



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Matheus Soares Viana Fernandes

**Análise dos coeficientes de redução de rigidez empregados em  
lajes lisas protendidas**

Rio de Janeiro

2023

Matheus Soares Viana Fernandes

**Análise dos coeficientes de redução de rigidez empregados em lajes  
lisas protendidas**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Orientadores: Profa. Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares  
Prof. André Tenchini da Silva

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

F363 Fernandes, Matheus Soares Viana.  
Análise dos coeficientes de redução de rigidez empregados em  
lajes lisas protendidas / Matheus Soares Viana Fernandes. – 2023.  
123 f.

Orientadores: Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares, André  
Tenchini da Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de  
Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia civil - Teses. 2. Lajes de concreto - Teses. 3.  
Concreto protendido - Teses. 4. Análise estrutural (Engenharia) -  
Teses. 5. Método dos elementos finitos - Teses. I. Tavares, Maria  
Elizabeth da Nóbrega. II. Silva, André Tenchini. III. Universidade do  
Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 624.073

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial  
desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

**Análise dos coeficientes de redução de rigidez empregados em lajes lisas  
protendidas**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Aprovado em: 28 de fevereiro de 2023.

Banca Examinadora:

*Maria Elizabeth da N. Tavares*

Profa. Dra. Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares (Orientadora)  
Faculdade de Engenharia – UERJ

*André Tenchini da Silva*

Prof. Dr. André Tenchini da Silva (Orientador)  
Faculdade de Engenharia – UERJ

*Luciano Rodrigues Ornelas de Lima*

Prof. Dr. Luciano Rodrigues Ornelas de Lima  
Faculdade de Engenharia – UERJ

*Cláudia Maria de Oliveira Campos*

Profa. Dra. Cláudia Maria de Oliveira Campos  
Universidade Federal Fluminense - UFF

## DEDICATÓRIA

A Glória Deus, à minha esposa Nathália, ao meu filho, à minha mãe Rose, à minha irmã Laura e à memória do meu pai Wagner.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, sustentador do Universo, o detentor e doador de todo conhecimento e sabedoria.

A minha esposa Nathália, fiel, paciente e auxiliadora sem qual dificilmente este trabalho seria finalizado.

A minha mãe Rose pelo apoio e confiança no meu futuro profissional até mesmo quando eu não acreditava que fosse possível.

A minha irmã Laura pelos ombros e ouvidos amigos que sempre estiveram próximos quando precisei.

Aos meus orientadores, Prof<sup>a</sup>. Doutora Maria Elizabeth, Prof. Doutor André TENCHINI que durante todo o tempo do mestrado e, especialmente, toda a pandemia, estiveram ao meu lado não me deixando desanimar e compreendendo as minhas dores ao longo das mais inusitadas e adversas situações e lutas.

Aos meus amigos do PGECIV, pelos cafés, risos, reclamações, choro e apoio. Em especial, a Keila Letícia, Augusto César, Karina Mota, Ana Waldila e Bárbara Cardoso.

A UERJ por ter sido a minha casa ao longo de onze anos e a Universidade que me formou como engenheiro civil.

A FAPERJ pelo apoio financeiro.

Meu filho, se você aceitar as minhas palavras e guardar no coração os meus mandamentos, se der ouvidos à sabedoria e inclinar o coração para o discernimento, se clamar por entendimento e por discernimento gritar bem alto, se procurar a sabedoria como se procura a prata e buscá-la como quem busca um tesouro escondido, então você entenderá o que é temer ao Senhor e achará o conhecimento de Deus. Pois o Senhor é quem dá sabedoria; de sua boca procedem o conhecimento e o discernimento.

*Provérbios 2:1-6*

Aos engenheiros que, ao invés de cegamente seguirem os códigos de prática, buscam aplicar as leis da natureza.

*T.Y. Lin*

## RESUMO

FERNANDES, Matheus Soares Viana. *Análise dos coeficientes de redução de rigidez empregado em lajes lisas protendidas*. 2023. 123 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

As estruturas em concreto protendido ganham cada vez mais importância no cenário nacional devido aos seus vários benefícios e, dentre eles, tem-se os grandes vãos, baixas interferências com vigas e a simplicidade na montagem de fôrma que esta tecnologia proporciona. Em edifícios altos é imprescindível a avaliação dos efeitos de segunda ordem devido aos esforços laterais do vento e, com isso, a correta avaliação do comportamento estrutural no Estado Limite Último ganha mais preponderância. A realização de análises elásticas são mais simples de serem executadas e requerem um esforço computacional mais baixo em comparação às análises não lineares, as quais, apesar de serem mais precisas, exigem um esforço computacional muito mais alto. As análises não lineares também necessitam de um tempo muito maior para a correta elaboração do modelo numérico. Portanto, a utilização de fatores que busquem aproximar as análises no Estado Limite Último à situação real sob a qual estarão submetidos no instante anterior ruína são vantajosas pois reduzem o custo computacional e facilitam a modelagem ao requererem apenas uma análise elástica. Visto que as normas brasileiras não contemplam fatores redutores de rigidez para lajes lisa protendidas, faz-se necessário o estudo para inclusão destes fatores. Assim, por meio do programa de análise em elementos finitos Abaqus (2014), foi desenvolvido um modelo numérico onde se aplicaram elementos tridimensionais C3D8R e diversos contatos entre os elementos do modelo. A validação foi feita por meio de resultados de ensaios experimentais e posteriormente, desenvolveram-se casos de estudo através de: curvas carga *versus* deslocamento, variação da tensão ao longo dos fios de protensão e mapa de fissuração. Sendo assim, compararam-se os resultados com a finalidade de se propor uma forma mais sistemática de valores para coeficientes de redução da rigidez em lajes lisas protendidas no Estado Limite Último.

Palavras-chave: Lajes lisas protendidas. Análise estrutural. Análise não-linear. Análise de elementos finitos.



## ABSTRACT

FERNANDES, Matheus Soares Viana. *Analysis of coefficients for reduction of stiffness in prestressed flat slabs*. 2023. 123 p. Master's Thesis (Master of Science in Civil Engineering) – Faculty of Engineering, Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, 2023.

Prestressed concrete structures are stretching more and more its importance nationally due to their many benefits and, among them, there are large spans, low interference with beams and the simplicity in formwork assembly that this technology provides. In tall buildings, it is essential to assess the second order effects due to lateral wind forces and, therefore, the correct assessment of the structural behavior in the Ultimate Limit State increases in preponderance. Performing elastic analyzes are simpler to perform and require a lower computational effort compared to nonlinear analyses, which, despite being more accurate, require a much higher computational effort. Nonlinear analyzes also require a much longer time for the correct elaboration of the numerical model. Therefore, the use of factors that seek to approximate the analyzes in the Ultimate Limit State to the real situation under which they will be submitted in the instant before the failure are advantageous because they reduce the computational cost and facilitate the modeling by requiring only an elastic analysis. Since Brazilian standards do not include stiffness reducing factors for prestressed flat slabs, it is necessary to study for including these factors. Thus, using the finite element analysis program Abaqus (2014), a numerical model was developed where C3D8R three-dimensional elements and various contacts between model elements were applied. Validation was carried out through the results of experimental tests and later, case studies were developed through: load versus displacement curves, stress variation along the prestressing wires and cracking map. Therefore, the results were compared with the aim of proposing a more systematic form of values for stiffness reduction factors in prestressed flat slabs in the Ultimate Limit State.

Keywords: Prestressed flat slab. Structural analysis. Non-linear analysis. Finite element analysis.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Laje lisa protendida (Cauduro, 2003) .....	17
Figura 2 – Linhas de Ruptura (Wight, 2012) .....	23
Figura 3 – Disposição de armaduras no método de ruptura (Hambly, 1976) .....	24
Figura 4 – Discretização no método de grelhas (Hambly, 1976).....	26
Figura 5 – Matriz de rigidez do MAG .....	26
Figura 6 – Elemento infinitesimal (Timoshenko, 1959).....	27
Figura 7 – Método do pórtico equivalente - MPE (ACI 318, 2014) .....	30
Figura 8 – Divisão de faixas no MPS segundo a NBR 6118 (2014) .....	32
Figura 9 – MPE <i>versus</i> MPEM (Park <i>et al.</i> , 2009).....	36
Figura 10 – Rotação do elemento torcional segundo o tipo de carregamento considerado (Park <i>et al.</i> , 2009) .....	37
Figura 11 – Relação entre a rigidez torcional e proporção entre carga horizontal e gravitacional (Kim, 2014a).....	39
Figura 12 – Dimensões da laje ensaiada por Nawy (1976).....	50
Figura 13 – Condição de contorno das lajes (Nawy, 1976).....	52
Figura 14 – Condições de contorno do modelo numérico .....	52
Figura 15 – Posição média do fio (Nawy, 1976).....	53
Figura 16 – Vista em planta dos fios de protensão .....	54
Figura 17 – Posições dos fios de protensão .....	55
Figura 18 – Comportamento da curva tensão <i>versus</i> deformação à compressão segundo Alfarrah <i>et al</i> (2017).....	58
Figura 19 – Comportamento do concreto à compressão .....	59
Figura 20 – Comportamento à tração proposto por Alfarrah <i>et al</i> (2017) .....	60
Figura 21 – Comportamento do concreto à tração .....	60
Figura 22 – Comportamento do aço de protensão (Nawy, 1976).....	61
Figura 23 – Energia interna (ALLIE) <i>versus</i> energia cinética (ALLKE) do modelo de referência .....	63
Figura 24 – Modelo com malha refinada (5 mm).....	65
Figura 25 – Modelo com malha grosseira (10 mm) .....	66
Figura 26 – Localização dos pontos de controle .....	67
Figura 27 – Carga <i>versus</i> deslocamento – Malhas de 10 e 5 mm .....	68

Figura 28 – Mapa de fissuração das lajes ensaiadas (Nawy, 1976). .....	69
Figura 29 – Mapa de Fissuração do Modelo Numérico (malha de 5 mm) .....	70
Figura 30 – Mapa de Fissuração do Modelo Numérico (malha de 10 mm) .....	71
Figura 31 – Posições dos fios .....	75
Figura 32 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,20$ ) – P15 .....	76
Figura 33 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,20$ ) – P18X .....	77
Figura 34 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,20$ ) – Fio 6 .....	78
Figura 35 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,20$ ) – Fio 3 .....	79
Figura 36 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,00$ ) – P15 .....	80
Figura 37 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,00$ ) – P18X .....	80
Figura 38 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,00$ ) – Fio 6 .....	82
Figura 39 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,00$ ) – Fio 3 .....	82
Figura 40 – Posições dos engrossamentos .....	83
Figura 41 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) – P15 .....	84
Figura 42 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) – P18-X .....	84
Figura 43 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) - Fio 3 - Vão .....	88
Figura 44 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) - Fio 3 - Pilar .....	88
Figura 45 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) - Fio 6 - Vão .....	89
Figura 46 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) - Fio 6 - Pilar .....	89

Figura 47 – Comparação entre coeficiente de Poisson – P15 .....	90
Figura 48 – Comparação entre coeficiente de Poisson – P18-X.....	91
Figura 49 – Comparação entre coeficiente de Poisson estendida – P15 e P18-X ....	91
Figura 50 – Comparação de Coeficiente de Poisson - Fio 3 Vão.....	92
Figura 51 – Comparação de Coeficiente de Poisson - Fio 3 Pilar .....	93
Figura 52 – Comparação de Coeficiente de Poisson - Fio 6 Vão.....	93
Figura 53 – Comparação de Coeficiente de Poisson - Fio 6 Pilar .....	94
Figura 54 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – P15 .....	95
Figura 55 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – P18-X.....	95
Figura 56 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – Fio 3 - Vão .....	97
Figura 57 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – Fio 3 – Pilar .....	97
Figura 58 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – Fio 6 – Vão .....	98
Figura 59 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – Fio 6 – Pilar .....	98
Figura 60 – Fissuração – Coeficiente de Poisson = 0,00 .....	99
Figura 61 – Fissuração – Coeficiente de Poisson = 0,20 .....	100
Figura 62 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – P15.....	101
Figura 63 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – P18-X .....	102
Figura 64 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – Fio 3 - Vão.....	103
Figura 65 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – Fio 3 – Pilar .....	104
Figura 66 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – Fio 6 – Vão.....	104
Figura 67 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – Fio 6 - Pilar .....	105
Figura 68 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – P15.....	106
Figura 69 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – P18-X .....	107
Figura 70 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – Fio 3 – Vão.....	108
Figura 71 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – Fio 3 - Pilar .....	108
Figura 72 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – Fio 6 – Vão.....	109
Figura 73 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – Fio 6 - Pilar .....	109
Figura 74 – Tensão média x Coeficiente de redução de rigidez - P15.....	113
Figura 75 – Tensão média x Coeficiente de redução de rigidez - P18-X .....	114
Figura 76 – Momento de fissuração <i>versus</i> coeficiente de redução da rigidez .....	115

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características físicas do modelo experimental .....	50
Tabela 2 – Dados dos modelos experimental e numérico.....	56
Tabela 3 – Parâmetro do modelo do concreto .....	57
Tabela 4 – Nomenclaturas dos modelos .....	75
Tabela 5 – Comparação entre tipos de análise em termos de carga para L/150 .....	77
Tabela 6 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,00$ ) – Rigidez secante.....	81
Tabela 7 – Comparação entre modelos de rigidezes distintas – Rigidez secante – P15 .....	85
Tabela 8 – Comparação entre modelos de rigidezes distintas – Rigidez secante – P18-X.....	85
Tabela 9 – Comparação entre comportamentos linear e não linear (50% Prot.) – Rigidez secante.....	86
Tabela 10 – Comparação entre comportamentos linear e não linear (150% Prot.) – Rigidez secante.....	87
Tabela 11 – Comparação do coeficiente de Poisson .....	92
Tabela 12 – Rigidez secante do modelos numéricos variando níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) .....	103

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACI	The American Concrete Institute
ALLAE	Energia total dissipada de ensaio numérico
ALLIE	Energia interna de ensaio numérico
ALLKE	Energia cinética de ensaio numérico
BSI	British Standards Institution
CDPM	<i>Concrete Damage Plasticity Model</i>
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
EUA	Estados Unidos da América
EUROCODE	European Committee for Standardisation
MAG	Método da analogia de grelha
MEF	Método dos elementos finitos
MLR	Método das linhas de ruptura
MPEM	Método do Pórtico Equivalente Modificado
MPEU	Método do Pórtico Equivalente Unificado
MPS	Método do pórtico simples
MRD	Método da rigidez direta
NBR	Norma brasileira
SMMT	<i>Softened Membrane Model for Torsion</i>
VATM	Modelo de Analogia da Trelíça Espacial de Ângulo Variável

## LISTA DE SÍMBOLOS

$m_x$	momento resistente máximo por unidade de comprimento
$m_y$	momento resistente máximo por unidade de comprimento
$m_b$	momento fletor por unidade de comprimento
$m_t$	momento torsor por unidade de comprimento
$G$	módulo elástico cisalhante
$\lambda_c$	fator multiplicativo que opera na rotação média do MPEM
$T_L$	momento torsor das cargas laterais
$T_g$	momento torsor das cargas gravitacionais
$R_t$	fator de correção que considera as características físicas e geométricas entre métodos analíticos e o MPE
$c_t$	razão entre o momento torsor na extremidade da viga e o momento torsor induzido por uma rotação unitária nesta mesma extremidade
$\gamma_f$	esforços solicitantes devem ser majorados por este fator
$\gamma_{f1}$	variabilidade referente ao material
$\gamma_{f3}$	é igual a 1,1 e representa os efeitos de 2ª ordem
$I_c$	momento de inércia da seção bruta de concreto
$E_{ci}$	módulo de deformação tangencial inicial do concreto
$\sigma_b$	resistência do concreto no estado biaxial
$\sigma_c$	resistência do concreto no estado uniaxial
$\psi$	ângulo de dilatância do concreto
$\varepsilon$	excentricidade do concreto
$\mu$	viscosidade

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
<b>1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>21</b>
<b>1.1 Metodologia para cálculo de lajes .....</b>	<b>21</b>
1.1.1 Método das linhas de ruptura (MLR) .....	23
1.1.2 Método da analogia de grelha (MAG).....	25
1.1.3 Método elástico (Teoria de placas) .....	27
1.1.4 Método dos elementos finitos (MEF) .....	29
1.1.5 Método do pórtico equivalente (MPE) .....	30
<b>1.2 Comportamento de estruturas de concreto protendido à torção .....</b>	<b>40</b>
<b>1.3 Estudos recentes sobre dimensionamento em lajes lisas em concreto protendido.....</b>	<b>44</b>
<b>1.4 Estabilidade estrutural de edifícios de laje lisas em concreto protendido ..</b>	<b>45</b>
<b>2 DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO .....</b>	<b>48</b>
<b>2.1 Descrição do modelo .....</b>	<b>48</b>
2.1.1 Configuração inicial .....	49
2.1.2 Modelo experimental .....	49
<b>2.2 Condições de contorno .....</b>	<b>51</b>
<b>2.3 Protensão.....</b>	<b>53</b>
<b>2.4 Material.....</b>	<b>56</b>
2.4.1 Concrete Damage Plasticity Model (CDPM).....	56
2.4.2 Lei constitutiva de compressão uniaxial do concreto .....	58
2.4.3 Lei constitutiva de tração uniaxial do concreto .....	59
2.4.4 Lei constitutiva uniaxial do aço de protensão .....	61
<b>2.5 Análise não linear .....</b>	<b>61</b>
<b>2.6 Contatos e malha .....</b>	<b>64</b>
<b>2.7 Validação modelo numérico.....</b>	<b>66</b>
2.7.1 Carga <i>versus</i> deslocamento.....	66
2.7.2 Mapa de fissuração .....	68
<b>3 CASOS DE ESTUDO .....</b>	<b>73</b>
<b>3.1 Casos estudados.....</b>	<b>73</b>
3.1.1 Nomenclaturas dos modelos numéricos.....	74



3.2 Não linearidade geométrica.....	75
3.3 Coeficiente de Poisson .....	90
3.4 Variação no nível de protensão .....	100
4 DISCUSSÃO SOBRE OS RESULTADOS.....	111
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	116
5.1 Introdução.....	116
5.2 Conclusões .....	117
5.3 Trabalhos futuros.....	118
REFERÊNCIAS.....	119
ANEXO A – PROTENSÃO POR MEIO DE VARIAÇÃO DE TEMPERATURA .....	123

## INTRODUÇÃO

A humanidade está em um processo de aprimoramento de diversas tecnologias de forma muito acelerada nos últimos séculos devido aos avanços tecnológicos. Estes desenvolvimentos abrangem uma ampla gama de áreas, atingindo inclusive a indústria da construção civil. As soluções estruturais em concreto são recentes historicamente, visto que este material foi desenvolvido somente ao final do século XIX.

Após o advento do concreto, houve a necessidade de torna-lo um material mais adequado para construção, uma vez que ele apresentava elevada resistência à compressão. A introdução de barras de aço nas regiões sujeitas à tração, supriu a deficiência deste material, possibilitando que fosse usado para vencer maiores vão; surgiu-se o concreto armado.

Sucessivas melhoras foram incorporadas a técnica do concreto armado até que na década de 30 surgiram as primeiras estruturas em concreto protendido na Europa. Mas foi somente após o fim da Segunda Guerra Mundial, com a urgente necessidade de reconstruir as pontes que foram destruídas ao longo da guerra, que esta tecnologia ganhou força e se tornou mais acessível a outros mercados.

O concreto protendido é uma tecnologia que visa introduzir um esforço interno de compressão à estrutura de forma a aliviar as tensões de tração, permitindo, assim, que o concreto esteja submetido somente à compressão ou a um nível de tração que esteja dentro de limites toleráveis.

No Brasil o concreto protendido começou a ser utilizado em 1949, com a construção da Ponte do Galeão que, na época, foi a mais extensa ponte em concreto protendido no mundo, com 380 m de comprimento (Cauduro, 1996).

Outra área de grande utilização desta tecnologia é a construção de edificações pois, com o advento da protensão, expandiu-se o uso de lajes lisas, isto é, laje sem vigamento (Figura 1). Este benefício permite à construção ter: fôrmas simples, execução mais rápida, reduzidas cargas que chegam à fundação devido a lajes menos espessas e facilidade na instalação dos sistemas elétrico e hidráulico (Aalami, 2014).



Figura 1 – Laje lisa protendida (Cauduro, 2003)

O Método do Pórtico Equivalente (MPE) foi o método de análise mais utilizado no século passado, e que ainda continua em utilização, para o dimensionamento de edifícios com lajes protendidas devido a sua fácil aplicação e através da compreensão da protensão como uma simples carga distribuída. O MPE foi originalmente desenvolvido para ser utilizado em estruturas submetidas a carregamentos majoritariamente gravitacionais; porém, mediante a aprimoramentos, passou a representar melhor estruturas submetidas a carregamentos laterais, como sismos ou vento.

Por sua vez, o Método dos Elementos Finitos (MEF) vem sendo cada vez mais usado nos escritórios de cálculo. O método permite uma análise mais generalista e consegue englobar diversos efeitos em seus modelos, desde carregamentos laterais em duas direções, materiais compósitos, não linearidades física e geométrica. Devido à possibilidade de grandes quantidades de dados de entrada no programa, faz-se necessário que o usuário entenda corretamente cada dado de entrada para que o cálculo represente de maneira mais realista e consistente possível o comportamento estrutural.

Ao inserir a protensão nas lajes do modelo estrutural, torna-se indispensável a compreensão dos efeitos intrínsecos aos esforços de interno de protensão introduzidos a estrutura. A rigidez das lajes lisas protendidas é alterada e a sua correta

consideração eleva a acurácia dos resultados, conduzindo, assim, a modelos mais precisos e, possivelmente, mais econômicos.

Ao se comportarem como um grande diafragma rígido, as lajes lisas protendidas auxiliam os sistemas de contraventamento das edificações, tais como paredes estruturais ou estruturas reticuladas específicas. É de conhecimento comum que estruturas de concreto fissuram durante sua operação e tal fissuração reduz a rigidez das lajes. Portanto, é imprescindível compreender o real nível de fissuração para as lajes protendidas e como o nível de protensão interfere neste aspecto na análise do comportamento global da estrutura.

Neste trabalho pretende-se desenvolver um modelo numérico tridimensional de uma laje lisa protendida bem como bases para uma melhor avaliação da influência da protensão em lajes lisas protendidas para que se tenha um modelo estrutural que descreva com melhor precisão o comportamento da estrutura.

## **Motivação**

Existem diversos métodos de cálculo para lajes lisas tais como: o método das linhas de ruptura (MLR), método de analogia de grelha (MAG), método do pórtico equivalente (MPE) e método dos elementos finitos (MEF). Cada um destes métodos citados apresenta seus ônus e bônus, cabendo ao engenheiro, a escolha daquele que melhor o atenderá.

Pela sua fácil aplicação e entendimento, empregou-se o MPE como base do início dos estudos e da compreensão do caminho de cargas em lajes lisas. Ao utilizar um modelo simples, torna-se mais fácil separar efeitos dos esforços internos a estrutura que surgem com a introdução da protensão, de forma que suas respectivas influências fiquem mais claras. Com o passar do tempo, o MPE sofreu certas alterações para contemplar carregamentos horizontais e a correta consideração da rigidez torcional do elemento.

Também é bastante difundido e aceito que a fissuração e a microfissuração em estruturas de concreto reduzem a rigidez do elemento estrutural, seja em concreto armado ou protendido. O entendimento desta redução de rigidezes nos elementos do MPE, auxiliará na correta avaliação dos elementos equivalentes.

À vista disso, a extensão dos efeitos da fissuração em lajes de concreto protendido é um desafio a ser compreendido. Percebe-se que mesmo para métodos de análise simples, como o MPE, não são considerados fatores que englobem esses efeitos para concreto protendido, quanto mais ao utilizar modelos mais complexos como o MEF. Portanto, busca-se fatores que contemplem a redução de rigidez em lajes lisas protendidas conforme o nível de protensão ao qual a estrutura estará submetida.

## **Objetivos**

As lajes protendidas estão ganhando mais espaço no Brasil e necessitam de uma compreensão mais profunda do seu comportamento. Neste sentido, o trabalho em questão pretende entender como a protensão influencia no comportamento do concreto e se o efeito da carga axial da protensão também influencia significativamente no comportamento da estrutura.

As metas traçadas para este trabalho, de forma que se alcance os objetivos desta dissertação, foram:

- Compreender a influência do mecanismo de transferência de esforços entre laje e coluna em lajes lisas de concreto protendido;
- Compreender a influência da protensão quanto ao retardamento da fissuração no estado limite último;
- Propor coeficientes para redução da rigidez de lajes lisas protendidas.

## **Estrutura da dissertação**

No capítulo da introdução foi apresentada de forma concisa, as ponderações iniciais, a motivação e objetivos desta pesquisa.

O capítulo um aborda a revisão bibliográfica, onde serão explicados os métodos de análise de lajes mais utilizados, uma breve abordagem sobre alguns dos estudos mais relevantes encontrados sobre lajes protendidas, um histórico do

desenvolvimento do MPE, o avanço sobre o estudo de estruturas de concretos submetidas a torção e a consideração da redução de rigidez dos elementos de concreto segundo as normas brasileiras.

No capítulo dois é apresentado o modelo experimental utilizado como base do estudo numérico, bem como todo o desenvolvimento do modelo numérico no programa Abaqus (Abaqus, 2014). Os critérios de validação serão descritos bem como todas as premissas para modelagem numérica.

No capítulo três serão apresentados os resultados dos casos de estudo realizados com base em quatro critérios: não-linearidade geométrica, coeficiente de Poisson, esbeltez e nível de protensão.

No capítulo quatro é feita uma breve discussão da aplicabilidade dos resultados encontrados no dia a dia de projeto. Também são apresentadas sugestões de fatores multiplicativos para redução da rigidez de lajes lisas protendidas.

Por fim, no capítulo cinco são apresentadas as conclusões observadas ao longo deste trabalho, bem como, um breve resumo de cada capítulo. Também, são levantadas algumas sugestões para trabalhos futuros de forma a expandir a abrangência das conclusões levantadas.

## 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As metodologias de cálculo que existem atualmente já foram testadas e aprovadas ao longo dos anos. Cada uma delas apresenta suas vantagens e desvantagens, tornando-as mais atrativa de acordo com a situação na qual o engenheiro se depara.

Dentre elas, o MEF vem aumentando cada vez mais sua relevância, porém ainda é de suma importante estudar as outras metodologias. Assim, será feita uma revisão do MPE, pois, devido a sua simplicidade, pode auxiliar na compreensão dos mecanismos de transferência de esforços entre uma laje lisa e pilar. Também, com intuito de entender o passo-a-passo das dificuldades e das soluções e como os engenheiros encararam os desafios no passado para desenvolver o MPE, será apresentado o histórico do desenvolvimento do método do pórtico equivalente.

Após a abordagem acerca do MPE e o conceito do elemento torcional, também será explicada a influência da protensão no comportamento à torção de vigas, pois devido à similaridade com o elemento torcional, esta abordagem ajudará a compreender a influência da protensão na rigidez a torção de lajes lisas.

Por fim, serão brevemente expostas algumas pesquisas recentes com lajes lisas protendidas e descrito como os efeitos das não linearidades são incorporados na análise estrutural. Também será tratado como NBR 6118 (2014) e a NBR 9052 (2017) lidam com o entendimento da redução da rigidez em lajes protendidas, visto que esta compreensão ainda não está claramente definida nas normatizações.

### 1.1 Metodologia para cálculo de lajes

Um projeto estrutural pode ser dividido em, basicamente, quatro etapas subsequentes: a concepção estrutural, a análise estrutural, o dimensionamento e o detalhamento. Sendo assim, deve-se obter os esforços e deformações de uma estrutura de forma eficaz para que as etapas sucedam-se. Se houver uma falha logo

na primeira etapa, tanto o dimensionamento como o detalhamento estarão com as premissas equivocadas.

No tópico seguinte será desenvolvida uma explicação teórica sobre cada um dos cinco métodos de análise estrutural de lajes. Por serem metodologias consagradas na engenharia, faz-se pertinente uma breve revisão em cada metodologia pois ainda ocorrerão vezes em que os engenheiros poderão usá-las como solução para seus problemas diários.

Primeiramente, será visto o MLR que foi o fundamento de diversas normas desde o século passado, mas com o advento de programas computacionais cada vez mais complexos e precisos, veio perdendo espaço. Ainda assim, o seu entendimento auxilia a compreensão do comportamento da laje ao se aproximar da ruptura.

O MAG ainda é muito usado por programas comerciais de cálculo estrutural devido a sua facilidade de implementação e precisão. Os métodos elásticos, fundamentados na teoria elástica de lajes, foram a base de muitos projetos até um passado recente e ainda são usados para validação dos cálculos computacionais quando estes não apresentam a resposta esperada.

Por sua vez, o método que mais vem ganhando relevância e sendo desenvolvido é o MEF. Em consequência à sua facilidade de reprodução de diversos efeitos em ambiente computacional, esta metodologia permite que se desenvolvam modelos de grande consistência com a realidade.

Apesar de apresentar limitações e seu uso estar em declínio, o MPE possui relevância até hoje. Com facilidade de uso e baixo custo computacional, é possível projetar diversas estruturas usuais ainda hoje e, em caso de estruturas complexas, este método permite um pré-dimensionamento confiável rapidamente.

Devido a vasta utilização do MPE, um grande número de estudos para que o método pudesse ser desenvolvido e expandido foram produzidos. Por ser um método simples, bidimensional e de fácil entendimento, o isolamento de alguns parâmetros na análise estrutural torna-se mais fácil, o que ajuda na compreensão do seu impacto no comportamento estrutural. Será apresentado o desenvolvimento histórico do MPE com o objetivo de serem compreendidos os procedimentos que os pesquisadores passados buscaram aprimorar e como eles implementaram esses aprimoramentos, além de descrever qual a situação do método atualmente.



### 1.1.1 Método das linhas de ruptura (MLR)

O método das linhas de ruptura (ou método das charneiras plásticas) é um método de análise estrutural bastante comum para lajes de concreto armado, além do que permite economias expressivas no consumo de aço. As lajes, geralmente, não são estruturas espessas e dificilmente possuem taxas elevadas de armadura. Cabe, então, limitar as deformações excessivas e avaliar o comportamento momento *versus* curvatura da laje.

Quando uma laje dimensionada no Domínio 2 ou 3 for submetida a um carregamento no estado de serviço, que aumente até a carga última, levará as armaduras das seções mais solicitadas ao escoamento. Estas regiões passarão a se comportar como rótulas plásticas e ocasionarão uma redistribuição de momentos. As regiões plastificadas recebem o nome de linhas de ruptura que subdividem a laje em painéis menores, como ilustrado na Figura 2.

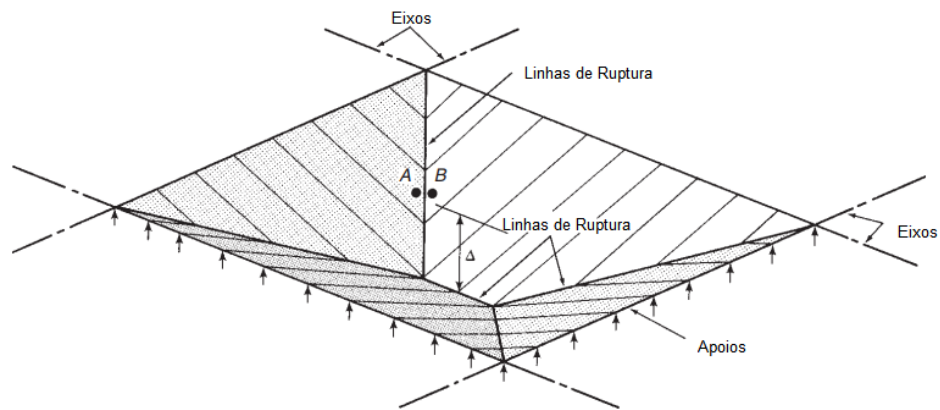


Figura 2 – Linhas de Ruptura (Wight, 2012)

Leonhardt (1979.4) afirma que o desenvolvimento e a direção das linhas de ruptura dependerão de diversos fatores, dentre os quais, cita: carregamento, condições de contorno, relação entre os vãos da laje e armaduras.

Assim como as seções plastificadas são consideradas eixos de rotação, os apoios contínuos com rotação livre (1º e 2º gêneros) também o são. Já no caso de apoio sobre pilares, a determinação do eixo de rotação não é trivial. Segundo Souza e Cunha (1998), pode-se considerar os seguintes ângulos:

- 45° entre dois apoios do mesmo tipo;
- 60° a partir do apoio engastado quando o outro for livremente apoiado;
- 90° a partir do apoio quando a borda vizinha for livre.

O MLR consegue analisar diversas disposições de armadura, sendo os casos mais comuns aqueles em que as barras cruzam-se perpendicularmente. Quando uma linha de ruptura desenvolve-se ao longo de um certo ângulo  $\alpha$ , atinge seus momentos resistentes máximos por unidade de comprimento ( $m_x$  e  $m_y$ ). Os momentos fletores e torsores por unidade de comprimento ( $m_b$  e  $m_t$ ) ao longo dessa linha de ruptura podem ser calculados, como mostrado na Figura 3.

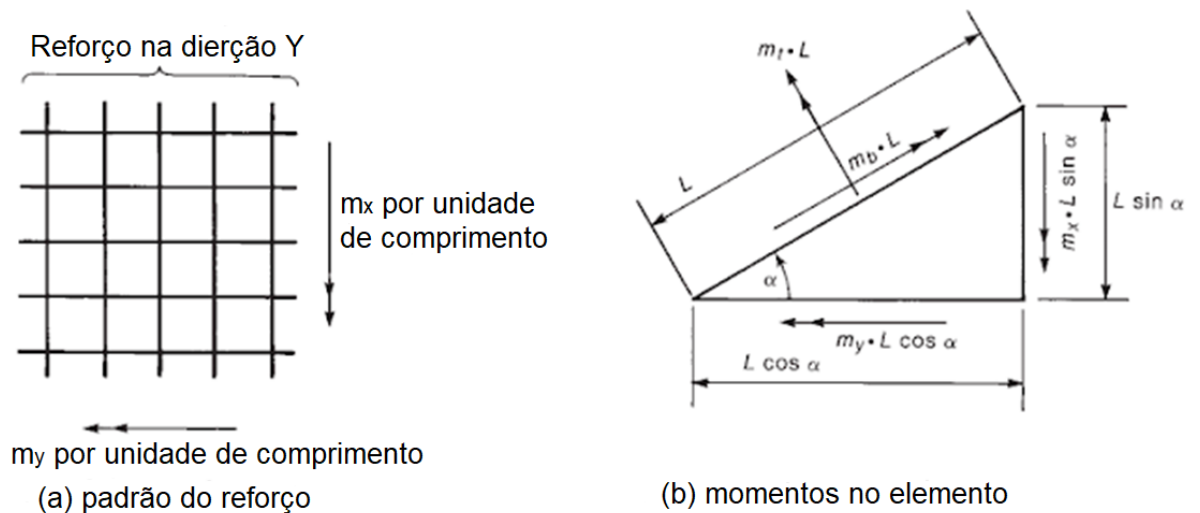


Figura 3 – Disposição de armaduras no método de ruptura (Hambly, 1976)

Considerando armaduras ortogonais e o equilíbrio da seção da Figura 3, tem-se que:

$$m_b L = m_x (L \sin \alpha) \sin \alpha + m_y (L \cos \alpha) \cos \alpha \quad (1)$$

$$m_b = m_x \sin^2 \alpha + m_y \cos^2 \alpha \quad (2)$$

$$m_t = \frac{m_x - m_y}{2} \sin 2\alpha \quad (3)$$

Para o caso em que  $m_x = m_y$ , tem-se que  $m_b = m_x = m_y$  e  $m_t = 0$ , independente do ângulo da linha de ruptura.

O MLR, portanto, auxiliará na compreensão de como a laje comporta-se nos instantes entre o início da plastificação e a ruptura. Também fornecerá momentos e cortantes em certas regiões, porém não fornecerá informações sobre deformações e carga de plastificação, ou seja, este é um método empregado no ELU.

A grande vantagem deste método é que se tem o máximo aproveitamento dos materiais e da estrutura na tentativa de se obter a configuração de ruína da laje através das sucessivas plastificações. Contudo, a dificuldade em se encontrar a configuração de ruína, especialmente em lajes não usuais, pode tornar o método limitado a algumas poucas disposições estruturais.

#### 1.1.2 Método da analogia de grelha (MAG)

Grelhas são sistemas reticulados formados pelo cruzamento de vigas coplanares submetidos a carregamentos perpendiculares ao plano reticulado. Este método consiste na substituição do painel de laje por uma série ortogonal de vigas equivalentes que se cruzam (Figura 4). O MAG não é uma aproximação numérica, sendo possível considerar o comportamento inelástico e a respectiva redistribuição de momentos.

Os cálculos são realizados a partir do método das forças ou dos deslocamentos, onde, ao considerar a rigidez de cada elemento, forma-se um sistema de equações que relacionam os deslocamentos às cargas. O equilíbrio é atingido para cada ponto nodal.

Os resultados dos esforços e deslocamentos são obtidos levando em conta o número de faixas que se cruzam e a rigidez à torção de cada uma das barras. O momento torsor influencia diretamente na diminuição dos momentos fletores e nos deslocamentos, por isso sua consideração é de grande importância. Não obstante, a rigidez à torção pelo MAG não reflete de maneira correta o comportamento da laje, levando a alguns autores, como Montoya e Hambly (1976) recomendarem reduzir pela metade o seu valor, como Stramandinoli e Loriggio (2003) evidenciaram.

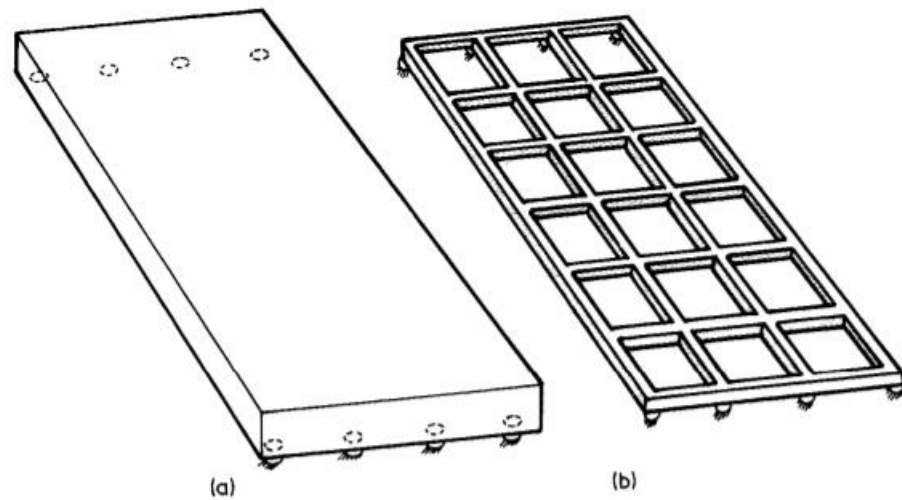


Figura 4 – Discretização no método de grelhas (Hambly, 1976)

O momento torsor considerado para o cálculo dos esforços é influenciado pela dimensão adotada nas faixas de grelha. Para malhas com faixas de pequenas espessuras, verifica-se um considerável incremento dos momentos fletores e deformações. Este fator torna difícil a escolha apropriada de uma malha que represente uma laje maciça.

O MAG apresenta grande similaridade com o método da rigidez direta pois considera um elemento de barra com seis deslocamentos que apresenta uma matriz de rigidez local (Figura 5). Este mesmo elemento será referenciado segundo um sistema global para que seja acoplado à matriz de rigidez global. Ao aplicar as condições de contorno, encontram-se as reações da estrutura, os deslocamentos e, por sua vez, os esforços e os deslocamentos em cada elemento.

$$K_m = \begin{bmatrix} GJp/L & 0 & 0 & -(GJp/L) & 0 & 0 \\ 0 & 4Ely/L & -(6Ely/L^2) & 0 & 2Ely/L & 6Ely/L^2 \\ 0 & -(6Ely/L^2) & 12Ely/L^3 & 0 & -(6Ely/L^2) & -(12Ely/L^3) \\ -(GJp/L) & 0 & 0 & GJp/L & 0 & 0 \\ 0 & 2Ely/L & -(6Ely/L^2) & 0 & 4Ely/L & 6Ely/L^2 \\ 0 & 6Ely/L^2 & -(12Ely/L^3) & 0 & 6Ely/L^2 & 12Ely/L^3 \end{bmatrix}$$

Figura 5 – Matriz de rigidez do MAG

### 1.1.3 Método elástico (Teoria de placas)

Os métodos baseados na teoria elástica de placas são os métodos consagrados, que já comprovados por resultados experimentais, que mais foram utilizados ao longo das últimas décadas. Diversos autores já produziram tabelas aproximadas baseadas na Teoria de Placas, recorrendo a algumas simplificações para tornar os cálculos menos complexos, visto que elas foram produzidas em uma época onde as calculadoras não eram tão avançadas como são atualmente.

