



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

João Vitor Motta Muniz

**Configurações de equilíbrio de cascas finas em teorias
escalares-tensoriais**

Rio de Janeiro

2023

João Vitor Motta Muniz

Configurações de equilíbrio de cascas finas em teorias escalares-tensoriais



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

M966c Muniz, João Vitor Motta.
Configurações de equilíbrio de cascas finas em teorias escalares-
tensoriais / João Vitor Motta Muniz. – 2023.
94 f. : il.

Orientador: Santiago Esteban Perez Bergliaffa.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Teoria de campos escalares - Teses. 2. Relatividade geral (Física) –
Teses. 3. Astrofísica – Modelos matemáticos - Teses. 4. Buracos negros
(Astronomia) – Teses. I. Perez Bergliaffa, Santiago Esteban (Orient.).
II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando
Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

João Vitor Motta Muniz

Configurações de equilíbrio de cascas finas em teorias escalares-tensoriais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 04 de agosto de 2023.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Antônio Duarte Pereira Junior

Prof. Dr. Antônio Duarte Pereira Junior
Universidade Federal Fluminense



Prof. Dr. Marcelo Chiapparini
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meus pais, meu irmão e minha esposa que foram fundamentais na minha trajetória.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, irmão e avó, que me incentivaram nos momentos difíceis.

A minha esposa por seu apoio, amor e companheirismo.

Ao professor Santiago Esteban Perez Bergliaffa, pela excepcional orientação e suas valiosas contribuições e ensinamentos que foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

À UERJ, a instituição que tornou tudo isto possível.

À FAPERJ pelo fomento que tornou possível este trabalho.

RESUMO

MUNIZ, J. V. M. *Configurações de equilíbrio de cascas finas em teorias escalares-tensoriais*. 2023. 95 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Por mais bem testada que a teoria da Relatividade geral seja, ainda existem algumas observações que ela não consegue explicar satisfatoriamente, como por exemplo a expansão acelerada do universo. Por conta disto, os físicos foram levados a considerar teorias alternativas a esta, com o intuito de resolver estas complicações. Dentre diversas teorias, neste trabalho iremos utilizar as teorias escalares-tensoriais (TET's). Nosso objetivo é estudar as configurações de equilíbrio e os tipos de equilíbrio (estável ou instável) de uma colagem com interior Minkowski e exterior uma solução de vácuo das TET's, através do formalismo de cascas finas. Este estudo pretende possibilitar estudos mais aprofundados sobre quase buracos negros nas teorias escalares tensoriais, tendo em vista que as cascas finas são uma primeira modelagem para estes objetos. Além disso, elas também modelam colapsos gravitacionais. Estudamos, as equações de estado do tipo $p = \sigma$ e $p = \gamma\sigma^2$. Encontramos as suas configurações de equilíbrio e com elas foi possível estudar a estabilidade do sistema e também sua compactibilidade. No primeiro caso obtivemos que estas configurações são todas estáveis e além disso, o sistema sempre possui uma compactibilidade (C) menor do que o limite imposto pela TRG ($C = 1$). Já no segundo caso, obtivemos apenas configurações de equilíbrio estável, no entanto, dependendo do valor do fator β (que aparece na função de acoplamento), pode haver configurações mais compactas do que o limite da TRG.

Palavras-chave: Teoria da Relatividade Geral. Teoria escalar-tensorial. Cascas finas.
Quase buracos negros.

ABSTRACT

MUNIZ, J. V. M. *Thin Shell equilibrium configurations in scalar-tensor theories*. 2023. 95 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

As well tested as the theory of General Relativity (GR) may be, there are still some observations that it cannot satisfactorily explain, such as the accelerated expansion of the universe. Because of this, physicists have been led to consider alternative theories in order to address these complications. Among various theories, in this work, we will be using scalar-tensor theories (TETs). Our goal is to study the equilibrium configurations and types of equilibrium (stable or unstable) of a shell with Minkowski interior and a vacuum solution of TET's as the exterior, using the formalism of thin shells. This study aims to enable further investigations into quasi-black holes in scalar-tensor theories, considering that thin shells provide an initial modeling for these objects. Additionally, they also model gravitational collapses. We studied the equations of state in the form $p = \sigma$ and $p = \gamma\sigma^2$. We found their equilibrium configurations, which allowed us to study the stability of the system and also its compactibility. In the first case, we obtained that all these configurations are stable, and furthermore, the system always has a compactibility (C) smaller than the limit imposed by TRG ($C = 1$). In the second case, we only obtained stable equilibrium configurations, however, depending on the value of the factor β (which appears in the coupling function), there may be configurations that are more compact than the TRG limit.

Keywords: General Relativity. Scalar-tensor theories. Thin shell. Quasi-black holes.

Lista de ilustrações

Figura 1 - Representação das possibilidades de obtenção de teorias alternativas a TRG por meio de violações de hipóteses do teorema de Lovelock (Berti <i>et al.</i> , 2015)	13
Figura 2 - A imagem (A) representa o referencial S que está em repouso imerso em um campo gravitacional uniforme \vec{g} . A figura (B) representa o referencial S' imerso em um espaço vazio e sujeito a uma aceleração \vec{g} .	16
Figura 3 - Representação de um referencial rígido imerso no campo gravitacional da terra, observando a queda de 3 partículas A, B e C	16
Figura 4 - Representação de algumas variedades de Riemann bidimensionais contidas em um espaço tridimensional. Vale ressaltar que uma variedade não necessariamente precisa ser entendida como imersa em uma outra variedade de dimensão maior	19
Figura 5 - Representação no diagrama espaço temporal da linha de mundo da luz, uma linha de universo com velocidade superior a da luz, um evento e uma partícula acelerada	20
Figura 6 - Representação bidimensional do cone de luz e a relação entre diferentes eventos, O, E1, E2, E3 e E4.	20
Figura 7 - Divisão entre dois espaços tempos de métricas $g_{\mu\nu}^+$ e $g_{\mu\nu}^-$, realizada por uma hipersuperfície Σ de dimensão 3 e vetor normal n_μ .	33
Figura 8 - Gráfico da equação (322). O ponto em vermelho marca a coordenada (0.04, 1). Vemos que se $y_0 < 0.04$ teríamos $b > a$, o que não é permitido no nosso caso.	75
Figura 9 - Gráfico da equação $f = \frac{3(1-\sqrt{y_0})}{2(1+\sqrt{y_0})} + \frac{[2\sqrt{y_0}-(1+y_0)]}{1-y_0}$	76
Figura 10 - Gráfico da equação (337).	78
Figura 11 - Configurações de equilíbrio para $a^* = 0.5, 2, 3.5$ e 5 que satisfazem a equação de estado $p_0 = \sigma_0$ e cujos valores de β são apresentados na figura 10.	79
Figura 12 - O plano azul representa $\Omega_e = 1$. As curvas preta, verde, vermelha e roxas representam a equação (369) avaliada nas configurações de equilíbrio, com, $a^* = 0.5, 2, 3.5, 5$, respectivamente	85
Figura 13 - Compacidade das configurações de equilíbrio	86
Tabela 1 - Resultado da solução da equação de estado e da 2° CJ	89

Figura 14 - Ômegas avaliados nas configurações de equilíbrio com $\beta = -4.9$ e -4.5 . . 90

Figura 15 - Ômegas avaliados nas configurações de equilíbrio com $\beta = 4, 4.5$ e 6 91

Figura 16 - Gráfico $C \times \rho_0^*$ para as configurações de equilíbrio para diferentes valores de β .
Sendo $\rho_0^* = \frac{\rho_0}{\gamma}$ 92

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FE	Frame de Einstein
FJ	Frame de Jordan
PEE	Princípio da equivalência de Einstein
PEF	Princípio da equivalência fraco
TET	Teoria escalar-tensorial
TRG	Teoria da Relatividade Geral
TRR	Teoria da Relatividade Restrita

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	RELATIVIDADE GERAL	15
1.1	Princípio da equivalência	15
1.2	Variedades diferenciáveis	18
1.3	Equações de Einstein	21
1.3.1	<u>Tensores importantes na TRG</u>	21
1.3.2	<u>Equações de campo</u>	26
2	FORMALISMO DE CASCAS FINAS	32
2.1	Definições	33
2.2	Condições de junção	35
2.3	Descontinuidade de quantidades físicas e geométricas	36
2.4	Segunda condição de junção	38
2.5	Estabilidade de uma casca fina do tipo tempo esfericamente simétrica	39
3	TEORIAS ESCALARES-TENSORIAIS	50
3.1	Teorias métricas	50
3.2	Teorias escalares-tensoriais no referencial de Jordan	51
3.3	Referencial de Einstein	58
3.3.1	<u>Solução de vácuo</u>	63
3.4	Condições de junção	65
3.5	Compacidade	68
3.6	Dinâmica da shell	69
3.7	Colagem de Minkowski com a solução de vácuo	70
3.7.1	<u>Equação de estado $p_0 = \sigma_0$</u>	73
3.7.2	<u>Equação de estado $p_0 = \gamma \sigma_0^2$</u>	87
	CONCLUSÃO	93
	APÊNDICE A – Demonstrações para o cálculo de conservação no FJ	98
	APÊNDICE B – Aproximação pós-newtoniana	100
	APÊNDICE C – Conservação do tensor energia momento da shell na TET no FE.	102

INTRODUÇÃO

A TRG é uma das teorias mais bem testadas da física (Will, 2014). A cada ano ela vem passando por diversos testes e recentemente, graças ao avanço da tecnologia, foi possível confirmar, no final de 2015, mais uma de suas previsões: a existência de ondas gravitacionais (Abbott *et al.*, 2016). Porém, por mais bem testada que esta teoria seja, ainda existem algumas observações que ela não consegue explicar satisfatoriamente, o que leva a modificações, seja do conteúdo de matéria no universo, ou da dinâmica obedecida pela geometria do espaço-tempo. A mais relevante das observações sem explicação satisfatória é a expansão acelerada do universo, cuja explicação na teoria da Relatividade Geral se baseia na existência seja da constante cosmológica ou da energia escura (Davis; Parkinson, 2016) (Permuter, 2003). Além de não ser possível detectar esta energia diretamente, esta, por sua vez, se comporta de maneira distinta da energia que estamos acostumados, tendo em vista que, ao invés de contribuir para a contração do universo (como esperado de uma energia “comum”) ela contribui para sua expansão. A constante cosmológica (Λ), como veremos, foi introduzida por Einstein em suas equações de campo com o intuito de descrever um universo estático e segundo a teoria quântica de campos ela está associada a densidade de energia de vácuo (ρ_{vac}) e é calculada como sendo (Amendola; Tsujikawa, 2010)

$$\rho_{vac} = 10^{74} \text{Gev}^4. \quad (1)$$

No entanto, experimentalmente obtém-se (Amendola; Tsujikawa, 2010)

$$\rho_{\Lambda} = 10^{-47} \text{Gev}^4, \quad (2)$$

sendo ρ a densidade de energia, que está relacionada com a constante cosmológica pela expressão

$$\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (3)$$

Esta divergência de valores é conhecida como o problema da constante cosmológica. Por conta deste problema, os físicos foram levados a buscarem outros modelos de tal forma a explicar satisfatoriamente a expansão acelerada. Estes novos modelos ficaram conhecidos como modelos alternativos e são divididos em: matéria modificada e gravidade modificada. Os modelos de matéria modificada consistem em alterar o lado direito das equações de Einstein. Tais modelos não são satisfatórios pois precisam de campos que violem alguma condição de energia (Amendola; Tsujikawa, 2010). A gravidade modificada consiste, por outro lado, em alterar o lado esquerdo das equações de Einstein. Exemplos de teorias

de gravidade modificada são as teorias $f(R)$ e escalares-tensoriais (Amendola; Tsujikawa, 2010).

Além disso, existe uma outra questão não explicada satisfatoriamente na TRG. Observações de curvas de rotações de galáxias sugerem um comportamento distinto do previsto pela TRG e, atualmente, para resolver esta questão faz-se necessário supor a existência de uma matéria conhecida como matéria escura (Bertone; Hooper; Silk, 2005). Esta matéria pode ser detectada apenas indiretamente, tendo em vista que, até o momento atual, sabemos que ela interage muito fracamente com a matéria normal. Existem diversos trabalhos teóricos e experimentais que analisam e limitam os possíveis candidatos à matéria escura (Murayama, 2007) (Bertone; Hooper; Silk, 2005), no entanto, ainda não sabemos do que ela é composta.

Existem diversas maneiras de se produzir uma teoria de gravitação distinta da TRG. Uma forma conveniente de classificar estas maneiras é utilizando o teorema de Lovelock. Este teorema nos diz que o único tensor simétrico de ordem 2 com divergência nula que pode ser construído a partir da métrica e suas derivadas até a segunda ordem em dimensão 4, e conservando a invariância sob difeomorfismos, é o tensor de Einstein mais a constante cosmológica.

Com isto, as teorias alternativas podem ser obtidas ao se abrir mão de algumas hipóteses do teorema de Lovelock, como por exemplo (Berti *et al.*, 2015)

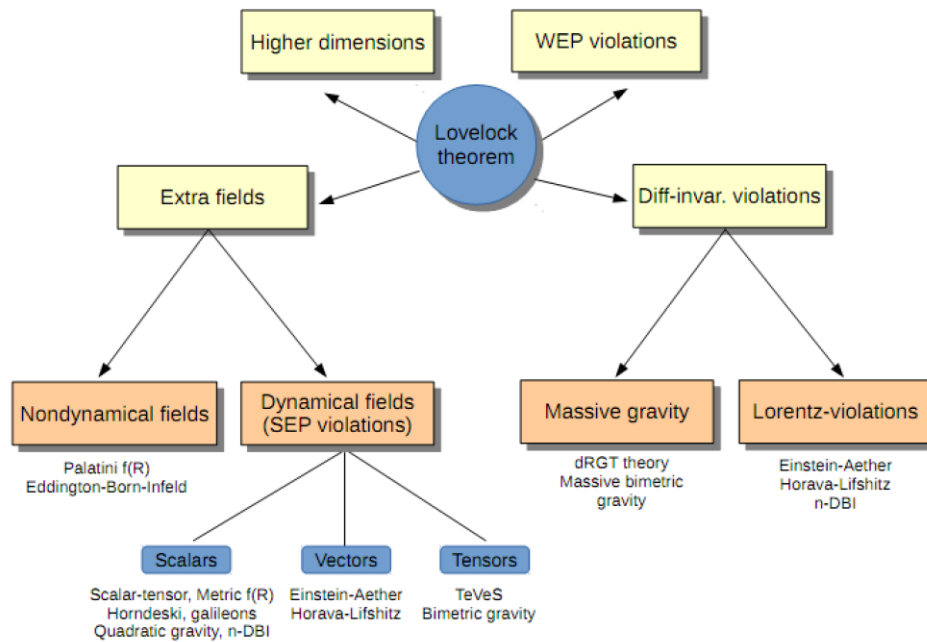
1. Adicionar graus de liberdade dinâmicos ou não dinâmicos.
2. Violar a invariância por difeomorfismo.
3. Utilizar um espaço-tempo com dimensão maior que 4.
4. Violar o princípio da equivalência fraco. Isto pode ser feito alterando o lado esquerdo das equações de Einstein, de tal forma que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} \neq 0$.

Estas possibilidades são apresentadas na figura 1 juntamente com alguns exemplos de suas respectivas teorias.

Como existem muitas teorias alternativas possíveis, faz-se necessário o estudo de diversos fenômenos nestas teorias com o intuito de verificá-las e também de analisar suas previsões. Atualmente existem diversos trabalhos que visam o estudo de ondas gravitacionais, buracos negros e quasi-buracos negros ¹, nos mais diversos tipos de teoria (Alves; Miranda; De Araujo, 2010) (Bernard; Blanchet; Trestini, 2022) (Lemos; Zaslavskii, 2007). Em particular, as teorias escalares-tensoriais têm recebido bastante atenção, começando

¹ Para gravidade modificada e cosmologia veja a referência (Clifton *et al.*, 2012)

Figura 1 - Representação das possibilidades de obtenção de teorias alternativas à TRG por meio de violações de hipóteses do teorema de Lovelock



Fonte: Berti *et al.*, 2015, f.14.

pela teoria de Brans-Dicke (Brans; Dicke, 1961a), e suas generalizações (Fujii; Maeda, 2003).

Neste trabalho estamos interessados em estudar, no cenário das teorias escalares-tensoriais, os estados de equilíbrio e os tipos de equilíbrio (estável ou instável) de uma casca fina, que surge da colagem do espaço-tempo de Minkowski com uma solução de vácuo esfericamente simétrica da teoria. A colagem será feita utilizando as condições de junção introduzidas por Israel (Israel, 1965) e generalizadas pelo Barrabès (Barrabès; Bressange, 1997) para as TET's. Tal sistema é um primeiro passo para a modelagem de quase-buracos negros e colapso gravitacional em teorias escalares-tensoriais.

Iremos utilizar as métricas com assinatura $(-, +, +, +)$ e vamos alternar, quando conveniente, entre as unidades geometrizadas ($c = G = 1$) e $c = 1$.

No capítulo 1 iremos analisar os fundamentos da teoria da Relatividade Geral. Vamos estudar os conceitos que são os pilares desta teoria e também iremos obter as equações de movimento e definir tensores que são fundamentais para o entendimento da teoria. No capítulo 2 será discutido o formalismo de cascas finas, onde será obtido as condições de junção para a colagem de espaços-tempos esfericamente simétricos na TRG, assim como as equações essenciais para o estudo de estabilidade da casca. Com os conceitos analisados nos capítulos 1 e 2, no capítulo 3 iremos estudar a teoria escalares-tensoriais. Primeiramente vamos obter as equações de movimento da teoria e logo em

seguida, derivar as condições de junção para a colagem de espaços-tempos. Com estas informações em mãos será possível calcular os estados de equilíbrio e a estabilidade de uma shell, na colagem do espaço-tempo de Minkowski com uma solução de vácuo da teoria escalar-tensorial. No capítulo final iremos apresentar as conclusões e as perspectivas de trabalho futuro.

1 RELATIVIDADE GERAL

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) foi desenvolvida por Albert Einstein em 1915 (Einstein, 2015). Esta teoria foi revolucionária em sua época, tendo em vista que transformou a maneira com que se entendia a gravidade.

Antes dessa teoria, a teoria dominante de gravitação era a descrita por Newton em 1687, conhecida como a gravitação newtoniana. Nesta, a força da gravidade é entendida como sendo uma força que atua instantaneamente. No entanto, o fato de atuar instantaneamente ia de encontro com o limite imposto pela velocidade da luz advindo da Teoria da Relatividade Restrita (TRR). Este problema, portanto, foi resolvido por Einstein, que interpretou a teoria da gravitação como sendo uma teoria geométrica, de tal forma que a gravitação fosse descrita através da geometria do espaço-tempo, sendo a fonte de gravitação o tensor energia-momento. Com isso, a gravitação passou a ser entendida da seguinte forma: A matéria/energia diz para o espaço-tempo como se curvar e o espaço-tempo diz para a matéria/energia como se mover.

Neste capítulo vamos estudar alguns conceitos fundamentais da TRG e, além disso, iremos descrever o formalismo de Israel para o estudo de cascas finas. Este estudo será de fundamental importância para o entendimento do nosso trabalho em teorias escalares-tensoriais.

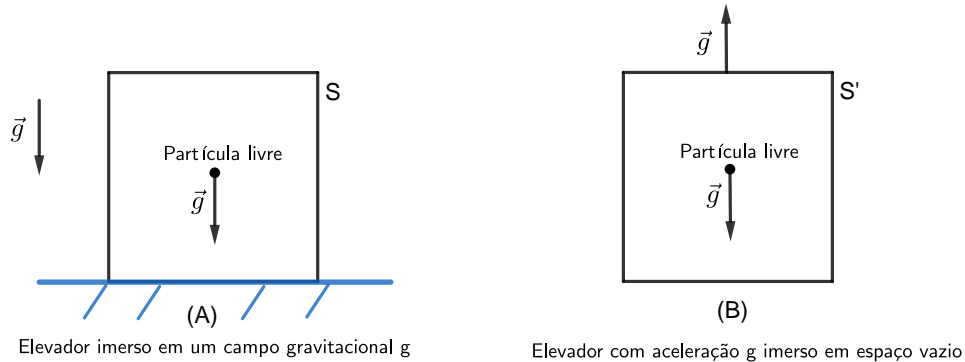
1.1 Princípio da equivalência

Um princípio que foi fundamental para o desenvolvimento da TRG foi o **Princípio da Equivalência**, que hoje é entendido como sendo na verdade dois princípios: o **Princípio da Equivalência Fraco** (PEF) e o **Princípio da Equivalência de Einstein** (PEE). O primeiro nos diz que a massa inercial de um corpo é equivalente a sua massa gravitacional e o segundo é uma generalização do primeiro (Carroll, 2004), como veremos mais adiante.

Para entendermos o que o PEF implica, vamos analisar o “experimento mental” do elevador, desenvolvido por Einstein. Este experimento consiste em supor a existência de dois observadores S e S’ cada um dentro de um elevador, sendo o primeiro em repouso e sujeito a um campo gravitacional uniforme \vec{g} e, o segundo, imerso em um espaço vazio e possuindo uma aceleração dada por $-\vec{g}$, como ilustrado na figura 2.

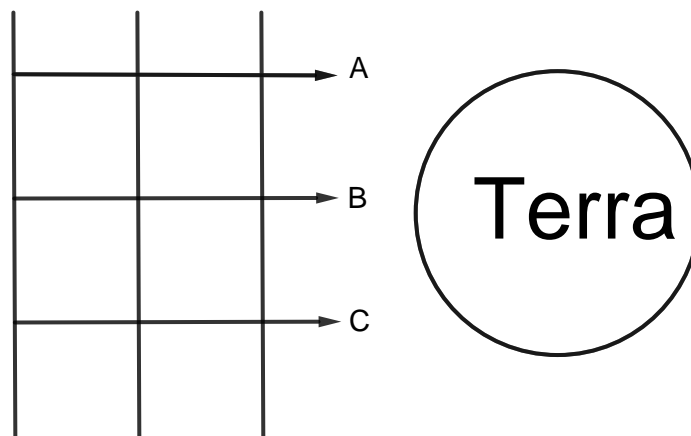
Se S soltar algum objeto, ele medirá, o mesmo, caindo com a aceleração do campo gravitacional (\vec{g}). Por outro lado, se S’ também soltar um objeto, por efeitos puramente inerciais ele irá observar uma queda com aceleração dada por \vec{g} . Com isso, percebe-se que um referencial em repouso sujeito a um campo gravitacional uniforme é equivalente a um referencial acelerado uniformemente em relação a um dado referencial inercial (Schutz,

Figura 2 - A imagem (A) representa o referencial S que está em repouso imerso em um campo gravitacional uniforme \vec{g} . A figura (B) representa o referencial S' imerso em um espaço vazio e sujeito a uma aceleração \vec{g}



Fonte: O autor, 2023.

Figura 3 - Representação de um referencial rígido imerso no campo gravitacional da terra, observando a queda de 3 partículas A, B e C



Fonte: O autor, 2023.

2009). Por conta disto, somos levados a conclusão de que certos referenciais em queda livre podem ser capazes de anular o efeito da gravidade. Mas qual é o limite para “remover” o campo gravitacional de um referencial em queda livre? Para responder esta questão, vamos imaginar um referencial rígido composto por régua e relógios, imerso no campo gravitacional da Terra como ilustrado na figura 3.

Vamos supor que existam 3 partículas em queda livre neste campo gravitacional, e que cada uma é representada por A, B e C, como ilustrado na figura 3. Podemos perceber que este não é um referencial livre dos efeitos gravitacionais, devido ao fato do campo gravitacional da Terra não ser uniforme, o que implica na mudança de trajetória das partículas A e C com relação a B, e também devido a dependência da aceleração gravitacional com a distância.

Portanto, um referencial em queda livre será capaz de “remover” o campo gravitacional apenas se ele estiver contido em uma pequena região do espaço-tempo, onde os efeitos mencionados anteriormente desaparecem, ou seja, os instrumentos de medida não são capazes de detetá-los. Logo, em um campo gravitacional arbitrário não existe referenciais inerciais globais, como os da TRR, mas apenas referenciais inerciais locais, cujo tamanho estará relacionado com a precisão do equipamento e o grau de não uniformidade do campo gravitacional (Schutz, 2009).

O PEE, como dito anteriormente, é uma generalização do PEF. Devido ao fato da massa e da energia serem equivalentes, Einstein foi levado ao PEE (Carroll, 2004), que nos diz que (Will, 2014)

1. PEF é válido.
2. Os resultados de um experimento local não gravitacional independem da velocidade do referencial em queda livre, com relação ao qual o experimento é realizado (invariância local de Lorentz).
3. Os resultados de um experimento não gravitacional independem de sua localização no espaço-tempo (Invariância local de posição).

Basicamente, o que este princípio nos diz é que é impossível diferenciar um referencial sujeito a um campo gravitacional, de referenciais uniformemente acelerados. Pode-se demonstrar que o PEE está diretamente relacionado com o fato de que podemos pensar a relatividade geral como sendo descrita por meio de um espaço-tempo curvo (Will, 2014). Estes princípios apresentados acima são os pilares da TRG e passaram com sucesso por uma série de testes experimentais (Will, 2014).

Na Teoria da Relatividade Restrita (TRR), como sabemos, referenciais inerciais são equivalentes. No entanto, na TRG como dito anteriormente, não possuímos mais um referencial inercial global. Por conta disso, agora não temos um certo tipo de sistema de coordenadas em que as leis da física se simplifiquem, logo, deve-se levar em consideração transformações de coordenadas arbitrárias (Hartle; Dray, 2003), o que implica em considerar também, referenciais não inerciais.

Por conta disso, Einstein foi levado a concluir que qualquer referencial pode, por meio de experimentos, obter as leis da física (D’Inverno, 1992) Ou seja, a transformação de coordenadas, como é algo arbitrário, não deve interferir nas leis físicas (invariância por difeomorfismo). A partir daí, Einstein propôs o princípio da covariância geral, que diz que todos os sistemas de coordenadas/observadores são equivalentes (Weinberg, 1972).

1.2 Variedades diferenciáveis

O PEE nos leva a uma conclusão muito interessante e importante para a descrição da TRG. Ao encarar um referencial em queda livre como um referencial capaz de anular o efeito do campo gravitacional, estamos conseqüentemente nos afastando da ideia de força gravitacional (como entendida por Newton), tendo em vista que toda força está associada a uma aceleração (Carroll, 2004). Com isso, a descrição matemática da gravidade é feita de uma forma geométrica, ou seja, a gravidade deixa de ser uma força atuando em uma determinada região do espaço-tempo e passa a ser uma manifestação do próprio espaço-tempo, que sofrerá deformações devido a presença de matéria-energia. Podemos dizer então que a matéria-energia define como o espaço-tempo irá se curvar e o espaço-tempo define como a matéria-energia se comportará.

As estruturas matemáticas com as quais vamos trabalhar na TRG são as variedades diferenciáveis pseudo-riemannianas, que são dotadas de uma métrica (Carroll, 2004). Uma variedade pseudo-riemanniana é formada por um conjunto de pontos que podem ser continuamente parametrizados, sendo o número de parâmetros independentes, a dimensão da variedade (Wald, 1984). Este é um espaço contínuo e na TRG teremos que, localmente, se comporta como o espaço euclidiano/de Minkowski (dependendo da assinatura da métrica), no entanto, globalmente esta estrutura pode se comportar de distintas maneiras (desde que se mantenha contínua). Basicamente, o que estamos dizendo, é que é possível fazer um certo mapeamento que nos leva das vizinhanças de um ponto da variedade à vizinhanças de um ponto do espaço euclidiano/de Minkowski de dimensão equivalente (Schutz, 2009).

