



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Anderson Mendonça da Silva

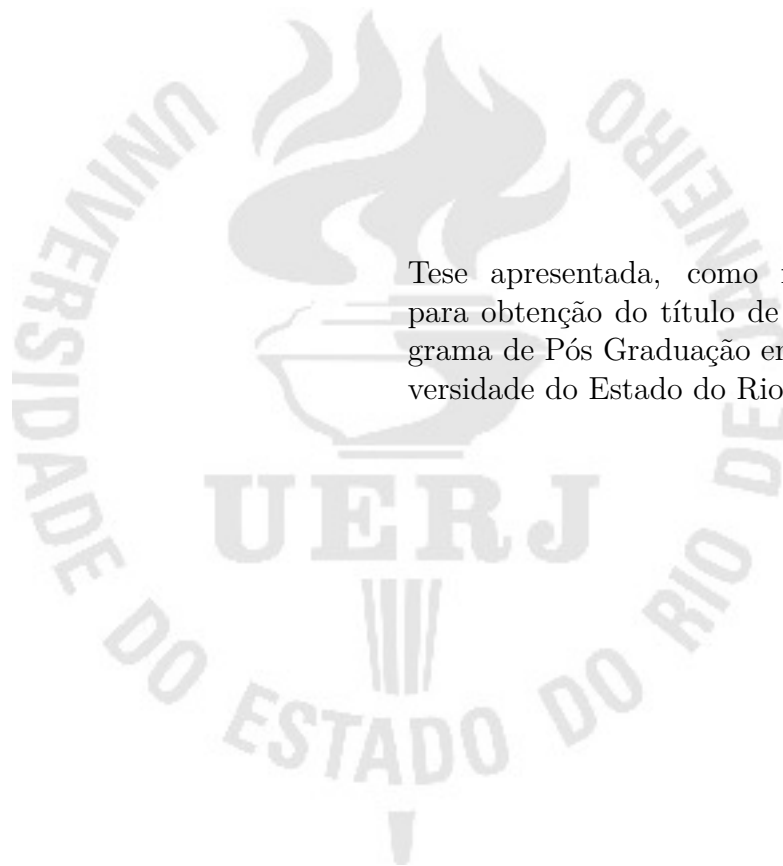
**Modelos cosmológicos aplicados à teoria de Bergmann–Wagoner  
com condições iniciais naturais**

Rio de Janeiro

2018

Anderson Mendonça da Silva

**Modelos cosmológicos aplicados à teoria de Bergmann–Wagoner com  
condições iniciais naturais**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. James Ewan Faskin Skea

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

S586

Silva, Anderson Mendonça da.

Modelos cosmológicos aplicados à teoria de  
Bergmann-Wagoner com condições iniciais naturais /  
Anderson Mendonça da Silva. – 2018.

141 f. : il.

Orientador: James Ewan Faskin Skea.

Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de  
Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Cosmologia – Modelos matemáticos – Teses.
2. Constantes cosmológicas – Teses. 3. Gravitação - Teses.
4. Universo inflacionário – Teses. 5. Runge-Kutta, Fórmulas  
de – Teses. I. Skea, James Ewan Faskin. II. Universidade do  
Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias  
Tavares. III. Título.

CDU 524.8:519.6

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou  
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Anderson Mendonça da Silva

**Modelos cosmológicos aplicados à teoria de Bergmann–Wagoner com condições iniciais naturais**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 10 de Maio de 2018.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. James Ewan Faskin Skea (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Marcelo Evangelista de Araujo  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Joras  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Jailson Sousa de Alacanz  
Observatório Nacional

Rio de Janeiro

2018

## DEDICATÓRIA

A Deus, pelo dom da vida; aos meus pais pelo aprendizado de humildade, exemplo de amor e fé; e à minha esposa Jessica, companheira e amiga.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me fazer louco e fraco. Pelo contrário, Deus escolheu as coisas loucas do mundo para confundir os sábios; e Deus escolheu as coisas fracas do mundo para confundir as fortes. (1º Coríntios 1:27)

Agradeço ao meu professor e orientador Dr. James Skea (Jim), por entender minhas limitações de tempo, oferecendo-me a oportunidade de continuar estudando e me aperfeiçoando, oportunidade que outros não me concederam e, com paciência, fez-me capaz de realizar este trabalho.

Agradeço a minha amada esposa Jessica pelo carinho, pela compreensão e pelo ânimo nos momentos das minhas quase desistências.

Aos meus pais José Carlos e Monica pela educação que me ofereceram, pelo esforço e abnegação de tantos anos, pelo carinho e amor incondicional. Aproveito esta oportunidade para dizer AMO MUITO VOCÊS.

Aos meus colegas da pós graduação que junto compartilhamos o desafio de nos tornarmos pesquisadores.

Aos professores da pós graduação pelos ensinamentos e experiências transmitidos com muito empenho e qualidade.

Aos meus colegas de trabalho da Fiscalização Administrativa do Batalhão Central de Manutenção e Suprimento do Exército Brasileiro.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, possibilitaram a realização deste trabalho.

A maturidade começa a manifestar-se  
quando sentimos que nossa preocupação  
é maior pelos demais que por nós mesmos.

*Albert Einstein*

## RESUMO

SILVA, A. M. *Modelos cosmológicos aplicados à teoria de Bergmann–Wagoner com condições iniciais naturais*. 2018. 141 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Algumas teorias escalar-tensoriais contêm em sua ação um termo cosmológico representado por uma função  $\lambda(\phi)$ , que generaliza uma constante cosmológica. A variação dessa função pode ser usada para explicar a inflação cósmica durante o Universo Primordial e, ao mesmo tempo, a expansão acelerada observada hoje. A teoria de Bergmann–Wagoner acrescenta à Relatividade Geral um campo escalar que pode ser interpretado, no *frame* de Jordan, como  $\phi(t) = G^{-1}$ , transformando a “constante” gravitacional  $G$ , em uma variável. Observações indicam que a equação de estado para a energia escura é  $w \approx -1$ , todavia, esses estudos não descartam a possibilidade de  $w \neq -1$ , sendo compatível com a função cosmológica em substituição a constante. Por outro lado, observações indicam que qualquer variação atual da constante gravitacional é limitada por  $|\dot{G}/G| < 10^{-13}\text{yr}^{-1}$ . Na primeira parte desta tese, foi modelado um campo  $\phi(t)$  que respeita a variação de  $G$  observada e gera uma função cosmológica  $\lambda(\phi)$  que possui um valor “grande” próximo ao *Big Bang* e depois decai. Este comportamento geraria a inflação durante o Universo Primordial e também seria compatível com as observações atuais que indicam  $\Lambda \approx 10^{122} t_p^{-2}$ . Na segunda parte, a função cosmológica e o parâmetro de Hubble foram modelados de forma que  $\lambda(t) \propto t^{-2}$  e  $H(t) \propto t^{-1}$ , e o comportamento dos parâmetros cosmológicos e as possíveis consequências para a evolução do Universo foram estudados. Foram encontradas as soluções gerais para os casos sem matéria e espacialmente plano, e implementados integradores para resolver as equações diferenciais na presença de matéria e curvatura. As condições iniciais utilizadas foram definidas para que os parâmetros cosmológicos tenham valores “naturais” próximos ao *Big Bang*.

Palavras-chave: função cosmológica. teoria de Bergmann–Wagner. campo escalar.



## ABSTRACT

SILVA, A. M. *Cosmological models applied to Bergmann-Wagoner theory with natural initial conditions*. 2018. 141 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Some scalar-tensor theories contain in their action a cosmological term represented by a function  $\lambda(\phi)$ , that generalizes a cosmological constant. The variation of this function can be used to explain the cosmic inflation during the Primordial Universe and, at the same time, the accelerated expansion observed today. Bergmann-Wagoner's theory adds to General Relativity a scalar field that can be interpreted, in the frame of Jordan, such as  $\phi(t) = G^{-1}$ , transforming the gravitational "constant"  $G$  into a variable. Observations indicate that the state equation for dark energy is  $w \approx -1$ , however, these studies do not rule out the possibility of  $w \neq -1$ , being compatible with the cosmological function in place of the constant. On the other hand, observations indicate that any current variation of the gravitational constant is bounded by the inequality  $|\dot{G}/G| < 10^{-13} \text{ yr}^{-1}$ . In the first part of this thesis, a field  $\phi(t)$  which respects the variation of  $G$  observed is generated and generates a cosmological function  $\lambda(\phi)$  which has a value "big" next to Big Bang and then decays. This behavior would generate inflation during the Primordial Universe and would also be compatible with the current observations indicate  $\Lambda \approx 10^{-122} t_p^{-2}$ , In the second part, the cosmological function and the Hubble parameter were modeled so that  $\lambda(t) \propto t^{-2}$  and  $H(t) \propto t^{-1}$ , and the behavior of the cosmological parameters and the possible consequences for the evolution of the Universe were studied in these models. We found the general solutions for the cases with no matter and spatially flat, and implemented integrators to solve the equations differences in presence of matter and curvature. The initial conditions used were defined so that the cosmological parameters have "natural" close to Big Bang.

Keywords: cosmological function. Bergmann-Wagoner theory. scalar field.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Valores medidos para a constante de Hubble. . . . .	22
Figura 2	- Evolução do fator de escala para os três valores de $k$ . . . . .	27
Figura 3	- Todos os possíveis processo de formação dos núcleos dos elementos mais leves durante a BBN. . . . .	31
Figura 4	- A abundância dos elementos químicos ${}^4\text{He}$ , $\text{D}$ , ${}^3\text{He}$ e ${}^7\text{Li}$ como previsto pela Nucleossíntese Primordial. . . . .	32
Figura 5	- Resultado do experimento FIRAS do satélite COBE. . . . .	33
Figura 6	- Diagrama causal para o modelo FLRW. . . . .	42
Figura 7	- Diagrama causal para um modelo inflacionário. . . . .	44
Figura 8	- Exemplo de potencial em regime <i>slow roll</i> . . . . .	48
Figura 9	- As curvas de rotação das galáxias M31, M101 e M81. . . . .	54
Figura 10	- Conjunto de dados SNIa, BAO, $H(z)$ . . . . .	60
Figura 11	- Distribuição em duas dimensões para $(w_0, w_a)$ com dados de (Planck + WP + BAO). . . . .	61
Figura 12	- Potencial para o modelo tangente hiperbólica. . . . .	88
Figura 13	- Potencial para o modelo exponencial. . . . .	89
Figura 14	- Relação entre o valor inicial da função cosmológica $\lambda_i$ e o valor assintótico da equação de estado efetiva $w'_1$ . . . . .	94
Figura 15	- Valor de $k$ calculado para um precisão de aproximadamente $10^{-30}$ . . . . .	100
Figura 16	- Modelo 1: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	101
Figura 17	- Modelo 1: Evolução de $H(t)$ . . . . .	101
Figura 18	- Modelo 1: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	102
Figura 19	- Modelo 2: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	103
Figura 20	- Modelo 2: Evolução de $H(t)$ . . . . .	104
Figura 21	- Modelo 2: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	104
Figura 22	- Modelo 3: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	105
Figura 23	- Modelo 3: Evolução de $H(t)$ . . . . .	106
Figura 24	- Modelo 3: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	106
Figura 25	- Modelo 4: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	107
Figura 26	- Modelo 4: Evolução de $H(t)$ . . . . .	108
Figura 27	- Modelo 4: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	108
Figura 28	- Valor de $k$ calculado para um precisão de aproximadamente $10^{-30}$ . . . . .	109
Figura 29	- Modelo 5: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	110
Figura 30	- Modelo 5: Evolução de $H(t)$ . . . . .	110
Figura 31	- Modelo 5: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	111
Figura 32	- Modelo 6: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	111

Figura 33 - Modelo 6: Evolução de $H(t)$ . . . . .	112
Figura 34 - Modelo 6: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	113
Figura 35 - Modelo 7: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	113
Figura 36 - Modelo 7: Evolução de $H(t)$ . . . . .	114
Figura 37 - Modelo 7: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	114
Figura 38 - Modelo 8: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	115
Figura 39 - Modelo 8: Evolução de $H(t)$ . . . . .	116
Figura 40 - Modelo 8: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	116
Figura 41 - Valor de $k$ calculado para um precisão de aproximadamente $10^{-30}$ . . . . .	117
Figura 42 - Modelo 9: Evolução do parâmetro de $H(t)$ . . . . .	118
Figura 43 - Modelo 9: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	119
Figura 44 - Modelo 10: Evolução do parâmetro de $H(t)$ . . . . .	119
Figura 45 - Modelo 10: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	120
Figura 46 - Modelo 11: Evolução do parâmetro de $H(t)$ . . . . .	121
Figura 47 - Modelo 11: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	121
Figura 48 - Modelo 12: Evolução do parâmetro de $H(t)$ . . . . .	122
Figura 49 - Modelo 12: Quantidade de inflação e equação de estado. . . . .	123
Figura 50 - Valor de $k$ calculado para um precisão de aproximadamente $10^{-30}$ . . . . .	124
Figura 51 - Modelo 13: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	124
Figura 52 - Modelo 13: Evolução da função $\Phi(t)$ e equação de estado efetiva. . . . .	125
Figura 53 - Modelo 14: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	126
Figura 54 - Modelo 14: Evolução da função $\Phi(t)$ e equação de estado efetiva. . . . .	127
Figura 55 - Modelo 15: Evolução de $\lambda(t)$ . . . . .	127
Figura 56 - Modelo 15: Evolução da função $\Phi(t)$ e equação de estado efetiva. . . . .	128
Figura 57 - Modelo 16: Evolução da função $\lambda(t)$ . . . . .	129
Figura 58 - Modelo 16: Equação de estado efetiva. . . . .	129

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Algumas medições da constante de Hubble durante os anos. . . . .	23
Tabela 2	- História térmica do Universo e seus principais eventos. . . . .	34
Tabela 3	- A história e o futuro do Universo para $w = -3/2$ , energia <i>phantom</i> . . .	59
Tabela 4	- Parâmetros do método Runge–Kutta explícito para uma ordem genérica.	76
Tabela 5	- Exemplo de parâmetros do método Runge–Kutta para quarta ordem. .	76
Tabela 6	- Barreira de Butcher. . . . .	77
Tabela 7	- Parâmetros do método RKF4(5) segundo a matriz de Butcher. . . . .	78
Tabela 8	- Métodos de Fehlberg, Verner e barreira de Butcher. . . . .	79
Tabela 9	- Comparação entre as linhas de programação escritas em C e em MPFR.	82
Tabela 10	- Relações entre os valores de $r_+$ , $r_-$ , $H'_1$ , $H'_2$ , $w'_1$ e $w'_2$ ; e o valor inicial da função cosmológica $\lambda_i$ . . . . .	93
Tabela 11	- Relações entre parâmetros cosmológicos variando $H_0$ e $t_0$ . . . . .	97

## LISTA DE SÍMBOLOS

$c = G = \hbar = 1$	Unidades de Planck
$M_p = 1/\sqrt{8\pi}$	Massa de Planck
$i, j, k$	Espaços tridimensionais
$\mu, \nu, \gamma$	Espaços quadridimensionais
$(1, -1, -1, -1)$	Assinatura da métrica
$\frac{da(t)}{dt} \equiv \dot{a}(t)$	Derivada temporal
$V'(\phi) \equiv \frac{dV(\phi)}{d\phi}$	Derivada com respeito a $\phi$
$\partial_\mu \phi \equiv \phi_{,\mu}$	Derivada parcial
$\nabla_\mu \phi \equiv \phi_{;\mu}$	Derivada covariante
$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$	Equação de Einstein
$h \equiv \frac{H_0}{100 \text{ km/s/Mpc}}$	Parâmetro Hubble $h$
$\square \equiv g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu$	Operador d'Alembertiano
$\square \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu$	Operador d'Alembertiano para um escalar
$1\text{eV} \approx 11604\text{K}$	Conversão de temperaturas
$1t_p \approx 10^{-44}\text{s}$	Conversão de tempo
$1l_p \approx 10^{-35}\text{m}$	Conversão de comprimento

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	14
1	<b>COSMOLOGIA</b> . . . . .	18
1.1	Princípio Cosmológico e o Modelo Padrão . . . . .	18
1.2	Redshift Cosmológico . . . . .	20
1.3	Lei de Hubble . . . . .	21
1.4	Equações de Friedman . . . . .	23
1.5	Equações de Estado . . . . .	25
1.6	Evolução do Fator de Escala . . . . .	26
1.7	Evolução Térmica do Universo . . . . .	27
1.8	Nucleossíntese Primordial . . . . .	29
1.9	Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	32
1.10	Distâncias e Horizontes Cosmológicas . . . . .	34
2	<b>COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA</b> . . . . .	38
2.1	Introdução . . . . .	38
2.2	Problemas Fundamentais do Modelo Padrão . . . . .	39
2.3	Cosmologia Inflacionária . . . . .	41
2.4	Modelo Inflacionário . . . . .	44
2.5	Regime Slow Roll . . . . .	45
2.6	Inflação Caótica . . . . .	47
2.7	Lei de Potência para a Inflação . . . . .	49
2.8	Inflação Intermediária . . . . .	49
2.9	Reaquecimento . . . . .	50
3	<b>MODELO <math>\Lambda</math>CDM</b> . . . . .	52
3.1	Introdução . . . . .	52
3.2	Matéria Escura . . . . .	56
3.3	Energia Escura . . . . .	57
3.4	Modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	60
4	<b>TEORIAS ESCALAR-TENSORIAIS</b> . . . . .	62
4.1	Introdução . . . . .	62
4.2	Teoria de Brans–Dicke . . . . .	65
4.3	Princípio de Equivalência . . . . .	66
4.4	Transformação Conforme . . . . .	69
4.5	Problema da Transformação Conforme . . . . .	71
4.6	Brans–Dicke com Potencial $V(\phi)$ . . . . .	72
4.7	Teoria de Bergmann–Wagoner . . . . .	73
5	<b>INTEGRAÇÃO NUMÉRICA</b> . . . . .	75

5.1	<b>Introdução</b>	75
5.2	<b>Método Explícito de Runge–Kutta</b>	75
5.3	<b>Erro Estimado para o Método de Runge–Kutta</b>	77
5.4	<b>Método Runge–Kutta–Fehlberg</b>	77
5.5	<b>Método Runge–Kutta Segundo Verner</b>	79
5.6	<b>Ordem das Equações</b>	80
5.7	<b>Linguagens e Bibliotecas de Múltipla Precisão</b>	80
6	<b>RESULTADO E DISCUSSÕES</b>	83
6.1	<b>Introdução</b>	83
6.2	<b>Soluções Exatas</b>	85
6.3	<b>Modelos para o Campo Escalar <math>\phi(t)</math></b>	86
6.3.1	<u>Tangente Hiperbólica</u>	86
6.3.2	<u>Exponencial</u>	88
6.4	<b>Modelos Baseados no valor de <math>\lambda(t)</math></b>	90
6.4.1	<u>Função Cosmológica Proporcional a <math>t^{-2}</math></u>	90
6.4.2	<u>Parâmetro de Hubble Proporcional a <math>t^{-1}</math></u>	94
6.5	<b>Método Numérico</b>	98
6.6	<b>Soluções Numéricas</b>	98
6.6.1	<u>Modelo 1: Tangente Hiperbólica, <math>k = 0</math> e <math>\phi</math> Decrescente</u>	99
6.6.2	<u>Modelo 2: Tangente Hiperbólica, <math>k = 1</math> e <math>\phi</math> Decrescente</u>	102
6.6.3	<u>Modelo 3: Tangente Hiperbólica, <math>k = -1</math> e <math>\phi</math> Decrescente</u>	103
6.6.4	<u>Modelo 4: Tangente Hiperbólica, <math>k = 0</math> e <math>\phi</math> Crescente</u>	105
6.6.5	<u>Modelo 5: Exponencial, <math>k = 0</math> e <math>\phi</math> Decrescente</u>	107
6.6.6	<u>Modelo 6: Exponencial, <math>k = 1</math> e <math>\phi</math> Decrescente</u>	109
6.6.7	<u>Modelo 7: Exponencial, <math>k = -1</math> e <math>\phi</math> Decrescente</u>	112
6.6.8	<u>Modelo 8: Exponencial, <math>k = 0</math> e <math>\phi</math> Crescente</u>	115
6.6.9	<u>Modelo 9: <math>\lambda</math> proporcional a <math>t^{-2}</math>, <math>k = 0</math> e <math>\phi</math> Decrescente</u>	115
6.6.10	<u>Modelo 10: <math>\lambda</math> proporcional a <math>t^{-2}</math>, <math>k = 1</math> e <math>\phi</math> Decrescente</u>	118
6.6.11	<u>Modelo 11: <math>\lambda</math> proporcional a <math>t^{-2}</math>, <math>k = -1</math> e <math>\phi</math> Decrescente</u>	120
6.6.12	<u>Modelo 12: <math>\lambda</math> proporcional a <math>t^{-2}</math>, <math>k = 0</math> e <math>\phi</math> Crescente</u>	122
6.6.13	<u>Modelo 13: <math>H</math> proporcional a <math>t^{-1}</math>, <math>k = 0</math> e <math>\phi</math> Decrescente</u>	123
6.6.14	<u>Modelo 14: <math>H</math> proporcional a <math>t^{-1}</math>, <math>k = 0</math> e <math>\phi</math> Crescente</u>	125
6.6.15	<u>Modelo 15: <math>H</math> proporcional a <math>t^{-1}</math>, <math>k = 1</math> e <math>\phi</math> Crescente</u>	126
6.6.16	<u>Modelo 16: <math>H</math> proporcional a <math>t^{-1}</math>, <math>k = -1</math> e <math>\phi</math> Crescente</u>	128
	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	130
	<b>REFERÊNCIAS</b>	133

## INTRODUÇÃO

O surgimento da cosmologia moderna aconteceu graças, principalmente, a duas descobertas realizadas no início do século XX. A primeira delas, A teoria da Relatividade Geral (RG) publicada pelo pesquisador alemão Albert Einstein (1) em 1915 contendo uma descrição geométrica da gravitação e de como aplicá-la no entendimento da dinâmica do Universo. E a segunda, realizada alguns anos depois em 1929 pelo astrônomo americano Edwin Hubble<sup>1</sup> (2) que através de observações feitas por ele mesmo e por outros pesquisadores demonstrou que as galáxias afastavam-se de um observador com velocidade proporcional à distância entre o observador e a própria galáxia, sugerindo assim, um Universo em expansão progressiva.

As observações de Hubble (3) no telescópio Monte Wilson em 1924 mostraram que a nebulosa de Andrômeda era na verdade, um sistema estelar com dimensões semelhantes ao nosso, confirmando as intuições filosóficas de Kant que no final do século XVIII esculpiu a expressão "Universos-ilhas" para descrever as nebulosas ainda naquela época. Um pouco antes disso, em 1912, o astrônomo norte americano Vesto Slipher (4) descobriu que as linhas espectrais das estrelas na nebulosa<sup>2</sup> de Andrômeda apresentava um deslocamento para o azul, indicando que a galáxia estava aproximando-se com velocidade relativa de 300 km/s. Ele realizou o mesmo trabalho durante 20 anos com diversas galáxias diferentes e percebeu que a maioria delas apresentava deslocamento espectral para o vermelho ou seja, um afastamento relativo. Slipher também percebeu que, quanto menor era a luminosidade da galáxia e portanto mais distante, maior era o deslocamento espectral para o vermelho. Apoiado nestas e outras observações feitas por ele, Hubble postulo seu principal trabalho, a chamada lei de Hubble, um passo enorme para a física e a astronomia naquele momento.

A concepção de um Universo em expansão como sugeria a lei de Hubble era, na época, um problema natural oriundo de um senso comum entre os cientistas que acreditavam que o Universo era estático. Até mesmo Einstein (5) foi levado a modificar suas equações acrescentando a chamada constante cosmológica de forma a equilibrar a atração gravitacional, muito bem descrita pela RG original a uma espécie de força repulsiva determinada por essa constante de modo a adaptar sua teoria a ideia de um Universo estático, este modelo ficou conhecido como Universo Estático de Einstein. A ideia no entanto, foi abandonada por apresentar grande instabilidade. Observações subsequentes, dentre elas, as do próprio Hubble, já demonstravam, de forma inequívoca, que o Universo está em expansão. O holandês Willem de Sitter (6) em 1917, apoiado nos estudos de Einstein,

---

<sup>1</sup> Há provas que Lemaître já havia calculado a constante Hubble em 1927.

<sup>2</sup> Nesta época, Slipher ainda pensava que a galáxia de Andrômeda era uma nebulosa próxima à Via láctea.



propôs um modelo cosmológico onde o Universo era completamente vazio de matéria e dominado por uma constante cosmológica positiva. Esse modelo foi concebido a partir da ideia de que os efeitos gravitacionais da distribuição de matéria eram irrelevantes frente à repulsividade decorrente de uma determinada constante cosmológica. O Universo de de Sitter, como é conhecido, apresenta um crescimento exponencial, condizente, a priori, com os dados observacionais da época.

Durante a segunda década do século 20, o pesquisador russo Alexander Friedman (7, 8) e o padre belga George Lemaître (9, 10), demonstraram que a equação de Einstein pode descrever um Universo não estático independentemente do acréscimo da constante cosmológica. As chamadas equações de Friedman, deduzidas em 1922–1924, foram uma extensão do modelo Estático de Einstein e resultaram em um Universo em expansão com curvatura positiva em um primeiro artigo e com curvatura negativa em um segundo artigo. Seus resultados passaram relativamente despercebidos pela comunidade científica da época, ainda muito ligada ao modelo estático. Em 1927 Lemaître chegou aos mesmos resultados encontrados por Friedman. Ele propôs que o Universo estava inicialmente comprimido em um único átomo, o átomo primordial. Este átomo se fragmentou em uma quantidade descomunal de pedaços que por sua vez se fragmentaram em outros pedaços menores até formarem a configuração atual do Universo.

As descobertas de Hubble viabilizaram a descrição das características do Universo em grande escala através da RG, utilizando as galáxias e não mais as estrelas próximas. A partir destes conceitos, o britânico Edward Milne (11) nos anos 1930, estabelece o chamado princípio cosmológico que segundo o qual, o Universo em expansão deve ser necessariamente homogêneo e isotrópico. Isso significa que em um determinado instante, diversos observadores em pontos distintos terão as mesmas interpretações do Universo. Obviamente, esse conceito não se aplica em um contexto local, ou seja, o princípio cosmológica só se manifesta em grandes escalas. Observações davam conta de que em escalas superiores a 100 Mpc o Universo era bastante homogêneo, corroborando assim com o princípio cosmológico. Howard Robertson (12, 13, 14) em 1935–1936 e Arthur Walker (15) em 1937, demonstraram através de geometria Riemanniana que o elemento de linha associado aos resultados de Friedman e Lemaître é o único que respeita o princípio cosmológico defendido por Milne. Robertson explora as propriedades físicas e matemáticas do espaço-tempo. Walker, por sua vez, descreve a métrica na forma usualmente conhecida.

Na década de 40 dois modelos conflitantes do Universo foram propostos quase que simultaneamente: em 1946 George Gamow (16) publicou o primeiro de uma série de artigos que resultaria na atual teoria do *Big Bang*; em 1948 Bondi e Gold (17) e, independentemente, Fred Hoyle (18) propuseram um modelo estacionário do Universo em expansão em que a densidade é mantida constante pela criação contínua de matéria. Esse impasse somente seria resolvido vinte anos depois. O nome *Big Bang* foi sarcasticamente dado por Hoyle em uma série de debates sobre Astronomia no programa de rádio da BBC,

intitulado *The Nature of Things*, os textos foram publicados em 1950.

Gamow associou à ideia de Lemaître de um Universo inicialmente denso à sua visão de altas temperaturas primordiais como uma “fornalha atômica” capaz de formar os núcleos de todos os elementos químicos. Em 1948, Gamow, seu aluno de doutorado Ralph Alpher e Hans Bethe (19) publicaram os resultados de seus cálculos e confirmando que, até certo ponto, estavam corretos. Depois dessa publicação surgiram na literatura científica muitos artigos (ver resumo em Peebles e Peebles (20)) com modificações e refinamentos dos cálculos. É necessário comentar que a abundância dos elementos químicos mais leves no Universo como um todo começou a ser desvendado pelos estudos de Gamow e seus contemporâneos, essa abundância é consequência direta da expansão. Estimativas atuais apontam que a massa visível do Universo é aproximadamente 73% composta por Hidrogênio, 23% por Hélio e 2% composta por todos os outros elementos químicos.

O artigo mais importante daquela época foi o artigo de Alpher e Herman de 1948 (21). Eles perceberam que, no contexto do *hot Big Bang*, a radiação que permeava o Universo Primordial deveria apresentar um espectro de corpo negro quando em equilíbrio térmico com a matéria e que podiam estimar como a expansão teria diminuído as frequências da radiação, e por consequência a sua temperatura, permitindo estimar o seu valor hoje. No fim deste artigo eles escrevem:

“...encontra-se que a temperatura atual do Universo é em torno de 5K”.

Em artigos subsequentes, as temperaturas previstas variavam de acordo com a mudança nos métodos e abordagens adotadas pelos autores: em 1949 Alpher e Herman (22) revisaram sua previsão para 20K; em 1953 e 1956 (23, 24, 25) Gamow estimou a temperatura em 7K e 6K respectivamente.

Em 1964 – 1965 Penzias e Wilson (26) detectaram radiação isotrópica com uma temperatura de  $(3,5 \pm 1)K$ , e Dicke et al. (27) interpretaram a observação como sendo uma assinatura do *hot Big Bang*, a Radiação Cósmica de Fundo (RCF). Curiosamente essa radiação já tinha sido detectada em pelo menos duas ocasiões anteriores por Émile Le Roux em 1955 (28) (embora haja controvérsia sobre seus resultados), que reportou um valor de  $(3 \pm 2)K$ , e por Tigran Shmaonov em 1957 (29), que encontrou radiação isotrópica com uma temperatura de  $(4 \pm 3)K$ , mas em nenhum dos casos a associação crucial com a RCF foi feita.

A descoberta do RCF vem ao encontro da teoria do *hot Big Bang*, que prediz um Universo inicialmente muito quente e denso, dominado por radiação que se esfriou em consequência da expansão, possibilitando assim o surgimento das partículas elementares e posteriormente dos núcleos de elementos químicos mais leves, a chamada nucleossíntese Primordial. A RCF foi, historicamente, o “tiro de misericórdia” nas teorias estáticas e estacionárias defendidas por Hoyle e Narlikar (30). No início dos anos 1970, os livros de

referência, Weinberg (31) por exemplo, já tratavam a teoria do *Big Bang* como “Modelo Padrão” da cosmologia.

## 1 COSMOLOGIA

### 1.1 Princípio Cosmológico e o Modelo Padrão

As estrelas são distribuídas no espaço de forma muito irregular, geralmente concentradas em galáxias, que por sua vez, agrupam-se formando conglomerados de galáxias. No estudo do Universo em larga escala é, porém, necessário desprezar essas heterogeneidades locais. Baseado nesta ideia, duas hipóteses são consideradas para o entendimento do Modelo Padrão, a validade da RG em larga escala e o conceito de homogeneidade e isotropia do Universo, ou seja, não existe nenhum observador privilegiado no Universo e as suas características são as mesmas em qualquer direção. Isso significa que, embora existam grandes aglomerados de matéria em estrelas, galáxias e grupos de galáxias, a densidade média de matéria é constante em escalas maiores que 100Mpc.

Hoje, existem muitas razões para reconhecer que o modelo homogêneo e isotrópico dá, em termos gerais, uma descrição adequada não apenas ao estado atual do Universo mas também a uma parte notável da sua evolução. A propriedade fundamental do modelo é o seu caráter não estacionário. Não há dúvidas, que a propriedade do Universo em expansão dá uma justa explicação ao fenômeno fundamental do deslocamento para o vermelho. A homogeneidade e isotropia do espaço significam, que se pode escolher um tempo do Universo tal que a cada instante a métrica do espaço seja idêntica em todos os pontos e em todas as direções.

A homogeneidade implica que a métrica tridimensional, sem considerar por ora a dependência temporal, deva ser correspondente a um espaço com curvatura constante onde o tensor tridimensional de Riemann  $R_{ijkl}$  é dado por:

$$R_{ijkl} = K(\gamma_{ij}\gamma_{kl} - \gamma_{ik}\gamma_{jl}), \quad (1)$$

fazendo a contração dos índices  $i$  e  $k$ :

$$R_{ij} = -2K\gamma_{ij}. \quad (2)$$

Já a isotropia denota uma simetria esférica para o elemento de linha tridimensional tal que:

$$dl^2 = f(r)dr^2 + g(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3)$$

sem perda de generalidade  $g(r) = r^2$  e  $f(r) = e^{\lambda(r)}$  já que  $f(r) > 0$ .  $R_{ij}$  tem componentes:

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r}, \quad R_{22} = \text{cossec}^2\theta, \quad R_{33} = 1 + \frac{r\lambda'e^{-\lambda}}{2} + e^{-\lambda}, \quad (4)$$

comparando com a equação (3) e reescalando  $r$  como  $r' = K/|K|r$ :

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5)$$

onde  $k$  deve ter, necessariamente, os valores de  $-1$ ,  $0$  ou  $1$  de acordo com a curvatura do Universo. Acrescentando a dependência temporal a  $dl^2$  tem-se:

$$dl^2 = a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (6)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala.

Essa é uma métrica de um espaço tridimensional cujo "diâmetro" varia com o tempo mas se mantém homogêneo e isotrópico. Por fim, escolhendo como coordenada temporal o tempo medido por observadores comóveis (o tempo cósmico) que, segundo o princípio cosmológico é o mesmo para todos, a métrica Friedman–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (7)$$

Embora a equação (7) seja a forma mais comum da métrica FLRW na literatura, outras formas são úteis para analisar determinados aspectos do Universo e sua evolução. A forma conforme da métrica é descrita como:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (8)$$

onde o tempo conforme,  $\eta$ , é definido como:

$$\eta(t) \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (9)$$

Obtém-se outra forma útil da métrica (em coordenadas comoveis normalizadas) fazendo  $r = \sin \chi$  no caso  $k = 1$ . O intervalo assume a forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (10)$$

A métrica para os demais valores de  $k$  pode ser encontrada definindo:

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & k = 1 \\ \chi, & k = 0, \\ \sinh \chi, & k = -1 \end{cases} \quad (11)$$

assim, tem-se:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (12)$$

## 1.2 Redshift Cosmológico

O desvio espectral  $z$ , é um parâmetro que mede a alteração na frequência/comprimento de onda de um sinal luminoso observado em função da velocidade relativa entre a fonte emissora e o receptor. Este índice é dado por:

$$1 + z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e}, \quad (13)$$

onde  $\lambda_e$  e  $\lambda_r$  são respectivamente os comprimentos de onda da luz emitida e recebida. Quando a fonte emissora e o receptor se aproximam relativamente, há um aumento na frequência da onda recebida em relação a onda transmitida, o chamado desvio para o azul. Por sua vez, quando elas se afastam, há uma diminuição na frequência, o desvio para o vermelho ou *redshift*. Este desvio pode ter três causas distintas: o efeito Doppler; a perda de energia do sinal emitido devido ao próprio campo gravitacional da fonte; a expansão do Universo. Desconsiderando as duas primeiras hipóteses, é necessário fazer uma análise cuidadosa do *redshift* cosmológico no contexto do Modelo Padrão.

Considera-se um sinal de luz emitido em um ponto do espaço com coordenadas  $(t_e, r_e, \theta, \phi)$ , que é recebido por um observador comóvel localizado em  $(t_r, r_r, \theta, \phi)$ . Devido à homogeneidade do espaço-tempo, pode-se escolher, sem perda da generalidade,  $r_r = 0$ . Como um sinal de luz apresenta uma equação geodésica nula,  $ds^2 = 0$ , as geodésicas que passam por  $r_r = 0$  são aquelas em que  $\theta$  e  $\phi$  são constantes. Por isso  $d\theta = d\phi = 0$ . Assim, através da métrica de FLRW é possível mostrar que:

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_e}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_e), \quad (14)$$

onde o sinal significa que o raio de luz aproxima-se do observador. Por sua vez, emitir ondas sucessivas em um intervalo de tempo  $\delta t$  curto o suficiente para que  $a(t)$  não mude de valor significativamente, faz com que a equação (14) torne-se:

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_r + \delta t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_e). \quad (15)$$

Assim, fazendo a diferença entre (14) e (15) é possível mostrar que:

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_r}{a(t_r)}.$$

Como o comprimento de onda da luz é dado por  $\lambda = c \delta t$ , pode-se concluir que a equação que define o *redshift* torna-se:

$$1 + z = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}. \quad (16)$$

### 1.3 Lei de Hubble

Inicialmente sugerida por George Lemaître em 1927. A lei de Hubble foi posteriormente proposta por Edwin Hubble e Milton Humason em 1929 a quem lhe é obviamente atribuída. Ela é dada por:

$$v = D_p H_0, \quad (17)$$

onde  $v$  é a velocidade de afastamento,  $D_p$  é a distância própria e  $H_0$  é a chamada constante de Hubble.  $H_0$  tem dimensões de  $t^{-1}$  e é definida como:

$$H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}, \quad (18)$$

onde  $t_0$  é o tempo presente. A lei de Hubble pode também ser apresentada através do *redshift*, expandindo este parâmetro em série de Taylor:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1 \approx \frac{1}{[1 + (t_0 - t_e)H_0]} - 1 \approx (t_0 - t_e)H_0, \quad (19)$$

onde  $(t_0 - t_e)$  é a distância própria  $D_p$  em unidades naturais.

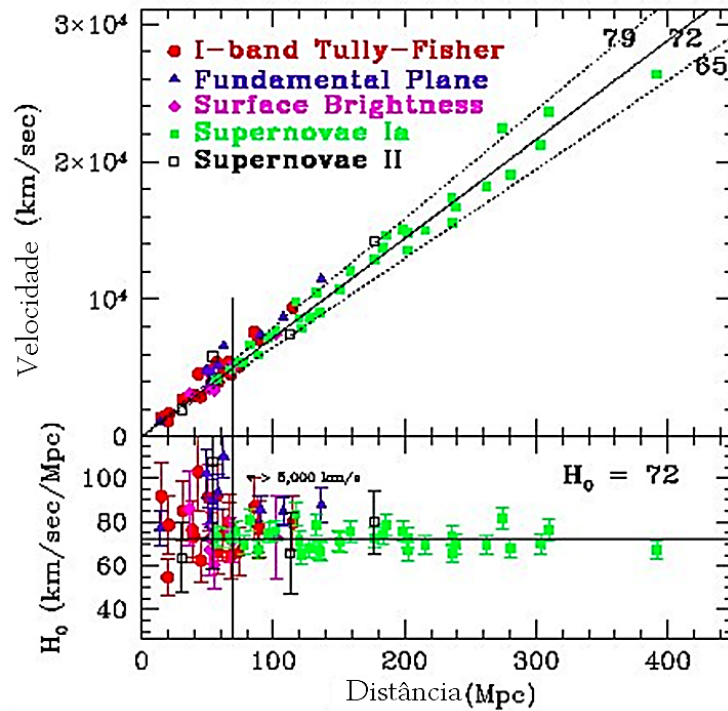
A lei de Hubble mostra que o Universo está se expandindo, e a constante de Hubble representa a taxa desta expansão. Se o Universo está se expandindo é razoável imaginar que, em algum ponto no passado, ele deve ter começado como uma singularidade. Essa é a ideia original da famosa teoria do *Big Bang*. A lei de Hubble foi construída avaliando aspectos físicos de galáxias próximas à Terra e, por isso, é válida apenas para pequenas distâncias. Fazendo a expansão em série de Taylor em torno de  $t_0$  do fator de escala, tem-se:

$$a(t) = a(t_0) \left[ 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0)^2 + \dots \right].$$

Os termos de ordens superiores ao termo de primeira ordem descrevem a diferença entre a lei de expansão verdadeira e a aproximação feita por Hubble. O termo de segunda ordem é associado ao chamado parâmetro de desaceleração  $q$  definido como:

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0) a(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2}, \quad (20)$$

Figura 1 - Valores medidos para a constante de Hubble.



Legenda: Parte Superior—Algumas medidas independentes para  $H_0$ ; Parte inferior—Convergência para o valor típico  $H_0 = 72$ .

Fonte: FEEDMAN et al, 2001, p. 62. (32) Adaptado pelo autor.

tornando o fator de escala:

$$a(t) = a(t_0) \left[ 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \right].$$

Uma das mais recente medições da constante de Hubble foi publicada em novembro de 2016 pela *The  $H_0$  Lenses in COSMOGRAIL's Wellspring Collaboration* (H0LiCOW) (33), com o valor de  $H_0 = 71,9_{-3,0}^{+2,4}$  km/s/Mpc. É interessante observar a evolução do valor da constante durante este um século de desenvolvimento:

Como a constante de Hubble tem dimensão de  $t^{-1}$  pode-se estimar, porém de forma pouco rigorosa, a idade do Universo. Esse parâmetro é definido como tempo de Hubble  $t_H$ , outro parâmetro importante que pode ser calculado a partir de  $H_0$  é o raio de Hubble.



Tabela 1 - Algumas medições da constante de Hubble durante os anos.

$H_0$ (km/s/Mpc)	Grupo de Pesquisa	Publicação
575	Lemaître	1927
530	Hubble	1929
180	Humason et al.	1956
$50 \pm 4, 3\sigma$	Sandage et al.	1976
$72 \pm 8$	Telescópio Hubble	2001
$77, 6_{-12,5}^{+14,9}$	Chandra	2006
$71, 0 \pm 2, 5$	WMAP	2010
$67, 3 \pm 1, 2$	Missão Planck	2013
$71, 90_{-3,0}^{+2,4}$	H0LiCOW	2016

Legenda: *Chandra X-Ray Observatory* (Chandra); *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP)

Fonte: HUMASON et al, 1956, p. 97 (34); SANDAGE et al, 1976, p. 7 (35); FREEDMAN et al, 2001, p. 47 (32); BONAMENTE et al, 2006, p. 25 (36); JAROSIK et al, 2011, p. 14 (37) e ADE et al, 2013, p. 1 (38).

Os valores mais atuais para o tempo e o raio de Hubble<sup>3</sup> são respectivamente:

$$t_H \equiv \frac{1}{H_0} \approx 4,29 \times 10^{17} \text{ s} \approx 13,61 \text{ Gyr},$$

$$a_H \equiv \frac{c}{H_0} \approx 1,29 \times 10^{26} \text{ m} \approx 4,18 \text{ Gpc}.$$

#### 1.4 Equações de Friedman

A partir das equações de Einstein aplicadas à métrica FLRW, as componentes do tensor e o escalar de Ricci são respectivamente:

<sup>3</sup> Utilizando a medição H0LiCOW e a velocidade da luz de  $c = 299.799.458 \text{ m/s}$ .

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (21)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (22)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad (23)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}, \quad (24)$$

$$R = -6 \frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}. \quad (25)$$

Por sua vez, o tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$  é caracterizado como um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (26)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia,  $p$  é a pressão de matéria e  $U$  é a quadri-velocidade, com  $U^\mu U_\mu = 1$ . As componentes covariantes do tensor energia-momento são:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{11} = \frac{pa^2}{1 - kr^2}, \quad T_{22} = pa^2, \quad T_{33} = T_{22} \sin^2 \theta. \quad (27)$$

As componentes 00 e 11 das equações de Einstein são:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (28)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi p. \quad (29)$$

As equações para  $G_{22}$  e  $G_{33}$  são equivalentes à equação (29). Subtraindo a equação (29) pela equação (28) tem-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p). \quad (30)$$

Equações (28) e (30) geralmente são chamadas de equações de Friedman. Derivando (28) e substituindo em (30) é possível mostrar que:

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (31)$$

Esse resultado também pode ser deduzido através da lei de conservação do tensor energia-momento,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$

## 1.5 Equações de Estado

O Universo é tratado como um sistema termodinâmico, cuja matéria é descrita por um fluido perfeito. Por isso, é mister que sejam propostas relações, chamadas de Equações de Estado, entre os parâmetros que o caracterizam. No contexto cosmológico, as equações de estado usadas geralmente têm a forma:

$$p(\rho) = w\rho, \quad (32)$$

onde  $w$  é uma constante que define a natureza deste fluido.

