Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Matheus dos Santos Thomé

Pontuação em Linguagem Matemática

Rio de Janeiro

2020

Matheus dos Santos Thomé

Pontuação em Linguagem Matemática

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva

Coorientadora: Profª. Dra. Sueli Ferreira da Cunha

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

T465 Thomé, Matheus dos Santos.
Pontuação em linguagem matemática/ Matheus dos Santos Thomé. – 2020.
54 f. : il.

Orientador: Jaime Velasco Câmara da Silva
Coorientadora: Sueli Ferreira da Cunha
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Matemática – Teses. 2. Notação matemática – Teses. I. Silva, Jaime Velasco Câmara da. II. Cunha, Sueli Ferreira da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 51

Patricia Bello Meijinhos CRB-7/ 5217- Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

_______________________________ Assinatura

_______________________________ Data

Matheus dos Santos Thomé

Pontuação em Linguagem Matemática

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em 18 de setembro de 2020

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Profª. Dra. Sueli Ferreira da Cunha (Coorientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Janeisi de Lima Meira
Universidade Federal do Tocantins

Prof. Dr. Laurent Marcos Prouvée
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro
2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus familiares.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço ao meus pais Roberto Luis e Ana Cristina, que desde cedo me mostraram a importância dos estudos e que, junto ao meu irmão Lucas, me incentivaram em todas as minhas escolhas e decisões na vida. De igual importância, é o agradecimento à minha esposa Carla, pelo apoio em diversas situações, pela importância nessa caminhada pelo mundo acadêmico, sem me deixar desanimar. Ainda no ambiente familiar, não posso deixar de registrar um agradecimento diferente, à minha companheira de manhãs, tardes, noites e madrugadas escrevendo, minha eterna gata Miquelina.

Agradeço aos meus companheiros de trabalho na Escola Municipal Rio das Pedras, principalmente à amiga e professora Mariana Carvalho, sempre preocupada com meus estudos e disposta a ajudar.

Faço um grande agradecimento aos colegas do PROMAT, André, Enrique, Robson e Victor, que estiveram juntos comigo nesses dois anos de estudos na UERJ e dividimos os percalços e as vitórias semestre a semestre, tornando essa caminha menos árdua e muito mais divertida. Além dos discentes, agradeço também aos docentes do PROFMAT, pelo conhecimento transmitido, pela paciência e pela compreensão das dificuldades de conciliar o trabalho e a realização do mestrado.

Destaco, em especial, o agradecimento aos meus orientadores Prof. Jaime Velasco e Profª. Sueli Cunha, que além de auxiliarem o desenvolvimento deste trabalho, me apresentaram ao grupo Mate$_{\text{Gra}}$mática e seus integrantes (José, Michelle e Natália), onde conduzimos discussões proveitosas que foram primordiais para algumas ideias presentes neste trabalho.

Por fim, mas não menos importante, agradeço o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar.

François Viète

RESUMO

THOMÉ, Matheus dos Santos. *Pontuação em Linguagem Matemática*. 2020. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

A pontuação, independentemente da linguagem que estivermos considerando, é uma das mais importantes áreas de sua gramática, pois é essencial para o entendimento de um texto. Em linguagem matemática, evidentemente, o uso da pontuação também é importante. Nesse sentido, este trabalho tem por objetivo apresentar diferentes situações em que uma expressão matemática deve ser pontuada, e os motivos pelos quais essas pontuações são utilizadas. Para fundamentar este estudo, inicialmente são apresentados os conceitos, já determinados, da gramática da linguagem matemática (como os dialetos, os processos de formação de palavras, os estilos de leitura e caracteres que indicam uma pontuação), para em seguida, realizar um paralelo com determinados casos que necessitam de pontuação em língua portuguesa. Neste contexto, são encontradas semelhanças entre situações que carecem de pontuação nas duas linguagens. Ao analisarmos essas semelhanças, nota-se que o uso de uma pontuação adequada faz com que certas frases sejam mais claras, evitando assim ruídos, ambiguidades e interpretações incorretas. Com o propósito de eliminar, com o auxílio da pontuação, certos tipos de ruído, analisamos o que são expressões matemáticas ambíguas e o que as ocasionam; além de observar as características e as estruturas de expressões que podem ter o seu sentido alterado, caso não seja pontuada ou seja pontuada incorretamente. Além desses dois casos, na linguagem matemática, uma ausência ou uso incorreto de pontuação ocasiona, em certos casos, expressões incoerentes matematicamente, sendo esta mais uma situação onde o emprego correto da pontuação se faz necessário.

Palavras-chave: Pontuação. Gramática da Linguagem Matemática. Interpretação de Expressões.

ABSTRACT

THOMÉ, Matheus dos Santos. *Punctuation in Mathematical Language*. 2020. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Punctuation, independently of the language we are considering, is one of the most important grammar areas, since it is essential for understanding a text. In mathematical language, the correct use of the punctuation is also very important. In this point of view, the present study aims to present different situations in which a mathematical expression should be punctuated, and the reasons why these punctuations are used. Initially, some grammar concepts of mathematical language are presented to support this study, such as dialects, words formation processes, reading styles and characters that indicate punctuation. Afterwards, a parallel is made with certain cases that require punctuation in portuguese language. In this context, similarities are found between situations that need punctuation in these two languages. When these similarities are analyzed, should be noted that the use of an appropriate punctuation makes certain phrases clearer, thus avoiding noise, ambiguity and incorrect interpretations. In order to eliminate certain kinds of noise, using some pontuation, we analyze ambiguous mathematical expressions and their causes; we also observed the characteristics and structures of expressions that may have their meaning changed, if its punctuation is missing or made incorrectly. In these cases, besides the ambiguity and the altered meaning, it can cause mathematically inconsistent expressions, and it is one more situation where the correct use of punctuation is necessary.

Keywords: Punctuation. Mathematical Language Grammar. Interpretation of Expressions.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO...	9
1	**CONCEITOS BÁSICOS DA GRAMÁTICA DA LINGUAGEM MATEMÁTICA**...	13
1.1	**Formação de Palavras e Notações**...	14
1.1.1	<u>Formação de Palavras</u>..	14
1.1.2	<u>Casos Particulares de Notações.</u>..	17
1.2	**Escrita de uma expressão**...	21
1.3	**Leitura e compreensão de uma expressão**..	25
1.4	**Pontuação**..	27
2	**UTILIZAÇÃO DA PONTUAÇÃO EM LINGUAGEM MATEMÁTICA**..	31
2.1	**Eliminação de ambiguidades**..	31
2.2	**Alteração do sentido de uma sentença**..	36
2.3	**Correção de expressões matematicamente incoerentes**.............................	41
	CONSIDERAÇÕES FINAIS..	46
	REFERÊNCIAS..	48
	APÊNDICE A – Sinais gráficos de pontuação *versus* letras..........................	50
	APÊNDICE B – Prioridade entre as operações lógicas.................................	53

INTRODUÇÃO

Durante meus estudos da Matemática e dando aulas no Ensino Básico em rede pública e privada, uma situação sempre se repetiu: a grande dificuldade dos alunos em interpretar termos matemáticos básicos, e consequentemente a ineficiência na apresentação de resoluções de problemas. Vale ressaltar que muitos alunos não apresentam dificuldades em resolver algoritmos; as dificuldades aparecem já na leitura e interpretação do problema, o que ocasiona um prejuízo na identificação da melhor maneira de resolução.

Durante a escolha do tema do trabalho final do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), fui apresentado ao grupo Mate$_{\text{Gra}}$mática[1], o qual estuda a gramática da linguagem matemática. Ao iniciar minha participação no grupo, comecei a compreender que a linguagem matemática possui uma gramática que estabelece determinadas regras de escrita nessa linguagem (assim como qualquer língua natural, como o português, o inglês ou o espanhol, presentes na grade comum curricular). No estudo da gramática da linguagem matemática, analisamos letras, palavras (bem como seus processos de formação), classes gramaticais, figuras de linguagem, pontuação e outros elementos de uma estrutura gramatical, assim como no português. Uma boa compreensão desses elementos auxilia na interpretação de problemas e consequentemente na sua resolução. Neste contexto, o intuito deste trabalho é abordar especificamente a pontuação em linguagem matemática de maneira mais ampla, independentemente do contexto de uma sala de aula. Tratamos, ao longo do texto, dos sinais gráficos utilizados para tal, em quais situações podem (e devem) ser utilizados, e como a pontuação influencia na leitura e na interpretação de expressões, traçando também paralelos com a pontuação na língua portuguesa.

Inicialmente, precisamos entender o que é, e como se faz a pontuação, na língua portuguesa, para traçarmos um paralelo com a linguagem matemática. Segundo Bechara (2009, p. 514):

> [...] pontuação é constituída por uns tantos sinais gráficos assim distribuídos: os essencialmente *separadores* (vírgula [,], ponto e vírgula [;], ponto final [.], ponto de exclamação [!], reticências [...]), e os sinais de comunicação ou "mensagem" (dois pontos [:], aspas simples [' '], aspas duplas [" "], o travessão simples [–], os parênteses [( )], os colchetes ou parênteses retos [[ ]], a chave aberta [{], a chave fechada [}]).

Ao analisarmos os sinais de pontuação listados por Bechara, percebemos que alguns deles são recorrentes nos nossos estudos em sala de aula no ensino da Matemática, como

---

[1] http://mategramatica.ime.uerj.br

parênteses, vírgulas, dois pontos, pontos de exclamação e reticências, mas nem todos são utilizados como pontuação na linguagem matemática. Esta pontuação é feita por meio de pares de parênteses ("(" e ")"), colchetes ("[" e "]") e chaves ("{" e "}") (CUNHA; VELASCO, 2019), ou por vírgulas e pontos e vírgulas (utilizadas, por exemplo, numa listagem de elementos), e reticências (utilizadas para indicar que uma determinada ideia se prolonga). Um detalhe fica evidente nos três tipos de pontuação comentados incialmente: eles sempre ocorrem aos pares. Um único parêntese (ou colchete ou chave) não forma uma pontuação, assim como, em certas circunstâncias, esses sinais gráficos, mesmo aos pares, não representam uma pontuação. Eles podem ser empregados em tipos específicos de notação como, por exemplo, em uma notação funcional, e em outros casos que serão apresentados ao longo do texto e no Apêndice A.

Agora que já apresentamos quais são os caracteres que são utilizados para pontuar as sentenças matemáticas, precisamos entender quando utilizá-los, e para isso, analisaremos outra definição de pontuação em nossa língua:

> Sinais de pontuação são recursos prosódicos que conferem às orações ritmo, entoação e pausa, bem como indicam limites sintáticos e unidades de sentido. Na escrita, substituem, em parte, o papel desempenhado pelos gestos na fala, garantindo coesão, coerência e boa compreensão da informação transmitida. (INFO ESCOLA, 2020)

Nessa definição, percebemos a ideia de comunicação, coerência e coesão. Logo, é possível afirmar que a pontuação é aplicada para uma melhor nitidez, fluência e compreensão do texto, dando sentido mais claro a uma frase, evitando possíveis ruídos como, por exemplo, interpretações ambíguas.

Para ilustrar, consideremos um exemplo de pontuação na língua portuguesa: digamos que nosso objetivo seja escrever uma frase que ilustre a situação em que João esteja sendo avisado de que o dono da empresa chegou a um determinado local. Uma possibilidade é escrevermos a seguinte frase: "João, o dono da empresa chegou.". Nota-se aqui a utilização da vírgula para dar o sentido e a entonação adequados. Caso quiséssemos escrever uma outra situação, em que João é o dono da empresa, e que ele chegou a um determinado local, poderíamos utilizar as mesmas palavras e postas na mesma ordem, porém utilizando a pontuação de outra maneira: "João, o dono da empresa, chegou.". Neste caso, "o dono da empresa" é um aposto que especifica uma característica de João, sendo necessário o uso de duas vírgulas para indicar que é um aposto. Por sua vez, caso não utilizássemos pontuação alguma (exceto o ponto final), obteríamos a frase "João o dono da empresa chegou.". É possível notar a existência de ambiguidade, pois não está claro se João está sendo avisado de que o dono da empresa chegou, ou se João é o dono da empresa, e ele chegou. Sendo assim, embora esta última frase seja ambígua, é possível pontuá-la de modo a obter duas novas frases (as duas dadas inicialmente) e que possuem sentidos distintos.

Em linguagem matemática, o uso da pontuação também é necessário, tanto para escrever quanto para ler corretamente (com a entonação adequada) certas expressões matemáticas. Por exemplo, para escrever, em linguagem matemática, a frase "a união do conjunto A com a interseção dos conjuntos B e C", escrevemos "$A \cup (B \cap C)$", tendo em vista que a operação de união é binária e como não conhecemos o seu segundo termo (isto é, o elemento representado como resultado da operação de interseção dos conjuntos B e C), o escrevemos, através da operação que o produz, entre parênteses. Porém, caso quiséssemos escrever a frase "a interseção da união dos conjuntos A e B, com o conjunto C", deveríamos escrever "$(A \cup B) \cap C$". Novamente, utilizamos a pontuação para definir qual o conjunto (isto é, o resultado da união dos conjuntos A e B) será utilizado na interseção com o conjunto C. Por sua vez, caso não utilizássemos a pontuação, obteríamos a frase "$A \cup B \cap C$". Nota-se que temos uma frase ambígua, visto que, como não existe estabelecida uma ordem de prioridade entre as operações de união e de interseção, não é possível interpretá-la de modo adequado. Contudo, embora esta seja uma expressão ambígua, é possível pontuá-la de modo a obter duas novas expressões (as duas dadas anteriormente) e que possuem sentidos claros e distintos.

Analisando agora a oração "Calma, não vamos brigar!", notamos que ela já possui um sentido claro: "é pedido calma a alguém e que não se comece uma briga". Embora não exista ambiguidade, uma pontuação equivocada altera o seu sentido. Por exemplo, "Calma não, vamos brigar!", daria a entender que "não se quer calma e que os participantes da conversa devam brigar".

Da mesma forma, em linguagem matemática, a expressão "$10 + (3 \times 2)$" possui significado claro (a saber, "a soma de 10 com o produto de 3 por 2"), não sendo, portanto, ambígua. Nota-se que, devido ao critério de prioridade das operações (usualmente conhecido como PEMDAS[2]), como a multiplicação é prioritária em relação à adição, essa expressão tem o mesmo significado que "$10 + 3 \times 2$", sendo consequentemente interpretada exatamente da mesma forma que a primeira. Por outro lado, caso queiramos escrever "o produto da soma de 10 com 3, por 2", devemos alterar a pontuação da expressão original, e escrever "$(10 + 3) \times 2$". Nota-se que, neste caso, a pontuação é obrigatória, visto que, devido ao critério PEMDAS, a ausência de pontuação nos levaria ao mesmo significado da expressão inicial, que

[2] PEMDAS (a abreviação de Parênteses, Expoente, Multiplicação/Divisão, Adição/Subtração) é a convenção utilizada para indicar a ordem que devemos seguir para resolver uma expressão aritmética (tratada mais detalhadamente na página 49).

