



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Renato Silva de Almeida

Inflação quintessencial quente

Rio de Janeiro

2023

Renato Silva de Almeida

Inflação quintessencial quente



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

A447i Almeida, Renato Silva de.
Inflação quintessencial quente / Renato Silva de Almeida. – 2023.
94 f. : il.

Orientador: Rudnei de Oliveira Ramos.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Universo inflacionário - Teses. 2. Energia escura (Astronomia) – Teses.
3. Cosmologia - Teses. I. Ramos, Rudnei de Oliveira (Orient.).
II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando
Dias Tavares. III. Título.

CDU 524.852

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

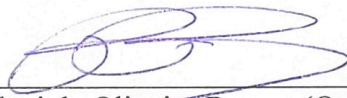
Renato Silva de Almeida

Inflação Quintessencial Quente

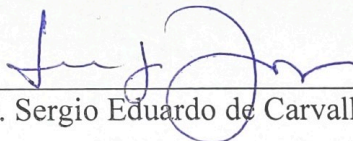
Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 22 de junho de 2023.

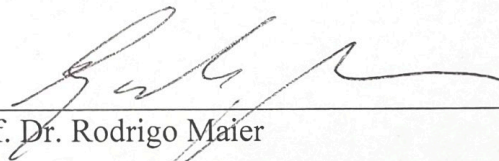
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ



Prof. Dr. Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Joras
Universidade Federal do Rio de Janeiro



Prof. Dr. Rodrigo Maier
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Rio de Janeiro

2023

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por ter me sustentado em todos os momentos da minha vida. Agradecer aos meus pais Wanderley Fonseca de Almeida e Eliete Aparecida Silva pelo apoio e carinho nessa minha jornada desde o início do mestrado até esse momento gratificante que é realizar mais uma etapa na minha vida. Agradecer também meu irmão Rodrigo Silva de Almeida que é minha coluna junto com os meus pais. Sou muito grato a eles por tudo.

Agradeço a Thereza Goulart, que sempre me apoiou em momentos muito difíceis, sempre com uma injeção de ânimo. Agradeço também a Maria do Carmo por me apoiar sempre. Aos meus amigos de igreja, especialmente, Bruno Durans e Jaqueline Martins que sempre acreditaram em mim.

Ao meu orientador Rudnei de Oliveira Ramos por todos os ensinamentos, ajuda e paciência nessa minha difícil jornada, porém de grandes aprendizados.

Agradeço ao PPGF-UERJ por toda ajuda no âmbito acadêmico e a todos os profissionais que lá trabalham. Aos professores do instituto por todos os ensinamentos e conselhos que me ajudaram muito ao longo da minha trajetória, meus sinceros agradecimentos. A todos os amigos que fiz ao longo do período que estive no PPGF-UERJ e, em especial, ao Ismael que estudou comigo na graduação no IFRJ.

A FAPERJ pelo apoio financeiro.

Temer por quê? Se eu estou guardado por quem nunca perdeu batalhas

Seu nome é Jeová Jireh

Irás prover de novo, eu creio em ti

Aline Barros

RESUMO

ALMEIDA, R. S. *Inflação quintessencial quente*. 2023. 94 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Estudamos nesta dissertação a possível unificação dos regimes inflacionário no Universo primordial e de expansão acelerada (energia escura) no Universo mais recente por meio de efeitos dissipativos. Em particular, procuramos analisar como tais efeitos dissipativos são capazes de produzir uma dinâmica consistente unificando essas duas épocas do Universo. Os tópicos abordados têm por objetivo buscar uma compreensão geral da natureza dinâmica dos campos interativos e aplicações em cosmologia, ou seja, no caso de modelos definidos como quintessência. Com isso, pretendemos descrever a inflação quintessencial no contexto da inflação quente caracterizados por diferentes tipos de interações entre campos e sua consistência do ponto de vista de sistemas dinâmicos. Além disso, propomos termos de interação entre o campo de quintessência e matéria de forma equivalente aos termos de interação encontrados na inflação quente, onde o ínflaton interage com a radiação. Ao propor o conjunto de equações de fundo junto com termos dissipativos parametrizados de forma específica, o termo de dissipação foi relacionado à radiação dominando durante o período inflacionário, levando assim a um regime de inflação quente, enquanto o termo de dissipação relacionado a matéria dominando em tempos tardios. Foi possível também obter os resultados relacionados à evolução dos termos de dissipação Q_r , $Q_{m,1}$ e $Q_{m,2}$ junto as equações de evolução. Já para a dinâmica relacionada aos tempos tardios levamos em consideração o plano (x, y) . No plano (x, y) foi possível ter informações sobre o comportamento das trajetórias que passam pela região acelerada, o que é importante para estudar a dinâmica tardia do sistema, onde é possível saber a capacidade do sistema de alcançar um regime dominado por DE. Outra análise feita nesta dissertação foi da estabilidade das condições de rolamento lento. A análise do sistema dinâmico se deu em diferentes regimes, de forma a estudar a estabilidade do sistema nos mesmos.

Palavras-chave: Inflação quente. Energia escura. Modelos de quintessência.

ABSTRACT

ALMEIDA, R. S. *Quintessential warm inflation*. 2023. 94 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

We study in this dissertation the possible unification of the regimes of inflation in the primordial universe and the accelerated expansion (dark energy) regimes in the later universe by means of dissipative effects. In particular, we seek to analyze how such dissipative effects are able to produce a consistent dynamics unifying these two epochs of the universe. The topics covered aim to seek a general understanding of the dynamical nature of interacting fields and applications in cosmology, i.e., in the case of models involving a quintessence field. By doing so, we aim to describe quintessential inflation in the context of warm inflation and characterized by different types of interactions between fields and their consistency from the point of view of dynamical systems. Furthermore, we propose interaction terms between the quintessence field and matter in a manner equivalent to the interaction terms found in warm inflation, where the inflaton interacts with radiation. By proposing the set of background equations together with parameterized dissipative terms in a specific way, the dissipation term was radiation-related dominating during the inflationary period, thus leading to a warm inflation regime, while the matter-related dissipation term dominating at late times. It was also possible to obtain the results related to the evolution of the dissipation terms Q_r , $Q_{m,1}$ and $Q_{m,2}$ together with the evolution equations. For the dynamics related to late times, we took into account the (x, y) plane. In the (x, y) plane it was possible to have information about the behavior of the trajectories that pass through the accelerated region, which is important to study the late dynamics of the system, where it is possible to know the capacity of the system to reach a regime dominated by DE. Another analysis made in this dissertation was the stability of the slow-roll conditions. The analysis of the dynamical system took place in different regimes, in order to study the stability of the system in them.

Keywords: Warm inflation. Dark energy. Quintessential models.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Expansão do Universo	12
Figura 2 -	Valores dos parâmetros de densidade das componentes em função do <i>redshift</i> , considerando um Universo plano, $k = 0$	42
Figura 3 -	Dados observacionais de vínculos relacionados ao modelo Λ CDM, considerando uma curvatura livre e no plano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ (intervalos de confiança de 68% e 95%)	43
Figura 4 -	Dados observacionais dos vínculos atuais da equação de estado da energia escura $\Omega_m - w$, no modelo w CDM plano (intervalos de confiança de 68% e 95%)	44
Figura 5 -	A evolução das taxas de dissipação Q_r , $Q_{m,1}$ e $Q_{m,2}$	66
Figura 6 -	Os índices de densidade de energia em função do número de e-folds devido a um potencial inflaton com constantes $n = 3$ e $\alpha = 0.015$. As condições iniciais consideradas foram tais que $x(0) = 0.0025$, $\Omega_m(0) = 10^{-50}$, $\Omega_r(0) = 5 \times 10^{-10}$, $\lambda(0) = 9.1 \times 10^{-3}$, enquanto que para as relações de coeficiente de dissipação consideramos $Q_r(0) = 10^{-4}$, $Q_{m,1}(0) = 1.2 \times 10^{-40}$ para o correspondente ao coeficiente de dissipação $\Upsilon_{m,1}$ e $Q_{m,2}(0) = 1.7 \times 10^{-65}$ para o coeficiente de dissipação $\Upsilon_{m,2}$ (a combinação dos dois coeficientes de dissipação foram considerados tais para reproduzir o caso análogo estudado em (Lima; Ramos, 2019)	67
Figura 7 -	A região dos parâmetros λ e Q_m permitindo aceleração em tempos tardios	70
Figura 8 -	Imagens das trajetórias do espaço de fase do sistema dinâmico no plano (x, y) para diferentes valores dos parâmetros. Painel a: $Q_m = 0$, $\lambda = \lambda_{\text{accel}}/10$; Painel b: $Q_m = 1$, $\lambda = \lambda_{\text{accel}}/10$; Painel c: $Q_m = 1$, $\lambda = \lambda_{\text{accel}}/2$; Painel d: $Q_m = 1$, $\lambda = \lambda_{\text{accel}}$; Painel e: $Q_m = 1$, $\lambda = 3\lambda_{\text{accel}}$. .	71

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO	11
1.1	Conceitos básicos	11
1.2	Dinâmica do Universo	13
1.2.1	<u>A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker</u>	13
1.2.2	<u>Parâmetros cosmológicos</u>	17
1.3	Universo Primordial	19
1.3.1	<u>Problemas do modelo do Big Bang</u>	20
2	INFLAÇÃO	22
2.1	As falhas do modelo cosmológico padrão corrigidas pela inflação	24
2.2	Dinâmica do inflaton	25
2.3	Inflação fria	27
2.3.1	<u>Condições de rolamento lento para inflação fria</u>	29
2.4	Inflação quente	32
2.4.1	<u>Condições de rolamento lento para inflação quente</u>	34
3	UNIVERSO RECENTE	37
3.1	Problemas do modelo Λ CDM	39
3.1.1	<u>Problema de ajuste da constante cosmológica</u>	39
3.1.2	<u>Problema da coincidência cósmica</u>	40
3.2	Dados observacionais do modelo Λ CDM	40
3.3	Quintessência	44
3.4	Inflação Quintessencial	45
4	SISTEMAS DINÂMICOS	48
4.1	Introdução a sistemas dinâmicos	48
4.2	Teoria da estabilidade linear	50
4.2.1	<u>Exemplo: Sistema dinâmico 2D</u>	52
4.3	Método de Lyapunov	53
4.3.1	<u>Exemplo: estabilidade de Lyapunov</u>	54
4.4	Teoria dos múltiplos centros	55
4.4.1	<u>Exemplo: Teoria do múltiplo centro</u>	58
5	SISTEMA DINÂMICO NO CONTEXTO DA INFLAÇÃO QUIN- TESSENCIAL QUENTE	61
5.1	Modelo proposto	61
5.2	Sistema dinâmico	62
5.3	Dinâmica do tempo tardio	68
5.4	Dinâmica do tempo tardio: sistema dinâmico completo	72

6	ESTABILIDADE DAS CONDIÇÕES DE ROLAMENTO LENTO	
	75
6.1	Sistema dinâmico	75
6.2	Análise de estabilidade do modelo de inflação quente quintessencial	78
6.3	Regimes dissipativos	79
6.3.1	<u>Dissipação forte na radiação, mas fraca na matéria</u>	79
6.3.2	<u>Dissipação fraca tanto na radiação quanto na matéria</u>	82
6.3.3	<u>Energia Escura</u>	84
	CONCLUSÃO	88
	REFERÊNCIAS	90

INTRODUÇÃO

A cosmologia nos últimos anos tem se desenvolvido rapidamente tanto em seus aspectos teóricos como também observacionais. Esse rápido desenvolvimento tem possibilitado um avanço muito grande na nossa compreensão da evolução do Universo desde épocas primordiais até sua história mais recente. Ao mesmo tempo em que esse novo entendimento sobre o Universo se amplia, várias outras questões de extrema relevância têm surgido, tais como uma explicação mais fundamental de inflação com bases em modelos de física de partículas, a natureza da matéria e energia escuras, o problema da constante cosmológica, o problema da coincidência cósmica, entre outros.

Nesse contexto, a cosmologia se tornou um tópico de destaque na física atual, aglutinando diversas áreas da física e suas metodologias, objetivando uma compreensão dos problemas mencionados. É nesse contexto que se baseia esse projeto de pesquisa. Abordaremos os diferentes tópicos relacionados com as diversas propostas de modelos inflacionários e a possível unificação com modelos associados a energia escura.

Além disso, vivemos atualmente numa época de cosmologia de precisão, com diferentes dados observacionais vindo de diferentes fontes, tais como dados obtidos por meio da medida da radiação cósmica de fundo de micro-ondas (Aghanim et al., 2020); dados de aglomeração de galáxias (Anderson et al., 2014; Bautista et al., 2018); lentes gravitacionais (Abbott et al., 2019); da estrutura em larga escala do Universo (Scolnic et al., 2018) de supernovas (Abbott et al., 2019), só para citar algumas das mais importantes. Todos esses dados observacionais apontam para um Universo que é muito bem modelado pelo chamado modelo Λ CDM.

O modelo Λ CDM é o modelo cosmológico mais simples descrevendo os dados observacionais e descreve nosso Universo como constituído de uma constante cosmológica (Λ) que descreve a energia escura como a fonte para a recente expansão acelerada do Universo, e matéria escura fria (CDM), como as componentes de energia dominantes. Finalmente, o modelo Λ CDM é complementado pela ideia de inflação como sendo o paradigma para a solução dos problemas do modelo cosmológico do big bang para o Universo primordial.

Embora inflação, energia escura e matéria escura são considerados como entidades separadas em geral no modelo Λ CDM, há várias propostas tentando formular uma descrição unificada dessas quantidades e regimes dinâmicos (Nojiri; Odintsov, 2006; Guendelman; Nissimov; Pacheva, 2016). Isto é motivado tanto para se obter uma descrição simples para tais diferentes formas de energias que prevaleciam no Universo primordial (inflação) e na história recente (energia e matéria escuras). Espera-se com isso também resolver inconsistências diversas no modelo Λ CDM, tais como questões de ajuste fino de condições (Copeland; Sami; Tsujikawa, 2006), o problema da coincidência cósmica (Steinhardt; Wang; Zlatev, 1999) e do problema da constante cosmológica.

Nesta dissertação, visamos estudar a possível unificação dos regimes inflacionário no Universo primordial e de expansão acelerada (energia escura) no Universo mais recente por meio de efeitos dissipativos. Em particular, procuramos analisar como tais efeitos dissipativos são capazes de produzir uma dinâmica consistente unificando essas duas épocas do Universo. Para tanto, fazemos uso dos chamados modelos de inflação quente (Berera; Moss; Ramos, 2009; Bastero-Gil; Berera, 2009).

Na inflação quente, efeitos dissipativos, intrínsecos das interações microscópicas envolvidas, naturalmente produz uma dinâmica regida por tais efeitos. Inflação quente tem se mostrado na literatura recente como capaz de conciliar teorias de campos escalares renormalizáveis no contexto da inflação e também de possivelmente levar naturalmente a uma fase posterior que, atualmente, pode descrever a energia escura (Lima; Ramos, 2019).

Exploraremos então aqui modelos de inflação quente caracterizados por diferentes tipos de interações entre campos e sua consistência do ponto de vista de sistemas dinâmicos. Generalizamos então trabalhos semelhantes envolvendo interações no setor escuro (Bahamonde et al., 2018), mas agora também dentro de um contexto de dinâmica de campos envolvendo explicitamente efeitos dissipativos que podem atuar tanto no Universo recente como também nos instantes primordiais.

Os tópicos abordados nesta dissertação têm por objetivo buscar uma compreensão geral da natureza dinâmica dos campos interativos e aplicações em cosmologia, especialmente no contexto do Universo primitivo (inflação) e do recente, para descrever a energia escura dinamicamente, ou seja, no caso de modelos definidos como quintessência.

1 MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

1.1 Conceitos básicos

O desenvolvimento da relatividade geral por Albert Einstein no século passado nos permitiu criar uma teoria convincente para descrever o Universo pela primeira vez na história. A relatividade geral combinada com os dados observacionais nos permite entender que o Universo está se expandindo e que já foi muito mais quente e denso em seus primórdios. Isso leva a ideia do modelo do Big Bang.

O sucesso do Big Bang repousa sobre três pilares observacionais: o diagrama de Hubble mostrando a expansão, a abundância de elementos leves que correspondem à nucleossíntese, e a radiação de corpo negro remanescente, também chamada de radiação cósmica de fundo em micro-ondas. Entretanto, indo além do modelo cosmológico padrão do Big Bang, baseado nos três pilares descritos anteriormente, nas últimas duas décadas estudos tanto teóricos como observacionais apontam para

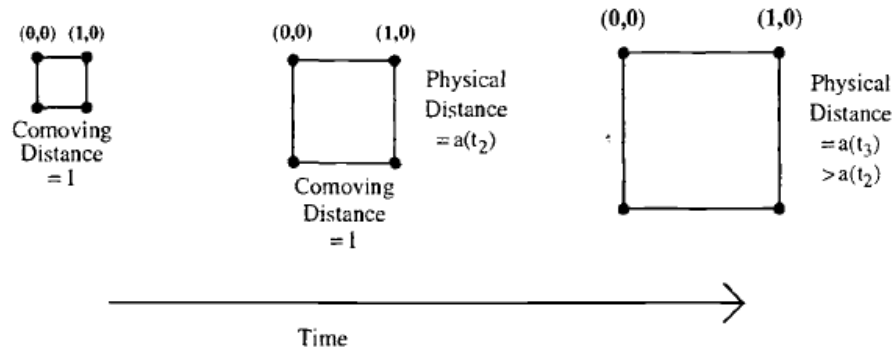
- A existência de matéria escura e de energia escura fria.
- Necessidade de compreender a evolução das perturbações em torno de um Universo predominantemente homogêneo e isotrópico em largas escalas.
- Inflação como originador dessas perturbações.

Existem boas evidências de que o Universo está se expandindo, ou seja, que no início de sua história a distância entre nós e as galáxias distantes era menor do que o que temos hoje. Este efeito é convenientemente descrito pela introdução de um fator de escala a , que em épocas anteriores era menor do que nos dias atuais. Pode-se pensar no espaço como uma grade, como na Fig. 1, que se expande uniformemente ao longo do tempo (Dodelson; Schmidt, 2020).

Além disso, sabemos que o Universo se expande adiabaticamente, ou seja, temperatura (energia) diminui de forma específica ($T \sim 1/a$), e sabendo basicamente como ele se comporta, podemos descrever aproximadamente sua evolução no tempo. Com isso, introduzimos uma grandeza chamada desvio para o vermelho que sempre pode ser definido e medido

$$z = \frac{a_0}{a(t)} - 1 \tag{1}$$

Figura 1 - Expansão do Universo



Fonte: Dodelson, 2020, p.2.

onde a_0 é o fator de escala hoje.

O chamado desvio para o vermelho é uma medida de quanto que o comprimento de onda da luz de um objeto desviou-se para o vermelho, isso ocorre quando o objeto está se afastando do observador. No contexto da cosmologia, pode ser entendido como uma medida de distância, e que quanto maior for o desvio para o vermelho mais rápido o objeto se move. Mas, de acordo com a lei de Hubble, maior será a sua distância, e segundo a relatividade restrita, quanto mais longe o objeto estiver, mais tempo levará para um sinal de luz chegar. Portanto, em cosmologia, a distância também pode ser entendida como tempo.

Atualmente vivemos em uma época em que o Universo é dominado na proporção de aproximadamente 70% com relação a densidade total, pela energia escura, uma energia “misteriosa” que está acelerando o Universo. Caso a expansão do Universo fosse revertida, a segunda fase em que entraríamos seria a dominada por matéria, e em seguida a fase onde a radiação dominaria o conteúdo energético do Universo, isso de acordo com a teoria da relatividade geral.

De qualquer forma, se voltássemos ainda mais, chegaríamos ao Big Bang. No entanto, alguns problemas de ajustes fino foram encontrados no modelo padrão. Para resolver isso, outra era chamada de inflação foi proposta, esse é um paradigma cosmológico que é particularmente relevante e que será abordado mais abaixo¹.

¹ É importante ressaltar que há também propostas alternativas a ideia de inflação, como por exemplo modelos não singulares de ricochete (Cai; Easson; Brandenberger, 2012). Nesta dissertação não abordaremos tais propostas alternativas.

1.2 Dinâmica do Universo

1.2.1 A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

A cosmologia moderna baseia-se no que chamamos de princípio cosmológico, o que nos diz quem em escalas suficientemente grandes acima de aproximadamente (10^8 anos-luz) o Universo é considerado homogêneo e isotrópico.

Esse princípio afirma que a Terra não ocupa uma posição privilegiada no Universo. Essa é uma suposição da cosmologia que leva em consideração as tecnologias atuais que temos disponíveis. Além disso, mesmo que do ponto de vista da Terra o Universo seja observado como isotrópico, essa situação de homogeneidade não pode ser obtida a partir de um único local cósmico, ou seja, precisam de dois locais diferentes separados por uma certa distância cosmológica, de modo que possamos verificar a homogeneidade do Universo. Entretanto, considera-se o princípio como válido para que seja possível estudar o Universo dentro de uma visão científica, sendo validado com as observações (Tamanini, 2014).

Inicia-se com a ação de Einstein-Hilbert na presença de matéria e sem uma constante cosmológica,

$$S = S_{EH} + S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right), \quad (2)$$

em que, $\kappa^2 = 8\pi G$, R é o escalar Ricci, g é o determinante da métrica e \mathcal{L}_m é densidade de Lagrangiana descrevendo o conteúdo de matéria do Universo. Variando-se (2) em relação a $g^{\mu\nu}$ nos fornece as equações de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (3)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor Ricci e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento para a fonte de matéria, na qual

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4)$$

sendo $S_m = \int d^4x \mathcal{L}_m$.

O princípio cosmológico pressupõe que o Universo é extremamente simétrico. A métrica de Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker (FLRW) são baseadas nessas simetrias, que descreve um Universo homogêneo e isotrópico, em que o elemento de linha é

dado por (McGrand,),

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}\theta^2 d\phi^2 \right), \quad (5)$$

em que, $k = -1, 0, +1$ é a curvatura espacial e $a(t) > 0$ (é uma função da coordenada de tempo) que denominamos como fator de escala. Além disso, para cada valor de k pode-se dizer o tipo de curvatura do Universo, ou seja, para $k = 1$, dizemos que o Universo é espacialmente fechado, para $k = -1$, dizemos que o Universo é espacialmente aberto e para $k = 0$, dizemos que o Universo é espacialmente plano (Carroll, 2019). Em relação as coordenadas (r, θ, ϕ) estas são referidas como coordenadas em movimento ou comóvel, ou seja, para um observador que esteja em repouso nestas coordenadas, o mesmo permanecerá em repouso, nas constantes r, θ e ϕ para todo o tempo t .

Diante disso, o fator de escala $a(t)$ relaciona-se de forma linear com os comprimentos espaciais no Universo. Para exemplificar, a distância física radial ($dt = d\theta = d\phi = 0$) entre dois pontos, no caso A e B, no Universo é dado por

$$L_{AB} = \int_A^B ds = a(t) \int_A^B \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (6)$$

em que a integral acima nos permite medir as distâncias radiais em um Universo fechado, plano ou aberto. No caso mais simples ($k = 0$), obtém-se $L_{AB} = a(t)(r_B - r_A)$. É possível notar através de (6) que a separação entre os dois pontos do Universo está evoluindo no tempo em razão do fator de escala, ou seja, quanto maior o fator de escala, mais distante estarão os pontos no Universo.

A partir de (5), pode-se calcular o tensor de curvatura, $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, em termos de sua definição e utilizando-se o símbolo de Christoffel ($\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$),

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\beta}, \quad (7)$$

onde

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}), \quad (8)$$

assim podemos calcular $R_{\mu\nu}$ através de

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}, \quad (9)$$

e R

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (10)$$

De modo, que para o lado esquerdo de (3) temos uma expressão explícita, que pode ser complementada com o termo para $T_{\mu\nu}$. A matéria dentro de um Universo homogêneo e isotrópico pode ser descrita, em grandes escalas e com alta precisão, como um fluido perfeito, o qual está em repouso nas coordenadas comóveis. Logo, temos que o vetor u^μ denota a velocidade quádrupla de um observador em movimento com o fluido e, em coordenadas convergentes, lê-se $u^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ e o tensor energia-momento é

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} , \quad (11)$$

onde ρ é a densidade de energia e p é a densidade de pressão isotrópica exercida pelo fluido. Definimos uma equação de estado, na qual a densidade energética e a pressão do fluido da matéria estão relacionadas por uma equação de estado $p = p(\rho)$, o que nos referimos como (EoS). No caso de fluidos perfeitos, a equação de estado é uma relação linear

$$p_i = w_i \rho_i , \quad (12)$$

sendo w_i o que denominamos de equação do parâmetro de estado (EoS). No caso de matéria, $w_m = 0$ e para um fluido relativístico, no caso radiação, $w_r = \frac{1}{3}$. Nota-se também o limite de w da energia dominante (Hawking; Ellis, 1973), que implica $|w| \leq 1$.