Timoshenko (1959), partindo das resoluções mais simples e clássicas, compilou soluções para diversas condições de contorno que já haviam sido desenvolvidas em sua época. A teoria clássica de placas parte de um elemento infinitesimal, sujeito a esforços de momento e cisalhantes, como mostra a Figura 6.

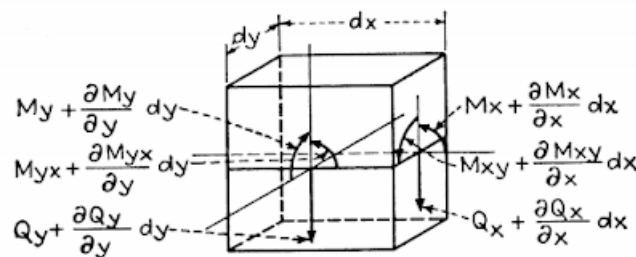


Figura 6 – Elemento infinitesimal (Timoshenko, 1959)

Para se obter o equilíbrio do ponto infinitesimal tem-se:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dx + q \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dx + Q_y \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial M_x}{\partial x} \cdot dy \cdot dx - Q_x \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (9)$$

Substituindo as Equações (4) e (5) e eliminando  $Q_x$  e  $Q_y$ :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \cdot dy \cdot dx + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \cdot dx \cdot dy - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \cdot dy \cdot dx = -q \quad (10)$$

Considerando  $M_{xy} = -M_{yx}$ , tem-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dy - 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \cdot dy \cdot dx + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \cdot dx \cdot dy = -q \quad (11)$$

Utilizando-se da Lei de Hooke, chega-se a:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (13)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \quad (14)$$

Aplicando as Equações (12), (13) e (14) em (11), deriva-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q}{D} \quad (15)$$

A partir da Equação (15) e do processo de diferença finitas, Marcus desenvolveu um conjunto de fórmulas para lajes armadas em ambas as direções. Nádai (1950), partindo da mesma equação diferencial de Marcus (1929), utilizou o método de Fourier e integrações para casos de lajes apoiadas nas quatro bordas. Czerny (1976), por sua vez, partiu da Teoria da Elasticidade e, considerando o

coeficiente de Poisson nulo, desenvolveu novas tabelas para diversas condições de contorno e para carregamentos uniformes e triangulares (Souza e Cunha, 1998).

#### 1.1.4 Método dos elementos finitos (MEF)

O MEF é um procedimento de análise numérica aproximada que tem sido muito usado e tem expandido sua aplicação cada vez mais. Este método tem como ideia principal, a divisão de um corpo contínuo em finitas partes.

Essas partes são conectadas entre si por meio de nós, os quais estabelecem a continuidade dos deslocamentos e rotações da estrutura. O comportamento entre os nós de um elemento finito é descrito por meio de equações aproximadas e as cargas atuantes são distribuídas proporcionalmente entre cada nó. Acrescentam-se as condições de contorno para que seja possível satisfazer as equações de equilíbrio.

O MEF resolverá um sistema linear de equações de forma iterativa até que se atinja um erro consideravelmente pouco significativo. O erro presente nas diversas aproximações e principalmente no cálculo iterativo deverão ser minimizados ao máximo para que se obtenha uma resposta próxima da realidade.

Por sua grande adaptabilidade, uma das grandes vantagens deste método é a resolução de problemas de geometrias complexas e não usuais, mesmo que não se tenha nenhuma solução analítica exata. Os elementos finitos adaptam-se à geometria da estrutura e, a partir de uma análise de convergência da malha, é possível desenvolver soluções cada vez mais precisas.

Atualmente existem muitos programas que realizam análises pelo MEF, desde simples análises 2D até análises 3D, onde se pode adicionar diversas variáveis. Dentre algumas destas variáveis, cita-se: contatos entre superfícies, não-linearidades geométricas, não-linearidades físicas, modelagem precisa dos materiais e introdução de gradientes de temperatura.

### 1.1.5 Método do pórtico equivalente (MPE)

Este método passou a ser amplamente utilizado nos EUA a partir de meados da década de 60 e ganhou relevância no Brasil a partir da década de 80. O MPE é uma ferramenta de análise estrutural que modela uma laje em duas direções como um pórtico bidimensional em cada direção. Para esta simplificação estrutural, deve-se dividir a laje em faixas.

Na NBR 6118 (2014) é considerado o Método do Pórtico Simples (MPS), onde as rigidezes tanto da coluna quanto da viga não sofrem alterações. O MPE considera que a rotação na extremidade da viga, que representa a laje, é igual à rotação da coluna. O ACI 318 (2014) considera a influência dos elementos torcionais que contribuem na absorção das rotações que são transferidas à coluna. Esses elementos estão descritos na Figura 7.

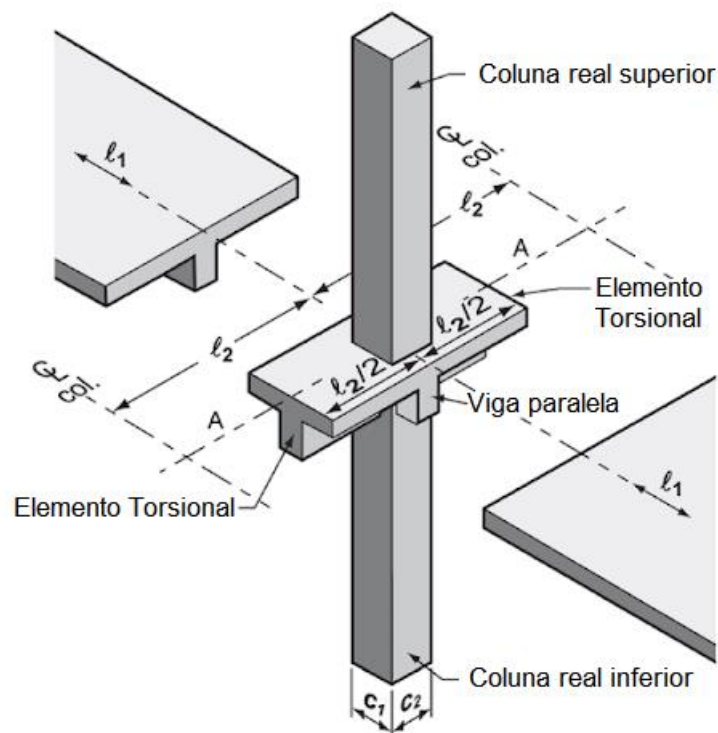


Figura 7 – Método do pórtico equivalente - MPE (ACI 318, 2014)



Para utilização do MPE, pode-se seguir os seguintes passos:

- 1) A estrutura deve ser dividida em uma série de pórticos equivalentes por meio de linhas de apoios (pilares ou apoios quaisquer), nas direções longitudinal e transversal. Cada um desses pórticos é definido pelos limites de sua área de influência, ou seja, a linha média entre esses pórticos;
- 2) Cada faixa deve ser analisada como uma “viga-laje” isolada, com as propriedades geométricas da sua seção bruta. A faixa é retificada respeitando-se o vão entre os apoios da disposição original e adotando, para cada um dos vãos, uma largura constante, que deve ser a maior com o objetivo de que não haja prejuízo à segurança;
- 3) Com a geometria do pórtico definida, determinam-se as rigidezes equivalentes do contato entre a “viga-laje” e os pilares. Para isso, é necessário o uso do conceito de elementos torcionais;
- 4) Aplica-se o conceito de pilar equivalente (item 8.11.4 da ACI-318 (2014)), no qual faz-se a substituição do pilar e dos elementos de torção por um único elemento de rigidez ( $K_e$ ) representando a combinação das rigidezes dos elementos substituídos;
- 5) Para resolução do pórtico, pode-se usar o método das forças ou dos deslocamentos. De posse dos resultados, deve-se dividir os momentos positivos e negativos obtidos pela análise do pórtico segundo critério de distribuição de cada norma.

A divisão adotada segundo a NBR 6118 (2014), no seu item 14.7.8, em cada faixa será (Figura 8):

- 45% dos momentos positivos para as duas faixas internas;
- 27,5% dos momentos positivos para cada uma das faixas externas;
- 25% dos momentos negativos para as duas faixas internas;
- 37,5% dos momentos negativos para cada uma das faixas externas.

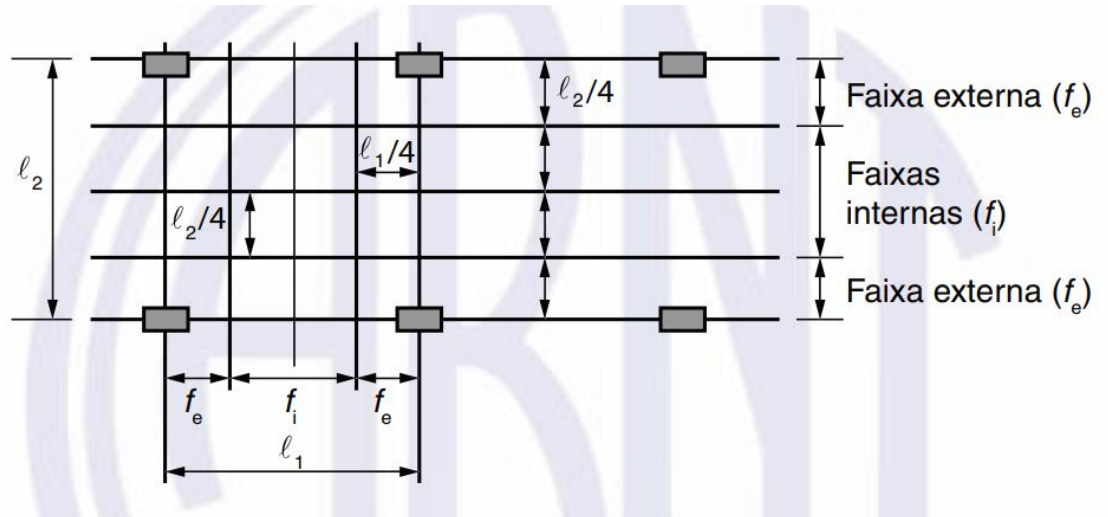


Figura 8 – Divisão de faixas no MPS segundo a NBR 6118 (2014)

#### 1.1.5.1 Desenvolvimento histórico do método do pórtico equivalente

Corley *et al.* (1961) estudaram a obtenção dos momentos em lajes de concreto armado e compararam os resultados obtidos com o MPE. Foram usados ensaios experimentais como validação.

A transformação de uma laje em uma estrutura aporticada é uma aproximação que descreve eficientemente a tendência dos momentos, oferecendo, assim, resultados próximos dos modelos experimentais e da Teoria de Placas. Foram propostas alterações significativas, como: momento de inércia na região do pilar, momento de inércia na região dos capitéis e consideração do elemento torcional.

Dentre essas alterações citadas, o elemento torcional é uma hipótese que considera a rotação absorvida pela coluna como composta por duas parcelas, uma devida à flexão e outra devido à torção. Para quantificar a rotação devido à flexão é considerada a flexibilidade da coluna em sua seção bruta. Já a quantificação da rotação devido à torção é mais complicada e requer uma série de simplificações, das quais cita-se:

- O momento torsor considerado é distribuído linearmente na viga de borda;
- Quando a laje não apresentar vigas de borda, pode-se considerar a porção da laje compreendida entre os limites das dimensões da coluna;
- Em lajes com capitéis, considerar como infinita a rigidez a torção do capitel; e
- A resistência ao empenamento das regiões dos vãos internos pode ser desprezada.

Assim, Corley *et al.* (1961) propuseram uma rotação média que leva em consideração o módulo de cisalhamento ( $G$ ), a proporção entre as dimensões do elemento torcional e a extensão do vão, e a geometria da seção. Para o cálculo do módulo de cisalhamento ( $G$ ) foi considerada a formulação clássica da Teoria da Elasticidade, com coeficiente de Poisson igual a zero, ou seja, o módulo de cisalhamento é igual a metade do módulo de elasticidade.

Jirsa *et al.* (1963) avaliou painéis de laje submetidos a cargas distribuídas alternadas, aonde o momento positivo máximo pode dobrar e o momento negativo máximo aumentar em até 25%. Também estudaram a distribuição de cargas em sistemas de lajes lisas, para que se estimasse de forma satisfatória este efeito.

Foram ensaiados cinco modelos: uma laje lisa, duas lajes cogumelos e duas lajes apoiadas em vigas. Dois tipos de carregamento foram considerados: padrão de tabuleiro de xadrez e faixas alternadas. O padrão de cargas alternadas por faixas apresentou um aumento de 20% no momento máximo quando comparado com a distribuição uniforme. Para o padrão de tabuleiro de xadrez, os momentos aumentaram em 30%. Não houve diferença nas estruturas apoiadas em vigas.

Por meio de um estudo analítico, percebeu-se menor sensibilidade dos panos de laje de canto e de extremidade em relação aos vãos internos. O padrão de tabuleiro de xadrez apresentou os maiores momentos nas lajes lisas. Foi proposta uma metodologia para avaliar a sensibilidade da estrutura ao padrão de carregamento de acordo com as rigidezes das vigas e das colunas. O padrão tabuleiro de xadrez não se mostrou crítico quando a laje foi apoiada em vigas robustas, e o padrão de faixas alternadas é sempre de grande preocupação.

Corley e Jirsa (1970) buscaram investigar a teoria do MPE, que havia sido incluído no ACI 318 (1963). Após explicação detalhada de cada elemento considerado no cálculo dos esforços, eles compararam o método com os resultados do ensaio de uma laje de nove painéis. O elemento torcional permitiu a inclusão da influência das

vigas de borda na distribuição dos esforços ao tornar a rigidez da coluna, em uma análise 2D aproximada, em função tanto da sua própria rigidez, quanto da rigidez do elemento torcional.

Com os resultados dos ensaios de duas lajes, compararam o Método da Rigidez Direta (MRD) e o MPE. Corley e Jirsa (1970) concluíram que o MPE proporciona resultados consistentes e de grande praticidade.

Para melhor compreender como geometria, condições de contorno, configuração da coluna e propriedades do material interferem na rigidez do elemento torcional, Aalami e Mehrain (1974) estudaram as curvas momento *versus* rotação do elemento torcional variando alguns aspectos.

Para análise das condições de contorno, foi estabelecido um limite inferior considerando que a coluna não contribui na rigidez da laje e um limite superior considerando uma rigidez infinita na porção da laje sobre a coluna, permitido apenas um movimento de corpo rígido. O limite real situa-se entre esses dois extremos, mas a realidade está mais próxima do limite superior. Comprovou-se que as condições de contorno paralelas ao pórtico pouco interferem nas rigidezes do MPE.

Nilson e Walters Jr (1975) desenvolveram um método para cálculo das deformações de lajes lisas armadas em duas direções. Os resultados foram comparados com ensaios experimentais e com outros métodos de análise. Para encontrar a deformação máxima segundo Nilson e Walters Jr (1975), deve-se obter a deformação máxima para o caso de viga bi-engastada e as rotações da coluna à esquerda e à direita. A fissuração e os fatores reológicos do concreto também foram considerados. Três lajes foram estudadas e houve uma diferença de 20% entre os valores de deformação máxima entre o método proposto e o experimental.

Descrever o comportamento da ligação entre coluna e lajes de concreto é muito difícil devido à sensibilidade da rigidez da estrutura, sendo este efeito ainda mais complexo quando há esforços laterais. Corley e Vanderbilt (1983) compararam três modelos (viga equivalente, coluna equivalente e *stub-beam model*) e concluíram que o primeiro, apesar de simples, é muito incipiente. No segundo, o elemento torcional foi calibrado para lajes sob esforços verticais somente, sendo um modelo genérico e de fácil uso. O último modelo é mais completo e foi validado para uma grande gama de ensaios, comparando-se curvas de momento *versus* rotação para vãos internos e de extremidades.

Também foram realizados dois estudos de sensibilidade. O primeiro debruçou-se sobre a escolha de qual elemento deve ser usado em série com o elemento torcional: a coluna ou a viga. Concluíram que para o caso de uma estrutura submetida a carregamento vertical, deve-se usar a coluna em série. No caso de carregamentos laterais, pode-se utilizar ou a coluna ou a viga. Já o segundo estudo comparou o efeito da fissuração através de um coeficiente  $\beta$  - razão entre o momento de inércia da seção fissurada e da seção bruta. Foram analisados os fatores,  $\beta = 1$  e  $\beta = 1/3$ . A estrutura com beta reduzido apresentou deslocamentos maiores e mais parecidos com a realidade. Contudo, por causa do coeficiente  $\beta$  incluir todos os elementos (vigas, colunas e elementos torcionais), ele não representa o nível de fissuração real de cada um destes.

A análise e o dimensionamento de edifícios mais altos começaram a levantar dúvidas quanto a consistência dos métodos de análise. Cano e Klinger (1988) compararam os métodos disponíveis à época de sua publicação. Eles explicaram as vantagens e desvantagens e descreveram a forma de aplicação.

Luo e Durrani (1995a) estudaram ligações internas entre lajes lisas e colunas, e propuseram um fator ao MPE que altera a largura da viga equivalente para incorporar as diversas variáveis (relação entre a carga gravitacional e lateral, fissuração e proporção de aço). Baseado nos métodos elásticos e em vários modelos experimentais, os autores concluíram que o balanceamento de momentos obtido pelo modelo do ACI-318 (1989) apresentava valores inconsistentes e que o modelo proposto apresentava resultados mais consistentes ao longo de toda estrutura.

Luo e Durrani (1995b) expandiram o estudo anterior para o caso das ligações de lajes lisas com colunas externas. Desta forma, puderam elaborar um modelo que prediz de forma mais acurada o comportamento das estruturas quando sujeitas a cargas laterais. Também observaram que, em lajes com vigas de borda, a rigidez torcional deste elemento é superestimado.

Park *et al.* (2009) verificaram as premissas do MPE para o caso de cargas laterais e mostraram que algumas dessas premissas estavam equivocadas. As normas americana (ACI 318, 2005), europeia (Eurocode 2, 2004) e britânica (BS 8110, 1997), permitem este método para análise de edifícios, contudo não reduzem a rigidez segundo o tipo de carregamento.

Para carregamentos verticais é assumido que a distribuição do momento torsor por unidade de comprimento ao longo do elemento torcional distribui-se

triangularmente. Entretanto, para os carregamentos laterais a distribuição de momento torsor por unidade de comprimento no elemento torcional é melhor representado por uma distribuição uniforme. A Figura 9 ilustra a diferença entre estas premissas onde se vê no lado esquerdo, o carregamento, a distribuição de momento torsor, a rotação e a curvatura para carregamentos gravitacionais e para carregamentos laterais a esquerda. A este método, deram o nome de Método do Pórtico Equivalente Modificado (MPEM).

A fim de demonstrar este fato, modelaram um edifício de dois andares com nove panos de laje (três em cada direção) no programa de elementos finitos SAP 2000 (1996). A diferença de comportamento pode ser vista na Figura 10, mostrando a rotação do elemento torcional a partir da face do pilar, deixando evidente que para um carregamento triangular as rotações máximas ocorrem no meio do vão entre pilares (Figura 10-a) e para o carregamento distribuído, as deformações máximas ocorrem próxima a face do pilar (Figura 10-b).

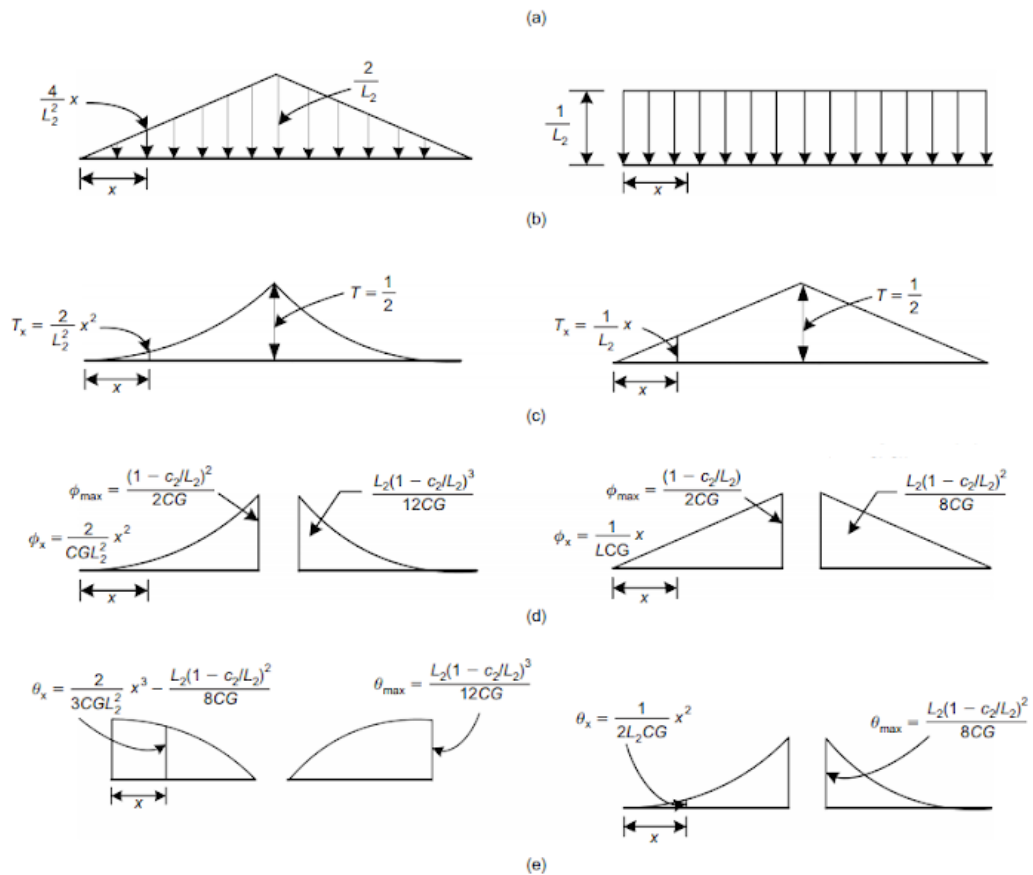
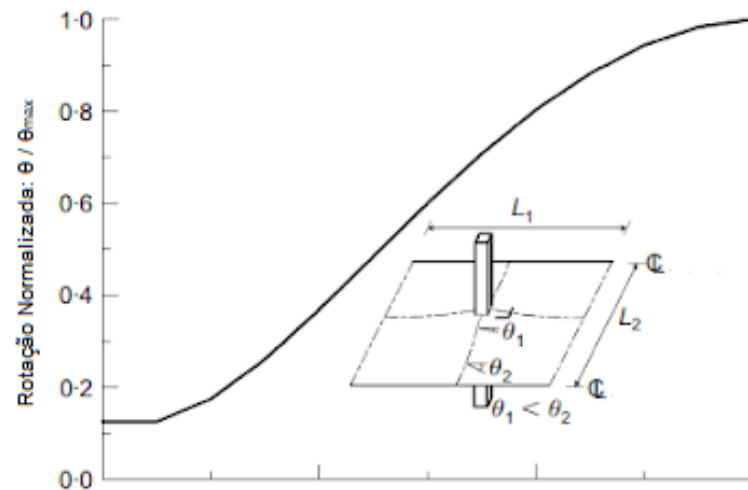
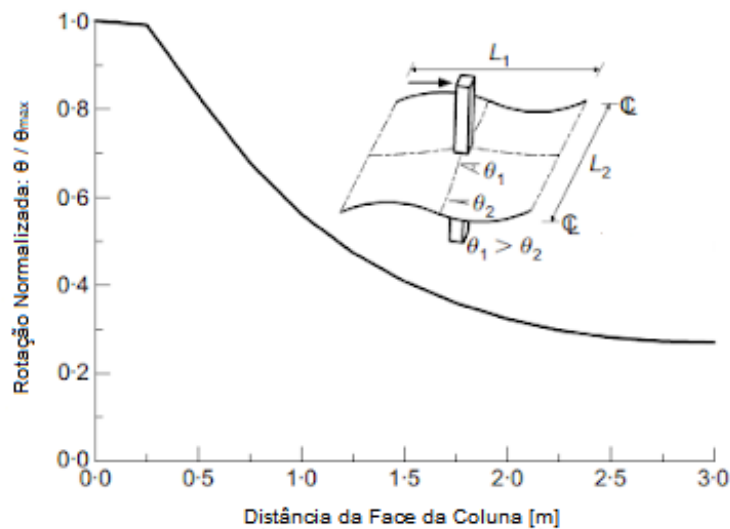


Figura 9 – MPE versus MPEM (Park *et al.*, 2009)

Analisado diversos parâmetros e comparando modelos, os autores concluíram que o sistema de transferência de esforços é diferente para cada tipo de carregamento e que para o caso de carregamento lateral deve-se utilizar a viga com rigidez equivalente, não a coluna equivalente. O MPEM apresentou resultados mais próximos da realidade e dos ensaios experimentais utilizados.



(a) Carregamento gravitacional



(b) Carregamento lateral

Figura 10 – Rotação do elemento torcional segundo o tipo de carregamento considerado (Park *et al.*, 2009)

Kim *et al.* (2014a) propuseram um novo modelo para MPE que engloba as rigidezes para os carregamentos gravitacionais e laterais. No método proposto,

distribui-se a rotação do elemento torcional entre a coluna e a viga equivalentes. Deram o nome a este método de Método do Pórtico Equivalente Unificado (MPEU).

O MPEU unifica o MPE desenvolvido por Jirsa e Corley (1970) no qual a estrutura é primordialmente submetida a um carregamento gravitacional e o MPEM desenvolvido por Park *et al.* (2009), no qual a estrutura é submetida primordialmente a carregamentos laterais. Uniu-se os métodos por meio de um termo  $\lambda_c$ , que é a relação entre o momento torsor das cargas laterais ( $T_L$ ) e o momento torsor das cargas gravitacionais ( $T_g$ ). A razão  $\lambda_c$  é um fator multiplicativo que opera na rotação média do MPEM. As duas rotações médias são somadas e se obtêm a rotação total:

$$\theta_{l,max} = \frac{L_2(1 - c_2/L_2)^2}{8CG} \lambda_c \quad (16)$$

$$\theta_{g,médio} = \frac{L_2(1 - c_2/L_2)^2}{18CE_c} \quad (17)$$

$$\theta_{l,médio} = \frac{L_2(1 - c_2/L_2)^2}{12CE_c} \lambda_c \quad (18)$$

$$\theta_{total} = \frac{L_2\alpha^2(2\alpha + 3\lambda_c)}{36CE_c} \lambda_c \quad (19)$$

$$T_{total} = \frac{1 + \lambda_c}{2} \quad (20)$$

$$K_{t,\lambda_c} = \frac{T_{total}}{\theta_{total}} = \frac{18CE_c(1 + \lambda_c)}{L_2\alpha^2(2\alpha + 3\lambda_c)} \quad (21)$$

A rigidez torcional para o MPE, MPEM e MPEU são mostradas na Figura 11:



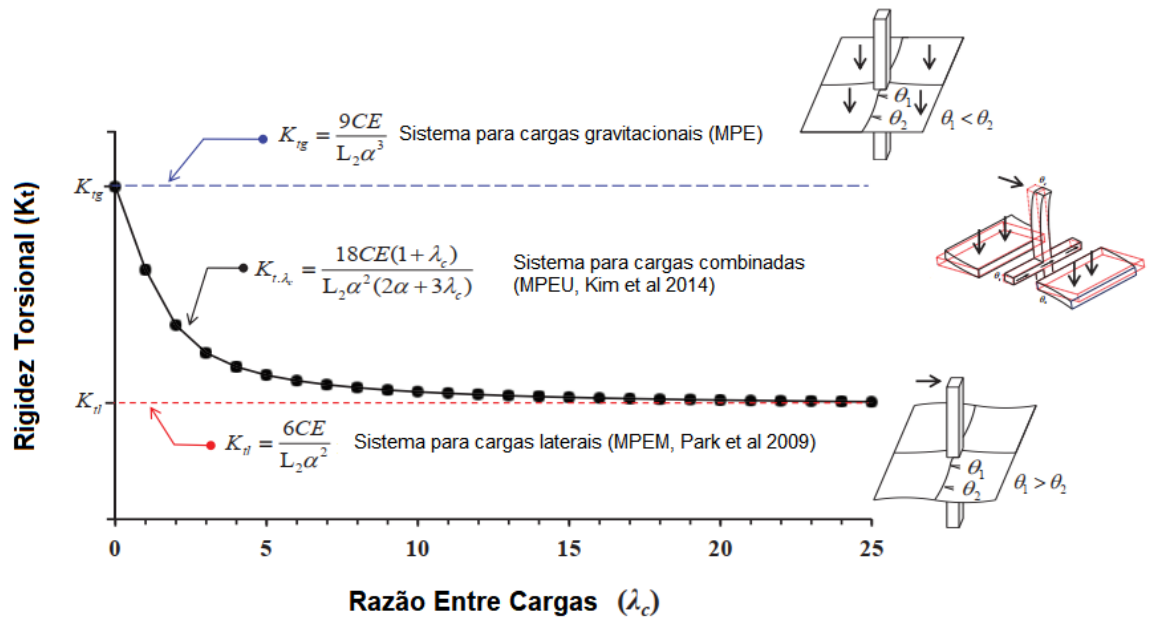


Figura 11 – Relação entre a rigidez torsional e proporção entre carga horizontal e gravitacional (Kim, 2014a)

Com o intuito de validar o MPEU, Kim *et al.* (2014b) utilizaram o ensaio experimental realizado por Hwang e Moehle (1993) e verificaram que para baixas cargas laterais, os outros métodos também apresentaram bons resultados. À medida que a razão entre cargas ( $\lambda_c$ ) aumentou, ou seja, a carga lateral aumentou, o MPEU apresentou os melhores resultados, mas devido à perda de rigidez proveniente da fissuração do concreto, ainda apresentava certa discrepância.

Existem diversos métodos para consideração da redução da rigidez do concreto devido a fissuração, na maioria das vezes, de difícil aplicação ou requerem valores que não estão disponíveis na fase inicial do dimensionamento. Buscando simplificar, Kim *et al.* (2014b) utilizaram dois fatores redutores de rigidez: um para viga equivalente, que considera as cargas gravitacionais iniciais, e outro para o elemento torcional, que considera as cargas laterais.

O primeiro fator já havia sido apresentado por Choi e Park (2003) e é apresentado na Equação (22). O segundo fator engloba a perda de rigidez da coluna, da laje e da ligação entre a laje e a coluna. Por meio da análise de 16 ligações de vãos internos e nove ligações externas encontradas na literatura, Kim *et al.* (2014) realizaram uma regressão linear e desenvolveram as Equações (23) e (24).

$$\eta_g = \frac{K_I}{K_0} = \frac{1}{1,7(V_g/V_c) + 1} \quad (22)$$

$$\eta_{l,int} = -0,004 \frac{M_{ub}}{T_{cr}} + 0,22 \quad (23)$$

$$\eta_{l,ext} = -0,073 \frac{M_{ub}}{T_{cr}} + 0,18 \quad (24)$$

Portanto, concluíram que o MPEU apresentou boas predições em alguns casos e superestimou outros. Isto se deve a grande quantidade de variáveis, como: acentuada redução da rigidez em estágios iniciais, escoamento do aço, esmagamento do concreto, fraco efeito da coluna no ensaio e danos acumulados devido a cargas cíclicas. Por ser um método fácil de aplicar e conferir bons resultados, o MPEU mostrou-se uma boa ferramenta para a realidade de dimensionamento.

## 1.2 Comportamento de estruturas de concreto protendido à torção

Como foi visto, o elemento torcional é fundamental para o desenvolvimento do MPE pois transfere as cargas à coluna por meio de momentos torsores. Neste subcapítulo, além de avaliar como essa transferência ocorre e quais fatores a influenciam, também será abordado como a inclusão da protensão altera o comportamento de vigas protendidas a fim de compreender como a protensão pode influenciar a rigidez do elemento torcional.

Fraser (1976) estudou o efeito da rigidez torcional da viga equivalente. Alguns autores já haviam proposto correções ao MPE por meio de vigas com larguras equivalentes, contudo, neste estudo, visou-se aprofundar a compreensão do efeito da rigidez à torção no elemento torcional. Foram introduzidos dois fatores de correção entre métodos analíticos e o MPE: fator ( $R_t$ ) que considera as características físicas e geométricas e o fator ( $c_t$ ) que consiste na razão entre o momento torsor na extremidade da viga e o momento torsor induzido por uma rotação unitária nesta mesma extremidade.

Percebeu-se que o método proposto pelo ACI superestimava a rigidez do elemento torcional e apenas uma pequena parcela do momento nodal aplicado foi transmitido por torção. Winter e Clough *apud* Fraser (1976) sugerem que o efeito da torção seja negligenciado, porém Fraser (1976) pontua que o estudo é pautado em teorias com materiais elásticos o que não é o caso do concreto armado, um material ortotrópico e que apresenta uma perda de rigidez significativa.

No Brasil, Cavalcanti (2005) estudou o modelo da Treliza Espacial Generalizada e seus parâmetros fundamentais para análise e dimensionamento de vigas à torção. Também estudou as rigidezes à torção da fase elástica e da fase pós-fissuração de vigas em concreto armado de resistências normal e de alta resistência.

Foram ensaiadas 16 vigas à torção pura de diversas classes de resistência do concreto sendo realizada a comparação entre modelos teóricos e experimentais dos diagramas momento torsor *versus* ângulo de rotação por unidade de comprimento. Concluiu-se que: a fase entre o momento torsor de fissuração e o momento torsor último pode ser aproximado a uma reta, a rigidez secante aumenta com o aumento da resistência do concreto e o modelo proposto apresenta uma melhor concordância em termos de rigidez tangente.

Por meio de uma modelagem computacional, Bernardo e Lopes (2007) conseguiram prever o comportamento de vigas de concreto armado sujeitas à torção. Consideraram vigas com resistência normal, de seção cheia e vazada, e explicaram os critérios de transição de uma fase para outra.

A transição da fase linear e o início da fissuração é muito rápida e difícil de ser observada. A fase de transição entre as fases lineares e não lineares é encontrada considerando o tipo de ruptura, frágil ou dúctil. Em rupturas dúcteis, assume-se que a fase linear estende-se até que haja escoamento de alguma armadura, longitudinal ou transversal. Em rupturas frágeis, deve ser identificado o esmagamento da biela do concreto.

Quando comparados os modelos teóricos e experimentais, notou-se uma redução da rigidez torcional, na fase elástica, de 70% devido a microfissuração do concreto, conforme Leonhardt (1979, v.4) já houvera mencionado. Este efeito é mais evidente em vigas de seção vazadas, devido a concentração de tensões próxima a face mais externa e a pouca redistribuição de esforços.

A fase intermediária do modelo adotado é descrita de forma satisfatória e a fase não linear pós-fissuração apresenta boa predição quanto ao momento último, mas não

apresenta uma curva concordante até o momento último. Concluiu-se que o modelo proposto apresentou bons resultados e pode ser utilizado em trabalhos acadêmicos e para dimensionamentos de estruturas sujeitas à torção.

Vigas de concreto armado sujeitas a um esforço de protensão longitudinal e submetidas à torção foram estudadas por Rodrigues (2011). As vigas eram de seção cheia e de seção vazada, com concreto de alta resistência e de resistência normal. O estudo teórico teve por objetivo incluir o efeito da protensão no modelo *Softened Membrane Model for Torsion* (SMMT), desenvolvido por Hsu e Jeng (2009) e validar o modelo proposto com modelos experimentais encontrados na literatura.

Após as análises, houve dificuldades de se chegar a conclusões definitivas devido a incompatibilidade de dados com a literatura pesquisada, poucos ensaios experimentais disponíveis, dificuldade de implementação computacional, adaptações das premissas básicas do modelo SMMT para o caso de análise de vigas sujeitas à torção, e complexa interdependência entre as deformações.

Taborda (2012) estudou vigas de concreto armado submetidos à torção e o efeito do confinamento no seu comportamento e resistência. Também visou aperfeiçoar o Modelo de Analogia da Treliça Espacial de Ângulo Variável (VATM), de modo a incluir a protensão.

O confinamento axial em vigas sujeitas à flexão, influencia principalmente nos Estádios II e III, após a carga de fissuração. No caso de confinamento axial em vigas sujeitas à torção percebe-se que devido ao surgimento de tensões de compressão, há um aumento da rigidez no primeiro momento. Contudo essas tensões contrapõem-se às deformações axiais da estrutura não permitindo que estas se alonguem livremente e haja perda de ductilidade. O efeito do confinamento axial da protensão longitudinal exterior é mais pronunciado no Estado II e se manifesta por um incremento da rigidez à torção secante no estado fissurado e em um ligeiro aumento do momento torsor resistente, dado a reduzida rigidez axial introduzida pela armadura de protensão.

Taborda (2012) concluiu que há um efeito favorável do estado de compressão induzido que tende a se opor ao estado de tração induzido pelo momento torsor. Entretanto, este efeito favorável tende a se estabilizar, uma vez que a capacidade resistente do concreto a compressão tende a esgotar mais rapidamente.

Ramos (2013) buscou caracterizar o comportamento não linear das lajes de concreto armado, por meio de um estudo da curva momento *versus* rotação. Esta

curva é definida em três estágios: fase linear, início da fissuração no concreto e início do escoamento do aço até a ruptura total. Esses resultados foram comparados a dados de análises experimentais. No primeiro estágio, somente a geometria e a resistência do concreto influenciam no comportamento. No segundo estágio, assumiu-se que somente o aço e suas características controlam o comportamento, mas não foi possível caracterizar relações independentes. No terceiro estágio, na plastificação, não foi possível avançar nos estudos devido à falta de ensaios.

Lopes *et al.* (2013) estudaram o comportamento de lajes de concreto armadas sujeitas à torção, onde focaram nas rigidezes da fase inicial ( $K_I$ ) não fissurada e da fase seguinte ( $K_{II}$ ) com presença maior de fissuras. Quando o momento fletor é a carga predominante, a relação entre  $K_I / K_{II}$  é igual a 3~5, mas quando o momento torsor passa a predominar,  $K_I / K_{II}$  é igual a 15~17. Também estudaram a relação momento torsor *versus* rotação para a fase não linear.

Foram ensaiadas nove lajes, seis quadradas e três retangulares, todas apoiadas em três pontas e a carga aplicada na ponta sobressalente. A resistência a torção não foi influenciada pelo tipo de malha usada, soldada ou fabricada *in situ*. A relação entre  $K_I / K_{II}$  variou de 12,6 a 26,4, com uma média de 17,8. Para análise de estado limite último em lajes de concreto armado, foi recomendado que se considere o coeficiente de Poisson igual a zero. Da mesma forma, para a análise no estado limite de serviço no qual a estrutura seja submetida predominantemente aos efeitos de torção deve-se verificar as deformações com coeficiente de Poisson igual a zero e utilizar uma rigidez no estado fissurado ( $K_{II}$ ) conservadora.

Tinh e Trung (2016) investigaram experimental e numericamente a melhora da rigidez à torção de lajes de concreto armado quando sujeitas à compressão. Tinh e Trung (2016) citam que se a rigidez torcional for ignorada em lajes isotrópicas, haverá um aumento de aproximadamente 25% dos momentos fletores atuantes. Também foi estudada a influência da taxa de armadura na rigidez torcional e concluíram que na fase pré-fissuração, não há dependência de quantidade de armaduras. Contudo, na fase pós-fissuração, a redução da rigidez torcional pode ser da ordem de 10 a 25 vezes segundo a quantidade de armadura.

### 1.3 Estudos recentes sobre dimensionamento em lajes lisas em concreto protendido

Carneiro (2015) analisou e dimensionou uma laje lisa protendida seguindo as recomendações da norma brasileira NBR 6118 (2014) e das normas americanas ACI 318 (2011) e ACI 423.3R (2005). Seu objetivo era avaliar diferentes formas de distribuição das cordoalhas na laje, a distribuição da armadura passiva nas faixas de laje, as diferenças nos métodos de análise do pavimento, o nível de protensão, a fissuração, o efeito da fissuração na análise dos deslocamentos e o percentual de perdas.

Foi concluído que a melhor distribuição de cabos é aquela que utiliza feixes em uma direção e distribuí os cabos na outra. O MPM ou MPS apresentou maior consumo de armadura passiva, cerca de 22% a mais quando comparado ao MAG. Os deslocamentos obtidos pelo MAG mostraram-se ligeiramente superior que o MPM. Como só houve fissuração em uma pequena região próxima ao pilar, a consideração da inércia bruta atendia satisfatoriamente.

Visando compreender melhor a tecnologia do concreto protendido e sua implementação, Nobre (2017) realizou um estudo comparativo entre diversos métodos de análise de lajes e a introdução das cordoalhas protendidas. Os métodos de análise foram o MPE, o MAG e o MEF. Foram comparadas as tensões normais, as deformações, a quantidade de armadura passiva e a disposição dos cabos.

Quanto as tensões normais, Nobre (2017) concluiu que os modelos mostraram boa convergência, quando comparados com as tensões admissíveis do concreto. Apesar da grande variação entre os modelos, nas regiões sobre o apoio do MAG e do MPE, ambos apresentaram concentração de tensões. No MEF, contudo, por meio do aumento de rigidez dos elementos da laje sobre o pilar pode-se atenuar essas concentrações.

