Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

André Victor Ribeiro de Campos

Estudo de triângulos e quadriláteros na construção de mosaicos geométricos sob a perspectiva da Teoria de Van Hiele

Rio de Janeiro

2020

André Victor Ribeiro de Campos

Estudo de triângulos e quadriláteros na construção de mosaicos geométricos sob a perspectiva da Teoria de Van Hiele

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

C198 Campos, André Victor Ribeiro de.
Estudo de triângulos e quadriláteros na construção de mosaicos geométricos sob a perspectiva da Teoria de Van Hiele/ André Victor Ribeiro de Campos. – 2020.
93f. : il.

Orientador: Rogério Luiz Quintino de Oliveira Junior.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Geometria – Estudo e ensino (Ensino fundamental) - Teses. 2. Mosaicos (Matemática) – Teses. 3. Matemática na arte – Teses. I. Oliveira Junior, Rogério Luiz Quintino de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 514.07

Patricia Bello Meijinhos CRB-7/ 5217- Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

______________________________ ________________

Assinatura Data

André Victor Ribeiro de Campos

Estudo de triângulos e quadriláteros na construção de mosaicos geométricos sob a perspectiva da Teoria de Van Hiele

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 15 de dezembro de 2020.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior (Orientador)

Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

____

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araujo Carneiro

Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

____

Prof.ª Dra. Aline Mauricio Barbosa

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa Ana Rosa e ao meu filho Hugo, meus parceiros da vida.

AGRADECIMENTOS

A todos os familiares e amigos que, de alguma maneira, me incentivaram.

Ao meu orientador Professor Rogerio Quintino, pela dedicação e paciência.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante o período de realização deste Mestrado.

Aos colegas do curso, pela parceria e que o tornaram bem mais agradável, divertido e proveitoso.

Frequentemente sinto ter mais em comum com os matemáticos do que com os meus colegas artistas.

Maurits Cornelis Escher

RESUMO

CAMPOS, André Victor Ribeiro de. **Estudo de triângulos e quadriláteros na construção de mosaicos geométricos sob a perspectiva da Teoria de Van Hiele**. 2020. 96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Este trabalho relata uma experiência realizada em uma escola pública do Município do Rio de Janeiro em duas turmas do sétimo ano do Ensino Fundamental em 2019. Em ambas, foram trabalhados triângulos e quadriláteros, sua classificação, características principais e soma dos ângulos internos. Em uma delas usando o estudo tradicional com conceitos, figuras e definições, fazendo uso da apostila, livro e caderno. Na outra, utilizou-se a manipulação das figuras e construção de mosaicos geométricos. O objetivo era comparar as duas abordagens e verificar o interesse, desempenho e aproveitamento das turmas. Por estar há muitos anos trabalhando com essa fase de escolaridade, nem sempre dispondo de tempo e dos recursos necessários, notando o desinteresse dos alunos e sua difícil assimilação do assunto, o autor deste trabalho optou por fazer essa tentativa. Como o assunto é Geometria e os alunos tinham domínio mínimo, quase nulo de seus fundamentos, viu-se na teoria de Van Hiele uma combinação interessante com a ideia acima, visto que a mesma trabalha com níveis sucessivos de aprendizagem, onde o aluno vai construindo o conhecimento e progredindo, podendo partir do básico reconhecimento de figuras. A análise desse experimento através do olhar pedagógico qualitativo e quantitativo nos fez perceber que a experiência foi válida, não somente para o desenvolvimento geométrico dos estudantes, mas para despertar o interesse, participação e motivação destes, além de um legado para a prática docente.

Palavras-chave: Triângulos. Quadriláteros. Mosaicos Geométricos. Teoria de Van Hiele.

ABSTRACT

CAMPOS, André Victor Ribeiro de. **Study of triangles and quadrilaterals building geometric mosaics from the perspective of Van Hiele's theory**. 2020. 96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

This work reports an experience carried out in a public school in the city of Rio de Janeiro in two classes of the seventh year of Elementary Education in 2019. In both, triangles and quadrilaterals were worked, their classification, main characteristics and sum of the internal angles. In one of them using the traditional study with concepts, figures and definitions, using the handout, book and notebook. In the other, manipulation of figures and construction of geometric mosaics was used. The objective was to compare the two approaches and check the interest and performance of the classes. As the author has been working with this phase of education for many years, not always having the time and the necessary resources, noting the students' lack of interest and their difficult assimilation of the subject, the author of this work chose to make this attempt. As the subject is Geometry and the students had minimal mastery, almost zero of its fundamentals, it was seen in Van Hiele's theory an interesting combination with the above idea, since it works with successive levels of learning, where the student builds knowledge and progressing, being able to start from the basic recognition of figures. The analysis of this experiment through the qualitative and quantitative pedagogical look made us realize that the experience was valid, not only for the geometric development of the students, but to arouse their interest, participation and motivation, as well as a legacy for teaching practice.

Keywords: Triangles. Quadrilaterals. Geometric Mosaics. Van Hiele's theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC –	Base Nacional Comum Curricular
ENEM –	Exame Nacional do Ensino Médio
GEEM –	Grupo de Estudos para o Ensino da Matemática
MMM –	Movimento da Matemática Moderna
PCN –	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD –	Programa Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ensinar Geometria no Ensino Fundamental é um verdadeiro desafio. As barreiras a transpor são inúmeras. A começar, pela relação tempo/conteúdo. Na maioria das escolas, o que se visa é o ENEM, a quantidade de conteúdo e a antecipação dos conceitos. Ainda há o agravante da valorização excessiva da Álgebra e Artimética, seja pelos pais, coordenadores e claro, nós, professores.

Lorenzato (1995) enumera algumas razões para tal, entre elas o desconhecimento da Geometria por parte dos professores. Muito em parte devido a uma formação escolar já deficiente e um curso de Licenciatura onde a mesma, quando aparece, é de maneira rápida e frágil.

Um outro motivo que o pesquisador mostra é o apego excessivo aos livros didáticos, onde a Geometria aparece distante da Álgebra, Aritmética e demais disciplinas.

Na confecção do planejamento, seja semanal, mensal ou anual, a Geometria vem ocupando um espaço secundário e, em certas ocasiões, por falta de tempo hábil, ela acaba por ser deixada de fora do conteúdo dado em sala de aula.

