



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Apóllo Vitalino da Silva

**Correções radiativas ao modelo de Gribov-Zwanziger refinado**

Rio de Janeiro

2023

Apóllo Vitalino da Silva

**Correções radiativas ao modelo de Gribov-Zwanziger refinado**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

S586c

Silva, Apóllo Vitalino da.

Correções radiativas ao modelo de Gribov-Zwanziger refinado /  
Apóllo Vitalino da Silva. - 2023.

108 f.: il.

Orientador: Bruno Werneck Mintz.

Tese (Doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Teoria quântica de campos - Teses. 2. Cromodinâmica  
quântica - Teses. 3. Yang-Mills, Teoria de - Teses. 4. Confinamento  
(Física nuclear) - Teses. 5. Gluons - Teses. I. Mintz, Bruno Werneck  
(Orient.). II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto  
de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Apóllo Vitalino da Silva

## Correções radiativas ao modelo de Gribov-Zwanziger refinado

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 27 de março de 2023.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Mario Junior de Oliveira Neves  
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

---

Prof. Dr. Carlos Alfonso Martín Ballon-Bayona  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Profa. Dra. Letícia Faria Domingues Palhares  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Jr  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Rio de Janeiro

2023

## DEDICATÓRIA

Dedico a Deus todo esse trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiríssimo lugar, agradeço a Deus por ter permitido que tudo isso acontecesse e por ter me sustentado até aqui, pois só Ele sabe todas as dificuldades que passei durante o doutorado.

Agradeço aos meus pais, Apolo e Luciana, pela criação, pelo esforço, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Agradeço a Universidade do Estado do Rio de Janeiro, por ter me proporcionado um grande aprendizado, amigos verdadeiros e grandes experiências.

Agradeço ao meu orientador Dr. Bruno Wernek Mintz pela oportunidade, incentivo e apoio não só na elaboração deste trabalho mas também em todo o decorrer desses anos me orientando no mestrado e agora no doutorado. Pela paciência, pois sei que deixei a desejar em muitos aspectos mas mesmo assim sempre procurou ensinar-me de maneira mais didática possível e a tirar o melhor de mim.

Agradeço ao Mario Junior de Oliveira Neves, que me orientou durante a graduação. Muito obrigado pela influência, pois com certeza o senhor é uma das pessoas responsáveis por eu estar terminando essa jornada do doutorado. Levarei sempre comigo os seus ensinamentos.

Agradeço ao Carlos Stivens pela paciência, pois vivia em sua bancada tirando dúvidas. Mesmo com a pandemia minhas dúvidas eram sanadas via mensagens.

Agradeço ao meu grande amigo Kenion Assunção por me ajudar sempre, pois mesmo quando não sabia as respostas para minhas dúvidas, ajudava-me a encontrá-las. Sua ajuda foi fundamental para o desenvolvimento desta tese.

Agradeço ao meu discipulador Fernando Josué pelos conselhos e incentivo para continuar e finalizar este trabalho.

Agradeço a minha namorada Evelyn por todo o apoio e compreensão na difícil e árdua reta final da conclusão do doutorado.

Agradeço aos meus grandes amigos da época de graduação Ana Carolina, Bruno Cecílio, Lucas Leonardo e Nayton Vicentini, que mesmo estando longe sempre me apoiaram. E ao meu amigo Fábio Ofredi pela ajuda incansável em minhas apresentações.

Agradeço aos meus grandes amigos da época de escola, inseparáveis, Laura Benevides, Marcellly Fortes, Rafaella Fortes e Ulisses Lopes que sempre me apoiaram mesmo que indiretamente.

Agradeço a minha Crew, que sempre esteve do meu lado proporcionando grandes momentos de alegria.

Agradeço ao meu pastor João Dias e todos os que fazem parte do ministério que congreguei, pela compreensão, força e apoio. E aos novos amigos que ganhei na Igreja Presbiteriana de Piedade pelas orações e apoio.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Também com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

Agradeço a todos aqueles que fizeram parte direta e indiretamente para o término deste trabalho e da minha formação.

porquanto nele foram criadas todas as coisas nos céus e na terra, as visíveis e as invisíveis, sejam tronos ou dominações, sejam governos ou poderes, tudo foi criado por

Ele e para Ele.

*Colossenses 1:16 – KJA*

e sem Ele, nada do que existe teria sido feito.

*João 1:3 – KJA*



## RESUMO

SILVA, A. V. *Correções radiativas ao modelo de Gribov-Zwanziger refinado*. 2023. 108 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

O fenômeno do confinamento ainda é um problema em aberto e por isso diversos modelos e/ou métodos são propostos para tentar explicá-lo. O modelo de Gribov-Zwanziger (GZ) é um exemplo disso, proposto para tentar descrever o propagador de glúon. No entanto, mostrou-se incompatível ao comparar com os resultados da QCD na rede, que é no momento nossa fonte de comparação bem estabelecida para abordagens não perturbativas. Este modelo sofreu um refinamento dando origem ao que chamamos de teoria de Gribov-Zwanziger Refinada (ou modelo RGZ). O modelo RGZ apresenta, para o propagador do glúon a nível árvore, uma ótima concordância com os dados na rede para uma faixa de valores baixos de momento. Com isso, neste trabalho apresentaremos algumas técnicas e ferramentas utilizadas para calcular correções a 1-loop do propagador que o modelo RGZ apresenta. Em virtude destes cálculos serem demasiadamente trabalhosos e complexos, iremos propor uma maneira de automatizá-los para alcançar o objetivo de obter essas correções.

Palavras-chave: Teoria Quântica de Campos. Correções Radiativas. Gribov-Zwanziger. QCD na Rede.

## ABSTRACT

SILVA, A. V. *Radiative corrections to the refined Gribov-Zwanziger Model*. 2023. 108 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

The phenomenon of confinement is still an open problem and therefore many models and/or methods are proposed to try to explain it. The Gribov-Zwanziger (GZ) model is one example of this, proposed to try to describe the gluon propagator. However, it was shown to be incompatible when comparing with the lattice QCD results, which is at the moment our well-established source of comparison for non-perturbative approaches. This model underwent a refinement giving rise to what we call the Refined Gribov-Zwanziger theory (or RGZ model). The RGZ model presents, for the tree level gluon propagator, an excellent agreement with the lattice data for a range of low moment values. Therefore, in this work we will present some techniques and tools used to calculate corrections to the 1-loop propagator that the RGZ model presents. As these calculations are too laborious and complex, we will propose a way to automate them to achieve the goal of obtaining these corrections.

Keywords: Quantum Field Theory. Radiative Corrections. Gribov-Zwanziger. Lattice QCD.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Vértices . . . . .	38
Figura 2	- Propagadores . . . . .	38
Figura 3	- Diagramas para o modelo perturbativo de YM . . . . .	39
Figura 4	- Loop dos <i>ghosts</i> . . . . .	39
Figura 5	- Loop dos glúons . . . . .	43
Figura 6	- Tadpole . . . . .	46
Figura 7	- Diagrama mais contratermo . . . . .	47
Figura 8	- Constante de acoplamento . . . . .	51
Figura 9	- Tubo de fluxo . . . . .	52
Figura 10	- Potencial do quark estático . . . . .	53
Figura 11	- Resultado de QCD na rede para o potencial do quark estático . . . . .	53
Figura 12	- Diagramas para o propagador dos <i>ghosts</i> e do glúon . . . . .	58
Figura 13	- Representação gráfica de uma red. . . . .	58
Figura 14	- Propagador do glúon . . . . .	59
Figura 15	- Espaço das órbitas . . . . .	64
Figura 16	- Fixação de calibre . . . . .	64
Figura 17	- Hiper-superfície formada pela fixação de calibre . . . . .	65
Figura 18	- Regiões de Gribov . . . . .	68
Figura 19	- Cópias próximas ao horizonte . . . . .	69
Figura 20	- Região modular fundamental . . . . .	69
Figura 21	- Propagador dos <i>ghosts</i> . . . . .	72
Figura 22	- Comportamento do propagador para o glúon . . . . .	76
Figura 23	- Total de diagramas na versão local . . . . .	82
Figura 24	- Site FeynCalc . . . . .	90
Figura 25	- Estrutura inicial do código . . . . .	91
Figura 26	- Estrutura para os vértices . . . . .	91
Figura 27	- Estrutura dos 3 diagramas . . . . .	92
Figura 28	- Comparativo com (Tissier; Wschebor, 2011) . . . . .	92
Figura 29	- Escrita da estrutura para o modelo RGZ . . . . .	93
Figura 30	- Escrita para a estrutura dos vértices do modelo RGZ . . . . .	93
Figura 31	- Diagrama tadpole. . . . .	97

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	11
1	<b>TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS (TQC)</b> . . . . .	13
1.1	Formalismo funcional . . . . .	14
1.2	Funções de Correlação . . . . .	17
2	<b>CROMODINÂMICA QUÂNTICA</b> . . . . .	22
2.1	Ação de Yang-Mills . . . . .	22
2.2	Quantização de Faddeev-Popov . . . . .	26
2.3	Regras de Feynman da Teoria de YM . . . . .	35
2.4	Grupo de Renormalização e Liberdade Assintótica . . . . .	49
2.5	Duas abordagens para o confinamento . . . . .	51
3	<b>ALGUMAS ABORDAGENS NÃO PERTURBATIVAS PARA A QCD</b> . . . . .	56
3.1	Equações de Schwinger-Dyson para a QCD . . . . .	56
3.2	QCD na Rede . . . . .	57
3.3	Modelo de glúon massivo para a QCD . . . . .	59
4	<b>MODELO DE GRIBOV-ZWANZIGER (GZ)</b> . . . . .	61
4.1	Aspectos gerais do modelo GZ . . . . .	61
4.2	O problemas das cópias de Gribov . . . . .	62
4.3	Região de Gribov ( $\Omega$ ) e região modular fundamental ( $\Lambda$ ) . . . . .	66
4.4	Ação de Gribov-Zwanziger . . . . .	70
4.5	Modelo de Gribov-Zwanziger Refinado (RGZ) . . . . .	73
5	<b>CORREÇÕES RADIATIVAS NO MODELO DE GRIBOV-ZWANZIGER REFINADO (RGZ)</b> . . . . .	78
5.1	Versão local do modelo RGZ . . . . .	78
5.2	Versão não local do modelo RGZ . . . . .	83
5.3	Proposta de um código . . . . .	89
5.3.1	<u>Resultados para o modelo RGZ</u> . . . . .	90
	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	95
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	96
	<b>APÊNDICE A</b> – Diagrama “tadpole” para o modelo massivo de YM . . . . .	97

## INTRODUÇÃO

A descrição clássica é muito poderosa e foi utilizada ao longo de vários séculos na física para explicar os fenômenos naturais e nos fornecer ferramentas para melhor compreensão do universo. Até o início do século XX, a física clássica norteou nossa compreensão da natureza a partir da interação entre partículas. Todavia, com o advento da Mecânica Quântica (MQ) e com o surgimento da Teoria Quântica de Campos (TQC), que uniu a MQ com a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), percebemos que essa descrição não era suficiente para descrever os fenômenos físicos observáveis e, a partir de um formalismo já utilizado na física clássica que utiliza campos para descrever determinados sistemas, a descrição de partículas foi substituída por uma descrição de campos.

Não há nenhum mecanismo na MQ para lidar com sistemas onde ocorrem mudanças no número de partículas, sendo assim ela não permite a descrição de sistemas onde partículas são criadas e/ou destruídas. A TRR postula a correspondência entre matéria e energia e, portanto, permite tal criação ou aniquilação. Tanto na MQ quanto na TRR, as partículas podem ser identificadas como os objetos fundamentais da natureza, uma vez que são essas partículas que produzem os campos clássicos (o que significa dizer que as partículas são as fontes dos campos), isso nos leva ao problema da criação/aniquilação que não pode ser explicado através desse ponto de vista. A TQC resolve esse problema ao introduzir os campos quânticos como as entidades fundamentais da natureza e, nessa abordagem, as partículas elementares são compreendidas como flutuações dos mesmos.

No primeiro capítulo deste trabalho, será apresentada uma breve revisão sobre as ferramentas matemáticas bem conhecidas na literatura de Teoria Quântica de Campos (Peskin; Schroeder, 1995; Lancaster; Blundell, 2014; Itzykson; Zuber, 2006). Nele, falaremos sobre o formalismo funcional, partindo da abordagem de integrais de caminho na Mecânica Quântica (Feynman; Hibbs; Styer, 2010) e, logo após, faremos uma extensão dessa abordagem utilizando o conceito de campos (Das, 2006). Isso nos permitirá definir funções específicas, tais como as funções de correlação conexas e as funções 1PI, que estarão intimamente ligadas à grandezas de suma importância para prosseguir com a finalidade desta tese, como os propagadores e os vértices. Por fim, veremos o conceito de funcionais geradores e a correspondência que existe entre a massa de uma partícula e o polo do propagador da mesma.

O segundo capítulo é dedicado a uma revisão da teoria mais aceita para descrever as interações fortes, a Cromodinâmica Quântica (QCD) que, como veremos, consiste em um caso específico das teorias de Yang-Mills (Yang; Mills, 1954). Com isso, será feita uma exposição sobre como definir a ação de Yang-Mills e, por conseguinte, obteremos a ação que descreve a Cromodinâmica Quântica e abordaremos questões que envolvem a quantização de Faddeev-Popov (Faddeev; Popov, 1967). Veremos que essa quantização

apresenta certas inconsistências que foram observadas por Gribov (Gribov, 1978), o qual forneceu uma possível solução para as mesmas. Dessa maneira, tendo em mãos a ação que descreve a QCD, veremos como obter as regras de Feynman para esta teoria e, em seguida, apresentaremos um exemplo que apontará o caminho de como obter correções a *1-loop* para um certo propagador. Por fim, mostraremos sem muitas delongas uma das propriedades da QCD, a liberdade assintótica e duas abordagens para um fenômeno peculiar que essa teoria apresenta, o confinamento.

O confinamento é um fenômeno puramente não perturbativo, que está em aberto desde a segunda metade do século XX até os dias de hoje. Dessa forma, no terceiro capítulo desta tese apresentaremos algumas abordagens não perturbativas que tentam trazer alguma compreensão sobre esse fenômeno. Dentre elas, falaremos sobre a abordagem das Equações de Schwinger-Dyson, da QCD na rede — que trabalha com simulações numéricas de Monte Carlo — e, por último, apresentaremos o modelo de glúon massivo para a QCD, onde é feita a inserção de um termo massivo na lagrangiana para o glúon.

Ainda no contexto de abordagens não perturbativas, o quarto capítulo é dedicado a outro tratamento não perturbativo. Nele, falaremos mais detalhadamente sobre o modelo de Gribov-Zwanziger, que tem como objetivo eliminar as inconsistências apresentadas na quantização de Faddeev-Popov, conhecidas como cópias de Gribov. Por fim, veremos o refinamento que houve nesse modelo que culminou no modelo de Gribov-Zwanziger Refinado, conhecido como modelo RGZ.

Já o quinto e último capítulo é dedicado aos resultados originais desse trabalho. Nele, fazendo uso das ferramentas vistas no capítulo um e no capítulo dois, serão propostos alguns mecanismos para obter correções radiativas a *1-loop* para o propagador do glúon no calibre de Landau, tendo como base o modelo RGZ para a descrição desse propagador. Veremos que os cálculos são bastantes exaustivos (o que podemos perceber desde o exemplo feito no capítulo 2) levando à elaboração de um código para automatizar esses cálculos e possibilitar a obtenção de correções para o propagador do glúon.

## 1 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS (TQC)

Como debatido na introdução, a Física Clássica e a Mecânica Quântica são, por si mesmas, insuficientes para uma plena descrição dos fenômenos da natureza que conhecemos até o momento. Portanto, foi necessário o desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos, que busca unir os fenômenos bem explicados pela MQ e os fenômenos bem descritos pela Teoria da Relatividade. Na abordagem da TQC, compreendemos que cada partícula elementar e cada onda no Universo é simplesmente uma excitação de um campo quântico<sup>1</sup>, definido em todo o espaço-tempo.

A TQC é tão importante que até hoje é a teoria que prevê um resultado teórico mais próximo do experimental, o que pode ser visto por meio da Eletrodinâmica Quântica (tradicionalmente abreviada como QED, do inglês “Quantum ElectroDynamics”). Ela é atualmente a teoria física testada com maior exatidão e que prevê, por exemplo, um valor para o momento de dipolo magnético do elétron com uma precisão de 12 algarismos significativos com os resultados experimentais. Esse cálculo é feito para a quinta ordem em  $\alpha$  (constante de estrutura fina) e seu valor teórico, segundo o Modelo Padrão, tem uma contribuição da QED que envolve léptons — elétron ( $e$ ), muon ( $\mu$ ) e tau ( $\tau$ ) — e fótons, uma contribuição da interação fraca que envolve os bósons ( $W^\pm, Z^0$ ) mediadores dessa interação e uma contribuição hadrônica (Aoyama; Kinoshita; Nio, 2019).

A TQC fornece implicações profundas como, por exemplo, explicar o fato de todas as partículas elementares do mesmo tipo serem idênticas entre si, uma vez que elas são excitações de um mesmo campo quântico. Outra implicação inclui restringir a simetria das representações do grupo de simetria de permutação de qualquer classe de partículas idênticas, de modo que algumas classes obedecem à estatística de Fermi-Dirac e outras à estatística de Bose-Einstein. Além disso como a TQC envolve MQ e TRR, ela contempla a criação e aniquilação de partículas e, por conseguinte, introduz produtos de operadores que criam e aniquilam partículas, reais ou virtuais (Lancaster; Blundell, 2014).

Vale mencionar que a TQC pode ser feita em espaços com métricas distintas, tais como o espaço de Minkowski e o espaço Euclidiano<sup>2</sup>. Devido ao fato da métrica do espaço de Minkowski ser indefinida (não possuir produto interno positivo-definido) surgem muitos

---

<sup>1</sup> A interação gravitacional apresenta um grande desafio para a Física, uma vez que não conseguimos descrevê-la como as demais interações fundamentais. Não há um consenso sobre o que ela é de fato. Enquanto algumas TQC tentam quantizá-la, a Teoria da Relatividade Geral a encara como um efeito geométrico do espaço-tempo. Portanto, fenômenos diretamente relacionados à gravitação podem não ser descritos corretamente através da TQC. Ondas gravitacionais, por exemplo, podem ser apenas um desses efeitos geométricos e não a excitação de um campo quântico.

<sup>2</sup> Cujas métricas são equivalentes em quatro dimensões, se suas componentes temporais admitirem valores imaginários.

problemas para uma TQC descrita com esta métrica<sup>3</sup>, porém, esses problemas podem ser evitados ao substituir o tempo  $t$  por  $it$  (ou a energia  $E$  por  $iE$ ), provocando assim a mudança do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano (Gimeno-Segovia; Llanes-Estrada, 2008). A transição de um espaço para o outro é denominada rotação de Wick, que é rigorosamente compreendida, e assume a forma de um teorema relacionando os axiomas de Wightman (Wightman; Garding, 1965) para funções de n-pontos na TQC com os axiomas de Osterwalder-Schrader (Osterwalder; Schrader, 1973) para correlatores na TQC euclidiana. Frequentemente, é preferível fazer cálculos de observáveis no espaço euclidiano devido à facilidade e, logo após, voltar ao espaço de Minkowski onde podemos obter as interpretações físicas da teoria. Este procedimento é também bastante instrutivo pois revela paralelos interessantes entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Estatística (Peskin; Schroeder, 1995; Weinberg, 1995; Năstase, 2019a).

Tendo feito esse breve comentário sobre TQC, este capítulo terá como propósito apresentar sem muitas delongas as ferramentas matemáticas necessárias para o estudo e cálculos das quantidades de nosso interesse da teoria em questão. Falaremos um pouco sobre o formalismo funcional, funções de correlação e funcionais geradores.

## 1.1 Formalismo funcional

Basicamente, existem dois formalismos que nos ajudam a obter as chamadas funções de correlação para uma teoria quântica de campos que estão relacionadas diretamente com algumas grandezas, como por exemplo, as regras de Feynman e os propagadores<sup>4</sup>. Tais formalismos são: o formalismo de operadores, que é mais antigo, e o formalismo funcional proveniente da abordagem de integral de caminho (integral funcional), que representa uma abordagem mais moderna (Feynman, 1948; Peskin; Schroeder, 1995; Das, 2006; Lancaster; Blundell, 2014). Neste trabalho, vamos utilizar o formalismo funcional e fazer, então, uma breve revisão dos conceitos básicos que regem esse formalismo.

Na Mecânica Quântica (MQ) usual, o movimento de uma partícula sob a ação de um potencial independente do tempo pode ser descrito pela *amplitude de probabilidade*, conhecida também como *propagador* da partícula. Utilizando o sistema de unidades naturais<sup>5</sup>, a amplitude de encontrar a partícula na posição  $q_f$  sabendo que ela estava

---

<sup>3</sup> Os integrandos das integrais funcionais apresentam exponenciais complexas na métrica de Minkowski, isso faz com que essas integrais oscilem e dificulte na exploração de soluções analíticas para estes casos. Após a aplicação da rotação de Wick, essa oscilação desaparece, uma vez que na métrica euclidiana a exponencial se torna real.

<sup>4</sup> Os propagadores correspondem a funções de correlação de 2-pontos, ou seja, a funções de Green.

<sup>5</sup> Neste trabalho sempre utilizaremos as unidades naturais, ou seja,  $c = \hbar = 1$ . As exceções serão devidamente citadas no texto.



localizada na posição  $q_i$ , em um intervalo de tempo  $T = t_f - t_i$ , é dada por

$$U(q_i, q_f; T) = \langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle \rightarrow \mathcal{U}(q_i, q_f; T) = \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{i \int d^4x \mathcal{L}\right\}, \quad (1)$$

onde  $H$  é o operador hamiltoniano independente do tempo do sistema,  $|q\rangle$  é autoestado do operador  $\hat{q}$  (ou seja,  $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$ ) e o último termo é a representação funcional da amplitude de probabilidade, que demonstraremos abaixo. A quantidade  $\mathcal{D}q(t)$  é chamada de medida funcional de integração e  $\mathcal{L}$  é a densidade lagrangiana do sistema. Sabemos que em MQ, um processo pode ocorrer de diversas maneiras e que todas elas podem, em princípio, contribuir simultaneamente. Dessa forma, a amplitude de probabilidade é obtida considerando a soma de todas essas possibilidades (“caminhos”) que levam a partícula do estado inicial ao estado final. Portanto,  $\int \mathcal{D}q(t)$  está associada à soma das contribuições de todos os caminhos possíveis que o sistema pode tomar, iniciando em  $q(0) = q_i$  e terminando em  $q(T) = q_f$ .

Antes de introduzirmos o formalismo funcional, é importante apresentarmos um artifício matemático conveniente para relacionar espaços com métricas diferentes. Tal artifício consiste em realizar uma continuação analítica do tempo real para tempo imaginário, algo relevante para abordagens a temperatura zero, também conhecida como rotação de Wick:

$$t \rightarrow -i\tau \text{ ou } x^0 \rightarrow -ix^4, \quad (2)$$

sendo que  $\tau$  ( $x^4$ ) é uma grandeza real. Análogo a isso, é ir do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano, uma vez que a métrica de Minkowski se transforma na Euclidiana com uma troca de sinal

$$t^2 - \vec{x}^2 \rightarrow -(\tau^2 + \vec{x}^2), \quad (3)$$

enquanto a operação correspondente para o espaço dos momentos é  $k^0 \rightarrow -ik^4$ . Um ponto importante sobre o uso do espaço Euclidiano é que o mesmo desempenha um papel muito mais importante a temperatura finita do que a temperatura zero.

Com isso, aplicando a rotação de Wick na amplitude de probabilidade, temos

$$U(q_f, -i\tau_f; q_i, -i\tau_i) = \langle q_f | \exp\left\{-\hat{H}(\tau_f - \tau_i)\right\} | q_i \rangle. \quad (4)$$

Após algumas manipulações algébricas, como o uso da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff e também da fórmula de Trotter (Bellac, 1996; Das, 2006; Hall, 2015) e a introdução do parâmetro  $\varepsilon$ , — proveniente da divisão em  $N$  subintervalos da componente de tempo imaginário, onde  $\varepsilon \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$  — obtemos

$$U(q_f, -i\tau_f; q_i, -i\tau_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle q_f \left| \left( e^{-\Delta\tau\hat{T}/N} e^{-\Delta\tau\hat{V}/N} \right)^N \right| q_i \right\rangle, \quad (5)$$

onde  $\hat{T}$  e  $\hat{V}$  são, respectivamente, os operadores de energia cinética e potencial. Trabalhando um pouco mais na última expressão, obtemos

$$\begin{aligned} U(q_f, -i\tau_f; q_i, -i\tau_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \dots dq_{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} \left\{ \sqrt{\frac{mN}{2\pi\Delta\tau}} e^{-\frac{mN}{2\Delta\tau}(q_{j+1}-q_j)^2} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}V(q_j)} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \dots dq_{N-1} \left( \frac{mN}{2\pi\Delta\tau} \right)^{N/2} \exp \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \left( -\frac{mN}{2\Delta\tau}(q_{j+1}-q_j)^2 - \frac{\Delta\tau}{N}V(q_j) \right) \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

em que  $\Delta\tau/N = \varepsilon$ , sendo  $N$  o número e  $\varepsilon$  o tamanho dos subintervalos do tempo imaginário. Então, olhando para o argumento da exponencial acima, temos

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left[ -\frac{m}{2\varepsilon} (q_{j+1} - q_j)^2 - \varepsilon V(q_j) \right] = -\varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\varepsilon} \right)^2 + V(q_j) \right]. \quad (7)$$

Como discutido anteriormente, quando  $N \rightarrow \infty$  temos que  $\varepsilon \rightarrow 0$  e, portanto, podemos identificar e substituir na expressão acima os seguintes termos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \implies \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \quad (\text{Soma da Riemann})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\varepsilon} \right) = \frac{dq}{d\tau} = \dot{q}. \quad (\text{Derivada})$$

Sendo assim, a equação (6) será reescrita como

$$\begin{aligned} U(q_f, -i\tau_f; q_i, -i\tau_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \dots dq_{N-1} \left( \frac{m}{2\pi\varepsilon} \right)^{N/2} \exp \left\{ - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ \frac{m}{2} \dot{q}^2(\tau) + V(q(\tau)) \right] \right\} \\ &= \int_{\substack{q(\tau_i)=q_i \\ q(\tau_f)=q_f}} \mathcal{D}q e^{-S_E[q; \tau_i, \tau_f]}, \quad (8) \end{aligned}$$

cujos termos

$$S_E[q; \tau_i, \tau_f] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[ \frac{m}{2} \dot{q}^2(\tau) + V(q(\tau)) \right] \quad (9)$$

é conhecida por ação Euclidiana ( $S_E$ ), e

$$\mathcal{D}q = \lim_{N \rightarrow \infty} dq_1 \dots dq_{N-1} \left( \frac{m}{2\pi\varepsilon} \right)^{N/2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi\varepsilon} \right)^{N/2} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \quad (10)$$

é denominada medida funcional.

Podemos estender essa ideia para teoria quântica de campos onde os estados são representados por campos e, com isso, a integral funcional soma todas as possíveis configurações de campos que podem existir entre dois pontos do espaço-tempo (Das, 2006).

Isso é matematicamente expresso da seguinte forma

$$\langle \phi_f | e^{-iHT} | \phi_i \rangle \rightarrow \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L} \right\}, \quad (11)$$

onde  $\phi$  é o campo do sistema,  $\mathcal{L}$  a densidade de lagrangiana e  $\mathcal{D}\phi$  a medida de integração das possíveis configurações do campo, sendo que tais configurações são fixadas pelas condições de contorno do campo:  $\phi(\vec{x}, -T) = \phi_i(\vec{x})$  e  $\phi(\vec{x}, T) = \phi_f(\vec{x})$  (Peskin; Schroeder, 1995; Das, 2006).

A discussão apresentada até aqui descreve o formalismo de integrais de caminho a partir do qual obtivemos a expressão (11). Infelizmente, da maneira que essa expressão se encontra, não temos, de forma imediata, uma amplitude de probabilidade nem um propagador. A seguir, abordaremos as chamadas funções de correlação e introduziremos o conceito de funcional gerador, que, ao inserirmos fontes externas à equação (11), nos permite calcular quantidades físicas tal como o propagador (Lancaster; Blundell, 2014).

## 1.2 Funções de Correlação

As funções de correlação são estruturas matemáticas de suma relevância, dentre as quais as mais simples são as funções de correlação de 2-pontos que também são conhecidas como funções de Green<sup>6</sup>. As funções de Green são objetos matemáticos que podem ser definidos a partir da solução de problemas de autovalores do tipo  $Lu = \lambda u$ , de operadores diferenciais lineares não-homogêneos em equações diferenciais. Embora alguém possa achar essa definição simplória, as aplicações de tais funções são vastas e consiste em uma ferramenta muito útil para áreas como física, matemática e engenharia.

Considerando a abordagem de campos no espaço euclidiano, a função de correlação de  $n$ -pontos é, por definição, dada por

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) e^{-S(\Phi)}}{\int \mathcal{D}\Phi e^{-S(\Phi)}}, \quad (12)$$

onde  $\Phi_i(x)$  é um campo quântico, sendo que o índice  $i$  pode carregar índices de Lorentz e de cor, e  $S(\Phi)$  é a ação da teoria. Uma outra maneira de obter tais funções é através da derivada funcional de um objeto denominado *funcional gerador*, definido por

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\Phi e^{-[S(\Phi) + \int d^4x J_i(x)\Phi_i(x)]}}{\int \mathcal{D}\Phi e^{-S(\Phi)}}, \quad (13)$$

---

<sup>6</sup> Vale ressaltar que em muitos lugares na literatura há um abuso de linguagem quando dizemos função de Green, pois, como foi dito, essas funções são um caso específico das funções de correlação (ou correladores). Uma função de Green é uma função de correlação de 2-pontos.

onde  $J_i(x)$  são as fontes externas do campos  $\Phi_i(x)$ . Com isso, as funções de correlação são dadas explicitamente por

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle = (-1)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J_{i_n}(x_n) \dots \delta J_{i_1}(x_1)} \Big|_{J_{i_k}=0} . \quad (14)$$

Uma ferramenta bastante utilizada na MQ e na TQC é a teoria de perturbação (TP), em que é feita uma expansão em série de potências de algum parâmetro pequeno da teoria (tipicamente a constante de acoplamento). Quando separamos a ação em uma parte livre e em outra parte de interação,

$$S(\Phi) = S_0(\Phi) + S_I(\Phi) , \quad (15)$$

e aplicamos a TP ao funcional gerador, obtemos o que identificamos como o *propagador* da teoria que consiste em uma função associada à amplitude de probabilidade da partícula de se movimentar de um ponto a outro no espaço-tempo, onde a mesma é dada por uma função de correlação dos campos em TQC. Dessa forma, temos que o funcional gerador pode ser reescrito em termos do funcional gerador da teoria livre ( $Z_0[J]$ ) (Peskin; Schroeder, 1995; Ryder, 1996; Das, 2006)

$$Z[J] = N e^{S_I(-\frac{\delta}{\delta J})} Z_0[J] . \quad (16)$$

O funcional gerador da teoria livre é dado por

$$Z_0[J] = \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J_i(x) \Delta_{ij}(x-y) J_j(y) \right] . \quad (17)$$

Na equação (17) o termo  $\Delta_{ij}(x-y) = \langle \Phi_i(x) \Phi_j(y) \rangle_0$  é o propagador da teoria e pode ser escrito no espaço dos momenta como

$$(2\pi)^4 \delta^4(p+q) \langle \Phi_i(p) \Phi_j(-p) \rangle_0 = \int d^4x d^4y e^{i(p \cdot x + q \cdot y)} \langle \Phi_i(x) \Phi_j(y) \rangle_0 . \quad (18)$$

O termo  $\Delta_{ij}(x-y)$  é fundamental na expansão perturbativa, da mesma forma que os fatores de vértices<sup>7</sup> que provém do termo de interação ( $S_I(\Phi)$ ). Tais vértices podem ser obtidos através de derivadas funcionais desta ação, como descrito na seguinte expressão

$$V_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) = - \frac{\delta^n S_I(\Phi)}{\delta \Phi_{i_n}(x_n) \dots \delta \Phi_{i_1}(x_1)} \Big|_{\Phi=0} , \quad (19)$$

---

<sup>7</sup> Tais fatores de vértices estão diretamente relacionados com as regras de Feynman, que serão abordadas de forma mais explícita nos capítulos seguintes.

que pode ser reescrito, no espaço dos momenta, como

$$\begin{aligned} V_{i_1 \dots i_n}(p_1, \dots, p_n) &= \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} V_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \tilde{V}(p_1, \dots, p_n) . \end{aligned} \quad (20)$$

Vale ressaltar que as funções de correlação, anteriormente mencionadas, possuem partes desconexas, ou seja, há diagramas de Feynman<sup>8</sup> onde dois pontos ou mais estão desconectados. Porém, é possível termos uma abordagem onde tais funções sejam apenas conexas e conseqüentemente teremos um funcional gerador que, através de derivadas funcionais, produzirá tais funções. Essas funções conexas são de suma importância, uma vez que contribuem para a parte não trivial do operador de espalhamento (matriz S). Sendo assim, o *funcional gerador conexo* é dado por

$$W[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-n+1}}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle_c J_{i_1}(x_1) \dots J_{i_n}(x_n) . \quad (21)$$

Com isso, as funções de correlação de  $n$ -pontos<sup>9</sup> conexas serão dadas por

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle_c = (-1)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J_{i_1}(x_1) \dots \delta J_{i_n}(x_n)} \Big|_{J_{i_k}=0} . \quad (22)$$

Os funcionais geradores apresentados até aqui se relacionam da seguinte forma

$$W[J] = -\ln Z[J] . \quad (23)$$

Entretanto, além dessas ainda há outra ferramenta matemática.

Em TQC, um exemplo da importância das funções de correlação é que a função de correlação de 2-pontos pode ser identificada como o propagador da teoria. Mas, nas funções de correlação conexas, existem as funções (ou diagramas) irredutíveis a uma partícula, também conhecidas como diagramas *1PI*. Um diagrama *1PI* é um diagrama que não pode ser dividido em dois diagramas disjuntos pelo simples corte de uma linha interna. Assim, como visto até aqui, para as funções *1PI* de  $n$ -pontos há também um funcional gerador a elas associados, dado por

$$\Gamma[\phi] = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle_{1PI} \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) , \quad (24)$$

onde  $\phi_i(x)$  tem as mesmas características de  $J_i(x)$ . Conseqüentemente, as funções *1PI* de

<sup>8</sup> Falaremos de forma mais detalhada sobre os diagramas de Feynman nos capítulos seguintes.

<sup>9</sup> Em especial, para  $n = 2$ , teremos a função conexa de 2-pontos, ou seja, o propagador. Vale ressaltar que o polo desse propagador se relaciona com a massa da partícula que esse propagador representa (Peskin; Schroeder, 1995).

$n$ -pontos são dadas por

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_n}(x_n) \rangle_{1PI} = - \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta \phi_{i_1}(x_1) \dots \delta \phi_{i_n}(x_n)} \Big|_{\phi_{i_k}=0} . \quad (25)$$

Há uma relação entre os funcionais  $Z[J]$  e  $W[J]$ , da mesma forma também há uma relação entre  $\Gamma[\phi]$  e  $W[J]$ , dada por

$$\Gamma[\phi] = \int d^d x J_i(x) \phi_i(x) - W[J] , \text{ onde } \phi_i(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J_i(x)} , \quad (26)$$

que nada mais é que uma transformada de Legendre. Tal funcional ( $\Gamma[\phi]$ ) é conhecido como *ação efetiva* e, como foi dito, gera as funções  $1PI$ . Conhecer essa ação é, de certa forma, equivalente a conhecer a “solução” da teoria, uma vez que ela engloba todas as propriedades subjacentes à TQC da maneira mais simples possível.