O balanço do pórtico foi uma região que apresentou maiores diferenças quando comparado o MPE com os outros métodos. Outro ponto crítico foram as regiões de inflexão de deformada, o que por sua vez “cria” apoios fictícios que foram considerados como totalmente rígidos, mas não representa a realidade.

As deformações também apresentaram boa concordância e obedeceram aos critérios estabelecidos pelo ACI 318 (2014). As armaduras mostraram uma maior discrepância, principalmente no *software* que se baseia no MAG que utiliza as

armaduras mínimas segundo a NBR 6118 (2014). O layout foi estudado com cabos concentrados e distribuídos e as deformações obtidas apresentaram a mesma ordem de grandeza. A disposição dos cabos concentrados garantiu e aumentou a rigidez da estrutura. A deformação absoluta do caso com cabos distribuídos e com cabos concentrados foi de 8,4 mm e 7,5 mm, respectivamente.

Hodne (2018) estudou a disposição das cordoalhas engraxadas em lajes com bases em três modelos de laje, com cinco disposições diferentes e um exemplar sem protensão.

As deformações foram minimizadas quando os cabos estão concentrados, pois os esforços que surgem atuarão diretamente sobre o pilar. O autor afirma que para estruturas de vãos desiguais, a melhor distribuição é aquela na qual os cabos são concentrados na direção mais curta e distribuídos na direção mais longa.

O melhor *layout* quanto às tensões e deformações foi aquele onde os cabos foram concentrados nas duas direções. Por usar muitos feixes de cabos, o seu posicionamento torna-se mais simples e econômico. Entretanto, esta disposição requer um maior consumo de aço passivo no meio do vão, pois todos os cabos de aço estarão concentrados nas linhas de pilares.

#### 1.4 Estabilidade estrutural de edifícios de laje lisas em concreto protendido

A partir do desenvolvimento das lajes lisas protendidas, houve a tendência de se abdicar do uso da tradicional concepção estrutural reticulada com vigas e pilares. Por meio da protensão, a fissuração da laje é reduzida e as faixas de protensão da laje acabaram assumindo o papel das vigas. Naturalmente, a punção passou a ser considerada no dimensionamento da laje.

Os problemas de estabilidade global da edificação de múltiplos pavimentos de lajes lisas tornaram-se mais preponderantes e se deve usar núcleos rígidos ou paredes estruturais para contornar tais problemas. Todavia, comumente desprezam-se os efeitos de pórticos formados pelas faixas de protensão, seja por conservadorismo no dimensionamento ou por falta de estudos que estipulem os critérios.

Na análise estrutural, parte-se da situação indeformada da estrutura, mas é notável a ocorrência de esforços maiores que os previstos por uma análise linear que podem gerar instabilidade da estrutura. O parâmetro de instabilidade  $\gamma_z$ , introduzido por Franco e Vasconcelos (1991), avalia a sensibilidade da edificação em relação aos efeitos de 2ª ordem e serve como majorador aproximado para uma análise de 1ª ordem.

Segundo a NBR 6118 (2014), os esforços solicitantes devem ser majorados por um fator  $\gamma_f = \gamma_{f1} \times \gamma_{f3}$ . O fator  $\gamma_{f1}$  representa a variabilidade referente ao material e o fator  $\gamma_{f3}$  é igual a 1,1 e representa os efeitos de 2ª ordem. Desta forma, para o dimensionamento no Estado Limite Último (ELU), o fator  $\gamma_f$  já considera a não linearidade geométrica na análise estrutural.

De forma a representar todas as influências no cálculo dos esforços em uma estrutura, a NBR 6118 (2014) preconiza os dois tipos de não linearidades que precisam ser consideradas nos cálculos, a não linearidade física e a não linearidade geométrica.

A análise de 1ª ordem é realizada a partir da configuração geométrica não deformada, ou seja, as tensões e deformações são obtidas a partir das formulações clássicas da teoria da elasticidade. Uma vez que a configuração geométrica já está deformada, surgirão novas solicitações denominadas por efeitos de 2ª ordem sendo a causa da não linearidade geométrica.

A variação das propriedades físicas do material para um dado carregamento é usualmente incorporado na análise estrutural. Como a resistência à tração do concreto é em torno de 10% da resistência à compressão, tem-se a necessidade de trabalhar fora dos limites da proporcionalidade elástica do material. As propriedades do material alteram-se a cada novo incremento de carga, conferindo um comportamento não linear, resultado dos efeitos da fissuração, da fluência, da presença de armadura, etc.

Com a finalidade de simplificar a análise e o dimensionamento, a norma NBR 6118 (2014) propõe alterar diretamente o valor da rigidez secante para cada elemento da estrutura, de acordo com a sua relevância para a estabilidade global e com o tipo de carregamento. A NBR 6118 (2014) em seu item 15.3, torna obrigatória a consideração da não linearidade física nas análises de estruturas de concreto armado e no item 15.7.2 recomenda os valores para a rigidez secante em cada elemento



estrutural, ao considerar os efeitos de 2ª ordem globais em edifícios com quatro ou mais pavimentos:

- Lajes:  $(EI)_{sec} = 0,3 E_{ci} l_c$
- Vigas:  $(EI)_{sec} = 0,4 E_{ci} l_c$  para  $A_{s'} \neq A_s$   
 $(EI)_{sec} = 0,5 E_{ci} l_c$  para  $A_{s'} = A_s$
- Pilares:  $(EI)_{sec} = 0,8 E_{ci} l_c$

onde:  $l_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto e  $E_{ci}$  o módulo de deformação tangencial inicial do concreto.

A NBR 9062 (2017), em seu Anexo A, sugere que de maneira aproximada e simplificada, para análise de 2ª ordem em estruturas de concreto pré-moldado de moderada deslocabilidade ( $\gamma_z < 1,3$ ), adote-se os seguintes valores de rigidez secante:

- Lajes:  $(EI)_{sec} = 0,25 E_{ci} l_c$
- Vigas CA:  $(EI)_{sec} = 0,5 E_{ci} l_c$
- Vigas CP:  $(EI)_{sec} = 0,8 E_{ci} l_c$
- Pilares:  $(EI)_{sec} = 0,4 E_{ci} l_c$  para estruturas com ligação viga-pilar articulada com um pavimento ou galpões  
 $(EI)_{sec} = 0,55 E_{ci} l_c$  para estruturas com ligações semirrígidas com até quatro pavimentos  
 $(EI)_{sec} = 0,55 E_{ci} l_c$  para estruturas com ligações semirrígidas com cinco ou mais pavimentos  
 $(EI)_{sec} = 1,0 E_{ci} l_c$  para estruturas com ligações rígidas (conforme 5.1.2.8), seguir a NBR 6118

Ocorre que, no caso de vigas e lajes protendidas, o nível de fissuração destes elementos é, em princípio, consideravelmente menor que o de um elemento de concreto armado. Assim, pode-se considerar a possibilidade de trabalhar com valores maiores para redução da rigidez, do que as indicações das normas.

## 2 DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO

Os programas de elementos finitos resolvem muitos dos problemas de alta complexidade que são encontrados na engenharia. O avanço dos computadores está diretamente relacionado com a velocidade da solução e, conseqüentemente, da precisão auxiliando grandemente na tomada de decisão. Neste trabalho, utilizou-se o programa Abaqus (2014) para desenvolvimento do modelo numérico de uma laje lisa protendida e para a realização de estudos de casos que avaliassem separadamente, alguns dos efeitos no comportamento estrutural.

Os ensaios experimentais permitem que se reproduza em ambiente controlado o comportamento das estruturas ou parte delas. Muitas vezes, devido ao alto custo e à grande demanda de tempo para executar todos os experimentos necessários, uma solução adotada é a realização de modelagem numérica. Por meio de um modelo experimental, valida-se o modelo numérico que possibilita a realização de uma análise paramétrica.

Os ensaios feitos por Nawy *et al.* (1976) foram utilizados para validar o modelo numérico que seria usado como base para os casos de estudo dos fatores que influenciam na rigidez de lajes lisas protendidas. Como há poucas referências sobre a modelagem numérica tridimensional de lajes protendidas, foram desenvolvidas e aplicadas as melhores abordagens pertinentes ao modelo em questão. Muitas das decisões tomadas neste estudo serão expostas nesta seção.

Portanto, o objetivo principal deste capítulo é elucidar as diretrizes para a modelagem numérica da laje de referência, bem como compreender os comportamentos das fases pré e pós fissuração da estrutura de concreto.

### 2.1 Descrição do modelo

Este trabalho seguiu uma abordagem numérica através da qual se buscou validar o modelo numérico desenvolvido segundo o modelo experimental de Nawy (1976). Através da modelagem numérica, 24 outros modelos foram desenvolvidos para estudos de casos. O modelo experimental de Nawy (1976), partiu de um protótipo

de laje lisa protendida que foi instrumentada a fim de monitorar seus deslocamentos. Estes dados serviram para validar o modelo numérico principal a fim de que se obtenha resultados confiáveis.

### 2.1.1 Configuração inicial

O modelo numérico tem por objetivo representar os comportamentos que acontecem em um ensaio da maneira mais fidedigna possível. Por conseguinte, é necessário que os parâmetros sejam bem estabelecidos.

Sendo assim, modelou-se apenas um quarto de uma laje quadrada de 152,4 cm para que a eficiência computacional fosse aprimorada; da mesma forma ocorreu com o pilar central. Os fios de protensão foram lançados em furos especialmente estruturados para este fim e ancorados nas extremidades por meio de placas de ancoragem ligadas a laje de concreto. Por fim, aplicou-se a protensão nos fios e carregou-se a laje de maneira uniforme na face oposta ao pilar.

### 2.1.2 Modelo experimental

Os aprimoramentos da tecnologia da protensão em duas direções em sistemas de lajes lisas avançou bastante desde o seu surgimento; uma das áreas que mais ganhou força foram as paredes *tilt-up* a partir na década de 1950. Na época em que foi escrito o ACI 318 (1971), este só apresentava especificações muito genéricas. Esse fator motivou Nawy e Chakrabarti (1976) a estudarem teórica e experimentalmente, as deformações em um painel de laje com pilar centrado, submetida a um carregamento gravitacional uniforme.

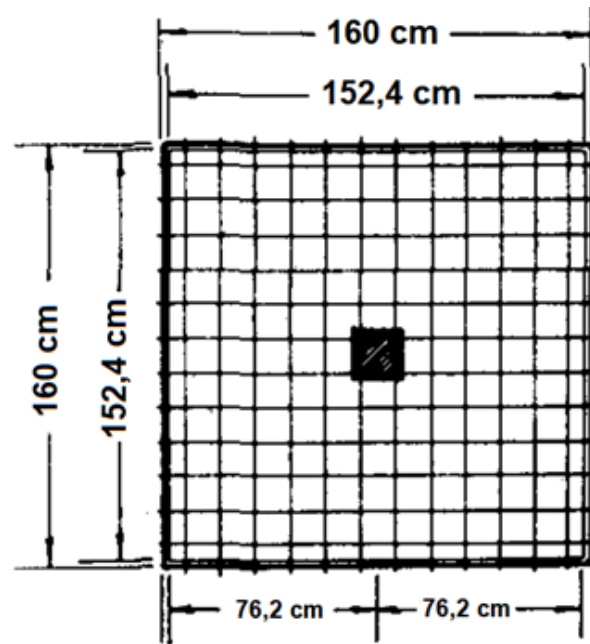


Figura 12 – Dimensões da laje ensaiada por Nawy (1976).

O modelo experimental (RP-1) possui fios de protensão distribuídos uniformemente nas duas direções e todas as curvaturas dos fios são parabólicas. Como será observado adiante, este fato é de grande valia para a transformação da protensão em uma carga equivalente uniforme. Ademais, por não haver armadura, a influência somente da protensão no comportamento da estrutura, torna-se mais evidenciada e, assim, o processo de modelagem menos complicado.

Para este modelo experimental, o tipo de cimento foi o CP-V (Tipo III, pelo ACI) e a dimensão máxima do agregado era 9,5 mm.

Tabela 1 – Características físicas do modelo experimental <sup>1</sup>

Laje	Tempo até o Ensaio [dias]	$f_c$ [MPa]	Tração Indireta [MPa]	Módulo de Ruptura [MPa]	Slump [mm]	Módulo de Elasticidade [MPa]
RP-1	9,25 (6,25)	39,51 (27,56)	3,00	3,76	89	29737 (24132)

O fio de protensão tem diâmetro de 3,05 mm, sendo do tipo de relaxação normal (RN). Porém, a especificação do fabricante recomendava submeter o fio a uma

<sup>1</sup>Valores entre parênteses ocorreram no ato da protensão.

temperatura constante de 500°C por trinta minutos e, por fim, deixar resfriar naturalmente para que se torne um fio de relaxação baixa (RB). A tensão última do fio foi especificada em 1953,3 MPa, a tensão de escoamento em 1875,4 MPa no “offset” de 0,2% e o limite de proporcionalidade de 1544,4 MPa. O fio foi inserido com graxa em um tubo plástico de diâmetro de 3,6 mm para que fosse eliminada a aderência com o concreto. O módulo de elasticidade é de 206,8 GPa.

A laje é de lados quadrados com 160 cm e espessura média de 3,4 cm. A distância entre bordos é de 152,4 cm (Figura 12). Há uma célula de carga central com um macaco hidráulico que representam uma coluna de dimensões de 10,2 cm x 10,2 cm.

A laje foi posicionada no pórtico de ensaio após a protensão e a célula de carga foi posicionada no centro da laje. O macaco hidráulico central, portanto, aplica uma força suficiente para eliminar o deslocamento central proveniente da protensão. A partir de então, para cada incremento do carregamento, media-se a carga por meio da célula de carga de forma a compensar os deslocamentos no meio da laje, os quais deveriam sempre ser nulos. As leituras eram realizadas ao fim de cada incremento de carregamento.

## 2.2 Condições de contorno

A carga uniforme foi aplicada no modelo experimental por meio de uma bolsa de borracha inflada com água (Figura 13). Assim, assegurou-se que a carga fosse aproximada o máximo possível de uma carga uniformemente distribuída.

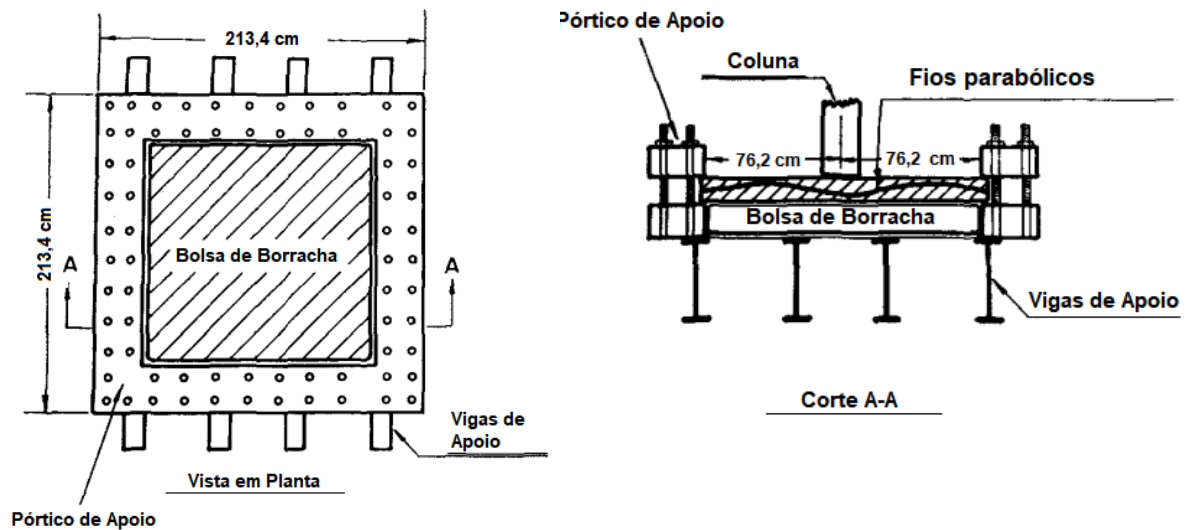


Figura 13 – Condição de contorno das lajes (Nawy, 1976).

De forma a representar os apoios do ensaio experimental, adotou-se que as bordas inferiores e superiores do modelo numérico tivessem seus deslocamentos verticais nulos (Figura 14). Com isso, representou-se de forma adequada o pórtico de reação no qual as extremidades da laje estavam apoiadas.

Como o modelo numérico apresenta dupla simetria, optou-se pelo uso do artifício de simetria nas duas direções para redução do custo computacional, sendo necessário modelar somente um quarto do modelo real.

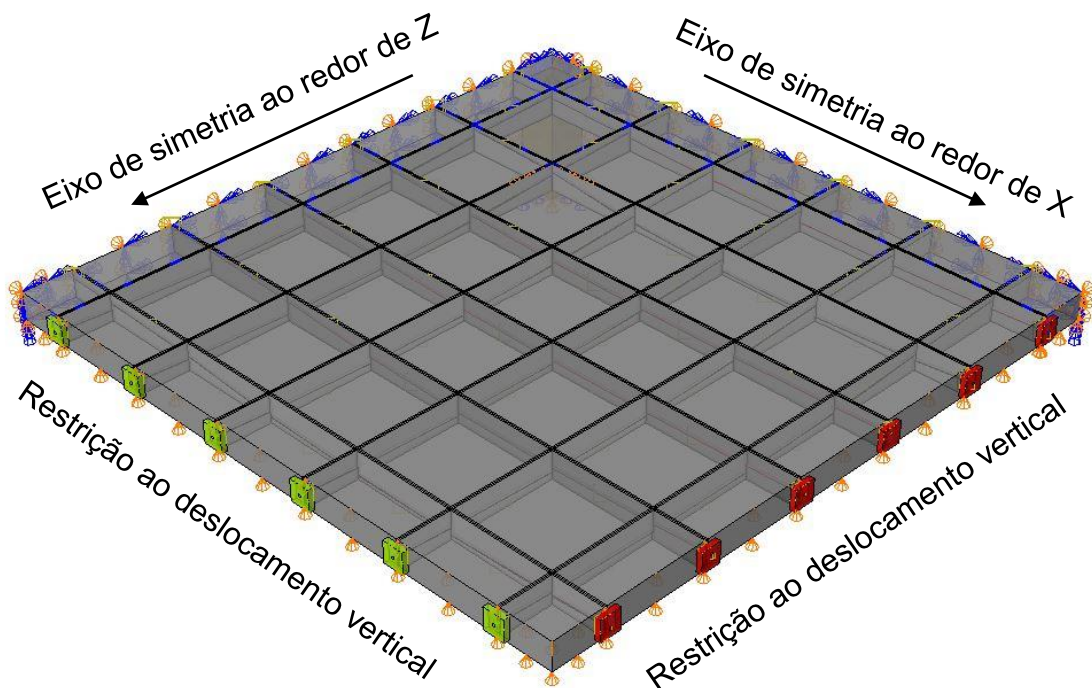


Figura 14 – Condições de contorno do modelo numérico

### 2.3 Protensão

A posição média dos fios estão conforme a Figura 15. O coeficiente  $\beta$  é a proporção entre o vão  $L$  e o ponto de inflexão entre curvaturas. O coeficiente  $\alpha$  é a proporção entre o eixo central da coluna e o ponto de curvatura máxima. O braço de alavanca máximo da laje na região sobre o apoio e no meio da laje é de 0,95 cm.

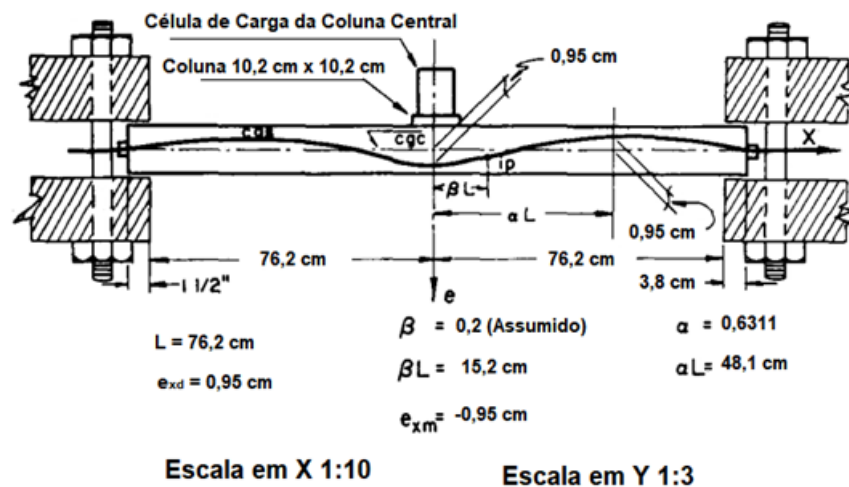


Figura 15 – Posição média do fio (Nawy, 1976).

Entretanto, durante o lançamento dos fios no modelo numérico, Nawy *et al.* (1976) não apresentaram as excentricidades de cada fio de protensão utilizados no ensaio experimental, mas citaram apenas a posição média dos fios (Figura 15). Com isso, este fato dificultou a modelagem; pois, o mesmo fio, ao ser lançado em um sentido cruzava, com os fios do outro sentido. Consequentemente, existiram diversas interferências entre fios perpendiculares, fato que não é permitido pelo *software* de análise.

Portanto, a estratégia adotada para contornar tal dificuldade foi lançar todos os fios de um mesmo sentido (Eixo X) com a excentricidade média (Figura 16) informada por Nawy *et al.* (1976), caracterizados pelos fios de cor verde na Figura 16. No entanto, no outro sentido (Eixo Z), os fios foram lançados de forma que as suas posições não gerassem interferência entre elementos, nem problemas de malha. Manteve-se os pontos de inflexão e se controlou as suas posições para manter o traçado parabólico. Ao fim do lançamento, por meio da teoria das cargas equivalentes,

corrigiu-se as tensões iniciais de protensão nos fios, para que apresentassem a mesma carga equivalente total média.

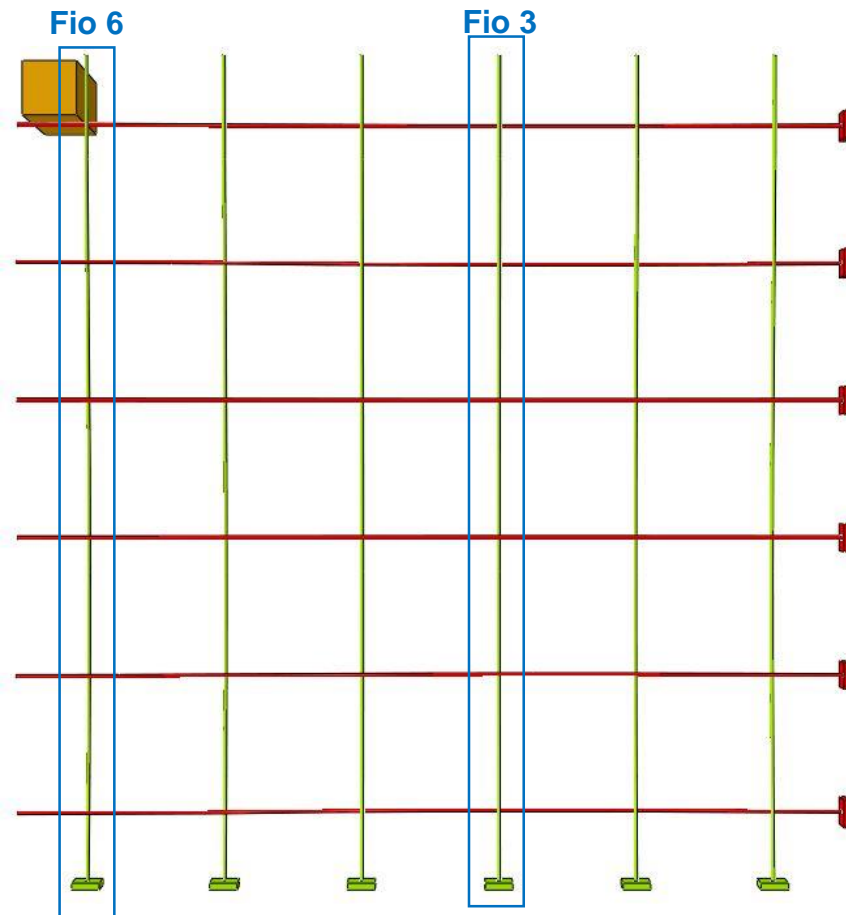
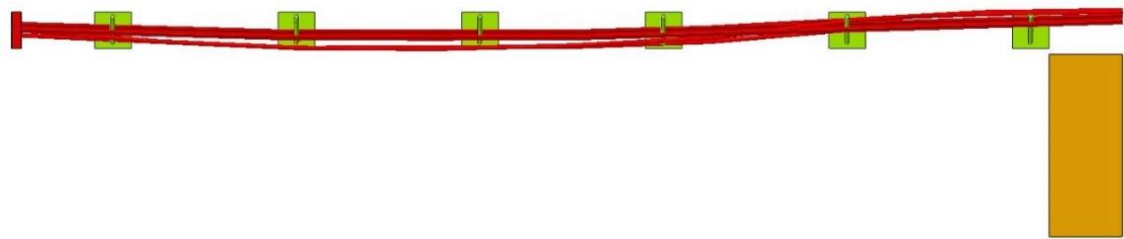


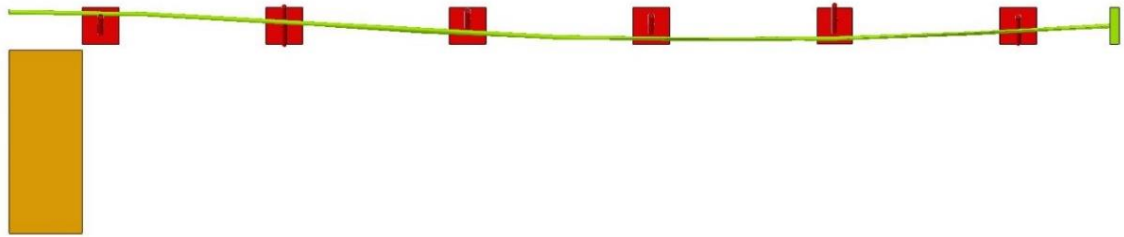
Figura 16 – Vista em planta dos fios de protensão

Na Figura 17, fica evidente que estes fios (vermelhos) não se encontram na mesma altura. Para simular a operação da protensão nos fios, foi aplicada uma variação de temperatura. O coeficiente de expansão térmica do fio é igual a  $10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ . A variação de temperatura aplicada aos fios de posições iguais (Eixo X) foi de 533,35  $^{\circ}\text{C}$  e a tensão esperada conforme as fórmulas era de 1.065,3 MPa. Por sua vez, a variação de temperatura aplicada nos fios de posições variáveis (Eixo Z) foi de 603,35  $^{\circ}\text{C}$ , a tensão esperada conforme as fórmulas era de 1.065,3 MPa. Para cálculo da temperatura aplicada ver ANEXO A.

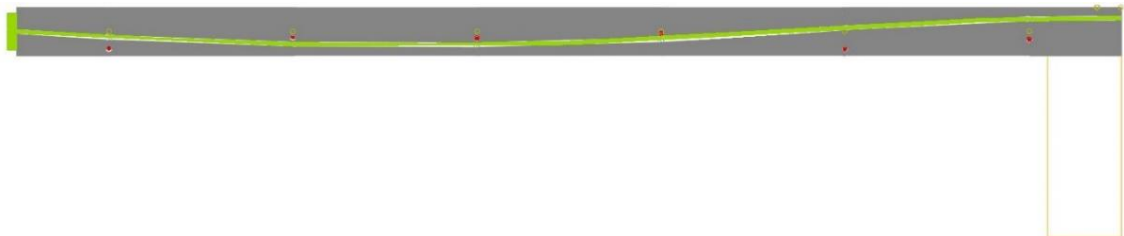




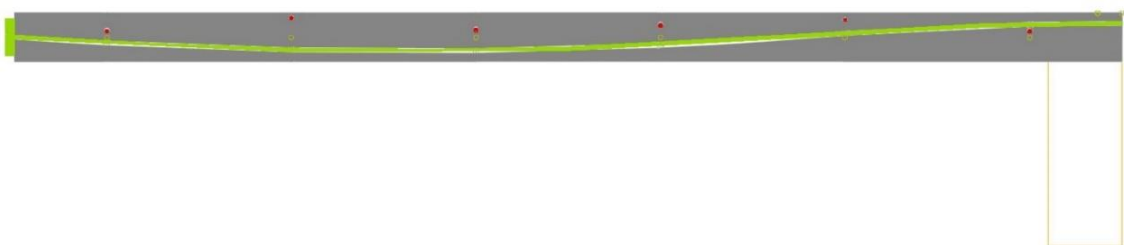
(a) Vista longitudinal dos Fios do Eixo Z



(b) Vista longitudinal dos Fios do Eixo X



(c) Corte longitudinal - Fio 3



(d) Corte longitudinal - Fio 6

Figura 17 – Posições dos fios de protensão

Na Tabela 2, é possível ver as informações relativas a protensão para o modelo experimental (Nawy *et al.*, 1976) e o último *step* de protensão no modelo numérico de referência. Nela pode-se observar a concordância na fase de protensão entre os modelos experimental e numérico. O único parâmetro que apresentou uma discrepância maior foi o deslocamento causado pela protensão. Contudo, a ordem de grandeza dos deslocamentos torna esta diferença de baixa relevância, não descaracterizando a compatibilidade entre os modelos.

Tabela 2 – Dados dos modelos experimental e numérico

Laje	Protensão inicial [MPa]	Protensão final [MPa]	Força inicial de protensão [kN]	Força final de protensão [kN]	Tensão média no concreto [MPa]	Deslocamento devido à protensão [mm]
RP-1	1.103,2	1.065,3	8,05	7,77	1,77	0,79
Numérico	1.109,1	1.062,0	8,02	7,74	1,75	0,35

## 2.4 Material

Existem diversos modelos para descrever o comportamento do concreto atualmente, contudo foi adotado o modelo de fissuração *Concrete Damage Plasticity* (CDP) por ser o modelo mais completo implementado no Abaqus (2014) e descrever melhor o padrão de fissuração, apesar de ser necessário mais parâmetros a serem incluídos.

Souza (2018) realizou uma série de estudos a fim de comparar o método proposto por Alfarrah *et al* (2017) com outros métodos já existentes e apresentou excelente convergência com o modelo de Alfarrah *et al* (2017). Portanto, definiu-se este método para modelagem do concreto para compressão, tração, dano à compressão e dano à tração. Este modelo foi adotado pois apresenta menor sensibilidade a variação do tamanho da malha, requerendo apenas valores que os ensaios experimentais escolhidos já forneciam. Este modelo de concreto foi desenvolvido com base no modelo plástico de dano do concreto utilizado pelo Abaqus (2014) e não requer calibração com ensaios experimentais para sua caracterização (Alfarrah, 2017).

### 2.4.1 Concrete Damage Plasticity Model (CDPM)

O *Concrete Damaged Plasticity Model* (CDPM) é destinado à análise de estruturas de concreto ou outros materiais frágeis e é útil para quaisquer combinações de carga, incluindo carregamento cíclico, estático e dinâmico. Ele também é capaz de

representar o comportamento inelástico completo do concreto quando submetido à compressão e à tração, incluindo as características de dano. Na compressão, a falha do concreto tende a mostrar um comportamento mais relacionado a plasticidade e na falha a tração fica mais evidenciado o efeito do dano.

A característica do CDPM é tornar irreversíveis os efeitos dos danos associados aos mecanismos de falha do concreto quando sujeitos a baixas tensões confinantes e descrever a degradação progressiva das propriedades mecânicas. Segundo Alfarrah *et al.* (2017), o CDPM apresenta um bom desempenho em estados de tensão uniaxial e biaxial, não devendo ser usado em caso de significativas tensões de compressão triaxiais.

Com relação às características de plasticidade, o comportamento do concreto depende de quatro parâmetros constitutivos ( $\sigma_{b0}/\sigma_{c0}$ ,  $\psi$ ,  $\epsilon$  e  $K_c$ ). Estes parâmetros são a razão entre as resistências no estado biaxial e uniaxial ( $\sigma_{b0}/\sigma_{c0}$ ), o ângulo de dilatância ( $\psi$ ), a excentricidade ( $\epsilon$ ) e a relação entre a magnitude da tensão desviadora de tração uniaxial ( $K_c$ ) e a de compressão uniaxial. Segundo o *Model Code* (2010), é possível encontrar a resistência à compressão biaxial em função da resistência à compressão no estado uniaxial.

O programa Abaqus (2014) adicionou uma técnica de regularização visco-plástica ao CDPM. Esta permite que as tensões fiquem fora da superfície de escoamento usando o parâmetro de viscosidade  $\mu$ . Este parâmetro relativo a viscosidade reduz as dificuldades de convergência provenientes do comportamento *softening* e da degradação da rigidez.

Souza (2018), ao fazer uma análise extensiva de diversos modelos de concreto e sobre os coeficientes do CDPM fortalece a recomendação para o uso dos valores que estão apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetro do modelo do concreto

$\sigma_{b0}/\sigma_{c0}$	$\psi$	$\epsilon$	$K_c$	$\mu$
1,16	38°	0,1	0,667	0

### 2.4.2 Lei constitutiva de compressão uniaxial do concreto

A não-linearidade do comportamento do concreto à compressão pode ser descrita por meio de uma curva tensão *versus* deformação ( $\sigma_c \times \epsilon_c$ ). Esta curva pode ser dividida em três partes principais.

Na primeira fase, até aproximadamente 40% da resistência máxima do concreto, o concreto comporta-se integralmente de forma linear. Na segunda etapa do carregamento até a carga de resistência máxima, o comportamento apresenta um desenvolvimento não linear devido a microfissuração do concreto.

Quando a tensão de compressão atinge a resistência máxima do concreto à compressão ( $f_{cm}$ ), é iniciada a perda de resistência do concreto, ou seja, a tensão é reduzida, porém a deformação continua aumentando. Isto ocorre devido à perda de rigidez, provocando um descarregamento até ser atingida uma deformação limite, a partir da qual é considerado que o concreto perdeu sua capacidade resistente.

Essas três fases podem ser melhor observadas na Figura 18.

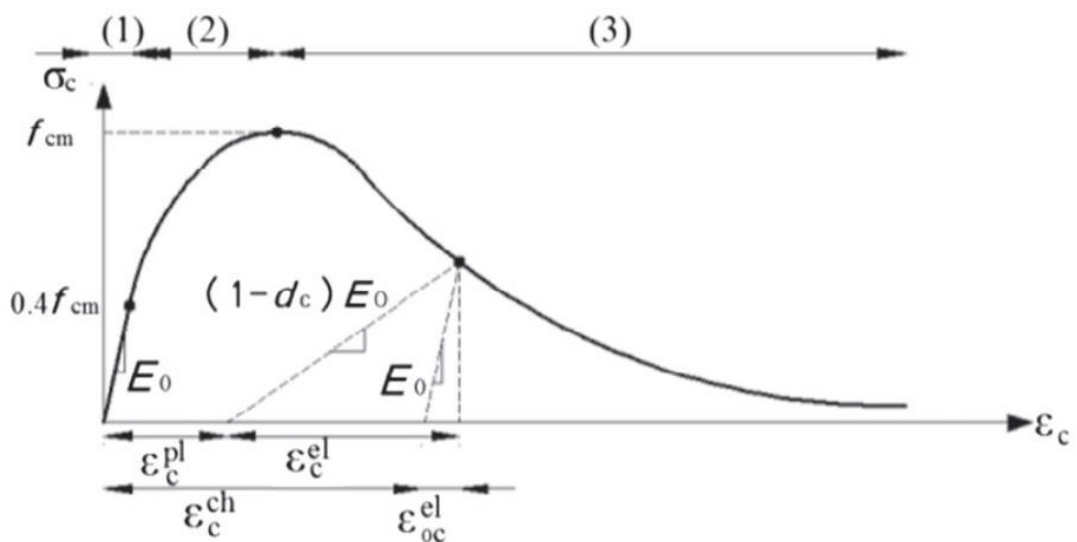


Figura 18 – Comportamento da curva tensão *versus* deformação à compressão segundo Alfarrah *et al* (2017)

Na Figura 19-a, pode-se observar o mesmo padrão de comportamento descrito pelo modelo teórico de Alfarrah *et al* (2017) ao utilizar os valores adotados na Tabela 3 na modelagem do concreto. Primeiro uma fase linear elástica, posteriormente uma

ligeira perda de rigidez até a carga de ruptura, e, por fim, o comportamento pós-fissuração de perda de rigidez até que o elemento esteja submetido a uma carga de compressão suficientemente baixa. Na Figura 19-b, percebe-se que o dano desenvolve-se de maneira acelerada até uma parcela de deformação plástica, até que ele tenda a 1,0 (um).

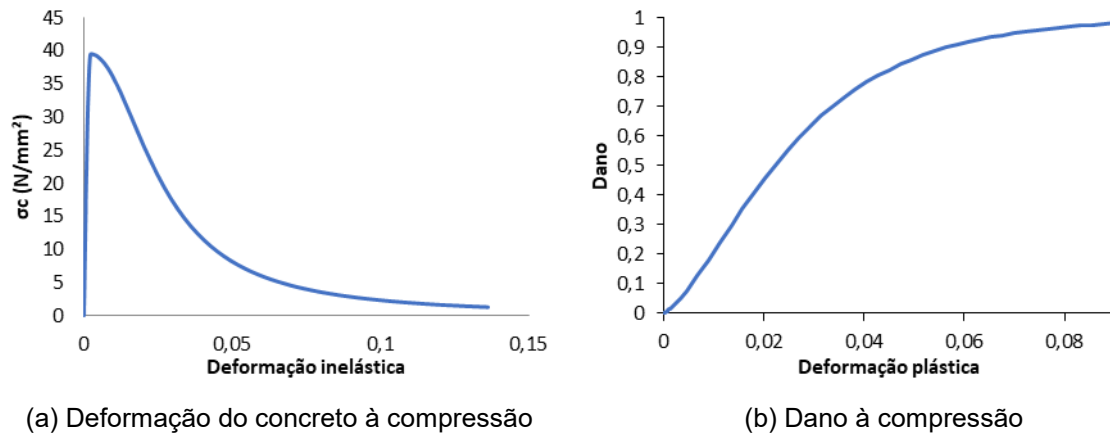


Figura 19 – Comportamento do concreto à compressão

#### 2.4.3 Lei constitutiva de tração uniaxial do concreto

Diferentemente do comportamento a compressão, a curva do modelo do material apresenta um trecho linear ascendente, até que se atinja uma tensão limite ( $f_{tm}$ ). Como observado na Figura 20, após o pico de fissuração, o concreto inicia uma perda de resistência, porém continua aumentando sua deformação, até que seja atingida a deformação máxima de dano a tração e o elemento em questão deixe de contribuir para a matriz de rigidez do modelo numérico.

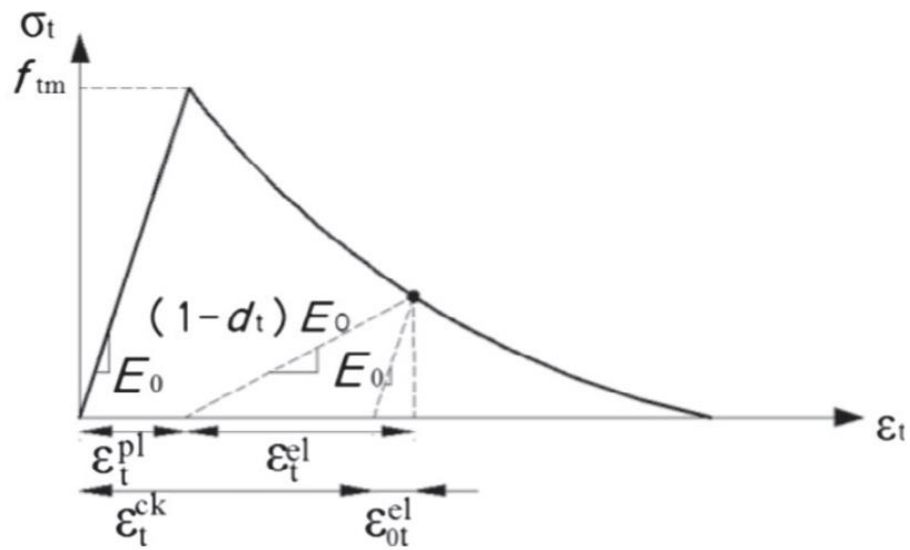
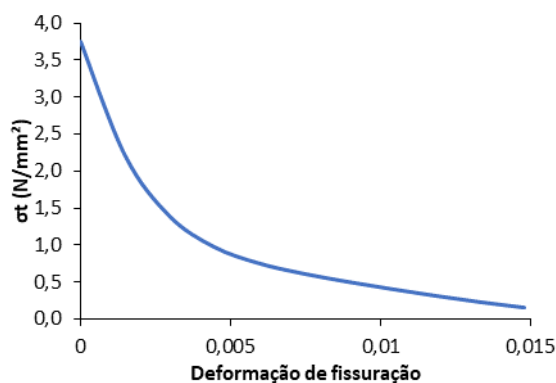
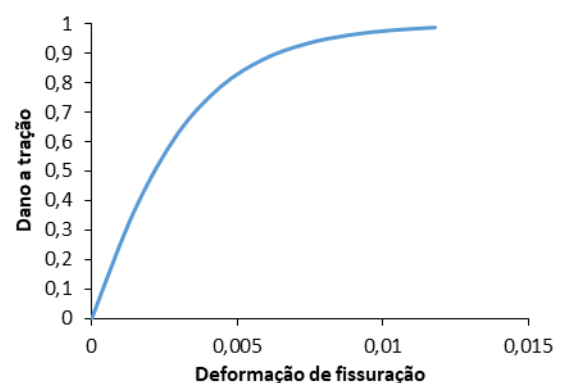


Figura 20 – Comportamento à tração proposto por Alfarrah *et al* (2017)

Na Figura 21-a, vê-se somente a deformação de fissuração do comportamento a tração do modelo de concreto implementado no programa. Há uma queda acentuada da resistência à tração e, depois da transição, a curva tende a uma tração muito próxima de nulo. Já na Figura 21-b, percebe-se que diferentemente do dano a compressão, esta curva apresenta, uma curva mais linear no início do dano até que ela tenda 1,0 (um).



