Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecologia e Ciência

Instituto de Matemática e Estatística

Daniele Vidal de Aguiar

Logaritmos: história, teoria e ensino-aprendizagem

Rio de Janeiro

2021

Daniele Vidal de Aguiar

Logaritmo: história, teoria e ensino-aprendizageem

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho

Coorientador: Prof. Dr. Fernando Antônio de Araujo Carneiro

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

A282 Aguiar, Daniele Vidal.
Logaritmo: história, teoria e ensino-aprendizagem / Daniele Vidal de Aguiar. – 2021.
127 f. : il.

Orientador: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho.
Coorientador: Fernando Antônio de Araujo Carneiro.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística

1. Logaritmos - Teses. 2. Matemática - História - Teses. 3. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio) - Teses. I. Carvalho, João Bosco Pitombeira Fernandes de . II. Carneiro, Fernando Antônio de Araujo. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 519.662

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Daniele Vidal de Aguiar

Logaritmos: história, teoria e ensino-aprendizagem

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de novembro de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Fernando Antônio de Araujo Carneiro (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Leonardo Navarro de Carvalho
Instituto de Matemática e Estatística - UFF

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes Da Silva
Instituto de Matemática e Estatistica - UERJ

Rio de Janeiro
2021

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus filhos, Alice e Henrique, todo esforço e conquista são por eles.

Ao meu esposo e amigo Jovani, por me dar força e incentivo para eu não desistir.

Aos meus pais, Pedro e Francisca, meus primeiros educadores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado força e saúde para iniciar, permanecer e concluir mais uma etapa da minha vida.

Ao meu grande amigo e esposo Jovani por todo carinho, incentivo e apoio na decisão de retomar meus estudos e alcançar esse título tão desejado.

Aos meus amigos, por toda palavra de incentivo e força, fazendo com que eu agreditasse em meu potencial.

A minha filha Alice, por compreender e aceitar minha ausência no tempo dedicado na realização deste trabalho.

Ao meu orientador João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho e coorientador Fernando Antônio de Araujo Carneiro, pela dedicação à realização desse trabalho.

Aos meus amigos e professores do PROFMAT, que proporcionaram essa jornada produtiva, leve e especial.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.

Paulo Freire

RESUMO

AGUIAR, Daniele Vidal. *Logaritmos: história, teoria e ensino-aprendizagem.* 2021. 126 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

O presente trabalho desenvolve uma pesquisa descritiva e bibliográfica, onde foram analisados livros, artigos, dissertações e documentos, a fim de descrever a história dos logaritmos, contextualizando sua descoberta e mostrando os logaritmos da atualidade. Bem como, entender como os logaritmos estiveram presentes na cultura escolar brasileira, constatar a importância da interdisciplinaridade, da contextualização, das novas tecnologias e da história no processo de ensino e aprendizagem da matemática. A fim de saber de fato como estão sendo abordados os logaritmos em sala de aula, foram analisados cinco livros didáticos, todos aprovados pela Programa Nacional do Livro e do Material Didáticos (PNLD) e adotados por escolas do ensino médio no Brasil. Com base nesta análise, seguindo o mesmo raciocínio encontrado nos livros e como os logaritmos são estudados por alunos, este trabalho descreve as definições, consequências, propriedades, a função logarítmica, sua inversa e a relação existente entre elas. A presente pesquisa apresenta a concepção geométrica dos logaritmos, que embora não abordada em livros didáticos do ensino médio, é defendida por muitos autores por sua simplicidade e ligação com conteúdos de nível superior, como o Cálculo Integral. Este trabalho traz uma proposta de ensino e aprendizagem sobre os logaritmos que poderá ser utilizada por professores de matemática do ensino médio em suas aulas, a fim de enriquece-las e dar mais significado a tal estudo. Ele está dividida em cinco atividades, que de modo dinâmico, serão trabalhados a história, a interdisciplinaridade e contextualização, as novas tecnologias, utilizando calculadora e computador com software, e a concepção geométrica dos logaritmos.

Palavras-chave: Logaritmos. História. Contextualização. Interdisciplinaridade. Concepção geométrica. Novas Tecnologias. Ensino. Aprendizagem. Livro didático.

ABSTRACT

AGUIAR, Daniele Vidal. Logarithms: history, theory and teaching-learning. 2021. 126 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

The present work develops a descriptive and bibliographic research, where books, articles, dissertations and documents were analyzed in order to describe the history of logarithms, contextualizing their discovery and transforming into what is meant by logarithm today. As well as, understanding how logarithms were present in Brazilian school culture, to verify the importance of interdisciplinarity, contextualization, new technologies and history in the process of teaching and learning mathematics. In order to know in fact how logarithms are being approached in the classroom, five textbooks were analyzed, all approved by the National Program of Books and Didactic Material (PNLD) and adopted by high schools in Brazil. Based on this analysis, following the same reasoning found in the books and how logarithms are studied by students, this work describes the definitions, consequences, properties, logarithmic function, its inverse and the relationship between them. This research presents the geometric conception of logarithms, which although not addressed in high school textbooks, is defended by many authors for its simplicity and connection with higher-level contents, such as Integral Calculus. This work brings a teaching and learning proposal about logarithms that can be used by high school mathematics teachers in their classes, in order to enrich them and give more meaning to such study. It is divided into five activities, which in a dynamic way, will be worked history, interdisciplinarity and contextualization, new technologies, using calculator and computer with software, and geometric conception of logarithms.

Keywords: Logarithms. History. Contextualization. Interdisciplinarity. Geometric design. New Technologies. Teaching. Apprenticeship. Textbook.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

COVID-19	Coronavírus Disease 2019
PCN+	Novas Orientações para o Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PNBE	Programa Nacional de Biblioteca na Escola
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didáticos
PUC	Puntifícia Universidade Católica
SARS-CoV-2	Coronavírus 2 da Síndrome Respiratória Aguda Grave

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No século XVI, houve o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, com isto, surgiram difíceis cálculos aritméticos. Deste modo, iniciou-se uma busca de métodos que auxiliassem na resolução de tais cálculos de forma mais simples e com menos erros. E foi nesse contexto que surgem os logaritmos. Seu advento provavelmente se deu com a transformação da multiplicação e divisão em adição e subtração, respectivamente, por meio de algumas formas trigonométricas (KATZ, 1992).

Os pioneiros no estudo dos logaritmos foram Jost Bürgi (1552-1632) e John Napier (1552-1632). Devido a muitos na época estarem se dedicando a estudos que facilitassem cálculos, Bürgi e Napier, concidentemente, publicaram simultaneamente e independente as primeiras tábuas dos logaritmos (LIMA, 2016).

A partir de seu surgimento e ao longo dos anos seguintes, os logaritmos receberam contribuição de muitos estudiosos o que promoveu seu desenvolvimento. Como exemplo, podemos citar, Briggs (1561-1631), que construiu as tabelas de logaritmos Briggsianos (BOYER, 1974), Amédée Mannheim (1831-1906), que padronizou as modernas réguas de cálculo com a escala log (EVES, 2011) e Euler (1707-1783) que foi o primeiro a provar que não existe logaritmo real de números negativos (CARVALHO; ROQUE, 2012).

Com o passar do tempo e com a evolução das máquinas de calcular, os logaritmos deixam seu papel de instrumento essencial e simplificador de cálculos aritmético. Na contemporaneidade, segundo Lima (2016), eles se destacam no ensino de matemática, pois ocupa uma posição central nesta ciência e suas aplicações, estando presente em fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos.

Os docentes da atualidade buscam tornar a matemática mais concreta no processo de ensino e aprendizagem. Isto se dá, pois muitos alunos apresentam dificuldades em tal disciplina, e consideram-na difícil e abstrata. Carvalho e Roque (2012) afirmam que os discentes anseiam não somente por conceitos aplicados em situações do cotidiano, mas também em conectá-los a uma rede de significados e de relação com outras ideias, matemáticas ou não. A história da matemática desempenha um papel fundamental nesse sentido, pois exibe os problemas iniciais de onde se originaram os conceitos.

Sendo assim, o ensino dos logaritmos e de sua história revelam-se essenciais no processo de ensino e aprendizagem. É neste sentido que essa pesquisa se justifica.

O presente trabalho desenvolve uma pesquisa descritiva e bibliográfica, onde são analisados livros, artigos, dissertações e teses. A tendência metodológica adotada é a histórico-dialética, pois utiliza a história com a finalidade de compreensão e explicação científica. Segundo o processo de coleta de dados, essa pesquisa utiliza modalidade histórico-bibliográfico, pois faz análise de documentos escritos e produções.

Esse trabalho apresenta como objetivo geral estudar os logaritmos, desde sua criação até o que, em tempos atuais, são trabalhados pelos docentes em salas de aula do ensino médio. A fim de alcançar tal objetivo, apresentamos a seguir os objetivos específicos:

- Estudar a história dos logaritmos, contextualizando sua descoberta e mostrando os logaritmos da atualidade;
- Entender como os logaritmos estiveram presentes na cultura escolar brasileira;
- Constatar a importância da interdisciplinaridade, da contextualização, das novas tecnologias e da história da matemática no processo de ensino aprendizagem;
- Investigar, por meio da análise de livros didáticos, como os logaritmos são abordados em sala de aula;
- Descrever as definições, consequências, propriedades, a função logarítmica, sua inversa e a relação existente entre elas;
- Apontar a importância do estudo dos logaritmos pela concepção geométrica no ensino médio, bem como, descrever, por meio desta, sua definição, os logaritmos naturais, o número e e ele em outras bases;
- Apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem, para o ensino médio, sobre os logaritmos.

Nessa temática que pretendemos promover um novo olhar para o estudo e a importância dos logaritmos e sua história. Esperamos que o material produzido possa contribuir para o docente, a fim de aprimorar e enriquecer seus conhecimentos e suas aulas, e para o discente, que encontre mais significado e desperte o desejo pelo estudo dos logaritmos.

O trabalho está dividido do seguinte modo:

No primeiro capítulo, trataremos da parte histórica dos logaritmos. A priori falaremos do que antecede a seu surgimento, isto é, como as funções trigonométricas eram calculadas e o método de prostaférese. Posteriormente falaremos de fato dos logaritmos, de seu surgimento, os pioneiros nessa temática e as contribuições de estudiosos ao longo do tempo. É importante observar que este capítulo conta com um exemplo que descreve a situação cinemática criada por Napier a fim de definir os logaritmos.

No segundo capítulo descreveremos sobre os logaritmos na cultura escolar brasileira. Faremos a abordagem sobre as concepções aritmética, algébrica e algébrico-funcional dos logaritmos. Partimos para três tópico que falam da importância da interdisciplinaridade e contextualização, da história da matemática e das novas tecnologias no processo de ensino aprendizagem.

No terceiro capítulo temos a análise dos logaritmos em cinco livros didáticos, que conta com a descrição, pontos relevantes e exemplos do conteúdo em cada livro. Com base nessa análise, prosseguimos para dois tópicos que abordam a definição, consequências e propriedades operatória dos logaritmos, e a função logarítmica, seu gráfico e sua relação como a função exponencial, como são trabalhados em sala de aula. Finalizando o capítulo descreveremos sobre os logaritmos pela concepção geométrica, que conta com uma breve introdução, a definição, os logaritmos naturais, o número e e ele em outras bases.

No capítulo 4, apresentamos uma proposta de ensino e aprendizagem sobre os logaritmos. Nele descrevemos cinco atividades que abordam quatro pontos primordiais para o estudo dos logaritmos. Eles são a história dos logaritmos, a contextualização e interdisciplinaridade como ferramentas introdutórias, as novas tecnologias, através do uso da calculadora e computados com software, sua concepção geométrica, que se distribuem nas atividades.

Chamamos atenção ao apêndice deste trabalho, onde consta as cinco atividades citadas no capítulo 4, que estão organizadas para serem aplicadas pelos docentes em sala de aula.

1 **HISTÓRIA DOS LOGARITMOS**

Com o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, que se deu no século XVI, houve o surgimento de cálculos aritméticos de difíceis resolução. Deste modo, tornou-se necessária a busca de novas ferramentas para resolvê-los de modo simples. Segundo Katz (1992), os logaritmos surgiram provavelmente com a transformação da multiplicação e divisão em adição e subtração, respectivamente, na utilização de algumas formas trigonométricas, afim de simplificar e reduzir os erros nos cálculos.

Folkerts, Launert e Thom (2016) observam a necessidade de voltar a tempos anteriores à invenção dos logaritmos, para entender melhor como as funções trigonométricas eram calculadas. Deste modo, nos cinco parágrafos seguinte, usaremos como base o artigo Jost Bürgi's Method for Calculating Sine, publicado em 2016 por Folkerts, Launert e Thom.

Na antiguidade grega, os gregos usavam as funções trigonométricas em diversas situações, como por exemplo, para determinar alturas e distâncias nas geodésias, bem como, calcular triângulos esféricos em astronomia, utilizando, em terminologia moderna, a tangente e o seno, respectivamente. A fim de diminuir as dificuldades de cálculos astronômicos, os gregos desenvolveram métodos, tabelas e teoremas relacionados às cordas.

De forma mais desenvolvida, Ptolomeu, apresentou sua tabela de cordas, onde constavam os valores das cordas para os arcos entre 0° e 180°, possibilitando os cálculos de ângulos, lados de triângulos e quadrantes arbitrários. Seus métodos e tabelas foram utilizados em cálculos trigonométricos e astronomia teórica até o século XVI.

Segundo Folkerts, Launert e Thom (2016), não foi apenas na Grécia que foram desenvolvidas tabelas trigonométricas, eles relatam que em Dently na Índia também foram encontrados trabalhos semelhantes, sendo que os hindus não partiram dos arcos, como os gregos, e sim do que hoje conhecemos como seno. Tal substituição foi de grande valia, pois se tratando do lado de um triângulo retângulo, era possível usar os teoremas para tais triângulos.

Folkerts, Launert e Thom (2016), prosseguem enfatizando a importância para o mundo árabe-islâmico, das traduções das tabelas astronômicas, dos escritos dos hindus e da tabela de cordas de Ptolomeu para o árabe, nos séculos VIII e IX. Nos séculos posteriores, surgiram as tabelas Zījes, que auxiliavam em cálculos astronômicos e astrológicos, como o cálculo do movimento dos corpos celestes.

Prosseguindo, tais autores, citam que do final do século IX ao XI, surgiram tabelas senoidais mais exatas; do século XII em diante chegaram à Europa Ocidental, através dos árabes, outras tabelas desenvolvidas na Índia; no Ocidente, do século XIII ao século XIV, surgiram escritos baseados nas "tabelas Toledanas"; no século XV os valores dos senos foram recalculados por estudiosos da Universidade de Viena; no século XVI, os que se destacaram foram Nicolaus Copernicus (1473-1543), calculou uma tabela de seno usando o método de Ptolomeu, George Joachim Rheticus (1514-1574), publicou seu *Canon Doctrinae Triangulorum*, e Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613), publicou em 1613 o *Thesaurus Mathematicus*, que marcou o fim do cálculo das tabelas trigonométricas usando de métodos mencionados anteriormente.

Seguindo uma cronologia histórica, faremos a seguir uma menção do método de simplificar cálculos que se destacou, antes do surgimento dos logaritmos.

Um dos métodos de transformar multiplicação (divisão) em adição (subtração), utilizando fórmulas trigonométricas, muito utilizado entre final do século XVI e começo do século XVII, ficou conhecido por prostaférese, vem do grego *prosthesis* e *apharesis* que significam adição e subtração.

De acordo com Boyer (1974), o surgimento de identidades trigonométricas, no período já mencionado, ocorreu em toda Europa e promoveu a dedicação de estudiosos a métodos eficazes para cálculos analíticos. Folkerts, Launert e Thom (2016) mencionam quatro identidades trigonométricas, que foram demasiadamente utilizadas por matemáticos e astrônomos no final do século XVII. Os autores ainda complementam que tais fórmulas, descritas a seguir, provavelmente foram utilizadas pelo alemão Johannes Werner (1468-1528) para facilitar cálculos presentes na astronomia, e por isso são muitas vezes conhecidas por *fórmulas de Werner*.

$$2\, cos\, A\, cos\, B = cos(A + B) + cos(A - B)$$
$$2\, sen\, A\, cos\, B = sen(A + B) + sen(A - B)$$
$$2\, cos\, A\, sen\, B = sen(A + B) - sen(A - B)$$
$$2\, sen\, A\, sen\, B = cos(A - B) - cos(A + B)$$

Convém ressaltar ainda que as regras descritas acima só tenham sido comumente conhecidas no final do século XVII, Boyer (1974) afirma que os árabes, no tempo de ibn-Yunus, conheciam pelo menos a identidade que transforma um produto de cossenos numa soma de cossenos.

Utilizando notações modernas, vamos propor, a seguir, um exemplo de como calculavam a multiplicação naquela época aplicando as fórmulas trigonométricas, mencionadas acima.

Suponha que queremos calcular a multiplicação 8 768 por 9 063. À priori vamos atribuir aos valores dados a cosseno de ângulos desconhecidos, como segue:

$$cos\, A = \frac{8\,768}{2} = 4\,384$$

$$cos\, B = 9\,0\,63$$

Observe que tomamos como cosseno de A a metade do valor dado 8 768. Isto se dá, pois queremos calcular $\cos A \cos B$, e nas fórmulas trigonométricas temos $2\, cos\, A\, cos\, B$.

Agora, vamos consultar a tabela trigonométrica, dada abaixo, a fim de encontrar os ângulos A e B. É fato que, em notações modernas, dividiríamos cada número por 10^4, com o objetivo de encontrar valores próximos nas tabelas atuais. Assim, segue:

$$cos\, A = 0{,}438\,4$$

$$cos\, B = 0{,}9063$$

Consultando a tabela dada (Figura 1), obtemos $A = 64°$ e $B = 25°$. Em seguida, utilizaremos a identidade trigonométrica,

$$2\, cos\, 64°\, cos\, 25° = cos(64° + 25°) + cos(64° - 25°) = cos\, 89° + cos\, 39°$$

Usando novamente a tabela trigonométrica, obtemos:

$$cos\, 89° + cos\, 39° = 0{,}0175 + 0{,}7771 = 0{,}7946$$

Observe que os números originalmente foram divididos por 10^4. Deste modo,

$$8\,768\ \times 9\,063 =\ (0{,}8768\ \times 10^4) \times (0{,}9063 \times 10^4) = (0{,}8768 \times 0{,}9063) \times 10^8$$

Portanto, para chegar ao resultado final é necessário multiplicar o valor encontrado por 10^8. Logo, o produto de 8 768 por 9 063 é 79 460 000.

Figura 1 – Tabela Trigonométrica

Angulos em Graus	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1

Angulos em Graus	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1	0	—

Fonte: Site Proenem, acessado em 21/09/20.

É notório que, na atualidade, com a ajuda das calculadoras, fazendo o produto proposto, encontramos 79 464 384, um número maior que o encontrado usando a prostaférese. Porém, como afirma Boyer (1974), no contexto histórico que estamos estudando, era comum tabelas trigonométricas com doze a quinze algarismos significativos, o que possibilitava ao método uma economia de esforços, bem como um resultado mais preciso.

É importante ressaltar que o exemplo a cima não tem por objetivo encontrar o resultado preciso como fazemos na atualidade, e sim, mostrar como procediam na utilização do método de prostaférese.

Feito um breve apanhado histórico, na matemática, antes do surgimento dos logaritmos, vamos dar início ao que de fato se propõe este capítulo.

De formas simultâneas, porém independentes, houve as primeiras publicações de tábuas de logaritmos por Jost Bürgi (1552-1632) e John Napier (1552-1632). Lima (2016), justifica tal coincidência ao fato de que muitos, na época, estavam se dedicando a soluções de problemas desse tipo. Tais tábuas logarítmicas, apesar de serem longas e trabalhosas em sua construção, eram de grande valia, pois facilitavam os cálculos, por exemplo, de multiplicação transformada em adição. A fim de entender melhor como se organizavam e eram utilizadas as tábuas de logaritmos, segue o trecho:

> “Uma tábua de logaritmos consiste essencialmente em duas colunas de números. A cada número à esquerda corresponde a um número à sua direita, chamado de logaritmo. Para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos [...]. Para achar o produto basta ler a tábua da direita para esquerda, qual o número que tem esse logaritmo. Semelhantemente, para dividir dois números basta subtrair os logaritmos. Finalmente, para extrair a raiz *n*-ésima de um número, basta dividir o número pelo índice da raiz.” (LIMA, 2016, p. 2)

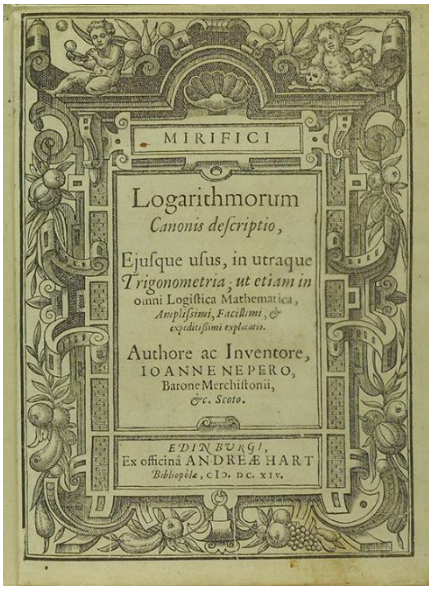
Napier (1550-1617), escocês, residiu por muito tempo, próximo a Edimburgo, no castelo de Merchiston, propriedade de sua família (EVES, 2011). Um barão, que além de administrar suas propriedades, era muito culto e escrevia sobre vários assuntos. Um admirador da matemática, apesar de não ter sido matemático profissional, interessava-se por certos aspectos dela, prioritariamente os que a relacionava com a computação e trigonometria (BOYER, 1974).

Figura 2 – John Napier

Fonte: “Portrait Gallery - NZ," *Convergence* , autor Swetz, julho de 2007, da página da MMA, acessado em 12/08/20.

Napier destacou-se no estudo dos logaritmos, devido a suas publicações e convívio no meio acadêmico (LIMA, 2016). Com o intuito de simplificar cálculos, ele se dedicou aproximadamente 20 anos a tal estudo (MIGUEL; MIORIM, 2002). Em 1614, publicou sua primeira obra, a respeito dos logaritmos, o livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Decriptio* (Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos). Nesta obra, além das tabelas, constava apenas uma sucinta explicação de como utilizá-las (KATZ, 1992). Segundo a página digital da Universidade de Lisboa (acesso em 02/07/2020), ela continha técnicas que simplificavam problemas de cálculo numérico, relacionados com o desenvolvimento do comércio e do progresso da navegação e Astronomia.

Figura 3 – Capa do livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Decriptio* de Napier.



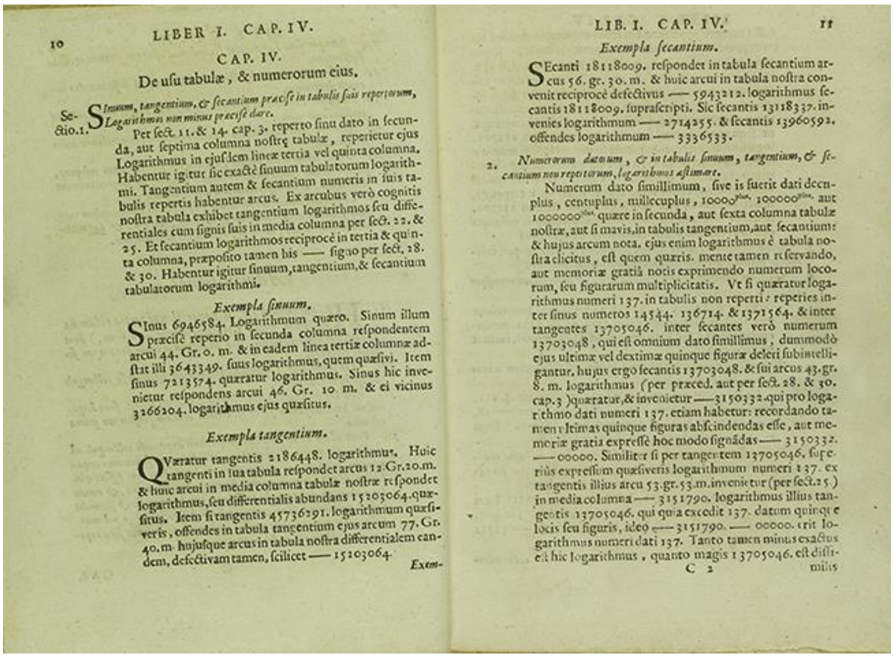
MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis deſcriptio,
Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logiſtica Mathematica,
Ampliſſimi, Facillimi, &
expeditiſſimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

Fonte: "Mathematical Treasure: John Napier's Mirifici Logarithmorum," (Swetz, setembro de 2013), página da MMA, acessado em 12/08/20.

Miguel e Miorim (2002), observaram que Napier justifica o uso dos logaritmos, em sua primeira obra, quando descreve na capa da mesma*: ejusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mhathematica Amplissimi, Facillimi et expedissimi explicatio* (e de seu uso em uma ou outra trigonometria, bem como em todo cálculo matemático, com a explicação mais ampla, mais fácil e mais livre de complicações). Justificativa que se comprova pela obra conter um suplemento de trigonometria esférica, e este estar presentes em muitos cálculos astronômicos da época. Nesse livro, Napier alcançou os logaritmos para senos, tangentes e secantes de comprimento de arco, como podemos constatar na figura 4.

Eves (2011), menciona que por Napier ter restringido inicialmente os logaritmos aos senos de ângulos, suponha-se que ele esteva familiarizado com o método de prostaférese, embora a abordagem feita por ele, para reduzir multiplicações e divisões, associou-se as progressões, como veremos mais à frente.

Figura 4 – Páginas 10 e 11 do livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Decriptio* de Napier



10 LIBER I. CAP. IV.

CAP. IV.

De uſu tabulæ, & numerorum eius.

Se-ctio.1. *Sinuum, tangentium, & ſecantium præciſe in tabulis ſuis repertorum, Logarithmos non minus præciſe dare.*

Per ſect. 11. & 14. cap. 3. reperto ſinu dato in ſecunda, aut ſeptima columna noſtræ tabulæ, reperietur ejus Logarithmus in ejuſdem lineæ tertia vel quinta columna. Habentur igitur ſic exactè ſinuum tabulatorum logarithmi. Tangentium autem & ſecantium numeris in ſuis tabulis repertis habentur arcus. Ex arcubus verò cognitis noſtra tabula exhibet tangentium logarithmos ſeu differentiales cum ſignis ſuis in media columna per ſect. 22. & 25. Et ſecantium logarithmos reciprocè in tertia & quinta columna, præpoſito tamen his — ſigno per ſect. 28. & 30. Habentur igitur ſinuum, tangentium, & ſecantium tabulatorum logarithmi.

Exempla ſinuum.

Sinus 6946584. Logarithmum quæro. Sinum illum præciſè reperio in ſecunda columna reſpondentem arcui 44. Gr. o. m. & in eadem linea tertiæ columnæ adſtat illi 3643349. ſuus logarithmus, quem quæſivi. Item ſinus 7213574. quæratur logarithmus. Sinus hic invenietur reſpondens arcui 46. Gr. 10 m. & ei vicinus 3266204. logarithmus ejus quæſitus.

Exempla tangentium.

Quæratur tangentis 2186448. logarithmus. Huic tangenti in ſua tabula reſpondet arcus 12 Gr. 20. m. & huic arcui in media columna tabulæ noſtræ reſpondet logarithmus, ſeu differentialis abundans 15203064. quæſitus. Item ſi tangentis 45736291. logarithmum quæſiveris, offendes in tabula tangentium ejus arcum 77. Gr. 40. m. hujuſque arcus in tabula noſtra differentialem eandem, defectivam tamen, ſcilicet — 15203064.

Exem-

LIB. I. CAP. IV. 11

Exempla ſecantium.

Secanti 18118009. reſpondet in tabula ſecantium arcus 56. gr. 30. m. & huic arcui in tabula noſtra convenit reciprocè defectivus — 5943212. logarithmus ſecantis 18118009. ſupraſcripti. Sic ſecantis 13118337. invenies logarithmum — 2714255. & ſecantis 13960592. offendes logarithmum — 3336533.

2. *Numerorum datorum, & in tabulis ſinuum, tangentium, & ſecantium non repertorum, logarithmos æſtimare.*

Numerum dato ſimillimum, ſive is fuerit dati decuplus, centuplus, millecuplus, 10000plus. 100000plus. aut 1000000plus. quære in ſecunda, aut ſexta columna tabulæ noſtræ, aut ſi mavis, in tabulis tangentium, aut ſecantium: & hujus arcum nota. ejus enim logarithmus è tabula noſtra elicitus, eſt quem quæris. mente tamen reſervando, aut memoriæ gratiâ notis exprimendo numerum locorum, ſeu figurarum multiplicitatis. Vt ſi quæratur logarithmus numeri 137. in tabulis non reperti: reperies inter ſinus numeros 14544. 136714. & 1371564. & inter tangentes 13705046. inter ſecantes verò numerum 13703048, qui eſt omnium dato ſimillimus, dummodò ejus ultimæ vel dextimæ quinque figuræ deleri ſubintelligantur. hujus ergo ſecantis 13703048. & ſui arcus 43. gr. 8. m. logarithmus (per præced. aut per ſect. 28. & 30. cap. 3) quæratur, & invenietur — 3150332. qui pro logarithmo dati numeri 137. etiam habetur: recordando tamen ultimas quinque figuras abſcindendas eſſe, aut memoriæ gratia expreſſè hoc modo ſignãdas — 3150332. — 00000. Similiter ſi per tangentem 13705046. ſuperiùs expreſſum quæſiveris logarithmum numeri 137. ex tangentis illius arcu 53. gr. 53. m. invenietur (per ſect. 25.) in media columna — 3151790. logarithmus illius tangentis 13705046. qui quia excedit 137. datum quinque locis ſeu figuris, ideo — 3151790. — 00000. erit logarithmus numeri dati 137. Tanto tamen minus exactus eſt hic logarithmus, quanto magis 13705046. eſt diſſi-

C 2 milis

Fonte: Extraída de "Mathematical Treasure: John Napier's Mirifici Logarithmorum," (Swetz, setembro de 2013), página da MMA, acessado em 12/08/20

Sua primeira obra atraiu interessados pelo assunto, gerando mais aperfeiçoamento de seus métodos e, consequentemente, aprimorando o estudo dos logaritmos, como mostra o trecho a seguir:

> "A publicação em 1614 do sistema de logaritmos teve sucesso imediato, e entre seus admiradores mais entusiásticos estava Henry Briggs, professor de geometria em Oxford. Em 1615 ele visitou Napier em sua casa na Escócia, e lá eles discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Briggs propôs o uso de potência de dez, e Napier que já havia pensado nessa possibilidade e concordava. Napier uma vez tinha proposto uma tabela usando:
>
> $$\log 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \log 10 = 1$$
>
> Os dois finalmente concordaram em que o logaritmo de 1 deveria ser 0 e o logaritmo de 10 deveria ser 1. Mas Napier já não tinha energia suficiente para por em prática essas ideias, pois morrera em 1617. Por isso recaiu sobre Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns." (O BARICENTRO DA MENTE, acesso em 02/07/2020)

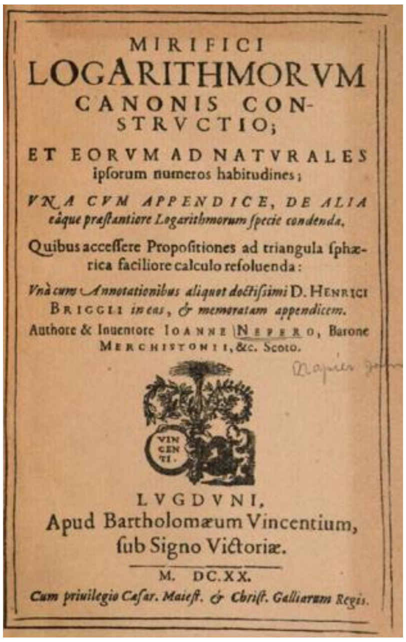
A teoria para a construção das tábuas de logaritmos, foi publicada em sua segunda obra, *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (Uma Construção da Maravilhosa Regra dos Logaritmos), no ano de 1619, dois anos após morte de Napier

(KATZ, 1992). Segundo Miguel e Miorim (2002), em tal obra, os logaritmos surgiram por meio de um cenário geométrico, cinemático, funcional e trigonométrico, entrelaçados.

> “Geométrico, porque o logaritmo não aparecia como um número puro, mas como a medida de um segmento de reta; cinemático, porque a situação utilizada para descrever tal conceito envolvia a coordenação de dois movimentos; aritmético, porque o mesmo conceito era expresso por meio do relacionamento entre duas seqüências de números, uma geométrica e outra aritmética; funcional, porque a situação cinemática envolvia uma grandeza variando em função de outra; e trigonométrico, porque Napier se propôs a determinar, não os logaritmos de segmentos de reta genéricos, mas os logaritmos de segmentos de reta representativos dos senos de certos ângulos.” (MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 36)

É válido ressaltar que, a priori, Napier estava à procura de um facilitador da multiplicação de senos, visto que a trigonometria era necessária às observações astronómicas e à navegação; só mais tarde este estudo abrangeria qualquer número (Página digital da universidade de Lisboa, acesso em 02/07/2020).