Há uma outra relação interessante entre  $\Gamma[\phi]$  e  $W[J]$ . Temos que a equação (22) para  $n = 2$  (ou seja, o propagador) é dada por

$$\frac{\delta^2 W(J)}{\delta J_i(x) \delta J_j(y)} = \langle \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle_c \quad (27)$$

e, a partir da equação (26), podemos obter o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma(\phi)}{\delta \phi_j(y)} &= \int dx \left[ \frac{\delta J_i(x)}{\delta \phi_j(y)} \phi_i(x) + J_i(x) \frac{\delta \phi_i(x)}{\delta \phi_j(y)} \right] - \int dz \frac{\delta W(J)}{\delta J_i(z)} \frac{\delta J_i(z)}{\delta \phi_j(y)} \\ &= \int dx \frac{\delta J_i(x)}{\delta \phi_j(y)} \phi_i(x) + J_j(y) - \int dz \phi_i(z) \frac{\delta J_i(z)}{\delta \phi_j(y)} \\ &= J_j(y) . \end{aligned} \quad (28)$$

Sendo assim, as soluções da equação abaixo ao igualarmos as fontes externas a zero

$$\frac{\delta \Gamma(\phi)}{\delta \phi_j(y)} \Big|_{J=0} = 0 \quad (29)$$

fornece-nos os valores esperados no vácuo para os campos  $\phi_i$ , ou seja,  $\langle \phi_i(x) \rangle$ . Com isso, podemos obter o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \int dz \langle \phi_i(x) \phi_k(z) \rangle_c \frac{\delta^2 \Gamma(\phi)}{\delta \phi_k(z) \delta \phi_j(y)} &= \int dz \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J_i(x) \delta J_k(z)} \left( \frac{\delta J_k(z)}{\delta \phi_j(y)} \right) \\ &= \int dz \frac{\delta \phi_i(x)}{\delta J_k(z)} \frac{\delta J_k(z)}{\delta \phi_j(y)} \\ &= \frac{\delta \phi_i(x)}{\delta \phi_j(y)} \\ &= \delta^{ij} \delta(x - y) . \end{aligned} \quad (30)$$

Analisando o resultado e o integrando da equação (30), podemos notar que a derivada segunda do funcional gerador conexo ( $W(J)$ ) em relação às fontes ( $J_i$ ) precisa ser igual ao inverso da derivada segunda da ação efetiva ( $\Gamma(\phi)$ ) em relação aos campos ( $\phi_i$ ). Matematicamente, isso pode ser expresso por

$$\frac{\delta^2 W(J)}{\delta J_i(x) \delta J_j(y)} = \left( \frac{\delta^2 \Gamma(\phi)}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_j(y)} \right)^{-1} \quad (31)$$

e possibilita estabelecer uma conexão entre o propagador (função conexa de 2-pontos) e a função 1PI de 2-pontos. Vamos exemplificar, reescrevendo a equação (30), para uma teoria livre, da seguinte maneira

$$\Gamma_{ij}^{(2)}(x, y) = \frac{\delta^2 \Gamma(\phi)}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_j(y)} = (\partial^2 - m^2) \delta_{ij} \delta(x - y), \quad (32)$$

dada no espaço de coordenadas. Através de uma transformada de Fourier, podemos escrever essa expressão no espaço dos momenta, obtendo

$$\Gamma^{(2)}(p) \propto p^2 - m^2. \quad (33)$$

Este resultado, entre as funções de correlação (conexas e 1PI), será interessante em capítulos futuros quando falarmos sobre condições de renormalização.

Neste capítulo vimos alguns conceitos básicos de TQC, dentre os quais gostaríamos de destacar as funções de correlação e as funções 1PI que serão utilizadas neste trabalho. Tais conceitos são de suma importância, pois através deles podemos obter informações físicas das teorias que descrevem as interações que conhecemos. No capítulo a seguir, abordaremos a Cromodinâmica Quântica (TQC utilizada na descrição da interação forte) e, com isso, introduziremos as teorias de Yang-Mills, apresentaremos o método de Faddeev-Popov e outras características dessa teoria.

## 2 CROMODINÂMICA QUÂNTICA

Até o presente momento, são conhecidas quatro interações fundamentais na natureza, a partir das quais podemos explicar a maior parte (ou grande parte) dos fenômenos que ocorrem no universo. Tais interações são: 1) Interação gravitacional; 2) Interação eletromagnética; 3) Interação fraca; 4) Interação forte.

A interação gravitacional era compreendida até o começo do século XX como uma força atrativa entre corpos massivos, entretanto, a partir da descrição da Teoria da Relatividade Geral, esta interação pode ser vista como um efeito de deformação geométrica no espaço-tempo devida à presença de matéria e energia (Schutz, 2009; Das, 2011). Diversas tentativas têm sido feitas com o propósito de descrever tal interação no âmbito quântico, como a teoria de cordas (Polchinski, 1998; Zwiebach, 2004), Gravidade Quântica (Rocci, 2013) e Teoria-M (Năstase, 2019b).

A interação eletromagnética descreve todos os fenômenos de natureza elétrica e magnética e foi a primeira interação fundamental a ser descrita como uma TQC, conhecida como QED (anteriormente mencionada). Tal interação ocorre entre partículas portadoras de carga elétrica  $e$ , no MP, é mediada pelo fóton ( $\gamma$ ).

A interação fraca, também conhecida como interação nuclear fraca ou força fraca, descreve os processos de decaimento radioativo dos átomos, envolve os processos de fusão e fissão nuclear, e é mediada pelo bósons  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z$  no MP.

Por fim, a interação forte, também conhecida como interação nuclear forte ou força forte, será a interação de interesse nesta tese. Tal interação descreve o fato de o próton, nêutron e outras partículas hadrônicas não serem partículas fundamentais e, por conseguinte, serem formados por quarks, anti-quarks e glúons em um estado de confinamento (uma vez que tais partículas possuem carga de cor). Os glúons ( $g$ ) são os bósons mediadores desta interação no MP. A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria mais aceita para descrever essa interação e apresenta algumas características como a liberdade assintótica e o fenômeno de confinamento de cor, que serão abordados em seções posteriores.

### 2.1 Ação de Yang-Mills

As teorias de campo escalar, a teoria de Yukawa e a QED são TQC bastantes relevantes porém insuficientes para descrever todas as interações fundamentais conhecidas. Para construirmos uma TQC consistente e que expresse aspectos da realidade, descrevendo as demais interações (exceto a gravitacional), devemos aprofundar o mecanismo utilizado na QED e tratarmos as simetrias de calibre como algo fundamental. As teorias de campos de calibre foram introduzidas pela primeira vez por Yang e Mills, em seu artigo de 1954



(Yang; Mills, 1954). As teorias de calibre não-abelianas contemplam o grupo  $SU(N)$  de matrizes  $U$ ,  $N \times N$ , unitárias ( $UU^\dagger = \mathbb{1}$ ) e com determinante igual a 1 ( $\det(U) = +1$ ). Dessa forma a QCD é um caso específico das teorias de Yang-Mills em que  $N = 3$ , ou seja, a QCD engloba o grupo de simetria  $SU(3)$  (Ne’eman, 1961; Gell-Mann, 1961; Glashow; Gell-Mann, 1961; Marciano; Pagels, 1978; Peskin; Schroeder, 1995; Vandersickel, 2011).

As teorias de Yang-Mills (YM) também têm por objetivo tomar uma invariância sobre rotação de fase local e generalizar para uma invariância sob qualquer grupo de simetria contínuo (Peskin; Schroeder, 1995). Uma vantagem muito interessante das teorias de YM é o fato de que elas permitem a descrição das demais interações não contempladas pelas teorias supracitadas, ou seja, as interações forte e fraca.

Essas teorias apresentam outra interessante vantagem que consiste no fato de permitirem a unificação das interações fundamentais da natureza. Na segunda metade do século passado, o trabalho de vários físicos importantes de áreas como Física de Partículas e TQC culminou em alguns modelos para descrever essas interações. Um exemplo disso, onde é feita a unificação das interações eletromagnética e fraca, é o modelo de Glashow-Weinberg-Salam (GWS) (Glashow, 1961; Salam, 1968; Weinberg, 1967), o qual possui simetria de calibre  $SU(2) \times U(1)$  e é mediado pelo fóton ( $\gamma$ ) e os bósons vetoriais  $W$ 's e  $Z$  (Weinberg, 2004). Também podemos citar o caso do modelo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , conhecido também como modelo “três-dois-um”, que contempla o grupo de simetria  $SU(5)$  (Greiner; Müller et al., 2000; Bailin; Love, 1993) e que é uma tentativa para descrever, de forma unificada, as interações eletromagnética, forte e fraca.

Esse modelo de unificação das interações fundamentais não contempla a interação gravitacional, que apresenta uma grande dificuldade para ser descrita através de uma TQC. Entretanto, diferentes abordagens tem sido feitas de maneira a incluir tal interação em uma teoria de calibre, como por exemplo (Sobreiro; Otoya, 2007b) para o caso de uma teoria de YM euclidiana em  $SO(4)$  mapeada em um espaço-tempo curvo onde o mecanismo de quebra de simetria de cor produz um modelo gravitacional. Há também trabalhos que utilizam o princípio de incerteza generalizado em um perspectiva relativística onde se introduz um comprimento mínimo que leva a uma teoria efetiva quântica da gravidade (Todorinov; Das; Bosso, 2022).

Vamos então mostrar como é definida uma ação de YM (Slavnov; Faddeev, 1991). Mas para isso, é sabido que as teorias de YM são divididas da seguinte maneira: parte fermiônica, parte bosônica e parte de interação. A parte fermiônica está associada aos campos de matéria; a parte bosônica, aos bósons mediadores da teoria, ou seja, composta puramente por campos de YM; e a parte de interação é regida pelos bósons que mediam a interação entre os férmions. Tendo dito isso, nesta tese, iremos trabalhar com o que é denominado de ação de YM pura, ou seja, composta apenas por bósons de calibre.

Os campos de Yang-Mills, na representação adjunta, são definidos da seguinte maneira<sup>10</sup>

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \sum_{a=1}^{N^2-1} A_\mu^a(x) T^a = A_\mu^a(x) T^a \quad (34)$$

onde o índice latino  $a$  representa a cor e o termo  $A_\mu^a(x)$  representa os  $N^2 - 1$  bósons de calibre da teoria. No caso da QCD, pertencente ao grupo  $SU(3)$ , temos  $3^2 - 1 = 8$ , ou seja, 8 bósons de calibre envolvidos que, neste caso, são os glúons. O segundo termo,  $T^a$ , consiste nos geradores do grupo e são matrizes hermitianas ( $T = T^\dagger$ ) que satisfazem a álgebra de Lie

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (35)$$

e formam uma base ortonormal da forma

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (36)$$

Os índices  $a, b, c$  vão de 1 até  $N^2 - 1$  e  $f^{abc}$  é a constante de estrutura totalmente antissimétrica. Vale ressaltar que, pela identidade de Jacobi,

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^c, [T^a, T^b]] + [T^b, [T^c, T^a]] = 0, \quad (37)$$

chega-se à seguinte relação envolvendo tais constantes

$$f^{abc} f^{cde} + f^{adc} f^{ceb} + f^{aec} f^{cbd} = 0. \quad (38)$$

Isto posto, a dinâmica dos campos da equação (34), em um espaço euclidiano, é dada pela seguinte ação

$$S_{YM} = \frac{1}{2} \int d^4x \text{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (39)$$

onde

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = T^a F_{\mu\nu}^a \quad (40)$$

e

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (41)$$

é o tensor do campo de calibre. Na equação (41), o último termo à direita – que é um

---

<sup>10</sup> A partir daqui vamos sempre utilizar a notação de Einstein, ou seja, não utilizaremos o símbolo de somatório.

termo não-linear e traz consigo a constante de acoplamento  $g$  – é o responsável por toda complexidade e peculiaridades que as teorias não-abelianas trazem. Para teorias abelianas este termo desaparece, mostrando que não há autointeração entre os bósons de calibre. No caso da QED isso significa que os fótons não autointeragem. Todavia, para teorias não-abelianas este termo existe e mostra a autointeração entre os campos de calibre, no caso da QCD significa que há autointeração entre os glúons.

A ação em (39) é invariante sobre a seguinte transformação de calibre nos campos de YM

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow U \mathcal{A}_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger, \quad (42)$$

onde  $U(x)$ , como mencionado, é uma matriz do grupo  $SU(N)$  e, para transformações infinitesimais, é dada por

$$U(x) = e^{ig\xi^a(x)T^a} = \mathbb{1} + ig\xi^a(x)T^a + O(\xi^2), \quad (43)$$

onde  $\xi^a(x)$  são os parâmetros da transformação. Através de uma transformação infinitesimal no parâmetro  $\xi^a(x)$ , torna-se evidente a invariância em (39) e obtém-se que

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + D_\mu^{ab}\xi^b, \quad (44)$$

onde  $D_\mu^{ab}$  é a derivada covariante que, na representação adjunta, é dada por

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} - gf^{abc}A_\mu^c. \quad (45)$$

Essa derivada é importante pois é com ela que a teoria se torna invariante sob transformação de calibre e juntamente com isso vem o termo de interação (termo de acoplamento com a matéria fermiônica). Com isso, podemos obter também a seguinte transformação de calibre para  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \rightarrow U \mathcal{F}_{\mu\nu} U^\dagger. \quad (46)$$

A fim de obtermos uma ação que descreva a QCD é necessário que tornemos a ação de YM (39) na sua forma quântica, ou seja, que quantizemos a ação de YM. Para esta quantização utiliza-se o método funcional de Feynman (método das integrais de caminho) (Peskin; Schroeder, 1995). Porém, é necessário fixar o calibre devido à presença de cópias de calibre<sup>11</sup> provindas do ato da integração funcional. Uma maneira de amenizar o problema dessas cópias é utilizar o procedimento de Faddeev e Popov (Faddeev; Popov, 1967) que consiste em utilizar uma condição de fixação de calibre para reduzir o número

---

<sup>11</sup> Tais cópias são estados físicos equivalentes, uma vez que descrevem configurações de campo fisicamente equivalentes.

de cópias e fornecer uma teoria com menos ambiguidades. Mesmo assim, Gribov mostrou (Gribov, 1978) que esse procedimento não é suficiente para eliminar todas as cópias da teoria. Tais assuntos serão abordados de maneira mais detalhada posteriormente.

## 2.2 Quantização de Faddeev-Popov

Utilizar o método de Faddeev-Popov consiste em aplicar uma restrição ao campo considerado, o que, por consequência, implementa uma condição de fixação de calibre e, portanto, determina o campo de maneira não ambígua (Faddeev; Popov, 1967; Ornigotti; Aiello, 2014). Como citado anteriormente, esse método elimina parte das cópias de calibre que surgem a partir do método funcional. Para utilizar o mecanismo de Faddeev-Popov, é necessário fixarmos um determinado calibre e, ao fazermos isso, a simetria de calibre é perdida e substituída pela conhecida simetria de BRST (Becchi; Rouet; Stora, 1976; Tyutin, 1975), que possui a propriedade de nilpotência, garantindo a renormalizabilidade da teoria.

Essa quantização é feita através da inserção de campos não-físicos, conhecidos como campos fantasmas de Faddeev-Popov, que são escalares porém obedecem à estatística de Fermi-Dirac. A introdução de tais campos provoca uma quebra do princípio de causalidade (Streater; Wightman, 1964) e, portanto, suas excitações não podem ser vistas como partículas físicas. Ainda assim esses campos garantem a unitariedade da teoria, uma vez que os diagramas que eles representam cancelam aqueles que não são físicos e provêm da teoria de perturbação aplicada à ação.

Adotando o calibre de Landau,  $\partial_\mu A_\mu^a = 0$ , podemos definir a componente de fixação de calibre da ação da teoria da seguinte maneira

$$S_{gf} = \int d^4x \left( i b^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b \right), \quad (47)$$

onde  $b^a$  é um campo auxiliar conhecido como campo de Nakanishi-Lautrup e os campos  $c^a$  e  $\bar{c}^a$  são campos grassmanianos e correspondem aos campos fantasma e anti-fantasma, respectivamente, de Faddeev-Popov supracitados. Uma observação importante a ser feita sobre o campo  $b^a$  é que ele corresponde a um multiplicador de Lagrange para a fixação de calibre escolhida – calibre de Landau. Após a aplicação do método de Faddeev-Popov, a ação será reescrita como

$$S = S_{YM} + S_{gf}. \quad (48)$$

Dito isso, vamos retornar à discussão da simetria BRST proveniente da fixação de calibre e, para lidarmos com ela, é importante definir um operador anticomutante  $s$ , denominado operador de BRST. Essa simetria fornece à equação (48) um conjunto de

transformações que a tornam invariante dados por:

$$\begin{aligned}
sA_\mu^a &= -D_\mu^{ab} c^b , \\
sc^a &= \frac{g}{2} f^{abc} c^b c^c , \\
s\bar{c}^a &= ib^a , \\
sb^a &= 0 .
\end{aligned} \tag{49}$$

Como mencionado anteriormente, a simetria BRST fornece o caráter de renormalizabilidade para a ação (48) ao eliminar parte das ambiguidades da teoria. Com isso, as simetrias que permanecem após a aplicação do método de Faddeev-Popov podem ser escritas como equações funcionais, conhecidas como identidades de Ward, e devem obedecer ao princípio da ação quântica (Piguet; Sorella, 2008; Schwinger, 1951; Lowenstein, 1971a; Lowenstein, 1971b; Lam, 1972; Clark; Lowenstein, 1976). Esse princípio, por sua vez, faz com que as transformações não-lineares dos campos – que é o caso das transformações de BRST – dêem origem a inserções de operadores locais compostos. Uma vez que tais campos não são fundamentais na teoria, é necessário que eles sejam acoplados a fontes externas (invariantes sob a ação do operador de BRST) e, por conseguinte, acrescentarão um termo à ação, dado por

$$S_{ext} = \int d^4x \left[ \Omega_\mu^a (sA_\mu^a) + L^a (sc^a) \right] , \tag{50}$$

em que  $\Omega_\mu^a$  é uma fonte externa anti-comutante e  $s\Omega_\mu^a = 0$  e  $sL^a = 0$ .

Uma vez introduzidas as fontes externas, podemos reescrever a ação como

$$S' = S + S_{ext} , \tag{51}$$

e podemos também introduzir uma equação funcional para descrever a invariância de BRST como

$$\mathcal{S}(S') = \int dx^4 \left( \frac{\delta S}{\delta \Omega_\mu^a} \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta S}{\delta L^a} \frac{\delta S}{\delta c^a} + ib^a \frac{\delta S}{\delta \bar{c}^a} \right) = 0 , \tag{52}$$

denominada identidade de Slavnov-Taylor (Slavnov, 1972; Taylor, 1971). Tal identidade desenvolve um papel fundamental na prova da renormalizabilidade das teorias de calibre não-abelianas invariantes de calibre, uma vez que ela impõe condições sobre os possíveis contratermos na renormalização da teoria.

Agora, vamos analisar com mais detalhes a quantização da ação de YM utilizando o método de Faddeev-Popov (Faddeev; Popov, 1967). Mas antes, por simplicidade e por questões didáticas, tomemos inicialmente o exemplo de uma integral em duas dimensões em coordenadas cartesianas (Ryder, 1996; Sterman, 1993), dada por

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy f(x, y) , \tag{53}$$

onde essa função  $f(x, y)$  é invariante sob rotações em torno do eixo  $z$ . Tomemos então uma rotação no sentido anti-horário em um ângulo  $\varphi$ , descrita por

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi \\ y &\rightarrow y' = -x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi . \end{aligned} \tag{54}$$

Com isso, a função  $f(x', y')$  é dada por

$$f(x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi, -x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi) \equiv F(r) . \tag{55}$$

Uma maneira apropriada para lidar com a integral (53) seria reduzi-la de duas para uma dimensão<sup>12</sup>, o que pode ser feito com a introdução do sistema de coordenadas polares. Dessa forma, ao aplicarmos a mudança de coordenadas<sup>13</sup>, teremos

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr F(r) = 2\pi \int_0^\infty r dr F(r) . \tag{56}$$

Como mencionado, essa função é invariante sobre o grupo de rotações em duas dimensões. Isso é análogo ao caso de uma teoria de calibre, onde sabemos que a ação é invariante sob transformações locais de calibre. Ao realizarmos a integração da equação (53), percebemos que há infinitos pontos onde o integrando se repete – o que também pode ser notado devido à simetria de rotação presente – que será o análogo às cópias mencionadas até aqui, presentes na quantização das teorias de calibre. Na abordagem que estamos fazendo, o uso das coordenadas polares funciona de maneira a isolar (separar) esta repetição (como fica evidente na equação (56)).

À vista disso, todas as ambiguidades (devidas a tais repetições) foram separadas no termo da integração em  $\theta$ , fazendo com que em  $r$  não haja mais tais ambiguidades. Entretanto, ainda que não conhecêssemos a função  $F(r)$  (a forma explícita da função do integrando no novo sistema de coordenadas), vele a pena questionarmos: ainda seria possível reduzirmos o número de integrais, como na equação (56)? Felizmente, a resposta é sim e o truque é utilizar a invariância rotacional do integrando.

Nesse cenário, onde  $F(r)$  não é conhecida, é conveniente escolher um raio no plano- $xy$  para reduzirmos o número de integrais. Tal raio pode ser escolhido, em termos de coordenadas cartesianas, através de uma escolha do tipo  $y' = 0$  (ou então  $x' = 0$ ) e isso deve ser feito de tal modo que o valor da integral original (53) não seja alterado. Portanto, para definirmos essa escolha/condição, é necessário fazermos uso da função delta de Dirac. Todavia, a simples introdução da delta no integrando alteraria o resultado da integral e não nos levaria ao nosso propósito (reduzir o número de integrais). Um procedimento legítimo

---

<sup>12</sup> Veremos que essa redução terá uma analogia com o procedimento de FP.

<sup>13</sup> Vale ressaltar que a variável  $\varphi$  está relacionada à simetria de rotação, enquanto a variável  $\theta$  diz respeito à coordenada polar.

para fixação dessa condição, sem a alteração da integral, consiste em introduzirmos um fator unitário que contenha a delta e que é definido por

$$\Delta(r) \int_0^{2\pi} d\varphi \delta(y') = 1. \quad (57)$$

Nessa equação, cada termo desempenha um papel:  $\delta(y')$  fixa a condição de  $y' = 0$ ; a integral em  $\varphi$  efetua a soma de todos os ângulos pertencentes ao intervalo  $[0, 2\pi]$ , garantindo a invariância sob rotações; e  $\Delta(r)$  normaliza essa integração e é função apenas de  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

A partir da equação (57), podemos encontrar explicitamente a função  $\Delta(r)$

$$\Delta(r) = \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \delta(y') \right)^{-1}. \quad (58)$$

Uma maneira de trabalhar com a equação acima é fazer uso da seguinte propriedade da delta de Dirac

$$\delta(f(\alpha)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{df(\alpha_i)}{d\alpha} \right|} \delta(\alpha - \alpha_i), \quad (59)$$

onde  $\alpha_i$  são os zeros da função  $f(\alpha)$ . Assim, para o nosso caso, temos

$$y' = -x \operatorname{sen} \varphi + y \operatorname{cos} \varphi = 0 \Rightarrow x \operatorname{sen} \varphi = y \operatorname{cos} \varphi \Rightarrow \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (60)$$

de onde obtemos as seguintes raízes

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \pi + \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right). \quad (61)$$

Devido à periodicidade da função tangente, cujo o período é  $\pi$ , a equação (60) admite infinitas soluções. Todavia, uma vez que a integral é dada no intervalo de  $[0, 2\pi]$  obtemos as soluções dadas acima. A derivada de  $y'$  com respeito a  $\varphi$  é igual a  $-x \operatorname{cos} \varphi - y \operatorname{sen} \varphi$ . Com isso, podemos fazer uso do artifício geométrico para os valores do cosseno e do seno para as raízes  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , como expresso a seguir.

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{y} \\ \diagup \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{---} \quad \varphi_1 \\ \text{x} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{y}{r} \\ \operatorname{cos} \varphi_1 = \frac{x}{r} \end{array} \right.$$

$$\varphi_2 = \pi + \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} y \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ x \end{array} \quad \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi_2 - \pi \end{array} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \varphi_2 = -\frac{y}{r} \\ \operatorname{cos} \varphi_2 = -\frac{x}{r} \end{cases}$$

Dessa maneira, obtemos

$$\left| \frac{dy'}{d\varphi} \right|_{\varphi_1, \varphi_2} = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (62)$$

e

$$\delta(y') = \frac{1}{r} [\delta(\varphi - \varphi_1) + \delta(\varphi - \varphi_2)]. \quad (63)$$

Por fim, obtemos

$$\Delta(r) = \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{r} [\delta(\varphi - \varphi_1) + \delta(\varphi - \varphi_2)] \right)^{-1} = \frac{r}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}. \quad (64)$$

Portanto, a equação (57) se torna

$$1 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \delta(y'). \quad (65)$$

Introduzindo este fator 1 na equação (53) e usando o fato de que  $f(x, y)$  e  $\Delta(r)$  são invariantes sob rotações, temos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy f(x, y) \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \delta(y') \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' f(x', y') \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{2} \delta(y') \\ &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} dx' x' f(x', 0) \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} dx' x' f(x', 0). \end{aligned} \quad (66)$$

Dessa forma, chegamos ao mesmo resultado de (56) porém na direção específica  $y' = 0$ . Ou seja, conseguimos reduzir a integral (e fazer as separações das repetições) sem assumir uma forma específica para  $F(r)$ .

Vale mencionar que se tivéssemos ignorado uma das soluções em (60), teríamos encontrado o dobro da resposta correta. O fator  $2\pi$  em (66) corresponde ao volume do grupo  $\text{SO}(2)$ , ou seja, o grupo de rotações ortogonais bidimensionais. Outro detalhe é que



há uma outra maneira de escrever  $\Delta(r)$ , que servirá para futuras comparações, dada por

$$\begin{aligned}\Delta(r)^{-1} &= \int \delta(y'(\varphi)) d\varphi \\ &= \int \delta(y'(\varphi)) \left| \det \left( \frac{d\varphi}{dy'} \right) \right| dy' \\ &= \left| \det \left( \frac{d\varphi}{dy'} \right) \right|_{y'=0} .\end{aligned}\tag{67}$$

Consequentemente, temos

$$\Delta(r) = \left| \det \left( \frac{dy'}{d\varphi} \right) \right|_{y'=0} .\tag{68}$$

Essa estratégia de escrever o fator 1 de maneira perspicaz neste caso simples mostra, em linhas gerais, a essência do método de Faddeev-Popov.

Façamos então este procedimento para o caso da ação de YM, que será bem mais complexo. Temos que o funcional gerador para este caso, é dado por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}} \quad \text{com} \quad S_{YM} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a .\tag{69}$$

Podemos notar que o funcional gerador é divergente, uma vez que ele é definido a partir de uma integral funcional que é tomada sobre todos os possíveis campos de calibre  $A_\mu$ . Isso ocorre pois se considerarmos dois campos  $A'_\mu$  e  $A_\mu$  relacionados por uma transformação de calibre, então a ação assim como a medida de integração serão as mesmas para ambos os campos, devido ao fato de serem invariantes de calibre. Logo, se somarmos sobre ambos  $A'_\mu$  e  $A_\mu$ , obteremos um resultado divergente. Não há nada que possa ser feito para que essa divergência desapareça, porém é possível separá-la como uma “constante infinita” (que será análogo ao volume do grupo no exemplo bidimensional) do funcional gerador de maneira que a parte restante da integral funcional será bem definida. Ou seja, queremos reduzir o funcional (Z) à forma  $Z = NP$ , onde  $N$  é a contante infinita independente do campo  $A_\mu$  e  $P$  é o funcional de  $A_\mu$  bem definido (Padmanabhan, 2016; Sterman, 1993; Ryder, 1996).

Para conseguir fazer essa separação é preciso impor uma certa condição sobre os campos, com o intuito de que dentre todas as configurações equivalentes do campo, apenas uma obedeça essa condição. Impor essa condição é fazer uma fixação de calibre. Assim como o caso para duas dimensões, vamos utilizar a delta de Dirac para fixar o calibre. Mas, como foi discutido no exemplo, precisamos introduzir essa delta no funcional (69) a partir de um fator unitário. Esse fator é dado por

$$1 = \Delta(A) \int \mathcal{D}U \delta(f - \partial_\mu A_\mu^U) ,\tag{70}$$

em que  $(A^\alpha)_\mu^U$  obedece a seguinte transformação de calibre (vista na seção anterior)

$$A_\mu^U = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger, \quad (71)$$

sendo  $U$  dado por

$$U(x) = e^{ig \alpha^a(x) T^a}. \quad (72)$$

Logo, para o caso de uma transformação infinitesimal no parâmetro  $\alpha$ , temos

$$(A^\alpha)_\mu'^a = (A^\alpha)_\mu^a + D_\mu^{ab} \alpha^b. \quad (73)$$

Como feito no exemplo bidimensional, podemos obter  $\Delta(A)$  a partir de (68). Sendo assim, fazendo uma mudança de variável

$$\omega = f - \partial_\mu A_\mu, \quad (74)$$

obtemos que a equação (70) fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Delta(A)^{-1} &= \int \mathcal{D}U \delta(\omega) \\ &= \int \mathcal{D}\omega \left| \det \left( \frac{\delta U}{\delta \omega} \right) \right| \delta(\omega) \\ &= \left| \det \left( \frac{\delta U}{\delta \omega} \right) \right|_{\omega=0}, \end{aligned} \quad (75)$$

ou seja,

$$\Delta(A) = \left| \det \left( \frac{\delta \omega}{\delta U} \right) \right|_{\omega=0}. \quad (76)$$

Mas, podemos reescrever esse  $\Delta(A)$  através de uma transformação infinitesimal de  $U$  no parâmetro  $\alpha$  em (72). Dessa forma, temos

$$\Delta(A) = \left| \det \left( \frac{\delta \omega}{\delta U} \right) \right|_{\omega=0} = \frac{1}{g} |\det(\partial_\mu D_\mu)|. \quad (77)$$

Esse resultado é conhecido como determinante de Faddeev-Popov. Esse determinante depende explicitamente do campo de calibre  $(A_\mu)$  proveniente da derivada covariante  $(D_\mu)$ , por isso ele não pode ser absorvido em uma constante de normalização e gerará novos termos para a ação. Assim, temos que o fator 1 é dado por

$$1 = \frac{1}{g} \int \mathcal{D}\alpha \delta(f - \partial_\mu A_\mu^\alpha) |\det(\partial_\mu D_\mu)|. \quad (78)$$

Aqui usamos o fato de que a partir de (72), temos

$$\int \mathcal{D}U \equiv \int \mathcal{D}\alpha . \quad (79)$$

Equivalentemente, no nosso exemplo bidimensional, essa medida funcional é simplesmente a medida  $d\theta$ .

Introduzindo (70) em (69) e usando o fato da invariância sob transformação de calibre, temos

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}} \frac{1}{g} \int \mathcal{D}\alpha |\det(\partial_\mu D_\mu)| \delta(f - \partial_\mu A_\mu) . \quad (80)$$

Em decorrência dessa invariância, a integração em  $U$  (ou em  $\alpha$ ) produz um valor constante infinito que corresponde ao volume do grupo de calibre completo (Pokorski, 2000; Sterman, 1993). Sendo assim, obtemos

$$Z[J] = \frac{1}{g} \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}} |\det(\partial_\mu D_\mu)| \delta(f - \partial_\mu A_\mu) . \quad (81)$$

Sendo assim, parte das ambiguidades foi separada no termo referente ao volume<sup>14</sup>. O isolamento desse fator era exatamente o que queríamos alcançar ( $Z = NP$ ), da mesma forma como foi feito no exemplo bidimensional. Esse fator contribui apenas com uma constante multiplicativa global para  $Z$ , dessa maneira sua forma normalizada é dada por

$$Z[J] = \frac{1}{g} \int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}} |\det(\partial_\mu D_\mu)| \delta(f - \partial_\mu A_\mu) . \quad (82)$$

A escolha feita por Faddeev e Popov para representar este determinante para um novo conjunto de campos anticomutantes que pertencem a representação adjunta, inclui inserir uma integral funcional gaussiana sob as variáveis de Grassmann (Peskin; Schroeder, 1995). Logo, o determinante de FP pode ser reescrito como<sup>15</sup>

$$\frac{1}{g} \det(\partial_\mu D_\mu) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left[ \int d^4x \bar{c} (-\partial_\mu D_\mu) c \right] . \quad (83)$$

Uma vez encontrado o determinante de FP, resta-nos reescrever o funcional delta  $\delta(f - \partial_\mu A_\mu)$  de maneira apropriada. Como o funcional gerador  $Z[J]$  independe do calibre e da função  $f$ , podemos tomar uma integração funcional convergente envolvendo essa função. Em decorrência disso surgirá uma constante que multiplicará o funcional gerador, porém, que em nada alterará os aspectos físicos da teoria (uma vez que apenas a forma normalizada de  $Z[J]$  possui consequências físicas). Uma escolha conveniente para esta

<sup>14</sup> Esse procedimento é análogo ao que fora feito para o caso bidimensional onde o volume foi o fator  $2\pi$ .

<sup>15</sup> Em que o fator  $1/g$  foi absorvido na normalização dos campos  $c$  e  $\bar{c}$ .

integração funcional convergente seria uma gaussiana dada por

$$\int \mathcal{D}f \exp\left(-\frac{1}{2\xi} \text{tr} \int d^4x f^2\right) \delta(f - \partial_\mu A_\mu) = \exp\left(-\frac{1}{2\xi} \text{tr} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2\right), \quad (84)$$

onde  $\xi$  é uma constante real e não negativa. Por questões de simplicidade e como é adotado na literatura, a expressão anterior pode ser reescrita em termos do campo Nakanishi-Lautrup ( $b$ ) (Piguet; Sorella, 2008), dada por

$$\exp\left(-\frac{1}{2\xi} \text{tr} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2\right) = \int \mathcal{D}b \exp\left[\text{tr}\left(ib \partial_\mu A_\mu + \frac{\xi b^2}{2}\right)\right] \quad (85)$$

Finalmente, tomando (83) e (85) e substituindo-as em (82), temos

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_{YMFP}} \quad (86)$$

em que  $\Phi$  denota todos os campos envolvidos na teoria  $(A, b, c, \bar{c})$ , a ação  $S_{YMFP}$  é dada por

$$S_{YMFP} = S_{YM} + S_{gf} \quad (87)$$

e a ação  $S_{gf}$ , para o caso linear covariante (como foi citado), é dada por

$$S_{gf} = \int d^4x \left( ib^a \partial_\mu A_\mu^a + \frac{\xi b^a b^a}{2} - \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b \right). \quad (88)$$

Podemos observar na equação anterior que para o caso de  $\xi = 0$  recuperamos o calibre de Landau e no caso de  $\xi = 1$  obtemos o calibre de Feynman. Uma forma de perceber isso de maneira mais explícita é olhar, por exemplo, para o propagador livre do campo de calibre. Esse propagador no calibre linear covariante (LCG) é dado por

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle_{LCG} = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{p^2} \delta^{ab} + \xi \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \delta^{ab}. \quad (89)$$

No calibre de Landau, temos

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle_{\text{Landau}} = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{p^2} \delta^{ab}. \quad (90)$$

E no calibre de Feynman, temos

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle_{\text{Feynman}} = \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \frac{1}{p^2}. \quad (91)$$

Ainda que parte das ambiguidades fora resolvida através da quantização de FP, em seu artigo de 1978 (Gribov, 1978), Gribov observou que ainda haviam outras ambiguidades (denominadas cópias de Gribov) que deveriam ser eliminadas para fornecer uma teoria bem estruturada. Esse assunto será abordado em maiores detalhes em capítulos futuros.

Na próxima seção veremos as regras de Feynman que regem a Teoria de YM.

