



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Fernando Nascimento Coelho


Números Primos e a Hipótese de Riemann

Rio de Janeiro

2023

Fernando Nascimento Coelho

Números Primos e a Hipótese de Riemann



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Raphael Constant da Costa

Coorientadora: Prof^a Dra. Patrícia Nunes da Silva

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

C672 Coelho, Fernando Nascimento
Números primos e a Hipótese de Riemann/ Fernando Nascimento Coelho –
2023.
159 f.: il.

Orientador: Raphael Constant da Costa
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de
Matemática e Estatística.

1. Números primos - Teses. 2. Funções Zeta - Teses. I. Costa, Raphael
Constant da. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de
Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 511.213

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta
dissertação, desde que citada a fonte

Fernando Nascimento Coelho

Assinatura

01/08/2023

Data

Fernando Nascimento Coelho

Números Primos e a Hipótese de Riemann

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 28 de Março de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Raphael Constant da Costa (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof^a Dra. Patrícia Nunes da Silva (Coorientadora)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Ruben Edwin Lizarbe Monje
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León
Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza -
UNILA

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

A minha vó Dulce. (in memoriam)

AGRADECIMENTOS

Agradeço toda minha família que me motivaram e apoiaram a realização desse trabalho: minha esposa Michelle, meu filho Miguel, minha mãe Maria Edileuza, meu pai Paulo, minhas irmãs Rebeca e Dulce e meus sogros Grace e Dudu (in memoriam). Agradeço também o grande esforço dos meus orientadores Raphael e Patrícia que me guiaram durante essa jornada, bem como o apoio da UERJ e do programa PROFMAT que ajudam a solidificar o ensino da matemática no Brasil.

Certainly one would wish for a stricter proof here.
I have meanwhile temporarily put aside the search
for this after some fleeting futile attempts, as it appears
unnecessary for the next objective of my investigation.

Bernard Riemann.

RESUMO

COELHO, Fernando Nascimento. *Números Primos e a Hipótese de Riemann*. 2023. 159 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

O objetivo desse trabalho é mostrar a conexão entre os números primos e a hipótese de Riemann. Inicialmente abordando resultados importantes sobre números primos e sua distribuição. Depois introduzimos conceitos relacionados a função Zeta de Riemann, suas extensões no plano complexo, equações funcionais e suas raízes. Finalmente mostramos a conexão entre a função Zeta de Riemann e a distribuição dos números primos.

Palavras-chave: Números Primos. Função Zeta. Teorema dos Números Primos. Hipótese de Riemann.

ABSTRACT

COELHO, Fernando Nascimento. *Prime Numbers and the Riemann Hypothesis*. 2023. 159 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

The purpose of this work is to demonstrate how the Riemann Hypothesis and prime numbers are related. Initially addressing important results about prime numbers and their distribution. Then we present concepts related to the The Riemann Zeta function, its extensions in the complex plane, its functional equations and roots are also discussed. Lastly, we demonstrate how the distribution of prime numbers and the Riemann zeta function are related.

Keywords: Prime Numbers. Zeta Function. Prime Number Theorem. Riemann Hypothesis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Primeira rodada do Crivo de Eratóstenes para $p = 2$	20
Figura 2 - Primeira rodada do Crivo de Eratóstenes para $p = 3$	20
Figura 3 - Primeira rodada do Crivo de Eratóstenes para $p = 5$	21
Figura 4 - Primeira rodada do Crivo de Eratóstenes para $p = 7$	21
Figura 5 - A função $\pi(x)$ até $n = 100$ com $\pi(100) = 25$	29
Figura 6 - A função $\pi(x)$ até $n = 1000$. Em que $\pi(1000) = 168$	30
Figura 7 - Gráficos das funções $\pi(n)$, $n/\ln(n)$ e $L_i(n)$	32
Figura 8 - Erro relativos das funções $L_i(n)$ e $n/\ln(n)$ em relação a $\pi(n)$	32
Figura 9 - Gráficos das funções $\pi(n)$, $n/(\ln(n) - 1)$ e $L_i(n)$	32
Figura 10 - As séries Zeta e Eta quando $s > 0$ real	52
Figura 11 - A função $(1 + x)^{-s}$ e aproximação por retângulos.	54
Figura 12 - Primeiros zeros de $\zeta(s)$ com eixos σ x t com $s = \sigma + it$	72
Figura 13 - Coincidência do Primeiro zero de $\zeta(s)$ e $\eta(s)$	73
Figura 14 - Simetria dos zeros não triviais.	75
Figura 15 - Contorno fechado considerado na integral.	92
Figura 16 - A função $\psi(x)$ em azul e a fórmula explícita de Von Mangoldt em vermelho (sem considerar zeros de zeta).	98
Figura 17 - A função $\psi(x)$ em azul e a fórmula explícita de Von Mangoldt em vermelho (considerando 10 primeiros zeros de zeta).	98
Figura 18 - A função $\psi(x)$ em azul e a fórmula explícita de Von Mangoldt em vermelho (considerando 50 primeiros zeros de zeta).	99
Figura 19 - A função $\psi(x)$ e a fórmula explícita de Von Mangoldt em vermelho (considerando 100.000 primeiros zeros de zeta).	99
Figura 20 - A derivada $d\psi(x)/dx$ utilizando a fórmula de Von Mangoldt para 100.000 zeros de Zeta.	100
Figura 21 - Contorno de uma integral complexa.	114
Figura 22 - Contorno da integral quando $0 < y < 1$	134
Figura 23 - Contorno fechado para $y > 1$	137

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores do polinômio de Euler $p(n)$ de 0 a 41.	23
Tabela 2 - Tabela com valores de $\pi(x)$	30
Tabela 3 - valores das funções $\pi(n)$, $n/\ln(n)$ e $L_i(n)$	31

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TNP	Teorema dos Números Primos
TFA	Teorema Fundamental da Aritmética

LISTA DE SÍMBOLOS

\sum_p	Somatório em todos os primos
\prod_p	Produtório em todos os primos
$\Gamma(s)$	Função Gama

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	15
1	OS NÚMEROS PRIMOS	17
1.1	A Infinitude dos Números Primos e o Teorema Fundamental da Aritmética	17
1.2	Como saber se um número é Primo?	18
1.3	Existem Fórmulas para Obter Primos?	22
1.4	A Série Harmônica e a Série Harmônica dos Números Primos	26
1.5	Distribuição dos Primos	28
1.6	Teorema dos Números Primos	33
2	A FUNÇÃO ZETA NO DOMÍNIO REAL	37
2.1	A série Zeta	37
2.2	A Fórmula do Produto de Euler	38
2.3	Importantes Relações Oriundas do Produto de Euler	41
2.4	Valores especiais de Zeta - Problema da Basileia	43
3	A FUNÇÃO ZETA NO DOMÍNIO COMPLEXO	47
3.1	Convergência e Analiticidade de Zeta	47
3.2	A Série Eta	48
3.3	A Relação entre as Séries Eta e Zeta e a Primeira Extensão de Zeta	51
4	A EQUAÇÃO FUNCIONAL E A SEGUNDA EXTENSÃO DE ZETA	57
4.1	A Função Gama	57
4.2	A Relação Entre as Funções Gama e Zeta	58
4.3	A Relação Entre as Funções Gama e Eta	59
4.4	A Equação Funcional de Zeta	60
4.5	Forma Equivalente a Equação Funcional	65
4.6	O Cálculo de $\zeta(0)$	67
4.7	A Função $\xi(s)$	68
5	AS RAÍZES DA FUNÇÃO ZETA E A HIPÓTESE DE RIEMANN	69
5.1	A Região $\sigma > 1$	69
5.2	A Região $\sigma < 0$	69
5.3	A Região $0 \leq \sigma \leq 1$ e os Zeros não triviais	70
5.4	Análise dos Zeros Comuns das Funções Eta e Zeta	74
5.5	A Simetria dos Zeros	74
5.6	As raízes da Função $\xi(s)$	76

6	A FUNÇÃO ZETA E A FUNÇÃO DE CONTAGEM DOS NÚMEROS PRIMOS	77
6.1	O Artigo de Riemann e a Introdução da Função $J(x)$	77
6.2	A fórmula da Inversão de Möbius	78
6.3	A Relação Entre as Funções Zeta e Möbius	81
6.4	Fórmula Explícita de Riemann para $J(x)$	82
6.5	O Cálculo de $\ln \zeta(s)$	85
7	A FÓRMULA DE VON MANGOLDT	87
7.1	As Funções de Chebyshev e a Fórmula Explícita de Von Mangoldt	87
7.2	Primeira parte da Prova da Fórmula de Von Mangoldt - Integral	88
7.3	Segunda Parte da Prova da Fórmula de Von Mangoldt - Teorema de Resíduos	91
7.3.1	<u>Cálculo dos resíduos</u>	92
7.3.1.1	Resíduo quando $s = 0$	92
7.3.1.2	Resíduos para os zeros de Zeta	94
7.3.1.3	Resíduo quando $s = 1$	94
7.4	O Componente Ondulatório de $\psi(x)$	96
7.5	Esboço da Demonstração do Teorema do Número Primo	100
	CONCLUSÃO	102
	REFERÊNCIAS	104
	APÊNDICE A – Resultados Importantes de Séries	107
	APÊNDICE B – Conceitos e Resultados Importantes de Números Complexos	109
	APÊNDICE C – Transformada de Fourier	117
	APÊNDICE D – A Equação Funcional da Função Teta de Jacobi	120
	APÊNDICE E – As Equações Funcionais da Função Gama - Duplicação de Legendre e Reflexão de Euler	127
	APÊNDICE F – Cálculo da Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds$ ($y > 0, a > 0$)	134
	ANEXO A – Artigo Riemann	140
	ANEXO B – Descrição Oficial do Problema	148

INTRODUÇÃO

A hipótese de Riemann é um dos problemas de matemática em aberto mais famosos do mundo. Para se ter uma ideia ele foi citado nos 23 problemas de Hilbert em 1900. Além disso, aparece também nos sete problemas no Clay Institute Milenium prize em 2000. Único problema que aparece nessas duas listas (ENRICO, 2000).

Tal hipótese apareceu no único artigo de apenas 9 páginas de Bernhard Riemann em teoria analítica dos números publicado em 1859 com o título “On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity”. Nesse trabalho, Riemann faz a seguinte alegação:

Encontra-se, de fato, aproximadamente esse número de raízes reais dentro desses limites, e é bastante provável que todas essas raízes são reais. Certamente, gostaria de ter uma prova rigorosa aqui; Por enquanto, eu tenho colocado de lado essa busca depois de algumas tentativas frustradas, pois parece desnecessário para meu próximo objetivo da minha investigação¹. (RIEMANN, 1859, tradução nossa)

Cuja versão mais moderna e equivalente a conjectura supracitada é dada por

Os zeros não triviais de $\zeta(s)$ possuem parte real igual a $1/2$ ². (ENRICO, 2000, tradução nossa)

Em que $\zeta(s)$ é uma a função Zeta de variável complexa que será alvo de profunda investigação nos próximos capítulos.

O objetivo principal desse trabalho é mostrar a conexão dos números primos com a hipótese de Riemann, ou seja, com os “zeros não triviais de um função complexa” de forma acessível para estudantes de graduação ou mesmo alunos do ensino médio com uma boa base matemática. Prezando sempre que possível em mostrar detalhes dos cálculos necessários para demonstrar as equações mais importantes que envolvem o assunto. No entanto, algumas passagens são menos técnicas e mais intuitivas, deixando em alguns momentos o rigor matemático que poderiam fazer o conteúdo demasiadamente longo e menos acessível.

A busca por balancear os detalhes das demonstrações com uma leitura mais fluida foi o grande desafio do trabalho. Os trabalhos como de Edwards (2001) e Stein e Shakarchi (2010) são excelentes, mas com um rigor que em alguns momentos deixa a leitura mais desafiadora e até desestimulante por conta de passagens com grandes saltos de conhecimento. Enquanto alguns trabalhos como Jorgen (2013) ou mesmo o clássico Derbyshire

¹ No original: One now finds indeed approximately this number of real roots within these limits, and it is very probable that all roots are real. Certainly one would wish for a stricter proof here; I have meanwhile temporarily put aside the search for this after some fleeting futile attempts, as it appears unnecessary for the next objective of my investigation.

² No original: The nontrivial zeros of $\zeta(s)$ have real part equal to $1/2$.

(2003) não mostra detalhes importantes das demonstrações ou possuem assuntos que se distanciam mais do objetivo desse trabalho.

O trabalho Arwashan (2021) de todas as fontes pesquisadas foi o que melhor balanceou a compreensão, assuntos necessários para o entendimento, sem deixar de lado um certo rigor nas passagens. Este foi a fonte principal da maior parte desse texto, embora em alguns momentos possuam passagens mais intuitivas ou mesmo alguns erros que tentamos corrigir e melhorar neste trabalho.

1 OS NÚMEROS PRIMOS

1.1 A Infinitude dos Números Primos e o Teorema Fundamental da Aritmética

Uma das primeiras referências à definição de número primo pode ser encontrada no livro Elementos de Euclides VII na definição 12 (BICUDO, 2009). Ela é bem próxima da atual, mas com caráter geométrico e já incorporava noções Pitagóricas de divisões inteiras: um número primo é o medido por uma unidade só. Essa ideia indica a indivisibilidade do segmento com medida natural prima a menos da unidade. Segue a definição mais clássica, geralmente apresentada durante o ensino fundamental.

Definição 1.1. *Um número inteiro $p > 1$ é dito primo quando admite apenas os divisores positivos 1 e p . Enquanto, números que admitem mais divisores positivos são chamados de compostos.*

Observe, portanto, que o número 1 não é primo, nem composto de acordo com a definição acima. Isso é conveniente principalmente por conta do Teorema 1.1 que veremos em breve. Os números primos têm uma importância gigantesca na teoria dos números devido ao teorema fundamental da aritmética enunciado a seguir:

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Seja $n \geq 2$ um número natural. Podemos escrever n de forma única como produto de primos a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração. Para $n = 2$ que é primo temos que vale o teorema acima. Suponha, por indução, que vale para $2, 3, \dots, n - 1$ ($n \geq 2$ natural). Se n for primo o teorema é válido, se n é composto, então pode-se escrever $n = ab$, com $1 < a < n$ e $1 < b < n$. Como a e b são menores que n vale a hipótese de indução: a e b podem ser escrito como produto de primos, e portanto n também. Falta mostrar a unicidade. Seja n o menor natural que admita duas fatorações distintas que não diferem apenas pela ordem dos fatores, digamos $n = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$, em que $p_1 \leq p_2 \dots \leq p_r$ e $q_1 \leq q_2 \dots \leq q_s$ são primos. Temos que p_1 divide $q_1 q_2 \dots q_s$, logo p_1 divide algum q_i , como q_i é primo, temos $p_1 = q_i$ e $p_1 \geq q_1$. De forma análoga, chega-se que $p_1 \leq q_1$. Logo, na verdade $p_1 = q_1$. Assim, o número $n/p_1 = n/q_1$ não admitiria fatoração única, contradizendo a minimalidade de n . O que conclui a demonstração do teorema. (MARTINEZ et al., 2010) \square

Esse importante teorema ajuda a compreender o porquê dos números primos serem tão importantes e fascinantes na matemática. Comumente comparados aos átomos em

relação à matéria³, pois números primos são os blocos indivisíveis em que todo número natural é formado.

Uma pergunta natural que surge da definição acima e da observação dos números primos em sequência é se este conjunto é finito ou infinito: a seguir apresentamos o teorema de Euclides que responde essa dúvida. A resposta foi dada por Euclides no livro Elementos na proposição IX 20 (BICUDO, 2009): “Os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos.” A demonstração clássica e elegante, feita por redução ao absurdo é apresentada abaixo em linguagem moderna:

Teorema 1.2 (Teorema de Euclides). *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe uma quantidade finita n de números primos, a saber, p_1, p_2, \dots, p_n ordenados em ordem crescente. Considere o número que é maior que qualquer primo $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ e observe que, por hipótese, este número é composto, logo algum p_j divide N . Esse primo p_j também divide $p_1 p_2 \dots p_n = N - 1$, portanto divide a diferença, logo p_j divide 1. O que claramente é um absurdo, portanto a hipótese é falsa e existem infinitos primos. \square

Vale ressaltar que o número $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ que aparece na demonstração do Teorema 1.2 não necessariamente é primo. Por exemplo, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$.

Dada que a quantidade de números primos é infinita uma próxima dúvida que surge é como saber se um número natural é primo ou não? Como eles estão distribuídos? Quão raros eles são? Existe uma fórmula que gere os primos? Estas dúvidas foram e são discutidas há pelo menos desde os gregos antigos até os dias de hoje, tendo ocupado a mente de muitos célebres matemáticos da história. Inclusive a palavra “primo” (do latim *primus*) é de origem grega. Os gregos dividiam os números em “primeiros” e “secundários” que seriam respectivamente os primos e composto como conhecemos hoje, ver (MOTA, 2017).

1.2 Como saber se um número é Primo?

Um das primeiras formas e mais conhecidas para determinar a primalidade de uma lista de números naturais é o Crivo de Eratóstenes, que consiste basicamente em um algoritmo de “força bruta” que faz o seguinte procedimento (CRANDALL; POMERANCE, 2006):

³ De acordo com a teoria atômica de Dalton. Atualmente temos conhecimento de partículas sub-atômicas.

1. Dado um número natural $n > 2$, liste os inteiros consecutivos de 2 a n .
2. Inicialmente, considere $p = 2$ o menor número primo.
3. Elimine todos os múltiplos de p no intervalo $2p$ até n .
4. Encontre o o menor número da lista maior que p e que não foi eliminado; se não houver, o procedimento se encerra. Caso contrário, seja p igual a este número, que será primo, e repete-se o item anterior.
5. Quando o procedimento terminar, todos os números que sobraram serão os primos menores ou iguais a n .

Não é necessário passar por todos os números, basta ir até no máximo $p = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, pois se existisse um número x , tal que $\sqrt{n} < x \leq n$ composto que não foi eliminado teríamos $x = ab$, com $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$, logo $x = ab > n$ o que é um absurdo. Portanto, encerrando o processo até $p = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ é suficiente e todos números que não foram eliminados serão primos.

Nas ilustrações abaixo seguem o exemplo do algoritmo do Crivo de Eratóstenes feito para $n = 100$, portanto precisamos seguir para números menores que $\lfloor \sqrt{100} \rfloor = 10$. As Figuras 1, 2, 3 e 4 detalham o algoritmo aplicado em quatro rodadas:

1. Na primeira rodada, escolhe-se o número 2, que será primo e eliminam-se todos números múltiplos de 2 maiores que 2 conforme Figura 1.
2. Na segunda rodada, escolhe-se o próximo número não eliminado da lista, 3, que será primo e eliminam-se todos números múltiplos de 3 maiores que 3 conforme Figura 2.
3. Na terceira rodada, escolhe-se o próximo número não eliminado da lista, 5, que será primo e eliminam-se todos números múltiplos de 5 maiores que 5 conforme Figura 3.
4. Na quarta rodada, escolhe-se o próximo número não eliminado da lista, 7, que será primo e eliminam-se todos números múltiplos de 7 maiores que 7 conforme Figura 4.
5. O próximo número da lista é 11, mas este já é maior que $\sqrt{100}$ e, portanto não será necessário continuar o processo o qual forneceu uma lista de 25 primos menores ou iguais a 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

Outra forma interessante de verificar a primalidade de um número é utilizar o famoso teorema de Wilson, mas antes antes de demonstrar este resultado vamos precisar de um outro teorema bastante conhecido:

Figura 1 - Primeira rodada do Crivo de Eratóstenes para $p = 2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: O Autor, 2022.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 2 - Primeira rodada do Crivo de Eratóstenes para $p = 3$.

Fonte: O Autor, 2022.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 3 - Primeira rodada do Crivo de Eratóstenes para $p = 5$.

Fonte: O Autor, 2022.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 4 - Primeira rodada do Crivo de Eratóstenes para $p = 7$.

Fonte: O Autor, 2022.

Teorema 1.3 (Teorema de Bachet-Bézout). *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ com*

$$ax + by = \text{mdc}(a, b). \quad (1)$$

A demonstração do Teorema 1.3, bem como uma demonstração similar ao Teorema de Wilson podem ser verificadas em (MARTINEZ et al., 2010).

Teorema 1.4 (Teorema de Wilson). *Seja $n > 1$, então $n|(n-1)! + 1$ se, e somente se, n é primo. Ou em forma de congruência:*

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n} \text{ se, e somente se, } n \text{ é primo.} \quad (2)$$

Demonstração. Suponha que $n = ab$ com $a < b < n$, logo a e b aparecem na lista $1, 2, \dots, (n-1)$, portanto $n|(n-1)!$ e n não divide $(n-1)! + 1$. Para o caso que $n = p^2$ com p primo maior que 2, observe que p e $2p$ aparecem em $(p^2-1)!$, pois $2p < p^2 - 1$ e portanto p^2 divide $(p^2-1)!$ e não divide $(p^2-1)! + 1$. Para o caso $n = 4 = 2^2$ pode-se checar que 4 não divide $(4-1)! + 1 = 7$. Ou seja, mostramos que se n é composto, então n não divide $(n-1)! + 1$.

Para o caso em que $n = p$ é primo, perceba que em $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)$ os fatores listados são justamente as classes de congruência módulo p . Além disso, para cada $r \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tem-se que $\text{mdc}(r, p) = 1$.

Assim, o Teorema 1.3 garante que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $px + ry = 1$, logo $ry \equiv 1 \pmod{p}$. Portanto, todo resto módulo p possui inverso multiplicativo e este é único módulo p , pois se existisse $y' \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tal que $ry' \equiv 1 \pmod{p}$, teríamos $ryy' \equiv y \pmod{p}$, logo $y' \equiv y \pmod{p}$. Agora, observe que as únicas classes tais que $r^2 \equiv 1 \pmod{p}$ são $r \equiv \pm 1 \pmod{p}$, pois $p|(r^2-1) = (r+1)(r-1)$ se, e somente se, $p|(r+1)$ ou $p|(r-1)$, como p é primo, temos $r \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Com essas informações, percebe-se que todos os fatores de $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)$ módulo p possuem inversos multiplicativos únicos que dois a dois possuem produto igual a 1, sobrando apenas os restos 1 e $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$. Assim, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, concluindo a demonstração. \square

1.3 Existem Fórmulas para Obter Primos?

Desde a descoberta da infinitude dos números primos, matemáticos se debruçaram para tentar enxergar alguma regularidade na sequência de primos. Foram muitas as tentativas de encontrar fórmulas relativamente simples para encontrar o próximo primo. Há uma frase atribuída ao célebre matemático Leonard Euler, indicando sua frustração sobre o tema:

Matemáticos tentam em vão até os dias de hoje encontrar alguma ordem

na sequência dos números primos, e temos razões para acreditar que esse é um mistério no qual nossa mente nunca irá penetrar. ⁴. (HAVIL, 2003)

Além da frase de Paul Erdos, parafraseando o físico Albert Einstein:

Deus pode não jogar dados com o universo, mas há algo estranho acontecendo com os números primos ⁵. (HAVIL, 2003)

Por último Robert Charles “Bob” Vaughan, matemático britânico famoso por suas contribuições em teoria analítica dos números, costumava falar:

É evidente que os números primos são aleatoriamente distribuídos, mas, infelizmente, não sabemos o que aleatório significa. ⁶. (HAVIL, 2003)

Uma das primeiras tentativas para encontrar alguma regularidade na sequência dos números primos pela sua razoável facilidade foram os polinômios. Por exemplo, o polinômio de Euler a seguir fornece números primos até $n = 40$:

$$p(n) = n^2 - n + 41 \tag{3}$$

Tabela 1 - Valores do polinômio de Euler $p(n)$ de 0 a 41.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p(n)	41	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	151	173	197	223	251	281	313	347	383	421
primo	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
p(n)	461	503	547	593	641	691	743	797	853	911	971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601	1681
primo	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	N

Fonte: Autor, 2022.

Obviamente essa distribuição não forneceria sempre números primos, pois sendo n qualquer natural múltiplo de 41, tem-se que $41|p(n)$ para $p(n) > 41$, portanto não pode ser primo. Outra observação é que o polinômio de Euler não fornece todos os primos a partir de 41, “pulando” alguns primos, por exemplo o número 59 não apareceu na lista. Outra observação é que o polinômio $q(n) = n^2 + n + 41$ também fornece os mesmos primos, pois $q(-n) = q(n - 1) = p(n)$, este por sua vez também é chamado de polinômio de Euler. Dessa última observação pode-se criar um polinômio $q(n - 40) = n^2 - 79n + 1601$ que fornecerá primos para $n = 0, 1, 2, \dots, 79$.

⁴ No original: Mathematicians have tried in vain to this day to discover some order in the sequence of prime numbers, and we have reason to believe that it is a mystery into which the mind will never penetrate.

⁵ No original: God may not play dice with the Universe, but there’s something strange going on with the prime numbers!

⁶ No original: It is evident that the primes are randomly distributed but, unfortunately, we don’t know what random means.

Fica a dúvida, será que existe um polinômio com coeficientes inteiros que forneça sempre números primos? A resposta é não conforme veremos no resultado a seguir:

Proposição 1.2. *Não existe polinômio $P(x)$ não constante com coeficientes inteiros, tal que $P(x)$ seja primo para todo inteiro x .*

Demonstração. Suponha que exista tal polinômio:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \text{ com } a_i \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$p = P(1) = \sum_{i=0}^n a_i \text{ é primo.}$$

No entanto, observe que para k inteiro:

$$P(1 + kp) = \sum_{i=0}^n a_i (1 + kp)^i.$$

No qual, expandindo os termos de $(1 + kp)^i$ em binômios de Newton:

$$\begin{aligned} P(1 + kp) &= \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (kp)^j \\ &= \sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (kp)^j \\ &= P(1) + \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (kp)^j \\ &= p + p \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} k^j p^{j-1}. \end{aligned}$$

Logo, ou $P(1 + kp) \neq p$ é múltiplo de p para todo $k \in \mathbb{Z}$, o que contradiz a hipótese de gerar sempre primos, ou $P(1 + kp) = p, \forall k \in \mathbb{Z}$, o que implicaria que o polinômio seria constante. Portanto não existe tal polinômio, tal proposição pode ser encontrada em (RASHID, 2020). \square

Para polinômios com coeficientes racionais a afirmação também vale com uma demonstração similar à realizada acima e pode ser conferida em (RASHID, 2020).

Embora seja comum a crença que não existem fórmulas que gerem primos, ela é infundada, como podemos ver a seguir:

Proposição 1.3 (HONSBERGER, 1976). *Sejam x e y números naturais com $y \neq 0$ e*

seja $b = x(y + 1) - (y! + 1)$, então

$$f(x, y) = \frac{y - 1}{2} [|b^2 - 1| - (b^2 - 1)] + 2.$$

gera somente números primos, todos os primos e cada primo ímpar exatamente uma vez.

Demonstração. Tem-se que b é inteiro, portanto b^2 é um inteiro não negativo, daí há dois casos para analisar:

1. $b^2 - 1 \geq 0$, logo $|b^2 - 1| = (b^2 - 1)$ e $f(x, y) = 2$ que é primo.
2. $b^2 = 0$, logo $f(x, y) = y + 1$. Como $b = 0$, tem-se $x(y + 1) = (y! + 1)$, conclui-se que $y + 1$ divide $y! + 1$ e portanto, pelo Teorema de Wilson segue $(y + 1)$ é primo, que é justamente o valor de $f(x, y)$.

Conclui-se que a função $f(x, y)$ somente fornece valores 2 ou $y + 1$ e neste caso esse valor é primo. Observe que $f(1, 1) = 2$ e para p um primo ímpar, defina:

$$y = p - 1 \text{ e } x = \frac{1}{p} [(p - 1)! + 1].$$

Veja que x é inteiro pelo Teorema de Wilson pode-se escrever:

$$p = y + 1 \text{ e } xp = (p - 1)! + 1.$$

Logo $xp = x(y + 1) = (p - 1)! + 1 = y! + 1$ e $b = 0$, o que fornece $f(x, y) = y + 1 = p$. Assim, $f(x, y)$ produz todos os primos. Por outro lado, suponha que $f(x, y) = p$, em que p é um primo ímpar como essa função só produz 2 e $y + 1$ como resultados, teremos $y + 1 = p$, o que implica que $b = 0$. Daí, $x(y + 1) = y! + 1$, e como $y + 1 = p$, temos como anteriormente:

$$y = p - 1 \text{ e } x = \frac{(p - 1)! + 1}{p}.$$

que gera justamente o valor $f(x, y) = p$ como vimos. □

Existem outras fórmulas, geralmente também apoiando-se no Teorema de Wilson que podem ser conferidas em (MOURA, 2018). No entanto, essas fórmulas não ajudam muito no propósito de encontrar o próximo número primo, pois são equações que demandam a mesma ou maior capacidade computacional para encontrar a sequência de primos em relação a um algoritmo de força bruta, como o Crivo de Eratóstenes.

1.4 A Série Harmônica e a Série Harmônica dos Números Primos

O Teorema 1.2 mostra que há infinitos números primos e na seção anterior foi possível ter uma ideia que há uma grande dificuldade de descobrir fórmulas simples que ajudem a buscar o próximo primo. Isso nos faz pensar em tentar estimar o quão raro é um número primo: é mais frequente termos números primos ou quadrados perfeitos? Uma forma interessante de responder a essa dúvida é observar a convergência de séries e comparar com a série harmônica. Então vamos a definição a seguir:

Definição 1.4.

$$H_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \quad (4)$$

é chamada de *série harmônica*. Ou em sua forma recursiva:

$$H_r = H_{r-1} + \frac{1}{r}, \quad r \in \mathbb{N}^* \text{ e } H_1 = 1 \quad (5)$$

É possível mostrar que tal série diverge, quando n tende ao infinito:

Proposição 1.5. *A série harmônica é divergente.*

Demonstração. Agrupando os termos da série harmônica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_\infty &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ &> 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot 2^{i-1} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A última série é claramente divergente e, portanto, a série harmônica também diverge. \square

Proposição 1.6. *A série harmônica dos quadrados*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

é convergente.

Demonstração. Basta fazer um agrupamento similar ao que foi feita na demonstração da

proposição anterior:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} \right) + \left(\frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{16^2} \right) + \dots \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} \right) + \left(\frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{8^2} \right) + \dots \\
&= 1 + 2 \frac{1}{2^2} + 4 \frac{1}{4^2} + 8 \frac{1}{8^2} + \dots \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Assim, temos que a série dos inversos dos quadrados é convergente. \square

Agora, para responder a dúvida sobre a densidade dos primos convém definir a série harmônica dos primos:

Definição 1.7. *A série harmônica dos números primos é definida como:*

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

Vamos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 1.8. *A série harmônica dos primos diverge.*

Demonstração. Para um inteiro $x \geq 2$ fixado, sejam P o conjunto de todos os primos que são menores ou iguais a x e M o conjunto de todos os inteiros que possuem apenas fatores primos em P , incluindo o número 1. Observe a seguinte identidade abaixo:

$$\left(1 + \frac{1}{p} \right) \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \dots + \frac{1}{p^{2k}} + \dots \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^j}.$$

Agora, multiplique a expressão acima para cada $p \in P$:

$$\prod_{p \in P} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \dots + \frac{1}{p^{2k}} + \dots \right) = \prod_{p \in P} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^j} \right).$$

Observe que para um determinado $n \in M$, tal que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_m^{\alpha_m}$ aparecerá uma única vez nos produtórios acima pelo Teorema 1.1. Assim, podemos escrever:

$$\prod_{p \in P} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \sum_{n \in M} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in M} \frac{1}{n}.$$

Pelo fato da série harmônica ser divergente e a série do recíproco dos quadrados ser convergente pode-se concluir da expressão acima quando x tende ao infinito que o produto:

$$\prod_{p \in P} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

também tende ao infinito. Para completar a demonstração, utilizando a inequação vinda diretamente da expansão em Taylor da função exponencial, tem-se $e^c > 1 + c, \forall c > 0$. Assim,

$$\prod_{p \in P} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \prod_{p \in P} e^{(1/p)} = \exp\left(\sum_{p \in P} \frac{1}{p}\right).$$

Logo, conclui-se que

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p}$$

tende para o infinito quando x tende para o infinito. O que encerra a demonstração. \square

A demonstração acima e algumas outras podem ser encontradas em Narkiewicz (2013) e uma demonstração bastante elementar e detalhada em Andrade (2010). O fato da série harmônica dos números primos divergir é um resultado bastante interessante e indica que os primos, apesar de ser relativamente raros, aparecem com uma frequência maior que os quadrados perfeitos, por exemplo. A taxa de crescimento da série harmônica é bem lenta, enquanto a da série harmônica dos primos é obviamente mais lenta ainda. É possível mostrar que esta série cresce na ordem de $\log(\log(x))$, e a demonstração pode ser encontrada em Narkiewicz (2013) e no artigo Paul (2015).