(a) Deformação do concreto à tração



(b) Dano à tração

Figura 21 – Comportamento do concreto à tração

#### 2.4.4 Lei constitutiva uniaxial do aço de protensão

Para a modelagem do fio de protensão foi utilizado uma curva bilinear onde o primeiro trecho representa a fase elástica do fio e o segundo, com uma rigidez muito inferior, representa o escoamento do material.

O comportamento bilinear do fio mostra uma fase elástica guiada conforme o módulo de elasticidade do aço e tensão de escoamento de 1875 MPa. Uma segunda fase, com uma reta mais abatida que cordoalhas, que é a fase após o escoamento do aço. Considerou-se um encruamento de 78,8%.

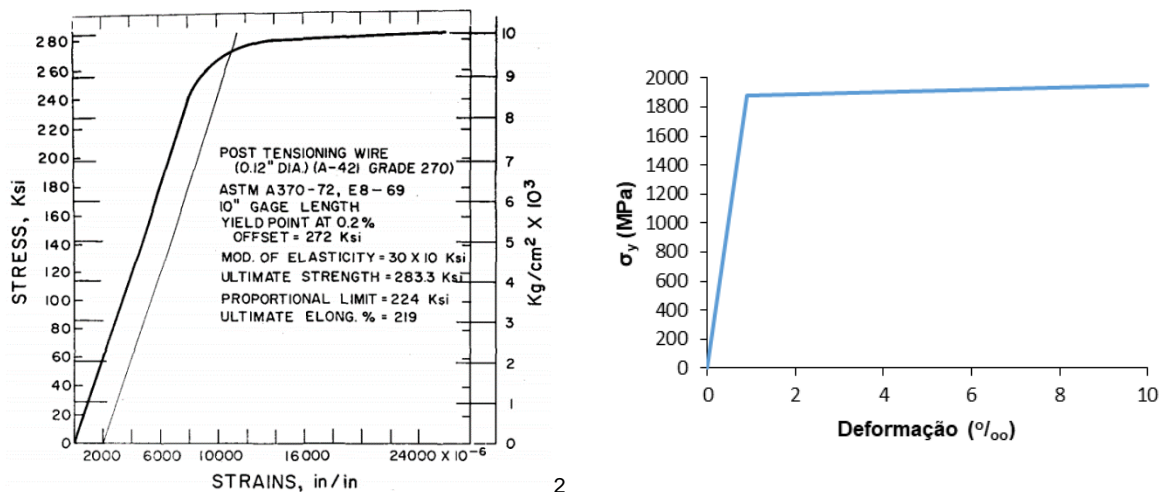


Figura 22 – Comportamento do aço de protensão (Nawy, 1976)

#### 2.5 Análise não linear

Foi utilizado para análise em elementos finitos, o programa Abaqus (2014), versão 6.14, para a execução das análises do modelo desenvolvido por Nawy *et al.* (1976). Devido as grandes não linearidades presentes na modelagem de lajes protendidas, o programa convencional para modelagens numéricas em elementos

<sup>2</sup> 1 ksi = 6,89476 MPa

finitos, Abaqus *Standart*, não terminaria as análises em tempo hábil ao acrescentarem-se as não linearidades do modelo.

O modelo de Nawy *et al.* (1976) no Abaqus *Standart*, só apresentava avanços significativos se não ativasse a não linearidade geométrica. Quando esta era ativada, o incremento de carga era da ordem de  $10^{-8}$ , o que inviabilizava o prosseguimento do modelo por não ser possível fazê-lo em tempo hábil.

Devido à grande quantidade de contatos presentes no modelo, não linearidades físicas e não linearidade geométrica, optou-se em realizar uma análise *quasi-estática* explícita. Este tipo de análise é um procedimento dinâmico, originalmente desenvolvido para eventos de impacto de alta velocidade. O problema é resolvido através do equilíbrio dinâmico, onde a massa e a inércia são fundamentais para os resultados.

A aplicação de análises dinâmicas explícitas para modelar eventos *quasi-estáticos* deve levar em consideração a impossibilidade de modelar computacionalmente este evento em seu tempo natural. Seriam necessários milhões de incrementos de tempo, sendo preciso reduzir o tempo de aplicação de maneira que não prejudique o resultado. Assim o aumento da velocidade do processo de forma artificial é necessário para que se atinja uma solução econômica.

Para que se obtenha bons resultados a um custo computacional viável e que mantenha as características *quasi-estáticas* da análise, existem técnicas numéricas que ajudam na resolução do processo, tais quais: *mass scaling*, tempo de aplicação da carga e balanceamento de energia.

Para calibração dos modelos analisados na análise explícita, fez-se uso do *mass scaling*, um aumento artificial da densidade do material, que garante um aumento do incremento do tempo necessário para a análise do modelo. Este artifício, quando usado adequadamente, permite reduzir drasticamente o tempo de processamento sem comprometer a qualidade dos resultados.

A redução do tempo de aplicação da carga também é uma forma para reduzir o custo computacional. Entretanto, deve-se notar que quanto menor o tempo de carregamento, mais rápida será a análise e maiores serão as influências dinâmicas. Por exemplo, caso um modelo com deslocamento prescrito a uma velocidade de 1 mm/s tenha esse valor alterado para 10 mm/s, a análise será 10 vezes mais rápida (Abaqus, 2014).



Existem diversos estudos que relacionam as energias à qualidade da solução. As principais energias de referência foram: energia cinética (ALLKE), energia interna (ALLIE) e energia artificial (ALLAE) (Abaqus, 2014). Quando a energia cinética total da estrutura deformada se mantiver em torno de 5% a 10% da energia interna do modelo na maior parte da aplicação do carregamento, pode-se desprezar o efeito dinâmico durante a maior parte da resposta estrutural (Abaqus, 2014). A energia artificial foi medida para que fosse evitado erros provenientes de *shear locking*, buscando mantê-la sempre abaixo de 1% a 2% da energia interna (Abaqus, 2104).

Como mostrado na Figura 23 abaixo, pelo controle feito entre as energias cinética e interna, é possível notar que ao longo da maior parte no carregamento (82%) a diferença permanece abaixo de 10%. Entretanto, aproximando-se do fim da aplicação de carga, o nível de fissuração aumenta e gera uma crescente redução da rigidez da estrutura. Com um modelo menos rígido, a uma aplicação da carga constante, o modelo *quasi-estático* resultará em um aumento da energia cinética.

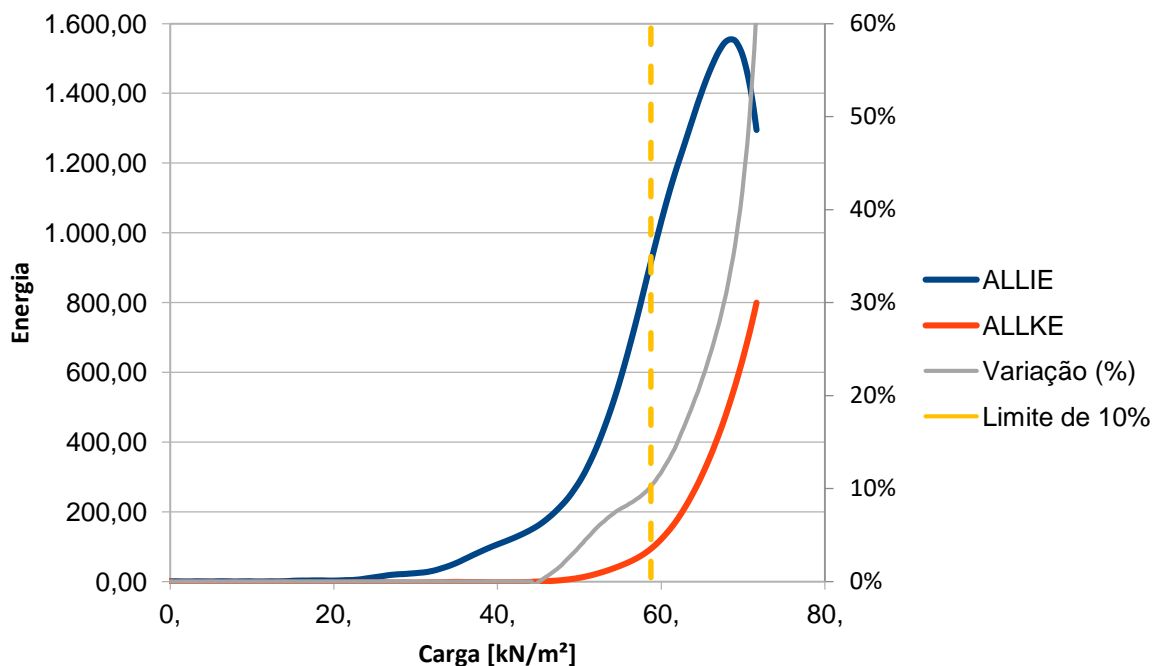


Figura 23 – Energia interna (ALLIE) versus energia cinética (ALLKE) do modelo de referência

Ao se comparar as curvas entre a energia cinética (ALLKE) e a energia interna (ALLIE), pode-se considerar que o modelo continua sendo válido até a inversão da

energia interna. A partir daí, a fissuração já é generalizada e se está muito próximo do fim da análise do modelo numérico.

## 2.6 Contatos e malha

Na ancoragem de fios, cordoalhas e cabos ocorrem diversas interações entre estes elementos e os elementos de fixação (cunhas e os blocos). A cunha prende-se ao fio, e estas são travadas pelo bloco. Desta forma, para simular a interação entre a cunha, a placa de ancoragem e o fio, modelou-se o contato entre a ancoragem e o fio com o *constraint* do tipo “*Tie*”. Por haver uma associação entre os nós das superfícies associadas, não houve prejuízos em retirar os movimentos relativos entre estes elementos, visto que as perdas de protensão relacionadas a acomodação são baixas e o seu efeito foi computado na redução da tensão de protensão.

Da mesma forma, devido às pequenas dimensões da chapa de ancoragem, modelou-se o contato entre este elemento e a laje com o *constraint* do tipo “*Tie*”. Este efeito apresentou baixa influência no comportamento da estrutura, alterando localmente de maneira suave, a região de concreto imediatamente após a ancoragem.

Para simular a interação entre o fio engraxado, a bainha e a laje, sendo desprezado o atrito entre o fio e a bainha, utilizou-se o contato do tipo *Penalty Contact* com as propriedades de contato normal *Hard Contact (Default)*. Esta propriedade não permite que os nós de uma superfície ultrapassem até o limite estabelecido, a superfície de contato. Já para o contato tangencial usou-se a propriedade tipo *Frictionless*, que permite impor um coeficiente de fricção entre as superfícies igual a zero (0).

O tipo de elemento finito utilizado foi o hexagonal de integração reduzida, C3D8R. Todos os elementos do modelo utilizaram este mesmo tipo de elemento finito. O tamanho médio dos elementos para o modelo mais refinado foi de 5 mm, 4,5 mm, 4,8 mm e 4 mm, para respectivamente, a laje, os fios, as ancoragens e o pilar.

O tamanho do problema para o modelo numérico mais refinado foi de 425.109 elementos com 477.060 nós, gerando 1.431.180 equações. Para análise ser finalizada, eram necessários em torno de 10 dias a 12 dias (Figura 24).

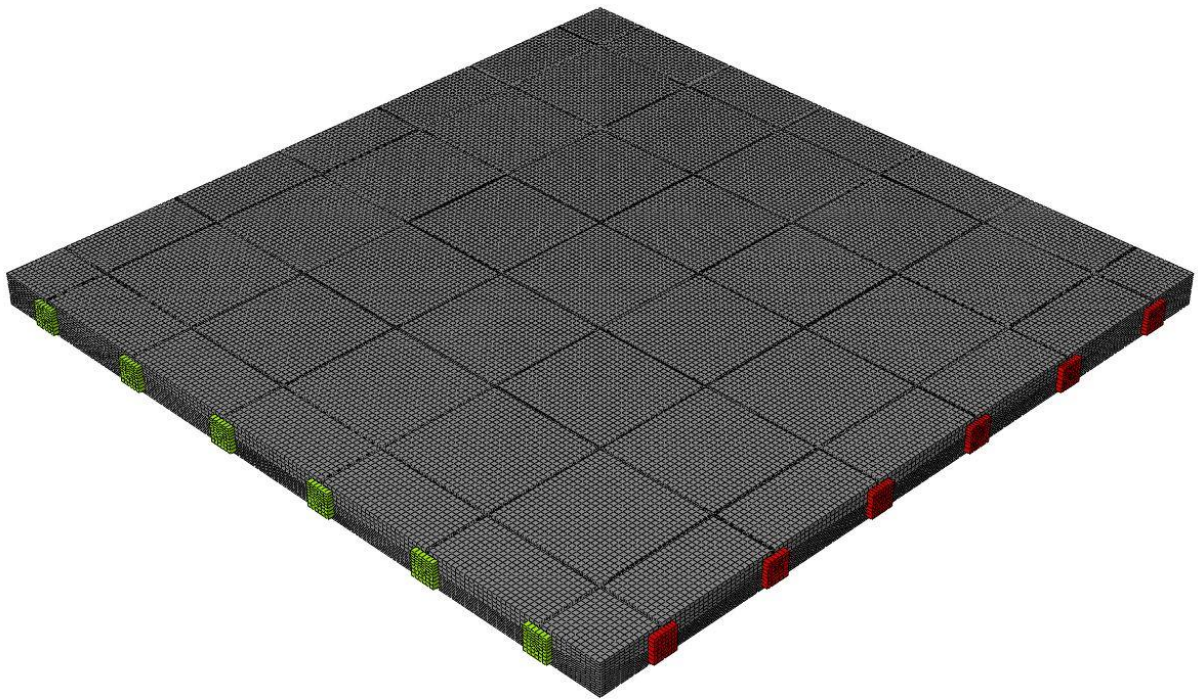


Figura 24 – Modelo com malha refinada (5 mm)

Já para o modelo com malha grosseira, o tamanho médio dos elementos para o modelo mais refinado foi de 10 mm, 4,5 mm, 4,8 mm e 4 mm, para respectivamente, a laje, os fios, as ancoragens e o pilar. Neste modelo numérico foram gerados 187.188 nós com 158,997 de elementos, gerando 561.564 equações. Para análise ser finalizada, eram necessários em torno de 4 dias a 5 dias (Figura 25).

No capítulo seguinte serão apresentados os resultados do estudo de sensibilidade com ambas as malhas porém, para desenvolvimento dos estudos de caso, foi escolhida a malha com elementos de 10 mm devido ao tempo de execução ser três vezes menor. Os resultados nos pontos de controle (P15, P18-X e P18-Z) também se mostraram consistentes com o modelo experimental e não apresentaram diferenças significativas entre si.

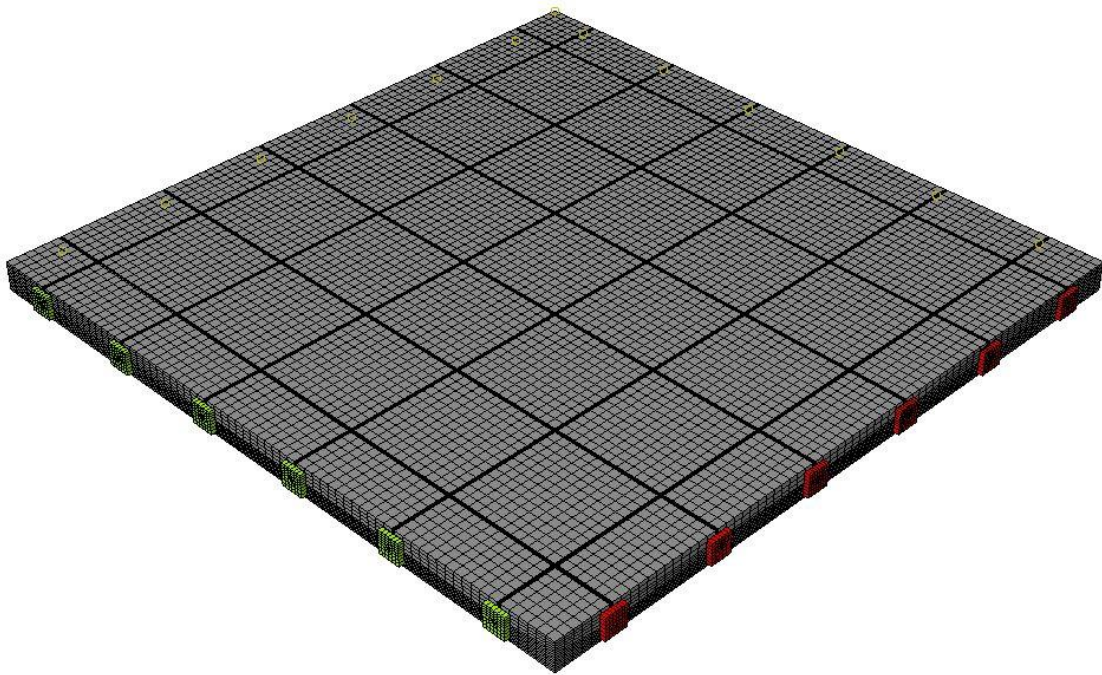


Figura 25 – Modelo com malha grosseira (10 mm)

## 2.7 Validação modelo numérico

Foram realizadas três formas para validação do modelo: mapa de fissuração, por meio da curva carga *versus* deslocamento no meio da laje e da curva carga *versus* deslocamento no meio do elemento torcional.

### 2.7.1 Carga *versus* deslocamento

Um dos meios mais eficazes e comuns de verificação do comportamento de estruturas é por meio da análise de curvas carga *versus* deslocamento. Neste tópico foram analisados os seguintes pontos de controle:

- Ponto 15 que está situado no meio da diagonal que conecta o vértice da laje ao pilar;

- o Ponto 18-X que está situado entre o pilar e o meio da borda, sobre o eixo X-X do modelo numérico. Os fios perpendiculares a este eixo são aqueles que foram modelados todos iguais segundo o traçado médio apresentado por Nawy *et al* (1976); e
- o Ponto 18-Z que está situado entre o pilar e o meio da borda, sobre o eixo Z-Z do modelo numérico. Os fios perpendiculares a este eixo são aqueles que foram modelados de forma a evitar o cruzamento com os fios de traçado médio. Posteriormente tiveram sua força de protensão alterada para compensar a diferentes excentricidades.

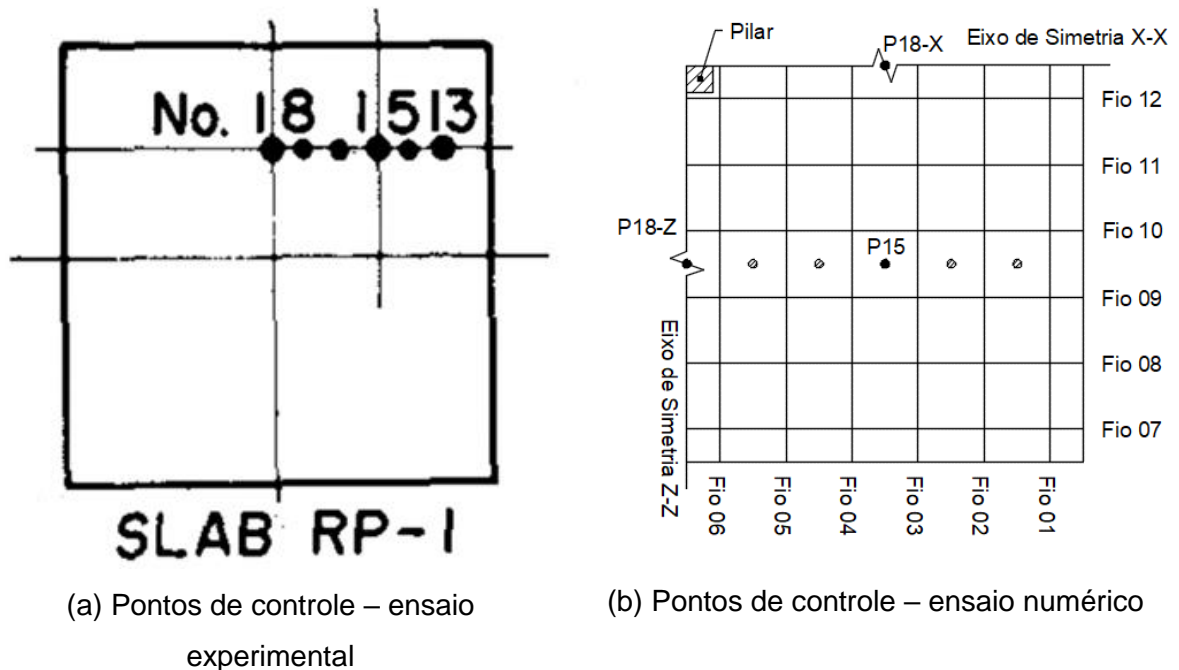


Figura 26 – Localização dos pontos de controle

Na Figura 27, foram comparadas as curvas do modelo experimental (azul), do modelo numérico com malha de 10 mm (verde) e do modelo numérico com malha de 5 mm (vermelho). Deve-se ressaltar que não houve nenhuma diferença muito expressiva entre os modelos com malha de 5 mm e 10 mm.

Após comparadas as curvas entre os gráficos carga *versus* deslocamento dos pontos de controle (P15, P18-X e P18-Z), nota-se que o modelo experimental apresenta uma rigidez inicial menor que o modelo numérico. Isto está relacionado a acomodação inicial que um modelo experimental sofre antes do início do ensaio

propriamente dito, bem como, uma tendência de modelos *quasi-estáticos* apresentarem uma rigidez inicial mais elevada.

A única diferença mais grave observada nesta etapa ocorre em uma parte qualitativa e gráfica da análise do mapa de fissuração. Conclui-se que não houve discrepâncias entre os modelos apesar do diferente grau de refinamento

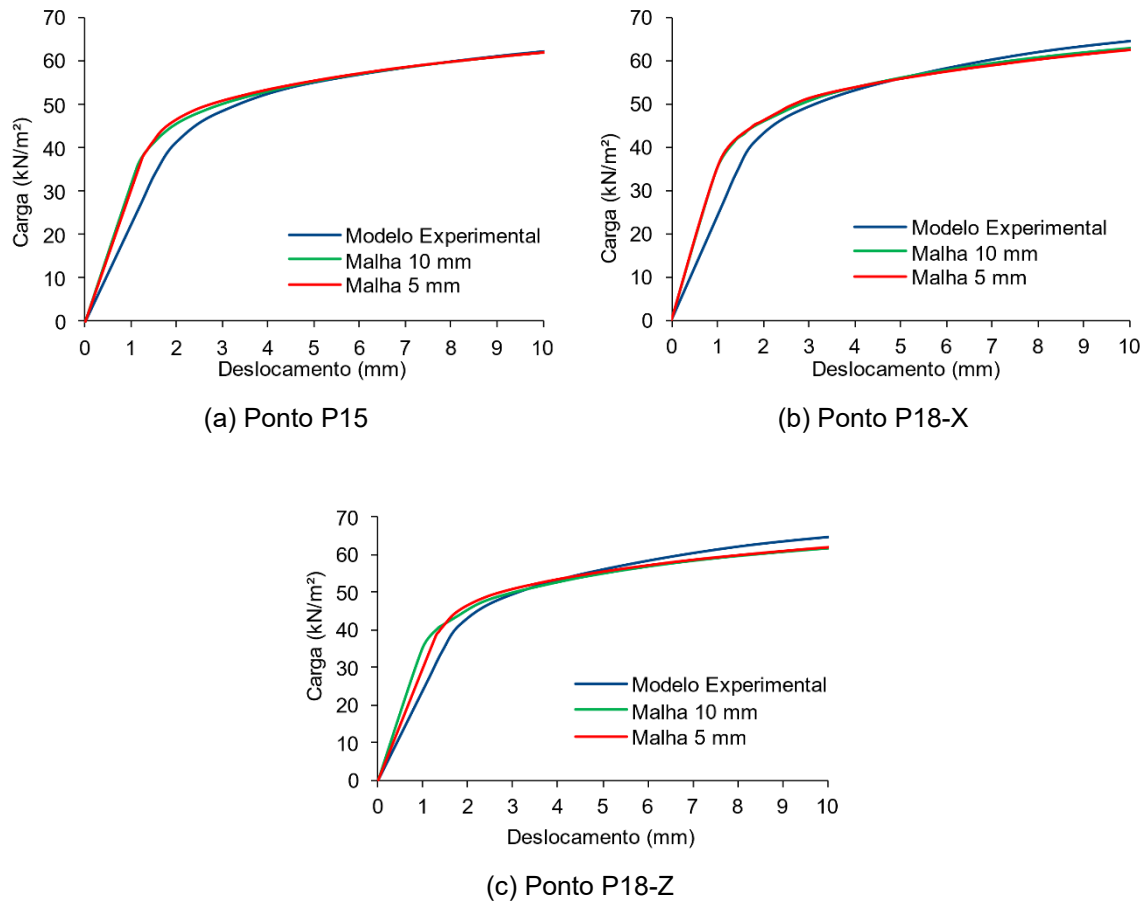


Figura 27 – Carga *versus* deslocamento – Malhas de 10 e 5 mm

### 2.7.2 Mapa de fissuração

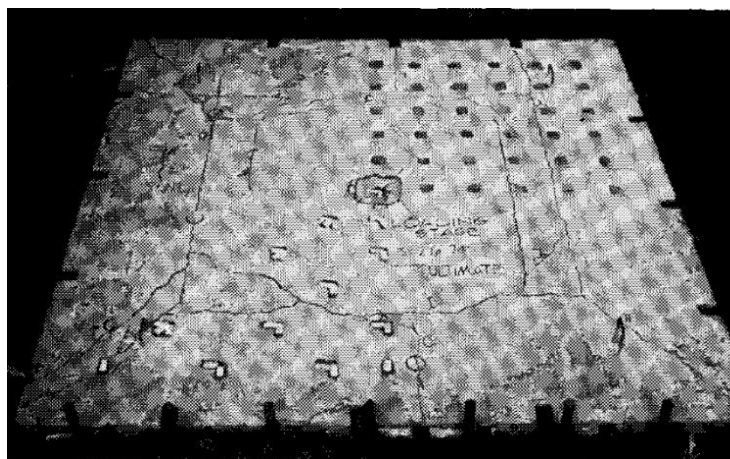
A verificação a ser realizada neste item é de caráter qualitativo, portanto não há como utilizar alguma métrica de alta precisão. A comparação do mapa de fissuração entre o modelo experimental e o modelo numérico é feito de forma visual e tem o intuito de servir como um parâmetro comparativo global.



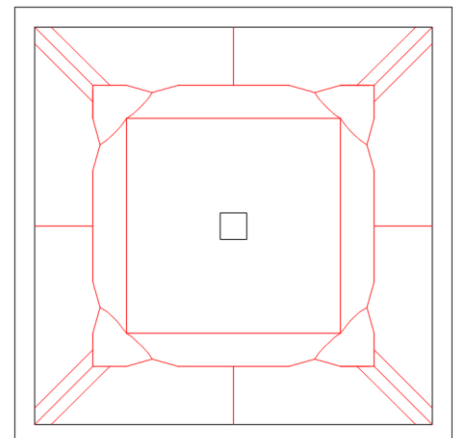
Depois do modelo numérico ter completado a análise, de posse do mapa de fissuração é possível de antemão perceber se os comportamentos dos modelos estão próximos ou não, se as condições de contorno adotadas foram fidedignas ou não e a partir dessas verificações puramente visuais, definir se é viável prosseguir com o estudo deste modelo numérico.

Serão apresentados os desenvolvimentos das fissuras para os dois modelos, com malha fina (5 mm) e com malha grossa (10 mm).

Quando comparados os mapas de fissuração da face inferior da laje finais de ambos os ensaios numéricos (Figura 29 e Figura 30) nota-se que as fissuras destes modelos surgem nas mesmas regiões indicadas pelo ensaio experimental (Figura 28). Para melhor compressão da fissuração, foi desenvolvido um desenho esquemático desta fissuras ao longo do modelo numérico (Figura 28-b).



(a) Laje ensaiada – RP1



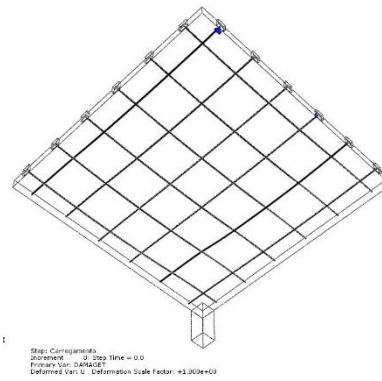
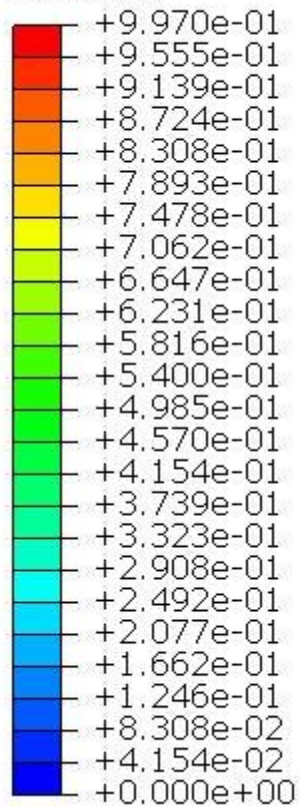
(b) Esquemático

Figura 28 – Mapa de fissuração das lajes ensaiadas (Nawy, 1976).

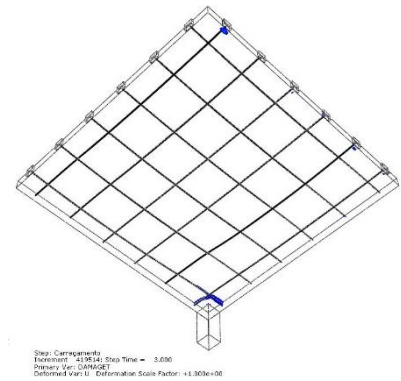
Através do modelo numérico com malha fina (Figura 29), porém, é possível observar mais claramente o surgimento das primeiras fissuras: uma fissura diagonal que se estende entre o vértice da borda e o pilar, e duas fissuras paralelas a cada um dos bordos. Esse início de fissuração era esperado, uma vez que essas regiões apresentaram maiores esforços solicitantes.

As fissuras começam a ser mais proeminentes e a ter uma propagação mais acelerada a partir de 62,5% da carga total aplicada ao modelo. Isto deixa claro que a partir deste momento, o modelo inicia o seu comportamento pós-fissuração.

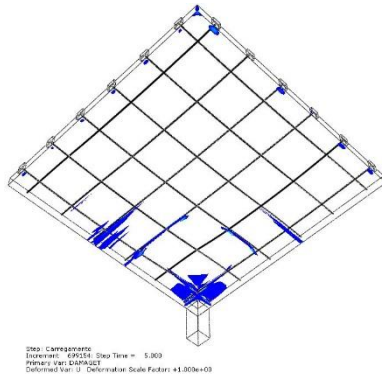
DAMAGET



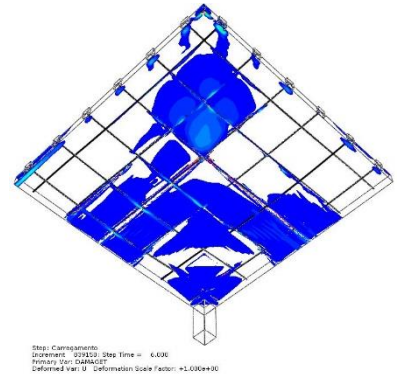
(a) 0,0% do carregamento



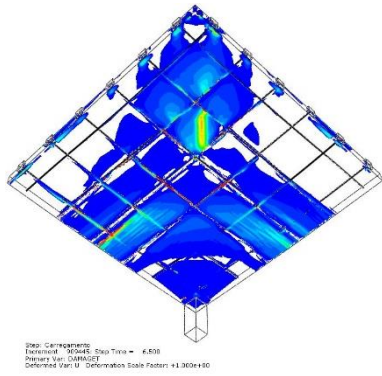
(b) 37,5% do carregamento



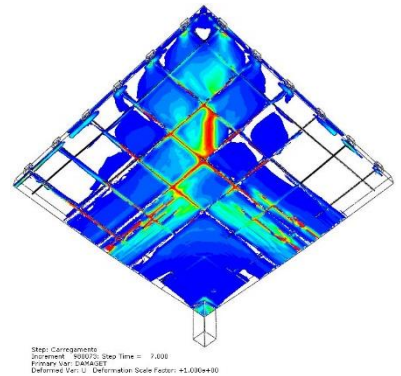
(c) 62,5% do carregamento



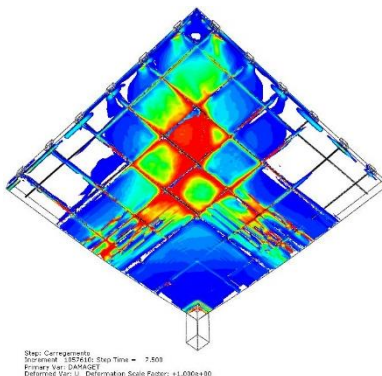
(d) 75,0% do carregamento



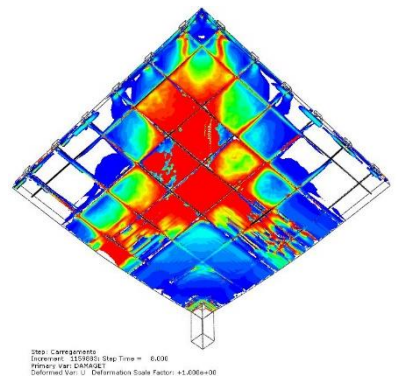
(e) 81,25% do carregamento



(f) 87,5% do carregamento



(g) 93,75% do carregamento



(h) 100,0% do carregamento

Figura 29 – Mapa de Fissuração do Modelo Numérico (malha de 5 mm)



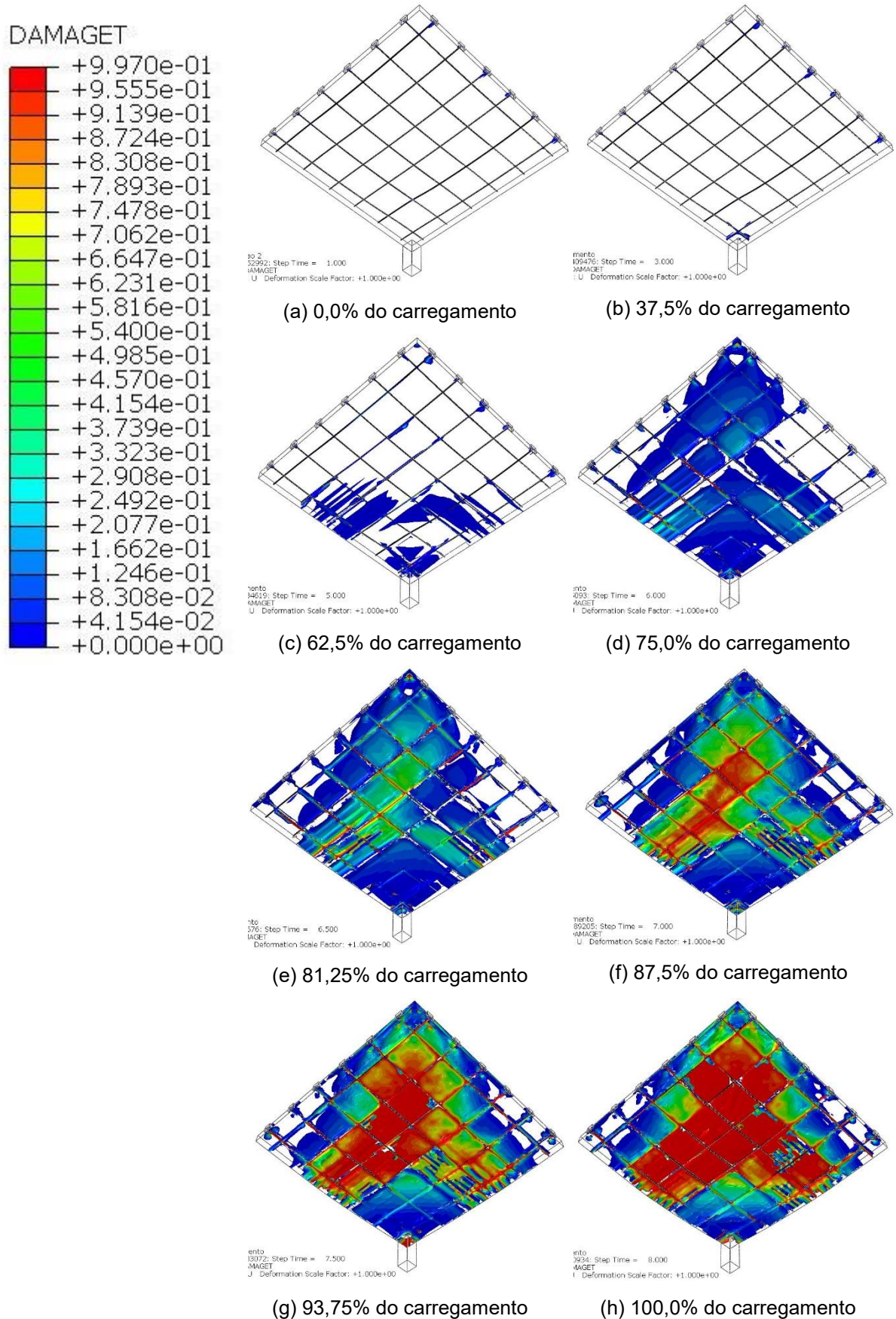


Figura 30 – Mapa de Fissuração do Modelo Numérico (malha de 10 mm)

Quando o carregamento atinge 87,5% da carga total aplicada torna-se visível, em ambos os modelos, que essas fissuras tendem a se encontrar. Vê-se que esse ponto torna-se o vértice de um quadrado de fissuras com lados paralelos as bordas. Nesta região, no ponto médio da diagonal entre o vértice e o centro de pilar está localizado o ponto de controle P15.

Ao se aproximar do fim da análise (93,75%), percebe-se que o dano começa a ficar restringido ao entorno das fissuras já formadas, indicando as linhas de ruptura deste sistema estrutural. Na Figura 29-h começa a ser observada a formação de fissuras que se bifurcam próximas ao canto da laje, as quais não são observadas na Figura 30.

Vale notar, que algumas fissuras surgem nos elementos logo abaixo dos fios de protensão, que são regiões que apresentam uma rigidez reduzida devido ao furo do fio de protensão. Ao mesmo tempo, nesta região em específico, existem diversos elementos que possuem uma dimensão muito maior que a outras duas. Devido a sua maior rigidez no sentido mais estreito em comparação com os outros elementos finitos mais uniformes, é causado um aumento de rigidez local que restringem a propagação do dano.

Pela última imagem fica evidente que o dano está ocorrendo de forma generalizada na laje, o que indica a falha no modelo numérico. O aumento da rigidez local causado pelo elementos mais estreitos não interferiu no comportamento global.

Analisando, a propagação das fissuras nos dois modelos, observou-se que o padrão de comportamento foi mantido independente do refinamento da malha. Ficou evidenciado nesta comparação visual, o quanto o refinamento da malha melhora a visualização das fissuras no modelo numérico. Como será visto na seção seguinte, a diferença de comportamento nos pontos de controle é imperceptível.

### 3 CASOS DE ESTUDO

A partir do modelo numérico validado, foram desenvolvidos 24 modelos com o objetivo de compreender como a ação da protensão interfere no comportamento da estrutura, bem como qual a sensibilidade dos diversos fatores quando se utiliza o artifício da protensão.

Os resultados foram comparados em termos de: fissuração, carga *versus* deslocamento nos pontos P15 e P18-X e tensão nos fios de protensão.