Substituindo (32) na equação da conservação do tensor energia-momento (31), verifica-se que:

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (33)$$

onde  $\rho_0$  é uma constante. No contexto cosmológico, três equações de estado são particularmente relevantes:

- (i)  $w = 1/3$ , associado a matéria ultrarrelativística, às vezes chamada de “radiação”;
- (ii)  $w = 0$ , que descreve matéria não relativística, ou “poeira”, associado tanto a matéria bariônica quanto a matéria escura fria;
- (iii)  $w = -1$ , que descreve tanto uma constante cosmológica quanto um campo escalar constante.

As formas de  $\rho$  para cada valor de  $w$  são respectivamente:

$$\rho(a) = \begin{cases} \rho_0^r a^{-4}, \\ \rho_0^m a^{-3}, \\ \rho_0^\Lambda. \end{cases} \quad (34)$$

As constantes de proporcionalidade  $\rho_0^r$ ,  $\rho_0^m$  e  $\rho_0^\Lambda$  são atribuídas à radiação, poeira e constante cosmológica respectivamente. Apesar da notação,  $\rho_0^\Lambda$  não é incluído na densidade da energia,  $\rho$ , na equação (28). Porém, transferindo-se o termo com a constante cosmológica para o lado direito dessa equação, é possível associar o  $\Lambda$  a uma densidade de energia equivalente dada por:

$$\rho_0^\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (35)$$

No *hot Big Bang*, toda a matéria no Universo é inicialmente ultrarrelativística, e a radiação domina o período inicial do Universo. À medida que o Universo expande, a matéria resfria e torna-se não relativística. A densidade de energia associada à poeira decai mais rapidamente do que a densidade associada à radiação e, após um determinado tempo, a matéria passa a dominar. Como o decaimento de  $\rho^r$  e  $\rho^m$  são proporcionais a  $a^{-4}$  e  $a^{-3}$  respectivamente, a evolução de  $a(t)$  sugere que, em algum momento, a constante cosmológica, passe a dominar o Universo.

Em uma abordagem realista, é mais correto admitir a coexistência dos três fluidos que compõem o Universo, por isso:

$$\rho = \rho^r + \rho^m + \rho^\Lambda. \quad (36)$$

## 1.6 Evolução do Fator de Escala

Utilizando a equação de Friedman (28), em um Universo com curvatura  $k = 0$  e sem constante cosmológica, tem-se:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho. \quad (37)$$

A densidade crítica,  $\rho_c$ , é definida como a densidade para a qual o Universo hoje teria curvatura idênticamente zero:

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi}. \quad (38)$$

Com base em  $\rho_c$  define-se os parâmetros de densidade total,  $\Omega^{\text{tot}}$ , e de fluidos individuais como:

$$\Omega^{\text{tot}} \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \Omega^r \equiv \frac{\rho^r}{\rho_c}, \quad \Omega^m \equiv \frac{\rho^m}{\rho_c}, \quad \Omega^\Lambda \equiv \frac{\rho^\Lambda}{\rho_c}. \quad (39)$$

Estes valores fazem parte da lista dos parâmetros cosmológicos, uma relação de grandezas física observadas por pesquisadores. Assim, pode-se reescrever a densidade de energia em termos de  $\Omega^{\text{tot}}$  e também em termos do parâmetro de densidade dos tipos de matérias que compõem o Universo, de forma que:

$$H^2 = H_0^2 \Omega^{\text{tot}} = H_0^2 (\Omega^r + \Omega^m + \Omega^\Lambda). \quad (40)$$

Para o caso mais geral com  $k \neq 0$  tem-se:

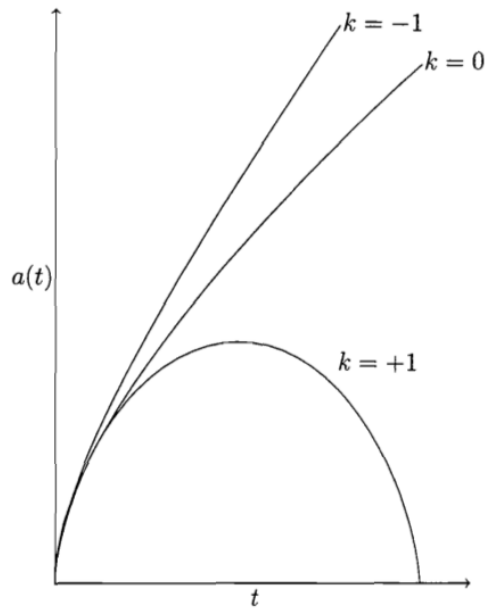
$$\Omega^k \equiv \frac{k}{(aH)^2} = \Omega^{\text{tot}} - 1, \quad (41)$$

onde o parâmetro  $\Omega^k$  é a chamada "densidade de curvatura". A partir deste resultado é possível constatar a relação entre a curvatura do Universo representada por  $k$  e a densidade de energia:

- (i)  $\Omega^{\text{tot}} < 1 \rightarrow k = -1$  (Universo aberto);
- (ii)  $\Omega^{\text{tot}} = 1 \rightarrow k = 0$  (Universo plano);
- (iii)  $\Omega^{\text{tot}} > 1 \rightarrow k = 1$  (Universo fechado).

Dados observacionais atuais de RCF e de supernovas com alto *redshift* mostram que  $\Omega^{\text{tot}}$  hoje em dia é aproximadamente 1, compatível com um Universo espacialmente plano. Utilizando a equação de Friedman (28) com  $k = 0$ , pode-se mostrar que a solução

Figura 2 - Evolução do fator de escala para os três valores de  $k$ .



Fonte: CARVALHO, 2005, p. 23. (39) Adaptado pelo autor.

geral para  $a(t)$  é:

$$a(t) \propto t^{2/3(1+w)}. \quad (42)$$

Obviamente, essa equação não é válida quando  $w = -1$ , que corresponde à equação de estado para uma constante cosmológica. Porém, com  $\rho^m$  e  $\rho^r$  iguais a zero,  $\rho = 0$  em (28) e fica evidente que:

$$H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow a(t) \propto e^{\sqrt{\Lambda/3}t}. \quad (43)$$

Esse resultado é extremamente importante pois mostra o caráter exponencial da evolução do Universo quando dominado por uma constante cosmológica e também fundamenta as teorias ditas inflacionárias durante o Universo Primordial. Assim, o fator de escala evolui particularmente para cada tipo de fluido como:

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{1/2}, & w = 1/3, \\ t^{2/3}, & w = 0, \\ e^{\sqrt{\Lambda/3}t}, & w = -1. \end{cases} \quad (44)$$

## 1.7 Evolução Térmica do Universo

O modelo de um Universo em expansão naturalmente leva a supor que a evolução tenha ocorrido a partir de uma singularidade inicial. Como foi visto, a própria dinâmica

do fator de escala sugere que a singularidade tenha ocorrido em  $t = 0$ . Além disso, se o Universo é composto por uma combinação de três tipos distintos de fluido, é evidente que em cada período evolutivo, se tenha características termodinâmicas associadas a dominação de cada um, por isso é razoável supor que houve uma evolução térmica distinta para cada uma das eras.

Durante a era da radiação, a densidade de energia  $\rho^r$  é proporcional a  $a^{-4}$ , durante a dominação da matéria  $\rho^m$  é proporcional a  $a^{-3}$  e na era dominada pela constante cosmológica.  $\rho^\Lambda$  é constante. Partindo desta premissa e com base nas equações (16), (33) e (39) pode-se reescrever os parâmetros de densidades dos três tipos de fluidos em termos do *redshift* cosmológico de forma que:

$$\Omega^X(z) = \begin{cases} \Omega_0^r(1+z)^4, & w = 1/3, \\ \Omega_0^m(1+z)^3, & w = 0, \\ \Omega_0^\Lambda, & w = -1, \end{cases} \quad (45)$$

onde o índice zero representa valores de hoje em dia para os parâmetros de densidade.

O parâmetro de densidade  $\Omega^{\text{tot}}$  atual pode ser calculado levando em conta que o valor do *redshift* medido hoje em dia é  $z(t_0) \approx 0$ . Segundo o grupo de pesquisa Planck com dados de 2013 (38) a contribuição de cada tipo de fluido em  $\Omega_0^{\text{tot}}$  é:

$$\Omega_0^{\text{tot}} = \Omega_0^r + \Omega_0^m + \Omega_0^\Lambda \approx 0 + 0,3183 + 0,6817 \approx 1, \quad (46)$$

cujos valores foram retirados da coluna *best fit* do conjunto de dados (Planck+WP). A variação deste valor é estimada por meio do parâmetro de densidade de curvatura dado por  $\Omega^k$  cujo valor hoje em dia é:

$$\Omega_0^k = -0,037_{-0,049}^{+0,043}, \quad (95\%; \text{Planck} + \text{WP}). \quad (47)$$

Estes resultados são compatíveis com o valor de curvatura do espaço-tempo  $k = 0$ , ou seja um Universo espacialmente plano, embora  $k = \pm 1$  não possam ser descartados.

Para o período de transição de dominação entre a radiação e matéria, define-se o *redshift*  $z_{eq}$  que é encontrado dividindo-se os seus parâmetros de densidade destes dois tipos de fluidos, tal que:

$$1 + z_{eq} = \frac{\Omega_0^m}{\Omega_0^r}, \quad (48)$$

também considerando o melhor ajusta aos dados publicados por Planck 2013, o *redshift* desta transição é:

$$z_{eq} \approx 3403, \quad (\text{Planck} + \text{WP}). \quad (49)$$

Para valores de  $z \gg z_{eq}$ , o Universo é dominado pela radiação. Este período é comumente chamado de Universo Primordial. A lei de Stefan–Boltzmann relaciona a densidade de

radiação de energia de um corpo negro com a sua temperatura, e tem a forma:

$$\rho^r(T) = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}, \quad (50)$$

onde a constante de proporcionalidade  $\sigma$  é chamada de constante de Stefan-Boltzmann. Pela equação (34),  $\rho^r \propto a^{-4}$  e conclui-se que:

$$T(t) \propto a(t)^{-1} \Rightarrow a(t)T(t) = \text{constante}. \quad (51)$$

Outra relação importante é a relação entre a temperatura e o tempo cósmico. Durante a época de dominação da radiação,  $a \propto t^{1/2}$ , logo:

$$T(t) \propto t^{-1/2}. \quad (52)$$

Os resultados acima indicam que o Universo Primordial apresentava altas temperaturas, era denso, dominado pela radiação, e que durante a sua evolução inicial, a temperatura diminuiu com o inverso do fator de escala  $a(t)$  até o momento em que a densidade de energia dos fótons se tornou aproximadamente igual à densidade de energia associada à matéria.

O período de transição entre a matéria e a energia escura a dado através do *redshift*  $z_\Lambda$  como:

$$1 + z_\Lambda = \left( \frac{\Omega_0^m}{\Omega_0^\Lambda} \right)^{-1/3} \Rightarrow z_\Lambda \approx 0,29. \quad (53)$$

note que esta transição aconteceu logo após o período de formação de discos galáticos, em  $z \approx 1 - 2$  (40).

## 1.8 Nucleossíntese Primordial

Conforme a análise feita até este ponto, o Universo Primordial, com  $z \gg z_{eq} \sim 10^3$ , era dominado por radiação, e a temperatura do Universo,  $T$ , era proporcional a  $a(t)^{-1}$ . Pela equação (16) a temperatura em termos do *redshift* obedece:

$$T(z) \propto 1 + z. \quad (54)$$

A síntese do núcleo dos elementos químicos mais leves, a *Big Bang Nucleosynthesis* (BBN), era extremamente sensível às condições do Universo no período em que a temperatura era em torno de 1MeV ( $z = 6 \times 10^9$ ), que corresponde a aproximadamente um segundo após o *Big Bang*. Em temperaturas mais elevadas, as interações fracas eram em equilíbrio térmico, fixando assim a razão entre o densidade de nêutrons  $n$  e o densidade

de prótons<sup>4</sup>  $p$  em  $n/p = e^{-Q/T}$  onde  $Q$  é a diferença entre a massa de nêutrons e prótons, cujo valor é  $Q = 1,293\text{MeV}$ . A taxa de interconversão entre os nêutrons e prótons é:

$$\Gamma_{n \leftrightarrow p} \sim G_F^2 T^5, \quad (55)$$

onde  $G_F \approx 1,66 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} (\hbar c)^3$  é a constante de acoplamento de Fermi, enquanto a taxa de expansão do Universo é:

$$H \sim \sqrt{g_* G T^2}, \quad (56)$$

onde  $g_*$  é o número efetivo de graus de liberdade de partículas relativísticas, que determina a densidade de energia da radiação:

$$\rho^r = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4. \quad (57)$$

Conforme a temperatura diminui,  $\Gamma_{n \leftrightarrow p}$  cai mais rápida do que a taxa de expansão, que resulta na saída do equilíbrio na temperatura:

$$T_{fr} \sim (g_* G_N / G_F^4)^{1/6} \simeq 1 \text{ MeV}. \quad (58)$$

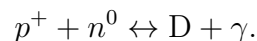
A fração entre a densidade numérica de nêutrons e prótons nesta temperatura é de  $n/p \simeq 1/6$ . Após o desacoplamento, os nêutrons são livres para o decaimento beta, e a fração  $n/p$  cai para  $\simeq 1/7$  no momento em que as reações nucleares começam. Um modelo analítico simplificado do desacoplamento produz uma relação  $n/p$  com uma precisão de 1% (41).

As taxas dessas reações dependem da densidade numérica de bárions, que geralmente é expressa normalizada em termos da densidade numérica de fótons provenientes de radiação de corpo negro como:

$$\eta \equiv \frac{n_b}{n_\gamma}, \quad (59)$$

Com  $n_\gamma$  determinado pela temperatura da RCF atual, as abundâncias dos elementos leves podem ser explicada com um valor de  $\eta$  no intervalo  $(5,8 - 6,6) \times 10^{-10}$ .

A nucleossíntese começa com a formação de Deutério (D) no processo:



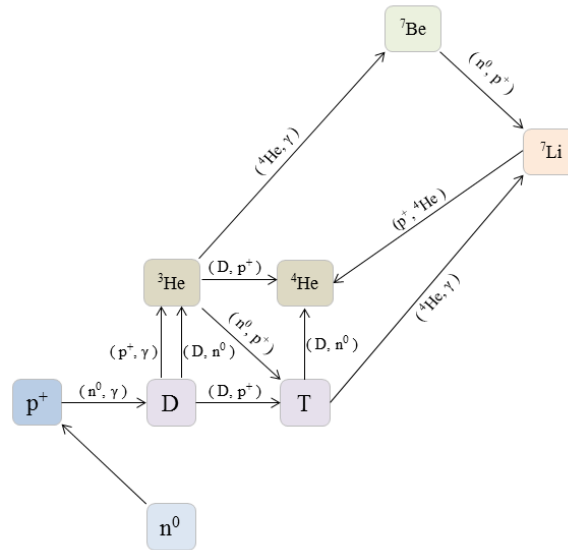
No entanto a grande densidade de fótons atrasa a produção de Deutério (e outros núcleos mais complexos) por fotodissociação, até bem depois que a temperatura cair abaixo da energia de ligação do Deutério,  $Q_D = 2,23 \text{ MeV}$ . A quantidade  $\eta^{-1} e^{-Q_D/T}$ ,

---

<sup>4</sup> Nesta seção, a letra  $p$  representa a densidade de prótons e não a pressão.

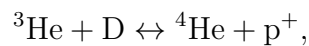


Figura 3 - Todos os possíveis processo de formação dos núcleos dos elementos mais leves durante a BBN.



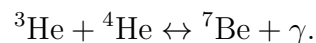
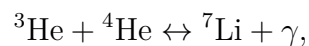
Fonte: O autor, 2018.

isto é, o número de fótons por bárion acima do limiar de fotodissociação do Deutério, cai abaixo da unidade em  $T \simeq 0,1$  MeV. Os núcleos podem então formar-se sem serem imediatamente fotodissociados. Apenas as reações:



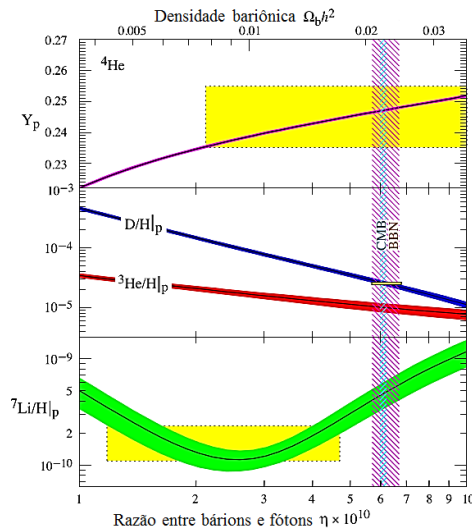
são importantes, pois a densidade de matéria bariônica tornou-se muito baixa neste época, a maioria dos nêutrons termina ligado ao elemento  ${}^4\text{He}$  por causa da sua estabilidade.

Os elementos mais pesados não se formam em quantidades significativas, parte por causa da instabilidade dos núcleos atômicos com número de massa iguais a 5 e 8 que impede as reações  $n^0 + {}^4\text{He}$ ,  $p^+ + {}^4\text{He}$  e  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ , e em parte por causa da barreira de Coulomb que impede as reações:



A figura 3 mostra o caminho para a formação dos núcleos durante o Universo Primordial.

Figura 4 - A abundância dos elementos químicos  ${}^4\text{He}$ , D,  ${}^3\text{He}$  e  ${}^7\text{Li}$  como previsto pela Nucleossíntese Primordial.



Legenda: A largura das linhas demonstram uma confiança de 95%. As caixas indicam as abundâncias dos elementos de luz observados. A banda vertical mais estreita indica o intervalo de concordância entre a densidade dos bárions e a RCF, enquanto a banda mais larga indica o intervalo de concordância com a BBN, ambos com 95% de confiança.

Fonte: PATRIGNANI et al, 2016, p. 380. (42) Adaptado pelo autor.

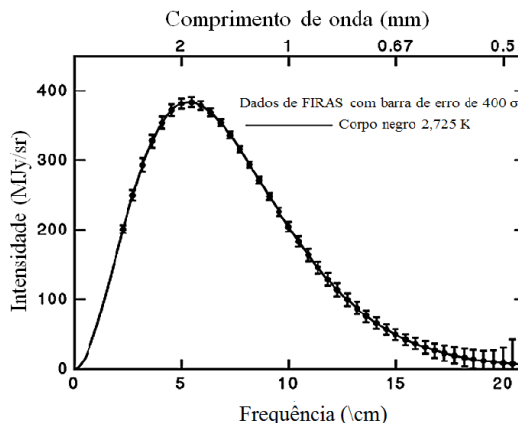
Assim, a fração de massa de  ${}^4\text{He}$ ,  $Y_p \equiv \rho({}^4\text{He})/\rho_b$ , pode ser estimada em:

$$Y_p = \frac{2(n/p)}{1 + n/p} \simeq 0,25. \quad (60)$$

## 1.9 Radiação Cósmica de Fundo

Durante o Universo Primordial o fator de escala era muito pequeno e por consequência, a densidade de energia era muito grande em comparação aos dias atuais. Por isso, o caminho livre médio de partículas era muito menor do que é hoje fazendo com que o meio se encontrasse em equilíbrio termodinâmico. Com a expansão do fator de escala, os fótons se esfriaram mais rapidamente do que as partículas não-relativísticas e, em torno de  $z \approx 3.300$  ( $T \approx 0,79 \text{ eV}$ ) as densidades de energia da matéria e da radiação ( $\gamma$  e  $\nu$ ) se equipararam. Diminuindo ainda mais a temperatura até  $0,26 \text{ eV}$ , os núcleos e elétrons

Figura 5 - Resultado do experimento FIRAS do satélite COBE.



Fonte: MATHER et al, 1990, p. L39. (44) Adaptado pelo autor.

puderam se combinar formando os átomos de elementos químicos neutros. Este período ficou conhecido como a época da recombinação, e ocorreu no período em que o *redshift* era de aproximadamente  $z = 1088$ , segundo os resultados de Bennett et al, de WMAP 2013, (43).

A recombinação é sucedida pelo último espalhamento, uma época onde a taxa de combinação entre núcleos e elétrons cai abaixo da taxa de expansão. Neste momento, a interação entre os fótons e a matéria praticamente cessa, provocando o desacoplamento. Com isso, originou-se o fundo de fótons de baixa energia que permeia o Universo com espectro semelhante a um corpo negro. Segundo a lei de Wien, que relaciona o comprimento de onda,  $\lambda_{max}$ , em que ocorre o máximo de emissão de um corpo negro com a temperatura,  $T$ :

$$\lambda_{max}T = 2,898 \times 10^{-3}\text{mK}, \quad (61)$$

Para um Universo em expansão, o comprimento de onda evolui proporcionalmente ao fator de escala ou seja  $\lambda \propto a$ , indicando que no passado os fótons provenientes da RCF eram mais energéticos e, usando equação (13):

$$T(z) = T_0(1 + z), \quad (62)$$

onde  $T_0$  é a temperatura atual.

Em 18 de novembro de 1989, a *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) lançou o satélite chamado *Cosmic Background Explorer* (COBE), para analisar detalhadamente a RCF do Universo operando em uma faixa de micro-ondas.

Os dados observacionais do COBE mostraram que a RCF apresenta uma temperatura de 2,725K, com uma frequência de pico de 160,4GHz, que corresponde a um comprimento de onda de 1,9 mm. Uma outra característica importante da RCF diz res-

Tabela 2 - História térmica do Universo e seus principais eventos.

Evento	tempo $t$	<i>redshift</i> $z$	Temperatura $T$
Início da inflação (?)	$10^{-42}$	–	$10^{18}$ GeV
Término da inflação (?)	$10^{-32}$	–	$10^{13}$ GeV
Bariogênese (?)	–	–	–
Transição de fase eletrofraca	20ps	$10^{15}$	100 GeV
Transição de fase QCD	20 $\mu$ s	$10^{12}$	150MeV
Equilíbrio térmico: $\gamma, \nu, e^\pm, n^0$ e $p^+$	$10^{-2}$ s	$4 \times 10^{10}$	10MeV
Desacoplamento de neutrinos	1s	$6 \times 10^9$	1 MeV
Aniquilação elétron-pósitron	6s	$2 \times 10^9$	500 keV
Nucleossíntese (BBN)	3min	$4 \times 10^8$	100keV
Igualdade de matéria e radiação	71, 7kyr	3293	0, 79eV
Recombinação/Desacoplamento de $\gamma$	375kyr	1091, 64	0, 2622eV
Re-ionização	482Myr	10, 1	$2, 7 \times 10^{-3}$ eV
Igualdade energia escura-matéria	9Gyr	0, 4	$0, 33 \times 10^{-3}$ eV
Dias de hoje ( $T \equiv T_0 = 2, 725$ K)	13, 74Gyr	0	$0, 23 \times 10^{-3}$ eV

Fonte: BENNETT et al, 2013, p. 46 (43); LIDDLE; LYTH, 2000, p. 35 (45) e BAUMANN, 2012, p. 40. (46) Adaptado pelo autor.

peito à isotropia: segundo os dados do COBE, tirando a anisotropia de dipolo devido ao deslocamento próprio do sistema solar, a radiação é isotrópica, com flutuações da ordem de  $\delta T/T \approx 10^{-5}$ . Por mais que sejam pequenas, essas flutuações são relevantes pois mostram que, na época do último espalhamento, o Universo já apresentava algum nível de inomogeneidade, que precisa ser explicada modificando, de alguma maneira, o Modelo Padrão.

A tabela 2 mostra a evolução térmica associada a alguns eventos do Universo Primordial até os dias de hoje. As interrogações apresentadas indicam os eventos que não podem ser explicados simplesmente pelo Modelo Padrão do *Big Bang* por isso há muita incerteza quanto aos valores das variáveis cosmológicas, Essas dúvidas são as principais motivações para o desenvolvimento de novos modelos cosmológicos tais como os modelos inflacionários.

### 1.10 Distâncias e Horizontes Cosmológicas

Para introduzir o conceito de horizonte de partículas e horizonte de eventos, é necessária definir a distância própria,  $D_p$ , que é a distância entre dois eventos que ocorrem

no mesmo valor do tempo cósmico,  $t$ . Considerando a métrica FLRW, cuja isotropia garante que não haja direção privilegiada, pode-se supor que os eventos estejam no mesmo raio, com  $d\theta = d\phi = 0$ . Outrossim, a homogeneidade permite considerar o observador em  $r = 0$ . Colocando  $dt = d\theta = d\phi = 0$  na equação (7), a distância própria entre  $r = 0$  e  $r = r_e$  (a coordenada radial comóvel do evento observado) é dada por:

$$D_p(t) \equiv \int_0^{r_e} ds = a(t) \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t) \begin{cases} \arcsin(r_e), & k = 1, \\ r_e, & k = 0, \\ \operatorname{arcsinh}(r_e), & k = -1. \end{cases} \quad (63)$$

Por outro lado, usando equação (14) para um raio de luz, essa integral é equivalente a:

$$D_p(t_e) = a(t_r) \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (64)$$

Dispondo da definição de distancia própria, pode-se definir agora o chamado horizonte de partículas. O horizonte de partículas  $D_{hp}$  representa a distância comóvel que a luz percorre do tempo  $t_e = 0$  até um observador em um tempo onde  $t_r = t_0$ . Essa distância é dada por:

$$D_{hp} \equiv \lim_{t_e \rightarrow 0} D_p(t_e) = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (65)$$

O horizonte de partículas é uma hipersuperfície no espaço-tempo que separa os eventos observáveis dos eventos ainda não observáveis, de forma que seu valor define o tamanho do Universo visível. É interessante descrever este horizonte em termo dos parâmetros cosmológicos, a fim de estimar seu valor. Para isso utiliza-se as derivadas das equações (16) em relação ao fator de escala, e a definição do parâmetro de Hubble para que  $D_{hp}$  seja dado por:

$$D_{hp} = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{da}{a(t)^2 H(t)} = \int_0^\infty \frac{dz}{H(z)}, \quad (66)$$

lembrando que  $z_r(t_0) \approx 0$  e  $z_e(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow 0$ . Por fim, utiliza-se as equações (40) e (45) para determinar o horizonte de partículas em termos de  $H_0$ ,  $\Omega_0^r$ ,  $\Omega_0^m$  e  $\Omega_0^\Lambda$  de forma que:

$$D_{hp} = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \left[ \Omega_0^r (1+z)^4 + \Omega_0^m (1+z)^3 + \Omega_0^\Lambda (1+z)^{3(1+w)} \right]^{-1/2} dz. \quad (67)$$

onde  $w$  é referente a constante cosmológica. Com os valores obtidos por Planck 2013 ( $\Omega_0^r \approx 0$  e  $w \approx -1$ ) o horizonte de partículas é:

$$D_{hp} \approx \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \left[ \Omega_0^m (1+z)^3 + \Omega_0^\Lambda \right]^{-1/2} dz \approx 14,4 \text{ Gpc}. \quad (68)$$

Outra importante distância comóvel é o horizonte de eventos, que define a maior

distância comóvel a partir da qual luz emitida hoje possa chegar ao observador no futuro. Pelo mesmo processo usado no cálculo do horizonte de partículas, porém fazendo com que  $z_r(t) \rightarrow -1$  quando  $t \rightarrow \infty$ , o horizonte de eventos definido com  $D_{he} \equiv \lim_{t_r \rightarrow \infty} -[D_p(t_0)]$ , logo:

$$D_{he} = \frac{1}{H_0} \int_{-1}^0 \left[ \Omega_0^r (1+z)^4 + \Omega_0^m (1+z)^3 + \Omega_0^\Lambda (1+z)^{3(1+w)} \right]^{-1/2} dz. \quad (69)$$

Como no caso do horizonte de partículas, o horizonte de eventos pode ser calculado com os parâmetros cosmológicos observados, seu valor é:  $D_{he} \approx 5,1 \text{Gpc}$ .

Outra forma de medir distâncias em cosmologia é através do fluxo luminoso de objetos cujas luminosidades intrínsecas são conhecidas com algum nível de confiança, as chamadas velas padrão. Em distâncias cosmológicas, a vela padrão mais usada é a supernova do tipo Ia. Uma supernova é um evento astronômico que ocorre durante os estágios finais da evolução de algumas estrelas, que é caracterizado por uma explosão que aumenta drasticamente a luminosidade da estrela em um curto espaço de tempo. O fluxo luminoso de uma explosão de uma supernova observado pode ser usado para inferir a distância da estrela em relação ao observador.

Considere uma fonte luminosa a uma distância  $D_l$  comóvel. Em um espaço euclidiano estática, a relação entre a luminosidade absoluta e o fluxo luminoso observado é dado por:

$$F = \frac{L}{4\pi D_l^2}, \quad (70)$$

com a distância  $D_l$  associada ao raio de uma esfera cujo centro coincide com a posição da fonte. Em um Universo FLRW porém, o fluxo luminoso será diluído pela expansão.

No momento em que a luz alcança a Terra, a área da esfera centrada em torno da supernova é de  $4\pi D_l^2$  e a fração da luz recebida em um telescópio com área de abertura  $A$  é, por consequência,  $A/4\pi D_l^2$ . A taxa de chegada dos fótons é menor do que a taxa dos fótons emitidos por um fator de  $1/(1+z)$ . Por sua vez, a energia  $E_r$  dos fótons recebidos é menor do que a energia  $E_e$  dos fótons emitidos por um factor de  $1/(1+z)$ . Por isso, a fórmula adequada para o fluxo observado  $F$  de uma fonte com luminosidade absoluta  $L$  em um Universo espacialmente plano, segundo a métrica FLRW, é dada por:

$$F = \frac{L}{4\pi D_p^2 (1+z)^2} = \frac{L}{4\pi r_e^2 a(t_0)^2 (1+z)^2}. \quad (71)$$

A relação entre a distância de luminosidade e a distância própria é:

$$D_l = D_p(1+z) = r_e a(t_0)(1+z), \quad (72)$$

e por consequência, a distância de luminosidade em termos dos parâmetros cosmológicos

é:

$$D_l(z_e) = \frac{(1+z_e)}{H_0} \int_0^{z_e} \left[ \Omega_0^r(1+z)^4 + \Omega_0^m(1+z)^3 + \Omega_0^\Lambda(1+z)^{3(1+w_\Lambda)} \right]^{-1/2} dz, \quad (73)$$

A distância de luminosidade,  $D_l$ , é uma alternativa para mensurar distâncias cósmicas para  $z \geq 0,1$  onde a relação de Hubble talvez não seja tão precisa.

Por fim, a última forma de medir distâncias abordada neste trabalho é a distância angular  $D_a$ . A ideia por trás deste valor é similar à ideia da distância de luminosidade: mensurar o ângulo,  $\delta\theta$ , formado no céu por objetos cujas dimensões são bem conhecidas, por exemplo as maiores galáxias em aglomerados. A distância angular é definida então como:

$$D_a = \frac{l}{\delta\theta}, \quad (74)$$

onde  $l$  é o comprimento do objeto em questão e o ângulo  $\delta\theta$  pequeno. Por sua vez, o comprimento do objeto é dado por:

$$l = a(t_e)r_e\delta\theta. \quad (75)$$

Assim, comparando as equações (74) e (75), a distância angular  $D_a = a(r_e)r_e$ . Dividindo a distância angular pela distância de luminosidade tem-se:

$$D_a = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} \frac{D_l}{1+z} = \frac{D_l}{(1+z)^2}. \quad (76)$$

A distância angular não é tão confiável pois a orientação da galáxia em geral afeta seu tamanho aparente, e pode ser difícil determinar visualmente a extensão de uma galáxia a grandes distâncias.

## 2 COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA

### 2.1 Introdução

O Modelo Padrão baseado no *hot Big Bang* apresenta uma singularidade convencionalmente descrita no tempo  $t = 0$ , instante em que, pelas soluções clássicas, a temperatura do Universo Primordial  $T \rightarrow \infty$ . Contudo, quando  $T$  é da ordem da massa de Planck ( $M_p \approx 1,22 \times 10^{19} \text{GeV}$ ) o modelo clássico passa a não fazer sentido, visto que os efeitos quânticos devam se tornar dominantes. Assim, é coerente começar um *hot Big Bang* a partir de um conjunto de condições iniciais específicas de forma que a temperatura do Universo logo após o *Big Bang* seja confortavelmente abaixo de  $M_p$  por exemplo  $10^{17} \text{GeV}$ . A partir dessa análise, foram previstos dois problemas que não podiam ser explicados pelo Modelo Padrão.

O primeiro problema foi discutido por Steve Weinberg (31) em 1972, o chamado “Problema do Horizonte”. No Modelo Padrão, o Universo inicialmente homogêneo e isotrópico contém regiões separadas que são causalmente desconectadas, por isso dificilmente apresentariam as mesmas características físicas. Entretanto, as observações da RCF de Boughn, Fram e Patridge (47) na década de 70 não encontraram nenhuma evidência de anisotropia acima de  $\delta T/T = 0,004$ .

O segundo problema foi descrito e estudado por Dicke e Peebles (48) em 1979, que perceberam que a densidade do Universo hoje é muito próxima à densidade crítica com um desvio da ordem de  $10^{-2}$ . Isso implica que a densidade do Universo Primordial era muito próximo à unidade. Para que isso ocorra é necessário escolher condições iniciais muito precisas, caso contrário o Universo, ou recolapsaria ou se expandiria muito rapidamente impossibilitando a formação de estruturas. Esse problema é conhecido como o “Problema da Planaridade”.

O primeiro modelo teórico para a inflação durante o Universo Primordial foi proposto por Alan Guth (49) em 1981. Guth discutiu esses dois problemas e propôs um modelo chamado hoje de “velha inflação”, que consistia em um super-resfriamento durante uma possível transição de fase do Universo pouco tempo depois do *Big Bang*. Durante a inflação, o resfriamento de um estado de falso vácuo geraria um crescimento exponencial do fator de escala, ou seja, uma expansão extremamente violenta. O falso vácuo consiste em um estado no qual a matéria é dominada por uma grande densidade de energia proveniente de, por exemplo, um campo escalar. Neste processo, formam-se bolhas que expandem exponencialmente, mas mantendo sua densidade de energia constante até que o falso vácuo decaia. Nesse momento as bolhas do falso vácuo colidem uma com as outras, esquentando o Universo novamente.

Este modelo bastante simples foi discutido por Stephen Hawking (50) sob dois



olhares distintos. No primeiro deles, considerando o surgimento das bolhas da nova fase bastante provável, é natural esperar que essas bolhas se formem muito próximas umas das outras fazendo com que as possíveis colisões entre elas tornem o Universo extremamente heterogêneo. Outra falha seria a pouca expansão resultante, a inflação não seria suficiente para resolver os problemas do Modelo Padrão. Já no segundo caso, considerando o surgimento destas bolhas pouco provável, não haveria colisões entre elas e cada uma das bolhas se tornaria um Universo distinto. Ambas as hipóteses não são aceitáveis para a maioria da comunidade científica.

Um novo modelo para o Universo inflacionário foi proposto pelo russo Andrei Linde (51) também em 1981. Hoje conhecida como a “nova inflação”, o trabalho de Linde propôs que a inflação pode iniciar durante o falso vácuo ou ser determinada por uma instabilidade apresentada no máximo global de um potencial efetivo. Este potencial decai lentamente até o seu mínimo, uma ideia chamada de rolamento lento ou regime *slow roll*.

A velha e a nova inflação são modificações substanciais na teoria do *Big Bang*, contudo ainda sofrem de alguns problemas. Para criar um contexto inflacionário possível do ponto de vista destas hipóteses, é necessário admitir que o Universo antes da inflação foi relativamente homogêneo, e grande o suficiente para que não recalescesse ante aos efeitos gravitacionais da matéria nele. Em 1983 Linde (52) propôs uma solução, a chamada inflação caótica. De acordo com este cenário, a inflação não necessita de um equilíbrio térmico ou transição de fase para iniciar. Um campo escalar cujo potencial é quadrático seria o suficiente para gerar a inflação. De fato qualquer potencial, polinomial ou não, gera a inflação necessária desde de que seu decaimento seja suave o suficiente para se ajustar ao regime *slow roll*.

Hoje, sabe-se que os modelos inflacionários baseados na ideia de uma transição de fase do Universo e nas teorias de grande unificação sofrem de diversos problemas e, portanto, são desfavorecidos. Porém, o estudo de outros mecanismos que geram inflação, e suas consequências são, talvez, o que há de mais efervescente na cosmologia hoje. Para uma revisão detalhada sobre o cenário atual da cosmologia após os resultados do grupo de pesquisa Planck 2013 ver o artigo de Linde 2014 (53).

## 2.2 Problemas Fundamentais do Modelo Padrão

No Universo atual, a densidade de energia, medida através do parâmetro  $\Omega^{\text{tot}}$  é muito próxima à densidade crítica. Isso indica a existência de um problema de ajuste fino nas condições iniciais, pois, para que  $\Omega^{\text{tot}}$  seja próximo da unidade hoje, seu valor deve ter sido extraordinariamente próximo da unidade no Universo Primordial, o que seria altamente improvável. Para demonstrar isso, utiliza-se da ideia de um Universo que expande-se desaceleradamente, ou seja  $\ddot{a} < 0$ , preenchido apenas por matéria e/ou

radiação cuja segunda equação de Friedman (30) torna-se:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) < 0, \quad (77)$$

que implica em:

$$\rho + 3p > 0. \quad (78)$$

Uma outra forma de visualizar as consequências de um Universo com expansão desacelerado é através do raio comóvel de Hubble  $(aH)^{-1}$ . Fazendo:

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt}(\dot{a}) = \frac{d}{dt}(aH) < 0, \quad (79)$$

e invertendo a equação, tem-se :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{aH} \right) > 0. \quad (80)$$

Desta maneira, é possível mostrar que o termo do lado esquerdo da equação de Friedman escrita na forma:

$$\frac{k}{(aH)^2} = \Omega^{\text{tot}} - 1, \quad (81)$$

sempre cresce, indicando que  $\Omega^{\text{tot}}$  tende a um valor maior que a unidade. Porém, observações sugerem que  $\Omega^{\text{tot}}$  é da ordem de um e, portanto, ele precisa ter seu valor muito próximo ao valor que tinha no passado, por exemplo,  $|\Omega^{\text{tot}} - 1| \lesssim 10^{-16}$  na época da nucleossíntese e  $|\Omega^{\text{tot}} - 1| \lesssim 10^{-61}$  na época de Planck. Se as condições iniciais não forem precisamente escolhidas, o Universo brevemente colapsa, ou se expande rapidamente antes que uma estrutura possa ser formada. Esse é o “Problema da Planaridade”.

A distância máxima percorrida pela luz desde  $t = 0$  até a época do desacoplamento, que ocorreu em  $z \approx 1100$ , e que determina a dimensão do horizonte causal, é da ordem de  $D_l \approx 0,040 h^{-1}$  Mpc. Esse valor corresponde a uma separação angular de:

$$D_a = \frac{D_l}{(1+z)^2} \approx 1^\circ. \quad (82)$$

Entretanto, a temperatura da radiação de fundo é extremamente homogênea entre regiões com separação angular maior que  $2^\circ$ , ou seja, regiões que não estavam causalmente conectadas apresentam similaridades nas características físicas, particularmente na temperatura, esse é o “Problema do Horizonte”. O satélite COBE observou anisotropias com  $\delta T/T \approx 10^{-5}$  na superfície do último espalhamento. Esse padrão de flutuações se estende em uma escala tão larga que seria muito improvável gerá-lo entre o *Big Bang* e o tempo do último espalhamento no Modelo Padrão.

Outro problema importante é o referente aos monopólos magnéticos, também conhecido como “Problema das Relíquias Exóticas”. Esse problema surge na física de partí-

culas dentro do contexto de *Grand Unified Theories* (GUTs), que preveem uma unificação das forças eletrofraca e forte em uma energia indeterminada. A quebra da simetria  $U(1)$  sempre presente nessas teorias leva à produção dos chamados defeitos topológicos no espaço-tempo, análogos às imperfeições na estrutura cristalina de um cristal. O defeito topológico mais simples é o chamado monopolo magnético: uma partícula estável e massiva com carga magnética quantizada. Estudos (54) indicaram que o número de monopolos magnéticos produzidos na quebra de uma GUT dentro do Modelo Padrão seria um fator de  $10^{14}$  maior do que os limites experimentais.

### 2.3 Cosmologia Inflacionária

Para resolver os principais problemas do Modelo Padrão, assume-se que o Universo primitivo se expandiu aceleradamente durante um curto período de tempo de modo que  $\ddot{a} > 0$ . Essa expansão ficou conhecida como Inflação Cósmica. As consequências da Inflação são demonstradas através das equações:

$$\rho + 3p < 0, \quad (83)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{aH} \right) < 0. \quad (84)$$

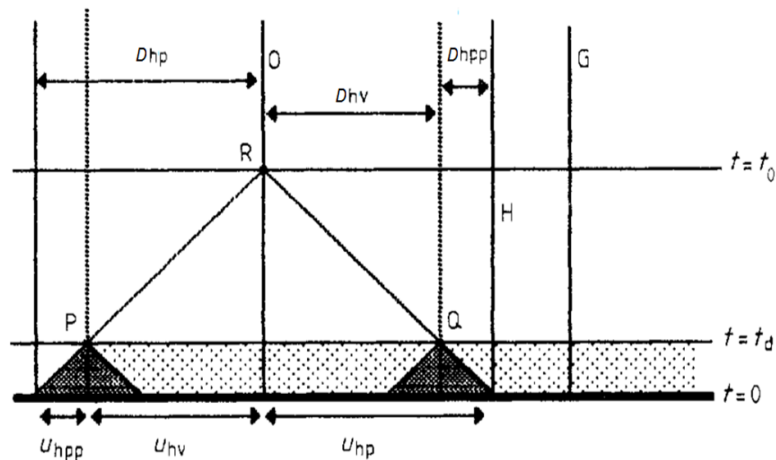
Como agora o lado esquerdo da equação (81) diminui durante a inflação, o  $\Omega^{\text{tot}}$  aproxima-se rapidamente da unidade. Levando em consideração que a inflação tenha sido suficiente para tornar o valor de  $\Omega^{\text{tot}}$  muito próximo da unidade, ele permanece aproximadamente o mesmo nos dias de hoje, resolvendo naturalmente o “Problema da Planaridade”. Vale ressaltar que o Universo em expansão acelerada viola a condição de energia forte, visto que esse condição impõe um caráter atrativo à matéria. A inflação por sua vez, caracteriza-se pelo seu caráter repulsivo, uma vez que a equação de estado tem pressão necessariamente negativa dada por:

$$p < -\frac{\rho}{3} \quad \Rightarrow \quad w < -\frac{1}{3}. \quad (85)$$

Portanto, no período inflacionário, o Universo não era dominado por matéria e/ou radiação como no Modelo Padrão, e sim por outro tipo de energia que reflete essa propriedade. Uma equação de estado que se enquadra perfeitamente nesta característica é aquela vinculada à constante cosmológica para a qual  $w = -1$ . Como será visto nos próximos capítulos, as observações atuais são compatíveis com este valor de  $w$ .

Para explicar como a inflação resolve o problema do horizonte, compare a figura 6, que demonstra as relações entre os horizontes no modelo FLRW, e a figura 7, que de-

Figura 6 - Diagrama causal para o modelo FLRW.



Legenda: Os cones de luz estão a  $\pm 45^\circ$  e as linhas de Universo comóveis são as linhas verticais. A letra R representa um evento nos dias de hoje, P e Q representam dois eventos que ocorreram durante o desacoplamento. Os eventos P e Q não estão em contato causal, impedindo uma explicação satisfatória para condições físicas semelhantes observadas atualmente.

Fonte: ELLIS; STOEGER 1988, p. 208. (55) Adaptado pelo autor.

monstra as relações entre os horizontes em um típico modelo inflacionário.