Para entendermos o que significa dizer que uma variedade é diferenciável, vamos supor que exista uma curva γ cujo parâmetro é λ , e que também exista um campo escalar ϕ definido em toda a variedade. A variedade será diferenciável se $\frac{d\phi}{d\lambda}$, com $\phi = \phi(\gamma(\lambda))$, for bem definido em todo espaço (Schutz, 2009).

Na descrição da TRG, o espaço-tempo é descrito por uma variedade diferenciável (Carroll, 2004). Como na TRR a métrica desempenha um papel importante na descrição do espaço-tempo de Minkowski, considera-se que o espaço-tempo na TRG é descrito por uma variedade diferenciável dotada de uma métrica \mathbf{g} (de assinatura $(-, +, +, +)$ ou $(+, -, -, -)$), que descreve sua estrutura global, ou seja, diferentes métricas (não conectadas por transformações de coordenadas) definem diferentes formas de variedades (Schutz, 2009). Algumas variedades são representados na figura 4, dentre eles a esfera e o toro.

Assim como na TRR, na TRG um determinado evento é representado como um ponto no espaço-tempo e uma sequência de eventos formam uma linha de mundo ou linha de universo (Hartle; Dray, 2003). Estas são representadas, para um espaço-tempo de Minkowski, na figura 5. Nestes diagramas de espaço-tempo a velocidade de uma partícula

Figura 4 - Representação de algumas variedades de Riemann bidimensionais contidas em um espaço tridimensional. Vale ressaltar que uma variedade não necessariamente precisa ser entendida como imersa em uma outra variedade de dimensão maior



Fonte: O autor, 2023.

está relacionado com a inclinação da reta tangente a sua linha de universo $\left(\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}\right)$.

Percebemos que nos diagramas de espaço-tempo as retas com inclinação de 45° representam partículas que viajam com a velocidade da luz, e delimitam o que é conhecido como o cone de luz de um certo evento (evento O), que é uma superfície tridimensional contida no espaço-tempo e é representada em duas dimensões na figura 6. Por meio desta representação, podemos estudar as relações entre diferentes eventos.

Intervalos espaço-temporais são definidos como

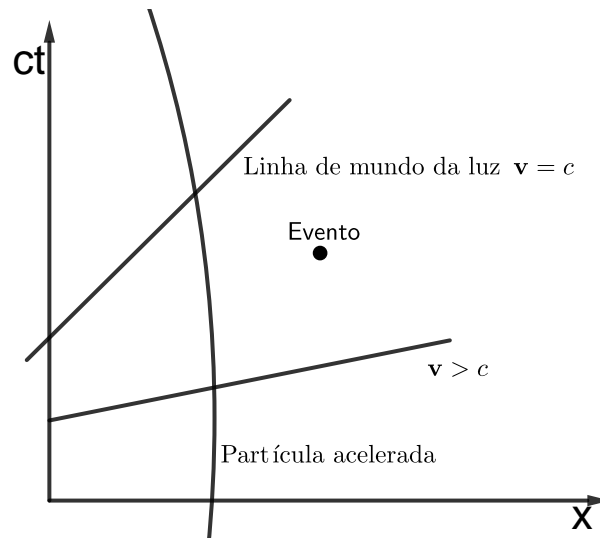
$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (4)$$

e são classificados da seguinte forma (Lemos, 2007) (Lemos, 2007):

- (i) $\Delta s^2 < 0$: Tipo tempo. Eventos com possível relação causal.
- (ii) $\Delta s^2 > 0$: Tipo espaço. Eventos sem relação causal.
- (iii) $\Delta s^2 = 0$: Tipo luz.

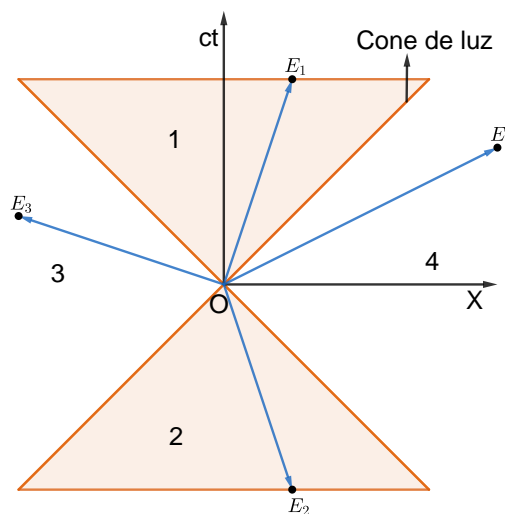
O cone de luz de um evento separa o espaço-tempo de Minkowski em quatro regiões, 1 (Futuro absoluto), 2 (Passado absoluto), 3 e 4. Supondo um evento em cada região denotados por E_1 , E_2 , E_3 e E_4 , podemos perceber que a separação entre os eventos $O - E_1$ e $O - E_2$ é do tipo tempo (i), ou seja, pode haver uma relação causal entre os eventos, já entre $O - E_3$ e $O - E_4$ é do tipo espaço (ii), sendo assim impossível uma relação causal, tendo em vista que para ser causal seria necessário velocidades superiores a c , o que não está de acordo com um postulando da TRR, que nos diz que a velocidade da luz é constante (c) para todos os referenciais inerciais, independentemente do movimento da fonte luminosa relativa ao observador (Lemos, 2007).

Figura 5 - Representação no diagrama espaço temporal da linha de mundo da luz, uma linha de universo com velocidade superior a da luz, um evento e uma partícula acelerada



Fonte: O autor, 2023.

Figura 6 - Representação bidimensional do cone de luz e a relação entre diferentes eventos, O , E_1 , E_2 , E_3 e E_4



Fonte: O autor, 2023.

1.3 Equações de Einstein

Nesta seção iremos introduzir alguns tensores fundamentais na TRG e iremos obter as equações de campo de Einstein por meio do princípio da mínima ação.

1.3.1 Tensores importantes na TRG

Antes de passarmos para a derivação das equações de campo da TRG, vamos rapidamente apresentar alguns tensores que são importantes nesta teoria, tendo em vista que serão fundamentais nos cálculos realizados neste trabalho.

Como a TRG descreve o espaço-tempo por meio de sua curvatura, faz-se necessário a construção de um operador de derivação que seja covariante. Este operador é conhecido como derivada covariante e é definido, para tensores arbitrários do tipo (k, l) , como sendo

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = & \partial_{\sigma} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma \lambda} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ & + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma \lambda} T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \dots - \Gamma^{\lambda}_{\sigma \nu_1} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} , \\ & - \Gamma^{\lambda}_{\sigma \nu_2} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} \dots \end{aligned} \quad (5)$$

em que $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ são conhecidos como os símbolos de Christoffel. Fazendo as suposições (Carroll, 2004):

$$\text{Espaço livre de torção} \rightarrow \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} , \quad (6)$$

$$\text{Conexão compatível com a métrica} \rightarrow g_{\mu\nu;\beta} = 0 , \quad (7)$$

podemos associá-los à métrica na forma (Carroll, 2004)

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{g^{\sigma\beta}}{2} (g_{\nu\beta,\mu} + g_{\beta\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\beta}) . \quad (8)$$

Ou seja, na TRG dada uma métrica podemos calcular os símbolos de Christoffel e com isso teremos um operador de derivação bem definido sobre a variedade.

Outro tensor importante é o tensor de curvatura de Riemann. Como o nome já indica, ele contém informações sobre a curvatura da variedade e é definido em termos dos símbolos de Christoffel na forma (Schutz, 2009):

$$R^{\mu}_{\beta\lambda\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma,\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \Gamma^{\nu}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} \Gamma^{\nu}_{\beta\lambda} . \quad (9)$$

Com esta definição podemos obter a relação do tensor de Riemann e a métrica. Para isso vamos passar para um referencial inercial local em um ponto \mathcal{P} , onde $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$, mas não necessariamente $\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\lambda} = 0$ (Weinberg, 1972), ou seja

$$R^\mu_{\beta\lambda\sigma} = \Gamma^\mu_{\beta\sigma,\lambda} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda,\sigma}. \quad (10)$$

Utilizando nesta última equação a relação dos símbolos de Christoffel com a métrica, dada pela equação (8):

$$R^\mu_{\beta\lambda\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma} [(g_{\sigma\gamma,\beta\lambda} + g_{\gamma\beta,\sigma\lambda} - g_{\beta\sigma,\gamma\lambda}) - (g_{\lambda\gamma,\beta\sigma} + g_{\gamma\beta,\lambda\sigma} - g_{\beta\lambda,\gamma\sigma})]. \quad (11)$$

Como a derivada parcial comuta, alguns termos se cancelam e ficamos com

$$R^\mu_{\beta\lambda\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma} [g_{\sigma\gamma,\beta\lambda} - g_{\beta\sigma,\gamma\lambda} - g_{\lambda\gamma,\beta\sigma} + g_{\beta\lambda,\gamma\sigma}]. \quad (12)$$

Reorganizando os termos, e levando em conta que a métrica é simétrica obtemos

$$R^\mu_{\beta\lambda\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma} [g_{\gamma\sigma,\beta\lambda} - g_{\gamma\lambda,\beta\sigma} + g_{\beta\lambda,\gamma\sigma} - g_{\beta\sigma,\gamma\lambda}]. \quad (13)$$

Para estudarmos as propriedades do tensor de curvatura de Riemann, vamos utilizar sua versão com todos os índices abaixados, pois nesta forma suas propriedades se tornam mais explícitas (Weinberg, 1972):

$$R_{\mu\beta\lambda\sigma} = g_{\mu\alpha}R^\alpha_{\beta\lambda\sigma}. \quad (14)$$

Utilizando (13) na equação acima, e levando em conta que $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\gamma} = g_\mu^\gamma = \delta_\mu^\gamma$ ficamos com

$$R_{\mu\beta\lambda\sigma} = \frac{1}{2} [g_{\mu\sigma,\beta\lambda} - g_{\mu\lambda,\beta\sigma} + g_{\beta\lambda,\mu\sigma} - g_{\beta\sigma,\mu\lambda}]. \quad (15)$$

De (15) podemos perceber algumas propriedades do tensor de Riemann:

$$R_{\mu\beta\lambda\sigma} = -R_{\beta\mu\lambda\sigma} = -R_{\mu\beta\sigma\lambda} = R_{\lambda\sigma\mu\beta}, \quad (16)$$

$$R_{\mu\beta\lambda\sigma} + R_{\mu\lambda\sigma\beta} + R_{\mu\sigma\beta\lambda} = 0. \quad (17)$$

A propriedade (16) indica que o tensor de Riemann é antissimétrico na permutação

do primeiro par de índices, do segundo par de índices e é simétrico na troca dos dois pares de índices entre si. Já a propriedade (17) é conhecida como ciclicidade, e nos diz que a soma dos tensores de Riemann com uma troca cíclica nos seus 3 últimos índices é nula (Weinberg, 1972).

Obtivemos estas propriedades levando em conta um sistema de coordenadas localmente plano. No entanto, as duas equações são equações tensoriais, sendo (16) uma igualdade de componentes de tensores de mesma ordem e (17) uma soma de tensores de mesma ordem igualado a zero, o que gera um tensor de mesma ordem cujas componentes são nulas. Portanto, estas equações são válidas para todos os sistemas de coordenadas (Schutz, 2009).

Por meio do tensor de Riemann, podemos definir o tensor de Ricci como sendo uma contração entre o primeiro e terceiro índice do tensor de Riemann (Weinberg, 1972)

$$R^\lambda{}_{\beta\lambda\sigma} = g^{\lambda\mu} R_{\mu\beta\lambda\sigma} = R_{\beta\sigma}. \quad (18)$$

Pelas relações de simetria, dadas por (16), podemos perceber que o tensor de Ricci será simétrico na troca de índices:

$$R_{\beta\sigma} = g^{\lambda\mu} R_{\mu\beta\lambda\sigma} = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\sigma\mu\beta} = R_{\sigma\beta}. \quad (19)$$

Além disso, podemos definir um escalar, conhecido como escalar de Ricci, como sendo a contração do tensor de Ricci (Weinberg, 1972), ou seja, seu traço:

$$R = g^{\sigma\beta} R_{\beta\sigma} = g^{\sigma\beta} g^{\lambda\mu} R_{\mu\beta\lambda\sigma}. \quad (20)$$

O tensor de Ricci e o escalar de Ricci são únicos. Este fato é devido as propriedades de simetria do tensor de Riemann apresentadas em (16). Por meio destas propriedades, pode-se mostrar que a contração do tensor de Riemann com a métrica inversa ou é nula ou resulta em $\pm R_{\beta\sigma}$ e para o escalar de Ricci, a dupla contração do tensor de Riemann com a métrica inversa resulta em $\pm R$ ou 0 (Weinberg, 1972).

Existe uma relação que é importante na TRG. Para derivá-la, podemos tomar a derivada parcial em relação a x^ν na equação (15), e ficamos com

$$R_{\mu\beta\lambda\sigma,\nu} = \frac{1}{2} [g_{\mu\sigma,\beta\lambda\nu} - g_{\mu\lambda,\beta\sigma\nu} + g_{\beta\lambda,\mu\sigma\nu} - g_{\beta\sigma,\mu\lambda\nu}]. \quad (21)$$

Por meio de (21) temos que

$$R_{\mu\beta\nu\lambda,\sigma} = \frac{1}{2} [g_{\mu\lambda,\beta\nu\sigma} - g_{\mu\nu,\beta\lambda\sigma} + g_{\beta\nu,\mu\lambda\sigma} - g_{\beta\lambda,\mu\nu\sigma}] , \quad (22)$$

$$R_{\mu\beta\sigma\nu,\lambda} = \frac{1}{2} [g_{\mu\nu,\beta\sigma\lambda} - g_{\mu\sigma,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\sigma,\mu\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\mu\sigma\lambda}] . \quad (23)$$

Fazendo a soma de (21), (22) e (23) e levando em conta que as derivadas parciais comutam, percebemos que todos os termos irão se cancelar, logo,

$$R_{\mu\beta\lambda\sigma,\nu} + R_{\mu\beta\nu\lambda,\sigma} + R_{\mu\beta\sigma\nu,\lambda} = 0 . \quad (24)$$

Mas como estamos em um referencial inercial local, podemos substituir a derivada parcial pela covariante (Schutz, 2009)

$$R_{\mu\beta\lambda\sigma;\nu} + R_{\mu\beta\nu\lambda;\sigma} + R_{\mu\beta\sigma\nu;\lambda} = 0 . \quad (25)$$

Como a equação acima é uma equação tensorial, ou seja, as somas destes tensores de mesma ordem resultam em um novo tensor de mesma ordem, e este novo tensor terá componentes nulas no sistema de coordenadas localmente planas, logo terá componentes nulas em todos os outros sistemas de coordenadas (Schutz, 2009). Portanto, esta é uma equação válida para todos os referenciais, ou seja, é uma equação covariante e ela é conhecida como identidade de Bianchi.

Podemos também definir um outro tensor, o tensor de Einstein, como sendo uma composição do tensor de Ricci e do escalar de Ricci, cujas componentes são dadas por:

$$G_{\beta\sigma} = R_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}g_{\beta\sigma}R . \quad (26)$$

Como a métrica e o tensor de Ricci são simétricos, teremos que o tensor de Einstein também será ($G_{\beta\sigma} = G_{\sigma\beta}$). Nota-se que a divergência do tensor de Einstein é igual a uma dupla contração das identidades de Bianchi, portanto, ela será nula (Schutz, 2009):

$$(G^{\beta\sigma})_{;\beta} = 0 . \quad (27)$$

O último tensor que iremos definir nesta seção será o tensor de energia-momento. Este tensor é tal que carrega em suas componentes toda informação sobre as fontes de gravitação, sendo estas, a densidade de energia, o fluxo de energia e o fluxo de momento. Ele está associado com o conteúdo de matéria-energia do sistema. É um tensor do tipo (2,0), ou seja, possui 2 índices contravariantes e 0 covariantes, cujas componentes são

dadas por $T^{\mu\nu}$, sendo (Schutz, 2009)

$$\begin{aligned} T^{00} &= \text{Fluxo do 0-momento sobre a superfície de } t \text{ constante} \\ T^{0i} &= \text{Fluxo do 0-momento sobre a superfície de } x^i \text{ constante} \\ T^{i0} &= \text{Fluxo do i-momento sobre a superfície de } t \text{ constante} \\ T^{ij} &= \text{Fluxo do i-momento sobre a superfície de } x^j \text{ constante} \end{aligned}$$

com i, j variando de 1 até 3.

Supondo que estamos no espaço-tempo de Minkowski, e que neste espaço haja um fluido perfeito que se move com velocidade \vec{v} , se passarmos para um referencial que se move junto do fluido, a quadrivelocidade do fluido será dada por $\vec{U} = (1, 0, 0, 0)$ (com $c = 1$) (Schutz, 2009), com isso pode-se obter (Schutz, 2009):

$$\begin{aligned} T^{\bar{0}\bar{0}} &= \rho, \\ T^{\bar{0}\bar{i}} &= 0, \\ T^{\bar{i}\bar{0}} &= 0, \\ T^{\bar{i}\bar{j}} &= P\delta^i_j, \end{aligned}$$

sendo ρ e P respectivamente, a densidade e a pressão do fluido e a barra sobre os índices uma indicação de que estamos no referencial co-móvel ao fluido.

Como $T^{\mu\nu}$ são componentes de um tensor, eles se transformam, no espaço-tempo de Minkowski, como

$$T^{\mu\nu} = \Lambda^\nu_{\bar{\nu}} \Lambda^\mu_{\bar{\mu}} T^{\bar{\mu}\bar{\nu}}, \quad (28)$$

em que $\Lambda^\mu_{\bar{\mu}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\bar{\mu}}}$ é a matriz de transformação de coordenadas.

Utilizando o $T^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ do referencial co-móvel com a partícula e sendo a matriz transformação de Lorentz dada por (Lemos, 2007)

$$\Lambda^\beta_{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

em que $c = 1$, obtemos de (28) que para um referencial inercial o tensor energia momento

será

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{\rho + v^2 p}{1 - v^2}, \\ T^{0i} &= T^{i0} = (\rho + p) \frac{v^i}{1 - v^2}, \\ T^{ij} &= p \delta^{ij} + (\rho + p) \frac{v^i v^j}{1 - v^2}. \end{aligned}$$

Pode-se então reescrever as equações acima em uma forma única (Schutz, 2009)

$$T^{\mu\nu} = p \eta^{\mu\nu} + (\rho + p) U^\mu U^\nu, \quad (30)$$

em que $U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$ é a quadri-velocidade e τ o tempo próprio. Este é um resultado obtido apenas para referenciais inerciais no espaço de Minkowski. No entanto a generalização para espaços curvos de (30) é (Schutz, 2009):

$$T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + (\rho + p) U^\mu U^\nu. \quad (31)$$

Como a energia e o momento possuem uma lei de conservação, o tensor energia-momento também possuirá uma, dada por (Schutz, 2009)

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (32)$$

Ela representa 4 equações, uma para cada ν . Quando $\mu = 0$ teremos a lei de conservação de energia e para $\mu = i$ teremos a conservação de momento espacial.

A generalização de (32) para referenciais gerais é (Schutz, 2009):

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0, \quad (33)$$

Esta lei de conservação será garantida pelas equações de Einstein.

1.3.2 Equações de campo

A escolha de ação que resulta nas equações de movimento da TRG é a ação de Einstein-Hilbert (Misner; Thorne; Wheeler, 1973), que foi proposta por Hilbert como sendo

$$\tilde{S}_{EH} = \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (34)$$

com a densidade lagrangeana dada por $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$, em que R é o escalar de Ricci e g o determinante da métrica.

Na relatividade geral, o campo dinâmico é a métrica, conseqüentemente, a derivação das equações de Einstein é feita tomando uma pequena variação da ação (34) em relação a métrica $g^{\sigma\beta}$. Como $R = g^{\sigma\beta} R_{\beta\sigma}$, teremos que a variação de S_{EH} se tornará

$$\delta S_{EH} = (\delta S_{EH})_1 + (\delta S_{EH})_2 + (\delta S_{EH})_3, \quad (35)$$

sendo

$$(\delta S_{EH})_1 = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\sigma\beta} \delta R_{\beta\sigma}, \quad (36)$$

$$(\delta S_{EH})_2 = \int d^4x \sqrt{-g} R_{\beta\sigma} \delta g^{\sigma\beta}, \quad (37)$$

$$(\delta S_{EH})_3 = \int d^4x R \delta \sqrt{-g}. \quad (38)$$

Percebemos, portanto, que para resolvermos este problema devemos calcular as variações $\delta R_{\beta\sigma}$ e $\delta \sqrt{-g}$.

Vamos começar pelo mais complicado: o termo $\delta R_{\beta\sigma}$. A ideia para realizar este cálculo consiste em fazer uma variação do tensor de Riemann e mostrar que esta variação pode ser escrita em termos de derivadas totais das variações dos símbolos de Christoffel e por conta disso poderemos utilizar o teorema de Stokes na variação da ação (36) (Carroll, 2004).

A relação do tensor de Riemann com os símbolos de Christoffel é dada por (9):

$$R^\mu{}_{\beta\lambda\sigma} = \Gamma^\mu{}_{\beta\sigma,\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\beta\lambda,\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \Gamma^\nu{}_{\beta\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \Gamma^\nu{}_{\beta\lambda}. \quad (39)$$

Uma pequena variação da métrica irá resultar em uma pequena variação em cada símbolo de Christoffel de (39), como um exemplo:

$$\Gamma^\mu{}_{\beta\sigma} \rightarrow \Gamma^\mu{}_{\beta\sigma} + \delta \Gamma^\mu{}_{\beta\sigma}. \quad (40)$$

Substituindo estas variações em (39), com os devidos índices, obtemos $R^\mu{}_{\beta\lambda\sigma} + \delta R^\mu{}_{\beta\lambda\sigma}$, sendo

$$\begin{aligned} \delta R^\mu_{\beta\lambda\sigma} &= (\delta\Gamma^\mu_{\beta\sigma})_{,\lambda} - (\delta\Gamma^\mu_{\beta\lambda})_{,\sigma} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\beta\sigma} + (\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda})\Gamma^\nu_{\beta\sigma} \\ &\quad - \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\delta\Gamma^\nu_{\beta\lambda} - (\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma})\Gamma^\nu_{\beta\lambda}. \end{aligned} \quad (41)$$

Esta pequena variação do tensor de Riemann pode ser escrita como

$$\delta R^\mu_{\beta\lambda\sigma} = \nabla_\lambda (\delta\Gamma^\mu_{\sigma\beta}) - \nabla_\sigma (\delta\Gamma^\mu_{\lambda\beta}). \quad (42)$$

A igualdade acima é obtida levando em conta que a variação do símbolo de Christoffel é uma diferença entre dois símbolos e se transforma como tensor, com isso, podemos calcular sua derivada covariante (Carroll, 2004). Além disso para verificar esta igualdade, é necessário utilizar a equação (5) para derivada covariante e também o fato de estarmos considerando um espaço sem torção, equação (6).

Como o escalar de Ricci é uma contração do tensor de Riemann, temos por meio de (42), que

$$\delta R_{\beta\sigma} = \delta R^\lambda_{\beta\lambda\sigma} = \nabla_\lambda (\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\beta}) - \nabla_\sigma (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\beta}). \quad (43)$$

Substituindo, (43) em (36) ficamos com:

$$\begin{aligned} (\delta S_{EH})_1 &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\sigma\beta} [\nabla_\lambda (\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\beta}) - \nabla_\sigma (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\beta})] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} [g^{\sigma\beta}\nabla_\lambda (\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\beta}) - g^{\sigma\beta}\nabla_\sigma (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\beta})] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\alpha [g^{\sigma\beta} (\delta\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}) - g^{\alpha\beta} (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\beta})], \end{aligned} \quad (44)$$

onde na última igualdade foi considerado a compatibilidade da métrica ($g_{\mu\nu;\sigma}$) e realizada, no primeiro termo entre colchetes, a troca de índice $\lambda \rightarrow \alpha$ e no segundo termo $\sigma \rightarrow \alpha$.

Podemos perceber que (44) é uma integração sobre todo o volume do espaço-tempo da divergência de um vetor. Lançando mão portanto do teorema de Stokes, teremos que este termo equivale a uma integração sobre a superfície que define este volume, mas geralmente no princípio variacional a superfície é escolhida no infinito espacial, onde os campos vão para zero de forma adequada. Logo (Lemos, 2007)

$$(\delta S_{EH})_1 = 0. \quad (45)$$

Agora nos resta calcular $\delta\sqrt{-g}$ para obtermos $(\delta S_{EH})_3$, e para isso vamos antes obter um resultado importante que relaciona a variação da métrica e de sua inversa. Lembrando que

$$g^{\beta\lambda}g_{\lambda\sigma} = \delta^\beta_\sigma, \quad (46)$$

podemos realizar uma pequena variação em relação a métrica na equação acima:

$$\delta(g^{\beta\lambda}g_{\lambda\sigma}) = \delta(\delta^\beta_\sigma) = 0, \quad (47)$$

em que na última igualdade foi utilizado o fato de que a variação da delta de Kronecker é nula. O primeiro termo da igualdade (47) pode ser expandido usando regra da derivação do produto:

$$\delta(g^{\beta\lambda}g_{\lambda\sigma}) = \delta(g^{\beta\alpha})g_{\alpha\sigma} + g^{\beta\lambda}\delta(g_{\lambda\sigma}) = 0, \quad (48)$$

logo,

$$g^{\beta\lambda}\delta(g_{\lambda\sigma}) = -g_{\alpha\sigma}\delta(g^{\beta\alpha}). \quad (49)$$

Multiplicando a equação acima por $g_{\beta\mu}$ e utilizando o fato de que $g^{\beta\lambda}g_{\beta\mu} = \delta^\lambda_\mu$ ficamos com

$$\delta(g_{\mu\sigma}) = -g_{\beta\mu}g_{\alpha\sigma}\delta(g^{\beta\alpha}). \quad (50)$$

Realizando na equação acima as trocas de índices, $\mu \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow \mu$ e $\mu \rightarrow \lambda$, obtém-se

$$\delta(g_{\beta\sigma}) = \delta(g_{\sigma\beta}) = -g_{\beta\mu}g_{\sigma\alpha}\delta(g^{\mu\alpha}), \quad (51)$$

e este resultado será utilizado em breve.

Vamos agora determinar δg . Para isso iremos utilizar o fato de que qualquer matriz quadrada \mathbf{M} com $\text{Det}(\mathbf{M}) \neq 0$ satisfaz a seguinte relação (Carroll, 2004)

$$\frac{1}{\text{Det}(\mathbf{M})} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \text{Det}(\mathbf{M}) = \text{Tr} \left(\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \mathbf{M} \right), \quad (52)$$

sendo \mathbf{M}^{-1} a inversa de \mathbf{M} . Com isso, substituindo \mathbf{M} por $g_{\beta\sigma}$ na relação acima e levando

em conta pequenas variações em relação a métrica

$$\delta g = g \operatorname{Tr} (g^{\mu\beta} \delta g_{\beta\sigma}) = g (g^{\beta\sigma} \delta g_{\beta\sigma}). \quad (53)$$

Substituindo (51) na equação acima

$$\begin{aligned} \delta g &= -g (g^{\beta\sigma} g_{\beta\mu} g_{\sigma\alpha} \delta(g^{\mu\alpha})) \\ &= -g (g_{\sigma\alpha} \delta(g^{\sigma\alpha})) \\ &= -g (g_{\sigma\beta} \delta(g^{\sigma\beta})), \end{aligned} \quad (54)$$

onde na segunda igualdade utilizamos $g^{\sigma\beta} g_{\beta\mu} = \delta^\sigma_\mu$ e na última igualdade realizamos uma troca de índices $\alpha \rightarrow \beta$.