Assim como foi anteriormente observado, a diferença entre os comportamentos das curvas carga *versus* deslocamento dos pontos P18-X e P18-Z não diferem consideravelmente entre si. Devido a este fato e também com o intuito de não sobrecarregar este capítulo com gráficos redundantes, optou-se em apresentar somente os resultados relativos ao ponto de controle P18-X.

#### 3.1 Casos estudados

Uma ampla gama de fatores influenciam a protensão e o comportamento da estrutura. Por isso, foram desenvolvidos casos de estudos com algumas das características pertinentes, tais quais: não linearidade geométrica, esbeltez, coeficiente de Poisson e tensão no fio de protensão.

Para este estudo, estabeleceu-se como critério quantitativo para o deslocamento limite do comportamento estrutural no estado limite último à flexão uma flecha de  $L/150$ , quando considerado o comportamento pós-fissuração. Segundo Bjerrum *apud* Thomaz (2020), este deslocamento é aquele a partir do qual são temidos danos estruturais nos edifícios. Sabe-se também que as deformações maiores do que esta já necessitam de reforços estruturais. Na Figura 31 observa-se que o vão relativo ao P15 compreende a diagonal entre o centro do pilar (linha verde) e a quina da laje, já o vão relativo ao P18-X está compreendido entre o eixo do pilar e o ponto médio do lado da laje (linha vermelha).

O primeiro tópico considerado foi a influência da não linearidade geométrica no comportamento global da estrutura. Também visou-se obter mais informações do

efeito da protensão na rigidez da laje e qual seria a rigidez secante da laje protendida ao considerar sua fissuração.

A esbeltez é uma das principais correlações usadas para o pré-dimensionamento de lajes lisas protendidas. Por isso, compreender como os diversos fatores interagem com esta grandeza contribuirá a uma maior assertividade dos resultados na etapa inicial de cálculo.

Por sua vez, o coeficiente de Poisson é uma variável que apresenta algumas incertezas. Existem autores que recomendam considera-lo igual a 0,20, já outros 0,10, e há ainda outros que recomendam até mesmo zerá-lo ao afirmar que não influencia no resultado (Corley *et al.*, 1961), sendo este apenas mais um valor para os projetistas preocuparem-se em considerar.

Por fim, é de extrema importância conhecer como a variação da tensão no fio de protensão interage com todos outros componentes e como ela se comporta ao longo do carregamento. Sendo estes os principais agentes do concreto protendido, uma maior compreensão da extensão de sua influência mostra-se indubitavelmente relevante.

### 3.1.1 Nomenclaturas dos modelos numéricos

Em busca de uma melhor visualização e compreensão dos gráficos que serão expostos neste capítulo, elaborou-se um sistema de nomenclatura própria para este trabalho que adota o seguinte modelo: **M#.XX.Y.ZZZ**. A letra “M” é referência à palavra modelo; já o símbolo “#” é uma letra para Não Linear ou Linear (N ou L). O número XX contempla a esbeltez do modelo, podendo ser inclusa uma letra minúscula após este número fazendo referência a posição do engrossamento da espessura laje de forma que fosse possível variar a esbeltez. Já o número Y é a primeira casa decimal dos coeficientes de Poisson adotado e, por fim, o número ZZZ é referente à porcentagem de protensão aplicada em comparação a carga aplicada no modelo de referência (100%). Isto está resumido conforme a Tabela 4.

Tabela 4 – Nomenclaturas dos modelos

#	N (Não linear) ou L (Linear)
XX	45, 40i, 40m ou 40s
Y	0 (0,00) ou 2 (0,20)
ZZZ	050,100,150

Exemplo: ML.40i.0.100 – Modelo Linear com esbeltez igual a 40; modelo no qual o engrossamento ocorreu na face inferior da laje, adotado coeficiente de Poisson igual a 0,00 e com 100% de carga de protensão referência aplicada.

Dentro dos estudos paramétricos, foram avaliadas as tensões e variações das tensões nos fios de protensão. Após, foram escolhidos dois pontos para verificar a tensão nos fios 3 e 6. Um destes pontos está sobre o eixo X, o eixo do pilar, que será referenciado como “Pilar” e o segundo ponto está localizado no meio do vão da laje, o qual será referenciado como “Vão”. Estas regiões podem ser visualizadas na Figura 31.

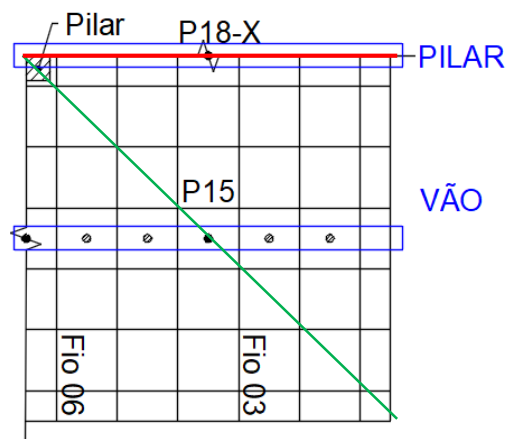


Figura 31 – Posições dos fios

### 3.2 Não linearidade geométrica

A análise elástica é uma forma simples e rápida de se obter os esforços de um modelo estrutural. Porém, este método não engloba todas as variáveis que interferem no comportamento de uma estrutura, sendo a não-linearidade geométrica uma delas. Muitas normatizações, inclusive a NBR 6118 (2014), consideram um fator de majoração de esforços para compensar esta limitação da análise elástica. O valor desta majoração é de 10% para a maioria dos casos.

O estudo da não linearidade geométrica teve por finalidade avaliar a diferença entre o comportamento dos modelos de laje lisa protendida linear e não linear. Serão apresentadas a seguir, as curvas dos comportamentos linear e não-linear geometricamente (NLG) dos modelos MN.45.2.100 e ML.45.2.100 para o P15 (Figura 32) e para o P18-X (Figura 33), os quais possuem as mesmas características do modelo experimental.

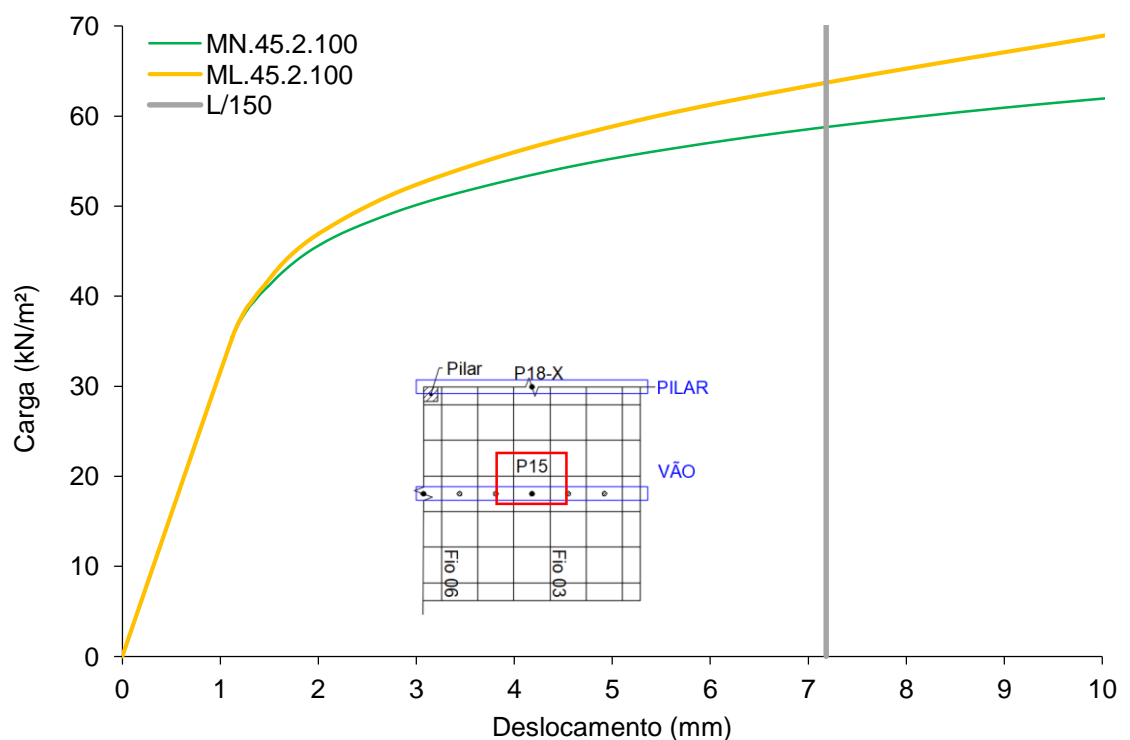


Figura 32 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,20$ ) – P15

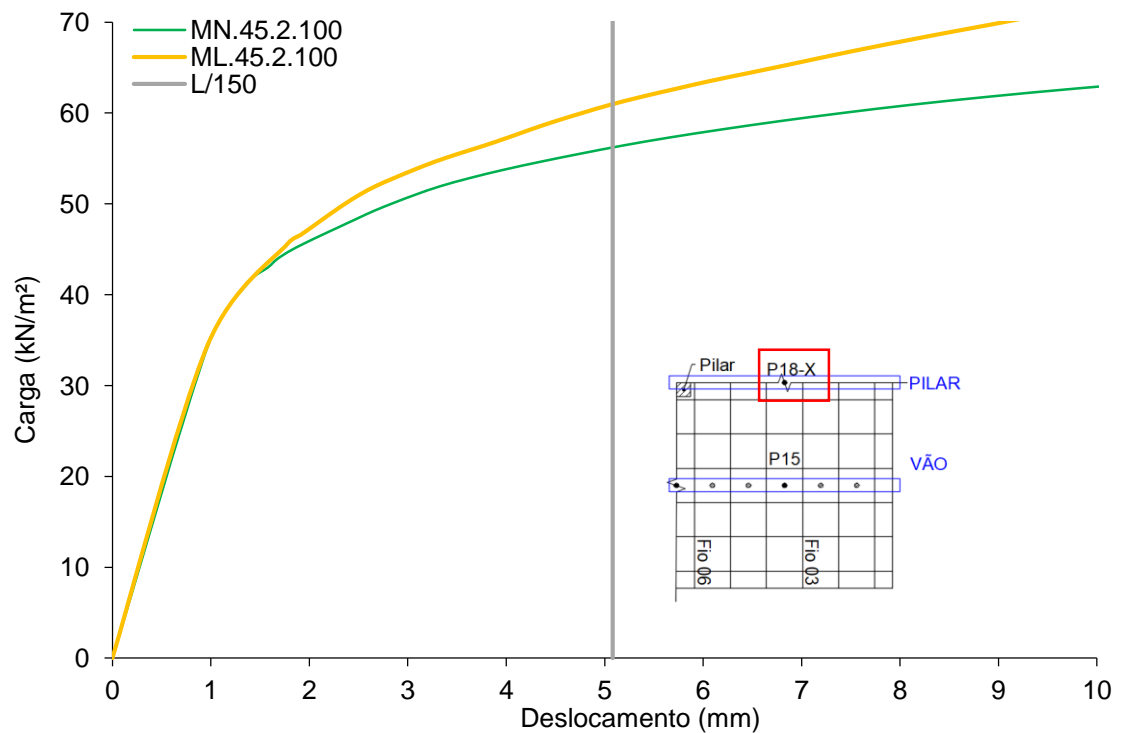


Figura 33 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,20$ ) – P18X

Comparando os comportamentos separadamente de cada ponto, P15 e do P18-X, apesar da magnitude dos deslocamentos serem diferentes, percebe-se que há um certo grau de similaridade no que tange ao comportamento pós-fissuração. Primeiro as curvas crescem praticamente coincidentes durante o trecho elástico, porém, após a carga de fissuração, é visto um descolamento da curva dos modelos lineares, e, com isso, acusando um comportamento mais rígido.

O aumento da rigidez do modelo linear em comparação com o modelo não linear, para as cargas no limite L/150, está apresentada na Tabela 5. As diferenças percentuais em carga estão próximas do valor  $\gamma_{f3}$  (10%), que é o fator majorador que engloba os efeitos de segunda ordem.

Tabela 5 – Comparação entre tipos de análise em termos de carga para L/150

Carga em L/150 (kN/m²)			
Ponto	ML.45.2.100	MN.45.2.100	Diferença
P15	63,70	58,77	8,40%
P18-X	60,98	56,20	8,51%

A tensão nos fios ao longo do carregamento para o modelo não linear e para o modelo linear pode ser vista na Figura 34 e na Figura 35, respectivamente.

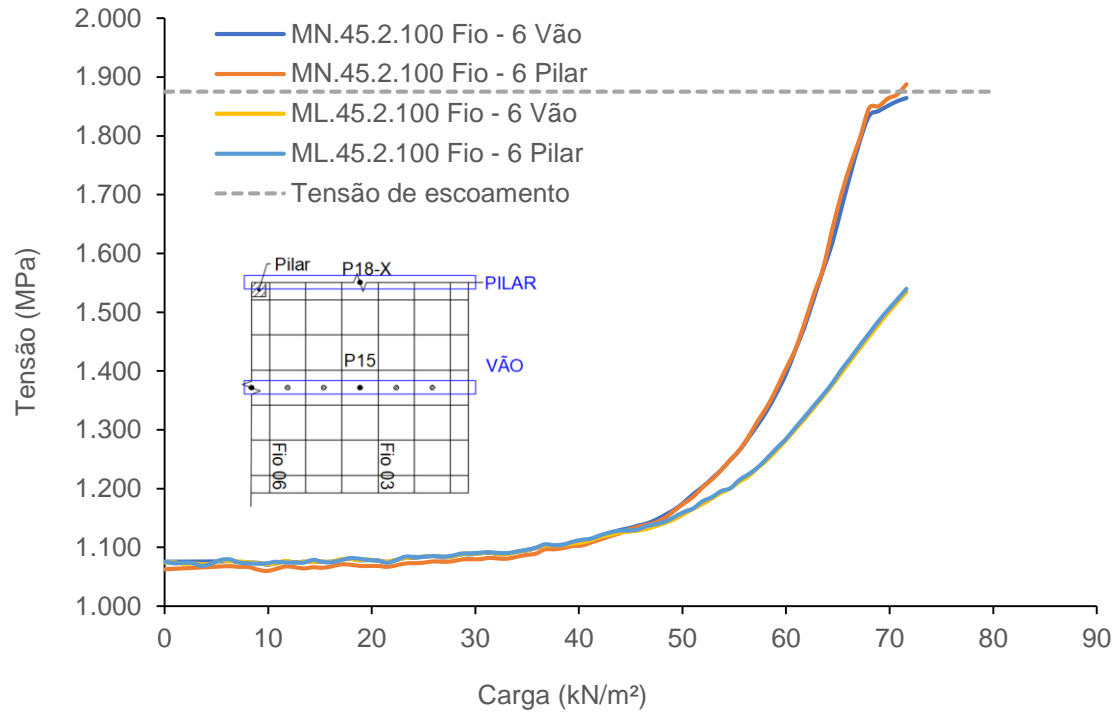


Figura 34 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,20$ ) – Fio 6



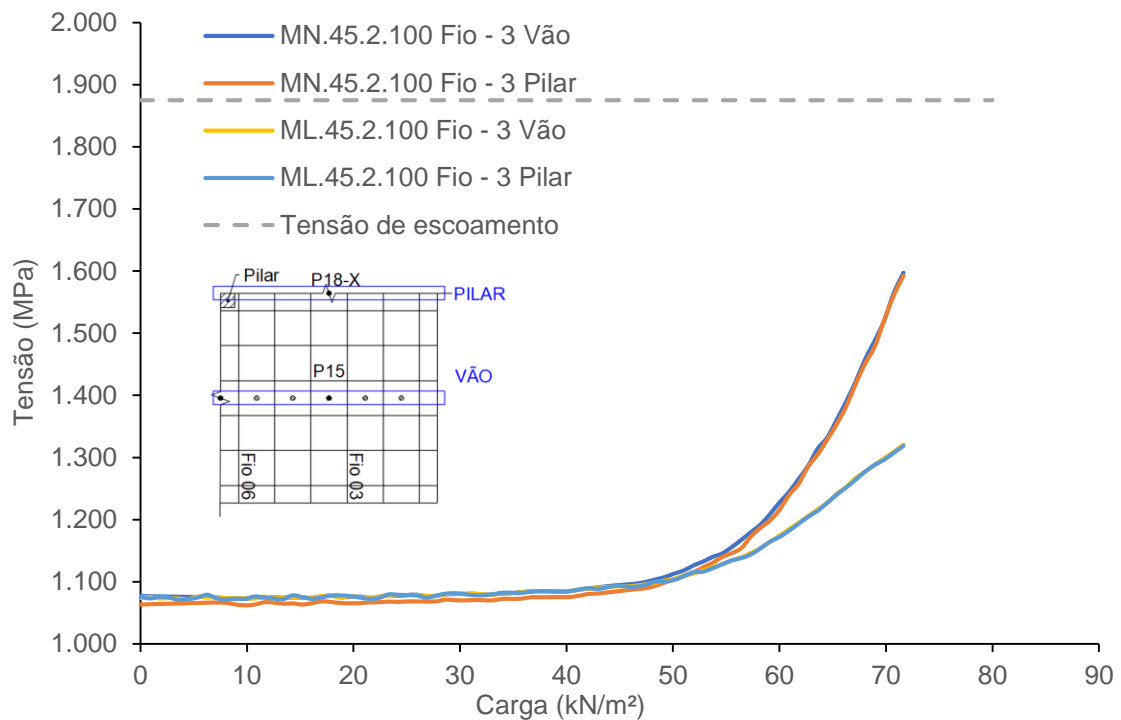


Figura 35 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,20$ ) – Fio 3

Por sua vez, quanto a tensão nos fios, nota-se uma grande influência da não linearidade geométrica após o início da fissuração da laje. Constata-se que a tensão nos fios apresenta, em regiões distintas (vão e pilar), o mesmo valor ao longo de sua extensão, fato que era esperado por se tratar de uma protensão sem aderência. Há, todavia, uma diferença no fio 6, cuja posição passa sobre o pilar, ao se aproximar do fim da análise: este inicia o escoamento diferentemente do modelo linear. Isto pode ser observado no patamar formado, que é um indicativo de que o limite de escoamento foi atingido.

No modelo que não considera a não linearidade geométrica, percebe-se um aumento da tensão mais lento que o modelo que faz esta consideração. A diferença da tensão no fio chega a aproximadamente 260 MPa, o que corresponde a 13% da tensão de escoamento do aço de protensão.

Ainda dentro da análise da não linearidade geométrica, também foi feita uma avaliação da influência do coeficiente de Poisson quanto a este tópico. Serão apresentadas as curvas dos comportamentos linear e não linear dos modelos MN.45.0.100 e ML.45.0.100 para o P15 (Figura 36) e para o P18-X (Figura 37).

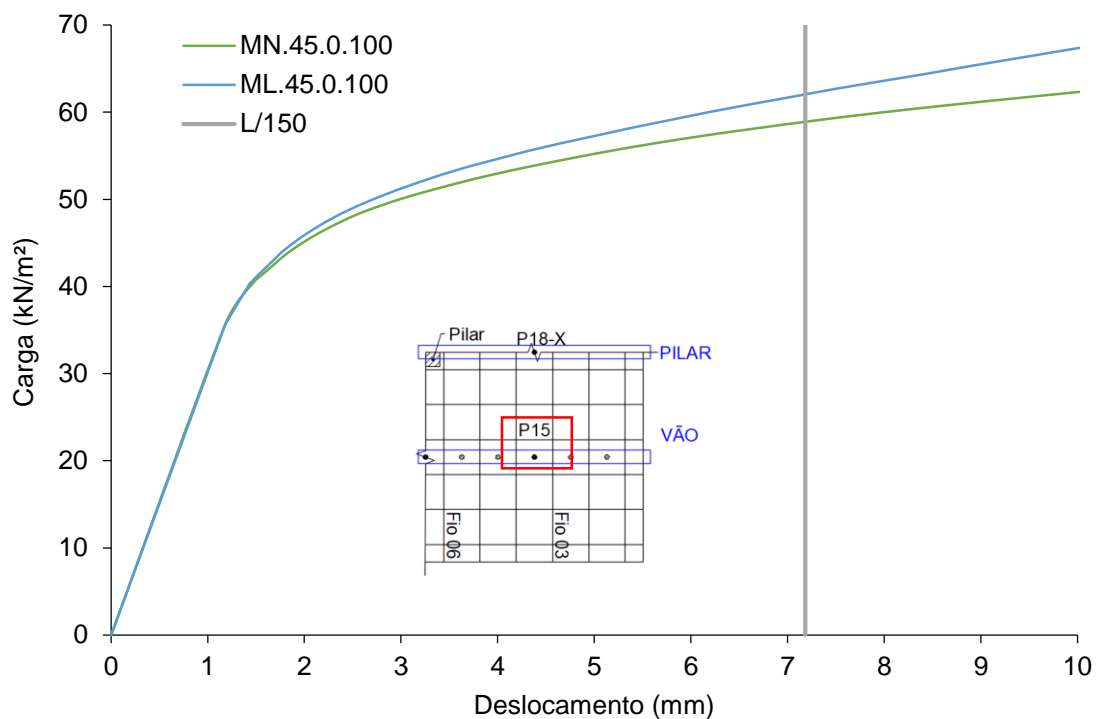


Figura 36 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,00$ ) – P15

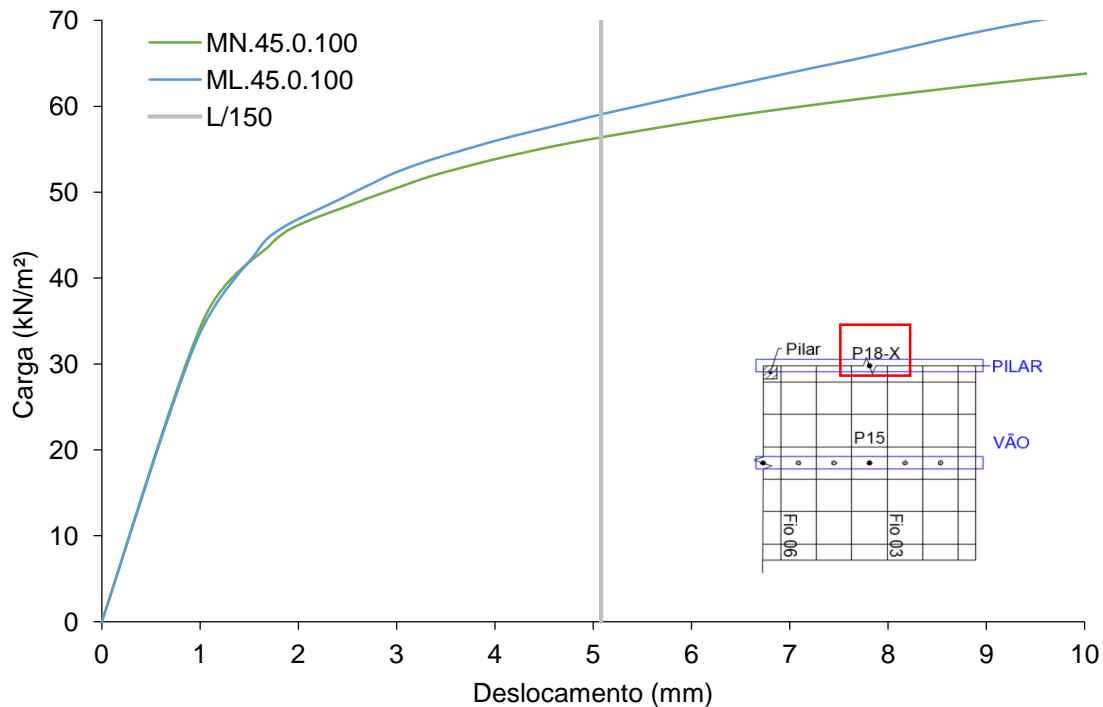


Figura 37 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,00$ ) – P18X

O padrão global do comportamento da laje com o coeficiente de Poisson nulo não se diferenciou muito dos modelos com o coeficiente de Poisson igual 0,20. Nota-se claramente um trecho elástico com inclinação semelhante no início do carregamento, e o início do comportamento pós-fissuração ocorre após a carga de 35 kN/m<sup>2</sup>, aproximadamente.

Tabela 6 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,00$ ) – Rigidez secante

Carga em L/150 (kN/m <sup>2</sup> )			
Ponto	ML.45.0.100	MN.45.0.100	Diferença
P15	58,87	62,05	5,40%
P18-X	56,38	59,05	4,74%

Não obstante, ao se avaliar os dados da Tabela 6, percebe-se que para os modelos com coeficiente de Poisson nulo, houve um comportamento mais rígido dos modelos lineares. Ao comparar as cargas dos modelos lineares da Tabela 5 e da Tabela 6 para os pontos P15 e P18-X, observa-se que são valores similares, porém, ao analisar estas mesmas cargas para os modelos não-lineares, a diferença aumenta. Nisto, vê-se que o coeficiente de Poisson nulo torna o modelo mais rígido.

A tensão nos fios ao longo do carregamento para o modelo não linear e para o modelo linear podem ser vista na Figura 38 e na Figura 39, respectivamente.

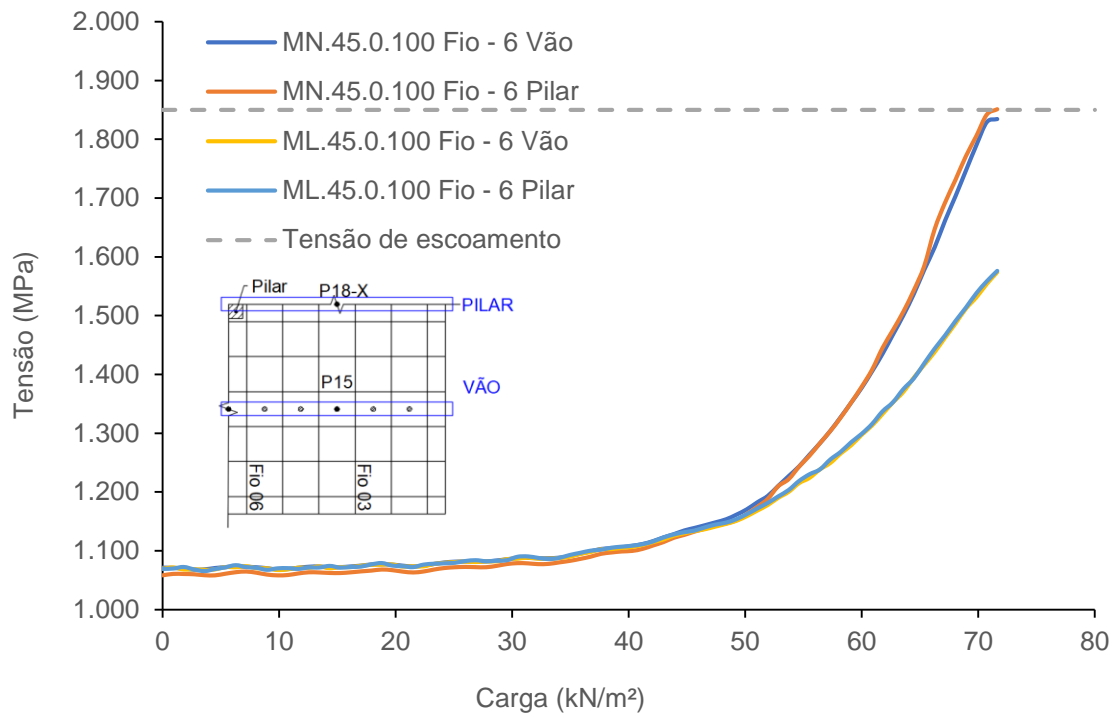


Figura 38 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,00$ ) – Fio 6

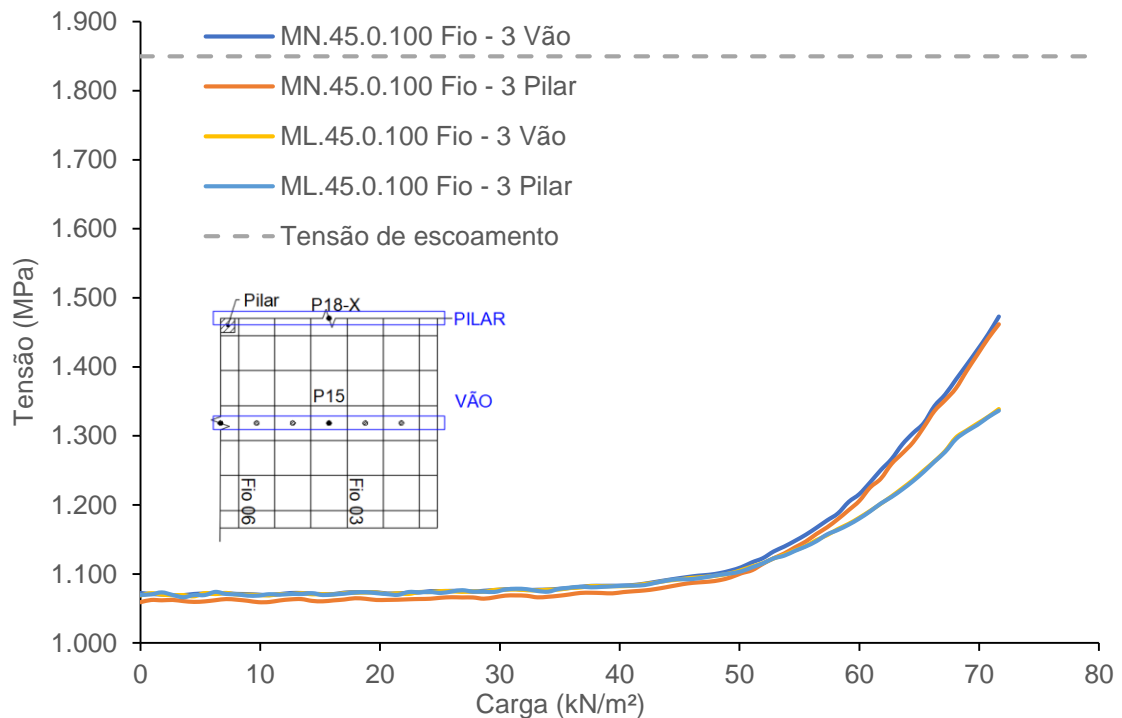


Figura 39 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $\nu = 0,00$ ) – Fio 3

Conforme anteriormente observado quanto a tensão nos fios, é identificada uma grande influência da não-linearidade geométrica após o início da fissuração da laje. Percebe-se então que a tensão ao longo dos fios varia de maneira uniforme e, o fio 6, próximo ao término do carregamento, atinge a tensão de escoamento.

Dentro do grupo dos modelos com maior rigidez foram avaliados três outros modelos que preservaram a mesma esbeltez entre si e mantiveram o mesmo traçado dos fios. Isto foi feito para manter a consistência e minimizar as influências das variáveis nos resultados.

O primeiro modelo manteve as características por meio de um engrossamento na parte inferior do ensaio numérico da laje. O segundo modelo manteve as características por meio de um engrossamento médio da laje, isto é, metade na porção superior e metade na porção inferior. Já o último modelo manteve as características por meio de um engrossamento na parte superior da laje. As posições destes engrossamentos podem ser vistas na Figura 40.

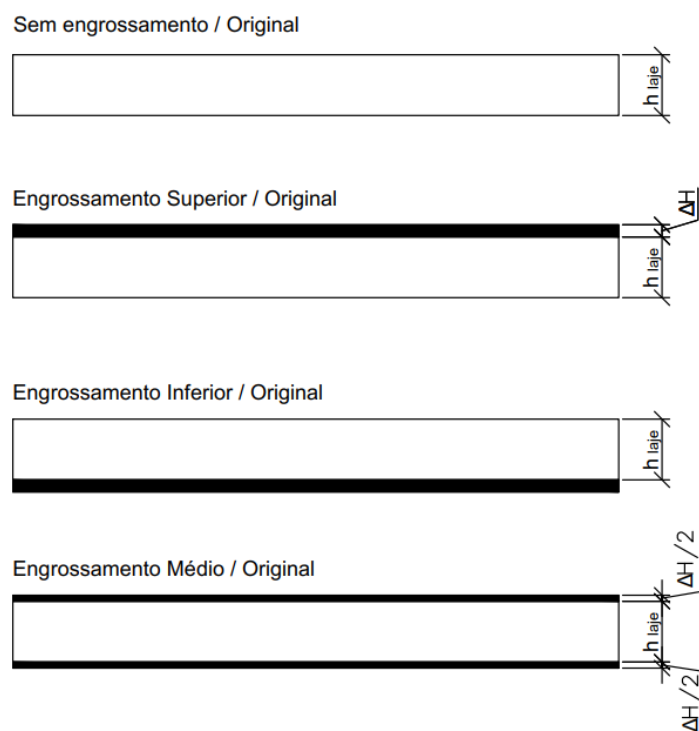


Figura 40 – Posições dos engrossamentos

Na Figura 41 e na Figura 42 são apresentados os comportamentos do P15 e P18-X para os modelos lineares e não-lineares.

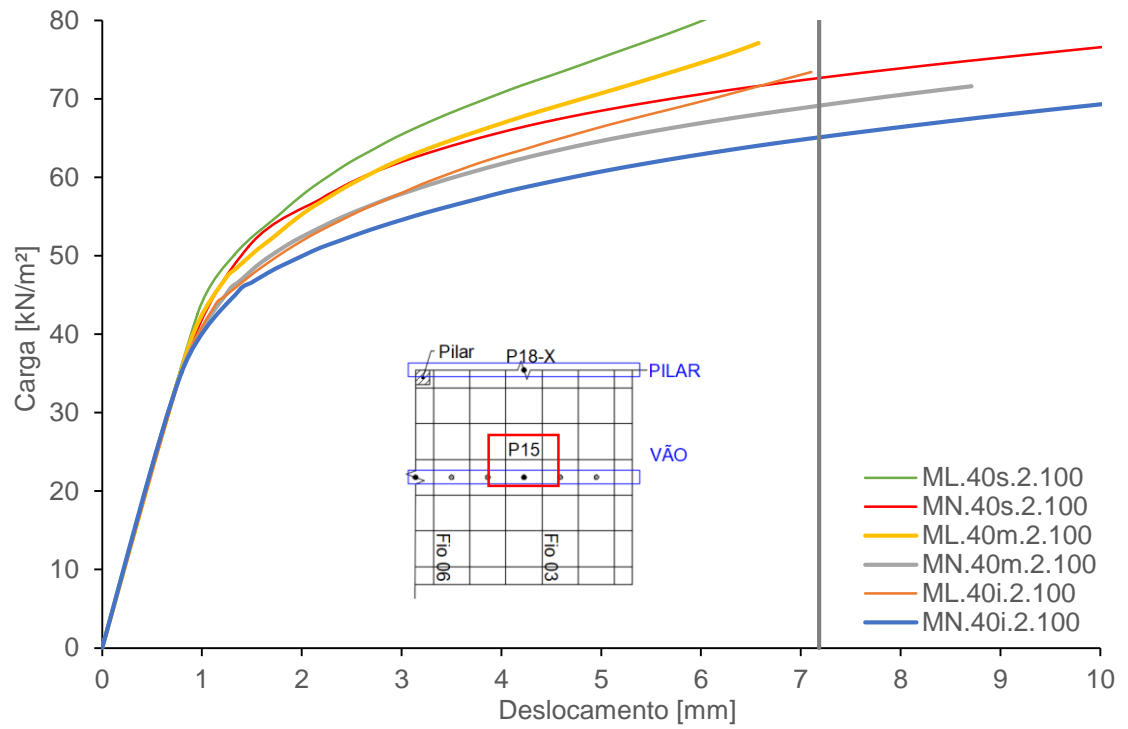


Figura 41 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) – P15

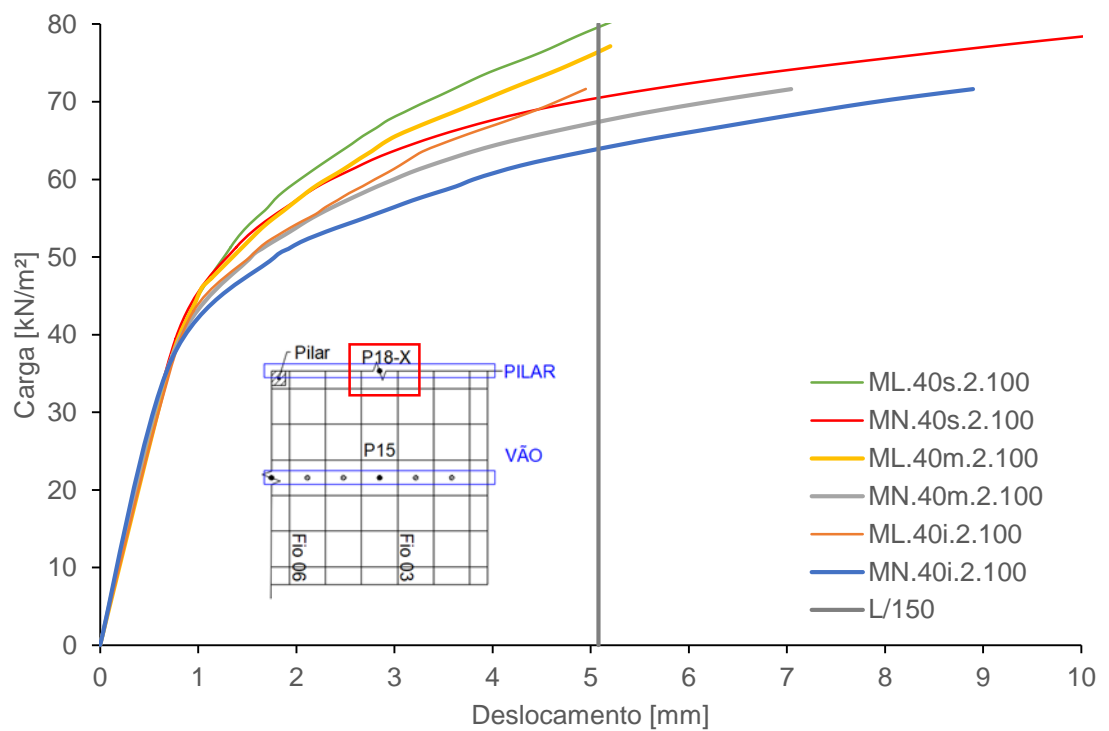


Figura 42 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) – P18-X

Quando os modelos mais rígidos lineares e não-lineares são comparados entre si, identificou-se que as inclinações da fase pré-fissuração pouco diferenciam indicando, assim, uma baixa influência da não linearidade geométrica na rigidez elástica nesta etapa.

Uma distinção entre os modelos mais rígidos ocorre na carga de fissuração pois quanto maior o braço do binário do momento resistente, mais tarde a fissuração iniciará. Também é observado que quanto maior o engrossamento na face superior, maior será a carga de fissuração; com isso, denota-se uma evolução no comportamento estrutural devido a melhora na região de momento positivo e não tanto devido a uma melhora na resistência à punção. Como a taxa de armadura e o nível de protensão permanecem o mesmo, somente houve a mudança no braço de alavanca nesta porção.

Quando comparadas as curvas entre os modelos não-lineares e os modelos lineares, nota-se que a inclinação da curva no trecho pós-fissuração destes dois grupos são muito similares dentro do próprio grupo. A principal diferença entre curvas de diferentes rigidezes relativas deve-se a maior carga de fissuração.

Na Tabela 7 e na Tabela 8 observa-se que a variação de esbeltez no limite de  $L/150$  em comparação ao modelo base. Percebe-se que quando mantido a mesma protensão e o mesmo traçado dos fios, houve uma melhora no comportamento à medida que se reduz a esbeltez. Deve-se ressaltar, porém, que fios mantiveram o mesmo traçado de forma absoluta, não permanecendo na mesma posição relativa à laje exceto nos modelos de engrossamento médio.

Tabela 7 – Comparação entre modelos de rigidezes distintas – Rigidez secante – P15

Carga em $L/150$ (kN/m <sup>2</sup> )				
Ponto	MN.45.2.100	MN.40i.2.100	MN.40m.2.100	MN.40s.2.100
15	63,70	65,11	69,14	72,68
Diferença		2,21%	8,54%	14,10%

Tabela 8 – Comparação entre modelos de rigidezes distintas – Rigidez secante – P18-X

Carga em $L/150$ (kN/m <sup>2</sup> )				
Ponto	MN.45.2.100	MN.40i.2.100	MN.40m.2.100	MN.40s.2.100
18-X	60,98	63,92	67,41	70,48
Diferença		4,82%	10,54%	15,58%

Ao comparar apenas o modelo com engrossamento médio (MN.40m.2.100), que manteve o mesmo traçado relativo ao modelo de referência, percebe-se que para o P15 houve um aumento de 8,54% do carregamento limite. Desta forma, para um aumento da esbeltez de 14,25% (45,7 / 40), teve-se uma melhora na capacidade resistente da laje de 8,54%.

Apesar de haver uma melhora no comportamento, o aumento da rigidez não conduziu a um ganho proporcional em carga última. Duas causas para essa discrepância são: apesar de manter o mesmo traçado do fio, ele não está posicionado tão eficientemente quando na laje com menor rigidez e ao aumentar-se a área da seção transversal sem o aumentar o esforço de protensão, reduziu-se o nível desforço axial da protensão.

