Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Ygor Faria Paranhos

Histórias para contar: uma maneira lúdica de trabalhar as complexidades de conjuntos finitos e infinitos no ensino básico

Rio de Janeiro
2023

Ygor Faria Paranhos

Histórias para contar: uma maneira lúdica de trabalhar as complexidades de conjuntos finitos e infinitos no ensino básico

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Guido Gerson Espiritu Ledesma

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

P223 Paranhos, Ygor Faria

Histórias para contar: uma maneira lúdica de trabalhar as complexidades de conjuntos finitos e infinitos no ensino básico / Ygor Faria Paranhos. - 2023.

122 f. : il.

Orientador: Guido Gerson Espiritu Ledesma

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Teoria dos conjuntos - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 3. Arte de contar histórias - Teses.I. Ledesma, Guido Gerson Espiritu. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 510.22

Patricia Bello Meijinhos - CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Ygor Faria Paranhos

Histórias para contar: uma maneira lúdica de trabalhar as complexidades de conjuntos finitos e infinitos no ensino básico

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 03 de Março de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Guido Gerson Espiritu Ledesma (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof.ª Dra. Mariana Gesualdi Villapouca
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof.ª Dra. Mariana Rodrigues da Silveira
Universidade Federal do ABC

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Maria Aparecida e Carlos, pela dedicação na criação de seus filhos.

Agradeço à minha esposa Adriana pela resiliência, compreensão e apoio nesse período.

Agradeço ao meu irmão Jefferson por ter sido alicerce nessa construção.

Agradeço ao meu professor orientador Dr. Guido Gerson E. Ledesma pelas horas de dedicação e cuidado.

Agradeço aos professores do PROFMAT da Universidade Estadual do Rio de Janeiro pelos conhecimentos compartilhados.

Agradeço aos colegas de curso pelas ricas discussões.

Agradeço aos amigos que contribuiram direta e indiretamente nesta jornada.

O meu eterno agradecimento.

Um crescimento infinito é incompatível com um mundo finito. Quem acredita nisso ou é louco ou é economista.

LATOUCHE.

RESUMO

PARANHOS, Ygor Faria. *Histórias para contar: uma maneira lúdica de trabalhar as complexidades de conjuntos finitos e infinitos no ensino básico.* 2023. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Um dos assuntos mais instigantes é o infinito. Ele aparece em poesias, é assunto na astronomia, na astrofísica e, claro, é assunto na matemática. Visando fascinar os alunos do ensino básico com os resultados que podem ser obtidos quando tratamos do finito e do infinito, o presente trabalho tem como objetivo principal a contação de histórias, umas já conhecidas por matemáticos, como o "Hotel de Hilbert", e outras de criação própria, inspiradas naquelas. Para alcançar esse objetivo principal, trabalharemos formalmente o ramo da teoria de conjuntos que trata de cardinalidade, que, informalmente, se trata do "tamanho" de um conjunto ou sua "quantidade de elementos". Vale destacar que as funções e suas propriedades serão as ferramentas fundamentais nessa construção. Os conjuntos numéricos e suas cardinalidades finitas ou infinitas são objetos centrais de estudo e muitos resultados importantes sobre suas cardinalidades estarão aqui presentes.

Palavras-chave: Conjuntos. Cardinalidades. Histórias.

ABSTRACT

PARANHOS, Ygor Faria. *Stories to tell: a playful way to work with the complexities of finite and infinite sets in basic education*. 2023. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

One of the most exciting subjects is infinity. It appears in poetry, it is a subject in astronomy, astrophysics and, of course, in mathematics. Aiming to fascinate elementary school students with the results that can be obtained when we deal with the finite and the infinite, results that will be formally and informally justified, the main objective of this work is storytelling, some already known by mathematicians, such as the "Hilbert Hotel", and others of our authorship, inspired by those. To achieve this main objective, we will formally work the set theory that deals with cardinality, which, informally, deals with the "size" of a set or its "number of elements". It is worth noting that the functions and their properties will be the fundamental tools in this construction. Numerical sets and their finite or infinite cardinalities are central objects of study and many important results about their cardinalities will be present here.

Keywords: Sets. Cardinality. Stories.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O infinito é um tema fascinante, e muitas ideias intrínsecas a ele são conjecturadas por toda a humanidade, até mesmo por pessoas sem o conhecimento técnico matemático necessário para explicá-lo. A ideia de algo inalcançável, incontável, fora dos nossos domínios, é instigante. Corroborando a fala de (ANDRADE, 2010), "A crença geral de que **O todo é maior que a parte** deixa de valer aqui" (grifo do autor). Por muito tempo os matemáticos vêm se empenhando para explicar tecnicamente esse ente matemático. Tais estudos foram importantíssimos para a compreensão do que seja o infinito e os resultados são impressionantes: não há somente um tipo de infinito; um infinito pode ser tão grande quanto um pedaço infinito seu; entre outros.

A compreensão do finito e do infinito está diretamente relacionada à formalização, à compreensão e ao desenvolvimento da teoria dos conjuntos, e um dos grandes estudiosos é o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), responsável pela elaboração da moderna teoria dos conjuntos. Essa teoria formaliza a ideia de cardinalidade de conjunto, ver (ANDRADE, 2010).

Mostraremos, neste trabalho, que as cardinalidades de conjuntos podem ser comparáveis e, dessa forma, poderemos dizer, de acordo com os critérios e definições formalizadas ao longo do texto, que a cardinalidade de um conjunto é menor, igual ou maior que a de outro conjunto. Para compreensão dos assuntos tratados, será necessário que o leitor tenha conhecimento prévio sobre conjuntos e conjuntos numéricos, pois esses serão os principais objetos explorados, além de funções, que serão as principais ferramentas nessa construção.

No que tange à educação básica, surge um grande questionamento, que é, de fato, a motivação para a realização deste trabalho: como apresentar esses resultados para crianças em nível básico de ensino, desde os primeiros anos do ensino fundamental até o último ano do ensino médio? Com o objetivo de responder a esse questionamento, concluiremos nosso trabalho com um capítulo especial de contação de histórias: instigantes e desafiadoras, todas baseadas em resultados formais apresentados ao longo deste texto, possibilitando que o aluno compreenda, mesmo de forma intuitiva e informal, o finito e o infinito matemático.

1 O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Neste capítulo desenvolveremos formalmente a teoria dos números naturais e, para apresentar de maneira lúdica os pilares dessa construção, apresentamos a história a seguir, de autoria própria.

No reino de Vallala[1] vivem os Vikings, os Hunos e os Otomanos. Esse reino, incrivelmente, possui um número infinito de cidadãos, e toda sua estrutura foi feita para atender seus infinitos moradores, escolas e ônibus com infinitos assentos, hospitais com infinitos leitos, infinitos pratos e talheres, etc. Certa vez, seus habitantes planejaram uma viagem para um reino distante e, para que pudessem chegar ao destino, reservaram um dos seus ônibus com infinitos lugares. Na hora do embarque, o comissário de bordo Viking, que estava com a atribuição de organizar o acesso ao ônibus, verificou que o ônibus fretado estava vazio e foi alocando cada morador do reino em um respectivo lugar, com o comando "próximo". Assim, o ônibus que estava com 0 passageiro sentado foi recebendo um passageiro a cada vez que o comissário gritava "próximo", de modo que foi ficando ocupado com 1 passageiro sentado, depois com 2 passageiros sentados, 3 passageiros sentados, 4 passageiros sentados, e assim por diante, tendo sempre um morador sucedendo outro.

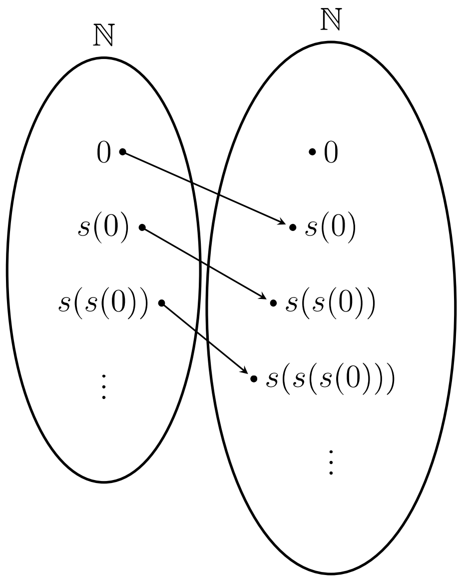
Note que, na situação descrita acima, a quantidade de passageiros que ocupam o ônibus começa com 0, cada morador é sempre sucedido por outro após o comando "próximo", ordenadamente, e esse processo não termina. Essas estão entre as ideias fundamentais para a construção do conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$, e o conjunto de axiomas que definem $\mathbb{N}$ são chamados Axiomas de Peano, conforme veremos formalmente a seguir.

1.1 Os axiomas de Peano

Todos os resultados desse capítulo foram inspirados em (HALMOS, 2017), (HEFEZ, 2009b) e (LIMA, 2004). Os Axiomas de Peano admitem alguns conceitos primitivos, que são objetos não-definidos: um conjunto, designado por $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados números naturais, e uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, em que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a imagem $s(n)$ é chamada sucessor de n. Esses objetos estão relacionados pelos três axiomas abaixo, que são os **Axiomas de Peano**.

[1] Nome retirado da história cujo título é "O Grande Hotel de Hilbert" ou, simplesmente, "Hotel de Hilbert", de onde foi tirada inspiração para a história deste capítulo.

Figura 1 - Construção do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

(P1): A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva.

(P2): Existe um único número natural que não é sucessor de qualquer outro número natural. Ele será chamado de "zero" e será denotado pelo símbolo 0, isto é, $0 \in \mathbb{N}$ e $0 \notin \mathrm{Img}(s)$.

(P3): **Princípio da indução:** seja X um subconjunto de $\mathbb{N}$. Se $0 \in X$ e se podemos garantir que $n \in X$ implica que $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Note que o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, é diferente de vazio e tem pelo menos dois elementos, pois, pelo item (P2), temos que $0 \in \mathbb{N}$ e, pelo item (P1), $s(0) \in \mathrm{Img}(s) \subseteq \mathbb{N}$ é tal que $0 \neq s(0)$, pois $0 \notin \mathrm{Img}(s)$. Aplicando a função s para os elementos distintos 0 e $s(0)$, temos que $s(s(0)) \in \mathbb{N}$ será outro elemento de $\mathbb{N}$, pois $s(0) \neq s(s(0))$, dado que, pelo item (P1), a função s é injetiva. Temos também que $s(s(s(0))) \in \mathbb{N}$ é diferente do elemento $s(s(0))$, pelo mesmo item (P1). Observe a Figura 1, que ilustra a função s.

Temos então, ainda intuitivamente, que $n \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, cada número natural é diferente de seu sucessor e o próximo teorema nos comprovará esse resultado. A técnica utilizada para essa e outras demonstrações similares é chamada de demonstração por indução matemática. Quando precisamos demonstrar que uma propriedade P é verdadeira para todos os números naturais, isto é $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, precisamos mostrar que o conjunto $V = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeira}\}$ é o próprio conjunto dos números naturais. Para isso, utilizamos os axiomas de Peano 1.1, item (P3). Para melhores explicações, ver (HEFEZ, 2009a).

Teorema 1.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n \neq s(n)$.*

Demonstração. De fato, vamos demonstrar por indução sobre n. Consideremos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq s(n)\}$. Vamos mostrar que $X = \mathbb{N}$.

Pelo Axioma de Peano 1.1, item (P2), temos que $0 \neq s(0)$, de modo que $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, que $k \neq s(k)$. Vamos mostrar que $s(k) \in X$. Como $k \in X$, temos que $k \neq s(k)$ e, como a função s é injetiva, temos que $s(k) \neq s(s(k))$, isto é, $s(k) \in X$. Assim, pelo item (P3), temos que $X = \mathbb{N}$, de modo que $n \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Dessa forma, já podemos descrever o conjunto $\mathbb{N}$ e seus elementos, um a um, sendo

$$\mathbb{N} = \{ \quad 0, \xrightarrow{s} s(0), \xrightarrow{s} s(s(0)), \xrightarrow{s} s(s(s(0))), \xrightarrow{s} \ldots\}.$$

Note que, para cada $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $s(n) = m$ e, nesse caso, n é chamado de antecessor de m. A próxima proposição nos comprovará que todo número natural diferente de 0 possui antecessor.

Proposição 1.1. *$Img(s) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, isto é, 0 é o único número natural que não possui antecessor.*

Demonstração. Vamos demonstrar a proposição por indução sobre $n \in \mathbb{N}$. Consideremos o conjunto $X = \{0\} \cup \mathrm{Img}(s)$. Vamos mostrar que $X = \mathbb{N}$. Por definição, temos que $0 \in X$. Suponhamos que $k \in \mathbb{N}$ é tal que $k \neq 0$ e $k \in X$. Dessa forma, temos que $k \in \mathrm{Img}(s)$, isto é, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que p é o antecessor de k, isto é, $s(p) = k$. Assim, temos que $s(s(p)) = s(k) \in X$, o que implica, pelo Axioma de Peano 1.1, item (P3), que $X = \mathbb{N}$ e, portanto, $\mathbb{N} = \{0\} \cup \mathrm{Img}(s)$ e o único número natural que não possui antecessor é o zero, como queríamos demonstrar.

□

1.2 Aritmética natural

1.2.1 Soma de números naturais

Nosso desejo agora é, dados dois números naturais m e n, definir a soma entre m e n, que denotaremos por $m + n$. Em outras palavras, gostaríamos de definir uma função $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que será chamada de soma, e faremos essa definição recursivamente, usando os conceitos e resultados obtidos até então. Sabemos que, se um número natural n é igual a 0, então n não possui antecessor. No entanto, se $n \neq 0$, então existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $s(p) = n$.

Definição 1.1. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então, definimos recursivamente a soma de m com n, denotada por $m+n$, como a função $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que*

$$m+n = \begin{cases} m+n = m, \ \ se \ n = 0 \\ m+n = m+s(p) = s(m+p), \ \ se \ n \neq 0 \ \ e \ s(p) = n \end{cases}$$

Note que, por definição, temos que $m+0 = m$ e, em particular, temos que $0+0 = 0$. Temos também que $m + s(0) = s(m + 0) = s(m)$, isto é, somar m com $s(0)$ é tomar o sucessor de m. Da mesma forma, $m + s(s(0)) = s(m + s(0)) = s(s(m))$, isto é, somar m com $s(s(0))$ é tomar o sucessor do sucessor de m. Podemos generalizar essa ideia da soma $m + n$ como o número natural resultado do processo que parte de m e realiza n vezes a função s. Precisamos verificar se a função soma está bem definida, isto é, se $m + n \in \mathbb{N}$, para todo par de números naturais m e n e, para isso, temos a proposição a seguir.

Proposição 1.2. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e seja $m+n$ a operação soma da Definição 1.1. Então, $m + n \in \mathbb{N}$ para todos m e n.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução que $m + n \in \mathbb{N}$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

Consideremos m fixo e façamos indução sobre n. Seja o conjunto $X = \{n, m \in \mathbb{N} \mid m + n \in \mathbb{N}\}$. Se $n = 0$, então $m + n = m + 0 = m \in \mathbb{N}$ e, dessa forma, $0 \in X$. Suponhamnos que $0 \neq k \in X$, isto é, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $s(p) = k$ e $m + k = m + s(p) = s(m + p) \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $s(k) \in X$. De fato, temos que $m+s(k) = m+s(s(p)) = s(m+s(p)) = s(s(m+p)) \in \mathbb{N}$, de modo que $s(k) \in X$. Assim, $k \in X$ implica $s(k) \in X$ e como $0 \in X$, temos que $X = \mathbb{N}$.

□

Proposição 1.3. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m + n = 0$, então $m = n = 0$.*

Demonstração. Se $n = 0$, então, por definição, temos que $m + n = m + 0 = m = 0$, de modo que $m = n = 0$. Suponhamos, por absurdo, que $n \neq 0$. Dessa forma, temos que existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $s(p) = n$. Assim, temos que $m + n = m + s(p) = s(m + p) = 0$, isto é, 0 é sucessor de $m+p \in \mathbb{N}$. Absurdo, pois 0 não é sucessor de qualquer número natural. Assim, concluímos que $m = n = 0$, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 1.4. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $0 + n = n + 0 = n$.*

Demonstração. Por definição, já temos que $n + 0 = n$. Resta-nos mostrar que $0 + n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar por indução sobre n. Consideremos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 + n = n\}$. Vamos mostrar que $X = \mathbb{N}$. Por definição, $0 + 0 = 0$ e, dessa forma, $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, que $0 + k = k = k + 0$. Vamos mostrar que $s(k) \in X$. Por definição, temos que $0 + s(k) = s(0 + k) = s(k)$, isto é, $s(k) \in X$. Assim, $0 \in X$ e $k \in X$ implica $s(k) \in X$, de modo que, pelo Axioma de

Peano 1.1, item (P3), temos $X = \mathbb{N}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n+0 = 0+n = n$, como queríamos demonstrar.

□

Dado um número natural m, para obtermos o sucessor de m, podemos realizar a soma $m+s(0)$. No entanto, veremos a seguir que podemos obter o sucessor de m mudando a ordem das parcelas da soma.

Proposição 1.5. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então, $m + s(0) = s(0) + m = s(m)$.*

Demonstração. Já vimos que $m + s(0) = s(m)$ e, dessa forma, resta-nos demonstrar que $s(0) + m = s(m)$. Vamos mostrar por indução sobre m. Seja o conjunto $X = \{m \in \mathbb{N} \mid s(0) + m = s(m)\}$. Vamos mostrar que $X = \mathbb{N}$. Pela Definição 1.1, temos que $s(0) + 0 = s(0)$, de modo que $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, que $s(0) + k = s(k)$. Vamos mostrar que $s(k) \in X$. Temos que $s(0) + s(k) = s(s(0) + k) = = s(s(k))$, isto é, $s(k) \in X$. Assim, temos que $X = \mathbb{N}$ e, dessa forma, temos que $s(0) + m = m + s(0) = s(m)$, como queríamos demonstrar.

□

Note que, se $n \neq 0$, então temos que $m + n = m + s(p) = = m + (p + s(0))$. Por outro lado, temos, por definição, que $m + n = = m + s(p) = s(m + p) = (m + p) + s(0)$. Assim, temos que $m + n = = m + (p + s(0)) = (m + p) + s(0)$, o que sugere que a operação soma 1.1 é associativa. Na proposição a seguir veremos que de fato vale essa propriedade.

Proposição 1.6. *Sejam m, n e $p \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(m + n) + p = m + (n + p).$$

Demonstração. De fato, vamos mostrar por indução sobre p. Fixemos $m, n \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $X = \{p \in \mathbb{N} \mid (m + n) + p = m + (n + p)\}$. Temos, por definição, que $(m + n) + 0 = m + n = m + (n + 0)$ e, dessa forma, $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, $(m+n)+k = m+(n+k)$. Vamos mostrar que $s(k) \in X$. Temos que $(m+n)+s(k) = = s((m+n)+k) = s(m+(n+k)) = m+s(n+k) = m+(n+s(k))$, isto é, $(m+n)+s(k) = = m + (n + s(k))$, de modo que $s(k) \in X$. Assim, $0 \in X$ e $k \in X$ implica $s(k) \in X$, de modo que $X = \mathbb{N}$, ou seja, para todo $p \in \mathbb{N}$ temos que $(m + n) + p = m + (n + p)$, como queríamos demonstrar.

□

Segue da Proposição 1.5 que $s(0)$ é o número natural que deve ser utilizado para obter o sucessor de m, através da operação soma, e, assim, podemos definir um novo símbolo para o elemento $s(0) \in \mathbb{N}$.

Definição 1.2. *O número natural $s(0)$ será denotado por 1 e chamado de "um", é tal que $m+1 = 1+m = s(m)$.*

Definição 1.3. *Seja $m \in \mathbb{N}$, tal que $m \neq 0$. Dessa forma, temos que m possui um antecessor, isto é, um $p \in \mathbb{N}$, tal que $s(p) = p+1 = m$. Escreveremos $m-1$ para representar o antecessor de m, ou seja, $m-1 = p$, tal que $p+1 = m$.*

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos que, se $n = 0$, então $m+0 = 0+m = m$. Temos também que, se $n = 1$, então $m+1 = 1+m = s(m)$. Mas será que vale para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $m+n = n+m$, ou seja, a operação soma é comutativa? A resposta é sim e veremos a demonstração na proposição a seguir.

Proposição 1.7. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então, $m+n = n+m$.*

Demonstração. Vamos demonstrar esse resultado por indução sobre n. Fixemos $m \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \mid m+n = n+m\}$. Vamos mostrar que $X = \mathbb{N}$. Temos, pela Proposição 1.4, que $m+0 = 0+m = m$, e isso implica que $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, que $m+k = k+m$. Vamos mostrar que $s(k) \in X$. Temos, por definição, que $m+s(k) = s(m+k)$ e, agora, pela hipótese de indução, temos que $m+s(k) = s(m+k) = s(k+m) = k+s(m) = = k+(m+s(0)) = k+(s(0)+m) = (k+s(0))+m = s(k)+m$, isto é, $m+s(k) = s(k)+m$, o que implica $s(k) \in X$. Assim, $X = \mathbb{N}$, de modo que $m+n = n+m$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Vamos definir os próximos símbolos para números naturais.

Definição 1.4. *Sejam os números naturais 0 e $s(0) = 1$. Então, definimos os números naturais conforme a seguir:*

- *O número natural $s(s(0)) = s(1)$ será denotado por 2 e chamado "dois";*
- *O número natural $s(s(s(0))) = s(s(1)) = s(2)$ será denotado por 3 e chamado "três";*
- *O número natural $s(s(s(s(0)))) = s(s(s(1))) = s(s(2)) = s(3)$ será denotado por 4 e chamado "quatro";*
- *E assim por diante com os símbolos que já conhecemos.*

Vamos realizar a soma de alguns números naturais respeitando a Definição 1.1 e as propriedades demonstradas até então. Veja os exemplos:

Exemplo 1.1. Exemplos de somas de números naturais utilizando a Definição 1.1.

(a) $2 + 3 = 2 + s(2) = s(2 + 2) = s(2 + s(1)) = s(s(2 + 1)) = $
$= s(s(2 + s(0))) = s(s(s(2 + 0))) = s(s(s(2))) = s(s(3)) =$
$= s(4) = 5$.

(b) $3 + 4 = 3 + s(3) = s(3 + 3) = s(3 + s(2)) =$
$= s(s(3 + 2)) = s(s(3 + s(1))) = s(s(s(3 + 1))) =$
$= s(s(s(3 + s(0)))) = s(s(s(s(3 + 0)))) = s(s(s(s(3)))) =$
$= s(s(s(4))) = s(s(5)) = s(6) = 7$.

Note que, no Exemplo 1.1 acima, item (a), temos que $2 + 3 = s^3(2)$, e , no item (b) acima, $3 + 4 = s^4(3)$. Note também que $s^0 = id_{\mathbb{N}}$, em que $id_{\mathbb{N}}$ é a função identidade e, dessa forma, $s^0(n) = id_{\mathbb{N}}(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim temos, intuitivamente ainda, que a soma $m+n$ pode ser calculada realizando a operação $s^n(m)$ e, para provarmos esse fato, temos a proposição a seguir.

Proposição 1.8. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então, $m + n = s^n(m)$.*

Demonstração. Consideremos m fixo e façamos indução sobre n. Para isso, consideremos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n = s^n(m)\}$. Dessa forma, temos que $s^0(m) = id_{\mathbb{N}} = = m = m + 0$ e temos que $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, $m + k = s^k(m)$. Vamos mostrar que $s(k) \in X$. Temos que $m + s(k) = s(m + k) = s(s^k(m)) = s \circ s^k(m) = = s^{k+1}(m) = s^{s(k)}(m)$ e, dessa forma, temos que $s(k) \in X$. Logo, temos que $X = \mathbb{N}$ e $m + n = s^n(m)$, como queríamos demonstrar.

□

Pela Proposição 1.8, temos um novo método para determinar a soma de números naturais e veremos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 1.2. Exemplos de somas de números naturais utilizando o método da Proposição 1.8.

(a) $2 + 4 = s^4(2) = s^3(3) = s^2(4) = s^1(5) = s(5) = 6$.

(b) $3 + 1 = s^1(3) = s(3) = 4$.

1.2.2 Produto de números naturais

Definição 1.5 (Produto de números naturais)**.** *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então, definimos recursivamente o produto entre m e n, denotado por $m \cdot n$ por*

$$m \cdot n = \begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot (n+1) = m \cdot n + m \end{cases}$$

Note que a definição já direciona o número natural 0 como o elemento tal que $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$ e veremos esse resultado a seguir.

Proposição 1.9. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então, $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$.*

Demonstração. Por definição, já temos que $m \cdot 0 = 0$ e, dessa forma, resta-nos provar que $0 \cdot m = 0$. De fato, vamos provar por indução sobre m. Consideremos o conjunto $X = \{m \in \mathbb{N} \mid 0 \cdot m = 0\}$. Por definição, temos que, se $m = 0$, então $0 \cdot 0 = 0$, e isto implica que $0 \in X$. Suponhamos que $k \in \mathbb{N}$, isto é, $0 \cdot k = 0$. Vamos mostrar que $k+1 \in X$. Por definição, temos que $0 \cdot (k+1) = 0 \cdot k + 0 = 0 \cdot k = 0$ e, assim, $k+1 \in X$. Logo, $0 \in X$ e $k \in X$ implica $k+1 \in X$, de modo que $X = \mathbb{N}$ e, assim, $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Temos que $0 \cdot 0 = 0$. Veremos a seguir que, se o produto entre dois números naturais for zero, pelo menos um deles deve ser igual a zero.

Proposição 1.10. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m \cdot n = 0$, então ou $m = 0$ ou $n = 0$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $m \neq 0$ e $n \neq 0$. Dessa forma, temos, por definição, que existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $s(p) = p + 1 = n$. Assim, $m \cdot n = m \cdot (p+1) = $ $= m \cdot p + m = 0$, o que, pela Proposição 1.3, implica $m \cdot p = m = 0$. Absurdo, pois $m \neq 0$. Dessa forma, concluímos que ou $m = 0$ ou $n = 0$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Definição 1.6 (Elemento neutro do produto de números naturais)**.** *Dizemos que $m \in \mathbb{N}$ é o elemento neutro do produto de números naturais, introduzido na Definição 1.5, se $m \cdot n = n \cdot m = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Por definição, temos que o produto $m \cdot 1$ pode ser obtido fazendo $m \cdot 1 = m \cdot (0+1) = $ $= m \cdot 0 + m = m$, isto é, o número natural 1 é nosso candidato para ser o elemento neutro do produto, ou seja, $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$. Vamos demonstrar esse fato na proposição a seguir.

Proposição 1.11 (Elemento neutro do produto de números naturais)**.** *O número natural 1 é o elemento neutro do produto, isto é, $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Já sabemos que $m \cdot 1 = m$. Vamos mostrar por indução sobre m que $1 \cdot m = m$. Consideremos o conjunto $X = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot m = m\}$. Se $m = 0$, então, por definição, temos que $1 \cdot m = 1 \cdot 0 = 0$ e, assim, $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, $1 \cdot k = k$. Vamos mostrar que $k+1 \in X$. De fato, temos que $1 \cdot (k+1) = 1 \cdot k + 1 = k+1$, ou seja, $1\cdot(k+1) = k+1$, de modo que $k+1 \in X$. Logo, temos que $X = \mathbb{N}$ e $m\cdot 1 = 1\cdot m = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Veremos a seguir alguns exemplos de produto de números naturais utilizando a Definição 1.5.

Exemplo 1.3. Produtos de números naturais utilizando a Definição 1.5.

(a) $3 \cdot 2 = 3 \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6$.

(b) $5 \cdot 3 = 5 \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 2 + 5 = 5 \cdot (1 + 1) + 5 = 5 \cdot 1 + 5 + 5 =$ $= 5 + 5 + 5 = 15$.

(c) $2 \cdot 4 = 2 \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 3 + 2 = 2 \cdot (2 + 1) + 2 = 2 \cdot 2 + 2 + 2 =$ $= 2 \cdot (1 + 1) + 2 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

A Definição 1.5, de produto de números naturais, já sugere que essa operação tenha a propriedade distributiva. Veremos na próxima proposição essa propriedade do produto de números naturais.

Proposição 1.12 (Distributividade)**.** *Sejam m, n e p números naturais. Então, $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.*

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre p e, para isso, fixemos $m, n \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $X = \{p \in \mathbb{N} \mid m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p\}$. Note que, se $p = 0$, então $m \cdot (n + p) = m \cdot (n + 0) = m \cdot n = m \cdot n + 0 = m \cdot n + m \cdot 0$, isto é, $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, $m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k$. Vamos mostrar que $k + 1 \in X$. De fato, temos que $m \cdot [n + (k + 1)] = m \cdot [(n + k) + 1] = m \cdot (n + k) + m =$ $= m \cdot n + m \cdot k + m = m \cdot n + m \cdot (k + 1)$, isto é, $k + 1 \in X$. Assim, temos que $X = \mathbb{N}$ e $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Proposição 1.13 (Propriedades do produto de números naturais)**.** *Sejam m, n e p números naturais. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *(Associatividade) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.*

2. *(Comutatividade) $m \cdot n = n \cdot m$.*

Demonstração. Sejam os números naturais m, n e p.

1. Vamos mostrar por indução sobre $p \in \mathbb{N}$ que $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$. Para isso, fixemos $m, n \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $X = \{p \in \mathbb{N} \mid m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p\}$. Por definição, temos que, se $p = 0$, então $m \cdot (n \cdot 0) = m \cdot 0 = 0 = (m \cdot n) \cdot$

0 e, assim, $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$. Vamos mostrar que $k+1 \in X$. De fato, $m \cdot [n \cdot (k+1)] = m \cdot [n \cdot k + n] =$ $= m \cdot (n \cdot k) + m \cdot n = (m \cdot n) \cdot k + m \cdot n = (m \cdot n) \cdot (k+1)$ e, dessa forma, $k+1 \in X$. Logo, $X = \mathbb{N}$, de modo que $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ para todo $p \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

2. Vamos mostrar que o produto de números naturais é comutativo. Fixemos $m \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n = n \cdot m\}$. Como $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$, temos que $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, $m \cdot k = k \cdot m$. Vamos mostrar que $k+1 \in X$. De fato, $m \cdot (k+1) = m \cdot k + m = k \cdot m + m = m + k \cdot m = m \cdot (1+k) =$ $= m \cdot (k+1)$. Assim, $k+1 \in X$ e $X = \mathbb{N}$, de modo que $m \cdot n = n \cdot m$, como queríamos demonstrar.

$\square$

1.2.3 Potenciação de números naturais

Definição 1.7 (Potenciação de números naturais). *Sejam a e n números naturais. Então, definimos recursivamente a operação potenciação de números naturais, designada por a^n, como*

$$a^n = \begin{cases} 0, & se\ a = 0\ e\ n \neq 0; \\ 1, & se\ a \neq 0\ e\ n = 0; \\ a^{n-1} \cdot a, & se\ a \neq 0\ e\ n \geq 1. \end{cases}$$

Observe que, para números naturais, não está definida a operação potenciação 0^0.

Note que, para um número natural $a \neq 0$, por definição, $a^1 = a^{1-1} \cdot a = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$. Veremos a seguir alguns exemplos de potenciação de números naturais usando a Definição 1.7.

Exemplo 1.4. Exemplos de potenciações de números naturais utilizando a Definição 1.7.

(a) $3^2 = 3^1 \cdot 3 = 3^0 \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$.

(b) $2^5 = 2^4 \cdot 2 = 2^3 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^0 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ $= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Proposição 1.14 (Propriedades da potenciação de números naturais)**.** *Sejam a, m e n números naturais, então valem as seguintes propriedades:*

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Demonstração. Vamos demonstrar por indução as duas propriedades.

1. Suponhamos $a \neq 0$, fixemos $m \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \mid a^m \cdot a^n = a^{m+n}\}$. Vamos mostrar por indução sobre n que $X = \mathbb{N}$. Se $n = 0$, então $a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+n}$ e, dessa forma, $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$. Vamos mostrar que $k+1 \in X$. De fato, $a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^{(k+1)-1} \cdot a) = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a =$ $= a^{m+k} \cdot a = a^{(m+k)+1} = a^{m+(k+1)}$ e, assim, $k+1 \in X$. Logo, $X = \mathbb{N}$ e $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, como queríamos demonstrar.

2. Suponhamos $a \neq 0$, fixemos $m \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \mid (a^m)^n = a^{m \cdot n}\}$. Vamos mostrar por indução sobre n que $X = \mathbb{N}$. Se $n = 0$, então $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0} = a^{m \cdot n}$, isto é, $0 \in X$. Suponhamos que $k \in X$, isto é, $(a^m)^k = a^{m \cdot k}$. Dessa forma, temos que $(a^m)^{k+1} =$ $= (a^m)^{(k+1)-1} \cdot a^m = (a^m)^k \cdot a^m = a^{m \cdot k} \cdot a^m = a^{m \cdot k + m} =$ $= a^{m \cdot (k+1)}$, isto é, $k+1 \in X$. Assim, temos que $X = \mathbb{N}$ e $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, como queríamos demonstrar.

□

1.3 Comparação de números naturais

Definimos a relação de ordem dos números naturais utilizando a operação soma de números naturais introduzida na Definição 1.1.

Definição 1.8. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m é menor ou igual que n, ou n é maior ou igual que m, se existe um $p \in \mathbb{N}$, tal que $n = m + p$. Nesse caso, escrevemos $m \leq n$ ou $n \geq m$.*

Definição 1.9. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m é estritamente menor que n (ou, simplesmente, m é menor que n) ou n é estritamente maior que m (ou, simplesmente, n é maior que m), se existe um $p \in \mathbb{N}$, tal que $p \neq 0$ e $n = m + p$. Nesse caso, escrevemos $m < n$ ou $n > m$.*

Proposição 1.15. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $m \neq 0$ e $n \neq 0$. Se $m \leq n$, então $m - 1 \leq n - 1$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $n - 1 < m - 1$. Dessa forma, temos que existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $p \neq 0$ e $(n-1) + p = m - 1$, e isso implica $(n+p) - 1 = m - 1$. Assim, $s((n+p)-1)) = s(m-1)$, de modo que $n + p = m$, isto é, $n < m$. Absurdo, pois $m \leq n$. Logo, temos que $m - 1 \leq n - 1$, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 1.16. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \neq 0$, temos que $0 < n$.*

Demonstração. De fato, devemos mostrar que existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $p \neq 0$ e $0 + p = n$. Como $n \neq 0$, temos que existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $s(p) = n \neq 0$ e, assim, temos que $0 + s(p) = s(0 + p) = s(p) = n$. Logo, por definição, temos que $0 < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 1.17. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então, $n < s(n)$.*

Demonstração. Como $s(n) = n + 1$ e $1 = s(0) \neq 0$, temos, por definição, que $n < s(n)$, como queríamos demonstrar.

□

Note que, pela Proposição 1.17, cada número natural n é estritamente menor que seu sucessor e, dessa forma, podemos listá-los, ordenadamente, sendo

$$0 < s(0) = 1 < s(1) = 2 < s(2) = 3 < \ldots < n < s(n) = n + 1 < \ldots.$$

Proposição 1.18. *Sejam os números naturais m, n e p. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *(Transitividade) Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.*
2. *(Monotonicidade da soma) Se $m < n$, então $m + p < n + p$ para todo $p \in \mathbb{N}$.*
3. *(Monotonicidade do produto) Se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$ para todo $p \in \mathbb{N}$, tal que $p \neq 0$.*

Demonstração. Sejam os números naturais m, n e p.

1. Como $m < n$ e $n < p$, temos que existem $r, s \in \mathbb{N}$, tal que $r \neq 0$, $s \neq 0$, $m + r = n$ e $n + s = p$. Assim, temos que $r + s \neq 0$ e $m + (r + s) = (m + r) + s = n + s = p$, de modo que, por definição, $m < p$.

2. Como $m < n$ temos, por definição, que existe $t \in \mathbb{N}$, tal que $t \neq 0$ e $m + t = n$. Dessa forma, temos que $(m + t) + p = n + p$, o que implica $(m + p) + t = n + p$, de modo que, por definição, $m + p < n + p$.

3. Como $m < n$ temos, por definição, que existe $t \in \mathbb{N}$, tal que $t \neq 0$ e $m+t = n$. Note que $p \cdot t \neq 0$, pois $p \neq 0$ e $t \neq 0$. Dessa forma, temos que $n \cdot p = (m+t) \cdot p = m \cdot p + t \cdot p$, o que implica, por definição, que $m \cdot p < n \cdot p$.

□

Proposição 1.19. *Sejam, $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m < n$, então $m + 1 \leq n$.*

Demonstração. Como $m < n$, temos, por definição, que existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $p \neq 0$ e $m + p = n$.

Se $p = 1$, então $m + 1 = n$, de modo que $m + 1 \leq n$.

Se $p > 1$, então, pela Proposição 1.18, item 1, temos que $m + 1 < m + p = n$, o que implica $m + 1 \leq n$. Dessa forma, temos que $m + 1 \leq n$, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 1.20 (Tricotomia)**.** *Sejam os números naturais m e n. Então, ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$.*

Demonstração. Vamos mostrar que não podem ocorrer duas opções simultaneamente e, para isso, suponhamos, por absurdo, a ocorrência de duas. Vamos separar em três casos.

Se $m < n$ e $m = n$, então, por definição, temos que existe $p > 0$, tal que $m+p = n$. Como $m = n$, temos que $m = m + p$ e, assim, $m < m$. Absurdo, pois $m = m$.

Se $m > n$ e $m = n$, então, por definição, temos que existe $p > 0$, tal que $n+p = m$. Como $m = n$, temos que $n = n + p$ e, assim, $n < n$. Absurdo, pois $n = n$.

Se $m < n$ e $n < m$, então existem $p > 0$ e $t > 0$, tal que $m + p = n$ e $n + t = m$. Dessa forma, temos que $(n + t) + p = n$, isto é, $n + (t + p) = n$, de modo que $t + p = 0$. Absurdo, pois $t + p > 0$.

Dessa forma, demonstramos que não podem ocorrer duas opções simultaneamente. Vamos mostrar, por indução sobre m, que uma deve ocorrer e, para isso, fixemos $n \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto X definido abaixo.

$$X = \{m \in \mathbb{N} \mid \text{ ou } m < n \text{ ou } m = n \text{ ou } m > n\}.$$

Vamos mostrar por indução que $X = \mathbb{N}$. Temos que ou $0 = n$ ou $0 \neq n$. Se $0 = n$, então $0 \in X$. No entanto, se $n \neq 0$, então $0 < n$ e, assim, $0 \in X$.

Suponhamos que $k \in X$, isto é, ou $k < n$ ou $k = n$ ou $k > n$. Vamos mostrar que $k + 1 \in X$.

Se $k < n$, então existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $p \neq 0$ e $n = k + p$. Se $p = 1$, então $k + 1 = n$, de modo que $k + 1 \in X$. Se $p \neq 1$, então $k + 1 < k + p = n$, de modo que $k + 1 < n$ e $k + 1 \in X$.

Se $k = n$, então $k + 1 = n + 1 > n$ e, dessa forma, $k + 1 > n$, o que implica $k + 1 \in X$.

Se $n < k$, então existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $p \neq 0$ e $k = n + p$. Dessa forma, temos que $k + 1 = n + (p + 1) > n$, isto é, $k + 1 > n$, de modo que $k + 1 \in X$.

Dessa forma, temos que $0 \in X$ e $k \in X$ implica $k + 1 \in X$, de modo que, por indução, $X = \mathbb{N}$.

□

A Proposição 1.20 nos assegura que, dados dois números naturais m e n, eles são comparáveis.

Definição 1.10. *Definimos o conjunto I_0 como o conjunto vazio, isto é, $I_0 = \emptyset$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \neq 0$, $I_n = \{p \in \mathbb{N} \mid 0 \leq p \leq n - 1\}$.*

Proposição 1.21. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m \leq n$, então $I_m \subseteq I_n$.*

Demonstração. Se $m = 0$, então $I_m = \emptyset$, o que implica $\emptyset = I_m \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $m \neq 0$, então $n \neq 0$ e, como $m \leq n$, temos, pela Proposição 1.15, que $m - 1 \leq n - 1$. Seja $x \in I_m$. Por definição, temos que $0 \leq x \leq m - 1$ e isso implica $0 \leq x \leq m - 1 \leq n - 1$, de modo que $0 \leq x \leq n - 1$, ou seja, $x \in I_n$. Assim, temos que $I_m \subseteq I_n$.

□

Proposição 1.22. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m < n$, então $I_m \subsetneq I_n$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.21, temos que $I_m \subseteq I_n$. Vamos mostrar que $I_m \neq I_n$. De fato, se $m = 0$, então $n \neq 0$ e, dessa forma, temos que $\emptyset = I_m \subsetneq I_n \neq \emptyset$. Se $m \neq 0$, como $m < n$, temos que $m - 1 < m < m + 1 \leq n$, isto é, $m \notin I_m$ e $m \in I_n$, o que implica $I_m \neq I_n$. Dessa forma, temos que $I_m \subsetneq I_n$, como queríamos demonstrar.