O Currículo Carioca[1], que é o parâmetro para a confecção do planejamento anual das escolas do Município do Rio de Janeiro, apresenta, para o sétimo ano, oitenta e sete habilidades, das quais apenas vinte são da área de Geometria. E estas, estão concentradas nos últimos bimestres, assim como ocorre nos livros didáticos.

As escolas, em sua maioria, já nem ensinam mais Desenho Geométrico, pois não têm esta disciplina no seu currículo. Desta forma, instrumentos como compasso e par de esquadros não constam mais em algumas listas de material escolar dos estudantes.

Limitou-se, à disciplina, a regras de construção de figuras e não mais ao ensino da Geometria.

Neste contexto, necessitamos criar estratégias, visto que a aprendizagem de Geometria é fundamental ao estudante:

> Devemos citar ainda a importância da Geometria na formação acadêmica dos alunos; em relação à própria Matemática, por facilitar a compreensão de conteúdos que de forma geral auxiliam significativamente na aprendizagem de outras disciplinas como a Física, Química, Geografia. No contexto profissional a

[1] Disponível em <www.rio.rj.gov.br/dlstatic/10112/10884557/4268552/MATEMATICA.pdf>
Acesso em 01 de Mar. de 2019.

> importância da Geometria só é reconhecida nas profissões onde se faz necessária a utilização da mesma. Como exemplo podemos citar Engenharia, Arquitetura, Desenho, a Geometria aparece na forma de habilidades em profissões onde sua aplicação é menos formal: costureira, mestre de obras, coreógrafo, desportista, manobrista, etc. (HAMAZAKI, 2004, p.1)

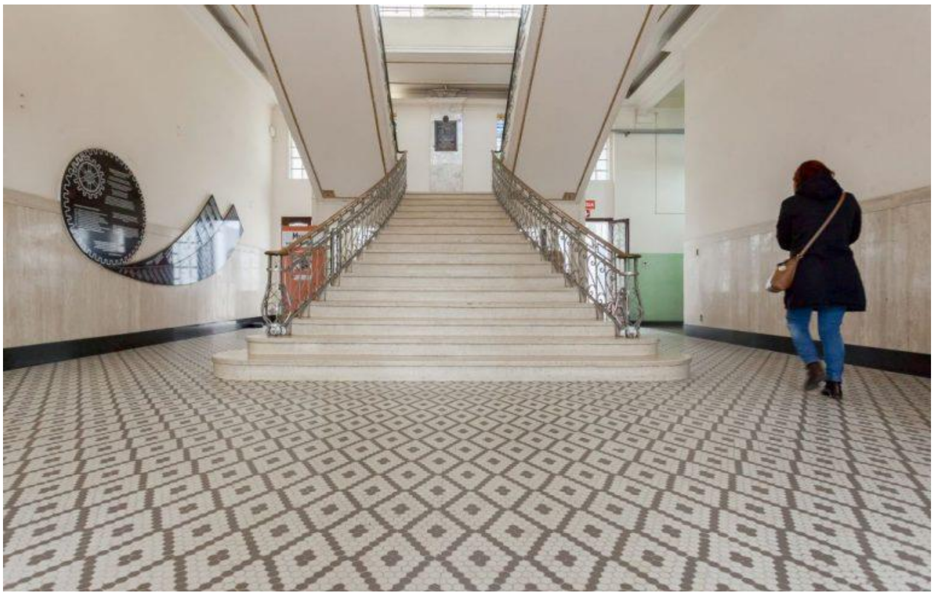
Propusemos um trabalho com o apoio das Artes Plásticas como tentativa de ensinar a Geometria a um grupo de alunos que nada, ou muito pouco conheciam desta disciplina. Com isto, este trabalho trata-se de um estudo de campo.

Para esta experiência, optamos pela construção, por parte dos alunos, de mosaicos geométricos, ou seja, aquele formados por figuras geométricas.

De fato, os mosaicos estão visíveis no cotidiano de todos nós, seja em formações de azulejos e pastilhas de vidro nas paredes, pisos modernos e históricos, até em simples malhas quadriculadas que formam telas de proteção.

Como mostra a figura 1, uma das entradas do prédio histórico da UFPR, na praça Santos Andrade, é formado por um mosaico feito com cerâmica e bossa[2].

Figura 1 – Mosaico em piso de cerâmica



Fonte: NOGUEIRA, 2016

[2] Uma versão contemporânea da azulejaria brasileira, com desenhos e cores que resgatam a estética da arquitetura moderna.

Além do apelo visual, a utilização de um material lúdico, tátil, se mostra, a cada dia, mais importante como um instrumento facilitador da aprendizagem dos alunos, algo que os mesmos possam construir e não somente observar.

Mais ainda, se tratando de Geometria, que é (ou deveria ser) para alunos do sétimo ano, estudo de figuras e suas características. Descobri-las, manipulá-las, ao invés de observá-las, nos pareceu um motivador a mais nesta experiência.

> Procura-se por meio da construção dos mosaicos aplicar conceitos geométricos, como as propriedades das figuras planas, dos movimentos rígidos no plano, dos distintos tipos de mosaicos periódicos e não periódicos, onde se destaca a importância desses temas quando se trabalha com interdisciplinaridade. O meio ambiente constitui hoje, como na antiguidade, motivo de estudo e de desenvolvimento da capacidade criadora da humanidade e é a Geometria que oferece maiores possibilidades na hora de experimentar mediante materiais adequados. (CARDOSO; GANDULFO, 2013, p. 2)

No intuito de fundamentar teoricamente esta experiência, optamos pela Teoria de Van Hiele. Esta teoria trata do ensino e do desenvolvimento do raciocínio geométrico em níveis, onde o estudante tem participação ativa com o auxílio do professor, trabalhando em conjunto com ele.

Neste contexto, o aluno só avança de nível quando o anterior for totalmente assimilado, dominado. Sendo assim, o aluno se torna um agente direto do processo de aprendizagem, pois age, questiona, produz e tira suas próprias conclusões.

Por ser um processo que torna o aluno um agente mais ativo e menos passivo, a Teoria de Van Hiele se enquadra, de fato, na nossa experiência e se mostra uma das saídas para uma questão fundamental: por que os estudantes têm tanta dificuldade no aprendizado da Geometria?