Na Tabela 9 e na Tabela 10, são apresentados os valores para majoração dos modelos com engrossamento. É possível notar que nos casos de menores níveis de protensão, todos os casos ficam abaixo de 10%. Contudo, no engrossamento superior, com nível de protensão de 150%, o nível de majoração ultrapassa levemente o valor de 10%.

Tabela 9 – Comparação entre comportamentos linear e não linear (50% Prot.) – Rigidez secante

Carga em L/150 (kN/m <sup>2</sup> )			
Ponto	ML.40i.2.050	MN.40i.2.050	Diferença
15	57,53	55,06	-4,29%
18-X	57,27	54,48	-4,87%

Carga em L/150 (kN/m <sup>2</sup> )			
Ponto	ML.40m.2.050	MN.40m.2.050	Diferença
15	62,23	59,78	-3,94%
18-X	61,83	58,81	-4,88%

Carga em L/150 (kN/m <sup>2</sup> )			
Ponto	ML.40s.2.050	MN.40s.2.050	Diferença
15	65,99	62,33	-5,55%
18-X	63,90	60,81	-4,84%



Tabela 10 – Comparação entre comportamentos linear e não linear (150% Prot.) –  
Rigidez secante

Carga em L/150 (kN/m <sup>2</sup> )			
Ponto	ML.40i.2.150	MN.40i.2.150	Diferença
15	79,12	74,69	-5,60%
18-X	77,09	72,79	-5,58%

Carga em L/150 (kN/m <sup>2</sup> )			
Ponto	ML.40m.2.150	MN.40m.2.150	Diferença
15	84,14	80,26	-4,61%
18-X	81,29	76,92	-5,37%

Carga em L/150 (kN/m <sup>2</sup> )			
Ponto	ML.40s.2.150	MN.40s.2.150	Diferença
15	91,77	82,29	-10,33%
18-X	86,02	78,90	-8,27%

Da Figura 43 a Figura 46, observa-se que as tensões nos fios dos modelos apresentam os mesmos padrões de comportamento observados nas curvas dos pontos P15 e P18-X, no sentido de que se mantém semelhantes até a carga de fissuração e quanto maior o engrossamento superior, melhor o comportamento dos modelos.

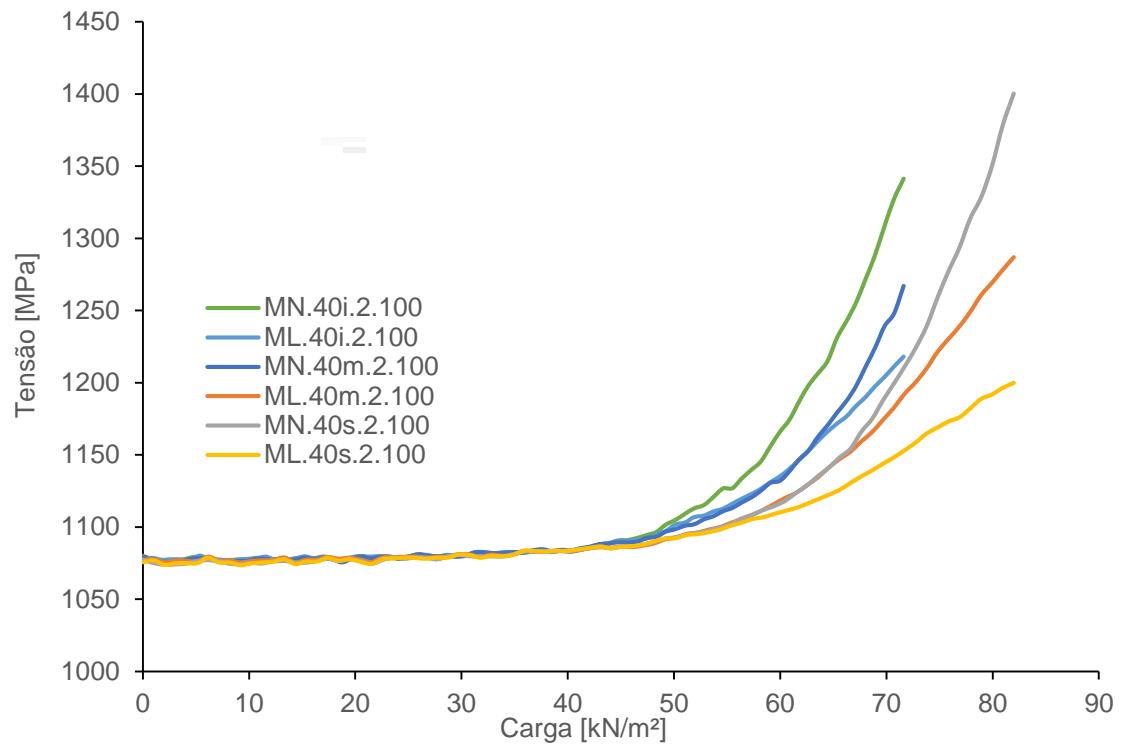


Figura 43 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) - Fio 3 - Vão

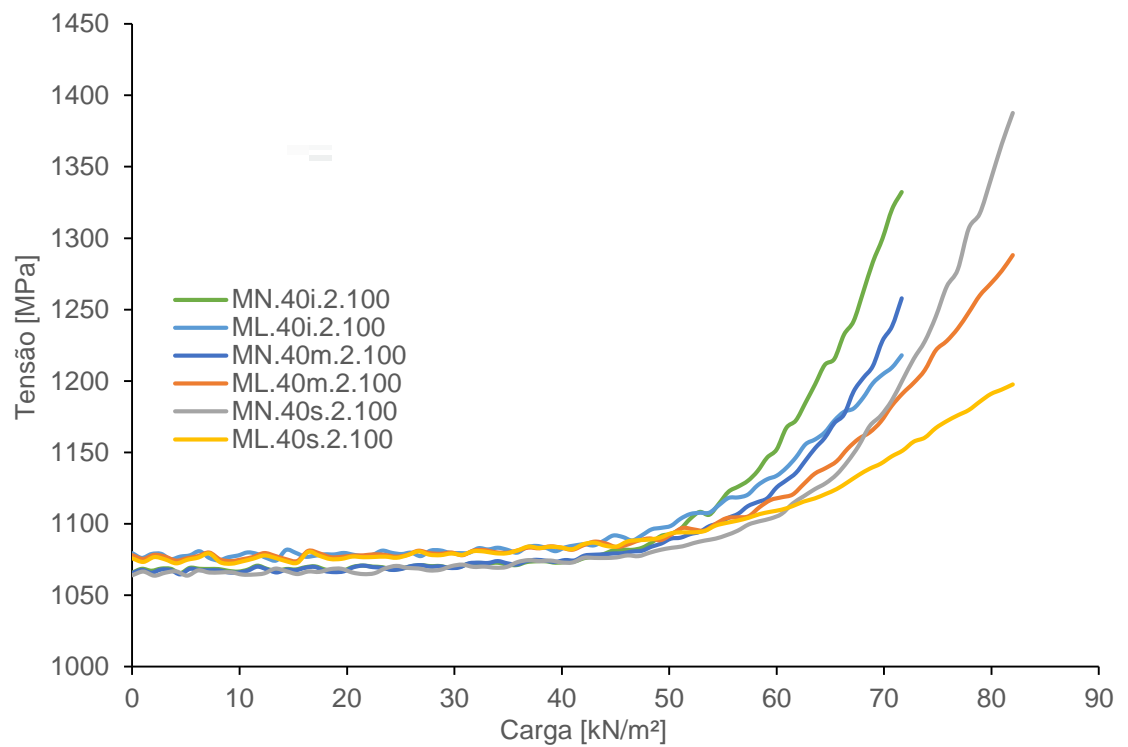


Figura 44 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) - Fio 3 - Pilar

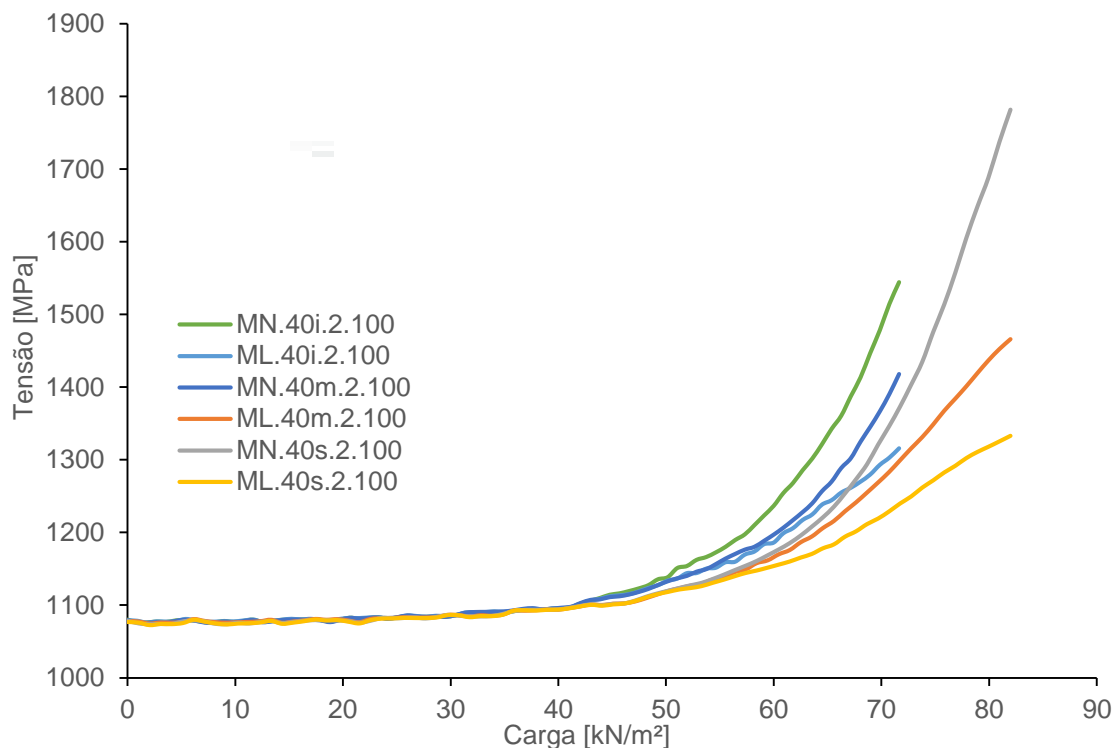


Figura 45 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) - Fio 6 - Vão

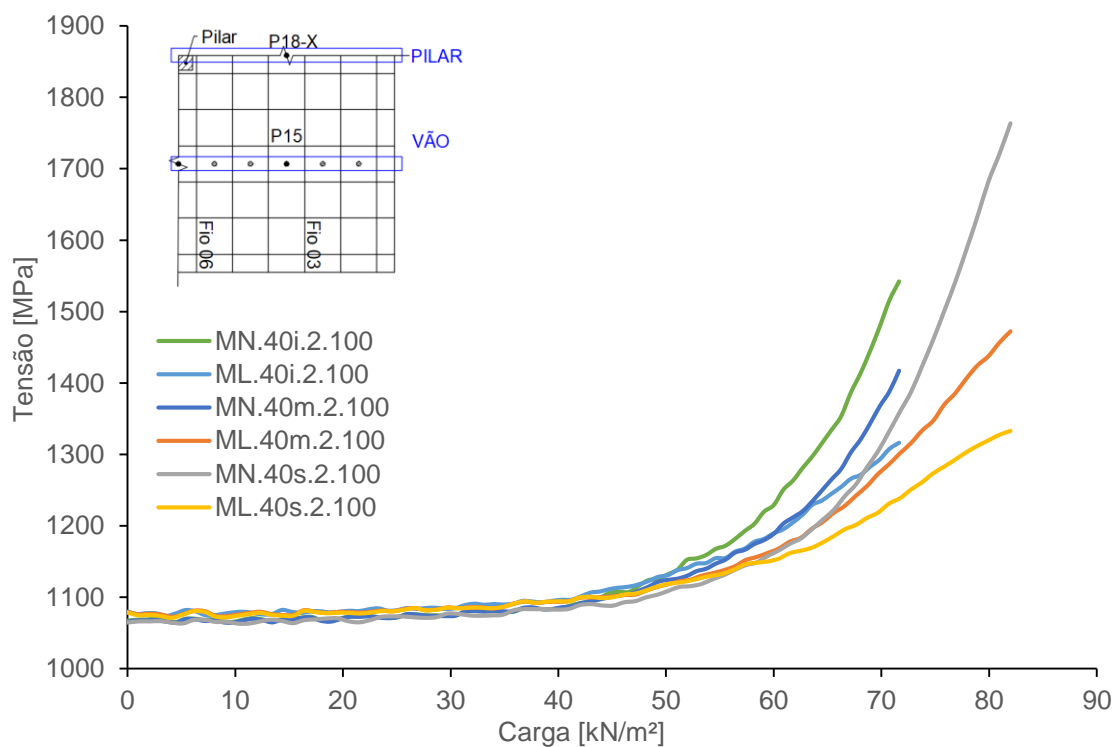


Figura 46 – Comparação entre comportamentos linear e não linear ( $L/h = 40$ ) - Fio 6 - Pilar

Novamente o fio 6 atinge uma tensão maior que o fio 3 em todos os casos. Até antes da fissuração, a tensão no fio cresce bem pouco, independentemente do ponto de análise do fio ou da posição em relação a laje.

### 3.3 Coeficiente de Poisson

Para avaliar o efeito do coeficiente de Poisson e sua influência, foram comparados dois modelos por meio de análise não linear: o primeiro cujo coeficiente de Poisson era igual a 0,20 e um segundo modelo no qual o coeficiente de Poisson era igual 0,00 (zero).

A diferença entre os comportamentos de modelos de mesma rigidez, mesma protensão e apenas alterando o coeficiente de Poisson, levou a busca da compreensão da extensão da influência deste coeficiente no comportamento estrutural.

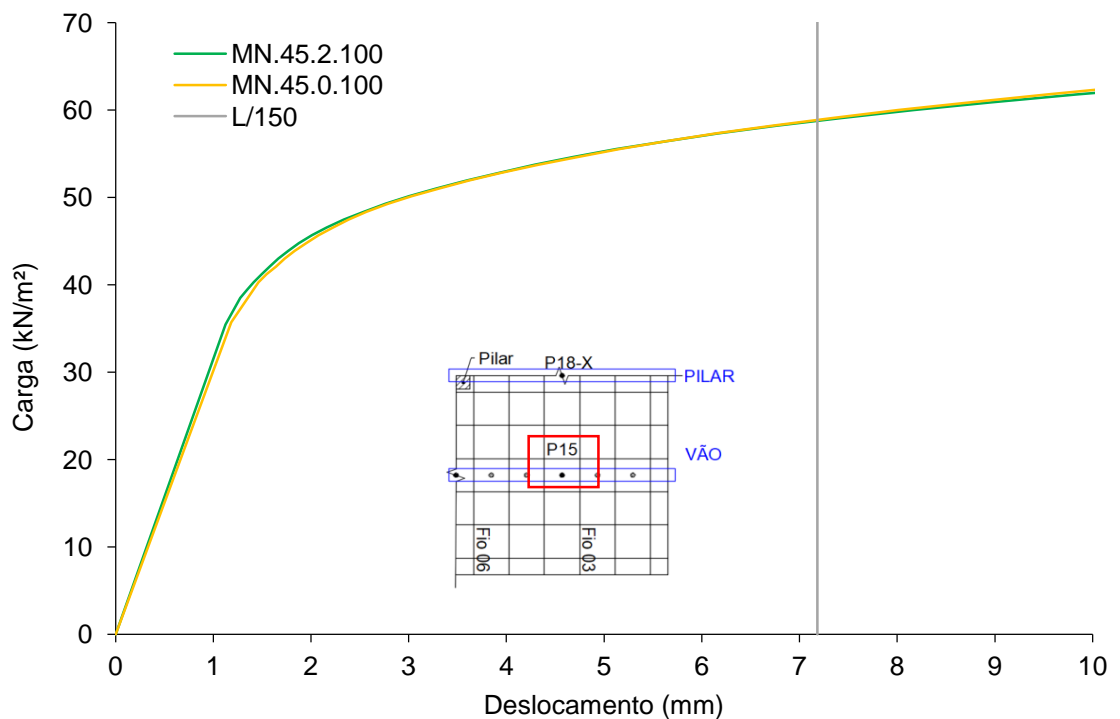


Figura 47 – Comparação entre coeficiente de Poisson – P15

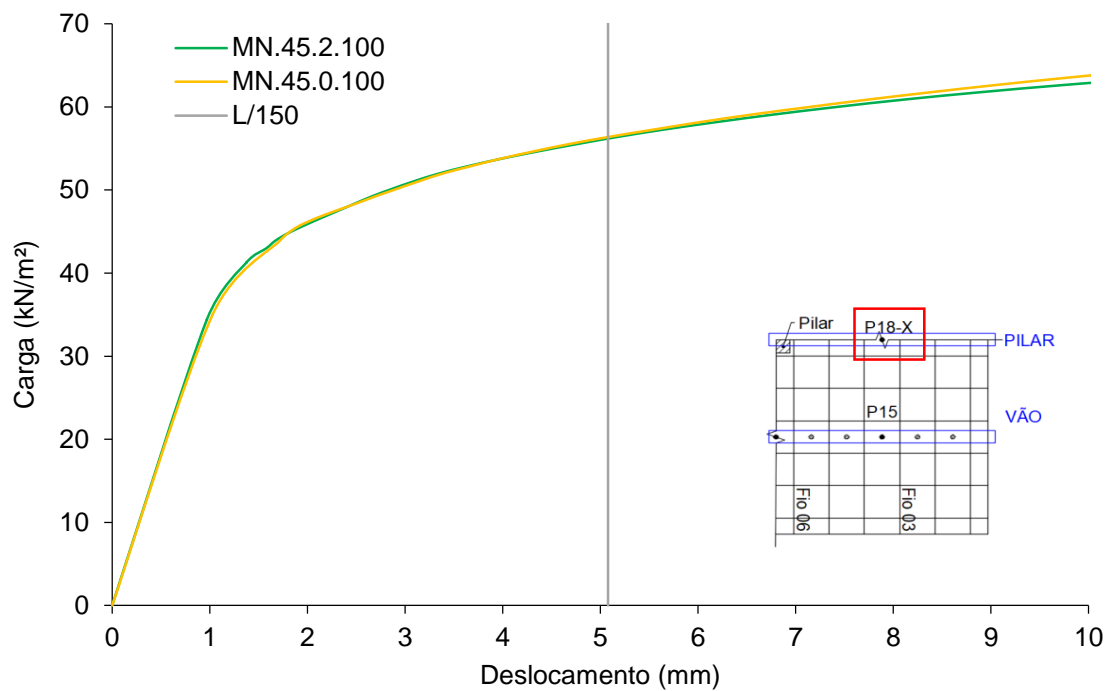


Figura 48 – Comparação entre coeficiente de Poisson – P18-X

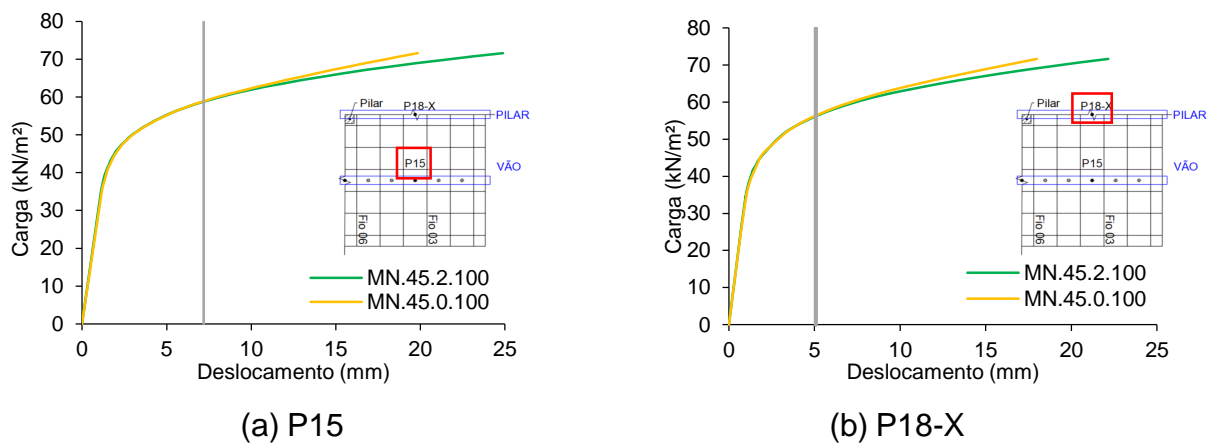


Figura 49 – Comparação entre coeficiente de Poisson estendida – P15 e P18-X

Pode ser verificado que as curvas não apresentam diferenças entre si para o carregamento até o limite de  $L/150$ . Contudo, como visto na Figura 49, a diferença torna-se mais evidente para grandes deformações, somente quando a estrutura já está muito próxima da sua completa ruptura.

Na Tabela 11, observa-se que o modelo com coeficiente de Poisson nulo apresenta um ligeiro aumento de sua rigidez em comparação ao modelo com a consideração do coeficiente de Poisson igual 0,20 para o limite  $L/150$ .

Tabela 11 – Comparação do coeficiente de Poisson

Carga em L/150			
Ponto	MN.45.2.100	MN.45.0.100	Diferença
15	63,70	62,05	-2,59%
18-X	60,98	59,05	-3,16%

As tensões no fio 3 ao longo do carregamento para o modelo com coeficiente de Poisson iguais 0,00 e 0,20 podem ser vistas na Figura 50 e na Figura 51. Já as tensões no fio 6 podem ser vistas na Figura 52 e na Figura 53.

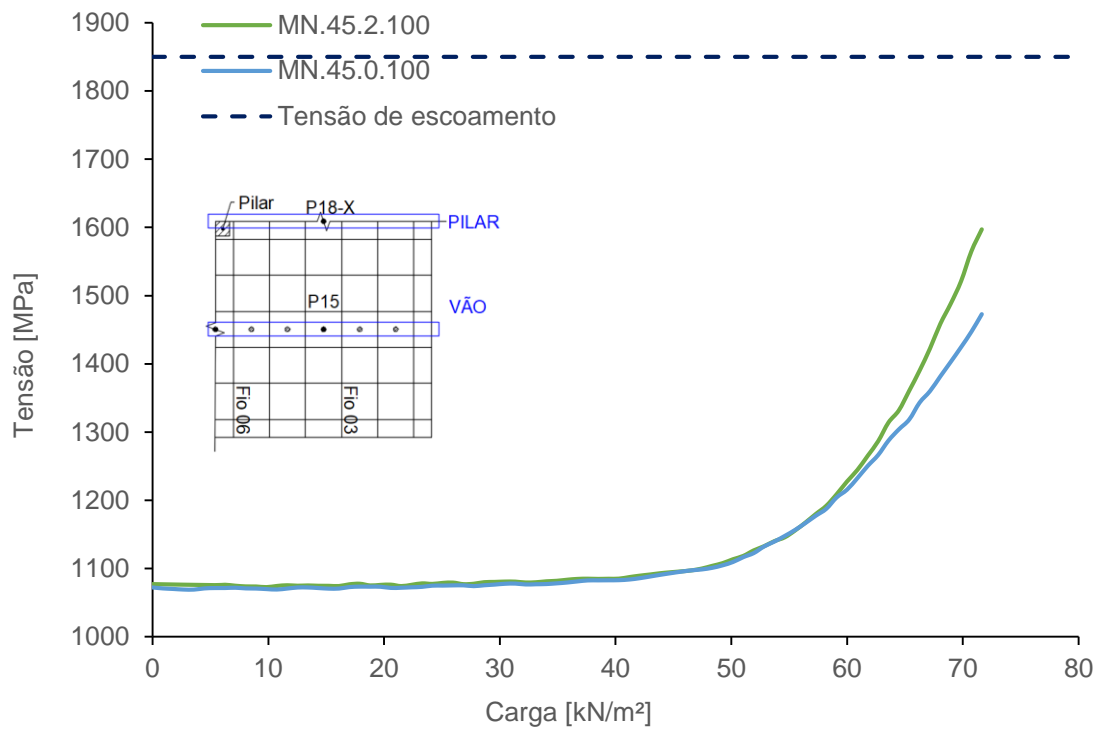


Figura 50 – Comparação de Coeficiente de Poisson - Fio 3 Vão

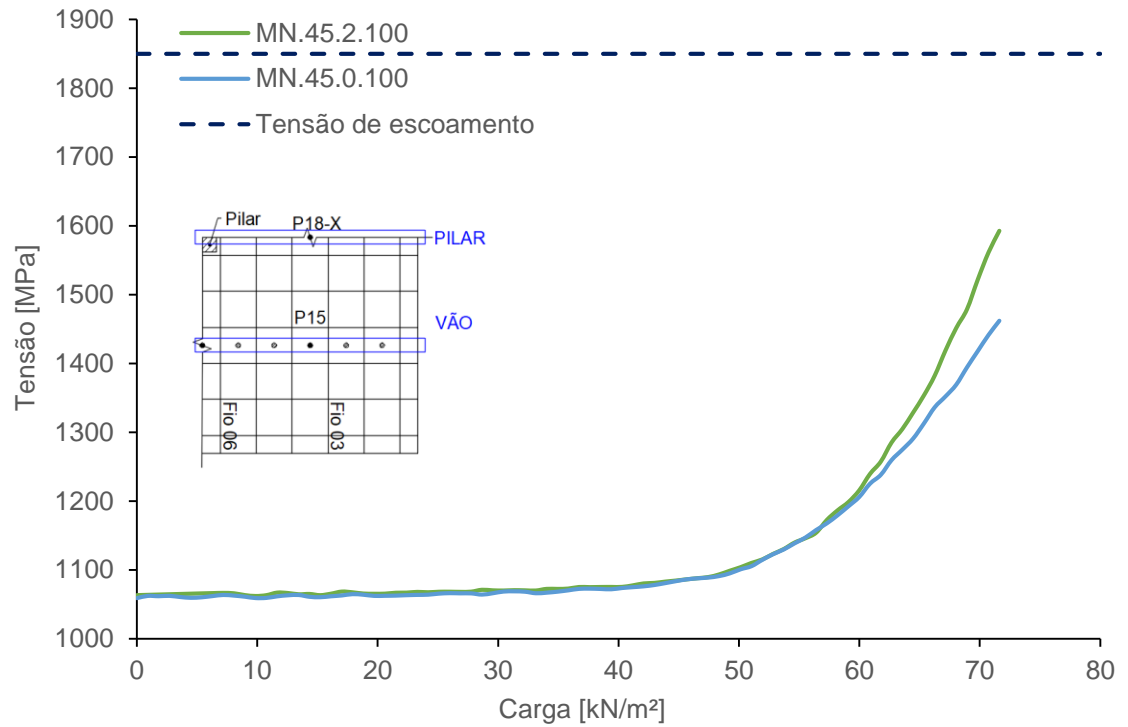


Figura 51 – Comparação de Coeficiente de Poisson - Fio 3 Pilar

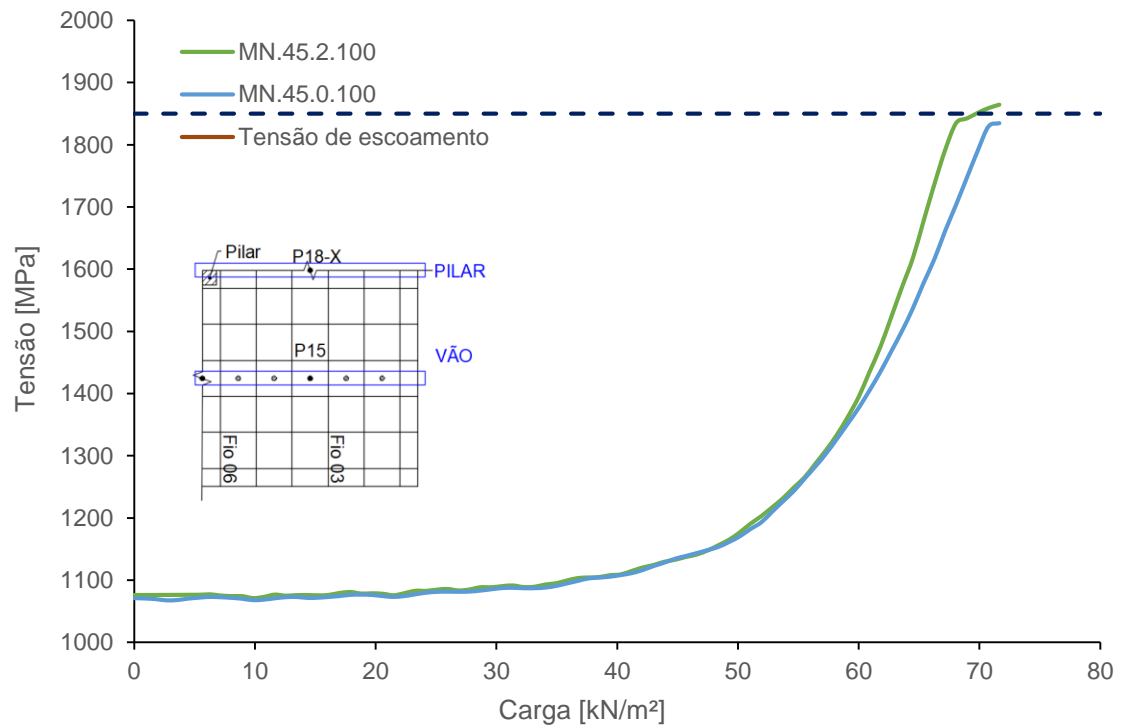


Figura 52 – Comparação de Coeficiente de Poisson - Fio 6 Vão

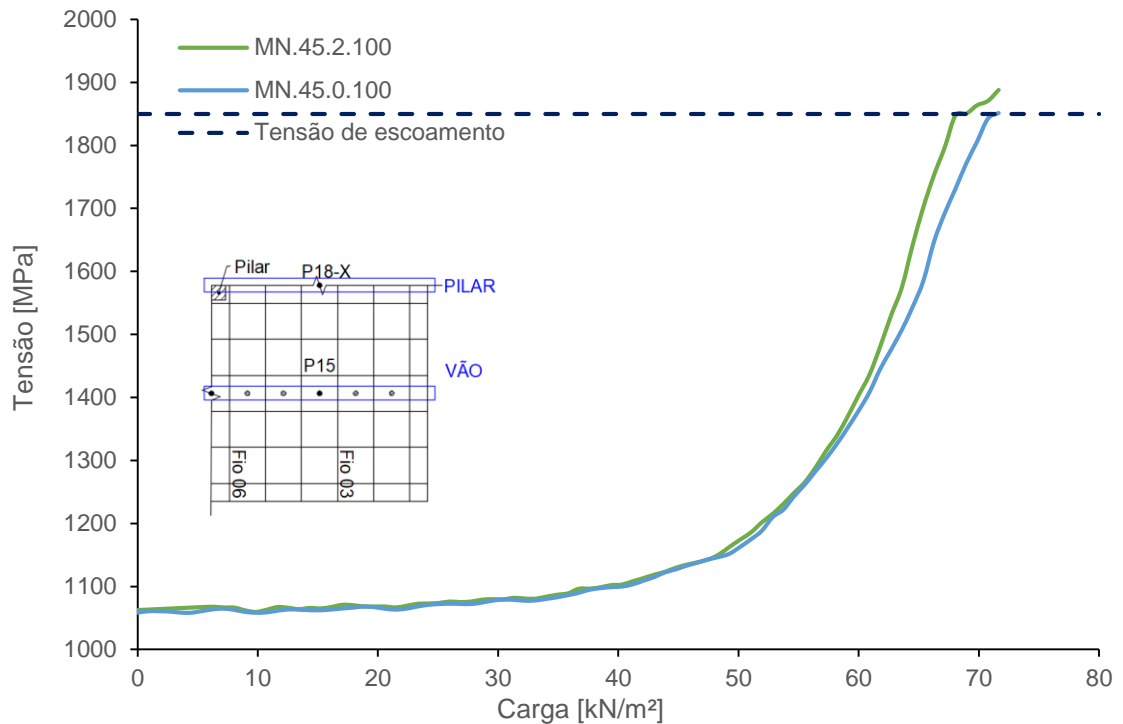


Figura 53 – Comparação de Coeficiente de Poisson - Fio 6 Pilar

Da mesma forma, ao avaliar as tensões nos fios de protensão, também é notável que ao longo da maior parte do carregamento os comportamentos são muito próximos. Contudo ao se aproximar do final da análise numérica, as curvas começam a se separar, indicando um comportamento mais rígido para os modelos com coeficiente de Poisson nulo.

A seguir, os resultados dos modelos de maior rigidez com a variação dos coeficientes de Poisson serão apresentados. Na Figura 54 e na Figura 55 observa-se que as curvas não apresentam diferenças entre si para o carregamento dentro do limite  $L/150$ , todavia, têm-se que as curvas dos modelos com enrijecimento na parte superior mostraram uma tendência de separação mais nítida logo após este limite, tanto no P15 quanto no P18-X. Isto indica que o modelo com coeficiente de Poisson nulo, em modelos mais rígidos estruturalmente, tendem a apresentar uma maior influência no comportamento da estrutura aumentando ainda mais a rigidez do modelo como um todo.



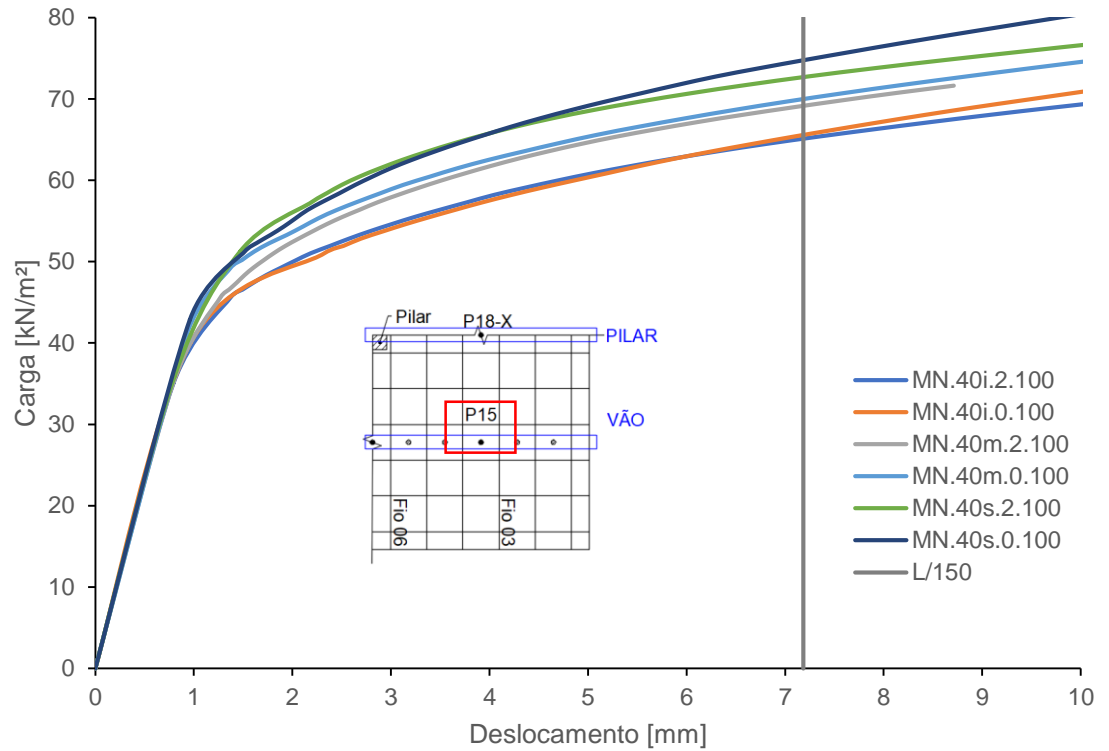


Figura 54 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – P15

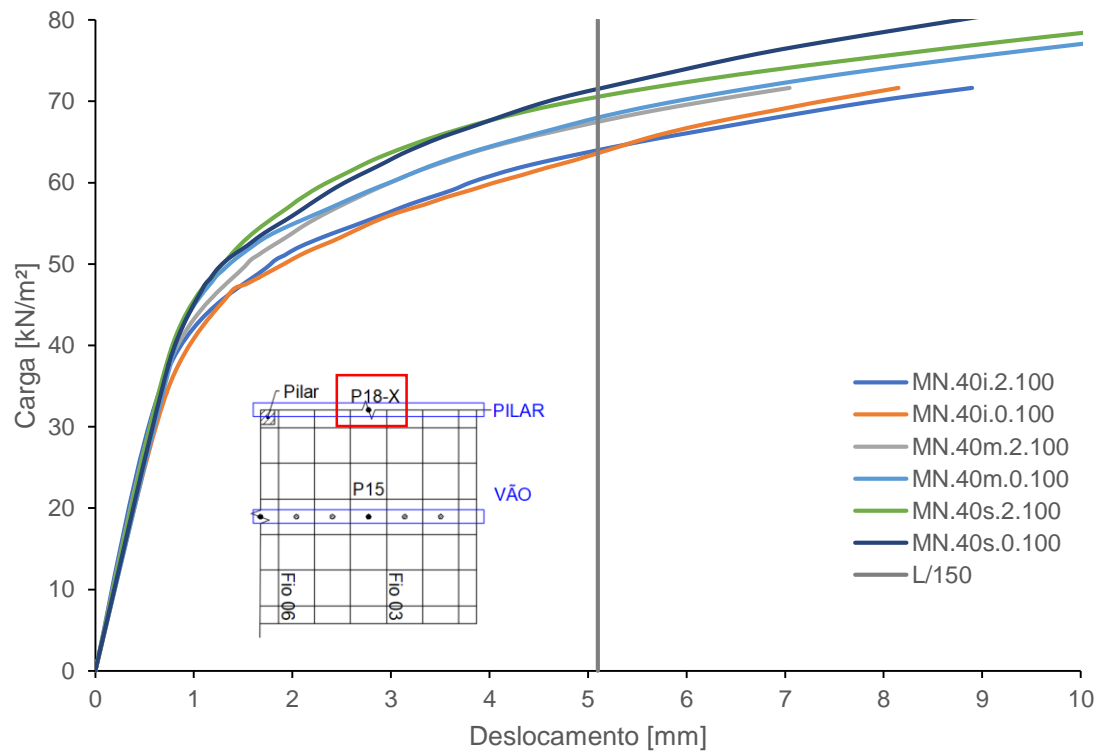


Figura 55 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – P18-X

Na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** são apresentadas as diferenças entre as rigidezes secantes para cada esbeltez. Todas as variações são baixas, contudo o modelo MN.40s.0.100, apesar de ainda manter uma diferença baixa, já se torna mais perceptível e como visto acima, para além do limite  $L/150$ , esta diferença só aumentará.

Carga em $L/150$			
Ponto	MN.40i.2.100	MN.40i.0.100	Diferença
15	65,11	65,57	0,70%
18-X	63,92	63,54	-0,60%

Carga em $L/150$			
Ponto	MN.40m.2.100	MN.40m.0.100	Diferença
15	69,14	69,97	1,21%
18-X	67,41	67,90	0,73%

Carga em $L/150$			
Ponto	MN.40s.2.100	MN.40s.0.100	Diferença
15	72,68	74,75	2,85%
18-X	70,48	71,44	1,37%

A tensão no fio 3 ao longo do carregamento para o modelo com coeficiente de Poisson iguais 0,00 e 0,20 pode ser vista na Figura 56 e na Figura 57. Já as tensões no Fio 6 podem ser vistas na Figura 58 e na Figura 59.

