Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação e Humanidades
Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira

Lorena Rosa Branquinho

Divisão por frações: Compreensão Profunda da Matemática Fundamental de futuros professores de Matemática

Rio de Janeiro
2023

Lorena Rosa Branquinho

Divisão por frações: Compreensão Profunda da Matemática Fundamental de Futuros Professores de Matemática

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, Programa de Pós-Graduação de Ensino em Educação Básica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Cotidiano e Currículo na Educação Básica.

Orientadora: Profª. Drª. Gabriela Félix Brião

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CAP/A

B821 Branquinho, Lorena Rosa

Divisão por frações: Compreensão Profunda da Matemática Fundamental de Futuros Professores de Matemática / Lorena Rosa Branquinho. – 2023.

93 f.: il.

Orientadora: Gabriela Félix Brião.

Dissertação (Mestrado em Educação Básica) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira.

1. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 2. Frações - Teses. 3. Professor - Formação - Teses. I. Brião, Gabriela Félix. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira. III. Título.

CDU 372.851

Albert Vaz CRB-7 / 6033 - Bibliotecário responsável pela elaboração da ficha catalográfica.

Lorena Rosa Branquinho

Divisão por frações: Compreensão Profunda da Matemática Fundamental de Futuros Professores de Matemática

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, Programa de Pós-Graduação de Ensino em Educação Básica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Cotidiano e Currículo na Educação Básica.

Aprovada em 16 de fevereiro de 2023.

Banca Examinadora:

____

Profª. Drª. Gabriela Félix Brião

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

____

Profª. Drª. Sueli Ferreira da Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

____

Prof. Dr. Marcos Antonio Gonçalves Júnior

Universidade Federal de Goiás

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu pai,
João (In Memoriam),
que me dedicou um apoio incondicional e
me ensinou o que significa amar.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, João (In Memoriam), por tudo que compartilhamos nessa jornada, por ter despertado o meu interesse pela matemática desde criança, e por todo o seu amor por mim e pela nossa família.

À minha doce mãe, Barbara, por sempre me incentivar a tentar e ser a melhor versão de mim mesma, e pelo seu amor e apoio incondicionais.

Ao Luiz, meu marido, outro grande incentivador e companheiro de todas as jornadas da vida, pelo seu amor, sua atenção, paciência e pelo seu colo em todos os momentos que eu precisei.

À minha irmã e ao meu cunhado, Simone e André, pelo incentivo, apoio e compreensão em todos os momentos.

À minha orientadora, Professora Gabriela Brião, por todo o seu apoio, tempo, desorientações, orientações, pelo colo, pelo choro e principalmente por sempre ter acreditado nesse trabalho e pela sua amizade inestimável... Obrigada Gaby.

Aos Professores Marcos Antonio Gonçalves Júnior, Sueli Cunha, Daniella Assemany e Jaime Velasco por gentilmente terem aceitado o convite para composição da banca.

À Lu e ao Bruno, amigos que vieram com o mestrado, por me apresentar a novas perspectivas, pelo apoio, incentivo, por me ouvir e pela parceria de produção.

À Barbara, Andreia, Flávia e Mariana, por compartilhar o grupo de orientação, pelas contribuições e pelo apoio. E aos irmãos de orientação caçulas... Monike e Aharon...

A todos os alunos que gentilmente aceitaram participar desta pesquisa.

Ao CAp-UERJ, a todos os professores e coordenadoras do programa por possibilitarem essa oportunidade, pelo acolhimento e trocas nesse período.

À secretaria do programa, por ter sido sempre tão solícita e eficiente em um período turbulento de pandemia.

Aos meus colegas de mestrado pelas trocas e conversas.

A todos que de alguma forma contribuíram com esta jornada. Obrigado por me incentivarem e me apoiarem nessa caminhada.

Atingir a paz total é nossa missão maior como educadores,
em particular como educadores matemáticos.
Ubiratan D’Ambrosio

RESUMO

BRANQUINHO, L. R. **Divisão por Frações**: Compreensão Profunda da Matemática Fundamental de futuros professores de matemática. 2022. 93 f. Dissertação (Mestrado em Ensino em Educação Básica) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

O ensino de frações é um tema bastante complexo na Educação Básica, situa-se numa fase de transição entre os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, nos quais a rotina e contexto escolar são diferentes. À medida em que o ensino de frações avança demanda bases sólidas para se desenvolver. A chegada da divisão por frações, uma operação que engloba os números fracionários e a divisão, muitas vezes, se torna um grande desafio não apenas para alunos, mas também para os professores. Esta pesquisa dá sequência a uma investigação sobre o ensino de frações que consistiu na análise de seis coleções de livros didáticos aprovados pelo PNLD 2019-2022 para o quarto e o quinto anos do Ensino Fundamental, acerca do conceito por frações. Como principal referencial teórico utiliza-se uma pesquisa de Liping Ma na qual ela desenvolve o conceito de Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (CPMF). Com foco no conhecimento do professor sobre o ensino da divisão por frações busca-se propiciar desafios (contribuir para) o conhecimento sobre divisão por frações a partir de uma investigação do que os futuros professores de matemática compreendem, possibilitando que eles conheçam um outro papel docente, o de um professor que tem um conhecimento profundo sobre o tema. Por se tratar de um Mestrado Profissional, um dos requisitos para titulação é a produção de um Produto Educacional (PE), neste caso, um curso destinado a (futuros) professores que ensinam matemática. Um protótipo deste PE foi realizado em uma turma da Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) que forneceu apontamentos relevantes contribuindo para que se tornasse um curso de extensão. No contexto e condições (ensino remoto e período de pandemia) de realização dos encontros não foram encontrados indícios claros de CPMF no grupo de cursistas.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Divisão por Frações, Conhecimento do professor, Liping Ma.

ABSTRACT

BRANQUINHO, L. R. **Division by Fractions**: deep understanding of fundamental mathematics of future mathematics teachers. 2022. 93 f. Dissertação (Mestrado em Ensino em Educação Básica) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

The teaching of fractions is a very complex topic, it is located in a transition phase between the initial and final years of Elementary School, in which the routine and school context are different. As the teaching of fractions advances, it demands solid foundations to develop. The arrival of fraction division, an operation that encompasses fractional numbers and division, often becomes a major challenge not only for students but also for teachers. This research continues an investigation on the teaching of fractions that consists of the analysis of six collections of textbooks approved by the PNLD 2019-2022 for the fourth and fifth years of Elementary School, about the concept of fractions. As the main theoretical reference, a research by Liping Ma is used, in which she develops the concept of Deep Understanding of Fundamental Mathematics (CPMF). Focusing on the teacher's knowledge about the teaching of division of fractions, it seeks to provide challenges (contribute to) the knowledge about division by fractions from an investigation of what future mathematics teachers understand, allowing them to know another teaching role, that of a professor who has a deep knowledge of the subject. As it is a Professional Master's, one of the requirements for a degree is the production of an Educational Product (EP), in this case, a course intended for (future) teachers who teach mathematics. A prototype of this EP was carried out in a class of the Mathematics Degree at the University of the State of Rio de Janeiro (UERJ) that provided relevant notes for the course under construction. In the context and conditions (remote teaching and pandemic period) in which the meetings were held, no clear evidence of CPMF was found in the group of course participants.

Palavras-Chave: Mathematics Education, Fraction Division, Teacher Knowledge, Liping Ma.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEDA	Ato Executivo de Decisão Administrativa
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CAp	Colégio de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira
CPMF	Compreensão Profunda da Matemática Fundamental
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EUA	Estados Unidos da América
Mobral	Movimento Brasileiro de Alfabetização
MTK	*Mathematical knowledge for Teaching*
MTSK	*Mathematical Teachers Specialized Knowledge*
PAE	Período Acadêmico Emergencial
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPGEB	Programa de Pós-Graduação de Ensino em Educação Básica
PPM1	Práticas Pedagógicas em Matemática 1
RNP	Rede Nacional de Ensino e Pesquisa
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SCIELO	*Scientific Eletronic Library Online*
TCLE	Termo de Compromisso Livre e Esclarecido
TELT	*Teacher Education and Learning to Teach*
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

PLANO A: TUDO DANDO ERRADO, CONFORME O PLANEJADO

> Ainda bem que sempre existe outro dia.
> E outros sonhos. E outros risos. E outras pessoas. E outras coisas...
>
> Clarice Lispector

Tudo dando errado, conforme o planejado... pode parecer uma maneira muito pessimista para começar uma dissertação, mas foram (e são) tempos difíceis, não apenas para mim, mas para o mundo...

Esta dissertação faz parte dos requisitos para aprovação no Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação de Ensino em Educação Básica (PPGEB) sediado no Colégio de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira (CAp-UERJ). Participei do processo seletivo presencial no final de 2019, e em abril de 2020 estava previsto o início das aulas e demais atividades presenciais do curso. E foi assim que tudo começou a dar errado. Em março, inicialmente, as atividades presenciais foram suspensas por quinze dias, e esse retorno acabou sendo adiado outras vezes.

A pandemia mundial, causada pela disseminação da COVID 19, nos forçou a criar outras estratégias e substituições ao modelo presencial que estávamos acostumados. As disciplinas e atividades do mestrado foram realizadas de forma remota, mediadas por recursos tecnológicos, o que demandou uma grande adaptação tanto por parte dos docentes, como dos discentes. As interações e trocas realizadas durante os encontros eram mais restritas e limitadas. Ter a família toda convivendo no mesmo espaço também era um desafio para muitos, principalmente para quem tinha filhos. Dificuldades com o uso de alguns recursos e ferramentas, problemas com a baixa qualidade da internet ou mesmo com quedas de conexão também passaram a fazer parte do cotidiano.

Todas as questões envolvidas e impactadas por essas medidas de distanciamento social também inviabilizaram o meu projeto de pesquisa inicial, que abordava a divisão por frações, mas usaria como pano de fundo para a pesquisa a Educação Financeira com alunos do segundo ano do Ensino Médio do CAp-UERJ. Como não havia previsão para o retorno presencial e as aulas não eram totalmente síncronas, submeter o projeto à Plataforma Brasil naquele momento não era possível. Um novo projeto precisava surgir dessa situação, mas não queria sair do tema principal, que era a divisão por frações.

Minha orientadora, Drª. Gabriela Brião, sugeriu realizar minha pesquisa com uma turma de Prática Pedagógica em Matemática 1 (PPM1), uma disciplina que faz parte do terceiro período da licenciatura em Matemática, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), na qual ela era a professora regente. Organizei um minicurso destinado a esses futuros professores acerca da divisão por frações. Assim, iniciou-se a construção deste trabalho, com um público-alvo, um ambiente e uma proposta diferentes do projeto inicial.

Muitas coisas aconteceram para que eu chegasse a esse programa de mestrado e muitas outras aconteceram depois, acho importante compartilhar algumas delas, além das escolhas que envolvem diretamente essa pesquisa.

A voz por trás da pesquisa

Suponho que me entender
não é uma questão de inteligência
e sim de sentir,
de entrar em contato...
Ou toca, ou não toca.

Clarice Lispector

Nasci em uma cidade pequena da zona da mata de Minas Gerais, Cataguases[1], que no censo realizado em 2010 possuía menos de setenta mil habitantes e possui uma arquitetura marcada pelo Modernismo, com projetos de grandes arquitetos, como Francisco Bolonha e Oscar Niemeyer.

Desde pequena eu adorava a escola, não aceitava perder um único dia de aula, mesmo que estivesse doente ou em dias chuvosos. Envolvia-me em tudo o que acontecia, todos os eventos e projetos da escola despertavam meu interesse, me renderam muitas memórias boas e engraçadas. A escola sempre foi uma amiga, enquanto muitos não gostavam de matemática, química ou física, o desafio sempre me instigou. A matemática da escola sempre foi acessível e amigável para mim, tive professoras e professores maravilhosos, lembro-me de cada um deles.

Cursei a Educação Infantil e o Ensino Fundamental em escolas públicas, o Ensino Médio em uma escola particular. Eram escolas limpas, coloridas, bem cuidadas, espaçosas, com recursos necessários a uma boa prática, acho que

[1] Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/mg/cataguases/panorama. Acesso em: 22 set. 2022.

Skovsmose[2] as classificaria como *salas de aula prototípicas*[3]. Algumas pessoas poderiam até me perguntar o que eu queria ser quando crescesse, mas isso não era importante, eu amava ser criança, correr, pular, brincar, eram as minhas prioridades.

Sempre via meu pai desenvolvendo uma matemática que muitas vezes eu não compreendia, ele era ótimo com muitos cálculos. Aprendi a fazer cálculos mentais, desenvolvi claramente a noção de completar e ainda outras técnicas de cálculo de uma maneira muito divertida e agradável, acho que foi assim que a minha proximidade com a matemática começou.

Experiência Escolar

Meu primeiro contato com as frações se baseava na representação parte-todo, barras de chocolates, bolos, tortas e o uso de materiais manipuláveis fazem parte dessa memória. Faz tempo que isso aconteceu, não me recordo exatamente o que mais era trabalhado ou discutido durantes as aulas, mas naquele momento foi suficiente. As frações não me pareciam um monstro, tão pouco incompreensíveis. As dificuldades que não surgiram quando eu era aluna, vieram com força para a professora. Como auxiliar os discentes na compreensão das frações e das operações com frações? Um grande desafio...

No Ensino Médio estudei em uma Escola Técnica de Formação Gerencial, que fazia parte do projeto Escola do Sebrae[4]. Esta aliava a metodologia de projetos, estímulos à autonomia, consciência crítica e me forneceu uma concepção de

---

[2] Ole Skovsmose possui mestrado em Matemática e Filosofia pela Universidade de Copenhague (1975) e doutorado em Educação Matemática pela Royal Danish School of Education Studeis (1982). Professor Emérito da Universidade de Aalborg (Dinamarca), leciona na Universidade Estadual Paulista Júlia de Mesquita Filho (UNESP). Autor de diversos livros publicados em vários idiomas, "foi um dos idealizadores da Educação Matemática Crítica e o principal disseminador dessa concepção de Educação Matemática ao redor do mundo" (CEOLIM, HERMANN, 2012, p. 9).

[3]*Sala de aula prototípica, simplista ou estereotipada*: é definida por Skovsmose (2014) como um "ambiente organizado", no qual tudo é idealizado, a estrutura escolar é adequada, professores e alunos estão envolvidos e dedicados no processo. As dificuldades relacionadas aos discentes são restritas à aspectos da aprendizagem matemática. É o tipo de ambiente em que a maior parte das pesquisas são realizadas, mesmo que represente a minoria das salas de aula reais. Na região Sudeste, em geral, as salas de aula podem ser classificadas como prototípicas, pois possuem condições mínimas para o ensino.

[4]"A Escola do Sebrae nasceu com o objetivo de desenvolver no estudante suas competências técnicas e comportamentais, preparando o jovem para vencer desafios do mercado e empreender na vida. Por meio de uma metodologia inovadora de projetos, o estudante é capaz de desenvolver atitudes empreendedoras, habilidades em gestão, solução de problemas, oratória, ideação e modelagem de negócios. Além disso, é estimulado a desenvolver características como autonomia, proatividade e responsabilidade socioambiental, tornando-se um cidadão crítico e consciente do seu papel na sociedade". Disponível em: https://escoladosebrae.com.br/. Acesso em: 22 set. 2022.

Educação que eu tratava como um “bom modelo”. Concomitantemente ao Ensino Médio, tínhamos o curso técnico de Administração Empresarial, e esse curso me fez ter certeza do que eu não gostaria de cursar na graduação: administração. Durante os estágios, o trabalho era demasiadamente burocrático e repetitivo, não conseguia me ver sentada atrás de uma mesa por anos fazendo as mesmas coisas. Eu queria algo que fosse interessante, que me propusesse novos desafios e emoções. Fui aprovada no vestibular para a Licenciatura em Matemática, gostava da disciplina e de ensinar, de ajudar as pessoas.

“Meus problemas” com a Matemática começaram na faculdade, era uma matemática muito diferente da que havia aprendido na escola e cursar uma Licenciatura em Matemática foi bem decepcionante para mim. Esperava que fosse uma formação mais direcionada para a formação de professores e que as questões que permeiam esse universo tivessem mais espaço, além da própria matemática (é claro).

Nunca vou esquecer a primeira vez que entrei em uma escola pública da rede municipal do Rio de Janeiro, foi muito contrastante com a realidade que eu conhecia. Lotada, barulhenta, pequena, restrita, cheia de grades. A primeira impressão na escola em que realizei meus estágios supervisionados foi extremamente sufocante, se eu tinha dúvidas de que a graduação seria suficiente para a formação docente, eu tive a certeza de que não estava preparada para aquela realidade.

Com o passar do tempo convivendo com aquela comunidade escolar, em algum momento, acabei percebendo que não era tão sufocante quanto no começo, mas ainda assim longe do ideal. Não era uma escola localizada em comunidade, tinham carteiras razoáveis, ar-condicionado e portas nas salas, o que eu descobri não ser a realidade em todo o município. Mas o aspecto que mais chamou a minha atenção e faz com que eu sempre repare quando passo perto de uma escola, é a semelhança com uma prisão. São grades e portões separando cada parte, restringindo e oprimindo, muitas vezes carece urgentemente de manutenção, paredes descascadas, sujas, manchadas, há muito tempo sem pintura, problemas com infiltrações, vazamentos e muitos outros. Como alguém poderia querer passar um tempo num ambiente de tamanho descuido e abandono?

Na mesma escola em que realizei os estágios atuei durante dois anos como voluntária nos Programas: Mais Educação e Novo Mais Educação, oferecendo oficinas de matemática para os alunos que desejassem participar. Esforçava-me para levar atividades que despertassem o seu interesse e os desafiasse. Era muito triste para mim, ver que muitos duvidavam a todo tempo da própria capacidade de fazer matemática. Quando algum deles percebia que conseguia, que havia solucionado uma questão/concluído um jogo/ou qualquer atividade que envolvesse a matemática, eu me sentia recompensada. Notei por essa época que alguns tópicos geravam maiores dificuldades e incompreensões, como as frações.

Mostrar para esses alunos que eles eram capazes de matematizar se tornou mais importante do que ensinar conteúdos/técnicas/procedimentos matemáticos, isso me fez perceber que eles precisavam de muito mais do que matemática e que um professor precisa de muito mais do que conhecimento técnico e teórico para lecionar.

Comecei a pesquisar mais sobre o assunto e encontrei uma Especialização em Educação Matemática, no Colégio Pedro II. O curso atendia a professores que ensinam matemática, com formação nesta área ou em pedagogia, foi uma experiência enriquecedora. Durante a especialização, uma amiga me apresentou ao PPGEB, ela já havia cursado uma disciplina como aluna especial, e eu me inscrevi em Didática da Matemática, ministrada pela minha orientadora, que me aproximou muito da Educação Matemática. Dois textos (LINS, 2004 e VIANNA, 2008) dessa disciplina foram parte da minha inspiração para uma pesquisa sobre frações e que resultou no trabalho de conclusão de curso na especialização Branquinho (2019), que consistiu na revisão de seis coleções de livros didáticos destinados ao quarto e ao quinto anos do Ensino fundamental, em que o conceito de frações é abordado segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018).

Este trabalho dá sequência à investigação sobre o ensino de frações, agora direcionado para a divisão por frações. Gostaria de que os alunos vissem a escola com a mesma magia que eu sempre vi, que lhes fosse um espaço de acolhimento e exploração, não apenas uma obrigação, um lugar do qual querem fugir. Sei que nem todos seriam cativados pela Matemática, como eu fui, mas espero poder contribuir para um outro olhar para a Matemática.

INTRODUÇÃO

... a operação mais complicada com os números mais complexos,
pode ser considerada um tópico cimeiro da aritmética.[5]

Sim, estamos falando sobre a divisão por frações. Uma operação que alia dois temas de grande dificuldade: a divisão e os números fracionários. Se a Matemática já é vista como um monstro por muitas pessoas, indecifrável e inacessível quando usamos números naturais, as frações surgem como um novo desafio. É um número? Não é um número? Por que as operações parecem não seguir a mesma lógica de antes? Como isso funciona?

Em minha percepção, no Brasil vivemos imersos a uma cultura que supervaloriza um título: se cursei uma licenciatura e obtive meu diploma, estou formado, pronto para lecionar e sei tudo. Não gostamos de admitir que não sabemos, muitas vezes não temos a humildade necessária para continuar aprendendo, se formando. É fácil se fechar dentro daquilo que conhece, não se permitir explorar outros lugares, não sair de sua zona de conforto. As aulas de matemática podem facilmente se tornar uma mera repetição de procedimentos e algoritmos prontos, quando não nos sentimos confortáveis com algum tópico.

A Matemática não é boa, ruim, justa ou injusta, se pensada enquanto ferramenta, vai depender da maneira como é utilizada. Pode ser destinada a inúmeros fins, desde a criação de bombas com potencial devastador a de vacinas que salvam milhares de vidas. Desta forma, além do conhecimento matemático adquirido, é necessário refletir sobre o seu uso e suas implicações. Para tal reflexão, problematizar a ideologia da certeza[6] que permeia a Matemática torna-se muito importante, assim como suprimir esse caráter de neutralidade e certeza infindável. Acredito em matemáticas que são construídas e usadas por seres humanos, nunca neutras, mas ao contrário, sempre em busca de algum propósito; discutir essas questões demanda uma sociedade que não tema a(s) matemática(s), que a(s) conheça(m) e saibam lidar

[5](MA, 2009, p. 114).