### 2.3 Regras de Feynman da Teoria de YM

Nesta seção, vamos apresentar as regras de Feynman para a teoria de YM no calibre de Landau. Nosso objetivo aqui é não apenas mostrar o resultado, mas também apresentar (mesmo que de forma resumida) como se obtêm tais resultados. Como vimos na seção anterior, a ação para QCD (YM pura), neste calibre, é dada por<sup>16</sup>

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \int d^4x \left( i b^a \partial_\mu A_\mu^a - \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b \right) . \quad (92)$$

Tal ação pode ser escrita como uma parte livre ( $S_0$ ) mais uma parte que contém os termos de interação ( $S_{int}$ ), dada por

$$S = S_0 + S_{int} , \quad (93)$$

em que

$$S_0 = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu A_\nu^a)^2 - (\partial_\mu A_\nu^a)(\partial_\nu A_\mu^a) \right] + i b^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial^2 c^a \right\} \text{ e} \quad (94)$$

$$S_{int} = \int d^4x \left( g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c + \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e - g f^{abc} (\partial_\mu \bar{c}^a) A_\mu^c c^b \right) . \quad (95)$$

Com isso, podemos começar a montagem dos diagramas de Feynman e traduzi-los em expressões matemáticas. A partir da parte livre da ação, obtemos os propagadores (a nível árvore) da teoria e, a partir da parte de interação, obtemos o que chamamos de vértices dos diagramas. Para exemplificar, vamos considerar o primeiro termo da ação de interação. Esse irá nos fornecer o vértice com três glúons (tri-glúon). Como vimos no capítulo anterior, a expressão para se obter o vértice é dada por

$$V_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) = - \frac{\delta^n S_{int}(\Phi)}{\delta \Phi_{i_n}(x_n) \dots \delta \Phi_{i_1}(x_1)} \Big|_{\Phi=0} . \quad (96)$$

Sendo assim, para o termo escolhido temos

$$V_{\lambda\rho\sigma}^{klm}(x, y, z) = - \frac{\delta^3 \left( -g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c \right)}{\delta A_\lambda^k(x) \delta A_\rho^\ell(y) \delta A_\sigma^m(z)} \Big|_{A=0}$$

---

<sup>16</sup> Aqui chamamos o tensor do campo de calibre de “G” apenas para indicar que tal parte da ação é referente aos glúons, bósons mediadores da QCD. Vale lembrar também que, rigorosamente, tal ação não representa a QCD, pois não contém a parte dos quarks. Porém, nesta tese, iremos trabalhar apenas com teorias de YM puras, ou seja, iremos considerar apenas a parte bosônica. Dessa forma, tais regras seriam aplicáveis para teorias não-abelianas e não para QCD em si.

$$\begin{aligned}
&= -g f^{k\ell m} \{ -\delta_{\sigma\lambda} [(\partial_\rho \delta(x-y))\delta(x-z) + 2(\partial_\rho \delta(x-z))\delta(x-y)] \\
&\quad + \delta_{\rho\lambda} [(\partial_\sigma \delta(x-z))\delta(x-y) + 2(\partial_\sigma \delta(x-y))\delta(x-z)] \\
&\quad + \delta_{\sigma\rho} [(\partial_\lambda \delta(x-z))\delta(x-y) - (\partial_\lambda \delta(x-y))\delta(x-z)] \} ,
\end{aligned}$$

que, no espaço dos momenta, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{\lambda\rho\sigma}^{k\ell m}(p_1, p_2, p_3) &= \int d^4x d^4y d^4z e^{i(p_1 \cdot x + p_2 \cdot y + p_3 \cdot z)} V_{\lambda\rho\sigma}^{k\ell m}(x, y, z) \\
&= ig f^{k\ell m} \{ \delta_{\lambda\rho} [(p_1)_\sigma - (p_2)_\sigma] + \delta_{\rho\sigma} [(p_2)_\lambda - (p_3)_\lambda] + \delta_{\sigma\lambda} [(p_3)_\rho - (p_1)_\rho] \} \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3) . \quad (97)
\end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos obter todos os vértices da teoria. Para o vértice com quatro glúons (quadri-glúon), temos

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -g^2 \left[ f^{abm} f^{cdm} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + f^{dam} f^{bcm} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}) \right. \\
&\quad \left. + f^{cam} f^{bdm} (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}) \right] (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) . \quad (98)
\end{aligned}$$

Por fim, para o vértice ghost-glúon, temos

$$\tilde{V}_\alpha^{abc}(p_1, p_2, p_3) = ig f^{abc} (p_2)_\alpha (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3) . \quad (99)$$

Uma maneira de obter os propagadores é escrever a parte livre da ação em uma forma matricial. Para isso, podemos reescrever a equação (94) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
S_0 &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \left( -A_\nu^a \partial^2 A_\nu^a + A_\nu^a \partial_\mu \partial_\nu A_\mu^a \right) + \frac{i}{2} b^a \partial_\mu A_\mu^a - \frac{i}{2} (\partial_\mu b^a) A_\mu^a + \bar{c}^a \partial^2 c^a \right] \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left[ \delta^{ab} A_\mu^a \left( -\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu^b + i\delta^{ab} b^a (\partial_\nu A_\nu^b) - i\delta^{ab} A_\mu^a (\partial_\mu b^a) \right] + \bar{c}^a \partial^2 c^a \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\delta^{ab}}{2} \begin{bmatrix} A_\mu^a & b^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu) & -i\partial_\mu \\ i\partial_\nu & 0^{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^b \\ b^b \end{bmatrix} + \bar{c}^a \partial^2 c^a \right\} , \quad (100)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$S_0 = \int d^4x \left\{ \frac{\delta^{ab}}{2} \left[ \Phi^T \mathcal{O}_{2 \times 2} \Phi \right] + \bar{c}^a \partial^2 c^a \right\} , \quad (101)$$

em que  $\Phi$  é a matriz com os campos e  $\mathcal{O}_{2 \times 2}$  é a matriz dos operadores. Sendo assim,

$$\Phi = \begin{bmatrix} A_\nu^b \\ b^b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} (-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu) & -i\partial_\mu \\ i\partial_\nu & 0^{ab} \end{bmatrix} . \quad (102)$$

Com isso, para obter os propagadores, precisamos obter a inversa da matriz

$$\mathcal{O}(x-y) = \begin{bmatrix} (-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu) & -i\partial_\mu \\ i\partial_\nu & 0 \end{bmatrix} \delta(x-y) \quad (103)$$

que, no espaço dos momenta, é dada por

$$\tilde{\mathcal{O}}(p) = \begin{bmatrix} (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) & -p_\mu \\ p_\nu & 0 \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Vale ressaltar que essa matriz não contempla os campos  $\bar{c}^a$  e  $c^a$ , pois são campos desacoplados e seu propagador é obtido de forma imediata. Portanto, após a inversão da matriz, obtemos

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle = \mathcal{D}_{AA}(p^2) \delta^{ab} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2} \delta^{ab} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p), \quad (105)$$

$$\langle A_\mu^a(p) b^b(-p) \rangle = \mathcal{D}_{Ab}(p^2) p_\mu \delta^{ab} = \frac{p_\mu}{p^2} \delta^{ab}, \quad (106)$$

$$\langle \bar{c}^a(p) c^b(-p) \rangle = \mathcal{D}_{\bar{c}c}(p^2) \delta^{ab} = \frac{1}{p^2} \delta^{ab}, \quad (107)$$

onde os  $\mathcal{D}'s$  são denominados fator de forma e

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(p) = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (108)$$

é o projetor transverso, tal que  $p_\mu \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) = p_\nu \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) = 0$ . É interessante observar que, no espaço euclidiano,

$$\mathcal{P}_{\mu\mu}(p) = d - 1 \quad (109)$$

e

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \mathcal{P}_{\mu\nu}(k) = d - 2 + \frac{(p \cdot k)^2}{p^2 k^2}. \quad (110)$$

Vale mencionar que, nesse trabalho, os propagadores no espaço dos momenta são definidos usando a seguinte convenção da transformada de Fourier

$$\tilde{\Phi}(p) = \int d^d x e^{ip \cdot x} \Phi(x) \quad (111)$$

em que

$$\Phi(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip \cdot x} \tilde{\Phi}(p), \quad (112)$$

para qualquer um dos campos da teoria.

Richard Feynman, uma das mentes mais brilhantes da física do século XX, desenvolveu um mecanismo para representar interações entre partículas através de diagramas que, em sua homenagem, receberam o seu nome. A seguir, apresentamos alguns diagramas de Feynman referentes à QCD. As figuras (1) e (2) nos mostram cada vértice e cada propagador<sup>17</sup> com seus respectivos diagramas de Feynman.

Figura 1 - Vértices

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: Four-gluon vertex} \\
 & = -g^2 [f^{abm} f^{cdm} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + f^{dam} f^{bcm} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \\
 & \quad + f^{cam} f^{bdm} (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta})] (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
 \\
 & \text{Diagram 2: Three-gluon vertex} \\
 & = igf^{abc} [\delta_{\alpha\beta} (p_1 - p_2)_\gamma + \delta_{\beta\gamma} (p_2 - p_3)_\alpha + \delta_{\gamma\alpha} (p_3 - p_1)_\beta] \\
 & \quad \times (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3) \\
 \\
 & \text{Diagram 3: Ghost-gluon vertex} \\
 & = -igf^{abc} (p_2)_\alpha (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3)
 \end{aligned}$$

Legenda: Vértices para QCD sem quarks.

Fonte: O autor, 2023.

Figura 2 - Propagadores

$$\begin{aligned}
 & \bar{c}^a \text{---} \leftarrow \text{---} c^b = \frac{1}{p^2} \delta^{ab} \\
 \\
 & A_\mu^a \text{~~~~~} A_\nu^b = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{p^2} \delta^{ab}
 \end{aligned}$$

Legenda: Propagadores para QCD sem quarks.

Fonte: O autor, 2023.

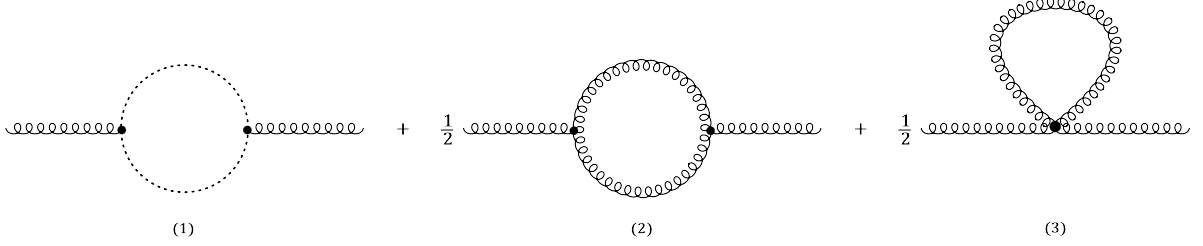
Vale ressaltar que não foram apresentados diagramas contendo quarks, uma vez que esse trabalho contempla apenas teorias de YM puras. Em capítulos futuros, abordaremos

<sup>17</sup> Na imagem dos propagadores não temos o propagador  $\langle A_\mu^a(p)b^b(-p) \rangle$ , pois como não há vértices envolvendo esses campos, logo não haverá diagramas com vértices contendo esse propagador.



esse mecanismo de diagramas de Feynman para cálculos de correções a 1-loop. Por hora, apresentaremos de maneira breve correções a 1-loop para o propagador perturbativo do glúon. A partir da análise das regras de Feynman obtidas anteriormente, notamos que há três digramas que contribuem para essas correções a 1-loop, representados na figura 3.

Figura 3 - Diagramas para o modelo perturbativo de YM

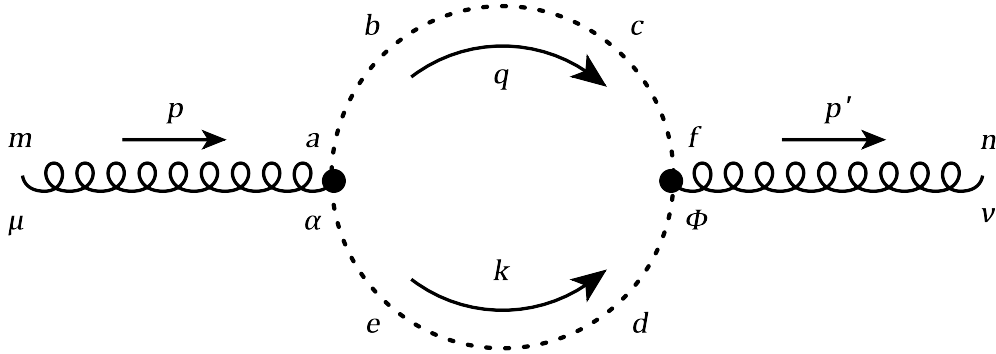


Legenda: Todos os diagramas que contribuem para correções a 1-loop para o propagador do glúon.

Fonte: O autor, 2023.

Quando trabalhamos com cálculos de correções perturbativas em TQC, é comum utilizarmos ferramentas como a regularização dimensional, os parâmetros de Feynman e a renormalização, por exemplo. O cálculo para o primeiro diagrama (figura 4), denominado *loop dos ghosts*, é dado por

Figura 4 - Loop dos *ghosts*



Legenda: Diagrama proveniente do vértice  $\Gamma_{A\bar{c}c}$  com sua estrutura de índices completa.

Fonte: O autor, 2023.

$$\begin{aligned}
 (D_1)_{\mu\nu}^{mn}(p) &= -\langle A_\mu^m(p)A_\alpha^a(-p) \rangle \int_{q,k,p} [\Gamma_{A\bar{c}c}]_\alpha^{abe}(p, -q, -k) \langle \bar{c}^b(q)c^c(-q) \rangle [\Gamma_{A\bar{c}c}]_\phi^{fdc}(-p', k, q) \\
 &\quad \times \langle \bar{c}^d(k)c^e(-k) \rangle \langle A_\phi^f(p')A_\nu^n(-p') \rangle \\
 &= -\delta^{ma}\mathcal{P}_{\mu\alpha}(p)D_{AA}(p) \int_{q,k,p'} \left\{ -igf^{abe}(-q_\alpha)\delta(p-q-k) \right\} \delta^{bc}D_{\bar{c}c}(q) \times \\
 &\quad \times \left\{ -igf^{fdc}k_\phi\delta(-p'+k+q) \right\} \delta^{de}D_{\bar{c}c}(k)\delta^{fn}\mathcal{P}_{\phi\nu}(p')D_{AA}(p')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\delta^{ma} \mathcal{P}_{\mu\alpha}(p) D_{AA}(p) \int_q \left\{ -igf^{abe}(-q_\alpha) \right\} \delta^{bc} D_{\bar{c}c}(q) \left\{ -igf^{fdc}(p-q)_\phi \right\} \delta^{de} D_{\bar{c}c}(p-q) \times \\
&\quad \times \delta^{fn} \mathcal{P}_{\phi\nu}(p) D_{AA}(p) \\
&= \delta^{ma} \mathcal{P}_{\mu\alpha}(p) D_{AA}(p) \Pi_{\alpha\phi}^{af[1]}(p^2) \delta^{fn} \mathcal{P}_{\phi\nu}(p) D_{AA}(p)
\end{aligned}$$

Vamos prosseguir com o cálculo apenas da auto-energia  $(\Pi^{[1]})$ , ou seja, o diagrama sem as pernas externas. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\alpha\phi}^{af[1]}(p^2) &= - \int_q \left\{ -igf^{abe}(-q_\alpha) \right\} \delta^{bc} D_{\bar{c}c}(q) \left\{ -igf^{fdc}(p-q)_\phi \right\} \delta^{de} D_{\bar{c}c}(p-q) \\
&= -g^2 f^{abe} \delta^{bc} f^{fdc} \delta^{de} \int_q \frac{q_\alpha(p-q)_\phi}{q^2(p-q)^2} \\
&= -g^2 f^{ace} f^{fec} \int_q \frac{q_\alpha(p-q)_\phi}{q^2(p-q)^2} \\
&= g^2 N \delta^{af} \int_q \frac{q_\alpha(p-q)_\phi}{q^2(p-q)^2} .
\end{aligned} \tag{113}$$

Como mencionado, vamos utilizar a regularização dimensional, que tem como base fazer uma mudança no número de dimensões na medida de integração, que é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \longrightarrow \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} , \tag{114}$$

onde  $\varepsilon$  é o parâmetro dado por  $\varepsilon = (4-d)/2$  e  $\mu$  é o parâmetro introduzido para corrigir a dimensionalidade, uma vez que passamos de quatro dimensões para  $d$  dimensões. Então a autoenergia é dada por

$$\Pi_{\alpha\phi}^{af[1]}(p^2) = g^2 N \delta^{af} \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\alpha(p-q)_\phi}{q^2(p-q)^2} . \tag{115}$$

Utilizando o método dos parâmetros de Feynman (Peskin; Schroeder, 1995)

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(1-x)A + xB]^2} , \tag{116}$$

temos

$$\frac{1}{q^2(p-q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(1-x)q^2 + x(p-q)^2]^2} . \tag{117}$$

Completando quadrados na equação (117) dentro dos colchetes, obtemos

$$\begin{aligned}
(1-x)q^2 + x(p-q)^2 &= q^2 - xq^2 + xp^2 + xq^2 - 2xpq \\
&= q^2 - 2xpq + x^2p^2 - x^2p^2 + xp^2 \\
&= (q-xp)^2 + xp^2(1-x) .
\end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\frac{1}{q^2(p-q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(q-px)^2 + x(1-x)p^2]^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + \Delta)^2}, \quad (118)$$

onde

$$\ell = q - px \quad (119)$$

$$\Delta = x(1-x)p^2.$$

Substituindo (118) e (119) em (115), temos<sup>18</sup>

$$\Pi_{\alpha\phi}^{af[1]}(p^2) = g^2 N \delta^{af} \mu^{2\varepsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{(l+px)_\alpha (p-l-px)_\phi}{(\ell^2 + \Delta)^2}. \quad (120)$$

Na equação (120), é útil utilizarmos os resultados

$$\int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu}{f(\ell^2)} = 0 \quad \text{e} \quad \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{f(\ell^2)} \neq 0 \Rightarrow \ell^\mu \ell^\nu = \frac{1}{d} \delta^{\mu\nu} \ell^2. \quad (121)$$

Por fim, podemos escrever a auto-energia como

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\phi}^{af[1]}(p^2) &= g^2 N \delta^{af} \mu^{2\varepsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{-\ell_\alpha \ell_\phi + p_\alpha p_\phi x - p_\alpha p_\phi x^2}{(\ell^2 + \Delta)^2} \\ &= g^2 N \delta^{af} \mu^{2\varepsilon} \int_0^1 dx \left\{ \frac{-\delta^{\alpha\phi}}{d} \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 + \Delta)^2} \right. \\ &\quad \left. + p_\alpha p_\phi x(1-x) \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 + \Delta)^2} \right\}. \quad (122) \end{aligned}$$

O método de regularização dimensional leva a algumas integrais recorrentes e conhecidas na literatura (Peskin; Schroeder, 1995; Itzykson; Zuber, 2006) como, por exemplo,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \quad \text{e} \\ \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^2} \frac{\ell^2}{(\ell^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n-d/2-1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2}. \end{aligned} \quad (123)$$

---

<sup>18</sup> Lembrando que  $d^d q = d^d \ell$  na mudança de variável

Portanto, aplicando o resultado acima em (122), temos

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\phi}^{af[1]}(p^2) = \mu^{2\varepsilon} g^2 N \delta^{af} \int_0^1 dx \left\{ \frac{-\delta^{\alpha\phi}}{d} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \Gamma(1-d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-d/2} + \right. \\ \left. \frac{p_\alpha p_\phi x(1-x)}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \right\}. \quad (124) \end{aligned}$$

Uma vez que a autoenergia total é uma grandeza transversa, é favorável reescrevermos os termos do integrando de maneira que tenhamos fatores comuns em evidência. Sendo assim, a autoenergia é dada por

$$\Pi_{\alpha\phi}^{af[1]}(p^2) = g^2 N \delta^{af} \int_0^1 dx \frac{\mu^{2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(\Delta/4\pi)^{2-d/2}} \left\{ \frac{\delta^{\alpha\phi} x(1-x)p^2}{2(d/2-1)} + p_\alpha p_\phi (1-x)x \right\}. \quad (125)$$

Antes de efetuarmos a integração em  $x$ , é necessário lidarmos com os termos provenientes da regularização dimensional (ou seja,  $d$  e  $\varepsilon$ ). Dessa maneira, lembrando que  $d = 4 - 2\varepsilon$  e tomando uma expansão em série de potência de  $\varepsilon$ , encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\mu^{2\varepsilon} \Gamma(2-d/2)}{(\Delta/4\pi)^{2-d/2}} &= \frac{(\mu^2)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon)}{(\Delta/4\pi)^\varepsilon} \\ &= \Gamma(\varepsilon) \left( \frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \\ &= \Gamma(\varepsilon) \exp \left\{ -\varepsilon \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \\ &= \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_c + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \left( 1 - \varepsilon \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \\ &\simeq \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_c - \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) \end{aligned}$$

e

$$\left( \frac{d}{2} - 1 \right)^{-1} = (2 - \varepsilon - 1)^{-1} = (1 - \varepsilon)^{-1} \simeq 1 + \varepsilon,$$

onde  $\gamma_c$  é a constante de Euler-Mascheroni, cujo valor aproximado é 0.5772. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\phi}^{af[1]}(p^2) &= \frac{g^2 N \delta^{af}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_c - \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \left\{ \frac{\delta^{\alpha\phi} p^2}{2} (1 + \varepsilon) + 2 p_\alpha p_\phi \right\} x(1-x) \\ &= \frac{g^2 N \delta^{af}}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{\delta^{\alpha\phi} p^2}{\varepsilon} + \delta^{\alpha\phi} p^2 + \frac{2 p_\alpha p_\phi}{\varepsilon} - \gamma_c \delta^{\alpha\phi} p^2 - \varepsilon \gamma_c \delta^{\alpha\phi} p^2 - 2 \gamma_c p_\alpha p_\phi \right. \\ &\quad \left. - \delta^{\alpha\phi} p^2 \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) - \varepsilon \delta^{\alpha\phi} p^2 \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) - 2 p_\alpha p_\phi \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) \right\} x(1-x). \end{aligned}$$

Nesse ponto, onde só nos resta fazer a integral em  $x$ , podemos descartar os termo de ordem  $\varepsilon$  ( $\mathcal{O}(\varepsilon) \rightarrow 0$ ). Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\phi}^{af[1]}(p^2) &= \frac{g^2 N \delta^{af}}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{\delta^{\alpha\phi} \phi^2}{\varepsilon} + \delta^{\alpha\phi} p^2 + \frac{2 p_\alpha p_\phi}{\varepsilon} - \gamma_c \delta^{\alpha\phi} p^2 - 2 \gamma_c p_\alpha p_\phi \right. \\ &\quad \left. - \delta^{\alpha\phi} p^2 \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) - 2 p_\alpha p_\phi \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) \right\} x(1-x) \\ &= \frac{g^2 N \delta^{af}}{2(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{6} \frac{\delta^{\alpha\phi} p^2}{\varepsilon} + \frac{1}{6} \delta^{\alpha\phi} p^2 + \frac{1}{6} \frac{2 p_\alpha p_\phi}{\varepsilon} - \frac{1}{6} \gamma_c \delta^{\alpha\phi} p^2 - \frac{1}{6} 2 \gamma_c p_\alpha p_\phi \right. \\ &\quad \left. - \delta^{\alpha\phi} p^2 \left[ \frac{1}{18} \left( -5 + 3 \ln \left( \frac{p^2}{4\pi\mu^2} \right) \right) \right] - 2 p_\alpha p_\phi \left[ \frac{1}{18} \left( -5 + 3 \ln \left( \frac{p^2}{4\pi\mu^2} \right) \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

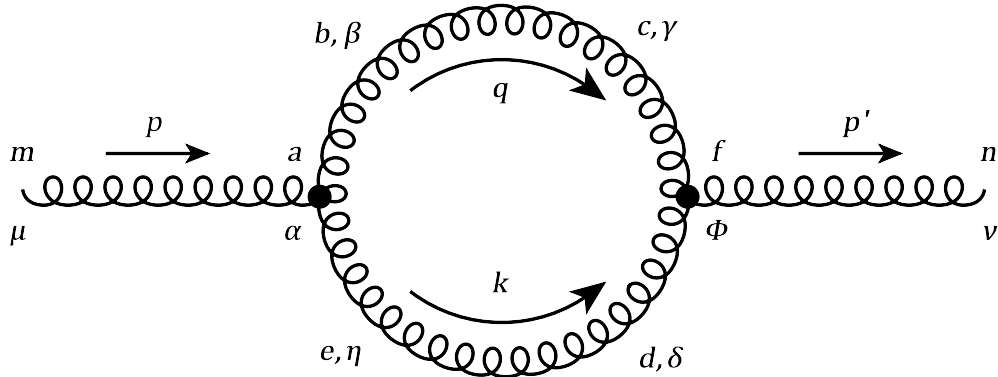
Por fim, podemos separar o resultado encontrado para a autoenergia em uma parte divergente e outra finita, a saber:

$$\text{Parte divergente: } \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{g^2 N \delta^{af} \delta^{\alpha\phi} p^2}{192\pi^2} + \frac{g^2 N \delta^{af} p_\alpha p_\phi}{96\pi^2} \right\}. \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \text{Parte finita: } \frac{g^2 N \delta^{af}}{36(4\pi)^2} \left\{ \delta^{\alpha\phi} p^2 \left[ 8 - 3 \gamma_c - 3 \ln \left( \frac{p^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \right. \\ \left. - p_\alpha p_\phi \left[ -10 + 6 \gamma_c + 6 \ln \left( \frac{p^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \right\}. \quad (127) \end{aligned}$$

Para o cálculo do segundo diagrama (figura 5), que é chamado de *loop dos glúons*, temos

Figura 5 - Loop dos glúons



Legenda: Diagrama proveniente do vértice  $\Gamma_{AAA}$  com sua estrutura de índices completa.

Fonte: O autor, 2023.

$$\begin{aligned}
(D_2)_{\mu\nu}^{mn}(p) &= \langle A_\mu^m(p) A_\alpha^a(-p) \rangle \int_{q,k,p'} [\Gamma_{AAA}]_{\alpha\beta\eta}^{abe}(p, -q, -k) \langle A_\beta^b(q) A_\gamma^c(-q) \rangle \\
&\quad \times [\Gamma_{AAA}]_{\gamma\delta\phi}^{cdf}(q, k, -p') \langle A_\delta^d(k) A_\eta^e(-k) \rangle \langle A_\phi^f(p') A_\nu^n(-p') \rangle \quad (128) \\
&= \delta^{ma} \mathcal{P}_{\mu\alpha}(p) D_{AA}(p) \int_{q,k,p'} \left\{ ig f^{abe} [\delta_{\alpha\beta}(p+q)_\eta + \delta_{\beta\eta}(-q+k)_\alpha + \delta_{\alpha\eta}(-k-p)_\beta] \delta(p-q-k) \right\} \\
&\quad \times \delta^{bc} \mathcal{P}_{\beta\gamma}(q) D_{AA}(q) \left\{ ig f^{fcd} [\delta_{\phi\gamma}(-p'-q)_\delta + \delta_{\gamma\delta}(q-k)_\phi + \delta_{\phi\delta}(k+p')_\gamma] \delta(-p'+q+k) \right\} \\
&\quad \quad \quad \times \delta^{ed} \mathcal{P}_{\eta\delta}(k) D_{AA}(k) \delta^{fn} \mathcal{P}_{\phi\nu}(p') D_{AA}(p') \\
&= \delta^{ma} \mathcal{P}_{\mu\alpha}(p) D_{AA}(p) \int_q (-g^2) f^{abe} f^{fcd} \{ [\delta_{\alpha\beta}(p+q)_\eta + \delta_{\beta\eta}(p-2q)_\alpha + \delta_{\alpha\eta}(q-2p)_\beta] \} \\
&\quad \times \delta^{bc} \mathcal{P}_{\beta\gamma}(q) D_{AA}(q) [\delta_{\phi\gamma}(-p-q)_\delta + \delta_{\gamma\delta}(2q-p)_\phi + \delta_{\phi\delta}(2p-q)_\gamma] \\
&\quad \quad \quad \times \delta^{ed} \mathcal{P}_{\eta\delta}(p-q) D_{AA}(p-q) \delta^{fn} \mathcal{P}_{\phi\nu}(p) D_{AA}(p) \\
&= \delta^{ma} \mathcal{P}_{\mu\alpha}(p) D_{AA}(p) \Pi_{\alpha\phi}^{af[2]}(p^2) \delta^{fn} \mathcal{P}_{\phi\nu}(p) D_{AA}(p)
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\Pi_{\alpha\phi}^{af[2]}(p^2) &= \int_q (-g^2) f^{abe} f^{fcd} \{ [\delta_{\alpha\beta}(p+q)_\eta + \delta_{\beta\eta}(p-2q)_\alpha + \delta_{\alpha\eta}(q-2p)_\beta] \} \\
&\quad \times \delta^{bc} \mathcal{P}_{\beta\gamma}(q) D_{AA}(q) [\delta_{\phi\gamma}(-p-q)_\delta + \delta_{\gamma\delta}(2q-p)_\phi + \delta_{\phi\delta}(2p-q)_\gamma] \\
&\quad \quad \quad \times \delta^{ed} \mathcal{P}_{\eta\delta}(p-q) D_{AA}(p-q)
\end{aligned}$$

Após alguns cálculos e usando a seguinte identidade envolvendo a constante de estrutura do  $SU(N)$

$$f^{abc} f^{dbc} = N \delta^{ad}, \quad (129)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\alpha\phi}^{af[2]}(p^2) &= -g^2 N \delta^{af} \int_q \left\{ \mathcal{P}_{\alpha\phi}(p-q) [-4 p_\beta p_\gamma \mathcal{P}_{\beta\delta}(q)] + \mathcal{P}_{\alpha\delta}(p-q) [-4 p_\beta q_\phi \mathcal{P}_{\beta\delta}(q) \right. \\
&\quad + 2 p_\beta p_\phi \mathcal{P}_{\beta\delta}(q) + 2 p_\beta p_\delta \mathcal{P}_{\beta\phi}(q) + 2 p_\beta q_\delta \mathcal{P}_{\beta\phi}(q)] + \mathcal{P}_{\eta\phi}(p-q) [2 p_\alpha p_\gamma \mathcal{P}_{\eta\gamma}(q) \\
&\quad - 4 q_\alpha p_\gamma \mathcal{P}_{\eta\gamma}(q) + 2 p_\eta p_\delta \mathcal{P}_{\alpha\gamma}(q) + 2 q_\eta p_\gamma \mathcal{P}_{\alpha\gamma}(q)] + \mathcal{P}_{\eta\delta}(p-q) [-p_\eta p_\delta \mathcal{P}_{\alpha\phi}(q) \\
&\quad - p_\eta q_\delta \mathcal{P}_{\alpha\phi}(q) - q_\eta p_\delta \mathcal{P}_{\alpha\phi}(q) - q_\eta q_\delta \mathcal{P}_{\alpha\phi}(q) + 2 p_\eta q_\phi \mathcal{P}_{\alpha\delta}(q) - p_\eta p_\phi \mathcal{P}_{\alpha\delta}(q) \\
&\quad \quad \quad \left. + 2 q_\eta q_\phi \mathcal{P}_{\alpha\delta}(q) - q_\eta p_\phi \mathcal{P}_{\alpha\delta}(q) - p_\alpha p_\delta \mathcal{P}_{\eta\phi}(q) - p_\alpha q_\delta \mathcal{P}_{\eta\phi}(q) + 2 q_\alpha p_\delta \mathcal{P}_{\eta\phi}(q) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 q_\alpha q_\delta \mathcal{P}_{\eta\phi}(q) + 2 p_\alpha q_\phi \mathcal{P}_{\eta\delta}(q) - p_\alpha p_\phi \mathcal{P}_{\eta\delta}(q) - 4 q_\alpha q_\phi \mathcal{P}_{\eta\delta}(q) \\
& \qquad \qquad \qquad + 2 q_\alpha p_\phi \mathcal{P}_{\eta\delta}(q)]\} D_{AA}(q) D_{AA}(p-q) .
\end{aligned}$$

Devido ao enorme número de termos e passos para prosseguir com o cálculo da equação acima, muito exaustivos e tediosos, apresentaremos apenas o resultado final para a autoenergia obtido através desse diagrama. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\alpha\phi}^{af [2]}(p^2) = \frac{g^2 N \delta^{af}}{36(4\pi)^2} \left\{ \delta^{\alpha\phi} p^2 \left[ \frac{75}{\varepsilon} + 89 - 75 \gamma_c - 75 \ln \left( \frac{p^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \right. \\
\left. - p_\alpha p_\phi \left[ \frac{84}{\varepsilon} + 107 - 84 \gamma_c - 84 \ln \left( \frac{p^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \right\} . \quad (130)
\end{aligned}$$

E assim, podemos separar esse resultado nas partes finita e divergente, como a seguir:

$$\text{Parte divergente: } \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{25g^2 N \delta^{af} \delta^{\alpha\phi} p^2}{192\pi^2} - \frac{7g^2 N \delta^{af} p_\alpha p_\phi}{48\pi^2} \right\} . \quad (131)$$

$$\begin{aligned}
\text{Parte finita: } \frac{g^2 N \delta^{af}}{36(4\pi)^2} \left\{ \delta^{\alpha\phi} p^2 \left[ 89 - 75 \gamma_c - 75 \ln \left( \frac{p^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \right. \\
\left. - p_\alpha p_\phi \left[ 107 - 84 \gamma_c - 84 \ln \left( \frac{p^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \right\} . \quad (132)
\end{aligned}$$

Então, resta-nos ainda calcular o terceiro diagrama (figura 6), conhecido na literatura como *tadpole*. Ele nos fornece uma contribuição nula ( $\Pi^{[3]} = 0$ ), devido à regularização dimensional e ao fato da teoria ser não massiva.<sup>19</sup> Portanto, como a autoenergia total é dada pela soma da autoenergia de cada diagrama da figura 3, finalmente obtemos uma autoenergia transversa, como esperado

$$\begin{aligned}
\Pi &= \Pi^{[1]} + \Pi^{[2]} + \Pi^{[3]} \\
&= - \frac{g^2 N \delta^{af} p^2}{(4\pi)^2} \left( \delta_{\alpha\phi} - \frac{p_\alpha p_\phi}{p^2} \right) \frac{13}{6} \left\{ - \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_c + \ln \left( \frac{p^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{97}{78} \right\} . \quad (133)
\end{aligned}$$

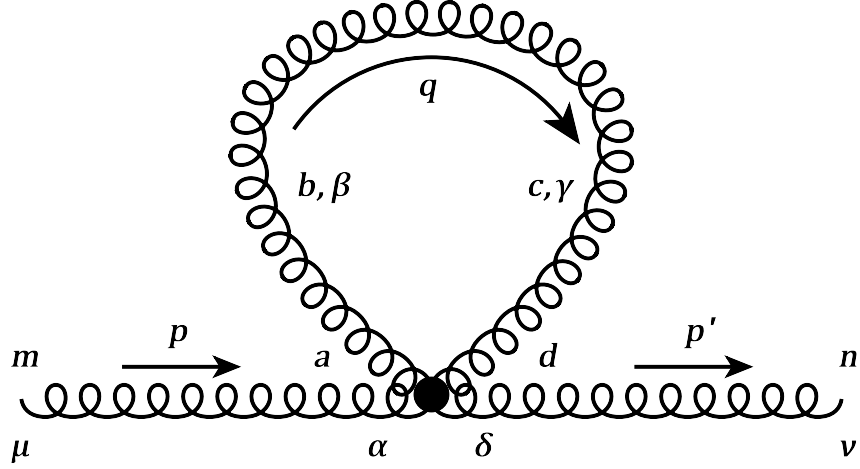
Esse resultado pode ser comparado, por exemplo, com aquele encontrado por Itzykson e Zuber publicado no livro (Itzykson; Zuber, 2006) no calibre linear covariante.

Agora, precisamos renormalizar essa expressão para obter uma autoenergia finita. Sendo assim, vamos utilizar o esquema de renormalização  $\overline{MS}$  e, para tanto, vamos partir

---

<sup>19</sup> Porém, para o caso da teoria de YM massiva essa contribuição deixa de ser nula. Para mais detalhes dos cálculos desse diagrama ver Apêndice A.

Figura 6 - Tadpole



Legenda: Diagrama proveniente do vértice  $\Gamma_{AAAA}$  com sua estrutura de índices completa.  
 Fonte: O autor, 2023.

da ação nua (*bare*) da teoria, ou seja,

$$S = \int d^d x \left\{ \frac{1}{4} \left[ \partial_\mu (A_0)_\nu^a - \partial_\nu (A_0)_\mu^a + g_0 f^{abc} (A_0)_\mu^b (A_0)_\nu^c \right]^2 + i(b_0)^a \partial_\mu (A_0)_\mu^a + (\bar{c}_0)^a \partial_\mu D_\mu^{ab} (A_0, g_0) (c_0)^b \right\} . \quad (134)$$

Com isso, precisamos introduzir a relação entre as grandezas nuas e as grandezas renormalizadas, dadas a seguir:

$$\begin{aligned} A_0 &= Z_A^{1/2} A \\ b_0 &= Z_b^{1/2} b \\ c_0 &= Z_c^{1/2} c \\ \bar{c}_0 &= Z_{\bar{c}}^{1/2} \bar{c} \\ g_0 &= Z_g g , \end{aligned} \quad (135)$$

em que os parâmetros  $Z'$ s são os chamados fatores de renormalização.