1.5 Distribuição dos Primos

Uma forma pela qual alguns matemáticos começaram a analisar os primos foi na sua distribuição, buscando entender o comportamento da “densidade de primos” e para isso foi definida uma função que conta a quantidade de primos menores ou iguais a um número natural n .

Definição 1.9. *Seja $\pi(n)$ a quantidade de primos menores ou iguais a n . As vezes também definida no formato de somatório:*

$$\pi(n) = \sum_{p \leq n} 1.$$

Essa função conhecida como “prime counting function” ou função de contagem

de números primos permite uma visão mais analítica dos números primos. Mesmo sendo uma função degrau é possível compará-la com funções conhecidas. Sabe-se que há infinitos números primos como foi verificado no Teorema 1.2, portanto esta função é uma função em degraus não decrescente, mas quão rápido ou devagar ela cresce? Observe, por exemplo, o gráfico dessa função até $n = 100$ na Figura 5.

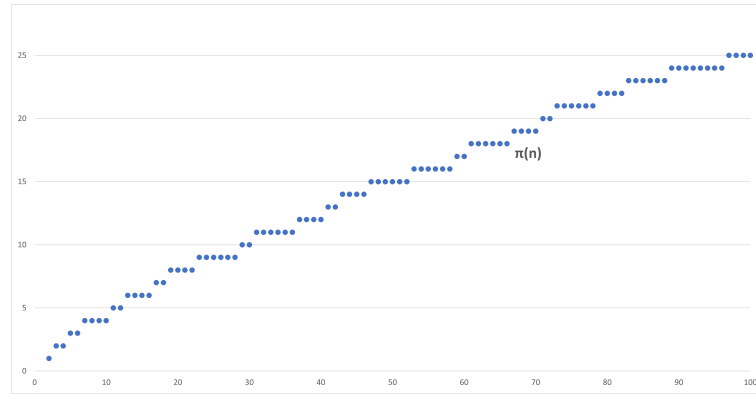


Figura 5 - A função $\pi(x)$ até $n = 100$ com $\pi(100) = 25$

Fonte: Autor, 2022.

A extensão de cada degrau, ou seja, a quantidade de números inteiros compreendida em intervalos em que a função π é constante (não há primos) varia e há alguns degraus mais longos conforme Figura 5. Uma faixa de inteiros consecutivos que não contém nenhum número primo é chamada de deserto de primos. A próxima proposição é um resultado simples que mostra a existência de desertos arbitrariamente grandes. Dela decorre a existência de degraus de extensão arbitrariamente grandes.

Proposição 1.10. *Existe uma sucessão arbitrariamente grande de números naturais sem qualquer primo.*

Demonstração. De fato, considere a seguinte sequência:

$$n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$$

o termo $n! + j$ é divisível por $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, pois $n! = n \cdot (n-1) \cdots j \cdots 2 \cdot 1$, logo nenhum desses termos é primo, pois claramente $n! + j \neq j$. Portanto, tem-se um sequência de $(n-1)$ naturais compostos. \square

Embora a sequência de primos em si pareça misteriosa e às vezes até aleatória, observando o gráfico até $n = 1000$ na Figura 6 é possível notar alguma regularidade, e foi nessa distribuição que um progresso mais sólido em relação aos números primos começou a aparecer.

O grande Matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss ainda adolescente conjecturou por volta do ano 1793 um comportamento da função $\pi(x)$, analisando grupos

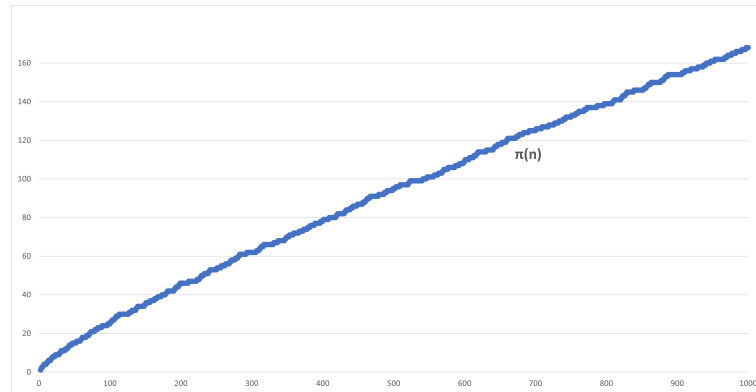


Figura 6 - A função $\pi(x)$ até $n = 1000$. Em que $\pi(1000) = 168$

Fonte: Autor, 2022.

de 1000 números chamado de “chiliad” e verificando quantos primos tinham até valores da ordem de alguns milhões. Gauss verificou que parecia existir uma relação entre a frequência de primos até x e o inverso do logaritmo nesse ponto (DERBYSHIRE, 2003). Para se ter uma ideia do hercúleo trabalho de Gauss e outros matemáticos sem a óbvia utilização de recursos computacionais que não existiam na época: até um milhão existem 78498 primos, conforme Tabela 2. Na Figura 6 podemos começar a entender uma famosa

Tabela 2 - Tabela com valores de $\pi(x)$

n	$\pi(n)$
10^2	25
10^3	168
10^4	1229
10^6	78498
10^8	5761455
10^{12}	37607912018
10^{16}	279238341033925

Fonte: (CRANDALL; POMERANCE, 2006)

frase dita por Don Zagier em 1795 em uma palestra na universidade de Bonn:

Os números primos crescem como ervas daninhas entre os números naturais, parecendo não obedecer a nenhuma outra lei senão a do acaso, e ninguém pode prever onde o próximo irá brotar. O segundo fato é ainda mais surpreendente, pois afirma exatamente o oposto: que os números primos exibem uma regularidade impressionante, que existem leis que governam seu comportamento e que eles obedecem a essas leis com precisão quase militar⁷. (ENRICO, 2000, tradução nossa)

⁷ No original: “They [Prime numbers] grow like weeds among the natural numbers, seeming to obey no other law than that of chance, and nobody can predict where the next one will sprout. The second fact is even more stonishing, for it states just the opposite: that the prime numbers exhibit stunning regularity, that there are laws governing their behavior, and that they obey these laws with almost military precision.”

Enquanto sabemos da dificuldade de encontrar padrões em fórmulas que descrevam por completo os números primos com precisão e eficiência. Eles obedecem uma curva tão bem comportada como exibida na Figura 6 e que na próxima seção veremos um importante teorema que descreve o comportamento assintótico da função $\pi(x)$.

Uma conjectura muito parecida em relação a função $\pi(x)$ feita também por Gauss, foi em termos da aproximação assintótica da função $L_i(x)$ obtida pela integração do recíproco do logaritmo:

Definição 1.11. *A função logarítmica integral é definida para todos os reais positivos $x \geq 1$ da seguinte forma:*

$$L_i(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt.$$

Antes de enunciar o Teorema dos Números Primos propriamente é interessante mostrar algumas evidências “empíricas” iniciais como tabela e gráficos da conjectura levantada por Gauss. Na Tabela 3 seguem alguns valores das funções $\pi(n)$, $n/\ln(n)$ e $L_i(n)$:

Tabela 3 - valores das funções $\pi(n)$, $n/\ln(n)$ e $L_i(n)$

n	$\pi(n)$	$\lfloor n/\ln(n) \rfloor$	$L_i(n)$
10	4	4	5
100	25	22	29
1000	168	145	177
10000	1229	1086	1245
100000	9592	8686	9629

Fonte: Autor, 2022.

Observando o gráfico dessas funções até $n = 100000$ na Figura 7 é possível verificar como a função $L_i(n)$ aproxima muito melhor $\pi(n)$ em relação a $n/\ln(n)$: é difícil distinguir as duas curvas verde e preta. No entanto, tanto a $L_i(n)$ como a $n/\ln(n)$ mostram uma tendência de crescimento parecido com a $\pi(n)$. Em termos de erro percentual em relação a $\pi(n)$ é possível verificar para os primeiros 100000 números uma tendência de redução na Figura 8.

Há registros na literatura que sugerem a função $n/(\ln(n) - 1)$ como aproximação melhor de $\pi(n)$, como pode ser visto na Figura 9 para os primeiros 1000 números. O matemático francês Adrien-Marie Legendre publicou a conjectura em uma forma alternativa de forma independente (CRANDALL; POMERANCE, 2006):

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x) - B}$$

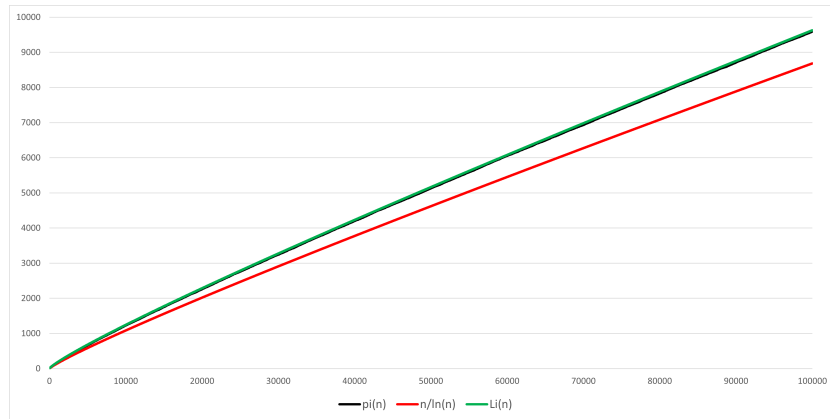


Figura 7 - Gráficos das funções $\pi(n)$, $n/\ln(n)$ e $Li(n)$

Fonte: Autor, 2022.



Figura 8 - Erro relativos das funções $Li(n)$ e $n/\ln(n)$ em relação a $\pi(n)$.

Fonte: Autor, 2022.

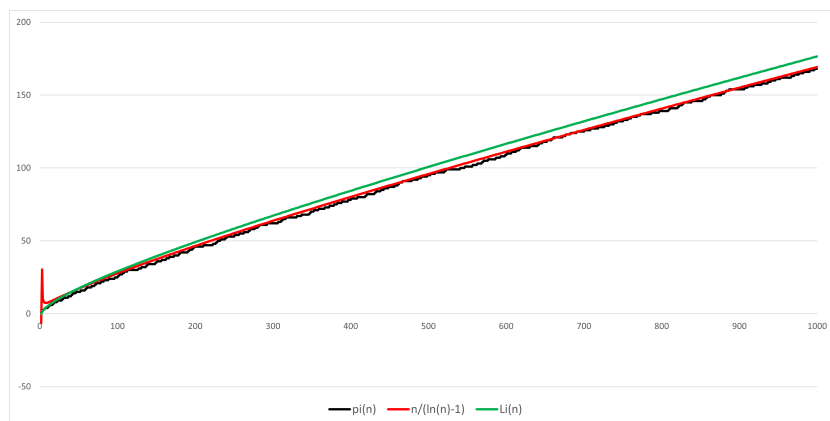


Figura 9 - Gráficos das funções $\pi(n)$, $n/(\ln(n) - 1)$ e $Li(n)$.

Fonte: Autor, 2022

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)-B}} = 1$$

com $B = 1.08366$. No entanto, verificou-se depois que nessa forma de aproximação o melhor número B é igual a 1, mas para valores elevados de x a função $L_i(x)$ é a melhor (HAVIL, 2003).

As aproximações discutidas até aqui são equivalentes quando x tende ao infinito, inclusive para qualquer B :

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)} \approx \frac{x}{\ln(x) - 1} \approx \frac{x}{\ln(x) - 1.08366}$$

1.6 Teorema dos Números Primos

Na seção anterior foram vistas as ideias por trás da conjectura da distribuição dos números primos. O teorema dos números primos é importante na teoria analítica dos números e relaciona a quantidade de números primos até x através da função $\pi(x)$ e $\frac{x}{\ln(x)}$. A seguir, apresentaremos o teorema propriamente dito:

Teorema 1.5 (O Teorema dos Números Primos Primeira versão). *Temos que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1.$$

Teorema 1.6 (O Teorema dos Números Primos Segunda Versão). *Há uma outra versão também com a função $L_i(x)$*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{L_i(x)} = 1.$$

Ambas versões indicam boas aproximações assintóticas dessas funções $\pi(x)$. Como consequência desses teoremas pode-se dizer que a probabilidade de um determinado número N ser primo é aproximadamente $\frac{1}{\ln(N)}$ ou que o n -ésimo número primo é aproximadamente $N \ln(N)$. Uma forma de entender melhor o porquê do Teorema 1.5 é fazer uma análise simplificada para nos dar uma noção do comportamento da função $\pi(x)$, aproveitando a ideia do crivo de Eratóstenes: Seja x um inteiro maior que 2. A quantidade de números que são divisíveis por 2 menores ou iguais a x é aproximadamente $x/2$, restando $x(1 - 1/2)$ números, agora retira-se de forma análoga os múltiplos de 3: $x(1 - 1/2)(1 - 1/3)$, repetindo-se o processo até o primo menor ou igual a \sqrt{x} , ou seja,

pode-se escrever de forma aproximada a seguinte expressão:

$$\pi(x) \approx \prod_{p \leq \sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)x. \quad (6)$$

Para concluir essa ideia de demonstração do Teorema é necessário utilizar um Teorema provado pelo matemático polonês Franz Mertens:

Teorema 1.7 (Terceiro Teorema de Mertens). *Tem-se que*⁸

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = e^\gamma,$$

Para simplificar, pode-se escrever:

$$\prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \approx \frac{e^{-\gamma}}{\ln n}.$$

Para n grande e utilizando o Teorema 1.7 com a equação (6), temos que

$$\pi(x) \approx \prod_{p \leq \sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)x \approx \frac{e^{-\gamma}x}{\ln \sqrt{x}} = 2e^{-\gamma} \frac{x}{\ln x}.$$

Essa observação acima não é uma demonstração, apenas uma ideia para visualizar o teorema de outra forma. De fato, o Teorema dos Números Primos foi demonstrado apenas em 1896 de forma independente por dois matemáticos: o francês Jacques Hadamard e o belga Charles-Jean de la Vallée Poussin (EVES, 2011), ou seja, 37 anos após a publicação do famoso artigo de Riemann sobre a quantidade de primos menores que um determinado número. A proposição a seguir mostra a equivalência assintótica entre as duas funções, pode ser encontrada em (HAVIL, 2003):

Proposição 1.12. *Os dois limites a seguir são equivalentes:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{L_i(x)} = 1.$$

Demonstração. Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1.$$

⁸ $\gamma = 0,561459\dots$ é um número conhecido como constante de Euler-Mascheroni.

Então,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x du / \ln(u)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln(x)} \frac{x / \ln(x)}{\int_2^x du / \ln(u)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x / \ln(x)}{\int_2^x du / \ln(u)}.\end{aligned}$$

Usando a regra de L'Hospital, derivando o numerador e denominador:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x du / \ln(u)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x / \ln(x)}{\int_2^x du / \ln(u)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(\ln(x) - x \frac{1}{x})}{(\ln(x))^2}}{\frac{1}{\ln(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - 1}{\ln x}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x du / \ln(u)} = 1.$$

A demonstração da volta pode ser feita da mesma forma. □

É possível estimar, utilizando o Teorema dos Números Primos qual é x -ésimo primo. Na verdade, o teorema do número primo é equivalente a estimar o x -ésimo primo (HAVIL, 2003).

Proposição 1.13. *O x -ésimo primo é aproximadamente $x \ln x$.*

Demonstração. Seja p_x o x -ésimo primo, então $\pi(p_x) = x$. Assumindo que o Teorema 1.5 seja verdade, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} = 1.$$

Aplicando o logaritmo, obtemos

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} \right) = \ln 1 = 0.$$

Como a função logarítmica é contínua no intervalo dos reais positivos, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{\pi(x)}{x / \ln x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln \pi(x) - \ln x + \ln \ln x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \left(\frac{\ln(\pi(x))}{\ln x} + \frac{\ln \ln x}{\ln x} - 1 \right) &= 0.\end{aligned}$$

Utilizando o fato da função \ln ser ilimitada:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \pi(x)}{\ln x} + \frac{\ln \ln x}{\ln x} - 1 \right) = 0.$$

Observe que diretamente da regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \pi(x)}{\ln x} = 1.$$

Multiplicando o resultado acima pelo resultado do Teorema 1.5:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \pi(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \ln \pi(x)}{x} = 1.$$

Trocando x por p_x , ou seja, $\pi(p_x) = x$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{p_x} = 1.$$

Logo, $p_x \approx x \ln x$. □

2 A FUNÇÃO ZETA NO DOMÍNIO REAL

Em seu artigo, escrito em 1859, “A quantidade de números primos menores que uma determinada quantidade”, Bernard Riemann conjecturou sua famosa hipótese: todos os zeros não triviais (raízes) da função Zeta estão sobre a mesma linha crítica. Mas o que isso significa? Começemos pela função Zeta que é a soma infinita dos recíprocos de todos os naturais elevados a uma determinada potência.

Definição 2.1. *A função Zeta é definida conforme a expressão:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

Uma primeira pergunta que nos vem imediatamente à mente é: se todos os termos da série são positivos, como é possível essa expressão ir a zero? A resposta é que a variável s que é a potência desses números não é real, mas um número complexo. No entanto, inicialmente vamos analisar a função Zeta no domínio dos reais, pois esta função era bem conhecida e analisada por matemáticos antes de Riemann estendê-la para os números complexos. Além de introduzir alguns conceitos e resultados que serão úteis.

2.1 A série Zeta

Inicialmente, analisaremos a convergência para $s = 1$. Nesse caso, a função é dada pela soma dos recíprocos dos números naturais, e é chamada de série harmônica, conforme foi definida na Seção 1.4:

$$\zeta(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Foi visto também na Seção 1.4 que a série diverge. No entanto, nesse caso o teste da razão aplicada a série harmônica claramente é inconclusivo, pois:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Proposição 2.2. *A função $\zeta(s)$:*

1. *Converge para $s > 1$.*
2. *Diverge para $s \leq 1$.*

Demonstração. Observe que, quando $s < 1$, tem-se $1/n^s > 1/n$, ou seja, todos os termos de $\zeta(s)$ são maiores que $\zeta(1)$, logo $\zeta(s)$ diverge para todo $s \leq 1$ pelo critério da

comparação. Para $s > 1$ tal série converge, pois pode-se provar que é menor que a série geométrica abaixo:

$$\begin{aligned}
 \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) + \left(\frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \dots + \frac{1}{15^s}\right) + \dots \\
 &< 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s}\right) + \left(\frac{1}{8^s} + \frac{1}{8^s} + \dots + \frac{1}{8^s}\right) + \dots \\
 &= 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} + \frac{8}{8^s} + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Essa última expressão converge para $\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}$, pois $\frac{1}{2^{s-1}} < 1$ para $s > 1$. Logo, $\zeta(s)$ está bem definido para $s > 1$ e

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}.$$

□

2.2 A Fórmula do Produto de Euler

A função Zeta foi estudada por Leonard Euler (1707-1783), um dos mais brilhantes e produtivos matemáticos de todos os tempos. Euler descobriu a magnífica relação da série zeta e o produto envolvendo números primos e nos deu assim uma primeira conexão clara entre a função Zeta e os números primos.

Proposição 2.3 (Fórmula do Produto de Euler).

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

em que o produtório acima e sempre que aparecer nesse trabalho dessa forma é calculado sobre todos os números primos.

Apresentaremos uma ideia de demonstração bastante intuitiva, mas com alguns argumentos pouco formais conforme veremos a seguir.

Temos que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \dots \quad (7)$$

Multiplicando toda expressão acima por $\frac{1}{2^s}$, temos

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \dots \quad (8)$$

Subtraindo ambos os lados de (7) e (8), obtemos

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots \quad (9)$$

Ou seja, foram eliminadas da série que define a função Zeta todas as frações cujos denominadores eram potências de números pares. Novamente multiplique (9) por, agora, $\frac{1}{3^s}$ e subtraindo a própria expressão, obtemos

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \dots \quad (10)$$

Repetindo o processo acima para cada primo p , obtém-se

$$\dots \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1, \quad (11)$$

que pode ser reescrita da forma abaixo, chegando no resultado esperado:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Uma outra demonstração mais formal do produto de Euler utiliza o Teorema fundamental da aritmética. Observando a identidade a ser demonstrada:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

pode-se escrever quando $s > 1$ a seguinte série geométrica para primo p :

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots$$

Ou seja, queremos demonstrar que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p_j} \left(1 + \frac{1}{p_j^s} + \frac{1}{p_j^{2s}} + \dots \right),$$

em que p_j são os primos em ordem crescente, $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$. Assim, pelo Teorema Fundamental da Aritmética pode-se afirmar que todo número natural n pode ser expresso de forma única em fatoração em primos, a menos da ordem: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$. Logo,

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t})^s}.$$

Ou seja, perceba que $1/n^s$ aparece justamente multiplicando $1/p_1^{k_1 s}$ do termo do produtório referente a p_1 com $1/p_2^{k_2 s}$ do termo do produtório referente a p_2 e assim sucessivamente até $1/p_t^{k_t s}$ do termo do produtório referente a p_t pode-se concluir intuitivamente o resultado. No entanto, é possível formalizar um pouco mais o argumento. Sejam M e N inteiros positivos com $M > N$, logo podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &\leq \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots + \frac{1}{p^{Ms}} \right) \\ &\leq \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right) \\ &\leq \prod_{p \leq N} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \\ &\leq \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right). \end{aligned}$$

Fazendo N tender a infinito pode-se escrever:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right). \quad (12)$$

Agora, pode-se buscar uma inequação no outro sentido, utilizando, novamente, o Teorema Fundamental da Aritmética.

$$\prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots + \frac{1}{p^{Ms}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Fazendo M tender ao infinito:

$$\prod_{p \leq N} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Fazendo, agora, N tender ao infinito:

$$\prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s). \quad (13)$$

Portanto, a partir das equações (12) e (13) pode-se concluir a fórmula do produto de Euler.

A beleza da fórmula do produto de Euler é que ela relaciona a soma infinita de todos os inversos dos números naturais elevados a uma determinada potência (na esquerda) com um produto também infinito relacionados a todos os primos (do lado direito). A fórmula é considerada como um marco na teoria dos números e foi o ponto inicial de Riemann no seu artigo (RIEMANN, 1859).

2.3 Importantes Relações Oriundas do Produto de Euler

Duas importantes fórmulas podem ser derivadas do produto de Euler: o recíproco de zeta e a sua derivada. Porém, antes vamos definir duas importantes funções no campo da teoria dos números:

Definição 2.4. A função $\mu(n)$ é chamada de Função de Möbius e definida da seguinte forma:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{se } n = p_1 \cdots p_k, \text{ produto de } k \text{ primos distintos} \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Definição 2.5. A função $\Lambda(n)$ é chamada de Função de Von Mangoldt e definida da seguinte forma:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p), & \text{se } n \text{ for primo ou uma potência de primo } n = p^m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Proposição 2.6. O inverso da função Zeta é dado por:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Demonstração. A partir do produto de Euler (Proposição 2.3) pode-se inverter a ex-

pressão:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots$$

Expandido termo a termo o lado direito, percebe-se que dentro de cada parênteses optamos por multiplicar ou o número 1 ou $1/p_i^s$ com outro 1 ou $1/p_j^s$ com $i \neq j$ e assim por diante, ou seja, primos distintos, logo o resultado obtido só pode potências s de números que são produtos de primos distintos, e o sinal é definido pela quantidade de fatores primos, se for par é positivo e negativo, caso contrário. Escreve-se, portanto, a expressão como:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

□

Proposição 2.7. *Vale a seguinte expressão relacionada à derivada de $\zeta(s)$:*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Demonstração. A partir do produto de Euler (Proposição 2.3), aplique o logaritmo natural dos dois lados:

$$\begin{aligned} \ln \zeta(s) &= \ln \left(\prod_p \frac{1}{1 - p_i^{-s}} \right) \\ &= \sum_p \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} \\ &= - \sum_p \ln \left(1 - \frac{1}{p_i^s} \right). \end{aligned}$$

Derivando dos dois lado em relação a s , utilizando a regra da cadeia e lembrando que $(a^x)' = a^x \ln(a)$, obtemos:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_p \frac{(1 - p_i^{-s})'}{(1 - p_i^{-s})} = - \sum_p \frac{(-1)p_i^{-s} \ln(p_i)}{(1 - p_i^{-s})} = - \sum_p \ln(p_i) \frac{1/p_i^s}{(1 - p_i^{-s})}.$$

Expandindo a série geométrica, temos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_p \ln(p_i) \left(\frac{1}{p_i^s} + \frac{1}{p_i^{2s}} + \frac{1}{p_i^{3s}} + \dots \right),$$

que se pode escrever:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{\ln(2)}{2^s} - \frac{\ln(2)}{2^{2s}} - \frac{\ln(2)}{2^{3s}} - \frac{\ln(2)}{2^{4s}} - \dots$$

$$-\frac{\ln(3)}{3^s} - \frac{\ln(3)}{3^{2s}} - \frac{\ln(3)}{3^{3s}} - \frac{\ln(3)}{3^{4s}} - \dots$$

$$-\frac{\ln(5)}{5^s} - \frac{\ln(5)}{5^{2s}} - \frac{\ln(5)}{5^{3s}} - \frac{\ln(5)}{5^{4s}} - \dots$$

Em termos da função de Von Mangoldt (Definição 2.5), segue a seguinte equação:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

□

2.4 Valores especiais de Zeta - Problema da Basileia

A fórmula do produto de Euler foi um grande marco, mas infelizmente não provém diretamente os valores de zeta. O cálculo das séries zeta quando $s > 1$ é normalmente feito numericamente, exceto em alguns casos em que há fórmulas explícitas, como é o caso de $\zeta(2)$:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Esse problema ficou conhecido como problema da Basileia, local de nascimento do matemático suíço Leonhard Euler que demonstrou pela primeira vez a seguinte proposição em 1735 (FILHO, 2014).

Proposição 2.8. *O valor da série zeta em $s = 2$:*

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Essa ideia de demonstração mostrada a seguir foi basicamente a forma como Euler fez, mas conforme veremos a seguir, utilizando um argumento pouco formal ao considerar a função $\sin x/x$ como se fosse um polinômio sem demonstrar que isso poderia ser feito.

Temos que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

A demonstração de Euler utilizou a série de Taylor da função seno:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots \quad (14)$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \dots \quad (15)$$

Utilizando o Teorema Fundamental da Álgebra (COSTA, 2016) pode-se escrever para qualquer polinômio $p(x)$:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$p(x) = a_n x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{x - x_1}{x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_2} \right) \dots \left(\frac{x - x_n}{x_n} \right).$$

Pelas relações de Girard tem-se:

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Assim, substituindo na equação acima pode-se escrever:

$$p(x) = (-1)^n a_0 \left(\frac{x - x_1}{x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_2} \right) \dots \left(\frac{x - x_n}{x_n} \right)$$

$$p(x) = a_0 \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \left(1 - \frac{x}{x_2} \right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n} \right).$$

Observe que a função acima $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ possui zeros da forma $\pm k\pi$, com k inteiro não negativo. Assim, pelo Teorema fundamental da Álgebra e assumindo que tal função se comporta como um polinômio pode-se escrever para $a_0 = 1$:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = \left(1 - \frac{x}{\pi} \right) \left(1 - \frac{x}{-\pi} \right) \left(1 - \frac{x}{2\pi} \right) \left(1 - \frac{x}{-2\pi} \right) \dots$$

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2} \right) \dots$$

Logo, o coeficiente do termo x^2 devem ser iguais na equação acima:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \dots$$

Portanto, pode-se escrever:

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots = \frac{1}{6}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ou escrita na forma de somatório:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Para formalizar o argumento podemos utilizar a seguinte proposição encontrada em (STEIN; SHAKARCHI, 2010).

Proposição 2.9. *Considerando D , o disco unitário centrado na origem, vamos definir*

$$F_n(z) = 1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}.$$

de forma que

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \prod_{n=1}^{+\infty} F_n(z).$$

Vale a seguinte expressão:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Tomando $c_n = 1/\pi^2 n^2$, temos que as hipóteses da Proposição 2.9 são satisfeitas, uma vez que $|z^2| < 1$ e também usamos a convergência de

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2}.$$

Daí pela Proposição 2.9 a convergência de

$$\prod_{n=1}^{+\infty} F_n(z)$$

para $\operatorname{sen} z/z$ é uniforme. Agora, seja

$$f_n(z) = \prod_{i=1}^n F_i(z)$$

de forma que $f_n(z)$ converge uniformemente para $\operatorname{sen} z/z$ em D . Em particular irá convergir uniformemente para todo compacto (fechado e limitado) contido em D . Para dar continuidade vamos precisar de um teorema a seguir cuja a demonstração também pode ser encontrada em (STEIN; SHAKARCHI, 2010).

Teorema 2.1. *Seja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções holomórficas que convergem uni-*

formemente para a função f em todo subconjunto compacto de Ω , então a sequência de derivadas $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ converge uniformemente para f' em todo subconjunto compacto de Ω .

Portanto as hipóteses do Teorema 2.1 são satisfeitas. Em particular, para z fixado em D a sequência $f_n''(z)$ converge pontualmente para $(\operatorname{sen} z/z)''$. Embora a conclusão do Teorema 2.1 seja para a primeira derivada, vale para derivada de qualquer ordem conforme observado em (STEIN; SHAKARCHI, 2010).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n''(0) = \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z} \right)'' \Big|_{z=0} = -1/3.$$

Por outro lado, no coeficiente de z^2 no polinômio $f_n(z)$ aparecem justamente as somas parciais de

$$-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} \cdots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n''(0) = 2\left(-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} \cdots\right).$$

Logo,

$$2\left(-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} \cdots\right) = -1/3.$$

Daí $f_n''(0)$ é 2 vezes essas somas parciais, de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n''(0) = 2\left(-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} \cdots\right) = -\frac{1}{3}$$

e o resultado segue.

3 A FUNÇÃO ZETA NO DOMÍNIO COMPLEXO

3.1 Convergência e Analiticidade de Zeta

Na Definição 2.1 introduzimos a função Zeta. Agora, em vez de considerar s um número real, consideraremos um número complexo da forma $s = \sigma + it$. Essa foi a grande inovação que Riemann trouxe no seu artigo (RIEMANN, 1859) e é o cerne do estudo para se entender a hipótese de Riemann. Assim,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma} n^{it}}.$$

Pode-se escrever $n^{it} = (e^{\ln n})^{it}$, daí:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma} (e^{\ln n})^{it}}.$$

Calculando o módulo do termo $1/n^s$, temos

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \left| \frac{1}{n^{\sigma}} \right| \left| \frac{1}{e^{it \ln n}} \right|.$$

Pela fórmula de Euler que pode ser encontrada no Apêndice B.2, temos

$$|e^{it \ln n}| = |\cos t \ln n + i \operatorname{sen} t \ln n| = 1.$$

Portanto, $|1/n^s| = |1/n^{\sigma}| = 1/n^{\sigma}$. Segue da Proposição 2.2 e do Teste da Comparação que pode ser encontrado no Apêndice A.3 que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge absolutamente sempre que $s = \sigma + it$, com $\sigma > 1$. Uma questão que pode surgir é se a função Zeta é analítica no domínio nesse domínio? Para responder isso pode-se observar o critério de Cauchy-Riemann (NETO, 1993) e se as quatro derivadas parciais são contínuas em $\operatorname{Re}(s) > 1$. Reescrevendo a zeta de uma forma um pouco diferente, temos

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma} (e^{it \ln n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(-t \ln n)}}{n^{\sigma}}.$$

Aplicando a fórmula de Euler do (ver Apêndice B.2), obtém-se:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(-t \ln n)}{n^\sigma} + i \frac{\text{sen}(-t \ln n)}{n^\sigma} \right).$$

Como a função cosseno é par e seno é ímpar, segue que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(t \ln n)}{n^\sigma} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^\sigma}.$$

Chamando $u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(t \ln n)}{n^\sigma}$ e $v = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^\sigma}$ podemos calcular as derivadas parciais a seguir:

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = u_\sigma = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(t \ln n)}{n^\sigma} \ln n,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^\sigma} \ln n,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = v_\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^\sigma} \ln n,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v_t = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(t \ln n)}{n^\sigma} \ln n.$$

Observe que $u_\sigma = v_t$ e $u_t = -v_\sigma$ e todas as quatro derivadas parciais são contínuas e, portanto, satisfazem os critérios de Cauchy (NETO, 1993) e conseqüentemente a função Zeta é analítica em $\sigma > 1$.