Embasam-nos as professoras e pesquisadoras do Projeto Fundão, grupo de pesquisa do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, projeto que atua na área de Educação Matemática desde mil novecentos e oitenta e dois, as professoras Nasser e Sant'Ana (2017, p. 5), "A nosso ver, a resposta a esta pergunta deve levar em conta não só a atuação didática do professor, mas também, e principalmente, a participação do aluno na construção do conhecimento."

Na obra das professoras acima – Geometria segundo a Teoria de Van Hiele – há propostas de atividades para o ensino de diversos tópicos da Geometria Plana.

A Teoria em si, tem sido mais utilizada e conhecida. Conseguimos encontrar, durante nossa pesquisa, alguns bons resultados, como o obtido com alunos do terceiro ano do ensino fundamental, em Porto Alegre, pelos professores Daniela Cristina Vargas Lopes e Rodrigo Sychocki Silva, em uma experiência envolvendo simetria, que assim concluíram:

> Consideramos que ocorreu a manifestação nítida da aprendizagem durante a aplicação dessas atividades, conforme verificamos em vários momentos durante as aulas, onde os alunos aumentaram, qualitativamente e quantitativamente a participação e contribuição em aula com ideias e comentários. Durante o momento da avaliação no final do ano, houve alto índice de acerto na questão proposta. (LOPES; SILVA, 2015, p. 117-118)

Tendo em mente essas decisões, tínhamos o objetivo de fazer uma comparação na experiência. Fazer dois tipos de abordagens bens distintas em duas turmas, para, de forma gradual e com a nossa co-participação, analisar o aumento ou não do interesse da parte dos alunos, a participação deles no processo de aprendizagem e como isso se refletiria em uma avaliação.

A experiência da qual trata esta dissertação foi realizada em duas turmas do sétimo ano de uma Escola Municipal da Cidade do Rio de Janeiro no mês de outubro de dois mil e dezenove, pelo professor-autor deste trabalho.

Em ambas, houve uma aula inaugural, idêntica, onde se buscou mostrar os conceitos básicos da Geometria, seus elementos primitivos, ângulos e suas características, retas e seus subconjuntos. Isto foi feito para que, desta forma, os alunos tivessem a chance de iniciar o estudo de uma forma homogênea. Esta atividade foi nomeada como “Atividade Zero”.

A seguir, em uma das turmas, que chamaremos aqui de turma B, utilizou-se o processo tradicional de ensino fazendo uso do livro, a apostila e caderno. Esta foi a turma de controle da experiência.

Na outra, chamada neste trabalho de turma A, aplicou-se sete atividades, com a construção de mosaicos geométricos e sua utilização no ensino de triângulos e quadriláteros.

Em ambas as turmas foram trabalhadas as definições destas figuras geométricas, seus elementos, passando pelas suas classificações quanto aos ângulos internos e medidas dos lados. Finalizamos com a medida da soma de seus ângulos internos.

Na turma A, decidiu-se pela construção gradual do conhecimento geométrico do aluno com a manipulação do material concreto fornecido pelo professor-autor e observando o modelo (ou teoria) de Van Hiele.

Ao final do período de aprendizagem do conteúdo dito, ambas as turmas realizaram um teste idêntico, englobando os assuntos estudados no período. Este teste nos serviu de avaliação quantitativa e qualitativa da repercussão do emprego da Arte no ensino de Geometria.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no primeiro capítulo, dissertamos sobre a relação ensino/aprendizagem da Geometria, um pouco da sua história no Brasil, sua evolução, seus desafios e possíveis estratégias para reduzir a deficiência dos alunos nesta disciplina.

No segundo capítulo, mostramos a relação entre a Arte e a Matemática ao longo da história e suas aplicações em sala de aula. Falamos também sobre os mosaicos geométricos.

No terceiro capítulo, apresentamos a teoria de Van Hiele, seus níveis e fases de aprendizagem de Geometria, assim como algumas discussões de outros autores e exemplos de aplicação da mesma em outros trabalhos.

Nos capítulos seguintes, são descritas a “atividade zero” e as atividades com a turma A, seus debates e as reações dos alunos frente ao uso do material concreto e a arte dos mosaicos no ensino de Geometria.

Por fim, temos as considerações finais, mostrando a grande validade da experiência e como o ganho qualitativo dos alunos foi importante, o seu desejo de participação e motivação para a aprendizagem. Estas observações foram bem distintas do que ocorria antes da experiência com a turma A.

Finalmente, a ideia deste trabalho é também deixar esse legado para outros colegas professores para utilizá-lo novamente nos próximos anos.

1 O ENSINO DA GEOMETRIA

1.1 História do Ensino da Geometria no Brasil

Pesquisando a história do ensino da Geometria no Brasil, percebemos que ela sempre acompanhou, legalmente, as diretrizes para o ensino da Matemática.

Segundo Pavanello (1993), ainda no início do século XX, quando éramos praticamente um país agrícola e com muitos analfabetos, tínhamos uma escola primária que valorizava a parte "utilitária" da Matemática, valorizando operações, métodos e conhecimentos que fossem, de fato, utilizados na vida prática.

No Ensino Secundário, restrito às elites, a Geometria, a Álgebra e a Aritmética eram ensinadas sem conexão por professores diferentes e de modo puramente abstrato, científico. Desta forma, ele se distanciava da escola primária e preparava os alunos para os cursos superiores.

No decorrer do século XX, reformas e mudanças no ensino de Matemática foram acontecendo sempre variando em função da economia, das profissões que se faziam necessárias ao mercado e do papel assumido pelo Estado nessa formação.

Entre essas mudanças, destacaremos três que tiveram influência direta no ensino da Geometria. Destas, duas foram extremamente prejudiciais ao ensino desta disciplina e o tempo para sua "recuperação" foi longo e, mesmo assim, alguns resquícios deste prejuízo ainda são sentidos e vividos até hoje.

A primeira mudança ocorrida no ensino de Geometria no Brasil se deu na década de 60, pois nesta época a educação brasileira baseou o currículo de Matemática no *Movimento da Matemática Moderna* (MMM), de origem estadunidense[3], que influenciou o ensino de Matemática em muitos países.