Como queremos calcular $\delta\sqrt{-g}$, temos pela regra da cadeia,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g. \quad (55)$$

Substituindo (54) na equação acima

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\sigma\beta} \delta g^{\sigma\beta}. \quad (56)$$

Com isso teremos que

$$(\delta S_{EH})_3 = - \int d^4x R \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\sigma\beta} \delta g^{\sigma\beta}. \quad (57)$$

Logo, pela equação (35) e pelo princípio da mínima ação

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} R g_{\sigma\beta} \right] \delta g^{\sigma\beta} = 0. \quad (58)$$

Como $\delta g^{\sigma\beta}$ é arbitrária, teremos que

$$R_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} R g_{\sigma\beta} = 0. \quad (59)$$

As equações acima são as equações de campo de Einstein no vácuo, ou seja, para regiões livres de massa/energia. Caso exista uma fonte de gravitação, a ação será dada

por

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_M, \quad (60)$$

em que G é a constante de Newton e S_M a ação de matéria-energia. Pelo princípio da mínima ação, definindo (Carroll, 2004),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\sigma\beta}} = \frac{1}{2} T_{\sigma\beta} \quad (61)$$

e utilizando a equação (59) teremos que as equações de campo de Einstein serão dadas por

$$R_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} R g_{\sigma\beta} = G_{\sigma\beta} = 8\pi G T_{\sigma\beta}, \quad (62)$$

Esta foi a primeira forma das equações obtidas por Einstein. No entanto, depois de alguns anos, passou-se a acreditar que o universo era estático, e para descrever isto foi introduzido um outro termo nas equações de tal forma que se tornou

$$R_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} R g_{\sigma\beta} + \Lambda g_{\sigma\beta} = 8\pi G T_{\sigma\beta}. \quad (63)$$

Este novo termo é acompanhado de uma constante Λ conhecida como constante cosmológica. Medidas realizadas após a publicação de Einstein mostraram que na realidade o universo, atualmente, está se expandindo (Bagdonas; Zanetic; Gurgel, 2017). Devido a esta descoberta, Einstein chegou a acreditar que a introdução da constante cosmológica foi um de seus maiores erros. No entanto, atualmente a expansão acelerada do universo é descrita por meio do modelo padrão, levando em conta a constante cosmológica (equações de Friedmann) (D’inverno, 1992).

No próximo capítulo iremos estudar o formalismo de cascas finas para entendermos como “colar” soluções e analisar sua estabilidade na TRG, e assim permitir este estudo nas TET’s.

2 FORMALISMO DE CASCAS FINAS

As cascas finas são muito importantes para a modelagem de fenômenos astrofísicos como o colapso gravitacional de uma estrela, explosões de supernovas e também para o estudo das propriedades de quasi-buracos negros (Pereira; Coelho; Rueda, 2014) (Sarangi; Slavin, 2022) (Lemos; Luz, 2022) (Quinta, 2013).

Nesta seção iremos estudar estas cascas finas. Este estudo será de grande importância para quando formos resolver a dinâmica de cascas finas na teoria escalar-tensorial, pois vamos demonstrar que as equações válidas para a TRG, aqui apresentadas, terão as mesmas formas que para o problema em teoria escalar-tensorial que iremos apresentar mais adiante. Antes de passarmos para este formalismo na TRG, vale ressaltar que ele também está presente na teoria eletromagnética. Suponha uma casca fina, esfericamente simétrica de raio R com densidade uniforme σ e uma carga total dada por Q . A lei de Gauss nos diz que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}, \quad (64)$$

em que S é a superfície gaussiana, \vec{E} o campo elétrico, Q_{int} é a carga total que está dentro da gaussiana e ϵ_0 é a permissividade do vácuo. Utilizando a equação (64) e lançando mão da simetria do problema, podemos obter que o campo elétrico de uma casca com uma densidade de carga uniforme é dada por

$$\vec{E}_{interno} = \vec{0}, \quad (65)$$

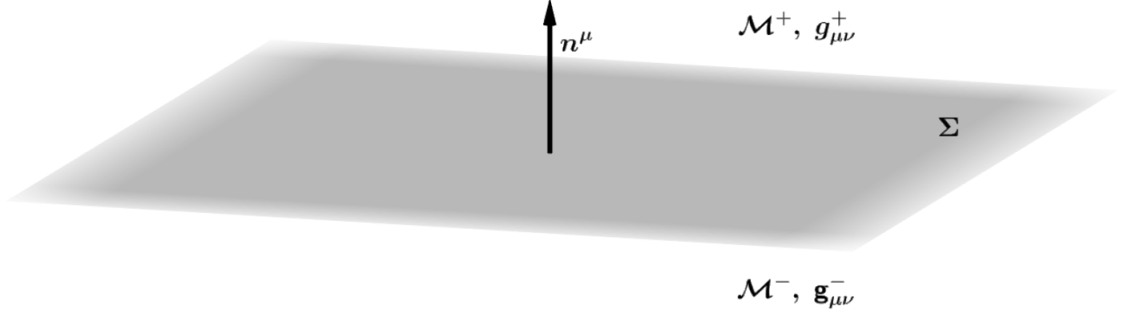
$$\vec{E}_{externo} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (66)$$

logo, utilizando as duas equações acima teremos que a descontinuidade do campo elétrico sobre a casca é dada por

$$[\vec{E}] = \vec{E}_{externo} - \vec{E}_{interno} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (67)$$

em que utilizamos $\frac{Q}{4\pi R^2} = \sigma$, que é a densidade de carga. Além disso, o potencial elétrico e o campo elétrico paralelo à superfície (E^{\parallel}) serão contínuos através da mesma (Griffiths, 2010), ou seja, na superfície teremos

Figura 7 - Divisão entre dois espaços tempos de métricas $g_{\mu\nu}^+$ e $g_{\mu\nu}^-$, realizada por uma hipersuperfície Σ de dimensão 3 e vetor normal n^μ



Fonte: O autor, 2023.

$$\begin{aligned} V_{\text{interno}} &= V_{\text{externo}} \\ E_{\text{interno}}^{\parallel} &= E_{\text{externo}}^{\parallel} \end{aligned} \quad (68)$$

Basicamente, o que temos neste problema é que para realizar a colagem de uma região com solução nula das equações do eletromagnetismo (região interior) com uma solução de uma carga pontual (região exterior), faz-se necessário satisfazer as condições de junção dadas pelas equações (67) e (68).

Na TRG ao utilizarmos as cascas finas também teremos condições de junção que devem ser satisfeitas, de tal modo a permitir a existência de uma determinada colagem de espaços-tempos, como veremos a seguir.

2.1 Definições

As cascas finas são hipersuperfícies que separam o espaço-tempo em duas regiões que iremos chamar de \mathcal{M}^+ (região exterior) e \mathcal{M}^- (região interior). Em cada região podemos ter espaços-tempos distintos (Poisson, 2004), cujas métricas serão dadas, respectivamente, por $g_{\mu\nu}^+$ e $g_{\mu\nu}^-$ e estão associadas a sistemas de coordenadas x_+^μ e x_-^μ .

Uma ilustração da casca fina é apresentada na figura 7. Estas cascas podem ou não conter matéria sobre elas, dependendo das geometrias interior e exterior.

Por conveniência iremos introduzir um novo sistema de coordenadas (x^μ) em uma região aberta que contenha ambos os lados da superfície (coordenadas canônicas). Estas coordenadas serão tais que na região aberta de \mathcal{M}^+ coincidam com x_+^μ e na região aberta de \mathcal{M}^- coincidam com x_-^μ . Podemos supor que a hipersuperfície é intersectada perpendicularmente por uma congruência de geodésicas e que l denote a distância/tempo próprio

ao longo da geodésica. Vamos ajustar as geodésicas de tal forma que teremos $l = 0$ sobre Σ e convencionar que $l < 0$ em \mathcal{M}^- e $l > 0$ em \mathcal{M}^+ .

O vetor normal (n^μ) à hipersuperfície será definido como apontando da região \mathcal{M}^- para \mathcal{M}^+ e ele será dado por (Poisson, 2004)

$$n_\mu = \epsilon l_{,\mu}, \quad (69)$$

em que $\epsilon = n^\mu n_\mu$. Teremos $\epsilon = 1$ para uma hipersuperfície do tipo tempo e $\epsilon = -1$ para uma hipersuperfície do tipo espaço.

Vamos supor que as coordenadas atreladas a um observador sobre a hipersuperfície sejam y^a , de tal forma que $y^a = (\tau, \theta, \phi)$, sendo a primeira uma coordenada temporal e as duas últimas espaciais (angulares). A métrica sobre Σ , também conhecida como *primeira forma fundamental*, será denotada por h_{ab} , de tal forma que o elemento de linha sobre a superfície será

$$ds^2_\Sigma = h_{ab} dy^a dy^b \quad (70)$$

em que

$$h_{ab} = \frac{\partial x^\mu_\pm}{\partial y^a} \frac{\partial x^\nu_\pm}{\partial y^b} g^\pm_{\mu\nu} \quad (71)$$

$$= e^\mu_a e^\nu_b g^\pm_{\mu\nu}, \quad (72)$$

sendo a projeção

$$e^\mu_a = \frac{\partial x^\mu_\pm}{\partial y^a}. \quad (73)$$

Note que estamos utilizando letras latinas para as coordenadas da hipersuperfície e que nas coordenadas canônicas as seguintes relações são válidas

$$[n^\mu] = [e^\mu_a] = 0, \quad (74)$$

sendo $[X]$ o cálculo da descontinuidade da quantidade X dado por

$$[X] = \lim_{d \rightarrow 0^+} X^+ - \lim_{d \rightarrow 0^-} X^-. \quad (75)$$

em que d representa a distância à superfície.

2.2 Condições de junção

A colagem de espaços-tempos não pode ser feita de qualquer maneira: ela deve ser feita de tal forma que satisfaça as equações de Einstein (equação (62)) em todo o espaço-tempo, incluindo a superfície. Para garantir isto, algumas condições devem ser satisfeitas. Estas condições são conhecidas como as condições de junção e para obtê-las vamos utilizar o método da superfície singular (Visser, 1996).

O método da superfície singular consiste em supor que as quantidades envolvidas no sistema possam ser escritas em termos de distribuições de tal forma que as quantidades na superfície sejam proporcionais a uma delta de Dirac. Desta forma, podemos escrever a métrica de todo o espaço-tempo como sendo dada por

$$g_{\mu\nu} = \Theta(l)g_{\mu\nu}^+ + \Theta(-l)g_{\mu\nu}^-, \quad (76)$$

e sua derivada será

$$g_{\mu\nu,\rho} = \Theta(l)g_{\mu\nu,\rho}^+ + \Theta(-l)g_{\mu\nu,\rho}^- + \epsilon\delta(l)[g_{\mu\nu}]n_\rho, \quad (77)$$

em que $\Theta(l)$ é a função de Heavside, que satisfaz as propriedades

$$\begin{aligned} \Theta(\pm l)^2 &= \Theta(\pm l) \\ \Theta(l)\Theta(-l) &= 0 \\ \frac{d\Theta(\pm l)}{dl} &= \delta(l), \end{aligned} \quad (78)$$

sendo $\delta(l)$ a distribuição de Dirac.

Estamos interessados em saber se a métrica dada pela equação (76) resulta em uma solução (no sentido das distribuições) para as equações de Einstein e para verificar isto, devemos descobrir se esta métrica fornece quantidades físicas e geométricas apropriadamente descritas em termos de distribuições.

Lembrando que o tensor e o escalar de Ricci são contrações do tensor de Riemann que é dado por (13), ao utilizarmos as equações (76) e (77) no $G_{\mu\nu}$ teremos termos que são proporcionais ao produto $\Theta(l)\delta(l)$. No entanto, esta quantidade, que é a multiplicação de duas distribuições, não é bem definida matematicamente e (Avilés; Maeda; Martínez, 2020), portanto, para eliminá-la, pela equação (77), devemos impor a seguinte condição

$$[g_{\mu\nu}] = 0. \quad (79)$$

Utilizando esta condição na equação (77) teremos que

$$g_{\mu\nu,\rho} = \Theta(l)g_{\mu\nu,\rho}^+ + \Theta(-l)g_{\mu\nu,\rho}^-. \quad (80)$$

A relação (79) é conhecida como a primeira condição de junção e ela nos diz que a métrica deve ser contínua através da hipersuperfície. Esta condição nos leva à conclusão de que, se existirem descontinuidades na derivada da métrica, estas devem estar na direção perpendicular a superfície, ou seja, paralelas ao vetor normal n^μ . Portanto, deve existir um campo tensorial $\omega_{\mu\nu}$ de tal forma que

$$[g_{\rho\mu,\nu}] = n_\rho\omega_{\mu\nu}. \quad (81)$$

Vamos estudar no próximo tópico as descontinuidades de quantidades físicas e geométricas que serão fundamentais para a obtenção da 2ª condição de junção.

2.3 Descontinuidade de quantidades físicas e geométricas

Utilizando as equações (76) e (80) na equação que relaciona os símbolos de Christoffel e a métrica (equação (8)) e levando em conta as propriedades da função de Heaviside (equação (78)) é possível obter (Avilés; Maeda; Martínez, 2020)

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \Theta(l)\Gamma^{\mu+}_{\nu\rho} + \Theta(-l)\Gamma^{\mu-}_{\nu\rho}. \quad (82)$$

Derivando a equação acima e utilizando a equação (69), teremos

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{2} (\Theta(l)\Gamma^{\mu+}_{\nu\rho,\sigma} + \Theta(-l)\Gamma^{\mu-}_{\nu\rho,\sigma} + \epsilon\delta(l)[\Gamma^\mu_{\nu\rho}]n_\sigma), \quad (83)$$

sendo

$$[\Gamma^\mu_{\nu\rho}] = \frac{1}{2} (n_\rho\omega^\mu_{\nu} + n_\mu\omega^\nu_{\rho} - n^\mu\omega_{\nu\rho}). \quad (84)$$

Utilizando a equação acima, a equação (74) e a definição de derivada covariante (5) podemos obter a descontinuidade da derivada covariante do vetor normal à hipersuperfície como sendo (Avilés; Maeda; Martínez, 2020)

$$[\nabla_\nu n_\rho] = -[\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}]n_\mu = \frac{1}{2} (\epsilon\omega_{\nu\rho} - \omega_{\lambda\nu}n^\lambda n_\rho - \omega_{\lambda\rho}n^\lambda n_\nu) . \quad (85)$$

Por definição, a curvatura extrínseca da hipersuperfície é dada por

$$K_{\sigma\beta} = h^\nu{}_\sigma h^\rho{}_\beta \nabla_\nu n_\rho , \quad (86)$$

em que $h_{\mu\nu}$ é o tensor projeção, definido como

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \epsilon n_\mu n_\nu . \quad (87)$$

Note que ao multiplicar a equação (87) por $e_a^\mu e_b^\nu$ obtemos, levando em conta que $n_\mu e_a^\mu = 0$, exatamente a equação (72).

Podemos perceber, pela equação (86), que a descontinuidade da curvatura extrínseca está relacionada à descontinuidade na derivada covariante do vetor normal na forma

$$[K_{\sigma\beta}] = h^\nu{}_\sigma h^\rho{}_\beta [\nabla_\nu n_\rho] , \quad (88)$$

onde utilizamos a continuidade da métrica e também do vetor normal.

Substituindo as equações (87) e (85) na equação (88) podemos obter a descontinuidade da curvatura extrínseca e de seu traço como sendo (Avilés; Maeda; Martínez, 2020)

$$\begin{aligned} [K_{\sigma\beta}] &= \frac{1}{2} (\epsilon\omega_{\sigma\beta} - \omega_{\sigma\rho}n^\rho n_\beta - \omega_{\beta\nu}n^\nu n_\sigma + \epsilon\omega_{\nu\rho}n^\nu n^\rho n_\sigma n_\beta) , \\ [K] &= g^{\sigma\beta}[K_{\sigma\beta}] = \frac{1}{2} (\epsilon\omega^\sigma{}_\sigma - \omega_{\sigma\beta}n^\sigma n^\beta) . \end{aligned} \quad (89)$$

Vamos agora analisar o tensor de Riemann. Sabemos que ele depende de derivadas segundas da métrica, conseqüentemente, tendo em vista a separação da métrica dada pela equação (76), teremos que ele será na forma

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \Theta(l)R^{+\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + \Theta(-l)R^{-\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + \delta(l)\bar{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu} , \quad (90)$$

em que (Avilés; Maeda; Martínez, 2020)

$$\bar{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = \epsilon ([\Gamma^\rho_{\sigma\nu}]n_\mu - [\Gamma^\rho_{\sigma\mu}]n_\nu) . \quad (91)$$

Substituindo a equação (84) na equação (91) teremos a parte do tensor de Riemann proporcional a função δ em termos de $\omega_{\mu\nu}$ e do vetor normal como sendo (Avilés; Maeda; Martínez, 2020)

$$\bar{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = \frac{\epsilon}{2} (\omega^\rho_{\nu} n_\sigma n_\mu + \omega_{\sigma\mu} n^\rho n_\nu - \omega^\rho_{\mu} n_\sigma n_\nu - \omega_{\sigma\nu} n^\rho n_\mu) . \quad (92)$$

Com isto, realizando contrações na equação (92) (tomando $\rho \rightarrow \mu$) e utilizando o fato de que $n^\mu n_\mu = \epsilon$, teremos

$$\bar{R}_{\sigma\nu} = \bar{R}^\rho_{\sigma\rho\nu} = \frac{\epsilon}{2} (\omega_{\nu\mu} n^\mu n_\sigma + \omega_{\sigma\mu} n^\mu n_\nu - \omega^\mu_{\mu} n_\sigma n_\nu - \epsilon \omega_{\sigma\nu}) \quad (93)$$

Logo, por meio das equações (89), a equação (93) pode ser escrita como

$$\bar{R}_{\sigma\nu} = -(\epsilon[K_{\sigma\nu}] + [K]n_\sigma n_\nu) \quad (94)$$

logo,

$$\bar{R} = g^{\sigma\nu} \bar{R}_{\sigma\nu} = -2\epsilon[K] . \quad (95)$$

Das equações (94) e (95) obtemos a parte proporcional à função $\delta(l)$ do tensor de Einstein

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\bar{R} = -\epsilon ([K_{\mu\nu}] - h_{\mu\nu}[K]) , \quad (96)$$

em que $h_{\mu\nu}$ é dado pela equação (87). Com estes resultados em mãos, estamos prontos para obter a 2ª condição de junção.

2.4 Segunda condição de junção

Para obter a segunda condição de junção, vamos supor que a matéria possua um tensor energia-momento na forma

$$T_{\mu\nu} = \Theta(l)T_{\mu\nu}^+ + \Theta(-l)T_{\mu\nu}^- + \delta(l)\bar{t}_{\mu\nu}, \quad (97)$$

em que $\bar{t}_{\mu\nu}$ representa o tensor energia-momento sobre Σ . Substituindo as equações (96) e (97) na equação de Einstein (62), obteremos que a parte proporcional à $\delta(l)$ resultará em

$$-\epsilon ([K_{\mu\nu}] - h_{\mu\nu}[K]) = \bar{t}_{\mu\nu}. \quad (98)$$

Projetando a equação (98) sobre a hipersuperfície, utilizando a equação (74) e levando em conta que a métrica da superfície é contínua, teremos

$$-\epsilon ([K^a_b] - h^a_b[K]) = \bar{t}^a_b, \quad (99)$$

A equação (99) é conhecida como a 2° condição de junção. Ela nos diz que caso haja uma descontinuidade da curvatura extrínseca e/ou de seu traço, a colagem só pode ser feita com uma casca que possua algum tipo de matéria. Por outro lado, não existindo estas descontinuidades, ou seja, sendo $[K_{\mu\nu}] = [K] = 0$ é possível colar os espaços-tempos em questão sem a presença de matéria na superfície.

Mais adiante iremos estudar estas condições de junção para o caso da teoria escalar-tensorial (TET) e os resultados obtidos aqui serão utilizados. Na próxima seção vamos discutir o caminho a ser seguido para possibilitar o estudo da estabilidade de uma casca fina do tipo tempo esfericamente simétrica.

2.5 Estabilidade de uma casca fina do tipo tempo esfericamente simétrica

Vamos agora estudar a dinâmica de uma casca, para assim ser possível determinar um método para o estudo de sua estabilidade.

Iremos utilizar unidades de tal forma que $c = 1$, apenas por conveniência. Neste trabalho estamos interessados em cascas esfericamente simétricas e do tipo tempo ($\epsilon = 1$). Vamos supor que a geometria de ambos os lados da superfície seja esfericamente simétrica e que os correspondentes elementos de linha possam ser escritos na forma

$$ds_{\pm}^2 = -f(R_{\pm})dt^2 + \frac{dR_{\pm}^2}{f(R_{\pm})} + r_{\pm}^2(R_{\pm}) (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\varphi^2), \quad (100)$$

em que o índice “ \pm ” indica quantidades das regiões \mathcal{M}^+ e \mathcal{M}^- , respectivamente. Neste trabalho não iremos utilizar t_{\pm} , tendo em vista que no caso específico que iremos estudar teremos $t_- = t_+ = t$. Supondo uma casca com um raio ρ e esfericamente simétrica, a métrica sobre ela será dada por

$$ds_{\Sigma}^2 = -d\tau^2 + \rho^2(\tau) (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\varphi^2) , \quad (101)$$

em que τ é o tempo próprio de um observador sobre a superfície.

Supondo que as coordenadas da casca sejam dadas por

$$x^{\mu} = (T(\tau), R_{\pm}(\tau), \theta, \phi) , \quad (102)$$

teremos

$$dx^{\mu} = \left(\frac{dT}{d\tau} d\tau, \frac{dR_{\pm}}{d\tau} d\tau, d\theta, d\phi \right) , \quad (103)$$

Substituindo a equação (103) na equação (100) e juntando termos

$$ds_{\pm}^2 = \left(-f(R_{\pm})\dot{T}^2 + f^{-1}(R_{\pm})\dot{R}_{\pm}^2 \right) d\tau^2 + r_{\pm}^2(R_{\pm}) (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\varphi^2) , \quad (104)$$

em que o ponto indica derivada em relação a τ . Por meio da continuidade da métrica (equação (79)), ao igualar as equações (101) e (104) ficamos com as equações

$$\left(-f(R_{\pm})\dot{T}^2 + f^{-1}(R_{\pm})\dot{R}_{\pm}^2 \right) = -1 \quad (105)$$

$$r_{\pm}(R_{\pm}) = \rho(\tau) . \quad (106)$$

Derivando a equação (106) em relação a τ , podemos obter a seguinte relação

$$r' \dot{R}_{\pm} = \dot{\rho}(\tau) , \quad (107)$$

em que $r' = \frac{dr_{\pm}}{dR_{\pm}}$.

Isolando \dot{T}^2 na equação (105)

$$\dot{T}^2 = f^{-2}(R_{\pm}) \left(f(R_{\pm}) + \dot{R}_{\pm}^2 \right) \quad (108)$$

Podemos agora calcular o vetor normal à hipersuperfície, que por definição é dado por

$$n_\gamma = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\gamma} \frac{1}{\sqrt{g^{\mu\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}}} \quad (109)$$

em que $\Phi = r_\pm(R_\pm) - \rho(\tau) = 0$ é a equação que define a hipersuperfície de raio $\rho(\tau)$. O denominador da equação (109), utilizando a equação da superfície e omitindo os índices \pm , é dado por

$$\sqrt{g^{\mu\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}} = \sqrt{-f^{-1}(R) \left(\frac{\dot{\rho}}{\dot{T}}\right)^2 + f(R)}. \quad (110)$$

Utilizando a última igualdade da equação (108) e a equação (107) na equação (110), juntando todos os termos ficamos com

$$\sqrt{g^{\mu\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}} = \frac{r' f(R_\pm)}{\sqrt{f(R_\pm) + \frac{\dot{\rho}^2}{r'^2}}}. \quad (111)$$

Com este resultado, a equação (109), sendo $\frac{\partial\Phi}{\partial T} = \left(-\frac{\dot{\rho}}{\dot{T}}\right)$ e $\frac{\partial\Phi}{\partial r_\pm} = 1$, será dada por

$$n_\pm = \left(-\frac{\dot{\rho}(\tau)}{r'}, \frac{\sqrt{f(R_\pm) + \frac{\dot{\rho}^2}{r'^2}}}{f(R_\pm)}, 0, 0 \right), \quad (112)$$

ou seja, por (107) e (108)

$$n_\pm = \left(-\dot{R}_\pm, \dot{T}, 0, 0 \right). \quad (113)$$

Note que, caso a casca esteja em equilíbrio ($\dot{R}_\pm = 0$) o vetor normal será

$$n_\pm = \left(0, \frac{1}{\sqrt{f(R_\pm)}}, 0, 0 \right), \quad (114)$$

Vamos supor que a matéria sobre a superfície, caso seja necessária, possa ser descrita como um fluido perfeito. Logo, devido a simetria esférica teremos que $t_{\theta\theta} = t_{\varphi\varphi}$ e o tensor energia momento na superfície será

$$\bar{t}^a_b = (-\sigma, p, p), \quad (115)$$

em que σ é a densidade de energia e p a pressão. Estas quantidades podem ser determinadas por meio das curvaturas extrínsecas do interior e do exterior. Para visualizar isto, é necessário utilizar a equação (98). Expandindo o lado esquerdo da equação (98) e utilizando a equação (115)

$$\sigma = -\frac{1}{8\pi G} \left[K_\tau^{\tau+} - K_\tau^{\tau-} - \delta_\tau^\tau \left(K_\tau^{\tau+} + K_\theta^{\theta+} + K_\phi^{\phi+} - K_\tau^{\tau-} - K_\theta^{\theta-} - K_\phi^{\phi-} \right) \right] \quad (116)$$

$$p = -\frac{1}{8\pi G} \left[K_\theta^{\theta+} - K_\theta^{\theta-} - \delta_\theta^\theta \left(K_\tau^{\tau+} + K_\theta^{\theta+} + K_\phi^{\phi+} - K_\tau^{\tau-} - K_\theta^{\theta-} - K_\phi^{\phi-} \right) \right]. \quad (117)$$

Utilizando o fato de que $\delta_\tau^\tau = \delta_\theta^\theta = 1$ e que $[K_\theta^\theta] = [K_\phi^\phi]$, cortando termos, ficaremos com

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi G} [K_\theta^\theta] \quad (118)$$

$$p = \frac{1}{8\pi G} ([K_\tau^\tau] + [K_\theta^\theta]) \quad (119)$$

Por definição, a curvatura extrínseca é dada por (Visser, 1996)

$$K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu. \quad (120)$$

Será útil escrever a equação (120) nas coordenadas da casca. Para isso, basta realizar uma transformação de coordenadas na mesma

$$K_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b K_{\mu\nu} = e^\mu_a e^\nu_b (\partial_\mu n_\nu - \Gamma^\beta_{\mu\nu} n_\beta), \quad (121)$$

em que na última igualdade apenas utilizamos a definição de derivada covariante dada pela equação (5). Pode-se reescrever o primeiro termo da equação (??) por meio da regra de derivada do produto, resultando em

$$K_{ab} = e^\mu_a \partial_\mu (e^\nu_b n_\nu) - \partial_\mu (e^\nu_b) n_\nu - e^\mu_a e^\nu_b \Gamma^\beta_{\mu\nu} n_\beta. \quad (122)$$

Como o vetor normal é dado por $(-\dot{R}_\pm, \dot{T}, 0, 0)$, percebemos que o primeiro termo da

equação (122) irá ser nulo (levando em conta que $e^\mu_a = \frac{dx^\mu}{dy^a}$), ou seja,

$$K_{ab} = -\partial_\mu(e^\nu_b)n_\nu - e^\mu_a e^\nu_b \Gamma^\beta_{\mu\nu} n_\beta. \quad (123)$$

Agora podemos utilizar a definição de e^μ_a dada pela equação (73) na equação (123), para obter (Mazharimousavi; Halilsoy; Amen, 2017)

$$K^\pm_{ab} = -n_\gamma \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^a \partial y^b} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} \right), \quad (124)$$

em que $x = x(y)$.