3.2 A Série Eta

Na seção anterior foi visto que a série Zeta converge para todo $Re(s) = \sigma > 1$. Nessa seção vamos estender essa convergência, incluindo a região $0 < \sigma < 1$. Para isso, inicialmente defini-se a função Eta:

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$$

Essa série frequentemente é chamada de série Zeta alternada por conta da alternância de sinais dos seus termos.

Proposição 3.1. *A série eta converge para todo $s = \sigma + it$, com $\sigma > 0$.*

Demonstração. Considerando $s = \sigma$ real, temos

$$\eta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma}}.$$

Perceba que a série acima para $\sigma > 0$ atende as três condições do teste da série alternada visto na Proposição A.4, portanto converge. Seja $\eta^*(s)$ a série Eta com os termos agrupados dois a dois, da seguinte forma:

$$\eta^*(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + \cdots.$$

Que pode ser reescrita como

$$\eta^*(s) = \sum_{n \text{ ímpar}} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right).$$

Segue da igualdade

$$\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) = s \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}}$$

que

$$\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| = |s| \left|\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}}\right|.$$

Aplicando desigualdade triangular:

$$\left|\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}}\right| \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{|x^{s+1}|},$$

em que s é um número complexo e pode ser escrito como $s = \sigma + it$, assim $x^{s+1} = x^{(\sigma+1)+it} = x^{(\sigma+1)}x^{it}$. Utilizando $x = e^{\ln x}$ na parcela imaginária com o logaritmo referente ao ramo principal (ver Apêndice B.4): $x^{s+1} = x^{(\sigma+1)}e^{\ln x it} = x^{(\sigma+1)}e^{i(t \ln x)}$. Como temos $|e^{i(t \ln x)}| = |\cos(t \ln x) + i \operatorname{sen}(t \ln x)| = 1$. Assim, conclui-se que

$$|x^{s+1}| = x^{\sigma+1}.$$

Portanto,

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{|x^{s+1}|} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\sigma+1}}.$$

Como $1/x^{\sigma+1} \leq 1/n^{\sigma+1}$ para $n \leq x \leq n+1$, segue da desigualdade ML (ver Apêndice

B.5.1):

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} < \frac{1}{n^{\sigma+1}}(n+1-n) = \frac{1}{n^{\sigma+1}}.$$

Logo, podemos concluir que

$$\left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right| < |s| \frac{1}{n^{\sigma+1}}. \quad (16)$$

Note que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}}$ é exatamente a série zeta e, conforme já visto converge absolutamente para $\sigma + 1 > 1$, ou seja, para $\sigma > 0$. Aplicando o teste da comparação visto na Proposição A.3 e da equação (16) pode-se concluir que $\eta^*(s)$ converge absolutamente quando $\sigma > 0$, e portanto da série original η converge quando $\sigma > 0$. \square

A convergência para $s = \sigma + it$ também pode ser provada usando a teoria de séries de Dirichlet que são séries do tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Em que s e a_n são números complexos e a_n recebe o nome de caráter de Dirichlet. Tais séries foram introduzidas pelo matemático alemão Peter Gustav Dirichlet. Em Apostol (1998) podemos encontrar um importante teorema que afirma que se uma série de Dirichlet é convergente em um ponto específico $s_0 = \sigma_0 + it_0$, então ela é convergente para todo $\sigma > \sigma_0$. Em nosso caso, a série de Dirichlet é tal que $a_n = (-1)^{n-1}$, e como foi mostrado a convergência para $t = 0$ e $\sigma > 0$, portanto a série converge para todo s com $\sigma > 0$. No entanto, a demonstração do teorema mencionado acima acerca da convergência das séries de Dirichlet não é simples. Por este motivo, optamos pela prova da convergência de η apresentada em Sondow (2012).

Vale mencionar que a série η converge absolutamente quando $\sigma > 1$ e condicionalmente quando $0 < \sigma \leq 1$, pois sabemos que o valor absoluto da série η diverge quando $\sigma \leq 1$. A convergência de η quando $0 < \sigma \leq 1$ é uma grande vantagem para a série zeta e será melhor explorada na próxima seção.

3.3 A Relação entre as Séries Eta e Zeta e a Primeira Extensão de Zeta

Escrevendo as séries zeta e eta:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

$$\eta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \dots$$

Subtraindo Eta e Zeta, tem-se

$$\zeta(s) - \eta(s) = \frac{2}{2^s} + \frac{2}{4^s} + \frac{2}{6^s} + \dots = 2^{1-s} \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots \right).$$

Que podemos reescrever como

$$\zeta(s) - \eta(s) = 2^{1-s} \zeta(s).$$

E agora pode-se isolar zeta:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \eta(s). \quad (17)$$

Dessa forma, a equação (17) estabelece uma nova relação entre as funções Eta e Zeta que pode ser usada para obtenção dos valores de Zeta para $0 < \sigma < 1$. Esse tipo de extensão é chamada de continuação analítica. Mais formalmente, uma continuação analítica é definida como: dada uma função f_1 , analítica no domínio D_1 e f_2 analítica no domínio D_2 , tais que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ e $f_1 = f_2$ em $D_1 \cap D_2$, então f_2 é chamada continuação analítica de f_1 em D_2 . Adicionalmente, se a continuação analítica existe, então ele é única em D_2 . É possível verificar a relação entre Zeta e Eta quando s é um número real, conforme Figura 10.

Vamos analisar quando o denominador da equação que relaciona Zeta e Eta é zero, ou seja, quando $1 - 2^{1-s} = 0$. Substituindo $s = \sigma + it$, temos

$$2^{1-\sigma} 2^{-it} = 1,$$

que se pode escrever como

$$2^{1-\sigma} (\cos(t \ln 2) - i \operatorname{sen}(t \ln 2)) = 1.$$

Logo, deve-se ter $2^{1-\sigma} \cos(t \ln 2) = 1$ e $2^{1-\sigma} \operatorname{sen}(t \ln 2) = 0$, cujas soluções são $\sigma = 1$ e $t = n \frac{2\pi}{\ln 2}$, $n \in \mathbb{Z}$ ou reescrita como $s_n = 1 + in \frac{2\pi}{\ln 2}$. Então como é possível definir zeta

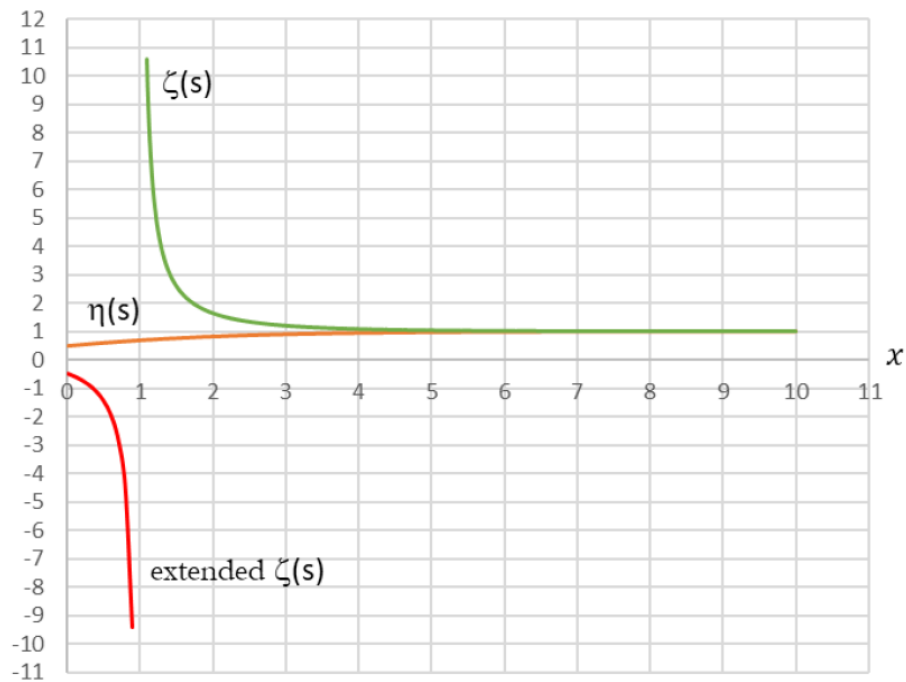


Figura 10 - As séries Zeta e Eta quando $s > 0$ real

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

nesses pontos em que o denominador é zero? O caso em que $n = 0$, ou seja, $s_0 = 1$ tem-se:

$$\eta(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

No Apêndice B.3 podemos encontrar o seguinte resultado: $\eta(1) = \ln 2$, logo zeta não pode ser definida nesse ponto. Para os outros valores de $s_n = 1 + in\frac{2\pi}{\ln 2}$, com $n \neq 0$, foram analisados por E. Landau em 1909, mas somente respondido 40 anos depois por D. V. Widder, que provou que a função Eta vale zero nesses pontos.

Proposição 3.2.

$$\eta(s_n) = 0 \text{ para } s_n = 1 + in\frac{2\pi}{\ln 2}, \text{ com } n \in \mathbb{Z}^*.$$

A demonstração a seguir pode ser conferida em Sondow (2003).

Demonstração. Sejam ζ_{2N} e η_{2N} a soma dos primeiros $2N$ termos das séries Zeta e Eta:

$$\zeta_{2N}(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots + \frac{1}{(2N)^s}$$

$$\eta_{2N}(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \dots - \frac{1}{(2N)^s}$$

Calculando $\eta_{2N} - \zeta_{2N}$:

$$\eta_{2N}(s) - \zeta_{2N}(s) = -2^{1-s} \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s} \right) = -2^{1-s} \zeta_N(s).$$

Em que

$$\zeta_N(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s},$$

temos que

$$\eta_{2N}(s) - \zeta_{2N}(s) = -2^{1-s} \zeta_N(s). \quad (18)$$

Note que

$$\zeta_N(s) = \zeta_{2N}(s) - \sum_{n=N+1}^{2N} n^{-s}.$$

Substituindo em (18), temos

$$\eta_{2N}(s) - \zeta_{2N}(s) = -2^{1-s} \left(\zeta_{2N}(s) - \sum_{n=N+1}^{2N} n^{-s} \right).$$

Isolando o termo eta, encontramos

$$\eta_{2N}(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta_{2N}(s) + 2^{1-s} \sum_{n=N+1}^{2N} n^{-s}. \quad (19)$$

Reescrevemos o termo do somatório acima de uma forma conveniente:

$$\sum_{n=N+1}^{2N} n^{-s} = \sum_{k=1}^N (N+k)^{-s} = \sum_{k=1}^N \left[N \left(1 + \frac{k}{N} \right) \right]^{-s} = N^{-s} \sum_{k=1}^N \left(1 + \frac{k}{N} \right)^{-s}.$$

Finalmente, pode-se escrever:

$$\sum_{n=N+1}^{2N} n^{-s} = N^{1-s} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(1 + \frac{k}{N} \right)^{-s}.$$

Substituindo na equação (19), temos

$$\eta_{2N}(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta_{2N}(s) + 2^{1-s} N^{1-s} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(1 + \frac{k}{N} \right)^{-s} \right] \quad (20)$$

Veremos agora que o termo entre colchetes em (20) é uma soma de Riemann associada à

integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^s} dx.$$

A qual fazendo uma mudança de variável $y = x + 1$, chega-se a

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^s} dx = \int_1^2 \frac{1}{y^s} dy = \begin{cases} \ln y \Big|_1^2 = \ln 2, & \text{se } s = 1, \\ \frac{y^{-s+1}}{-s+1} \Big|_1^2 = \frac{1-2^{1-s}}{s-1}, & \text{se } s \neq 1. \end{cases} \quad (21)$$

A mesma integral pode ser calculada aproximando-a pelas chamadas somas de Riemann da integral $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^s} dx$. Ou seja, dividindo o intervalo $[0, 1]$ em N segmentos de largura $1/N$, portanto o valor de x no final de cada segmento será k/N , em que $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ e o valor da função $(1+x)^{-s}$ será no final de cada segmento $(1+k/N)^{-s}$, como mostrado na Figura 11. $A(N)$ é a soma das áreas dos retângulos vermelhos na Figura 11:

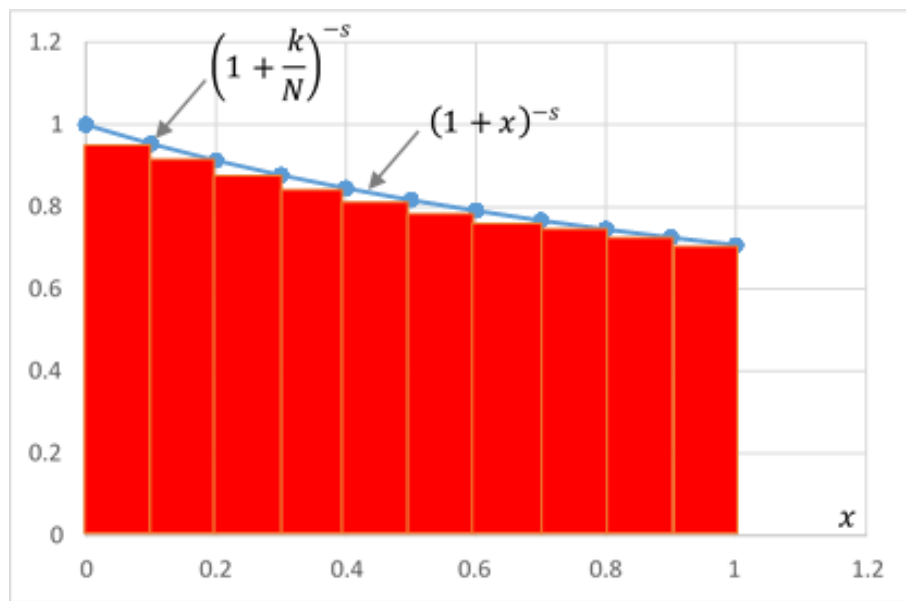


Figura 11 - A função $(1+x)^{-s}$ e aproximação por retângulos.

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

$$A(N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \left(1 + \frac{k}{N}\right)^{-s},$$

que é justamente o último termo da equação (20). Esta soma é uma soma de Riemann

da integral $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^s} dx$. Considere a diferença $d_N(s)$ por

$$d_N(s) = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^s} dx - \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \left(1 + \frac{k}{N}\right)^{-s}.$$

Agora, voltando para equação (20), podemos reescrevê-la como

$$\eta_{2N}(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta_{2N}(s) + 2^{1-s}N^{1-s} \left[\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^s} dx - d_N(s) \right]. \quad (22)$$

Estamos interessados nos valores de $\eta_{2N}(s)$ para $s = s_n = 1 + in\frac{2\pi}{\ln 2}$ com $n \in \mathbb{Z}^*$. Lembrando que s_n satisfaz $1 - 2^{1-s_n} = 0$. Observe que tais valores de s_n são diferentes de 1 e (21) nos diz que o valor da integral em (22) é zero.

$$\eta_{2N}(s_n) = (0)\zeta_{2N}(s_n) + (1)N^{-in\frac{2\pi}{\ln 2}} \left[\frac{0}{s_n - 1} - d_N(s_n) \right].$$

Logo,

$$\eta_{2N}(s_n) = -\frac{d_N(s_n)}{N^{in\frac{2\pi}{\ln 2}}}.$$

Quando N tende ao infinito, o valor de $\eta_{2N}(s_n)$ tende a $\eta(s_n)$ e $d_N(s)$ tende a zero. Enquanto, como $|N^{in\frac{2\pi}{\ln 2}}|$ é limitado por 1, temos que o valor de Eta vale zero quando $s_n = 1 + in\frac{2\pi}{\ln 2}$ para $n \in \mathbb{Z}^*$. \square

Agora que verificamos o valor de Eta nos pontos s_n com exceção para $s = 1$ ($n = 0$), podemos escrever desde que o limite exista

$$\zeta(s_n) = \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}},$$

com ambos numerador e denominador tendendo a zero quando s tende a s_n . Esse é um caso em que podemos utilizar a regra de L'Hospital, daí

$$\zeta(s_n) = \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}} = \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{\eta'(s)}{(1 - 2^{1-s})'} = \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{\eta'(s)}{2^{1-s} \ln 2}.$$

Como temos $2^{1-s_n} = 1$, chegamos em

$$\zeta(s_n) = \frac{\eta'(s_n)}{\ln 2}.$$

Portanto, a Zeta está bem definida para todo $\sigma > 0$, exceto para o ponto $\sigma = 1$ que é

justamente o polo de zeta e o resíduo pode ser calculado (ver Apêndice B.6):

$$Res(\zeta, 1) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s).$$

Substituindo pela relação entre Zeta e Eta vista na equação (17), tem-se

$$Res(\zeta, 1) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s-1}{1-2^{1-s}} \eta(s) = \left[\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s-1}{1-2^{1-s}} \right] \left[\lim_{s \rightarrow 1} \eta(s) \right].$$

Como no primeiro limite temos o numerador e denominador tendendo a zero, pode-se aplicar a regra de L'Hospital:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)}{1-2^{1-s}} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)'}{(1-2^{1-s})'} = \frac{1}{\ln 2},$$

enquanto para o segundo limite temos $\lim_{s \rightarrow 1} \eta(s) = \eta(1)$ (ver Apêndice B.3), temos $\eta(1) = \ln 2$. Logo, concluímos que:

$$Res(\zeta, 1) = 1. \tag{23}$$

4 A EQUAÇÃO FUNCIONAL E A SEGUNDA EXTENSÃO DE ZETA

Bernard Riemann descobriu uma equação funcional que estende a função Zeta a todo plano complexo. Inicialmente, porém, vamos introduzir uma importante função chamada Gama.

4.1 A Função Gama

Vamos começar definindo uma importante função na teoria analítica dos números.

Definição 4.1. *A Função gama é definida como:*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad (24)$$

em que $s = \sigma + it$ é um número complexo.

Note que o lado direito da equação (24) é uma integral de uma função complexa de uma variável real. Vamos calcular o valor de $\Gamma(s + 1)$, temos que

$$\Gamma(s + 1) = \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx.$$

Aplicando integral por partes para $v = -e^{-x}$ ($dv = e^{-x}$) e $u = x^s$ ($du = sx^{s-1}$), obtém-se

$$\Gamma(s + 1) = (-x^s e^{-x}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s)x^{s-1} e^{-x} dx.$$

É possível mostrar que o $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^s}{e^x} = 0$, aplicando a regra de L'Hospital várias vezes até o numerador virar uma constante para o caso em s é um número natural⁹, portanto podemos escrever:

$$\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s). \quad (25)$$

A equação acima é conhecida como equação funcional de Gama. Calculando $\Gamma(1)$, tem-se

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = (-e^{-x}) \Big|_0^{\infty} = 1.$$

⁹ para o caso em que s não é natural pode-se argumentar que podemos limitar x^s por x^n com n natural e aplicar a regra de L'Hospital.

Utilizando a equação (25) pode-se perceber por indução que $\Gamma(n) = (n - 1)!$, com $n \in \mathbb{N}$. De fato, temos

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 = (2 - 1)!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 = (3 - 1)!$$

\vdots

Assumindo que $\Gamma(n) = (n - 1)!$ (hipótese de indução), pela equação funcional: $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$, concluímos que $\Gamma(n + 1) = n(n - 1)! = n!$. Assim, quando $s = n$ é um inteiro positivo a função Gama se comporta como o fatorial.

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \tag{26}$$

De fato, a função Gama pode ser vista como uma extensão da função fatorial para todo o restante no plano complexo. Vamos avaliar se há algum ponto em que a função Gama não está definida, utilizando que $(n - 1)! = n!/n$, ou seja, $\Gamma(n) = \Gamma(n + 1)/n$ portanto $1! = 2!/2$ e $0! = 1!/1$ e o próximo termo teríamos que dividir por zero, conseqüentemente os fatoriais, ou melhor, a função Gama não está bem definida para $n = 0, -1, -2, -3, \dots$

4.2 A Relação Entre as Funções Gama e Zeta

Proposição 4.2. *As funções Gama e Zeta guardam a seguinte relação:*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du, \text{ em que } s = \sigma + it, \text{ com } \sigma = \text{Re}(s) > 1. \tag{27}$$

Demonstração. Por (24) temos que

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = nu$, em que n é um número natural constante e u uma variável real, temos portanto $dx = ndu$ e

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty (nu)^{s-1} e^{-nu} ndu.$$

A ideia dessa mudança de variável é para aparecerem os números naturais de uma forma

que lembre a função Zeta. Simplificando a equação, temos

$$\frac{1}{n^s} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-nu} du. \quad (28)$$

Agora, somando em todos os números naturais encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-nu} du,$$

o qual pode-se escrever:

$$\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} u^{s-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu} \right) du.$$

Quando $\sigma > 1$, o somatório do lado esquerdo é justamente a função Zeta, enquanto o somatório do lado direito trata-se de uma série geométrica infinita de razão e^{-u} e primeiro termo e^{-u} que converge para

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu} = \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} = \frac{1}{e^u - 1}.$$

Substituindo, chegamos na expressão (27):

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du \quad (\sigma > 1).$$

□

É possível definir a a função Gama baseada na equação acima

$$\Gamma(s) = \frac{1}{\zeta(s)} \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du \quad (\sigma > 1)$$

e encontrar a definição de Gama mostrada em (24).

4.3 A Relação Entre as Funções Gama e Eta

A próxima proposição estabelece uma relação entre as funções Gama e Eta.

Proposição 4.3. *As funções Gama e Eta guardam a seguinte relação:*

$$\eta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u + 1} du \quad (\sigma > 0). \quad (29)$$

Sua demonstração é bem similar à realizada na proposição anterior, mas antes de aplicarmos o somatório deve-se multiplicar a expressão $(-1)^{n-1}$.

Demonstração. Partindo da equação (28), temos

$$\frac{1}{n^s} \Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu} du.$$

Multiplicando por $(-1)^{n-1}$ chegamos a

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n^s} \Gamma(s) = (-1)^{n-1} \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu} du.$$

Agora, somando em todos os números naturais, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu} du,$$

o qual pode-se escrever:

$$\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \int_0^\infty u^{s-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-nu} \right) du.$$

Quando $\sigma > 0$, o somatório do lado esquerdo é justamente a função Eta, enquanto o somatório do lado direito trata-se de uma progressão geométrica infinita de razão $-e^{-u}$ e primeiro termo e^{-u} que converge para:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-nu} = \frac{e^{-u}}{1 + e^{-u}} = \frac{1}{e^u + 1}.$$

Substituindo, chegamos na equação (29):

$$\eta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u + 1} du \quad (\sigma > 0).$$

□

4.4 A Equação Funcional de Zeta

A equação funcional de Zeta pode ser obtida por diversos métodos (TITCHMARSH et al., 1986). Aqui, será explicada a forma similar à original feita pelo próprio Riemann. Para obter a equação funcional, vamos precisar de uma proposição que já era conhecida na época de Riemann, cuja a prova pode ser consultada no Apêndice D. Seja $\phi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}$.

Proposição 4.4. $\phi(u)$ tem uma equação funcional que a relaciona com $\phi(1/u)$:

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\phi(1/u).$$

O método começa estabelecendo uma relação entre Gama e Zeta, para isso vamos analisar o valor Gama em $s/2$ a partir da Definição 4.1:

$$\Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-x} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = \pi n^2 u$, em que n é um número natural constante, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(s/2) &= \int_0^{\infty} (\pi n^2 u)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} \pi n^2 du \\ &= \int_0^{\infty} \pi^{s/2} n^s u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du. \end{aligned}$$

O termo $\pi^{s/2} n^s$ é constante na integral, assim

$$\frac{1}{n^s} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du.$$

Tomando a soma em todos os números naturais, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du,$$

que podemos rescrever como

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} du.$$

O somatório do lado esquerdo é justamente a função $\zeta(s)$ quando $\sigma > 1$ e definindo $\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}$, temos

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du. \quad (30)$$

Por um momento, vamos analisar o somatório $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}$:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} &= \sum_{-\infty}^{n=-1} e^{-\pi n^2 u} + [e^{-\pi n^2 u}]_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} + 1. \end{aligned}$$

Lembrando que $\phi(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}$, temos a relação

$$\phi(u) = 2\psi(u) + 1. \quad (31)$$

Agora, vamos precisar da Proposição 4.4 para dar continuidade a demonstração da equação funcional de zeta. Utilizando a equação (31) na Proposição 4.4, obtemos

$$2\psi(u) + 1 = \frac{1}{\sqrt{u}}(2\psi(1/u) + 1).$$

Simplificando para isolar o termo $\psi(u)$, temos:

$$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\psi(1/u) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2}. \quad (32)$$

Voltando para equação (30):

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)du.$$

Dividindo o intervalo integral em duas parcelas, temos

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)du + \int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)du.$$

Utilizando a relação encontrada na equação (32) na primeira integral:

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \left[\frac{1}{\sqrt{u}}\psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2} \right] du + \int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)du.$$

Expandindo o termo entre colchetes, obtemos

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \\ & \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \frac{1}{\sqrt{u}}\psi\left(\frac{1}{u}\right) du + \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \frac{1}{2\sqrt{u}} du - \int_0^1 \frac{1}{2} u^{\frac{s}{2}-1} du + \int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)du. \end{aligned}$$

Simplificando a expressão:

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{u}\right)du + \int_0^1 \frac{1}{2}u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}du - \int_0^1 \frac{1}{2}u^{\frac{s}{2}-1}du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)du.$$

A segunda e terceira integral podem ser calculadas da seguinte forma

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{u}\right)du + \left[\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{s}{2}-1/2}}{\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}\right)}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{s}{2}}}{\left(\frac{s}{2}\right)}\right]_0^1 + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)du.$$

Que pode ser escrito como:

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{u}\right)du + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)du.$$

Agregando o segundo e terceiro termos do lado direito, temos

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{u}\right)du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)du. \quad (33)$$

Vamos examinar um pouco o segundo termo da equação (33). Fazendo uma mudança de variável seja $v = 1/u$, então podemos escrever $u = 1/v$ e $du = -v^{-2}dv$. Como quando u tende a zero com valores positivos, temos v tendendo ao infinito e quando u tende a 1, v tende também para 1, temos

$$\int_0^1 u^{s/2-3/2}\psi\left(\frac{1}{u}\right)du = \int_\infty^1 (v^{-1})^{s/2-3/2}\psi(v)(-v^{-2}dv).$$

O qual se pode simplificar:

$$\int_0^1 u^{s/2-3/2}\psi\left(\frac{1}{u}\right)du = \int_1^\infty v^{-s/2-1/2}\psi(v)dv.$$

Podemos escrever ¹⁰:

$$\int_0^1 u^{s/2-3/2}\psi\left(\frac{1}{u}\right)du = \int_1^\infty u^{-s/2-1/2}\psi(u)du.$$

¹⁰ Em cálculo o valor da integral independe da variável, podemos dizer obviamente que $\int_a^b x^2 dx = \int_a^b y^2 dy$ quando x e y são variáveis independentes. No entanto, essa igualdade continua valendo quando temos variáveis relacionadas.

Reescrevendo a equação (33) e substituindo o termo da expressão acima, obtemos

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty u^{-s/2-1/2}\psi(u)du + \int_1^\infty u^{s/2-1}\psi(u)du.$$

Agregando os termos das integrais do lado direito, temos

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1})\psi(u)du.$$

O lado direito da equação acima possui uma característica bem interessante: se trocarmos s por $(1-s)$ ela continua a mesma, pois $s(s-1) = (1-s)(1-s-1)$ e os expoentes de u nas integrais trocam de lugar:

$$\frac{-(1-s)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{s}{2} - 1 \text{ e } \frac{1-s}{2} - 1 = \frac{-s}{2} - \frac{1}{2}.$$

Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) &= \\ \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1})\psi(u)du &= \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s). \end{aligned}$$

Logo,

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \quad (34)$$

A equação (34) é conhecida como a equação funcional de Zeta obtida por Riemann. Um importante fato que esta equação funcional traz é que ela estende a definição de zeta para o restante da região do plano complexo ($\sigma \leq 0$). Para esclarecer o que isso significa exatamente considere um ponto $s_0 = \sigma_0 + it_0$, em que $\sigma_0 \leq 0$, ou seja, s_0 está no semi-plano complexo em que s não estava definida, mas como $(1-s_0) = (1-\sigma_0) - it_0$, a parte real $(1-\sigma_0)$ é positiva e está no semi-plano complexo positivo no qual Zeta está definida nesses pontos e pode ser calculada. Assim, com esse valor e a equação funcional (34) estamos aptos a calcular o valor de $\zeta(s_0)$. Por exemplo, vamos calcular o valor de $\zeta(-1)$:

$$\pi^{-\frac{-1}{2}}\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)\zeta(-1) = \pi^{-\frac{(1-(-1))}{2}}\Gamma\left(\frac{1-(-1)}{2}\right)\zeta(1-(-1)),$$

ou seja,

$$\zeta(-1) = \frac{\pi^{-1}\Gamma(1)\zeta(2)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(-\frac{1}{2})}.$$

Temos $\Gamma(1) = 0! = 1$ e pela equação funcional de Gama (25) $\Gamma(-1/2) = -2\Gamma(1/2)$. Pela

fórmula de reflexão de Euler que está demonstrada no Apêndice E.2 pode-se calcular que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e assim, $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$. Também foi visto que $\zeta(2) = \pi^2/6$ na Seção (2.4). Finalmente, substituindo os termos, temos

$$\zeta(-1) = \frac{\pi^{-1}(1)\pi^2/6}{\pi^{\frac{1}{2}}(-2\sqrt{\pi})} = -\frac{1}{12}. \quad (35)$$

Um fato bastante curioso sobre o resultado acima acontece ao fazermos um exercício de tentar analisar pela definição original de Zeta definida apenas para o semi plano complexo a direita do 1 ($Re(s) > 1$) nesse ponto -1:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots .$$

Daí temos

$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{4^{-1}} + \dots$$

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots .$$

Logo, chega-se no seguinte resultado, utilizando a equação (35):

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

Esse resultado claramente errado segundo Cauchy, pois usamos a definição original de Zeta para um ponto em que não estava definida. No entanto, esse resultado é famoso e inclusive apareceu em diversas notas do brilhante matemático indiano Ramanujan sobre a estranha igualdade acima, mesmo sem ele ter conhecimento sobre a função Zeta.

4.5 Forma Equivalente a Equação Funcional

Conforme visto a equação (34) é justamente equação funcional de Zeta obtida por Riemann. No entanto, existe uma forma mais popular da equação funcional:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \quad (36)$$

As duas equações (34) e (36) são equivalentes. Para mostrar a equivalência precisamos de outras duas equações funcionais. A primeira delas é a fórmula de reflexão de Euler:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi s}. \quad (37)$$

A segunda é a fórmula de duplicação de Legendre:

$$\Gamma(s + 1/2) = 2^{1-2s} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2s)}{\Gamma(s)}. \quad (38)$$

A demonstração das duas fórmulas acima são apresentadas no Apêndice E. Começando com a equação (34), temos

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Isolando o $\zeta(s)$, obtemos

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}}{\pi^{-\frac{s}{2}}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s). \quad (39)$$

Utilizando a fórmula de reflexão de Euler (37) em $s/2$, temos

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\text{sen}\left(\pi \frac{s}{2}\right)}.$$

Isolando $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, tem-se

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)} \frac{\pi}{\text{sen}\left(\pi \frac{s}{2}\right)}.$$

Substituindo na equação funcional com o termo $\zeta(s)$, obtemos

$$\zeta(s) = \frac{1}{\frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)} \frac{\pi}{\text{sen}\left(\pi \frac{s}{2}\right)}} \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}}}{\pi^{-\frac{s}{2}}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Simplificando a expressão, temos

$$\zeta(s) = \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \pi^{s-1} \text{sen}\left(\pi \frac{s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Agora, vamos utilizar a fórmula de duplicação de Legendre vista na equação (38) em $(-s/2 + 1/2)$:

$$\Gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2\left(-\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right)} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(2\left(-\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Simplificando, obtém-se:

$$\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 2^s \Gamma(1-s).$$

Finalmente, substituindo a expressão acima em (39) encontramos:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

4.6 O Cálculo de $\zeta(0)$

Para calcular o valor de zeta em $s = 0$ é suficiente conhecer o valor no ponto $\zeta(1-0) = \zeta(1)$, mas vimos que 1 é um polo e Zeta não está definida nesse ponto. Para contornar esse problema, vamos utilizar um resultado obtido na equação (23):

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta(s) = 1.$$

Multiplicando a equação funcional de Zeta na equação (36) por $(1-s)$, temos

$$(1-s) \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) (1-s) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

A partir da equação funcional de Gama em (25) em $(1-s)$ sabemos que: $\Gamma(2-s) = (1-s)\Gamma(1-s)$. Substituindo na última equação e tomando o limite dos dois lados quando s tende a 1, temos:

$$\lim_{s \rightarrow 1} (1-s) \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1} 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(2-s) \zeta(1-s). \quad (40)$$

Sabemos que do resíduo de Zeta no ponto 1 vale

$$\lim_{s \rightarrow 1} (1-s) \zeta(s) = -(\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta(s)) = -1.$$

Assim, substituindo em (40), tem-se

$$-1 = 2^1 \pi^0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Gamma(2-1) \zeta(1-1).$$

Como $\Gamma(1) = 0! = 1$, conclui-se que

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}. \quad (41)$$

Assim, a função Zeta está definida em todo plano complexo, exceto para o polo em 1.

