aula**

Explorar a investigação Matemática em sala de aula faz lembrar da zona de desenvolvimento proximal[10] de Vygotsky (2008, p.53). Este autor analisa como a linguagem se desenvolve lógica e analiticamente, através da observação do desenvolvimento intelectual do indivíduo, ainda criança,

> Esse instante crucial, em que a fala começa a servir ao intelecto, e os pensamentos começam a ser verbalizados, é indicado por dois sintomas objetivos inconfundíveis: (1) a curiosidade ativa e repentina da criança pelas palavras, suas perguntas sobre cada coisa nova (“O que é isto?”); e (2) a

[10] Zona de desenvolvimento proximal representa a diferença entre a capacidade da criança de resolver problemas por si própria e a capacidade de resolvê-los com ajuda de alguém.

> consequente ampliação de seu vocabulário, que ocorre de forma rápida e aos saltos.

Quando a criança se torna jovem e ingressa no mundo dos adultos, este meio precisa desafiá-la com tarefas intelectuais e exigências que possam proporcionar o desenvolvimento de seu raciocínio, de modo a atingir estágios mais elevados. Especificamente, no contexto da Matemática, ela pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio humano. A investigação[11] é objeto deste estudo e como ele se desenvolve.

Particularmente, a investigação Matemática não trata, exclusivamente, de resolver problemas muito sofisticados, mas sim, de identificar claramente o problema, formular conjecturas, procurar respostas, desenvolver estratégias, testar, provar. Para Stewart (1995, p.17),

> Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos [...] um interessante e autocontido pedaço de Matemática, concentrando-se num exemplo judiciosamente escolhido, contém normalmente em si o germe de uma teoria geral, na qual o exemplo surge como um mero detalhe, a ser embelezado à vontade.

Uma afirmação que ilustra a citação acima é sobre a solução do problema de Pierre de Fermat[12] pelo matemático inglês Andrew Wiles[13], "é bom trabalhar em qualquer problema contando que ele dê origem a Matemática interessante durante o caminho, mesmo se não o resolvermos no final"

O interesse pela investigação Matemática em sala de aula deve ser estimulado pelos professores, tornando-se um poderoso processo de construção e desenvolvimento do conhecimento. Segundo Oliveira e Brocardo e Da Ponte (2016, p. 18),

> Os alunos podem ter um sabor da Matemática em construção e do trabalho criativo e independente… [Eles podem] generalizar a partir de observação de casos, [usar] argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta.

---

[11] Segundo o Dicionário Oxford Languages, investigação é uma "averiguação sistemática de algo; inquirição, indagação, apuração".

[12] Pierre de Fermat (1601-1665), um dos grandes matemáticos do século XVII. Sebastião e Silva (1967).

[13] Sir Andrew John Wiles (Cambridge, 11 de abril de 1953) é um matemático britânico. Professor na Universidade de Princeton, ficou famoso por ter demonstrado, com a colaboração de Richard Lawrence Taylor, o Último Teorema de Fermat, em 1994. (http://clubes.obmep.org.br/blog/b_andrew-wiles).

Deste modo, para que ocorra a investigação Matemática, Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira e Oliveira (1999), definiram quatro momentos principais, descritos na tabela 2.

Tabela 2 - Momentos na realização de uma investigação

EXPLORAÇÃO E FORMULAÇÃO DE QUESTÕES	• Reconhecer uma situação problemática
	• Explorar a situação problemática
	• Formular questões
CONJECTURAS	• Organizar dados
	• Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
TESTES E FORMULAÇÃO	• Realizar testes
	• Refinar uma conjectura
JUSTIFICAÇÃO E AVALIAÇÃO	• Justificar uma conjectura
	• Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: OLIVEIRA, BROCARDO e PONTE, 2016.

A investigação não constitui um trabalho necessariamente isolado e que tenha tempo determinado para ser encerrado. Algumas conjecturas iniciais podem ser finalizadas ou, posteriormente, negadas. A Afirmação de Fermat foi a mais longa conjectura que permaneceu deste modo até ser provada, muitos séculos depois. A investigação sobre as regularidades nas raízes dos números complexos, de

Braumann (2002), foi trabalhosa para ser demonstrada e, mais tarde, não satisfeito, fez uma outra demonstração mais simples e elegante, mostrando que “o importante não é a diversidade de conjecturas, mas os diversos processos de justificação e prova sucessivamente postos em ação”. (OLIVEIRA E BROCARDO e PONTE, 2016)

Não se pode confundir resolução de problema com exercício, tampouco com investigação. Polya (1990) diz que um exercício é fechado e tem resposta imediata enquanto um problema pode ser aberto e o estudante não tem um método específico para chegar ao resultado imediato. Entretanto, os exercícios e problemas possuem natureza comum em relação à clareza de seus enunciados, sabendo exatamente onde se quer chegar. Já numa investigação, as situações são abertas, onde os pontos de partida e de chegada não estão completamente definidos, cabendo ao estudante mobilizar seus conhecimentos cognitivos e afetivos para formular questões, demonstrar, analisar seus resultados, discutir e argumentar com os envolvidos.

Para que a investigação Matemática ocorra na sala de aula, não só os estudantes devem ser estimulados para este fim, como também, os professores precisam ser preparados para organizar o trabalho, as etapas e definir os objetivos. Para Oliveira e Brocardo e Da Ponte (2016, p.25),

> Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

O trabalho tem início com a apresentação da proposta, continua com a explicação de como este será desenvolvido, estimula os estudantes a explorar o problema e a formular questões, testar conjecturas, aprofundá-las e justificá-las.

E como o professor deve executar seu trabalho nessa modalidade de investigação?

Nas escolas brasileiras o padrão de estudo é baseado na resolução de exercícios, com algumas resoluções de problemas. Sendo assim, o professor precisa dosar suas interferências de modo que o estudante tenha sua autonomia para refletir e criar conjecturas, assim como garantir que a investigação seja fluente na disciplina de Matemática, mostrando que não são afirmações, mas sim interrogações que fazem o trabalho se desenvolver. “As investigações acerca da capacidade intelectual, necessariamente, testam tanto o pesquisador quanto o sujeito experimental”, diz Koehler (1921).

Também é responsabilidade do professor avaliar o progresso de seus estudantes, observando, verificando se realmente compreenderam a proposta da investigação, anotar informações que cada grupo desenvolveu, fazer perguntas e ouvir explicações. Pode acontecer do professor não ter resposta imediata para algo que seja questionado. É necessário estar aberto a quaisquer tipos de perguntas e que essas sejam respondidas com raciocínio matemático autêntico. Pois, para os estudantes, o modelo do professor contribui para promover a aprendizagem do trabalho da disciplina de Matemática (OLIVEIRA, BROCARDO e PONTE, 2016).

Na disciplina de Matemática, podem ser feitas investigações em diferentes áreas do conhecimento, como as numéricas, que contribuem para a compreensão e desenvolvimento de diferentes conjuntos numéricos; as geométricas, que ajudam a compreender o espaço em que vivemos, onde os conceitos podem ser estudados de modo experimental, indutivo-dedutivo e axiomático, além de utilizar programas computacionais; em estatística, onde os estudantes têm a oportunidade de trabalhar com problemas reais, realizando pesquisas em sua própria sala de aula, a partir da formulação de um problema, passando pela coleta de dados, organização destes, sistematização em gráficos, tabelas, interpretação e análise dos resultados.

Além das observações descritas anteriormente, uma sugestão de avaliação para o processo de investigação é a produção de relatórios escritos individualmente ou em grupo. O roteiro sugerido no quadro 11, inclui o modo como o professor poderá avaliar seu estudante.

Quadro 11 - Roteiro para elaboração de um relatório

Na elaboração do relatório pode ter em conta, entre outros, os seguintes aspectos:

- Identificação do aluno ou grupo de alunos;
- Título;
- Objetivo do trabalho incluindo as questões iniciais;
- Descrição do processo de investigação (incluindo tabelas e/ou esquemas, esboços de gráficos, organização dos dados recolhidos…), das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas;
- Conclusões;
- A sua apreciação crítica da tarefa proposta;
- Apreciação autocrítica da sua intervenção no trabalho;
- Bibliografia e outros materiais consultados;

Aspectos que serão tidos em conta na avaliação:

- Organização do trabalho;
- Descrição e justificação dos procedimentos utilizados;
- Correção e clareza dos raciocínios;
- Correção dos conceitos matemáticos envolvidos;
- Correção e clareza da linguagem utilizada;
- Criatividade.

Fonte: A autora, 2022.

É importante ressaltar que a investigação está nos currículos a investigação está nos currículos de diferentes países, em uns, de modo direto e consolidado, em outros, indiretamente, com algumas referências ao estudo de Matemática, como veremos adiante.

Nos Estados Unidos da América, o Council of Teachers of Mathematics (NCTM)[14], identificou cinco objetivos para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar: (i) aprender a dar valor a Matemática; (ii) adquirir confiança na sua capacidade de fazer Matemática; (iii) tornar-se apto a resolver problemas matemáticos; (iv) aprender a comunicar matematicamente; e (v) aprender a raciocinar matematicamente[15]. Este documento orienta professores e alunos como ter um relacionamento de confiança com a Matemática, fazendo-a trabalhar em favor do investigador, avaliando a diversidade de problemas, criando conjecturas, argumentando e analisando os resultados.

Na Inglaterra, segundo o relatório Cockcroft (1982), desde os anos 80, já existem registros específicos da utilização da investigação Matemática. O documento DEPARTMENT FOR EDUCATION, sinaliza que os estudantes devem ter

> oportunidades de usar e aplicar a Matemática em tarefas práticas, em problemas da vida real e em problemas puramente matemáticos; trabalhar em problemas que constituam um desafio; encontrar e considerar diferentes linhas de argumentação Matemática (1998, p. 2).

De acordo com esse documento, podemos observar no quadro 12 quais competências os estudantes deverão desenvolver ao longo do trabalho de investigação:

[15] NCTM, 1991.

Quadro 12 - Competências que os estudantes devem desenvolver na investigação Matemática

● Descobrir modos de ultrapassar as dificuldades que apareçam; desenvolver e usar estratégias próprias; ● Selecionar, experimentar e avaliar uma variedade de abordagens diferentes; ● Identificar a informação em falta e reduzir um problema complexo a um conjunto de pequenos problemas; ● Explicar e justificar como chegaram a uma conclusão; ● Elaborar conjecturas e hipóteses, desenvolver métodos para testá-las e analisar os resultados de modo a verificar se são ou não válidas; ● Usar o raciocínio matemático, inicialmente para explicar e depois, seguindo uma linha de argumentação, para reconhecer as inconsistências.

Fonte: DEPARTMENT FOR EDUCATION, 1998.

Nos programas franceses para educação, a ideia de investigação se faz presente, intimamente ligada a trabalhos científicos, desenvolvendo a experimentação, conforme o documento MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA RECHERCHE ET DE LA TECHNOLOGIE, afirmando que:

> o estudo de situações mais complexas, sob a forma de preparação de atividades na aula ou de problemas a resolver ou a redigir, alimenta o trabalho de investigação, individual ou em equipe, e permite aos alunos avaliar a sua capacidade de mobilizar os seus conhecimentos em diversos setores (1997, p.13)

Em Portugal, a investigação Matemática é tratada como tema transversal, não deixando de citar a importância do desenvolvimento do raciocínio matemático, conforme MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2007). No quadro 13, podemos ver estes objetivos:

Quadro 13 - Objetivos gerais para aprendizagem Matemática

● Reconhecer e apresentar generalizações Matemática e exemplos e contraexemplos de uma afirmação; ● Justificar os raciocínios que elaboram e as conclusões a que chegam; ● Compreender o que constitui uma justificação e uma demonstração em Matemática e usar vários tipos de raciocínio e formas de demonstração; ● Desenvolver e discutir argumentos matemáticos; ● Formular e investigar conjecturas Matemáticas.

Fonte: MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2007.

Neste documento, os estudantes são estimulados, desde o 1° ciclo (6-9 anos) a explicar e justificar suas ideias Matemáticas (são sugeridas investigações em Regularidades Numéricas e Relações Numéricas em Tabuadas); no 2° ciclo (10-11 anos) as análises tornam-se mais intensas (trabalham em organização e tratamento de dados, ou seja, em investigação Estatística); no 3° ciclo (12-14 anos), estes estudantes já estão aptos ao raciocínio dedutivo, distinguir argumentações e a formular diferentes demonstrações (aqui, são usados os diferentes temas de Geometria Plana e Teorema de Pitágoras); e no ensino secundário (15-17 anos) os estudantes desenvolvem o raciocínio e pensamento científico, descobrindo conceitos matemáticos, validando conjecturas, usando métodos de demonstração (nesta etapa, os estudos sugeridos são em torno da Geometria Espacial e Funções, ambos apoiados pelo uso da Tecnologia, que colabora nas experimentações e na formulação de conjecturas).

No Brasil, a investigação Matemática e a pesquisa são fundamentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), publicados em 1998, onde são mostrados os objetivos gerais para o ensino de Matemática (quadro 14).

Quadro 14 - Objetivos gerais para o ensino de Matemática

- Grandezas e medidas - “manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos **fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras**…”
- Espaço e forma - “o estudo de conteúdos do bloco espaço e forma tem como **ponto de partida a análise de figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades**”.
- Grandezas e medidas - “muitas atividades que envolvem a questão do tempo podem interessar os alunos, como [...] **pesquisa sobre o funcionamento e construção de um relógio solar**…”
- Cálculo - “o uso da calculadora facilitará e **estimulará a investigação**…”
- Espaço e forma - “as principais funções do desenho **são visualizar [...] ajudar a provar, ajudar a fazer conjecturas** [...]”.
- Espaço e forma - “**as observações do material concreto [devem ser] elementos desencadeadores de conjecturas e processo que leem a justificativas mais formais”**.
- Tratamento de informação - “nos ciclos finais, a noção de probabilidade continua a **ser explorada de maneira informal, por meio de investigações**…”

Fonte: PCN, 1998.