[6] Ideologia da certeza representa uma crença exacerbada em resultados matemáticos, de que mesmo aplicada a matemática é a melhor solução, mesmo para problemas reais, representando uma “verdade inquestionável”. “Vemos a ideologia da certeza como uma estrutura geral e fundamental de interpretação para um número crescente de questões que transformam a matemática em uma “linguagem de poder”. Essa visão da matemática – como um sistema perfeito, como pura, como uma ferramenta infalível se bem usada – contribui para o controle político” BORBA, SKOVSMOSE (2001, p. 129).

com ela(s). A Matemática pode ser utilizada como um mecanismo de exclusão quando privamos parte da nossa sociedade (em geral os menos favorecidos) do seu pleno entendimento e exercício, mas ela também tem o potencial (para quem a utiliza) de promover a libertação, de questionar as desigualdades socioeconômicas e de lutar por equidade. Acredito que isso depende do tipo de acesso que é concedido às pessoas. Quando limitamos e a tornamos inacessível, selecionamos alguns para ingressar nessa gaiola e fechamos a porta para que os “indesejados” não façam parte, repercutimos séculos de injustiças e segregação. Mas quando promovemos uma matemática que apresenta possibilidades, soluções, que se mostra aberta a discussões e diversos caminhos, possibilitamos (ou tentamos possibilitar) a todos que a compreendam e que a utilizem da maneira que melhor lhes sirva.

A minha busca não se faz por uma crítica à formação docente, à universidade, aos alunos, ou sugere fornecer uma quantidade maior de conhecimentos. O objetivo é conhecer uma outra maneira de aprender. Também não faz parte dessa pesquisa diagnosticar o que um futuro professor de matemática não sabe, mas a partir da hipótese de que lhe falta uma Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (CPMF), procurar meios de desenvolvê-la, conhecer uma nova possibilidade de ser professor. Caminhar em direção ao reconhecimento de que há saberes diferentes, e matemáticas possíveis. Esta investigação se insere no projeto de pesquisa “Matemáticas outras que surgem em uma sala de aula que valoriza a experiência do outro” da linha de pesquisa de anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio do PPGEB e coordenado por minha orientadora.

O objetivo dessa pesquisa é contribuir para a construção de Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental sobre divisão por frações junto a futuros professores de matemática.

A motivação desta pesquisa começou em 2018/2019, quando cursei uma Especialização em Educação Matemática, no Colégio Pedro II, destinada a professores que ensinam matemática. Meu trabalho de conclusão constituiu-se de uma pesquisa qualitativa documental, em que seis coleções[7] de livros didáticos aprovadas pelo PNLD 2019-2022 foram analisadas quanto à apresentação das frações referente ao quarto e ao quinto anos do Ensino Fundamental. A pesquisa

---

[7] Foram analisadas as coleções: “Eu gosto”, da editora IBEP; “A conquista”, da editora FTD; “Liga mundo”, da editora Saraiva; “Aprender juntos”, da editora SM; “Ápis”, da editora Ática e “Bem-me-quer”, da Editora do Brasil.

analisou as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) acerca do ensino de Matemática e das frações em especial. Abordou a construção da fração como um número e conhecimentos que alicerçam esse processo, ressaltando alguns obstáculos e barreiras. Apresentou diversas possibilidades para o ensino de frações como: o uso de calculadoras, leitura, resolução de problemas, etnomatemática, história da matemática e o uso de materiais manipuláveis. E ainda produzi uma proposta de atividades utilizando o livro Monstromática, escrito por Jon Scieszika e ilustrado por Lane Smith. Ao final dessa pesquisa ressaltei o abismo entre o que se vê como proposta pelos documentos oficiais, pelas próprias coleções e o que, de fato, é desenvolvido no material didático. Não se nota a construção da relação entre fração e número, tampouco os muitos recursos didáticos/pedagógicos são explorados, constituindo um instrumento de ensino fragmentado, repleto de subdivisões sem criar conexões com outros conhecimentos (BRANQUINHO, 2019).

A partir desse trabalho, foi possível compreender por que ao ingressar no sexto ano do Ensino Fundamental, o discente se depara com tamanha dificuldade para operar com as frações, não tendo compreendido o seu significado mais básico: o de um número fracionário. Os livros didáticos baseiam-se quase exclusivamente na representação parte-todo. Pizzas, bolos, tortas, barras de chocolates, frutas e até mesmo figuras geométricas são as representações mais utilizadas nos anos iniciais, todas possuem uma característica em comum: são variáveis quantitativas discretas. O uso de variáveis contínuas, como representações na reta numérica ou associação à operação de divisão não são comuns.

A divisão por frações ocorre na transição entre o quinto e o sexto ano, do Ensino Fundamental I para o II, um período de grandes mudanças para os alunos. Pode se tornar um desafio quase (e muitas vezes) intransponível, geralmente é um tema apresentado de maneira muito mecânica, sem representação, significado ou entendimento de tudo o que está por trás dessa operação (NOVAES, TORTOLA, VERTUAN, 2021; LOPES, 2008). Decora-se aquele famoso: “repete a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda”, o aluno não sabe o porquê mas sabe que é assim, repete e obtém êxito nos cálculos. Mas é só isso, alguns irão decorar essa regra e simplesmente aplicá-la repetidamente, sem refletir sobre, já outros nem isso... Ao ingressar na faculdade, nossa formação segue um modelo bem semelhante à Educação Básica, não somos apresentados às matemáticas, e sim a uma Matemática (escolar) que se constitui como uma ciência soberana, que sabe de todas as coisas. Não discutimos sobre o uso ou suas potencialidades, apenas aprendemos mais tópicos/procedimentos/fórmulas/cálculos, tudo muito técnico e teórico. Adentramos na sala de aula e muitas vezes acabamos por ensinar da maneira que aprendemos, pois isto é o que sabemos, o que conseguimos reproduzir. E o ciclo se repete.

Almejando romper com esse ciclo, nos capítulos a seguir será apresentada uma pesquisa que foi realizada em uma turma com vinte e três alunos da disciplina de Práticas Pedagógicas em Matemática I, cadeira obrigatória da Licenciatura em Matemática, na UERJ, campus Maracanã.

O capítulo 1 traz o referencial teórico da pesquisa, abordando aspectos relativos à dificuldade de apreensão do conceito de frações, da operação de divisão, da operação de divisão por frações. O conceito de Compreensão Profunda da Matemática Fundamental é apresentado e para finalizar algumas questões que permeiam o ensino.

O capítulo 2 é composto pela revisão de literatura em que são analisados: uma tese de doutorado, três dissertações de mestrado e um artigo.

O capítulo 3 consiste no percurso metodológico da pesquisa e elaboração de um curso sobre divisão por frações.

O Capítulo 4, Análise de dados, conta com uma análise dos dados obtidos no curso produzido.

1. REFERENCIAL TEÓRICO

Vianna (2008, p. 161) defende “o extermínio das frações, sua retirada dos currículos, dos livros didáticos, das listas de conteúdo escolar...”, esta seria uma proposta muito radical? Falar sobre mudanças curriculares é um tema complexo, difícil de chegar a um consenso entre políticas públicas, documentos oficiais, professores, diretores escolares e demais partes envolvidas nesse processo. As frações seriam realmente capazes de “roubar” o gosto das crianças pela matemática? O autor tece duras críticas à maneira como as frações são trabalhadas, apresenta-se algo que não é uma fração, nem um número, mas atribui o tratamento destinado aos números. As representações parte-todo amplamente utilizadas nos anos iniciais dificultam a relação entre uma fração e um número, e qualquer argumentação racional não seria capaz de romper com a convicção acerca do ensino de frações nas séries iniciais. Assim como Vianna (2008), considero importante ressaltar que a permanência das frações no currículo não se dá pelo que elas representaram em outros momentos da história, mas por serem a “representação fracionária” dos números racionais.

Nesse mesmo sentido, comparar a Matemática aos monstros que representam as dificuldades, Lins (2004) fala sobre o jardim guardado por monstros que filtram aqueles que irão passear por ali. Ressalta que a Matemática acadêmica, do matemático, ao assumir um caráter absolutista, alheia a qualquer coisa externa à própria Matemática, torna-a distante da realidade, não “natural” para quem não a conhece profundamente. Esse distanciamento entre a “Matemática acadêmica” e o que ele se refere como a “Matemática da rua” promove uma descrença mútua, uma nega e ignora a outra, não conseguem coexistir ou se apoiar. E assim, como ao se deparar com um monstro, a pessoa fica paralisada, não sabe o que fazer ou como agir e talvez fuja, ocorre o mesmo ao se encontrar com a matemática. É mais fácil e confortável não enfrentar o monstro, negar a sua existência e seguir com a vida quando não sou capaz de produzir significados familiares. Dessa forma:

> A situação é complexa, porque quem garante que o monstro exerça sua função de me impedir de entrar lá, paradoxalmente, sou eu, porque sou eu que me paraliso frente a ele, sou eu que digo a mim mesmo “não sei o que fazer”, e, aos outros “não há o que fazer”. (LINS, 2004, p. 119).

E esse ciclo de medo e distanciamento da matemática se perpetua, o jardim da matemática continua sendo habitado apenas por aqueles para quem os monstros monstruosos, se tornam de estimação. Da mesma forma que é cômodo para o aluno negar a dificuldade, também é para o docente dar uma aula expositiva, em que todos acreditam que o professor ensina e o aluno aprende, e se ele não aprendeu é porque lhe falta algo ou ele não é capaz. Nesse cenário, o papel da Educação Matemática é transformar o monstro monstruoso, em um monstro de estimação, mesmo que após isso o aluno decida não frequentar o jardim do matemático, essa terá sido a sua escolha e não uma imposição.

De volta às frações, como ir do monstro monstruoso para o monstro de estimação?

Para começar, Vianna (2008) assume que a fração tomada exclusivamente como representação parte-todo, usando barras, pizzas, tortas e outros objetos não simboliza um número. Aliar as frações à divisão também não é uma opção, pois nos anos iniciais a divisão se restringe aos números naturais, tendo como resultado apenas números “inteiros” e positivos. Ele apresenta um exemplo muito interessante (2008, p. 167-168):

> Considere o Bucaneiros F.C., um time de futebol que disputa dois torneios simultâneos. Apresentada a alunos de séries iniciais a situação abaixo, eles a resolverão sem qualquer dificuldade.
> Situação: o Bucaneiros jogou três partidas no campeonato da cidade e ganhou uma delas. No campeonato nacional ele jogou cinco partidas e ganhou duas.
> Uma forma de representar o que acabamos de afirmar é a seguinte:

Campeonato da cidade:	Partidas ganhas 1 Partidas jogadas 3	Representação: 1/3
Campeonato nacional:	Partidas ganhas 2 Partidas jogadas 5	Representação 2/5

> Pergunta: como representar o total de partidas ganhas e jogadas?
> Respostas dos alunos, obtida por simples adição:
> Partidas ganhas 3
> Partidas jogadas 8
> Ou seja: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$

Neste caso, estamos falando de razão. A primeira razão é a análise do rendimento do Bucaneiros FC no campeonato da cidade, a segunda razão compreende o rendimento do time no campeonato nacional e a terceira razão refere-se ao rendimento do time em todas as partidas. Esta modelagem poderia ser representada através de porcentagem, mas não de frações.

Esse resultado é compatível com a situação, mas não com o tratamento matemático que damos às frações, pode ser bastante perturbador para você, assim como foi para muitos dos professores que interagiram com Vianna nesse problema.

Existem outras maneiras possíveis para representar a solução, mas o objetivo do autor era causar estranhamento e um conflito entre o conhecimento acerca das frações e esse contexto, claro que isso só é possível, porque apesar de utilizar a mesma representação, não são frações.

Um aluno dos anos iniciais que não conhece as operações com frações, possivelmente resolveria qualquer soma de frações dessa maneira, somando os numeradores e denominadores, parece o caminho mais natural. O estranhamento causado em professores e pesquisadores com esse exemplo busca se aproximar do que as crianças enfrentam ao encararem a soma de frações pela primeira vez. Elas utilizam conhecimentos prévios para tentar resolver novas situações, mas isso não funciona com as frações. Dessa forma, esse exemplo não é absurdo para as crianças, os professores, no entanto, só o aceitam quando reconhecem que não estamos lidando com números. O propósito de desestabilizar esses conhecimentos é despertar para a ideia de que, talvez, o que parece com um número quando as frações são ensinadas, não retrata um número (claro que o fato deste exemplo específico não tratar de fração como número, não garante que as frações não tenham atribuído como significado o de um número, é uma possibilidade) (VIANNA, 2008).

Vianna (2008) critica o método como as frações são ensinadas, como representações parte-todo, pois remetem apenas a um procedimento de dupla contagem. Contam-se o número de partes que se quer: temos o numerador, contam-se o número de partes em que o todo foi dividido: temos o denominador. E de fato, se as frações permanecem no currículo por representarem os números racionais, não deveriam ser desenvolvidas aliadas ao significado de número? Em Branquinho (2019), apresento algumas possibilidades/ferramentas que podem ser utilizadas.

Ao abordar as frações, o discente se depara com obstáculos epistemológicos, outros conhecimentos construídos e alguns já solidificados se chocam com os significados que precisam ser construídos. Por exemplo: para os números naturais, 2 é igual somente a 2[8], mas temos as frações equivalentes, que são representações fracionárias de um mesmo número racional como $\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \frac{7}{35}$, que representa o número decimal 0,2 que por sua vez também pode ser escrito como 0,2 ou 0,20 ou 0,20000. As operações também seguem uma lógica diferente dos números naturais,

[8] 2 é equivalente a: $\frac{4}{2}$; 200% ou 1,99999999; porém estes elementos não pertencem ao conjunto dos Números Naturais.

e assim, talvez a grande dificuldade em lidar com as frações se deva ao fato de criar uma ruptura entre os saberes que o aluno possui e os que precisa construir.

A escola é um ciclo: o aluno aprende com o professor, o aluno estuda mais e se torna professor, o professor estuda mais e se torna o professor do professor. Um vai aprendendo com o outro, mas muitas vezes, ensinamos da mesma maneira que aprendemos, principalmente com tópicos mais complexos que não compreendemos tão bem, em geral. Acredito ser o caso da divisão por frações. É mais fácil dizer ao discente: “repete a primeira e multiplica pelo inverso da segunda fração”. Se o conceito de fração não está bem solidificado, como compreender uma operação tão complexa quanto à divisão por frações? Como criar uma representação adequada para algo que não se compreende? E o ciclo se repete, o aluno aprende com o professor, ao se tornar professor: ensina da maneira como aprendeu... Para tentar romper com esse ciclo de repetição e construir um conhecimento significativo, que transforme esse monstro monstruoso em um monstro de estimação, iremos apresentar alguns pontos importantes para compreender a complexidade dessa operação e depois veremos algumas possibilidades diferentes.

1.1. Uma muito breve história do ensino de frações no Brasil

Por mais que o nosso currículo escolar não tenha sofrido grandes alterações e reformulações ao longo do tempo, os conteúdos que o compõem vão sofrendo alterações, outros vão sendo incorporados, como vimos com o ensino de estatística e probabilidade que a BNCC trouxe para os anos iniciais. Podemos afirmar que o ensino de frações foi se transformando junto com a escola brasileira.

Na década de 1960, apenas o curso primário (com quatro anos de escolarização) era um dever do Estado, a chamada “escola de primeiras letras” buscava um ensino que seria utilizado fora da escola, conhecimentos que serviriam para o dia a dia e para os trabalhos mais comuns, seguindo sempre a lógica de apresentar uma operação, suas regras e exemplos numéricos. A obrigatoriedade da inserção do sistema métrico decimal a partir de 1972 causou uma mudança na ordem em que os conteúdos eram apresentados:

> Considerando-se a *sequência* “operações-frações-decimais”, as frações significam operadores que dividem coisas da vida cotidiana em partes iguais, das quais se deseja tomar algumas delas. Já para a *sequência* operações-decimais-frações, as frações constituem razões entre dois números para uso em problemas de mudanças de sistemas de medidas. (COPPE, SIQUEIRA,

2021, p. 24).

A primeira sequência era utilizada antes da implementação do sistema métrico decimal, após esse período o subconstruto[9] razão integrou-se às frações.

No fim do século XIX e início do XX, estudos da psicologia sobre o ensino começaram a se destacar, assim como críticas ao ensino baseado na memorização, a preocupação com o desenvolvimento infantil e a importância de levar aspectos da vida cotidiana para a escola. O método intuitivo que propunha que a partir da observação o conteúdo poderia ser sistematizado e o da Escola Nova estabelecia o aluno como foco do processo de aprendizagem, esses foram os dois movimentos que guiaram esse período. Os materiais didáticos começavam do fácil para o difícil, do concreto para o abstrato, de brincadeiras e situações do cotidiano até chegarem nos exercícios mais teóricos.

O final década de 1960 no Brasil coincidiu com o período no qual o nosso sistema escolar adquiriu a obrigatoriedade de ofertar oito anos de escolarização gratuita. A influência do movimento da Matemática Moderna culminou na produção de livro do aluno e guia do professor destinados a cada ano escolar, “e a matemática do ensino de frações tem por finalidade a construção dos números racionais, a fração como uma das representações do número racional.” (COPPE, SIQUEIRA, 2021, p. 40). O ensino da matemática seguia a lógica e a estrutura da Matemática, que adquiriu mais destaque na Escola. Esta foi uma tendência proveniente do cenário internacional, almejando uma produção de conhecimento única, uniforme e para todo o ensino.

No meio da década de 1980, as críticas e debates em torno do Movimento da Matemática Moderna, entre os campos pedagógicos e disciplinares, fomentaram o cenário em que surgiu a Educação Matemática no Brasil. A partir de então, final do século XX, documentos oficiais começaram a permear o cenário educacional: em 1997 os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), e em 2017 a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os PCN apontam para o desenvolvimento da cidadania e apresentam temas transversais que deveriam permear todas as áreas de ensino. Já

[9] “...podemos dizer que existe um consenso entre os pesquisadores de que Kieren (1976) foi o primeiro a sugerir que os números racionais possuem diversos significados, denominados, em seu primeiro trabalho de interpretações.” (GOMES, 2010, p. 26). “Em 1988, Kieren revê suas sugestões para os diversos significados de fração e passa a falar em “*subconstrutos”,* ao invés de *interpretações.” (GOMES, 2010, p. 27, grifo do autor).*

a BNCC surge como um documento normativo para direcionar a criação dos currículos estaduais e municipais. Ambos os documentos propõem o ensino dos números racionais a partir dos dois últimos anos do Ensino Fundamental I, após o trabalho com operações com números naturais, sistema monetário e com a ideia de metades.

Os PCN (BRASIL, 1997) agrupam os conteúdos por ciclos com duração de dois anos, no segundo ciclo (equivalente ao: quarto e quinto ano do ensino fundamental) traz os números racionais e suas representações fracionárias e decimais, a partir dos subconstrutos parte-todo, quociente, razão e operador. No terceiro ciclo, mantém os mesmos significados, e espera-se que o aluno seja capaz de:

> ...*efetuar cálculos* envolvendo adição, subtração, multiplicação*, divisão* e potenciação*, escolher adequadamente os procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito*) em função dos contextos dos problemas, dos números e das operações envolvidas (BRASIL, 1998, p. 76, grifo nosso).

A BNCC (BRASIL, 2017, p. 307) destaca na unidade temática dos números para o sétimo ano: “Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações” e como habilidades:

> **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
> **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (BRASIL, 2017, p. 308, grifo do autor).

Os PCN desenvolvem um pouco mais o que o professor deve esperar do aluno, abordam aspectos importantes como a escolha do cálculo, o que valoriza os cálculos aproximados, exatos, mentais e escritos. De modo geral, ele é mais abrangente quanto ao que propõe para a Educação, trazendo temas transversais e abordando questões como o uso de jogos, da história da matemática, de tecnologias, relação professor-aluno, conhecimento e ainda outros aspectos. Diferente da BNCC que apresenta habilidades mais gerais, os PCN atribuem às frações como significado uma representação fracionária de um quociente (resultado de uma divisão) e em seu texto traz aspectos como o letramento matemático (mas sem caracterizá-lo). Importante ressaltar que nenhum dos dois se constitui enquanto currículo e sim como documentos norteadores para a elaboração do currículo escolar. Ambos propõem uma Educação para a cidadania.

Neste texto não pretendo defender e nem criticar documento algum (isso já seria um trabalho bem longo), mas a BNCC, que é o documento mais atual (e bastante controverso) da Educação brasileira aponta as frações como representação parte-todo, resultado da divisão, razão e operador. Essa sucinta história do ensino das frações, poderia se estender por muitas páginas, mas a intenção aqui é destacar um ponto principal: os movimentos educacionais, a partir do final dos anos 80, acabaram nos direcionando a uma Matemática Escolar em que o conhecimento é autossuficiente, ele não depende de nada para existir, ELE EXISTE, é uma ferramenta que deve ser aplicada para resolver um exercício ou situação-problema.

Lopes (2008) relata que os conceitos relacionados às frações são apresentados de maneira rápida, sem muito desenvolvimento e aprofundamento. Ao analisar livros didáticos publicados após o Movimento da Matemática Moderna, percebe-se uma pressa em progredir com o ensino das frações rapidamente para chegar ao conjunto dos números racionais.

Essa Matemática não transforma o monstro monstruoso, não se aproxima da matemática do cotidiano, não cria relações importantes com o mundo real, não permite uma análise crítica do seu uso e pode acabar se tornando mais uma ferramenta de exclusão.