4.7 A Função $\xi(s)$

Após a obtenção da equação funcional em (34):

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

Riemann considerou o lado esquerdo e multiplicou por $s(s-1)/2$, definindo a nova função

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \quad s \in \mathbb{C}. \quad (42)$$

Observe que $s(s-1)/2$ não muda de valor ao alterarmos s por $(1-s)$, bem como sabemos da equação (34) que $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ também não varia. Portanto, podemos concluir que:

$$\xi(s) = \xi(1-s). \quad (43)$$

A equação acima é conhecida como a equação funcional de $\xi(s)$ e frequentemente também considerada como a equação funcional de zeta. Nesse domínio o valor de $\xi(s)$ pode ser encontrado a partir da equação (42) e todos os termos desta estão definidos, exceto quando $\sigma = 1$. No entanto, observe que o fator $(s-1)$ elimina o polo, pois temos que $\lim_{s \rightarrow 1}(s-1)\zeta(s) = 1$. Assim, fazendo $s = 1$ concluímos que

$$\xi(1) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

O valor de $\Gamma(1/2)$ pode ser encontrado pela fórmula de reflexão de Euler em (37) para $s = 1/2$: $\Gamma(1/2)^2 = \pi/(\sin(\pi/2))$, assim $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, logo $\xi(1) = 1/2$. Com isso $\xi(s)$ se torna bem definida em todo o plano complexo. A razão para definir a nova função $\xi(s)$ ficará mais evidente no Capítulo 6.

5 AS RAÍZES DA FUNÇÃO ZETA E A HIPÓTESE DE RIEMANN

A função Zeta está definida em todo plano complexo com exceção do polo em 1. Para a busca de zeros é conveniente dividir o plano complexo em três regiões:

1. Primeira região: $\sigma > 1$.
2. Segunda região: $\sigma < 0$.
3. Terceira região: $0 \leq \sigma \leq 1$.

As próximas seções serão dedicadas a análise de zeros nessas regiões.

5.1 A Região $\sigma > 1$

Relembrando a fórmula de Euler na Proposição 2.3:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Essa equação foi demonstrada na Proposição 2.3 para $s > 1$ real, mas de fato a mesma continua válida para s complexo desde que a série zeta convirja ($\sigma > 1$). A partir dessa fórmula, pode-se perceber que quando $\sigma > 1$, zeta é um produto infinito no qual nenhum fator é igual a zero. Além disso, como mostraremos a seguir, para valores grande de p_i , o fator se aproxima de 1. Vamos analisar o comportamento de $1/p_i^s$, em que $s = \sigma + it$:

$$\frac{1}{p_i^s} = \frac{1}{p_i^{\sigma+it}} = \frac{p_i^{-it}}{p_i^{\sigma}} = \frac{e^{-it \ln p_i}}{p_i^{\sigma}} = \frac{\cos(t \ln p_i)}{p_i^{\sigma}} - i \frac{\text{sen}(t \ln p_i)}{p_i^{\sigma}}.$$

As funções seno e cosseno são limitadas, portanto quando p_i tende ao infinito, $1/p_i^s$ tende a zero e conseqüentemente $\frac{1}{1-p_i^{-s}}$ tende a 1. Assim, o produtório $\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ não pode ir a zero, conseqüentemente não há zero na primeira região $\sigma > 1$.

5.2 A Região $\sigma < 0$

O valor da função Zeta nessa região deve ser determinado pela equação funcional de Zeta (36):

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

A partir da equação acima que para $\zeta(s)$ ser zero, algum dos termos do lado direito deve ser zero. Observe que o termo $\zeta(1-s)$ não pode ser zero quando $\sigma < 0$, pois nesse caso o argumento $(1-s)$ tem a parte real $(1-\sigma) > 1$, portanto está na primeira região. Como visto na seção anterior, a função Zeta não se anula (não admite zeros) nesta região. Sabemos também que $\Gamma(1-s)$, 2^s e π^{s-1} não se anulam. Falta o termo $\text{sen}(\frac{\pi s}{2})$ que só pode ser zero nessa região quando s é um inteiro negativo par. Portanto, temos $\zeta(2k) = 0$ quando $k = -1, -2, \dots$. Esses são chamados os zeros triviais de zeta, pois são relativamente fáceis de encontrar. Perceba que o termo $\text{sen}(\frac{\pi s}{2})$ também é zero quando s é um inteiro positivo par, mas nesse caso observe que apareceria a função Gama em valores negativos inteiros nos quais esta não está definida.

5.3 A Região $0 \leq \sigma \leq 1$ e os Zeros não triviais

A terceira e última região de interesse é quando $0 \leq \sigma \leq 1$ e esta recebe um nome especial: **faixa crítica**. O próprio Riemann calculou os primeiros quatro zeros nessa região nessa região e verificou que todos possuíam a parte real igual a $1/2$. Atualmente, sabe-se que os primeiros 10 trilhões de zeros também possuem todos a parte real igual a $1/2$. A hipótese de Riemann versa exatamente sobre isso: todos os zeros não triviais de ζ estão na **linha crítica** $\sigma = 1/2$. Vimos na equação (17) uma relação entre Zeta e Eta justamente na região $0 < \sigma \leq 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \eta(s).$$

Em que eta foi definida como:

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots.$$

Escrevendo $s = \sigma + it$, temos $n^{-s} = n^{-\sigma} e^{-it \ln n} = n^{-\sigma} (\cos(t \ln n) - i \text{sen}(t \ln n))$, portanto

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(t \ln n)}{n^{\sigma}} - i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^{\sigma}}.$$

Reescrevendo o termo $1/(1-2^{1-s})$, temos

$$\frac{1}{1-2^{1-s}} = \frac{2^s}{2^s - 2} = \frac{2^{\sigma+it}}{2^{\sigma+it} - 2},$$

que pode ser escrito como

$$\frac{1}{1 - 2^{1-s}} = \frac{2^\sigma \cos(t \ln 2) + i2^\sigma \text{sen}(t \ln 2)}{(2^\sigma \cos(t \ln 2) - 2) + i2^\sigma \text{sen}(t \ln 2)},$$

ou ainda multiplicando o lado direito em cima e embaixo pelo conjugado do denominador:

$$\frac{1}{1 - 2^{1-s}} = \frac{[2^\sigma \cos(t \ln 2) + i2^\sigma \text{sen}(t \ln 2)][2^\sigma \cos(t \ln 2) - 2 - i2^\sigma \text{sen}(t \ln 2)]}{[2^\sigma \cos(t \ln 2) - 2 + i2^\sigma \text{sen}(t \ln 2)][2^\sigma \cos(t \ln 2) - 2 - i2^\sigma \text{sen}(t \ln 2)]}.$$

Expandindo, simplificando e separando a parte real e imaginária, temos que

$$\frac{1}{1 - 2^{1-s}} = \frac{2^{2\sigma} - 2^{\sigma+1} \cos(t \ln 2)}{4 - 4 \cdot 2^\sigma \cos(t \ln 2) + 2^{2\sigma}} - i \frac{2^{\sigma+1} \text{sen}(t \ln 2)}{4 - 4 \cdot \cos(t \ln 2) + 2^{2\sigma}}.$$

Substituindo na expressão que relaciona Zeta e Eta:

$$\zeta(s) = \left[\frac{2^{2\sigma} - 2^{\sigma+1} \cos(t \ln 2)}{4 - 4 \cdot 2^\sigma \cos(t \ln 2) + 2^{2\sigma}} - i \frac{2^{\sigma+1} \text{sen}(t \ln 2)}{4 - 4 \cdot \cos(t \ln 2) + 2^{2\sigma}} \right] \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(t \ln n)}{n^\sigma} - i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^\sigma} \right].$$

Multiplicando os fatores podemos encontrar a parte real e imaginária de zeta:

$$\text{Re}(\zeta(s)) = \left[\frac{2^{2\sigma} - 2^{\sigma+1} \cos(t \ln 2)}{4 - 4 \cdot 2^\sigma \cos(t \ln 2) + 2^{2\sigma}} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(t \ln n)}{n^\sigma} \right] - \left[\frac{2^{\sigma+1} \text{sen}(t \ln 2)}{4 - 4 \cdot \cos(t \ln 2) + 2^{2\sigma}} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^\sigma} \right]$$

e

$$\text{Im}(\zeta(s)) = \left[\frac{2^{\sigma+1} \text{sen}(t \ln 2)}{4 - 4 \cdot \cos(t \ln 2) + 2^{2\sigma}} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(t \ln n)}{n^\sigma} \right] - \left[\frac{2^{2\sigma} - 2^{\sigma+1} \cos(t \ln 2)}{4 - 4 \cdot 2^\sigma \cos(t \ln 2) + 2^{2\sigma}} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^\sigma} \right].$$

E para a função Zeta ser zero, deve-se ter a parte real e imaginária valendo zero:

$$\text{Re}(\zeta(s)) = 0 \text{ e } \text{Im}(\zeta(s)) = 0.$$

Portanto, a hipótese de Riemann resume-se em encontrar σ e t de forma que as equações acima sejam satisfeitas. Obviamente, as equações são grandes e não parecem simples, mas de certa forma é uma forma alternativa e de relativa fácil compreensão. A hipótese, portanto, diz que para a solução das equações acima deve-se ter $\sigma = 1/2$. A Figura 12 mostra os primeiros cinco zeros obtida das duas equações acima.

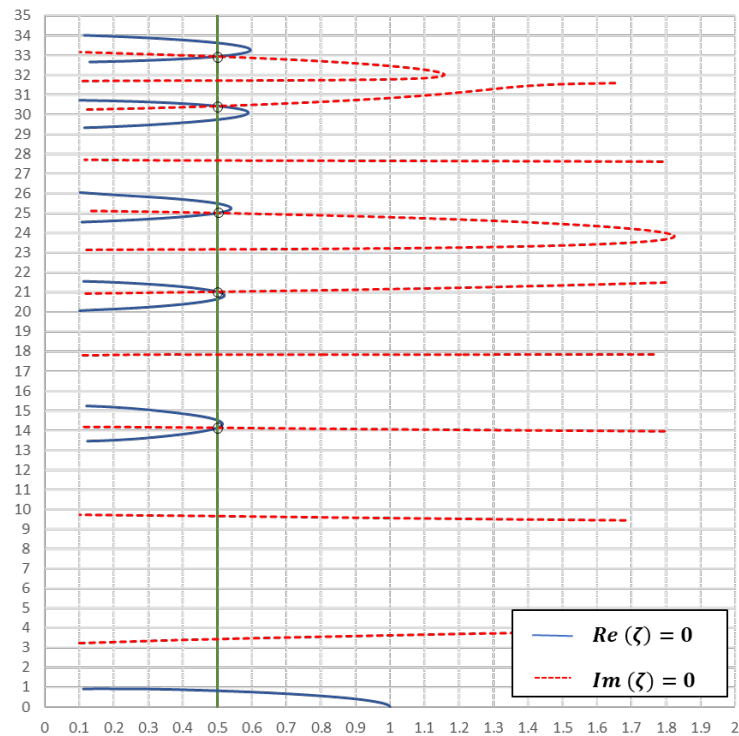


Figura 12 - Primeiros zeros de $\zeta(s)$ com eixos σ x t com $s = \sigma + it$.

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

No entanto, em vez de seguir o caminho descrito, pode-se verificar os zeros de zeta a partir da relação entre Zeta e Eta:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \eta(s).$$

Os zeros de Eta na região $\sigma > 0$ inclui todos os zeros de Zeta na mesma região, portanto a busca por zeros de Zeta na faixa crítica pode ser feita buscando os zeros de Eta:

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(t \ln n)}{n^{\sigma}} - i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^{\sigma}}.$$

Que será zero quando a parte real e imaginária forem zero:

$$\text{Re}(\eta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(t \ln n)}{n^{\sigma}} = 0$$

e

$$\text{Im}(\eta(s)) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^{\sigma}} = 0.$$

A Figura 13 mostra a coincidência do primeiro zero de Eta e Zeta com a reta $\sigma = 1/2$. Vimos na Proposição 3.2 que a Eta possui zeros quando $1 - 2^{1-s} = 0$ e são iguais a

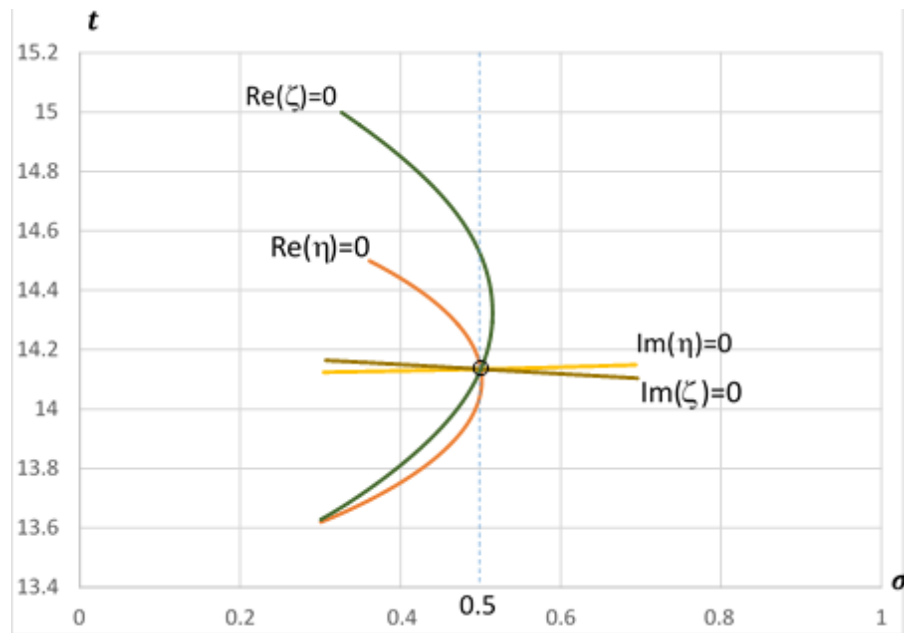


Figura 13 - Coincidência do Primeiro zero de $\zeta(s)$ e $\eta(s)$.

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

$s_n = 1 + in \frac{2\pi}{\ln 2}$ (na linha $\sigma = 1$). No entanto, não estamos interessados nestes, pois o denominador de Zeta nesses pontos é zero e o limite de Zeta nesses pontos vistos também é igual a $\zeta(s_n) = \frac{\eta'(s_n)}{\ln 2}$, exceto quando $n = 0$. Agora, pode-se resumir ainda mais a hipótese de Riemann: as equações a seguir para $0 < \sigma < 1$ apenas são satisfeitas quando $\sigma = 1/2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(t \ln n)}{n^\sigma} = 0$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sen}(t \ln n)}{n^\sigma} = 0.$$

Observe que as equações acima são de fato $Re(\eta(s))$ e $Im(\eta(s))$ multiplicadas por (-1) e isto não causa qualquer prejuízo numa igualdade igual a zero. Note também que foi excluída da terceira região os pontos em que $\sigma = 1$, veremos mais a frente que nenhum desses pontos são zeros de Zeta. Além da reta $\sigma = 0$, que não são zeros por conta da simetria da função Zeta em relação a reta $\sigma = 1/2$. Assim, se houvesse zero em $\sigma = 0$ deveria ter em $\sigma = 1$, que não é o caso. Finalmente, observe a simplicidade das equações que intrigam matemáticos por mais de 160 anos.

5.4 Análise dos Zeros Comuns das Funções Eta e Zeta

Inicialmente, vamos analisar a parte real de eta (uma observação semelhante se aplica também a parte imaginária). A parte real de eta é:

$$\operatorname{Re}(\eta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(t \ln n)}{n^{\sigma}} = 0.$$

Seja $A(u)$ definida como

$$A(u) = \frac{\cos(t \ln n)}{u^{\sigma}} = 0,$$

que é uma função cosseno, portanto tem um comportamento de oscilação cujo o período pode ser calculado por:

$$\cos(t \ln(u + T)) = \cos(t \ln u)$$

$$t \ln(u + T) = t \ln u + 2\pi$$

$$\ln \frac{u + T}{u} = \frac{2\pi}{t}$$

$$T = (e^{\frac{2\pi}{t}} - 1)u$$

5.5 A Simetria dos Zeros

Se $(\sigma^* + it^*)$ é um zero não-trivial de Zeta, então seu conjugado $(\sigma^* - it^*)$ é também um zero, pois:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(-t^* \ln n)}{n^{\sigma^*}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(t^* \ln n)}{n^{\sigma^*}} = 0$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(-t^* \ln n)}{n^{\sigma^*}} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(t^* \ln n)}{n^{\sigma^*}} = 0.$$

Além disso, pela equação funcional (36)

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s),$$

se $(\sigma^* + it^*)$ é um zero de Zeta, então $1 - (\sigma^* + it^*) = (1 - \sigma^*) - it^*$ é também um zero. Concluimos, portanto, que se $(\sigma^* + it^*)$ é um zero de Zeta, então $(\sigma^* - it^*)$, $(1 - \sigma^*) - it^*$ e $(1 - \sigma^*) + it^*$ são também zeros de Zeta que podem ser visualizados na Figura (14).

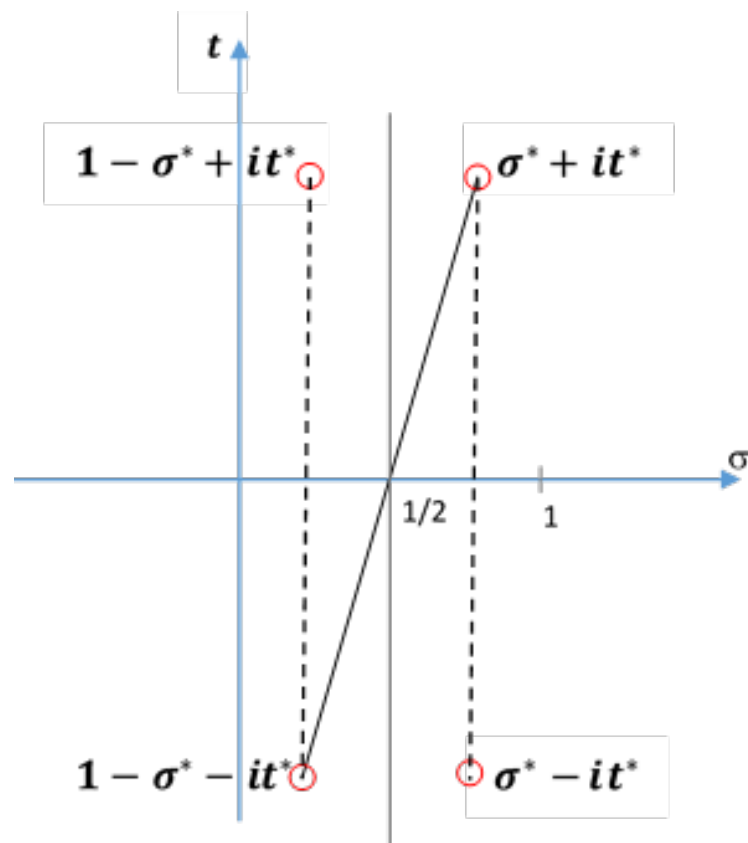


Figura 14 - Simetria dos zeros não triviais.

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

5.6 As raízes da Função $\xi(s)$

Definimos anteriormente na equação (42):

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \quad (44)$$

e encontramos a equação funcional:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Esta equação indica uma simetria em relação a reta $\sigma = 1/2$. Na região $\sigma \geq 1/2$ o valor de ξ é determinado pela equação (44) que indica que ξ só pode ser zero quando ζ for zero (lembre-se que encontramos $\xi(1) = 1/2$ por conta do polo de Zeta em 1), e portanto os zeros não triviais de Zeta, normalmente designados por ρ , são os zeros de ξ . A importância dos zeros de ξ ficará mais evidente no próximo capítulo.

6 A FUNÇÃO ZETA E A FUNÇÃO DE CONTAGEM DOS NÚMEROS PRIMOS

A hipótese de Riemann conforme vimos estabelece uma investigação sobre os zeros não triviais de uma função complexa. Isso por si não desperta tanta curiosidade e não explica o porquê do problema ser tão importante e famoso. Certamente, a conexão entre a hipótese de Riemann e seus zeros não triviais com a teoria dos números, especialmente sobre a distribuição dos números primos ao longo dos números naturais é onde reside a maior parte da relevância desse famoso problema.

6.1 O Artigo de Riemann e a Introdução da Função $J(x)$

Riemann apresentou seu artigo em 1859 (RIEMANN, 1859) e foi o primeiro e único artigo de Riemann sobre teoria dos números. É considerado revolucionário por estabelecer uma ponte entre dois ramos da matemática bem diferentes: teoria dos números e análise complexa. Riemann de forma brilhante mostrou intuitivamente uma fórmula explícita descrevendo a distribuição dos números primos e relacionando-a com os zeros da função Zeta.

No entanto, inicialmente, Riemann precisou fazer um pequeno ajuste na definição da função de contagem de primos $\pi(x)$ para adequar às definições de função. O ajuste consiste em fazer o $\pi(x)$ ser acrescido de meio quando x é um número primo e somente adicionar mais meio após x passar desse primo. Por exemplo, $\pi(x)$ é igual a zero até atingir o 2, então $\pi(2) = 1/2$ e logo depois do 2 fica com valor 1, até antes do 3, então $\pi(3) = 1 + 1/2$ e depois do 3 torna-se 2 até encontrar o próximo primo.

Riemann não conseguiu estabelecer uma relação direta entre $\pi(x)$ e Zeta. Para isso Riemann utilizou uma outra função similar a $\pi(x)$, mas com a seguinte adaptação: o valor da nova função $J(x)$ se altera quando ela passa por primos ou potências de primos. Quando a função $J(x)$ passa por uma potência de primo $x = p^n$ soma-se o valor $1/n$ da mesma forma que na supracitada função $\pi(x)$. Inicialmente no ponto em que $x = p^n$ soma-se metade do valor $1/n$, assim soma-se $1/2n$ e depois desse ponto soma-se a outra metade. Por exemplo, $J(x)$ começa com o valor zero até encontrar o $x = 2^1$, nesse ponto $J(2) = 1/2$ depois do 2 até antes do 3 o valor torna-se 1, em $J(3) = 1 + 1/2$, até antes do valor 4. Em $x = 4 = 2^2$, o valor fica 2, $J(4) = 2 + 1/4$, depois do 4 o valor fica em $2 + 1/2$ e assim por diante.

Encontraremos uma relação entre as funções $\pi(x)$ e $J(x)$. Observe que o número de primos menores que $x^{1/n}$ é igual ao número de potências de primos p^n menores que x .

Assim, podemos escrever:

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \frac{1}{4}\pi(x^{\frac{1}{4}}) + \dots$$

$$J(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \pi(x^{\frac{1}{m}}), \quad (45)$$

em que $\pi(x)$ pode ser recuperado a partir da equação acima pela fórmula de inversão de Möbius que veremos a seguir.

6.2 A fórmula da Inversão de Möbius

A função $\mu(n)$ de Möbius da Definição (2.4):

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{se } n = p_1 \dots p_k, \text{ produto de } k \text{ primos distintos,} \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Foi introduzida em 1832 pelo matemático alemão August Ferdinand Möbius. Ela é basicamente um função que é igual a 1 se $n = 1$, $(-1)^k$ se n é um produto de k primos distintos, e igual a zero caso contrário.

Proposição 6.1. *A função de Möbius obedece à relação*

$$\sum_{d|u} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{se } u = 1, \\ 0, & \text{se } u > 1. \end{cases} \quad (46)$$

Demonstração. Seja u um número natural com s fatores primos

$$u = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}.$$

Seja d um divisor de u , então $\mu(d)$ é igual a:

- $\mu(d) = (-1)^k$ se d é um produto de k diferentes primos entre as s possibilidades, logo temos $\binom{s}{k}$ número de divisores com essa característica.
- E para o restante dos divisores $\mu(d) = 0$, exceto por $\mu(1) = 1$.

Assim, podemos escrever:

$$\sum_{d|u} \mu(d) = \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k}. \quad (47)$$

O caso $k = 0$ é onde não se escolhe nenhum primo, correspondente no lado direito com $d = 1$ e $\mu(1) = 1$. Observe que o somatório do lado direito nos lembra o binômio de Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i,$$

o qual fazendo $x = 1$ e $y = -1$, tem-se

$$(1 - 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i.$$

O valor acima é zero para $n > 0$. Assim, na equação (47), teremos:

$$\sum_{d|u} \mu(d) = \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} = (1 - 1)^s = 0,$$

quando $s > 0$, ou seja, o valor acima é zero. Isso ocorre justamente quando o número tem pelo menos um fator primo que pode ser escolhido para compor seus divisores, ou seja, quando $u > 1$. Daí,

$$\sum_{d|u} \mu(d) = 0.$$

Para o caso em que $u = 1$, claramente obtemos no somatório apenas $\mu(1) = 1$, portanto

$$\sum_{d|u} \mu(d) = \mu(1) = 1.$$

□

Além da Proposição 6.1, será necessário o seguinte resultado.

Proposição 6.2. *Sejam n, m e u inteiros positivos, então vale:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nm = \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{d|u} u.$$

Demonstração. A demonstração desse resultado será apresentada como um esboço. Ob-

serve que do lado esquerdo temos na verdade um produto de dois somatórios infinitos:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots) \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots .$$

Esse produto vai gerar uma soma de diversos números, vamos analisar quantas vezes um determinado número x vai aparecer. Seja d um divisor de x , então para cada divisor d no primeiro parênteses, temos um número x/d no segundo parênteses cujo o produto desses dois termos é justamente x . Podemos concluir, portanto, que o número x aparecerá exatamente a quantidade de divisores do próprio x , escrevendo isso em forma de somatório chegamos no resultado.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nm = \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{d|u} u.$$

□

De forma um pouco mais geral, podemos escrever a Proposição 6.2 da seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(nm) = \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{d|u} f(u). \quad (48)$$

Voltando para a equação (45), temos

$$J(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \pi(x^{\frac{1}{m}}).$$

A fórmula de inversão de Möbius nos fornece o seguinte resultado a partir da equação acima:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{\frac{1}{n}}).$$

Para demonstrar isso, vamos analisar o lado direito, substituindo $J(x^{1/n})$ baseado na equação (45):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{\frac{1}{n}}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \pi(x^{\frac{1}{nm}}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{nm} \pi(x^{\frac{1}{nm}}). \end{aligned}$$

Utilizando a equação (48) e o fato que dado $u = nm$ todos os possíveis valores de n são

exatamente os divisores de u . Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{\frac{1}{n}}) &= \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{d|u} \frac{\mu(d)}{u} \pi(x^{\frac{1}{u}}) \\ &= \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{\frac{1}{u}})}{u} \sum_{d|u} \mu(d). \end{aligned}$$

De acordo com a propriedade principal da função de Möbius na Proposição 6.1: o segundo somatório do lado direito é igual a zero para todos os valores de u , exceto para $u = 1$, o qual a soma vale 1. Portanto, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{\frac{1}{n}}) = \left[\frac{\pi(x^{\frac{1}{u}})}{u} \right]_{u=1}.$$

Finalmente, podemos escrever:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{\frac{1}{n}}) = \pi(x).$$

Uma observação sobre a equação acima é que apesar da soma ir de 1 até o infinito. Isso não é necessário, pois quando o argumento da função J torna-se menor que 2, a função J torna-se nula. Assim, basta que $x^{\frac{1}{n}} \geq 2$, ou seja, quando $n \leq \lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor$.

6.3 A Relação Entre as Funções Zeta e Möbius

Existe uma relação entre as funções Zeta e Möbius, conforme vimos na Proposição 2.6 escrita de uma forma um pouco diferente:

$$\zeta(s) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s} = 1.$$

Aqui será demonstrada novamente de outra forma. Começando pelo lado direito e usando a definição de Zeta, temos

$$\zeta(s) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{(nm)^s}.$$

Usando, novamente, a equação (48) e o fato que m é um divisor de $u = nm$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{(nm)^s} = \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{d|u} \frac{\mu(d)}{u^s} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{u^s} \sum_{d|u} \mu(d).$$

Utilizando a Proposição 6.1 no último somatório, obtemos:

$$\zeta(s) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{(nm)^s} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{u^s} \sum_{d|u} \mu(d) = \frac{1}{1^s} \mu(1) = 1.$$

6.4 Fórmula Explícita de Riemann para $J(x)$

Agora, vamos mostrar a derivação de Riemann para uma fórmula explícita de $J(x)$. Para isso, vamos recorrer à fórmula do produto de Euler vista na Proposição 2.3:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (\sigma > 1 : s = \sigma + it).$$

Essa equação é considerada “a chave de ouro de Riemann que permitiu abrir a porta entre os números primos e a análise complexa, e finalmente encontrar uma fórmula explícita para a distribuição de primos” (DERBYSHIRE, 2003).

Tomando o logaritmo complexo na fórmula do produto de Euler:

$$\ln \zeta(s) = - \sum_p \ln \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \quad (\sigma > 1). \quad (49)$$

Utilizando a expansão em série da função logaritmo vista em (76):

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n z^n}{n} + \dots$$

Para o caso $z = -1/p^s$, temos:

$$\ln \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) = -\frac{1}{p^s} - \frac{1}{2p^{2s}} - \frac{1}{3p^{3s}} - \frac{1}{4p^{4s}} - \dots = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}.$$

Voltando para equação (49):

$$\ln \zeta(s) = \sum_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \right) \quad (\sigma > 1).$$

Observe que os termos da série entre parênteses acima são positivos e $|1/(np^{ns})| \leq |1/p^{ns}|$. Pela Proposição A.3 temos que esta série converge absolutamente. Assim, podemos escrever:

$$\ln \zeta(s) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p^{ns}} \right) \frac{1}{n} = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} (p^n)^{-s} \frac{1}{n} \quad (\sigma > 1),$$

que pode ser simplificado para apenas um somatório em termos de soma de todos os valores possíveis de potências de primos:

$$\ln \zeta(s) = \sum_{p^n} (p^n)^{-s} \frac{1}{n} \quad (\sigma > 1). \quad (50)$$

O próximo passo é muito importante, pois fará a transição da teoria dos números para análise complexa. Para isso, vamos lembrar de dois conceitos: definição de integral usando a soma de Riemann e a soma de Riemann-Stieltjes. Primeiro, sabemos que uma integral pode ser calculada da seguinte forma:

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f(x)dx,$$

para um intervalo $[a, b]$ dividido em $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Mais detalhes sobre esse resultado pode ser verificado em Lima (2019).