Pelo fato de estarmos interessados apenas nas correções da função de Green de 2-pontos para o glúon ( $\langle AA \rangle$ ), o único termo da ação que contribuirá para esse cálculo é

$$\begin{aligned} S &= \int d^d x \frac{1}{4} \left( \partial_\mu (A_0)_\nu^a - \partial_\nu (A_0)_\mu^a \right)^2 \\ &= \int d^d x \frac{1}{4} Z_A \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right)^2 . \end{aligned} \quad (136)$$

Como estamos fazendo correções a 1-loop, é necessário expandir os contratermos em série



de potências de  $\hbar$ , como abaixo

$$Z_A = 1 + \hbar Z_A^{(1)} + \mathcal{O}(\hbar^2) . \quad (137)$$

Portanto, levando em consideração as unidades naturais ( $\hbar = 1$ ), temos

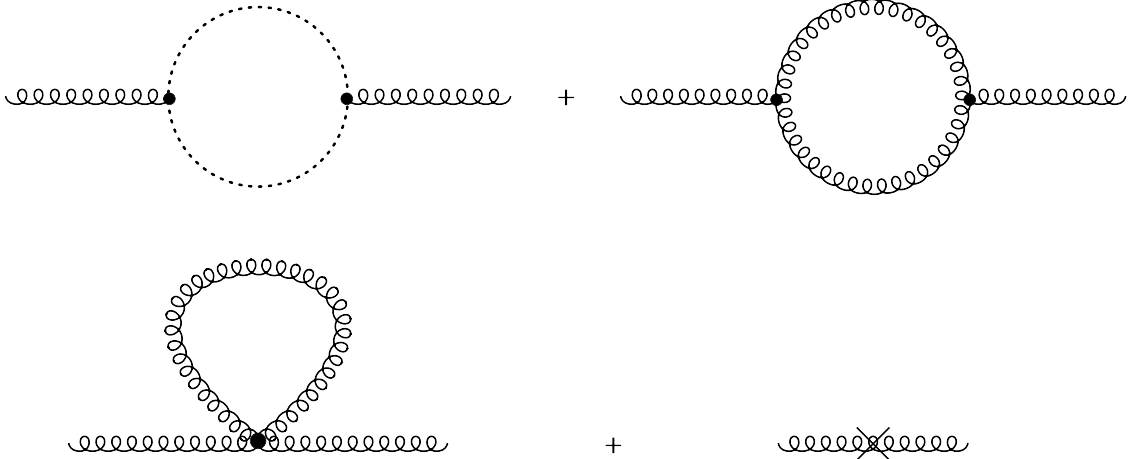
$$\begin{aligned} S &= \int d^d x \frac{1}{4} \left( 1 + Z_A^{(1)} \right) \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right)^2 \\ &= \int d^d x \left\{ \frac{1}{4} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right)^2 + \frac{1}{4} Z_A^{(1)} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right)^2 \right\} . \end{aligned} \quad (138)$$

O primeiro termo da expressão acima contribui para obtermos o propagador, a nível árvore, do glúon. Logo, apenas o segundo termo contribuirá para a renormalização e será considerado como um termo da parte de interação da ação<sup>20</sup>, ou seja, terá um caráter de vértice. Sendo assim, no espaço dos momenta, temos

$$\tilde{V}_{\mu\nu}^{mn}(p, q) = - \frac{\delta^2 S_{int}}{\delta A_\mu^m(p) \delta A_\nu^n(q)} = - (2\pi)^d \delta^d(p + q) Z_A^{(1)} \left( p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu \right) \delta^{mn} . \quad (139)$$

Então, levando em consideração agora esse contratermo, os diagramas para o cálculo de uma autoenergia finita podem ser representados como na figura 7. Dessa forma, temos

Figura 7 - Diagrama mais contratermo



Legenda: Diagramas que geram uma autoenergia finita.

Fonte: O autor, 2023.

<sup>20</sup> Como foi visto na seção anterior, a ação pode ser separada em uma parte livre e outra interagente. Os fatores contendo os contratermos sempre serão considerados como termos da parte interagente da ação.

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\phi}^{af}(p^2) = & -\frac{g^2 N \delta^{af} p^2}{(4\pi)^2} \left( \delta_{\alpha\phi} - \frac{p_\alpha p_\phi}{p^2} \right) \frac{13}{6} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_c + \ln\left(\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{97}{78} \right\} \\ & - Z_A^{(1)} \left( \delta_{\alpha\phi} - \frac{p_\alpha p_\phi}{p^2} \right) p^2 \delta^{af} . \end{aligned} \quad (140)$$

Portanto, utilizando o esquema de renormalização  $\overline{MS}$ , temos que

$$Z_A^{(1)} = \frac{g^2 N}{(4\pi)^2} \frac{13}{6} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_c - \ln\left(\frac{\bar{\mu}^2}{4\pi\mu^2}\right) \right\} , \quad (141)$$

onde  $\bar{\mu}$  é o parâmetro de escala do esquema de renormalização  $\overline{MS}$  que é introduzido para corrigir a dimensionalidade do argumento do logaritmo.

Por fim, obtemos a autoenergia renormalizada

$$\Pi_{\alpha\phi}^{af}(p^2) = -\frac{g^2 N p^2 \delta^{af}}{(4\pi)^2} \left( \delta_{\alpha\phi} - \frac{p_\alpha p_\phi}{p^2} \right) \frac{13}{6} \left\{ \ln\left(\frac{p^2}{\bar{\mu}^2}\right) - \frac{97}{78} \right\} . \quad (142)$$

Conseqüentemente, podemos obter a expressão para o propagador do glúon com correções a 1-loop

$$\langle A_\alpha^a(p) A_\phi^f(-p) \rangle_{\text{pert}} = G_{\alpha\phi}^{af}(p^2) = \mathcal{D}(p^2) \left( \delta_{\alpha\phi} - \frac{p_\alpha p_\phi}{p^2} \right) \delta^{af} = \mathcal{D}(p^2) \mathcal{P}_{\alpha\phi}(p) \delta^{af} , \quad (143)$$

onde

$$\mathcal{D}(p^2) = \frac{1}{p^2} \left\{ 1 - \frac{g^2 N}{(4\pi)^2} \frac{13}{6} \left[ \ln\left(\frac{p^2}{\bar{\mu}^2}\right) - \frac{97}{78} \right] \right\} \quad (144)$$

é conhecido como fator de forma.

Em princípio, existem diversos esquemas de renormalização. Sendo assim, podemos utilizar outro esquema, como por exemplo, o *Infrared Safe* (IS) que é utilizado em teorias de YM massivas (Tissier; Wschebor, 2011; Peláez; Tissier; Wschebor, 2014), onde a condição é feita na função de 2-pontos *1PI*. Dessa forma, temos

$$G_{\alpha\phi}^{af}(p^2) = \mathcal{D}(p^2) \mathcal{P}_{\alpha\phi}(p) \delta^{af} , \quad (145)$$

em que, levando em consideração a correção a 1-loop, temos

$$\mathcal{D}(p^2) = \frac{1}{p^2 + \Pi} . \quad (146)$$

Vimos que, pela equação (31), podemos escrever

$$\Gamma^{(2)} = \mathcal{D}^{-1} = p^2 + \Pi . \quad (147)$$

Sendo assim, como foi dito, no esquema IS a condição é tal que<sup>21</sup>

$$\Gamma^{(2)}(p^2 = \mu^2) = \mu^2 . \quad (148)$$

Dessa forma, para esse esquema, concluímos que

$$Z_A^{(1)} = \frac{g^2 N}{(4\pi)^2} \frac{13}{6} \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_c + \ln(4\pi) + \frac{97}{78} \right] , \quad (149)$$

e com isso, obtemos a autoenergia renormalizada para o esquema IS

$$\Pi_{\alpha\phi}^{af}(p^2) = -\frac{g^2 N p^2 \delta^{af}}{(4\pi)^2} \left( \delta_{\alpha\phi} - \frac{p_\alpha p_\phi}{p^2} \right) \frac{13}{6} \ln\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right) . \quad (150)$$

Por fim, temos que a expressão para o propagador, nesse esquema, é dada por

$$\langle A_\alpha^a(p) A_\phi^f(-p) \rangle_{\text{pert}} = G_{\alpha\phi}^{af}(p^2) = \mathcal{D}(p^2) \left( \delta_{\alpha\phi} - \frac{p_\alpha p_\phi}{p^2} \right) \delta^{af} = \mathcal{D}(p^2) \mathcal{P}_{\alpha\phi}(p) \delta^{af} , \quad (151)$$

onde

$$\mathcal{D}(p^2) = \frac{1}{p^2} \left\{ 1 - \frac{g^2 N}{(4\pi)^2} \frac{13}{6} \ln\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right) \right\} . \quad (152)$$

Fica evidente que o resultado para os propagadores em (144) e (152) difere apenas de uma constante.

No último capítulo dessa tese iremos fazer um procedimento análogo, porém com cálculos ainda mais complexos. Por esse motivo, iremos utilizar a ajudar de softwares para a realização desses cálculos. Na seção a seguir, apresentaremos o Grupo de Renormalização, introduziremos a função beta e, a partir da mesma, veremos a propriedade de liberdade assintótica.

## 2.4 Grupo de Renormalização e Liberdade Assintótica

Um questionamento que recorrentemente é feito no ramo da Física é: “quando uma teoria é realmente válida?”. O Grupo de Renormalização fornece uma possível resposta para esta pergunta. Esse, por sua vez, permite-nos compreender melhor o porquê de uma Teoria Quântica de Campos renormalizada descrever bem a natureza.

O Grupo de Renormalização é um método para estudar o comportamento da constante de acoplamento da teoria em relação à mudança de escala. O mesmo nos fornece informações sobre muitos fenômenos físicos, como a liberdade de Anderson e a transição

---

<sup>21</sup> Como estamos trabalhando, nessa seção, com uma teoria sem massa, a condição do esquema IS foi adaptada para  $m^2 = 0$ .

de Kosterlitz-Thouless (para mais detalhes conferir: (Lancaster; Blundell, 2014)).

Uma grandeza importante definida e abordada no formalismo do Grupo de Renormalização é a função  $\beta$ , que consiste na taxa de variação da constante de acoplamento renormalizada na escala de energia  $\mu$  (Peskin; Schroeder, 1995; Ryder, 1996), dada por

$$\beta(g) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g(g_0, \Lambda/\mu), \quad (153)$$

onde  $\Lambda$  é um parâmetro de corte das divergências proveniente da regularização de Pauli-Villars.

É bem discutido na literatura que teorias de calibre não-abelianas possuem a propriedade conhecida como liberdade assintótica, que nos diz que a constante de acoplamento da teoria, quantidade que nos fornece uma ideia da intensidade da interação, tende a zero para altas energias (Gross; Wilczek, 1973; Politzer, 1973). Isso significa que no limite de altas energias, para altos valores de momento, a interação torna-se cada vez mais fraca (levando a um cenário de partículas quase livres). Uma vez que a QCD é uma teoria de calibre não-abeliana, ela apresenta a característica de liberdade assintótica que pode ser evidenciada a partir da função beta  $\beta(g)$ , definida acima.

Para uma melhor compreensão dessa característica, a liberdade assintótica pode ser vista quando pensamos em partículas com carga de cor aproximando-se cada vez mais uma da outra. À medida em que a distância entre elas diminui, a carga de cor efetiva das mesmas tenderá assintoticamente a zero, como se surgisse um “efeito de blindagem” de suas cargas de cor. Então, possuir carga de cor nula significa que as partículas não mais possuirão interação forte nessa escala de comprimento. Todavia, olhando para esse argumento de maneira contrária, ou seja, no caso de partículas com carga de cor cuja distância aumenta gradativamente, o “efeito de blindagem” desaparece. Nesse cenário as cargas de cor aumentam significativamente e tornam a interação cada vez mais intensa (Lancaster; Blundell, 2014).

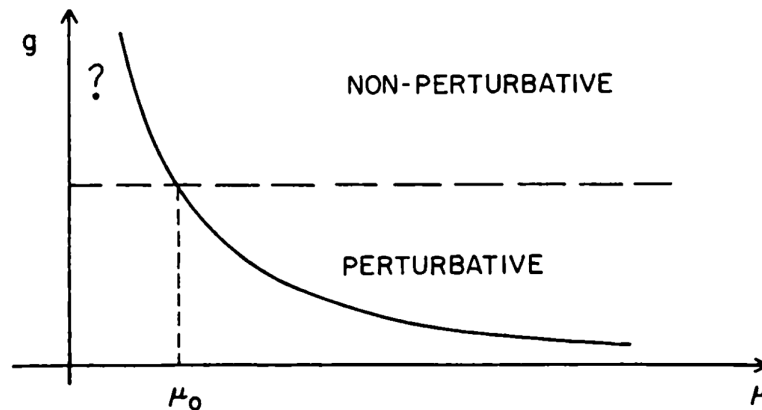
Para que possamos compreender a liberdade assintótica de maneira qualitativa é necessário analisarmos a função beta para uma teoria de calibre no  $SU(N)$  com férmions na representação fundamental, onde a mesma é dada por (Peskin; Schroeder, 1995; Ramond, 1997)

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f \right), \quad (154)$$

em que  $g$  é a constante de acoplamento da teoria,  $N$  é o número de dimensão do grupo e  $n_f$  é a quantidade de tipos de férmions. No caso da QCD ( $N = 3$ ) e a partir da equação (154), para que liberdade assintótica ocorra é necessário que a função beta seja negativa. Portanto, o termo entre parenteses precisa ser positivo. Com isso  $n_f \leq 16$ , o que é coerente com os resultados experimentais e com o MP, que nos mostra a existência de 6 tipos de quarks: *up* (u), *down* (d), *strange* (s), *charm* (c), *bottom* (b) e *top* (t).

Uma outra consequência desse comportamento é que no regime de altas energias (ultravioleta - UV) a constante de acoplamento é perturbativa, o que faz com que a teoria possa ser descrita perturbativamente nessa escala. Por outro lado, para o regime de baixas energias (infravermelho - IR) a constante de acoplamento deixa de ser perturbativa, fazendo com que o uso da teoria de perturbação não seja mais confiável. Isso pode ser visto na figura 8.

Figura 8 - Constante de acoplamento



Legenda: Esboço do comportamento da constante de acoplamento em relação a escala de energia  $\mu$ .

Fonte: Ramond, 1997, p. 291.

## 2.5 Duas abordagens para o confinamento

O fenômeno do confinamento, até o momento, ainda é um problema em aberto. Não há métodos ou modelos que de fato o descrevam em todos os detalhes. Basicamente, esse fenômeno nos diz que toda partícula que apresenta carga de cor não possui estados assintóticos, ou seja, tais partículas não aparecem sozinhas (livres) na natureza e sempre aparecem em estados ligados – ou na forma de bárions (próton, nêutron, etc), ou na forma de mésons (píons, kaons, etc). Em grandes distâncias (baixas energias), a interação entre quarks e glúons torna-se tão intensa que não é possível isolar uma destas partículas das outras. Existem diferentes formas de abordar esse fenômeno como, por exemplo, através da violação de positividade ou através do modelo de tubo de fluxo. Nessa seção forneceremos uma breve explicação sobre esses mecanismos.

A abordagem de tubo de fluxo (Kogut; Susskind, 1975; Casher; Neuberger; Nussinov, 1979; Isgur; Paton, 1985; Shuryak, 2018), basicamente mostra que o potencial entre quark ( $q$ ) e antiquark ( $\bar{q}$ ) cresce linearmente na tentativa de separá-los, fazendo com que os mesmos fiquem confinados em estados ligados. Assim, para entender esse modelo, vamos pensar em um par estático  $q\bar{q}$ , separados por uma certa distância, entre os quais

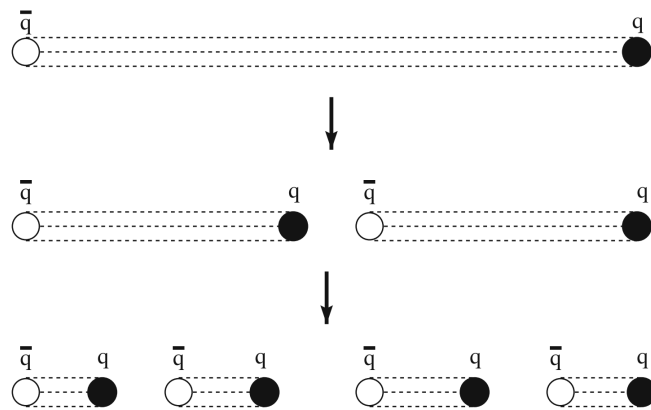
há um campo cromoeletrico (ou campo elétrico de cor). Como considerado na literatura, por alguma razão tal campo é comprimido em uma região cilíndrica, cuja área de seção reta é aproximadamente constante a medida que a distância de separação ( $L$ ) do par  $q\bar{q}$  aumenta.

Nessas circunstâncias, a energia ( $\mathcal{E}$ ) armazenada no campo cromoeletrico ( $E$ ) crescerá linearmente com relação a  $L$  e é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{L}{2} \int d^2x_{\perp} E^a(x) E^a(x), \quad (155)$$

onde a integração é feita sobre a seção reta do tubo de fluxo. Isso mostra que uma energia potencial surgirá linearmente associada às fontes estáticas (“potencial do quark estático”) e será necessária uma quantidade infinita de energia para separar tais cargas em uma distância infinita, o que não condiz especificamente com a realidade da QCD. Uma vez que na QCD real, para férmions leves, o potencial linear não se estende indefinidamente e, para separações entre os quarks suficientemente grandes, é energeticamente mais favorável a produção de um par  $q\bar{q}$  (Greensite, 2011). Quando isso ocorre, há a quebra do tubo de fluxo (figura 9) e esse processo é repetido até que toda energia seja convertida para a formação desses pares.

Figura 9 - Tubo de fluxo

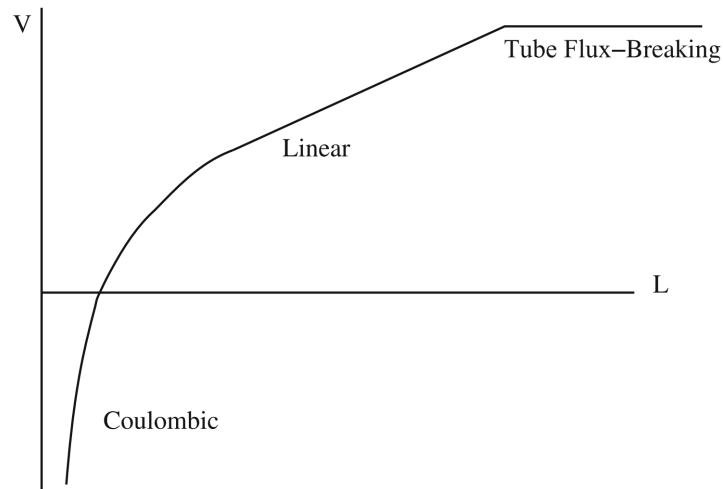


Legenda: Formação de pares quark-antiquark com a quebra do tubo de fluxo.

Fonte: Greensite, 2011, p. 23.

Tendo em vista essa discussão, podemos analisar o comportamento do potencial do quark estático que será qualitativamente parecido como esquematizado na figura 10. Nela podemos perceber o comportamento coulombiano do potencial para pequenas distâncias, cenário onde a liberdade assintótica prevalece; para distâncias intermediárias o potencial é linear e ocorre a formação do tubo de fluxo; por fim, para grandes distâncias, o campo cromoeletrico é blindado por campos de matéria dinâmicos. Tal comportamento é visto em simulações de Monte Carlo na rede (Philipsen; Wittig, 1998; Knechtli, 2000; Detar; Heller; Lacock, 2000) (ver figura 11 como exemplo de um resultado de QCD na rede).

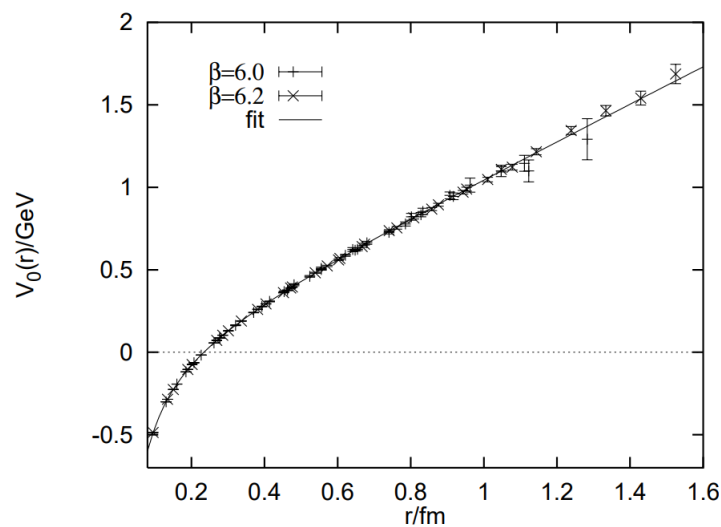
Figura 10 - Potencial do quark estático



Legenda: Potencial confinante do par quark-antiquark estático.

Fonte: Greensite, 2011, p. 24.

Figura 11 - Resultado de QCD na rede para o potencial do quark estático



Legenda: Potencial Linear em função da posição do par quark-antiquark estático, que seria um indício do confinamento.

Fonte: Brambilla; Vairo, 1999, p. 33.

Uma outra maneira de se entender o confinamento é considerando que a interação forte faz com que qualquer estado de uma partícula com carga de cor não nula seja um estado não físico (Oehme, 1995; Nishijima, 1996; Alkofer; Smekal, 2001).

Segundo Le Bellac (Bellac, 1996), o propagador, ou seja, a função de Green de dois pontos pode aparecer numa variedade de “versões”: tempo imaginário, tempo real, avançada, retardada. Entretanto, todas essas “versões” dependem de uma única função: a função espectral. Portanto podemos escrever o propagador em termos desta função.

O propagador escrito na representação espectral de Källén-Lehmann (Peskin; Schroeder, 1995), é dado por

$$D(x, y) = \langle \Omega | \mathcal{T}(\phi(x)\phi(y)) | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{d(M^2)}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x - y; M^2), \quad (156)$$

onde  $|\Omega\rangle$  representa o estado de vácuo e  $\rho(M^2)$  é a função espectral dada por

$$\rho(M^2) = \sum_\lambda (2\pi) \delta(M^2 - m_\lambda^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2, \quad (157)$$

sendo  $|\lambda_0\rangle$  um auto-estado de energia com momento nulo que obedece as relações

$$\hat{P} |\lambda_0\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \hat{H} |\lambda_0\rangle = m_\lambda |\lambda_0\rangle. \quad (158)$$

Observamos que, *a priori*, a função espectral  $\rho(M^2)$  é sempre positiva ( $\rho(M^2) > 0$ ) para todo  $M^2 > 0$ . Apesar disso, existem casos onde essa positividade da função espectral pode ser violada. Analisemos, por exemplo, o propagador do modelo RGZ<sup>22</sup> no calibre de Landau, ou seja,  $\alpha = 0$ . Dessa forma, temos o fator de forma

$$\mathcal{D}(p^2) = \frac{p^2 + M^2}{(p^2 + m^2)(p^2 + M^2) + 2g^2 N \gamma^4}. \quad (159)$$

Utilizando frações parciais, tal propagador pode ser escrito como

$$\mathcal{D}(p^2) = \frac{R_1}{p^2 + a_1^2} + \frac{R_2}{p^2 + a_2^2} \quad (160)$$

onde

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{-(m^2 - M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}}; \\ a_1^2 &= \frac{(m^2 + M^2) - \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}}{2}; \\ R_2 &= \frac{(m^2 - M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}}; \\ a_2^2 &= \frac{(m^2 + M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}}{2}. \end{aligned} \quad (161)$$

Sendo assim, supondo que  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $a_1$  e  $a_2$  sejam reais e definindo  $\Lambda^4 = 2g^2 N \gamma^4$ , obtemos:

$$(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4 \geq 0 \implies |m^2 - M^2| \geq 2\Lambda^2 \geq 0. \quad (162)$$

---

<sup>22</sup> Falaremos mais sobre esse modelo no capítulo 5, por hora vamos mencioná-lo apenas para exemplificar.



Logo, podemos reescrever  $R_1$  e  $R_2$

$$R_1 = \frac{(m^2 - M^2)}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}} \left\{ -1 + \frac{|m^2 - M^2|}{(m^2 - M^2)} \sqrt{1 - \frac{4\Lambda^4}{(m^2 - M^2)^2}} \right\}; \quad (163)$$

$$R_2 = \frac{(m^2 - M^2)}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}} \left\{ 1 + \frac{|m^2 - M^2|}{(m^2 - M^2)} \sqrt{1 - \frac{4\Lambda^4}{(m^2 - M^2)^2}} \right\}. \quad (164)$$

No entanto, para  $m^2 \geq M^2$  temos que  $R_1 \leq 0$  e  $R_2 \geq 0$ . Outro detalhe é que podemos reescrever  $\mathcal{D}(p^2)$  utilizando a representação de Källén-Lehmann:

$$D(p^2) = \int_0^\infty \frac{d(M^2)}{2\pi} \frac{\rho(M^2)}{p^2 + M^2}, \quad (165)$$

onde, agora a função espectral é dada por

$$\rho(M^2) = 2\pi R_1 \delta(M^2 - a_1^2) + 2\pi R_2 \delta(M^2 - a_2^2). \quad (166)$$

Logo, sendo  $R_1$  negativo (pelas condições dadas acima) isso implica que a equação acima é negativa entrando em conflito com (157). Então, dizemos que tal propagador (159) viola a positividade da função espectral (166), ou seja, o propagador da RGZ não tem uma representação espectral bem definida. Caso  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $a_1$  e  $a_2$  sejam complexos, então a violação é vista de imediato.

Em outras palavras, dizemos que tais propagadores não apresentam, em seu espectro, estados assintóticos de partículas, ou seja, havendo violação de positividade função espectral de uma partícula, a mesma estará confinada.

Vimos que as teorias de YM são fundamentais na descrição das interações forte, fraca e eletromagnética e que a quantização de tais teorias é dada pelo método de FP, que não é algo de fácil compreensão. Em seguida, vimos um resumo das regras e digramas de Feynman para a QCD, que é uma teoria de YM, e apreciamos algumas de suas peculiaridades, como a liberdade assintótica e o fenômeno do confinamento. Em vista disso, no próximo capítulo veremos algumas abordagens não perturbativas para a QCD, que tentam fornecer alguma descrição para o confinamento.

### 3 ALGUMAS ABORDAGENS NÃO PERTURBATIVAS PARA A QCD

Como discutido na seção anterior, o fenômeno do confinamento ocorre para o regime de baixas energias — regime não perturbativo — e consiste em um grande problema em aberto na Física. Desde a segunda metade do século XX, muitos esforços têm sido feitos para se compreender esse fenômeno. Dessa forma, têm sido propostos alguns modelos não perturbativos baseados no comportamento dos propagadores da teoria e que tentam explicá-lo, como por exemplo, o modelo massivo que pode ser visto como um modelo fenomenológico (Peláez; Tissier; Wschebor, 2014), a QCD na rede (Lüscher, 2003) e o modelo com as equações de Schwinger-Dyson (ESD) (Aguilar; Natale, 2004).

A Cromodinâmica Quântica é a teoria mais aceita para descrever a interação forte que apresenta o fenômeno do confinamento, o qual até o momento não foi bem compreendido. Na seção 2.5, vimos dois possíveis conceitos para o confinamento; na seção seguinte, veremos uma possível descrição com as Equações de Schwinger-Dyson e, mais à frente, veremos os demais modelos citados acima. Portanto, há diversas tentativas para trilhar esse caminho para o entendimento desse fenômeno e, conseqüentemente, uma melhor compreensão das partículas elementares que formam os hádrons. Nesse capítulo, faremos uma breve abordagem de alguns desses métodos e modelos, a fim de estudar a QCD no regime não perturbativo.

#### 3.1 Equações de Schwinger-Dyson para a QCD

As Equações de Schwinger-Dyson (ESD) podem ser consideradas como equações de movimento para funções de correlação de uma dada teoria quântica de campos, em analogia às Equações de Euler-Lagrange, que fornecem as equações de movimento para sistemas clássicos. A princípio, de maneira simplória, podemos obter uma forma para o propagador do glúon para qualquer quadri-momento  $p$  ao construirmos e resolvermos as ESD para o propagador do glúon, uma vez que essas equações envolvem todas as funções de correlação (Schwinger, 1948; Dyson, 1949; Aguilar; Natale, 2004; Aguilar; Binosi; Papavassiliou, 2008), como também podemos encontrar a constante de acoplamento da QCD. Com isso, analisar a solução dessas equações pode ser visto como uma maneira de investigar o comportamento infravermelho (limite de baixas energias da QCD/regime não perturbativo) do propagador do glúon, assim como da constante de acoplamento. Portanto, essa abordagem consiste em uma ferramenta para se estudar relevantes características da QCD, como por exemplo o confinamento.

As ESD formam um conjunto infinito de equações integrais acopladas para propagadores e vértices que relacionam todas as funções de Green da teoria. Essas equações

são exatas, uma vez que não é necessário (teoricamente) nenhum tipo de aproximação. Portanto, *a priori*, podemos utilizar essas equações em estudos para regimes perturbativos e não perturbativos dentro de uma abordagem contínua do espaço-tempo<sup>23</sup>. Dessa maneira, obter uma solução para essas equações significaria termos uma teoria totalmente completa onde todas suas funções de Green de  $n$ -pontos estariam determinadas.

A obtenção dessas soluções, no entanto, requer necessariamente o uso de aproximações, uma vez que essas equações compõem um conjunto infinito de equações acopladas, provenientes da truncagem das ESD. Com isso, na prática, apenas algumas dessas equações são retidas, fazendo com que infinitas equações sejam ignoradas e provocando, por sua vez, incertezas teóricas. Tal processo produz diversas maneiras possíveis de aproximação e, com isso, dá origem a soluções numéricas.

Uma boa ferramenta de verificação de qual solução das ESD possui uma resposta fisicamente mais coerente é realizar testes fenomenológicos nos quais são utilizados, por exemplo, o propagador do glúon e a constante de acoplamento (fornecidos pelas soluções das ESD) para calcular quantidades físicas sensíveis ao comportamento infravermelho da QCD e, então, fazer comparações das previsões de cada solução com os dados experimentais. Na figura 12, podemos ver diagramaticamente as ESD para o propagador do *ghost* e do glúon (Williams, 2007). Algumas soluções possíveis para as ESD são por exemplo, a solução de Mandelstam (Mandelstam, 1979), Alkofer *et al.* (HAUCK; SMEKAL; ALKOFER, 1998) que fez uma melhoria na solução de Mandelstam, e Cornwall (Cornwall, 1982).

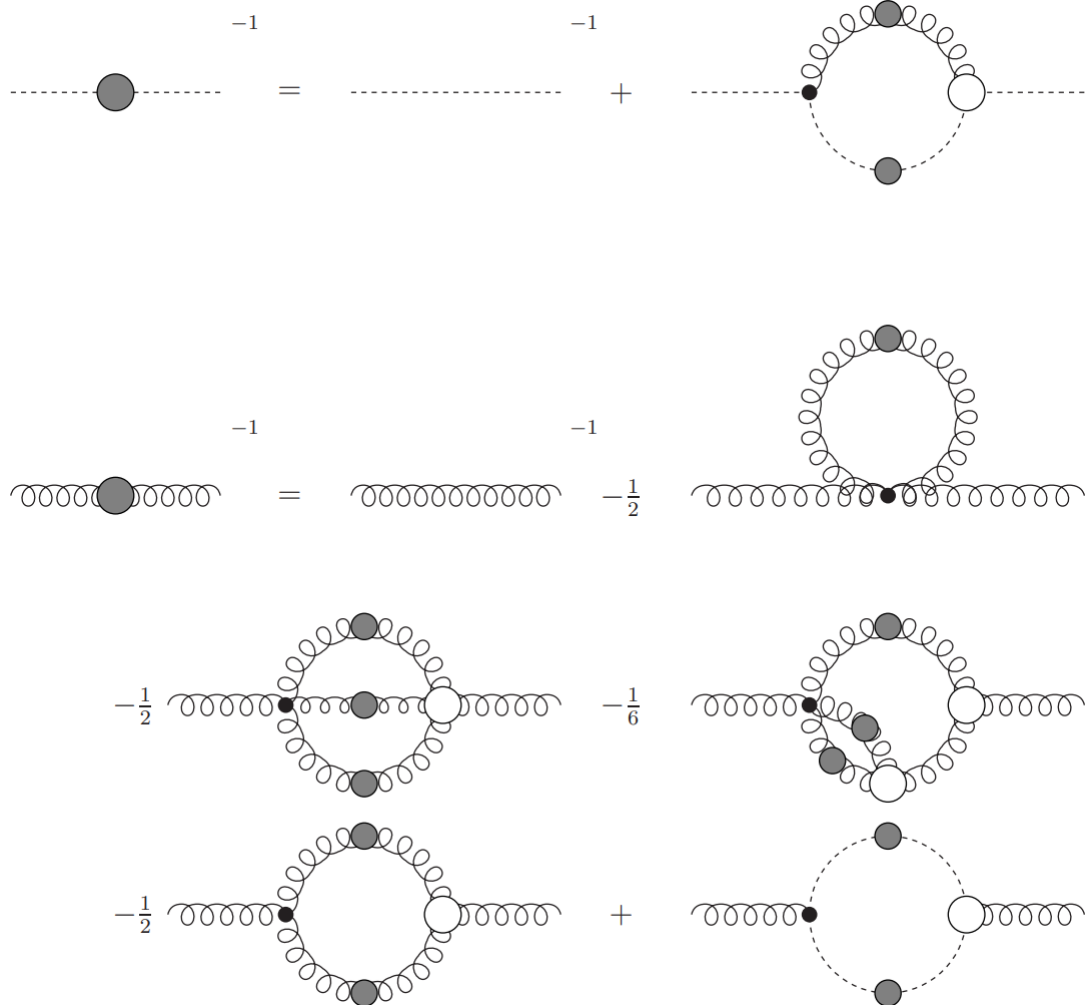
### 3.2 QCD na Rede

Uma segunda abordagem é a QCD na rede que faz uso de simulações numéricas para lidar com problemas que envolvem aspectos não perturbativos da QCD (Bali, 2001). Esse método foi proposto em 1974 por Kenneth G. Wilson (Wilson, 1974) e ele consiste em tomar as coordenadas do espaço-tempo como variáveis discretas assim como os campos e os demais termos da lagrangiana da teoria, ou seja, consiste em uma teoria de calibre discretizada — utilizando a integração funcional em espaço-tempo euclidiano. Na QCD na rede, cada sítio representa um ponto no espaço-tempo. Quando tomado um limite onde o número de sítios tende ao infinito e o parâmetro de rede (a distância entre cada sítio) tende a zero, recuperamos o caráter contínuo da teoria, tal procedimento pode ser visto graficamente na figura 13.

---

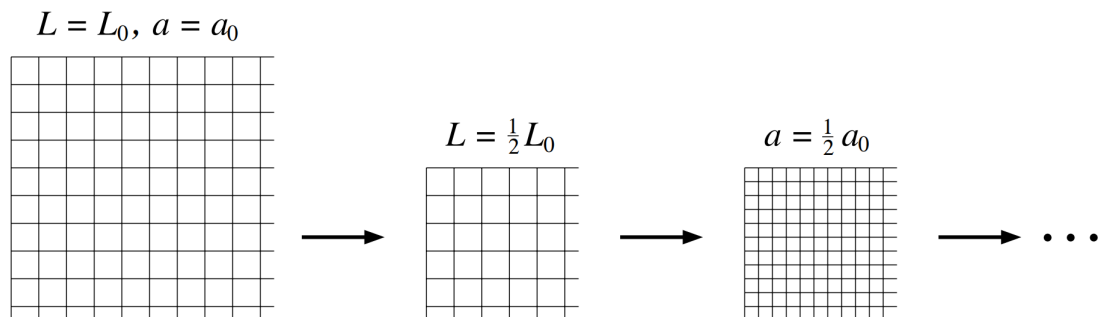
<sup>23</sup> Atualmente o método utilizado para estudar fenômenos não perturbativos em coordenadas discretas do espaço-tempo consiste na QCD na rede, ou seja, simulações de Teoria de Calibre numa rede.