Usa-se a métrica FLRW em coordenadas comóveis normalizadas (12). Nessas coordenadas, as geodésicas nulas radiais obedecem as relações  $d\theta = 0$ ,  $d\phi = 0$  e  $ds^2 = 0$ , assim, para essas geodésicas define-se:

$$U \equiv \chi_2 - \chi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}. \quad (86)$$

A isotropia do espaço-tempo considerado permite que se use essa equação para analisar a causalidade em qualquer Universo condizente com a métrica FLRW, através da relação entre  $U$  e  $t$ . O valor da coordenada radial,  $U_{hp}$  no horizonte de partículas medido por O no evento R com coordenadas  $\chi = 0$  e  $t = 0$  é dado por:

$$U_{hp} = \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (87)$$

A distância do horizonte de partículas medida por O nesse instante é:

$$D_{hp} = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = a(t_0) U_{hp}. \quad (88)$$

Da mesma forma, o valor da coordenada radial medido por O para os eventos P e Q, que são as linhas de Universo mais distantes que O pode observar desde o desacoplamento em  $t_d$  é:

$$U_{hv} = \int_{t_d}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (89)$$

e a distância atual medida para esse horizonte visual (hv) é:

$$D_{hv} = a(t_0) \int_{t_d}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = a(t_0) U_{hv}. \quad (90)$$

O horizonte de partículas primordial (hpp), isto é o horizonte de partículas que seria medido por um observador nos eventos P e Q, ocorrerá em um valor da coordenada radial  $U_{hpp}$  que corresponde a uma escala de distância atual dada por:

$$D_{hpp} = a(t_0) \int_0^{t_d} \frac{dt}{a(t)} = a(t_0) U_{hpp}, \quad (91)$$

demonstrando que:

$$D_{hp} = D_{hv} + D_{hpp}. \quad (92)$$

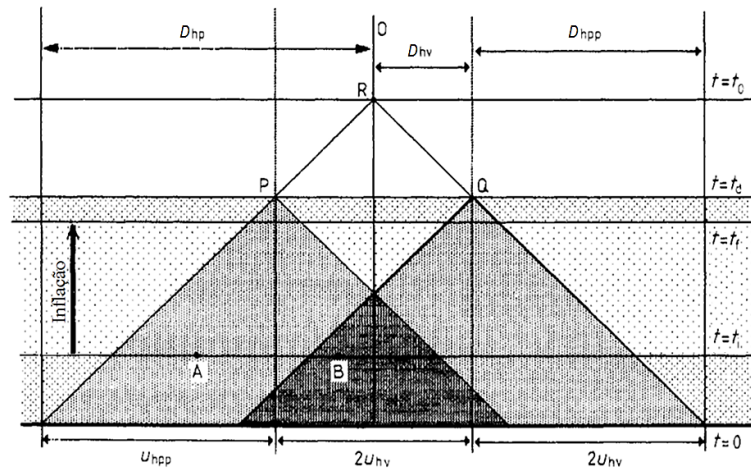
O observador no ponto R vê dois eventos distintos P e Q, que ocorreram na superfície do desacoplamento em  $t = t_d$ . Contudo, esses dois eventos não estiveram conectados no passado, pois a singularidade inicial limita seus cones de luz, assim, os eventos P e Q não podem influenciar-se mutuamente ou seja, não há nenhuma razão para que os observáveis medidos nos dois eventos apresentem qualquer semelhança física. Por isso, não é possível explicar satisfatoriamente a isotropia na RCF.

No caso de um Universo inflacionário homogêneo e isotrópico, as equações de (86) à (92) não mudam, porém acrescenta-se a era inflacionária, a área na figura 7 entre os tempos  $t_i$  e  $t_f$ . A parte escura do diagrama representa a região onde os eventos P e Q estão casualmente conectados. O evento B, por exemplo, encontra-se nesta região, por isso ele pode influenciar tanto o evento P quanto Q. Já o evento A, fora da região de causalidade, pode influenciar P mas não pode influenciar Q. A região de causalidade cresce conforme a quantidade de inflação. Para que haja inflação suficientemente grande,  $D_{hpp} \gg D_{hv}$ , assim o contato causal entre os eventos P e Q torna-se extremamente provável, resolvendo o “Problema do Horizonte”.

O problema dos monopolos magnéticos é resolvido se essas partículas são formadas antes ou durante a inflação. Monopolos são formados com uma densidade de aproximadamente um para cada volume de horizonte na época da quebra da simetria GUT. Sem inflação, a densidade desses objetos seria da ordem de  $10^{11} \rho_c$ . Porém, com inflação, a região visível de nosso Universo hoje surgiu de um (ou poucos) volumes de horizonte na época inflacionária, contendo um (ou poucos) monopolos magnéticos.

Uma outra característica atraente na inflação é a possibilidade de apresentar um

Figura 7 - Diagrama causal para um modelo inflacionário.



Legenda: Os eventos P e Q estão conectados através da região mais escura do diagrama, A probabilidade de contato causal entre os dois eventos é determinada pela quantidade de inflação.

Fonte: ELLIS; STOEGER 1988, p. 2010. (55) Adaptado pelo autor.

mecanismo para explicar a existência de perturbações de densidade que dariam origem a estruturas em grande escala. Flutuações quânticas teriam sido amplificadas pela inflação a ponto de gerar flutuações de densidade no plasma primordial. Essas flutuações deram origem às estruturas observadas atualmente tais como galáxias, aglomerados e superaglomerados. Evidentemente, a inflação por si só não é a explicação definitiva para a formação das estruturas cósmicas. O crescimento das sementes das inhomogeneidades depende das características do conteúdo subsequente do Universo: os tipos e quantidades relativas da matéria presente.

## 2.4 Modelo Inflacionário

A forma mais elementar de inflação é através de um campo escalar  $\phi$  cuja evolução é determinada por um potencial  $V(\phi)$ . Um modelo inicial para isso é a ação  $I_{IF}$  dada por:

$$I_{IF} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + V(\phi) \right]. \quad (93)$$

Pelo princípio variacional determina-se o tensor energia-momento:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(L\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (94)$$

Na cosmologia FLRW,  $\phi \equiv \phi(t)$ , e  $T_{\mu\nu}$  assume a forma de um fluido perfeito cuja densidade de energia e pressão são dadas respectivamente por:

$$\rho^\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p^\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (95)$$

Para satisfazer a condição de inflação (83) tem-se  $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ . As equações de Friedman, por sua vez, são:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right], \quad (96)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{3} [\dot{\phi}^2 - V(\phi)]. \quad (97)$$

Obviamente, as equações (96) e (97) são determinadas levando-se em conta que o termo  $k/a^2$  em um Universo inflacionário tende rapidamente a zero após o início da inflação, e que a constante cosmológica pode ser entendida como parte integrante do potencial  $V(\phi)$ . A equação de conservação do tensor energia-momento (31) para a inflação considerando  $\rho^\phi$  e  $p^\phi$  como descritos na equação (95) é a equação de Klein–Gordon:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (98)$$

Derivando a equação (96) e utilizando a equação de Klein-Gordon, obtém-se uma relação simples entre a derivada do campo e a derivada da função de Hubble:

$$\dot{H} = -4\pi\dot{\phi}^2. \quad (99)$$

## 2.5 Regime Slow Roll

O regime *slow roll* é uma hipótese sobre a relação entre a energia cinética do campo,  $\dot{\phi}^2$ , e o potencial  $V(\phi)$ . Ela garante que, durante a inflação, a expansão do Universo seja na prática exponencial. O regime *slow roll* é válido quando a energia cinética do campo  $\phi$  é ínfima em comparação ao potencial  $V(\phi)$ , ou seja  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ . Isso impõe que a equação de estado  $p(\rho) = w\rho$  para o campo escalar  $\phi$  durante a inflação comporte-se como uma

constante cosmológica, visto que:

$$w = \frac{p^\phi}{\rho^\phi} \approx -1. \quad (100)$$

A condição para o regime *slow roll* também implica que a equação de Friedman para a densidade de energia do campo  $\rho^\phi$ , equação (96), seja dada por:

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3}V(\phi). \quad (101)$$

Derivando a equação (101) e substituindo  $\dot{H}$  através da equação (99), pode-se demonstrar que a equação de Klein–Gordon para um Universo inflacionário é:

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi), \quad (102)$$

que tem como consequência  $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ . Para sistematizar as condições no regime *slow roll* foram definidos dois parâmetros  $\epsilon$  e  $\eta$ :

$$\epsilon = \frac{M_{\text{P}}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1, \quad \eta = M_{\text{P}}^2 \left| \frac{V''}{V} \right| \ll 1. \quad (103)$$

Outro análise importante a ser feita com relação ao período inflacionário é avaliar o quanto de inflação é necessária para resolver os problemas do Modelo Padrão. Para isso, define-se um parâmetro que mede a quantidade de expansão do Universo durante a inflação: o número de *e-folds*,  $N$ :

$$N \equiv \ln \left( \frac{a_f}{a_i} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H(t)dt, \quad (104)$$

onde o índice “*i*” representa o início da inflação; e “*f*”, o fim da inflação e o início do período do reaquecimento subsequente. Durante esse período, a temperatura do Universo é elevada a um valor próximo à do início da inflação. A partir do reaquecimento o Universo evolui seguindo o modelo FLRW, mas com regiões de causalidade muito maiores do que no Modelo Padrão. Considerando que o Universo passa a ser dominado pela radiação depois do reaquecimento (assim ignorando as épocas de dominação da matéria e da energia escura) equação (44) implica que  $H(a) \propto a^{-2}$  e portanto:

$$\frac{a_0 H_0}{a_f H_f} = \frac{a_0}{a_f} \left( \frac{a_0}{a_f} \right)^{-2} = \frac{T_0}{T_f} \approx 10^{-28}, \quad (105)$$

onde foi usado  $T_f \approx 10^{15}\text{GeV}$  e a temperatura  $T_0 \approx 10^{-4}\text{eV}$ .

Assim, para que a inflação resolva os problemas do Modelo Padrão, o termo  $(aH)^{-1}$  no fim da inflação dever ser multiplicado por um fator de  $10^{28}$ , e a relação entre os raios



comóvel de Hubble no início e no fim da inflação torna-se:

$$\frac{1}{a_i H_i} > \frac{1}{a_0 H_0} \approx \frac{10^{28}}{a_f H_f}. \quad (106)$$

Por fim, considerando  $H$  constante durante o período inflacionário, que implica em  $H_i \approx H_f$ , a equação (106) torna-se:

$$\frac{a_f}{a_i} > 10^{28} \quad \Rightarrow \quad N \equiv \ln \left( \frac{a_f}{a_i} \right) > 65, \quad (107)$$

ou seja, para resolver os problemas do Modelo Padrão é necessário que a inflação gere um crescimento de no mínimo 65 *e-folds*. Para o regime *slow roll*, pode-se mostrar que:

$$H(t) dt = \frac{H(\phi)}{\dot{\phi}} d\phi \approx \frac{-1}{\sqrt{2\epsilon}} \frac{d\phi}{M_p}, \quad (108)$$

e o número de *e-folds* será dado por:

$$N = \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \frac{d\phi}{M_p}. \quad (109)$$

## 2.6 Inflação Caótica

A inflação caótica foi introduzida por Andrei Linde nos anos oitenta (52). Embora inflação caótica possa acontecer com diversas formas do potencial, um simples potencial quadrático:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (110)$$

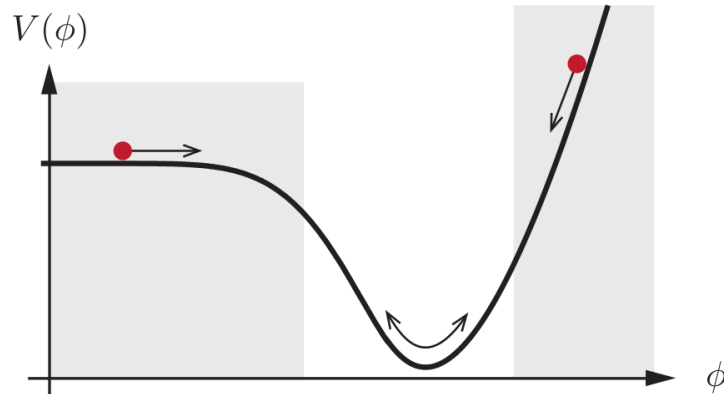
onde  $m$  é a massa da partícula associada ao campo  $\phi$ , serve para demonstrar as características principais.

Na inflação caótica, o potencial  $V(\phi)$  inicialmente assume um valor relativamente grande e desce lentamente em direção ao seu mínimo. Neste processo, as condições de *slow roll* são respeitadas fazendo com que a expansão do Universo Primordial seja essencialmente exponencial. No fim da inflação, ou seja, quando  $\epsilon \lesssim 1$ , o campo  $\phi$  passa a oscilar no fundo do potencial, como visto na figura 8. Esta oscilação converte a energia do campo em partículas que reaquecem o Universo.

Para que o potencial seja compatível com o regime *slow roll* é necessário que:  $\phi_i \gg M_p$ . Deste modo, as equações (101) e (102) com o potencial quadrático são:

$$H^2 = \frac{1}{6} \frac{m^2 \phi^2}{M_p^2}, \quad 3H\dot{\phi} = -m^2 \phi. \quad (111)$$

Figura 8 - Exemplo de potencial em regime *slow roll*.



Legenda: A inflação ocorre nas partes sombreadas do potencial.

Fonte: BAUMANN, 2012, p. 32. (46) Adaptado pelo autor.

Combinando essas duas equações pode-se demonstrar que  $\dot{\phi}(t)$  satisfaz a equação diferencial:

$$\dot{\phi}(t) = -mM_p \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (112)$$

Por sua vez, considerando que a inflação termine quando o parâmetro  $\epsilon \lesssim 1$ , então:

$$\epsilon = \frac{2M_p^2}{\phi_f^2} \lesssim 1, \quad (113)$$

que corresponde ao valor  $\phi_f \gtrsim \sqrt{2}M_p$  para o campo no final da inflação. Desta forma, o número de *e-folds* para inflação caótica com um potencial quadrático é:

$$N = \frac{1}{4} \frac{\phi_i^2}{M_p^2} - \frac{1}{2}. \quad (114)$$

Utilizando o valor de  $N \gtrsim 65$ , é possível calcular o valor mínimo de  $\phi_i$  para que o campo reproduza a expansão necessária, este valor é:

$$\phi_i \gtrsim 16M_p. \quad (115)$$

Percebe-se que, para a inflação caótica, é natural que o valor inicial do campo escalar seja próximo da massa de Planck.

## 2.7 Lei de Potência para a Inflação

Um potencial que obedeça os parâmetros *slow roll* é suficiente para caracterizar o período inflacionário, mesmo que falhe no final da inflação ( $\epsilon \leq 1$ ). Esse comportamento pode ser negligenciado, desde que o número de *e-folds* exceda o valor mínimo  $N \approx 65$ . Por fins de ilustração, é útil estudar algumas soluções exatas e suas propriedades.

Dentre essas soluções exatas, destaca-se a chamada inflação de lei-de-potência (56), no qual o fator de escala tem a forma  $a(t) = a_0 t^P$ . Esse comportamento surge quando o potencial tem a forma exponencial:

$$V(\phi) = V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{P}} \frac{\phi}{M_p}\right), \quad (116)$$

onde  $V_0$  e  $P$  são constantes. As equações de movimento com  $k = 0$  têm como solução particular:

$$a = a_0 t^P, \quad (117)$$

enquanto o campo escalar satisfaz:

$$\frac{\phi}{M_p} = \sqrt{2P} \ln\left(\sqrt{\frac{V_0}{P(3P-1)}} \frac{t}{M_p}\right). \quad (118)$$

Para  $P > 1$  este potencial satisfaz as condições de *slow roll* para a inflação. Os parâmetros são simplesmente  $\epsilon = \eta/2 = 1$ , independentes de  $\phi$ . Se  $\phi$  for a única fonte de matéria do Universo, o potencial  $V(\phi)$  será responsável por uma inflação que não se estingue com o passar do tempo, e o campo  $\phi$  age como um fluido perfeito com  $w = 2/(3P)$ . Esta afirmação não será válida se outro tipo de matéria também estiver presente, pois a combinação entre os dois tipos de matéria modificará a equação de estado efetiva e, portanto, a evolução de  $a(t)$ .

## 2.8 Inflação Intermediária

Na investigação de modelos inflacionários, geralmente procura-se uma solução exata para as equações de Friedman (96), (97) e Klein-Gordon (98), propondo uma forma específica de potencial. Neste tipo de abordagem, não há controle sobre o tipo de solução que surgirá de tal procedimento, e normalmente o resultado não é simples. A solução mais investigada usando esta técnica é a inflação intermediária (57), que dá origem a uma expansão do tipo:

$$a(t) \propto \exp\left(At^f\right), \quad (119)$$

com  $0 < f < 1$  e  $A > 0$ . Esse modelo surge do potencial:

$$V(\phi) \propto \left(\frac{\phi}{M_p}\right)^{-\beta} \left(1 - \frac{\beta^2 M_p^2}{6 \phi^2}\right), \quad (120)$$

onde  $\beta = 4(f^{-1} - 1)$ .

A inflação é mais rápida do que qualquer inflação proveniente de uma lei de potência porém mais lenta do que uma exponencial. Neste modelo, como na inflação de lei-de-potência, não há um fim natural para a inflação. Note que assintoticamente, para  $\phi \rightarrow \infty$ :

$$V(\phi) \propto \phi^{-\beta}. \quad (121)$$

## 2.9 Reaquecimento

Com o fim da inflação, o Universo se torna frio e desprovido de matéria e, segundo a maioria das teorias inflacionárias, quase toda a energia está armazenada no campo escalar  $\phi$ . Assim é necessário que algum processo termodinâmico após a inflação aconteça para que o Universo torne-se quente e denso outra vez como no *hot Big Bang*. Esse processo é chamado de reaquecimento. O reaquecimento se dá através da conversão de energia acumulada no campo  $\phi$  a partir de oscilações em torno do mínimo do potencial  $V(\phi)$  durante a dinâmica da expansão do Universo. As partículas produzidas pela oscilação do potencial formam o plasma que, em determinado tempo, atinge o estado de equilíbrio térmico. O reaquecimento se encerra quando a maior parte da energia intrínseca ao campo se converte em radiação. Assim, o fim do reaquecimento é caracterizado por  $\rho^\phi \ll \rho^r$ .

Com o fim da inflação, o campo escalar passa a oscilar em torno do mínimo do potencial  $V(\phi)$ . Esta é a fase de oscilações coerente, que acontece em todos os pontos na vasta região de homogeneidade criada pela inflação. Se não houver decaimento de partículas relativísticas, essa fase pode ser muito longa em comparação ao tempo de Hubble. Para o potencial descrito pela equação (110), a equação de Klein-Gordon é equivalente a:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -m^2\phi. \quad (122)$$

A expansão torna-se muito longa em comparação ao período de oscilação, assim  $H^{-1} \gg m^{-1}$  e, por isso, pode-se abandonar o termo de atrito  $3H\dot{\phi}$  na equação (122), e o campo sofre oscilações com uma frequência  $m$  em um movimento harmônico simples. Pode-se reescrever a equação de conservação do tensor energia-momento do campo no caso da inflação caótica como:

$$\dot{\rho}^\phi + 3H\rho^\phi = 3Hp^\phi = -\frac{3}{2}H(m^2\phi^2 - \dot{\phi}^2). \quad (123)$$

O valor médio do lado direito da equação (123) tende a zero ao longo de um período de oscilação. Por conseguinte, o campo durante as oscilações comporta-se como um campo de matéria sendo  $\rho^\phi \propto a^{-3}$  e assim:

$$\dot{\rho}^\phi + 3H\rho^\phi = 0. \quad (124)$$

A queda na densidade de energia reflete a diminuição da amplitude das oscilações. O próximo passo é incluir o decaimento de partículas do campo, que vai acontecer quando o tempo de Hubble atinge o tempo de decaimento. Uma maneira de fazer isso é inserindo um termo fenomenológico de decaimento na equação (124), assim tem-se:

$$\dot{\rho}^\phi + (3H + \Gamma_\phi)\rho^\phi = 0, \quad (125)$$

onde  $\Gamma_\phi$  parametriza a taxa de decaimento. No entanto, isso não é uma forma inteiramente válida para introduzir um decaimento de partículas, mesmo para um decaimento lento pois só avalia decaimentos fermiônicos. Se o campo  $\phi$  decair em bósons, o decaimento pode ser muito rápido, envolvendo um mecanismo chamado ressonância paramétrica, obtida por efeitos da condensação Bose-Einstein. Este tipo de decaimento é chamado de preaquecimento, pois a criação dos bósons acontece longe do equilíbrio térmico.

As partículas produzidas pela deterioração do campo irão interagir entre si criando outras partículas e a sopa resultante irá atingir eventualmente a temperatura de equilíbrio  $T_{rh}$ . Essa temperatura de reaquecimento é determinada pela densidade de energia  $\rho^{rh}$  no fim desta época. Necessariamente  $\rho^{rh} < \rho_e^\phi$ , onde  $\rho_f^\phi$  é a densidade de energia do campo escalar no fim da inflação. Se o reaquecimento acontece por um longo tempo,  $\rho^{rh} \ll \rho_f^\phi$ .

### 3 MODELO $\Lambda$ CDM

#### 3.1 Introdução

Lord Kelvin com trabalhos publicados em 1904, (58) foi o primeiro a tentar obter uma estimativa dinâmica da quantidade de matéria escura na Via Láctea. Seu argumento era simples mas poderoso: se as estrelas na Via Láctea podem ser descritas como um gás de partículas, agindo sob a influência da gravidade, então pode-se estabelecer uma relação entre o tamanho do sistema e a dispersão de velocidade das estrelas. Kelvin também obteve um limite superior para a densidade da matéria em tal volume, argumentando que uma densidade maior estaria em conflito com as velocidades observadas das estrelas. Henri Poincaré (59) ficou impressionado com a ideia de aplicar a teoria cinética dos gases para estimar a densidade de sistemas estelares tais como a Via Láctea. Em 1906, ele explicitamente mencionou matéria escura ou *matière obscure* em seu artigo original. Ele argumentou que, como a dispersão das velocidades prevista por Kelvin é da mesma ordem de grandeza que a observada, a quantidade de matéria escura será provavelmente igual ou menor do que a matéria visível.

Um passo importante na compreensão da estrutura da Via Láctea foi dado pelo astrônomo holandês Jacobus Kapteyn em 1922. Ele tentou estabelecer uma teoria geral da distribuição de massas, forças e velocidades. Kapteyn foi o primeiro a oferecer um modelo quantitativo para a forma e o tamanho da Galáxia descrevendo-a como uma distribuição achatada de estrelas, girando em torno de um eixo que aponta para o polo galáctico. Ele argumentou que o Sol estava localizado perto do centro da Galáxia, e que o movimento das estrelas poderia ser descrito como o de um gás em uma atmosfera sem grandes perturbações.

Em 1932, o aluno de Kapteyn, Jan Oort (60), publicou uma análise das componentes perpendiculares ao plano da galáxia das velocidades de estrelas na vizinhança do Sol. Em sua análise, Oort fez uma série de melhorias no trabalho de Kapteyn, relaxando, por exemplo, a hipótese do comportamento isotérmico do gás das estrelas, encontrando um valor mais provável para a densidade total de matéria perto do Sol de  $0,092 M_{\odot}/\text{pc}^3$  ( $6,3 \times 10^{-24} \text{g}/\text{cm}^3$ ). Em comparação com os cálculos anteriores da densidade feitos por Kapteyn, James Jeans (61) (1922) e Bertil Lindblad (62) (1926), seu valor era muito próximo ao obtido por Kapteyn,  $0,099 M_{\odot}/\text{pc}^3$ , porém menor do que os resultados de Jeans ( $0,143 M_{\odot}/\text{pc}^3$ ) e Lindblad ( $0,217 M_{\odot}/\text{pc}^3$ ). Para estimar a quantidade de matéria escura, Oort argumentou que a contribuição de estrelas à densidade local poderia ser aproximada extrapolando a função de massa estelar baseada nas estrelas observadas. Com essa abordagem, as estrelas sozinhas contribuiriam com uma fração substancial da densidade total inferida, e a densidade de matéria escura perto do Sol seria inferior a

$0,05M_{\odot}/\text{pc}^3$ , muito menor do que a densidade de massa de estrelas visíveis.

O astrônomo suíço Fritz Zwicky (63) é indiscutivelmente o mais famoso e amplamente citado no campo da matéria escura. Em 1933, ele estudou os *redshifts* de vários grupos de galáxias, publicados por Hubble e Humason (64) em 1931 e notou uma grande dispersão nas velocidades aparentes de oito galáxias dentro do aglomerado de Coma<sup>5</sup>, com diferenças que excederam 2.000km/s. O fato do Coma exibir uma grande dispersão de velocidade em relação a outros aglomerados já havia sido notado por Hubble e Humason, mas Zwicky foi um passo adiante, aplicando o teorema virial ao aglomerado para estimar sua massa. Zwicky começou estimando a massa total do Coma como sendo o produto do número de galáxias (800 na época) e a massa média de uma galáxia,  $10^9M_{\odot}$ , valor sugerido por Hubble. Ele então adotou uma estimativa para o tamanho físico do sistema,  $10^6$  anos-luz, e assim, determinou a energia potencial do sistema. A partir daí, calculou a energia cinética média e, finalmente, a dispersão de velocidade, descobrindo que 800 galáxias de  $10^9M_{\odot}$  em uma esfera de  $10^6$  anos-luz deveriam exibir uma dispersão de velocidade de 80km/s, enquanto a dispersão média de velocidade observada ao longo da linha de visão foi de aproximadamente 1.000km/s, e concluiu:

*“Se fosse confirmado, teríamos o resultado surpreendente: a matéria escura é presente em quantidade muito superior à matéria luminosa.”*

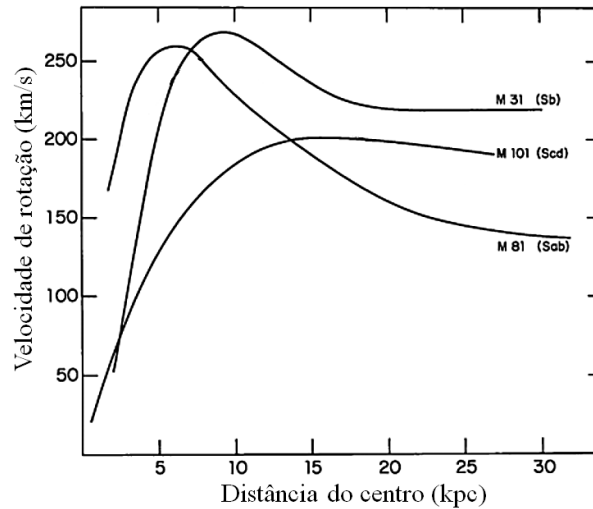
Em 1937, Zwicky publicou um novo artigo (65) refinando e ampliando a análise do aglomerado de Coma. O objetivo desse trabalho foi determinar a massa das galáxias, aplicando novamente o teorema virial, desta vez assumindo que o aglomerado continha 1.000 galáxias dentro de um raio de  $2 \times 10^6$  anos-luz. A partir da dispersão de velocidade observada, de 700km/s, ele obteve um limite inferior conservador de  $4,5 \times 10^{13}M_{\odot}$  para a massa do aglomerado, correspondendo a uma massa média por galáxia de  $4,5 \times 10^{10}M_{\odot}$ . Supondo então uma luminosidade absoluta média por galáxia de  $8,5 \times 10^7L_{\odot}$ , Zwicky mostrou que a razão massa-luminosidade é surpreendentemente elevada, de cerca de 500. O trabalho de Zwicky dependia da relação de Hubble entre *redshift* e a distância, ele usou os resultados de Hubble e Humason, que apontaram para  $H_0 = 558\text{km/s/Mpc}$ , com uma incerteza estimada de 10 a 20%. Usando o valor atual de  $H_0 = 67,3\text{km/s/Mpc}$ , a razão massa-luminosidade diminuiria por um fator de aproximadamente 8.

Embora a observação da dispersão de velocidades tenha sido importante no desenvolvimento da teoria de matéria escura, historicamente outro fenômeno provavelmente foi mais determinante em convencer a comunidade científica sobre a existência de matéria escura: as curvas de rotação de galáxias. Baseado nos dados de Roberts e Rots (66) em 1973, observou-se que o perfil das galáxias era achatado a grandes distâncias do seu centro, como ilustrado na figura 9.

---

<sup>5</sup> O aglomerado de Coma é um aglomerado de galáxias com, atualmente, mais de 3.000 galáxias identificadas.

Figura 9 - As curvas de rotação das galáxias M31, M101 e M81.



Legenda: Cada curva descreve como a velocidade rotacional varia em relação a distância do centro da galáxia. Nos três casos, a curva tem um comportamento aproximadamente constante longe do centro, incompatível com a distribuição da matéria luminosa observada.

Fonte: ROBERTS; ROTS, 1973, p. 483. (66) Adaptado pelo autor.

Avanços tecnológicos, em particular o desenvolvimento do espectrógrafo de tubo de imagem por Kent Ford, possibilitaram um estudo mais detalhado sobre curvas de rotação a partir da década 70. Utilizando esse equipamento, Ford e Vera Rubin realizaram observações da Galáxia de Andrômeda, publicando seus resultados em 1970 (67). As observações se estendiam a 110 minutos de arco do centro da galáxia e eram compatíveis com as medidas de ondas de rádio obtidas anteriormente por Morton Roberts (68) em 1966.

Em 1970, Ken Freeman (69) usando como modelo um disco exponencial, com a escala fixada através de observações fotométricas, calculou o raio no qual foi previsto o pico da curva de rotação, e comparou a previsão com a curva de rotação observada usando a linha de emissão de hidrogênio em 21cm. Esta combinação de modelagem teórica e observações de rádio que se estendem para além do disco óptico permitiu que Freeman chegasse a uma conclusão impressionante. Ele descobriu que, para M33 (a galáxia do Triângulo) e NGC 300, as curvas de rotação observadas atingiram o pico em raios maiores do que o previsto. Em uma discussão entre ele e Roberts, eles concluíram que deve haver nessas galáxias matérias adicionais que não são detectáveis, seja opticamente ou a 21cm. Sua massa deve ser pelo menos tão grande quanto a matéria luminosa, e sua distribuição deve ser bastante diferente da distribuição exponencial que é válida para a matéria visível da galáxia. Muitas observações na década de 80 indicaram a presença da matéria escura,



incluindo as lentes gravitacionais, distribuição de temperatura dos gases em galáxias e aglomerados, e o padrão de anisotropia na RCF. Um consenso entre os cientistas, diz que a matéria escura é composta principalmente por um tipo não caracterizado de partícula subatômica (70). A busca dessa partícula, por vários meios diferentes disponíveis, é um dos principais esforços da física de partículas e da cosmologia hoje.

Em 1998, o grupo de pesquisa *High-Z Supernova Search Team*, liderado por Adam Riess (71), e em 1999, o projeto *Supernova Cosmology Project* de Saul Perlmutter (72) et al., descobriram que a sugestão de György Paál (73), de um Universo que expandia de forma acelerada, estava correta. Desde então, diversos trabalhos corroboraram com esse fato (43, 38). Uma hipótese simples para explicar um Universo em expansão acelerada é o acréscimo de um tipo de energia capaz de superar os efeitos gravitacionais atrativos causados pela distribuição de matéria no Universo. A candidata mais notável para isso é a constante cosmológica  $\Lambda$  apresentada por Einstein em 1917 (5). A constante cosmológica foi acrescentada às equações de Einstein com o objetivo de produzir um Universo estático, porém esse modelo foi abandonado por ser instável, e estar em desacordo com dados observacionais subsequentes que apoiavam um Universo dinâmico. O ressurgimento de  $\Lambda$  foi proposto pois apresenta uma equação de estado  $w = -1$  que corresponde a uma pressão negativa. A natureza da energia escura, nome dado em alusão a matéria escura, é tão, se não mais, hipotética quanto a sua fonte de inspiração. Espera-se que a energia escura seja bastante homogênea, pouco densa e que não interaja através de nenhuma força fundamental além da gravidade.

Embora, os dados observacionais atuais sejam compatíveis com a energia escura proveniente de uma constante cosmológica onde  $w = -1$ , outras explicações para as observações também são viáveis: As mais importante delas são os modelos quintessência (74) e com energia *phantom* (75). Esses modelos sugerem que a equação de estado pode ser  $w \neq -1$ . Dados observacionais como os de Ashutosh Tripathi et al. (76), são suporte para esta afirmação. O modelo com energia *phantom* é caracterizador por uma equação de estado  $w < -1$ , um regime super acelerado. Este modelo sofre de muitos problemas e prevê o fim do Universo no chamado *Big Rip*. O modelo quintessência por sua vez, é descrito por uma equação de estado  $w > -1$  e variável no tempo. Robert R. Caldwell et al. introduziram o termo quintessência para designar um campo escalar dinâmico que é gravitacionalmente repulsivo. A dinâmica é a propriedade essencial do modelo. O desafio de qualquer teoria de energia escura é explicar o fato de ela existir na medida exata. A constante cosmológica por exemplo, é totalmente inerte, mantém a mesma densidade. Portanto, para explicar a quantidade de energia escura hoje, o valor de  $\Lambda$  deveria ter sido muito bem sintonizado na criação do Universo para ser adequado às observações de hoje. Em contrapartida, a quintessência interage com a matéria e evolui com o tempo, de forma que possa se ajustar gradativamente às observações atuais.

### 3.2 Matéria Escura

Existem fortes evidências que sugerem a existência de uma espécie (ou várias) de matéria escura. A combinação de dados observacionais de Planck 2013 e WMAP mostram que a quantidade de matéria escura no Universo é estimada em  $\Omega_0^e h^2 \approx 0,12038$  que, com  $h = 0,6704$ , corresponde a uma densidade de matéria escura de  $\Omega_0^e \approx 0,2678$ . Para demonstrar a relevância da matéria escura, basta compara a sua densidade com a densidade total de matéria contida no Universo que é de  $\Omega_0^m \approx 0,3183$ .

A hipótese sobre a matéria escura é a mais aceita pela comunidade científica para explicar a formação das estruturas cósmicas das galáxias e ainda, pode explicar as anisotropias da RCF. A maioria das pesquisas em cosmologia e astronomia defendem a tese de que galáxias, aglomerados de galáxias e o Universo como um todo contêm muito mais matéria do que é observada através de sinais eletromagnéticos.

Provavelmente a candidata mais popular para a matéria escura é a *Weakly Interacting Massive Particle* (WIMP), uma partícula massiva que interagiria com outros tipos de matéria (além de gravitacionalmente) somente através da força fraca. Devido a sua massa grande, seria uma partícula não-relativística, portanto, “fria”, durante boa parte do Universo Primordial, justificando sua inclusão no tipo de matéria denominado *cold dark matter* (CDM). Parte da popularidade da WIMP como candidata é devido ao milagre das WIMPs: com algumas suposições plausíveis sobre suas propriedades, sua abundância hoje produziria uma densidade compatível com a da matéria escura (77, 78, 79).

Partículas que entram no rol de CDM como WIMPs são as possíveis partículas super simétricas mais leves: neutralinos, sneutrinos e gravitinos. Além dessas possibilidades, o áxion, previsto na teoria Peccei-Quinn, tem sido amplamente discutido como possível candidato à matéria escura (80).

A busca pelas WIMPs (e em um grau um pouco menor, pelos áxions) tem motivado um programa experimental que continua até hoje. Com o advento do *Large Hadron Collider* (LHC) e experiências astrofísicas cada vez mais sensíveis, muitos acreditam que o momento da verdade veio para WIMPs: ou será descoberto logo, ou vai começar a declinar como candidata a matéria escura.

Uma possibilidade que também foi sugerida para explicar a formação das estruturas cósmicas é a chamada *hot dark matter* (HDM), que são basicamente neutrinos. Devido a sua massa pequena ( $\lesssim 2eV$ ) os neutrinos, na temperatura de hoje, são partículas relativísticas (por isso são considerados “quentes”) e, portanto, não aglomerariam da maneira que se projeta para a matéria escura.

Há três tipos ou “sabores” de neutrinos conhecidos: os de elétron, os de múon e os de tau, pesquisas sobre essa partícula cogitam a possibilidade da existência de um quarto sabor de neutrino ainda não detectado, esse novo sabor apresentaria características semelhantes aos outros três já conhecidos, porém sua massa seria substancialmente maior

do que dos outros e conseqüentemente, sua velocidade seria muito menores. Esse neutrino é hoje um candidato à matéria escura possível.

Uma alternativa para contrapor-se à ideia de matéria escura puramente CDM ou matéria escura puramente HDM é poposta por Silvio Bonometto, Riccardo Valdarnini (81) e outros em 1984. Eles estudaram a possibilidade da coexistência dos dois tipos de partículas como constituintes da matéria escura, esse modelo é chamado de *cold plus hot dark matter* (CHDM).

Contudo, ainda há astrônomos e astrofísicos, que acreditam que a possibilidade mais óbvia é considerar que a matéria escura, é na verdade, composta por objetos compactos muito menos luminosos do que as estrelas comuns porém, qualitativamente semelhantes. As possibilidades para tais partículas incluíam planetas, anãs marrons, anãs vermelhas, anãs brancas, estrelas de nêutrons e buracos negros. O pesquisador Kim Griest denominou esse tipo de objetos de *Massive Astrophysical Compact Halo Objects* (MACHOs), em resposta a hipótese das "WIMPs". Embora exista consenso hoje que reconhece que os MACHOs não constituem uma grande fração da matéria escura, as opiniões diferem sobre quais linhas de evidência desempenharam o papel mais importante para chegar a essa conclusão.

Muitas experiências com a finalidade de detectar partículas de matéria escura estão em curso, No entanto, nenhuma candidata à partícula de matéria escura, por enquanto, foi detectada. Embora a existência de matéria escura seja quase que unanimidade na comunidade científica, uma minoria de astrônomos, motivada pela falta de observações conclusivas sobre uma partícula de matéria escura argumenta a favor de modificações profundas no Modelo Padrão e na RG, como proposto, por exemplo na *Modified Newtonian dynamics* (MOND) (82).

### 3.3 Energia Escura

Um dos méritos das teorias inflacionárias, é prever a possibilidade de uma inhomogeneidade mínima no Universo que pode explicar as estruturas em larga escala e a anisotropia da RCF observada. Para compreender essas flutuações na evolução do Universo Primordial, precisa-se conhecer as quantidades e os tipos de matéria e energia que constituem o cosmos. A possibilidade mais simples para isso, é considerar a constante cosmológica  $\Lambda = 0$ , e a matéria escura sendo do tipo CDM como é mais comum, porém este modelo começou a ser descartado quando surgiram os primeiros dados observacionais no final dos anos 90 que indicavam uma expansão acelerada do Universo. O modelo então, foi substituído por outro que continha uma constante cosmológica diferente de zero. O modelo  $\Lambda$ CDM apresenta uma explicação natural para a expansão acelerada:  $\Lambda$  como a "fonte de energia escura".

A energia escura é uma forma de energia hipotética que só interage gravitacionalmente e que apresenta pressão negativa, um contraponto à gravidade. Essa pressão é a responsável por acelerar a expansão do Universo. A energia escura com equação de estado  $w = -1$  é consistente com a definição da constante cosmológica feita por Einstein no seu artigo de 1917 (5). Artigos mais recentes contudo, consideram a possibilidade de uma energia escura cuja equação de estado é  $w \neq -1$ , tais como os modelos quintessência ( $w > -1$ ) e *phantom* ( $w < -1$ ). Substituindo a densidade de energia proveniente de uma constante cosmológica  $\rho^\Lambda$  por um densidade mais geral  $\rho^\lambda$  na equação (39), torna a densidade total de energia:

$$\rho = \rho^r + \rho^m + \rho^\lambda, \quad (126)$$

onde  $\rho^\lambda$  é, genericamente a densidade de energia escura. A densidade de energia escura pode, ainda, ser descrita como uma componente dinâmica cuja equação de estado é  $w(z)$ , transformando a equação (40) em:

$$H^2 = H_0^2 \left\{ \Omega_0^r (1+z)^4 + \Omega_0^m (1+z)^3 + \Omega_0^\lambda \exp \left[ 3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz' \right] \right\}, \quad (127)$$

onde  $\Omega_0^\lambda$  é o parâmetro de densidade da energia escura nos dias de hoje. Existem muitas maneiras de parametrizar  $w(z)$ , dentre elas tem-se:

$$w(z) = w_0 + w'(z=0) \frac{z}{(1+z)^p}, \quad p = 1, 2, \quad (128)$$

e a parametrização logarítmica dada por:

$$w(z) = w_0 + w'(z=0) \log(1+z), \quad (129)$$

onde  $w_0$  é o valor da equação de estado hoje e  $w'(z=0)$  é a primeira derivada avaliada em  $z=0$ . No modelo quintessência as equações de densidade de energia e de pressão são respectivamente:

$$\rho_Q = \frac{1}{2a^2} Q'^2 + V, \quad (130)$$

$$p_Q = \frac{1}{2a^2} Q'^2 - V, \quad (131)$$

onde  $Q'^2$  e  $V(Q)$  são os termos cinético e potencial respectivamente; e ambos são funções do tempo conforme. A equação de estado é, também uma função do tempo pois  $w(\eta) = \rho_Q/p_Q$ . O modelo quintessência foi proposto para estudar as flutuações apresentadas nas observações da RCF. Esse modelo é mais geral do que o  $\Lambda$ CDM pois a equação de estado e torna-se  $w = -1$  quando  $Q' = 0$ .

Para o modelo com energia *phantom*, onde a equação de estado é constante, o

Tabela 3 - A história e o futuro do Universo para  $w = -3/2$ , energia *phantom*.

Tempo	Evento
$\approx 10^{-43}$ s	Era de Planck
$\approx 10^{-36}$ s	Inflação
Primeiros três Minutos	Elementos Leves
$\approx 10^5$ yr	Formação dos Átomos
$\approx 1$ Gyr	Formação das Primeiras Galáxias
$\approx 15$ Gyr	Dias de Hoje
$t_{rip} - 1$ Gyr	Fim do Conglomerado de Galáxias
$t_{rip} - 60$ Myr	Destruição da Via Láctea
$t_{rip} - 0,25$ yr	Dissociação do Sistema Solar
$t_{rip} - 30$ min	Explosão da Terra
$t_{rip} - 10^{-19}$ s	Dissociação dos Átomos
$t_{rip} - 35$ Gyr	<i>Big Rip</i>

Fonte: CALDWELL; DAVE; STEINHARDT, 2003, p. 71301(3). (75)

Adaptado pelo autor.

parâmetro de Hubble é escrito como:

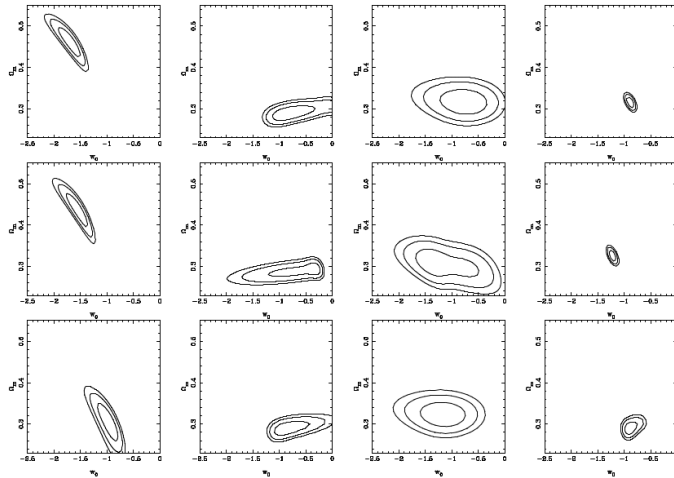
$$H^2 = H_0^2 \left[ \Omega_0^r (1+z)^4 + \Omega_0^m (1+z)^3 + \Omega_0^\lambda (1+z)^{-3(1+w)} \right]. \quad (132)$$

Considerando os valores atuais dos parâmetros e escolhendo um valor específico para  $w$  pode-se calcular os eventos cosmológicos e comparar com os eventos historicamente já estabelecidos, assim como feito por (75) na tabela 3.

Ambos os modelos encontram amparo em artigos tais como Tripathi et. al. (76) que apresenta uma análise do conjunto de dados observacionais com baixo *redshift* e com  $\Omega_0^\lambda + \Omega_0^m \approx 1$ . Os dados referem-se à SNIa UNION com *redshift* até  $\approx 1,4$ ; BAO com  $z$  até 2,3; e o terceiro conjunto de dados refere-se a  $H(z)$  avaliado em diferentes *redshit* com intervalo de  $0,07 \leq z \leq 2,3$ . Utilizando-se para isso modelos  $w(z)$  parametrizados por  $p = 1$ ,  $p = 2$  e parametrização logarítmica.