Figura 5 – Capa do livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* de Napier



MIRIFICI
LOGARITHMORVM
CANONIS CON-
STRVCTIO;
ET EORVM AD NATVRALES
ipsorum numeros habitudines;
VNA CVM APPENDICE, DE ALIA
eâque præstantiore Logarithmorum specie condenda.
Quibus accessere Propositiones ad triangula sphæ-
rica faciliore calculo resoluenda:
Vnà cum Annotationibus aliquot doctissimi D. HENRICI
BRIGGII in eas, & memoratam appendicem.
Authore & Inuentore IOANNE NEPERO, Barone
MERCHISTONII, &c. Scoto.
VINCENTI.
LVGDVNI,
Apud Bartholomæum Vincentium,
sub Signo Victoriæ.
M. DC.XX.
Cum priuilegio Cæsar. Maiest. & Christ. Galliarum Regis.

Fonte: "Napier's Binary Chessboard Calculator - Napier and Logarithms" (Kolpas e Tomash, dezembro 2018), página da MMA, acessado em 12/08/20.

Para descrever os logaritmos, Napier criou uma situação cinemática, que descrevia dois segmentos, onde continham duas sequências numéricas, sendo uma geométrica e outra aritmética. Para melhor entendimento, considere um segmento Q_0A, figura 6. Suponha, que este segmento seja percorrido, por um corpo móvel, que parte de Q_0, com velocidade que diminui à medida que se aproxima de A. A velocidade adotada é igual ao tamanho do segmento Q_0A, o qual Napier atribuiu a medida igual ao raio de uma circunferência que determinava a medida de outros segmentos menores que representavam o seno de alguns ângulos para a sua tabela de senos, isto é, Q_0A tinha medida igual a $10\ 000\ 000 = 10^7$. Vale a pena transcrever aqui a passagem de Miguel e Miorim (2002) que justifica essa escolha de Napier:

> "É claro que, por um lado, para que a sua imaginada tábua calculadora pudesse ser útil, na época, à realização de cálculos trigonométricos – os quais requeriam, com freqüência, que divisões e multiplicações entre os senos de certos números fossem realizadas – seria conveniente que o primeiro termo da PG a ser construída coincidisse com o número a ser tomado como raio do círculo trigonométrico. [...] Desse modo, Napier escolheu para o primeiro termo de sua PG o número 10^7, e é por essa razão que ambos os pontos móveis de sua definição cinemática iniciam seus movimentos com a velocidade de 10^7." (MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 41)

Em seguida marcamos sobre este, um ponto Q_1 tal que $Q_1A = pQ_0A$, onde p é uma razão dada e $p < 1$. Depois assinalamos os pontos: Q_2 tal que $Q_2A = pQ_1A$, Q_3 tal que $Q_3A = pQ_2A$, Q_4 tal que $Q_4A = pQ_3A$, ... , Q_k tal que $Q_kA = pQ_{k-1}A$. Observe que:

$$Q_1A = pQ_0A$$
$$Q_2A = p(Q_1A) = p(pQ_0A) = p^2Q_0A \Leftrightarrow Q_2A = p^2Q_0A$$
$$Q_3A = p(Q_2A) = p(p^2Q_0A) = p^3Q_0A \Leftrightarrow Q_3A = p^3Q_0A$$
$$Q_4A = p(Q_3A) = p(p^3Q_0A) = p^4Q_0A \Leftrightarrow Q_4A = p^4Q_0A$$
$$....$$
$$Q_{k-1}A = p(Q_{k-2}A) = p(p^{k-2}Q_0A) = p^{k-1}Q_0A \Leftrightarrow Q_{k-1}A = p^{k-1}Q_0A$$
$$Q_kA = p(Q_{k-1}A) = p(p^{k-1}Q_0A) = p^kQ_0A \Leftrightarrow Q_kA = p^kQ_0A$$

Figura 6 – Segmento Q_oA

Fonte: O autor, 2021.

Deste modo, temos que $(pQ_0A, p^2Q_0A, p^3Q_0A, p^4Q_0A, \ldots, p^{k-1}Q_0A, p^kQ_0A, \cdots)$ é uma progressão geométrica de razão p, ou seja, os segmentos Q_iA representam uma progressão geométrica de razão p. Miguel e Miorim (2002), descrevem que tal razão era escolhida, para que essa progressão tivesse seus termos o mais próximo uns dos outros, isto porque, almejava-se abranger ângulos cujas medidas estivessem próximas. Com esse objetivo, Napier adotou a razão $p = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$. Portanto, $(10^7, 10^7(1 - 1/10^7), 10^7(1 - 1/10^7)^2, 10^7(1 - 1/10^7)^3, \cdots)$ foi a progressão geométrica adotada por ele na época.

Segundo Carvalho e Roque (2012), Napier, a fim de definir o logaritmo de p^{k}, criou uma correspondência entre os pontos Q_{i}, descritos acima, com outros pontos definidos por uma progressão aritmética. Esta, sobre um segmento de tamanho também igual a 10^7. Deste modo, tome tal segmento como B_0B (figura 7) e os pontos B_i, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, sobre ele, mantendo a mesma distância um do outro.

Figura 7 – Segmento B_0B

Fonte: O autor, 2021

Agora, considere dois móveis T e V, um partindo de B_0 e outro de Q_0, respectivamente, num mesmo instante e com velocidades iguais. T move-se por B_0B de forma aritmética, enquanto, V move-se por Q_0A de forma geométrica. Observe, que T cobre cada segmento, definidos pelos pontos B_i, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, no mesmo tempo, visto que eles são de igual tamanho e a velocidade é constante. A velocidade de V irá variar para que ele cubra cada intervalo Q_iA, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, que são decrescentes, no mesmo tempo. Napier afirma que o logaritmo de Q_iA, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, é dado, respectivamente, pelo comprimento do segmento B_0B_i, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ (CARVALHO; ROQUE, 2012). É valido ressaltar, que ele, criou um artifício para fornecer o logaritmo dos senos dos ângulos compreendidos entre 0° a 90° e que podiam ser representados por números inteiros. Deste modo, Q_iA, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, são segmentos que possuem comprimentos iguais aos valores do seno de alguns ângulos, enquanto B_0B_i, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ eram, respectivamente, o logaritmo desses valores.

Estabelecendo, essa relação entre as progressões, Napier define logaritmo e cria uma forma de calculá-lo. De acordo com Boyer (1974), Napier, a princípio, nomeou sua novo descoberta de números artificiais, porém depois fez a junção de duas palavras gregas, Logos e Arithmos, que significam, respectivamente, razão e número, obtendo a palavra Logaritmo.

> “Assim, o significado etimológico da palavra logaritmo é o número de razões, sendo que o termo razão refere-se à razão da PG, e número de razões, ou seja, o logaritmo de um termo n da PG, refere-se ao número n de vezes em que a razão (1 – 1/10^7) da PG deveria ser sucessivamente aplicada ao primeiro termo - 10^7 - dessa mesma PG a fim de se obter o número 10^7 (1 – 1/10^7)^n.” (MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 43)

Através da definição de logaritmo descrita por Napier, é de fácil observação que, quanto menor for Q_iA, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, seno de um ângulo, maior será B_0B_i, o logaritmo do seno desse ângulo. Isso se dá, devido p, razão da progressão geométrica, adotada por Napier, ser um número menor que um, tinha-se uma progressão geométrica decrescente. Outro fato importante, que segue da definição de logaritmo feita por ele, e que o logaritmo de Q_0A é igual a B_0B_0 , ou seja, ele será nulo.

Porém, tal definição não fornecia diretamente um modo de construir a tabela do logaritmo dos senos, e sim justifica a propriedade fundamental que fornecerá os valores da tabela. Afim de exemplificar, vamos considerar uma forma mais simples e usando notação atual, como segue.

À priori, vamos adotar log para logaritmo, apesar de Napier, não ter feito. Agora, vamos adotar a razão da progressão aritmética $(B_0B_1, B_0B_2, B_0B_3, \cdots, B_0B_k, \cdots)$, como uma constante t. Daí segue,

$$B_0B_1 = t$$
$$B_0B_2 = t + t = 2t = 2B_0B_1$$
$$B_0B_3 = t + t + t = 3t = 3B_0B_1$$
$$\ldots.$$
$$B_0B_k = t + t + \cdots + t = kt = kB_0B_1$$

Assim, escrevemos a progressão aritmética como $(B_0B_1, 2B_0B_1, 3B_0B_1, \cdots, kB_0B_1, \cdots)$.

Pela definição de logaritmo estabelecida por Napier, temos:

$$log(Q_kA) = B_0B_k$$

Sabendo que $Q_0A = 10^7$ e que $Q_kA = p^kQ_0A$, segue:

$$log(Q_kA) = B_0B_k$$
$$log(p^kQ_0A) = k\, B_0B_1$$
$$log(p^k 10^7) = kt$$

Por outro lado, como $Q_iA, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k$, formam uma progressão geométrica, dados $m < n$ e $r < s$, tais que:

$$\frac{Q_mA}{Q_nA} = \frac{Q_rA}{Q_sA}$$

Como $Q_kA = p^kQ_0A$, segue:

$$\frac{p^mQ_0A}{p^nQ_0A} = \frac{p^rQ_0A}{p^sQ_0A}$$

então,

$$p^{m-n}Q_0A = p^{r-s}Q_0A$$

ou ainda,

$$log(p^{m-n}Q_0A) = log(p^{r-s}Q_0A)$$

Pela definição de logaritmo, dada por Napier, temos $log(Q_kA) = log(p^kQ_0A\,) = B_0B_k$. Deste modo, como $B_0B_k = kB_0B_1$, segue:

$$log(p^{m-n}Q_0A) = log(p^{r-s}Q_0A)$$
$$(m-n)B_0B_1 = (r-s)B_0B_1$$

ou,

$$m\,B_0B_1 - \,n\,B_0B_1 = r\,B_0B_1 - s\,B_0B_1$$

Usando novamente a definição de logaritmo feita por Napier, segue:

$$m\,B_0B_1 - \,n\,B_0B_1 = r\,B_0B_1 - s\,B_0B_1$$
$$B_0B_m - \,B_0B_n = \,B_0B_r - B_0B_s$$
$$log(Q_mA\,) - log(Q_nA\,) = log(Q_rA\,) - log(Q_sA\,)$$

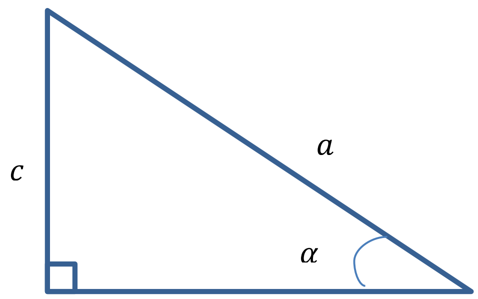
Logo,

$$\text{se } \frac{Q_m A}{Q_n A} = \frac{Q_r A}{Q_s A}, \text{ então } log(Q_m A\,) - log(Q_n A\,) = log(Q_r A\,) - log(Q_s A\,) \qquad \text{(I)}$$

Assim, chegamos à igualdade acima, que representa a propriedade fundamental, a qual permite construir tabelas de logaritmo, como queríamos demonstrar.

Como mencionado anteriormente, Napier calculava o logaritmo do seno de algum ângulo. Por exemplo, calcular o $log(Q_r A\,)$ era determinar o $log(sen\ \alpha)$, sendo $sen\ \alpha = Q_r A$. Assim, a fim de exemplificar como ele calculava os logaritmos, usando a mesma forma adotada por Katz (1992), iremos considerar um triângulo retângulo, representado abaixo, de hipotenusa a e cateto c, valores conhecidos, onde a é oposto a um ângulo α, que se deseja determinar.

Figura 8 – Triângulo retângulo



Fonte: O autor, 2021

Para solucionar tal problema, ele considerava a relação trigonométrica:

$$\frac{sen\ \alpha}{r} = \frac{b}{a}$$

onde $r = 10^7$, o raio da circunferência com que Napier determinava os senos.

Em seguida, por meio da propriedade fundamental (I), segue-se

$$log(sen\ \alpha) - log(r) = log(b) - log(a)$$

ou ainda, sabendo que $log(r) = log(10^7) = 0$, temos

$$log(sen\ \alpha) = log(b) - log(a) + log(r)$$

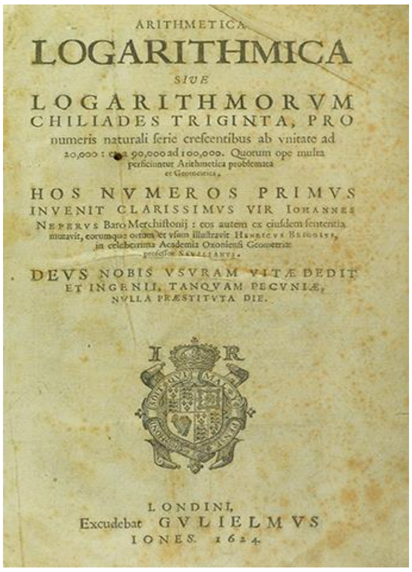
$$log(sen\ \alpha) = log(b) - log(a)$$

Assim, determinava-se o logaritmo do seno de α através do logaritmo dos lados conhecidos dos triângulos.

O método adotado por Napier para os logaritmos foi de extrema importância na história. Com a aplicação de sua primeira obra, foi dada a largada para que matemáticos e outros estudiosos desenvolvessem mais trabalhos a respeito do tema, chegando ao logaritmo utilizado na atualidade. O primeiro a sugerir uma mudança no logaritmo de Napier foi Briggs, de quem falaremos a seguir.

Especialista em geometria e professor na Universidade de Oxford, Briggs (1561-1631) foi um grande admirador de Napier. Como citado anteriormente, ele visitou Napier em 1915, quando fizeram alguns aprimoramentos no sistema de logaritmos, tais como, considerar potências base 10. Segundo Boyer (1974), com a morte de Napier em 1917, recaiu sobre Briggs a responsabilidade de construir tabelas de logaritmos comuns ou Briggsianos, publicando neste mesmo ano sua obra *Logarithmorum Chilias prima* (Os Primeiros Mil Logaritmos), onde calculava os logaritmos de 1 a 1000 com quatorze casas. Já em 1924, ele publicou a obra *Arithmetica Logarithmica* (Aritmética Logarítmica), em que fez uma ampliação da tabela acrescentando os logaritmos comuns de 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000, mantendo o número de casas. Com esta obra, chega-se a um trabalho com os logaritmos que semelhante aos da atualidade. Posteriormente, John Speidell, publicou, em 1619, *New Logarithmes* (Novos Logaritmos), em que calculava os logaritmos naturais das funções trigonométricas.

Figura 9 – Capa do livro *Arithmetica Logarithmica* de Briggs



Fonte: Mathematical Treasure: *Arithmetica Logarithmica* of Henry Briggs (Swetz, abril de 2013), a página da MMA, acessado em 10/08/20.

Agora, falaremos de Bürgi, que embora não tenha publicado antes de Napier a respeito dos logaritmos, também teve seu destaque nesse estudo. Vamos começar fazendo uma singela citação da bibliografia de Bürgi escrita por Clark (2015).

Nascido em 28 de fevereiro de 1552, o suíço, natural da comuna de Lichtensteig, Jobst Bürgi (1552-1632) provavelmente recebeu uma educação inicial de aproximadamente 6 anos. Após tal formação, que terminou em 1564, ele experimentou várias profissões, o que mais tarde, o ajudou a construir instrumentos. Em 1571, depois do termino de seu ensino profissionalizante, Bürgi trabalhou como relojoeiro em diversos lugares. Devido aos conhecimentos e habilidades adquiridas, em 1579, ele foi nomeado para trabalhar no observatório de Kassel na Alemanha, como artesão e relojoeiro. A partir desse ano ele se dedicou a tal oficio, bem como à astronomia e matemática. Um de seus grandes inventos, deu-se em 1584, quando construiu o primeiro relógio com precisão de segundos. Tal criação, exigiu que Bürgi criasse métodos e sistemas mecânicos necessários à distribuição uniforme e constante das forças iniciais de um peso ou mola. Buscando formas de melhorar seu trabalho, ele se dedicou ao aprimoramento dos cálculos astronômicos, buscando métodos e fórmulas para melhorar a prostaférese, processo que transforma multiplicação e divisão, em adição e subtração, respectivamente. Assim, Bürgi precisou deter conhecimentos iniciais de prostaférese envolvendo senos. A partir de 1587, ele começou a se dedicar a medição de corpos celestes, e mais uma vez, fez-se necessário a busca por novos métodos matemáticos. Deste modo, além de trabalhar nas medições celestes e construções de instrumentos, ele se dedicou a matemática, desenvolvendo trabalhos em trigonometria, trilhando, assim, seu caminho na invenção dos logaritmos.

Figura 10 – Jobst Bürgi

Fonte: “Portrait Gallery - A - M," *Convergence* , autor Swetz (2007), da página da MMA, acessado em 12/08/20.

O suíço Bürgi, foi o único rival de Napier quanto à prioridade da invenção dos logaritmos (EVES, 2011). Praticamente de forma simultânea, eles tiveram ideias semelhantes, porém independentes como relata o trecho abaixo:

> “Napier foi de fato o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas a idéias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente na Suíça por Jobst Bürgi mais ou menos ao mesmo tempo. Na verdade, é possível que a idéia de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi[7] em 1588, o que seria meia dúzia de anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. Porém, Bürgi só publicou seus resultados em 1620, meia dúzia de anos depois de Napier publicar sua *Descriptio*.” (BOYER, 1974, p. 230)

A função de relojoeiro no século XVI era de extrema importância, pois além de construir relógios para fins decorativos, tal profissão era considerada uma atividade científico-tecnológico (MIGUEL; MIORIM, 2002). Isso se dava porque a construção de relógios, na época, exigia conhecimentos astronômicos. Para construir relógios astronômicos[1] e muitas vezes fazer observações astronômicas, Bürgi se deparava com cálculos extremamente trabalhosos e que exigiam muita precisão. Deste modo, com o intuito de simplificar cálculos, ele, assim como Napier, desenvolve um estudo sobre logaritmos vinculado às progressões.

Seu primeiro trabalho foi publicado em Praga no ano de 1620, um livro cujo nome era *Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen* (Tábuas de progressões aritméticas e geométricas). A obra de Bürgi se assemelha à de Napier, pois ambos principiaram com as propriedades das sequências aritméticas e geométricas. Porém, apesar de terem o mesmo princípio fundamental, elas diferem, pois foram usadas terminologias e valores distintos (BOYER, 1974). É válido ressaltar, que Bürgi utilizou uma abordagem algébrica, enquanto Napier, como citado anteriormente, fez mão de uma abordagem geométrica (EVES, 2011). Complementando as diferenças entre suas obras segue o trecho:

> Em vez de partir de um número um pouco *menor* que um (como Napier que usava $1-10^{-1}$), Bürgi escolheu um número um pouco *maior* que um – o número $1+10^{-4}$; e em vez de multiplicar as potências desses números por 10^{7}, Bürgi multiplicava por 10^{8}. Havia ainda outra pequena diferença: em sua tabulação Bürgi multiplicava todos os seus índices de potência por dez. (BOYER, 1974, p. 231)

Eves (2011) afirma que alguns matemáticos foram responsáveis pela propagação dos logaritmos pela Europa, como por exemplos, na Itália o grande responsável em divulgar tais teorias foi Bonaventura Cavalieri, assim como na Alemanha foi Johann Kepler e na França foi Edmund Wingate.

Existiram outras contribuições para aprimoramento dos logaritmos. Eves (2011), cita que William Oughtred, criou a régua de cálculo logarítmica reta e Amédée Mannheim (1831-1906), que em 1850 foi responsável por padronizar as modernas réguas de cálculo com a escala log.

Nascido na Suíça, Euler, foi o mais importante matemático de seus país de todos os tempos e também deu contribuições valiosas para a evolução dos logaritmos. É certo que ele foi o primeiro a tratar o logaritmo como expoente e usou e para a base dos logaritmos naturais (EVES, 2011). Carvalho e Roque (2012), relatam que Euler foi o primeiro a provar que não existiam logaritmos reais de números negativos, bem

1 Relógio capaz que exibe informações astronômicas, tais como as posições relativas do Sol, da Lua e de alguns planetas e constelações.

como que tanto os logaritmos dos números negativos quanto os logaritmos de números imaginários, resultam em números imaginários, ainda se estendem como mostra o trecho a seguir,

> "Após analisar os pontos de vista de Leibniz e Johann Bernoulli, Euler esclareceu a questão no artigo *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*. Para provar a existência de logaritmo de números negativos, ele partiu do princípio de que o número e é base para todos os logaritmos e exponenciais. Ele observou que, se o símbolo $\log\ w$ for interpretado como o conjunto de todos os números complexos z tais que $e^z = w$, continua válida a propriedade do logaritmos do produto, isto é, se um número complexo é logaritmo de wz, então $\log(wz) = \log w\ + \log z$, como pretendia Johann Bernoulli.
>
> Isto significava que, ao admitir-se uma infinidade de logaritmos para cada número, manteve-se a validade da regra $e^{logw} = w$, o que não ocorreria se para cada número houvesse apenas um logaritmo. A relação
>
> $$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\, sen\, x,$$
>
> Conhecida como identidade de Euler, estabeleceu a tão necessária conexão entre os logaritmos e as funções trigonométricas. Além dessa conquista, a identidade de Euler deu significado aos logaritmos de números negativos." (CARVALHO; ROQUE, 2012, p. 315-316)

Figura 11 – Leonhard Euler

Fonte: "Portrait Gallery - A - M," *Convergence* , autor Swetz (2007), da página da MMA, acessado em 12/08/20.

2 **OS LOGARITMOS NA CULTURA ESCOLAR BRASILEIRA**

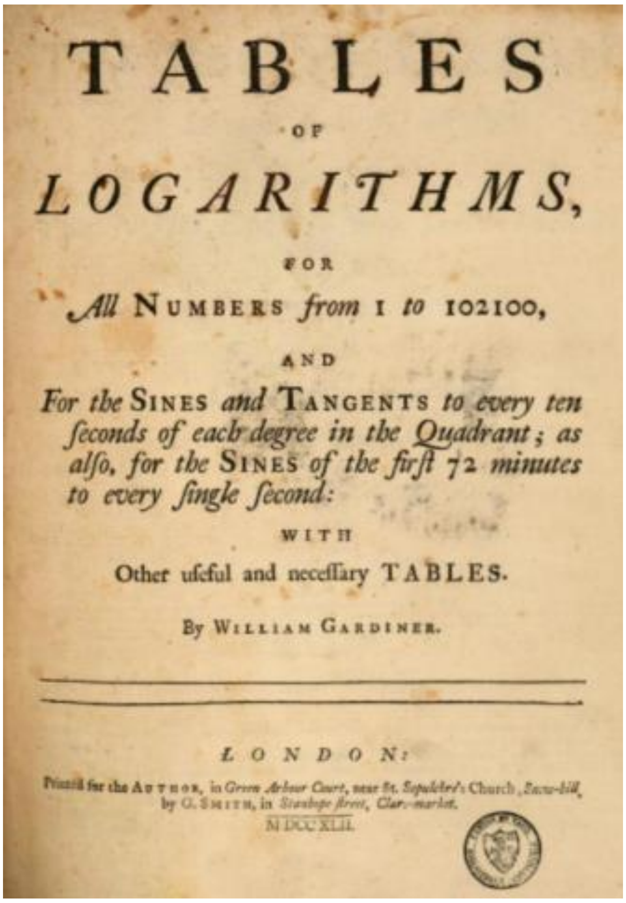
Os logaritmos, por muito tempo, foram um instrumento essencial para o cálculo aritmético. Possibilitavam, de forma rápida, a resolução de operações complicadas que envolviam multiplicação e divisão de números com muitos algarismos, bem como, a potenciação com expoentes fracionários. Na atualidade, com a evolução das máquinas de calcular, a função do logaritmo na aritmética, ou seja, como instrumento simplificador de cálculos, tornou-se obsoleto.

De acordo com Panagiotou (2011) os logaritmos são um bom exemplo de algo que muda fundamentalmente seu papel dentro da matemática, pois sua utilidade inicial que era de simplificação de cálculos dimimuiu em importância, enquanto o uso da função logarítmica para a solução de problemas ascendeu.

Concebido de forma aritmética por Napier, o logaritmo, ao logo do tempo, passou a ser visto sob concepções algébricas e algébrico-funcionais. Fazendo uma análise da matemática em livros do século XIX ao XXI, Soares (2017), afirma que na matemática escolar brasileira, os logaritmos eram tratados por meios aritméticos, adotando uma concepção aritmética, mantendo sua essência de criação, na qual Napier fez uma relação com as progressões. Aponta ainda, que na década de 1890, esse cenário muda, e eles passaram a ser expoentes numa equação ou função, adotando uma concepção algébrica. A partir de 1930, perdurando prioritariamente até a atualidade, eles passaram a ser tratados segundo uma concepção algébrico-funcional.

Apesar de John Wallis e Johnn Bernoulli, em 1685 e 1694, respectivamente, terem reconhecido uma possibilidade de definir os logaritmos por uma concepção particularmente algébrica, foi apenas em 1742, 140 anos após a concepção aritmética original de Napier, que William Gardiner publicou, em seu livro *Tables of Logarithms of numbers* tal abordagem. Em sua obra, Gardiner define o logaritmo de um número como expoente de uma potência de base dez, e está sendo igual ao próprio número.

Figura 12: Capa do livro *Tables of Logarithms* de Willian Gardiner



TABLES

OF

LOGARITHMS,

FOR

All NUMBERS *from* 1 *to* 102100,

AND

For the SINES *and* TANGENTS *to every ten ſeconds of each degree in the Quadrant; as alſo, for the* SINES *of the firſt* 72 *minutes to every ſingle ſecond:*

WITH

Other uſeful and neceſſary TABLES.

By WILLIAM GARDINER.

LONDON:

Printed for the AUTHOR, in *Green Arbour Court*, near St. *Sepulchre's* Church, *Snow-hill*, by G. SMITH, in *Stanhope ſtreet*, *Clare-market*.

MDCCXLII.

Extraída do site https://books.google.com.br/, acessado em 25/11/20.

Em programas oficiais brasileiros de ensino de Matemática, Miorim e Miguel (2002), relatam que o logaritmo, entre 1856 a 1912, estava majoritariamente presente na Aritmética, vindo após o estudo das razões e proporções e a teoria das progressões. No ano 1892, segundo tais autores, pela primeira vez o logaritmo passa a estar no campo da Álgebra, mantendo sua conexão com as progressões, mudança impulsionada pela Reforma da Educação Brasileira. Assim, houve uma oscilação de tal tema entre a Aritmética e a Álgebra, no período de 1893 e 1912.

A mudança para a concepção algébrico-funcional dos logaritmos foi proporcionada por uma conexão entre sua teoria e um campo de matemática que se iniciava, o do Cálculo Diferencial e Integral. Isto se deu, devido aos estudos que evidenciaram a relação dos logaritmos a fenômenos naturais, almejando investigar o movimento e as grandezas variáveis.

Miorim e Miguel (2002), afirmam que na cultura educacional brasileira, essa mudança se deu no século XX, início da década de 70, quando a função exponencial foi associada à função logarítmica, e esta, por sua vez, começa a destacar-se no estudo de problemas envolvendo variações de grandezas. Concepção adotada por livros didáticos na atualidade, e que está relacionada ao avanço tecnológico.

Mais adiante, abordaremos a concepção geométrica dos logaritmos que, embora pouco abordada em sala de aula, tem uma posição de destaque no estudo dos logaritmos, pois “apresenta uma vantagem incontestável de simplicidade conceitual e técnica” (LIMA, 2016).

Visto, como se comportou e para que foram utilizados os logaritmos ao longo do tempo, façamos uma pergunta: por que estudar os logaritmos hoje em dia?

A fim de mostrar que, mesmo com todo o avanço tecnológico, o estudo dos logaritmos é necessário e fundamental na atualidade, transcrevemos o trecho a seguir:

> “[...] o estudo dos logaritmos ainda é e continuará a ser de central importância. Com efeito, embora eles tenham sido inventados como acessório para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da Matemática e da ciência em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são estritamente relacionados com os logaritmos, que no princípio eram importantes apenas por causa das tábuas, mostraram ter apreciável valor intrínseco.” (LIMA, 2016, p. 3)

Por outro lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), propõem que o Ensino Médio deve propiciar,

> “[...] um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade.” (PCNEM, 1999, p. 4)

Além disso, este documento, expõe que o ensino da matemática, no nível médio, tem por finalidade levar o aluno a “aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas" (PCNEM, 1999, p. 42)

Com base no que propõem os PCNEM (1999) e o fato dos logaritmos estarem diretamente relacionas a fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos, possibilitando aplicações em situações reais do cotidiano, e tornando seu aprendizado útil à vida do discente, chagamos a uma justificativa, com base em documentos oficiais, sobre a importância de seu estudo.

2.1 **A importância da interdisciplinaridade e contextualização no processo de ensino e aprendizagem**

A fim de que o conhecimento desenvolvido pelo aluno não seja de forma fragmentada, tornando-se ineficaz, a interdisciplinaridade deve estar presente em todo o processo de ensino e aprendizagem, e esta será promovida por ensino pautado na contextualização.

> "O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência." (PCNEM, 1999, P.43)

No ensino médio, os objetivos educacionais vão além do aprofundamento dos saberes nas disciplinas, eles também envolvem a articulação interdisciplinar desses saberes, propiciados pelos "conteúdos tecnológicos e práticos, já presentes junto a cada disciplina, mas particularmente apropriados para serem tratados desde uma perspectiva integradora" (PCNEM, 1999, P.6).

Uma das competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática é a contextualização sociocultural, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (1999). Uma forma de desenvolvê-la, segundo tal documento, é "Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento". Daí, revela-se a busca para, além de relacionar os conteúdos a situações do cotidiano do aluno, também o objetivo de os relacionar a outras disciplinas.

Com o intuito de citar um exemplo prático de como é desenvolvida essa articulação interdisciplinar, segue o trecho abaixo, retirado dos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> "O princípio físico da conservação da energia, essencial na interpretação de fenômenos naturais e tecnológicos, pode ser verificado em processos de natureza biológica, como a fermentação, ou em processos químicos, como a combustão, contando em qualquer caso com o instrumental matemático para seu equacionamento e para sua quantificação." (PCNEM, 1999, p. 8)

Com base no PCN+, ampliamos o exemplo acima, em que se trata do estudo da energia, conceito comum às distintas ciências. Na física a energia pode ser apresentada no cálculo da energia cinética do movimento de um veículo, na biologia e na química, a energia está presente nas reações químicas e na fotossíntese, e a matemática se integra a todos pois permite quantificar os conceitos e efetuar cálculos precisos. Além da integração na Área das Ciências da Natureza e Matemática, a necessidade de, por exemplo, quantificar, interpretar, utilizar instrumentos adequados para medir, compreender o contexto social e histórico, promove a articulação entre outros campos do saber. Agora, com o intuito de dar um contexto social e cultural aos conhecimentos, segue um trecho, presente no PCN+, que envolve o estudo da energia.

> "Poderíamos igualmente retomar a discussão do aprendizado da energia, no conjunto das ciências e em cada uma delas, para ilustrar como dar contexto social e cultural aos conhecimentos. Para compreender a energia em seu uso social, as considerações tecnológicas e econômicas não se limitam a nenhuma das disciplinas, tornando essencial um trabalho de caráter interdisciplinar. Na produção de combustíveis convencionais ou alternativos, com a utilização de biomassa atual, como a cana-de-açúcar, ou de biomassa fóssil, como o petróleo, a fotossíntese, estudada na Biologia, é o início para a produção natural primária dos compostos orgânicos, enquanto outros processos químicos são necessários à sua transformação e industrialização. Na geração hidrelétrica, termelétrica ou eólica, além da eventual contribuição de conceitos químicos e biológicos, a produção de eletricidade decorre de técnicas e processos estudados na Física, centrais para compreender e manipular fluxos naturais de matéria e energia, como a radiação solar, a evaporação, as convecções, as induções eletromagnéticas, as correntes elétricas e sua dissipação térmica. Tratar energia nesse contexto social e produtivo é bem mais do que compreender sua produção ou expressá-la em unidades usuais, sabendo converter joules ou calorias em quilowatts-hora ou toneladas equivalentes de petróleo. É preciso investigar e

> compreender, além das contas domésticas de luz ou de gás, também a matriz energética que relaciona os setores sociais que demandam energia, como indústria, comércio, transporte ou residências, com as diferentes fontes de oferta, como petróleo, gás natural, hidroeletricidade, termeletricidade, carvão mineral ou vegetal.
>
> É preciso, ainda, levar em conta os impactos ambientais e os custos financeiros e sociais das distintas opções energéticas, temas fronteiriços com a Economia e a Geografia, da área de ciências humanas. Por exemplo, a produção do álcool de cana, o etanol, que complementa os derivados de petróleo como combustível automotivo, é uma alternativa que não é decidida simplesmente pelo preço, mais caro se comparado ao da gasolina, pois também envolve a balança de pagamentos de importação, já que o álcool é produto nacional e o petróleo consumido no Brasil é em parte importado, assim como envolve geração local de empregos e alívio ambiental urbano. De uma perspectiva histórica, o estudo da energia pode discutir a importância da invenção das rodas d'água, dos moinhos de vento e do aperfeiçoamento dos arreios de animais de tração para o acúmulo de produção no período medieval, ou o papel da máquina a vapor para impulsionar a primeira revolução industrial, ou do motor elétrico, da iluminação elétrica e da eletroquímica para a segunda revolução industrial e daí para a frente, até alcançar a enorme rede de oferta e demanda de insumos energéticos, dos quais depende tão profundamente a vida contemporânea. Esses tratamentos de aspectos geográficos, sociais e históricos podem ser feitos articuladamente com as demais áreas, mas não é preciso que sejam deixados para a área de ciências humanas, por conta da "natureza do conteúdo". Pelo contrário, precisamente por sua natureza humanista, esses aspectos são significativos para dar contexto sócio-cultural a disciplinas científicas como a Biologia, a Física e a Química, e às linguagens matemáticas de que fazem uso, propiciando assim um aprendizado mais eficaz." (PCN+, 2002, p. 31)

Portanto, a interdisciplinaridade e a contextualização são peças fundamentais a serem desenvolvidas pelos docentes em todas as áreas de conhecimento. A matemática, por estar relacionada a fenômenos naturais e sociais, possibilita seu ensino pautado nessa perspectiva interdisciplinar e contextualizada. Os logaritmos, por estarem ligados a fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos, possibilitam uma interação entre as diversas áreas de conhecimento e vários contextos sociais. Mais adiante, na análise de livros didáticos, veremos alguns exemplos da interdisciplinaridade e contextualização possíveis com os logaritmos.