Com base no quadro 14, podemos dizer que, no currículo brasileiro, há destaque aos processos investigativos, destacados em negrito, nos estudos dos conteúdos matemáticos e, na vida real, principalmente, onde estão associados ao tratamento da informação.

Entretanto, os currículos não se organizam sozinhos; é necessário que os professores façam a sua gestão, tomando decisões a respeito das tarefas que os estudantes irão desenvolver e em que proporção estas serão aplicadas. Interessa pontuar que as atividades investigativas nos anos iniciais não precisam ter lugar de destaque, de modo que o estudante, dentro de um contexto, possa usar essa metodologia de modo mais natural e como parte integrante da Matemática.

Segundo Brocardo (2002), alguns professores têm, sistematicamente, inserido a investigação Matemática em seu cotidiano escolar, em uma ou mais unidades didáticas ao longo do ano letivo. Quando o professor usa a investigação Matemática em sala de aula, talvez, não fosse tão rápido quanto reproduzir algum conteúdo, como é feito no ensino tradicional. Entretanto, a consolidação desse conhecimento não necessitará ser repetido, como acontece algumas vezes com outras práticas em que são estudados os conteúdos matemáticos. Desse modo, professor e estudante aprimoram o gosto pela Matemática e o desenvolvimento do processo investigativo.

1.3 **Estudo da Razão Trigonométrica Seno**

Para escrever Matemática, precisamos organizar definições, teoremas, demonstrações, entre outros processos. Segundo Roque (2012, p.30),

> [...] não podemos deixar de perceber uma diferença crucial entre a ordem lógica da exposição, o modo como um texto matemático é organizado para ser apresentado, e a ordem da invenção, que diz respeito ao modo como os resultados matemáticos se desenvolveram.

Roque (2012) diz que a forma como a Matemática é ensinada contribui para torná-la mais acessível ou não, tornando-a mais abstrata ou mais aplicável em problemas do cotidiano. Em geral, as definições precedem as conclusões sobre os objetos, mostrando os requisitos verdadeiros de um enunciado que, na realidade, foram os últimos a serem descobertos.

Ainda sobre Roque (2012, p.172),

> o início do século II [16]. foi marcado por um declínio na atenção dos matemáticos aos problemas geométricos avançados, o que não representou uma decadência do campo matemático e sim um deslocamento de interesse em direção a outras áreas, como a trigonometria[17] e os métodos numéricos. [...] no mundo árabe, a astronomia levou a um grande desenvolvimento da trigonometria[...]

As tabelas trigonométricas associadas a ângulos já eram usadas em problemas práticos, como os de astronomia e navegação. Elas eram utilizadas para circunferências de raios muito grandes, evitando números fracionários, usando propriedades das figuras geométrica, para obtenção dos dados de modo indireto, sendo possível imaginar o cálculo do ângulo ou lado de um triângulo com medidas muito grandes. (ROQUE; DE CARVALHO, 2012).

De acordo com Roque e De Carvalho (2012), no estudo da trigonometria plana eram interessantes os problemas que utilizavam lados e ângulos dos triângulos, pois, quando Aristarco de Samos (300 a. E. C.) mediu a distância entre Terra-Sol e Terra-Lua, foi verificada a aproximação do seno de um ângulo pequeno. Entretanto, apesar dos erros experimentais (não conceituais) de Aristarco, quem foi considerado o fundador da trigonometria foi Hiparco de Nicéia (120 a. E.C.), cujos fragmentos de obras são descrições feitas por outros gregos, inclusive, por Euclides. Segundo Roque e De Carvalho (2012, p.138).

> [...] a trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu, que viveu em torno de 150 E.C. Seu principal trabalho, [...] o Almagesto tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, supondo que a terra está em seu centro. Ptolomeu desenvolveu a trigonometria [...] na qual o capítulo 11 consiste em uma tabela de cordas (ou seja, de senos).

E, complementando, Lima (1997, p.209) diz que:

> [...] a Trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra,

---

[17] A trigonometria foi uma criação da Matemática grega, e recebeu contribuições importantes de matemáticos de várias culturas: hindus, muçulmanos e europeus. Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, calcular o tempo e ser utilizada na navegação e na geografia. (Roque, 2012, p. 135).

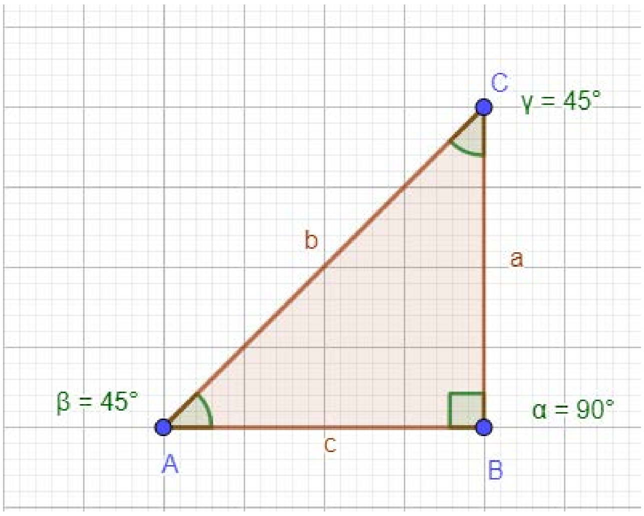
> surgindo daí, o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência como ângulo central por ela subentendido. Se c é o comprimento da corda, ∝ é o ângulo e r o raio da circunferência então C = 2r sen (∝/2). Esta é a origem da palavra seno, que provém de uma tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo jiba (corda) com jaib (dobra, cavidade, sinus em latim). [Cfr." Meu Professor de Matemática", pag.187]

Inicialmente, a Trigonometria se ocupava de resolver o problema de triângulos, ou seja, dos três lados e três ângulos, quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado (Lima, 1997).

O enfoque deste trabalho, como já foi dito no texto, é sobre Trigonometria, especificamente, o valor do seno do ângulo de 30º. Segundo Silva (2015), para cada situação particular, manipulando materiais concretos, é possível verificar que as razões trigonométricas são razões de semelhança, que convergem para o enfoque deste trabalho, sobre Trigonometria, especificamente o seno de 30°.

Segundo Lima (1997), figura 1, num triângulo retângulo de hipotenusa *b* e ângulos agudos β e γ , opostos respectivamente aos catetos a e *c*, têm-se as definições:

Figura 1 - Triângulo retângulo

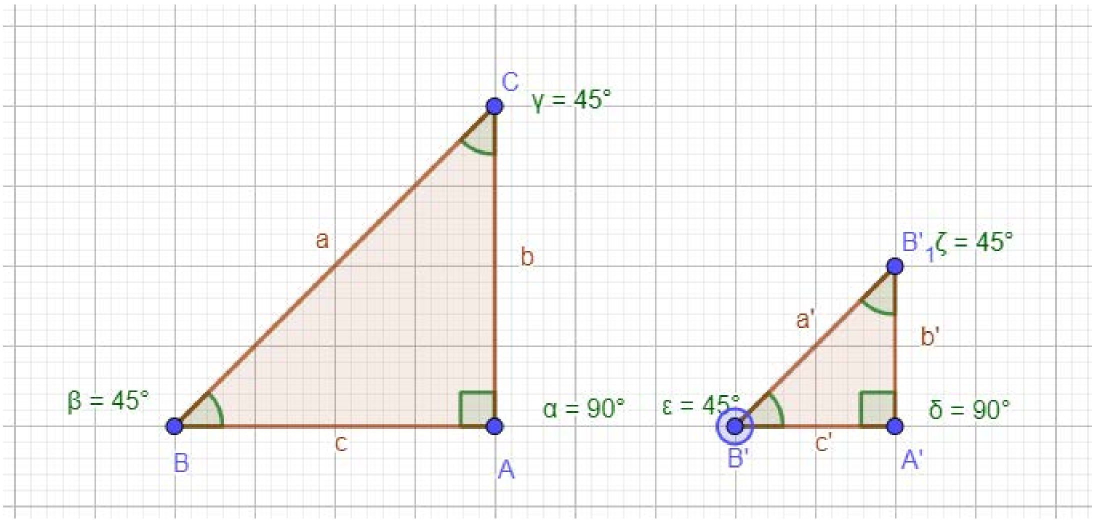


Fonte: A autora, 2022.

cos β= c:b= (cateto adjacente): (hipotenusa), sen β =a:b (cateto oposto): (hipotenusa), e, analogamente, cos γ=a:b e sen γ=c:b

Assim, as relações anteriores definem seno e cosseno de um ângulo agudo qualquer, considerando o triângulo retângulo. Lembrando que o cosseno e o seno do ângulo de B ou C não dependem do tamanho do triângulo, mas sim, da medida de $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$. Por isso, dois triângulos retângulos são semelhantes quando possuem um mesmo ângulo B.

Figura 2 - Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: A autora, 2022.

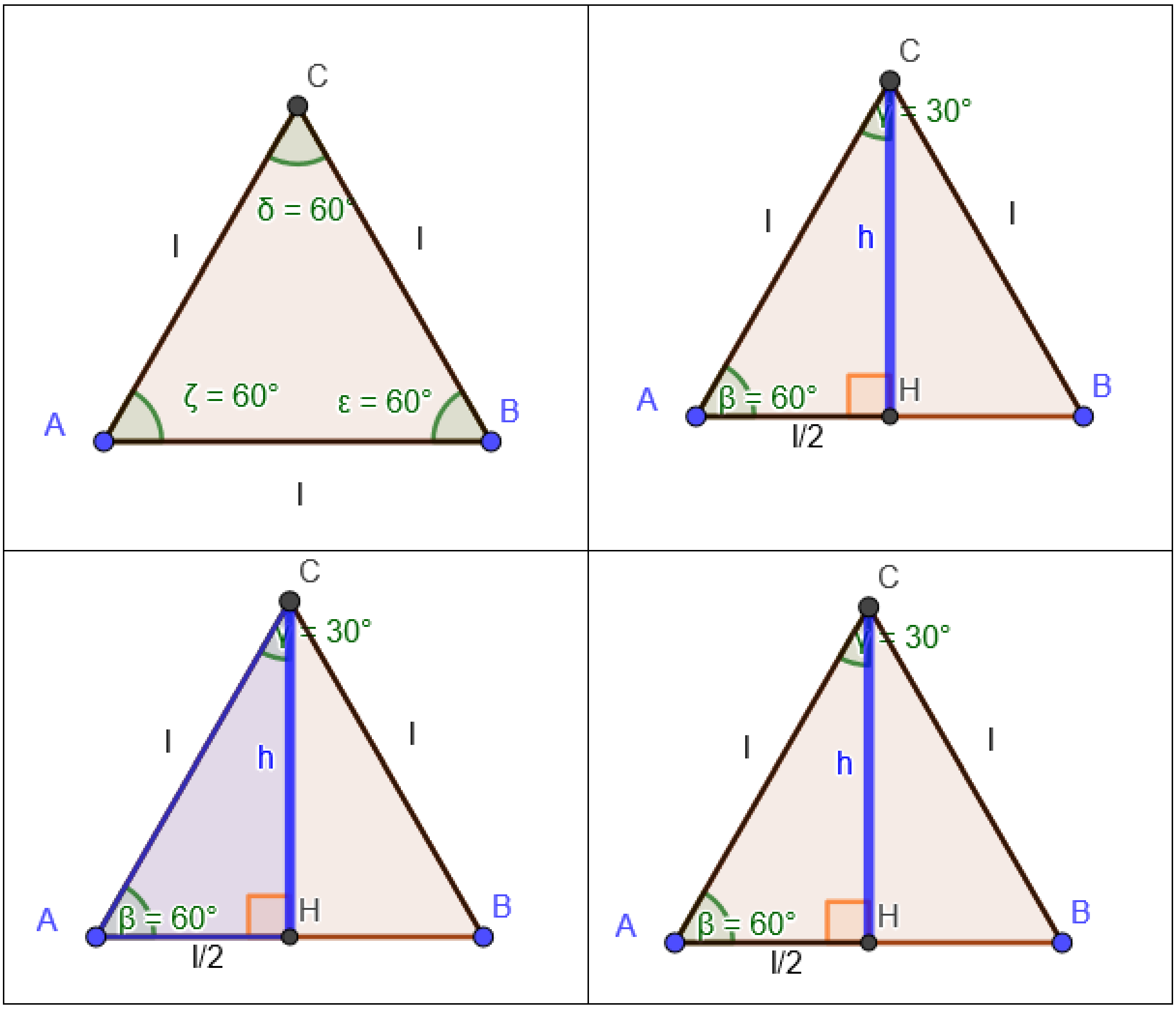
Sendo ABC semelhante a A'B'C', e β= ε e, considerando as medidas de seus lados, então podemos escrever a razão de semelhança: b'/a'=b/a e c'/a'=c/a. Portanto, sen β = sen ε e cos β = cos ε, demonstrando que "[...] seno e cosseno pertencem ao ângulo e não ao triângulo que o contém" (Lima,1997, p. 211).