A soma de Riemann-Stieltjes é bem similar, mas considera uma segunda função:

$$\lim_{|\Delta g| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Substituindo na equação acima a função $g(x) = J(x)$, $f(x) = x^{-s}$ e o intervalo $[a, b]$ por $[0, \infty)$, temos:

$$\lim_{|\Delta J| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} t_i^{-s}[J(x_{i+1}) - J(x_i)] = \int_0^{\infty} x^{-s}dJ(x).$$

Sabemos que a função $J(x)$ é uma função degrau e para qualquer pequeno intervalo $[J(x_{i+1}) - J(x_i)]$ é igual a zero, exceto quando ocorre um salto no valor de $J(x)$. Isto acontece sempre que p_i^n pertence ao subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Se considerarmos partições com subintervalos suficientemente pequenos para os quais tais potências são pontos interiores e tomarmos $t_i = p_i^n$, $[J(x_{i+1}) - J(x_i)] = 1/n$. No limite, encontramos:

$$\sum_{p^n} (p^n)^{-s} \frac{1}{n} = \int_0^{\infty} x^{-s}dJ(x) \quad (\sigma > 1),$$

que comparando com a equação (50), temos:

$$\ln \zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{-s}dJ(x) \quad (\sigma > 1). \quad (51)$$

A importância desse resultado reside no fato que agora estarmos na área de análise e

cálculo. Integrando a última equação por partes (para $u = x^{-s}$ e $dv = dJ$):

$$\ln \zeta(s) = [x^{-s}J(x)] \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s)x^{-s-1}J(x)dx \quad (\sigma > 1)$$

Perceba que quando x tende a zero, temos um indeterminação no primeiro termo do lado direito, pois $J(x) = 0$ para $x < 2$. No entanto, como todas as derivadas de $J(x)$ se anulam quando $x < 2$ pela regra de L'Hospital podemos concluir que esse limite vai a zero, pois

$$\frac{J(x)}{x^s} = \frac{J(x)}{x^{\sigma+it}} = \frac{J(x)}{x^{\sigma}(\cos(t \ln x) + i \operatorname{sen}(t \ln x))}.$$

Os saltos de $J(x)$ ocorrem apenas em p^n e são sempre menores ou iguais a 1, portanto sempre menor que x , como $\sigma > 1$ temos $J(x)/x^{\sigma}$ tendendo a zero quando x tende ao infinito. Assim, podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{\ln \zeta(s)}{s} = \int_0^{\infty} J(x)x^{-s-1}dx \quad (\sigma > 1). \quad (52)$$

Para dar prosseguimento para encontrar uma fórmula para $J(x)$, vamos precisar de mais um conceito e um teorema discutidos a seguir.

Definição 6.3 (Transformação de Mellin). *A transformada de Mellin de uma função no domínio real $f(x)$ é:*

$$\{Mf\}(s) = \Phi(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx.$$

Em que s é uma variável complexa.

Teorema 6.1 (Teorema da inversão de Mellin (ARWASHAN, 2021)). *A função $f(x)$ pode ser recuperada da transformada de Mellin a partir da seguinte equação*

$$\{M^{-1}\phi\}(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-s}\Phi(s)ds,$$

em que a é um número arbitrário, ou seja, a integral acima é de menos infinito ($-\infty$) até mais infinito ($+\infty$) sobre qualquer linha vertical no plano complexo.

Voltando para a equação (52), temos

$$\frac{\ln \zeta(s)}{s} = \int_0^{\infty} J(x)x^{-s-1}dx \quad (\sigma > 1).$$

Perceba que o lado direito é quase a transformada de Mellin (Definição ??), fazendo

$z = -s$ chegaremos na definição exatamente:

$$\frac{\ln \zeta(-z)}{-z} = \int_0^{\infty} J(x)x^{z-1}dx \quad (\sigma > 1).$$

Agora, podemos aplicar a inversa da transformada vista no Teorema 6.1 para extrair a $J(x)$:

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln \zeta(-z)}{-z} x^{-z} dz.$$

Voltando para a variável original s :

$$J(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-a-i\infty}^{-a+i\infty} \frac{\ln \zeta(s)}{s} x^s ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a-i\infty}^{-a+i\infty} \frac{\ln \zeta(s)}{s} x^s ds$$

Como a é um número arbitrário, pode-se substituir o $-a$ por a , obtendo-se

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln \zeta(s)}{s} x^s ds, \quad (53)$$

que é justamente uma expressão analítica para a função $J(x)$, que é uma forma alternativa de contar números primos. Essa expressão pode ser melhorada calculando o valor de $\ln \zeta(s)$ que veremos na próxima seção.

6.5 O Cálculo de $\ln \zeta(s)$

Para o cálculo de $\ln \zeta(s)$ vamos partir da equação funcional de $\xi(s)$ vista em (42):

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s). \quad (54)$$

E também vimos a equação funcional de Gama em (25) se aplicada a $s/2$:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) = \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

Substituindo em (54), temos

$$\xi(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s). \quad (55)$$

Riemann assumiu que era possível fatorar $\xi(s)$ em termos de suas raízes como a

equação a seguir:

$$\xi(s) = f(s) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

em que ρ são as raízes de $\xi(s)$, que conforme visto na Seção 5.6 são iguais a raízes não triviais de Zeta. A função $f(x)$ é uma função não-nula e Riemann mostrou que esta função deve ser constante (ARWASHAN, 2021). A constante tem valor $f(s) = f(0)$ que será igual a $\xi(0)$, pois

$$\xi(0) = f(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{0}{\rho}\right) = f(0).$$

Assim, temos:

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right). \quad (56)$$

A última equação nos diz que $\xi(s)$ se comporta como um “polinômio de grau infinito”. A demonstração da validade dessa fatoração foi mostrada por Hadamard em 1893, 34 anos depois da publicação do artigo de Riemann.

Agora, usando as equações (56) e (55):

$$\xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) = \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s).$$

Tomando o logaritmo dos dois lados e isolando o termo $\ln \zeta(s)$, temos

$$\ln \zeta(s) = \ln \xi(0) + \sum_{\rho} \ln \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) + \frac{s}{2} \ln \pi - \ln(s-1).$$

Chegamos numa expressão para $\ln \zeta(s)$, finalmente podemos substituir em (53) e após várias relativamente complicadas operações chega-se à expressão de Riemann para $J(x)$ (ARWASHAN, 2021):

$$J(x) = L_i(x) - \sum_{\rho} L_i(x^{\rho}) - \ln 2 + \int_x^{\infty} \frac{d\tau}{\tau(\tau^2 - 1) \ln(\tau)}. \quad (57)$$

Uma observação interessante sobre a equação acima é que $J(x)$ é um número real, enquanto o lado direito é calculada sobre números complexos. Uma explicação intuitiva para esse fato é que as raízes de Zeta são números complexos nos quais o seu conjugado também é uma raiz, conforme vimos na Seção 5.5, e quando colocados na equação (57) os termos imaginários cancelam-se. De fato, isso pode ser demonstrado e será abordado no próximo capítulo. Além disso, veremos outra forma de obter a equação (57).

7 A FÓRMULA DE VON MANGOLDT

Como visto no capítulo anterior, a fórmula explícita da função $J(x)$ foi um marco importante no entendimento da distribuição dos números primos. No entanto, com algumas passagens intuitivas e com falta de provas formais. Até que o matemático alemão Hans von Mangoldt 35 anos depois conseguiu uma fórmula explícita de uma função contagem adaptada que veremos a seguir sem utilizar a integral logarítmica, tornando-a mais simples e de forma mais rigorosa.

7.1 As Funções de Chebyshev e a Fórmula Explícita de Von Mangoldt

O matemático russo Pafnuty Chebyshev introduziu duas novas funções de contagem de números primos. São elas:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$$

e

$$\psi(x) = \sum_{p^n \leq x} \ln p.$$

Ambas as funções são do tipo degrau: a primeira soma $\ln p$ para todo p primo; enquanto a segunda também soma $\ln p$, mas para as potências p^n , com p primo. Similarmente às funções $\pi(x)$ e $J(x)$ definidas anteriormente, elas também assumem metade do salto $(\ln(p)/2)$ no ponto p^n e depois desse ponto soma-se a outra metade até aparecer a próxima potência de primo.

Chebyshev provou que o Teorema dos Números Primos (Teorema 1.5) é equivalente às funções definidas $\vartheta(x)$ e $\psi(x)$ acima serem assintóticas em relação a x (ARWASHAN, 2021). Em outras palavras: o Teorema do Número Primo é verdade se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Nesse capítulo, vamos principalmente estabelecer a relação entre a função $J(x)$ e $\psi(x)$. A função $J(x)$ soma $1/n$ cada vez que $x = p^n$, assim $dJ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta J$ é igual a zero para todo x , exceto quando $x = p^n$, em que $dJ = 1/n$. Enquanto a função $\psi(x)$ soma $\ln p$ cada vez que $x = p^n$, assim $d\psi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta \psi$ é igual a zero para todo x , exceto quando $x = p^n$,

em que $d\psi = \ln p = 1/n \ln p^n$. Assim, podemos escrever:

$$d\psi = \ln p = \frac{1}{n} \ln p^n = \frac{1}{n} \ln x = dJ \ln x, \text{ para } x = p^n \text{ e}$$

$$d\psi = dJ = 0, \text{ para } x \neq p^n.$$

Logo, temos

$$d\psi(x) = \ln x dJ(x). \quad (58)$$

Trinta e cinco anos após o artigo de Riemann, o matemático alemão Hans Von Mangoldt pavimentou a demonstração do Teorema dos Números Primos ao encontrar uma fórmula explícita de $\psi(x)$:

$$\psi(x) = x - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}. \quad (59)$$

Tal fórmula consiste em quatro termos: o primeiro é x , o segundo uma constante, o terceiro pelo fato de ter um termo quadrático no denominador torna-se negligente para valores elevados de x , e finalmente o último termo é uma soma percorrendo todos os zeros não triviais de Zeta. Nas próximas seções será apresentada a demonstração em duas partes.

7.2 Primeira parte da Prova da Fórmula de Von Mangoldt - Integral

Apesar do Teorema dos Números Primos não ter sido demonstrado a primeira demonstração apresentada irá utilizar este resultado. No entanto, depois abordaremos outra demonstração sem uso desse teorema.

Nessa seção vamos focar em demonstrar a seguinte equação de $\psi(x)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)x^s}{\zeta(s)s} ds = \psi(x).$$

Para isso, começaremos com a equação (51):

$$\ln \zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{-s} dJ(x) \quad (\sigma > 1).$$

Derivando em relação a s , temos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \int_0^{\infty} -x^{-s} \ln x dJ(x) \quad (\sigma > 1).$$

Pela equação (58), podemos escrever

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \int_0^\infty -x^{-s} d\psi(x) \quad (\sigma > 1). \quad (60)$$

Integrando por partes a integral do lado direito da equação acima, com ($u = x^{-s}$ e $dv = d\psi(x)$), temos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = [-x^{-s}\psi(x)]_0^\infty - \int_0^\infty (sx^{-s-1})\psi(x)dx \quad (\sigma > 1). \quad (61)$$

Observe que pela definição da função $\psi(x)$ sabemos que $\psi(x)$ e todas suas derivadas serão zero para $x < 2$ e por L'Hospital percebe-se que $\psi(x)/x^s = 0$ quando x tende a zero. Quando x tende ao infinito, também temos $-x^{-s}\psi(x)$ tendendo a zero, pois:

$$\frac{\psi(x)}{x^s} = \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+it}} = \frac{\psi(x)}{x^\sigma(\cos(t \ln x) + i \operatorname{sen}(t \ln x))}.$$

Como estamos com $\sigma > 1$, podemos escrever $\sigma = 1 + \epsilon$:

$$\frac{\psi(x)}{x^s} = \frac{\psi(x)}{x} \frac{1}{x^\epsilon(\cos(t \ln x) + i \operatorname{sen}(t \ln x))}.$$

Assumindo que o Teorema dos Números Primos seja verdadeiro, temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Além disso, como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\epsilon} = 0$, temos da equação (61) que

$$-\frac{1}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \int_0^\infty \psi(x)x^{-s-1}dx \quad (\sigma > 1). \quad (62)$$

Agora, podemos utilizar a transformada inversa de Mellin vista no Teorema 6.1 para recuperar a função $\psi(x)$, obtendo

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds, \quad (63)$$

que é justamente a equação no início da seção. Veremos a seguir uma outra forma de chegar nesse resultado sem utilizar o Teorema dos Números Primos. Começando pela equação (50):

$$\ln \zeta(s) = \sum_{p^n} (p^n)^{-s} \frac{1}{n} \quad (\sigma > 1).$$

Derivando dos dois lados em relação a s , temos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p^n} \frac{-n \ln p}{p^{ns}} \frac{1}{n} \quad (\sigma > 1).$$

Simplificando, chegamos a

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p^n} \frac{\ln p}{p^{ns}} \quad (\sigma > 1).$$

Multiplicando por x^s/s , obtemos

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} = \frac{x^s}{s} \sum_{p^n} \frac{\ln p}{p^{ns}} \quad (\sigma > 1).$$

Integrando ambos os lados de $a - i\infty$ até $a + i\infty$ (em que a é uma constante arbitrária maior que zero) e dividindo por $2\pi i$, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{s} \sum_{p^n} \frac{\ln p}{p^{ns}} ds.$$

Rearranjando os termos e trocando o somatório com a integral do lado esquerdo, podemos escrever

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = \sum_{p^n} \ln p \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{x}{p^n}\right)^s \frac{1}{s} ds.$$

Denotando $y = x/p^n$, obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = \sum_{p^n} \ln p \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds \right]. \quad (64)$$

A integral nos colchetes acima é uma integral bem conhecida e vale:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < y < 1, \\ 1/2, & \text{se } y = 1, \\ 1, & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

O cálculo da integral acima pode ser verificado no Apêndice F. A soma do lado direito da equação (64) é sobre todas as potências de primos, p^n . Relembrando que $y = x/p^n$,

podemos reescrever o resultado da integral em termos dos intervalos em x :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < x < p^n, \\ 1/2, & \text{se } x = p^n, \\ 1, & \text{se } x > p^n. \end{cases}$$

Assim, lembrando da definição da função $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{p^n \leq x} \ln p,$$

e lembrando que nessa definição que ao encontrar uma potência teremos um salto da metade do valor $\ln p$ conforme visto na Seção 7.1. Logo, teremos justamente a equação que queremos mostrar:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = \psi(x). \quad (65)$$

7.3 Segunda Parte da Prova da Fórmula de Von Mangoldt - Teorema de Resíduos

A vantagem da equação (65) é que podemos avaliar a integral pelo Teorema dos Resíduos (ver no Apêndice B.6), que nos diz que:

Se uma função $g(z)$ tem n polos z_1, z_2, \dots, z_n no domínio D (incluindo a fronteira), então

$$\oint_{\partial D} g(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(g, z_k). \quad (66)$$

A estratégia para adequar o cálculo da integral em (65) ao fato do contorno da integral ser fechado em (66) é fazer uma integral no domínio como mostrado na Figura 15. Assim, a integral percorrendo sobre os lados do topo, base e esquerda tendem a zero quando h e K vão para infinito, portanto a integral será igual a todos os resíduos no retângulo infinito vezes $2\pi i$ e conseqüentemente $\psi(x)$ será igual a soma de todos os resíduos de $[-\zeta'(s)x^s/\zeta(s)s]$. Um ponto importante que deve ser observado é que esse procedimento supracitado apenas foi possível pelo fato da função Zeta está definida em todo plano complexo na sua extensão vista nos capítulos anteriores.

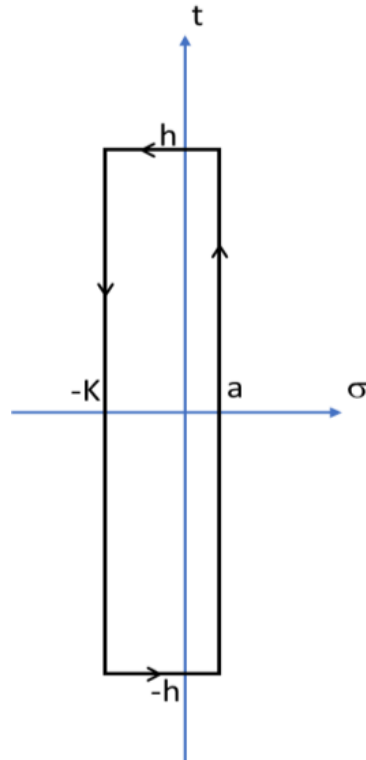


Figura 15 - Contorno fechado considerado na integral.

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

7.3.1 Cálculo dos resíduos

Assim vamos analisar o termo do integrando da equação (65):

$$\left[-\frac{\zeta'(s) x^s}{\zeta(s) s} \right].$$

Para calcular os resíduos desse termo precisamos analisar os pontos em que ele não está definido: quando o denominador igual a zero, ou seja, $\zeta(s) = 0$ ou $s = 0$ e também $s = 1$ que é o ponto em que a Zeta não está definida.

7.3.1.1 Resíduo quando $s = 0$

Pela definição de resíduo (ver Apêndice B.6), temos

$$\text{Res} \left[-\frac{\zeta'(s) x^s}{\zeta(s) s}, 0 \right] = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{\zeta'(s) x^s}{\zeta(s) s} (s - 0) = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}. \quad (67)$$

Para calcular $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$ vamos precisar da equação funcional (36):

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

O termo que estamos procurando lembra a derivada logarítmica, aplicando o logaritmo natural na equação acima, temos

$$\ln \zeta(s) = s \ln 2 + (s-1) \ln \pi + \ln \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) + \ln \Gamma(1-s) + \ln \zeta(1-s).$$

E então derivando em relação a s , obtemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \ln 2 + \ln \pi + \frac{\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)} - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}.$$

Aplicando o limite quando $s \rightarrow 1$, temos que

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \ln 2\pi + 0 - \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Isolando o termo que estamos interessado, obtemos

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \ln 2\pi - \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}. \quad (68)$$

Considerando o limite abaixo:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)},$$

temos que o numerador e denominador tendem ao infinito quando $s \rightarrow 1$, portanto podemos aplicar a regra de L'Hospital:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta'(s)}{-\Gamma'(1-s)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 1} \zeta'(s)}{\lim_{s \rightarrow 1} -\Gamma'(1-s)}.$$

Assim, temos que

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} = - \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Substituindo na equação (68), chegamos que

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \ln 2\pi.$$

E, conseqüentemente, por (67), finalmente obtemos

$$\text{Res} \left[-\frac{\zeta'(s) x^s}{\zeta(s) s}, 0 \right] = -\ln 2\pi.$$

7.3.1.2 Resíduos para os zeros de Zeta

Inicialmente, vamos calcular os resíduos para $s = T$, em que T são os zeros triviais de Zeta.

$$\text{Res} \left[-\frac{\zeta'(s) x^s}{\zeta(s) s}, T \right] = \lim_{s \rightarrow T} -\frac{\zeta'(s) x^s}{\zeta(s) s} (s - T) = -\lim_{s \rightarrow T} \frac{(s - T)}{\zeta(s)} \lim_{s \rightarrow T} \zeta'(s) \frac{x^s}{s}.$$

Aplicando a regra de L'Hospital no primeiro limite do lado direito, em que o numerador e denominador tendem a zero, obtemos

$$\text{Res} \left[-\frac{\zeta'(s) x^s}{\zeta(s) s}, T \right] = -\lim_{s \rightarrow T} \frac{1}{\zeta'(s)} \lim_{s \rightarrow T} \zeta'(s) \frac{x^s}{s} = -\lim_{s \rightarrow T} \frac{x^s}{s} = -\frac{x^T}{T}.$$

O mesmo argumento acima também se aplica para $s = \rho$, em que ρ é um zero não-trivial de Zeta. Assim, temos que

$$\text{Res} \left[-\frac{\zeta'(s) x^s}{\zeta(s) s}, \rho \right] = -\frac{x^\rho}{\rho}.$$

7.3.1.3 Resíduo quando $s = 1$

Para $s = 1$, vamos utilizar a definição de Zeta em termos de Eta vista em na equação (17):

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \eta(s).$$

Aplicando logaritmo, temos

$$\ln \zeta(s) = \ln \eta(s) - \ln(1 - 2^{1-s}).$$

Derivando em relação a s , obtemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} - \frac{2^{1-s} \ln 2}{1 - 2^{1-s}}.$$

Pensando no cálculo do resíduo, vamos calcular o limite abaixo:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}(s-1) &= \lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{\eta'(s)}{\eta(s)} - \frac{2^{1-s} \ln 2}{1 - 2^{1-s}} \right] (s-1) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}(s-1) - \lim_{s \rightarrow 1} \frac{2^{1-s} \ln 2}{1 - 2^{1-s}}(s-1) \\ &= 0 - 2^0 \ln 2 \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s-1}{1 - 2^{1-s}}. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}(s-1) &= -\ln 2 \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)'}{(1 - 2^{1-s})'} \\ &= -\ln 2 \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{2^{1-s} \ln 2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Agora, estamos pronto para calcular o resíduo:

$$\begin{aligned} Res \left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}, 1 \right] &= \lim_{s \rightarrow 1} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} (s-1) \\ &= -\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}(s-1) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{x^s}{s} \\ &= -(-1) \frac{x^1}{1} = x. \end{aligned}$$

Finalmente, com as equações (65) e (66), chegamos a

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{k=1}^n Res \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}, z_k \right)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^n Res \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}, z_k \right),$$

em que z_k são os polos da função $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}$. Assim,

$$Res \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}, z_k \right) = \begin{cases} -\ln 2\pi, & \text{se } z_k = 0, \\ -\frac{x^\rho}{\rho}, & \text{se } z_k = \rho, \\ -\frac{x^T}{T}, & \text{se } z_k = T, \\ x, & \text{se } z_k = 1. \end{cases}$$

Chegamos na seguinte equação

$$\psi(x) = x - \ln 2\pi - \sum_T \frac{x^T}{T} - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}.$$

Relembrando que os zeros triviais de Zeta vistos na Seção 5.2 são os inteiros pares negativos $-2, -4, -6, \dots$, podemos escrever:

$$\psi(x) = x - \ln 2\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-2k}}{-2k} - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}. \quad (69)$$

Esse termo dos zeros triviais de Zeta pode ser encontrado pela série de Taylor da função logarítmica (76):

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

O qual fazendo $y = -1/x^2$ e multiplicando por $1/2$, temos

$$\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{3x^6} - \frac{1}{4x^8} - \dots \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-2k}}{-2k}.$$

Finalmente, substituindo o resultado acima na equação (69):

$$\psi(x) = x - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}. \quad (70)$$

Assim, chegamos na fórmula explícita de $\psi(x)$, através da qual podemos calcular $dJ(x) = \frac{d\psi(x)}{\ln x}$ (vista na equação (58)) integrando de 0 a x . Assim, vamos obter dois dos termos na fórmula explícita de Riemann para a $J(x)$ vista em 57: $L_i(x)$ e $\sum_\rho L_i(x^\rho)$. No entanto, os outros dois termos da equação (57) não podem ser obtidos por esse caminho. Von Mangoldt seguiu uma forma diferente bem mais complexa e mostrada em Edwards (2001) e conseguiu uma prova rigorosa da fórmula explícita de Riemann para $J(x)$.

Vale mencionar que a equação (70) obtida é bem mais simples que a versão original de Riemann vista na equação (57). Por esse motivo, a equação (70) é usada com mais frequência nos textos mais modernos da área.

7.4 O Componente Ondulatório de $\psi(x)$

Vimos na seção anterior como expressar $\psi(x)$ de forma explícita em que apareciam os zeros de Zeta. Estas raízes são números complexos e para entender a sua contribuição para a equação (70) vamos escrever $\rho = \sigma + it$. Conforme visto na Seção 5.5 o conjugado

de ρ também é uma raiz: $\bar{\rho} = \sigma - it$. A contribuição desse par, portanto, pode ser expressa por

$$\begin{aligned} -\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{x^{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} &= -\frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it} - \frac{x^{\sigma-it}}{\sigma-it} \\ &= -\frac{x^\sigma[\cos(t \ln x) + i\text{sen}(t \ln x)]}{\sigma+it} - \frac{x^\sigma[\cos(t \ln x) - i\text{sen}(t \ln x)]}{\sigma-it}. \end{aligned}$$

Multiplicando pelos respectivos conjugados dos denominadores de cada termo acima, obtemos

$$-\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{x^{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = -\frac{x^\sigma[\cos(t \ln x) + i\text{sen}(t \ln x)](\sigma-it)}{(\sigma+it)(\sigma-it)} - \frac{x^\sigma[\cos(t \ln x) - i\text{sen}(t \ln x)](\sigma+it)}{(\sigma-it)(\sigma+it)}.$$

Simplificando a expressão acima, temos

$$-\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{x^{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = \frac{-2x^\sigma[\sigma \cos(t \ln x) + t\text{sen}(t \ln x)]}{\sigma^2 + t^2}.$$

A expressão acima pode ser simplificada um pouco mais, utilizando o seguinte artifício ao escrevê-la de forma um pouco diferente:

$$-\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{x^{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = \frac{-2x^\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} \cos(t \ln x) + \frac{t}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} \text{sen}(t \ln x) \right].$$

Seja $\alpha = \text{arctg}(t/\sigma)$ para aparecer os termos $\cos \alpha$ e $\text{sen} \alpha$ na expressão

$$-\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{x^{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = \frac{-2x^\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} [\cos \alpha \cos(t \ln x) + \text{sen} \alpha \text{sen}(t \ln x)].$$

Assim, podemos simplificar a expressão, chegando a

$$-\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{x^{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = \frac{-2x^\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + t^2}} \cos(t \ln x - \alpha).$$

Observe que, de fato, o termo imaginário desapareceu como esperado pelo fato da função $\psi(x)$ ser real. Agora, podemos reescrever a equação (69) da seguinte forma:

$$\psi(x) = x - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^{\sigma_k}}{\sqrt{\sigma_k^2 + t_k^2}} \cos(t_k \ln x - \alpha_k). \quad (71)$$

Como a função $\psi(x)$ acima se comporta se não utilizarmos os zeros de Zeta no cálculo da equação (71)? O comportamento se assemelha bastante a função linear $f(x) = x$ e passa bem próximo da função $\psi(x)$ propriamente pela sua definição conforme Figura 16. Percebemos conforme passamos a considerar o termos relativos aos zeros de Zeta um comportamento ondulatório começa a aparecer, e vai se aproximando cada vez mais da

função $\psi(x)$ propriamente, conforme Figuras 17 e 18. Até que com uma quantidade bem elevada de zeros de Zeta (para x até 50) o gráfico das duas funções se torna basicamente os mesmos conforme Figura 19.

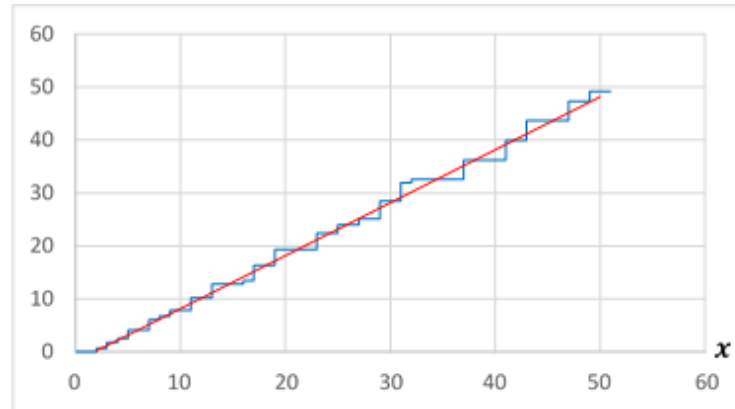


Figura 16 - A função $\psi(x)$ em azul e a fórmula explícita de Von Mangoldt em vermelho (sem considerar zeros de zeta).

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

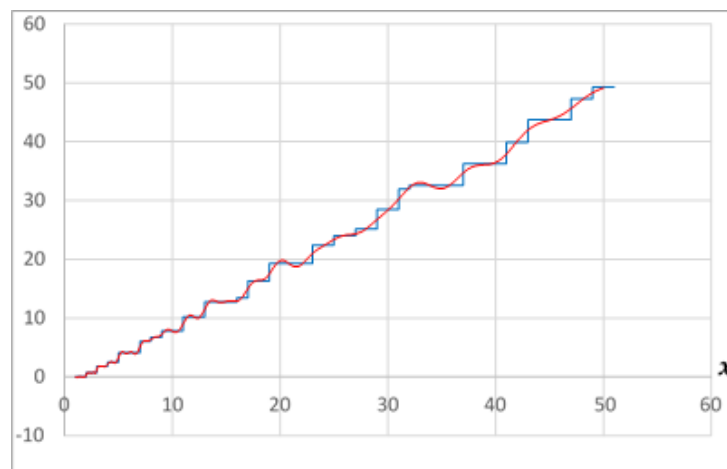


Figura 17 - A função $\psi(x)$ em azul e a fórmula explícita de Von Mangoldt em vermelho (considerando 10 primeiros zeros de zeta).

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

Uma outra observação interessante é analisar a derivada de $\psi(x)$, $d\psi/dx$ com a mesma quantidade de zeros (100.000) da Figura 19. Percebe-se pela Figura 20 que a função captura através de picos os momentos em que passamos por potências de primos.

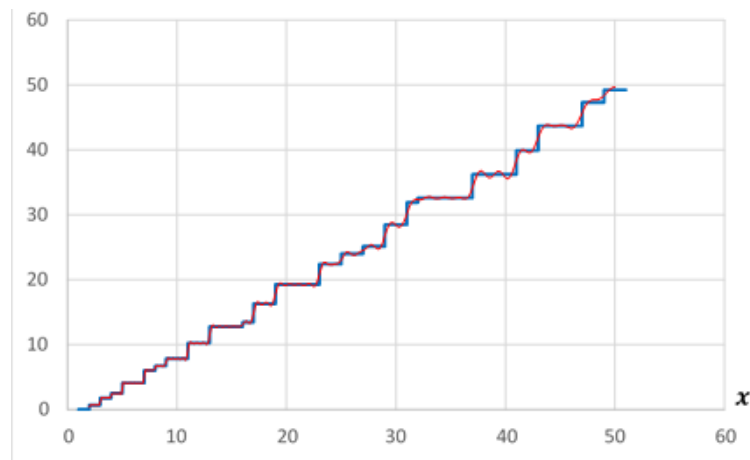


Figura 18 - A função $\psi(x)$ em azul e a fórmula explícita de Von Mangoldt em vermelho (considerando 50 primeiros zeros de zeta).

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

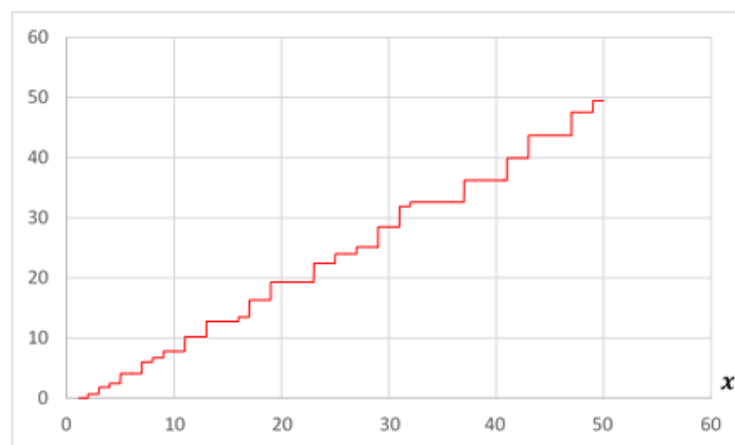


Figura 19 - A função $\psi(x)$ e a fórmula explícita de Von Mangoldt em vermelho (considerando 100.000 primeiros zeros de zeta).

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

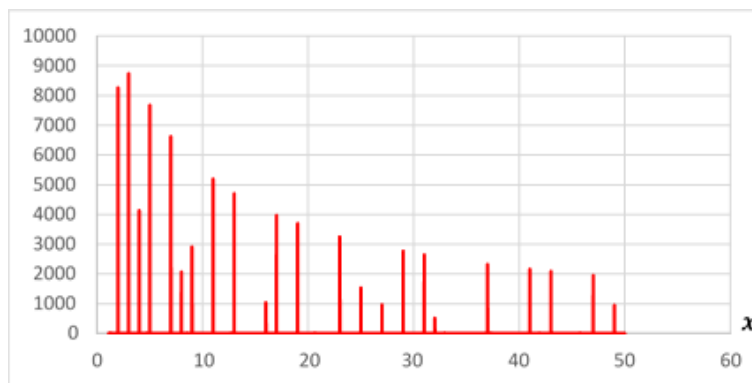


Figura 20 - A derivada $d\psi(x)/dx$ utilizando a fórmula de Von Mangoldt para 100.000 zeros de Zeta.