2.2 **A importância da história da matemática no processo de ensino e aprendizagem**

Segundo Carvalho e Roque (2012), nem sempre os discentes anseiam por conceitos aplicados em situações do cotidiano, mas também em conectá-los a uma rede de significados e de relações com outras ideias, matemáticas ou não. A história da Matemática desempenha um papel fundamental nesse sentido, pois exibe os problemas iniciais de que se originaram conceitos.

De certo, a humanidade é fruto de seu desenvolvimento social e econômico ao longo da história. Inserir um contexto histórico ao aprendizado do aluno, possibilita-o compreender como foi e está sendo o desenvolvimento social, econômico e cultural da sociedade na qual está inserido, bem como a evolução da ciência.

Na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, segundo os PCN+, deseja-se que os estudantes compreendam o conhecimento científico e o tecnológico, como produto de uma construção humana, através de um processo histórico e social. De acordo com tal documento, mais especificamente, com relação a matemática, temos:

- Por meio de um processo histórico relacionado às condições sociais, políticas e econômicas de uma dada época, almeja-se que o discente compreenda a construção do conhecimento matemático. Desta forma, ele poderá ter uma visão crítica de que a ciência está em constante construção.
- É necessário que o aluno compreenda o desenvolvimento histórico no que se relaciona a matemática, para que assim reconheça sua presença e influência no mundo, na transformação, na sociedade e suas necessidades ao longo do tempo. Como exemplo, temos a criação dos logaritmos, que surgiram devido ao avanço tecnológico no período das grades navegações. Neste sentido, a matemática, além de mostrar-se um instrumento essencial para solucionar problemas do cotidiano na época, como o uso das tabelas logarítmicas para resolver difíceis cálculos, desenvolveu-se e possibilitou novas aplicações fora do contexto inicial, situações estas que veremos exemplos mais adiante, junto a análise de livros didáticos.

- O estudante deve ser capaz de reconhecer a importância do conhecimento matemático para desenvolvimento tecnológico, e a relação desta com a ciência, ao logo da história.

Panagiotou (2011) defende que a história da matemática pode ajudar ao aluno a compreender conceitos matemáticos, métodos e provas mostrando-lhes como foram descobertos e desenvolvidos; ajuda-o a perceber que ela provem do ser humano e é uma atividade dinâmica que sofre influência de fatores sociais e culturais, moldada de acordo com as necessidades de cada época; estimula-o a aprender e melhorar suas atitudes e percepções em relação a ela.

Com tudo isso, a história da matemática revela-se uma ferramenta importante no processo de ensino aprendizagem, pois com ela, o aluno tem uma visão ampla dos motivos que levaram ao surgimento de um conteúdo, além de constatar a importância de seu estudo e motivar-se a procura de novos conhecimentos.

No caso dos logaritmos, sua história desempenha um papel de extrema importância para o processo de ensino e aprendizagem. De acordo com Panagiotou (2011), estudar a história dos logaritmos possibilita ao aluno perceber que eles são uma resposta a um problema, desfazendo o estigma que são um simples produto da função exponencial, percepção que se tem quando saltamos direto para definição.

2.3 **A importância das novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem da matemática**

É de extrema importância que na atualidade que o processo de ensino e aprendizagem da matemática esteja associado as novas tecnologias. O trecho a seguir revela o que se espera do ensino da matemática a cerca dos recursos tecnológicos.

> “[...] que se propõe hoje é que o ensino de Matemática possa aproveitar ao máximo os recursos tecnológicos, tanto pela sua receptividade social como para melhorar a linguagem expressiva e comunicativa dos alunos.

> É esperado que nas aulas de Matemática se pudesse oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais." (Brasil, 1998, p. 46)

De acordo com os PCNEM (1999), as calculadoras e os computadores são importantes instrumentos no processo de ensino aprendizagem, pois eles possibilitam trabalhar com dados e situações reais inseridas no mundo contemporâneo, promovem a articulação das diferentes áreas do conhecimento, contribuem para compreensão e representação de gráficos, identificação de regularidades, interpretação e o uso de modelos matemáticos.

No estudo dos logaritmos, esses instrumentos se destacam. A calculadora, por exemplo, auxilia no cálculo de logaritmos de infinitos valores, possibilitando uma rápida resolução de questões que abordam este tema. Por sua vez, os computadores proporcionam a utilização de softwares, jogos, tabelas entre outros. Como exemplo, o *software GeoGebra*, que enseja uma análise precisa do comportamento gráfico dos logaritmos e sua relação com o gráfico da função exponencial. Mais à frente, dentro da análise dos livros didáticos, veremos exemplos do uso das calculadoras e do *software GeoGebra* em sala de aula.

3 UMA ANÁLISE DOS LOGARITMOS EM LIVROS DIDÁTICOS

A fim de saber de fato como estão sendo abordados os logaritmos em sala de aula, faremos uma análise de como alguns livros didáticos adotados por escolas do ensino médio no Brasil, aprovados pela Programa Nacional do Livro e do Material Didáticos (PNLD) apresentam os logaritmos.

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), uma junção do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e do Programa Nacional de Biblioteca na Escola (PNBE) proporcionada pelo decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017, avalia e disponibiliza gratuitamente materiais de apoio à pratica educativa, tais como obras didáticas, literárias, educativas, softwares e jogos educacionais, entre outros, às escolas públicas.

Foram escolhidos cinco livros, descritos abaixo, de diferentes editoras todos com edição no ano de 2016 e que constam na relação de abras aprovadas pelo PNLD[2] 2018, Portaria n° 62, de 1° de agosto de 2017. Ao fazermos referências dos livros adotados para análise, mencionaremos segundo a numeração como segue.

1. IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações -** 1º ano: Ensino Médio. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016. 416 p.
2. BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: iteração e tecnologia** – Volume 1: Ensino Médio. 2 ed. São Paulo: Leya, 2016. 416 p.
3. DANTE, Luiz Carlos. **Matemática: contexto e aplicação** – Volume 1: Ensino Médio. 3 ed. São Paulo: Ática, 2016. 408 p.
4. LEONARDO, Fábio Martins de**. Conexões com a matemática** – Volume 1: Ensino Médio. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2016. 416 p.
5. SOUZA, Joamir Roberto de. **#Contato matemática**, 1º ano: Ensino Médio. - 1. ed. – São Paulo: FTD, 2016. 288 p.

[2] https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-livrodidatico/item/11148-guia-pnld-2018, acesso em 10/11/2020.

3.1 Análise do livro 1

O livro (1), tem o tópico logaritmo no capítulo intitulado Função Logarítmica, entre os capítulos Função Exponencial e Progressões. Inicia o capítulo com duas situações problema, representadas na figura a seguir. Na situação 1, os autores expressam o limiar de audibilidade, valor mínimo de intensidade de som, medida em que abaixo não se ouvem sons, e o valor da intensidade que proporciona dor, $10^{-12}\, W/m^2$ e $1\, \mathrm{W/m^2}$, respectivamente. Apontam a dificuldade de trabalhar com valores desse tipo e justificam que as escalas logarítmicas auxiliam nesse sentido. Já a situação 2, trata-se da desvalorização do preço de um caminhão em que, ao equacionar este problema, chegaram à equação exponencial $(0{,}9)^x = 0{,}5$, na qual não é possível reduzir as potências a uma mesma base, sendo necessário utilizar o logaritmo para resolvê-la.

Posteriormente, o livro (1), segue com a definição de logaritmo, propriedades decorridas dela e alguns exercícios diretos e de fácil resolução. Antes de prosseguir para as propriedades operatórias, função logarítmica e gráfico, os autores fazem um pequeno relato histórico da invenção dos logaritmos.

Finalizam esse capítulo mencionando uma aplicação dos logaritmos nos terremotos, explicam a resolução de equações exponenciais usando logaritmos e voltam à situação 1, expressa no início, para que de fato possa ser resolvida.

Figura 13 – Logaritmos, limiar de audibilidade e desvalorização financeira

Introdução

Situação 1

Você sabia que uma pessoa com audição normal é capaz de ouvir uma grande faixa de sons de intensidades bem diversas?

Existe um valor mínimo de intensidade de som, abaixo do qual não se ouve som algum: é o limiar de audibilidade, cujo valor é, em W/m², igual a 10^{-12}; há também um valor de intensidade a partir do qual há dor: 1 W/m². W é o símbolo de watt, unidade de potência.

Manipular e comparar valores nessa faixa numérica, de $10^{-12} = 0{,}000000000001$ até 1,0 (além da faixa de sons cujas intensidades superam o limiar de dor), não é tarefa fácil nem prática. A saída encontrada pela Ciência é a utilização de uma **escala logarítmica**, cuja estrutura e vantagens vamos conhecer neste capítulo.

Situação 2

Suponhamos que um caminhão zero-quilômetro custe hoje R$ 120 000,00 e sofra uma desvalorização de 10% por ano de uso.

Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R$ 60 000,00?

A cada ano que passa o valor do caminhão fica sendo 90% do que era um ano atrás. Então, seu valor evolui da seguinte forma:

- após 1 ano de uso:
  90% de 120 000 reais, ou seja, 108 000 reais
- após 2 anos de uso:
  90% de 108 000 reais, ou seja, 97 200 reais
- após 3 anos de uso:
  90% de 97 200 reais, ou seja, 87 480 reais
  e assim por diante.

No Brasil, o transporte rodoviário é um dos principais meios de distribuição de cargas.

O valor do veículo em reais evolui, ano a ano, de acordo com a sequência:

$$120000; \quad (0{,}9) \cdot 120000; \quad (0{,}9)^2 \cdot 120000; \quad (0{,}9)^3 \cdot 120000; \quad \dots; \quad (0{,}9)^x \cdot 120000$$

em que **x** indica o número de anos de uso.

Para responder à pergunta feita, devemos resolver a equação $(0{,}9)^x \cdot 120000 = 60000$, ou seja, $(0{,}9)^x = 0{,}5$, que é uma equação exponencial.

No entanto, não é possível reduzir as potências a uma mesma base. Para resolver essa equação usaremos logaritmos.

Esses problemas, além de outros, mostram a importância de se estudar a função logarítmica e os logaritmos.

No decorrer deste capítulo, vamos conhecer a solução desses problemas.

Fonte: Iezzi et al., 2016, p. 148.

Analisando o livro em questão, observa-se que existem poucos exercícios contextualizados e que também proporcionem a interdisciplinaridade. Outro ponto que chama atenção é o fato de a parte histórica dos logaritmos estar depois de sua definição. Introduzir o capítulo com fatos históricos, estimularia ainda mais seu estudo, pois assim, os discentes seriam capazes de entender para que foi criado e em que contexto histórico.

3.2 **Análise do livro 2**

No livro (2), o logaritmo encontra-se num capítulo composto pela função modular, exponencial e logarítmica, antecedido pelo capítulo função quadrática e antecedente ao capítulo sequências e progressões. O autor inicia o tópico logaritmo mencionando que uma equação exponencial pode ser resolvida reduzindo os dois membros a uma potência de mesma base, e após um exemplo, expõe a equação $10^x = 900$, que não se pode resolver assim. Afirma, portanto, que nesses casos usam-se os logaritmos. Depois de uma breve abordagem histórica, define de fato os logaritmos e segue expondo as consequências da definição. As propriedades operatórias, equações e funções logarítmicas vêm intercaladas por exercícios simples e poucos contextualizados.

É válido ressaltar que o autor aborda dois fatos que são exemplos de interdisciplinaridade. Segue abaixo sua primeira abordagem, que trata do decaimento radioativo, onde se tem uma relação da matemática com a química.

Figura 14 – Logaritmos e o decaimento radioativo

Decaimento radioativo

Todo elemento radioativo, seja ele natural ou artificial, se transmuta a uma velocidade característica pelos processos de decaimento ou desintegração. Para se determinar a duração de um elemento radioativo foi preciso estabelecer parâmetros de comparação, como a vida média e a meia-vida, que correspondem, respectivamente, ao tempo médio que um isótopo instável leva para decair ou desintegrar e ao tempo necessário para que a massa de um determinado radioisótopo caia, por desintegração, pela metade. Vamos associar a vida média e a meia-vida de isótopos por meio da fórmula $P = V_m \cdot \ln 2$, em que **P** é a meia-vida e V_m a vida média. A massa de um isótopo pode ser calculada em função do tempo pela fórmula $M = M_0 \cdot e^{-\lambda t}$, em que **M** é a massa, M_0 a massa inicial, λ a constante de desintegração e t o tempo, em bilhões de anos. A meia-vida é o tempo t_k para o qual $M = \frac{M_0}{2}$.

Na natureza existem elementos radioativos que realizam transmutações sucessivas até que seu núcleo atinja uma configuração estável. Um desses elementos é o urânio-238, utilizado, por exemplo, na datação de rochas, que após uma série de transmutações dá origem ao chumbo-206, que é estável. Considerando a constante de desintegração do urânio-238 igual a 0,154, responda às questões.

a) Qual a fórmula para calcular a massa de 5 quilogramas de urânio-238 após o tempo t? $M = 5 \cdot e^{-0,154t}$

b) Qual será a massa de uma tonelada de urânio-238 após 3 bilhões de anos? aproximadamente 0,63 tonelada

c) Após quanto tempo a massa inicial de 2 toneladas de urânio-238 será de 1,5 tonelada? aproximadamente 1,87 bilhão de anos

d) Qual a vida média do urânio-238? aproximadamente 6,49 bilhões de anos

Na fotografia temos o urânio na forma como é encontrado na natureza.

O urânio é um dos minerais mais evidenciados nos últimos anos por causa da sua grande capacidade de geração de energia e, consequentemente, do seu grande poder destrutivo, caso seja utilizado na fabricação de armas.

O urânio encontrado na natureza é composto por cerca de 99% de urânio-238 e 1% de urânio-235, sendo esse último o utilizado em usinas de produção de energia elétrica e também em bombas nucleares. Para ser utilizado em usinas nucleares, o urânio encontrado na natureza é enriquecido atingindo de 2% a 4% de urânio-235. Já para as bombas nucleares, esse nível deve ficar entre 90% e 99%.

Realize uma pesquisa sobre as principais aplicações pacíficas de elementos radioativos, ou seja, aplicações que não têm como finalidade a fabricação de armas.

Central nuclear Almirante Álvaro Alberto, localizada na cidade de Angra dos Reis (RJ). Na imagem vemos as usinas nucleares Angra 1 e Angra 2 (fotografia de 2015).

Fonte: Balestri, 2016, p. 168.

Neste exemplo, ele expõe as fórmulas $P = V_m \, ln2$ e $M = M_0 \, e^{-\lambda t}$, onde P é a meia-vida, V_m é a vida média, M é a massa de um isótopo, M_0 a massa inicial, λ a constante de desintegração e t o tempo. Deste modo, mostra ao aluno uma aplicação dos logaritmos numa situação real, que envolve outra disciplina e também com um contexto social.

O segundo exemplo, que segue abaixo, o autor faz uma relação entre os logaritmos e a geologia. Os cientistas, por meio da fórmula $T = \left(\frac{t}{log2}\right) \cdot log\left(1 + \frac{N_2}{N_1}\right)$, conseguem medir a idade de uma rocha, a qual possibilita entender e analisar melhor a evolução da Terra. Com tal exemplo, é proporcionada a interdisciplinaridade entre a matemática e a geografia, usando um assunto real e atual.

Figura 15 – Logaritmos e geologia

Idade das rochas

Analisando as idades e características das rochas atuais, cientistas buscam entender como era o planeta em tempos anteriores aos do surgimento de formas de vida complexa. Entretanto, para entender a evolução da Terra e o significado dos processos geológicos nessa evolução, é necessário estabelecer relações temporais entre os registros geológicos. Portanto, definir métodos para estabelecer essas relações é um dos objetivos dos geólogos.

A radioatividade tornou-se o principal instrumento na comprovação do tempo geológico longo. Os métodos para datação radiométrica baseiam-se no decaimento radioativo, que é constante para cada tipo de isótopo atômico.

Para datar rochas, um isótopo conveniente é o urânio-238, um isótopo radioativo que se transforma em chumbo-206, o qual é estável. Para medir a idade de uma rocha, pode ser utilizada a fórmula $T = \left(\frac{t}{\log 2}\right) \cdot \log\left(1 + \frac{N_2}{N_1}\right)$, em que t é igual à meia-vida do urânio, ou seja, aproximadamente 4,5 bilhões de anos, N_1 é a quantidade de átomos de urânio-238, N_2 a quantidade de átomos de chumbo-206 e T a idade da rocha em bilhões de anos.

Geólogo retirando uma amostra da rocha.

a) Qual a idade de uma rocha cuja amostra contém 100 átomos de urânio-238 e 25 átomos de chumbo-206? aproximadamente 1,45 bilhão de anos

b) A amostra de uma rocha com 500 milhões de anos possui 150 átomos de chumbo-206. Quantos átomos de urânio-238 possui essa amostra? aproximadamente 1874 átomos de urânio-238

c) Considerando uma amostra com 500 átomos de urânio-238, escreva a lei de formação da função T que relaciona a idade da rocha com a quantidade de átomos de chumbo-206. Essa função é crescente ou decrescente? $T(N_2) = \frac{4,5}{\log 2} \cdot \log\left(1 + \frac{N_2}{500}\right)$; crescente

Fonte: Balestri, 2016, p. 174.

3.3 **Análise do livro 3**

Analisando o livro (3), constata-se que o logaritmo vem num capítulo nomeado de logaritmo e função logarítmica, e este localiza-se entre os capítulos função exponencial e sequências. O autor inicia o capítulo em questão, propondo que os alunos se dividam em grupos e resolvam as equações: a) $2^x = 4$, b) $2^x = 8$, c) $10^x = 1\,000$, d) $2^x = 5$, e) $10^x = 8\,000$ e f) $10^x = 990$. Com isto, pretende-se que os discentes percebam que 5 não pode ser representado como potência de base 2, nem 8 000 e 990 não podem ser representados como potência de base 10, nos itens d) e f), respectivamente, sugerindo soluções com valores aproximados. Em seguida, propõe um problema sobre juros que resulta numa equação exponencial $(1{,}1213)^X = 2$, que também não pode ser resolvida reduzindo a igualdade a potências de mesma base. Com esses dois problemas, o autor almeja despertar e estimular no aluno o interesse pelos logaritmos.

Prosseguindo, no livro (3), definem-se os logaritmos, expõem-se suas consequências, relacionam-se as propriedades operatórias e propõe-se exercícios diretos e de fácil resolução. Posteriormente, em meio aos conteúdos de função e equação logarítmica, até o final do capítulo, o autor trabalha com algumas conexões que o logaritmo proporciona. Uma delas é a audição e os logaritmos. A intensidade sonora (I), fornece dados que permite avaliar se o som é forte ou fraco, e cálculo do nível de intensidade sonora (I_{dB}) de uma onda é dado pela fórmula $I_{dB} = 10\,log\left(\frac{I}{I_0}\right)$. Outro exemplo, é o logaritmo na era da informática, onde o autor expõe a expressão, $I = log_2 \frac{1}{p}$, onde I representa 1 *bit* de informação e p é a probabilidade de um evento ocorrer.

Dois pontos se destacam no livro (3); um deles é que o autor reserva o final do capítulo para trabalhar com questões de vestibular. Outro ponto, é a utilização da tecnologia no estudo dos logaritmos: Ele apresenta uma atividade para ser desenvolvida, com o auxílio do *software GeoGebra*, na construção do gráfico da função logarítmica e na relação entre a função exponencial e logarítmica, representada a seguir.

Figura 16 – Construção do gráfico da função logarítmica através do GeoGebra

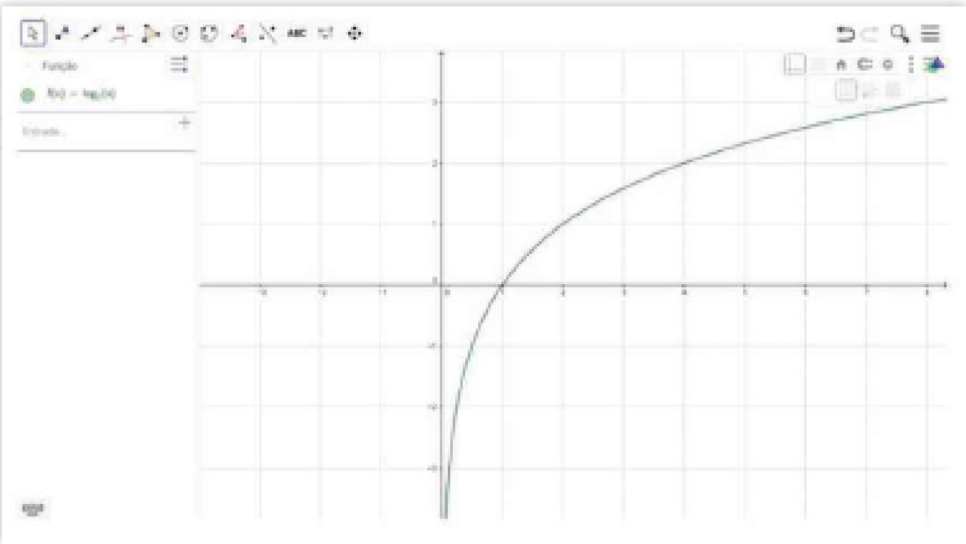
Para construir gráficos de funções logarítmicas vamos novamente utilizar o *software* GeoGebra.

Construção do gráfico de funções logarítmicas

Vamos construir o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_2 x$ e destacar alguns pontos importantes. Para isso, siga os passos a seguir.

1º passo: No campo Entrada de comando (situado na parte esquerda da tela), digite a função $f(x) = \log(2, x)$ e tecle "Enter". No GeoGebra, $f(x) = \log(2, x)$ é a notação de $f(x) = \log_2(x)$.

2º passo: Do lado direito da Barra de ferramentas (parte superior da tela), clique na Barra de estilos e depois em "Exibir ou esconder a malha"; selecione a malha quadriculada. Você agora deverá ter uma imagem igual à apresentada abaixo.



Captura de tela do 1º passo.

3º passo: Para obter a raiz da função f, ainda no campo de entrada, digite **Raiz [f, 0, 100]** e tecle "Enter". Como a função não é polinomial, o GeoGebra analisa as raízes dentro de um intervalo. Nesse caso, estamos utilizando o intervalo [0, 100]. Veja que foi criado o ponto $A = (1, 0)$, logo $x = 1$ é raiz de f.

4º passo: No campo Entrada de comando, insira os pontos $B = (2, 1)$, $C = (4, 2)$, $D = (1/2, -1)$ e $E = (1/4, -2)$ e verifique que todos pertencem ao gráfico da função. (A cada ponto inserido tecle "Enter".)

Observe ainda que o gráfico da função não intersecta o eixo das ordenadas. O eixo das ordenadas será uma assíntota do gráfico da função.

Fique atento!
Você pode mover, ampliar ou reduzir a sua imagem utilizando ✥ da Barra de ferramentas.
Outra opção para aumentar ou diminuir o *zoom* é utilizar o *scroll* do *mouse* (aquela "rodinha" que fica na parte superior da maioria dos *mouses*).

Fonte: Dante, 2016, p. 195.

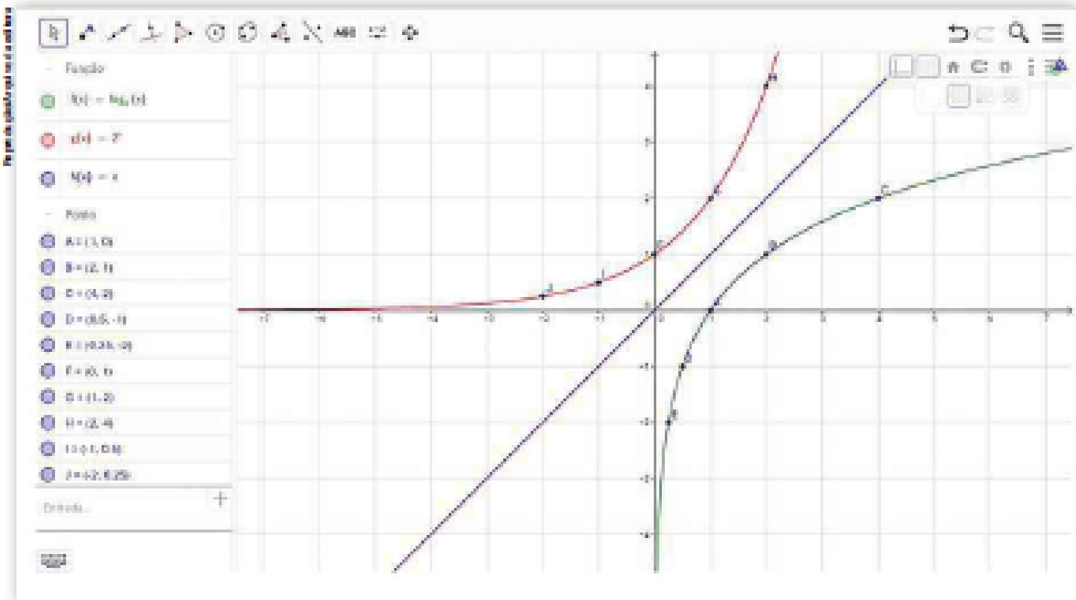
Figura 17 – Relação entre os gráficos das funções logarítmica e exponencial através do GeoGebra

Relação entre o gráfico de uma função logarítmica e de uma função exponencial de mesma base

Estudamos que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$). Agora, teremos a oportunidade de verificar melhor essa relação com funções logarítmicas e exponenciais.

1º passo: Repita os mesmos passos da construção do gráfico da função $f(x) = \log_2(x)$. Em seguida, digite no campo Entrada de comando $g(x) = 2$^x e tecle "Enter" e $h(x) = x$ e tecle "Enter".

2º passo: No campo Entrada de comando digite os pontos (um de cada vez): $A = (1, 0)$, $B = (2, 1)$, $C = (4, 2)$, $D = (1/2, -1)$, $E = (1/4, -2)$, $F = (0, 1)$, $G = (1, 2)$, $H = (2, 4)$, $I = (-1, 1/2)$ e $J = (-2, 1/4)$. Observe que os pontos de A a E pertencem à função logarítmica, enquanto os pontos de F a J pertencem à função exponencial.



Captura de tela do 2º passo.

Fique atento!
Não se esqueça de salvar cada uma das construções.

1. Repita os passos anteriores e construa os gráficos das funções a seguir:

a) $f(x) = \log_{10}(x)$ — Veja os gráficos no Manual do Professor.

b) $g(x) = \log_2(x + 1)$

c) $h(x) = \log_2(x)$

d) $j(x) = \log_{10}(x + 1)$

2. Qual é a relação entre as coordenadas de dois pontos simétricos em relação à reta $y = x$?

2. A abscissa do primeiro ponto é igual à ordenada do segundo, a ordenada do primeiro é igual à abscissa do segundo. Exemplo: $A = (1, 0)$ e $F = (0, 1)$. Os pontos pertencem a funções inversas.

3. Represente as funções $f(x) = \log_{10} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e suas respectivas funções inversas.

Veja os gráficos no Manual do Professor.

4. Existe uma função logarítmica muito importante: trata-se de $f(x) = \log_e x$, em que e representa o número de Euler. Construa o gráfico da função $f(x) = \ln(x)$, determine sua imagem e sua raiz.

Veja o gráfico no Manual do Professor. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$; raiz: $x = 1$

Fonte: Dante, 2016, p. 196.

3.4 **Análise do livro 4**

Num capítulo com o título *Função Logarítmica*, entre os capítulos *Função Exponencial e Sequências*, o conteúdo sobre logaritmos se encontra no livro (4). O capítulo é iniciado por meio do relato do terremoto que ocorreu no Chile, em setembro de 2015, que atingiu 8,3 graus na escala Richter e seus tremores foram sentidos até na cidade de São Paulo. O autor prossegue explicando que o cálculo da magnitude do terremoto é obtido por uma função logarítmica, assim, ele pretende despertar o interesse do aluno e justificar, com uma situação real, o estudo dos logaritmos.

Antes de definir de fato os logaritmos, o livro relembra a importância da função exponencial, por situações abordadas no capítulo anterior, para assim, mencionar sua inversa, a função logarítmica, que será estudada no capítulo em questão. Prossegue, com o exemplo abaixo, que se refere ao número de bactérias em relação ao tempo, onde equacionado chega-se à equação exponencial $n = 2^t$. Ao perguntar em quantas horas haverá 1 024 bactérias, tem-se à necessidade de utilizar o logaritmo para que possa determinar o valor de t na equação $1\,024 = 2^t$.

Figura 18 – O logaritmo na determinação do número de bactérias

Determinada bactéria se divide ao meio a cada hora, conforme indica a tabela abaixo.

Tempo (t)	0	1	2	3	4
Número de bactérias (n)	1	2	4	8	16

Analisando os dados, concluímos que o número n de bactérias em função da quantidade t de horas pode ser descrito por: $n = 2^t$

Com base nessas informações, podemos responder às seguintes perguntas:

- Quantas bactérias haverá após 10 horas?

  Essa é uma pergunta que envolve potenciação, e a resposta é:

  $$n = 2^t \Rightarrow n = 2^{10} \Rightarrow n = 1.024$$

  Logo, haverá 1.024 bactérias.

- Em quantas horas haverá 1.024 bactérias?

  Essa é uma pergunta que envolve logaritmo, pois, para respondê-la, devemos encontrar o valor do **expoente** t na equação: $1.024 = 2^t$

  O valor de t é 10 horas, pois $2^{10} = 1.024$.

  Dizemos que 10 é o **logaritmo** de 1.024 na **base** 2. Representamos assim:

  $$10 = \log_2 1.024 \quad \text{ou} \quad \log_2 1.024 = 10$$

Fonte: Leonardo, 2016, p. 169.

O livro (4) aborda nos tópicos seguintes as consequências da definição, propriedades, função logarítmica, equação logarítmica, inequação logarítmica e sistema, com exercícios de aplicação direta e poucos contextualizados e envolvendo a interdisciplinaridade.

É válido ressalvar que, ao iniciar o tópico de função logarítmica, o autor volta ao problema que iniciou o capítulo, sobre bactérias que se multiplicavam por divisões sucessivas, numa relação de 2 bactérias por hora. Como inicialmente apenas chegara-se à equação exponencial $n = 2^t$, agora com parte de conhecimentos adquiridos, descreve-se a igualdade $n = 2^t \Rightarrow t = log_2 n$, possibilitando determinar a quantidade t de horas em função da quantidade *n* de bactérias. Com o resgate desse assunto das bactérias, o autor promoveu o prosseguimento da questão interdisciplinar com a biologia, fez com que o aluno pudesse utilizar o que foi aprendido, ampliando seu entendimento no assunto em questão, e despertou seu maior interesse em prosseguir com tal estudo, uma vez que se chega a uma função logarítmica, assunto do tópico a ser abordado.

O gancho promovido com a questão das bactérias não aconteceu com o assunto sobre o terremoto ocorrido no Chile, mencionado na introdução do capítulo. Seria de grande valia o autor retomar essa questão para que de fato o discente pudesse ver tudo que foi adquirido sobre os logaritmos, sendo utilizado em uma situação real e histórica.

É importante observar que, em meio aos exercícios intitulados complementares, constam duas questões de vestibulares anteriores, que envolvem o tema terremoto. Uma delas é a questão, numerada por 5, que está na página 185, trata-se de uma questão retirada do vestibular da PUC de Minas Gerais, a qual enunciaremos abaixo.