é diferente do significado agora desejado. Em suma, embora a expressão original já possua um sentido claro, uma pontuação equivocada poderia alterar completamente o seu sentido.

Utilizando as ideias acima, temos que a pontuação na linguagem matemática, assim como em uma língua natural, permite dar maior clareza à sentença, seja para eliminar ambiguidades, seja para mudar sentidos de uma frase. Além disso, em linguagem matemática, foi encontrado um terceiro caso: corrigir sentenças matematicamente incoerentes.

Sendo assim, este trabalho trata de determinados casos de pontuação em linguagem matemática, em conteúdos relacionados à Matemática do Ensino Básico, e visa identificar algumas regras gramaticais de pontuação (que estão destacadas ao longo do texto). Inicialmente, no Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos fundamentais sobre a gramática da linguagem matemática, que auxiliam na escrita e na leitura de expressões, completando com uma análise de como a pontuação interfere nos significados de tais expressões. Por sua vez, no Capítulo 2, apresentamos os casos onde é necessário o uso correto da pontuação, em linguagem matemática, para evitar ambiguidades e alteração do sentido de expressões, ou corrigir expressões matematicamente incoerentes. Este trabalho conta ainda com dois apêndices, em que o primeiro trata de sinais gráficos utilizados na língua portuguesa e que configuram, em determinadas situações, letras na linguagem matemática (Apêndice A); e o segundo, aborda a prioridade entre as operações lógicas (Apêndice B).

1 **CONCEITOS BÁSICOS DA GRAMÁTICA DA LINGUAGEM MATEMÁTICA**

Como este estudo tem por objetivo estudar a pontuação na linguagem matemática, precisamos primeiramente estabelecer algumas regras gerais da gramática desta linguagem. Do mesmo modo que na língua portuguesa, a linguagem matemática possui letras, alfabeto, palavras, vocabulário, classes gramaticais, formação de palavras e regras de pontuação (CUNHA; VELASCO, 2019).

Quando aprendemos a gramática da nossa língua na escola, somos apresentados a sua norma culta. Com o passar do tempo, conhecendo outras pessoas e lugares, percebemos variações de vocabulário, assim como das aplicações de suas regras gramaticais ou na maneira de se expressar. A essa “[...] variedade regional de uma língua ou modo de falar restrito e próprio de uma comunidade linguística menor, pertencente a outra maior [...]” (DIALETO, 2020) denomina-se *dialeto*. Tendo a Matemática grandes áreas de atuação e possuindo diversas subáreas, encontramos diferenças substanciais em relação à linguagem matemática utilizada por elas. Sendo assim, observamos nesta linguagem a presença de alguns dialetos, como o *Aritmetiquês*, o *Algebrês*, o *Logiquês*, o *Geometriquês*, entre outros (CUNHA; VELASCO, 2019). Cada um desses dialetos representa a linguagem matemática utilizada em determinada área da Matemática: Aritmética, Álgebra, Lógica e Geometria, respectivamente. É importante ressaltar que os dialetos possuem suas regras particulares, porém eles se mesclam em diversos momentos.

Assim como na língua portuguesa, a linguagem matemática possui um *alfabeto* que é constituído pelas letras dos alfabetos latino e grego (nas formas maiúscula e minúscula), pelos algarismos e pelos demais símbolos matemáticos. Todos esses elementos são denominados *letras* da linguagem matemática, como “r”, “β”, “3”, “$\|$” e “$\exists$”, por exemplo. Por sua vez, uma construção com letras do alfabeto matemático, e que possua algum sentido matemático, é denominado *palavra*. Por exemplo, “ab” (o produto de duas constantes reais desconhecidas, a e b), “$\sqrt{2}$” (a raiz quadrada de 2) e “$\sim p$” (a negação de uma proposição lógica p) são palavras da linguagem matemática.

Na língua portuguesa, podemos combinar determinadas palavras, que juntas possuem um significado único (como, por exemplo, “de coragem”, que possui o mesmo significado de “corajoso”); essas combinações são denominadas *locuções*. A linguagem matemática também possui locuções como, por exemplo, “$a + b$”, que significa “a soma de duas constantes reais desconhecidas a e b". Em alguns casos, as locuções são utilizadas para representar identificadores. Um *identificador* é uma palavra ou locução, que indica uma das diferentes formas (por exemplo, por meio de operações) de se obter um objeto em questão (CUNHA; VELASCO, 2019). Por exemplo, o número "20" possui, dentre os seus vários identificadores, as locuções "$16 + 4$" e "4×5", ambas formadas por três palavras, sendo duas delas numerais e a outra representativa de um operador, e que significam, respectivamente, "a soma de 16 com 4" e "o produto de 4 por 5". Vale ressaltar que nem todo identificador é uma locução. Por exemplo, uma reta r, que passa pelos pontos distintos A e B, pode ser descrita usando um identificador, a palavra "$\overleftrightarrow{AB}$".

Além destes, outros conceitos básicos são descritos a seguir, como processos de formação de palavras e notações (Seção 1.1), as diferentes formas de se ler e escrever nesta linguagem (Seções 1.2 e 1.3, respectivamente) e a pontuação (Seção 1.4).

1.1 **Formação de palavras e notações**

Ao analisarmos as palavras presentes na linguagem matemática, como as apresentadas anteriormente, é possível perceber que ocorrem processos de formação distintos. Algumas palavras inclusive são constituídas por uma única letra, como "3", "a", "$\parallel$" e "p" que significam respectivamente, "a quantidade três" (no *Aritmetiquês*), "uma constante real desconhecida" (no *Algebrês*), "a relação de paralelismo" (no *Geometriquês*) e "uma proposição lógica simples" (no *Logiquês*). Assim como na língua portuguesa, é possível formar novas palavras a partir de uma ou mais palavras. As subseções a seguir tratam, de modo mais detalhado, de dois processos de formação de palavras (Subseção 1.1.1) bem como de alguns casos particulares de notações (Subseção 1.1.2).

1.1.1 Formação de palavras

Esta subseção trata de dois processos de formação de palavras presentes na linguagem matemática: a derivação por afixação e a composição por justaposição. Exemplos desses processos de formação são, respectivamente, as palavras a^3 e 72.

Na *derivação por afixação*, novas palavras são construídas a partir de uma palavra, denominada *primitiva*, por meio da inserção de afixos. Na língua portuguesa, existem dois tipos de afixos: os prefixos (como em <u>in</u>feliz) e os sufixos[3] (como em feliz<u>mente</u>). Além desses dois, na linguagem matemática, foram identificados outros tipos de afixos (CUNHA; VELASCO, 2019), como descrito a seguir.

a) *Prefixos* são afixos que se <u>antepõem</u> à palavra primitiva. Por exemplo:
   - "$\sim p$" é uma palavra formada pelo acréscimo do prefixo de negação "$\sim$" à palavra "p", significando "a negação da proposição lógica p";
   - "-3" é uma palavra formada pelo acréscimo do prefixo "$-$" (indicativo de "simétrico" ou "oposto") à palavra "3", significando "o simétrico de 3";

b) *Sufixos*[4] são afixos que se <u>pospõem</u> à palavra primitiva. Por exemplo:
   - "5!" é uma palavra formada pelo acréscimo do sufixo "!" (indicativo de "fatorial") à palavra "5", significando "o fatorial de 5";
   - "a^3" é uma palavra formada pelo acréscimo do sufixo superior "3" (indicativo de "potência") à palavra "a", significando "o cubo de uma constante real a";

c) *Sobrefixos* são afixos colocados <u>em cima</u> da palavra primitiva. Por exemplo:
   - "$\neq$" e "$\nexists$" são palavras formadas pelo acréscimo do sobrefixo de negação "$/$" às palavras "$=$" e "$\exists$", significando "o sinal de diferente" (isto é, "não igual") e "não existe", respectivamente;

d) *Suprafixos* são afixos colocados <u>acima</u> da palavra primitiva. Por exemplo:
   - "$\overline{AB}$" é uma palavra formada pelo acréscimo do suprafixo "$-$" à palavra "AB", significando "a medida do segmento de reta de extremos nos pontos A e B";

---

[3] Na linguagem matemática (assim como na língua portuguesa), também existe o processo de formação por afixação denominado *parassíntese*, onde são afixados pelo menos dois afixos à palavra primitiva. Porém, não abordaremos este assunto neste trabalho.

[4] Em alguns casos, os sufixos podem ser inferiores, como em "x_2" (significando "a segunda variável de uma sequência de variáveis") ou superiores, como em "x^2" (*significando* "o quadrado de uma variável real x"). Nos dois casos, o afixo "2" foi acrescido à palavra "x", sendo que no primeiro ele foi afixado abaixo da palavra e no segundo, acima.

- "$3{,}2\overline{6}$" é uma palavra formada pelo acréscimo do suprafixo "$-$" (indicativo de período) a parte da palavra (justamente o período) "$3{,}26$", significando que "6 é o período da dízima periódica composta $3{,}2666\cdots$;

e) *Infrafixos* são afixos colocados abaixo da palavra primitiva. Por exemplo:

- "$\geq$" é uma palavra formada pelo acréscimo do infrafixo "$-$" (indicativo de igualdade) à palavra "$>$", significando "maior do que ou igual a";
- $\sum\limits_{1\leq i\leq n}$ é uma palavra formada pelo acréscimo do infrafixo "$1 \leq i \leq n$" (indicativo de intervalo de somação) à palavra "Σ", significando "uma soma de n termos";

f) *Circunfixos* são afixos descontínuos, ou que circundam parcialmente ou totalmente[5] a palavra primitiva. Por exemplo:

- "$|5|$" é uma palavra formada pelo acréscimo do circunfixo "$|\ |$" (um afixo descontínuo, indicativo de "valor absoluto" ou "módulo") à palavra "5", significando "o valor absoluto do número 5";
- "$\sqrt{3}$" é uma palavra formada pelo acréscimo do circunfixo ", (indicativo de raiz quadrada), que circunda parcialmente a palavra "3", significando "a raiz quadrada de 3".

Por outro lado, a *composição por justaposição* ocorre por meio da junção de duas ou mais palavras, sem a perda de nenhum de seus elementos. Na língua portuguesa[6], por exemplo, a palavra "passatempo" é obtida por meio da justaposição das palavras "passa" e "tempo". Por sua vez, na linguagem matemática, encontram-se exemplos de palavras formadas por justaposição, e em diferentes dialetos. No *Aritmetiquês,* no *Algebrês* e no *Geometriquês*, encontramos respectivamente "456" (a justaposição das palavras "4", "5" e "6", que denominam quantidades inteiras conhecidas), significando "quatrocentos e cinquenta e seis" e que corresponde à "soma de quatro centenas, com cinco dezenas e com seis unidades"; "ab" (a

---

[5] Circunfixos que envolvem totalmente uma palavra primitiva são encontrados apenas em assuntos tratados no Ensino Superior, e que não serão, portanto, abordados neste trabalho.

[6] Na língua portuguesa, também ocorre o processo de formação de palavras por justaposição com elemento de ligação (hífen "-"), como na palavra cavalo-marinho. E, em linguagem matemática, a representação decimal de números racionais é uma palavra formada por justaposição, com elemento de ligação (","), separando a parte inteira da parte fracionária. Por exemplo, no número "2,5", a vírgula faz a ligação entre a parte inteira, "2" ("dois") e a parte fracionária, "5" ("cinco décimos").

justaposição das palavras "a" e "b", que denominam constantes reais desconhecidas), significando "o produto de a por b"; e "AB" (a justaposição das palavras "A" e "B", que denominam pontos), significando "o segmento de reta de extremos nos pontos distintos A e B".

1.1.2 Casos Particulares de Notações

Algumas palavras (ou locuções) possuem estruturas específicas em linguagem matemática. Essas escritas são denominadas *notações*, que são palavras (ou locuções) com um significado próprio em determinado contexto, e que admitem os seus próprios métodos de formação. Dentre as notações, destacamos três tipos: a funcional, a sequencial e a matricial. Embora essas notações contenham parênteses, colchetes ou chaves, nesses casos, **tais caracteres não possuem a função de pontuação**.

A *notação funcional*, como o próprio nome indica, tem origem na notação que expressa "a imagem de um elemento x por uma função f", isto é, a palavra "$f(x)$". Esse tipo de notação é formado por uma palavra indicando a propriedade ou a característica do objeto (ou lista de objetos), seguida do nome do objeto (ou da lista de objetos) entre parênteses (CUNHA; VELASCO, 2019). Vale ressaltar que, mesmo tendo origem no *Algebrês*, encontramos este tipo de notação em diversos dialetos. Como exemplo de notações funcionais, podemos citar: "$\det(A)$", significando "o determinante de uma matriz A"; "$m(\angle ABC)$", cujo significado é "a medida do ângulo $\angle ABC$"; "$d(P,Q)$", significando "a distância entre os pontos P e Q"; e "$Q(p,q)$", significando "uma proposição composta Q, constituída pelas proposições simples p e q".

Por sua vez, uma *notação sequencial* é uma listagem de elementos, circundados por parênteses, colchetes ou chaves, e separados por vírgulas ou pontos e vírgulas (estes últimos, no caso de os elementos serem números decimais, conforme visto mais adiante). Dependendo dos caracteres que utilizarmos, a notação sequencial possui um significado diferente. Por exemplo, as locuções "$\{2,3\}$", "$[2,3]$" e "$(2,3)$" são constituídas pela mesma sequência de números e possuem significados distintos (a saber, dependendo do contexto, podem significar respectivamente um determinado conjunto, um certo intervalo fechado e um dado par ordenado). Devido a essa diversidade de significados, estudamos a seguir diferentes maneiras de se escrever uma notação sequencial.

Notações sequenciais escritas utilizando chaves ocorrem, por exemplo, para indicar a listagem dos elementos que pertencem a um determinado conjunto. Por exemplo, nos conjuntos $E = \{primavera, verão, outono, inverno\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e $L = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$, listamos[7] os elementos dos conjuntos das estações do ano, dos números naturais e das letras do alfabeto da língua portuguesa, respectivamente. Nos conjuntos $\mathbb{N}$ e L, percebemos o uso de uma pontuação (as reticências, "..."), porém, nesses dois conjuntos, as reticências possuem funções distintas. No caso do conjunto dos números naturais, um conjunto infinito, elas são utilizadas com o intuito de indicar a continuação dos elementos do conjunto. Por sua vez, no conjunto das letras do alfabeto, um conjunto finito, as reticências são empregadas para omitir alguns dos seus elementos, dada a vasta quantidade de elementos que ele possui, dando uma maior clareza a escrita.

Diferentemente das chaves, os colchetes são utilizados em várias situações compondo notações sequenciais (não configurando, portanto, pontuações). Uma das formas em que encontramos os colchetes é em intervalos numéricos, os quais sinalizam se o elemento da fronteira pertence ou não ao intervalo dado. Vejamos as diferentes maneiras de se representar os intervalos e suas leituras.