□

Note que, pela Proposição 1.22, temos que

$$I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \ldots \subsetneq I_n \subsetneq I_{n+1} \subsetneq \ldots.$$

Definição 1.11. *Seja $X \subset \mathbb{N}$. Um número $m \in X$ será dito elemento mínimo de X quando tem-se que $m \leq n$ para todo $n \in X$.*

Proposição 1.23. *Seja $X \subset \mathbb{N}$, tal que $X \neq \emptyset$. Se X possui elemento mínimo $m \in X$, então não existe $m' \in X$, tal que $m' \neq m$ e m' é elemento mínimo de X.*

Demonstração. De fato, suponhamos que X possui elemento mínimo $m \in X$. Suponhamos, por absurdo, que existe $m' \in X$, tal que $m \neq m'$ e m' é elemento mínimo de X. Dessa forma, por definição, temos que $m \leq m'$ e $m' \leq m$, isto é, existem $p, p' \in \mathbb{N}$, tal que $m+p = m'$ e $m'+p' = m$. Assim, temos que $m+p = (m'+p')+p = m'+(p+p') = m'$ logo, $p+p' = 0$, o que implica $p = p' = 0$. Assim, concluímos que $m = m'+p' = m'+0 = m'$ e $m' = m+p = (m'+p') = p = m'+(p'+p)$, isto é, $m = m'$. Absurdo, pois $m \neq m'$. Dessa forma, temos que o elemento mínimo de X, quando existe, é o único elemento mínimo de X, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 1.2 (Princípio da Boa Ordenação - PBO)**.** *Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui elemento mínimo, isto é, se $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$ então, existe $a \in A$, tal que $a \leq n$ para todo $n \in A$.*

Demonstração. De fato, se $0 \in A$, então 0 será o elemento mínimo de A e o teorema estará demonstrado. Suponhamos então que $0 \notin A$. Consideremos o conjunto $X \subset \mathbb{N}$ definido por $X = \{n \in \mathbb{N} \mid I_n \subset \mathbb{N} \setminus A\}$. Observe que, do fato de $I_0 = \emptyset \subset \mathbb{N} \setminus A$, temos que $0 \in X$. Note que, dizer que $n \in X$ implica dizer que $I_n \subset \mathbb{N} \setminus A$, isto é, todos os números naturais p, tal que, $0 \leq p \leq n-1$ pertencem ao complementar de A, ou seja, não pertencem a A. Assim, como $0 \notin A$, temos que $I_1 = \{0\} \subset \mathbb{N} \setminus A$ e, dessa forma, $1 \in X$. Observe que, como $A \neq \emptyset$, existe um elemento $a \in A \subset \mathbb{N}$ e, do fato de $X \subset \mathbb{N} \setminus A$, temos que $a \notin X$. Portanto, $X \neq \mathbb{N}$.

Tomemos agora a hipótese de indução da seguinte forma: se $X \neq \mathbb{N}$, então $0 \in X$ e não se tem que $n \in X$ implica $n+1 \in X$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, como $X \neq \mathbb{N}$ e $0 \in X$, temos que deve existir um $m \in X$, tal que $m+1 \notin X$. Como $m \in X$, temos que $I_m \subset \mathbb{N} \setminus A$, ou seja, todos os números naturais desde 0 até $m-1$ pertencem ao complementar de A (não pertencem a A). Como $m+1 \notin X$, temos que $I_{m+1} \not\subset \mathbb{N} \setminus A$, isto é, existe um elemento em I_{m+1} que pertence ao conjunto A, e só há uma possibilidade, o elemento m. Dessa forma, o elemento $m \in A$ é tal que todos os naturais menores que m pertencem ao complementar de A. Sendo assim, $m \leq k$ para todo $k \in A$, o que demonstra o teorema.

□

2 EQUINUMERABILIDADE

> "O trabalho de um pastor primitivo era muito simples. De manhã bem cedo, ele levava as ovelhas para pastar. À noite recolhia as ovelhas, guardando-as dentro de um cercado. Mas como controlar o rebanho? Como ter certeza de que nenhuma ovelha havia fugido ou sido devorada por algum animal selvagem? O jeito que o pastor arranjou para controlar seu rebanho foi contar as ovelhas com pedras. Assim: cada ovelha que saía para pastar correspondia a uma pedra. O pastor colocava todas as pedras em um saquinho. No fim do dia, à medida que as ovelhas entravam no cercado, ele ia retirando as pedras do saquinho. Que susto levaria se após todas as ovelhas estarem no cercado, sobrasse alguma pedra!". História retirada de (MACHADO; HARTMANN, 2014).

Note que, na história contada acima, quando não sobram nem faltam pedras ao final do dia, o pastor tem certeza que a quantidade de ovelhas que saíra pela manhã é a mesma quantidade de ovelhas que retornara à noite. Isto porque o pastor relacionava cada pedra a uma e somente uma ovelha, de forma que não sobram nem ovelhas nem pedras. Em termos matemáticos, se O for o conjunto das ovelhas que saíram para pastar pela manhã e P o conjunto das pedras colocadas no saquinho, temos uma função bijetiva que relaciona os elementos do conjunto O com os elementos do conjunto P. Veja a Figura 2.

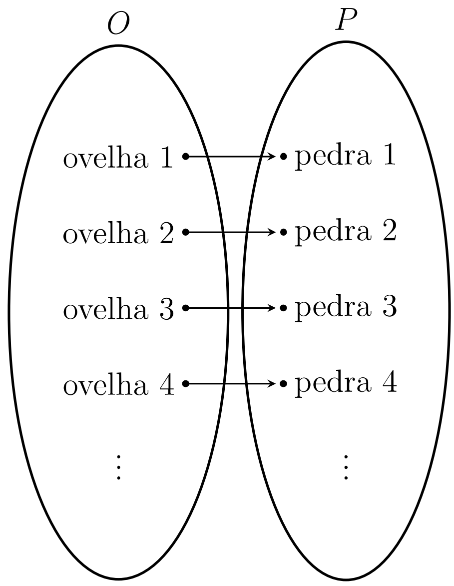
Observe que existe uma função bijetiva entre os conjuntos O e P e, nesse caso, diremos que os conjuntos O e P são equinumeráveis.

Definição 2.1 (Conjuntos equinumeráveis)**.** *Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é equinumerável ao conjunto B quando existe uma função bijetiva entre o conjunto A e o conjunto B.*

Notação 2.1. Escreveremos $A \approx B$ para dizer que o conjunto A é equinumerável ao conjunto B e $A \not\approx B$ quando não existe função bijetiva entre os conjuntos A e B. Para dizer que existe uma bijeção f entre os conjuntos A e B, escreveremos $A \underset{f}{\approx} B$.

No ensino básico, são apresentados os seguintes conjuntos: dos números naturais, $\mathbb{N}$; dos números inteiros, $\mathbb{Z}$; dos números racionais, $\mathbb{Q}$; dos números irracionais, $\mathbb{I}$; dos números reais, $\mathbb{R}$; e dos números complexos, $\mathbb{C}$. Veremos a seguir alguns resultados de equinumerabilidade envolvendo esses conjuntos e, ao longo deste trabalho, muitos outros resultados com tais conjuntos. Todos os resultados mostrados aqui tiveram como inspiração (ENDERTON, 1977).

Figura 2 - Bijeção entre os conjuntos O e P.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2023.

Proposição 2.1. *Seja* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *o conjunto dos números inteiros. Então, o conjunto dos números naturais,* $\mathbb{N}$*, é equinumerável ao conjunto* $\mathbb{Z}$.

Demonstração. Vamos exibir uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Consideremos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como segue abaixo

$$f(n) = \begin{cases} k, & \text{se } n = 2k, k \in \mathbb{N}; \\ -k, & \text{se } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \text{ e } k \neq 0. \end{cases}$$

Vamos mostrar que a função f é uma bijeção. De fato, a função f é injetiva, pois, sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $m \neq n$. Existem três possibilidades para m e n: ou são ambos pares, ou são ambos ímpares, ou possuem paridades diferentes.

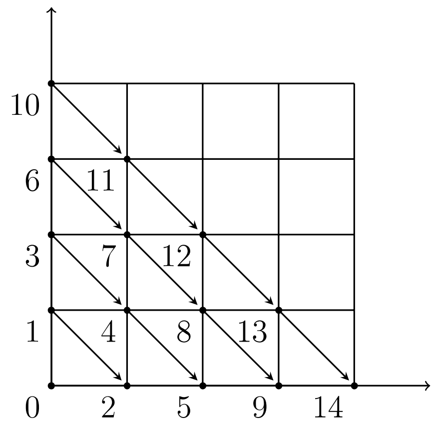
Se m e n são ambos pares, então existem $k \neq k' \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2k \neq 2k' = n$. Dessa forma, temos que $f(m) = k \neq k' = f(n)$, e $f(m) \neq f(n)$.

Caso sejam ambos ímpares, então existem $k \neq k' \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2k - 1 \neq 2k' - 1 = n$. Dessa forma, temos que $f(m) = -k \neq -k' = f(n)$, e $f(m) \neq f(n)$.

Por último, se m e n possuem paridades diferentes, podemos supor, sem perda de generalidade, que m é par e n ímpar. Então existem $k, k' \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2k$ e $n = 2k' - 1$ e, assim, $f(m) = k \neq -k' = f(n)$ e $f(m) \neq f(n)$. Provamos, então, que a função f é injetiva.

A função f é sobrejetiva. De fato, dado $z \in \mathbb{Z}$. Se z for não-negativo, então $z \in \mathbb{N}$, o que implica $2z \in \mathbb{N}$ e $f(2z) = z$. Se z for negativo, então $-z \neq 0$, $-z \in \mathbb{N}$ e $f(2(-z) - 1) = -(-z) = z$. Portanto, a função f é sobrejetiva. Provamos, assim, que a

Figura 3 - Bijeção entre os conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$.



Fonte: (ENDERTON, 1977, p. 130)

função f é uma bijeção. Logo, temos que $\mathbb{N} \underset{f}{\approx} \mathbb{Z}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Proposição 2.2. *O conjunto $\mathbb{N}$ é equinumerável ao conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

Demonstração. Observe que essa afirmação é equivalente a afirmar a existência de uma função bijetiva entre os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e, de fato, tal função existe. Consideremos a função J definida da seguinte forma

$$\begin{array}{rccl} J: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (m,n) & \longmapsto & J(m,n) = \frac{1}{2}[(m+n)^2 + 3m + n] \end{array}$$

A ideia da função J, definida acima, está na Figura 3, retirada de (ENDERTON, 1977). Note que, a partir do ponto $(0,0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pecorremos, intuitivamente ainda, todo o plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pelo caminho $J(0,0) = 0$, $J(0,1) = 1$, $J(1,0) = 2$, $J(0,2) = 3$, $J(1,1) = 4$, $J(2,0) = 5$, ...

A função J está bem definida. Para verificar isso, devemos mostrar que para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $J(m,n) \in \mathbb{N}$. Temos então três possibilidades para analisar: ou m e n são ambos pares ou m e n são ambos ímpares ou m e n possuem paridades diferentes.

- Caso I) Se m e n são ambos pares, então existem $t, s \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2t$ e $n = 2s$ e, dessa forma,

$$\begin{aligned} J(m,n) &= \frac{1}{2}[(2t+2s)^2 + 6t + 2s] = \frac{1}{2}[4(t+s)^2 + 6t + 2s] \\ &= 2(t+s)^2 + 3t + s \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- Caso II) Se m e n são ambos ímpares, então existem $t, s \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2t + 1$ e $n = 2s + 1$ e, dessa forma,

$$\begin{aligned}
J(m,n) &= \frac{1}{2}[((2t+1)+(2s+1))^2+3(2t+1)+(2s+1)]\\
&= \frac{1}{2}[(2(t+s)+2)^2+3(2t+1)+(2s+1)]\\
&= \frac{1}{2}[4(t+s+1)^2+6t+3+2s+1]\\
&= 2(t+s+1)^2+3t+s+2 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

- Caso III) Se m e n possuem paridades diferentes, temos dois casos para analisar: quando m for par e n for ímpar e quando m for ímpar e n for par.

  ⋆ Se m for par e n for ímpar, então existem $t, s \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2t$ e $n = 2s+1$. Dessa forma,
  $$\begin{aligned}
  J(m,n) &= \frac{1}{2}[(2t+2s+1)^2+3(2t)+(2s+1)]\\
  &= \frac{1}{2}[(2(t+s)+1)^2+6t+2s+1]\\
  &= \frac{1}{2}[4(t+s)^2+4(t+s)+1+6t+2s+1]\\
  &= 2(t+s)^2+2(t+s)+3t+s+1 \in \mathbb{N}.
  \end{aligned}$$

  ⋆ Se m for ímpar e n for par, então existem $t, s \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2t+1$ e $n = 2s$. Dessa forma,
  $$\begin{aligned}
  J(m,n) &= \frac{1}{2}[(2t+1+2s)^2+3(2t+1)+2s]\\
  &= \frac{1}{2}[(2(t+s)+1)^2+6t+3+2s]\\
  &= \frac{1}{2}[4(t+s)^2+4(t+s)+1+6t+3+2s]\\
  &= \frac{1}{2}[4(t+s)^2+4(t+s)+6t+2s+4]\\
  &= 2(t+s)^2+2(t+s)+3t+s+2 \in \mathbb{N}.
  \end{aligned}$$

Concluímos dessa forma que para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $J(m,n) \in \mathbb{N}$. Portanto, J está bem definida.

Afirmamos que a função J é uma bijeção. De fato, a função J é injetiva, e, para demonstrarmos esse fato, consideremos (m,n) e $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $(m,n) \neq (r,s)$. Temos, assim, três casos para analisar.

- Caso I) Quando $m \neq r$ e $n = s$;

- Caso II) Quando $m = r$ e $n \neq s$;

- Caso III) Quando $m \neq r$ e $n \neq s$.

Vamos então estudar cada caso.

- Caso I) Como $m \neq r$ e $n = s$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $m > r$. Note que, como $m > r$, temos que $3m > 3r$. Vamos mostrar que $J(m,n) \neq$ $\neq J(r,s) = J(r,n)$.

De fato,

$m > r$
$\Rightarrow m + n > r + n$
$\Rightarrow (m+n)^2 > (r+n)^2$
$\Rightarrow (m+n)^2 + 3m > (r+n)^2 + 3r$
$\Rightarrow (m+n)^2 + 3m + n > (r+n)^2 + 3r + n$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2}[(m+n)^2 + 3m + n] > \dfrac{1}{2}[(r+n)^2 + 3r + n]$
$\Rightarrow J(m,n) > J(r,n) = J(r,s)$.

Concluímos que $J(m,n) \neq J(r,s)$.

- Caso II) Temos agora que $m = r$ e $n \neq s$. Vamos mostrar que $J(m,n) \neq J(r,s) = J(m,s)$. De fato, podemos supor, sem perda de generalidade, que $n > s$. Dessa forma,

  $n > s$
  $\Rightarrow m + n > m + s$
  $\Rightarrow (m+n)^2 > (m+s)^2$
  $\Rightarrow (m+n)^2 + 3m > (m+s)^2 + 3m$
  $\Rightarrow (m+n)^2 + 3m + n > (m+s)^2 + 3m + s$
  $\Rightarrow \dfrac{1}{2}[(m+n)^2 + 3m + n] > \dfrac{1}{2}[(m+s)^2 + 3m + s]$
  $\Rightarrow J(m,n) > J(m,s) = J(r,s)$.

  Concluímos que $J(m,n) \neq J(r,s)$.

- Caso III) Nossa hipótese agora é que $m \neq r$ e $n \neq s$. Vamos dividir em dois casos: o primeiro, quando $m + n > r + s$ (de forma análoga poderíamos fazer quando $r + s > m + n$), e o segundo, quando $m + n = r + s$.

  (i) Nossa premissa é que $m + n > r + s$ e, para demonstrarmos que $J(m,n) \neq \neq J(r,s)$. Vamos precisar do resultado a seguir.

  Afirmação. Sejam $t, l \in \mathbb{N}$ tal que $t > l$. Então, $J(0,t) > J(l,0)$.

  Demonstração. De fato, como $t > l$, temos que existe um elemento $p \in \mathbb{N}$, tal que $p \geq 1$ e $t = l + p$. Observemos que, como $p \geq 1$, temos que $2p \geq 2$, o que implica $2p + 1 \geq 3$ e, assim,

$t = l + p$
$\Rightarrow t^2 = l^2 + 2pl + p^2$
$\Rightarrow t^2 + t > l^2 + 2pl + p^2 + l$
$\Rightarrow t^2 + t > l^2 + (2p+1)l + p^2 > l^2 + (2p+1)l$
$\Rightarrow t^2 + t > l^2 + (2p+1)l \geq l^2 + 3l$
$\Rightarrow t^2 + t > l^2 + 3l$
$\Rightarrow \frac{1}{2}[t^2 + t] > \frac{1}{2}[l^2 + 3l]$
$\Rightarrow J(0,t) > J(l,0)$, como queríamos demonstrar .

Vamos observar agora que
$J(m,n) = \frac{1}{2}[(m+n)^2 + 3m + n] \geq \frac{1}{2}[(m+n)^2 + (m+n)] =$
$= J(0, m+n) > J(r+s, 0) = \frac{1}{2}[(r+s)^2 + 3(r+s)] =$
$= \frac{1}{2}[(r+s)^2 + 3r + 3s] \geq \frac{1}{2}[(r+s)^2 + 3r + s] =$
$= J(r,s)$.
Dessa forma, temos que $J(m,n) > J(r,s)$ e, portanto, $J(m,n) \neq J(r,s)$, como queríamos demonstrar.

(ii) Caso tenhamos $m + n = r + s$, então ou ($m > r$ e $n < s$) ou ($m < r$ e $n > s$). Se $m > r$ e $n < s$, então $2n < 2s$ implica $2s - 2n > 0$, logo,
$m + n = r + s$
$\Rightarrow (m+n)^2 = (r+s)^2$
$\Rightarrow (m+n)^2 + 3(m+n) = (r+s)^2 + 3(r+s)$
$\Rightarrow (m+n)^2 + 3m + 3n = (r+s)^2 + 3r + 3s$
$\Rightarrow (m+n)^2 + 3m + 3n + (2s - 2n) > (r+s)^2 + 3r + 3s$
$\Rightarrow (m+n)^2 + 3m + n > (r+s)^2 + 3r + s$
$\Rightarrow \frac{1}{2}[(m+n)^2 + 3m + n] > \frac{1}{2}[(r+s)^2 + 3r + s]$
$\Rightarrow J(m,n) > J(r,s)$
$\Rightarrow J(m,n) \neq J(r,s)$.
Se $m < r$ e $n > s$, então $2n > 2s$ implica $2n - 2s > 0$, logo,
$m + n = r + s$
$\Rightarrow (m+n)^2 = (r+s)^2$
$\Rightarrow (m+n)^2 + 3(m+n) = (r+s)^2 + 3(r+s)$
$\Rightarrow (m+n)^2 + 3m + 3n = (r+s)^2 + 3r + 3s$
$\Rightarrow (m+n)^2 + 3m + 3n < (r+s)^2 + 3r + 3s + (2n - 2s)$
$\Rightarrow (m+n)^2 + 3m + n < (r+s)^2 + 3r + s$
$\Rightarrow \frac{1}{2}[(m+n)^2 + 3m + n] < \frac{1}{2}[(r+s)^2 + 3r + s]$
$\Rightarrow J(m,n) < J(r,s)$
$\Rightarrow J(m,n) \neq J(r,s)$.

Concluímos, dessa forma, que a função J é injetiva.

Vamos mostrar agora que a função J é sobrejetiva. De fato, consideremos o conjunto T definido abaixo

$$T = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{existe } (r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \text{ tal que } J(r,s) = k\}.$$

Vamos mostrar, por indução, que T é o próprio $\mathbb{N}$.

De fato,

- $0 \in T$.

  Para provarmos esse fato, basta observarmos que $J(0,0) = \frac{1}{2}[(0+0)^2 + 3 \cdot 0 + 0] = 0$.

- Hipótese de indução: Suponhamos que a afirmação seja válida para $k \in T$, isto é, $k = J(r,s) = \frac{1}{2}[(r+s)^2 + 3r + s]$, para algum $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Vamos mostrar que vale também para $k+1$, isto é, $k+1 \in T$.

- Afirmação: $k+1 \in T$.

  De fato, como $k \in T$, temos que existe $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $J(r,s) = k$, isto é, $J(r,s) = \frac{1}{2}[(r+s)^2 + 3r + s] = k$. Vamos separar em dois casos: o primeiro caso, quando $s \geq 1$, e o segundo, quando $s = 0$.

  $\star$ Se $s \geq 1$, então $s - 1 \geq 0$, de modo que $s - 1 \in \mathbb{N}$. Dessa forma, consideremos o elemento $(r+1, s-1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Temos que

  $$J(r+1, s-1) = \frac{1}{2}[(r+1+s-1)^2 + 3(r+1) + s - 1]$$
  $$= \frac{1}{2}[(r+s)^2 + 3r + s + 2]$$
  $$= \frac{1}{2}[(r+s)^2 + 3r + s] + 1 = k+1.$$

  $\star$ Se $s = 0$, temos que $k = J(r,0) = \frac{1}{2}[(r+0)^2 + 3r + 0] = \frac{1}{2}[r^2 + 3r]$. Então, consideremos o par $(0, r+1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

  Temos que

  $$\begin{aligned} J(0, r+1) &= \frac{1}{2}[(0+r+1)^2 + 3 \cdot 0 + r + 1] \\ &= \frac{1}{2}[(r+1)^2 + r + 1] \\ &= \frac{1}{2}[r^2 + 3r + 2] \\ &= \frac{1}{2}[r^2 + 3r] + 1 = k+1. \end{aligned}$$

  Logo, $k+1 \in T$.

Concluímos que $T = \mathbb{N}$ e a função J é sobrejetiva. Logo, J é uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, de modo que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \underset{J}{\approx} \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Proposição 2.3. *O intervalo* $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ *é equinumerável ao conjunto dos números reais,* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Vamos mostrar que existe uma função bijetiva entre os dois conjuntos. Para isso, consideremos as duas funções f e g, definidas a seguir

$$\begin{array}{rccl} f: & (0,1) & \rightarrow & (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ & x & \mapsto & f(x) = \pi x - \frac{\pi}{2} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} g: & (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = \tan(x) \end{array}$$

Do fato de f ser uma função afim, segue que é uma bijeção. Temos também que a função $\tan x$ é uma bijeção para $x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Consideremos então a função $h = g \circ f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(f(x)) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$. Como h é uma composição de funções bijetivas, segue que h é uma bijeção, de modo que $(0,1) \underset{h}{\approx} \mathbb{R}$, isto é, o conjunto $(0,1)$ é equinumerável ao conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$.

$\square$

Definição 2.2 (O conjunto das partes ou conjunto potência)**.** *Dado um conjunto* A*, definimos o conjunto das partes de* A*, também chamado conjunto potência de* A*, denotado por* $P(A)$*, como o conjunto cujos elementos são subconjuntos do conjunto* A*, isto é, se* $X \subset A$*, então* $X \in P(A)$*. Escreveremos* $P^*(A)$ *para designar o conjunto* $P(A) \setminus \{\emptyset\}$*.*

Definição 2.3 (O conjunto das funções)**.** *Definimos o conjunto* B^A *como o conjunto de todas as funções de* A *em* B*.*

Proposição 2.4. *Para cada conjunto* A*, temos que* $P(A) \approx \{0,1\}^A$*, sendo* $\{0,1\}^A$ *o conjunto das funções de* A *em* $\{0,1\}$*.*

Demonstração. Vamos mostrar que existe uma bijeção entre os conjuntos $P(A)$ e $\{0,1\}^A$. Para isso, consideremos a função definida a seguir

$$H : P(A) \rightarrow \{0,1\}^A$$
$$H(B)(x) = f_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B; \\ 0, & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

A função f_B é chamada de função característica de B. A nossa afirmação é que H é uma bijeção. Vamos mostrar que H é injetiva. Sejam B e S subconjuntos de A, tal que $B \neq S$. Dessa forma, consideremos o conjunto $B \setminus S$, que pode ser vazio ou não-vazio.

- Se $B \setminus S = \emptyset$ e $B \neq S$, então existe um $s \in S$, tal que $s \notin B \cap S$ e isso implica $s \notin B$. Dessa forma, $H(B) \neq H(S)$, pois $f_B(s) = 0 \neq 1 = f_S(s)$.

- Se $B \setminus S \neq \emptyset$, então existe $b \in B$ tal que $b \notin S$. Dessa forma, $H(B) \neq H(S)$, pois $f_B(b) = 1 \neq 0 = f_S(b)$.

Logo, $H(B) \neq H(S)$ e a função H é injetiva.

A função H também é sobrejetiva. De fato, dado $f \in \{0,1\}^A$, o conjunto $B = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$ é tal que $B \subseteq A$. Por definição, $H(B) = f_B = f$. Logo, H é sobrejetiva, o que conclui a demonstração.

Assim, $P(A) \approx \{0,1\}^A$, como queríamos demonstrar.

□

Note que, pela Proposição 2.4, temos que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx P(\mathbb{N})$ e que $\{0,1\}^{\mathbb{R}} \approx P(\mathbb{R})$, entre outros.

Teorema 2.1. *Para todos os conjuntos A, B e C, temos que:*

(a) $A \approx A$;

(b) Se $A \approx B$, *então* $B \approx A$;

(c) Se $A \approx B$ *e* $B \approx C$, *então* $A \approx C$.

Demonstração. Sejam os conjuntos A, B e C.

(a) $A \approx A$.

Se $A = \emptyset$, então a função $f : \emptyset \to \emptyset$, que é a função vazio, é uma bijeção. Dessa forma, temos que $\emptyset \approx \emptyset$ e isso implica $A \approx A$.

Caso tenhamos $A \neq \emptyset$, basta considerarmos a função identidade, que é uma bijeção.

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & A \\ & a & \longmapsto & f(a) = a \end{array}$$

(b) Se $A \approx B$, então $B \approx A$.

De fato, como $A \approx B$, temos, por definição, que existe uma função f de A em B, bijetiva. Dessa forma, a função f^{-1} será uma função bijetiva de B em A. Sendo assim, $B \approx A$.

(c) Se $A \approx B$ e $B \approx C$, então $A \approx C$.

Como $A \approx B$ e $B \approx C$, então $A \underset{f}{\approx} B$ e $B \underset{g}{\approx} C$. Consideremos a função h definida pela composição das funções f e g, sendo $h = g \circ f$, de A em C. Como a composição de funções bijetivas é uma função bijetiva, temos que h é uma bijeção entre A e C, o que implica $A \approx C$.

□

Teorema 2.2 (Cantor 1873). *O conjunto dos números naturais* $\mathbb{N}$ *não é equinumerável ao conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo, então, que $\mathbb{N} \underset{f}{\approx} \mathbb{R}$. Vamos mostrar que existe um número real z que não está na imagem de f e, dessa forma, f não será sobrejetiva, o que nos fornecerá um absurdo, dado que f é uma bijeção e, portanto, deveria ser sobrejetiva.

Consideremos então a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, bijetiva, de modo que $f(n) \in \mathbb{R}$ é escrito na base 10, como

$$f(n) = f_0(n), f_1(n)f_2(n)\ldots = f_0(n)\cdot 10^0 + f_1(n)\cdot 10^{-1} + f_2(n)\cdot 10^{-2}\ldots$$

e vamos construir o número real $z \notin \mathrm{Img}(f)$,

$$z = a_0, a_1a_2a_3\ldots = a_0\cdot 10^0 + a_1\cdot 10^{-1} + a_2\cdot 10^{-2}\ldots,$$

da seguinte forma:

- A parte inteira, a_0, de z será 7 se a parte inteira de $f(0)$ for diferente de 7, e 6, se a parte inteira de $f(0)$ for igual a 7. Assim, $z \neq f(0)$;
- Cada $(n+1)$-ésima casa decimal de z será 7 se a $(n+1)$-ésima casa decimal de $f(n+1)$ for diferente de 7, e 6, caso a $(n+1)$-ésima casa decimal de $f(n+1)$ for 7.

Esse argumento é conhecido como diagonal de Cantor. Podemos observar abaixo a ideia dessa construção, que nos fornece um z diferente de cada $f(n)$, com n um número natural.

$$\begin{array}{cccccccl}
f(0) = & f_0(0), & f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0) & \ldots & \text{, sendo } a_0 \neq f_0(0) \\
f(1) = & f_0(1), & f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) & f_4(1) & \ldots & \text{, sendo } a_1 \neq f_1(1) \\
f(2) = & f_0(2), & f_1(2) & f_2(2) & f_3(2) & f_4(2) & \ldots & \text{, sendo } a_2 \neq f_2(2) \\
f(3) = & f_0(3), & f_1(3) & f_2(3) & f_3(3) & f_4(3) & \ldots & \text{, sendo } a_3 \neq f_3(3) \\
f(4) = & f_0(4), & f_1(4) & f_2(4) & f_3(4) & f_4(4) & \ldots & \text{, sendo } a_4 \neq f_4(4) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \qquad\vdots
\end{array}$$

Assim, se $f(0) = 7,097$, z terá a unidade simples igual a 6, de forma que $z \neq$ $\neq f(0)$, pois as partes inteiras serão diferentes. Também, se $f(1) = 0,4896$, então z terá o algarismo 7 nos décimos; sendo assim, $z \neq f(1)$, pois terão a primeira casa decimal diferente.

Essa construção nos fornece um número real z, tal que $z \neq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, assim, a função f não é sobrejetiva, o que nos fornece um absurdo, pois a função f é uma bijeção (injetiva e sobrejetiva). Dessa forma, $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$. $\square$

Proposição 2.5 (Cantor)**.** *Um conjunto A não é equinumerável ao seu conjunto das partes $P(A)$, isto é, $A \not\approx P(A)$ para todo conjunto A.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $A \underset{f}{\approx} P(A)$ e consideremos o conjunto $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\} \subseteq A$. Vamos mostrar que $B \notin \mathrm{Img}(f)$, o que nos dá uma contradição, já que f é uma bijeção. Nós afirmamos que $B \neq \emptyset$, pois, se $B = \emptyset$, então, como f é uma bijeção, existe um elemento $a \in A$, tal que $f(a) = \emptyset \in P(A)$. Como $f(a) = \emptyset$ e como $a \notin \emptyset$, segue que $a \in B$. Absurdo, pois não existe um elemento $a \in B = \emptyset$.

Como $A \supseteq B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$, então existe $x_0 \in A$, tal que $f(x_0) = B$. Qual a relação entre x_0 e B ?

- Se $x_0 \in B$, então $x_0 \notin f(x_0) = B$, absurdo;
- Se $x_0 \notin B = f(x_0)$, então $x_0 \in B$, absurdo.

Por contradição, mostramos que não pode existir uma bijeção entre A e $P(A)$ e, assim, $A \not\approx P(A)$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Dessa forma, temos que $\mathbb{N} \not\approx P(\mathbb{N}) \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, de modo que $\mathbb{N} \not\approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Da mesma maneira, temos que $\mathbb{R} \not\approx P(\mathbb{R}) \approx \{0,1\}^{\mathbb{R}}$, de modo que $\mathbb{R} \not\approx \{0,1\}^{\mathbb{R}}$, entre outros.

3 CONJUNTOS

3.1 Conjuntos finitos

Intuitivamente, quando pensamos no que seria um conjunto finito, logo nos vem a ideia de contagem de elementos, contagem essa com uma propriedade particular: de que terminará em algum momento. Este pensamento nos motiva a definir conjunto finito, tendo como principal ferramenta o conjunto dos números naturais. Este capítulo foi inspirado em (YARNELLE, 1964), (ENDERTON, 1977) e (FAJARDO, 2017).

Definição 3.1 (Conjunto Finito)**.** *Dizemos que um conjunto A é finito quando é equinumerável a um conjunto I_n, $n \in \mathbb{N}$, sendo $I_0 = \emptyset$ e $I_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, se $n \neq 0$.*

Lema 3.1. *Seja f uma função de I_n em I_n. Se f for uma função injetiva, então f será sobrejetiva.*

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema por indução sobre n. Vamos mostrar que, se existe uma função injetiva de I_n em I_n, então, obrigatoriamente, a imagem de f tem que ser I_n, isto é, f será sobrejetiva. Para isso, consideremos o conjunto

$$T = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{toda função injetiva de } I_n \text{ em } I_n \text{ tem imagem } I_n\}.$$

Vamos mostrar que $T = \mathbb{N}$. Se $n = 0$, então $I_0 = \emptyset$, e a única função de $\emptyset$ em $\emptyset$ é a função $\emptyset$, que tem imagem $\emptyset$, de modo que $0 \in T$. Suponhamos que $k \in T$, isto é, que toda função injetiva de I_k em I_k tem como imagem todo o conjunto I_k. Precisamos mostrar que $k+1 \in T$, isto é, que toda função injetiva de I_{k+1} em I_{k+1} tem como imagem todo o conjunto I_{k+1}. Seja f uma função injetiva de I_{k+1} em I_{k+1}. Existem duas possibilidades para a imagem de f: ou ela leva cada elemento de I_k em um elemento de I_k, sendo, assim, fechada em I_k, ou tem um membro de I_k com imagem $k \in I_{k+1}$.

Caso 1) Se a função f for fechada em I_k, consideremos a função $g = f\mid_{I_k}$, a função f restrita a I_k. Como a restrição de uma função injetiva é uma função injetiva, g é uma função injetiva de I_k em I_k e, como $k \in T$, temos que a imagem de g é todo I_k, pela hipótese de indução. Do fato de f ser uma função injetiva, só existe uma possibilidade para $f(k)$, que é k. Assim, $\text{Img}(f) = I_k \cup \{k\} = I_{k+1}$, como queríamos demonstrar.

Caso 2) Suponhamos que a função f não seja fechada em I_k, isto é, existe um elemento $p \in I_k$, tal que $f(p) = k \in I_{k+1}$. Neste caso, como f é uma função injetiva, temos que existe um elemento $s \in I_k$, tal que $f(k) = s \neq k = f(p)$. Definamos, então, a função $\widehat{f} : I_{k+1} \to I_{k+1}$, trocando os valores de $f(k)$ e $f(p)$, de modo que

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} k = f(p), & \text{se } x = k; \\ s = f(k), & \text{se } x = p; \\ f(x), & \text{caso contrário}\ . \end{cases}$$

Observemos que a função $\widehat{f}$ é fechada em I_k e, usando o Caso 1, a imagem de $\widehat{f}$ é $I_k \cup \{k\} = I_{k+1} = \text{Img}(f)$. Podemos concluir neste caso que $\text{Img}(f) = I_{k+1}$ e que $k+1 \in T$. Dessa forma, por indução, concluímos que $T = \mathbb{N}$, o que completa a demonstração.

□

Teorema 3.1 (Princípio do Escaninho)**.** *O conjunto I_n não é equinumerável a um subconjunto próprio de si mesmo.*

Demonstração. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista um conjunto A, tal que $A \subsetneq I_n$ e $A \approx I_n$. Dessa forma, existe uma bijeção f entre A e I_n. Consideremos então, as funções $f^{-1} : I_n \to A$ e $h : A \to I_n$, em que $h(a) = a$ é a função inclusão, e definamos a função g a seguir

$$\begin{array}{rccl} g: & I_n & \to & I_n \\ & x & \mapsto & g(x) = h \circ f^{-1}(x) \end{array}$$

Como a função inversa de uma bijeção é uma bijeção, temos que f^{-1} é uma bijeção e, composta com a função inclusão h, que é uma função injetiva, resulta em uma função injetiva. Dessa forma, a função $g = h \circ f^{-1}$ será uma função injetiva de I_n em I_n e, pelo Lema 3.1, sua imagem é todo I_n. No entanto, a imagem de g é $A \neq I_n$, um absurdo. Logo, o conjunto I_n não pode ser equinumerável a um subconjunto próprio de si mesmo.

□

Agora faz sentido pensar em uma generalização do Princípio do Escaninho, isto é, se pode existir uma bijeção entre um conjunto finito A qualquer e uma parte própria sua. O próximo teorema nos assegura que não, que não pode existir tal equinumerabilidade.

Teorema 3.2. *Nenhum conjunto finito é equinumerável a um subconjunto próprio de si mesmo.*

Demonstração. Seja A um conjunto finito. Se $A = \emptyset$, então A não possui subconjunto próprio. Suponhamos então $A \neq \emptyset$ e $B \subsetneq A$. Se $B = \emptyset \subsetneq A$, não existe função de $A \neq \emptyset$ em $B = \emptyset$, pois B não possui elemento para ser imagem de f, logo $A \not\approx B$.

Suponhamos $B \neq \emptyset$ e vamos demonstrar, por absurdo, que $A \not\approx B$. Suponhamos, então, que $A \underset{f}{\approx} B$. Como A é um conjunto finito, temos, por definição, que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $A \underset{g}{\approx} I_n$. Como $g : A \to I_n$ é uma bijeção, a sua inversa $g^{-1} : I_n \to A$ também será uma bijeção, e as imagens $g(B)$ e $g(A \setminus B)$ são subconjuntos de I_n, tais que, $g(B) \neq \emptyset$ e $g(A \setminus B) \neq \emptyset$, pois, do fato de $B \subsetneq A$, existe $a \in A \setminus B$ e existe $b \in B$.

Figura 4 - Diagrama representativo da função $\varphi = h \circ f \circ g^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} I_n \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[d, bend right, "\varphi=h\circ f\circ g^{-1}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ g(B) & B \arrow[l, "h=g|_B"] \end{tikzcd}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Também, $g(B) \cup g(A \backslash B) = I_n$ e $g(B) \cap g(A \backslash B) = \emptyset$. Assim, o conjunto $I_n \backslash g(A \backslash B) = g(B)$ é um subconjunto próprio de I_n. Como a função g é uma bijeção, a função $h = g\mid_B$ é uma bijeção de B em $g(B) \subsetneq I_n$. Consideremos a função $\varphi = h \circ f \circ g^{-1} : I_n \to g(B)$, representada na Figura 4.

Como as funções g^{-1}, f e h são bijeções, segue que a função $\varphi : I_n \to g(B) \subsetneq I_n$ é uma bijeção, absurdo, pois não pode existir uma bijeção entre I_n e uma parte própria sua, pelo Teorema 3.1.

Dessa forma, não pode existir uma bijeção entre um conjunto finito e uma parte própria sua, como queríamos demonstrar.

$\square$

Até esse momento já conseguimos demonstrar algumas propriedades de conjuntos finitos, mas nossa motivação para definição de conjunto finito estava relacionada à contagem (que termina) de seus elementos. Uma questão que nos vem agora é: essa contagem é unica? Dado um conjunto A, finito, podemos contar seus elementos e obtermos "resultados diferentes"? O próximo corolário nos garante que não é possível.

Corolário 3.1. *Seja A um conjunto finito. Então, é único o número $n \in \mathbb{N}$, tal que $A \approx I_n$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que possa existir I_n e I_m, com $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $m \neq n$, $A \approx I_n$ e $A \approx I_m$. Como $m \neq n$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $m < n$. Isto implica, pela Proposição 1.22, que $I_m \subsetneq I_n$. Como $A \approx I_n$ e $A \approx I_m$, por hipótese, temos que $I_n \approx I_m$ e, dessa forma, o conjunto I_n será equinumerável a uma parte própria sua, o que é um absurdo, pelo Teorema 3.1. Concluímos, então, que existe um único $n \in \mathbb{N}$, tal que $A \approx I_n$.

$\square$

Lema 3.2. *Seja A um conjunto tal que $A \subsetneq I_n, n \in \mathbb{N}$. Então, existe um $m \in \mathbb{N}$, tal que $m < n$ e $A \approx I_m$.*

Para fixar as ideias, vamos pensar nos conjuntos $I_n, n \in \mathbb{N}$.

- Se $n = 0$, então $I_0 = \emptyset$. O conjunto $\emptyset$ não possui subconjunto próprio;
- Se $n = 1$, então $I_1 = \{0\}$ e o único subconjunto próprio de I_1 é $A = \emptyset$. Logo, existe $m = 0 < 1 = n$, tal que $A \approx I_0$;
- Se $n = 2$, então $I_2 = \{0, 1\}$. Assim, seus subconjuntos próprios são $A_1 = \emptyset$ (de modo que existe $m = 0 < 2 = n$ com $A_1 \approx I_0$), $A_2 = \{0\}$ (de modo que existe $m = 1 < 2 = n$ com $A_2 \approx I_1$) e $A_3 = \{1\}$ (de modo que existe $1 = m < 2 = n$ com $A_2 \approx I_1$).

Essa construção nos direciona para demonstrarmos o Lema por indução.