Quando comparamos triângulos retângulos em que um de seus ângulos internos que mede 30º, podemos estabelecer uma classe de equivalência, já sabendo que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo mede 180º. Como um dos ângulos mede 90º, já que o triângulo é retângulo, e fixamos o segundo ângulo com 30º, o terceiro terá 60º, necessariamente. Deste modo, determinado o ângulo de 30°, é possível afirmar que teremos um "triângulo 30º-60º-90º" que tem a propriedade de que a hipotenusa terá o dobro da medida do cateto oposto ao ângulo de 30º. Sendo assim, quando o cateto oposto ao ângulo de 30° é dividido pela hipotenusa, inevitavelmente, o valor do numerador (cateto oposto) será metade do valor do denominador (hipotenusa), gerando um valor constante, chamado de seno de 30°, ou seja, ½ (SILVA, 2018).

A demonstração deste fato segue adiante: Construa um triângulo equilátero ABC qualquer. Trace a ceviana CH, partindo do vértice C, em relação ao lado AB.

Esta ceviana CH é, simultaneamente, altura, mediana, mediatriz e bissetriz, devido ao triângulo ABC ser equilátero. Observe o triângulo ACH, formado pela ceviana CH. Veja que AH/AC = (l/2)/l. AH/AC = l/2. 1/l. Logo, AH/AC =1/2 AH/AC = cateto oposto a 30º /hipotenusa Esta razão é conhecida como seno de 30º. Seno de 30º= ½, CQD.

Figura 3 - Demonstração



Fonte: A autora, 2022.

Portanto, o seno de 30º será sempre ½, mesmo que sejam construídos infinitos triângulos retângulos com um ângulo interno igual a 30° e, portanto, lados homólogos proporcionais, considerando ângulos de 0° a 90°, de acordo com Silva (2021).

2 METODOLOGIA

Os procedimentos metodológicos desta pesquisa estão divididos em duas etapas. Na primeira é apresentada a pesquisa bibliográfica realizada sobre qual modelo de pesquisa é utilizado na dissertação e, na segunda é feita a construção autoral do conjunto de atividades.

2.1 Parte 1: Pesquisa bibliográfica

A pesquisa pode ser realizada com um objetivo intelectual ou por necessidade prática. Neste caso, a pesquisa em questão, refere-se a fazer algo de modo mais eficaz. Ou seja, calcular o sen 30° através da semelhança de triângulos e não decorando através de fórmulas e tabelas. Segundo Gil (2002, p.1),

> [...] pode-se definir pesquisa como o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa é requerida quando não se dispõe de informação suficiente para responder ao problema, ou então quando a informação disponível se encontra em tal estado de desordem que não possa ser adequadamente relacionada ao problema.

Para desenvolver uma pesquisa, é necessário que o pesquisador tenha conhecimento do assunto, curiosidade, criatividade, entre outras características. Além disso, elaborar o projeto de pesquisa (sistematizando um planejamento), definir os elementos do projeto (formular o problema, construir hipóteses, especificar os objetivos, operacionalizar as variáveis, elaborar instrumentos, determinar estratégias, etc.) e, finalmente, esquematizar a pesquisa.

Esta pesquisa é definida como exploratória, pois, de acordo com (GIL, 2002, P.27), "tem como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou construir hipóteses". Assim, esta coleta de dados utilizou o levantamento bibliográfico. A respeito da pesquisa bibliográfica, entende-se que nela somos:

> Sustentados e movidos pelo desafio de conhecer o já construído e produzido para depois buscar o que ainda não foi feito, de dedicar cada vez mais atenção a um número considerável de pesquisas realizadas de difícil acesso, de dar conta de determinado saber que se avoluma cada vez mais rapidamente e de divulgá-lo para a sociedade, todos esses pesquisadores trazem em comum a opção metodológica, por se constituírem pesquisas de levantamento e de avaliação do conhecimento sobre determinado tema (FERREIRA, 2002, p. 259).

Foi utilizado material já publicado, disponibilizado em livros ou acervos de internet, principalmente, os indicados pela orientadora. Esse material é extraído, principalmente, do Google Acadêmico (sites exclusivos de Academias/Universidades), que contém dissertações, teses, artigos, revistas, anais de eventos científicos.

Após definir as etapas da pesquisa bibliográfica, é escolhido o tema (onde o papel do orientador é de suma importância, devido à sua experiência em sugerir temas e indicar leituras) e é feito o levantamento bibliográfico preliminar (para que o pesquisador se familiarize com o tema). A seguir, há a formulação do problema (de modo claro, preciso e bem delimitado), onde são aplicadas perguntas a fim de verificar se o problema está bem definido. Daí, é elaborado um plano provisório da pesquisa é feita a leitura do material com o objetivo de compreender o conteúdo e obter respostas para o problema inicial. Segundo Gil (2002, p.59),

> a leitura feita na pesquisa deve servir aos seguintes objetivos: a) identificar as informações e os dados constantes do material impresso; b) estabelecer relações das informações e dos dados obtidos com o problema proposto; c) analisar a consistência das informações e dados apresentados pelos autores.

A leitura do material pode ser feita de modo exploratório (reconhecimento do texto), seletiva (apenas textos que interessam à pesquisa), analítica (fazer análises definitivas) ou interpretativa. Para esta pesquisa, foi feito o fichamento do material, através da identificação das obras, anotação de ideias, registro de conteúdos e comentários, organização das informações. (GIL, 2002)

Para o desenvolvimento da primeira parte da pesquisa, foram lidos livros físicos de Raymond Duval, Semiósis e Pensamento Humano- Registros Semióticos e aprendizagens intelectuais, além de Aprendizagem em Matemática- Registros de Representação Semiótica, de Silvia Dias Alcântara Machado, A Matemática do Ensino Médio, de Elon Lages Lima, História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, de Tatiana Roque e, também, artigos científicos, extraídos do Google Acadêmico.

Os dois livros principais são embasados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, pois ele é o autor desses estudos. Os outros artigos são fundamentados em sua teoria.

Este levantamento foi feito com indicação da orientadora e era a teoria considerada adequada aos propósitos de representar, de modos diferentes, como se comportam os ângulos dos triângulos estudados para desenvolver a pesquisa.

2.2 **Parte 2: Confecção do conjunto de atividades**

Para realizar essa etapa da pesquisa, foram feitos levantamentos de artigos no Laboratório Sustentável de Matemática[18] e planos de aula no site do Nova Escola[19], como forma de inspiração para a construção autoral das atividades.

Deste levantamento, as atividades foram separadas em 2 etapas, a primeira com 2 atividades e a segunda com 4 atividades, totalizando 6 atividades:

- Etapa 1: Atividades Preparatórias

  São 2 atividades, a primeira, sobre a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo ser sempre 180º, independente de sua classificação quanto a ângulos ou lados desenho do triângulo, e a segunda, sobre a construção de triângulos com material concreto, palitos de dente, de modo a verificar a semelhança entre eles.
- Etapa 2: Atividades para produção de conhecimento específico

---

[18] LSM - Laboratório Sustentável de Matemática: fundado em 2014, no Colégio Estadual Hebe Camargo, como um projeto da professora Daniela Mendes Vieira da Silva, apoiada, principalmente, por seus alunos e pela direção da escola onde trabalhava – em Pedra de Guaratiba, bairro da Zona Oeste carioca. (https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/)

[19] NOVA ESCOLA- Associação Nova Escola é uma organização de impacto social sem fins lucrativos que trabalha para o Brasil ter professores da Educação Básica fortalecidos em suas práticas, contribuindo para a melhoria da aprendizagem e do desenvolvimento dos estudantes. Criada em 2015 com o apoio de sua mantenedora, a Fundação Lemann, a Associação é herdeira da revista de mesmo nome, nascida em 1986 na Fundação Victor Civita. Hoje, a Nova Escola é uma plataforma digital que produz reportagens, cursos autoinstrucionais, formações, planos de aula e materiais educacionais para fortalecer os professores brasileiros e é acessada por cerca de 3,1 milhões de pessoas por mês. (https://novaescola.org.br/planos-de-aula)

Nesta etapa, exploramos o uso de instrumentos de medida como o esquadro e transferidor, de modo que seja verificada a semelhança entre os triângulos dados. Para o desenvolvimento das atividades desta etapa, os triângulos foram desenhados no GeoGebra[20] e compartilhados de modo que facilitasse a medição de lados.

Na atividade 1, a proposta é que sejam desenhados triângulos semelhantes ao fornecido pela atividade, no papel quadriculado, observando a proporção entre os lados. A seguir, os ângulos dos triângulos criados são medidos com o transferidor, os valores são anotados e verificado se existe, realmente, a semelhança com o triângulo inicial, feito no GeoGebra, com os triângulos desenhados no papel quadriculado.

Na atividade 2, são feitas considerações sobre semelhança ou não, a partir de triângulos retângulos quaisquer dados seus ângulos e seus lados. Em vista dos ângulos fornecidos pelo modelo do Plano de Aula do site Nova Escola ter valores decimais, foram desenhados, também no GeoGebra, triângulos para esta atividade.

Na atividade 3, as explorações são feitas a partir do triângulo retângulo em que a hipotenusa mede o dobro do cateto oposto ao ângulo dado. Aqui, os estudantes precisam construir diferentes triângulos retângulos, com as mesmas características do triângulo dado como modelo. Para desenvolver essa atividade são usados o papel quadriculado e os instrumentos de medida, como régua, esquadros e/ou transferidor.

A atividade 4 é uma expansão da atividade 3, na qual são utilizados diferentes ângulos.

Todas essas atividades estão nos apêndices 1 e 2, disponíveis para uso.

[20] GeoGebra é um software dinâmico de Matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma. Além disso, o) Tarefa, onde o progresso dos alunos pode ser monitorado em tempo real.(https://www.GeoGebra.org/about)

3 CONJUNTO DE ATIVIDADES COMENTADO

Para construir o conjunto de atividades a seguir, usamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009) e, também, foram exploradas competências e habilidades específicas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para o ensino de Matemática.

As habilidades são ideias que os estudantes devem aprender para adquirir uma determinada competência, definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8).

Nos anos finais do Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas por ano de escolaridade e, com referência às competências específicas, de acordo com o conteúdo a ser estudado. Para compreender a sigla (EF67EF01), vide Anexo 1.

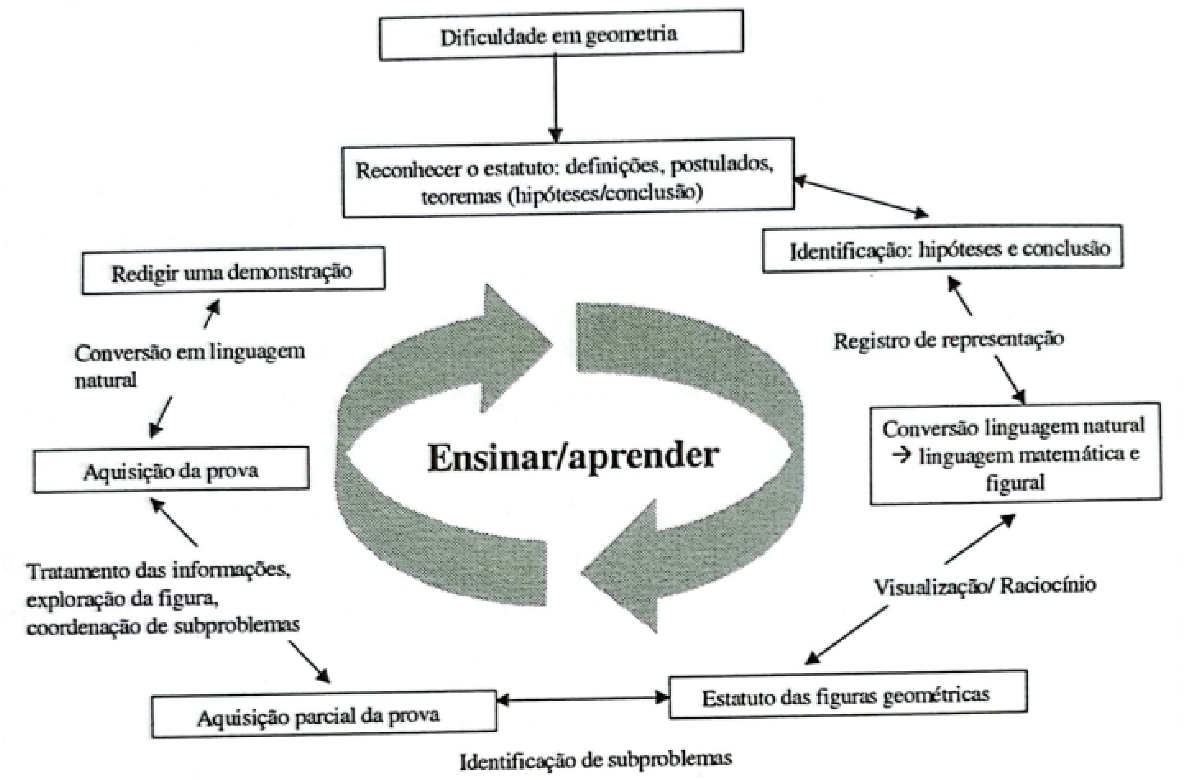
Na etapa do ensino médio, as habilidades estão diretamente ligadas às competências específicas. Para compreender a sigla (EM13LGG103), vide Anexo 2.

Estas atividades foram desenvolvidas a partir de observações relevantes e necessárias, de Machado (2008), para lidar com as dificuldades dos estudantes em relação aos processos de construção de conceitos geométricos, de modo a oferecer subsídios para o ensino e aprendizagem de geometria.