As indicações R_1 e R_2 de dois terremotos, na escala Richter, estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$, em que E_1 e E_2 medem as respectivas energias, liberadas pelos terremotos em forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Nessas condições, se $R_1 = 8{,}5$ e $R_2 = 7{,}0$, é correto afirmar que a razão entre E_1 e E_2, nessa ordem, é igual a:

a) 0,5

b) 1,5

c) $10^{0,5}$

d) $10^{1,5}$

Resolvendo a questão, como pretende-se que o discente a faça, primeiro iremos substituir os valores de $R_1 = 8{,}5$ e $R_2 = 7{,}0$ na fórmula dada, obtendo:

$$R_1 - R_2 = log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \Rightarrow 8{,}5 - 7{,}0 = log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \Rightarrow 1{,}5 = log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

Pela definição de logaritmo, temos:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{1,5}$$

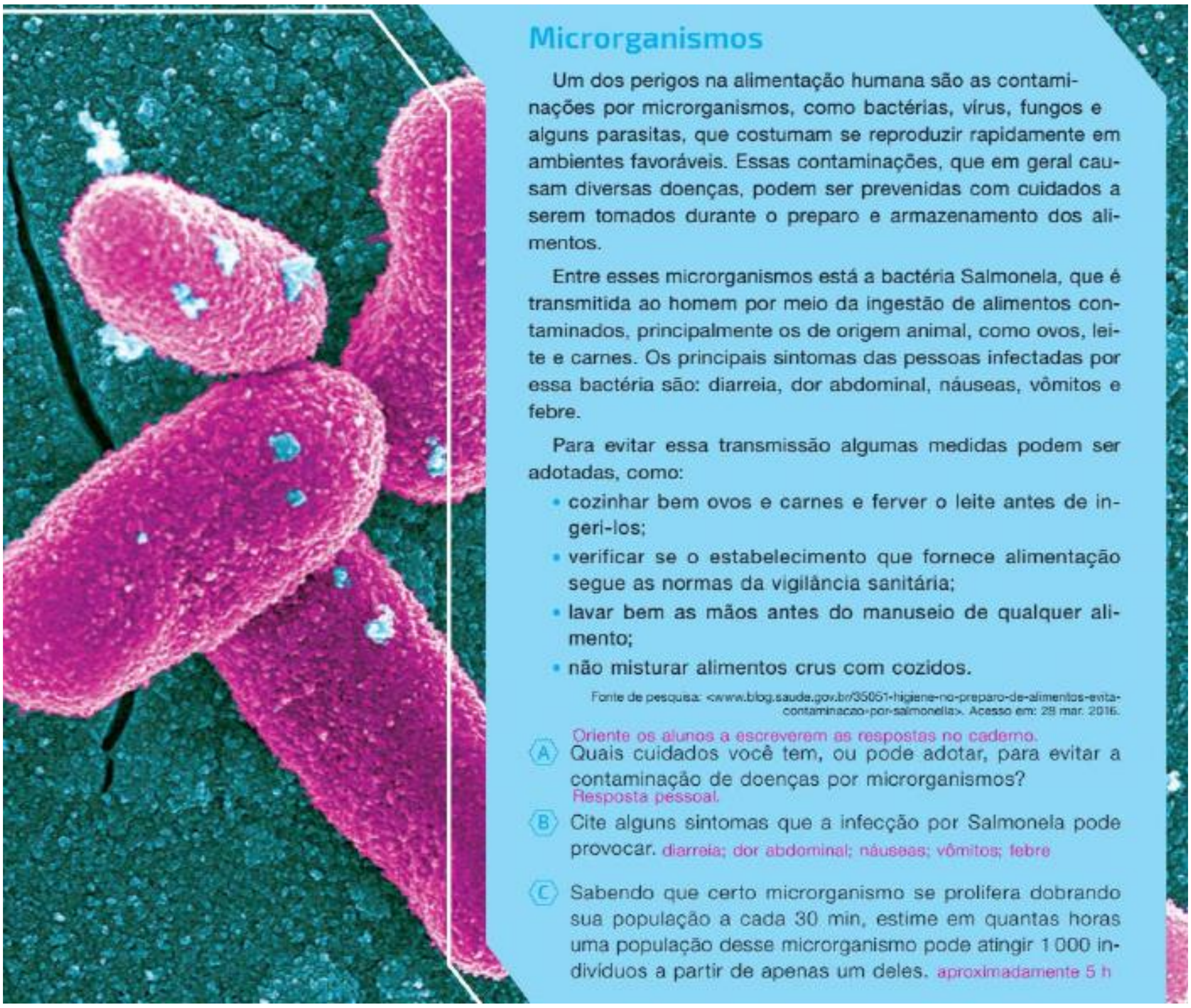
Encontrando a razão desejada, que corresponde ao item d) $10^{1,5}$.

Ao propor questões neste contexto, o autor proporciona a interdisciplinaridade da matemática com a geografia, relacionando, assim, os logaritmos com os terremotos.

3.5 **Análise do livro 5**

O livro (5) foi o último a ser analisado. Nele o capítulo nomeado logaritmos e função logarítmica, está entre os capítulos função exponencial e função modular. Este capítulo inicia-se com o assunto microrganismos, mais especificamente tratando da bactéria chamada Salmonela, presente na figura abaixo. O texto bem escrito trata do assunto com grande clareza, que além de explicar sobre o que são microrganismos, explica o que é a Salmonela, meio de transmissão, sintomas e como evitá-la, transmitindo conhecimento amplo para o aluno sobre o assunto. Ao final do texto em questão, o autor propõe três perguntas, e uma delas começa a relacionar o tema à matemática. Ela relata que um certo microrganismo se prolifera dobrando sua população a cada 30 min, e propõe que o discente estime em quantas horas uma população desse microrganismo atinja 1 000 indivíduos a partir de apenas um deles. Com esse exemplo, espera-se que o aluno, por meio de multiplicações sucessivas por 2, encontre que após 5 horas atingirá mil indivíduos.

Figura 19 – O logaritmo e os microrganismos



Microrganismos

Um dos perigos na alimentação humana são as contaminações por microrganismos, como bactérias, vírus, fungos e alguns parasitas, que costumam se reproduzir rapidamente em ambientes favoráveis. Essas contaminações, que em geral causam diversas doenças, podem ser prevenidas com cuidados a serem tomados durante o preparo e armazenamento dos alimentos.

Entre esses microrganismos está a bactéria Salmonela, que é transmitida ao homem por meio da ingestão de alimentos contaminados, principalmente os de origem animal, como ovos, leite e carnes. Os principais sintomas das pessoas infectadas por essa bactéria são: diarreia, dor abdominal, náuseas, vômitos e febre.

Para evitar essa transmissão algumas medidas podem ser adotadas, como:

- cozinhar bem ovos e carnes e ferver o leite antes de ingeri-los;
- verificar se o estabelecimento que fornece alimentação segue as normas da vigilância sanitária;
- lavar bem as mãos antes do manuseio de qualquer alimento;
- não misturar alimentos crus com cozidos.

Fonte de pesquisa: <www.blog.saude.gov.br/35051-higiene-no-preparo-de-alimentos-evita-contaminacao-por-salmonella>. Acesso em: 29 mar. 2016.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A) Quais cuidados você tem, ou pode adotar, para evitar a contaminação de doenças por microrganismos?
Resposta pessoal.

B) Cite alguns sintomas que a infecção por Salmonela pode provocar. diarreia; dor abdominal; náuseas; vômitos; febre

C) Sabendo que certo microrganismo se prolifera dobrando sua população a cada 30 min, estime em quantas horas uma população desse microrganismo pode atingir 1 000 indivíduos a partir de apenas um deles. aproximadamente 5 h

Fonte: Souza, 2016, p. 157. critério do leitor o cálculo do item em questão, seria válido, que ele desenvolvesse com o aluno o seguinte raciocínio,

Horas (t)

Microrganismo (M)

Início

1

$0{,}5\ \mathrm{h}$

$$2 \cdot 1 = 2 = 2^1 = 2^{2 \cdot 0{,}5}$$

1,0 h

$$2 \cdot 2 = 4 = 2^2 = 2^{2 \cdot 1,0}$$

1,5 h

$$2 \cdot 4 = 8 = 2^3 = 2^{2 \cdot 1,5}$$

2,0 h

$$2 \cdot 8 = 16 = 2^4 = 2^{2 \cdot 2,0}$$

2,5 h

$$2 \cdot 16 = 32 = 2^5 = 2^{2 \cdot 2,5}$$

3,0 h

$$2 \cdot 32 = 64 = 2^6 = 2^{2 \cdot 3,0}$$

3,5 h

$$2 \cdot 64 = 128 = 2^7 = 2^{2 \cdot 3,5}$$

…

…

t h

$$M = 2^{2t}$$

Figura 20 – O estudo dos logaritmos e as bactérias

Estudando logaritmo

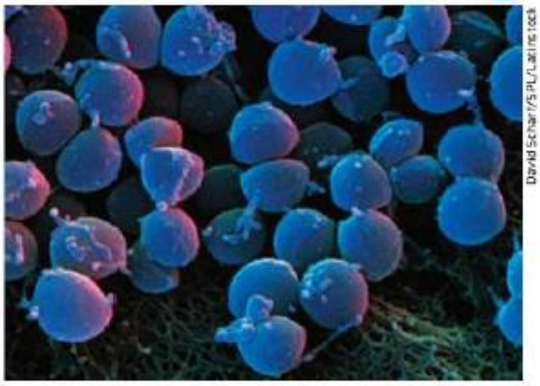
Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades da página 269 da seção **Acessando tecnologias.**

Veja a seguir uma situação relacionada à equação exponencial, assunto estudado no capítulo anterior.

A taxa de crescimento diário de certa cultura de bactérias é de 5%. Em quantos dias uma população B_0 dessa bactéria irá triplicar, se a taxa de crescimento se mantiver?

Para responder a essa pergunta, construiremos um quadro a partir das informações apresentadas.

Dia	População
início	B_0
1º dia	$B_1 = B_0 + B_0 \cdot 0{,}05 = B_0 \cdot 1{,}05$
2º dia	$B_2 = B_1 + B_1 \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_1}_{B_0 \cdot 1{,}05} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^2$
3º dia	$B_3 = B_2 + B_2 \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_2}_{B_0 \cdot (1{,}05)^2} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^3$
4º dia	$B_4 = B_3 + B_3 \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_3}_{B_0 \cdot (1{,}05)^3} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^4$
...	...
enésimo dia	$B_n = B_{n-1} + B_{n-1} \cdot 0{,}05 = \underbrace{B_{n-1}}_{B_0 \cdot (1{,}05)^{n-1}} \cdot 1{,}05 = B_0 \cdot (1{,}05)^n$



Bactéria *Staphylococcus aureus* (aumento aproximado de 11 800 vezes). Essa bactéria é encontrada em seres humanos e outros animais.

Lembre-se de que podemos escrever porcentagem na forma decimal, como apresentada ao lado, isto é: $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$.

Fonte: Souza, 2016, p. 158.

Chegando a uma equação exponencial, quando seria sugerido o uso do logaritmo, conteúdo a ser estudado, para solucioná-la. Assim, o aluno além de fazer a conexão da biologia com a matemática, iria relacioná-la ao logaritmo, mais especificamente, despertando seu interesse pelo conteúdo a ser estudado, dentro do contexto que foi amplamente descrito.

É importante observar, que para introduzir o tópico logaritmo, antes de sua definição, o autor expõe outro exemplo que envolve as bactérias, como segue abaixo. De certo, ele ainda está dentro do tema trabalhado na introdução do capítulo, porém, com outros valores e deixando o primeiro momento sem uma ligação direta com os logaritmos. Ainda antes da definição, ele ainda faz um breve apontamento histórico sobre a criação dos logaritmos.

Esse livro prossegue basicamente seguindo a mesma ordem de tópicos como os outros livros analisados, adotando em sua maioria exercícios de simples aplicação e alguns abordados por meio da contextualização e da interdisciplinaridade.

Nas atividades resolvidas, R 11 na página 172, temos um exemplo da conexão dos logaritmos com a economia. Na questão deseja-se determinar quantos meses, no mínimo, seriam necessários para que uma aplicação de R$ 200,00 resulte num montante de R$ 250,00, a uma taxa mensal de 0,8%. Para o desenvolvimento dessa questão, faz-se necessário o uso da fórmula $M = C\ (1 + i)^t$, em que M é o montante obtido por um capital C, aplicado a uma taxa de juros i durante t meses. Substituindo os valores na fórmula obtemos,

$$M = C(1 + i)^t$$

$$250 = 200\ (1 + 0{,}008)^t$$

$$250 = 200\ (1 + 0{,}008)^t$$

$$1{,}25 = \ (1{,}008)^t$$

Aplicando os logaritmos decimais dos dois lados da igualdade, temos:

$$log(\ 1{,}25) = \ log\ (1{,}008)^t$$

Usando a propriedade da potência $log_b a^{\ x} = x\ log_b a$, segue:

$$log(\ 1{,}25) = \ t\,log\ \ (1{,}008)$$

Os valores de $log(\ 1{,}25) = 0{,}097$ e $log\ \ (1{,}008) = 0{,}003$ foram informados no enunciado da questão, portanto:

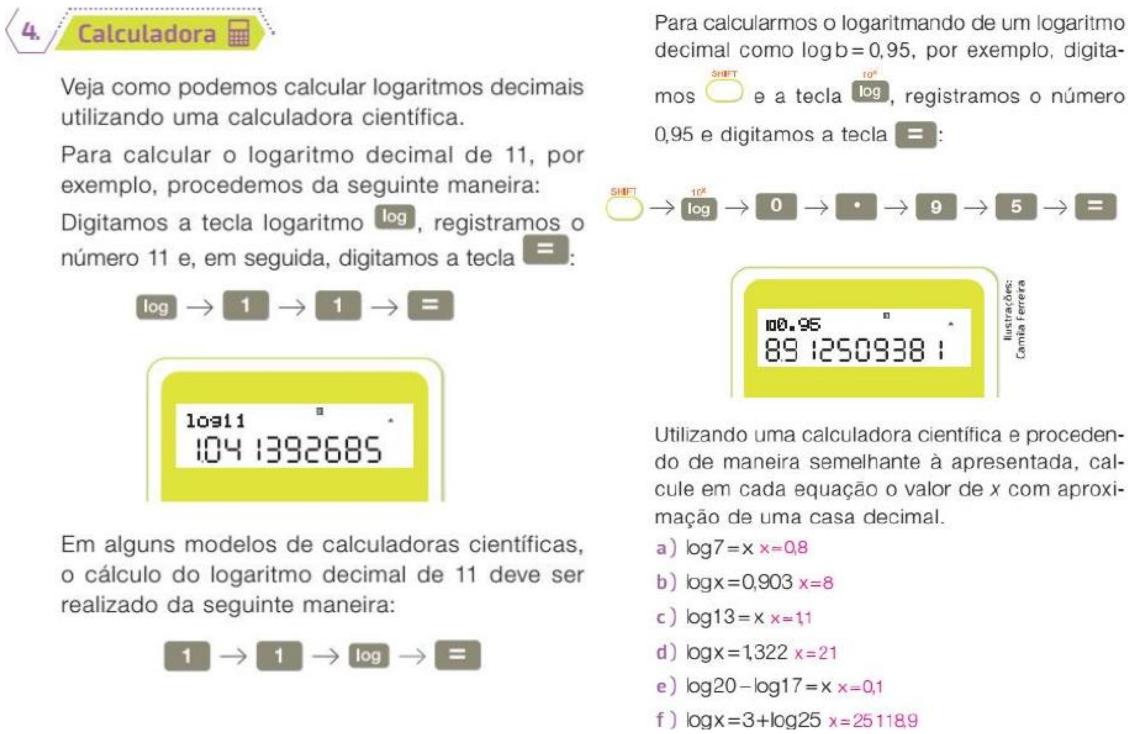
$$0{,}097 = \ t \cdot 0{,}003$$

$$t = \frac{0,097}{0,003} \simeq 32,333$$

Logo, são necessários, no mínimo, 33 meses.

Como vimos anteriormente, utilizar a tecnologia, mais especificamente a calculadora, é benéfico no processo de ensino aprendizagem. No livro (5), o autor propõe uma atividade, presente na página 162, para ser resolvida por meio do uso da calculadora, como segue.

Figura 21 – A calculadora e os logaritmos decimais



4. Calculadora

Veja como podemos calcular logaritmos decimais utilizando uma calculadora científica.

Para calcular o logaritmo decimal de 11, por exemplo, procedemos da seguinte maneira: Digitamos a tecla logaritmo log, registramos o número 11 e, em seguida, digitamos a tecla =:

log → 1 → 1 → =

log11
1.041392685

Em alguns modelos de calculadoras científicas, o cálculo do logaritmo decimal de 11 deve ser realizado da seguinte maneira:

1 → 1 → log → =

Para calcularmos o logaritmando de um logaritmo decimal como log b = 0,95, por exemplo, digitamos SHIFT e a tecla log, registramos o número 0,95 e digitamos a tecla =:

SHIFT → log → 0 → • → 9 → 5 → =

10^0.95
8.912509381

Ilustrações: Camila Ferreira

Utilizando uma calculadora científica e procedendo de maneira semelhante à apresentada, calcule em cada equação o valor de x com aproximação de uma casa decimal.

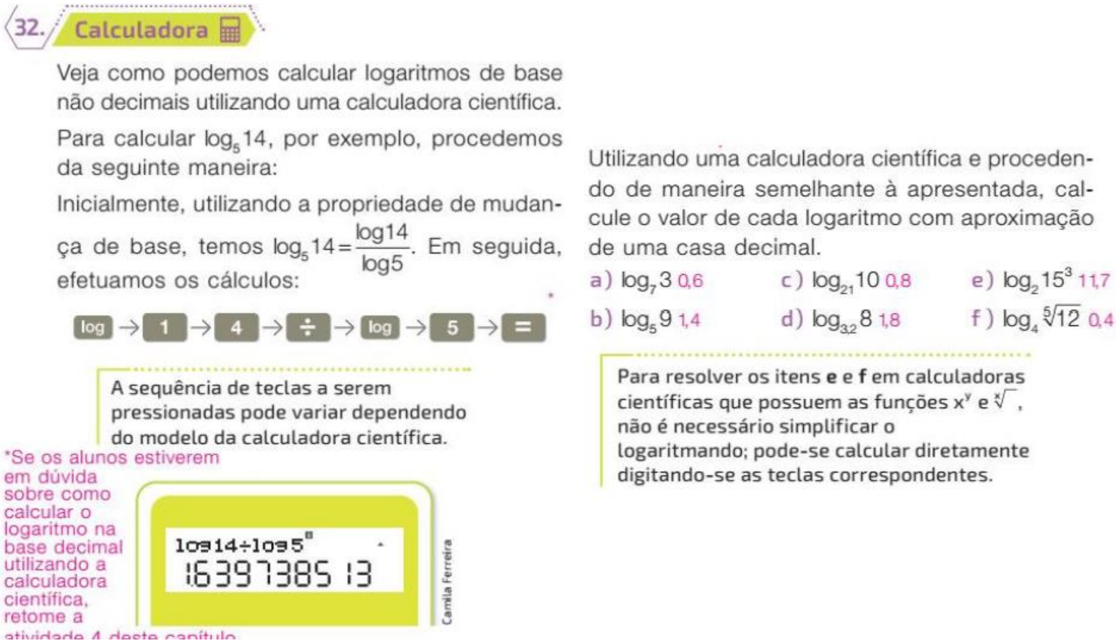
a) log7 = x x = 0,8
b) logx = 0,903 x = 8
c) log13 = x x = 1,1
d) logx = 1,322 x = 21
e) log20 − log17 = x x = 0,1
f) logx = 3 + log25 x = 25 118,9

Fonte: Souza, 2016, p. 162.

Nessa questão, o aluno recebe orientações de como utilizar a calculadora científica para o cálculo do logaritmo decimal de um dado número, ou do logaritmando de um logaritmo decimal, por meio de ilustrações dos comandos que deverão ser aplicados à calculadora. Em seguida propõe-se a resolução de equações utilizando a calculadora científica.

Mais à frente, nas atividades da página 167, o livro propõe o cálculo de logaritmos não decimais por meio da calculadora. A priori, utiliza-se a propriedade de mudança de base e depois com a calculadora resolve-se a divisão de dois logaritmos decimais. No exemplo, temos $log_5 14 = \frac{log14}{log5}$, como segue abaixo.

Figura 22 – A calculadora e os logaritmos não decimais



32. Calculadora

Veja como podemos calcular logaritmos de base não decimais utilizando uma calculadora científica.

Para calcular $\log_5 14$, por exemplo, procedemos da seguinte maneira:

Inicialmente, utilizando a propriedade de mudança de base, temos $\log_5 14 = \frac{\log 14}{\log 5}$. Em seguida, efetuamos os cálculos:

log → 1 → 4 → ÷ → log → 5 → =

A sequência de teclas a serem pressionadas pode variar dependendo do modelo da calculadora científica.

*Se os alunos estiverem em dúvida sobre como calcular o logaritmo na base decimal utilizando a calculadora científica, retome a atividade 4 deste capítulo.

Utilizando uma calculadora científica e procedendo de maneira semelhante à apresentada, calcule o valor de cada logaritmo com aproximação de uma casa decimal.

a) $\log_7 3$ 0,6
b) $\log_5 9$ 1,4
c) $\log_{21} 10$ 0,8
d) $\log_{32} 8$ 1,8
e) $\log_2 15^3$ 11,7
f) $\log_4 \sqrt[5]{12}$ 0,4

Para resolver os itens **e** e **f** em calculadoras científicas que possuem as funções x^y e $\sqrt[x]{\ }$, não é necessário simplificar o logaritmando; pode-se calcular diretamente digitando-se as teclas correspondentes.

Fonte: Souza, 2016, p. 167.

3.6 **Definição, consequências e propriedades operatórias dos logaritmos**

Feita a análise dos livros didático, observa-se que, de modo geral, eles expressam as definições, consequências e propriedades dos logaritmos, bem como a função logarítmica e sua inversa da mesma forma. Seguindo o mesmo raciocínio, com o objetivo de mostrar como elas são trabalhadas com os alunos em sala de aula, a seguir as transcreveremos.

3.6.1 Definição dos logaritmos

Sejam a e b, números reais positivos com $a \neq 1$. Chama-se logaritmo de b na base a o expoente x, tal que $a^x = b$, ou seja,

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

sendo, b a base do logaritmo, a o logaritmando e x o logaritmo.

Exemplos:

1. $log_2 16 = 4$, *pois* $2^4 = 16$
2. $log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, *pois* $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

3.6.2 Consequências da definição

De acordo com a definição dos logaritmos, segue:

1. $log_a a = 1$

De fato, tome $log_a a = x$. Pela definição dos logaritmos, segue:

$$a^x = a^1 \Rightarrow x = 1$$

2. $log_a 1 = 0$

De fato, tome $log_a 1 = x$. Pela definição dos logaritmos, segue:

$$a^x = 1 \Rightarrow a^x = a^0 \Rightarrow x = 0$$

3. $log_a b = log_a c \Leftrightarrow b = c$

I) $log_a b = log_a c \Rightarrow b = c$

De fato, tome $log_a b = x$ e $log_a c = x$. Pela definição dos logaritmos, temos $a^x = b$ e $a^x = c$. Portanto, $b = c$.

II) $b = c \Rightarrow log_a b = log_a c$

De fato, tome $log_a b = x$. Pela definição de logaritmo, segue $a^x = b$. Como $b = c$, temos $a^x = c$. Deste modo, $log_a c = x$. Portanto, $log_a b = log_a c$.

Logo, de I) e II), provamos $log_a b = log_a c \Leftrightarrow b = c$.

4. $a^{log_a b} = b$

De fato, tome $log_a b = x$. Pela definição de logaritmos, temos $a^x = b$. Portanto, substituindo $log_a b = x$ em $a^x = b$, segue:

$$a^x = b \Rightarrow a^{log_a b} = b$$

5. $log_a a^n = n$

De fato, tome $log_a a^n = x$. Pela definição de logaritmos, temos $a^x = a^n \Rightarrow x = n$. Logo, $log_a a^n = n$

3.6.3 Propriedades operatórias dos logaritmos

3.6.3.1 Logaritmo do produto

O logaritmo do produto de dois ou mais números reais positivos é igual à soma dos logaritmos desses números, todos na mesma base $a > 0$ e $a \neq 1$.

$$log_a(b \times c) = log_a b + log_a c$$

De fato, considere $log_a(b \times c) = k$, $log_a b = p$ e $log_a c = q$. Pela definição de logaritmo, temos $a^k = b \times c$, $a^p = b$ e $a^q = c$, respectivamente. Substituindo o segundo e o terceiro no primeiro, segue $a^k = a^p \times a^q$. Pela propriedade de potência, temos $a^p \times a^q = a^{p+q}$. Portanto, $a^k = a^{p+q}$. Daí, segue $k = p + q$. Logo, substituindo $log_a(b \times c) = k$, $log_a b = p$ e $log_a c = q$ na última igualdade, chegamos $log_a(b \times c) = log_a b + log_a c$.

3.6.3.2 Logaritmo do quociente

O logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses números, todos na mesma base $a > 0$ e $a \neq 1$.

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$$

De fato, considere $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = k$, $log_a b = p$ e $log_a c = q$. Pela definição de logaritmo, temos $a^k = \frac{b}{c}$, $a^p = b$ e $a^q = c$, respectivamente. Substituindo o segundo e o terceiro no primeiro, segue $a^k = \frac{a^p}{a^q}$. Pela propriedade de potência, temos $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$. Portanto,

$a^k = a^{p-q}$. Daí, segue $k = p - q$. Logo, substituindo $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = k$, $log_a b = p$ e $log_a c = q$ na última igualdade, chegamos $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$.

3.6.3.3 Logaritmo de uma potência

O logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base dessa potência.

$$log_a b^n = n \times log_a b$$

De fato, considere $log_a b = k$ e $log_a b^n = p$. Pela definição de logaritmo, temos que $a^k = b$ e $a^p = b^n$. Agora, substituindo $a^k = b$ em $a^p = b^n$, segue $a^p = (a^k)^n = a^{k \times n}$. Portanto, $p = k \times n$. Logo, substituindo $log_a b = k$ e $log_a b^n = p$ na última igualdade, temos $log_a b^n = n \times log_a b$.

3.6.3.4 Mudança de base

Se a, b e c são números reais positivos, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, então:

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

De fato, pela definição de logaritmo, segue:

$$(I)\ log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$
$$(II)\ log_c b = y \Rightarrow c^y = b$$
$$(III)\ log_c a = z \Rightarrow c^z = a$$

De (I) e (II), temos $a^x = c^y$. Agora, substituindo (III) na igualdade $a^x = c^y$, segue

$$(c^z)^x = c^y \Rightarrow c^{z \cdot x} = c^y \Rightarrow z \cdot x = y \Rightarrow x = \frac{y}{z} \Rightarrow log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}.$$

3.7 **Função logarítmica, seu gráfico e sua relação com a função exponencial**

Com base no PCNEM (1999) e no PCN+ (2002), destacamos abaixo dois trechos que relatam a importância do estudo das funções, e que esta vai além da matemática, revelando-se primordial em outras disciplinas e na vida cotidiana.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.” (PCN+, 2002, p. 121)
>
> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (PCNEM, 1999, p. 43)

Panagiotou (2011) enfatiza que o estudo da função logarítmica e exponencial sempre permanecerá um assunto importante, visto que elas descrevem muitos fenômenos naturais e sociais, como decaimento radioativo, evolução da população e disseminação de doenças contagiosas.

Em grande parte dos livros analisados anteriormente, os capítulos que tratavam de logaritmos são nomeados *Função Logarítmica*. Daí, revela-se a importância do conceito de função dentro desse estudo. A partir da análise dos livros didáticos, feita anteriormente, pode-se observar que em sua maioria a função logarítmica fora enunciada como inversa da função exponencial. No livro (1), os autores definem diretamente a função logarítmica e depois descreve sua relação com a função exponencial. Apenas o livro (4) trabalha a função logarítmica de modo diferente. Como vimos anteriormente, ao iniciar esse tópico, o autor volta ao problema das bactérias, visto de modo breve no início do capítulo, e dá segmento, achando uma equação exponencial e obtendo uma função logarítmica. De fato, essa é a forma mais adequada de dar início ao estudo de funções, pois o assunto é trabalhado de forma interdisciplinar, podendo envolver temas ricos e reais. Como uma orientação nesse sentido, segue abaixo um trecho retirado PCN+ (2002).

> “Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponenciais e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. A resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas podem ter sua ênfase diminuída e, até mesmo, podem ser suprimidas.” (PCN+, 2002, p. 121)

Definiremos abaixo a função logarítmica como é apresentada aos alunos em sala de aula e como consta nos livros didáticos.

Seja a um número real positivo e $a \neq 1$. Denomina-se função logarítmica de base a a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Agora, falaremos sobre a importância do estudo dos gráficos, o gráfico da função logarítmica e como ele é apresentado e trabalhado em sala de aula.

É certo, que muitas informações presentes em jornais, revistas, noticiários e até mesmo em livros didáticos de várias disciplinas são transmitidas por meio de gráficos. Sabendo lê-los e interpretá-los, o discente estará preparado para se posicionar frente a diversas situações a ele apresentadas. Deste modo, na matemática o estudo dessa ferramenta tão valiosa é primordial. Um dos conteúdos que insere gráficos em seu estudo é o das funções. Segundo os PCN+ (2002), o aluno além de compreender o conceito de função, associando-o a vida cotidiana, deverá associar as diferentes funções a seus respectivos gráficos.

A função logarítmica que modela diversas situações reais do nosso cotidiano, coloca seu gráfico em posição de destaque para a interpretação, análise e conhecimentos de tais situações. Na análise dos livros didáticos, constatamos em algumas questões que envolviam a função logarítmica com a interdisciplinaridade, onde era necessário o conhecimento se sua curva. Como exemplo, escolhemos a questão presente nas páginas 174 e 175 do livro (5). Nela trabalha-se com os logaritmos nos terremotos, como segue abaixo. Em seu item c) pede-se para identificar qual dos gráficos dados melhor representa a função $y = \frac{2}{3} log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$.

Tendo em vista que os alunos já adquiriram o conhecimento de função exponencial e quadrática, eles podem descartar as opções I e III, por tratarem de gráficos de tais funções, respectivamente. Ficando apenas com as opções II e IV, por serem gráficos de funções logarítmicas. Agora, os estudantes devem analisar se a função dada é crescente ou decrescente, e assim, opinar por um dos dois gráficos restantes. Observe que a função dada tem a base do logaritmo igual a 10, portanto, uma base maior que um, que implica em uma função crescente. Logo, o gráfico que representa a função dada é o de número II. Neste item, além de exigir os conhecimentos detalhados acima, é preciso que o discente conheça o comportamento da curva dessa função de estudo, saber a “cara” que o gráfico de uma dada função, possibilita uma análise mais detalhada da questão.

Figura 23 – Terremoto, função logarítmica e seu gráfico (continua)

Contexto Terremotos

Placas tectônicas: blocos rochosos que compõem a superfície terrestre e sustentam os continentes e oceanos.

51. O terremoto é um fenômeno natural decorrente de movimentos da crosta terrestre, geralmente resultantes do choque entre duas placas tectônicas, que liberam grande quantidade de energia e ocasionam tremores na terra.

Com base na quantidade de energia liberada por um terremoto, é possível determinar, utilizando um aparelho chamado sismógrafo, sua magnitude na escala Richter, desenvolvida em 1935 pelo sismólogo norte-americano Charles Richter (1900-1985). Para sua elaboração, esse sismólogo atribuiu aos terremotos mais fracos, que já haviam sido registrados, valores próximos de zero, e adotou uma escala logarítmica.

Nos últimos anos, terremotos provocaram estragos que puderam ser vivenciados pela população de diversos países. Em abril de 2015, por exemplo, um terremoto de 7,8 graus atingiu o Nepal, onde milhares de pessoas foram mortas ou feridas. Em agosto de 2014 um terremoto com magnitude de 3,0 graus, atingiu a cidade de Montes Claros, em Minas Gerais, ocasionando estragos em algumas edificações.

Diante disso, apesar do enorme progresso já realizado pelos cientistas no sentido de identificar as causas de terremotos e desenvolver aparelhos que informam sua magnitude e origem, o empenho tem sido em encontrar uma maneira de prevê-los, para que a população possa ser alertada, e assim tomar medidas de segurança necessárias antes de sua ocorrência.