Figura 12 - Diagramas para o propagador dos *ghosts* e do glúon



Legenda: Representação diagramática das ESD para os propagadores dos *ghosts* e do glúon.  
 Fonte: Williams, 2007, p. 22.

Figura 13 - Representação gráfica de uma rede

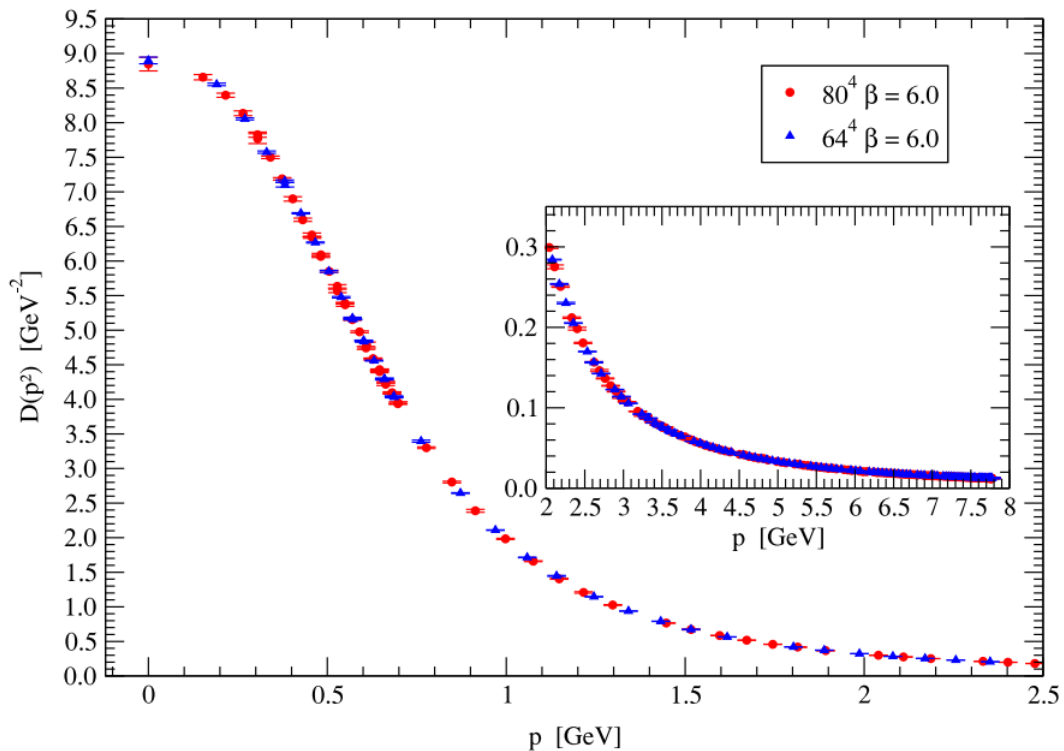


Legenda: Sequência de redes com espaçamentos de rede  $a$  e tamanhos  $L$  que diminuem por fatores de 2.  
 Fonte: Lüscher, 2003, p. 11.

Esse método é extremamente importante e poderoso uma vez que é capaz de lidar

com problemas analiticamente insolúveis e também com processos que, até o momento, não podem ser realizados experimentalmente. Dentre os sucessos da QCD na rede vale destacar sua capacidade em reproduzir certos valores observáveis, tais como as massas dos núcleons (Durr et al., 2008) e dos hádrons leves (Lüscher, 2003; Aoki et al., 2003). Há também resultados para variáveis termodinâmicas para QCD na rede (Borsanyi et al., 2014), assim como para o propagador do glúon (Cucchieri; Mendes, 2007; Oliveira; Silva, 2012; Dudal; Oliveira; Silva, 2018) como pode ser visto na figura 14

Figura 14 - Propagador do glúon



Legenda: Propagador do glúon renormalizado para simulações na rede.

Fonte: Dudal; Oliveira; Silva, 2018, p. 355.

### 3.3 Modelo de glúon massivo para a QCD

Uma das características que a QCD apresenta é invariância sob transformações de calibre. Essa propriedade possui como consequência o fato de o campo de calibre (campo do glúon) da teoria não apresentar massa, uma vez que a mesma quebraria essa invariância. Todavia, os dados provenientes de simulações na rede indicam que no regime infravermelho aparece uma massa efetiva para o glúon (Cucchieri; Mendes, 2007; Dudal; Oliveira; Silva, 2018). Esse comportamento norteou a criação de um modelo que introduz na lagrangiana da teoria um termo de massa para o glúon, tal modelo é denominado

*modelo massivo*. Entretanto, em 1982 esse modelo que apresenta massa para o glúon foi sugerido pioneiramente por John M. Cornwall (Cornwall, 1982).

Um exemplo de aplicação desse mecanismo é considerar uma massa do tipo Proca (Ryder, 1996) para o glúon, em uma perspectiva de teoria efetiva no regime infravermelho, fixando-se o calibre de maneira que a teoria continue renormalizável. É comum na literatura o uso do calibre de Curci-Ferrari para essa abordagem (Curci; Ferrari, 1976). Embora, a princípio, tal consideração não pareça ser razoável por não conter a simetria de calibre, alguns trabalhos que procedem dessa forma obtiveram resultados para propagadores e vértices de interação compatíveis com a rede (Peláez; Tissier; Wschebor, 2013; Peláez; Tissier; Wschebor, 2014; Peláez; Tissier; Wschebor, 2015).

Ainda que esse termo de massa inserido na teoria seja coerente com os resultados da rede, o mecanismo que o produz não é claro e, conseqüentemente, mais um parâmetro é adicionado à teoria. Um outro fato relevante é que ocorre também uma quebra suave da simetria BRST<sup>24</sup>, entretanto a teoria permanece renormalizável (Boer et al., 1996). Vale ressaltar que, em uma teoria quântica, a simetria BRST substitui a simetria de calibre. Uma das vantagens desse modelo é que as regras de Feynman são idênticas às usuais — caso do glúon sem massa — com exceção do propagador para o glúon massivo. Além disso o termo de massa regulariza o comportamento infravermelho da teoria e não modifica o comportamento ultravioleta (Tissier, 2019).

Nesse capítulo, apresentamos de maneira breve algumas das principais abordagens não perturbativas para a QCD. Vimos as ESD, que são equações de movimento das funções de correlação, vimos também o método da QCD na rede que trabalha com simulações de Monte Carlo de maneira a tomar o espaço-tempo discreto e, por fim, o modelo massivo que introduz um termo massivo na lagrangiana da QCD. No próximo capítulo, apresentaremos um outro tratamento não perturbativo para a QCD, o modelo de Gribov-Zwanziger, que oferece uma proposta para eliminar ainda que parcialmente as famosas cópias de Gribov.

---

<sup>24</sup> Ainda há uma simetria BRST modificada, porém sem a propriedade de nilpotência.

## 4 MODELO DE GRIBOV-ZWANZIGER (GZ)

Neste capítulo, vamos tratar de uma forma mais detalhada sobre mais uma abordagem não perturbativa para a QCD, a saber, o modelo de Gribov-Zwanziger (conhecido como modelo GZ). Mencionamos até aqui que o método de Faddeev-Popov para quantizar teorias de calibre não é suficiente para eliminar todas as configurações ambíguas que aparecem na quantização e que foi V. N. Gribov que percebeu tal fato (Gribov, 1978). Com isso, tais ambiguidades ficaram conhecidas como cópias de Gribov e ainda precisavam ser eliminadas.

### 4.1 Aspectos gerais do modelo GZ

O método de Faddeev-Popov (FP) possui limitações (Sorella, 2015), pois no regime não perturbativo há a presença de cópias de Gribov, e só é de fato funcional no regime perturbativo, onde tais cópias desaparecem. Esse problema das cópias ocorre independentemente da escolha do calibre. Neste trabalho, faremos uso do calibre de Landau que, como verificado em (Semenov-Tyan-Shanskii; Franke, 1986; Dell’antonio; Zwanziger, 1989; Dell’antonio; Zwanziger, 1991; Baal, 1992; Zwanziger, 1993), possui cópias de Gribov.

A primeira proposta para lidar com esse problema foi apresentada por Gribov (Gribov, 1978), que propôs implementar uma restrição ao espaço de integração funcional dos campos de calibre. Essa região restrita denomina-se primeira região de Gribov (ou simplesmente região de Gribov) que esperava não conter cópias (configurações equivalentes dos campos). Todavia, ao abordar essa ideia no calibre de Landau, percebeu-se que ainda existiam cópias nessa região (como mencionado acima). Investigações foram feitas afim de verificar se esse era um problema específico do calibre de Landau, mas notou-se que o problema permanecia para outros calibres (Coulomb, MAG, linear covariante, etc), indicando que deveria haver uma região mais fundamental do que esta região — conhecida como região modular fundamental (RMF) (Semenov-Tyan-Shanskii; Franke, 1986; Dell’antonio; Zwanziger, 1989; Dell’antonio; Zwanziger, 1991; Baal, 1992) — na qual não haveria cópias, exclusive em sua borda. Embora a RMF seja a região ideal, infelizmente até o momento não foi determinada uma maneira de defini-la, haja vista o alto grau de complexidade que isso apresenta. Ainda assim, Baal apresentou uma tentativa de defini-la no formalismo hamiltoniano (Baal, 1992).

O procedimento descrito acima pode ser compreendido como uma melhoria do método usual da quantização de FP. Contudo, ainda não tinha sido estabelecido como implementar concretamente a restrição no espaço de integração. Em 1989, Zwanziger

sugeriu como implementá-la adicionando um termo extra à ação original de YM com um calibre fixado, o chamado “termo de horizonte”. Essa ação resultante é denominada ação de Gribov-Zwanziger e possui as propriedades de localizabilidade e renormalizabilidade (Zwanziger, 1989b; Zwanziger, 1993; Maggiore; Schaden, 1994).

A restrição à região de Gribov implica certas consequências que podem ser observadas através das funções de correlação de 2-pontos (o propagador) da teoria. Isso pode ser evidenciado para o propagador dos glúons no calibre de Landau que é suprimido no regime de baixas energias em consequência do parâmetro massivo  $\gamma$ , o parâmetro de Gribov. Esse propagador, em nível de árvore, é calculado como (Zwanziger, 1993; Vandersickel; Zwanziger, 2012; Vandersickel, 2011; Capri et al., 2012)

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle = \frac{p^2}{p^4 + 2Ng^2\gamma^4} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \delta^{ab}, \quad (167)$$

enquanto que o parâmetro de Gribov é dado por

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{3Ng^2/4}{p^4 + 2Ng^2\gamma^4} = 1. \quad (168)$$

Já o propagador, a 1-loop, do *ghosts* nesse calibre (Sobreiro; Sorella, 2005), que é dado por

$$\langle \bar{c}^a(p) c^a(-p) \rangle \approx \frac{\gamma^2}{p^4}, \quad (169)$$

possui um comportamento mais singular do que o previsto no regime perturbativo (da ordem de  $p^{-2}$ ). É importante ressaltar que, nesse cenário, o propagador dos glúons deixa de ter polos reais e, como isso, os glúons são removidos do espectro físico da teoria. Essa característica é esperada para objetos confinados. No caso do propagador dos *ghosts*, que não são objetos físicos, a equação (169) exhibe um comportamento que indica a existência de forças de longo alcance que no regime de baixas energias são necessárias para evidenciar o fenômeno do confinamento.

A seguir, trataremos com maiores detalhes o problema das cópias de Gribov. A partir do funcional gerador, mostraremos que, mesmo com a fixação de calibre, as ambiguidades (cópias) permanecem. Veremos que os autovalores do operador de FP podem ser nulos, o que faz com que o funcional gerador derivado pelo método de FP para quantização se torne indefinido.

## 4.2 O problemas das cópias de Gribov

Um ponto de partida para estudarmos o problema das cópias é a análise da degenerescência que há em transformações de calibre. Essa degenerescência pode ser vista na



matriz unitária  $U$  definida na equação (43)

$$U(x) = e^{ig\xi^a(x)T^a} = \mathbb{1} + ig\xi^a(x)T^a + O(\xi^2),$$

uma vez que ela depende do parâmetro  $\xi^a(x)$  definido em todo espaço-tempo e do gerador do grupo  $T^a$ . Logo, para diferentes valores de coordenadas espaço-temporais e para diferentes componentes do grupo, teremos diferentes configurações de campos que obedecem à mesma transformação de calibre. Com isso, todos os objetos presentes na teoria que são invariantes de calibre apresentarão degenerescência.

Como vimos, a ação de YM é invariante de calibre e, portanto, apresentará degenerescências. Para quantizar uma ação que apresenta tais degenerescências aplicamos a fixação de calibre (como vimos no capítulo 2). Porém, antes de aplicarmos de fato essa fixação vamos introduzir, de um ponto de vista geométrico simplificado, o conceito de órbitas de calibre.

Define-se uma órbita como sendo o conjunto de todos os campos conectados por transformações de calibre. Matematicamente, uma órbita é dada por

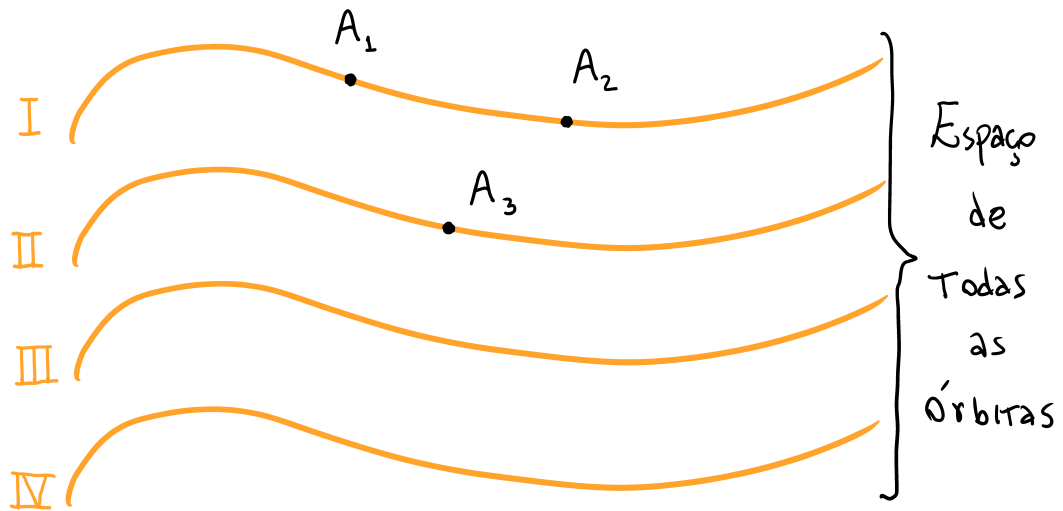
$$\left\{ A_\mu^U \mid A_\mu^U = U^\dagger A_\mu U - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger \right\}. \quad (170)$$

Com isso, todos os campos de calibre que pertencem à mesma órbita são fisicamente equivalentes. Para uma melhor ilustração, veja a figura 15. Por exemplo, na órbita I os campos  $A_1$  e  $A_2$  são fisicamente equivalentes por estarem na mesma órbita. Portanto, existirá uma matriz  $U_{12}$  que fará uma conexão entre eles. Entretanto, o campo  $A_3$  não será um campo equivalente a  $A_1$  (ou a  $A_2$ ) por estar em uma órbita diferente (órbita II). Devido a essas equivalências, qualquer quantidade invariante de calibre (por exemplo,  $F^2 = F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$ ) terá um mesmo valor ao longo de cada órbita. Sendo assim, é preciso apenas pegar um único ponto de cada órbita para obter tais quantidades. Então, em um cenário ideal, a fixação de calibre é uma certa condição matemática ( $f(A) = 0$ ) que, em princípio, intercepta cada órbita uma única vez e, assim, seleciona um único ponto na mesma (ver figura 16).

A condição de fixação de calibre  $f(A) = 0$  define uma hiper-superfície no espaço de configurações do campo de calibre, como pode ser visto na figura 17, sendo esperado que após a fixação de calibre essa hiper-superfície fosse interceptada apenas uma única vez por cada órbita. Porém, como também pode ser visto na figura 17, tais órbitas cruzam mais de uma vez a hiper-superfície, gerando assim as cópias de Gribov.

Discutimos até aqui de maneira qualitativa sobre o problema das cópias de Gribov. A seguir analisaremos analiticamente esse problema, assim como Gribov procedeu em seu artigo de 1978. Tendo essa finalidade em mente, vamos partir de uma transformação de

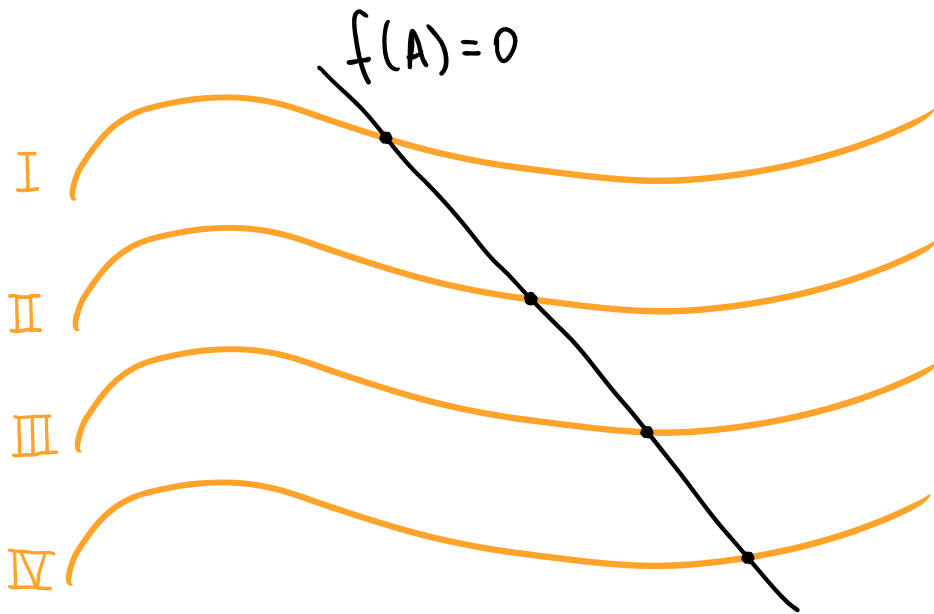
Figura 15 - Espaço das órbitas



Legenda: Campos de calibre reagrupados nas órbitas.

Fonte: O autor, 2022.

Figura 16 - Fixação de calibre



Legenda: Condição matemática  $f(A) = 0$  para fixar o calibre.

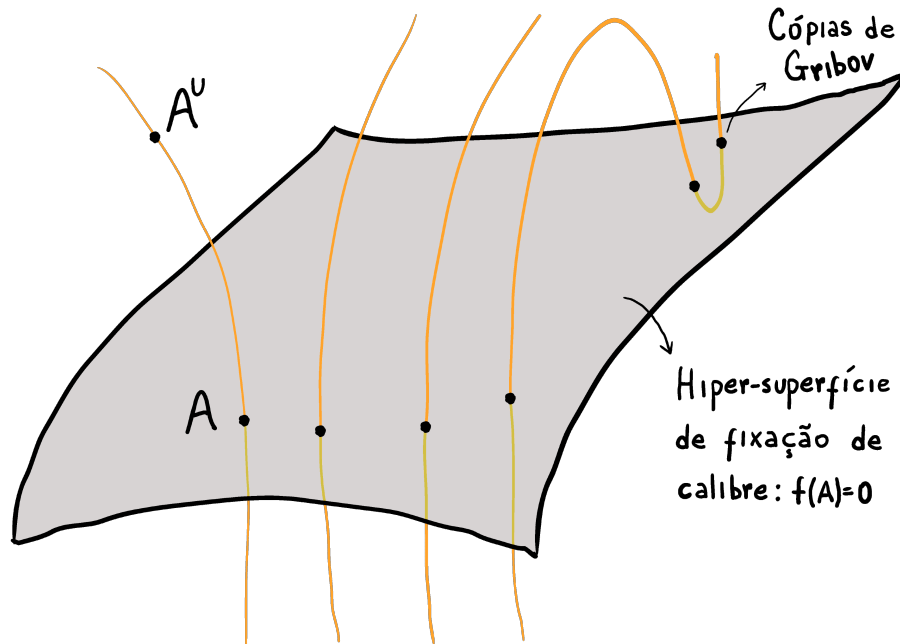
Fonte: O autor, 2022.

calibre dada por

$$A'_\mu = U^\dagger A_\mu U - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger \quad (171)$$

e vamos investigar qual(ais) condição(ões) matemática(s) deve(m) ser satisfeita(s) de ma-

Figura 17 - Hiper-superfície formada pela fixação de calibre



Legenda: As órbitas interceptam mais de uma vez essa hiper-superfície da fixação de calibre.

Fonte: O autor, 2022.

neira que tanto  $A_\mu$  quanto  $A'_\mu$  obedecem a uma mesma condição de fixação de calibre<sup>25</sup>, ou seja

$$\partial_\mu A_\mu = \partial_\mu A'_\mu = 0 . \quad (172)$$

Conforme discutido qualitativamente acima, isso faz com que o campo  $A'_\mu$  seja uma cópia de Gribov do campo  $A_\mu$ . Ou seja, a fixação de calibre não fixa o calibre univocamente. Substituindo (171) em (172), temos

$$\partial_\mu \left[ U^\dagger A_\mu U - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger \right] = 0 \quad (173)$$

e, para uma transformação infinitesimal em  $U$ , à primeira ordem, temos

$$-\partial_\mu (\partial_\mu \xi + ig [\xi, A_\mu]) = 0 . \quad (174)$$

A equação (174) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\mathcal{M}^{ab} \xi^b = 0 , \quad (175)$$

onde  $\mathcal{M}^{ab}$  é o chamado operador de Faddeev-Popov, que no calibre de Landau é um

<sup>25</sup> Neste trabalho utilizaremos sempre o calibre de Landau ( $\partial_\mu A_\mu = 0$ ).

operador hermitiano e é dado por

$$\mathcal{M}^{ab} = -\partial_\mu D_\mu^{ab} = -\delta^{ab} \partial^2 + g f^{abc} A_\mu^c \partial_\mu . \quad (176)$$

A equação (175) é a chamada equação das cópias de Gribov e consiste em uma equação de autovetores com autovalor zero. Através da análise dessa equação, podemos notar que ela possui autovalores nulos, os quais estão diretamente associados às cópias de Gribov (infinitesimais). Esses autovalores geram um problema na equação (82), pois nela há o determinante deste operador com autovalores nulos, fazendo com que o funcional se torne mal definido para o regime infravermelho, onde tais cópias são relevantes.

Analisando a equação (174) podemos notar que, dependendo dos valores de  $A_\mu$  e  $g$ , ocorrem diferentes possibilidades para os autovalores do operador de FP. Para o caso de pequenas flutuações (regime ultravioleta) para  $A_\mu$  e  $g$ , a equação (174) se torna

$$-\partial^2 \xi = 0 \Rightarrow \xi(x) = 0 \quad \forall x , \quad (177)$$

fazendo com que o método de FP permaneça consistente, pois o operador  $-\partial^2$  tem autovalores positivos. Todavia, o mesmo não acontece para valores de  $A_\mu$  e  $g$  grandes, podendo ocorrer a possibilidade de autovalores negativos, nulos e positivos. O caso para autovalores negativos faz com que a positividade do determinante do funcional em (82) não seja mais garantida, tornando novamente o método de FP para quantização de teorias de YM mal definido (Sobreiro et al., 2004; Baal, 1992; Capri et al., 2012; Capri et al., 2014). Devido a essa má definição do método de FP, Gribov então sugeriu restringir o domínio de integração da integral funcional sobre os campos de calibre, ou seja,

$$Z_{FP} \rightarrow Z_\Omega = \int_\Omega [\mathcal{D}A] [\mathcal{D}\bar{c}] [\mathcal{D}c] e^{-S_{FP}} , \quad (178)$$

onde  $\Omega$  é a conhecida região de Gribov que veremos na próxima seção.

### 4.3 Região de Gribov ( $\Omega$ ) e região modular fundamental ( $\Lambda$ )

O método de FP, embora de suma relevância para a quantização de teorias de YM, apresenta certas inconsistências no regime infravermelho — como visto na equação (82) — devido aos autovalores nulos e negativos que o operador de FP pode apresentar. Uma maneira de lidar com esse problema foi proposta por Gribov, que indagou se a quantização das teorias de YM estava sendo feita de maneira coerente. Sendo assim, ele propôs impor uma restrição à região de integração, de modo que essa integração não fosse tomada sobre todas as configurações do campo  $A_\mu$ , mas apenas sobre aquelas que passam por uma região delimitada, conhecida por região de Gribov ( $\Omega$ ), além de obedecerem à condição de calibre.

Essa região de Gribov é definida como o conjunto de todos os campos que obedecem a condição de calibre de Landau, de forma que o operador de FP seja estritamente positivo<sup>26</sup>, ou seja,

$$\Omega \equiv \left\{ A_\mu^a ; \partial_\mu A_\mu^a = 0 ; \mathcal{M}^{ab} = -\partial_\mu D_\mu^{ab} > 0 \right\} . \quad (179)$$

Essa região possui algumas propriedades<sup>27</sup> importantes, descritas abaixo:

- 1) A primeira propriedade refere-se a aspectos geométricos da região  $\Omega$ , definindo-a como *convexa*. Isso significa que, para dois campos  $A_1$  e  $A_2$  quaisquer pertencentes à região, um campo  $A'$  formado pela combinação linear desses campos ( $A' = \alpha A_1 + \beta A_2$ ) também pertence à região. Outra maneira de analisarmos essa característica é imaginar que não há nenhum furo contido na região  $\Omega$ . A demonstração de tal propriedade pode ser encontrada em (Zwanziger, 1982).
- 2) A segunda propriedade também envolve aspectos geométricos da região  $\Omega$  e garante que ela seja limitada em todas as direções no espaço de configurações. Isso significa que ela possui uma topologia de uma hiperesfera, cuja superfície ( $\partial\Omega$ ) é definida através do primeiro autovalor nulo do operador de FP. A demonstração dessa propriedade também pode ser vista em (Zwanziger, 1982).
- 3) A terceira propriedade afirma que todas as órbitas de calibre passam pelo menos uma vez na região  $\Omega$ . Isso significa que um campo de calibre externo à região é uma cópia de outro campo interno à mesma. A demonstração dessa propriedade também é dada em (Zwanziger, 1982).

Embora a proposta de Gribov tenha sido impressionante, ela não foi suficiente para remover todas as ambiguidades (cópias) interiores à região  $\Omega$ . Ainda que dentro dessa região o operador de FP seja estritamente positivo, o mesmo não ocorre em sua borda ( $\partial\Omega$ ), onde há o primeiro autovalor nulo. Essa borda é denominada primeiro horizonte de Gribov, ou seja,  $\partial\Omega_1$ . Assim, como o operador de FP pode apresentar outros autovalores nulos, existem também outros horizontes que separam diferentes regiões de Gribov, como pode ser visto na figura 18. Como consequência da propriedade 3, podemos descartar todas as outras regiões de Gribov, pois sempre haverá uma cópia na região  $\Omega$ .

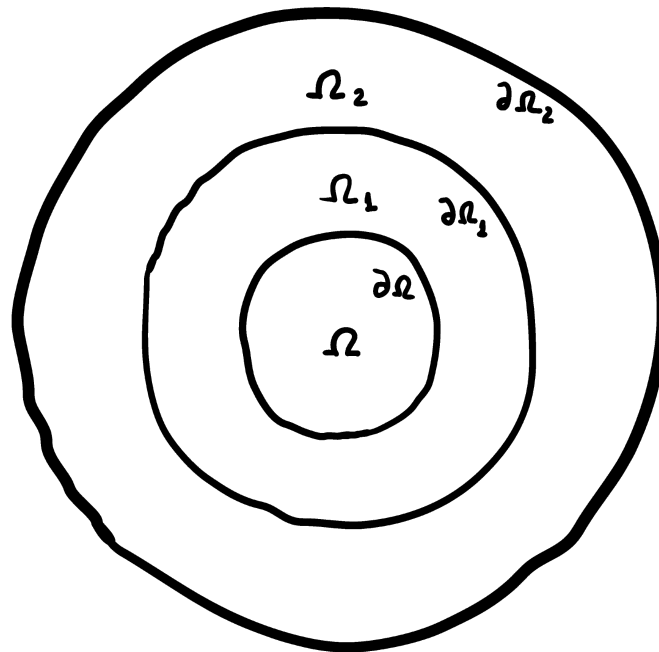
Gribov, em seu artigo de 1978, estudou com maior profundidade os horizontes ( $\partial\Omega_i$ ) e percebeu que, na vizinhança de tais fronteiras, os autovalores da região interna são equivalentes aos autovalores da região externa a menos de um sinal, ou seja, isso mostra

---

<sup>26</sup> Um operador é dito positivo quando seus autovalores forem todos positivos.

<sup>27</sup> Mais uma vez é válido ressaltar que nessa tese utilizamos sempre o calibre de Landau e as abordagens feitas são válidas para o mesmo.

Figura 18 - Regiões de Gribov



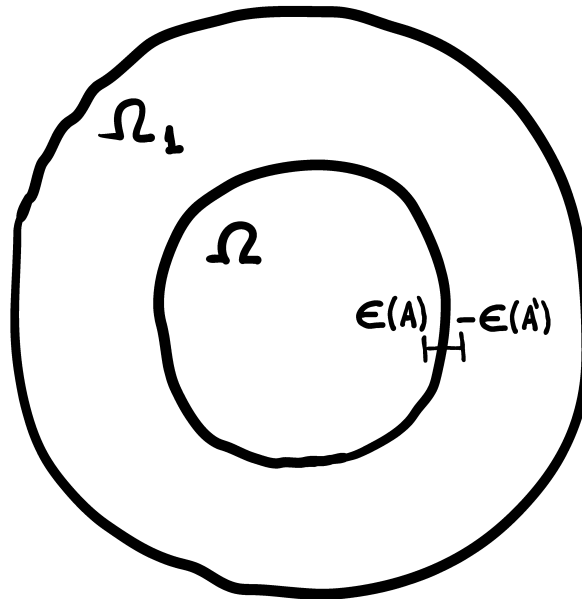
Legenda: Diferentes regiões de Gribov ( $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ ) com seus respectivos horizontes ( $\partial\Omega, \partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ ).

Fonte: O autor, 2022.

a equivalência (cópias) dita na propriedade 3. De forma específica, isso foi mostrado para as regiões  $\Omega$  e  $\Omega_1$  e pode ser visto na figura 19.

Entretanto, como foi dito, ainda há cópias na região  $\Omega$ . Sendo assim, há uma região mais fundamental que essa, denominada região modular fundamental ( $\Lambda$ ), em que não haveria mais cópias (figura 20). Sabemos que essa região está contida na região de Gribov  $\Omega$  e que há alguns pontos da região modular fundamental  $\Lambda$  bem próximos da borda de  $\Omega$  (Baal, 1997). Porém, devido ao pouco conhecimento dessa região, ainda não se sabe como implementá-la no funcional de FP (82). Gribov, entretanto, mostrou o caminho para implementar a região  $\Omega$  nesse funcional.

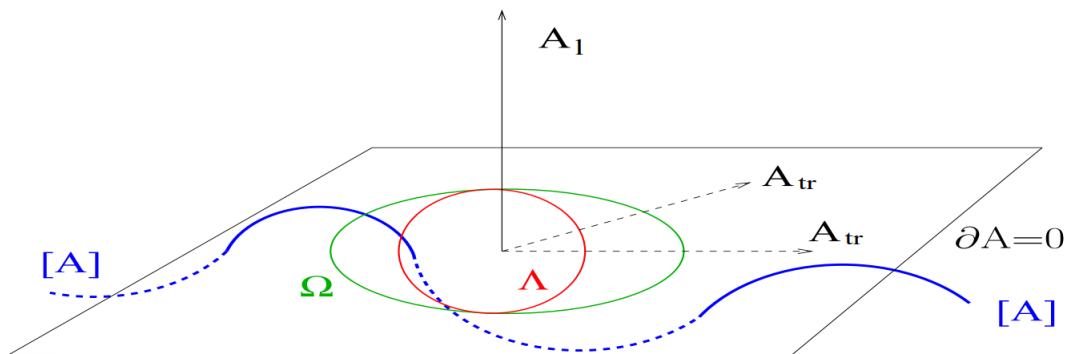
Figura 19 - Cópias próximas ao horizonte



Legenda: Como mostrado por Gribov, se uma configuração de campo  $A_\mu$  próxima a  $\partial\Omega$  está dentro de  $\Omega$  e, portanto, temos que o autovalor é positivo ( $\epsilon(A) > 0$ ), existe uma configuração de campo equivalente  $A'_\mu$  próxima de  $\partial\Omega$  porém na parte externa de  $\Omega$ . Pois haverá um mesmo autovalor, mas, com o sinal trocado, ou seja,  $\epsilon(A) = -\epsilon(A')$ . Esse resultado também pode ser estendido para configurações de campos próximas a qualquer horizonte  $\partial\Omega_i$ .

Fonte: O autor, 2022.

Figura 20 - Região modular fundamental



Legenda: Uma representação esquemática do espaço de configuração dos campos de calibre, o “hiperplano” dos campos de calibre transversais, a região de Gribov e a região modular fundamental.

Fonte: Alkofer, 2007, p. 146.

#### 4.4 Ação de Gribov-Zwanziger

Após toda essa discussão, seria importante indagar: como podemos calcular a função de partição<sup>28</sup>

$$Z = \int_{\Omega} \mathcal{D}A \delta(\partial_{\mu} A_{\mu}) \det(\mathcal{M}^{ab}(A)) e^{-S_{YM}} \quad ? \quad (180)$$

Como mencionado na seção anterior, Gribov indicou um caminho para isso. Uma vez que  $\mathcal{M}^{ab}$  é positivo no interior de  $\Omega$ , conseqüentemente sua inversa  $(\mathcal{M}^{ab})^{-1}$  existirá e será positiva também. O termo  $\mathcal{M}^{ab}$  já foi discutido anteriormente e é dado por

$$\mathcal{M}^{ab} = -\partial^2 \left( \delta^{ab} + \frac{1}{\partial^2} g f^{acb} A_{\mu}^c \partial_{\mu} \right) . \quad (181)$$

Gribov, em seu trabalho (Gribov, 1978), mostrou que o propagador dos *ghosts*, na presença de um campo  $A$  externo,  $\mathcal{G}(p, A)$  é proporcional ao valor esperado da inversa do operador de FP

$$\mathcal{G}(p, A) = \frac{\delta^{ab}}{N^2 - 1} \langle p | (\mathcal{M}^{ab})^{-1} | p \rangle = \frac{1}{p^2} (1 + \sigma(p, A)) , \quad (182)$$

onde  $\sigma(p, A)$  é conhecido como fator de forma de Gribov, o qual é calculado, até a segunda ordem (figura 21) no campo  $A_{\mu}^a$  (Capri et al., 2013; Sorella, 2015; Sobreiro; Sorella, 2005), por

$$\sigma(p, A) = \frac{g^2 N}{p^2(N^2 - 1)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{A_{\mu}^a(-q) A_{\nu}^a(q) (p - q)_{\mu} p_{\nu}}{(p - q)^2} , \quad (183)$$

e a equação (182) pode ser reescrita como

$$\mathcal{G}(p, A) \approx \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \sigma(p, A)} .$$

A partir da equação (183), podemos notar que, caso  $A_{\mu}^a(-q) A_{\nu}^a(q)$  seja monotonicamente decrescente em  $q^2$  para a maior porção do intervalo de integração<sup>29</sup>, o fator  $\sigma(p, A)$  será decrescente à medida que  $p^2$  aumentar (ou seja, o valor máximo de  $\sigma(p, A)$  corresponde ao valor mínimo do momento). Então, esse fator calculado a momento não nulo é menor ou igual ao seu valor a momento nulo, o que é matematicamente expresso por

$$\sigma(p, A) \leq \sigma(0, A) . \quad (184)$$

Como dito acima,  $\mathcal{M}^{-1}$  precisa ser necessariamente positivo e, como  $\mathcal{G}(p, A)$  e  $\mathcal{M}^{-1}$

<sup>28</sup> A partir desse ponto, onde constar  $\det(\mathcal{M}^{ab}(A))$  estaremos nos referindo a  $|\det(\mathcal{M}^{ab}(A))|$  como é feito na literatura.