1.2. A operação aritmética mais complexa: Divisão

A divisão demanda conhecimento sobre a subtração, a multiplicação e a procura pelo algarismo que se encaixe no quociente, não podendo ser grande demais e nem muito pequeno. Além disso, na adição, subtração e multiplicação temos dois números e como resultado um terceiro número, na divisão temos dois números, mas possíveis resultados distintos na resolução de um problema, pode ser o quociente, o resto ou nenhum dos dois, a sua solução. Essa ruptura torna a divisão a mais complexa entre as quatro operações básicas. (VERGNAUD, 2009; RIPOLL, RANGEL, GIRALDO, 2015; BRIÃO, MUZINATTI, RIBEIRO, 2015).

Construir um significado sólido para a divisão é essencial não apenas para a divisão por frações, mas também para a compreensão das frações como números. Dessa forma, explorar outros algoritmos e outras interpretações se torna essencial.

Uma mesma operação pode representar situações diferentes, utilizando como ilustração a divisão não exata de 37 por 5, observamos:

I. Luana preparou 37 brigadeiros e precisa colocá-los em caixinhas com cinco unidades para vender. Quantas caixinhas completas ela terá?

Nesse caso, ela terá 7 caixinhas completas, logo a resposta é 7 (o quociente da divisão não exata).

II. Luana preparou 37 brigadeiros e precisa colocá-los em caixinhas que cabem cinco unidades. Quantos doces irão sobrar após completar o máximo de caixas possível?

Aqui ela irá completar as mesmas 7 caixinhas, e sobrarão dois doces, a resposta é 2 (o resto).

III. Luana preparou 37 brigadeiros e precisa colocá-los em caixinhas que cabem cinco unidades. Quantas caixinhas serão necessárias para armazenar todos os doces?

Em 7 caixinhas ela consegue armazenar apenas 35 doces, como todos precisam ficar em caixas, ela precisará de 8 caixinhas (não é o resto e nem o quociente).

Os problemas apresentados são discretos, ou seja, envolvem números inteiros. Se considerarmos os decimais, poderíamos ter ainda:

IV. Luana possui 37 metros de fita de cetim, se quiser dividir entre suas 5 filhas. Quantos metros de fita cada uma irá receber?

Aqui, cada uma receberá 7,4 metros de fita (que é o quociente da divisão não exata).

Mas note que mesmo para os alunos que já realizam esse último tipo de divisão, as quatro situações anteriores permanecem inalteradas. Em quatro contextos obtivemos quatro soluções distintas, dessa forma, diferentes situações podem ser modelizadas por uma mesma operação de divisão.

Os problemas envolvendo a divisão podem seguir ainda dois modelos:

I. Partição/Repartição: no sentido de partilha, distribuição, é um modelo no qual conhecemos o todo e a quantidade de partes que desejamos dividir; o resultado representa o valor de cada parte.

Brião, Muzinatti e Ribeiro (2015, p. 86) exemplificam com: “Tenho 10 lápis e quero distribuí-los igualmente entre 5 pessoas. Quantos lápis cada pessoa receberá?

10 lápis ÷ 5 = 2 lápis (repartição*)”*

II. Quotição/Cotição/Agrupamento: no sentido de comparação, medição relativa em que conhecemos o todo e o valor de cada parte; o resultado passa a ser a quantidade de partes (ou quotas).

E novamente, temos como exemplo: “Quantas caixas de 5 lápis cada uma se consegue formar com 10 lápis?

10 lápis ÷ 5 lápis = 2 (agrupamento)”

Nestes dois casos, apesar de a operação de divisão ser a mesma (10 ÷ 5), em cada situação a quantidade (5) representa objetos diferentes. Na primeira 10 lápis divididos por 5 pessoas resulta em 2 lápis por pessoa, na segunda temos caixas com 5 lápis “contendo ao todo” 10 lápis, então o número de caixas resulta da divisão de 10 lápis em grupos de 5 lápis.

Ambos os problemas foram propostos por Brião, Muzinatti e Ribeiro (2015, p. 86) a professores de matemática para que os classificassem. O professor que ensina matemática deve ter o conceito de número e da divisão bem claros e estabelecidos para que reconheça esses modelos, o que se torna muito relevante não apenas para a sua prática docente, mas também para conseguir reconhecer e lidar com as possíveis soluções e/ou dificuldades de seus alunos. Afinal, se a divisão por frações é a operação mais complexa com os números mais complexos (no início da Educação Básica), antes de compreendê-la será necessário compreender profundamente o processo da divisão, mas claro, esse não é o único conhecimento necessário, existem ainda outros... falaremos deles posteriormente.

1.3. Liping Ma

É possível que o leitor nunca tenha ouvido esse nome. Iremos apresentar um pouco do que pesquisamos sobre ela. A Revolução Cultural que ocorreu entre 1966 e 1976, na China, constituiu-se em um momento de transformações sociais e políticas, que visavam distanciá-la do modelo soviético de comunismo. Possuía quatro objetivos, dentre eles: “assegurar uma experiência revolucionária à juventude chinesa”. A Revolução foi finalizada em 1977[10]. Foi nesse período que Liping Ma e outros adolescentes com sete ou oito anos de escolarização deixaram Xangai, a cidade em que ela nasceu e foi criada, sendo enviados a uma aldeia pobre e pequena, localizada no Sul da China. Eles deveriam trabalhar no campo e serem reeducados pela comunidade. Após alguns meses da mudança, o chefe da aldeia pediu à Liping Ma que desse aulas na escola primária. Ma passou cinco anos ensinando todos os cinco anos de escolaridade e, ao final tornou-se diretora da escola.

[10] Para mais informação acesse: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-foi-a-revolucao-cultural-chinesa/. Acesso em: 22 set. 2022.

Após retornar a Xangai, ela começou a ler clássicos da educação e atingiu o grau de mestra na Universidade Normal da China Oriental. Dando continuidade à sua formação, no final de 1988, foi para os Estados Unidos para estudar na Universidade do Estado de Michigan, na qual ela trabalhou como assistente de estudo na Formação de Professores e Aprender a Ensinar (Teacher Education and Learning to Teach – TELT). Seu trabalho consistia em codificar respostas de professores a questões, no entanto essas devolutivas eram bem distintas do que ela esperava, pouquíssimos professores respondiam corretamente.

> Os instrumentos matemáticos do TELT foram desenvolvidos por Deborah Ball para a sua dissertação (BALL, 1988b) foram criados para testar os conhecimentos dos professores no contexto de práticas comuns que os professores adotam no processo de ensino. (MA, 2009, p. 25).

A tese de doutorado de MA, defendida em 1999, utilizou essas questões do TELT e posteriormente resultou no livro “Saber e Ensinar Matemática Elementar” de 2009. A autora aborda quatro tópicos fundamentais da matemática elementar que intitulam os primeiros capítulos:

I. *Subtração com reagrupamento: abordagens para ensinar um tópico*,
II. *Multiplicação com números de vários algarismos: lidar com os erros dos alunos*,
III. *Criar representações: divisão de frações*[11] e
IV. *Explorar novos conhecimentos: a relação entre perímetro e área*.

A divisão de frações, abordada no terceiro capítulo é a questão utilizada nesta dissertação. Em sua pesquisa, Ma utilizou dados de 23 professores dos Estados Unidos e de outros 72 professores chineses. Ela compara o desempenho desses dois grupos de professores, mas este não é o ponto principal do trabalho, ela analisa o que os difere, desde o tempo de escolarização formal, possibilidades de formação continuada, como ocorre essa formação docente e o que se apresenta como relevante, para cada grupo, para ensinar esses tópicos. Esta análise dá origem ao conceito de Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (CPMF), que dá nome a esta dissertação e que será abordado em breve. Antes, iremos discutir um pouco mais sobre o terceiro capítulo do trabalho de Ma.

[11] Pesquisas utilizadas no referencial teórico e na revisão de literatura MA (2009); SILVA (2017); MORAL (2018); SILVA F.º (2019), DUGAICH (2020); MORIEL Jr.; WIELEWSKI; CARILLO (2019) utilizam o termo “divisão de frações” ao tratar da “divisão por frações”, dessa forma, este trabalho considerou que ambos os termos se referem à divisão cujo divisor é uma fração.

1.3.1. Criar representações: divisão por frações

O cenário desse capítulo (3, da tese de Ma) solicitava o cálculo de uma divisão por frações, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ e a criação de uma situação problema que possa ser representada por esta operação.

> Imagine que está a ensinar a divisão por frações. Para que isto tenha algum significado para as crianças, muitos professores tentam arranjar situações da vida real ou histórias-problema para mostrar a aplicação de um conteúdo particular. Qual seria uma boa história ou um bom modelo para $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$? (MA, 2009, p. 113).

Este cenário é um tópico avançado da aritmética e Ma (2009, p. 113-114) considera que:

> A divisão é a mais complicada das quatro operações. Os números fracionários são muitas vezes considerados os números mais complexos da matemática do ensino básico. A divisão por frações, a operação mais complicada, com os números mais complexos, pode ser considerada um tópico cimeiro da aritmética.

Com o grupo de professores americanos, dentre os 23, 21 tentaram calcular $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, sendo que nove conseguiram efetuar os procedimentos de cálculo corretamente. Dois não reduziram e nem transformaram o resultado em número misto, quatro não foram claros ou não demostraram segurança nos cálculos. Todos os professores que utilizaram o algoritmo para os cálculos, converteram o número misto em fração imprópria e multiplicaram invertendo o divisor.

Os professores chineses não apenas calcularam corretamente, mas apresentaram outras maneiras de realizar o cálculo, dando sentido ao algoritmo, no lugar do termo “inverter e multiplicar”, eles utilizavam “dividir por um número é equivalente a multiplicar pelo seu recíproco”. Sobre esta regra, um dos professores ressaltou que ela é válida desde que o divisor não seja zero e que ela também se aplica a divisão por números inteiros, porém é ensinada apenas ao abordar a divisão por frações, porque o recíproco de qualquer número inteiro será uma fração com numerador um. O currículo matemático chinês destaca as relações entre uma operação e sua inversa. “A maioria dos professores não mencionou a propriedade para se lembrar do procedimento de cálculo, mas sim para justificar os seus cálculos” (MA, 2009, p. 118).

Outro professor explicou que provavelmente este algoritmo da divisão por frações foi aceito como habitual porque além da multiplicação ser menos complicada que a divisão, elimina o problema dos restos quando um número não for divisível por outro. Assim, além de conhecer vários métodos de resolução, os alunos também devem conseguir avaliar qual se aplica melhor a cada caso.

Dos 23 professores americanos, 6 não elaboraram um modelo, 16 representações possuíam concepções erradas e um professor desenvolveu uma história com conceito correto, mas complicada à nível pedagógico.

Dez professores confundiram a divisão por ½ com a divisão por 2, as representações falavam em “dividir igualmente por dois” ou “dividir em metades” usando objetos circulares. Como no exemplo exposto por Ma (2009, p. 126-127) em sua pesquisa:

> Podemos usar uma torta, uma torta inteira, e depois três quartos de outra torta e termos duas pessoas, temos de ter a certeza de que isso é *dividido igualmente*, para que cada pessoa obtenha uma parte igual à outra. (Sr.ª Fiona).

Ao propor a divisão de algo igualmente para duas pessoas estamos falando da divisão por 2, se fossem 6 tortas para dividir, teríamos: 6 tortas ÷ 2 pessoas = 3 tortas/pessoa, estes professores não perceberam essa mudança de operação.

Seis professores confundiram a divisão por ½ com a multiplicação por ½. O professor Barry utilizou a expressão “tirar metade do total”, que está relacionada com a multiplicação.

> Provavelmente o mais fácil seria falar de tortas com este número pequeno. Usar a torta habitual para frações. Podíamos ter uma torta inteira e três quartos de outra como se alguém tivesse tirado um pedaço. Depois dividíamos tudo em quartos e teríamos de *tirar uma metade do total*. (Prof. Barry) (MA, 2009, p. 127).

Para determinar uma parte do total utilizamos a multiplicação de frações, se tivéssemos 2 quilos de açúcar e quiséssemos tirar uma metade dessa quantidade, faríamos $2.\frac{1}{2} = 1$ quilo de açúcar. Ainda, segundo Ma, essa confusão entre a divisão por ½ com a multiplicação por ½ demonstrava também uma dificuldade com o conceito da multiplicação por frações.

Ainda duas professoras confundiram os três conceitos:

> Dividir um e três quartos em metades. Ok, vejamos... Teríamos este todo, e aqui teríamos os três quartos. E depois queremos apenas a metade do todo. (Prof.ª Bernadette).

> Temos um e três quartos de litros de um líquido num jarro, e queremos dividi-lo ao meio de uma maneira visível, para cada um ficar com metade do líquido para beber, (Prof.ª Beatrice). (MA, 2009, p. 128).

Ao empregar “dividir um e três quartos ao meio” e “dividi-lo ao meio” estavam se referindo à divisão por 2 e os termos “apenas metade do todo” e “ficar com metade” relacionam-se com a multiplicação por ½, dessa forma, aparentemente os conceitos da divisão por ½, multiplicação por ½ e divisão por 2 não eram diferenciáveis.

Dois professores americanos não apresentaram nenhuma história, eles não conseguiam conceber uma representação para a divisão por uma metade.

Uma professora criou uma história conceitualmente correta, representando uma divisão, “Dividir o número A pelo número B é achar quantos Bs estão contidos em A” (MA, 2009, p. 130), porém a sua solução resultava em um número fracionário de crianças, portanto é uma representação problemática para a sala de aula.

> Vejamos algo como 2 tabletes de chocolate e um quarto. E eu quero dar a cada criança metade de um tablete. Quantas crianças podem obter ou irão obter um pedaço de chocolate? Claro que ficou metade de uma criança no fim, mas... ok, é esse o problema de usar crianças aqui, porque depois temos quatro crianças e meia. Sabemos que serão quatro crianças e uma criança irá receber apenas metade da quantidade dos outros. Penso que eles conseguiam descobrir isso. (MA, 2009, p. 129).

Ela utilizou dois inteiros e um quarto, quando o problema tratava de 1 inteiro e três quartos, mas isso não interfere na compreensão da divisão por frações.

Cálculos corretos ou incompletos foram apresentados por 9 professores, dentre os 16 que criaram uma história conceitualmente incorreta, mesmo tendo discutido entre eles os resultados de suas histórias, quatro professores não notaram as divergências, cinco notaram, mesmo assim não conseguiram chegar a uma representação correta. Esses professores demonstravam um conhecimento superficial e insuficiente sobre os procedimentos de cálculo, não compreendiam por que o algoritmo funcionava, o que não permitia que criassem uma representação a partir desse resultado, possuíam uma base conceitual muito fraca.

Pelo menos 4 professores demonstraram ter dificuldades em operar com números mistos, sem compreender como e porque se dava a conversão de número misto em fração imprópria. Este era outro contributo para a criação de uma abordagem à divisão por ½.

1.3.2. A operação mais complexa, com os números mais complexos: Divisão por frações

Ao questionar se o conhecimento pedagógico poderia ser capaz de superar o desconhecimento do conceito Ma, (2009, p. 135) afirma que “Para criar uma representação, devemos primeiro saber o que representar”. Ela não encontrou evidências de que o conhecimento pedagógico fosse limitado ou insuficiente. Os objetos usados nas histórias (pizzas, tortas, dinheiro, frutas e receitas) são representativos para os conceitos relacionados às frações, entretanto a ausência do significado da divisão por frações os impediu de criar representações adequadas para o modelo solicitado.

Então quais seriam os conhecimentos necessários para representar a divisão por fração? O que um professor que ensina matemática precisa saber sobre a divisão por frações? Lembra quando falamos sobre os modelos de divisão? Destacam-se a seguir os modelos da divisão por frações.

Entre os professores chineses, 90% criaram pelo menos uma representação correta, ou seja, 65 professores criaram mais de 80 histórias adequadas à divisão por frações. Seis professores afirmaram não serem capazes de elaborar uma situação e um forneceu um problema incorreto, representando $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$.

Três modelos de divisão foram utilizados pelos professores chineses:

- $1\frac{3}{4}$ metros ÷ $\frac{1}{2}$ metro = $\frac{7}{2}$ (modelo de agrupamento)
- $1\frac{3}{4}$ metros $\div \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ metros (modelo de repartição)
- $1\frac{3}{4}$ metros quadrados $\div \frac{1}{2}$ metro $= \frac{7}{2}$ **metros** (modelo de produto e fatores)

Que correspondem a:

- Quantos $\frac{1}{2}$ metros existem em algo que tem $1\frac{3}{4}$ metros de comprimento?
- Se metade de um comprimento mede $1\frac{3}{4}$ metros, quanto mede o todo?
- Se um lado de um retângulo de $1\frac{3}{4}$ metros quadrados mede $\frac{1}{2}$ metro, qual é o comprimento do outro lado? (MA, 2009 p. 138, grifo nosso).

O modelo de agrupamento da divisão foi empregado em dezesseis histórias criadas pelos professores chineses. Oito delas baseavam-se em "encontrar quantos $\frac{1}{2}$s existem em $1\frac{3}{4}$", era o caso da professora americana que conseguiu elaborar a história com problemas à nível pedagógico. Por exemplo, Ma (2009, p. 139) apresenta "Cortamos uma maçã em quatro partes iguais. Pegamos em três partes e juntamo-las a uma maçã inteira. Se $\frac{1}{2}$ maçã for uma porção, quantas porções podemos obter com $1\frac{3}{4}$ maçãs? (Sr.ª I)".

"Encontrar quantas vezes $1\frac{3}{4}$ é relativamente a $\frac{1}{2}$" estava presente nas outras oito histórias com o modelo de agrupamento, como em: "Estava planejado construir uma ponte em 1 mês e $\frac{3}{4}$. Mas de fato demorou apenas $\frac{1}{2}$ mês. Quantas vezes o tempo que estava planejado é relativamente ao tempo que realmente levou? (Prof. K)." (MA, 2009, p. 139).

O agrupamento no conjunto dos números inteiros consiste em determinar, por exemplo, quantas vezes o número 3 está contido em 12, ou encontrar quantas vezes o número 12 é relativamente ao número 3. Ao dividir 12 por 3, obtemos 4, logo 12 é 4 vezes o número 3. Quando tratamos de frações, principalmente quando o dividendo é menor que o divisor, o quociente será uma fração imprópria, e o objetivo será "determinar qual fração um número é de outro" ou "encontrar que parte fracionária de um número é igual a outro".

Sessenta e duas situações correspondiam ao modelo de repartição da divisão, "encontrar um número tal que $\frac{1}{2}$ dele seja $1\frac{3}{4}$". Exemplo: "A mãe comprou uma caixa de doces. Ela deu à avó $\frac{1}{2}$ do conteúdo da caixa, e essa porção pesava $1\frac{3}{4}$ kg. Quanto pesava originalmente a caixa?" (MA, 2009, p. 142).

Com os números inteiros, na verdade com os naturais, os alunos aprenderam o modelo de repartição da divisão, que anseia encontrar o valor de uma unidade quando é conhecido o valor de várias unidades. Por exemplo, temos 36 pessoas em uma gincana para um jogo, foram agrupados em 4 grupos de mesmo tamanho, quantas pessoas teremos em cada grupo? Nesse caso temos a quantidade dos vários grupos, 36 pessoas, também temos o número de grupos 4, e queremos encontrar o tamanho de cada grupo.

Na divisão por frações o todo passa a ser uma incógnita, não temos o valor de várias unidades, e sim o valor de uma parte de uma unidade.

> Por exemplo, $\frac{1}{2}$ de uma corda de saltar mede $1\frac{3}{4}$ metros, qual é o comprimento da corda? Sabemos que uma parte da corda mede $1\frac{3}{4}$ metros e sabemos também que essa parte é $\frac{1}{2}$ da corda. Dividimos o número da parte, $1\frac{3}{4}$ metros, pela fração da corda correspondente do todo, $\frac{1}{2}$, e obtemos o número que representa o todo $3\frac{1}{2}$ metros. (MA, 2009, p. 141).

Logo, a versão fracionária do modelo de repartição pretende encontrar um número quando uma parte dele é conhecida. Conceitualmente, as duas abordagens são idênticas, a diferença é a característica da quantidade: com números inteiros conhecemos um múltiplo da unidade, já com os números fracionários conhecemos uma fração da unidade. Nos modelos de agrupamento e no de produto e fatores não ocorre essa mudança de significado.

O modelo de produto e fatores que se baseia em "encontrar um fator quando o produto e o outro fator são conhecidos apareceu em três histórias. Por exemplo: "Sabemos que a área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. Digamos que a área de um quadro retangular é $1\frac{3}{4}$ metros quadrados e a sua largura é $\frac{1}{2}$ metro; qual é o seu comprimento? (Sr. A)" (MA, 2009, p. 143).

Objetos circulares e retangulares foram muito utilizados pelos professores americanos, demonstravam propensão em trabalhar com unidades inteiras e reais (como objetos do cotidiano). Os professores chineses usavam esses recursos para abordar o conceito de fração, mas para as operações a inclinação se dava para representações abstratas, contínuas, como unidades de medidas de comprimento e tempo.

Durante as entrevistas com os professores chineses eles apontaram conceitos importantes que consideravam como uma base de conhecimento para o entendimento do significado da divisão por fações, representados na Figura 1, são eles: Conceito de unidade, Conceito de fração, Significado da adição, Significado da multiplicação com números inteiros, Conceito de operações inversas, Significado da divisão com números inteiros e o Significado da multiplicação com frações.

Figura 1 – Base de conhecimentos para o entendimento do significado da divisão por frações

Fonte: Ma (2009, p. 145).