A figura 10 mostra que os dados de SNIa “parecem preferir” o modelo do tipo *phantom* com altos valores de  $\Omega_0^m$  em comparação aos outros dois conjuntos de dados, isso para todas as parametrizações avaliadas. Os contornos de SNIa mostram que o modelo com uma constante cosmológica está fora do nível de confiança de  $3\sigma$  para as parametrizações  $p = 1$ ,  $p = 2$ . Os dados de BAO e  $H(z)$ , embora mostrem-se mais afetuosos ao modelo quintessência com valores de  $\Omega_0^m$  menores, também são compatíveis

Figura 10 - Conjunto de dados SNIa, BAO,  $H(z)$ .



Legenda: Os gráficos apresentam, da esquerda para a direita, as curvas para o conjunto de dados SNIa, BAO,  $H(z)$  e uma combinação dos três; de cima para baixo, as parametrizações  $p = 1$ ,  $p = 2$  e logarítmica. Os contornos, do mais interno ao mais externo correspondem a uma acurácia de 68%, 95% e 99% respectivamente.

Fonte: THIPATHI et al, 2017 p. 6 (76).

com  $w = -1$  dentro do nível de confiança de  $1\sigma$ . O intervalo permitido para  $\Omega_0^m$  são menores nos dados BAO do que nos dados de  $H(z)$ . Por fim, a coluna que representa as três observações avaliadas em conjunto não permite concluir qual modelo é mais aceitável já que cada parametrização parece se adaptar a um modelo em particular.

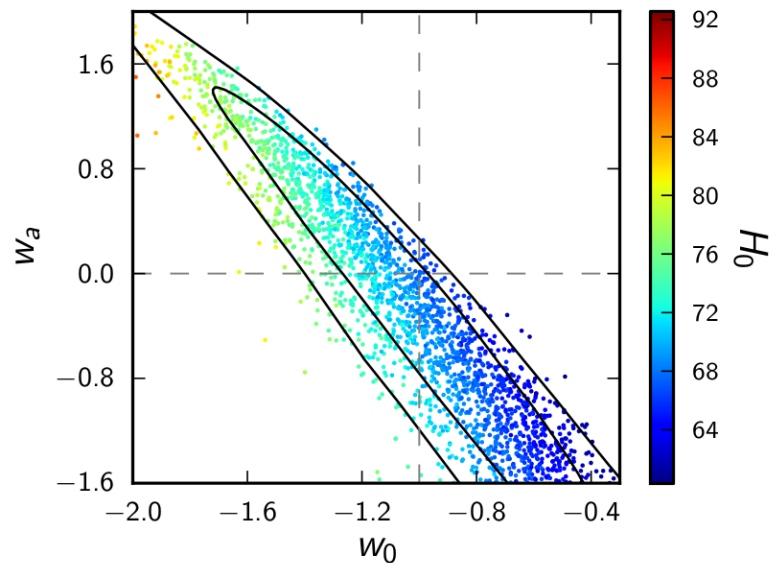
### 3.4 Modelo $\Lambda$ CDM

O modelo  $\Lambda$ CDM é hoje o modelo mais aceito pelo pesquisadores pois contempla a existência da energia escura; e ainda é consistente com um Universo espacialmente plano e com os modelos inflacionários. O modelo  $\Lambda$ CDM é definido por:

$$\Omega_0^m + \Omega_0^\Lambda = 1, \quad w = -1, \quad (133)$$

onde  $\Omega_0^m$  é a soma do parâmetro de densidade de matéria escura do tipo CDM e matéria bariônica. As observações atuais para os parâmetros, segundo Planck 2013, são:  $\Omega_0^m \approx 0.314$ ,  $\Omega_0^\Lambda \approx 0.686$  e para equação de estado:  $w \approx -1$ . Estes resultados sugerem que o Universo é composto, em maior parte, por energia escura, cuja equação de estado é compatível com a constante cosmológica. Parametrizando-se  $w(a)$ , como é feito por

Figura 11 - Distribuição em duas dimensões para  $(w_0, w_a)$  com dados de (Planck + WP + BAO).



Legenda: Os contornos interno e externo correspondem a um nível de confiança de 68% e 95% respectivamente e os valores de  $H_0$  estão codificados por cores. O cruzamento das linhas tracejadas representa a solução como uma constante cosmológica, ou seja:  $w_0 = -1$  e  $w_a = 0$ .

Fonte: ADE et al, 2014 p. 49 (38).

Planck 2013, tem-se :

$$w(a) \equiv \frac{p}{\rho} = w_0 + (1 - a)w_a. \quad (134)$$

O sinal de  $w_a$  pode dar uma ideia do tipo de evolução da energia escura, e o sinal de  $1 + w_0$  determina se a energia escura é atualmente do tipo quintessência ou *phantom*, essas duas constantes são determinadas pelas observações. De acordo com Planck 2013, os valores de  $w_0$  e  $w_a$  são respectivamente:

$$w_0 = -1,04_{-0,69}^{+0,72},$$

$$w_a < 1,32,$$

ambos segundo os dados de (95%; Planck+WP+BAO). Embora os resultados sejam compatíveis com a constante cosmológica, não são descartadas as outras hipóteses. A figura 11 ilustra a variação de  $w_0$  e  $w_a$  em termos de possíveis valores da constante de Hubble  $H_0$ .

## 4 TEORIAS ESCALAR-TENSORIAIS

### 4.1 Introdução

As teorias escalar-tensoriais têm sua gênese nos trabalhos do físico finlandês Gunnar Nordström em 1912 (83), que tentou incorporar gravitação à Relatividade Restrita descrevendo o campo gravitacional por um potencial escalar (o “campo escalar”,  $\Phi$ ). Para evitar uma equação de força trivial, a massa gravitacional dependeria de  $\Phi$  pela equação  $m = m_0 \exp(\Phi/c^2)$ . Essa teoria (a “primeira teoria de Nordström”) foi elaborada em 1913 (84) sem modificações. Neste mesmo ano, Nordström apresentou uma segunda teoria (85), em que a fonte do campo gravitacional foi associada com o traço do tensor energia-momento (novamente um escalar). Nesta “segunda teoria de Nordström”, a constante de gravitação de Newton é substituída por uma função que depende do potencial,  $g(\Phi)$ . Embora ambas as teorias foram descartadas, sendo superadas por RG, características das duas teorias de Nordström aparecem mais tarde em teorias escalar-tensoriais.

Um campo escalar também surgiu nos trabalhos de Theodor Kaluza (86) em 1921 e Oskar Klein (87) em 1926, cuja intenção era unificar as duas forças fundamentais da natureza conhecidas na época: eletromagnetismo e gravidade. Kaluza e Klein propuseram uma extensão à RG, adicionando uma dimensão ao espaço-tempo quadridimensional. As equações resultantes poderiam ser separadas em três conjuntos de equações: o primeiro equivalente às equações de campo de Einstein, o segundo equivalente às equações de Maxwell e o último conjunto seria uma equação relacionada a um campo escalar. Definindo  $\phi = g_{55}$  as equações de Einstein são:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{Rg_{\alpha\beta}}{2} = \frac{\phi^2}{2} \left( F_{\alpha\mu} F^\mu{}_\beta + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) - \left( \frac{\phi_{;\alpha\beta}}{\phi} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\square\phi}{\phi} \right).$$

Identificando  $\phi^2 = 4G$ , constante essas são exatamente as equações Einstein–Maxwell. Mas se  $\phi$  variasse, o segundo termo entre parênteses modificaria as equações originais, e  $G = \phi^2/4$  não seria mais constante.

Nas décadas de 50 e 60, Pascual Jordan, Carls Brans e Robert Dicke modificaram a formulação original de RG adicionando a hipótese de um campo escalar. Esta teoria ficou conhecida com a teoria de Jordan–Brans–Dicke. Por economia de notação, particularmente em índices, usa-se a abreviação BD em vez do mais correto JBD.

A suposição de Jordan, sintetizada em seu livro (88) de 1955, consistia em substituir a constante gravitacional por um campo escalar variável no tempo. Especificamente, Jordan supôs que  $\kappa = \phi$ , uma hipótese amparada nas ideias de Paul Dirac (89, 90)



que propôs que as constantes fundamentais<sup>6</sup> pudessem ser dependentes do tempo. O desenvolvimento dos cálculos de Jordan se baseavam na formulação feita por Kaluza, porém sem acrescentar uma quinta dimensão.

A ideia de Brans em sua tese de doutorado defendida em 1961, foi tentar incorporar uma formulação do Princípio de Mach a uma teoria de gravidade, modificando RG. Usando para isso um campo escalar de forma semelhante ao campo proposto por Jordan, porém com  $\kappa = \phi^{-1}$ . A interpretação de Brans em conjunto com Dicke (91) do princípio de Mach sugere que se deve adotar a convenção de que as forças inerciais são, em algum sentido, reais sendo consequência da interação do campo de força entre a distribuição de massa do Universo e a massa teste local. Se assim for, a massa inercial da partícula teste deve ser determinada por um campo de força universal, presumidamente relacionado à gravidade. No entanto, para independer das coordenadas o novo campo deve ser necessariamente uma grandeza escalar. Na teoria de Einstein o tensor métrico do espaço-tempo, ou mais precisamente a geometria, é a única quantidade que descreve a gravidade. O campo escalar de BD tem como sua fonte toda a matéria do Universo. Posto que o campo gravitacional na teoria BD depende tanto desse campo escalar quanto do tensor métrico, ela pertence a uma classe de teorias denominadas escalar-tensoriais.

As equações apresentadas por Brans e Dicke envolvem necessariamente a constante de acoplamento adimensional  $\omega$ , cujo valor não é determinado pela teoria em princípio. Porém, para  $\omega$  grande, a teoria se aproxima da RG e, para que BD seja compatível com o Modelo Padrão, os resultados de experimentos que visam distinguir as duas teorias impõem limites inferiores a  $|\omega|$ .

Em 1962 (92) Dicke apresenta a chamada transformação conforme – uma transformação da métrica que tem como objetivo recuperar a formulação convencional do campo gravitacional, com o escalar de Ricci,  $R$ , isolado na lagrangeana, preservando assim a geometria formulada por Einstein. O campo escalar  $\phi$  reaparece como um campo de matéria após a transformação. Dicke apresenta também uma discussão sobre a invariância das leis físicas sob transformações deste tipo.

Em 1968 e 1969, Kenneth Nordtvedt (93, 94, 95) demonstrou que qualquer variação da constante  $G$  violaria o Princípio de Equivalência Forte. Ele calculou os desvios nas previsões da teoria de BD em relação a RG para o sistema orbital Terra-Lua, levando em conta a energia de ligação gravitacional diferente dos dois objetos. Os artigos de Nordtvedt acompanhados do trabalho de Clifford Will (96) de 1971, foram os responsáveis pela criação do formalismo *Parameterized Post Newton* (PPN), uma maneira mais profunda e ampla de analisar a grande maioria de teorias gravitacionais, dentre elas as teorias escalar-tensoriais. Eles codificaram parâmetros, chamados de parâmetros PPN para

---

<sup>6</sup> por exemplo a constante de Planck; constante de Coulomb; constante de Boltzmann etc.

comparar previsões de várias teorias gravitacionais com as observações. A versão atual do formalismo PPN tem dez parâmetros e, no contexto das teorias escalar-tensoriais, talvez o mais significativo deles seja o parâmetro  $\gamma$ , que mede quanto da curvatura do espaço é produzida por uma massa unitária. Para a teoria BD, por exemplo, o limite  $\omega \rightarrow \infty$  é equivalente a  $\gamma \rightarrow 1$ , assim sendo, recupera-se a RG.

Concomitantemente aos trabalhos de Nordtvedt, Peter Bergmann (97) sugeriu uma lagrangeana capaz de generalizar todas as ideias até então propostas desde Kaluza e Klein.

$$L = \sqrt{-g}[f_1(\phi)R + f_2(\phi)M + f_3(\phi)g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + f_4(\phi)].$$

Ela contempla o termo trivial da ação ligada a RG porém acoplado ao campo  $\phi$ , a fim de reproduzir a hipótese de Jordan, que associa a constante gravitacional ao campo escalar variável. Apresenta também um termo,  $M$ , ligado ao campo eletromagnético com o intuito de reeditar a hipótese de Kaluza e por fim, introduz um termo cosmológico, como uma função do campo  $\phi$ . Este termo é capaz de recolocar a constante cosmológica como uma possível variável do campo escalar, embora ela tenha sido descartada naquela época. Outra hipótese para o termo cosmológico introduzido por Bergmann foi a associação da equação de uma onda linear para uma aproximação de campo fraco. O fato novo desta ação proposta por Bergmann foi a substituição da até então constante de acoplamento sugerida pela teoria BD como uma nova variável,  $\omega(\phi)$ . Esta lagrangeana é invariante frente a uma transformação de calibre. Bergmann nota que o número de funções arbitrárias de  $\phi$  pode ser reduzido através de redefinições de  $\phi$  e uma transformação conforme.

Em 1970, Robert Wagoner (98) usa a lagrangeana de Bergmann, omitindo o termo eletromagnético,  $M$ , a escrevendo inicialmente na forma:

$$L = \sqrt{-g}[h(\phi)R + l(\phi)g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + 2\lambda(\phi)].$$

Depois de uma transformação conforme do tensor métrico e uma redefinição de  $\phi$ , Wagoner reescreve a lagrangeana na forma:

$$L = \sqrt{-g}[R - ng^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + 2\lambda(\phi)], \quad n = \pm 1.$$

Wagoner estuda o limite de um campo fraco e conclui que, nesse limite,  $\phi = \phi_i$ , constante, e  $\lambda(\phi_i) = \lambda'(\phi_i) = 0$  e determina que o potencial gravitacional tem a forma:

$$\Phi = -G^* \int \rho_0 R^{-1} \left\{ 1 + 2n \psi'(\phi_i)^2 \exp \left[ -\sqrt{n\lambda''(\phi_i)R} \right] \right\} dV.$$

Comparando com o potencial newtoniana:

$$\Phi = -G \int \rho_0 R^{-1} dV,$$

e os limites experimentais da época, ele determina que os potenciais são compatíveis em dois casos: a distâncias pequenas ( $< 1$  cm):

$$0 < (n\lambda''(\phi_i))^{-1/2} \lesssim 1 \text{ cm}, \quad G^* = G,$$

ou a distâncias grandes ( $> 10^{22}$  cm):

$$|\lambda''(\phi_i)|^{-1/2} \gtrsim 10^{22} \text{ cm}, \quad G^* = G[1 + 2n(\psi'(\phi_i))^2]^{-1}.$$

Nota-se que nos dois casos a função cosmológica é variável e no segundo caso,  $G^*$ , o análogo da constante de Newton  $G$ , depende de  $\phi$ .

## 4.2 Teoria de Brans–Dicke

Das teorias escalar-tensoriais de gravitação, provavelmente a que teve mais impacto é a teoria proposta inicialmente por Jordan e posteriormente Brans e Dicke. Na notação da teoria BD, a ação é dada por:

$$I_{BD} = \int \left\{ (16\pi)^{-1} [\phi R - \omega \phi^{-1} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}] + L_m \right\} \sqrt{-g} d^4x, \quad (135)$$

onde  $\omega$  é conhecida como a constante de acoplamento e o termo  $L_m$  é a lagrangeana associada à matéria. Nota-se que o escalar de Ricci na lagrangeana é multiplicado por  $\phi$ . Assim, espera-se que  $\phi$  modifique as equações de campo de uma forma mais complexa do que por um simples acréscimo ao tensor energia-momento. Teorias em que existem essa interação entre  $\phi$  e  $R$  são denominadas teorias não-minimamente acopladas. Variando a ação obtém-se as equações de campo análogas às equações de Einstein, e a equação do campo  $\phi$ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (136)$$

$$\square \phi = \frac{8\pi T}{3 + 2\omega}. \quad (137)$$

Verifica-se que, para  $\phi$  constante, as equações (136) reduzem-se às de campo usuais, tornando a RG um caso particular de BD com  $G \equiv \phi(x^\mu)^{-1}$ . Para um Universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica FLRW, pode-se supor que o campo dependente apenas do tempo, ou seja,  $\phi(x^\mu) \equiv \phi(t)$ , essa característica é compartilhada pela maioria das teorias inflacionárias. Assim demonstra-se que:

$$\square \phi(t) = \ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi}, \quad (138)$$

e as equações das componentes  $G_{00}$  e  $G_{ii}$  do tensor de Einstein e a equação para o campo  $\phi$  ficam:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3\phi} + \frac{\omega\dot{\phi}^2}{6\phi^2} - \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi}, \quad (139)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -\frac{8\pi p}{\phi} - \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \quad (140)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = \frac{\rho - 3p}{3 + 2\omega}. \quad (141)$$

Na teoria BD a conservação do tensor energia-momento não é imediatamente óbvia, as equações (136) contêm termos adicionais em comparação às equações da RG. Por isso, utilizar a identidade de Bianchi ( $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ ), em princípio, é mais cautelosa. Assim tem-se:

$$8\pi \left[ \frac{\dot{\rho}}{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{(\rho + p)}{\phi} \right] + \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} - 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} \right) + 3\frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\omega\dot{\phi}^2}{\phi^2} - \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right) = \frac{8\pi\rho\dot{\phi}}{\phi^2}. \quad (142)$$

Fazendo a diferença entre as equações (139) e (140), substituindo o resultado e a equação de campo (141) na identidade de Bianchi, é possível mostrar que de fato, o tensor energia-momento permanece conservado. Assim, comparando a equação (142) à equação de conservação do tensor energia momento, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} - 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} \right) + 3\frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\omega\dot{\phi}^2}{\phi^2} - \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right) = \frac{8\pi\rho\dot{\phi}}{\phi^2}. \quad (143)$$

Esta equação normalmente é interpretada como uma possível transferência de energia entre o campo e a matéria, que é uma característica das teorias não-minimamente acopladas.

### 4.3 Princípio de Equivalência

Princípios de equivalência, mas não necessariamente com esse nome, têm constado na Física desde a época de Galileu (1632) e seu experimento mental formulado no interior de um barco em movimento. Mais tarde, Isaac Newton, nos parágrafos introdutórios do Principia (99) relata como seus experimentos com pêndulos mostraram a equivalência (proporcionalidade) de massa e peso. Essa propriedade é às vezes chamada o Princípio de Equivalência de Newton (PEN) (100). Em termos da “massa inercial”  $m_i$  e “massa gravitacional passiva”  $m_{gp}$  definida por Hermann Bondi (101) em 1957, o PEN afirma que “ $m_i/m_{gp}$  é constante”.

De uma forma simples, o Princípio de Equivalência Fraco ou, em inglês, *Weak Equivalence Principle* (WEP), pode ser enunciado como: *todas as partículas pontuais*

caem com a mesma aceleração em um campo gravitacional (a universalidade de queda livre).

Muitos textos afirmam que o PEN e WEP são iguais porém Di Casoli et al. (100) salientam que essa identificação só é válida se as massas constam nas equações de movimento sempre na razão  $m_i/m_{gp}$ , e citam como contraexemplo a teoria de dinâmica de Bohm (102).

Escrito de uma forma mais cuidadosa, o WEP afirma (96): *para uma determinada posição e velocidade inicial, a trajetória no espaço-tempo de um corpo teste eletricamente neutro independe de sua estrutura e composição interna.*

Um corpo teste é definido como um corpo com energia gravitacional própria desprezível (no sentido newtoniano), e pequeno suficiente para que qualquer acoplamento a não-homogeneidades de campos externos pode ser considerado irrelevante.

Provavelmente o teste mais importante do WEP foi realizado pelo físico húngaro Loránd Eötvös (103) usando uma balança de torção. Os experimentos foram realizados ao longo de 15 anos, e os resultados, publicados somente três anos depois de sua morte. Denotando as duas massas do balanço por a e b, a balança de torção mede o coeficiente de Eötvös:

$$\eta \equiv 2 \left( \frac{m_{ag}}{m_{ai}} - \frac{m_{bg}}{m_{bi}} \right) \bigg/ \left( \frac{m_{ag}}{m_{ai}} + \frac{m_{bg}}{m_{bi}} \right), \quad (144)$$

que é nulo se o WEP for válido. Eötvös e seus colaboradores concluíram que  $\eta < 9 \times 10^{-9}$ . Mais tarde, melhorias no aparelho por Renner (104) aperfeiçoaram esse limite a  $\eta < 4,2 \times 10^{-9}$ . Na década de sessenta, Roll, Krotkov e Dicke (105) apontaram algumas imprecisões nos resultados de Eötvös e Renner, e, com um novo experimento, obtiveram  $\eta = (0 \pm 1,6) \times 10^{-10}$ . Atualmente os experimentos mais precisos (106) demonstram que  $\eta \approx 10^{-12} - 10^{-13}$ .

O Princípio de Equivalência de Einstein (EEP) utiliza o conceito de uma “Experiência Teste Local e Não-gravitacional” (ETLN) que pode ser definida como uma experiência conduzida em um laboratório blindado em queda livre, pequeno suficiente para que as não-homogeneidades de campos externos possam ser desprezados através de seu volume, e em que os efeitos dos campos gravitacionais próprios possam ser ignorados.

Assim o EEP afirma: **(i)** a validade do WEP **(ii)** o resultado de qualquer ETLN independe da velocidade do aparelho (em queda livre) **(iii)** o resultado de qualquer ETLN independe de sua localização no espaço e no tempo.

Juntos os itens **(ii)** e **(iii)** asseguram que os resultados dos experimentos sejam invariantes com respeito às transformações de Poincaré.

Existe um debate sobre se o WEP e EEP são de fato conceitos diferentes. Leonard Schiff em 1960 (107) conjecturou que qualquer teoria de gravitação completa e auto-consistente que satisfaz o WEP automaticamente incorpora o EEP mas até hoje essa conjectura está em aberto.

O Princípio de Equivalência Forte (SEP) acrescenta ao EEP a possibilidade de incluir nos experimentos corpos com gravitação própria significativa (por exemplo planetas e estrelas) e retira a necessidade de que os Experimentos Teste Locais (ETLs) sejam não-gravitacionais. O SEP pode ser formulado da seguinte maneira: **(i)** o WEP é válido também para corpos com gravitação própria **(ii)** o resultado de qualquer ETL independe da velocidade do aparelho (em queda livre) **(iii)** o resultado de qualquer ETL independe de sua localização no espaço e no tempo.

Em seus estudos, Einstein afirmou que sua teoria puramente métrica levaria a uma dependência da massa inercial de uma partícula em relação ao campo gravitacionais do resto da Universo. No entanto, Brans (108) apontou que este era apenas um efeito devido à escolha de coordenadas. De fato, o movimento de qualquer partícula teste sob a influência unicamente da gravidade é descrito por uma geodésica com os efeitos gravitacionais de todas as partículas incorporados à métrica. Caso haja efetivamente uma força externa  $F_{ext}$ , então a RG de Einstein diz que a equação governante do movimento é:

$$m_i(\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = F_{ext}^\alpha, \quad (145)$$

onde  $x^\mu$  são as coordenadas e  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  são as componentes da conexão.

Entretanto, como é bem conhecido, em qualquer ponto as coordenadas podem ser escolhidas para que a métrica seja Minkowskiana e os componentes da conexão sejam zero. Assim, para uma partícula teste,  $m_i$  pode ser entendida como a razão entre força e a aceleração, como na relatividade especial e, portanto, será independente do campo gravitacional. Em outras palavras, o efeito da massa do Universo em  $m_i$  pode ser completamente eliminado por uma transformação de coordenadas. Em todas essas discussões, a frase "partícula teste" pode ser interpretada como uma partícula pequena em massa e tamanho o suficiente para que não haja interação de volta, bem como efeitos de maré. No entanto, para uma massa com energia gravitacional auto-vinculante não trivial, pode haver outras consequências para o WEP se  $G$  não for constante.

Dicke apresentou um bom resumo desses tópicos em seu artigo (109). Ao procurar uma maneira de incluir o Princípio de Mach, Dicke foi levado a considerar a possível existência de um campo independente da escolha da sistema de coordenadas, ou seja, um campo que não pode ser "transformado", naturalmente um campo escalar. O escalar a ser usado foi, por sua vez, sugerido a Dicke pela "Coincidência de números grandes" envolvendo números cosmológicos escalonados, como descrito por Dirac. Em termos dos valores conhecidos na década de 1950, em unidades naturais:

$$\frac{GM}{R} \sim 1, \quad (146)$$

onde  $M$  é a massa total e  $R$  é o raio visível do Universo calculado através do parâmetro

de Hubble  $1/H_0$ .

Evidentemente, a explicação contemporânea para esta coincidência está na planaridade do espaço-tempo na cosmologia padrão, que eventualmente levou ao conceito de inflação envolvendo um campo escalar universalmente acoplado. Em termos das densidades de energia  $\rho$  e  $\rho_c$ , onde  $M = \rho_0/H_0^3$  a equação (40) torna-se:

$$\frac{G\rho_0}{H_0^2} = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \Omega_0^{\text{tot}} \sim 1, \quad (147)$$

com as equações de Einstein e metrica FLRW e  $\Lambda = 0$ . Dicke foi levado ao que se tornou conhecida como a teoria Brans-Dicke. A teoria satisfaz o WEP e EEP contudo, viola o SEP pois implica que os efeitos gravitacionais locais dependem do tempo. Especificamente, reescrevendo a equação (146) como:

$$\frac{M}{R} \sim \frac{1}{G}, \quad (148)$$

e assumindo que o  $\phi \propto 1/G$ , pode-se ver que  $\phi$  e  $G$  devem ser dependentes do tempo. De fato, da equação (138), e supondo um fluido perfeito com  $p$  e  $\rho$  proporcionais,  $\phi$  obedece:

$$\square\phi \propto \rho. \quad (149)$$

#### 4.4 Transformação Conforme

As equações de campo geradas a partir da ação (135) são bastante complexas devido ao acoplamento entre o campo  $\phi(t)$  e matéria, como evidenciado pela equação da matéria (143). Porém é possível reduzir sua complexidade usando uma transformação em que o tensor métrico e campo escalar são multiplicados por um fator conforme. Especificamente, considere  $g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}$  tal que:

$$g_{\mu\nu} = \lambda^{-1}\tilde{g}_{\mu\nu}, \quad \sqrt{-g} = \lambda^{-2}\sqrt{-\tilde{g}}, \quad \phi = \lambda\tilde{\phi}, \quad (150)$$

onde  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  é a métrica neste novo referencial. Fazendo as transformações mencionadas nas equações (150) pode-se deduzir<sup>7</sup>:

$$L_m = \lambda^2\tilde{L}_m, \quad (151)$$

---

<sup>7</sup> Nesta seção, o  $\lambda$  não representa a função  $\lambda(\phi)$  utilizada para generalizar a constante cosmológica.

onde  $\tilde{L}_m$  é a langrangeana de matéria após a transformação. Por sua vez, aplicando a regra da cadeia na métrica  $g_{\mu\nu}$  tem-se:

$$\frac{\delta(X)}{\delta g^{\mu\nu}} \equiv \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\delta X}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \lambda \frac{\delta X}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}, \quad (152)$$

então, usando essas duas equações e a definição de tensor energia-momento, é possível mostrar que:

$$T_{\mu\nu} = \lambda \tilde{T}_{\mu\nu} \quad e \quad T = \lambda^2 \tilde{T}. \quad (153)$$

O escalar de Ricci, diante desta transformação, são relacionados por:

$$R = \lambda \left( \tilde{R} + 3\tilde{\square} \ln \lambda - \frac{3}{2} \lambda^{-2} \tilde{g}^{\mu\nu} \lambda_{,\mu} \lambda_{,\nu} \right), \quad (154)$$

onde:

$$\tilde{\square} \ln \lambda = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \lambda^{-1} \lambda_{,\nu}). \quad (155)$$

Substituindo as equações (150), (154) e (155) na ação BD descrita pela equação (135) tem-se:

$$\tilde{I} = \int \left\{ \frac{1}{16\pi} \left[ \tilde{\phi} \tilde{R} + 3\tilde{\phi} \tilde{\square} \ln \lambda - \frac{\tilde{\phi}}{2} (3 + 2\omega) \frac{\lambda_{,\mu} \lambda^{,\mu}}{\lambda^2} - 2\omega \frac{\lambda_{,\mu} \tilde{\phi}^{,\mu}}{\lambda} - \omega \frac{\tilde{\phi}_{,\mu} \tilde{\phi}^{,\mu}}{\tilde{\phi}} \right] + \tilde{L}_m \right\} \sqrt{-\tilde{g}} d^4x, \quad (156)$$

Escolhendo  $\lambda$  tal que  $\tilde{\phi}$  torne-se constante, a ação conforme é:

$$\tilde{I} = \int \left\{ \frac{1}{16\pi G_0} \left[ \tilde{R} - \frac{1}{2} (3 + 2\omega) \frac{\lambda_{,\mu} \lambda^{,\mu}}{\lambda^2} \right] + \tilde{L}_m \right\} \sqrt{-\tilde{g}} d^4x, \quad (157)$$

onde  $G_0 = \tilde{\phi}^{-1}$  é uma constante. Esta integral é a ação conforme ou ação de BD no *frame* de Einstein. Definindo:

$$\tilde{L}_\lambda = -\frac{(3 + 2\omega) \lambda_{,\mu} \lambda^{,\mu}}{32\pi G_0 \lambda^2}, \quad (158)$$

a equação variacional:

$$\delta \int \left[ \tilde{R} + 16\pi G_0 (\tilde{L}_m + \tilde{L}_\lambda) \right] \sqrt{-\tilde{g}} d^4x = 0 \quad (159)$$

fornece a forma trivial das equações de Einstein:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} \tilde{g}_{\mu\nu} = 8\pi G_0 \tilde{\tau}_{\mu\nu}, \quad (160)$$

onde define-se o tensor energia-momento:

$$\tilde{\tau}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta \left[ \sqrt{-\tilde{g}} (\tilde{L}_m + \tilde{L}_\lambda) \right]}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}. \quad (161)$$



Neste novo tratamento,  $\nabla_{\mu}\tilde{\tau}^{\mu\nu} = 0$  pois traz consigo tanto a parte de matéria quanto a contribuição do campo. Variando a equação (157) pode-se escrever:

$$\tilde{\square}(\ln \lambda) = \frac{8\pi\tilde{T}}{\tilde{\phi}(3 + 2\omega)}. \quad (162)$$

#### 4.5 Problema da Transformação Conforme

A teoria de BD e a transformação conforme descrita por Dicke em 1962 representam, aparentemente, duas formas de uma mesma teoria: a forma original (ou *frame* de Jordan) e a conforme (ou o *frame* de Einstein). Porém, ao longo do tempo, têm surgido discussões sobre as consequências das formulações em termos das duas ações, são elas: o *frame* de Jordan e o *frame* de Einstein são fisicamente equivalentes?; se não, qual dos dois apresenta conteúdo físico consistente?

Alguns autores, dentre eles o próprio Dicke (92, 110, 111), apresentam argumentos que defendem que os *frames* de Jordan e Einstein são equivalentes e, neste caso, não faz sentido deliberar sobre qual deles é o referencial "físico". Porém hoje em dia há algum consenso (112, 113, 114) de que os dois *frames* não são fisicamente equivalentes: uma transformação conforme, em geral, não é similar a uma mudança de coordenadas e, por isso, as duas abordagens representam teorias distintas. A segunda discussão tenta definir qual dos dois *frames* é físico. Como na primeira discussão, há autores (115), que entendem que o *frame* de Einstein é fisicamente mais consistente, pois não viola a condição de energia fraca. Já na formulação de Jordan, a teoria escalar-tensorial não seria viável porque a densidade de energia do campo escalar gravitacional não está limitada por baixo. O sistema seria, portanto, instável e desintegraria em direção a um estado de energia negativa. Contudo um terceiro grupo de autores (116) entende que nenhuma das teorias represente melhor a física de gravitação do que a outra: a questão deve ser mais pragmática, qual das teorias melhor se adapta às observações e aos experimentos existentes. A método mais usada para testar isso é através do formalismo PPN criado por Nordtvedt (93, 94, 95) e Will (96). Ele sintetiza vários parâmetros para comparar as teorias de gravitação, RG e os dados observacionais. Os parâmetros mais relevantes do formalismo PPN aplicado às teorias escalar-tensoriais são os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$ , que são relacionados com as grandezas cosmológicas de forma que:

$$\gamma = \frac{\omega + 1}{\omega + 2}, \quad (163)$$

$$\beta = 1 + \Lambda. \quad (164)$$

Para que uma teoria escalar-tensorial seja compatível com a RG por exemplo, é necessário que  $\gamma = \beta \approx 1$  nos dias atuais.

#### 4.6 Brans–Dicke com Potencial $V(\phi)$

Uma forma de expandir a ideia da teoria BD é acrescentar um potencial como feito pela cosmologia Camaleônica (117, 118) cujo objetivo era incorporar a expansão do Universo a teoria original. O modelo foi sugerido para que  $\phi$  seja suficientemente “pesado” para o ambiente laboratorial de modo que as restrições locais da gravidade sejam satisfeitas, e ao mesmo tempo, suficientemente “leve” em escalas cosmológicas cuja densidade é baixa. Fazendo do campo um bom candidato à energia escura. A ação de BD com um potencial  $V(\phi)$  (BDV) é dada por:

$$I_{\text{BDV}} = \int \{ (16\pi)^{-1} [\phi R - \omega \phi^{-1} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + 2V(\phi)] + L_m \} \sqrt{-g} d^4x, \quad (165)$$

e as equações de campo para este novo modelo são dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda}) + \frac{1}{\phi} [\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi + g_{\mu\nu} V(\phi)], \quad (166)$$

$$\square \phi + \frac{2(\phi V' - 2V)}{3 + 2\omega} = \frac{8\pi T}{3 + 2\omega}. \quad (167)$$

As equações na teoria BDV para a métrica FLRW são similares às equações (139), (140) e (141) acrescentando o termo vinculado ao potencial  $V(\phi)$  de forma que as componentes  $G_{00}$ ,  $G_{ii}$  do tensor de Einstein tornam-se:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{V}{3\phi} = \frac{8\pi\rho}{3\phi} + \frac{\omega \dot{\phi}^2}{6\phi^2} - \frac{\dot{a} \dot{\phi}}{a \phi}, \quad (168)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{V}{\phi} = -\frac{8\pi p}{\phi} - \frac{\omega \dot{\phi}^2}{2\phi^2} - 2\frac{\dot{a} \dot{\phi}}{a \phi} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi}, \quad (169)$$

e a equação do campo  $\phi$  será dada por:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{2(\phi V' - 2V)}{3 + 2\omega} = \frac{8\pi(\rho - 3p)}{3 + 2\omega}. \quad (170)$$

As mesmas análises no que se refere à conservação do energia-momento e do acoplamento entre a matéria e o campo feitas para o modelo BD original podem ser feitas para o modelo BDV.

#### 4.7 Teoria de Bergmann–Wagoner

A teoria escalar tensorial mais geral foi proposta por Bergmann (97) em 1968 e incorporou à teoria BD o termo eletromagnético, o termo cosmológico e fez da constante de acoplamento  $\omega$  uma função do campo escalar. Contudo, o termo cosmológico esteve negligenciado por muito tempo devido observações que, até pouco tempo, não contemplavam uma possível constante cosmológica. Com a descoberta da expansão do Universo, a constante cosmológica voltou a ser lembrada. Do ponto de vista das teorias BDV, a constante cosmológica pode ser entendida como parte integrante do potencial, neste caso especificamente,  $V(\phi)$  pode ser descrito como:

$$V(\phi) \equiv \Lambda\phi. \quad (171)$$

Esse potencial não altera significativamente as teorias BDV visto que as equações de campo na teoria BDV são equivalentes as equações de campo da RG com constante cosmológica, apenas apresenta uma interpretação mais específica para o potencial. Contudo, Uma nova generalização foi sugerida por Wagoner (98) em 1970, ela substituiu o termo cosmológico da Lagrangeana de Bergmann por uma função cosmológica, fazendo com que  $\Lambda$  possa ser interpretada como uma função do campo escalar. A ação de Bergmann–Wagoner (BW) é dada por:

$$I_{\text{BW}} = \int \left\{ (16\pi)^{-1} \left[ \phi R - \omega(\phi)\phi^{-1}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + 2\phi\lambda(\phi) + L_m \right] \right\} \sqrt{-g} d^4x, \quad (172)$$

onde  $\lambda(\phi)$  é a função cosmológica. As equações de campo para a teoria BW são dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\lambda(\phi) = \frac{8\pi}{\phi}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2}(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda}) + \frac{1}{\phi}[\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\phi], \quad (173)$$

$$\square\phi + \frac{2\phi^2 d\lambda/d\phi - 2\phi\lambda(\phi)}{3 + 2\omega} = \frac{1}{3 + 2\omega} \left( 8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} \right). \quad (174)$$

As equação para as componentes do tensor de Einstein são similares às equações (168) e (169) quando o potencial da teoria BDV for  $V(\phi) \equiv \lambda(\phi)\phi$  e a equação do campo (174) é desenvolvida lembrando que  $\lambda(\phi) \equiv \lambda[\phi(t)]$  para um campo escalar dependente do tempo.

As outras teorias escalar-tensoriais para a gravitação são casos particulares de BW:

- (i) Brans–Dicke (1962): BD é um caso particular de BW quando  $\lambda(\phi) \equiv 0$  e  $\omega'(\phi) \equiv 0$ ;
- (ii) Nordtvedt (1970): Brans–Dicke–Nordtvedt (BWN) (119) é um caso particular de BW quando  $\lambda(\phi) \equiv 0$ ;
- (iii) Bekenstein (1977): *Variable Mass Theory* (VMT) (120) é um caso particular de BW

quando  $\lambda(\phi) \equiv 0$ , sendo a função de acoplamento  $\omega(\phi)$  determinada por uma escolha particular. A teoria VMT diz que as demais massas de partículas elementares podem variar no espaço-tempo através do campo escalar  $\phi$ , essa variação determinada por uma equação de campo com dois parâmetros arbitrários  $r$  e  $q$ , Bekenstein mostrou que a teoria é uma teoria similiar a BWN com:

$$\omega(\phi) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{4}f(\phi)[(1 - 6q)qf(\phi) - 1][r + (1 - r)qf(\phi)]^{-2}, \quad (175)$$

$$\phi = [1 - qf(\phi)]f(\phi)^{-r}; \quad (176)$$

(iv) Barker (1978) (121): Barker é um caso particular de BW quando:

$$\omega(\phi) = \frac{4 - 3\phi}{2\phi - 2}, \quad (177)$$

$$G_{\text{hoje}} = 1, \quad (178)$$

$$\Lambda = \frac{1 - \phi_{\text{hoje}}}{2\phi_{\text{hoje}}} = -(8 + 4\omega)^{-1}. \quad (179)$$

Todas as teorias escalar-tensoriais reduzem-se a RG no limite em que  $\omega \rightarrow \infty$  e  $\lambda(\phi) = 0$ , Em particular, as teorias BD, BWN, VMT e Barker, fazem previsões coerentes para todas as condições gravitacionais onde  $\omega(\phi_{\text{hoje}})$  é grande, estrelas de nêutrons, buracos negros, ondas gravitacionais por exemplo. Diferindo da RG em uma ordem de  $O(1/\omega)$ .

## 5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

### 5.1 Introdução

Uma das áreas da física contemporânea é a Física Computacional, área que utiliza-se de métodos numéricos de integração para solucionar problemas que não podem ser resolvidos exatamente. A aplicação de métodos numéricos de integração neste trabalho se faz necessária devido ao grau de precisão que se deseja alcançar. Evidentemente, os métodos numéricos para resolver equações diferenciais possuem imprecisões que dependem de alguns fatores, tais como: o método escolhido, o número de iterações, o grau de complexidade das equações, etc. Neste capítulo, estuda-se métodos numéricos de integração, em particular o método Explícito de Runge–Kutta de ordem  $n$ , com modelos de avaliação de erro feito por Fehlberg em 1969 (122) e por Verner em 1978 (123). Outros aspectos importantes à serem considerados são as limitações computacionais devido à arquitetura dos processadores atuais, linguagens de programação compiladas, C e C++ por exemplo, são mais rápidas do que as linguagens interpretadas (BASIC e Maple) porém, são geralmente limitadas em 16 dígitos decimais significativos. Pensando nisso, desenvolveu-se técnicas para contornar esta restrição, as bibliotecas de aritmética de precisão arbitrária foram criadas para executar cálculos em qualquer nível de precisão desejada, independentemente da arquitetura do computador. A biblioteca *Multiple-Precision Floating-Point* (MPFR) (124) foi escolhida pois apresenta um grande número de funções capazes de executam esse tipo de cálculo.

### 5.2 Método Explícito de Runge–Kutta

O método de Runge–Kutta (RK) foi desenvolvido pelos matemáticos Carl Runge e Martin Kutta para resolver numericamente equações diferenciais ordinárias (EDOs) por meio de um truncamento na série de Taylor. Dada a equação diferencial:

$$y'(x) = f[x, y(x)], \quad y(x_0) = y_0, \quad (180)$$

com  $x_0, x \in R, y_0 \in R^N, y : R \rightarrow R^N, f : R \times R^N \rightarrow R^N$ . O método RK explícito de  $s$  estágios é definido por:

$$g_i = f \left( x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} g_j \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, s, \quad (181)$$

Tabela 4 - Parâmetros do método Runge–Kutta explícito para uma ordem genérica.

0	0				
$c_2$	$a_{21}$	0			
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	0	
$c_i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$\dots$	$a_{ii-1}$	0
	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_{i-1}$	$b_i$

Fonte: O autor, 2018.

Tabela 5 - Exemplo de parâmetros do método Runge–Kutta para quarta ordem.

0	0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0		
1	0	0	1	0	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

Fonte: O autor, 2018.

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i g_i, \quad (182)$$

e fornece, para cada valor de  $n$ , a aproximação de  $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ , onde  $y(x)$  é a solução da equação (180). O método é dito explícito quando a matriz formada pelos elementos  $a_{ij}$  é triangular inferior com os elementos da diagonal principal iguais a zero. Além disso, outra restrição a esse método é que o valor do parâmetro  $c_1 = 0$ . A matriz de Butcher, figura 4, apresenta um quadro esquemático para os valores dos parâmetros do método RK:

O exemplo mais conhecido dos métodos RK explícitos para a solução de EDOs é o de quarta ordem (RK4). Há várias escolhas possíveis dos parâmetros, mas destaca-se aquela cujos parâmetros são:

Esse conjunto de parâmetros é o mais utilizado pois seus valores são computacionalmente mais eficientes em relação a outras escolhas, visto que, em sua maioria, são constituídos por números na base 2.

Tabela 6 - Barreira de Butcher.

<b>ordem</b> $p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Estágios</b> $s(p)$	1	2	3	4	6	7	9	11	12	13

Legenda: Comparação entre o número de ordem  $p$  e o número mínimo de estágios  $s$  para solução numérica de EDO via método RK segundo a Barreira de Butcher.

Fonte: CHEN et al, 2008, p. 199. (125) Adaptado pelo autor.

### 5.3 Erro Estimado para o Método de Runge–Kutta

O erro estimado por passo atribuído aos métodos de RK de ordem  $n$  é dado por:

$$\epsilon \approx \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(x_0), \quad (183)$$

onde,  $y^{(n+1)}(x_0)$  é uma previsão da derivada de ordem  $n+1$  de  $y(x)$  avaliada em  $x_0$ . O principal problema deste tipo de aproximação feita pelo método RK, é a falta de controle sobre o erro  $\epsilon$ , pois não se conhece o valor de  $y^{(n+1)}(x_0)$ . Em geral, há duas maneiras diferentes para aumentar o nível de precisão e assim minimizar o erro do método:

- (i) Reduzir o valor do passo  $h$ ;
- (ii) Aumentar a ordem  $p$ .

No primeiro caso, reduzir o passo, acarreta em um aumento do número de passos e conseqüentemente, aumento do tempo de processamento necessário para alcançar o mesmo valor de  $y(x)$ .