Se o colchete estiver com sua abertura voltada para o interior do intervalo, temos que o extremo adjacente a ele pertence ao intervalo, e diz-se que esse é um intervalo fechado e limitado nesse extremo. Caso o colchete esteja em posição invertida (isto é, com sua abertura voltada para o exterior do intervalo), temos que o extremo adjacente a ele não pertence ao intervalo, e diz-se que esse é um intervalo aberto e limitado nesse extremo. Nesta situação, podemos substituir os colchetes "invertidos" por parênteses, como apresentado mais adiante. Seguem alguns exemplos:

- $[0, 2]$, intervalo dos números reais de 0 até 2;
- $[3, 5[$, intervalo dos números reais a partir de 3 e inferiores a 5;
- $]-3, 5]$, intervalo dos números reais superiores ao simétrico de 3 e no máximo 5;
- $]7, 10[$, intervalo dos números reais compreendidos entre 7 e 10.

[7] Uma outra forma de se caracterizar os elementos de um conjunto é feita por meio da utilização de uma frase ou sentença matemática indicando uma determinada propriedade satisfeita por todos os elementos desse conjunto. Como tal situação não condiz com uma notação sequencial, não a tratamos neste momento, mas sim, no Apêndice A.

Uma outra situação onde encontramos os colchetes, constituindo notações sequenciais, é indicando o produto misto[8] de vetores em $\mathbb{R}^3$. Nesse sentido, "$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$" significa "o produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$".

Assim como os colchetes, os parênteses também são utilizados em notações sequenciais, como em sequências numéricas (progressões aritméticas e geométricas, por exemplo) e em intervalos numéricos, entre outros casos.

Como exemplos de progressões[9], podemos citar $(2{,}1;\ 5{,}1;\ 8{,}1;\ 11{,}1)$ e $(6, 18, 54, 162, \dots)$. A primeira é uma progressão aritmética finita, de razão 3 e primeiro termo $2{,}1$. Já a segunda, é uma progressão geométrica infinita, de razão 3 e primeiro termo 6. Vale ressaltar que, no primeiro exemplo, os elementos estão separados por pontos e vírgulas, tendo em vista que seus elementos são números decimais, e para dar uma melhor clareza na separação dos termos, é utilizado esse tipo de pontuação[10]. Nota-se que, no segundo caso, novamente é feito o uso das reticências (uma pontuação) indicando a continuação da listagem dos elementos.

Como dito anteriormente, nos intervalos numéricos, os parênteses (assim como os colchetes invertidos) indicam que as fronteiras adjacentes a eles não estão incluídas no intervalo. Sendo assim, podemos reescrever os exemplos já apresentados, da seguinte maneira: $[3, 5)$, $(-3, 5]$ e $(7, 10)$. No entanto, no caso de intervalos numéricos ilimitados (superiormente ou inferiormente), é obrigatório o uso dos parênteses no extremo no qual tal intervalo é ilimitado, não sendo possível o uso dos colchetes invertidos, onde o intervalo for ilimitado. Por exemplo:

- $(7, +\infty)$, intervalo dos números reais superiores a 7;
- $[3, +\infty)$, intervalo dos números reais a partir de 3;
- $(-\infty, 5)$, intervalo dos números reais inferiores a 5;
- $(-\infty, 7]$, intervalo dos números reais no máximo 7.

Outras situações em que a notação sequencial (com uso dos parênteses) ocorre são na escrita de pontos e vetores (por meio de suas coordenadas num sistema cartesiano), e para identificar planos (por meio de três de seus pontos não colineares). Para representar pontos em

---

[8] O *produto misto* é um número real calculado por meio do determinante de uma matriz constituída pelas respectivas coordenadas de três vetores.

[9] Alguns autores nomeiam as progressões sem o uso das notações sequenciais, simplesmente listando os seus elementos, sem o uso dos parênteses.

[10] É aconselhado realizar este procedimento de troca das vírgulas por pontos e vírgulas, sempre que houver uma listagem cujos elementos sejam números representados na forma decimal.

um sistema cartesiano, utiliza-se uma notação sequencial cuja lista de elementos é constituída pelas coordenadas desse ponto. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, a locução "$(2,3)$" representa um ponto de abscissa 2 e ordenada 3. Por sua vez, "$(1,3,-4)$" representa um ponto[11] de $\mathbb{R}^3$ de abscissa 1, ordenada 3 e cota -4. Na escrita de um plano determinado por três pontos não colineares, a lista de objetos da notação sequencial é formada por estes três pontos. Sendo assim, (A,B,C) descreve o plano determinado pelos pontos não colineares A, B e C.

Por fim, uma *notação matricial* é utilizada para escrever elementos ordenados em linhas e colunas (como em uma tabela), sem separação por vírgulas, e circundados por parênteses ou colchetes. Com este tipo de notação, descrevemos matrizes e coeficientes (ou números) binomiais. Uma matriz pode ser escrita, de modo explícito, por meio de uma notação matricial, que indica quais são os seus elementos e como eles estão dispostos nas linhas e colunas. Por exemplo, caso saibamos que os elementos da sua primeira linha são 3 e 0 (nesta ordem) e os da segunda linha são -4 e 3 (também nesta ordem), escrevemos tal matriz por meio da notação matricial $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. Nesse caso, podemos ainda empregar os parênteses ao invés dos colchetes, escrevendo $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, que é sinônima à anterior, e descreve, portanto, a mesma matriz.

Um outro exemplo de notação matricial é a escrita de coeficientes binomiais. Dados dois números naturais n e p, com $n \geq p$, denomina-se por $\binom{n}{p}$, o coeficiente binomial, que é calculado pela combinação de n tomada p a p (ou seja, $C_{n,p}$).

Analisando os exemplos apresentados nesta seção, notamos que determinadas palavras (ou locuções) se escrevem exatamente da mesma maneira, mas que, segundo o contexto em que estão inseridas, possuem significados diferentes não correlacionados. Tais palavras são denominadas *homônimas*[12]. Como exemplo, a locução "(x,y)" pode indicar tanto um determinado ponto no plano cartesiano quanto um certo intervalo aberto. Conforme dito anteriormente, no primeiro caso, os números x e y indicam as coordenadas desse ponto, enquanto que, no segundo, estabelecem os extremos de tal intervalo. Um outro exemplo é dado pelo termo "$\binom{n}{p}$", que pode indicar tanto uma matriz formada por duas linhas e uma coluna quanto um coeficiente binomial. No primeiro caso, "n" é a entrada da primeira linha e primeira coluna da matriz, e "p" é a entrada da sua segunda linha e primeira coluna; já no segundo, n e

[11] Vale ressaltar que, as locuções $(2,3)$ e $(1,3,-4)$ também são indicativas de coordenadas de um vetor em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

[12] Em língua portuguesa, também encontramos palavras homônimas. Por exemplo, a palavra "manga" possui diferentes significados, dentre eles um determinado fruto ou parte de uma roupa.

p são os parâmetros da combinação. Enfatizamos que, nessas ocasiões, só é possível distinguir o significado da palavra homônima pelo contexto em que estão inseridas.

Vale ressaltar que palavras (ou locuções) homônimas não ocorrem somente com estes três tipos de notações. Por exemplo, a palavra "AB" (uma palavra formada por justaposição, como já tratado na Subseção 1.1.2) pode significar tanto "o segmento de reta de extremos nos pontos A e B" quanto "o produto das matrizes A e B".

Assim como estudamos que determinada palavra (ou locução) pode possuir significados distintos, é possível encontrar palavras (ou locuções) distintas que possuem exatamente o mesmo significado; neste caso, elas são ditas *sinônimas*. Por exemplo, sendo A uma matriz, as palavras "$|A|$" e "$\det(A)$"' possuem precisamente o mesmo significado, a saber "o determinante da matriz A". Sendo assim, neste contexto, essas palavras são sinônimas. Outro caso, é a representação de "um plano determinado por três pontos não colineares" (por exemplo, A, B e C), que pode ser escrito tanto em notação funcional, "$pl(A, B, C)$", quanto em notação sequencial, "(A, B, C)" ou ainda pela palavra "(ABC)", que é formado pela justaposição dos nomes dos três pontos, seguida por uma circunfixação. Portanto, esses três termos, são todos sinônimos.

1.2 **Escrita de uma expressão**

Tanto para se escrever quanto para se ler, em linguagem matemática, em geral, observa-se uma dificuldade maior do que na língua portuguesa. Um dos motivos disto é que não estamos imersos, no dia a dia, em um ambiente que se comunica fundamentalmente em linguagem matemática. Em outros termos, exceto pelos numerais e porcentagem (entre outros conceitos), esta linguagem não está presente no cotidiano das pessoas, não sendo portanto utilizada em e-mails, campanhas publicitárias, trocas de mensagem e tampouco aparecem no noticiário. Por exemplo, não é usual encontrarmos as palavras "$\forall$" e "$\exists$" no dia a dia. Além da falta de contato, a linguagem matemática não possui uma oralidade, isto é, ela necessita de uma outra língua para ser verbalizada (CUNHA; VELASCO, 2019).

A iniciação na escrita em linguagem matemática ocorre já nos anos iniciais na escola, quando aprendemos a escrever números, sendo esses nomeados por numerais formados por um ou mais algarismos indo-arábicos. Os numerais que nomeiam quantidades conhecidas são palavras formadas por algarismos indo-arábicos (a saber, $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$), sendo que numerais relativos a quantidades a partir de 10 são palavras formadas pela justaposição de algarismos (como em 10, 25 e 457, por exemplo), segundo o sistema de numeração decimal. Além dos números, somos apresentados a conjuntos de elementos (que podem ser números ou não), sendo esses conjuntos usualmente nomeados por letras maiúsculas do alfabeto latino (possivelmente cursiva ou com algum estilo específico). Por exemplo, o conjunto dos números naturais é denominado pela letra $\mathbb{N}$ e o conjunto das cores primárias pode ser nomeado C.

Particularmente com respeito a conjuntos, temos as relações entre eles (inclusão) e entre elementos e conjuntos (pertinência). Essas relações são escritas respectivamente por: $\subseteq$ e $\in$. Sendo assim, uma relação de inclusão de conjuntos como, por exemplo, "o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos números racionais" (ou "todo número natural é racional"), se escreve "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$". Da mesma forma, uma relação de pertinência, como "o número três pertence ao conjunto dos naturais" (ou "três é um número natural"), se escreve "$3 \in \mathbb{N}$".

Determinadas relações geométricas entre alguns objetos também possuem certas palavras em linguagem matemática que as descrevam, tais como paralelismo "$\parallel$", perpendicularismo "$\perp$" e congruência "$\equiv$", por exemplo. Utilizamos a representação de paralelismo e perpendicularismo quando relacionamos duas retas, uma reta e um plano e dois planos. Por exemplo, as frases, "as retas r e s são paralelas", "a reta r é perpendicular ao plano α" e "os planos α e β são paralelos", são escritas, respectivamente, como "$r \parallel s$", "$r \perp \alpha$" e "$\alpha \parallel \beta$". Por sua vez, a relação de congruência é verificada em uma maior variedade de situações, como em ângulos, segmentos ou polígonos. Por exemplo, para escrever que "dois triângulos (digamos, ABC e DEF) são congruentes", escrevemos a frase "$ABC \equiv DEF$".

As escritas de variáveis e as constantes numéricas desconhecidas são usualmente realizadas por palavras formadas por uma única letra, na linguagem matemática, que variam conforme o conjunto numérico a que pertencem. Variáveis inteiras são frequentemente nomeadas por i e j; já as variáveis reais costumam ser escritas como x e y. Por sua vez, as constantes inteiras desconhecidas, geralmente, são nomeadas por m e n; por outro lado, as constantes desconhecidas reais são usualmente nomeadas como a e b (CUNHA; VELASCO, 2019). As diferentes maneiras apresentadas auxiliam na leitura (logo, na interpretação) de uma expressão.

Até o presente momento, escrevemos expressões envolvendo os nomes de objetos matemáticos e suas relações. Vejamos agora como escrever expressões que envolvam objetos por meio de seus identificadores. Por exemplo, para escrever a frase "o cubo de um número natural", precisamos representar um número natural, digamos por n, e acrescentar a esta palavra o sufixo superior "3", indicativo de "cubo", obtendo assim a palavra "n^3". Caso queiramos exprimir "o produto de 3 por n", usamos as mesmas palavras (3 e n), porém, neste caso, utilizamos a justaposição[13], originando assim a palavra "$3n$". Vale observar que "$3n$" possui ainda um outro significado, "o triplo de n", fazendo dela uma palavra polissêmica[14]. No entanto, nesta outra interpretação, o processo de formação é por prefixação, onde "3" é o prefixo que significa "triplo".

Por outro lado, alguns identificadores, descritos em forma de locução, envolvem operações. Neste caso, são utilizadas palavras indicativas da operação em questão, sejam elas aritméticas (como adição ($+$), subtração ($-$), multiplicação ($\times$) e divisão ($\div$)), entre conjuntos (como união ($\cup$) e interseção ($\cap$)) ou lógicas (como conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), condicional ($\rightarrow$) e bicondicional ($\leftrightarrow$)). Os exemplos a seguir descrevem algumas dessas situações. Em "a diferença entre 12 e 5", percebe-se a ideia operacional de subtração (pois a diferença corresponde ao resultado da subtração). Sendo assim, a frase "$12 - 5$", possui o significado desejado. Por sua vez, "a interseção dos conjuntos dos números naturais e dos números racionais", se escreve "$\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$". De modo semelhante, a sentença "q ocorre à condição de p" se escreve "$p \rightarrow q$".

Geralmente, há uma palavra, em linguagem matemática, que descreve alguns conceitos geométricos (como já visto nos casos de paralelismo e perpendicularismo, escritos por "$\parallel$" e "$\perp$", respectivamente). No entanto, nem sempre isso acontece como, por exemplo, a secância (propriedade de ser secante, tratado mais adiante) entre dois planos. Porém, mesmo não havendo palavras indicativas de determinado conceito, este ainda pode ser descrito em linguagem matemática, utilizando sua definição.

Para ilustrar, lembramos inicialmente que dois planos são ditos *secantes* quando a interseção entre ambos for uma reta. Assim, ao escrever, em linguagem matemática, o que são planos secantes, precisamos dizer que são dois planos, digamos denominados "α" e "β", e que possuem determinada propriedade. Para isso, escreve-se uma expressão com a seguinte estrutura:

---

[13] Em *Algebrês*, a justaposição é indicativa de produto, quando envolver pelo menos uma quantidade desconhecida.

[14] Propriedade de uma palavra ou locução que possui vários sentidos correlacionados (CUNHA; VELASCO, 2019).

“lista de objetos $\mid$ propriedade(s) que os relaciona(m)”.