Portanto, dada as métricas interior e exterior, por meio da equação (124) é possível obter a curvatura extrínseca da hipersuperfície que faz a separação dos espaços-tempos. Para a métrica na forma da equação (100) temos que os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma^t_{tR_\pm} = \frac{f'_\pm}{2f_\pm} \quad \Gamma^{R_\pm}_{R_\pm R_\pm} = \frac{-f'_\pm}{2f_\pm} \quad \Gamma^{R_\pm}_{\theta\theta} = -f_\pm r_\pm r'_\pm \quad (125)$$

$$\Gamma^{R_\pm}_{\phi\phi} = -f_\pm r_\pm r'_\pm \text{Sen}^2(\theta) \quad \Gamma^{R_\pm}_{tt} = \frac{f_\pm f'_\pm}{2} \quad \Gamma^\theta_{\theta R_\pm} = \frac{r'_\pm}{r_\pm} \quad (126)$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos(\theta)\text{sen}(\theta) \quad \Gamma^\phi_{\phi R_\pm} = \frac{r'_\pm}{r_\pm} \quad \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot(\theta), \quad (127)$$

em que $f_\pm = f(R_\pm)$ e $f'_\pm = \frac{df(R_\pm)}{dR_\pm}$.

Logo, utilizando as equações (125), (126) e (127) na equação (124) pode-se obter

$$K^\pm_{\tau\tau} = \frac{3\dot{R}_\pm^2 \dot{t} f'_\pm}{2f_\pm} - \frac{1}{2} f_\pm \dot{t}^3 f'_\pm - \ddot{R}_\pm \dot{t} + \dot{R}_\pm \ddot{t}, \quad (128)$$

$$K^\pm_{\theta\theta} = f_\pm r_\pm r'_\pm \dot{t}, \quad (129)$$

$$K^\pm_{\phi\phi} = f_\pm r_\pm r'_\pm \dot{t} \text{sen}^2(\theta). \quad (130)$$

Substituindo a equação (108) acima, após uma álgebra obtêm-se

$$K_{\tau\tau}^{\pm} = -\frac{f'_{\pm} + 2\ddot{R}_{\pm}}{2\sqrt{f_{\pm} + \dot{R}_{\pm}^2}}, \quad (131)$$

$$K_{\theta\theta}^{\pm} = r_{\pm}r'_{\pm}\sqrt{f_{\pm} + \dot{R}_{\pm}^2}, \quad (132)$$

$$K_{\phi\phi}^{\pm} = r_{\pm}r'_{\pm}\sqrt{f_{\pm} + \dot{R}_{\pm}^2}\text{sen}^2(\theta). \quad (133)$$

Tendo obtido estas curvaturas extrínsecas, podemos utilizar a métrica da superfície dada por (101) para levantar os índices e com isto obter

$$K_{\tau}^{\tau\pm} = \frac{f'_{\pm} + 2\ddot{R}_{\pm}}{2\sqrt{f_{\pm} + \dot{R}_{\pm}^2}}, \quad (134)$$

$$K_{\theta}^{\theta\pm} = \frac{r_{\pm}r'_{\pm}}{\rho^2}\sqrt{f_{\pm} + \dot{R}_{\pm}^2}, \quad (135)$$

$$K_{\phi}^{\phi\pm} = \frac{r_{\pm}r'_{\pm}}{\rho^2}\sqrt{f_{\pm} + \dot{R}_{\pm}^2}, \quad (136)$$

que levando em conta a equação (106) podem ser reescritas como

$$K_{\tau}^{\tau\pm} = \frac{f'_{\pm} + 2\ddot{R}_{\pm}}{2\sqrt{f_{\pm} + \dot{R}_{\pm}^2}}, \quad (137)$$

$$K_{\theta}^{\theta\pm} = \frac{r'_{\pm}}{r_{\pm}}\sqrt{f_{\pm} + \dot{R}_{\pm}^2}, \quad (138)$$

$$K_{\phi}^{\phi\pm} = \frac{r'_{\pm}}{r_{\pm}}\sqrt{f_{\pm} + \dot{R}_{\pm}^2}, \quad (139)$$

Substituindo as equações (137), (138) e (139) nas equações (116) e (117) obtemos a densidade de energia e a pressão da matéria sobre a casca como sendo

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi G} \left(\frac{r'_{+}}{r_{+}}\sqrt{f_{+} + \dot{R}_{+}^2} - \frac{r'_{-}}{r_{-}}\sqrt{f_{-} + \dot{R}_{-}^2} \right), \quad (140)$$

$$p = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{f'_{+} + 2\ddot{R}_{+}}{2\sqrt{f_{+} + \dot{R}_{+}^2}} - \frac{f'_{-} + 2\ddot{R}_{-}}{2\sqrt{f_{-} + \dot{R}_{-}^2}} + \frac{r'_{+}}{r_{+}}\sqrt{f_{+} + \dot{R}_{+}^2} - \frac{r'_{-}}{r_{-}}\sqrt{f_{-} + \dot{R}_{-}^2} \right). \quad (141)$$

Vale ressaltar que para o caso em que $r_{+} = R_{+}$ e $r_{-} = R_{-}$ ($R_{-} = R_{+} = \rho(\tau)$), por

continuidade da métrica), as equações (140) e (141) se reduzem a

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi G} \left(\frac{1}{\rho(\tau)} \sqrt{f_+ + \dot{\rho}^2} - \frac{1}{\rho(\tau)} \sqrt{f_- + \dot{\rho}^2} \right), \quad (142)$$

$$p = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{f'_+ + 2\ddot{\rho}}{2\sqrt{f_+ + \dot{\rho}^2}} - \frac{f'_- + 2\ddot{\rho}}{2\sqrt{f_- + \dot{\rho}^2}} + \frac{1}{\rho(\tau)} \sqrt{f_+ + \dot{\rho}^2} - \frac{1}{\rho(\tau)} \sqrt{f_- + \dot{\rho}^2} \right). \quad (143)$$

que é exatamente o resultado obtido pelos autores da referência (Mazharimousavi; Halilsoy; Amen, 2017).

Se a casca estiver em equilíbrio estático, ou seja, $\rho(\tau) = r_{\pm}(R_{\pm}) = \rho_0$ teremos $\dot{R}_{\pm} = \ddot{R}_{\pm} = 0$, logo as equações acima resultam em

$$\sigma_0 = -\frac{1}{4\pi G} \left(\frac{r'_+}{\rho_0} \sqrt{f_+} - \frac{r'_-}{\rho_0} \sqrt{f_-} \right), \quad (144)$$

$$p_0 = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{f'_+}{2\sqrt{f_+}} - \frac{f'_-}{2\sqrt{f_-}} + \frac{r'_+}{\rho_0} \sqrt{f_+} - \frac{r'_-}{\rho_0} \sqrt{f_-} \right). \quad (145)$$

É importante notar que tanto a pressão quanto a densidade das configurações de equilíbrio ficam determinadas pelas equações de Einstein e as condições de junção. No entanto, tais quantidades estão relacionadas ainda pela equação de estado, determinada pela microfísica.

Além destas equações também devemos ter a lei de conservação do tensor energia momento da casca, que nos diz que

$$\nabla_a \bar{t}^a_b = \partial_a \bar{t}^a_b + \Gamma^a_{aj} \bar{t}^j_b - \Gamma^j_{ab} \bar{t}^a_j = 0, \quad (146)$$

em que na primeira igualdade utilizamos a definição de derivada covariante, dada por (5). Utilizando a métrica (101), o tensor-energia momento (115) e levando em conta que $\sigma = \sigma(\tau)$ e $p = p(\tau)$ a equação (146) resulta em (Visser, 1996)

$$\dot{\sigma} + 2\frac{\dot{\rho}}{\rho}(p + \sigma) = 0. \quad (147)$$

Outra relação que devemos considerar, como dito anteriormente, é a equação de estado. Vamos supor uma equação de estado do tipo

$$p = p(\sigma), \quad (148)$$

logo, utilizando a equação (148) na equação (147)

$$\dot{\sigma} + 2\frac{\dot{\rho}}{\rho}(p(\sigma) + \sigma) = 0. \quad (149)$$

Para fazer o estudo da estabilidade devemos encontrar a equação (140) em termos apenas de R_+ ou R_- . Para isso, utiliza-se a equação (106) que nos diz que

$$r_{\pm} = \rho(\tau), \quad (150)$$

ou seja,

$$r_+ = r_-. \quad (151)$$

Derivando a equação (151) em relação a τ , lembrando que $r_{\pm} = r_{\pm}(R_{\pm})$

$$\dot{R}_- = \frac{r'_+}{r'_-} \dot{R}_+. \quad (152)$$

Com as equações (150), (151) e (152), sendo conhecida a função $r_{\pm}(R_{\pm})$, a priori é possível obter uma equação para a densidade de energia dependente apenas de R_+ , R_- ou $\rho(\tau)$.

Supondo que tenhamos escolhido escrever a densidade de energia em termos de R_+ , por meio da equação (140) pode-se isolar o termo \dot{R}_+^2 para obter uma equação de movimento radial para a casca na forma

$$\dot{R}_+^2 + V(R_+, \sigma(R_+)) = 0, \quad (153)$$

em que $V(R_+, \sigma(R_+))$ é o potencial da casca.

Agora devemos ter um pouco de cuidado. A equação de movimento acima ainda não está escrita explicitamente, tendo em vista que a coordenada R_+ depende de τ na forma $R(t(\tau))$. Consequentemente,

$$\dot{R}_+^2 = \left(\frac{dR_+}{dt} \right)^2 t^2, \quad (154)$$

utilizando a equação (108) na equação (154)

$$\dot{R}_+^2 = \left(\frac{dR_+}{dt} \right)^2 f_+^{-2} \left(f_+^{-1} + \dot{R}_+^2 \right), \quad (155)$$

isolando o termo \dot{R}_+^2 ficamos com

$$\dot{R}_+^2 = \frac{f_+ R_{t_+}^2}{f_+^2 - R_{t_+}^2}, \quad (156)$$

em que $R_{t_+} = \frac{dR_+}{dt}$. Logo, substituindo a equação (156) na equação (153) teremos

$$\frac{f_+ R_{t_+}^2}{f_+^2 - R_{t_+}^2} + V(R_+, \sigma(R_+)) = 0. \quad (157)$$

Multiplicando a equação (157) por $f_+^2 - R_{t_+}^2$ e juntando termos, ficamos com

$$R_{t_+}^2 + \frac{f_+^2}{f_+ - V(R_+, \sigma(R_+))} V(R_+, \sigma(R_+)) = 0. \quad (158)$$

Logo, tomando

$$V_1(R_+, \sigma(R_+)) = \frac{f_+^2}{f_+ - V(R_+, \sigma(R_+))} V(R_+, \sigma(R_+)), \quad (159)$$

a equação de movimento da casca será

$$R_{t_+}^2 + V_1(R_+, \sigma(R_+)) = 0. \quad (160)$$

A equação (149) junto da (160) descrevem o movimento completo da casca. Ou seja, tendo solucionado a equação (149) pode-se substituir na equação (153) e resolvendo a equação de movimento resultante, pode-se obter a solução geral para a dinâmica da casca (Mazharimousavi; Halilsoy; Amen, 2017). Porém, note que a equação (160) é uma equação unidimensional não linear, conseqüentemente é difícil obter uma solução analítica completa para o raio da casca em função de t .

Por conta desta dificuldade, para resolver a equação de movimento vamos trabalhar com a versão linearizada da equação. Para linearizar as equações deve-se expandir em série de Taylor o potencial $V(R_+, \sigma(R_+))$ em torno do raio de equilíbrio R_{+0} , de tal forma que $r_+(R_{+0}) = \rho_0$

$$V_1(R_+, \sigma) = V_1(R_{+0}, \sigma_0) + \left. \frac{dV_1}{dR_+} \right|_{R_+=R_{+0}} (R_+ - R_{+0}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V_1}{dR_+^2} \right|_{R_+=R_{+0}} (R_+ - R_{+0})^2 + \dots \quad (161)$$

em que teremos

$$\begin{aligned} V_1(R_{+0}, \sigma_0) &= 0 \\ \left. \frac{dV_1}{dR_+} \right|_{R_+=R_{+0}} &= 0. \end{aligned} \quad (162)$$

A primeira linha da equação (162) é devido ao fato de que R_{+0} é o raio de equilíbrio, ou seja, $\dot{R}_+ = 0$, logo, pela equação (153) deveremos ter $V(R_{+0}, \sigma_0) = 0$. A segunda linha é devido ao fato de que no equilíbrio não temos uma força resultante sobre a casca.

Vamos chamar $R_+ - R_{+0} = x$, com isso a equação (153) será escrita na forma

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = 0, \quad (163)$$

em que $\omega^2 = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V_1}{dR_+^2} \right|_{R_+=R_{+0}}$. Derivando a equação (163) em relação a τ teremos

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (164)$$

Esta é a equação de um oscilador harmônico. Teremos que se $\omega^2 > 0$ o raio da casca oscilará em torno do ponto de equilíbrio R_{+0} ($x = 0$), por outro lado, se $\omega^2 < 0$ teremos instabilidade. Ou seja, teremos equilíbrio estável quando

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d^2V_1}{dR_+^2} \right|_{R_+=R_{+0}} > 0. \quad (165)$$

e instável quando

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d^2V_1}{dR_+^2} \right|_{R_+=R_{+0}} < 0. \quad (166)$$

Logo, para estudar a estabilidade devemos encontrar V_1'' . Para isto, basta derivar duas vezes o potencial que aparece na equação (153), em relação a coordenada R_+ , para obter uma relação na forma

$$V_1'' = V_1''(R_+, \sigma, \sigma', \sigma''). \quad (167)$$

Podemos obter σ' e σ'' por meio da equação de conservação (149), que ao considerar $\sigma = \sigma(R_+)$ e levar em conta que $\rho = r_+$ e $\dot{R} = r'_+ \dot{R}_+$, pode ser escrita como

$$\sigma' \dot{R}_+ + 2 \dot{R}_+ \frac{r'_+}{r_+} \dot{R}_+ (p(\sigma) + \sigma) = 0. \quad (168)$$

Dividindo a equação (168) por \dot{R}_+ e isolando σ'

$$\sigma' = -2 \frac{r'_+}{r_+} (p(\sigma) + \sigma). \quad (169)$$

Derivando a expressão (169) em termos de R_+

$$\sigma'' = -2 \left(\left[\frac{r''_+}{r_+} - \frac{r'_+}{r_+^2} \right] (p(\sigma) + \sigma) + \frac{r'_+}{r_+} \sigma' [\Omega + 1] \right), \quad (170)$$

em que $\Omega = \frac{dp}{d\sigma}$. Substituindo a equação (169) na equação acima e apenas evidenciando o termo $p(\sigma) + \sigma$ ficamos com

$$\sigma'' = -2(p(\sigma) + \sigma) \left(\left[\frac{r''_+}{r_+} - \frac{r'_+}{r_+^2} \right] - 2 \left(\frac{r'_+}{r_+} \right)^2 [\Omega + 1] \right). \quad (171)$$

Logo, dadas as geometrias da região \mathcal{M}^- e \mathcal{M}^+ e dada uma equação de estado, é possível estudar a estabilidade da casca por meio da equação (167), em que as derivadas da densidade de energia são dadas por (169) e (171). Este estudo é feito tomando $V_1'' = 0$ e isolando o fator $\Omega = \frac{dp}{d\sigma}$. Além desta quantidade, teremos outra que virá da equação de estado para a matéria sobre a casca. Desta equação de estado podemos obter um $\Omega_e = \frac{dp}{d\sigma}$. Graficando as equações de Ω e Ω_e , caso $V_1'' = 0$ seja na forma $A + B\Omega = 0$, sendo $B > 0$ (o que de fato ocorreu nos casos estudados), teremos equilíbrio estável se $\Omega < \Omega_e$ ($V_1'' > 0$) e instável se $\Omega > \Omega_e$ ($V_1'' < 0$) (Bergliaffa; Chiapparini; Reyes, 2020).

No próximo capítulo vamos analisar uma teoria alternativa à TRG, que é conhecida como teoria escalar-tensorial. Nela iremos estudar a estabilidade de uma casca para uma colagem particular.

3 TEORIAS ESCALARES-TENSORIAIS

As teorias escalares-tensoriais (TET) são teorias alternativas à TRG. Nelas, a gravitação além de ser mediada por meio da métrica $g_{\mu\nu}$, também é mediada por um campo escalar $\phi(x^\mu)$. Este tipo de teoria normalmente é apresentada em dois referenciais distintos. O primeiro é o referencial de Jordan, e o segundo o referencial de Einstein. Ambos os referenciais estão correlacionados por meio de uma transformação conforme, como veremos. Neste capítulo estaremos interessados em uma teoria escalar-tensorial simples (Tsuchida; Kawamura; Watanabe, 1998), cuja ação, no referencial de Jordan, é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right) d^4x + S_m[\psi_m, g_{\mu\nu}], \quad (172)$$

sendo ϕ um campo escalar, $\omega(\phi)$ uma função arbitrária adimensional, ψ_m os campos de matéria e S_m a ação dos campos de matéria.

Nesta teoria iremos estudar as condições de junção e a estabilidade de uma shell, no referencial de Einstein ², realizando uma colagem entre o espaço-tempo de Minkowski e a solução de vácuo da teoria, obtida no artigo (Tsuchida; Kawamura; Watanabe, 1998). Vamos demonstrar que, devido às condições utilizadas na resolução do problema, algumas das equações que iremos utilizar para a teoria escalar-tensorial terão a mesma forma que as equações da TRG.

3.1 Teorias métricas

Antes de passarmos para o estudo da teoria escalar-tensorial, vamos definir uma classe de teorias, a qual esta teoria alternativa faz parte, conhecida como teorias métricas. Uma teoria é dita métrica quando satisfaz as seguintes propriedades (Will, 2014)

1. O espaço-tempo é dotado de uma métrica simétrica.
2. As trajetórias seguidas por uma partícula teste em queda livre são geodésicas desta métrica.
3. A física não gravitacional de referenciais locais em queda livre é a mesma da TRR.

² A escolha deste referencial foi realizada, tendo em vista que nele as equações são mais simples e os resultados vão independer do referencial, tendo em vista que iremos calcular quantidades adimensionais.

Como comentamos no capítulo de relatividade geral, se o PEE é válido, a gravidade pode ser descrita por meio de um espaço-tempo curvo. Como uma consequência deste argumento, as teorias que englobam completamente o PEE são as teorias métricas (Will, 2014). Como o PEE é bem testado experimentalmente (Will, 2014), esta classe de teorias são candidatas viáveis para a explicação da natureza. Como exemplo de teoria métrica temos a TRG e a teoria de Brans-Dicke e suas generalizações (Brans; Dicke, 1961) (Felice; Tsujikawa, 2018).

3.2 Teorias escalares-tensoriais no referencial de Jordan

Vamos obter as equações de movimento desta teoria no referencial de Jordan. Para isso, vamos generalizar a ação (172) na forma (Fujii; Maeda, 2003)

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} (F(\phi)R - Z(\phi)g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}) d^4x + S_m[\psi_m, g_{\mu\nu}]. \quad (173)$$

Para obter as equações de movimento devemos fazer a variação em relação aos campos da teoria, ou seja, em relação à métrica e ao campo escalar. Variando a equação (173) em relação a métrica $g^{\mu\nu}$ e utilizando o princípio da mínima ação, devemos ter

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \delta \left[\int \sqrt{-g} (F(\phi)R - Z(\phi)g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}) d^4x + S_m[\psi_m, g_{\mu\nu}] \right] = 0. \quad (174)$$

em que δ indica a variação em relação a métrica $g^{\mu\nu}$.

Vamos separar o cálculo em 3 partes, omitindo a integração

$$(\delta S)_1 = \delta [\sqrt{-g}F(\phi)R], \quad (175)$$

$$(\delta S)_2 = -\delta [\sqrt{-g}Z(\phi)g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}], \quad (176)$$

$$(\delta S)_3 = \delta S_m[\psi_m, g_{\mu\nu}]. \quad (177)$$

Começando pelo mais simples, por definição

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m[\psi_m, g_{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (178)$$

consequentemente, a equação (177) será dada por

$$(\delta S)_3 = -\frac{\sqrt{-g}}{2} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (179)$$

Utilizando a propriedade de derivada funcional do produto, teremos que o termo (176) será

$$(\delta S)_2 = -Z(\phi) [(\delta\sqrt{-g})g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}]. \quad (180)$$

A variação do primeiro termo da equação (180) já calculamos no capítulo de relatividade geral. Logo, substituindo a equação (56) na primeira parte da equação (180), ficaremos com

$$(\delta S)_2 = -Z(\phi)\sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (181)$$

Resta agora calcular a parte (175). Fazendo da mesma forma que fizemos na TRG, vamos escrever $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, logo

$$(\delta S)_1 = F(\phi) [(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})]. \quad (182)$$

Note que o primeiro e o segundo termo da relação (182) diferem da TRG apenas pelo fator $F(\phi)$, logo podemos utilizar o resultado obtido da relatividade

$$F(\phi) [(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}] = F(\phi)\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (183)$$

O último termo da equação (182) será diferente da TRG, pois agora devemos levar em conta o acoplamento não mínimo $F(\phi)$ que depende das coordenadas. Utilizando a conta já feita na equação (44), teremos que o último termo de (182) será,

$$F(\phi)\sqrt{-g}\nabla_\lambda [g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - g^{\lambda\beta}(\delta\Gamma^\rho_{\rho\beta})]. \quad (184)$$

Integrando (184) por partes, ou seja, reescrevendo-o, teremos

$$\nabla_\lambda (F(\phi)\sqrt{-g} [g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - g^{\lambda\beta}(\delta\Gamma^\rho_{\rho\beta})]) - \sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi) [g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - g^{\lambda\beta}(\delta\Gamma^\rho_{\rho\beta})]. \quad (185)$$

Note que o primeiro termo acima é uma integração sobre todo o volume do espaço-tempo da divergência de um vetor. Lançando mão, portanto, do teorema de Stokes, teremos que este termo equivale a uma integração sobre a superfície que define este volume, mas geralmente no princípio variacional consideramos a variação como sendo nula nesta superfície (Lemos, 2007), ou seja, podemos eliminar o primeiro termo para ficarmos com

$$-\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi) [g^{\mu\nu} (\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - g^{\lambda\beta} (\delta\Gamma^\rho_{\rho\beta})] \quad (186)$$

Pode-se mostrar que, em termos da métrica (Carroll, 2004),

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} [g_{\alpha\mu} \nabla_\nu(\delta g^{\alpha\lambda}) + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu(\delta g^{\alpha\lambda}) - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\beta})] ,$$

logo, substituindo isto na equação (186)

$$-\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi) \left[\left(-\frac{g^{\mu\nu}}{2} [g_{\alpha\mu} \nabla_\nu(\delta g^{\alpha\lambda}) + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu(\delta g^{\alpha\lambda}) - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\beta})] \right) - g^{\lambda\beta} \left(-\frac{1}{2} [g_{\alpha\rho} \nabla_\beta(\delta g^{\alpha\rho}) + g_{\alpha\beta} \nabla_\rho(\delta g^{\alpha\rho}) - g_{\rho\alpha} g_{\beta\gamma} \nabla^\rho(\delta g^{\alpha\gamma})] \right) \right] . \quad (187)$$

Utilizando a propriedade de levantamento e abaixamento de índices da métrica e juntando termos, a equação acima será

$$-\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi) \left[\left(-\frac{1}{2} [2\nabla_\alpha(\delta g^{\alpha\lambda}) - g_{\alpha\beta} \nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\beta})] \right) - \left(-\frac{1}{2} [g_{\alpha\rho} \nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\rho}) + g^{\lambda\beta} g_{\alpha\beta} \nabla_\rho(\delta g^{\alpha\rho}) - g^{\lambda\beta} g_{\rho\alpha} g_{\beta\gamma} \nabla^\rho(\delta g^{\alpha\gamma})] \right) \right] .$$

Note que o segundo termo da equação acima se somará com o terceiro termo, com isso teremos

$$-\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi) \left[\left(-\frac{1}{2} [2\nabla_\alpha(\delta g^{\alpha\lambda})] + g_{\alpha\beta} \nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\beta}) \right) - \left(-\frac{1}{2} [g^{\lambda\beta} g_{\alpha\beta} \nabla_\rho(\delta g^{\alpha\rho}) - g^{\lambda\beta} g_{\rho\alpha} g_{\beta\gamma} \nabla^\rho(\delta g^{\alpha\gamma})] \right) \right] . \quad (188)$$

Agora devemos integrar por partes todos os termos acima. Integrando por partes o primeiro termo teremos

$$\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi) (\nabla_\alpha(\delta g^{\alpha\lambda})) = -\sqrt{-g}\nabla_\alpha \nabla_\lambda F(\phi) (\delta g^{\alpha\lambda}) . \quad (189)$$

O segundo termo da equação (188) será

$$\begin{aligned} -\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi)g_{\alpha\beta}\nabla^\lambda(\delta g^{\alpha\beta}) &= -\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi)\nabla^\lambda(g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}) \\ &= \sqrt{-g}\square F(\phi)g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (190)$$

em que na primeira linha utilizamos a compatibilidade da métrica e na segunda linha integramos por partes. Fazendo este mesmo procedimento com o terceiro termo de (188)

$$\begin{aligned} -\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi)\frac{1}{2}g^{\lambda\beta}g_{\alpha\beta}\nabla_\rho(\delta g^{\alpha\rho}) &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi)\nabla_\rho(g^{\lambda\beta}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\rho}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\nabla_\rho\nabla_\lambda F(\phi)g^{\lambda\beta}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\rho} \end{aligned} \quad (191)$$

Reescrevendo o termo acima teremos

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\nabla_\rho\nabla_\lambda F(\phi)g^{\lambda\beta}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\rho} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\nabla_\rho\nabla_\alpha F(\phi)\delta g^{\alpha\rho}. \quad (192)$$

O quarto e último termo de (188) será dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi)g^{\lambda\beta}g_{\rho\alpha}g_{\beta\gamma}\nabla^\rho(\delta g^{\alpha\gamma}) &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\nabla_\lambda F(\phi)\nabla_\alpha(g^{\lambda\beta}g_{\beta\gamma}(\delta g^{\alpha\gamma})) \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\nabla_\alpha\nabla_\gamma F(\phi)\delta g^{\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (193)$$

Logo, somando (189), (190), (192) e (193) teremos (note que (192) e (193) se cancelam)

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu}) = -\sqrt{-g}\nabla_\alpha\nabla_\lambda F(\phi)(\delta g^{\alpha\lambda}) + \sqrt{-g}\square F(\phi)g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \quad (194)$$

Substituindo as equações (183) e (194) na equação (182)

$$(\delta S)_1 = \sqrt{-g}\left[F(\phi)G_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)F(\phi)\right]\delta g^{\mu\nu}. \quad (195)$$

Utilizando as equações (179), (181) e (195) em (174) teremos que

$$\int \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi} [F(\phi)G_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu) F(\phi) - Z(\phi) \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} \right) - \frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (196)$$

Como $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário, esta equação acima só é satisfeita se (Lemos, 2007)

$$F(\phi)G_{\mu\nu} = - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu) F(\phi) + Z(\phi) \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} \right) + 8\pi T_{\mu\nu} . \quad (197)$$

A equação (197) é a equação de movimento da teoria em relação a métrica, que nada mais é do que a equação de Einstein modificada pela presença do campo escalar.