De acordo com Duval (1995), a geometria envolve a visualização para exploração heurística de uma situação complexa. A construção de configurações, que pode ser trabalhada como modelo e, também, o raciocínio que é um processo que conduz à prova e a explicação.

Inspirado em Mello (1999), quadro 15, utilizamos o esquema a seguir, desenvolvido por Machado (2008), para orientação das atividades:

Quadro 15 - Quadro para desenvolvimento de atividades de Geometria



Fonte: MACHADO, 2008, p. 132.

O esquema de Machado (2008) nos mostra como Ensinar/aprender Geometria, começando pelas dificuldades neste conteúdo, passando pelas definições, teoremas e axiomas, gerando identificação e hipóteses, passando por até chegar na aquisição da prova para redigir a demonstração. Em cada uma dessas etapas é feito diferentes tipos de Registros de Representação.

Desse modo, utilizando essa ideia de uso de Registros de Representação Semiótico, as atividades foram propostas de modo que os estudantes sejam auxiliados para compreensão do seno de 30º ser igual a ½. O planejamento das atividades para aplicação em sala de aula, foi feito considerando o 1° quadrante, ou seja, 0° ≤ x ≤ 90°.

3.1 **Visão geral das atividades**

- Objetivos do conjunto de atividades:

* Compreender o que é semelhança de triângulos.

* Verificar a proporcionalidade entre lados homólogos.

* Identificar/calcular a razão de semelhança SENO.

- Recursos necessários:

  * Triângulos e tabelas, régua, transferidor, tesoura (opcional), papel quadriculado, lápis de cor, palitos de dente.

3.1.1 Etapa 1 - Atividades preparatórias:

3.1.1.1 Primeira atividade da etapa 1 (quadro 16)

Quadro 16 - Etapa 1 - Atividade 1

1. a) Você irá receber uma folha extra de papel e irá desenhar um triângulo qualquer. A seguir, marcará os três ângulos referentes a cada vértice. Rasgará o triângulo em três partes, de modo que cada uma contenha um dos ângulos. Então, organizará os três ângulos lado a lado. b) Verifique o que acontece e escreva, com suas palavras a que conclusões chegou. Não esqueça de registrar, no espaço retangular, o modelo de triângulo que desenhou. **Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.**

Para esta primeira atividade, é usada a modificação mereológica, onde, segundo Duval (1995), a figura pode separar-se em partes que são subfiguras da figura dada, fracionando-a e reagrupando-a, isto é, uma relação em parte do todo. Neste caso, após desenhar o triângulo de qualquer tamanho, serão pintados cada um de seus ângulos. O triângulo será repartido em três. A partir dos pedaços do triângulo, cada um com um ângulo pintado, os ângulos serão reagrupados, lado a lado de modo que o estudante possa analisar qual a medida deste novo ângulo criado.

Na primeira atividade, cada estudante irá desenhar um tipo de triângulo, onde serão exploradas as diferentes medidas de lados e ângulos, e na segunda atividade, serão analisadas e comparadas as medidas dos lados e ângulos, conforme mostra a habilidade (EF06MA19)

A seguir, o triângulo será rasgado de modo que cada lado fique com um ângulo e estes lados, reorganizados, estamos usando a habilidade (EF06MA23)

Finalizando esta atividade, mesmo com triângulos com lados e ângulos diferentes, os estudantes irão verificar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre será 180°, conforme indica a habilidade (EF07MA24).

Quadro 17 - Etapa 1- Atividade 2

2. Você receberá uma caixinha de palitos de dentes e irá desenvolver as seguintes atividades: a) Construa, com os palitos recebidos, um triângulo de lados 3, 4 e 5, sendo a unidade de medida o palito de dente. b) A seguir, use o transferidor e meça cada um dos ângulos formados entre os lados (3 e 4, 4 e 5, 5 e 3). Faça uma representação do triângulo e, de cada um desses ângulos, neste espaço ao lado. c) Anote o que observou em relação à soma destes ângulos. d)Construa, com os palitos recebidos, um segundo triângulo de lados 6, 8 e 10, ainda com a unidade de medida sendo o palito de dente, e) A seguir, use o transferidor e meça cada um dos ângulos formados entre os lados (6 e 8, 8 e 10, 10 e 6). Represente, na caixa retangular ao lado, o desenho que fez do triângulo de lados 6,8 e 10 e de cada um de seus ângulos. f) Anote o que observou em relação a soma dos ângulos internos deste triângulo g) Agora, reconstrua, usando os palitinhos, o triângulo 3, 4 e 5 e, em volta deste, construa um triângulo de lados 6, 8 e 12, sendo o palitinho, a unidade de medida. Use o transferidor para medir esses novos ângulos, referentes aos lados 6, 8 e 12, e descreva o que aconteceu. h) Agora, construa esses triângulos separadamente: um com lados 3,4 e 5 e outro com lados 6,8 e 12. Meça todos os ângulos dos dois triângulos. Existe diferença

quando os triângulos são construídos separadamente ou quando estão sobrepostos?
i) Investigue como são as medidas dos ângulos entre (3 e 4) e (6 e 8)? O mesmo acontece com os ângulos entre (4 e 5) e (8 e 10)? E entre os lados (5 e 3) e (10 e 6)?
j) Ainda com os triângulos de lados 3,4 e 5 e 6, 8 e 10 montados, vamos analisar os lados destes triângulos. Como se relacionam os lados que formam os ângulos nos triângulos de lados (3,4 e 5), (6, 8 e 10).? Ou seja, o tamanho do lado de cada triângulo tem relação com os ângulos formados entre cada dois lados? Existe algum padrão entre eles?
Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

Na segunda atividade, utilizamos a modificação posicional, que é o deslocamento em relação a um referencial (DUVAL, 1995). Para Machado (2008, p. 127),

> Essas modificações são realizadas psiquicamente, graficamente e mentalmente. O interesse de fracionar a figura- ou seu exame a partir de partes elementares- está ligado à operação de reconfiguração intermediária. A reconfiguração, operação que consiste em organizar uma ou várias subfiguras diferentes de uma figura dada em outra figura.

Nesta etapa, foram utilizadas as seguintes habilidades da BNCC, Ensino Fundamental:

(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos (BRASIL, 2018, p. 303).

(EF06MA23) Construir algoritmos para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.) (BRASIL, 2018, p. 303).

(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° (BRASIL, 2018, p. 309).

3.1.2 Etapa 2 - Atividades para produção de conhecimento específico:

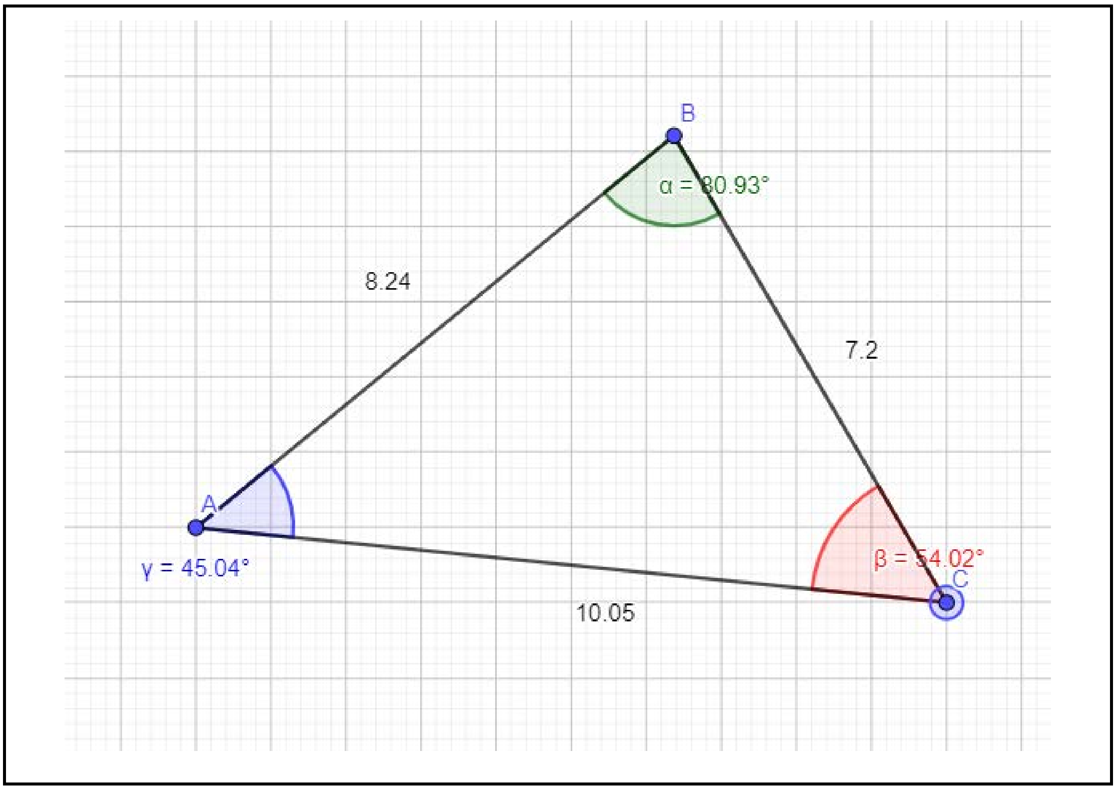
Para a segunda etapa (atividades para produção de conhecimento específico), utilizaremos três formas de processo cognitivo, de acordo com as funções epistemológicas, segundo Duval (1995):

- visualização para exploração heurística de uma situação complexa;
- construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
- raciocínio, que é o processo que conduz para a prova e a explicação.

3.1.2.1 Primeira atividade da etapa 2 no quadro 18:

Quadro 18 - Etapa 2- Atividade 1

1. Consolidar a ideia de semelhança de triângulos, pela elaboração de estratégias na criação de triângulos. A partir da imagem adiante crie o que se pede:



a) Crie dois triângulos semelhantes ao triângulo ABC, usando o quadriculado da imagem como guia e o papel quadriculado que você recebeu. Não esqueça das proporções entre os lados.

b) Meça, com o transferidor, e registre os ângulos internos a cada dois lados e os lados dos triângulos que criou.

c) Confira se, de fato, os triângulos criados por você são semelhantes a ABC, anote os porquês da sua reflexão.

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

Aqui, os lados e ângulos das figuras serão analisados e anotações sobre o que se observa serão feitas em língua portuguesa. Para isto, serão utilizados os registros de representação semiótica (discursivos, matemático e da figura).

Aqui, são utilizadas as seguintes habilidades da BNCC, Ensino Fundamental e Médio:

(EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas (BRASIL, 2018, p. 303).

(EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 303).

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes (BRASIL, 2018, p. 319).

(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança. (BRASIL, 2018, p. 529).

Nesta atividade, a habilidade (EF06MA25) é utilizada quando o estudante desenha triângulos semelhantes ao triângulo inicial, fornecido na malha quadriculada.

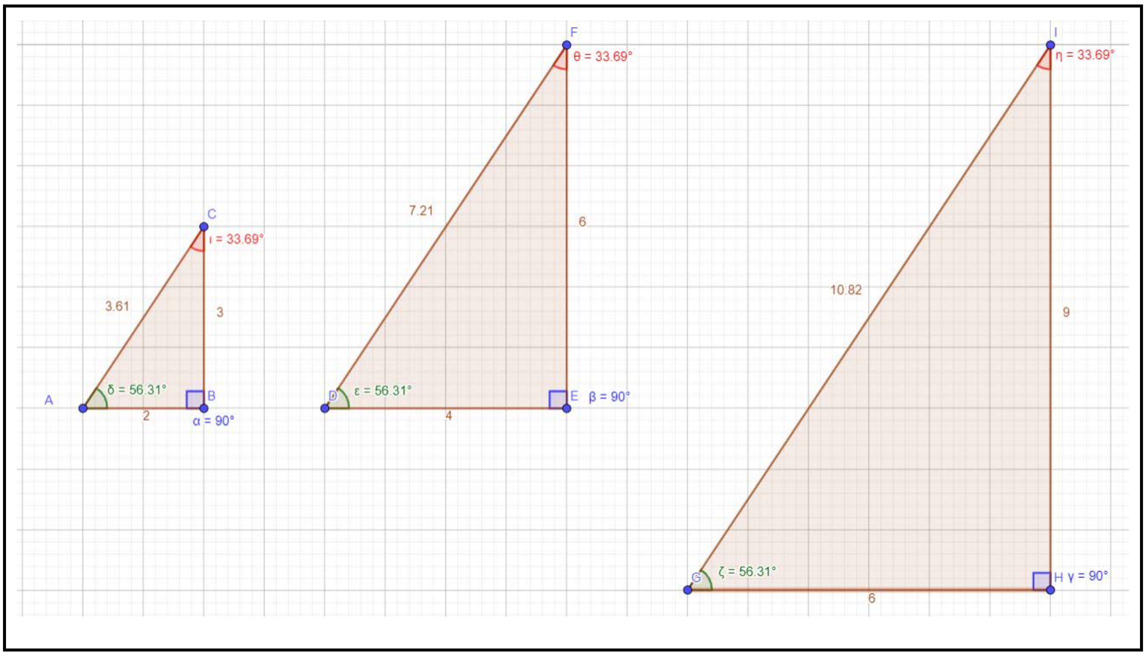
A partir daí, usa o transferidor, como instrumento de medida, de acordo com o descrito na habilidade (EF06MA27).

Na sequência desta atividade, o estudante já poderá ser capaz de reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, conforme texto da habilidade (EF09MA12).

A habilidade (EM13MAT308) é utilizada para descrever aos colegas suas devidas conclusões, onde o estudante reflete sobre quais etapas utiliza para resolver o problema pedido na atividade.