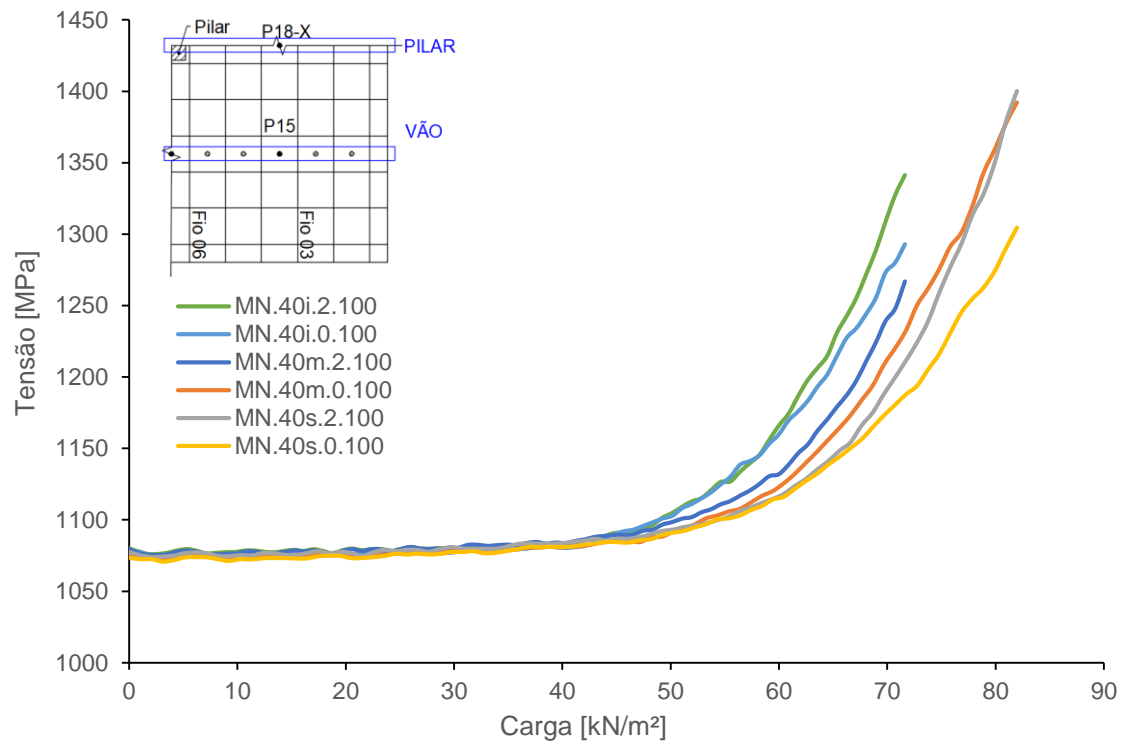


Figura 56 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – Fio 3 - Vão

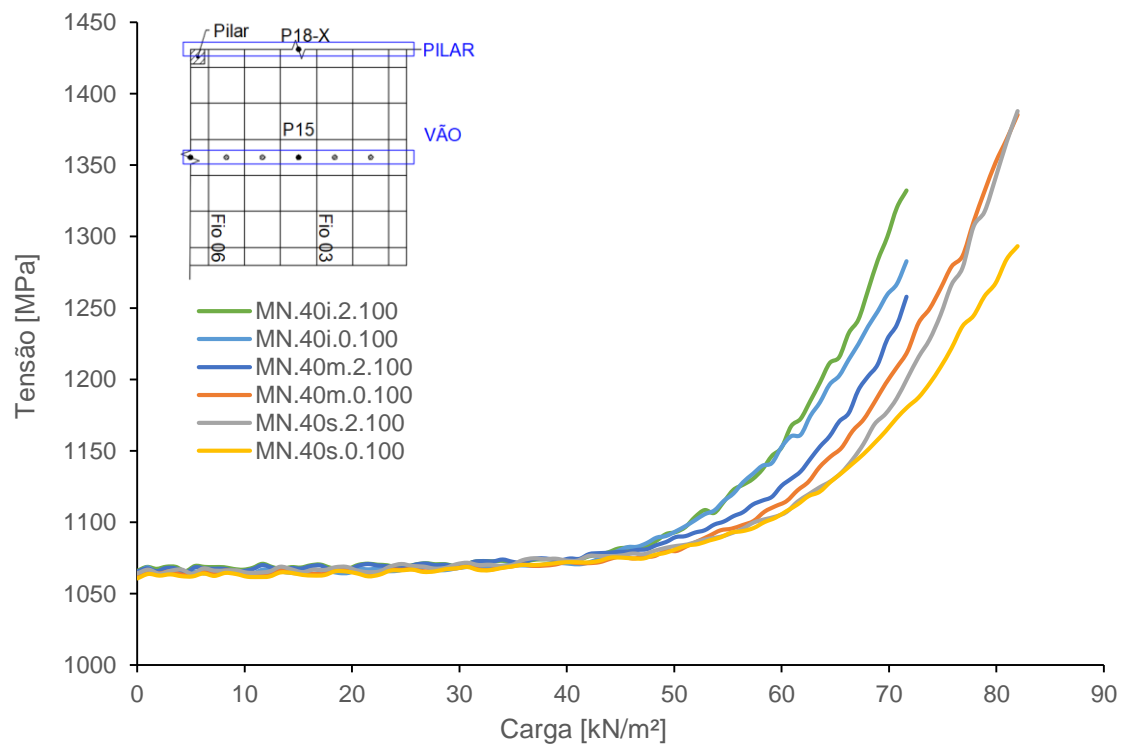


Figura 57 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – Fio 3 – Pilar

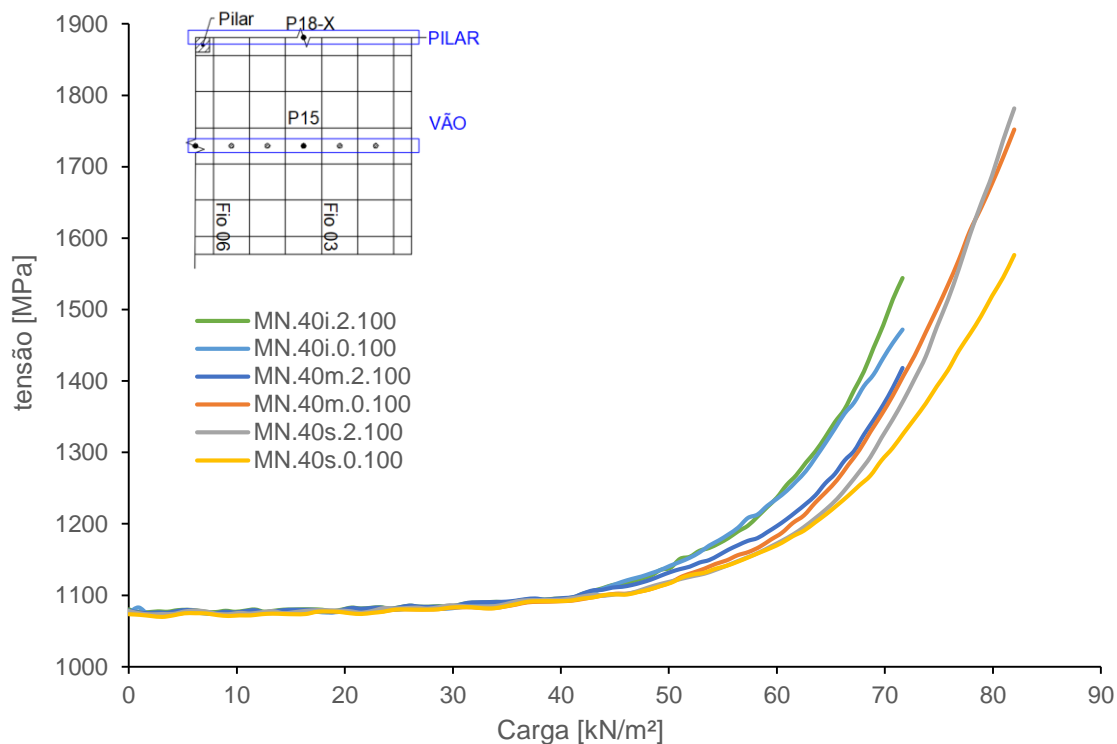


Figura 58 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – Fio 6 – Vão

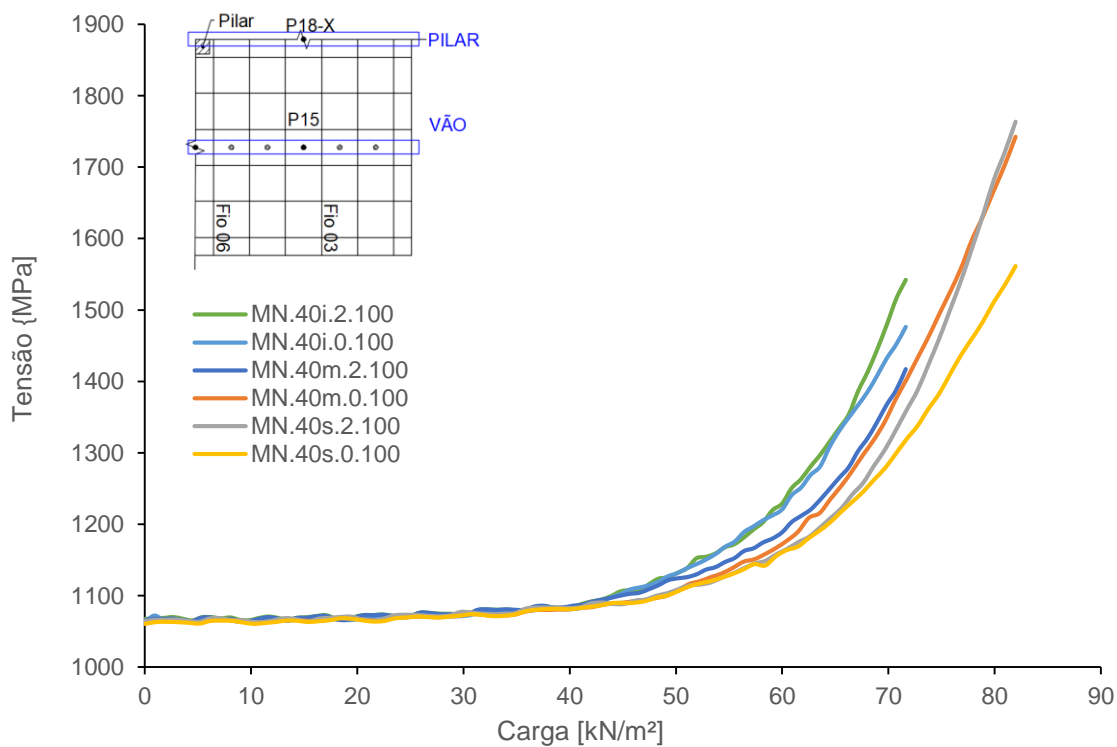


Figura 59 – Comparação entre coeficiente de Poisson ( $L/h = 40$ ) – Fio 6 – Pilar

De igual modo observado nos gráficos carga *versus* deslocamento, os comportamentos da tensão nos fios apresentam semelhanças. Entretanto, somente o modelo com enrijecimento superior demonstrou que o modelo com coeficiente de Poisson igual a 0,20 comporta-se de forma mais flexível próximo a carga do limite  $L/150$ . Na Figura 60 é mostrado o padrão de fissuração da laje quando coeficiente de Poisson é nulo e na Figura 61 mostra o padrão de fissuração quando o coeficiente de Poisson é igual 0,20. Nestas figuras, comparando-se para o mesmo nível de carregamento (carga última aplicada no modelo numérico), nota-se que há uma grande diferença na magnitude da fissuração que pode ser explicado devido ao modelo com coeficiente de Poisson deformar 10 mm a mais o modelo com coeficiente de Poisson nulo (Figura 49).

Ao analisar a fissuração na face inferior, percebe-se que a diferença entre os modelos nas análises do comportamento carga *versus* deslocamento e tensão dos fios deve-se principalmente a uma maior influência do momento positivo.

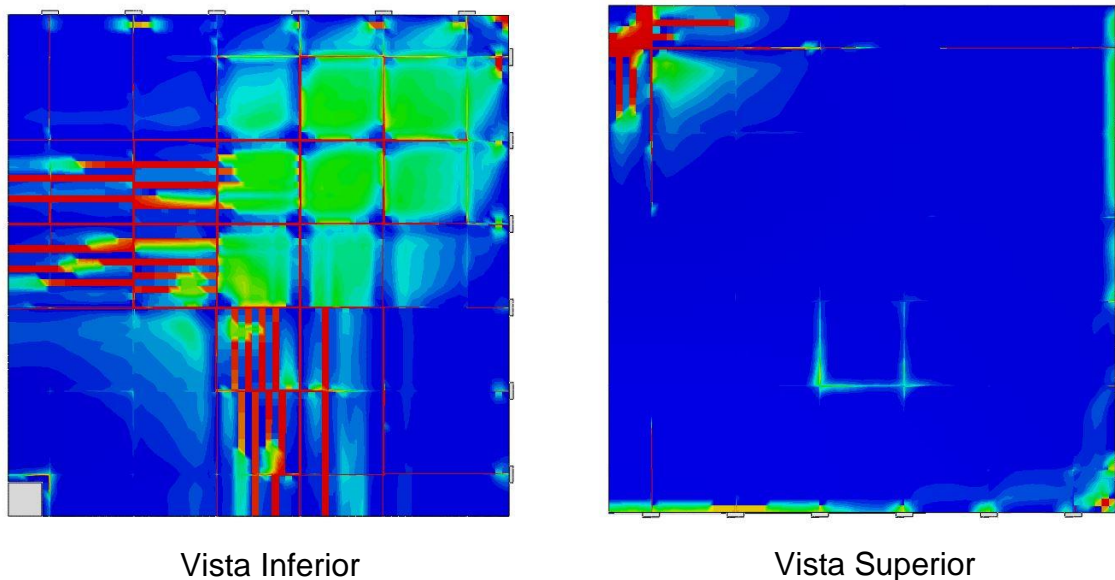


Figura 60 – Fissuração – Coeficiente de Poisson = 0,00

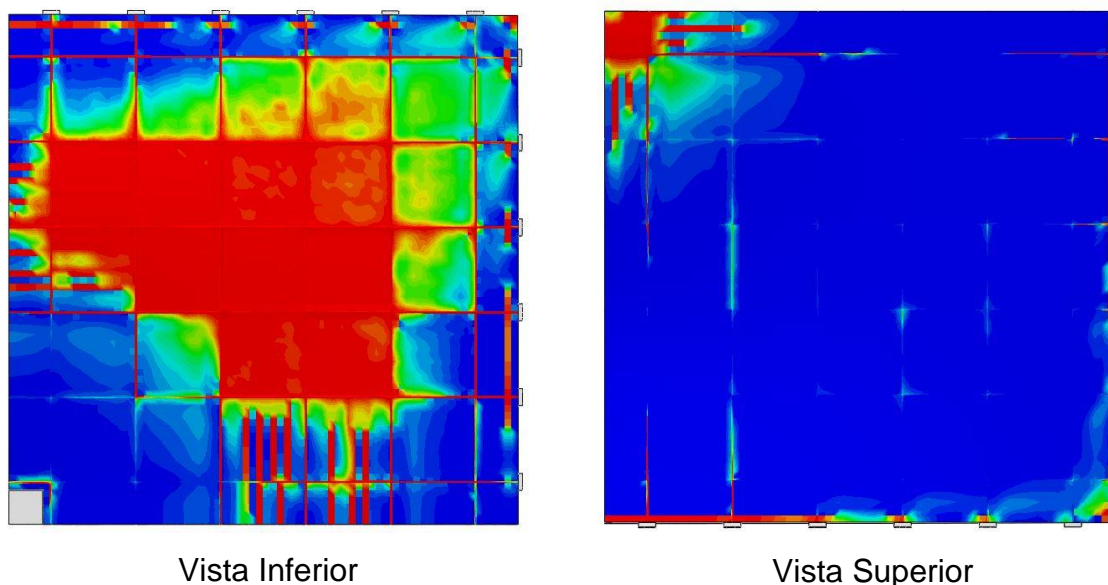


Figura 61 – Fissuração – Coeficiente de Poisson = 0,20

### 3.4 Variação no nível de protensão

Por fim, o último grupo de análises foi a variação do nível da protensão aplicada aos fios. Foram estabelecidos dois grupos diferentes de modelos o primeiro reduziu-se em 50% o nível da protensão aplicada com o fim de avaliar o comportamento da estrutura em baixos níveis de tensão inicial. Já no segundo grupo aumentou-se em 50% o nível de protensão do modelo numérico validado (MN.45.2.100) de forma a avaliar o comportamento estrutural em um nível de compressão maior, porém sem exceder a tensão de escoamento no ato da protensão.

Com o intuito de que o efeito da protensão seja considerado nas duas direções, há uma prática comumente usada de aplicar, ao menos, uma tensão média no concreto de 0,50 MPa. Assim, ao se reduzir a protensão pela metade, a estrutura ainda estaria submetida a um nível de protensão de 0,88 MPa e, portanto, se comportando dentro do esperado para este modelo estrutural.

Dentro do segundo grupo, a fim de não levar o fio ao escoamento logo no começo no ensaio, escolheu-se um aumento da protensão inicial em apenas 50%. Desta forma pode-se avaliar o efeito da protensão na estrutura enquanto o fio ainda trabalha dentro do regime elástico, mesmo que por um período reduzido.

A seguir são apresentados os comportamentos dos modelos com a esbeltez de 45, variando-se o nível de protensão. Ao observar a Figura 62 e a Figura 63, constata-se que a fase elástica foi pouco influenciada tanto para o P15 quanto para o P18-X. Também se verifica que a fissuração ocorre mais cedo no ensaio quando a protensão aplicada é reduzida; além disso, ela da mesma forma é adiada quando a protensão aplicada é maior.

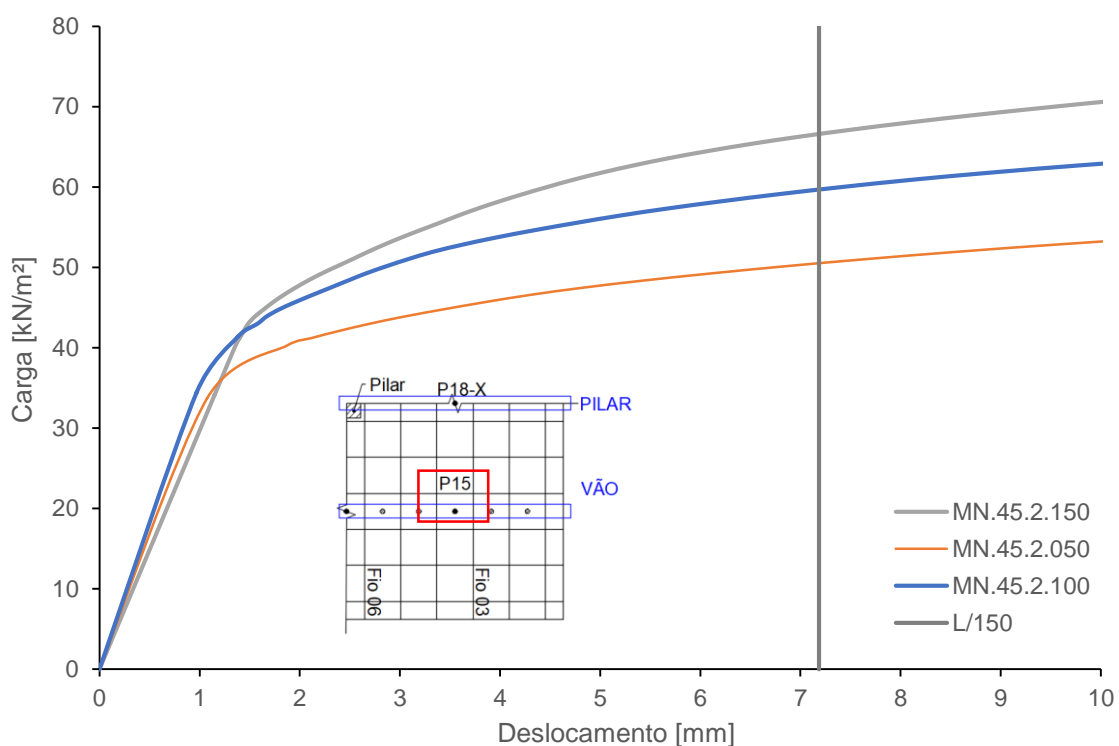


Figura 62 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – P15

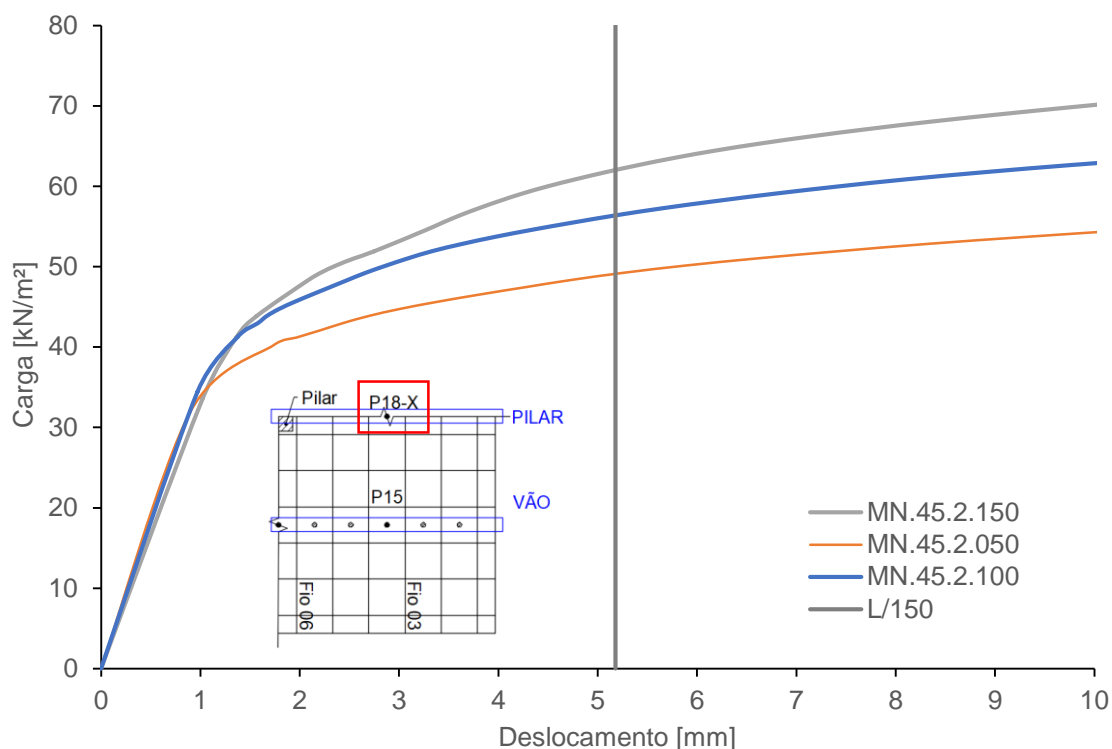


Figura 63 – Comparação entre níveis de protensão (L/h = 45) – P18-X

Os três modelos apresentaram inclinações próximas entre si tanto na fase elástica quanto na fase pós-fissuração, o que indica que o nível de protensão não altera as rigidezes desses tramos, mas apenas prolonga a fase elástica.

Na Tabela 12, observa-se que a carga atuante no ELU não aumenta nem diminui na mesma proporção que o aumento ou a redução da protensão. Porém, no modelo com menor protensão aplicada, a diferença entre o P15 e o P18-X tenderam a se igualar, aproximadamente, 13%. Este fato mostra que quanto menor o nível de protensão, mais próximo de um comportamento uniforme nas duas direções a laje adquiri.

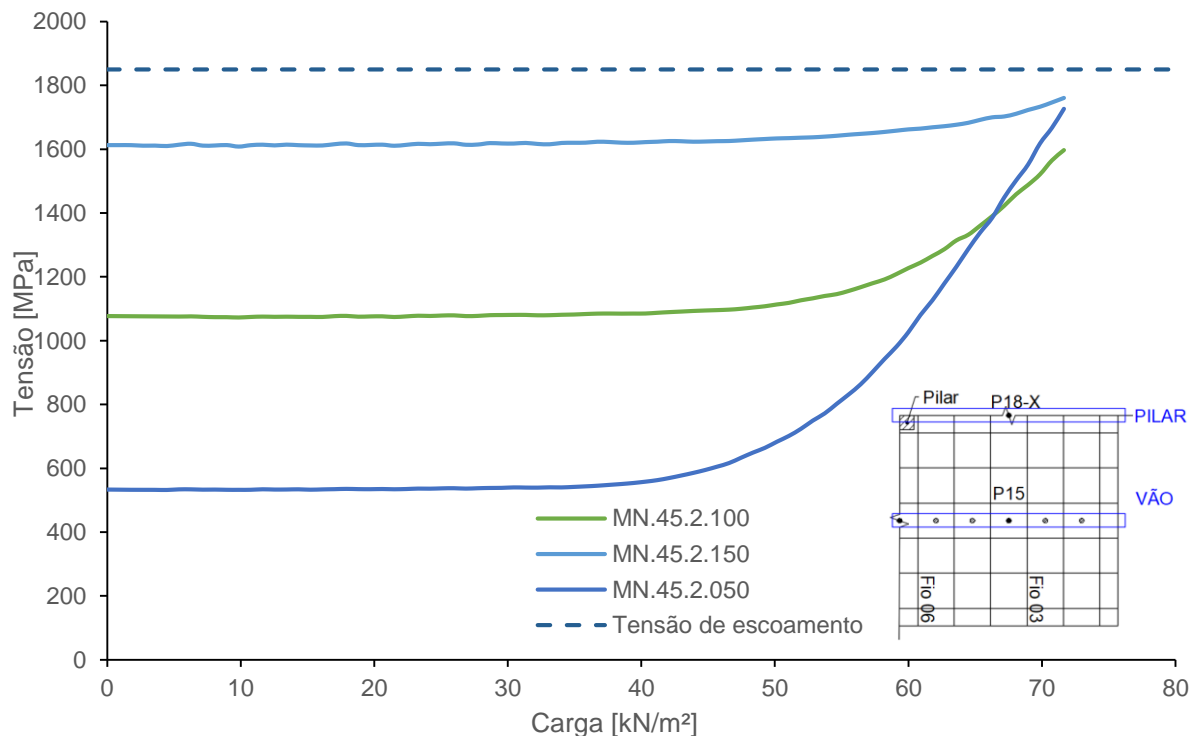


Tabela 12 – Rigidez secante do modelos numéricos variando níveis de protensão ( $L/h = 45$ )

Carga em L/150 (kN/m <sup>2</sup> )			
Ponto	MN.45.2.100	MN.45.2.150	Diferença
15	58,77	66,58	13,30%
18-X	56,20	61,78	9,94%

Carga em L/150 (kN/m <sup>2</sup> )			
Ponto	MN.45.2.100	MN.45.2.050	Diferença
15	58,77	50,61	-13,88%
18-X	56,20	48,95	-12,90%

Quando avaliadas as tensões nos fios (Figura 64 a Figura 67), é possível observar que houve o mesmo padrão de comportamento nos fios 3 e 6 nas duas posições. O modelo com maior protensão manteve o nível da tensão aplicada constante ao longo da maior parte do carregamento; já o modelo com menor protensão inicia o aumento da tensão mais cedo, ou seja, a fissuração começa mais precocemente.

Figura 64 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – Fio 3 - Vão

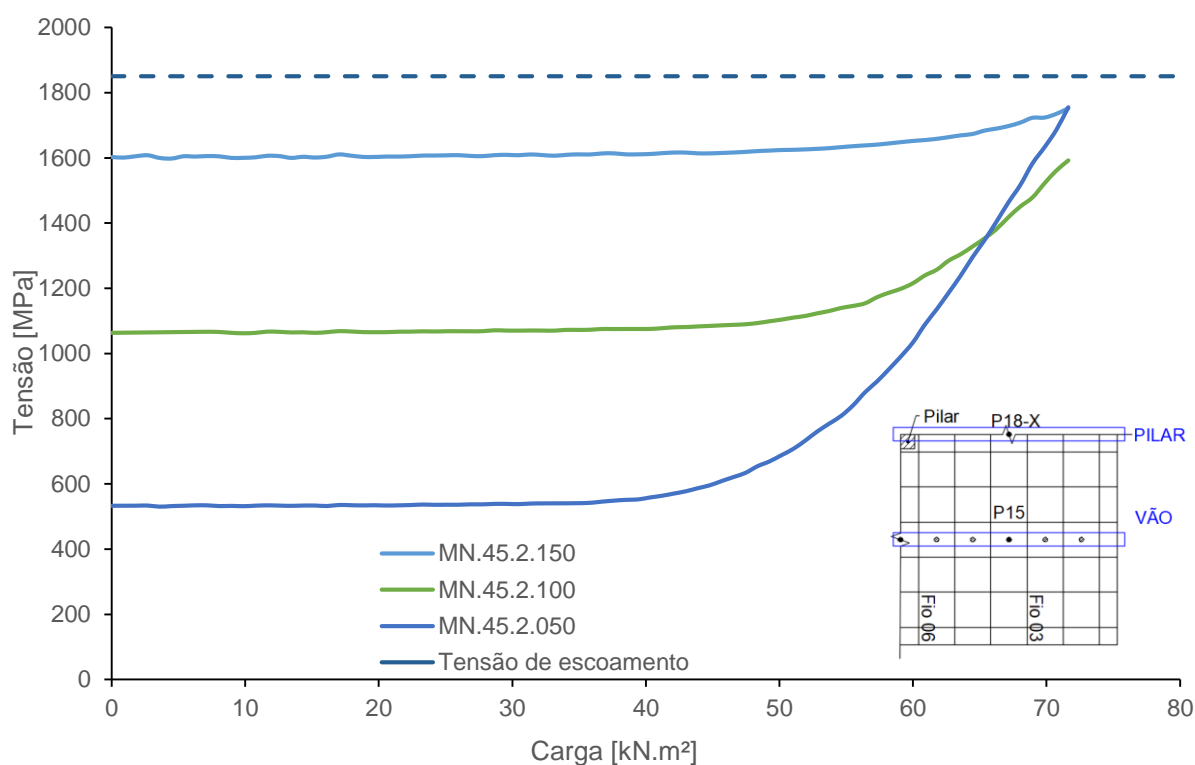


Figura 65 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – Fio 3 – Pilar

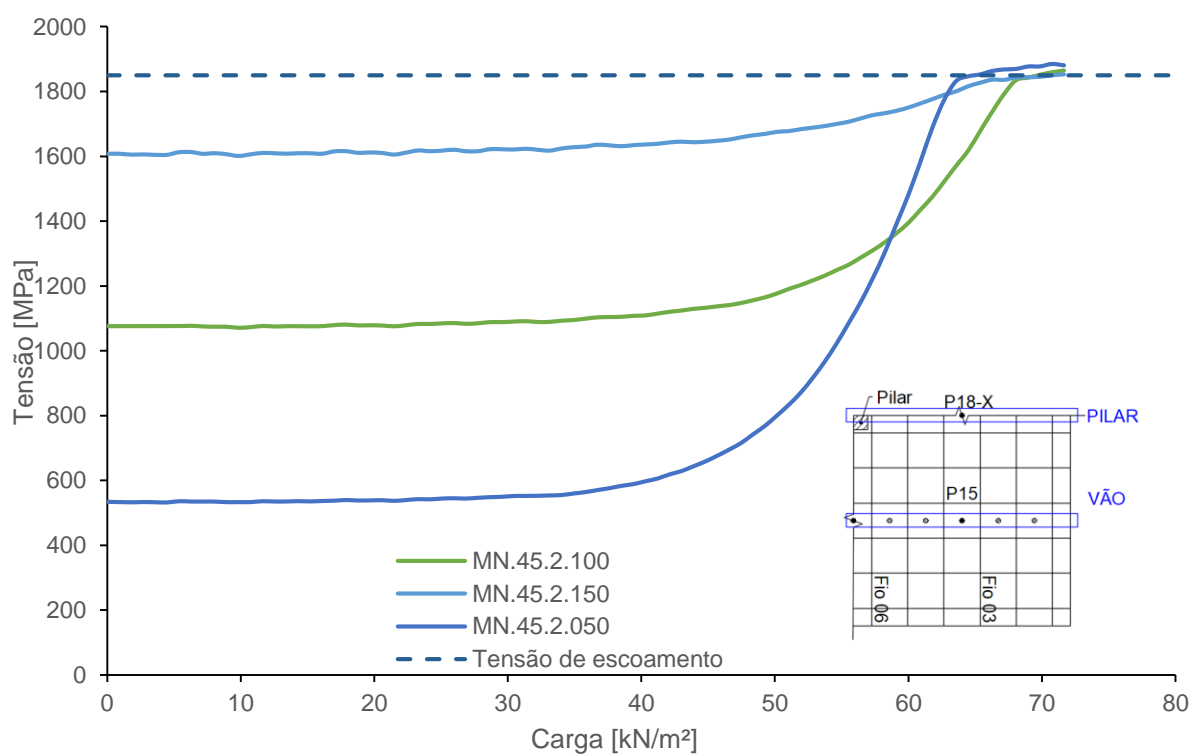


Figura 66 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – Fio 6 – Vão

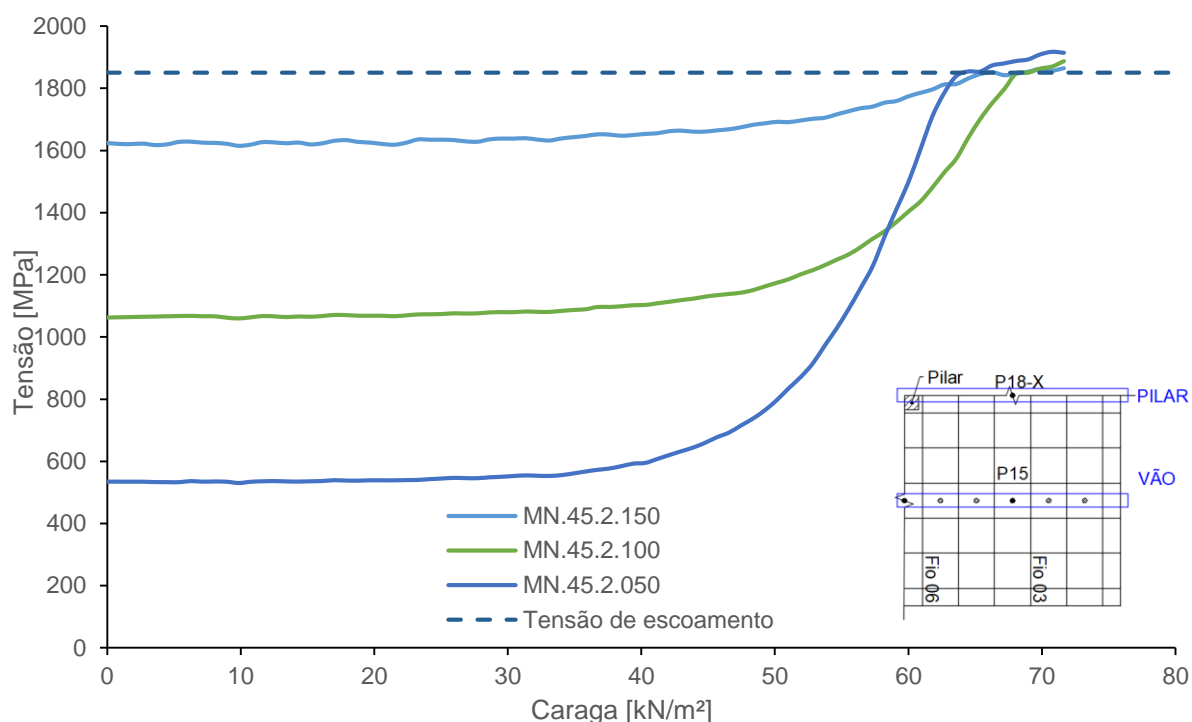


Figura 67 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 45$ ) – Fio 6 - Pilar

O fio 3 não chegou a atingir a tensão de escoamento em nenhum dos modelos. Todavia o fio 6 atingiu o escoamento em todos os modelos. O modelo de menor protensão apresentou um patamar de escoamento significativamente mais longo que o modelo de referência.

Nota-se também que o comportamento com fios engraxados é igual independente do ponto avaliado e da protensão aplicada. Este fato é evidenciado para níveis de protensão diferentes.

Quanto aos modelos de maior rigidez, buscou-se compreender como o nível de protensão, segundo o mesmo traçado dos fios, poderia influenciar o comportamento, de acordo com a esbeltez do modelo, quando os fios estivessem em posições diferentes.

Nos primeiros estudos, constatou-se que os modelos mais rígidos e com níveis de protensão maiores não foram levados a ruptura com o carregamento adotado para os modelos com esbeltez de 45. Portanto, foi necessário o aumento do carregamento em 33,3% para que, assim, estes fossem levados a ruptura e, simultaneamente, mantendo as energias dentro dos limites estabelecidos por este estudo.

Na Figura 68 e na Figura 69, apresentadas abaixo, será exposto o comportamento carga *versus* deslocamento nos pontos P15 e P18-X, respectivamente.

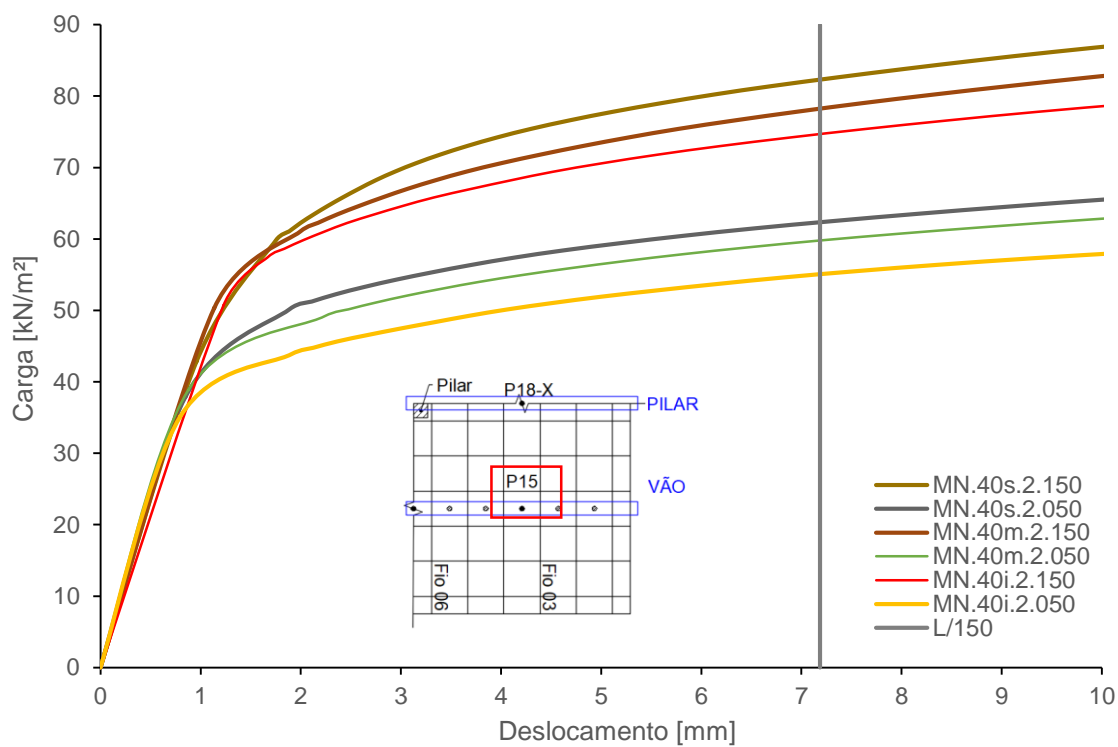


Figura 68 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – P15

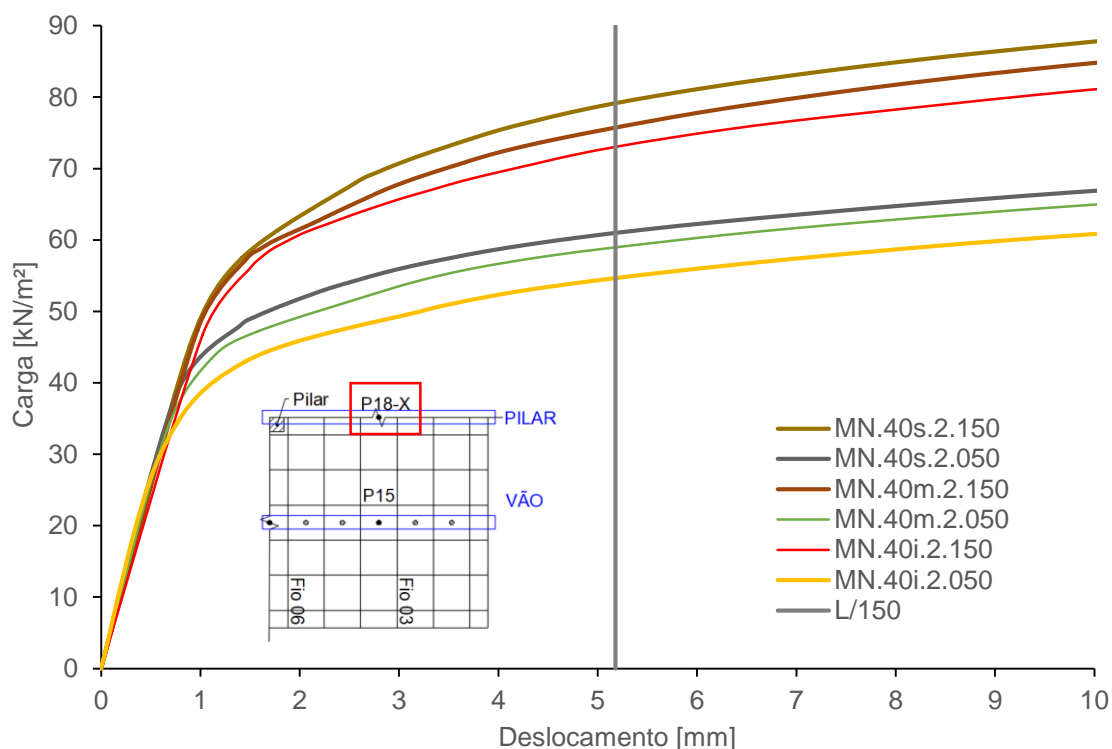


Figura 69 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – P18-X

Verificou-se que a fase elástica também foi pouco influenciada tanto para o P15 quanto para o P18-X quando as rigidezes relativas foram alteradas. Além disso, a principal diferença foi a carga de fissuração, bem como ocorreu nos modelos de esbelteza iguais a 45.