As equações cosmológicas resultantes das equações de campo de Einstein (3) junto com a métrica FLRW (5) são compostas por duas equações diferenciais associadas para o fator de escala $a(t)$ e as variáveis de matéria $\rho(t)$ e $p(t)$. Dessa maneira, podemos chegar no seguinte resultado para as equações de Einstein

$$\frac{kc^2}{a^2} + H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho , \quad (13)$$

Para facilitar as contas, iremos escrever as equações em unidades naturais. Desta forma, temos que $c = 1$, logo

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} . \quad (14)$$

onde o ponto denota a diferenciação em relação ao tempo. A Eq. (14) é a famosa equação de Friedmann, em que $\rho = \rho_m + \rho_r$. Por sua vez, a partir das componentes diagonais das

equações de campo de Einstein, obtém-se a equação de aceleração para a expansão do Universo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) . \quad (15)$$

a evolução do fator de escala $a(t)$ é determinada pelas equações cosmológicas (13) e (15) desde que uma equação de estado relacionada a ρ e p seja assumida. Vemos que, de (15), pode-se obter uma relação sobre as variáveis que estabelece um Universo em aceleração ou desaceleração, de acordo com o sinal de \ddot{a} :

- Se $\rho + 3p > 0$ Universo desacelerando.
- Se $\rho + 3p < 0$ Universo acelerando.

Caso a equação de estado (12) seja mantida, pode-se olhar para a equação do parâmetro de estado, o que indica $w > -\frac{1}{3}$ (desaceleração) e $w < -\frac{1}{3}$ (aceleração). Valores que sejam fisicamente significativos e que estejam entre 0 e 1/3, nos descrevem um Universo em desaceleração.

Pode-se também definir uma equação de continuidade para o fluido utilizando as equações acima. Derivando a Eq. (14) em relação ao tempo obtemos

$$2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] = \frac{8\pi G}{3} \dot{\rho} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{k}{a^2} \quad (16)$$

Substituindo as Eqs. (14) e (15) na (16) obtemos

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 , \quad (17)$$

de maneira a expressar a conservação da energia ao longo da evolução do Universo. Se adotarmos a equação linear de estado (12), temos que a equação de conservação (17) nos fornece a seguinte solução de ρ em termos de a

$$\rho \propto a^{-3(w+1)} . \quad (18)$$

No caso do fluido de matéria, $w_m = 0$ e assim

$$\rho_m \propto a^{-3} , \quad (19)$$

ao passo que para um fluido de radiação, $w_r = \frac{1}{3}$ e assim

$$\rho_r \propto a^{-4}, \quad (20)$$

da Eq. (12), temos que

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (21)$$

o que para o parâmetro de Hubble, resulta (para $w \neq -1$)

$$H \propto \frac{2}{3(1+w)} t^{-1}. \quad (22)$$

Portanto, temos como base este primeiro exemplo de modelo que envolve matéria e radiação, com os comportamentos esperados para $a(t)$, $\rho(t)$ e $H(t)$ para as fases de dominação para radiação e matéria. Visto que a densidade de matéria diminui a um ritmo mais lento do que a densidade de radiação, o que nos mostra que a matéria em algum momento da evolução do Universo será dominante, mesmo que a sua densidade inicial seja menor do que a da radiação.

1.2.2 Parâmetros cosmológicos

Nesta seção iremos abordar sobre o parâmetro de Hubble. Hubble fez medições (Hubble, 1929) relacionadas às velocidades de recuo tendo como base 18 galáxias que se encontravam a distâncias consideráveis, na qual pode encontrar uma relação linear entre velocidade e distância

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (23)$$

em que \vec{v} é a velocidade da galáxia, \vec{r} a sua distancia e H_0 a constante de Hubble. A Eq. (23) é o que denominamos de lei de Hubble. Nos dias atuais sabe-se que H não é considerada mais uma constante, e sim um parâmetro que varia com o tempo. Como forma de compreender essa lei, tomamos com exemplo duas partículas separadas por uma certa distância l_0 , o que depois de um certo tempo t vamos ter a seguinte distância

$$l(t) = a(t)l_0, \quad (24)$$

onde $a(t)$ é o que denominamos de fator de escala, ou seja, que nos diz o quanto o Universo está se expandindo. Além disso, derivando-se a Eq. (24) e efetuando algumas substituições, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{l}(t) &= \dot{a}(t)l_0 , \\ l_0 &= \frac{l(t)}{a(t)} , \\ \dot{l}(t) &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}l(t) , \\ \dot{l}(t) &= H(t)l(t) . \end{aligned} \tag{25}$$

a Eq (25) é geralmente chamada de horizonte e dá a distância máxima que a luz (pensamos na luz como transportadora de informação) viaja desde o início do Universo, ou seja, a importância do horizonte é que este delimita a região em que os eventos estão causalmente conectados.

Geralmente é conveniente escrever a equação de Friedmann de uma forma adimensional. Assim, definimos a densidade crítica do Universo, que se define como a densidade que o Universo teria para um determinado valor do parâmetro Hubble, como $\rho_c = \frac{3H^2}{\kappa^2}$. Dividindo a equação de Friedmann (14), por H^2 , pode-se expressar em termos de parâmetros de densidade adimensionais:

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_K , \tag{26}$$

em que,

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}, \quad \Omega_K = -\frac{k}{a^2 H^2} . \tag{27}$$

Assim, ao longo da evolução do Universo, o termo de curvatura torna-se cada vez mais importante até dominar a equação de Friedmann. Dessa maneira, podemos reescrever (26) como

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r ,$$

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (28)$$

A densidade crítica está relacionada ao valor limite entre um Universo em expansão e um Universo em colapso, onde Ω contém todas as contribuições para a densidade de energia incluindo a curvatura. Podemos ver que a curvatura do Universo controla o valor final do Ω . Caso a densidade do Universo ρ_c exceda, a gravidade se torna dominante e o Universo começa a colapsar. Da mesma maneira, se ρ_c for menor a gravidade é vencida e o Universo se expande indefinidamente. Definindo os seguintes valores para a constante k , temos que

- $k > 0 \Rightarrow \Omega > 1 \Rightarrow$ Universo fechado
- $k = 0 \Rightarrow \Omega = 1 \Rightarrow$ Universo plano
- $k < 0 \Rightarrow \Omega < 1 \Rightarrow$ Universo aberto

1.3 Universo Primordial

Há uma aceitação de que o Universo evoluiu de um estado inicialmente quente e denso para um Universo mais frio e menos denso. Este modelo do Universo é chamado de modelo do Big Bang Quente (ou Hot Big Bang).

O modelo Hot Big Bang do Universo surgiu a partir de observações do desvio para o vermelho. Em 1929, Edwin Hubble construiu sua famosa relação distância-velocidade para galáxias próximas (ver seção 1.2.2). Com base na lei de Hubble, podemos concluir que no passado distante tudo era muito mais próximo e extrapolado ainda mais e assume que o Universo surgiu de uma singularidade onde tudo era quente e denso.

Descrito como o modelo padrão da cosmologia (Hot Big Bang), foi construído de acordo com o Princípio Cosmológico das equações da teoria da relatividade geral de Einstein, e que se baseia em três pontos importantes:

- A descoberta de Hubble em 1929 (Hubble, 1929) da expansão do Universo com medições, mostrou que a velocidade com que as galáxias recuavam era proporcional à sua distância.
- Com a previsão feita por Alpher e Herman sobre a existência da Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas, ou CMBR (do inglês, *Cosmic Microwave Background Radiation*) no final da década de 40 e que Penzias e Wilson descobriram pela primeira

vez em 1965. Ao usarem uma antena para teste, eles notaram que havia ruído de fundo que não conseguia ser eliminado e que denominaram como excesso de temperatura da antena (Penzias; Wilson, 1965). Esta é uma das descobertas mais importantes da cosmologia, na qual Dickey, Peebles, Rolle e Wilkinson colocam essa observação em um contexto cosmológico (Dicke et al., 1965).

A Radiação Cósmica de Fundo (RCF)², refere-se à radiação na faixa do micro-ondas, sendo emitidas do espectro térmico de um corpo negro com uma temperatura de cerca de 2,725K (Mather et al., 1999) que parou de interagir com a matéria do Universo um período de desacoplamento³. À medida que o Universo se expandia e esfriava, os fótons perdiam energia e, a partir de certo ponto, não tinham mais energia suficiente para ionizar os átomos de hidrogênio, o elemento mais abundante no Universo. De acordo com observações dos satélites COBE (Wright et al., 1992) e WMAP (Komatsu et al., 2009), esta radiação é precisamente isotrópica numa precisão de 1 parte em 10⁵. Essa anisotropia, embora muito pequena está relacionada com as perturbações que acabam dando origem as estruturas em larga escala no Universo.

- A teoria da nucleossíntese (Gamow, 1948) nos descreve a formação de elementos leves (como hidrogênio (75%), hélio (25%)), aproximadamente, bem como vestígios de berílio e lítio) e que os elementos mais pesados foram posteriormente formados por conta dos processos nucleares em estrelas e explosões estelares. A teoria prevê a abundância relativa desses elementos, o que é consistente (com exceção do lítio) com as observações de variações da RCF dos satélites COBE e WMAP (e mais recentemente com o satélite de Planck).

Esses fatos fizeram do modelo do Big Bang uma teoria bem-sucedida. No entanto, logo ficou claro que tinha alguns problemas, que foram corrigidos posteriormente com a ideia de inflação. Vejamos quais são esses problemas e como a ideia de inflação resolve tais problemas.

1.3.1 Problemas do modelo do Big Bang

- **Problema da Planicidade:** A essência do problema da planicidade é que vivemos em um Universo que aparenta ser extremamente plano. Da expressão para $a(t)$, Eq. (15), temos um $\ddot{a} < 0$ para a época dominada tanto pela radiação quanto pela

² Ao longo do trabalho usarei a abreviação RCF ao invés da sigla em inglês CMBR.

³ À medida que o Universo esfriava para cerca de 3000 K, núcleos e elétrons se combinavam para formar átomos neutros. O número de elétrons livres diminuiu drasticamente e os fótons começaram a viajar livremente. Este processo é chamado de desacoplamento de fótons da matéria.

matéria. Isso significa que \dot{a} está diminuindo, então $a^2 H^2 = \dot{a}^2$ está diminuindo. Da Eq. (28) vemos que para qualquer $k \neq 0$, implica que Ω deve desviar da unidade e quanto mais remoto é o tempo que consideramos, maior é o ajuste necessário no termo de curvatura k . Mas notamos que atualmente Ω está muito próximo da unidade (Komatsu et al., 2009). Isso significa que Ω deve estar muito próximo da unidade no início do Universo, ou seja, quase plano. Isso requer uma adaptação das condições originais. Pequenos desvios em Ω podem causar o colapso ou expansão significativa do Universo sem produzir as estruturas que vemos hoje, o que denominamos de problema da planicidade e para o qual o modelo HBB não tem explicação.

- **Problema do Horizonte:** Assumimos que o Princípio Cosmológico descreve todo o nosso Universo. De fato, vemos que a partir do mesmo podemos construir uma teoria sólida apoiada por evidências observacionais. No entanto, a RCF observada hoje emitida quando o Universo tinha cerca de 300.000 anos (Penzias; Wilson, 1965) é recebida de forma isotrópica e na mesma temperatura (com uma precisão de uma parte em 10^5). Entretanto, podemos fazer o seguinte questionamento: como pontos tão distantes que nunca tiveram contato podem ter entrado em equilíbrio térmico? Essa discordância é conhecida como o problema do horizonte. Este é um dos pontos que a teoria do Big Bang não consegue explicar.

- **Problema da Estrutura em larga escala:** Ao contrário do problema do horizonte, temos um problema de estrutura em larga escala. Se o Universo fosse completamente homogêneo, como as estruturas se formariam? Como surgiram as galáxias e os aglomerados de galáxias? Portanto, algum mecanismo deve ter criado as perturbações que o resultou nas anisotropias RCF observadas hoje, permitindo a formação das estruturas. O que modelo do Big Bang sozinho não poderia explicar qual teria sido a origem dessas perturbações.

- **Monopolo magnético:** A física do Universo primitivo lida com valores de energia tão altos que acredita-se que as forças fundamentais da natureza não eram distinguidas umas das outras. As teorias que tentam descrever esse fenômeno são chamadas de *Grand Unified Theory* (GUT) (Georgi; Glashow, 1974). Uma das previsões da GUT é que o Universo deveria ter passado por uma transição de fase quando era muito jovem ($t \sim 10^{-36} s$). Esse tipo de transição de fase geralmente é acompanhado pela criação de defeitos topológicos e a maioria dos modelos da GUT prevê a formação de monopolos magnéticos.

2 INFLAÇÃO

Na década de 70, o modelo do Big Bang explicou com muito sucesso duas propriedades qualitativas gerais do nosso Universo: sua expansão e a presença de radiação de fundo de micro-ondas, além de alcançar sucessos quantitativos na teoria da nucleossíntese dos elementos leves. No entanto, como discutido acima, o modelo do Big Bang apresenta problemas que, no início da década de 80, motivaram a introdução da ideia de inflação.

A ideia de inflação está associada a uma época nos instantes iniciais em que o Universo se expandiu de forma acelerada. Uma possível causa imediata que temos está relacionada a uma componente de energia que possua uma pressão negativa, o que pode ser notado usando a condição $\ddot{a} > 0$ em (15)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \Rightarrow p < -\frac{\rho}{3} \quad (29)$$

essa componente de energia, denominada de energia do vácuo, que domina outras formas de energia pode ser associada a um campo escalar chamado ínflaton. Assim, a dinâmica do ínflaton atua como um mecanismo para a fase de inflação no Universo.

A ideia de inflação foi proposta por (Guth, 1981) e consiste em um modelo em que o Universo se expande de forma rápida, devido a uma transição de fase cosmológica de primeira ordem e na qual o Universo sofre super-resfriamento. Embora essa ideia, conhecida hoje como *inflação antiga*, seja problemática, é historicamente importante porque demonstrou que a inflação é capaz de resolver os problemas do HBB. A entrada do Universo na fase de radiação que é importante no cenário inflacionário era um problema, e que ficou conhecido como o “problema da saída elegante” (Linde, 1982; Albrecht; Steinhardt, 1982).

De maneira a querer resolver os problemas do modelo de inflação original de Guth, (Linde, 1982), Albrecht e Steinhardt (Albrecht; Steinhardt, 1982), em 1982, de forma independente, propuseram o modelo chamado de *inflação nova*. Este modelo é baseado em uma transição de fase cosmológica de segunda ordem em um sistema de rolagem lenta, em que o ínflaton rola para um mínimo de energia potencial, durante a qual ocorre expansão, seguida por uma segunda fase chamada reaquecimento. A segunda etapa é importante, pois é onde as partículas são geradas.

A formação das partículas ocorre assumindo (somente neste ponto) acoplamento não nulo a outros campos e que o ínflaton oscila em torno de uma energia potencial mínima. São essas oscilações que dão origem à formação de partículas por meio da produção de partículas quanticamente. No entanto, este modelo tem o problema de ter um “pseudovácuo” para obter uma inflação necessária para resolver as falhas da HBB.

Linde, em 1983, então propôs a *inflação caótica* (Linde, 1983), onde o estado inicial era caótico, na qual o valor inicial do ínflaton é tomado como caótico, isto é, assume valores aleatórios para diferentes regiões do Universo. Além de não precisar de transição de fase, isso resolveu os problemas das inflações antiga e nova baseado inteiramente no sistema de rolamento lento e tem o potencial suficiente para causar inflação. Este modelo é, portanto, bastante flexível, graças à grande liberdade na escolha do potencial e das condições iniciais.

Os modelos de inflação mencionados até agora podem ser classificados como modelos de inflação fria. Eles recebem esse nome por conta do super-resfriamento que resulta da diluição da radiação causada pela expansão porque não há produção de radiação simultânea a inflação para aquecer o Universo.

Pode-se também considerar os modelos classificados como inflação quente. Ao contrário ao da inflação fria, na inflação quente os acoplamentos do ínflaton com outros campos não são desprezados durante o regime inflacionário. Como consequência, radiação pode ser produzida durante o mesmo. Isso ocorre porque a relatividade geral não limita a existência de radiação durante a inflação, desde que a energia do vácuo seja dominante. Portanto, em um regime que produz radiação suficiente durante a inflação, é possível evitar o super-resfriamento e com isso manter o Universo aquecido. Desta forma, o fim do período inflacionário pode ser alcançado sem um mecanismo de reaquecimento, sendo possível ter uma transição suave para a era da radiação. Assim, a inflação quente oferece uma solução para o problema conhecido como “saída elegante”, já citado.

Pela primeira vez, Fang (Fang, 1980) propôs um sistema inflacionário envolvendo a produção simultânea de partículas e introduziu um termo de dissipação devido à transição de fase em conexão com a teoria de Landau. Contudo, seu termo de dissipação é diferente ao de inflação quente, como em (Guth, 1981), seu trabalho foi um dos pioneiros neste tema de inflação.

Mais tarde, tivemos os trabalhos de Moss (Moss; Graham, 2008), Yokoyama e Maeda (Yokoyama; Maeda, 1988) nos anos de 1985 e 1987, em que acrescentaram um termo dissipativo local de forma intuitiva à equação de fundo do ínflaton e mostraram que o mesmo pode produzir radiação. Entretanto, Berera e Fang (Berera; Fang, 1995), no ano de 1995 conseguiram demonstrar que a dinâmica correta do ínflaton está de acordo com a equação de Langevin (Langevin, 1908). Em seguida, Berera (Berera, 1995) mostrou que a etapa adicional de reaquecimento pode ser de forma consistentemente eliminada. Essa é a natureza da inflação quente, onde a produção de radiação ocorre durante a inflação, até que a energia do ínflaton seja dissipada por completa em radiação e entramos na era da radiação.

Um problema muito importante com o advento da inflação quente é derivar sua dinâmica a partir de princípios básicos por meio da teoria quântica de campos. De fato, uma teoria de campo térmica (Bellac, 1996), ou seja, uma teoria de campos que combina

efeitos quânticos e térmicos, é necessária para estudar fenômenos dinâmicos, como no caso do ínflaton e banho de radiação na inflação quente.

A inflação quente parece mais natural de duas maneiras. Primeiro, as partículas também são formadas durante a inflação no sentido de que o acoplamento do ínflaton a outros campos é importante durante o regime inflacionário. Em segundo lugar, a transição para a era de radiação é de forma suave, sem resfriamento ou uma fase subsequente abrupta de aquecimento (Berera; Moss; Ramos, 2009).

Um dos pontos mais importantes da inflação é a criação de perturbações de densidade. Durante a inflação, o ínflaton pode sofrer perturbações de origem quântica e térmica e devido à expansão, e esses “distúrbios” tornam-se mais fortes e podem ser considerados clássicos ao cruzar o horizonte de Hubble (quando $\lambda > 1/H$, com λ o comprimento de onda associado a essas perturbações). Essas perturbações são observadas na radiação cósmica de fundo. As flutuações quânticas e térmicas são as principais características da inflação fria e quente, respectivamente.

2.1 As falhas do modelo cosmológico padrão corrigidas pela inflação

As deficiências do modelo do Universo padrão foram corrigidas pela inflação descrita nas últimas seções. Guth não foi o primeiro a estudar a inflação, mas foi um pioneiro em seu trabalho (Guth, 1981) e mostrou como a inflação poderia melhorar essas deficiências. As quatro principais são

- **Planicidade:** A inflação nos diz que o Universo está se expandindo exponencialmente em um curto período de tempo, resolvendo o problema da planicidade. A partir de (28) e tanto para a inflação fria quanto para a inflação quente $a = a_0 e^{(Ht)}$, temos que

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \rightarrow \Omega - 1 = \frac{k}{a_0 e^{(Ht)} H^2} \rightarrow \Omega \approx 1 \quad (30)$$

para Ht suficientemente grande ($Ht \gtrsim 60$). Assim, a partir do Universo inicial, o coeficiente de densidade é muito próximo da unidade, o que resolve o problema de ajuste fino das condições iniciais. Logo, temos que a razão $|\Omega - 1|$ entre o fim e o início da inflação

$$\frac{|\Omega_f - 1|}{|\Omega_i - 1|} \sim \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N} \quad (31)$$

o que deverá ser da ordem 10^{-60} , em que $|\Omega_f - 1| \approx 10^{-60}$ e assume-se $|\Omega_i - 1| \approx 1$. Com isso, para a solução do problema de planicidade precisa-se que $N \gtrsim 60$, onde N está

relacionado ao número de e-folds e que já foi assumido (Baumann, 2012).

- **Horizonte:** A inflação resolve esse problema de maneira simples. O Universo que agora não poderia estar em contato causal já esteve anteriormente. O Universo possuía menor escala, de forma que todos os seus pontos possuíam contato causal. No entanto, a inflação fez com que o Universo se expandisse exponencialmente, separando pontos que antes estavam próximos, mas continham as informações de antes da expansão. Isso explica o alto grau de uniformidade da temperatura RCF observada pelos satélites COBE, WMAP e Planck. Assim como no problema da planicidade, pode-se mostrar que $N \gtrsim 60$ também resolve o problema do horizonte (Lyth; Riotto, 1999).

- **Formação das estruturas:** Durante a inflação, surgem perturbações de densidade devido às flutuações quânticas (inflação fria) ou térmicas (inflação quente) do ínflaton. À medida que o Universo se expandiu, essas flutuações foram amplificadas e empurradas para além do horizonte de eventos e agora podem ser consideradas flutuações clássicas (no caso das flutuações quânticas em inflação fria). Ao final da inflação, as mesmas não estão em contato causal porque ficam fora do horizonte, no entanto, como está agora na era de radiação, o horizonte volta a crescer e as flutuações retornam para dentro do mesmo. Voltando ao horizonte, essas perturbações agora aparecem como perturbações de grande escala visualizados pela observação da RCF.

- **Produção de resíduos:** Durante a expansão acelerada, a densidade de energia (energia do vácuo) do Universo muda muito lentamente. No entanto, partículas massivas, como os monopolos, são rapidamente diluídas devido à expansão inflacionária. O mesmo vale para os outros defeitos topológicos.

2.2 Dinâmica do ínflaton

O ínflaton é um campo escalar responsável pela inflação. Por isso, devemos entender sua dinâmica no espaço-tempo. Na métrica FRLW, dada pela Eq. (5) e a partir da Eq. (13) obtemos a equação de Friedmann

$$\frac{k}{a^2} + H^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{3}. \quad (32)$$

Durante a inflação, o fator de escala aumenta muito rapidamente e, portanto, o primeiro termo da Eq. (32) pode ser desprezado. Isso nos leva então a

$$H^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{3} . \quad (33)$$

Fazendo-se $k = 0$ e colocando em coordenadas cartesianas, a métrica FRLW pode ser expressa de forma

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} [1, -a(t)^2, -a(t)^2, -a(t)^2] . \quad (34)$$

A ação de Einstein-Hilbert para a relatividade geral é

$$S_{E-H} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R} , \quad (35)$$

e que a ação para o campo escalar é da seguinte forma

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) . \quad (36)$$

Assumindo um acoplamento mínimo com a gravidade, $\zeta \phi^2 \mathcal{R} = 0$ ($\zeta = 0$). Do teorema de Noether (Weinberg, 1972), o tensor energia-momentum é dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} , \quad (37)$$

através do qual pode-se obter a densidade de energia

$$\rho = T^{00} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{a(t)^2} + V(\phi) , \quad (38)$$

e a densidade de pressão (Mukhanov, 2005),

$$p = \frac{1}{3} \sum_i T^{ii} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{a(t)^2} - V(\phi) . \quad (39)$$

Supondo que o campo escalar seja homogêneo, como o ínfaton (notando que durante a inflação os termos com o gradiente espacial em (38) e (39) rapidamente tornam-se desprezíveis), temos portanto apenas os seguintes termos

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) , \quad (40)$$

e

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) . \quad (41)$$

De (40) e (41), o tensor energia-momentum do ínflaton pode ser comparado ao de um fluido ideal,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} . \quad (42)$$

Neste ponto, é importante notar que em um sistema onde o ínflaton varia lentamente, temos $p \approx -\rho$, esta é exatamente a equação de estado que estamos procurando à medida que a expansão do Universo está se acelerando. Portanto, quando temos $\dot{\phi}^2/2 \ll V(\phi)$ nas Eqs. (40) e (41), o ínflaton é bem adequado para descrever regimes inflacionários.