Já no segundo caso, aumentar a ordem de convergência  $p$  é indicado até certo ponto, pois a chamada barreira de Butcher diz que a quantidade de estágios,  $s$ , aumenta mais rapidamente do que a ordem  $p$ . Por exemplo, para o método RK de quinta ordem, o número mínimo de estágios necessários é de 6. Por isso, aumentar a ordem do método pode não ser computacionalmente interessante. Alguns estudos tais como Chen et al. (125) estão sendo feitos com o intuito de diminuir o número de estágios dos métodos RK e quebrar a barreira de Butcher. A tabela 6 apresenta dados sobre esta barreira.

### 5.4 Método Runge–Kutta–Fehlberg

O método Runge–Kutta–Fehlberg (RKF) foi elaborado pelo matemático germânico Erwin Fehlberg e apresentado em 1969 (122). Ele foi desenvolvido para solucionar EDOs através de um método RK de ordem  $p$  incorporando a ideia de otimização de passo. Esse

Tabela 7 - Parâmetros do método RKF4(5) segundo a matriz de Butcher.

0	0					
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0				
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$	0			
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$	0		
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	0	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	0
$\bar{b}_i$	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	0
$b_i$	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$

Fonte: FEHLBERG, 1969, p. 13. (122) Adaptado pelo autor.

processo visa modificar o valor de  $h$  em cada ponto a fim de otimizar os cálculos na próxima iteração, fazendo com que os resultados sejam os melhores possíveis, tanto em precisão quanto em eficiência.

A construção do método RKF $p(p+1)$  foi feita mediante análise da solução de uma EDO calculada de duas maneiras diferentes, pelos métodos RK de ordem  $p$  e de ordem  $(p+1)$ , usando os mesmos valores de  $g_i$  em ambos os casos. O erro estimado do método RKF $p(p+1)$  é:

$$\epsilon = |y_{n+1} - \bar{y}_{n+1}| = \left| h \sum_{i=1}^s (b_i - \bar{b}_i) g_i \right|, \quad (184)$$

onde  $\bar{y}_{n+1}$  e  $\bar{b}_i$  são os valores referentes ao RKF $(p+1)$ . A matriz de Butcher na figura 7 apresenta uma escolha comum para os valores dos parâmetros utilizados em RKF4(5): O passo  $h_o$  otimizado é calculado baseado no erro estimado como:

$$h_o = \beta h \left( \frac{\epsilon_{tol}}{\epsilon} \right)^{1/5}, \quad (185)$$

onde  $\epsilon_{tol}$  é a tolerância no nível de precisão desejada, e  $\beta$  um fator que satisfaz  $\beta \simeq 1$ . O valor da tolerância é definido previamente para que o passo seja ajustado conforme a necessidade. Pode-se ainda, definir um intervalo de tolerância de forma que o passo só seja modificado se extrapolar determinados limites, como por exemplo:

$$h_o = \begin{cases} \beta h \left( \frac{\epsilon_{tol}}{\epsilon} \right)^{1/5}, & \epsilon \geq \epsilon_{tol}, \\ \beta h \left( \frac{\epsilon_{tol}}{\epsilon} \right)^{1/4}, & \epsilon < \epsilon_{tol}. \end{cases} \quad (186)$$



Tabela 8 - Métodos de Fehlberg, Verner e barreira de Butcher.

Estágios $s(p)$	Ordem $p$				
	4	5	6	7	8
Barreira de Butcher	6	7	9	10	11
Fehlberg	6	8	10	13	17
Verner	8	10	13	16	

Legenda: O número de estágios  $s$  para ordem  $p$  nos métodos de Fehlberg e de Verner comparado ao limite teórico determinado pela barreira de Butcher.

Fonte: VERNER, 1978, p. 773. (123) Adaptado pelo autor.

### 5.5 Método Runge–Kutta Segundo Verner

Os trabalhos mais produtivos na avaliação do erro de truncamento foram produzidos por Fehlberg que obteve os parâmetros do método  $RKF_p(p+1)$  para  $p = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . No entanto, foi deduzido por Wayne Enright e Thomas Hull (126) que o método RKF para ordens  $p > 4$  apresenta uma dificuldade fundamental. O erro de truncamento é identicamente zero para equações do tipo:

$$y'(x) = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad (187)$$

ou seja, para equações cuja derivada seja dependente apenas da variável  $x$ . Isso ocorre porque o método de ordem  $p$  tem um erro de truncamento de ordem  $O(h^{p+2})$ , exatamente o mesmo erro do método de ordem  $(p+1)$ . Como resultado disso, o passo será aumentado de tamanho independentemente da magnitude do erro real.

Em 1978 o matemático Jim Verner (123) publicou o seu trabalho que propôs uma nova forma de truncamento para os métodos RK explícitos a fim de contornar o problema do método de RKF para ordens superiores a 4. A ideia é construir uma série de procedimentos que determina os parâmetros de um método de ordem  $p$ , que evita o problema supracitado. A tabela 8 compara o número de estágios usados nos dois métodos para várias ordens com o limite inferior sugerido pela barreira Butcher.

Verner apresentou seus parâmetros para o modelo de Runge–Kutta explícito (RKV) até oitava ordem. Testes realizados com diversas EDOs (127) revelaram que, em geral, os métodos RKV estimam melhor os erros de integração do que os métodos RKF. O método usado nesta tese é o RKV8(9), cuja matriz de Butcher consta no artigo de Verner (123).

## 5.6 Ordem das Equações

Os métodos Runge–Kutta e suas variações, são aplicáveis às equações diferenciais de primeira ordem, contudo, pode-se utilizá-los para equações diferenciais de ordens maiores. Para demonstrar isso, considere a equação diferencial de ordem  $n$ :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y). \quad (188)$$

Usando a substituição:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= v(x, y), \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= w(x, y), \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} &= z(x, y), \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= f(x, y), \end{aligned} \quad (189)$$

a equação (188) é equivalente ao conjunto de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= v(x, y), \\ \frac{dv}{dx} &= w(x, y), \\ &\vdots \\ \dots &= z(x, y), \\ \frac{dz}{dx} &= f(x, y). \end{aligned} \quad (190)$$

Obviamente, aplicar esse recurso para equações de segunda ordem, seria fisicamente o mais útil.

## 5.7 Linguagens e Bibliotecas de Múltipla Precisão

Métodos numéricos podem ser implementados em quase todas as linguagens de computação. Porém, a escolha da linguagem é de vital importância e deve levar em conta os objetivos da pesquisa. Este trabalho preocupa-se principalmente com dois aspectos: o tempo de execução e a precisão, que, por sua vez, serão dependentes do grau de complexidade das equações a serem resolvidas.

Como mencionado na introdução deste capítulo, existem dois tipos básicos de linguagem de programação: as interpretadas e as compiladas. As linguagens interpretadas são mais simples, pois não requerem o passo adicional de compilação e geralmente são

mais fáceis de *debugar* <sup>8</sup>. Entretanto, a execução de programas neste tipo de linguagem é lenta, pois os cálculos são realizados juntamente com a tradução do código-fonte em linguagem de máquina. Este fato torna ineficiente a aplicação de linguagens interpretadas em equações muito complexas ou que exijam um número muito grande de passos.

Por isso, este trabalho concentra-se nas linguagens compiladas, em particular C, em parte, devido à sua extensibilidade, ou seja, a facilidade de criar novas estruturas; e em parte devido às bibliotecas disponíveis para cálculos numéricos de precisões arbitrárias.

A desvantagem principal da linguagem C está no nível de precisão padrão dos números de ponto flutuante: o tipo `double` usa 64 bits, dos quais 53 representam os algarismos significativos de um número real, enquanto os demais são reservados para armazenar o sinal e o expoente. Traduzindo os 53 bits para a base decimal, fornece  $2^{53} \approx 10^{16}$ , ou seja, 16 dígitos decimais significativos. Em princípio, C define o tipo `long double`, porém a implementação desse formato depende de um conjunto de fatores, como o processador, o compilador e até o sistema operacional, sendo muitas vezes simplesmente convertido em `double`. Para muitas aplicações a precisão oferecida por uma variável `double` é razoável. Contudo, em aplicações que exijam um número muito grande de iterações, os erros, devido ao truncamento na série de Taylor, podem se acumular, fugindo da precisão desejada.

Uma forma de superar essa limitação é a utilização de bibliotecas de múltipla precisão, que permitem trabalhar com números com mais de 16 algarismos decimais, criando um novo tipo de objeto no qual os números são particionados em vários blocos de 64 bits. Novas versões das operações matemáticas são definidas. Elas manipulam esses blocos de uma forma que os resultados dos cálculos superem os 16 dígitos usuais. Essas manipulações acarretam em um custo adicional no tempo de execução do programa, todavia, ainda assim, a combinação de linguagem compilada e a biblioteca se mostrou mais rápida do que o mesmo programa implementado numa linguagem interpretada.

Para a linguagem C, existem duas principais escolhas de bibliotecas de múltipla precisão: GNU *Multiple Precision* (GMP) e *Multiple Precision Floating-Point Reliable* (MPFR) (124). Para este trabalho escolheu-se a biblioteca MPFR pois apresenta uma quantidade grande de funções matemáticas capazes de executar cálculos com precisão arbitrária. Outra vantagem é a possibilidade de escolher o tipo de arredondamento que será feito pelo processador. A sintaxe de MPFR é bem diferente daquela que é usual em C: na prática, a biblioteca MPFR é uma nova linguagem de programação que utiliza C como base. A modificação mais relevante é a forma de calcular expressões matemáticas. MPFR executa uma função (um cálculo) por linha de programação, de forma que a quantidade de linhas em MPFR é muito maior do que em C. Como exemplo de rotina executada em

---

<sup>8</sup> É usado em uma situação em que precisa-se analisar um determinado bloco de programação ou a execução de um programa para localizar possíveis erros ou *bugs* de sistema e também erros de programação.

Tabela 9 - Comparação entre as linhas de programação escritas em C e em MPFR.

Rotina em C (C++)	Rotina em MPFR
<pre>rhoa=   rho0*pow(a, -3*(1+w));</pre>	<pre>mpfr_set_str(n1, "1.0", 10, MPFR_RNDN); mpfr_set_str(n3, "3.0", 10, MPFR_RNDN); mpfr_add(rhoa, n1, w, MPFR_RNDN); mpfr_mul(rhoa, n3, rhoa, MPFR_RNDN); mpfr_neg(rhoa, rhoa, MPFR_RNDN); mpfr_pow(rhoa, a, rhoa, MPFR_RNDN); mpfr_mul(rhoa, rho0, rhoa, MPFR_RNDN);</pre>

Legenda: A variáveis `n1` e `n3` são os números 1 e 3 armazenados com precisão arbitrária; e o comando `MPFR_RNDN` é a forma de arredondamento escolhida.

Fonte: O autor, 2018.

MPFR pode-se usar a equação da densidade de energia por exemplo  $\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}$ :

## 6 RESULTADO E DISCUSSÕES

### 6.1 Introdução

Entre as teorias escalar-tensoriais abordadas neste trabalho, escolheu-se a teoria mais geral: a teoria BW, onde  $\phi(x^\mu) \equiv \phi(t)$  e  $G(t, \vec{r}) \equiv \phi(t)^{-1}$ , utilizando-se para isso o *frame* de Jordan, ou seja uma teoria não-minimamente acoplada. Essa escolha deve-se ao fato de que deseja-se estudar a variação temporal da constante gravitacional  $G$  para, possivelmente determinar as condições para a inflação. Contudo, o ponto fundamental deste trabalho, está na escolha de uma função cosmológica,  $\lambda(\phi) \equiv \lambda[\phi(t)]$  em substituição a constante cosmológica  $\Lambda$ . Essa função evolui a partir de um valor relativamente grande durante o Universo Primordial até um valor compatível com as observações de uma constante cosmológica hoje em dia. A função cosmológica juntamente com o campo escalar têm papéis fundamentais na expansão do Universo durante o período de inflação cósmica,  $\lambda(t)$ , como é proposto, também explicaria a expansão acelerada do Universo observada atualmente.

Evidências observacionais e analisadas pelos artigos (128, 129, 130) sugerem que os valores atuais dos parâmetros cosmológicos são:  $|\dot{G}/G| = |\dot{\phi}/\phi| < 10^{-64} t_p^{-1}$ ,  $H_0 \approx 10^{-62} t_p^{-1}$  e  $\Lambda \approx 10^{-122} t_p^{-2}$ , onde todos os parâmetros estão descritos em termos de unidades de Planck e  $t_p$  é o tempo de Planck. Por simplicidade o acoplamento será considerado constante  $\omega(\phi) \equiv \omega$ . A equação (174) será dada então por:

$$(3 + 2\omega) \left( \dot{\phi}\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}^2 \frac{\dot{a}}{a} \right) + 2\phi^2 \dot{\lambda} - 2\phi\dot{\phi}\lambda = 8\pi\dot{\phi}T, \quad (191)$$

note que, diferentemente da teoria BD onde  $\omega = -3/2$  implica em  $T = 0$ , ou seja, vácuo ou radiação, não há esse tipo de restrição na teoria BW visto que, em geral  $\lambda(t) \neq 0$ . Pode-se determinar o potencial para a ação de BW como sendo  $V(\phi) \equiv \lambda(\phi)\phi$ .

A proposta deste trabalho é calcular exata e numericamente a evolução dos parâmetros cosmológicos  $\lambda(t)$ ,  $H(t)$  e  $a(t)$ , baseado na ideia de uma função  $\phi(t)$  cujo valor inicial é dado por  $\phi(0) = \phi_i$  e sua evolução tenha fim em  $\phi(t) = 1$  quanto  $t \rightarrow \infty$ . Essa evolução deve ser capaz de gerar inflação suficiente para que o Universo não recolapse após o *Big Bang* e ao final dela, os valores de  $\lambda(t)$ ,  $H(t)$  e  $a(t)$ , devem ser compatíveis com seus valores observacionais atuais. Para isso, assume-se um tensor energia-momento que descreva um fluido perfeito conforme a equação (26).

Em tese, o Universo será isotrópico e homogêneo; todas as variáveis serão dependentes, em última análise, do tempo, e o espaço-tempo será descrito pela forma usual da

métrica de FLRW (7). Assim, as equações de campo para  $G_{00}$  e  $G_{ii}$  são:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3\phi} + \frac{\omega\dot{\phi}^2}{6\phi^2} - \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \frac{\lambda}{3}, \quad (192)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k}{a^2} = -\frac{8\pi p}{\phi} - \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \lambda. \quad (193)$$

A forma dessas equações motiva as definições de uma densidade efetiva e uma pressão efetiva para o campo escalar:

$$8\pi\rho_\phi \equiv \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi} - 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} + \phi\lambda, \quad (194)$$

$$8\pi p_\phi \equiv \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi} + 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} + \ddot{\phi} - \phi\lambda, \quad (195)$$

a partir das quais é possível definir uma equação de estado efetiva do campo escalar:

$$w = \frac{p_\phi}{\rho_\phi}. \quad (196)$$

Nota-se que a interpretação dessas grandezas como se fossem de um fluido perfeito é questionável: as definições de  $p_\phi$  e  $\rho_\phi$  dependem não somente de  $\phi$ , mas também da taxa de expansão do Universo. Ambos contêm termos provenientes da densidade lagrangiana, mas incluem também termos da interação entre  $\phi$  e a geometria, devido ao acoplamento não-mínimo. Assim, podemos esperar que essas grandezas efetivas não obedeçam as restrições usuais da RG.

Este trabalho está particularmente interessado no Universo Primordial, especificamente, no período logo após o *Big Bang*, por isso, a equação de estado será dada pela equação  $p(\rho) = \rho/3$ , que corresponde a um Universo dominado por radiação. Considerando essas suposições, a equação (191) será rescrita da forma:

$$(3 + 2\omega) \left( \dot{\phi}\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}^2\frac{\dot{a}}{a} \right) + 2\phi^2\dot{\lambda} - 2\phi\dot{\phi}\lambda = 0, \quad (197)$$

as equações referentes às componentes  $G_{00}$  e  $G_{ii}$  do tensor de Einstein na teoria BW serão:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3\phi} + \frac{\omega\dot{\phi}^2}{6\phi^2} - \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \frac{\lambda}{3}, \quad (198)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k}{a^2} = -\frac{8\pi\rho}{3\phi} - \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \lambda, \quad (199)$$

e por fim, a identidade de Bianchi  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$  para este modelo será:

$$8\pi \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{\phi} \right) + 4 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right] + \frac{d}{dt} \left( \lambda + \frac{\omega \dot{\phi}^2}{2 \phi^2} - 3 \frac{\dot{a} \dot{\phi}}{a \phi} \right) + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \omega \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} - \frac{\dot{a} \dot{\phi}}{a \phi} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right) = 0. \quad (200)$$

É comum impor que o tensor energia-momento e o campo  $\phi$  se conservem separadamente (131, 132) para respeitar o Princípio de Equivalência Forte, porém, esta imposição não será realizada.

Definindo  $H(t) \equiv \dot{a}/a$ ,  $\Phi(t) \equiv \dot{\phi}/\phi$  e  $P(t) \equiv 8\pi\rho/\phi$ , subtraindo (198) de (199) e rearranjando os termos, é possível mostrar que:

$$\dot{H} = -H^2 + \frac{1}{3}(\lambda - \omega\Phi^2 - P) - \frac{1}{2}(H\Phi + \dot{\Phi} + \Phi^2), \quad (201)$$

$$\dot{\lambda} = \lambda\Phi - \left( \omega + \frac{3}{2} \right) (3H\Phi^2 + \Phi^3 + \Phi\dot{\Phi}), \quad (202)$$

$$\dot{P} = -P(4H + \Phi). \quad (203)$$

Vale ressaltar que a equação (203) é compatível com a equação de conservação do tensor energia-momento para a radiação dada por  $\rho = \rho_0 a^{-4}$ . A vantagem desse conjunto de equações é a independência com respeito à curvatura. Do ponto de vista físico, é necessário escolher condições iniciais que respeitem os possíveis valores  $k = 0$  ou  $k \pm 1$ . As variáveis  $\lambda(t)$ ,  $H(t)$ , e  $P(t)$ , calculadas numericamente, podem ser usadas para avaliar o nível de precisão do método, para isso utiliza-se a equação (198), uma espécie de equação de vínculo, dada por:

$$\frac{k}{a^2} = -H^2 + \frac{\lambda}{3} + \frac{P}{3} + \frac{\omega}{6}\Phi^2 - H\Phi. \quad (204)$$

Uma alternativa para solucionar esse problema é substituir a equação (204) na equação (201), eliminado assim o termo de  $\lambda(t)$ . Essa nova equação será tal que:

$$\dot{H} = \frac{k}{a^2} - \frac{2P}{3} + \frac{1}{2} [H\Phi - (\omega + 1)\Phi^2 - \dot{\Phi}]. \quad (205)$$

Para um Universo espacialmente plano e preenchido apenas pelo campo  $\phi(t)$ , a equação (205) torna-se uma equação independente de  $\lambda(t)$  e  $P(t)$ , e pode ser resolvida de forma exata, modelando uma das duas funções,  $\Phi(t)$  ou  $H(t)$ , que compõe a equação.

## 6.2 Soluções Exatas

Embora a intenção final seja estudar a evolução do Universo incluindo os efeitos da densidade de matéria e curvatura, é instrutivo analisar as equações simplificadas quando

$P = k = 0$ , procurando soluções exatas que possam nortear a análise numérica no caso mais geral. Substituindo  $P = k = 0$  em (205) obtém-se:

$$\dot{H} = \frac{1}{2} [H\Phi - (\omega + 1)\Phi^2 - \dot{\Phi}], \quad (206)$$

que, dada uma forma de  $\Phi(t)$ , é uma EDO de primeira ordem e linear em  $H(t)$  com solução geral:

$$H(t) = \left\{ C - \frac{1}{2} \int [(\omega + 1)\Phi^2 + \dot{\Phi}] e^{-\frac{1}{2} \int \Phi dt} dt \right\} e^{\frac{1}{2} \int \Phi dt} \quad (207)$$

Lembrando que  $\Phi(t) \equiv \dot{\phi}(t)/\phi$ , vê-se que o fator integrante pode ser determinado em termos de  $\phi$ :

$$e^{-\frac{1}{2} \int \Phi dt} = e^{-\frac{1}{2} \ln(\phi)} = \phi^{-1/2}, \quad (208)$$

e a solução geral (207) torna-se:

$$H(t) = \left( C - \frac{1}{2} \int \frac{\omega \dot{\phi}^2 + \phi \ddot{\phi}}{\phi^{5/2}} dt \right) \sqrt{\phi}. \quad (209)$$

Assim, se for possível calcular a integral em  $\phi(t)$  de uma forma exata, obtém-se uma solução para  $H(t)$ . Feito isso,  $\lambda(t)$  pode ser determinado pela equação de vínculo (204). Devido ao fator de  $\phi^{5/2}$  no denominador, espera-se que seja difícil encontrar um modelo para  $\phi(t)$  para as quais a integral pode ser calculada exatamente porém, surpreendentemente, há casos interessantes em que esse processo pode ser levado a cabo.

### 6.3 Modelos para o Campo Escalar $\phi(t)$

#### 6.3.1 Tangente Hiperbólica

O primeiro modelo para o campo  $\phi(t)$  a ser estudado tem a forma de um tangente hiperbólica:

$$\phi(t) = \frac{1}{2}(1 + \phi_i) + \frac{1}{2}(1 - \phi_i) \tanh[c(t - t_d)]. \quad (210)$$

Os fatores  $(1 + \phi_i)/2$  e  $(1 - \phi_i)/2$  fazem com que  $\phi(t) \rightarrow \phi_i$  para  $t \ll t_d$  (isto é próximo ao *Big Bang*), enquanto para  $t \gg t_d$ ,  $\phi(t) \rightarrow 1$ , valor atual de  $G(t)^{-1}$  em unidades de Planck. Este modelo foi projetado para que  $\phi(t)$  seja aproximadamente constante quando  $t \approx 1 t_p$  para que a evolução do espaço-tempo coincida com um Universo inflacionário com características exponenciais. O valor de  $t_d$  determina o tempo em que o campo permanecerá, em certa medida, constante durante a primeira fase do processo, assim regendo a quantidade de inflação. Em torno de  $t = t_d$ , dependendo do sinal de  $c$ , o campo



decai ou cresce, com a magnitude de  $c$  determinando quão suave ou não será a evolução de  $\phi(t)$  nessa época.

Para a função (210) é possível integrar completamente a solução (209), tal que:

$$H(\phi) = \frac{\sqrt{2}C}{\sqrt{\phi}} + \frac{2c}{3} \left[ \frac{3(\omega + 2)\phi + 3(\omega + 1)(1 + \phi_i) - \omega\phi_i\phi^{-1}}{1 - \phi_i} \right], \quad (211)$$

para  $\phi_i \neq 1$ . O valor do campo é restringido pela raiz quadrada logo,  $\phi(t) > 0$ . O modelo do campo foi pensado para que  $\phi(t) = 1$  quando  $t \rightarrow \infty$  que corresponde a  $\tanh[c(t - t_d)] \rightarrow 1$ , assim é possível determinar a constante  $C$ , de tal maneira que:

$$C = \frac{H_0}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}c(2\omega + 3)(3 + \phi_i)}{3(1 - \phi_i)}. \quad (212)$$

Supondo por aproximação, que  $H(t) = 0$  para  $t \rightarrow \infty$ , visto que o valor  $H_0 \approx 10^{-62} t_p^{-1}$ ,  $C$  torna-se então:

$$C = -\frac{\sqrt{2}c(2\omega + 3)(3 + \phi_i)}{3(1 - \phi_i)}, \quad (213)$$

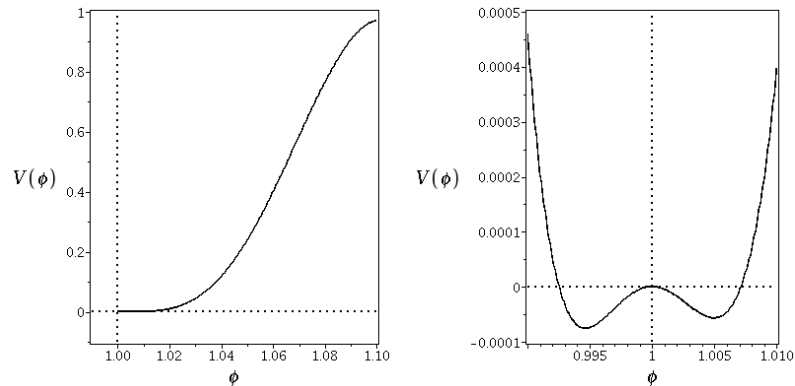
o que leva à forma final do parâmetro de Hubble,  $H$ :

$$\begin{aligned} H(\phi) &= \frac{H_0}{\sqrt{\phi}} \\ &+ \frac{2c}{3} \frac{3(\omega + 2)\phi - (2\omega + 3)(3 + \phi_i)\phi^{1/2} + 3(\omega + 1)(1 + \phi_i) - \omega\phi_i\phi^{-1}}{1 - \phi_i}. \end{aligned} \quad (214)$$

A solução para  $\lambda(\phi)$  pode ser encontrada substituindo  $H(\phi)$  na equação (204), evidentemente, fazendo  $P = k = 0$ , assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda(\phi) &= 3\phi H_0^2 + \frac{2c^2(2\omega + 3)(3\omega + 4)\phi^2}{(1 - \phi_i)^2} + \frac{6c(2\omega + 3)H_0\phi^{3/2}}{1 - \phi_i} \\ &- \frac{4c^2(2\omega + 3)^2(\phi_i + 3)\phi^{3/2}}{(1 - \phi_i)^2} - \frac{4c(\phi_i + 3)(2\omega + 3)H_0\phi}{1 - \phi_i} \\ &+ \frac{4c^2(2\omega + 3)(2\omega\phi_i^2 + 21\omega\phi_i + 3\phi_i^2 + 27\omega + 33\phi_i + 42)\phi}{3(1 - \phi_i)^2} \\ &+ \frac{6c(\phi_i + 1)(2\omega + 3)H_0\phi^{1/2}}{1 - \phi_i} - \frac{4c^2(2\omega + 3)^2(\phi_i + 1)(\phi_i + 3)\phi^{1/2}}{(1 - \phi_i)^2} \\ &+ \frac{2c^2(2\omega + 3)(3\omega\phi_i^2 + 4\omega\phi_i + 4\phi_i^2 + 3\omega + 4\phi_i + 4)}{(1 - \phi_i)^2} \\ &- \frac{2c(2\omega + 3)\phi_i H_0\phi^{-1/2}}{1 - \phi_i} + \frac{4c^2(2\omega + 3)^2\phi_i(\phi_i + 3)\phi^{-1/2}}{3(1 - \phi_i)^2} \\ &- \frac{4c^2(2\omega + 3)(\omega + 1)\phi_i(\phi_i + 1)\phi^{-1}}{(1 - \phi_i)^2} + \frac{2c^2\omega\phi_i^2(2\omega + 3)\phi^{-2}}{3(1 - \phi_i)^2}. \end{aligned} \quad (215)$$

Figura 12 - Potencial para o modelo tangente hiperbólica.



Legenda:  $H_0 = 0$ ;  $\phi_i = 1, 1$ ;  $\omega = 50.000$  e  $c = 0,007$ .

Fonte: O autor, 2018.

Repara-se que, neste caso foi possível escrever  $\lambda$  explicitamente como função do campo escalar, e que a expressão resultante é uma soma de potências de  $\phi^{1/2}$ . Como era de se esperar, fazendo  $\phi(t) \rightarrow 1$ ,  $\lambda(\phi) \rightarrow 3H_0^2$  e recupera-se a solução de de Sitter. A figura 12 mostra o gráfico da forma do potencial  $V(\phi) = \phi\lambda(\phi)$  com valores de  $H_0$ ,  $\phi_i$ ,  $\omega$  e  $c$  tipicamente usados nos estudos numéricos, com detalhe do potencial próximo à  $\phi = 1$ . A figura mostra, dentre outras coisas, que o comportamento geral do potencial é similar para um campo  $\phi(t)$  crescente ou decrescente. O potencial pode ser estudado através de uma expansão em série de potências para valores em torno de  $\phi = 1$ . Usando a transformação  $\chi = \phi - 1$ , pode-se escrever  $V(\chi)$  tal que:

$$V(\chi) = 3H_0^2 + 6H_0^2\chi + \left[3H_0^2 + \frac{c}{2}(2\omega + 3)(3H_0 - 2c)\right]\chi^2 + \dots, \quad (216)$$

da qual conclui-se que  $\phi = 1$  é um valor extremo de  $V$  somente se  $H_0 = 0$  e, ainda, que  $\phi = 1$  será um mínimo local para  $\omega < -3/2$ , e um máximo local quando  $\omega > -3/2$ .

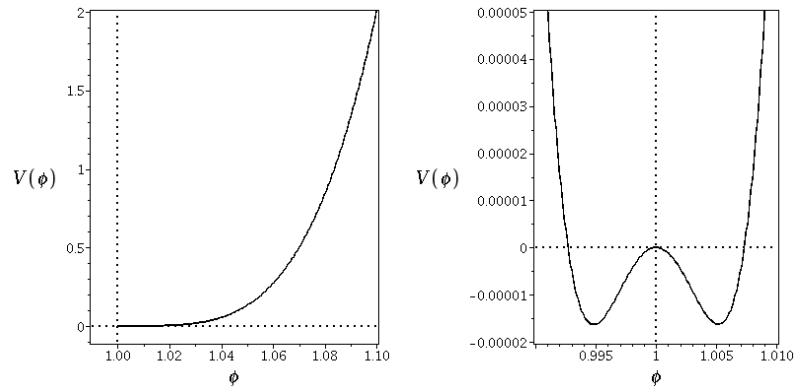
### 6.3.2 Exponencial

O segundo modelo escolhido para o campo  $\phi(t)$  tem a forma de uma exponencial e é dado por:

$$\phi(t) = 1 + \exp[-c(t - t_d)] = 1 + be^{-ct}, \quad (217)$$

Neste modelo  $\phi(t)$  não é aproximadamente constante perto de  $t = 1$  e, por isso, a inflação gerada não é exponencial. O valor de  $b$  determina o valor inicial  $\phi_i = 1 + b$  e a constante  $c$  define o grau de suavidade da evolução do campo  $\phi(t)$ . A mesma análise feita para o modelo anterior pode ser repetida para este modelo, fornecendo a solução geral para  $H(t)$

Figura 13 - Potencial para o modelo exponencial.



Legenda:  $H_0 = 0$ ;  $b = 0, 1$ ;  $\omega = 50.000$  e  $c = -0,0014$ .

Fonte: O autor, 2018.

em um Universo espacialmente plano, sem matéria:

$$H(t) = C\sqrt{1 + be^{-ct}} - (\omega + 1)c + \frac{c\omega}{3(1 + be^{-ct})}, \quad (218)$$

que pode ser escrito em termos de  $\phi$  como:

$$H(\phi) = C\sqrt{\phi} + \frac{c}{3} [\omega\phi^{-1} - 3(\omega + 1)], \quad \phi > 0. \quad (219)$$

Para  $H = H_0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , o valor da constante  $C$  é:

$$C = H_0 + \frac{c}{3} (2\omega + 3). \quad (220)$$

e  $H(\phi)$  é dado por:

$$H(\phi) = H_0\sqrt{\phi} + \frac{c}{3} [(2\omega + 3)\phi^{1/2} + \omega\phi^{-1} - 3(\omega + 1)]. \quad (221)$$

A forma de  $\lambda(\phi)$  neste caso é:

$$\begin{aligned} \lambda(\phi) &= \frac{1}{3} [3H_0 + (2\omega + 3)c]^2 \phi - c(2\omega + 3)[3H_0 + (2\omega + 3)c]\phi^{1/2} \\ &+ \frac{1}{2} c^2 (2\omega + 3)(3\omega + 4) + \frac{c}{3} (2\omega + 3)[3H_0 + (2\omega + 3)c]\phi^{-1/2} \\ &- c^2 (2\omega + 3)(\omega + 1)\phi^{-1} + \frac{1}{6} c^2 \omega (2\omega + 3)\phi^{-2}. \end{aligned} \quad (222)$$

Novamente,  $\lambda(\phi)$  é uma soma de potências de  $\phi^{1/2}$  mas, diferente do modelo anterior, a maior potência neste caso é  $\phi$ . O potencial,  $V(\phi)$  tem  $\phi^2$  como a maior potência, figura 13. Mais uma vez, estuda-se o potencial através de uma expansão em série potência para

valores em torno de  $\phi = 1$ ,  $V(\chi)$  é dado por:

$$V(\chi) = 3H_0^2 + 6H_0^2\chi + \left[ 3H_0^2 + \frac{c}{4}(2\omega + 3)(3H_0 - c) \right] \chi^2 \dots, \quad (223)$$

da mesma forma que no caso da tangente hiperbólica,  $\phi = 1$  é um valor extremo de  $V$  somente se  $H_0 = 0$  e  $\phi = 1$  será um mínimo local para  $\omega < -3/2$ , e um máximo local quando  $\omega > -3/2$ .

## 6.4 Modelos Baseados no valor de $\lambda(t)$

### 6.4.1 Função Cosmológica Proporcional a $t^{-2}$

As observações que sugerem o valor da constante cosmológica em  $\Lambda \approx 3,39 \times 10^{-122} t_p^{-2}$  e a estimativa da idade do Universo em  $t_0 \approx 8,08 \times 10^{60} t_p$  tem levado a suposições de que a relação  $\Lambda \approx t_0^{-2}$  não seja uma coincidência, alguns autores (133) têm sugerido explicações para essa relação.

No contexto da teoria BW, a relação tem uma explicação natural em termos da função cosmológica,  $\lambda(t) \propto t^{-2}$ . É interessante buscar soluções explícitas em que  $\lambda(t)$  tem esse comportamento, e inferir a evolução do campo escalar para que isso aconteça. Para isso, propõe-se uma forma para a função cosmológica tal que:

$$\lambda(t) = \lambda_i t^{-2}, \quad (224)$$

com  $\lambda_i$  sendo seu valor inicial. Usando a equação de vínculo (204), para retirar o valor positivo de  $H(t)$ , substituindo na equação (202) e isolando o termo  $\dot{\Phi}$ , tem-se:

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{2} \frac{\Omega \Phi^3 t^3 - \Omega \Phi^2 t^2 \sqrt{6\Omega \Phi^2 t^2 + 12\lambda_i} + 2\lambda_i \Phi t + 4\lambda_i}{\Omega \Phi t^3}, \quad (225)$$

onde  $\Omega = (2\omega + 3)/2$ . Fazendo a substituição de variável  $\Phi(t) \equiv \Psi(t)/t$ , a equação torna-se separável, de tal modo que:

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{2} \frac{\Omega \Psi^3 - \Omega \Psi^2 \sqrt{6\Omega \Psi^2 + 12\lambda_i} + 2\Omega \Psi^2 + 2\lambda_i \Psi + 4\lambda_i}{\Omega t \Psi}. \quad (226)$$

e assim:

$$\frac{dt}{2\Omega t} = \frac{\Psi d\Psi}{\Omega \Psi^3 - \Omega \Psi^2 \sqrt{6\Omega \Psi^2 + 12\lambda_i} + 2\Omega \Psi^2 + 2\lambda_i \Psi + 4\lambda_i}. \quad (227)$$

Fazendo uma nova transformação:

$$\Psi \equiv \sqrt{\frac{8\lambda_i}{\Omega}} \frac{X}{1 - X^2}, \quad (228)$$

a equação (227) torna-se em:

$$\frac{dt}{2\Omega t} = \frac{-2XdX}{\Omega X^4 - \sqrt{2\Omega\lambda_i}X^3 - 4\Omega\sqrt{3\lambda_i}X^2 - \sqrt{2\Omega\lambda_i}X - \Omega}. \quad (229)$$

A solução da equação (229) corresponde ao campo  $\phi(t)$  para um Universo sem matéria e espacialmente plano. O denominador do lado direito da equação é uma polinômio de ordem 4 em  $X$ . Para proceder com a integração, é necessário descobrir quantas das raízes são reais. Em princípio esse número pode ser determinado usando o discriminante,  $\Delta$ , que é mais facilmente calculado em termos de  $\lambda_i$  e  $b = \lambda_i/\Omega$ :

$$\Delta(\lambda_i, b) = -32b^3 + 192(\lambda_i - 1)b^2 + 384(20\lambda_i - 1)b + 256(12\lambda_i + 1). \quad (230)$$

Se  $\Delta < 0$  existem duas raízes reais; se  $\Delta > 0$  há quatro raízes reais ou nenhuma. Uma análise de  $\Delta$  demonstra que há dois pontos críticos:  $\lambda_i = 3/8, b = 4$  onde  $\Delta = -1728$  e  $\lambda_i = 9/4, b = 16$  onde  $\Delta = 0$ . O primeiro ponto é um máximo local, enquanto o segundo é um ponto de sela. Assim, o sinal de  $\Delta$  varia de acordo com a região do plano  $\lambda_i - b$ . Porém, para os valores de  $\lambda_i$  e  $\omega$  estudados,  $\Delta > 0$  e, desta maneira, existem duas raízes reais, e o polinômio pode ser reescrito como:

$$Q(X) = \Omega(X - r_+)(X - r_-)(X^2 + \alpha X + \beta), \quad (231)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais e  $r_+$  e  $r_-$  são as raízes reais do polinômio. Comparando os coeficientes das potências de  $X$  na equação (231) com as potências do denominador de (229), obtém-se as relações:

$$\alpha = r_+ + r_- - \sqrt{\frac{2\lambda_i}{\Omega}}, \quad \beta = -\frac{1}{r_+r_-}. \quad (232)$$

A solução da integral do lado direito é então:

$$\begin{aligned} & \ln \left[ (X^2 + \alpha X + \beta)^{\frac{\beta - r_+ r_-}{\Omega(\alpha r_+ + r_+^2 + \beta)(\alpha r_- + r_-^2 + \beta)}} (X - r_+)^{\frac{-2r_+}{\Omega(r_+ - r_-)(\alpha r_+ + r_+^2 + \beta)}} \right. \\ & \left. (X - r_-)^{\frac{2r_-}{\Omega(r_+ - r_-)(\alpha r_- + r_-^2 + \beta)}} \right] \\ & - \frac{2(\alpha r_+ r_- + \alpha\beta + 2\beta r_+ + 2\beta r_-)}{\Omega(\alpha r_+ + r_+^2 + \beta)(\alpha r_- + r_-^2 + \beta)\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \arctan \left( \frac{2X + \alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \right). \end{aligned} \quad (233)$$

Fazendo a integral em  $t$  a relação final entre  $t$  e  $X$  é:

$$t^{1/2\Omega} \propto (X - r_+)^{\frac{2r_+}{\Omega(r_- - r_+) (\alpha r_+ + r_+^2 + \beta)}} (X - r_-)^{\frac{2r_-}{\Omega(r_+ - r_-) (\alpha r_- + r_-^2 + \beta)}} \\ (X^2 + \alpha X + \beta)^{\frac{\beta - r_+ r_-}{\Omega(\alpha r_+ + r_+^2 + \beta) (\alpha r_- + r_-^2 + \beta)}} \\ \exp \left[ -\frac{2(\alpha r_+ r_- + \alpha \beta + 2\beta r_+ + 2\beta r_-)}{\Omega(\alpha r_+ + r_+^2 + \beta) (\alpha r_- + r_-^2 + \beta) \sqrt{4\beta - \alpha^2}} \arctan \left( \frac{2X + \alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \right) \right]. \quad (234)$$

Embora a solução seja exata, ela é implícita e de difícil tratamento, contudo, é possível retirar algumas informações importantes a respeito dessa cosmologia fazendo um análise assintótica das equações. Em particular, para estudar o comportamento quando  $t \rightarrow \infty$ , é necessário encontrar qual valor de  $X$  corresponde a esse limite. Observando os termos no lado direito da equação (234), fica evidente que o arco tangente é um valor limitado e a exponencial tende a uma constante.

Portanto, para que o lado direito da equação (234) torne-se infinito, existem apenas duas possibilidades:

- (i) para  $X \rightarrow \infty$ , o lado direito comporta-se como  $X^p$  com  $p > 0$ ; ou
- (ii) para pelo menos um dos fatores,  $(X - r_{\pm})^{p_j}$ ,  $p_j < 0$  e  $X \rightarrow r_{\pm}$ , onde  $j = 1, 2$ .

No primeiro caso, escrevendo o produto de potencias como:

$$\Pi = (X - r_+)^{p_1} (X - r_-)^{p_2} (X^2 + \alpha X + \beta)^{p_3},$$

tem-se, para  $X$  grande:

$$\Pi \approx X^{p_1 + p_2 + 2p_3}.$$

Contudo,  $p_1 + p_2 + 2p_3 = 0$  e esta possibilidade é descartada.

No segundo caso, devido à simetria de  $\Pi$  em relação à troca  $r_+ \leftrightarrow r_-$ , basta analisar uma das alternativas. Para isso, faz-se  $X = (r_+ + \epsilon)$  e, no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , descobre-se que:

$$\Pi = \epsilon^{p_1} (r_+ - r_-)^{p_2} (r_+^2 + \alpha r_+ + \beta)^{p_3}.$$

Para os valores de  $\lambda_i$  e  $\omega$  usados nesta tese, o sinal de  $p_1$  é sempre negativo e conclui-se que, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $X \rightarrow r_+$ . Evidentemente, a mesma análise vale para  $X \rightarrow r_-$ . Portanto é possível estudar o comportamento da solução quando  $t \rightarrow \infty$  fazendo  $X \rightarrow r_+$  (ou a  $r_-$ ). Por exemplo, para calcular o valor da equação de estado efetiva  $w$  quando  $t \rightarrow \infty$  coloca-se o valor de  $X$  em  $t = \infty$  na equação (228) e assim:

$$\Psi = \Psi' = \sqrt{\frac{8\lambda_i}{\Omega} \frac{r_{\pm}}{1 - r_{\pm}^2}}$$

Tabela 10 - Relações entre os valores de  $r_+$ ,  $r_-$ ,  $H'_1$ ,  $H'_2$ ,  $w'_1$  e  $w'_2$ ; e o valor inicial da função cosmológica  $\lambda_i$ .

$\lambda_i(t_p^{-2})$	$r_+$	$r_-$	$H'_1$	$H'_2$	$w'_1$	$w'_2$
1	2,662	-2,655	0,770	0,765	-0,134	-0,129
2	3,151	-3,141	1,003	0,998	-0,335	-0,332
3	3,482	-3,470	1,183	1,178	-0,437	-0,434
4	3,739	-3,725	1,336	1,330	-0,501	-0,499
5	3,952	-3,937	1,471	1,465	-0,547	-0,545

Fonte: O autor, 2018.

onde  $\Psi'$  é uma constante, e portanto:

$$\Phi = \Psi' t^{-1}. \quad (235)$$

A primeira conclusão retirada do estudo assintótico deste modelo, está contida no sinal de  $\Phi(t)$ , dependendo do valor da raiz  $r_{\pm}$ , a função  $\Phi(t)$  é positiva ou negativa, este sinal determina o comportamento do campo  $\phi(t)$ , crescente ou decrescente respectivamente. Pode-se também observar que  $\Phi \rightarrow 0$  para  $t$  grande, pelo menos para o espaço de parâmetros aqui considerado, o comportamento assintótico de  $\dot{\Phi}$  pode ser obtido substituindo-se (235) na equação (225). Para determinar o valor assintótico do parâmetro de Hubble, utiliza-se a equação (204), obviamente considerando o valor positivo de  $H(t)$ , obtendo-se:

$$H(t) \approx \frac{-\Psi' + \frac{1}{3}\sqrt{6\Omega\Psi'^2 + 12\lambda_i}}{2} t^{-1} \equiv H' t^{-1}. \quad (236)$$

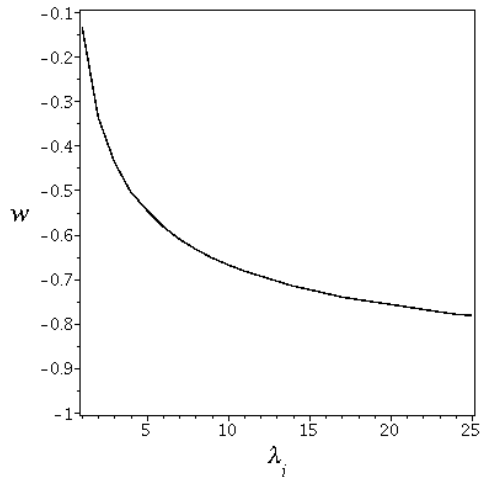
Por fim, substituindo tudo na equação de estado efetiva (196) tem-se:

$$w' = \frac{3\Omega(2\Omega - 1)\Psi'^3 + 2\Omega(2\sqrt{6\Omega\Psi'^2 + 12\lambda_i} - 3\sqrt{6\Omega\Psi'^2 + 2\lambda_i})\Psi'^2 + 12\lambda_i(1 - \Omega)\Psi' + 24\lambda_i}{3\Omega(2\Omega + 3)\Psi'^3 - 6\Omega\sqrt{6\Psi'^2\Omega + 12\lambda_i}\Psi'^2 + 12\Omega\lambda_i\Psi'} \quad (237)$$

portanto, conclui-se que a equação de estado efetiva  $w$  tende a uma constante quando  $t$  for grande. A tabela 10 apresenta alguns valores possíveis para os parâmetros  $r_+$ ,  $r_-$ ,  $H'_1$ ,  $H'_2$ ,  $w'_1$  e  $w'_2$  baseados na escolha de  $\lambda_i$  e  $\omega = 50.000$ .