Quadro 19 - Etapa 2- itens 2 e 3

2. Vamos observar a figura para ver o que acontece quando os triângulos são retângulos, responder às perguntas e fazer a discussão.



a. O que os triângulos ABC, DEF e GHI têm em comum, além de serem todos retângulos? Anote o que observa.

b. Qual é a relação entre o lado EF e o lado BC? Anote o que observa.

c. Qual é a relação entre o lado ED e o lado AB? Anote o que observa.

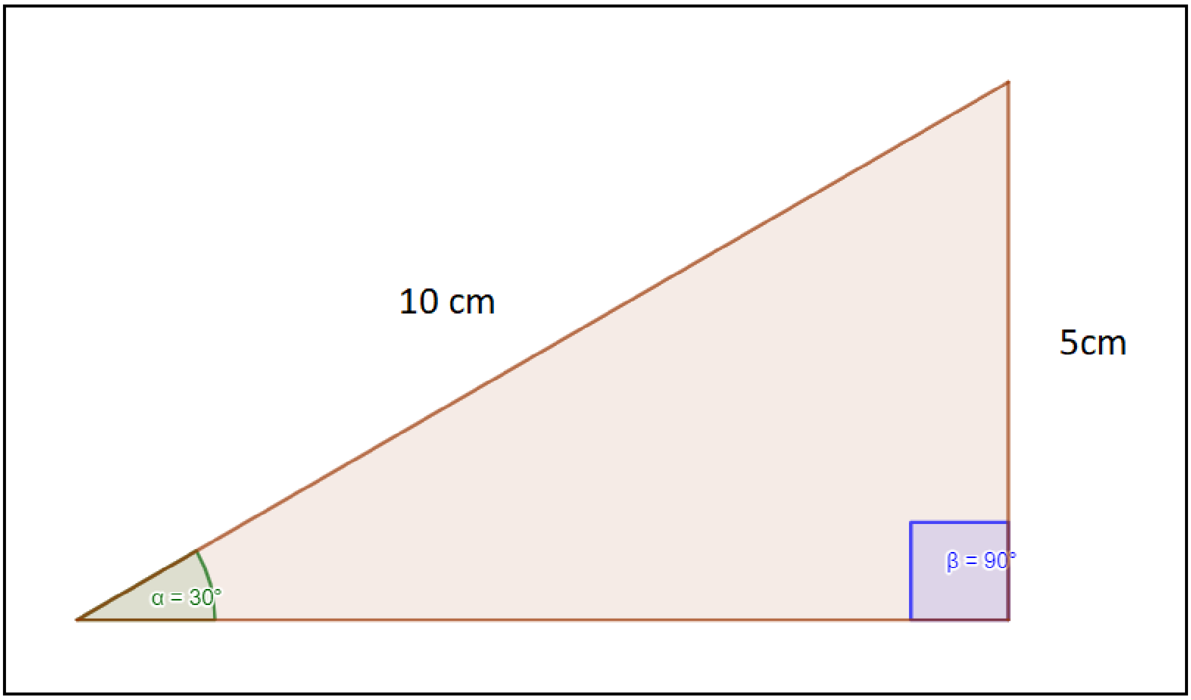
d. Agora compare os lados EF e HI, anote o que observa.

e. Compare os lados HI e BC, anote o que observa.

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

3. Vamos analisar a semelhança a partir de ângulos com papel quadriculado.

3.1.



a. Usando o papel quadriculado faça 4 triângulos retângulos diferentes nos quais a hipotenusa é sempre o dobro do cateto oposto ao ângulo alfa. Sugerimos começar o desenho por um segmento de reta vertical, com uma determinada medida, desenhar a reta horizontal, formando o ângulo de 90°, use um esquadro para isto, e, a partir da extremidade superior, desenhar a hipotenusa, com o dobro do tamanho da medida desse segmento de reta (que será o cateto oposto ao ângulo alfa)

b) meça, com o transferidor, o ângulo alfa em cada um dos triângulos feitos e anote na figura feita no papel quadriculado.

c) observe os triângulos dos seus colegas e comente a que conclusão chegou sobre a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.
3.2 Usando papel quadriculado faça o caminho contrário. Desenhe 4 triângulos retângulos com um ângulo de 30º e meça cateto oposto e hipotenusa. A seguir, responda qual é a relação entre eles.
Para essa atividade, sugerimos que comece desenhando um segmento horizontal. Em um dos extremos, você irá marcar o ângulo de 30°, utilizando o transferidor e, marcando esse segmento de reta. No outro extremo, você irá fazer um segmento perpendicular ao horizontal, determinando o ângulo de 90°, use um esquadro para isto. A seguir, você poderá desenhar o terceiro segmento, um extremo partindo do ângulo de 30° e o outro, partindo do ângulo de 90°, fechando o triângulo.
Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

Nos itens 2 e 3, serão utilizadas as hipóteses de semelhança entre triângulos retângulos e a respectiva conclusão, utilizando figuras geométricas, de acordo com as diferentes apreensões Machado (2008. p. 127):

a) Perceptiva: é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
b) Discursiva: é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, levando em consideração a rede semântica de propriedades do objeto;
c) Operatória: está centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem; e
d) Sequencial: é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura.

Sobre a BNCC, foram utilizadas as seguintes habilidades:

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 303).

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica (BRASIL, 2018, p. 315).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático (BRASIL, 2018, p. 523).

Para iniciar a atividade 3, é utilizada a malha quadriculada como objeto para construção de triângulos retângulos com as mesmas características ao mostrado na figura, ou seja, com a hipotenusa tendo o dobro da medida do cateto, de acordo com a habilidade (EF06MA21)

A habilidade (EF08MA18) pode ser observada quando os novos triângulos são criados a partir de medidas diferentes do triângulo fornecido na atividade. Essas novas figuras podem ser obtidas através de transformações no plano e, então, modificadas suas medidas.

Também nesta atividade, estão sendo usados diferentes tipos de registros, com uso de instrumentos (transferidor, esquadro e régua), além dos registros algébricos em busca do desenvolvimento do raciocínio matemático, de acordo com a competência específica 4.

Quadro 20 - Etapa 2- item 4

4. Expandindo: Repita a atividade 3.2 para diferentes ângulos... 45º, 78º, 17º… e anote suas observações sobre eles. Nesta atividade, você seguirá os mesmos passos da atividade anterior. Porém, em um dos extremos, você irá desenhar um ângulo de 45° e todos os passos anteriores. Depois, fará um outro triângulo com o ângulo de 78° e todos os passos anteriores. A seguir, um triângulo com o ângulo de 17° e todos os passos anteriores.

Para o item 4, serão repetidas as atividades finais do item 3, de modo que seja formulada uma possível demonstração do seno de 30°, como processo de ensino e aprendizagem dos conceitos /habilidades geométricos e do raciocínio lógico-dedutivo. (MACHADO, 2008)

E as habilidades da BNCC, relacionadas a esta atividade, são:

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos. (BRASIL, 2018, p. 533).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 - Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística - para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 523).

Para o item 4, serão utilizados contraexemplos, como sugere (EM13MAT512), do mesmo modo, como demonstrado na atividade 3, anterior a essa.

Deste modo, é verificado que, para interpretar e construir soluções adequadas dos problemas propostos, são necessárias estratégias de diferentes campos da Matemática, como Álgebra, Aritmética e Geometria, neste caso, conforme a Competência Específica 3.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação foi desenvolvida através de um levantamento bibliográfico a respeito da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS), da Investigação Matemática em sala de aula, nascida da reflexão sobre a prática cotidiana em sala de aula e, de uma reflexão sobre a aplicação dos conceitos de triângulos semelhantes na trigonometria no triângulo retângulo, a fim de alcançar o porquê do seno de 30º ser ½.

Com esta finalidade, o objetivo geral que era desenvolver um percurso pedagógico multissemiótico e investigativo para a construção da ideia do seno a partir da proporcionalidade de lados homólogos em triângulos retângulos semelhantes, foi alcançado com êxito, por meio da criação do conjunto de atividades autorais, investigativas e multissemióticas para auxiliar estudantes a compreender este tema.

Para dar suporte ao objetivo geral, foram definidos dois objetivos específicos: 1) criar um conjunto de atividades visando atender ao objetivo geral e 2) selecionar um conjunto de materiais concretos para ser o suporte do conjunto de atividades supracitado.

Sobre a criação de um conjunto de atividades para atender ao objetivo geral (1), foi necessário dividir este conjunto de atividades em duas partes distintas: a primeira, criando as condições para o desenvolvimento da aprendizagem de razões trigonométricas, tendo como mote a razão trigonométrica seno. Foi enfatizada, nesta primeira parte, a proporcionalidade entre lados homólogos como sendo uma propriedade importante de triângulos semelhantes. E a segunda, para manter tal proporcionalidade, verificar a existência da necessidade de conservação da congruência entre os ângulos internos dos triângulos envolvidos, para que a semelhança possa ser garantida.

A todo momento, esta parte do conjunto de atividades leva o estudante, por meio de suas próprias investigações, a perceber que, se a proporcionalidade se perde, também se perde a semelhança. Ao final de cada atividade o estudante é convidado a expor suas observações e conjecturas para que elas sejam discutidas e validadas ou repensadas a partir de reflexões coletivas mediadas pelo professor ou professora em suas salas de aula.

Neste estudo, ficou entendido que o conjunto de atividades buscado deveria ter, ao menos duas representações semióticas para cada atividade proposta, abrir a possibilidade de elaboração, discussão e validação de conjecturas e ser pensado a partir da proporcionalidade de lados homólogos de triângulos retângulos semelhantes.

Para o segundo objetivo específico, que era selecionar um conjunto de material concreto para ser o suporte do conjunto de atividades supracitado (2), para cada atividade elaborada, foram indicados o uso de materiais concretos tais como: papel quadriculado, esquadro, transferidor, régua, tesoura e palitos de dentes. Estes materiais foram pensados pela facilidade de encontrá-los na escola, no caso de conjuntos de esquadro, transferidor e régua e pelo baixíssimo custo de folhas de papel quadriculado e de palitos de dentes. Ao escolher materiais de apoio, são julgados, de fundamental importância, que fossem acessíveis a qualquer professor ou professora que deseje utilizar o conjunto de atividades elaborado. Além disso, os materiais escolhidos, embora simples, atendem aos objetivos didáticos e matemáticos pensados para o conjunto de atividades elaborado.

Deste modo, podemos verificar que o papel quadriculado facilita o desenho de triângulos retângulos e a comparação entre seus lados e ângulos. E os palitos permitem a criação, manipulação e a comparação de triângulos semelhantes e não semelhantes, a fim de compreender a importância da proporcionalidade na semelhança.

Já os conjuntos com esquadros, transferidor e régua se mostram um recurso de apoio às medições necessárias e demandadas pelas atividades propostas e trazem também utilidade a estes materiais comprados ano após ano, mas que, via de regra, repousam no fundo de mochilas e gavetas à eterna espera de uso.

Não consideramos neste documento, por fugir ao escopo da presente pesquisa, a forma como este conteúdo é tradicionalmente estudado. Consideramos que as mudanças nas atividades aqui propostas, quando aplicadas, têm potencial para que o estudante tenha um contato mais produtivo e real da razão pelo qual o seno de 30° é ½, estendendo este entendimento para outras razões trigonométricas, usando a proporcionalidade. Ou seja, aqui propomos um caminho que passa ao largo da memorização de tabelas de ângulos notáveis.

Como dificuldades enfrentadas no presente estudo, apresentamos a escassez de estudos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para além da referência principal, que é Raymond Duval.

Como desdobramentos futuros da presente pesquisa, pensamos em utilizar este conjunto de atividades na formação continuada do professor. São sugeridas, ao longo deste documento, habilidades da BNCC, de modo a contribuir no desenvolvimento dos estudantes, privilegiando os processos de investigação Matemática com múltiplas representações semióticas em sala de aula. Estas formações podem redundar em um córpus de pesquisa que enseje uma futura tese de doutoramento.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Maria de Lourdes Haywanon Santos; TENÓRIO, Robinson Moreira. *Resultados brasileiros no PISA e seus (des) usos*. *Estudos em avaliação educacional*, v. 28, n. 68, p. 344-380, 2017.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. *Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget*. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

ARTIGUE, Michèle. *Didactical Engineering as a framework for the conception of teaching products*. In:BIEHLER, Rolf; SCHOLZ, Roland; STRÄSSER, Rudolf; WINKLEMANN, Bernard. Didactics of mathematics as a scientific discipline.Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994, p. 470.

BALDINO, Roberto Ribeiro. *Ensino remedial em recuperação paralela* p. 73-96. Zetetiké, v. 3, n. 2, 1995.

BRASIL. Ministério da Educação*. Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, 2018.

______. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Brasil no Pisa 2018 [recurso eletrônico]*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2020. 185 p.: il.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação Matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P., COSTA, C., ROSENDO, A. I., MAIA, E., FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. (Eds.), Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. *Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática*. Zetetike, v. 13, n. 1, p. 87-120, 2005.

COCKCROFT, W. H. *Mathematics counts.* London: HMSO, 1982

DE ARRUDA, Wellington José; DE MELO, Rosinalda Aurora. *Conversões entre representações dos números racionais: análise de aspectos matemáticos e cognitivos com uso de material manipulável*. Revista de Educação Matemática (REMat), v. 17, p. 1-23, 2020.

DE FREITAS, José Luiz Magalhães; REZENDE, Veridiana. *Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica.* Revista Paranaense de Educação Matemática, 2013. v. 2, n. 3, p. 10-34.