<sup>29</sup> Isso pode ser visto no artigo de Gribov (1978).



são proporcionais, então, ao analisarmos a equação (184), podemos perceber que o fator de forma  $\sigma(p, A)$  precisa ser menor do que um, condição a qual exclui a possibilidade de polos no operador de FP inverso<sup>30</sup>. Dessa maneira, podemos escrever que

$$\sigma(p, A) < 1, \quad \forall p. \quad (185)$$

Com isso, a única outra fonte possível de polos para  $\mathcal{M}^{-1}$  viria do fator  $1/p^2$ , ou seja, para o caso em que  $p^2 = 0$ . Todavia, essa singularidade do operador inverso representa um horizonte de Gribov no operador  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M}^{ab}\xi^b = 0$ ). Tendo isso em mente, podemos retornar a pergunta que iniciou essa seção: como podemos calcular a seguinte função de partição

$$Z = \int_{\Omega} \mathcal{D}A \delta(\partial_{\mu}A_{\mu}) \det(\mathcal{M}^{ab}(A)) e^{-S_{YM}} \quad ? \quad (186)$$

O primeiro passo é dado pela restrição da região de integração  $\Omega$  que, a partir da síntese das discussões sobre o fator de forma de Gribov, consiste na introdução da função de Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \forall x > 0 \\ 0, & \forall x < 0. \end{cases} \quad (187)$$

Portanto, neste caso teremos  $\theta(1 - \sigma(0, A))$  que, quando inserido no funcional gerador, fornece

$$\begin{aligned} Z &= \int_{\Omega} \mathcal{D}A \delta(\partial_{\mu}A_{\mu}) \det(\mathcal{M}^{ab}(A)) e^{-S_{YM}} \\ &= \int \mathcal{D}A \delta(\partial_{\mu}A_{\mu}) \det(\mathcal{M}^{ab}(A)) \theta(1 - \sigma(0, A)) e^{-S_{YM}}. \end{aligned} \quad (188)$$

Gribov explorou o fator de forma, calculando-o até segunda ordem em teoria de perturbação, como esquematizado na figura 21. Entretanto, seguindo um caminho diferente de Gribov, Zwanziger obteve, para todas as ordens, uma expressão fechada para o fator de forma (Zwanziger, 1989a; Zwanziger, 1989b; Zwanziger, 1993). Essa expressão ficou conhecida como função horizonte ( $H(A)$ )<sup>31</sup>. Sendo assim, em termos da função horizonte, o fator de forma é dado por

$$\sigma(0, A) = \frac{H(A)}{4V(N^2 - 1)}, \quad (189)$$

---

<sup>30</sup> Na literatura isso é conhecido como condição de não polo.

<sup>31</sup> Posteriormente, seguindo o mesmo raciocínio de Gribov, chegou-se a mesma expressão que Zwanziger para  $H(A)$  (Capri et al., 2013)

onde

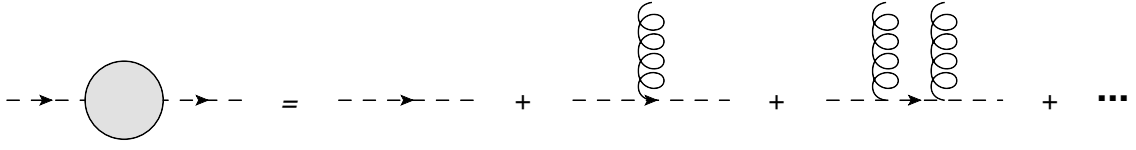
$$H(A) = g^2 \int d^4x d^4y f^{abc} A_\mu^b(x) (\mathcal{M}^{-1})^{ad}(x, y) f^{dec} A_\mu^c(y). \quad (190)$$

A função  $H(A)$  é, devido ao operador inverso de FP, uma quantidade não local.

Dessa maneira, o funcional gerador (188) se torna

$$Z = \int \mathcal{D}A \delta(\partial_\mu A_\mu) \det(\mathcal{M}^{ab}(A)) \theta(4V(N^2 - 1) - H(A)) e^{-S_{YM}}. \quad (191)$$

Figura 21 - Propagador dos *ghosts*



Legenda: Propagador dos *ghosts* com glúons externos.

Fonte: O autor, 2022.

A não localidade da última expressão representa um problema, uma vez que, em TQC, observáveis provêm de teorias locais e preferencialmente renormalizáveis. A fim de torná-la local, é necessária a introdução de um conjunto de campos auxiliares, a saber,  $(\bar{\varphi}_\mu^{ab}, \varphi_\mu^{ab}, \bar{\omega}_\mu^{ab}, \omega_\mu^{ab})$ . Em relação à sua estatística, os campos  $(\bar{\varphi}_\mu^{ab}, \varphi_\mu^{ab})$  obedecem à distribuição de Bose-Einstein e os campos  $(\bar{\omega}_\mu^{ab}, \omega_\mu^{ab})$  obedecem à distribuição de Fermi-Dirac. Após os cálculos para obter a expressão em sua forma local, como demonstrado nos artigos (Zwanziger, 1989a; Zwanziger, 1989b; Zwanziger, 1993), é conveniente escrever o funcional gerador como a integral da exponencial de uma ação. Sendo assim, obtemos

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi e^{-[S_{GZ} - 4V(N^2 - 1)\gamma^4]}, \quad (192)$$

em que  $\mathcal{D}\Phi$  é o conjunto das medidas de integração dos campos

$$\mathcal{D}\Phi = \mathcal{D}A \mathcal{D}b \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\bar{\varphi} \mathcal{D}\omega \mathcal{D}\bar{\omega}, \quad (193)$$

$S_{GZ}$  é conhecida como a ação de Gribov-Zwanziger (no calibre de Landau), definida por

$$S_{GZ} = S_{FP} + S_H, \quad (194)$$

onde

$$S_{FP} = \int d^4x \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + i b^a \partial_\mu A_\mu^a - \bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b \right), \quad (195)$$

$$S_H = \int d^4x \left[ (\bar{\varphi}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \varphi_\mu^{bc} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \omega_\mu^{bc}) + i g \gamma^2 f^{abc} A_\mu^a (\bar{\varphi}_\mu^{bc} + \varphi_\mu^{bc}) \right] \quad (196)$$

e o fator  $\gamma$  é denominado parâmetro de Gribov, que possui dimensão de massa. Esse parâmetro tem características puramente não perturbativas. Dessa forma, ele contém toda a informação não perturbativa da região de Gribov e não é livre, uma vez que provém de uma equação de *gap*, dada por

$$\frac{\partial \mathcal{E}_V}{\partial \gamma^2} = 0, \quad (197)$$

em que  $\mathcal{E}_V$  é a energia do vácuo.

A ação de Gribov-Zwanziger ( $S_{GZ}$ ) é renormalizável a todas as ordens em teoria de perturbação, possuindo, portanto, as propriedades de localidade e de renormalizabilidade, as quais podem ser vistas em (Zwanziger, 1989b; Vandersickel, 2011; Sobreiro, 2007a; Zwanziger, 1993; Maggiore; Schaden, 1994). Em nível de árvore, as funções de correlação para os glúons, nesse modelo de Gribov-Zwanziger, é dada por

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle = \mathcal{D}_{GZ}(p^2) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \delta^{ab}, \quad (198)$$

em que

$$\mathcal{D}_{GZ}(p^2) = \frac{p^2}{p^4 + 2Ng^2\gamma^4}, \quad (199)$$

e a função de correlação para os *ghosts*, a 1-*loop*, é dada por

$$\langle \bar{c}^a(p) c^a(-p) \rangle \approx \frac{\gamma^2}{p^4}. \quad (200)$$

Entretanto, ao compararmos com os dados da rede, encontramos discordâncias entre os resultados teóricos para os propagadores e os resultados obtidos nas simulações. Com isso, foi preciso um refinamento na teoria de Gribov-Zwanziger, que veremos na próxima seção.

#### 4.5 Modelo de Gribov-Zwanziger Refinado (RGZ)

Como vimos, o modelo GZ aprimora a quantização do método de FP, uma vez que ele restringe a região de integração e, com isso, minimiza o número de ambiguidades. Ainda que haja cópias nesse modelo, podemos dizer que ele é muito eficiente pois, ainda que introduza restrições à ação, preserva informações físicas da teoria. Além disso, outra particularidade do modelo GZ é o fato do glúon não pertencer ao espectro físico, o que ocorre como uma consequência da existência do horizonte de Gribov. Isso se torna evidente quando olhamos para o propagador (198) que, explicitamente, apresenta polos complexos

(ou seja, possui massa complexa) e pode ser reescrito como

$$\frac{p^2}{p^4 + 2Ng^2\gamma^4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p^2 + i\sqrt{2N}g\gamma^2} + \frac{1}{p^2 - i\sqrt{2N}g\gamma^2} \right). \quad (201)$$

Os resultados mais antigos (anteriores a 2007) das simulações na rede possuíam boa concordância qualitativa com os resultados de propagadores do modelo GZ. Para simulações em 2, 3 e 4 dimensões, observava-se que o propagador do glúon tendia a zero no limite de momento nulo (regime infravermelho), enquanto que o propagador dos *ghosts* exibia um comportamento singular (Cucchieri; Mendes; Taurines, 2005; Sternbeck et al., 2005) da mesma forma que para os resultados analíticos apresentados no modelo GZ. Outras abordagens, como as soluções encontradas pelas ESD e pelas equações exatas do grupo de renormalização, também exibiam o mesmo comportamento para esses propagadores (Lerche; Smekal, 2002; Alkofer; Smekal, 2001; Pawłowski et al., 2004; Alkofer et al., 2004). Entretanto, devido ao avanço nas técnicas computacionais e do aprimoramento do poder de processamento, ao aumentar o número de sítios da rede e, com isso, o volume da mesma, obtiveram-se resultados mais precisos e completamente destoantes dos anteriores. Em 2007, Attilio Cucchieri e Tereza Mendes (Cucchieri; Mendes, 2007) encontraram que o propagador do glúon é finito e não nulo no regime de  $p \rightarrow 0$  e que o propagador dos *ghosts* é menos singular do que  $p^{-4}$ , evidenciando inconsistências na GZ. A partir desse artigo, muitos outros trabalhos utilizando redes com volumes maiores do que aqueles utilizados anteriormente também evidenciaram as inconsistências da GZ (Bogolubsky et al., 2007; Bogolubsky et al., 2009; Sternbeck et al., 2007; Bornyakov; Mitrjushkin; Müller-Preussker, 2009; Gong et al., 2009).

Em TQC, os valores esperados no vácuo dos campos fornecem diversas informações sobre observáveis físicos, o que os torna bastante úteis e relevantes. Um exemplo importante consiste nos condensados, que são valores esperados no vácuo para dois ou mais campos situados em um mesmo ponto do espaço-tempo. Alguns estudos (Guimaraes; Mintz; Sorella, 2015; Dudal et al., 2019; Mintz et al., 2019; Dudal et al., 2008a; Dudal et al., 2008b; Dudal et al., 2008c; Dudal; Oliveira; Vandersickel, 2010) mostraram que a teoria de GZ em 4 dimensões apresenta certas instabilidades relacionadas à formação de condensados de dimensão de massa igual a 2. A implementação desses condensados na ação tem por consequência incluir efeitos não perturbativos, que desempenham um papel importante na região infravermelha. A presença deles pode ser incorporada à ação GZ, dando origem ao que se chamou de teoria de Gribov-Zwanziger Refinada (RGZ). Esse procedimento é feito através da adição de operadores compostos, a princípio introduzidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

Após toda essa análise, observou-se que era necessário modificar a ação de GZ introduzindo novos termos e, com isso, dando origem à RGZ (Dudal et al., 2008c; Dudal

et al., 2008b). Dessa maneira, a ação RGZ pode ser escrita como

$$S_{RGZ} = S_{GZ} + \frac{m^2}{2} \int d^4x A_\mu^a A_\mu^a + M^2 \int d^4x (\bar{\varphi}_\mu^{ab} \varphi_\mu^{ab} - \bar{\omega}_\mu^{ab} \omega_\mu^{ab}) . \quad (202)$$

Podemos notar a presença de novos parâmetros  $m^2$  e  $M^2$  que, da mesma maneira que o parâmetro de Gribov ( $\gamma^2$ ), não são livres e são gerados dinamicamente a nível quântico (Dudal; Sorella; Vandersickel, 2011). O fato de não serem livres faz com que tais parâmetros também tenham suas respectivas equações de *gap* que podem ser vistas em (Dudal et al., 2019). É a partir desses parâmetros que surgem os condensados de dimensão 2 e, através deles, tais condensados são implementados à ação<sup>32</sup>. Portanto, os condensados são dados por  $\langle A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) \rangle$  e  $\langle \bar{\varphi}_\mu^{ab}(x) \varphi_\mu^{ab}(x) - \bar{\omega}_\mu^{ab}(x) \omega_\mu^{ab}(x) \rangle$ .

Para obtermos tais condensados, à primeira ordem, nós acoplamos os operadores  $A^2$  e  $(\bar{\varphi}\varphi - \bar{\omega}\omega)$  à ação através das fontes externas  $J$  e  $\zeta$ , obtendo

$$e^{-V\mathcal{E}(J,\zeta)} = \int \mathcal{D}\Phi e^{-(S_{GZ} + J \int d^4x (\bar{\varphi}_\mu^{ab} \varphi_\mu^{ab} - \bar{\omega}_\mu^{ab} \omega_\mu^{ab}) + \zeta \int d^4x A_\mu^a A_\mu^a)} . \quad (203)$$

A partir da energia do vácuo, os condensados são dados por

$$\langle A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) \rangle = \left. \frac{\partial \mathcal{E}(J, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{J=\zeta=0} \quad \text{e} \quad \langle \bar{\varphi}_\mu^{ab}(x) \varphi_\mu^{ab}(x) - \bar{\omega}_\mu^{ab}(x) \omega_\mu^{ab}(x) \rangle = \left. \frac{\partial \mathcal{E}(J, \zeta)}{\partial J} \right|_{J=\zeta=0} . \quad (204)$$

Uma vez que estamos nesse regime de primeira ordem, consideraremos apenas os termos quadráticos da ação GZ. Sendo assim, podemos encontrar a energia do vácuo através do método de regularização dimensional em  $D$  dimensões

$$\mathcal{E}(J, \zeta) = \frac{(D-1)(N^2-1)}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln \left( p^2 + \frac{2\gamma^4 g^2 N}{p^2 + J} + 2\zeta \right) . \quad (205)$$

Portanto, a partir das duas últimas equações, os condensados são dados por

$$\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle = -\gamma^4 (N^2 - 1)(D - 1) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 (p^4 + 2g^2 \gamma^4 N)} \quad (206)$$

$$\langle \bar{\varphi}_\mu^{ab} \varphi_\mu^{ab} - \bar{\omega}_\mu^{ab} \omega_\mu^{ab} \rangle = \gamma^4 g^2 (N^2 - 1)(D - 1) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 (p^4 + 2g^2 \gamma^4 N)} . \quad (207)$$

Podemos notar que os condensados dependem do parâmetro de Gribov e, uma vez que tal parâmetro não for nulo, os condensados não serão nulos.

---

<sup>32</sup> Vale ressaltar que esses novos parâmetros não afetam a renormalizabilidade da teoria.

Nesse cenário, ao calcularmos o propagador do glúon, obtemos

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle_{RGZ} = \delta^{ab} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \mathcal{D}_{RGZ}(p^2), \quad (208)$$

em que

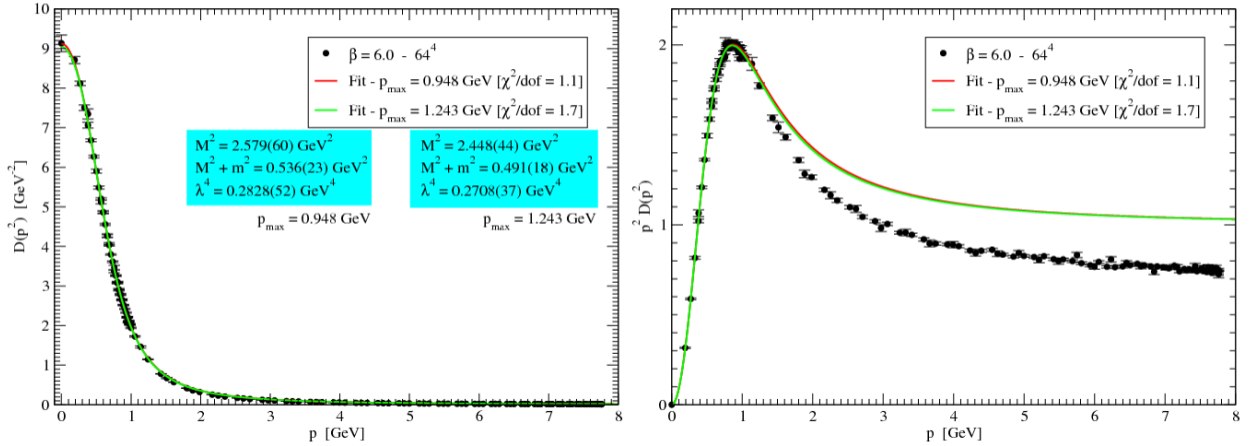
$$\mathcal{D}_{RGZ}(p^2) = \frac{p^2 + M^2}{(p^2 + m^2)(p^2 + M^2) + 2g^2\gamma^4 N}. \quad (209)$$

Podemos calcular ainda o propagador dos *ghosts* que, nesse cenário, é dado por

$$\langle \bar{c}^a(p) c^b(-p) \rangle \Big|_{p \sim 0} \sim \frac{\delta^{ab}}{p^2}. \quad (210)$$

Até aqui, as predições da ação da RGZ, a nível de propagadores, estão em excelente concordância com os dados da rede. Na figura 22, podemos notar essa concordância para  $p \lesssim 1$  GeV (Sorella et al., 2010), região na qual os resultados da RGZ são completamente compatíveis com aqueles obtidos na rede. Todavia, essa concordância entre os resultados não ocorre para valores fora desse regime de baixos momentos. Por conseguinte, para que a RGZ forneça resultados compatíveis com a rede (no regime de altos momentos), é necessário aprimorar os resultados através de correções radiativas.

Figura 22 - Comportamento do propagador para o glúon



Legenda: Concordância entre o propagador do glúon a nível árvore do modelo RGZ com dados da QCD na rede.

Fonte: Sorella et al., 2010, p. 6.

No capítulo seguinte, iremos calcular as correções radiativas para a RGZ a 1-*loop*. Faremos uso de pacotes desenvolvidos para o software Mathematica<sup>®</sup>, em especial o pacote FeynCalc (Shtabovenko; Mertig; Orellana, 2020; Shtabovenko; Mertig; Orellana, 2016; Mertig; Böhm; Denner, 1991), a partir do qual obteremos as correções para algumas funções de correlação do modelo à temperatura zero. Então, analisaremos a viabilidade da RGZ como um modelo efetivo para as interações fortes em contraste com outros modelos

não perturbativos, como a QCD na rede, as ESD e o Grupo de Renormalização Funcional.

## 5 CORREÇÕES RADIATIVAS NO MODELO DE GRIBOV-ZWANZIGER REFINADO (RGZ)

Neste capítulo, faremos a exposição de um cálculo original a *1-loop* para o modelo RGZ à temperatura zero. Pelo fato desse cálculo não ser simples, utilizaremos pacotes desenvolvidos para o software Mathematica. O modelo RGZ, a nível de propagador, apresenta uma boa concordância com os dados da rede, como vimos no capítulo anterior. Entretanto, essa concordância é no regime de baixos valores de momento. Outro ponto é que o modelo RGZ a nível árvore, ou seja, sem correções, apresenta instabilidades termodinâmicas (Canfora et al., 2015). Por outro lado, essas instabilidades não aparecem em resultados obtidos em QCD na rede (Borsanyi et al., 2012; Borsanyi et al., 2014). Tendo isso em vista, a seguinte questão é levantada: será que o modelo RGZ com correções a *1-loop* trará melhorias para esses pontos ou não?

Para realizar o cálculo dessas correções, sugerimos dois caminhos: o primeiro seria trabalhar com a versão local do modelo RGZ e o segundo seria trabalhar com a versão não local do modelo. A seguir abordaremos cada um deles.

### 5.1 Versão local do modelo RGZ

Na seção 2.3, vimos o passo a passo de um exemplo de como proceder no cálculo a *1-loop*. A ideia para esse capítulo será similar, porém, fazendo uso da ação apresentada no capítulo anterior, que representa a parte bosônica da QCD, e, conseqüentemente, abordando regras de Feynman diferentes. Como foi visto, sabemos que a ação local para o modelo RGZ (no calibre de Landau) é dada por

$$S_{RGZ} = S_{FP} + S_H + S_{cond} , \quad (211)$$

lembrando que a ação de Faddeev-Popov é dada por

$$S_{FP} = \int d^d x \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + i b^a \partial_\mu A_\mu^a - \bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b \right) , \quad (212)$$

enquanto a forma local da função horizonte de Zwanziger pode ser escrita como

$$S_H = \int d^d x \left[ \left( \bar{\varphi}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \varphi_\mu^{bc} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \omega_\mu^{bc} \right) + i g \gamma^2 f^{abc} A_\mu^a \left( \bar{\varphi}_\mu^{bc} + \varphi_\mu^{bc} \right) \right] . \quad (213)$$

O termo  $S_{cond}$  na ação da RGZ é dado por

$$S_{cond} = \frac{m^2}{2} \int d^d x A_\mu^a A_\mu^a + M^2 \int d^4 x \left( \bar{\varphi}_\mu^{ab} \varphi_\mu^{ab} - \bar{\omega}_\mu^{ab} \omega_\mu^{ab} \right) . \quad (214)$$



Esse termo explica os condensados de dimensão dois da teoria e consiste no refinamento da teoria de Gribov-Zwanziger. Os fatores do termo acima são os responsáveis por produzir um propagador não nulo do glúon no infravermelho, o que é uma característica importante da teoria RGZ. Vale lembrar também que o operador de FP que aparece acima é dado por

$$\mathcal{M}^{ab}(A) = -\partial_\mu D_\mu^{ab} = -\delta^{ab} \partial^2 + g f^{abc} A_\mu^c \partial_\mu . \quad (215)$$

Como foi dito, o objetivo aqui é obter correções a 1-*loop* para a função de correlação de 2-pontos do glúon, ou seja, correções para o propagador do mesmo. Sendo assim, a partir da ação do modelo RGZ ( $S_{RGZ}$ ) e tomando como base o mesmo método usado na seção 2.3 para obter os propagadores da teoria, os propagadores a nível árvore relevantes para essa correção são

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle = \delta^{ab} \left[ \frac{p^2 + M^2}{p^4 + (m^2 + M^2)p^2 + m^2 M^2 + 2Ng^2\gamma^4} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \right] \equiv \delta^{ab} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) D_{AA}(p) , \quad (216)$$

$$\langle \bar{\omega}_\mu^{ab}(p) \omega_\nu^{cd}(-p) \rangle = \frac{1}{p^2 + M^2} \delta^{ac} \delta^{bd} \delta_{\mu\nu} \equiv \delta^{ac} \delta^{bd} \delta_{\mu\nu} D_{\bar{\omega}\omega}(p) , \quad (217)$$

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(p) \varphi_\nu^{bc}(-p) \rangle &= \langle A_\mu^a(p) \bar{\varphi}_\nu^{bc}(-p) \rangle = \frac{ig\gamma^2 f^{abc}}{p^4 + p^2(m^2 + M^2) + m^2 M^2 + 2Ng^2\gamma^4} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \\ &\equiv f^{abc} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) D_{A\varphi}(p) , \end{aligned} \quad (218)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}_\mu^{ab}(p) \varphi_\nu^{cd}(-p) \rangle &= \langle \bar{\varphi}_\mu^{ab}(p) \bar{\varphi}_\nu^{cd}(-p) \rangle = \frac{g^2\gamma^4 f^{abm} f^{cdm}}{(p^2 + M^2)[p^4 + (m^2 + M^2)p^2 + m^2 M^2 + 2Ng^2\gamma^4]} \mathcal{P}_{\mu\nu} \\ &\equiv f^{abm} f^{cdm} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) D_{\varphi\varphi}(p) , \end{aligned} \quad (219)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}_\mu^{ab}(p) \varphi_\nu^{cd}(-p) \rangle &= \frac{\delta^{ac} \delta^{bd} \delta_{\mu\nu}}{p^2 + M^2} - \frac{g^2\gamma^4 f^{abm} f^{cdm}}{(p^2 + M^2)[p^4 + (m^2 + M^2)p^2 + m^2 M^2 + 2Ng^2\gamma^4]} \mathcal{P}_{\mu\nu} \\ &= \delta^{ac} \delta^{bd} \delta_{\mu\nu} D_{\bar{\omega}\omega}(p) - f^{abm} f^{cdm} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) D_{\varphi\varphi}(p) , \end{aligned} \quad (220)$$

$$\langle \bar{c}^a(p) c^b(-p) \rangle = \frac{1}{p^2} \delta^{ab} \equiv \delta^{ab} D_{\bar{c}c}(p) , \quad (221)$$

onde

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(p) = \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (222)$$

é o projetor transverso como visto anteriormente.

No exemplo abordado em 2.3, também foram obtidos os propagadores  $\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle$  e  $\langle \bar{c}^a(p) c^b(-p) \rangle$ , mas devido ao termo  $S_{cond}$  e da função horizonte o primeiro propagador sofreu uma grande diferença pois, por simplicidade, no exemplo foi usado o propagador

perturbativo para o glúon. Isso significa que o fator de forma (a nível árvore) é igual a  $1/p^2$ , uma vez que estávamos no modelo de YM perturbativo. Entretanto, o propagador dos *ghosts* não sofreu alteração nenhuma pois o termo da ação que o gera não sofreu mudanças. Os demais propagadores, que não são triviais de serem vistos olhando simplesmente para a ação, aparecem devido à localização da ação RGZ e geram o que chamamos de propagadores mistos. É interessante notar também que os seguintes fatores de forma a nível árvore podem se relacionar como

$$D_{A\varphi}(p) = ig\gamma^2 D_{\bar{\omega}\omega}(p) D_{AA}(p) \quad e \quad (223)$$

$$D_{\varphi\varphi}(p) = g^2\gamma^4 [D_{\bar{\omega}\omega}(p)]^2 D_{AA}(p) . \quad (224)$$

Outro detalhe é que, para cálculos futuros, será conveniente escrever o fator de forma do propagador do glúon, equação (216), da seguinte maneira

$$D_{AA}(p) = \frac{R_1}{p^2 + a_1^2} + \frac{R_2}{p^2 + a_2^2} , \quad (225)$$

onde

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{-(m^2 - M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}} ; \\ a_1^2 &= \frac{(m^2 + M^2) - \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}}{2} ; \\ R_2 &= \frac{(m^2 - M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}} ; \\ a_2^2 &= \frac{(m^2 + M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2 N \gamma^4)}}{2} . \end{aligned} \quad (226)$$

Tendo em mãos os resultados para os propagadores a nível árvore, o próximo passo é obter as expressões para os vértices apresentados na ação do modelo RGZ. Utilizando novamente as ferramentas vistas no capítulo 2, os vértices relevantes são dados por

$$[\Gamma_{AAA}(p_1, p_2, p_3)]_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = -igf^{abc} [(p_1 - p_2)_\gamma \delta_{\alpha\beta} + (p_2 - p_3)_\alpha \delta_{\beta\gamma} + (p_3 - p_1)_\beta \delta_{\gamma\alpha}] , \quad (227)$$

$$\begin{aligned} [\Gamma_{AAAA}(p_1, p_2, p_3, p_4)]_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd} &= -g^2 [f^{abm} f^{cdm} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + f^{dam} f^{bcm} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \\ &\quad + f^{cam} f^{bdm} (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta})] , \end{aligned} \quad (228)$$

$$[\Gamma_{A\bar{c}c}(p_1, p_2, p_3)]_{\alpha}^{abc} = -igf^{abc}(p_2)_{\alpha} \ , \quad (229)$$

$$[\Gamma_{A\bar{\varphi}\varphi}(p_1, p_2, p_3)]_{\alpha\beta\gamma}^{abcde} = -igf^{abd}\delta^{ce}\delta_{\beta\gamma}(p_2)_{\alpha} \ , \quad (230)$$

$$[\Gamma_{A\bar{\varphi}\varphi}(p_1, p_2, p_3)]_{\alpha\beta\gamma}^{abcde} = -igf^{abd}\delta^{ce}\delta_{\beta\gamma}(p_2)_{\alpha} \ . \quad (231)$$

Podemos notar que os três primeiros vértices foram obtidos no capítulo 2. Como esperado, o resultado acima é idêntico, pois estamos trabalhando com o primeiro setor da ação RGZ ( $S_{RGZ}$ ), ou seja, esses vértices são oriundos da ação de Faddeev-Popov ( $S_{FP}$ ). Os outros dois vértices, provenientes da função horizonte, novamente, são gerados por estarmos na versão local do modelo RGZ.

Por fim, tendo as expressões dos propagadores e dos vértices, precisamos saber quais serão os diagramas relevantes para a correção do propagador do glúon. Sendo assim, ao analisarmos os propagadores e os vértices do modelo RGZ, chegamos aos diagramas da figura 23.

Logo, temos um total de 20 diagramas<sup>33</sup> para a contribuição dessa correção a 1-loop. Observa-se que os três primeiros diagramas da figura 23 são os mesmos visto no capítulo 2, provenientes da ação de Faddeev-Popov, e os demais diagramas são oriundos dos outros termos da ação RGZ. Podemos observar também que há diagramas com pernas externas com propagadores de um único campo (campo que representa o glúon) e há outros com pernas externas com propagadores mistos, como por exemplo o diagrama (*h*) que possui o propagador  $\langle A\varphi \rangle$ .

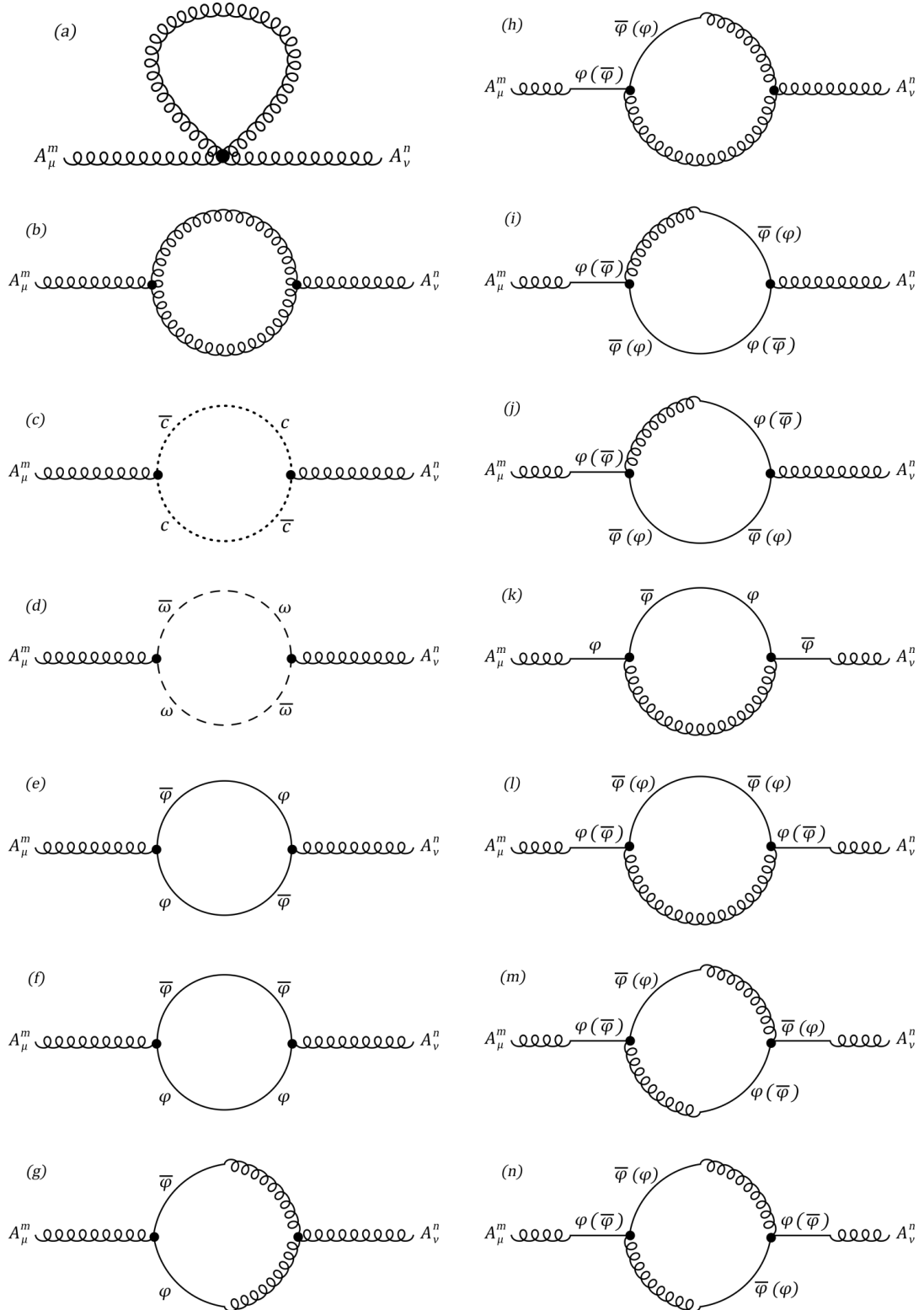
Por fim, precisamos agora calcular a contribuição de cada diagrama visto na figura 23 e somá-las para no final renormalizar o resultado e assim, obter a correção a 1-loop. Entretanto, é um fato notável que a complexidade da teoria torna tais cálculos bastante trabalhosos, vista a quantidade de diagramas para serem calculados, ainda que exija apenas ferramentas bem conhecidas da TQC. Sendo assim, como foi dito, para atacar de forma eficiente este cálculo, utilizaremos ferramentas bem estabelecidas na comunidade, em especial o pacote FeynCalc (Shtabovenko; Mertig; Orellana, 2020; Shtabovenko; Mertig; Orellana, 2016; Mertig; Böhm; Denner, 1991), desenvolvido para software *Mathematica*.

Todavia, antes de entrar em mais detalhes sobre o código que desenvolvemos, trataremos da versão não local do modelo RGZ.

---

<sup>33</sup> Na figura 23 vemos 14 diagramas, porém cada diagrama com a notação  $\varphi(\bar{\varphi})$  (ou  $\bar{\varphi}(\varphi)$ ) gera 2 diagramas totalizando os 20 diagramas.

Figura 23 - Total de diagramas na versão local



Legenda: Diagramas relevantes para as correções a 1-loop na versão local do modelo RGZ.

Fonte: O autor, 2023.

## 5.2 Versão não local do modelo RGZ

Uma das motivações para trabalhar com a versão não local do modelo é a diminuição do número de diagramas a serem considerados. Como vimos no capítulo anterior, os campos  $\varphi$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\omega$  e  $\bar{\omega}$  são campos auxiliares utilizados para a localidade do modelo. Consequentemente, na versão não local os mesmos não aparecem e, como pode ser observado na figura 23, apenas três diagramas não contém esses campos. Logo, na ausência desses campos restará apenas os três primeiros diagramas para serem calculados.