De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

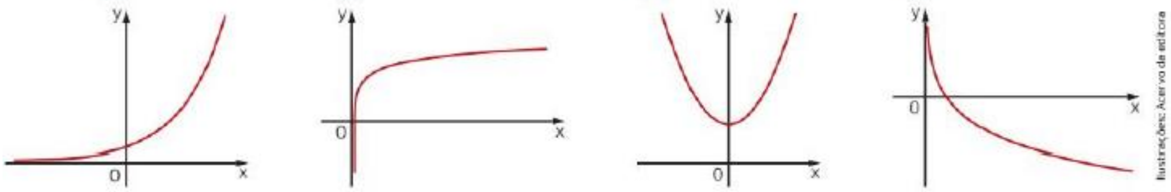
a) Qual é o nome do ponto pelo qual se propaga o terremoto na superfície terrestre? epicentro

b) Sabendo-se que a magnitude y de um terremoto na escala Richter pode ser expressa pela função $y = \frac{2}{3}\log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$, na qual x representa a energia liberada em quilowatts-hora, pelo terremoto, determine:

- a energia liberada pelo terremoto ocorrido no Nepal e pelo ocorrido em Montes Claros; Nepal: $7 \cdot 10^{8,7}$ kWh; Montes Claros: $7 \cdot 10^{1,5}$ kWh
- a magnitude de um terremoto que liberar $7 \cdot 10^{9}$ kWh de energia e suas possíveis consequências. 8 graus na escala Richter. Com isso, as construções sofrem danos severos e podem ocorrer grandes rachaduras no solo.

c) Dentre os gráficos a seguir, qual melhor representaria a função apresentada no item b? II

I II III IV



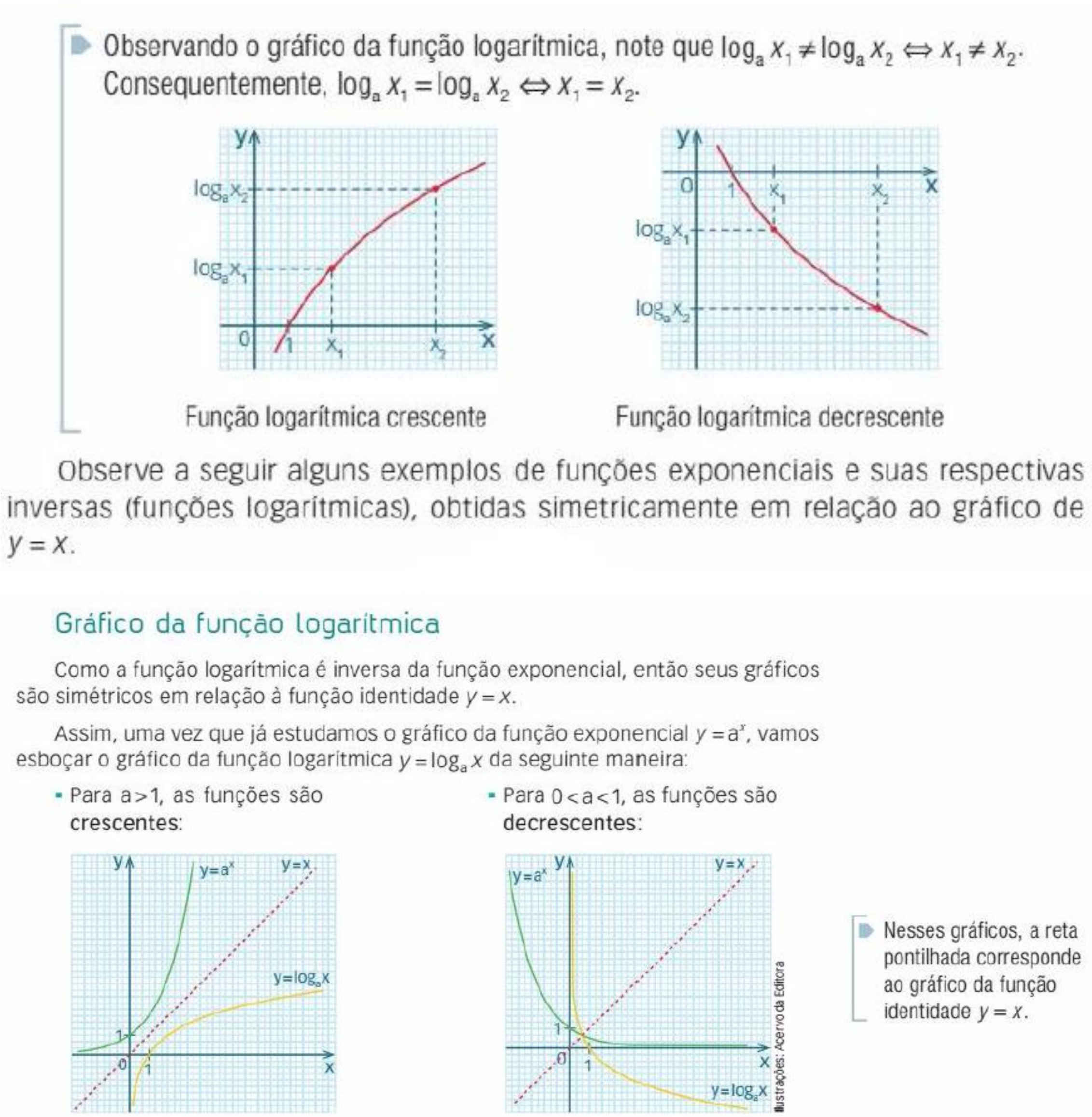
d) Pesquise sobre a magnitude, na escala Richter, de outros terremotos já registrados e suas consequências. Com base na magnitude obtida, determine a quantidade de energia liberada. Resposta pessoal.

Fontes de pesquisas: <http://g1.globo.com/mundo/noticia/2015/05/numero-de-mortos-em-terremotos-no-nepal-passa-de-8500-e-bate-recorde.html>. Acesso em: 20 ago. 2015. <http://g1.globo.com/mg/grande-minas/noticia/2014/04/tremor-no-fim-da-noite-de-segunda-acorda-moradores-de-montes-claros.html>. Acesso em: 21 ago. 2015. <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT803840-1716,00.html>. Acesso em: 9 dez. 2015.

Fonte: Souza, 2016, p. 174 e 175.

Dos cinco livros analisados anteriormente, quatro iniciam a abordagem ao tópico gráfico da função logarítmica expondo dois exemplos de funções logarítmicas, em que constrói-se uma tabela, atribuindo valores para x e obtendo os valores de y, e marcando os pares ordenados em um gráfico, para cada uma das funções. Desses exemplos dados, chega-se que uma delas representa a função logarítmica crescente e outra decrescente. Depois dessa análise, generaliza-se o comportamento do gráfico da função em estudo. É válido ressaltar, que apenas o livro (2), aborda esse tópico de modo distinto, como ilustramos abaixo. Nele, o assunto é introduzido lembrando que a função logarítmica é a inversa da exponencial, visto antes de definir tal função, e, portanto, seus gráficos são simétricos em relação à função identidade $y = x$. Prossegue, lembrando que já é conhecido o gráfico da função exponencial, e constrói o gráfico da logarítmica com a ajuda dele e da identidade.

Figura 24 – Grafico da função logarítmica a partir do gráfico da função exponencial



Observando o gráfico da função logarítmica, note que $\log_a x_1 \neq \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$. Consequentemente, $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Observe a seguir alguns exemplos de funções exponenciais e suas respectivas inversas (funções logarítmicas), obtidas simetricamente em relação ao gráfico de $y = x$.

Gráfico da função logarítmica

Como a função logarítmica é inversa da função exponencial, então seus gráficos são simétricos em relação à função identidade $y = x$.

Assim, uma vez que já estudamos o gráfico da função exponencial $y = a^x$, vamos esboçar o gráfico da função logarítmica $y = \log_a x$ da seguinte maneira:

- Para $a > 1$, as funções são crescentes:
- Para $0 < a < 1$, as funções são decrescentes:

Nesses gráficos, a reta pontilhada corresponde ao gráfico da função identidade $y = x$.

Fonte: Balestri, 2016, p. 169.

A seguir abordaremos o estudo do gráfico da função logarítmica como apresentado pela maioria dos livros analisados e como majoritariamente faz-se em sala de aula. Como exemplo, escolhemos o livro (5) página 169. O tópico é iniciado com a construção das funções logarítmicas $f(x) = log_2 x$ e $g(x) = log_{\frac{1}{2}} x$. Em seguida, considere-se os valores $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 e 4 para x, constrói-se a tabela e os gráficos das duas funções dadas, como segue abaixo.

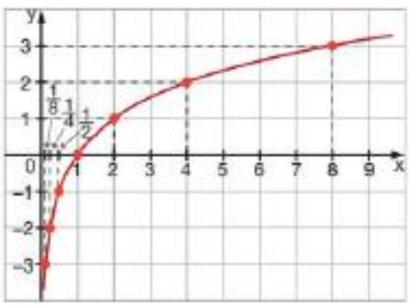
Figura 25 – Grafico da função logarítmica obtido a partir dos pares ordenados (x, y)

Gráfico de uma função logarítmica

Vamos esboçar o gráfico das funções logarítmicas $f(x)=\log_2 x$ e $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$. Para isso, atribuímos alguns valores para x e calculamos os valores correspondentes de y, determinando pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos esses pares ordenados em um plano cartesiano.

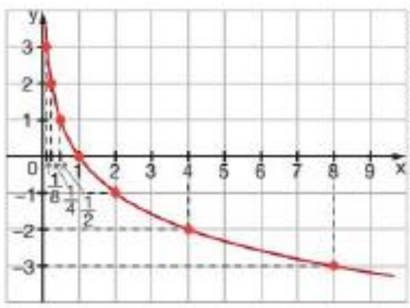
- $f(x)=\log_2 x$

x	$f(x)=\log_2 x$	(x, y)
$\frac{1}{8}$	$f\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2 \frac{1}{8}=-3$	$\left(\frac{1}{8}, -3\right)$
$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2 \frac{1}{4}=-2$	$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2 \frac{1}{2}=-1$	$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
1	$f(1)=\log_2 1=0$	(1,0)
2	$f(2)=\log_2 2=1$	(2,1)
4	$f(4)=\log_2 4=2$	(4,2)
8	$f(8)=\log_2 8=3$	(8,3)



- $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

x	$g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$	(x, y)
$\frac{1}{8}$	$g\left(\frac{1}{8}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}=3$	$\left(\frac{1}{8}, 3\right)$
$\frac{1}{4}$	$g\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}=2$	$\left(\frac{1}{4}, 2\right)$
$\frac{1}{2}$	$g\left(\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}=1$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
1	$g(1)=\log_{\frac{1}{2}} 1=0$	(1,0)
2	$g(2)=\log_{\frac{1}{2}} 2=-1$	(2, −1)
4	$g(4)=\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$	(4, −2)
8	$g(8)=\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$	(8, −3)



Ilustrações: Acervo da editora

Fonte: Souza, 2016, p. 169.

Analisando os gráficos, tem-se que ambos cortam o eixo das abscissas no ponto $(1{,}0)$ e nunca interceptam o eixo das ordenadas. Além disso, f é crescente e a base do logaritmo é $a=2$, g é decrescente e a base do logaritmo é $a=\frac{1}{2}$. Generalizando, temos que para qualquer função logarítmica $f(x)=log_a x$, com $a>0$ e $a\neq 1$, segue que:

- seu gráfico intersecta o eixo x no ponto $(1{,}0)$ e não cruza o eixo y;

- f é crescente se $a > 1$, ou seja, $x_1 > x_2 \Leftrightarrow log_{x_1} > log_{x_2}$;
- f é decrescente se $0 < a < 1$, ou seja, $x_1 > x_2 \Leftrightarrow log_{x_1} < log_{x_2}$.

Antes de estabelecer uma importante relação entre as funções logarítmica e exponencial, é necessário que o discente tenha em mãos informações adquiridas em estudos anteriores, como descreveremos abaixo.

- ✓ **Função Inversa:** Dada uma função bijetiva $f: A \rightarrow B$, chama-se função inversa de f a função $f^{-1}: B \rightarrow A$ tal que, $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, para $x \in A$ e $y \in B$.
- ✓ Os gráficos de uma função e sua inversa são simétricos em relação à reta $y = x$.
- ✓ **Função Exponencial:** é toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = a^x$, onde a é um número real positivo e $a \neq 1$.
- ✓ A função exponencial é bijetiva.
- ✓ Vale a propriedade $f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) + f(x_2)$.
- ✓ A função exponencial admite inversa.

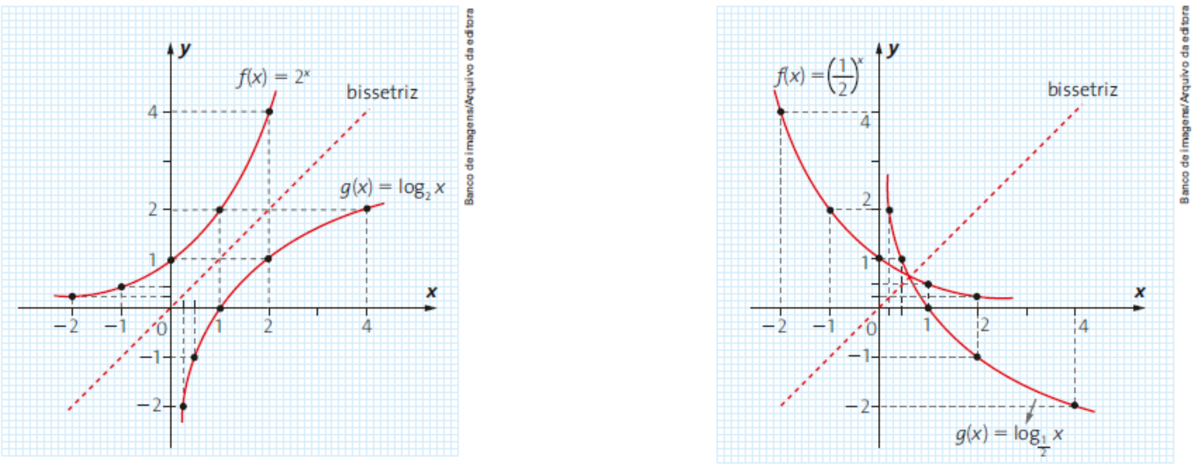
De acordo com a análise dos livros didáticos, podemos perceber que, de modo geral, ao descrever a relação entre as funções logarítmica e exponencial, expõem-se os gráficos e observa-se a simetria em relação à reta $y = x$. Assim, constando-se que a função logarítmica é inversa da exponencial, e vice-versa. A fim de ilustrar como o tópico é abordado em sala de aula, escolhemos o livro (3) página 194, como segue abaixo.

Figura 26 – Relação entre as funções logarítmica e exponencial

Uma relação importante

Já estudamos, na página 190, que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes I e III). Observe os gráficos das funções inversas $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ a seguir:

a) $a > 1$ b) $0 < a < 1$



Observação: Veja no gráfico do item **a** ($a > 1$) que a função exponencial cresce rapidamente, enquanto a função logarítmica cresce muito lentamente.

Fonte: Dante, 2016, p. 194.

3.8 **Logaritmo pela concepção geométrica**

3.8.1 Introdução

A relação entre os logaritmos e a área de uma faixa de hipérbole foi observada por Grégoire de Saint-Vincent e Isaac Newton em 1647 e 1660, respectivamente. Segundo, Lima (2016), embora na época não tenham identificado de fato esta área com os logaritmos naturais, muito menos tenham reconhecido o número e, seus escritos nos revelam o quanto é antiga a concepção geométrica dos logaritmos; além disso revela-se natural, intuitiva e instrutiva por construir uma ótima introdução do Cálculo Integral.

De acordo com Soares (2017) a concepção geométrica dos logaritmos não é utilizada nos livros didáticos do ensino médio. A partir dos livros analisados anteriormente, constatou-se que essa afirmação se cumpre, visto que nenhum deles abordou tal concepção.

A seguir, citaremos um trecho de Klein (1927), onde ele defende a concepção geométrica dos logaritmos já no ensino médio.

> "O resultado dessas observações relativas ao início do século XIX pode ser resumido dizendo-se que **a introdução dos logaritmos naturais partindo da quadratura da hipérbole tem o mesmo rigor que qualquer outro método, com a vantagem, como temos assinalado, de superar a todos em simplicidade e intuição**. **É indubitável que este desenvolvimento moderno passou de um modo estranho pelo ensino secundário sem deixar qualquer vestígio fundamental** (...)" . (apud MIGUEL; MIORIM, 2002, p. 59)

O autor ainda relata a importância de haver uma continuidade da forma em que foi abordado um conteúdo do ensino médio ao superior, para que este possa continuar construindo a partir da base que fora adquirida no ensino que o antecede. Portanto, introduzir os logaritmos no ensino médio sob a concepção geométrica, na qual se utiliza faixas retangulares sob uma hipérbole, auxiliaria no ensino superior a outros procedimentos.

Lima (2016), defende a concepção geométrica dos logaritmos por apresentar a vantagem da simplicidade conceitual e técnica. Ele menciona que trabalhar com a definição $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, proporciona três inconvenientes destacados no trecho a seguir.

> "O primeiro inconveniente é que ela requer que se estudem preliminarmente as propriedades da função exponencial, em particular que se saiba o significado de a^y quando y é irracional, e que se provem regras como $a^y \cdot a^z = a^{y+z}$ para y, z ∈ quaisquer. Tais preliminares envolvem dificuldades técnicas que conduzem ao seguinte dilema: ou passar por cima dessas dificuldades, fazendo de conta que elas não existem - o que deixa a desejar do ponto de vista de honestidade científica - ou esgotar a paciência do aluno (ou leitor) com longos detalhes rebarbativos.
>
> O segundo inconveniente da definição de logaritmos como expoente é que, tratando todas as bases da mesma maneira, ela não permite apresentar espontaneamente o número e como uma base especial, que se distinga naturalmente das demais. Como se sabe, e será amplamente mostrado neste texto, os logaritmos de base e surgem naturalmente em problemas de origens as mais diversas, daí serem chamados de logaritmos naturais. Na definição de logaritmo como expoente, o número e aparece artificialmente.
>
> O terceiro inconveniente da definição de logaritmo como expoente é a dificuldade de se estabelecerem certas desigualdades fundamentais, como por exemplo $L(1 + x) < x$ (válida para logaritmos de base e), que é óbvia na definição geométrica." (LIMA, 2016, p. x)

Ainda segundo o autor, tais inconvenientes poderão ser evitados quando adotada a concepção geométrica. Ele aponta que a definição geométrica dos logaritmos:

I. Exige apenas o conceito de área de figura plana e da propriedade fundamental $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$, sendo esta resultado do fato de que a área de um retângulo se mante inalterada quando se multiplica e se divide, respectivamente, sua base e altura pelo mesmo número.
II. Possibilita o número e surgir mais naturalmente e os logaritmos definidos por esse meio são de base e.
III. Definir $L(1 + x)$ como área tornam as propriedades fundamentais, tais como $L(1 + x) < x$, mais evidentes.

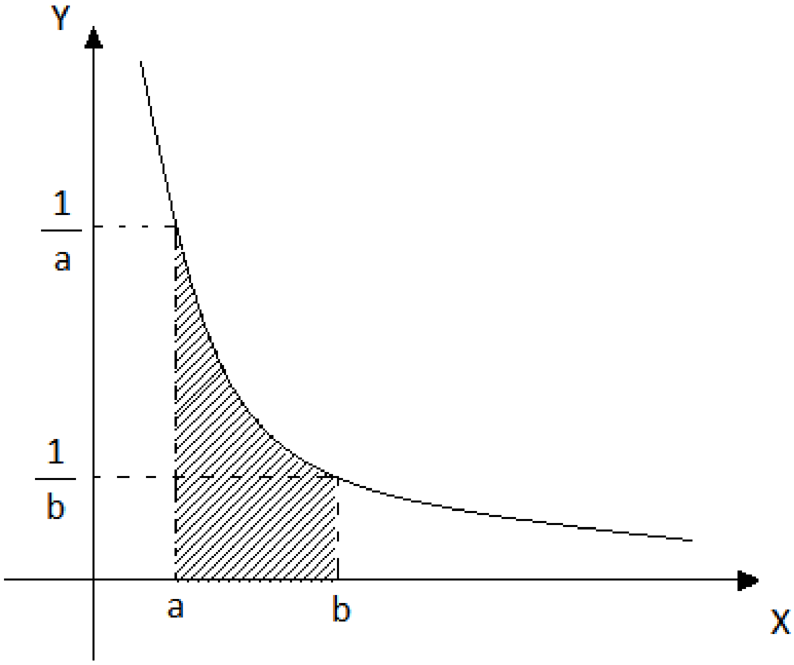
3.8.2 Definição

A fim de expor de fato a concepção geométrica dos logaritmos, inicialmente introduziremos a definição de área de uma faixa da hipérbole.

Considere o plano cartesiano e os pontos presentes nele representados pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais.

Seja o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, para $x > 0$. Dados dois números positivos a e b, como $a < b$, tome por faixa da hipérbole a região limitada pelo pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = a$ e $y = b$. Indicaremos tal região do plano por K_a^b.

Gráfico 1 – A região hachurada é a faixa K_a^b



Fonte: O autor, 2021.

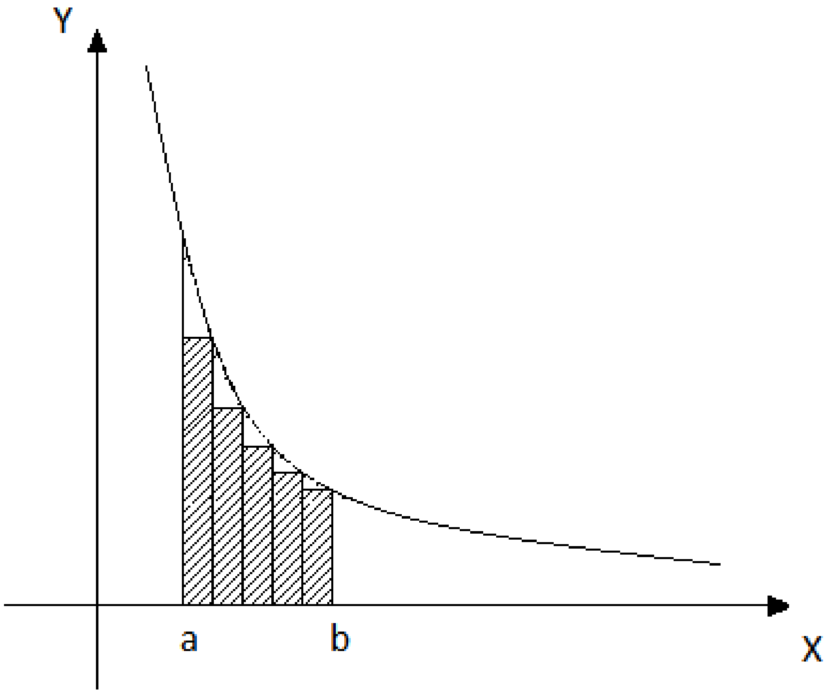
Observe que a faixa da hipérbole é a região formada pelos pontos (x, y) tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$, ou seja,

$$K_a^b = \left\{(x, y); a \leq x \leq b \text{ } e \text{ } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$$

Agora, vamos expor como se calcula a área da faixa da hipérbole K_a^b.

Faremos a decomposição do intervalo $[a, b]$, por meio de pontos intermediários, em um número finito de subintervalos justapostos, todos com o mesmo comprimento. Em cada um dos intervalos $[f, g]$ da decomposição, $f < g,$ consideremos o retângulo de altura $1/g$. A reunião de todos esses retângulos inscritos forma um polígono retangular inscrito na faixa K_a^b. Deste modo, ao somar a área de cada um desses retângulos, vamos obter o valor da área da faixa K_a^b, aproximadamente por falta.

Gráfico 2 – Intervalo $[a, b]$ dividido em cinco retângulos de mesma base



Fonte: O autor, 2021.

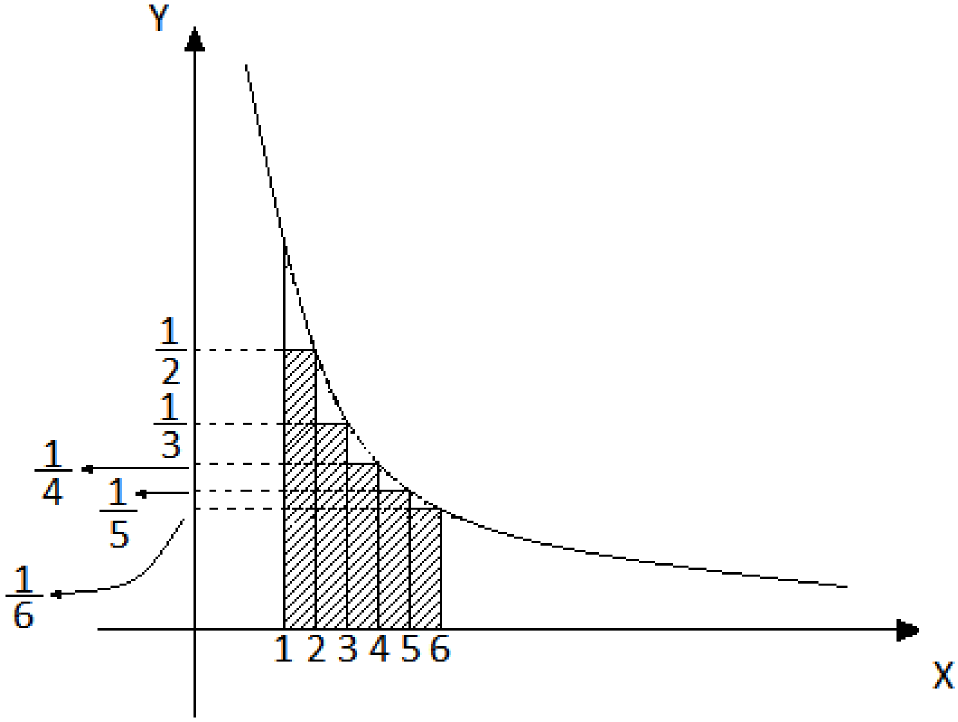
A fim de ilustrar como se dá esse cálculo, propomos os exemplos a seguir.

Considere a faixa K_1^6, ilustrada na figura a seguir. O intervalo $[1, 6]$ será dividido em cinco subintervalos por meio dos pontos intermediários 2, 3, 4 e 5. Deste modo, obtemos um polígono retangular cuja área é dada pela soma da área dos cinco retângulos de base 1 e alturas $1/_2$, $1/_3$, $1/_4$ e $1/_5$, respectivamente. Assim, segue:

$$\left(1\ \times \frac{1}{2}\right) + \left(1\ \times \frac{1}{3}\right) + \left(1\ \times \frac{1}{4}\right) + \left(1\ \times \frac{1}{5}\right) + \left(1\ \times \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{87}{60} \cong 1{,}45$$

Gráfico 3 – Aproximação por falta com 5 retângulos para a área da faixa K_1^6



Fonte: O autor, 2021.

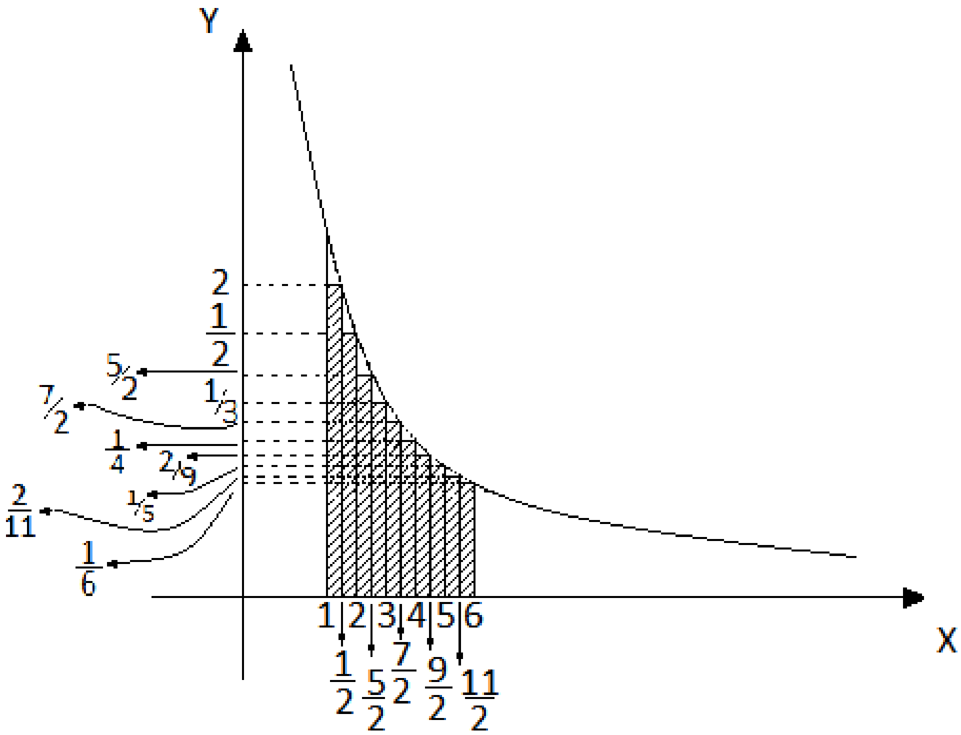
É importante ressaltar que quanto maior a divisão do intervalo $[1, 6]$, melhor será a aproximação por falta da área da faixa K_1^6. Deste modo, ao dividirmos o intervalo $[1, 6]$ em 10 subintervalos iguais por meio dos pontos ${}^{1}/_{2}$, 2, ${}^{5}/_{2}$, 3, ${}^{7}/_{2}$, 4, ${}^{9}/_{2}$, 5 e ${}^{11}/_{2}$, obtemos 10 retângulos todos de base ${}^{1}/_{2}$ e alturas 2, ${}^{1}/_{2}$, ${}^{2}/_{5}$, ${}^{1}/_{3}$, ${}^{2}/_{7}$, ${}^{1}/_{4}$, ${}^{2}/_{9}$, ${}^{1}/_{5}$, ${}^{2}/_{11}$e ${}^{1}/_{6}$, respectivamente, como podemos verificar na figura a seguir. Daí, temos:

$$\left(\frac{1}{2} \times 2\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{7}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} = \frac{62\,921}{27\,720} \cong 2,26987$$

Gráfico 4 – Aproximação por falta com 10 retângulos para a área da faixa K_1^6



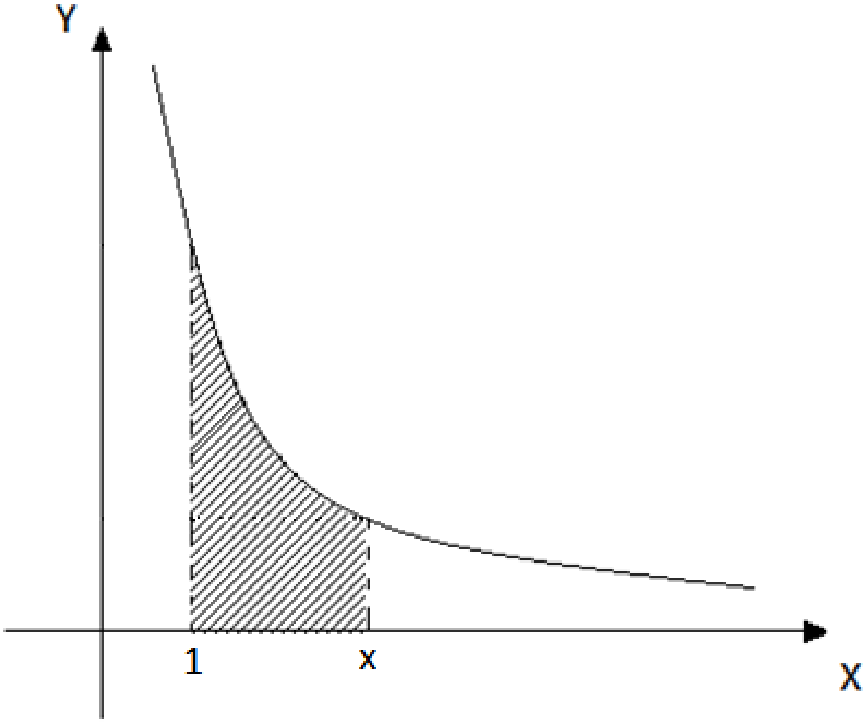
Fonte: O autor, 2021.

3.8.3 Logaritmos naturais

A seguir definiremos o logaritmo natural, também conhecidos como logaritmos neperianos, sob uma concepção geométrica. Usaremos como base bibliográfica para descrever este e dois próximos tópicos a obra *Logaritmos* de Elon Lages Lima, do ano de 2016.

O logaritmo natural de x, onde $x \in \mathbb{R}_+^*$, é a área da faixa K_1^x. Deste modo, pela definição e considerando $\ln x$ para indicar logaritmo natural de x, quando $x > 0$, segue $\ln x = Área\ (K_1^x)$. Se $0 < x < 1$ tomaremos $Área\ (K_1^x) < 0$. Em particular, para $x = 1$, temos K_1^1 um segmento de reta, tendo área igual a zero.

Gráfico 5 – $\ln x$ é igual à área hachurada



Fonte: O autor, 2021.

Como exemplo calculemos um valor aproximado para $\ln 3$. O intervalo $[1, 3]$ será dividido em dez subintervalos por meio dos pontos a seguir.

1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3

Os valores de ${}^{1}/_{x}$ quando x assume os valores dados, são aproximadamente:

0,888 0,714 0,625 0,555 0,500 0,454 0,416 0,384 0,357 0,333

Uma aproximação inferior de $ln\, 3$ é dada pela área do polígono retangular inscrito na faixa K_1^3, composta por dez retângulos todos de base 0,2 e alturas iguais aos últimos valores expostos acima. Assim,

$$(0{,}2\ \times 0{,}888) + (0{,}2\ \times 0{,}714) + (0{,}2\ \times\ 0{,}625) + (0{,}2\ \times\ 0{,}555) + (0{,}2\ \times\ 0{,}500)$$
$$+ (0{,}2\ \times\ 0{,}454) + (0{,}2\ \times\ 0{,}416) + (0{,}2\ \times\ 0{,}384) + (0{,}2\ \times\ 0{,}357)$$
$$+ (0{,}2\ \times\ 0{,}333) \cong 1{,}0452$$

Deste modo, a área do polígono retangular é igual a 1,0452. Logo, o valor aproximado por falta de $ln\,3$ é 1,0452.

3.8.4 Número e

Antes de falarmos de fato da constante e, definiremos dois teoremas, omitindo suas respectivas provas, deixamos a cargo do leitor.

Teorema 1: Toda função logarítmica f é sobrejetiva, ou seja, dado qualquer número real a, existe um único número real positivo x tal que $f(x) = a$.