Demonstração. Consideremos então o conjunto T definido abaixo:

$$T = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ todo } A \subsetneq I_n \text{ é equinumerável a algum } I_m, \text{ com } m < n\}.$$

Vamos mostrar que $T = \mathbb{N}$. Para $n = 0$ o subconjunto A não pode ser definido. Temos que $1 \in T$ e $2 \in T$. Suponhamos que a afirmação seja válida para $n \in T$. Precisamos mostrar que $n + 1 \in T$. Seja $A \subsetneq I_{n+1}$, existem duas possibilidades para o elemento n: ou $n \notin A$ ou $n \in A$.

- Se $n \notin A$, então $A \subseteq I_n$. Se $A = I_n$, então $A \approx I_n$, com $m = n < n + 1$. Caso contrário, $A \subsetneq I_n$ e, pela hipótese de indução, $A \approx I_m, m < n$, de modo que $m < n + 1$;
- Suponhamos que $n \in A$ e consideremos o conjunto $A' = A \setminus \{n\}$. Isso significa que $A = A' \cup \{n\}$. Temos que $A' \subsetneq I_n$, pois, se $A' = I_n$, teríamos que $A = I_{n+1}$, absurdo. Dessa forma, pela hipótese de indução, $A' \approx I_m$, com $m < n$. Como $A = A' \cup \{n\}$, temos que $A \approx I_{m+1}$ e, como $m < n$, temos que $m + 1 < n + 1$, e o resultado vale para $n + 1$, isto é, $n + 1 \in T$.

Concluímos, por indução, que $T = \mathbb{N}$.

□

Será que todo subconjunto próprio de um conjunto finito qualquer é finito? Os fatos até agora demonstrados, e também nossa intuição, nos levam a acreditar que sim. O próximo Teorema demonstrará esse resultado.

Teorema 3.3. *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Demonstração. Sejam B um conjunto finito e $A \subseteq B$. Como B é finito, existe um único $n \in \mathbb{N}$, tal que $B \approx I_n$. Se $A = B$, então $A \approx B \approx I_n$ implica $A \approx I_n$, e o conjunto A será finito. Caso contrário, como $B \underset{f}{\approx} I_n$, consideremos $f : A \subsetneq B \to I_n$. Como f é uma bijeção, temos que $A \approx f(A)$ e $f(A) \subsetneq I_n$, pois, caso $f(A) = I_n$, teríamos que $B \approx I_n \approx f(A) \approx A$, isto é, $B \approx A$, absurdo. Como $f(A) \subsetneq I_n$, existe $m \in \mathbb{N}, m < n$, tal que $f(A) \approx I_m$, de modo que $A \approx f(A) \approx I_m$. Assim, um subconjunto de um conjunto finito é finito, como queríamos demonstrar.

□

3.2 Conjuntos infinitos

Definição 3.2 (Conjunto infinito)**.** *Um conjunto X será dito infinito quando não for finito, isto é, quando $X \not\approx I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, um conjunto X será dito infinito quando não houver uma bijeção entre I_n e X para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Corolário 3.2. *Valem as seguintes afirmações:*

(a) Todo conjunto equinumerável a um subconjunto próprio é infinito;

(b) O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito.

Demonstração. (a) Suponhamos por absurdo que um conjunto finito A seja equinumerável a um subconjunto próprio. Este fato nos fornece um absurdo, pois um conjunto finito não pode ser equinumerável a um subconjunto próprio, como já provamos no Teorema 3.2.

(b) Para demonstrarmos esse fato, vamos mostrar que existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e um subconjunto próprio X de $\mathbb{N}$, o que, pelo item (a), prova que $\mathbb{N}$ é infinito. Seja o conjunto $X = \{n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Temos que X é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$, pois $X \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus X = \{0\} \neq \emptyset$. Afirmamos que a função g, definida abaixo, é uma bijeção.

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{N} & \to & X \\ & n & \longmapsto & g(n) = n+1 \end{array}$$

A função g é injetiva, pois, dados $m \neq n \in \mathbb{N}$, temos que $m+1 \neq n+1$ e isso implica que $g(m) \neq g(n)$.

A função g é sobrejetiva. De fato, suponhamos por absurdo que a função g não seja sobrejetiva. Dessa forma, existe um elemento $k \in X$, tal que $k \notin g(\mathbb{N})$. No entanto, pelo Axioma de Peano 1.1, item (P2), o único número natural que não é sucessor de algum número natural é o zero, e isso implica que $k = 0$. Absurdo, pois $k = 0 \notin X$. Logo, g é sobrejetiva e, portanto, uma bijeção. Assim, $\mathbb{N}$ é infinito, pois é equinumerável a um subconjunto próprio.

□

A partir da definição de conjuntos infinitos podemos observar que o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, é infinito, pois, pela Proposição 2.1, $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$, sendo $\mathbb{N}$ um subconjunto próprio de $\mathbb{Z}$. Também, o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é infinito, pois, $(0, 1)$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{R}$ e, pela Proposição 2.3, $\mathbb{R} \approx (0, 1)$.

Proposição 3.1. *Seja I o conjunto dos números naturais ímpares, isto é, $I = \{1, 3, \ldots, 2m + 1, \ldots\} = \{n \mid n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}\}$. Então, I é infinito.*

Demonstração. De fato, vamos mostrar que existe uma bijeção entre I e uma parte própria sua. Consideremos o conjunto $J = \{3, 5, 7, \ldots, 2n + 3, \ldots\}$, um subconjunto próprio de I, e a função $f : I \to J$ definida abaixo por $f(n) = n + 2$.

Afirmamos que a função f é uma bijeção. De fato, f é injetiva, pois, sejam $k, l \in I$, tal que $f(k) = f(l)$. Dessa forma, temos que $k+2 = l+2$, o que implica $k = l$ e a função f é injetiva. A função f é sobrejetiva, pois, dado $j \in J$, existe um $n \in \mathbb{N}$, tal que $j = 2n+3$ e, dessa forma, $j = (2n+1)+2$. Logo, $f(2n+1) = j$. Segue que existe uma bijeção entre o conjunto I e uma parte própria sua, J, e, portanto, o conjunto I dos números naturais ímpares é um conjunto infinito.

□

3.3 Conjuntos enumeráveis

Definição 3.3 (Conjuntos enumeráveis)**.** *Um conjunto A será dito enumerável quando for finito ou quando for equinumerável ao conjunto dos números naturais,* $\mathbb{N}$.

Bem, intuitivamente imaginamos uma quantidade infinita de conjuntos enumeráveis. Por exemplo, todo conjunto da forma $\{n\}$, tal que $n \in \mathbb{N}$ será enumerável, assim como todo conjunto da forma $\{m, n\}$, tal que $m, n \in \mathbb{N}$. Temos também alguns exemplos de conjuntos enumeráveis infinitos, como o conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$, introduzido na demonstração do Corolário 3.2, item (b), e também o conjunto dos números naturais pares $P = \{0, 2, 4, \ldots\}$, cuja demonstração segue abaixo.

Corolário 3.3. *O conjunto P, dos números naturais pares, é enumerável.*

Demonstração. De fato, vamos exibir uma bijeção entre o conjunto P e o conjunto $\mathbb{N}$. Seja f a função definida da seguinte forma

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \to & P \\ & n & \mapsto & f(n) = 2n \end{array}$$

Afirmamos que a função f é uma bijeção. De fato, a função f é injetiva, pois, sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $f(n) = f(m)$. Dessa forma, temos que $2m = 2n$, o que implica $m = n$ e a função f é injetiva. A função f também é sobrejetiva, pois, dado $k \in P$, temos que $k = 2l$, para algum $l \in \mathbb{N}$, de modo que $f(l) = 2l = k$. Dessa forma, $P \underset{f}{\approx} N$ e P é enumerável.

$\square$

Note que já provamos a existência de outros conjuntos enumeráveis, pois, pela Proposição 2.1, temos que $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$, isto é, o conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável. Da mesma maneira, temos que os conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e o conjunto I, dos números naturais ímpares, são enumeráveis, resultados demonstrados nas Proposições 2.1 e 2.2, respectivamente.

3.4 Conjuntos não-enumeráveis

Definição 3.4 (Conjuntos não-enumeráveis)**.** *Um conjunto A será dito não-enumerável quando for infinito e $A \not\approx \mathbb{N}$.*

De acordo com a nossa definição temos, pelo Teorema 2.2, que o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, é um conjunto não-enumerável. Como $(0,1) \approx \mathbb{R}$, o intervalo aberto $(0,1)$ é também não-enumerável.

4 NÚMEROS CARDINAIS

4.1 Números cardinais finitos

Ao questionar os alunos em uma sala de aula do ensino básico sobre o que eles entendem que seja o número dois, um aluno responde, mostrando dois dedos na mão; outro responde "duas balas"; e um terceiro aluno grita "nós aqui do fundo" (Pedro apontando para ele e o colega de classe, Caio). Esses são exemplos de conjuntos que possuem pelo menos uma propriedade em comum: que podemos construir uma bijeção entre eles, sendo eles, então, equinumeráveis. Essa é a ideia principal de que precisamos para definir a cardinalidade de um conjunto e número cardinal, número esse que terá a função de "medir" o tamanho de um conjunto ou de representar a quantidade de elementos de um conjunto dado. Todas as definições e demonstrações aqui mostradas foram inspiradas em (YARNELLE, 1964), (ENDERTON, 1977) e (HALMOS, 2017).

Definição 4.1 (Número cardinal finito)**.** *Seja A um conjunto finito. Definimos como a cardinalidade do conjunto A, representada por $|A|$, o único número $n \in \mathbb{N}$, tal que $A \approx I_n$, e escrevemos $|A| = n$, sendo esse $n \in \mathbb{N}$ chamado número cardinal finito. Assim sendo, todo $n \in \mathbb{N}$ será um número cardinal finito.*

Vale lembrar que a existência e a unicidade de $n \in \mathbb{N}$ foi demonstrada no Corolário 3.1. Dessa forma, o número cardinal finito 2 representará a cardinalidade de todos os conjuntos finitos equinumeráveis ao conjunto $I_2 = \{0, 1\}$, isto é,

$$2 = |I_2| = |\{\text{Pedro, Caio}\}| = |\{\text{“duas balas”}\}|.$$

4.2 Números cardinais transfinitos

4.2.1 O número cardinal $\aleph_0$

É evidente que não podemos usar um número natural n para representar a cardinalidade de conjuntos infinitos. Por isso, a tarefa de definir cardinalidade e número cardinal para conjuntos infinitos impõe a necessidade de novos símbolos, que serão os números cardinais correspondentes aos respectivos conjuntos.

Nosso "tijolo inicial" será o símbolo $\aleph_0$[2]. Vimos ao longo deste trabalho os conjun-

[2] O nome do símbolo $\aleph$ é Álefe e é a primeira letra do alfabeto hebraico (entre outros). É correspondente à letra Alfa, α, do alfabeto grego e à letra A do alfabeto brasileiro.

tos infinitos enumeráveis, que são os conjuntos equinumeráveis ao conjunto dos números naturais. Para esses conjuntos, o símbolo $\aleph_0$ representará sua cardinalidade.

Definição 4.2. *Um conjunto infinito S terá número cardinal $\aleph_0$ se, e somente se, S for infinito e enumerável. Nesse caso, dizemos que a cardinalidade de S é $\aleph_0$ e escrevemos $|S| = \aleph_0$.*

Definição 4.3 (Número cardinal transfinito)**.** *Seja X um conjunto infinito. Se $\aleph_X$ é o número cardinal correspondente à cardinalidade do conjunto X, isto é, se $|X| = \aleph_X$, então dizemos que $\aleph_X$ é um número cardinal transfinito.*

De acordo com a definição e com as demonstrações até aqui realizadas, o conjunto dos números naturais pares, P, e o conjunto dos números naturais ímpares, I, possuem cardinalidade $\aleph_0$, isto é, $|P| = |I| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Também, todo subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ terá cardinalidade $\aleph_0$, como veremos no teorema a seguir.

Teorema 4.1. *Seja X_0 um conjunto infinito, tal que $X_0 \subset \mathbb{N}$. Então, $|X_0| = \aleph_0$.*

Demonstração. Para mostrarmos que $|X_0| = \aleph_0$, devemos mostrar que $X_0 \approx \mathbb{N}$. Vamos construir uma bijeção f de $\mathbb{N}$ em X_0. Como X_0 é um conjunto infinito e $X_0 \subset \mathbb{N}$, X_0 possui um menor elemento, pelo Princípio da Boa Ordenação 1.2. Denotemos por x_0 o menor elemento de X_0 e façamos $f(0) = x_0$. Como X_0 é infinito, segue que o conjunto $X_0 \setminus \{x_0\} = X_1 \neq \emptyset$ e $X_1 \subset \mathbb{N}$. Novamente, pelo Princípio da Boa Ordenação, X_1 possui um menor elemento e denotemos x_1 como o menor elemento de X_1. Observemos que $x_0 < x_1$, pois, caso contrário, se $x_0 \geq x_1$, então x_0 não seria o menor elemento de X_0, o que seria um absurdo. Continuando a construção de f de forma indutiva, suponhamos termos achado uma sequência $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tal que

(a) cada conjunto $X_i = X_0 \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\}$, para $1 \leq i \leq n$, é diferente de vazio, pois X_0 é infinito e $X_i \subset \mathbb{N}$;

(b) x_0 é o menor elemento de X_0 e x_i é o menor elemento de $X_0 \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\}$, para $1 \leq i \leq n$;

(c) $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Como X_0 é infinito, temos que $X_{n+1} = X_0 \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \neq \emptyset$ e $X_{n+1} \subseteq \mathbb{N}$. Dessa forma, temos, pelo Princípio da Boa Ordenação 1.2, que existe x_{n+1}, o menor elemento de X_{n+1}. Fixemos $f(n+1) = x_{n+1}$. Note que $x_{n+1} > x_n$. Assim, de forma indutiva, construímos uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$.

Afirmamos que a função f é injetiva. De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $m \neq n$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m < n$. Dessa forma, temos, pelo item (c), que $x_m < x_n$. Note que, como a função $f : \mathbb{N} \to X_0$ é injetiva e, do fato de que toda função injetiva é bijetiva sobre sua imagem, temos que $\mathbb{N} \approx f(\mathbb{N})$, sendo, assim, $f(\mathbb{N})$ infinito.

A função f também é sobrejetiva. De fato, suponhamos por absurdo, que f não seja sobrejetiva. Dessa forma, existe um $m \in X_0$, tal que m não pertence a $f(\mathbb{N})$, então $m \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos que $m \in X_{j+1} = X_0 \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_j\}$. Segue, da minimalidade de x_j e de $j \in \mathbb{N}$, que $x_j < m$, de modo que $x_n < m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos que $f(\mathbb{N}) \subseteq I_m$, o que é um absurdo, pois, pelo Teorema 3.3, todo subconjunto de um conjunto finito é finito. Logo, a função f é sobrejetiva.

Assim, a função f é uma bijeção e $X_0 \approx \mathbb{N}$, sendo $|X_0| = \aleph_0$.

□

Corolário 4.1. *Seja A um conjunto enumerável e $X \subseteq A$. Então, X é enumerável.*

Demonstração. De fato, se X for um conjunto finito, então X é enumerável. Suponhamos então, X infinito. Dessa forma, temos que o conjunto A é infinito, pois, se A fosse finito, como $X \subseteq A$, teríamos, pelo Teorema 3.3, que X é finito, um absurdo, pois assumimos X infinito. Como o conjunto A é infinito enumerável, então, temos que $A \underset{f}{\approx} \mathbb{N}$, de modo que $X \approx f(X) \subseteq \mathbb{N}$ e, como X é um conjunto infinito, temos que $f(X)$ é infinito o que, pelo Teorema 4.1, implica $f(X) \approx \mathbb{N}$, de modo que $X \approx f(X) \approx \mathbb{N}$, o que implica $X \approx \mathbb{N}$, isto é, X é enumerável, como queríamos demonstrar.

□

A *priori*, podemos pensar que, para que um conjunto infinito tenha número cardinal $\aleph_0$, este deve estar contido no conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, mas já sabemos que esse fato não é verdade, pois o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ (tal que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$) e o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ escapam dessa conjectura. De fato, $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, o que implica $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Seja F um conjunto finito, tal que $F \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Notemos que $\mathbb{N} \subsetneq F \cup \mathbb{N}$, o que, a *priori*, nos indicaria que o conjunto $F \cup \mathbb{N}$ possui número cardinal diferente de $\aleph_0$. No entanto, quando tratamos de números cardinais transfinitos, temos resultados intrigantes. Alguns conjuntos parecerão ter número cardinal diferente de outros (aqui estamos tratando de forma informal). No entanto, tal fato nem sempre ocorrerá, como no exemplo citado. A demonstração desse fato segue no teorema a seguir.

Teorema 4.2. *Seja F um conjunto finito e X um conjunto infinito e enumerável, então $|F \cup X| = |X| = \aleph_0$.*

Demonstração. Vamos mostrar que o conjunto $F \cup X$ é infinito e enumerável, isto é, que $F \cup X \approx \mathbb{N}$. Se F for vazio, então $F \cup X = X$, logo, $|F \cup X| = |X| = \aleph_0$. Suponhamos $F \neq \emptyset$. Como F é finito, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $I_k \underset{f}{\approx} F$ e como X é infinito enumerável, existe uma função g, tal que $\mathbb{N} \underset{g}{\approx} X$.

Caso I) Se $F \cap X = \emptyset$, então consideremos a função $\varphi : \mathbb{N} \to F \cup X$, definida da seguinte forma

$$\varphi(n) = \begin{cases} f(n), & \text{se } 0 \leq n \leq k-1; \\ g(n-k), & \text{se } n \geq k. \end{cases}$$

Afirmamos que a função φ é uma bijeção. De fato, φ é sobrejetiva, pois, dado $x \in F \cup X$, se $x \in X$, então existe um $s \in \mathbb{N}$, tal que $g(s) = x$. Como $s \in \mathbb{N}$, temos que $s + k \in \mathbb{N}$, com $s + k \geq k$. Isso implica que $\varphi(s+k) = g(s+k-k) = g(s) = x$. Se $x \in F$, então existe um $t \in \mathbb{N}$, tal que $0 \leq t \leq k-1$ e $f(t) = x$, logo, $\varphi(t) = f(t) = x$, sendo a função φ, assim, sobrejetiva. A função φ também é injetiva, pois, sejam $s, t \in \mathbb{N}$, tal que $s \neq t$. Se s e t forem menores que $k-1$, então $\varphi(s) = f(s) \neq f(t) = \varphi(t)$, pois a função f é injetiva. Se s e t forem maiores que $k-1$, então $s \neq t$ e, dessa forma, temos que $s - k \neq t - k$ e $\varphi(s) = g(s-k) \neq g(t-k) = \varphi(t)$, pois a função g é injetiva. Se $m \leq k-1$ e $n \geq k$, então $\varphi(m) = f(m) \in F$ e $\varphi(m) = g(m-k) \in X$ e, como $F \cap X = \emptyset$, tem-se que $\varphi(m) \neq \varphi(n)$. Assim, a função φ é injetiva e, portanto, uma bijeção. Concluímos nesse caso que $|F \cup X| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Caso II) Se $F \cap X \neq \emptyset$, então seja $Y = F \cap X \neq \emptyset$. Notemos que $F \cup X = X \cup F = = X \cup (F \setminus Y)$ e que $(F \setminus Y) \subsetneq F$ é um conjunto finito, pelo Teorema 3.3. Então, pelo Caso I, o conjunto $X \cup (F \setminus Y)$ é equinumerável a $\mathbb{N}$, sendo $|F \cup X| = |X \cup (F \setminus Y)| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$, como queríamos demonstrar.

$\square$

De acordo com o teorema anterior, dado $V = \{a, e, i, o, u\}$, temos que $|V \cup \mathbb{N}| = \aleph_0$, assim como para o conjunto E, das estrelas no céu que podemos observar. Ainda que E tenha uma quantidade de elementos muito grande, E é um conjunto finito e $|E \cup \mathbb{N}| = \aleph_0$. Mas e se estivermos tratando de dois conjuntos infinitos enumeráveis, será que sua cardinalidade será $\aleph_0$? Para nos ajudar a pensar na resposta dessa pergunta, vamos trabalhar com dois conjuntos já conhecidos no ensino básico, que são $D_2 = \{2^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ e $D_3 = \{3^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{3, 9, 27, 81, \ldots\}$.

Utilizando resultados da aritmética, sabemos que os conjuntos D_2 e D_3 são disjuntos, mas o que poderíamos dizer sobre a cardinalidade do conjunto $D_2 \cup D_3$? Vamos analisar algumas características dos conjuntos do tipo $D_p = \{p^{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$, com $p \in \mathbb{N}$, sendo p um número primo.

Proposição 4.1. *O conjunto D_p, p primo, é infinito e enumerável.*

Demonstração. Como $D_p \subset \mathbb{N}$, pelo Teorema 4.1, basta mostrarmos que D_p é infinito. Para mostrarmos que D_p é infinito, devemos mostrar uma bijeção entre D_p e uma parte própria sua. Consideremos o conjunto $D'_p = \{p^{n+2} | n \in \mathbb{N}\}$, um subconjunto próprio de D_p, e a função $g : D_p \to D'_p$ definida por $g(p^k) = p^{k+1}$. Afirmamos que a função g é uma bijeção. De fato, g é injetiva, pois, sejam $k, k' \in \mathbb{N}$, se $g(k) = g(k')$, então $p^{k+1} = p^{k'+1}$, o que implica $k + 1 = k' + 1$, de modo que $k = k'$, pelo teorema fundamental da aritmética. A função g também é sobrejetiva, pois, dado $x \in D'_p$, existe $t \in \mathbb{N}$, tal que $x = p^{t+2}$, o que implica $x = p^{(t+1)+1}$, logo $g(t + 1) = p^{t+2} = x$. Assim, o função g é uma bijeção e o conjunto D_p é infinito. Concluímos que o conjunto $D_p \subset \mathbb{N}$ é infinito e, portanto, $|D_p| = \aleph_0$.

□

Com a demonstração dada acima, por definição, temos que $|D_p| = \aleph_0$ para todo primo $p \in \mathbb{N}$. O conjunto $D_2 \cup D_3$ é, então, a união de dois conjuntos infinitos enumeráveis, mas e quanto à sua cardinalidade? Veremos a seguir que a cardinalidade do conjunto $D_2 \cup D_3$ é $\aleph_0$.

Corolário 4.2. *A cardinalidade do conjunto $D_2 \cup D_3$ é $\aleph_0$.*

Demonstração. Novamente, observemos que o conjunto $D_2 \cup D_3$ é um conjunto infinito, tal que $D_2 \cup D_3 \subset \mathbb{N}$. Segue, do Teorema 4.1, que $|D_2 \cup D_3| = \aleph_0$, como queríamos demonstrar.

□

O resultado obtido no Corolário 4.2 pode ser estendido para dois conjuntos infinitos enumeráveis quaisquer, e além, para a união finita de conjuntos infinitos enumeráveis, como veremos nos teoremas seguintes.

Lema 4.1. *Sejam X e Y conjuntos infinitos enumeráveis. Então, $|X \cup Y| = \aleph_0$.*

Demonstração. Vamos mostrar que existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $X \cup Y$. Como os conjuntos X e Y são infinitos enumeráveis, temos que $\mathbb{N} \underset{f}{\approx} X$ e $\mathbb{N} \underset{g}{\approx} Y$. Vamos separar nossa demonstração em dois casos: no primeiro caso consideraremos X e Y conjuntos disjuntos e, no segundo caso, o contrário.

Caso I) Suponhamos $X \cap Y = \emptyset$ e consideremos a função $h : \mathbb{N} \to X \cup Y$, definida abaixo

$$h(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}), & \text{se } n = 2 \cdot k, k \in \mathbb{N}; \\ g(\frac{n-1}{2}), & \text{se } n = 2 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Afirmamos que a função h é uma bijeção. De fato, h é injetiva, pois, sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $m \neq n$. Se ambos forem pares, temos que $h(m) = f(\frac{m}{2}) \neq f(\frac{n}{2}) = h(n)$, pois a função f é injetiva. Se m e n forem ambos ímpares, então $h(m) = = g(\frac{m-1}{2}) \neq g(\frac{n-1}{2}) = h(n)$, pois a função g é injetiva. Se m e n tiverem paridades diferentes, suponhamos, sem perda de generalidade, que m é par e n ímpar, então $h(m) \in X$ e $h(n) \in Y$ e, como $X \cap Y = \emptyset$, $h(m) \neq h(n)$. Logo, a função h é injetiva.

A função h também é sobrejetiva. De fato, dado $z \in X \cup Y$, se $z \in X$, então existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $f(m) = z$. Assim, temos que $h(2m) = f(\frac{2m}{2}) = f(m) = z$. Se $z \in Y$, então existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $g(m) = z$ logo, $h(2m+1) = g(\frac{2m+1-1}{2}) = g(m) = z$. Portanto, a função h é sobrejetiva. Logo, h é uma bijeção e $|\mathbb{N}| = |X \cup Y| = \aleph_0$, como queríamos demonstrar.

Caso II) Se $X \cap Y \neq \emptyset$. Notemos que $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$ e que $X \cap (Y \setminus X) = \emptyset$. Se $Y \setminus X$ for finito, então, pelo Teorema 4.2, temos que $X \cup (Y \setminus X)$ será infinito enumerável e, se $Y \setminus X$ for infinito enumerável, então, pelo Caso I, $X \cup (Y \setminus X)$ será infinito enumerável, como queríamos demonstrar.

Assim, temos que $|X \cup Y| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

□

Teorema 4.3. *Sejam $X_0, X_1, \ldots, X_n$ conjuntos infinitos enumeráveis e $\bigcup_{k=0}^{n} X_k$, a união finita de conjuntos infinitos enumeráveis. Então, $\bigcup_{k=0}^{n} X_k$ é infinito enumerável, isto é, $\bigcup_{k=0}^{n} X_k \approx \mathbb{N}$ e $\left|\bigcup_{k=0}^{n} X_k\right| = \aleph_0$.*

Demonstração. Vamos demonstrar esse fato por indução sobre n. Se $n = 0$, então X_0 é um conjunto infinito enumerável e $|X_0| = \aleph_0$. Suponhamos a afirmação válida para $n \in \mathbb{N}$, isto é, $\bigcup_{k=0}^{n} X_k$ é um conjunto infinito enumerável . Vamos mostrar que a propriedade vale também para $n+1 \in \mathbb{N}$. De fato, notemos que $X_0 \cup \ldots \cup X_n \cup X_{n+1} = = (X_0 \cup \ldots \cup X_n) \cup X_{n+1}$. Pela nossa hipótese de indução, o conjunto $\bigcup_{k=0}^{n} X_k = Y$ é infinito enumerável, então $(X_0 \cup \ldots \cup X_n) \cup X_{n+1} = Y \cup X_{n+1}$ é a união de dois conjuntos infinitos enumeráveis, o que, pelo Lema 4.1, é infinito enumerável. Dessa forma, por indução, o conjunto $\bigcup_{k=0}^{n} X_k$ é infinito enumerável e $\left|\bigcup_{k=0}^{n} X_k\right| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$, como queríamos demonstrar.

□

Pela Proposição 2.2, temos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, e esse fato sugere que podemos generalizar o resultado para o produto finito de conjuntos infinitos enumeráveis, isto é, que $\prod_{i=0}^{n} X_i = X_0 \times X_1 \times \ldots \times X_n \approx \mathbb{N}$ para conjuntos $X_0, X_1, \ldots, X_n$ infinitos enumeráveis. A proposição a seguir demonstrará esse fato.

Proposição 4.2. *Sejam $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos infinitos enumeráveis. Então,* $\prod_{i=0}^{n} X_i \approx \mathbb{N}$.

Demonstração. De fato, vamos demonstrar esse resultado por indução sobre n. Se $n = 0$, não há o que demonstrar. Se $n = 1$, então, por hipótese, temos que $X_0 \underset{f_0}{\approx} \mathbb{N}$ e $X_1 \underset{f_1}{\approx} \mathbb{N}$ e, pela Proposição 2.2, temos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \underset{f}{\approx} \mathbb{N}$. Consideremos, então, a função g definida abaixo.

$$\begin{aligned} g : X_0 \times X_1 &\to \mathbb{N} \\ (x, x') &\mapsto g(x, x') = f(f_0(x), f_1(x')) \end{aligned}$$

Afirmamos que a função g é uma bijeção. De fato, g é injetiva, pois, sejam (x, x') e $(y, y') \in X_0 \times X_1$, tal que $g(x, x') = g(y, y')$. Isso implica que $f(f_0(x), f_1(x')) = = f(f_0(y), f_1(y'))$ e, como a função f é uma bijeção (em especial injetiva), temos que $(f_0(x), f_1(x')) = (f_0(y), f_1(y'))$, segue que $f_0(x) = f_0(y)$ e $f_1(x') = f_1(y')$. Como as funções f_0 e f_1 são bijeções, temos que $x = y$ e $x' = y'$, de modo que $(x, x') = (y, y')$ e a função g é injetiva.

A função g também é sobrejetiva. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, como a função f é sobrejetiva, temos que existem $r, s \in \mathbb{N}$, tal que $f(r, s) = n$. Como $r \in \mathbb{N}$ e $f_0 : X_0 \to \mathbb{N}$ é uma bijeção, temos que existe $x \in X_0$, tal que $f_0(x) = r$. De forma análoga, como $s \in \mathbb{N}$ e $f_1 : X_1 \to \mathbb{N}$ é uma bijeção, segue que existe $y \in X_1$, tal que $f_1(y) = s$. Logo, $g(f_0(x), f_1(y)) = f(f_0(x), f_1(y)) = f(r, s) = n$ e a função g é sobrejetiva.

Dessa forma, temos que g é uma bijeção e $X_0 \times X_1 \approx \mathbb{N}$.

Suponhamos como hipótese de indução que o resultado seja válido para $n \in \mathbb{N}$, isto é, que $\prod_{i=0}^{n} X_i \underset{H}{\approx} \mathbb{N}$. Vamos mostrar que o resultado vale para $n + 1 \in \mathbb{N}$, ou seja, que $\prod_{i=0}^{n+1} X_i \approx \mathbb{N}$, sendo $X_{n+1} \underset{f_{n+1}}{\approx} \mathbb{N}$. Consideremos, então, a função $G : \prod_{i=0}^{n+1} X_i \to \mathbb{N}$, definida por
$G(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(H(x_0, x_1, \ldots, x_n), f_{n+1}(x_{n+1}))$. Note que os argumentos para demonstrarmos que a função G é uma bijeção são análogos aos utilizados anteriormente para a função g, pois $\prod_{i=0}^{n} X_i \underset{H}{\approx} \mathbb{N}$ e $X_{n+1} \underset{f_{n+1}}{\approx} \mathbb{N}$. Logo, temos que a função G é uma bijeção, de modo que $\prod_{i=0}^{n} X_i \approx \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

□

4.2.2 O número cardinal $\aleph_1$

Vimos na Proposição 2.3 que o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é equinumerável a uma parte própria sua, o intervalo $(0,1)$. Logo, pelo Corolário 3.2, temos que $\mathbb{R}$ é um conjunto infinito. No entanto, vimos no Teorema 2.2 que $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$ e, dessa forma, não podemos utilizar o símbolo $\aleph_0$ para designar a cardinalidade do conjunto dos números reais, pois este representa a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Para representar a cardinalidade do conjunto dos números reais será utilizado o símbolo $\aleph_1$.

Definição 4.4. *Um conjunto infinito X terá número cardinal $\aleph_1$ se, e somente se, X for equinumerável a $\mathbb{R}$. Nesse caso, dizemos que a cardinalidade de X é $\aleph_1$ e escrevemos $|X| = \aleph_1$.*

Notemos que $(0,1) \approx \mathbb{R}$, e isso implica que $|(0,1)| = |\mathbb{R}| = \aleph_1$. Também, dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq b$, o intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ possui cardinalidade $\aleph_1$, como mostra a Proposição abaixo.

Proposição 4.3. *Sejam a e b números reais, tal que $a \neq b$. Então, o intervalo $(a,b) \cap \mathbb{R}$ possui cardinalidade $\aleph_1$.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que $(a,b) \approx (0,1)$. Para isso, consideremos a função $f : (a,b) \to (0,1)$ definida abaixo

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Como $a \neq b$, temos que $b - a \neq 0$ e, assim, a função está bem definida para todo $x \in (a,b)$. Afirmamos que a função f é uma bijeção. De fato, f é injetiva, pois, sejam α e β dois números reais, tal que $f(\alpha) = f(\beta)$. Dessa forma, $\frac{\alpha - a}{b-a} = \frac{\beta - a}{b-a}$, o que implica $\alpha - a = \beta - a$ e, portanto, $\alpha = \beta$. Assim, a função f é injetiva.

A função f também é sobrejetiva, pois, dado $y \in (0,1)$, temos que $x = y(b-a)+a \in \mathbb{R}$ é tal que $x \in (a,b)$ e $f(x) = y$. De fato, dado $y \in (0,1)$, temos que $0 < y < 1$, o que implica $0 < y(b-a) < b-a$ e, dessa forma, $a < y(b-a) + a < (b-a) + a$, de modo que $a < y(b-a) + a < b$ e, assim, $a < x < b$. Temos também que $f(x) = f(y(b-a)+a) = = \frac{y(b-a)+a-a}{b-a} = \frac{y(b-a)}{b-a} = y$. Assim, a função f é sobrejetiva e, portanto, uma bijeção. Temos então que $(a,b) \approx (0,1)$ e, como $(0,1) \approx \mathbb{R}$, temos, pelo Teorema 2.1, que $(a,b) \approx \mathbb{R}$, de modo que $|(a,b)| = |\mathbb{R}| = \aleph_1$.

$\square$

De maneira geral, para definirmos um número cardinal precisamos estabelecer um conjunto que represente essa cardinalidade e todos os conjuntos equinumeráveis a esse representante terão o mesmo número cardinal.

Definição 4.5. *Seja A um conjunto tal que $|A| = \aleph_\alpha$. Um conjunto X terá número cardinal $\aleph_\alpha$ se, e somente se, X for equinumerável a A. Nesse caso, dizemos que a cardinalidade de X é $\aleph_\alpha$ e escrevemos $|X| = \aleph_\alpha$.*

4.3 Aritmética cardinal

Até o presente momento não trabalhamos formalmente as operações soma, produto e potência de números cardinais, e serão necessárias definições que as sistematizem, levando em consideração que alguns critérios precisam ser atendidos.

Critérios 4.1. Eis os critérios que devem ser atendidos:

- Para conjuntos finitos, as operações soma, produto e potência de números cardinais devem ser consistentes com as operações soma, produto e potência de números naturais;
- As relações entre os conjuntos envolvidos devem ser consideradas;
- Os números cardinais transfinitos devem ser números operáveis.

Por exemplo, dados dois conjuntos A e B, trabalharemos na busca de operações entre esses conjuntos de forma que a cardinalidade do conjunto obtido da operação realizada entre A e B atenda aos Critérios 4.1 estabelecidos acima, isto é, se $|A| = 3$ e $|B| = 5$, gostaríamos de definir as operações soma, produto e potência, escritas aqui como $\heartsuit$, $\diamondsuit$, e $\triangle$, respectivamente, de forma que $|A \heartsuit B| = 3 + 5 = 8$, $|A \diamondsuit B| = 3 \cdot 5 = 15$ e $|A \triangle B| = 3^5 = 243$ e sempre considerando a relação existente entre tais conjuntos. Note que, pelos critérios estabelecidos, devemos definir operações em que tenhamos também $|\mathbb{R} \heartsuit I_n| = \aleph_1 + n$, $|\mathbb{R} \diamondsuit \mathbb{N}| = \aleph_1 \cdot \aleph_0$, $|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}| = \aleph_0^{\aleph_1}$, entre outras.

4.3.1 Soma de números cardinais

No ensino básico, a operação soma de números naturais pode descrever diversas situações do cotidiano, como: a de juntar objetos, acrescentar quantidades, operação inversa, entre outras. Além disso, pode ser apresentada simplesmente de forma tecnicista. Somente no ensino médio, após mais de nove anos no ensino básico e após adquirir boa bagagem matemática, os alunos são apresentados ao conceito de conjuntos e as operações entre eles, em especial nesse momento a união, que também é conhecida como "soma lógica". Dados dois conjuntos finitos A e B, existem alguns fenômenos que ocorrem com a união entre eles, que serão explorados nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.1. Exemplos de "soma lógica" entre conjuntos.

(I) Se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, b, e\}$, então temos que $|A| = 5$ e $|B| = 3$. No entanto, $|A \cup B| = 6$. Observemos que $|A \cup B| \neq |A| + |B|$ e que esse resultado se deve ao fato de que $A \cap B \neq \emptyset$.

(II) Se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, e\}$, então temos que $|A| = 5$ e $|B| = 2$. No entanto, $|A \cup B| = 5$. Observemos que $|A \cup B| \neq |A| + |B|$ e que esse resultado se deve ao fato de que $B \subset A$.

(III) Se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{b, c, d, f\}$, então temos que $|A| = 5$ e $|B| = 4$. Nesse exemplo, $|A \cup B| = 9$. Observemos que $|A \cup B| = |A| + |B|$ e que esse resultado se deve ao fato de que $A \cap B = \emptyset$.

Devemos agora definir a soma de números cardinais de forma que esteja conectada à operação união entre conjuntos e em consonância com os Critérios 4.1 que precisam ser atendidos. Note que nos exemplos acima, para que tais critérios sejam atendidos, é necessário que os conjuntos sejam disjuntos. Nos parece agora que já temos elementos suficientes para definirmos a soma de números cardinais.

Definição 4.6 (Soma de números cardinais)**.** *Sejam κ e λ números cardinais. Definimos a soma $\kappa \oplus \lambda$ como a cardinalidade do conjunto $|K \cup L|$, sendo os conjuntos K e L disjuntos tais que $|K| = \kappa$ e $|L| = \lambda$.*

Note que, dado um conjunto K, tal que $|K| = \kappa$, existem infinitos conjuntos que possuem cardinalidade κ; basta observarmos que, dado $n \in \mathbb{N}$, $|K| = |K \times \{n\}| = |\{(k, n) \mid k \in K\}|$, o que veremos na proposição a seguir.

Proposição 4.4. *Seja K um conjunto, tal que $|K| = \kappa$, e seja $n \in \mathbb{N}$, então $|K \times \{n\}| = \kappa$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $K \approx K \times \{n\}$. Para isso, consideremos f a função definida da forma abaixo

$$\begin{array}{rccl} f: & K & \to & K \times \{n\} \\ & k & \mapsto & f(k) = (k, n) \end{array}$$

Afirmamos que a função f é uma bijeção. De fato, f é injetiva, pois, sejam k_1 e k_2 elementos de K, tal que $f(k_1) = f(k_2)$. Isso implica que $(k_1, n) = (k_2, n)$ e, portanto, $k_1 = k_2$. Logo, a função f é injetiva. A função f é também sobrejetiva. De fato, dado $(k', n) \in K \times \{n\}$, temos que $k' \in K$ é tal que $f(k') = (k', n)$. Assim, a função f é sobrejetiva e, portanto, uma bijeção. Concluimos que $K \approx K \times \{n\}$, de modo que $|K| = |K \times \{n\}| = \kappa$.

□

Dessa forma, precisamos verificar se a operação soma entre números cardinais está bem definida, isto é, que independe dos representantes escolhidos e, para isso, temos a proposição a seguir.

Proposição 4.5. *A soma de números cardinais está bem definida.*

Demonstração. Sejam os conjuntos K_1, K_2, L_1 e L_2 tais que $|K_1| = |K_2| = \kappa$, $|L_1| = |L_2| = \lambda$, com $K_1 \cap L_1 = \emptyset$ e $K_2 \cap L_2 = \emptyset$. Vamos mostrar que $K_1 \cup L_1 \approx K_2 \cup L_2$ e, assim, concluiremos que $|K_1 \cup L_1| = |K_2 \cup L_2| = \kappa \oplus \lambda$. Como $|K_1| = |K_2| = \kappa$ e $|L_1| = |L_2| = \lambda$, temos que $K_1 \underset{f}{\approx} K_2$ e $L_1 \underset{g}{\approx} L_2$. Consideremos a função h definida abaixo

$$h : K_1 \cup L_1 \to K_2 \cup L_2$$
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in K_1; \\ g(x), & \text{se } x \in L_1. \end{cases}$$

Afirmamos que a função h é uma bijeção. De fato, h é injetiva, pois, sejam $x, x' \in K_1 \cup L_1$, tal que $x \neq x'$. Como $K_1 \cap L_1 = \emptyset$, se x e x' pertencem a K_1, então $h(x) = f(x) \neq f(x') = h(x')$, pois a função f é injetiva. Se x e x' pertencem a L_1, então $h(x) = g(x) \neq g(x') = h(x')$, pois a função g é injetiva. Se x e x' pertencem a conjuntos distintos, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x \in K_1$ e $x' \in L_1$, então, temos que $h(x) = f(x) \in K_2$ e $h(x') = g(x') \in L_2$. Como $K_2 \cap L_2 = \emptyset$, temos que $h(x) = f(x) \neq g(x') = h(x')$ e, portanto, h é injetiva.