Este movimento privilegiava as Estruturas Algébricas e a linguagem de conjuntos. Havia um formalismo e uma simbologia excessivos.

---

[3] Há dúvidas entre os historiadores se realmente a Matemática Moderna surgiu primeiramente nos EUA. Muitos acreditam que ela surgiu, ao mesmo tempo, nos EUA e na Europa (ALVES; SILVEIRA, 2016, p. 12).

Essa proposta acabou distanciando o aluno das questões práticas; poucos conseguiam acompanhar a disciplina de Matemática neste contexto, visto que essa “nova” linguagem se aproximava demais da linguagem de uma Matemática “pura”.

Alvo de muitas críticas e extinto após cerca de duas décadas, esse Movimento acabou prejudicando o ensino da Matemática como um todo e, ainda mais, o da Geometria.

Sobre isto, assim resume Ávila (1993):

> [...] As características principais dessa reforma foram uma ênfase acentuada na utilização da linguagem de conjuntos e numa apresentação excessivamente formal das diferentes partes da Matemática. Foi uma reforma radical.
> Os reformistas contaram, desde o primeiro instante, com adeptos fervorosos e poucos opositores. A maioria dos professores — e mesmo alguns eminentes matemáticos — apoiava as mudanças com entusiasmo. Mas, com o passar do tempo, a ineficácia da Matemática Moderna ia-se tornando mais e mais evidente. Os opositores do movimento foram aumentando em número e contando, cada vez mais, com o apoio de pesquisadores de grande prestígio. Em conseqüência disso, e das muitas críticas que então se faziam à *Matemática Moderna*, aliadas às evidências da ineficácia dessa orientação para o ensino, novas mudanças começaram a ser feitas, no sentido de corrigir os rumos que vinham sendo seguidos. (ÁVILA, 1993, p 5-10)

Essa “ênfase” na linguagem de conjuntos, simbolismos e estruturas privilegiou a Álgebra em detrimento dos outros ramos da Matemática Básica. Mesmo a Aritmética se tornou confusa e rebuscada. Simples operações como soma e subtração eram tratadas como conjuntos e os resultados como símbolos: “É 7 um número? Claro que não! É o *nome* de um número, 5 + 2, 6 + 1 e 8 – 1 são nomes para o mesmo número. O símbolo 7 é um *numeral* para o número” (KLINE, 1976, p. 16).

Lima (1999) divide o ensino da Matemática como conceituação, manipulação e aplicação e descreve que a *Matemática Moderna* focou demais no primeiro item:

> Quase não havia lugar para as manipulações e muito menos para as aplicações. Por um lado, a Matemática que então se estudava nas escolas era pouco mais do que um vago e inútil exercício de generalidades, incapaz de suprir as necessidades das demais disciplinas científicas e mesmo do uso prático no dia-a-dia. Por outro lado, como os professores e autores de livros didáticos não alcançavam a razão de ser e o emprego posterior das noções abstratas que tinham de expor, o ensino perdia muito em objetividade, insistindo em detalhes irrelevantes e deixando de destacar o essencial. (LIMA, 1999, p. 1-6)

Segundo Pavanello (1993), figuras geométricas e interseções entre elas eram tratadas como conjuntos de pontos no plano. Teoremas eram tratados como postulados, utilizados para resolução de problemas e o ensino de Geometria tinha, também, a seguinte característica: “Não existe qualquer preocupação com a construção de uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas” (PAVANELLO, 1993, p. 13).

O crítico mais famoso deste Movimento, Professor Morris Kline, resume parte do prejuízo que o ensino da Geometria teve em sua famosa obra “O Fracasso da Matemática Moderna”:

> Nesta questão, podemos comparar a teoria dos conjuntos com a geometria elementar. Quando vistos pela primeira vez, os axiomas da geometria devem parecer óbvios ao estudante, e até este ponto a geometria e a teoria dos conjuntos começam em igualdade de condições. Mas quase antes de perceber que qualquer coisa de importância se está desenvolvendo na geometria, o estudante compara com consequências que o surpreendem e o podem excitar. Partindo de axiomas aparentemente simples e do modo dedutivo de raciocinar, emergem resultados tão inesperados e capitosos como o de que linhas medianas de um triângulo se encontram num ponto, como o fazem as alturas, os bissetores do ângulo e os bissetores perpendiculares dos lados – e não apenas para um tipo de trângulo mas para todo triângulo. A um estudante sensível à matemática, tais resultados vêm como uma revelação jamais inesquecível do poder do raciocínio matemático abstrato. Nada existe comparável no tratamento rudimentar da teoria dos conjuntos no novo currículo de matemática. (KLINE, 1976, p. 119-120)

Neste contexto histórico, foram formados professores de todos os segmentos, seguindo esse Movimento. Também foram realizados vários GEEM – Grupos de Estudos para o Ensino da Matemática – onde matemáticos brasileiros, entre estes autores e editores de livros didáticos, discutiam o Movimento em si. Estes matemáticos encaravam o MMM, de fato, como uma modernização e possível solução para os problemas do ensino da Matemática no país. Nesta época, a Matemática Moderna passou a nortear o currículo escolar brasileiro.

Além disso, cursos eram oferecidos aos professores já formados e em formação para sua adaptação a esta “modernização” no ensino da Matemática.

A mudança no ensino de Geometria que veio a seguir se deu com a promulgação da Lei 5692/71 – “Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Graus”, que acarretou outro prejuízo histórico para o ensino desta disciplina.

Segundo Pavanello (1993), essa lei facilitou a enfatização da Álgebra em detrimento do raciocínio lógico-dedutivo, essencial para a Geometria. O texto desta promulgação permitia que o professor definisse os conteúdos de acordo com a “clientela”. Ora, esses professores eram provenientes de uma formação influenciada pela Matemática Moderna.

Ainda que desejassem, muitos não tinham conhecimento, tampouco didática, para ensinar a disciplina de Geometria. Dessa forma, ela foi praticamente retirada dos anos iniciais de escolaridade e, em alguns casos, até dos anos finais. Quando era inserida no 2º grau, os alunos apresentavam extrema dificuldade, pois a lei também instituiu o ensino da Educação Artística que, no âmbito geral, substituiu o Desenho Geométrico.