Sendo assim, vamos fazer todas as análises que fizemos no capítulo anterior para a ação da RGZ em sua versão não local. Essa ação é dada por

$$S_{RGZ}^{NL} = S_{FP} + S_{A^2} + \gamma^4 H_{RGZ}(A), \quad (232)$$

onde  $S_{FP}$  é a ação de FP vista em (212),

$$S_{A^2} = \frac{m^2}{2} \int d^d x A_\mu^a A_\mu^a \quad (233)$$

e  $H_{RGZ}(A)$  é a função horizonte em sua versão não local que, na presença dos condensados<sup>34</sup>, é dada por

$$H_{RGZ}(A) = g^2 \int d^d x d^d y f^{abc} A_\mu^b(x) \left( \frac{1}{-\partial_\sigma D_\sigma + M^2} \right)_{xy}^{ad} f^{dec} A_\mu^e(y) \quad (234)$$

Tendo agora essa ação, os propagadores relevantes para a correção a 1-loop são dados por

$$\langle A_\mu^a(p) A_\nu^b(-p) \rangle = \delta^{ab} \left[ \frac{p^2 + M^2}{p^4 + (m^2 + M^2)p^2 + m^2 M^2 + 2N g^2 \gamma^4} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) \right] \equiv \delta^{ab} \mathcal{P}_{\mu\nu}(p) D_{AA}(p) \quad (235)$$

$$\langle \bar{c}^a(p) c^b(-p) \rangle = \frac{1}{p^2} \delta^{ab} \equiv \delta^{ab} D_{\bar{c}c}(p). \quad (236)$$

Os vértices a serem considerados serão apenas três:  $\Gamma_{AAA}$ ,  $\Gamma_{AAAA}$  e  $\Gamma_{A\bar{c}c}$ . Porém os dois primeiros, vértices com três (trivértice) e quatro (quadrivértice) campos do glúon, terão suas expressões bastante diferentes do que vimos na seção anterior devido à contribuição da função horizonte em sua versão não local. O terceiro vértice não sofrerá mudança alguma em seu resultado obtido na seção anterior.

Dessa forma, obteremos as contribuições da função horizonte para o trivértice e quadrivértice. Para obter essas contribuições é suficiente expandir a função horizonte em torno de  $A = 0$  até termos quárticos no campo de calibre. Sendo assim, a partir de (234)

---

<sup>34</sup> Foi tomada a ação da RGZ e feita a integração nos campos de Zwanziger  $\varphi$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\omega$  e  $\bar{\omega}$ .

e levando em consideração apenas o termo não local (sem os índices), temos

$$\begin{aligned}
-\partial D + M^2 &= -\partial^2 + M^2 + \mathbb{A} \cdot \partial \\
&= (-\partial^2 + M^2) \underbrace{(-\partial^2 + M^2)(-\partial^2 + M^2)^{-1}}_{=\mathbb{1}} \\
&\quad + \underbrace{(-\partial^2 + M^2)(-\partial^2 + M^2)^{-1}}_{=\mathbb{1}} \mathbb{A} \cdot \partial, \quad (237)
\end{aligned}$$

onde, levando em consideração os índices,

$$(\mathbb{A} \cdot \partial)_{xy}^{ab} \equiv \delta_{xy} g f^{abc} A_\mu^c(y) \partial_\mu^{(y)}. \quad (238)$$

Usando a propriedade  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  em (237), temos

$$(-\partial D + M^2)^{-1} = \left[ \mathbb{1} + \frac{1}{(-\partial^2 + M^2)} \mathbb{A} \cdot \partial \right]^{-1} (-\partial^2 + M^2)^{-1}. \quad (239)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor funcional do termo acima entre colchetes até  $\mathcal{O}(A^2)$ , temos

$$\left[ \mathbb{1} + \frac{1}{(-\partial^2 + M^2)} \mathbb{A} \cdot \partial \right]^{-1} \simeq \mathbb{1} - \frac{1}{(-\partial^2 + M^2)} \mathbb{A} \cdot \partial + \frac{1}{(-\partial^2 + M^2)} \mathbb{A} \cdot \partial \frac{1}{(-\partial^2 + M^2)} \mathbb{A} \cdot \partial$$

e, por conseguinte, temos que

$$\begin{aligned}
(-\partial D + M^2)^{-1} &\simeq (-\partial^2 + M^2)^{-1} - \frac{1}{(-\partial^2 + M^2)} (\mathbb{A} \cdot \partial) \frac{1}{(-\partial^2 + M^2)} \\
&\quad + \frac{1}{(-\partial^2 + M^2)} (\mathbb{A} \cdot \partial) \frac{1}{(-\partial^2 + M^2)} (\mathbb{A} \cdot \partial) \frac{1}{(-\partial^2 + M^2)}. \quad (240)
\end{aligned}$$

Dessa maneira, levando em consideração os índices, concluímos que a expansão do termo não local da ação da função horizonte é dada por

$$\begin{aligned}
\left( \frac{1}{-\partial D + M^2} \right)_{XY}^{ad} &= \left( \frac{1}{-\partial^2 + M^2} \right)_{XY}^{ad} - \left( \frac{1}{-\partial^2 + M^2} \right)_{XZ}^{ab} (\mathbb{A} \cdot \partial)_{ZW}^{bc} \left( \frac{1}{-\partial^2 + M^2} \right)_{WY}^{cd} \\
&\quad + \left( \frac{1}{-\partial^2 + M^2} \right)_{XZ}^{ab} (\mathbb{A} \cdot \partial)_{ZW}^{bc} \left( \frac{1}{-\partial^2 + M^2} \right)_{WB}^{ce} (\mathbb{A} \cdot \partial)_{BE}^{ef} \left( \frac{1}{-\partial^2 + M^2} \right)_{EY}^{fd}. \quad (241)
\end{aligned}$$

Assim, até a quarta ordem no campo do glúon, a função horizonte completa é dada por

$$\gamma^4 H_{RGZ}(A) = \left( \gamma^4 H_{RGZ} \right)_{A^2} + \left( \gamma^4 H_{RGZ} \right)_{A^3} + \left( \gamma^4 H_{RGZ} \right)_{A^4} + \mathcal{O}(A^5), \quad (242)$$

onde, substituindo (241) em (234), temos

$$\left(\gamma^4 H_{RGZ}\right)_{A^2} = g^2 N \gamma^4 \int_{XY} A_\mu^b(x) \left(\frac{1}{-\partial + M^2}\right)_{XY} A_\mu^b(y) \quad (243)$$

$$\left(\gamma^4 H_{RGZ}\right)_{A^3} = \frac{g^3 N \gamma^4}{2} f^{abc} \int_{XYZ} A_\mu^b(x) \left[\left(\frac{1}{-\partial + M^2}\right)_{XZ} \left(A_\nu^c(z) \partial_\nu^{(z)}\right) \left(\frac{1}{-\partial + M^2}\right)_{ZY}\right] A_\mu^a(y) \quad (244)$$

$$\begin{aligned} \left(\gamma^4 H_{RGZ}\right)_{A^4} = & -g^4 \gamma^4 F^{abcd} \int_{XYZB} A_\mu^b(x) \left[\left(\frac{1}{-\partial + M^2}\right)_{XZ} \left(A_\alpha^c(z) \partial_\alpha^{(z)}\right) \left(\frac{1}{-\partial + M^2}\right)_{ZB}\right. \\ & \left. \times \left(A_\beta^d(B) \partial_\beta^{(B)}\right) \left(\frac{1}{-\partial + M^2}\right)_{BY}\right] A_\mu^a(y) , \quad (245) \end{aligned}$$

em que

$$F^{abcd} := f^{eaf} f^{fbg} f^{gch} f^{hde} . \quad (246)$$

Esse tensor de quarta ordem possui 24 combinações possíveis, porém muitas serão idênticas. Podemos identificá-las em três grupos diferentes que são denotados por

$$F^{abcd} \neq F^{acbd} \neq F^{acdb} , \quad (247)$$

ou seja, todas as outras configurações serão iguais a uma dessas  $F'$ s acima. A permutação dos índices desse tensor funciona da seguinte forma: para duas mudanças com mais de um índice ou para três mudanças com um índice ou mais, os tensores serão iguais. Por exemplo  $F^{abcd} = F^{badc} = F^{bcd a} = F^{cbad}$ . Então, podemos reescrever nossa ação total da RGZ da seguinte maneira

$$S_{RGZ}^{NL} = S_{FP} + S_{A^2} + \left(\gamma^4 H_{RGZ}\right)_{A^2} + \left(\gamma^4 H_{RGZ}\right)_{A^3} + \left(\gamma^4 H_{RGZ}\right)_{A^4} + \dots , \quad (248)$$

ressaltando que os termos omitidos não são relevantes para o cálculo do propagador a 1-loop.

Entretanto, o resultado para essas contribuições, podem ser escritas no espaço dos momenta. Para isso, vamos adotar a seguinte convenção

$$\tilde{\Phi}(p) = \int d^d x e^{ip \cdot x} \Phi(x) \equiv \int_X e^{ip \cdot x} \Phi(x) \quad (249)$$

$$\Phi(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip \cdot x} \tilde{\Phi}(p) \equiv \int_P e^{-ip \cdot x} \tilde{\Phi}(p) \quad (250)$$

para a transformada de Fourier dos campos e suas inversas.

A atuação do inverso do operador  $(-\partial^2 + M^2)$  em uma dada função é feita da

seguinte forma

$$\left(\frac{1}{-\partial^2 + M^2}\right)_{XY} f_Y = \int_P \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 + M^2} \tilde{f}(p) = \int_Y G(x-y) f(y), \quad (251)$$

em que  $\tilde{f}(p)$  é a transformada Fourier de  $f(x)$  e  $G(x-y)$  é a função de Green do operador  $(-\partial^2 + M^2)$ .

Com esses resultados, a função horizonte expandida pode ser reescrita em termos dos campos no espaço dos momenta. Sendo assim, temos que o termo quadrático é dado por

$$\left(\gamma^4 H_{RGZ}\right)_{A^2} = g^2 N \gamma^4 \int_P \tilde{A}_\mu^a(p) \left(\frac{1}{p^2 + M^2}\right) \tilde{A}_\mu^a(-p), \quad (252)$$

que contribuirá somente para o propagador do glúon. Os termos de terceira e quarta ordem, termos de interação que contribuirão para o trivértice e quadrivértice, respectivamente, são dados por

$$\left(\gamma^4 H_{RGZ}\right)_{A^3} = \frac{g^2 N \gamma^4}{2} f^{abc} \int_{P_1 P_2 P_3} \frac{(-ip_1)_\nu}{(p_1^2 + M^2)(p_2^2 + M^2)} \tilde{A}_\mu^a(p_1) \tilde{A}_\mu^b(p_2) \tilde{A}_\nu^c(p_3) \delta(p_1 + p_2 + p_3) \quad (253)$$

$$\begin{aligned} \left(\gamma^4 H_{RGZ}\right)_{A^4} = g^4 \gamma^4 F^{abcd} \int_{\{P\}} & \frac{(p_1)_\beta (p_1 + p_2)_\alpha}{(p_1^2 + M^2)[(p_1 + p_2)^2 + M^2]} \\ & \times \frac{\tilde{A}_\mu^a(p_1) \tilde{A}_\beta^d(p_2) \tilde{A}_\alpha^c(p_3) \tilde{A}_\mu^b(p_4)}{(p_1 + p_2 + p_3)^2 + M^2} \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4), \quad (254) \end{aligned}$$

em que  $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ .

O próximo passo agora é obter a contribuição que esses termos gerarão. Essa contribuição, como foi dito, será nos vértices de três e quatro glúons. Esses vértices a nível de árvore serão os mesmos da teoria perturbativa de YM, provenientes de  $S_{FP}$  em (232). Dessa forma, os termos oriundos da expansão da função horizonte serão apenas adicionais.

Tendo dito isso, o novo termo no espaço dos momenta para o vértice de três glúons é dado por

$$\begin{aligned} \left[\Gamma_H^{(3)}\right]_{\alpha\beta\gamma}^{abc} &= -\frac{\delta^3(\gamma^4 H_{RGZ})_{A^3}}{\delta \tilde{A}_\alpha^a(p_1) \delta \tilde{A}_\beta^b(p_2) \delta \tilde{A}_\gamma^c(p_3)} \\ &= \frac{ig^3 N \gamma^4}{2} f^{abc} \delta(p_1 + p_2 + p_3) \left\{ \frac{[(p_1)_\gamma - (p_2)_\gamma] \delta_{\alpha\beta}}{(p_1^2 + M^2)(p_2^2 + M^2)} + \frac{[(p_2)_\alpha - (p_3)_\alpha] \delta_{\beta\delta}}{(p_2^2 + M^2)(p_3^2 + M^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(p_3)_\beta - (p_1)_\beta] \delta_{\gamma\alpha}}{(p_3^2 + M^2)(p_1^2 + M^2)} \right\}. \quad (255) \end{aligned}$$



Desse modo, podemos escrever um vértice de três glúons efetivo unindo o termo acima com o vértice padrão de YM perturbativa (227). Portanto, para a abordagem não local do modelo RGZ, o vértice de três glúons é dado por

$$\begin{aligned}
[\Gamma_{RGZ}^{(3)}]_{\alpha\beta\gamma}^{abc} &= -\frac{\delta^3 S_{RGZ}}{\delta \tilde{A}_\alpha^a(p_1) \delta \tilde{A}_\beta^b(p_2) \delta \tilde{A}_\gamma^c(p_3)} \\
&= -igf^{abc} \delta(p_1 + p_2 + p_3) \left\{ \delta_{\alpha\beta} [(p_1)_\gamma - (p_2)_\gamma] \left[ 1 - \frac{g^2 N \gamma^4}{2} \frac{1}{(p_1^2 + M^2)(p_2^2 + M^2)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \delta_{\beta\gamma} [(p_2)_\alpha - (p_3)_\alpha] \left[ 1 - \frac{g^2 N \gamma^4}{2} \frac{1}{(p_2^2 + M^2)(p_3^2 + M^2)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \delta_{\gamma\alpha} [(p_3)_\beta - (p_1)_\beta] \left[ 1 - \frac{g^2 N \gamma^4}{2} \frac{1}{(p_3^2 + M^2)(p_1^2 + M^2)} \right] \right\}. \quad (256)
\end{aligned}$$

O novo termo para o vértice de quatro glúons, também no espaço dos momenta, é dado por

$$\begin{aligned}
[\Gamma_H^{(4)}]_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd} &= -\frac{\delta^4 (\gamma^4 H_{RGZ})_{A^4}}{\delta \tilde{A}_\alpha^a(p_1) \delta \tilde{A}_\beta^b(p_2) \delta \tilde{A}_\gamma^c(p_3) \delta \tilde{A}_\delta^d(p_4)} \\
&= -g^4 \gamma^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \left\{ F^{abcd} \left[ \left( \frac{(p_4)_\gamma (p_4 + p_3)_\beta}{(p_4^2 + M^2)[(p_4 + p_3)^2 + M^2][(p_4 + p_3 + p_2)^2 + M^2]} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(p_1)_\beta (p_1 + p_2)_\gamma}{(p_1^2 + M^2)[(p_1 + p_2)^2 + M^2][(p_1 + p_2 + p_3)^2 + M^2]} \right) \delta_{\delta\alpha} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{(p_4)_\alpha (p_4 + p_1)_\beta}{(p_4^2 + M^2)[(p_4 + p_1)^2 + M^2][(p_4 + p_2 + p_1)^2 + M^2]} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(p_3)_\beta (p_3 + p_2)_\alpha}{(p_3^2 + M^2)[(p_3 + p_2)^2 + M^2][(p_3 + p_2 + p_1)^2 + M^2]} \right) \delta_{\delta\gamma} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{(p_3)_\delta (p_3 + p_4)_\alpha}{(p_3^2 + M^2)[(p_3 + p_4)^2 + M^2][(p_3 + p_4 + p_1)^2 + M^2]} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(p_2)_\alpha (p_2 + p_1)_\delta}{(p_2^2 + M^2)[(p_2 + p_1)^2 + M^2][(p_2 + p_1 + p_4)^2 + M^2]} \right) \delta_{\gamma\beta} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{(p_1)_\delta (p_1 + p_4)_\gamma}{(p_1^2 + M^2)[(p_1 + p_4)^2 + M^2][(p_1 + p_4 + p_3)^2 + M^2]} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(p_2)_\gamma (p_2 + p_3)_\delta}{(p_2^2 + M^2)[(p_2 + p_3)^2 + M^2][(p_2 + p_3 + p_4)^2 + M^2]} \right) \delta_{\beta\alpha} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F^{abcd} \left[ \left( \frac{(p_4)_\beta (p_4 + p_2)_\gamma}{(p_4^2 + M^2)[(p_4 + p_2)^2 + M^2][(p_4 + p_2 + p_3)^2 + M^2]} \right. \right. \\
& + \left. \frac{(p_1)_\gamma (p_1 + p_3)_\beta}{(p_1^2 + M^2)[(p_1 + p_3)^2 + M^2][(p_1 + p_3 + p_2)^2 + M^2]} \right) \delta_{\delta\alpha} \\
& + \left( \frac{(p_4)_\alpha (p_4 + p_1)_\gamma}{(p_4^2 + M^2)[(p_4 + p_1)^2 + M^2][(p_4 + p_1 + p_3)^2 + M^2]} \right. \\
& + \left. \frac{(p_2)_\gamma (p_2 + p_3)_\alpha}{(p_2^2 + M^2)[(p_2 + p_3)^2 + M^2][(p_2 + p_3 + p_1)^2 + M^2]} \right) \delta_{\delta\beta} \\
& + \left( \frac{(p_1)_\delta (p_1 + p_4)_\beta}{(p_1^2 + M^2)[(p_1 + p_4)^2 + M^2][(p_1 + p_4 + p_2)^2 + M^2]} \right. \\
& + \left. \frac{(p_3)_\beta (p_3 + p_2)_\delta}{(p_3^2 + M^2)[(p_3 + p_2)^2 + M^2][(p_3 + p_2 + p_4)^2 + M^2]} \right) \delta_{\gamma\alpha} \\
& + \left( \frac{(p_2)_\delta (p_2 + p_4)_\alpha}{(p_2^2 + M^2)[(p_2 + p_4)^2 + M^2][(p_2 + p_4 + p_1)^2 + M^2]} \right. \\
& + \left. \frac{(p_3)_\alpha (p_3 + p_1)_\delta}{(p_3^2 + M^2)[(p_3 + p_1)^2 + M^2][(p_3 + p_1 + p_4)^2 + M^2]} \right) \delta_{\gamma\beta} \Big] \\
& + F^{acdb} \left[ \left( \frac{(p_4)_\gamma (p_4 + p_3)_\alpha}{(p_4^2 + M^2)[(p_4 + p_3)^2 + M^2][(p_4 + p_3 + p_1)^2 + M^2]} \right. \right. \\
& + \left. \frac{(p_2)_\alpha (p_2 + p_1)_\gamma}{(p_2^2 + M^2)[(p_2 + p_1)^2 + M^2][(p_2 + p_1 + p_3)^2 + M^2]} \right) \delta_{\delta\beta} \\
& + \left( \frac{(p_4)_\beta (p_4 + p_2)_\alpha}{(p_4^2 + M^2)[(p_4 + p_2)^2 + M^2][(p_4 + p_2 + p_1)^2 + M^2]} \right. \\
& + \left. \frac{(p_3)_\alpha (p_3 + p_1)_\beta}{(p_3^2 + M^2)[(p_3 + p_1)^2 + M^2][(p_3 + p_1 + p_2)^2 + M^2]} \right) \delta_{\delta\gamma} \\
& + \left( \frac{(p_3)_\delta (p_3 + p_4)_\beta}{(p_3^2 + M^2)[(p_3 + p_4)^2 + M^2][(p_3 + p_4 + p_2)^2 + M^2]} \right. \\
& + \left. \frac{(p_1)_\beta (p_1 + p_2)_\delta}{(p_1^2 + M^2)[(p_1 + p_2)^2 + M^2][(p_1 + p_2 + p_4)^2 + M^2]} \right) \delta_{\gamma\alpha} \\
& + \left( \frac{(p_2)_\delta (p_2 + p_4)_\gamma}{(p_2^2 + M^2)[(p_2 + p_4)^2 + M^2][(p_2 + p_4 + p_3)^2 + M^2]} \right. \\
& \left. \left. + \frac{(p_1)_\gamma (p_1 + p_3)_\delta}{(p_1^2 + M^2)[(p_1 + p_3)^2 + M^2][(p_1 + p_3 + p_4)^2 + M^2]} \right) \delta_{\beta\alpha} \right] \Big\} .
\end{aligned}$$

Assim como para o vértice de três glúons, podemos escrever um vértice efetivo unindo o termo acima com o vértice padrão da teoria perturbativa de YM. Portanto, o vértice de quatro glúons para o modelo RGZ não local é dado por

$$\begin{aligned} [\Gamma_{RGZ}^{(4)}]_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd} = & [\Gamma_H^{(4)}]_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd} - g^2 [f^{abm} f^{cdm} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) + f^{dam} f^{bcm} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \\ & + f^{cam} f^{bdm} (\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta})] . \end{aligned} \quad (257)$$

Vale ressaltar que as regras de Feynman apresentadas até aqui são as necessárias para obter o cálculo proposto nesse trabalho: correção a *1-loop* do propagador do glúon no calibre de Landau usando a abordagem do modelo RGZ.

No início dessa seção, foi dito que nossa motivação para trabalhar na versão não local do modelo era o fato da diminuição do número de diagramas a serem calculados. Entretanto, fica claro e evidente que as expressões para os vértices crescem demasiadamente. O cálculo proposto nesse trabalho já se apresenta ser totalmente inviável ser feito à mão e, levando em consideração a versão não local, fica mais inviável ainda proceder dessa maneira. Por isso a proposta de automatizar esses cálculos. Na próxima seção, vamos abordar o código que estamos desenvolvendo.

### 5.3 Proposta de um código

A proposta desse código é dar continuidade aos cálculos mencionados nesse trabalho. Como dito anteriormente, já existem pacotes/códigos que trabalham com QCD, QED e teoria  $\phi^4$ . Entretanto não há nenhum que seja voltado especificamente para cálculos com o modelo RGZ, por isso será necessário o desenvolvimento de um código e não apenas o uso de um único pacote estabelecido. Toda essa proposta terá como base o software Mathematica.

O pacote principal que utilizamos é o FeynCalc (Shtabovenko; Mertig; Orellana, 2020; Shtabovenko; Mertig; Orellana, 2016; Mertig; Böhm; Denner, 1991) que já contempla bastantes teorias, como pode ser visto na figura 24. Esse pacote foi desenvolvido para fazer avaliações de diagramas de Feynman, cálculos algébricos de TQC e de física de partículas elementares. Dessa maneira, esse pacote é capaz de gerar regras de Feynman, fazer contrações de Lorentz, obter fatores de cor, trabalhar com álgebra tensorial, ele também possui ferramentas para cálculos a *2-loops*, etc, sendo, pois um pacote bastante robusto e poderoso.

A seguir, descreveremos como esse novo código foi escrito. Inicialmente, as imagens apresentadas serão para o modelo de glúon massivo. Com isso, faremos um comparativo com os resultados obtidos em (Tissier; Wschebor, 2011). Sendo assim, na figura 25 é

Figura 24 - Site FeynCalc

 $\phi^3$  theory

Tree level	1-loop level
	Renormalization ( $\overline{\text{MS}}$ , $\overline{\text{MS}}$ )

 $\phi^4$  theory

Tree level	1-loop level
	$\phi\phi \rightarrow \phi\phi$
	Renormalization ( $\overline{\text{MS}}$ , $\overline{\text{MS}}$ )

## Quantum electrodynamics (QED)

Tree level	1-loop level
$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$	$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$
$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$	$e^- \rightarrow e^-$
$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	$e^- \rightarrow \gamma e^-$
$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$	$\gamma$
$e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$	$\gamma \rightarrow \gamma$
$e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$	$\gamma \rightarrow \gamma\gamma$
$\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$	$\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$
	$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$
	$\pi \rightarrow \gamma\gamma$
	Renormalization ( $\overline{\text{MS}}$ , $\overline{\text{MS}}$ )

## Quantum chromodynamics (QCD)

Tree level	1-loop level	2-loop level
$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$	$u_g \rightarrow u_g$	$u_g g \rightarrow u_g$
$\gamma g \rightarrow q\bar{q}$	$u_g g \rightarrow u_g$	
$\gamma \rightarrow q\bar{q}$	$g \rightarrow g$	
$\gamma \rightarrow q\bar{q}g$	$g \rightarrow g$ (background field gauge)	
$gg \rightarrow gg$	$g \rightarrow gg$	
$gg \rightarrow q\bar{q}$	$q \rightarrow q$	
$\mu^+\mu^- \rightarrow q\bar{q}$	Renormalization ( $\overline{\text{MS}}$ , $\overline{\text{MS}}$ )	
$q\gamma \rightarrow gq$	Renormalization ( $\overline{\text{MS}}$ , $\overline{\text{MS}}$ ), massless quarks	
$qg \rightarrow qg$		
$q_i \bar{q}_i \rightarrow q_i \bar{q}_i$		
$q_i \bar{q}_i \rightarrow q_j \bar{q}_j$		
$q_i q_i \rightarrow q_i q_i$		
$q_i \bar{q}_j \rightarrow q_i \bar{q}_j$		
$q_i q_j \rightarrow q_i q_j$		
$q\bar{q} \rightarrow e^+e^-$		
$q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$		
$q\bar{q} \rightarrow \gamma g$		
$q\bar{q} \rightarrow gg$		
$q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-$		

Legenda: Alguns exemplos de cálculos interessantes de livros e artigos que podem ser reproduzidos usando FeynCalc.

Fonte: FeynCalc Example Gallery, 2022.

possível observarmos como escrever a expressão para o projetor transversal ( $\mathcal{P}_{\mu\nu}(p)$ ) para os fatores de forma e para os propagadores com suas respectivas estruturas de cor e de Lorentz nesse ambiente. Já na figura 26, podemos ver como escrever o vértice de três glúons, de quatro glúons e o vértice dos *ghosts*.

Na figura 27, vemos como escrever a estrutura dos 3 diagramas presentes no modelo massivo. Após isso é feito todo o processo de contrações, aplicação dos parâmetros de Feynman, regularização e por fim são aplicadas as condições de renormalização. Sendo assim, a figura 28 mostra que o código consegue reproduzir os resultados encontrados em (Tissier; Wschebor, 2011). Esse código também consegue reproduzir os resultados para o modelo perturbativo de YM para o propagador do glúon (resultados que vimos no capítulo 2 deste trabalho).

### 5.3.1 Resultados para o modelo RGZ

Para obter resultados referentes ao modelo RGZ é preciso fazer algumas mudanças no código. É necessário reescrever as expressões para os fatores de forma, para os pro-

Figura 25 - Estrutura inicial do código

### Transverse projector

```
In[3]:= TP[p_, μ_, γ_] := MTD[μ, γ] - FVD[p, μ] × FVD[p, γ] × FAD[p]
```

### Propagators' Form factors

```
In[4]:= DAA[p_, m_] := FAD[{p, m}];
DCC[p_] := FAD[p];
```

```
In[6]:= DAA[p, m]
```

```
Out[6]=  $\frac{1}{p^2 - m^2}$ 
```

### Propagators with full color and Lorentz structures (Landau gauge)

```
In[7]:= PropAA[G1_, G2_] := Module[{p = Part[G1, 1], a = Part[G1, 2], b = Part[G2, 2],
α = Part[G1, 3], β = Part[G2, 3]},
SUNDelta[a, b] × TP[p, α, β] × DAA[p, m]
]
PropCbarC[Cbar_, C_] := Module[{p = Part[Cbar, 1], a = Part[Cbar, 2], b = Part[C, 2]},
SUNDelta[a, b] × DCC[p]
]
```

Legenda: Maneira de escrever o projetor transversal ( $\mathcal{P}_{\mu\nu}(p)$ ), os fatores de forma e os propagadores com suas respectivas estruturas de cor e de Lorentz.

Fonte: O autor, 2023.

Figura 26 - Estrutura para os vértices

### Vertices

```
In[9]:= AAA[G1_, G2_, G3_, g_] := Module[{k = Part[G1, 1], p = Part[G2, 1], q = Part[G3, 1], a = Part[G1, 2], b = Part[G2, 2], c = Part[G3, 2],
α = Part[G1, 3], β = Part[G2, 3], γ = Part[G3, 3]},
I g SUNF[a, b, c] (
(FVD[k, β] - FVD[q, β]) MTD[γ, α]
+ (FVD[p, γ] - FVD[k, γ]) MTD[α, β]
+ (FVD[q, α] - FVD[p, α]) MTD[β, γ]
)
]

AAAA[G1_, G2_, G3_, G4_, g_] := Module[{a = Part[G1, 2], b = Part[G2, 2], c = Part[G3, 2], d = Part[G4, 2],
α = Part[G1, 3], β = Part[G2, 3], γ = Part[G3, 3], δ = Part[G4, 3], Q = Q},
-g^2 (
SUNF[a, b, Q] × SUNF[Q, c, d] (MTD[α, γ] × MTD[β, δ] - MTD[α, δ] × MTD[β, γ])
+ SUNF[a, c, Q] × SUNF[Q, b, d] (MTD[α, β] × MTD[γ, δ] - MTD[α, δ] × MTD[β, γ])
+ SUNF[a, d, Q] × SUNF[Q, b, c] (MTD[α, β] × MTD[γ, δ] - MTD[α, γ] × MTD[β, δ])
)
]

ACbarC[G_, Cbar_, C_, g_] := Module[{a = Part[G, 2], b = Part[Cbar, 2], c = Part[C, 2], p = Part[Cbar, 1],
μ = Part[G, 3]},
-I g SUNF[a, b, c] × FVD[p, μ]
]
```

Legenda: Maneira de escrever o vértice de três glúons, de quatro glúons e o vértice dos *ghosts*.

Fonte: O autor, 2023.

Figura 27 - Estrutura dos 3 diagramas

## Diagram 1 (“tadpole”)

```
In[37]= G1 = {p, m1, μ};
G2 = {-1, a, α};
G3 = {1, b, β};
G4 = {-p, n1, v};
D1 = 1/2 * AAAA[G1, G2, G3, G4, g] * PropAA[G2, G3];
Clear[G1, G2, G3, G4]
```

## Diagram 2 (“ghost loop”)

```
In[43]= G1 = {p, m1, μ};
cbar1 = {-1, a};
c1 = {1, b};
G2 = {-p, n1, v};
cbar2 = {p - 1, c};
c2 = {1 - p, d};
D2 = (-1) ACbarC[G1, cbar1, c2, g] * PropCbarC[cbar1, c1] * ACbarC[G2, cbar2, c1, g] * PropCbarC[cbar2, c2];
Clear[G1, G2, c1, c2, cbar1, cbar2];
```

## Diagram 3 (“gluon loop”)

```
In[51]= G1 = {p, m1, μ};
G2 = {-1, a, α};
G3 = {1, b, β};
G4 = {p - 1, c, γ};
G5 = {1 - p, d, δ};
G6 = {-p, n1, v};
D3 = 1/2 * AAA[G1, G2, G5, g] * PropAA[G2, G3] * AAA[G3, G4, G6, g] * PropAA[G4, G5];
Clear[G1, G2, G3, G4, G5, G6]
```

Legenda: Maneira de escrever a estrutura para os 3 diagramas presentes no modelo massivo.

Fonte: O autor, 2023.

Figura 28 - Comparativo com (Tissier; Wschebor, 2011)

Comparing with eq. (17) in <https://arxiv.org/pdf/1105.2475.pdf...>

```
In[81]= aux1 = 111 / s - 2 / s^2 + (2 - s^2) * Log[s] + 2 (1 / s + 1)^3 * (s^2 - 10 * s + 1) * Log[1 + s] +
(4 / s + 1)^(3/2) (s^2 - 20s + 12) * Log[(Sqrt[4 + s] - Sqrt[s]) / (Sqrt[4 + s] + Sqrt[s])];
aux2 = aux1 / . s -> ScaleMu^2 / m^2;
GMinus1TW = s + 1 + g^2 * CA * s / 384 / π^2 (aux1 - aux2);

In[84]= FullSimplify[(GMinus1) - GMinus1TW, Assumptions -> {s > 0, m > 0, ScaleMu > 0}];
If[% == 0, Print["It agrees with the literature!"], Print["Nah... Something is wrong!"]]

It agrees with the literature!
```

Legenda: Reprodução dos resultados em (Tissier; Wschebor, 2011).

Fonte: O autor, 2023.

pagadores completos (ou seja, com suas estruturas de cor e Lorentz) e para os vértices. Fazendo o cálculo na versão não local, continuaremos com os mesmos três diagramas de antes e, então, não será necessário acrescentar qualquer estrutura nova na figura 27.

Dessa maneira, a figura 29 mostra os fatores de forma e os propagadores completos para o modelo RGZ. Podemos perceber, na linha 6, que o fator de forma  $D_{AA}$  foi escrito como na equação (225). Na figura 30, temos o vértice de três glúons na versão não

local. A estrutura do vértice  $\Gamma_{A\bar{c}c}$  permanece a mesma como na figura 26 e, como vimos anteriormente na equação (257), a estrutura para o vértice de quatro glúons na versão não local é bastante grande. Portanto, não seria adequado apresentar uma imagem contendo esse vértice.

Figura 29 - Escrita da estrutura para o modelo RGZ

**Transverse projector**

```
In[3]= TP[p_, μ_, ν_] := MTD[μ, ν] - FVD[p, μ] × FVD[p, ν] × FAD[p]
```

**Propagators' Form factors**

```
In[4]= DAA[p_, R1_, a1_, R2_, a2_] := R1 * FAD[{p, a1}] + R2 * FAD[{p, a2}];
DCC[p_] := FAD[p];
```

```
In[6]= DAA[p, R1, a1, R2, a2]
```

```
Out[6]=  $\frac{R1}{p^2-a1^2} + \frac{R2}{p^2-a2^2}$ 
```

**Propagators with full color and Lorentz structures (Landau gauge)**

```
In[7]= PropAA[G1_, G2_, R1_, a1_, R2_, a2_] := Module[{p = Part[G1, 1], a = Part[G1, 2], b = Part[G2, 2],
α = Part[G1, 3], β = Part[G2, 3]},
SUNDelta[a, b] × TP[p, α, β] × DAA[p, R1, a1, R2, a2]
]
PropCbarC[Cbar_, C_] := Module[{p = Part[Cbar, 1], a = Part[Cbar, 2], b = Part[C, 2]},
SUNDelta[a, b] × DCC[p]
]
```

Legenda: Maneira de escrever o projetor transversal ( $\mathcal{P}_{\mu\nu}(p)$ ), os fatores de forma e os propagadores com suas respectivas estruturas de cor e de Lorentz para o modelo RGZ.

Fonte: O autor, 2023.

Figura 30 - Escrita para a estrutura dos vértices do modelo RGZ

### Vertices

```
In[9]= AAANL[G1_, G2_, G3_, g_, B_, M_, n_] :=
Module[{p1 = Part[G1, 1], p2 = Part[G2, 1], p3 = Part[G3, 1], a = Part[G1, 2], b = Part[G2, 2], c = Part[G3, 2],
α = Part[G1, 3], β = Part[G2, 3], γ = Part[G3, 3]},
-I g SUNF[a, b, c] (MTD[α, β] (FVD[p1, γ] - FVD[p2, γ])
+ MTD[β, γ] (FVD[p2, α] - FVD[p3, α])
+ MTD[γ, α] (FVD[p3, β] - FVD[p1, β])
) +
 $\frac{I g^3 B^4 n}{2}$  SUNF[a, b, c] (MTD[α, β] (FVD[p1, γ] - FVD[p2, γ]) FAD[{p1, M}] × FAD[{p2, M}]
+ MTD[β, γ] (FVD[p2, α] - FVD[p3, α]) FAD[{p2, M}] × FAD[{p3, M}]
+ MTD[γ, α] (FVD[p3, β] - FVD[p1, β]) FAD[{p3, M}] × FAD[{p1, M}]
)
]
```

Legenda: Maneira de escrever o vértice de três glúons na versão não local do modelo RGZ e do vértice  $\Gamma_{A\bar{c}c}$ .

Fonte: O autor, 2023.