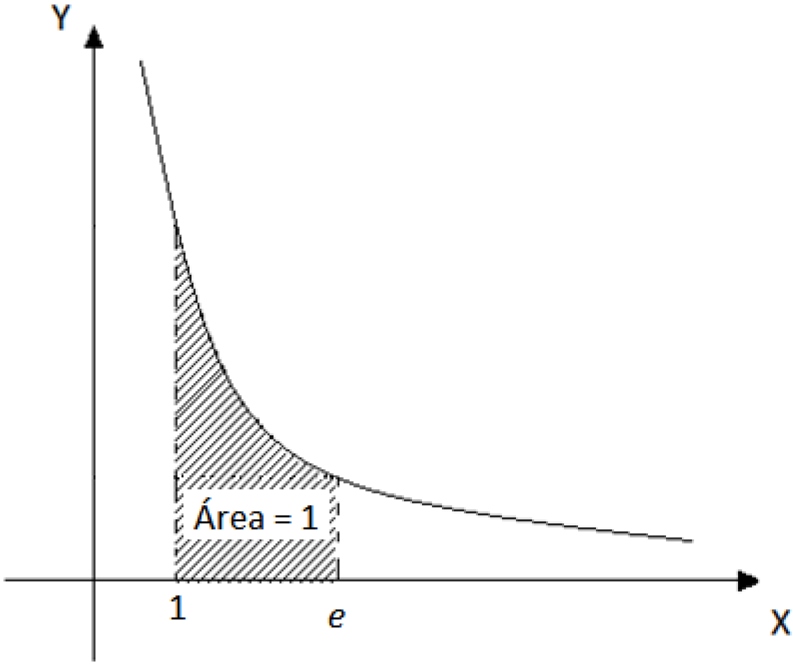
Teorema 2: A uma função real $\ln x \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que a cada número real $x > 0$, que faz a correspondência com seu logaritmo natural $ln\,x$, é uma função logarítmica.

De acordo com o teorema 1, existe um único número real positivo x tal que seu logaritmo natural seja igual a 1, isto é, $ln\,x = 1$. Este número é representado pela letra e, que é a base do sistema de logaritmos naturais. Portanto,

$$ln\,x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Sabemos que pela definição geométrica os logaritmos naturais é a área da faixa K_1^x. Deste modo, a faixa K_1^e tem área igual a 1.

Gráfico 6 – $Área\ K_1^e = 1$



Fonte: O autor, 2021.

Observe que, $e > 1$, pois números reais positivos menores que 1 têm logaritmos negativos.

Calculando a área da faixa da K_1^2, obtemos aproximadamente 0,6685, cálculo deixado a cargo do leitor. Vimos anteriormente que a área da faixa K_1^3 é aproximadamente 1,0452. Como K_1^e tem área igual a 1, segue $ln\,2 < 1 < ln\,3$. Daí, concluímos que $2 < e < 3$.

3.8.5 Outras bases

É possível definimos outros sistemas de logaritmos usando a faixa da área sobre a hipérbole, ou seja, a concepção geométrica. Para isto, usaremos a hipérbole $y = {}^{t}/_{x}$, onde t é uma constante positiva. Para cada t escolhido define-se um novo sistema de logaritmos.

Sejam dois pontos a e b no eixo das abscissas. Considere a hipérbole $y = {}^{t}/_{x}$ e a faixa $K[t]_a^b$ delimitada por ela, pelo eixo das abscissas e pelas retas $y = a$ e $y = b$.

Mostremos que a área de $K[t]_a^b$ é t vezes a área de K_a^b.

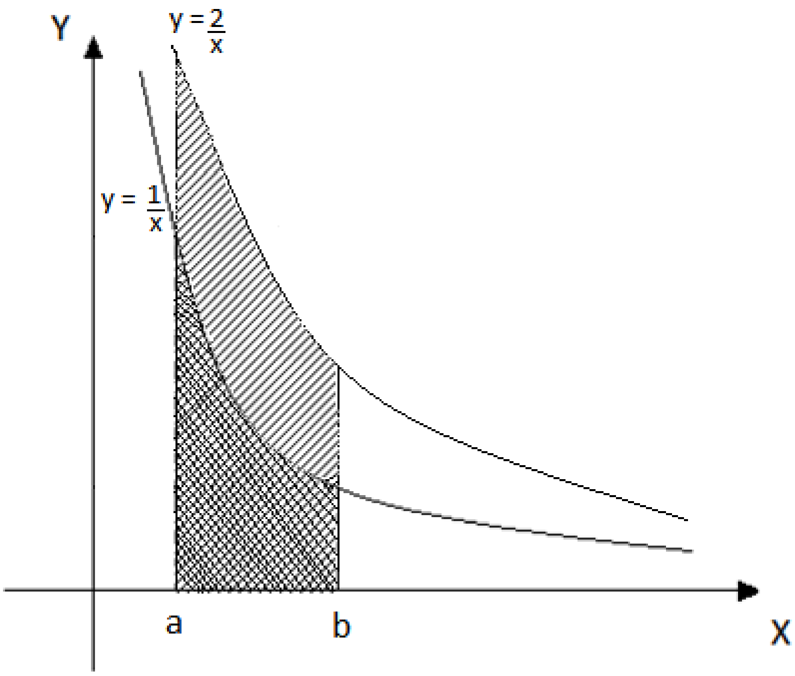
Considere o mesmo número de retângulos de mesma base inscritos nas faixas $K[t]_a^b$ e K_a^b. Sabemos que a área de K_a^b por falta é determinada pela soma das áreas dos retângulos inscritos. Assim, dado um subintervalo $[c, d]$ de $[a, b]$, o retângulo de base $[c, d]$ inscrito na hipérbole $y = 1/x$ tem altura $1/d$ e área $(d-c)/d$. Agora, um retângulo de mesma base inscrito sob a hipérbole $y = t/x$ tem altura t/d e área $t \cdot (d-c)/d$. Logo, concluímos que a área do segundo é t vezes a do primeiro. Isto se repetirá em cada subintervalo de $[a, b]$. Portanto, a soma da área dos retângulos inscritos em $y = t/x$ é t vezes a soma dos retângulos inscritos em $y = 1/x$. Assim,

$$\acute{A}rea\ de\ K[t]_a^b = t\ \times \acute{A}rea\ de\ K_a^b,$$

visto que são números reais com as mesmas aproximações inferiores.

Observe a figura a seguir, nela temos as hipérboles $y = 1/x$ e $y = 2/x$. A área da faixa $K[2]_a^b$ é o dobro da área K_a^b.

Gráfico 7 – Área sob as faixas das hipérboles $y = 1/x$ e $y = 2/x$ delimitadas pelo eixo das abscissas e as retas $y = a$ e $y = b$.



Fonte: O autor, 2021.

Sabemos que $ln\, x = \grave{A}rea\ (K_1^x)$ e $\acute{A}rea\ de\ K[t]_a^b = t\ \times \acute{A}rea\ de\ K_a^b$. Daí,

$$\acute{A}rea\ de\ K[t]_1^x = t\ \times \acute{A}rea\ de\ K_1^x = t \cdot ln\, x$$

Tomemos,

$$log_a\, x = \acute{A}rea\ de\ K[t]_1^x$$

Assim, definimos um novo sistema de logaritmos para um dado $t > 0$. Como $\acute{A}rea\ de\ K[t]_1^x = t \cdot ln\, x$, segue:

$$log_a\, x = t \cdot ln\, x$$

Se o número $a > 0$ é base de um sistema de logaritmos, sabemos que $log_a\, a = 1$. Deste modo,

$$log_a\, a = t\ \cdot ln\, a = 1 \Rightarrow t = {}^{1}/_{ln\, a} \Rightarrow a = e^{1/t}$$

Como $y = {}^{t}/_{x}$ e $t = {}^{1}/_{\ln a}$, então $y = {}^{1}/_{x \ln a}$. Deste modo, definiremos $log_a\, x$ como a área da faixa da hipérbole $y = {}^{1}/_{x \ln a}$ compreendida entre 1 e x.

É valido observar que ao fazer $t > 0$ estamos considerando apenas os logaritmos com base $a > 1$, visto que $a = e^{1/t}$. Para calcularmos $log_a\, x$, onde $0\ < a < 1$, pela concepção geométrica definida anteriormente, devemos observar que $log_a x = -\, log_{\frac{1}{a}}$. Por exemplo, para determinar $log_{\frac{1}{2}}\, x$, basta calcular $-\, log_2 x$.

4 UMA PROPOSTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM SOBRE OS LOGARITMOS

Com a pesquisa teórica realizada até então e a análise dos livros didáticos do ensino médio, observamos que o estudo dos logaritmos se dará de modo mais satisfatório, eficaz e envolvente para o discente quando desenvolvido através de alguns pontos primordiais. Selecionamos quatro pontos principais necessários para tal estudo, que são a história dos logaritmos, a contextualização e interdisciplinaridade como ferramentas introdutórias, as novas tecnologias, utilizando calculadora e computador com software, e sua concepção geométrica, presentes nas atividades 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

Portanto, a presente proposta de ensino e aprendizagem possibilita ao docente aplicar tais atividades em suas aulas sobre logaritmos, como o objetivo de enriquecê-las e proporcionar um aprendizado mais significativo.

A seguir descreveremos cada uma das atividades, como elas deverão ser aplicadas e o que se deseja alcançar.

ATIVIDADE 1 – Esta atividade propõe o passo inicial, o primeiro contato do aluno com o tema logaritmo. Ela trabalha com a história dos logaritmos, os fundamentos e contextos históricos presentes na época de seu surgimento.

Como visto anteriormente, a história da matemática é uma ferramenta fundamental para o processo de ensino e aprendizagem. Através de fatos históricos, o discente conhecerá a origem do conceito a ser estudado, bem como o cenário social, econômico e cultural que impulsionaram seu desenvolvimento, perceberá que ele é um sujeito ativo de uma sociedade em constante transformações, reconhecerá a importância da matemática no desenvolvimento tecnológico e a relação desta com a ciência ao longo do tempo.

Segundo Panagiotou (2011), a maioria dos autores limita-se à discussão da importância de usar a história da matemática, enquanto um número limitado de artigos sugere um material, onde se tenha o uso da história da matemática como ferramenta didática, para ser aplicado em sala de aula. Nesse sentido, a presente atividade também propõe ao docente uma forma de introduzir na prática a história dos logaritmos.

Panagiotou (2011) alerta que o aluno pode não entender como era difícil realizar no passado, onde não se tinha o sistema numérico adquado que dispomos na atualidade, as quatro operações aritméticas. Assim, ele enfatiza que uma forma de fazer o discente compreender o problema e valorizar as conquistas obtidas no passado, é envolvê-lo numa atividade em sala de aula com cálculos, que envolvam grandes números, antes da evolução dos algoritmos conhecidos.

Com a atividade 1 deseja-se que o discente tenha o contato com a história dos logaritmos, entenda o que antecedeu a ele, o método da prostaférese, o que impulsionou de fato seu estudo e os métodos utilizados por Napier, o pioneiro nessa temática.

A primeira parte dessa atividade tratará do método da prostaférese. Para tal, será desenvolvida a multiplicação de 8 768 por 9 063 utilizando este método e seguindo quatro passos. Utilizaremos conhecimentos básicos de trigonometria e uma tabela trigonométrica fornecida na atividade.

Será proposto ao aluno que calcule a multiplicação de 13 640 por 7 771, seguindo os passos utilizados no exemplo. Espera-se que ele expresse,

$$cos\,A = \frac{13\,640}{2} = 6\,820$$
$$cos\,B = 7\,771$$

ou ainda,

$$cos\,A = 0,6\,820$$
$$cos\,B = 0,7\,771$$

Em seguida, o discente deverá consultar a tabela trigonométrica, concluir que $A = 47°$ e $B = 39°$ e aplicar a identidade trigonométrica abaixo.

$$2\cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$
$$2\cos 47°\,cos\,39° = \cos(47° + 39°) + \cos(47° - 39°) = \cos 86° + cos\,8°$$

A fim de encontrar de fato a multiplicação desejada, o aluno consultará a tabela para obter $\cos 86° + \cos 8° = 0{,}0698 + 0{,}9903 = 1,0601$. Ele deverá observar que os dois números originalmente foram divididos por 10^4, sendo necessário no final multiplicar o valor encontrado por 10^8. Logo, concluirá que o resultado da multiplicação de 13 640 por 7 771 é 106 010 000. Seguindo uma cronologia histórica, a atividade 1 terá uma segunda parte, onde trataremos da história dos logaritmos.

É fato que, seguindo o currículo de matemática do ensino médio, o aluno ainda não teve contato com as progressões aritméticas e geométricas, utilizadas para a compreensão das sequências adotadas por Napier em seu método para calcular os logaritmos. Deste modo, a presente atividade, lança um exemplo simples, exigindo apenas conhecimentos prévios de potências, para que o discente entenda de forma superficial como eram calculados os logaritmos.

Por meio de uma relação entre duas sequências, $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots)$ e $(a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \cdots)$, almeja-se que o aluno entenda que a multiplicação de números positivos corresponde a uma adição, uma vez que se representarmos os números em forma de potências e for feita sua associação com seus expoentes, que seriam somados, obtendo um número que daria a correspondência ao resultado final. Em termos matemáticos, calcular o produto de dois números $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$, em que $\mathrm{A} = a^m$ e $\mathrm{B} = a^n$, significa calcular a soma $m + n$, que vem de $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Uma vez encontrado o resultado de $m + n$, consulta-se a tabela fornecida e encontra-se a correspondência deste número, o qual seria o resultado desejado.

Após um exemplo apresentado, será proposta ao aluno, no item a), que calcule $9 \cdot 2\,187$ fazendo uso do método apresentado. Pretende-se que ele consulte a tabela fornecida e siga o raciocínio abaixo, obtendo o resultado da multiplicação.

7ª coluna da tabela

9ª coluna da tabela

$$9 \cdot 2\,187 = 3^2 \cdot 3^7 = \underbrace{3^{2+7}}_{\text{Repete-se a base 3 e somam-se os expoentes.}} = 3^9 = 19\,683$$

2ª coluna da tabela

No item b), deseja-se que o discente complete a tabela com as potências de 3, $3^{11} = 177\,147$, $3^{12} = 531\,441$, $3^{13} = 1\,594\,323$, $3^{14} = 4\,782\,969$ e $3^{15} = 14\,348\,907$. Com base nos dados obtidos neste item, o aluno responderá o item c). Deseja-se que ele calcule $2\,187 \cdot 6\,561$, seguindo o raciocínio a seguir.

$$2\,187 \cdot 6\,561 = \overbrace{3^{7}}^{\text{7ª coluna da tabela}} \cdot \underbrace{3^{8}}_{\text{8ª coluna da tabela}} = \underbrace{3^{7+8}}_{\text{Repete-se a base 3 e somam-se os expoentes.}} = \overbrace{3^{15}}^{\text{15ª coluna da tabela}} = 14\,348\,907$$

ATIVIDADE 2 – Esta atividade tem por objetivo iniciar o estudo dos logaritmos por meio de um exemplo real, um acontecimento atual, que foi vivenciado direta ou indiretamente por pessoas do todo o mundo, sendo assim, um assunto presente no cotidiano do aluno. Usar um tema de extrema importância para introduzir logaritmo, ajuda ao aluno dar mais significado e utilidade ao conteúdo além de despertar o interesse em adquiri-lo.

Como mencionado anteriormente, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999), defendem que para mais de aplicar conhecimentos matemáticos em situações reais, faz-se necessário promover a relação destes com outras áreas de conhecimentos. É nessa dinâmica que a presente atividade também se desenvolve, pois trabalhar a matemática pautada no tema da pandemia da COVID-19, faz com que esta se associe com a história, biologia e com a própria matemática, quando faz uso de conteúdos vistos em anos anteriores.

No desenvolver da atividade 2, até o item c, almeja-se que o discente chegue a $P_n = P_0(1{,}02)^n$. É válido ressaltar que são necessários conhecimentos básicos de porcentagem, uma vez que a taxa de contaminação é de 2%. Com auxílio do professor o aluno deverá seguir uma linha de pensamento, mostrada na tabela abaixo.

Tabela 1 – Raciocínio almejado com os itens a), b) e c) da atividade 2

Dias	Número de pessoas contaminadas
Início	P_0
1º dia	$P_1 = P_0 + P_0 \cdot 0{,}02 = P_0(1{,}02)^1$
2º dia	$P_2 = P_1 + P_1 \cdot 0{,}02 = P_1(1{,}02)^1 = P_0(1{,}02)^1 \cdot (1{,}02)^1 = P_0(1{,}02)^2$
3º dia	$P_3 = P_2 + P_2 \cdot 0{,}02 = P_2(1{,}02)^1 = P_0(1{,}02)^2 \cdot (1{,}02)^1 = P_0(1{,}02)^3$

4º dia	$P_4 = P_3 + P_3 \cdot 0{,}02 = P_3(1{,}02)^1 = P_0(1{,}02)^3 \cdot (1{,}02)^1 = P_0(1{,}02)^4$
5º dia	$P_5 = P_4 + P_4 \cdot 0{,}02 = P_4(1{,}02)^1 = P_0(1{,}02)^4 \cdot (1{,}02)^1 = P_0(1{,}02)^5$
...	...
Enésimo dia	$P_n = P_{n-1} + P_{n-1} \cdot 0{,}02 = P_{n-1}(1{,}02)^1 = P_0(1{,}02)^{n-1} \cdot (1{,}02)^1$ $= P_0(1{,}02)^n$

Uma vez chegando à fórmula $P_n = P_0(1{,}02)^n$, o próximo item tem por objetivo que o aluno chegue à equação exponencial $(1{,}02)^n = 5$, uma vez que se pede para determinar em quantos dias o número de contaminados irá quintuplicar, seguindo o raciocínio:

$$P_n = 5 \cdot P_0$$
$$\cancel{P_0}(1{,}02)^n = 5 \cdot \cancel{P_0}$$
$$(1{,}02)^n = 5$$

É sabido que o aluno de ensino médio adquire primeiramente os conhecimentos de função e equação exponencial antes de ser introduzido o estudo dos logaritmos. Deste modo, neste ponto da atividade, referente ao item d), ele não encontrará forma de resolver essa equação exponencial obtida com conhecimento prévios, pois para resolver uma equação exponencial é necessário reduzir os dois lados da igualdade a potências de mesma base. Assim, o docente deverá auxiliá-lo a observar que se faz necessários a detenção mais conhecimentos, que no caso são acerca dos logaritmos.

Na atualidade o ensino da matemática deve ser desenvolvido com auxílio de recursos tecnológicos, pois dessa forma o aluno desenvolverá uma linguagem e comunicação com o mundo ao qual está inserido. Nesse contexto, de inserir a tecnologia no processo de ensino aprendizagem que as atividades 3 e 4 serão propostas.

O PCNEM (1999) nos aponta que calculadoras e computadores além de possibilitar a compreensão e representação de gráficos, permitem trabalhar com dados reais e proporcionam a articulação das áreas de conhecimento. Como vimos anteriormente, eles se destacam no estudo dos logaritmos, visto que possibilitam cálculos de forma rápida e precisa, bem como a utilização de softwares.

ATIVIDADE 3 – Tem por objetivo introduzir a calculadora, um instrumento das novas tecnologias, no estudo dos logaritmos. Ela poderá ser aplicada pelo docente em suas aulas sobre os logaritmos, após o estudo dos conceitos iniciais, cálculo e as propriedades, visto que são conhecimentos prévios a atividade em questão. Nela trabalharemos com uma calculadora científica simples que disponha da tecla $\boldsymbol{log}$. É valido ressaltar que muitos celulares da atualidade possuem aplicativo de calculadora com essa função. Portanto, caso o aluno não possua de fato uma calculadora, seria interessante oferecer-lhe a oportunidade de usar seu próprio celular.

Essa atividade se divide em quatro exemplos, e para cada, um desafio onde o aluno irá seguir seus passos. O exemplo 1 tem por objetivo que o discente constate que é possível fazer o cálculo de logaritmos de números inteiros e decimais utilizando a função $\boldsymbol{log}$ de sua calculadora. No desafio referente a esse exemplo, espera-se que o aluno encontre, seguindo os passos apresentados, $log\, 47 \cong 1{,}672098$ e $log\, 3{,}59 \cong 0{,}555094$. Já no exemplo 2, antes de usar a calculadora para obter o valor do logaritmo desejado, faz-se necessário a aplicação das propriedades $\sqrt[q]{M^p} = M^{\frac{p}{q}}$ e $log_a M^N = N \,.\, log_a M$. No desafio correspondente, espera-se que o discente escreva,

$$log\, \sqrt[3]{3{,}49} = log(3{,}49)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \,.\, log\, 3{,}49,$$

com o auxílio da calculadora finalize encontrando $log\, 3{,}49$ e dividindo o resultado por 3. Portanto, obtendo $log\, \sqrt[3]{3{,}49} \cong 0{,}180942$.

Prosseguimos com o exemplo 3, nele é necessário fazer a mudança da base 3 para a 10 utilizando $log_b M = \frac{log_a M}{log_a b}$. No desafio, espera-se que o aluno chegue a,

$$log_2 95 = \frac{log\, 95}{log\, 2} \cong 6{,}599856.$$

Finalizamos com o exemplo 4, onde é necessário aplicar a propriedade $log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N$ para depois utilizar a calculadora. No desafio correspondente, é apresentada uma questão, extraída de Dante (2016), onde deseja-se calcular o pH de uma solução cuja contração de $\mathrm{H_3O^+}$ é $4{,}5\,.\,10^{-5}\ mol/L$. Para alcançar este objetivo, o discente deverá seguir os passos abaixo.

$$pH = log\left(\frac{1}{4{,}5\,.\,10^{-5}}\right) = log\,1 - log\,4{,}5\,.\,10^{-5} = log\,1 - (log\,4{,}5 + log\,10^{-5})$$
$$= log\,1 - (log\,4{,}5 - 5\,.\ log\,10)$$

Neste momento, seria interessante que o professor, com auxílio da calculadora, constatasse com seus alunos que o logaritmo de um é sempre zero e que logaritmo de um número na mesma base do número é igual a um. Para finalizar, o discente calculará $log\,4{,}5 \cong 0{,}653213$ e, fazendo as operações com os valores encontrados, resultará em,

$$pH = log\left(\frac{1}{4{,}5\,.10^{-5}}\right) \cong 4{,}346787\ .$$

ATIVIDADE 4 – A presente atividade trabalhará com o software GeoGebra. Esse software matemático é gratuito e possibilita trabalhar com álgebra, geometria, cálculos, gráficos e tabelas de modo dinâmico. Com ele pretendemos possibilitar ao aluno uma análise precisa do gráfico da função logarítmica e transparecer sua relação com o gráfico da função exponencial.

A atividade 4 poderá ser aplicada por docentes em suas práticas de ensino quando se desejar trabalhar com o gráfico da função logarítmica. Deste modo, faz-se necessário o estudo prévio dos tópicos que o antecede, como a definição dos logaritmos, consequências, propriedades, equação e função logarítmica. É importante observar que, a presente atividade segue como modelo inspirador uma atividade de Dante (2016), que consta na análise do livro 3.

Nessa atividade é necessário que a escola disponha de um laboratório de informática com computadores. A priori o docente deverá se certificar se os computadores possuem instalados o software GeoGebra. Caso não o tenham é possível baixá-lo gratuitamente no site https://www.geogebra.org/download?lang=pt. A versão utilizada foi a GeoGebra Clássico 6.

A realização do item a) tem por objetivo a construção e análise do gráfico da função logarítmica. Nele, o professor poderá explorar com os alunos o fato da função $y = log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, nesse exemplo uma função crescente, intersecta o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$, não corta o eixo das ordenadas, e que o ponto (x, y) pertence ao gráfico quando satisfaz $y = log_a x$.

Ao fazer os itens f), g) e h), espera-se que os discentes percebam o comportamento da função exponencial, que os pontos dados pertencem a ele e que seu zero é dado no ponto $(0, 1)$. Já o item i), com a construção do gráfico de $h(x) = x$, será o passo intermediário para se chegar à relação existente entre a função exponencial e logarítmica, visto que duas funções inversas são simétricas em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes do plano cartesiano. A conclusão final de que as funções logarítmica e exponencial são inversas será o objetivo almejado no item j).

Finalizando a atividade, o item l) ajudará o aluno a ver o comportamento de uma função logarítmica decrescente, confirmar que seu gráfico também cruza o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$, observar sua inversa e confirmar com mais um exemplo a relação entre as duas funções.

Contudo, a atividade 4 busca analisar o comportamento do gráfico da função logarítmica e sua relação com a exponencial de forma mais dinâmica, utilizando uma ferramenta que as novas tecnologias dispõem, trazendo a atualidade para a sala de aula e fazendo com que o aluno encontre mais significado no que está aprendendo em matemática.

Como foi constatado anteriormente, muitos autores defendem a concepção geométrica dos logaritmos. Embora ela seja pouco utilizada no ensino médio, Lima (2016) afirma que esta se revela uma ponte valiosa para introduzir o Cálculo Integral. Além de proporcionar uma continuidade do que é visto no ensino médio ao superior, este método, de utilizar faixas retangulares sob uma hipérbole para introduzir os logaritmos, contém o mesmo rigor que qualquer outro, porém se revela simples e intuitivo.

Por outro lado, na análise dos livros didáticos, podemos constatar que o conteúdo de logaritmo sempre é posterior ao de exponencial. Desta forma, definir os logaritmos como expoente, ou seja, por $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, não causa tanta estranheza aos discentes. Assim, também haverá uma conexão entre os dois temas.

Porém, isso não anula a importância de se trabalhar a concepção geométrica no ensino médio. Dar o aluno a oportunidade de ampliar seus conhecimentos quanto ao tema, para que assim, ele possa escolher o que lhe cabe melhor, o que é de extrema importância no processo de ensino e aprendizagem. Para aqueles, por exemplo, que optarem no ensino superior pela área de exatas, terá uma bagagem importante no estudo de cálculo, quando visto no ensino que o antecede a concepção geométrica dos logaritmos.

ATIVIDADE 5 – Defendemos a importância de o docente trabalhar a concepção geométrica, mesmo que a outra seja instrumento introdutório para o estudo dos logaritmos. Seguindo essa ideia, a atividade 5 se propõe. Ela poderá ser utilizada pelo professor em suas práticas de ensino após ao estudo dos logaritmos, como está presente nos livros didáticos do ensino médio, para ampliar os conhecimentos de seus alunos, possibilitando-os adquirir tal conhecimento sob outra concepção.

Como na atividade 4, esta utilizará laboratório de informática com o software GeoGebra instalado nos computadores. O software está disponível para download gratuitamente no site https://www.geogebra.org/download?lang=pt e versão utilizada neste trabalho foi GeoGebra Clássico 6.

A priori, a atividade 5 orienta a construção do gráfico da função $f(x) = {}^{1}/_{x}$, para $x > 0$. É valido observar com os alunos que esta é a função da hipérbole para valores $x > 0$ e que o gráfico obtido é o seu ramo positivo.

Em seguida, do item c) ao f), o aluno construirá as retas $r\colon x = 1$ e $t\colon y = 4$, determinará a área da região K_1^4 e achará os pontos de interseção da função com as retas. Com esta sequência, espera-se que o discente conclua que dados dois números positivos a e b, como $a < b$, a faixa da hipérbole K_a^b é a região limitada pelo pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = a$ e $y = b$, ou ainda, $K_a^b = \left\{(x, y); a \leq x \leq b \ e \ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$.

Dos itens g) ao j), o objetivo é a compreensão, construção e cálculo da área da região S, composta pelos retângulos inscritos em K_1^4, concluir $Área\ (K_1^4) > Área\ (S)$ e que quanto maior o número de retângulos inscritos, menor será a diferença entre as áreas. Generalizando, o professor deverá induzir que para todo S, sempre teremos $Área\ (K_b^a) > Área\ (S)$.

Nesta parte da atividade o aluno estará preparado para a compreensão da definição de logaritmo natural sob a concepção geométrica. Deseja-se que ele compreenda $ln\, 4 = Área\ (K_1^4)$ e que reforce o conhecimento adquirido com o cálculo de $ln\, 7$, no item k.

A presente atividade se limitará ao cálculo do logaritmo natural pelo GeoGebra. O professor poderá propor ao aluno que calcule manualmente a área de $Área\ (S)$, nos dois exemplos, e que constate que este valor é aproximado, não chegará aos encontrados pelo software. Além disso, fica a critério do docente estender o estudo dos logaritmos sobre a concepção geométrica.

É valido ressaltar que embora essa atividade utilize as funções Integral e Soma de Riemann Inferior no GeoGebra, tais assuntos não serão abordados, pois ela é direcionada aos alunos do ensino médio. Porém, cabe ao professor comentar com seus discentes a título de curiosidade.

As atividades 1, 2, 3, 4 e 5 encontam-se nos apêndices A, B, C, D e E.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O surgimento da matemática originalmente está relacionado à vida cotidiana do homem, e a sobrevivência deste, por sua vez, está associada ao seu desenvolvimento de conceitos matemáticos (Boyer, 1974). Estudar a matemática vai além de memorizar fórmulas e conteúdos. Se ela surge em meio a um contexto social, expressando os anseios de uma determinada época, faz-se necessário que seu estudo se justifique por meio dessa história. Só assim, o aluno entenderá o que antecedeu ao assunto a ser estudado, tomando-o de significado e lançando a ideia que a matemática é uma ciência em transformação.

O estudo dos logaritmos é de extrema importância. Um conteúdo que muitas vezes é introduzido e apresentado, aos alunos de ensino médio, de modo mecânico, limita todo o potencial histórico e atual que ele representa.

Neste trabalho, com o estudo histórico dos logaritmos, pode-se constatar que seu surgimento ocorreu pela busca de meios que facilitassem os cálculos que sugiram com o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, ocorrido no século XVI. Apesar dos pioneiros neste estudo, Napier e Bürgi, terem como objetivo criar uma ferramenta facilitadora de cálculos, ao logo da história dos logaritmos, com trabalhos desenvolvidos por outros matemáticos e as necessidades da sociedade em cada época, os objetivos e métodos foram se modificando e chegando ao que conhecemos na atualidade. Fato que expõe o quanto a matemática é uma ciência em transformação e que surge e se modifica para atender os desejos de uma sociedade.

Não apenas defender a utilização da história da matemática, mas sim buscar formas de trabalha-la em sala de aula é um ponto primordial. Inúmeros são os benefícios que esta ferramenta pode proporcionar no seu estudo. Com os logaritmos está percepção não é diferente, como pode-se constatar ao decorrer dessa pesquisa. Já mencionava Panagiotou (2011), que recapitulando a história dos logaritmos o aluno reconhecerá sua importância. De acordo com o autor, história é capaz de despertar o interesse do aluno pela aprendizagem, a pesquisa e investigação; mostrar a importância, utilidade e valor da matemática, motivando o seu estudo; eliminar a percepção de que a matemática é para gênios, pois percebe que sua história é pautada por tentativas, erros e acertos, fazendo com que o aluno perceba que não é o único a encontrar problemas, aumentando assim, sua confiança e perseverança.

Na cultura escolar brasileira, pode-se constatar que o logaritmo está presente há muito tempo e que percorreu os campos aritmético, algébrico e algébrico-funcional. Este último, o qual está presente nos livros didáticos da atualidade, evidencia a relação dos logaritmos a fenômenos naturais. É importante observar, que por anos a relação fundamental entre os logaritmos e a função exponencial não foi enfatizada, eles eram vistos separadamente, pertenciam a "gavetas" diferentes no currículo escolar. Vale salientar que não há estudos abrangente que compare esta situação, histórica e atual, do Brasil com a de outros países.

Com o tempo, os logaritmos perderam sua essência inicial e apresentam-se na atualidade como uma ferramenta valiosa para estudar e modelar fenômenos naturais, aproximam-se das novas tecnologias. Por documentos oficiais, foi possível constatar que instrumentos tecnológicos, como computador e calculadora, são importantes no estudo dos logaritmos e de toda a matemática.

Os logaritmos, por estarem relacionados a fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos, proporcionam facilmente uma interação entre as diversas áreas de conhecimento e vários contextos sociais, propiciando um ensino pautado na interdisciplinaridade e na contextualização, fundamentais ao processo de ensino e aprendizagem.

Essa pesquisa enriqueceu-se muito com a análise dos logaritmos nos livros didáticos, pois desse modo, pode-se constatar como tal assunto está sendo abordado em sala de aula. Com ela pode-se concluir que logaritmos estão quase que predominantemente presentes entre os tópicos função exponencial e progressões. Com essa análise conclui-se que os livros didáticos trabalham a interdisciplinaridade e a contextualização, por meio de exemplos e exercícios. A história dos logaritmos quando abordada é vista resumidamente e nem sempre inicia tal assunto. Já as novas tecnologias são pouco abordadas no estudo do tópico em questão, vista em sua maioria como exemplo ou exercício.

Com a presente pesquisa verificou-se que a concepção geométrica dos logaritmos é pouco utilizada no ensino médio. Klein (1927) e Lima (2016) são autores que defendem esta concepção por ser simples e de fácil compreensão, além de ser uma ótima introdução ao Cálculo Integral. Adotar esse método elimina a necessidade de se ter conhecimentos prévios de propriedades da função exponencial, possibilita apresentar o número e e algumas desigualdades de forma natural (LIMA, 2016).

A proposta de ensino e aprendizagem se deu por meio do que constatamos com a pesquisa teórica e a análise dos livros didáticos. As atividades que as compõem foram desenvolvidas com o objetivo de propor algo que se possa trabalhar de forma simples e envolvente, aos olhos dos alunos, os quatro pontos que julgamos primordiais no estudo dos logaritmos. As atividades buscam um modo prático do professor trabalhar os logaritmos com seus alunos utilizando a sua história, as novas tecnologias, sua concepção geométrica, a contextualização e a interdisciplinaridade.

Diante de toda a presente pesquisa espera-se que ela possibilite ao professor formas ampliar sua abordagem didática sobre logaritmos, tornando o seu estudo mais significativo e atrativo para os discentes. As atividades apresentadas certamente contribuirão para se desenvolver em sala de aula uma abordagem concreta dos logaritmos pautada em sua história, utilizando recursos tecnológicos, abordando sua concepção geométrica, trabalhando também a contextualização e a interdisciplinaridade.