Outro aspecto importante e desastroso dessa lei foi a criação da escola de 1º grau com oito anos substituindo a antiga “admissão”, onde um concurso era feito entre o Primário, que compunha os quatro primeiros anos, e o Ginásio, contendo os quatro último anos de ensino destinado à formação da criança e do pré-adolescente. Dessa forma, as escolas públicas tiveram trágicas consequências, pois suas turmas se apresentavam muito mais cheias, com alunos nem sempre preparados para a série em que se encontravam. Os professores tiveram achatamento salarial e, por isso, foram forçados a aumentar sua carga de trabalho. Além disso, não havia suporte pedagógico algum do Estado para trabalhar com esse novo público e este, ao contrário, pressionava os professores em função dos custos desse aumento da demanda.

Já no 2º grau, a ideia desta lei era a de uma escola majoritariamente profissionalizante, devido às necessidades do mercado. Mas acabou fracassada, pois não havia oferta de docentes preparados para tal “escola”. Assim, ela se tornou uma escola de menor qualidade e que também não preparava mais para os cursos superiores. Além disso, ela era oferecida, majoritariamente, em horário noturno.

Por outro lado, nas escolas particulares e militares, a interpretação da lei foi bem diferente. Ambas mantiveram o currículo mais completo, com o ensino da Geometria atrelado ou não aos outros ramos da Matemática e mantiveram o Desenho Geométrico. Além disso, continuaram preparando, no 2º grau, os alunos para o Ensino Superior.

Para concluir esta parte histórica que empobreceu o ensino de Geometria no Brasil, reproduzimos um trecho de Pavanello (1993): “A dualidade tradicional de nosso ensino poderia, então, ser reformulada como ‘escola onde se ensina geometria’ (escola de eleite) x ‘escola onde não se ensina geometria’ (escola do povo)” (PAVANELLO, 1993, p. 15).

Muitos destes alunos, provenientes deste abandono da Geometria, se tornariam, futuramente, professores de Matemática. Daí, a preocupação de Lorenzato (1995):

> Presentemente está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la.

> Mas é preciso romper esse ciclo de ignorância geométrica, mesmo porque já passou o tempo do “Ler, Escrever e Contar”. (LORENZATO, 1995, p. 4)

Para Moura, Cavalcante e Gomes (2016), todo esse debate que perdurou as décadas seguintes, as pesquisas em Educação Matemática como as citadas nos parágrafos anteriores, além de questionamentos sobre esse “abandono” do ensino de Geometria, culminaram com a notícia positiva dos Parâmetros Curriculares Nacionais, ou PCN, promulgados pelo Ministério da Educação e Cultura em 1998.

Os PCN retomam o ensino da Geometria associado aos outros tópicos da Matemática, além de incluir construções geométricas com régua e compasso.

Eles também ressaltam a importância da Geometria no desenvolvimento cognitivo do estudante:

> Quanto aos conteúdos, apresentam um aspecto inovador ao explorá-los não apenas na dimensão de conceitos, mas também na dimensão de procedimentos e de atitudes. Em função da demanda social incorporam, já no ensino fundamental, o estudo da probabilidade e da estatística e evidenciam a importância da geometria e das medidas para desenvolver as capacidades cognitivas fundamentais. (BRASIL, 1998, p. 16)

Os PCN de 1998 embasam os professores que se permitam estimular o ensino da Geometria sob vários aspectos, não somente o teórico, mas de envolvimento com a realidade que os cerca.

Dentre os objetivos destes parâmetros, destacamos este, agrupando todos os ramos da matemática escolar:

> Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico). (BRASIL, 1998, p. 48)

Já na seção de conteúdos deste documento, em “Espaço e Forma”, se destaca novamente o que o ensino da Geometria pode contribuir para o desenvolvimento e aprendizagem do aluno.

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.
> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL, 1998, p. 51)

Segundo Lobo e Bayer (2004), esta foi a iniciativa mais inovadora e positiva para o ensino da Geometria, pois atendia aos anseios dos pesquisadores e professores que tentavam minimizar, de alguma forma, os estragos causados pelo seu abandono histórico no século XX, mostrando, pela primeira vez, uma real preocupação com o ensino desta disciplina.

É evidente que não se pode esperar que mudanças na concepção da Educação de um país ocorram de maneira abrupta e imediata. Isto leva tempo e promove debates acerca de sua relevância.

Desta maneira, isto mostra a relevância de trabalhos e pesquisas no ensino de Geometria, como a que esta dissertação se propõe a fazer.

1.2 A Importância da Geometria na Aprendizagem

A importância da aprendizagem da Geometria já é uma realidade; no entanto, como ela está sendo tratada é ainda um processo em andamento.

Pesquisas comprovam que, desde os primeiros anos da Educação Infantil, se faz importante a aprendizagem geométrica da criança, pois:

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: a criança é capaz de identificar uma figura apenas por sua forma, aparência física e geral e, enfim, por sua imagem. A partir daí, têm início as representações mentais que lhe permitirão trazer à memória objetos e espaços ausentes. (CLEMENTE et al, 2015, p. 3)

Como os autores do artigo supracitado embasam, quando a Geometria se apresenta para uma criança de forma prática e natural, desde a percepção de seu corpo, quanto ao ambiente em que estão inseridos, ela cria uma noção de espaço e forma fundamental para o desenvolvimento cognitivo dela.

Baseado em estudos e pesquisas nesta área, os currículos de Geometria vêm evoluindo e permitindo avanços significativos, bem diferentes da forma que se apresentavam há vinte anos.

Vemos, por exemplo, a Geometria Espacial já aparecendo nos livros do 1º ano do Ensino Fundamental. Estes livros trabalham desde o início do ano letivo com os sólidos geométricos, tratados há alguns anos apenas no Ensino Médio, no curso de Geometria Espacial.

Com isso, objetos com formato de paralelepípedo, cilindro, cone, cubo etc. já fazem parte do cotidiano da criança e são percebidos de maneira natural, assim como a diferença entre esses sólidos e as figuras planas, estas últimas que serão muito mais abordadas durante os anos seguintes do Ensino Fundamental.