Variando-se a ação completa $S = S_{E-H} + S_\phi$ em relação a ϕ , obtemos a equação de movimento para o ínflaton

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + V_\phi(\phi) = 0 , \quad (43)$$

em que $V_\phi(\phi) = dV(\phi)/d\phi$. Na métrica FRLW, obtemos então que

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi(\phi) = 0 , \quad (44)$$

e a equação acima é a equação de Klein-Gordon (Peskin, 2018) para o ínflaton, mas com o termo de “fricção” ($3H\dot{\phi}$) devido ao acoplamento do ínflaton com a métrica.

2.3 Inflação fria

Conforme mencionado, na inflação fria, o ínflaton é considerado isolado dos outros campos durante a inflação. Como não há produção de radiação, a entropia desta, $S_r = s_r a(t)^3$, permanece constante. Além disso, pode-se dizer que temos uma expansão

adiabática e conseqüentemente isentrópica. Logo, de acordo com a primeira lei da termodinâmica, temos que

$$d [\rho a(t)^3] = -pd [a(t)^3] , \quad (45)$$

$$d [\rho a(t)^3] = -w\rho d [a(t)^3] , \quad (46)$$

e

$$\rho \propto a(t)^{-3(1+w)} . \quad (47)$$

Com isso, pode-se usar a equação de estado (12). Tratando-se do ínflaton, $w = -1$, e que da equação (17) podemos notar que durante a inflação a energia do vácuo associada ao ínflaton, ρ_ϕ , mantém-se (aproximadamente) constante

$$\rho_\phi \propto cte , \quad (48)$$

concluimos da equação de Friedmann (14) que o parâmetro de Hubble permanece quase constante durante a inflação, uma vez que a energia do vácuo é aproximadamente constante e dominante durante a inflação.

Vimos que para a radiação, $p_r = \rho_r/3$ e portanto, $\rho_r \propto a(t)^{-4}$, válida durante o equilíbrio termodinâmico. Além disso, sabe-se que a mesma obedece a lei, $\rho_r \propto T(t)^4$ (Kolb; Turner, 1990), logo

$$\rho_r \propto T(t)^4, \quad s_r \propto T(t)^3, \quad T(t) \propto a(t)^{-1} , \quad (49)$$

onde usamos $E = T(t)S$. Assim, vemos que a temperatura diminui inversamente com o fator de escala. O super-resfriamento se dá por conta do fator de escala crescer de forma rápida durante o regime inflacionário e que também pode ser compreendido através da equação de conservação da energia para a radiação

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 , \quad (50)$$

como H permanece aproximadamente constante, pode-se integrar para obter

$$\rho_r \propto e^{-4Ht} . \quad (51)$$

É possível notar que na equação anterior, temos a diluição da radiação devido à expansão.

Portanto, na inflação fria não há termo de dissipação e, portanto, não há geração de entropia. A radiação originalmente presente no Universo é rapidamente diluída pela expansão, resultando no super-resfriamento do Universo. Ao final do regime inflacionário, ocorre o chamado período de reaquecimento, quando o ínflaton se aproxima de seu mínimo de potencial e oscila em torno desse mínimo. Dessa maneira, o ínflaton passa a interagir com outros campos e decai em radiação, reaquecendo o Universo. O decaimento por sua vez cria um termo de dissipação que amortece as oscilações do ínflaton. A equação que descreve esse decaimento do ínflaton é da seguinte forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma\dot{\phi} + V_{\phi}(\phi) = 0 \quad (52)$$

em que o novo termo $\Gamma\dot{\phi}$ está associado ao decaimento do ínflaton em radiação. Note que na inflação fria a produção de partículas é assumida ser efetiva somente após o regime inflacionário. Não há produção de radiação durante a inflação.

2.3.1 Condições de rolamento lento para inflação fria

A inflação ocorre em um estado conhecido como rolamento lento, onde o termo do potencial domina a parte cinética, o que resulta em uma pressão negativa. Como o termo cinético é pequeno, podemos aproximar a equação de Friedmann tal que

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] \approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi) . \quad (53)$$

Considerando que ϕ tenha um valor inicial grande, pode-se argumentar que o termo de fricção $3H\dot{\phi}$ terá domínio sobre o termo de aceleração na Eq. (44). Desse modo, as seguintes condições poderão ser usadas

$$V \gg \frac{\dot{\phi}^2}{2} ,$$

e

$$3H\dot{\phi} \gg \ddot{\phi}, \quad (54)$$

e a equação de movimento para o ínflaton pode ser aproximada para

$$3H\dot{\phi} + V_{\phi}(\phi) = 0. \quad (55)$$

Podemos trabalhar com alguns potenciais para o ínflaton e que são mais simples e que estão na literatura, são eles: $V(\phi) = m^2\phi^2/2$ e $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$. Utilizaremos o primeiro potencial para que possamos ter uma solução compreensível.

A partir do potencial $V(\phi) = m^2\phi^2/2$, e de acordo com as Eqs. (53) e (55), as mesmas ficam da seguinte maneira

$$H^2 = \frac{4\pi G}{3}m^2\phi^2,$$

$$3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0. \quad (56)$$

logo, as soluções são

$$\phi = \phi_0 - \frac{mM_{pl}}{\sqrt{12\pi}}t,$$

e

$$a = a_0 e^{Ht} = a_0 e^{\left[\left(\phi_0 - \frac{mM_{pl}}{\sqrt{12\pi}}t\right)\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\frac{m}{M_{pl}}t\right]}. \quad (57)$$

Agora podemos definir dois parâmetros importantes chamados de parâmetros de rolamento lento, que são condições para que ocorra a inflação. De acordo com os termos $V \gg \frac{\dot{\phi}^2}{2}$ e $3H\dot{\phi} \gg \ddot{\phi}$, podemos definir

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \cong \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_{,\phi}}{V}\right)^2,$$

e

$$\eta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \cong \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V_{,\phi\phi}}{V} \right)^2 . \quad (58)$$

Desde que as seguintes condições sejam atendidas, o regime de inflação ocorrerá

$$\epsilon \ll 1, \quad |\eta| \ll 1 . \quad (59)$$

No entanto, deve-se notar que os parâmetros de rolamentos lentos só limitam a forma do potencial (Liddle; Parsons; Barrow, 1994), portanto a validade da aproximação não pode ser totalmente garantida. Em princípio, o parâmetro $\dot{\phi}$ é independente e pode assumir grandes valores.

Agora podemos determinar a quantidade de inflação ou o número de e-folds, definido por

$$N = \ln \left(\frac{a(t)}{a_0} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt \approx -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi \quad (60)$$

em que e-fold é definido como o tempo que leva $a(t)$ para crescer por um fator de e , ou seja, $\Delta t = H^{-1}$. A fim de querer resolver as falhas da TBB necessitamos que $N > 60$ (Baumann, 2012).

De acordo com o potencial escolhido, $V = m_\phi^2 \phi^2 / 2$, e pela seguinte condição $\epsilon = 1$, para o final da inflação, temos que

$$\phi_f = \frac{M_{pl}}{\sqrt{4\pi}} . \quad (61)$$

Utilizando-se $\phi_f = \frac{M_{pl}}{\sqrt{4\pi}}$ em N e considerando como por exemplo $N = 70$, obtém-se

$$\phi_i \simeq 3.3 M_{pl} . \quad (62)$$

Fazendo as substituições ϕ_i e ϕ_f na equação de solução do ínflaton, Eq. (57), obtemos um tempo de inflação de $t \sim 10^{-12} GeV^{-1} s$, para o qual usamos $M_{pl} = 1.22 \cdot 10^{-19} GeV$ e $m \approx 5 \cdot 10^{-7} M_{pl}$ (Kolb; Turner, 1990). Logo, a inflação consiste em uma expansão exponencial em um período de tempo muito curto.

2.4 Inflação quente

No caso da inflação quente, a interação do ínflaton com outros campos é importante durante o período inflacionário. Essas interações são responsáveis por gerar radiação através do decaimento do ínflaton, o que faz aumentar a entropia. O efeito de produção de radiação se manifesta na equação de movimento do ínflaton através de um termo $\Upsilon\dot{\phi}$ na equação original da inflação fria.

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Upsilon\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 . \quad (63)$$

na qual, o termo $\Upsilon\dot{\phi}$ é a única diferença em relação a inflação fria, ou seja, uma aproximação levada em consideração por conta do decaimento do ínflaton devido à sua interação com os campos que contém o banho térmico no qual está imerso, sendo válido apenas quando este se mantém próximo ao equilíbrio térmico (Berera; Fang, 1995). Em geral, esse termo está relacionado por meio de um teorema de flutuação-dissipação, mas os detalhes disso dependeriam do estado estatístico do sistema e da dinâmica microscópica.

Durante o regime inflacionário, há uma competição entre a produção de radiação e a expansão. Pode-se visualizar melhor essa questão ao reescrever a equação de movimento do ínflaton (63) da seguinte forma

$$\ddot{\phi} + 3H(1 + Q)\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 . \quad (64)$$

onde foi definido que $Q \equiv \Upsilon/3H$. Q dá uma medida da efetividade de produção de radiação na inflação quente. Dois regimes são usualmente definidos. Para $Q < 1$ define-se o que se chama de regime de dissipação fraca, enquanto que $Q > 1$ denomina-se regime de dissipação forte.

Note que agora a equação para a radiação também se modifica para:

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = \Upsilon\dot{\phi}^2 \quad (65)$$

o termo $\Upsilon\dot{\phi}^2$ entra como um termo de fonte para a radiação.

Algo importante a ser falado é a questão da diferença entre a inflação fria e a inflação quente. Além da modificação na Eq. (64), as perturbações em inflação quente são diferentes daquelas em inflação fria. Durante o período de inflação, geram-se flutuações que estão associadas ao ínflaton. Essas flutuações acabam levando as inomogeneidades (diferença de temperatura) observadas na RCF. Essas inomogeneidades eventualmente serão as responsáveis pela formação das estruturas do Universo. As flutuações ou per-

turbações geradas durante a inflação são consideradas como o gerador da formação das estruturas. No entanto, essas perturbações podem ser quânticas ou térmicas. Flutuações quânticas são típicas para a inflação fria, enquanto que flutuações térmicas são para a inflação quente. Tomando a temperatura de Hawking H como ponto de partida, se ela for maior que a temperatura de radiação T_r , haverá predominância das flutuações quânticas sobre as térmicas. Se a temperatura associada à radiação for maior que a temperatura de Hawking, então teremos o domínio das flutuações térmicas (Berera, 2006), ou seja, inflação quente. Portanto, a separação da inflação fria e quente ocorre no ponto $T_r \approx H$. Assim, a ocorrência de inflação quente requer a condição

$$T_r > H . \quad (66)$$

Lembrando que a densidade de radiação pode ser expressa como $\rho_r \propto T^4$, a mesma condição pode ser expressa por

$$\rho_r^{1/4} \gtrsim H . \quad (67)$$

O termo $\Upsilon \dot{\phi}$ na equação de conservação de energia para o ínflaton (63) representa uma perda de energia. Este termo de perda deve concordar com o termo de ganho de energia na equação de conservação de energia do fluido de radiação para que a energia total seja conservada. A Eq. (63) pode ser escrita em termos da densidade do ínflaton (ρ_ϕ), tal que

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(p_\phi + \rho_\phi) = -\Upsilon \dot{\phi}^2 . \quad (68)$$

Da conservação da energia total, a equação da radiação é portanto

$$\dot{\rho}_r + 3H(p_r + \rho_r) = \Upsilon \dot{\phi}^2 , \quad (69)$$

a partir desta equação de radiação, lembrando que $p_r = \rho_r/3$, obtém-se

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r + \Upsilon \dot{\phi}^2 \equiv -4H\rho_r + 3HQ\dot{\phi}^2 . \quad (70)$$

A parcela $4H\rho_r$ representa o decaimento exponencial da radiação, como na inflação fria. Já a parcela $\Upsilon \dot{\phi}^2 \equiv 3HQ\dot{\phi}^2$ representa a radiação produzida durante a inflação e que entra como um termo de fonte na Eq. (70).

2.4.1 Condições de rolamento lento para inflação quente

Como na inflação fria, podemos obter agora as condições de aproximação de rolamento lento equivalentes para o caso da inflação quente. Partimos das equações:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \rho_r \right] , \quad (71)$$

$$\ddot{\phi} + 3H(1+Q)\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 , \quad (72)$$

e

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = \Upsilon\dot{\phi}^2 . \quad (73)$$

Fazendo-se as mesmas aproximações da inflação fria e com a adição das aproximações $4H\rho_r \gg \dot{\rho}_r$ e $\Upsilon\dot{\phi}^2 \gg \dot{\rho}_r$ na Eq. (73) isso corresponde quase a um decaimento estável do ínflaton em radiação. Isso significa que ρ_r não mudará muito e permanecerá pequeno.

Temos, portanto

$$V \gg \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \rho_r , \quad (74)$$

$$3H(1+Q)\dot{\phi} \gg \ddot{\phi} , \quad (75)$$

$$4H\rho_r \gg \dot{\rho}_r , \quad (76)$$

e

$$\Upsilon\dot{\phi}^2 \gg \dot{\rho}_r . \quad (77)$$

e as Eqs. (71) - (73) ficam então

$$H^2 \cong \frac{8\pi G}{3} V, \quad (78)$$

$$3H(1+Q)\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (79)$$

e

$$4H\rho_r \cong \Upsilon\dot{\phi}^2. \quad (80)$$

Agora podemos definir os parâmetros de rolamento lento análogos à inflação fria. Definiu-se as generalizações dos parâmetros ϵ e η , relacionados à restrições na forma do potencial, porém, acrescentamos dois parâmetros β e δ ,

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 = \frac{\epsilon}{1+Q}, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V_{,\phi\phi}}{V} \right) = \frac{\eta}{1+Q}, \quad (81)$$

$$\beta = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{\Upsilon_{,\phi} V_{,\phi}}{\Upsilon V} \right), \quad b = \frac{TV_{,\phi T}}{V_{,\phi}}, \quad (82)$$

onde o parâmetro β refere-se à necessidade do coeficiente de dissipação ser não nulo. No caso de $b \ll 1+Q$ é garantido que as correções térmicas do potencial sejam pequenas em comparação com o termo clássico. O período inflacionário continua enquanto as seguintes condições forem atendidas

$$\bar{\epsilon} \ll 1 \Rightarrow \epsilon \ll 1+Q, \quad |\beta| \ll 1 \Rightarrow |\eta| \ll 1+Q, \quad \beta \ll 1+Q, \quad b \ll 1+Q. \quad (83)$$

Outra quantidade modificada é a já definida quantidade de e-folds, que agora é dada por

$$\bar{N} = \ln \left(\frac{a(t)}{a_0} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \frac{-8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V(1+Q)}{V'} d\phi. \quad (84)$$

Ao observar os parâmetros de rolamento lento e o número de e-folds, vemos claramente que a dissipação do ínflaton tem o efeito de aumentar a eficácia do parâmetro de rolamento lento, ou seja, aumentando o tempo de inflação e, portanto, aumentando o número

de e-folds. Agora escolhendo o mesmo potencial usado na inflação fria, $V = m_\phi^2 \phi^2 / 2$, para efeito de comparação, temos que

$$\phi = \phi_0 + \frac{nM_{Pl}}{\sqrt{12\pi}} \left(-t + \frac{1}{m^2} \int_\phi^{\phi_0} \frac{\Upsilon}{\phi} d\phi \right) \quad (85)$$

$$a = a_0 e^{Ht} = a_0 \exp \left\{ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left[\left(\phi_0 - \frac{mM_{Pl}}{\sqrt{12\pi}} t \right) \frac{m}{M_{Pl}} t + \int_\phi^{\phi_0} \frac{\Upsilon}{mM_{Pl}} d\phi \right] \right\} \quad (86)$$

Podemos ver a partir das Eqs. (85) e (86) que o termo relacionado à dissipação, considerando as mesmas condições iniciais que seriam usadas na inflação fria, a dissipação aumenta o tempo de inflação e, portanto, o número de e-folds. Isso implica por exemplo em condições iniciais menos restritas do que daqueles da inflação fria para obter o mesmo número de e-folds, graças ao termo de dissipação.

3 UNIVERSO RECENTE

O conceito de matéria escura foi introduzido na década de 1930 para explicar o movimento das estrelas observadas na Via Láctea (Oort, 1932) e para explicar o movimento das galáxias observadas no aglomerado Coma (Zwicky, 1933). Em ambos os casos, a velocidade medida dos objetos astronômicos estudados, estrelas e galáxias, parecia ser maior do que se esperava da força gravitacional dada pela massa aparente de seus respectivos sistemas, Via Láctea e aglomerado Coma. Esses resultados indicam que uma grande fração da massa total desses sistemas deve estar contida em matéria invisível.

Até agora, a matéria escura só foi detectada através de seus efeitos gravitacionais. Há muitos indícios de detecção indireta, que são de pouca utilidade na determinação de sua natureza (Huterer; Shafer, 2017). Uma das poucas coisas que sabemos é que a maior parte da matéria escura do Universo é não bariônica. Sabe-se disso porque a teoria do Big Bang e a análise RCF fornecem restrições severas nas densidades da matéria bariônica, resultando em valores muito inferiores aos calculados com base nas taxas de expansão, válido se a RG valer.

Olhando para o quadro geral através das observações cosmológicas e astrofísicas (Ade et al., 2014), existem pelo menos dois componentes “invisíveis”, matéria e energia escura, que fazem parte da densidade total de energia do Universo. Eles compõem aproximadamente 95% da densidade total do Universo: onde $\sim 30\%$ é na forma de matéria escura e $\sim 65\%$ é na forma de energia escura, onde os $\sim 5\%$ restantes são matéria bariônica (Ade et al., 2014). Essas duas novas formas de matéria e energia não interagem ou interagem fracamente com o campo eletromagnético e, portanto, são muito difíceis de serem detectadas diretamente. Por outro lado, a matéria escura parece se aglomerar e se comportar como poeira, ou seja, matéria sem pressão, sugerindo que pode ser por exemplo, alguma partícula estável predita em extensões do modelo padrão de partículas. Já a energia escura não se agrupa e deve satisfazer a restrição $\rho + 3p < 0$, que requer a introdução de alguma forma de pressão negativa, uma vez que a densidade ρ é sempre positiva. Parece que uma nova física é necessária para explicar o mistério da energia escura.

O modelo Λ CDM recebeu o nome dos dois componentes que atualmente dominam a formação do Universo: uma forma de energia escura descrita pela constante cosmológica (Λ) e a matéria escura fria (CDM). Como foi mencionado, a matéria escura refere-se a forma de matéria que não emite luz e em princípio não é matéria do tipo bariônica. No modelo Λ CDM, a matéria escura é considerada “fria”, ou seja, não relativística e com equação de estado $w_m = 0$. Se ignorarmos os instantes iniciais, os outros componentes importantes são bárions ($w_b = 0$) e radiação (com equação de estado $w_r = 1/3$). Também é assumido que não há transferência de energia entre esses diferentes fluidos. Claro, isso não é totalmente verdade, por exemplo, os processos nucleares em estrelas significa a

transferência de energia do setor de bárions para o setor de radiação, mas a quantidade de energia envolvida é insignificante do ponto de vista cosmológico, então podemos definir o fator de transferência de energia entre os componentes do modelo Λ CDM como $Q_i = 0$. A solução da equação do movimento (17) é então obtida por (18), que muda para cada fluido (incluindo curvatura espacial)

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda_0}, \quad \rho_k = \rho_{k_0} a^{-2}, \quad \rho_m = \rho_{m_0} a^{-3}, \quad \rho_r = \rho_{r_0} a^{-4}. \quad (87)$$

onde tratamos a matéria não relativística como um único fluido ($\rho_m = \rho_b + \rho_{dm}$). Juntamente com uma das duas equações de Friedmann, a Eq. (87) descreve completamente a evolução do Universo.

Apesar de sua relativa simplicidade, o modelo Λ CDM se ajusta muito bem a uma ampla gama de dados cosmológicos. A primeira referência a este modelo remonta a década de 90. Naquela época, o modelo geralmente aceito pela comunidade cosmológica era o modelo CDM, que é idêntico ao modelo Λ CDM, mas sem a constante cosmológica. No entanto, foi demonstrado que a função de correlação angular em larga escala das galáxias estava em melhor concordância com o resultado observacional quando uma pequena constante cosmológica positiva foi introduzida (Efstathiou; Sutherland; Maddox, 1990). Evidências mais convincentes foram obtidas no final da década de 1990, quando o modelo Λ CDM forneceu uma explicação bem-sucedida para a relação luminosidade-distância observada das supernovas do tipo Ia (SNeIa) (Riess et al., 1998).

Embora, o modelo Λ CDM possa descrever com sucesso a formação e evolução da estrutura em grande escala no Universo, seu estado original e a abundância de diferentes formas de matéria e energia, ele é um modelo que apresenta problemas. Alguns deles (o problema da planicidade, o problema do horizonte, o problema do monopolo) são solucionáveis se o modelo padrão Λ CDM for precedido por uma fase inflacionária inicial, mas outros, nomeadamente o problema da constante cosmológica e a coincidência cósmica (Zlatev; Wang; Steinhardt, 1999), são mais intrigantes e que serão discutidos adiante.

Devido aos problemas relacionados ao modelo Λ CDM, foram desenvolvidos alguns modelos alternativos de energia escura além da constante cosmológica convencional. Pode-se encontrar uma visão geral da situação, por exemplo, em (Copeland; Sami; Tsujikawa, 2006). Ao passo que no mesmo modelo e na maioria das abordagens alternativas à matéria escura (do inglês, *Dark matter*) e à energia escura (do inglês, *Dark energy*) sejam consideradas como componentes independentes do meio cósmico, existem linhas de pesquisas que

admitem o acoplamento entre os dois componentes escuros⁴. Este tipo de acoplamento não contraria a conservação de energia-momento. Modelos interativos como esse nos levam a uma dinâmica mais ampla e rica e que são muito úteis para resolver o problema da coincidência.

Diante disso, temos que os modelos que levam em consideração a interação entre DE e DM foram introduzidos por Wetterich (Wetterich, 1988). Esse tipo de modelo tem atraído muita atenção na literatura recente. Uma questão em que se deve levar em consideração é a escolha do termo de interação, uma vez que nem a natureza física de DE e DM são conhecidas e que não existe uma interação específica como motivação (Perez et al.,).

Entretanto, as abordagens relacionadas a como lidar com a energia escura são basicamente fenomenológicas. A maior parte das interações estudadas até o presente momento são lineares, ou seja, no sentido de que o termo de interação dos balanços energéticos dos componentes individuais é proporcional à densidade de DM ou à densidade de DE ou a uma combinação entre as duas que ocorre de forma linear.

Visto que sistemas com interações permitem soluções analíticas apenas em casos especiais, alguns autores se voltam para sistemas dinâmicos, por exemplo, em um contexto geral (Wainwright; Ellis, 1997) de modo a obter um panorama qualitativo do comportamento assintótico da dinâmica em cosmologia (Amendola et al., 2006). Modelos que envolvam a interação entre matéria escura e energia escura têm recebido uma atenção especial, já que nos fornecem uma estrutura para abordar o problema da coincidência cósmica dentre outros problemas do modelo Λ CDM (Bull et al., 2016; Popolo; Delliou, 2017). Vejamos abaixo alguns dos problemas associados ao modelo Λ CDM.