“Nesta perspectiva, aprender é um processo contínuo durante o qual o novo conhecimento é apoiado pelo conhecimento anterior e este é reforçado e aprofundado pelo novo conhecimento” (MA, 2009, p. 145-146). Assim para construir adequadamente o significado da divisão por frações esses conceitos são essenciais, ao mesmo tempo em que o seu desenvolvimento aprofunda e consolida esses outros conceitos. Para a compreensão da divisão por frações, se torna essencial o significado da multiplicação com frações, que além de constituir a base, atua ainda como um “nó” interligando diversos conceitos importantes.

1.3.3. Um caso especial:

A maior parte dos professores chineses utilizou o modelo de repartição em detrimento do modelo de agrupamento, apareceram em mais de trinta cenários distintos nas suas histórias e apenas três deles utilizaram objetos circulares, deixando claro que seu conhecimento acerca da divisão por frações era bem estruturado e lhes permitia criar diversas representações, com ênfase a uma professora criou três histórias utilizando um mesmo cenário:

> A operação $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ pode ser representada a partir de diferentes perspectivas. Por exemplo, podemos dizer: aqui está $1\frac{3}{4}$ kg de açúcar e queremos embalá-

> lo em pacotes de $\frac{1}{2}$ kg cada. Quantos pacotes teremos? Podemos também dizer que temos dois pacotes de açúcar, um com açúcar branco e outro com açúcar amarelo. O açúcar branco pesa $1\frac{3}{4}$ kg e o açúcar amarelos $\frac{1}{2}$ kg. Quantas vezes é o peso de açúcar branco maior que o do açúcar amarelo? Mais ainda, podemos dizer que na mesa está uma porção de açúcar que pesa $1\frac{3}{4}$ kg; é $\frac{1}{2}$ de todo o açúcar que existe em casa, por isso quanto açúcar temos nós em casa? Todas as três histórias são sobre açúcar, e todas representam $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$. Mas os modelos numéricos que ilustram são distintos. Colocaria as três histórias no quadro e convidaria os alunos a comparar os diferentes significados que elas representam. Após a discussão pedir-lhes-ia que tentassem inventar as suas próprias histórias-problema para representar os diferentes modelos da divisão por frações. (Sr.ª D.) (MA, 2009, p. 150).

Esta professora além de criar representações baseadas em modelos diferentes, sugere a comparação dos significados de cada uma. Essa uniformidade da operação e do cenário facilita a compreensão de cada modelo envolvido. Ela ainda propôs algo que, ao menos no Brasil, não é comum, sugerir aos alunos que criem suas próprias histórias-problema.

Dessa forma, Liping Ma evidencia que para elaborar uma representação conceitualmente correta sobre um tópico, além do conhecimento pedagógico e do contexto em que o aluno está inserido, é imprescindível que o professor possua um extenso e profundo conhecimento sobre o tema.

1.3.4. CPMF: Compreensão Profunda da Matemática Fundamental

Liping Ma ao comparar os conhecimentos de professores dos Estados Unidos e da China em quatro tópicos (subtração com reagrupamento, multiplicação com vários algarismos, divisão por frações, relação entre perímetro e área), nota que o conhecimento do primeiro grupo é procedimental, fragmentado, enquanto o segundo possuía uma compreensão conceitual sobre todos; essa discrepância se tornou ainda mais evidente com a divisão por frações.

Os professores chineses demonstraram ser essencial além de saber como, saber o porquê, entender por que aquela sequência de procedimentos funciona. Outro ponto que se destacou foi a linguagem usada, ao citar “dividir por um número é equivalente a multiplicar pelo seu recíproco” eles abrem espaço para um conhecimento matemático mais conceitual. É uma "regra geral” que pode ser aplicada aos números naturais ou inteiros, e que os alunos também já conhecem. Isto permite uma exploração muito mais ampla do que o algoritmo “repete a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda" apontado pelos americanos, que também é comumente difundido aqui no Brasil. Dessa forma, além de se preocupar com a compreensão conceitual, os chineses se preocupavam em exemplificar formas não usais para resolução, desenvolvendo outras estratégias de cálculo que permitiriam ao docente analisar cada caso e definir qual estratégia seria mais eficiente. Além de uma explicação verbal, apresentavam também uma simbólica, em geral mais rigorosa.

"Ser capaz de calcular de várias formas significa que transcendemos a formalidade de um algoritmo e alcançamos a essência das operações numéricas" (MA, 2009, p. 196). Neste caso os professores chineses demonstraram o algoritmo habitual de quatro maneiras distintas e indicaram três métodos de cálculo alternativos. Isso demonstra uma habilidade em estabelecer relações entre tópicos, o que faz muito sentido visto que a matemática não se constitui de regras e procedimentos isolados, mas de uma rede, um emaranhado de conhecimentos interligados e associados. As quatro operações básicas não são conhecimentos isolados, para consolidar sua aprendizagem é importante estabelecer relações entre elas, fazem parte da *matemática elementar,* vão se relacionar também com todos os tópicos elementares e servirão de base para a construção de conhecimentos mais avançados e aprofundados.

Essa *matemática elementar* é fundamental, básica, compreende os princípios, grande parte dos conhecimentos mais básicos que serão utilizados no desenvolvimento de todos os ramos e campos da Matemática. Exatamente por isso, é tão importante que estes tópicos sejam desenvolvidos completamente no ensino básico, pois será sobre eles que a aprendizagem matemática futura se consolidará. Assim, um novo tema ao mesmo tempo em que depende de uma base de conhecimentos pode ser usado para aprofundar essa mesma base pré-existente, mostrando que todos os conhecimentos estão interligados, conectados.

No Brasil muitas vezes criamos uma barreira para essa matemática fundamental, com o que Cunha (2017) classifica como imprecisões matemáticas que permeiam a Educação Básica, as verdades incompletas por exemplo, quando se diz que não é possível calcular 10 – 14, principalmente nos anos iniciais. De fato, quando tratamos do conjunto dos números Naturais, isso não é possível, mas seria possível afirmar que não podemos fazer isso porque "vai faltar", ou que ainda não trabalharemos com essas situações, porque ao conhecer o conjunto dos números Inteiros essa "regra" deixa de ser verdadeira, e acaba se tornando um obstáculo à aprendizagem. Outra imprecisão citada por Cunha são amálgamas entre definições: quando temos definições que parecem sinônimas, mas que são casos particulares, na Língua Portuguesa temos várias palavras que se encaixam nessa situação como por exemplo SEDE. Na frase: *Estou com sede,* e em *A sede da empresa fica no centro*, apesar de ambas terem a mesma grafia, entendemos claramente que se trata de coisas diferentes; na primeira se refere a vontade de beber algo, a segunda em geral a um prédio, a matriz da empresa. Com o sinal “=” ocorre o mesmo, inclusive quando tratamos das frações equivalentes, escrevemos $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, e costuma-se ler que *um terço é igual a dois sextos*, quando na verdade *um terço é equivalente a dois sextos*.

Outro ponto relevante sobre o comportamento dos professores chineses é a predisposição em deixar o aluno pensar e explorar sozinho, solicitar que ele proponha problemas, o que não apareceu nos professores americanos e, também não é muito comum no Brasil.

Indo além do conhecimento conceitual sobre a matemática apresentado pelos professores, destaca-se a importância das suas atitudes também. Ma (2009, p. 209) afirma que:

> Atitudes básicas em relação à matemática mencionadas pelos professores durante as entrevistas, tais como “justificar uma asserção com um argumento matemático”, “saber como, assim como saber porquê”, “manter consistência de uma ideia em vários contextos”, e “abordar um tópico de múltiplas formas” pertencem a todos os tópicos da matemática elementar.

Atribuir à matemática uma perspectiva de exploração, de busca, de conhecimento embasado e construído, com sentido além da mera repetição de algum procedimento demonstra um conhecimento mais profundo do professor, mas também tem o potencial de aproximar o aluno da matemática, de convidá-lo para este jardim.

Esse conhecimento profundo, abrangente e amplo da matemática faz parte da Compreensão Profunda da Matemática Fundamental, que também pode ser vista como:

> a tomada de consciência da estrutura conceitual e das atitudes básicas em relação à matemática elementar e a capacidade de providenciar uma base para essa estrutura conceitual e incentivar atitudes básicas nos alunos. Um entendimento profundo da matemática tem alcance, profundidade e abrangência: alcance de entendimento é a capacidade de relacionar um tópico com tópicos de poder conceitual similar ou menor, profundidade de entendimento é a capacidade de relacionar um tópico com aqueles de maior poder conceitual, abrangência é a capacidade de relacionar com todos os tópicos (MA, 2009, p. 215).

Assim o professor com CPMF ao abordar uma situação/problema propicia diversas abordagens, cria conexões entre outros conceitos, retorna e ao mesmo tempo amplia conceitos básicos, compreende o currículo além dos tópicos, mas também sua estrutura, promove atitudes básicas (de exploração da matemática) em seus alunos e tem consciência disso. Este professor está ciente de que seu papel vai muito além de “ensinar um algoritmo”, vai além da Matemática, mas também inclui um conhecimento curricular amplo e a responsabilidade de estimular uma postura de pesquisador nos seus alunos.

1.3.5. O caminho em busca da CPMF

Almejando identificar como e quando a CPMF é desenvolvida, Ma dá seguimento à sua pesquisa entrevistando um grupo de professores recém-formados, um grupo de alunos que concluíram o nono ano e ingressariam na formação docente, e três professores que ela identificou como detentores de uma CPMF, todos chineses. Cabe destacar que essa formação de professores na China seria o equivalente, no Brasil, aos alunos que ao concluírem o Ensino Fundamental II ingressam no curso Normal.

Os dois grupos de futuros professores obtiveram êxito em seus cálculos, demonstrando um conhecimento procedimental. Mais de 80% dos recém-formados elaboraram uma situação problema conceitualmente correta para representar a divisão por frações, e menos da metade dos que ingressariam na formação obtiveram hesito. O primeiro grupo utilizou o modelo de agrupamento em quase todas as situações, no segundo grupo metade utilizou agrupamento e a outra metade o modelo de repartição (MA, 2009).

Os recém-formados apresentavam um conhecimento conceitualmente correto, sem conceitos equivocados, preocupação em ensinar e aprender, mas suas explicações eram curtas, não se aprofundavam nos temas e não estabeleciam relações entre conceitos ou muitas alternativas diante de algum bloqueio. Os dois grupos de futuros professores chineses demonstraram maior entendimento conceitual sobre a divisão por frações do que os professores estadunidenses, além de não externaram aspectos de CPMF (MA, 2009).

A CPMF como conhecimento do professor “nem sempre possui fronteiras claras”, dos professores chineses entrevistados por Ma (2009), um décimo não apresentava nenhum aspecto, um décimo foi identificado como possuindo, e todo o restante estava numa “zona cinzenta” entre os extremos. Aparentemente a CPMF encontrada nesses poucos professores e que já possuíam vários anos de experiência em todos os anos de ensino foi adquirida após a sua formação inicial.

> Entrevistei três professores com CPMF, perguntando-lhes como tinham adquirido o seu conhecimento matemático. Os professores mencionaram vários fatores: aprender com os colegas, aprender matemática com os alunos, aprender matemática resolvendo problemas, ensinar, ensinar a todos os ciclos de uma ponta à outra e estudar materiais de ensino de forma exaustiva (MA, 2009, p. 244).

Os professores entrevistados salientaram a importância de uma pesquisa cuidadosa e crítica dos materiais de ensino: o Quadro de Referência do Ensino e Aprendizagem (pela descrição da autora, este Quadro se assemelharia ao que temos no Brasil como a BNCC), manuais do professor e manuais escolares. O Quadro de Referência é estudado antes do início de um semestre, utilizado para estabelecer as metas para auxiliar os alunos a alcançarem o que é estipulado, não é negociado, mas sim seguido pelos professores. Os manuais escolares e do professor são elaborados por professores experientes e especializados em currículo, com reconhecimento nacional, e os docentes estudam desde a sua organização, a forma como os conteúdos são apresentados, o porquê, e analisam as sugestões de ensino que são propostas, visto que o material deve servir como um apoio, suporte e não como um limitador. A preocupação consiste em como ensinar da melhor maneira possível para que se disponha de menos tempo, mas que todos os alunos da turma sejam atendidos. Um dos professores relatou gastar três ou quatro vezes mais tempo para se preparar para a aula. Essa preparação é o que permite ao professor criar conexões ou bases sólidas de aprendizagem, compreender quais aprendizagens futuras utilizarão o que se ensina hoje.

O estudo dos materiais é realizado de maneira individual e coletiva. É reconhecido que um professor com mais anos de atuação terá mais experiências, mas também pode restringir seu pensamento, enquanto os menos experientes costumam ser mais criativos, explorando mais, e dessa forma, um sempre poderá se beneficiar da interação com o outro.

Os professores chineses também fazem matemática, resolvem problemas para compreendê-los e pensar em diferentes maneiras de solucioná-los e ensiná-los. O desenvolvimento de uma boa compreensão matemática, por sua vez, também possibilita que o docente aprenda com o aluno, ao abraçar uma nova ideia e explorála em sala de aula.

Ma (2009, p. 242-243) destaca que “os professores chineses desenvolvem e aprofundam o seu conhecimento de matemática elementar, preparando-se para as aulas, ensinando matemática e refletindo sobre o processo.”, sua competência matemática é construída ao longo da escolarização, antes da formação de professores, na qual cria-se um vínculo entre essa competência e a preocupação sobre como ensinar e aprender. Assim, se não desenvolver esses conhecimentos durante a sua formação inicial, dificilmente conseguirá posteriormente.

Por que o professor consegue desenvolver uma CPMF na China e nos EUA não? O único fator não é a formação escolar ou formação docente, os chineses também não a possuem nessas fases. Quais fatores estariam relacionados a essas discrepâncias? Nos EUA é comum que a matemática elementar seja vista como “básica, superficial e de fácil compreensão”, portanto não demandaria um estudo tão profundo e conceitual. A formação de professores foca muito em “como ensinar”, mas de uma maneira dissociada dos conteúdos e da matemática, quando o conhecimento do professor e a aprendizagem do aluno deveriam ser tratados como processos interdependentes, relacionados e desenvolvidos simultaneamente. O Currículo “vem de fora” é imposto a partir de políticas públicas, não é analisado, criticado ou compreendido, assim como os manuais escolares que trazem poucas informações úteis ao professor, supostamente porque não se espera que seja lido. Alia-se a visão, bastante comum, de que a faculdade é o processo final de formação docente, assim, a crença de que o professor não precisa estudar mais a sua matéria é estabelecida. Há ainda outro fator de extrema relevância: os professores estadunidenses possuem menos tempo fora da sala de aula e nesse escasso tempo precisam fazer muito mais, precisam decidir o quê, como e quando ensinar, e ainda se aprofundar nesses temas, visto que, em geral, os manuais e currículos acabam sendo desprezados, tornando a tarefa de se preparar para a aula inviável (MA, 2009).

Vemos todas essas características aqui no Brasil, a matemática elementar é tida como “menos importante”, a formação docente falha em relacionar o conhecimento do professor e a aprendizagem do aluno, os nossos materiais didáticos (livros aprovados pelo PNLD) em geral não são valorizados, a BNCC é “polêmica” e pouco aceita, o tempo do professor fora da sala de aula é extremamente escasso, e também, contamos a crença de que o professor não precisa mais estudar após a faculdade.

Surge o questionamento sobre como combater esse problema. Temos um ensino fragmentado, professores com conhecimentos fragmentados e um currículo fragmentado que acabam se tornando um ciclo vicioso, não importa qual deles é a causa ou a consequência. Como romper com esse ciclo de fragmentação?

A formação docente certamente faz parte dessa solução, principalmente por abranger menos instituições escolares se comparadas com a Educação Básica, mas não acredito que a solução seja simplesmente inserir mais conteúdo ou disciplinas no currículo. Ma (2009, p. 253) sugere que: “O que deveríamos fazer era reconstruir uma matemática escolar substancial com um entendimento mais amplo da relação entre matemática fundamental e novos ramos avançados da disciplina”. Esse olhar para a Matemática como um corpo de conhecimentos interligados e interdependentes é o que seria capaz de elevar o nível da educação matemática, sem priorizar um conhecimento em detrimento do outro, mas entendendo que todos estão conectados.

Falar sobre seguir o currículo, utilizar manuais escolares ou livros didáticos é um pouco complicado, muitas vezes é tido como sinônimo de cercear a autonomia docente, mas um currículo adequado e materiais de apoio que tragam informações e conhecimentos úteis ao docente não precisa limitar o seu trabalho, pelo contrário, pode ampliá-lo fornecendo outras visões, concepções e maneiras de ensino, permitindo ainda que o professor faça adaptações, seu uso não precisa ser exclusivo. Como Ma encontrou no grupo de professores chineses que seguiam o currículo estabelecido e utilizavam os materiais de apoio, mas não de modo exclusivo e apontavam explicações que também não estavam presentes neles, incluindo soluções que aprenderam com os seus alunos.

Ma (2009, p. 257) ressalta que embora a sala de aula do professor chinês com CPMF possa parecer “tradicional”, “É baseada no manual escolar, mas não confinada aos manuais escolares. O professor é o líder, mas as ideias e iniciativas dos alunos são altamente encorajadas e valorizadas”, uma abordagem conceitual também é muito explorada. Em alguns aspectos essa sala de aula se aproxima do “Ensino tradicional” em outros de uma sala de aula que busca construir um conhecimento conceitual e crítico. A verdade é que uma nova tendência escolar não precisa excluir a outra, elas se apoiam, utilizam-se de algumas características e substituem outras, mas não são antagônicas. Se o conhecimento docente estiver limitado a procedimentos de cálculos não importa se os alunos irão se sentar em grupos, utilizar materiais manipuláveis ou qualquer outra estratégia, ele não será capaz de promover uma investigação matemática apropriada. O Ensino Tradicional não é o vilão!

No Ensino tradicional tem-se o professor como figura centralizadora, detentor de conhecimentos e responsável por repassá-los, o aluno como expectador, um ensino baseado em procedimentos, algoritmos e na reprodução sistemática de exercícios. Obviamente muitas críticas são válidas e pertinentes, mas a partir da concepção simplista de que o Ensino Tradicional não é bom, parece que toda e qualquer característica relacionada a ele deve ser eliminada da escola. Então o centro tem que ser o aluno, a aula não pode ser expositiva, as carteiras não podem ser enfileiradas, listas de exercícios não podem ser utilizadas. Não se trata de defender ou crucificar qualquer metodologia de ensino, mas de se apropriar das características que mais se adequam às necessidades de um determinado contexto escolar.

A grande questão não é o Ensino Tradicional, e sim uma abordagem tecnicista que coloca em prática a Matemática pela Matemática, sob uma ótica reducionista: neutra, livre de interesses sociais, políticos e econômicos. Fiorentini (1995, p. 17) destaca que:

> Segundo essa tendência pedagógica (tecnicista), a *aprendizagem* da Matemática consiste, basicamente, no desenvolvimento de habilidades e atitudes, na fixação de conceitos ou princípios. Isso pode ser reforçado através de jogos e outras atividades estimulantes que facilitam a memorização dos fatos e o exercício operante para desenvolver habilidades e atitudes.

Essa pedagogia tecnicista se fortaleceu no Brasil após o fim do regime militar em 1964, até o final da década de 1970 para atender às demandas de formação do capitalismo. O enfoque são os conteúdos, os recursos, as regras e macetes, não aluno e/ou professor. Formar cidadãos críticos, criativos e que saibam se posicionar historicamente no mundo não fazia parte dos seus objetivos, a escola deveria “preparar recursos humanos “competentes” para este sistema” (FIORENTINI, p. 17).

> Nesse sentido, não temos expectativa de que a proposta de um currículo comum como a BNCC vá impactar a prática docente e resolver os problemas do ensino e da aprendizagem da Matemática que, provavelmente, retomará uma abordagem tecnicista (PASSOS; NACARATO, 2018, p. 132).

No Brasil parece que ainda permanecemos presos a esta tendência tecnicista seja pela não continuidade das políticas públicas independente de seu desempenho, produzidas fora da escola (sem a participação dos professores). Ou por um esquema de avaliações de larga escala que acaba por incentivar um ensino direcionado à *preparação para avaliação* e limita a autonomia docente. O tempo e esforço despendidos no ensino de técnicas, algoritmos e procedimentos que apenas visam à resolução de problemas específicos, não garantem um bom resultado. O ensino focado na construção de conhecimento através de reflexões e investigações deveria, por consequência, resultar em um bom desempenho em avaliações.

Nas salas de aula dos professores chineses, entrevistados, mesmo tendo o professor como líder, alunos enfileirados, aulas expositivas e baseadas nos manuais escolares, há uma aprendizagem conceitual, os discentes demonstram interesse, estão sendo estimulados a exporem suas ideias e participarem do seu próprio processo de aprendizagem. A preocupação não é a realização/aprovação em avaliações, o foco é a aprendizagem.

1.4. Cálculo da divisão por frações

Diante das dificuldades conceituais relacionadas à divisão por frações, muitas vezes, o seu ensino acaba se restringindo ao uso do clássico algoritmo “repete a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda”, até mesmo alguns livros didáticos apresentam dessa maneira. E parece que essa é a única forma de realizar o cálculo. A Figura 2 é um trecho do livro didático destinado ao sétimo ano do Ensino Fundamental aprovado pelo PNLD 2019, da coleção A Conquista da Matemática.