A legislação vigente em adaptação, a Base Nacional Comum Curricular, ou BNCC, cita, na disciplina Matemática, na unidade temática Geometria, para os anos iniciais do Ensino Fundamental: "Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa."(BRASIL, 2017, p. 272)

Já no quadro de Habilidades Específicas, para o primeiro ano do Ensino Fundamental, a BNCC descreve: "(EF01MA13) Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico." (BRASIL, 2017, p. 279)

Notemos que tudo isso é estudado por crianças ainda no processo de alfabetização, e que estas crianças são capazes de pensar geometricamente e analisar de forma puramente geométrica os sólidos acima, sem cálculos, fórmulas ou medidas.

Lorenzato (1995) explicita o que essa mudança no currículo de Matemática pode representar para o estudante:

> A Geometria é um excelente apoio as outras disciplinas: como interpretar um mapa, sem o auxílio da Geometria? E um gráfico estatístico? Como compreender conceitos de medida sem idéias geométricas? A história das civilizações está repleta de exemplos ilustrando o papel fundamental que a Geometria (que é carregada de imagens) teve na conquista de conhecimentos artísticos, científicos e, em especial, matemáticos. A imagem desempenha importante papel na aprendizagem e é por isso que a reapresentação de tabelas, fórmulas, enunciados, etc, sempre recebe uma interpretação mais fácil com o apoio geométrico. (LORENZATO, 1995, p. 6)

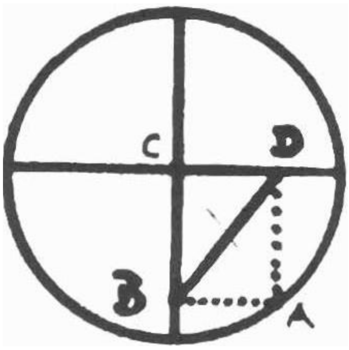
O mesmo pesquisador cita o termo “raciocícinio geométrico”, mostrando que a Geometria, além de poder ser um excelente suporte para o aprendizado da Aritmética e da Álgebra, pode ser uma disciplina que cria uma linha de pensamento própria.

Mesmo hoje, isto é pouco explorado na resolução de problemas-situações que envolvam a Geometria e não dependam de outras informações.

Entre alguns exemplos de problemas do tipo que citamos, selecionamos o da figura abaixo. Nele, mesmo os melhores alunos em Matemática de uma turma possivelmente teriam dificuldade de resolvê-lo, alegando falta de dados. Agem desta forma, pois assim foram ensinados, não enxergando a Geometria sem dados aritméticos, não possuindo, portanto, “percepção geométrica”, segundo Lorenzato (1995).

O exemplo é o seguinte: “Dado um círculo de raio conhecido e um retângulo, qual a medida da diagonal BD?”

Figura 2 – Exemplo de Exercício de Percepção Geométrica



Fonte: LORENZATO, 1995, p. 5.

Para resolvê-lo, bastam dois conceitos geométricos simples: o retângulo possui duas diagonais e ambas têm a mesma medida e a circunferência é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto dado ou, na linguagem dos estudantes, “todos os raios são iguais”.

Problemas como este são, de fato, inéditos para a maioria dos estudantes e professores. São totalmente diferentes do que vemos nos livros didáticos, mesmo os que valorizam a Geometria.

> É muito comum, diante de questões deste tipo, pessoas ficarem sem ação e se justificarem dizendo que não podem resolvê-las porque não foram dados números ou medidas. Isso denota a forte tendência que a nossa Educação Matemática tem imprimido aos alunos: a de Aritmetização do raciocínio. (LORENZATO, 1995, p. 5)

Por outro lado, muitos estão presos a instituições que visam apenas concursos e não à educação de uma forma completa. Estas instituições atraem o público com seus resultados no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), por vezes com uma estatística maquiada, como se só este fato importasse para a formação da criança/adolescente. Ainda que estes concursos cubram a disciplina de Geometria e demais conteúdos de forma contextualizada, em geral eles vêm com uma gama pequena de conteúdos explorados e o estudo dos alunos acaba, portanto, ficando focado apenas nestes conteúdos.

Nesse processo, a Geometria, ou a Matemática em geral, acaba, por vezes, regredindo à mesmice que gostaríamos que fosse, há muito, esquecida, descartada.

Temos, assim, um ensino direcionado, focado, sem interdisciplinaridade e pouco abrangente.

> Quando é falado sobre inovação, é lembrado de laboratórios de informática; em um segundo plano, a utilização de material concreto com a proposta de fazer com que o aluno construa o seu conhecimento. Mesmo assim, continua aquela preocupação com questões que serão cobradas em provas de seleção que alguns terão que prestar. Com isso, percebe-se que a responsabilidade em não deixar nenhuma lacuna na vida escolar do aluno faz com que esses professores fiquem, na sua grande maioria, presos a uma lista de conteúdos fechada considerada desnecessária em alguns momentos. (RIBEIRO, 2013, p. 1)

O mesmo trabalho destaca ainda, algumas falas de professores em relação à inovação e como cada um a enxerga de uma maneira. Se, por um lado, alguns pensam em *softwares* educacionais, outros apenas visualizam uma mudança de concepção do ensino.

Ainda sobre a resistência a mudanças, tema central do estudo acima, muitos professores justificam a falta de tempo como o obstáculo para estudarem novas concepções de ensino e que suas aulas estão, de fato, como elas foram durante sua formação como docentes.

Lobo e Bayer (2004) abordam este tema de maneira clara quando expõem que, apesar dessa evolução de ideias e percepções no ensino da Geometria, ainda é o professor quem prepara o planejamento e o executa na sala. Daí a preocupação com a formação deste docente.

O fato do Desenho Geométrico estar inserido na disciplina de Geometria ilustra bem este fato. Isto está previsto na Legislação e os livros já vêm com esse conteúdo e exercícios de construções geométricas.

A maioria dos docentes não estudou Desenho Geométrico, seja na escola ou no curso superior. Ao chegar na sala, se ele precisa ensiná-lo, como fazê-lo? O professor é capaz de aprender, mas terá tempo e condições de se preparar para isso na situação na qual vivemos?