3.1 Problemas do modelo Λ CDM

3.1.1 Problema de ajuste da constante cosmológica

O problema de ajuste da constante cosmológica está associado ao fato de que a maioria das teorias quânticas de campo indicam uma enorme constante cosmológica advinda da energia do vácuo quântico, sendo mais de 100 ordens de magnitude maior do que o inferido nas observações (Popolo; Delliou, 2017). As previsões teóricas nos dão $\rho_\Lambda \simeq 10^{71} \text{ GeV}^4$, ou seja, contrário aos limites superiores cosmológicos dando $\rho_\Lambda \simeq$

⁴ Manteremos os termos em inglês: DM (Dark Matter) e DE (Dark Energy), para a matéria escura e energia escura, respectivamente

10^{-47} GeV^4 , o que dá origem ao problema de afinação extrema no valor requerido para ρ_Λ . Um tratamento mais completo do problema (Padilla, 2015) leva à conclusão de que o valor renormalizado de Λ é altamente sensível à massa de outras partículas, ou seja, extremamente bem ajustado para obter o pequeno valor medido de Λ .

3.1.2 Problema da coincidência cósmica

Observações recentes mostram que a maior parte da densidade de energia no Universo possui pressão negativa. Entretanto, a razão para isso seria a densidade de energia do vácuo associada a uma constante cosmológica, ou de natureza dinâmica, que chamamos de quintessência, na forma de um campo escalar relacionado a um potencial e que evolui de forma lenta. De qualquer forma, a questão a ser explicada é por que a densidade de energia escura corresponde aproximadamente à densidade de matéria atual. Temos que, com a expansão do Universo, as densidades diminuem em taxas diferentes, ou seja, parece que sua proporção deve ser definida para um valor infinitesimal específico no Universo primordial para que as duas densidades possam aproximadamente se coincidir hoje, cerca de 15 bilhões de anos depois (Zlatev; Wang; Steinhardt, 1999).

O modelo de quintessência chamado de “campo rastreador” (do inglês, *tracker fields*) foi introduzido de maneira a tentar evitar o problema da coincidência cósmica (Steinhardt; Wang; Zlatev, 1999), no qual o mesmo tem uma equação de movimento com o que chamamos de soluções atrativas, em que a gama de condições iniciais é muito ampla e converge rapidamente para uma trajetória específica (que leva a uma equação de estado $w_\phi = -1$).

Um dos principais pontos com essa proposta de campo de quintessência é tentar esclarecer por que a densidade de energia e matéria devem ser semelhantes hoje e resolver o problema de coincidência cósmica, (ver seção 5) (Steinhardt; Wang; Zlatev, 1999).

3.2 **Dados observacionais do modelo Λ CDM**

Nesta seção iremos ver alguns dos dados observacionais referentes ao modelo Λ CDM. É de grande importância estudar a solução da equação de conservação de energia (17), para o caso $p = w\rho$, com w constante. Sob esta suposição, a solução de densidade de energia é exata e é dada por:

$$\rho = \rho_0(1+z)^{3(1+w)}, \quad (88)$$

essa solução é importante porque pode ser aplicada a diferentes tipos de fluidos que compõem nosso Universo, como a radiação ($w_r = 1/3$), a matéria não relativística ($w_m = 0$) e a densidade de energia associada a constante cosmológica ($w_\Lambda = -1$). Para cada de tipo de fluido nós temos que a Eq. (88) tem uma solução

- Radiação $\rightarrow w = 1/3 \rightarrow \rho_r = \rho_{0r}(1+z)^4$;
- Matéria não relativística $\rightarrow w = 0 \rightarrow \rho_m = \rho_{0m}(1+z)^3$;
- Contante cosmológica $\rightarrow w = -1 \rightarrow \rho = \rho_{0\Lambda}$.

Além disso, em um Universo plano, a solução do fator de escala em relação ao tempo é facilmente obtida pela Eq. (14),

- Radiação $\rightarrow w = 1/3 \rightarrow a(t) \propto t^{1/2}$;
- Matéria não relativística $\rightarrow w = 0 \rightarrow a(t) \propto t^{2/3}$;
- Contante cosmológica $\rightarrow w = -1 \rightarrow a(t) \propto e^{Ht}$.

Esses diferentes padrões de densidade de energia dão origem a diferentes épocas no Universo, cada uma dominada por um fluido. Incorporando as restrições observacionais atuais (Velasquez-Toribio et al., 2020) sobre as densidades de energia da radiação, matéria e constante cosmológica, e seus respectivos estados de decaimento, podemos concluir que a radiação dominou a dinâmica no início do Universo ($z \gg 1$). Essa radiação se dilui muito mais rápido que a matéria, chegando a um ponto em que suas densidades são iguais, chamada de paridade matéria-radiação. A partir daí, a matéria domina a expansão cósmica, cuja dinâmica é dominada pelo fluido com $w = -1$.

Os valores dos parâmetros de densidade (Ω_i) indicam qual fluido é mais importante em um determinado momento da história cósmica e estarão próximos de 1 se esse componente for dominante, conforme a Fig. (2).

Dessa maneira, é possível reescrever a Eq. (14) relacionada tanto com o parâmetro de densidade atual como o redshift,

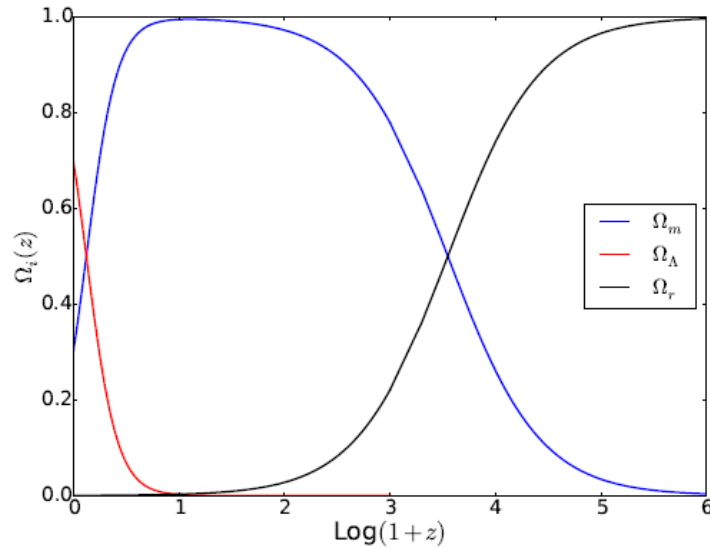
$$H = H_0 \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} . \quad (89)$$

Esses parâmetros são limitados por restrições de normalização, como consequência da equação de Friedmann,

$$\Omega_r(z) + \Omega_m(z) + \Omega_k(z) + \Omega_\Lambda(z) = 1 . \quad (90)$$

O método de descrever o parâmetro de Hubble em termos de parâmetros de densidade

Figura 2 - Valores dos parâmetros de densidade das componentes em função do *redshift*, considerando um Universo plano, $k = 0$



Fonte: Sánchez, 2008, p.17.

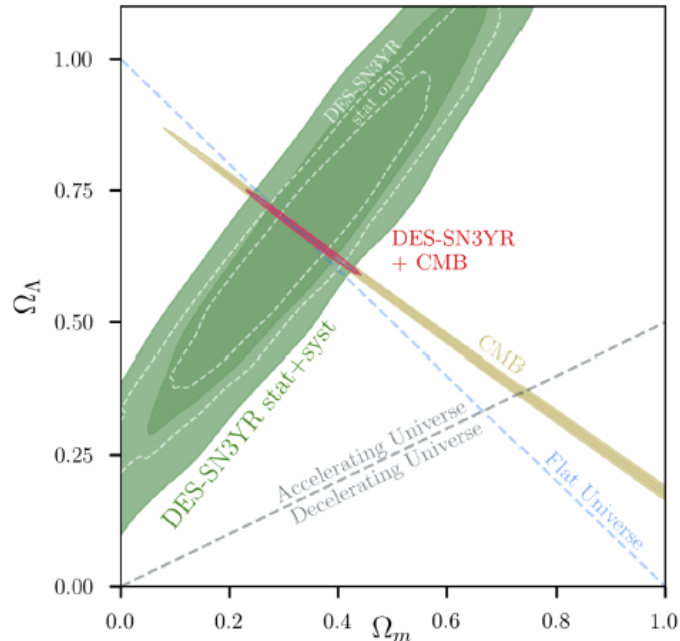
atuais tem sido usado na literatura para estimar a contribuição de cada componente por meio de observações do Universo.

A expansão acelerada do Universo é uma das maiores descobertas da história e um dos fundamentos do atual paradigma da cosmologia. A descoberta de que o Universo está em um período de expansão acelerada foi feita por dois grupos de pesquisas e de forma independente, são eles: o *Supernova Cosmology Project* (SCP) (Perlmutter et al., 1999) e o *High-z Supernova e Search Team* (HZT) (Riess et al., 1998). Tamann e Leibundgot mostraram na década de 90 que as supernovas do tipo Ia (SN Ia) são uniformes e encaixam-se bem como velas padrão, ou seja, objetos com luminosidade intrínseca. Este fato foi utilizado pelos grupos SCP e HZT afim de realizar suas descobertas analisando o módulo de distância de SN Ia.

No ano de 1998, foram publicados resultados pelo grupo de pesquisa SCP que ficou constatado um modelo de Universo plano com matéria e constante cosmológica com um nível de confiança de 99% e que foi descartado um valor negativo para Ω_Λ . De forma semelhante, o grupo HZT obteve resultados que demonstraram $\Omega_\Lambda > 0$, para um Universo com curvatura, matéria e uma constante cosmológica, com uma certeza de 99,7%. Esses dois resultados significam (a partir da Eq. 15) que o Universo está passando por uma fase de expansão acelerada.

Por quase duas décadas, esses resultados foram amplamente confirmados pela análise de dados mais recentes e um número maior de SNs Ia, assim como, pela análise de

Figura 3 - Dados observacionais de vínculos relacionados ao modelo Λ CDM, considerando uma curvatura livre e no plano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ (intervalos de confiança de 68% e 95%)



Fonte: Abbott, 2019, p.6.

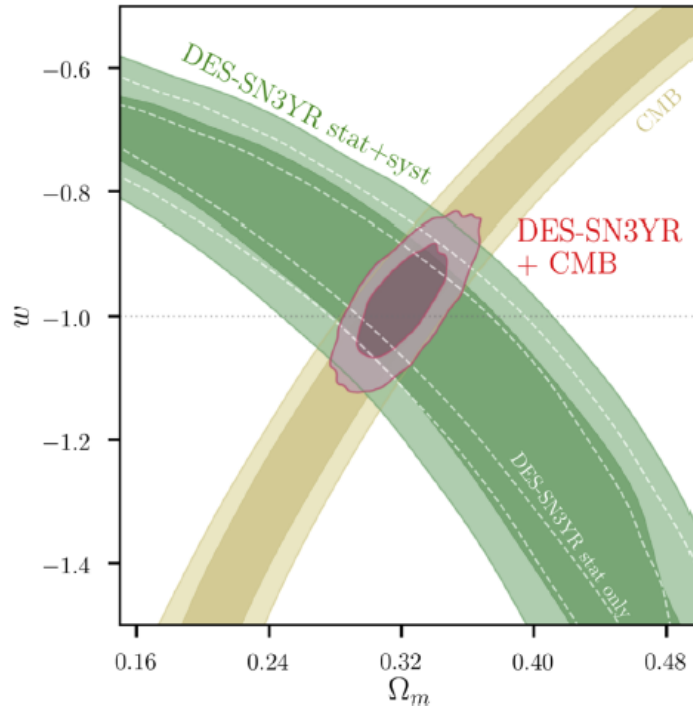
sinais de Oscilação Acústica Bariônica⁵, oriundo da estrutura em grande escala e análise do espectro da RCF. Todas essas estimativas de valores de parâmetros de densidade de energia são compatíveis e consistentes, o que torna o modelo Λ CDM conhecido como um modelo de concordância cósmica. Assumindo um modelo Λ CDM plano, podemos encontrar $\Omega_m = 0.331 \pm 0.038$ e $\Omega_\Lambda = 0.669 \pm 0.038$ com (Ω_k) adicionado como parâmetro livre na Eq. (89), a Fig. (3) nos mostra que os dados RCF fornecem fortes restrições de planicidade, consistente com a curvatura zero.

Entretanto, é importante destacar que para um Universo em expansão acelerada, de modo a conservar as equações de campo de Einstein, é necessário um fluido que se oponha à força gravitacional clássica e tenha pressão negativa, ver [Eq. (15)]. Este fluido é o que denominamos de energia escura.

Este fluido é o que denominamos de energia escura. Atualmente, existem muitas maneiras de descrever a mesma, como incluir novos campos com diferentes acoplamentos

⁵ Na cosmologia, as Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO, do inglês *Baryon acoustic oscillations*) são flutuações na densidade da matéria bariônica visível do Universo.

Figura 4 - Dados observacionais dos vínculos atuais da equação de estado da energia escura $\Omega_m - w$, no modelo w CDM plano (intervalos de confiança de 68% e 95%)



Fonte: Abbott, 2019, p.7.

ou de uma maneira mais fenomenológica, definindo os parâmetros da equação de estado da energia escura, representada pela constante cosmológica e por um fluido com equação de estado $w(z) = w$. Como principal resultado (Abbott et al., 2019), foi usado DES-SN3YR com o RCF e um modelo w CDM plano ($\Omega_k = 0$) e foi encontrado $\Omega_m = 0.321 \pm 0.038$ e $w = -0.978 \pm 0.059$. Logo, a restrição sobre w é consistente com o modelo cosmológico-constante para a energia escura. Os intervalos de confiança de 68% e 95% são dados pelos contornos vermelhos na Fig. (4), que também mostra as contribuições de DES-SN3YR e RCF.

3.3 Quintessência

Uma alternativa a constante cosmológica no modelo Λ CDM é a quintessência, o chamado “quinto elemento” após bárions, CDM, fótons e neutrinos. A quintessência é descrita por um campo escalar canônico ϕ minimamente acoplado à gravidade e dinâmico, que pode produzir a expansão acelerada observada à medida que rola lentamente para

fora da parte plana de seu potencial e que seria atualmente o componente dominante do setor de densidade de energia do Universo. Um campo que muda lentamente ao longo da energia potencial $V(\phi)$ faz com que o Universo acelere. Esse mecanismo é semelhante a taxa de expansão do Universo primitivo, mas difere no fato de que a matéria não relativística (matéria escura e bárions) não pode ser ignorada para uma discussão adequada da dinâmica da energia escura. A natureza dinâmica do campo de quintessência, com $\dot{w} \neq 0$, nos mostra que os modelos de quintessência pode ter “vantagens” sobre o modelo Λ CDM (Owen,).

Além disso, em muitos casos o campo de quintessência tem um tipo de potencial exponencial por exemplo, (Copeland; Liddle; Wands, 1998)

$$V(\phi) \propto e^{\frac{-\lambda\phi}{M_{pl}}}, \quad (91)$$

Necessariamente, precisamos que a densidade de energia potencial corresponda à observação de energia escura $V(\phi_0) = 0.7\rho_{c,0} = 3M_{pl}^2 H_0^2$ e que $\phi_0 \equiv \phi(t_0)$ para os dias atuais, ou seja, $m \approx \lambda H_0$ e a massa do campo escalar de quintessência é aproximadamente da ordem do valor da constante de Hubble hoje, $H_0 \approx 1.43 \times 10^{-42} GeV$.

O maior sucesso dos modelos de quintessência é sua capacidade de fornecer explicações alternativas válidas para a baixa densidade de energia do vácuo atual em relação a constante cosmológica, e que devemos ter $|\rho_{vac}| < 10^{-7} GeV^4$ atualmente. Em contraste, a teoria quântica de campos prevê valores de densidade de energia da constante cosmológica que são maiores que 100 ordens de magnitude. Por outro lado, em todos os modelos considerados até agora, a energia do vácuo associada à quintessência evolui dinamicamente para zero devido à evolução do campo escalar (Perrotta; Baccigalupi; Matarrese, 1999).

Portanto, no cenário de quintessência, é possível escolher uma subclasse de modelo que permita uma “solução de rastreamento” (Steinhardt; Wang; Zlatev, 1999): aqui uma certa densidade de energia no campo escalar atual pode ser obtida a partir de um grande número de valores iniciais, por conta disso o interesse nas pesquisas sobre o modelo de quintessência em vários trabalhos na literatura.

3.4 Inflação Quintessencial

Se o mecanismo de quintessência é um campo escalar de rolamento lento que se assemelha ao campo ínflaton, surge a seguinte indagação: o campo de quintessência poderia ser o mesmo campo escalar que impulsiona a inflação primordial? Combinar dois campos escalares em um dessa maneira é chamado de inflação quintessencial (QI) (Pe-

bles; Vilenkin, 1999), o que obviamente melhora a questão de quintessência de duas maneiras principais. Primeiro, o uso de uma única teoria unificada, além de parecer suficiente, mantém a teoria com menos graus de liberdade do que dois campos escalares distintos. Em segundo lugar, combinar as duas fases da evolução do Universo elimina o problema das condições iniciais de quintessência, porque o atrator inflacionário agora determina as condições iniciais.

A criação de um modelo de inflação quintessencial bem-sucedido tem seus desafios. As escalas de densidade de energia relevantes são notavelmente diferentes, com inflação na ordem de $10^{64} GeV^4$ e expansão acelerada tardia na ordem de $10^{-48} GeV^4$, uma diferença de aproximadamente 112 ordens de magnitude que um potencial de campo escalar deve superar. Em segundo lugar, ambos os períodos de expansão acelerada requerem um potencial plano para que seja viável nas versões mínimas da teoria, dois platôs separados por 112 ordens de grandeza são muito mais difíceis de modelar, com o risco de formar um potencial artificial.

Isso levou ao aumento da pesquisa para relacionar a inflação com a quintessência junto aos dados observacionais e, portanto, o tópico tornou-se uma área popular de pesquisa hoje. No entanto, há uma diferença importante em relação ao paradigma inflacionário padrão, onde o potencial do campo ínflaton tem um mínimo local, o que significa que o campo ínflaton libera sua energia quando oscila, gerando partículas suficientes para reaquecer nosso Universo. Por outro lado, para modelos “não oscilantes”, ou seja, na inflação quintessencial, onde o campo ínflaton “sobrevive” para replicar a aceleração cósmica atual, o mecanismo de reaquecimento é bem diferente, ou seja, quando a fase inflacionária termina, um mecanismo de reaquecimento é necessário para manter o campo ínflaton “vivo” para que a inflação corresponda ao Universo quente do Big Bang. Como as partículas que estavam presentes antes do período inicial foram diluídas na fase final da inflação, acabou resultando em um Universo frio.

Assim, a ideia mais plausível de reaquecer o Universo dentro da estrutura QI é através de uma fase do Universo dominada pela energia cinética de um campo escalar, Spokoyny (Spokoyny, 1993) chama o período dominado pela energia cinética de “deflacionário”, Joyce (Joyce, 1997) prefere “kination”, Caldwell, Dave e Steinhardt (Caldwell; Dave; Steinhardt, 1998) propõe o nome “quintessência” para um campo que age como a constante cosmológica, na qual toda a densidade de energia da expansão é dominada pela energia cinética de um campo escalar (Joyce, 1997), em que o regime adiabático é quebrado, permitindo a formação de partículas. Como o modelo em discussão reduz o papel do ínflaton à função essencial de impulsionar a inflação e acrescenta a possibilidade de que o ínflaton acabe tornando-se uma quintessência, chamamos essa estrutura de inflação quintessencial (Peebles; Vilenkin, 1999).

Nesta dissertação pretendemos descrever a inflação quintessencial no contexto da inflação quente (descrita na seção 2.4). Além disso, propomos termos de interação en-

tre o campo de quintessência e matéria de forma equivalente aos termos de interação encontrados na inflação quente, onde o ínflaton interage com a radiação. Uma grande vantagem de descrever a inflação quintessencial no contexto de inflação quente é o papel feito pelo termo de dissipação e que já discutimos a respeito anteriormente. Como ao final da inflação quente o Universo transita naturalmente para a fase de radiação, isso evita o período dominado pela energia cinética de um potencial escalar considerado em muitos modelos de quintessência. Nesse sentido a transição para o modelo do Big Bang Quente é mais natural.

4 SISTEMAS DINÂMICOS

Este capítulo tem por objetivo fornecer uma introdução concisa às partes da abordagem de sistemas dinâmicos que são mais importantes para aplicações cosmológicas. Os tópicos refletem a maioria das técnicas usadas pelos pesquisadores no campo e não abrangem outras técnicas matemáticas, igualmente interessantes, aplicadas em outros lugares. Leitores interessados em detalhes matemáticos e outras aplicações podem consultar livros-texto bem conhecidos sobre o assunto (Wiggins; Golubitsky, 2003; Perko, 2013).

4.1 Introdução a sistemas dinâmicos

Vamos começar esta seção com a seguinte pergunta: O que é um sistema dinâmico? É uma estrutura que pode ser usada para estudar algo tão simples como, por exemplo o pêndulo, bem como algo tão complexo quanto a dinâmica do Universo. Em geral, um sistema dinâmico pode ser considerado qualquer sistema abstrato consistindo em

- Um espaço de fase ou espaço de estado,
- Regras matemáticas que descrevem a evolução dos pontos neste espaço.

É o segundo ponto que deve ser enfatizado. De acordo com os primeiros princípios, as regras matemáticas que descrevem um processo complexo na natureza pode ser simplesmente impossível. Portanto, precisamos de uma regra matemática como entrada. Para descrever um sistema, precisamos de um conjunto de quantidades que descrevem o estado do sistema. Denominamos o conjunto de todos os valores possíveis dessas quantidades de espaço de estados. Em modelos ecológicos, essas quantidades são geralmente tamanhos populacionais: um exemplo típico disso é o modelo predador-presa. Olhando para o Universo, somos tentados a escolher as densidades de energia do Universo ρ_i para descrever seu estado. No entanto, verifica-se que essas densidades não são uma escolha muito boa nesse contexto, e variáveis muito melhores podem ser identificadas.

Inicialmente, denotamos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ como um elemento do espaço de estados $X \subseteq R^n$. Um sistema dinâmico é geralmente escrito como (Wiggins; Golubitsky, 2003)

$$\dot{x} = f(x), \tag{92}$$

em que a função $f : X \rightarrow X$ e onde o ponto indica a diferencial em relação a algum parâmetro de tempo apropriado $t \in R$, que geralmente não precisa estar relacionado ao tempo físico. Uma função f é vista como um campo vetorial em R^n tal que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) . \quad (93)$$

Isso significa que temos n equações descrevendo o comportamento dinâmico de n variáveis. Escolhemos um ponto $x \in X$ em um certo tempo t , então $f(x)$ define um campo vetorial em R^n . Quando discutirmos uma solução específica para (92), ela será frequentemente denotada por $\psi(t)$ para simplificar a notação. Cada solução $\psi(t)$ do sistema (92) é usualmente chamada de órbita ou trajetória do espaço de fase e limitamo-nos a sistemas finitos e contínuos. De fato, a função f deve ser diferenciável ao menos em X . Em geral, os sistemas dinâmicos que aparecem na cosmologia são contínuos e de dimensão finita. De fato, a função f geralmente contém apenas funções elementares e geralmente é suave em quase todos os lugares. No entanto, vemos que em casos mais complexos a função f pode apresentar certas singularidades. Neste caso, usaremos apenas as ferramentas padrões descritas abaixo na parte do espaço de fase em que f é contínua.

Definição 1: A equação autônoma $\dot{x} = f(x)$ tem um ponto crítico (ou constante ou de equilíbrio) em $x = x_0$ se e somente se $f(x_0) = 0$.

Pela definição 1, o ponto crítico do sistema (92) corresponde ao ponto x onde o sistema está em repouso. Em princípio, o sistema pode permanecer neste estado (estável) indefinidamente. No entanto, é necessário determinar se o sistema pode atingir esse estado e se esse estado é estável ou não com relação a pequenas perturbações. Isso naturalmente leva ao problema da estabilidade dos pontos críticos ou pontos fixos. As duas definições a seguir ajudarão a esclarecer o que significa estável e assintoticamente estável. Simplificando, um ponto fixo x_0 do sistema (92) é dito estável se todas as soluções $x(t)$ começando perto dele se mantiverem em torno do mesmo.

Definição 2: Ponto fixo estável. Seja x_0 um ponto fixo do sistema (92). Diz-se estável se, para cada $\epsilon > 0$, encontrarmos δ tal que se $\psi(t)$ for qualquer solução de (92) que satisfaça $\|\psi(t_0) - x_0\| < \delta$, então a solução é $\psi(t)$ para todo $t \geq t_0$ e satisfaz $\|\psi(t) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

O ponto é chamado de assintoticamente estável se for estável e as soluções se aproximarem do ponto crítico para todas as condições iniciais próximas.

Definição 3: Ponto fixo assintoticamente estável. Seja x_0 um ponto fixo estável do sistema (92). É chamado assintoticamente estável se existe um número δ , então se $\psi(t)$ é qualquer solução de (92) satisfazendo $\|\psi(t_0) - x_0\| < \delta$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = x_0$.

Uma pequena diferença entre essas duas definições é que todas as trajetórias próximas a um ponto fixo assintoticamente estável chegarão eventualmente a esse ponto, enquanto as trajetórias próximas a um ponto estável podem, por exemplo, orbitar em torno desse ponto. A maior parte dos pontos fixos estáveis na cosmologia também são assintoticamente estáveis. Portanto, ao discutir modelos cosmológicos, não vamos diferenciar entre essas duas possibilidades, a menos que seja necessária uma explicação mais aprofundada. Pontos fixos instáveis são pontos críticos que não são estáveis, ou seja, soluções começando perto do ponto fixo se afastam dele. Compreender os pontos críticos ou fixos de um sistema dinâmico permite-nos compreender localmente quase que por completo as propriedades de evolução temporal do sistema físico em consideração. Isso pode ser feito sem buscar soluções explícitas para algumas condições iniciais, mas podemos fazer afirmações qualitativas sobre todas as soluções possíveis.

Definido o conceito de estabilidade, podemos agora apresentar os métodos que podem ser usados para estudar as propriedades de estabilidade dos pontos críticos. A abordagem mais comum é a chamada teoria da estabilidade linear, que, para a maioria das aplicações cosmológicas, é suficiente para um bom entendimento da física do modelo cosmológico em questão. Observe que existem outros conceitos de estabilidade: a teoria da estabilidade de Lyapunov e a dos múltiplos centros, que foram aplicados à cosmologia, ver (Boehmer; Harko; Sabau, 2010). Os métodos de Lyapunov e de múltiplos centros serão descritos abaixo através de um exemplo.

4.2 Teoria da estabilidade linear

A ideia básica da teoria da estabilidade linear é linearizar um sistema próximo a um ponto fixo a fim de entender a dinâmica de todo o sistema próximo a esse ponto. Suponha que $\dot{x} = f(x)$ seja um dado sistema dinâmico para o qual o ponto fixo é x_0 . Como assumimos que f é suficientemente suave, podemos linearizar o sistema em torno do ponto crítico. Temos $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ tal que qualquer $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode ser dado por uma expansão de Taylor próximo de x_0 , o que dá

$$f_i(x) = f_i(x_0) + \sum_{j=1}^i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) y_j + \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) y_j y_k + \dots, \quad (94)$$

em que o vetor y é definido por $y = x - x_0$. Na teoria da estabilidade linear, somente as primeiras derivadas parciais são consideradas. Portanto, de particular interesse é o objeto $\partial f_i / \partial x_j$, que corresponde à matriz jacobiana de cálculo vetorial

$$J = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (95)$$

É possível definir o que também é chamado de matriz de estabilidade. São os autovalores da matriz jacobiana J , avaliada no ponto crítico x_0 , que contém a informação de estabilidade. O jacobiano é uma matriz $n \times n$ com n elementos, autovalores possivelmente complexos reais, autovalores (contando repetidos autovalores de acordo). Existem algumas limitações na teoria da estabilidade linear que motivam a definição de pontos hiperbólicos.

Definição 4: Ponto hiperbólico. Seja $x = x_0 \in X \subset R^n$ um ponto fixo (ponto crítico) do sistema $\dot{x} = f(x)$. Então dizemos que x_0 é hiperbólico se nenhum dos autovalores da matriz jacobiana $J(x_0)$ tiver parte real nula, ou seja, nenhum pode ser um número complexo puro. Caso contrário, o ponto é chamado de não hiperbólico.

A teoria da estabilidade linear falha para pontos não hiperbólicos, ou seja, autovalores imaginários puros e outros métodos devem ser usados para estudar as propriedades de estabilidade. Existem duas abordagens alternativas para lidar com essas questões, que seriam o método de Lyapunov e a teoria dos múltiplos centros.

Tratando-se de sistemas cosmológicos dinâmicos, temos que distinguir três casos principais ao classificar pontos fixos. Primeiro, se todos os autovalores da matriz jacobiana tiverem partes reais positivas e parte imaginária nula, as trajetórias são repelidas a partir do ponto fixo e, neste caso, estamos falando de um ponto instável (ou nó repulsivo ou repulsor). Em segundo lugar, se todos os autovalores tiverem partes reais negativas, o ponto atrairia todas as trajetórias próximas e é considerado estável e às vezes é chamado de atrator ou nó de atração, o que chamamos de variedades estável e instável, ver (Stuart; Humphries, 1998). Finalmente, se pelo menos dois autovalores tiverem partes reais com sinais opostos, o ponto fixo correspondente é chamado de ponto de sela, que o atrai em uma direção, mas o repele na outra. Em 2 e 3 dimensões é possível classificar todos os possíveis pontos críticos, mas em mais de três dimensões torna-se muito difícil, na qual a resolução do sistema dinâmico fica complexo. Para todos os propósitos práticos da cosmologia, as amplas classificações acima são suficientes para a maioria dos modelos.

4.2.1 Exemplo: Sistema dinâmico 2D

Considere brevemente um sistema dinâmico bidimensional geral dado por

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \quad (96)$$

onde f e g são funções (suaves) de x e y . Assumimos que (x_0, y_0) seja um ponto crítico hiperbólico, de modo que $f(x_0, y_0) = 0$ e $g(x_0, y_0) = 0$. A matriz jacobiana do sistema é simplesmente dada por

$$J = \begin{pmatrix} f_{,x} & f_{,y} \\ g_{,x} & g_{,y} \end{pmatrix}, \quad (97)$$

em que a vírgula em $f_{,x}$ representa a derivada parcial do argumento. Como este sistema é bidimensional, o sistema jacobiano tem dois autovalores, que denotamos por $\lambda_{1,2}$. Estes são dados explicitamente por

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(f_{,x} + g_{,y}) + \frac{1}{2}\sqrt{(f_{,x} - g_{,y})^2 + 4f_{,y}g_{,x}}, \quad (98)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(f_{,x} + g_{,y}) - \frac{1}{2}\sqrt{(f_{,x} - g_{,y})^2 + 4f_{,y}g_{,x}}, \quad (99)$$

e que deve ser avaliado em um ponto fixo (x_0, y_0) . Para qualquer sistema bidimensional, é fácil calcular os autovalores e determinar as propriedades de estabilidade dos pontos fixos. Assumindo um sistema $2D$ geral e de acordo com a teoria da estabilidade linear, as possibilidades relativas à estabilidade do ponto crítico em relação aos dois autovalores λ_1 e λ_2 são as seguintes

1. Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, então o ponto crítico do sistema dinâmico é assintoticamente estável e as trajetórias que começam perto desse ponto se aproximam desse ponto ou permanecerão próximas a ele.

2. Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, então o ponto crítico do sistema dinâmico é instável e as trajetórias se afastarão.

3. Se $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e forem de sinais opostos, então o ponto crítico é uma sela.

4. Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$, ou o contrário, o ponto é instável.

5. Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$, ou o contrário, não é possível dizer se o ponto crítico é estável ou instável. O ponto é não hiperbólico.

6. Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, com $\alpha > 0$ e $\beta \neq 0$, trata-se de uma espiral instável.

7. Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, com $\alpha < 0$ e $\beta \neq 0$, trata-se de uma espiral estável.

8. Se $\lambda_1 = +i\beta$ e $\lambda_2 = -i\beta$, com $\alpha > 0$ e $\beta \neq 0$, então as soluções são oscilatórias e é um centro.

4.3 Método de Lyapunov

Existe uma extensa literatura de matemática aplicada que explora sistemas dinâmicos que vão além das teorias de estabilidade linear. Embora a maior parte seja dedicada às aplicações da teoria da estabilidade linear, para completar, mencionaremos uma técnica muito poderosa que tem o potencial de mostrar estabilidade local e global e que também pode ser aplicada a pontos não-hiperbólicos. O método, atribuído a Lyapunov, não depende de estabilidade linear e pode ser aplicado diretamente a sistemas dinâmicos. Isso torna o método muito poderoso, mas tem uma desvantagem: você precisa de uma função chamada Lyapunov, e não há uma maneira sistemática de fazer isso, é preciso supor uma função adequada. Dessa maneira, começaremos definindo a função de Lyapunov.

Definição 5 (função Lyapunov). $\dot{x} = \vec{f}(x)$ com $x \in X \subset R^n$ seja um sistema dinâmico suave com ponto fixo x_0 . Desde que $V : R^n \rightarrow R$ seja uma função contínua em uma vizinhança U do ponto fixo x_0 , então V é chamada de função Lyapunov para o ponto x_0 se

- 1 - Se V for diferenciável em $U \setminus \{x_0\}$;
- 2 - Se $V(x) > V(x_0)$;
- 3 - $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$.

Pode-se observar que o terceiro requisito é muito importante. O que significa

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n, \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n, \\ &= \vec{grad} \cdot \vec{f}(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{100}$$

isso requer o uso frequente da regra da cadeia e substituição das equações do sistema dinâmico para eliminar o termo \dot{x}_i para $i = 1, \dots, n$. A seguir, relatamos os principais teoremas sobre as funções de Lyapunov e a estabilidade do ponto fixo no contexto de sistema dinâmico.

Teorema 1 (estabilidade de Lyapunov). Seja x_0 seja um ponto crítico do sistema $\dot{x} = f(x)$, e que U seja um domínio contendo x_0 . Se existe uma função Lyapunov $V(x)$ para a qual $\dot{V} \leq 0$, então x_0 é um ponto fixo estável. Se existir uma função Lyapunov $V(x)$ para a qual $\dot{V} < 0$, então x_0 é um ponto fixo assintoticamente estável. Além disso, se $\|x\| \rightarrow \infty$ e $V(x) \rightarrow \infty$ para todos os x , então x_0 é considerado globalmente estável ou globalmente assintótico, respectivamente.

Portanto, se conseguirmos encontrar uma função de Lyapunov (Bahamonde et al., 2018) adequada que satisfaça os critérios do teorema da estabilidade de Lyapunov, poderíamos estabelecer a estabilidade (assintótica) sem qualquer referência a uma solução do sistema dinâmico. No entanto, o oposto não é totalmente verdadeiro. Não ter uma função de Lyapunov em um determinado momento não significa instabilidade, simplesmente talvez não tenhamos sido capazes de encontrar uma função.

4.3.1 Exemplo: estabilidade de Lyapunov

Vamos começar com uma função simples, candidata a uma função de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}x^2 + \alpha y^4, \quad (101)$$

e

$$\dot{x} = x^2y - \gamma(x - y)^3, \quad \dot{y} = -y + (x + y)^2, \quad (102)$$

onde α é uma constante e γ um parâmetro arbitrário. Estamos interessados na estabilidade do ponto crítico $(x, y) = (0, 0)$. Obviamente, este tipo de função satisfaz as duas primeiras condições da função de Lyapunov, de modo que também satisfaz $V \rightarrow \infty$ quando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$. Resta apenas verificar se $\dot{V} \leq 0$ próximo de um ponto crítico. A derivada do tempo para esta função nos fornece

$$\dot{V} = x\dot{x} + 4\alpha y\dot{y}^3 = x^3y + 4\alpha y^3 [(x + y^2) - y] - \gamma x(x - y)^3. \quad (103)$$

Para os pontos próximos à origem, prevalecem os termos quárticos. Portanto, essa função pode satisfazer $\dot{V} < 0$ para determinados α . Para vermos isso com mais clareza, podemos inserir as coordenadas polares $x = r\cos(\phi)$ e $y = r\sin(\phi)$, logo

$$\dot{V} = [-4\alpha\sin^4\phi - \gamma\cos\phi(\cos\phi - \sin\phi)^3 + \sin\phi\cos^3\phi] r^4 + \mathcal{O}(r)^5. \quad (104)$$

Temos que observar que para valores negativos de $\gamma < 0$ e $\gamma = 0$, a função (101) não será uma função de Lyapunov adequada, pois \dot{V} não será negativa para todos os valores de ϕ . Para $\gamma > 0$ é bom para garantir um α suficientemente grande o que garante que \dot{V} seja de fato negativo. Por exemplo, a escolha do parâmetro $\gamma = 1$ para uma determinada escolha $\alpha = 2$ pode ser facilmente verificada de forma que \dot{V} seja negativo para todo ϕ .

Este cálculo simples e rápido mostra que existe um ponto crítico globalmente estável de forma assintótica quando $\gamma > 0$. Veremos a seguir que a teoria dos múltiplos centros aplicada ao mesmo ponto crítico é consideravelmente mais complexa e desafiadora. No entanto, sempre se chegará a uma resposta definitiva nesse caso. O método de estabilidade de Lyapunov requer a capacidade de encontrar uma função adequada, e o fato de não conseguir fazer isso não implica estabilidade nem instabilidade. Entretanto, é um tanto surpreendente que esse método não seja usado com mais frequência no estudo de sistemas dinâmicos cosmológicos..

4.4 Teoria dos múltiplos centros

A teoria da estabilidade linear não pode determinar a estabilidade de pontos críticos com jacobianos que têm autovalores reais zero. O método da teoria dos múltiplos centros reduz a dimensão do sistema dinâmico, e então a estabilidade deste sistema reduzido pode ser estudada. As propriedades de estabilidade do sistema reduzido determinam a estabilidade dos pontos críticos de todo o sistema. Seguindo (Wiggins, 1990) e (Carr, 2012), importantes fundamentos da teoria dos múltiplos centros são discutidos aqui.

Vamos começar com um sistema dinâmico

$$\dot{z} = F(z), \quad (105)$$

com a função F (regular) e $z \in R^n$. Assumimos que o sistema tenha um ponto fixo z_0 . Seguindo a estabilidade linear, o sistema pode ser linearizado próximo a este ponto usando (95).

Observando que $z_* = z - z_0$, podemos reescrever (105) em ordem linear como

$$\dot{z}_* = Jz_* . \quad (106)$$

Como J é uma matriz $n \times n$, ela possui n autovalores, o que requer a introdução dos próximos três espaços. O espaço “estável” (E^s) é coberto pelos autovetores de J associados a autovalores com partes reais negativas. O espaço “instável” (E^u) é coberto pelos autovetores de J associados aos autovalores com parte real positiva, e E^c é coberto pelos autovetores de J associados aos autovalores com parte real nula. A dinâmica das trajetórias no espaço de fase E^s e E^u pode ser entendida usando a teoria da estabilidade linear, a teoria dos múltiplos centros nos permite entender a dinâmica das trajetórias no espaço de fase E^c .

Se o espaço instável não estiver vazio, ou seja, J tem pelo menos um autovalor com parte real positiva, então o ponto crítico correspondente não pode ser estável, seja hiperbólico ou não hiperbólico. Se, ao contrário, o espaço instável relacionado ao ponto crítico não hiperbólico estiver vazio, ou seja, J não tiver autovalores com parte real positiva, a estabilidade pode ser decidida utilizando-se a teoria dos múltiplos centros. Neste último caso, há sempre uma transformação de coordenadas, o que permite que o sistema dinâmico (105) seja reescrito da seguinte forma

$$\dot{x} = Ax + f(x, y), \quad (107)$$

$$\dot{y} = By + g(x, y), \quad (108)$$

onde $(x, y) \in R^c \times R^s$, onde c é a dimensão de E^c e s é a medida de E^s e as duas funções f e g correspondem,

$$f(0, 0) = 0, \quad \nabla f(0, 0) = 0, \quad (109)$$

$$g(0, 0) = 0, \quad \nabla g(0, 0) = 0. \quad (110)$$

Nas Eqs. (107) e (108), A é uma matriz $c \times c$ com autovalores com partes reais nulas, enquanto B é uma matriz $s \times s$ cujos autovalores têm partes reais negativas.

Definição 6 (Múltiplo Centro). Um espaço geométrico é um múltiplo centro

de (107) e (108) se puder ser representado localmente na forma

$$W^c(0) = \{(x, y) \in R^c \times R^n | y = h(x) | x| < \delta, h(0) = 0, \nabla h(0) = 0\}, \quad (111)$$

para função δ suficientemente pequena e $h(x)$ (regular) em R^s . Os termos $h(0) = 0$ e $\nabla h(0) = 0$ na definição significam que o espaço $W^c(0)$ é tangente ao espaço próprio E^c no ponto crítico $(x, y) = (0, 0)$.

Abaixo apresentamos três teoremas que fundamentam a teoria dos múltiplos centros e que se mostram úteis em aplicações cosmológicas. A primeira nos mostra a existência de um centro, enquanto a segunda nos mostra a questão da estabilidade. A teoria final mostra como pode ser construída localmente a variedade central, e esta construção local é suficiente para um estudo de estabilidade. Os leitores interessados devem consultar (Carr, 2012), onde podem ser encontradas evidências para seguir a teoria.

Teorema 2 (Existência). (107) e (108) tem um múltiplo centro. A dinâmica das Eqs. (107) e (108) restrito ao múltiplo centro é dado por

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)), \quad (112)$$

em que $u \in R^c$ é pequeno o suficiente.

Teorema 3 (Estabilidade). Suponhamos que a solução zero de (112) é estável (estabilidade assintótica ou instável), então a solução nula de (107) e (108) também é estável (assintoticamente estável ou instável). Além disso, se $(x(t), y(t))$ também for uma solução de (107) e (108) com $(x(0), y(0))$ suficientemente pequeno, existe uma solução $u(t)$ de (112) de modo que

$$x(t) = u(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \quad (113)$$

$$y(t) = h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \quad (114)$$

como $t \rightarrow \infty$, onde $\gamma > 0$ é uma constante.

Esses dois teoremas dependem de quem será a função $h(x)$ e que a mesma deverá ser encontrada. Em seguida, derivamos a equação diferencial da função $h(x)$. De acordo com definição 6, temos $y = h(x)$. Diferenciamos a mesma em relação ao tempo e aplicando

a regra da cadeia, o resultado será

$$\dot{y} = \nabla h(x) \cdot \dot{x} \quad (115)$$

como $W^c(0)$ é baseado na dinâmica gerada pelas Eqs. (107) e (108), podemos substituir \dot{x} no lado direito de (107) e \dot{y} no lado direito de (108). Logo,

$$Bh(x) + g(x, h(x)) = \nabla h(x) \cdot [Ax + f(x, h(x))], \quad (116)$$

onde também usamos o fato de que $y = h(x)$. Esta última equação pode ser rearranjada em uma equação quasilinear diferencial parcial

$$\mathcal{N}(h(x)) := \nabla h(x) [Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0, \quad (117)$$

que deve ser satisfeita por $h(x)$ para ser um múltiplo centro. Normalmente não encontramos uma solução para esta equação, mesmo em sistemas relativamente simples isso é pouco provável. É o terceiro e o teorema final que explicam que não precisamos conhecer a função inteira.

Teorema 4 (Aproximação). Seja $\phi : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^s$ um mapeamento com $\phi(0) = \nabla\phi(0)$ tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^q)$ como $x \rightarrow 0$ para alguns $q > 1$. Logo

$$|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x|^q) \text{ com } x \rightarrow 0. \quad (118)$$

O ponto chave aqui é que um conhecimento aproximado da variedade central retorna a mesma informação de estabilidade que uma solução exata da Eq. (117). Além disso, uma aproximação para o múltiplo centro pode frequentemente ser encontrada diretamente assumindo uma expansão em série de h . Em seguida, determinam-se os coeficientes da série que satisfazem a Eq. (117) para cada ordem da série.

4.4.1 Exemplo: Teoria do múltiplo centro

A teoria dos múltiplos centros raramente é usada no contexto de sistemas dinâmicos cosmológicos. Isso nos levou a dar um exemplo dessa técnica. Considere o sistema

$$\dot{x} = x^2y - \gamma(x - y)^3, \quad \dot{y} = -y + (x + y)^2. \quad (119)$$

Aqui γ é um parâmetro arbitrário. Notamos que a origem $(0, 0)$ é um ponto crítico do sistema e os autovalores da matriz estável são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. O sistema (119) assume sua forma correta em (107) e (108). Assumimos aqui que sempre é possível escrever um sistema dinâmico desta forma selecionando um novo sistema dinâmico com novas variáveis que diagonalizam a matriz de estabilidade no ponto considerado crítico. As Eqs. (107) e (108) fornecem as seguintes expressões claras para as quantidades relevantes: $A = 0$, $B = -1$, $f = x^2y - \gamma(x - y)^3$ e $g = (x + y)^2$. O próximo passo é apresentar a Eq. (117), que agora torna-se

$$h'(x) [x^2h(x) - \gamma(x - h(x))^3] + h(x) - (x + h(x))^2 = 0, \quad (120)$$

que é uma EDO não linear de primeira ordem da função desconhecida $h(x)$. Uma solução clara para esta equação não pode ser encontrada usando métodos padrões. Portanto, fazemos uma expansão sucessiva de $h(x)$ em x , que o *Teorema 4* mostra ser suficiente para a estabilidade. Dessa maneira, temos que

$$h(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4, \quad (121)$$

substituindo em (120), deixando apenas os termos até a quarta potência de x , o que nos dá

$$(a_1 - 1)x^2 + (a_3 - 2a_2)x^3 + (a_4 - 2a_3 - a_2^2 - 2\gamma a_2)x^4 = 0, \quad (122)$$

o que tem que ser verdade para todos os valores de x . Dessa maneira, pode-se deduzir a solução

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 5 + 2\gamma. \quad (123)$$

Aqui descobrimos que a variedade central é dada localmente pela equação $h(x) = x^2 + 2x^3 + (5 + 2\gamma)x^4$. Esta informação pode ser usada no *Teorema 2* para estudar a dinâmica de um sistema de múltiplo centro reduzido, dado por

$$\dot{u}(h) = u^2 h(u) - \gamma(u - h(u))^3 = -\gamma u^3 + (1 + 3\gamma)u^4 + \mathcal{O}(u^5). \quad (124)$$

Finalmente, concluímos as propriedades de estabilidade do ponto crítico $(0, 0)$. As soluções de $\gamma > 0$ em (124) são estáveis, enquanto as soluções de $\gamma < 0$ são instáveis. Se $\gamma = 0$, os termos cúbicos desaparecem e o próximo termo da série deve ser considerado, neste caso o termo quártico. Como esse termo é de potência par, deduzimos a instabilidade. Em geral, qualquer equação do tipo $\dot{u} = \beta u^n$, onde β é uma constante e n é um inteiro positivo, é estável somente se $\beta < 0$ e n for de paridade ímpar, enquanto qualquer outro caso é instável, ver (Perko, 2013).

5 SISTEMA DINÂMICO NO CONTEXTO DA INFLAÇÃO QUINTESSENCIAL QUENTE

Neste capítulo iremos abordar os resultados obtidos no contexto de inflação quintessencial quente. Apresentaremos o modelo com as devidas equações que iremos explorar no contexto de sistema dinâmico, e assim estudar a sua estabilidade junto com as devidas discussões relacionadas ao Universo tardio.

5.1 Modelo proposto

Aqui propomos o conjunto completo de equações de fundo envolvendo o campo escalar quintessencial, o fluido da radiação e as densidades de energia da matéria como dadas, respectivamente, por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Upsilon_r\dot{\phi} + \Upsilon_m\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (125)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = \Upsilon_r\dot{\phi}^2, \quad (126)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \Upsilon_m\dot{\phi}^2, \quad (127)$$

onde Υ_r descreve o fluxo de energia entre o campo escalar quintessencial e densidade de energia de radiação, enquanto Υ_m descreve a troca de energia entre o campo escalar quintessencial e densidade de energia da matéria. Nós parametrizamos os termos de dissipação nas formas específicas, que são motivadas por muitos dos primeiros trabalhos sobre inflação quente e também discutidos em (Lima; Ramos, 2019),

$$\Upsilon_r = C_r \rho_r^{c/4} \phi^p M^{1-c-p}, \quad (128)$$

e

$$\Upsilon_m = C_m \rho_m^{k/4} \phi^q M^{1-k-q}, \quad (129)$$

onde C_r e C_m são constantes sem dimensão, M é alguma escala apropriada (constante) com dimensão de massa. Portanto, $[\Upsilon_r] = M$ e $[\Upsilon_m] = M^6$. As várias potências c , p , k , q modelam as dependências diferentes que estes coeficientes de dissipação podem ter com campo de fundo de quintessência, temperatura (isto é, em termos de densidade energética de radiação) e densidade energética da matéria.

Como mostrado em (Lima; Ramos, 2019), escolhas apropriadas e fenomenológicas de dependências em T , ϕ e ρ_m podem ser feitas nas Eqs. (128) e (129) de forma que possamos ter, por exemplo, o coeficiente de dissipação Υ_r , dado na Eq. (128), dominando durante a inflação, levando assim a um regime de inflação quente, enquanto Υ_m , dado na Eq. (129), domina apenas em tempos tardios. Além disso, a Eq. (129) apesar de poder ser subdominante em tempos primordiais, pode ajudar na geração de uma abundância inicial para a densidade de matéria. Dados os parâmetros apropriados C_m e C_r , podemos providenciar para que o campo escalar de quintessência exiba um comportamento semelhante ao encontrado, por exemplo, no caso de acoplamentos não mínimos do campo escalar à matéria (Wetterich, 1994), modelando assim diferentes formas de troca de energias entre os componentes do setor escuro. O termo de interação do campo escalar matéria-quintessência sob a escolha apropriada de parâmetros, também pode ajudar a fornecer uma força de atrito extra no campo escalar de quintessência e, assim, ajudar a fazer com que ϕ adquira uma equação de estado negativa em momentos tardios, sinalizando o início da época de dominação da energia escura (quintessência)(Lima; Ramos, 2019).

5.2 Sistema dinâmico

As equações de evolução (125) - (127) podem ser redefinidas para uma forma apropriada para uma análise dinâmica do sistema definindo as variáveis (Bahamonde et al., 2018)

$$x = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}M_{Pl}H}, \quad (130)$$

$$y = \sqrt{\frac{V}{3}} \frac{1}{M_{Pl}H}, \quad (131)$$

⁶ Observe que, em princípio, não precisamos de ter ambos os termos de dissipação com a mesma escala de massa e poderíamos fazê-los com escalas diferentes. Mas qualquer diferença entre estas escalas pode ser absorvida nas constantes adimensionais C_r e C_m .

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{3M_{Pl}^2 H^2}, \quad (132)$$

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{3M_{Pl}^2 H^2}. \quad (133)$$

Note que das definições acima, temos que

$$x^2 + y^2 = \Omega_\phi, \quad (134)$$

é a fração da densidade de energia do ínflaton/quintessência. A partir das Eqs. (130) - (133), a equação de Friedmann,

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V + \rho_r + \rho_m \right), \quad (135)$$

se torna equivalente a

$$1 = x^2 + y^2 + \Omega_r + \Omega_m. \quad (136)$$

As equações de evolução (125) - (127) podem então ser apresentado sob a forma de um sistema dinâmico

$$x' = -\frac{3x(1-x^2)}{2} + \frac{\Omega_r x}{2} - 3x(Q_m + Q_r) + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 - \frac{3xy^2}{2}, \quad (137)$$

$$y' = \frac{3y}{2} + \frac{3x^2 y}{2} - \frac{3y^3}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}xy\lambda + \frac{y\Omega_r}{2}, \quad (138)$$

$$\lambda' = -\sqrt{6}x(-1 + \Gamma)\lambda^2, \quad (139)$$

$$\Omega_r' = 6x^2 Q_r - \Omega_r + 3x^2 \Omega_r - 3y^2 \Omega_r + \Omega_r^2, \quad (140)$$

onde as equações acima foram escritas usando o vínculo (136) eliminando Ω_m como variável independente. Nas Eqs. (137) - (140), a derivada está relacionada ao número de efolds, $' \equiv d/dN$, onde $dN = Hdt$. Q_r e Q_m são definidos como

$$Q_r = \frac{\Upsilon_r}{3H}, \quad (141)$$

e

$$Q_m = \frac{\Upsilon_m}{3H}, \quad (142)$$

cujas equações dinâmicas serão obtidas abaixo.

Nas Eqs. (137) - (140) também introduzimos a variável λ , que é definida como

$$\lambda = -M_{Pl} \frac{V_{,\phi}}{V}, \quad (143)$$

e Γ na Eq. (139) é definido como

$$\Gamma = \frac{VV_{,\phi\phi}}{V_{,\phi}^2}. \quad (144)$$

Note que as Eqs. (137) - (140) são gerais e válidas, em princípio, para qualquer potencial. Para completar o sistema dinâmico, precisamos também das equações de evolução para as razões de dissipação Q_m , Q_r e também fixar a forma do potencial para o campo de ínflaton, $V(\phi)$. Consideramos aqui um potencial exponencial generalizado do ínflaton como utilizado para exemplo em (Lima; Ramos, 2019),

$$V(\phi) = V_0 e^{-\alpha(\phi/M_{Pl})^n}, \quad (145)$$

onde V_0 é a normalização do potencial, α é uma constante sem dimensão aqui considerada positiva e $n > 1$ para potenciais mais complicados do que o potencial exponencial simples. Essa forma de potencial foi originalmente proposta em (Geng et al., 2015) e considerada também (Geng et al., 2017; Das; Banerjee; Roy, 2019) para a inflação quintessencial nos casos de ausência de dissipação (ou seja, produção de radiação).

Assim,

$$\Gamma = 1 - \frac{(n-1)}{n\alpha} \left(\frac{\lambda}{n\alpha} \right)^{\frac{n}{1-n}}, \quad (146)$$

$$\lambda = n\alpha \left(\frac{\phi}{M_{Pl}} \right)^{n-1}, \quad (147)$$

e, para $n \neq 1$, ϕ está relacionado a λ por

$$\phi = M_{Pl} \left(\frac{\lambda}{n\alpha} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (148)$$

e as equações de evolução para Q_m e Q_r podem ser expressas, respectivamente, como

$$Q'_m = \frac{3(2-k)Q_m}{4} + \frac{3(x^2-y^2)Q_m}{2} + \sqrt{6}qx \left(\frac{n\alpha}{\lambda} \right)^{\frac{1}{-1+n}} Q_m + \frac{Q_m\Omega_r}{2} - \frac{3kx^2Q_m^2}{2(-1+x^2+y^2+\Omega_r)}, \quad (149)$$

$$Q'_r = \frac{3(1-2c)Q_r}{2} + \frac{3(x^2-y^2)Q_r}{2} + \sqrt{6}px \left(\frac{n\alpha}{\lambda} \right)^{\frac{1}{-1+n}} Q_r + \frac{Q_r\Omega_r}{2} - \frac{3cx^2Q_r^2}{2\Omega_r}. \quad (150)$$

Ao escrever o sistema de equações (137) - (140), (149) e (150), consideramos a fração em energia da densidade de matéria como equivalente à primeira integral da Eq. (127) e determinado pela restrição Eq. (136). O sistema de equações (137) - (140), (149) e (150), juntamente com Eq. (136), formam, portanto, um conjunto completo de equações descrevendo a dinâmica do sistema.

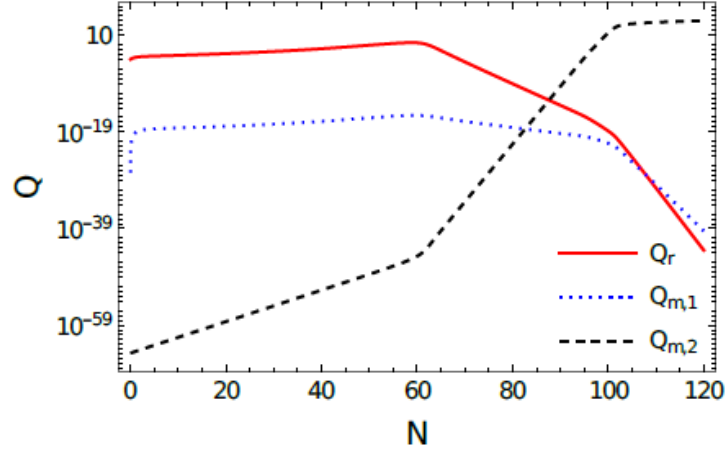
Em (Lima; Ramos, 2019), as equações de evolução (125) - (127) foram resolvidas assumindo coeficientes de dissipação Υ_r dados por

$$\Upsilon_r = \frac{C_r \rho_r^{3/4}}{\phi^2}, \quad (151)$$

e Υ_m da forma $\Upsilon_m = \Upsilon_{m,1} + \Upsilon_{m,2}$,

$$\Upsilon_{m,1} = \frac{C_m \rho_m^{3/4}}{\phi^2}, \quad (152)$$

Figura 5 - A evolução das taxas de dissipação Q_r , $Q_{m,1}$ e $Q_{m,2}$



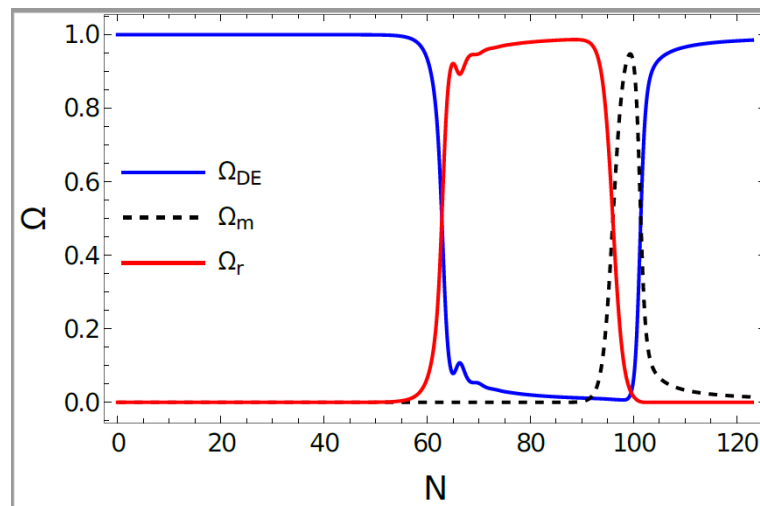
Fonte: O autor, 2023.

$$\Upsilon_{m,2} = \frac{M^2}{\rho_m^{1/4}}. \quad (153)$$

Na Fig. (5), apresentamos a evolução das taxas de dissipação Q_r , $Q_{m,1}$ e $Q_{m,2}$ obtidas das Eqs. (151), (152) e (153). Observe que logo após a inflação, tanto Q_r como $Q_{m,1}$ caem de forma semelhante, enquanto $Q_{m,2}$ apresenta crescimento acentuado após a inflação, durante a era da radiação, ao mesmo tempo em que se achata nos momentos finais. Isto mostra que as diferentes escolhas das potências nas Eqs. (128) e (129), pode levar a diferentes evoluções durante as diferentes épocas do Universo.

Vamos mostrar que, neste caso, o sistema dinâmico dado pelas Eqs. (137) - (140), (149) e (150) levam à mesma dinâmica, conforme mostrado em (Lima; Ramos, 2019). Na Fig. (6) mostramos o resultado obtido pela solução do sistema dinâmico para as frações de densidade de energia Ω_ϕ , Ω_r e Ω_m . Vemos que o sistema de equações (137) - (140), (149) e (150) produz uma evolução que é inicialmente caracterizada por um regime inflacionário acelerado, quando Ω_ϕ domina. Esta fase vai suavemente para um regime dominado por radiação quando Ω_r domina. No final do evolução, apresenta uma curta fase dominada pela matéria, antes de Ω_ϕ tornar novamente a componente dominante no futuro, o que corresponde a uma fase de energia escura.

Figura 6 - Os índices de densidade de energia em função do número de efolds devido a um potencial ínfaton com constantes $n = 3$ e $\alpha = 0.015$. As condições iniciais consideradas foram tais que $x(0) = 0.0025$, $\Omega_m(0) = 10^{-50}$, $\Omega_r(0) = 5 \times 10^{-10}$, $\lambda(0) = 9.1 \times 10^{-3}$, enquanto que para as relações de coeficiente de dissipação consideramos $Q_r(0) = 10^{-4}$, $Q_{m,1}(0) = 1.2 \times 10^{-40}$ para o correspondente ao coeficiente de dissipação $\Upsilon_{m,1}$ e $Q_{m,2}(0) = 1.7 \times 10^{-65}$ para o coeficiente de dissipação $\Upsilon_{m,2}$ (a combinação dos dois coeficientes de dissipação foram considerados tais para reproduzir o caso análogo estudado em (Lima; Ramos, 2019)



Fonte: O autor, 2023.

5.3 Dinâmica do tempo tardio

Analisar o sistema dinâmico completo feito das Eqs. (137) - (140), (149) e (150) é muito complicado dado que se trata de um sistema de seis dimensões. No entanto, ainda podemos obter informações valiosas olhando para trechos do sistema em um determinado plano. O plano mais interessante para olhar é o plano (x, y) , o que nos dá informações sobre o comportamento das trajetórias que passam através da região acelerada. Isto é de particular importância ao estudar a dinâmica tardia do sistema, em que queremos saber sobre a capacidade do sistema de alcançar um regime dominado por DE. Nós realizamos esta análise em seguida.

Como estamos interessados no comportamento tardio do sistema, podemos ignorar os termos relacionados à radiação nas Eqs. (137) e (138), que podem então ser aproximadas como

$$x' \simeq -\frac{3x(1-x^2)}{2} - 3xQ_m + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 - \frac{3x^2y}{2}, \quad (154)$$

$$y' \simeq -\frac{3y}{2} + \frac{3x^2y}{2} - \frac{3y^3}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}xy\lambda, \quad (155)$$

com a restrição de que

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad (156)$$

e as trajetórias no plano (x, y) são então limitadas a estar no semicírculo definido pela Eq. (156) e $y \geq 0$ (que significa energia potencial positiva). Para valores fixos de λ e Q_m , os pontos fixos derivados das Eqs. (154) e (155) são dados por

$$P_1 = (0, 0), \quad (157)$$

$$P_2 = (-\sqrt{1+2Q_m}, 0), \quad (158)$$

$$P_3 = (\sqrt{1+2Q_m}, 0), \quad (159)$$

$$P_4 = (x_4, y_4), \quad (160)$$

onde

$$x_4 = \frac{3 + \lambda^2 + 3Q_m}{2\sqrt{6}\lambda} - \frac{\sqrt{\lambda^4 + 6\lambda^2(1 - Q_m) + 9(1 + Q_m)^2}}{2\sqrt{6}\lambda}, \quad (161)$$

$$y_4 = \left\{ \frac{6\lambda^2 - \lambda^4 + (1 + Q_m)^2}{12\lambda^2} + \left[\frac{\lambda^2 - 3(1 + Q_m)}{12\lambda^2} \right] \times \sqrt{\lambda^4 + 6\lambda^2(-1 + Q_m) + 9(1 + Q_m)^2} \right\}^{1/2}. \quad (162)$$

Pode-se verificar que ambos os pontos P_2 e P_3 são repulsores, enquanto o P_1 é um ponto de sela. O ponto P_4 é um atrator, isso é explicitamente visto na Fig. (8). É útil observar o valor assintótico para P_4 para ϕ grande. A partir de Eq. (147) temos então que $\lambda \rightarrow 0$. Expandindo o ponto P_4 para $\lambda \ll 1$, obtemos que suas coordenadas satisfazem

$$x_4 \sim \frac{\lambda}{\sqrt{6}(1 + Q_m)} + \mathcal{O}(\lambda^3), \quad (163)$$

e

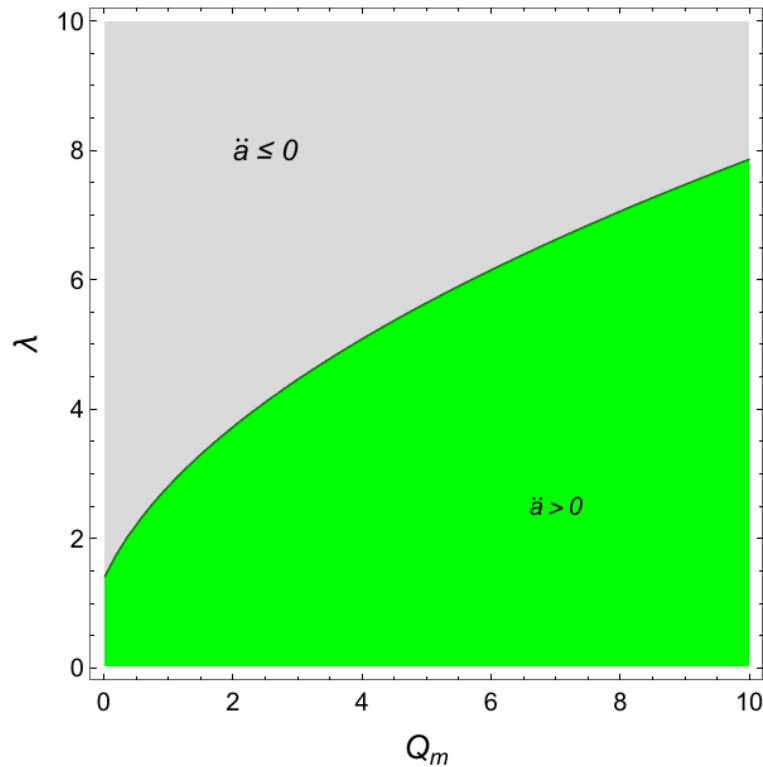
$$y_4 \sim 1 - \frac{(1 + 2Q_m)\lambda^2}{12(1 + Q_m)^2} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (164)$$

Assim, o ponto P_4 é um atrator para as trajetórias levando, assintoticamente, a um regime acelerado e dominado por energia escura, com a energia potencial do campo de quintessência dominando em momentos posteriores.

Na Fig. (8), damos uma visão geral das trajetórias do espaço de fase do sistema dinâmico no plano (x, y) para diferentes valores de parâmetros. A região verde sombreada denota a região onde a aceleração domina, a sombra azul é a região da parte dominada por energia, isto é, cinética, onde a energia cinética da quintessência domina, e que satisfaz $x^2 > 1/2$. A região cinza é a região dominada pela matéria.

Note que para $Q_m > 0$, os pontos P_2 e P_3 se movem longe dos limites da região mostrados na Fig. (8). Desta forma, eles não são mostrados nos painéis da Fig. (8) (b) - (e). Uma vez que P_2 e P_3 se encontram nas regiões cinéticas, as trajetórias em seguida, emanam da região azul. Observe também que, conforme λ aumenta (para um valor fixo de Q_m), o ponto P_4 se move da região em aceleração em direção ao ponto P_1 para a

Figura 7 - A região dos parâmetros λ e Q_m permitindo aceleração em tempos tardios



Fonte: O autor, 2023.

região de domínio da matéria. É interessante olhar pelo valor correspondente de λ_{accel} do exemplo apresentado na Fig. (6). Em momentos posteriores, a taxa de dissipação total $Q_m = Q_{m,1} + Q_{m,2}$ nivela com um valor $Q_m \simeq 10^4$.

A região nos parâmetros Q_m e λ para a qual o ponto P_4 está no regime de aceleração é ilustrado na Fig. (7). O limite da aceleração e não-aceleração das regiões são mostradas na Fig. (7) e é dada pela condição $x_4^2 - y_4^2 = -1/3$, ou seja, onde a equação de estado é exatamente $w = -1/3$. Essa condição leva a relação funcional de λ com Q_m delimitando a região de aceleração,

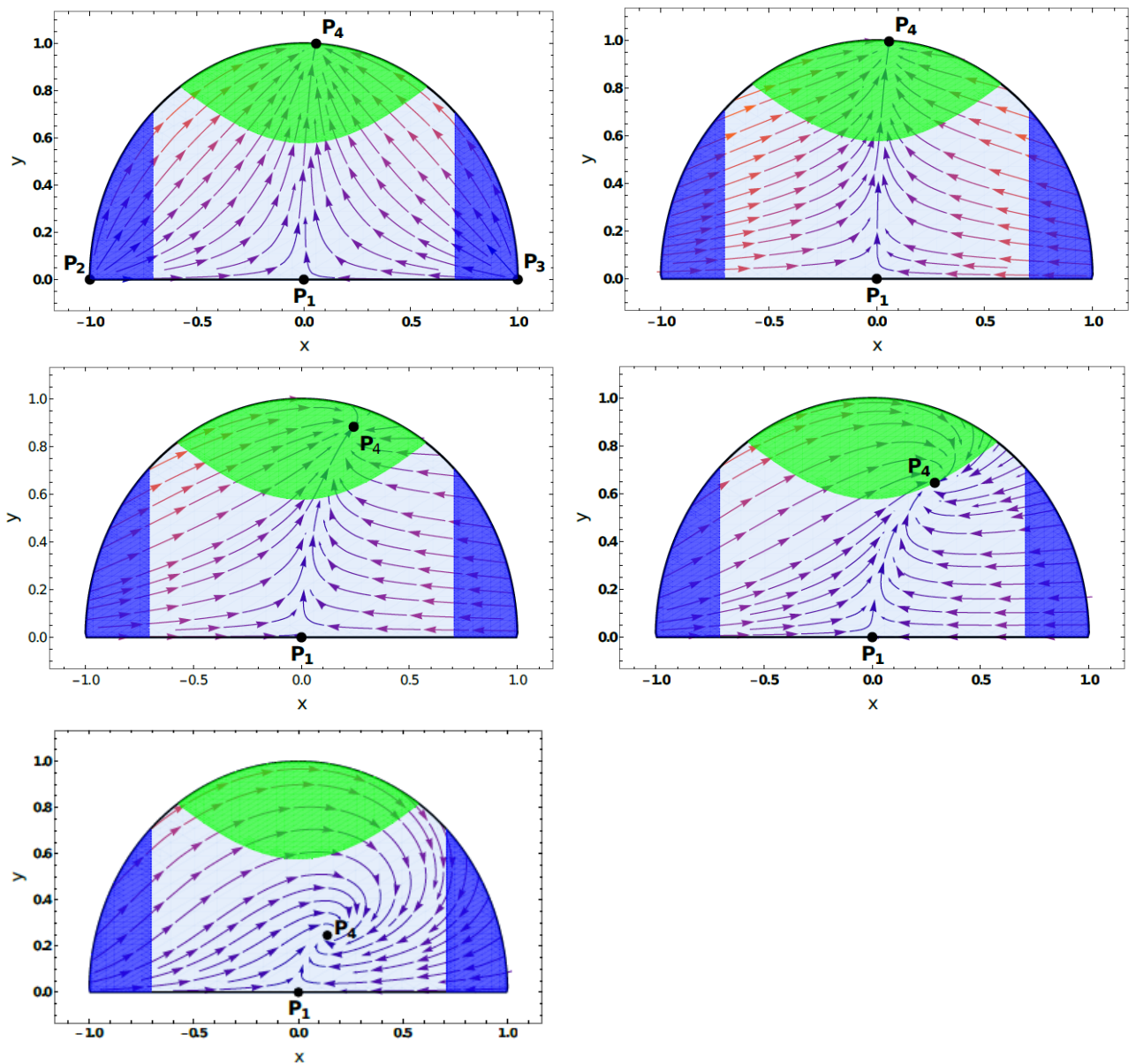
$$\lambda_{accel} = \sqrt{2 + 6Q_m}. \quad (165)$$

A partir da Eq. (165), o valor correspondente para λ_{accel} é então $\lambda_{accel} \sim 240$. O valor de λ em momentos posteriores, no caso das condições iniciais utilizadas no exemplo da Fig. (6), é $\lambda_f \sim 22 \ll \lambda_{accel}$. Assim, o sistema em momentos posteriores vai para o regime de energia escura, conforme esperado.

Note que quanto maior for Q_m , mais fácil será entrar no regime de aceleração, com

$x_4 \rightarrow 0$ e $y_4 \rightarrow 1$ para $Q_m \gg 1$ e $\lambda \ll 1$. Fisicamente, o termo de dissipação Υ_m atua como um termo de fricção que retarda o campo de quintessência em momentos posteriores e facilita a entrada no regime de aceleração $\ddot{a} > 0$.

Figura 8 - Imagens das trajetórias do espaço de fase do sistema dinâmico no plano (x, y) para diferentes valores dos parâmetros. Painel a: $Q_m = 0$, $\lambda = \lambda_{\text{accel}}/10$; Painel b: $Q_m = 1$, $\lambda = \lambda_{\text{accel}}/10$; Painel c: $Q_m = 1$, $\lambda = \lambda_{\text{accel}}/2$; Painel d: $Q_m = 1$, $\lambda = \lambda_{\text{accel}}$; Painel e: $Q_m = 1$, $\lambda = 3\lambda_{\text{accel}}$



Fonte: O autor, 2023.

5.4 Dinâmica do tempo tardio: sistema dinâmico completo

Aqui nesta seção iremos abordar o sistema completo com todas as equações. Entretanto, a análise detalhada do sistema ficará para um trabalho futuro. Tendo em vista que o campo escalar quintessencial se dissipa predominantemente para a densidade de energia da matéria durante o Universo recente, como fica evidente na Fig. (5), temos que para a dinâmica do tempo tardio a contribuição da radiação pode ser ignorada ($\Omega_r \approx 0$), o que significa que também podemos ignorar as equações de Ω_r e Q_r como dadas nas Eq. (140) e Eq. (150), respectivamente. Portanto, o sistema dinâmico anterior de seis equações agora se reduz a um sistema dinâmico de quatro equações:

$$x' = -\frac{3x(1-x^2)}{2} - 3xQ_m + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 - \frac{3x^2y}{2}, \quad (166)$$

$$y' = -\frac{3y}{2} + \frac{3x^2y}{2} - \frac{3y^3}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}xy\lambda, \quad (167)$$

$$Q_m' = \frac{3(2-k)Q_m}{4} + \frac{3(x^2-y^2)Q_m}{2} + \sqrt{6}qx \left(\frac{n\alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{-1+n}} Q_m - \frac{3kx^2Q_m^2}{2(-1+x^2+y^2)}, \quad (168)$$

$$\lambda' = \sqrt{6}x(n-1)(\alpha n)^{1/n-1}\lambda^{n-2/n-1}, \quad (169)$$

e a equação de restrição dada na Eq. (136) se tornará

$$1 = x^2 + y^2 + \Omega_m. \quad (170)$$

Nós determinamos a equação de estado do fluido total (incluindo Ω_m e Ω_ϕ) como

$$w_{tot} \equiv \frac{p_\phi + p_m}{\rho_\phi + \rho_m} = x^2 - y^2. \quad (171)$$

Antes de analisar o conjunto de equações, observamos que, x e y satisfazem $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, pela restrição dada na Eq. (170), λ e Q_m não são limitados e podem assumir valores entre 0 e ∞ . Para obter parâmetros dinâmicos que sejam limitados, ao contrário de λ e Q_m , introduzimos duas novas variáveis z e ξ como segue:

$$z = \frac{\lambda^{\frac{1}{n-1}}}{1 + \lambda^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (172)$$

$$\xi = \frac{Q_m}{1 + Q_m}. \quad (173)$$

Em que z e ξ variam de $0 < z < 1$, $0 < \xi < 1$. No entanto, descobrimos que o conjunto dinâmico transformado em termos de (x, y, z, ξ) tem apenas um conjunto de pontos críticos $(0, 0, z, 0)$, que não apresenta nenhuma solução de aceleração (pois $x^2 - y^2 = 0$ para esse ponto crítico).

Para superar essa dificuldade, primeiro redefinimos z como

$$z = \frac{1 - \lambda^{\frac{1}{n-1}}}{\lambda^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (174)$$

que varia de $-1 < z \leq 0$ para valores $1 \leq \lambda < \infty$. Aqui notamos que para valores de λ menores que a unidade, z torna-se novamente ilimitado, o que não queremos, ou seja, por isso restringimos o valor inferior de λ a 1. Em seguida, fazemos uma transformação não trivial das variáveis z e ξ em dois outros parâmetros u e v como ⁷

$$u = \frac{\xi - z}{\xi + z}, \quad v = \frac{\xi - z}{\xi^2}, \quad (175)$$

de modo que

$$\xi = \frac{2u}{(1+u)v}, \quad z = \frac{2u(1-u)}{(1+u)^2v}. \quad (176)$$

⁷ É importante observar que a análise de sistemas dinâmicos com potenciais exponenciais mais acentuados ($n > 1$) é uma tarefa árdua, como foi apontado em (Das; Banerjee; Roy, 2019). A análise de estabilidade linear (Bahamonde et al., 2018) é interrompida nesses casos, pois as partes reais de alguns dos autovalores acabam sendo zero. Em (Das; Banerjee; Roy, 2019), os autores usaram a Teoria dos Múltiplos Centros para analisar a estabilidade de um sistema com potenciais exponenciais acentuados. No entanto, descobrimos que, com a dissipação do campo escalar para o setor de matéria, o sistema se torna muito complexo para ser analisado empregando a Teoria dos Múltiplos Centros. Portanto, escolhemos a parametrização não trivial, dada na eq. (175), que nos permite a análise de estabilidade do sistema com dissipação.

Os intervalos ξ e z ($0 < \xi < 1$ e $-1 < z \leq 0$) impõem restrições aos valores de u e v como

$$u \leq -1 \Rightarrow v > \frac{2(u-1)u}{(u+1)^2},$$

$$u \geq 1 \Rightarrow v > \frac{2u}{u+1}. \quad (177)$$

Portanto, em termos das quatro variáveis (x, y, u, v) , obtemos o conjunto de equações da seguinte forma:

$$x' = \frac{3y^2}{\sqrt{6}} \left(\frac{v(1+u)^2}{v(1+u)^2 + 2u(1-u)} \right)^{n-1} + \frac{3x}{2} \left(-2 - \frac{4xu}{v(1+u) - 2u} + 1 + x^2 - y^2 \right) \quad (178)$$

$$y' = -\frac{xy\sqrt{6}}{2} \left(\frac{v(1+u)^2}{v(1+u)^2 + 2u(1-u)} \right)^{n-1} + \frac{3y}{2} (1 + x^2 - y^2), \quad (179)$$

$$u' = \frac{1}{4} \left[\frac{3kx^2}{2\Omega_m} \frac{4u^2(1-u)}{v} + \frac{2u(1-u)}{v} ((1+u)v - 2u) \right. \\ \left. \left\{ \frac{-3k}{4} + \frac{q\sqrt{6}x(\alpha n)^{1/n-1}}{v(1+u)^2} (v(1+u)^2 + 2u - 2u^2) + \frac{3}{2}(1 + x^2 - y^2) \right\} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{6}x(v(1+u)^2 + 2u(1-u))^2(\alpha n)^{1/n-1}}{v(1+u)} \right], \quad (180)$$

$$v' = \frac{3kx^2u}{2\Omega_m} + \frac{(v(1+u) - 2u)}{2} \left[\frac{-3k}{4} + q\sqrt{6}x(\alpha n)^{1/n-1} \frac{(v(1+u)^2 + 2u - 2u^2)}{v(1+u)^2} + \frac{3}{2}(1 + x^2 - y^2) \right] \\ + \sqrt{6}x(\alpha n)^{1/n-1} \frac{(v(1+u)^2 + 2u(1-u))^2}{4u(1+u)^2} - \frac{6kx^2}{\Omega_m} \frac{u}{(1+u)} - \frac{2(v(1+u) - 2u)}{(1+u)} \\ \left[-\frac{3k}{4} + q\sqrt{6}x(\alpha n)^{1/n-1} \frac{(v(1+u)^2 + 2u - 2u^2)}{v(1+u)^2} + \frac{3}{2}(1 + x^2 - y^2) \right]. \quad (181)$$

onde $\Omega_m = 1 - x^2 - y^2$ da Eq. (170). A transformação não trivial na Eq. (175) criou uma estrutura complicada do sistema de equações, o que dificulta a identificar os pontos críticos analiticamente. A proposta dessa transformação não trivial é que podemos encontrar pontos fixos não triviais, e a técnica de linearização (Bahamonde et al., 2018) ainda se aplica, o que possibilita a obtenção de autovalores não nulos. Análise do sistema (178) - (181) pode ser feita de forma numérica. Em um trabalho futuro, pretendemos realizar a análise detalhada desse sistema.

6 ESTABILIDADE DAS CONDIÇÕES DE ROLAMENTO LENTO

No capítulo anterior vimos a possibilidade do Universo entrar num regime acelerado. Tanto no Universo primordial como no recente, a fase de aceleração é regida pelas condições de rolamento lento. Verificaremos agora que essa fase de rolamento lento é estável e que condições precisam ser satisfeitas para tal.

Neste capítulo faremos a análise do sistema dinâmico da inflação quente levando em consideração os resultados de estabilidade obtidos em (Bastero-Gil et al., 2012). Entretanto, a análise de estabilidade das condições de rolamento lento em questão é uma variação de primeira ordem das equações dinâmicas da inflação quente. Para fazer o estudo da estabilidade, as equações do sistema dinâmico devem ser equações diferenciais de primeira ordem. Além disso, iremos analisar a estabilidade em diferentes regimes.

6.1 Sistema dinâmico

O modelo quintessencial de inflação quente é composto pelo conjunto completo de equações de fundo envolvendo o campo escalar quintessencial ϕ , o fluido de radiação ρ_r e a densidade da energia da matéria ρ_m e são dadas pelas equações (125) - (129), (141) e (142).

O potencial total incluindo a contribuição térmica pode ser escrito como

$$V(T, \phi) = -\frac{\pi^2}{90}g_*T^4 + V(\phi), \quad (182)$$

em que $V(\phi) = V_0 \exp[-\alpha(\phi/M_{Pl})^n]$ e g_* é o número efetivo de partículas relativísticas do banho térmico. A densidade de entropia s é definida como

$$s = -V_{,T}, \quad (183)$$

que, para o potencial na Eq. (182), resulta

$$s = \frac{4\pi^2}{90}g_*T^3. \quad (184)$$

Agora, $\rho_r = (\pi^2/30)g_*T^4$, o que resulta $\rho_r = (3/4)sT$. Então, o conjunto de equações (125) - (127) pode ser reescrito como

$$\ddot{\phi} + 3H(1 + Q_r + Q_m)\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 , \quad (185)$$

$$T\dot{s} + 3HTs = \Upsilon_r\dot{\phi}^2 , \quad (186)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \Upsilon_m\dot{\phi}^2 , \quad (187)$$

e a equação de Friedmann pode ser escrita como

$$3H^2 = 8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V + sT + \rho_m \right) = 8\pi G \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \rho_r + \rho_m \right) . \quad (188)$$

Sob as condições de rolamento lento, (ver seção 2.4.1) e devido às aproximações da inflação quente, o conjunto de equações de fundo dadas (125) - (127) se reduzem para

$$3H(1 + Q_r + Q_m)\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 , \quad (189)$$

$$4H\rho_r = 3HQ_r\dot{\phi}^2 , \quad (190)$$

$$3H\rho_m = 3HQ_m\dot{\phi}^2 , \quad (191)$$

e em termos da densidade de energia de entropia, o conjunto de equações acima se torna

$$3H(1 + Q_r + Q_m)\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 , \quad (192)$$

$$Ts = Q_r\dot{\phi}^2 , \quad (193)$$

$$\rho_m = Q_m\dot{\phi}^2 . \quad (194)$$

Nas condições de rolamento lento, a equação de Friedmann se torna

$$3H^2 = 8\pi GV. \quad (195)$$

Os parâmetros de rolamento lento de ordem principal nesse modelo é (Moss; Xiong, 2008)

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \\ \eta &= \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{,\phi\phi}}{V}, \\ \kappa &= \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{,\phi}}{\phi V}, \\ \beta &= \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{,\phi} \Gamma_{r,\phi}}{V \Gamma_r}, \\ \gamma &= \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{,\phi} \Gamma_{m,\phi}}{V \Gamma_m}, \\ \delta &= \frac{TV_{,\phi T}}{V_{,\phi}}. \end{aligned} \quad (196)$$

Aqui, definimos um parâmetro extra de rolagem lenta γ relacionado à dissipação da densidade de energia da matéria, que, em geral, não está presente nos modelos de inflação quente padrão. Com dois parâmetros adicionais:

$$\begin{aligned} c &= \frac{T\Gamma_{r,T}}{\Gamma_r}, \\ k &= \frac{4\rho_r \Gamma_{m,\rho_m}}{\Gamma_m}. \end{aligned} \quad (197)$$

Neste caso, a equação equivalente fica (até a primeira ordem nos parâmetros de rolamento lento):

$$\begin{aligned} &\left[1 + \frac{2c}{4-c} \left(\frac{Q_r}{1+Q_r+Q_m} \right) + \frac{2k}{4-k} \left(\frac{Q_m}{1+Q_r+Q_m} \right) \right] \frac{1}{H} \frac{d \ln \dot{\phi}}{dt} = \\ &-\frac{\eta}{1+Q_r+Q_m} + \frac{4}{4-c} \frac{\beta Q_r}{(1+Q_r+Q_m)^2} + \frac{4}{4-k} \frac{\gamma Q_m}{(1+Q_r+Q_m)^2} \\ &\quad - (cQ_r + kQ_m) \frac{\epsilon}{(1+Q_r+Q_m)^2}, \end{aligned} \quad (198)$$

6.2 Análise de estabilidade do modelo de inflação quente quintessencial

Achamos conveniente mudar a variável independente do tempo cósmico t para o campo do ínflaton ϕ nas equações de movimento. Nós definimos $u \equiv \dot{\phi}$, e, portanto $d/dt = ud/d\phi$. Também redefinimos $\rho_m \equiv w$. Em seguida, o conjunto de equações (185) - (187) podem ser escritas como

$$u' = -3H - \Gamma_r - \Gamma_m - V_{,\phi}u^{-1} \equiv f(u, s, w), \quad (199)$$

$$s' = -3Hsu^{-1} + T^{-1}\Gamma_r u \equiv g(u, s, w), \quad (200)$$

$$w' = -3Hwu^{-1} + \Gamma_u u \equiv h(u, s, w). \quad (201)$$

Desse modo, podemos definir a matriz M que é a matriz das primeiras derivadas de f , g e h em termos dos parâmetros de rolamento lento com o objetivo de verificar a estabilidade do sistema dinâmico (199) - (201),

$$M = \left. \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, s, w)} \right|_{u=\bar{u}, s=\bar{s}, w=\bar{w}}. \quad (202)$$

Os elementos da matriz M são

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{H}{u} \left[-3(1 + Q_r + Q_m) - \frac{\epsilon}{(1 + Q_r + Q_m)^2} \right] \equiv \mathcal{A}, \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{H}{s} \left[-cQ_r - \frac{\epsilon}{(1 + Q_r + Q_m)^2} + \delta(1 + Q_r + Q_m) \right] \equiv \mathcal{B}, \\ \frac{\partial f}{\partial w} &= \frac{H}{w} \left[-\frac{3k}{4}Q_m - \frac{Q_m\epsilon}{(1 + Q_r + Q_m)^2} \right] \equiv \mathcal{C}, \\ \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{Hs}{u^2} \left[6 - \frac{\epsilon}{(1 + Q_r + Q_m)^2} \right] \equiv \mathcal{D}, \\ \frac{\partial g}{\partial s} &= \frac{H}{u} \left[c - 4 - \frac{Q_r\epsilon}{(1 + Q_r + Q_m)^2} \right] \equiv \mathcal{E}, \\ \frac{\partial g}{\partial w} &= \frac{Hs}{uw} \left[-\frac{Q_m\epsilon}{(1 + Q_r + Q_m)^2} \right] \equiv \mathcal{F}, \\ \frac{\partial h}{\partial u} &= \frac{Hw}{u^2} \left[6 - \frac{\epsilon}{(1 + Q_r + Q_m)^2} \right] \equiv \mathcal{G}, \\ \frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{Hw}{su} \left[-\frac{Q_r\epsilon}{(1 + Q_r + Q_m)^2} \right] \equiv \mathcal{H}, \\ \frac{\partial h}{\partial w} &= \frac{H}{u} \left[-3 + \frac{3k}{4} - \frac{Q_m\epsilon}{(1 + Q_r + Q_m)^2} \right] \equiv \mathcal{I}. \end{aligned} \quad (203)$$

A matriz M fica então

$$M = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{C} \\ \mathcal{D} & \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{G} & \mathcal{H} & \mathcal{I} \end{pmatrix}. \quad (204)$$

6.3 Regimes dissipativos

A seguir vamos analisar diferentes casos envolvendo os fatores de dissipação Q_r e Q_m .

6.3.1 Dissipação forte na radiação, mas fraca na matéria

Analisamos o sistema no regime fortemente dissipativo na radiação, mas fracamente dissipativo na matéria ($Q_r \gg 1$ e $Q_m \ll 1$). Neste regime, os elementos da matriz M dada nas Eqs. (203) podem ser aproximados como

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -3Q_r \frac{H}{u}, \\ \mathcal{B} &= (\delta - c)Q_r \frac{H}{s}, \\ \mathcal{C} &= -\frac{3k}{4}Q_m \frac{H}{w}, \\ \mathcal{D} &= 6\frac{Hs}{u^2}, \\ \mathcal{E} &= \frac{H}{u}(c - 4), \\ \mathcal{F} &= 0, \\ \mathcal{G} &= 6\frac{Hw}{u^2}, \\ \mathcal{H} &= 0, \\ \mathcal{I} &= \left(-3 + \frac{3k}{4}\right) \frac{H}{u}. \end{aligned} \quad (205)$$

Para o caso de interesse, ou seja, para o regime dissipativo forte em Q_r e com os parâmetros de rolamento lento sendo muito pequenos (como $\delta \ll 1$), temos que, os coeficientes da Eq. (205) simplificam-se para

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -3Q_r \frac{H}{u}, \\
\mathcal{B} &= (-c)Q_r \frac{H}{s}, \\
\mathcal{C} &= -\frac{3k}{4}Q_m \frac{H}{w}, \\
\mathcal{D} &= 6\frac{Hs}{u^2}, \\
\mathcal{E} &= \frac{H}{u}(c-4), \\
\mathcal{F} &= 0, \\
\mathcal{G} &= 6\frac{Hw}{u^2}, \\
\mathcal{H} &= 0, \\
\mathcal{I} &= \left(-3 + \frac{3k}{4}\right) \frac{H}{u}.
\end{aligned} \tag{206}$$

Em posse dos coeficientes da matriz M numa forma simplificada, finalmente podemos calcular seu determinante e conseqüentemente seus autovalores, da seguinte forma

$$M = \begin{pmatrix} -3Q_r & -cQ_r & \frac{-3kQ_m}{4} \\ 6 & -4+c & 0 \\ 6 & 0 & -3 + \frac{3k}{4} \end{pmatrix}, \tag{207}$$

$$\text{Det}(M - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -3Q_r - \lambda & -cQ_r & \frac{-3kQ_m}{4} \\ 6 & -4+c-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & -3 + \frac{3k}{4} - \lambda \end{vmatrix} < 0. \tag{208}$$

Logo, obtemos a equação característica

$$\begin{aligned}
\text{Det}(M - \lambda \mathbb{I}) &= -18kQ_m + \frac{9ckQ_m}{2} - 36Q_r - 9cQ_r + 9kQ_r + \frac{9ckQ_r}{4} - 12\lambda + 3c\lambda + 3k\lambda \\
&\quad - \frac{3ck\lambda}{4} - \frac{9kQ_m\lambda}{2} - 21\lambda Q_r - 3c\lambda Q_r + \frac{9kQ_r\lambda}{4} - 7\lambda^2 + c\lambda^2 + \frac{3k\lambda^2}{4} - 3Q_r\lambda^2 - \lambda^3 \tag{209}
\end{aligned}$$

Como há muitos termos na equação caraterística e sabemos que, $Q_m \ll 1$, logo ignoramos os termos que contêm Q_m , o que nos dá

$$\begin{aligned}
\text{Det} (M - \lambda \mathbb{I}) = & -36Q_r - 9cQ_r + 9kQ_r + \frac{9ckQ_r}{4} - 12\lambda + 3c\lambda + 3k\lambda - \frac{3ck\lambda}{4} - 21\lambda Q_r \\
& - 3c\lambda Q_r + \frac{9kQ_r\lambda}{4} - 7\lambda^2 + c\lambda^2 + \frac{3k\lambda^2}{4} - 3Q_r\lambda^2 - \lambda^3.
\end{aligned} \tag{210}$$

Agora, podemos resolver a Eq. (210) para obter os autovalores, encontrando as raízes da equação característica, o que resulta

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{3}{4}(-4 + k), \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(-4 + c - 3Q_r - \sqrt{(-4 + c)^2 - 6(4 + 3c)Q_r + 9Q_r^2} \right), \\
\lambda_3 &= \frac{1}{2} \left(-4 + c - 3Q_r + \sqrt{(-4 + c)^2 - 6(4 + 3c)Q_r + 9Q_r^2} \right).
\end{aligned} \tag{211}$$

Ao olhar para os autovalores λ_2 e λ_3 , dentro raiz, pode-se, em princípio, usar mais uma vez forte aproximação dissipativa $Q_r \gg 1$ e a raiz pode ser aproximada para $3Q_r$. Ao substituir este valor, obtém-se

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{3}{4}(-4 + k), \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2}(-4 + c - 3Q_r - 3Q_r), \\
\lambda_3 &= \frac{1}{2}(-4 + c - 3Q_r + 3Q_r).
\end{aligned} \tag{212}$$

Ao exigir que todos os autovalores sejam negativos tal que a estabilidade seja satisfeita ($\lambda_i < 0$), obtém-se as condições:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{3}{4}(-4 + k), \\
\lambda_2 &= -3Q_r,
\end{aligned}$$

$$\lambda_3 = -4 - c, \quad (213)$$

Logo, a condição de estabilidade é

$$Q_r > 0, \quad k < 4, \quad c > -4. \quad (214)$$

6.3.2 Dissipação fraca tanto na radiação quanto na matéria

Agora analisamos o sistema no regime dissipativo fraco tanto na radiação quanto na matéria ($Q_r, Q_m \ll 1$). Neste regime os elementos da matriz M dada nas Eqs. (203) podem ser aproximados como

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -(3 + \epsilon) \frac{H}{u}, \\ \mathcal{B} &= [\delta - (c - \epsilon)Q_r] \frac{H}{s}, \\ \mathcal{C} &= - \left(\frac{3k}{4} + \epsilon \right) Q_m \frac{H}{w}, \\ \mathcal{D} &= (6 - \epsilon) \frac{Hs}{u^2}, \\ \mathcal{E} &= (c - 4 - Q_r\epsilon) \frac{H}{u}, \\ \mathcal{F} &= -\epsilon Q_m \frac{Hs}{uw}, \\ \mathcal{G} &= (6 - \epsilon) \frac{Hw}{u^2}, \\ \mathcal{H} &= -\epsilon Q_r \frac{Hw}{su}, \\ \mathcal{I} &= \left(-3 + \frac{3k}{4} - \epsilon Q_m \right) \frac{H}{u}. \end{aligned} \quad (215)$$

Para o caso de interesse, ou seja, para o regime dissipativo fraco e com os parâmetros de rolamento lento sendo muito pequenos ($\delta, \epsilon \ll 1$). Temos que nessa aproximação, os coeficientes da Eq. (215) simplificam-se para

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -3\frac{H}{u}, \\
\mathcal{B} &= -cQ_r\frac{H}{s}, \\
\mathcal{C} &= -\frac{3k}{4}Q_m\frac{H}{w}, \\
\mathcal{D} &= 6\frac{Hs}{u^2}, \\
\mathcal{E} &= (c-4)\frac{H}{u}, \\
\mathcal{F} &= 0, \\
\mathcal{G} &= 6\frac{Hw}{u^2}, \\
\mathcal{H} &= 0, \\
\mathcal{I} &= -3 + \frac{3k}{4}\frac{H}{u}.
\end{aligned} \tag{216}$$

Em posse dos coeficientes da matriz M numa forma simplificada, finalmente podemos calcular seu determinante e conseqüentemente seus autovalores, da seguinte forma

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -cQ_r & \frac{-3kQ_m}{4} \\ 6 & -4+c & 0 \\ 6 & 0 & -3 + \frac{3k}{4} \end{pmatrix}, \tag{217}$$

$$\text{Det}(M - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -cQ_r & \frac{-3kQ_m}{4} \\ 6 & -4+c-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & -3 + \frac{3k}{4} - \lambda \end{vmatrix} < 0. \tag{218}$$

Logo, obtemos a equação característica

$$\begin{aligned}
\text{Det}(M - \lambda\mathbb{I}) &= -36 + 9c + 9k - \frac{9ck}{4} - 18kQ_m + \frac{9ckQ_m}{2} - 18cQ_r + \frac{9ckQ_r}{2} - 33\lambda + 6c\lambda \\
&+ \frac{21k\lambda}{4} - \frac{3ck\lambda}{4} - \frac{9kQ_m\lambda}{2} - 6cQ_r\lambda - 10\lambda^2 + c\lambda^2 + \frac{3k\lambda^2}{4} - \lambda^3,
\end{aligned} \tag{219}$$

Como há muitos termos na equação característica e usando mais uma vez que $Q_r, Q_m \ll 1$, logo ignoramos os termos que contêm Q_m e Q_r , o que nos dá

$$\begin{aligned}
\text{Det} (M - \lambda \mathbb{I}) &= -36 + 9c + 9k - \frac{9ck}{4} - 33\lambda + 6c\lambda + \frac{21k\lambda}{4} - \frac{3ck\lambda}{4} \\
&- 10\lambda^2 + c\lambda^2 + \frac{3k\lambda^2}{4} - \lambda^3.
\end{aligned} \tag{220}$$

Agora, podemos resolver a Eq. (220) para obter os autovalores, encontrando as raízes da equação característica e exigindo que os autovalores sejam negativos tal que a estabilidade seja satisfeita ($\lambda_i < 0$), obtém-se as condições

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -3, \\
\lambda_2 &= -4 + c, \\
\lambda_3 &= \frac{3}{4}(-4 + k),
\end{aligned} \tag{221}$$

Logo, a condição de estabilidade é

$$c < 4, \quad k < 4. \tag{222}$$

6.3.3 Energia Escura

Analisamos agora o sistema no regime de Energia Escura de dissipação forte na matéria e fraca na radiação ($Q_m \gg 1$ e $Q_r \ll 1$). Neste regime os elementos da matriz M dada nas Eqs. (203) podem ser aproximados como

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -3Q_m \frac{H}{u}, \\
\mathcal{B} &= \delta Q_m \frac{H}{s}, \\
\mathcal{C} &= -\frac{3k}{4} Q_m \frac{H}{w}, \\
\mathcal{D} &= 6 \frac{Hs}{u^2}, \\
\mathcal{E} &= (c-4) \frac{H}{u}, \\
\mathcal{F} &= 0, \\
\mathcal{G} &= 6 \frac{Hw}{u^2}, \\
\mathcal{H} &= 0, \\
\mathcal{I} &= \left(-3 + \frac{3k}{4}\right) \frac{H}{u}.
\end{aligned} \tag{223}$$

Para o caso de interesse, ou seja, para o regime de energia escura e com os parâmetros de rolamento lento sendo muito pequeno como $\delta \ll 1$. Temos que nessa aproximação, os coeficientes da Eq. (223) simplificam-se para

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -3Q_m \frac{H}{u}, \\
\mathcal{B} &= 0, \\
\mathcal{C} &= -\frac{3k}{4} Q_m \frac{H}{w}, \\
\mathcal{D} &= 6 \frac{Hs}{u^2}, \\
\mathcal{E} &= (c-4) \frac{H}{u}, \\
\mathcal{F} &= 0, \\
\mathcal{G} &= 6 \frac{Hw}{u^2}, \\
\mathcal{H} &= 0, \\
\mathcal{I} &= \left(-3 + \frac{3k}{4}\right) \frac{H}{u}.
\end{aligned} \tag{224}$$

Em posse dos coeficientes da matriz M numa forma simplificada, finalmente podemos calcular seu determinante e conseqüentemente seus autovalores, da seguinte forma

$$M = \begin{pmatrix} -3Q_m & 0 & \frac{-3kQ_m}{4} \\ 6 & -4+c & 0 \\ 6 & 0 & -3 + \frac{3k}{4} \end{pmatrix}, \tag{225}$$

$$Det (M - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -3Q_m - \lambda & 0 & \frac{-3kQ_m}{4} \\ 6 & -4 + c - \lambda & 0 \\ 6 & 0 & -3 + \frac{3k}{4} - \lambda \end{vmatrix} < 0. \quad (226)$$

Logo, obtemos a equação característica

$$\begin{aligned} Det (M - \lambda \mathbb{I}) = & -36Q_m + 9cQ_m - 9kQ_m + \frac{9ckQ_m}{4} - 12\lambda + 3c\lambda + 3k\lambda - \frac{3ck\lambda}{4} - 21Q_m\lambda \\ & + 3cQ_m\lambda - \frac{9kQ_m\lambda}{4} - 7\lambda^2 + c\lambda^2 + \frac{3k\lambda^2}{4} - 3Q_m\lambda^2 - \lambda^3. \end{aligned} \quad (227)$$

Agora, podemos resolver a Eq. (227) para obter os autovalores, encontrando as raízes da equação característica, o que resulta

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -4 + c, \\ \lambda_2 &= \frac{3}{8} \left(-4 + k - 4Q_m - \sqrt{16 - 8k + k^2 - 32Q_m - 24kQ_m + 16Q_m^2} \right), \\ \lambda_3 &= \frac{3}{8} \left(-4 + k - 4Q_m + \sqrt{16 - 8k + k^2 - 32Q_m - 24kQ_m + 16Q_m^2} \right), \end{aligned} \quad (228)$$

semelhante ao caso anterior, onde havíamos considerado $Q_r \gg 1$, aqui, assumindo $Q_m \gg 1$ a raiz pode ser aproximada para $4Q_m$, logo

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -4 + c, \\ \lambda_2 &= \frac{3}{8} (-4 + k - 4Q_m - 4Q_m), \\ \lambda_3 &= \frac{3}{8} (-4 + k - 4Q_m + 4Q_m), \end{aligned} \quad (229)$$

Ao exigir que os autovalores sejam negativos tal que a estabilidade seja satisfeita ($\lambda_i < 0$), obtém-se as condições:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -4 + c, \\
\lambda_2 &= \frac{3}{2}(k - 2Q_m), \\
\lambda_3 &= -\frac{3}{4}(4 + k),
\end{aligned} \tag{230}$$

logo, a condição de estabilidade é

$$c < 4, \quad -4 < k \leq 0, \quad k > 0, \quad Q_m > \frac{k}{2}. \tag{231}$$

Assim, vemos que, para que o sistema seja estabilizado, a forma dos coeficientes dissipativos Q_r e Q_m deve obedecer a essas condições

$$-4 < c < 4, \tag{232}$$

e

$$-4 < k < 4. \tag{233}$$

De acordo com os resultados de estabilidade, vemos que para $|c| < 4$ sempre garantirá a estabilidade. Mas pode haver alguns valores de Q_r para os quais c pode estar longe dessa faixa de valores e ainda ter estabilidade. Assim, outros valores de c distantes de $[-4, 4]$ podem ser permitidos, mas isso restringe a faixa de variação de Q_r durante a dinâmica. Enquanto para $|c| < 4$, a dinâmica será estável para qualquer faixa de Q_r e não precisará se preocupar com instabilidades.

Semelhante ao caso de Q_r , temos que para Q_m os resultados para a estabilidade nos mostra que para $|k| < 4$ teremos a estabilidade. Entretanto, pode haver valores de Q_m em que k pode estar longe desse intervalo de valores e ainda assim ter estabilidade. Desse modo, outros valores de k que não estejam no intervalo $[-4, 4]$ podem ser permitidos, o que leva a uma restrição na variação de Q_m durante a dinâmica. Logo, para $|k| < 4$ a dinâmica será estável para qualquer intervalo de Q_m o que não irá gerar preocupação em relação a instabilidades. Os resultados obtidos acima generalizam aqueles obtidos em (Bastero-Gil et al., 2012), onde foi considerado só o caso de dissipação no setor de radiação, ou seja, na inflação quente no Universo primordial.

CONCLUSÃO

Tendo em vista o que foi apresentado ao longo desta dissertação, conclui-se que o modelo de inflação quintessencial quente consegue descrever tanto o Universo primordial quanto o tardio com resultados consistentes relacionados a dinâmica do Universo. Os modelos de quintessência têm como objetivo principal tentar explicar a energia escura, que possui ainda uma origem misteriosa na cosmologia.

A partir do contexto de sistemas dinâmicos foi possível estudar toda a dinâmica do Universo e a estabilidade do sistema de equações propostas neste trabalho. Além disso, utilizamos de teorias que são mais importantes para aplicações cosmológicas e que foram descritas ao longo deste trabalho.

Ao propor o conjunto de equações de fundo junto com termos dissipativos parametrizados de forma específica, o termo de dissipação foi relacionado à radiação dominando durante o período inflacionário, levando assim a um regime de inflação quente, enquanto o termo de dissipação relacionado a matéria dominando em tempos tardios. Com o sistema completo de equações foi possível demonstrar a mesma dinâmica, mostrado em (Lima; Ramos, 2019). O sistema de equações produz uma evolução que caracteriza um regime inflacionário acelerado, quando a energia do ínflaton domina, passando por uma fase dominada por radiação, tendo no final da evolução uma curta fase dominada pela matéria, antes da energia do ínflaton voltar a dominar novamente no futuro, correspondendo a uma fase de energia escura.

Vimos também os resultados relacionados à evolução dos termos de dissipação Q_r , $Q_{m,1}$ e $Q_{m,2}$ junto as equações de evolução. Observou-se que após a inflação, tanto Q_r como $Q_{m,1}$ tem um declínio semelhante, enquanto $Q_{m,2}$ tem um crescimento acentuado após o período inflacionário, durante a era da radiação, ao mesmo tempo que sofre um achatamento em momentos finais. Isto nos mostra que diferentes escolhas das potências nos termos de dissipação podem levar a diferentes evoluções durante as diferentes épocas do Universo.

Já para a dinâmica relacionada aos tempos tardios levamos em consideração o plano (x, y) , dado que o sistema dinâmico completo é muito complicado sendo um sistema de seis dimensões. No plano (x, y) foi possível ter informações sobre o comportamento das trajetórias que passam pela região acelerada, o que é importante para estudar a dinâmica tardia do sistema, onde é possível saber a capacidade do sistema de alcançar um regime dominado por DE. Como estamos interessados no comportamento tardio do sistema, nós ignoramos os termos relacionados a radiação nas equações do sistema dinâmico. Assumindo valores fixos para λ e Q_m , conseguimos achar pontos fixos derivados das equações x' e y' . Dos quatros pontos fixos obtidos, pode-se verificar que os pontos P_2 e P_3 são repulsores, enquanto o P_1 é um ponto de sela e o ponto P_4 é um atrator. Na figura 7, damos uma

visão geral das trajetórias do espaço de fase do sistema dinâmico no plano (x, y) para diferentes valores de parâmetros. Assim, o sistema em momentos posteriores vai para o regime de energia escura, conforme esperado.

Outra análise feita nesta dissertação foi da estabilidade das condições de rolamento lento. A análise do sistema dinâmico se deu em diferentes regimes, de forma a estudar a estabilidade do sistema nos mesmos. Os resultados obtidos foram satisfatórios, vimos que $|c| < 4$ sempre nos garantirá a estabilidade do sistema, sendo a dinâmica estável para qualquer faixa de Q_r e que não será preciso se preocupar com instabilidades. Entretanto, pode haver alguns valores de Q_r em que c está fora dessa faixa de valores e ainda ter estabilidade. Desse modo, podem ter valores de c distantes de $[-4, 4]$ permitidos, o que restringi a variação de Q_r durante a dinâmica.

A mesma análise feita para Q_r , foi feita para Q_m , e os resultados para a estabilidade nos dá que para $|k| < 4$ teremos a estabilidade, sendo a dinâmica estável para qualquer faixa de Q_m , de modo a não gerar preocupação com instabilidades. Entretanto, pode haver alguns valores de Q_m em que k pode estar fora dessa faixa de valores e ainda ter estabilidade. Desse modo, podem ter valores de k distantes de $[-4, 4]$ permitidos, o que restringi a variação de Q_m durante a dinâmica. Os resultados de estabilidade para os diferentes regimes dissipativos generalizam aqueles originalmente obtidos em (Bastero-Gil et al., 2012).

Portanto, com as diferentes análises feitas através das equações dinâmicas propostas nesta dissertação junto a teoria de sistemas dinâmicos no contexto de inflação quintessencial quente e analisando a estabilidade das condições de rolamento lento foi possível obter resultados consistentes tanto para o Universo primordial quanto para o tardio. Como perspectiva para um trabalho futuro, pretende-se analisar o sistema dinâmico completo.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, T. et al. First cosmology results using type ia supernovae from the dark energy survey: constraints on cosmological parameters. *The Astrophysical Journal Letters*, [s. l.], IOP Publishing, v. 872, n. 2, p. L30, 2019.
- ADE, P. A. et al. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, [s. l.], EDP sciences, v. 571, p. A16, 2014.
- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, [s.l.], EDP sciences, v. 641, p. A6, 2020.
- ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Physical Review Letters*, [s.l.], APS, v. 48, n. 17, p. 1220, 1982.
- AMENDOLA, L. et al. Challenges for scaling cosmologies. *Physical Review D*, [s.l.], American Physical Society (APS), v. 74, n. 2, jul 2006.
- ANDERSON, L. et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data releases 10 and 11 galaxy samples. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [s.l.], Oxford University Press, v. 441, n. 1, p. 24–62, 2014.
- BAHAMONDE, S. et al. Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity. *Physics Reports*, [s.l.], Elsevier, v. 775, p. 1–122, 2018.
- BASTERO-GIL, M.; BERERA, A. Warm inflation model building. *International Journal of Modern Physics A*, [s.l.], World Scientific, v. 24, n. 12, p. 2207–2240, 2009.
- BASTERO-GIL, M. et al. Stability analysis for the background equations for inflation with dissipation and in a viscous radiation bath. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, [s.l.], IOP Publishing, v. 2012, n. 11, p. 042–042, nov 2012.
- BAUMANN, D. Tasi lectures on inflation.[s. l.: s. n.]. 2012.
- BAUTISTA, J. E. et al. The SDSS-IV extended baryon oscillation spectroscopic survey: Baryon acoustic oscillations at redshift of 0.72 with the DR14 luminous red galaxy sample. *The Astrophysical Journal*, [s.l.], American Astronomical Society, v. 863, n. 1, p. 110, aug 2018.
- BELLAC, M. L. *Thermal Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- BERERA, A. Warm inflation. *Physical Review Letters*, [s.l.], American Physical Society (APS), v. 75, n. 18, p. 3218–3221, oct 1995.
- BERERA, A. The warm inflationary universe. *Contemporary Physics*, [s.l.], Informa UK Limited, v. 47, n. 1, p. 33–49, jan 2006.
- BERERA, A.; FANG, L.-Z. Thermally induced density perturbations in the inflation era. *Physical Review Letters*, [s.l.], APS, v. 74, n. 11, p. 1912, 1995.

- BERERA, A.; MOSS, I. G.; RAMOS, R. O. Warm inflation and its microphysical basis. *Reports on Progress in Physics*, [s.l.], IOP Publishing, v. 72, n. 2, p. 026901, 2009.
- BOEHMER, C. G.; HARKO, T.; SABAU, S. V. *Jacobi stability analysis of dynamical systems applications in gravitation and cosmology*. 2010.
- BULL, P. et al. Problems, solutions, and the road ahead. *Physics of the Dark Universe*, [s.l.], Elsevier BV, v. 12, p. 56–99, jun 2016.
- CAI, Y.-F.; EASSON, D. A.; BRANDENBERGER, R. Towards a nonsingular bouncing cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, [s.l.], IOP Publishing, v. 2012, n. 08, p. 020–020, aug 2012.
- CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Physical Review Letters*, [s.l.], APS, v. 80, n. 8, p. 1582, 1998.
- CARR, J. *Applications of centre manifold theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 35.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- COPELAND, E. J.; LIDDLE, A. R.; WANDS, D. Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Physical Review D*, [s.l.], APS, v. 57, n. 8, p. 4686, 1998.
- COPELAND, E. J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. Dynamics of Dark Energy. *International Journal of Modern Physics D*, [s.l.], World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 15, n. 11, p. 1753–1935, nov 2006.
- DAS, S.; BANERJEE, M.; ROY, N. Dynamical system analysis for steep potentials. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, [s.l.], IOP Publishing, v. 2019, n. 08, p. 024–024, aug 2019.
- DICKE, R. H. et al. Cosmic black-body radiation. *Astrophysical Journal*, [s.l.], v.142, p. 414–419, 1965.
- DODELSON, S.; SCHMIDT, F. *Modern Cosmology*. [S.l.]: Elsevier Science, 2020. ISBN 9780128159491.
- EFSTATHIOU, G.; SUTHERLAND, W. J.; MADDOX, S. J. The cosmological constant and cold dark matter. *Nature journal*, [s.l.], v.348, n. 6303, p. 705–707, dez. 1990.
- FANG, L. Entropy generation in the early universe by dissipative processes near the higgs phase transition. *Physics Letters B*, [s.l.], v.95, n. 1, p. 154–156, 1980. ISSN 0370-2693.
- GAMOW, G. The origin of elements and the separation of galaxies. *Physical Review*, [s.l.], APS, v. 74, n. 4, p. 505, 1948.
- GENG, C.-Q. et al. Quintessential inflation with canonical and noncanonical scalar fields and planck 2015 results. *Physical Review D*, [s.l.], American Physical Society (APS), v. 92, n. 2, jul 2015.

- GENG, C.-Q. et al. Observational constraints on successful model of quintessential inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, [s.l.], IOP Publishing, v. 2017, n. 06, p. 011–011, jun 2017.
- GEORGI, H.; GLASHOW, S. L. Unity of all elementary-particle forces. *Physical Review Letters*, [s.l.], APS, v. 32, n. 8, p. 438, 1974.
- GUENDELMAN, E.; NISSIMOV, E.; PACHEVA, S. Quintessential inflation, unified dark energy and dark matter, and higgs mechanism.[s. l.: s. n.]. 2016.
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, [s.l.], APS, v. 23, n. 2, p. 347, 1981.
- HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1973. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, [s.l.], National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929.
- HUTERER, D.; SHAFER, D. L. Dark energy two decades after: observables, probes, consistency tests. *Reports on Progress in Physics*, [s.l.], IOP Publishing, v. 81, n. 1, p. 016901, dec 2017.
- JOYCE, M. Electroweak baryogenesis and the expansion rate of the universe. *Physical Review D*, [s.l.], APS, v. 55, n. 4, p. 1875, 1997.
- KOLB, E.; TURNER, M. *The Early Universe*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1990. (Frontiers in physics).
- KOMATSU, E. et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe* observations: cosmological interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, [s.l.], IOP Publishing, v. 180, n. 2, p. 330, 2009.
- LANGEVIN, P. Sur la théorie du mouvement brownien. *Compt. Rendus*, [s.l.], v.146, p. 530–533, 1908.
- LIDDLE, A. R.; PARSONS, P.; BARROW, J. D. Formalizing the slow-roll approximation in inflation. *Physical Review D*, [s.l.], APS, v. 50, n. 12, p. 7222, 1994.
- LIMA, G. B.; RAMOS, R. O. Unified early and late universe cosmology through dissipative effects in steep quintessential inflation potential models. *Physical Review D*, [s.l.], APS, v. 100, n. 12, p. 123529, 2019.
- LINDE, A. Chaotic inflation. *Physics Letters B*, [s.l.], v.129, n. 3, p. 177–181, 1983. ISSN 0370-2693.
- LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, [s.l.], Elsevier, v. 108, n. 6, p. 389–393, 1982.
- LYTH, D. H.; RIOTTO, A. *Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation*. [S.l.]: Elsevier BV, 1999. 1–146 p. 1999.

- MATHER, J. C. et al. Calibrator design for the cobe* far infrared absolute spectrophotometer (firas). *The Astrophysical Journal*, [s.l.], IOP Publishing, v. 512, n. 2, p. 511, 1999.
- MCGRAND, S. J. C. Dark Energy and Modified Gravity: A Dynamical Systems Approach. [S. l.: s. n.], 2020.
- MOSS, I. G.; GRAHAM, C. Particle production and reheating of the inflationary universe. *Phys. Rev. D*, [s.l.], American Physical Society, v. 78, p. 123526, Dec 2008.
- MOSS, I. G.; XIONG, C. On the consistency of warm inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, [s.l.], IOP Publishing, v. 2008, n. 11, p. 023, nov 2008.
- MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unifying phantom inflation with late-time acceleration: Scalar phantom–non-phantom transition model and generalized holographic dark energy. *General Relativity and Gravitation*, [s.l.], Springer, v. 38, p. 1285–1304, 2006.
- OORT, J. H. The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, [s.l.], North Holland Publishing Company, v. 6, p. 249, 1932.
- OWEN, C. The universe during epochs of accelerating expansion. Lancaster University. Tese (Doutorado) - Lancaster University, Lancaster, 2019.
- PADILLA, A. Lectures on the cosmological constant problem.[s. l.: s. n.]. 2015.
- PEEBLES, P.; VILENKIN, A. Quintessential inflation. *Physical Review D*, [s.l.], APS, v. 59, n. 6, p. 063505, 1999.
- PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophysical Journal*, [s.l.], v.142, p. 419–421, 1965.
- PEREZ, J. de C. et al. *BD- Λ CDM and Running Vacuum Models: Theoretical background and current observational status*. [S. l.: s. n.], 2021.
- PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 7.
- PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, [s.l.], IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.
- PERROTTA, F.; BACCIGALUPI, C.; MATARRESE, S. Extended quintessence. *Physical Review D*, [s.l.], American Physical Society (APS), v. 61, n. 2, dec 1999.
- PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC press, 2018.
- POPOLO, A. D.; DELLIOU, M. L. Small scale problems of the λ cdm model: A short review. *Galaxies*, [s.l.], v.5, n. 1, 2017. ISSN 2075-4434.
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The astronomical journal*, [s.l.], IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.

- SCOLNIC, D. M. et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *The Astrophysical Journal*, [s.l.], IOP Publishing, v. 859, n. 2, p. 101, 2018.
- SPOKOINY, B. Deflationary universe scenario. *Physics Letters B*, [s.l.], Elsevier, v. 315, n. 1-2, p. 40–45, 1993.
- STEINHARDT, P. J.; WANG, L.; ZLATEV, I. Cosmological tracking solutions. *Physical Review D*, [s.l.], APS, v. 59, n. 12, p. 123504, 1999.
- STUART, A.; HUMPHRIES, A. *Dynamical Systems and Numerical Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Monographs on Applied Mathematics, v. 8). ISBN 9780521645638.
- TAMANINI, N. *Dynamical systems in dark energy models*. 2014. Tese (Doutorado) - UCL University College London, London, 2014.
- VELASQUEZ-TORIBIO et al. Observational constraints on the non-flat λ cdm model and a null test using the transition redshift.[s. l.: s. n.]. 2020.
- WAINWRIGHT, J.; ELLIS, G. F. R. *Dynamical Systems in Cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York, NY: Wiley, 1972.
- WETTERICH, C. Cosmology and the fate of dilatation symmetry. *Nuclear Physics B*, [s.l.], Elsevier, v. 302, n. 4, p. 668–696, 1988.
- WETTERICH, C. The cosmological model for an asymptotically vanishing time-dependent cosmological “constant”.[s. l.: s. n.]. 1994.
- WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. [S.l.]: World Publishing Company, 1990. (Texts in Mathematics vol. 2). ISBN 9780387970035.
- WIGGINS, S.; GOLUBITSKY, M. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. [S.l.]: Springer, 2003. v. 2.
- WRIGHT, E. L. et al. Interpretation of the cosmic microwave background radiation anisotropy detected by the COBE differential microwave radiometer. *Astrophysical Journal*, [s.l.], v.396, p. L13–L18, 1992.
- YOKOYAMA, J.; MAEDA, K.-i. On the dynamics of the power law inflation due to an exponential potential. *Physics Letters B*, [s.l.], Elsevier, v. 207, n. 1, p. 31–35, 1988.
- ZLATEV, I.; WANG, L.; STEINHARDT, P. J. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Physical Review Letters*, [s.l.], APS, v. 82, n. 5, p. 896, 1999.
- ZWICKY, F. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, [s.l.], v.6, p. 110–127, 1933.