DENARDI, Vânia Bolzan. *Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de Matemática*. XXI EDRAPEM. Pelotas, RS, 2017.

DEPARTMENT FOR EDUCATION. *The national curriculum for maths.* Disponível em <http://dfee.gov.uk/nc/matindex.html>. 1998.

DUVAL, Raymond. Approche cognitive des problémes de géométrie*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 1, pp.57-74. Irem de Strasbourg, 1988.

______. *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais.* Editora Livraria da Física, 2009.

FERREIRA, Norma Sandra de Almeida. *As pesquisas denominadas" estado da arte"*. Educação & sociedade, 2002. v. 23, p. 257-272.

FREITAS, Luiz Carlos et.al. *Avaliação Educacional:caminhando pela contramão*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2009.

GIL, Antonio Carlos et al. *Como elaborar projetos de pesquisa.* São Paulo: Atlas, 2002.

HENRIQUES, A. *L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple*. Grenoble: Lab. Leibniz, 2006.

INEP. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Pisa 2022 avaliou mais de 80% dos participantes da amostra.** Ministério da Educação, 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/pisa-2022-avaliou-mais-de-80-dos-participanes-da-amostra>. Acesso em: 13 abr. 2023.

KHOELER, W. *Intelligenzpruejitngen an Menschenaffen*. Berlim, l. Springer, 1921.

LIMA, Elon Lages. *A Matemática do ensino médio*. SBM, 1997.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Aprendizagem em Matemática.* Papirus Editora, 2008.

MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de et al. *Demonstração: uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria*. 1999.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Matemática A - 10° ano.* Lisboa: DES, 2001.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE (publicado originalmente em inglês em 1989), 1991.

OECD (2019), PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do, PISA, OECD Publishing, Paris. Disponível em: <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>. Acesso em: 01 fev. 2023.

______. Results (Volume II): Where All Students Can Succeed, PISA, OECD Publishing, Paris. Disponível em: <https://doi.org/10.1787/b5fd1b8f-en>. Acesso em: 01 fev. 2023.

______. Results (Volume III): What School Life Means for Students’ Lives, PISA, OECD Publishing, Paris. Disponível em: <https://doi.org/10.1787/acd78851-en>. Acesso em: 01fev. 2023.

OLIVEIRA, Hélia; BROCARDO, Joana; DA PONTE, João Pedro. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Autêntica, 2016.

PONTE, J. P., FERREIRA, C., VARANDAS, J. M., BRUNHEIRA, L.; OLIVEIRA, H. *A relação professor-aluno na realização de investigações Matemáticas.* Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.

POLYA, G. *Mathematics and plausible reasoning: induction and analogy in mathematics.* Princeton, NJ: Princeton University Press. (edição original de 1954), 1990.

POST, Eduardo. Nova Escola, 2018. *Descobrindo os Critérios de Semelhança de Triângulos.* Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1197/descobrindo-os-criterios-de-semelhanca-de-triangulos>. Acesso em: 18 jan. 2023.

______. *Explorando triângulos semelhantes.* Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/255/explorando-triangulos-semelhantes>. Acesso em:18 jan. 2023.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro: Zahar, 2012

______; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. *Tópicos de história da Matemática.* 2012.

SILVA, Daniela Mendes Vieira. *Construindo a Trigonometria na Circunferência com materiais concretos na V JORMAT.* Disponível em: <https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2015/12/construindo-trigonometria-circunferencia-v-jormat.html>. Acesso em: 24 jan. 2023.

______. *De onde vêm o seno, o co-seno, a tangente, a co-tangente, a secante e a co-secante?* Disponível em: <https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2021/09/de-onde-vem-seno-cosseno-tangente-cotangente-secante-cossecante.html>. Acesso em: 18 jan. 2023.

______. *Trigonometria no triângulo retângulo: Razões trigonométricas são razões equivalentes!!!! #ProntoFalei!* Disponível em: <https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2018/06/razoes-trigonometricas-sao-razoes-equivalentes.html>. Acesso em: 18 jan. 2023.

SILVA, J. S. *Geometria analítica plana.* Lisboa: Fluminense, 1967

STEWART, I. *Os problemas da Matemática.* Lisboa: Gradiva, 1995.

VYGOTSKY, Lev Semenovich *Pensamento. Linguagem*. 2008.

ZIZEK, S. *O mais Sublime dos Histéricos*. Rio de Janeiro: Zahar, 1991.

______. *Eles não sabem o que fazem*. Rio de Janeiro: Zahar, 1992.

APÊNDICE A – VERSÃO PROFESSOR – CONJUNTO DE ATIVIDADES, CONSIDERANDO O 1° QUADRANTE, OU SEJA, 0° ≤ X ≤ 90°

- Conjunto de atividades pensado para vivência em dois dias de aula.

Objetivos específicos: Explorar propriedades da semelhança de triângulos, tais como:

- a proporcionalidade entre lados homólogos.
- a razão de semelhança.
- a congruência de ângulos internos de triângulos semelhantes.

Recursos necessários:
Triângulos impressos, Régua, Transferidor, Tesoura, Papel Quadriculado, Lápis de cor, Palitos de dente e Calculadora.

Primeiro dia

ETAPA I- ATIVIDADES PREPARATÓRIAS:

1. a. Você irá receber uma folha extra de papel e irá desenhar um triângulo qualquer. A seguir, marcará os três ângulos referentes a cada vértice. Rasgará o triângulo em três partes, de modo que cada uma contenha um dos ângulos. Então, organizará os três ângulos lado a lado.

b. Verifique o que acontece e escreva, com suas palavras a que conclusões chegou. Não esqueça de registrar, no espaço retangular, o modelo de triângulo que desenhou.

____

____

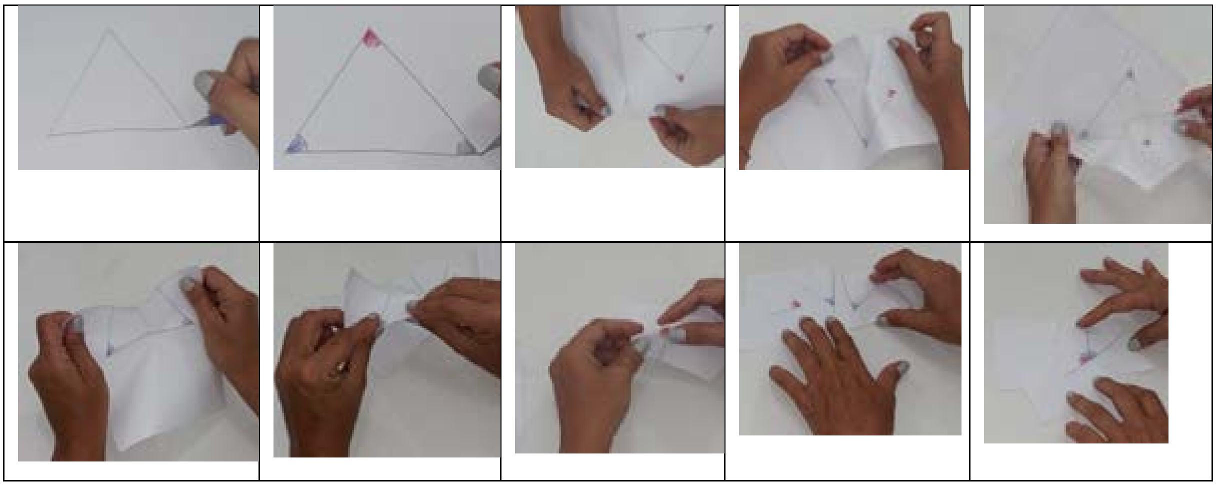
____

c. Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

Observação para o professor que irá aplicar a atividade: sugerimos que leve papel sulfite (branco ou colorido). Caso não seja possível, pedir ao estudante que use uma folha do próprio caderno.

Essa atividade pode ser realizada, rasgando-se o papel.

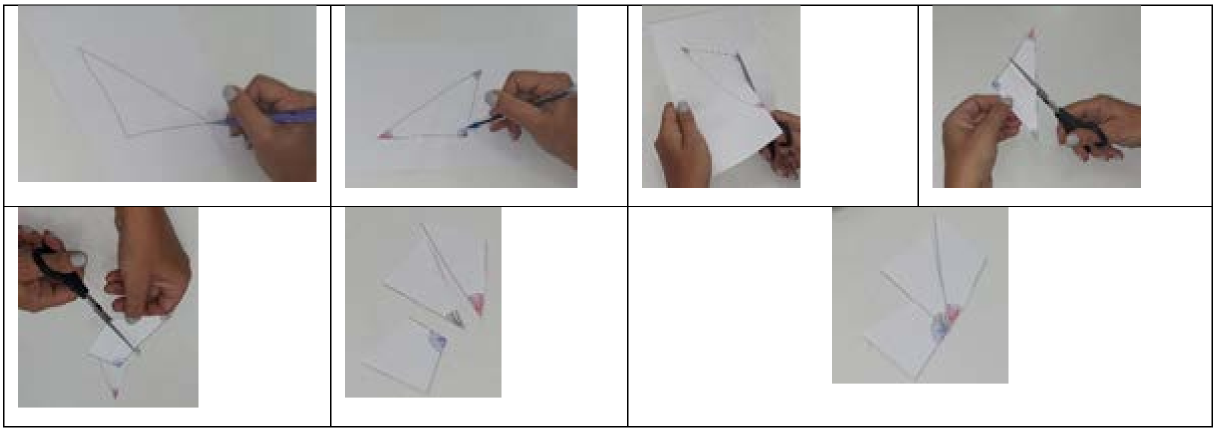
Figura 4 - Passo a passo



Fonte: A autora, 2022.

Ou então, usando-se a tesoura.

Figura 5 - Com tesoura



Fonte: A autora, 2022.

2. Você receberá uma caixinha de palitos de dentes e irá desenvolver as seguintes atividades:

a. Construa com os palitos recebidos, um triângulo de lados 3, 4 e 5, sendo a unidade de medida o palito de dente.
b. A seguir, use o transferidor e meça cada um dos ângulos formados entre os lados (3 e 4, 4 e 5, 5 e 3). Faça uma representação do triângulo e, de cada um desses ângulos, neste espaço ao lado.
c. Anote o que observou em relação à soma destes ângulos?

d. Construa, com os palitos recebidos, um segundo triângulo de lados 6, 8 e 10, ainda com a unidade de medida sendo o palito de dente.

e. A seguir, use o transferidor e meça cada um dos ângulos formados entre os lados (6 e 8, 8 e 10, 10 e 6). Represente, na caixa retangular ao lado, o desenho que fez do triângulo de lados 6,8 e 10 e de cada um de seus ângulos.

f. Anote o que observou em relação a soma dos ângulos internos deste triângulo?

Dica para o professor: Estimule seus estudantes a perceberem a razão de semelhança, os lados homólogos e a proporcionalidade a partir dos conceitos estudados até aqui

Agora, reconstrua, usando os palitinhos, o triângulo 3, 4 e 5 e, em volta deste, construa um triângulo de lados 6, 8 e 12, sendo o palitinho, a unidade de medida. Use o transferidor para medir esses novos ângulos, referentes aos lados 6, 8 e 12, e descreva o que aconteceu.

Dica para o professor: Estimule seu estudante a perceber que, se não há proporcionalidade entre os lados, os ângulos se alteram e perdemos a proporcionalidade do triângulo.

h. Agora, construa esses triângulos separadamente: um com lados 3,4 e 5 e outro com lados 6,8 e 12. Meça todos os ângulos dos dois triângulos. Existem diferença quando os triângulos são construídos separadamente ou quando estão sobrepostos?

i. Investigue como são as medidas dos ângulos entre (3 e 4) e (6 e 8)? O mesmo acontece com os ângulos entre (4 e 5) e (8 e 10)? E entre os lados (5 e 3) e (10 e 6)?

j. Ainda com os triângulos de lados 3,4 e 5 e 6, 8 e 10 montados, vamos analisar os lados destes triângulos. Como se relacionam os lados que formam os ângulos nos triângulos de lados (3,4 e 5), (6, 8 e 10).? Ou seja, o tamanho do lado de cada triângulo tem relação com os ângulos formados entre cada dois lados? Existe algum padrão entre eles?

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

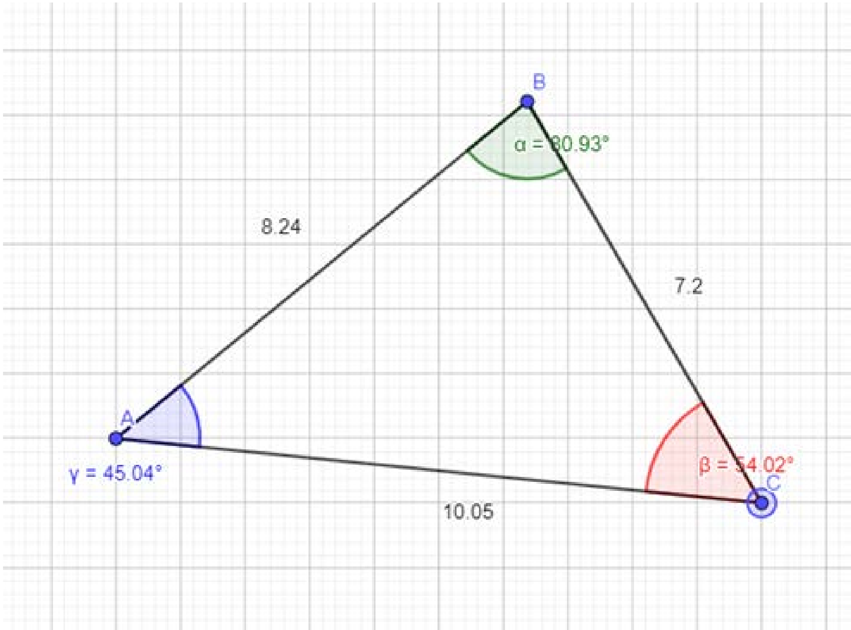
Observação para o professor que irá aplicar a atividade: pedir que o estudante leve transferidor e régua para realizar esta atividade, caso a escola ou quem irá aplicar não disponha desse material. Serão utilizados 36 palitos de dentes (3+4+5+6+8+10) para realizar a atividade, que pode ser individual ou pequenos grupos. Caso seja individual, cada caixa (vem com 100 palitos) consegue atender a duas pessoas, com sobra.

Segundo dia

ETAPA II- ATIVIDADES PARA PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO ESPECÍFICO:

1. Consolidar a ideia de semelhança de triângulos, pela elaboração de estratégias na sua criação. A partir da imagem adiante, crie o que se pede:

Figura 6 – Imagem disparadora



Fonte: A autora, 2022.

a) Crie dois triângulos semelhantes ao triângulo ABC, usando o quadriculado da imagem como guia e o papel quadriculado que você recebeu. Não esqueça das proporções entre os lados.

b) Meça, com o transferidor, e registre os ângulos internos a cada dois lados e os lados dos triângulos que criou.

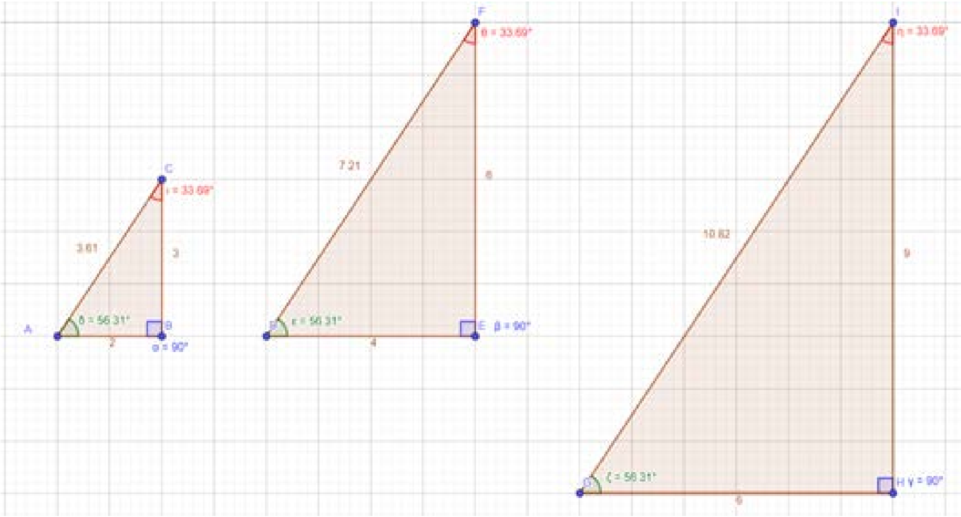
c) Confira se, de fato, os triângulos criados por você são semelhantes a ABC, anote os porquês da sua reflexão.

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

Observação para o professor que irá aplicar a atividade: imprimir o papel quadriculado para cada indivíduo ou grupo que realizará esta atividade. Lembrar aos estudantes que : Dois triângulos são semelhantes quando possuem os três ângulos ordenadamente congruentes (mesma medida) e os lados correspondentes proporcionais.

2. Vamos observar a figura para ver o que acontece quando os triângulos são retângulos, responder às perguntas e fazer a discussão.

Figura 7 - Triângulos retângulos



Fonte: A autora, 2022.

a. O que os triângulos ABC, DEF e GHI têm em comum, além de serem todos retângulos? Anote o que observa.

____

____

____

b. Qual é a relação entre o lado EF e o lado BC? Anote o que observa.

____

____

____

c. Qual é a relação entre o lado ED e o lado AB? Anote o que observa.

____

____

____

d. Agora compare os lados EF e HI, anote o que observa.

____

____

____

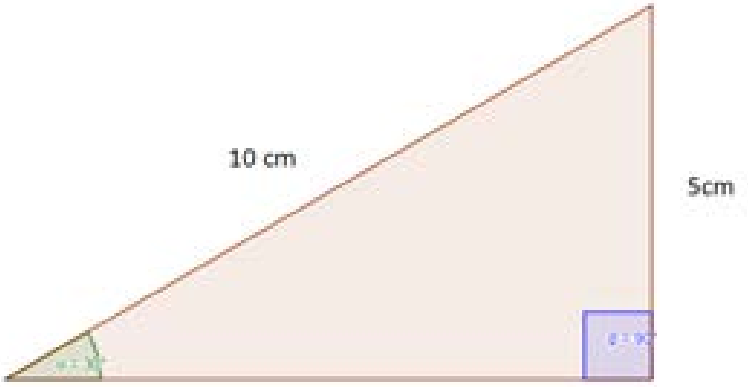
e. Compare os lados HI e BC, anote o que observa.

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

3. Vamos analisar a semelhança a partir de ângulos com papel quadriculado.

3.1

Figura 8 - Analisando semelhança



Fonte: A autora, 2022.

a. Usando o papel quadriculado faça 4 triângulos retângulos diferentes nos quais a hipotenusa é sempre o dobro do cateto oposto ao ângulo alfa, conforme se observa abaixo. Sugerimos começar o desenho por um segmento de reta vertical, com uma determinada medida, desenhar a reta horizontal, formando o ângulo de 90°, use um esquadro para isto, e, a partir da extremidade superior, desenhar a hipotenusa, com o dobro do tamanho da medida desse segmento de reta (que será o cateto oposto ao ângulo alfa)

b) meça, com o transferidor, o ângulo alfa em cada um dos triângulos feitos e anote na figura feita no papel quadriculado.

c) observe os triângulos dos seus colegas e comente a que conclusão chegou sobre a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

3.2 Usando papel quadriculado faça o caminho contrário. Desenhe 4 triângulos retângulos com um ângulo de 30º e meça cateto oposto e hipotenusa. A seguir, responda qual é a relação entre eles.

Para essa atividade, sugerimos que comece desenhando um segmento horizontal.Em um dos extremos, você irá marcar o ângulo de 30°, utilizando o transferidor e, marcando esse segmento de reta. No outro extremo, você irá fazer um segmento perpendicular ao horizontal, determinando o ângulo de 90°, use um esquadro para isto, A seguir, você poderá desenhar o terceiro segmento, um extremo partindo do ângulo de 30° e o outro, partindo do ângulo de 90°, fechando o triângulo.

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

Observação para o professor que irá aplicar a atividade: imprimir o papel quadriculado para cada indivíduo ou grupo que realizará esta atividade. Inicialmente, sugere-se 2 folhas de papel quadriculado: 1 para a atividade 3.1 e outra para a atividade 3.2.

4. Expandindo: Repita a atividade 3.2 para diferentes ângulos... 45º, 78º, 17º… e anote suas observações sobre eles.

Nesta atividade, você seguirá os mesmos passos da atividade anterior. Porém, em um dos extremos, você irá desenhar um ângulo de 45° e todos os passos anteriores.

Depois, fará um outro triângulo com o ângulo de 78° e todos os passos anteriores.

A seguir, um triângulo com o ângulo de 17° e todos os passos anteriores.

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

Observação para o professor que irá aplicar a atividade 4: imprimir o papel quadriculado para cada indivíduo ou grupo que realizará esta atividade

APÊNDICE B – VERSÃO ALUNO– CONJUNTO DE ATIVIDADES, CONSIDERANDO O 1° QUADRANTE, OU SEJA, 0° ≤ X ≤ 90°

- Conjunto de atividades pensado para vivência em dois dias de aula.

Objetivos específicos: Explorar propriedades da semelhança de triângulos, tais como:

- a proporcionalidade entre lados homólogos.
- a razão de semelhança.
- a congruência de ângulos internos de triângulos semelhantes.

Recursos necessários:

Triângulos impressos, Régua, Transferidor, Tesoura, Papel Quadriculado, Lápis de cor, Palitos de dente e Calculadora.

Primeiro dia

ETAPA I- ATIVIDADES PREPARATÓRIAS:

1. a. Você irá receber uma folha extra de papel e irá desenhar um triângulo qualquer. A seguir, marcará os três ângulos referentes a cada vértice. Rasgará o triângulo em três partes, de modo que cada uma contenha um dos ângulos. Então, organizará os três ângulos lado a lado.

b. Verifique o que acontece e escreva, com suas palavras a que conclusões chegou. Não esqueça de registrar, no espaço retangular, o modelo de triângulo que desenhou.

____

____

____

c. Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

2. Você receberá uma caixinha de palitos de dentes e irá desenvolver as seguintes atividades:

a. Construa com os palitos recebidos, um triângulo de lados 3, 4 e 5, sendo a unidade de medida o palito de dente.
b. A seguir, use o transferidor e meça cada um dos ângulos formados entre os lados (3 e 4, 4 e 5, 5 e 3). Faça uma representação do triângulo e, de cada um desses ângulos, neste espaço ao lado.
c. Anote o que observou em relação à soma destes ângulos?

____

____

____

d. Construa, com os palitos recebidos, um segundo triângulo de lados 6, 8 e 10, ainda com a unidade de medida sendo o palito de dente.
e. A seguir, use o transferidor e meça cada um dos ângulos formados entre os lados (6 e 8, 8 e 10, 10 e 6). Represente, na caixa retangular ao lado, o desenho que fez do triângulo de lados 6,8 e 10 e de cada um de seus ângulos.
f. Anote o que observou em relação a soma dos ângulos internos deste triângulo?

g Agora, reconstrua, usando os palitinhos, o triângulo 3, 4 e 5 e, em volta deste, construa um triângulo de lados 6, 8 e 12, sendo o palitinho, a unidade de medida. Use o transferidor para medir esses novos ângulos, referentes aos lados 6, 8 e 12, e descreva o que aconteceu.

h Agora, construa esses triângulos separadamente: um com lados 3,4 e 5 e outro com lados 6,8 e 12. Meça todos os ângulos dos dois triângulos. Existem diferença quando os triângulos são construídos separadamente ou quando estão sobrepostos?

i Investigue como são as medidas dos ângulos entre (3 e 4) e (6 e 8)? O mesmo acontece com os ângulos entre (4 e 5) e (8 e 10)? E entre os lados (5 e 3) e (10 e 6)?

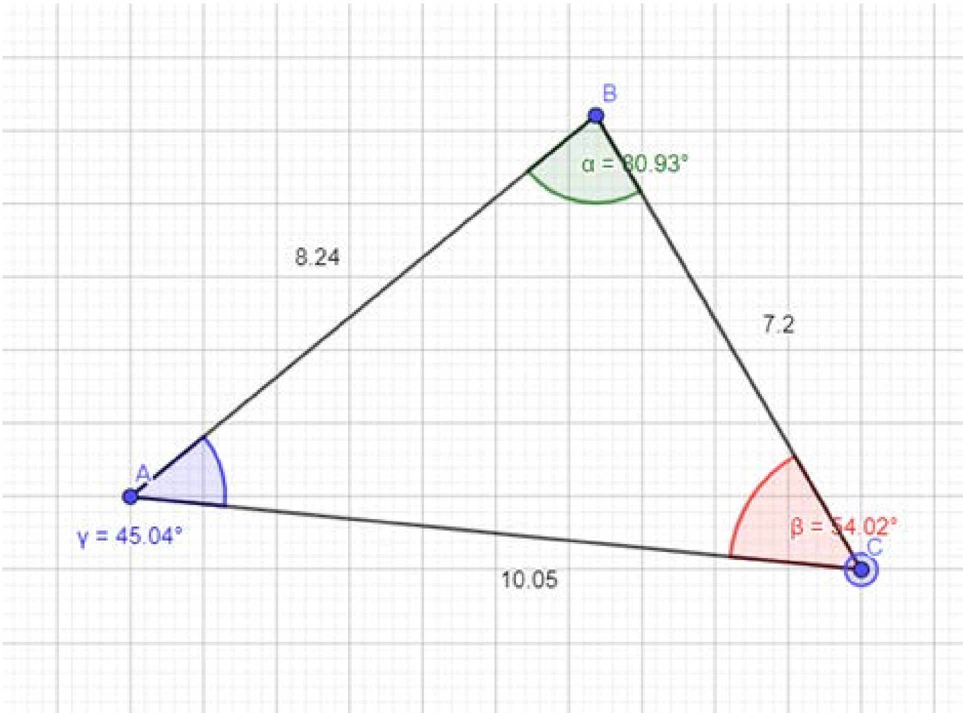
j Ainda com os triângulos de lados 3,4 e 5 e 6, 8 e 10 montados, vamos analisar os lados destes triângulos. Como se relacionam os lados que formam os ângulos nos triângulos de lados (3,4 e 5), (6, 8 e 10).? Ou seja, o tamanho do lado de cada triângulo tem relação com os ângulos formados entre cada dois lados? Existe algum padrão entre eles?

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

Segundo dia

ETAPA II- ATIVIDADES-PARA PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO ESPECÍFICO:

1. Consolidar a ideia de semelhança de triângulos, pela elaboração de estratégias na sua criação. A partir da imagem adiante, crie o que se pede:



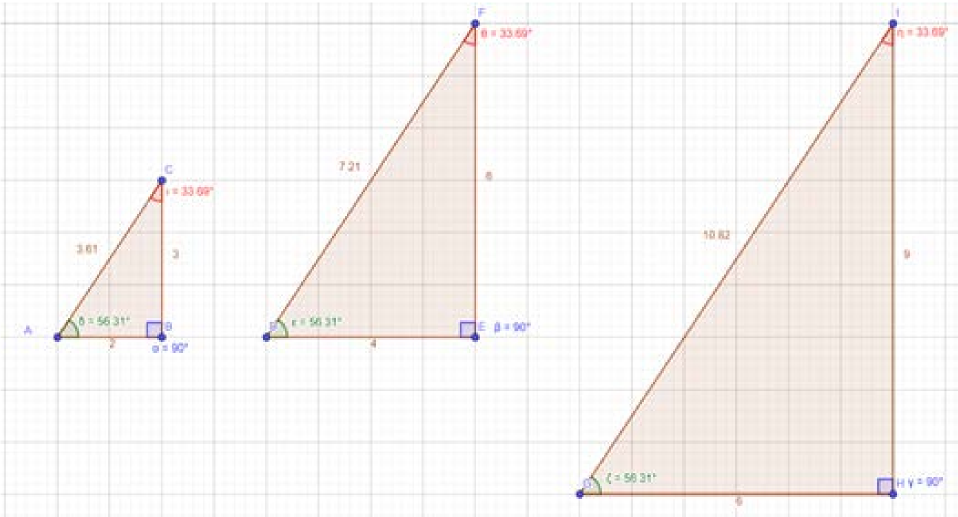
a. Crie dois triângulos semelhantes ao triângulo ABC, usando o quadriculado da imagem como guia e o papel quadriculado que você recebeu. Não esqueça das proporções entre os lados.

b. Meça, com o transferidor, e registre os ângulos internos a cada dois lados e os lados dos triângulos que criou.

c. Confira se, de fato, os triângulos criados por você são semelhantes a ABC, anote os porquês da sua reflexão.

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

2. Vamos observar a figura para ver o que acontece quando os triângulos são retângulos, responder às perguntas e fazer a discussão.



a. O que os triângulos ABC, DEF e GHI têm em comum, além de serem todos retângulos? Anote o que observa.

____

____

____

b. Qual é a relação entre o lado EF e o lado BC? Anote o que observa.

____

____

____

c. Qual é a relação entre o lado ED e o lado AB? Anote o que observa.

____

____

____

d. Agora compare os lados EF e BC, anote o que observa.

____

____

____

g. Compare os lados HI e BC, anote o que observa.

____

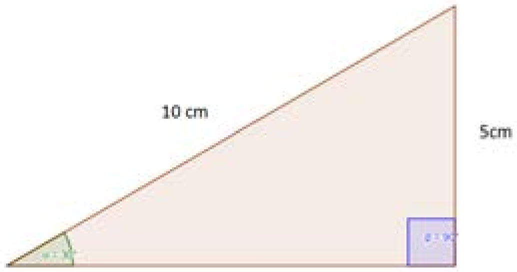
____

____

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

3. Vamos analisar a semelhança a partir de ângulos com papel quadriculado.

3.1



a. Usando o papel quadriculado faça 4 triângulos retângulos diferentes nos quais a hipotenusa é sempre o dobro do cateto oposto ao ângulo alfa, conforme se observa abaixo. Sugerimos começar o desenho por um segmento de reta vertical, com uma determinada medida, desenhar a reta horizontal, formando o ângulo de 90°, use um esquadro para isto, e, a partir da extremidade superior, desenhar a hipotenusa, com o dobro do tamanho da medida desse segmento de reta (que será o cateto oposto ao ângulo alfa).

b. meça, com o transferidor, o ângulo alfa em cada um dos triângulos feitos e anote na figura feita no papel quadriculado.

c. observe os triângulos dos seus colegas e comente a que conclusão chegou sobre a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

____

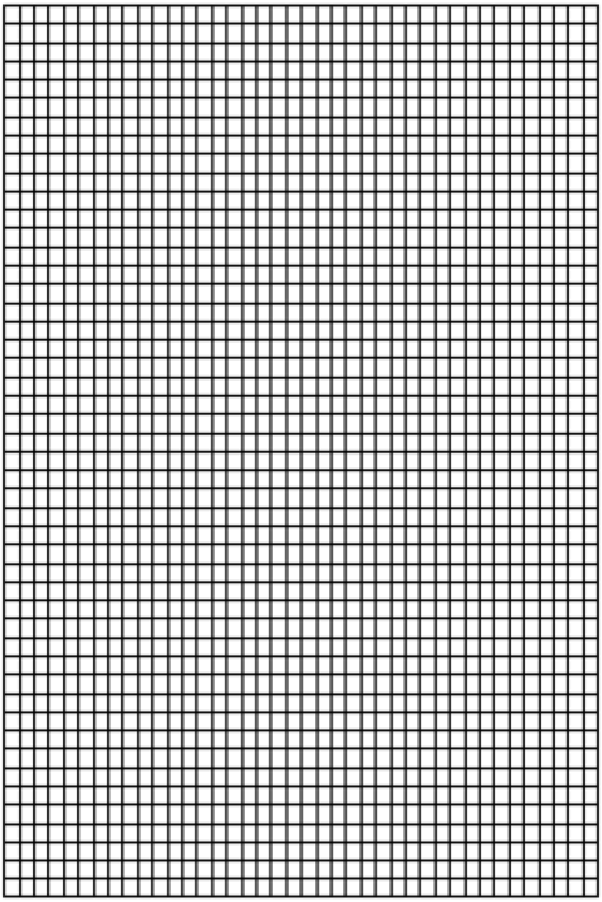
____

____

3.2 Usando papel quadriculado faça o caminho contrário. Desenhe 4 triângulos retângulos com um ângulo de 30º e meça cateto oposto e hipotenusa. A seguir, responda qual é a relação entre eles.

Para essa atividade, sugerimos que comece desenhando um segmento horizontal. Em um dos extremos, você irá marcar o ângulo de 30°, utilizando o transferidor e, marcando esse segmento de reta. No outro extremo, você irá fazer um segmento perpendicular ao horizontal, determinando o ângulo de 90°, use um esquadro para isto. A seguir, você poderá desenhar o terceiro segmento, um extremo partindo do ângulo de 30° e o outro, partindo do ângulo de 90°, fechando o triângulo.

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.



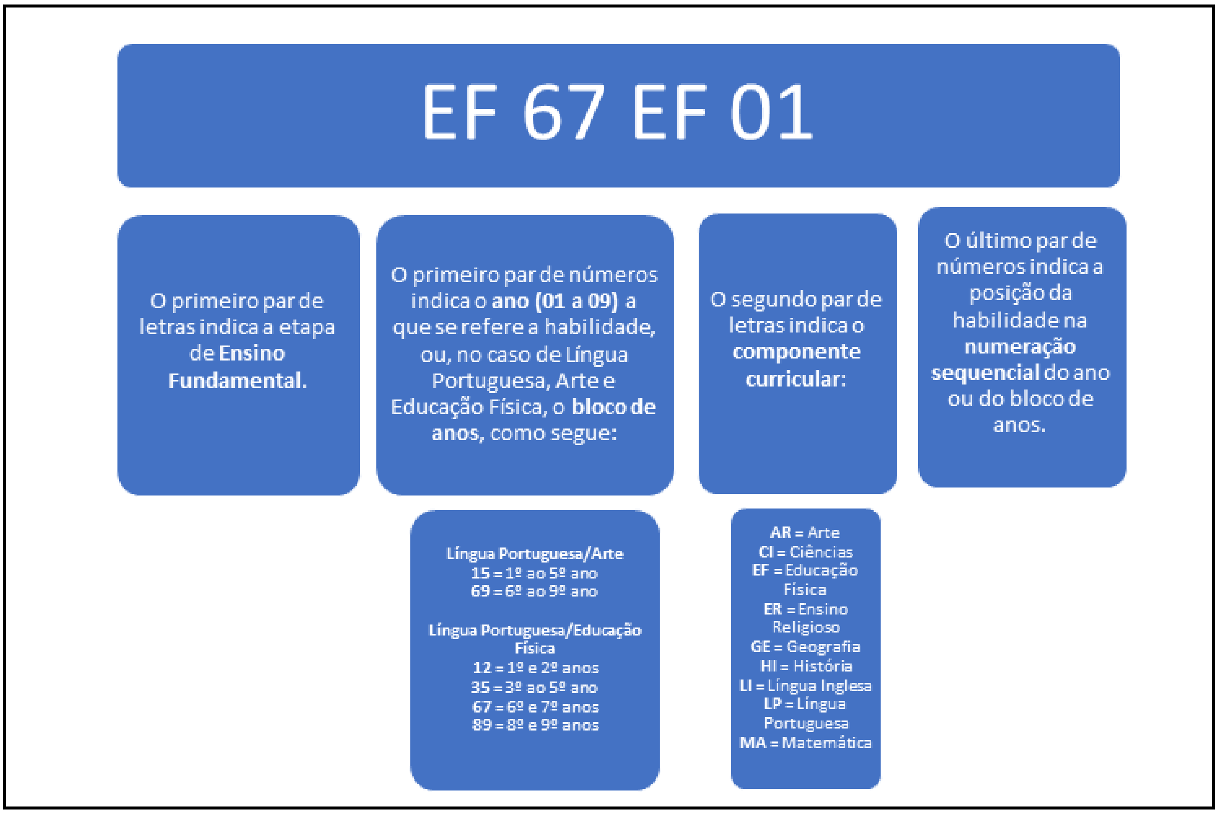
4. Expandindo: Repita a atividade 3.2 para diferentes ângulos... 45º, 78º, 17º… e anote suas observações sobre eles.

Nesta atividade, você seguirá os mesmos passos da atividade anterior. Porém, em um dos extremos, você irá desenhar um ângulo de 45° e todos os passos anteriores. Depois, fará um outro triângulo com o ângulo de 78° e todos os passos anteriores. A seguir, um triângulo com o ângulo de 17° e todos os passos anteriores.

Com as anotações em mãos, é hora da discussão, explique, com suas próprias palavras, a seus colegas de classe, o que observou e a que conclusões chegou.

ANEXO A – Representação das unidades temáticas, objetos do conhecimento e habilidades para cada ano do Ensino Fundamental

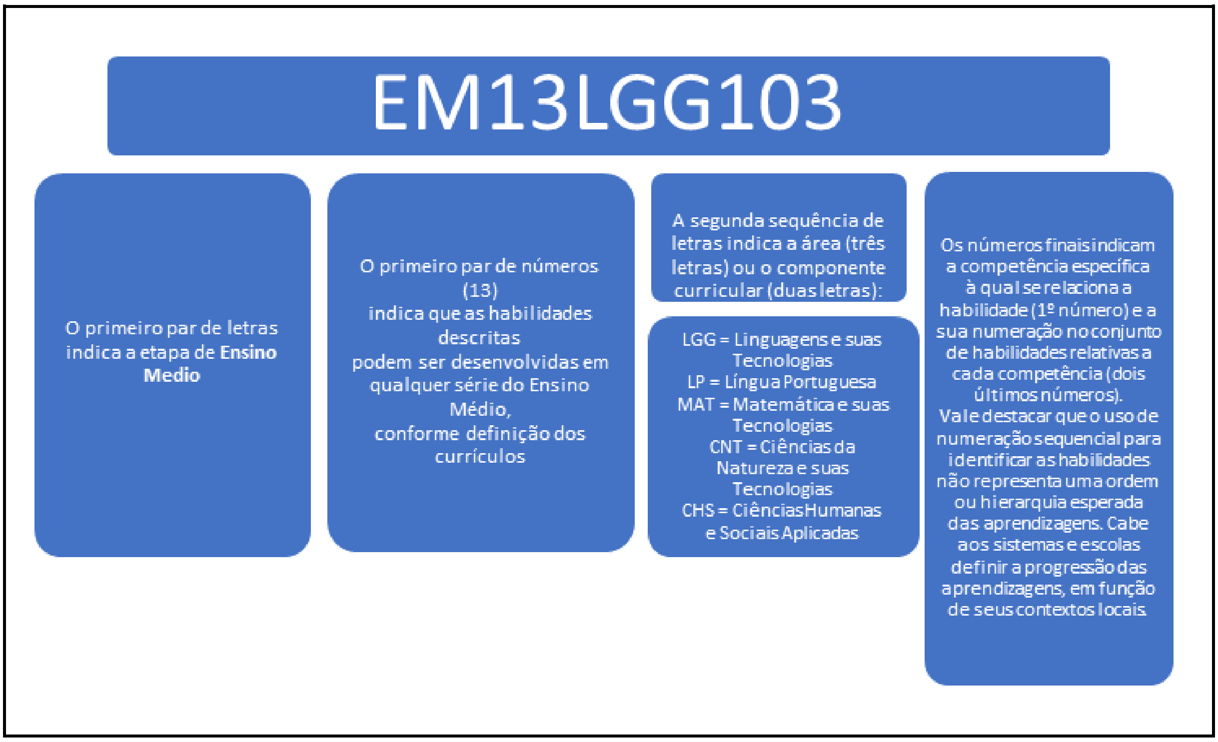
Figura 9 - Representação das unidades temáticas, objetos do conhecimento e habilidades para cada ano



Fonte: BNCC, 2018, p. 30.

ANEXO B – Representação das unidades temáticas, objetos do conhecimento e habilidades para cada ano do Ensino Médio

Figura 10 - Identificação de cada habilidade, segundo código alfanumérico



Fonte: BRASIL, 2018, p.34.