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

7.5 Esboço da Demonstração do Teorema do Número Primo

Vimos no início desse Capítulo que o Teorema dos Números Primos é equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Utilizando a expressão explícita de Von Mangoldt em (69) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x)}{x} &= \frac{x - \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}}{x} \\ &= 1 - \frac{\ln 2\pi}{x} - \frac{1}{2x} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho}. \end{aligned}$$

Quando x tende ao infinito temos que o segundo e terceiro termos vão a zero. Portanto, para o Teorema do Número Primo ser verdade devemos ter

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho} = 0.$$

Seja $\rho = \sigma + it$, assim

$$x^{\rho-1} = x^{\sigma-1+it} = x^{\sigma-1} [\cos(t \ln x) + i \operatorname{sen}(t \ln x)].$$

De acordo com o que vimos no Capítulo 5, sabemos que os zeros não triviais de Zeta estão na faixa crítica $0 \leq \sigma \leq 1$. Temos, portanto, para $\sigma < 1$ que $x^{\sigma-1} = 1/x^{1-\sigma}$ tende a zero quando x tende ao infinito, assim como $x^{\sigma-1} [\cos(t \ln x) + i \operatorname{sen}(t \ln x)]$, pois $|\cos(t \ln x) + i \operatorname{sen}(t \ln x)| = 1$. É possível mostrar que a soma sobre todos esses zeros vão

a zero também, assim o Teorema do Número Primo fica válido nesse caso (ARWASHAN, 2021).

No entanto, quando a raiz de Zeta possui parte real $\sigma = 1$, temos $x^{\sigma-1} = 1$ e o argumento feito acima não é válido. Assim, a prova do Teorema dos Números Primos é equivalente a mostrar que a função Zeta não possui zeros em $\sigma = 1$.

O Teorema dos Números Primos nos diz que o número de primos até um determinado valor x é assintoticamente equivalente as funções $L_i(x)$ ou $x/\ln x$. Uma pergunta que surge após esse teorema é o que ocorre com erro, ou seja, a diferença entre $\pi(x)$ e a função $L_i(x)$ (ou $x/\ln x$). Esta diferença tende a zero quando x tende ao infinito, mas ela obedece a algum comportamento específico? Veremos no último capítulo um pouco sobre isso e a relação com a Hipótese de Riemann.

CONCLUSÃO

Nesse trabalho conhecemos melhor um pouco sobre os números primos, alguns resultados importantes como sua infinitude, testes de primalidade, fórmulas que geram números primos, da sua “densidade” nos números naturais. Bem como a sua distribuição e o importante Teorema dos Números Primos.

Depois vimos o que há por trás da Hipótese de Riemann e sua conexão com os números primos, para isso introduzimos a importante função Zeta, inicialmente no domínio real, depois no domínio complexo. Para estender o domínio da função Zeta, introduzimos as funções Eta, Gama e Xi que permitiram estabelecer equações funcionais importantes para analisar os zeros triviais e não triviais de Zeta. Finalmente, mostramos a fórmula explícita de Riemann para $J(x)$ e de Von Mangoldt da função adaptada $\psi(x)$ que contam de formas um pouco diferentes a quantidade de primos até x .

É importante desmitificar um ponto que causa bastante dúvida: a fórmula explícita para a distribuição dos números primos encontrada por Riemann no seu artigo Riemann (1859), assim como a versão de Von Mangoldt vista na Seção 7.1, independem da localização das raízes de Zeta, ou seja, independem da hipótese de Riemann ser verdadeira ou falsa. De fato, Riemann escreveu no seu artigo o seguinte trecho:

Certamente, gostaria de ter uma prova rigorosa aqui; Por enquanto, eu deixei de lado essa busca depois de algumas tentativas frustradas, pois parece desnecessário para o próximo objetivo da minha investigação.¹¹.
(RIEMANN, 1859, tradução nossa)

Por outro lado, em 1901 o matemático sueco Helge Von Koch provou que a Hipótese de Riemann é equivalente a

$$\pi(x) = L_i(x) + O(\sqrt{x} \ln x).$$

A notação O -Grande acima significa que a diferença absoluta (o erro) entre $L_i(x)$ e $\pi(x)$ é sempre menor que $C\sqrt{x} \ln x$ (C é uma constante). Assim, se a hipótese de Riemann for verdadeira temos que a função $L_i(x)$ é uma excelente aproximação da quantidade de primos até x , mantendo o erro sempre abaixo de $C\sqrt{x} \ln x$.

Existe também um “mito urbano” propagado até por mídias importantes, por exemplo o vídeo produzido pela BBC News Brasil Veras (2021) que traz excelentes informações para o público geral de um assunto pouco divulgado de forma didática e interessante. No

¹¹ No original: Certainly one would wish for a stricter proof here; I have meanwhile temporarily put aside the search for this after some fleeting futile attempts, as it appears unnecessary for the next objective of my investigation.

entanto, ajuda a fomentar a ideia que a resolução da Hipótese de Riemann traz riscos elevados a segurança na internet que utiliza criptografia como base. A prova da Hipótese de Riemann traz um profundo entendimento sobre a distribuição dos números primos. No entanto, a criptografia que utiliza como fundamento a dificuldade computacional de fatorar números grandes em seus fatores primos não sofrerá impactos significativos. Visto que se isso fosse verdade, poderíamos supor a veracidade da hipótese e conseguir alguma vantagem na quebra do algoritmo de criptografia. De fato, é conhecido que os primeiros 10^{13} (ordenados a partir da parte imaginária positiva) zeros da função Zeta possuem parte real igual a $1/2$ Derbyshire (2003).

Por fim, citamos uma famosa frase dita pelo matemático alemão David Hilbert que dá uma ideia da dimensão da importância do problema em aberto mais famoso da atualidade tem para matemática e áreas afins.

Se eu acordasse após 1000 anos dormindo, minha primeira pergunta seria: A Hipótese de Riemann foi provada?¹². (ARWASHAN, 2021, tradução nossa)

¹² No original: “If I were to awaken after having slept for a thousand years, my first question would be: Has the Riemann Hypothesis been proven?”

REFERÊNCIAS

- AHLFORS, L.V. *COMPLEX ANALYSIS*. [s.n.], 1966. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=RfYK28TcZEwC>.
- ANDRADE, Lenimar Nunes de. *Série Harmônica de Números Primos*. [S.l.]: SBM, 2010.
- APOSTOL, T.M. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer New York, 1998. (Undergraduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387901633. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Il64dZELHEIC>.
- ARTIN, E.; BUTLER, M. *The Gamma Function*. Holt, Rinehart and Winston, 1964. (Athena series). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=NNc-AAAAIAAJ>.
- ARWASHAN, N. *The Riemann Hypothesis and the Distribution of Prime Numbers*. Nova Science Publishers, 2021. (Mathematics research developments). ISBN 9781536194821. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=TpCDzgEACAAJ>.
- BICUDO, I. *Os elementos*. Unesp, 2009. ISBN 9788571399358. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=um94A66MDxkC>.
- COSTA, Allan Inocência de Souza. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, *Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra*. São Carlos - SP: [s.n.], 2016.
- CRANDALL, R.; POMERANCE, C.B. *Prime Numbers: A Computational Perspective*. Springer New York, 2006. (Lecture notes in statistics). ISBN 9780387289793. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ZXjHKPS1LEAC>.
- DERBYSHIRE, J. *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*. National Academies Press, 2003. ISBN 9780309085496. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=qsoqLNQUIJMC>.
- EDWARDS, H.M. *Riemann's Zeta Function*. Dover Publications, 2001. (Dover books on mathematics). ISBN 9780486417400. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ruVmGFPwNhQC>.
- ENRICO, Bombieri. *Problems of the Millennium: the Riemann Hypothesis*. Clay Institute, 2000. Disponível em: https://www.claymath.org/sites/default/files/official_problem_description.pdf.
- EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. [S.l.]: UNICAMP, 2011. ISBN 8526806572.
- FILHO, Marcos Fernando Cancio Justo Dos Santos. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, *Euler e o problema de Basileia*. João Pessoa - PB: [s.n.], 2014.
- HAVIL, J. *Gamma: Exploring Euler's Constant*. Universities Press (India) Pvt. Limited, 2003. ISBN 9788173715099. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=8b1etW9-hW4C>.

- HONSBERGER, Ross. *Mathematical Gems II*. [S.l.]: The Mathematical Association of America, 1976. (The Dolciani Mathematical Expositions). ISBN 0883853027.
- IÓRIO, Valéria. *EDP: Um Curso de Graduação*. IMPA, 2018. ISBN 9788524404221. Disponível em: <https://loja.sbm.org.br/edp-um-curso-de-graduac-o.html>.
- JORGEN, Veisdal. *Prime Numbers and the Riemann zeta function*. Stavanger, Rogaland Norway: [s.n.], 2013.
- LIMA, E.L. *Curso de análise*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2019. (Curso de análise, v. 1). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=7OJUAAAAYAAJ>.
- MARTINEZ, F.E.B. et al. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. IMPA, 2010. (Projeto Euclides). ISBN 9788524403125. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=q5z3kQEACAAJ>.
- MOTA, Karla Valéria Caldas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, *O Mistério e a Beleza dos Números Primos*. Goiânia: [s.n.], 2017.
- MOURA, Frederico Torres de. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, *Números Primos: Uma Fórmula Geradora*. Arrais - TO: [s.n.], 2018.
- NACHBIN, André. *Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada*. IMPA, 2007. ISBN 9788524402623. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/26CBM_14.pdf.
- NARKIEWICZ, W. *The Development of Prime Number Theory: From Euclid to Hardy and Littlewood*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. (Springer Monographs in Mathematics). ISBN 9783662131572. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=2gf9CAAQBAJ>.
- NETO, A.L. *Funções de uma variável complexa*. IMPA, 1993. (Projeto Euclides). ISBN 9788524400872. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=kyPKAAAACAAJ>.
- PAUL, Pollack. Euler and the partial sums of the prime harmonic series. Athens, Georgia 30602, USA, 2015. Disponível em: <http://pollack.uga.edu/eulerprime.pdf>.
- RASHID, Tariq. *Towards the Riemann Zeta Hypothesis*. [S.l.: s.n.], 2020.
- RIEMANN, Bernhard. On the number of prime numbers less than a given quantity. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, Berlin, Novembro 1859.
- SONDOW, Jonathan. Zeros of the alternating zeta function on the line. *Taylor and Francis*, New York, 2003.
- _____. A simple counterexample to havil's "reformulation" of the riemann hypothesis. New York, 2012. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0706.2840>.
- STEIN, E.M.; SHAKARCHI, R. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2003. ISBN 9780691113845. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=I6CJngEACAAJ>.

_____. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2010. (Princeton lectures in analysis). ISBN 9781400831159. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=0ECHh9tjPUAC>).

TITCHMARSH, L.S.P.G.E.C. et al. *The Theory of the Riemann Zeta-function*. Clarendon Press, 1986. (Oxford science publications). ISBN 9780198533696. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=1CyfApMt8JYC>).

VERAS, Mota Camila. *O Enigma dos Números Primos, cuja solução ameaçaria a internet*. BBC News Brasil, 2021. Disponível em: <https://youtu.be/Uf7nd8sz5yQ>).

APÊNDICE A – Resultados Importantes de Séries

A.1 Testes de Convergências de Séries

Há muitos testes que podem ser utilizados para avaliar a convergências de séries infinitas. Neste trabalho apresentaremos apenas três destes. Antes disso, será apresentada uma definição de convergência absoluta:

Definição A.1. *Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita absolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.*

Proposição A.2 (Teste da Razão). *Suponha que exista r tal que:*

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Se $r < 1$, então a série é absolutamente convergente. Se $r > 1$, então a série diverge, e se $r = 1$, então o teste é inconclusivo.

Proposição A.3 (Teste da Comparação Direta). *Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é absolutamente convergente e $|a_n| \leq |b_n|$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.*

Proposição A.4 (Teste da Série Alternada). *Se as três condições abaixo são satisfeitas*

1. a_n é uma sequência de reais positivos,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
3. $a_{n+1} < a_n$ para todo n .

Então $\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n a_n$ é convergente para qualquer k natural.

As demonstrações das proposições acima podem ser encontradas em Lima (2019).

A.2 A série Geométrica

A série geométrica é muito importante e comum em cálculo e definida como:

Definição A.5. *Defini-se a série geométrica da seguinte forma*

$$M(r) = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

Em que cada termo da série é obtido multiplicando o anterior pela razão r . Pode-se definir também a soma parcial dos primeiros n termos:

$$M_n(r) = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}. \tag{72}$$

Pode-se multiplicar ambos os lados da equação (72) por r , obtendo-se

$$rM_n(r) = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n.$$

Subtraindo de (72) e desta última igualdade, temos

$$(1 - r)M_n(r) = 1 - r^n.$$

Considerando, $r \neq 1$:

$$M_n(r) = \frac{1 - r^n}{1 - r},$$

que pode ser escrita como

$$M_n(r) = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^n}{1 - r}.$$

Assim, quando $|r| < 1$, r^n tende a zero quando n tende ao infinito, logo a série geométrica converge para $1/(1 - r)$.

APÊNDICE B – Conceitos e Resultados Importantes de Números Complexos

Para um bom entendimento da hipótese de Riemann é importante termos um conhecimento básico de números complexos. Detalhamos aqui alguns resultados que serão utilizados. Um bom resumo e mais detalhado em alguns pontos podem ser encontrados em Nachbin (2007).

B.1 Séries de Taylor

A série de Taylor no domínio complexo é bem similar ao domínio real conforme teorema a seguir válido para funções analíticas.

Definição B.1 (Funções Analíticas). *A classe de funções analíticas é formada por funções complexas de variável complexa que possui derivada em qualquer ponto que a função está definida. O termo holomorfa é frequentemente utilizado como sinônimo.*

Teorema B.1 (Séries de Taylor). *Se f uma função analítica numa região Ω , contendo z_0 , então a representação*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(z_0)(z - z_0)^i}{i!}$$

é válida no maior disco aberto de centro z_0 contido em Ω . Para o caso típico $z_0 = 0$, temos

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)(z)^i}{i!}.$$

Alguns exemplos de funções e suas expansões em série de Taylor:

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (73)$$

$$\cos(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} = 1 - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (74)$$

$$\text{sen}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (75)$$

$$\log(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} z^j}{j} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n z^n}{n} + \dots \quad (76)$$

B.2 Fórmula de Euler

A fórmula de Euler traz uma relação entre as funções exponencial complexa e trigonométricas que foi descoberta também por Leonhard Euler descrita na proposição a seguir.

Proposição B.2. *Seja z um número complexo, então*

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z,$$

fazendo $z = \pi$ na equação acima, temos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi.$$

Que pode ser escrito como

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Considerada uma das mais belas equações da matemática ao reunir as mais comuns e importantes constantes: $0, 1, i, \pi, e$. A demonstração da Proposição B.2 pode ser feita por expansão em séries de Taylor das funções exponenciais, cosseno e seno em domínio complexo vistas nas equações 73, 74 e 75.

Demonstração. Utilizando a equação (73) para iz :

$$e^{iz} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^j}{j!}.$$

□

Agora, pode-se utilizar o fato que $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$ e, portanto

tem-se $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ para escrever

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{4k}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{4k+1}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{4k+2}}{(4k+2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{4k}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-z^{4k+2}}{(4k+2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{iz^{4k+1}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-iz^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Usando as equações (74) e (75), obtemos

$$e^{iz} = \cos(z) + i\operatorname{sen}(z).$$

B.3 Convergência Absoluta de uma Série

Inicialmente, algumas definições importantes.

Definição B.3 (Convergência Absoluta). *Uma série (complexa ou real) $\sum_n a_n$ é dita absolutamente convergente se a série dos valores absolutos $\sum_n |a_n|$ é convergente.*

Definição B.4 (Convergência Condicional). *Se a série é convergente, mas a série com valores absolutos não, então a convergência dessa série é chamada condicional.*

Um clássico exemplo de convergência condicional é a série harmônica alternada que pode ser escrita em termos de da função $\eta(1)$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \eta(1).$$

Nessa série pode-se aplicar o teste de séries alternadas visto na Proposição A.4 o qual a série claramente atende a todos os critério, sendo, portanto, convergente. Pelo fato da série harmônica ser divergente percebe-se que, de fato, a série tem uma convergência condicional. Pode-se, inclusive, calcular o valor da série, utilizando a equação (76) para $z = 1$:

$$\ln 2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \eta(1).$$

Um fato curioso das séries que convergem condicionalmente é que o valor da soma varia conforme troca-se a ordem dos termos da séries. Para ilustrar considere:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2.$$

Multiplicando por 2:

$$2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \dots = 2 \ln 2.$$

Se adicionarmos os termos com os mesmos denominadores pode-se rearranjar os termos de forma que:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = 2 \ln 2.$$

No entanto, chegamos na mesma série alternada que tínhamos visto que o valor era $\ln 2$. Essa observação foi descoberta por Peter Lejeune-Dirichlet em 1827 e explicado depois por Bernard Riemann que provou que uma série condicionalmente convergente converge para qualquer valor com um rearranjo dos termos ou mesmo divergir. Por outro lado, séries absolutamente convergentes possuem a mesma soma, independentemente do arranjo dos termos (ARWASHAN, 2021). Esse é o exatamente o caso da expansão de Taylor de e^{ix} conforme 73.

$$e^{ix} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{ix^j}{j!} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

Cuja a série dos termos absolutos é:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x^j|}{j!}.$$

O qual se pode utilizar o critério de convergência da razão visto em A.2:

$$r = \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \frac{|x|}{n+1}.$$

O que claramente converge para zero quando n tende ao infinito, portanto a série converge absolutamente.

B.4 Exponencial e Logaritmo Complexo

A expressão em coordenadas polares de um número complexo não nulo é dada por

$$z = re^{i\varphi}.$$

O qual podemos calcular a exponencial da seguinte forma

$$z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Um número complexo z pode ser representado em coordenadas polares:

$$z = r e^{i(\phi+2\pi k)}$$

Em que o argumento principal $\phi \in (-\pi, \pi]$. Aplicando o logaritmo complexo:

$$\begin{aligned} \log z &= \ln(re^{i(\phi+2\pi k)}) \\ &= \ln r + i(\phi + 2\pi k) \end{aligned}$$

Como um número complexo possui infinitos argumentos, a função logaritmo nos complexos pode assumir infinitos valores. Para tornar a função logaritmo complexa bem definida, é definido um ramo para cada valor de $k \in \mathbb{Z}$. Quando o argumento principal $k = 0$ chama-se o ramo principal da função logarítmica complexa.

B.5 Integral Complexa

A integral no plano complexo possui similaridades com a integral feita nos números reais. No entanto, como no plano complexo existem infinitos caminhos possíveis entre dois pontos, é necessário definir uma curva $\gamma(t)$ no plano complexo para especificar o caminho da integral. Seja $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ a curva em questão e faremos uma divisão de $(n - 1)$ segmentos $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ com $a = z_0 = \gamma(t_0)$, $z_j = \gamma(t_j)$ e $b = z_n = \gamma(t_n)$ como mostrado na Figura 21. A integral complexa é definida como o limite do somatório abaixo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(z_j)(z_{j+1} - z_j).$$

Substituindo $z_j = \gamma(t_j)$, temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(\gamma(t_j))(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)).$$

Agora, multiplique e divida por $(t_{j+1} - t_j)$ no somatório:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(\gamma(t_j)) \frac{(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j))}{(t_{j+1} - t_j)} (t_{j+1} - t_j).$$

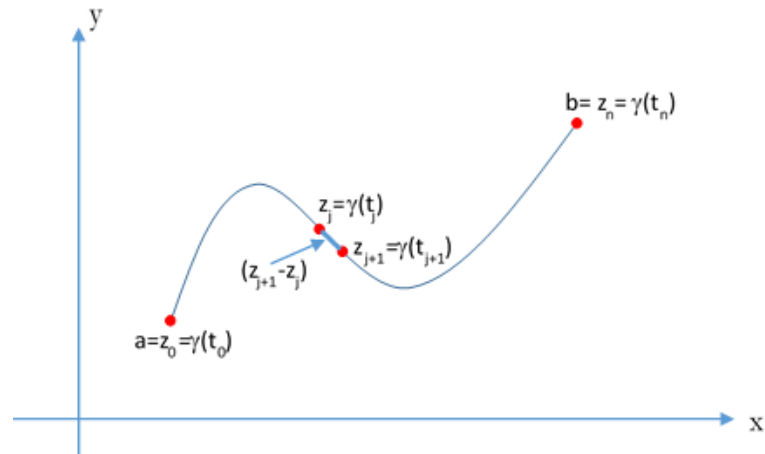


Figura 21 - Contorno de uma integral complexa.

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

Observe que no limite acima quando n tende ao infinito o termo $\frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{(t_{j+1} - t_j)}$ é justamente a derivada $d\gamma(t)$ em relação a t . Assim, podemos escrever

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_n} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (77)$$

Uma observação importante é que se $f(z)$ for uma função analítica no domínio D em que a curva γ está contida, então com a sua função primitiva $F(t)$ qual que $F'(z) = f(z)$ temos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_n} F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Pela regra da cadeia obtemos

$$\frac{d[F(\gamma(t))]}{dt} = F'(\gamma(t)) \gamma'(t).$$

Substituindo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{t_0}^{t_n} \frac{d[F(\gamma(t))]}{dt} dt \\ &= F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

O que indica que se $f(z)$ for analítica no domínio D e a e b são pontos nesse domínio, então a integral de $f(z)$ de a até b é independente do caminho!

B.5.1 Desigualdade ML

A desigualdade ML é um resultado muito utilizado em estimativas de integrais de contorno. Vamos retomar o resultado encontrado na seção anterior na equação (77):

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_n} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Aplicando o módulo nos dois lados e aplicando a desigualdade triangular ($|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$), temos

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{t_0}^{t_n} |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt.$$

Ou seja,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{t_0}^{t_n} |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt.$$

Seja M o máximo valor de $f(z)$ sob a curva $\gamma(t)$, então

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \int_{t_0}^{t_n} |\gamma'(t)| dt.$$

Podemos escrever No comprimento de $l(\gamma)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{\Delta t} \right| \Delta t \\ &= \int_{t_0}^{t_n} |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

Logo, chegamos no resultado conhecido como a desigualdade ML:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M l(\gamma). \tag{78}$$

B.6 Teorema dos Resíduos

Seja $f(z)$ uma função analítica no domínio D (incluindo a fronteira) e sejam 1 e 2 dois pontos quaisquer na fronteira de D , então a integral de 1 a 2 é independente do caminho, em particular a integral de 1 a 2 seguindo o caminho no sentido horário é igual

a integral de 1 a 2 no sentido anti-horário. Assim, podemos escrever que

$$\oint_D f(z)dz = 0. \quad (79)$$

Agora, considere a função $g(z) = f(z)/(z - z_0)$, em que z_0 é um ponto no interior do domínio D . A função $g(z)$ é analítica em D com exceção do ponto z_0 . A fórmula de Cauchy afirma que

$$\oint_D \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (80)$$

Agora, para uma função $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ que não está definida em $z = z_0$, z_0 é chamado polo de $g(z)$ e o resíduo de $g(z)$ no ponto z_0 é por definição dado por

$$Res(g, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)(z - z_0) = f(z_0).$$

E se a função $g(z)$ tem n polos no domínio D podemos escrever o seguinte teorema

Teorema B.2 (Teorema dos resíduos).

$$\oint_D g(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n Res(g, z_k). \quad (81)$$

A demonstração desses resultados descritos podem ser encontrados em Nachbin (2007) e Ahlfors (1966).

APÊNDICE C – Transformada de Fourier

Será definido um importante conceito amplamente utilizado na matemática e física: a transformada de Fourier.

Definição C.1 (Transformada de Fourier). *A transformada de Fourier da função de variável complexa $s(t)$ é dada por*

$$\mathfrak{F}(s(t)) = \hat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i2\pi\omega t} dt. \quad (82)$$

A função $s(t)$ pode ser recuperada da transformada de Fourier pela inversa da transformada dada por

$$s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\omega)e^{i2\pi\omega\tau} d\omega. \quad (83)$$

C.1 Série de Fourier

A série de Fourier da função periódica $s(t)$ é dada por

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i2\pi k\omega_0 t}. \quad (84)$$

O coeficiente de Fourier

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T s(t)e^{-i2\pi k\omega_0 t} dt. \quad (85)$$

Em que T e ω_0 são o período e a frequência, respectivamente, e guardam a relação $\omega_0 = 1/T$.

C.2 Relação entre a Transformada e Séries de Fourier

Seja $f(t)$ uma função complexa definida no intervalo $[0, T]$ e igual a zero fora do intervalo. Claramente $f(t)$ não é periódica, construa a função $g(t)$ periódica de período T , em que $g(t) = f(t)$ no intervalo $[0, T]$. Agora, como $g(t)$ é periódica podemos escrever

sua série de Fourier dada por

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i2\pi k\omega_0 t}. \quad (86)$$

Com o coeficiente de Fourier

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T g(t) e^{-i2\pi k\omega_0 t} dt. \quad (87)$$

Como $f(t)$ e $g(t)$ são idênticas entre $[0, T]$, então podemos escrever a equação acima como

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T f(t) e^{-i2\pi k\omega_0 t} dt. \quad (88)$$

Temos que $f(t)$ é nula fora do intervalo $[0, T]$ e $\omega_0 = 1/T$, portanto

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt.$$

Veja que a integral acima é justamente a transformada de Fourier definida. Assim, temos que

$$C_k = \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right),$$

e por (86), obtemos

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right) e^{i2\pi \frac{k}{T} t}. \quad (89)$$

Se limitarmos t apenas no domínio $[0, T]$, podemos escrever em termos de $f(t)$ que

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right) e^{i2\pi \frac{k}{T} t} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Se considerarmos t como uma constante e que a nova variável seja ω , que é o argumento de \hat{f} podemos escrever que

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i2\pi \omega t} \quad \text{com } \omega = \frac{k}{T}.$$

A última expressão nos lembra a soma de Riemann, informalmente temos quando T tende ao infinito, $\Delta\omega = 1/T$ tende a zero. Assim, podemos escrever a seguinte equação:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega.$$

Que é justamente a transformada inversa de Fourier.

Para mais detalhes dos assuntos tratados nessa seção consultar Stein e Shakarchi (2003) e Iório (2018).

APÊNDICE D – A Equação Funcional da Função Teta de Jacobi

D.1 Introdução

Vamos definir também uma importante função de variável complexa.

Definição D.1 (Função Theta de Jacobi). *A função Theta de Jacobi é uma função da forma:*

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)}$$

Em que z e τ são variáveis complexas com a parte imaginária de τ positiva. Quando $z = 0$ e $\tau = iu$, a função Theta de Jacobi torna-se

$$\phi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \tag{90}$$

que é justamente a função encontrada na Proposição 4.4. Na qual possui a seguinte equação funcional

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \phi\left(\frac{1}{u}\right)$$

que foi utilizada na demonstração da equação funcional da função Zeta e será demonstrada, utilizando a fórmula do somatório de Poisson e transformada de Fourier da função $f(x) = e^{-\pi x^2 a}$.

D.2 Fórmula do Somatório de Poisson

Seja $f(x)$ uma função suave, ou seja, infinitamente diferenciável e que tende a zero quando x tende ao infinito. A fórmula do somatório de Poisson é a relação de igualdade entre as duas séries a seguir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}(n). \tag{91}$$

Em que \hat{F} é a transformada de Fourier de F . Para demonstrar a equação (91) vamos definir a seguinte equação

$$G(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n+v). \quad (92)$$

Observe que

$$G(v+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n+(v+1)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F((n+1)+v).$$

Como n varia de $-\infty$ até ∞ , adicionar 1 não faz diferença, portanto $G(v+1) = G(v)$. Assim, $G(v)$ é uma função periódica de período 1 e, portanto, podemos escrever sua série de Fourier da seguinte forma

$$G(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_m e^{2\pi i m v}. \quad (93)$$

Em que C_m é o coeficiente de Fourier

$$C_m = \int_0^1 G(v) e^{-2\pi i m v} dv.$$

Substituindo $G(v)$ pela equação (92)

$$\begin{aligned} C_m &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n+v) e^{-2\pi i m v} dv \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 F(n+v) e^{-2\pi i m v} dv. \end{aligned}$$

Fazendo a alteração de variável $n+v = x$ ($dv = dx$), temos

$$\begin{aligned} C_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} F(x) e^{-2\pi i m (x-n)} dx \\ &= \int_{n=-\infty}^{\infty} F(x) e^{-2\pi i m (x)} e^{2\pi i m (n)} dx. \end{aligned}$$

Observe que $e^{2\pi i m (n)} = \cos(2\pi m n) + i \operatorname{sen}(2\pi m n) = 1$. Assim,

$$C_m = \int_{n=-\infty}^{\infty} F(x) e^{-2\pi i m x} dx.$$

A equação acima é justamente a transformada de Fourier da função $F(x)$, logo $C_m = \hat{F}(m)$ e podemos escrever pelas equações (92) e (93) a seguinte expressão

$$G(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n+v) = G(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{F}(m)e^{2\pi imv}.$$

que também é válida para $v = 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{F}(m).$$

D.3 Transformada de Fourier da $f(x) = e^{-\pi x^2 a}$

Nessa seção vamos mostrar que

$$\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2 a}) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi \frac{u^2}{a}}.$$

Para mostrar a equação acima, vamos mostrar que a transformada de Fourier a função $g(x) = e^{-\pi x^2}$ é igual a própria função, ou seja, $\hat{g}(u) = e^{-\pi u^2}$. Pela definição da transformada de Fourier vista na equação (82), temos

$$\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x u} dx.$$

Queremos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x u} dx = e^{-\pi u^2}.$$

Dividindo por $e^{-\pi u^2}$:

$$e^{\pi u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x u} dx = 1.$$

Como $e^{\pi u^2}$ é constante em relação a variável x , temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi u^2} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x u} dx = 1.$$

Assim, podemos escrever o expoente da exponencial da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2 + 2ixu + (iu)^2)} dx = 1.$$

Observe que o expoente da exponencial pode ser escrito como um quadrado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+iu)^2} dx = 1.$$

Queremos mostrar que a integral do lado esquerdo é constante igual a 1. Vamos calcular a derivada em relação a u abaixo

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+iu)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial u} e^{-\pi(x+iu)^2} \right) dx. \quad (94)$$

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial u} e^{-\pi(x+iu)^2} = -i2\pi(x+iu)e^{-\pi(x+iu)^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-\pi(x+iu)^2} = -2\pi(x+iu)e^{-\pi(x+iu)^2}.$$

Assim, temos que

$$\frac{\partial}{\partial u} e^{-\pi(x+iu)^2} = i \frac{\partial}{\partial x} e^{-\pi(x+iu)^2}.$$

Voltando para a equação (94)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+iu)^2} dx &= i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{-\pi(x+iu)^2} \right) dx \\ &= i \left[e^{-\pi(x+iu)^2} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= i[0 - 0] = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+iu)^2} dx = 0.$$

Portanto, a expressão $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+iu)^2} dx$ é uma constante. Falta provarmos que, de fato, essa constante vale 1. Vejamos quanto vale a integral para $u = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+iu)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx.$$

Seja

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx.$$

Observe que $I > 0$, pois $e^{-\pi x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vamos calcular, inicialmente, I^2 :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-\pi y^2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Utilizando coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$. Assim temos

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} dx dy &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, r)} \right| d\theta dr \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right| d\theta dr \\ &= | -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta - \cos \theta r \cos \theta | d\theta dr \\ &= r d\theta dr. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{-1}{2\pi} e^{-\pi r^2} \right]_0^{\infty} \\ &= [2\pi - 0] \left[0 - \frac{(-1)}{2\pi} \right] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como $I > 0$, temos que $I = 1$. Logo, concluímos que o valor da constante é 1 e vale que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+iu)^2} dx = 1.$$

Ou seja,

$$\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi u^2}. \quad (95)$$

Estamos buscando o valor de $\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2 a})$ o qual podemos escrever da seguinte forma mais conveniente para aplicar a transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2 a}) &= \mathfrak{F}(e^{-\pi(x\sqrt{a})^2}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x\sqrt{a})^2} e^{-2\pi i x u} dx.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $v = x\sqrt{a}$ ($dx = dv/\sqrt{a}$), temos

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2 a}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} e^{-2\pi i \frac{v}{\sqrt{a}} u} \frac{dv}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} e^{-2\pi i v \frac{u}{\sqrt{a}}} dv.\end{aligned}$$

Definindo $t = u/\sqrt{a}$, temos

$$\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2 a}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} e^{-2\pi i v t} dv.$$

A integral do lado direito é justamente a transformada de Fourier da função $e^{-\pi v^2}$, portanto

$$\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2 a}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathfrak{F}(e^{-\pi v^2}).$$

Conforme vimos em (95) que

$$\mathfrak{F}(e^{-\pi v^2}) = e^{-\pi t^2}.$$

Assim,

$$\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2 a}) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi t^2}.$$

Voltando para a variável u pela relação $t = u/\sqrt{a}$, chegamos que

$$\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2 a}) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi(\frac{u}{\sqrt{a}})^2}. \quad (96)$$

D.4 A Equação Funcional da Função Theta de Jacobi

Voltando para definição da função $\phi(a)$ vista na equação (90)

$$\phi(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 a}.$$

Aplicando a Fórmula do Somatório de Poisson, temos

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 a} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(e^{-\pi n^2 a}). \end{aligned}$$

Utilizando agora a equação (96):

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(e^{-\pi n^2 a}) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi(\frac{m^2}{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\frac{m^2}{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Portanto, mostramos a equação funcional da função ϕ :

$$\phi(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{1}{a}\right).$$

APÊNDICE E – As Equações Funcionais da Função Gama - Duplicação de Legendre e Reflexão de Euler

Como citado na Seção 4.5 foram utilizadas duas equações funcionais de Gama as quais serão demonstradas a seguir.