A função h é sobrejetiva. De fato, dado $y \in K_2 \cup L_2$, como $K_2 \cap L_2 = \emptyset$, temos que ou $y \in K_2$ ou $y \in L_2$. Se $y \in K_2$, então, do fato de $K_1 \underset{f}{\approx} K_2$, existe um elemento $x \in K_1$, tal que $f(x) = y$ e, dessa forma, temos que $h(x) = f(x) = y$. Se $y \in L_2$, então, do fato de $L_1 \underset{g}{\approx} L_2$, existe um elemento $x \in L_1$, tal que $g(x) = y$ e, dessa forma, temos que $h(x) = g(x) = y$. Logo, a função h é sobrejetiva e, portanto, uma bijeção. Assim, temos que a soma $\kappa \oplus \lambda = |K_1 \cup L_1| = |K_2 \cup L_2|$ independe dos representantes, como queríamos demonstrar.

$\square$

Note que, de posse da Definição 4.6 dada acima, somente no Exemplo (III) dos Exemplos 4.1, os Critérios 4.1 estabelecidos para a operação soma de números cardinais são atendidos. No entanto, apesar da falha dos critérios nos Exemplos (I) e (II) dos Exemplos 4.1, podemos, estrategicamente, contornar essa situação, de forma que sempre será possível realizar a operação soma entre números cardinais, independentemente dos números cardinais ou representantes dados, como veremos a seguir.

Exemplo 4.2. Exemplos da estratégia para realizar a "soma lógica".

(I) Como $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, b, e\}$ não são conjuntos disjuntos, então, consideremos os conjuntos $A \times \{0\}$ e $B \times \{1\}$, temos que $|A| = |A \times \{0\}| = 5$,

$|B| = |B \times \{1\}| = 3$ e $(A \times \{0\}) \cap (B \times \{1\}) = \emptyset$. Logo, esses serão os representantes desses números cardinais para determinar a soma entre eles. Temos que $|A| = |A \times \{0\}| = 5$, $|B| = |B \times \{1\}| = 3$ e $(A \times \{0\}) \cap (B \times \{1\}) = \emptyset$. Dessa forma, $|(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})| = 5 \oplus 3 = 8$;

(II) Como $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, e\}$ não são conjuntos disjuntos, então, consideremos os conjuntos $A \times \{0\}$ e $B \times \{1\}$, temos que $|A| = |A \times \{0\}| = 5$, $|B| = |B \times \{1\}| = 2$ e $(A \times \{0\}) \cap (B \times \{1\}) = \emptyset$. Logo, esses serão os representantes desses números cardinais para determinar a soma entre eles. Temos que $|A| = |A \times \{0\}| = 5$, $|B| = |B \times \{1\}| = 2$ e $(A \times \{0\}) \cap (B \times \{1\}) = \emptyset$. Dessa forma, $|(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})| =$ $= 5 \oplus 2 = 7$.

De acordo com nossa definição e nossos exemplos, dados os números cardinais finitos 8 e 3, temos que existem conjuntos A e B, tal que $|A| = 8$, $|B| = 3$ e $|A \cup B| = 8 \oplus 3 = 11$, por exemplo, os conjuntos $A = I_7 \times \{0\}$ e $B = I_2 \times \{1\}$.

Note que, se $A = \emptyset$ e $B = \{0, 1\}$, então temos que $A \cup B = \emptyset \cup B = B$, de modo que $|A \cup B| = |B|$, o que implica $0 \oplus 2 = 2$. Logo, para que os Critérios 4.1 estabelecidos sejam atendidos, é necessário que o números cardinal 0 satisfaça a propriedade de ser o elemento neutro da soma de números cardinais, isto é, gostaríamos que $\kappa \oplus 0 = \kappa$ para todo número cardinal κ. O próximo teorema demonstrará essa propriedade.

Teorema 4.4. *Seja κ um número cardinal. Então, $\kappa \oplus 0 = \kappa$.*

Demonstração. Seja K um conjunto, tal que $|K| = \kappa$. Note que $K \cup \emptyset = K$, e isso implica que $|K \cup \emptyset| = |K|$. Logo, temos que $\kappa \oplus 0 = \kappa$, como queríamos demonstrar.

□

O seguinte teorema nos garante que a soma de números cardinais finitos é consistente com a soma usual de números naturais.

Teorema 4.5. *Sejam m e n números cardinais finitos, $\oplus$ a operação soma de números cardinais introduzida na Definição 4.6 e $+$ a soma de números naturais introduzida na Definição 1.1. Então,*

$$m \oplus n = m + n.$$

Demonstração. Sejam X e Y conjuntos finitos disjuntos, tal que $|X| = m$ e $|Y| = n$. Se $X = \emptyset$, então, pelo Teorema 4.4, $m \oplus n = 0 \oplus n = n = 0 + n$. Suponhamos então que X e Y sejam conjuntos não-vazios. Dessa forma, temos que existem $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $X \underset{f}{\approx} I_m$ e $Y \underset{g}{\approx} I_n$, em que $I_m = \{p \in \mathbb{N} \mid 0 \leq p \leq m - 1\}$, $I_n = \{q \in \mathbb{N} \mid 0 \leq q \leq n - 1\}$, $|I_m| = m$ e $|I_n| = n$. Consideremos a função h definida a seguir

$$h : X \cup Y \to I_{m+n}$$
$$h(k) = \begin{cases} f(k), & \text{se } k \in X; \\ g(k) + m, & \text{se } k \in Y. \end{cases}$$

Afirmamos que a função h é uma bijeção. De fato, h é injetiva e, para demonstrarmos esse fato, sejam $k, l \in X \cup Y$, tal que $h(k) = h(l)$. Se $k, l \in X$, então $h(k) = f(k)$ e $h(l) = f(l)$, logo, temos que $h(k) = f(k) = f(l) = h(l)$. Como a função f é injetiva, temos que $k = l$. Se $k, l \in Y$, então $h(k) = g(k)+m$ e $h(l) = g(l)+m$. Logo, $h(k) = h(l)$ implica que $g(k)+m = g(l)+m$, de modo que $g(k) = g(l)$. Como a função g é injetiva, temos que $k = l$. Se $k \in X$ e $l \in Y$, então $0 \leq h(k) = f(k) \leq m-1$ e $h(l) = g(l)+m \geq m > m-1$, de modo que $h(k) \neq h(l)$, e a função h é injetiva.

A função h é sobrejetiva. De fato, dado $r \in I_{m+n}$, temos que ou $0 \leq r \leq m-1$ ou $m \leq r \leq m+n-1$. Se $0 \leq r \leq m-1$, então existe $x \in X$, tal que $f(x) = r$, portanto, $h(x) = f(x) = r$. Se $m \leq r \leq m+n-1$, então $0 \leq r-m \leq n-1$ e, dessa forma, existe $y \in Y$, tal que $g(y) = r-m$, de modo que $h(y) = g(y)+m = = r-m+m = r$ e a função h é sobrejetiva. Assim, temos que h é uma bijeção, de modo que $X \cup Y \underset{h}{\approx} I_{m+n}$ e, dessa forma, $|X \cup Y| = |I_{m+n}|$. Assim, $m \oplus n = |X \cup Y| = |I_{m+n}| = m+n$, o que implica $m \oplus n = m+n$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Agora vamos explorar alguns resultados intrigantes quando a soma de números cardinais tem $\aleph_0$ como parcela. Considere o conjunto finito $V = \{a, e, i, o, u\}$ e o conjunto $\mathbb{N}$. Observemos que $|V| = 5$, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ e $V \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Por definição, temos que $|V \cup \mathbb{N}| = 5 \oplus \aleph_0$, mas, pelo Teorema 4.2, temos que $|V \cup \mathbb{N}| = \aleph_0$ e, portanto, temos que

$$5 \oplus \aleph_0 = \aleph_0.$$

Podemos generalizar esse resultado para um número natural n qualquer, pois, pelo Teorema 4.2, se F é um conjunto finito, isto é, se $|F| = n$, então $|F \cup \mathbb{N}| = \aleph_0$, de modo que

$$n \oplus \aleph_0 = \aleph_0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

O resultado obtido no Teorema 4.1 nos diz que, se X e Y são conjuntos tais que $|X| = |Y| = \aleph_0$, então $|X \cup Y| = \aleph_0$, o que nos fornece, por definição, que

$$\aleph_0 \oplus \aleph_0 = \aleph_0.$$

A soma também permanece inalterada para uma quantidade finita de parcelas iguais a $\aleph_0$, pois, pelo Teorema 4.3, dados $X_0, X_1, \ldots, X_n$ conjuntos infinitos enumeráveis, temos que $\left|\bigcup_{k=0}^{n} X_k\right| = \aleph_0$, de modo que

$$\sum_{k=0}^{n} \aleph_0 = \aleph_0 \oplus \aleph_0 \oplus \cdots \oplus \aleph_0 = \aleph_0.$$

4.3.1.1 Propriedades da soma de números cardinais

Teorema 4.6. *Sejam κ, λ e μ números cardinais quaisquer, então valem as seguintes propriedades:*

1. $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$;
2. $\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$.

Demonstração. Sejam os conjuntos dois a dois disjuntos K, L e M, tal que $|K| = \kappa$, $|L| = \lambda$ e $|M| = \mu$.

1. Note que $K \cup L = L \cup K$ e $K \cap L = \emptyset$. Dessa forma, temos que $|K \cup L| = |L \cup K|$ e, portanto, $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$.
2. Como a união entre conjuntos é associativa, temos que $K \cup (L \cup M) = (K \cup L) \cup M$, de modo que $|K \cup (L \cup M)| = |(K \cup L) \cup M|$, o que implica $\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$, como queríamos demonstrar.

□

4.3.2 Produto de números cardinais

Temos agora a tarefa de definir o produto de números cardinais e desejamos que os Critérios 4.1 estabelecidos sejam atendidos. Logo, a operação produto de números cardinais deve ser consistente com o produto usual de números naturais e, para nos auxiliar na busca da definição do produto de números cardinais, consideremos os conjuntos finitos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1\}$, temos que $|A| = 3$ e $|B| = 2$. Desejamos estabelecer uma operação entre os conjuntos A e B de forma que a cardinalidade obtida seja igual a $3 \cdot 2 = 6$. Lembremo-nos então do produto cartesiano entre conjuntos, definido por $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$ e observemos os exemplos a seguir.

Exemplo 4.3. Exemplos de produto cartesiano entre conjuntos.

(I) Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1\}$, então $|A| = 3$, $|B| = 2$ e $A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$ terá $3 \cdot 2 = 6$ elementos.

(II) Se $A = \{0, 1\}$ e $B = \{0, 1\}$, então $|A| = 2$, $|B| = 2$ e $A \times B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ terá $2 \cdot 2 = 4$ elementos.

Note que, para que os critérios estabelecidos sejam atendidos, não é necessário que os conjuntos dados sejam disjuntos. Com isso, já temos elementos suficientes para definir o produto de números cardinais.

Definição 4.7 (Produto entre números cardinais)**.** *Sejam κ e λ números cardinais. Definimos o produto $\kappa \odot \lambda$ como a cardinalidade do conjunto $|K \times L|$, sendo K e L conjuntos tais que $|K| = \kappa$ e $|L| = \lambda$.*

Proposição 4.6. *A operação produto entre números cardinais está bem definida.*

Demonstração. Para mostrarmos que a operação está bem definida, devemos mostrar que a cardinalidade do produto é verdadeira, independentemente dos representantes. Dessa forma, sejam K_1, K_2, L_1 e L_2, tal que $|K_1| = |K_2| = \kappa$ e $|L_1| = |L_2| = \lambda$. Assim, sabemos que $K_1 \underset{f}{\approx} K_2$ e $L_1 \underset{g}{\approx} L_2$.

Consideremos a seguinte função h abaixo.

$$\begin{array}{rccl} h: & K_1 \times L_1 & \rightarrow & K_2 \times L_2 \\ & (x, y) & \mapsto & h(x, y) = (f(x), g(y)) \end{array}$$

Afirmamos que h é uma bijeção. De fato, para verificarmos que h é injetiva, sejam (a, b) e (x, y) em $K_1 \times L_1$, tal que $h(a, b) = h(x, y)$. Dessa forma, temos que $(f(a), g(b)) = (f(x), g(y))$, o que implica $f(a) = f(x)$ e $g(b) = g(y)$ e, como as funções f e g são injetivas, temos que $a = x$ e $b = y$, e isso implica $(a, b) = (x, y)$. Assim, a função h é injetiva.

A função h é sobrejetiva, pois, dado $(k_2, l_2) \in K_2 \times L_2$. Como $k_2 \in K_2$, então existe $k_1 \in K_1$, tal que $f(k_1) = k_2$. De forma análoga, como $l_2 \in L_2$, então existe $l_1 \in L_1$, tal que $g(l_1) = l_2$, logo, $h(k_1, l_1) = (f(k_1), g(l_1)) = (k_2, l_2)$, e h é sobrejetiva. Assim, $K_1 \times L_1 \underset{h}{\approx} K_2 \times L_2$ e a operação produto está bem definida.

□

O teorema a seguir foi inspirado em (MIRAGLIA; ABUD, 1999) e (KIRILOV, 2017).

Teorema 4.7. *Seja κ um número cardinal. Então, $\kappa \odot 0 = 0$.*

Demonstração. Seja o conjunto K, tal que $|K| = \kappa$. Temos, por definição, que $\kappa \odot 0 = |K \times \emptyset|$. Note que $K \times \emptyset = \{(k, x) \mid k \in K \text{ e } x \in \emptyset\} = \emptyset$, pois, como não há elementos $x \in \emptyset$, não existe um par ordenado pertencente a $K \times \emptyset$. Assim, $|K \times \emptyset| = |\emptyset|$, de modo que $\kappa \odot 0 = 0$, como queríamos demonstrar.

□

Note que, de acordo com a Definição 4.7, temos a existência do elemento neutro do produto de números cardinais.

Teorema 4.8. *Seja κ um número cardinal. Então, $\kappa \odot 1 = \kappa$.*

Demonstração. De fato, dado um número cardinal κ, seja o conjunto K, tal que $|K| = \kappa$. Note que, pelo Teorema 4.4, $K \approx K \times \{0\}$. Assim, temos que $|K| = |K \times \{0\}|$. Logo, por definição, $\kappa \odot 1 = \kappa$, como queríamos demonstrar.

□

O próximo teorema nos garante que o produto de números cardinais finitos é consistente com a operação usual produto de números naturais.

Teorema 4.9. *Sejam m e n números cardinais finitos, $m \odot n$ a operação produto de números cardinais introduzida na Definição 4.7 e $m \cdot n$ a operação produto de números naturais introduzida na Definição 1.5. Então,*

$$m \odot n = m \cdot n.$$

Demonstração. Sejam m e n números cardinais finitos. Temos que existem conjuntos X e Y, tal que $|X| = m$ e $|Y| = n$. Vamos demonstrar o teorema por indução sobre n.

Se $n = 0$, então $Y = \emptyset$ e, pelo Teorema 4.7, temos que $m \odot 0 = 0 = m \cdot 0$. Suponhamos que a afirmação seja válida para o número cardinal n, isto é, $m \odot n = m \cdot n$. Vamos mostrar que a afirmação vale para o número cardinal $n+1$, isto é, $m \odot (n+1) = m \cdot (n+1)$. Então, consideremos o conjunto Y, tal que $|Y| = n+1$, e seja $y \in Y$. Temos que $Y = (Y \setminus \{y\}) \cup (\{y\})$, de modo que $|Y| = |(Y \setminus \{y\}) \cup (\{y\})|$. Pela propriedade da soma de números cardinais, temos que $n \oplus 1 =$
$= n+1 = |(Y \setminus \{y\})| + 1$, o que implica $|(Y \setminus \{y\})| = n$. Note que $X \times Y = X \times [(Y \setminus \{y\}) \cup (\{y\})] = [X \times (Y \setminus \{y\})] \cup [X \times (\{y\})]$ e que $[X \times (Y \setminus \{y\})] \cap [X \times (\{y\})] = \emptyset$. Logo, por definição, temos que $m \odot (n+1) = |X \times Y| = |[X \times (Y \setminus \{y\})] \cup [X \times (\{y\})]| = m \odot n + m$ e, pela hipótese de indução, $|[X \times (Y \setminus \{y\})] \cup [X \times (\{y\})]| = m \cdot n + m =$
$= m \cdot (n+1)$, o que implica $m \odot (n+1) = m \cdot (n+1)$, como queríamos demonstrar.

□

Dado um número cardinal n e o número cardinal $\aleph_0$ temos que, por definição, o produto $n \odot \aleph_0$ é a cardinalidade do conjunto $F \times \mathbb{N}$, onde F é um conjunto finito, tal que $|F| = n$. Vamos analisar a cardinalidade do conjunto $F \times \mathbb{N}$ e, para isso, temos os resultados a seguir.

Lema 4.2. *Seja o conjunto $F = \emptyset$, isto é, $|F| = 0$. Então, $|F \times \mathbb{N}| = 0$.*

Demonstração. Note que esse é um resultado direto do Teorema 4.7. Assim, $|F \times \mathbb{N}| = |\emptyset \times \mathbb{N}| = |\emptyset| = 0$, como queríamos demonstrar.

□

Note que, pelo Lema 4.2, dados os números cardinais 0 e $\aleph_0$, temos que

$$0 \odot \aleph_0 = 0.$$

Dado um conjunto finito e não vazio F, tal que $|F| = n$, devemos investigar o que ocorre com a cardinalidade do conjunto $F \times \mathbb{N}$ e a proposição a seguir nos auxiliará na obtenção desse resultado.

Proposição 4.7. *Seja F um conjunto finito e não vazio, tal que $|F| = m$. Então, $|\mathbb{N} \times F| = \aleph_0$.*

Demonstração. Se $|F| = 1$, isto é, se $F = \{f_0\}$, então, pelo Corolário 4.8, temos que $\aleph_0 \odot 1 = \aleph_0$.

Suponhamos agora que $|F| = m > 1$. Dessa forma, temos que $F = \{f_i \mid 0 \leq i \leq m-1\}$. Consideremos a função g definida a seguir

$$g : \mathbb{N} \times F \to \mathbb{N}$$
$$g(n, f_i) = mn + i$$

Afirmamos que a função g é uma bijeção. De fato, g é injetiva, pois, sejam (r, f_i) e (s, f_j) elementos de $\mathbb{N} \times F$. Note que, como $f_i, f_j \in F$, temos que $0 \leq i \leq m-1$ e $0 \leq j \leq m-1$, de modo que $0 \leq |j-i| \leq m-1$. Suponhamos que $g(r, f_i) = g(s, f_j)$, então $mr+i = ms+j$ e, dessa forma, $m(r-s) = j-i$. Assim, $m|(r-s)| = |j-i| \leq m-1$, de modo que $m|(r-s)| \leq m-1$, o que implica $|r-s| = 0$, logo, $r = s$. Como $|r-s| = 0$, temos que $|j-i| = 0$ e, portanto $j = i$. Logo, $(r, f_i) = (s, f_j)$ e a função g é injetiva.

A função g também é sobrejetiva. De fato, dado $k \in \mathbb{N}$ temos, pelo algoritmo de Euclides, que existem $r, s \in \mathbb{N}$, tal que $k = ms + r$, sendo $0 \leq r \leq m-1$. Dessa forma, $g(s, f_r) = ms + r = k$ e a função g é sobrejetiva. Logo, a função g é uma bijeção e $(\mathbb{N} \times F) \approx \mathbb{N}$, o que implica $|\mathbb{N} \times F| = |\mathbb{N}|$, de modo que $\aleph_0 \odot m = \aleph_0$, como queríamos demonstrar.

□

Pela Proposição 4.2, temos que se $X_i \approx \mathbb{N}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, então $\prod_{i=0}^{n} X_i \approx \mathbb{N}$. Logo, por definição, temos que $|\prod_{i=0}^{n} X_i| = |\mathbb{N}|$, o que implica

$$\aleph_0 \odot \aleph_0 \odot \aleph_0 \odot \ldots \odot \aleph_0 = \aleph_0.$$

4.3.2.1 Propriedades do produto de números cardinais

Proposição 4.8. *Para todo número cardinal κ, $\kappa \oplus \kappa = 2 \odot \kappa$.*

Demonstração. Observe que essa propriedade deve valer para qualquer representante, então seja K, tal que $|K| = \kappa$. Os conjuntos $K \times \{0\}$ e $K \times \{1\}$ são disjuntos e $|K \times \{0\}| = = |K \times \{1\}| = \kappa$. Vamos agora mostrar que $[(K \times \{0\}) \cup (K \times \{1\})] \approx (\{0,1\} \times K)$.

Para isso, consideremos a função g definida da seguinte forma

$$g : (K \times \{0\}) \cup (K \times \{1\}) \to \{0,1\} \times K$$
$$g(k,x) = \begin{cases} (0,k), & \text{se } x = 0; \\ (1,k), & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Afirmamos que a função g é uma bijeção. De fato, g é injetiva, pois, sejam $(k_1, x_1), (k_2, x_2) \in (K \times \{0\}) \cup (K \times \{1\})$, tal que $g(k_1, x_1) = g(k_2, x_2)$. Então, ou $(0, k_1) = (0, k_2)$ e, dessa forma, $k_1 = k_2$ e $x_1 = x_2 = 0$ ou $(1, k_1) = (1, k_2)$, e isso implica $k_1 = k_2$ e $x_1 = x_2 = 1$. Logo, $(k_1, x_1) = (k_2, x_2)$ e g é injetiva.

A função g é sobrejetiva, pois, dado $y \in \{0,1\} \times K$, então existe $k \in K$, tal que ou $y = (0,k)$ ou $y = (1,k)$. Se $y = (0,k)$, então $g(k,0) = (0,k) = y$. Se $y = (1,k)$, então $g(k,1) = (1,k) = y$. Logo, g é sobrejetiva e, portanto, uma bijeção. Dessa forma, temos que, $[(K \times \{0\}) \cup (K \times \{1\})] \underset{g}{\approx} (\{0,1\} \times K)$, de modo que $\kappa \oplus \kappa = 2 \odot \kappa$.

□

Teorema 4.10. *Sejam κ, λ e μ números cardinais quaisquer, então valem a seguintes propriedades:*

1. $\kappa \odot \lambda = \lambda \odot \kappa$;
2. $\kappa \odot (\lambda \odot \mu) = (\kappa \odot \lambda) \odot \mu$;
3. $\kappa \odot (\lambda \oplus \mu) = \kappa \odot \lambda \oplus \kappa \odot \mu$.

Demonstração. Sejam os conjuntos K, L e M, tal que $|K| = \kappa$, $|L| = \lambda$ e $|M| = \mu$.

1. Afirmamos que $K \times L \approx L \times K$.

   Para demonstrarmos esse fato, consideremos a função f definida abaixo

$$\begin{aligned} f : \ K \times L \ &\to \ L \times K \\ (k,l) \ &\mapsto \ f(k,l) = (l,k) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que f é uma bijeção. De fato, f é injetiva, pois, sejam $(k_1, l_1), (k_2, l_2) \in K \times L$, tal que $f(k_1, l_1) = f(k_2, l_2)$. Então, $(l_1, k_1) = (l_2, k_2)$ e, dessa forma, temos que $l_1 = l_2$ e $k_1 = k_2$ e, portanto, $(k_1, l_1) = (k_2, l_2)$.

A função f também é sobrejetiva, pois, dado $(l, k) \in L \times K$, temos que $(k, l) \in K \times L$ é tal que $f(k, l) = (l, k)$.

Com isso, a função f é uma bijeção e $K \times L \underset{f}{\approx} L \times K$. Dessa forma, $|K \times L| = |L \times K|$, o que implica $\kappa \odot \lambda = \lambda \odot \kappa$, como queríamos demonstrar.

2. Vamos mostrar que $K \times (L \times M) \approx (K \times L) \times M$ e, para isso, consideremos a função f definida abaixo

$$\begin{array}{rccl} f: & K \times (L \times M) & \to & (K \times L) \times M \\ & (k, (l, m)) & \mapsto & f(k, (l, m)) = ((k, l), m) \end{array}$$

Afirmamos que a função f é bijetiva. De fato, f é injetiva, pois, sejam $(k_1, (l_1, m_1))$ e $(k_2, (l_2, m_2))$, elementos de $K \times (L \times M)$, tal que $f(k_1, (l_1, m_1)) = f(k_2, (l_2, m_2))$. Dessa forma, temos que $((k_1, l_1), m_1) = ((k_2, l_2), m_2)$, o que implica $m_1 = m_2$ e $(k_1, l_1) = (k_2, l_2)$. Logo, $k_1 = k_2$ e $l_1 = l_2$ e, portanto, $(k_1, (l_1, m_1)) = (k_2, (l_2, m_2))$, e a função f é injetiva.

A função f também é sobrejetiva. De fato, dado $((k, l), m) \in (K \times L) \times M$, temos que $(k, (l, m)) \in K \times (L \times M)$ é tal que $f(k, (l, m)) = ((k, l), m)$.

Assim, a função f é uma bijeção e $K \times (L \times M) \approx (K \times L) \times M$, o que implica $|K \times (L \times M)| = |(K \times L) \times M|$. Logo, $\kappa \odot (\lambda \odot \mu) = (\kappa \odot \lambda) \odot \mu$, como queríamos demonstrar.

3. Sejam os conjuntos K, L e M, tal que $|K| = \kappa$, $|L| = \lambda$, $|M| = \mu$ e $L \cap M = \emptyset$. Note que, como os conjuntos L e M são disjuntos, então os conjuntos $K \times L$ e $K \times M$ são disjuntos e, por definição, temos que $|(K \times L) \cup (K \times M)| = |K \times L| \oplus |K \times M| = \kappa \odot \lambda \oplus \kappa \odot \mu$.

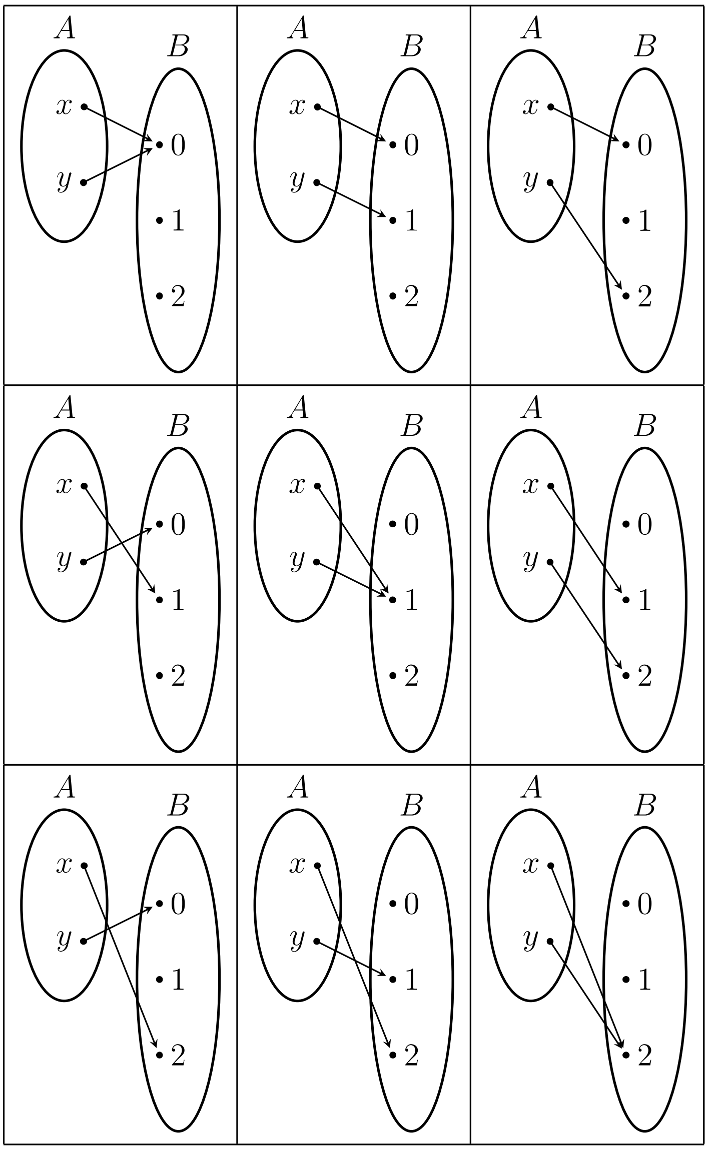
Note também que, como os conjuntos L e M são disjuntos, então $K \times (L \cup M) = (K \times L) \cup (K \times M)$ e, dessa forma, $|K \times (L \cup M)| = |(K \times L) \cup (K \times M)|$. Assim, como $|K \times (L \cup M)| = \kappa \odot (\lambda \oplus \mu)$, temos que $\kappa \odot (\lambda \oplus \mu) = \kappa \odot \lambda \oplus \kappa \odot \mu$, como queríamos demonstrar.

$\square$

4.3.3 Potência de números cardinais

No ensino básico, quando são apresentadas as ideias de função, uma estratégia muito utilizada é a construção de função por meio de diagramas, de modo que cada

Figura 5 - Funções de $A = \{x, y\}$ em $B = \{0, 1, 2\}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

elemento do conjunto domínio (de saída) é associado a um, e somente um, elemento do conjunto contradomínio (de chegada). Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{x, y\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$, uma função $f : A \to B$ associa cada elemento $a \in A$ a um, e somente um, elemento $f(a) \in B$. Note que o número de possibilidades para a escolha do elemento $f(a)$ é igual ao número de elementos do conjunto B. Observe a Figura 5, que exibe as possibilidades para a construção de uma função f, de A em B.

Desse modo, pelo princípio fundamental da contagem[3], temos que o número de

[3] Consiste em uma técnica matemática de contagem desenvolvida em Análise Combinatória.

Figura 6 - Diagrama representativo da função $H : K_1^{L_1} \to K_2^{L_2}$.

$$\begin{tikzcd}
K_2 & L_2 \arrow[l, bend right, "H(\varphi)=f\circ\varphi\circ g^{-1}"'] \arrow[d, "g^{-1}"] \\
K_1 \arrow[u, "f"] & L_1 \arrow[l, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

funções $f : A \to B$, isto é, a cardinalidade do conjunto B^A, será igual a $|B| \cdot |B| = 3 \cdot 3 = 3^2 = |B|^{|A|}$. Com essa ideia, podemos definir a operação potenciação entre números cardinais.

Definição 4.8 (Potenciação de números cardinais)**.** *Sejam κ e λ números cardinais. Definimos a potência κ^λ como a cardinalidade do conjunto $|K^L|$, sendo K e L conjuntos tal que $|K| = \kappa$ e $|L| = \lambda$.*

Proposição 4.9. *A operação potenciação entre números cardinais está bem definida.*

Demonstração. Sejam K_1, K_2, L_1 e L_2, tal que $|K_1| = |K_2| = \kappa$ e $|L_1| = |L_2| = \lambda$. Dessa forma, temos que $K_1 \underset{f}{\approx} K_2$ e $L_1 \underset{g}{\approx} L_2$. Vamos mostrar que $K_1^{L_1} \approx K_2^{L_2}$ e, para isso, consideremos a função H definida abaixo

$$H : K_1^{L_1} \to K_2^{L_2}$$
$$H(\varphi) = f \circ \varphi \circ g^{-1}.$$

Observe a Figura 6, que representa a construção da função H.

Afirmamos que a função H é uma bijeção. De fato, H é injetiva, pois, sejam $\varphi, \psi \in K_1^{L_1}$, tal que $H(\varphi) = H(\psi)$. Dessa forma, temos que $f \circ \varphi \circ g^{-1} = f \circ \psi \circ g^{-1}$. Como as funções f e g são bijeções, elas possuem inversas, o que implica $f^{-1} \circ (f \circ \varphi \circ g^{-1}) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ \psi \circ g^{-1}) \circ g$. Dessa forma, temos que $\varphi = \psi$. Assim, $H(\varphi) = H(\psi)$ implica $\varphi = \psi$, e H é injetiva.

A função H é sobrejetiva. De fato, dado $\tau \in K_2^{L_2}$, consideremos $\varphi \in K_1^{L_1}$, tal que $\varphi = f^{-1} \circ \tau \circ g$. Temos que, $H(\varphi) = f \circ \varphi \circ g^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ \tau \circ g) \circ g^{-1} = (f \circ f^{-1}) \circ \tau \circ (g \circ g^{-1}) = \tau$. Assim, H é sobrejetiva. Dessa forma, a função H é uma bijeção, de modo que $K_1^{L_1} \approx K_2^{L_2}$, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 4.11. *Seja κ um número cardinal. Então, valem as seguintes identidades:*

1. $\kappa^0 = 1$ *para todo número cardinal* κ*;*
2. $0^0 = 1$*;*
3. $0^\kappa = 0$ *para todo número cardinal* $\kappa \neq 0$*;*
4. $\kappa^1 = \kappa$ *para todo número cardinal* $\kappa \neq 0$*.*

Demonstração. Seja K um conjunto, tal que $|K| = \kappa$.

1. $\kappa^0 = 1$ para todo número cardinal κ;

   Para nos auxiliar na demonstração dessa identidade, precisaremos do resultado a seguir.

   Afirmação 4.1. *Seja o conjunto B. Então, $\emptyset$ é uma função de $\emptyset$ em B.*

   Demonstração. De fato, dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é um conjunto, f, que satisfaz as duas propriedades a seguir.

   (i) $f \subseteq A \times B$;

   (ii) Para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$, tal que $f(x) = y$.

   Dessa forma, uma função de $\emptyset$ em B deve ser um subconjunto de $\emptyset \times B$, que satisfaz a Propriedade (ii) acima. Pelo Teorema 4.7, temos que $\emptyset \times B = \emptyset$ e, assim, o único candidato para ser função é $\emptyset$. Devemos verificar se $\emptyset$ satisfaz as propriedades acima. De fato,

   (i) $\emptyset \subseteq \emptyset \times B$;

   (ii) Se $x \in \emptyset$, então existe um único $y \in B$, tal que $(x, y) \in \emptyset$ é verdadeiro por vacuidade.

   Dessa forma, temos que $\emptyset$ é a função de $\emptyset$ em B, de modo que $B^\emptyset = \{\emptyset\}$.

   □

   Note que $\kappa^0 = |K^\emptyset|$. Logo, como $K^\emptyset = \{\emptyset\}$, temos que $\kappa^0 = |K^\emptyset| = |\{\emptyset\}| = 1$, como queríamos demonstrar.

2. $0^0 = 1$;

   Note que esse é um resultado direto para $K = \emptyset$. Assim, $\kappa^0 = 0^0 = 1$.

3. $0^\kappa = 0$ para todo número cardinal $\kappa \neq 0$;

   Afirmação 4.2. *Seja o conjunto $K \neq \emptyset$. Então, $\emptyset^K = \emptyset$.*

   Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\emptyset^K \neq \emptyset$ e seja a função $f \in \emptyset^K$. Como $K \neq \emptyset$, seja $k \in K$. Dessa forma, $f : K \to \emptyset$ é tal que $f(k) \in \emptyset$, mas o conjunto $\emptyset$ não possui elementos e, assim, não podemos definir f. Logo, $\emptyset^K = \emptyset$, como queríamos demonstrar.

   □

   Como $0^\kappa = |\emptyset^K| = |\emptyset| = 0$, temos que $0^\kappa = 0$, como queríamos demonstrar.

4. $\kappa^1 = \kappa$ para todo número cardinal $\kappa \neq 0$.

   De fato, vamos mostrar que, se $K \neq \emptyset$, então $K^U \approx K$, sendo $U = \{u\}$ um conjunto unitário. Para isso, consideremos a função $G : K^U \to K$, $G(g) = g(u)$. Afirmamos que G é uma bijeção. De fato, G é injetiva, pois, sejam $g_1, g_2 \in K^U$, tal que $G(g_1) = G(g_2)$. Dessa forma, temos que $g_1(u) = G(g_1) = G(g_2) = g_2(u) \in K$. Assim, $g_1 = g_2$ e a função G é injetiva.

   A função G é sobrejetiva. De fato, dado $k \in K$, seja $g' \in K^U$, tal que $g'(u) = k$. Temos que $G(g') = g'(u) = k$ e a função G é sobrejetiva. Logo, a função G é uma bijeção e $K^U \approx K$, de modo que $|K^U| = |K|$. Assim, temos que $\kappa^1 = \kappa$, como queríamos demonstrar.

□

A operação potenciação de números cardinais possui algumas propriedades importantes, que serão exploradas no teorema a seguir.

Teorema 4.12. *Sejam κ, λ e μ números cardinais quaisquer, então valem as seguintes propriedades:*

1. $\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \odot \kappa^\mu$;

2. $(\kappa \odot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \odot \lambda^\mu$;

3. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \odot \mu}$.

Demonstração. Sejam K, L e M conjuntos tais que $|K| = \kappa$, $|L| = \lambda$, $|M| = \mu$ e $L \cap M = \emptyset$.

1. Vamos mostrar que $K^{L \cup M} \approx K^L \times K^M$ e, para isso, consideremos a função G definida abaixo

$$G : K^{L\cup M} \to K^L \times K^M$$
$$G(\psi) = (\psi\mid_L, \psi\mid_M)$$

Afirmamos que a função G é bijetiva. De fato, G é injetiva, pois, sejam $\psi, \varphi \in K^{L\cup M}$, tal que $G(\psi) = G(\varphi)$. Dessa forma, temos que $(\psi(l), \psi(m)) = (\varphi(l), \varphi(m))$, o que implica $\psi(l) = \varphi(l)$ para todo $l \in L$ e $\psi(m) = \varphi(m)$ para todo $m \in M$, de modo que $\varphi = \psi$ para todo $x \in L \cup M$. Logo, a função G é injetiva.

A função G é sobrejetiva. De fato, dado $(i, j) \in K^L \times K^M$, seja $g : L \cup M \to K$ definida a seguir

$$g(x) = \begin{cases} i(x), & \text{se } x \in L; \\ j(x), & \text{se } x \in M. \end{cases}$$

Como os conjuntos L e M são disjuntos, segue que a função g está bem definida. Como $G(g) = (i, j)$, segue que a função G é sobrejetiva e, portanto, uma bijeção. Concluímos assim que $K^{L\cup M} \underset{G}{\approx} K^L \times K^M$, de modo que $\kappa^{\lambda\odot\mu} = \kappa^\lambda \odot \kappa^\mu$, como queríamos demonstrar.

2. Vamos mostrar que $(\kappa \odot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \odot \lambda^\mu$. Para isso, consideremos a função $H : (K \times L)^M \to K^M \times L^M$, definida por $H(i) = (\pi_1 \circ i, \pi_2 \circ i)$, sendo π_1 e π_2 as projeções $\pi_1 : K \times L \to K$ e $\pi_2 : K \times L \to L$.

   Afirmamos que a função H é bijetiva. De fato, H é injetiva, pois, sejam $i, j \in (K\times L)^M$, tal que $H(i) = H(j)$. Dessa forma, temos que $H(i) = (\pi_1 \circ i, \pi_2 \circ i) = = H(j) = (\pi_1 \circ j, \pi_2 \circ j)$, o que implica $\pi_1 \circ i = \pi_1 \circ j$ e $\pi_2 \circ i = \pi_2 \circ j$. Como $i, j \in (K \times L)^M$, para cada $m \in M$, temos que $i(m), j(m) \in K \times L$, isto é, existem $k_1, k_2 \in K$ e $l_1, l_2 \in L$, tal que $i(m) = (k_1, l_1)$ e $j(m) = (l_1, l_2)$. Assim, $\pi_1 \circ i(m) = \pi_1 \circ j(m)$ implica $k_1 = k_2$ e $\pi_2 \circ i = \pi_2 \circ j$, que implica $l_1 = l_2$, de modo que $i(m) = j(m)$ e a função H é injetiva, como queríamos demonstrar.

   A função H é sobrejetiva, pois, dado $(\varphi, \psi) \in K^M \times L^M$, temos que a função $i \in (K \times L)^M$ definida por $i(m) = (\varphi(m), \psi(m))$ é tal que $H(i)(m) = i(m) = = (\varphi(m), \psi(m))$. Assim, H é sobrejetiva. Dessa forma, H é uma bijeção, de modo que $|(K \times L)^M| = |K^M \times L^M|$, o que implica $(\kappa \odot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \odot \lambda^\mu$, como queríamos demonstrar.

3. Precisamos mostrar que $(K^L)^M \approx K^{L\times M}$ e, dessa forma, teremos que $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\odot\mu}$. Consideremos a função $H : (K^L)^M \to K^{L\times M}$, definida por $H(f) = h_f$, sendo $h_f : L \times M \to K$, definida por $h_f(l, m) = f(m)(l)$.