O gráfico 14 apresenta a relação entre o valor inicial da função cosmológica e o valor assintótico da equação de estado efetiva  $w'_1$ . Um gráfico similar para  $w'_2$  não apresenta grandes diferenças. Os valores assintóticos de  $w$  encontrados na tabela 10 são aceitáveis fisicamente, contudo não são compatíveis com observações, visto que a análise feita pela colaboração Planck em 2013, supondo que  $w$  é constante, indica que  $w \leq -0,88$  com um nível de confiança em 95%. Para que  $w$  aproxima-se desse valor,  $\lambda_i \approx 80$ , um valor

Figura 14 - Relação entre o valor inicial da função cosmológica  $\lambda_i$  e o valor assintótico da equação de estado efetiva  $w'_1$ .



Fonte: O autor, 2018.

relativamente grande. A análise assintótica feita na equação (236) demonstra que, para  $t$  grande,  $H \approx H_i t^{-1}$ . Supondo que esse comportamento também valha para  $t$  pequeno, a equação pode ser usado para determinar valores de  $H_i$  compatíveis com observações do parametro de Hubble. Utilizando por exemplo,  $H'_1 = 1,015$ , e a idade do Universo  $t_0 \approx 13,8 \text{ Gyr}$ , o valor atual do parâmetro de Hubble seria  $H_0 \approx 1,259 \times 10^{-61} t_p^{-1} \approx 71,9 \text{ km/s/Mpc}$ , o valor observado por H0LiCOW. A suposição de que  $H \propto t^{-1}$  seja uma boa aproximação próximo ao *Big Bang* tem que ser verificado numericamente.

Se, de fato,  $H \propto t^{-1}$  descrever bem a evolução do Universo no modelo em que  $\lambda \propto t^{-2}$ , e dada a complexidade deste modelo, é natural perguntar se um modelo no qual  $H$  é proporcional a  $t^{-1}$  não seria adequado para reproduzir grande parte das características do modelo com  $\lambda \propto t^{-2}$ , com a vantagem de, talvez, produzir soluções mais simples. Este argumento será o ponto de partida da próxima seção.

#### 6.4.2 Parâmetro de Hubble Proporcional a $t^{-1}$

Nesta seção, utiliza-se a equação (206), modelando agora o parâmetro de Hubble e levando em conta que, no contexto das soluções de de Sitter,  $\Lambda = 3H_0^2$ . A intenção é obter uma solução exata em que o comportamento de  $\lambda$  se aproxime de  $\lambda \propto t^{-2}$ , porém mais facilmente tratável. O valor do parâmetro de Hubble atual é da ordem de  $H_0 \approx 10^{-61} t_p^{-1}$ . Assim, o modelo  $H(t) \propto t^{-1}$  é um alternativa.  $H(t)$  é dado então por:

$$H(t) = H_i t^{-1}, \quad (238)$$



onde  $H_i$  é o valor inicial de  $H(t)$ . É possível verificar analiticamente se a cosmologia em questão é inflacionaria. Neste modelo, o fator de escalar é dado por:

$$a(t) = a_0 t^{H_i}, \quad (239)$$

lembrando que  $\ddot{a} > 0$  em universos inflacionários. Derivando duas vezes  $a(t)$  tem-se:

$$\ddot{a} = H_i(H_i - 1)t^{H_i-2}, \quad (240)$$

onde  $a_0 = 1$ . Assim, o modelo é compatível com um universo inflacionário se  $H_i > 1$ .

A função  $\Phi(t)$  para a cosmologia tratada nesta seção com  $\rho = k = 0$  tem a forma:

$$\Phi(t) = \frac{H_i + 1 - m \tanh \left\{ \frac{m}{2} [C - \ln(t)] \right\}}{2(\omega + 1)t} = \frac{t^m(H_i + m + 1) + C_1(H_i - m + 1)}{2(\omega + 1)(t^m + C_1)t}, \quad (241)$$

onde  $C$  é constante,  $m \equiv \sqrt{H_i^2 + 8H_i\omega + 10H_i + 1}$  e  $C_1 \equiv e^{Cm}$ . O campo  $\phi(t)$  para o modelo é então:

$$\phi(t) = D \cosh^{\frac{1}{\omega+1}} \left\{ \frac{m}{2} [C - \ln(t)] \right\} t^{\frac{H_i+1}{2(\omega+1)}} = C_2 t^{\frac{H_i-m+1}{\omega+1}} (t^m + C_1)^{\frac{1}{\omega+1}}. \quad (242)$$

onde  $C_2$  e  $D$  são constantes arbitrárias, independentes de qualquer parâmetro cosmológico, mas determinadas pela exigência que  $\phi(t_0) = 1$ .

A evolução de  $\Phi$  pode ser separada em dois regimes: um dominado pelos termos em  $C_1$ , o outro dominado pelos termos em  $t^m$ . Se  $t^m \gg C_1$  então:

$$\Phi \approx \frac{t^m(H_i + m + 1)}{2(\omega + 1)t^{m+1}} = \frac{H_i + m + 1}{2(\omega + 1)t}. \quad (243)$$

Para os valores neste trabalho,  $H_i \approx 1$  e  $\omega \gtrsim 50.000$ , portanto  $m \approx \sqrt{8H_i\omega}$  e

$$\Phi \approx \frac{\sqrt{2H_i}}{\sqrt{\omega t}}. \quad (244)$$

Do outro lado, se  $C_1 \gg t^m$  tem-se:

$$\Phi \approx \frac{C_1(H_i - m + 1)}{2(\omega + 1)C_1 t} = \frac{H_i - m + 1}{2(\omega + 1)t}. \quad (245)$$

Fazendo novamente  $m \approx \sqrt{8H_i\omega}$  resulta em:

$$\Phi \approx -\frac{\sqrt{2H_i}}{\sqrt{\omega t}}. \quad (246)$$

Percebe-se que, independentemente do regime,  $|\Phi|$  tem a mesma forma. Uma vez que

$\dot{G}/G = -\Phi$  é possível calcular a variação de  $G$  para este modelo. Usando  $H_i = 1$ ,  $\omega = 50.000$  e  $t_0 = 13,8$  Gyr:

$$|\Phi| = \left| \frac{\dot{G}}{G} \right| \approx 4,58 \times 10^{-13} \text{ yr}^{-1} \quad (247)$$

Para os valores típicos utilizados nas integrações numérica,  $\omega$  é positivo e grande em comparação a  $H_i$ . Assim,  $m$  será dominado pelo termo  $\sqrt{8H_i\omega}$  e, desta forma, a constante  $C_1$ , será pequena ou grande dependendo do sinal de  $C$ . Uma escolha óbvia seria  $C_1 \approx 0$  e, com isso, uma lei de potência descreveria muito bem  $\phi(t)$ , como consta em (134). Não há uma expressão óbvia para  $\lambda(\phi)$ , porém é possível escrever a função cosmológica em termo de  $t$ , que resulta em:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{3H_i^2}{t^2} - \frac{\omega}{2} \left[ \frac{t^m(H_i + m + 1) + C_1(H_i - m + 1)}{2(\omega + 1)(t^m + C_1)t} \right]^2 \\ &+ \frac{3H_i}{t^2} \frac{t^m(H_i + m + 1) + C_1(H_i - m + 1)}{2(\omega + 1)(t^m + C_1)}. \end{aligned} \quad (248)$$

Para  $t$  grande todos os termos da função cosmológica são assintoticamente proporcionais a  $t^{-2}$ , fazendo  $\lambda \propto t^{-2}$ , corroborando ao argumento inicial. Para valores típicos usados na integração numérica,  $\lambda(t)$  é sempre positivo.

A equação de estado efetiva  $w$  do campo  $\phi$  é constante e dada por:

$$w = -1 + \frac{2}{3H_i}. \quad (249)$$

É impressionante que  $w$  seja determinado unicamente pelo valor inicial do parâmetro de Hubble e ainda, que valores naturais para  $H_i$  produzam equações de estado fisicamente aceitáveis. Por exemplo:

$$H_i \in [\sqrt{1/3}, \sqrt{8\pi/3}] \Rightarrow w \in [0, 15, -0, 77], \quad (250)$$

com os valores maiores de  $H_i$  fornecendo valores de  $w$  compatíveis com as observações cosmológicas hoje.

Observações mais recentes como H0LiCOW, indicam que o parâmetro de Hubble hoje tem valor de  $H_0 \approx 1,256 \times 10^{-61} \text{ t}_p^{-1}$ . Esse valor de  $H_0$  no modelo  $\Lambda$ CDM, fornece uma idade do Universo de  $t_0 \approx 8,08 \times 10^{60} \text{ t}_p$ .

Outros valores de  $H_i$  são possíveis se a condição sobre o valor de  $t_0$  for relaxada. Observações independentes do modelo cosmológico às vezes fornecem valores da idade do Universo levemente maiores dos calculados usando o modelo  $\Lambda$ CDM. Destacam-se as estimativas das idades de aglomerados globulares (135), que produzem idades de  $12,7 \pm 1,7$  Gyr ou  $13,4 \pm 1,1$  Gyr dependendo da técnica usada, e o estudo de estrelas

Tabela 11 - Relações entre parâmetros cosmológicos variando  $H_0$  e  $t_0$ .

$H_i(t_p^{-1})$	$H_0(\text{km/s/Mpc})$	$t_0(\text{Gyr})$	$t_{65}(s)$	$w$
1	70,86	13,8	$9,14 \times 10^{-16}$	-0,333
1,015		13,8	$3,50 \times 10^{-16}$	-0,343
1,066	71,9	14,5	$1,63 \times 10^{-17}$	-0,375
1,184		16,1	$3,75 \times 10^{-20}$	-0,437
1,034		13,8	$1,08 \times 10^{-16}$	-0,355
1,086	73,24	14,5	$5,31 \times 10^{-18}$	-0,386
1,206		16,1	$1,38 \times 10^{-20}$	-0,447
1,058		13,8	$2,59 \times 10^{-17}$	-0,370
1,112	75,08	14,5	$1,31 \times 10^{-18}$	-0,400
1,234		16,1	$4,05 \times 10^{-21}$	-0,460

Fonte: O autor, 2018.

deficientes em ferro. Em particular, uma análise da estrela HD 140283 feita por Bond et. al. (136) em 2013 indicou uma idade de  $14,46 \pm 0,8\text{Gyr}$ . Embora esse valor seja maior do que as idades provenientes de observações cosmológicas, ele é compatível com o  $13,77 \pm 0,06\text{Gyr}$  levando em conta as incertezas estatísticas. Porém, aceitando-se a possibilidade de modelos diferentes do modelo  $\text{RG} + \Lambda\text{CDM}$ , é válido considerar idades do Universo de até  $16,1\text{Gyr}$ , o limite superior indicado pelas idades das estrelas mais antigas.

A tabela 11 mostra a relação entre  $H_i$ ,  $H_0$ ,  $t_0$ ,  $t_{65}$  (o tempo em que o Universo expande em 65 *e-folds*), e  $w$ . Na primeira linha foram fixos o valor de  $H_i = 1,0$  e  $t_0$ , a partir dos quais foi calculado  $H_0$ . Vê-se que o valor é muito próximo às observações cosmológicas. As linhas seguintes mostram a variação de  $H_i$  usando os valores de  $H_0$  mais recentemente calculados pelo grupo H0LiCOW (71,9) e por Riess et al. (73,24) (137). O valor 75,08 é o limite superior de  $H_0$ , levando em conta a incerteza final de 2,4% citada no artigo.

A tabela contém resultados positivos e negativos do ponto de vista das observações. Na primeira linha o valor "natural"  $H_i = 1 t_p^{-1}$  foi atribuído, junto com a idade do Universo mais aceita  $13,8\text{Gyr}$ . Essas escolhas produzem um valor de  $H_0 \approx 70,85\text{km/s/Mpc}$ , que fica entre os valores citados por Planck/WMAP e Riess/H0LiCOW. Porém o valor  $H_i = 1$  significa que  $a \propto t$  e o Universo permanece no limiar entre modelos inflacionários e não-inflacionários. O tempo para atingir 65 *e-folds* é maior do que geralmente estipulado para o fim da inflação: entre  $10^{-38}\text{s}$  e  $10^{-26}\text{s}$ .

No modelo proposto aqui, os valores de  $t_0$ ,  $H_0$  e  $H_i$  são interligados pela equação  $H_0 = H_i/t_0$ . Para que os valores de  $H_0$  e  $t_0$  sejam iguais aos do modelo  $\Lambda\text{CDM}$ , o valor inicial do parâmetro de Hubble deve ser  $H_i \approx 1,015$ , que produz um Universo

levemente inflacionário. Esse limiar também é evidente no valor de  $w = -1/3$ , considerado o limite para  $p/\rho$  para produzir inflação. Atualmente um valor de  $w$  tão próximo de zero é inconciliável com cálculos baseados no modelo  $\Lambda$ CDM. Como visto anteriormente, para Planck 2013, supondo  $w$  constante,  $w \leq -0,88$  com 95% de confiança.

Das demais linhas, o menor valor de  $w = -0,460$  ocorre com  $H_0$  no limite superior dos valores indicados por Riess, e uma idade do Universo de 16,1Gyr, no limite superior dos valores prováveis sugeridos pelas idades das estrelas mais antigas. Mesmo assim, o valor continua incompatível com análises de observações. Porém, os valores de  $H_i > 1$  demonstram que esse modelos são sempre inflacionários e nunca sofrem do problema do horizonte do Modelo Padrão.

Toda essa análise foi realizada para cosmologias com  $k = 0$  e  $\rho = 0$ . Como será visto, para modelos mais completos, em que a curvatura e matéria são relevantes, a equação de estado efetiva não é mais constante, particularmente próximo ao *Big Bang*.

## 6.5 Método Numérico

Para efetuar os cálculos numéricos para os modelos cosmológicos desta trabalho, utilizou-se o método Runge–Kutta, particularmente aquele descrito por Verner como RKV8(9), cujos parâmetros estão no apêndice deste trabalho. Usou-se também a biblioteca de múltipla precisão MPFR, como foi descrito, cujo nível de precisão será determinado pela equação (184). O passo será corrigido de acordo a tolerância pré-determinada de forma que a cada nova ponto calculado, o passo será multiplicado por um fator de correção dado por:

$$f_c = \left| \frac{\epsilon_{tol}}{\epsilon} \right|^{1/9}, \quad (251)$$

Para evitar uma escolha inicial equivocada no valor do passo  $h$ , foi acrescentada uma correção adicional. Repete-se o cálculo do primeiro passo cem vezes para que o fator de correção  $f_c$  ajuste o passo até que o valor de  $h$  esteja compatível com a precisão sugerida pela tolerância.

## 6.6 Soluções Numéricas

As soluções numéricas são apresentadas com a proposta de estudar a evolução das variáveis cosmológicas, a fim de verificar se os modelos para  $\phi(t)$ ,  $\lambda(t)$  e  $H(t)$  na teoria de BW são capazes de reproduzir as propriedades do Universo Primordial. Em qualquer integração numérica a questão da escolha das condições de contorno, ou condições iniciais, tem que ser abordada. Embora a teoria BW tenha embasamento teórico significativo,

é inegável que é uma teoria até o momento especulativa, que dificulta a definição das variáveis cosmológicas em qualquer época. Porém, é possível adotar a ideia de que, na saída da transição do estado quântico do Universo para o regime clássico, essas variáveis deveriam ter valores “naturais”, ou seja próximos a 1 em unidades de Planck. Assim, no tempo de Planck,  $t_p$  espera-se que o fator de escala,  $a(t)$  seja igual ao comprimento de Planck,  $l_p$ , e a densidade de energia inicial seja igual à densidade de Planck. Portanto as integrações, feitas em unidade de Planck, devem começar em  $t = 1$  com  $a = 1$ . Existe mais liberdade na escolha do valor inicial do parâmetro de Hubble, uma vez que não parece haver as mesmas restrições quânticas sobre uma taxa de expansão. Porém, aderindo à noção de valores naturais, foram usadas condições iniciais em que  $H(1) \approx 1t_p^{-1}$ , lembrando que o valor usado deve respeitar o vínculo (204).

Devido ao fator  $8\pi$  que consta nas equações de campo, e a consequente possibilidade de adotar unidades de Planck com  $G = 1$  ou  $8\pi G = 1$  na medição de massas, existe uma ambiguidade sobre o que deve ser considerado um valor “natural” para essas variáveis, que produz uma faixa de valores considerados naturais. As mesmas considerações valem para o valor inicial da função cosmológica,  $\lambda(t)$ .

O valor inicial de  $\phi$  talvez seja o mais especulativo dentre todas as variáveis. A única exigência é que  $\phi(t_0) = 1$ . Se  $\phi$ . Por fim o parâmetro  $\omega$ , se for constante, é limitado pelos dados observacionais, dos quais os mais rigorosas são da sonda Cassini (138),  $\gamma = 1 + (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$  cujo limite da precisão é de  $2\sigma$  (95%). Isso implica em  $\omega < -15.000$  ou  $\omega > 40.000$ . Em todas as análises foi usado  $\omega = 50.000$ .

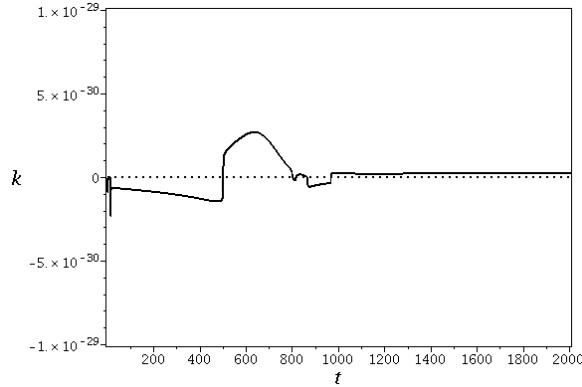
As soluções numéricas serão determinadas pelas equações (201), (202) e (203), com a equação de vínculo (204) usada para determinar condições iniciais consistentes. A tolerância na integração numérica é definida para que se mantenha uma precisão em torno de  $10^{-30}$ . Essa precisão é testada usando (204) para calcular o valor de  $k$  durante a integração nos modelos em que o Universo é espacialmente plano.

### 6.6.1 Modelo 1: Tangente Hiperbólica, $k = 0$ e $\phi$ Decrescente

A primeira cosmologia a ser integrada numericamente é de um universo espacialmente plano no qual o campo escalar tem a forma de um tangente hiperbólica como na equação (210) e cujo seu valor decresce durante a evolução. Este modelo depende de três parâmetros:  $c$ ,  $\phi_i$  e  $t_d$ , cujos valores foram definidos como:

$$\phi_i = 1,1 \quad c = 0,0074477054841195 \quad t_d = 700.$$

Figura 15 - Valor de  $k$  calculado para um precisão de aproximadamente  $10^{-30}$ .



Fonte: O autor, 2018.

Escolhendo  $H(1) = 1$ ,  $P(1) = 2$ ,  $a(1) = 1$ , e colocando  $k = 0$  na equação (204), obtém-se:

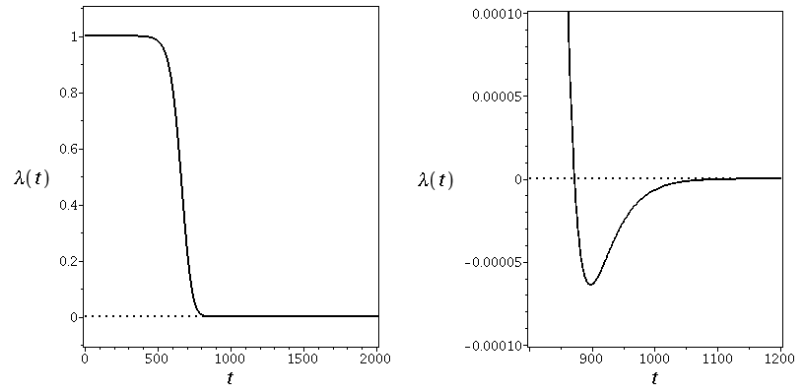
$$\lambda(1) \approx 0,999999877798618893444848381195.$$

O parâmetro  $c$  foi ajustado para que  $H(t)$  e  $\lambda(t)$  tivessem valores pequenos para  $t$  grande. As partes relevantes da evolução de diversas variáveis cosmológicas são apresentados nos gráficos a seguir. O gráfico 15 mostra o valor de  $k$  durante a integração, confirmando que o programa funciona com o nível de precisão especificado.

O gráfico 16 mostra a evolução de  $\lambda(t)$  durante a inflação. É interessante notar que neste modelo  $\lambda$  pode assumir valores negativos, dependendo da escolha das condições iniciais. Para as condições iniciais usadas, a função cosmológica evolui para um valor final de  $\approx 10^{-28}$ , próximo do limite da precisão definida.

A figura 17 mostra a evolução do parâmetro de Hubble. Assim como no caso da função cosmológica,  $H(t)$  tende a um valor pequeno no fim da inflação, porém não se torna negativo em nenhum momento da evolução. O segunda gráfico mostra em detalhes o efeito do acréscimo da densidade de energia, que se manifesta logo no começo da evolução diminuindo significativamente o valor de  $H(t)$ . Como era de se esperar, o efeito do acréscimo de  $P(t)$  rapidamente desaparece. A figura 18 mostra a quantidade de inflação gerada pela evolução e o valor de  $w$  da equação de estado efetiva de  $\phi$ . A inflação é compatível com cálculos que indicam um limite inferior para o número de *e-folds* em aproximadamente 65. No início da evolução,  $w \approx -1$  como era de se esperar, porém, após o tempo de decaimento  $t_d$  o valor de  $w$  torna-se positivo e muito grande, com um pico em torno de  $t = 2.500 t_p$ , caindo rapidamente depois até  $w \approx -1$ . Este comportamento é

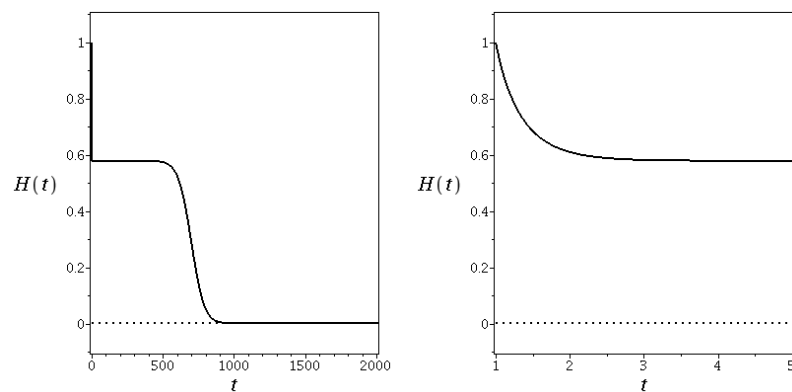
Figura 16 - Modelo 1: Evolução de  $\lambda(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Detalhe do período em que  $\lambda(t) < 0$ .  
 Valor final da função cosmológica:  $\lambda(t) \approx 6,4916 \times 10^{-28}$  em  $t \approx 4.532$ .

Fonte: O autor, 2018.

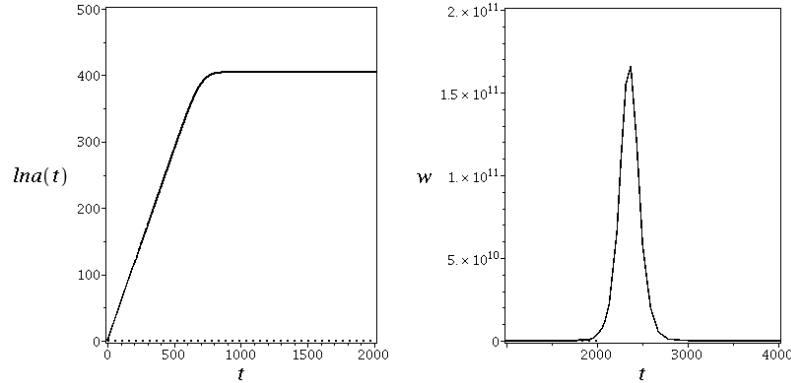
Figura 17 - Modelo 1: Evolução de  $H(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $H(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 0$  e  $t = 5$ . Valor final para o parâmetro de Hubble:  
 $H(t) \approx 1,4702 \times 10^{-14}$  em  $t \approx 4.532$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 18 - Modelo 1: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 400 *e-folds* até o fim da inflação com uma aparente estabilidade no valor de  $\ln a(t)$  devido a  $H(t)$  pequeno no fim da inflação; (b) Equação de estado efetiva  $w$  com valor de pico em torno de  $1,7 \times 10^{11}$ .

Fonte: O autor, 2018.

consequência do fato de que, em torno do pico,  $\rho_\phi$  decai mais rapidamente do que  $p_\phi$ .

$$w = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{\omega}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \ddot{\phi} - \phi\lambda + 2H\dot{\phi}}{\frac{\omega}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \phi\lambda - 3H\dot{\phi}}, \quad (252)$$

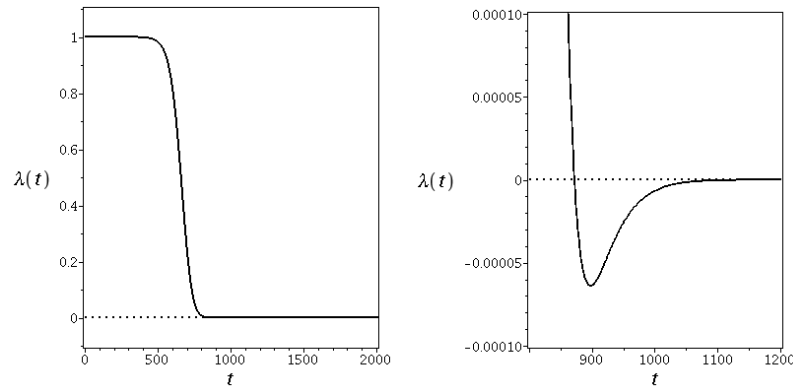
Uma análise dos termos individuais da equação (252) mostra que, nessa época, os dois primeiros termos de  $\rho_\phi$  têm módulos muito semelhantes, porém com sinais contrários, fazendo com que o último termo, apesar de muito menor do que ambos, domine. Os mesmos dois termos que cancelam em  $\rho_\phi$  se somam no cálculo de  $p_\phi$ , criando um valor de  $w \gg 1$ . Já foi mencionado que a interpretação de  $w$  rigorosamente como um parâmetro da equação de estado é duvidoso e, de fato, não há nenhum comportamento anômalo na evolução deste modelo provocado pelo valor alto de  $w$ , reforçando a noção de que a interpretação de  $w$  como uma equação de estado é fisicamente questionável, pelo menos quando a variação de  $\phi$  é relevante.

### 6.6.2 Modelo 2: Tangente Hiperbólica, $k = 1$ e $\phi$ Decrescente

O segundo modelo que foi integrado apresenta condições iniciais semelhantes ao modelo anterior, porém com curvatura positiva. Para respeitar a equação de vínculo, o valor inicial da densidade de energia foi modificado, de forma que:

$$P(1) = 5.$$



Figura 19 - Modelo 2: Evolução de  $\lambda(t)$ .

Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Detalhe durante o período em que  $\lambda(t) < 0$ . Valor final da função cosmológica:  $\lambda(t) \approx 2,4419 \times 10^{-21}$  em  $t \approx 2.678$ .

Fonte: O autor, 2018.

As condições iniciais semelhantes foram escolhidas para facilitar a comparação entre os modelos com e sem curvatura.

A figura 19 mostra que não há diferenças significativas entre o modelo com curvatura positiva e o modelo sem curvatura no comportamento da função cosmológica, embora o valor final de  $\lambda(t)$  para o caso em que  $k = 1$  seja maior.

A figura 20 mostra a evolução do parâmetro de Hubble, em que as diferenças são mais evidentes. Além do valor final maior, a figura em detalhe mostra uma queda ainda maior no valor do parâmetro em comparação ao modelo anterior, porém  $H(t)$  cresce logo em seguida, estabilizando-se no mesmo valor do modelo  $k = 0$ . Esse comportamento é atribuído aos efeitos da curvatura juntamente com a densidade.

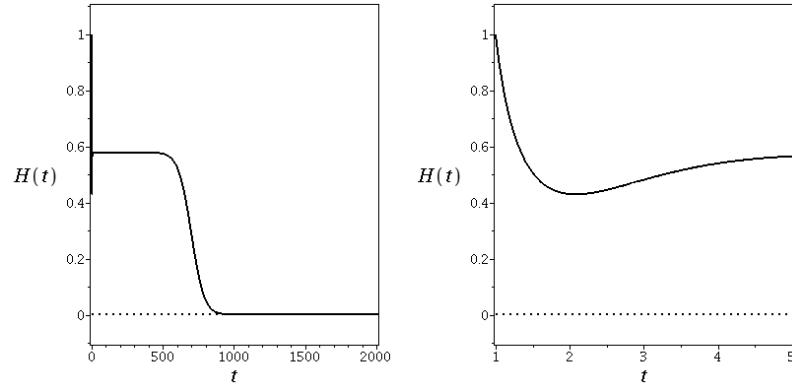
O primeiro gráfico da figura 21 mostra que não houve mudanças na quantidade de inflação. Já no caso da equação de estado, o valor do pico apresentou uma queda significativa, embora continue muito grande. Provavelmente, essa queda é consequência do valor final maior na função cosmológica, em comparação ao modelo anterior.

### 6.6.3 Modelo 3: Tangente Hiperbólica, $k = -1$ e $\phi$ Decrescente

Este modelo apresenta curvatura negativa  $k = -1$  com os mesmos valores para  $\phi_i$ ,  $c$  e  $t_d$  dos modelos anteriores. Os valores iniciais para as variáveis são:  $H(1) = 1,5$ ;  $P(1) = 2,75$  e  $a(1) = 1$ . Os valores iniciais das variáveis cosmológicas são um pouco diferentes do que nos modelo anterior para respeitar a equação de vínculo, assim  $\lambda(1)$  é:

$$\lambda(1) \approx 0,999999816718654795801546986668.$$

Figura 20 - Modelo 2: Evolução de  $H(t)$ .

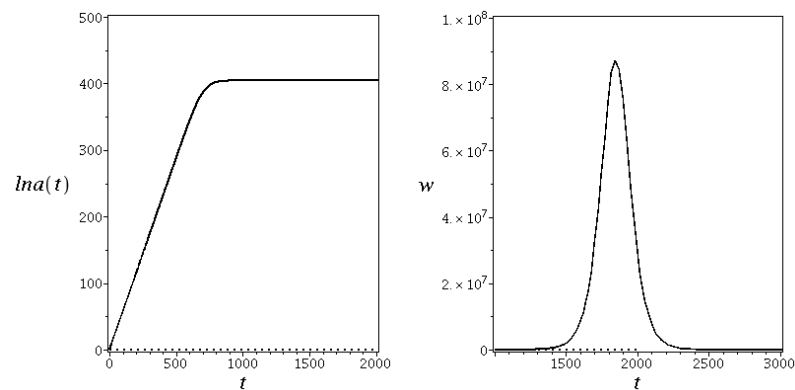


Legenda: Evolução de  $H(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 1$  e  $t = 5$ . Valor final para o parâmetro de Hubble:

$$H(t) \approx 2,8530 \times 10^{-11} \text{ em } t \approx 2.678.$$

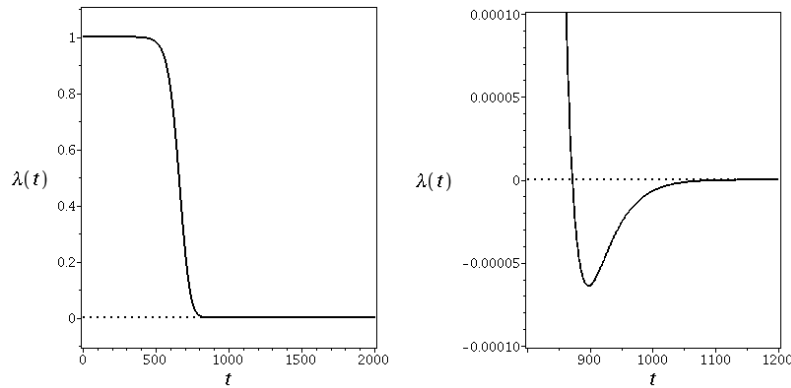
Fonte: O autor, 2018.

Figura 21 - Modelo 2: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 400 *e-folds* até o fim da inflação; (b) Equação de estado efetiva  $w$  com valor de pico em torno de  $9 \times 10^7$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 22 - Modelo 3: Evolução de  $\lambda(t)$ .

Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Detalhe durante o período em que  $\lambda(t) < 0$ . Valor final da função cosmológica:  $\lambda(t) \approx 8,5011 \times 10^{-16}$  em  $t \approx 2.420$ .

Fonte: O autor, 2018.

A proposta do Modelo 3 é a mesma do Modelo 2: comparar os efeitos do acréscimo da curvatura ao modelo em que  $k = 0$ . A figura 22 mostra que o comportamento da função cosmológica é bastante similar ao dos modelos anteriores. O gráfico (b) da figura 23 mostra as consequências da curvatura negativa e da densidade de energia nos primeiros momentos do Universo, comportamento este muito próximo ao modelo sem curvatura. O parâmetro de Hubble neste modelo em particular, evolui para um valor negativo no fim da inflação, a consequência imediata disso é um recolapso.

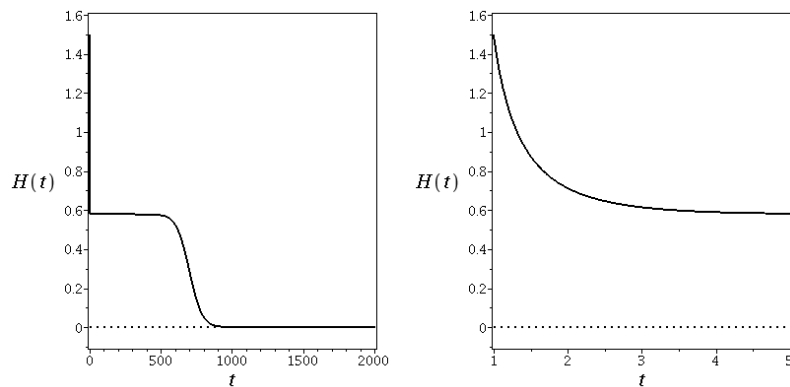
A figura 24 mostra que a quantidade de inflação não mudou porém, como o valor final de  $H(t)$  é pequeno mas negativo, o valor de  $\ln a(t)$  diminuirá suavemente no período pós inflação causando um recolapso em algum ponto futuro na evolução do Universo.

#### 6.6.4 Modelo 4: Tangente Hiperbólica, $k = 0$ e $\phi$ Crescente

Um modelo em que o campo é crescente apresenta um valor de  $\phi$  pequeno durante o período inicial da evolução. Isso implica em efeitos gravitacionais mais intensos durante a inflação, por isso, é de se esperar que este modelo seja mais propenso a um recolapso. As condições iniciais são escolhidas de tal maneira que todos os parâmetros tenham valores iguais ao do modelo 1, exceto o valor inicial do campo, que agora é  $\phi_i = 0,9$ , e por consequência  $\lambda(1)$  é então:

$$\lambda(1) \approx 1,000000149243749121640045898987.$$

Figura 23 - Modelo 3: Evolução de  $H(t)$ .

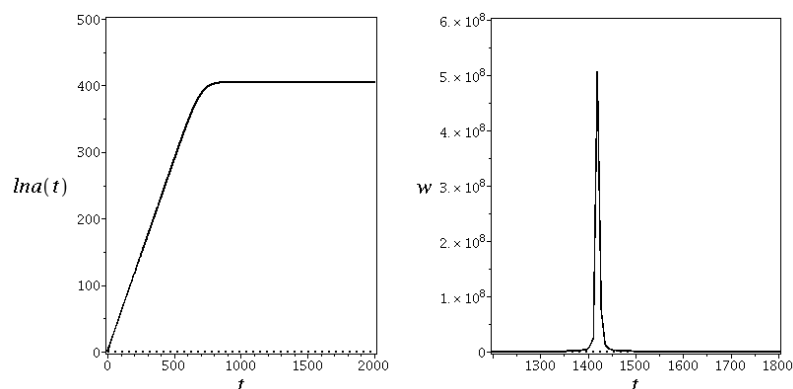


Legenda: (a) Evolução de  $H(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 1$  e  $t = 5$ . Valor final para o parâmetro de Hubble:

$$H(t) \approx -1,6834 \times 10^{-8} \text{ em } t \approx 2.420.$$

Fonte: O autor, 2018.

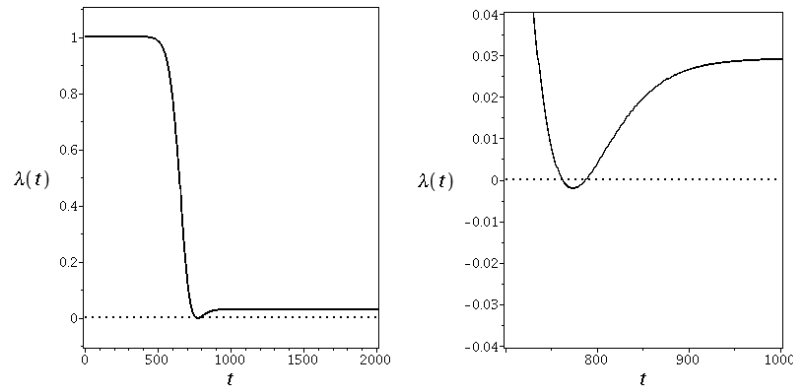
Figura 24 - Modelo 3: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno 400  $e$ -folds até o fim da inflação; (b) Equação de estado efetiva  $w$  com valor de pico em torno de  $5 \times 10^8$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 25 - Modelo 4: Evolução de  $\lambda(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Detalhe durante o período em que  $\lambda(t) < 0$ . Valor final da função cosmológica:  $\lambda(t) \approx 0,0292$  em  $t \approx 21.814$ .

Fonte: O autor, 2018.

Neste modelo, o valor final de  $H(t)$  é negativo fazendo com que o Universo recolapse em algum momento de sua evolução. Isso fica bastante claro observando a figura 27, gráfico (a), onde mostra a evolução de  $\ln a(t)$ . Após a inflação, o Universo apresenta uma contração permanente. Considerando a semelhança entre as condições iniciais do modelo 1 e 4. Os modelos crescentes são, nesta cosmologia, mais sujeitos a um recolapso.

#### 6.6.5 Modelo 5: Exponencial, $k = 0$ e $\phi$ Decrescente

A segunda cosmologia a ser integrada numericamente é aquela em que  $\phi(t)$  tem a forma de um exponencial, como na equação (217). Este modelo depende de dois parâmetros:  $\phi_i$  e  $c$ , cujos valores foram definidos como:

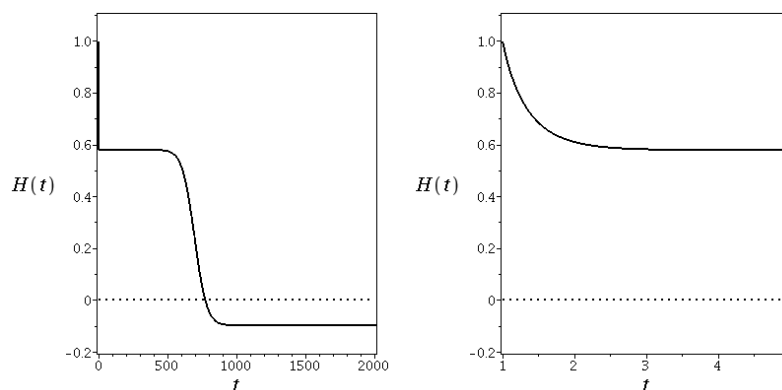
$$\phi_i = 0,2 \quad c = -0,00143224088672878,$$

Os valores iniciais das variáveis cosmológicas são:  $H(1) = 1$ ,  $P(1) = 2$  e  $a(1) = 1$ , e pela equação de vínculo obtém-se:

$$\lambda(1) \approx 0,997505973996805307377448255025.$$

A figura 28, apresenta o valor de  $k$  calculado no intuito de verificar a precisão do método, que, como antes, a precisão foi fixada em torno de  $10^{-30}$ . A figura 29 retrata a evolução de  $\lambda(t)$ . Note que o modelo agora não apresenta uma inflação exponencial visto que não

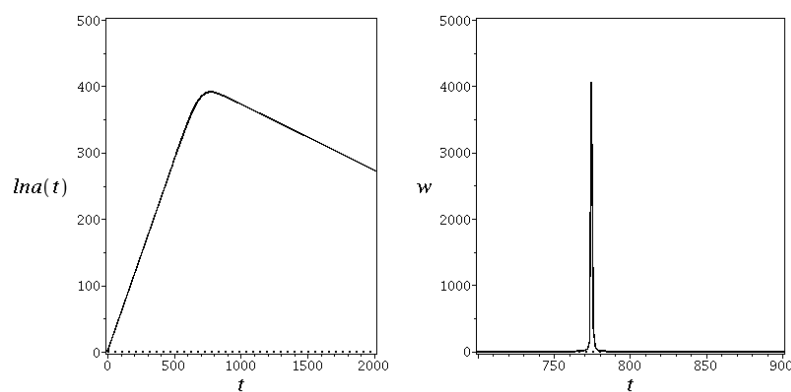
Figura 26 - Modelo 4: Evolução de  $H(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $H(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 1$  e  $t = 5$ (b). Valor final para o parâmetro de Hubble:  $H(t) \approx -0,0987$  em  $t \approx 1.814$ .

Fonte: O autor, 2018.

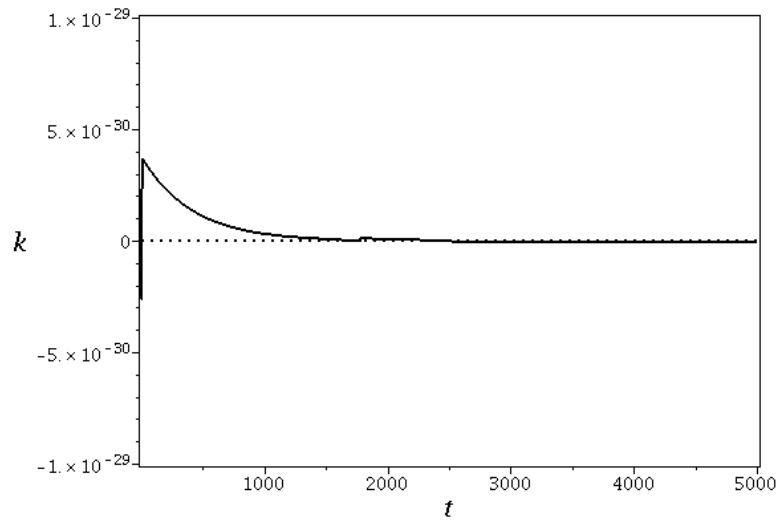
Figura 27 - Modelo 4: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 400  $e$ -folds até o fim da inflação porém com queda no valor de  $\ln a(t)$  sugerindo um recolapso; (b) Equação de estado efetiva  $w$  com valor de pico em torno de  $4 \times 10^3$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 28 - Valor de  $k$  calculado para um precisão de aproximadamente  $10^{-30}$ .



Fonte: O autor, 2018.

há momentos em que a função cosmológica é aproximadamente constante. O gráfico (b) contudo, mostra que  $\lambda(t)$  também tem uma fase negativa, como nos modelos em que o campo é regido por uma tangente hiperbólica. A figura 30 mostra que o parâmetro de Hubble também não apresenta nenhum período constante e que os efeitos iniciais da densidade de energia são bastante breves, como dantes. Os gráficos da figura 31 mostram que a inflação neste modelo é substancialmente menor do que nos modelos anteriores e que a equação de estado efetiva,  $w$ , demonstra o mesmo comportamento da cosmologia anterior, fugindo das padrões da RG.

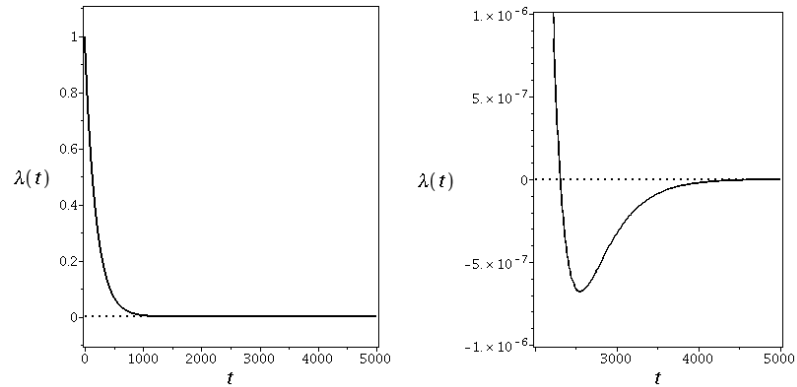
#### 6.6.6 Modelo 6: Exponencial, $k = 1$ e $\phi$ Decrescente

O sexto modelo apresenta condições iniciais semelhantes ao modelo anterior, porém com curvatura positiva. O valor inicial da densidade de energia foi modificado, de forma que:

$$P(1) = 5.$$

A figura 32 mostra que, desta vez, a evolução da função cosmológica não passa por uma fase negativa, e que o seu valor final é relativamente grande em comparação ao modelo anterior. A evolução de  $H(t)$ , como mostra a figura 33, apresenta uma queda inicial acentuada e posteriormente uma acréscimo. Esse comportamento é semelhante ao observado no modelo 2, efeito este, da curvatura positiva somada à densidade de energia. A figura 34 revela a quantidade de inflação e a equação de estado efetiva  $w$ . Neste modelo,

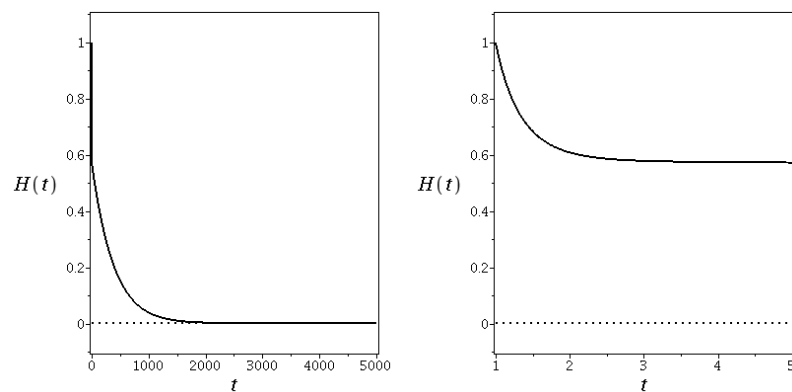
Figura 29 - Modelo 5: Evolução de  $\lambda(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Detalhe durante o período em que  $\lambda(t) < 0$ . Valor final da função cosmológica:  $\lambda(t) \approx 5,1313 \times 10^{-28}$  em  $t \approx 2,7911 \times 10^5$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 30 - Modelo 5: Evolução de  $H(t)$ .

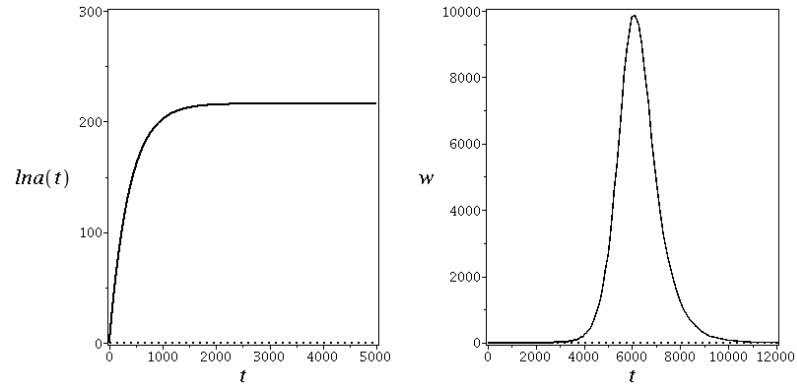


Legenda: (a) Evolução de  $H(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 1$  e  $t = 5$ . Valor final para o parâmetro de Hubble:  $H(t) \approx 1,3080 \times 10^{-14}$  em  $t \approx 2,7911 \times 10^5$ .

Fonte: O autor, 2018.



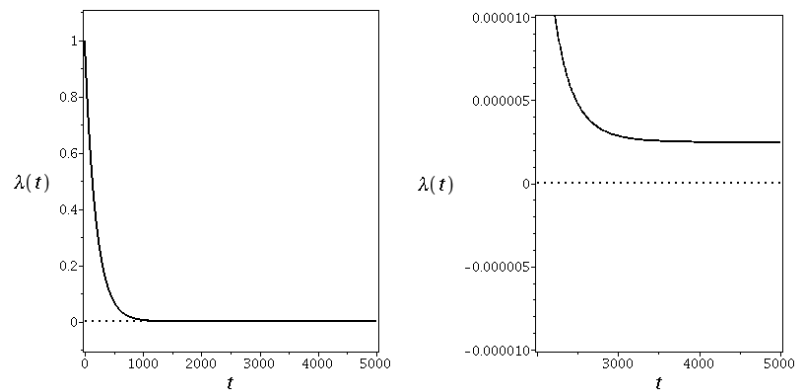
Figura 31 - Modelo 5: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 200 *e-folds* até o fim da inflação com uma aparente estabilidade no valor de  $\ln a(t)$ ; (b) Equação de estado efetiva  $w$  com valor de pico em torno de  $1 \times 10^4$ .

Fonte: O autor, 2018.

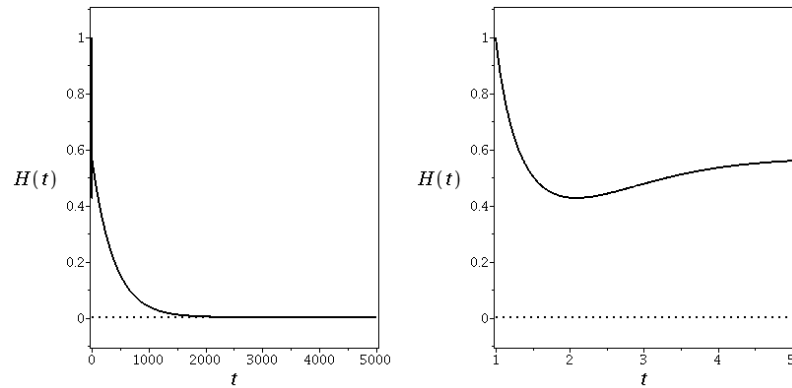
Figura 32 - Modelo 6: Evolução de  $\lambda(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Não há fase negativa durante a evolução. Valor final da função cosmológica:  $\lambda(t) \approx 2,4516 \times 10^{-6}$  em  $t \approx 5,9453 \times 10^4$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 33 - Modelo 6: Evolução de  $H(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $H(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 1$  e  $t = 5$ . Valor final para o parâmetro de Hubble:

$$H(t) \approx 9,0398 \times 10^{-4} \text{ em } t \approx 5,9453 \times 10^4.$$

Fonte: O autor, 2018.

$|w| < 1$ , compatível com uma equação de estado de um campo ou fluido convencional. Essa compatibilidade parece ser possível pois  $\lambda(t)$  não apresenta valores negativos no final do processo de inflação.

#### 6.6.7 Modelo 7: Exponencial, $k = -1$ e $\phi$ Decrescente

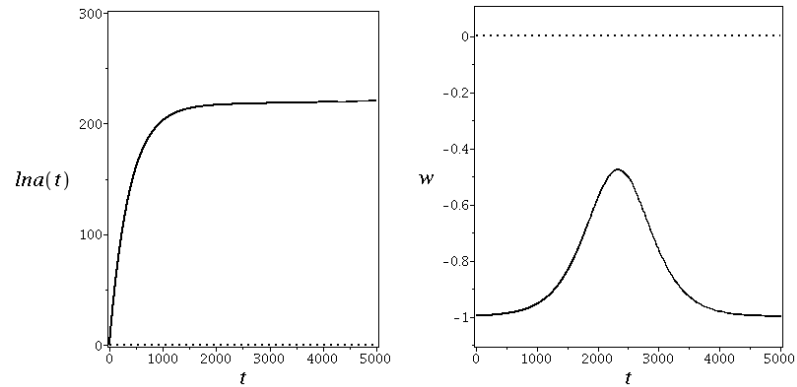
Este modelo apresenta curvatura negativa  $k = -1$  com os mesmos valores para  $\phi_i$ , e  $c$  dos modelos anteriores. Os valores iniciais para as variáveis são:  $H(1) = 1,5$ ,  $P(1) = 2,75$  e  $a(1) = 1$ . segundo a equação de vínculo  $\lambda(1)$  é:

$$\lambda(1) \approx 0,997505973996805307377448255025.$$

A figura 35 mostra que o comportamento da função cosmológica é similar aos modelos que apresentam fases negativas para  $\lambda(t)$ .

A evolução de  $H(t)$  é demonstrada na figura 36, como antes, os efeitos da curvatura e da densidade de energia manifestam-se durante os primeiros momentos da evolução. Neste caso o valor final do parâmetro de Hubble é negativo sugerindo um recolapso. Os gráficos da figura 37 exprimem a quantidade de inflação e  $w$ . O gráfico (a) mostra que após o fim da inflação  $\ln a(t)$  diminui lentamente até um recolapso. A equação de estado efetiva, por sua vez, apresenta novamente um comportamento anômalo.

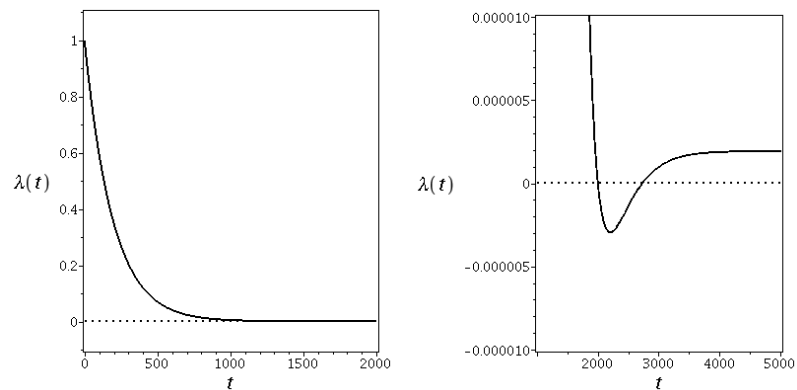
Figura 34 - Modelo 6: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 200 *e-folds* até o fim da inflação; (b) Equação de estado efetiva  $w$  com valor de pico em torno de  $-0,5$ .

Fonte: O autor, 2018.

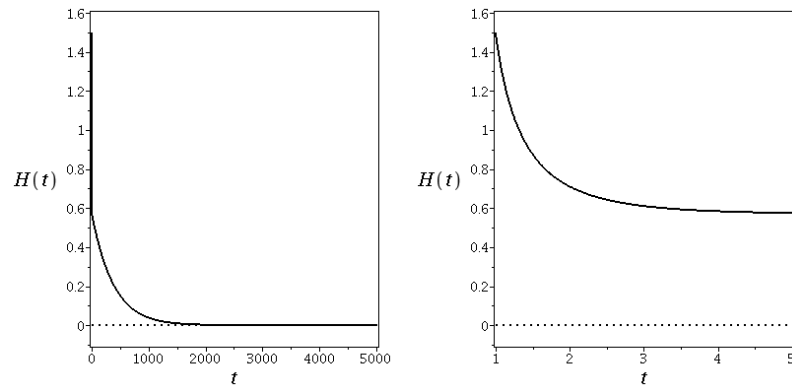
Figura 35 - Modelo 7: Evolução de  $\lambda(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Detalhe durante o período em que  $\lambda(t) < 0$ ; valor final da função cosmológica:  $\lambda(t) \approx 19,229 \times 10^{-6}$  em  $t \approx 34.222$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 36 - Modelo 7: Evolução de  $H(t)$ .

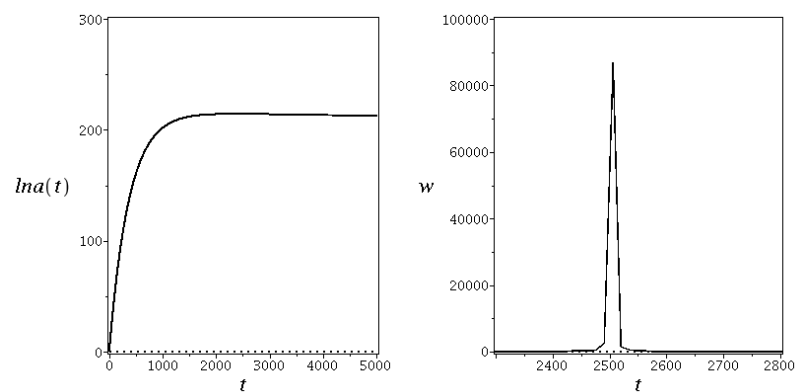


Legenda: (a) Evolução de  $H(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 1$  e  $t = 5$ . Valor final para o parâmetro de Hubble:

$$H(t) \approx -8,0085 \times 10^{-4} \text{ em } t \approx 34.222.$$

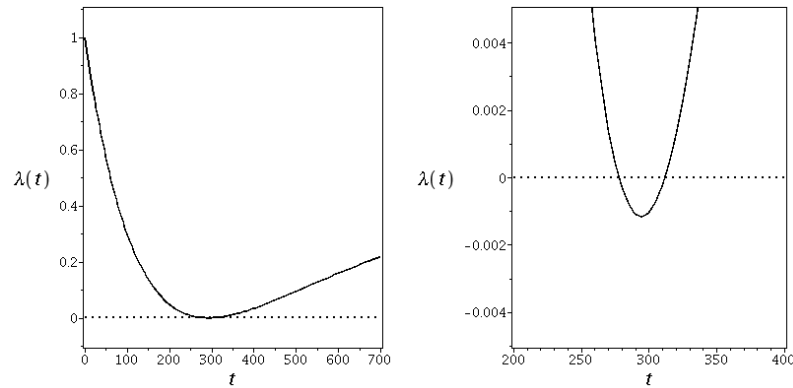
Fonte: O autor, 2018.

Figura 37 - Modelo 7: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 200 *e-folds* até o fim da inflação; (b) Equação de estado efetiva  $w$  com pico em torno de  $9 \times 10^4$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 38 - Modelo 8: Evolução de  $\lambda(t)$ .

Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Detalhe durante o período em que  $\lambda(t) < 0$ ; valor final da função cosmológica:  $\lambda(t) \approx 0,2229$  em  $t \approx 712$ .

Fonte: O autor, 2018.

#### 6.6.8 Modelo 8: Exponencial, $k = 0$ e $\phi$ Crescente

No modelo 8,  $\phi(t)$  é crescente com condições iniciais semelhantes aos valores do modelo 5, porém com  $b = -0,2$  e por consequência  $\lambda(1)$  é:

$$\lambda(1) \approx 0,997878535463314785580516597202.$$

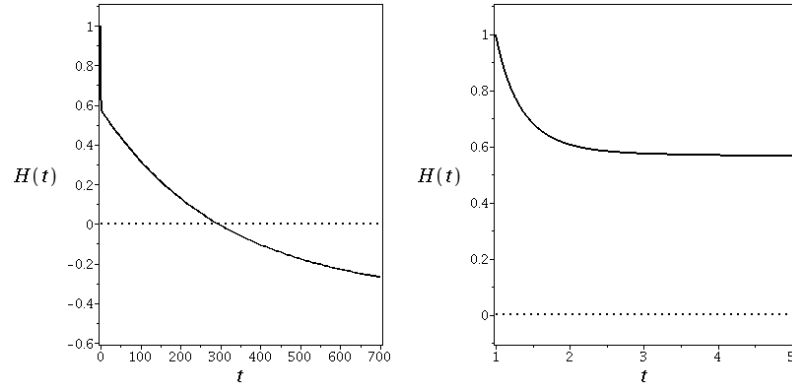
Como no modelo 4, O valor final de  $H(t)$  é negativo fazendo com que o Universo recolapse durante sua evolução, porém a contração aqui é mais vigorosa pois o módulo de  $H(t)$  no fim da inflação é maior que no modelo supracitado. Os modelo 5 e 8, possuem condições iniciais muito semelhantes contudo, no primeiro,  $\phi$  é decrescente e no segundo,  $\phi$  é crescente, por isso, conclui-se que: universos que possuem campos crescentes são mais sujeitos a um recolapso, ao menos para as cosmologias estudadas até então.

#### 6.6.9 Modelo 9: $\lambda$ proporcional a $t^{-2}$ , $k = 0$ e $\phi$ Decrescente

A terceira cosmologia a ser integrada neste trabalho tem a função cosmológica determinada pela equação (224). Neste modelo, a função  $\Phi(t)$  torna-se uma das variáveis de integração e a sua forma depende de dois parâmetros:  $\Phi_i$  e  $\phi_i$ , cujos valores foram definidos como:

$$\Phi_i = -0,0001 \quad \phi_i = 1,8.$$

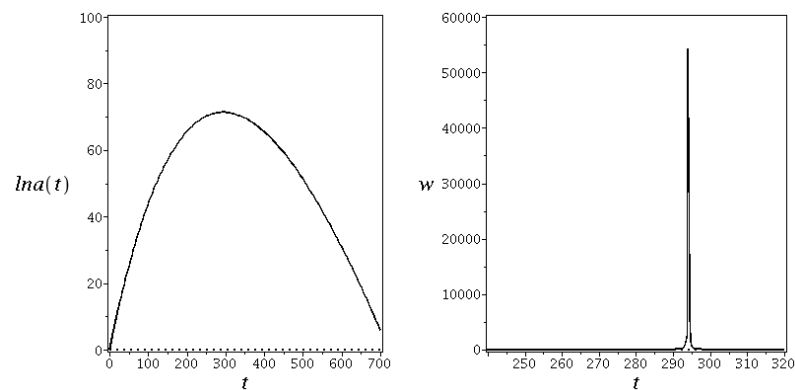
Figura 39 - Modelo 8: Evolução de  $H(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $H(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 1$  e  $t = 5$ . Valor final para o parâmetro de Hubble:  $H(t) \approx -0,2729$  em  $t \approx 712$ .

Fonte: O autor, 2018.

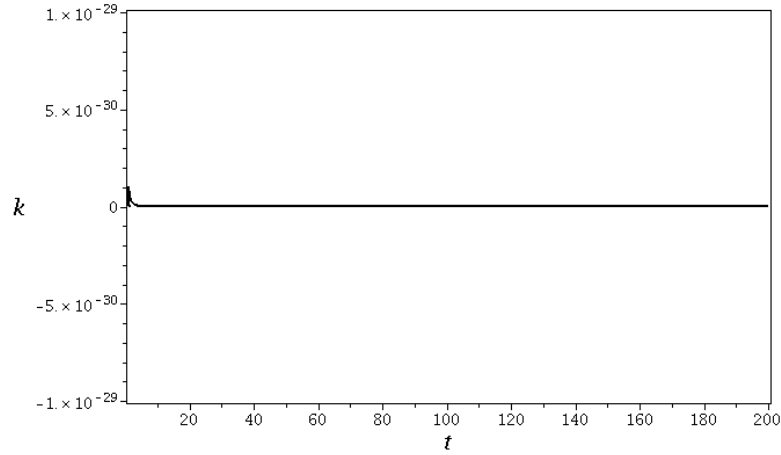
Figura 40 - Modelo 8: Quantidade e inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 70  $e$ -folds o Universo não se sustenta pois  $\ln a(t)$  cai em direção a um recolapso; (b) Equação de estado efetiva  $w$  com pico em torno de  $5,5 \times 10^4$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 41 - Valor de  $k$  calculado para um precisão de aproximadamente  $10^{-30}$ .



Fonte: O autor, 2018.

Os valores iniciais das variáveis cosmológicas foram escolhidos baseados na hipótese de condições iniciais elaborada na seção 6.6 e na tabela 11, que relaciona valores de  $H_i$  com  $H_0$ ,  $t_0$ ,  $t_{65}$  e  $w$ . Foi escolhido o conjunto de dados com  $w$  mais próximo o possível das observações:  $H(1) = 1,234$ ,  $P(1) = 1$  e  $a(1) = 1$ . Fazendo  $k = 0$ , pela equação de vínculo tem-se:

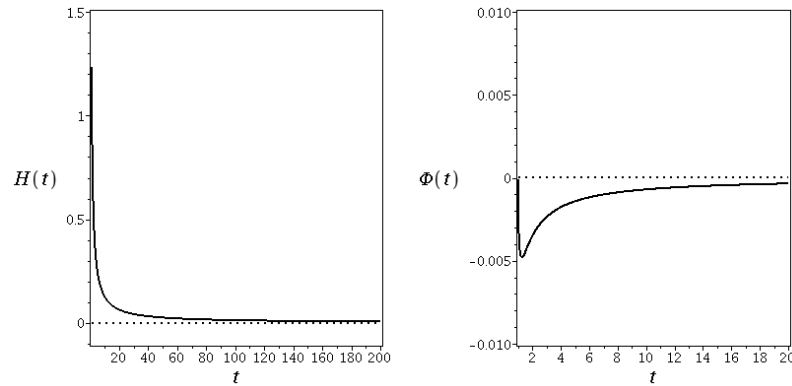
$$\lambda(1) \approx 3,5676478.$$

Este valor de  $\lambda_i$  é levemente maior em comparação aos modelos cosmológicos baseados em  $\phi(t)$ . Como nos outros modelos, a figura 41, apresenta o valor de  $k$  calculado no intuito de verificar a precisão da integração.

O gráfico (a) da figura 42 sugere que, pelo menos para a escolha  $H_i = 1,234$ ,  $H(t) \propto t^{-1}$ , mesmo para  $t$  pequeno. Isso pode ser facilmente verificado plotando o gráfico  $(t, tH)$  que, de fato, confirma esse resultado para  $t > 1,2t_p$ . Esse resultado também mostra que os modelos em que  $H \propto t^{-1}$  e  $\lambda \propto t^{-2}$  têm comportamentos similares para as condições iniciais usadas. O decaimento de  $H(t)$  é mais rápido do que nas cosmologias anteriores, fazendo com que a inflação deste modelo seja mais suave.

O gráfico (b) mostra o comportamento de  $\Phi(t)$ : inicialmente a função diminui vigorosamente, chegando ao valor mínimo de  $\Phi(1,3) \approx -0,0048$ . Posteriormente, seu valor sobe de forma lenta, tendendo a zero. Integrando até  $t \approx 10^{30} t_p$ , o valor final da função nessa época é de  $\Phi(t) \approx 10^{-33}$ , menor do que o nível de precisão da integração. Contudo, da solução exata sabe-se que  $\Phi(t) \rightarrow 0$  para  $t$  grande e conclui-se que, mesmo para modelos com matéria, o comportamento de  $\Phi(t)$  nesta cosmologia é compatível com a premissa de que  $|\dot{G}/G| < 10^{-13} \text{yr}^{-1}$  hoje. A figura 43 apresenta, no gráfico (a), a evolução do fator de escala, e sugere que a quantidade de inflação até  $t \approx 10^{22} t_p$  é próxima a 65 *e-folds*. O gráfico (b) mostra o comportamento da equação de estado efetiva,  $w$ , que

Figura 42 - Modelo 9: Evolução do parâmetro de  $H(t)$ .



Legenda: (a) Evolução do parâmetro de  $H(t)$ ; (b) Evolução de  $\Phi(t)$ . Valor final:  $H(t) \approx 1,269 \times 10^{-30}$  e  $\Phi(t) \approx -7,090 \times 10^{-33}$ , ambos para  $t \approx 1,003 \times 10^{30}$ .

Fonte: O autor, 2018.

crece rapidamente nos primeiros  $5 t_p$ , demonstrando seu caráter evolutivo pelo menos nos primeiros momentos de vida do Universo. A equação de estado varia muito suavemente por toda a integração a partir de  $t = 5 t_p$ . Observando os resultados numéricos, vê-se que  $\Delta w = 2 \times 10^{-6}$  para uma variação  $\Delta t = 10^{10} t_p$ . O valor final de equação de estado efetiva,  $w \approx -0,476$ , é igual ao valor obtido substituindo as condições iniciais deste modelo na equação (237) da solução exata.

Integrando  $\Phi(t)$  com  $\phi_i$  arbitrária, o valor final do campo calculado pelo integrador em  $t \approx \times 10^{30} t_p$  é  $\phi(t) \approx 1,1$ . Para que  $\phi$  coincida com  $G = 1$  hoje é necessário ajustar o valor  $\phi_i$  cuidadosamente, contudo esse procedimento não altera a evolução das variáveis principais do modelo.

#### 6.6.10 Modelo 10: $\lambda$ proporcional a $t^{-2}$ , $k = 1$ e $\phi$ Decrescente

Este modelo tem condições iniciais semelhantes ao modelo anterior, porém com curvatura positiva. O valor inicial da  $\lambda(t)$  torna-se:

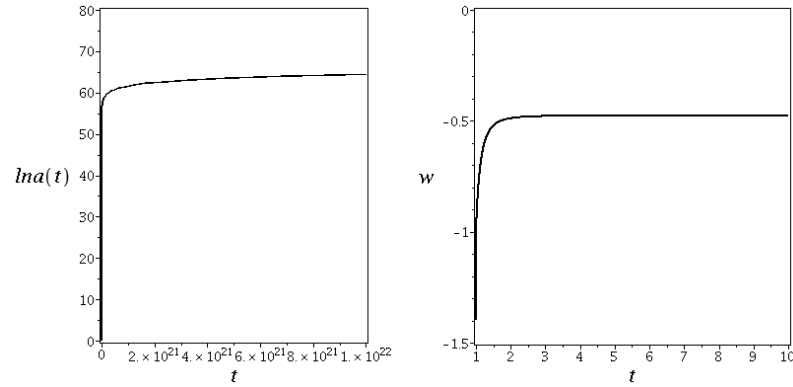
$$\lambda(1) = 6,5676478.$$

A figura 44 (a) não mostra diferenças significativas em comparação ao modelo sem curvatura. Em particular,  $H(t)$  mantém-se proporcional a  $t^{-1}$ . A figura (b) mostra que o modelo com curvatura positiva apresenta um valor mínimo de  $\Phi(t)$  menor, contudo, essa diferença não parece modificar o comportamento geral da função.

A quantidade de inflação apresentada na figura 45 gráfico (a) é maior do que no



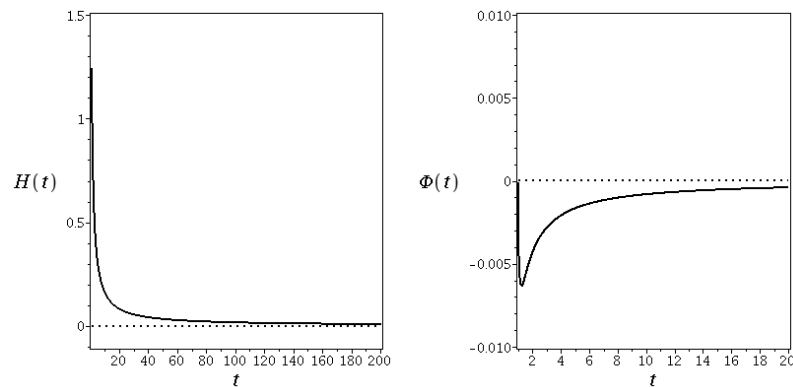
Figura 43 - Modelo 9: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 65 *e-folds* para  $t \approx 10^{22}$ ;  
 (b) Equação de estado efetiva com valor final de  $w \approx -0,476$ .

Fonte: O autor, 2018.

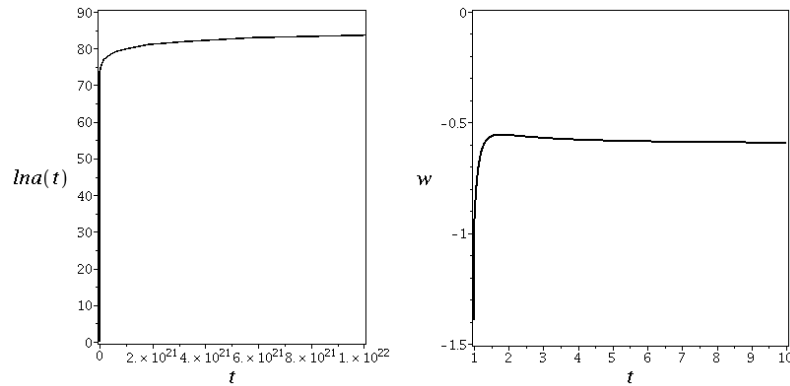
Figura 44 - Modelo 10: Evolução do parâmetro de  $H(t)$ .



Legenda: (a) Evolução do parâmetro de  $H(t)$ ; (b) Evolução de  $\Phi(t)$ . Valor final:  $H(t) \approx 7,488 \times 10^{-30}$  e  $\Phi(t) \approx -3,755 \times 10^{-32}$ , ambos em  $t \approx 2,211 \times 10^{29}$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 45 - Modelo 10: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 85 *e-folds* para  $t \approx 10^{22}$ ;  
 (b) Equação de estado efetiva. Valor final:  $w \approx -0,598$ .

Fonte: O autor, 2018.

modelo  $k = 0$ , com aproximadamente 85 *e-folds* depois dos mesmos  $10^{22} t_p$ . A equação de estado efetiva tem valor final significativamente menor do que no modelo plano:  $w$  também cresce muito rapidamente, contudo, seu valor máximo  $w \approx -0,556$  acontece em  $t \approx 1,8 t_p$ , e depois decai de forma lenta até  $w \approx -0,598$ .

#### 6.6.11 Modelo 11: $\lambda$ proporcional a $t^{-2}$ , $k = -1$ e $\phi$ Decrescente

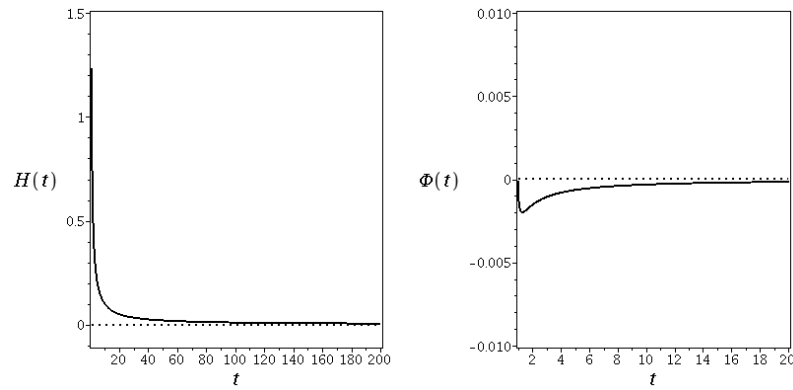
As condições iniciais deste modelo são equivalentes aos modelos anteriores, porém com curvatura negativa. O valor inicial da  $\lambda(t)$  calculada é:

$$\lambda(1) = 0,5676478.$$

O gráfico (a) da figura 46 também não apresenta diferenças significativas em comparação ao modelo sem curvatura. O gráfico (b) mostra que o modelo com curvatura negativa tem um valor mínimo de  $\Phi(t)$  maior do que nos modelos com  $k = 0$  e  $k = 1$ .

A quantidade de inflação apresentada na figura 47 (a) é menor do que no modelo plano, com 50 *e-folds* em  $t \approx 10^{22} t_p$ . A equação de estado efetiva varia lentamente a partir de  $10 t_p$  até o valor de  $w \approx -0,334$ , no limiar entre modelos inflacionários e não inflacionários.

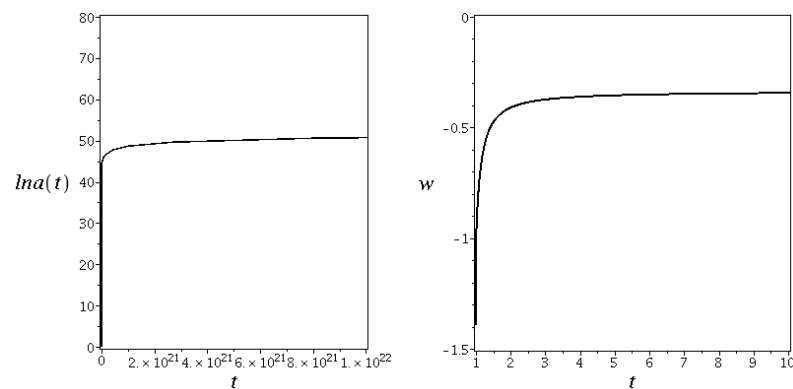
Figura 46 - Modelo 11: Evolução do parâmetro de  $H(t)$ .



Legenda: (a) Evolução do parâmetro de  $H(t)$ ; (b) Evolução de  $\Phi(t)$ . Valor final:  $H(t) \approx 4,305 \times 10^{-30}$  e  $\Phi(t) \approx -1,381 \times 10^{-32}$ , ambos em  $t \approx 2,315 \times 10^{29}$ .

Fonte: O autor, 2018.

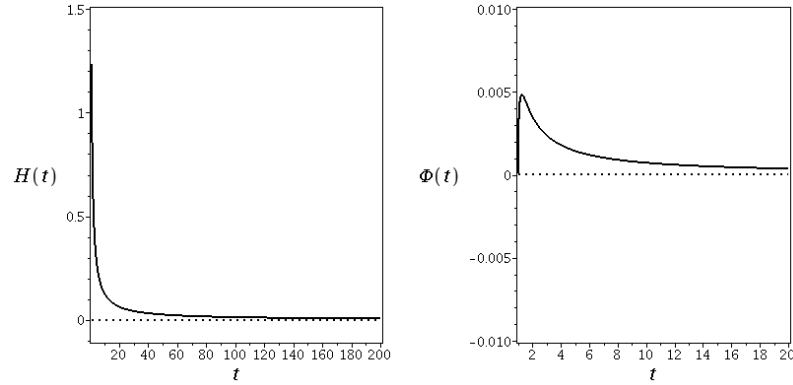
Figura 47 - Modelo 11: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 50  $e$ -folds para  $t \approx 10^{22}$ ;  
(b) Equação de estado efetiva. Valor final:  $w \approx -0,334$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 48 - Modelo 12: Evolução do parâmetro de  $H(t)$ .



Legenda: (a) Evolução do parâmetro de  $H(t)$ ; (b) Evolução de  $\Phi(t)$ . Valor final:  $H(t) \approx 2,697 \times 10^{-30}$  e  $\Phi(t) \approx 1,520 \times 10^{-32}$ , ambos em  $t \approx 4,698 \times 10^{29}$ .

Fonte: O autor, 2018.

#### 6.6.12 Modelo 12: $\lambda$ proporcional a $t^{-2}$ , $k = 0$ e $\phi$ Crescente

No modelo 12,  $\phi(t)$  é crescente e os parâmetros  $\Phi_i$  e  $\phi_i$  precisam ser adaptados com  $\phi_i < 1$  para que  $\phi(t_0) \approx 1$ . Os novos valores foram redefinidos como:

$$\Phi_i = 0,0001 \quad \phi_i = 0,2.$$

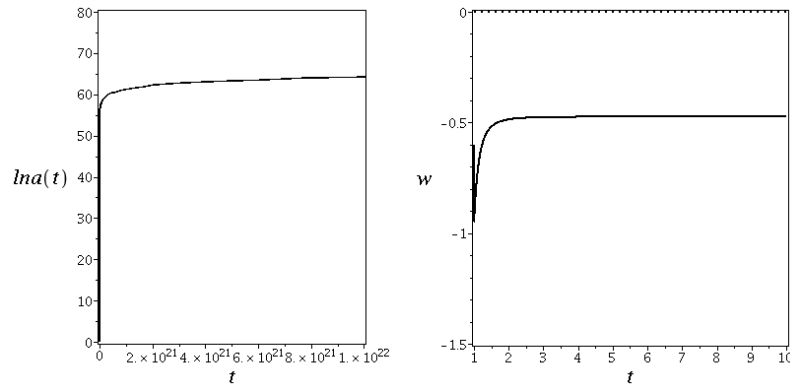
Os valores iniciais das demais variáveis cosmológicas serão os mesmos utilizados nos modelos decrescentes. Para  $k = 0$ , pela equação de vínculo tem-se:

$$\lambda(1) \approx 3,5683882.$$

A figura 48 (a) não mostra mudanças significativas em comparação aos modelos anteriores. O gráfico (b) apresenta  $\Phi(t) > 0$ , e mostra um comportamento bastante simétrico em torno do eixo  $\Phi = 0$  em relação ao modelo 9, com valor máximo de  $\Phi(1,3) \approx 0,0048$ . A função  $\Phi(t)$  neste caso também evolui para valores próximos a zero.

A quantidade de inflação apresentada na figura 49 gráfico (a), é próxima à inflação do modelo decrescente, com 65 *e-folds* em  $t \approx 10^{22} t_p$ . O comportamento da equação de estado efetiva é diferente dos outros modelos, com  $w$  caindo rapidamente até  $w \approx -0,949$  em  $t \approx 1,005 t_p$  e depois crescendo até  $w \approx -0,474$  em  $t \approx 10 t_p$ . A partir de  $10 t_p$  a variação da equação de estado torna-se lenta como no caso decrescente. O valor final de  $w$  é igual ao obtido pela solução exata. Não foram observadas diferenças tão significativas entre os modelos crescente e decrescente nesta cosmologia.

Figura 49 - Modelo 12: Quantidade de inflação e equação de estado.



Legenda: (a) Quantidade de inflação em torno de 65 *e-folds* para  $t \approx 10^{22}$ ;  
 (b) Equação de estado efetiva. Valor final:  $w \approx -0,474$ .

Fonte: O autor, 2018.

#### 6.6.13 Modelo 13: $H$ proporcional a $t^{-1}$ , $k = 0$ e $\phi$ Decrescente

O décimo terceiro modelo refere-se a uma cosmologia em que  $H(t) \propto t^{-1}$ . Como no modelo anterior, a função  $\Phi(t)$  é uma das variáveis de integração, e depende de dois parâmetros:  $\Phi_i$  e  $\phi_i$ . Como será visto, o valor de  $\phi_i$  não é tão relevante quanto nos outros modelos, pois neste modelo  $\phi$  não se mantém decrescente. O valor de  $\Phi_i$  será:

$$\Phi_i = -0,0001.$$

Devido à similaridade entre as duas cosmologias, a escolha das condições iniciais para este modelo seguiu a mesma lógica do modelo  $\lambda(t) \propto t^{-2}$ , com:  $H(1) = 1,234$ ,  $P(1) = 1$  e  $a(1) = 1$ . Fazendo  $k = 0$ , pela equação de vínculo tem-se:

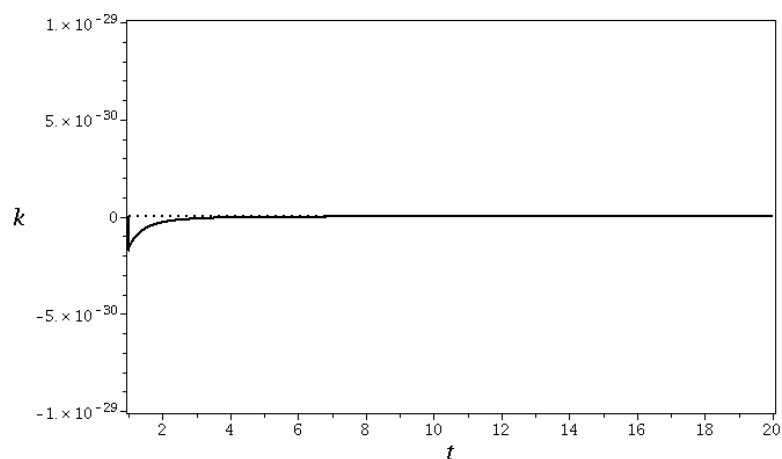
$$\lambda(1) \approx 3,5676478.$$

A figura 50 apresenta o valor de  $k$  calculado no intuito de verificar a precisão da integração.

Os gráficos da figura 51 sugerem que  $\lambda(t) \propto t^{-2}$  praticamente durante toda a evolução, salvo no período em que  $t < 1,01 t_p$ . Esta sugestão pode ser verificada plotando o gráfico  $(t, t^2\lambda)$ , assim como feito de forma similar no modelo 9. No breve período inicial, o valor de  $\lambda(t)$  decai mais rapidamente, consequência direta do acréscimo de matéria. A cosmologia abordada aqui é, em parte, compatível com o modelo descrito na seção 6.4.1, entretanto, há uma diferença significativa no comportamento da função  $\Phi(t)$ .

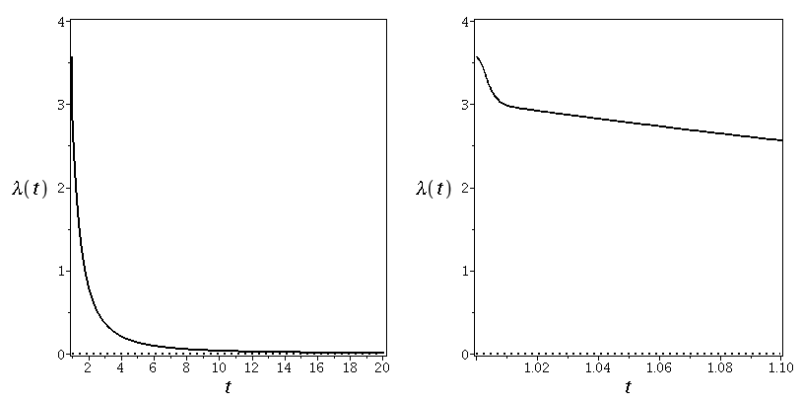
A figura 52, gráfico (a) mostra que o comportamento decrescente do campo  $\phi(t)$  não se sustenta. Para que a função  $\Phi(t)$  permaneça negativa, como descrito na equação (246)

Figura 50 - Valor de  $k$  calculado para um precisão de aproximadamente  $10^{-30}$ .



Fonte: O autor, 2018.

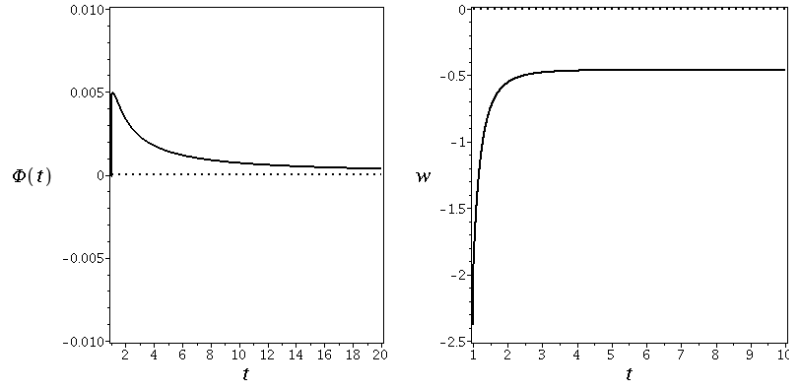
Figura 51 - Modelo 13: Evolução de  $\lambda(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 1$  e  $t = 1,1$ . Valor final de  $\lambda(t) \approx 7,940 \times 10^{-30}$  em  $t \approx 6,498 \times 10^{14}$ .

Fonte: O autor, 2018.

Figura 52 - Modelo 13: Evolução da função  $\Phi(t)$  e equação de estado efetiva.



Legenda: (a) Evolução da função  $\Phi(t)$ ; (b) Equação de estado efetiva. Valor final:  $\Phi(t) \approx 1,085 \times 10^{-17}$  em  $t \approx 6,498 \times 10^{14}$  e  $w \approx -0,458$ .