Figura 2: Divisão de frações

Note que a divisão de $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{6}$ tem o mesmo resultado que a multiplicação de $\frac{2}{3}$ pelo inverso de $\frac{1}{6}$, que é $\frac{6}{1}$:

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$$

$$\frac{2}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{2}{3} : \underbrace{\frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1}}_{\text{inverso}}$$

Para dividir uma fração por outra fração, diferente de zero, multiplicamos a primeira pelo inverso da segunda.

Fonte: A Conquista da Matemática de GIOVANNI Jr.; CASTRUCCI (2018, p. 113).

Em uma meta-análise, Moriel Júnior, Wielewski e Carillo (2019, p. 996), identificaram seis algoritmos principais utilizados em diversas pesquisas relacionadas ao ensino de frações. A Tabela 1 apresenta esses algoritmos, sendo “1. inversão da multiplicação que chamaremos de inverter e multiplicar; 2. redução das frações a um denominador comum e divisão dos numeradores que chamaremos de igualar denominadores; 3. conversão das frações em decimais, cuja diferença para o anterior é que o denominador comum é uma potência de 10; 4. produtos cruzados; 5. uso da unidade fracionada e 6 “dividir numeradores e denominadores entre si”. Apontam ainda que o primeiro, em que se realiza a divisão como multiplicação pelo número inverso, é o mais utilizado em sites educativos e em pesquisas sobre conhecimento docente. O primeiro algoritmo (inverter e multiplicar) corresponde à definição matemática de divisão por frações (dividir equivale a multiplicar pelo inverso), dessa forma, este é o procedimento mais utilizado e aceito pelos matemáticos. Os demais algoritmos são uma derivação do primeiro, partindo de alguma adaptação e possuem algumas limitações, não atendendo a qualquer caso geral.

Tabela 1 – Seis algoritmos para a divisão por frações

Nomenclatura	**Algoritmo**
1 Inverter e multiplicar	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
2 Igualar denominadores	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \div \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
3 Conversão das frações em decimais	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x} \div \frac{c \cdot y}{d \cdot y} = \frac{ax}{cy} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ *, sendo b·x=d·y potências de 10*
4 Produtos cruzados[12]	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
5 Uso da unidade fracionada	*Se* $\frac{a}{b}$ *equivale a* $\frac{c}{d}$*, então* $\frac{1}{d}$ *equivale a* $\frac{a}{b \cdot c}$ *e a unidade* $\frac{d}{d}$ *equivale a* $\frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
6 Dividir numeradores e denominadores entre si[13]	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$ *(Caso particular: a é múltiplo de c e b de d)* $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c \cdot d}{b \cdot c \cdot d} \div \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{bcd \div d}$ *(Caso geral)*

Fonte: Adaptação de Moriel Júnior, Wielewski e Carillo (2019, p. 996-997).

É importante que o professor que ensina matemática conheça e pense em múltiplas formas de solucionar um problema, visto que tem o potencial de associar

[12] Este algoritmo é uma simplificação do item 1, puramente procedimental.

[13] $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \div \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{b \cdot c} \div \frac{c \cdot b}{d \cdot c} = \frac{b \cdot a}{b \cdot c} \div \frac{c \cdot b}{c \cdot d} = \frac{b}{b} \cdot \frac{a}{c} \div \frac{c}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$

uma visão da Matemática como corpo de conhecimentos interligados. O grupo de professores chineses entrevistados por Ma (2009), apresentaram três alternativas de cálculo (Quadro 1):

Quadro 1:Alternativas de cálculo apresentadas por professores chineses

I. Dividir por frações utilizando números decimais
$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 1{,}75 \div 0{,}5 = 3{,}5$
II. Aplicar a propriedade distributiva
$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \left(1+\frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{2} = \left(1+\frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{1} = (1 \times 2) + \left(\frac{3}{4} \times 2\right) = 2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \left(1+\frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{2} = \left(1 \div \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}\right) = 2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$
III. Não é necessário multiplicar
$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7 \div 1}{4 \div 2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

Fonte: Adaptado de Ma (2009, p. 121-124).

Utilizar representação decimal para realizar a divisão é uma alternativa interessante, nesse caso específico, é mais fácil transformar as frações trabalhadas em números decimais, pois evita ter que converter o número misto em fração e depois transformar a fração imprópria obtida no resultado em um número misto novamente. Mas, com algumas frações essa conversão não é tão intuitiva e pode até resultar em dízima periódica. Ainda será possível efetuar o cálculo, mas não tão vantajoso, observe a divisão: $\frac{3}{5} \div \frac{4}{6} = \frac{0{,}75}{0{,}8333\ldots} = 0{,}9$.

O segundo caminho apontado utiliza a propriedade distributiva, sem a necessidade de converter em decimal ou transformar o número misto em fração imprópria, podendo a partir daí utilizar a estratégia I, ou mesmo realizar a multiplicação pelo inverso.

A alternativa III não demanda da multiplicação para efetuar a divisão, funciona muito bem nas situações em que numerador e denominador forem divisíveis, respectivamente, pelo numerador e denominador. Apesar de ser válida para quaisquer frações, há casos em que essa estratégia não facilita os cálculos, quando a divisão entre numeradores ou entre denominadores resultar em uma dízima periódica, como no exemplo, já citado: $\frac{3}{5} \div \frac{4}{6} = \frac{3 \div 4}{5 \div 6} = \frac{0,75}{0,8333\ldots} = 0,9$.

Mesmo apresentando um cálculo correto em qualquer uma das alternativas apontadas pelos professores chineses, ou dos algoritmos apresentados por Moriel Júnior, Wielewski e Carillo (2019), também faz parte de um conhecimento conceitual e profundo da matemática analisar qual estratégia é mais adequada para cada situação.

O "algoritmo tradicional" pode ser trabalhado de uma maneira mais significativa e generalizada, que permita aos alunos explorar e pesquisar. Uma simples mudança na *linguagem matemática* já é relevante, pode ser apresentado como "*Dividir é equivalente a multiplicar pelo seu inverso (ou recíproco)"*. Primeiro essa regra serve para qualquer número (mesmo que só faça sentido a partir do trabalho com frações, ela pode ser experimentada com números inteiros), outro ponto relevante é não dizer que é igual, pois há diversos significados relacionados ao sinal[14] "=".

Parece ser um consenso de que o algoritmo mais utilizado acaba por reduzir a divisão por frações a multiplicação e que há outras possibilidades, por que apenas este é explorado? O mais provável é porque não há as mesmas limitações para o seu uso, todas as estratégias de cálculo que se utilizam da divisão podem recair em casos que teremos dízimas periódicas infinitas, a multiplicação elimina o problema com os restos, aparentemente simplificando o cálculo.

1.5. O ensino das frações

"O ensino de matemática deveria, sim, estar e ser fundamentado na melhor compreensão dos conceitos e dos significados, na valorização do raciocínio e do pensamento matemático" (VAZ, 2016, p. 65). O objetivo do ensino da matemática não

[14] Miranda (2019) relaciona onze significados ao sinal "=".

é o de memorizar e reproduzir fórmulas e algoritmos prontos, mas uma compreensão conceitual, assim, a divisão por frações pode ter um significado além do "repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda".

O ensino de frações, ainda hoje, parece preso ao século XIX, sendo "marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, "carroções", cálculo pelo cálculo"; para Lopes (2008, p. 22) esse ensino "empobrece as aulas de matemática" e acaba suprimindo oportunidades de desenvolver ideias e conceitos matemáticos. Mas como aproximar esse ensino do século XXI, da realidade dos nossos alunos, de forma que ele se sinta atraído a pesquisar, pensar e explorar a matemática? Como convidá-lo a conhecer esse monstro monstruoso (e domesticá-lo)?

Na sala de aula o primeiro passo para mudar essa realidade pode ser dado deflagrando a divisão por frações a partir de atividades com o potencial futuro de generalizar situações e deduzir regras. Se apresentarmos uma divisão por frações a um aluno do sexto ou sétimo ano do Ensino Fundamental, é bem provável que a primeira estratégia utilizada na resolução seja a de dividir numerador por numerador, e denominador por denominador. Ao se deparar com uma situação nova, a tendência é tentar aplicar algum conhecimento prévio, esse procedimento se assemelha com o tratamento dado à multiplicação de frações e, também, funciona, é uma opção viável para muitos casos. Antes do cálculo, pretende-se desenvolver o conceito.

Quando o ensino parte do uso do algoritmo como apenas uma regra, uma imposição e não colabora para o conceito da divisão, na verdade, permite que o aluno pense que não há divisão por frações, apenas a multiplicação. Apesar de serem operações inversas, esse conceito não é muito trabalhado previamente (e nem mesmo nessa etapa), não são relações estabelecidas para outras operações (demandariam conhecimentos que os alunos ainda não possuem, no caso da soma e subtração, os números negativos, e da multiplicação e divisão das próprias frações).

Frações? Frações? Alguém viu por aí? A busca por situações reais que utilizem as frações é um desafio, hoje elas não são comuns em nosso dia a dia. É cada vez mais incomum, pois as representações digitais e decimais foram ganhando espaço (LOPES, 2008). Ninguém diz que comeu $\frac{5}{13}$ de um bolo, essas contextualizações não são nada realísticas. E como dito anteriormente, as frações não permanecem no currículo pelo seu passado ou mesmo pelo presente, mas por representarem números racionais.

Como criar um contexto de sala de aula que permita essa pesquisa, exploração e que não restrinja as possibilidades dos alunos?

De fato, o professor precisa ter desenvolvido uma compreensão profunda da divisão por frações. A CPMF, estabelecida por Ma (2009), não se restringe a um conjunto de conhecimentos em específico, mas à matemática em geral, assim como também engloba outros aspectos além do conhecimento matemático que pode ser atingido a partir do "fazer matemática", de resolver problemas de várias maneiras, pensar em estratégias distintas de resolução; de uma compreensão conceitual; do conhecimento curricular adquirido a partir de uma leitura atenta e crítica de documentos oficiais, do currículo e de debates com outros colegas. Temos outros aspectos relevantes a serem desenvolvidos, como: O que faz com que o professor valorize múltiplas abordagens? O que o leva a incentivar o aluno a pesquisar, pensar e refletir sobre o conhecimento?

Freire (1987, p. 39) afirma que "Ninguém educa a ninguém, ninguém educa a si mesmo, os homens se educam entre si, mediatizados pelo mundo", dessa forma, enquanto o professor educa, ele também é educado. Essa troca de experiências entre educador-educando e educando-educador só ocorreria através do diálogo, que por sua vez, demanda "saber escutar". Não basta falar ao outro, fazer comunicados, é necessário falar com o outro, e "Somente quem escuta paciente e criticamente o outro, fala com ele" (FREIRE, 1996, p. 43). É importante aceitar e respeitar o conhecimento viável ao aluno, compreender suas escolhas e seu pensamento.

D'Ambrosio (2013), afirma que um professor/pesquisador construtivista elabora modelos a partir das produções escritas dos alunos que lhe permita criar situações suficientemente desafiadoras para que, progressivamente, seja capaz de construir novos conhecimentos e percepções. Para tanto, valoriza diferentes pensamentos, escuta atentamente, acreditando que há algo de viável na produção do aluno. D'Ambrosio (2013) define como uma *escuta hermenêutica,* ouvir acreditando, um ouvir construtivista, quando o docente acredita que pode aprender com o discente:

> O professor que assim ouve está disposto a reconstruir a sua própria compreensão da matemática e a desafiar a sua forma de entender certos conceitos, como consequência de sua interação com seus alunos na construção conjunta do conhecimento. Esse professor considera e aceita a matemática do aluno e entende que seu trabalho docente é de pesquisa, em busca de aprender essa matemática, certamente diferente da sua própria,

> mas que é tão importante conhecer quanto à matemática acadêmica. (D'AMBROSIO, 2013, p. 251).

Esse tipo de escuta permite que o professor/pesquisador desenvolva modelos e proponha situações mais adequadas para cada momento, contribui para uma ampliação da sua visão sobre os alunos, a realidade escolar e o seu conhecimento matemático. Proporciona ainda, aos discentes, uma sensação de pertencimento ao seu processo de aprendizagem, valorização do seu pensamento e estimula a criatividade, sem receio de se expor e a criar estratégias coletivas.

Esse tipo de trocas e experiências não acontece em qualquer ambiente, a postura do professor certamente é um aspecto de extrema relevância. "O clima de respeito que nasce de relações justas, sérias, humildes, generosas em que a autoridade docente e as liberdades dos alunos se assumem eticamente, autentica o caráter formador do espaço pedagógico" (FREIRE, 1996, p. 36).

Este capítulo (Referencial Teórico) fez um passeio partindo das dificuldades de relacionar fração e número, um sucinto histórico do ensino de frações no Brasil, as dificuldades com a operação de divisão. A tese de doutorado (1999) de Liping Ma publicada como livro em 2009 foi apresentada para fundamentar o conceito de CPMF, e como ela pode ser alcançada. Representações da divisão por frações, assim como possibilidades para o seu cálculo foram explorados para demonstrar que não precisamos nos prender a um único modelo para a divisão de frações, existem outras opções. A última sessão aborda algumas questões que permeiam esse ensino e poderiam contribuir para um ensino no qual o professor possua uma CPMF e o aluno tenha espaço para construir o seu conhecimento.

2. REVISÃO DE LITERATURA

As frações parecem não seguir as mesmas regras que os números naturais, demandam um tratamento adequado, especial e muitas vezes se tornam um monstro monstruoso da matemática. As dificuldades são inúmeras desde compreendê-las como um número até a divisão por números fracionários que acaba se tornando uma multiplicação (pelo recíproco). Não seria espantoso encontrar centenas, milhares de trabalhos sobre o tema, e quais seriam as suas contribuições para a área e para este estudo?

O Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) lançado em 2002 que reúne os trabalhos de programas de pós-graduação do país inteiro com o objetivo de torná-los mais acessíveis foi utilizado para iniciar a revisão de literatura. Como o trabalho de Ma (2009) é base fundamental para este trabalho pela abordagem às frações e devido à construção do conceito de Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (CPMF) tentei verificar se havia algum trabalho relacionado a sua pesquisa. A primeira palavra-chave utilizada foi “Liping Ma” retornando com nenhum resultado, em seguida utilizei apenas “Compreensão Profunda da Matemática Fundamental”, sem trabalhos relacionados. Tentei pesquisar “CPMF” apareceram vinte e sete trabalhos, todos de programas de pós-graduação em direito, referentes ao imposto (Contribuição Provisória sobre Movimentação Financeira).

A *Scientific Eletronic Library Online*, SCIELO, uma biblioteca científica online que permite acesso a publicações digitais de periódicos científicos também foi utilizada, para as três palavras-chave (Liping Ma, Compreensão Profunda da Matemática Fundamental e CPMF) não encontrou nenhum resultado.

Como a primeira busca não alcançou resultados, inseri “Ensino de Frações” em ambas as plataformas, obtendo como resultado 1.420.506 trabalhos na CAPES e 26 na SCIELO, conforme tabela 2.

A segunda busca não foi eficaz, logo, para tentar limitar um pouco mais os resultados, foi incluída a palavra “Divisão” ao “Ensino de Frações”, previamente utilizado. Na SCIELO encontramos dois trabalhos dispensando refinamento ou buscas adicionais, na CAPES noventa e dois, apresentado na tabela 3.

Tabela 2 – Segunda busca da revisão de literatura

Base de Dados	Quantidade Encontrada
CAPES	1.420.506
SCIELO	26
Total	1.420.532

Fonte: A autora, 2022.

Tabela 3– Terceira busca da revisão de literatura

Base de Dados	Quantidade Encontrada
CAPES	92
SCIELO	2
Total	94

Fonte: A autora, 2022.

Para reduzir a quantidade de teses e dissertações a busca foi refinada selecionando os últimos cinco anos restando sete trabalhos, um deles era de um programa de Doutorado em Ciências dos alimentos, os demais relacionados a programas de ensino ou educação (Tabela 4).

Tabela 4– Quarta revisão de literatura

Base de Dados	Quantidade Encontrada
CAPES	6
SCIELO	2
Total	8

Fonte: A autora, 2022.

Neste momento os resumos de todos os trabalhos foram lidos para definir quais seriam parte da revisão de literatura. Resultando em um total de cinco trabalhos com aderência a esta pesquisa, sendo uma tese de doutorado, três dissertações de mestrado e um artigo de revista, a tabela 5 apresenta os títulos, autores, tipo de programa, ano e objetivos principais de cada um.

Tabela 5 – Resumo dos trabalhos analisados

Título	Atividades Multimodais em uma Abordagem Partitiva para Frações
Autora	Aline Simas da Silva
Instituição	Universidade Anhanguera de São Paulo
	Doutorado em Educação Matemática
Ano	2017
Objetivos Principais	Desenvolver um instrumento matemático que propicie a ideia de partição para frações; Identificar os mecanismos que emergem das interações com um instrumento matemático que permite a ideia de partição para frações; Analisar os procedimentos e estratégias adotadas e as características de pensamentos manifestados pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades propostas.
Título	Conhecimento Especializado de Professores de Matemática Mobilizados em um Contexto de Planejamento de Ensino de Divisões de Frações por meio da Resolução de Problemas
Autor	Glauco Cauê Yamamoto Moral
Instituição	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – Universidade de Cuiabá
	Mestrado em Ensino, Currículo e Saberes Docentes
Ano	2018
Objetivo	Identificar conhecimentos especializados de professores de Matemática associados ao ensino de divisão de frações por meio da resolução de problemas
Título	Conhecimento Especializado para Ensinar Divisão de Frações: Atividades Formativas Baseadas em Questões de Prática
Autora	Vicente Pedroso da Silva Filho
Instituição	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – Universidade de Cuiabá
	Mestrado em Ensino, Currículo e Saberes Docentes
Ano	2019
Objetivo	Identificar como as atividades formativas baseadas em questões de prática contribuem para a construção ou a mobilização de

	conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações por parte dos licenciandos em Matemática.
Título	Jogos como Possibilidade para a Melhoria do Desempenho e das Atitudes em Relação às Frações e aos Decimais nos Anos Finais do Ensino Fundamental
Autora	Valéria Cristina Brumati Dugaich
Instituição	Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Campus Bauru)
	Mestrado em Docência para a Educação Básica
Ano	2020
Objetivo	Pesquisar e criar jogos como ferramenta pedagógica com potencial para criar situações e experiências favoráveis ao ensino das diferentes representações de um número racional, podendo impactar positivamente nas atitudes dos alunos dos anos finais do ensino fundamental em relação a esses números, bem como no desempenho em tarefas relacionadas a eles.
Título	Meta-análise sobre Conhecimento para Ensinar Divisão de Frações
Autores	Jeferson Gomes Moriel Junior Gladys Denise Wielewski José Carrillo
Publicação	Bolema
Ano	2019
Objetivo	Identificar as principais contribuições de pesquisas relacionadas ao conhecimento docente sobre o ensino de divisão de frações e responder à pergunta: “que conjunto de conhecimentos um professor precisa para ensinar e fazer aprender divisão de frações?”.

Fonte: A autora, 2022.

Silva (2017) realiza uma pesquisa com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, professores e licenciandos em Matemática, na qual aborda a divisão de frações realçando a ideia de partição. A partir das interações com seus sujeitos de pesquisa nota que para os números naturais essa é a definição mais frequente e usual, “dividir algo entre pessoas”, uma divisão na qual se conhece um todo e a quantidade de partes em que este deve ser distribuído, porém, essa definição não foi utilizada para as frações. O uso da cotição para a divisão de frações identificado por Silva (2017) se contrapõem com o que Ma (2009) encontrou, os professores chineses utilizavam muito o modelo de repartição.

Silva (2017) aponta ainda que para uma ampla compreensão da divisão de frações os modelos de partição e quotição devem ser desenvolvidos concomitantemente e, também, aliados ao conceito de divisão. Muitas vezes a divisão por frações é mecanizada através do algoritmo e passa uma imagem de que não há divisão, apenas a multiplicação. Baseando-se em uma percepção de que uma abordagem percepto-motora é capaz de produzir aprendizagens através do fazer, tocar, mover, ver, Silva desenvolve um instrumento chamado de "Cachorro-quente". Tal instrumento propicia atividades multissensoriais, nas quais essa experiência contribui para a compreensão da divisão de frações como partição, na construção de um "algoritmo para frações unitárias" e nota que mesmo na ausência do instrumento ele é parte do pensamento e explicações dos alunos do sexto ano do ensino fundamental.

> "As nossas análises indicam que nas tentativas dos participantes de identificar propriedade gerais não houve uma separação entre o concreto e o abstrato, já que mesmo quando os materiais não foram manipulados fisicamente, tal ato foi imaginado."

Dessa forma, Silva (2017, p. 275) conclui que o instrumento contribui para a compreensão do algoritmo tradicional da divisão por frações. Ela ainda destaca a importância de trabalhar com o mesmo contexto para a divisão, seja com números naturais ou fracionários para conectá-las, visto que essencialmente, se trata da mesma operação, a divisão.