Para pesquisas posteriores a partir desta, uma sugestão seria aplicar as atividades em sala de aula, gerar e analisar os resultados fazendo um comparativo do ensino dos logaritmos dado de forma direta, com exposição dos conceitos, e outra utilizando a presente proposta. Além deste trabalho, poderão ser analisados livros de acordo com o novo ensino médio, verificando como os alunos irão estudar os logaritmos a partir de agora. Além disso, visto que a atividade 2, que apresenta um texto sobre a Covid-19, tenha sido desenvolvida antes de muitos acontecimentos que ocorreram sobre tal doença, seria interessante que ela fosse atualizada, para que assim o aluno possa ter informações mais precisas.

REFERÊNCIAS

BAIXAR Aplicativos GeoGebra. **GeoGebra**: Baixar aplicativos. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang=pt.>. Acesso em: 01 de abr. 2021.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: iteração e tecnologia** – Volume 1: Ensino Médio. 2 ed. São Paulo: Leya, 2016. 416 p.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974. 252 p.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parêmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2015. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 21 de out. de 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 1999. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 20 de out. de 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Naciaonais**: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. CDU: 371.214. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2020.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira; ROQUE, Tatiana. **Tópicos de história da matemática.** Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. 467 p.

CLARK, Kathleen. **Jost Bürgi's aritmetische und geometrische progreß Tabulen (1620).** Edition and commentary. Yallahassee, FL: Birkhäuser, 2015. 258 p.

CORONAVÍRUS (COVID-19): origem, sinais, sintomas, achados, tratamento e mais. **Sanarmed**: coronavírus, 2020. Disponível em: < https://www.sanarmed.com/coronavirus-origem-sinais-sintomas-achados-tratamentos>. Acesso em: 13 de jan. de 2021.

DANTE, Luiz Carlos. **Matemática: conexões e aplicações** – Volume 1: Ensino Médio. 3 ed. São Paulo: Ática, 2016. 408 p.

DOENÇAS por coronavírus (COVID-19): Vacinas. **World Health Organization**, 2020. Disponível em: <https://www.who.int/news-room/q-a-detail/coronavirus-disease-(covid-19)-vaccines?adgroupsurvey={adgroupsurvey}&gclid=Cj0KCQiAst2BBhDJARIsAGo2ldXzhJleuJJLrVMct4hUr8Xe40KhrBMbO7_puyEHMudxUYgFIOknbxAaAsZ_EALw_wcB>. Acesso em: 25 de fev. 2021.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 5. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 848 p.

FOLKERTS, Menso; LAUNERT, Dieter; THOM, Andreas. **Jost Bürgi's method for calculating sines.** 2016. 21 p.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações** – 1º ano: Ensino Médio. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016. 416 p.

JOHN NAPIER. **Universidade de Lisboa**: Instituto de Educação. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/icm99/icm17/napier.htm>. Acesso em: 02 de jul. de 2020.

KATZ, Victor Joseph. **A history of mathematics.** New York: Harper Collins, 1992.

KILHIAN, Kleber. Utilizando tábuas para calcular logaritmos. **O baricentro da mente**, 2010. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2010/06/utilizando-tabuas-para-calcular-logaritmos.html>. Acesso em: 02 de jul. de 2020.

KLEIN, Felix. **Matemática elementar de um ponto de vista superior** – Volume I, parte II, Álgebra. Madrid: s/e, Coleção biblioteca matemática, 1927.

KOLPAS, Sidney; TOMASH, Erwin. Calculadora de tabuleiro de xadrez binário de Napier – Napier e logaritmos. **MAA Mathematical Association of America**: Publicações MAA – Periódicos – Convergência – Calculadora binária de xadrez de Napier – Napier e logaritmos, dez. de 2018. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/napiers-binary-chessboard-calculator-napier-and-logarithms>. Acesso em: 12 de ago. 2020.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a matemática** – Volume 1: Ensino Médio. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2016. 416 p.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**: Elon Lages Lima. 6. ed. Rio de Janeiro: Coleção Professor de Matemática – Sociedade brasileira de Matemática, 2016. 134 p.

MALAVÉ, Mayara Malavé. Testes para a Covid-19: como são e quando devem ser feitos. **Fiocruz**: comunicação e informação – notícias, 2020. Disponível em: <https://portal.fiocruz.br/noticia/testes-para-covid-19-como-sao-e-quando-devem-ser-feitos#:~:text=Existem%20dois%20tipos%20principais%20de,duas%20horas%20para%20o%20resultado>. Acesso em: 13 de jan. de 2021.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira.** Rio Claro: Publicação da Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2002. 113 p.

MORTES e casos de coronavírus nos estados. **G1**: Bem estar – coronavírus, 2021. Disponível em: <https://especiais.g1.globo.com/bemestar/coronavirus/estados-brasil-mortes-casos-media-movel/>. Acesso em: 25 de fev. de 2021.

PANAGIOTOU, Evangelos N. **Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms.** Science and Education, 20 (1), 1 – 35. DOI: 10.1007 / s11191 – 010 – 9276 – 5, 2011. 35 p.

PROGRAMAS do livro. **FNDE**: Programas. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-livro-didatico/item/11148-guia-pnld-2018>. Acesso em: 10 de nov. 2020.

SOARES, Diogo Oliveira. **Logaritmos e funções logarítmica na matemática escolar brasileira.** Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2017. 98 p.

SOUZA, Joamir Roberto de. **#Contato matemática** – 1º ano: Ensino Médio. 1 ed. São Paulo: FTD, 2016. 288 p.

SWETZ, Frank J. Galeria de retratos – A – M. **MAA Mathematical Association of America**: Publicações MAA – Periódicos – Convergência – Galeria de retratos – A – M, jul. de 2007. Disponível em: < https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/images-for-classroom-use/portrait-gallery-a-m>. Acesso em: 12 de ago. 2020.

SWETZ, Frank J. Galeria de retratos – NZ. **MAA Mathematical Association of America**: Publicações MAA – Periódicos – Convergência – Galeria de retratos – NZ, jul. de 2007. Disponível em: <https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/Portraits/Napier_4.jpeg>. Acesso em: 12 de ago. de 2020.

SWETZ, Frank J. Tesouro matemático: Arithmetica Logarithmica de Henry Briggs. **MAA Mathematical Association of America**: Publicações MAA – Periódicos – Convergência – Tesouro matemático, abril. de 2013. Disponível: < https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-iarithmetica-logarithmicai-of-henry-briggs>. Acesso em: 10 de ago. de 2020.

SWETZ, Frank J. Tesouro matemático: Mirifici Logarithmorum de John Napier. **MAA Mathematical Association of America**: Publicações MAA – Periódicos – Convergência – Tesouro matemático, set. de 2013. Disponível: < https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-john-napier-s-mirifici-logarithmorum>. Acesso em: 12 de ago. de 2020.

TABLES of Logarithms, for All Numbers 1 to 102100. **Google**: livros. Disponível em: <https://books.google.com.br/>. Acesso em: 25 de nov. de 2020.

TRIGONOMETRIA – Triângulos retângulos. **Proenem**: tudo sobre enem – matemática. Disponível em: <https://www.proenem.com.br/enem/matematica/trigonometria-triangulo-retangulo/> . Acesso em: 21 de set. de 2020.

APÊNDICE A – Atividade 1

Os logaritmos e sua história

Na atualidade resolver contas de multiplicações e divisões se revela uma tarefa fácil e rápida, pois dispomos de instrumentos tecnológicos, como calculadoras e computadores, que nos auxiliam. Você sabia que nem sempre foi assim, que a alguns séculos atrás essa tarefa era árdua e demorada? Vamos embarcar em uma viagem histórica que nos revelará como e porque surgiram os logaritmos.

No século XVI se deu o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, com isto, ocorreu o surgimento de cálculos de difíceis resolução. Resolver cálculos presentes em estudos astronômicos da época como, por exemplo, $2{,}794753\,.\,1{,}981042$ ou $2{,}794753 : 1{,}981042$, tomava tempo e eram bem custosos. Desta forma, despertou-se o desejo de descobrir formas de facilitar essa tarefa.

Antes do surgimento dos logaritmos, entre o final do século XVI e começo do século XVII, utilizava-se um método para simplificar cálculos que ficou conhecido por prostaférese, vem do grego *prosthesis* e *apharesis* que significam adição e subtração. Tal método transformava multiplicação (divisão) em adição (subtração) utilizando fórmulas trigonométricas, como as descritas a seguir.

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$
$$2\,\mathrm{sen}\,A\cos B = \mathrm{sen}(A+B) + \mathrm{sen}(A-B)$$
$$2\cos A\,\mathrm{sen}\,B = \mathrm{sen}(A+B) - \mathrm{sen}(A-B)$$
$$2\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

Você gostaria de entender como esses cálculos aconteciam?

Utilizando notação moderna, vamos construir um exemplo de como calculavam a multiplicação naquela época através das fórmulas trigonométricas.

Calcule a multiplicação 8 768 por 9 063 utilizando o método da prostaférese de acordo com os passos abaixo.

Passo 1: Atribua aos valores 8 768 e 9 063 o cosseno de ângulos desconhecidos, como $cos\,A$ e $\cos B$, respectivamente. Observe que em todas as fórmulas trigonométricas expostas anteriormente, têm-se $2\cos A \cos B$. Desta forma, para se calcular $\cos A \cos B$, adote $cos\ A$ como a metade de 8 768.

$$\cos A = \frac{8\,768}{2} = 4\,384$$
$$cos\ B = 9\,0\,63$$

Passo 2: Consulte a tabela trigonométrica abaixo e obtenha os ângulos A e B. Como a tabela é utilizada atualmente, vamos colocar uma vírgula antes de cada número para encontrarmos valores próximos. Desta forma, encontraremos A e B, sendo $\cos A = 0,438\,4$ e $\cos B = 0,9063$.

$$A = 64°$$
$$B = 25°$$

Passo 3: Utilize a identidade trigonométrica abaixo, substituindo $A = 64°$ e $B = 25°$.

$$2\cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$
$$2\cos 64°\, cos\, 25° = \cos(64° + 25°) + \cos(64° - 25°) = \cos 89° + cos\, 39°$$

Passo 4: Consulte novamente a tabela fornecida e descubra quanto vale $cos\, 89° + cos\, 39°$.

$$cos\, 89° + cos\, 39° = 0,0175 + 0,7771 = 0,7946$$

Observe que os números originalmente foram divididos por 10^4. Deste modo,

$$8\,768 \times 9\,063 = (0,8768 \times 10^4) \times (0,9063 \times 10^4) = (0,8768 \times 0,9063) \times 10^8$$

Portanto, para chegar ao resultado final é necessário multiplicar o valor encontrado por 10^8. Logo, o produto de 8 768 por 9 063 que é 79 460 000.

Agora, seguindo os passos realizados para a multiplicação pelo método da Prostaférese e com auxílio do professor, calcule o produto de 13 640 por 7 771.

Angulos em Graus	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1

Angulos em Graus	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1	0	___

Tabela trigonométrica

Extraída do site Proenem, acessado em 21/09/20.

E foi nessa temática, com o objetivo de simplificar cálculos, que os matemáticos Jost Bürgi (1552-1632) e John Napier (1552-1632), de forma simultânea e independentes, desenvolveram estudos e apresentaram trabalhos sobre a teoria dos logaritmos.

Devido a suas publicações e convívio no meio acadêmico na época (LIMA, 2016), Napier tornou-se pioneiro no estudo dos logaritmos, e após 20 anos de dedicação, no ano de 1614, publicou sua primeira obra o livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Decriptio* (Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos). Nesta obra constavam tabelas de logaritmos e explicações de como utilizá-las.

A ideia de Napier era associar os termos de duas sequências. Por meio de um exemplo simples, vamos ver como isso acontecia. Considere as duas sequências $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots)$ e $(a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \cdots)$. Associaremos os termos das duas sequências, de forma a relacionar o produto de dois números quaisquer da segunda sequência, $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, a soma de dois números da primeira, $m + n$. Considere a tabela a seguir.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2 187	6 561	19 683	59 049

Observe que na tabela apresentada anteriormente, os números da segunda linha podem ser representados por potências de base 3 e expoente igual ao número correspondente da primeira linha. Deste modo, representaremos os números positivos da segunda linha como potências de base 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2 187	6 561	19 683	59 049
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}

Agora, vamos calcular o produto $81 \cdot 729$. Esses números correspondem aos números 4 e 6 na primeira linha da tabela. Assim, multiplicar $81 \cdot 729$ corresponde a somar $4 + 6 = 10$, que representa o número 59 049 na segunda linha da tabela, que é o resultado da multiplicação apresentada. A fim de entender melhor a associação feita, segue o esquema abaixo onde utiliza-se as potências presentes na terceira linha da tabela acima.

$$81 \cdot 729 = \underbrace{3^4}_{\text{4ª coluna da tabela}} \cdot \overbrace{3^6}^{\text{6ª coluna da tabela}} = \underbrace{3^{4+6}}_{\text{Repete-se a base 3 e somam-se os expoentes.}} = \overbrace{3^{10}}^{\text{10ª coluna da tabela}} = 59\,049$$

Vamos exercitar o método usado por Napier para calcular as multiplicações? Responda as atividades a seguir.

a) Utilizando o mesmo método apresentado acima, faça a multiplicação $9 \cdot 2\,187$.

b) Complete a tabela a seguir calculando as potências de base 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	9	27	81	243	729	2 187	6 561	19 683	59 049					
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}					

c) Utilizando a tabela obtida no item anterior, calcule a multiplicação $2\,187 \cdot 6\,561$.

É importante observar que a sequência de potências de base 3, utilizada no exemplo anterior, não foi a utilizada por Napier, ele usou uma sequência onde seus termos eram bem próximos uns dos outros.

A publicação da primeira obra de Napier sobre logaritmos, despertou o interesse de muitos estudiosos da época, que proporcionaram aperfeiçoamentos aos métodos publicados por ele. Um fato importante ocorreu em 1615, onde o professor de Oxford, Henry Briggs (1561-1631), visitou Napier na Escócia e o propôs o uso de potência de base dez em seu método.

Ao longo da história dos logaritmos, até chegar ao que estudamos na atualidade, diversos matemáticos e estudiosos deram suas contribuições. Isso nos revela que a ciência está em constante transformação e que é o resultado dos desejos e necessidades encontradas pela sociedade que compõem cada época da história.

APÊNDICE B – Atividade 2

A Covid-19

Desde 2020, o mundo vem sendo devastado por um vírus denominado SARS-CoV-2, causador da doença Covid-19. Possivelmente originário da cidade de Wuhan na China, os primeiros relatos se deram em 31/12/2019 e já nas primeiras semanas apresentaram um crescimento exponencial com taxa de transmissão de 2,75%.

Com letalidade global de 3,4%, o coronavírus (Covid-19) se mostrou de grande risco para os idosos e pessoas com doenças crônicas. Este último grupo que representa de 25 a 50% dos infectados, apresentou taxas de mortalidade superiores comparado às pessoas inicialmente saudáveis. Como por exemplo, pessoas contaminadas que possuíam câncer apresentaram taxa de mortalidade de 5,6%, os hipertensos de 6%, doenças respiratórias crônicas de 6,3%, diabetes de 7,3% e doenças cardiovasculares de 10,5%.

Por ser uma doença nova, não se sabe ao certo todos os sintomas da Covid-19. De 70-80% dos infectados são assintomáticos, porém, os sintomáticos apresentaram tosse (65-80%), febre (45-85%), dispneia (30-40%) e sintomas gastrointestinais (10%)[1].

A transmissão do novo coronavírus se dá por meio de contato próximo de uma pessoa com outra infectada. O aperto de mão, gotículas de saliva, espirros, tosse, catarro, objetos ou superfícies contaminadas, tais como celulares, mesas, talheres, maçanetas, brinquedos, teclados de computador, entre outras, são meios da transmissão do vírus.

De acordo com o Ministério da Saúde, para se prevenir da Covid-19 é necessário utilizar máscara em todos os ambientes, lavar as mãos com frequência utilizando sabão ou álcool em gel 70%, cobrir o nariz e a boca com um lenço ou parte inferior do cotovelo ao tossir e respirar, manter distância de um metro entre pessoas em lugares públicos e de convívio social, higienizar os objetos que são utilizados com frequência, manter ambientes limpos e ventilados, dormir bem e manter uma

[1] Informações obtidas no site: sanarmed.com/coronavirus-origem-sinais-sintomas-achados-tratamentos, acesso em 13/01/2021.

alimentação saudável. Para aquelas pessoas que estiverem doentes, evitar contato próximo com outras pessoas, principalmente aquelas com doenças crônicas e idosos.

A forma de identificar a magnitude do novo coronavírus em uma população se dá por meio dos testes. Para enfrentar o vírus, a Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda a testagem num maior número possível de pessoas. Desta forma, tanto os governantes quanto os profissionais de saúde identificarão a dimensão real da propagação desse vírus na sociedade, bem como, identificar os assintomáticos, a transmissão do vírus por via área e faixa etária.

São dois os tipos principais de testes para a Covid-19. O RT_PCR ou teste molecular, analisado em laboratório, ele tem duração de aproximadamente duas horas para produzir o resultado e pesquisa a presença do Ácido ribonucleico (RNA) viral. O outro é o teste sorológico rápido, que pesquisa a presença de anticorpos contra o vírus e tem duração de 20 min para oferecer o resultado[2]

Desde o início da pandemia houve uma corrida de cientistas em todo o mundo para a descoberta de vacinas que combatessem a COVIID-19. De acordo com a OMS (Organização Mundial de Saúde), todas as vacinas desenvolvidas tem por objetivo ensinar o sistema imunológico do corpo a reconhecer e bloquear com segurança o vírus que causa essa doença. Em 15 de fevereiro de 2021 a OMS emitiu uma Lista de Uso de Emergência (EULs) para duas versões da vacina AstraZeneca / Oxford COVID-19[3].

Com base no site G1, com atualização em 24/02/2021, o Brasil registrava 10 326 008 casos de COVID-19 e 250 079 mortos[4]. Além dos milhares de brasileiros mortos, a pandemia gerou no Brasil uma grande crise econômica, afetando grandes setores como comércio, serviços e indústrias.

Vejamos a seguir uma situação que envolve o tema abordado no texto anterior e o estudo dos logaritmos.

A taxa de crescimento diária dos contaminados pelo Covid-19 de uma certa população é de 2%. Considere P_0 a quantidade inicial de pessoas contaminadas.

---

[2] https://portal.fiocruz.br/noticia/testes-para-covid-19-como-sao-e-quando-devem-ser-feitos#:~:text=Existem%20dois%20tipos%20principais%20de,duas%20horas%20para%20o%20resultado, acesso em 13/01/2021.

[3] https://www.who.int/news-room/q-a-detail/coronavirus-disease-(covid-19)-vaccines?adgroupsurvey={adgroupsurvey}&gclid=Cj0KCQiAst2BBhDJARIsAGo2ldXzhJleuJJLrVMct4hUr8Xe40KhrBMbO7_puyEHMudxUYgFIOknbxAaAsZ_EALw_wcB, acesso em 25/02/21.

[4] https://especiais.g1.globo.com/bemestar/coronavirus/estados-brasil-mortes-casos-media-movel/, acesso em 25/02/2021.

Com base nas informações apresentadas e considerando P_n a quantidade de contaminados no dia n, responda:

a) Qual o número de contaminados no primeiro dia (P_1) em função de P_0? E no segundo dia (P_2)?

b) Seguindo a mesma linha de raciocínio do item anterior, complete a tabela a seguir.

Dias	Número de pessoas contaminadas
Início	P_0
1º dia	$P_1 =$
2º dia	$P_2 =$
3º dia	$P_3 =$
4º dia	$P_4 =$
5º dia	$P_5 =$

c) Se P_n representa o número de contaminados no enésimo dia e seguindo os mesmos passos dos itens anteriores, você consegue determinar a fórmula que o representa?

Você conseguiu concluir com item anterior que $P_n = P_0(1{,}02)^n$? Se sim, você está pronto para continuar. Se não, peça auxilio de seu professor.

d) Agora com através da fórmula obtida $P_n = P_0(1{,}02)^n$, determine em quantos dias a quantidade inicial P_0 de contaminados irá quintuplicar?

e) Você conseguiu responder o item anterior? Se não, o que te impossibilitou?

APÊNDICE C – Atividade 3

Os logaritmos e a calculadora

Com auxílio de uma calculadora científica vamos calcular os logaritmos decimais e também com outras bases. Observe os exemplos a seguir e responda as questões propostas.

EXEMPLO 1: Neste exemplo vamos utilizar a função $\boldsymbol{log}$ da calculadora. Ela nos permite calcular o logaritmo decimal de um número dado, seja inteiro ou decimal. Vamos calcular $log\, 24$. Para isto, selecione a tecla $\boldsymbol{log}$, digite 24 e selecione a tecla $=$, obtendo o resultado aproximado 1,380211. Logo, $log\, 24 \cong 1{,}380211$.

Agora é com você!

Calcule $log\, 47$ e $log\, 3{,}59$ seguindo os mesmos passos do exemplo acima.

EXEMPLO 2: Vamos calcular $log\, \sqrt[5]{7{,}36}$. Antes de usarmos a calculadora, é preciso aplicarmos as propriedades abaixo.

$$\sqrt[q]{M^p} = M^{\frac{p}{q}} \qquad \text{e} \qquad \log_a M^N = N \,.\log_a M$$

Daí,

$$log\, \sqrt[5]{7{,}36} = log(7{,}36)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \,.log\, 7{,}36$$

Agora, selecione a tecla $\boldsymbol{log}$, digite 7,36 e aperte $=$, obtendo o valor aproximado 0,866878. Finalize dividindo o valor encontrado por 5 e obtendo 0,173376. Logo, $log\, \sqrt[5]{7{,}36} \cong 0{,}173376$.

Agora é com você!

Calcule $log\, \sqrt[3]{3{,}49}$ seguindo os mesmos passos do exemplo 2.

EXEMPLO 3: Calcularemos $log_3\, 872$. Para isso, devemos fazer a mudança de base para a base 10 aplicando a propriedade a seguir.

$$log_b\, M = \frac{log_a\, M}{log_a\, b}$$

Assim,

$$log_3 872 = \frac{log\,872}{log\,3}$$

Prosseguindo, selecione na calculadora $\boldsymbol{log}$, digite 872 e aperte $=$, encontrando aproximadamente 2,940516. Em seguida, selecione $\boldsymbol{log}$, 3 e $=$, encontrando o valor aproximado 0,477121. Por fim, divida os dois valores obtidos, encontrando 6,163038. Logo, $log_3 872 \cong 6{,}163038$.

Agora é com você!

Calcule $log_2 95$ de acordo com o exemplo 3.

EXEMPLO 4: Calcule $log\,\frac{2}{5}$. Para tal, utilizaremos a propriedade abaixo.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N$$

Daí,

$$log\,\frac{2}{5} = log\,2 - log\,5$$

Agora, com o auxílio da calculadora, calculemos $log\,2$, $\log 5$ e a diferença entre os valores encontrados. Selecione $\boldsymbol{log}$, o número 2 e $=$, obtendo 0,301029. Depois selecione $\boldsymbol{log}$, o número 5 e $=$, obtendo 0,698970. Finalize subtraindo os valores encontrados temos – 0,397940. Logo, $log\,\frac{2}{5} \cong -0{,}397940$.

Agora é com você!

O pH de uma solução é p logaritmo decimal do inverso da concentração de $\mathrm{H_3O^+}$. Qual é o pH de uma solução cuja concentração de $\mathrm{H_3O^+}$ é $4{,}5\,.\,10^{-5}\,mol/L$? (Questão extraída de Dante, 2016)

APÊNDICE D – Atividade 4

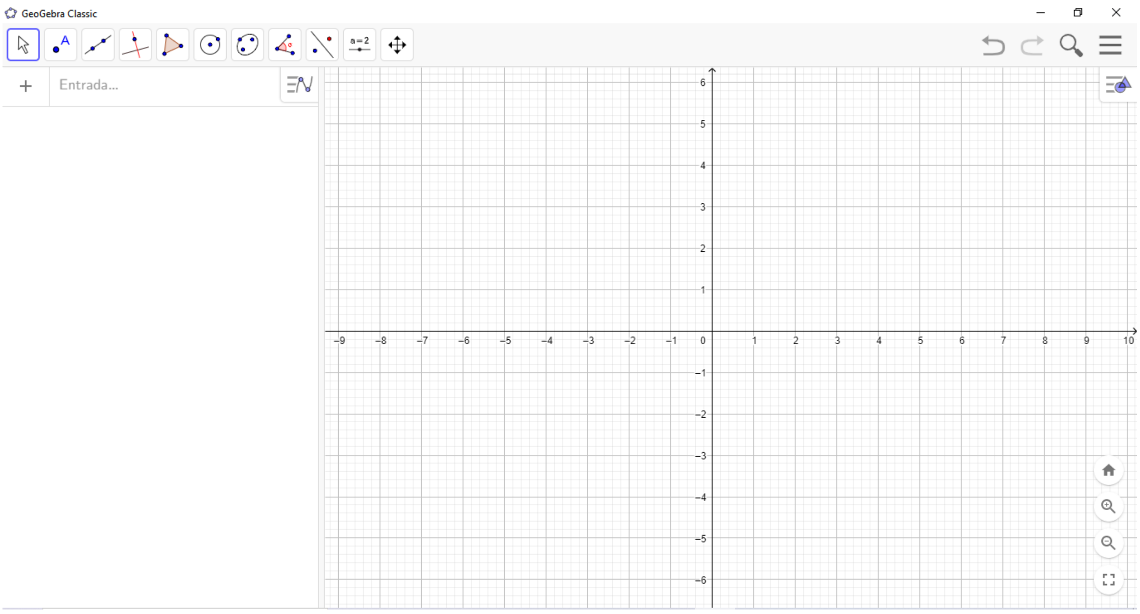
O gráfico da função logarítmica e sua inversa no GeoGebra

Vamos utilizar o software GeoGebra para estudarmos o gráfico da função logarítmica e entendermos qual é sua relação com o gráfico da função exponencial.

a) Construa o gráfico da função $f(x) = log_3 x$ no GeoGebra, seguindo os passos abaixo.

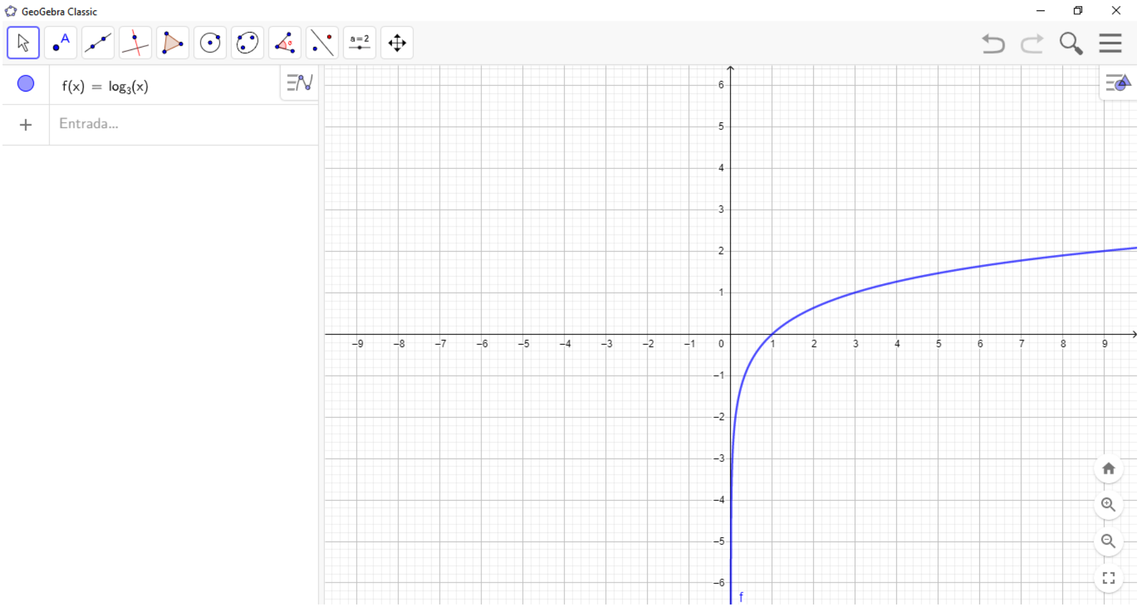
Passo 1: Abra o aplicativo.

Após abri-lo você encontrará a seguinte tela:



Captura da tela inicial.

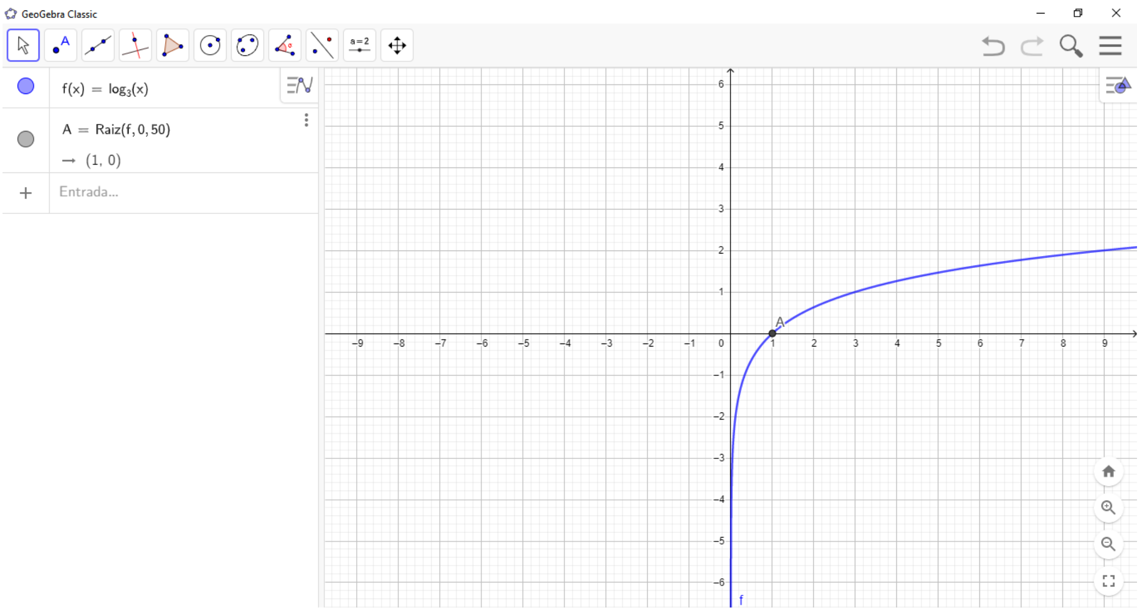
Passo 2: Digite no campo “Entrada”, que se localiza no canto superior esquerdo, a função $f(x) = log(3, x)$, que corresponde a $f(x) = log_3 x$, e clique em “Enter” no teclado.



Captura da tela do passo 2 / item a.

b) Você consegue identificar o zero da função? Vamos determina-lo no gráfico realizando o passo 1:

Passo 1: A função $f(x)$ não é polinomial, sendo assim, no GeoGebra, para determinar o zero da função é preciso estipular um intervalo. Adotaremos o intervalo $[0, 50]$. No campo de “Entrada” digite $raiz\ [f, 0, 50]$.

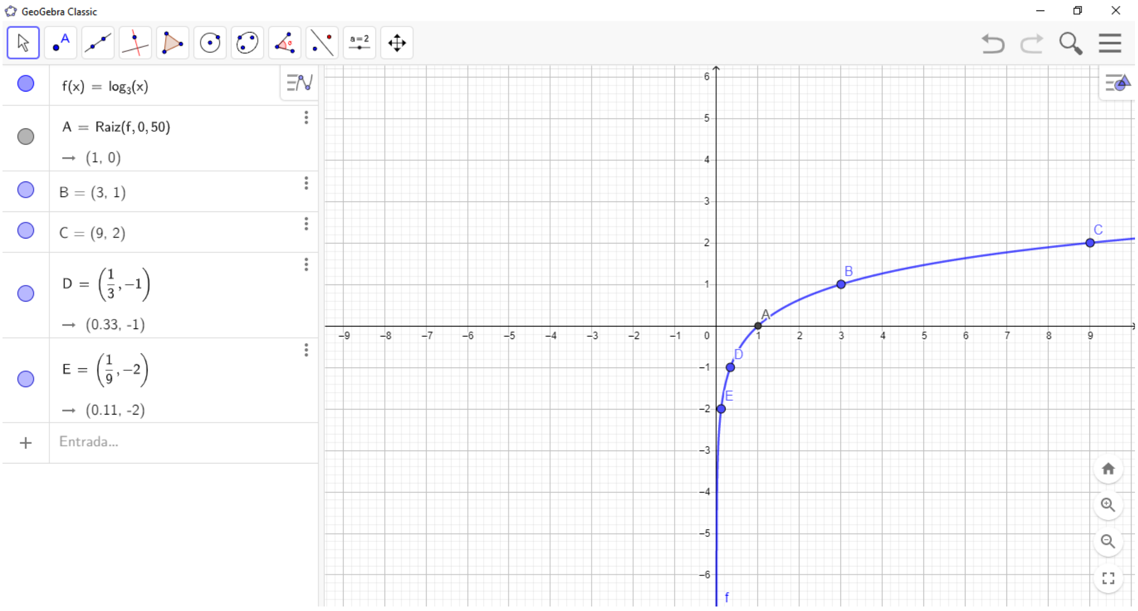


Captura da tela do passo 1 / item b.

c) Qual ponto foi obtido no gráfico encontrado no item anterior? Você sabia que o gráfico da função $y = log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, intersecta o eixo X no ponto de coordenadas $(1{,}0)$ e nunca corta o eixo Y? Discuta esses fatos com seus colegas e professor.

d) Insira os pontos $B = (3,1)$, $C = (9,2)$, $D = (1/3, -1)$ e $E = (1/9, -2)$ através do passo que segue.