Assim como vimos no exemplo do capítulo 2, esse cálculo gera uma parte divergente

e outra convergente. Sendo assim, ao compilar o código com esses novos parâmetros (propagadores, vértices, etc) para o modelo RGZ, obtemos também tais partes. Para a parte divergente, após a simplificação de mais de dois mil termos, foi possível chegar em uma expressão simples e concisa dada por

$$\left(\Pi_{div}\right)_{\alpha\phi}^{af}(p^2) = \frac{g^2 N \delta^{af}}{192\pi^2} \left[ -\frac{18g^2 N \gamma^4 p^2 \delta_{\alpha\phi}}{(p^2 + M^2)^2} + 9m^2 \delta_{\alpha\phi} + 26p^2 \left( \delta_{\alpha\phi} - \frac{p_\alpha p_\phi}{p^2} \right) \right]. \quad (258)$$

Vale ressaltar que, no limite do parâmetro de Gribov tendendo a zero ( $\gamma \rightarrow 0$ ), o resultado obtido para a parte divergente do caso massivo é recuperado. Todavia, até o momento não foi possível obter uma expressão simplificada para a parte convergente. A mesma também apresenta mais de dois mil termos que, mesmo após diversas tentativas em que o código foi compilado por vários dias, não conseguimos obter uma forma simplificada para os mesmos.

Devido às dificuldades encontradas na simplificação da parte convergente não foi possível dar prosseguimento aos cálculos para a renormalização da teoria e, por fim, obter o resultado da correção do propagador do glúon a *1-loop*. No entanto, vale a pena analisarmos a parte divergente obtida (258). Após uma certa análise, podemos observar que não há um termo na ação ( $S_{RGZ}$ ) que produza um contratermo que anule o primeiro termo entre colchetes na expressão acima. Para resolver esse problema seria necessário a inserção de um termo à mão, o que ocorreria a cada ordem de correção na expansão perturbativa. Por consequência disso, o modelo em sua versão não local mostra-se não renormalizável, a partir dos resultados que obtivemos até determinado momento.

Outro ponto relevante a ser destacado é que existe uma estrutura transversa contida em (258). Entretanto, isso não garante a transversalidade da parte divergente do resultado, um vez que os dois primeiros termos não são transversos. A transversalidade é obtida no limite em que o parâmetro de Gribov  $\gamma$  e a massa  $m$  tendem a zero e, com isso, o resultado obtido equivale àquele encontrado para o modelo perturbativo de YM no capítulo 2.



## CONCLUSÃO

A ideia deste trabalho foi fazer inicialmente uma revisão de algumas das ferramentas matemáticas utilizadas em Teoria Quântica de Campos mostrando, por exemplo, a utilidade das funções de correlação e das funções 1PI, assim como a relação entre elas.

Após isso, foi feita uma apresentação das teorias de Yang-Mills mostrando as unificações conhecidas até o momento e as possíveis tentativas de unificações. Entretanto, foi dado um enfoque no grupo  $SU(3)$  pois o mesmo contempla a Cromodinâmica Quântica. Vimos também que, para obter uma ação que descreva a QCD, é necessário quantizar a ação de YM e que o método conhecido e utilizado para isso é a Quantização de Faddeev-Popov, que funciona muito bem para regimes de altas energias. Todavia, vimos que esse método apresenta certas inconsistências (conhecidas como cópias de Gribov) no infravermelho e que o modelo de Gribov-Zwanziger seria um método mais conciso para fazer tal quantização. Em seguida, apresentamos as regras de Feynman para a QCD e fizemos um exemplo de como obter correções a 1-loop para o propagador do glúon no modelo perturbativo de YM no calibre de Landau. Percebemos que mesmo nessa teoria os cálculos já se mostram ser demasiadamente grandes.

Logo após ter apresentado abordagens para o fenômeno do confinamento, vimos alguns dos tratamentos não perturbativos para a QCD. Em especial, abordamos o modelo GZ e RGZ, observando que o modelo RGZ apresenta um propagador para o glúon, a nível árvore, com uma ótima concordância com os dados obtidos em QCD na rede. Porém, essa concordância é para baixos valores de momento.

Por fim, propomos automatizar os cálculos feitos para obter as correções a 1-loop no calibre de Landau para o propagador do glúon no modelo RGZ. Foi observado que não foi de grande ajuda trabalhar na versão não local do modelo, pois mesmo que o número de diagramas caia drasticamente, as expressões para os vértices aumentam demasiadamente. Portanto, não houve muita diferença, a nível de quantidades de cálculos, trabalhar na versão local ou na versão não local. Mesmo com um intervalo de tempo considerável de máquina, não foi possível simplificar mais de quatro mil termos para dar continuidade nos cálculos.

O próximo passo é aperfeiçoar o código com a esperança de que a simplificação desses termos seja possível para então obter uma expressão renormalizada e por fim o propagador do glúon com sua correção a 1-loop. Outra perspectiva é fazer tal análise a temperatura finita para estudar o comportamento de grandezas termodinâmicas, como por exemplo a pressão. Pois, como foi apresentado, o modelo RGZ a nível árvore apresenta instabilidades termodinâmicas. Todavia, tais instabilidades não são vistas em resultados obtidos pela QCD na rede. A ideia, então, é verificar como essas instabilidades do modelo RGZ reagem às correções a 1-loop.

## REFERÊNCIAS

- AGUILAR, A. C.; BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. *Physical Review D*, [S.l.], v. 78, n. 2, Jul. 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.78.025010>. Acesso em: 20 jan. 2018.
- AGUILAR, A. C; NATALE, A. A. A dynamical gluon mass solution in a coupled system of the Schwinger-Dyson equations. *Journal of High Energy Physics*, [S.l.], v. 2004, n. 08, p. 057–057, Sep. 2004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2004/08/057>. Acesso em: 20 jan. 2018.
- ALKOFER, R. QCD Green functions and their application to hadron physics. *Brazilian journal of physics*, [S. l.], v. 37, n. 1B, p. 144–164, 2007.
- ALKOFER, R. et al. Analytic properties of the Landau gauge gluon and quark propagators. *Physical Review D*, [S. l.], v. 70, n. 1, p. 014014, 2004.
- ALKOFER, R.; SMEKAL, L. von. The infrared behaviour of QCD green's functions confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Physics Reports*, [S. l.], v. 353, n. 5-6, p. 281–465, 2001. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00010-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00010-2). Acesso em: 22 jan. 2018.
- AOKI, S. et al. Light hadron spectrum and quark masses from quenched lattice QCD. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 67, p. 034503, 2003.
- AOYAMA, T.; KINOSHITA, T.; NIO, M. Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron. *Atoms*, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 28, 2019.
- BAAL, P. van. More (thoughts on) Gribov copies. *Nuclear Physics B*, [S. l.], v. 369, n. 1-2, p. 259–275, 1992.
- BAAL, P. van. *Gribov ambiguities and the fundamental domain*. *arXiv preprint hep-th/9711070*, [S. l.: s. n.], 1997.
- BAILIN, D.; LOVE, A. *Introduction to Gauge Field Theory Revised Edition*. Rev. ed. [S.l.]: Taylor & Francis, 1993. (Graduate student series in physics).
- BALI, Gunnar S. QCD forces and heavy quark bound states. *Phys. Rept.*, v. 343, p. 1–136, 2001.
- BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. Renormalization of gauge theories. *Annals of Physics*, [S. l.], v. 98, n. 2, p. 287–321, 1976.
- BELLAC, M. Le. *Thermal field theory*. New York, USA: Cambridge Univ. Press, 1996.
- BOER, J. de et al. On the renormalizability and unitarity of the Curci-Ferrari model for massive vector bosons. *Phys. Lett. B*, v. 367, p. 175–182, 1996.
- BOGOLUBSKY, I. L. et al. The Landau gauge gluon and ghost propagators in 4D SU(3) gluodynamics in large lattice volumes. *PoS, LATTICE 2007*, p. 290, 2007.

- BOGOLUBSKY, I. L. et al. Lattice gluodynamics computation of Landau-gauge Green's functions in the deep infrared. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 676, n. 1-3, p. 69–73, 2009.
- BORNYAKOV, V. G.; MITRJUSHKIN, V. K.; MÜLLER-PREUSSKER, M. Infrared behavior and Gribov ambiguity in SU(2) lattice gauge theory. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 7, p. 074504, 2009.
- BORSANYI, S. et al. Precision SU(3) lattice thermodynamics for a large temperature range. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2012, n. 7, p. 1–22, 2012.
- BORSANYI, S. et al. Full result for the QCD equation of state with 2+1 flavors. *Phys. Lett. B*, v. 730, p. 99–104, 2014.
- BRAMBILLA, N.; VAIRO, A. *Quark confinement and the hadron spectrum*. *arXiv preprint hep-ph/9904330*, [S. l.: s. n.], 1999.
- CANFORA, F. et al. Effect of the Gribov horizon on the Polyakov loop and vice versa. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 75, p. 1–13, 2015.
- CAPRI, M. A. L. et al. An all-order proof of the equivalence between Gribov's no-pole and Zwanziger's horizon conditions. *Phys. Lett. B*, v. 719, p. 448–453, 2013.
- CAPRI, M. A. L. et al. Study of the zero modes of the Faddeev–Popov operator in the maximal Abelian gauge. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 344, p. 275–289, 2014.
- CAPRI, M. A. L. et al. A study of the zero modes of the Faddeev–Popov operator in Euclidean Yang–Mills theories in the Landau gauge in  $d = 2, 3, 4$  dimensions. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 72, n. 3, p. 1–9, 2012.
- CASHER, A.; NEUBERGER, H.; NUSSINOV, S. Chromoelectric-flux-tube model of particle production. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 20, p. 179–188, 1979.
- CLARK, T.; LOWENSTEIN, J. H. Generalization of Zimmermann's normal-product identity. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 113, n. 1, p. 109–134, 1976.
- CORNWALL, J. M. Dynamical mass generation in continuum quantum chromodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 26, n. 6, p. 1453, 1982.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. What's up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices. *PoS, LATTICE 2007*, p. 297, 2007.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; TAURINES, A. R. Positivity violation for the lattice Landau gluon propagator. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 5, p. 051902, 2005.
- CURCI, G; FERRARI, R. On a class of Lagrangian models for massive and massless Yang-Mills fields. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, Springer, v. 32, n. 2, p. 151–168, 1976.
- DAS, A. *Field Theory: A Path Integral Approach*. 2. ed. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2006.
- DAS, Ashok. *Lectures on gravitation*. [S.l.]: World scientific, 2011.

- DELL'ANTONIO, G.; ZWANZIGER, D. Ellipsoidal bound on the Gribov horizon contradicts the perturbative renormalization group. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 326, n. 2, p. 333–350, 1989.
- DELL'ANTONIO, G.; ZWANZIGER, D. Every gauge orbit passes inside the Gribov horizon. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 138, n. 2, p. 291–299, 1991.
- DETAR, C.; HELLER, U.; LACOCK, P. First signs for string breaking in two-flavor QCD. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, Elsevier, v. 83, p. 310–312, 2000.
- DUDAL, D. et al. The BRST-invariant vacuum state of the Gribov–Zwanziger theory. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, n. 9, p. 1–14, 2019.
- DUDAL, D. et al. Landau gauge gluon and ghost propagators in the refined Gribov-Zwanziger framework in 3 dimensions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 125012, 2008a.
- DUDAL, D. et al. Refinement of the Gribov-Zwanziger approach in the Landau gauge: Infrared propagators in harmony with the lattice results. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 065047, 2008b.
- DUDAL, D.; OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. High precision statistical Landau gauge lattice gluon propagator computation vs. the Gribov–Zwanziger approach. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 397, p. 351–364, 2018.
- DUDAL, D.; OLIVEIRA, O.; VANDERSICKEL, N. Indirect lattice evidence for the refined Gribov-Zwanziger formalism and the gluon condensate  $\langle A^2 \rangle$  in the Landau gauge. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 81, p. 074505, 2010.
- DUDAL, D.; SORELLA, S. P.; VANDERSICKEL, N. The dynamical origin of the refinement of the Gribov-Zwanziger theory. *Phys. Rev. D*, [S. l.], v. 84, p. 065039, 2011.
- DUDAL, D. et al. New features of the gluon and ghost propagator in the infrared region from the Gribov-Zwanziger approach. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 77, p. 071501, 2008c.
- DURR, S. et al. Ab-Initio Determination of Light Hadron Masses. *Science*, v. 322, p. 1224–1227, 2008.
- DYSON, F. J. The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. *Physical Review*, APS, v. 75, n. 3, p. 486, 1949.
- FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Physics Letters B*, [S. l.], v. 25, n. 1, p. 29–30, 1967.
- FEYNCALC: *example gallery*. Disponível em: <https://feyncalc.github.io/examples>. Acesso em: 10 fev 2019.
- FEYNMAN, R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of modern physics*, APS, v. 20, n. 2, p. 367, 1948.
- FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R.; STYER, D. F. *Quantum mechanics and path integrals*. [S.l.]: Courier Corporation, 2010.

- GELL-MANN, M. *The eightfold way: a theory of strong interaction symmetry*. CalTech Synchrotron Laboratory, CRC Press, 1961.
- GIMENO-SEGOVIA, M.; LLANES-ESTRADA, F. J. From Euclidean to Minkowski space with the Cauchy-Riemann equations. *Eur. Phys. J. C*, v. 56, p. 557–569, 2008.
- GLASHOW, S. L. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear physics*, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 579–588, 1961.
- GLASHOW, S. L.; GELL-MANN, M. Gauge theories of vector particles. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 437–460, 1961.
- GONG, M et al. Lattice gluon propagator in the Landau gauge: A study using anisotropic lattices. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 24, n. 24, p. 1925–1935, 2009.
- GREENSITE, J. *An introduction to the confinement problem*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 821.
- GREINER, W.; MÜLLER, B. et al. *Gauge theory of weak interactions*. 3rd rev. ed. [S.l.]: Springer, 2000. v. 5.
- GRIBOV, V. N. Quantization of Nonabelian Gauge Theories. *Nucl. Phys. B*, [S.l.], v. 139, p. 1–19, 1978.
- GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, APS, v. 30, n. 26, p. 1343, 1973.
- GUIMARAES, M. S.; MINTZ, B. W.; SORELLA, S. P. Dimension two condensates in the Gribov-Zwanziger theory in Coulomb gauge. *Physical Review D*, APS, v. 91, n. 12, p. 121701, 2015.
- HALL, B. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*. [S.l.]: Springer, 2015. v. 222.
- HAUCK, A.; SMEKAL, L. von; ALKOFER, R. Solving a coupled set of truncated QCD Dyson—Schwinger equations. *Computer Physics Communications*, [S.l.], v. 112, n. 2-3, p. 166–182, 1998. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655\(98\)00045-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655(98)00045-9). Acesso em: 23 abr. 2018.
- ISGUR, N.; PATON, J. Flux-tube model for hadrons in QCD. *Physical Review D*, APS, v. 31, n. 11, p. 2910, 1985.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J. B. *Quantum field theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2006.
- KNECHTLI, F. String breaking and lines of constant physics in the SU(2) Higgs model. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, Elsevier, v. 83, p. 673–675, 2000.
- KOGUT, J.; SUSSKIND, L. Hamiltonian formulation of Wilson’s lattice gauge theories. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 11, p. 395–408, 1975.
- LAM, Yuk-Ming P. Perturbation Lagrangian Theory for Scalar Fields-Ward-Takahashi Identity and Current Algebra. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 6, p. 2145–2161, 1972.

- LANCASTER, T.; BLUNDELL, S. J. *Quantum field theory for the gifted amateur*. [S.l.]: OUP Oxford, 2014.
- LERCHE, C.; SMEKAL, L. von. Infrared exponent for gluon and ghost propagation in Landau gauge QCD. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 12, p. 125006, 2002.
- LOWENSTEIN, J. H. Differential vertex operations in lagrangian field theory. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 24, n. 1, p. 1–21, 1971.
- LOWENSTEIN, J. H. Normal-product quantization of currents in lagrangian field theory. *Physical Review D*, APS, v. 4, n. 8, p. 2281, 1971.
- LÜSCHER, M. Lattice QCD—from quark confinement to asymptotic freedom. In: SPRINGER. *Annales Henri Poincare*. [S.l.], 2003. v. 4, p. 197–210.
- MAGGIORE, N.; SCHADEN, M. Landau gauge within the Gribov horizon. *Physical Review D*, APS, v. 50, n. 10, p. 6616, 1994.
- MANDELSTAM, S. Approximation scheme for quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, [S. l.], v. 20, p. 3223–3238, 1979. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.3223>. Acesso em: 09 mai. 2018.
- MARCIANO, W.; PAGELS, H. Quantum chromodynamics. *Physics Reports*, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 137–276, 1978.
- MERTIG, R.; BÖHM, M.; DENNER, A. Feyn calc-computer-algebraic calculation of Feynman amplitudes. *Computer Physics Communications*, Elsevier, v. 64, n. 3, p. 345–359, 1991.
- MINTZ, B. W. et al. Infrared massive gluon propagator from a BRST-invariant Gribov horizon in a family of covariant gauges. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 3, p. 034002, 2019.
- NĂSTASE, H. *Cosmology and string theory*. [S.l.]: Springer, 2019a.
- NĂSTASE, H. *Introduction to quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019b.
- NE’EMAN, Y. Derivation of strong interactions from a gauge invariance. *Nuclear physics*, Elsevier, v. 26, n. 2, p. 222–229, 1961.
- NISHIJIMA, K. BRS invariance, asymptotic freedom and color confinement. (A review). *Czech. J. Phys.*, [S.l.], v. 46, p. 1–124, 1996.
- OEHME, R. Analytic structure of amplitudes in gauge theories with confinement. *International Journal of Modern Physics A*, [S.l.], v. 10, n. 14, p. 1995–2014, 1995. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X95000978>. Acesso em: 18 mai. 2018.
- OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. Lattice Landau gauge gluon propagator: Lattice spacing and volume dependence. *Phys. Rev. D*, [S.l.], v. 86, p. 114513, 2012.
- ORNIGOTTI, M.; AIELLO, A. The Faddeev-Popov Method Demystified. *arXiv preprint arXiv:1407.7256*, [S. l.: s. n.], 2014.

- OSTERWALDER, K.; SCHRADER, R. Axioms for Euclidean Green's functions. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 31, n. 2, p. 83–112, 1973.
- PADMANABHAN, T. *Quantum Field Theory: The Why, What and How*. [S.l.]: Springer, 2016.
- PAWLOWSKI, J. M. et al. Infrared behavior and fixed points in Landau-gauge QCD. *Physical review letters*, APS, v. 93, n. 15, p. 152002, 2004.
- PELÁEZ, M.; TISSIER, M.; WSCHEBOR, N. Three-point correlation functions in Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, v. 88, p. 125003, 2013.
- PELÁEZ, M.; TISSIER, M.; WSCHEBOR, N. Two-point correlation functions of QCD in the Landau gauge. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 6, p. 065031, 2014.
- PELÁEZ, M.; TISSIER, M.; WSCHEBOR, N. Quark-gluon vertex from the Landau gauge Curci-Ferrari model. *Physical Review D*, APS, v. 92, n. 4, p. 045012, 2015.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- PHILIPSEN, O.; WITTIG, H. String breaking in non-abelian gauge theories with fundamental matter fields. *Physical Review Letters*, APS, v. 81, n. 19, p. 4056, 1998.
- FIGUET, O.; SORELLA, S. P. *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 28.
- POKORSKI, S. *Gauge field theories*. [S.l.]: Cambridge University Press Cambridge, 2000. v. 92.
- POLCHINSKI, J. G. *String theory, volume I: An introduction to the bosonic string*. [S.l.]: Cambridge university press Cambridge, 1998.
- POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Physical Review Letters*, APS, v. 30, n. 26, p. 1346, 1973.
- RAMOND, P. *Field theory: a modern primer*. [S.l.]: Westview press, 1997.
- ROCCI, A. On first attempts to reconcile quantum principles with gravity. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2013. v. 470, n. 1, p. 012004.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996.
- SALAM, A. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf. Proc. C*, v. 680519, p. 367–377, 1968.
- SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- SCHWINGER, J. Quantum electrodynamics. I. A covariant formulation. *Physical Review*, APS, v. 74, n. 10, p. 1439, 1948.
- SCHWINGER, J. The theory of quantized fields. I. *Physical Review*, APS, v. 82, n. 6, p. 914, 1951.

- SEMENOV-TYAN-SHANSKII, M. A.; FRANKE, V. A. A variational principle for the Lorentz condition and restriction of the domain of path integration in non-abelian gauge theory. *Journal of Soviet Mathematics*, Springer, v. 34, n. 5, p. 1999–2004, 1986.
- SHTABOVENKO, V.; MERTIG, R.; ORELLANA, F. New developments in FeynCalc 9.0. *Computer Physics Communications*, Elsevier, v. 207, p. 432–444, 2016.
- SHTABOVENKO, V.; MERTIG, R.; ORELLANA, F. FeynCalc 9.3: New features and improvements. *Computer Physics Communications*, Elsevier, v. 256, p. 107478, 2020.
- SHURYAK, E. *Lectures on nonperturbative QCD* (Nonperturbative Topological Phenomena in QCD and Related Theories). [S. l.: s. n.], 2018.
- SLAVNOV, A. A. Ward identities in gauge theories. *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian, v. 10, n. 2, p. 153–161, 1972.
- SLAVNOV, A. A.; FADDEEV, L. D. *Gauge fields: An introduction to quantum theory*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 2a ed, 1991.
- SOBREIRO, R. F. *Non-perturbative aspects of Yang-Mills theories*. [S. l.: s. n.], 2007a. arXiv preprint arXiv:0705.4107.
- SOBREIRO, R. F.; OTOYA, V. J. Vasquez. *Effective gravity from a quantum gauge theory in Euclidean space-time*. *Class. Quant. Grav.*, v. 24, p. 4937–4953, 2007b.
- SOBREIRO, R. F.; SORELLA, S. P. *Introduction to the Gribov ambiguities in Euclidean Yang-Mills theories*. [S. l.: s. n.], 2005. arXiv preprint hep-th/0504095.
- SOBREIRO, R. F. et al. Gribov horizon in the presence of dynamical mass generation in Euclidean Yang–Mills theories in the Landau gauge. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 590, n. 3-4, p. 265–272, 2004.
- SORELLA, S. P. *Lectures on confinement and on the Gribov problem in non-Abelian gauge theories*. Rio de Janeiro: X Escola CBPF, 2015. Disponível em: [https://mesonpi.cat.cbpf.br/escola2015/downloads/material/PG11\\_Introducao\\_ao\\_problema\\_do\\_confinamento\\_dos\\_quarks\\_e\\_gluons\\_nas\\_teorias\\_de\\_Yang-Mills.pdf](https://mesonpi.cat.cbpf.br/escola2015/downloads/material/PG11_Introducao_ao_problema_do_confinamento_dos_quarks_e_gluons_nas_teorias_de_Yang-Mills.pdf). Acesso em: 06 jul. 2022.
- SORELLA, S. P. et al. Features of the Refined Gribov-Zwanziger theory: Propagators, BRST soft symmetry breaking and glueball masses. *PoS*, FACESQCD, p. 022, 2010.
- STERMAN, G. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1993.
- STERNBECK, A. et al. The Gluon and ghost propagator and the influence of Gribov copies. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, v. 140, p. 653–655, 2005.
- STERNBECK, A. et al. Comparing SU(2) to SU(3) gluodynamics on large lattices. *PoS*, LATTICE2007, p. 340, 2007.
- STREATER, R. F.; WIGHTMAN, A. S. *PCT, spin and statistics, and all that*. [S.l.]: Princeton University Press, 1964. v. 52.



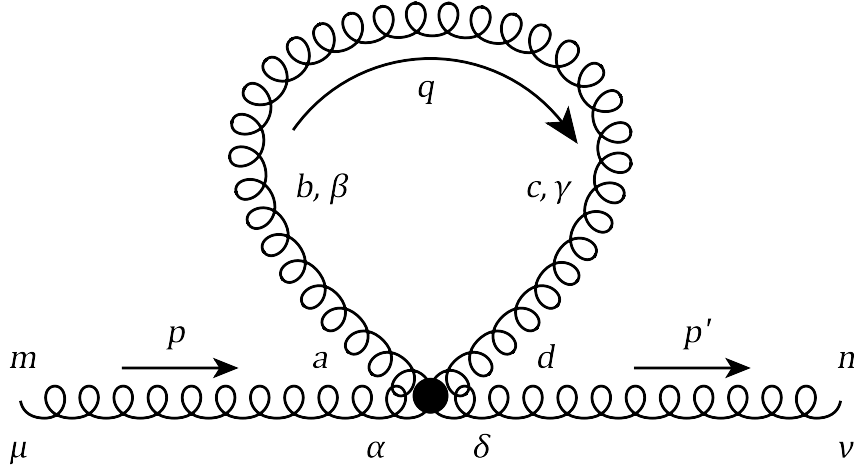
- TAYLOR, J. C. Ward identities and charge renormalization of the Yang-Mills field. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 33, n. 2, p. 436–444, 1971.
- TISSIER, M. How nonperturbative is the infrared regime of QCD? Apresentação de slides do LaTeX. 2019. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/gif/wp-content/uploads/2019/12/Tissier-MV2019.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2022.
- TISSIER, M.; WSCHEBOR, N. Infrared safe perturbative approach to yang-mills correlators. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 4, p. 045018, 2011.
- TODORINOV, V.; DAS, S.; BOSSO, P. *Effective field theory from Relativistic Generalized Uncertainty*. [S. l.: s. n.], 2022. arXiv preprint arXiv:2205.06878.
- TYUTIN, I. V. *Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism*. 1975.
- VANDERSICKEL, N. *A study of the Gribov-Zwanziger action: from propagators to glueballs*. [S. l.: s. n.], 2011. arXiv preprint arXiv:1104.1315.
- VANDERSICKEL, N.; ZWANZIGER, D. The Gribov problem and QCD dynamics. *Physics reports*, Elsevier, v. 520, n. 4, p. 175–251, 2012.
- WEINBERG, S. A model of leptons. *Physical review letters*, APS, v. 19, n. 21, p. 1264, 1967.
- WEINBERG, S. *The quantum theory of fields*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. v. 1.
- WEINBERG, S. The making of the standard model. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, Springer, v. 34, n. 1, p. 5–13, 2004.
- WIGHTMAN, A. S.; GARDING, L. Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory. *Arkiv Fys.*, Princeton Univ., NJ; Univ. of Lund, Sweden, v. 28, 1965.
- WILLIAMS, R. *Schwinger-Dyson equations in QED and QCD the calculation of fermion-antifermion condensates*. 2007. Tese (Doutorado) — Durham University, Durham, 2007.
- WILSON, K. G. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 10, p. 2445–2459, 1974.
- YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 96, p. 191–195, 1954.
- ZWANZIGER, D. Non-perturbative modification of the Faddeev-Popov formula. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 114, n. 5, p. 337–339, 1982.
- ZWANZIGER, D. Action from the Gribov horizon. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 321, n. 3, p. 591–604, 1989a.
- ZWANZIGER, D. Local and renormalizable action from the Gribov horizon. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 323, n. 3, p. 513–544, 1989b.

ZWANZIGER, D. Renormalizability of the critical limit of lattice gauge theory by BRS invariance. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 399, n. 2-3, p. 477–513, 1993.

ZWIEBACH, B. *A first course in string theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004.

## APÊNDICE A – Diagrama “tadpole” para o modelo massivo de YM

Figura 31 - Diagrama tadpole



Legenda: Diagrama proveniente do vértice  $\Gamma_{AAAA}$  com sua estrutura de índices completa.

Fonte: O autor, 2023.

$$D_{\mu\nu}^{mn}(p) = \langle A_{\mu}^m(p) A_{\alpha}^a(-p) \rangle \int_{q,p'} [\Gamma_{AAAA}]_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd}(p, -q, q, -p') \langle A_{\beta}^b(q) A_{\gamma}^c(-q) \rangle \langle A_{\delta}^d(p') A_{\nu}^n(p') \rangle \quad (259)$$

Lembrando que

$$\langle A_{\mu}^m(p) A_{\nu}^n(-p) \rangle = \delta^{mn} P_{\mu\nu}(p) D_{AA}(p) \quad ; \quad P_{\mu\nu}(p) = \delta_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^2}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd}(p_1, p_2, p_3, p_4) = & -g^2 \left\{ f^{abe} f^{cde} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + f^{ace} f^{bde} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \right. \\ & \left. + f^{ade} f^{bce} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}) \right\} \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) . \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{mn}(p) = & \delta^{ma} P_{\mu\alpha}(p) D_{AA}(p) \int_{q,p'} \left\{ -g^2 \left[ f^{abe} f^{cde} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + f^{ace} f^{bde} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \right. \right. \\ & \left. \left. + f^{ade} f^{bce} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}) \right] \delta(p - q + q - p') \right\} \delta^{bc} P_{\beta\gamma}(q) D_{AA}(q) \delta^{dn} P_{\delta\nu}(p') D_{AA}(p') \\ = & \delta^{ma} P_{\mu\alpha}(p) D_{AA}(p) \int_q \left\{ -g^2 \left[ f^{abe} f^{cde} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + f^{ace} f^{bde} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \right. \right. \\ & \left. \left. + f^{ade} f^{bce} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}) \right] \right\} \delta^{bc} P_{\beta\gamma}(q) D_{AA}(q) \delta^{dn} P_{\delta\nu}(p) D_{AA}(p) . \end{aligned}$$

Vamos prosseguir com o cálculo apenas da auto-energia ( $\Pi_{\alpha\delta}^{ad}$ ). Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\alpha\delta}^{ad} &= \int_q \left\{ -g^2 \left[ f^{abe} f^{cde} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + f^{ace} f^{bde} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f^{ade} f^{bce} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}) \right] \right\} \delta^{bc} P_{\beta\gamma}(q) D_{AA}(q) \\
&= -g^2 \left\{ f^{ace} \underbrace{f^{cde}}_{-f^{dce}} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + f^{ace} \underbrace{f^{cde}}_{-f^{dce}} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + f^{ade} \underbrace{f^{cde}}_{=0} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}) \right\} \\
&\quad \times \int_q P_{\beta\gamma}(q) D_{AA}(q) \\
&= -g^2 \left\{ -N \delta^{ad} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) - N \delta^{ad} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \right\} \int_q P_{\beta\gamma}(q) D_{AA}(q) \\
&= g^2 N \delta^{ad} \{ (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \} \int_q P_{\beta\gamma}(q) D_{AA}(q) \\
&= g^2 N \delta^{ad} \int_q \left[ P_{\delta\alpha}(q) - \delta_{\alpha\delta} \underbrace{\delta_{\beta\gamma} P_{\beta\gamma}(q)}_{(d-1)} + P_{\alpha\delta}(q) - \delta_{\alpha\delta} \underbrace{\delta_{\beta\gamma} P_{\beta\gamma}(q)}_{(d-1)} \right] D_{AA}(q) \\
&= g^2 N \delta^{ad} \int_q 2 [P_{\alpha\delta}(q) - (d-1) \delta_{\alpha\delta}] D_{AA}(q) \\
&= 2g^2 N \delta^{ad} \int_q \left[ \delta_{\alpha\delta} - \frac{q_\alpha q_\delta}{q^2} - d \delta_{\alpha\delta} + \delta_{\alpha\delta} \right] ; \int_q \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{d} \int_q f(q^2) \\
&= 2g^2 N \delta^{ad} \int_q \left[ 2\delta_{\alpha\delta} - \frac{\delta_{\alpha\delta}}{d} - d \delta_{\alpha\delta} \right] D_{AA}(q) \\
&= 2g^2 N \delta^{ad} \delta_{\alpha\delta} \left[ 2 - d - \frac{1}{d} \right] \int_q D_{AA}(q) .
\end{aligned}$$

No caso perturbativo a integral acima se anula, mas para o caso massivo temos

$$\Pi_{\alpha\delta}^{ad} = 2g^2 N \delta^{ad} \delta_{\alpha\delta} \frac{(2d - d^2 - 1)}{d} \int_q \frac{1}{q^2 + m^2} ; \left( \int_q = \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \right) . \quad (260)$$

Sabemos que (Peskin; Schroeder, 1995)

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \left( \frac{1}{\Delta} \right)^{n-d/2} . \quad (261)$$

Portanto, temos que

$$\Pi_{\alpha\delta}^{ad} = 2g^2 N \delta^{ad} \delta_{\alpha\delta} \frac{(2d - d^2 - 1)}{d} \mu^{2\varepsilon} \left\{ \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - d/2)}{\Gamma(1)} \left( \frac{1}{\Delta} \right)^{1-d/2} \right\} ; \Delta = m^2 . \quad (262)$$

Porém, podemos fazer as seguintes mudanças

- $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$

$$\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) = \frac{2\Gamma(2 - d/2)}{(2 - d)}$$

- $\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} = \frac{(4\pi)^{2-d/2}}{(4\pi)^2}$
- $\frac{1}{\Delta^{1-d/2}} = \frac{\Delta}{\Delta^{2-d/2}}$ .

Com isso, temos

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha\delta}^{ad} &= \frac{2g^2 N \delta^{ab} \delta_{\alpha\delta}}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{(2d - d^2 - 1)}{d} \mu^{2\varepsilon} \frac{2\Gamma(2 - d/2)}{(2 - d)} \frac{\Delta}{(\Delta/4\pi)^{2-d/2}} \right\} \\ &= \frac{4g^2 N \delta^{ab} \delta_{\alpha\delta}}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{(2d - d^2 - 1)}{d(2 - d)} \Delta \frac{\mu^{2\varepsilon} \Gamma(2 - d/2)}{(\Delta/4\pi)^{2-d/2}} \right\}. \end{aligned}$$

Temos que  $d = 4 - 2\varepsilon$ , logo

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{2(4 - 2\varepsilon) - (4 - 2\varepsilon)^2 - 1}{2(4 - 2\varepsilon) - (4 - 2\varepsilon)^2} &= \frac{8 - 4\varepsilon - 16 - 4\varepsilon^2 + 16\varepsilon - 1}{8 - 4\varepsilon - 16 - 4\varepsilon^2 + 16\varepsilon} \\ &= \frac{-9 + 12\varepsilon - 4\varepsilon^2}{-8 + 12\varepsilon - 4\varepsilon^2} \\ &\simeq \frac{12\varepsilon - 9}{12\varepsilon - 8}; \quad \mathcal{O}(\varepsilon^2) \rightarrow 0 \\ &= \frac{12\varepsilon - 9}{(-8) \left(1 - \frac{12\varepsilon}{8}\right)} \\ &= \frac{9 - 12\varepsilon}{8} \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\right)^{-1} \\ &\simeq \left(\frac{9}{8} - \frac{3\varepsilon}{2}\right) \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{9}{8} - \frac{3\varepsilon}{2} + \frac{27\varepsilon}{16} - \frac{9\varepsilon^2}{4} \\ &= -\frac{9\varepsilon^2}{4} + \frac{3\varepsilon}{16} + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{(\mu^2)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon)}{(\Delta/4\pi)^\varepsilon} \simeq \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_c - \ln\left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right).$$

Sendo assim, temos

$$\prod_{\alpha\delta}^{ad} = \frac{4g^2 N \delta^{ab} \delta_{\alpha\delta}}{(4\pi)^2} \frac{m^2}{4} \left\{ -9\varepsilon^2 + \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{9}{2} \right\} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_c - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) \right\}$$

$$= \frac{g^2 m^2 N \delta^{ad} \delta_{\alpha\delta}}{(4\pi)^2} \left\{ -9\varepsilon + 9\varepsilon^2 \gamma_c + 9\varepsilon^2 \ln \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{3}{4} - \frac{3\varepsilon}{4} \gamma_c - \frac{3\varepsilon}{4} \ln \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{9}{2\varepsilon} - \frac{9\gamma_c}{2} - \frac{9}{2} \ln \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} ; \mathcal{O}(\varepsilon) \rightarrow 0$$

$$= \frac{g^2 m^2 N \delta^{ad} \delta_{\alpha\delta}}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{9}{2\varepsilon} + \frac{3}{4} - \frac{9\gamma_c}{2} - \frac{9}{2} \ln \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\}$$

$$= \frac{3g^2 m^2 N \delta^{ad} \delta_{\alpha\delta}}{2(4\pi)^2} \left\{ \frac{3}{\varepsilon} + \frac{1}{2} - 3\gamma_c - 3 \ln \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \quad (\text{fator } 1/2 \text{ global})$$

$$\text{Parte divergente: } \frac{9g^2 m^2 N \delta^{ad} \delta_{\alpha\delta}}{64\pi^2 \varepsilon} \tag{263}$$

$$\text{Parte finita: } \frac{3g^2 m^2 N \delta^{ad} \delta_{\alpha\delta}}{128\pi^2} \left\{ 1 - 6\gamma_c - 6 \ln \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \tag{264}$$