Silva (2017) apresenta uma pesquisa desenvolvida por Deborah Ball em 1988, a mesma que Liping Ma utilizou em sua tese de doutorado (como citado no referencial teórico) e destaca que encontrou resultados semelhantes para a divisão $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, inicialmente consideravam as representações com a ideia de partição. Sem sucesso se arriscavam na Quotição, com dificuldades e na maior parte das vezes sem êxito. O foco maior da tese é o trabalho com o "Cachorro-quente" (Produto Educacional) com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Moral (2018) investiga a caracterização do conhecimento especializado de professores de matemática sobre o ensino da divisão de frações a partir da resolução de problemas. Desenvolve oficinas formativas com professores da rede estadual que atuam nos anos finais do Ensino Fundamental. Utiliza o modelo MTSK[15] na análise dos conhecimentos necessários ao docente para esse ensino e conclui que os procedimentos de "como fazer" e conhecimentos didáticos sempre eram apontados, enquanto os relacionados às estruturas e práticas matemáticas tiveram pouca expressividade. Moral relata que a falta de tempo impossibilitou que a pesquisa aprofundasse a análise dos indícios de conhecimentos necessários. Além disso, afirma serem necessárias políticas públicas educacionais que direcionadas para um conhecimento específico e especializado do professor de matemática, propondo que as horas atividades dos docentes sejam destinadas para uma formação continuada referente à sua área de atuação.

Acredito que outras possibilidades de políticas públicas contribuiriam para melhorias na educação como: investimento em uma infraestrutura escolar adequada, em materiais didáticos, paradidáticos e de apoio em quantidade e qualidade suficientes, valorização da profissão docente, incluindo um "tempo de planejamento" que atenda as reais demandas de trabalho fora da sala de aula. Além disso, "a aprendizagem vem da ação, da ação e da reflexão", Beatriz D'Ambrosio em entrevista a Brião (2015) afirma que apesar de um aprofundamento de leituras teóricas é difícil aprender sem relacionar essas leituras com a prática docente, dessa forma o professor se forma enquanto leciona, pode aprender e refletir sobre a própria prática e optar por aquilo que melhor se adequa à sua realidade.

As dissertações de mestrado de Moral (2018) e Silva Filho (2019) são provenientes de um mesmo programa, grupo de estudos, orientador e analisam o MTSK relacionado à divisão por frações. A diferença é que o primeiro utiliza a resolução de problemas com professores que possuem alguma experiência em sala de aula, e o segundo recorre a questões de práticas com alunos da licenciatura em Matemática. Silva Filho (2019) realizou oficinas formativas nas quais foram propostas

---

[15]Na década de 80, Shulman propôs três categorias para descrever o conhecimento docente (conhecimento do conteúdo da matéria, conhecimento curricular e conhecimento pedagógico do conteúdo), direcionadas a qualquer área de ensino (GOMES; WIELEWSKI; MONTES, 2013). A partir desse modelo Deborah Ball e outros pesquisadores propuseram o *Mathematical knowledge for Teaching* (MKT) que contempla os conhecimentos necessários à prática docente (conhecimentos matemáticos, relacionados ao ensino e suas conexões), divididos em seis categorias. Como o MKT não abrangia alguns casos, um pesquisador com seu grupo (José Carillo) propôs o *Mathematical Teachers Specialized Knowledge* (MTSK) que se subdivide em dois domínios: "– Conhecimento matemático (MK) e Conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) – e as crenças dos professores sobre a matemática, seu ensino e aprendizagem são consideradas importantes, pois dão sentido às diferentes ações do professor e permeiam todos os subdomínios (GOMES, WIELEWSKI, MONTES, 2013, p. 2).

situações práticas que podem ocorrer durante uma aula, visavam identificar e possibilitar maneiras de desenvolver os conhecimentos necessários ao ensino da divisão de frações. Dessa forma, ele conclui que a formação inicial deve explorar e estimular a criação de MTSK no futuro professor, além dos conhecimentos de nível superior. Caberia ainda ao professor iniciar a mudança pela sua própria prática e incentivar seus colegas de profissão a seguirem o mesmo caminho de transformação.

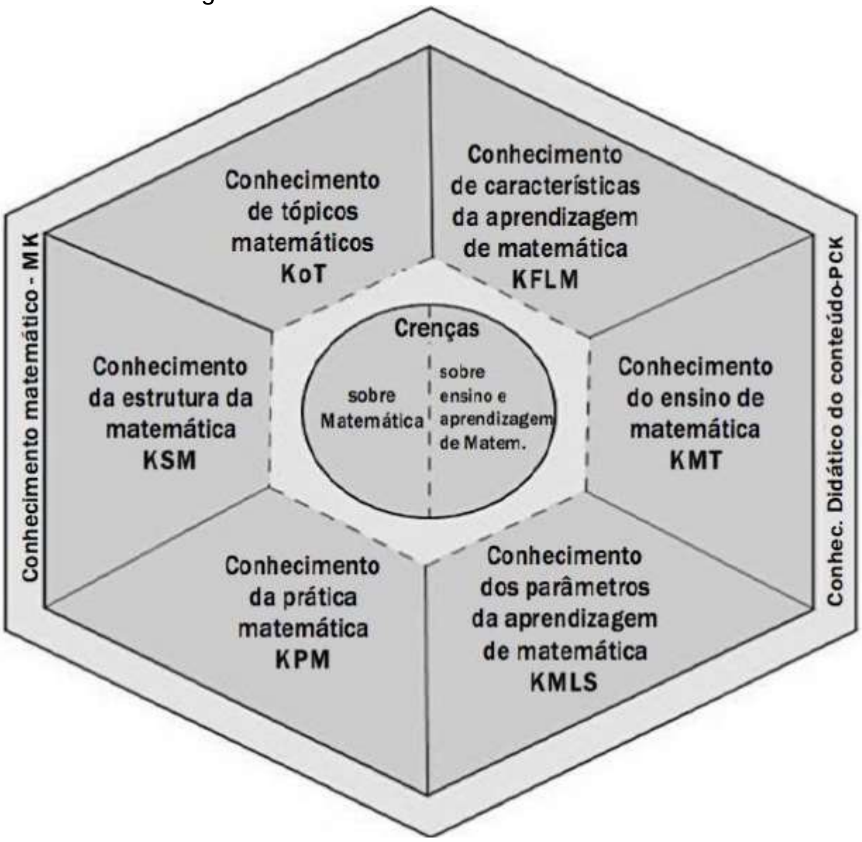
Dugaich (2020) busca relacionar o uso de jogos, as atitudes e o desempenho em matemática de alunos do nono ano do Ensino Fundamental da rede estadual que obtiveram um baixo resultado no SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo). Ao longo de uma década de trabalho como supervisora de ensino e de uma análise do SARESP entre 2012 e 2018, Dugaich (2020) notou que a habilidade de relacionar os números racionais em suas formas fracionárias e decimais se apresentava como uma grande dificuldade. A partir da crença de que as atitudes frente à matemática, podem ser positivas ou negativas, auxiliando ou dificultando a aprendizagem. O jogo como recurso metodológico se mostra, nesta pesquisa, eficiente para gerar atitudes mais positivas, contribuir para a apreensão de conhecimentos, aumentar o interesse, foco e disposição dos alunos e ainda diminuir o medo de errar.

Dugaich (2020) ressalta a importância de analisar as atitudes dos alunos com a matemática, investigar suas razões e buscar propor alternativas que sejam capazes de torná-las mais positivas. Essa busca por uma matemática mais acessível e "atraente" corrobora com esta pesquisa, esse estigma negativo em nada contribui para o ensino e/ou para a aprendizagem.

Dentre os trabalhos encontrados para revisão de literatura, dois abordavam especificamente o conhecimento do professor para o ensino da divisão de frações. A partir de oficinas formativas, baseadas em uma estrutura mais rígida com perguntas e respostas, buscaram elencar e classificar as falas dos sujeitos de pesquisa de acordo com o MTSK. Moral (2018) com professores dos anos finais do Ensino Fundamental e resolução de problemas como metodologia de ensino; Silva Filho (2019) com futuros professores de matemática e situações de práticas. Apesar de trazerem contribuições para esta análise, ambas as dissertações são muito direcionadas a essa classificação dos conhecimentos como definido pelo MTSK.

O MTSK e a CPMF possuem aproximações, ambos se preocupam em estabelecer conexões entre conceitos passados e futuros, trabalhar com diferentes abordagens, conhecimento do currículo, porém o primeiro é mais “técnico”, dividindo esse Conhecimento Especializado para Ensinar Matemática (como apresentado na Figura 3) o que não faz parte do escopo desta pesquisa que busca possibilitar meios para construir conhecimento matemático como um todo, como uma estrutura única, emaranhada de ligações e conexões.

Figura 3 – Subdomínios do MTSK



Fonte: (MORIEL JUNIOR, WIELEWSKI, MONTES, 2013, p. 4, tradução do autor).

As pesquisas (SILVA, 2017; MORAL, 2018; SILVA FILHO, 2019 e DUGAICH, 2020) apontam que a divisão de frações, seja o conhecimento do professor ou o do aluno, acaba se configurando como um conhecimento procedimental e fragmentado, e, que assentado no uso do algoritmo (repete a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda), é incapaz de atribuir significado conceitual à operação.

Dessa forma, a análise da literatura existente se mostrou escassa tanto no tema da divisão por frações, como na análise do conhecimento do professor, sendo, neste caso, as pesquisas mais direcionadas à análise do conhecimento que o professor possui do que à busca por construir um conhecimento mais profundo que é o objetivo principal do Produto Educacional.

Moriel Júnior, Wielewski e Carillo (2019) desenvolvem uma *meta-análise*[16] com foco no conhecimento que o professor (ou futuro) precisa para ensinar e fazer aprender divisão de frações. Para isso, utilizou 58 estudos na íntegra (entre teses, dissertações, livros e artigos) publicados entre 1990 e 2014. Dentre estas pesquisas inclui-se MA (2009). Esta *meta-análise* apresentada destaca que o conhecimento do professor sobre a divisão de frações é procedimental e fragmentado, a maior parte consegue realizar o cálculo, mas não é capaz de criar uma representação ou explicar de maneira conceitualmente correta; ainda alguns não obtiveram êxito nos cálculos. Apontam que além de um conhecimento matemático específico, um conhecimento didático específico também é importante. Um ponto que vale a pena ressaltar é que em diversas pesquisas era mais acessível para os professores os casos em que o dividendo é maior do que o divisor ao solucionar um problema. Algumas pesquisas concluíram que não existe uma relação clara entre tempo de atuação docente e desenvolvimento de conhecimentos específicos para o ensino da divisão de frações, entretanto Ma (2009) apenas encontrou a CPMF bem desenvolvida em professores com muitos anos de atuação. Acredito que ter muitos anos como docente não garante uma CPMF ou o desenvolvimento de conhecimentos específicos para o ensino, mas futuros ou recém-formados também não possuem esses indícios.

Destaca-se que as propostas de ensino da divisão por frações não devem ser alicerçadas no uso do algoritmo, mas em atividades que desenvolvam o conceito e encaminhem o aluno à dedução de uma regra operatória (MORIEL JÚNIOR, WIELEWSKI E CARILLO, 2019). O ensino e a aprendizagem de frações deflagradas a partir do uso do algoritmo se mostra ineficaz para desenvolver o conceito da divisão de frações (isto também foi discutido no Referencial Teórico).

Em seu artigo, Moriel Júnior, Wielewski e Carillo (2019) apontam ainda, assim como nas dissertações de Silva Filho (2018) e Moral (2019) para que um professor desenvolva esses conhecimentos específicos para o ensino da divisão de frações ele deveria receber uma formação inicial específica, ministrada por um formador com tais conhecimentos já desenvolvidos. Seria possível formar um Professor de Matemática que tivesse todos esses conhecimentos plenamente desenvolvidos? Quanto tempo seria necessário? Como se daria essa formação? Seria de fato significativa? Acredito que a solução para o problema consista em mudanças na formação inicial sim, mas

---

[16] Meta-análise é uma técnica que reúne dois ou mais estudos com o objetivo de condensar/comparar os resultados de pesquisas sobre um mesmo tema.

mudanças na maneira como a Matemática é ensinada, tornando-a mais exploratória, investigativa, um ensino baseado mais em perguntas do que em respostas. E, também, mudanças em políticas públicas que valorizem a profissão docente, possibilitem uma formação continuada, um currículo planejado para a realidade escolar, entre tantas outras soluções mais possíveis e viáveis.

3. PERCURSO METODOLÓGICO

Este capítulo busca apresentar os caminhos trilhados durante a pesquisa, as escolhas feitas na elaboração de um Produto Educacional (PE). O referencial teórico apresentado no capítulo 1 serviu como base para a criação de um curso sobre o ensino da divisão de frações direcionado para professores que ensinam matemática que pretende criar possibilidades para o início do desenvolvimento de uma CPMF.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) no documento da Área de Ensino (BRASIL, 2019) delibera para a obtenção da titulação dos cursos de Mestrado e Doutorado profissionais que um PE seja elaborado e validado:

> No Mestrado Profissional, distintamente do Mestrado Acadêmico, o mestrando necessita desenvolver um processo ou produto educativo e aplicado em condições reais de sala de aula ou outros espaços de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição, entre outros. A dissertação/tese deve ser uma reflexão sobre a elaboração e aplicação do produto educacional respaldado no referencial teórico metodológico escolhido. (BRASIL, 2019, p. 15).

Corroborando com este documento, Rizzatti et al. (2020) elucida que a elaboração do PE deriva de uma pergunta ou problema do cotidiano escolar e precisa oferecer a possibilidade de ser reutilizado, adaptado e compartilhado, além de relevante e pertinente aos campos de pesquisa do programa de pós-graduação em questão; ter sido utilizado/experimentado com o público-alvo. A dissertação apresenta o contexto, o referencial teórico, as escolhas metodológicas, a pergunta/problema que se deseja responder, ou seja, é a fundamentação e o embasamento do PE, sendo este, uma construção à parte, trilhado por esta pesquisa.

Borba, Almeida e Gracias (2018, p. 24) questionam se “A sala de aula ouve a pesquisa?” e respondem que o fato de existir uma pesquisa sobre determinado tema não garante que todos o compreendam. Acreditam que seria muito superficial assumir que uma produção científica resolveria todas as questões e problemas abordados. No Brasil nos deparamos com contextos sociais e políticos, infraestrutura escolar discrepantes, além de uma desigualdade social acentuada e a falta de tempo (e recursos) e condições para que o docente possa se dedicar diariamente para planejamento e leituras, fatores que impactam diretamente na qualidade da Educação.

Isso sem contar com a falta de continuidade nas políticas públicas que geralmente demandam/demandariam longo período para atingirem seus objetivos. Dessa forma, uma pesquisa replicada seguindo o mesmo modelo não apresentará, necessariamente, os mesmos resultados e impactos obtidos originalmente. O processo de ensino-aprendizagem se torna muito complexo ao considerar todas as variáveis envolvidas.

A existência de pesquisas numa área não garante uma aprendizagem significativa, e por mais que o ensino da divisão de frações já tenha sido abordado diversas vezes, vemos que ainda se configura como um desafio para alunos e professores. As escolhas realizadas durante esse processo de construção e sistematização da pesquisa fazem parte da metodologia de pesquisa (BORBA, ALMEIDA, GRACIAS, 2018). De certa forma, o PE é a construção dessa metodologia de ensino e este capítulo aborda a metodologia dessa pesquisa.

Com o início da Pandemia Mundial em 2020, no Rio de Janeiro, os portões das escolas foram fechados a partir do dia 15 de março, mudando drasticamente aquele ano que se iniciava, o que resultou na reelaboração da metodologia, muitas das decisões tomadas eram as possíveis naquele momento. Essa pesquisa apresenta a construção de um minicurso destinado a professores e futuros professores que ensinam matemática.

3.1. **Minicurso: Divisão de frações**

O minicurso “Divisão de Frações: Compreensão Profunda da Matemática de professores que ensinam Matemática” foi realizado durante a disciplina Prática Pedagógica em Matemática 1 (PPM1), geralmente frequentada por discentes do terceiro período da Licenciatura em Matemática da UERJ, Campus Maracanã.

O reitor da UERJ, Ricardo Lodi Ribeiro, através do Ato Executivo de Decisão Administrativa (AEDA) nº 029/Reitoria/2020[17] solicitou um planejamento para o retorno das atividades e a Deliberação nº 014/2020[18] regulamentou o Período Acadêmico Emergencial (PAE) estabelecendo 2020.1 entre 14 de setembro e 12 de dezembro de 2020.

[17]Disponível em: http://www.boluerj.uerj.br/pdf/aeda_00292020_22052020.pdf. Acesso em: 22 out. 2022.
[18] Disponível em: https://www.uerj.br/wp-content/uploads/2020/07/Deliberacao14.pdf. Acesso em: 22 out. 2022.

A disciplina de PPM1 ocorreu de maneira totalmente remota, através da plataforma Rede Nacional de Ensino e Pesquisa[19] (RNP), sendo ministrada pela professora Dra. Gabriela Félix Brião (orientadora desta pesquisa), com cerca de 23 alunos inscritos, no período da noite. Assisti aulas da disciplina como ouvinte (enquanto realizava o meu Estágio à Docência, etapa constituinte do mestrado), e notei alguns aspectos importantes: a única câmera que permanecia ligada durante as aulas era a da docente, a participação discente se dava principalmente de maneira escrita através do *chat*, poucos abriam o microfone. Era um momento delicado, certamente, nem todos os alunos tinham um ambiente reservado e com estrutura favorável para o ensino remoto que possibilitasse ativar câmera e microfone, a docente os deixava livres para que pudessem optar pelo que fosse mais conveniente.

Com base nessas informações o minicurso precisaria permitir que os alunos participassem, através da escrita, mas o chat não favorecia muito a digitação de fórmulas, além de ser aberto para os participantes da chamada, de forma que todos veriam instantaneamente as respostas dos colegas que poderiam se sentir constrangidos ou serem influenciados. Desta forma, o *Nearpod*[20] foi eleito como um mediador tecnológico.

O *Nearpod* é um site que possui uma versão gratuita, a que foi utilizada, e outra paga. Ele permite criar apresentações, compartilhar aulas, jogos, *quizes* e outras atividades através de um *link* ou código de acesso; ao criador do material são disponibilizados relatórios de desempenho e soluções apresentadas. Pode ser utilizado de maneira síncrona, durante as aulas, ou assíncrona, disponibilizando um acesso. Sincronamente há a possibilidade de compartilhar as respostas dos alunos sem que apareça a autoria para os demais participantes. O software além de um manuseio intuitivo e simples, funciona muito bem em computadores, notebooks e dispositivos móveis, sem demandar uma internet de grande qualidade.

Todos os inscritos na disciplina receberam uma cópia virtual do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para participação na pesquisa, apresentado no Apêndice, dos 23 termos enviados, 15 foram devolvidos e apenas

[19] RNP: É uma rede brasileira para educação e pesquisa que disponibiliza “internet segura e de alta capacidade, serviços personalizados e promovem projetos de inovação”. Saiba mais em: https://www.rnp.br/sobre. Acesso em: 22 set. 2022.
[20] Disponível em: https://nearpod.com/login?referer=/library/%3Fks%3D1%26origin%3D. Acesso em: 22 set. 2022.

esses constituem a base de dados deste trabalho, o número de participantes de cada encontro sofreu variações.

Quatro encontros foram realizados e as atividades foram divididas da seguinte maneira: I. Atividade diagnóstica, II. Divisão de frações: da divisão às frações. III. Divisão de frações: Significados e Análise de problemas e IV. Análise de erro como uma possibilidade e serão descritas a seguir:

I. Atividade diagnóstica

Neste primeiro contato com os discentes, no dia 19 de novembro de 2020, apresentei a pesquisa e as motivações e questionamentos até aquele momento. Um pequeno roteiro sobre a realização das atividades também foi apresentado (posteriormente sofreu alterações).

Inicialmente uma diagnose foi elaborada utilizando as mesmas questões que MA (1999) propôs a professores chineses e estadunidenses em parte de sua tese de doutorado. A autora destaca que os alunos chineses possuem um melhor desempenho em comparações internacionais acerca da matemática se comparados com os alunos dos EUA, o que seria um paradoxo visto que os professores dos EUA possuem um período mais longo de escolarização formal para trabalhar com a educação básica, de quatro a seis anos a mais em média. Dessa forma, propondo as mesmas questões a ambos os grupos de professores ela construiu o conceito da Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (CPMF) que explicaria esse paradoxo.