Fonte: O autor, 2018.

da solução exata, é necessário que  $t < \ln(C_1)/m$ . Com valores iniciais utilizados neste modelo, isso ocorre para  $t < \ln(C_1)/703$ . O campo  $\Phi(t)$  torna-se positivo em  $t \approx 1,0009 t_p$  e atinge o seu valor máximo  $\Phi(1,02) \approx 0,005$ , decaindo posteriormente para valores próximos de zero.

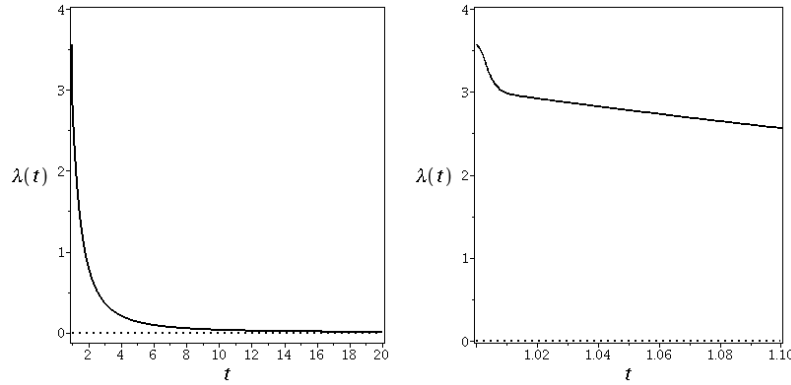
O gráfico (b) mostra que o comportamento da equação de estado efetiva é semelhante ao comportamento da cosmologia anterior. Contudo, neste modelo,  $w$  não é, exatamente constante, mas varia significativamente apenas durante o período inicial da evolução do Universo. A partir de  $t \approx 2.000 t_p$  a variação no valor de  $w$  é menor do que  $10^{-10}$ . O valor final da equação de estado é  $w \approx -0,458$ , levemente superior ao valor calculado na solução exata com  $\rho = 0$  ( $w \approx -0,460$ ).

#### 6.6.14 Modelo 14: $H$ proporcional a $t^{-1}$ , $k = 0$ e $\phi$ Crescente

No modelo 14 e nos próximos,  $\phi(t)$  será crescente, visto que o modelo decrescente não se sustenta para as condições iniciais utilizadas. Os parâmetros  $\Phi_i$  e  $\phi_i$  serão adaptados com  $\phi_i < 1$ , como feito anteriormente, para que  $\phi(t_0) \approx 1$ . A escolha de  $\phi_i$  é feita baseada na equação (242) da solução exata, fazendo  $C_1 = 0$  de forma que  $\phi(t_0) \approx 2,68 C_2$ . Desta maneira, os valores de  $\Phi_i$  e  $\phi_i$  serão definidos como:

$$\Phi_i = 0,0001 \quad \phi_i \approx 0,37.$$

vale ressaltar que o valor de  $\phi_i$  não muda a evolução do Universo para este modelo. Os valores iniciais das demais variáveis cosmológicas serão os mesmos utilizados no modelo

Figura 53 - Modelo 14: Evolução de  $\lambda(t)$ .

Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 1$  e  $t = 1,1$ . Valor final de  $\lambda(t) \approx 6,379 \times 10^{-30}$  em  $t \approx 7,249 \times 10^{14}$ .

Fonte: O autor, 2018.

decrecente. Para  $k = 0$  e pela equação de vínculo tem-se:

$$\lambda(1) \approx 3,5683882.$$

O modelo crescente com  $k = 0$  é similar ao modelo anterior, com todos os parâmetros cosmológicos apresentando o mesmo comportamento, e a análise feita anteriormente se repetindo. A diferença óbvia está no comportamento de  $\Phi(t)$ , que, neste modelo, não tem nenhuma fase negativa.

#### 6.6.15 Modelo 15: $H$ proporcional a $t^{-1}$ , $k = 1$ e $\phi$ Crescente

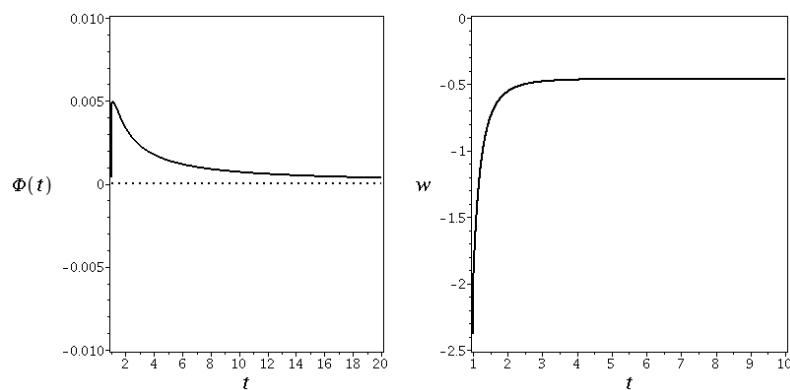
O modelo 15 tem condições iniciais semelhantes ao modelo anterior, porém com curvatura positiva. O valor inicial da  $\lambda(t)$  torna-se:

$$\lambda(1) = 6,5683882.$$

A figura 55 mostra que  $\lambda(t) \propto t^{-2}$  após  $t \approx 1,006 t_p$ , o mesmo comportamento apresentado pelo modelo espacialmente plano. A figura 56 gráfico (a), mostra um  $\Phi(t) > 0$  que apresenta valor máximo de  $\Phi(1,01) \approx 0,008$ , depois decaindo lentamente e evoluindo para valores próximos a zero. O gráfico (b) mostra que a equação de estado efetiva cresce muito rapidamente até seu valor máximo de  $w \approx -0,431$  em  $t \approx 4,5 t_p$ , e depois decaindo lentamente até o valor final de  $w \approx -0,458$ . Como no caso espacialmente plano,  $w$  torna-se constante.

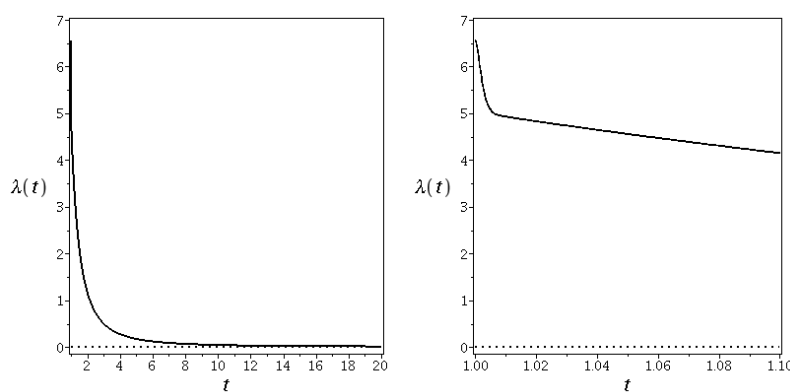


Figura 54 - Modelo 14: Evolução da função  $\Phi(t)$  e equação de estado efetiva.



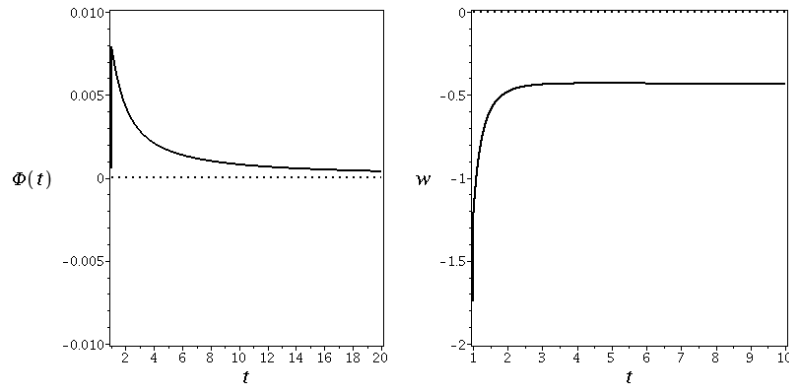
Legenda: (a) Evolução da função  $\Phi(t)$ ; (b) Equação de estado efetiva. Valor final:  $\Phi(t) \approx 9,722 \times 10^{-18}$  em  $t \approx 7,249 \times 10^{14}$  e  $w \approx -0,458$ .  
Fonte: O autor, 2018.

Figura 55 - Modelo 15: Evolução de  $\lambda(t)$ .



Legenda: (a) Evolução de  $\lambda(t)$ ; (b) Detalhe durante o período entre  $t = 1$  e  $t = 1,1$ . Valor final de  $\lambda(t) \approx 3,330 \times 10^{-30}$  em  $t \approx 1,003 \times 10^{15}$ .  
Fonte: O autor, 2018.

Figura 56 - Modelo 15: Evolução da função  $\Phi(t)$  e equação de estado efetiva.



Legenda: (a) Evolução da função  $\Phi(t)$ ; (b) Equação de estado efetiva. Valor final:  $\Phi(t) \approx 7,025 \times 10^{-18}$  em  $t \approx 1,003 \times 10^{15}$  e  $w \approx -0,458$ .

Fonte: O autor, 2018.

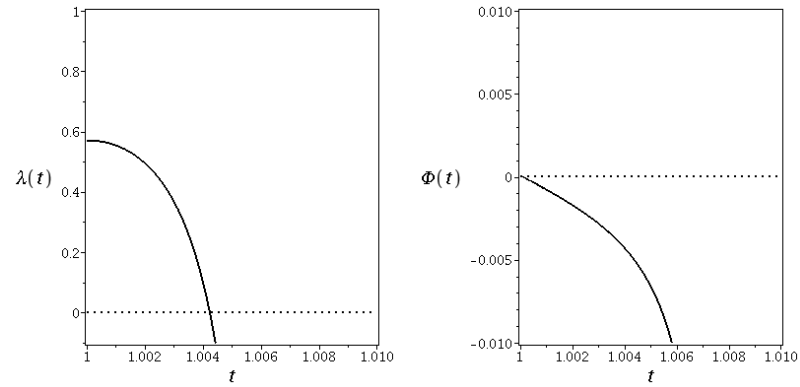
#### 6.6.16 Modelo 16: $H$ proporcional a $t^{-1}$ , $k = -1$ e $\phi$ Crescente

O último modelo estudado nesta tese tem condições iniciais similares ao modelo anterior, porém com curvatura negativa. O valor inicial da  $\lambda(t)$  torna-se:

$$\lambda(1) = 0,5683882.$$

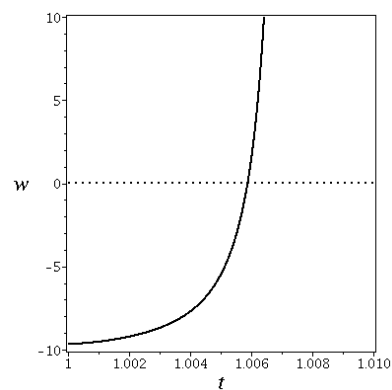
Com essas condições iniciais, não foi possível integrar além de  $t \approx 1,0077t_p$ . A figura 57 gráfico (a), mostra que a função cosmológica decai muito rapidamente até o fim da integração, tornando-se negativa em  $t \approx 1,004t_p$ . O comportamento de  $\Phi(t)$ , apresentado no gráfico (b), também é patológico, tornando-se negativa em  $t \approx 1,00012t_p$  e, em seguida, caindo expressivamente. O comportamento dos parâmetros anteriores reflete no valor da equação de estado efetiva, como visto na figura 58. O valor de  $w$  torna-se positivo em  $t \approx 1,006t_p$  e cresce indeterminadamente, chegando a  $w \approx 10^{22}$  no fim da integração. Evidentemente, a função cosmológica não evolui da forma hipotética sugerida. Por isso, este modelo não é fisicamente relevante.

Figura 57 - Modelo 16: Evolução da função  $\lambda(t)$ .



Legenda: (a) Evolução da função  $\lambda(t)$ ; (b) Evolução da função  $\Phi(t)$ . Valor final de  $\lambda(t) \approx -3,297 \times 10^{21}$  e  $\Phi(t) \approx -3,632 \times 10^8$  em  $t \approx 1,0077$ .  
 Fonte: O autor, 2018.

Figura 58 - Modelo 16: Equação de estado efetiva.



Legenda: Equação de estado efetiva, valor final:  $w \approx 10^{22}$  em  $t \approx 1,0077$ .  
 Fonte: O autor, 2018.

## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A proposta desta tese foi estudar modelos cosmológicos aplicados à teoria de gravitação de Bergmann–Wagoner. Essa teoria generaliza a teoria escalar-tensorial mais familiar de Jordan–Brans–Dicke em dois pontos importantes: a constante de acoplamento da teoria JBD é substituída por uma função,  $\omega(\phi)$ , e é acrescido um termo cosmológico  $\lambda(\phi)$ . O termo cosmológico faz um papel semelhante à constante cosmológica em RG mas, em modelos em que  $\phi$  evolui,  $\lambda(\phi)$  varia com o tempo.

Essa propriedade abre a possibilidade de explicar duas características marcantes da cosmologia moderna de uma só vez: a inflação no Universo Primordial, que se inicia logo após ao *Big Bang*, e as observações que dão conta de uma expansão acelerada do Universo hoje. Para isso, é necessário encontrar modelos em que  $\lambda$  evolua de um valor inicialmente grande para um valor na ordem de  $10^{-122}t_p^{-2}$  hoje. Supondo que o acoplamento é constante, esses modelos também têm que incorporar um valor de  $\omega > 40.000$  ou  $\omega < -15.000$  para serem compatíveis com observações atuais.

Uma abordagem tradicional à cosmologia com teorias escalar-tensoriais é adotar um modelo fenomenológico para  $\lambda(\phi)$ , e subsequentemente resolver as equações de campo para obter a evolução temporal de  $\lambda(t)$ ,  $\phi(t)$  etc. Na primeira parte da tese, uma abordagem diferente foi usada: Uma forma de  $\phi(t)$  foi modelada para garantir valores de  $\lambda$  quase constantes, mas diferentes, no Universo Primordial e no Universo recente, com um período de transição entre essas duas épocas. Para esse fim, estudou-se um modelo para  $\phi(t)$  baseado no comportamento de uma tangente hiperbólica. Em uma outra abordagem, foi modelado um campo  $\phi(t)$  para que  $\lambda$  evolua de um valor grande para um valor pequeno, porém, sem a definição de um períodos de transição, de forma que a função cosmológica não seja constante após o *Big Bang*. Utilizou-se para isso uma função exponencial. Em ambas as cosmologias, foram encontradas soluções exatas para o caso particular de um universo sem matéria e espacialmente plano. Os potenciais  $V(\phi)$  nas duas cosmologias apresentam valores extremos em  $\phi = 1$  quando  $H_0 = 0$ , e neste caso,  $\phi$  será um mínimo local para  $\omega < -3/2$  e um máximo local para  $\omega < -3/2$ .

O ponto de partida da segunda parte desta tese foi a observação que, em unidades de Planck a expansão do Universo hoje pode ser explicada por uma constante cosmológica cujo valor é  $\Lambda \approx t_0^{-2}$ . Aceitando a possibilidade de uma função cosmológica que evolui com o tempo, é natural propor um modelo no qual  $\lambda \propto t^{-2}$ , com um valor  $\lambda_i \approx 1$  próximo ao *Big Bang*. Curiosamente essa proposta se alinha com a hipótese dos grandes números de Dirac. Para este modelo foi encontrada, de forma implícita, a solução geral no caso de vácuo com curvatura espacial nula. A complexidade da solução dificultou o estudo analítico de suas propriedades, porém foi possível determinar uma expressão para o valor assintótica da equação estado efetiva  $w$  do campo escalar em termos das condições iniciais.

Para valores "naturais", o parâmetro da equação de estado efetiva do campo escalar varia de  $w \approx -0,13$  a  $w \approx -0,80$ .

Devido a complexidade das soluções quando  $\lambda \propto t^{-2}$ , foi investigado outro modelo baseado numa premissa parecida, mas com a esperança que as soluções exatas seriam mais tratáveis: uma cosmologia na qual o parâmetro de Hubble é inversamente proporcional ao tempo cósmico. Novamente, uma solução exata foi encontrada, no caso de vácuo e sem curvatura, mostrando-se de fato mais simples. A solução apresenta duas fases: uma com  $\phi$  crescente, outro com  $\phi$  decrescente. Em ambos os casos, o comportamento assintótico de  $\phi$  difere somente pelo sinal e, para valores do acoplamento,  $\omega$ , e o parâmetro de Hubble inicial,  $H_i$ , produz uma variação de  $G$  no limiar das observações. Descobriu-se que, para esse modelo,  $w$  é constante, sendo determinado somente pelo valor de  $H_i$ . Para valores naturais de  $H_i$ ,  $w \in [0,15, -0,77]$ . Como esperado, a solução para  $\lambda(t)$  neste modelo é proporcional a  $t^{-2}$  para  $t$  grande.

Foram desenvolvidos integradores para resolver as equações diferenciais relacionadas a cada cosmologia para os casos mais gerais, isso é, com o acréscimo de algum tipo de matéria (radiação) e de curvatura. Os resultados numéricos baseados no modelo para  $\phi(t)$  mostraram que é possível construir um conjunto de condições iniciais naturais capazes de fazer com que o Universo evolua de forma consistente com as observações. As integrações demonstraram que a função cosmológica pode apresentar valores negativos durante um breve período de sua evolução, contudo, é viável produzir um  $\lambda(t)$  após o fim da inflação com o valor da constante cosmológica medida hoje. A inflação foi compatível com o limite inferior teórico de 65 *e-folds* para as condições iniciais testadas, porém, alguns modelos, dentre eles, os com  $\phi(t)$  crescente, apresentaram um valor final negativo para  $H(t)$  fazendo com que ocorra uma contração no Universo após a inflação, sugerindo assim um recolapso. A equação de estado efetiva  $w$  apresentou valores muito maiores do que 1 (limite físico para uma equação de estado convencional), logo após a inflação, contudo esse aspecto não alterou a evolução do Universo. Para o modelo em que  $\lambda(t)$  é sempre positivo,  $w$  manteve-se entre -1 e 1.

Os resultados numéricos para as cosmologias baseadas no valor da constante cosmológica demonstraram que: condições iniciais naturais são escolhas plausíveis para reproduzir o Universo observado hoje. O valor de  $\Phi$  aproxima-se de zero para quase todas as condições iniciais testadas, sendo compatível com os limites observáveis da variação de  $G$ . Os 65 *e-folds* de inflação são alcançados em  $t \approx 10^{-22} t_p$  na maioria dos modelos, embora isso não seja relevante pois o Universo é permanentemente inflacionárias. Não foram verificadas notáveis diferenças na inflação entre o modelo crescente e o decrescente. A equação de estado efetiva  $w$  na cosmologia  $\lambda(t) \propto t^{-2}$  mostrou-se uma variável no tempo embora essa variação seja pequena. O valor final de  $w$  nos modelos com matéria é igual ao valor assintótico  $w'$  calculado através da solução exata com  $\rho = 0$ , salvo no modelo em que  $k = -1$ . Para a cosmologia  $H(t) \propto t^{-1}$ ,  $w$  torna-se constante em um curto período de

tempo depois do *Big Bang*. Os valores finais da equação de estado calculados numericamente foram de  $-0,334 \gtrsim w \gtrsim -0,598$ , em ambas as cosmologias. Valor incompatíveis, em tese, com as observações que sugerem um  $w \approx -1$ , embora se tenha artigos, em particular, o Triparthi et al. (76), que apresentam dados observacionais com baixo *redshift* conciliáveis com os valores de equação de estado  $w$  calculados numericamente nesta tese.

Este trabalho estudou a aplicação da teoria escalar-tensorial de Bergmann–Wagoner a modelos cosmológicos com métrica FLRW, procurando soluções que evoluíssem de condições iniciais naturais perto da singularidade inicial a um estado compatível com o Universo observado hoje, em particular em que diz respeito à pequena “constante cosmológica” atual. Para simplificar a análise e reduzir o número de parâmetros, optou-se por estudar o caso particular em que o acoplamento é constante. Porém, na sua forma mais geral, o acoplamento,  $\omega(\phi)$  é uma função do campo escalar. Atualmente, observações indicam que  $|\omega| \gtrsim 15.000$ . Do mesmo modo que pergunta-se porque a “constante cosmológica” tem um valor tão pequeno hoje, é natural, dentro do contexto de teorias escala-tensoriais, perguntar porque  $|\omega|$  seria tão grande. Por isso, um novo trabalho seria estudar uma função  $\omega(\phi)$  que evolui de valores próximos a 1 depois do *Big Bang* até valores grandes hoje.

As cosmologias vistas nesta tese, ou não foram modeladas com esse intuito, ou não apresentaram qualquer tipo de oscilação no campo escalar  $\phi(t)$  em torno de um mínimo do potencial  $V(\phi)$  após a inflação, por isso, para produzir um reaquecimento no Universo Primordial é necessário adicionar um outro campo escalar. Assim, um trabalho nesta linha seria supor um novo campo escalar e incorporá-lo à ação BW. Este campo, por hipótese, seria capaz de criar uma física de reaquecimento após à inflação, e, neste contexto, eficaz na geração de um mecanismo para a produção de matéria.

Por fim, é natural supor que o Universo não foi sempre homogêneo e isotrópico, dadas as observados hoje, por esse motivo, pode-se conjecturar que o cosmos tenha evoluído de um modelo anisotrópico para um isotrópico, por isso, a métrica FLRW não seria capaz de reproduzir o Universo no período inicial. Assim sendo, talvez seja interessante estudar a teoria de BW com uma métrica não usual, tal como Bianchi IX, para investigar como o Universo evoluiria e buscar as condições necessárias para uma desejável isotropização.

## REFERÊNCIAS

- 1 EINSTEIN, A. The field equations of gravitation. *Koninklijke Preußische Akademie der Wissenschaften Sitzungsberichte*, [S.I.], v. 1915, p. 844–847, 1915.
- 2 HUBBLE, E. P. Relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, [S.I.], v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929.
- 3 HUBBLE, E. P. A spiral nebula as a stellar system, messier 31. *Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 69, p. 103–129, 1929.
- 4 SLIPHER, V. The radial velocity of the andromeda nebula. *Lowell Observatory Bulletin*, [S.I.], v. 2, p. 56–57, 1913.
- 5 EINSTEIN, A. Cosmological considerations in the general theory of relativity. *Koninklijke Preußische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, [S.I.], v. 1917, p. 142–152, 1917.
- 6 DE-SITTER, W. On the relativity of inertia: Remarks concerning einstein's latest hypothesis. *Oninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings*, [S.I.], v. 19II, p. 1217–1225, 1917.
- 7 FRIEDMAN, A. On the curvature of space. *Zeitschr. Phys.*, [S.I.], v. 10, p. 377–386, 1922.
- 8 FRIEDMAN, A. On the possibility of a world with a constant negative curvature of space. *Zeitschr. Phys.*, [S.I.], v. 21, p. 326–332, 1924.
- 9 LEMAÎTRE, G. Note on de sitter's universe. *Journal of Mathematical Physics*, [S.I.], v. 4, p. 189–192, 1925.
- 10 LEMAÎTRE, G. *The Gravitational Field in a Fluid Sphere of Uniform Invariant Density According to the Theory of Relativity; Note on de Sitter Universe; Note on the Theory of Pulsating Stars*. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 1927.
- 11 MILNE, E. A. World struture and the expansion of the universe. *Nature*, [S.I.], v. 130, n. 3270, p. 9–10, 1932.
- 12 ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure. *Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 82, p. 284–301, 1935.
- 13 ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure II. *Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 83, p. 187–201, 1936.
- 14 ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure III. *Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 83, p. 257–271, 1936.
- 15 WALKER, A. G. On Milne's theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, [S.I.], v. 2, n. 1, p. 90–217, 1937.

- 16 GAMOW, G. Expanding universe and the origin of elements. *Physical Review*, [S.I.], v. 70, n. 7-8, p. 572–573, 1946.
- 17 BONDI, H.; GOLD, T. The steady-state theory of the expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [S.I.], v. 108, n. 3, p. 252–270, 1948.
- 18 HOYLE, F. A new model for the expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [S.I.], v. 108, n. 5, p. 277–382, 1948.
- 19 ALPHER R. A.; BETHE, H.; GAMOW, G. The origin of chemical elements. *Physical Review*, [S.I.], v. 73, n. 7, p. 803–804, 1948.
- 20 PEEBLES, P. J. E.; PEEBLES, P. J. *Principles of physical cosmology*. [S.I.]: Princeton university press, 1993.
- 21 ALPHER, R. A.; HERMAN, R. Evolution of universe. *Nature*, [S.I.], v. 162, n. 4124, p. 774–775, 1948.
- 22 ALPHER, R. A.; HERMAN, R. Remarks on the evolution of the expanding universe. *Physical Review*, [S.I.], v. 75, n. 7, p. 1089–1095, 1949.
- 23 GAMOW, G. *Expanding universe and the origin of galaxies*. [S.I.]: Munksgaard Copenhagen, 1953.
- 24 GAMOW, G. The evolutionary universe. *Scientific American*, [S.I.], v. 195, p. 136–154, 1956.
- 25 GAMOW, G. The physics of the expanding universe. *Vistas in Astronomy*, [S.I.], v. 2, p. 1726–1732, 1956.
- 26 PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s. *Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 142, p. 419–421, 1965.
- 27 DICKE, R. H. et al. Cosmic black-body radiation. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 142, p. 414–419, 1965.
- 28 FLOCH, A. L.; BRETENAKER, F. Early cosmic background. *Nature*, Nature Publishing Group, [S.I.], v. 352, n. 6332, p. 198–198, 1991.
- 29 SHMAONOV, T. A. "commentary". *Pribery i Tekhnika Experimenta*, [S.I.], v. 1, p. 83, 1957.
- 30 HOYLE, F.; NARLIKAR, J. V. Cosmology and quantum electrodynamics. *Nature*, [S.I.], v. 219, p. 340–341, 1968.
- 31 WEINBERG, S.; DICKE, R. H. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. [S.I.]: Wiley New York, 1973.
- 32 FREEDMAN, W. L. et al. Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 553, n. 1, p. 47–72, 2001.
- 33 BONVIN, V. et al. H0LiCOW V. New COSMOGRAIL time delays of HE0435-1223:  $H_0$  to 3.8% precision from strong lensing in a flat  $\Lambda$ CDM model. *MNRAS, Oxford Academic*, [S.I.], v. 465, n. 4, p. 4914–4930, 2016.



- 34 HUMASON, M. L.; MAYALL, N. U.; SANDAGE, A. R. Redshifts and magnitudes of extragalactic nebulae. *The Astronomical Journal*, [S.I.], v. 61, p. 97–162, 1956.
- 35 SANDAGE, A.; TAMMANN, G. Steps toward the Hubble constant. VII—Distances to NGC 2403, M101, and the Virgo cluster using 21 centimeter line widths compared with optical methods: The global value of  $h_0$ . *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 210, p. 7–24, 1976.
- 36 BONAMENTE, M. et al. Determination of the cosmic distance scale from sunyaev-zel'dovich effect and Chandra x-ray measurements of high-redshift galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, [S.I.], v. 647, n. 1, p. 25–54, 2006.
- 37 JAROSIK, N. et al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Sky maps, systematic errors, and basic results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, [S.I.], v. 192, n. 2, p. 1–15, 2011.
- 38 ADE, P. A. R. et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, [S.I.], v. 571, n. A16, p. 1–66, 2014.
- 39 CARVALHO, F. C. *Teorias escalares-tensoriais e o regime superacelerado do universo: Aspectos dinâmicos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2005.
- 40 SPERGEL, D. N.; LILLY, S. J.; STEIDEL, C. The epoch of galaxy formation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, [S.I.], v. 94, n. 7, p. 2783–2784, 1997.
- 41 BERNSTEIN, J.; BROWN, L. S.; FEINBERG, G. Cosmological helium production simplified. *Reviews of Modern Physics*, [S.I.], v. 61, n. 1, p. 25–39, 1989.
- 42 PATRIGNANI, C. et al. Review of particle physics. *Chinese Physics C*, [S.I.], v. 40, n. 10, p. 380–385, 2016.
- 43 BENNETT, C. L. et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: final maps and results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, [S.I.], v. 208, n. 20, p. 1–54, 2013.
- 44 MATHER, J. C. et al. A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cosmic background explorer (COBE) satellite. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 354, p. L37–L40, 1990.
- 45 LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. *Cosmological inflation and large-scale structure*. [S.I.]: Cambridge university press, 2000.
- 46 BAUMANN, D. *Cosmology. Part III: Mathematical Tripos*. Amsterdam: [s.n.], 2012.
- 47 BOUGHN, S. P.; FRAM, D. M.; PARTRIDGE, R. B. Isotropy of the microwave background at 8-millimeter wavelength. *Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 165, p. 439–444, 1971.
- 48 DICKE, R. H.; PEEBLES, P. J. E. In general relativity: An einstein centenary survey. *Cambridge University Press*, [S.I.], p. 504–517, 1979.
- 49 GUTH, A. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, [S.I.], v. 23, n. 2, p. 347–356, 1981.

- 50 HAWKING, S. W.; MOSS, I. G.; STERWART, J. M. Bubble collisions in the very early universe. *Physical Review D*, [S.I.], v. 115, n. 10, p. 2681–2693, 1982.
- 51 LINDE, A. Chaotic inflation. *Physics Letters B*, [S.I.], v. 129, n. 3,4, p. 177–181, 1983.
- 52 LINDE, A. A new inflation: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, [S.I.], v. 108, n. 6, p. 389–393, 1982.
- 53 LINDE, A. *Inflationary cosmology after Planck*. [S.I.]: Oxford University Press Oxford, England, UK, 2015. v. 100.
- 54 PRESKILL, J. Magnetic monopoles. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, [S.I.], v. 34, p. 461–530, 1984.
- 55 ELLIS, G. F. R.; STOEGER, W. Horizon in inflationary universes. *Classical and Quantum Gravity*, Vaticano, v. 5, p. 207–220, 1988.
- 56 LUCCHIN, F.; MATARRESE, S. Power-law inflation. *Physical Review D*, [S.I.], v. 32, n. 5, p. 1316–1322, 1985.
- 57 MUSLIMOV, A. G. On the scalar field dynamics in a spatially flat friedmann universe. *Classical and Quantum Gravity*, [S.I.], v. 7, p. 231–237, 1990.
- 58 KELVIN, W. T. B. *Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light*. [S.I.]: CJ Clay and Sons, 1904.
- 59 POINCARÉ, H. The milky way and the theory of gases. *Popular Astronomy*, [S.I.], v. 14, p. 247–488, 1906.
- 60 OORT, J. H. The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, [S.I.], v. 6, p. 249, 1932.
- 61 JEANS, J. H. The motions of stars in a kapteyn universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [S.I.], v. 82, p. 122–132, 1922.
- 62 LINDBLAD, B. Researches based on determinations of stellar luminosities (second paper). *Upsala Meddelanden*, [S.I.], v. 11, p. 30, 1926.
- 63 ZWICKY, F. Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln. *Helvetica Physica Acta*, [S.I.], v. 6, p. 110–127, 1933.
- 64 HUBBLE, E.; HUMASON, M. L. The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 74, p. 43–80, 1931.
- 65 ZWICKY, F. On the masses of nebulae and of clusters of nebulae. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 86, p. 217–246, 1937.
- 66 ROBERTS, M. S.; ROTS, A. H. Comparison of rotation curves of different galaxy types. *Astronomy & Astrophysics*, Groninga, v. 26, p. 483–485, 1973.

- 67 RUBIN, V. C.; FORD, W. K. J. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 159, p. 379–403, 1970.
- 68 ROBERTS, M. S. A high-resolution 21-cm hydrogen-line survey of the andromeda nebula. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 144, p. 639–656, 1966.
- 69 FREEMAN, K. C. On the disks of spiral and S0 galaxies. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 160, p. 811–830, 1970.
- 70 BERGSTROM, L. Non-baryonic dark matter: Observational evidence and detection methods. *Reports on Progress in Physics*, [S.I.], v. 63, n. 5, p. 793, 2000.
- 71 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and cosmological constant. *The Astronomical Journal*, [S.I.], v. 116, n. 3, p. 1009–1038, 1998.
- 72 PERMUTTER, S. et al. Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 517, n. 2, p. 565–586, 1999.
- 73 PAÁL, G.; HORVATH, I.; LUKACS, B. Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *Astrophysics and Space Science*, [S.I.], v. 191, n. 1, p. 107–124, 1992.
- 74 CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Physical Review Letters*, [S.I.], v. 80, n. 8, p. 1582–1585, 1998.
- 75 CALDWELL, R. R.; KAMIONKOWSKI, M.; WEINBERG, N. N. Phatom energy: Dark energy with  $w < -1$  causes a cosmic doomsday. *Physical Review Letters*, [S.I.], v. 91, n. 7, p. 71301(1)–71301(4), 2003.
- 76 TRIPATHI, A.; SANGWAN, A.; JASSAL, H. Dark energy equation of state parameter and its evolution at low redshift. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, [S.I.], v. 2017, n. 6, p. 1–15, 2017.
- 77 SREDNICKI, M.; WATKINS, R.; OLIVE, K. A. Calculations of relic densities in the early universe. *Nuclear Physics B*, [S.I.], v. 310, n. 3,4, p. 693–713, 1988.
- 78 GONDOLO, P.; GELMINI, G. Cosmic abundances of stable particles: Improved analysis. *Nuclear Physics B*, [S.I.], v. 360, n. 1, p. 145–179, 1991.
- 79 GRIEST K. E SECKEL, D. Three exceptions in the calculation of relic abundances. *Physical Review D*, [S.I.], v. 43, n. 10, p. 3191–3203, 1991.
- 80 PECCEI, R. D. e. Q. H. R. CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Physical Review Letters*, [S.I.], v. 38, n. 25, p. 1440–1443, 1977.
- 81 BONOMETTO, S. A.; VALDARNINI, R. Nature of dark matter and pancake mass. *Physics Letters A*, [S.I.], v. 103, n. 8, p. 369–373, 1984.
- 82 MILGROM, M. A modification of the newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 270, p. 365–370, 1983.

- 83 NORDSTRÖM, G. The principle of relativity and gravitation. *Physikalische Zeitschrift* 13, [S.I.], v. 23, p. 1126–1129, 1912.
- 84 NORDSTRÖM, G. Inertial and gravitational mass in relativistic mechanics. *Annalen der Physik (Leipzig)*, [S.I.], v. 40, p. 856–878, 1913.
- 85 NORDSTRÖM, G. Theory of gravitation from the point of view of the principle of relativity. *Annalen der Physik (Leipzig)*, [S.I.], v. 42, p. 533, 1913.
- 86 KALUZA, T. On the unification problem in physics. *Sitzungsberichte Pruss. Acad. Sci.*, [S.I.], p. 966–972, 1921.
- 87 KLEIN, O. Quantum theory and five-dimensional theory of relativity. *Zeitschrift für Physik*, [S.I.], v. 37, n. 12, p. 895–906, 1926.
- 88 JORDAN, P. *Gravity and Space: Foundations of Theoretical Cosmology*. [S.I.]: Braunschweig, F. Vieweg, 1955. v. 107.
- 89 DIRAC, P. A. M. The cosmological constants. *Nature*, [S.I.], v. 139, p. 323–324, 1937.
- 90 DIRAC, P. A. M. A new basis for cosmology. *Proceedings of the Royal Society A*, [S.I.], v. 165, n. 921, p. 199–208, 1938.
- 91 BRANS, C. H.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, [S.I.], v. 124, n. 3, p. 925–935, 1961.
- 92 DICKE, R. H. Mach's principle and invariance under transformation of units. *Physical Review*, [S.I.], v. 125, n. 6, p. 2163–2167, 1962.
- 93 NORDTVEDT, K. J. Equivalence principle for massive bodies. I. Phenomenology. *Physical Review*, [S.I.], v. 169, n. 5, p. 114–116, 1968.
- 94 NORDTVEDT, K. J. Equivalence principle for massive bodies. II. Phenomenology. *Physical Review*, [S.I.], v. 169, n. 5, p. 117–125, 1968.
- 95 NORDTVEDT, K. J. Equivalence principle for massive bodies. Including rotational energy and radiation pressure. *Physical Review*, [S.I.], v. 180, n. 5, p. 1293–1298, 1969.
- 96 WILL, C. M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. [S.I.]: Cambridge University Press, 1993.
- 97 BERGMANN, P. Comments on the scalar-tensor theory. *International Journal of Theoretical Physics*, [S.I.], v. 1, n. 1, p. 25–36, 1968.
- 98 WAGONER, R. Scalar-tensor theory and gravitational waves. *Physical Review D*, [S.I.], v. 1, n. 12, p. 3209–3216, 1970.
- 99 NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. [S.I.]: typis A. et JM Duncan, 1833. v. 2.
- 100 CASOLA, E. D.; LIBERAT, S.; SSONEGO, S. Scalar-tensor theory and gravitational waves. *American Journal of Physics*, [S.I.], v. 83, n. 1, p. 39–46, 2014.

- 101 BONDI, H. Negative mass in general relativity. *Reviews of Modern Physics*, [S.I.], v. 29, n. 3, p. 423–428, 1957.
- 102 BOHM, D.; HILEY, B.; HOLLAND, P. Book review-The undivided universe-an ontological interpretation of quantum theory. *Nature*, [S.I.], v. 366, p. 420, 1993.
- 103 EÖTVÖS, R. Verhandlungen der 16 allgemeinen konferenz der internationalen erdmessung. *G. Reiner, Berlin*, [S.I.], v. 319, p. 21–29, 1910.
- 104 RENNER, J. Further investigation about deflections of the vertical. *MTA Muszaki Tudományok Oszt. Közl.*, [S.I.], v. 21, n. 1-4, p. 99–113, 1957.
- 105 ROLL, P. G.; KROTKOV, R.; DICKE, R. H. The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *Annals of Physics*, [S.I.], v. 26, n. 3, p. 442–517, 1964.
- 106 BAEßLER, S. et al. Improved test of the equivalence principle for gravitational self-energy. *Physical Review Letters*, [S.I.], v. 83, n. 18, p. 3585–3588, 1999.
- 107 SCHIFF, L. I. On experimental tests of the general theory of relativity. *American Journal of Physics*, [S.I.], v. 28, n. 4, p. 340–343, 1960.
- 108 BRANS, C. H. Mach’s principle and the locally measured gravitational constant in general relativity. *Physical Review*, [S.I.], v. 125, n. 1, p. 388–396, 1962.
- 109 DICKE, R. H. The equivalence of inertial and gravitational mass. In: *Quasars and high-energy astronomy, Proceedings of the 2nd Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, held in Austin, December 15-19, 1964 Edited by KN Douglas, I. Robinson, A. Schild, EL Schucking, JA Wheeler, and NJ Woolf. New York: Gordon & Breach.* [S.I.: s.n.], 1969. p. 375.
- 110 FARAONI, V.; NADEAU, S. (pseudo) issue of the conformal frame revisited. *Physical Review D*, [S.I.], v. 75, p. 23501, 2007.
- 111 CAPOZZIELLO, S.; DARABI, F.; VERMIERI, D. Correspondence between jordan–einstein frames and palatini-metric formalisms. *Modern Physics Letter A*, [S.I.], v. 25, n. 39, p. 3279–3289, 2010.
- 112 MAGNANO, G.; SOKOLOWSKI, L. M. Physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general-relativistic self-gravitating scalar field. *Modern Physics Letter A*, [S.I.], v. 50, n. 8, p. 5039–5059, 1994.
- 113 FARAONI, V.; GUNZIG, E.; NARDONE, P. Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology. *arXiv preprint gr-qc/9811047*, [S.I.], p. 1–52, 1998.
- 114 CAPOZZIELLO, S.; MARTIN-MORUNO, P.; RUBANO, C. Physical non-equivalence of the Jordan and Einstein frames. *Physics Letter B*, [S.I.], v. 689, n. 4,5, p. 117–121, 2010.
- 115 NANDI, K. K. et al. Brans–Dicke wormholes in the Jordan and Einstein frames. *Physical Review D*, [S.I.], v. 57, n. 2, p. 823–828, 1998.
- 116 CORDA, C. Gravitational wave astronomy: The definitive test for “Einstein frames versus Jordan” controvesy. *Astroparticle Physics*, [S.I.], v. 34, n. 6, p. 412–419, 2011.

- 117 DAS, S.; BANERJEE, N. Brans–Dicke scalar field as a chameleon. *Physical Review D*, [S.I.], v. 78, n. 4, p. 43512, 2008.
- 118 KHOURY, J.; WELTMAN, A. Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space. *Physical Review D*, [S.I.], v. 93, n. 17, p. 171104, 2004.
- 119 NORDTVEDT, K. J. Post-Newtonian metric for a general class of scalar-tensor gravitational theories and observational consequences. *Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 161, p. 1059–1067, 1970.
- 120 BEKENSTEIN, J. D. Are particle rest masses variable? theory and constraints experiments. *Physical Review D*, [S.I.], v. 15, n. 6, p. 1458–1468, 1977.
- 121 BARKER, B. M. General scalar-tensor theory of gravity with constant  $g$ . *Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 211, p. 5–11, 1978.
- 122 FEHLBERG, E. *Low-order classical Runge–Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems*. [S.I.]: National Aeronautics and Space Administration, 1969. v. 315.
- 123 VERNER, J. H. Explicit Runge–Kutta methods with estimates of the local truncation error. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, [S.I.], v. 15, n. 4, p. 772–790, 1978.
- 124 THE GNU Multiple-Precision Floating-Point. 2018. Disponível em: <https://www.mpf.org>. Acesso em: 01 maio de 2018.
- 125 CHEN, D. J. L.; CHANG, J. C.; CHENG, C. H. Higher order composition Runge–Kutta methods. *Tamkang Journal of Mathematics*, [S.I.], v. 39, n. 3, p. 199–211, 2008.
- 126 ENRIGHT W. H. E HULL, T. E. Test results on initial value methods for non-stiff ordinary differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, [S.I.], v. 13, n. 6, p. 944–961, 1976.
- 127 HULL, T. E. et al. Comparing numerical methods for ordinary differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, [S.I.], v. 9, n. 4, p. 603–637, 1972.
- 128 WILLIAMS, J. G.; TURYSHEV, S. G.; BOGGS, D. H. Progress in lunar laser ranging tests of relativistic gravity. *Physics Review Letter*, [S.I.], v. 93, n. 26, p. 261101, 2004.
- 129 KASPI, V. M.; TAYLOR, J. H.; RIBA, M. F. High-precision timing of millisecond pulsars. III. Long-term monitoring of PSRs B1855+09 and B1937+21. *Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 428, p. 713–728, 1994.
- 130 ROTHMAN, T.; MATZNER, R. Scale-covariant gravitation and primordial nucleosynthesis. *Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 257, p. 450–455, 1982.
- 131 LEE, H. W.; KIM, K. Y.; MYUNG, Y. S. Equations of state in the Brans–Dicke cosmology. *The European Physical Journal C*, [S.I.], v. 71, p. 1585, 2011.
- 132 MAK, M. K.; HARKO, T. Brans–Dicke cosmology with a scalar field potential. *Europhysics Letters*, [S.I.], v. 60, n. 1, p. 155–161, 2002.

- 133 BARROW J. D. E SHAW, D. J. The value of the cosmological constant. *General Relativity and Gravitation*, [S.I.], v. 43, n. 10, p. 2555–2560, 2011.
- 134 BATISTA, C. E. M.; ZIMBAHI, W. Power-law solutions and accelerated in scalar-tensor theories. *Physical Review D*, [S.I.], v. 82, n. 2, p. 23527, 2010.
- 135 KRAUSS, L. M.; CHABOYER, B. Age estimates of globular clusters in the milky way: Constraints on cosmology. *Science*, [S.I.], v. 299, n. 5603, p. 65–69, 2003.
- 136 BOND, H. E. et al. HD 14283: A star in the solar neighborhood that formed shortly after the Big Bang. *The Astrophysical Journal Letters*, [S.I.], v. 765, p. 1–5, 2013.
- 137 RIESS, A. G. et al. A 2.4% determination of the local value of the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, [S.I.], v. 826, n. 1, p. 56, 2016.
- 138 BERTOTTI, B.; IESS, L.; TORTORA, P. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, [S.I.], v. 425, n. 6956, p. 374–376, 2003.