Para o professor-autor deste trabalho, o exemplo da falha no estudo de Geometria acima é bastante importante, pois estudei Desenho Geométrico nos sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental e, também, no Ensino Médio, já que fiz um curso técnico. Com isso, na minha trajetória profissional, tenho, de fato, "ensinado" aos colegas de profissão conceitos de Desenho Geométrico que estes sentem dificuldade.

Como um exemplo de obra que tenta dirimir o hiato no ensino de Geometria observado anteriormente, podemos citar a Coleção Matemática dos professores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis (2012) para o Ensino Fundamental, que trabalha conteúdos como vistas ortográficas no livro do sexto ano, algo bem técnico para a maioria dos colegas docentes. De forma simples, clara, mas inovadora. Estes autores incentivam até a construção de plantas baixas dos cômodos da escola e dos quartos dos alunos no sétimo ano do Ensino Fundamental.

Assim, essa Coleção trabalha a Geometria de forma construtiva, com uso de instrumentos e experimentação. O raciocínio dedutivo acompanha toda a obra.

Essa aborgadem, infelizmente, ainda causa espanto em alguns professores, que se vêem diante de algo muito distinto do que consideram "Geometria". Tanto é o caso que esta Coleção pouco figura nas listas de material das principais escolas particulares da cidade do Rio de Janeiro.

Ela, inclusive, foi preterida na escolha das escola públicas para o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em 2017, não constando entre as dez primeiras coleções escolhidas.

Estes dados, constantes no site oficial do programa[4], apontam como líder das escolhas a coleção "Praticando Matemática" dos professores Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos. Esta coleção trabalha a Geometria do sétimo ano do Ensino Fundamental de

[4] Fonte: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Data de acesso: 15 de Abr. 2019.

forma aritmetizada e algebrizada. Ela ensina algumas construções geométricas, mas possui menos de cinco exercícios abordando-as.

É com este livro do sétimo ano que foi realizada a experiência deste trabalho no ensino de triângulos e quadriláteros com os alunos, pois, na escola onde ela ocorreu, a coleção supracitada foi adotada por uma escolha da maioria dos colegas docentes.

2 A ARTE E A MATEMÁTICA

2.1 História

Descritas desta forma, esta expressão – Arte e Matemática – pode parecer a alguns, apenas como duas disciplinas do currículo escolar e mais nada. De fato o são. Entretanto, fazendo uma pesquisa mais apurada, descobre-se que ambas estão bem mais próximas do que se imagina e que, tanto na história, como na vida, existem diversas passagens onde as duas caminham juntas.

Historicamente, a Arte, apesar de não soar desta maneira, pode ser vista como uma verdadeira "necessidade" do ser humano. Tanto quanto qualquer ciência: "Em cada momento específico e em cada cultura, o homem tenta satisfazer suas necessidades socioculturais também por meio de sua vontade/necessidade de arte". (BIESDORF; WANDSCHEER, 2011 apud BUORO, 2000)

Desde o início dos tempos, o homem tinha a necessidade de se expressar e assim o fez e o faz continuamente ao longo da história.

> Por meio da arte a humanidade expressa suas necessidades, crenças, desejos, sonhos. Todos têm uma história, que pode ser individual ou coletiva. As representações artísticas nos oferecem elementos que facilitam a compreensão da história dos povos em cada período. (BIESDORF; WANDSCHEER, 2011, p. 1)

Na evolução e no desenvolvimento humano, nos encontros entre estas formas de expressão, seus estilos e contextos históricos, a Matemática habitou e habita esse universo de forma a demonstrar a expressão de alguns artistas.

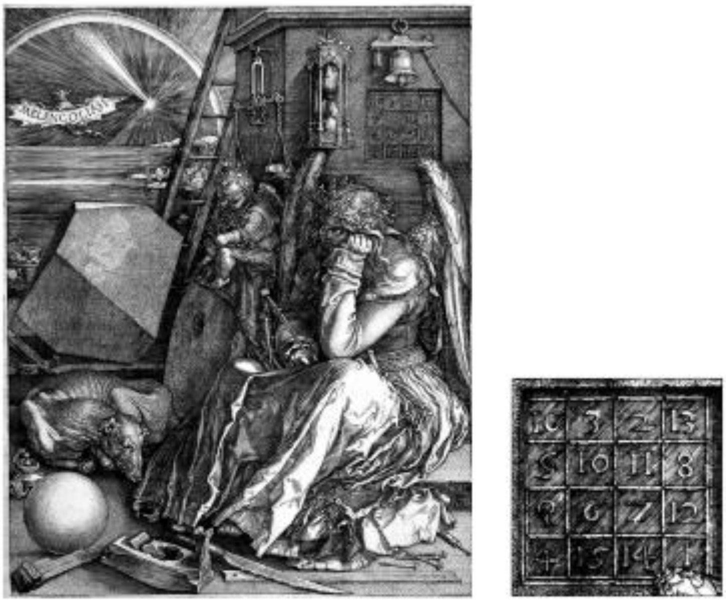
> Analisando as origens dos registros da Arte e da Matemática e um tempo mais remoto, podemos perceber que os desenhos e as figuras do homem neolítico, que embora possa ter menos tempo para o lazer e pouca necessidade de medir terras, mostram preocupação com as relações espaciais que abriram o caminho para a Geometria. Desenhos em potes, tecidos e cestas são exemplos de simetria que são conceitos tratados pela Geometria Elementar. (ZALESKI FILHO, 2013 apud HELBEL, 2013, p. 12)

Pirâmides egípcias, construções gregas e romanas como edificações, onde se fazem presentes conceitos de engenharia e matemáticos apurados, são consideradas obras de arte.

Ainda que, à época de sua confecção, essas construções tivessem outras intenções, são feitos artísticos reconhecidos e glorificados. Dessa forma, vemos como, mesmo sem intenção inicial, apenas com a intuição, essas duas ciências estão interligadas e definem estilos históricos de arte e conhecimento matemático naturalmente unidos, uma vez que para as construções que citamos, por exemplo, a Matemática se fez presente para sua execução.

Segundo Fainguelernt e Nunes (2015), posteriormente, já no Renascimento, podemos nos deparar com obras de arte onde a Matemática e seu domínio se mostram presentes. Intencionalmente juntos, conceitos geométricos e até aritméticos constituem, por exemplo, a pintura do alemão Albrecht Dürer (1471-1528), Melancolia, de 1514, mostrada na figura abaixo.