A palavra “|” significa “tal que” (ou “tais que”, “que” ou “cuja”) e indica que, aquilo que a sucede é uma propriedade ou algum tipo de relação entre os objetos que a precede. A propriedade, neste caso, é “a interseção entre planos ser uma reta”, denominada digamos “r”. Sendo assim, existe uma reta cuja interseção dos planos coincide com ela. Escrevemos tal propriedade relativa a dois planos, (denominados anteriormente “α” e “β”), da seguinte maneira: “$\exists!\ r,\ r \subset \alpha \cap \beta$”. Portanto, a definição de planos secantes, em linguagem matemática, se escreve:

$$\alpha, \beta \mid \exists!\ r,\ r \subset \alpha \cap \beta.$$

Além de escrevermos definições por extenso, também é possível escrever postulados como, por exemplo, “Dois pontos distintos determinam[15] uma reta”. O postulado indica que dois pontos distintos são o suficiente para determinar a existência de uma única reta que os contém. Sendo assim, temos uma condição (dois pontos distintos) que leva à consequência de algo (existir uma única reta que os contém). Esta situação é escrita, em linguagem matemática, pela estrutura

$$“\cdots \Rightarrow \cdots”,$$

onde o operador relacional lógico “$\Rightarrow$” indica a relação de causa e consequência (ou de dependência) entre o que o antecede e o que o sucede. A condição (dois pontos A e B, distintos) se escreve “$A \neq B$”. Por sua vez, a consequência indica a existência de “uma única reta” (escrita por “$\exists!\, r$”), que possui a propriedade de conter os dois pontos iniciais (e escreve-se, portanto, “$A, B \in r$”). Sendo assim, a consequência como um todo é escrita como “$\exists!\, r \mid A, B \in r$”. Nota-se aqui a presença do sufixo “!” (indicativo de “unicidade”) adicionado à palavra “$\exists$”. Em suma, o postulado se escreve:

$$A \neq B \Rightarrow \exists!\, r \mid A, B \in r.$$

Por sua vez, a propriedade algébrica “o quadrado de um número inteiro também é um número inteiro” diz que, dado um número inteiro (digamos m), o seu quadrado (m^2) também é um número inteiro, e indica uma relação de causa e consequência. Sendo assim, utilizando novamente a estrutura “$\cdots \Rightarrow \cdots$”, formamos a frase

[15] A palavra “determina(m)”, em Geometria, significa a existência e a unicidade de algo. Sendo assim, ao dizer que “dois pontos distintos determinam uma reta”, isto significa que existe uma reta que contém dois pontos distintos dados, e que ela é única.

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m^2 \in \mathbb{Z},$$

que descreve a propriedade desejada.

Após termos visto como se expressar (ou se escrever) em linguagem matemática, passemos agora à leitura de expressões. Vale lembrar que a linguagem matemática não possui oralidade, sendo necessária, na sua leitura, a utilização de uma outra linguagem (no nosso caso, a língua portuguesa).

1.3 **Leitura e compreensão de uma expressão**

No cotidiano em uma sala de aula, ao lidarmos com expressões matemáticas, temos por costume ler cada letra da expressão. Por exemplo, a palavra "$2a$", é usualmente lida como " 'dois' 'a' ". Porém, isto é diferente do que fazemos na nossa língua materna, visto que, para ler a palavra "futebol", por exemplo, não iremos fazê-lo letra por letra, como: " 'éfe' 'u' 'tê' 'é' 'bê' 'o' 'éle' ". Isso não ocorre, porque fomos alfabetizados a ler e a entender palavras como um todo. Sendo assim, também precisamos ser alfabetizados da mesma maneira em linguagem matemática, pois, como Danyluk (apud SOUZA, 2010) afirma, "Ser alfabetizado em matemática, então, é entender o que se lê e escrever o que se entende [...]". Além disso, segundo Silveira:

> Alguns educadores apostam não em uma mera tradução de palavras, e sim, na procura de sentidos do texto matemático, porém, advertem que tal interpretação se depara com critérios lógicos que são necessários para que o texto traduzido não entre em contradição com a lógica da matemática. [...] portanto, é ler o que está escrito além do texto codificado. (SILVEIRA, 2014, p. 47)

Desta forma, considera-se que existem dois tipos de leitura de expressões: a *leitura soletrada* (onde as letras são identificadas e lidas uma de cada vez, sem conectar nenhuma delas, e sem analisar o seu sentido matemático) e a *leitura interpretada* (onde, primeiramente, compreendemos o significado da expressão como um todo, analisando o contexto e a que dialeto pertence, e quais regras gramaticais são utilizadas, para em seguida, lê-la). É possível perceber a diferença da utilização dessas leituras em um exemplo habitual de sala de aula. Como visto anteriormente, a leitura usual da expressão "$2a$" ('dois' 'a') é uma leitura soletrada. Nota-se que esta leitura não reflete significado matemático algum; apenas são identificadas quais letras constituem essa palavra. Por sua vez, uma leitura interpretada pode ser tanto "o dobro de uma constante real desconhecida a" quanto "o produto de dois por uma constante real desconhecida a", visto que "$2a$" é uma palavra polissêmica. Neste modo de leitura, fica claro o conceito matemático que está sendo tratado.

A leitura soletrada de uma expressão matemática não garante a compreensão de seu significado, como visto no exemplo do parágrafo anterior. É possível perceber essa dificuldade em expressões mais longas como, por exemplo, na sentença: "$ABCD \mid AB \parallel CD, BC \parallel DA$". Caso fosse lida de forma soletrada, teríamos " 'a' 'bê' 'cê' 'dê' 'tal que', 'a' 'bê' 'é paralelo a' 'cê' 'dê', 'bê' 'cê' 'é paralelo a' 'dê' 'a' ", não sendo possível identificar qualquer significado matemático da sentença. Porém, analisando a expressão para uma leitura interpretada, nota-se aqui a mesma estrutura analisada na página 25, pois tem-se a presença de um objeto que possui determinada propriedade. Tal objeto é um quadrilátero $ABCD$. Por sua vez, AB e CD são lados opostos de $ABCD$ (assim como BC e DA). Portanto, a propriedade "$AB \parallel CD, BC \parallel DA$" expressa que os lados opostos do quadrilátero são paralelos. Em suma, a expressão inicial significa que "o quadrilátero $ABCD$ possui lados opostos paralelos", que é precisamente a definição de paralelogramo. Sendo assim, a leitura interpretada da expressão é "$ABCD$ é um paralelogramo", tendo, neste caso, o significado matemático muito mais nítido, se comparado à leitura soletrada.

Em expressões aritméticas, é comum o uso da leitura soletrada como, por exemplo, na expressão "$3 + 4 \times 5$". A leitura soletrada " 'três' 'mais' 'quatro' 'vezes' 'cinco' ", sem entonação, não nos dá a noção precisa de que se trata de $3 + (4 \times 5)$ ou de $(3 + 4) \times 5$ (uma soma e um produto, respectivamente). Assim, mesmo em uma leitura soletrada, é necessária uma entonação para diferenciar estas duas expressões. Desta forma, a leitura soletrada da primeira deve ser " 'três' 'mais', 'quatro' 'vezes' 'cinco' ", enquanto a da segunda " 'três' 'mais' 'quatro', 'vezes' 'cinco' ". Observa-se que, dado o critério PEMDAS, a multiplicação é prioritária em relação à adição. Em outros termos, $3 + 4 \times 5$ é sinônima de $3 + (4 \times 5)$. Nota-se que a entonação na leitura (que em língua portuguesa é provocada pela pontuação, feita, neste caso, com a vírgula) é induzida pelo par de parênteses (sinais gráficos de pontuações em linguagem matemática).

Ao interpretar cada uma destas expressões, percebemos que a primeira é uma soma e a segunda é um produto. Mais precisamente, a primeira significa "a soma de três com o produto de quatro por cinco", sendo esta sua leitura interpretada. Por sua vez, a segunda corresponde ao "produto da soma de três com quatro, por cinco" (analogamente, esta é a sua leitura interpretada).

1.4 **Pontuação**

Devido ao paralelo realizado na introdução do trabalho, entre a pontuação na língua portuguesa e na linguagem matemática, conclui-se que, nesta última, a pontuação é utilizada com a mesma concepção: dar uma melhor clareza e entendimento da ideia a ser transmitida, seja definindo prioridade entre as operações, seja evitando más intepretações ou ambiguidades. Como já foram apresentados os diferentes caracteres que indicam a pontuação na linguagem matemática, daremos ênfase na pontuação feita aos pares (por meio de parênteses, colchetes e chaves), dado que as vírgulas, pontos e vírgulas e as reticências são utilizados na linguagem matemática com o mesmo intuito que na língua portuguesa (as duas primeiras, por exemplo, em uma listagem; já as últimas, para indicar que determinada ideia se prolonga). Analisaremos agora como esses tipos de pontuação estão relacionados com a escrita e com a leitura de expressões matemáticas.

<u>Escrita de Expressões</u>

Ao analisarmos a frase "o quadrado da soma de dois números reais", uma expressão algébrica, percebemos que há implicitamente duas operações envolvidas: a adição e a potenciação. Mais especificamente, temos uma potência de uma soma de duas parcelas. Dado que não conhecemos os valores das parcelas, as nomeamos por a e b. Como consequência, sua soma também é desconhecida, e é descrita pelo identificador $a + b$. Por sua vez, como devemos escrever o quadrado deste valor (descrito por uma locução), uma pontuação é necessária para que então seja acrescido o sufixo superior "2", indicando o quadrado deste termo. Sendo assim, a expressão "$(a + b)^2$" possui o sentido desejado.

Em algumas propriedades matemáticas, também é utilizada a pontuação. Por exemplo, consideremos a seguinte propriedade de planos: "Todo plano secante a um segundo também é secante aos paralelos a este último.". Analisando esta propriedade, percebemos que se trata de três planos, envolvendo noções de paralelismo e secância. Além disso, ela indica uma relação de "causa e consequência"; isto é, "o fato de um plano ser secante a um segundo, tem por consequência ser secante aos paralelos a este último". Assim, para escrevê-la em linguagem matemática, precisamos inicialmente considerar dois planos secantes (nomeados, digamos, α e β); esta noção se escreve "$\alpha, \beta \mid \exists!\ r,\ r \subset \alpha \cap \beta$" (como visto na Seção 1.2). Em seguida, é necessário escrever que um terceiro plano (digamos γ) é paralelo a β (o segundo). Para isso, utilizamos a palavra "$\parallel$", que significa paralelismo, formando assim a frase $\gamma \parallel \beta$. Temos então escritas as duas condições (dois planos secantes α e β, e o plano γ paralelo a β) que nos levam a uma consequência (que o primeiro plano é secante ao último, e se escreve pela frase[16] "$\exists!\ s,\ s \subset \alpha \cap \gamma$"). Como visto na seção anterior (página 26), esta situação se exprime pela relação lógica de *implicação*, descrita pelo operador "$\Rightarrow$". Porém, como não há uma palavra, na linguagem matemática, que indica a secância (diferentemente do paralelismo e perpendicularismo, por exemplo), é necessária uma pontuação para uma melhor clareza do texto, deixando mais evidente cada uma das condições. Sendo assim, a propriedade se escreve da seguinte maneira:

$$(\alpha, \beta \mid \exists!\ r,\ r \subset \alpha \cap \beta), \gamma \parallel \beta \Rightarrow \exists!\ s, s \subset \alpha \cap \gamma.$$

De modo geral,

> *sentenças contendo expressões envolvendo conceitos para os quais não existe uma palavra correspondente em linguagem matemática, e que estejam em uma listagem, necessitam de pontuação.*

Vale ressaltar que, trocando a secância pelo perpendicularismo na propriedade acima, não haveria necessidade de pontuação, visto que existe uma palavra que significa perpendicularismo (a saber, "$\perp$"). Logo, para escrever a seguinte propriedade "Todo plano perpendicular a um segundo plano é perpendicular aos paralelos a este último", não é necessária a pontuação, já que todas as relações presentes da propriedade possuem palavras que as descrevem. A propriedade apresentada relaciona três planos, que denominamos α, β e γ, e as relações de paralelismo e perpendicularismo, que são escritas pelas palavras "$\parallel$" e "$\perp$", respectivamente. Dos três planos nomeados, dois (digamos, α e β) são perpendiculares e escrevemos portanto $\alpha \perp \beta$. Continuando a escrever a expressão, temos que o terceiro plano γ é paralelo ao segundo plano. Como a relação de paralelismo tem uma palavra que a representa, formamos a frase $\gamma \parallel \alpha$. As duas propriedades já escritas implicam que o primeiro plano é perpendicular ao terceiro, uma relação escrita como $\alpha \perp \gamma$. Utilizando a implicação lógica, relacionamos as propriedades descritas, obtendo a frase:

$$\alpha \perp \beta, \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \perp \gamma.$$

---

[16] Nota-se aqui que esta última expressão é uma consequência das anteriores. Como os três planos já foram descritos anteriormente, não há a necessidade de escrever a estrutura "$\alpha, \gamma \mid \cdots$".

Leitura de expressões

Depois de vermos como é feita a pontuação em certos casos em linguagem matemática, tratamos agora de como a pontuação nesta linguagem interfere na leitura de expressões, tanto na entonação de sua leitura como em sua interpretação. Assim como no português, a pontuação na linguagem matemática dita o ritmo da leitura das frases, principalmente quando são lidas de forma soletrada. Na língua portuguesa, o emprego dos parênteses e colchetes ocasiona uma entonação especial na leitura, situação também presente, em certas utilizações das vírgulas (Bechara, 2009). Percebemos uma entonação diferente na leitura soletrada em frases matemáticas formadas por um mesmo conceito matemático repetidas vezes como, por exemplo, na expressão "$-(-7)$", cuja leitura soletrada é " 'menos', 'menos sete' ". Ao compararmos a expressão matemática e a sua leitura soletrada, percebemos um paralelo entre a vírgula na língua portuguesa e os parênteses na linguagem matemática; as duas pontuações servindo de pausa para leitura, facilitando o entendimento da frase. A pontuação ocasiona a mesma entonação na leitura soletrada da expressão "$(f^{-1}(x))^{-1}$", onde temos " 'éfe' 'a menos um' 'de xis', 'elevado a menos um' ". Vale ressaltar a diferença de entonação (associada a um pontuação), comparando a leitura deste último termo com a de "$f^{-1}(x^{-1})$", que se lê (de forma soletrada) " 'éfe' 'a menos um', 'de xis' 'elevado a menos um' ".

Analisando estas expressões e fazendo uma leitura interpretada, percebemos um outro motivo para o uso da pontuação: dar uma clareza à expressão. Na primeira expressão, "$-(-7)$", o prefixo "$-$ " indica simétrico e aparece duas vezes, sendo a primeira indicando o simétrico do valor descrito pela expressão contida no interior dos parênteses. Este valor, por sua vez, corresponde ao "simétrico de 7". Sendo assim, sua leitura interpretada é "o simétrico do simétrico de sete". De modo geral, em linguagem matemática,

> *ao acrescentar repetidas e seguidas vezes um afixo de mesmo indicativo (negação, potência, transposta, simétrico, inverso, entre outros), é necessária uma pontuação para maior clareza ou para dar sentido matemático à expressão.*

No segundo exemplo, "$(f^{-1}(x))^{-1}$", cada sufixo superior "-1" indica inverso[17], sendo que, pela pontuação, o mais externo indica o inverso da expressão $f^{-1}(x)$, enquanto que o mais

[17] O assunto inverso de função é apresentado na Seção 2.3.

interno, o inverso da função f. Assim, a expressão original significa “o inverso da imagem de x pela função inversa de f”. Observa-se ainda os parênteses da notação funcional $f^{-1}(x)$, que, conforme observamos na Subseção 1.1.2, não configuram pontuação.

Em uma leitura interpretada de expressões em que aparecem mais de um operador, uma pontuação (caso exista) permite indicar a operação que a frase representa, definindo, com maior clareza, uma prioridade entre as operações. Por exemplo, ao interpretar a expressão “$5 \times (4 + 3)$”, notamos que ela corresponde a um produto, onde um dos fatores vale 5, e o outro está descrito na forma de um identificador. Assim, a sua leitura é: “o produto de 5 pela soma de 4 com 3”.

Como um segundo exemplo, na expressão $\sim(p \wedge q)$, que possui um operador lógico, também notamos a presença da pontuação. Neste caso, temos a negação de uma proposição lógica composta (uma locução, formada pela conjunção de duas proposições simples p e q). Nota-se que se não tivéssemos a pontuação, a expressão se tornaria uma conjunção da negação da proposição p com a proposição q (isto é, $\sim p \wedge q$).

Ao analisarmos os exemplos apresentados, tanto na escrita como na leitura, e supormos uma ausência da pontuação (como no último exemplo) ou uma utilização inadequada, podem ocorrer três problemas, que são o foco de estudo do próximo capítulo.

2 UTILIZAÇÃO DA PONTUAÇÃO EM LINGUAGEM MATEMÁTICA

Assim como a ausência ou o uso incorreto da pontuação gera ruídos na transmissão de uma mensagem na língua portuguesa, o mesmo ocorre em linguagem matemática. No português, o uso incorreto da pontuação acarreta em frases ambíguas ou em uma mudança de sentido. Essas duas situações também são encontradas na linguagem matemática (Seções 2.1 e 2.2). Uma terceira situação (Seção 2.3) é identificada nesta linguagem: usamos a pontuação para dar sentido a determinadas frases matematicamente incoerentes.

2.1 Eliminação de ambiguidades

Antes de tratar da pontuação envolvendo sentenças ambíguas em linguagem matemática, realizamos a seguir o mesmo tipo de discussão, porém do ponto de vista da língua portuguesa.

A *ambiguidade* é um ruído de comunicação, podendo ser gerada por uma “duplicidade de sentido” (AMBIGUIDADE, 2020a) ou por uma “imprecisão que se origina principalmente de um conhecimento ou entendimento vago sobre algo” (AMBIGUIDADE, 2020b). Na língua portuguesa, encontramos dois tipos de ambiguidade: a estrutural (ou textual) e a lexical. A *ambiguidade estrutural* é caracterizada quando a frase possui mais de um sentido devido à forma com a qual foi construída. Já *ambiguidade lexical* é decorrente de significados diferentes que um vocábulo pode conter, ou seja, uma palavra polissêmica ou homônima.

Segundo Bechara (2009), as ambiguidades, na forma escrita, podem ser evitadas de algumas formas: trocando a ordem das palavras, evitando uso de pronomes possessivos, substituindo palavras por seus significados ou por sinônimos mais claros, pontuando a frase adequadamente, entre outras. Outra possibilidade é que, caso exista algum tipo de interatividade, perguntas feitas durante um diálogo permitem sanar eventuais ambiguidades. Porém, na linguagem matemática, isto não é possível, visto que não encontramos pessoas interagindo nesta linguagem. Como as pessoas não estão habituadas com a linguagem matemática, toda expressão nesta linguagem precisa inevitavelmente estar com a pontuação adequada, sob pena de não haver a comunicação correta do conteúdo desejado.

Vejamos as seguintes frases: “Vamos perder nada foi resolvido.” e “João pediu um prato ao garçom.”. Na primeira frase, encontramos uma *ambiguidade estrutural*, já que a frase pode ser interpretada de duas maneiras diferentes, em função de uma pontuação utilizada, que seriam: “ocorreu uma perda ocasionada por nada ter sido resolvido” ou, “não ocorreu uma perda, pois já resolveram algo”. Para obter a primeira interpretação, devemos pontuá-la da seguinte forma: “Vamos perder, nada foi resolvido.”. Por sua vez, para a segunda interpretação, deve-se escrever: “Vamos perder nada, foi resolvido.”. Já no segundo exemplo, a frase é ambígua por causa da palavra “prato”, um vocábulo que possui pelo menos dois significados: o objeto prato, ou uma refeição. Sendo assim, esta frase possui uma *ambiguidade lexical*. Novamente pautados nas ideias de Bechara, podemos eliminar a ambiguidade nesta frase, porém não com o auxílio de uma pontuação. É necessária uma alteração da palavra polissêmica que gera a ambiguidade (prato), substituindo-a, por exemplo, por “prato vazio” ou por “refeição”, deixando assim a frase mais compreensível; isto é, “João pediu um prato vazio ao garçom.” ou “João pediu uma refeição ao garçom.”.

Assim como na língua portuguesa, palavras polissêmicas da linguagem matemática podem gerar expressões com ambiguidade lexical. Por exemplo, as letras maiúsculas do alfabeto latino, como A e B, podem nomear tanto conjuntos quanto matrizes[18]. Considerando-se então a locução “$A \times B$”, temos uma expressão polissêmica, cujos significados são “o produto cartesiano de dois conjuntos” ou “o produto de duas matrizes”. Ainda neste contexto, consideremos a expressão “$|A| = 7$”. Se “A” indicar um conjunto finito, o circunfixo “$|\ |$” indica o seu número de elementos. Sendo assim, a expressão dada significa que “o conjunto A possui 7 elementos”. Por sua vez, sendo “A” uma matriz, o mesmo circunfixo “$|\ |$” indica o seu determinante. Portanto, neste caso, a expressão inicial significa “o determinante da matriz A vale 7”.

Como dito anteriormente (no exemplo da palavra “prato”), uma ambiguidade lexical pode ser eliminada ao substituir a palavra polissêmica por um sinônimo ou dando mais detalhes do objeto descrito. Dadas essas duas opções, é possível reescrever as frases ambíguas apresentadas no parágrafo anterior, eliminando as ambiguidades. No caso da locução “$A \times B$”, a ambiguidade pode ser eliminada se escrevermos mais informações a respeito de A e B, sejam eles conjuntos ou matrizes (como feito, em língua portuguesa, no exemplo em que

[18] Vale ressaltar que, dependendo do contexto, letras maiúsculas latinas também podem significar pontos.

acrescentamos a informação “vazio” à palavra “prato”). Por exemplo, considerando A e B subconjuntos do conjunto dos números inteiros,

$$A \subset \mathbb{Z},\ B \subset \mathbb{Z},\ A \times B$$

indica o produto cartesiano dos conjuntos A e B, sem ambiguidade.

Por outro lado, sabendo que A é uma matriz de ordem $m \times p$ e B é uma matriz de ordem $p \times n$, a expressão

$$A \in \mathcal{M}_{m\times p},\ \ B \in \mathcal{M}_{p\times n},\ A \times B$$

indica o produto de duas matrizes, sem ambiguidade.

Analisando a segunda expressão ambígua, $|A| = 7$, e suas possíveis leituras (número de elementos ou determinante), percebemos que ela contém uma palavra polissêmica (a saber $|A|$). Por sua vez, tal palavra possui sinônimos, ambos em notação funcional: $n(A)$, (significando[19] o número de elementos do conjunto A) e $\det(A)$ (significando o determinante da matriz A). Com esses sinônimos, pode-se eliminar a ambiguidade de “$|A| = 7$” sem a necessidade de se dar mais informações a respeito de A, reescrevendo-a como $n(A) = 7$ e $\det(A) = 7$, respectivamente (de modo análogo ao realizado ao substituir, em língua portuguesa, a palavra “prato” por “refeição”).

Quanto à ambiguidade do tipo estrutural, em linguagem matemática, ela surge em diferentes circunstâncias. Por exemplo, em determinadas operações matemáticas para as quais não existe uma regra de prioridade bem estabelecida; dependendo da forma em que as escrevemos, a expressão obtida pode possuir alguma ambiguidade deste tipo, caso não seja pontuada da maneira correta.

Esse é o caso das operações entre conjuntos, como a união ($\cup$), a interseção ($\cap$) e a diferença ($-$ ou $\backslash$); para essas operações, não existe uma regra que nos permita interpretar a sentença, caso exista mais de um tipo operador e não haja uma pontuação indicando o como devemos compreendê-la. Sendo assim, voltando ao exemplo apresentado na introdução deste trabalho, onde escrevemos, em linguagem matemática, a expressão “a união do conjunto A com a interseção de B com C”, precisamos necessariamente utilizar uma pontuação, e escrever: “$A \cup (B \cap C)$”. Tal pontuação é imprescindível, pois deve-se escrever a união de A com um outro conjunto, sendo este escrito na forma de um identificador locucional (a saber, $B \cap C$). Além disso, como não está estabelecida a prioridade entre as operações de conjuntos (diferentemente do que ocorre com as operações aritméticas), a pontuação não pode ser removida. Caso o fosse,

[19] O número de elemento de um conjunto A também pode ser escrito como $\#(A)$.

teríamos a expressão ambígua “$A \cup B \cap C$”, logo não sendo possível dizer se seu significado é “a união do conjunto A com a interseção de B com C” ou “a interseção da união de A com B, com C”. Nota-se que o último significado se escreve, em linguagem matemática, como “$(A \cup B) \cap C$”. Analisando estas leituras interpretadas, fica clara uma diferença na operação que cada uma das expressões representa: a primeira indica uma união, e a segunda, uma interseção.

Para ilustrar que, de fato, as duas expressões pontuadas (a saber, $A \cup (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cap C$) não são equivalentes, vejamos um exemplo para o qual $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$. Consideremos os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ e $C = \{7, 8, 9, 10\}$. Como vimos, na primeira expressão temos uma união entre o conjunto A e o conjunto criado a partir da interseção de B com C (que denominamos D). Logo, inicialmente precisamos determinar o conjunto D, isto é, $D = \{3, 5, 7\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{7\}$. Em seguida, realizamos a união do conjunto A com o conjunto D, isto é, $A \cup D = \{1, 2, 3\} \cup \{7\} = \{1, 2, 3, 7\}$. Sendo assim $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 7\}$. Por sua vez, para determinar o conjunto $(A \cup B) \cap C$, é necessário primeiramente obter o conjunto E, dado pela união de A com B (visto que precisamos calcular a interseção de E com C): $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$. Finalmente, efetuando $E \cap C = \{1, 2, 3, 5, 7\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{7\}$ (que equivale a $(A \cup B) \cap C = \{7\}$), concluindo que as duas expressões não representam o mesmo conjunto, não sendo, portanto, expressões equivalentes.

De modo análogo ao observado na discussão anterior, notamos que, como também não está estabelecida uma prioridade entre as operações lógicas de conjunção e disjunção (ver Apêndice B), a expressão $p \wedge q \vee r$ também é ambígua, não sendo possível identificar se é uma conjunção ou uma disjunção entre duas proposições (sendo uma delas simples, e a outra composta). Porém, pontuando-a adequadamente, obtém-se duas novas expressões (a saber, $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee r$), que possuem sentidos distintos (uma conjunção e uma disjunção, respectivamente, onde em cada expressão, uma das proposições é descrita por um identificador). Vale ressaltar que essas duas expressões podem inclusive possuir valores lógicos diferentes, conforme exemplo apresentado no Apêndice B. De modo geral, vale sempre que

> *expressões formadas por operações distintas, e para as quais não há uma regra de prioridade estabelecida, precisam ser pontuadas.*

A ocorrência de sentenças ambíguas em linguagem matemática não é apenas devido à ausência de uma regra de prioridade já estabelecida; expressões formadas por uma mesma operação binária não associativa e para a qual não está estabelecido um critério do tipo “ordem em que aparecem” também podem ser ambíguas. Ressaltamos que, dentre as quatro operações aritméticas fundamentais, somente a adição e a multiplicação são associativas.

Lembramos que uma operação binária “$*$”, definida em um conjunto A, possui a *propriedade associativa* quando, dados três elementos quaisquer desse conjunto, operar dois deles para, em seguida, operar este resultado com o terceiro resultar no mesmo elemento que operar o primeiro com o resultado da operação do segundo com o terceiro. Em outros termos, em linguagem matemática:

$$(a * b) * c = a * (b * c), \ \ \forall\, a, b, c \in A.$$

Como consequência dessa propriedade, é possível omitir a pontuação em quaisquer das expressões nos dois membros da igualdade anterior e escrever a expressão $a * b * c$ (a operação “$*$” sucessivamente em a, b e c), cujo valor está bem definido e pode ser, tanto o do primeiro membro quanto o do segundo. Nota-se que este procedimento permite escrever uma expressão mais “limpa” do que as anteriores. Vale observar que as operações de adição e multiplicação de matrizes, bem como as operações de união e interseção de conjuntos ou ainda as operações de conjunção e disjunção de proposições lógicas, também são operações associativas.

Consequentemente, tratando agora especificamente das operações aritméticas, como a adição e a multiplicação são associativas, expressões como “$a + b + c$” e “$a \times b \times c$” não são ambíguas, e o seu sentido está bem definido. Por outro lado, em relação à subtração, <u>em princípio</u>, a expressão “$a - b - c$” (a “diferença sucessiva” de a, b e c) não estaria bem definida, pois seu valor poderia ser tanto o de “$(a - b) - c$” quanto o de “$a - (b - c)$” (que, em geral, são distintos). Porém, para as operações aritméticas, existe o critério da “ordem em que aparecem”, que indica que operações de mesmo nível de prioridade devem ser resolvidas na ordem em que estão dispostas, da esquerda para a direita. Sendo assim, devido a esse critério, a expressão “$a - b - c$” está bem definida, e é sinônima de “$(a - b) - c$” (sendo o seu significado “a diferença entre, a diferença entre a e b, e c”). Vale ressaltar que o mesmo tipo de discussão pode ser realizado com a operação de divisão[20] (que também não é associativa). De modo geral,

> *expressões contendo uma operação não associativa, que ocorrem mais de uma vez e sucessivamente, devem ser pontuadas, para evitar ambiguidade.*

Vale ressaltar que, caso exista um critério do tipo “ordem em que aparecem” para tal operação, a pontuação pode ser omitida, sem perda de compreensão do sentido da expressão original.

---

[20] Como existe uma regra para interpretar essas expressões, elas não são classificadas como ambíguas, sendo tratadas mais detalhadamente na Seção 2.2.

Um exemplo de operação não associativa para a qual não está definido um tal critério é o produto vetorial (BOULOS; CAMARGO, 2005) de vetores em $\mathbb{R}^3$. Devido à definição de produto vetorial, expressões como “$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$” são ambíguas, necessitando assim de uma pontuação para serem compreendidas. Sendo assim, “o produto vetorial de $\vec{u}$ pelo produto vetorial de $\vec{v}$ por $\vec{w}$”, se escreve “$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$”. Por sua vez, “o produto vetorial, do produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, por $\vec{w}$”, se escreve “$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$”.

O mesmo tipo de discussão pode ser realizado com respeito à operação lógica de condicional. Dado que esta é uma operação não associativa e não existe um critério do tipo “ordem em que aparecem”, a expressão “$p \rightarrow q \rightarrow r$” é ambígua, necessitando, portanto, de uma pontuação para ser bem compreendida.

2.2 **Alteração do sentido de uma sentença**

Na Seção1.4, ao apresentarmos as utilizações da pontuação na linguagem matemática e na língua portuguesa, fizemos um paralelo, em determinadas situações, entre dois sinais gráficos: os parênteses (em linguagem matemática) e a vírgula (em língua portuguesa). Em língua portuguesa, uma frase onde a localização da pontuação é alterada ou é acrescentada uma pontuação (que não existia inicialmente na frase), pode ter o seu sentido alterado. Por exemplo, consideremos a frase “João procura todos os livros.”. Analisando seu sentido, da maneira em que ela está escrita, compreendemos que “João está procurando todos os livros”. Caso seja colocada uma vírgula, originando a nova frase “João, procura todos os livros.”, o seu sentido mudará, indicando então que “é pedido a João que ele procure todos os livros”. Utilizando essa ideia, nesta seção são apresentados casos onde a pontuação, na linguagem matemática, quando utilizada de modo inadequado, altera o sentido de uma sentença matemática ou a torna matematicamente incoerente.

Em determinadas expressões aritméticas, uma pontuação mal utilizada pode mudar seu sentido, visto que tal pontuação poderá alterar a prioridade entre as operações nela presentes. Antes, porém, de tratarmos da pontuação em expressões aritméticas, tecemos a seguir algumas considerações a respeito da prioridade entre as operações.

Existem estabelecidas na Matemática determinadas regras de prioridade de resolução das operações aritméticas de exponenciação, radiciação, multiplicação, divisão, adição e subtração. São elas: primeiramente resolve-se as radiciações e exponenciações (na ordem em que aparecem), posteriormente as multiplicações e divisões (ainda na ordem em que aparecem), para, por fim, resolver as adições e subtrações (novamente na ordem em que aparecem); naturalmente respeitando as pontuações por parênteses (colchetes ou chaves), caso existam. Esse critério é usualmente conhecido como PEMDAS (abreviação de Parênteses, Exponenciação, Multiplicação/Divisão e Adição/Subtração), já mencionado na página 13. Percebem-se dois pares de operações e respectivas inversas; no entanto, nota-se também a ausência da radiciação (a operação inversa da exponenciação). Esta omissão pode ser explicada gramaticalmente pelo fato de a radiciação ser expressa por uma palavra formada por circunfixação (como visto na Subseção 1.1.1), processo que consiste em circundar parcialmente ou totalmente uma palavra ou locução. Assim, não há dúvida de que ao efetuar esta operação, é necessário antes determinar o valor expresso pelo identificador que o circunfixo indicativo de raiz envolve. Por exemplo, na expressão "$\sqrt{2+7}$", temos "a raiz quadrada da soma de 2 com 7", e não necessitamos usar o critério PEMDAS, visto que o circunfixo envolve a locução "$2+7$", não restando dúvidas de que, primeiramente é preciso resolver a adição, para posteriormente solucionar a radiciação. Esta e outras explicações mais detalhadas sobre o critério PEMDAS são difíceis de serem encontradas em materiais didáticos, o que dificulta em se obter mais informações, por exemplo, a respeito da origem desse critério[21].

Observamos que a letra "P", na sigla PEMDAS, indica que as operações entre parênteses (caso existam) devem ser as primeiras a serem resolvidas, já que os parênteses visam identificar um dos operandos de uma determinada operação (CUNHA; VELASCO, 2020), que é escrito na forma de identificador. Porém, em expressões com mais de um par de parênteses, por mais que os escrevamos em ordem decrescente de tamanho (dos mais exteriores para os mais interiores), pode ocorrer uma dificuldade de visualização (comprometendo assim a interpretação, principalmente em sala de aula, onde a diferença entre os tamanhos pode não ficar tão nítida). Por isso, usualmente substituem-se os parênteses por colchetes (na sua segunda utilização) e por chaves (na terceira e demais utilizações), facilitando assim o seu entendimento e sem alterar o seu sentido (OTTES, 2016). Por exemplo, na expressão "$10+\Big(12-\big(5+13\times(4\div 2)\big)\Big)$" é possível substituir alguns dos seus parênteses por colchetes e chaves, obtendo a nova expressão "$10+\{12-[5+13\times(4\div 2)]\}$", sendo esta mais agradável visualmente, que ainda é sinônima à original; ambas indicam a soma de 10 com o

---

[21] O grupo de estudo Mate$_{\text{Gra}}$mática está em constante estudo sobre este critério, com um ponto de vista gramatical, já tendo apresentado alguns resultados (CUNHA; VELASCO, 2020).

valor que corresponde à diferença entre 12 e o valor identificado pela soma de 5 com um outro valor; este último, por sua vez, é o produto de 13 pelo quociente de 4 por 2. Assim, as duas expressões como um todo significam “a soma de 10 com a diferença entre 12 e a soma de 5 com o produto de 13 pelo quociente de 4 por 2”.

Vale ressaltar que, como nem todos utilizam os colchetes e as chaves, estes sinais gráficos não estão contemplados na sigla “PEMDAS”. Uma maneira de os considerar como integrantes do critério, é alterando o significado da letra “P” para **p**ontuação, englobando assim tanto parênteses quanto colchetes e chaves.

O critério PEMDAS é utilizado, entre outras situações, para a resolução de expressões aritméticas[22] que envolvam operações de estruturas distintas (aditiva e multiplicativa), denominadas *estruturas mistas* (ARRAIS, 2006). Porém, em expressões formadas apenas por uma das operações não associativas (subtração, divisão e potenciação), é possível que uma pontuação mal utilizada altere seu significado.

Nesse sentido, expressões com apenas subtrações (ou apenas divisões), mesmo sem pontuação, possuem um significado único, devido ao critério da “ordem em que aparecem”. Como visto, neste critério, temos que a resolução das expressões com operações do mesmo nível de prioridade segue a ordem da esquerda para a direita. Por exemplo, “a diferença entre a diferença entre 13 e 5, e 3”, se escreve “$(13 - 5) - 3$”. Porém, devido à convenção da “ordem em que aparecem”, podemos omitir a pontuação, o que não interfere na interpretação da expressão. Sendo assim, neste caso, a pontuação é considerada um pleonasmo[23]. Logo, a expressão não pontuada “$13 - 5 - 3$” também representa a situação descrita inicialmente. Por outro lado, a pontuação é fundamental para se escrever a frase “a diferença entre 13 e a diferença entre 5 e 3”; ou seja, “$13 - (5 - 3)$”.

O mesmo tipo de discussão pode ser feito com respeito à divisão. Novamente devido ao critério da “ordem em que aparecem”, expressões como “$32 \div 8 \div 2$” possuem um sentido claro, significando o quociente de um valor por outro, sendo este também um quociente. Em particular, essa expressão significa “o quociente do quociente de 32 por 8, por 2”; sendo, portanto, sinônima de “$(32 \div 8) \div 2$”. Caso a expressão seja pontuada de modo inadequado, obtemos “$32 \div (8 \div 2)$”, que não possui o sentido da expressão original. Neste caso, seu significado é “o quociente de 32 pelo quociente de 8 por 2”.

[22] Este assunto é apresentado aos alunos no início do Ensino Básico, mesmo não estando presente na Base Nacional Comum Curricular.

[23] Figura de linguagem que indica “a repetição de um termo já expresso ou de uma ideia já sugerida, para fins de clareza ou ênfase.” (BECHARA, 2009, p. 495).

No Ensino Básico, o critério PEMDAS e o da “ordem em que aparecem” não são geralmente justificados de modo claro. Desta forma, as prioridades entre as operações são passadas de geração em geração, como uma “crença”. Acredita-se que isto se deva a uma falta de questionamento sobre determinados procedimentos, sendo estes apresentados de uma forma mecânica, automática.

Alguns autores (como BENDER, 1962), afirmam que não há uma justificativa matemática para a prioridade entre as operações, e consideram que a adoção do critério PEMDAS se deu com o intuito de facilitar o ensino das expressões aritméticas, sem a utilização de uma grande quantidade de parênteses, colchetes e chaves (isto é, utilizando-se menos pontuação), para uma maior clareza.

A redução da utilização da pontuação, devido à existência das regras de prioridade, é percebida quando escrevemos a seguinte frase: “a soma do produto de 2 por 5 com o produto de 3 por 7”. Desconsiderando inicialmente o critério PEMDAS, esta frase se escreve “$(2 \times 5) + (3 \times 7)$”, pois se trata de uma soma em que as parcelas são identificadores locucionais, na forma de produtos. Porém, considerando o critério PEMDAS, não existe a necessidade da utilização da pontuação, pois sabemos que a multiplicação tem prioridade sobre a adição. Logo, a expressão

$$2 \times 5 + 3 \times 7 \tag{1}$$

está correta, sendo mais clara e sinônima à anterior, porém, com uma quantidade menor de caracteres.

Por outro lado, pontuando-se a expressão (1), de modo inadequado, da forma $2 \times (5 + 3) \times 7$, obtemos uma expressão com significado distinto do anterior, pois esta corresponde a um produto sucessivo de três fatores, em que o segundo deles é uma soma.

A alteração no significado de uma expressão, por meio de uma pontuação, também ocorre em sentenças envolvendo outras operações, além da adição e da multiplicação. Por exemplo, para escrever “o quadrado do quociente de 8 por 2”, observamos inicialmente que o sufixo superior “2” (indicativo de quadrado), deve ser acrescido ao termo indicado (neste caso, um quociente, que é um identificador). Sendo assim, uma pontuação é necessária, e escrevemos “$(8 \div 2)^2$”. Caso a expressão fosse escrita (equivocadamente) sem a pontuação, teríamos “$8 \div 2^2$”, que significa “o quociente de 8 pelo quadrado de 2”.

Um outro exemplo da mudança de sentido de uma expressão, devido a uma pontuação, é a expressão “$p \rightarrow q \wedge r$”, lida como “q e r ocorrem à condição de p”, tendo em vista a prioridade da condicional sobre a conjunção (ver Apêndice B). Porém, com uma pontuação inadequada, obtemos uma expressão com sentido distinto da original. De fato, "$(p \to q) \wedge r$" descreve uma conjunção (e não mais uma condicional), que significa "q ocorre à condição de p, e r".

Em certas sentenças matemáticas, a utilização inadequada da pontuação pode acarretar em sentenças falsas. Diferentemente dos exemplos anteriores, onde houve mudança de sentido de expressões aritméticas e lógicas (com possíveis alterações de seus respectivos valores), algumas alterações acarretam em frases incoerentes matematicamente, ou seja, frases que, embora tenham um sentido claro, transmitem uma mensagem matematicamente incoerente.

Essa situação ocorre ao pontuar de modo inadequado a expressão "$3 + 4 \times 5 = 23$". Nota-se que ela está gramaticalmente correta, e, devido ao critério PEMDAS, seu significado é claro: "a adição de 3 com o produto de 4 por 5 resulta em 23" (ou equivalentemente "a soma de 3 com o produto de 4 por 5 é igual a 23"). Além disso, essa expressão também está matematicamente correta, visto que a locução no primeiro membro da igualdade é de fato um identificador de 23. Porém, com uma pontuação da forma "$(3 + 4) \times 5 = 23$", obtemos uma expressão gramaticalmente correta, e o seu significado é "a multiplicação da soma de 3 com 4, por 5, resulta em 23" (ou equivalentemente "o produto da soma de 3 com 4, por 5, é igual a 23). Entretanto, esta expressão não está matematicamente correta, visto que a locução no primeiro membro da igualdade indica um identificador de 35, e não de 23, como antes.

Como visto, a ausência de pontuação, ou uma pontuação incorreta, pode não refletir o sentido desejado, o que ocorre ao escrever algumas definições geométricas. Por exemplo, lembramos que um conjunto é dito *convexo* quando o segmento que liga quaisquer dois de seus pontos estiver contido nesse conjunto. Para exprimir essa definição, em linguagem matemática, devemos utilizar a estrutura "$\cdots \mid \cdots$" (página 25) em que o objeto em questão é um conjunto (denominado[24] aqui $\mathcal{C}$) e a propriedade que o caracteriza é a convexidade (detalhada a seguir). Como o segmento que liga quaisquer dois de seus pontos está contido em $\mathcal{C}$, escrevemos "$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB \subset \mathcal{C}$". Portanto, a frase

$$\mathcal{C} \mid (A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB \subset \mathcal{C})$$

significa que o conjunto $\mathcal{C}$ é convexo. Nota-se aqui a utilização da pontuação para destacar a propriedade de convexidade. Caso não a utilizássemos, obteríamos a expressão

$$\mathcal{C} \mid A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB \subset \mathcal{C},$$

[24] Neste caso, o conjunto $\mathcal{C}$ é nomeado por uma letra cursiva, pois se trata de um conjunto genérico de pontos em Geometria.

que não admite um sentido claro, pois esta é uma expressão do tipo “$\cdots \Rightarrow \cdots$”, em que “$\mathcal{C} \mid A, B \in \mathcal{C}$” não tem sentido geométrico.

Ao longo desta seção, vimos que a pontuação pode alterar o sentido de uma sentença, ou, se empregada de maneira incorreta, transformar a sentença em uma frase incoerente matematicamente. Porém, a pontuação utilizada de maneira correta, torna determinadas sentenças, não pontuadas e incoerentes matematicamente, em expressões que admitem um sentido claro e correto, do ponto de vista matemático. Este é precisamente o assunto da próxima seção.

2.3 **Correção de expressões matematicamente incoerentes**

Inicialmente, lembramos que *frase* é toda construção comunicativa de sentido completo (TUFANO, 2005). Sendo assim, uma frase em linguagem matemática é uma expressão que possui algum sentido matemático (sendo este matematicamente coerente ou não). Por exemplo, as sentenças “$2 \times 5 = 10$” e “$3 + 8 = 12$” são duas frases, pois possuem pelo menos um significado matemático claro (a saber, por exemplo, “o produto de 2 por 5 é igual a 10” e “a soma de 3 com 8 é igual a 12”, respectivamente). Nesse caso, a primeira é coerente do ponto de vista matemático (pois, de fato, o resultado da multiplicação de 2 por 5 é igual a 10), mas a segunda não é coerente matematicamente (pois o resultado da adição indicada não vale 12).

Vale ressaltar que, se uma expressão não possui significado matemático algum (isto é, se ela não é uma frase), então, em particular, ela não é matematicamente coerente. Por exemplo, consideremos a expressão “$3 \cup \rightarrow 7\ \infty$”, formada pelas palavras da linguagem matemática “3” (o numeral três), “$\cup$” (o operador de união), “ $\rightarrow$” (o operador lógico de condicional), “7” (o numeral sete) e “∞” (infinito)). Embora todas as palavras utilizadas para compô-la possuam um significado claro (quando analisadas separadamente), quando as reunimos para formar essa sentença, não é possível identificar um significado matemático para a expressão como um todo. Portanto, ela não constitui uma frase, sendo, portanto, matematicamente incoerente.

Nesse sentido, tratamos, nesta seção, de expressões matemáticas (que podem ser frases ou não), que são matematicamente incoerentes, e que podem ser corrigidas por meio de uma pontuação adequada. Vale ressaltar que nem toda sentença pode ser corrigida desta forma. Por exemplo, a expressão do parágrafo anterior (“$3 \cup \rightarrow 7\ \infty$”) não admite forma alguma de pontuação que sequer a transforme em uma frase (quanto mais, em algo matematicamente coerente). Por sua vez, a expressão “$3 + 8 = 12$” (que, conforme vimos, já é uma frase) também não pode ser pontuada de modo a torná-la coerente do ponto de vista matemático.

Notamos que, expressões que podem ser corrigidas por meio de uma pontuação já foram tratadas neste trabalho. Por exemplo, como vimos (página 42), embora a expressão

$$\mathcal{C} \mid A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB \subset \mathcal{C}$$

não possua sentido matemático claro (não sendo, portanto, matematicamente coerente), podemos pontuá-la da forma

$$\mathcal{C} \mid (A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow AB \subset \mathcal{C})$$

de modo a obter uma frase coerente do ponto de vista matemático.

Consideremos agora a expressão “$2 + 3 \times 4 = 20$”. Notamos que ela é uma frase (visto que possui um significado; por exemplo, “a soma de 2 com o produto de 3 por 4 é igual a 20”) e é matematicamente incoerente (pois o primeiro membro da igualdade corresponde a um identificador de 14, e não de 20). Porém, podemos corrigi-la, com o uso da pontuação, da forma “$(2 + 3) \times 4 = 20$”, obtendo uma nova frase, desta vez, matematicamente correta.

Como outro exemplo, consideremos a e b duas constantes reais desconhecidas, e M uma matriz, e analisemos a expressão “$a + bM$”. A palavra “bM” possui um significado claro, a saber, “o múltiplo escalar da matriz M segundo a constante b”, que é uma certa matriz. Sendo assim, a expressão dada possui um significado, a saber, “a soma da constante a com o múltiplo escalar da matriz M, segundo a constante b”. Porém, essa frase é matematicamente incoerente, visto que a operação de adição de uma constante real com uma matriz não está definida.

Por outro lado, sendo a multiplicação de um escalar por uma matriz uma operação bem definida, é possível corrigir esta frase, de modo a obter uma nova, que tenha um sentido matematicamente coerente. Para isso, basta pontuá-la de forma que a soma seja entre as constantes a e b (e não mais entre a e uma certa matriz). Em outros termos, a expressão “$(a + b)M$” (que significa “o múltiplo escalar de M, segundo o fator multiplicador $a + b$”), além de possuir um sentido claro (sendo portanto uma frase), ela é matematicamente coerente. Para ilustrar o exemplo anterior, consideremos:

$$a = 3;\ b = 4 \text{ e } M = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Substituindo estes valores na sentença original, (a saber $a + bM$) e realizando o produto do escalar b pela matriz M, obtemos:

$$3+4\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}=3+\begin{bmatrix}8 & 32 & 4\\ 12 & 0 & 20\end{bmatrix}.$$

Nota-se que, como não está definida a adição de um escalar por uma matriz (conforme dito anteriormente), esta última expressão é matematicamente incoerentes, não sendo possível identificar seu valor.

Por outro lado, com estes mesmos valores de a, b e M, a locução $(a+b)M$ é matematicamente coerente, e seu valor corresponde à matriz:

$$(3+4)\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 56 & 7\\ 21 & 0 & 35\end{bmatrix}.$$

Esta situação ("$a+bM$") é similar a expressões que envolvem adição e multiplicação de vetores por um escalar. De fato, em $a+b\vec{u}$, observamos a soma de uma constante real a com um vetor (identificado por $b\vec{u}$, isto é, um múltiplo escalar do vetor $\vec{u}$); no entanto, esta operação (adição de um número real com um vetor) também não está bem definida. De forma análoga, a multiplicação de um escalar por um vetor é uma operação bem definida. Assim, é possível igualmente corrigir esta expressão, por meio de uma pontuação, destacando a soma dos números reais a e b, obtendo assim a expressão matematicamente coerente "$(a+b)\vec{u}$", cujo significado é "o múltiplo escalar de $\vec{u}$, segundo o fator multiplicador $a+b$". Há outros casos análogos aos apresentados, ao substituirmos a matriz ou o vetor por objetos matemáticos para os quais não esteja bem definida sua adição com uma constante, como por exemplo, uma função qualquer.

Em determinados contextos, ao escrevermos definições ou propriedades em linguagem matemática, é necessário o uso da pontuação para que seja possível ler e interpretar a sentença matemática da maneira correta, como já visto. Diferentemente dos casos em que a não utilização da pontuação gera sentenças falsas, analisados na Seção 2.2, em certas sentenças a ausência da pontuação acarreta em uma proposição ou sentença sem sentido matemático. Este é o caso, por exemplo, ao escrever, sem nos atentar à pontuação, a propriedade (com respeito à mediatriz[25]) "Os pontos pertencentes à mediatriz de um segmento são equidistantes de seus extremos." como

$$m, AB \;\middle|\; m \perp AB, m \cap AB = \{M\}, AM \equiv MB, P \in m \Rightarrow d(P,A) = d(P,B). \qquad (2)$$

Na sentença acima, temos uma expressão do tipo "$\cdots \Rightarrow \cdots$", como já apresentado na página 26. Por sua vez, seu primeiro membro possui a estrutura "$\cdots | \cdots$" (página 25), em que o

[25] Lembramos que a *mediatriz* de um segmento é a reta que o intersecta perpendicularmente em seu ponto médio. Tal definição se escreve, em linguagem matemática, como: $m, AB \;\middle|\; m \perp AB, m \cap AB = \{M\}, AM \equiv MB$.

que sucede a palavra "|" corresponde a relações e propriedades com respeito aos objetos que a precedem. Porém, neste caso, "$P \in m$" não tem relação com os objetos "m" e "AB", não sendo possível, portanto, identificar o significado geométrico da expressão como um todo. Consequentemente, (2) é matematicamente incoerente.

Por outro lado, uma pontuação pode ser acrescentada a essa expressão de modo a corrigi-la, obtendo uma nova expressão com o significado desejado. Com efeito, consideremos agora a seguinte frase:

$$(m, AB \mid m \perp AB, m \cap AB = \{M\}, AM \equiv MB), P \in m \Rightarrow d(P, A) = d(P, B). \qquad (3)$$

Esta nova sentença ainda possui uma estrutura do tipo "$\cdots \Rightarrow \cdots$", relacionando duas expressões. Nesse caso, o primeiro membro indica duas informações: que m é a mediatriz do segmento AB, e que P é um ponto em m. Por sua vez, o segundo sinaliza que o ponto P está à mesma distância de A e de B (os extremos do segmento AB), sendo, portanto, equidistante destes dois pontos. Como a mediatriz de um segmento é um conceito matemático para o qual não existe uma palavra que o represente, uma pontuação se faz necessária para que possamos identificá-la na frase como uma unidade de sentido.

Observamos ainda sentenças que não apresentam um sentido claro, mas que não seguem o modelo apresentado inicialmente (de operações não definidas ou de conceitos que não possuem representação própria na linguagem matemática). Um exemplo é o caso, em determinadas situações, em que se deve exprimir noções de funções correlacionadas com as de inverso. Para entendermos os possíveis erros, ao escrevermos tais expressões, que geram uma sentença sem sentido, precisamos compreender a notação de inverso.

De modo geral, dados uma operação de natureza multiplicativa[26] $*$ (interna em um conjunto C com determinada estrutura algébrica e que admita um elemento neutro u para essa operação) e um elemento $c \in C$, o *inverso* de c com respeito a $*$ é um elemento $d \in C$ (caso exista) tal que $c * d = d * c = u$. Neste caso, nomeia-se o elemento inverso pelo acréscimo do sufixo superior "-1" a seu nome. Em outros termos, a palavra "c^{-1}" significa "o inverso de c". Por exemplo, caso "a" seja um número real, "M" seja uma matriz e "f" seja uma função, os seus inversos (caso existam) são nomeados "a^{-1}", "M^{-1}" e "f^{-1}", respectivamente.

Particularmente em relação às funções, a noção de inverso pode estar associada à própria função, ao elemento de seu domínio ou à imagem de um elemento. Nesse sentido, a palavra "$f^{-1}(x)$" significa "a imagem de x pela inversa de f", e pode ser escrita sempre que f for

[26] Multiplicação de números reais e de matrizes, e composição de funções são exemplos de operações de natureza multiplicativa.

invertível e x pertencer ao domínio da inversa de f. Por sua vez, "$f(x^{-1})$" indica "a imagem do inverso de x por f", e tem sentido quando x possuir inverso, pertencente ao domínio de f. Por fim, a palavra "$\left(f(x)\right)^{-1}$" significa "o inverso da imagem de x por f", que pode ser escrita sempre que x pertencer ao domínio de f, e que $f(x)$ possuir inverso. Nota-se, neste último caso[27], uma pontuação é utilizada, pois o sufixo superior "-1" deve ser adicionado a $f(x)$, uma palavra em notação funcional. Vale ainda ressaltar que essa pontuação não é facultativa, não podendo portanto ser omitida, sob pena de se escrever a palavra $f(x)^{-1}$, que não possui um significado matemático. Esta expressão configura, portanto, mais uma sentença do tipo sem sentido e matematicamente incoerente, mas que, se corrigida por meio de uma pontuação adequada (da forma $(f(x))^{-1}$), admite um sentido claro e coerente matematicamente. Este último exemplo é apenas um caso particular de uma situação mais geral:

> *o acréscimo de sufixos superiores a expressões em notação funcional deve ser precedido de pontuação.*

Sendo assim, por exemplo, para exprimir "o quadrado do determinante da matriz A", "o cubo da distância entre dois pontos A e B" e "o complementar do plano determinado pelos pontos A, B e C", por meio de uma notação funcional, uma pontuação é necessária, e escrevemos "$\left(\det(A)\right)^2$", "$(d(A,B))^3$" e $\left(pl(A,B,C)\right)^{\mathsf{C}}$, respectivamente.

[27] Notamos que a palavra $\left(f(x)\right)^{-1}$ possui dois pares de parênteses com funções distintas: os mais externos constituem uma pontuação e os internos compõem parte da notação funcional, não configurando, portanto, pontuação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciarmos nosso estudo pela pontuação em língua portuguesa, notamos diferentes situações onde uma frase necessita ser pontuada, seja por vírgulas, ponto, reticências, parênteses ou qualquer outro tipo de pontuação. Porém, mesmo com uma diversidade de sinais gráficos, a sua grande maioria é utilizada com o intuito de dar clareza e coesão a um texto; mas vale ressaltar que cada tipo de sinal gráfico possui suas próprias regras de aplicação. Foi visto que, em linguagem matemática, a pontuação também é utilizada com o mesmo intuito: dar clareza a sentenças matemáticas, evitando assim possíveis ruídos na transmissão da mensagem. Ao estudarmos os caracteres que indicam pontuação, em linguagem matemática, percebemos que alguns são utilizados com a mesma função da língua portuguesa; são eles: a vírgula e o ponto e vírgula (empregados para separar termos de uma lista) e as reticências (aplicadas com o intuito de indicar a continuação de uma listagem). Contudo, o enfoque deste trabalho são as pontuações da linguagem matemática realizadas aos pares (parênteses, colchetes e chaves), sendo utilizadas para evitar ambiguidades e interpretações equivocadas, e corrigir, em determinados casos, sentenças incoerentes matematicamente, evitando assim possíveis problemas na comunicação. Identificamos, ao longo do estudo, várias regras de pontuação, e que são revisitadas a seguir.

Durante nosso estudo da gramática da linguagem matemática, notamos a ocorrência de dois tipos de ambiguidade: a estrutural (ocasionada pela forma com a qual a frase foi construída) e a lexical (devido à presença de palavras homônimas ou polissêmicas). Esta última, como vimos, não pode ser resolvida com o auxílio de uma pontuação. Por sua vez, a estrutural, em determinados casos, pode ser evitada com o uso de uma pontuação adequada. Isto posto, identificamos que *frases que são constituídas por mais de uma operação, para as quais não existe preestabelecida uma regra de prioridade, necessitam de uma pontuação* (página 36). Por exemplo, a expressão “$A - B \cap C$” é ambígua, não sendo possível identificar o seu significado, devido à ausência de prioridade entre as operações de diferença e de interseção de conjuntos. Entretanto, após uma pontuação adequada, obtemos expressões com sentidos claros: “$A - (B \cap C)$” (“a diferença entre A e a interseção de B com C”) e “$(A - B) \cap C$” (“a interseção da diferença entre A e B, com C”).

Ainda em relação a expressões que envolvem operações, notamos que *frases compostas por uma mesma operação não associativa, que ocorra mais de uma vez, e para a qual não exista preestabelecido um critério do tipo “ordem em que aparecem”, necessitam de pontuação* (página 37). Por exemplo, a expressão “$A - B - C$” é ambígua, não sendo possível identificar o seu significado, pois a diferença de conjuntos é não associativa, e não está estabelecido um critério do tipo “ordem em que aparecem”. Entretanto, após uma pontuação adequada, obtemos expressões com sentidos claros: “$A - (B - C)$” (“a diferença entre A e a diferença entre B e C”) e “$(A - B) - C$” (“a diferença entre a diferença entre A e B, e C”).

O acréscimo de afixos a palavras ou locuções, em certos casos, deve ser precedido de pontuação. Em particular, identificamos que *palavras ou locuções escritas em forma de notação funcional necessitam de uma pontuação, para que seja acrescido um sufixo superior* (página 47); a ausência de uma pontuação origina uma palavra sem sentido matemático. Por exemplo, ao escrevermos o “quadrado da medida do segmento AB”, utilizando a notação funcional, devemos pontuar, isto é, “$\left(m(AB)\right)^2$”; neste caso, sem a pontuação, formaríamos “$m(AB)^2$”, que não possui sentido matemático. Uma outra regra identificada envolvendo afixos e pontuação nos diz que *ao acrescentar repetidas e seguidas vezes afixos de mesmo indicativo, é necessária uma pontuação* (página 31). Por exemplo, “a transposta da transposta de uma matriz A” se escreve “$(A^t)^t$”.

Outro caso onde a pontuação se faz necessária é em determinadas sentenças envolvendo conceitos matemáticos para os quais não há uma palavra correspondente em linguagem matemática. Nesse caso, *sentenças envolvendo tais conceitos, e que estejam em uma listagem, necessitam de pontuação*, para identificarmos o objeto que está sendo tratado (como no exemplo envolvendo a secância de planos, na página 30).

Ao fim do trabalho, ao analisarmos os casos em que a pontuação é necessária, tivemos a confirmação de que, assim como na língua portuguesa, a ausência ou uso incorreto de uma pontuação, em linguagem matemática, ocasiona graves problemas na maneira de se comunicar, interferindo na leitura e na interpretação. Observamos que não basta sabermos escrever vários termos ou conceitos em linguagem matemática; uma pontuação incorreta ou sua ausência pode alterar totalmente o significado de uma frase ou até transformá-la em algo matematicamente incoerente. Por outro lado, uma frase pontuada corretamente torna um texto mais claro, o que facilita tanto a compreensão do leitor a respeito do assunto nele tratado quanto seu aprendizado sobre o tema, principalmente em turmas de Ensino Básico onde as maiores dificuldades, dos alunos, estão presentes na interpretação de conceitos matemáticos.

Este trabalho revelou a importância da pontuação em linguagem matemática, identificou algumas de suas regras, e abre o horizonte para que outras situações sejam avaliadas e novas regras sejam identificadas.

REFERÊNCIAS

AMBIGUIDADE. In: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2020a. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/ambiguidade/>. Acesso em: 29/07/2020.

AMBIGUIDADE. In: MICHAELIS, Moderno Dicionário da Língua Portuguesa Online. São Paulo: Melhoramentos, 2020b. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/ambiguidade/>. Acesso em: 24/08/2020.

ARRAIS, B. U. *Expressões aritméticas: crenças, concepções e competências no entendimento do professor polivalente*. 2006. 178 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

BOULOS, P., CAMARGO, I. de. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. 3ª ed. São Paulo: Pearson, 2005.

BECHARA, E. *Moderna gramática portuguesa*. 37. ed. revista, ampliada e atualizada conforme o novo Acordo Ortográfico. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2009.

BENDER, M. Order of operations in elementary arithmetic. *The arithmetic teacher*, vol 9, n.5, p.263-267, maio. 1962. Disponível em: <www.jstor.org/stable/41184625>. Acesso em: 10/05/2019.

CUNHA, S.; VELASCO, J. *Introdução à Gramática da Linguagem Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2019.

CUNHA, S.; VELASCO, J. Pourquoi effectuer d'abord ce qui est entre parenthèses? *Les Chantiers de Pédagogie Mathématique*, Paris, n. 185, jun 2020. Disponível em: <www.apmep-iledefrance.fr/Pourquoi-effectuer-d-abord-ce-qui-est-entre-parentheses>. Acesso em: 24/08/2020.

DIALETO. In: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2020. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/dialeto/>. Acesso em: 29/07/2020.

INFO ESCOLA. Disponível em: <https://www.infoescola.com/portugues/pontuacao/>, Acesso em: 21/04/2020.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria.* 1ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

OTTES, B. A. *Expressão numérica: a hierarquia das quatro operações matemáticas*. 2016. 76 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

SILVEIRA, M. R. A. Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, vol. 16, n. 1, p. 47-73, 2014.

SOUZA, K. N. V. Alfabetização Matemática: Considerações sobre a Teoria e a Prática. *Revista de Iniciação Científica da FFC*. Volume 10, Número 1, 2010. Disponível em: <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/view/273>. Acesso em: 29/07/2020.

TUFANO, D. *Gramática e literatura brasileira: curso completo.* São Paulo: Paulus, 2005.

APÊNDICE A – Sinais gráficos de pontuação *versus* letras

Durante este trabalho, analisamos as situações em que parênteses, colchetes e chaves são sinais gráficos utilizados para pontuar. Porém, há casos em que estes figuram como letras em linguagem matemática, bem como alguns dos sinais gráficos de pontuação da língua portuguesa.

Lembramos que a pontuação na língua portuguesa é feita com o uso de, dentre outros sinais gráficos, ponto (.), vírgula (,), ponto e vírgula (;), dois pontos (:), ponto de exclamação (!), ponto de interrogação (?), reticências (...), aspas (“ ”) e parênteses (( )). Alguns destes símbolos figuram como letras do alfabeto da linguagem matemática, a saber, o ponto de exclamação (!), os dois pontos (:), o ponto (.) e o ponto e vírgula[28] (;), como detalhado a seguir.

O <u>ponto de exclamação</u> (!), em linguagem matemática, é um sufixo que indica o fatorial (quando afixado ao nome ou a um identificador de um número natural) ou a unicidade (quando adicionado ao quantificador existencial “$\exists$”). Caso seja adicionado a um número natural n, como em “n!”, ele indica “o fatorial de n”, e seu valor é determinado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \text{ , ou seja, } \prod_{i=0}^{n-1} n - i.$$

Por outro lado, quando adicionado ao quantificador existencial “$\exists$”, forma a palavra “$\exists!$”, que significa “a existência e a unicidade” de algo. Por exemplo, a expressão

$$\exists!\, m \in \mathbb{Z} \mid n + m = m + n = n, \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

significa que o elemento neutro (denominado aqui m) da adição de inteiros existe e é único.

Por sua vez, os <u>dois pontos</u> (:) são usualmente empregados para escrever razões entre grandezas (frequentemente utilizada na representação de escalas). Nesse sentido, a razão entre dois números reais x e y (com y não nulo) pode ser escrita como “$x : y$” (ou[29] $\frac{x}{y}$). Há ainda três outras utilizações para os dois pontos: em uma locução que descreve uma função, em uma estrutura que descreve um objeto matemático por meio de uma ou mais equações, e na descrição de proposições lógicas compostas. Um exemplo do primeiro caso é “$f : A \to B$”, onde f corresponde ao nome de uma função de domínio A e contradomínio B. Quanto ao segundo caso,

[28] O ponto e vírgula é considerado letra, quando visto como uma palavra sinônima de “|”.

[29] A palavra $\frac{x}{y}$ é um termo polissêmico que, além de indicar fração e razão, pode também significar quociente (o mesmo que $x \div y$).

uma reta r pode ser descrita, por meio de sua equação cartesiana, pela expressão $r: 2x + 3y = 12$. Por fim, uma proposição lógica composta pode ser descrita, por meio das proposições simples que a formam, como em "$P(p, q): p \vee q$". Nestes últimos casos, os dois pontos são utilizados como um separador entre o nome da função (ou da reta, ou da proposição) e algumas de suas características (domínio e contradomínio, no caso de função; a equação, no caso da reta; e as proposições simples que constituem a composta).

Em relação ao ponto (.), há duas aplicações: em numerais com mais de uma classe numérica, e como o nome do operador de multiplicação (mais recomendado em expressões algébricas). Em ambos os casos, o ponto não tem a função de pontuação. No primeiro caso (isto é, em números formados por mais de uma classe numérica), sua função é separar as classes, podendo ser ou não utilizado, já que sua ausência não altera o significado da palavra; sua presença permite maior distinção entre as classes, dando portanto mais clareza à palavra. Por exemplo, a palavra "34.562" (que significa "3 dezenas de milhar, 4 unidades de milhar, 5 centenas, 6 dezenas e 2 unidades simples") possui duas classes numéricas, sendo lida como "trinta e quatro mil quinhentos e sessenta e dois", sendo portanto sinônima de "34562". Vale ressaltar que, nessa utilização, o ponto deve ser escrito alinhado abaixo em relação aos algarismos que compõem o numeral. No segundo caso (isto é, como operador de multiplicação, no *Algebrês*, em substituição ao operador "$\times$"), esta letra deve figurar centralizada, como em "$a \cdot b$", que significa então "o produto de duas constantes reais desconhecidas". Vale ressaltar que as locuções $a \cdot b$, $a \times b$ e a palavra ab são sinônimas e significam "o produto de a por b". No entanto, ao descrever a *operação de multiplicação*, deve-se utilizar **apenas** as locuções, tendo em vista que ab indica **tão somente** o resultado (o produto). Em outros termos, $a \times b$ é um identificador de ab (CUNHA; VELASCO, 2019). Por exemplo, $a \times b = c$ significa tanto "o produto de a por b é igual a c" quanto "a multiplicação de a por b resulta em c".

Determinados sinais gráficos utilizados aos pares para pontuar em linguagem matemática (parênteses, colchetes e chaves) são, em certas situações, também considerados letras, tendo em vista que fazem parte da formação de algumas notações (como apresentado na Subseção 1.1.2). Além desses, são tratados a seguir outros casos em que parênteses e chaves[30] não são utilizados em uma pontuação.

Em relação aos parênteses, o único caso identificado, até o momento, é na descrição de um plano, em Geometria. Por exemplo, a palavra "(ABC)" significa "o plano determinado por

[30] Não foram identificadas, até o presente momento, situações em que os colchetes não sejam utilizados como pontuação, além das notações sequencial e matricial.

três pontos não colineares A, B e C" (ou, equivalentemente, "o plano determinado pelo triângulo ABC"). Neste caso, os parênteses constituem um circunfixo, adicionado à palavra ABC, que significa "triângulo de vértices A, B e C".

Por fim, quanto às chaves, durante o estudo da notação sequencial, vimos que uma de suas utilizações é na descrição de um conjunto, delimitando a lista de seus elementos; como exemplo, citamos $C = \{amarelo, azul, vermelho\}$ e $P = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$. Porém, em particular, os elementos destes conjuntos podem ser descritos por meio de uma propriedade que os caracteriza, comum a todos, não formando assim uma notação sequencial. Para descrever um conjunto a partir de uma certa propriedade, é utilizada a estrutura "$\cdots \mid \cdots$" (tratada na página 25), que justamente relaciona um objeto (ou uma lista de objetos) a suas propriedades. Desta forma, considerando que os elementos de C correspondem às cores primárias, tem-se que $\{x \mid x \text{ é } cor\ primária\}$ é uma outra forma de descrever o conjunto C. De modo análogo, observando que os elementos de P correspondem aos números inteiros pares, $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists\ k \in\ \mathbb{Z}, n = 2k\}$ descreve precisamente o conjunto P. Observamos que, nestes casos, as chaves não constituem pontuação. Vale ressaltar que nem todo conjunto pode ser descrito por meio de uma propriedade comum a seus elementos.

Particularmente, os *lugares geométricos*, por serem conjuntos constituídos exatamente pelos pontos que possuem uma determinada propriedade (MUNIZ NETO, 2013), são descritos de maneira similar à que viemos de apresentar. Por exemplo, fixados um ponto O e uma constante real positiva r, a expressão $\{A \mid d(A, O) = r\}$ (ou seja, o conjunto de todos os pontos A que distam r de O) descreve a circunferência de centro O e raio r (em Geometria Plana), e a esfera de centro O e raio r (em Geometria Espacial).

Chaves são ainda utilizadas para agregar um grupo de sentenças que descrevem um único objeto, como no caso de uma função por partes, um sistema de equações ou ainda equações reduzidas de uma reta no espaço), exemplificados a seguir.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 4x + y = 6 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad r\colon \begin{cases} y = 2x + 5 \\ z = -3x + 2 \end{cases}.$$

APÊNDICE B – Prioridade entre as operações lógicas

Reunimos neste apêndice algumas noções básicas da Lógica que são utilizadas ao longo do texto. Não temos, entretanto, o intuito de detalhar tal conteúdo, mas sim, de relembrar algumas nomenclaturas e conceitos importantes para a compreensão dos exemplos abordados no texto e que tratam especificamente deste tema.

As proposições lógicas simples são nomeadas por letras minúsculas do alfabeto latino, geralmente p, q e r. Por sua vez, as proposições lógicas compostas são nomeadas por letras maiúsculas do alfabeto latino, usualmente P, Q e R (CUNHA; VELASCO, 2019).

Existem cinco operações lógicas, enumeradas a seguir, com as respectivas palavras que as descrevem em linguagem matemática; são elas: a negação ($\sim$), a conjunção ($\wedge$), a disjunção ($\vee$), a condicional ($\rightarrow$) e a bicondicional ($\leftrightarrow$). Sua ordem de prioridade segue a seguinte regra: primeiramente operam-se as negações, posteriormente, as conjunções e a disjunções, seguidas das condicionais para, por fim, operar as bicondicionais (evidentemente, sempre que estas operações ocorrerem numa expressão dada).

De acordo com essa ordem de prioridade, sempre que uma expressão não pontuada for constituída por operações de níveis de prioridade distintos como, por exemplo, "$\sim p \wedge q$" (constituída por uma negação e uma conjunção), não ocorre dúvida quanto a sua interpretação; como a negação é operada primeiramente em relação à conjunção, esta proposição corresponde à "conjunção da negação de p com q".

Por sua vez, ainda de acordo com as regras de prioridade estabelecidas, as operações de conjunção e disjunção têm mesmo nível de prioridade, e não existe definida, nesse caso, uma regra do tipo "ordem em que aparecem". Sendo assim, como visto no texto (página 36), expressões do tipo "$p \wedge q \vee r$" são ambíguas, necessitando portanto de uma pontuação para serem compreendidas.

Após pontuar essa sentença, obtemos duas expressões distintas: "$(p \wedge q) \vee r$", uma **disjunção** entre uma proposição composta (identificada por $p \wedge q$) e uma simples (nomeada r); e "$p \wedge (q \vee r)$", uma conjunção de uma proposição simples (nomeada p) com uma composta (identificada por $q \vee r$). Essas duas expressões podem até mesmo possuir valores lógicos distintos, conforme ilustra o próximo exemplo. Consideremos as seguintes proposições simples:

p: A UERJ é uma universidade privada;

q: Buenos Aires é a capital do Brasil;

r: O número 3 é ímpar.

Antes de analisar os valores lógicos de $(p \wedge q) \vee r$ e $p \wedge (q \vee r)$, precisamos verificar os valores lógicos das proposições simples p, q e r. A proposição p é falsa, visto que a UERJ (Universidade do Estado do Rio de Janeiro) é uma universidade pública; por sua vez, a proposição q também é falsa, pois Buenos Aires é capital da Argentina; finalmente, a proposição r é verdadeira, já que 3 é de fato um número ímpar.

Com base nessas informações, notamos que, como r tem valor lógico verdadeiro, uma disjunção de qualquer proposição com r também tem valor lógico verdadeiro. Em particular, $(p \wedge q) \vee r$ tem valor lógico verdadeiro. Por sua vez, como p tem valor lógico falso, uma conjunção de p com qualquer proposição também tem valor lógico falso. Consequentemente, $p \wedge (q \vee r)$ tem valor lógico falso, valor este diferente do da expressão anterior.