   Afirmamos que a função H é uma bijeção. De fato, H é injetiva, pois, sejam $f, g \in (K^L)^M$, tal que $f \neq g$. Dessa forma, temos que existe $m \in M$, tal que

$f(m) \neq g(m)$. Logo, existe algum $l \in L$, tal que $f(m)(l) \neq g(m)(l)$. Dessa forma, temos que $H(f)(l,m) = f(m)(l) \neq g(m)(l) = H(g)(l,m)$, e a função H é injetiva, como queríamos demonstrar.

A função H também é sobrejetiva. De fato, dado $\psi \in K^{L\times M}$ e fixado $m \in M$, definimos $g_m : L \to K$ por $g_m(l) = \psi(l,m)$. Note que isso define uma função $g : M \to K^L$, sendo $g(m) = g_m$. Com isso, temos que $H(g) = h_g(l,m) = g(m)(l) = g_m(l) = = \psi(l,m)$. Logo, a função H é sobrejetiva e, portanto, uma bijeção. Assim, temos que $(K^L)^M \approx K^{L\times M}$, de modo que $|(K^L)^M| = |K^{L\times M}|$, o que implica $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\odot\mu}$, como queríamos demonstrar.

□

Precisamos verificar se a operação potenciação de números cardinais, para conjuntos finitos X e Y, tal que $|X| = m$ e $|Y| = n$, é consistente com a operação potenciação para os números naturais m e n, introduzida na Definição 1.7. Note que há uma inconsistência entre potenciação de números cardinais e de números naturais, pois, pelo Teorema 4.11, item 2, temos que, para números cardinais $m = 0$ e $n = 0$, $m^n = 0^0 = 1$. No entanto, para números naturais $m = 0$ e $n = 0$ a operação $m^n = 0^0$ não está definida. Com exceção dessa identidade mostrada, a operação potenciação de números cardinais é consistente com a operação potenciação de números naturais, como veremos no teorema a seguir.

Teorema 4.13. *Sejam m e n números cardinais finitos, não simultaneamente nulos, e seja $(m^n)_{\mathbb{N}}$ a operação potência usual para números naturais. Então,*

$$m^n = (m^n)_{\mathbb{N}}.$$

Demonstração. Sejam os conjuntos finitos X e Y tais que $|X| = m$ e $|Y| = n$. Vamos mostrar o teorema por indução sobre n. Se $n = 0$, então $m \neq 0$ e, pelo Teorema 4.11, item 1, temos que $m^0 = 1 = (m^0)_{\mathbb{N}}$. Suponhamos que o fato seja verdadeiro para o número cardinal n, isto é, $m^n = (m^n)_{\mathbb{N}}$. Vamos mostrar que a afirmação vale para o número cardinal $n+1$. Para isso, consideremos o conjunto finito Y, tal que $|Y| = n+1$ e seja $y \in Y$. Dessa forma, temos que $Y = (Y \setminus \{y\}) \cup (\{y\})$, o que implica $X^Y = X^{(Y\setminus\{y\})\cup(\{y\})}$. Logo, pelo Teorema 4.12, item 1, e pelo Teorema 4.9, temos que

$$|X^Y| = |X^{(Y\setminus\{y\})\cup(\{y\})}| = m^{n\oplus 1} = m^n \odot m^1.$$

Pela nossa hipótese de indução, temos que $m^n = (m^n)_{\mathbb{N}}$ e, pelo Teorema 4.11, item 4, $m^1 = m$. Assim,

$$|X^Y| = |X^{(Y\setminus\{y\})\cup(\{y\})}| = m^{n\oplus 1} = m^n \odot m^1 = \\ = (m^n)_{\mathbb{N}} \cdot (m^1)_{\mathbb{N}} = (m^{n+1})_{\mathbb{N}}.$$

Dessa forma, por indução, mostramos que $m^n = (m^n)_{\mathbb{N}}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Proposição 4.10. $\mathbb{N}^{I_n} \approx \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, tal que* $n \geq 1$*.*

Demonstração. Consideremos a função

$$H : \mathbb{N}^{I_n} \to \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}$$
$$h \mapsto H(h) = \prod_{i=0}^{n-1} \{h(i)\}$$

Afirmamos que a função H é uma bijeção. De fato, H é injetiva e, para demonstrarmos esse fato, sejam as funções $f, g \in \mathbb{N}^{I_n}$ tais que $f \neq g$. Dessa forma, temos que existe existe $m \in I_n$, tal que $f(m) \neq g(m)$. Assim, $\prod_{i=0}^{n-1}\{f(i)\} \neq \prod_{i=0}^{n-1}\{g(i)\}$, de modo que $H(f) \neq H(g)$, e a função H é injetiva. A função H é também sobrejetiva. De fato, dado $y \in \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}$, temos que $y = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, em que $a_i \in \mathbb{N}$ para cada $i \in I_n$. Dessa forma, podemos construir a função

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I_n & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \varphi(n) = a_n \end{array}$$

Assim, temos que $H(\varphi) = \prod_{i=0}^{n-1}\{\varphi(i)\} = (\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)) =$ $= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = y$ e a função H é sobrejetiva. Logo, temos que a função H é uma bijeção, e isso implica que $\mathbb{N}^{I_n} \underset{H}{\approx} \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

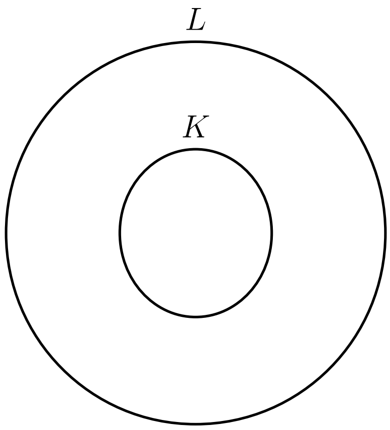
Já demonstramos na Proposição 2.4 que, dado um conjunto A, temos que $P(A) \approx \{0,1\}^A$. Dessa forma, algumas cardinalidades podem ser conhecidas, como veremos abaixo.

Exemplo 4.4. Exemplos de algumas cardinalidades.

1. Note que o conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é tal que seus elementos são as sequências enumeráveis infinitas formadas pelos algarismos 0 e 1. Como exemplos de seus elementos, temos $0000000\ldots$, $111111\ldots$, $00010001111\ldots$ e $110000000\ldots$. Pela Proposição 2.4, temos que $P(\mathbb{N}) \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, o que implica $|P(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$, de modo que $|P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.

2. De forma análoga, $P(\mathbb{R}) \approx \{0,1\}^{\mathbb{R}}$, o que implica $|P(\mathbb{R})| = |\{0,1\}^{\mathbb{R}}|$, de modo que $|P(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_1}$.

Figura 7 - Conjunto K contido no conjunto L.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

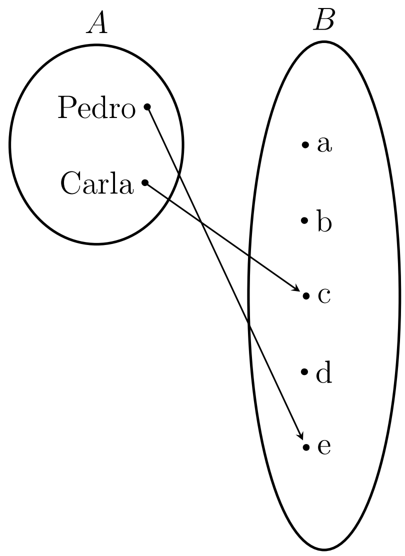
4.4 Comparação de números cardinais

Dados dois números cardinais κ e λ, sejam os conjuntos K e L tais que $|K| = \kappa$ e $|L| = \lambda$. Gostaríamos de estabelecer uma forma de comparar κ e λ, isto é, de poder dizer, por exemplo, que $\kappa \leq \lambda$ ou $\lambda \leq \kappa$, levando em considereção a relação existente entre os conjuntos K e L. A noção intuitiva que será utilizada para comparação de números cardinais será a relação de inclusão de conjuntos, pois, suponhamos que $K \subseteq L$, dessa forma, intuitivamente, temos que a cardinalidade do conjunto K será, no máximo, igual a cardinalidade do conjunto L e deverá ser igual somente quando os conjuntos coincidirem ou quando forem equinumeráveis, fato que ocorre quando estivermos tratando com conjuntos infinitos. Observe a Figura 7.

Para isso, começaremos investigando uma forma de compararmos números cardinais finitos, de forma que esteja consistente com a comparação usual de números naturais para, somente então, estabelecermos uma definição que inclua também os números cardinais transfinitos. Sejam então os números cardinais finitos 2 e 5. Temos, por exemplo, que os conjuntos $A = \{\text{Pedro}, \text{Carla}\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ são tal que $|A| = 2$ e $|B| = 5$, e gostaríamos que nossa definição permita escrever $2 \leq 5$ (ou mais, que $2 < 5$). Note que, se relacionarmos cada elemento do conjunto A a somente um elemento do conjunto B, de forma que elementos distintos do conjunto A impliquem elementos distintos no conjunto B, teremos um subconjunto de B equinumerável ao conjunto A. A Figura 8 mostra uma função injetiva, f, de $A = \{\text{Pedro}, \text{Carla}\}$ em $B = \{a, b, c, d, e\}$.

Na situação mostrada acima, seja o conjunto $C = \{c, e\}$. Temos que $C \subseteq B$ é tal que $C \approx A$, o que implica $|C| = |A| = 2 \leq 5 = |B|$. Note que a função construída acima possui a propriedade de ser injetiva, e essa será nossa principal ferramenta para comparação de números cardinais, pois, dados os conjuntos A e B e uma função injetiva $f : A \to B$, temos que o conjunto $f(A) = \{f(a) \in B \mid a \in A\}$ é um subconjunto do

Figura 8 - Função injetiva, f, de A em B.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

conjunto B, tal que $f(A)$ é equinumerável ao conjunto A. Observe a Figura 9.

Definição 4.9 (Conjunto dominante)**.** *Sejam os conjuntos K e L. Dizemos que o conjunto L domina o conjunto K se existe uma função injetiva de K em L. Podemos dizer também que o conjunto K é dominado pelo conjunto L. Nesse caso, escrevemos $K \precsim L$.*

Notação 4.1. Sejam os conjuntos K, L e uma função injetiva $f : K \to L$. Nesse caso, escrevemos $K \underset{f}{\precsim} L$.

Notação 4.2. Sejam os conjuntos K e L. Se não existe uma função injetiva $f : K \to L$, escrevemos $K \not\precsim L$.

A partir da Definição 4.9, caso tenhamos $K \subseteq L$, podemos afirmar que o conjunto L domina o conjunto K e, para verificar esse fato, podemos utilizar a função inclusão $f : K \to L$, tal que $f(k) = k$. Como a função inclusão é injetiva, temos que $K \underset{f}{\precsim} L$.

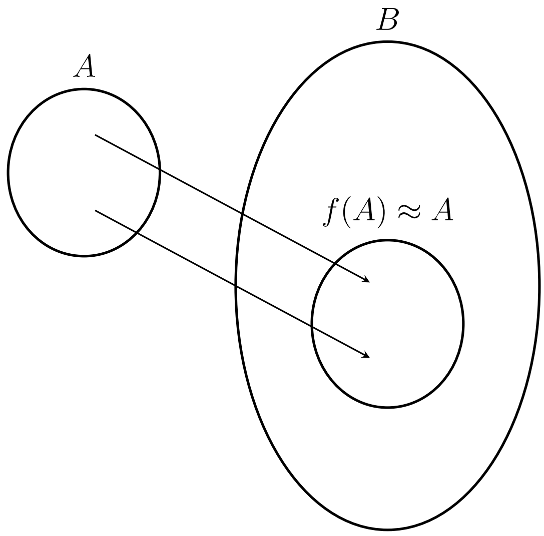
A ordenação de números cardinais será definida utilizando a Definição 4.9 dada.

Definição 4.10 (Comparação de números cardinais)**.** *Sejam κ e λ números cardinais e os conjuntos K e L tais que $|K| = \kappa$ e $|L| = \lambda$. Então, diremos que $\kappa \leq \lambda$ se, e somente se, o conjunto K for dominado pelo conjunto L. Em outras palavras,*

$$\kappa \leq \lambda \Leftrightarrow K \precsim L.$$

Precisamos verificar se nosso critério de comparação estabelecido na Definição 4.10 dada acima está bem definido, isto é, que não importa quais conjuntos sejam utilizados para realizarmos tal comparação. A proposição a seguir demonstrará esse fato.

Figura 9 - Toda função injetiva é bijetiva sobre sua imagem.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 10 - Diagrama representativo da função $H : K' \to L'$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "g"] \\ K' \arrow[r, "H"'] & L' \end{tikzcd}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Proposição 4.11. *O critério de comparação de números cardinais introduzido na Definição 4.10 está bem definido.*

Demonstração. Sejam os números cardinais κ e λ e os conjuntos K, K', L e L', tal que $|K| = |K'| = \kappa$ e $|L| = |L'| = \lambda$. Por definição, temos que

$$\kappa \leq \lambda \Leftrightarrow K \precsim L.$$

Vamos mostrar que $K \underset{h}{\precsim} L$ se, e somente se, $K' \precsim L'$. Suponhamos que $K \underset{h}{\precsim} L$. Como $|K| = |K'| = \kappa$ e $|L| = |L'| = \lambda$, temos que $K \underset{f}{\approx} K'$ e $L \underset{g}{\approx} L'$. Consideremos, então, a função H definida abaixo

$$H : K' \to L'$$
$$H(k') = g \circ h \circ f^{-1}(k')$$

Observe a Figura 10, com o diagrama que representa a função H.

Como a função H é uma composição das funções f^{-1}, h e g, que são injetivas, segue que H é injetiva. Dessa forma, temos que $K' \underset{H}{\precsim} L'$, como queríamos demonstrar.

De forma análoga, suponhamos que $K' \underset{h'}{\precsim} L'$. Vamos mostrar que $K \precsim L$. Como na demonstração acima, basta definirmos a função $G : K \to L$, tal que $G(k) = g^{-1} \circ h' \circ f(k)$, que também é composição de funções injetivas, logo, segue que é injetiva. Dessa forma, temos que $K \underset{G}{\precsim} L$.

Assim, temos que $K \precsim L$ se, e somente se $K' \precsim L'$, e o nosso critério de comparação está bem definido, como queríamos demonstrar.

□

Com a Definição 4.10 dada acima, já podemos ordenar alguns números cardinais.

Proposição 4.12. *Seja κ um número cardinal diferente de zero. Então, $1 \leq \kappa^\lambda$ para todo número cardinal λ.*

Demonstração. Sejam os conjuntos K e L tais que $|K| = \kappa \neq 0$ e $|L| = \lambda$. Se $\lambda = 0$, então, pelo Teorema 4.11, item 1, temos que $\kappa^\lambda = \kappa^0 = 1$ e, dessa forma, $1 \leq \kappa^\lambda = \kappa^0 = 1$.

Suponhamos $\lambda \neq 0$. Dessa forma, temos que $L \neq \emptyset$. Como $\kappa \neq 0$, temos que $K \neq \emptyset$. Sejam $k \in K$ e a função constante $f \in K^L$, tal que $f(l) = k$ para todo $l \in L$, e consideremos a função H definida abaixo

$$\begin{gathered} H : \{0\} \to K^L \\ H(0) = f \end{gathered}$$

Note que, como o domínio possui um único elemento, segue que a função H é injetiva. Dessa forma, temos, por definição, que K^L domina $\{0\}$. Em outras palavras, temos que $\{0\} \underset{H}{\precsim} K^L$, de modo que $1 \leq \kappa^\lambda$, como queríamos demonstrar.

□

Veremos a seguir alguns exemplos de comparação de números cardinais utilizando a Definição 4.10.

Exemplo 4.5. Exemplos de comparação de números cardinais.

(I) Sejam os conjuntos finitos I_m e I_n. Como, ou $I_m \subseteq I_n$ ou $I_n \subseteq I_m$, temos, respectivamente, que ou $m \leq n$ ou $n \leq m$.

(II) Dados os conjuntos P, dos números naturais pares, e $\mathbb{N}$, temos que $P \subseteq \mathbb{N}$ e, dessa forma, $|P| \leq |\mathbb{N}|$.

(III) Por definição, podemos também comparar os números cardinais $\aleph_0$ e $\aleph_1$. Como $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = \aleph_1$ e $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, temos que $\aleph_0 \leq \aleph_1$.

Suponhamos que, no caso (I) dos Exemplo 4.5, tenhamos $I_m \subsetneq I_n$. Dessa forma, gostaríamos de dizer que o número cardinal m é estritamente menor que o número cardinal

Figura 11 - Diagrama representativo da função $H : K \to L$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "H"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "g"] \\ K' \arrow[r, "h"'] & L' \end{tikzcd}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

n, pois, pelo Teorema 3.2, o conjunto $I_m \not\approx I_n$, isto é, os conjuntos I_m e I_n não possuem a mesma cardinalidade. O mesmo acontece no item (III) do Exemplo 4.5, pois, pelo Teorema 2.2, $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$, isto é, os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ não possuem a mesma cardinalidade. Já no caso (II) do Exemplo 4.5 acima, apesar de $P \subseteq \mathbb{N}$, temos, pelo Corolário 3.3, que $P \approx \mathbb{N}$, de modo que $|P| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$. Esses fatos nos motivam para nossa próxima definição.

Definição 4.11. *Sejam os números cardinais κ e λ e os conjuntos K e L tais que $|K| = \kappa$ e $|L| = \lambda$. Dizemos que o número cardinal κ é estritamente menor que o número cardinal λ e denotaremos por $\kappa < \lambda$ se, e somente se, o conjunto L domina o conjunto K e os conjuntos K e L não são equinumeráveis. Em outras palavras,*

$$\kappa < \lambda \Leftrightarrow K \precsim L \text{ e } K \not\approx L.$$

Proposição 4.13. *O critério de comparação dado na Definição 4.11 está bem definido.*

Demonstração. Sejam os números cardinais κ e λ, e os conjuntos K, K', L e L' tais que $|K| = |K'| = \kappa$ e $|L| = |L'| = \lambda$. Vamos mostrar que $K \not\approx L$ se, e somente se, $K' \not\approx L'$.

Suponhamos, inicialmente, que $K \not\approx L$. Vamos mostrar que $K' \not\approx L'$. Para isso, suponhamos, por absurdo, que $K' \underset{h}{\approx} L'$. Como $|K| = |K'| = \kappa$ e $|L| = |L'| = \lambda$, temos que $K \underset{f}{\approx} K'$ e $L \underset{g}{\approx} L'$. Consideremos, então, a função H definida abaixo.

$$H : K \to L$$
$$H(k) = g^{-1} \circ h \circ f(k)$$

Observe a Figura 11, que representa a construção da função H.

Por definição, a função H é composição das funções f, h e g^{-1}, que são bijetivas. Logo, a função H é uma bijeção, o que implica $K \underset{H}{\approx} L$. Absurdo, pois $K \not\approx L$. A demonstração da volta da proposição é análoga à demonstração acima. Dessa forma, temos que o critério estabelecido na Definição 4.11 está bem definido, como queríamos demonstrar.

$\square$

Proposição 4.14. *Seja o número cardinal $\kappa = 0$. Então, $\kappa < \lambda$ para todo número cardinal $\lambda \neq 0$.*

Demonstração. Sejam os conjuntos K e L, tal que $|K| = \kappa = 0$ e $|L| = \lambda \neq 0$. Vamos mostrar que $K \precsim L$ e $K \not\approx L$. De fato, como $\kappa = 0$, temos que $K = \emptyset$ e, assim, $K \subseteq L$ para todo conjunto L, de modo que $0 \leq \lambda$ para todo número cardinal λ. Afirmamos que $L \not\approx K$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $L \underset{f}{\approx} K$. Dessa forma, temos que $|L| = |K|$, e isso implica $\lambda = \kappa = 0$, absurdo, pois $\lambda \neq 0$. Assim, $L \not\approx K$ e $0 = \kappa < \lambda$ para todo número cardinal $\lambda \neq 0$, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 4.15. *Sejam os números cardinais finitos m e n. Então, ou $m < n$ ou $m = n$ ou $m > n$.*

Demonstração. Sejam os conjuntos finitos I_m e I_n, tal que $|I_m| = m$ e $|I_n| = n$. Dessa forma, temos que $m, n \in \mathbb{N}$ e, pela Poposição 1.20, ou $m < n$ ou $m = n$ ou $m > n$. Se $m = n$, então temos que $I_m = I_n$, de modo que $|I_m| = m = n = |I_n|$. Se $m \neq n$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $m < n$ e, dessa forma, pela Proposição 1.22, temos que $I_m \subsetneq I_n$, o que implica $I_m \precsim I_n$ e, pelo Teorema 3.1, temos que $I_m \not\approx I_n$. Logo, temos que $|I_m| = m < n = |I_n|$, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 4.16. *Para todo cardinal finito n, temos que $n < \aleph_0$.*

Demonstração. Seja o conjunto finito I_n, tal que $|I_n| = n$, e suponhamos, por absurdo, que $\aleph_0 \leq n$. Dessa forma, temos que $\mathbb{N} \underset{f}{\precsim} I_n$ e isso implica que o conjunto $f(\mathbb{N}) = \{f(n) \in I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é tal que $f(\mathbb{N}) \subseteq I_n$ e $f(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}$. Observe a Figura 12.

Assim, o conjunto finito I_n terá como subconjunto o conjunto $f(\mathbb{N})$, infinito, o que é um absurdo, pelo Teorema 3.3. Logo, temos que $n < \aleph_0$, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 4.17. *Sejam os números cardinais $\aleph_0$ e $\aleph_1$. Então, $\aleph_0 < \aleph_1$.*

Demonstração. De fato, como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, temos que $\aleph_0 \leq \aleph_1$. Pelo Teorema 2.2, temos que $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$, de modo que $\aleph_0 < \aleph_1$, como queríamos demonstrar.

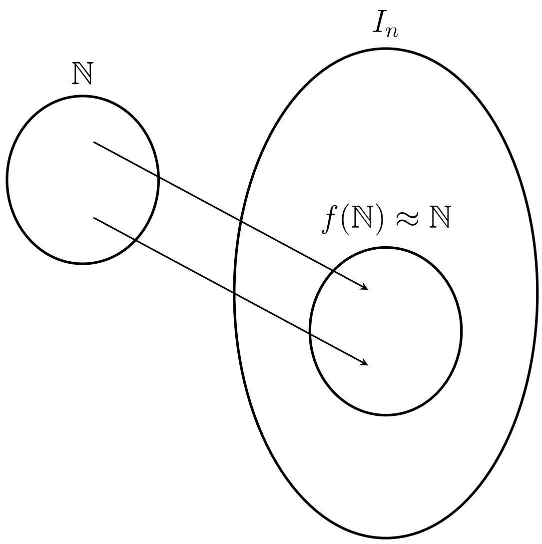
□

Proposição 4.18. *Seja o número cardinal κ. Então, $\kappa < 2^\kappa$.*

Demonstração. Seja o conjunto K, tal que $|K| = \kappa$. Se $\kappa = 0$, então $2^\kappa = 2^0 = 1$ e, pela Proposição 4.14, temos que $\kappa = 0 < 1 = 2^\kappa$. Suponhamos que $\kappa \neq 0$, isto é, que $K \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $K \precsim P(K)$ e, para isso, consideremos a função f definida abaixo

$$\begin{array}{rccl} f: & K & \to & P(K) \\ & k & \mapsto & f(k) = \{k\} \end{array}$$

Figura 12 - O absurdo de uma função injetiva de $\mathbb{N}$ em I_n.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Afirmamos que a função f é injetiva. De fato, sejam $k, k' \in K$, tal que $k \neq k'$. Dessa forma, temos que $f(k) = \{k\} \neq \{k'\} = f(k')$ e a função f é injetiva. Logo, temos que $K \precsim P(K)$, e isso implica que $\kappa \leq |P(K)|$. Pela Proposição 2.5, temos que $K \not\approx P(K)$ e, assim, $\kappa < |P(K)|$. No entanto, pela Proposição 2.4, temos que $P(K) \approx \{0,1\}^K$, de modo que $|P(K)| = |\{0,1\}^K| = 2^\kappa$. Assim, concluímos que $\kappa < 2^\kappa$ para todo número cardinal κ.

$\square$

Proposição 4.19. *Para quaisquer números cardinais κ, λ e μ, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *$\kappa \leq \kappa$;*
2. *Se $\kappa \leq \lambda$ e $\lambda \leq \mu$, então $\kappa \leq \mu$;*
3. *Se $\kappa \leq \lambda$ e $\lambda \leq \kappa$, então $\kappa = \lambda$.*

Demonstração. Sejam os conjuntos K, L e M, tal que $|K| = \kappa$, $|L| = \lambda$ e $|M| = \mu$.

1. Como $K \subseteq K$, temos que $K \precsim K$, o que implica $\kappa \leq \kappa$.
2. Como $\kappa \leq \lambda \leq \mu$, temos que $\kappa \leq \lambda$ e $\lambda \leq \mu$, isto é, $K \underset{f}{\precsim} L$ e $L \underset{g}{\precsim} M$. Consideremos, então, a função H definida abaixo

$$H : K \to M$$
$$H(k) = g \circ f(k)$$

Note que a função H é uma composição de duas funções injetivas, f e g, logo, H é injetiva. Assim, $K \underset{H}{\precsim} M$, e isso implica $\kappa \leq \mu$, como queríamos demonstrar.

3. Como $\kappa \leq \lambda$ e $\lambda \leq \kappa$, temos que $K \underset{f}{\precsim} L$ e $L \underset{g}{\precsim} K$. Queremos mostrar que $\kappa = \lambda$, isto é, que $K \approx L$. A demonstração desse fato é consequência direta do teorema seguinte.

$\square$

Teorema 4.14 (*Cantor – Bernstein – Schröeder*)**.** *Se $K \underset{f}{\precsim} L$ e $L \underset{g}{\precsim} K$, então $K \approx L$.*

Demonstração. Como as funções f e g são injetivas, se f ou g fosse também sobrejetiva, já teríamos uma bijeção entre os conjuntos K e L e não teríamos o que demonstrar. Suponhamos, então, que as funções f e g não são sobrejetivas e seja $K_0 = K \setminus \mathrm{Img}(g)$. Vamos definir recursivamente os seguintes conjuntos. Observe a Figura 13.

$$f(K_m) = L_m$$
$$g(L_m) = K_{m+1}$$

Consideremos a função H, definida da seguinte forma.

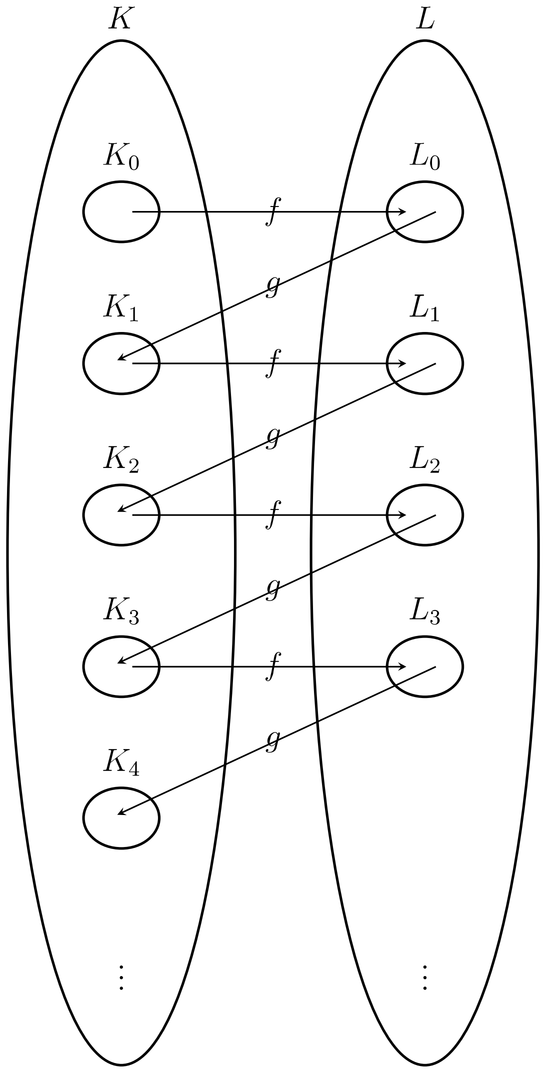
$$H : K \to L$$
$$H(k) = \begin{cases} f(k), \text{ se } k \in \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} K_m; \\ g^{-1}(k), \text{ se } k \notin \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} K_m. \end{cases}$$

Note que, se $k \in K$ é tal que $k \notin \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} K_m$, temos que $k \notin K_0$ e, dessa forma, $k \in \mathrm{Img}(g)$. Note também que a função g^{-1} está bem definida, pois, a função g, injetiva, é bijetiva sobre a sua imagem. Afirmamos que a função H é uma bijeção. De fato, a função H é injetiva, pois, sejam $k, k' \in K$, tal que $k \neq k'$. Temos que ou k, k' pertencem ao conjunto $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} K_m$ ou k, k' pertencem ao conjunto $K \setminus (\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} K_m)$ ou, sem perda de generalidade, k pertence ao conjunto $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} K_m$ e k' pertence ao conjunto $K \setminus (\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} K_m)$.

Se $k, k' \in \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} K_m$, então temos que $H(k) = f(k) \neq f(k') = H(k')$, pois a função f é injetiva.

Se $k, k' \in K \setminus (\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} K_m)$, então $k, k' \in \mathrm{Img}(g)$. Assim, $H(k) = g^{-1}(k) \neq g^{-1}(k') = H(k')$, pois a função g^{-1} é injetiva.

Figura 13 - Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Se $k \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$ e $k' \in K \setminus (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m)$, então existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $k \in K_r$ e, dessa forma, temos que $H(k) = f(k) \in f(K_r) = L_r$, por definição. Como $k' \in K \setminus (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m)$ temos, por definição, que $H(k') = g^{-1}(k')$. Afirmamos que $H(k') = g^{-1}(k') \notin \bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m$. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista $t \in \mathbb{N}$, tal que $H(k') = g^{-1}(k') \in L_t$. Como, por definição, temos que $g(L_t) = K_{t+1}$, teríamos que $g \circ g^{-1}(k') \in g(L_t) = K_{t+1}$. No entanto, $g \circ g^{-1}(k') = k'$, de modo que $k' \in g(L_t) = K_{t+1}$, o que é um absurdo, pois $k' \in K \setminus (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m)$. Dessa forma, temos que $H(k') = g^{-1}(k') \notin \bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m$. Assim, temos que $H(k) \neq H(k')$ e a função H é injetiva.

A função H também é sobrejetiva. De fato, dado $l \in L$, temos que ou $l \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m$ ou $l \in L \setminus (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m)$.

Se $l \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m$, então existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $l \in L_r$. Como, por definição, $L_r = f(K_r)$, temos que existe $k \in K_r$, tal que $f(k) = l$, de modo que $H(k) = f(k) = l$.

Se $l \in L \setminus (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m)$, afirmamos que $g(l) \notin \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$. De fato, $g(l) \notin K_0$, pois $K_0 = K \setminus \mathrm{Img}(g)$.

Suponhamos, por absurdo, que existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $r \neq 0$ e $g(l) \in K_r$. Dessa forma, como $r \neq 0$, temos que $r - 1 \in \mathbb{N}$. Por definição, $g(L_{r-1}) = K_r$ e, como a função g é injetiva, temos que $l \in L_{r-1}$, o que é um absurdo, pois $l \notin (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m)$. Dessa forma, como $g(l) \notin (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m)$ temos, pela definição da função H, que $H(g(l)) = g^{-1} \circ g(l) = l$, e a função H é sobrejetiva.

Logo, a função $H : K \to L$ é uma bijeção e, portanto, $K \underset{H}{\approx} L$, como queríamos demonstrar.

□

Para consultar outra demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder, ver (LEDESMA; MAGALHAES, 2020). Podemos obter muitos resultados interessantes a partir das propriedades demonstradas até aqui, em especial do Teorema 4.14. O primeiro resultado será mostrar que $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$ e, para isso, temos a proposição a seguir.

Proposição 4.20. *Sejam $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais, respectivamente. Então, $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Para demonstrarmos o resultado, mostraremos que $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{N}$, o que, pelo Teorema 4.14, implica $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, temos que $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}$. Para mostrarmos que $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{N}$, seja a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ definida abaixo, para $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tal que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$.

$$f(\frac{p}{q}) = \begin{cases} f(0) = 0; \\ f(\frac{p}{q}) = 2^p \cdot 3^q, \text{ se } p > 0; \\ f(\frac{p}{q}) = 5^{-p} \cdot 3^q, \text{ se } p < 0. \end{cases}$$

Afirmamos que a função f é injetiva. De fato, sejam $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$, tal que $p, p' \in \mathbb{Z}$, $q, q' \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\text{mdc}(p,q) = \text{mdc}(p',q') = 1$ e $f(\frac{p}{q}) = f(\frac{p'}{q'})$. Note que os números $n, m \in \mathbb{N}$ escritos por $n = 2^p \cdot 3^q$ e $m = 5^{-p} \cdot 3^q$ são distintos para todos $p, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e que, para que tenhamos $f(\frac{p}{q}) = f(\frac{p'}{q'})$, $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ devem ter o mesmo sinal. Dessa forma, para que tenhamos $f(\frac{p}{q}) = f(\frac{p'}{q'})$, ou $f(\frac{p}{q}) = 2^p \cdot 3^q = 2^{p'} \cdot 3^{q'} = f(\frac{p'}{q'})$, o que implica $2^{p-p'} \cdot 3^{q-q'} = 1$, de modo que $p = p'$, $q = q'$ e, dessa forma, $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, ou $f(\frac{p}{q}) = 5^{-p} \cdot 3^q = 5^{-p'} \cdot 3^{q'} = f(\frac{p'}{q'})$, o que implica $5^{-p+p'} \cdot 3^{q-q'} = 1$, de modo que $p = p'$ e $q = q'$, isto é, $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ ou $f(\frac{p}{q}) = 0 = f(\frac{p'}{q'})$, o que implica $\frac{p}{q} = 0 = \frac{p'}{q'}$. Assim, a função f é injetiva, de modo que $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{N}$. Logo, pelo Teorema 4.14, temos que $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$, o que implica $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Proposição 4.21. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$, tal que $a \neq b$. Então, o intervalo $((a,b) \cap \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ possui cardinalidade igual a $\aleph_0$.*

Demonstração. De fato, como temos $((a,b) \cap \mathbb{Q}) \precsim \mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$, vamos mostrar que $\mathbb{N} \precsim ((a,b) \cap \mathbb{Q})$, o que, pelo Teorema 4.14, podemos concluir que $((a,b) \cap \mathbb{Q}) \approx \mathbb{N}$. Para mostrarmos que $\mathbb{N} \precsim ((a,b) \cap \mathbb{Q})$, consideremos a função f abaixo

$$f : \mathbb{N} \to ((a,b) \cap \mathbb{Q})$$

$$f(n) = \begin{cases} a + \dfrac{1}{(b-a)^{n+1}}, \text{ se } b - a > 1; \\ a + \dfrac{1}{2^{n+1}}, \text{ se } b - a = 1; \\ a + (b-a)^{n+1}, \text{ se } b - a < 1. \end{cases}$$

Note que, como $b > a$, temos que $b - a > 0$ e $\frac{1}{b-a} > 0$. A função f está bem definida, pois,

- Se $b - a > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{b-a} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{(b-a)^{n+2}} < 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 < \frac{1}{(b-a)^{n+1}} < b - a \Rightarrow a < a + \frac{1}{(b-a)^{n+1}} < b$, isto é, $a < f(n) < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

- Se $b - a < 1 \Rightarrow 0 < b - a < 1 \Rightarrow 0 < (b-a)^{n+1} < b - a \Rightarrow$ $\Rightarrow a < a + (b-a)^{n+1} < b$, isto é, $a < f(n) < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

- Se $b - a = 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{2^{n+1}} < 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{2^{n+1}} < b - a \Rightarrow$ $\Rightarrow a < a + \dfrac{1}{2^{n+1}} < b$, isto é, $a < f(n) < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que a função f é injetiva. De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $f(m) = f(n)$.

- Se $b - a > 1$, então $f(m) = a + \dfrac{1}{(b-a)^{m+1}} = f(n) =$ $= a + \dfrac{1}{(b-a)^{n+1}}$, o que implica $m = n$ e a função f é injetiva;

- Se $b - a = 1$, então $f(m) = a + \dfrac{1}{2^{m+1}} = a + \dfrac{1}{2^{n+1}} = f(n)$, o que implica $m = n$ e a função f é injetiva;

- Se $b - a < 1$, então $f(m) = a + (b-a)^{m+1} = a + (b-a)^{n+1} = f(n)$, o que implica $m = n$ e a função f é injetiva.

Dessa forma, temos que $((a,b) \cap \mathbb{Q}) \precsim \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \precsim ((a,b) \cap \mathbb{Q})$, o que, pelo Teorema 4.14, implica $((a,b) \cap \mathbb{Q}) \approx \mathbb{N}$, de modo que $|((a,b) \cap \mathbb{Q})| = \aleph_0$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Outro resultado importante é que a cardinalidade do intervalo fechado $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ é igual a $\aleph_1$. De fato, note que $(0,1) \subseteq [0,1]$ e $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, o que implica $|(0,1)| \leq |[0,1]| \leq |\mathbb{R}|$. Assim, temos que $\aleph_1 \leq |[0,1]| \leq \aleph_1$, o que, pelo Teorema 4.14, implica que $|[0,1]| = \aleph_1$. Esse resultado é equivalente a dizer que $[0,1] \approx \mathbb{R}$, isto é, existe uma função bijetiva entre os conjuntos $[0,1]$ e $\mathbb{R}$. Um exemplo de uma bijeção entre esses conjuntos pode ser visto em (LEDESMA; MAGALHAES, 2020). Note que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a \neq b$, como $(a,b) \approx \mathbb{R}$, o mesmo argumento utilizado acima vale para os intervalos $(a,b], [a,b], [a,b)$, pois, por exemplo, $(a,b) \subseteq (a,b] \subseteq \mathbb{R}$, e isso implica, pelo Teorema 4.14, que $(a,b] \approx \mathbb{R}$.

Proposição 4.22. *Seja o número cardinal $\aleph_1$. Então, $\aleph_1 \oplus \aleph_1 = \aleph_1$.*

Demonstração. De fato, a função $f : (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \tan(x)$ é uma bijeção. Assim, a mesma função f pode ser reescrita por $f : (\frac{-\pi}{2}, 0] \cup (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \tan(x)$. Dessa forma, temos que $|(\frac{-\pi}{2}, 0]| \oplus |(0, \frac{\pi}{2})| = |\mathbb{R}|$, isto é, $\aleph_1 \oplus \aleph_1 = \aleph_1$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Outra consequência muito interessante do Teorema 4.14 é que a cardinalidade do conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é igual a cardinalidade do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, isto é, $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$, o que veremos na proposição a seguir.

Proposição 4.23. *Sejam os números cardinais* $\aleph_0$ *e* $\aleph_1$*. Então,* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Demonstração. Para demonstrarmos esse fato, vamos mostrar que $\mathbb{R} \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$, o que, pelo Teorema 4.14, implica $\mathbb{R} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Vamos mostrar que $\mathbb{R} \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e, para isso, vamos mostrar que $(0,1) \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, o que implica $\mathbb{R} \approx (0,1) \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Seja $x \in (0,1) \subseteq \mathbb{R}$, temos que x possui uma representação na base 2. Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 4.6. Exemplos de números reais escritos na base 2.

(I) Se $x = 0,625$, então $x = (0,101)_2 = (0,1010000\ldots)_2$.

(II) Se $x = 0,8$, então $x = (0,110011001100\ldots)_2$.

(III) Se $x = 0,3$, então $x = (0,010011001100\ldots)_2$.

(IV) Se $x = 0,5$, então $x = (0,1)_2 = (0,10000\ldots)_2$. No entanto, $x = (0,011111\ldots)_2$ e, dessa forma, x possui duas representações na base 2: uma finita, $x = (0,1)_2$, e outra infinita, $x = (0,011111\ldots)_2$.

Note que, se $x \in (0,1)$, então $x = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^{i-1}$, sendo $a_i \in \{0,1\}$, isto é, $x = (0, a_0a_1a_2a_3a_4\ldots)_2$, em que $a_i \in \{0,1\}$. Consideremos a função f definida abaixo, para $x \in (0,1)$ escrito na sua representação binária infinita

$$\begin{array}{rcl} f: \ (0,1) & \to & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ x & \mapsto & f(x) = f(\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^{i-1}) = h, \text{ em que } h(n) = a_n \end{array}$$

Note que, ao considerarmos apenas a representação binária infinita, nós evitamos a dupla representação em base 2 e, dessa forma, nossa função, f, está bem definida. Afirmamos que a função f é injetiva. De fato, sejam $x = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^{i-1}$ e $y = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot 2^{i-1}$ pertencentes ao intervalo $(0,1)$, tal que $x \neq y$. Dessa forma, $a_s \neq b_s$ para algum $s \in \mathbb{N}$. Assim, $f(x)(s) = a_s \neq b_s = f(y)(s)$, e a função f é injetiva, de modo que $(0,1) \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Assim, temos que $\mathbb{R} \approx (0,1) \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, o que implica $\mathbb{R} \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Vamos mostrar agora que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$ e, para isso, consideremos a função g definida abaixo

$$\begin{array}{rcl} g: \ \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ H & \mapsto & g(H) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} H(n) \cdot 10^{n-1} \end{array}$$

A função g está bem definida, pois, para toda função $H \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot 10^{n-1} \leq g(H) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot 10^{n-1}$ e, segue do critério de comparação de séries, que $g(H)$ é convergente, isto é, $g(H) \in \mathbb{R}$. Afirmamos que a função g é injetiva e, para mostrarmos esse fato, sejam $H, G \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, tal que $g(H) = g(G)$. Dessa forma, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} H(n) \cdot 10^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) \cdot 10^{n-1}$, com $H(n), G(n) \in \{0,1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, para que um número $x \in \mathbb{R}$ tenha mais de uma representação decimal (finita e infinita), ele deverá ter uma sequência do tipo $999\ldots$ na sua parte decimal, a partir de algum ponto. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 4.7. Exemplos de números reais que possuem mais de uma representação decimal.

(I) Se $x = 0,00999999\ldots$, então $x = 0,01$.

(II) Se $x = 0,0999999\ldots$, então $x = 0,1$.

(III) Se $x = 0,99999\ldots$, então $x = 1,0$.

Assim, para que $g(H) = \sum_{n=0}^{\infty} H(n) \cdot 10^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) = g(G)$, teremos que ter $H(n) = G(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $H(n), G(n) \in \{0,1\}$ sendo, dessa forma, a função g injetiva, de modo que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R} \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$, temos, pelo Teorema 4.14, que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$, o que implica $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, como queríamos demonstrar.

□

Já vimos que $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, isto é, a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ é igual a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mas e se considerarmos todo o plano real $\mathbb{R}^2$? Veremos na proposição a seguir que todo o plano real $\mathbb{R}^2$ possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Proposição 4.24. *Seja o número cardinal $\aleph_1$. Então, $\aleph_1 \odot \aleph_1 = \aleph_1$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.23, temos que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Dessa forma, $\aleph_1 \odot \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \odot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \oplus \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, isto é, $\aleph_1 \odot \aleph_1 = \aleph_1$, de modo que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 4.25. *As seguintes afirmações são verdadeiras para quaisquer números cardinais κ, λ e μ.*

1. *Se $\kappa \leq \lambda < \mu$, então $\kappa < \mu$;*

2. *Se $\kappa < \lambda \leq \mu$, então $\kappa < \mu$.*

Demonstração. Consideremos os conjuntos K, L e M tais que $|K| = \kappa$, $|L| = \lambda$ e $|M| = \mu$.

1. Como $\kappa \leq \lambda < \mu$, temos que $K \underset{f}{\precsim} L$, $L \underset{g}{\precsim} M$ e $L \not\approx M$.

   De forma análoga à demonstração feita na Proposição 4.19, item (2), podemos mostrar que $K \precsim M$.

   Vamos mostrar que $K \not\approx M$. Suponhamos por absurdo que $K \underset{\varphi}{\approx} M$. Dessa forma, temos que $\varphi^{-1} : M \to K$ é uma bijeção. Consideremos, então, a função $\psi = f \circ \varphi^{-1} : M \to L$. A função ψ é injetiva, pois, é composição das funções f e φ^{-1}, que são injetivas, de modo que $M \underset{\psi}{\precsim} L$.

   Assim, temos que $M \underset{\psi}{\precsim} L$ e $L \underset{g}{\precsim} M$, o que implica, pelo Teorema 4.14, que $L \approx M$. Absurdo, pois $L \not\approx M$. Assim, $K \precsim M$ e $K \not\approx M$, isto é, $\kappa < \mu$, como queríamos demonstrar.

2. Como $\kappa < \lambda$ e $\lambda \leq \mu$, temos que $K \underset{f}{\precsim} L$, $K \not\approx L$ e $L \underset{g}{\precsim} M$.

   Vamos mostrar que $K \precsim M$ e $K \not\approx M$. De forma análoga à demonstração feita na Proposição 4.19, item (2), podemos mostrar que $K \precsim M$. Pelos mesmos argumentos dados na demonstração do item (1) acima, temos que $K \not\approx M$. Logo, temos que $\kappa < \mu$, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 4.15. *Sejam κ, λ e μ números cardinais. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $\kappa \leq \lambda$, então $\kappa \oplus \mu \leq \lambda \oplus \mu$;*

2. *Se $\kappa \leq \lambda$, então $\kappa \odot \mu \leq \lambda \odot \mu$;*

3. *Se $\kappa \leq \lambda$, então $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$;*

4. *Se $\kappa \leq \lambda$, então $\mu^\kappa \leq \mu^\lambda$ para κ e μ não simultaneamente nulos.*

Demonstração. Consideremos os conjuntos K, L e M, tal que $|K| = \kappa$, $|L| = \lambda$ e $|M| = \mu$.

1. Consideremos o conjunto M, tal que $K \cap M = \emptyset$ e $L \cap M = \emptyset$. Como $\kappa \leq \lambda$ temos, por definição, que $K \underset{f}{\precsim} L$. Consideremos a função g definida abaixo.

$$g : K \cup M \to L \cup M$$
$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in K; \\ x, & \text{se } x \in M. \end{cases}$$

Afirmamos que a função g é injetiva. Para mostrarmos esse fato, sejam $x, y \in K \cup M$, tal que $x \neq y$. Dessa forma, como $K \cap M = \emptyset$, temos que ou $x, y \in K$ ou $x, y \in M$ ou, sem perda de generalidade, $x \in K$ e $y \in M$. Se $x, y \in K$, então $g(x) = f(x)$ e $g(y) = f(y)$ e, como a função f é injetiva, temos que $g(x) = f(x) \neq f(y) = g(y)$. Se $x, y \in M$, então $g(x) = x \neq y = g(y)$. Por fim, se $x \in K$ e $y \in M$, então $g(x) = f(x) \in L$ e $g(y) = y \in M$ e, como $L \cap M = \emptyset$, temos $g(x) \neq g(y)$. Dessa forma, temos que a função g é injetiva, de modo que $K \cup M \underset{g}{\precsim} L \cup M$, o que implica $\kappa \oplus \mu \leq \lambda \oplus \mu$, como queríamos demonstrar.

2. Se $\kappa = 0$, então, pelo Teorema 4.7, $\kappa \odot \mu = 0$, de modo que, pela Proposição 4.14, $\kappa \odot \mu = 0 \leq \lambda \odot \mu$ para todos números cardinais λ e μ. Suponhamos, então, $\kappa \neq 0$. Dessa forma, temos que $K \neq \emptyset$. Se $\mu = 0$, então temos que $\kappa \odot \mu = 0$ e $\lambda \odot \mu = 0$, o que implica, pela Proposição 4.19, que $\kappa \odot \mu = 0 \leq 0 = \lambda \odot \mu$. Suponhamos, então, $\mu \neq 0$. Dessa forma, temos que $M \neq \emptyset$.

   Como $\kappa \leq \lambda$ temos, por definição, que $K \underset{f}{\precsim} L$ e, como $K \neq \emptyset$, temos que $L \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $K \times M \precsim L \times M$ e, para isso, consideremos a função g definida abaixo

$$
\begin{gathered}
g : K \times M \to L \times M \\
g(k, m) = (f(k), m)
\end{gathered}
$$

   Afirmamos que a função g é injetiva. De fato, sejam (k, m) e $(k', m') \in K \times M$, tal que $g(k, m) = g(k', m')$. Dessa forma, temos que $(f(k), m) = (f(k'), m')$, o que implica $f(k) = f(k')$ e $m = m'$. Como a função f é injetiva, temos que $k = k'$. Assim, $(k, m) = (k', m')$ e a função g é injetiva. Dessa forma, temos que $K \times M \underset{g}{\precsim} L \times M$, o que implica $\kappa \odot \mu \leq \lambda \odot \mu$, como queríamos demonstrar.

3. Por definição, temos que $K \underset{f}{\precsim} L$. Queremos exibir uma função injetiva de K^M em L^M. Consideremos, então, a função G definida abaixo.

$$
\begin{array}{rccl}
G: & K^M & \to & L^M \\
 & i & \mapsto & G(i) = f \circ i
\end{array}
$$

   Para todo $i \in K^M$, temos que $G(i) \in L^M$. Afirmamos que a função G é injetiva. De fato, sejam $i, j \in K^M$, tal que $i \neq j$. Dessa forma, existe um elemento $m \in M$, tal que $i(m) \neq j(m)$. Assim, $G(i)(m) = f(i(m)) \neq f(j(m)) = G(j)(m)$, pois a função f é injetiva. Isso significa que $G(i) \neq G(j)$ e G é injetiva. Dessa forma, temos, por definição, que $K^M \underset{G}{\precsim} L^M$, o que implica $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$, como queríamos demonstrar.

4. Se $\kappa = 0$ e $\mu \neq 0$ então, pela Proposição 4.12, temos que $1 \leq \mu^\lambda$ para todo número cardinal λ. Assim, $\mu^\kappa = \mu^0 = 1 \leq \mu^\lambda$, de modo que $\mu^\kappa \leq \mu^\lambda$.

   Se $\mu = 0$ e $\kappa \neq 0$ então, pela Proposição 4.14 e pelo item anterior, temos que $\mu^\kappa = 0^\kappa = 0 \leq 0^\lambda = \mu^\lambda$, o que implica $\mu^\kappa \leq \mu^\lambda$.

   Suponhamos que $\kappa \neq 0$ e $\mu \neq 0$, isto é, $K \neq \emptyset$ e $M \neq \emptyset$. Como $\kappa \leq \lambda$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $K \subseteq L$, e fixemos $m \in M$. Vamos mostrar que $M^K \precsim M^L$ e, para isso, consideremos a função H definida abaixo.

$$H : M^K \to M^L$$
$$H(f(x)) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in K; \\ m, & \text{se } x \in L \setminus K. \end{cases}$$

   Afirmamos que a função H é injetiva. De fato, sejam $f, g \in M^K$, tal que $f(k) = g(k)$ para todo $k \in K$. Dessa forma, temos, por definição, que $H(f(k)) = f(k) = g(k) = = H(g(k))$ para todo $k \in K$ e $H(f(x)) = H(g(x)) = m$, se $x \in L \setminus K$. Assim, a função H é injetiva, de modo que $M^K \underset{H}{\precsim} M^L$. Dessa forma, temos que $\mu^\kappa \leq \mu^\lambda$, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 4.26. *Sejam os números cardinais transfinitos* $\aleph_0$ *e* $\aleph_1$*. Então, temos as seguintes identidades.*

1. $\aleph_0 \oplus \aleph_1 = \aleph_1$;
2. $\aleph_0 \odot \aleph_1 = \aleph_1$;
3. $(\aleph_0)^n = \aleph_0$ *para todo número cardinal finito* $n \neq 0$;
4. $m^{\aleph_0} = \aleph_1$ *para todo número cardinal finito* $m \geq 2$;
5. $(\aleph_0)^{\aleph_0} = \aleph_1$;
6. $(\aleph_1)^n = \aleph_1$ *para todo número cardinal finito* $n \geq 1$;
7. $(\aleph_1)^{\aleph_0} = \aleph_1$;

Demonstração. De fato,

1. Como $0 \leq \aleph_0$ e $\aleph_0 \leq \aleph_1$ temos, pela Proposição 4.15 e pela Proposição 4.4, que $\aleph_1 = 0 \oplus \aleph_1 \leq \aleph_0 \oplus \aleph_1$ e $\aleph_0 \oplus \aleph_1 \leq \aleph_1 \oplus \aleph_1$. Pela Proposição 4.22, $\aleph_1 \oplus \aleph_1 = \aleph_1$, logo
$$\aleph_1 = 0 \oplus \aleph_1 \leq \aleph_0 \oplus \aleph_1 \leq \aleph_1 \oplus \aleph_1 = \aleph_1,$$
   o que implica, pelo Teorema 4.14, que $\aleph_0 \oplus \aleph_1 = \aleph_1$, como queríamos demonstrar.

2. Como $1 \leq \aleph_0$ e $\aleph_0 \leq \aleph_1$ temos, pelo Teorema 4.15 e pelo Corolário 4.8, que $\aleph_1 = 1 \odot \aleph_1 \leq \aleph_0 \odot \aleph_1$ e $\aleph_0 \odot \aleph_1 \leq \aleph_1 \odot \aleph_1$. Pela Proposição 4.24, $\aleph_1 \odot \aleph_1 = \aleph_1$, de modo que
$$\aleph_1 \leq \aleph_0 \odot \aleph_1 \leq \aleph_1 \odot \aleph_1 = \aleph_1,$$
o que, pelo Teorema 4.14, implica $\aleph_0 \odot \aleph_1 = \aleph_1$, como queríamos demonstrar.

3. De fato, pela Proposição 4.10, temos que $\mathbb{N}^{I_n} \approx \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 1$. Isso implica que $|\mathbb{N}^{I_n}| = \left|\prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}\right|$, isto é, $(\aleph_0)^n = \left|\prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}\right|$. Como consequência da Proposição 4.2, temos que $\left|\prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}\right| = \aleph_0$, de modo que $(\aleph_0)^n = \left|\prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}\right| = \aleph_0$, isto é,
$$(\aleph_0)^n = \aleph_0,$$
como queríamos demonstrar.

4. De fato, como $2 \leq m$ e $m \leq \aleph_0$, temos, pela Proposição 4.15, item 3, que $2^{\aleph_0} \leq m^{\aleph_0}$ e $m^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$. Assim,
$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0} \leq m^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1,$$
o que, pelo Teorema 4.14, implica $m^{\aleph_0} = \aleph_1$. Esse resultado é equivalente a dizer que, se $m \in \mathbb{N}$, tal que $m \geq 2$, então $(I_m)^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$, e isso implica que o conjunto cujos elementos são todas as sequências infinitas formadas pelos algarismos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots n-1\}$ possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números reais ou do conjunto $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$.

5. De fato, como $2 \leq \aleph_0$ e $\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0}$, temos, pelo Teorema 4.15, item 3, que $2^{\aleph_0} \leq {\aleph_0}^{\aleph_0}$ e $(\aleph_0)^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$. Assim, pelo Teorema 4.12, item 3, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} \leq {\aleph_0}^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = = 2^{\aleph_0 \odot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Logo, temos que $\aleph_1 \leq {\aleph_0}^{\aleph_0} \leq \aleph_1$, o que, pelo Teorema 4.14, implica ${\aleph_0}^{\aleph_0} = \aleph_1$, como queríamos demonstrar.

6. De fato, temos, pela Proposição 4.23, que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, de modo que $(\aleph_1)^n = (2^{\aleph_0})^n$. Pela Proposição 4.7, temos $n \odot \aleph_0 = \aleph_0$, o que implica $(2^{\aleph_0})^n = 2^{n \odot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Assim,
$$(\aleph_1)^n = (2^{\aleph_0})^n = 2^{n \odot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1,$$
de modo que $(\aleph_1)^n = \aleph_1$, como queríamos demonstrar.

7. Pelas Proposições 4.23, 4.2 e pelo Teorema 4.12, item 3, temos, respectivamente, que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, $\aleph_0 \odot \aleph_0 = \aleph_0$ e $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \odot \aleph_0}$. Dessa forma, temos que
$$(\aleph_1)^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \odot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$
Assim, temos que $(\aleph_1)^{\aleph_0} = \aleph_1$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Proposição 4.27. *Seja* $\mathbb{N}$ *o conjunto dos números naturais. Então,* $\left|\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\right| = \aleph_1$.

Demonstração. Consideremos a função

$$\begin{aligned} H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} &\to \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \\ h &\mapsto H(h) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \{h(n)\} \end{aligned}$$

Afirmamos que a função H é uma bijeção. De fato, H é injetiva e, para demonstrarmos esse fato, sejam as funções $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tal que $H(f) = H(g)$. Dessa forma, temos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} \{f(n)\} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \{g(n)\}$, de modo que $f(m) = g(m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, temos que $f = g$ e a função H é injetiva. A função H é também sobrejetiva. De fato, dado $y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$, temos que $y = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, em que $a_n \in \mathbb{N}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, podemos construir a função

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \varphi(n) = a_n \end{array}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} H(\varphi) &= \prod_{n\in\mathbb{N}} \{\varphi(n)\} &&= (\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n), \ldots) = \\ & &&= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = y \end{aligned}$$

e a função H é sobrejetiva.

Logo, temos que a função H é uma bijeção, e isso implica que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \underset{H}{\approx} \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$, de modo que $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \left|\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\right|$.

Pela Proposição 4.26, item 5, temos que $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = (\aleph_0)^{\aleph_0} = \aleph_1$, de modo que $\left|\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\right| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = (\aleph_0)^{\aleph_0} = \aleph_1$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Em outras palavras, o resultado obtido na Proposição 4.27 é equivalente a dizer que o produto com infinitas e enumeráveis parcelas iguais a $\aleph_0$ é igual a $\aleph_1$, ou seja,

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \aleph_0 = \aleph_0 \odot \aleph_0 \odot \aleph_0 \odot \ldots \aleph_0 \odot \ldots = \aleph_1.$$

Ordenando os números cardinais conhecidos até então, temos, pela Proposição 4.15, que $n < n+1$ para todo número cardinal finito n. Temos também, pela Proposição 4.16, que $n < \aleph_0$ para todo número cardinal finito n. Para números cardinais transfinitos λ, temos, pela Proposição 4.18, que $\lambda < 2^{\lambda}$, e isso implica que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, e mais, que

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = \ldots = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1 < 2^{\aleph_1} = \aleph_2 < 2^{\aleph_2} = \aleph_3 < \ldots.$$

5 AXIOMA DA ESCOLHA E LEMA DE ZORN

5.1 Axioma da Escolha

Curiosamente, de todos os números cardinais transfinitos vistos neste trabalho, o menor, até então, foi $\aleph_0$. Esse fato sugere que $\aleph_0$ possa ser o menor número cardinal transfinito. Para que essa afirmação seja verdadeira, dado um conjunto infinito X, deveríamos conseguir construir uma função f, injetiva, de $\mathbb{N}$ em X, isto é, precisamos definir claramente uma imagem $f(n) \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para construirmos funções como essa, usamos o Axioma da escolha, que veremos a seguir. Os resultados deste capítulo foram inspirados em (ENDERTON, 1977), (FAJARDO, 2017) e (HALMOS, 2017).

Axioma 5.1 (Axioma da Escolha (AE))**.** Para todo conjunto X existe uma função F, chamada função de escolha, tal que o domínio de F é o conjunto de subconjuntos não-vazios de X e $F(Y) \in Y$ para todo $Y \neq \emptyset$, tal que $Y \subseteq X$, isto é,

$$F : P^*(X) \to X$$
$$F(Y) \in Y \text{ para todo } Y \in P^*(X)$$

Em outras palavras, seja um conjunto X, cujos elementos são conjuntos não-vazios. O Axioma da Escolha 5.1 é uma ferramenta poderosa, pois garante que podemos escolher um elemento de cada elemento de X, independentemente da natureza do conjunto X e de seus elementos. A primeira vista, o Axioma da Escolha pode parecer ingênuo ou até desnecessário, já que nos acostumamos a trabalhar com conjuntos numéricos e fórmulas bem definidas, em que a maioria dos resultados são construídos a partir de propriedades já conhecidas dos conjuntos em questão e de seus elementos. No entanto, o Axioma da Escolha é muito mais forte do que parece, pois, mesmo para um conjunto X, infinito, cujos elementos são, também, infinitos, é possível escolher, sem ambiguidade, um elemento de cada elemento de X.

5.2 Lema de Zorn

O Axioma da Escolha 5.1 possui algumas equivalências e uma das mais utilizadas na Teoria dos Conjuntos é o Lema de Zorn, Axioma 5.2. Para melhor compreensão do Lema de Zorn, precisaremos definir alguns objetos matemáticos, assim como obter alguns resultados sobre eles.

Definição 5.1 (Relação de ordem ou Ordem parcial)**.** *Seja um conjunto X. Uma relação $R \subseteq X \times X$ é chamada de relação de ordem em X, ou ordem parcial em X, se R satisfaz algumas condições para todos $A, B, C \in X$.*

- *(P1: Propriedade reflexiva): tem-se que $(A, A) \in R$ para todo $A \in X$;*

- *(P2: Propriedade transitiva): se $(A, B) \in R$ e $(B, C) \in R$, então $(A, C) \in R$;*

- *(P3: Propriedade antissimétrica): se $(A, B) \in R$ e $(B, A) \in R$, então $A = B$.*

Dizemos que os elementos $A, B \in X$ são comparáveis quando $(A, B) \in R$.

Exceto em casos específicos, usaremos o já conhecido símbolo $\leq$ para representar uma relação de ordem parcial, ou simplesmente ordem, em um conjunto X, de modo que podemos escrever

- (P1) $A \leq A$ para todo $A \in X$;

- (P2) Se $A \leq B$ e $B \leq C$, então $A \leq C$ para todos $A, B, C \in X$;

- (P3) Se $A \leq B$ e $B \leq A$, então $A = B$ para todos $A, B \in X$.

Definição 5.2 (Conjunto parcialmente ordenado)**.** *Definimos como conjunto parcialmente ordenado, ou simplesmente conjunto ordenado, o par (X, R), em que R é uma relação de ordem em X e X é o domínio da relação R. Nesse caso, dizemos que R é uma relação de ordem parcial no conjunto X.*

Note que a relação de inclusão é uma relação de ordem parcial. De fato, seja X um conjunto cujos elementos são conjuntos e sejam $A, B, C \in X$. Como todo conjunto está contido em si, isto é, $A \subseteq A$, temos que $\subseteq$ é reflexiva. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$, ou seja, $\subseteq$ é transitiva. Por fim, temos que, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$ e a relação de inclusão é antissimétrica. Dessa forma, o conjunto $(X, \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Temos a seguir algumas definições em um conjunto parcialmente ordenado.

Definição 5.3. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, $A \in X$, $\mathcal{M} \in X$ e $S \subseteq X$.*

- *(Elemento limitante superior) A é chamado de limitante superior do conjunto S se para todo $B \in S$, tem-se que $B \leq A$;*

- *(Conjunto limitado superiormente) Dizemos que um conjunto S é limitado superiormente se S possui limitante superior;*

- *(Elemento máximo) A é chamado de elemento máximo de S se $A \in S$ e $B \leq A$ para todo $B \in S$;*

- *(Elemento maximal) $\mathcal{M}$ é chamado de elemento maximal de X se não existe $A \in X$, tal que $\mathcal{M} \neq A$ e $\mathcal{M} \leq A$. Em outras palavras, $\mathcal{M}$ é elemento maximal de X se $\mathcal{M} \leq A$ implica $A = \mathcal{M}$.*

De forma análoga podemos definir elemento limitante inferior, conjunto limitado inferiormente, elemento mínimo e elemento minimal. Note que, por definição, se A for elemento máximo (ou maximal) de S, então A é um limitante superior de S.

Seja $X = \{0,1\}$, temos que $A = \{0\}$ e $B = \{1\}$ são elementos de $P(X)$, tal que $A \nsubseteq B$ e $B \nsubseteq A$ e, dessa forma, A e B não são comparáveis, considerando a relação de inclusão. Esse fato nos motiva para a próxima definição.

Definição 5.4 (Conjunto totalmente ordenado)**.** *Um conjunto $(X, \leq)$ é dito totalmente ordenado se for parcialmente ordenado e para todos $A, B \in X$, tem-se que $A \leq B$ ou $B \leq A$. Nesse caso, dizemos que o conjunto $(X, \leq)$ é totalmente ordenado e que $\leq$ é uma ordem total ou ordem linear em X.*

Em outras palavras, um conjunto $(X, \leq)$ será dito totalmente ordenado quando for parcialmente ordenado e todos os seus elementos forem comparáveis. Dessa forma, podemos dizer que o conjunto $(\mathbb{N}, \leq)$ é totalmente ordenado, sendo $\leq$ a ordem da Definição 1.8, pois, pela Proposição 1.20, dois números naturais são sempre comparáveis.

Definição 5.5 (Conjunto Cadeia)**.** *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{C} \subseteq X$. O conjunto $\mathcal{C}$ é chamado de cadeia se para todos $A, B \in \mathcal{C}$, temos que $A \leq B$ ou $B \leq A$. Em outras paravras, $\mathcal{C}$ é um subconjunto totalmente ordenado de um conjunto parcialmente ordenado.*

Note que, como $\emptyset \subseteq X$, por vacuidade, $\emptyset$ é uma cadeia contida em X, pela Definição 5.5. Dado um conjunto X e uma relação de ordem R em X, utilizamos o diagrama de Hasse para representar a relação entre os elementos de X, de forma que, se $A, B \in X$ e $(A, B) \in R$, representamos essa relação conectando esses elementos por uma seta que sai de A e chega em B. Como consequência, uma cadeia $\mathcal{C} \subseteq X$ é um conjunto tal que todos os seus elementos se conectam por setas e geram um caminho no diagrama de Hasse. Veja os exemplos abaixo.

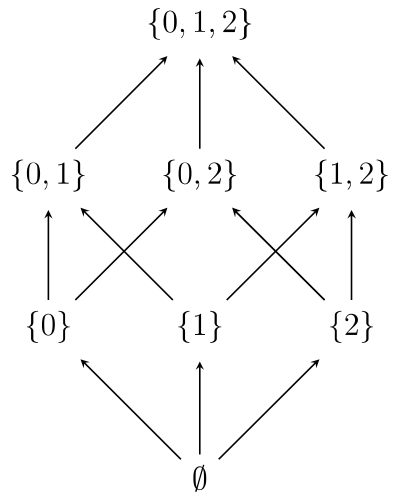
Exemplo 5.1. Exemplos de diagramas de Hasse.

(I) Seja o conjunto $X = \{0,1,2\}$. Consideremos o conjunto $(P(X), \subseteq)$. Note que, se $A \subseteq B$, então $(A, B) \in \subseteq$ e, dessa forma, podemos representar essa relação conectando os elementos A e B no diagrama de Hasse. Veja a Figura 14.

Seja $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \{0\}\}$. Note que todos os elementos de $\mathcal{C}_1$ são comparáveis e, assim, $\mathcal{C}_1$ é uma cadeia em $P(X)$. Note também que o elemento máximo de $\mathcal{C}_1$ é $\{0\}$, que os elementos $\{0,1\}$, $\{0,2\}$ e $\{0,1,2\}$ são limitantes superiores de $\mathcal{C}_1$ e $\{0,1,2\}$ é o elemento maximal de $P(X)$.

(II) Consideremos o conjunto $(N, |)$, em que $N = \{1,2,3,4,5,6,8,12\}$ e $|$ é a relação de ordem "divide". Dessa forma, temos que $(N, |)$ é um conjunto parcialmente

Figura 14 - Diagrama de Hasse para o conjunto $(P(X), \subseteq)$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

ordenado, pois, como $2 \nmid 5$, nem todos os seus elementos são comparáveis. Veja a Figura 15, com o diagrama de Hasse que representa a relação entre os elementos de N.

Note que o conjunto $\mathcal{C}_1 = \{1, 2, 4\}$ é uma cadeia em N, em que o elemento máximo é 4, os limitantes superiores são os elementos 8 e 12. Note também que os elementos 5, 8 e 12 são maximais de N.

(III) Vimos na Proposição 1.22 que os conjuntos $I_n, n \in \mathbb{N}$, com a relação de inclusão, formam uma cadeia, isto é, se $I = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, então, $(I, \subseteq)$ é um conjunto totalmente ordenado. Dessa forma, no diagrama de Hasse, todos os elementos de I estão conectados, como mostra a Figura 16.

Proposição 5.1. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, $\mathcal{C}$ uma cadeia contida em X e $S \subseteq \mathcal{C}$. Então, S é uma cadeia contida em X.*

Demonstração. Dado $S \subseteq \mathcal{C}$, temos que $A, B \in \mathcal{C}$ para todos $A, B \in S$ e, assim, $A \leq B$ ou $B \leq A$. Dessa forma, S é uma cadeia em X, como queríamos demonstrar. □

Proposição 5.2. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, $\mathcal{C} \subseteq X$ uma cadeia e $M \in X$ um limitante superior de $\mathcal{C}$. Então, $\mathcal{C} \cup \{M\}$ é uma cadeia contida em X.*

Demonstração. Devemos mostrar que, dados $A, B \in C \cup \{M\}$, tem-se que $A \leq B$ ou $B \leq A$. Se $M \in \mathcal{C}$, então $C \cup \{M\} = \mathcal{C}$ e não há o que demonstrar, pois $\mathcal{C}$ é uma cadeia. Suponhamos que $M \notin \mathcal{C}$ e sejam $A, B \in \mathcal{C} \cup \{M\}$. Se $A = B$, então $A \leq B$ e $B \leq A$, pois $\leq$ é reflexiva. Suponhamos, então, que $A \neq B$. Se $A, B \in \mathcal{C}$, então, como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, temos que $A \leq B$ ou $B \leq A$. Suponhamos, então, sem perda de generalidade, que $A \notin \mathcal{C}$,

Figura 15 - Diagrama de Hasse para o conjunto $(N, |)$.

$$\begin{tikzcd}
8 & 12 & \\
4 \arrow[u] \arrow[ur] & 6 \arrow[u] & \\
2 \arrow[u] \arrow[ur] & 3 \arrow[u] & 5 \\
& 1 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 16 - Diagrama de Hasse para o conjunto $(I_n, \subseteq)$.

$$\begin{tikzcd}
\vdots & & \vdots \\
\{0,1,2,3,4\} \arrow[rr] & & \{0,1,2,3,4,5\} \arrow[ull] \\
\{0,1,2\} \arrow[rr] & & \{0,1,2,3\} \arrow[ull] \\
\{0\} \arrow[rr] & & \{0,1\} \arrow[ull] \\
& \emptyset \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

isto é, $A = M$. Dessa forma, $B \in \mathcal{C}$ e, pela definição de limitante superior, temos que $B \leq M$, isto é, $B \leq A$. Logo, $\mathcal{C} \cup \{M\}$ é uma cadeia em X, como queríamos demonstrar.

$\square$

Dado um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$, podemos substituir a ordem parcial genérica, $\leq$, pela relação de inclusão em um conjunto adequado. Para isso teremos as próximas definições e resultados.

Definição 5.6 (Segmento fraco inicial)**.** *Sejam $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $A \in X$. O conjunto $\overline{s}(A) = \{B \in X \mid B \leq A\}$ é chamado de segmento fraco inicial de A.*

Note que, como a relação de ordem $\leq$ é reflexiva,temos que $A \in \overline{s}(A)$ para todo $A \in X$.

Lema 5.1. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $A, B \in X$. Então, $A \leq B$ se, e somente se, $\overline{s}(A) \subseteq \overline{s}(B)$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $D \in \overline{s}(A)$. Dessa forma, temos que $D \leq A$. Como, por hipótese, $A \leq B$ e a relação de ordem é transitiva, temos que $D \leq B$, isto é, $D \in \overline{s}(B)$, o que implica $\overline{s}(A) \subseteq \overline{s}(B)$.

$(\Leftarrow)$ Como $\overline{s}(A) \subseteq \overline{s}(B)$, temos que $A \in \overline{s}(A) \subseteq \overline{s}(B)$, o que implica $A \in \overline{s}(B)$, de modo que $A \leq B$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Note que, por definição, $\overline{s}(A) \subseteq X$, de forma que $\overline{s}(A) \in P(X)$ e, assim, podemos definir a função $\overline{s} : X \to P(X)$, sendo $\overline{s}(A) = \{B \in X \mid B \leq A\}$ e $\mathfrak{S} = \mathrm{Img}(\overline{s})$. Note que $\mathfrak{S} \subseteq P(X)$.

Lema 5.2. *Seja $\mathcal{C} \subseteq X$ uma cadeia, então $\overline{\mathfrak{S}} = \{\overline{s}(A) \mid A \in \mathcal{C}\}$ é uma cadeia em $\mathfrak{S} \subseteq P(X)$.*

Demonstração. Sejam $\overline{s}(A), \overline{s}(B) \in \overline{\mathfrak{S}}$. Dessa forma, por definição, temos que $A, B \in \mathcal{C}$ e, como $\mathcal{C}$ é uma cadeia contida em X, temos que $A \leq B$ ou $B \leq A$, o que, pelo Lema 5.1, implica $\overline{s}(A) \subseteq \overline{s}(B)$ ou $\overline{s}(B) \subseteq \overline{s}(A)$, de modo que $\overline{\mathfrak{S}}$ é uma cadeia contida em $\mathfrak{S}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Assim, poderemos substituir o conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ pelo conjunto parcialmente ordenado $(\mathfrak{S}, \subseteq)$.

Lema 5.3. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $S \subseteq X$. Então, A é elemento máximo de S se, e somente se, $\overline{s}(A)$ é elemento máximo de $\mathfrak{S}_S = \{\overline{s}(B) \mid B \in S\}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) De fato, como A é elemento máximo de S, temos que $A \in S$ e $D \leq A$ para todo $D \in S$. Dessa forma, temos que $\overline{s}(A) \in \mathfrak{S}_S$ e $\overline{s}(D) \subseteq \overline{s}(A)$ para todo $D \in S$, o que implica $\overline{s}(A)$ ser elemento máximo de $\mathfrak{S}_S$, como queríamos demonstrar.

($\Leftarrow$) Seja $\overline{s}(A)$ o elemento máximo de $\mathfrak{S}_S$. Dessa forma, temos por definição que $\overline{s}(B) \subseteq \overline{s}(A)$ para todo $\overline{s}(B) \in \mathfrak{S}_S$, o que implica, pelo Lema 5.1, que $B \leq A$ para todo $B \in S$, o que implica A ser o elemento máximo de S, como queríamos demonstrar.

□

Note que, de forma análoga ao Lema 5.3, um elemento A é limitante superior de $S \subseteq X$ se, e somente se, $\overline{s}(A)$ é limitante superior de $\mathfrak{S}_S = \{\overline{s}(B) \mid B \in S\}$. Da mesma forma, temos que $\mathcal{M}$ é elemento maximal de X se, e somente se, $\overline{s}(\mathcal{M})$ for elemento maximal de $\mathfrak{S}$, isto é, a função $\overline{s}$ não acrescenta novos elementos limitantes superiores, máximos ou maximais no conjunto $\mathfrak{S} = \text{img}(\overline{s})$, assim, as hipóteses de cadeias em $(X, \leq)$ são equivalentes às hipóteses de cadeias em $(\mathfrak{S}, \subseteq)$.

Enunciaremos agora o Lema de Zorn.

Axioma 5.2 (Lema de Zorn (LZ))**.** Seja $(X, \leq)$ um conjunto não vazio parcialmente ordenado, tal que toda cadeia $\mathcal{C} \subseteq X$ é limitada superiormente, então X tem um elemento maximal.

5.3 Equivalência entre o Axioma da escolha e o Lema de Zorn

Iniciaremos agora a demonstração da equivalência entre o Axioma da escolha e o Lema de Zorn.

Teorema 5.1. *O Axioma 5.1 (Axioma da Escolha) e o Axioma 5.2 (Lema de Zorn) são equivalentes.*

($AE \Rightarrow LZ$) Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto, tal que toda cadeia $\mathcal{C} \subseteq X$ possui limitante superior, e definamos o conjunto $\mathfrak{X}$ como segue abaixo

$$\mathfrak{X} = \{\mathcal{C} \subseteq X \mid \mathcal{C} \text{ é cadeia}\}.$$

Note que, como $\emptyset \subseteq X$ é uma cadeia, $\emptyset \in \mathfrak{X}$, o que implica $\mathfrak{X} \neq \emptyset$. Note também que, como os elementos de $\mathfrak{X}$ são subconjuntos de X, $\mathfrak{X}$ é parcialmente ordenado pela inclusão.

Afirmação 5.1. *Seja $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$, então existe $A \in X$, tal que $\mathfrak{A} \subseteq \overline{s}(A)$.*

Demonstração. De fato, dado $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$, temos que $\mathfrak{A}$ é uma cadeia contida em X. Como, por hipótese, toda cadeia contida em X possui limitante superior, temos que $\mathfrak{A}$ possui limitante superior. Seja $A \in X$ o limitante superior de $\mathfrak{A}$. Dessa forma, para todo $B \in \mathfrak{A}$,

$B \leq A$, e isso implica, pelo Lema 5.1, que $\overline{s}(B) \subseteq \overline{s}(A)$, ou seja, para todo $B \in \mathfrak{A}$, temos que $B \in \overline{s}(B) \subseteq \overline{s}(A)$, de modo que $B \in \overline{s}(A)$. Logo, $\mathfrak{A} \subseteq \overline{s}(A)$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Afirmação 5.2. *Se $\mathfrak{C}$ é uma cadeia contida em $\mathfrak{X} = \{\mathcal{C} \subseteq X \mid \mathcal{C}$ é cadeia$\}$, então $\bigcup\limits_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{C}} \mathfrak{A}$ é uma cadeia contida em X, tal que, para todo $\mathfrak{B} \in \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{C}} \mathfrak{A}$.*

Demonstração. Devemos mostrar que dados $D, E \in \bigcup\limits_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{C}} \mathfrak{A}$, tem-se que $D \leq E$ ou $E \leq D$. De fato, como $D, E \in \bigcup\limits_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{C}} \mathfrak{A}$, temos que existem $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{C}$, tal que $D \in \mathfrak{A}_1$ e $E \in \mathfrak{A}_2$. Como $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{X}$ é uma cadeia, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, e isso implica que $D, E \in \mathfrak{A}_2$. No entanto, $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{X}$, isto é, $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{X}$, ou seja, $\mathfrak{A}_2$ é uma cadeia contida em X, o que implica $D \leq E$ ou $E \leq D$. Logo, $\bigcup\limits_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{C}} \mathfrak{A}$ é uma cadeia contida em X.

O resultado $\mathfrak{B} \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{C}} \mathfrak{A}$ para todo $\mathfrak{B} \in \mathfrak{C}$ vem do fato de $\mathfrak{B}$ ser um dos conjuntos da união e, portanto, seus elementos são elementos da união $\bigcup\limits_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{C}} \mathfrak{A}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Pela Proposição 5.1, cada elemento de $\mathfrak{X}$ está contido em algum elemento de $\mathfrak{S} = \operatorname{img}(\overline{s})$ e, dessa forma, a passagem de $(X, \leq)$ para $(\mathfrak{S}, \subseteq)$ não produzirá novos elementos maximais em $\mathfrak{S}$. Uma das vantagens dessa passagem é que, no conjunto X, a afirmação de que toda cadeia possui um limitante superior é muito genérica, ao passo que, ao considerarmos o conjunto $\mathfrak{S}$, e uma cadeia $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{X}$, poderemos explicitar claramente o limitante superior de $\mathfrak{C}$, pois, pela Afirmação 5.2, $\bigcup\limits_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{C}} \mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$ é tal que, para todo $\mathfrak{B} \in \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{C}} \mathfrak{A}$, isto é, $\bigcup\limits_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{C}} \mathfrak{A}$ é limitante superior da cadeia $\mathfrak{C}$.

Outra vantagem de trabalharmos com o conjunto $\mathfrak{X}$ é a de que todos os seus elementos são cadeias contidas em X e, pela Proposição 5.1, todo subconjunto de uma cadeia é uma cadeia, o que implica que, se $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}$, então, para todo $S \subseteq \mathcal{C}$, temos que $S \in \mathfrak{X}$. Em outras palavras, são elementos de $\mathfrak{X}$ todos os subconjuntos de seus elementos.

Como, por hipótese, toda cadeia $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}$ possui limitante superior, digamos $M \in X$, e pela Proposição 5.2, $\mathcal{C} \cup \{M\}$ é uma cadeia contida em X, isto é, $\mathcal{C} \cup \{M\} \in \mathfrak{X}$, podemos adicionar um elemento de cada vez ao conjunto $\mathcal{C} \in \mathfrak{X}$, que não é máximo em uma cadeia $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{X}$, e essa é a ideia principal da demonstração da primeira parte do Teorema 5.1.

Afirmação 5.3. *Se $\mathfrak{X}$ possui elemento maximal, então X possui elemento maximal.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathfrak{A}$ seja o elemento maximal de $\mathfrak{X}$. Dessa forma temos, por definição, que $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$, isto é, $\mathfrak{A}$ é uma cadeia contida em X e como, por hipótese, toda cadeia em X é limitada superiormente, temos que $\mathfrak{A}$ possui limitante superior. Seja $\mathcal{M} \in X$ o limitante superior de $\mathfrak{A}$, isto é, para todo $A \in \mathfrak{A}$, temos que $A \leq \mathcal{M}$.

Afirmação 5.4. *Se $\mathfrak{A}$ é o elemento maximal de $\mathfrak{X}$ e $\mathcal{M}$ é limitante superior de $\mathfrak{A}$, então $\mathcal{M} \in \mathfrak{A}$.*

Demonstração. De fato, suponhamos por absurdo que $\mathcal{M} \notin \mathfrak{A}$. Dessa forma, temos, pela Proposição 5.2, que $\mathfrak{A} \cup \{\mathcal{M}\}$ é uma cadeia contida em X, o que implica $\mathfrak{A} \cup \{\mathcal{M}\} \in \mathfrak{X}$. Assim, temos que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \cup \{\mathcal{M}\}$, com $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A} \cup \{\mathcal{M}\}$, o que é um absurdo, pois $\mathfrak{A}$ é o elemento maximal de $\mathfrak{X}$. Dessa forma, temos que $\mathcal{M} \in \mathfrak{A}$, como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 5.3. *Mostraremos que $\mathcal{M}$ é elemento maximal de X.*

Demonstração. Devemos mostrar que, se existe $B \in X$, tal que $\mathcal{M} \leq B$, então $\mathcal{M} = B$. De fato, suponhamos que exista $B \in X$, tal que $\mathcal{M} \leq B$ e $\mathcal{M} \neq B$. Temos que $B \notin \mathfrak{A}$, pois, caso contrário, se $B \in \mathfrak{A}$, como $\mathcal{M}$ é limitante superior de $\mathfrak{A}$, teríamos $B \leq \mathcal{M}$, o que implica $M = B$, um absurdo, pois $M \neq B$.

Como $\mathcal{M}$ é um limitante superior de $\mathfrak{A}$, temos que $A \leq \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathfrak{A}$ e, por hipótese, $\mathcal{M} \leq B$, logo, por transitividade, temos que $A \leq B$ para todo $A \in \mathfrak{A}$, isto é, B é um limitante superior de $\mathfrak{A}$. Dessa forma, pela Proposição 5.2, temos que $\mathfrak{A} \cup \{B\}$ é uma cadeia contida em X, tal que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \cup \{B\}$ e $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A} \cup \{B\}$, um absurdo, pois $\mathfrak{A}$ é elemento maximal de $\mathfrak{X}$. Assim, $\mathcal{M}$ é elemento maximal de X, como queríamos demonstrar.

$\square$

Com a construção feita até agora, nosso trabalho se limita a demonstrar que o conjunto $(\mathfrak{X}, \subseteq)$ possui elemento maximal, pois, pela Proposição 5.3, concluiremos que o conjunto $(X, \leq)$ possui elemento maximal.

Para cada $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$, definamos o conjunto $\hat{\mathfrak{A}}$ por

$$\hat{\mathfrak{A}} = \{A \in X \mid \mathfrak{A} \cup \{A\} \in \mathfrak{X}\}.$$

Em outras palavras, $\hat{\mathfrak{A}}$ é o conjunto cujos elementos são os elementos de X, tal que, quando unidos ao conjunto $\mathfrak{A}$, temos como resultado uma cadeia contida em X. Note que, se $B \in \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{A} \cup \{B\} = \mathfrak{A}$ é uma cadeia e, dessa forma, para todo $B \in \mathfrak{A}$, temos que $B \in \hat{\mathfrak{A}}$.

Intuitivamente, a nossa próxima afirmação é a de que, se $\mathfrak{A}$ não possui limitantes superiores não pertencentes a si, então não temos como adicionarmos elemento de forma que tenhamos uma nova cadeia, isto é, $\mathfrak{A}$ tem que ser elemento maximal em $\mathfrak{X}$.

Afirmação 5.5. *Seja* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$ *e* $\hat{\mathfrak{A}} = \{A \in X \mid \mathfrak{A} \cup \{A\} \in \mathfrak{X}\}$*. Então,* $\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A} = \emptyset$ *se, e somente se,* $\mathfrak{A}$ *for elemento maximal em* $\mathfrak{X}$*.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) De fato, suponhamos por absurdo que exista $\mathfrak{M} \in \mathfrak{X}$, tal que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{A}$. Seja $A \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{A}$. Temos que $A \in \mathfrak{M}$, $A \notin \mathfrak{A}$ e, como $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A} \cup \{A\} \subseteq \mathfrak{M}$. Como $\mathfrak{M}$ é uma cadeia contida em $\mathfrak{X}$ temos, pela Proposição 5.1, que $\mathfrak{A} \cup \{A\}$ é uma cadeia contida em $\mathfrak{X}$, o que, pela definição de $\hat{\mathfrak{A}}$, implica que $A \in \hat{\mathfrak{A}}$. Logo, $A \in (\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A})$ e, dessa forma, $\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A} \neq \emptyset$, um absurdo, pois $\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A} = \emptyset$.

($\Leftarrow$) De fato, suponhamos por absurdo que $\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A} \neq \emptyset$ e seja $A \in \hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A}$. Dessa forma, temos que $A \notin \mathfrak{A}$ e, por definição, $\mathfrak{A} \cup \{A\} \in \mathfrak{X}$. Assim, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \cup \{A\}$ e $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A} \cup \{A\}$, isto é, $\mathfrak{A}$ não é maximal em $\mathfrak{X}$, como queríamos demonstrar.

□

Seja F a função de escolha para o conjunto X, isto é, $F : P^*(X) \to X$, tal que $F(S) \in S$ para todo $S \subseteq X$ e consideremos a função g definida abaixo.

$$g : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$$
$$g(\mathfrak{A}) = \begin{cases} \mathfrak{A} \cup \{F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A})\}, & \text{se } \hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A} \neq \emptyset; \\ \mathfrak{A}, & \text{se } \hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A} = \emptyset. \end{cases}$$

Como $\mathfrak{A} \subseteq X$ e $\hat{\mathfrak{A}} \subseteq X$ segue, da definição da função F, que $F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A}) \in \hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A}$. Nossa tarefa agora será mostrar que existe $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$, tal que $g(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ e, para nos auxiliar nessa demonstração, teremos algumas definições, sendo a primeira a noção de torre.

Definição 5.7 (Torre). *Seja* $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{X}$*. Dizemos que* $\mathfrak{T}$ *é uma torre se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\emptyset \in \mathfrak{T}$*;*

(ii) Se $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$*, então* $g(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{T}$*;*

(iii) Se $\mathfrak{C}$ *é uma cadeia contida em* $\mathfrak{T}$*, então* $\displaystyle\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$*.*

Torres de fato existem e nossa próxima proposição mostra que o próprio conjunto $\mathfrak{X}$ é uma torre.

Afirmação 5.6. *O conjunto* $\mathfrak{X}$ *é uma torre.*

Demonstração. Precisamos verificar que $\mathfrak{X}$ satisfaz as propriedades da Definição 5.7. De fato,

(i) O conjunto vazio é uma cadeia contida em X, pois, como $\emptyset$ não possui elementos, temos, para todos $A, B \in \emptyset$, ou $A \leq B$ ou $B \leq A$, por vacuidade, assim, $\emptyset \subseteq X$ é uma cadeia, o que implica $\emptyset \in \mathfrak{X}$;

(ii) Se $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$, isto é, se $\mathfrak{A}$ é uma cadeia contida em X, então ou $g(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ é uma cadeia contida em X ou $g(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cup \{F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A})\}$. No entanto, como $F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A}) \in (\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A})$, em especial $F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A}) \in \hat{\mathfrak{A}}$, segue, da definição de $\hat{\mathfrak{A}}$, que $g(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cup \{F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A})\}$ é uma cadeia contida em X, isto é, $g(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{X}$;

(iii) Se $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{X}$ é uma cadeia, então, pela Proposição 5.2, $\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$.

Dessa forma, mostramos que o conjunto $\mathfrak{X}$ é uma torre.

$\square$

Como temos a existência de pelo menos uma torre, sendo ela o conjunto $\mathfrak{X}$, podemos definir o conjunto $\mathfrak{T}_0$, como segue abaixo.

$$\mathfrak{T}_0 = \bigcap \{\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{X} \mid \mathfrak{T} \text{ é uma torre}\}.$$

Afirmação 5.7. *O conjunto $\mathfrak{T}_0$ é uma torre, tal que, para toda torre $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{X}$, $\mathfrak{T}_0 \subseteq \mathfrak{T}$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\mathfrak{T}_0$ satisfaz as propriedades da Definição 5.7. De fato,

(i) Temos, por definição, que $\emptyset \in \mathfrak{T}$, para toda torre $\mathfrak{T}$, o que implica que $\emptyset \in \bigcap \{\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{X} \mid \mathfrak{T} \text{ é uma torre }\} = \mathfrak{T}_0$;

(ii) Se $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, então $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$ para toda torre $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{X}$. Logo, pela definição de torre, temos que $g(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{T}$ para toda torre $\mathfrak{T}$, o que implica $g(\mathfrak{A}) \in \bigcap \{\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{X} \mid \mathfrak{T} \text{ é uma torre }\} = \mathfrak{T}_0$;

(iii) Seja $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{T}_0$ uma cadeia. Vamos mostrar que $\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$. Seja $\mathfrak{A} \in \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{T}_0$. Dessa forma, temos que $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, o que implica $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$ para toda torre $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{T}_0$. Assim, pela definição de torre, temos que $\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$ para toda torre $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{T}_0$, o que implica $\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, como queríamos demonstrar.

Assim, demonstramos que o conjunto $\mathfrak{T}_0$ é uma torre. A conclusão de que $\mathfrak{T}_0 \subseteq \mathfrak{T}$ para toda torre $\mathfrak{T}$ segue imediatamente da definição de $\mathfrak{T}_0$.

$\square$

Note que conseguimos mostrar que $\mathfrak{T}_0$ é uma torre contida em qualquer torre $\mathfrak{T}$, tal que $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{X}$ e, por isso, podemos dizer que $\mathfrak{T}_0$ é a menor torre contida em $\mathfrak{X}$. Como $\mathfrak{T}_0 \subseteq \mathfrak{X}$, temos que $\mathfrak{T}_0$ é parcialmente ordenado pela relação de inclusão. No entanto, alguns de seus elementos podem ser comparáveis, como, por exemplo, o conjunto $\emptyset$, pois $\emptyset \subseteq \mathfrak{A}$ para todo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$. Concentraremos nossos esforços a partir de agora nos elementos comparáveis de $\mathfrak{T}_0$.

Definição 5.8 (Elemento comparável)**.** *Dizemos que um elemento $\mathfrak{K} \in \mathfrak{T}_0$ é comparável se, para todo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, temos que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$ ou $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{A}$.*

Note que dizer que o conjunto $\mathfrak{T}_0$ é uma cadeia é equivalente a dizer que todos os seus elementos são comparáveis.

Proposição 5.4. *Sejam $\mathfrak{K} \in \mathfrak{T}_0$ um elemento comparável e $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, tais que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$ e $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{K}$. Então, $g(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{K}$.*

Demonstração. De fato, como $\mathfrak{T}_0$ é uma torre e $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, temos, pela definição de torre, que $g(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{T}_0$. Dessa forma, temos que $g(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{K}$ ou $\mathfrak{K} \subseteq g(\mathfrak{A})$. Se $g(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{K}$, nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que $\mathfrak{K} \subseteq g(\mathfrak{A})$. Dessa forma, temos duas possibilidades para analisar, sendo a primeira se $g(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ e a segunda se $g(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cup \{F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A})\}$. Se $g(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{K} \subseteq g(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ e, como por hipótese temos que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$, temos que $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}$, um absurdo, pois $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{K}$. Se $g(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cup \{F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A})\}$, então, como $\mathfrak{K} \subseteq g(\mathfrak{A})$, temos que $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{A} \cup \{F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A})\}$ e, dado que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$ e $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{K}$, implica $F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A}) \in \mathfrak{K}$, pela definição de F, logo, temos que $\{F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A})\} \subseteq \mathfrak{K}$, de modo que $\mathfrak{A} \cup \{F(\hat{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A})\} \subseteq \mathfrak{K}$, isto é, $g(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{K}$, como queríamos demonstrar.

□

Seja $\mathfrak{K} \in \mathfrak{T}_0$ um elemento comparável e definamos o conjunto $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}} \subseteq \mathfrak{T}_0$ como segue abaixo.

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}} = \{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0 \mid \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K} \text{ ou } g(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{A}\}.$$

Note que $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}} \neq \emptyset$ pois, $\emptyset \in \mathfrak{T}_0$ e $\emptyset \subseteq \mathfrak{K}$, de modo que $\emptyset \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$. Nosso objetivo agora será mostrar que o conjunto $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$ é uma torre.

Afirmação 5.8. *Seja $\mathfrak{K} \in \mathfrak{T}_0$ um elemento comparável. Então, o conjunto $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}} = \{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0 \mid \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$ ou $g(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{A}\}$ é uma torre.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$ satisfaz as propriedades da Definição 5.7.

(i) Pela Proposição 5.7, temos que $\mathfrak{T}_0$ é uma torre, o que implica que $\emptyset \in \mathfrak{T}_0$. Como $\emptyset \subseteq \mathfrak{K}$, temos, por definição, que $\emptyset \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$;

(ii) Seja $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$. Vamos mostrar que $g(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$. Como $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$ temos, pela definição de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$, que ou $\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{K}$ ou $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}$ ou $g(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{A}$. Se $\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{K}$, temos que existe $A \in \mathfrak{K} \setminus \mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{K}$ é comparável, temos que ou $g(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{K}$ ou $\mathfrak{K} \subseteq g(\mathfrak{A})$. Se $g(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{K}$, então, pela definição de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$, temos que $g(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$. Suponhamos então que $\mathfrak{K} \subseteq g(\mathfrak{A})$ e temos duas possibilidades: ou $\mathfrak{K} = g(\mathfrak{A})$ ou $\mathfrak{K} \subsetneq g(\mathfrak{A})$. Se $\mathfrak{K} = g(\mathfrak{A})$, então $g(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{K}$, o que implica $g(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$. Vamos mostrar que $\mathfrak{K} \subsetneq g(\mathfrak{A})$ não pode ocorrer. De fato, suponhamos que $\mathfrak{K} \subsetneq g(\mathfrak{A})$ ocorra. Dessa forma, temos que existe $B \in g(\mathfrak{A}) \setminus \mathfrak{K}$, o que implica que o conjunto $g(\mathfrak{A}) \setminus \mathfrak{A}$ possui pelo menos dois elementos distintos, A e B, pois $A \in \mathfrak{K}$ e $B \notin \mathfrak{K}$, o que é um absurdo, pois, por definição, $\mathfrak{A}$ e $g(\mathfrak{A})$ diferem apenas por um elemento. Dessa forma, temos que $g(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{K}$ e, portanto, $g(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$. Se $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}$, então $g(\mathfrak{A}) = g(\mathfrak{K})$, o que implica, $g(\mathfrak{K}) \subseteq g(\mathfrak{A})$, de modo que $g(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$, pela definição de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$. Se $g(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{A}$, como $\mathfrak{A} \subseteq g(\mathfrak{A})$, temos que $g(\mathfrak{K}) \subseteq g(\mathfrak{A})$, o que implica, pela definição de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$, que $g(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$.

(iii) Vamos mostrar que se $\mathfrak{C}$ é uma cadeia contida em $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$, então $\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$. De fato, se $\mathfrak{C}$ é uma cadeia contida em $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$, temos duas possibilidades: ou $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$ para todo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}$ ou $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{K}} = \{\mathfrak{A}' \in \mathfrak{C} \mid \mathfrak{A}' \not\subseteq \mathfrak{K}\} \neq \emptyset$, e isso implica $g(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{A}'$ para todo $\mathfrak{A}' \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{K}}$. Na primeira hipótese, como $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$ para todo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}$, temos que $\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$, o que implica, por definição, que $\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$. Na segunda, como $g(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{A}'$ e $\mathfrak{A}' \subseteq \bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A}$ para todo $\mathfrak{A}' \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{K}}$, temos que $g(\mathfrak{K}) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A}$, de modo que $\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$.

Assim, concluímos que $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$ é uma torre.

□

Vamos mostrar que, se $\mathfrak{K} \in \mathfrak{T}_0$ é comparável, então, para todo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, ou $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K} \subseteq g(\mathfrak{K})$ ou $g(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{A}$, e isso implica que $g(\mathfrak{K})$ é comparável. Dessa forma, a função g relaciona elementos comparáveis em elementos comparáveis. Note também que, por definição, $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$ é uma torre contida em $\mathfrak{T}_0$. No entanto, pela Proposição 5.7, temos que $\mathfrak{T}_0 \subseteq \mathfrak{T}_{\mathfrak{K}}$, o que implica $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{T}_0$.

Corolário 5.1. *Seja $\mathfrak{K} \in \mathfrak{T}_0$ um elemento comparável. Então, $g(\mathfrak{K})$ é um elemento comparável em $\mathfrak{T}_0$.*

Demonstração. De fato, como $\mathfrak{K} \in \mathfrak{T}_0$, temos que $g(\mathfrak{K}) \in \mathfrak{T}_0$, pois, pela Proposição 5.7, $\mathfrak{T}_0$ é uma torre. Como $\mathfrak{K}$ é comparável, temos que $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{T}_0$, de modo que, para todo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, ou $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$ ou $g(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{A}$, isto é, ou $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K} \subseteq g(\mathfrak{K})$ ou $g(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{A}$ para todo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, ou seja, $g(\mathfrak{K}) \in \mathfrak{T}_0$ é comparável, como queríamos demonstrar.

□

Nosso objetivo agora será mostrar que o conjunto $\mathfrak{T}_0$ é uma cadeia contida em $\mathfrak{X}$. Seja $\mathcal{K} = \{\mathfrak{K} \in \mathfrak{T}_0 \mid \mathfrak{K} \text{ é comparável }\}$. Para que $\mathfrak{T}_0$ seja uma cadeia contida em $\mathfrak{X}$, devemos ter $\mathcal{K} = \mathfrak{T}_0$ e, para isso, basta demonstrarmos que o conjunto $\mathcal{K}$ é uma torre, pois $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{T}_0$.

Proposição 5.5. *Seja $\mathcal{K} = \{\mathfrak{K} \in \mathfrak{T}_0 \mid \mathfrak{K} \text{ é comparável }\}$. Então, $\mathcal{K}$ é uma torre.*

Demonstração. Vamos verificar que $\mathcal{K}$ satisfaz as propriedades da Definição 5.7.

(i) Pela Proposição 5.7, temos que $\emptyset \in \mathfrak{T}_0$ e, como, para todo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, $\emptyset \subseteq \mathfrak{A}$, segue que $\emptyset$ é comparável, isto é, $\emptyset \in \mathcal{K}$;

(ii) Se $\mathfrak{K} \in \mathcal{K}$, então, pelo Corolário 5.1, $g(\mathfrak{K})$ é comparável, isto é, $g(\mathfrak{K}) \in \mathcal{K}$;

(iii) Seja $\mathfrak{C} \subseteq \mathcal{K}$ uma cadeia. Vamos mostrar que $\bigcup\limits_{\mathfrak{K} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{K}$ é comparável em $\mathfrak{T}_0$. Para todo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$, temos duas possibilidades: ou $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{A}$ para todo $\mathfrak{K} \in \mathfrak{C}$ ou existe pelo menos um $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{C}$, tal que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}'$, pois todo $\mathfrak{K} \in \mathfrak{C} \subseteq \mathcal{K}$ é comparável. Se $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{A}$ para todo $\mathfrak{K} \in \mathfrak{C}$, então $\bigcup\limits_{\mathfrak{K} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{A}$. Se existe $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{C}$, tal que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}'$, então $\mathfrak{A} \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{K} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{K}$ e, dessa forma, $\bigcup\limits_{\mathfrak{K} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{K}$ é comparável.

Assim, concluimos que o conjunto $\mathcal{K}$ é uma torre.

□

Como $\mathcal{K}$ é uma torre, temos, pela Proposição 5.7, que $\mathfrak{T}_0 \subseteq \mathcal{K}$. No entanto, por definição, temos que $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{T}_0$, de modo que $\mathfrak{T}_0 = \mathcal{K}$, isto é, todos os elementos de $\mathfrak{T}_0$ são comparáveis. Assim, o conjunto $\mathfrak{T}_0$ é uma cadeia contida em $\mathfrak{X}$, o que implica, pela Afirmação 5.2, que $\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A}$ é uma cadeia contida em X, de modo que $\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$. Pela Proposição 5.7, o conjunto $\mathfrak{T}_0$ é uma torre e, como consequência da Proposição 5.5, $\mathfrak{T}_0$ é uma cadeia contida em $\mathfrak{X}$, tal que $\mathfrak{T}_0 \subseteq \mathfrak{T}_0$, o que, pela definição de torre, implica $\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$ e, também pela definição de torre, resulta que $g(\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A}) \in \mathfrak{T}_0$. Além disso, pela Afirmação 5.2, temos que $g(\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A}) \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A}$ e, pela Definição 5.3 da função g, $\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A} \subseteq g(\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A})$, logo, temos que $g(\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A}) = \bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A}$. Assim, novamente pela Definição 5.3 da função g, temos que $\bigcup\limits_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0} \mathfrak{A}$ é elemento maximal em $\mathfrak{X}$, o que implica, pela Proposição 5.3, que o conjunto X possui elemento maximal, como queríamos demonstrar.

($LZ \Rightarrow AE$) Vamos mostrar que o Lema de Zorn implica o Axioma da escolha. Nossa demonstração foi inspirada na demonstração vista em (HALMOS, 2017). De fato, seja $X \neq \emptyset$ e $x \in X$. Definamos o conjunto W, como segue abaixo.

$$W = \{f : S \to X \mid S \subseteq P(X) \text{ e } f(A) \in A \text{ para todo } A \in S\}.$$

Afirmamos que o conjunto $W \neq \emptyset$. De fato, como $X \subseteq X$, temos que $X \in P(X)$, o que implica $S = \{X\} \subseteq P(X)$. Dessa forma, a função $h : S = \{X\} \to X$, definida por $h(X) = x \in X$ para algum $x \in X$, é um elemento de W, o que implica $W \neq \emptyset$.

Vamos mostrar que o conjunto W é parcialmente ordenado e, para isso, vamos construir uma ordem para os elementos de W.

Seja $\sqsubseteq : W \to W$ uma relação definida por

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g) \text{ e} \\ g \,|_{\mathrm{Dom}(f)}= f \end{cases}$$

Afirmamos que $\sqsubseteq$ é uma relação de ordem parcial em W. De fato,

(i) A relação $\sqsubseteq$ é reflexiva, pois $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ e $f \,|_{\mathrm{Dom}(f)}= f$. Assim, temos que $f \sqsubseteq f$;

(ii) A relação $\sqsubseteq$ é antissimétrica. De fato, sejam $f, g \in W$, tal que $f \sqsubseteq g$ e $g \sqsubseteq f$. Assim, temos, por definição, que $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ e $\mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, o que implica $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$. Temos também, por definição, que $g \,|_{\mathrm{Dom}(f)}= f$ e $f \,|_{\mathrm{Dom}(g)}= g$. Dessa forma, temos que $g = g \,|_{\mathrm{Dom}(g)}= g \,|_{\mathrm{Dom}(f)}= f$, o que implica $f = g$;

(iii) A relação $\sqsubseteq$ é transitiva. Sejam, f, g e $h \in W$, tal que $f \sqsubseteq g$ e $g \sqsubseteq h$. Vamos mostrar que $f \sqsubseteq h$. De fato, como $f \sqsubseteq g$, temos, por definição, que $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ e $g \,|_{\mathrm{Dom}(f)}= f$, isto é, $g(B) = f(B)$ para todo $B \in \mathrm{Dom}(f)$. De forma análoga, como $g \sqsubseteq h$, temos que $\mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(h)$ e $h \,|_{\mathrm{Dom}(g)}= g$, isto é, $h(E) = g(E)$ para todo $E \in \mathrm{Dom}(g)$. Note que $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(h)$ e $f(B) = g(B) = h(B)$ para todo $B \in \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, ou seja, $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(h)$ e $h \,|_{\mathrm{Dom}(f)}= f$, o que implica, por definição, que $f \sqsubseteq h$, como queríamos demonstrar.

Dessa forma, mostramos que a relação $\sqsubseteq$ é uma relação de ordem parcial no conjunto W, isto é, o conjunto $(W, \sqsubseteq)$ é parcialmente ordenado.

Vamos mostrar que toda cadeia $\mathcal{C} \subseteq W$ possui elemento máximo, o que, pelo Axioma 5.2 (Lema de Zorn), nos garante que W possui elemento maximal. Seja $\mathcal{C} \subseteq W$ uma cadeia e definamos a função z da seguinte forma

$$z : \bigcup_{f \in \mathcal{C}} (\mathrm{Dom}(f)) \to X$$
$$z \,|_{\mathrm{Dom}(f)}= f, \text{ para toda função } f \in \mathcal{C}.$$

Afirmamos que a função z está bem definida. De fato, seja $B \in \bigcup_{f \in \mathcal{C}} (\mathrm{Dom}(f))$. Dessa forma, temos que existe $f \in \mathcal{C}$, tal que $B \in \mathrm{Dom}(f)$ e, por definição, $z(B) = f(B) \in X$. Se $B \in \mathrm{Dom}(g)$ para $g \in \mathcal{C}$, então, como $\mathcal{C}$ é um cadeia contida em W, podemos supor, sem perda de generalidade, que $g \sqsubseteq f$, o que é equivalente a dizer que $\mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ e $f \,|_{\mathrm{Dom}(g)}= g$. Dessa forma, temos que $g(C) = f(C)$ para todo $C \in \mathrm{Dom}(g)$, o que implica que $z(B) = g(B) = f(B)$, em que $B \in \mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Assim, a função z está bem definida, como queríamos demonstrar.

Pela definição da função z, temos que $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(z)$ e $z \,|_{\mathrm{Dom}(f)}= f$ para toda função $f \in \mathcal{C}$, de modo que $f \sqsubseteq z$ para toda função $f \in \mathcal{C}$. Assim, temos que a função z é um elemento máximo para a cadeia $\mathcal{C}$, o que implica, pelo Axioma 5.2 (Lema de Zorn), que W possui elemento maximal.

Seja Ψ o elemento maximal de W. Vamos mostrar que $\text{Dom}(\Psi) = P^*(X)$. Temos que $\text{Dom}(\Psi) \subseteq P^*(X)$. Suponhamos, por absurdo, que $\text{Dom}(\Psi) \neq P^*(X)$ e seja $Y \in P^*(X) \setminus (\text{Dom}(\Psi))$. Note que, como $Y \in P^*(X) \setminus (\text{Dom}(\Psi))$, temos que Y é um subconjunto de X, tal que $Y \neq \emptyset$. Seja $y \in Y$ e definamos a função $\varphi : \text{Dom}(\Psi) \cup \{Y\} \to X$ como segue abaixo.

$$\varphi(B) = \begin{cases} \Psi(B), \text{ se } B \in \text{Dom}(\Psi); \\ y, \text{ se } B = Y. \end{cases}$$

Pela definição da função φ, se $B \in \text{Dom}(\Psi)$, então $\varphi(B) = \Psi(B) \in B$, pois $\Psi \in W$ e, se $B = Y$, então $\varphi(B) = \varphi(Y) = y \in Y$. Dessa forma, temos que $\varphi \in W$. Também, pela definição da função φ, temos que $\text{Dom}(\Psi) \subseteq \text{Dom}(\varphi)$ e $\varphi |_{\text{Dom}(\Psi)} = \Psi$, o que implica $\Psi \sqsubseteq \varphi$. Dessa forma, como Ψ é elemento maximal em W, temos que $\varphi = \Psi$, o que implica $\text{Dom}(\Psi) = \text{Dom}(\varphi) = \text{Dom}(\Psi) \cup \{Y\}$, de modo que $Y \in \text{Dom}(\Psi)$, o que é um absurdo, pois $Y \in P^*(X) \setminus (\text{Dom}(\Psi))$. Assim, temos que $\text{Dom}(\Psi) = P^*(X)$, com $\Psi \in W$, isto é, $\Psi : P^*(X) \to X$, tal que $\Psi(A) \in A$ para todo $A \in P^*(X)$, o que implica que Ψ é a função de escolha para o conjunto X, como queríamos demonstrar.

□

Dessa forma, concluímos que o Axioma 5.1 (da escolha) e o Axioma 5.2 (Lema do Zorn) são equivalentes.

5.4 Algumas consequências do Axioma 6.1 (da escolha) e do Axioma 6.2 (Lema de Zorn)

Teorema 5.2. *Seja X um conjunto infinito. Então, $\mathbb{N} \precsim X$.*

Demonstração. A ideia da demonstração desse teorema é a de construir uma função injetiva de $\mathbb{N}$ em X, e a principal ferramenta para essa construção será o Axioma 5.1. Seja F a função de escolha para o conjunto X. Então, para todo subconjunto não-vazio Y, de X, temos que $F(Y) \in Y$. Consideremos a função $h : \mathbb{N} \to P(X)$, tal que $h(0) = \emptyset$ e $h(n+1) = h(n) \cup \{F(X \setminus h(n))\}$.

Observe que a imagem da função h são subconjuntos distintos de X, em que elementos do conjunto X são escolhidos um a um, pela função de escolha F, como podemos ver abaixo.

- $h(0) = \emptyset$;
- $h(1) = h(0) \cup \{F(X \setminus h(0))\} = \{x_1\}$, tal que $x_1 \in X$;
- $h(2) = h(1) \cup \{F(X \setminus h(1))\} = \{x_1, x_2\}$, tal que $x_1 \in X$ e $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$;

- $h(3) = h(2) \cup \{F(X \setminus h(2))\} = \{x_1, x_2, x_3\}$, tal que $x_1 \in X$, $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ e $x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$;
- $h(4) = h(3) \cup \{F(X \setminus h(3))\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, tal que $x_1 \in X$, $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$, $x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ e $x_4 \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$;
- $\vdots$
- $h(n+1) = h(n) \cup \{F(X \setminus h(n))\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}\}$, tal que $x_1 \in X$, $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$, $x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$, ..., e $x_{n+1} \in X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Note que $h(0) \subseteq h(1) \subseteq h(2) \subseteq \ldots \subseteq h(n) \subseteq h(n+1) \subseteq \ldots$, isto é, se m e n são números naturais tais que $m < n$, então $m + 1 \leq n$ e $h(m) \subseteq h(m+1) \subseteq h(n)$. Consideremos agora a função g definida abaixo.

$$g : \mathbb{N} \to X$$
$$g(n) = F(X \setminus h(n))$$

Observe que, como X é um conjunto infinito e $h(n)$ um conjunto finito, então $X \setminus h(n) \neq \emptyset$, logo, temos que a função g está bem definida. Afirmamos que a função g é injetiva. De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $m \neq n$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m < n$ e, assim, temos que $m + 1 \leq n$, de modo que $h(m+1) \subseteq h(n)$. Assim, temos que $g(m) \in h(n)$, pois

$$g(m) = F(X \setminus h(m)) \in h(m) \cup \{F(X \setminus h(m))\} = h(m+1) \subseteq h(n).$$

No entanto, $g(n) = F(X \setminus h(n)) \notin h(n)$, o que implica $g(m) \neq g(n)$ e a função g é injetiva. Dessa forma, temos que $\mathbb{N} \underset{g}{\precsim} X$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Corolário 5.2. *Para todo número cardinal transfinito κ, temos que $\aleph_0 \leq \kappa$.*

Demonstração. De fato, seja um conjunto infinito K, tal que $|K| = \kappa$. Pelo Teorema 5.2, temos que $\mathbb{N} \precsim K$, o que implica $|\mathbb{N}| \leq |K|$ e, assim, $\aleph_0 \leq \kappa$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Teorema 5.3. *Seja K um conjunto infinito e A um conjunto enumerável. Então, $K \cup A \approx K$.*

Demonstração. De fato, seja o conjunto $A' = A \setminus K$. Note que $K \cup A = K \cup (A \setminus K) = K \cup A'$ e $K \cap A' = \emptyset$. Basta mostrarmos agora que $K \cup A' \approx K$.

Como o conjunto A é enumerável, temos, pelo Corolário 4.1, que o conjunto $A' \subseteq A$ é enumerável. Dessa forma, temos que existe uma função $f : A' \to \mathbb{N}$, injetiva e, dessa forma, temos que $f : A' \to f(A')$ é uma bijeção, o que implica $A' \underset{f}{\approx} f(A')$.

Como o conjunto K é infinito, temos, pelo Teorema 5.2, que existe uma função injetiva $g : \mathbb{N} \to K$ e, dessa forma, temos que $g : \mathbb{N} \to g(\mathbb{N})$ é uma bijeção.

Definamos $K' = g(\mathbb{N}) \subseteq K$ e consideremos o conjunto $A' \cup K'$. Note que $K' \approx \mathbb{N}$ e, como $A' \subseteq A \setminus K$ e $K' \subseteq K$, temos que $A' \cap K' = \emptyset$.

Pelo Teorema 4.2 ou pelo Lema 4.1, temos que $A' \cup K' \approx \mathbb{N}$, dessa forma, temos que existe uma função bijetiva $\varphi : K' \to A' \cup K'$.

Definamos a função $\psi : K \to K \cup A'$ por

$$\psi(k) = \begin{cases} k, \text{ se } k \in K \setminus K'; \\ \varphi(k), \text{ se } k \in K'. \end{cases}$$

Afirmamos que a função ψ é uma bijeção. De fato, a função ψ é injetiva, pois, sejam $k, k' \in K$ tais que $k \neq k'$. Se $k, k' \in K \setminus K'$, então $\psi(k) = k \neq k' = \psi(k')$ e a função ψ é injetiva. Se $k, k' \in K'$, então $\psi(k) = \varphi(k) \neq \varphi(k') = \psi(k')$, pois a função φ é injetiva e, assim, a função ψ é injetiva.

A função ψ é sobrejetiva. De fato, dado $y \in K \cup A'$, como $K \cap A' = \emptyset$, temos que ou $y \in K$ ou $y \in A'$. Se $y \in K$, então ou $y \in K \setminus K'$ ou $y \in K'$. Se $y \in K \setminus K'$, então $\psi(y) = y$ e a função ψ é sobrejetiva e, se $y \in K'$, então existe $k' \in K'$, tal que $\varphi(k') = y$, de modo que $\psi(k') = \varphi(k') = y$ e a função ψ é sobrejetiva. Se $y \in A'$, então existe $k' \in K'$, tal que $\varphi(k') = y$, o que implica $\psi(k') = \varphi(k') = y$, e a função ψ é sobrejetiva.

Dessa forma, temos que a função ψ é uma bijeção, de modo que $K \approx K \cup A'$. Como $K \cup A = K \cup A'$, temos que $K \approx K \cup A$, como queríamos demonstrar.

□

Corolário 5.3. *Seja K um conjunto infinito e seja $L \subseteq K$, tal que $K \not\approx L$. Então, o conjunto $K \setminus L$ é infinito.*

Demonstração. De fato, suponhamos, por absurdo, que $K \setminus L$ seja finito. Dessa forma, temos que L é infinito, pois, se L for finito, teríamos $(K \setminus L) \cup L$ finito, um absurdo, pois $(K \setminus L) \cup L = K$, infinito. Como $(K \setminus L)$ é finito e L é infinito temos, pelo Teorema 5.3, que $(K \setminus L) \cup L \approx L$, o que implica $K \approx L$, um absurdo, pois $K \not\approx L$. Assim, temos que $K \setminus L$ é infinito, como queríamos demonstrar.

□

Proposição 5.6. *Dados dois conjuntos X e Y temos que $Y \precsim X$ se, e somente se, existe uma função sobrejetiva de X em Y.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Vamos mostrar que, se $Y \precsim X$, então existe uma função sobrejetiva de X em Y. De fato, se $Y \precsim X$, então existe uma função $g : Y \to X$, injetiva. Seja $\hat{y} \in Y$ e definamos a função $f : X \to Y$ como segue

$$f(x) = \begin{cases} g^{-1}(x), \text{ se } x \in g(Y); \\ \hat{y}, \text{ se } x \notin g(Y). \end{cases}$$

A função f é sobrejetiva, pois, dado $y \in Y$, denotemos $x \in X$, tal que $x = g(y)$. Dessa forma, temos, por definição, que $f(x) = g^{-1}(x) = y$.

($\Leftarrow$) Vamos mostrar que, se existe uma função sobrejetiva de X em Y, então $Y \precsim X$. De fato, suponhamos que existe uma função sobrejetiva $f : X \to Y$ e consideremos o conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

O conjunto $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$, pois, como f é sobrejetiva, dado $y \in Y$, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$, então temos que $x \in f^{-1}(y)$. Também, se $y \neq y' \in Y$, então $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(y') = \emptyset$, pois, suponhamos o contrário, que $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(y') \neq \emptyset$. Isso quer dizer que existe um elemento $x \in f^{-1}(y)$ e $x \in f^{-1}(y')$, tal que $f(x) = y$ e $f(x) = y'$. Absurdo, pois f é função. Assim, $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(y') = \emptyset$ para todo $y \neq y' \in Y$.

Consideremos a função de escolha, F, para o conjunto X. Dessa forma, para todo subconjunto $f^{-1}(y) \subseteq X$, temos que $F(f^{-1}(y)) \in f^{-1}(y)$. Definamos a função h por

$$\begin{array}{rcl} h: \ Y & \to & X \\ y & \mapsto & h(y) = F(f^{-1}(y)) \end{array}$$

Afirmamos que a função h é injetiva. De fato, sejam $y, y' \in Y$, tal que $y \neq y'$. Dessa forma, temos que $h(y) = F(f^{-1}(y)) \in f^{-1}(y)$ e $h(y') = F(f^{-1}(y')) \in f^{-1}(y')$. Como os conjuntos $f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(y')$ são disjuntos, temos que $h(y) \neq h(y')$ e a função h é injetiva e, assim, temos que $Y \underset{h}{\precsim} X$, como queríamos demonstrar.

□

Vimos no Lema 4.3 que união finita de conjuntos infinitos enumeráveis é enumerável. No entanto, note que o conjunto $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} D_p = D_2 \cup D_3 \cup D_5 \cup \ldots \cup D_p \cup \ldots$, que é uma união infinita enumerável de conjuntos infinitos enumeráveis, é um conjunto infinito contido em $\mathbb{N}$ e, pelo Teorema 4.1, $|\bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} D_p| = \aleph_0$, isto é, o conjunto $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} D_p$ é infinito enumerável. Essa construção nos direciona para o resultado mais geral, ainda intuitivo, de que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, e o próximo teorema nos garantirá esse fato.

Teorema 5.4. *Sejam $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ conjuntos enumeráveis e $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$, a união enumerável de conjuntos enumeráveis. Então, X é enumerável.*

Demonstração. Se $X = \emptyset$, então X é enumerável. Suponhamos então $X \neq \emptyset$. Se, para algum $m \in \mathbb{N}$, temos $X_m = \emptyset$, então temos que $X \setminus X_m = (\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n) \setminus X_m = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$ e, dessa forma, podemos retirar cada $X_m = \emptyset$ que não alteramos o conjunto X. Suponhamos, então, que $X_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos também que os conjuntos X_m, tal que $m \in \mathbb{N}$, são dois a dois disjuntos. Consideremos o conjunto $H(m)$ definido abaixo.

$$H(m) = \{g_m : \mathbb{N} \to X_m \mid g_m \text{ é sobrejetiva } \}.$$

Note que o conjunto $H(m)$ é um subconjunto do conjunto $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n)^{\mathbb{N}}$. Afirmamos que $H(m) \neq \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$, isto é, existe pelo menos uma função sobrejetiva $g_m : \mathbb{N} \to X_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De fato, como X_m é enumerável, temos que ou $\mathbb{N} \underset{g}{\approx} X_m$ ou existe um $k \in \mathbb{N}$, tal que $k \neq 0$ e $I_k \underset{g}{\approx} X_m$.

Se $\mathbb{N} \underset{g}{\approx} X_m$, então temos que $g_m = g$ é a função desejada, pois g é sobrejetiva.

Se $I_k \underset{g}{\approx} X_m$, como $X_m \neq \emptyset$, seja $x_m \in X_m$. Então, consideremos a função g_m definida a seguir.

$$g_m : \mathbb{N} \to X_m$$
$$g_m(n) = \begin{cases} g(n), & \text{se } n \in I_k; \\ x_m, & \text{se } n \notin I_k. \end{cases}$$

A função g_m é sobrejetiva, por construção, pois a função $g : I_k \to X_m$ é sobrejetiva.

Afirmamos que $H(i) \cap H(j) = \emptyset$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$, tal que $i \neq j$. De fato, suponhamos por absurdo que $H(i) \cap H(j) \neq \emptyset$ e seja $g \in H(i) \cap H(j)$. Como $X_i \neq X_j$, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $x \in X_i$, tal que $x \notin X_j$. Dessa forma, temos que existe $s \in \mathbb{N}$, tal que $g(s) = x \in X_i$, e isso significa que $g(s) = x \notin X_j$, o que é um absurdo, pois $g : \mathbb{N} \to X_j$ é função. Assim, temos que $H(i) \cap H(j) = \emptyset$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$, tal que $i \neq j$.

Pelo Axioma 5.1, existe uma função de escolha, F, para o conjunto $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n)^{\mathbb{N}}$, tal que $F(H(m)) \in H(m)$.

Consideremos agora a função h definida abaixo.

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$
$$h(m, n) = F(H(m))(n) = g_m(n)$$

Afirmamos que a função h é sobrejetiva. De fato, dado $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, temos que existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $x \in X_k$. Dessa forma, temos que $g_k : \mathbb{N} \to X_k$ é sobrejetiva e, portanto, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $g_k(n) = x$ e, assim, temos que $h(k, n) = F(H(k))(n) = g_k(n) = x$ e a função h é sobrejetiva.

Assim, pela Proposição 5.6, temos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, de modo que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \precsim \mathbb{N}$, o que significa que X é enumerável, como queríamos demonstrar.

$\square$

Pelo Teorema 5.4, temos que a soma com infinitas e enumeráveis parcelas iguais a $\aleph_0$ é igual a $\aleph_0$, isto é,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \aleph_0 = \aleph_0 \oplus \aleph_0 \oplus \aleph_0 \oplus \ldots = \aleph_0.$$

Corolário 5.4. *Um conjunto é infinito se, e somente se, é equinumerável a um subconjunto próprio.*

Demonstração. O Corolário 3.2 já nos garante que, se um conjunto é equinumerável a um subconjunto próprio, então é infinito. Para completarmos a demonstração, temos que mostrar que, se um conjunto é infinito, então é equinumerável a um subconjunto próprio.

Seja X um conjunto infinito. Pelo Teorema 5.2, sabemos que $\mathbb{N} \underset{f}{\precsim} X$, isto é, existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$. Seja $f(0) \in X$ e consideremos o conjunto $X \setminus \{f(0)\}$, um subconjunto próprio do conjunto X. Definamos a função $g : X \to X \setminus \{f(0)\}$, em que

$$g(x) = \begin{cases} f(n+1), & \text{se } x = f(n), n \in \mathbb{N}; \\ x, & \text{se } x \neq f(n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nós afirmamos que a função g é uma bijeção. De fato, g é injetiva, pois sejam $x, x' \in X$, tal que $x \neq x'$, temos as seguintes possibilidades:

- Se $x, x' \in f(\mathbb{N})$, então existem $r, s \in \mathbb{N}$, tal que $x = f(r)$ e $x' = f(s)$. Como a função f é injetiva e $f(r) = x \neq x' = f(s)$, temos que $r \neq s$, o que implica $r + 1 \neq s + 1$ e, assim, $f(r+1) \neq f(s+1)$. Dessa forma, $g(f(r)) = f(r+1) \neq f(s+1) = g(f(s))$, de modo que $g(x) \neq g(x')$.

- Se $x, x' \notin f(\mathbb{N})$, então $g(x) = x \neq x' = g(x')$.

- Se $x \in f(\mathbb{N})$ e $x' \notin f(\mathbb{N})$, então existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $x = f(m)$, o que implica $g(x) = g(f(m)) = f(m+1) \neq x' = g(x')$, pois $x' \notin f(\mathbb{N})$.

Assim, a função g é injetiva.

A função g também é sobrejetiva, pois, dado $y \in X \setminus \{f(0)\}$, como $X \setminus \{f(0)\} = (f(\mathbb{N}) \setminus \{f(0)\}) \cup (X \setminus \{f(\mathbb{N})\})$, com $(f(\mathbb{N}) \setminus \{f(0)\}) \cap (X \setminus \{f(\mathbb{N})\}) = \emptyset$, temos que ou $y \in f(\mathbb{N}) \setminus \{f(0)\}$ ou $y \in X \setminus \{f(\mathbb{N})\}$.

Se $y \in f(\mathbb{N}) \setminus \{f(0)\}$, então existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \neq 0$ e $y = f(n)$. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $m + 1 = n$, de modo que $g(f(m)) = f(m+1) = f(n) = y$.

Se $y \in X \setminus \{f(\mathbb{N})\}$, então $g(y) = y$.

Assim, a função g é sobrejetiva e, portanto, uma bijeção, o que implica $X \underset{g}{\approx} X \setminus \{f(0)\}$, isto é, o conjunto X é equinumerável a um subconjunto próprio, sendo, assim, infinito, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 5.5. *Seja A um subconjunto enumerável de B e suponha que $|B| = \aleph_1$. Então, $|B \setminus A| = \aleph_1$.*

Demonstração. Como $|B| = \aleph_1 = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Seja o conjunto $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tal que $|A| = \aleph_0$. Vamos mostrar que $|(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A| = \aleph_1$. Para isso, consideremos o conjunto P, definido por

$$P = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A \text{ para algum } y \in \mathbb{R}\}.$$

Afirmamos que $|P| \leq \aleph_0$. De fato, consideremos a função $g : A \to P$, tal que $g(x, y) = x$. Note que, por construção, a função g é uma projeção e, portanto, sobrejetiva. Dessa forma, temos, pela Proposição 5.6, que $|P| \leq |A| = \aleph_0$. Como $|P| \leq \aleph_0$, temos que $\mathbb{R} \setminus P \neq \emptyset$, logo, existe um elemento $x_0 \in \mathbb{R} \setminus P$.

Consideremos agora o conjunto $X = \{x_0\} \times \mathbb{R}$. Note que, pelo Corolário 4.8, $|X| = 1 \odot \aleph_1 = \aleph_1$ e que $X \subseteq [(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A]$, de modo que $|X| \leq |(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A|$, isto é, $\aleph_1 \leq |(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A|$.

Por outro lado, temos que $[(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A] \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o que implica $|(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A| \leq \aleph_1$. Dessa forma, temos que $\aleph_1 \leq |(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A| \leq \aleph_1$, o que, pelo Teorema 4.14, implica $|(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A| = \aleph_1$, como queríamos demonstrar. Para um conjunto A finito, a demonstração é análoga.

□

Corolário 5.5. *Seja $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais, então $|\mathbb{I}| = \aleph_1$.*

Demonstração. De fato, temos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$. Como $|\mathbb{R}| = \aleph_1$ e $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, temos, pelo Teorema 5.5, que $|\mathbb{I}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \aleph_1$, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 5.6. *Sejam os números cardinais κ e λ. Então, $\kappa \leq \lambda$ ou $\lambda \leq \kappa$.*

Demonstração. De fato, sejam os conjuntos K e L, tal que $|K| = \kappa$ e $|L| = \lambda$. Se K ou L fosse vazio, suponhamos $K = \emptyset$, teríamos, pela Proposição 4.14, que $0 \leq \lambda$, e segue o resultado do teorema. Suponhamos, então, que os conjuntos K e L sejam não-vazios. Se $\lambda \leq \kappa$, então não há o que demonstrar. Suponhamos, então, que não ocorre $\lambda \leq \kappa$. Vamos mostrar que $\kappa \leq \lambda$. Como não ocorre $\lambda \leq \kappa$, temos que não ocorre $L \precsim K$, logo, pela Proposição 5.6, não existe uma função sobrejetiva de K em L.

Seja $F = \{f : A \to B \mid A \subseteq K, B \subseteq L \text{ e } f \text{ é função injetiva}\}$ e a ordem parcial $\sqsubseteq$ definida na suficiência do Teorema 5.1. De forma análoga demonstrada no Teorema 5.1, o conjunto F satisfaz as condições do Axioma 5.2 e, dessa forma, temos que F possui elemento maximal. Seja $\Psi : Z \to W$ o elemento maximal de F, tal que $Z \subseteq K$ e $W \subseteq L$. Vamos mostrar que $Z = K$. Suponhamos, por absurdo, que $Z \neq K$ e seja $k \in K \setminus Z$.

Se $\mathrm{Img}(\Psi) = L$, isto é, se $\Psi : Z \to L$ é uma função sobrejetiva sobre L, então, pela Proposição 5.6, temos que $L \precsim Z$. Como $Z \subseteq K$, temos que $Z \precsim K$ e, dessa forma, $L \precsim Z$ e $Z \precsim K$, e concluímos, pela Proposição 4.19, item 2, que $L \precsim K$, um absurdo, pois suponhamos que $L \precsim K$ não ocorre. Dessa forma, Ψ não é sobrejetiva sobre L, isto é, $\text{Img}(\Psi) \neq L$.

Seja $l \in L \setminus W$. Note que, como $\text{Img}(\Psi) \subseteq W$, $l \notin \text{Img}(\Psi)$. Definamos a função $g : Z \cup \{k\} \to W \cup \{l\}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \Psi(x), & \text{se } x \in Z; \\ l, & \text{se } x = k. \end{cases}$$

Por construção, temos que g é uma função injetiva e $g\mid_Z = \Psi$, e isso implica que $\Psi \sqsubseteq g$, o que contradiz o fato de Ψ ser o elemento maximal de F.

Dessa forma, temos que $Z = K$ e $\Psi : K \to W$ é injetiva, o que implica $K \precsim W$. Como $W \subsetneq L$, temos que $W \precsim L$. Logo, novamente pela Proposição 4.19, item 2, temos que $K \precsim L$, de modo que $\kappa \leq \lambda$, como queríamos demonstrar.

□

Lema 5.4. *Seja K um conjunto infinito. Então, $K \times \{0,1\} \approx K$.*

Demonstração. De fato, seja o conjunto F definido por

$$F = \{f : X \times \{0,1\} \to X \mid X \subseteq K \text{ e } f \text{ é uma função bijetiva}\}.$$

Afirmamos que $F \neq \emptyset$. De fato, como K é um conjunto infinito, temos, pelo Teorema 5.2, que existe um conjunto $A \subseteq K$, tal que $A \approx \mathbb{N}$. Pela Proposição 4.7, temos que que existe uma bijeção h entre os conjuntos $A \times \{0,1\}$ e A, de modo que $h \in F$, o que implica $F \neq \emptyset$.

Da mesma forma demonstrada na suficiência do Teorema 5.1, provamos que o conjunto F é bem ordenado pela relação $\sqsubseteq$, e que toda cadeia tem elemento máximo, e isso implica que o conjunto F possui elemento maximal. Seja $\Psi : L \times \{0,1\} \to L$ o elemento maximal de F, tal que $L \subseteq K$. Vamos mostrar que $K \approx L$. Suponhamos por absurdo que $K \not\approx L$. Dessa forma, temos, pelo Corolário 5.3, que $K \setminus L$ é infinito, o que implica, pelo Teorema 5.2, que existe um conjunto $B \subseteq (K \setminus L)$, tal que $B \approx \mathbb{N}$. Assim, pela Proposição 4.7, temos que $B \times \{0,1\} \underset{g}{\approx} B$. Consideremos a função f definida abaixo.

$$f : (L \cup B) \times \{0,1\} \to L \cup B$$

$$f(x) = \begin{cases} \Psi(x), & \text{se } x \in L \times \{0,1\}; \\ g(x), & \text{se } x \in B \times \{0,1\}. \end{cases}$$

Note que $(L \cup B) \times \{0,1\} = (L \times \{0,1\}) \cup (B \times \{0,1\})$ e que os conjuntos B e L são disjuntos, pois $B \subseteq (K \setminus L)$ e, como $\Psi(x) \in L$ e $g(x) \in B$, a função f está bem definida. Como as funções Ψ e g são bijetivas, temos, por construção, que a função f é bijetiva. Dessa forma, $f \in F$ é tal que $f\mid_{\text{Dom}(\Psi)} = \Psi$ e $\text{Dom}(\Psi) \subseteq \text{Dom}(f)$, o que implica $\Psi \sqsubseteq f$. Como $\Psi \sqsubseteq f$ e Ψ é elemento maximal de F, temos, pela definição de elemento maximal, que $\Psi = f$, e isso implica que $B = \emptyset$, isto é, $K \setminus L$ não possui um subconjunto equinumerável a $\mathbb{N}$, e isso implica, pelo Teorema 5.2, que $K \setminus L$ é finito, um absurdo, pois $K \setminus L$ é infinito. Dessa forma, temos que $K \approx L$, como queríamos demonstrar.

□

Corolário 5.6. *Seja κ um número cardinal transfinito. Então, $\kappa \oplus \kappa = \kappa$.*

Demonstração. De fato, pela Proposição 4.8, temos que $\kappa \oplus \kappa = 2 \odot \kappa$ e, como κ é um número cardinal transfinito, temos, pelo Lema 5.4 anterior, que $2 \odot \kappa = \kappa$. Dessa forma, temos que $\kappa \oplus \kappa = 2 \odot \kappa = \kappa$, o que implica $\kappa \oplus \kappa = \kappa$, como queríamos demonstrar.

□

Lema 5.5. *Seja K um conjunto infinito, tal que $K = L \cup M$. Então, $K \approx L$ ou $K \approx M$.*

Demonstração. De fato, se L ou M fosse finito, digamos M, então, pelo Teorema 5.3, temos que $K \approx L$ e a demonstração segue. Suponhamos, então, que os conjuntos L e M são infinitos.

Pelo Teorema 5.6, temos que $L \precsim M$ ou $M \precsim L$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $M \underset{f}{\precsim} L$, isto é, que existe uma função injetiva $f : M \to L$. Vamos mostrar que $K \approx L$. Como $L \subseteq K$, temos que $L \precsim K$. Vamos mostrar que $K \precsim L$, o que implica, pelo Teorema 4.14, que $K \approx L$. Consideremos a função $g : K \to L \times \{0,1\}$ definida por

$$g(k) = \begin{cases} (k, 0), & \text{se } k \in L; \\ (f(k), 1), & \text{se } k \in M \setminus L. \end{cases}$$

Afirmamos que a função g é injetiva. De fato, sejam $k_1, k_2 \in K$, tal que $k_1 \neq k_2$. Se $k_1, k_2 \in L$, então $g(k_1) = (k_1, 0) \neq (k_2, 0) = g(k_2)$. Se $k_1, k_2 \in M \setminus L$, então, como a função f é injetiva, temos que $f(k_1) \neq f(k_2)$, o que implica $g(k_1) = (f(k_1), 1) \neq (f(k_2), 1) = = g(k_2)$. Se $k_1 \in L$ e $k_2 \in M \setminus L$, então $g(k_1) = (k_1, 0) \neq (f(k_2), 1) = g(k_2)$ e a função g é injetiva.

Como a função $g : K \to L \times \{0,1\}$ é injetiva, temos que $K \underset{g}{\precsim} L \times \{0,1\}$. Como o conjunto L é infinito, temos, pelo Lema 5.4, que $L \approx L \times \{0,1\}$. Assim, temos que $K \underset{g}{\precsim} L \times \{0,1\}$ e $L \times \{0,1\} \approx L$, o que implica $K \precsim L$. Dessa forma, temos que $K \precsim L$ e $L \precsim K$, o que implica, pelo Teorema 4.14, que $K \approx L$, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 5.7. *Seja κ um número cardinal transfinito. Então, $\kappa \odot \kappa = \kappa$.*

Demonstração. Seja K um conjunto infinito, tal que $|K| = \kappa$. Definamos o conjunto F como segue abaixo.

$$F = \{f : X \times X \to X \mid X \subseteq K \text{ e } f \text{ é uma bijeção } \}.$$

Afirmamos que $F \neq \emptyset$. De fato, como o conjunto K é infinto temos, pelo Teorema 5.2, que existe um conjunto A, tal que $A \subseteq K$ e $A \approx \mathbb{N}$, isto é, A é um conjunto infinito e enumerável. Dessa forma, pela Proposição 4.2, temos que $A \times A \approx A$, de modo que existe uma função $f_A : A \times A \to A$, bijetiva. Assim, $f_A \in F$, o que implica $F \neq \emptyset$.

De forma análoga ao que fora feito na suficiência do Teorema 5.1, podemos concluir que o conjunto F é bem ordenado pela relação de ordem parcial $\sqsubseteq$, e que toda cadeia em F possui elemento máximo. Dessa forma, pelo Axioma 5.2, temos que o conjunto F possui elemento maximal. Seja $\Psi : L_1 \times L_1 \to L_1$ o elemento maximal de F, tal que $L_1 \subseteq K$ e $|L_1| = \lambda$. Dessa forma, temos que Ψ é uma bijeção, o que implica $|L_1 \times L_1| = |L_1|$, isto é, $\lambda \odot \lambda = \lambda$.

Afirmamos que $|K| = \kappa = \lambda = |L_1|$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $\kappa \neq \lambda$. Dessa forma, como $L_1 \subseteq K$, temos que $|L_1| = \lambda \leq \kappa = |K|$. Suponhamos $\lambda < \kappa$.

Consideremos o conjunto $(K \setminus L_1) \subseteq K$. Afirmamos que $|K \setminus L_1| = \kappa$. De fato, como $K = (K \setminus L_1) \cup L_1$, temos, pelo Lema 5.5, que $K \approx (K \setminus L_1)$ ou $K \approx L_1$. Como $\lambda < \kappa$, temos que $K \not\approx L_1$, o que implica $K \approx (K \setminus L_1)$. Assim, temos que $|K \setminus L_1| = \kappa$.

Como $|K \setminus L_1| = \kappa$ e $\lambda < \kappa$, temos que existe um conjunto $L_2 \subseteq K \setminus L_1$, tal que $|L_2| = |L_1| = \lambda$, isto é, o conjunto $K \setminus L_1$ possui um subconjunto L_2, equinumerável ao conjunto L_1, tal que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Consideremos os conjuntos $L_1 \cup L_2$ e $L_2 \cup L_1$. Temos que $|L_1 \cup L_2| = |L_2 \cup L_1| = \lambda \oplus \lambda$. Afirmamos que $\lambda \oplus \lambda = \lambda$. De fato, pela Proposição 4.8, temos que $\lambda \oplus \lambda = 2 \odot \lambda$ e, como $2 \leq \lambda$, temos, pelo Teorema 4.15, item 2, que $2 \odot \lambda \leq \lambda \odot \lambda$ e, assim, temos que $\lambda \leq \lambda \oplus \lambda = 2 \odot \lambda \leq \lambda \odot \lambda = \lambda$, o que implica, pelo Teorema 4.14, que $\lambda \oplus \lambda = \lambda$.

Consideremos o conjunto $(L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_1) \cup (L_2 \times L_2)$, temos que

$$\begin{aligned}
&|(L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_1) \cup (L_2 \times L_2)| \\
&= (\lambda \odot \lambda) \oplus (\lambda \odot \lambda) \oplus (\lambda \odot \lambda) \\
&= \lambda \oplus \lambda \oplus \lambda \\
&= \lambda \oplus \lambda = \lambda.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $[(L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_1) \cup (L_2 \times L_2)] \approx L_2$, isto é, existe uma função $h : (L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_1) \cup (L_2 \times L_2) \to L_2$, bijetiva.

Consideremos agora o conjunto $(L_1 \cup L_2) \times (L_2 \cup L_1)$. Note que $(L_1 \cup L_2) \times (L_2 \cup L_1) = (L_1 \times L_1) \cup (L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_1) \cup (L_2 \times L_2)$ e definamos a função $f_{L_1 \cup L_2} : (L_1 \cup L_2) \times (L_1 \cup L_2) \to L_1 \cup L_2$ por

$$f_{L_1 \cup L_2}(l) = \begin{cases} h(l), & \text{se } l \notin L_1 \times L_1; \\ \Psi(l), & \text{se } l \in L_1 \times L_1. \end{cases}$$

Note que, por definição, a função $f_{L_1 \cup L_2}$ é uma bijeção e que $f_{L_1 \cup L_2}(l) = h(l) \in L_2 \subseteq (L_1 \cup L_2)$, se $l \notin (L_1 \times L_1)$, e $f_{L_1 \cup L_2}(l) = \Psi(l) \in L_1 \subseteq (L_1 \cup L_2)$, de modo que $f_{L_1 \cup L_2}(l) \in (L_1 \cup L_2)$ para todo $l \in (L_1 \cup L_2) \times (L_1 \cup L_2)$, o que implica que $f_{L_1 \cup L_2} \in F$. Por construção, temos que $f_{L_1 \cup L_2} |_{\mathrm{Dom}(\Psi)} = \Psi$ e $\mathrm{Dom}(\Psi) \subseteq \mathrm{Dom}(f_{L_1 \cup L_2})$, o que implica $\Psi \sqsubseteq f_{L_1 \cup L_2}$. No entanto, como Ψ é elemento maximal de F, temos que $\Psi = f_{L_1 \cup L_2}$, o que implica $L_2 = \emptyset$, isto é, o conjunto $K \setminus L_1$ não possui um subconjunto L_2, tal que $|L_2| = \lambda < \kappa$, ou seja, nossa hipótese $\lambda < \kappa$ é falsa. Assim, temos que $\kappa \leq \lambda$ e, como $\lambda \leq \kappa$ segue, pelo Teorema 4.14, que $\kappa = \lambda$. Dessa forma, como $\lambda \odot \lambda = \lambda$, temos que $\kappa \odot \kappa = \kappa$, como queríamos demonstrar.

□

Corolário 5.7. *Seja κ um número cardinal transfinito. Então, $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.*

Demonstração. Como $2 \leq \kappa$ e $\kappa \leq 2^\kappa$ temos, pelo Teorema 4.15, item 3, que $2^\kappa \leq \kappa^\kappa$ e $\kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa$. Pelo Teorema 5.7, temos que $\kappa \odot \kappa = \kappa$. Assim, pelo Teorema 4.12, item 3, temos que $2^\kappa \leq \kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \odot \kappa} = 2^\kappa$, o que implica, pelo Teorema 4.14, que $\kappa^\kappa = 2^\kappa$, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 5.8 (Lei da absorção de números cardinais)**.** *Sejam κ e λ números cardinais, tal que o maior é transfinito e o menor diferente de zero. Então, temos que*

$$\kappa \oplus \lambda = \kappa \odot \lambda = \textit{máximo}(\kappa, \lambda).$$

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\lambda \leq \kappa$. Assim, κ é um número cardinal transfinito. Como $\lambda \leq \kappa$ e $2 \leq \kappa$ temos, pelo Teorema 4.15, que $\kappa \oplus \lambda \leq \kappa \oplus \kappa$ e $2 \odot \kappa \leq \kappa \odot \kappa$. Pela Proposição 4.8, temos que $\kappa \oplus \kappa = 2 \odot \kappa$ e, pelo Teorema 5.7, $\kappa \odot \kappa = \kappa$. Dessa forma, $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda \leq \kappa \oplus \kappa = 2 \odot \kappa \leq \kappa \odot \kappa = \kappa$, o que implica, pelo Teorema 4.14, que $\kappa \oplus \lambda = \kappa = \text{máximo}(\kappa, \lambda)$.

Para demonstrarmos a segunda igualdade, note que $1 \leq \lambda$ e $\lambda \leq \kappa$, o que implica, pelo Teorema 4.15, temos que $\kappa = \kappa \odot 1 \leq \kappa \odot \lambda$ e $\kappa \odot \lambda \leq \kappa \odot \kappa$. Assim, temos que $\kappa \leq \kappa \odot \lambda \leq \kappa \odot \kappa = \kappa$ o que, pelo Teorema 4.14, implica $\kappa \odot \lambda = \kappa = \text{máximo}(\kappa, \lambda)$, como queríamos demonstrar.

□

Corolário 5.8. *Sejam K, L conjuntos infinitos, tal que $|K| = \kappa$ e $|L| = \lambda$. Sejam também $\{K_l\}_{l \in L}$ e $\{L_k\}_{k \in K}$ coleções de conjuntos tais que*

(i) $K_l \cap K_{l'} = \emptyset$ *para todos* $l \neq l'$*;*

(ii) $L_k \cap L_{k'} = \emptyset$ *para todos* $k \neq k'$*;*

(iii) $|K_l| = \kappa$ *para todo* $l \in L$*;*

(iv) $|L_k| = \lambda$ *para todo* $k \in K$*.*

$$\textit{Então, } \left|\bigcup_{l \in L} K_l\right| = \left|\bigcup_{k \in K} L_k\right| = \textit{máximo}(\kappa, \lambda).$$

Demonstração. De fato, como $|K| = |K_l| = \kappa$ para todo $l \in L$, temos que $K \underset{g_l}{\approx} K_l$ para todo $l \in L$. Consideremos o conjunto $H(l) = \{g_l : K \to K_l \mid g_l$ é uma bijeção$\}$. Temos que $H(l) \neq \emptyset$, por construção, pois, para cada $l \in L$, existe $g_l : K \to K_l$, bijetiva. Note que $H(l) \subseteq (\bigcup\limits_{l \in L} K_l)^K$. Afirmamos que $H(l) \cap H(l') = \emptyset$ para todos $l, l' \in L$ tais que $l \neq l'$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $H(l) \cap H(l') \neq \emptyset$ e seja $g \in H(l) \cap H(l')$. Dessa forma, temos que $g : K \to K_l$ e $g : K \to K_{l'}$ são funções bijetivas, de modo que, para $k \in K$, $g(k) \in K_l$ e $g(k) \in K_{l'}$, isto é, $g(k) \in K_l \cap K_{l'}$, absurdo, pois $K_l \cap K_{l'} = \emptyset$. Assim, temos que $H(l) \cap H(l') = \emptyset$. Pelo Axioma 5.1, existe uma função de escolha, F, para o conjunto $(\bigcup\limits_{l \in L} K_l)^K$ e, como $H(l) \subseteq (\bigcup\limits_{l \in L} K_l)^K$, implica que $F(H(l)) \in H(l)$, isto é, $F(H(l)) = g_l \in H(l)$. Definamos a função h como segue abaixo.

$$h : K \times L \to \bigcup_{l \in L} K_l$$
$$h(k, l') = F(H(l'))(k) = g_{l'}(k)$$

Afirmamos que a função h é uma bijeção. De fato, a função é injetiva, pois, sejam $(k_i, l_i), (k_j, l_j) \in K \times L$ tais que $(k_i, l_i) \neq (k_j, l_j)$. Se $k_i \neq k_j$ e $l_i = l_j$, então temos que $h(k_i, l_i) = g_{l_i}(k_i) \in K_{l_i}$ e $h(k_j, l_j) = h(k_j, l_i) = g_{l_i}(k_j) \in K_{l_i}$. Dessa forma, como a função g_{l_i} é uma bijeção, temos que $g_{l_i}(k_i) \neq g_{l_i}(k_j)$ para todos $k_i \neq k_j$, e isso implica que a função h é injetiva. Se $l_i \neq l_j$, então temos que $h(k_i, l_i) = g_{l_i}(k_i) \in K_{l_i}$ e $h(k_j, l_j) = g_{l_j}(k_j) \in K_{l_j}$. Dessa forma, como $K_{l_i} \cap K_{l_j} = \emptyset$ para todo $l_i \neq l_j$, temos que $g_{l_i}(k_i) \neq g_{l_j}(k_j)$, isto é, $h(k_i, l_i) \neq h(k_j, l_j)$ e, dessa forma, temos que a função h é injetiva. A função h também é sobrejetiva. De fato, dado $k_{\hat{l}} \in (\bigcup\limits_{l \in L} K_l)$, então temos que existe $l' \in L$, tal que $k_{\hat{l}} \in K_{l'}$. Dessa forma, como a função $g_{l'} : K \to K_{l'}$ é uma bijeção, temos que existe $k' \in K$, tal que $g_{l'}(k') = k_{\hat{l}}$, e isso implica que $h(k', l') = F(H(l'))(k') = g_{l'}(k') = k_{\hat{l}}$ e, assim, temos que a função h é sobrejetiva. Dessa forma, concluímos que a função h é uma bijeção, e isso implica que $K \times L \approx \bigcup\limits_{l \in L} K_l$, isto é, $|K \times L| = \left|\bigcup\limits_{l \in L} K_l\right|$, de modo que $\left|\bigcup\limits_{l \in L} K_l\right| = \kappa \odot \lambda =$ máximo(κ, λ). Note que, de forma análoga, temos que $K \times L \approx \bigcup\limits_{k \in K} L_k$, e isso implica que $\left|\bigcup\limits_{l \in L} K_l\right| = \left|\bigcup\limits_{k \in K} L_k\right| = \kappa \odot \lambda =$ máximo(κ, λ), como queríamos demonstrar.

$\square$

6 HISTÓRIAS PARA CONTAR

Tendo trabalhado formalmente nos capítulos anteriores os conceitos de finitude e infinitude de conjuntos, assim como muitas propriedades acerca desses conceitos, apresentaremos neste capítulo histórias que podem ser trabalhadas no ensino básico, algumas delas de autoria já conhecida, e outras de autoria própria, como veremos abaixo.

Elas têm como objetivo apresentar, de maneira informal e agradável, os resultados obtidos neste trabalho e, como isso, facilitar a compreensão desses conhecimentos por alunos do ensino básico.

1. Primeira história: a história a seguir consiste em uma reprodução fiel da encontrada no texto de (CHALON; WEISS, 2017, p. 76). O pré-requisito para entender os conceitos matemáticos que esta história pretende trabalhar é o domínio da contagem e, por isso, ela pode ser apresentada para alunos a partir do 6º ano do ensino fundamental.

   Existia na Hungria uma vial [sic.] onde, incrivelmente, os seus habitantes não sabiam contar. Isso foi há muito tempo, muito tempo, muito tempo atrás. Ora, o chefe da vila era escolhido, por uma ano, como a pessoa que tinha mais ovelhas na cidade. Como esse chefe era escolhido, se as pessoas não sabiam contar?

   Para resolver a questão apresentada, o aluno deverá, de maneira informal, construir uma função entre dois conjuntos (das ovelhas de dois pretendentes ao cargo de chefe da vila). Se a função criada pelo aluno for injetiva, o conjunto domínio terá quantidade de elementos menor ou igual que o contradomínio. Se a função desejada for sobrejetiva, o conjunto domínio terá quantidade de elementos maior ou igual que o contradomínio. E, se a função for bijetiva, os dois conjuntos terão a mesma quantidade de elementos. A partir daí, o mesmo raciocínio deverá ser feito com os outros pretendentes ao cargo de chefe, um a um, até o último pretendente.

   Um professor do ensino básico (6º ano do ensino fundamental à 3ª série do ensino médio), ao trabalhar essa história com seus alunos em sala de aula, estará, de maneira informal, construindo conhecimentos sobre os seguintes temas já desenvolvidos formalmente neste trabalho:

   - Teorema 5.6: Dois números cardinais são sempre comparáveis;
   - Proposição 5.6 : Dados dois conjuntos X e Y temos que $|Y| \leq |X|$ se, e somente se, existe uma função sobrejetiva de X em Y;
   - Teorema 3.2: Nenhum conjunto finito é equinumerável a um subconjunto próprio de si mesmo;

- Proposição 4.25: Para quaisquer números cardinais κ, λ e μ. Se $\kappa < \lambda$ e $\lambda \leq \mu$, então $\kappa < \mu$.

2. Segunda história: a história a seguir consiste em uma reprodução fiel da encontrada no texto de (CHALON; WEISS, 2017, p. 77). Esta história pode ser aplicada para alunos a partir do 6º ano do ensino fundamental, pois exige como pré-requisito entendimento sobre sequências numéricas e operações básicas.

> *Num hotel no reino de Vallala, todos seus quarto [sic.] estavam ocupados com Vikings muito bonzinhos, Viking 1 no quarto 1, Viking 2 no quarto 2, Viking 3 no quarto 3, e, enfim um número de Vikings* $\mathbb{N}$ *ocupava cada quarto do hotel infinito. Ora, chegam o [sic.] hotel um número* $\mathbb{N}$ *de Hunos muito bonzinhos, cada um querendo um quarto. O gerente do hotel mais do que depressa solicita*
>
> > *Viking 1, mude-se para o quarto 2, viking [sic.] 2, mude-se para o quarto 4, Viking 3, ocupoe [sic.] o quato 6 e, enfim, cada Viking* n *deverá ocupar o quarto* $2n$.
>
> *Feito esse realocamento, o gerente do hotel solicita*
>
> > *Huno 1, ocupe o quarto 1, Huno dois, ocupe o quarto 3, Huno 3, ocupe o quarto 5 e, sucessivamente, Huno* n *ocupe o quarto de número* $2n - 1$.
>
> *Sua tarefa agora é a de hospedar infinitos Otomanos sem incomodar os demais hóspedes, que solicitam quartos individuais!*

Nesta história, o aluno deverá compreender que infinitos e enumeráveis Vikings ocupam todos os quartos em um hotel com infinitos e enumeráveis quartos numerados sequencialmente com os números naturais 1, 2, 3, etc. O aluno deverá compreender também que o mesmo acontece com dois grupos infinitos e enumeráveis de pessoas, Vikings e Hunos. Eles ocupam os mesmos infinitos e enumeráveis quartos do hotel, tendo, dessa forma, a mesma cardinalidade. A partir daí, o aluno deverá construir, de maneira informal, uma função bijetiva entre os três grupos de pessoas que pretendem se hospedar no hotel (Vikings, Hunos e Otomanos) e o conjunto dos números naturais que organiza os quartos do hotel, e perceber, ao conseguir construir tal função, que os três grupos juntos possuem a mesma cardinalidade que somente um dos grupos ou dois dos grupos juntos.

Um professor do ensino básico (6º ano do ensino fundamental à 3ª série do ensino médio), ao trabalhar essa história com seus alunos em sala de aula, estará, de maneira informal, construindo conhecimentos sobre os seguintes temas já desenvolvidos formalmente neste trabalho:

- Definição 3.3: Um conjunto A será dito enumerável quando for finito ou quando for equinumerável ao conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$.

- Lema 4.1: Sejam X e Y conjuntos infinitos enumeráveis. Então, $|X \cup Y| = \aleph_0$;
- Teorema 4.3: Sejam $X_0, X_1, \ldots, X_n$ conjuntos infinitos enumeráveis e $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} X_k$, a união finita de conjuntos infinitos enumeráveis. Então, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} X_k$ é infinito enumerável, isto é, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} X_k \approx \mathbb{N}$ e $\left|\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} X_k\right| = \aleph_0$.

3. Terceira história: Esta história foi eleborada pelo autor deste trabalho. Ela pode ser aplicada para alunos do ensino básico a partir do 6º ano do ensino fundamental, pois exige domínio das operações matemáticas básicas.

   > A bela e doce pricesa Vikn e o corajoso e astuto cavaleiro Oton, ambos do reino de Vallala, por estarem apaixonados, foram ao encontro do grande chefe do reino, Otão, pedir autorização para que se casassem e que pudessem viver juntos e felizes para sempre. Como Oton era o melhor cavaleiro do reino e uma peça fundamental, Otão permitiu o casamento do casal apaixonado, mas impôs um desafio. Vikn e Oton deveriam colocar-se um de frente para o outro na sala do trono do reino a distância de dez metros e, a cada badalada do relógio ancestral, deveriam se aproximar um do outro, andando metade da distância a que se encontravam. Assim, após a primeira badalada, o jovem casal se aproximou; após a segunda badalada, se aproximaram mais um pouco e, a cada badalada do relógio, mais perto ficavam um do outro. Após o sol nascer por uma semana e o beijo tão desejado não ter sido dado, perceberam que era impossível vencer tal desafio, mas, permaceram ali, naquela sala mágica e esplêndida, um de frente para o outro até o fim dos seus tempos.

   Com a utilização desta história em sala de aula, o professor poderá levar o aluno a compreender, de maneira informal, o conceito formal já apresentado neste trabalho, de que conjunto infinitos são equinumeráveis a subconjuntos próprios.

4. Quarta história: esta história foi elaborada pelo autor deste trabalho. Ela pode ser trabalhada em todos os níveis do ensino básico, pois o objetivo é apresentar de forma lúdica propriedades de conjuntos infinitos.

   A história foi inspirada no paradoxo de Banach-Tarski, que consiste na possibilidade de particionar uma esfera de raio $r > 0$ em finitos pedaços e rearranjar tais pedaços de forma a construir duas novas esferas idêndicas à esfera inicial. Resultados como esse são consequências das propriedades de conjuntos infinitos não-enumeráveis. Assim, ao trabalhar esta história em sala de aula, o professor poderá levar o aluno a conhecer a existência desse mundo de paradoxos da matemática.

Banach e Tarski eram os grandes mágicos do reino de Vallala e possuiam habilidades incríveis, que fascinavam a todos. Em uma bela tarde de outono, eles arrumaram cuidadosamente todos os itens que seriam necessários para a apresentação que aconteceria na noite que se aproximava. Separaram lenços, varinhas mágicas, cartolas, marretas mágicas, esferas, baralhos, espelhos e tantos outros itens necessários para o espetáculo. Arrumaram dentro do baú que ganharam do rei, como presente em uma das apresentações que impressionaram Vossa Majestade, adentraram na carruagem movida a infinitos cavalos reais e foram em direção ao palácio. Ao chegarem, foram recebidos pela rainha Vikntória, acompanhada de toda a família real, pois era uma noite especial, aniversário do príncipe caçula do reino. Assim que os convidados chegaram e o salão de apresentações estava cheio, Banach e Tarski iniciaram sua apresentação. Fizeram truques com lenços, pombas, cartolas e espelhos, até que chegou o grande momento do show de mágicas: a marreta mágica! Nesse momento, a dupla de mágicos solicita a participação de um voluntário da plateia para ajudar na realização da mágica e também para conferir que não há truques ou trapaças e Hunim foi o escolhido. Banach entrega a marreta mágica nas mãos Hunim, põe uma esfera sólida sobre a mesa e o orienta: "Vamos contar até três e dizer as palavras para que a mágica aconteça e, assim que terminarmos de declarar as palavras mágicas, você deve quebrar a esfera com exatamente três marretadas". E assim aconteceu. Banach, Tarski, Hunim e toda a platéia contaram até três e Hunim deu as três marretadas na esfera sólida enquanto Banach e Tarski falavam as palavras mágicas a cada golpe dado. Um silêncio tomou conta do salão. Sob os olhares atentos de Hunim, os mágicos recolheram todos os cacos que estavam sobre a mesa e começaram a rearrumá-los, como se fosse um enorme quebra-cabeça. Pedaços para lá, pedaços para cá, gira isso, gira aquilo, encaixa esse, desencaixa e reencaixa aquele, troca essa e aquela peça de lugar. Então, de repente a dupla parou e Hunim não acreditava no que acontecera diante de seus olhos sem que tivesse havido qualquer tipo de trapaça. Duas esferas idênticas à primeira estavam sobre a mesa, o que deixou a plateia perplexa. Hunim pegou as esferas sobre a mesa, meio incrédulo ainda, mas constatando que realmente estavam ali, diante de seus olhos, e as entregou, uma para cada mágico, que levantaram as mãos que seguravam as esferas para que todos da plateia constatassem que agora são duas e realmente são duas. Hunim se dirigiu ao seu assento sob aplausos e feliz por ter participado daquele inesquecível show protagonizado pela dupla de mágicos Banach e Tarski.

CONCLUSÃO

Este trabalho investigou de maneira formal algumas definições e propriedades importantes acerca de conjuntos finitos e infinitos e suas cardinalidades. Os resultados obtidos com a pesquisa realizada foram fundamentais para a elaboração de histórias, que têm como objetivo explicar tais resultados de forma lúdica e prazerosa para estudantes do ensino básico.

São muitas as possibilidades para o ensino deste tema e seus paradoxos, e é certo que a abordagem por meio de histórias tem grande potencial para atingir esse objetivo. Assim, este trabalho, por não ser um fim em si mesmo, pretende contribuir como fonte bibliográfica e inspiração para outras pessoas, professores ou não, na elaboração de mais histórias.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, M. G. C. Um breve passeio ao infinito real de cantor. *V Bienal da SBM. Paraíba*, 2010.

CHALON, G.; WEISS, A. *Teoria dos Conjuntos - Uma introdução*. [S.l.: s.n.], 2017.

ENDERTON, H. B. *Elements of set theory*. [S.l.]: Academic press, 1977.

FAJARDO, R. A. d. S. *Teoria dos Conjuntos*. [S.l.]: Notas de aula para disciplina de Teoria dos Conjuntos (IME-USP), 2017.

HALMOS, P. R. *Naive set theory*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2017.

HEFEZ, A. Indução matemática. *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2009.

HEFEZ, A. Iniciação à aritmética. *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2009.

KIRILOV, A. *Introdução à teoria de conjuntos*. [S.l.]: Notas de aula, 2017.

LEDESMA, G. E.; MAGALHAES, G. Teorema de cantor-bernstein-schröeder. *Cadernos do IME-Série Matemática*, n. 15, p. 137–150, 2020.

LIMA, E. L. *Curso de análise, volume 1*. [S.l.]: IMPA-Projeto Euclides, 2004.

MACHADO, G. M.; HARTMANN, L. A construção dos números. *UFSCar - São Paulo*, 2014.

MIRAGLIA, F.; ABUD, Z. I. *Lógica e Teoria dos Conjuntos*. [S.l.]: Notas de aula-Universidade de São Paulo, 1999.

YARNELLE, J. E. *An Introduction to Transfinite Mathematics*. [S.l.]: D. C. Heath, 1964.