Figura 3 – Melancolia de Albert Dürer



ALBRECHT DÜRER. *Melancolia*, 1514. / Detalhe do quadrado mágico.

Fonte: FAINGUELERNT; NUNES, 2015, p. 21

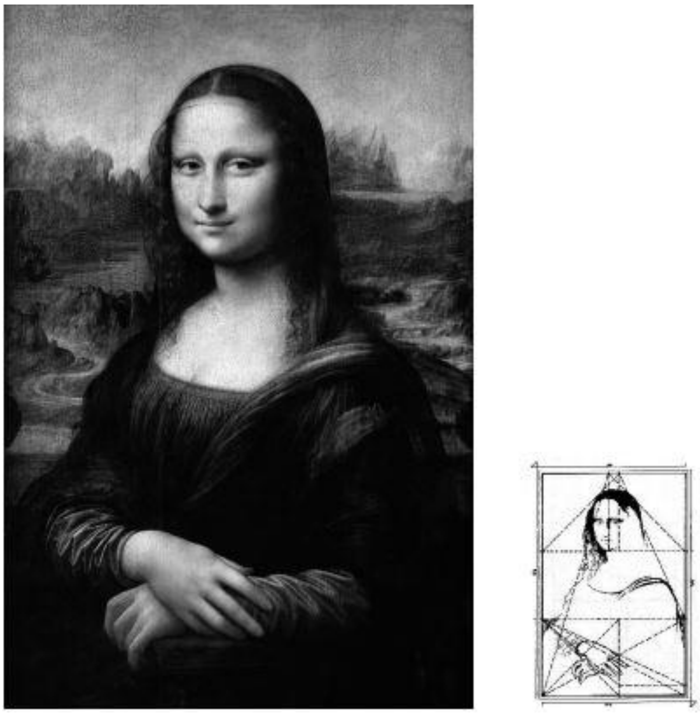
Além de poliedros e esferas, há o destaque para um curioso quadrado mágico, jamais explorado e pouco conhecido, mesmo hoje, da maioria da população.

Neste tempo, do Renascimento, podemos até concluir que uma ideia artística acabou se transformando em um conceito geométrico importante, invertendo a ideia que a arte utiliza conceitos matemáticos somente. Assim, esclarecem Fainguelernt & Nunes (2015):

> Uma das mais notáveis influências da arte sobre a matemática ocorreu no Renascimento. Até então, as gravuras e as pinturas eram “bidimensionais”, isto é, nelas não havia representada a noção de profundidade. A partir dessa época, os artistas dominaram a técnica de projetar em uma tela plana figuras e ambientes em três dimensões. Surgia a noção de perspectiva. Ao tentar compreender os princípios que governavam os processos de projeção e perspectiva, os matemáticos criaram uma nova geometria, a chamada Geometria Projetiva. Com ela, surgiram e desenvolveram-se diversos conceitos indispensáveis, que depois foram adaptados a diversas outras instâncias da matemática, das ciências, da engenharia, da arquitetura e mesmo das artes. (FAINGUELERNT; NUNES, 2015, p. 2)

Segundo as autoras, neste perído da história, temos, como expoente maior, a figura de Leonardo Da Vinci (1452–1519). Um artista, escultor, pintor, mas também um cientista, inventor, geômetra e arquiteto. Na sua obra mais conhecida, a Mona Lisa (pintada entre 1503 e 1506), Da Vinci utilizou conceitos matemáticos, a começar pela seção áurea e a harmonia que ela causa ao olhar humano. Além disso, podemos observar, nesta imagem, alguns triângulos que definem as posições dos braços e o rosto da gravura.

Figura 4 – Mona Lisa com esquema de triângulos



Fonte: FAINGUELERNT & NUNES, 2015, p. 22

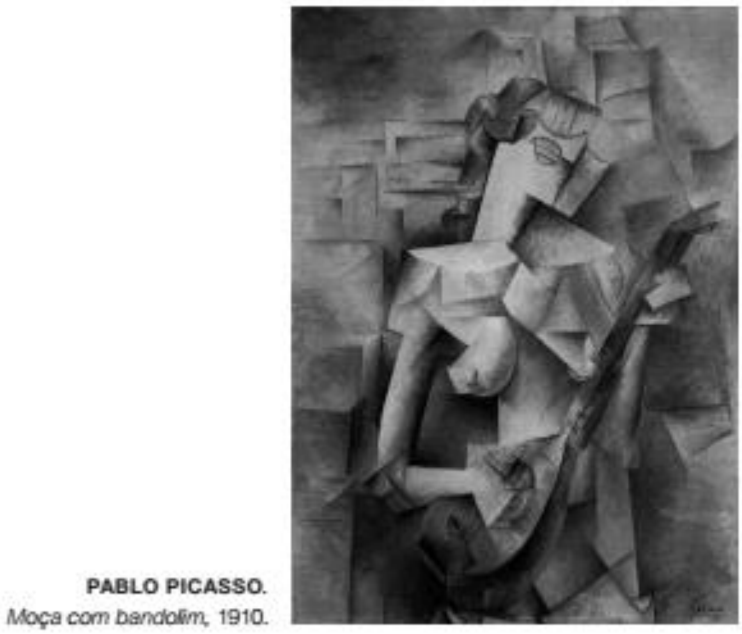
E acrescentam:

> Não foi por acaso que Leonardo da Vinci escolheu a seção áurea. Cada detalhe do quadro foi conscientemente pensado e refletido. Como ele mesmo afirma: “O pintor que desenha apenas guiado pela prática e pelo julgamento dos olhos, sem usar a razão, é como um espelho que reflete tudo o que encontra à sua frente, sem disso tomar conhecimento”. (FAINGULERNT & NUNES, 2015, p. 23)

Podemos citar como mais um exemplo envolvendo Arte e Matemática, também, o movimento Cubista representado na figura de Pablo Picasso (1881-1973). Fainguelernt & Nunes (2015), destacam que o Cubismo, diferentemente do Renascentismo, retratava figuras humanas ou a natureza distorcendo a realidade com liberdade, fazendo uso de linhas retas e figuras geométricas.

Nesta obra mostrada na próxima figura, o estilo cubista de Picasso.

Figura 5 – