



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciência

Instituto de Matemática e Estatística

Paulo Vinicius Brito dos Santos

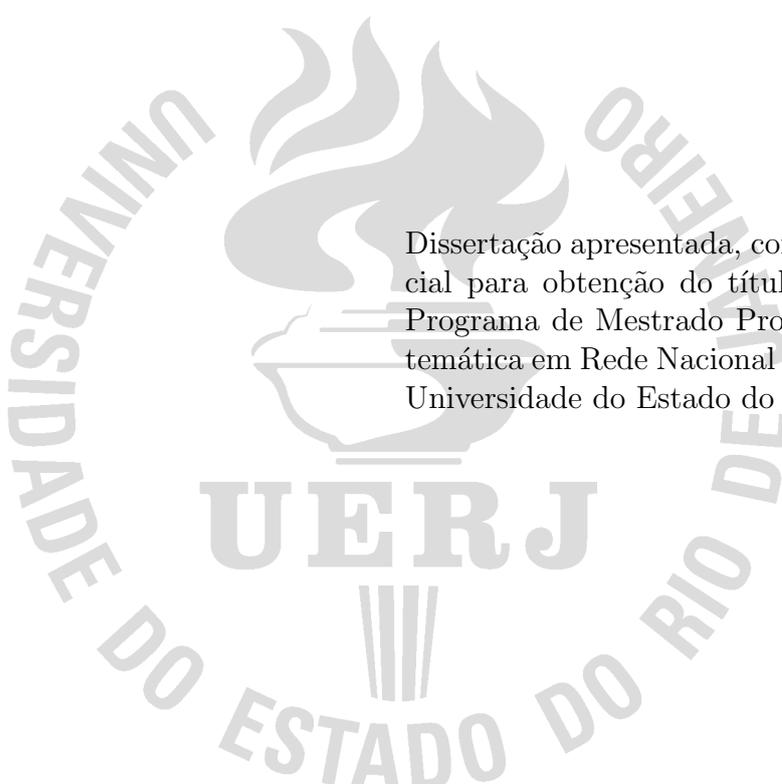
**Modelagem Matemática de Crescimento e Epidemiologia:  
Aspectos Educacionais**

Rio de Janeiro

2021

Paulo Vinicius Brito dos Santos

**Modelagem Matemática de Crescimento e Epidemiologia: Aspectos  
Educaçãoais**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa  
Coorientador: Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S237 Santos, Paulo Vinicius Brito dos.  
Modelagem matemática de crescimento e epidemiologia: aspectos educacionais/ Paulo Vinicius Brito dos Santos. – 2021.  
127 f.: il.

Orientador: Marcus Vinicius Tovar Costa  
Coorientador: Augusto Cesar de Castro Barbosa

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Modelos matemáticos - Teses. 2. Epidemiologia - Teses. 3. Crescimento demográfico - Teses. 3. Matemática - Estudo e ensino - Teses. I. Costa, Marcus Vinicius Tovar. II. Barbosa, Augusto Cesar de Castro. III. Título.

CDU 519.87

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte

---

Assinatura

---

Data

Paulo Vinicius Brito dos Santos

**Modelagem Matemática de Crescimento e Epidemiologia: Aspectos  
Educaçãoais**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 13 de Dezembro de 2021.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa (Orientador)  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

---

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa (Coorientador)  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

---

Prof. Dr. Victor Giraldo  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Chang Kuo Rodrigues  
Universidade Federal de Juiz de Fora

Rio de Janeiro

2021

## DEDICATÓRIA

Aos meus pais, amigos e todos que me ajudaram a chegar até aqui.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por todas as oportunidades que ela me trouxe.

Aos meus pais, José Luiz dos Santos e Maria Joselândia dos Santos, pelo apoio incondicional dado do início ao fim da minha trajetória acadêmica.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Marcus Vinícius Tovar Costa e Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa, pela disponibilidade, dedicação e ajuda ao longo de todo este trabalho, sempre contribuindo com ideias e fontes para minha pesquisa.

À minha noiva, Anna Carolina Aguiar Nascimento, por fornecer apoio e estar sempre ao meu lado acompanhando todo o processo.

Aos colegas de mestrado que compartilharam o cotidiano dessa jornada, pela amizade e trabalho.

À Universidade do Estado do Rio de Janeiro pela oportunidade de um ensino de qualidade.

A sabedoria comunica a vida a seus filhos  
e acolhe os que a procuram.  
*Bíblia Sagrada. Eclo 4,12*

## RESUMO

SANTOS, Paulo Vinicius Brito dos. *Modelagem Matemática de Crescimento e Epidemiologia: Aspectos Educacionais*. 2021. 127 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Neste trabalho buscamos trazer ideias a partir do tema de modelagem para fazer uma ligação entre a teoria aprendida em sala de aula com o mundo real. Houve uma preocupação em explicar todos os passos de maneira cautelosa, mostrando que o conteúdo e os conceitos abordados na modelagem podem ser passados de maneira simples e assim apontar um caminho aos professores para aplicação em salas de aula do Ensino Médio ou superior. Deixamos também sugestões sobre como fazer uma aplicação em sala de aula, enumerando etapas que possam ser seguidas ou tomadas como base para conduzir os alunos durante o processo de formulação de teorias e equações a respeito do fenômeno a ser modelado. Baseando-se em acontecimentos atuais ao ano de 2020, onde existe uma grande preocupação com a contaminação e disseminação do novo coronavírus (Sars-Cov-2), esse trabalho busca utilizar como foco os principais modelos de crescimento e epidemiologia para descrever, estudar e ensinar sobre a realidade em que vivemos. Explicações a respeito das funções exponenciais e progressões geométricas também são abordadas com exemplos direcionados ao tema de crescimento exponencial de vírus. Espera-se que assim como as ideias sobre modelagem, os exemplos de funções exponenciais e progressões geométricas também sejam aplicados em sala de aula, com objetivo de contextualizar o ensino de matemática, utilizando-se de um tema que causou grande impacto na vida de pessoas em todo o mundo. Foram utilizados métodos algébricos e numéricos para a solução das equações diferenciais presentes nos modelos. Em termos educacionais, foi apresentado o método das diferenças finitas (MDF) a fim de promover a discretização do modelo contínuo, contornando assim o tema de equações diferenciais ordinárias, que é impróprio para o Ensino Médio e no primeiro período da graduação. Modelos discretizados podem ser resolvidos pelo MDF de maneira simples, utilizando-se apenas planilhas do Excel, cuja explicação para criação das mesmas foi discriminada passo a passo. Os métodos propostos podem ser aplicados a outros tipos de modelo, variando conforme a necessidade. Acreditamos na ideia de que os métodos de ensino devem abranger quando possível um contexto cotidiano a fim de mostrar as possíveis aplicabilidades de determinado conteúdo em sua vida, trazendo para o dia a dia do aluno o que foi aprendido em ambiente escolar.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Crescimento. Epidemiologia. Educação Matemática.

## ABSTRACT

SANTOS, Paulo Vinicius Brito dos. *Mathematical Modeling of Growth and Epidemiology: Educational Aspects*. 2021. 127 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

In this work we seek to bring ideas from the theme of modeling to make a connection between the theory learned in the classroom and the real world. There was a concern to explain all the steps carefully, showing that the content and concepts covered in the modeling can be passed on in a simple way and thus point out a way for teachers to apply in high school or higher classrooms. We also leave suggestions on how to make an application in the classroom, enumerating steps that can be followed or taken as a basis to guide students during the process of formulating theories and equations regarding the phenomenon to be modeled. Based on current events in the year 2020, where there is a great concern with the contamination and spread of the new corona virus (Sars-Cov-2), this work seeks to focus on the main models of growth and epidemiology to describe, study and teach about the reality we live in. Explanations about exponential functions and geometric progressions are also covered with examples focused on the theme of exponential growth of viruses. It is expected that, as well as the ideas about modeling, the examples of exponential functions and geometric progressions will also be applied in the classroom in order to contextualize the teaching of mathematics using a theme that has had a great impact on the lives of people across the world. Algebraic and numerical methods were used to solve the differential equations present in the models. In educational terms, the finite difference method (MDF) was introduced in order to promote the discretization of the continuous model, thus bypassing the theme of ordinary differential equations, which is inappropriate for high school and in the first periods of graduation. Discretized models can be solved by MDF in a simple way, using only Excel spreadsheets, whose explanation for creating them was described step by step. The proposed methods can be applied to other types of models, varying as needed. We believe in the idea that teaching methods should cover, whenever possible, a daily context in order to show the possible applicability of certain content in his life, bringing to the student's daily life what was learned in the school environment.

Keywords: Mathematical Modeling. Growth. Epidemiology. Math Education.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Função exponencial. . . . .	17
Figura 2 - Comparação entre funções exponenciais. . . . .	18
Figura 3 - Contágio e crescimento exponencial do vírus. . . . .	19
Figura 4 - Interrupção na cadeia de transmissão. . . . .	20
Figura 5 - Relação entre função exponencial e progressão geométrica. . . . .	21
Figura 6 - Casos de COVID-19 no Brasil. . . . .	22
Figura 7 - Suavização das curvas. . . . .	23
Figura 8 - Funções exponenciais em escala logarítmica. . . . .	24
Figura 9 - Suavização das curvas em escala logarítmica. . . . .	24
Figura 10 - Esquema da modelagem matemática. . . . .	26
Figura 11 - Esquema de um modelo matemático. . . . .	26
Figura 12 - Representação esquemática de um modelo matemático. . . . .	27
Figura 13 - Caricaturas com diferentes níveis de detalhamento. . . . .	28
Figura 14 - Malthus. . . . .	31
Figura 15 - Solução do modelo de Malthus. . . . .	32
Figura 16 - Verhulst. . . . .	33
Figura 17 - Solução do modelo de Verhulst. . . . .	35
Figura 18 - Lotka-Volterra. . . . .	36
Figura 19 - Mecânica do modelo de Lotka-Volterra. . . . .	36
Figura 20 - Soluções do modelo de Lotka-Volterra. . . . .	39
Figura 21 - Solução numérica - exemplo dos coelhos e lobos. . . . .	41
Figura 22 - Solução numérica - exemplo dos coelhos e lobos em eixo duplo. . . . .	41
Figura 23 - Hipócrates. . . . .	42
Figura 24 - Kermack/McKendrick. . . . .	44
Figura 25 - Dinâmica das populações do modelo SIR. . . . .	44
Figura 26 - Modelagem SIR. . . . .	48
Figura 27 - Fases da Modelagem SIR. . . . .	49
Figura 28 - Ponto máximo da epidemia. . . . .	50
Figura 29 - Achatamento da curva de infecção. . . . .	51
Figura 30 - Situação proposta - momento inicial. . . . .	52
Figura 31 - Situação proposta - segunda onda. . . . .	52
Figura 32 - Segunda onda de casos na Itália. . . . .	53
Figura 33 - Modelo SIR com taxas de natalidade, mortalidade e vacinação. . . . .	54
Figura 34 - Modelo SIR com Dinâmica Vital e Vacinação. . . . .	55
Figura 35 - Comparação entre os modelos SIR e SIR com variações. . . . .	56
Figura 36 - Dinâmica das populações do modelo SIR. . . . .	57

Figura 37 - Modelagem SIRS. . . . .	59
Figura 38 - Dinâmica de populações do modelo SIRD. . . . .	60
Figura 39 - Modelagem SIRD. . . . .	62
Figura 40 - Modelagem SIRD - Menor Coeficiente de Infecção. . . . .	63
Figura 41 - Dinâmica do modelo SIRD com variantes. . . . .	64
Figura 42 - Modelagem SIRD com Variantes - Resultado Numérico. . . . .	69
Figura 43 - Método das Diferenças Finitas. . . . .	78
Figura 44 - Modelo de Crescimento de Malthus - Método das Diferenças Finitas. . . . .	79
Figura 45 - Modelo de Verhulst - Método das Diferenças Finitas. . . . .	80
Figura 46 - Modelo de Lotka-Volterra - MDF Exibido em Eixo Duplo. . . . .	81
Figura 47 - Modelo epidemiológico SIR - Método das Diferenças Finitas. . . . .	82
Figura 48 - Solução Discreta do Modelo SIR (Usando $\Delta t = 1$ ). . . . .	84
Figura 49 - Comparação entre os resultados obtidos. . . . .	84
Figura 50 - Logo Excel. . . . .	85
Figura 51 - Modelo de Malthus utilizando planilha do Excel. . . . .	86
Figura 52 - Gráfico para o Modelo de Malthus - Excel. . . . .	86
Figura 53 - Modelagem de Verhulst utilizando planilha do Excel. . . . .	87
Figura 54 - Gráfico para o Modelo de Verhulst - Excel. . . . .	88
Figura 55 - Modelagem de Lotka-Volterra utilizando Planilha do Excel. . . . .	89
Figura 56 - Gráfico para o Modelo de Lotka-Volterra - Excel. . . . .	89
Figura 57 - Modelagem SIR utilizando Planilha do Excel. . . . .	90
Figura 58 - Gráfico para o Modelo SIR - Excel. . . . .	91
Figura 59 - Logo GeoGebra. . . . .	91
Figura 60 - Exibir Planilha do GeoGebra. . . . .	92
Figura 61 - Modelo de Malthus feito no GeoGebra. . . . .	93
Figura 62 - Modelo de Verhulst feito no geogebra. . . . .	95
Figura 63 - Modelo SIR feito no GeoGebra. . . . .	97
Figura 64 - Modelo SIR feito no geogebra. . . . .	99
Figura 65 - Dinâmica da população na modelagem proposta. . . . .	113
Figura 66 - Excel - Planilha a ser construída pelos alunos. . . . .	119
Figura 67 - Excel - Redução do Coeficiente de Transmissão (Achatamento da curva). . . . .	119
Figura 68 - Excel - Tela de carregamento. . . . .	121
Figura 69 - Excel - principais elementos. . . . .	121
Figura 70 - Excel - Principais elementos. . . . .	122
Figura 71 - Excel - Função puxar para baixo. . . . .	122
Figura 72 - Excel - desabilitando a função puxar para baixo. . . . .	123
Figura 73 - Excel - Criação do Gráfico associado aos dados. . . . .	123
Figura 74 - Download do programa GeoGebra. . . . .	124
Figura 75 - Exibir Planilha do GeoGebra. . . . .	125

Figura 76 - Funcionalidade de “puxar para baixo” na planilha. . . . .	125
Figura 77 - Criação de controles deslizantes no GeoGebra. . . . .	126
Figura 78 - Exemplo de utilização dos controles deslizantes. . . . .	126
Figura 79 - Ferramenta de Compartilhamento em nuvem do GeoGebra. . . . .	127
Figura 80 - Canal Oficial do GeoGebra no Youtube - Playlists. . . . .	127

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b>	13
1	<b>FUNÇÃO EXPONENCIAL</b>	17
1.1	Crescimento Exponencial	18
1.2	Escala Logarítmica e Função Exponencial	23
2	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	25
2.1	Negacionismo	29
3	<b>MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL</b>	31
3.1	Modelo de Malthus	31
3.2	Modelo de Verhulst	33
3.3	Modelo de Lotka-Volterra	36
4	<b>MODELAGEM EPIDEMIOLÓGICA</b>	42
4.1	<b>Modelo SIR</b>	44
4.1.1	<u>Solução do Modelo SIR</u>	46
4.1.2	<u>A Segunda Onda</u>	51
4.2	<b>Modelo SIR com Natalidade, Mortalidade e Vacina</b>	53
4.2.1	<u>Solução do Modelo SIR com Dinâmica Vital e Vacinação</u>	55
4.3	<b>Modelo SIRS</b>	56
4.3.1	<u>Solução do modelo SIRS</u>	58
4.4	<b>Modelo SIRD</b>	59
4.4.1	<u>Solução do Modelo SIRD</u>	61
4.5	<b>Modelo SIRD com Variantes</b>	63
4.5.1	<u>Solução do modelo SIRD com variantes</u>	66
5	<b>MODELAGEM NA EDUCAÇÃO</b>	70
5.1	<b>Aplicação em sala de aula</b>	75
5.2	<b>Método das Diferenças Finitas</b>	77
5.2.1	<u>Modelo de Malthus Discretizado</u>	78
5.2.2	<u>Modelo de Verhulst Discretizado</u>	79
5.2.3	<u>Modelo de Lotka-Volterra Discretizado</u>	80
5.2.4	<u>Modelo Epidemiológico SIR discretizado</u>	81
5.3	<b>Excel na Modelagem</b>	85
5.3.1	<u>Modelo de Malthus no Excel</u>	85
5.3.2	<u>Modelo de Verhulst no Excel</u>	87
5.3.3	<u>Modelo de Lotka-Volterra no Excel</u>	88
5.3.4	<u>Modelo Epidemiológico SIR no Excel</u>	89
5.4	<b>GeoGebra na Modelagem</b>	91
5.4.1	<u>Modelo de Malthus</u>	92

5.4.2	<u>Modelo de Verhulst</u> . . . . .	94
5.4.3	<u>Modelo de Lotka-Volterra</u> . . . . .	95
5.4.4	<u>Modelo SIR</u> . . . . .	97
	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	100
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	101
	<b>APÊNDICE A</b> – Progressão Geométrica. . . . .	107
	<b>APÊNDICE B</b> – Método Runge-Kutta 4 <sup>o</sup> Ordem. . . . .	109
	<b>APÊNDICE C</b> – Aplicação da Modelagem (Proposta) . . . . .	113
	<b>APÊNDICE D</b> – O <i>Software</i> Excel - Conceitos Básicos. . . . .	121
	<b>APÊNDICE E</b> – O Software GeoGebra - Conceitos Básicos. . . . .	124

## INTRODUÇÃO

As velhas e conhecidas perguntas dos alunos aos professores em sala, principalmente quando o tema é matemática: Para que serve a matemática? Onde está sua aplicação? Qual o significado de se estudar matemática? Já virou o que costumamos chamar de lugar comum e quase todos aqueles que se propõem a ensiná-la já tiveram a oportunidade de ouvirem esses questionamentos. O fato é que alguns podem e devem buscar entendimento histórico dos motivos que levam ao que pode ser chamado de “fracasso” no ensino-aprendizado da matemática. No entanto, a busca de metodologias que possam romper essa tradição de insucesso e modificar o ensino-aprendizagem da matemática é um passo fundamental para transformá-la em algo mais atrativo para os alunos.

Os sistemas educacionais tem sido, nos últimos duzentos anos, dominados por uma fascinação pelo teórico e abstrato, principalmente quando diz respeito aos ensinamentos da matemática e da física em escolas e universidades. Teorias e técnicas são apresentadas e desenvolvidas, muitas vezes, sem conexão alguma com fatos reais, baseando-se puramente na teoria e mencionando que “essas teorias e técnicas servem para isso ou aquilo” e, frequentemente, ilustradas com exemplos artificiais, manipulados e descontextualizados. Professores e educadores que seguem essa metodologia teórica, sem buscar contextos reais e práticos, acabam fazendo com que os alunos sejam, por vezes, mal orientados e acabam fomentando um ciclo na construção de paradigmas sobre como os conteúdos são transmitidos (SILVA; FERREIRA; MOREIRA, 2010). Essa abordagem teórica, apesar de necessária muitas vezes, não deve ser o único caminho adotado, sendo de grande importância que o conhecimento seja estendido a situações contextualizadas e atuais, de forma a mostrar aos alunos a real utilidade e aplicação dos conhecimentos transmitidos.

Em vários países a busca por um ensino mais contextualizado e dinâmico tem sido realizada com êxito. Os bons exemplos devem ser estudados e, o que for possível, adaptado para outras realidades. Como exemplo, podem ser citados os casos de Finlândia e Coreia, que foram capazes de dar verdadeiros saltos na qualidade dos seus métodos de trabalho no ensino de ciências de maneira geral. As origens das ideias matemáticas são o resultado do processo para se tentar explicar e entender fenômenos observados na vida real e o desenvolvimento dessas ideias e suas organizações se dão a partir de elaborações sobre como representar o real. O desenvolvimento das ciências, desde os primórdios, tem sido construído por observações que, através da linguagem, seja a natural ou mais específica e formal, como a linguagem matemática, são compartilhadas socialmente e aprimoradas, estruturando-as como teorias, onde algumas dessas são difundidas e incorporadas ao pensamento dominante, tornando-se instrumentos fundamentais para o desenvolvimento das ciências (BASSANEZI, 2002). A realidade em si é muito complexa e exige conhecimentos variados para que se possam lidar com problemas reais. A estruturação da realidade en-

volve diversas áreas e especialidades, em que a matemática tem seu papel como a ciência centralizadora, inclusive sendo considerada por pesquisadores como a espinha dorsal da civilização moderna, ligando diferentes áreas do conhecimento e contribuindo para o avanço do mundo, conforme:

A matemática, alicerce de quase todas as áreas do conhecimento é dotada de uma arquitetura que permite desenvolver os níveis cognitivos e criativos, tem sua utilização defendida nos mais diversos graus de escolaridade (BIEMBENGUT; HEIN, 2014, p. 9).

Quanto à aprendizagem, o trabalho interdisciplinar é de grande importância para que a mesma ocorra de uma forma mais abrangente, visto que todas as disciplinas possuem um objetivo em comum que as interliga (MARQUES, 2019). O ato de criar uma formulação para representação do real é chamado de Modelagem matemática e o produto final com as equações bem definidas, formuladas através de observações, é chamado de Modelo Matemático. Os modelos matemáticos podem ser feitos de maneira mais simples, levando em conta menos detalhes (menos realista) ou de maneira mais sofisticada, incorporando diversas variáveis possuindo alto nível de retratação (mais realista). Acreditamos que algumas das atividades desenvolvidas em escolas e universidades devem seguir as origens do pensamento matemático, buscando pensar a respeito de um problema e sobre como podemos interpretá-lo, à luz da área específica de que trata o problema, e resolvê-lo matematicamente. Os conceitos de modelagem matemática são importantes ferramentas disponíveis para complementação da aprendizagem, mudando a maneira de como a matemática é apresentada no ensino tradicional, dando sentido e aplicabilidade do conhecimento que é adquirido em sala de aula, na vida real do aluno (FERREIRA, 2020).

No ensino através da modelagem, o professor atua como um agente facilitador, reduzindo a complexidade das questões envolvidas no processo e assim transmitindo o conhecimento sem causar um impacto intimidador de toda a complexidade envolvida em se modelar uma determinada realidade (HEIDEMANN; ARAUJO; VEIT, 2016). Os próprios modelos matemáticos não conseguem traduzir a realidade devido à sua grande complexidade de detalhes, mas isso não significa que modelos não possam ser de grande utilidade tanto em termos de previsibilidade, quanto em termos de incentivo a aprendizagem, pois sempre retratam a realidade com um certo nível de precisão (CIFUENTES; NEGRELLI, 2012). Modelos matemáticos podem incorporar diversas variáveis, os tornando bastante complexos e difíceis de serem alimentados com informações, para que possam ser utilizados.

Baseando-se na atualidade que vivemos com a pandemia de COVID-19, esse trabalho apresenta alguns conceitos e exemplos sobre modelagens de crescimento populacional e epidemiologia, bem como conceitos a respeito de funções exponenciais, que podem ser explicados e utilizados em salas de aulas dos ensinos médio e superior. Procuramos fazer

uma descrição bastante didática das variáveis utilizadas nas construções dos modelos e dos métodos algébricos e numéricos utilizados para suas resoluções. Em cada caso, o leitor, sem muito esforço, poderá se aventurar a explicar modelos matemático, bem como resolve-los de forma simples, sendo possível que sejam aplicados à educação. Procuramos dividir essa dissertação em capítulos cobrindo os temas de interesse, de modo há transformá-la na mais didática possível. Assim, ela está dividida em cinco capítulos.

No capítulo 1 são apresentados inicialmente os conceitos a respeito de função exponencial, bem como seu comportamento gráfico, e alguns exemplos da sua utilização. Foram escolhidos exemplos relacionados à disseminação de vírus, visando contextualizar o trabalho dentro do tema proposto. Esses conceitos são importantes para o estudo dos modelos que serão abordados posteriormente no trabalho.

No Capítulo 2 são apresentados os conceitos de Modelagem matemática e Modelo Matemático, importantes para compreensão dos modelos propostos nos capítulos seguintes. Analogias são feitas a fim de facilitar a compreensão do leitor a respeito do tema.

No capítulo 3 são apresentados alguns dos principais modelos populacionais, tais como o modelo de Malthus, Verhust e Lotka-Volterra. Os modelos são resolvidos algebricamente, e para o modelo de Lotka-Volterra é também apresentada uma solução numérica.

No capítulo 4 damos introdução ao estudo da epidemiologia e são apresentados alguns dos principais modelos epidemiológicos, tais como os modelos SIR, SIRS e SIRD. Também é abordado o acréscimo de variantes aos modelos, tais como a dinâmica vital (natalidade e mortalidade) e vacinação. Esse capítulo busca fazer uma ligação com o momento em que vivemos a pandemia de Covid-19.

O capítulo 5 foi dedicado, a aplicação da modelagem em termos educacionais, mostrando que é possível fazer modelagens complexas por métodos simples, inclusive utilizando planilhas do Excel ou o software de geometria dinâmica GeoGebra.

Os pré-requisitos matemáticos utilizados nas modelagens de crescimento populacional e epidemiologia são, em geral, modestos e muitas vezes desenvolvidos na própria formulação dos modelos, facilitando propositadamente a sua compreensão por qualquer leitor, independentemente do seu interesse principal. Esperamos que esse trabalho possa ser utilizado como material para inspiração a professores para sua utilização de novas propostas de modelagem, ou como texto complementar para disciplinas específicas (cálculo diferencial, equações diferenciais ordinárias, cálculo numérico, etc...), ou simplesmente para estudos individuais. Como deixaremos claro ao longo do texto, apesar do tema ter um aspecto matemático mais complexo, procuramos apresentá-los de modo que os tópicos também podem ser e devem ser abordados, por exemplo, no Ensino Médio. Apresentamos alguns apêndices nas páginas finais com conteúdos adicionais caso o leitor possua interesse. Além das ideias apresentadas, destacamos que a modelagem na educação já vem sendo aprimorada a muitos anos e que existe inúmeras outras formas de aplicação

do tema no ensino-aprendizagem (BURAK, 1992).

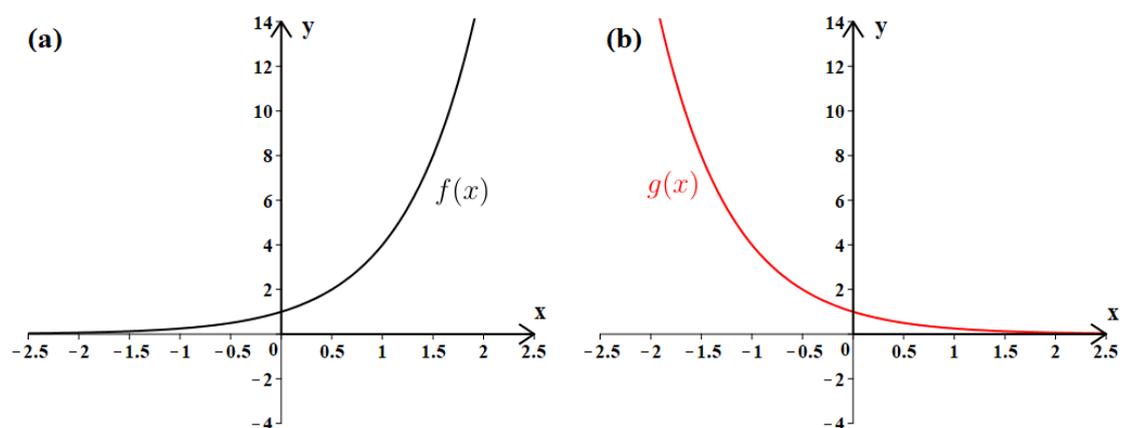
Esta dissertação está tendo como produto educacional um livro que trata a respeito da aplicação dos conceitos de modelagem na escola. Infelizmente, no momento atual, não houve aplicação em sala de aula das ideias propostas nesta dissertação, devido a toda situação da pandemia e do ensino remoto mas esperamos que futuramente essas ideias possam ser aplicadas, dando origem a futuros trabalhos com base na aplicação em sala.

## 1 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Uma função exponencial de base  $a$ , com  $a \in \mathbb{R}$  é definida por:  $f(x) = a^x$ , em que  $a > 0$ , onde  $a \neq 1$  e  $x$  é um número real. Os casos em que  $a = 1$  e  $a = 0$  são excluídos, pois  $f(x) = 1^x$  e  $f(x) = 0^x$  são funções constantes, e para o caso em que  $a < 0$ , a função possui imagem complexa; note que números do tipo,  $(-2)^{0,1}$ ,  $(-2)^{0,2}$  e  $(-2)^{0,3}$  são números complexos. Essas condições a respeito da base da função exponencial, nos remete a dois casos possíveis de valores para  $a$ : possui valor maior do que um, ou seja,  $a > 1$ , ou então  $a$  está entre zero e um, ou seja,  $0 < a < 1$ . Dadas essas condições, a imagem da função exponencial assume apenas valores reais positivos enquanto o domínio percorre todos os valores reais, ou seja,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  e  $f$  é sempre contínua em todo domínio (GIOIA, 2019).

O comportamento gráfico da função exponencial varia de acordo com os casos possíveis de valores para da base  $a$  (FONZAR, 2014). Para valores  $a > 1$ , a função  $f(x) = a^x$  é uma exponencial crescente, assumindo grandes valores à medida que  $x \rightarrow \infty$  e, por outro lado, assumindo valores próximos de zero quando  $x \rightarrow -\infty$ . Para o caso em que a base está entre zero e um,  $0 < a < 1$ , a função  $f(x) = a^x$  é uma exponencial decrescente, assumindo valores próximos de zero quando  $x \rightarrow \infty$  e, por outro lado, assumindo grande valores a medida que  $x \rightarrow -\infty$ . A figura 1 ilustra ambos os casos mencionados, utilizando  $f(x) = 4^x$  em (a) e  $g(x) = (1/4)^x$  em (b).

Figura 1 - Função exponencial.

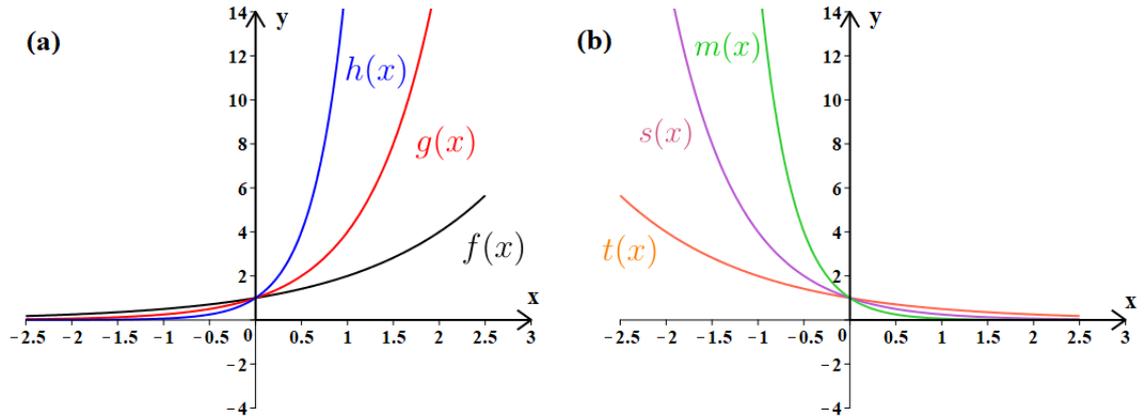


Fonte: O Autor, 2021.

Para exponenciais crescentes ( $a > 1$ ), quanto maior o valor da base, mais rápido o crescimento e mais próximo a curva fica do eixo  $y$ . Para funções exponenciais decrescentes ( $0 < a < 1$ ), quanto menor o valor da base, mais próximo do eixo  $y$ . A figura 2 (a) compara

o gráfico de três funções exponenciais crescentes:  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = 4^x$ ,  $h(x) = 16^x$ , enquanto a figura 2 (b) compara o gráfico de três funções exponenciais decrescentes:  $t(x) = (1/2)^x$ ,  $s(x) = (1/4)^x$  e  $m(x) = (1/16)^x$ .

Figura 2 - Comparação entre funções exponenciais.

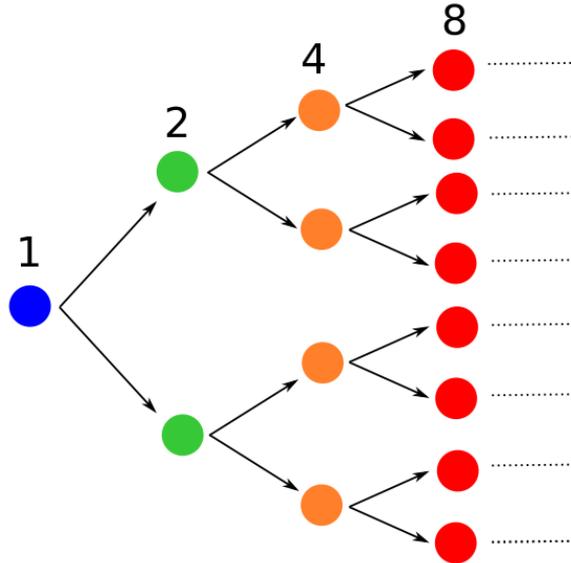


Fonte: O Autor, 2021.

## 1.1 Crescimento Exponencial

Diversos exemplos e aplicações podem ser tomadas como base para explicar o crescimento exponencial, tais como na matemática financeira, medição de terremotos na escala Richter, lei do resfriamento de Newton, decaimento radioativo, dentre muitos outros (SILVA, 2015). Neste trabalho vamos contextualizar o crescimento exponencial utilizando como exemplo a disseminação de um vírus, nos baseando na pandemia do novo coronavírus (SARS-Cov-2), que tem assolado o mundo. O termo “Crescimento Exponencial” tem estado muito presente nos noticiários, acompanhados de frases do tipo “o número de infectados dobra a cada quatro dias”. Pessoas com pouca instrução ou pouco familiarizadas com a matemática, não fazem a menor ideia de como ocorre esse tipo de comportamento, tão importante e presente em nosso cotidiano como, por exemplo, na reprodução de vírus e bactérias. Para estudarmos melhor o crescimento exponencial, vamos simular uma situação numérica, onde uma pessoa infectada por um vírus transmite o mesmo para duas outras pessoas em um período de 4 dias. A figura 3 ilustra o contágio de indivíduos por um vírus, onde assumimos um caso específico em que um indivíduo transmita para mais duas pessoas no período estabelecido.

Figura 3 - Contágio e crescimento exponencial do vírus.



Fonte: O Autor, 2021.

Começando apenas com um indivíduo o número de pessoas infectadas rapidamente atinge um grande valor em apenas poucos dias. Podemos observar que, o número de indivíduos infectados a cada dia forma uma sequência numérica, cujos termos estão em progressão geométrica (P.G) (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN, 2005). A soma dos  $n$  termos dessa progressão é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad (1)$$

onde  $a_1$  representa o primeiro termo da sequência,  $q$  a razão e  $n$  o termo específico da sequência, que se deseja conhecer. Podemos utilizar (1) para calcular o número total de indivíduos infectados pela doença após  $n - 1$  períodos de tempo desde o primeiro caso. A tabela 1 mostra a relação de períodos e dias decorridos após o primeiro caso e o número de pessoas acometidas pela doença desde então.

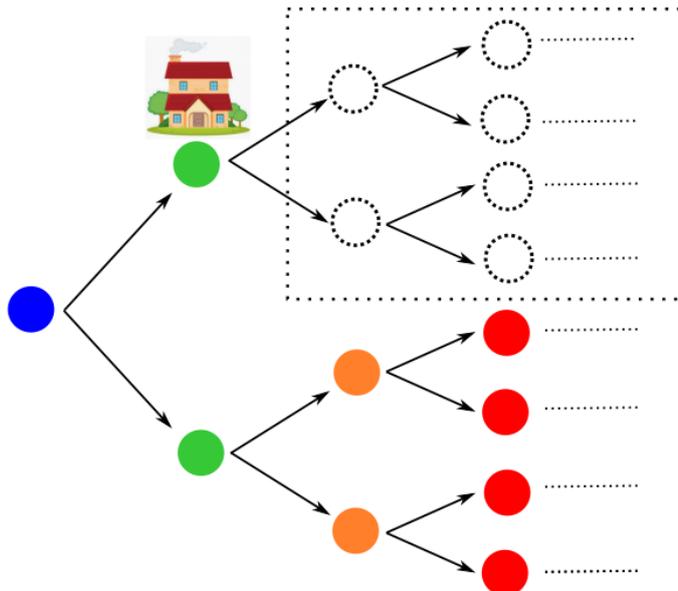
Tabela 1 - Crescimento exponencial do contágio.

Períodos decorridos	Pessoas atingidas	Dias decorridos
0 (Início)	1	0
1	3	4
2	7	8
3	15	12
⋮	⋮	⋮
30	2.147.483.647	120

Fonte: O Autor, 2021.

Após 30 períodos (120 dias) são mais de 2 bilhões de pessoas atingidas pela doença, muito superior aos 210 milhões de brasileiros de todo o país, correspondendo aproximadamente a 28% da população mundial (7,7 bilhões), segundo o site de contagem <https://www.worldometers.info/>. Esse simples cálculo já ilustra a grande necessidade em se tomar medidas urgentes, tais como o isolamento social tão falado e de difícil adoção em todo o mundo, a fim de frear sua disseminação. A figura 4 ilustra o caso em que um indivíduo permaneceu em casa, interrompendo a cadeia de transmissão.

Figura 4 - Interrupção na cadeia de transmissão.

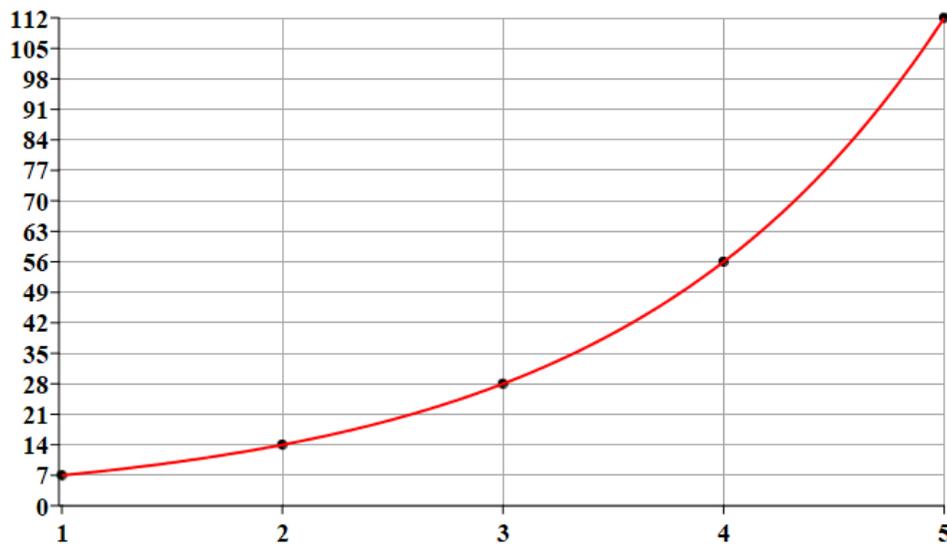


Fonte: O Autor, 2021.

Esse tipo de informação pode ser trabalhada, muito facilmente, na forma de conteúdo para os alunos de Ensino Médio, servindo tanto para conscientização dos alunos, como na aplicação de um tema atual para explorar questões de progressão geométrica e

função exponencial. Pode-se também mostrar a relação entre os temas função exponencial e progressão geométrica, visto que uma progressão geométrica  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , pode ser representada por uma função exponencial  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(1) = a_1$ ,  $f(2) = a_2$ ,  $f(3) = a_3$ , ...,  $f(n) = a_n$ . De fato, o seu termo geral  $a_n$  é dado por  $a_n = a_1 q^{n-1}$ , que expressa uma função exponencial do tipo  $f(x) = a b^{x-1}$ , onde  $a = a_1$  e  $b = q$ . Por exemplo, dada a P. G.: 7, 14, 28, 56, 112, ..., seu termo geral é dado por  $a_n = 7 \cdot 2^{n-1}$ , podendo ser representado pela função exponencial  $f(x) = a b^{x-1}$ , onde  $a = a_1$  e  $b = q$ , ou seja,  $f(x) = 7 \cdot 2^{x-1}$  representa o termo geral da P. G.. De fato,  $f(1) = 7$ ,  $f(2) = 14$ ,  $f(3) = 28$ , ..., remetem aos termos da progressão (os conceitos básicos de progressões geométricas podem ser vistos no apêndice A). A figura 5 mostra o gráfico da função exponencial  $f(x)$  com destaque para os pontos da progressão.

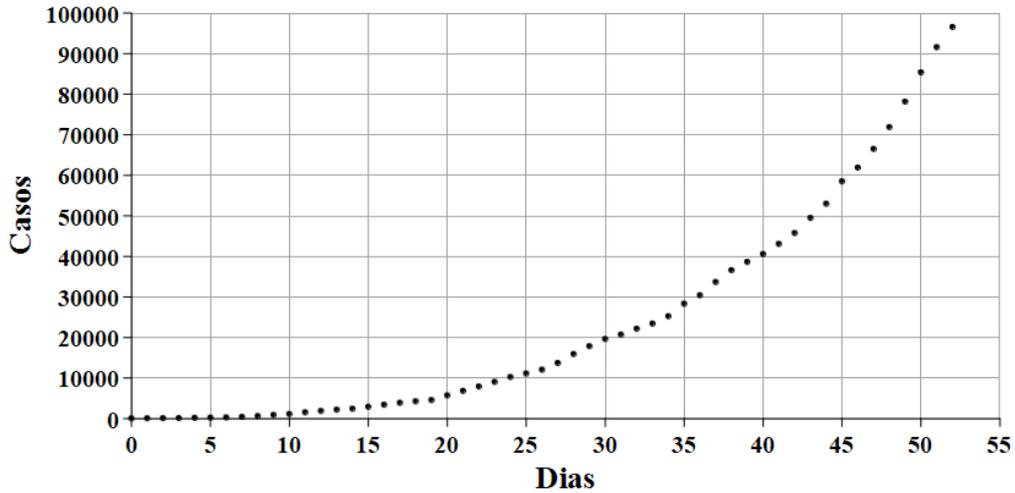
Figura 5 - Relação entre função exponencial e progressão geométrica.



Fonte: O Autor, 2021.

Com isso, ao verificarmos que existe um crescimento geométrico, podemos também afirmar que o crescimento é exponencial. Esse estudo realizado a respeito da propagação de um vírus também pode ser aprofundado e aplicado a turmas de ensino superior em diversas áreas. Ao analisarmos os primeiros casos de pessoas infectadas no Brasil nos primeiros dias pela pandemia de SARS-Cov-2, com dados colhidos diretamente do governo federal e disponibilizados no site: <https://covid.saude.gov.br/>, podemos ver, conforme a figura 6, que o crescimento se assemelha muito à uma curva exponencial.

Figura 6 - Casos de COVID-19 no Brasil.

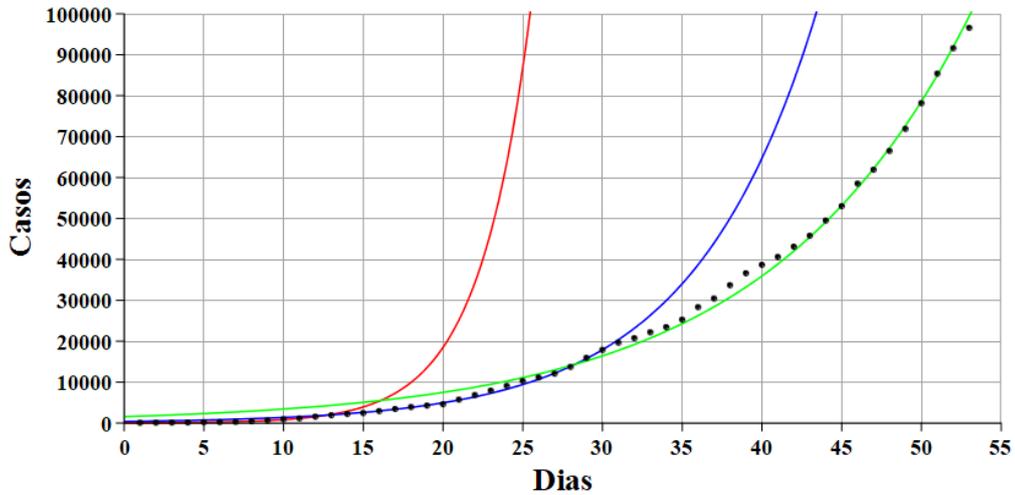


Fonte: O Autor, 2021.

Algumas perguntas podem ser levantadas, tais como: Por que o número de casos continua crescendo de forma expressiva e exponencial? Será que a quarentena realmente faz diferença ou estamos sacrificando a economia à toa?

Para que possamos responder a essas perguntas, é normal que sejam descartados alguns dados iniciais, devido à pouca precisão de informações. Descartando-se, por exemplo, os 15 primeiros dias passados desde o primeiro caso de infecção e estudados até o dia 67<sup>o</sup> dia, onde podemos observar o início da epidemia e as primeiras medidas de contenção da pandemia, verifica-se que, de fato, o comportamento se assemelha a uma função exponencial. Mas será que a quarentena funciona mesmo para conter o número de casos do coronavírus? Para responder a essa pergunta, dividimos os dados em três segmentos diferentes e, pelo método dos mínimos quadrados, obtemos diferentes exponenciais que se ajustam melhor em cada segmento de dados. A figura 7 ilustra as curvas obtidas com dados do dia 15 ao dia 26 em vermelho, do dia 26 ao dia 45 em azul e por último do dia 45 ao dia 67 em verde, concordando, neste último caso, bastante bem com os dados experimentais.

Figura 7 - Suavização das curvas.

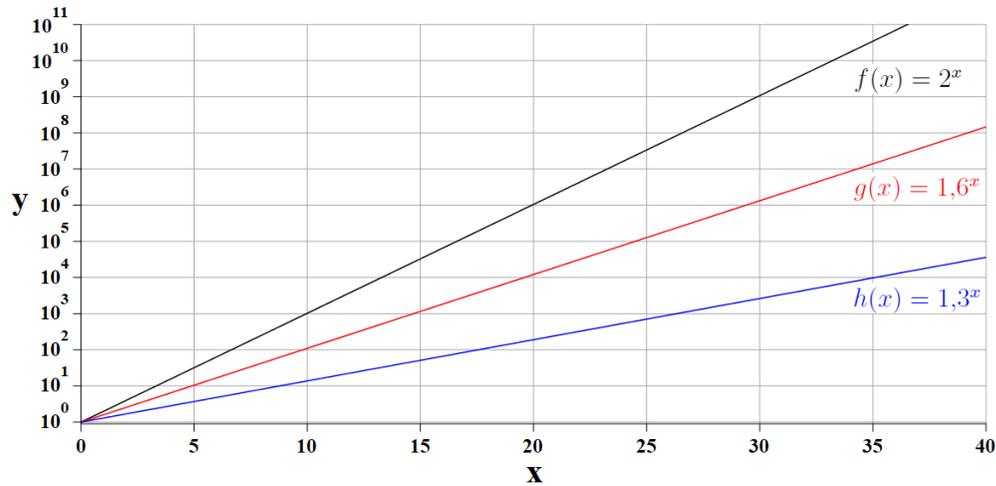


Fonte: O Autor, 2021.

## 1.2 Escala Logarítmica e Função Exponencial

O gráfico da função exponencial, algumas vezes pode ser de difícil visualização ou comparação com outras funções no sistema de eixos cartesianos na escala linear na qual estamos mais habituados, devido ao seu rápido crescimento, fazendo com que os valores no eixo das ordenadas fiquem altos muito rapidamente. Buscando uma visualização alternativa, pode-se apresentar os eixos (ou apenas um deles) na chamada escala logarítmica. A escala logarítmica pode ser útil na apresentação de dados ou funções quando os dados cobrem uma grande gama de valores, reduzindo a representação a uma escala mais fácil de ser visualizada e manejada (TAYLOR, 1996); (OGURI, 2010). Vamos então adotar a escala logarítmica no eixo das ordenadas, ou seja, os gráficos possuem os mesmos dados que gráficos feitos em escala linear, com a diferença que o eixo das ordenadas aumenta exponencialmente em potências de 10. Particularmente, para o nosso estudo de funções exponenciais, as mesmas são visualizadas como retas em gráficos de escala logarítmica. A figura 8 ilustra os gráficos das funções exponenciais  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = 1,6^x$  e  $h(x) = 1,3^x$  nas cores preta, vermelha e azul, respectivamente.

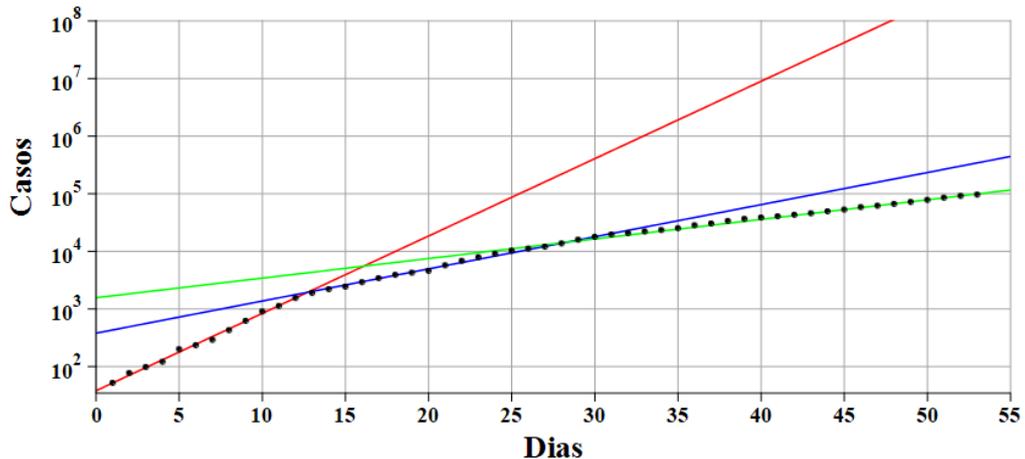
Figura 8 - Funções exponenciais em escala logarítmica.



Fonte: O Autor, 2021.

As funções exponenciais na escala logarítmica aparecem como retas, e quanto menor o valor da base da exponencial, menos inclinadas estão as retas e, de forma análoga, quanto maior a base da função exponencial, maior será a inclinação da reta do gráfico em escala logarítmica. A suavização das curvas exponenciais nos primeiros dias de quarentena, visto na figura 7, pode também ser visualizada na escala logarítmica, conforme a figura 9.

Figura 9 - Suavização das curvas em escala logarítmica.



Fonte: O Autor, 2021.

Vemos que ocorreu uma redução da inclinação das retas, o que indica uma suavização das curvas exponenciais passados os primeiros dias de quarentena, comprovando de que de fato a quarentena está funcionando e desempenhando o seu papel, reduzindo o grau de infecção. Essa redução ficou muito conhecida com o termo de achatamento da curva e será melhor compreendido nos capítulos subsequentes, onde veremos o motivo para se utilizar o termo “achatar a curva” no capítulo de modelagem epidemiológica.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento destes, sendo empregada em diversos campos de estudo, tais como a física, química, biologia, economia e engenharias (FIGUEIREDO, 2017). A maioria dos trabalhos realizados dentro da matemática tem como ponto de partida a busca de solução para resolver alguma situação problema. Assim, não estaríamos errados em dizer que a modelagem matemática já vem sendo trabalhada desde o início da própria matemática, conforme citado:

“Em busca de soluções para os problemas que enfrentavam no seu cotidiano, os povos antigos, mediante a experimentação, a observação, o método de tentativa e erro, entre outros, criavam representações dos diversos fenômenos que procuravam compreender, simplificando-os e apresentando-os nas mais diversas formas, como em desenhos, versos, equações e esquemas” (MENDONÇA; LOPES; SOARES, 2013).

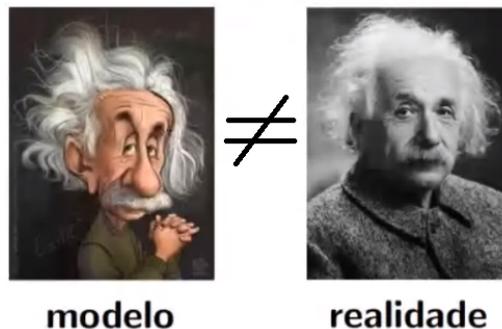
A modelagem matemática é um importante instrumento de pesquisa que traz vantagens às ciências em diversos aspectos, tais como servir de recurso para melhorar o entendimento da realidade, estimular novas ideias e técnicas experimentais, preencher lacunas onde existem falta de dados experimentais, sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão, possibilitar fazer interpolações, extrapolações e previsões, dentre muitas outras (D’AMBROSIO; MACHADO, 2014).

Modelar matematicamente um determinado fenômeno é o processo de obtenção de um modelo matemático, o que consiste em descrevê-lo matematicamente por meio da linguagem simbólica da matemática, ou seja, utilizando termos, fórmulas, diagramas, gráficos, representações geométricas, equações algébricas e tabelas (LIMA, 2019). Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela, o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos e parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial com linguagem matemática. No processo usual de modelagem existe uma certa sequência de etapas que podem ser resumidas basicamente em: Experimentação, Abstração, Resolução, Validação e Modificação. A figura 10 mostra um esquema proposto por Bassanezi dessas etapas, onde as setas contínuas representam a primeira aproximação e as setas pontilhadas indicam o processo dinâmico relativo à busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema.



berem lidar bem com as equações, bem como profissionais de diversas outras especialidades que possuem conhecimento em outras áreas, fornecendo informações e dados necessários para alimentar o modelo. É importante atentar para o fato de que a realidade é complicada demais para que um modelo possa prevê-la com exatidão, pois precisaríamos de um modelo que necessitaria de uma quantidade infinita de informações, contendo todos os pequenos detalhes da realidade para que o modelo fosse alimentado, sendo impossível sua construção e, em último caso, sua solução. Contudo, felizmente, não precisamos conhecer a natureza em todos os seus menores detalhes para fazer previsões úteis, bastando entender parcialmente a realidade para que previsões bem acuradas possam ser alcançadas fazendo uso de modelos matemáticos. Assim, um modelo não é sinônimo de realidade, retratando apenas uma simplificação desta. O estatístico George E.P. Box, ex-presidente do conselho americano de estatística e professor da Universidade Estadual da Carolina do Norte disse: “Todos os modelos estão errados, mas alguns são úteis.” George E.P. Box se refere ao fato de que todos os modelos são errados, tratando-se da realidade, mas que alguns deles são úteis, sendo esse o objetivo da modelagem. O conceito de modelo certo ou errado é melhor traduzido pela classificação de modelo útil ou não útil, uma vez que um modelo não útil para um certo cenário pode ser útil para outro, não fazendo sentido chamar um modelo de certo ou errado. A característica fundamental de um modelo classificado como “útil” é que ele seja capaz de capturar as principais características daquela determinada realidade. Uma boa representação dessa ideia é pensar que um modelo de uma realidade é uma caricatura dessa realidade, conforme retratado abaixo na figura 12.

Figura 12 - Representação esquemática de um modelo matemático.

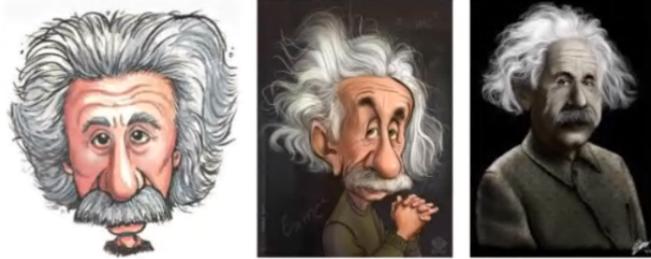


Fonte: Prof. Dr. Américo Cunha/Semana do Matemático IME UERJ, 2020.

Seguindo pela mesma ideia de que o modelo oferece uma caricatura da realidade, existem diversos tipos de modelos que podem representar melhor ou pior uma certa realidade, que variam de acordo com o nível de detalhamento. Para cada realidade podemos construir diferentes modelos, com diferentes características e níveis de detalhamento, conforme ilustrado na figura 13, representando três modelos com diferentes níveis de detalhamento.

Uma das caricaturas é feita a grosso modo, outra possui nível de detalhamento

Figura 13 - Caricaturas com diferentes níveis de detalhamento.



Fonte: Prof. Dr. Américo Cunha/Semana do Matemático IME UERJ, 2020.

intermediário e, por fim, a última caricatura da direita é bem detalhista, sendo bastante fiel à foto real, à direita na figura 12. Assim, também são os modelos matemáticos que podem buscar retratar os mais diferentes assuntos e, além disso, também podemos encontrar diversos modelos que tratam de um mesmo assunto, sendo que alguns são mais simplistas e outros mais elaborados com alta fidelidade à realidade. A elaboração de um modelo pode ser vista como de um modelo grosseiro, um intermediário e um modelo fiel. Quanto mais fiel é um modelo, mais difícil é sua elaboração e mais difícil é sua solução, devido à alta gama de informações necessárias para alimentá-lo. Então, por vezes, não temos tantas informações para se construir um modelo mais sofisticado e buscamos trabalhar com modelos mais simples.

Para que todas as informações úteis possam ser extraídas do modelo matemático, o mesmo precisa estar bem elaborado e devidamente resolvido. Muitas vezes, um determinado modelo matemático não pode ser resolvido analiticamente, precisando que sejam aplicadas técnicas numéricas, oriundas da análise numérica, para que sejam obtidas suas soluções. Há anos os métodos numéricos fazem parte do currículo de graduação dos cursos da área tecnológica, onde, normalmente, são oferecidas disciplinas que abordam métodos clássicos para se resolver numericamente problemas de Cálculo. Nas disciplinas de Cálculo Numérico, invariavelmente, o professor apresenta aos alunos métodos para se resolver numericamente integrais e equações diferenciais e, em certos casos, é possível se adotar a formulação numérica como via principal para descrever a dinâmica do sistema. Em outras palavras, ao invés de tomar o caminho de descrever a dinâmica analiticamente e, se preciso, resolver numericamente as equações resultantes. Em certos casos, é possível tratar um problema, desde sua concepção, fazendo-se uso de métodos de simulação, o que de certa forma evita o tratamento via solução de sistemas de equações diferenciais.

Nos próximos capítulos alguns modelos abordados serão resolvidos analiticamente e outros, que não podemos obter uma solução explícita, serão resolvidos numericamente. Também será feita uma sugestão de aplicação com viés educacional, para que a teoria da modelagem seja aplicada a alunos dos ensinos fundamental, médio e superior.

## 2.1 Negacionismo

A palavra negacionismo (do francês *négationnisme*), foi popularizada pelo historiador francês Henry Rousso e foi inicialmente utilizada para se referir a grupos de indivíduos que negavam a existência das câmaras de gás e o extermínio e judeus durante o regime nazista. Contudo, o negacionismo já podia ser encontrado em diversos outros contextos, sejam eles de caráter histórico ou científico (VALIM; AVELAR; BEVERNAGE, 2021). O negacionismo é caracterizado por ações de negar um evento sem apresentar validação, experiência histórica ou comprovação científica para essa negação. Na prática pode-se entender o negacionismo como uma escolha de escapar de uma verdade desconfortável, tratando-se de uma recusa em aceitar uma verdade empiricamente verificável. Na ciência, o negacionismo é definido como a rejeição de conceitos básicos, incontestáveis e apoiados por consenso científico em favor de ideias tanto radicais quanto controversas (LIVIO, 2021) (ROQUE, 2021) (PASTERNAK; ORSI, 2021) (TAKIMOTO, 2021).

Especificamente no período de pandemia da COVID-19 foram observados grupos de pessoas publicamente expostas (em particular políticos) contestando a intensidade da doença, os tratamentos efetivos, dados científicos a respeito da disseminação da doença e até mesmo a eficácia das vacinas desenvolvidas. O impacto do negacionismo pôde ser verificado na demora de medidas de contenção e até mesmo na compra tardia de vacinas, o que culminou em um maior número de mortes na população. Em situações onde existe dúvida sobre um determinado fato, evento ou realidade o melhor caminho a ser seguido é procurar observar, estudar e entender detalhadamente a realidade para então ter um conjunto com as reais possibilidades de ações a serem tomadas. Esse entendimento deve ser buscado com pesquisas e estudos realizados em cima de dados obtidos por experimentos realizados em laboratórios ou colhidos de observações diretas do que ocorre na natureza, como foi o caso da pandemia. Dessa forma, é possível desenvolver, comprovar ou mesmo descartar teorias e ter os melhores caminhos a serem seguidos.

Ao falarmos de modelagem e modelo matemático, vemos que fenômenos podem ser descritos segundo teorias físicas, biológicas, químicas, sociais e tantas outras associadas fórmulas matemáticas. É inegável o fato de que traços da realidade possam ser previstos com os estudos feitos de forma correta através dos processos rigorosos que a ciência exige para cada passo a ser dado em uma pesquisa que podemos chamar de “séria”, onde pesquisadores trabalham em cima de dados reais, observados na natureza ou produzidos em laboratório, e formulando previsões sobre o rumo que aquela “realidade” pode tomar. Como exemplo, podemos citar que os resultados dos modelos matemáticos epidemiológicos norteiam medidas que podem ser tomadas para se evitar maiores problemas durante um surto de uma doença em uma determinada localidade. Em um mundo em que a modelagem matemática já vem sendo desenvolvida e trabalhada desde o início dos tempos, a sociedade deve se apoiar em decisões bem estruturadas apresentadas pela comunidade

científica ao invés de opiniões sem qualquer embasamento, conhecido vulgarmente como “achismos” de indivíduos ou grupos de pessoas.

Nos capítulos a seguir são apresentados uma série de modelos de crescimento populacional e epidemiológicos, seguindo um claro e crescente em relação com seus graus de complexidade. Como poderá ser visto, procurou-se apresentá-los de uma forma mais simplificada, visando os fins educacionais a que essa dissertação se propõe, sem que no entanto, deixar patente o quanto esses são bons o suficiente para retratar a realidade com um grau razoável de precisão.

### 3 MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

Modelos de crescimento populacional são de grande importância e podemos dizer que são um marco no desenvolvimento da matemática. O primeiro modelo matemático elaborado para se descrever um processo de crescimento de um grupo populacional em comparação a algum bem de consumo foi elaborado por Thomas Robert Malthus e ficou conhecido como modelo de Malthus.

É importante ressaltar que, embora os primeiros modelos de crescimento populacional tenham sido elaborados para que fossem aplicados à dinâmica populacional de seres humanos, nota-se que estes modelos e os que foram propostos posteriormente, cada um com restrições que serão comentadas neste capítulo, são razoavelmente adequados para modelar o fenômeno de crescimento populacional de outras espécies, e de outros fenômenos.

Apesar de o número de indivíduos de uma população assumir apenas valores inteiros, pode-se aproximá-lo por uma função contínua no tempo, através de equações diferenciais, que dizem respeito a variação populacional.

Nas seções que seguem, apresentamos alguns modelos de destaque no tratamento de crescimento populacional e que serão a base do nosso trabalho

#### 3.1 Modelo de Malthus

Em 1798, Thomas Robert Malthus (1766 - 1834), economista e demógrafo britânico, ilustrado na figura 14, propôs em seu livro “*An Essay on the Principle of Population*” (MALTHUS, 1798), um modelo em que se considera que a população humana cresce a uma razão geométrica quando não está sujeita a nenhuma ação em oposição a esse crescimento. A formulação matemática desse modelo não foi feita por Malthus, mas pela equivalência entre o que ele propunha a esta formulação; convencionou-se usar seu nome para o modelo. A hipótese do modelo malthusiano é que a variação populacional é diretamente proporcional ao número de indivíduos. Considere que  $P(t)$  seja população de uma determinada espécie no instante  $t$  e  $P_0$  seja a população inicial ( $t = 0$ ). Esse modelo pode ser formulado matematicamente pelo Problema do Valor Inicial (PVI) (DENTAMARO, 2019); (TAVONI, 2013):

Figura 14 - Malthus.



Fonte: Google, 2021.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \\ P(0) = P_0 \end{cases}, \quad (2)$$

onde  $r$  é uma constante de proporcionalidade, chamada de taxa de crescimento quando  $r > 0$  ou taxa de declínio quando  $r < 0$ . Resolvendo o PVI temos:

$$\frac{dP}{dt} = rP \iff \frac{dP}{P} = r dt \iff \int \frac{dP}{P} = \int r dt \iff \ln|P| = rt + C \iff P(t) = e^{rt+c_1},$$

ou:

$$P(t) = e^{rt} e^{c_1}. \quad (3)$$

Substituindo a condição inicial na solução encontrada, encontramos:

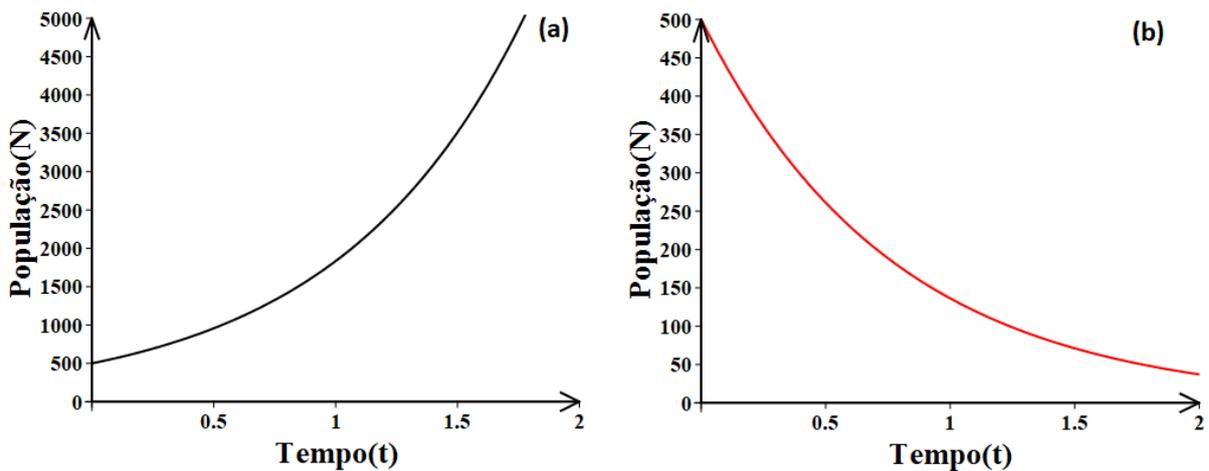
$$P(0) = e^0 e^{c_1} = P_0 \iff P_0 = e^{c_1},$$

que em (3) fornece a solução do modelo:

$$P(t) = P_0 e^{rt}. \quad (4)$$

A solução encontrada para o modelo de Malthus busca descrever o crescimento ou decréscimo de uma população. As figuras 15 (a) e 15 (b) ilustram a solução apresentada em (4). Utilizando, como exemplo, o parâmetro  $r = 1,3$  para a curva em crescimento (em preto) e  $r = -1,3$  na curva em decaimento (em vermelho). Para ambos os casos foi considerada a condição inicial  $P_0 = 500$  de indivíduos.

Figura 15 - Solução do modelo de Malthus.



Fonte: O Autor, 2021.

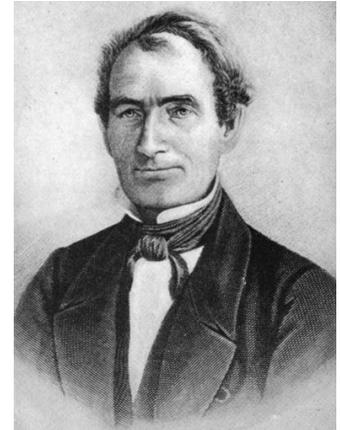
Note que para o caso onde  $r > 0$ , a população crescerá exponencialmente para todo tempo  $t \geq 0$ . Isso faz com que este seja um modelo razoável para prever o crescimento populacional apenas até um determinado tempo  $t$ . Uma análise deste resultado também

aponta que após um tempo crítico o crescimento populacional iria esbarrar em fatores limitantes, tais como falta de espaço e de alimento, que levaria a uma redução da população e posterior estabilização da taxa de crescimento populacional. Isso no entanto aponta que este modelo de Malthus não seja o mais adequado para a descrição desejada (SANTOS, 2015). Na seção seguinte veremos o modelo de Verhulst, que traz melhorias em relação ao modelo de Malthus.

### 3.2 Modelo de Verhulst

Em 1838, Pierre François Verhulst (1804 - 1849), matemático belga, ilustrado a figura 16, considerou fatores limitantes para crescimento populacional que não haviam sido incorporados pelo modelo de Malthus, e propôs um modelo no qual a população de uma determinada espécie cresce até um limite máximo sustentável, chamado de capacidade suporte. Essa característica foi obtida incorporando o termo  $(1 - \frac{P}{K})$  à taxa de crescimento populacional do modelo de Malthus, onde  $K$  é uma constante chamada de capacidade de suporte (VERHULST, 1838); (VERHULST, 1845). Note que, conforme o número de indivíduos se aproxima da capacidade suporte, isto é,  $P \rightarrow K$ , a taxa de crescimento se reduz até chegar a zero ( $P = K$ ), que é a capacidade máxima populacional. Matematicamente, o PVI do modelo de Verhulst é:

Figura 16 - Verhulst.



Fonte: Google, 2021.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (5)$$

Neste modelo, a taxa de variação populacional  $\frac{dP}{dt}$  é mediada por uma taxa de crescimento/declínio variável, continuando a ter uma relação com  $P(t)$  sem no entanto, se tratar de uma proporcionalidade direta, como no caso do modelo Malthusiano (DELMAS, 2004). Resolvendo o PVI (5),

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \iff \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = r dt \iff \int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int r dt,$$

que pode ser reescrito como:

$$\int \frac{KdP}{P(K-P)} = \int r dt. \quad (6)$$

Reescrevendo o primeiro membro da equação em termos de frações parciais, temos:

$$\frac{K}{P(K-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P} = \frac{A(K-P) + BP}{P(K-P)} = \frac{AK - AP + BP}{P(K-P)} = \frac{AK + (B-A)P}{P(K-P)}.$$

Comparando termo à termo, temos que  $A = 1$  e  $B - A = 0$ , o que implica  $B = 1$ . Assim, o integrando do primeiro termo de (6) pode ser escrito como

$$\frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}.$$

Substituindo em (6), temos:

$$\int \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P} \right) dP = \int r dt \iff \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{1}{K-P} dP = \int r dt.$$

Resolvendo as integrais, obtemos:

$$\ln(|P|) + c_1 - \ln(|K-P|) + c_2 = rt + c_3.$$

Somando-se as constantes e aplicando a propriedade do logaritmo e do módulo, obtemos

$$\ln \left( \left| \frac{P}{K-P} \right| \right) = rt + c_4 \iff \left| \frac{P}{K-P} \right| = e^{rt+c_4} \iff \frac{P}{K-P} = \pm e^{c_4} \cdot e^{rt}.$$

Fazendo  $c_5 = \pm e^{c_4}$ , temos:

$$\frac{P}{K-P} = e^{rt} \cdot c_5 \iff P = (K-P)e^{rt} \cdot c_5 \iff P + Pe^{rt} \cdot c_5 = Ke^{rt} \cdot c_5.$$

Isolando  $P$  e desenvolvendo, vem que

$$P = \frac{Ke^{rt} \cdot c_5}{1 + e^{rt} \cdot c_5} \iff P = \frac{K}{\frac{1}{e^{rt} \cdot c_5} + 1} \iff P = \frac{K}{\frac{e^{-rt}}{c_5} + 1}.$$

Considerando  $\frac{1}{c_5} = c$ , a solução da equação diferencial do PVI (5) é dada por

$$P(t) = \frac{K}{1 + c \cdot e^{-rt}}. \quad (7)$$

Aplicando a condição inicial, determinamos a constante:

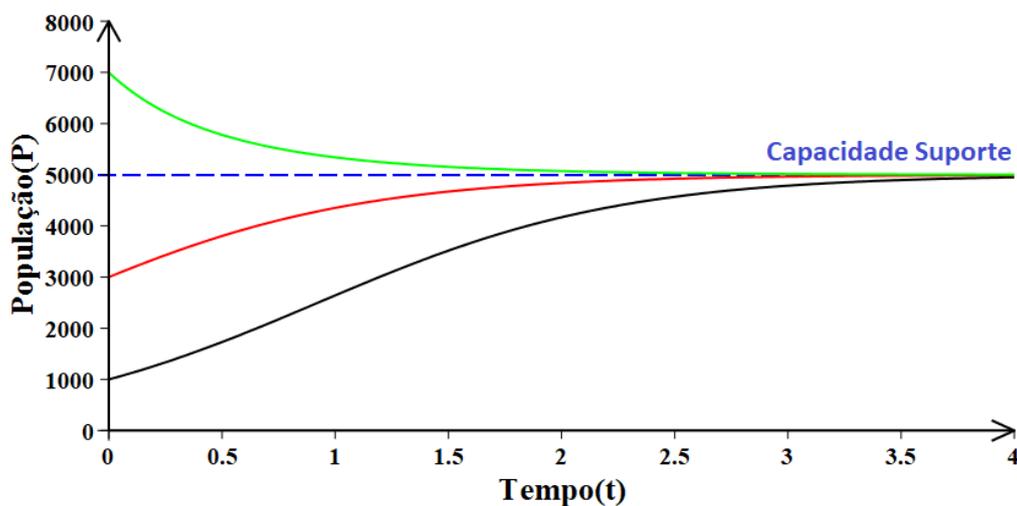
$$P(0) = \frac{K}{1+c} = P_0 \iff K = P_0(1+c) \iff K = P_0 + P_0 \cdot c \iff c = \frac{K - P_0}{P_0}.$$

Substituindo em (7), obtemos a resposta do PVI (5) para o 1º caso:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \frac{(K-P_0)e^{-rt}}{P_0}} = \frac{P_0 \cdot K}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}. \quad (8)$$

O modelo de Verhulst é válido para valores de  $P(t)$  que estejam compreendidos nos intervalos  $0 < P < K$  ou  $P > K$  (LEITHOLD, 1994); (STEWART, 2006a). O primeiro caso se trata de uma população em crescimento dentro de um ambiente com uma determinada limitação de recursos e o segundo caso remete a uma população que foi colocada em um habitat com recursos insuficientes para todos, ou quando um determinado habitat perdeu repentinamente uma fonte de recursos, havendo perda da capacidade suporte, o que acaba culminando na diminuição da população. Esses casos são apresentados na figura 17 considerando os parâmetros  $K = 5000$  e  $r = 1,5$ . Três casos são descritos:  $P_0 = 1000$  (curva em preto),  $P_0 = 3000$  (curva em vermelho) e  $P_0 = 7000$  (curva em verde).

Figura 17 - Solução do modelo de Verhulst.



Fonte: O Autor, 2021.

Conforme esperado, a população cresce (ou se reduz) até o limite máximo sustentável, reduzindo a taxa de crescimento (ou decaimento) quanto mais se aproxima desse limite. Para ambos os casos temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K$ , ou seja, independente do valor que a população inicial de uma determinada espécie pode assumir, será estabilizada em  $P = K$ . Se  $0 < P < K$ , então  $P'(t) > 0$ , fazendo  $P(t)$  se aproximar de  $K$  de maneira crescente. Caso  $P > K$ , então  $P'(t) < 0$ , fazendo  $P(t)$  se aproximar de  $K$  de maneira decrescente. Existem outros modelos de crescimento populacional que não serão abordados nesse trabalho, tais como os modelos de Gompertz e Bertalanffy-Richards, e até mesmo modelos que buscam unificar os diferentes modelos de crescimento em um único (RIBEIRO, 2017).

### 3.3 Modelo de Lotka-Volterra

Os modelos vistos anteriormente consideram crescimento de uma única espécie vivendo sozinha em um ambiente. Nesta seção consideraremos o modelo elaborado pelos matemáticos Alfred Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860 - 1940), ilustrados na figura 18, conhecido como modelo clássico presa-predador, por levar em consideração a interação de duas espécies no mesmo ambiente, sendo uma espécie predadora e outra a presa (LOTKA, 1925); (VOLTERRA, 1926). Alguns exemplos de interações entre presas e predadores podem ser coelhos e lobos em uma floresta isolada, peixes e tubarões, pulgões e joaninhas, bactérias e amebas ou até mesmo a espécie humana como fazendo papel de predador em uma ilha (BRANDER; TAYLOR, 1998). Nesse modelo, consideramos que a espécie presa tem um amplo suprimento alimentar, não havendo competição entre si e que a espécie predadora se alimenta inteiramente e apenas das presas. Este modelo possui uma mecânica periódica, visto que muitas presas representam uma grande quantidade de comida favorecendo a reprodução dos predadores, aumentando a disputa e reduzindo o número de presas, o que leva a morte de predadores por falta de alimento, favorecendo a reprodução de presas e o ciclo se repete, conforme ilustrado na figura 19 abaixo:

Figura 18 - Lotka-Volterra.



Fonte: Google, 2021.

Figura 19 - Mecânica do modelo de Lotka-Volterra.



Fonte: O Autor, 2021.

A modelagem matemática se dá considerando duas variáveis dependentes, ambas em função do tempo. Seja então  $N(t)$  o número de presas e  $P(t)$  o número de predadores no tempo  $t$ . Vamos entender passo a passo as equações que nos levam ao modelo de Lotka-Volterra, que diferente dos modelos de Malthus e Verhulst, toma a forma de um par de equações diferenciais (STEWART, 2006b). Na ausência de predadores, o amplo

suprimento de alimentos suportaria o crescimento exponencial das presas, isto é,

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t), \quad (9)$$

onde  $\alpha$  é uma constante relacionada ao crescimento da população de presas. Na ausência de presas, assumimos que a população de predadores declinaria a uma taxa proporcional a ela mesma, isto é,

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma P(t), \quad (10)$$

onde  $\gamma$  é uma constante relacionada à morte de predadores pela falta de comida, o que explica o sinal negativo na equação (10). Em um cenário com ambas as espécies presentes, pressupomos que a causa principal de morte entre as presas seja a de serem comidas pelos predadores, e as taxas de natalidade e mortalidade de predadores dependam da disponibilidade de comida, que são as presas. A chance de encontro entre as duas espécies é proporcional a ambas as populações, visto que quanto maior for qualquer uma das populações, maior é a chance do encontro e é, portanto, proporcional ao produto  $N(t)P(t)$ . O declínio das presas então será dado por

$$\frac{dN}{dt} = -\beta N(t)P(t), \quad (11)$$

onde  $\beta$  é uma constante de mortalidade de presas e, conforme as presas morrem, os predadores continuam caçando e passam se reproduzir, aumentando o seu número, nos sugerindo uma equação do tipo:

$$\frac{dP}{dt} = \delta N(t)P(t), \quad (12)$$

onde  $\delta$  é a constante de natalidade de novos predadores. É importante perceber que as constantes  $\beta$  e  $\delta$ , relacionadas à taxa de mortalidade de presas e ao nascimento de predadores, respectivamente, geralmente são diferentes, visto que a mortalidade de presas e natalidade de predadores possuem relação, porém com proporções diferentes (não é verdade que para cada presa que morreu, um predador irá nascer). As relações (9), (10), (11) e (12) acrescentadas das condições iniciais  $N(0) = N_0$  e  $P(0) = P_0$ , relativas ao número inicial de presas e de predadores, nos levam ao sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta P(t)N(t) \\ \frac{dP}{dt} = \delta N(t)P(t) - \gamma P(t) \\ N(0) = N_0 \quad P(0) = P_0 \end{cases}, \quad (13)$$

que descreve o modelo Presa-Predador clássico de Lotka-Volterra. A solução do sistema (13) é um par de funções  $N(t)$  e  $P(t)$ , que descrevem a população de presas e predadores como funções do tempo. Infelizmente, neste caso é impossível de se encontrar fórmulas explícitas para funções  $N(t)$  e  $P(t)$ , contudo, é possível determinar uma solução analítica que descreve o sistema de equações na forma de uma equação implícita (STEWART, 2006a). Dividindo a primeira equação pela segunda, temos:

$$\frac{dN}{dP} = \frac{[\alpha - \beta P(t)] N(t)}{[\delta N(t) - \gamma] P(t)},$$

onde podemos separar as variáveis  $N(t)$  e  $P(t)$  e integrar:

$$\int \frac{[\delta N(t) - \gamma]}{N(t)} dN = \int \frac{[\alpha - \beta P(t)]}{P(t)} dP \iff \int \delta dN - \int \frac{\gamma}{N(t)} dN = \int \frac{\alpha}{P(t)} dP - \int \beta dP.$$

Resolvendo as integrais em ambos os lados, obtemos:

$$\delta N - \gamma \ln(N) + A = \alpha \ln(P) - \beta P + B.$$

Arrumando os termos e juntando as constantes de integração, obtemos a equação

$$[\delta N - \gamma \ln(N)] + \beta P - \alpha \ln(P) = C,$$

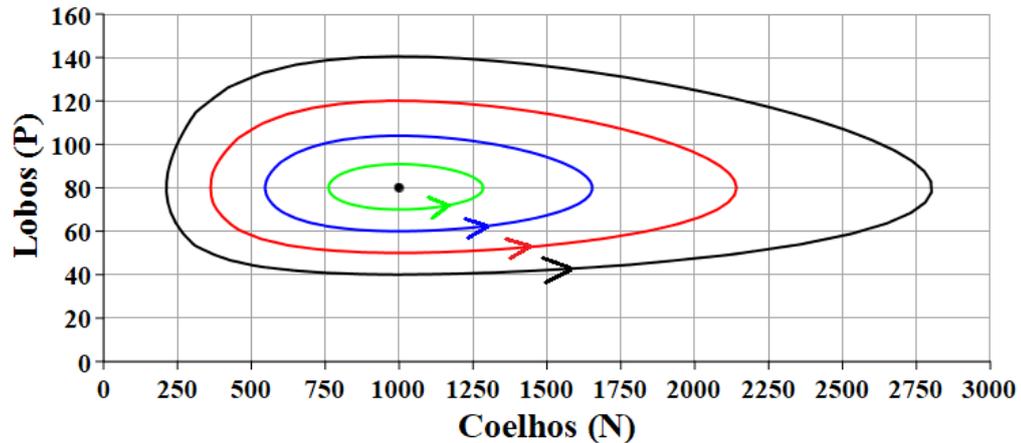
onde o valor da constante  $C$  varia de acordo com os pontos  $(N(t), P(t))$  fornecidos. Podemos escrever de forma equivalente a equação:

$$[\delta N - \gamma \ln(N)] + \beta P - \alpha \ln(P) = [\delta N - \gamma \ln(N(t))] + \beta P - \alpha \ln(P(t)), \quad (14)$$

que apesar da forma implícita, resolve o sistema de equações (13), proposto no modelo. Para ilustrar o resultado encontrado, apresentamos como exemplo um sistema com populações de lobos e coelhos descritos pelas equações de Lotka-Volterra. A figura 20 ilustra o comportamento da equação (14), utilizando os parâmetros:  $\alpha = 0,08$ ,  $\beta = 0,001$ ,  $\delta = 0,00002$  e  $\gamma = 0,02$  e com diferentes condições iniciais:

- Curva preta:  $N(0) = 1000$  coelhos e  $P(0) = 40$  lobos.
- Curva vermelha:  $N(0) = 1000$  coelhos e  $P(0) = 50$  lobos.
- Curva azul:  $N(0) = 1000$  coelhos e  $P(0) = 60$  lobos.
- Curva verde:  $N(0) = 1000$  coelhos e  $P(0) = 70$  lobos.
- Ponto preto no centro:  $N(0) = 1000$  coelhos e  $P(0) = 80$  lobos.

Figura 20 - Soluções do modelo de Lotka-Volterra.



Fonte: O Autor, 2021.

O comportamento das curvas ilustradas devem ser analisadas no sentido anti-horário, conforme indicado pelas setas desenhadas, e o ponto  $(1000,80)$  observado na figura, é o chamado ponto de equilíbrio do sistema (13), onde não existe variação do número de presas e predadores (taxa de crescimento igual a zero para ambas as espécies). O ponto de equilíbrio é encontrado fazendo-se ambas as equações do sistema iguais a zero:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta P(t)N(t) = N(t) [\alpha - \beta P(t)] = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dt} = \delta N(t)P(t) - \gamma P(t) = P(t) [\delta N(t) - \gamma] = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

De (15) temos

$$N(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta P(t) \quad (17)$$

e de (16) temos

$$P(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma = \delta N(t). \quad (18)$$

Das equações (17) e (18), obtemos

$$N(t) = 0, \quad P(t) = 0, \quad N(t) = \frac{\gamma}{\delta}, \quad P(t) = \frac{\alpha}{\beta},$$

que nos levam aos pontos de equilíbrio  $(0,0)$  e  $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ . Para o exemplo anterior, com os parâmetros  $\alpha = 0,08$ ,  $\beta = 0,001$ ,  $\delta = 0,00002$  e  $\gamma = 0,02$ , os pontos de equilíbrio do sistema são dados por  $(0, 0)$  e  $(1000, 80)$ . As curvas geradas pela equação (14), ilustradas na figura 20, nos dão ideia de como se comportariam os gráficos de  $N(t)$  e  $P(t)$ , todavia os pontos

dos gráficos podem ser obtidos via métodos numéricos, tais como o Método das Diferenças Finitas ou o Método de Runge-Kutta, por exemplo, adaptados para resolverem sistemas de equações diferenciais. Em diversas áreas, os pesquisadores recorrem com frequência às técnicas da análise numérica quando os problemas matemáticos enfrentados exigem um difícil tratamento analítico, ou simplesmente não permitem soluções puramente analíticas (BARBOSA; TOVAR; CARVALHES, 2006). Aplicando o método de Runge-Kutta de 4ª Ordem para o sistema (13) a fim de se obter as curvas  $N(t)$  e  $P(t)$ , utilizamos duas funções de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por:

$$\begin{cases} f_1 : (t, N, P) \rightarrow \alpha N - \beta PN \\ f_2 : (t, N, P) \rightarrow \delta NP - \gamma P \end{cases},$$

$$k_{11} = f_1(t_0, N_0, P_0) = 30, \quad k_{12} = f_2(t_0, N_0, P_0) = 0,$$

$$k_{21} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, N_0 + \frac{k_{11}h}{2}, P_0 + \frac{k_{12}h}{2}\right) = 30,45,$$

$$k_{22} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, N_0 + \frac{k_{11}h}{2}, P_0 + \frac{k_{12}h}{2}\right) = 0,0015,$$

$$k_{31} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, N_0 + \frac{k_{21}h}{2}, P_0 + \frac{k_{22}h}{2}\right) = 30,045,$$

$$k_{32} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, N_0 + \frac{k_{21}h}{2}, P_0 + \frac{k_{22}h}{2}\right) = 0,0015,$$

$$k_{41} = f_1(t_0 + h, N_0 + k_{31}h, P_0 + k_{32}h) = 30,089,$$

$$k_{42} = f_2(t_0 + h, N_0 + k_{31}h, P_0 + k_{32}h) = 0,003,$$

onde os valores de  $N_1, N_2, \dots, N_k$  e  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , das funções nos tempos  $t = 1, 2, \dots, k$  são dados por:

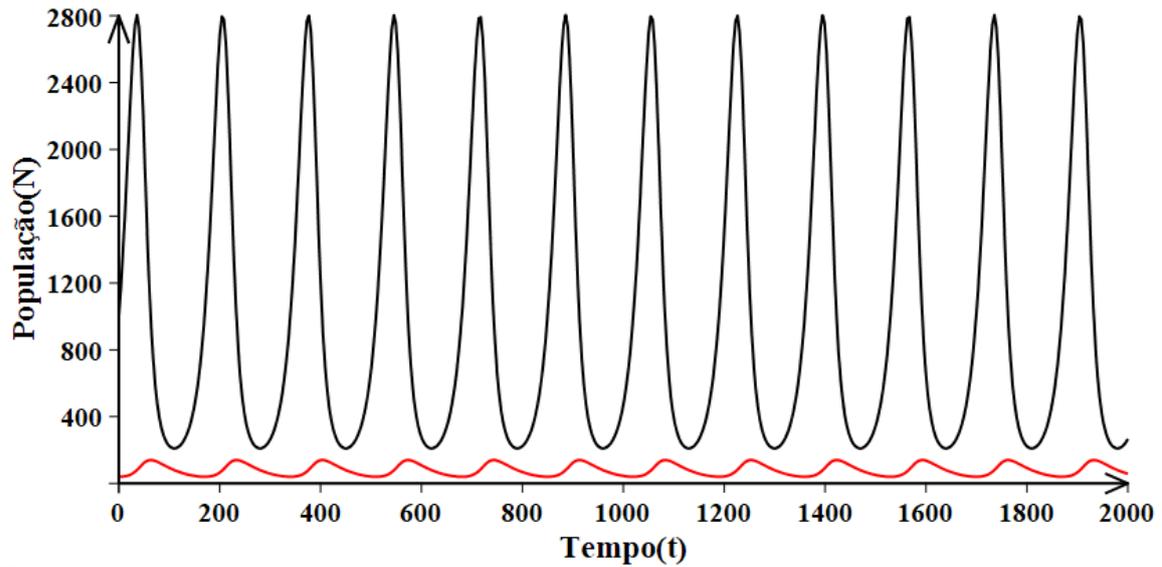
$$N(t_0 + h) = N_0 + \frac{h(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})}{6} = 1003,004,$$

$$P(t_0 + h) = P_0 + \frac{h(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})}{6} = 50,0001.$$

Uma forma mais simples da utilização do método de Runge-Kutta de 4ª ordem pode ser encontrada no apêndice B deste trabalho. Utilizando  $t = 0$  como o ponto de partida,  $N_0$  e  $P_0$  como as condições iniciais do sistema e  $h$  o passo utilizado para se obter os valores de  $N(t)$  e  $P(t)$  em  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , visto que  $t_n = t_{n-1} + h$ . Para os mesmos parâmetros utilizados acima, a figura 21 ilustra a solução numérica encontrada, onde a curva em vermelho representa a população de lobos e a curva preta a população de coelhos.

Como a população de coelhos é significativamente maior do que a população de lobos, é interessante uma análise de ambas as curvas ilustradas em uma figura de eixo duplo,

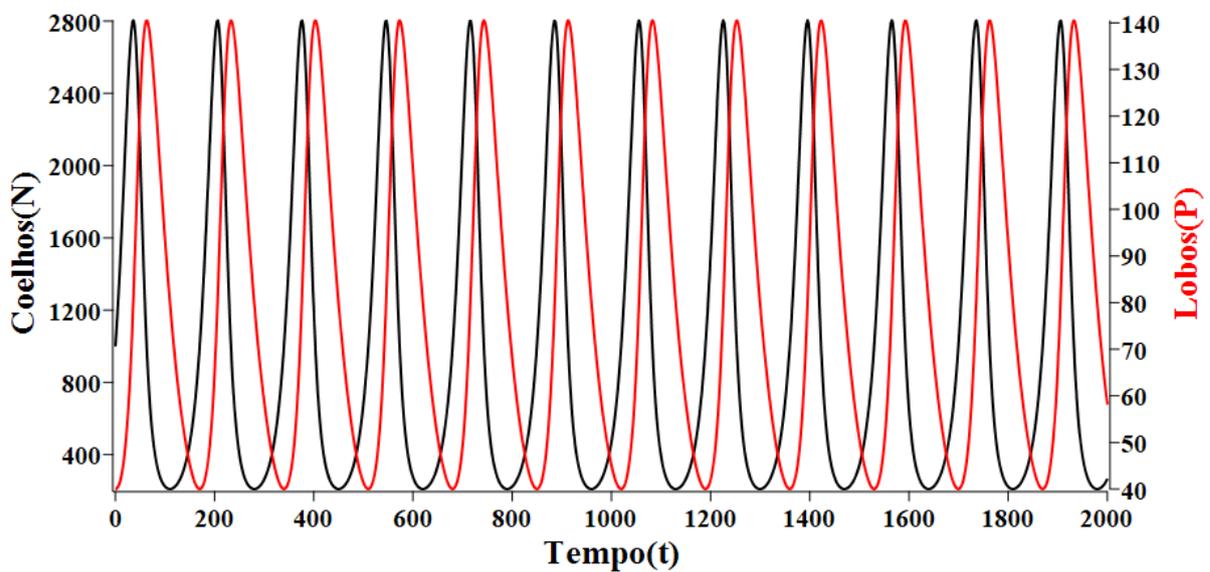
Figura 21 - Solução numérica - exemplo dos coelhos e lobos.



Fonte: O Autor, 2021.

onde uma escala conveniente facilita a análise do comportamento, conforme ilustrado na figura 22, onde observamos mais claramente o comportamento dos ciclos populacionais das espécies, bem como a mecânica de Lotka-Volterra descrita na figura 19.

Figura 22 - Solução numérica - exemplo dos coelhos e lobos em eixo duplo.



Fonte: O Autor, 2021.

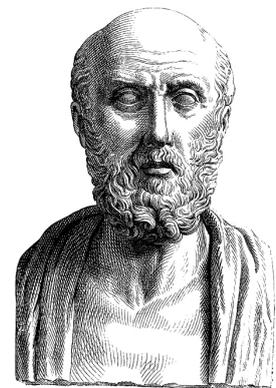
O alto número de presas favorece a multiplicação de predadores e estes, por aumentar, acaba reduzindo o número de presas o que culmina na morte de predadores, que por sua vez, favorece a reprodução de presas e o ciclo se repete.

## 4 MODELAGEM EPIDEMIOLÓGICA

De maneira geral podemos definir epidemiologia como o ramo da medicina que trata do processo saúde-doença em coletividades humanas. Segundo (ROUQUAYROL; GURGEL, 2018) é imperativo a análise de distribuição e os fatores determinantes relativos à uma dada enfermidade. Aqui podem ser incluídos os danos à saúde coletiva e medidas de prevenção, controle ou mesmo erradicação de doenças com suporte de indicadores que ajudem o planejamento, administração e ações a serem desenvolvidas (GOMES, 2015). A palavra epidemiologia tem origem no grego: Epi (sobre) + Demo (população) + Logos (estudo) (PEREIRA, 2013), o que deixa claro que “epidemiologia” implica o “estudo sobre a população”. Nesse sentido, o termo pode ser transportado para o campo da saúde e ser relacionado ao “estudo sobre o que afeta a população”. É claro que à medida que o entendimento do que venha a ser “saúde” e “doença”, os conceitos foram sendo aprimorados (PEREIRA, 2013). Na atualidade, a moderna ciência da epidemiologia reúne uma série de áreas do conhecimento tais como, as ciências biológicas, ciências sociais, matemática, informática e etc.

Do ponto de vista histórico, o interesse pelo estudo de epidemiologia de doenças infecciosas tem seu registro na Grécia antiga com Hipócrates (458 - 377 a.C.), ilustrado na figura 23, considerado como o pai da medicina. Hipócrates descreveu doenças e as relacionou com fatores pessoais e do meio ambiente. Em 1760, o matemático e físico holandês Daniel Bernoulli (1700-1782) publicou dois importantes trabalhos nas revistas *Mémoires de mathématique et de physique* e *Mercure de France*, onde apresenta o que é conhecido como o primeiro modelo matemático para tratar doenças infecciosas (FIORAVANTI, 2020). Na época, a intenção de Bernoulli era testar a inoculação preventiva da varíola. Essa técnica acabou se mostrando, matematicamente, bastante eficiente e o sucesso do modelo foi tal que, até os dias atuais, os parâmetros propostos por ele continuam sendo utilizados pela comunidade científica.

Figura 23 - Hipócrates.



Fonte: Google, 2021.

Decorridos 110 anos após as ideias de modelo introduzidas por Thomas Robert Malthus (crescimento populacional) em 1798, foram formuladas teorias específicas sobre transmissão de doenças infecciosas em uma expressão matemática mais simples nos modelos de W.H. Hamer em 1906, que postulou que o desenvolvimento de uma epidemia depende da taxa de contato entre os indivíduos suscetíveis e infecciosos, na forma de um modelo com tempo discreto e posteriormente Ronald Ross (1857 - 1932) em 1908, que generalizou o tempo para contínuo em trabalho sobre a dinâmica da malária (SABETI, 2011). Assim, como os modelos de crescimento buscam traduzir o crescimento popula-

cional de espécies, os modelos matemáticos epidemiológicos tentam descrever e prever o comportamento de epidemias. Os modelos matemáticos epidemiológicos basicamente podem ser classificados como modelos baseados em agentes, modelos estatísticos ou modelos compartimentais, sendo neste último o foco deste trabalho. Este tipo de modelagem consiste em dividir a população em categorias (“compartimentos”), relativas à situação de um indivíduo nas quais o mesmo pode se encontrar em um determinado momento de uma epidemia. Por exemplo, no modelo compartimental SIR, a ser visto a seguir, as pessoas podem ser classificadas nas categorias de suscetíveis (*susceptible*), que são os indivíduos que podem contrair a doença, de infectados (*infected*), que são os indivíduos contaminados com a doença e de recuperados (*recovered*), que são os indivíduos que ficaram curados.

As categorias são simbolizadas pelas letras  $S$ ,  $I$ , e  $R$ , utilizadas para dar um nome ao modelo e, ao mesmo tempo, sinalizar os compartimentos utilizados naquela abordagem. Outros modelos tais como  $SIRS$  e  $SIRD$  são mais exemplos de modelos epidemiológicos, sendo que no primeiro leva-se em conta que uma pessoa pode voltar a ser suscetível, enquanto que no segundo considera-se que podem haver mortes, representada por um novo compartimento  $D$  (*dead*) e uma nova variável  $D(t)$ , calculada em um determinado tempo  $t$  da epidemia. As categorias citadas são apenas alguns exemplos utilizados em modelos compartimentais, que por sua vez podem possuir muitos mais compartimentos, tais como exposto (*exposed*), hospitalizado (*hospitalized*) dentre vários outros que levam em consideração faixa etária e gênero, bem como também podem ter outras variações (que não são compartimentos) implementadas tais como taxa de natalidade, mortalidade, vacinação, dentre outras, aumentando a complexidade e a gama de informação que o modelo provê.

Assim como os modelos de crescimento vistos anteriormente, o estudo para os modelos acima é realizado através da taxa de variação do número de indivíduos em cada categoria em relação ao tempo, que são traduzidas matematicamente pelas derivadas em relação ao tempo, ou seja,  $\frac{dS}{dt}$ ,  $\frac{dI}{dt}$ ,  $\frac{dR}{dt}$  e  $\frac{dD}{dt}$  de cada uma das quantidades citadas anteriormente. De fato, elas são as taxas em que os números de indivíduos suscetíveis, infectados, recuperados e mortos estão se alterando em um determinado tempo  $t$ . Como buscamos todas as taxas de variação de forma simultânea, os modelos nos levam a sistemas de equações diferenciais ordinárias. É importante também observar que dadas as categorias apresentadas acima, um indivíduo pode somente estar em apenas uma categoria por vez, estando suscetível, infectado, recuperado ou morto.

A criação desses modelos chamados de preditivos passa por diversos obstáculos, como padronização de dados, desagregação de estatísticas a nível local e, principalmente, problemas relacionados à sub-notificação de infectados, recuperados e mortos. Mesmo com todos esses empecilhos, esforços vêm sendo realizados por diversos especialistas para fornecer dados que embasem o combate à pandemia. Dentro desse conjunto de ações, o mapeamento da expansão do número de infectados, de mortos e de recuperados tem

sido utilizado por governos para balizar a escolha de políticas públicas de saúde mais eficientes por meio da avaliação de impacto das mesmas. Além disso, a previsão da difusão da epidemia dentro dos países possui grande importância para a criação de estratégias econômicas para o período pós-crise. Neste trabalho vamos estudar alguns desses modelos nas secções que seguem.

#### 4.1 Modelo SIR

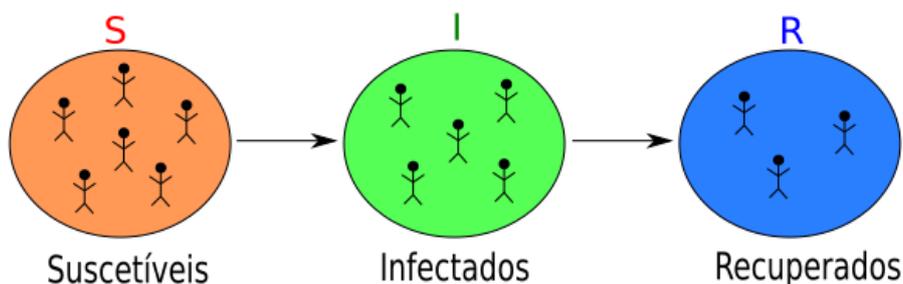
Proposto em 1927 por William Ogilvy Kermack (1898-1970) e Anderson Gray McKendrick (1876-1943), ilustrados na figura 24, o modelo SIR (*susceptible, infected, recovered*) foi o primeiro modelo matemático epidemiológico formalizado (KERMACK; MCKENDRICK, 1927a); (KERMACK; MCKENDRICK, 1933); (KERMACK; MCKENDRICK, 1927b). Esse modelo, conforme suas siglas, considera uma população inicialmente formada de indivíduos suscetíveis, que migram para a categoria de indivíduos infectados ao decorrer da epidemia e, por fim, ao se curarem, migram para indivíduos recuperados. A figura 25 ilustra a dinâmica do fluxo dos indivíduos entre as categorias do modelo SIR.

Figura 24 - Kermack/McKendrick.



Fonte: Google, 2021.

Figura 25 - Dinâmica das populações do modelo SIR.



Fonte: O Autor, 2021.

O modelo busca determinar o número de indivíduos  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$  em cada uma das categorias no decorrer do tempo. Como cada indivíduo pode ser enquadrado em apenas uma categoria por vez, temos que

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t), \quad (19)$$

onde  $N(t)$  é o número total de indivíduos. No modelo SIR são assumidas as condições de que a população total é constante (desprezadas as taxas de natalidade e mortalidade), de que não existem mortes em decorrência da doença e os indivíduos recuperados ficam imunes por toda a vida e que a população está isolada, não havendo contato com membros de outras populações. Iniciando o processo de modelagem, a taxa de variação relacionada aos indivíduos suscetíveis,  $\frac{dS}{dt}$ , depende do contato com pessoas infectadas  $I(t)$ . Quanto maior o contato com as suscetíveis  $S(t)$  maior a taxa, existindo relação multiplicativa entre essas categorias. Assumimos também que a taxa de variação é negativa, pois o número de indivíduos suscetíveis se torna menor no decorrer do tempo e adotamos  $\alpha$  como uma constante positiva de proporcionalidade, que vamos definir como sendo a taxa de infecção. Assim, a taxa de variação dos suscetíveis pode ser escrita como

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S(t)I(t). \quad (20)$$

Sobre a taxa de infecção,  $\frac{dI}{dt}$ , temos um acréscimo igual ao número de pessoas que deixaram de serem suscetíveis, ou seja,  $\frac{dI}{dt}$  recebe o termo  $\alpha S(t)I(t)$  mas, por outro lado, também devemos considerar que deve existir uma queda quando os infectados se tornam recuperados. Além disso, quanto mais infectados maior será o número de recuperados, o que leva a um termo negativo  $\beta I(t)$ , sendo  $\beta$  uma constante positiva de proporcionalidade, que vamos chamar de taxa de recuperação. A taxa de variação dos infectados é escrita então como

$$\frac{dI}{dt} = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t). \quad (21)$$

A taxa de Recuperados,  $\frac{dR}{dt}$ , equivale ao número de pessoas que deixaram de ser infectadas. Assim, o mesmo valor perdido  $\beta I(t)$  nos infectados é ganho nos recuperados:

$$\frac{dR}{dt} = \beta I(t). \quad (22)$$

As equações (20), (21) e (22) em conjunto com as condições iniciais  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$  e  $R(0) = R_0$ , relativas aos números iniciais de pessoas suscetíveis, infectadas e recuperadas, nos levam ao sistema

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha S(t)I(t), \\ \frac{dI}{dt} = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \beta I(t), \\ S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0. \end{cases} \quad (23)$$

No entanto, para grandes classes de doenças transmissíveis, é mais realista considerar uma forma de infecção que não depende do número absoluto de indivíduos infectados, mas sim de sua fração. Dessa forma, podemos considerar a taxa de variação dos suscetíveis pelo número  $N(t)$  de habitantes. Esse é o procedimento adotado pela maioria dos pesquisadores (RODRIGUES, 2020). Temos então o sistema

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)}, \\ \frac{dI}{dt} = \alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \beta I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \beta I(t), \\ S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0. \end{cases} \quad (24)$$

Para resolvermos o modelo a fim de se obter uma solução, precisamos de condições iniciais estabelecidas e é natural considerar que ao início da epidemia ( $t = 0$ ), não existam indivíduos recuperados, existe um número muito baixo de pessoas infectadas (provavelmente apenas uma) e que deve existir um alto número de pessoas suscetíveis, considerando-se basicamente toda a população. Com essas premissas serão utilizadas as condições iniciais:  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = 1$ ,  $R(0) = 0$ , onde  $S(0) = S_0$  é o total de pessoas da região na qual se aplica o modelo.

#### 4.1.1 Solução do Modelo SIR

Infelizmente, o sistema (24) não pode ser resolvido analiticamente, para obtermos funções explícitas de  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$  em função do tempo. Contudo, podemos resolvê-lo fazendo uso de técnicas numéricas. Vamos utilizar o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem adaptado para um sistema de equações diferenciais ordinárias (BRONSON; COSTA, 2008). O sistema (24) de 3 equações diferenciais dá origem a 3 funções de  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por:

$$\begin{cases} f_1 : (t, S, I, R) \rightarrow -\alpha \frac{S \cdot I}{S + I + R}, \\ f_2 : (t, S, I, R) \rightarrow \alpha \frac{S \cdot I}{S + I + R} - \beta \cdot I, \\ f_3 : (t, S, I, R) \rightarrow \beta \cdot I, \end{cases} \quad (25)$$

onde, para o ponto de partida,  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$ ,  $R(0) = R_0$  e passo é  $h$ . Calculamos as constantes  $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{31}, k_{32}, k_{33}, k_{41}, k_{42}, k_{43}$ , ou seja,  $k_{ij}$  para  $i = 1, \dots, 4$

e  $j = 1, \dots, 3$ , conforme segue:

$$k_{11} = f_1(t_0, S_0, I_0, R_0), \quad k_{12} = f_2(t_0, S_0, I_0, R_0), \quad k_{13} = f_3(t_0, S_0, I_0, R_0),$$

$$k_{21} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, I_0 + \frac{k_{12}h}{2}, R_0 + \frac{k_{13}h}{2}\right),$$

$$k_{22} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, I_0 + \frac{k_{12}h}{2}, R_0 + \frac{k_{13}h}{2}\right),$$

$$k_{23} = f_3\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, I_0 + \frac{k_{12}h}{2}, R_0 + \frac{k_{13}h}{2}\right),$$

$$k_{31} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, I_0 + \frac{k_{22}h}{2}, R_0 + \frac{k_{23}h}{2}\right),$$

$$k_{32} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, I_0 + \frac{k_{22}h}{2}, R_0 + \frac{k_{23}h}{2}\right),$$

$$k_{33} = f_3\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, I_0 + \frac{k_{22}h}{2}, R_0 + \frac{k_{23}h}{2}\right),$$

$$k_{41} = f_1(t_0 + h, S_0 + k_{31}h, I_0 + k_{32}h, R_0 + k_{33}h),$$

$$k_{42} = f_2(t_0 + h, S_0 + k_{31}h, I_0 + k_{32}h, R_0 + k_{33}h),$$

$$k_{43} = f_3(t_0 + h, S_0 + k_{31}h, I_0 + k_{32}h, R_0 + k_{33}h).$$

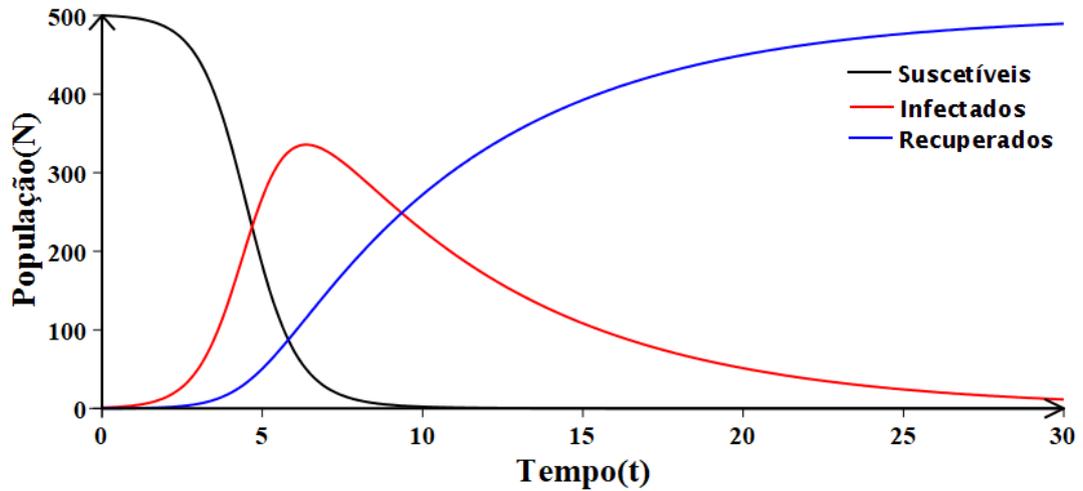
Uma vez obtidas as constantes, calculamos  $S(t_0 + h)$ ,  $I(t_0 + h)$  e  $R(t_0 + h)$ , dadas por:

$$\begin{aligned} S(t_0 + h) &= S_0 + \frac{h(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})}{6}, \\ I(t_0 + h) &= I_0 + \frac{h(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})}{6}, \\ R(t_0 + h) &= R_0 + \frac{h(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})}{6}. \end{aligned} \tag{26}$$

O processo iterativo se repete, conforme o passo  $h$  avança e, assim, obtemos os valores correspondentes às soluções de  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$ . Aplicando no método os parâmetros  $\alpha = 1,5$ ,  $\beta = 0,15$ , e as condições iniciais  $S_0 = 500$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$  e passo  $h = 0,1$ , obtemos a solução numérica do sistema, ilustrada pela figura 26, onde as curvas preta, vermelha e azul são, respectivamente, relativas às funções  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$ .

Das três curvas obtidas na solução do modelo, a curva de maior importância e também a mais estudada e comentada é a curva que representa o comportamento do

Figura 26 - Modelagem SIR.



Fonte: O Autor, 2021.

número de infectados (curva vermelha), justamente com o intuito da previsibilidade que podemos ter ao resolver o modelo. É importante prever o momento de pico da epidemia para que medidas de controle sejam tomadas. Analisando separadamente a equação relativa à infecção, dada por

$$\frac{dI}{dt} = \alpha \cdot S_0 \cdot I(t) - \beta \cdot I(t) = (\alpha \cdot S_0 - \beta) I(t), \quad (27)$$

vemos que é uma equação diferencial linear de primeira ordem cuja solução é da forma

$$I(t) = c_1 \cdot e^{r \cdot t}, \quad (28)$$

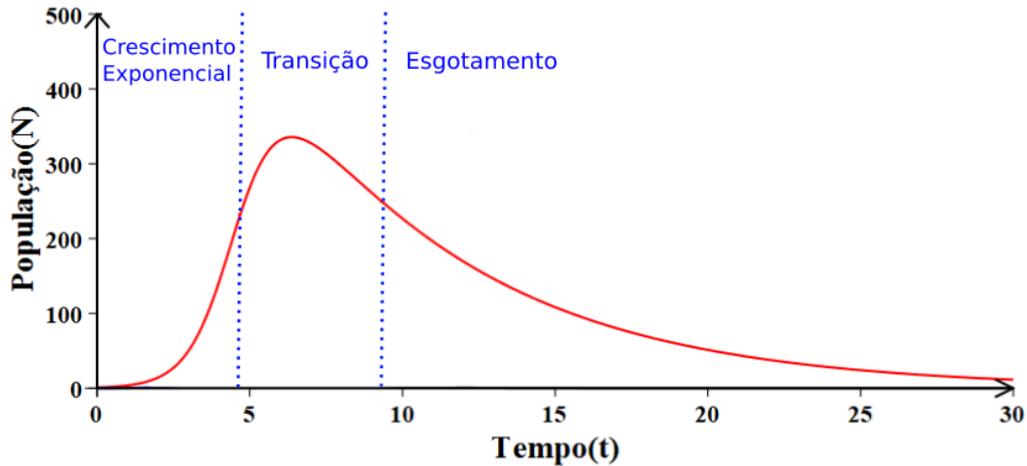
onde  $r$  é a raiz do polinômio de primeiro grau associado à equação. Aplicando a condição inicial  $I(0) = 1$ , encontramos  $c_1 = 1$ , que nos leva à solução

$$I(t) = e^{(\alpha \cdot S_0 - \beta)t}, \quad (29)$$

o que explica o comportamento exponencial no estágio inicial de uma epidemia. Conforme o número de infectados aumenta, o número de recuperados também aumenta, dando origem a uma fase transitória do comportamento exponencial. Como o número de suscetíveis está em constante declínio, a curva de infectados não pode aumentar indefinidamente, dando origem a uma fase transitória e, por último, a fase de esgotamento, conforme ilustrado na figura 27.

Ainda observando a equação diferencial (27), relativa à taxa de infecção, podemos estudar a fase de crescimento, ponto em que ocorre o pico de infecção e a fase de declínio

Figura 27 - Fases da Modelagem SIR.



Fonte: O Autor, 2021.

da epidemia. Observe que

$$\frac{dI}{dt} = \alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \beta I(t) = \left( \alpha \frac{S(t)}{N(t)} - \beta \right) I(t). \quad (30)$$

Assim, podemos afirmar que a epidemia cresce quando

$$\alpha \frac{S(t)}{N(t)} - \beta > 0 \iff \frac{S(t)}{N(t)} > \frac{\beta}{\alpha} \quad (31)$$

e diminui quando

$$\alpha \frac{S(t)}{N(t)} - \beta < 0 \iff \frac{S(t)}{N(t)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad (32)$$

ou seja, a epidemia atinge o seu pico para:

$$\frac{S(t)}{N(t)} = \frac{\beta}{\alpha} \iff S(t) = \frac{\beta N(t)}{\alpha}, \quad (33)$$

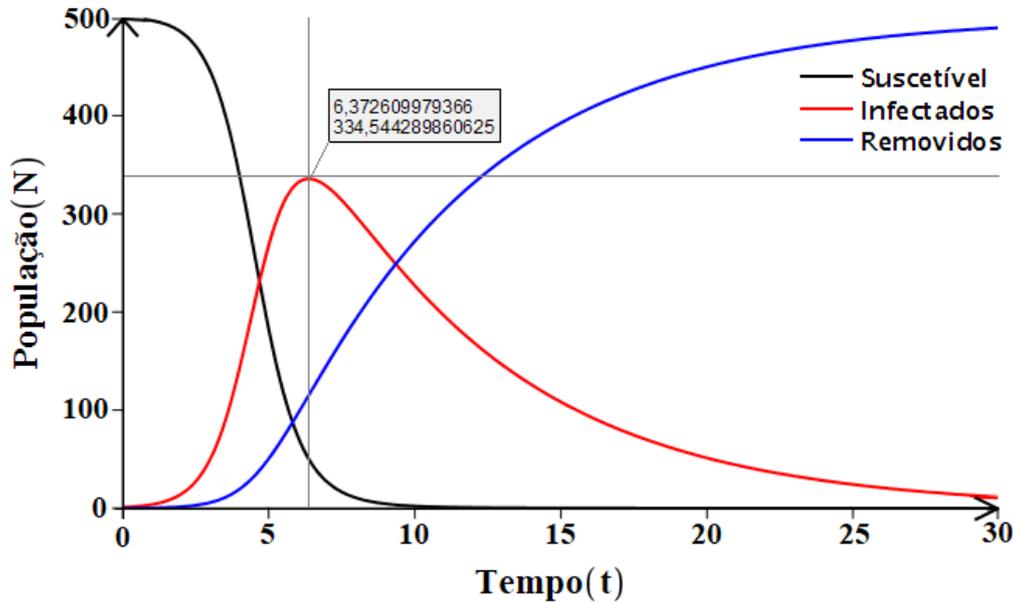
que é o chamado limitante da epidemia. Para o exemplo anterior, adotamos os coeficientes de transmissão, recuperação e o número de indivíduos como, respectivamente,  $\alpha = 1,5$ ,  $\beta = 0,15$  e população total  $N = 500$ . Assim, pela equação (33) temos que

$$S(t) = \frac{0,15 \cdot 500}{1,5} \implies S(t) = 50, \quad (34)$$

ou seja, no tempo em que o número de suscetíveis  $S(t) = 50$ , ocorrerá o pico da epidemia. Pelos dados encontrados pelo método de Runge-Kutta, podemos encontrar o tempo em que se dará o pico. No exemplo temos que  $S(6,372) \approx 50$ , o que significa que o pico de

infecção será no tempo  $t = 6,372$ , o que nos leva ao pico de infectados em  $I(6,372) \approx 334,54$ . A figura 28 ilustra esse resultado.

Figura 28 - Ponto máximo da epidemia.



Fonte: O Autor, 2021.

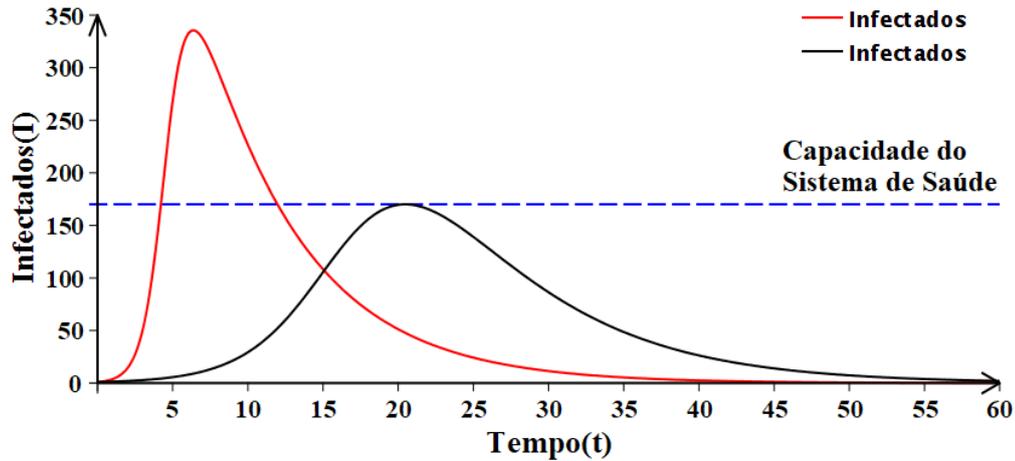
Da equação (33) definimos o chamado número básico de reprodução ou “*transmission rate*” (taxa de transmissão), utilizada como termômetro para medir a intensidade de uma epidemia, dada por

$$R_0 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (35)$$

que nos fornece uma medida que traduz o quanto a doença está sendo transmitida. Pela equação (31) a epidemia cresce se, e somente se,  $N < \alpha S(t)/\beta$ , ou seja, reduzindo a taxa de transmissão (35), o pico de infecção da epidemia será menor, mostrando a importância de reduzimos então o coeficiente de transmissão  $R_0$  através de medidas de combate à epidemia. Com o surgimento de uma nova doença, o controle principal é feito pela redução do coeficiente de propagação  $\alpha$  por medidas preventivas, seja lavando as mãos, isolando indivíduos doentes ou evitando a circulação de pessoas. Essa redução do coeficiente de transmissão produz o achatamento da curva de infecção, tão importante durante uma pandemia para se evitar maiores danos, visto que caso o coeficiente de transmissão  $\alpha$  seja muito elevado, a infecção se espalha muito rapidamente, levando à lotação em hospitais, culminando no colapso no sistema de saúde. A figura 29 ilustra as curvas de infecção, utilizando os parâmetros  $\beta = 0,15$ ,  $N = 500$  e  $\alpha = 1,5$  para a curva em vermelho e  $\alpha = 0,5$  para curva em preto.

Note que a taxa de transmissão (35) também varia com os parâmetros  $\beta$  e  $S(t)$ , podendo ser reduzida, aumentando o coeficiente de recuperação  $\beta$  pelo desenvolvimento

Figura 29 - Achatamento da curva de infecção.



Fonte: O Autor, 2021.

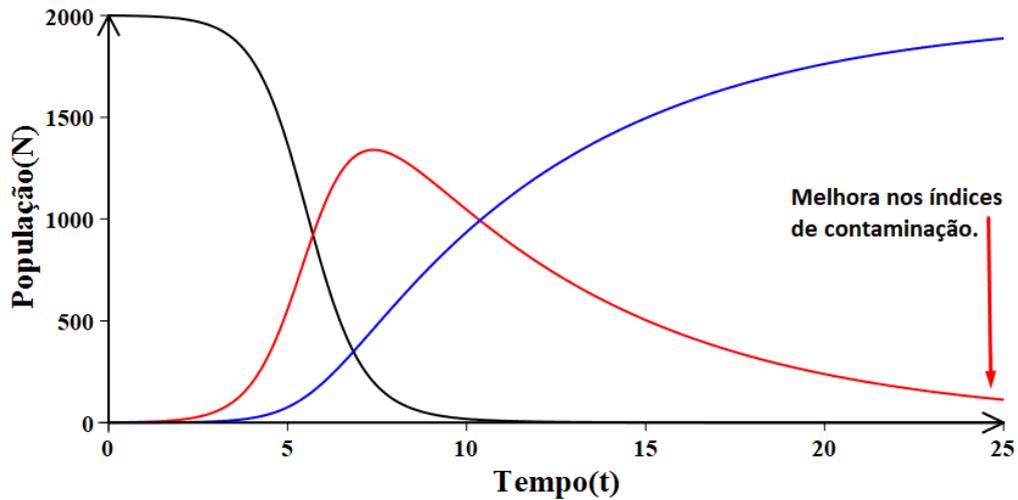
de medicamentos e fornecendo tratamentos efetivos contra a doença, que fazem com que as pessoas se recuperem mais rapidamente (antivirais e antibióticos, por exemplo) ou até mesmo reduzindo o número de pessoas suscetíveis  $S(t)$ , feito principalmente através da vacinação da população.

#### 4.1.2 A Segunda Onda

Bastante polêmico e alvo de preocupações, o termo “segunda onda”, visto frequentemente na mídia durante a pandemia, diz respeito a uma segunda explosão dos casos de infecção, que ocorre após a fase de esgotamento da primeira onda. Mas por que será que uma segunda onda poderia ocorrer? Seria possível que ela fosse ocorrer?

Para tentar responder essas perguntas, vamos supor que em uma cidade com 10.000 habitantes afetada pela pandemia, 20% das pessoas estão trabalhando (grupo prioritário) e 80% dos habitantes permanecem em quarentena nas suas casas (resto da população em geral). Baseado-se no modelo SIR, a figura 30 ilustra o momento inicial da nossa situação proposta, tratando os 2000 habitantes trabalhadores como sendo pessoas suscetíveis e que há apenas 1 pessoa inicialmente contaminada (são as condições iniciais do problema). Foram adotados os parâmetros de taxa de infecção  $\alpha = 1,5$  e taxa de recuperação  $\beta = 0,15$ .

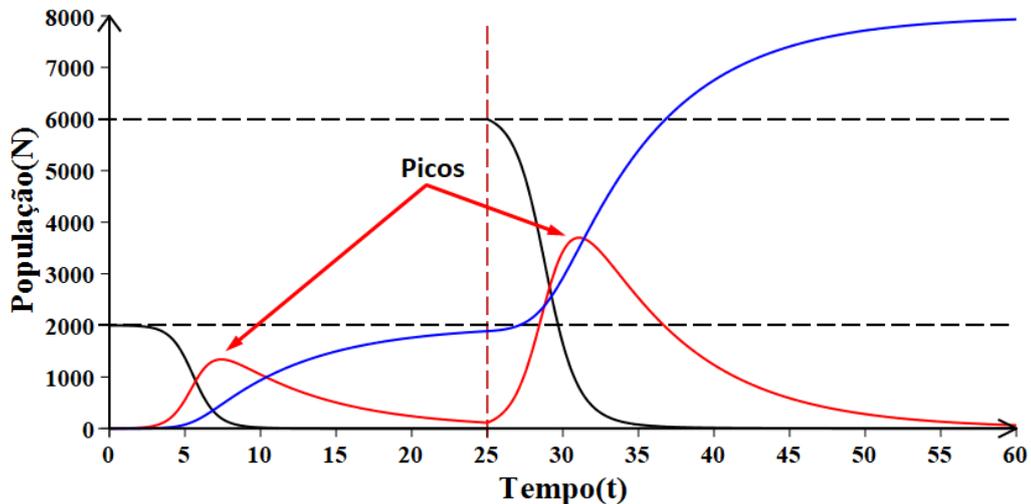
Figura 30 - Situação proposta - momento inicial.



Fonte: O Autor, 2021.

Após o pico inicial de infecção, em um dado momento, com a melhora nos índices de contaminação, uma parcela das 8000 pessoas passa a circular novamente nas ruas que, por hipótese, vamos supor que seja de 6000 pessoas. Esse “boom” de pessoas que voltam às ruas em um dado momento, faz com que surja uma nova onda de infecção, ilustrada na figura 31

Figura 31 - Situação proposta - segunda onda.



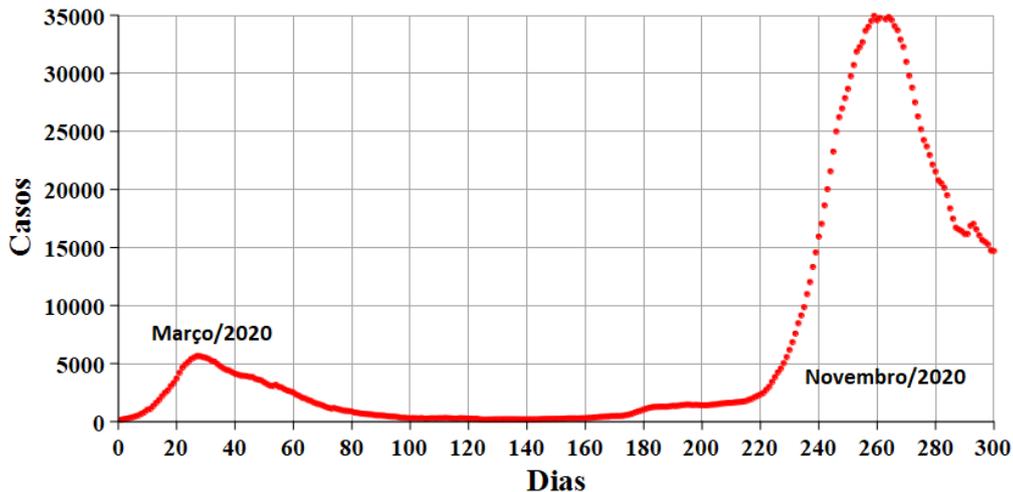
Fonte: O Autor, 2021.

Será que seria possível existir uma terceira onda? A resposta infelizmente seria sim. Enquanto houver número suficiente de indivíduos em quarentena, que voltam a circular nas ruas, é viável que ocorra mais uma onda. No capítulo de modelagem na educação que veremos mais a frente nesse trabalho, aprenderemos a aplicar a modelagem utilizando softwares simples como o Excel e o GeoGebra. Essa situação hipotética para

mostrar uma segunda onda também pode ser implementada por estes softwares e pode ser um viés educacional bastante interessante aos alunos.

Deixando a situação hipotética e passando a uma situação real, em março de 2020, a Itália se viu em um momento de crise com o número de casos de COVID-19 explodindo no país. Após um certo período de tempo com implementação de protocolos de combate à pandemia e rígidas medidas de contenção, o país viu o número de casos se reduzir a patamares menores e com isso implementou uma flexibilização das medidas de prevenção, fazendo com que grupos anteriormente isolados passassem a circular, que por sua vez aumentou repentinamente o número de pessoas suscetíveis, gerando um novo “boom” de infecções, conhecido como segunda onda. A figura 32 mostra os dados de pessoas infectadas, disponibilizados pela plataforma Google ([www.google.com](http://www.google.com)), tratados para serem exibidos na forma de média móvel dos últimos 7 dias, até o dia 31/12/2020.

Figura 32 - Segunda onda de casos na Itália.



Fonte: O Autor, 2021.

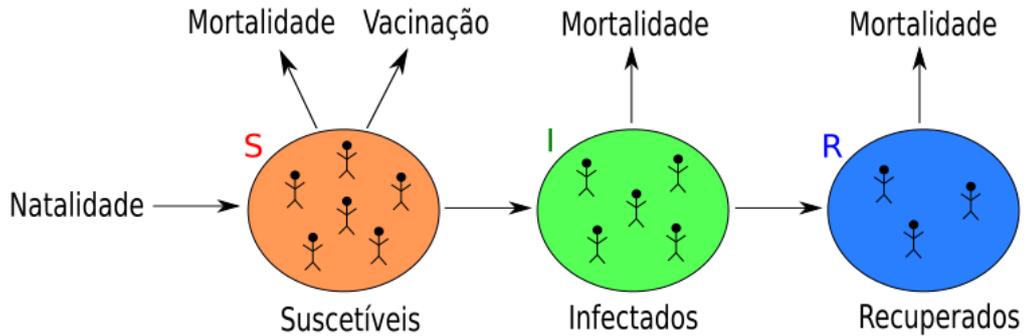
No caso da Itália, vemos que ocorreu uma explosão do número de casos em uma segunda onda de infecção ocorrida 260 dias (em novembro) após o início da infecção (em fevereiro), gerada pelo aumento de pessoas suscetíveis. Essa situação poderia ter sido contornada caso as medidas de restrição tivessem sido mantidas ou caso uma vacina (não disponível na época) tivesse sido aplicada. Na seção que segue vamos estudar uma variação do modelo SIR, adicionando novas dinâmicas ao modelo, dentre elas, a vacinação da população.

#### 4.2 Modelo SIR com Natalidade, Mortalidade e Vacina

Nesta seção veremos algumas possibilidades de variantes a serem incorporadas pelos modelos epidemiológicos, acrescentando-se novas variáveis ao modelo. Serão levadas

em conta as taxas de natalidade e mortalidade (*Vital Dynamics*), bem como a utilização de vacinas ao modelo SIR. Contudo, as mesmas variantes podem ser aplicadas aos outros tipos de modelos epidemiológicos que também serão apresentados neste trabalho. A figura 33 ilustra a dinâmica de populações com as variantes de mortalidade e natalidade integradas ao modelo.

Figura 33 - Modelo SIR com taxas de natalidade, mortalidade e vacinação.



Fonte: O Autor, 2021.

A natalidade dá origem a indivíduos suscetíveis, e a mortalidade pode ocorrer em todos os indivíduos, independente se são suscetíveis, infectados ou recuperados, havendo uma perda em todas as categorias. Para o modelo proposto, a vacinação, espera-se, que seja feita apenas em indivíduos suscetíveis, não fazendo sentido vacinar pessoas infectadas nem recuperadas, uma vez que estas já possuem imunização. Em algumas situações de desconhecimento do tempo de imunização de um indivíduo recuperado, é aconselhado incluí-lo também no grupo que será vacinado, como ocorre no caso da COVID-19. Em relação ao modelo SIR sem variações, temos o conjunto de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} + \omega \cdot N(t) - \mu \cdot S(t) - \delta \cdot S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \beta I(t) - \mu \cdot I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \beta I(t) - \mu \cdot R(t) \end{array} \right. , \quad (36)$$

onde  $\omega$  é a taxa de natalidade, proporcional ao número total de habitantes,  $\mu$  é a taxa de mortalidade, presente em todas as equações do sistema e proporcional ao número de indivíduos em cada categoria e  $\delta$  é a taxa de vacinação proporcional ao número de pessoas suscetíveis.

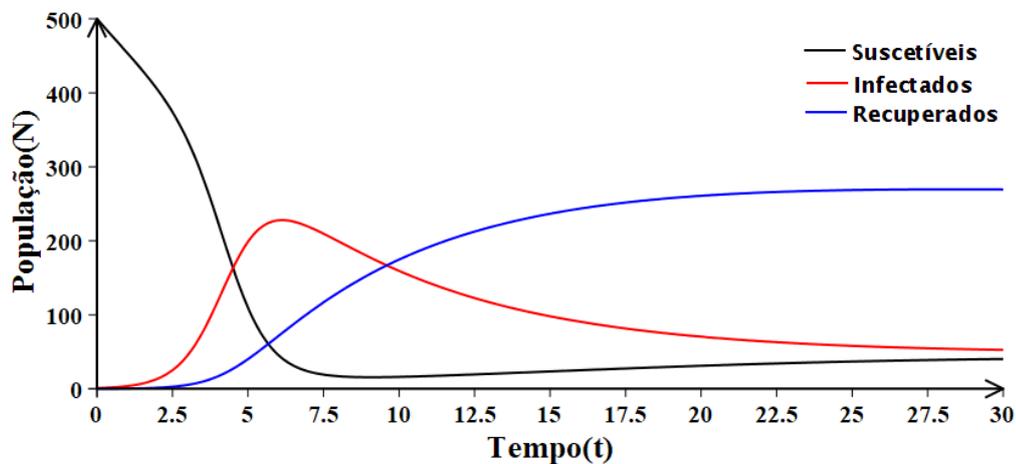
#### 4.2.1 Solução do Modelo SIR com Dinâmica Vital e Vacinação

De maneira análoga à solução numérica do modelo SIR, o modelo SIR com variantes resolvido pelo método Runge-Kutta de 4ª ordem apenas sofre alteração nas funções que compõem o método, que passam a ser dadas por

$$\begin{cases} f_1 : (t, S, I, R) \rightarrow -\alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} + \omega \cdot N(t) - \mu \cdot S(t) - \delta \cdot S(t), \\ f_2 : (t, S, I, R) \rightarrow \alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \beta I(t) - \mu \cdot I(t), \\ f_3 : (t, S, I, R) \rightarrow \beta I(t) - \mu \cdot R(t). \end{cases} \quad (37)$$

De forma análoga à seção 4.1.1, obtemos as curvas geradas que são ilustradas na figura 34, onde foram utilizados os parâmetros: taxa de infecção  $\alpha = 1,5$ , taxa de recuperação  $\beta = 0,15$ , taxa de natalidade  $\omega = 0,04$ , taxa de mortalidade  $\mu = 0,03$ , taxa de vacinação  $\delta = 0,1$  e as condições iniciais  $S(0) = 500$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$ .

Figura 34 - Modelo SIR com Dinâmica Vital e Vacinação.

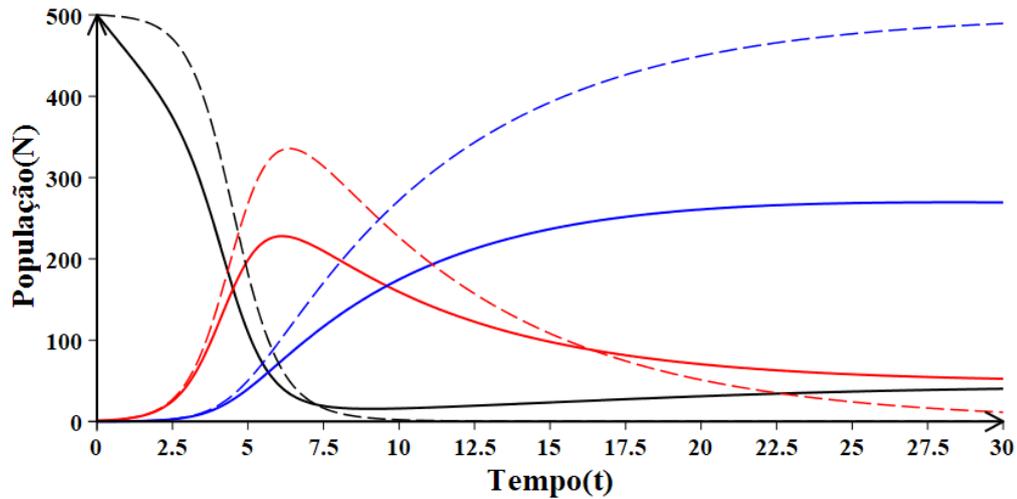


Fonte: O Autor, 2021.

Para observarmos como nessas novas variações afetam o gráfico, a figura 35 faz uma comparação entre os resultados dos modelos SIR (curvas pontilhadas) e SIR com variações (curvas sólidas). Para que possamos ver apenas o efeito da inclusão dos novos parâmetros, foram mantidas iguais as taxas de infecção  $\alpha = 1,5$  e a taxa de recuperação  $\beta = 0,15$  e as condições iniciais  $S(0) = 500$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$ .

Podemos ver que o número de pessoas suscetíveis decresceu mais rapidamente e o pico de infecção foi menor, não pela inclusão da dinâmica vital, mas pela vacinação aplicada em indivíduos suscetíveis. Neste caso consideramos que todas as pessoas recuperadas se tornam imunizadas (e não existem mortos), porém, é possível que isso não ocorra

Figura 35 - Comparação entre os modelos SIR e SIR com variações.



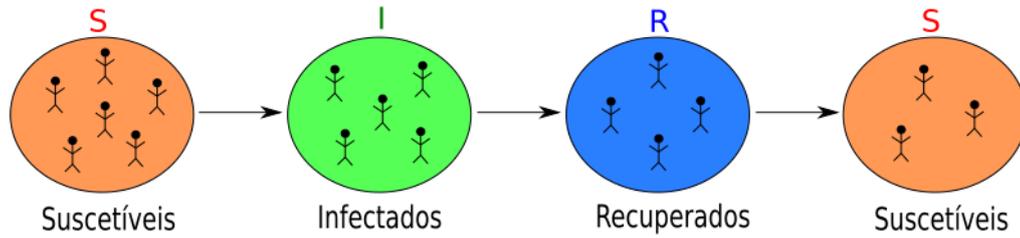
Fonte: O Autor, 2021.

na prática para todos dos indivíduos, sendo possível então modificar o modelo compartimental para acréscimo de mais um compartimento de imunização, que daria origem a mais uma equação diferencial no sistema (e por consequência mais uma curva, relativa à imunização, seria formada), que receberia indivíduos suscetíveis e indivíduos recuperados, conforme visto em (CABRERA; BATISTELA; PIQUEIRA, 2020), ou então acrescentar mais compartimentos para os óbitos relativos à doença, conforme visto em (BATISTELA; PIQUEIRA, 2020) e que também será abordado nas próximas seções.

### 4.3 Modelo SIRS

Bastante semelhante ao modelo SIR visto na seção anterior, o modelo SIRS (*susceptible, infected, recovered, susceptible*) foi também proposto por Kermack e McKendrick, seis anos após o modelo modelo SIR, em 1933 (KERMACK; MCKENDRICK, 1933). Esse modelo, além do fluxo SIR seguido pelo modelo anterior, considera que os indivíduos recuperados perdem a imunidade após um determinado tempo, voltando assim à categoria de indivíduos suscetíveis e que, portanto, podem se infectar novamente. A figura 36 ilustra a dinâmica do fluxo dos indivíduos entre as categorias do modelo SIRS.

Figura 36 - Dinâmica das populações do modelo SIR.



Fonte: O Autor, 2021.

A modelagem se dá de maneira praticamente análoga ao modelo SIR, com a exceção de que no modelo SIRS temos que acrescentar um termo negativo na taxa de recuperados,  $\frac{dR}{dt}$ , e ao mesmo tempo um termo igual, porém positivo, para a taxa,  $\frac{dS}{dt}$ , de indivíduos suscetíveis. Afinal, existe uma migração de indivíduos entre as categorias de recuperados e suscetíveis (uma categoria perde e a outra ganha o mesmo número de indivíduos). Essa migração proporcional ao número de indivíduos recuperados, nos leva a

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda R(t), \quad (38)$$

onde  $\lambda$  é a constante de perda de imunização dos indivíduos. Utilizando como base o sistema (24), acrescentando o termo dado em (38) na taxa relativa aos recuperados e a ressalva de que devemos, assim como no modelo SIR, dividir por  $N(t)$ , a fim de que a perda não dependa do número exclusivo de recuperados, mas sim de sua fração. Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} + \lambda \frac{R(t)}{N(t)} \\ \frac{dI}{dt} = \alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \beta I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \beta I(t) - \lambda \frac{R(t)}{N(t)}. \end{array} \right. \quad (39)$$

Assim, como no modelo SIR, serão consideradas as condições iniciais  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$ , condizentes ao início de um surto epidêmico. Também é possível, por exemplo, acrescentar os parâmetros de dinâmica vital (nascimentos e mortes por causa natural) no modelo SIRS, conforme vemos em (BATISTELA; CORREA; PIQUEIRA, 2020).

### 4.3.1 Solução do modelo SIRS

Mais uma vez, uma solução numérica é proposta fazendo uso do método de Runge Kutta 4<sup>a</sup> ordem, envolvendo o sistema de 3 equações diferenciais, com funções de  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$\begin{cases} f_1 : (t, S, I, R) \rightarrow -\alpha \frac{S.I}{S + I + R} + \lambda \frac{R(t)}{N(t)} \\ f_2 : (t, S, I, R) \rightarrow \alpha \frac{S.I}{S + I + R} - \beta.I \\ f_3 : (t, S, I, R) \rightarrow \beta.I - \lambda \frac{R(t)}{N(t)} \end{cases} \quad (40)$$

com as condições iniciais

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0 \text{ e } R(0) = R_0. \quad (41)$$

Considerando o tempo inicial  $t_0 = 0$  e o passo  $h = 0,1$ , temos o conjunto de constantes  $k_{ij}$  com  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $j = 1, 2, 3$ , dados por:

$$k_{11} = f_1(t_0, S_0, I_0, R_0),$$

$$k_{12} = f_2(t_0, S_0, I_0, R_0),$$

$$k_{13} = f_3(t_0, S_0, I_0, R_0),$$

$$k_{21} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, I_0 + \frac{k_{12}h}{2}, R_0 + \frac{k_{13}h}{2}\right),$$

$$k_{22} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, I_0 + \frac{k_{12}h}{2}, R_0 + \frac{k_{13}h}{2}\right),$$

$$k_{23} = f_3\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, I_0 + \frac{k_{12}h}{2}, R_0 + \frac{k_{13}h}{2}\right),$$

$$k_{31} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, I_0 + \frac{k_{22}h}{2}, R_0 + \frac{k_{23}h}{2}\right),$$

$$k_{32} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, I_0 + \frac{k_{22}h}{2}, R_0 + \frac{k_{23}h}{2}\right),$$

$$k_{33} = f_3\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, I_0 + \frac{k_{22}h}{2}, R_0 + \frac{k_{23}h}{2}\right),$$

$$k_{41} = f_1(t_0 + h, S_0 + k_{31}h, I_0 + k_{32}h, R_0 + k_{33}h),$$

$$k_{42} = f_2(t_0 + h, S_0 + k_{31}h, I_0 + k_{32}h, R_0 + k_{33}h),$$

$$k_{43} = f_3(t_0 + h, S_0 + k_{31}h, I_0 + k_{32}h, R_0 + k_{33}h),$$

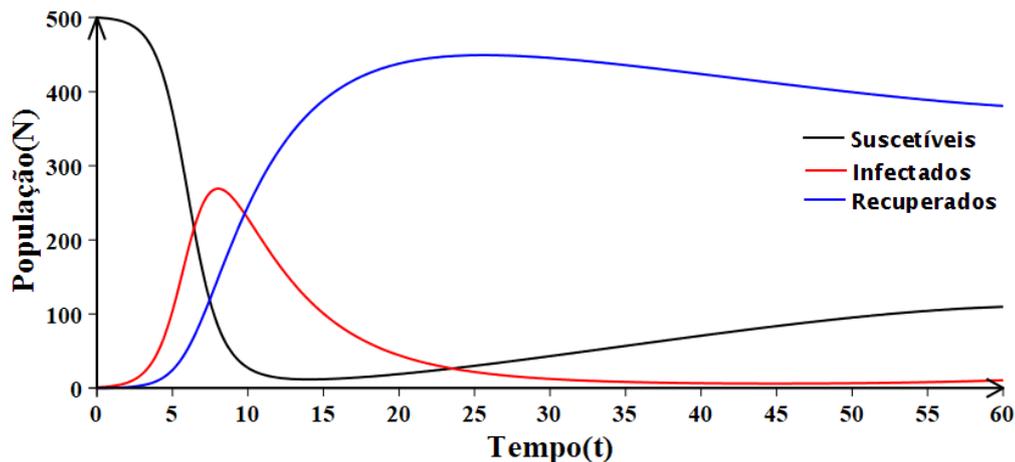
$$S(t_0 + h) = S_0 + \frac{h(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})}{6},$$

$$I(t_0 + h) = I_0 + \frac{h(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})}{6},$$

$$R(t_0 + h) = R_0 + \frac{h(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})}{6}.$$

O processo iterativo se repete, nos levando aos valores das soluções de  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$ . Considerando os valores para os parâmetros  $\alpha = 1,2$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $\lambda = 4,5$  e as condições iniciais  $S_0 = 500$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$  e passo  $h = 0,1$ , obtemos a solução numérica, ilustrada pela figura 37, onde as curvas preta, vermelha e azul correspondem às funções  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$ , respectivamente.

Figura 37 - Modelagem SIRS.



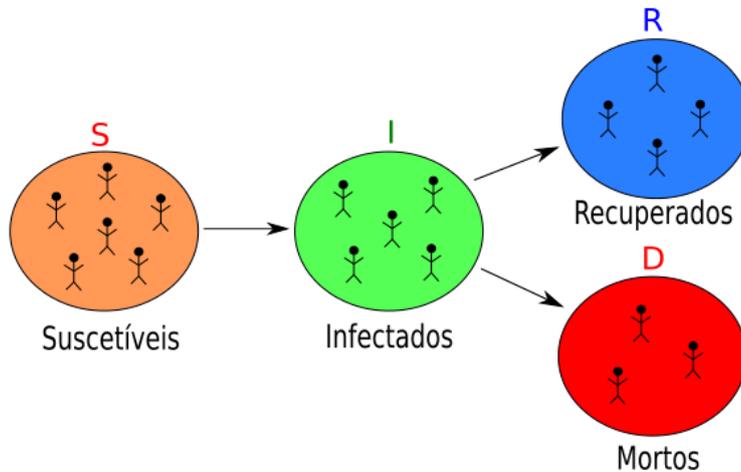
Fonte: O Autor, 2021.

No modelo SIRS, conforme esperado, podemos notar uma redução mais lenta no número de pessoas recuperadas, bem como um maior aumento no número de indivíduos suscetíveis. Como também podemos observar na figura 37, existe uma leve tendência de aumento dos números de pessoas infectadas.

#### 4.4 Modelo SIRD

Com semelhanças aos modelos anteriores, o modelo SIRD (*susceptible, infected, recovered, dead*), conforme sua sigla, considera que após uma pessoa suscetível ser infectada, esta irá se imunizar pelo resto da vida ou irá morrer em decorrência da doença. A figura 38 ilustra a dinâmica do fluxo dos indivíduos entre as categorias do modelo SIRD.

Figura 38 - Dinâmica de populações do modelo SIRD.



Fonte: O Autor, 2021.

Para modelar essa nova proposta, vamos acrescentar um termo que representa uma diminuição na taxa dos infectados. Neste caso, além dos indivíduos que se recuperam, existem aqueles que saem do grupo devido a óbitos. Dessa forma, temos uma nova equação diferencial, relativa à taxa de variação no tempo dos indivíduos mortos,  $\frac{dD}{dt}$ , que irá receber os indivíduos que deixaram a categoria de infectados e passam para a categoria de mortos. Essa nova equação diferencial relativa aos mortos é proporcional ao número de indivíduos infectados, sendo dada por

$$\frac{dD}{dt} = \delta I(t), \quad (42)$$

onde  $\delta$  é uma constante denominada de taxa de mortalidade. Então, fazemos uma alteração na equação original, relativa a taxa de infectados no sistema (24), e acrescentamos a equação (42), dando origem ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)}, \\ \frac{dI}{dt} = \alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - (\beta + \delta)I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \beta I(t), \\ \frac{dD}{dt} = \delta I(t). \end{array} \right. \quad (43)$$

Esse modelo, caracterizado como simples, descreve com precisão os dados do passado e possibilita fazer projeções confiáveis para as tendências da epidemia em cada localidade, conforme mostra o trabalho de (SILVA, 2020).

#### 4.4.1 Solução do Modelo SIRD

Como anteriormente, buscamos os valores para  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  e  $D(t)$  do sistema de equações diferenciais ordinárias não linear (43). Para tal, vamos resolvê-lo numericamente pelo método de Runge Kutta 4<sup>a</sup> ordem. Dado o sistema com 4 equações diferenciais, temos as funções de  $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$\begin{cases} f_1 : (t, S, I, R, D) \rightarrow -\alpha \frac{S.I}{S + I + R}, \\ f_2 : (t, S, I, R, D) \rightarrow \alpha \frac{S.I}{S + I + R} - (\beta + \delta).I, \\ f_3 : (t, S, I, R, D) \rightarrow \beta.I, \\ f_4 : (t, S, I, R, D) \rightarrow \delta.I, \end{cases} \quad (44)$$

com condições iniciais:

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \quad \text{e} \quad D(0) = d_0. \quad (45)$$

Para as constantes  $k_{ij}$  com o ponto de início  $t_0 = 0$  e utilizando o passo  $h = 0,1$ , temos:

$$k_{11} = f_1(t_0, S_0, I_0, R_0, D_0),$$

$$k_{12} = f_2(t_0, S_0, I_0, R_0, D_0),$$

$$k_{13} = f_3(t_0, S_0, I_0, R_0, D_0),$$

$$k_{14} = f_4(t_0, S_0, I_0, R_0, D_0),$$

$$k_{21} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, I_0 + \frac{k_{12}h}{2}, R_0 + \frac{k_{13}h}{2}, D_0 + \frac{k_{14}h}{2}\right),$$

$$k_{22} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, I_0 + \frac{k_{12}h}{2}, R_0 + \frac{k_{13}h}{2}, D_0 + \frac{k_{14}h}{2}\right),$$

$$k_{23} = f_3\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, I_0 + \frac{k_{12}h}{2}, R_0 + \frac{k_{13}h}{2}, D_0 + \frac{k_{14}h}{2}\right),$$

$$k_{24} = f_4\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, I_0 + \frac{k_{12}h}{2}, R_0 + \frac{k_{13}h}{2}, D_0 + \frac{k_{14}h}{2}\right),$$

$$k_{31} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, I_0 + \frac{k_{22}h}{2}, R_0 + \frac{k_{23}h}{2}, D_0 + \frac{k_{24}h}{2}\right),$$

$$k_{32} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, I_0 + \frac{k_{22}h}{2}, R_0 + \frac{k_{23}h}{2}, D_0 + \frac{k_{24}h}{2}\right),$$

$$k_{33} = f_3 \left( t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, I_0 + \frac{k_{22}h}{2}, R_0 + \frac{k_{23}h}{2}, D_0 + \frac{k_{24}h}{2} \right),$$

$$k_{34} = f_4 \left( t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, I_0 + \frac{k_{22}h}{2}, R_0 + \frac{k_{23}h}{2}, D_0 + \frac{k_{24}h}{2} \right),$$

$$k_{41} = f_1 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, I_0 + k_{32}h, R_0 + k_{33}h, D_0 + k_{34}h),$$

$$k_{42} = f_2 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, I_0 + k_{32}h, R_0 + k_{33}h, D_0 + k_{34}h),$$

$$k_{43} = f_3 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, I_0 + k_{32}h, R_0 + k_{33}h, D_0 + k_{34}h),$$

$$k_{44} = f_4 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, I_0 + k_{32}h, R_0 + k_{33}h, D_0 + k_{34}h),$$

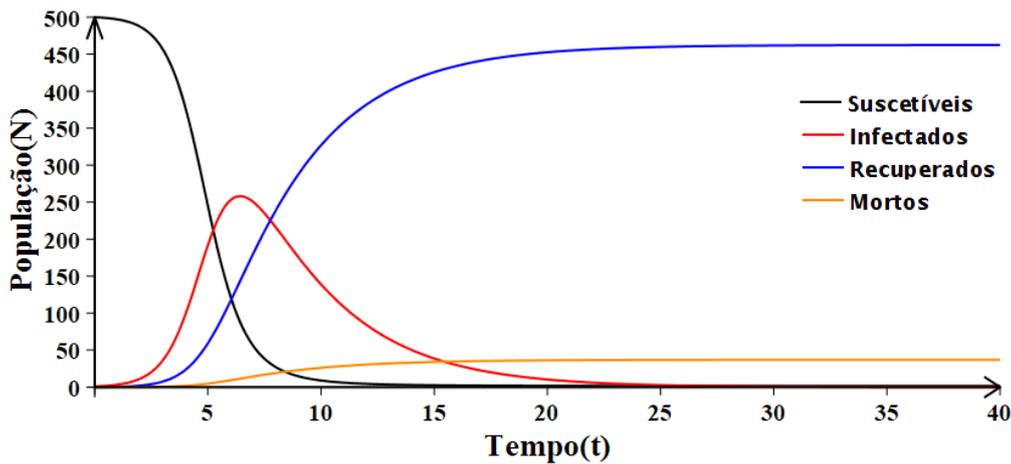
e

$$S(t_0+h) = S_0 + \frac{h(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})}{6} \quad ; \quad R(t_0+h) = R_0 + \frac{h(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})}{6}$$

$$I(t_0+h) = I_0 + \frac{h(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})}{6} \quad ; \quad D(t_0+h) = D_0 + \frac{h(k_{14} + 2k_{24} + 2k_{34} + k_{44})}{6}.$$

O processo se repete, nos fornecendo os valores das soluções para  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  e  $D(t)$ . A figura 39 ilustra a solução do sistema (43), utilizando os seguintes parâmetros: coeficiente de infecção  $\alpha = 1,5$ , coeficiente de recuperação  $\beta = 0,25$ , coeficiente de mortalidade  $\delta = 0,02$  e as condições iniciais  $S_0 = 500$ ,  $I(0) = 1$ ,  $R(0) = 0$  e  $D(0) = 0$ .

Figura 39 - Modelagem SIRD.



Fonte: O Autor, 2021.

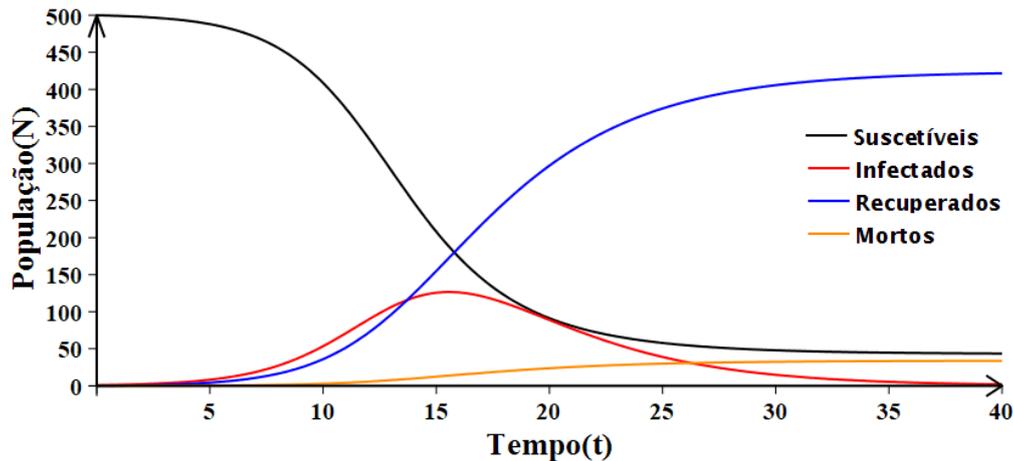
Conforme esperado, a totalidade da população inicial é dada por

$$S(t) = I(t) + R(t) + D(t), \tag{46}$$

onde, ao final da epidemia, quando existem poucos infectados, a população se dividiu entre

os recuperados ou mortos apenas. Note que esse é um caso que consideramos que toda a população foi atingida pela doença. No entanto, através de um ajuste de parâmetros, reduzindo-se o coeficiente de transmissão  $\alpha$ , podemos ter um epidemia na qual algumas pessoas nem cheguem a ter a doença, conforme ilustramos na figura 40, onde utilizamos os parâmetros  $\alpha = 0,7$ ,  $\beta = 0,25$ ,  $\delta = 0,02$  e as condições iniciais  $S_0 = 500$ ,  $I(0) = 1$ ,  $R(0) = 0$  e  $D(0) = 0$ .

Figura 40 - Modelagem SIRD - Menor Coeficiente de Infecção.



Fonte: O Autor, 2021.

A redução do coeficiente de transmissão resultou em uma curva de infecção mais “achatada”, gerando um número considerável de pessoas não infectadas que continuam sendo classificadas como suscetíveis, mesmo ao final da epidemia. A redução no coeficiente de transmissão, como é sabido, pode ser alcançado com medidas de distanciamento social mais efetivas e mais rígidas (MANCHEIN; BRUGNAGO, 2020). Outra característica importante a ser observada é a menor mortalidade, visto que com o coeficiente de infecção menor, menos indivíduos foram infectados e, conseqüentemente, menos mortes em decorrência da doença ocorreram.

#### 4.5 Modelo SIRD com Variantes

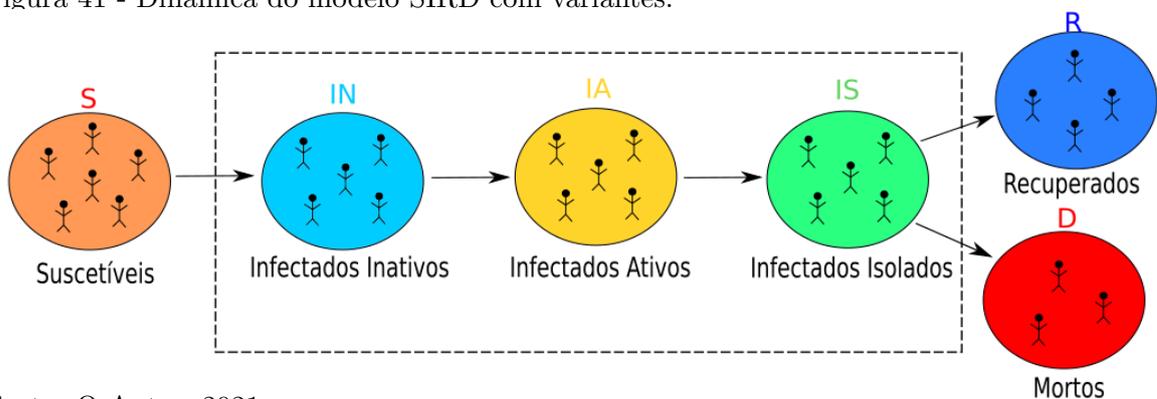
Para modelagens com maior complexidade, modelos simples como os vistos anteriormente podem não ser adequados, precisando-se de um modelo mais elaborado que forneça uma maior gama de informações. Podemos aumentar o nível de sofisticação do modelo acrescentando variáveis, como vimos no caso da dinâmica vital (seção 4.2.1), no qual foram adicionadas taxas de natalidade e de mortalidade, ou então no caso dos modelos compartimentais, mais compartimentos com diferentes classificações em que indivíduos podem ser enquadrados durante uma epidemia.

Nesta seção adicionamos compartimentos no modelo SIRD, subdividindo a ca-

tegoria de infectados em três novas categorias: Infectados inativos (doença em fase de incubação), Infectados ativos (estão transmitindo a doença) e infectados isolados, que são aqueles que já sabem do diagnóstico e estão isolados para não contagiar outras pessoas.

Para o primeiro grupo, vamos utilizar a sigla  $IN$ , que são indivíduos recém infectados e que estão com a doença em fase de incubação. Para o segundo grupo, vamos utilizar a sigla  $IA$ , composto de indivíduos cuja doença saiu do estágio de incubação e estão aptos a transmitir para outros. Para o terceiro grupo que vamos utilizar a sigla  $IS$ , são indivíduos que já sabem do diagnóstico e foram colocados em isolamento. A figura 41 ilustra o esquema da modelagem.

Figura 41 - Dinâmica do modelo SIRD com variantes.



Fonte: O Autor, 2021.

Como cada indivíduo pode estar somente enquadrado em um único compartimento por vez, a população total pode ser expressa pela relação

$$N(t) = S(t) + IN(t) + IA(t) + IS(t) + R(t) + D(t). \quad (47)$$

Com o acréscimo de mais variáveis, conseqüentemente, mais equações serão incorporadas ao modelo SIRD com variantes. As funções a serem analisadas nesse modelo são dadas então por:  $S(t)$  - Suscetíveis,  $IN(t)$  - Infectados não transmissores com vírus na fase de incubação,  $IA(t)$  - Infectados Ativos, que transmitem a infecção,  $IS(t)$  - Infectados Isolados, que teoricamente não são transmissíveis,  $R(t)$  - Recuperados,  $D(t)$  - Indivíduos mortos e  $T(t)$  - Total de casos infectados.

Para o processo de modelagem, precisamos entender como as taxas de variação de cada categoria vão se modificar. A taxa relativa aos indivíduos suscetíveis,  $\frac{dS}{dt}$ , decresce dependendo do número de indivíduos suscetíveis e indivíduos infectados ativos (que aumentam a disseminação da doença), além de uma constante de infecção  $\alpha$ ,

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha \cdot S(t) \cdot IA(t). \quad (48)$$

A taxa relativa aos indivíduos infectados incubados,  $\frac{dIN}{dt}$ , aumenta na mesma pro-

porção em que os suscetíveis foram infectados, porém, se reduz (dependendo apenas de si mesma) conforme os infectados incubados se tornam infectados ativos a uma taxa  $\theta$  de desencubação do vírus,

$$\frac{dIN}{dt} = \alpha S(t).IA(t) - \theta.IN(t). \quad (49)$$

A taxa relativa aos indivíduos infectados ativos,  $\frac{dIA}{dt}$ , aumenta na mesma proporção em infectados incubados se tornaram infectados ativos e se reduz conforme os infectados ativos são colocados isolados a uma taxa de isolamento  $\vartheta$ ,

$$\frac{dIA}{dt} = \theta.IN(t) - \vartheta.IA(t). \quad (50)$$

A taxa relativa aos indivíduos isolados,  $\frac{dIS}{dt}$ , aumenta na mesma proporção em que os infectados ativos são isolados e se reduz conforme eles são curados a uma taxa de recuperação  $\beta$  ou morrem à uma taxa de mortalidade  $\delta$ ,

$$\frac{dIS}{dt} = \vartheta IA(t) - (\beta + \delta)IS(t). \quad (51)$$

A taxa relativa aos indivíduos recuperados,  $\frac{dR}{dt}$ , aumenta na mesma proporção em que os indivíduos isolados são curados,

$$\frac{dR}{dt} = \beta IS(t). \quad (52)$$

A taxa relativa aos indivíduos mortos,  $\frac{dD}{dt}$ , aumenta na mesma proporção em que os indivíduos em isolamento morrem,

$$\frac{dD}{dt} = \delta IS(t). \quad (53)$$

De maneira adicional aos compartimentos ilustrados na figura 41, podemos acrescentar na modelagem a curva que representa o número total de casos registrados. Vamos chamar de  $\frac{dT}{dt}$  a taxa de variação que representa o total de casos de infecção, que aumenta na mesma proporção com que os indivíduos suscetíveis se tornam infectados (recebe diretamente o termo das pessoas deixaram de ser suscetíveis),

$$\frac{dT}{dt} = \alpha.S(t).IA(t). \quad (54)$$

Conforme vimos no modelo SIR, para fornecer uma noção mais realista, novamente devemos expressar os indivíduos suscetíveis como uma fração em relação ao total da população. Assim, as equações de (48), (49) e (54), que levam a função de indivíduos

suscetíveis, devem ser divididas por  $N(t)$ , fornecendo o sistema de EDO's a seguir.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\alpha \cdot \frac{S(t).IA(t)}{S(t) + IN(t) + IA(t) + IS(t) + R(t) + D(t)}, \\ \frac{dIN}{dt} = \alpha \cdot \frac{S(t).IA(t)}{S(t) + IN(t) + IA(t) + IS(t) + R(t) + D(t)} - \theta IN(t), \\ \frac{dIA}{dt} = \theta.IN(t) - \vartheta IA(t), \\ \frac{dIS}{dt} = \vartheta IA(t) - (\beta + \delta)IS(t), \\ \frac{dR}{dt} = \beta.IS(t), \\ \frac{dD}{dt} = \delta.IS(t), \\ \frac{dT}{dt} = \alpha \cdot \frac{S(t).IA(t)}{S(t) + IN(t) + IA(t) + IS(t) + R(t) + D(t)}, \end{array} \right. \quad (55)$$

relativo à nossa modelagem SIRD com variações nos compartimentos.

#### 4.5.1 Solução do modelo SIRD com variantes

De maneira análoga à solução dos modelos anteriores, resolvemos o modelo SIRD com variantes numericamente pelo método de Runge Kutta 4<sup>a</sup> ordem. Neste caso, o sistema possui 7 equações diferenciais, que nos remetem às funções de  $\mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 : (t, S, IN, IA, IS, R, D, T) \rightarrow -\alpha \cdot \frac{S.IA}{S + IN + IA + IS + R + D}, \\ f_2 : (t, S, IN, IA, IS, R, D, T) \rightarrow \alpha \cdot \frac{S.IA}{S + IN + IA + IS + R + D} - \theta.IN, \\ f_3 : (t, S, IN, IA, IS, R, D, T) \rightarrow \theta.IN - \vartheta.IA, \\ f_4 : (t, S, IN, IA, IS, R, D, T) \rightarrow \vartheta.IA - (\beta + \delta)IS, \\ f_5 : (t, S, IN, IA, IS, R, D, T) \rightarrow \beta.IS, \\ f_6 : (t, S, IN, IA, IS, R, D, T) \rightarrow \delta.IS, \\ f_7 : (t, S, IN, IA, IS, R, D, T) \rightarrow \alpha \cdot \frac{S.IA}{S + IN + IA + IS + R + D}, \end{array} \right. \quad (56)$$

com as seguintes condições iniciais

$$S(0) = S_0, IN(0) = IN_0, IA(0) = IA_0, IS(0) = IS_0, R(0) = R_0, D(0) = D_0, T(0) = T_0.$$

Como padrão, estabelecemos que o ponto de início é dado por  $t_0 = 0$  com um passo  $h = 0,1$ . Assim, as constantes  $k_{ij}$  do método são escritas como:

$$k_{11} = f_1(t_0, S_0, IN_0, IA_0, IS_0, R_0, D_0, T_0),$$

$$k_{12} = f_2(t_0, S_0, IN_0, IA_0, IS_0, R_0, D_0, T_0),$$

$$k_{13} = f_3(t_0, S_0, IN_0, IA_0, IS_0, R_0, D_0, T_0),$$

$$k_{14} = f_3(t_0, S_0, IN_0, IA_0, IS_0, R_0, D_0, T_0),$$

$$k_{15} = f_3(t_0, S_0, IN_0, IA_0, IS_0, R_0, D_0, T_0),$$

$$k_{16} = f_3(t_0, S_0, IN_0, IA_0, IS_0, R_0, D_0, T_0),$$

$$k_{17} = f_3(t_0, S_0, IN_0, IA_0, IS_0, R_0, D_0, T_0),$$

$$k_{21} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{12}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{13}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{14}h}{2}, R_0 + \frac{k_{15}h}{2}, D_0 + \frac{k_{16}h}{2}, T_0 + \frac{k_{17}h}{2}\right),$$

$$k_{22} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{12}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{13}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{14}h}{2}, R_0 + \frac{k_{15}h}{2}, D_0 + \frac{k_{16}h}{2}, T_0 + \frac{k_{17}h}{2}\right),$$

$$k_{23} = f_3\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{12}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{13}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{14}h}{2}, R_0 + \frac{k_{15}h}{2}, D_0 + \frac{k_{16}h}{2}, T_0 + \frac{k_{17}h}{2}\right),$$

$$k_{24} = f_4\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{12}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{13}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{14}h}{2}, R_0 + \frac{k_{15}h}{2}, D_0 + \frac{k_{16}h}{2}, T_0 + \frac{k_{17}h}{2}\right),$$

$$k_{25} = f_5\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{12}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{13}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{14}h}{2}, R_0 + \frac{k_{15}h}{2}, D_0 + \frac{k_{16}h}{2}, T_0 + \frac{k_{17}h}{2}\right),$$

$$k_{26} = f_6\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{12}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{13}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{14}h}{2}, R_0 + \frac{k_{15}h}{2}, D_0 + \frac{k_{16}h}{2}, T_0 + \frac{k_{17}h}{2}\right),$$

$$k_{27} = f_7\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{11}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{12}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{13}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{14}h}{2}, R_0 + \frac{k_{15}h}{2}, D_0 + \frac{k_{16}h}{2}, T_0 + \frac{k_{17}h}{2}\right),$$

$$k_{31} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{22}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{23}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{24}h}{2}, R_0 + \frac{k_{25}h}{2}, D_0 + \frac{k_{26}h}{2}, T_0 + \frac{k_{27}h}{2}\right),$$

$$k_{32} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{22}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{23}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{24}h}{2}, R_0 + \frac{k_{25}h}{2}, D_0 + \frac{k_{26}h}{2}, T_0 + \frac{k_{27}h}{2}\right),$$

$$k_{33} = f_3\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{22}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{23}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{24}h}{2}, R_0 + \frac{k_{25}h}{2}, D_0 + \frac{k_{26}h}{2}, T_0 + \frac{k_{27}h}{2}\right),$$

$$k_{34} = f_4\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{22}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{23}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{24}h}{2}, R_0 + \frac{k_{25}h}{2}, D_0 + \frac{k_{26}h}{2}, T_0 + \frac{k_{27}h}{2}\right),$$

$$k_{35} = f_5 \left( t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{22}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{23}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{24}h}{2}, R_0 + \frac{k_{25}h}{2}, D_0 + \frac{k_{26}h}{2}, T_0 + \frac{k_{27}h}{2} \right),$$

$$k_{36} = f_6 \left( t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{22}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{23}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{24}h}{2}, R_0 + \frac{k_{25}h}{2}, D_0 + \frac{k_{26}h}{2}, T_0 + \frac{k_{27}h}{2} \right),$$

$$k_{37} = f_7 \left( t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{k_{21}h}{2}, IN_0 + \frac{k_{22}h}{2}, IA_0 + \frac{k_{23}h}{2}, IS_0 + \frac{k_{24}h}{2}, R_0 + \frac{k_{25}h}{2}, D_0 + \frac{k_{26}h}{2}, T_0 + \frac{k_{27}h}{2} \right),$$

$$k_{41} = f_1 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, IN_0 + k_{32}h, IA_0 + k_{33}h, IS_0 + k_{34}h, R_0 + k_{35}h, D_0 + k_{36}h, T_0 + k_{37}h),$$

$$k_{42} = f_2 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, IN_0 + k_{32}h, IA_0 + k_{33}h, IS_0 + k_{34}h, R_0 + k_{35}h, D_0 + k_{36}h, T_0 + k_{37}h),$$

$$k_{43} = f_3 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, IN_0 + k_{32}h, IA_0 + k_{33}h, IS_0 + k_{34}h, R_0 + k_{35}h, D_0 + k_{36}h, T_0 + k_{37}h)$$

$$k_{44} = f_4 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, IN_0 + k_{32}h, IA_0 + k_{33}h, IS_0 + k_{34}h, R_0 + k_{35}h, D_0 + k_{36}h, T_0 + k_{37}h),$$

$$k_{45} = f_5 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, IN_0 + k_{32}h, IA_0 + k_{33}h, IS_0 + k_{34}h, R_0 + k_{35}h, D_0 + k_{36}h, T_0 + k_{37}h),$$

$$k_{46} = f_6 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, IN_0 + k_{32}h, IA_0 + k_{33}h, IS_0 + k_{34}h, R_0 + k_{35}h, D_0 + k_{36}h, T_0 + k_{37}h),$$

$$k_{47} = f_7 (t_0 + h, S_0 + k_{31}h, IN_0 + k_{32}h, IA_0 + k_{33}h, IS_0 + k_{34}h, R_0 + k_{35}h, D_0 + k_{36}h, T_0 + k_{37}h),$$

$$S(t_0 + h) = S_0 + \frac{h(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})}{6} \quad ; \quad IN(t_0 + h) = IN_0 + \frac{h(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})}{6}$$

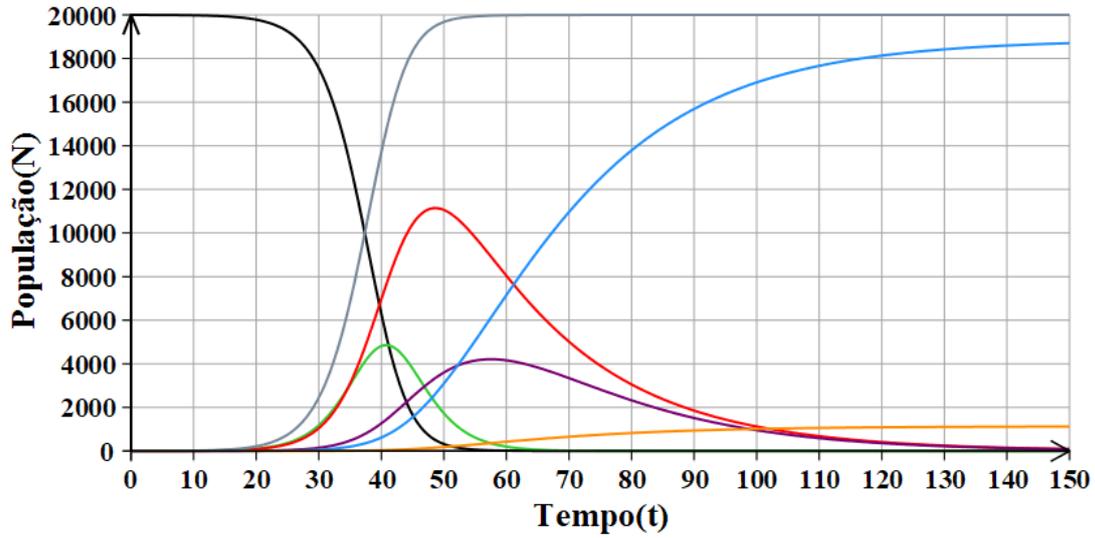
$$IA(t_0 + h) = IA_0 + \frac{h(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})}{6} \quad ; \quad IS(t_0 + h) = IS_0 + \frac{h(k_{14} + 2k_{24} + 2k_{34} + k_{44})}{6}$$

$$R(t_0 + h) = R_0 + \frac{h(k_{15} + 2k_{25} + 2k_{35} + k_{45})}{6} \quad ; \quad D(t_0 + h) = D_0 + \frac{h(k_{16} + 2k_{26} + 2k_{36} + k_{46})}{6}$$

$$T(t_0 + h) = T_0 + \frac{h(k_{17} + 2k_{27} + 2k_{37} + k_{47})}{6}.$$

O processo numérico se repete iterativamente, fornecendo valores para cada uma das funções abordadas no processo de modelagem. A solução do sistema (55) é ilustrada na figura 42, utilizando como parâmetros: taxa de infecção  $\alpha = 0,6$ , taxa de recuperação  $\beta = 0,1$ , taxa de desencubação  $\theta = 0,25$ , taxa de isolamento  $\vartheta = 0,05$ , taxa de mortalidade  $\delta = 0,0001$ , com as condições iniciais  $S_0 = 20.000$ ,  $IA(0) = 1$ ,  $IN(0) = 0$ ,  $IS(0) = 0$ ,  $R(0) = 0$ ,  $D(0) = 0$  e  $T(0) = 0$ . Na figura 42, Curva Preta - Indivíduos Suscetíveis, Cinza - Total de casos, Vermelha - Infectados Ativos, Verde - Infectados Incubados, Roxa - Infectados Isolados, Laranja - Mortos e Azul - Recuperados.

Figura 42 - Modelagem SIRD com Variantes - Resultado Numérico.



Fonte: O Autor, 2021.

Para os parâmetros utilizados acima, podemos ver pela curva cinza que toda a população foi infectada, ou seja, todos os indivíduos saíram da classificação de suscetível para a classificação de infectado incubado e, posteriormente, migraram para outros compartimentos da modelagem, conforme a figura 41. Esse modelo mais robusto nos fornece um gráfico bem mais elaborado e com mais informações se comparados aos gráficos obtidos nas modelagens mais simples feitas anteriormente.

## 5 MODELAGEM NA EDUCAÇÃO

Nos capítulos e seções que seguem, apresentamos a modelagem matemática na educação e discutimos a importância cada vez maior que vem sendo dada a ela como uma forma mais ativa de se apresentar matemática aos alunos. Nosso foco nesse trabalho são os Ensinos Fundamental e Médio, mas o mesmo pode ser aplicado ao Ensino Superior. Trataremos neste e nos próximos capítulos da modelagem epidemiológica, com o auxílio de várias ferramentas, que nos permitirão abordar em sala de aula, de forma didática, um tema que envolve, fundamentalmente, uma matemática com uma dificuldade intrínseca superior às séries ao que o trabalho se destina. A busca de diferentes métodos de ensino é importante para a evolução na maneira em que a matemática é transmitida aos alunos. O ensino da matemática sempre teve uma atenção diferenciada, ocupando grande espaço nas atividades desenvolvidas pelo homem na sociedade. Dessa forma, a matemática historicamente foi apontada como um dos alicerces do currículo escolar, sendo foco de preocupações para educadores, alunos e pais quanto ao seu papel na sociedade (TINTI; CALDEIRA; RIBEIRO, 2019). Em termos de documentos oficiais, a Lei de Diretrizes e Base (LDB) diz no artigo 35 que:

O ensino da língua portuguesa e da matemática será obrigatório nos três anos do Ensino Médio, assegurada às comunidades indígenas, também, a utilização das respectivas línguas maternas (BRASIL, 1996) (Seção IV, do Ensino Médio, Parágrafo 3).

Podemos ver assim a preocupação com a difusão da matemática em nossa educação e ainda no mesmo artigo, encontramos:

Os currículos do Ensino Médio deverão considerar a formação integral do aluno, de maneira a adotar um trabalho voltado para a construção de seu projeto de vida e para sua formação nos aspectos físicos, cognitivos e socio-emocionais (BRASIL, 1996) (Seção IV, do Ensino Médio, Parágrafo 7).

Na contra-mão da LDB, no contexto atual, a matemática é apresentada dentro de sala de aula em muitas escolas e universidades de uma forma abstrata e sem sentido real na vida do aluno, ensinada de forma mecânica e repetitiva, apenas adestrando os educandos a reproduzir aquilo que lhes é repassado no quadro (FERREIRA, 2020). Alguns professores ensinam a matemática teórica como se por si só o conteúdo fosse capaz de despertar o interesse dos alunos, e isso não é verdade para todos. É importante mostrar como de fato se deu o desenvolvimento da matemática para o aluno, ao invés de lecionar os conteúdos teóricos como se os mesmos simplesmente “existissem” sem nenhum tipo de desenvolvimento anterior. Para que o processo ensino-aprendizagem ocorra de uma forma mais efetiva, deve-se dar uma importância maior em se ensinar matemática de uma maneira à deixar clara sua utilidade fora do ambiente escolar, visando uma formação de

qualidade aos alunos ao passar ensinamentos que não sirvam apenas para se tirar boas notas nas avaliações, mas também para que os preparem para solucionar problemas fora da sala de aula. Daí, surge a necessidade de se pensar no ensino desta ciência de forma que desperte nos educandos o interesse pelos conteúdos e instiguem-os a descobrir novos caminhos durante o aprendizado da matemática de forma contextualizada. Essa conexão dos conceitos matemáticos com a vida real já é abordada em outros documentos oficiais do governo como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL., 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017).

Os PCN são utilizados há quase duas décadas como principal documento orientador do trabalho relacionado ao currículo escolar e a BNCC traz possíveis mudanças e atualizações também relacionadas à questão curricular (KOVALSKI, 2016). Os PCN expõem como um dos objetivos, de todas as áreas, para o ensino fundamental:

Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação (BRASIL., 1998, p. 69).

Vemos portanto uma característica da primeira etapa na modelagem matemática, onde baseado em um certo fenômeno da natureza, questionamos e buscamos entendê-lo com pensamento lógico e criatividade. Ainda nos PCN é colocado como um dos objetivos específicos da matemática:

Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da matemática como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL., 1998, p. 41).

Isto se enquadra nas etapas seguintes da modelagem, onde buscamos instrumentos matemáticos que descrevam o fenômeno e, posteriormente, instiguem o aluno a fazer previsões sobre o determinado fenômeno estudado. Isto é o que esperamos da aplicação da modelagem matemática em sala de aula, ou seja, que estimule os alunos a agir de forma reflexiva e que busquem de alguma forma transformar o mundo à sua volta, além de motivá-los a pensar criticamente sobre como são moldadas as coisas ao seu redor (MENEZES; VASCONCELOS, 2019).

Em relação à BNCC, a contextualização é mencionada já na apresentação da organização do documento, onde se afirma que, visando superar a fragmentação na abordagem do conhecimento, uma proposta é apresentar ideias interdisciplinares nas quatro áreas do conhecimento, Linguagens, Matemática, Ciências Humanas, e Ciências da Natureza, nas quais procura-se integrar e contextualizar os conhecimentos. Nessa questão a BNCC cita sobre uma vantagem direta da matemática, informando que:

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como

formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (BRASIL, 2017, p. 264).

Na BNCC a palavra modelagem é expressamente anunciada algumas vezes, relativa à matemática e às suas áreas, conforme vemos no trecho:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2017, p. 531).

Pode-se afirmar então que a utilização da modelagem matemática na educação vai ao encontro da LDB, das orientações dos PCN e também da BNCC, permitindo o desenvolvimento do conhecimento com base em um problema real, que deve ser observado, conjecturado, modelado e, por fim, validado e aperfeiçoado (BARROS, 2020). No entanto, nos documentos oficiais não se encontram instruções sobre como se fazer essa modelagem, e que concepções de modelagem matemática podem ser seguidas ou adaptadas. Isso se deve ao fato de que o objetivo da BNCC não é propor metodologias e sim “uma base para toda a Educação Básica Brasileira” (BRASIL, 2017).

Diversos autores abordam a utilização da modelagem matemática na educação, com diferentes metodologias e formas, mas todos convergem no sentido de obter um processo de ensino-aprendizagem mais efetivo. Dentre eles, podemos citar: Rodney Carlos Bassanezi (BASSANEZI, 2002), Maria Salett Biembengut (BIEMBENGUT, 2009) e Dionísio Burak (BURAK, 1992), cujos ideais e frases serão citadas ao longo deste capítulo.

Segundo Bassanezi<sup>1</sup>, a modelagem matemática é entendida como uma forma de arte, conforme relata: “Arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Por se tratar da matemática aplicada à natureza, a modelagem possui um viés educacional, sendo uma importante aliada na busca de diversos exemplos para o ensino de matemática; ela pode ser utilizada como um recurso para ligar a teoria com a realidade e, ao mesmo tempo, incentivar a interdisciplinaridade, conforme relatado

A modelagem matemática é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la (BASSANEZI; BERTONE; JAFELICE, 2014, p. 9).

---

<sup>1</sup> Rodney Carlos Bassanezi graduado em matemática (UNESP 1965), mestrado e doutorado (UNICAMP -1971, 1977). Trabalhou no IMECC- Unicamp de 1969 a 2001. Foi coordenador do programa de pós-graduação do CMCC(UFABC). Atua nas áreas, Teoria Fuzzy, Sistemas dinâmicos subjetivos; epidemiologia, ecologia Modelagem matemática. (Informações coletadas do Currículo Vitae Lattes – CNPq).

A Modelagem matemática na concepção de Bassanezi consiste nas seguintes etapas:

- 1) Experimentação - atividade laboratorial em que se processa os dados referentes ao experimento.
- 2) Abstração - é a formulação do modelo: seleção de variáveis, problematização e elaboração de enunciados, compreensíveis e operacionais. A simplificação de variáveis também é feita nessa etapa.
- 3) Resolução - realizada com a passagem da linguagem usual das hipóteses para linguagem matemática com o objetivo de se conseguir um modelo. Essa resolução é efetuada por um matemático, podendo ser completamente desvinculada da realidade modelada.
- 4) Validação - consiste na aprovação ou reprovação do modelo proposto. Faz-se a verificação do modelo a partir dos dados colhidos experimentalmente, sendo imprescindível corresponder, no mínimo, a circunstância estudada para que o modelo seja adotado.
- 5) Modificação - ocorre quando as hipóteses desenvolvidas no modelo, são afastadas da realidade por alguma razão ou falha nas etapas anteriores: coleta de dados, na formulação dos problemas e das hipóteses, na possibilidade do modelo ter sido excessivamente simplificado e terem sido desconsideradas as variáveis importantes.

Essas etapas descritas e o ideal de que modelar é uma arte se aproximam do pensamento de Maria Salett Biembengut<sup>2</sup>(BIEMBENGUT, 2009) que define que a Modelagem matemática como o método que visa:

Traduzir a linguagem do mundo real para o mundo matemático, ainda entende a Modelagem matemática como uma arte. A Modelagem, arte de modelar, é um processo que emerge da própria razão e participa da vida do ser humano como forma de constituição e de expressão do conhecimento (BIEMBENGUT; HEIN, 2014, p. 11).

Para Biembengut a modelagem matemática adota três etapas, subdivididas em seis subetapas, sendo elas:

- 1) Interação – reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto a ser modelado.

---

<sup>2</sup> Maria Salett Biembengut é matemática e pedagoga, Na Universidade Regional de Blumenau FURB atuou de 1990 a 2010 no Departamento de matemática e nos Programas de Pós-graduação em Educação e em Ensino de ciências e matemática. Atua como professora voluntária; e na PUCRS na Faculdade de matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e matemática (2010-2015 e idealizadora e fundadora do Centro de Referência em Modelagem matemática no Ensino. (Informações Currículo Vitae Lattes).

- 2) Matematização – formulação do problema e resolução do problema em termos do modelo.
- 3) Modelo Matemático – interpretação da solução e validação do modelo.

O modelo matemático para ser concluído deve aproximar-se, o máximo possível, da situação-problema representada por ele. Essa aproximação é feita com base nos dados obtidos da realidade através da interpretação da solução que permite a validação do modelo (BIEMBENGUT, 2009).

Para Dionísio Burak<sup>3</sup> (BURAK, 1992), que trabalhou Ensino Básico por 30 anos na rede estadual do Paraná (FREITAS, 2020), a modelagem matemática não apresenta uma concepção voltada necessariamente à construção de um modelo matemático, mas ao seu ver, entende-se como modelagem:

Um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões (BURAK, 1992, p. 62).

Essa concepção valoriza e considera todo o processo de construção do conhecimento como Modelagem matemática, sem necessariamente ter que chegar a um modelo ao final. Segundo Burak temos cinco etapas da modelagem:

- 1) Escolha do tema - é o momento em que o professor apresenta aos alunos alguns temas que possam gerar interesse ou os próprios alunos sugerem algum tema.
- 2) Pesquisa exploratória – escolhido o tema a ser pesquisado, encaminham-se os alunos para a procura de materiais e subsídios teóricos dos mais diversos, os quais contenham informações e noções prévias sobre o que se quer desenvolver/pesquisar.
- 3) Levantamento dos Problemas - feita a pesquisa, o professor deverá orientar os alunos a conjecturar sobre tudo que pode ter relação com a matemática, formulando os problemas ou averiguando sobre situações que os permitam aplicar ou aprender conteúdos matemáticos.
- 4) Resolução de problemas - baseia-se no desenvolvimento do conteúdo no contexto do tema nessa etapa, busca-se responder os problemas levantados com o auxílio do conteúdo matemático.

---

<sup>3</sup> Dionísio Burak graduado em matemática (UNICENTRO, 1973), mestrado pela UNESP (1987) e doutorado pela UNICAMP (1992). Professor titular aposentado do Departamento de matemática UNICENTRO em (2013). Tem experiência com ênfase em Educação matemática, nos temas: Modelagem matemática na Educação matemática, Ensino e Aprendizagem e Ensino de matemática. (Informações Currículo Vitae Lattes – CNPq).

- 5) Análise crítica das soluções – etapa marcada pela criticidade, não apenas em relação à matemática, mas também a outros aspectos, como a viabilidade e adequabilidade das soluções apresentadas, que, muitas vezes, são lógica e matematicamente coerentes, porém inviáveis para a situação em estudo.

Em todas essas etapas o professor é mediador do conhecimento, responsável por instigar perguntas e incentivar os alunos, para que as atividades sejam realizadas da melhor e mais produtiva maneira possível (FREITAS, 2020). De uma maneira geral, todos os autores citados possuem um forte viés educacional, especialmente Burak (BURAK, 1992) e Bassanezi (BASSANEZI., 2009) que cita:

A modelagem no ensino é uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado (BASSANEZI., 2009, p. 38).

Os modelos de crescimento populacional e de epidemiologia abordados nos capítulos anteriores deste trabalho podem ser aplicados nas salas de aula do Ensino Básico ou Superior, onde os alunos podem pensar e desenvolver estratégias próprias, levando-os à construção do próprio raciocínio para compreender um conceito, ao invés de resolver problemas com conceitos preestabelecidos. Conforme veremos nas seções que seguem, a modelagem pode ser aplicada à educação de diversas maneiras como, por exemplo, utilizando *softwares* como o GeoGebra ou de Planilhas com o Excel (CALDAS, 2019).

### 5.1 Aplicação em sala de aula

Neste trabalho propomos uma metodologia de aplicação em sala de aula, onde o professor do Ensino Básico junto aos alunos irá desenvolver os temas de crescimento populacional e de epidemiologia. Existem diversos trabalhos publicados que tratam a respeito da aplicação da modelagem em sala de aula como, por exemplo, em Freitas, que aplica a modelagem matemática baseada no tema função afim e desenvolve diversas atividades e perguntas que giram em torno desse tema, além de apresentar aplicações dos resultados.

Espera-se que o professor conduza um processo de simplificação da situação apresentada em um problema menos complexo, onde as ideias a respeito da modelagem possam ser mais facilmente concluídas (TEIXEIRA, 2019). As atividades propostas nesse trabalho giram em torno dos modelos de crescimento populacional e de epidemiologia, visando despertar o interesse dos alunos utilizando de um tema da atualidade. O tema de aplicação de modelagem em sala de aula é vasto e as estratégias a serem apresentadas nesse trabalho podem ser adaptadas pelo leitor a temas de modelagem relativas a outros fenômenos e áreas como, por exemplo, estatística (MENDONÇA; LOPES; SOARES, 2013), ou podem

até mesmo serem executadas em laboratório, caso seja uma modelagem plausível para isso como, por exemplo, em modelos de oscilações mecânicas unidimensionais, estudados na física (SANTOS, 2018).

Os modelos de crescimento populacional e epidemiologia podem ser construídos intuitivamente apenas com pensamentos simples, gerando uma reflexão sobre hipóteses e, com ajuda do professor, chegar a respostas, possibilitando a ligação dos conceitos matemáticos com exemplos reais. O professor como agente norteador, deverá fazer questões pertinentes para o início de uma investigação onde, os estudantes, por exemplo, organizados em pequenos grupos, refletem a fim de resolver o problema proposto na discussão inicial. Também é uma boa ideia a criação de um guia de atividades a ser entregue para os alunos, ou para os grupos, contendo etapas, ou perguntas, para que os alunos sejam guiados. Outras perguntas também podem ser elaboradas ou adaptadas de acordo com cada turma/escola (HEIDEMANN; ARAUJO; VEIT, 2016). O guia de atividades também tem papel norteador e possibilita uma maior compreensão dos eventos problematizados. Um exemplo proposto para aplicação (guia de aplicação) da modelagem matemática em aula, foi desenvolvido no apêndice C, onde sugerimos, motivado no tema de epidemiologia, textos e equações a serem escritos em sala, perguntas a serem feitas pelo professor, atividades com os alunos em sala de aula e uma atividade no laboratório de informática usando os softwares Excel ou GeoGebra. Apesar de não ter sido aplicado, principalmente devido a todo o problema gerado pela Pandemia de COVID-19, espera-se que a metodologia proposta possa ser aplicada na sala de aula em trabalhos futuros. A metodologia da aplicação também pode variar bastante. O pré-requisito necessário seria o conhecimento de funções e familiarização com utilização do computador, mas é aconselhado trabalhar com turmas do 2<sup>o</sup> ou 3<sup>o</sup> no do Ensino Médio para que a atividade possa se desenvolver melhor. A ideia principal da aplicação é fazer com que as atividades tragam um maior significado prático ao conteúdo teórico apresentado. Uma preocupação deve ser em utilizar um vocabulário correto, porém, adequado ao público alvo, evitando citar conhecimentos posteriores.

Nos capítulos anteriores, após a construção dos modelos, os mesmos foram resolvidos com métodos algébricos ou numericamente pelo método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, porém, ambas as maneiras não são boas para serem abordadas em uma sala de aula, o que gera a necessidade de buscar um caminho numérico alternativo. A ideia de contornar problemas com equações diferenciais por métodos numéricos parte do princípio de discretizar o problema, considerando que a evolução temporal das variáveis do sistema se dá em intervalos discretos de tempo (BARBOSA; TOVAR; CARVALHES, 2006). Isto significa transformar a variável temporal contínua  $t \in [0, \infty)$  em uma variável discreta  $t_i = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ , onde cada  $t_i$  difere de seu anterior por um valor fixo  $\Delta t$ , ou seja,  $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ , onde  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Esse valor fixo de variação temporal é chamado de passo temporal ou simplesmente de passo. Com o tempo discreto, as demais grandezas dinâmicas também são transformadas em variáveis discretas, calculadas em intervalos pe-

quenos de tempo e finitos. Por exemplo, uma função posição  $x(t)$  passa a ser escrita como  $x_i$ , sendo  $x_0$  a posição no instante  $t_0$ ,  $x_1$  a posição no instante  $t_1$  e assim por diante.

## 5.2 Método das Diferenças Finitas

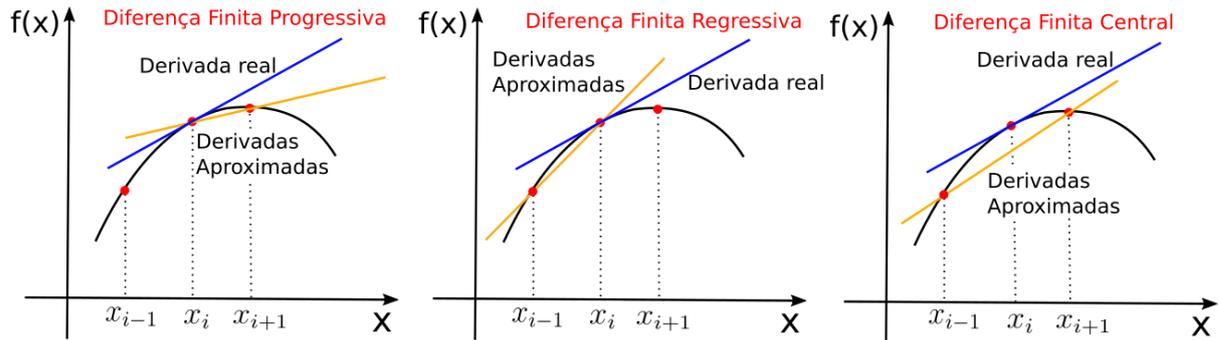
O Método das Diferenças Finitas (MDF) é um método numérico simples, que pode ser utilizado como opção para contornar as derivadas das equações diferenciais, discretizando o problema (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013). A técnica consiste em aproximar a derivada de uma função via reta secante. O que teremos, de fato, é a substituição da derivada pela razão incremental que deverá convergir para o valor da derivada do problema original, ao fazer o incremento tender a zero. Para isso, dividimos um intervalo  $[a, b]$  em subintervalos de mesmo comprimento, cujo tamanho é a diferença entre dois pontos  $x_i$  e  $x_{i+1}$ . Essa constante é chamada de passo e, geralmente, denotada por  $h$ . Assim, podemos definir uma malha de passo  $h$  associada a  $x_0$  como o conjunto de pontos  $x_i = x_0 \pm ih$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . A taxa de variação de uma função  $f$ , num instante  $x_0$  qualquer, é a derivada dessa função em um ponto  $x_0$ . Podemos obter então uma aproximação razoável de  $f'(x_0)$  tomando  $h$  pequeno, conforme mostra a equação (57):

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}. \quad (57)$$

O instrumento fundamental da matemática que nos permite fazer as aproximações para as derivadas é a série de Taylor. Esta relaciona valores da função e suas derivadas, num ponto  $x$ , com valores dessa mesma função numa vizinhança de  $x$ , ou seja,  $y(x + h)$ .

A técnica das diferenças finitas utiliza dois pontos, podendo ser classificado como diferença finita progressiva, regressiva ou central, dependendo da escolha dos pontos tomados para utilização do método. A figura 43 compara as diferentes utilizações do método bem como ilustra a reta tangente (derivada real) em azul e a reta secante em laranja.

Figura 43 - Método das Diferenças Finitas.



Fonte: O Autor, 2021.

Cada um dos modelos estudados anteriormente nesse trabalho pode ser discretizado. Esse método, além de simples, proporciona o benefício de permitir que as equações diferenciais sejam resolvidas, por exemplo, utilizando-se uma planilha do Excel ou o software GeoGebra.

### 5.2.1 Modelo de Malthus Discretizado

Utilizando o Método das Diferenças Finitas na forma regressiva, por exemplo, para resolver o modelo de crescimento de Malthus, adaptamos a definição (57) para essa modelagem. A variação populacional  $\frac{dP}{dt}$  em relação ao tempo  $t$  pode ser aproximada por

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta t}. \quad (58)$$

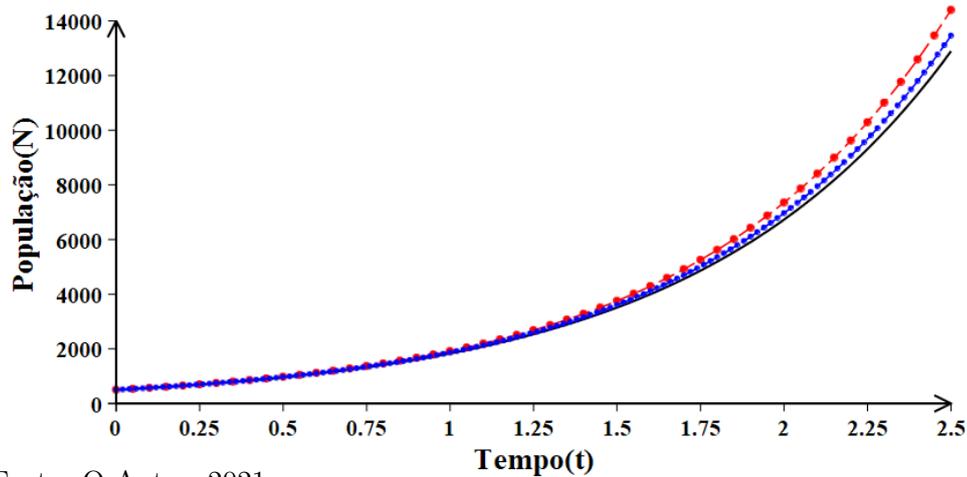
O modelo de Malthus, apresentado anteriormente na forma contínua, passa a ser escrito na forma discreta, utilizando da equação (58). Temos então:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \\ P(0) = P_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta t} = rP_i \\ P(0) = P_0 \end{cases} \implies \begin{cases} P_i = \frac{P_{i-1}}{1 - r\Delta t} \\ P(0) = P_0 \end{cases}. \quad (59)$$

A figura 44 compara a curva obtida resolvendo-se analiticamente (curva em preto), conforme visto na seção 3.1, com as curvas feitas pelo MDF, utilizando-se  $\Delta t = 0,05$  (em vermelho) e  $\Delta t = 0,02$  (em azul). Os parâmetros utilizados foram  $P_0 = 500$  para a condição inicial e  $r = 1,3$  para taxa de crescimento.

Como salientado, quanto menor o valor de  $\Delta t$ , mais a curva obtida pelo método das diferenças finitas se aproxima do resultado analítico.

Figura 44 - Modelo de Crescimento de Malthus - Método das Diferenças Finitas.



Fonte: O Autor, 2021.

### 5.2.2 Modelo de Verhulst Discretizado

Vamos utilizar o Método das Diferenças Finitas na forma progressiva para resolver o modelo de crescimento de Verhulst.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

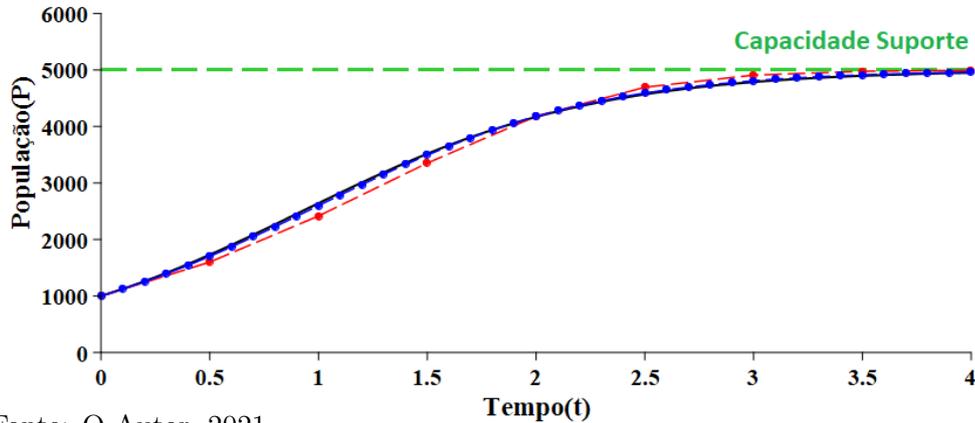
Adaptando a definição (57) para esta modelagem, temos que a variação populacional em relação ao tempo  $t$ ,  $\frac{dP}{dt}$ , pode ser aproximada por

$$\begin{cases} \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} = rP_i \left(1 - \frac{P_i}{K}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \implies \begin{cases} P_{i+1} = rP_i \left(1 - \frac{P_i}{K}\right) \Delta t + P_i \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (60)$$

A figura 45 compara a curva obtida resolvendo-se analiticamente (curva em preto) com as curvas feitas pelo MDF utilizando-se  $\Delta t = 0,05$  (em vermelho) e  $\Delta t = 0,02$  (em azul). Os parâmetros utilizados foram de  $P_0 = 1000$  para a condição inicial,  $r = 1,5$  para a taxa de crescimento e  $K = 5000$  para a capacidade suporte.

A diferença encontrada comparado os resultados do método das diferenças finitas com o resultado analítico, obtido na secção 3.2, é tão pequena que as curvas azul e preta estão praticamente sobrepostas, o que demonstra uma ótima precisão dos resultados.

Figura 45 - Modelo de Verhulst - Método das Diferenças Finitas.



Fonte: O Autor, 2021.

### 5.2.3 Modelo de Lotka-Volterra Discretizado

Analogamente, aplicamos o MDF na forma progressiva para resolver o modelo de crescimento de Lotka-Volterra. A variação de presas  $\frac{dN}{dt}$  e de predadores  $\frac{dP}{dt}$  em relação ao tempo  $t$  pode ser aproximada por

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta P(t)N(t) \\ \frac{dP}{dt} = \delta N(t)P(t) - \gamma P(t) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{N_{i+1} - N_i}{\Delta t} = \alpha N_i - \beta P_i N_i \\ \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} = \delta N_i P_i - \gamma P_i \end{cases} \quad (61)$$

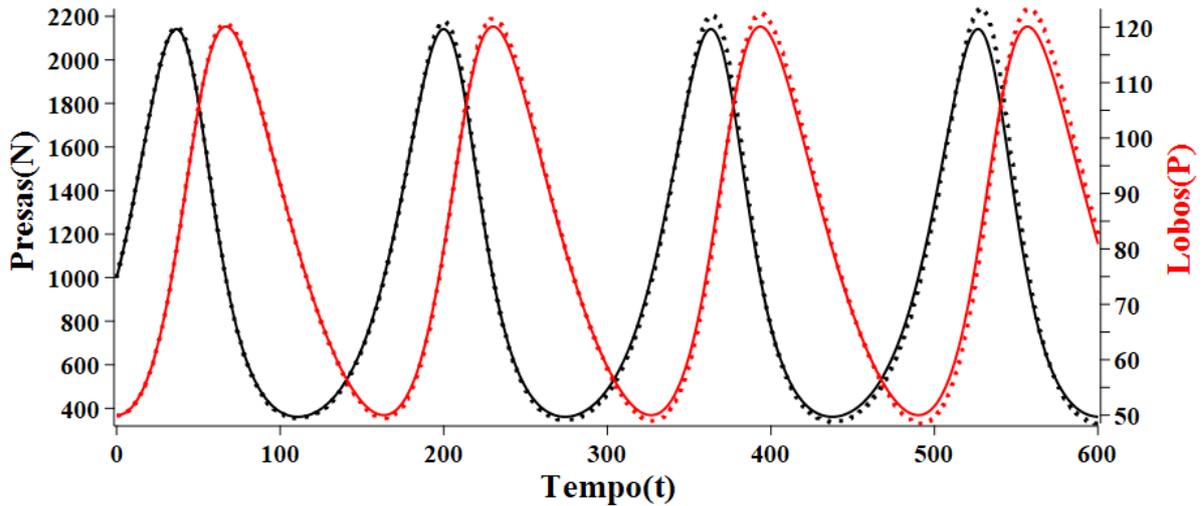
Isolando os termos  $N_{i+1}$  e  $P_{i+1}$ , obtemos:

$$\begin{cases} N_{i+1} = (-N_i P_i \beta + N_i \alpha) \Delta t + N_i \\ P_{i+1} = (N_i P_i \delta - P_i \gamma) \Delta t + P_i \end{cases} \quad (62)$$

A figura 46 ilustra o resultado em eixo duplo e também foram adicionadas curvas (preta e vermelha) sólidas relativas ao resultado obtido pelo método de Runge-Kutta.

A diferença entre os valores obtidos é pequena e os resultados obtidos estão em plena concordância se comparados ao método de Runge-Kutta, apresentado na seção 3.3. Vale comentar que, conforme o tempo avança para valores de  $t$  mais altos, o “erro numérico” no método das diferenças finitas tende a aumentar após o alto número de sucessivas iterações, mas nada que comprometa o resultado do método e esse erro poderia se reduzir para valores menores no incremento.

Figura 46 - Modelo de Lotka-Volterra - MDF Exibido em Eixo Duplo.



Fonte: O Autor, 2021.

#### 5.2.4 Modelo Epidemiológico SIR discretizado

Assim como os modelos de crescimento vistos anteriormente nesse trabalho, que possuem uma ou duas equações diferenciais, os modelos epidemiológicos com três ou mais equações diferenciais podem ser também resolvidos pelo MDF. Discretizando o sistema (24) e resolvendo pelo MDF, vem que

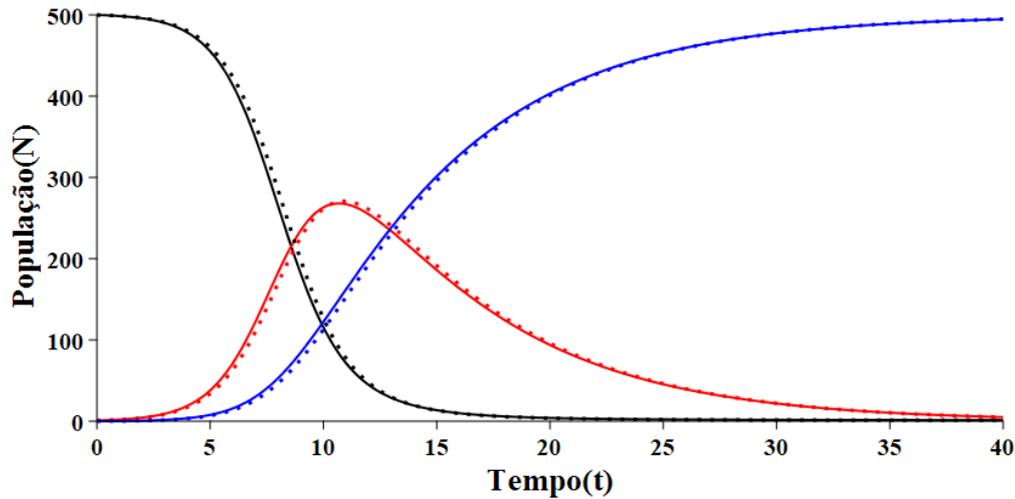
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \\ \frac{dI}{dt} = \alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \beta I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \beta I(t) \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta t} = -\alpha \frac{S_i I_i}{S_i + I_i + R_i} \\ \frac{I_{i+1} - I_i}{\Delta t} = \alpha \frac{S_i I_i}{S_i + I_i + R_i} - \beta I_i \\ \frac{R_{i+1} - R_i}{\Delta t} = \beta I_i \end{array} \right. , \quad (63)$$

onde, isolando os termos  $S_{i+1}$ ,  $I_{i+1}$  e  $R_{i+1}$ , obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{i+1} = -\alpha \frac{S_i I_i \Delta t}{S_i + I_i + R_i} + S_i, \\ I_{i+1} = \left( \alpha \frac{S_i I_i}{S_i + I_i + R_i} - \beta I_i \right) \Delta t + I_i, \\ R_{i+1} = \beta I_i \Delta t + R_i. \end{array} \right. \quad (64)$$

A figura 47 ilustra a discretização (em pontilhado) comparando-a com o resultado obtido pelo Runge-Kutta (linha contínua). Foram utilizados os parâmetros:  $S_0 = 500$ ,  $I_0 = 1$ ,  $R_0 = 0$ ,  $\alpha = 0,9$ ,  $\beta = 0,15$  e passo temporal  $\Delta t = 0,1$ .

Figura 47 - Modelo epidemiológico SIR - Método das Diferenças Finitas.



Fonte: O Autor, 2021.

O resultado foi muito próximo ao obtido pelo método de Runge-Kutta, o que mostra que apesar do MDF ser mais simples, é um método numérico igualmente eficaz. A fim de simplificar um pouco os cálculos efetuados no MDF podemos adotar  $\Delta t = 1$ , bastando apenas aplicar os parâmetros e as condições iniciais ao nosso sistema, fazendo uma substituição simples e direta dos valores, que nos fornece resultados que chamaremos de  $S_1, I_1$  e  $R_1$ , dados por:

$$S_1 = S_0 + S, \quad I_1 = I_0 + I, \quad \text{e} \quad R_1 = R_0 + R. \quad (65)$$

Estes resultados podem ser interpretados como valores obtidos após a primeira etapa de substituição e que, por sua vez, são utilizados para calcular os valores de  $S_2, I_2$  e  $R_2$ , que são os valores obtidos após duas etapas de substituição e assim sucessivamente. Lembrando que os valores de  $S, I$  e  $R$  são oriundos do sistema (24) e, por tanto, as equações (65) são equivalentes a:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 + \left( \frac{-\alpha \cdot S_0 I_0}{S_0 + I_0 + R_0} \right) & I_1 &= I_0 + \left( \frac{\alpha \cdot S_0 I_0}{S_0 + I_0 + R_0} \right) - \beta I_0 & R_1 &= R_0 + (\beta I_0) \\ S_2 &= S_1 + \left( \frac{-\alpha \cdot S_1 I_1}{S_1 + I_1 + R_1} \right) & I_2 &= I_1 + \left( \frac{\alpha \cdot S_1 I_1}{S_1 + I_1 + R_1} \right) - \beta I_1 & R_2 &= R_1 + (\beta I_1) \\ S_3 &= S_2 + \left( \frac{-\alpha \cdot S_2 I_2}{S_2 + I_2 + R_2} \right) & I_3 &= I_2 + \left( \frac{\alpha \cdot S_2 I_2}{S_2 + I_2 + R_2} \right) - \beta I_2 & R_3 &= R_2 + (\beta I_2) \\ &\vdots & &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

$\vdots$ 
 $\vdots$ 
 $\vdots$

continuando até uma  $n$ -ésima iteração, onde temos

$$S_n = S_{n-1} + \left( \frac{-\alpha \cdot S_{n-1} I_{n-1}}{S_{n-1} + I_{n-1} + R_{n-1}} \right),$$

$$I_n = I_{n-1} + \left( \frac{\alpha \cdot S_{n-1} I_{n-1}}{S_{n-1} + I_{n-1} + R_{n-1}} \right) - \beta I_{n-1},$$

$$R_n = R_{n-1} + (\beta I_{n-1}).$$

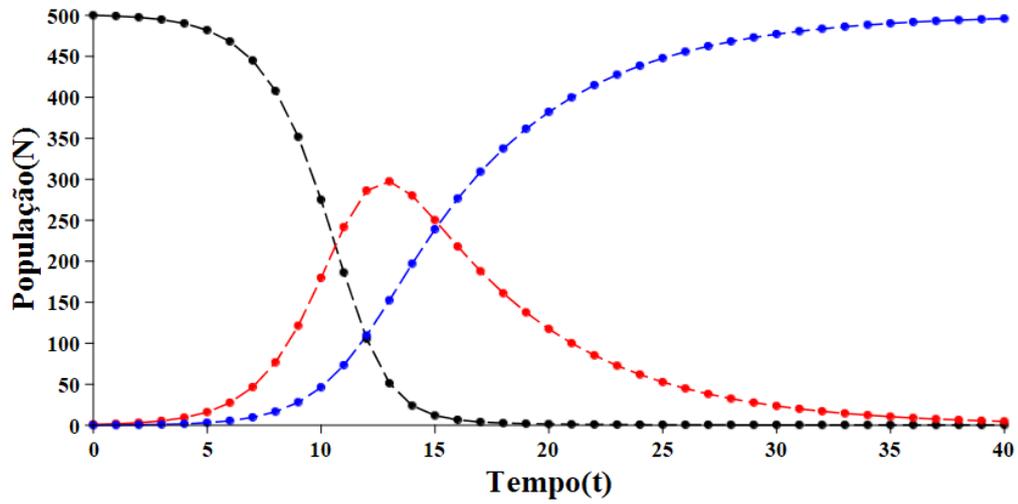
É importante ressaltar também que a solução discreta nos fornece apenas sucessivos pontos que traduzem o comportamento das curvas, conforme as substituições do método avançam. Vamos exemplificar utilizando os parâmetros  $\alpha = 0,9$  e  $\beta = 0,15$  com condições iniciais  $S(0) = S_0 = 500$ ,  $I(0) = I_0 = 1$  e  $R(0) = R_0 = 0$  para o sistema (24). Obtemos então os seguintes valores:

$S_1 = 499,101$	$I_1 = 1,748$	$R_1 = 0,150$
$S_2 = 497,534$	$I_2 = 3,0533$	$R_2 = 0,4122$
$S_3 = 494,805$	$I_3 = 5,324$	$R_3 = 0,870$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_{50} = 0,314$	$I_{50} = 0,923$	$R_{50} = 499,762$

Com esses valores podemos reproduzir as curvas  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$  na forma de pontos. Esses pontos obtidos são ilustrados na figura 48, na qual também foi adicionada uma linha pontilhada ligando os pontos, a fim de gerar uma impressão de continuidade e facilitar a compreensão do comportamento das curvas.

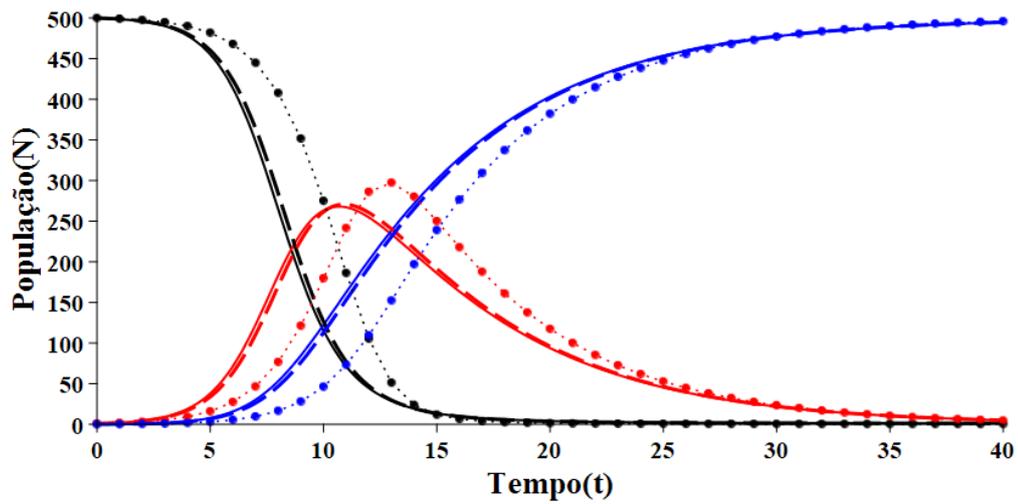
O resultado aparentemente foi bom e parece retratar a realidade, mesmo com  $\Delta t = 1$ . A figura 49 compara os resultados obtidos pelo método do Runge-Kutta (linha sólida), MDF com passo temporal  $\Delta t = 0,1$  (linha tracejada) e o MDF com passo temporal igual a 1 (linha pontilhada), todas usando os mesmos parâmetros de taxa de infecção  $\alpha = 0,9$ , taxa de recuperação  $\beta = 0,15$  e condições iniciais  $S(0) = 500$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$ .

Figura 48 - Solução Discreta do Modelo SIR (Usando  $\Delta t = 1$ ).



Fonte: O Autor, 2021.

Figura 49 - Comparação entre os resultados obtidos.



Fonte: O Autor, 2021.

As curvas sólidas e tracejadas estão muito próximas (quase sobrepostas) devido à boa precisão do passo temporal utilizado no método e, conforme esperado, o resultado final do MDF para o passo temporal  $\Delta t = 1$  é satisfatório, mas não possui a precisão dos métodos numéricos com menor passo temporal e tampouco de um analítico, caso existisse uma função explícita como solução.

### 5.3 Excel na Modelagem

O programa Excel, cujo logo está ilustrado na figura 50, é um dos mais famosos *softwares* de planilhas eletrônicas, amplamente presente em computadores particulares, escolas e universidades. Utilizado para inúmeras finalidades, este *software* é uma boa ferramenta para situações educacionais. Nas subseções que seguem, vamos resolver os modelos de crescimento de Malthus, Verhust e Lotka-Volterra e também o modelo epidemiológico SIR inicial pela técnica de discretização por diferenças finitas, aplicado ao *software* Excel para tratamento dos números, obtenção e exibição dos resultados. Caso o leitor precise de mais detalhes a respeito de como são feitas as planilhas, as informações podem ser encontradas no apêndice D.

Figura 50 - Logo Excel.



Fonte: Google, 2021.

#### 5.3.1 Modelo de Malthus no Excel

Uma vez escrito na forma discreta (59), o modelo pode ser resolvido de maneira simples utilizando-se uma planilha do *software* Excel. Mostramos a seguir a construção passo a passo de uma planilha, utilizando o parâmetro  $r = 1,3$ , a condição inicial  $P_0 = 500$  e o passo temporal de 0,05.

- Nas Células A1, A2 e A3 digitam-se: “Condição inicial”, “ $r$ ” e “ $\Delta t$ ”.
- Nas Células B1, B2 e B3 digitam-se os respectivos valores da condição inicial do parâmetro  $r$  e do passo  $\Delta t$ .
- Nas Células D1 e E1 digitam-se: “Tempo” e “Função”.
- Nas Células D2 e E2 colocamos os valores do tempo inicial e da condição inicial.
- Na Célula D3 digita-se:  $D2+\$B\$3$ .
- Na Célula E3 digita-se:  $E2/(1-\$B2\$ * \$B3\$)$ .

- Para Finalizar, arraste as células D3 e E3 para baixo.

A figura 51 ilustra a construção após execução dos passos acima.

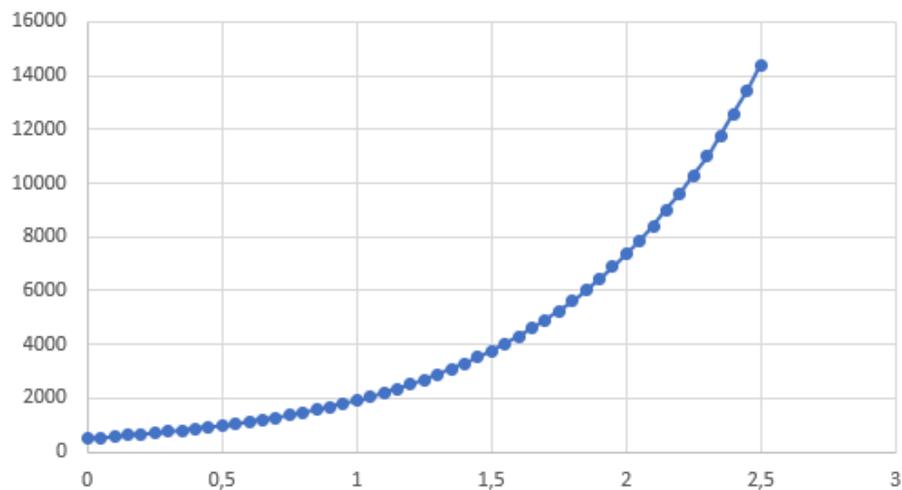
Figura 51 - Modelo de Malthus utilizando planilha do Excel.

	A	B	C	D	E
1	<b>Condição Inicial</b>	500		<b>Tempo</b>	<b>Função</b>
2	<b>r</b>	1,3		0	500
3	<b>Delta t</b>	0,05		0,05	534,7594
4				0,1	571,9351
5				0,15	611,6953

Fonte: O Autor, 2021.

Selecionando todos os dados obtidos, podemos inserir um gráfico dinâmico gerado pelo Excel. A figura 52 ilustra o gráfico para os parâmetros escolhidos.

Figura 52 - Gráfico para o Modelo de Malthus - Excel.



Fonte: O Autor, 2021.

### 5.3.2 Modelo de Verhulst no Excel

De forma análoga, o modelo de Verhulst pode ser feito na forma de planilha utilizando-se a forma discretizada em (60). A seguir mostramos a construção passo a passo de uma planilha utilizando os parâmetro  $r = 1,5$ , condição inicial  $P_0 = 1000$ , constante de capacidade  $K = 5000$  e passo temporal  $\Delta t = 0,05$ .

- Nas Células A1, A2, A3 e A4 digitam-se: “Condição inicial”, “ $r$ ”, “ $\Delta t$ ” e “ $K$ ”.
- Nas Células B1, B2, B3 e B4 digitam-se os respectivos valores da condição inicial, do parâmetro  $r$ , do passo temporal  $\Delta t$  e da constante de capacidade  $K$ .
- Nas Células D1 e E1 digitam-se: “Tempo” e “Função”.
- Nas Células D2 e E2 colocamos os valores do tempo inicial e da condição inicial.
- Na Célula D3 digita-se:  $D2 + \$B\$3$ .
- Na Célula E3 digita-se:  $E2 + \$B\$3 * \$B\$2 * \$E\$2 * (1 - E2 / \$B\$4)$ .
- Para Finalizar, arraste as células D3 e E3 para baixo.

A figura 53 ilustra a construção após execução dos passos acima.

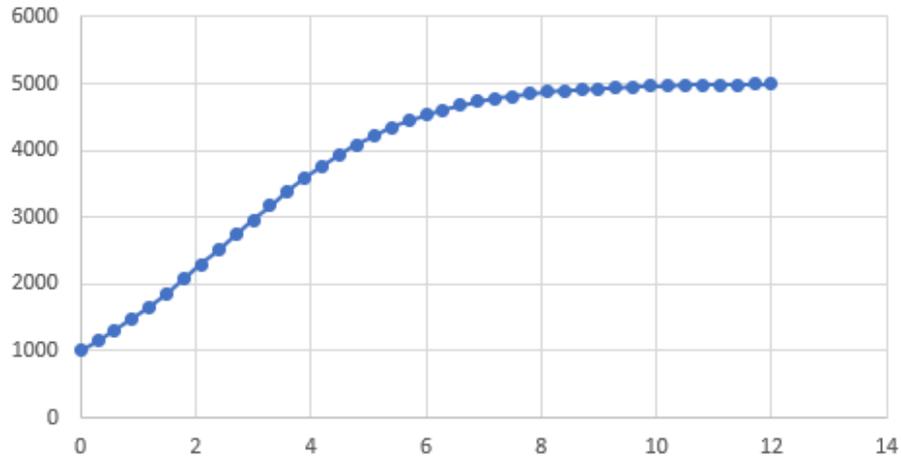
Figura 53 - Modelagem de Verhulst utilizando planilha do Excel.

	A	B	C	D	E
1	<b>Condição Inicial</b>	1000		<b>Tempo</b>	<b>Função</b>
2	<b>r</b>	0,6		0	1000
3	<b>Delta t</b>	0,3		0,3	1144
4	<b>K</b>	5000		0,6	1302,806
5				0,9	1476,208
6				1,2	1663,474

Fonte: O Autor, 2021.

Selecionando todos os dados obtidos, podemos inserir um gráfico dinâmico gerado pelo Excel. A figura 54 ilustra o gráfico para os parâmetros escolhidos.

Figura 54 - Gráfico para o Modelo de Verhulst - Excel.



Fonte: O Autor, 2021.

### 5.3.3 Modelo de Lotka-Volterra no Excel

De forma análoga, o modelo de Lotka-Volterra pode ser feito na forma de planilha utilizando-se a forma discretizada em (62). A seguir mostramos a construção passo a passo de uma planilha utilizando os parâmetros  $\alpha = 0,08$ ,  $\beta = 0,001$ ,  $\delta = 0,00002$ ,  $\gamma = 0,02$ , as condições iniciais  $N_0 = 1000$  e  $P_0 = 50$  e passo temporal  $\Delta t = 0,15$ .

- Nas Células A1, A2, A3, A4, A5, A6 e A7 digitam-se: “Condição inicial Presas”, “Condição Inicial Predadores”, “Alfa”, “Beta”, “Delta”, “Gama” e “Delta t”.
- Nas Células B1, B2, B3, B4, B5, B6 e B7 digitam-se os respectivos valores das condições iniciais  $N_0$  e  $P_0$ , dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  e do passo temporal  $\Delta t$ .
- Nas Células D1, E1 e F1 digitam-se: “Tempo”, “Presas” e “Predadores”.
- Nas Células D2, E2 e F2 colocamos os valores do tempo inicial e das condições iniciais.
- Na Célula D3 digita-se:  $=D2+\$B\$7$ .
- Na Célula E3 digita-se:  $=(-E2*F2*\$B\$4+E2*\$B\$3)*\$B\$7+E2$ .
- Na Célula F3 digita-se:  $=(E2*F2*\$B\$5-F2*\$B\$6)*\$B\$7+F2$ .
- Para Finalizar, arraste as células D3, E3 e F3 para baixo.

A figura 55 ilustra a construção da planilha após execução dos passos elencados.

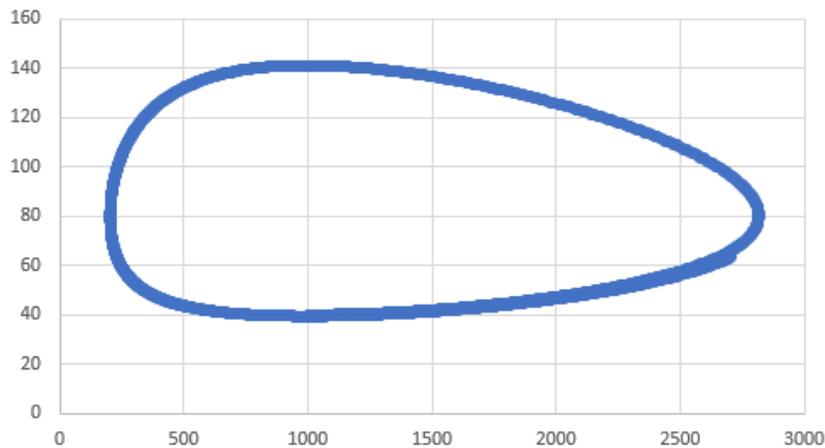
Figura 55 - Modelagem de Lotka-Volterra utilizando Planilha do Excel.

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Condição Inicial Presas</b>	1000		<b>Tempo</b>	<b>Presas</b>	<b>Predadores</b>
2	<b>Condição Inicial Predadores</b>	50		0	1000	40
3	<b>Alfa</b>	0,08		0,15	1006	40
4	<b>Beta</b>	0,001		0,3	1012,036	40,00072
5	<b>Delta</b>	0,00002		0,45	1018,108	40,0021643
6	<b>Gama</b>	0,02		0,6	1024,216	40,0043374
7	<b>Delta t</b>	0,15		0,75	1030,361	40,0072437
8				0,9	1036,542	40,0108877

Fonte: O Autor, 2021.

Selecionando todos os dados obtidos, podemos inserir um gráfico dinâmico gerado pelo Excel. A figura 56 ilustra o gráfico para os parâmetros escolhidos.

Figura 56 - Gráfico para o Modelo de Lotka-Volterra - Excel.



Fonte: O Autor, 2021.

Conforme visto acima o Excel consegue gerar gráficos do tipo “Presas  $\times$  Predador”, o que pode ser bem útil para mostrar aos alunos o ciclo de Lotka-Volterra presente nessa modelagem.

#### 5.3.4 Modelo Epidemiológico SIR no Excel

Mostramos a seguir a construção passo a passo de uma planilha utilizando os parâmetros  $\alpha = 0,9$ ,  $\beta = 0,15$ , com as condições iniciais  $S_0 = 500$ ,  $I_0 = 1$ ,  $R_0 = 0$  e passo temporal  $\Delta t = 0,1$ .

- Nas Células A1, A2, A3, A4, A5 e A6 digitam-se: “Condição inicial Suscetíveis”,

“Condição Inicial Infectados”, “Condição Inicial Recuperados”, “Alfa”, “Beta” e “Delta t”.

- Nas Células B1, B2, B3, B4, B5 e B6 digitam-se os respectivos valores das condições iniciais  $S_0$ ,  $I_0$ ,  $R_0$ , dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e do passo temporal  $\Delta t$ .
- Nas Células D1, E1, F1 e G1 digitam-se: “Tempo”, “Suscetíveis”, “Infectados” e “Recuperados”.
- Nas Células D2, E2, F2 e G2 colocamos os valores do tempo inicial e das condições iniciais.
- Na Célula D3 digitam-se:  $=D2+\$B\$6$ .
- Na Célula E3 digitam-se:  $=(-\$B\$4*E2*F2*\$B\$6)/(E2+F2+G2)+E2$ .
- Na Célula F3 digitam-se:  $=(\$B\$4*E2*F2/(E2+F2+G2)-\$B\$5*F2)*\$B\$6+F2$ .
- Na Célula G3 digitam-se:  $=F2*\$B\$5*\$B\$6+G2$ .
- Para Finalizar, arraste as células D3, E3, F3 e G3 para baixo.

A figura 57 ilustra a construção da planilha após execução dos passos elencados.

Figura 57 - Modelagem SIR utilizando Planilha do Excel.

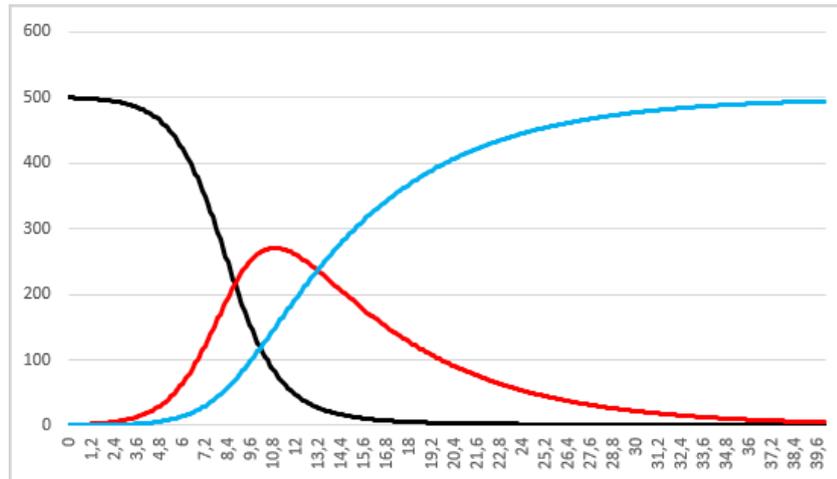
	A	B	C	D	E	F	G
1	Condição Inicial Suscetíveis	500		Tempo	Suscetíveis	Infectados	Recuperados
2	Condição Inicial Infectados	1		0	500	1	0
3	Condição Inicial Recuperados	0		0,1	499,91018	1,07482036	0,015
4	Alfa	0,9		0,2	499,813656	1,15522146	0,031122305
5	Beta	0,15		0,3	499,709932	1,24161688	0,048450627
6	Delta t	0,1		0,4	499,598475	1,3344504	0,06707488
7				0,5	499,47871	1,4341982	0,087091636

Fonte: O Autor, 2021.

Selecionando todos os dados obtidos, podemos inserir um gráfico dinâmico gerado pelo Excel. A figura 58 ilustra o gráfico para os parâmetros escolhidos.

Ao se alterar os parâmetros para as constantes de infecção e recuperação podemos mostrar as alterações no gráfico para os alunos. Uma constante de infecção maior significa um pico maior de infecção ou, no caso contrário, o achatamento da curva de infecção. Apesar de neste trabalho termos feito apenas para o modelo epidemiológico SIR, todos os outros modelos poderiam também serem feitos pelo Excel. Na seguir a seguir veremos que também podemos utilizar o *software* GeoGebra para auxiliar aplicação da modelagem em sala de aula.

Figura 58 - Gráfico para o Modelo SIR - Excel.



Fonte: O Autor, 2021.

#### 5.4 GeoGebra na Modelagem

O programa GeoGebra, cujo logo é ilustrada na figura 59, é um principais e mais conhecidos *softwares* matemáticos. Amplamente utilizado para fins educacionais em todo o mundo, o GeoGebra é um *software* livre que permite manipular a álgebra e a geometria de maneira dinâmica, sendo uma ferramenta educacional importante e amplamente utilizada em colégios e universidades. A utilização do GeoGebra traz benefícios em relação ao Excel por ser um *software* com uma interface gráfica mais bonita e dinâmica, além de contar com uma maior disponibilidade de ferramentas como, por exemplo, funções matemáticas que se alteram baseadas em parâmetros feitos com controles deslizantes e textos posicionados (e reposicionados) automaticamente por coordenadas, que tornam o resultado final bastante bonito e atrativo aos alunos.

Para fazer as modelagens propostas nos capítulos anteriores, utilizaremos a discretização dos modelos e o principal recurso utilizado será a planilha do GeoGebra. O procedimento possui similaridade com o que foi feito anteriormente no Excel.

Apesar as inúmeras vantagens, uma desvantagem em relação ao Excel é a necessidade de conhecimentos mais avançados do *software* para que sejam construídos os devidos gráficos. São necessários comandos importantes, além de toda uma lógica de programação para fazer com que o programa funcione de maneira adequada. Dificilmente uma pessoa seria capaz de montar a modelagem proposta sem conhecimento prévio do *software*. É recomendado que, para fins educativos, os estudantes apenas manipulem e analisem o programa já previamente construído contendo a modelagem.

Para realizar o nosso estudo, configuramos o GeoGebra para exibir a ferramenta de planilha, feito pelo menu “exibir”, conforme ilustra a figura 60. Caso o leitor precise

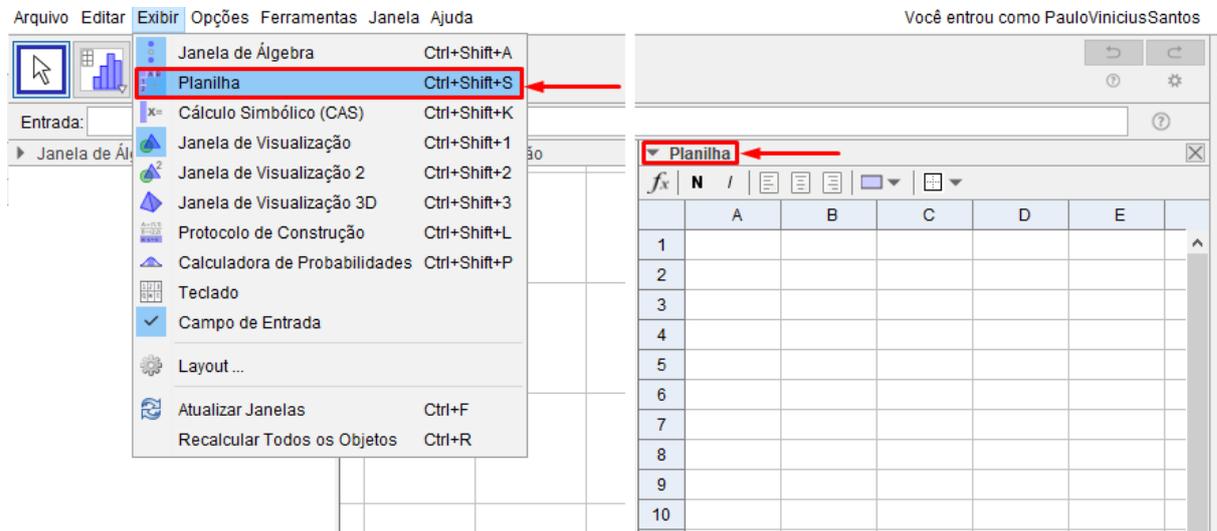
Figura 59 - Logo GeoGebra.



Fonte: Google, 2021.

de mais detalhes a respeito de como são feitos os programas no GeoGebra, as informações podem ser encontradas no apêndice E.

Figura 60 - Exibir Planilha do GeoGebra.



Fonte: O Autor, 2021.

O GeoGebra possui um sistema de armazenamento, edição e distribuição de trabalhos na nuvem, conhecido como “materiais do GeoGebra”. Essa funcionalidade permite fazer o upload de um arquivo feito previamente, diretamente no servidor próprio do GeoGebra e disponibilizá-lo para outras pessoas através de um link. Os modelos estudados nesse trabalho foram construídos e os links dos arquivos estão nas subseções que seguem.

#### 5.4.1 Modelo de Malthus

Utilizando a mesma ideia anterior de discretização de modelos, temos:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \\ P(0) = P_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta t} = rP_i \\ P(0) = P_0 \end{cases} \implies \begin{cases} P_i = \frac{P_{i-1}}{1 - r\Delta t} \\ P(0) = P_0 \end{cases} .$$

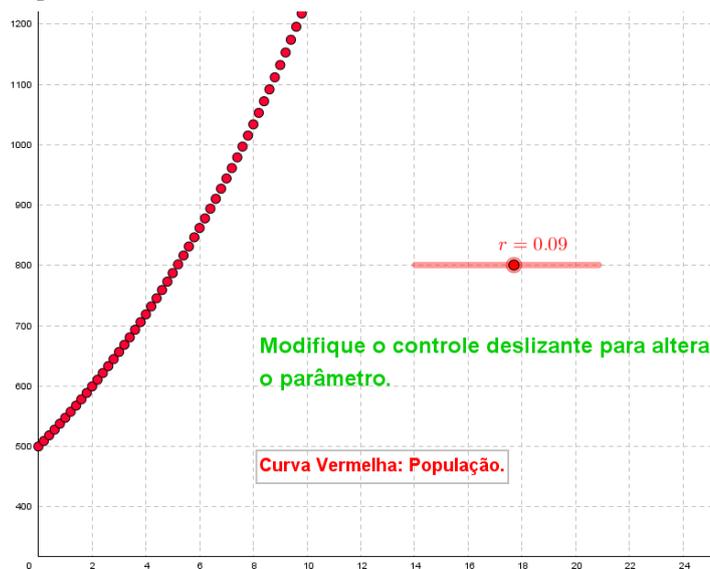
Este problema, uma vez escrito na forma discreta, pode ser resolvido e estudado utilizando-se o *software* GeoGebra. Vejamos a seguir, de maneira resumida, os principais passos da construção no GeoGebra.

- Criar uma variável  $h = 0,2$  (Será o passo temporal).
- Criar um controle deslizante  $r$ , respectivo ao parâmetro do coeficiente de crescimento populacional do modelo.
- Nas células A1 e B1 digitam-se: “ $t$ ” e “ $P_0$ ”, respectivamente.

- Nas células A2 e B2 digitam-se: “0” e “500”, respectivamente (Tempo inicial e População inicial escolhida).
- Nas células A3 e B3 digitam-se: “=A2+h” e “=B2/(1 - r\*h)”, respectivamente.
- Puxar as células A3 e B3 para baixo até o tempo desejado. Neste trabalho foi escolhido o tempo  $t = 80$ , relativo a célula A402.
- Selecionar da célula B2 até a última, no caso B402, e criar uma lista com os dados (Clicar com o botão direito na seleção > Criar > Lista).
- Criar o conjunto de pontos através do comando: “Sequência((Tempo(i), População(i)), i, 1, Comprimento(População), 1)”.

Além desses passos, foram adicionados textos e alterados os tamanhos das fontes e cores para tornar o arquivo mais atrativo. A figura 61 ilustra o resultado final obtido.

Figura 61 - Modelo de Malthus feito no GeoGebra.



Fonte: O Autor, 2021.

Uma vez construído, o arquivo pode ser colocado na nuvem do GeoGebra e distribuído através de um link. Para visualizar a construção feita para o modelo de Malthus acesse o link: <https://www.geogebra.org/m/v3qskpb5>. O link permite fazer a manipulação do parâmetro  $r$  (relativo a taxa de crescimento populacional) para que se possa estudar a mudança do comportamento da curva conforme o parâmetro se altera.

### 5.4.2 Modelo de Verhulst

Mantendo a discretização do modelo de Verhulst visto anteriormente, e dada por

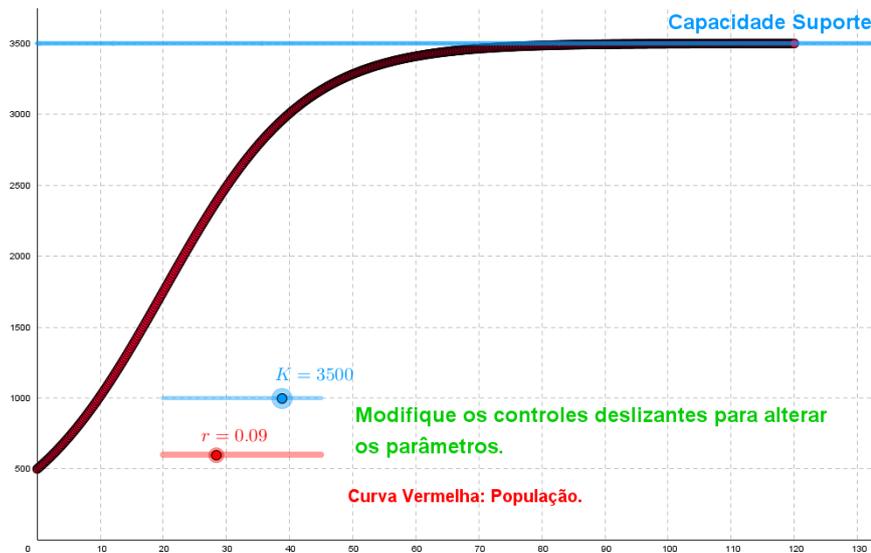
$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} = rP_i \left(1 - \frac{P_i}{K}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \implies \begin{cases} P_{i+1} = rP_i \left(1 - \frac{P_i}{K}\right) \Delta t + P_i \\ P(0) = P_0, \end{cases}$$

pode ser resolvido e estudado utilizando-se o *software* GeoGebra. Vejamos a seguir, de maneira resumida, os principais passos da construção no GeoGebra.

- Criar uma variável  $h = 0,2$  (Será o passo temporal).
- Criar dois controles deslizantes  $r$  e  $K$ , correspondentes aos parâmetros de coeficiente do crescimento populacional e capacidade suporte.
- Nas células A1 e B1 digitam-se: “ $t$ ” e “ $P_0$ ”, respectivamente.
- Nas células A2 e B2 digitam-se: “0” e “500”, respectivamente (Tempo inicial e População inicial escolhida).
- Nas células A3 e B3 digitam-se: “ $=A2+h$ ” e “ $=r*B2*(1-B2/K)*h+B2$ ”, respectivamente.
- Puxar as células A3 e B3 para baixo até o tempo desejado. Neste trabalho foi escolhido o tempo  $t = 120$ , relativo a célula A602.
- Selecionar da célula B2 até a última, no caso B602, e criar uma lista com os dados (Clicar com o botão direito na seleção > Criar > Lista).
- Criar o conjunto de pontos através do comando: “Sequência((Tempo(i), População(i)), i, 1, Comprimento(População), 1)”.
- Criar texto “Capacidade Suporte” para que se mova de maneira interativa pelo comando: Texto(“Capacidade Suporte”, (85,  $K + 100$ )).

Além desses passos, foram adicionados textos informativos e alterados os tamanhos das fontes, tamanho dos pontos exibidos e cores para tornar o arquivo mais atrativo. A figura 62 ilustra o resultado final obtido.

Figura 62 - Modelo de Verhulst feito no geogebra.



Fonte: O Autor, 2021.

Uma vez construído, o arquivo pode ser colocado na nuvem do GeoGebra e distribuído através de um link. Para visualizar a construção feita para o modelo de Verhulst, acesse o link <https://www.geogebra.org/m/qv6vnrf3>.

O link permite fazer a manipulação do parâmetro para que se possa estudar a mudança do comportamento da curva conforme o parâmetro se altera.

#### 5.4.3 Modelo de Lotka-Volterra

A discretização do modelo de Lotka-Volterra visto anteriormente, e dada por

$$\begin{cases} N_{i+1} = (-N_i P_i \beta + N_i \alpha) \Delta t + N_i \\ P_{i+1} = (N_i P_i \delta - P_i \gamma) \Delta t + P_i \end{cases},$$

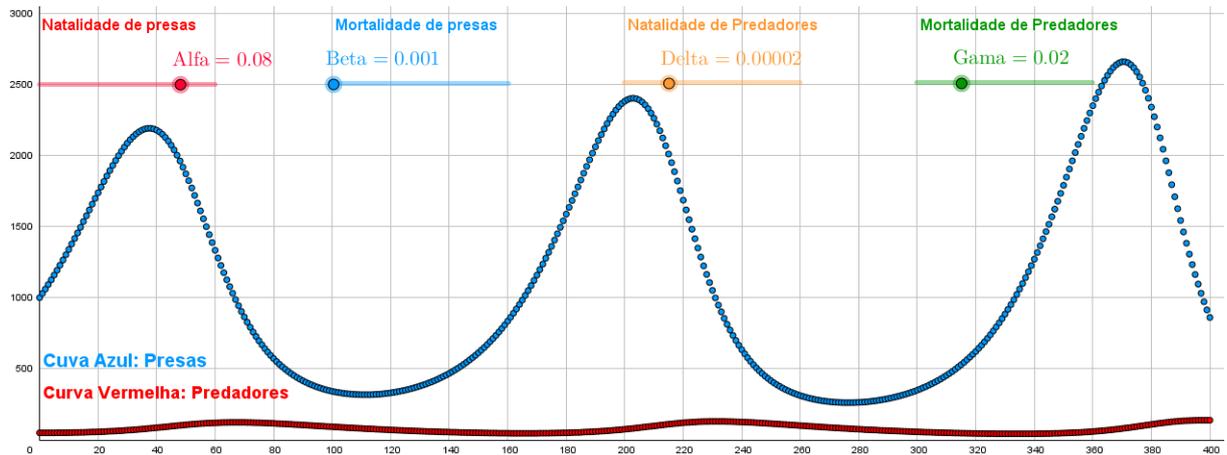
pode ser resolvido e estudado utilizando-se o *software* GeoGebra. Vejamos a seguir, de maneira resumida, os principais passos da construção no GeoGebra.

- Criar uma variável  $h = 1$  (Será o passo temporal).
- Criar quatro controles deslizantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  e  $\gamma$ , respectivos aos parâmetros de: Taxa de natalidade das presas, taxa de mortalidade das presas, taxa de natalidade de novos predadores e taxa de mortalidade de predadores.
- Nas células A1, B1, C1 e D1 digitam-se: “ $t$ ”, “ $S_0$ ”, “ $I_0$ ” e “ $R_0$ ” respectivamente.

- Nas células A2, B2, C2 e D2 digitam-se os valores: “0”, “500”, “1” e “0” respectivamente (Condições iniciais).
- Na célula A3 digitam-se: “=A2+h”.
- Na célula B3 digitam-se: “= $(-\alpha*B2*C2)/(B2+C2+D2)*h+B2$ ”.
- Na célula C3 digitam-se: “= $((\alpha*B2*C2)/(B2+C2+D2)-\beta*C2)*h+C2$ ”.
- Na célula D3 digitam-se: “= $\beta*C2*h+D2$ ”.
- Puxar as células A3, B3 e C3 para baixo até o tempo desejado. Neste trabalho foi escolhido o tempo  $t = 400$ , relativo a célula A402.
- Selecionar das células B2 e C2 até a última, no caso B402 e C402 e criar uma lista com os dados (Clicar com o botão direito na seleção > Criar > Lista).
- Renomear as duas listas feitas no passo anterior para “Presas” e “Predadores” (Respectivo a cada uma das listas criadas).
- Criar a sequência relativa ao tempo, pelo comando: Sequência(i\*h, i, 0, 600, 1). Renomeie essa sequência criada como “Tempo”.
- Criar o conjunto de pontos através do comando: “Sequência((Tempo(i), Suscetíveis(i)), i, 1, Comprimento(Presas), 1)”.
- Criar o conjunto de pontos através do comando: “Sequência((Tempo(i), Infectados(i)), i, 1, Comprimento(Predadores), 1)”.

Além desses passos, foram adicionados textos informativos e alterados os tamanhos das fontes, tamanho dos pontos exibidos e cores para tornar o arquivo mais atrativo. A figura 63 ilustra o resultado final obtido.

Figura 63 - Modelo SIR feito no GeoGebra.



Fonte: O Autor, 2021.

Uma vez construído, o arquivo pode ser colocado na nuvem do GeoGebra e distribuído através de um link. Para visualizar a construção feita para o modelo de Lotka-Volterra, acesse o link (<https://www.geogebra.org/m/v4b9rppd>).

#### 5.4.4 Modelo SIR

A discretização do modelo SIR visto anteriormente, e dada por

$$\begin{cases} S_{i+1} = -\alpha \frac{S_i I_i \Delta t}{S_i + I_i + R_i} + S_i, \\ I_{i+1} = \left( \alpha \frac{S_i I_i}{S_i + I_i + R_i} - \beta I_i \right) \Delta t + I_i, \\ R_{i+1} = \beta I_i \Delta t + R_i, \end{cases}$$

pode ser resolvido e estudado utilizando-se o *software* GeoGebra. Vejamos a seguir, de maneira resumida, os principais passos da construção no GeoGebra.

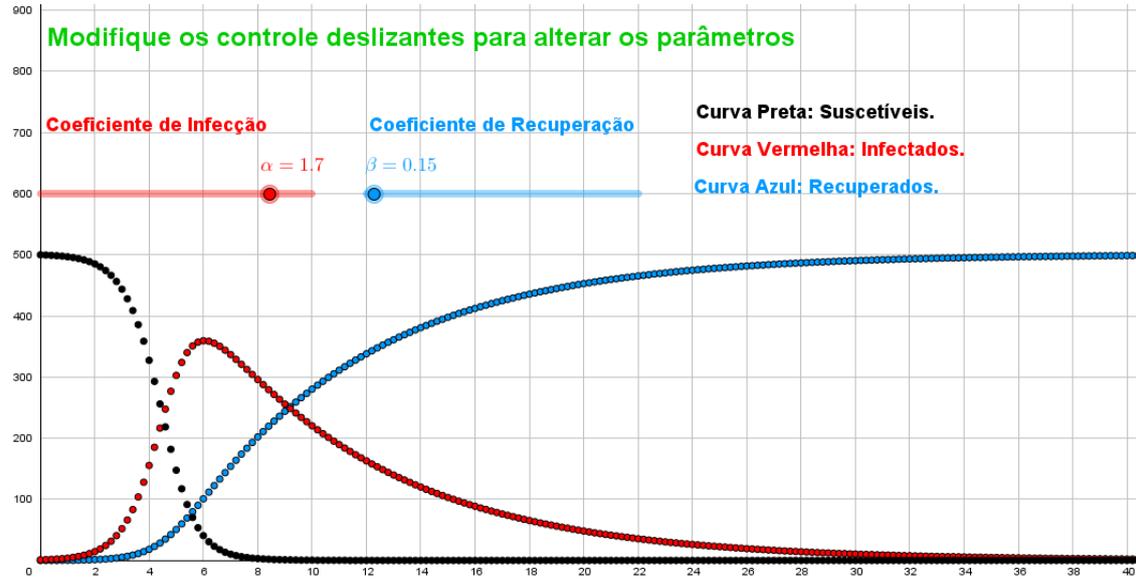
- Criar uma variável  $h = 0,2$  (Será o passo temporal).
- Criar dois controles deslizantes  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivos aos parâmetros da taxa de transmissão e taxa de recuperação.
- Nas células A1, B1, C1 e D1 digitam-se: “ $t$ ”, “ $S_0$ ”, “ $I_0$ ” e “ $R_0$ ” respectivamente.
- Nas células A2, B2, C2 e D2 digitam-se os valores: “0”, “500”, “1” e “0” respecti-

vamente (Condições iniciais).

- Na célula A3 digitam-se: “=A2+h”.
- Na célula B3 digitam-se: “=(-(α\*B2\*C2)/(B2+C2+D2)\*h+B2”.
- Na célula C3 digitam-se: “=((α\*B2\*C2)/(B2+C2+D2)- β\*C2)\*h+C2”.
- Na célula D3 digitam-se: “=β\*C2\*h+D2”.
- Puxar as células A3, B3, C3 e D3 para baixo até o tempo desejado. Neste trabalho foi escolhido o tempo  $t = 80$ , relativo a célula A402.
- Selecionar das células B2, C2 e D2 até a última, no caso B402, C402 e D402, e criar uma lista com os dados (Clicar com o botão direito na seleção > Criar > Lista).
- Renomear as três listas feitas no passo anterior para: Suscetíveis, Infectados e Recuperados (Respectivo a cada uma das listas criadas).
- Criar a sequência relativa ao tempo, pelo comando: Sequência(i\*h, i, 0, 400, 1). Renomeie essa sequência criada como “Tempo”.
- Criar o conjunto de pontos através do comando: “Sequência((Tempo(i), Suscetíveis(i)), i, 1, Comprimento(Suscetíveis), 1)”.
- Criar o conjunto de pontos através do comando: “Sequência((Tempo(i), Infectados(i)), i, 1, Comprimento(Infectados), 1)”.
- Criar o conjunto de pontos através do comando: “Sequência((Tempo(i), Recuperados(i)), i, 1, Comprimento(Recuperados), 1)”.

Além desses passos, foram adicionados textos informativos e alterados os tamanhos das fontes, tamanho dos pontos exibidos e cores para tornar o arquivo mais atrativo. A figura 64 ilustra o resultado final obtido. Para visualizar na nuvem a construção feita para o modelo SIR, acesse o link: <https://www.geogebra.org/m/r2dpctzt>.

Figura 64 - Modelo SIR feito no geogebra.



Espera-se que, apesar de aplicado a um número restrito de modelos, possa-se ter passado ao leitor a ideia que todos os outros modelos matemáticos vistos nesse trabalho podem ser feitos e manipulados de maneira análoga no GeoGebra. Bastante dinâmico e intuitivo, o GeoGebra é uma boa ferramenta disponível para fins educacionais e diversos outros modelos matemáticos sobre outros assuntos quaisquer da ciência/natureza podem também ser estudados e analisados por este *software*.

## CONCLUSÃO

Em diversos tópicos desse trabalho conseguimos ver a realidade escrita em termos de matemática e é essa a mensagem que gostaríamos de passar ao leitor: o contexto do dia a dia abordado com teorias e escrito com equações. Buscou-se escrever um trabalho com mais temas atuais e menos exemplos fictícios, a fim de se despertar o interesse dos alunos, e para isso a modelagem matemática possui a grande vantagem de ser a matemática aplicada à vida. A ideia de se aplicar a modelagem na educação, é criar um ambiente questionador e colaborador, fazendo com que os alunos reflitam e criem hipóteses sobre fenômenos da vida real, tirando o aluno da posição de conforto e o levar a ser protagonista na construção do seu próprio conhecimento. Diversos autores citados nesse trabalho, como Burak, Biembengut e Bassanezi, concordam que a modelagem deve ser aplicada à educação e aproveitada em sala de aula, sendo uma ferramenta para criação de uma consciência crítico-reflexiva, contribuindo na relação entre a matemática e a sociedade.

Muitos professores pensam na realidade como algo muito complexo e por isso preferem manter suas aulas apenas na (monótona) teoria. De fato, a realidade é muito complexa, contudo, conforme visto nesse trabalho, podemos nos ater apenas às características principais, buscando simplificações que são úteis e com pouca perda de precisão sobre a realidade em si, sendo possível entender e explicar as principais características dos modelos de crescimento populacional e epidemiologia. Essa ideia de construção de modelos simplistas também pode ser estendida a outros inúmeros temas da natureza, e aplicados a favor da educação.

Na solução dos modelos propostos, as soluções algébrica e numéricas pelo método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem são um pouco mais complicadas de serem abordadas no ensino, contudo, as soluções pelo métodos das diferenças finitas são bem mais simples, pois são feitas por recorrência e podem ser aplicadas em planilhas do Excel e do GeoGebra, que importantes ferramentas auxiliadoras na compreensão dos gráficos elaborados nos modelos. Esperamos que o objetivo de proporcionar ideias a respeito da modelagem ser aplicada no ensino de matemática tenha sido atingido e que esse trabalho possa inspirar novas e melhores ideias, ajudando a professores no caminho de modernização da educação.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, A. C.; TOVAR, M. V. C.; CARVALHES, C. G. A computação numérica como ferramenta para o professor de física do ensino médio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, p. 249–254, 2006.
- BARROS, O. J. M. *Ensino de Modelos Exponenciais por meio de Modelagem Matemática*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2020.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009.
- \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009, p. 38.
- BASSANEZI, R. C.; BERTONE, A. M. A.; JAFELICE, R. S. M. *Modelagem Matemática*. 3. ed. Minas Gerais: Universidade Federal de Uberlândia, 2014, p. 9. 9 p. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25315/1/Modelagem%20Matem%C3%A1tica.pdf>.
- BATISTELA, C. M.; CORREA, P.F; PIQUEIRA, R.C. Sirsi compartmental model for covid-19 pandemic with immunity loss. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020.
- BATISTELA, C. M.; PIQUEIRA, R.C. Nota técnica para covid-19 usando modelo sir. *Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*, 2020.
- BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2014, p. 11.
- \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2014, p. 9.
- BIEMBENGUT, M. S. *30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais*. Rio de Janeiro: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2009. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939/28967>.
- BRANDER, J. A.; TAYLOR, M. S. The simple economics of easter island: A ricardo-malthus model of renewable resource use. *The American Economic Review*, v. 88, p. 119–138, 1998.
- BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases*. Brasília: Ministério da Educação, 1996. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/Leis/L9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm).
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)*. Brasília: Ministério da Educação, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>.
- \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. Brasília: Ministério da Educação, 1998, p. 41. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>.

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. Brasília: Ministério da Educação, 1998, p. 69. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: Ministério da Educação, 2017. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_20dez\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf)).

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. Brasília: Ministério da Educação, 2017, p. 264. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_20dez\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf)).

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. Brasília: Ministério da Educação, 2017, p. 531. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_20dez\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf)).

BRONSON, R.; COSTA, G. *Equações Diferenciais*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

BURAK, D. *Modelagem matemática: Ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BURAK, D. *Modelagem matemática: Ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992, p. 62.

CABRERA, A.M; BATISTELA, C. M; PIQUEIRA, R.C. Covid-19: Estudo da imunização usando o modelo sir. *Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*, 2020.

CALDAS, M. A. T. *Modelagem no Ensino Médio: Ajuste de curvas epidemiológicas por funções elementares*. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. Uma interpretação epistemológica do processo de modelagem matemática: implicações para a matemática. *Boletim de Educação Matemática*, v. 26, p. 791–815, 2012.

CUMINATO, J.A; MENEGUETTE, M. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnica de diferenças Finitas*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 1.

D'AMBROSIO, U; MACHADO, N. J. *Ensino de Matemática: Pontos e Contrapontos*. 3. ed. São Paulo: Summus Editorial, 2014.

DELMAS, B. Pierre-françois verhulst et la loi logistique de la population. *Mathématiques et sciences humaines*, v. 88, p. 51–81, 2004. Disponível em: <https://journals.openedition.org/msh/pdf/2893>).

DENTAMARO, A. A. *Estudo da evolução de modelos de crescimento populacional e métodos para obtenção de parâmetros*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade Estadual Paulista, 2019.

FERREIRA, A. S. *A Modelagem Matemática Aplicada ao Estudo da Geometria Plana e Espacial: Área, Perímetro e Volume*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade Federal do Amazonas, 2020.

FIGUEIREDO, G. C. *Equações de Diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes e crescimento populacional de plantas anuais*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade Federal de Ouro Preto, 2017.

FIORAVANTI, C. Modelos para prever os rumos das epidemias. *Fapesp*, 2020. Disponível em: [https://revistapesquisa.fapesp.br/wp-content/uploads/2020/04/040-043\\_covid\\_modelos-epid\\_292.pdf](https://revistapesquisa.fapesp.br/wp-content/uploads/2020/04/040-043_covid_modelos-epid_292.pdf).

FONZAR, G. M. B. *Crescimento e Decaimento Exponencial*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2014.

FREITAS, G.B. *Modelagem Matemática na Escola básica como uma metodologia facilitadora e incentivadora na aprendizagem: Função Afim, um caso de estudo*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2020.

GIOIA, C. C. S. *Função Exponencial e Logarítmica: Um estudo interdisciplinar por meio da Resolução de Problemas*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2019.

GOMES, E.C.S. *Conceitos e ferramentas da epidemiologia*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2015. Disponível em: [https://ares.unasus.gov.br/acervo/bitstream/ARES/3355/1/3con\\_ferra\\_epidemio\\_2016-2.pdf](https://ares.unasus.gov.br/acervo/bitstream/ARES/3355/1/3con_ferra_epidemio_2016-2.pdf).

HEIDEMANN, L. A.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A. Atividades experimentais com enfoque no processo de modelagem científica: Uma alternativa para a ressignificação das aulas de laboratório em cursos de graduação em física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, 2016.

IEZZI, G; DOLCE, O; DEGENSZAJN. *Matemática Volume Único*. 3. ed. São Paulo: Atual, 2005.

KERMACK, W O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 115, p. 700–721, 1927.

KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics iii. further studies of the problem of endemicity. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 141, p. 94–122, 1927.

KERMACK, W O.; MCKENDRICK, A. G. Contributions to the mathematical theory of epidemics. iii.—further studies of the problem of endemicity. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 115, p. 700–721, 1933. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1933.0106>.

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10. *Modelagem Matemática: articulações entre a prática e propostas curriculares oficiais*. Disponível em: [http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd10\\_lenilton\\_kovalski.pdf](http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd10_lenilton_kovalski.pdf).

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

- LIMA, R. A. V. *Financiamentos Imobiliários e Modelagem Matemática: Uma proposta para o Ensino-Aprendizagem de Sistemas de Amortização*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade Federal do Semi-Árido, Mossoró, 2019.
- LIVIO, Mario. *Galileu e os negadores da ciência*. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2021.
- LOTKA, A.J. *Elements of Physical Biology*. Baltimore: William and Wilkins, 1925. Disponível em: <https://archive.org/details/elementsofphysic017171mbp/page/n443/mode/2up>.
- MALTHUS, T. *An essay on the principle of population*. Londres: Electronic Scholarly Publishing Project, 1798. Disponível em: <http://www.esp.org/books/malthus/population/malthus.pdf>.
- MANCHEIN, C.; BRUGNAGO, E. How relevant is the decision of containment measures against covid-19 applied ahead of time? *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 140, 2020.
- MARQUES, P. R. *A Modelagem Matemática a partir do desenvolvimento de experimentos práticos para o estudo de funções*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade Federal da Fronteira Sul, 2019.
- MENDONÇA, L. O.; LOPES, C. E.; SOARES, E. Educação estatística em um ambiente de modelagem matemática nas aulas do ensino médio. *Horizontes*, v. 31, p. 9–19, 2013.
- CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11. *BNCC e modelagem matemática: Relato de uma atividade desenvolvida com uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2019. Disponível em: <http://eventos.sbem.com.br/index.php/cnmem/2019/paper/viewFile/197/899>.
- OGURI, Victor (org). *Estimativas e erros em experimentos de física*. 3. ed. Rio de Janeiro: eduerj, 2010.
- PASTERNAK, Natalia; ORSI, Carlos. *Contra a realidade: A negação da ciência, suas causas e consequências*. 1. ed. Campinas: Papirus 7 Mares, 2021.
- PEREIRA, M.G. *Epidemiologia: teoria e prática*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2013.
- RIBEIRO, F. L. An attempt to unify some population growth models from first principles. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 39, 2017.
- RODRIGUES, P. H. Incidência de covid-19 no estado de são paulo. 2020.
- ROQUE, Tatiana. *O dia em que voltamos de marte: Uma história da ciência e do poder com pistas para um novo presente*. 1. ed. Rio de Janeiro: Critica, 2021.
- ROUQUAYROL, M.Z; GURGEL, M. *Epidemiologia e Saúde*. 8. ed. Rio de Janeiro: Medbook, 2018.
- SABETI, M. *Modelo Epidêmico Discreto SIR com Estrutura Etária e Aplicação de Vacinação em Pulsos e Constante*. Tese (Doutorado em Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

- SANTOS, C. E. B. *Modelos matemáticos para a dinâmica populacional de micro-organismos como motivação para o estudo de potenciação, funções exponenciais e logarítmicas*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- SANTOS, P. V. B. *Estudo sistemático de oscilações mecânicas unidimensionais*. Dissertação (Mestrado acadêmico em Ciências Computacionais), Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.
- SILVA, J. R. A. *Contexto e Aplicações das funções exponenciais no Ensino Médio: Uma abordagem interdisciplinar*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2015.
- SILVA, L. B.; FERREIRA, L.; MOREIRA, F. B. Modelagem matemática: Reflexões teóricas e aplicações. *Universidade Federal de Juiz de Fora*, 2010.
- SILVA, R.M. Usando o modelo sird para caracterizar a disseminação da covid-19 nos estados do parana, rio grande do sul e santa catarina. *Universidade Federal do Paraná*, 2020. Disponível em: <https://preprints.scielo.org/index.php/scielo/preprint/download/764/1039/1082>.
- STEWART, J. *Cálculo*. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006. v. 1.
- STEWART, J. *Cálculo*. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006. v. 2. 634-635 p.
- TAKIMOTO, Erika. *Contra a realidade: A negação da ciência, suas causas e consequências*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2021.
- TAVONI, R. *Os modelos de Crescimento Populacional de Malthus e Verhust - Uma motivação para o Ensino de Logaritmos e Exponenciais*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.
- TAYLOR, J.R. *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*. 2. ed. Colorado: University of Science Books, 1996.
- TEIXEIRA, J. C. P. *Introduzindo conceitos de Física no ensino fundamental 2 através da modelagem matemática*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática, PROFMAT), Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- TINTI, D. S.; CALDEIRA, A. D.; RIBEIRO, R. M. Modelagem matemática e suas contribuições para a educação matemática. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, v. 16, p. 1-4, 2019.
- VALIM, Patrícia; AVELAR, Alexandre; BEVERNAGE, Berber. Negacionismo: História, historiografia e perspectivas de pesquisa. *Revista Brasileira de História*, v. 41, 2021.
- VERHULST, P. F. *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance mathématique et physique*. Bruxelas: L'Observatoire de Bruxelles, 1838. Disponível em: [https://books.google.fr/books?id=8GsEAAAAYAAJ&printsec=frontcover&source=gbs\\_v2\\_summary\\_r&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false](https://books.google.fr/books?id=8GsEAAAAYAAJ&printsec=frontcover&source=gbs_v2_summary_r&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false).

VERHULST, P. F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, v. 18, p. 1–45, 1845. Disponível em: <https://eudml.org/doc/182533>.

VOLTERRA, V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature*, v. 118, p. 558–560, 1926. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/118558a0>.

## APÊNDICE A – Progressão Geométrica.

Uma progressão geométrica (P.G.) é uma sequência cuja taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é a mesma, ou seja, seus termos a partir do segundo são iguais ao produto do termo anterior por uma constante denominada razão e geralmente denotada pela letra  $q$ .

**Exemplo 1** *A sequência (1,2,4,8,16,...) é uma P.G. de razão 2.*

O termo geral de uma P. G., de forma análoga às progressões aritméticas, podemos entrar uma fórmula para que se encontre um termo  $a_n$  qualquer, desde que se conheçam o primeiro termo  $a_1$  e a razão  $q$  dessa progressão. Seja  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  uma P.G. Pela definição temos que

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$\vdots$     $\vdots$

Dando continuidade a esse processo, obtemos

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \tag{66}$$

que é a equação para o termo geral da P.G.  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de razão  $q$ . Existe uma relação entre progressão geométrica e função exponencial, visto que a equação (66) pode ser entendida como uma função exponencial e, assim como é possível fazer uma comparação entre progressão aritmética e função afim, podemos fazer uma analogia entre P.G. e uma função exponencial  $f(x) = ab^{x-1}$ , onde  $a = a_1$  e  $b = q$ .

**Exemplo 2** *Dada a P.G. (7, 14, 28, 56, ...), esta progressão pode ser representada por uma função  $f(x) = ab^{x-1}$ , onde  $a = a_1$  e  $b = q$ , ou seja, a função  $f(x) = 7 \cdot 2^{x-1}$ .*

A soma dos termos de uma P.G. é também um conceito amplamente utilizado na matemática financeira. A soma  $S_n$  dos  $n$  primeiros termos de uma progressão geométrica de razão  $q \neq 1$  é dada por

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{67}$$

**Demonstração:** A soma dos termos de uma P.G. é escrita como

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n. \quad (68)$$

Multiplicando (68) por  $q$ , obtemos

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n + a_{n+1}. \quad (69)$$

Fazendo (68)–(69), vem que

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad \square \quad (70)$$

Quando temos uma P.G. de razão  $|q| < 1$ , podemos calcular a soma de infinitos termos, utilizando a expressão

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}. \quad (71)$$

**Demonstração:** Para a demonstração da fórmula da soma de infinitos termos, basta utilizarmos a expressão (67) junto com a ideia de que se  $|q| < 1$ , então  $q^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{1 - \overset{0}{q^n}}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \quad \square \quad (72)$$

## APÊNDICE B – Método Runge-Kutta 4<sup>o</sup> Ordem.

Dada uma EDO linear de primeira ordem, com uma condição inicial,

$$\frac{\partial y}{\partial x} + p(x)y = q(x) \quad \text{e} \quad y(x_0) = y_0,$$

isolamos a derivada, de forma que a equação diferencial fica na forma

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

O método consiste em um processo de interações (método iterativo), utilizando um valor chamado de passo (dado por  $h$ ) e a condição inicial:  $x_0$  e  $y_0$ , para determinar constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$ , que por sua vez são utilizados para determinar o valor de  $y_{n+1}$  (valor da função  $y$  no ponto  $x_0 + h$ ). A **1<sup>a</sup> interação** parte de  $n = 0$  e as constantes utilizadas nas interações são dadas pelas fórmulas que seguem:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

Terminado o processo, incrementamos o passo  $x_{n+1} = x_n + h$  ( $x$  avança de acordo com o passo  $h$  a cada final de interação). É possível utilizar uma tabela para auxiliar para organização dos cálculos.

$n$	$x_n$	$y_n$	$y_{n+1}$
0	$x_0$	$y_0$	$\vdots$
1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

**Exemplo:** Dada a equação diferencial:  $y' = -x+y+2$  e a condição inicial  $y(0) = 2$ , utilize o método de Runge Kutta para determinar  $y(0,2)$ . Utilize passo  $h = 0,1$ .

Temos então a nossa função  $f(x, y)$ , dada por:  $f(x, y) = -x + y + 2$ . Nosso  $x_0$  e  $y_0$  iniciais são dados pela condição inicial  $y(0) = 2$ .

**1ª Interação:**  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 2$ .

$$k_1 = f(0, 2) = -0 + 2 + 2 = 4$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right) = f(0,05; 2,2) = -0,05 + 2,2 + 2 = 4,15$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right) = f(0,05; 2,2075) = -0,05 + 2,2075 + 2 = 4,1575$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) = f(0,1; 2,4157) = -0,1 + 2,4157 + 2 = 4,3157$$

Obtidos,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$ , obtemos  $y_{n+1}$

$$y_1 = y_0 + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

$$y_1 = 2 + \frac{0,1(4 + 2 \times 4,15 + 2 \times 4,1575 + 4,3147)}{6}$$

$$y_1 = 2 + \frac{0,1(4 + 8,3 + 8,315 + 4,3147)}{6}$$

$$y_1 = 2 + 0,4155 = 2,4155$$

Calculado  $y_1$ , temos a tabela até então:

$n$	$x_n$	$y_n$	$y_{n+1}$
0	0	2	2,4155
1	0,1	2,4155	$\vdots$

**2ª Interação:**  $x_1 = 0,1$ ,  $y_1 = 2,4155$ .

$$k_1 = f(x_1, y_1) = f(0,1; 2,4155) = -0,1 + 2,4155 + 2 = 4,3155$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_1}{2}\right) = f(0,15; 2,631275) = -0,15 + 2,631275 + 2 = 4,4813$$

$$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_2}{2}\right) = f(0,15; 2,63956) = -0,15 + 2,63956 + 2 = 4,4896$$

$$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = f(0,2; 2,864456) = -0,2 + 2,864456 + 2 = 4,6645$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6} = 2,4155 + \frac{0,1(4,3155 + 8,9626 + 8,9792 + 4,6645)}{6}$$

$$y_2 = 2,4155 + \frac{0,1 \times 26,9218}{6}$$

obtemos a resposta:

$$y_2 = 2,8642.$$

Os resultados obtidos pelas iterações podem ser organizados na forma de uma tabela. Para o caso do exemplo acima temos a tabela:

$n$	$x_n$	$y_n$	$y_{n+1}$
0	0	2	2,4155
1	0,1	2,4155	2,8642
2	0,2	2,8642	$\vdots$

Dando continuidade ao procedimento, podemos aplicar um número  $n$  de iterações a fim de se obter os demais valores da solução  $x_n(y)$ .

### Método aplicado a um Sistema de EDO's:

Esse método também pode ser estendido a um sistema de EDO's a fim de obtermos uma solução numérica para o mesmo. Seja um sistema de EDO's e as condições de contorno que seguem:

$$\begin{cases} y_1'(t) = g_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ y_2'(t) = g_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = g_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(t_n) = y_1 \\ y_2(t_n) = y_2 \\ \vdots \\ y_n(t_n) = y_n \end{cases}.$$

Isso dá origem ao sistema de funções  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f_1 : (t, y_1, y_2, \dots, y_n) \rightarrow g_1 \\ f_2 : (t, y_1, y_2, \dots, y_n) \rightarrow g_2 \\ \vdots \\ f_n : (t, y_1, y_2, \dots, y_n) \rightarrow g_n \end{cases}$$

e as constantes  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  passam a ser feitas para cada uma das funções. Isso gera um número maior de  $k'$ s, dados por

$$\begin{cases} k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1n} \\ k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2n} \\ k_{31}, k_{32}, \dots, k_{3n} \\ k_{41}, k_{42}, \dots, k_{4n} \end{cases},$$

onde, para cada  $k_{ij}$ ,  $i$  é o índice “natural” e  $j$  é o número da função na qual está sendo calculado. Uma vez calculados os  $k'$ s, podemos obter os valores das funções em  $t_n + h$ . Cada uma das funções  $y_1, y_2, \dots, y_n$  utiliza sua respectiva condição inicial e os  $k'$ s relativos aquela função. O passo será dado por

$$\begin{cases} y_1(t_n + h) = y_1 + \frac{h(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})}{6} \\ y_2(t_n + h) = y_2 + \frac{h(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})}{6} \\ y_3(t_n + h) = y_3 + \frac{h(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})}{6} \\ \vdots \\ y_n(t_n + h) = y_n + \frac{h(k_{1n} + 2k_{2n} + 2k_{3n} + k_{4n})}{6} \end{cases},$$

onde descobrimos todos os valores da função no passo seguinte. Aplicando esse método quantas vezes for necessário, obtemos todas as curvas  $y_1, y_2, \dots, y_n$  soluções do sistema de EDO's inicialmente dado.

## APÊNDICE C – Aplicação da Modelagem (Proposta)

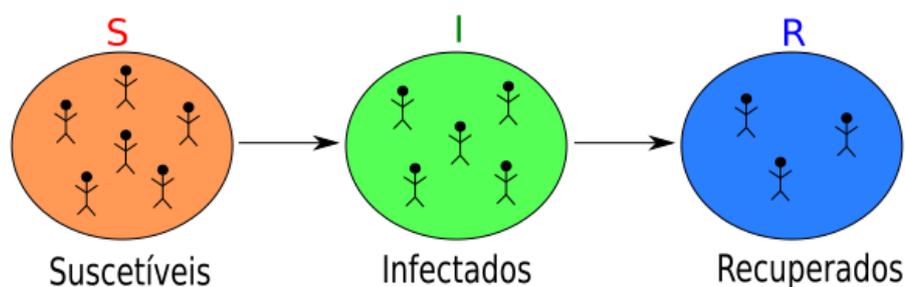
Neste apêndice, temos como objetivo propor uma maneira de conduzir o professor a realizar a aplicação da modelagem em sala de aula utilizando os conceitos de modelagem e o *software* Excel. O texto que se encontra na secção a seguir é prático e simples, a fim de que seja escrito para explicar as ideias envolvidas na modelagem aos alunos.

### C.1 Aplicação em Sala de Aula

A modelagem matemática é de essencial importância para se entender sobre a natureza e a ciência, onde buscamos descrever matematicamente (usando equações) o comportamento de um determinado fenômeno observado na vida real. Com essa descrição matemática podemos descrever o comportamento passado e até tentar prever como será o futuro. Na pandemia de COVID-19, por exemplo, deseja-se saber como o número de novas infecções varia conforme o tempo para que se possa tomar decisões para o combate e controle da doença.

Vamos modelar matematicamente uma situação de pandemia e, para isso, vamos classificar os indivíduos de uma região em Suscetíveis, Infectados e Recuperados, conforme a figura 65.

Figura 65 - Dinâmica da população na modelagem proposta.



Fonte: O Autor, 2021.

Vamos representar pelas funções  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$  a população que se encontra em cada uma das categorias. Veja que cada indivíduo pode ser enquadrado em apenas uma categoria por vez, logo temos que

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t),$$

onde  $N(t)$  é o número total de indivíduos. Ao começarmos a tentar descrever matema-

ticamente uma situação é normal que sejam supostas algumas hipóteses simplificadoras, para que se evite um excesso de informações. Vamos considerar:

1) População é constante, ou seja, desprezamos as taxas de natalidade e mortalidade existentes e desconsideramos a possibilidade de junção ou contato com membros de outras populações.

2) Não existem mortes em decorrência da doença e indivíduos infectados se tornam imunes pelo resto da vida.

Uma vez estipuladas nossas condições, iniciamos o pensamento de modelagem, queremos descobrir a chamada “taxa de variação” relacionada a cada uma das classificações, ou seja,  $V_S$ ,  $V_I$  e  $V_R$ , que são as taxas de variação relacionada a cada uma das classificações.

A contaminação de pessoas depende do contato de pessoas suscetíveis  $S(t)$  com pessoas infectadas  $I(t)$ . Quanto maior o contato de pessoas com as suscetíveis  $S(t)$ , maior a taxa de contaminação, existindo uma multiplicação entre essas categorias. Assumimos também que existe uma constante  $\alpha$  como fator de ajuste, visto que em cada local diferente, uma pandemia sofre modificações de acordo com fatores externos como, por exemplo, os hábitos dos habitantes ou até mesmo o clima. Vamos denotar essa constante  $\alpha$  como sendo a taxa de infecção,

$$V_S = -\alpha S(t)I(t). \quad (73)$$

Veja também que a variação  $V_S$  é negativa, pois o número de indivíduos suscetíveis se torna menor no decorrer do tempo. Sobre a variação do número de infectados,  $V_I$ , temos um aumento igual ao número de pessoas que deixaram de ser suscetíveis, ou seja, recebe o termo  $\alpha S(t)I(t)$ . Mas, por outro lado, também existe uma queda quando os infectados se tornam recuperados e, quanto mais infectados, maior será o número de recuperados, o que indica um termo negativo  $\beta I(t)$ , sendo  $\beta$  uma outra constante, que vamos chamar de taxa de recuperação. A taxa de variação dos infectados pode ser interpretada então como

$$V_I = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t). \quad (74)$$

Para a taxa de Recuperados,  $V_R$ , temos um aumento de acordo com as pessoas que deixaram de serem infectadas e passam a categoria de recuperadas, ou seja, perda de  $\beta I(t)$  na taxa de variação  $V_I$  implica um ganho de  $\beta I(t)$  na taxa dos recuperados,

$$V_R = \beta I(t). \quad (75)$$

As equações das variações  $V_S$ ,  $V_I$  e  $V_R$ , relativas aos números iniciais de pessoas suscetíveis, infectadas e recuperadas, nos levam ao sistema

$$\begin{cases} V_S = -\alpha S(t)I(t), \\ V_I = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t), \\ V_R = \beta I(t). \end{cases}$$

Vamos a seguir fazer uma estratégia de discretização do modelo contínuo. Fazemos isso considerando que a taxa de variação pode ser entendida como diferença dos valores em dois momentos em um curto intervalo de tempo. Vejamos a seguir a discretização do sistema

$$\begin{cases} \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta t} = -\alpha S_i I_i, \\ \frac{I_{i+1} - I_i}{\Delta t} = \alpha S_i I_i - \beta I_i, \\ \frac{R_{i+1} - R_i}{\Delta t} = \beta I_i, \end{cases}$$

Isolando os termos  $S_{i+1}$ ,  $I_{i+1}$  e  $R_{i+1}$ , o sistema fica escrito na forma

$$\begin{cases} S_{i+1} = -(\alpha S_i I_i) \Delta t + S_i, \\ I_{i+1} = (\alpha S_i I_i - \beta I_i) \Delta t + I_i, \\ R_{i+1} = \beta I_i \Delta t + R_i. \end{cases}$$

Esse é o sistema de equações obtido ao final da modelagem, que deverá ser resolvido pelo método numérico das diferenças finitas, a partir das condições iniciais estipuladas. Ao início de uma pandemia é natural que o número de infectados seja muito baixo e que não existam recuperados, sendo natural considerarmos então  $I_0 = 1$  e  $R_0 = 0$ ; já o número de pessoas suscetíveis pode ser qualquer valor, relativo ao número de habitantes de uma região.

### Guia da Atividade - Professor

#### Detalhes da Organização:

**Organização da turma:** Grupos de 4 alunos.

**Atividade Organizada em duas partes:** Primeira parte em sala de aula e segunda parte no laboratório com acesso ao computador.

**Recursos Utilizados:** Guias do Professor, Guia do Aluno, Quadro.

**Tempo Estimado da Atividade:** 1 hora e 30 minutos (para cada uma das partes).

#### Detalhes importantes da atividade

- Conversa geral sobre modelagem matemática (Início da aula).
- Escrever inicialmente as notas de aula no quadro.
- Dar um tempo aos alunos para isolar  $S_{i+1}$ ,  $I_{i+1}$  e  $R_{i+1}$ .
- Entregar uma Guia do Aluno para cada grupo após as notas de aula.
- Conversa durante o processo de modelagem sobre tópicos matemáticos a serem utilizados, por exemplo, contaminação de pessoas e proporcionalidade.
- Conversar a respeito das condições iniciais (após a construção do modelo).

**Guia da Atividade - Aluno**

Nomes: \_\_\_\_\_

**Responda as perguntas junto ao seu grupo:**

a) O que é Modelagem Matemática?

---

---

---

b) Qual é a importância da Modelagem Matemática?

---

---

c) Qual é o nosso problema a ser estudado?

---

---

d) Quais conceitos matemáticos são envolvidos no problema?

---

---

e) Quais equações matemáticas podem ser escritas para descrever a situação?

---

---

---

f) Como podemos fazer a solução das equações elaboradas anteriormente?

---

---

g) Podemos melhorar ou expandir os resultados obtidos para mais variáveis?

---

---

## C.2 Aplicação no Laboratório de Informática

Espera-se que os alunos cheguem ao laboratório de informática com a modelagem pronta e os devidos entendimentos a respeito dos conceitos envolvidos no modelo. Vamos exemplificar a atividade utilizando o modelo epidemiológico SIR. Seja o sistema de equações

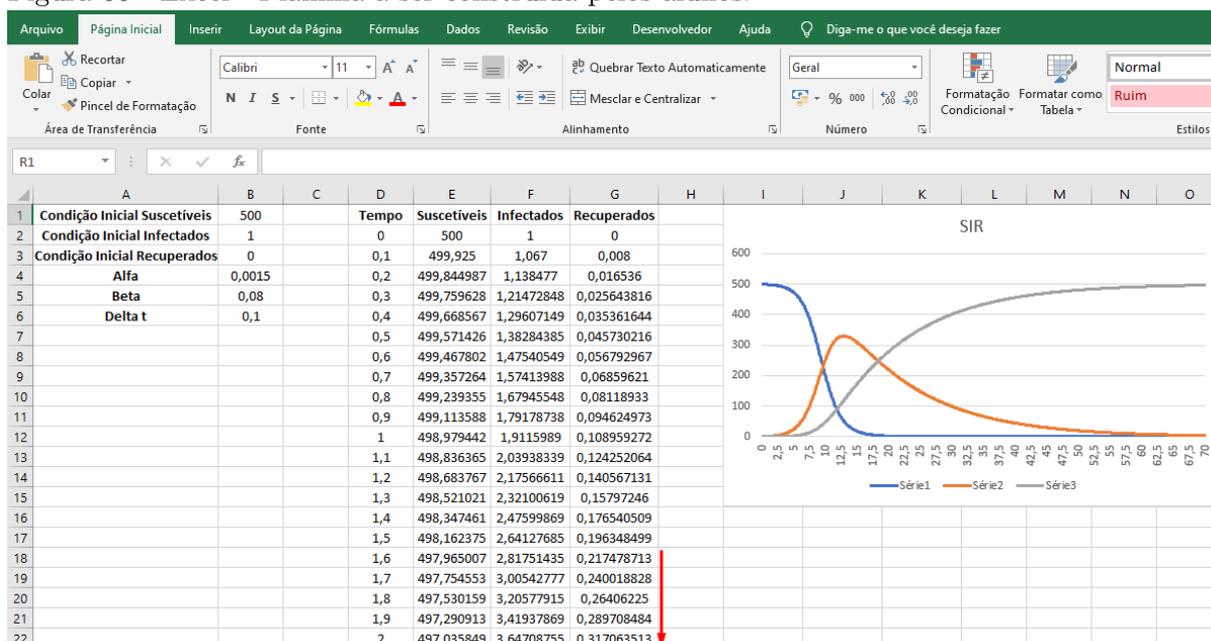
$$\begin{cases} S_{i+1} = -(\alpha S_i I_i) \Delta t + S_i, \\ I_{i+1} = (\alpha S_i I_i - \beta I_i) \Delta t + I_i, \\ R_{i+1} = \beta I_i \Delta t + R_i. \end{cases}$$

Vamos utilizar inicialmente os parâmetros  $\alpha = 0,0015$ ,  $\beta = 0,08$  e as condições iniciais  $S(0) = 500$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$ . A inserção dos comandos na caixa de entrada pode ser uma tarefa um tanto complicada e, por isso, sugere-se que o professor escreva os comandos no quadro para ajudar aos alunos, conforme segue:

- Nas Células A1, A2, A3, A4, A5 e A6, digitam-se: Condição Inicial Suscetíveis, Condição Inicial Infectados, Condição Inicial Recuperados, Alfa, Beta e Delta  $t$ .
- Nas Células B1, B2, B3, B4, B5 e B6, digitam-se os respectivos valores de condições iniciais, parâmetros e o passo temporal, que são respectivamente: 500, 1, 0, 0,0015, 0,08 e 0,1
- Nas Células D1, E1, F1, e G1, digitam-se: Tempo, Suscetíveis, Infectados e Recuperados.
- Nas Células D2, E2, F2, e G2, digitam-se: 0, =B1 , =B2, =B3.
- Na Célula D3, digitam-se: =D2+\$B\$6
- Na Célula E3, digitam-se: =(-\$B\$4\*E2\*F2)\*\$B\$6+E2
- Na Célula F3, digitam-se: =(\$B\$4\*E2\*F2-\$B\$5\*F2)\*\$B\$6+F2
- Na Célula G3, digitam-se: =F2\*\$B\$5\*\$B\$6+G2

Uma vez escrita as entradas, basta puxar para baixo as células D3, E3, F3 e G3 até um tempo que seja satisfatório como, por exemplo,  $t = 70$ . Após todos os dados prontos, selecionamos todo o intervalo de dados e inserimos o gráfico dinâmico das curvas de suscetíveis, infectados e recuperados. A figura 66 ilustra a planilha pronta, com gráfico dinâmico inserido.

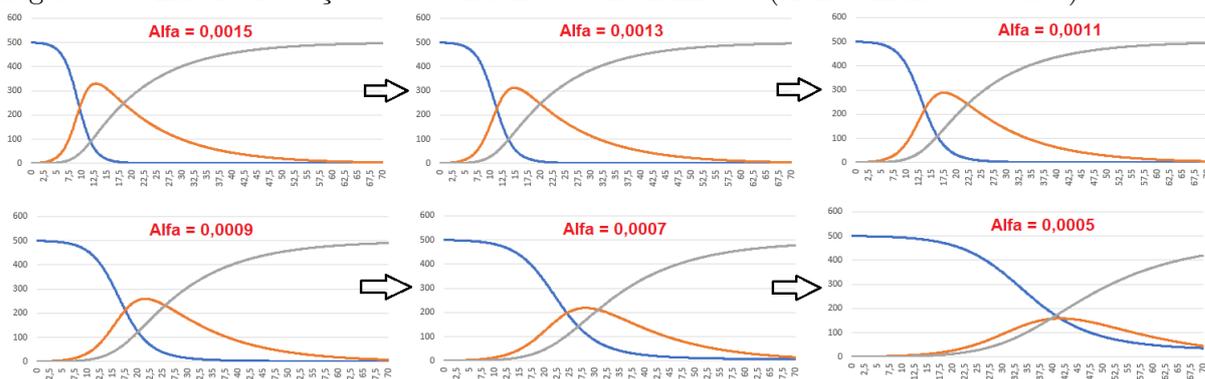
Figura 66 - Excel - Planilha a ser construída pelos alunos.



Fonte: O Autor, 2021.

Uma vez construída a planilha, podemos fazer alterações nos parâmetros e verificar as mudanças geradas no gráfico. Em especial é interessante mostrar o efeito da redução do coeficiente de transmissão, que gera o achatamento da curva de infectados, termo muito utilizado pelo noticiários durante a pandemia de Sars-Cov-2. A figura 67 ilustra o comportamento gráfico após reduções do coeficiente de transmissão.

Figura 67 - Excel - Redução do Coeficiente de Transmissão (Achatamento da curva).



Fonte: O Autor, 2021.

Acredita-se ser de grande importância essa atividade desenvolvida, em que os alunos possam ver na prática esse achatamento da curva, dentre efeitos que surgem das manipulações dos parâmetros.

Essa atividade pode sofrer modificações caso os alunos não possam desenvolver construindo-se a planilha. Alterações tais como, por exemplo, entregar uma planilha do

excel já pronta e apenas com as células dos parâmetros desprotegidas para que os alunos alterem os parâmetros. Essa estratégia seria mais prática e simples visto que a planilha já estaria pronta e sobraria mais tempo para questionamentos e análises da parte dos alunos. A economia de tempo pode também proporcionar que sejam mesclados em uma aula a atividade pelo Excel e a atividade com o GeoGebra, disponibilizando os Links dos modelos já feitos previamente pelo professor para que os alunos acessem a nuvem e possam tirar suas conclusões sobre os modelos.

## APÊNDICE D – O *Software* Excel - Conceitos Básicos.

Presente na maioria dos computadores, o mais famoso *software* de planilha é um importante aliado para inúmeras tarefas. Para o propósito da modelagem utilizando o método das diferenças finitas, o software é uma ferramenta simples e precisa, visto que o método é iterativo, calculando o próximo valor com base no valor anterior. A figura 68 mostra a tela de carregamento do *software*, após ter sido executado.

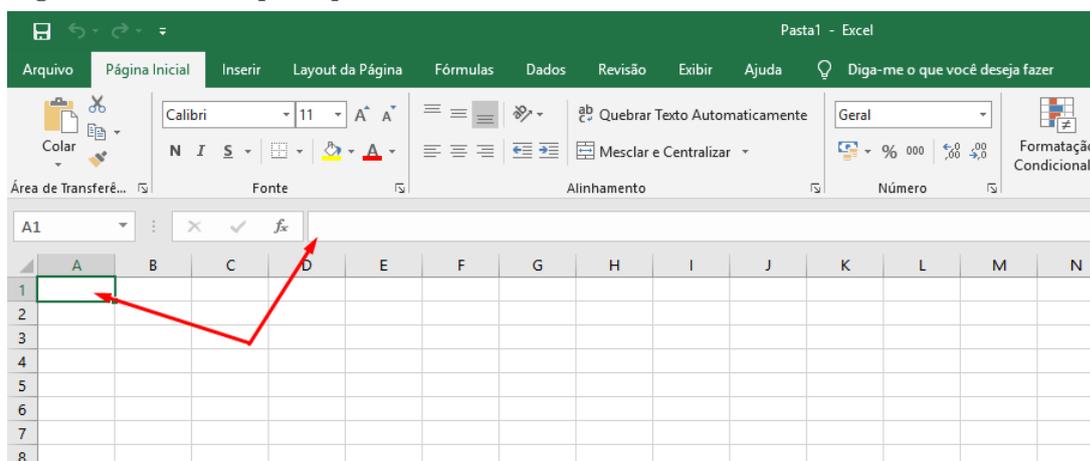
Figura 68 - Excel - Tela de carregamento.



Fonte: O Autor, 2021.

As partes mais importantes a serem utilizadas para nosso propósito são as células e a caixa de instrução. As células podem ser classificadas como células de *INPUT* (entrada) ou *OUTPUT* (saída). A figura 69 mostra em destaque os principais elementos.

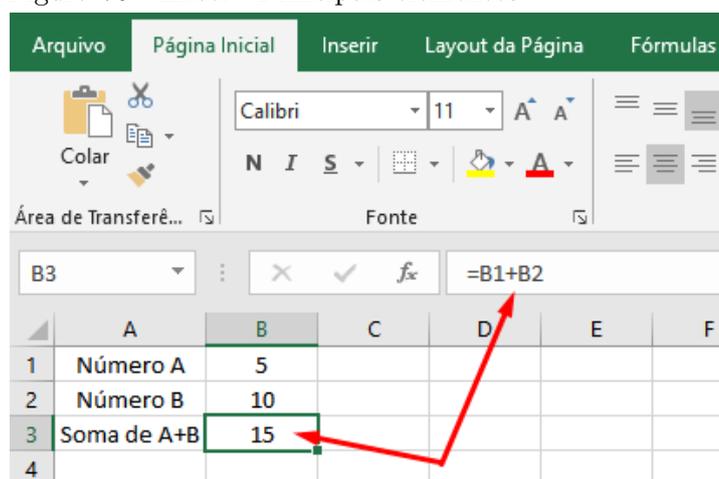
Figura 69 - Excel - principais elementos.



Fonte: O Autor, 2021.

As células de *INPUT* são células informativas de entrada tais como textos com nomes e números com os parâmetros das condições iniciais e outros coeficientes presentes na modelagem. As células de *OUTPUT* são células que possuem uma fórmula escrita na caixa de instrução; estas por sua vez têm seus valores calculados em função de outras células. A figura 70 exemplifica a criação de uma soma simples na célula de *OUTPUT* B3.

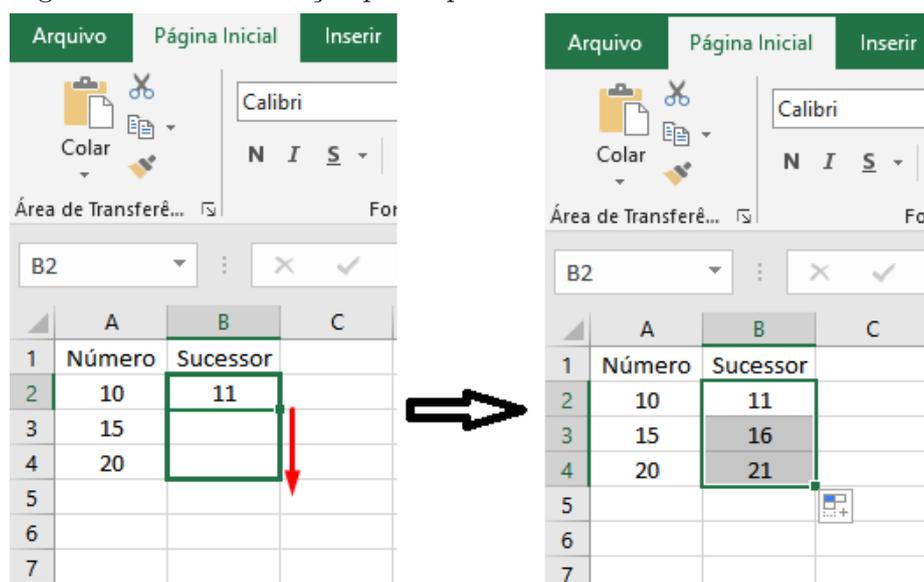
Figura 70 - Excel - Principais elementos.



Fonte: O Autor, 2021.

Outros comandos tais como divisões e multiplicações são utilizados da mesma forma. O Excel também possui um importante comando conhecido como “puxar para baixo”, ilustrado na figura 71.

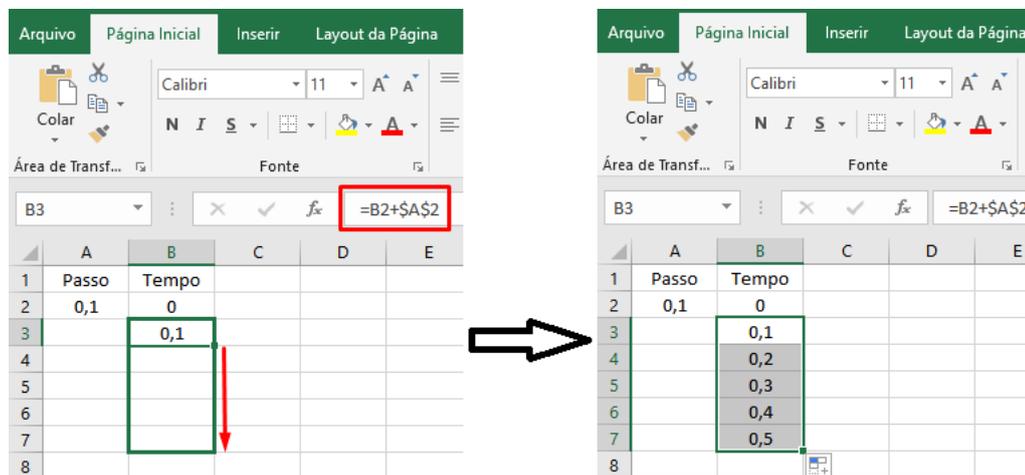
Figura 71 - Excel - Função puxar para baixo.



Fonte: O Autor, 2021.

Para alguns casos, a função “puxar para baixo” não é conveniente e podemos bloquear essa função colocando dois cifrões posicionados entre a letra e o número da célula que desejamos desabilitar a função, conforme ilustrado na figura 72.

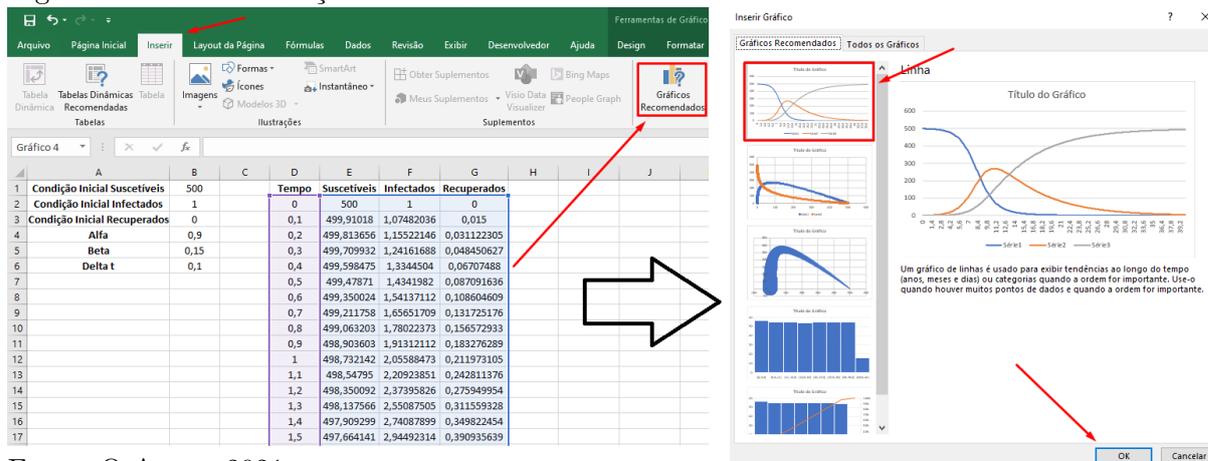
Figura 72 - Excel - desabilitando a função puxar para baixo.



Fonte: O Autor, 2021.

Dessa forma, podemos fazer com que uma parte da fórmula inserida tenha o efeito puxar para abaixo e outra parte sem o efeito. Outro ponto importante é a criação de um gráfico dinâmico associado aos dados calculados. Para construção do gráfico, basta selecionar todo o conjunto de dados desejado e clicar no botão Gráficos Recomendados, situado dentro da aba “inserir”. O primeiro gráfico recomendado já deverá ser o correto a ser inserido. A figura 73 mostra o procedimento descrito para inserção de um gráfico.

Figura 73 - Excel - Criação do Gráfico associado aos dados.

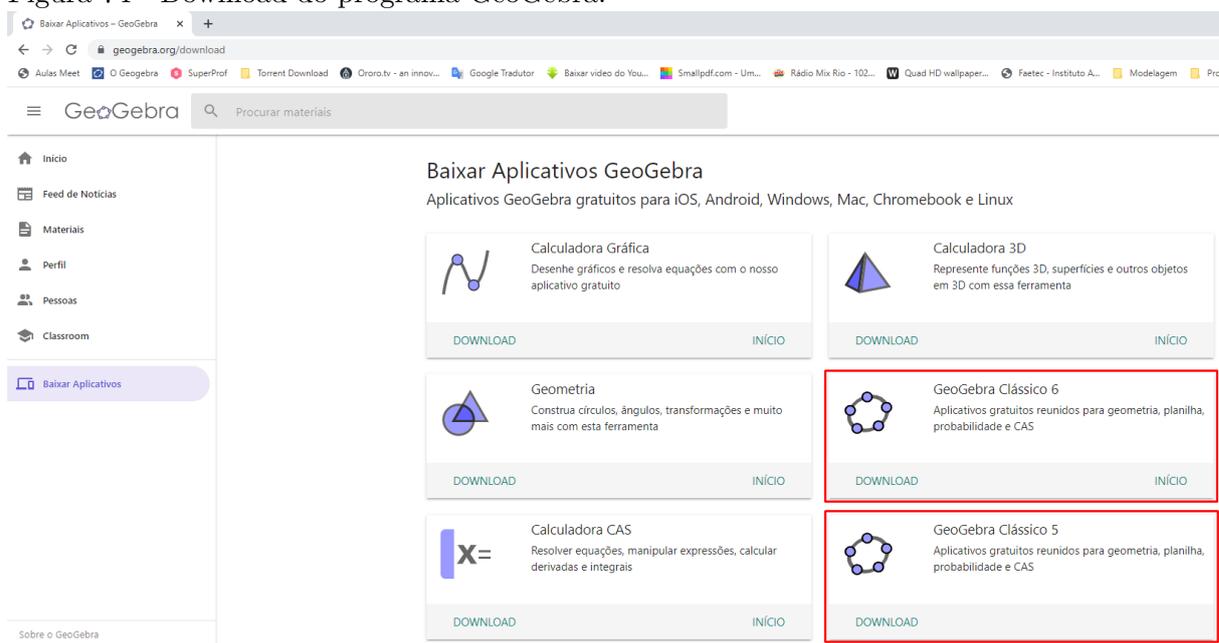


Fonte: O Autor, 2021.

## APÊNDICE E – O Software GeoGebra - Conceitos Básicos.

O objetivo desse apêndice é reunir e explicar os elementos básicos utilizados para construções no GeoGebra. Começando pelo download do software, vá até a parte de download do site oficial pelo link (<https://www.geogebra.org/download>) e baixe a versão clássica 5 ou 6 (ambas servem e basta fazer o download de apenas uma delas). A figura 74 ilustra a página de downloads do site e sinaliza em vermelho os programas corretos.

Figura 74 - Download do programa GeoGebra.

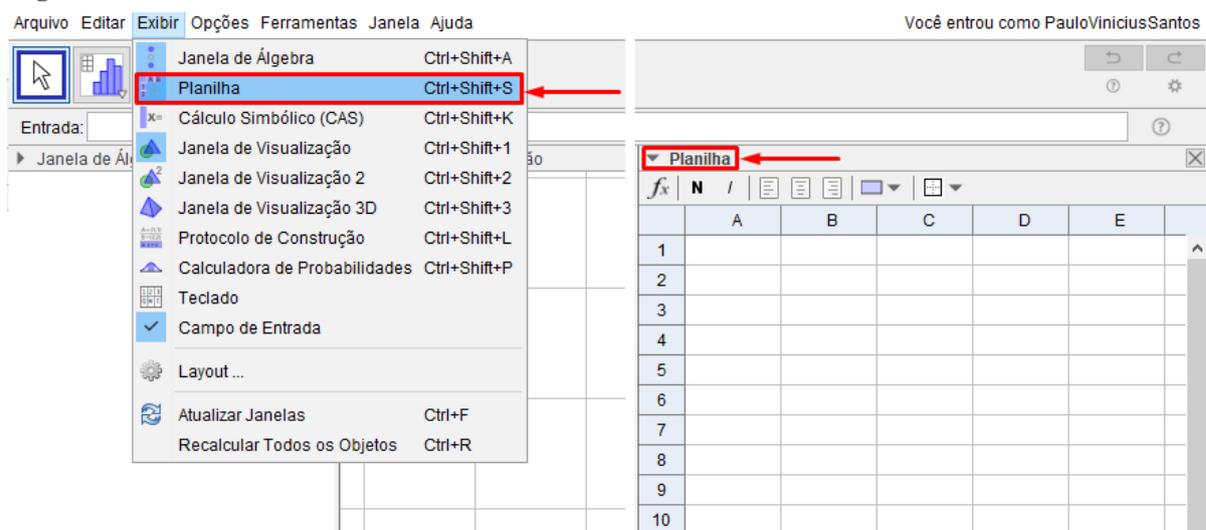


Fonte: O Autor, 2021.

Neste trabalho, particularmente, foi utilizado o GeoGebra clássico 5, que apesar de mais antigo, é uma versão bastante estável e confiável do programa, além de ainda receber atualizações constantemente. Caso outros professores queiram/optem por utilizar a versão mais nova, GeoGebra clássico 6, a lógica de construção e os comandos permanecem os mesmos.

Os outros programas mostrados na imagem tais como a Calculadora Gráfica, Calculadora 3D, Geometria e Calculadora CAS já estão todos dentro do GeoGebra Clássico (em ambos os clássicos). Uma vez instalado e aberto, para realizar o nosso estudo configuramos o GeoGebra para exibir a ferramenta de planilha, feito pelo menu “exibir” conforme, ilustra a figura 75.

Figura 75 - Exibir Planilha do GeoGebra.



Fonte: O Autor, 2021.

Uma vez habilitada a planilha, podemos colocar os dados utilizados nas modelagens, tais como as variáveis utilizadas (tempo, população, indivíduos infectados, ...) e os parâmetros iniciais do problema ( $t_0$ ,  $P_0$ ,  $I_0$ , ...). A possibilidade de selecionar células e usar o recurso “puxar para baixo” bastante utilizado no Excel, também é válido na planilha do GeoGebra, conforme ilustra a figura 76

Figura 76 - Funcionalidade de “puxar para baixo” na planilha.

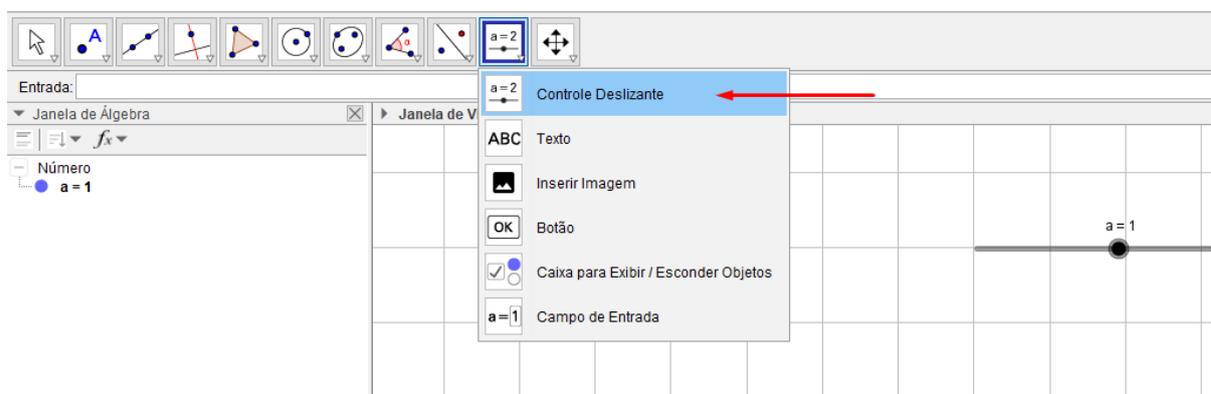
The figure shows two screenshots of the GeoGebra spreadsheet window. The left screenshot shows a blue selection box around cells A3 to D3, with a red arrow pointing down from the bottom-right corner. The right screenshot shows the same selection box extended to include cells A8 to D8, illustrating the 'drag down' functionality.

	A	B	C	D
1	t	$S_0$	$I_0$	$R_0$
2	0	500	1	0
3	0.2	500.2	1.2	0.2
4	0.4	500.4	1.4	0.4
5	0.6	499.93	1.83	0.44
6	0.8	499.31	2.4	0.5
7	1	498.5	3.14	0.57
8	1.2	497.44	4.1	0.66

Fonte: O Autor, 2021.

Um outro recurso muito importante que vamos utilizar são os controles deslizantes. Eles são responsáveis pela modificação dos parâmetros de forma rápida e simples. A beleza de todo dinamismo por trás do GeoGebra é feita na sua grande parte devido a esses controles deslizantes. A figura 77 ilustra a criação dos controles.

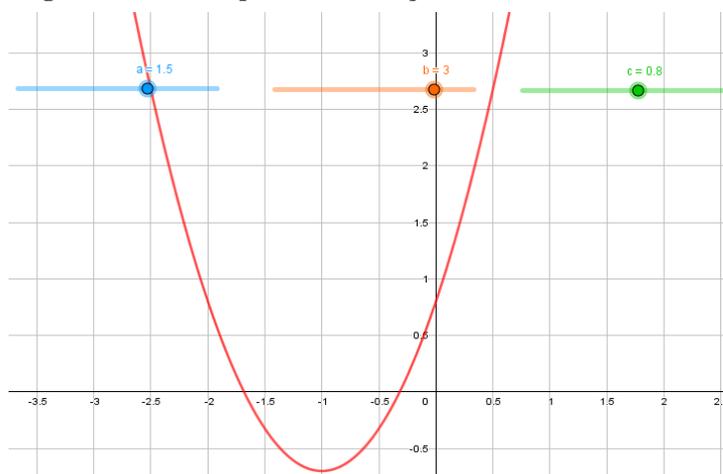
Figura 77 - Criação de controles deslizantes no GeoGebra.



Fonte: O Autor, 2021.

Uma vez criados os controles deslizantes necessários, podemos utilizar das letras para criações de equações, funções e utiliza-las diretamente na Planilha do GeoGebra, dentre outros modos de utilização. A figura 78 mostra um exemplo de utilização dos controles deslizantes para o estudo de funções do 2º grau.

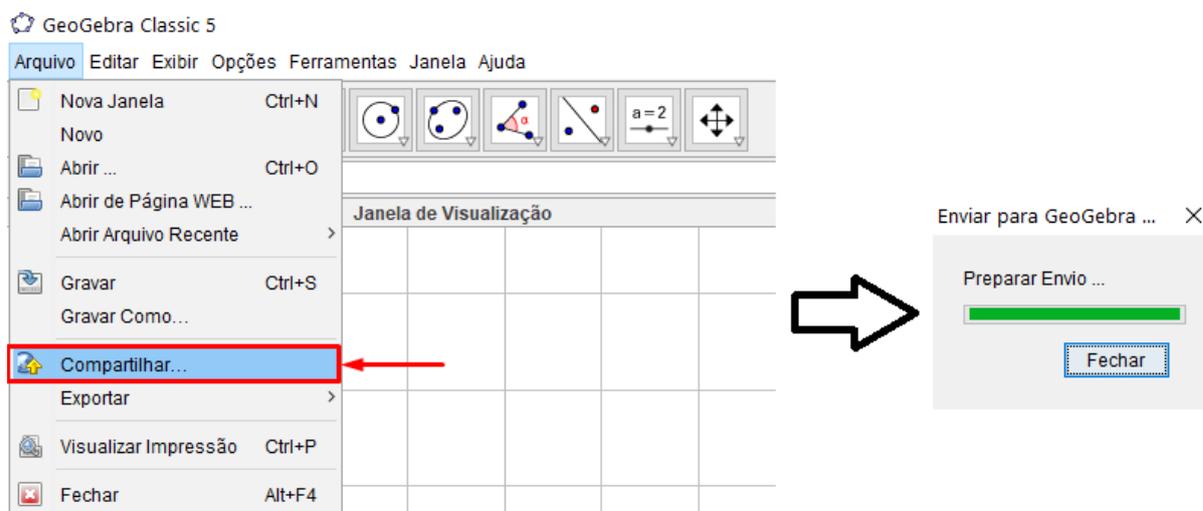
Figura 78 - Exemplo de utilização dos controles deslizantes.



Fonte: O Autor, 2021.

O arquivo completo pode ser acessado pelo link <https://www.geogebra.org/m/emg6suns>. Os links de arquivos do GeoGebra disponibilizados nessa dissertação foram feitos através do recurso de nuvem que o programa disponibiliza. Ao construir um arquivo do GeoGebra (.ggb) em seu computador, existe uma opção no próprio programa para que o mesmo possa ser disponibilizado na nuvem; basta clicar em “arquivo” e depois “compartilhar”, conforme ilustra a figura 79

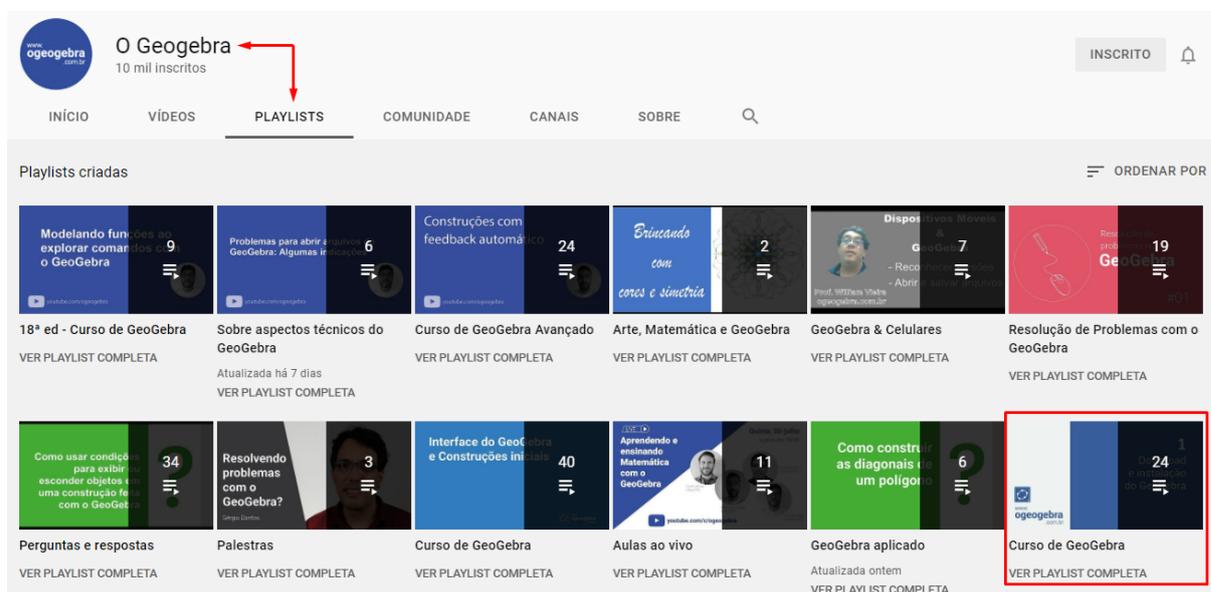
Figura 79 - Ferramenta de Compartilhamento em nuvem do GeoGebra.



Fonte: O Autor, 2021.

Para uma melhor aprendizagem do *software*, são disponibilizados muitos cursos em forma de vídeo aula no canal oficial do GeoGebra no youtube (verifique as playlists), conforme ilustra a figura 80.

Figura 80 - Canal Oficial do GeoGebra no Youtube - Playlists.



Fonte: O Autor, 2021.

A Universidade Estadual do Paraná (Unespar) todos os anos oferece um excelente curso de GeoGebra com duração de 3 meses. Ao final, os cursistas podem emitir um certificado oficial da Unespar de realização do curso. Ainda em 2021 irá ocorrer a 19ª edição.