E.1 A Função Beta e a Prova da Fórmula de Duplicação de Legendre

A fórmula de duplicação de Legendre foi definida na equação (38) e pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma(s + 1/2).$$

Para demonstrar a equação acima vamos introduzir a função beta $B(x, y)$:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (97)$$

Em que x e y são números complexos com partes reais positivas ($Re(x) > 0$ e $Re(y) > 0$). A função beta e a Gama tem a seguinte relação:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (98)$$

A demonstração da relação acima pode ser verificada começando com a definição de Gama:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du.$$

Escrevendo o produto $\Gamma(x)\Gamma(y)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du \int_0^{\infty} v^{y-1} e^{-v} dv \\ &= \int_{u=0}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} e^{-(u+v)} u^{x-1} v^{y-1} dv du. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = zt$ e $v = z - zt = z(1-t)$. Quando $t = 0$, temos $u = 0$ e quando t tende a 1 e z tende a infinito, u tende ao infinito. Para a variável v , quando $t = 1$, temos $v = 0$; e quando t tende a zero e z tende a infinito, temos v tende

ao infinito. Assim, podemos reescrever a integral acima como

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{z=0}^{\infty} \int_{t=0}^1 e^{-zt-(z-zt)}(zt)^{x-1}(z-zt)^{y-1}|J(t,z)|dtdz. \quad (99)$$

Em que $J(x,y)$ é chamado de Jacobiano cujo o módulo é dado por:

$$|J(x,y)| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(t,z)} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial t} \right| = |z(1-t) - t(z)| = |z| = z.$$

Assim, substituindo na equação (99) e simplificando:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{z=0}^{\infty} \int_{t=0}^1 e^{-z} z^{x+y-1} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dtdz.$$

Separando nas duas integrais:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{z=0}^{\infty} e^{-z} z^{x+y-1} dz \int_{t=0}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Agora, perceba que a primeira integral é justamente a definição de Gama para $(x+y)$, enquanto a segunda integral é a definição de $B(x,y)$. Logo, chegamos no resultado esperado na equação (98):

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y).$$

Voltando para a definição de beta na equação (97), fazendo $x = y = s$, temos

$$B(s,s) = \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{s-1} dt.$$

Fazendo a mudança de variável $t = (1+p)/2$ ($dt = dp/2$). Quando $t = 0$, temos $p = -1$ e quando $t = 1$, temos $p = 1$. Assim, chegamos em

$$B(s,s) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+p}{2}\right)^{s-1} \left(1 - \frac{1+p}{2}\right)^{s-1} \frac{dp}{2}.$$

Simplificando, temos que

$$\begin{aligned} B(s,s) &= \frac{1}{2^{s-1}} \frac{1}{2^{s-1}} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1+p)^{s-1} (1-p)^{s-1} dp \\ &= 2^{2-2s} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-p^2)^{s-1} dp. \end{aligned}$$

Como temos $(1 - p^2) = (1 - (-p)^2)$, a integral pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} B(s, s) &= 2^{2-2s} \frac{1}{2} 2 \int_0^1 (1 - p^2)^{s-1} dp \\ &= 2^{2-2s} \int_0^1 (1 - p^2)^{s-1} dp. \end{aligned}$$

Alterando a variável novamente para $p = \sqrt{q}$ ($dp = 1/2q^{-1/2}dq$). Observe que os limites de integração não se alteram, assim temos

$$B(s, s) = 2^{2-2s} \int_0^1 (1 - q)^{s-1} \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{2}} dq.$$

Que pode ser simplificado para

$$B(s, s) = 2^{1-2s} \int_0^1 q^{-\frac{1}{2}} (1 - q)^{s-1} dq.$$

Observe que a integral do lado direito pela definição de beta da equação (97) para $B(1/2, s)$:

$$B(s, s) = 2^{1-2s} B\left(\frac{1}{2}, s\right).$$

Usando a relação de beta e Gama na equação (98) para $x = y = s$ e utilizando a equação acima, temos

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(s+s)} = B(s, s) = 2^{1-2s} B\left(\frac{1}{2}, s\right).$$

Simplificando e calculando $\Gamma(2s)$:

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right). \quad (100)$$

Para finalizar a demonstração da fórmula de duplicação de Legendre precisamos calcular o valor de $\Gamma(1/2)$. Para isso vamos usar a fórmula de reflexão de Euler que será demonstrada na próxima seção. No entanto, conforme veremos vamos utilizar apenas a forma descrita na equação (100), portanto não há problemas em utilizá-la. Recordando a fórmula de reflexão de Euler vista na equação (37):

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)}.$$

Fazendo $s = 1/2$, temos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

e chegamos no resultado

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

O que nos leva, finalmente, na expressão final a partir da equação (100):

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right).$$

E.2 A Prova da Fórmula de Reflexão de Euler

Relembrando da fórmula de reflexão de Euler vista na equação (37):

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi s}.$$

A demonstração apresentada aqui foi encontrada em (ARTIN; BUTLER, 1964). Vamos definir a seguinte função:

$$\varphi(s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s)\operatorname{sen}(\pi s). \quad (101)$$

O objetivo é mostrar que essa função é constante (e igual a π) Calculando o valor em $(s+1)$:

$$\varphi(s+1) = \Gamma(s+1)\Gamma(-s)[- \operatorname{sen}(\pi s)]. \quad (102)$$

Relembrando a equação funcional de Gama (25):

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \quad (103)$$

que vale também para o valor $(-s)$

$$\Gamma(-s+1) = (-s)\Gamma(-s).$$

Assim,

$$\Gamma(-s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{s}. \quad (104)$$

Substituindo as equações (104), (103) em (102), temos

$$\begin{aligned}\varphi(s+1) &= [s\Gamma(s)]\left[-\frac{\Gamma(1-s)}{s}\right] [-\text{sen}(\pi s)] \\ &= \Gamma(s)\Gamma(1-s)\text{sen}(\pi s).\end{aligned}$$

Observe que do lado direito temos justamente a equação (101) da definição de $\varphi(s)$:

$$\varphi(s+1) = \varphi(s). \quad (105)$$

A equação (105) nos diz que a função $\varphi(s)$ é uma função periódica de período 1.

Agora, vamos utilizar a equação vista na seção na demonstração da fórmula de duplicação de Legendre (100):

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right).$$

Seja $b = 2\Gamma(1/2)$, assim podemos escrever:

$$b2^{-2s}\Gamma(2s) = \Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right).$$

Escrevendo a expressão acima para $s/2$:

$$b2^{-s}\Gamma(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right). \quad (106)$$

Escrevendo a equação acima para $(1-s)$:

$$b2^{s-1}\Gamma(1-s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right). \quad (107)$$

Voltando para função $\varphi(s)$ e calculando a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{s}{2}\right)\varphi\left(\frac{s+1}{2}\right) &= \left[\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\right] \left[\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{s+1}{2}\right)\text{sen}\left(\pi\frac{s+1}{2}\right)\right] \\ &= \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right).\end{aligned}$$

Utilizando as equações (106) e (107) e utilizando a relação trigonométrica $2\text{sen}(\pi s/2)\cos(\pi s/2) = \text{sen}(\pi s)$, temos

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{s}{2}\right)\varphi\left(\frac{s+1}{2}\right) &= \left[b2^{-s}\Gamma(s)\right] \left[b2^{s-1}\Gamma(1-s)\right] \frac{1}{2}\text{sen}(\pi s) \\ &= \frac{b^2}{4}\Gamma(s)\Gamma(1-s)\text{sen}(\pi s).\end{aligned}$$

Chamando a constante $b^2/4 = c$ e usando a definição de $\varphi(s)$ em (101), obtemos

$$\varphi\left(\frac{s}{2}\right)\varphi\left(\frac{s+1}{2}\right) = c\varphi(s).$$

Aplicando o logaritmo:

$$\ln \varphi\left(\frac{s}{2}\right) + \ln \varphi\left(\frac{s+1}{2}\right) = \ln c + \ln \varphi(s).$$

Sejam $u = s/2$ e $v = (s+1)/2$, temos

$$\ln \varphi(u) + \ln \varphi(v) = \ln c + \ln \varphi(s).$$

Derivando em relação a s :

$$\frac{d[\ln \varphi(u)]}{du} \frac{du}{ds} + \frac{d[\ln \varphi(v)]}{dv} \frac{dv}{ds} = 0 + \frac{d[\ln \varphi(s)]}{ds}.$$

Temos pela definição que $du/ds = dv/ds = 1/2$, assim

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d[\ln \varphi(u)]}{du} + \frac{d[\ln \varphi(v)]}{dv} \right] = \frac{d[\ln \varphi(s)]}{ds}.$$

Derivando mais uma vez em relação a s :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d^2[\ln \varphi(u)]}{du^2} \frac{du}{ds} + \frac{d^2[\ln \varphi(v)]}{dv^2} \frac{dv}{ds} \right] = \frac{d^2[\ln \varphi(s)]}{ds^2}.$$

Novamente usando que $du/ds = dv/ds = 1/2$, podemos escrever

$$\frac{1}{4} \left[\frac{d^2[\ln \varphi(u)]}{du^2} + \frac{d^2[\ln \varphi(v)]}{dv^2} \right] = \frac{d^2[\ln \varphi(s)]}{ds^2}. \quad (108)$$

Defina uma nova função $g(s)$ da seguinte forma

$$g(s) = \frac{d^2[\ln \varphi(s)]}{ds^2}.$$

Substitua na equação (108) e voltando com as definições de $u = s/2$ e $v = (s+1)/2$, temos

$$\frac{1}{4} \left[g\left(\frac{s}{2}\right) + g\left(\frac{s+1}{2}\right) \right] = g(s).$$

Como $\varphi(s)$ é periódica, as funções $\ln \varphi(s)$ e $g(s)$ também são periódicas (e contínuas). Assim, a função $g(s)$ é limitada por um valor M , tal que $|g(s)| \leq M$. Portanto

$$g(s) = \frac{1}{4} \left[g\left(\frac{s}{2}\right) + g\left(\frac{s+1}{2}\right) \right]$$

$$|g(s)| \leq \frac{1}{4} \left| g\left(\frac{s}{2}\right) \right| + \frac{1}{4} \left| g\left(\frac{s+1}{2}\right) \right|.$$

Logo, concluímos

$$|g(s)| \leq \frac{M}{2}.$$

Podemos repetir esse processo indefinidamente, em cada etapa dividindo o valor pela metade. Assim concluí-se que $g(s)$ deve ser zero. Como esta função é a segunda derivada de $\log \varphi(s)$, temos que a função $\log \varphi(s)$ é linear. No entanto, como essa função é também periódica, devemos ter que a $g(s)$ na verdade é uma função constante. Para encontrar esse valor vamos utilizar a definição de (101):

$$\varphi(s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s)\text{sen}(\pi s).$$

e também da equação funcional de Gama vista em (25):

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Sabemos pela equação (75) que a expansão de Taylor da função seno é dada por:

$$\text{sen}(\pi s) = \pi s - \frac{(\pi s)^3}{3!} + \frac{(\pi s)^5}{5!} - \dots$$

Substituindo $\Gamma(s)$ e a expansão de Taylor de $\text{sen} \pi s$ na definição de $\varphi(s)$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{\Gamma(s+1)}{s} \Gamma(1-s) \left(\pi s - \frac{(\pi s)^3}{3!} + \frac{(\pi s)^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \Gamma(s+1) \Gamma(1-s) \left(\pi - \frac{(\pi s)^2}{3!} + \frac{(\pi s)^4}{5!} - \dots \right). \end{aligned}$$

Fazendo $s = 0$

$$\varphi(s) = \Gamma(1)\Gamma(1)(\pi - 0 + 0 - \dots) = \pi.$$

Logo a função constante possui valor $\varphi(s) = \pi$ como queríamos verificar. Finalmente, chegamos na fórmula da reflexão de Euler

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi s)}.$$

APÊNDICE F – Cálculo da Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds$ ($y > 0, a > 0$)

Durante a Seção 7.2, especificamente na equação (64) foi utilizado o seguinte resultado

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < y < 1, \\ 1/2, & \text{se } y = 1, \\ 1, & \text{se } y > 1, \end{cases}$$

que será demonstrada nos casos a seguir.

F.1 Caso 1: $0 < y < 1$

Vamos calcular a integral no contorno fechado mostrado na Figura 22.

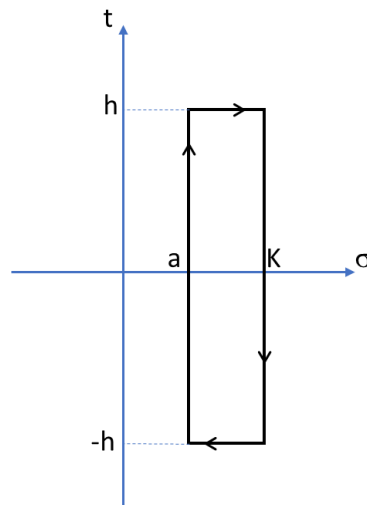


Figura 22 - Contorno da integral quando $0 < y < 1$

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

O integrando tem um polo quando $s = 0$ que está fora do domínio de interesse, então pelo teorema do resíduo temos que

$$\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds + \int_{a+ih}^{k+ih} \frac{y^s}{s} ds + \int_{k+ih}^{k-ih} \frac{y^s}{s} ds + \int_{k-ih}^{a-ih} \frac{y^s}{s} ds = 0.$$

Isolando o primeiro termo e invertendo os limites de integração dos últimos dois termos:

$$\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds = - \int_{a+ih}^{k+ih} \frac{y^s}{s} ds + \int_{k-ih}^{k+ih} \frac{y^s}{s} ds + \int_{a-ih}^{k-ih} \frac{y^s}{s} ds. \quad (109)$$

Observe o segundo termo do lado direito, podemos escrever $s = k + it$, com t variando no intervalo $[-h, h]$, enquanto o integrando y^s/s torna-se:

$$\frac{y^{k+it}}{k+it} = \frac{y^k (\cos(k \log y) + i \operatorname{sen}(k \log y))}{k+it}$$

A magnitude do numerador é menor ou igual a y^k , enquanto o denominador é maior ou igual a k , assim podemos escrever:

$$\left| \frac{y^{k+it}}{k+it} \right| \leq \frac{y^k}{k}.$$

Usando a desigualdade ML vista em B.5.1:

$$\left| \int_{k-ih}^{k+ih} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \frac{y^k}{k} 2h. \quad (110)$$

Verificando agora a primeira integral do lado direito da equação (109) cujos os limites de integração vai de $a + ih$ até $k + ih$. Assim o caminho pode ser escrito como $\gamma(\sigma) = \sigma + ih$ com $\gamma'(\sigma) = 1$. Utilizando a fórmula da integral complexa vista em B.5, temos

$$\int_{a+ih}^{k+ih} \frac{y^s}{s} ds = \int_a^k \frac{y^{\sigma+ih}}{\sigma+ih} (1) d\sigma.$$

Como temos $|\sigma + ih| \geq h$ e $|y^{\sigma+ih}| \geq y^\sigma$

$$\left| \int_{a+ih}^{k+ih} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \left| \int_a^k \frac{y^\sigma}{h} d\sigma \right| = \left| \left[\frac{y^\sigma}{h \log y} \right]_a^k \right| = \frac{|y^k - y^a|}{h |\log y|}.$$

Assim,

$$\left| \int_{a+ih}^{k+ih} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \frac{|y^k - y^a|}{h |\log y|}. \quad (111)$$

O mesmo resultado pode ser obtido para a terceira integral do lado direito da equação (109). Voltando para esta equação, substituindo os resultados encontrados em (110) e (111), temos que

$$\left| \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \frac{y^k}{k} 2h + 2 \frac{|y^k - y^a|}{h |\log y|}.$$

No caso $0 < y < 1$, temos que ao fazer k tender ao infinito, y^k tende a zero. Assim,

$$\left| \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq 2 \frac{y^a}{h |\log y|}.$$

Quando h tende ao infinito, temos

$$\left| \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq 0.$$

Portanto,

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = 0.$$

Logo, chegamos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = 0.$$

F.2 Caso 2: $y = 1$

Nesse caso, a integral em questão torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{1}{s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow \infty} [\log s]_{a-ih}^{a+ih} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow \infty} [\log(a+ih) - \log(a-ih)]. \end{aligned}$$

O qual pela definição de logaritmo complexo visto em B.4, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \left[\log(\sqrt{a^2+h^2}) + i \left(\operatorname{arctg} \frac{h}{a} \right) \right] - \right. \\ &\left. \left[\log(\sqrt{a^2+(-h)^2}) + i \left(\operatorname{arctg} \frac{-h}{a} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Simplificando, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \left[i \left(\operatorname{arctg} \frac{h}{a} \right) \right] - \left[i \left(\operatorname{arctg} \frac{-h}{a} \right) \right] \right\}.$$

Utilizando o ramo principal da função logaritmo, quando h tende ao infinito, temos

$\arctg(h/a)$ tendendo a $\pi/2$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left[i \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] - \left[i \left(\frac{-\pi}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \{ i\pi \}. \end{aligned}$$

Logo, chegamos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = \frac{1}{2}.$$

F.3 Caso 3: $y > 1$

Nesse caso será feita uma abordagem similar a feita no primeiro caso. No entanto, vamos escolher um contorno fechado incluindo o poço ($s = 0$) como mostra a Figura 23. Pelo teorema dos resíduos visto na Seção B.6 a integral no contorno fechado acima (no

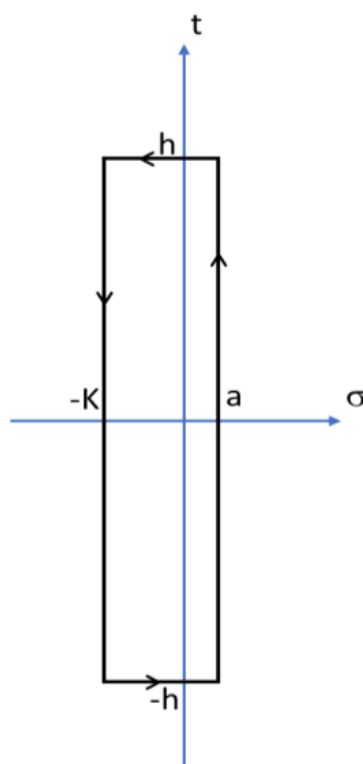


Figura 23 - Contorno fechado para $y > 1$.

Fonte: (ARWASHAN, 2021)

sentido anti-horário) torna-se igual ao valor do resíduo (nesse caso, $y^0 = 1$ multiplicado

por $2\pi i$. Assim, podemos escrever

$$\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds + \int_{a+ih}^{-k+ih} \frac{y^s}{s} ds + \int_{-k+ih}^{-k-ih} \frac{y^s}{s} ds + \int_{-k-ih}^{a-ih} \frac{y^s}{s} ds = 2\pi i. \quad (112)$$

Rearranjando os termos e alterando os limites de integração das últimas duas integrais:

$$\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds - 2\pi i = - \int_{a+ih}^{-k+ih} \frac{y^s}{s} ds + \int_{-k-ih}^{-k+ih} \frac{y^s}{s} ds + \int_{a-ih}^{-k-ih} \frac{y^s}{s} ds. \quad (113)$$

Utilizando os mesmos passos feito no primeiro caso podemos encontrar uma equação similar a (110), mas trocando o k por $-k$:

$$\left| \int_{-k-ih}^{-k+ih} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \frac{y^{-k}}{k} 2h.$$

De forma análoga ao que foi feito no primeiro caso também para a equação (111), temos para a primeira integral do lado direito da equação (113):

$$\left| \int_{a-ih}^{-k+ih} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \frac{|y^{-k} - y^a|}{h |\log y|}.$$

E o mesmo resultado acima vale também para a terceira integral da equação (113). Assim, da equação (113), temos

$$\left| \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds - 2\pi i \right| \leq \frac{y^{-k}}{k} 2h + 2 \frac{|y^{-k} - y^a|}{h |\log y|}.$$

Se k tender ao infinito para $y > 1$, então y^{-k} tende a zero:

$$\left| \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds - 2\pi i \right| \leq 2 \frac{y^a}{h \log y}.$$

Agora fazendo h tender ao infinito, temos

$$\left| \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds - 2\pi i \right| \leq 0.$$

Assim,

$$\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds = 2\pi i.$$

Logo, chegamos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{y^s}{s} ds = 1.$$

O que completa o cálculo da integral descrita.

ANEXO A – Artigo Riemann

Nesse anexo está disponível o artigo de Riemann traduzido do alemão para o inglês encontrado no livro Edwards (2001).

APPENDIX

On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude

by *BERNHARD RIEMANN*†

I believe I can best express my gratitude for the honor which the Academy has bestowed on me in naming me as one of its correspondents by immediately availing myself of the privilege this entails to communicate an investigation of the frequency of prime numbers, a subject which because of the interest shown in it by Gauss and Dirichlet over many years seems not wholly unworthy of such a communication.

In this investigation I take as my starting point the observation of Euler that the product

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

where p ranges over all prime numbers and n over all whole numbers. The function of a complex variable s which these two expressions define when they converge I denote by $\zeta(s)$. They converge only when the real part of s is greater than 1; however, it is easy to find an expression of the function which always is valid. By applying the equation

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s},$$

one finds first

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}.$$

If one considers the integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

†Translated from *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* [R1, p. 145] by H. M. Edwards.

from $+\infty$ to $+\infty$ in the positive sense around the boundary of a domain which contains the value 0 but no other singularity of the integrand in its interior, then it is easily seen to be equal to

$$(e^{-\pi st} - e^{\pi st}) \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

provided that in the many-valued function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ the logarithm of $-x$ is determined in such a way that it is real for negative values of x . Thus

$$2 \sin \pi s \Pi(s-1) \zeta(s) = i \int_{\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

when the integral is defined as above.

This equation gives the value of the function $\zeta(s)$ for all complex s and shows that it is single-valued and finite for all values of s other than 1, and also that it vanishes when s is a negative even integer.

When the real part of s is negative, the integral can be taken, instead of in the positive sense around the boundary of the given domain, in the negative sense around the complement of this domain because in that case (when $\text{Re } s < 0$) the integral over values with infinitely large modulus is infinitely small. But inside this complementary domain the only singularities of the integrand are at the integer multiples of $2\pi i$, and the integral is therefore equal to the sum of the integrals taken around these singularities in the negative sense. Since the integral around the value $n2\pi i$ is $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, this gives

$$2 \sin \pi s \Pi(s-1) \zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1} [(-i)^{s-1} + i^{s-1}],$$

and therefore a relation between $\zeta(s)$ and $\zeta(1-s)$ which, by making use of known properties of the function Π , can also be formulated as the statement that

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-s/2} \zeta(s)$$

remains unchanged when s is replaced by $1-s$.

This property of the function motivated me to consider the integral $\Pi((s/2) - 1)$ instead of the integral $\Pi(s-1)$ in the general term of $\sum n^{-s}$, which leads to a very convenient expression of the function $\zeta(s)$. In fact

$$\frac{1}{n^s} \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-s/2} = \int_0^{\infty} e^{-n\pi x} x^{(s/2)-1} dx;$$

so when one sets

$$\sum_1^{\infty} e^{-n\pi x} = \psi(x),$$

it follows that

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(x) x^{(s/2)-1} dx$$

or, because

$$2\psi(x) + 1 = x^{-1/2} \left[2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right] \quad (\text{Jacobi, Fund., p. 184}),$$

that

$$\begin{aligned} \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) &= \int_1^\infty \psi(x) x^{(s/2)-1} dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{(s-3)/2} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^{(s-3)/2} - x^{(s/2)-1}) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x) (x^{(s/2)-1} + x^{-(1+s/2)}) dx. \end{aligned}$$

I now set $s = \frac{1}{2} + ti$ and

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right) (s-1) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \xi(t)$$

so that

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - (tt + \frac{1}{4}) \int_1^\infty \psi(x) x^{-3/4} \cos(\frac{1}{2}t \log x) dx$$

or also

$$\xi(t) = 4 \int_1^\infty \frac{d[x^{3/2}\psi'(x)]}{dx} x^{-1/4} \cos\left(\frac{1}{2}t \log x\right) dx.$$

This function is finite for all finite values of t and can be developed as a power series in tt which converges very rapidly. Now since for values of s with real part greater than 1, $\log \zeta(s) = -\sum \log(1 - p^{-s})$ is finite and since the same is true of the other factors of $\xi(t)$, the function $\xi(t)$ can vanish only when the imaginary part of t lies between $\frac{1}{2}i$ and $-\frac{1}{2}i$. The number of roots of $\xi(t) = 0$ whose real parts lie between 0 and T is about

$$= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

because the integral $\int d \log \xi(t)$ taken in the positive sense around the domain consisting of all values whose imaginary parts lie between $\frac{1}{2}i$ and $-\frac{1}{2}i$ and whose real parts lie between 0 and T is (up to a fraction of the order of magnitude of $1/T$) equal to $[T \log (T/2\pi) - T]i$ and is, on the other hand, equal to the number of roots of $\xi(t) = 0$ in the domain multiplied by $2\pi i$. One finds in fact about this many real roots within these bounds and it is very likely that all of the roots are real. One would of course like to have a rigorous proof of this, but I have put aside the search for such a proof after some fleeting vain attempts because it is not necessary for the immediate objective of my investigation.

If one denotes by α the roots of the equation $\xi(\alpha) = 0$, then one can express $\log \xi(t)$ as

$$\sum \log\left(1 - \frac{tt}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0)$$

because, since the density of roots of size t grows only like $\log(t/2\pi)$ as t grows, this expression converges and for infinite t is only infinite like $t \log t$; thus it differs from $\log \xi(t)$ by a function of tt which is continuous and finite for finite t and which, when divided by tt , is infinitely small for infinite t . This difference is therefore a constant, the value of which can be determined by setting $t = 0$.

With these preparatory facts, the number of primes less than x can now be determined.

Let $F(x)$, when x is not exactly equal to a prime, be equal to this number, but when x is a prime let it be greater by $\frac{1}{2}$ so that for an x where $F(x)$ jumps

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}.$$

If one sets

$$p^{-s} = s \int_p^\infty x^{-s-1} dx, \quad p^{-2s} = s \int_{p^2}^\infty x^{-s-1} dx, \quad \dots$$

in the formula

$$\log \zeta(s) = -\sum \log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2} \sum p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum p^{-3s} + \dots,$$

one finds

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x)x^{-s-1} dx$$

when one denotes

$$F(x) + \frac{1}{2}F(x^{1/2}) + \frac{1}{3}F(x^{1/3}) + \dots$$

by $f(x)$.

This equation is valid for every complex value $a + bi$ of s provided $a > 1$. But when in such circumstances

$$g(s) = \int_0^\infty h(x)x^{-s} d \log x$$

is valid, the function h can be expressed in terms of g by means of Fourier's theorem. The equation splits when h is real and when $g(a + bi) = g_1(b) + ig_2(b)$ into the two equations

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x)x^{-a} \cos(b \log x) d \log x,$$

$$ig_2(b) = -i \int_0^\infty h(x)x^{-a} \sin(b \log x) d \log x.$$

When both equations are multiplied by $[\cos(b \log y) + i \sin(b \log y)] db$ and integrated from $-\infty$ to $+\infty$, one finds in both cases that the right side is $\pi h(y)y^{-a}$ so that when they are added and multiplied by iy^a

$$2\pi ih(y) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} g(s)y^s ds,$$

where the integration is to be carried out in such a way that the real part of s remains constant.†

The integral represents, for a value of y where the function $h(y)$ has a jump, the middle value between the two values of h on either side of the jump. The function f was defined in such a way that it too has this property, so one has in full generality

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s ds.$$

For $\log \zeta$ one can now substitute the expression

$$\begin{aligned} & \frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1) - \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \\ & + \sum_{\alpha} \log \left[1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha} \right] + \log \xi(0) \end{aligned}$$

found above; the integrals of the individual terms of this expression will not converge, however, when they are taken to infinity, so it is advantageous to reformulate the equation as

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d \frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} x^s ds$$

by integration by parts.

Since

$$-\log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \lim \left[\sum_{n=1}^m \log \left(1 + \frac{s}{2n} \right) - \frac{s}{2} \log m \right]$$

for $m = \infty$ and therefore,

$$-\frac{d \frac{1}{s} \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_1^{\infty} \frac{d \frac{1}{s} \log \left(1 + \frac{s}{2n} \right)}{ds},$$

all of the terms in the expression for $f(x)$ except for the term

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{ss} \log \xi(0) x^s ds = \log \xi(0)$$

take the form

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d \left[\frac{1}{s} \log \left(1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{ds} x^s ds.$$

But

$$\frac{d \left[\frac{1}{s} \log \left(1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{d\beta} = \frac{1}{(\beta-s)\beta}$$

†This argument is not quite correct. See the relevant note in Riemann's collected works [R1] (translator's note).

and, when the real part of s is greater than the real part of β ,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s ds}{(\beta - s)\beta} = \frac{x^\beta}{\beta} = \int_{\infty}^x x^{\beta-1} dx$$

or

$$= \int_0^x x^{\beta-1} dx$$

depending on whether† the real part of β is negative or positive. Thus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left[\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)\right]}{ds} x^s ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right) x^s ds \\ &= \int_{\infty}^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x} dx + \text{const} \end{aligned}$$

in the first case and

$$= \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x} dx + \text{const}$$

in the second case.

In the first case the constant of integration can be determined by taking β to be negative and infinite. In the second case the integral from 0 to x takes on two values which differ by $2\pi i$ depending on whether the path of integration is in the upper halfplane or in the lower halfplane; if the path of integration is in the upper halfplane, the integral will be infinitely small when the coefficient of i in β is infinite and positive, and if the path is in the lower halfplane, the integral will be infinitely small when the coefficient of i in β is infinite and negative. This shows how to determine the values of $\log[1 - (s/\beta)]$ on the left side in such a way that the constants of integration drop out.

By setting these values in the expression for $f(x)$ one finds

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Li}(x) - \sum_{\alpha} [\text{Li}(x^{(1/2)+\alpha i}) + \text{Li}(x^{(1/2)-\alpha i})] \\ &+ \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} \frac{dx}{x \log x} + \log \xi(0), \end{aligned}$$

where‡ the sum \sum_{α} is over all positive roots (or all roots with positive real parts) of the equation $\xi(\alpha) = 0$, ordered according to their size. It is possible, by means of a more exact discussion of the function ξ , easily to show that with this ordering of the roots the sum of the series

$$\sum_{\alpha} [\text{Li}(x^{(1/2)+\alpha i}) + \text{Li}(x^{(1/2)-\alpha i})] \log x$$

†Note that this excludes the possibility $\text{Re } \beta = 0$ and therefore does not apply to roots, if any, on the imaginary axis (translator's note).

‡Concerning the erroneous value of $\log \xi(0)$ in this formula, see Chapter 1 (translator's note).

is the same as the limiting value of

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} \frac{d \frac{1}{s} \sum \log \left[1 + \frac{(s - \frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha} \right]}{ds} x^s ds$$

as b grows without bound; by a different ordering, however, it can approach any arbitrary real value.