Passo 1: No campo “Entrada” insira cada um dos pontos por vez e clique em “Enter”, a cada ponto digitado.

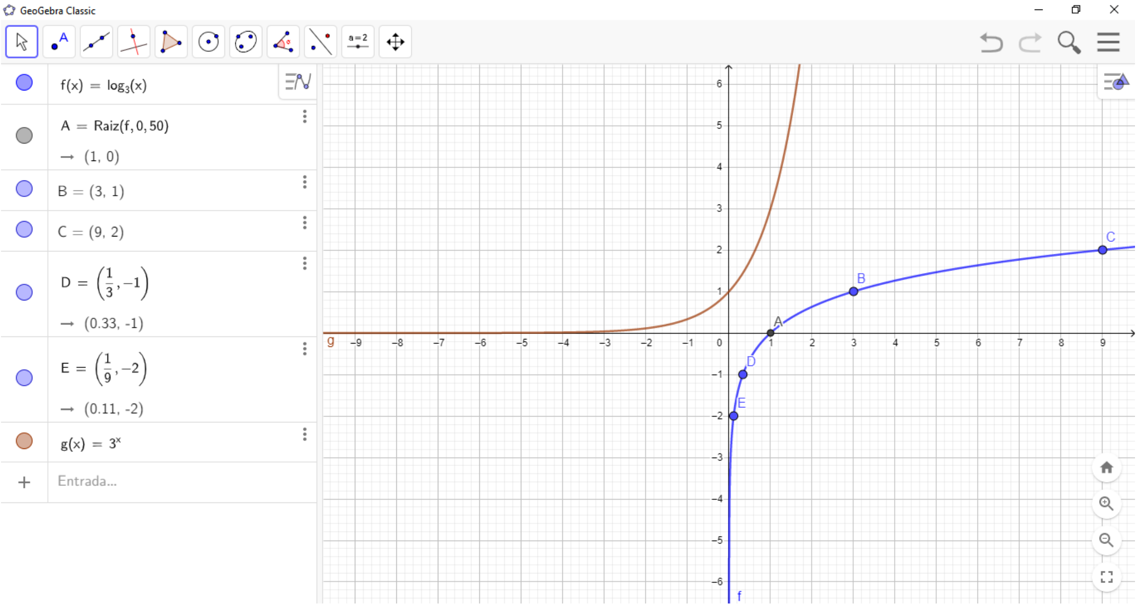


Captura da tela do passo 1 / item d.

e) Analise o gráfico obtido no item anterior e diga se pontos dados pertencem a ele. Discuta as respostas com os outros alunos e peça auxílio do professor, caso necessário.

f) Agora, vamos construir o gráfico da função exponencial $g(x) = 3^x$.

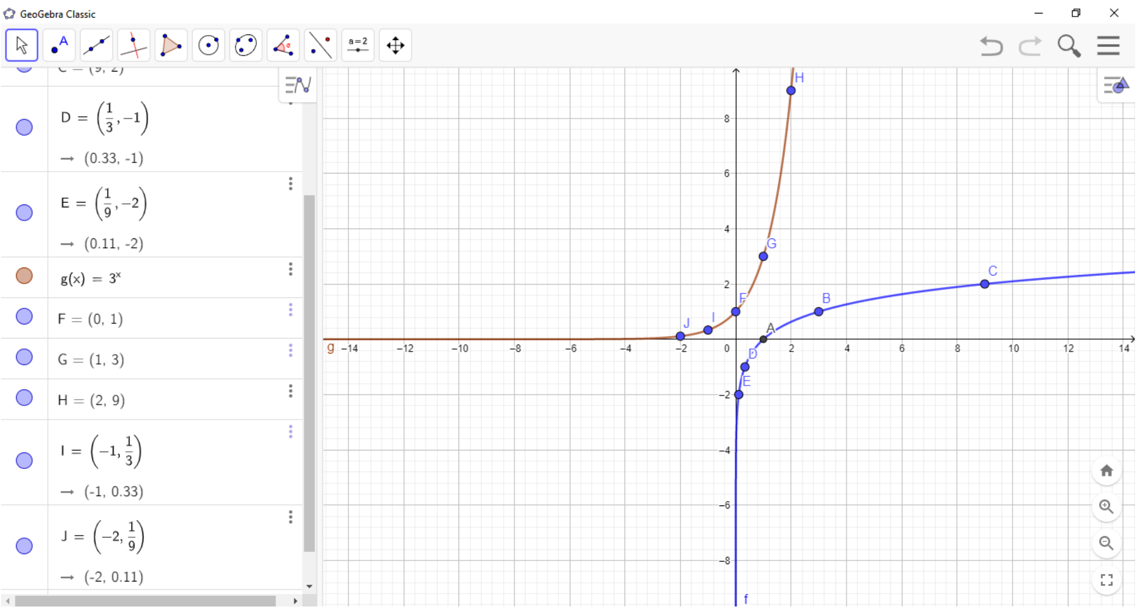
Passo 1: Digite no campo “Entrada”, que se localiza no canto superior esquerdo, a função $g(x) = 3\text{^}x$, que corresponde a $g(x) = 3^x$, e aperte “Enter”.



Captura da tela do passo 1 / item f.

g) Insira os pontos $F = (0, 1)$, $G = (1, 3)$, $H = (2, 9)$, $I = (-1, 1/3)$ e $J = (-2, 1/9)$ através do passo que segue.

Passo 1: No campo “Entrada” insira cada um dos pontos por vez e clique em “Enter”, a cada ponto digitado.

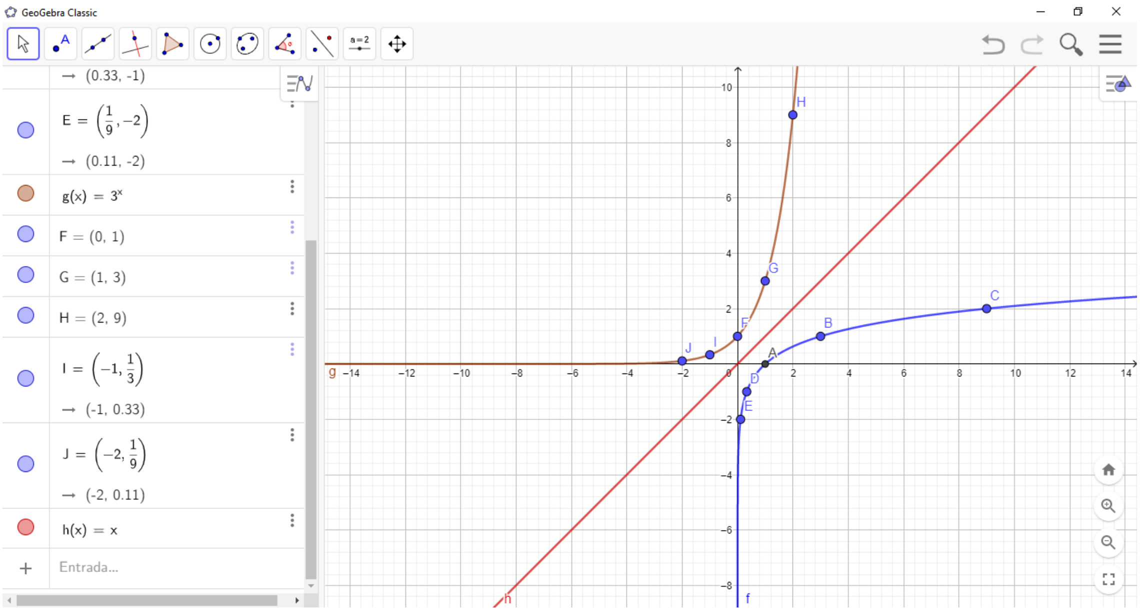


Captura da tela do passo 1 / item g.

h) Analise o gráfico obtido no item anterior e diga se pontos dados pertencem a ele. Discuta as respostas com os outros alunos e peça auxílio do professor, caso necessário.

i) Sabemos que duas funções inversas são simétricas em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes do plano cartesiano. Assim, vamos construir a função bissetriz $h(x) = x$.

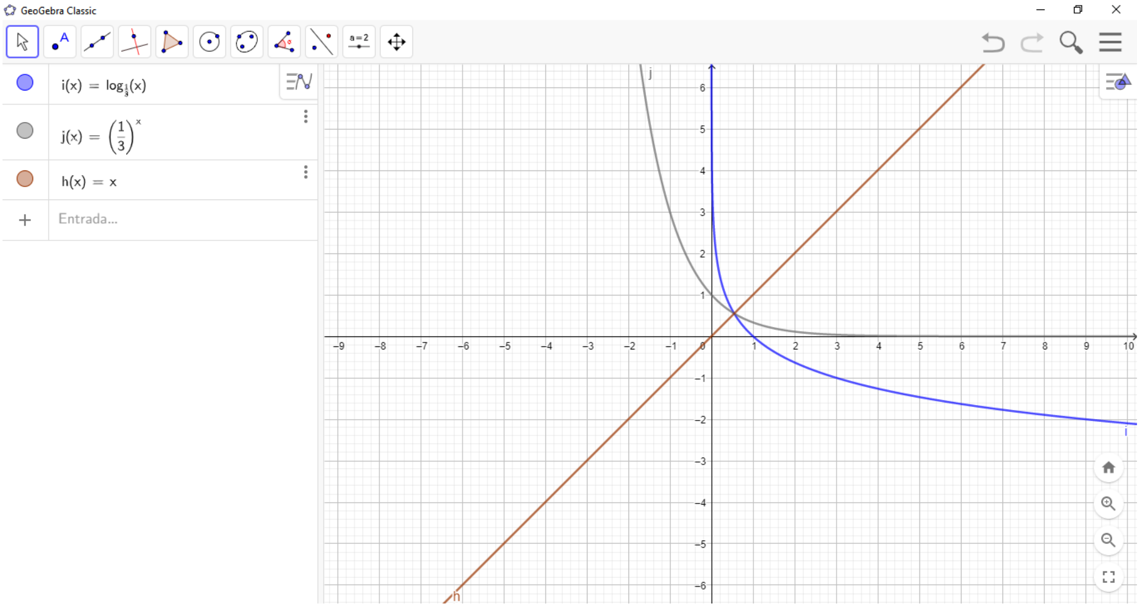
Passo 1: Digite no campo “Entrada”, que se localiza no canto superior esquerdo, a função $h(x) = x$ e clique em “Enter”.



Captura da tela do passo 1 / item i.

j) Analisando os gráficos plotados e os pontos neles marcados, o que você pode concluir em relação as funções logarítmicas e exponenciais? Discuta a resposta com os outros alunos e o professor.

k) Agora, seguindo os passos realizados para a construção dos gráficos nos itens anteriores, construa, no GeoGebra, o gráfico da função logarítmica $i(x) = log_{\frac{1}{3}} x$, de sua inversa $j(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e da bissetriz $h(x) = x$.



Captura da tela do item j.

l) Analisando os gráficos obtidos no item anterior, você consegue obter as mesmas conclusões obtidas anteriormente com os outros gráficos?

APÊNDICE E – Atividade 5

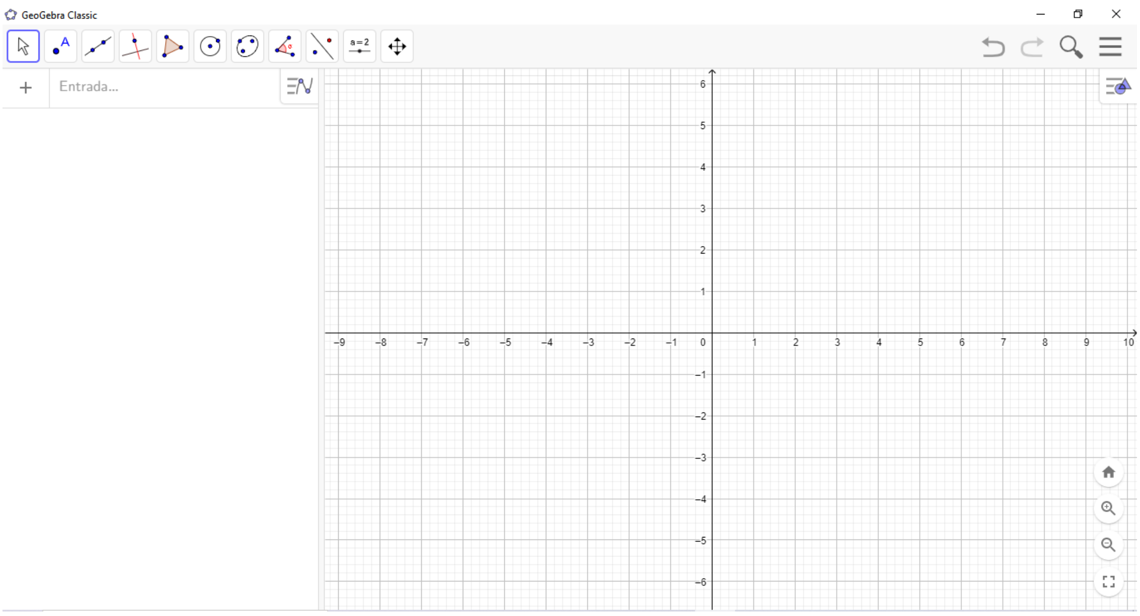
A concepção geométrica dos logaritmos

A concepção geométrica dos logaritmos será abordada com o auxílio do software GeoGebra.

a) Seja a função $f(x) = {}^{1}/_{x}$, para $x > 0$. Seguindo os passos abaixo, construa seu gráfico.

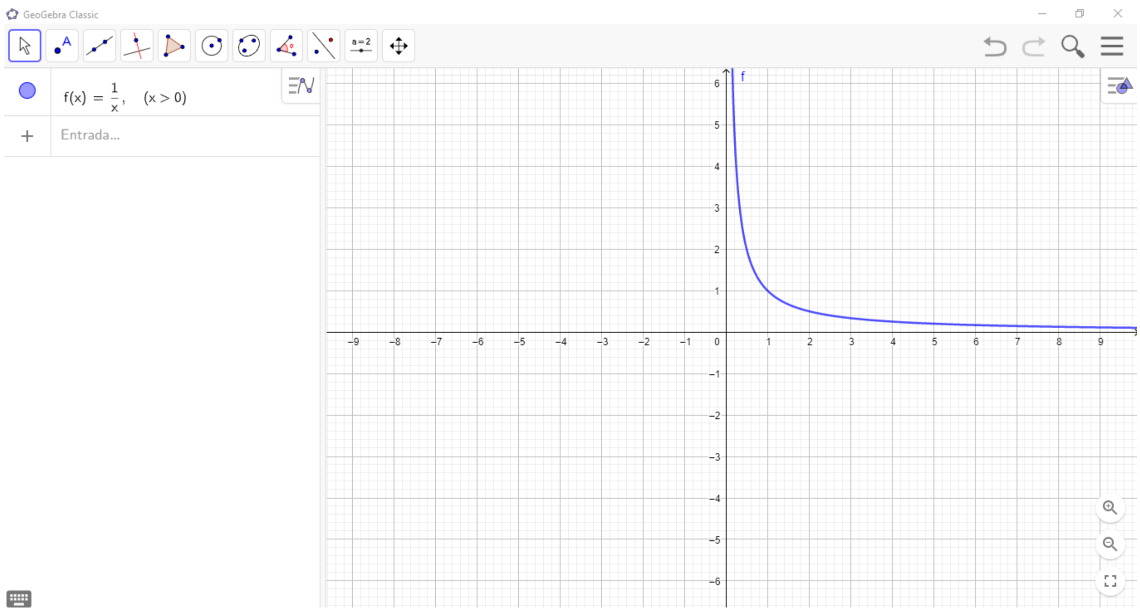
Passo 1: Abra o aplicativo.

Após abri-lo você encontrará a seguinte tela:



Captura da tela inicial.

Passo 2: Digite no campo “Entrada”, que se localiza no canto superior esquerdo, a função $f(x) = 1/x$, $x > 0$, e clique em “Enter” no teclado.

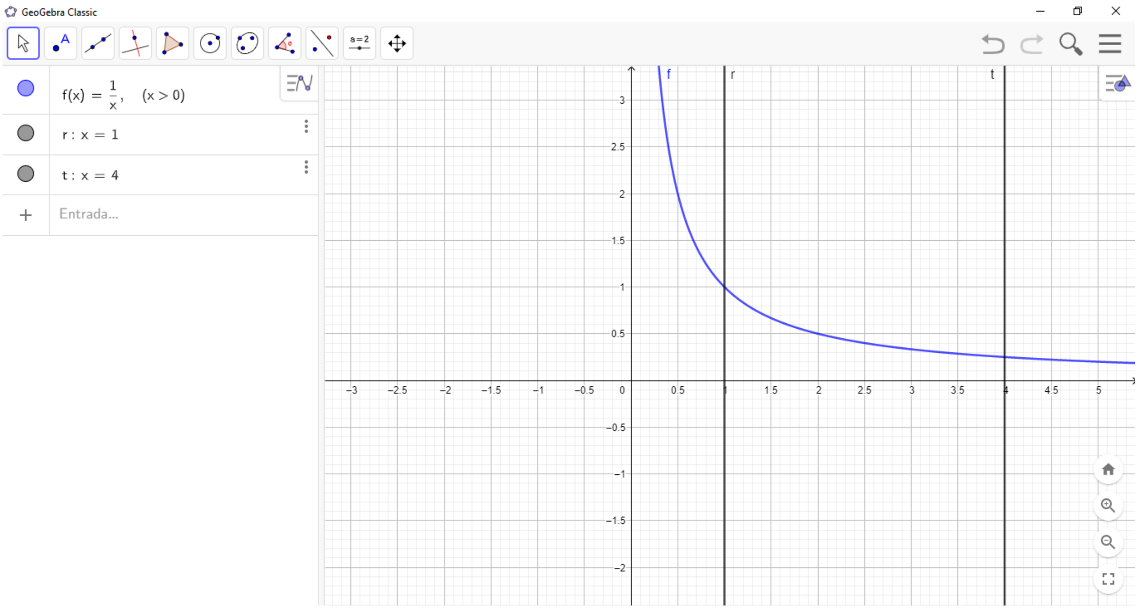


Captura da tela do passo 2 / item a.

b) Você sabia que este é o ramo positivo do gráfico de uma hipérbole? Discuta esse fato com seus colegas e professores.

c) Sejam os números positivos 1 e 4. Trace as retas $r: x = 1$ e $t: x = 4$, sob o gráfico obtido no item a.

Passo 1: No campo “Entrada” insira $r: x = 1$ e clique em “Enter” no teclado.
Passo 2: No campo “Entrada” insira $t: x = 4$ e clique em “Enter”.



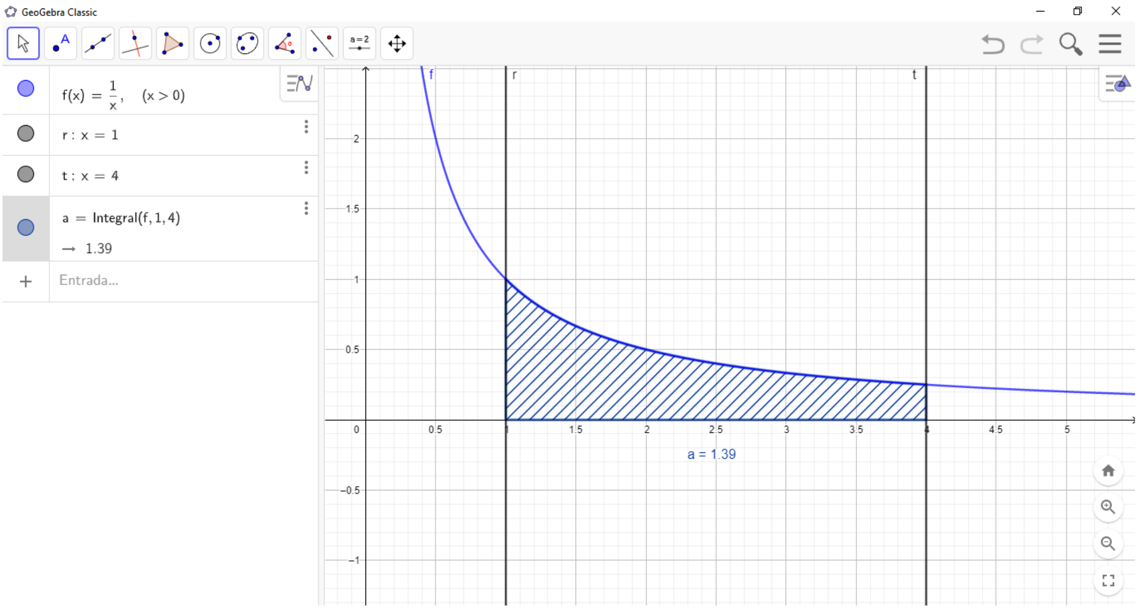
Captura da tela do passo 1 e 2 / item c.

d) Considere K_1^4 a região da faixa hipérbole limitada pela a função $f(x) = {}^1/_x$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $r: x = 1$ e $t: y = 4$. Determinar sua área.

Passo 1: No campo “Entrada” insira $Integral\,[f, 1, 4]$ e selecione “Enter”. A função integral calculará a área desejada. Observe o valor da área aparecerá no gráfico.

Podemos alterar as configurações dessa área, como por exemplo, mudar a cor e estilo. Vamos alterar a cor para azul e estilo tracejado, como expresso no passo 2.

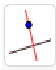
Passo 2: Clique com o botão direito do mouse e selecione “Configurações”. Agora, clique em “Cor” e selecione o azul. Depois, clique em “Estilo”, selecione a opção “Tracejado” em “Preenchimento”.



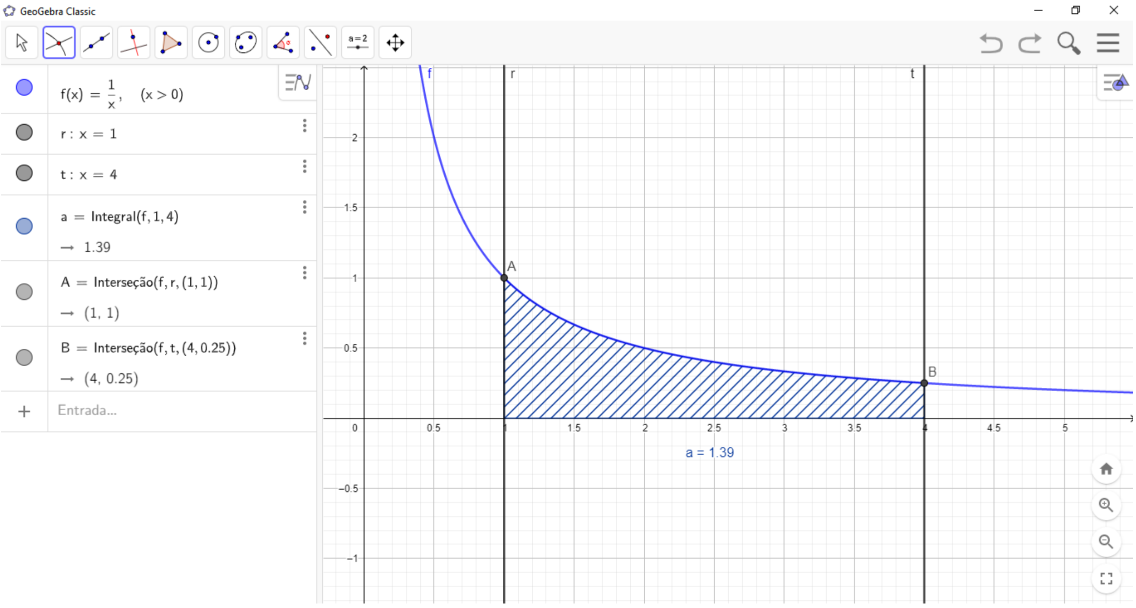
Captura da tela do passo 1 e 2 / item d.

e) Considere, $Área\ (K_1^4) = a$. Qual o valor da área obtida no item anterior?

f) Determine os pontos de interseção da função f com as retas r e t, seguindo os passos abaixo.

Passo 1: Na parte superior da tela, selecione a ferramenta  "Interseção de Dois Objetos". Clique no gráfico onde se localiza o ponto de interseção de função f e r. Note que aparecerá o ponto A de coordenadas $(1, 1)$.

Passo 2: Selecione novamente a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" e clique no gráfico onde se localiza o ponto de interseção de função f e t. Note que aparecerá o ponto B de coordenadas $(4, 0{,}24)$.



Captura da tela do passo 1 e 2 / item f.

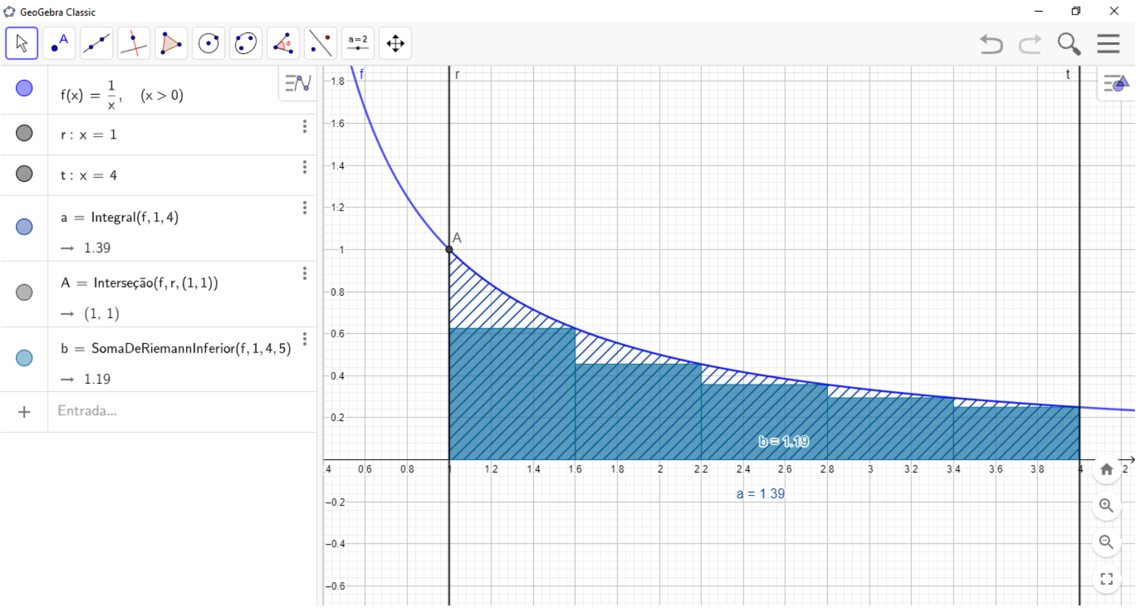
Observe que os pontos $A = (1,1)$ e $B = (4, 0{,}25)$ equivalem a $A = (1, \frac{1}{1})$ e $B = (4, \frac{1}{4})$, pois pertencem ao gráfico de f.

De forma geral, dados dois números positivos a e b, como $a < b$, a faixa da hipérbole K_a^b é a região limitada pelo pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = a$ e $y = b$. Esta região é formada pelos pontos (x, y) tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$, ou seja,

$$K_a^b = \left\{(x, y); a \leq x \leq b \ e \ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$$

g) Agora, iremos inscrever quatro retângulos na região K_a^b e calcular a soma de suas áreas. Para tal, usaremos a função Soma de Riemann Inferior, do seguinte modo:

Passo 1: No campo “Entrada” insira $SomaDeRiemannInferior\ [f, 1, 4{,}4]$ e selecione “Enter”. Observe que $[f, 1, 4{,}4]$ especifica a função f, o intervalo $[1, 4]$ e o número de retângulos inscritos.

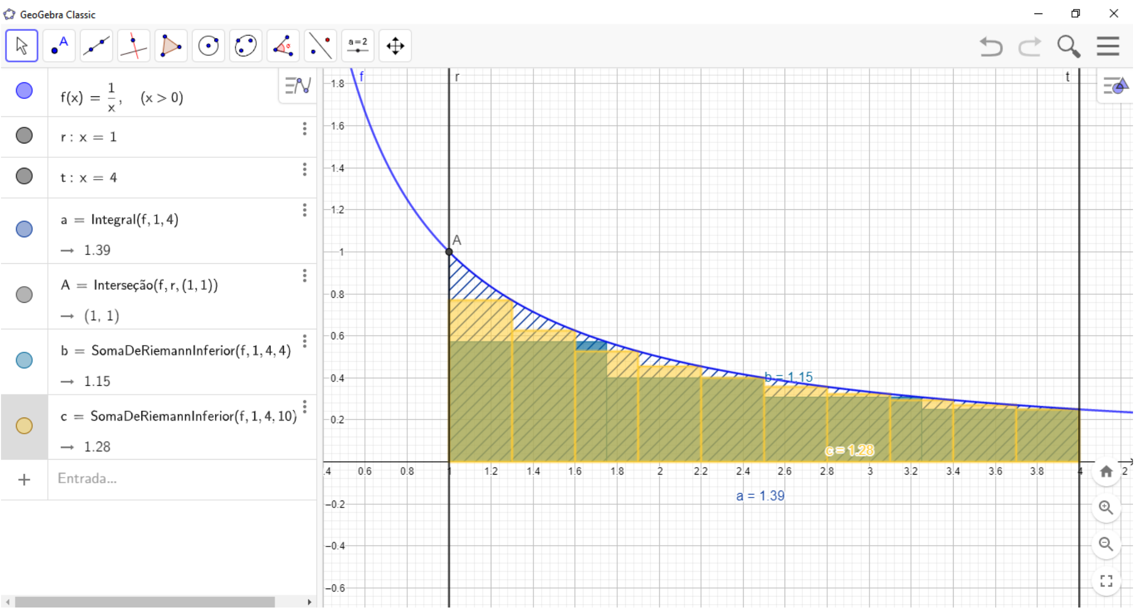


Captura da tela do passo 1 / item g.

h) Denotaremos por S a região composta pelos retângulos. Assim, $b = Área\ (S)$. Qual é a área obtida no item g?

i) Qual é a menor, $Área\ (S)$ ou $Área\ (K_1^4)$?

j) Utilizando os mesmos passos do item g, inscreva dez retângulos na região K_1^4 e calcule a área dessa nova região. Qual é a área obtida?



Captura da tela do item j.

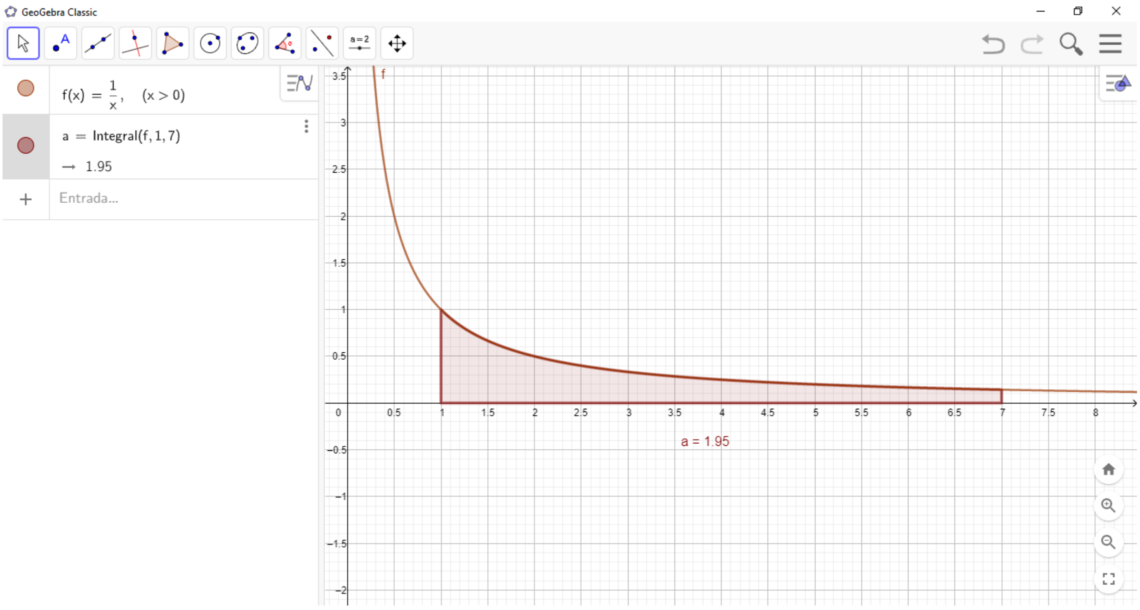
Observe que quanto maior a quantidade de triângulos inscritos na região K_1^4, menor será a diferença entre suas áreas. Porém, $Área\ (S)$ sempre será menor que $Área\ (K_1^4)$. De forma geral,

$$Área\ (K_b^a) > Área\ (S), \text{para todo } S$$

Você sabia que a área de K_1^x é o logaritmo natural de x , para $x \in \mathbb{R}_+^*$? Quando calculamos $Área\ (K_1^4)$ estávamos calculando o logaritmo natural de quatro, ou seja, $\ln 4$.

k) Utilizando o GeoGebra calcule $ln\, 7$.

Passo 1: Digite no campo “Entrada”, que se localiza no canto superior esquerdo, a função $f(x) = 1/x$, $x > 0$, e clique em “Enter” no teclado.
Passo 2: No campo “Entrada” insira $Integral\ [f, 1, 7]$ e selecione “Enter”.



Captura da tela do item k.