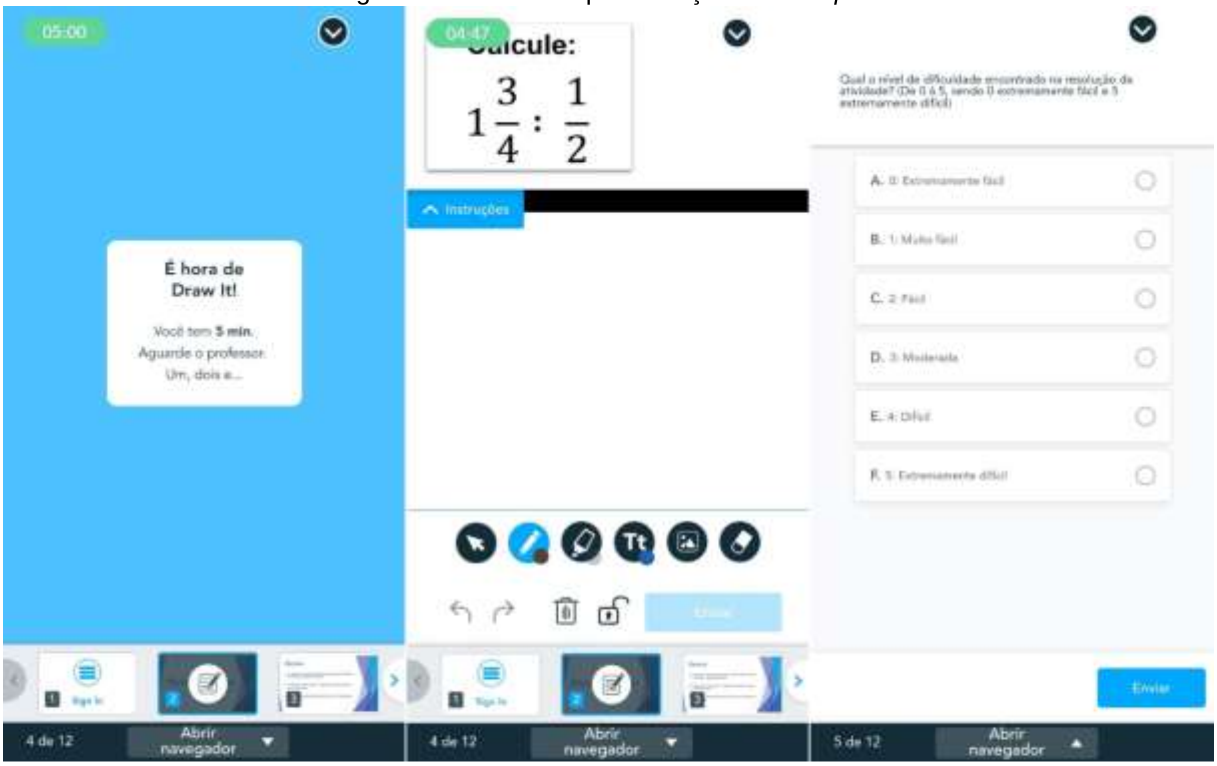
Este encontro contou com sete interações, sendo:

- A primeira delas o cálculo da divisão $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$;
- A classificação do nível de dificuldade de 0 a 5, sendo 0 extremamente fácil e 5 extremamente difícil;
- Comentário sobre a dificuldade;
- A interação seguinte propunha que se criasse um bom modelo ou história para a divisão anterior;
- A classificação do nível de dificuldade;
- Um comentário;
- A última interação contava com um espaço para que eles relatassem

um pouco sobre a experiência deles com a divisão de frações e a maneira como aprenderam.

Permanecemos simultaneamente na plataforma RNP e no *Nearpod.* Cerca de 15 alunos participaram desse momento. No ensino remoto se faz necessário salientar que alguns vão encontrar problemas com a conexão à internet podendo participar do começo, ou apenas do final, ou mesmo perder uma das atividades e participar das outras, neste caso, vou considerar todas as devolutivas.

Figura 4 – Telas da apresentação no *Nearpod*



Fonte: *Nearpod*/Intervenção I.

A Figura 4 apresenta três telas do *Nearpod*, como foram exibidas para os alunos durante as intervenções. A primeira avisa que a atividade a seguir possui um tempo determinado para ser realizada, seu início é deflagrado pelo professor. Após uma contagem regressiva de três segundos, temos a tela com a atividade e espaço para resolução, o recurso *Draw it* possibilita que o espaço seja desenhado livremente como se usasse uma caneta na tela, criar uma caixa de texto para digitar ou mesmo inserir uma imagem (pode ser uma foto do caderno). A terceira tela apresenta uma questão com opções para assinalar, utilizando outro recurso (*Poll*).

Nenhum dos alunos conhecia o *Nearpod*, apesar da facilidade em interagir com o programa, sincronizar o tempo das respostas foi um desafio, era necessário que todos tivessem respondido a uma interação para avançar. Assim, o tempo de duração da atividade acabou sendo bem maior do que o esperado, os 30-45 minutos idealizados, ultrapassaram uma hora e a última interação não foi realizada.

II. Divisão de frações: da divisão às frações

Este encontro também contou com o apoio do *Nearpod* e da RNP e transcorreu de maneira mais fluida e dinâmica que o anterior, realizado no dia 26 de novembro de 2020, com 14 participantes. Os seguintes tópicos foram apresentados:

- Um questionamento sobre o que é uma fração;
- Alguns resultados e análises obtidas em uma pesquisa anterior (BRANQUINHO, 2019) sobre o ensino de frações nos anos iniciais, ilustrando com alguns trechos de livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2019;
- O ensino de frações na BNCC;
- Uma pergunta se as frações deveriam ou não fazer parte do currículo;
- Um recorte de Vianna (2008) para questionar a visão da fração como número ou instrumento de dupla contagem, abordando uma questão proposta pelo autor e questionando se neste caso a fração faz sentindo;
- Subconstrutos das frações: razão, quociente, operador, porcentagem e probabilidade e uma contraposição com a representação parte-todo, a mais usual nos anos iniciais;
- Educação Matemática Crítica, destacando a importância de passear pelos *Millieus*[21] de Aprendizagem;
- A dificuldade da operação de divisão e outras possibilidades para o algoritmo "tradicional";
- A divisão como Agrupamento/Quotição/Cotição e Partição/Repartição baseado em (BRIÃO, MUZINATTI, RIBEIRO, 2015);
- Um espaço para descrever como ensinaria a divisão de frações;

[21] As atividades propostas em uma aula podem utilizar apenas conceitos matemáticos (matemática pura), situações que "parecem" vir da realidade (semirrealidade), ou se basear em situações da vida real, esses grupos são denominados *Millieus de Aprendizagem* por Ole Skovsmose (SKOVSMOSE, 2014). Também são conhecidos como Ambientes de Aprendizagem.

A atividade planejada era mais extensa, entretanto, pouco antes da aula optei por dividir em duas partes para não se tornar cansativa.

III. Divisão de frações: Significados e Análise de problemas

Para este encontro foi combinado na semana anterior que um *link* seria enviado para os alunos responderem antes do início deste encontro, que se realizou no dia 03 de dezembro de 2020, 11 alunos participaram desta interação. Eles não sabiam previamente, mas o link pedia que cada um inserisse 3 palavras sobre os conhecimentos que consideravam relevantes para dividir frações. Para esta interação um recurso diferente foi utilizado, o site *Mentimeter*, para a criação e exibição de uma nuvem de palavras[22]. Apesar de serem bem parecidos, com diversos recursos semelhantes, apenas o *Mentimeter* dispõe da criação de nuvens de palavras, o uso do *Nearpod* nos outros momentos do curso se deveu a uma preferência pessoal da pesquisadora.

O encontro síncrono se deu novamente pela RNP e pelo *Nearpod*, dando prosseguimento, abordamos:

- O significado da divisão por um número fracionário (MA, 2009);
- Outras possibilidades para efetuar a divisão por um número fracionário;
- Uma pergunta: se ensinariam a divisão por frações da mesma maneira;
- Classificação dos problemas com frações em 3 modelos: Agrupamento, Repartição e Produto e fatores (MA, 2009);
- Análise de problemas solicitando que os participantes classificassem de acordo com os modelos apresentados anteriormente;
- Exploração das dificuldades na divisão de frações e mudanças de significado.

IV. . Análise de erro como uma possibilidade

O último encontro se deu no dia 10 de dezembro, com 14 alunos e dessa vez iniciei compartilhando uma apresentação através da própria plataforma RNP:

[22] Nuvem de palavras é uma interação na qual os participantes podem inserir palavras/termos (nesse caso foram cinco), e os mais repetidos aparecem com tamanho maior, e o menos repetidos com menor destaque.

- O que é o erro e seu papel na escola, na sociedade e nas pesquisas (CURY, 2015);
- A análise de erro como uma possibilidade de aprendizagem (CURY, 2015);
- Análise da produção escrita dos alunos (D'AMBROSIO, 2013);
- Análise de erros como uma metodologia de pesquisa;
- Os erros na divisão por frações, trazendo alguns exemplos do primeiro encontro e outros apresentados por MA (2009);
- Representações concretas e abstratas para a divisão por frações.

Para finalizar uma última interação foi realizada através do *Nearpod* solicitando que os participantes avaliassem o curso e fizessem críticas/sugestões/elogios.

Uma sala de aula idealizada, remotamente, contaria com recursos e estrutura capazes de permitir uma ampla participação de todos com microfone e câmera ligados, sem interrupções sejam de fatores externos ou mesmo devido a oscilações da rede de internet, mas essa pesquisa foi realizada numa sala de aula real, com problemas reais. E mesmo uma sala de aula idealizada remotamente, não contaria com as mesmas possibilidades de interações e trocas possíveis no encontro presencial, portanto, essa é uma pesquisa possível dentro da realidade de uma pandemia mundial, num país de enorme desigualdade social.

As informações obtidas em cada intervenção foram organizadas, tabuladas e serão apresentadas na análise de dados.

4. ANÁLISE DE DADOS

Os relatórios gerados pelo *Nearpod* apresentam o nome dos alunos e uma orientação em paisagem, portanto não serão divulgados para preservar totalmente a identidade dos participantes. Para se adequar esteticamente, alguns dados foram reescritos ou recortados do relatório na integra. Como citado anteriormente (ver página 67), o curso foi desenvolvido durante as aulas da disciplina de PPM1 com licenciandos da UERJ. Refletindo após os encontros, senti falta de uma contextualização da realidade dos cursistas, como: em qual período eles se encontravam (apesar da disciplina estar na da grade curricular do terceiro período), qual era sua formação, experiência com as frações e como docente, quais as suas expectativas com o curso/disciplina... Estes questionamentos poderiam ser acrescidos em uma futura aplicabilidade do curso.

Durante os encontros tivemos entre 13 e 15 alunos online quando registrei a participação. Devido a oscilações na internet, e ao fato de que um aluno pode ter ingressado em outro momento, as participações de um mesmo encontro podem sofrer pequenas variações na quantidade.

4.1. Intervenção I - Atividade Diagnóstica

A primeira intervenção foi realizada no dia 19 de novembro de 2020, com cerca de 17 discentes, destes 15 enviaram o TCLE assinado e apenas as interações destes aparecem listadas ao longo do texto. Optei por apresentar as escritas dos alunos do curso com uma fonte diferente (Gabriola) para diferenciar de outras citações e apontamentos.

Após uma breve apresentação pessoal sobre a motivação da pesquisa e seu objetivo, exibi um roteiro dividindo as intervenções em três momentos:

- Avaliação diagnóstica
- Algumas concepções e possibilidades sobre o ensino de frações
- Análise das produções escritas e elaboração de atividades.

Por fim esse roteiro se modificou bastante com o segundo momento dividido em dois encontros, e um quarto encontro abordando a análise de erros e uma breve análise de alguns erros comuns. A elaboração de atividades não foi possível devido à falta de tempo disponível.

No Nearpod, a primeira interação, baseada em Ma (1999) solicitava o cálculo $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, o espaço destinado à questão permitia digitar, desenhar ou anexar uma imagem/foto para solução. Utilizando esses recursos obtiveram-se 13 devolutivas. Seis alunos (46,1%) utilizaram o algoritmo e apresentaram como solução $\frac{7}{2}$ uma fração imprópria, um aluno (7,7%) expôs $\frac{14}{4}$ e um aluno (7,7%) transformou o número misto em fração imprópria e em seguida todas as frações em número decimais e realizou a divisão obtendo 3,5 como resposta, dessa forma, 61,5% dos resultados estavam parcialmente corretos visto que esperava-se obter como solução um número misto $3\frac{1}{2}$. Quatro alunos (30,8%) realizaram a operação $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ obtendo como resultado a fração $\frac{3}{2}$, um aluno (7,7%) apresentou apenas o resultado final 2,5, totalizando 38,5% de erro.

Ma (2009) obteve uma totalidade de respostas corretas com os professores chineses e com os estadunidenses de 43% de acerto e mais 9% de respostas incompletas $\frac{14}{4}$, sem reduzir ou transformar em número misto. No curso 61,5% apresentaram o resultado correto com fração imprópria ($\frac{7}{2}$ ou $\frac{14}{4}$) ou representação decimal (3,5), o restante, 38,5% com um resultado incorreto.

A segunda interação questionava sobre o nível de dificuldade da questão, podendo ser classificado de 0 a 10, em ordem crescente. Os alunos que apresentaram o resultado correto com fração imprópria classificaram como 1 ou 2, os alunos que apresentaram um resultado incorreto classificaram com 0 ou 1, e o aluno que trabalhou com números decimais com nível 3 de dificuldade.

Em seguida, foi solicitado um comentário sobre a dificuldade encontrada na questão. A principal dificuldade apontada se relacionava à compreensão de número misto, um ponto interessante identificado é que, em dois comentários, há a sugestão de que o número misto pode ser visto como uma multiplicação, induzindo ao mesmo erro obtido em três soluções.

A segunda atividade contou com doze respostas, sendo algumas incompletas. Baseada em Ma (1999), buscava criar um contexto para solucionar a divisão proposta na atividade 1:

> Imagine que está a ensinar a divisão por frações. Para que isto tenha algum significado para as crianças, muitos professores tentam arranjar situações da

> vida real ou histórias-problema para mostrar a aplicação de um conteúdo particular. Qual seria uma boa história ou um bom modelo para $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$? (MA, 2009, p. 113).

Seguindo a classificação que Ma (2009) fez em seu trabalho, neste caso, temos cinco futuros professores que não apresentaram uma resposta ou não a desenvolveram. Um deles disse *"Eu falaria da hierarquia das operações"* E outro que *"Usaria uma barra de chocolate para ensinar"*, sem mais informações ou desenvolvimento de uma história ou explicação sobre o seu uso.

Cinco alunos confundiram a divisão por ½ com a divisão por 2:

> *Eu e meu irmão pedimos duas pizzas e dividimos a pizza em quatro pedaços cada uma. Nossa mãe comeu um pedaço de uma das pizzas, sobrando 1 inteira e 3 pedaços da outra. Eu e meu irmão queremos dividir o resto da pizza pela metade, quando cada um ficaria?*

> *Se temos 1 pizza inteira mais 3/4 da pizza, queremos saber quanto é a divisão desse total de pizza se dividirmos ao meio.*

O pensamento de dividir igualmente por dois ou em duas partes corresponde à divisão por 2, foram utilizadas as expressões dividir pela metade e dividir ao meio erroneamente. Se contrapor os exemplos deles com um número inteiro fica mais clara essa percepção, se tivessem 4 pizzas para dividir pela metade/em duas partes realizariam a divisão por 2, e não por ½.

Diferente do que Ma (2009) encontrou, eu notei outra confusão, que na verdade representava uma multiplicação por 2 no lugar da divisão por ½.

> *Em uma turma do sétimo ano as crianças receberão mini pizzas, e foi calculado que cada uma delas receberia uma mini pizza mais ¾ de outra. Porém essa seria a quantidade se todos quisessem comer as mini pizzas, mas só metade da turma quis, então agora qual seria a quantidade de pizza que cada criança receberá já que teremos que dividir o valor antigo pela nova quantidade de crianças?*

Nesse caso 1 e ¾ corresponde à quantidade de pizza que cada criança receberia, mas se apenas metade das crianças quiserem comer pizza, cada criança receberá duas porções, ou seja, o dobro da quantidade inicial de pizza, representando uma multiplicação por dois, $1\frac{3}{4} \times 2$.

> *Duas pizzas que foram cortadas em 4 fatias cada uma para dividir em uma mesa serão comidas de forma que 1 fatia foi dada para o aniversariante e o resto será dividido pela metade da mesa já que a outra metade não estava com fome, quantas fatias cada pessoa dessa metade da mesa receberá?*

Essa situação é um pouco mais complexa, mas novamente temos uma quantidade que seria dividida por um determinado número de pessoas e depois passa a ser dividida por um número que equivale à metade do número inicial, o que também irá resultar no dobro do resultado da primeira divisão. Por exemplo: ao dividir 24 balas para 8 crianças, $24 \div 8 = 3$, cada uma receberia 3 balas, se apenas metade quisessem balas, 4 crianças, teríamos: $24 \div 4 = 6$, então cada criança passaria a receber 6 balas, o dobro da quantidade da primeira divisão, mas esse resultado vai variar de acordo com a quantidade de pessoas, o que também não representa uma divisão por fração.

Também se solicitou a classificação de nível com os mesmos parâmetros utilizados anteriormente e um comentário sobre a dificuldade. Os níveis foram classificados de 3 a 6, e os comentários falavam em grande maioria sobre a dificuldade de compreender a divisão por uma fração e de propor problemas.

4.2. Intervenção II – Divisão de Frações: da divisão às frações

O segundo encontro realizado utilizando o *Nearpod e a RNP,* no dia 26 de novembro de 2020 contou com 14 participantes. Logo no início, a primeira interação com os alunos consistia em um questionamento sobre o que é uma fração. As respostas foram bem breves, apresentadas na Quadro 2, o objetivo da pergunta era ver qual seria o primeiro significado que atribuiriam às frações.

Oito deles relacionaram a fração com a ideia de divisão ou razão, quatro com a relação parte-todo e dois com a representação de um número. Esperava que a maior parte dos alunos fosse relacionar à ideia de razão, divisão, parte-todo; afinal, já havia observado que relacionar fração à representação de um número não aparece muito claramente quando se trabalha com este conceito (BRANQUINHO, 2019).

Quadro 2: Respostas dos alunos no Nearpod

O que é uma fração?
Divisão/Razão
Um meio de representar a razão de dois números. Partes de um número inteiro.
Uma divisão, uma partição.
Uma divisão
Divisão de números
É um número escrito na forma p/q, onde q=/0 e p,q pertencem aos reais
Uma divisão, razão entre dois números inteiros.
É uma divisão entre dois números
Fração seria uma representação de divisão entre partes (ou unidades)
Representação parte-todo
É uma representação de partes de um número inteiro.
PARTE DE UM TODO
Uma forma de repartir e contar a quantidade "consumida" do total que tinha. Exemplo, seis fatias de bolo e foram consumidas 3, ou seja, uma fração de 3/6.
Um ou mais pedaços de um objeto inteiro.
Representação de um número
Um número racional formado por partes inteiras, com denominados diferente de zero
É uma forma de descrever números inteiros e não inteiros.

Fonte: da autora

A interação seguinte questionava se as frações deveriam ser parte do currículo, todos responderam que sim. O exemplo citado por Vianna (2008), o do Bucaneiros (descrito na página 26), foi apresentado aos alunos e em seguida, repetia-se a pergunta, as frações deveriam ser parte do currículo? Desta vez nove alunos responderam que sim, e seis responderam que não. O objetivo desses questionamentos era levá-los a refletir sobre o real motivo das frações estarem em nosso currículo, e como a sua apresentação aos alunos pode impactar sua aprendizagem futura.

Dando continuidade foram apresentados os subconstrutos das frações (razão, operador, quociente, porcentagem e probabilidade), uma perspectiva da Educação Matemática Crítica, outras possibilidades para a divisão de números naturais, os modelos de agrupamento e repartição, finalizando com uma situação que envolvia uma mesma operação com resultados diferentes. A última interação apresentava um espaço para que os participantes descrevessem como ensinariam a divisão de frações.

Quadro 3: Respostas dos alunos no Nearpod

Ensinaria a parte mecânica e depois colocaria exercícios práticos pros alunos terem uma visão melhor do que a conta significa
Usando o exemplo da fita.
Repete a primeira e multiplica pela segunda invertida. Foi assim que aprendi.
Usando objetos concretos e situações do cotidiano.
Acho que depende da idade dos alunos. Depois das provocações de hoje, gostaria de repensar já que no imaginário, usamos muitas representações que como foi dito, não são bem frações.
De maneira mais aplicada e utilizando exemplos do dia a dia não necessariamente só de parte inteiro
Ensinaria da forma que aprendi
Através de representação gráfica
Ensinaria através do modo porcentagem ou operador. Diversificar a explicação de fração. Acredito que os outros modelos foram mais práticos para o dia a dia.
Usaria o exemplo tradicional da pizza para explicar.
Por imagens que possam ilustrar o problema abordado.
Gosto da ideia da parte pelo todo inicialmente porque é algo "mais palpável" de se visualizar. Acredito que a parte onde a matemática começa a ficar mais no "imaginário" é onde as pessoas costumam ter mais dificuldade. A partir daí poderia seguir para parte de divisões, razões, proporções, probabilidade e porcentagem.
Ensinaria com a ajuda de alguns exemplos, como pizza, torta, bolos. E dividiria esse objeto em pedaços e trabalharia com o inteiro (todo) e pedaços (que seria a parte de um todo). E assim iria ensinando frações.
Acho que pelo método de mensurar por dedução, "quantos x's dentro de y".

Do mesmo jeito como é explicado atualmente.

Fonte: 1da autora.

Como esta interação ocorreu durante o encontro, as respostas foram elaboradas de maneira bem rápida e não forneceram muitos dados para análise/desdobramentos (Quadro 3). Como não havia a possibilidade de mandar uma mensagem diretamente a um participante e fazer isso durante o próximo encontro poderia ser desconfortável, ou mesmo constrangedor, optei por não o fazer.

4.3. Intervenção III – Divisão de Frações: Significados e Análise de problemas

Conforme planejamento, na véspera deste encontro foi disponibilizado para os alunos um *link* do *Mentimeter* que permitia que cada um digitasse até cinco palavras sobre os conhecimentos que consideravam importantes para a divisão de frações. No dia 03 de dezembro de 2020 a nuvem de palavras (Figura 5) foi apresentada no início do encontro.

Figura 5: Nuvem de palavras

Fonte: *Mentimeter*

Esse recurso (nuvem de palavras) apresenta as palavras que mais se repetiram em maior tamanho e as menores são as que menos foram inseridas. Vemos através da imagem que divisão, múltiplos, multiplicação e multiplicação de fração/frações foram as de maior destaque. A Figura 1 (página 40) que relaciona o que Ma (2009) considera como a base de conhecimentos para o entendimento do significado da divisão por frações apresenta a multiplicação de frações como um ponto central, destacando também a multiplicação e divisão de números inteiros, assemelhando-se aos conhecimentos relacionados pelos alunos. Com menor representação na nuvem temos definição de fração e soma, que constam na base de conhecimentos como Conceito de fração e Significado da adição.