From $f(x)$ one can find $F(x)$ by inverting

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F(x^{1/n})$$

to find

$$F(x) = \sum (-1)^\mu \frac{1}{m} f(x^{1/m}),$$

where m ranges over all positive integers which are not divisible by any square other than 1 and where μ denotes the number of prime factors of m .

If \sum_α is restricted to a finite number of terms, then the derivative of the expression for $f(x)$ or, except for a part which decreases very rapidly as x increases,

$$\frac{1}{\log x} - 2 \sum_\alpha \frac{\cos(\alpha \log x) x^{-1/2}}{\log x}$$

gives an approximate expression for the density of primes + half the density of prime squares + $\frac{1}{3}$ the density of prime cubes, etc., of magnitude x .

Thus the known approximation $F(x) = \text{Li}(x)$ is correct only to an order of magnitude of $x^{1/2}$ and gives a value which is somewhat too large, because the nonperiodic† terms in the expression of $F(x)$ are, except for quantities which remain bounded as x increases,

$$\begin{aligned} \text{Li}(x) - \frac{1}{2} \text{Li}(x^{1/2}) - \frac{1}{3} \text{Li}(x^{1/3}) - \frac{1}{5} \text{Li}(x^{1/5}) \\ + \frac{1}{6} \text{Li}(x^{1/6}) - \frac{1}{7} \text{Li}(x^{1/7}) + \dots \end{aligned}$$

In fact the comparison of $\text{Li}(x)$ with the number of primes less than x which was undertaken by Gauss and Goldschmidt and which was pursued up to $x =$ three million shows that the number of primes is already less than $\text{Li}(x)$ in the first hundred thousand and that the difference, with minor fluctuations, increases gradually as x increases. The thickening and thinning of primes which is represented by the periodic terms in the formula has also been observed in the counts of primes, without, however, any possibility of establishing a law for it having been noticed. It would be interesting in a future count to examine the influence of individual periodic terms in the formula for the density of primes. More regular than the behavior of $F(x)$ is the behavior of $f(x)$ which already in the first hundred is on average very nearly equal to $\text{Li}(x) + \log \xi(0)$.

†Strictly speaking, the terms $\text{Li}(x^{(1/2)+ni})$ are not periodic but merely oscillatory (translator's note).

ANEXO B – Descrição Oficial do Problema

Nesse anexo está disponível a descrição oficial do problema encontrada no site do Clay Institute

PROBLEMS OF THE MILLENNIUM: THE RIEMANN HYPOTHESIS

E. BOMBIERI

I. The problem. The Riemann zeta function is the function of the complex variable s , defined in the half-plane¹ $\Re(s) > 1$ by the absolutely convergent series

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

and in the whole complex plane \mathbb{C} by analytic continuation. As shown by Riemann, $\zeta(s)$ extends to \mathbb{C} as a meromorphic function with only a simple pole at $s = 1$, with residue 1, and satisfies the functional equation

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s). \quad (1)$$

In an epoch-making memoir published in 1859, Riemann [Ri] obtained an analytic formula for the number of primes up to a preassigned limit. This formula is expressed in terms of the zeros of the zeta function, namely the solutions $\rho \in \mathbb{C}$ of the equation $\zeta(\rho) = 0$.

In this paper, Riemann introduces the function of the complex variable t defined by

$$\xi(t) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

with $s = \frac{1}{2} + it$, and shows that $\xi(t)$ is an even entire function of t whose zeros have imaginary part between $-i/2$ and $i/2$. He further states, sketching a proof, that in the range between 0 and T the function $\xi(t)$ has about $(T/2\pi) \log(T/2\pi) - T/2\pi$ zeros. Riemann then continues: “Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind.”, which can be translated as “Indeed, one finds between those limits about that many real zeros, and it is very likely that all zeros are real.”

The statement that all zeros of the function $\xi(t)$ are real is the Riemann hypothesis.

The function $\zeta(s)$ has zeros at the negative even integers $-2, -4, \dots$ and one refers to them as the *trivial zeros*. The other zeros are the complex numbers $\frac{1}{2} + i\alpha$ where α is a zero of $\xi(t)$. Thus, in terms of the function $\zeta(s)$, we can state

Riemann hypothesis. *The nontrivial zeros of $\zeta(s)$ have real part equal to $\frac{1}{2}$.*

In the opinion of many mathematicians the Riemann hypothesis, and its extension to general classes of L -functions, is probably today the most important open problem in pure mathematics.

II. History and significance of the Riemann hypothesis. For references pertaining to the early history of zeta functions and the theory of prime numbers, we refer to Landau [La] and Edwards [Ed].

¹ We denote by $\Re(s)$ and $\Im(s)$ the real and imaginary part of the complex variable s . The use of the variable s is already in Dirichlet's famous work of 1837 on primes in arithmetic progression.

The connection between prime numbers and the zeta function, by means of the celebrated *Euler product*

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

valid for $\Re(s) > 1$, appears for the first time in Euler's book *Introductio in Analysin Infinitorum*, published in 1748. Euler also studied the values of $\zeta(s)$ at the even positive and the negative integers, and he divined a functional equation, equivalent to Riemann's functional equation, for the closely related function $\sum (-1)^{n-1}/n^s$ (see the interesting account of Euler's work in Hardy's book [Hard]).

The problem of the distribution of prime numbers received attention for the first time with Gauss and Legendre, at the end of the eighteenth century. Gauss, in a letter to the astronomer Hencke in 1849, stated that he had found in his early years that the number $\pi(x)$ of primes up to x is well approximated by the function²

$$\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}.$$

In 1837, Dirichlet proved his famous theorem of the existence of infinitely many primes in any arithmetic progression $qn+a$ with q and a positive coprime integers.

On May 24, 1848, Tchebychev read at the Academy of St. Petersburg his first memoir on the distribution of prime numbers, later published in 1850. It contains the first study of the function $\pi(x)$ by analytic methods. Tchebychev begins by taking the logarithm of the Euler product, obtaining³

$$-\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) + \log(s-1) = \log((s-1)\zeta(s)), \quad (2)$$

which is his starting point.

Next, he proves the integral formula

$$\zeta(s) - 1 - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} x^{s-1} dx, \quad (3)$$

out of which he deduces that $(s-1)\zeta(s)$ has limit 1, and also has finite derivatives of any order, as s tends to 1 from the right. He then observes that the derivatives of any order of the left-hand side of (2) can be written as a fraction in which the numerator is a polynomial in the derivatives of $(s-1)\zeta(s)$, and the denominator is an integral power of $(s-1)\zeta(s)$, from which it follows that the left-hand side of (2) has finite derivatives of any order, as s tends to 1 from the right. From this, he is able to prove that if there is an asymptotic formula for $\pi(x)$ by means of a finite sum $\sum a_k x/(\log x)^k$, up to an order $O(x/(\log x)^N)$, then $a_k = (k-1)!$ for $k = 1, \dots, N-1$. This is precisely the asymptotic expansion of the function $\text{Li}(x)$, thus vindicating Gauss's intuition.

A second paper by Tchebychev gave rigorous proofs of explicit upper and lower bounds for $\pi(x)$, of the correct order of magnitude. Here, he introduces the counting functions

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \quad \psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \dots$$

² The integral is a principal value in the sense of Cauchy.

³ Tchebychev uses $1+\rho$ in place of our s . We write his formulas in modern notation.

and proves the identity⁴

$$\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \log [x]!$$

From this identity, he finally obtains numerical upper and lower bounds for $\psi(x)$, $\vartheta(x)$ and $\pi(x)$.

Popular variants of Tchebychev's method, based on the integrality of suitable ratios of factorials, originate much later and cannot be ascribed to Tchebychev.

Riemann's memoir on $\pi(x)$ is really astonishing for the novelty of ideas introduced. He first writes $\zeta(s)$ using the integral formula, valid for $\Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} x^{s-1} dx, \quad (4)$$

and then deforms the contour of integration in the complex plane, so as to obtain a representation valid for any s . This gives the analytic continuation and the functional equation of $\zeta(s)$. Then he gives a second proof of the functional equation in the symmetric form (1), introduces the function $\xi(t)$ and states some of its properties as a function of the complex variable t .

Riemann continues by writing the logarithm of the Euler product as an integral transform, valid for $\Re(s) > 1$:

$$\frac{1}{s} \log \zeta(s) = \int_1^\infty \Pi(x) x^{-s-1} dx \quad (5)$$

where

$$\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2} \pi(\sqrt[2]{x}) + \frac{1}{3} \pi(\sqrt[3]{x}) + \dots$$

By Fourier inversion, he is able to express $\Pi(x)$ as a complex integral, and compute it using the calculus of residues. The residues occur at the singularities of $\log \zeta(s)$ at $s = 1$ and at the zeros of $\zeta(s)$. Finally an inversion formula expressing $\pi(x)$ in terms of $\Pi(x)$ yields Riemann's formula.

This was a remarkable achievement which immediately attracted much attention. Even if Riemann's initial line of attack may have been influenced by Tchebychev (we find several explicit references to Tchebychev in Riemann's unpublished Nachlass⁵) his great contribution was to see how the distribution of prime numbers is determined by the complex zeros of the zeta function.

At first sight, the Riemann hypothesis appears to be only a plausible interesting property of the special function $\zeta(s)$, and Riemann himself seems to take that view. He writes: "Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.", which can be translated as "Without doubt it would be desirable to have a rigorous proof of this proposition; however I have left this research aside for the time being after some quick unsuccessful attempts, because it appears to be unnecessary for the immediate goal of my study."

⁴ Here $[x]$ denotes the integral part of x .

⁵ The Nachlass consists of Riemann's unpublished notes and is preserved in the mathematical library of the University of Göttingen. The part regarding the zeta function was analyzed in depth by C.L. Siegel [Sie].

On the other hand, one should not draw from this comment the conclusion that the Riemann hypothesis was for Riemann only a casual remark of minor interest. The validity of the Riemann hypothesis is equivalent to saying that the deviation of the number of primes from the mean $\text{Li}(x)$ is

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(\sqrt{x} \log x);$$

the error term cannot be improved by much, since it is known to oscillate in both directions to order at least $\text{Li}(\sqrt{x}) \log \log x$ (Littlewood). In view of Riemann's comments at the end of his memoir about the approximation of $\pi(x)$ by $\text{Li}(x)$, it is quite likely that he saw how his hypothesis was central to the question of how good an approximation to $\pi(x)$ one may get from his formula.

The failure of the Riemann hypothesis would create havoc in the distribution of prime numbers. This fact alone singles out the Riemann hypothesis as the main open question of prime number theory.

The Riemann hypothesis has become a central problem of pure mathematics, and not just because of its fundamental consequences for the law of distribution of prime numbers. One reason is that the Riemann zeta function is not an isolated object, rather is the prototype of a general class of functions, called *L-functions*, associated with algebraic (automorphic representations) or arithmetical objects (arithmetic varieties); we shall refer to them as *global L-functions*. They are Dirichlet series with a suitable Euler product, and are expected to satisfy an appropriate functional equation and a Riemann hypothesis. The factors of the Euler product may also be considered as some kind of zeta functions of a local nature, which also should satisfy an appropriate Riemann hypothesis (the so-called Ramanujan property). The most important properties of the algebraic or arithmetical objects underlying an *L-function* can or should be described in terms of the location of its zeros and poles, and values at special points.

The consequences of a Riemann hypothesis for global *L-functions* are important and varied. We mention here, to indicate the variety of situations to which it can be applied, an extremely strong effective form of Tchebotarev's density theorem for number fields, the non-trivial representability of 0 by a non-singular cubic form in 5 or more variables (provided it satisfies the appropriate necessary congruence conditions for solubility, Hooley), and Miller's deterministic polynomial time primality test. On the other hand, many deep results in number theory which are consequences of a general Riemann hypothesis can be shown to hold independently of it, thus adding considerable weight to the validity of the conjecture.

It is outside the scope of this article even to outline the definition of global *L-functions*, referring instead to Iwaniec and Sarnak [IS] for a survey of the expected properties satisfied by them; it suffices here to say that the study of the analytic properties of these functions presents extraordinary difficulties.

Already the analytic continuation of *L-functions* as meromorphic or entire functions is known only in special cases. For example, the functional equation for the *L-function* of an elliptic curve over \mathbb{Q} and for its twists by Dirichlet characters is an easy consequence of, and is equivalent to, the existence of a parametrization of the curve by means of modular functions for a Hecke group $\Gamma_0(N)$; the real difficulty lies in establishing this modularity. No one knows how to prove this functional equation by analytic methods. However the modularity of elliptic curves over \mathbb{Q} has been established directly, first in the semistable case in the spectacular work

of Wiles [Wi] and Taylor and Wiles [TW] leading to the solution of Fermat's Last Theorem, and then in the general case in a recent preprint by Breuil, Conrad, Diamond and Taylor.

Not all L -functions are directly associated to arithmetic or geometric objects. The simplest example of L -functions not of arithmetic/geometric nature are those arising from Maass waveforms for a Riemann surface X uniformized by an arithmetic subgroup Γ of $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. They are pull-backs $f(z)$, to the universal covering space $\Im(z) > 0$ of X , of simultaneous eigenfunctions for the action of the hyperbolic Laplacian and of the Hecke operators on X .

The most important case is again the group $\Gamma_0(N)$. In this case one can introduce a notion of *primitive* waveform, analogous to the notion of primitive Dirichlet character, meaning that the waveform is not induced from another waveform for a $\Gamma_0(N')$ with N' a proper divisor of N . For a primitive waveform, the action of the Hecke operators T_n is defined for every n and the L -function can be defined as $\sum \lambda_f(n)n^{-s}$ where $\lambda_f(n)$ is the eigenvalue of T_n acting on the waveform $f(z)$. Such an L -function has an Euler product and satisfies a functional equation analogous to that for $\zeta(s)$. It is also expected that it satisfies a Riemann hypothesis.

Not a single example of validity or failure of a Riemann hypothesis for an L -function is known up to this date. The Riemann hypothesis for $\zeta(s)$ does not seem to be any easier than for Dirichlet L -functions (except possibly for non-trivial real zeros), leading to the view that its solution may require attacking much more general problems, by means of entirely new ideas.

III. Evidence for the Riemann hypothesis. Notwithstanding some skepticism voiced in the past, based perhaps more on the number of failed attempts to a proof rather than on solid heuristics, it is fair to say that today there is quite a bit of evidence in its favor. We have already emphasized that the general Riemann hypothesis is consistent with our present knowledge of number theory. There is also specific evidence of a more direct nature, which we shall now examine.

First, strong numerical evidence.

Interestingly enough, the first numerical computation of the first few zeros of the zeta function already appears in Riemann's Nachlass. A rigorous verification of the Riemann hypothesis in a given range can be done numerically as follows. The number $N(T)$ of zeros of $\zeta(s)$ in the rectangle \mathcal{R} with vertices at $-1 - iT$, $2 - iT$, $2 + iT$, $-1 + iT$ is given by Cauchy's integral

$$N(T) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{R}} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) ds,$$

provided T is not the imaginary part of a zero (the -1 in the left-hand side of this formula is due to the simple pole of $\zeta(s)$ at $s = 1$). The zeta function and its derivative can be computed to arbitrary high precision using the MacLaurin summation formula or the Riemann-Siegel formula [Sie]; the quantity $N(T) - 1$, which is an integer, is then computed exactly by dividing by $2\pi i$ the numerical evaluation of the integral, and rounding off its real part to the nearest integer (this is only of theoretical interest and much better methods are available in practice for computing $N(T)$ exactly). On the other hand, since $\xi(t)$ is continuous and real for real t , there will be a zero of odd order between any two points at which $\xi(t)$ changes sign. By judiciously choosing sample points, one can detect sign changes

of $\xi(t)$ in the interval $[-T, T]$. If the number of sign changes equals $N(T)$, one concludes that all zeros of $\zeta(s)$ in \mathcal{R} are simple and satisfy the Riemann hypothesis. In this way, it has been shown by van de Lune, te Riele and Winter [LRW] that the first 1.5 billion zeros of $\zeta(s)$, arranged by increasing positive imaginary part, are simple and satisfy the Riemann hypothesis.

The Riemann hypothesis is equivalent to the statement that all local maxima of $\xi(t)$ are positive and all local minima are negative, and it has been suggested that if a counterexample exists then it should be in the neighborhood of unusually large peaks of $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$. The above range for T is $T \cong 5 \times 10^8$ and is not large enough for $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ to exhibit these peaks which are known to occur eventually. However, further calculations done by Odlyzko [Od] in selected intervals show that the Riemann hypothesis holds for over 3×10^8 zeros at heights up to⁶ 2×10^{20} . These calculations also strongly support independent conjectures by Dyson and Montgomery [Mo] concerning the distribution of spacings between zeros.

Computing zeros of L -functions is more difficult, but this has been done in several cases, which include examples of Dirichlet L -functions, L -functions of elliptic curves, Maass L -functions and nonabelian Artin L -functions arising from number fields of small degree. No exception to a generalized Riemann hypothesis has been found in this way.

Second, it is known that hypothetical exceptions to the Riemann hypothesis must be rare if we move away from the line $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Let $N(\alpha, T)$ be the number of zeros of $\zeta(s)$ in the rectangle $\alpha \leq \Re(s) \leq 2$, $0 \leq \Im(s) \leq T$. The prototype result goes back to Bohr and Landau in 1914, namely $N(\alpha, T) = O(T)$ for any fixed α with $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. A significant improvement of the result of Bohr and Landau was obtained by Carlson in 1920, obtaining the *density theorem* $N(\alpha, T) = O(T^{4\alpha(1-\alpha)+\varepsilon})$ for any fixed $\varepsilon > 0$. The fact that the exponent here is strictly less than 1 is important for arithmetic applications, for example in the study of primes in short intervals. The exponent in Carlson's theorem has gone through several successive refinements for various ranges of α , in particular in the range $\frac{3}{4} < \alpha < 1$. Curiously enough, the best exponent known up to date in the range $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{4}$ remains Ingham's exponent $3(1-\alpha)/(2-\alpha)$, obtained in 1940. For references to these results, the reader may consult the recent revision by Heath-Brown of the classical monograph of Titchmarsh [Ti], and the book by Ivic [Iv].

Third, it is known that more than 40% of nontrivial zeros of $\zeta(s)$ are simple and satisfy the Riemann hypothesis (Selberg [Sel], Levinson [Le], Conrey [Conr]). Most of these results have been extended to other L -functions, including all Dirichlet L -functions and L -functions associated to modular forms or Maass waveforms.

IV. Further evidence: varieties over finite fields. It may be said that the best evidence in favor of the Riemann hypothesis derives from the corresponding theory which has been developed in the context of algebraic varieties over finite fields. The simplest situation is as follows.

Let C be a nonsingular projective curve over a finite field \mathbb{F}_q with $q = p^a$ elements, of characteristic p . Let $\text{Div}(C)$ be the additive group of divisors on C

⁶ The most recent calculations by Odlyzko, which are approaching completion, will explore completely the interval $[10^{22}, 10^{22} + 10^{10}]$.

defined over \mathbb{F}_q , in other words formal finite sums $\mathbf{a} = \sum a_i P_i$ with $a_i \in \mathbb{Z}$ and P_i points of C defined over a finite extension of \mathbb{F}_q , such that $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ where ϕ is the Frobenius endomorphism on C raising coordinates to the q -th power. The quantity $\deg(\mathbf{a}) = \sum a_i$ is the degree of the divisor \mathbf{a} . The divisor \mathbf{a} is called effective if every a_i is a positive integer; in this case, we write $\mathbf{a} > 0$. Finally, a prime divisor \mathfrak{p} is a positive divisor which cannot be expressed as the sum of two positive divisors. By definition, the norm of a divisor \mathbf{a} is $N\mathbf{a} = q^{\deg(\mathbf{a})}$.

The zeta function of the curve C , as defined by E. Artin, H. Hasse and F.K. Schmidt, is

$$\zeta(s, C) = \sum_{\mathbf{a} > 0} \frac{1}{N\mathbf{a}^s}.$$

This function has an Euler product

$$\zeta(s, C) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

and a functional equation

$$q^{(g-1)s} \zeta(s, C) = q^{(g-1)(1-s)} \zeta(1-s, C)$$

where g is the genus of the curve C ; it is a consequence of the Riemann-Roch theorem. The function $\zeta(s, C)$ is a rational function of the variable $t = q^{-s}$, hence is periodic⁷ with period $2\pi i / \log q$, and has simple poles at the points $s = 2\pi im / \log q$ and $s = 1 + 2\pi im / \log q$ for $m \in \mathbb{Z}$. Expressed in terms of the variable t , the zeta function becomes a rational function $Z(t, C)$ of t , with simple poles at $t = 1$ and $t = q^{-1}$. The use of the variable t , rather than q^{-s} , is more natural in the geometric case and we refer to Zeta functions, with a capital Z, to indicate the corresponding objects.

The Riemann hypothesis for $\zeta(s, C)$ is the statement that all its zeros have real part equal to $\frac{1}{2}$; in terms of the Zeta function $Z(t, C)$, which has a numerator of degree $2g$, has zeros of absolute value $q^{-\frac{1}{2}}$.

This is easy to verify if $g = 0$, because the numerator is 1. If $g = 1$, a proof was obtained by Hasse in 1934. The general case of arbitrary genus g was finally settled by Weil in the early 1940s (see his letter to E. Artin of July 10, 1942 where he gives a complete sketch of the theory of correspondences on a curve [We1]); his results were eventually published in book form in 1948 [We2].

Through his researches, Weil was led to the formulation of sweeping conjectures about Zeta functions of general algebraic varieties over finite fields, relating their properties to the topological structure of the underlying algebraic variety. Here the Riemann hypothesis, in a simplified form, is the statement that the reciprocals of the zeros and poles of the Zeta function (the so-called *characteristic roots*) have absolute value $q^{d/2}$ with d a positive integer or 0, and are interpreted as eigenvalues of the Frobenius automorphism acting on the cohomology of the variety. After M. Artin, A. Grothendieck and J.-L. Verdier developed the fundamental tool of étale cohomology, the proof of the corresponding Riemann hypothesis for Zeta functions of arbitrary varieties over finite fields was finally obtained by Deligne [Del1], [Del2]. Deligne's theorem surely ranks as one of the crowning achievements

⁷ Similarly, $\zeta(s)$ is almost periodic in any half-plane $\Re(s) \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$.

of twentieth century mathematics. Its numerous applications to the solution of long-standing problems in number theory, algebraic geometry and discrete mathematics are witness to the significance of these general Riemann hypotheses.

In our opinion, these results in the geometric setting cannot be ignored as not relevant to the understanding of the classical Riemann hypothesis; the analogies are too compelling to be dismissed outright.

V. Further evidence: the explicit formula. A conceptually important generalization of Riemann's explicit formula for $\pi(x)$, obtained by Weil [We3] in 1952, offers a clue to what may lie still undiscovered behind the problem.

Consider the class \mathcal{W} of complex-valued functions $f(x)$ on the positive half-line \mathbb{R}_+ , continuous and continuously differentiable except for finitely many points at which both $f(x)$ and $f'(x)$ have at most a discontinuity of the first kind, and at which the value of $f(x)$ and $f'(x)$ is defined as the average of the right and left limits there. Suppose also that there is $\delta > 0$ such that $f(x) = O(x^\delta)$ as $x \rightarrow 0+$ and $f(x) = O(x^{-1-\delta})$ as $x \rightarrow +\infty$.

Let $\tilde{f}(s)$ be the Mellin transform

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^s \frac{dx}{x},$$

which is an analytic function of s for $-\delta < \Re(s) < 1 + \delta$.

For the Riemann zeta function, Weil's formula can be stated as follows. Let $\Lambda(n) = \log p$ if $n = p^\alpha$ is a power of a prime p , and 0 otherwise. We have

Explicit Formula. For $f \in \mathcal{W}$ we have

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0) - \sum_\rho \tilde{f}(\rho) + \tilde{f}(1) &= \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \left\{ f(n) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \right\} + (\log 4\pi + \gamma) f(1) \\ &+ \int_1^\infty \left\{ f(x) + \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} f(1) \right\} \frac{dx}{x - x^{-1}}. \end{aligned}$$

Here the first sum ranges over all nontrivial zeros of $\zeta(s)$ and is understood as

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{|\Im(\rho)| < T} \tilde{f}(\rho).$$

In his paper, Weil showed that there is a corresponding formula for zeta and L -functions of number fields as well as for Zeta functions of curves over finite fields. The terms in the right-hand side of the equation can be written as a sum of terms of local nature, associated to the absolute values of the underlying number field, or function field in the case of curves over a field of positive characteristic. Moreover, in the latter case the explicit formula can be deduced from the Lefschetz fixed point formula, applied to the Frobenius endomorphism on the curve C . The three terms in the left-hand side, namely $\tilde{f}(0)$, $\sum \tilde{f}(\rho)$, $\tilde{f}(1)$, now correspond to the trace of the Frobenius automorphism on the l -adic cohomology of C (the interesting term $\sum \tilde{f}(\rho)$ corresponds to the trace on H^1), while the right-hand side corresponds to the number of fixed points of the Frobenius endomorphism, namely the prime divisors of degree 1 on C .

Weil also proved that the Riemann hypothesis is equivalent to the negativity of the right-hand side for all functions $f(x)$ of type

$$f(x) = \int_0^\infty g(xy) \overline{g(y)} dy,$$

whenever $g \in \mathcal{W}$ satisfies the additional conditions

$$\int_0^\infty g(x) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty g(x) dx = 0.$$

In the geometric case of curves over a finite field, this negativity is a rather easy consequence of the *algebraic index theorem* for surfaces, namely:

Algebraic Index Theorem. *Let X be a projective nonsingular surface defined over an algebraically closed field. Then the self-intersection quadratic form $(D \cdot D)$, restricted to the group of divisors D on X of degree 0 in the projective embedding of X , is negative semidefinite.*

The algebraic index theorem for surfaces is essentially due to Severi⁸ in 1906 [Sev, §2, Teo.I]. The proof uses the Riemann-Roch theorem on X and the finiteness of families of curves on X of a given degree; no other proof by algebraic methods is known up to now, although much later several authors independently rediscovered Severi's argument.

The algebraic index theorem for nonsingular projective varieties of even dimension over the complex numbers was first formulated and proved by Hodge, as a consequence of his theory of harmonic forms. No algebraic proof of Hodge's theorem is known, and it remains a fundamental open problem to extend it to the case of varieties over fields of positive characteristic.

The work of Montgomery [Mo], Odlyzko [Od] and Rudnick and Sarnak [RS] on correlations for spacings of zeros of $\xi(t)$ suggests that L -functions can be grouped into a few families, in each of which the spacing correlation is universal; the conjectured spacing correlation is the same as for the limiting distribution of eigenvalues of random orthogonal, unitary or symplectic matrices in suitable universal families, as the dimension goes to ∞ . All this is compatible with the view expressed by Hilbert and Pólya that the zeros of $\xi(t)$ could be the eigenvalues of a self-adjoint linear operator on an appropriate Hilbert space. It should also be noted that a corresponding unconditional theory for the spacing correlations of characteristic roots of Zeta functions of families of algebraic varieties over a finite field, has been developed by Katz and Sarnak [KS], using methods introduced by Deligne in his proof of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields. Thus the problem of spacing correlations for zeros of L -functions appears to lie very deep.

All this leads to several basic questions.

Is there a theory in the global case, playing the same role as cohomology does for Zeta functions of varieties over a field of positive characteristic? Is there an analogue of a Frobenius automorphism in the classical case? Is there a general index theorem by which one can prove the classical Riemann hypothesis? We are

⁸ Severi showed that a divisor D on X is algebraically equivalent to 0 up to torsion, if it has degree 0 and $(D \cdot D) = 0$. His proof holds, without modifications, under the weaker assumption $(D \cdot D) \geq 0$, which yields the index theorem.

here in the realm of conjectures and speculation. In the adelic setting propounded by Tate and Weil, the papers [Conn], [Den], [Hara] offer glimpses of a possible setup for these basic problems.

On the other hand, there are L -functions, such as those attached to Maass waveforms, which do not seem to originate from geometry and for which we still expect a Riemann hypothesis to be valid. For them, we do not have algebraic and geometric models to guide our thinking, and entirely new ideas may be needed to study these intriguing objects.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, PRINCETON, NJ 08540

REFERENCES

- [Conn] A. CONNES, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, *Selecta Math. (NS)* **5** (1999), 29–106.
- [Conr] J.B. CONREY, More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line, *J. reine angew. Math.* **399** (1989), 1–26.
- [Del1] P. DELIGNE, La Conjecture de Weil I, *Publications Math. IHES* **43** (1974), 273–308.
- [Del2] P. DELIGNE, La Conjecture de Weil II, *Publications Math. IHES* **52** (1980), 137–252.
- [Den] C. DENINGER, Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces, *Proc. Int. Congress Math. Berlin 1998*, Vol. I, 163–186.
- [Ed] H.M. EDWARDS, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York - London 1974.
- [Hara] S. HARAN, Index theory, potential theory, and the Riemann hypothesis, *L-functions and Arithmetic, Durham 1990*, LMS Lecture Notes **153** (1991), 257–270.
- [Hard] G.H. HARDY, *Divergent Series*, Oxford Univ. Press 1949, Ch. II, 23–26.
- [IS] H. IWANIEC AND P. SARNAK, Perspectives on the Analytic Theory of L -Functions, to appear in proceedings of the conference *Visions 2000*, Tel Aviv.
- [Iv] A. IVIČ, *The Riemann Zeta-Function - The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications*, John Wiley & Sons Inc., New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore 1985.
- [KS] N.M. KATZ AND P. SARNAK, Random matrices, Frobenius eigenvalues and monodromy, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* **49**, Amer. Math. Soc., Providence RI 1999.
- [La] E. LANDAU, *Primzahlen*, Zwei Bd., IInd ed., with an Appendix by Dr. Paul T. Bateman, Chelsea, New York 1953.

- [Le] N. LEVINSON, More than one-third of the zeros of the Riemann zeta-function are on $\sigma = 1/2$, *Adv. Math.* **13** (1974), 383–436.
- [LRW] J. VAN DE LUNE, J.J. TE RIELE AND D.T. WINTER, On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip, IV, *Math. of Comp.* **46** (1986), 667–681.
- [Mo] H.L. MONTGOMERY, Distribution of the Zeros of the Riemann Zeta Function, *Proceedings Int. Cong. Math. Vancouver 1974*, Vol. I, 379–381.
- [Od] A.M. ODLYZKO, Supercomputers and the Riemann zeta function, *Supercomputing 89: Supercomputing Structures & Computations, Proc. 4-th Intern. Conf. on Supercomputing*, L.P. Kartashev and S.I. Kartashev (eds.), International Supercomputing Institute 1989, 348–352.
- [Ri] B. RIEMANN, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, *Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859* (1860), 671–680; also, *Gesammelte math. Werke und wissensch. Nachlass*, 2. Aufl. 1892, 145–155.
- [RS] Z. RUDNICK AND P. SARNAK, Zeros of principal L -functions and random matrix theory, *Duke Math. J.* **82** (1996), 269–322.
- [Sel] A. SELBERG, On the zeros of the zeta-function of Riemann, *Der Kong. Norske Vidensk. Selsk. Forhand.* **15** (1942), 59–62; also, *Collected Papers*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1989, Vol. I, 156–159.
- [Sev] F. SEVERI, Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica, *Math. Annalen* **62** (1906), 194–225.
- [Sie] C.L. SIEGEL, Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik* **2** (1932), 45–80; also *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1966, Bd. I, 275–310.
- [Ti] E.C. TITCHMARSH, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, 2nd ed. revised by R.D. Heath-Brown, Oxford Univ. Press 1986.
- [TW] R. TAYLOR AND A. WILES, Ring theoretic properties of certain Hecke algebras, *Annals of Math.* **141** (1995), 553–572.
- [We1] A. WEIL, *Œuvres Scientifiques—Collected Papers*, corrected 2nd printing, Springer-Verlag, New York - Berlin 1980, Vol. I, 280–298.
- [We2] A. WEIL, *Sur les Courbes Algébriques et les Variétés qui s’en déduisent*, Hermann & C^{ie}, Paris 1948.
- [We3] A. WEIL, Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers, *Meddelanden Från Lunds Univ. Mat. Sem.* (dedié à M. Riesz), (1952), 252–265; also, *Œuvres Scientifiques—Collected Papers*, corrected 2nd printing, Springer-Verlag, New York - Berlin 1980, Vol. II, 48–61.
- [Wi] A. WILES, Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem, *Annals of Math.* **141** (1995), 443–551.