Vamos agora obter a equação de movimento relativa ao campo escalar. Para fazer a variação da ação (173) em relação ao campo escalar, vamos ir para o nível da lagrangeana e utilizar as equações de Euler-Lagrange, que são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) . \quad (198)$$

A densidade lagrangeana associada a ação (173) é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} (F(\phi)R - Z(\phi)g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}) .$$

Logo, utilizando a equação acima teremos que o lado esquerdo das equações de Euler-Lagrange será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{1}{16\pi} (F'(\phi)R - Z'(\phi)g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}) , \quad (199)$$

sendo $F' = \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}$ e $Z' = \frac{\partial Z(\phi)}{\partial \phi}$. Devemos agora eliminar o fator R da equação acima. Para isso, basta tomar o traço da equação (197) e isolar R , para obter

$$R = \frac{1}{F} [3\square F + Zg^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - 8\pi T] . \quad (200)$$

Substituindo a equação acima na equação (199) teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \frac{1}{16\pi} \left(\frac{F'}{F} [3\Box F + Zg^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - 8\pi T] - Z'g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \right) \\
&= \frac{3}{16\pi} \frac{F'}{F} \Box F + \frac{1}{16\pi} \left[\frac{F'Z}{F} - Z' \right] g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \frac{8\pi T}{16\pi}
\end{aligned} \tag{201}$$

em que na última igualdade apenas reorganizamos os termos.

O lado direito de (198) será

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) &= \frac{1}{16\pi} \partial_\mu [-Zg^{\alpha\beta} (\delta^\mu_\alpha \phi_{,\beta} + \phi_{,\alpha} \delta^\mu_\beta)] \\
&= -\frac{2}{16\pi} \partial_\mu [Z\phi^{;\mu}] \\
&= -\frac{2}{16\pi} [Z'g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + Z\Box\phi] ,
\end{aligned} \tag{202}$$

em que na segunda linha utilizamos a propriedade de levantamento de índices da métrica e na terceira linha utilizamos a derivada do produto e a regra da cadeia.

Logo, substituindo as equações (201) e (202) em (198) e isolando os termos que possuem o operador D'Alembertiano, ficaremos com a equação de movimento

$$3\frac{F'}{F}\Box F + 2Z\Box\phi - 8\pi T = - \left[Z' + \frac{F'Z}{F} \right] g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} . \tag{203}$$

Outra forma da equação de movimento para o campo ϕ que nos será útil em breve, é a obtida igualando as equações (199) e (202) e isolando $\Box\phi$

$$\Box\phi = -\frac{1}{2Z} (F'R + Z'g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}) \tag{204}$$

Para retornar à teoria em que estamos interessados, devemos tomar $F(\phi) = \phi$ e $Z(\phi) = \frac{\omega(\phi)}{\phi}$ nas equações (197) e (203). Fazendo isto, após um simples cálculo podemos obter as equações de movimento da teoria como sendo

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \Box\phi) + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right) + \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} , \tag{205}$$

$$\Box\phi = \frac{1}{3 + 2\omega(\phi)} \left(8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \right) . \tag{206}$$

Sabemos que na TRG o tensor energia-momento é conservado. Podemos nos perguntar se na teoria escalar-tensorial, cuja ação seja na forma geral (173), ainda teremos

esta conservação. Para responder esta questão vamos utilizar as equações de movimento. Tomando a divergência da equação (197), utilizando o fato de que $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ e reorganizando termos, teremos

$$8\pi\nabla^\mu T_{\mu\nu} = ([\nabla_\nu, \square] + G_{\mu\nu}\nabla^\mu) F - Z'\nabla^\mu\phi T_{\mu\nu}^\phi - Z\nabla^\mu T_{\mu\nu}^\phi, \quad (207)$$

em que

$$T_{\mu\nu}^\phi \equiv -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + \phi_{,\mu}\phi_{,\nu}, \quad (208)$$

e

$$[\nabla_\nu, \square]F \equiv (g_{\mu\nu}\nabla^\mu\square - \nabla^\mu\nabla_\mu\nabla_\nu)F. \quad (209)$$

Com os resultados obtidos no apêndice A (equações (395) e (398), respectivamente) teremos que

$$-Z\nabla^\mu T_{\mu\nu}^\phi = \frac{1}{2}(F'R - Z'g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta})\nabla_\nu\phi \quad (210)$$

$$[\nabla_\nu, \square]F = -R_{\lambda\nu}\nabla^\lambda F. \quad (211)$$

Logo, substituindo as equações (210) e (211) na equação (207) ficaremos com

$$8\pi\nabla^\mu T_{\mu\nu} = (-R_{\lambda\nu}\nabla^\lambda + G_{\mu\nu}\nabla^\mu)F - Z'\nabla^\mu\phi T_{\mu\nu}^\phi + \frac{1}{2}(F'R - Z'g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta})\nabla_\nu\phi. \quad (212)$$

Utilizando na equação (212) o fato de que $\nabla_\nu F = F'\nabla_\nu\phi$ (a menos de uma integral de superfície), junto da equação (208)

$$8\pi\nabla^\mu T_{\mu\nu} = (-R_{\lambda\nu}\nabla^\lambda\phi + G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi)F' - Z'\nabla^\mu\phi\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + \phi_{,\mu}\phi_{,\nu}\right) + \frac{1}{2}(F'R - Z'g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta})\nabla_\nu\phi, \quad (213)$$

Utilizando $\nabla^\mu\phi\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} = g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}\nabla_\nu\phi$ (a menos de uma integral de superfície) na equação (213) e juntando termos,

$$8\pi\nabla^\mu T_{\mu\nu} = - \left(R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}g_{\lambda\nu} \right) F' \nabla^\lambda \phi + G_{\mu\nu} F' \nabla^\mu \phi. \quad (214)$$

Logo, pela definição do tensor de Einstein (equação (26)) a equação (214) resultará em

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (215)$$

ou seja, a teoria escalar-tensorial representada no referencial de Jordan e cuja ação seja do tipo (173), manterá a conservação do tensor energia-momento assim como na TRG. Consequentemente, ela será uma teoria métrica. Na seção a seguir vamos estudar a TET no referencial de Einstein.

3.3 Referencial de Einstein

Outra forma comum de representar as teorias escalares tensoriais é por meio do referencial de Einstein. Para passarmos para este referencial é necessário realizar uma transformação conforme da métrica do referencial de Jordan (FJ), do tipo

$$g_{*\mu\nu} = \Omega^2(x^\mu)g_{\mu\nu}, \quad (216)$$

em que iremos representar as quantidades com índices * embaixo, como sendo definidas no FE e as sem, no FJ. Ou seja, $g_{*\mu\nu}$ será a métrica no FE e $g_{\mu\nu}$ no FJ. O fator $\Omega^2(x^\mu)$ é uma função arbitrária das coordenadas do espaço-tempo e está representada ao quadrado para evitar a mudança do sinal do elemento de linha.

Para obter a ação neste novo referencial, faz-se necessário entender como o escalar de Ricci e o determinante da métrica se comportam por meio da transformação (216). Pode-se mostrar, por meio de uma extensa conta que (Fujii; Maeda, 2003)

$$R = \Omega^2 (R_* + 6\Box_* f - 6g_*^{\mu\nu} f_\mu f_\nu), \quad (217)$$

e

$$\sqrt{-g} = \Omega^{-4} \sqrt{-g_*}, \quad (218)$$

em que $f = \ln(\Omega)$ e $f_\mu = \partial_\mu \ln(\Omega)$. Utilizando as equações (217) e (218) na ação (173),

que é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} (F(\phi)R - Z(\phi)g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}) d^4x + S_m[\psi_m, g_{\mu\nu}], \quad (219)$$

ficaremos com três termos na forma

$$\sqrt{-g}F(\phi)R = \sqrt{-g_*}F(\phi)\Omega^{-2} (R_* + 6\Box_*f - 6g_*^{\mu\nu}f_{,\mu}f_{,\nu}) \quad (220)$$

$$-\sqrt{-g}Z(\phi)g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} = -\sqrt{-g_*}Z(\phi)\Omega^{-2}g_*^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} \quad (221)$$

$$S_m[\psi_m, g_{\mu\nu}] = S_m[\psi_m, \Omega^{-2}g_{*\mu\nu}] \quad (222)$$

Como o fator $F(\phi)\Omega^{-2}$ é arbitrário, vamos toma-lo como sendo

$$F(\phi)\Omega^{-2} = \frac{1}{G_*}, \quad (223)$$

sendo G_* a constante gravitacional no FE, também chamada de constante gravitacional nua. Utilizando esta definição, teremos que

$$\begin{aligned} f &= \ln(\sqrt{F(\phi)G_*}) \\ f_{,\mu} &= \partial_{\mu}\sqrt{F(\phi)G_*} \\ &= \frac{1}{2}\frac{F'}{F}\phi_{,\mu} \end{aligned} \quad (224)$$

Substituindo as equações acima na equação (220) e levando em conta que o segundo termo de (220) irá ser nulo (por integração por partes) ficaremos com

$$\sqrt{-g}F(\phi)R = \frac{\sqrt{-g_*}}{G_*} \left(R_* - \frac{3}{2} \left(\frac{F'}{F} \right)^2 g_*^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} \right). \quad (225)$$

Substituindo a equação (223) na equação (221)

$$-\sqrt{-g}Z(\phi)g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} = -\sqrt{-g_*}\frac{Z}{F}g_*^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}. \quad (226)$$

Logo, somando as equações (225) e (226) e juntando termos, teremos

$$\sqrt{-g} (F(\phi)R - Z(\phi)g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}) = \frac{\sqrt{-g_*}}{G_*} \left[R_* - \frac{3}{2} \left[\left(\frac{F'}{F} \right)^2 + \frac{Z}{F} \right] g_*^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} \right]. \quad (227)$$

Agora, vamos definir

$$\Delta = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{F'}{F} \right)^2 + \frac{Z}{F} \right] > 0, \quad (228)$$

e redefinir o campo escalar na forma

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = \sqrt{\Delta}. \quad (229)$$

Com a redefinição acima teremos

$$\sqrt{\Delta}\partial_\mu\phi = \frac{d\varphi}{d\phi}\phi_{,\mu} = \varphi_{,\mu}. \quad (230)$$

Logo, com a relação acima, o segundo termo da equação (227) pode ser escrito como

$$2\Delta g_*^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} = 2g_*^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}. \quad (231)$$

Substituindo a equação acima na equação (227)

$$\sqrt{-g} (F(\phi)R - Z(\phi)g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}) = \frac{\sqrt{-g_*}}{G_*} (R_* - 2g_*^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}), \quad (232)$$

Utilizando (232) e (222) em (219), teremos que a ação no FE será dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G_*} \int \sqrt{-g_*} (R_* - 2g_*^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}) + S_m[\psi_m, \Omega^{-2}g_{*\mu\nu}]. \quad (233)$$

Variando a ação acima em relação aos campos $g_*^{\mu\nu}$ e φ , pode-se obter as equações de movimento (Tsuchida; Kawamura; Watanabe, 1998)

$$G_{*\mu\nu} = 8\pi G_* T_{*\mu\nu} + 2 \left(\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{*\mu\nu} g_*^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} \right), \quad (234)$$

$$\square_* \varphi = -4\pi G_* \alpha(\varphi) T_*, \quad (235)$$

em que $\alpha(\varphi)$ é conhecida como a intensidade de acoplamento e é dada por

$$\alpha^2(\varphi) = \left(-\frac{d \ln(\Omega)}{d\varphi} \right)^2. \quad (236)$$

Aplicando a regra da cadeia na equação acima, sendo $\Omega = \Omega(\phi)$, e utilizando as equações (228) e (229), obtemos

$$\alpha^2(\varphi) = \left(\frac{F'}{4F} \right) \left(\frac{3}{2} \left(\frac{F'}{F} \right)^2 + \frac{Z}{F} \right)^{-1}. \quad (237)$$

Ao utilizar $F(\phi) = \phi$ e $Z(\phi) = \frac{\omega(\phi)}{\phi}$ na equação acima, obtemos

$$\alpha^2(\varphi) = \frac{1}{3 + 2\omega(\phi)}. \quad (238)$$

Podemos nos perguntar se neste referencial o tensor energia-momento ainda é conservado. Para responder esta questão vamos calculá-lo. Tomando a divergência da equação (234) teremos

$$\nabla^\mu G_{*\mu\nu} = 8\pi G_* \nabla^\mu T_{*\mu\nu} + 2 \left((\square_* \varphi) \varphi_{,\nu} + \varphi_{,\mu} (\nabla^\mu \varphi_{,\nu}) - \frac{1}{2} \nabla_\nu (\varphi'^{\beta} \varphi_{,\beta}) \right). \quad (239)$$

Utilizando a equação (235) no primeiro termo da equação acima

$$(\square_* \varphi) \varphi_{,\nu} = -4\pi G_* \alpha(\varphi) T_* \varphi_{,\nu}. \quad (240)$$

O último termo da equação (239) será

$$-\frac{1}{2} \nabla_\nu (\varphi'^{\beta} \varphi_{,\beta}) = -\frac{1}{2} [(\nabla_\nu \varphi'^{\beta}) \varphi_{,\beta} + \varphi'^{\beta} (\nabla_\nu \varphi_{,\beta})] = -(\nabla_\nu \varphi'^{\beta}) \varphi_{,\beta} = -\varphi_{,\beta} (\nabla^\beta \varphi_{,\nu}), \quad (241)$$

em que na última igualdade utilizamos o resultado da equação (393) do apêndice A. Substituindo as equações (240) e (241) em (239) e utilizando o fato de que $\nabla^\mu G_{*\mu\nu} = 0$,

ficaremos com

$$0 = 8\pi G_* \nabla^\mu T_{*\mu\nu} - 8\pi G_* \alpha(\varphi) T_* \varphi_{,\nu} + \varphi_{,\mu} (\nabla^\mu \varphi_{,\nu}) - \varphi_{,\beta} (\nabla^\beta \varphi_{,\nu}). \quad (242)$$

Notando que os dois últimos termos do lado direito da equação acima se cancelam, teremos

$$\nabla^\mu T_{*\mu\nu} = \alpha(\varphi) T_* \varphi_{,\nu}. \quad (243)$$

Concluimos, portanto, que no FE o tensor energia-momento de matéria não necessariamente se conserva. Conseqüentemente, as teorias escalares-tensoriais não serão teorias métricas neste referencial. No entanto, como no FJ, que é o referencial original da teoria, ela é uma teoria métrica, dizemos que a TET é uma teoria métrica (Will, 2014).

Podemos perceber, olhando para a equação (233), que no referencial de Einstein não temos o acoplamento do campo escalar com o escalar de Ricci (por isso é dito referencial de Einstein) e o termo cinético do campo escalar é simplesmente o termo cinético da equação de Klein-Gordon. Estas características são grandes facilitadoras para realizar as mais diversas contas. Outro fato importante é que no FE a ação de matéria se acopla ao campo escalar, como podemos ver pelo último termo de (233). Este acoplamento resulta no fato de que partículas em queda livre nesse referencial não seguem geodésicas (Fujii; Maeda, 2003).

Note que obtivemos a ação (233) para funções $F(\phi)$ e $Z(\phi)$ arbitrárias, através da transformação conforme do referencial de Jordan para o de Einstein. A escolha destas funções não afeta a parte cinética e nem o acoplamento mínimo, no entanto, ela afeta diretamente o fator Ω (equação (223)), e a relação entre os campos escalares dos dois referenciais (equação (229)). Se utilizarmos as funções da teoria que estamos interessados, $F(\phi) = \phi$ e $Z(\phi) = \frac{\omega(\phi)}{\phi}$, as equações (223) e (229) resultam, respectivamente, em

$$\Omega^2 = G_* \phi, \quad (244)$$

$$\varphi = \int \sqrt{\frac{3}{2\phi} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2}} d\phi. \quad (245)$$

Vimos que o FE e o FJ possuem algumas características distintas, isto nos leva a questionar qual referencial é o referencial físico, ou seja, qual referencial nos leva a soluções que possam ser comparadas com experimentos. Esta questão ainda é muito discutida atualmente, tanto em teorias clássicas como em teorias quantizadas. Nas teorias clássicas, existem autores que defendem que ambos os referenciais são equivalentes e resultam em uma mesma física, tendo em vista que uma transformação conforme é apenas uma

transformação de escala e a física independe da escala (Postma; Volponi, 2014) (Chiba; Yamaguchi, 2013). Outros autores defendem que cada referencial resulta em uma física diferente, alguns argumentando a favor do referencial de Jordan (Will, 2018) e outros do referencial de Einstein (Faraoni; Gunzig, 1999). E ainda existe os que defendem que ambos os referenciais são complementares (Quiros *et al.*, 2013). Neste trabalho iremos realizar a colagem de espaços-tempos no referencial de Einstein e devido a adimensionalização que iremos fazer, vamos tornar os resultados independentes dos referenciais, se levarmos em conta que a transformação conforme é apenas uma mudança de escala. Na seção a seguir, é apresentada uma solução de vácuo das teorias escalares-tensoriais.

3.3.1 Solução de vácuo

Vamos agora apresentar uma solução de vácuo da TET no referencial de Einstein, cuja ação é dada por (233). Vamos supor um elemento de linha nas coordenadas de Just (χ), na forma (Tsuchida; Kawamura; Watanabe, 1998)

$$ds_*^2 = -e^{\gamma(x)} dt^2 + e^{-\gamma(x)} d\chi^2 + \alpha^2 e^{\lambda(x)-\gamma(x)} d\Omega^2, \quad (246)$$

em que $d\Omega = d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2$ (ϕ é o ângulo azimutal) e α é um fator com dimensão de comprimento. Utilizando a equação acima nas equações de campo (234) e (235), pode-se obter as seguintes equações (Tsuchida; Kawamura; Watanabe, 1998)

$$\gamma'' + \gamma'\lambda' = 0 \quad (247)$$

$$-\gamma'^2 + \gamma'\lambda' - \lambda'^2 + \gamma'' - 2\lambda'' = 4\varphi'^2 \quad (248)$$

$$2 + \alpha^2 e^\lambda (\gamma'\lambda' - \lambda'^2 + \gamma'' - \lambda'') = 0 \quad (249)$$

$$\varphi'' + \lambda'\varphi' = 0, \quad (250)$$

em que $\gamma' = \frac{d\gamma}{d\chi}$. Utilizando as equações (247), (249) e (250), os autores da referência (Tsuchida; Kawamura; Watanabe, 1998) obtiveram uma solução na forma

$$\alpha^2 e^{\lambda(x)} = \chi^2 - a\chi \quad (251)$$

$$e^{\gamma(x)} = \left(1 - \frac{a}{\chi}\right)^{\frac{b}{a}} \quad (252)$$

$$\varphi(\chi) = \varphi_0 + \frac{c}{a} \ln \left(1 - \frac{a}{\chi}\right), \quad (253)$$

sendo a , b e c constantes de integração e φ_0 o valor assintótico do campo escalar no infinito. Vale ressaltar que b está relacionado com a massa ADM na forma $b = 2m$.

Substituindo as três equações acima na equação (248), obtêm-se

$$a^2 - b^2 = 4c^2. \quad (254)$$

A relação entre a coordenada r de Schwarzschild e a coordenada χ de Just é (Tsuchida; Kawamura; Watanabe, 1998)

$$\alpha e^{\frac{\lambda(\chi) - \gamma(\chi)}{2}} = r = \chi \left(1 - \frac{a}{\chi}\right)^{\frac{a-b}{2a}}. \quad (255)$$

Nas coordenadas de Schwarzschild, teremos que a solução de vácuo será (Tsuchida; Kawamura; Watanabe, 1998)

$$ds_*^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\mu(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (256)$$

em que

$$e^{2\nu(r)} = \left(1 - \frac{a}{\chi(r)}\right)^{\frac{b}{a}}, \quad (257)$$

$$e^{2\mu(r)} = \left(1 - \frac{a}{\chi(r)}\right) \left(1 - \frac{a+b}{2\chi(r)}\right)^{-2}. \quad (258)$$

Mais adiante iremos estudar a colagem desta solução de vácuo com a solução de Minkowski. Para realizar esta colagem será necessário estudar os limites dos parâmetros χ , a e b , para implementá-los nos cálculos.

Teremos as seguintes condições:

1. Vamos supor que o parâmetro ' a ' não possa ser zero.
2. Para não alterar a forma da métrica (equação (252)) vamos tomar

$$a, b > 0. \quad (259)$$

3. Pelo fato da coordenada de Schwarzschild ser sempre maior do que zero, olhando para a equação (255), vemos que

$$\chi > 0. \quad (260)$$

Desta mesma relação entre as coordenadas, devemos ter

$$\chi \geq a. \quad (261)$$

4. Para satisfazer a equação (254) devemos garantir

$$a > b. \quad (262)$$

Na próxima seção vamos estudar as condições de junção nas TET's.

3.4 Condições de junção

Antes de passarmos para o estudo da colagem de espaços-tempos esfericamente simétricos, devemos estudar as condições de junção que devem ser satisfeitas nas TET's. Vamos obter estas condições no referencial de Einstein, pois será neste referencial em que iremos trabalhar.

Utilizando o mesmo método que utilizamos no capítulo 2 (iremos manter as mesmas notações), vamos supor que o espaço-tempo seja separado em duas regiões, \mathcal{M}^+ e \mathcal{M}^- por uma hipersuperfície Σ e que a métrica e o campo escalar possam ser escritos na forma (Avilés; Maeda; Martínez, 2020)³

$$g_{*\mu\nu} = \Theta(l)g_{*\mu\nu}^+ + \Theta(-l)g_{*\mu\nu}^-, \quad (263)$$

$$\varphi = \Theta(l)\varphi^+ + \Theta(-l)\varphi^-, \quad (264)$$

sendo as quantidades das regiões \mathcal{M}^+ e \mathcal{M}^- representadas respectivamente por índices + e -. Derivando as equações acima obtemos

³ A referência Avilés; Maeda; Martínez (2020) possui as condições de junção no FJ.

$$\begin{aligned}
g_{*\mu\nu,\rho} &= \Theta(l)g_{*\mu\nu,\rho}^+ + \Theta(-l)g_{*\mu\nu,\rho}^- + \epsilon\delta(l)[g_{*\mu\nu}]n_\rho, \\
\varphi_{,\rho} &= \Theta(l)\varphi_{,\rho}^+ + \Theta(-l)\varphi_{,\rho}^- + \delta(l)[\varphi]n_\rho,
\end{aligned} \tag{265}$$

em que os colchetes indicam descontinuidade, como apresentado na equação (75) e $\epsilon = 1$ para hipersuperfície do tipo tempo e $\epsilon = -1$ para hipersuperfície do tipo espaço.

Podemos perceber que ao utilizarmos as equações (265) na equação de movimento (234) teremos termos proporcionais a $\delta(l)\theta(l)$, que não são bem definidos. Logo para eliminá-los devemos tomar

$$[g_{*\mu\nu}] = 0, \tag{266}$$

$$[\varphi] = 0, \tag{267}$$

ou seja, assim como na TRG, na TET no FE a primeira condição de junção nos diz que devemos ter a continuidade da métrica sobre a shell e além disso devemos ter a continuidade do campo escalar. Utilizando as equações (266) e (267) nas equações (265), teremos

$$g_{*\mu\nu,\rho} = \Theta(l)g_{*\mu\nu,\rho}^+ + \Theta(-l)g_{*\mu\nu,\rho}^-, \tag{268}$$

$$\varphi_{,\rho} = \Theta(l)\varphi_{,\rho}^+ + \Theta(-l)\varphi_{,\rho}^-, \tag{269}$$

A segunda condição de junção pode ser obtida, da mesma forma que na TRG, substituindo as equações (263), (264), (268) e (269) nas equações de movimento (234) e (235) e tomando os termos proporcionais ao delta de Dirac, ou seja, as quantidades que estão sobre a shell. Vamos realizar este cálculo em partes. Primeiramente, note que ao substituir (268) e (263) no lado esquerdo da equação (234), como vimos na equação (96), teremos

$$\bar{G}_{*\mu\nu} = -\epsilon ([k_{\mu\nu}] + h_{\mu\nu}[k]), \tag{270}$$

em que a notação com barra em cima indica termo proporcional à $\delta(l)$. Supondo um tensor energia-momento na forma

$$T_{*\mu\nu} = \Theta(l)T_{*\mu\nu}^+ + \Theta(-l)T_{*\mu\nu}^- + \delta(l)\bar{t}_{*\mu\nu}, \tag{271}$$

e levando em conta que o segundo termo do lado direito da equação (234), ao substituírmos (263) e (269), não resultará em nenhum termo proporcional à $\delta(l)$, logo os termos proporcionais à $\delta(l)$ na equação (234) resultarão em

$$-\frac{\epsilon}{8\pi G_*} ([k_{\mu\nu}] + h_{\mu\nu}[k]) = \bar{t}_{*\mu\nu}. \quad (272)$$

Note que a equação (272) possui a mesma forma que a da TRG (equação (98)), sendo diferente apenas pelo fato de que agora teremos G_* ao invés de G . Ainda teremos mais uma condição além dessa, devido ao fato de que na TET temos também uma equação para o campo escalar, a equação (235). Derivando a segunda linha da equação (265) teremos

$$\nabla_\nu \varphi_{,\rho} = \Theta(l) \nabla_\nu \varphi_{,\rho}^+ + \Theta(-l) \nabla_\nu \varphi_{,\rho}^- + \epsilon \delta(l) M n_\nu n_\rho, \quad (273)$$

em que

$$M = \epsilon n^\mu [\varphi_{,\mu}]. \quad (274)$$

Pela equação (273) podemos obter

$$\square_* \varphi = \Theta \square_* \varphi^+ + \Theta \square_* \varphi^- + \delta(l) M. \quad (275)$$

Portanto, substituindo (271) e (275) em (235), teremos que os termos proporcionais à delta resultarão em

$$M = -4\pi G_* \alpha(\varphi) \bar{t}_*. \quad (276)$$

Substituindo a equação acima em (274)

$$[\varphi_{,\mu}] = -4\pi G_* n_\mu \alpha(\varphi) \bar{t}_*. \quad (277)$$

Note que para não haver descontinuidade da derivada do campo escalar, basta o traço de $\bar{t}_{\mu\nu}$ ser nulo (equação (277)).

As equações (272) e (277) são as segundas condições de junção da TET no referencial de Einstein. Estas duas condições nos dizem que se houver descontinuidade na

curvatura extrínseca e ou na derivada do campo escalar, necessariamente devemos ter matéria na shell.

3.5 Compacidade

Além de estudar a estabilidade de uma casca esfericamente simétrica e do tipo tempo, iremos estudar a compacidade (C) das configurações de equilíbrio, que é dada por

$$C = \frac{2m}{\rho}, \quad (278)$$

em que m é a massa ADM e ρ o raio da casca.

Por meio da equação (255) (relação de γ e λ com a coordenada de Schwarzschild r), definida no FE, realizando uma transformação conforme $g_{\mu\nu} = \Omega^{-2}g_{*\mu\nu}$, teremos

$$\rho = \alpha^2 \Omega^{-2} e^{\lambda(\chi) - \gamma(\chi)}. \quad (279)$$

Supondo $\Omega^{-1} = e^{\frac{1}{2}\beta\varphi^2}$, apenas porque é o segundo em dificuldade (o primeiro é o de Brans-Dicke $\Omega^{-1} = e^{\alpha_0\varphi}$), e utilizando a última igualdade da equação (255) junto da equação (253) na equação acima, concluímos que

$$\rho = \chi^2 \left(1 - \frac{a}{\chi}\right)^{\frac{a-b}{a}} e^{\beta[\varphi_0 + \frac{\epsilon}{a} \ln(1 - \frac{a}{\chi})]^2}. \quad (280)$$

Logo, substituindo a expressão acima na equação (278) e utilizando o fato de que $b = 2m$, teremos que a compacidade será dada por

$$C = \frac{b}{\chi} \left(1 - \frac{a}{\chi}\right)^{\frac{b-a}{2a}} e^{-\frac{1}{2}\beta[\varphi_0 + \frac{\epsilon}{a} \ln(1 - \frac{a}{\chi})]^2}. \quad (281)$$

Mais adiante iremos utilizar a equação acima para obter a compacidade das configurações de equilíbrio para uma colagem específica.