Após algumas considerações sobre o significado da divisão por um número fracionário e de algumas possibilidades para o cálculo, perguntava-se (através do *Nearpod*) se eles ainda ensinariam da mesma maneira apontada no encontro passado, e solicitava que explicassem o que fariam diferente. Como a pergunta anterior obteve respostas curtas, com poucas informações, a intenção era que deixassem mais explicito como ensinariam este conteúdo. Contudo, não funcionou conforme a expectativa, pois as respostas se mantiveram superficiais (Quadro 4).

Quadro 4: Respostas dos alunos no Nearpod

SIM
Sim
Sim. Ensinaria.
Ensinaria, mas tentaria não focar só em um tipo de exemplo
Permaneceria com o tradicional.
Ensinaria da mesma forma, porém com um olhar mais didático
Sim
Sim, eu ainda ensinaria da mesma maneira. É um jeito que me apeguei e acho muito fácil. Gostei de conhecer novas maneiras, porém ainda ensinaria do jeito como é ensinado atualmente.
NÃO
Não, tentaria trazer coisas mais práticas nas questões
Achei interessante o modo de dividir as frações sem utilizar multiplicação. Dividindo o numerador e o denominador quando ambos são divisíveis. Ensinaria dessa forma.
Estudaria mais para trazer diversas formas de pensar sobre o assunto. Xô ensino tradicional!
Acho que não. Pretendo estudar as ideias dessa aula e buscar novos métodos. Acredito que cada pessoa pode ter um jeito diferente para chegar ao mesmo lugar, então provavelmente usaria um conjunto de

métodos para estimular ao melhor caminho para cada um.
Não, acho que explicaria sobre o inverso multiplicativo ao invés de só gravar “repete o primeiro e multiplica pelo inverso da segunda. Achei muito interessante o método da distributiva mas teria que ter uma habilidade maior na manipulação e na explicação para os alunos.
Não, acho que demonstraria para os alunos realmente como funciona a divisão com frações e evitaria ao máximo falar “repete a primeira e multiplica pelo inverso da segunda”.
Acredito que tentaria não reproduzir a mesmice de sempre, mas preciso me aprofundar um pouco melhor em novas formas de ensinar...

Fonte: da autora.

Metade dos alunos disse que ainda ensinaria da mesma maneira, mas a outra metade demonstrou interesse em pesquisar mais e buscar alternativas. Um dos objetivos do curso é contribuir para uma ampliação da visão sobre a divisão de frações, mostrando que há outros caminhos viáveis para o seu ensino.

Este encontro contou com a análise de alguns problemas envolvendo divisão por frações, inicialmente o objetivo era utilizar alguns problemas propostos pelos professores entrevistados por Ma e outros elaborados pelos próprios alunos. Apenas os problemas apresentados na pesquisa de Ma (2009) foram utilizados, visto que os participantes do curso não obtiveram êxito nesta tarefa. No *Nearpod,* cada problema era apresentado à turma e em seguida exibia-se uma interação do tipo *quiz* para marcar uma das opções: agrupamento ou repartição ou produto e fatores. Era disponibilizado um tempo para que todos conseguissem participar, logo após expunha uma explicação sobre esta classificação. Os problemas do tipo Produto e Fatores tiveram a maior porcentagem de acertos (76%), os de Repartição ficaram em torno de 50% e os de Agrupamento oscilaram entre 76% e 29%. Os slides no *Nearpod* continham onze problemas, mas apenas seis foram utilizados, era difícil conseguir sincronizar o tempo para que todos conseguissem responder de maneira ágil evitando que se tornasse cansativo e comprometesse a dinâmica da aula. Como foram classificados dois problemas de cada modelo, não considero possível mensurar se havia maior clareza nas definições dos modelos (de agrupamento, repartição e produto e fatores) ou se o enunciado dos problemas era mais explícito quanto à sua classificação.

4.4. Intervenção IV – Análise de erros como uma possibilidade

A última intervenção ocorreu no dia 10 de dezembro e diferente dos outros dias não teríamos três horas de duração, havia um evento online na UERJ e teria pouco mais de uma hora, dessa forma, optei por não realizar nenhuma interação, utilizei a RNP e uma apresentação de slides.

Ao final, enviei um link do *Nearpod* solicitando que eles fizessem uma avaliação do curso com críticas, sugestões ou elogios. Doze alunos participaram, todos os comentários foram positivos, selecionei três aleatoriamente e a quarta é a única que havia uma sugestão, de fato, o tempo de resposta no *Nearpod* acabou sendo maior do que o esperado, o que ocasionou um replanejamento, com a não realização de algumas interações.

> *Só tenho a agradecer por essa intervenção que abriu meus olhos sobre frações e divisões em frações, coisas que eu nunca tinha parado para pensar. Parabéns*
>
> *Achei enriquecedora, nunca havia parado para refletir sobre as formas da fração, apenas como uma divisão. É incrível como conteúdos que já estão enraizados e robotizados em nós podem ser vistos de outras formas e como precisamos transpor esses paradigmas ao lecionar.*
>
> *Gostei muito, mudo sim minha maneira de pensar me passou outros jeitos de como ensinar a divisão de frações, e me despertou interesse de pesquisar outras formas de ensinar para os diversos temas da matemática.*
>
> *Achei satisfatória, agregou novos pontos de vista sobre os métodos de ensino dados e conheci relembrei.*
> *Como sugestão acho q poderia dar menos tempo para as pessoas responderem o nearpod, visto que demorava mais do que deveria.*

Houve muita gentileza nas avaliações. Devido à brevidade e adversidades encontradas ao longo do curso, possivelmente não foi suficiente para mudar a forma como eles ensinam/irão ensinar e veem as frações, mas é significativo que lhes tenha despertado o interesse em pesquisar mais sobre este e outros temas da matemática e refletir sobre como e porque ensinamos um determinado conteúdo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta uma pesquisa sobre o ensino da divisão por frações realizada durante um período de muitas incertezas na sociedade, uma pandemia mundial. A Escola não poderia ficar de fora, muitas ressignificações para pesquisar dentro do que era possível naquele momento.

O interesse pelo tema, divisão de frações, surgiu da reflexão sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Em Branquinho (2019) buscou-se compreender como se dá a apreensão do conceito de fração. Seguindo nessa investigação a tese de doutorado de Liping Ma publicada como livro em português em 2009 se constitui como um dos principais referenciais teóricos desta pesquisa. O conceito de Compreensão Profunda da Matemática Fundamental desenvolvido por Ma traz a reflexão muitos aspectos do ensino da divisão por frações, partindo da definição de fração, passando pela divisão e multiplicação com números naturais, a multiplicação por frações até finalmente a divisão por frações.

Apesar de haver uma infinidade de trabalhos que abordam frações, investigações sobre a divisão por frações relacionada ao conhecimento docente não são tão frequentes. Os trabalhos analisados na revisão de literatura, assim como o referencial teórico utilizado corroboram que o ensino e a aprendizagem alicerçados no uso do algoritmo não é suficiente para a apreensão de significado da divisão por frações.

Para investigar o conhecimento do professor foi elaborado um protótipo de curso para aplicação em uma turma de licenciandos em matemática. Durante sua execução, o curso passou por diversas alterações tentando atender às demandas e necessidades das partes envolvidas (cursistas, docente da turma e a pesquisadora). O planejamento inicial passou por mudanças, até mesmo durante um encontro, demandando rápidas adaptações.

Foi desafiador conciliar o tempo de respostas dos alunos durante as interações através do *Nearpod*, ferramenta que possibilitou o registro das respostas dos alunos. Contudo limitou as participações espontâneas. Problemas com a qualidade e instabilidade na conexão de internet tornaram o processo um pouco mais lento, restringindo algumas interações programadas. Algumas participações foram breves, não fornecendo muitos elementos para análise posterior. As devolutivas dos alunos às questões propostas no primeiro encontro se assemelharam aos resultados encontrados por Ma (2009) com os professores americanos, algumas dificuldades com a operacionalização do cálculo e nenhum deles conseguiu propor uma situação problema que pudesse representar uma divisão por frações. O curso foi realizado em uma turma, caracterizando-se uma pequena amostragem, não significa que se fosse em uma escala maior os resultados se manteriam os mesmos.

Entretanto, os conteúdos debatidos se mostraram relevantes e interessantes para os cursistas. O curso foi bem avaliado e recebido pelos alunos e aguçou muitas reflexões sobre como poderia sanar as dificuldades encontradas/relatadas. Ainda assim, avalio positivamente por ter deflagrado um olhar mais amplo sobre o ensino de frações, com foco especial na divisão por frações, questionando porque aquele algoritmo é tão facilmente aceito e disseminado nas salas de aula.

Esta experiência promoveu uma remodelação do curso e do seu público-alvo, além de futuros professores de matemática, essa discussão também pode ser muito enriquecedora para professores ou futuros professores que ensinam matemática. O planejamento inicial contava com três intervenções, foram tantos desdobramentos, que demandou-se um quarto encontro. Durante a realização do curso algumas atividades foram suprimidas, para garantir a sua viabilidade e um espaço maior para trocas, a duração estimada passou a ser de dez encontros de três horas cada.

Com a intenção de estimular a construção de CPMF, o curso foi iniciado solicitando que os alunos propusessem problemas, algo que não é muito comum nas escolas brasileiras e que os fez perceber que apesar da divisão por frações parecer um tema simples e fácil, na realidade é complexo, e o conhecimento que possuíam sobre o tema não lhes fornecia uma base conceitual para isso. Nos encontros seguintes buscou-se desenvolver as características que Ma (2009) encontrou nos professores identificados como possuindo CPMF. O conhecimento conceitual foi desenvolvido retornando à divisão e ao conceito de fração. Propor outras formas para o cálculo além do algoritmo clássico colaborou para a percepção e relevância de que há múltiplas perspectivas sobre um mesmo assunto. Expôs-se o conhecimento curricular através de análise e discussão da proposta da BNCC (BRASIL, 2017). A abordagem de conhecimentos necessários à divisão por fração, a reflexão proposta na interação de nuvem de palavras e a exploração da BNCC contribuem para estabelecer conexões entre conhecimentos necessários à aprendizagem e aos que demandarão este como base, contribuindo para uma visão da matemática como um corpo de conhecimentos interligados. A análise de erros e a proposição de questões fornecem um olhar para o que de produtivo pode surgir dos erros dos alunos, demonstrando que o professor pode assumir uma atitude positiva (mais investigativa) diante desses equívocos, propondo mais buscas, perguntas, incentivando os alunos a terem essa postura mais participativa e de produção do próprio conhecimento.

Assim, considero que o objetivo dessa pesquisa, contribuir para a construção de Conhecimento Profundo da Matemática Fundamental sobre divisão por frações junto a futuros professores de matemática foi alcançado. Considero também que um curso não seria capaz de desenvolver um CPMF plenamente em futuros professores de matemática (ou mesmo em professores formados), mas tem o potencial de contribuir para uma percepção de que há muito para aprender sobre o tema.

O CPMF sobre divisão por frações é considerada um assunto básico, parte da base da aritmética, e exatamente por isso é um tópico fundamental para a apropriação de conhecimentos futuros. A partir das avaliações dos participantes (realizadas no último encontro) apresentados na análise, observa-se a percepção deles de que apenas um conhecimento rudimentar e a operacionalização através de um algoritmo, não é suficiente. Ao docente é essencial possuir um conhecimento especializado para o ensino. O que corrobora com parte das pesquisas utilizadas na revisão de literatura que abordam o modelo MTSK, que refere-se a esse conhecimento especializado do professor para ensinar.

Desse modo, o curso: “Divisão de Frações: Compreensão Profunda da Matemática Fundamental de professores que ensinam matemática” foi submetido para cadastro como um Curso de extensão da UERJ vinculado ao projeto de extensão “Formação compartilhada de professores: imagens e discursos sobre a prática docente” e aguarda aprovação.

Neste formato, com duração de 30 horas, seria possível disponibilizar um tempo maior para interação, análise e produção de atividades. A realização no ensino presencial possui potencial de propiciar interações/discussões/trocas mais efetivas para que a reflexão permeie todo o curso.

Consideramos que esta pesquisa que se encerra aqui, ainda tem potencial para se desdobrar em novas pesquisas. Afinal, como seria realizar este curso de modo presencial? E com professores de matemática? E com professores que ensinam matemática? E como seria uma turma destinada tanto aos professores de matemática quanto aos que ensinam e ainda para os futuros professores? E quais seriam os resultados em outras realidades? Quais resultados e desdobramentos podem surgir de outras intervenções? E da elaboração de atividades durante o curso? E se essas atividades fossem desenvolvidas em turmas da Educação Básica?

São muitas possibilidades e desdobramentos para pesquisas futuras. O trabalho apresentado aqui é um recorte dentro do que foi possível em um período não muito extenso e tão turbulento. Portanto, há uma perspectiva mais ampla nessa investigação com potencial de expansão em trabalhos posteriores.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. C., ALMEIDA, H. R. F. L., GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula**: diferentes vozes em uma investigação. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. A ideologia da certeza em educação matemática. In: SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: A questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001. p. 127-148.

BRANQUINHO, L. R. **As frações nos livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:** desafios e possibilidades de vencer a "Monstromática". 2019. 106 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2019.

BRASIL, 1997. **Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Disponivel em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em: 07 set. 2022.

BRASIL, 1997. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matematica** – terceiro e quartos ciclos do Ensino Fundamental. Disponivel em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Acesso em: 07 mai. 2019.

BRASIL, 2013. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica**. Disponivel em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-dc-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192> Acesso em: 07 set. 2022.

BRASIL, 2017. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 07 set. 2022.

BRASIL (Secretaria de Educacao Básica). Ministerio da Educação. **PNLD 2019**: Matemática. Brasilia: [*s. n.*], 2018. 200 p.

BRASIL, CAPES. **Documento de Área – Ensino**. Brasília, 2019.

BRIÃO, G. F. Conversa com a educadora matemática Beatriz D'Ambrosio: uma construtivista radical. **E-Mosaicos**, Rio de Janeiro, v.4, n. 7, p. 2-13, jun, 2015.

BRIÃO, G. F.; MUZINATTI, J. L.; RIBEIRO, C. M. **Caracterização de modelos de divisão por professores de matemática ao interpretar problemas de alunos**. In: Comité Interamericano de Educación Matemática, 24, 2015, Tuxtla Gutiérrez (México). Anais...p.82-90.

CEOLIM, A. J.; HERMANN, W. Ole Skovsmose e sua educação matemática crítica. **Revista Paranaense de Educação Matemática** (REPEM), Campo Mourão, Pr, v. 1, n. 1, p. 9-20, jul-dez, 2012.

COPPE, C.; SIQUEIRA, M. (Org.). **A matemática do ensino de frações**: do século XIX à BNCC. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

CUNHA, S. F. Considerações sobre a Aprendizagem Contínua do Matematiquês: a Linguagem Matemática. In: MAIA, M. G. Barreto; BRIÃO, G. F. (Org.). **Alfabetização Matemática**: Perspectivas Atuais. 1. ed. Curitiba: CRV, 2017. v. 1, cap. 3, p.45-60.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

D'AMBROSIO, B. S. O professor-pesquisador diante da produção escrita dos alunos. **Educação**, Campinas, n. 3, v. 18, p. 249-258, set/dez, 2013.

DUGAICH, V. C. B. **Jogos como possibilidade para a melhoria do desempenho e das atitudes em relação às frações e aos decimais nos anos finais do ensino fundamental**. 2020. 195f. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciência, Bauru, 2020.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zatetikè**, Campinas (SP), n. 4, p. 1-38, 1995

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**.17 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**.25. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 7ºano: ensino fundamental: anos finais. 4.ed. São Paulo: FTD, 2018.

GOMES, R. Q. G. **Saberes docentes de professores dos anos iniciais sobre frações**. 2010, 112f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In:BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática**: Pesquisa em movimento. 1ª. ed. São Paulo: Cortez, 2004. p. 92-120.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

MA, L. **Saber e ensinar matemática elementar**. 1. ed. Lisboa: Gradiva, 2009.

MIRANDA, D. R. **Significados do sinal de igualdade na matemática**. 2019. 75f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Profmat) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística, Rio de Janeiro, 2019.

MORAL, G. C. Y. **Conhecimento especializado de professores de matemática mobilizados em um contexto de planejamento de ensino de divisões de frações por meio de resolução de problemas**. 2018. 79p. Dissertação (Mestrado de Ensino de Matemática, Ciências Naturais e suas tecnologias) – Universidade de Cuiabá, MT, 2018.

MORIEL JÚNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D.; CARILLO, J. Meta-análise sobre conhecimento para ensinar divisão de frações. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 33, n. 65, p. 988-1026, 2019.

MORIEL JÚNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D; MONTES, M. **Conhecimentos mobilizados durante uma formação docente sobre porquês matemáticos:** o caso da divisão de frações. Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 6. Anais… Canoas, Brasil, 2013. p. to appear.

NOVAES, B. W. D.; TORTOLA, E.; VERTUAN, R. E. A "leitura" do sentido das frações: manifestações de professores dos quintos e sextos anos em atividades desenvolvidas no grupo de segunda. **Revista de História da Educação Matemática**, v.7, p. 1-27, 2021.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO,A. M. Trajetória e perspectivas para o ensino de matemática nos anos iniciais. **Estudos Avançados**, São Paulo (SP), v. 34, n. 94, p. 119-135, 2018.

RIPOLL, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. **Livro do professor de matemática volume I:** Números Naturais. Rio de Janeiro. Editora SBM, 2015.

RIZZATTI, I. M.; MENDONÇA, A. P.; MATTOS, F.; RÔÇAS, G. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai/ago, 2020.

SILVA, A. S. **Atividades multimodais em uma abordagem partitiva para frações**. 2017. 289f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, SP, 2017.

SILVA FILHO, V. P. **Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações**: atividades formativas baseadas em questões de prática. 2019. 115 f.. Dissertação (Mestrado de Ensino de Matemática, Ciências Naturais e suas tecnologias) – Universidade de Cuiabá, MT, 2019.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. Campinas, SP: Papirus, 2014.

VAZ, R. F. N. Divisão de frações: explorando algortimos não usuais. **Educação Matemática em Revista**, p. 59-66, 2016. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/322925971. Acesso em: 22 set. 2022.

VERGNAUD, Gèrard. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas no ensino da matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: UFPR, 2009.

VIANNA, C. R. A hora da fração: pequena sociologia dos vampiros na Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 161-181, 2008.

APÊNDICE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada Divisão de frações: Compreensão Profunda da Matemática Fundamental de Futuros Professores de Matemática, conduzida por Lorena Rosa Branquinho. Este estudo tem por objetivo investigar a Compreensão Profunda da Matemática Fundamental de futuros professores de matemática em relação à divisão de frações.

Você foi selecionado(a) por ser um aluno de graduação da Licenciatura em Matemática. Sua participação não é obrigatória. A qualquer momento, você poderá desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa, desistência ou retirada de consentimento não acarretará prejuízo.

Ao participar da pesquisa está sujeito ao risco de constrangimento, para evitar que isso ocorra os dados dos participantes não serão expostos com identificação em momento algum da pesquisa. Sua participação na pesquisa não é remunerada nem implicará gastos para os participantes.

Sua participação nesta pesquisa consistirá em alguns encontros virtuais onde utilizaremos a plataforma RNP e o site Nearpod (que permite criar apresentações com interações simultâneas em que os dados obtidos são exibidos sem identificação de usuário), na forma de um minicurso sobre “Divisão de Frações”. Essas intervenções ocorrerão durante as aulas de Prática Pedagógica em Matemática I, ministrada pela professora Dra. Gabriela Félix Brião (orientadora da presente pesquisa).

Os dados obtidos por meio desta pesquisa serão confidenciais e não serão divulgados em nível individual, visando assegurar o sigilo de sua participação.

A pesquisadora responsável se compromete a tornar públicos nos meios acadêmicos e científicos os resultados obtidos de forma consolidada sem qualquer identificação de indivíduos participantes.

Caso você concorde em participar desta pesquisa, assine ao final deste documento, que possui duas vias, sendo uma delas sua, e a outra, do pesquisador responsável / coordenador da pesquisa. Seguem os telefones e o endereço institucional do pesquisador responsável e do Comitê de Ética em Pesquisa – CEP, onde você poderá tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação nele, agora ou a qualquer momento.

Contatos do pesquisador responsável: Lorena Rosa Branquinho

E-mail: lorenarosab@gmail.com/ Celular: 021 997 997 124

Caso você tenha dificuldade em entrar em contato com o pesquisador responsável, comunique o fato à Comissão de Ética em Pesquisa da UERJ: Rua São Francisco Xavier, 524, sala 3018, bloco E, 3º andar, - Maracanã - Rio de Janeiro, RJ, e-mail: etica@uerj.br - Telefone: (021) 2334-2180. O CEP COEP é responsável por garantir a proteção dos participantes de pesquisa e funciona às segundas, quartas e sextas-feiras, de 10h às 12h e 14h às 16h.

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e que concordo em participar.

Rio de Janeiro, ____ de _________________ de _____.

Nome do(a) participante: ____

Assinatura: ____

Nome da pesquisadora: Lorena Rosa Branquinho

Assinatura: ______________________________