Da Figura 70 a Figura 73 são apresentadas as tensões nos fios 3 e 6 ao longo do carregamento. Nelas pode-se observar que para os modelos com nível de protensão reduzido houve um aumento na tensão de forma mais acentuado e mais cedo. Já para os modelos com o nível de protensão maior, observa-se uma baixa variação da tensão nos fios até que ocorra a fissuração. A tensão então é elevada, mas devido ao maior nível da protensão instalada no fio, atingi-se o patamar de escoamento muito mais rápido.

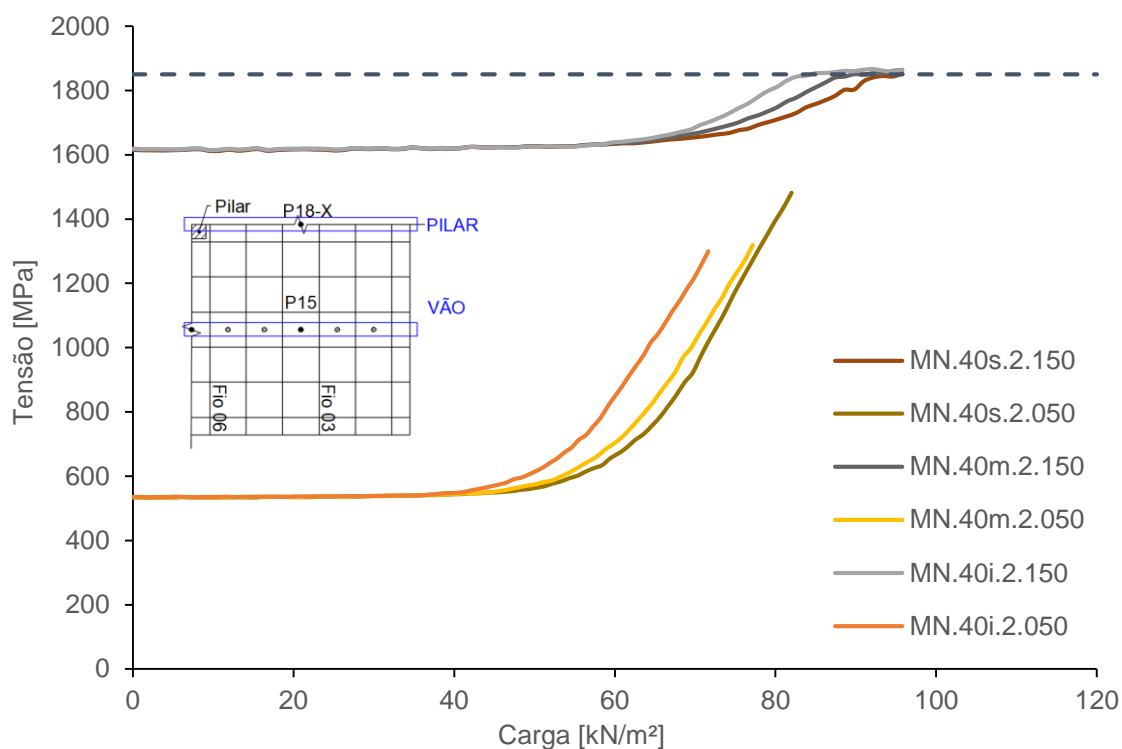


Figura 70 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – Fio 3 – Vão

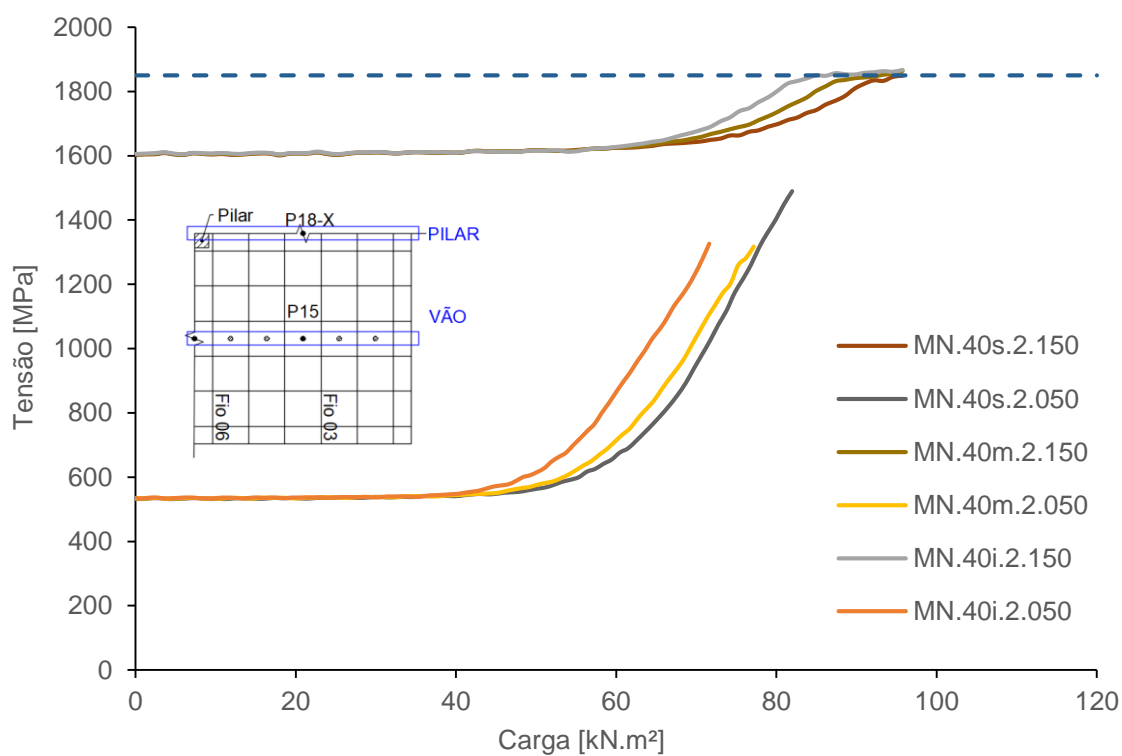


Figura 71 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – Fio 3 - Pilar

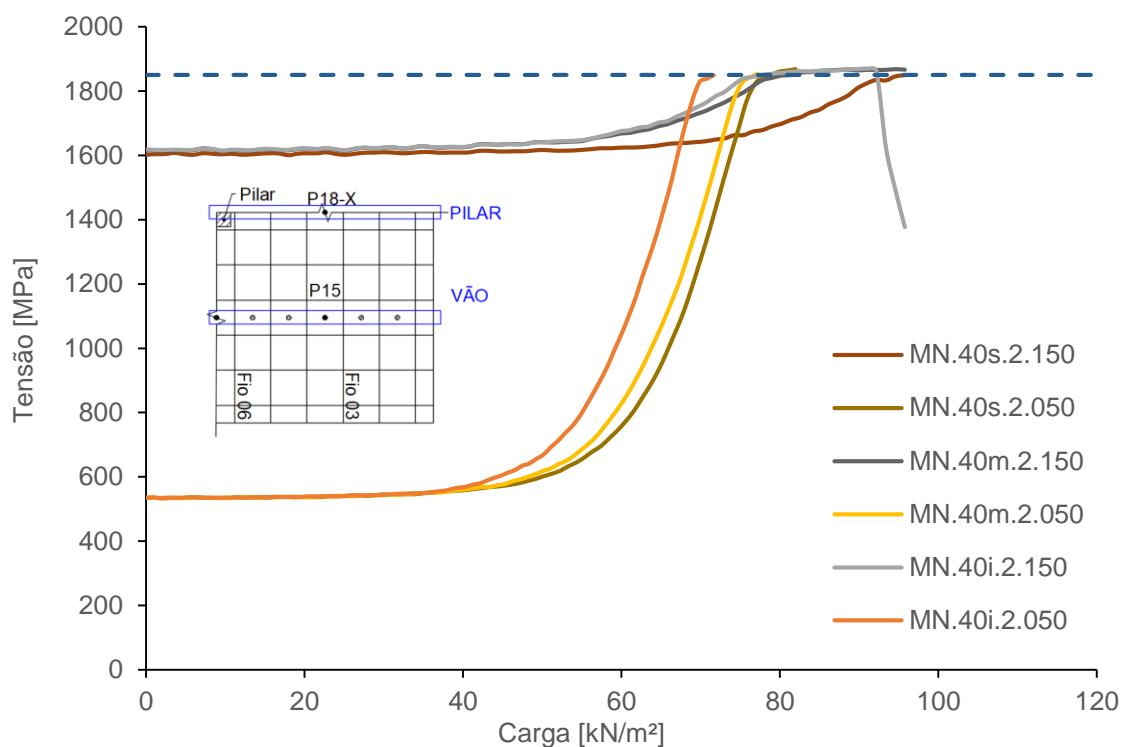


Figura 72 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – Fio 6 – Vão

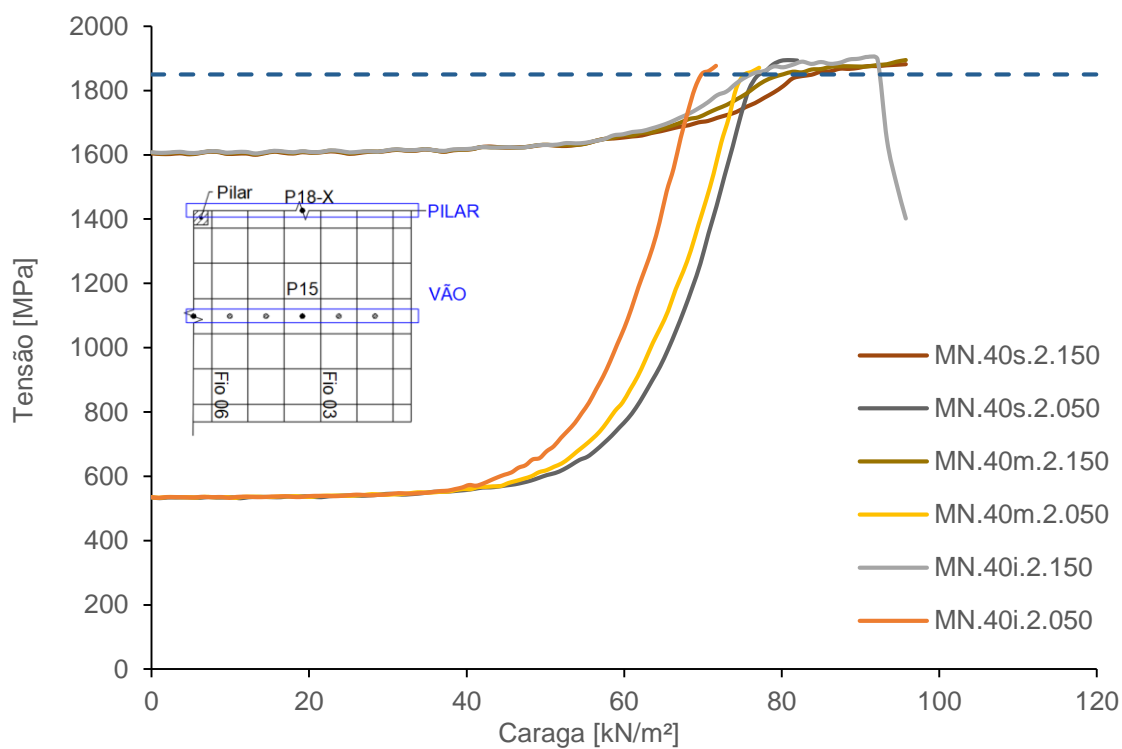


Figura 73 – Comparação entre níveis de protensão ( $L/h = 40$ ) – Fio 6 - Pilar

Nos modelos mais rígidos foi possível observar a diferença do comportamento quanto a influência do aumento e da redução de rigidez em conjunto com a influência da protensão. Nos modelos com maior nível de protensão e aumento da rigidez na face inferior, identificou-se o início de fissuração de forma mais precoce e não chegando ao término do carregamento. As curvas da tensão no fio 6 mostram uma queda acentuada, o que indica um esgotamento estrutural por falta de equilíbrio do modelo numérico.

Já os modelos com engrossamento médio e superior seguem a tendência de retardar a fissuração proporcionalmente ao aumento da espessura na face superior. Este fato, deve-se ao maior braço de alavanca do momento positivo, o que resulta em um crescimento significativo na sua resistência e no retardamento da fissuração.

Por fim, os modelos com protensão reduzida mostram uma propensão de se aproximarem, tendendo ao comportamento de concreto armado. Exceto no modelo com engrossamento na face superior, visto que o mesmo apresentou uma melhoria no comportamento de forma mais expressiva ao ser comparado com os outros dois modelos.



## 4 DISCUSSÃO SOBRE OS RESULTADOS

Para que os dados deste trabalho pudessem ganhar contornos mais práticos no dia a dia de projeto, buscou-se várias comparações entre as inclinações das curvas carga *versus* deslocamento. Foram comparadas as rigidezes secantes para o deslocamento  $L/150$  com a rigidez da fase elástica para que se encontrasse um fator redutor da rigidez para lajes lisas protendidas.

Quando avaliado o efeito da não linearidade geométrica de lajes lisas protendidas, observou-se que, para os casos analisados, a diferença entre os modelos estava dentro do valor de 10%. Portanto, o  $\gamma_{f3}$  estabelecido pela NBR 6118 (2014) e NBR 9062 (2017), mostra-se condizente e conservador.

Contudo, quando os modelos ficaram mais rígidos – por exemplo, com a não consideração do coeficiente de Poisson – foi identificado um efeito reduzido da não linearidade geométrica no comportamento estrutural. Da mesma forma, a influência da rigidez também é perceptível ao analisar pontos dentro do mesmo modelo. Portanto, em regiões mais rígidas da laje, os efeitos de segunda ordem foram menos evidentes. Pode-se citar, por exemplo, os pontos P18-X e P15, onde, nitidamente, o P18-X apresenta uma maior rigidez devida ao seu menor vão, e, conseqüentemente uma menor influência da não linearidade geométrica.

Muitos autores ao longo da revisão bibliográfica, sugerem a consideração ou não do coeficiente de Poisson, com diversas justificativas desde não ser relevante, simplificação numérica ou valores diferentes segundo a fissuração. Este trabalho, apesar de necessitar avaliar outros casos, mostrou que há uma tendência de que o coeficiente de Poisson de fato tenha uma baixa influência no comportamento estrutural dentro dos limites de cálculo de uma laje lisa protendida ( $L/150$ ). Desta forma, ficaria a cargo do engenheiro, a sua adoção ou não.

Deve-se ressaltar que atualmente, os programas de computador estão mais desenvolvidos contemplando a inserção de diversas variáveis, conjuntamente, os próprios computadores estão mais velozes. Sendo assim, é recomendável, em determinadas situações, a comparação entre os modelos que considerem e modelos que não considerem o efeito do coeficiente de Poisson e, através de um senso crítico, avaliar qual dos dois modelos tendem a representar de forma mais próxima o comportamento da estrutura em análise.

Destaca-se que ao avaliar o efeito do coeficiente de Poisson ao longo de todo o carregamento dos modelos numéricos para além do limite  $L/150$ , verificou-se que quanto mais fissurada estiver a estrutura, maior será a diferença entre os modelos que consideram e que não consideram o coeficiente de Poisson. Logo, nas fases de elevada fissuração, os modelos tendem a se comportar de forma mais próxima da realidade quando consideram o coeficiente de Poisson igual a 0,2.

Este fato demonstra que o coeficiente de Poisson possui a tendência de influenciar pouco uma análise linear; entretanto, quando se realiza uma análise não linear, o seu efeito começa a ter uma maior relevância. Isto corrobora a ideia de que o efeito do coeficiente de Poisson não influencia significativamente quando se está realizando uma análise linear, sendo a sua não consideração englobada nos coeficientes de majoração de cargas das normatizações.

Quando analisadas a diferença da tensão entre os fios no meio do vão (fio 3) e sobre o apoio (fio 6), notou-se uma diferença de comportamento em todos os casos estudados, o fio sobre o pilar atingia tensões maiores do que os fios no meio do vão. Portanto, ao analisar estruturas sujeitas a carregamentos gravitacionais e laterais, deve-se considerar o modelo global para que se encontre a tensão real nos fios (ou cabos) de protensão mais solicitados.

Para o cálculo em ELS de lajes lisas protendidas, antes da ocorrência de fissuras, pode-se admitir de maneira simplificada, que a tensão atuante no fio será a mesma que a tensão da protensão descontada as perdas do encurtamento elástico. Estas perdas são infimamente influentes, porém o mesmo não pode ser afirmado para vigas protendidas.

O momento de fissuração de uma laje lisa protendida leva em consideração os seguintes aspectos: geometria da laje, resistência do concreto a tração, excentricidade da fio de protensão e tensão média aplicada na laje. Os dois primeiros são comuns a lajes em concreto armado, porém os dois últimos são particulares de lajes protendidas. A excentricidade, por meio da teoria da carga equivalente, pode ser transformada em um carregamento, já a tensão média da laje é considerada como um “aumento” de resistência a tração do concreto que deve ser vencida para que as fissuras iniciem-se.

Na Figura 74 e na Figura 75 são apresentados os gráficos que mostram a relação da tensão axial média na laje devido a protensão e a redução de rigidez para o Estado Limite Último (ELU) dos modelos numéricos desenvolvidos. Devido a maior

rigidez do trecho elásticos dos modelos numéricos, os valores necessitam ser avaliados com cautela. Contudo, há uma clara tendência de que quanto maior for o nível de protensão inicial, maior será o coeficiente redutor de rigidez. Ao avaliar o modelo experimental da laje ensaiada por Nawy (1976), o coeficiente de redução da rigidez é igual a 0,36 e 0,46, para os pontos P15 e P18-X respectivamente.

Mesmo com os modelos numéricos apresentando valores mais baixos para a redução de rigidez, os valores encontrados neste trabalho estão seguindo a tendência dos valores encontrados na literatura. Lopes *et al* (2013) afirma que para lajes de concreto armado esta redução pode variar entre 0,20 a 0,33. Park *et al* (2012) desenvolveu uma correlação para lajes lisas protendidas que, de acordo com o momento de fissuração, varia de 0,15 a 0,55.

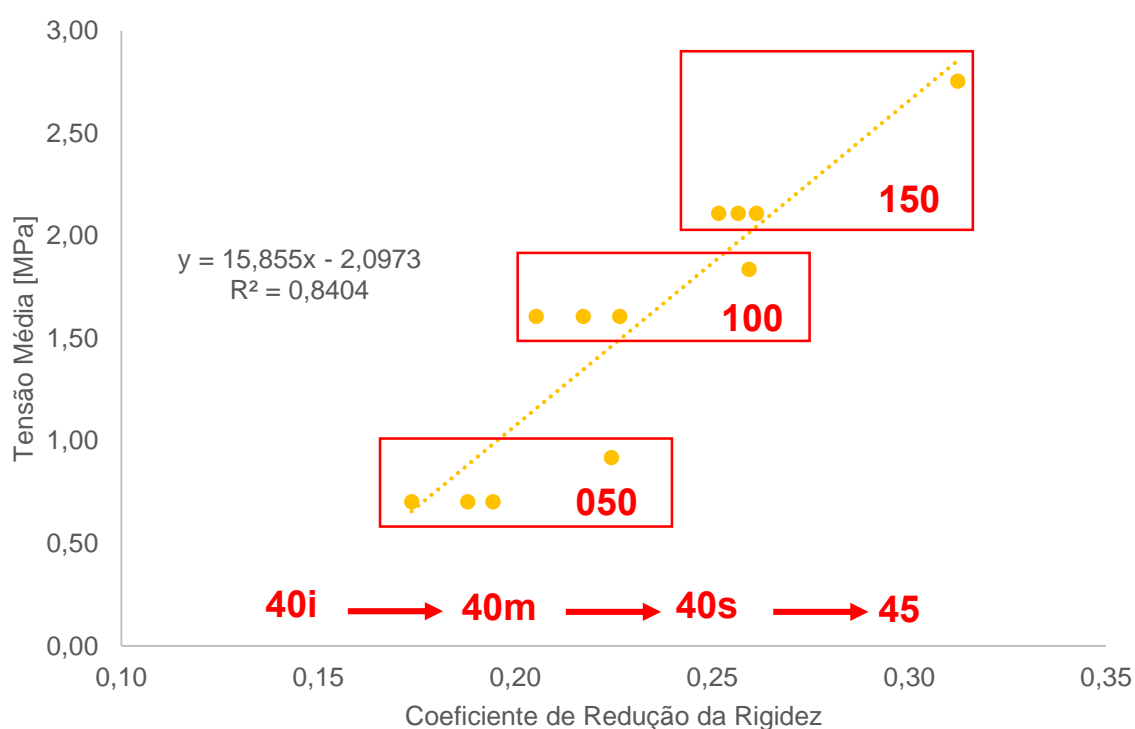


Figura 74 – Tensão média x Coeficiente de redução de rigidez - P15

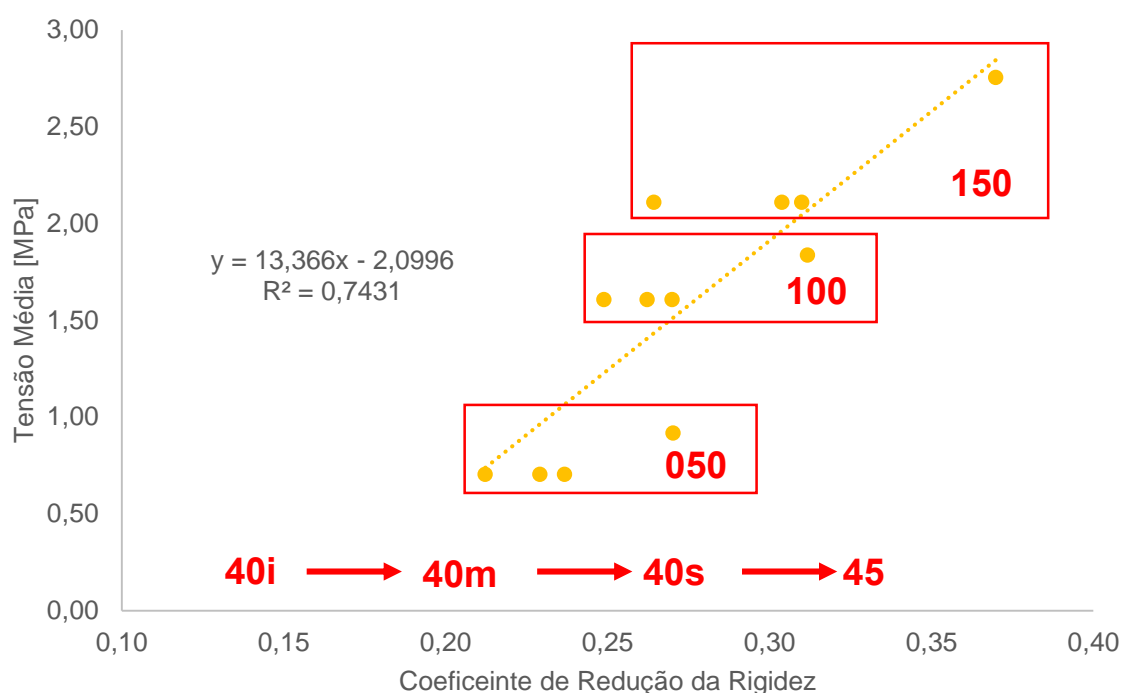


Figura 75 – Tensão média x Coeficiente de redução de rigidez - P18-X

As lajes que possuem uma esbelteza menor ( $L/h = 40$ ) apresentaram coeficientes redutores de rigidez menores que a laje do modelo de referência ( $L/h = 45$ ). Em elementos protendidos fletidos a linha neutra tende a baixar quando comparadas com elementos em concreto armado. Desta forma, as lajes protendidas além de apresentarem momentos de fissuração mais elevados, também têm a tendência de fissurarem menos por devido a inclusão da protensão.

Para avaliar de forma mais concisa, seguindo o mesmo princípio adotado por Park *et al* (2012), os principais fatores que influenciam na rigidez de uma laje lisa protendida podem ser contemplados pelo momento de fissuração ( $M_{fiss}$ ). Na Figura 76 é mostrado o gráfico momento de fissuração *versus* coeficiente de redução da rigidez. Para cálculo deste momento, levou-se em conta a geometria da laje, a resistência a tração do concreto e a tensão de compressão instalada devido a protensão. Neste gráfico, também é possível observar que há uma tendência de aumento do fator de redução de rigidez à medida que se aumenta o momento de fissuração.

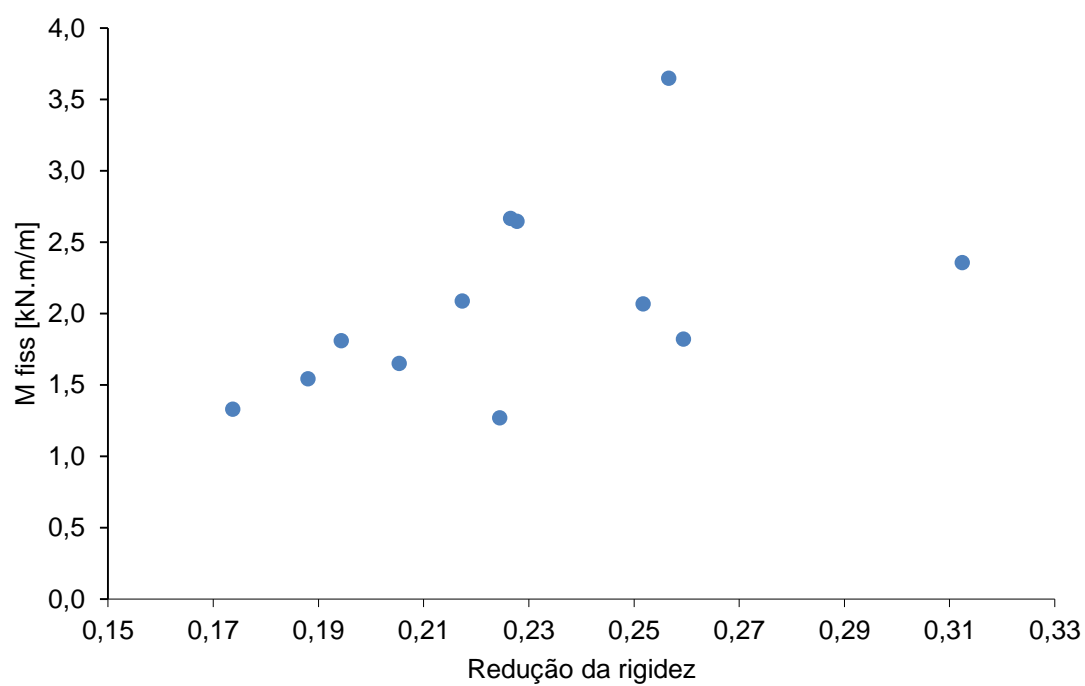


Figura 76 – Momento de fissuração *versus* coeficiente de redução da rigidez

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 Introdução

Inicialmente, a revisão bibliográfica abordou os principais métodos de análise dos esforços em lajes utilizados ainda hoje; por objetivo de explanar a base teórica de cada um deles. Ao fim desta primeira parte, dedicou-se especialmente ao método do pórtico equivalente (MPE), cuja utilização foi a maior, no século passado, para dimensionamento de lajes lisas protendidas dentre os métodos vigentes. Ao caminhar pelo seu desenvolvimento histórico e pelos aprimoramentos que foram implementados, pode-se compreender os conflitos e as soluções que ocorreram para que, assim, aprendesse com o MPE, mesmo não sendo tão mais usado como outrora.

Através do estudo do desenvolvimento histórico do MPE também buscou-se estudar a influência de diversos fatores por meio de alterações nas rigidezes de seus elementos, tendo o elemento torcional como o mais amplamente utilizado, sendo inclusive normatizado pelo ACI 318 (2014).

Um dos pontos que gera certo debate entre alguns dos métodos é a compreensão da degradação da rigidez à torção das lajes no modelo estrutural. Para tanto, explanou-se o desenvolvimento deste tópico a fim de entender como a rigidez a torção de lajes é afetada pela inclusão da protensão.

Ao fim da revisão bibliográfica, foi exposto como as diversas normas brasileiras buscam considerar o efeito da fissuração da rigidez de vários elementos na análise estrutural. Contudo, um perceptível déficit é não haver nenhuma recomendação do fator de minoração para lajes lisas protendidas.

Portanto, uma investigação numérica foi realizada com o intuito de avaliar separadamente alguns dos pontos que influenciam no comportamento estrutural de lajes lisas. Com essa finalidade, realizou-se análises *quasi-estática* de uma laje lisa protendida com fios de protensão com traçado parabólico. Ao término da modelagem, validou-se o comportamento desta laje por meio de um modelo experimental desenvolvido por Nawy *et al.* (1976).

Em seguida, foram apresentados 24 casos estudados por meio dos quais buscou-se padrões de variações segundo alguns fatores, tais como: o tipo de análise linear e não-linear, o coeficiente de Poisson, a esbeltez e o nível de protensão.

## 5.2 Conclusões

A análise dos resultados numéricos obtidos pelos modelos propostos permitiu algumas conclusões importantes, as quais serão descritas a seguir:

- A modelagem de lajes lisas protendidas tridimensionais são de grande dificuldade de elaboração devido aos contatos, a não retilineidade dos fios e cordoalhas e não compatibilização de deformações para os casos de cordoalha engraxada. Para que seja possível modelar de forma mais acurada as lajes protendidas é imprescindível que seja feito o levantamento completo dos fios ao longo do protótipo experimental de forma que as interferência entre cordoalhas ou fios que se cruzem sejam evitadas.
- O efeito da não linearidade geométrica na laje lisa protendida está diretamente relacionada à rigidez da estrutura, logo, os fatores que tornam a estrutura mais rígida terão menor influência dos efeitos de segunda ordem;
- O comportamento de todas lajes lisas protendidas deste trabalho, quando consideraram a não linearidade geométrica, apresentaram aumentos em comparação aos modelos sem a consideração da não linearidade geométrica abaixo de 10%. Este fato confirma que para lajes lisas protendidas o fator de  $\gamma_{f3}$  igual a 1,10 seria correto e seguro;
- O coeficiente de Poisson pouco interfere no comportamento para os fins práticos de engenharia, ou seja, dentro do limite de  $L/150$ . Porém ao se avaliar para além deste limite, percebe-se que a sua não consideração leva a resultados errôneos;
- Quanto ao aumento da rigidez das laje lisas protendidas nota-se que lajes com maiores rigidezes relativas não apresentam uma melhora proporcional quanto

ao carregamento máximo suportado. Por outro lado, há uma melhora quanto aos deslocamentos máximos suportados por estas estruturas;

- A redução da rigidez de lajes lisas protendidas no ELU tendem a ser menores do que lajes armadas com armadura passiva. As lajes lisas protendidas apresentam uma tendência de uma redução da rigidez ainda menor quanto maior for a tensão média na laje.
- Os fios que passam sobre o apoio, para carregamentos gravitacionais, são mais solicitados que os fios que estão localizados fora destas regiões.

### 5.3 Trabalhos futuros

Uma vez que os desafios para modelagem numérica de laje lisa de concreto protendido com fios de protensão curvos sejam vencidos, faz-se necessário aumentar ainda mais a quantidade de modelos numéricos desenvolvidos para que seja possível analisar outros modelos com diferentes particularidades e condições de contorno.

À vista disso, recomenda-se como trabalhos futuros:

1. Validar novos modelos numéricos com base em mais modelos experimentais encontrados na literatura;
2. Validar novos modelos numéricos globais (que representam panos de laje maiores) com base nos modelos experimentais encontrados na literatura;
3. Expandir o estudo de casos ao incluir as variações da configuração do fio de protensão;
4. Avaliar um modelo com fios/cabos retos, de forma a compreender o efeito isolado da tensão axial na estrutura;
5. Realizar os mesmo estudos paramétricos com modelos carregados lateralmente; e
6. Avaliar os fios sobre o apoio em estruturas carregadas lateralmente.



## REFERÊNCIAS

- AALAMI, Bijan: *Post-Tensioned Buildings, Design and Construction*, 2014.
- AALAMI, Bijan; MEHRRAIN, Mehrdad: *Rotational Stiffness of Concrete Slabs*, 1974.
- ACI 318: *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, USA, 1971.
- ACI 318: *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, USA, 2005.
- ACI 318: *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, USA, 2014.
- ABAQUS, Inc S: *ABAQUS Analysis user's manual*. 6.14th ed., 2014.
- ALFARRAH, B.; LÓPEZ-ALMANSA, F.; OLLER, S.: *New methodology for calculating damage variables evolution in Plastic Damage Model for RC structures*, Spain, 2017.
- BERNARDO; LOPES: *Behaviour of Concrete Beams Under Torsion: NS plain and Hollow Beams*, *Journal of Civil Engineering and Management*, 2007.
- BRITISH STANDARDS INSTITUTION: *The Structural Use of Concrete. Part 1: Code of Practice for Design and Construction*, UK, 1997.
- BURNS, Ned H.; HEMAKOM, Roongroj: *Test of Scale Model Post-Tensioned Flat Plate*, June, *Technical Papers, ASCE, USA*, 1977.
- BURNS, Ned H.; HEMAKOM, Roongroj: *Test of Post-Tensioned Flat Plates with Banded Tendons*, *Technical Papers, ASCE, USA*, 1985.
- CANO; KLINGER: *Comparison of Analysis Procedures for Two-Way Slabs*, *ACI Journal*, Volume 85, Issue 6, pages 597-608, November, USA, 1988.
- CAVALCANTI: *Análise da Rigidez à Torção em Vigas de Concreto Armado de Resistência Normal e de Alta Resistência*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal Fluminense, 2005.
- CARNEIRO, Anselmo Leal: *Análise e Dimensionamento de Lajes Lisas Protendidas em Aderência*, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, 2015.
- CAUDURO, Eugenio Luiz: *Manual para a Boa Execução de Estrutura Protendidas Usando Cordoalhas de Aço Engraxadas e Plastificadas*, 2003.
- CAUDURO, Eugenio Luiz: *Em favor da leveza*, 1996.
- CEB: *Fib Model Code for Concrete Structures*, Switzerland, 2010.

COMPUTERS AND STRUCTURES: SAP 2000 *Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures*, 1996.

CORLEY, W. Gene; SOZEN, M. A.; SIESS, C. P.: The Equivalent Frame Analysis for Reinforced Concrete Slabs, *ACI Journal*, Volume 33, Issue 18, Page 166, June, 1961.

CORLEY, W. Gene, JIRSA, James O.: Equivalent Frame Analysis for Slab Design, *ACI Journal*, Volume 13, Issue 20, pages 875-884, June, 1970.

CORLEY, W. Gene; VANDERBILT, M. Daniel: Frame Analysis of Concrete Building, *ACI Journal*, Volume 5, Issue 12, pages 33-43, December, 1983.

CZERNY, F.; *Tafeln für vierseitig und dreiseitig gelagerte rechteckplatten*, Beton-Kalender, Berlin, 1976.

EUROCODE 2: Design of concrete structures, Part 1-1 General Rules and Rules for Building, 2004.

FRASER, DONALD J.: Effective Torcional Stiffness of Equivalent Beams, *ACI Journal*, Volume 73, Issue 10, January, 1976

HAMBLY, E. C.: Bridge Deck Behaviour, 1976.

HODNE, Bjarte: *A Study on Effect of Tendon Layouts in Post-Tensioned Flat Slabs*, Dissertação (Mestrado em Engenharia), University of Stravanger, Norway, 2018.

JENG, Chyuan-Hwan; HSU, Thomas T. C.: *A softened membrane model for torsion in reinforced concrete members*, *Engineering Structures*, Elsevier, Volume 31, Issue 9, pages 1944-1954, 2009.

JIRSA, J. O., SOZEN, M. A., SIESS C. P.: *The Effects of Pattern Loadings of Reinforced Concrete Floor Slabs*, *ACI Journal*, Volume 13, Issue 19, June, 1963.

KIM, Kang Su; GHOI, Seung-Ho; OH, Jae-Yuel; LEE, Deuck Hang; LEE, Jae-Yeon, SHIN, Myoungsy: *Unified equivalent frame method for flat plate slab structures under combined gravity and lateral loads – Part 1: derivation*, 2014a.

KIM, Kang Su; GHOI, Seung-Ho; OH, Jae-Yuel; LEE, Deuck Hang; LEE, Jae-Yeon; SHIN, Myoungsy: *Unified equivalent frame method for flat plate slab structures under combined gravity and lateral loads – Part 2: verification*, 2014b.

KOSUT, Gary M., BURNS, Ned H., WINTER, Victor: *Test of Four-Panel Post-Tensioned Flat Plate*, *Technical Papers*, ASCE, USA, 1986.

LOPES, Adelino V.; LOPES, Sérgio M. R.; CARMO, Ricardo N. F. do: *Stiffness of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Torsion*, *Mater Struct* 47, pages 227–238, 2014.

LUO, Y. H.; DURRANI, A. J.: Equivalent Beam Model for Flat-Slab Buildings - Part 1: Interior Connections, *ACI Journal*, Volume 92, Issue 1, pages 115-124, January-February, 1995a.

LUO, Y. H.; DURRANI, A. J.: Equivalent Beam Model for Flat-Slab Buildings - Part 2: Exterior Connections, *ACI Journal*, Volume 92, Issue 2, pages 250-257, March-April, 1995b.

MARCUS, H.: *Vereinfachte Berechnung Biegsamer Platte*; Berlin; Julius Springer; 1929.

NADAI, A: *Theory of Flow and Fracture of Solids*, McGraw-Hill, New York, 3rd ed., 1950.

NAWY, Edward G.; CHAKRABARTI, Pinaki: *Deflection of Prestressed Concrete Flat Plates*, *PCI JOURNAL*, March-April, 1976.

NILSON, Arthur H.; WALTERS, Jr, Donald B.: *Deflection of Two-Way Floor Systems by the Equivalent Frame Method*, *ACI Journal*, Volume 72, Issue 5, pages 210-218, May, 1975.

NOBRE, Karon: Comparação entre Métodos de Análise de Lajes Protendidas, Monografia (Graduação em Engenharia Civil), Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2017.

PARK, Young Mi; Rew, Youn Ho; Han; Sang Whan: *Stiffness reduction factor for post-tensioned flat plate slabs*, Magazine of Concrete Research, ICE, 2012.

RAMOS: Avaliação Teórica do Comportamento à Torção de Lajes de Betão Armado, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, 2013.

SCORDELIS, A. C.; LIN, T. Y.; ITAYA, R.: *Behavior of a Continuous slab Prestressed in Two Directions*, *ACI Journal*, Volume 56, Issue 12, pages 441-460, December, 1959.

SOUZA, Keila Leticia Baptista: Análise da Influência do Material de Reparação em Vigas de Concreto Armado Recuperadas, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2018.

PARK, Y. M.; Han S. W.; KEE, S. H.: *A Modified Equivalent Frame Method for Lateral Load Analysis*, Magazine of Concrete Research, 2009.

RODRIGUES, João Augusto Teixeira de Frias: Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com Base no SMMT, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) Universidade da Beira Interior, 2011.

SOUZA, Vicente Custódio Moreira de Souza; CUNHA, Albino Joaquim Pimenta da: Lajes em Concreto armado e protendido, 1998.

STRAMANDINOLI, J. S. B.; LORIGGIO, D. D.: Estudo da Rigidez à Torção para a Aplicação do Processo de Analogia de Grelha em Lajes Maciças, V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, 2003.

TABORDA, Cátia Sofia Batista: Efeito do Confinamento Axial no Comportamento de Vigas de Betão Estrutural sujeitas à Torção, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) Universidade da Beira Interior, 2012.

THOMAZ, Ercio: Trincas em Edifícios: Causas, prevenção e recuperação, 2ª edição, 2020.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, Von S : *Theory of Plates and Shells*, 1959.

TINH, Pham Phu; TRUNG, Nguyen Mai Chi: *Torcional Stiffness of Reinforced Concrete Slab at Pre- and Post-Cracking stages*, 2016.

WIGHT, James K.; MacGREGOR, James G.: *Reinforced Concrete, Mechanics and Design, Sixth Edition*, Pearson, USA, 2012.

WOINOWSKY-KRIEGER, Von S.: *Beitrag zur Theorie der Pilzdecken*, 1934.

## ANEXO A – PROTENSÃO POR MEIO DE VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

Lei de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{A.1}$$

Lei da Variação Linear Térmica

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T \quad \text{A.2}$$

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T \quad \text{A.3}$$

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \varepsilon = \alpha \Delta T \quad \text{A.4}$$

A.3 em A.1

$$\sigma = E \alpha \Delta T \quad \text{A.5}$$

$$\Delta T = \frac{\sigma}{E\alpha} \quad \text{ou} \quad \Delta T = \frac{F}{AE\alpha}$$