3.6 Dinâmica da shell

Note que a primeira parte da segunda condição de junção da TET no referencial de Einstein (equação (272)) possui a mesma forma que a da TRG (equação (98)). Consequentemente, retornando ao tópico em que falamos sobre a dinâmica da shell na TRG, podemos perceber que as equações para σ e p no referencial de Einstein permanecerão idênticas, no caso de geometrias esfericamente simétricas (equações (140) e (141), respectivamente). Elas são dadas por

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{1}{4\pi G} \left(\frac{r_+ r'_+}{R^2} \sqrt{f_+ + \dot{R}_+^2} - \frac{r_- r'_-}{R^2} \sqrt{f_- + \dot{R}_-^2} \right), \\ p &= \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{f'_+ + 2\ddot{R}_+}{2\sqrt{f_+ + \dot{R}_+^2}} - \frac{f'_- + 2\ddot{R}_-}{2\sqrt{f_- + \dot{R}_-^2}} + \frac{r_+ r'_+}{R^2} \sqrt{f_+ + \dot{R}_+^2} - \frac{r_- r'_-}{R^2} \sqrt{f_- + \dot{R}_-^2} \right),\end{aligned}\quad (282)$$

A possível diferença que teremos em relação a TRG, no que diz respeito a dinâmica da shell na TET no FE, é com relação a lei de conservação do tensor energia-momento sobre a hipersuperfície. Teremos que, se este tensor energia-momento se conservar e a equação de conservação for dada por (147), as equações da dinâmica para σ' e σ'' , que vimos na TRG, serão válidas na mesma forma na TET. Por outro lado, se não houver conservação teremos uma alteração nestas equações. Portanto, faz-se necessário estudar a lei de conservação da matéria sobre a shell na TET.

Reescrevendo a equação de movimento (234) teremos

$$G_{*\mu\nu} = 8\pi G_* T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu(\varphi)}, \quad (284)$$

sendo $T_{\mu\nu(\varphi)}$ o tensor energia-momento do campo escalar dado por

$$T_{\mu\nu(\varphi)} = 2 \left(\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{*\mu\nu} g_*^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} \right). \quad (285)$$

Tomando a divergência da equação (284) e utilizando o fato de que $\nabla^\mu G_{*\mu\nu} = 0$ (Barrabès; Bressange, 1997), teremos

$$8\pi G_* \nabla^\mu T_{\mu\nu} + \nabla^\mu T_{\mu\nu(\varphi)} = 0. \quad (286)$$

Expandindo os tensores energia-momento na forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \theta(l)T_{\mu\nu}^+ + \theta(-l)T_{\mu\nu}^- + \delta(l)\bar{t}_{\mu\nu} \\ T_{\mu\nu(\varphi)} &= \theta(l)T_{\mu\nu(\varphi)}^+ + \theta(-l)T_{\mu\nu(\varphi)}^- + \delta(l)\bar{t}_{\mu\nu(\varphi)}, \end{aligned} \quad (287)$$

e substituindo a equação (287) em (286)

$$\begin{aligned} 8\pi G_* \left[n^\mu \delta(l)T_{\mu\nu}^+ - n^\mu \delta(l)T_{\mu\nu}^- + \delta'(l)n^\mu \bar{t}_{\mu\nu} + \delta(l)\nabla^\mu \bar{t}_{\mu\nu} + \theta(l)\nabla^\mu T_{\mu\nu}^+ \right. \\ \left. + \theta(-l)\nabla^\mu T_{\mu\nu}^- \right] + \left[n^\mu \delta(l)T_{\mu\nu(\varphi)}^+ - n^\mu \delta(l)T_{\mu\nu(\varphi)}^- + \delta'(l)n^\mu \bar{t}_{\mu\nu(\varphi)} \right. \\ \left. + \delta(l)\nabla^\mu \bar{t}_{\mu\nu(\varphi)} + \theta(l)\nabla^\mu T_{\mu\nu(\varphi)}^+ + \theta(-l)\nabla^\mu T_{\mu\nu(\varphi)}^- \right] = 0, \end{aligned} \quad (288)$$

em que $\delta'(l) = \frac{d\delta}{dl}$. Juntando termos proporcionais a θ , δ e δ' ficamos com

$$\begin{aligned} \theta(l) \left(\nabla^\mu T_{\mu\nu}^+ + \nabla^\mu T_{\mu\nu(\varphi)}^+ \right) + \theta(-l) \left(\nabla^\mu T_{\mu\nu}^- + \nabla^\mu T_{\mu\nu(\varphi)}^- \right) + \delta \left(n^\mu [T_{\mu\nu}] \right. \\ \left. + n^\mu [T_{\mu\nu(\varphi)}] + \nabla^\mu \bar{t}_{\mu\nu} + \nabla^\mu \bar{t}_{\mu\nu(\varphi)} \right) + \delta' n^\mu \left(\bar{t}_{\mu\nu} + \bar{t}_{\mu\nu(\varphi)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (289)$$

Os termos proporcionais a δ nos dizem que

$$n^\mu [T_{\mu\nu}] + n^\mu [T_{\mu\nu(\varphi)}] + \nabla^\mu \bar{t}_{\mu\nu} + \nabla^\mu \bar{t}_{\mu\nu(\varphi)} = 0. \quad (290)$$

Os termos proporcionais à δ' nos dizem que

$$n^\mu \left(\bar{t}_{\mu\nu} + \bar{t}_{\mu\nu(\varphi)} \right) = 0. \quad (291)$$

A equação (290) estabelece a lei de conservação do tensor energia-momento total sobre a shell. Já a equação (291) nos diz que a projeção do tensor energia-momento total sobre a shell na direção do vetor normal é nula, ou seja, apenas nos diz que de fato o tensor energia-momento está sobre a shell, como esperado. Analisando a equação (290) podemos perceber que em princípio esta equação não terá um resultado igual que a equação (147), no entanto, veremos que no caso particular em que iremos estudar isto ocorrerá.

3.7 Colagem de Minkowski com a solução de vácuo

Agora estamos prontos para estudar a colagem de dois espaços-tempos esfericamente simétricos na TET, com uma hipersuperfície do tipo tempo. Vamos colar o espaço-

tempo de Minkowski, espaço-tempo interior (\mathcal{M}^-), com o espaço-tempo do exterior \mathcal{M}^+ , que é solução de vácuo da TET no FE, dado pela equação (246). Neste problema teremos os seguintes elementos de linha

$$ds_-^2 = -d\tau^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (292)$$

$$ds_+^2 = -e^{\gamma(x)} dt^2 + e^{-\gamma(x)} d\chi^2 + \alpha^2 e^{\lambda(x)-\gamma(x)} d\Omega^2, \quad (293)$$

em que ds_-^2 é a geometria interior e ds_+^2 a geometria exterior.

Comparando as equações (292) e (293) com a métrica (100) percebemos que

$$f_+ = e^{\gamma(x)} \quad f_- = 1 \quad (294)$$

$$R_+ = \chi \quad R_- = r \quad (295)$$

$$r_+ = \alpha e^{\frac{1}{2}(\lambda(x)-\gamma(x))} = \rho(\tau) \quad r_- = r = \rho(\tau). \quad (296)$$

Derivando as equações para r_+ e r_- apresentadas acima, em relação às respectivas coordenadas, teremos

$$r'_+ = \frac{\alpha}{2} e^{\frac{1}{2}(\lambda(x)-\gamma(x))} (\lambda'(x) - \gamma'(x)), \quad (297)$$

$$r'_- = 1. \quad (298)$$

Portanto, substituindo as equações (294), (295), (296), (297) e (298) na equação (140) e (141), teremos que a densidade de energia e a pressão sobre a shell serão

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi G_* \rho} \left(\frac{\rho}{2} (\lambda' - \gamma') \sqrt{e^\gamma + \dot{\chi}^2} - \sqrt{1 + \dot{\rho}^2} \right) \quad (299)$$

$$p = \frac{1}{8\pi G_* \rho} \left(\frac{\rho(\gamma' e^\gamma + 2\ddot{\chi})}{2\sqrt{e^\gamma + \dot{\chi}^2}} - \frac{2\rho\ddot{\rho}}{2\sqrt{1 + \dot{\rho}^2}} + \frac{\rho}{2} (\lambda' - \gamma') \sqrt{e^\gamma + \dot{\chi}^2} - \sqrt{1 + \dot{\rho}^2} \right) \quad (300)$$

Consequentemente, em um estado de equilíbrio, $r_- = r_+ = \rho_0$ e $\dot{\rho} = \dot{\chi} = 0$, teremos

$$\sigma_0 = -\frac{1}{8\pi G_* \rho_0} \left(\rho_0 (\lambda'_0 - \gamma'_0) \sqrt{e^{\gamma_0}} - 2 \right), \quad (301)$$

$$p_0 = \frac{1}{16\pi G_* \rho_0} \left(\rho_0 \gamma'_0 \sqrt{e^{\gamma_0}} + \rho_0 (\lambda'_0 - \gamma'_0) \sqrt{e^{\gamma_0}} - 2 \right), \quad (302)$$

em que colocamos em evidência o fator $\frac{1}{2}$ em ambas as equações.

Por meio das equações (251) e (252) podemos obter

$$\gamma'_0 = \frac{b}{\left(1 - \frac{a}{\chi_0}\right)}, \quad (303)$$

$$\lambda'_0 = \frac{2\chi_0 - a}{\chi_0^2 \left(1 - \frac{a}{\chi_0}\right)}. \quad (304)$$

Substituindo (251), (303) e (304) na equação (301) e levando em conta que

$$\rho_0 = \chi_0 \left(1 - \frac{a}{\chi_0}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{b}{2a}}, \quad (305)$$

apenas nos termos entre parênteses, obtemos

$$\sigma_0 = -\frac{1}{8\pi G_* \rho_0} \left(\frac{2\chi_0 - a - b}{\sqrt{\chi_0(\chi_0 - a)}} - 2 \right). \quad (306)$$

Note que pode-se escrever a equação (302) como

$$p_0 = \frac{1}{16\pi G_* \rho_0} \left(\rho_0 \gamma' \sqrt{e^{\gamma_0}} - 8\pi G_* \rho \sigma_0 \right), \quad (307)$$

logo, utilizando (251), (303), (305) e (306) acima e cortando termos ficamos com

$$p_0 = \frac{1}{16\pi G_* \rho_0} \left(\frac{2\chi_0 - a}{\sqrt{\chi_0(\chi_0 - a)}} - 2 \right). \quad (308)$$

As equações (306) e (308) serão de fundamental importância para a solução do problema, tendo em vista que a imposição de uma equação de estado $p_0(\sigma_0)$ é necessária e resultará em uma equação cujos parâmetros serão a , b e χ .

Por conveniência, vamos usar uma nova variável adimensional, que será definida como sendo

$$y = 1 - \frac{a}{\chi}, \quad (309)$$

ou seja,

$$\chi = \frac{a}{1-y}. \quad (310)$$

Note que podemos escrever (306) como

$$\sigma_0 = \frac{1}{8\pi G_* \rho_0} \left(2 - \frac{\chi_0(1+y_0) - b}{\chi_0 \sqrt{y_0}} \right). \quad (311)$$

Utilizando (310) acima, colocando em evidência o fator $\frac{1}{a\sqrt{y}}$ e juntando termos teremos

$$\sigma_0 = \frac{1}{8\pi G_* \rho_0 a \sqrt{y_0}} (2a\sqrt{y_0} - (a+b)y_0 - a + b). \quad (312)$$

Realizando este mesmo procedimento na equação (308) obtemos

$$p_0 = \frac{1}{16\pi G_* \rho_0 \sqrt{y_0}} (1 + y_0 - 2\sqrt{y_0}). \quad (313)$$

A seguir iremos estudar, como um primeiro exemplo, o caso em que a equação de estado seja $p_0 = \sigma_0$.

3.7.1 Equação de estado $p_0 = \sigma_0$

No apêndice B vimos que no limite pós-newtoniano teremos

$$G_* = \frac{G \Omega^2(\varphi_0)}{1 + \alpha^2(\varphi_0)}, \quad (314)$$

em que G é a constante gravitacional usual e φ_0 é o campo escalar no infinito. Como um exemplo, vamos considerar, por simplicidade, que

$$\Omega^{-1} = e^{\frac{1}{2}\beta\varphi^2}, \quad (315)$$

em que β é uma constante. Utilizando a equação acima na equação (236) ficaremos com

$$\alpha(\varphi) = \beta\varphi. \quad (316)$$

Com isso teremos que, neste caso

$$G_* = \frac{G}{[1 + (\beta\varphi_0)^2] e^{\beta\varphi_0}}. \quad (317)$$

É conveniente separar o problema em dois problemas diferentes. Podemos supor $\varphi_0 = 0$ ou $\varphi_0 \neq 0$. No primeiro caso, por (317) teremos

$$G_* = G. \quad (318)$$

Neste caso, as contas são facilitadas, tendo em vista que G_* será igual a constante universal da gravitação, ao qual iremos tomar como sendo 1. No entanto, no segundo caso deve-se levar em conta que G_* irá ser na forma (317). Neste trabalho iremos supor que $\varphi_0 = 0$, como feito no estudo de estrelas pelos autores da referência (Tsuchida; Kawamura; Watanabe, 1998).

Como vimos anteriormente, devemos impor uma equação de estado ao problema com o intuito de descrever o comportamento microscópico da matéria sobre a superfície. Por simplicidade, vamos supor que

$$p_0 = \sigma_0, \quad (319)$$

ou seja, substituindo as equações (312) e (313) acima e isolando o parâmetro b

$$b = \frac{3a(1 - \sqrt{y_0})}{2(1 + \sqrt{y_0})}. \quad (320)$$

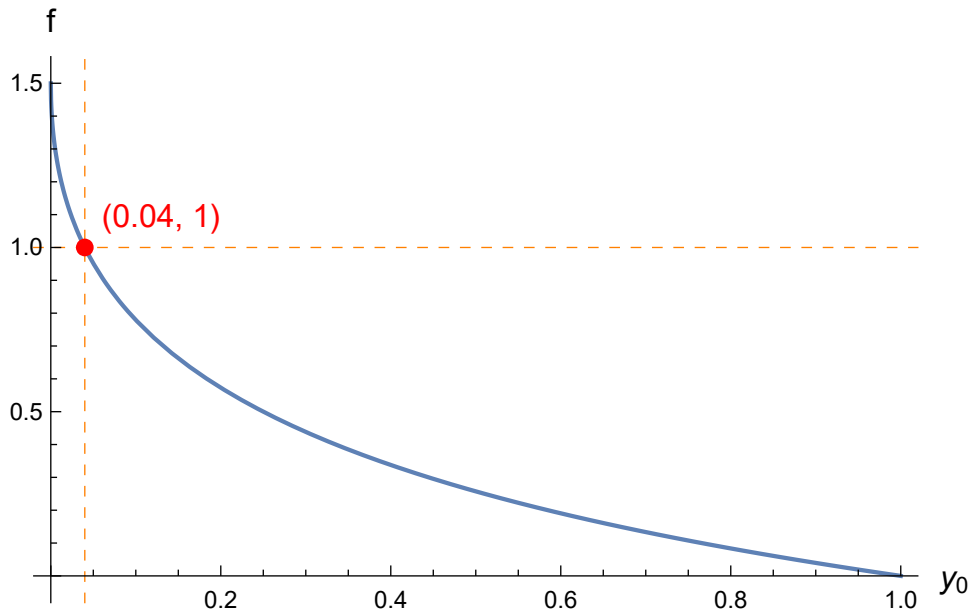
Vamos adimensionalizar esta expressão simplesmente multiplicando ambos os lados dela por um fator k , tal que a dimensão de k seja de L^{-1} . Com isso teremos

$$b^* = \frac{3a^*(1 - \sqrt{y_0})}{2(1 + \sqrt{y_0})}, \quad (321)$$

em que $a^* = ak$ e $b^* = bk$. Devemos tomar cuidado com esta expressão, pois não será para todos os valores de y_0 que a condição 4 da seção 3.3.1 ($a > b$) será satisfeita. Para verificar a região onde esta condição é verdadeira, podemos graficar

$$f(y_0) = \frac{3(1 - \sqrt{y_0})}{2(1 + \sqrt{y_0})} \quad (322)$$

Figura 8 - Gráfico da equação (322). O ponto em vermelho marca a coordenada (0.04, 1).
Vemos que se $y_0 < 0.04$ teríamos $b > a$, o que não é permitido no nosso caso



Fonte: O autor, 2023.

para obter a figura 8. Nela é possível observar que para garantir $a > b$ faz-se necessário considerar

$$y_0 > 0.04. \quad (323)$$

Além disso, vamos impor que

$$\sigma_0 > 0, \quad (324)$$

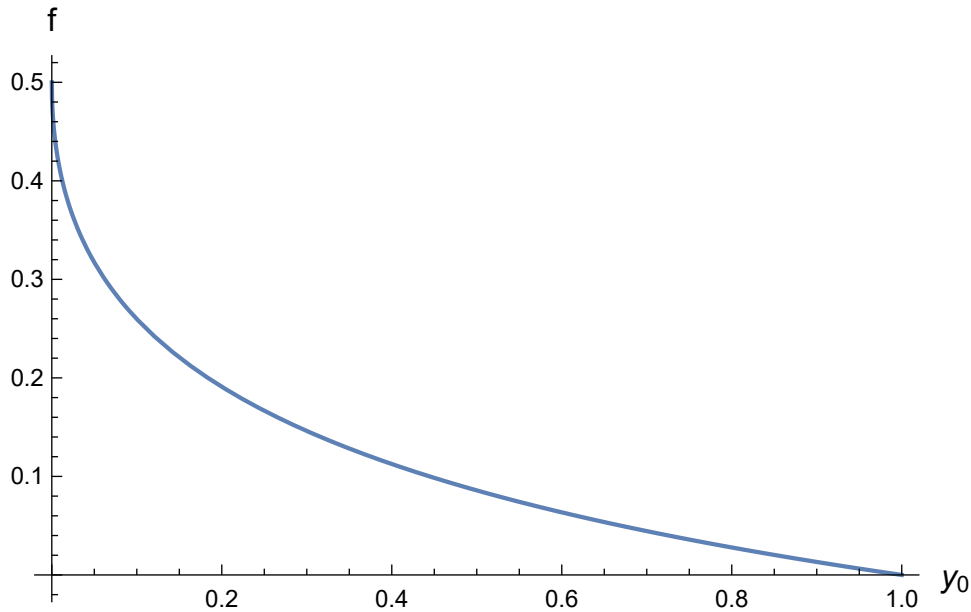
seja sempre satisfeito. Utilizando a equação (312) e realizando uma pequena álgebra, teremos que a equação (324) será verdadeira somente se

$$b + \frac{a [2\sqrt{y_0} - (1 + y_0)]}{(1 - y_0)} > 0, \quad (325)$$

que adimensionalizada pelo fator k será

$$b^* + \frac{a^* [2\sqrt{y_0} - (1 + y_0)]}{(1 - y_0)} > 0. \quad (326)$$

Figura 9 - Gráfico da equação $f = \frac{3(1-\sqrt{y_0})}{2(1+\sqrt{y_0})} + \frac{[2\sqrt{y_0}-(1+y_0)]}{1-y_0}$



Fonte: O autor, 2023.

Substituindo a equação (321) na equação acima, teremos a condição

$$a^* \left\{ \frac{3(1-\sqrt{y_0})}{2(1+\sqrt{y_0})} + \frac{[2\sqrt{y_0}-(1+y_0)]}{1-y_0} \right\} > 0. \quad (327)$$

Graficando a expressão entre chaves, obtemos a figura 9. Nela vemos que esta expressão será sempre positiva, conseqüentemente, pela condição 2 da seção 3.3.1 ($a > 0$), teremos que para qualquer a^* , a equação (326) será satisfeita, ou seja, sempre teremos $\sigma_0 > 0$.

Além da equação de estado, faz-se necessário satisfazer a 2ª CJ dada pela equação (277). Vamos calculá-la em termos dos parâmetros a , b e y_0 . Note que, para a shell em equilíbrio o vetor normal será

$$n_\chi = \sqrt{g_{\chi\chi}} = y_0^{-\frac{b}{2a}}, \quad (328)$$

em que na primeira igualdade utilizamos a equação (114) e na última a equação (252) com a mudança de variável (309).

A continuidade do campo escalar (equação (267)), utilizando (253), nos leva a

$$\varphi_i = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a} \ln \left(1 - \frac{a}{\chi} \right) \Big|_{\text{Shell}}, \quad (329)$$

sendo φ_i o campo escalar no interior. Ou seja, a equação acima nos diz que no interior teremos um espaço-tempo de Minkowski junto de um campo escalar, que iremos supor constante. Devido a este fato, a descontinuidade da derivada do campo escalar dependerá apenas do campo escalar exterior e será dado por

$$[\varphi, \mu] = \varphi, \chi^{(e)} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2\chi_0^2 \left(1 - \frac{a}{\chi_0}\right)}, \quad (330)$$

em que $\varphi, \chi^{(e)}$ é a derivada do campo escalar exterior e na última igualdade utilizamos a equação (253). Escrevendo a equação (330) em termos do parâmetro y_0

$$\varphi, \chi^{(e)} = \frac{(1 - y_0)^2 \sqrt{a^2 - b^2}}{2a^2 y_0}. \quad (331)$$

Outro fator que aparece na 2° CJ é o traço do tensor energia momento. Utilizando as equações (312) e (313), após uma álgebra, teremos

$$t = (2p_0 - \sigma_0) = - \frac{(\sqrt{y_0} - 1)^2 (\sqrt{y_0} + 1) [2a(\sqrt{y_0} - 1) + b(\sqrt{y_0} + 1)] y_0^{\frac{b}{2a} - 1}}{8\pi a^2}. \quad (332)$$

Logo, reescrevendo a equação (277), junto com a equação (316)

$$-\frac{[\varphi, \mu]}{4\pi n_\mu \beta \varphi t} = 1, \quad (333)$$

e utilizando as equações (328), (331) e (332) acima, obtemos

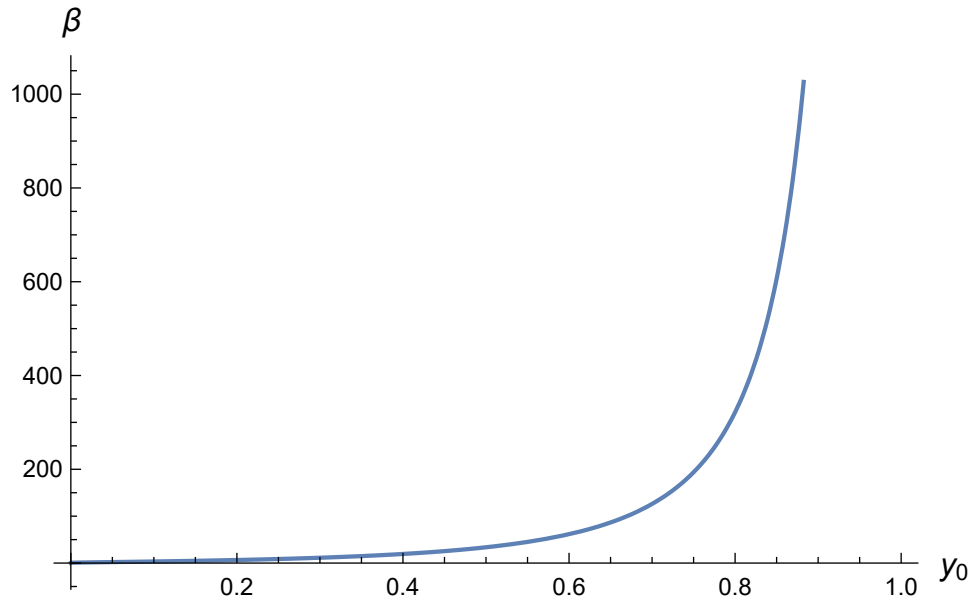
$$\frac{2a(\sqrt{y_0} + 1)}{\beta [2a(\sqrt{y_0} - 1) + b(\sqrt{y_0} + 1)] \ln(y_0)} = 1, \quad (334)$$

que ao multiplicarmos e dividirmos o lado esquerdo pelo fator k

$$\frac{2a^* (\sqrt{y_0} + 1)}{\beta [2a^* (\sqrt{y_0} - 1) + b^* (\sqrt{y_0} + 1)] \ln(y_0)} = 1. \quad (335)$$

O nosso problema se resume então, em resolver as equações (321) e (335), ou seja, temos 2 equações para 4 incógnitas: a^* , b^* , y_0 e β . Para entender o que está ocorrendo, substituindo a equação (321) em (335)

Figura 10 - Gráfico da equação (337)



Fonte: O autor, 2023.

$$\frac{4(\sqrt{y_0} + 1)}{\beta(\sqrt{y_0} - 1)\ln(y_0)} = 1. \quad (336)$$

Note que a equação acima independe de a explicitamente e também de b . Isolando β na equação (336)

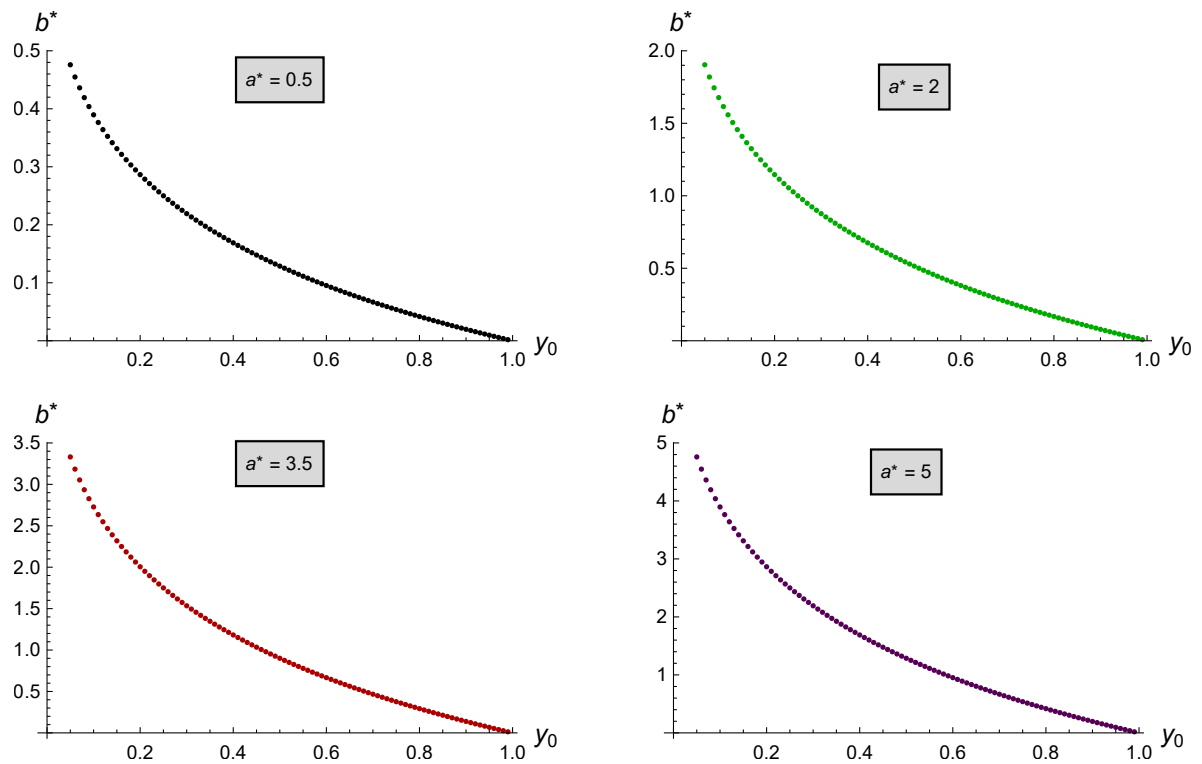
$$\beta = \frac{4(\sqrt{y_0} + 1)}{(\sqrt{y_0} - 1)\ln(y_0)}, \quad (337)$$

e graficando a expressão (337), teremos a figura 10. Nesta figura vemos que, para esta equação de estado utilizada, cada valor de y_0 nos leva a um valor de β , que por sua vez, será sempre positivo.

Como queremos encontrar configurações de equilíbrio desse sistema, que devem satisfazer tanto a equação de estado, quanto a 2º CJ, vamos fixar o parâmetro a^* em alguns valores, varrer $0.04 < y_0 < 1$ e calcular b^* por meio da equação (321), enquanto que a equação (337) irá fixar os β 's para cada y_0 . Realizamos este procedimento fixando $a^* = 0.5, 2, 3.5$ e 5 (estes valores foram escolhidos aleatoriamente, tendo em vista que a única limitação que temos é $a > 0$). Os resultados são apresentados na figura 11.

Agora podemos obter a equação de movimento da shell e com isto, permitir o estudo de sua estabilidade. Utilizando as equações (297) e (298) na equação (152) teremos

Figura 11 - Configurações de equilíbrio para $a^* = 0.5, 2, 3.5$ e 5 que satisfazem a equação de estado $p_0 = \sigma_0$ e cujos valores de β são apresentados na figura 10



Fonte: O autor, 2023.

$$\dot{R}_- = \dot{\rho} = \frac{\alpha}{2} e^{\frac{1}{2}(\lambda(x) - \gamma(x))} \left[\lambda'(x) - \gamma'(x) \right] \dot{\chi}. \quad (338)$$

Com isto, utilizando a equação acima na equação (299)

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{\rho}{2} (\lambda' - \gamma') \sqrt{e^\gamma + \dot{\chi}^2} - \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4} e^{(\lambda(x) - \gamma(x))} [\lambda'(x) - \gamma'(x)]^2 \dot{\chi}^2} \right). \quad (339)$$

Colocando o fator $\frac{1}{\rho}$ para dentro dos parênteses e utilizando a equação (296) teremos

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} (\lambda' - \gamma') \sqrt{e^\gamma + \dot{\chi}^2} - \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{2}(\gamma - \lambda)} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4} e^{(\lambda(x) - \gamma(x))} [\lambda'(x) - \gamma'(x)]^2 \dot{\chi}^2} \right). \quad (340)$$

Resolvendo a equação acima para $\dot{\chi}^2$, é possível obter

$$\begin{aligned} \dot{\chi}^2 = & (4096\pi^4 \alpha^4 \sigma^4 + 256\pi^2 \alpha^4 \sigma^2 e^\gamma \gamma' \lambda' - 128\pi^2 \alpha^4 \sigma^2 e^\gamma \gamma'^2 - 128\pi^2 \alpha^4 \sigma^2 e^\gamma \lambda'^2 \\ & - 512\pi^2 \alpha^2 \sigma^2 e^{\gamma - \lambda} - 4\alpha^4 e^{2\gamma} \gamma' \lambda'^3 + 6\alpha^4 e^{2\gamma} \gamma'^2 \lambda'^2 - 4\alpha^4 e^{2\gamma} \gamma'^3 \lambda' + \alpha^4 e^{2\gamma} \gamma'^4 \\ & + \alpha^4 e^{2\gamma} \lambda'^4 + 16\alpha^2 e^{2\gamma - \lambda} \gamma' \lambda' - 8\alpha^2 e^{2\gamma - \lambda} \gamma'^2 - 8\alpha^2 e^{2\gamma - \lambda} \lambda'^2 + 16e^{2\gamma - 2\lambda}) / \\ & 256\pi^2 (-2\alpha^4 \sigma^2 \gamma' \lambda' + \alpha^4 \sigma^2 \gamma'^2 + \alpha^4 \sigma^2 \lambda'^2). \end{aligned} \quad (341)$$

Utilizamos o fator α apenas para evidenciar as dimensões, sendo $[\alpha] = L$. Tomando $\alpha = 1$ podemos escrever a equação acima como

$$\dot{\chi}^2 + V(\chi, \sigma(\chi)) = 0, \quad (342)$$

em que

$$\begin{aligned} V(\chi, \sigma) = & - (4096\pi^4 \sigma^4 + 256\pi^2 \sigma^2 e^\gamma \gamma' \lambda' - 128\pi^2 \sigma^2 e^\gamma \gamma'^2 - 128\pi^2 \sigma^2 e^\gamma \lambda'^2 \\ & - 512\pi^2 \sigma^2 e^{\gamma - \lambda} - 4e^{2\gamma} \gamma' \lambda'^3 + 6e^{2\gamma} \gamma'^2 \lambda'^2 - 4e^{2\gamma} \gamma'^3 \lambda' + e^{2\gamma} \gamma'^4 \\ & + e^{2\gamma} \lambda'^4 + 16e^{2\gamma - \lambda} \gamma' \lambda' - 8e^{2\gamma - \lambda} \gamma'^2 - 8e^{2\gamma - \lambda} \lambda'^2 + 16e^{2\gamma - 2\lambda}) / \\ & 256\pi^2 (-2\sigma^2 \gamma' \lambda' + \sigma^2 \gamma'^2 + \sigma^2 \lambda'^2) \end{aligned} \quad (343)$$

A equação (342) descreve uma partícula em movimento unidimensional sob a ação do

potencial V e energia nula, e será usada na caracterização dos estados de equilíbrio.

Como vimos anteriormente, devemos levar em conta que a dependência temporal da coordenada exterior se dá em relação à t , logo, ao passar a equação de movimento (342) em termos de derivadas em relação à $t(\tau)$ ganhamos um fator no potencial, de tal forma que a equação de movimento torna-se

$$\chi_t^2 + V_1 = 0, \quad (344)$$

em que (equação (159))

$$V_1 = \frac{e^{2\gamma}}{e^\gamma - V(\chi, \sigma)} V(\chi, \sigma). \quad (345)$$

Além disto, vamos passar esta equação de movimento para uma equação de movimento em termos da coordenada y . Derivando a equação (310) em relação a t

$$\chi_t = \frac{a}{(1-y)^2} y_t, \quad (346)$$

logo,

$$\chi_t^2 = \frac{a^2}{(1-y)^4} y_t^2. \quad (347)$$

Consequentemente, utilizando a equação (347) na equação (344) teremos

$$y_t^2 + V_2 = 0, \quad (348)$$

em que

$$V_2 = \frac{(1-y)^4}{a^2} \frac{e^{2\gamma}}{e^\gamma - V(\chi, \sigma)} V(\chi, \sigma). \quad (349)$$

Realizando a transformação de coordenadas (309) nas equações (251), (252), (303) e (304) teremos, respectivamente

$$e^\lambda = \frac{a^2 y}{(1-y)^2}, \quad (350)$$

$$e^\gamma = y^{\frac{b}{a}}, \quad (351)$$

$$\gamma' = \frac{b(1-y)^2}{a^2 y}, \quad (352)$$

$$\lambda' = \frac{(1-y)^2}{ya^2} \left(a + \frac{2ya}{(1-y)} \right) = \frac{1-y^2}{ay}. \quad (353)$$

Substituindo a equação (343) em (349) e utilizando as equações (349)-(353), após simplificações obtemos

$$\begin{aligned} V_2 = & -(y-1)^4 y^{\frac{2b}{a}} \left(4096\pi^4 a^8 y^4 \sigma - 512\pi^2 a^6 (y-1)^2 \sigma y^{\frac{b}{a}+3} - 128\pi^2 a^6 (y^2-1)^2 \sigma y^{\frac{b}{a}+2} \right. \\ & - 256\pi^2 a^5 b (y-1)^3 (y+1) \sigma y^{\frac{b}{a}+2} - 128\pi^2 a^4 b^2 (y-1)^4 \sigma y^{\frac{b}{a}+2} - 8a^4 (y-1)^4 (y+1)^2 y^{\frac{2b}{a}+1} \\ & + 16a^4 (y-1)^4 y^{\frac{2(a+b)}{a}} + a^4 (y^2-1)^4 y^{\frac{2b}{a}} - 16a^3 b (y-1)^5 (y+1) y^{\frac{2b}{a}+1} \\ & + 4a^3 b (y-1)^5 (y+1)^3 y^{\frac{2b}{a}} - 8a^2 b^2 (y-1)^6 y^{\frac{2b}{a}+1} + 6a^2 b^2 (y-1)^6 (y+1)^2 y^{\frac{2b}{a}} \\ & + b^4 (y-1)^8 y^{\frac{2b}{a}} + 4ab^3 (y-1)^7 (y+1) y^{\frac{2b}{a}} \Big) / [64\pi^2 a^5 y^2 \sigma \\ & + a(y-1)^3 (a^2(y-1) + 2ab(y+1) + b^2(y-1)) y^{b/a}]^2. \end{aligned} \quad (354)$$

Derivando duas vezes a expressão acima em relação à y , teremos

$$V_2'' = V_2''(a, b, y, \sigma, \sigma'(y), \sigma''(y)), \quad (355)$$

que avaliado em uma configuração de equilíbrio resultará em

$$V_2'' = V_2''(a, b, y_0, \sigma, \sigma'(y_0), \sigma''(y_0)), \quad (356)$$

Não irei apresentar esta expressão aqui, tendo em vista o seu tamanho. Agora, faz-se necessário estudar as quantidades $\sigma'(y)$ e $\sigma''(y)$. Como apresentado no primeiro capítulo, estas quantidades são obtidas através da equação de conservação do tensor energia momento. Logo, devemos estudar esta conservação para o problema em questão.

Como vimos anteriormente, o campo escalar sobre a superfície é constante, logo, como o tensor energia-momento do campo escalar depende apenas de derivadas de φ (equação (208)) e o campo na superfície e no interior são constantes, teremos que

$$\begin{aligned}\bar{t}_{\mu\nu(\varphi)} &= 0, \\ T_{\mu\nu(\varphi)}^- &= 0.\end{aligned}\tag{357}$$

Além disso, como ambos os espaços-tempos não possuem matéria

$$T_{\mu\nu}^+ = T_{\mu\nu}^- = 0.\tag{358}$$

Utilizando as equações (357) e (358) na equação (415) do Apêndice C, ficaremos com

$$\nabla_b \bar{t}_a^b = -2n_\mu \varphi_{,a} [\varphi^{,\mu}],\tag{359}$$

mas como φ_i é constante

$$\nabla_b \bar{t}_a^b = -2n_\mu \varphi_{,a} \varphi_e^{,\mu},\tag{360}$$

em que φ_e é o campo escalar do exterior. Sendo $\partial^\theta \varphi_e = \partial^\phi \varphi_e = 0$, nos resta

$$\nabla_b \bar{t}_\tau^b = -2n_\mu \dot{\varphi} \varphi_e^{,\mu}.\tag{361}$$

Qualitativamente temos o seguinte. Se no interior e na superfície temos um campo escalar constante, significa dizer que o lado de fora não troca energia com o campo escalar da superfície que, por sua vez, não troca energia com o campo escalar interior. No entanto, como vemos pela equação (361) temos a possibilidade de haver troca de energia entre a matéria da shell e o campo escalar do exterior, de tal forma que o campo escalar exterior passe a depender do tempo, indicando assim, a emissão de ondas gravitacionais escalares. Neste trabalho tais emissões não são relevantes, conseqüentemente vamos tomar $\dot{\varphi}_e = 0$, e a equação de conservação (361) torna-se

$$\nabla_b \bar{t}_\tau^b = 0.\tag{362}$$

É importante notar que, a rigor, a casca em movimento perderá energia através da emissão de ondas gravitacionais escalares. Conseqüentemente, como estamos desprezando esta emissão, nossa análise será válida somente nos primeiros instantes do movimento. Em

particular, caso o estado seja estável, será ainda “mais estável” ao levar em conta a emissão de ondas escalares. Caso seja instável, tal condição pode ser mantida ou não, dependendo dos detalhes da emissão. Como a equação acima é da mesma forma que (146), logo a equação (169) ainda é válida e utilizando (296) e (297), ela nos leva a

$$\sigma' = -2(\lambda' - \gamma')(p(\sigma) + \sigma). \quad (363)$$

Realizando a transformação de coordenadas (309) acima

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{dy}{d\chi}\right)} (\lambda' - \gamma')(p(\sigma) + \sigma), \quad (364)$$

sendo

$$\frac{dy}{d\chi} = \frac{d(1 - \frac{a}{\chi})}{d\chi} = \frac{a}{\chi^2} = \frac{(1-y)^2}{a}, \quad (365)$$

em que na última igualdade utilizamos o fato de que $\chi = \frac{a}{(1-y)}$. Substituindo (352), (353) e (365) em (364) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dy} &= -\frac{2a}{(1-y)^2} \left[\frac{(1-y)^2}{ya^2} \left(a + \frac{2ya}{(1-y)} \right) - \frac{(1-y)^2 b}{ya^2} \right] (p(\sigma) + \sigma) \\ &= -2 \left[\frac{1}{y} \left(1 + \frac{2y}{(1-y)} \right) - \frac{b}{ya} \right] (p(\sigma) + \sigma). \end{aligned} \quad (366)$$

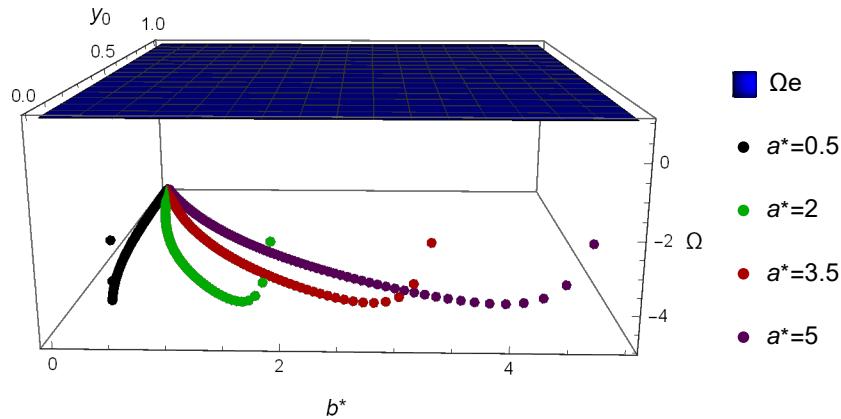
Derivando a equação (366) em relação a y e utilizando esta mesma equação onde aparecer $\frac{d\sigma}{dy}$ e simplificando, pode-se obter

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dy^2} &= 2(p(\sigma) + \sigma) \left[a^2 (y^2 + 2y + 3) + ab (3y^2 + 2y - 5) + 2(a(y+1) + b(y-1))^2 \Omega \right. \\ &\quad \left. + 2b^2(y-1)^2 \right] / (a(y-1)y)^2, \end{aligned} \quad (367)$$

em que $\Omega = \frac{dp}{d\sigma}$.

Substituindo as equações (366) e (367) na equação da derivada segunda do potencial (356), foi possível obter uma expressão (muito grande para apresenta-la aqui)

Figura 12 - O plano azul representa $\Omega_e = 1$. As curvas preta, verde, vermelha e roxas representam a equação (369) avaliada nas configurações de equilíbrio, com, $a^* = 0.5, 2, 3.5, 5$, respectivamente



Fonte: O autor, 2023.

$$V_2'' = V_2''(a, b, y_0, \Omega). \quad (368)$$

Logo, tomando $V_2'' = 0$, isolando Ω da expressão acima e adimensionalizando, teremos

$$\Omega = \Omega(a^*, b^*, y_0). \quad (369)$$

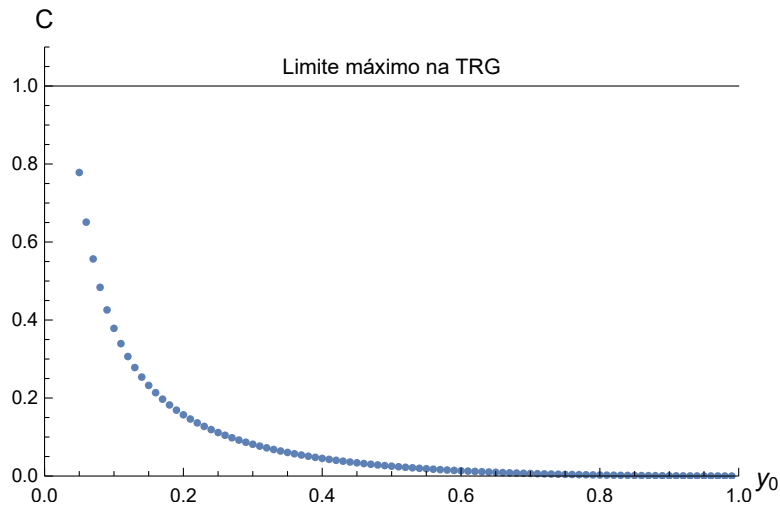
Por outro lado, a equação de estado $p_0 = \sigma_0$ nos leva a

$$\Omega_e = \frac{dp_0}{d\sigma_0} = 1. \quad (370)$$

Graficando as equações (369) e (370), junto da equação (369) avaliada nas configurações de equilíbrio (figura 11), obtemos a figura 12. Nela percebemos que todos as configurações de equilíbrio nos levam a $\Omega < \Omega_e$. Conseqüentemente, estes são estados de equilíbrio estável. Como discutido anteriormente, caso consideremos emissões de ondas gravitacionais escalares, estas configurações de equilíbrio tenderão a serem ainda mais estáveis.

Além disso, podemos calcular a compacidade das configurações de equilíbrio. Utilizando o fato de que $\varphi_0 = 0$, realizando a mudança de variável (309) na equação (281) e adimensionalizando, teremos

Figura 13 - Compacidade das configurações de equilíbrio



Fonte: O autor, 2023.

$$C = \frac{b^*(1-y_0)}{a^*} y_0^{\frac{b^*-a^*}{2a^*}} e^{-\frac{1}{8}\beta \left[\frac{\sqrt{a^{*2}-b^{*2}}}{a} \ln(y_0) \right]^2}, \quad (371)$$

em que foi utilizado o fato de que $c = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{4}$. Ao substituir a equação (321) acima, podemos obter

$$C = \frac{3}{2} (\sqrt{y_0} - 1)^2 y_0^{\frac{1-5\sqrt{y_0}}{4\sqrt{y_0}+4}} e^{\frac{(5y_0-26\sqrt{y_0}+5)\ln^2(y_0)}{8(\sqrt{y_0}+1)(\sqrt{y_0}\ln(y_0)-\ln(y_0))}}. \quad (372)$$

Note que esta equação também independe de a^* e b^* . Avaliando os valores de y_0 com os seus respectivos valores de β (figura 10) na equação (372) obtemos a, figura 13. Nela percebemos que teremos apenas $C < 1$, portando, como na TRG o limite de compacidade é $C = 1$, percebemos que nesta configuração com equação de estado $p_0 = \sigma_0$ não é possível a existência de uma shell mais compacta que um buraco negro da TRG.

Se encararmos a transformação conforme apenas como uma mudança de escala, estes resultados aqui obtidos são válidos tanto para o FE quanto para o FJ, tendo em vista que trabalhamos com quantidades adimensionais. Na próxima seção iremos realizar os cálculos para a equação de estado quadrática.

3.7.2 Equação de estado $p_0 = \gamma \sigma_0^2$

Vamos agora encontrar as configurações de equilíbrio e estudar suas respectivas estabilidades, para o caso em que a equação de estado é dada por

$$p_0 = \gamma \sigma_0^2, \quad (373)$$

em que γ é um parâmetro de dimensão de comprimento. Utilizando as equações (312) e (313), junto da equação

$$\rho_0 = \frac{a}{1 - y_0} y_0^{\frac{1}{2} - \frac{b}{2a}}, \quad (374)$$

que é facilmente obtida de (305), (309) e (310), na equação de estado (373), podemos obter, após uma álgebra

$$\frac{(1 - y_0) y_0^{\frac{b}{2a} - 2} \left\{ 4\pi a^3 (\sqrt{y_0} - 1)^2 y_0 - \gamma(1 - y_0) \left[a (\sqrt{y_0} - 1)^2 + b (y_0 - 1) \right]^2 y_0^{\frac{b}{2a}} \right\}}{64\pi^2 a^4} = 0. \quad (375)$$

Como o fator que multiplica as chaves acima nunca é zero, tendo em vista que $0 < y_0 < 1$, a equação de estado irá resultar em

$$4\pi a^3 (\sqrt{y_0} - 1)^2 y_0 - \gamma(1 - y_0) \left[a (\sqrt{y_0} - 1)^2 + b (y_0 - 1) \right]^2 y_0^{\frac{b}{2a}} = 0. \quad (376)$$

Podemos adimensionalizar a expressão acima, simplesmente dividindo tudo por γ^3 , que resultará em

$$4\pi a^{*3} (\sqrt{y_0} - 1)^2 y_0 - (1 - y_0) \left[a^* (\sqrt{y_0} - 1)^2 + b^* (y_0 - 1) \right]^2 y_0^{\frac{b^*}{2a^*}} = 0, \quad (377)$$

em que $a^* = \frac{a}{\gamma}$ e idem para b^* .

Outra equação que também devemos satisfazer, como já vimos no caso anterior, é a 2º CJ dada pela equação (334), que adimensionalizada pelo fator γ será dada por

$$\frac{2a^* (\sqrt{y_0} + 1)}{\beta \left[2a^* (\sqrt{y_0} - 1) + b^* (\sqrt{y_0} + 1) \right] \ln(y_0)} = 1. \quad (378)$$

Para encontrar as configurações de equilíbrio, faz-se necessário resolver as equações (377) e (378). Temos 2 equações e 4 incógnitas, sendo elas, a^* , b^* , y_0 e β . Como vimos no apêndice B, para a intensidade de acoplamento que estamos utilizando teremos $\beta = \beta_0$ e observações indicam que $\beta_0 > -5$. Por conta disso, vamos fixar alguns valores de β para resolvermos este problema. Consequentemente, ficaremos com 2 equações para 3

incógnitas.

Isolando b^* na equação (378), teremos

$$b^* = \frac{2a^* [\beta (1 - \sqrt{y_0}) \ln(y_0) + \sqrt{y_0} + 1]}{\beta (\sqrt{y_0} + 1) \ln(y_0)}, \quad (379)$$

e substituindo a equação acima em (377), após uma extensa álgebra obtemos

$$4\pi a^{*3} (1 - \sqrt{y_0})^2 y_0 + \frac{a^{*2} e^{1/\beta} (1 - \sqrt{y_0})^3 (\sqrt{y_0} + 1) y_0^{\frac{1-\sqrt{y_0}}{\sqrt{y_0}+1}} [\beta (\sqrt{y_0} - 1) \ln(y_0) - 2 (\sqrt{y_0} + 1)]^2}{\beta^2 \ln^2(y_0)} = 0. \quad (380)$$

Note que ao colocar a^{*2} em evidência na equação acima, dividir tudo por a^{*2} e isolar a^* , teremos

$$a^* = \frac{e^{1/\beta} (1 - \sqrt{y_0}) (\sqrt{y_0} + 1) y_0^{\frac{1-\sqrt{y_0}}{\sqrt{y_0}+1}-1} [\beta (\sqrt{y_0} - 1) \ln(y_0) - 2 (\sqrt{y_0} + 1)]^2}{4\pi \beta^2 \ln^2(y_0)}. \quad (381)$$

Produzimos um loop utilizando o Wolfram mathematica de tal forma que, dado um valor de β , varrendo $0 < y_0 < 1$, por meio da equação (381) é calculado o valor de a^* . Com isto, tendo a^* e seu y_0 correspondente, por (379) obtemos b^* .

No caso atual, diferentemente do caso anterior, iremos impor mais uma condição entre os parâmetros. Para evitar que os elementos não diagonais do tensor energia-momento resultem em fluxos mais rápidos que a velocidade da luz (Mayo; Bekenstein, 1996), faz-se necessário impor a condição de energia dominante (DEC). Esta condição nos diz que

$$\sigma_0 - p_0 > 0. \quad (382)$$

Substituindo as equações (312) e (313) acima, utilizando (374) e adimensionalizando, teremos

$$\frac{2}{a^*} [-y_0(a^* + b^*) + 2a^* \sqrt{y_0} - a^* + b^*] - (y_0 - 2\sqrt{y_0} + 1) > 0. \quad (383)$$

A expressão acima pode ser escrita como

$$6\sqrt{y_0} - 3y_0 - \frac{2b^*}{a^*} y_0 - 3 + \frac{2b^*}{a^*} > 0. \quad (384)$$

Tabela 1 - Resultado da solução da equação de estado e da 2°
CJ

β	Soluções
$\beta = -15$	Soluções possíveis com $0.14 < y_0 < 0.86$
$\beta = -4.9$	Soluções possíveis com $0.22 < y_0 < 0.56$
$\beta = -4.5$	Soluções possíveis com $0.24 < y_0 < 0.51$
$\beta = -3$	Soluções não satisfazem $a^* > b^*$
$\beta = -2$	Soluções não satisfazem $a^* > b^*$
$\beta = -1$	Soluções não satisfazem $a^* > b^*$
$\beta = 2$	Soluções não satisfazem a DEC
$\beta = 4$	Soluções possíveis com $0.07 < y_0 < 0.12$
$\beta = 4.5$	Soluções possíveis com $0.07 < y_0 < 0.14$
$\beta = 6$	Soluções possíveis com $0.08 < y_0 < 0.18$

Fonte: O autor, 2023.

Multiplicando a expressão acima por $-a^*$ e reorganizando termos

$$3a^* - 2b^* - 6a^* \sqrt{y_0} + 3a^* y_0 + 2b^* y_0 < 0, \quad (385)$$

que pode ser escrito como

$$3a^* (-1 + \sqrt{y_0})^2 + 2b^* (y_0 - 1) < 0. \quad (386)$$

Isolando b^* e levando em conta que $y - 1$ é negativo

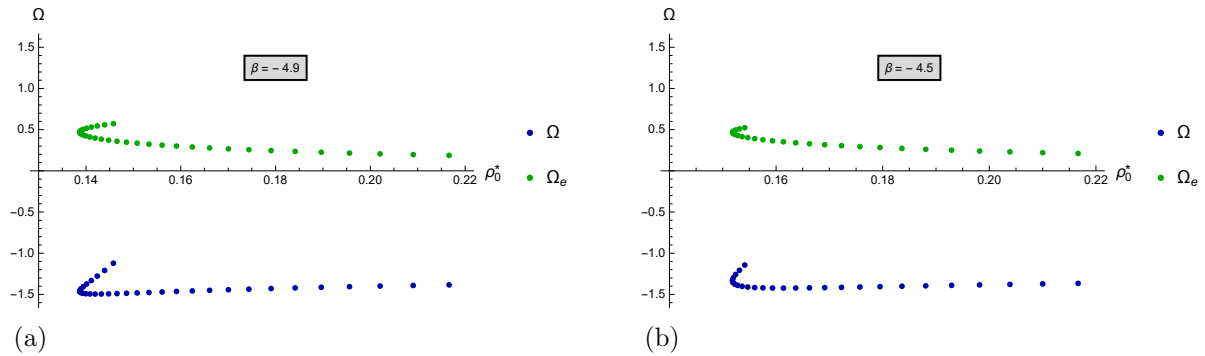
$$b^* > \frac{3a^* (-1 + \sqrt{y_0})^2}{2(1 - y_0)}. \quad (387)$$

Logo, para a DEC ser satisfeita devemos ter que a equação (387) seja satisfeita.

Resolvemos as equações (379) e (381) para alguns valores de β , impondo a condição (387) junto das condições que também foram impostas no problema anterior, sendo elas, $\sigma_0 > 0$, $a^*, b^* > 0$ e $a^* > b^*$ (pois se não ocorrer isto teremos φ complexo. Ver equação (253) e (254)). Os resultados são apresentados na figura 1. Nesta figura temos o intervalo de y_0 em que existem soluções que satisfazem todas as condições, no entanto, devemos lembrar que para cada y_0 teremos valores diferentes de a^* e b^* .

Com as configurações de equilíbrio em mãos, podemos calcular a estabilidade das mesmas. Para fazer isto, faz-se necessário realizar algumas mudanças nas contas em relação ao caso anterior. Agora devemos levar em conta a equação de estado (373) nas equações (366) e (367). Fazendo isto, podemos obter uma nova expressão para a derivada segunda do potencial e conseqüentemente, igualando esta expressão a zero e adimensio-

Figura 14 - Ômega avaliados nas configurações de equilíbrio com $\beta = -4.9$ e -4.5



Legenda: (a) $\beta = -4.9$. (b) $\beta = -4.5$.

Fonte: O autor, 2023.

nalizando, teremos

$$\Omega = \Omega(a^*, b^*, y_0), \quad (388)$$

cuja expressão é muito grande para escrever aqui.

Por outro lado, com esta nova equação de estado

$$\Omega_e(a^*, b^*, y_0) = 2\gamma\sigma_0, \quad (389)$$

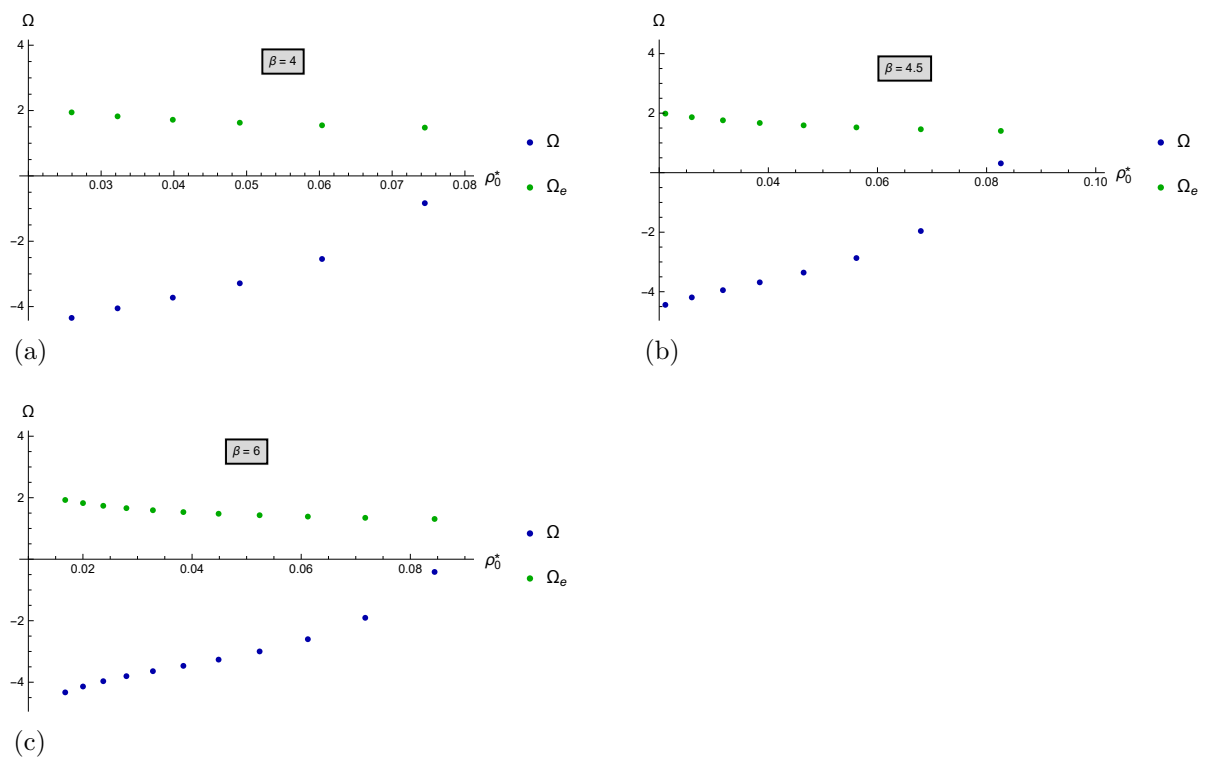
que por (312) e (374), com $G_* = 1$ e adimensionalizado por γ , será

$$\Omega_e = \frac{(1 - y_0)y_0^{\frac{b^*}{2a^*} - 1}}{4\pi a^{*2}} [2a^* \sqrt{y_0} - (a^* + b^*)y_0 - a^* + b^*] \quad (390)$$

Note que agora Ω_e , diferentemente do caso anterior, não é constante e passou a depender dos parâmetros envolvidos no problema. Avaliando as configurações de equilíbrio nas expressões (388) e (390), obtivemos as figuras 14 e 15. Nelas percebemos que sempre $\Omega < \Omega_e$, conseqüentemente, teremos apenas configurações de equilíbrio estável.

Além disso, utilizando a equação (281), ainda impondo $\varphi_0 = 0$, obtivemos a compacidade das configurações, que são apresentadas na figura 16. Note que para os valores de $\beta > -5$ considerados, nenhuma configuração de equilíbrio ultrapassa o limite máximo de C permitido pela TRG. Por outro lado, permitindo $\beta < -5$ é possível obter configurações que possuem compacidade maior do que a permitida pela TRG, como por exemplo $\beta = -15$. Além disso, pela figura 16 vemos que para os valores de β positivos teremos um aumento da compacidade conforme aumentamos o raio ρ_0^* da shell. Por outro lado, para β 's negativos temos um comportamento tal que as curvas possuem um pico. Na TRG o pico no diagrama $M \times R$ das configurações, tanto de estrelas (Shapiro; Teukolsky,

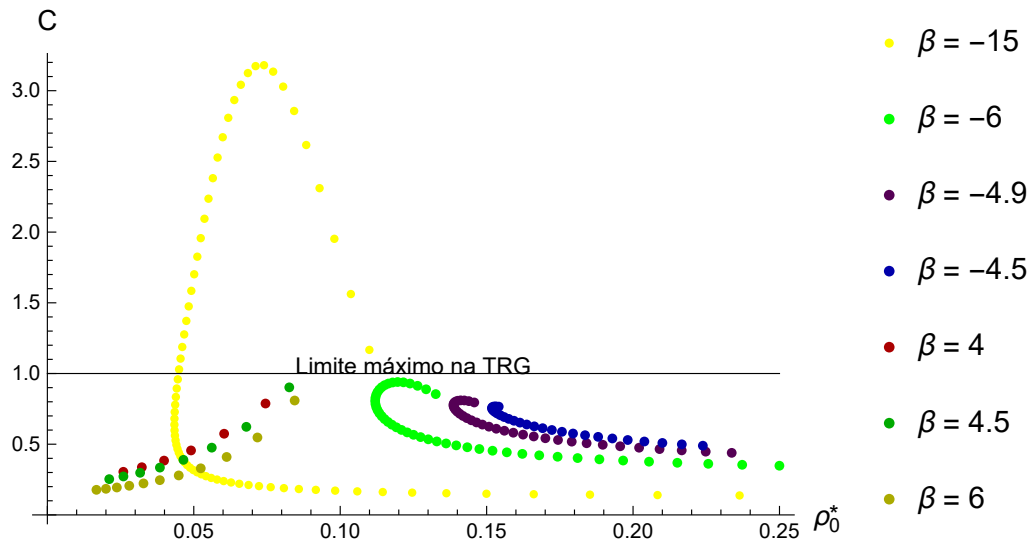
Figura 15 - $\hat{\Omega}$ avaliados nas configurações de equilíbrio com $\beta = 4, 4.5$ e 6



Legenda: (a) $\beta = 4$. (b) $\beta = 4.5$. (c) $\beta = 6$.

Fonte: O autor, 2023.

Figura 16 - Gráfico $C \times \rho_0^*$ para as configurações de equilíbrio para diferentes valores de β . Sendo $\rho_0^* = \frac{\rho_0}{\gamma}$



Fonte: O autor, 2023.

1983), quanto de shell (Bergliaffa; Chiapparini; Reyes, 2020), leva a um pico no diagrama $C \times R$, que por sua vez, por meio de um teorema, representa o ponto a partir do qual há uma mudança no tipo de estabilidade das configurações (Bergliaffa; Chiapparini; Reyes, 2020). No entanto este teorema, até onde conhecemos, não foi verificado ainda para as TET's.

As configurações de equilíbrio para $\beta > -5$ aqui encontradas resultaram em configurações estáveis como indicado nas figuras 14 e 15. Conseqüentemente, em princípio, o nosso resultado da figura 16 parece indicar que o teorema do máximo do diagrama CXR não é válido para a TET considerada.

CONCLUSÃO

A TRG é uma das teorias mais bem testadas da física, porém, por mais bem testada que esta teoria seja, ainda existem algumas observações que ela não consegue explicar satisfatoriamente, como por exemplo, a expansão acelerada do universo. Com o intuito de resolver estes problemas, os físicos foram levados a buscarem teorias alternativas à TRG. Dentre estas teorias, temos a teoria escalar-tensorial. Esta teoria foi o tema deste trabalho, na qual estudamos a colagem de um espaço-tempo de Minkowski com uma solução de vácuo, utilizando o formalismo de cascas finas. Impomos uma equação de estado barotrópica $p = \sigma$ e $p = \gamma\sigma^2$ para a matéria sobre a superfície e com isso obtivemos as configurações de equilíbrio permitidas, tanto pela equação de estado, quanto pela 2ª condição de junção.

Em posse dessas configurações, foi possível estudar o tipo de estabilidade das mesmas. Obtivemos que todas são de equilíbrio estável para ambas as equações de estado. Além disso, calculamos a compacidade destas configurações e obtivemos, para o caso $p = \sigma$ que são sempre menores do que o limite imposto pela TRG ($C = 1$). Por outro lado, no caso em que $p = \sigma^2$ se o fator β for suficientemente negativo vimos que é possível a existência de configurações mais compactas do que o limite da TRG. Além disso, vimos que a princípio, devido ao comportamento das curvas de compacidade pelo raio da shell, o teorema da TRG de mudança de estabilidade no máximo do diagrama $M \times R$ parece não ser válido na TET considerada.

Como perspectivas futuras, é natural estender a análise aqui apresentada a outras equações de estado, e também considerar valores não nulos do parâmetro φ_0 . Este último irá alterar o valor da constante gravitacional nua G_* , a densidade e pressão da matéria sobre a shell e também a segunda condição de junção.

Além disso, referências recentes (Giusti; Faraoni, 2020) indicam que a massa ADM (m), além de depender da massa de repouso da shell (M) também depende do campo escalar φ , nas teorias escalares-tensoriais. Consequentemente, caso seja encontrada esta relação ela pode ser utilizada nesta colagem que fizemos, com o intuito de restringir mais as configurações de equilíbrio (bastando utilizar $b = 2m$).

Para finalizar, seria interessante incorporar à análise o efeito da perda de energia da casca pela emissão de ondas escalares, segundo o tratamento em (Oshiro *et al.*, 1993).

Referências

- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, [s. l.], v. 116, n. 6, p. 1–16, 2016. ISSN 10797114.
- ALVES, M. E.; MIRANDA, O. D.; De Araujo, J. C. Extra polarization states of cosmological gravitational waves in alternative theories of gravity. *Classical and Quantum Gravity*, [s. l.], v. 27, n. 14, 2010. ISSN 02649381.
- AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. *Dark Energy: Theory and observations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780521516006.
- AVILÉS, L.; MAEDA, H.; MARTÍNEZ, C. Junction conditions in scalar-tensor theories. *Classical and Quantum Gravity*, [s. l.], v. 37, n. 7, 2020. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2053-1583/abe778>. Acesso em: 07 jun. 2023.
- BAGDONAS, A.; ZANETIC, J.; GURGEL, I. Quem descobriu a expansão do universo? Disputas de prioridade como forma de ensinar cosmologia com uso da história e filosofia da ciência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, [s. l.], v. 39, n. 2, 2017. ISSN 1806-1117.
- BARRABES, C.; BRESSANGE, G. F. Singular hypersurfaces in scalar – tensor theories. *Classical and Quantum Gravity*, [s. l.], v. 14, n. 3, p. 805-824, 1997.
- BERGLIAFFA, S. E. P.; CHIAPPARINI, M.; REYES, L. M. Thermodynamical and dynamical stability of a self-gravitating uncharged thin shell. *European Physical Journal C*, [s. l.], v. 80, n. 8, p. 1–10, 2020. ISSN 14346052.
- BERNARD, L.; BLANCHET, L.; TRESTINI, D. Gravitational waves in scalar-tensor theory to one-and-a-half post-Newtonian order. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, [s. l.], v. 2022, n. 8, p. 1–31, 2022. ISSN 14757516.
- BERTI, E. et al. Testing general relativity with present and future astrophysical observations. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, [s. l.], v. 32, n. 24, p. 243001, 2015. ISSN 13616382. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/24/243001>. Acesso em: 06 jan. 2023.
- BERTONE, G.; HOOPER, D.; SILK, J. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Physics Reports*, [s. l.], v. 405, n. 5-6, p. 279–390, 2005. ISSN 03701573.
- BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, [s. l.], v. 124, n. 3, p. 925–935, 1961. ISSN 0031899X.
- CARROLL, S. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. ISBN 0805387323.

- CHIBA, T.; YAMAGUCHI, M. Conformal-frame (in)dependence of cosmological observations in scalar-tensor theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, [s. l.], v. 2013, n. 10, p. 1–18, 2013. ISSN 14757516.
- CLIFTON, T. et al. Modified gravity and cosmology. *Physics Reports*, [S.l.] , v. 513, n. 1-3, p. 1–189, 2012. ISSN 03701573
- DAMOUR, T.; ESPOSITO-FARÈSE, G. Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, [S.l.], v. 54, n. 2, p. 1474–1491, 1996. ISSN 15502368
- DAVIS, T. M.; PARKINSON, D. Characterizing Dark Energy Through Supernovae. In: *Handbook of Supernovae*, p, 2016. P. 1-23.
- D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's relativity*. Oxford; Oxford University Press, 1992. ISBN 0198596883.
- EINSTEIN, A. Sobre a teoria da relatividade geral. *Sociedade Portuguesa de Matemática*, [Lisboa], v. 73. p. 131–144, 2015. Tradução: Irene Brito. ISSN 0872-3672.
- ESPOSITO-FARESE, G. Binary-pulsar tests of strong-field gravity. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9612039>. p. 24–28, 1996. Acesso em: 2 jan. 2023.
- FARAONI, V.; GUNZIG, E. Einstein frame or Jordan frame? *International Journal of Theoretical Physics*, [s. l.], v. 38, n. 1, p. 217–225, 1999. ISSN 00207748.
- FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. *Generalized Brans-Dicke theories*. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1005.0868>. p. 1–3, 2018. Acesso em: 05 fev. 2022
- FUJII, Y.; MAEDA, K.-i. *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- GIUSTI, A.; FARAONI, V. Quasilocal mass in scalar-tensor gravity: Spherical symmetry. *Classical and Quantum Gravity*, [S.l.], v. 37, n. 19, p. 1–11, 2020. ISSN 13616382.
- GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2010. ISBN 8576058863.
- HARTLE, J. B.; DRAY, T. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2003. v. 71. 1086–1087 p. ISSN 0002-9505.
- ISRAEL, W. Singular Hypersurfaces and Thin Shells in General Relativity. *Il Nuovo Cimento*, [s. l.], v. 571, n. 1964, 1965.
- LEMONS, J. P.; LUZ, P. Bubble universes and traversable wormholes. *Physical Review D*, [S.l.], v. 105, n. 4, 2022. ISSN 24700029.

- LEMOS, J. P.; ZASLAVSKII, O. B. Quasi-black holes: Definition and general properties. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, [s. l.], v. 76, n. 8, 2007. ISSN 15502368.
- LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007. ISBN 8588325241.
- MAYO, A. E.; BEKENSTEIN, J. D. No hair for spherical black holes: Charged and nonminimally coupled scalar field with self-interaction. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, [s. l.], v. 54, n. 8, p. 5059–5069, 1996. ISSN 15502368.
- MAZHARIMOUSAVI, S. H.; HALILSOY, M.; AMEN, S. N. Stability of spherically symmetric timelike thin-shells in general relativity with a variable equation-of-state. *International Journal of Modern Physics D*, [s. l.], v. 26, n. 14, p. 1–12, 2017. ISSN 02182718.
- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.l.: s.n.], 1973. ISBN 9781498746656.
- MURAYAMA, H. Physics beyond the standard model and dark matter. *Les Houches Summer School Proceedings*, [s. l.], v. 86, p. 287–289, 2007. ISSN 09248099.
- OSHIRO, Y. et al. Evaporation of a Collapsing Shell with Scalar Field Production. *Progress of Theoretical Physics*, [s. l.], v. 89, n. 1, p. 77–87, 1993. ISSN 0033-068X.
- PEREIRA, J. P.; COELHO, J. G.; RUEDA, J. A. Stability of thin-shell interfaces inside compact stars. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, [S.l.], v. 90, n. 12, p. 1–12, 2014. ISSN 15502368.
- PERLMUTTER, S. Supernovae, dark energy, and the accelerating universe. *Physics Today*, [s. l.], v. 56, n. 4, p. 53–60, 2003. ISSN 00319228.
- POISSON, E. *A relativist's toolkit. The mathematics of black-hole mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0521830915.
- POSTMA, M.; VOLPONI, M. Equivalence of the einstein and jordan frames. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, [S.l.], v. 90, n. 10, 2014. ISSN 15502368.
- QUINTA, G. M. *Black hole entropy through thin matter shells*. 2013. Disponível em: <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/395145792124/resumo.pdf>. Acesso em: 1 ago. 2022.
- QUIROS, I. et al. The conformal transformation's controversy: What are we missing? *General Relativity and Gravitation*, [S.l.], v. 45, n. 2, p. 489–518, 2013. ISSN 15729532.

- SARANGI, A.; SLAVIN, J. D. Dust Production in a Thin Dense Shell in Supernovae with Early Circumstellar Interactions. *The Astrophysical Journal*, [S.l.], v. 933, n. 1, p. 89, 2022. ISSN 0004-637X.
- SCHUTZ, B. F. *A First Course in General Relativity*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780521887052.
- SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. Berlin: Wiley, 1983. ISBN 0471873160.
- TSUCHIDA, T.; KAWAMURA, G.; WATANABE, K. *A maximum mass-to-size ratio in scalar-tensor theories of gravity*. Progress of Theoretical Physics, Oxford University Press (OUP), [S.l.], v. 100, n. 2, p. 291–313, Aug 1998. ISSN 1347-4081. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1143/PTP.100.291>. Acesso em: 07 jul. 2022.
- VISSER, M. *Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking*. New York: American Institute of Physics, 1996. 33–5168–33–5168 p.
- WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: University of Chicago Press, 1984. ISBN 0226870332.
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley Sons, 1972.
- WILL, C. M. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, [S.l.], v. 17, p. 1–113, 2014. ISSN 14338351.
- WILL, C. M. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. ISBN 9781425803780.

APÊNDICE A – Demonstrações para o cálculo de conservação no FJ

A.1 Cálculo de $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^\phi$

Tomando a divergência na definição de $T_{\mu\nu}^\phi$, dada pela equação (208), teremos

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^\phi = \square\phi\nabla_\nu\phi + \nabla^\mu\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi) - \frac{1}{2}\nabla_\nu(\nabla^\beta\phi\nabla_\beta\phi). \quad (391)$$

O último termo da equação acima é dado por

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\nabla_\nu(\nabla^\beta\phi\nabla_\beta\phi) &= -\frac{1}{2}[(\nabla_\nu\nabla^\beta\phi)\nabla_\beta\phi + \nabla^\beta\phi(\nabla_\nu\nabla_\beta\phi)] \\ &= -\nabla^\beta\phi(\nabla_\nu\nabla_\beta\phi), \end{aligned} \quad (392)$$

logo, podemos perceber que o segundo termo da equação (391) irá se cancelar com seu último termo, dado por (392) tendo em vista a comutação da derivação.

Com isso, ficamos com

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^\phi = \square\phi\nabla_\nu\phi. \quad (393)$$

Isolando $\square\phi$ na equação de movimento para o campo escalar ϕ , representado na equação (204), obtemos

$$\square\phi = -\frac{1}{2Z}(F'R - Z'g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}). \quad (394)$$

Substituindo a equação (394) em (393) teremos

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^\phi = -\frac{1}{2Z}(F'R - Z'g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta})\nabla_\nu\phi. \quad (395)$$

A.2 Cálculo de $[\nabla_\nu, \square]F$

Vamos reescrever o termo $[\nabla_\nu, \square]F$. Por definição,

$$[\nabla_\nu, \square] \phi = g_{\rho\sigma} (\nabla_\nu \nabla^\rho \nabla^\sigma - \nabla^\rho \nabla^\sigma \nabla_\nu) F. \quad (396)$$

Utilizando acima o fato de que as derivadas comutam entre si, podemos escrever esta equação como

$$\begin{aligned} [\nabla_\nu, \square] \phi &= g_{\rho\sigma} (\nabla_\nu \nabla^\rho \nabla^\sigma - \nabla^\rho \nabla_\nu \nabla^\sigma) F \\ &= g_{\rho\sigma} [\nabla_\nu, \nabla^\rho] \nabla^\sigma F. \end{aligned} \quad (397)$$

Para um campo vetorial V_α vale a seguinte propriedade (Fujii; Maeda, 2003)

$$[\nabla_\nu, \nabla^\rho] V^\sigma = -R_{\lambda\nu}{}^{\sigma\rho} V^\lambda.$$

Logo, substituindo isto em (397) ficaremos com

$$[\nabla_\nu, \square] \phi = -R_{\lambda\nu} \nabla^\lambda F, \quad (398)$$

onde utilizamos o fato de que $g_{\rho\sigma} R_{\lambda\nu}{}^{\sigma\rho} = -R_{\lambda\nu}$.

APÊNDICE B – Aproximação pós-newtoniana

B.1 Formalismo pós-newtoniano

A teoria de Newton da gravitação pode ser vista como uma primeira aproximação das teorias gravitacionais existentes. Esta teoria nos permite uma acurácia de 1 parte em 10^5 no sistema solar (Will, 2018). No entanto, existem alguns fenômenos em que esta teoria não consegue explicar, como por exemplo o avanço do periélio de mercúrio que é da ordem de 10^{-7} radianos por órbita e só foi explicado satisfatoriamente por meio da TRG. Por conta disso, foi necessário desenvolver uma aproximação mais acurada para a métrica do espaço-tempo que vai além de Newton. Esta aproximação é conhecida como o limite pós-newtoniano.

Existe todo um desenvolvimento sobre a métrica pós-newtoniana de tal forma que ela dependa de alguns coeficientes, cuja forma irá variar dependendo da teoria métrica de partida. Esta expansão em termos de coeficientes é conhecido como o formalismo pós-newtoniano e foi primeiramente desenvolvido por Eddington, Robertson e Schiff e mais tarde foi generalizada por Kenneth Nordtvedt e Clifford Will (Will, 2018). Este é um tema extenso, logo não irei detalha-lo, para mais informações consulte (Will, 2018).

Vamos aqui apenas utilizar alguns resultados deste formalismo para as teorias escalares tensoriais. Sendo definido

$$\alpha_0 = \alpha(\varphi_0), \quad (399)$$

$$\beta_0 = \left. \frac{d\alpha(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0}, \quad (400)$$

os parâmetros pós-newtonianos γ_e e β_e e a constante gravitacional podem ser expressos como (Tsuchida; Kawamura; Watanabe, 1998)

$$1 - \gamma_e = \frac{2\alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2}, \quad (401)$$

$$\beta_e - 1 = \frac{\beta_0\alpha_0^2}{2(1 + \alpha_0^2)^2}, \quad (402)$$

$$G_* = \frac{G\Omega^2(\varphi_0)}{1 + \alpha_0^2}, \quad (403)$$

em que $\gamma = \beta = 1$ corresponde ao limite da TRG (Misner; Thorne; Wheeler, 1973). Os parâmetros pós newtonianos podem ser restringidos por meio de fenômenos observacionais. Experimentos de time delay e de deflecção da luz no sistema solar indicam que (Esposito-

Farese, 1996)

$$|1 - \gamma_e| < 2 \times 10^{-3}. \quad (404)$$

Além disso, experimentos de lunar laser ranging levam a (Esposito-Farese, 1996)

$$|\beta_e - 1| \leq 6 \times 10^{-4}, \quad (405)$$

e estudos de pulsares binários indicam (Damour; Esposito-Farèse, 1996)

$$\beta_0 > -5. \quad (406)$$

Note que, ao utilizarmos $\Omega^{-1}(\varphi) = e^{\frac{1}{2}\beta\varphi^2}$ teremos $\alpha(\varphi) = \beta\varphi$ (equação (236)), logo, pela equação (400) teremos

$$\beta = \beta_0. \quad (407)$$

APÊNDICE C – Conservação do tensor energia momento da shell na TET no FE.

C.1 Conservação do $\bar{t}_{\mu\nu}$

A equação de conservação do tensor energia momento sobre a superfície é de fundamental importância para a obtenção das quantidades $\sigma'(y)$ e $\sigma''(y)$ que são utilizadas no cálculo da estabilidade. Vamos aqui demonstrar que no nosso caso de interesse a equação de conservação será na mesma forma que na TRG (equação (146)).

Na seção 2.5 obtemos (equação (290))

$$n^\mu [T_{\mu\nu}] + n^\mu [T_{\mu\nu(\varphi)}] + \nabla^\mu \bar{t}_{\mu\nu} + \nabla^\mu \bar{t}_{\mu\nu(\varphi)} = 0. \quad (408)$$

Na colagem de Minkowski com a solução de vácuo da TET o campo escalar sobre a superfície é constante, logo $\nabla^\mu \bar{t}_{\mu\nu(\varphi)} = 0$, ou seja, equação (408) resulta em

$$\nabla^\mu \bar{t}_{\mu\nu} = -n^\mu [T_{\mu\nu}] - n^\mu [T_{\mu\nu(\varphi)}]. \quad (409)$$

Levantando um índice da equação acima

$$\nabla_\mu \bar{t}_\nu^\mu = -n_\mu [T_\nu^\mu] - n_\mu [T_{\nu(\varphi)}^\mu], \quad (410)$$

e projetando esta equação na superfície

$$\nabla_b \bar{t}_a^b = -[T_\nu^\mu e_a^\nu n_\mu] - n_\mu [e_a^\nu T_{\nu(\varphi)}^\mu], \quad (411)$$

em que utilizamos o fato de que $[e_a^\nu] = [n_\mu] = 0$. Utilizando a equação (285), o segundo termo do lado direito da equação (411) será

$$\begin{aligned} -n_\mu [e_a^\nu T_{\nu(\varphi)}^\mu] &= -n_\mu \left[2e_a^\nu \left(\varphi^{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{*\nu}^\mu g_*^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} \right) \right] \\ &= -2n_\mu [\varphi^{,\mu} \varphi_{,a}] + n_\mu [g_{*\nu}^\mu g_*^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta}]. \end{aligned} \quad (412)$$

Como já definimos durante o texto, os índices sobre a shell são os mesmos em ambos os lados, conseqüentemente $[\varphi_{,a}] = 0$. Além disso, levando em conta que $[escalar] = 0$ podemos escrever a última igualdade de (412) como

$$-n_\mu [e_a^\nu T_{\nu(\varphi)}^\mu] = -2n_\mu \varphi_{,a} [\varphi^{;\mu}] + n_\mu [g_{*\nu}^\mu] g_*^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta}. \quad (413)$$

Utilizando o fato de que a métrica é contínua sobre a superfície (equação (266)) nos resta

$$-n_\mu [e_a^\nu T_{\nu(\varphi)}^\mu] = -2n_\mu \varphi_{,a} [\varphi^{;\mu}]. \quad (414)$$

Substituindo a equação acima na equação (411) teremos

$$\nabla_b \bar{t}_a^b = -[T_\nu^\mu e_a^\nu n_\mu] - 2n_\mu \varphi_{,a} [\varphi^{;\mu}]. \quad (415)$$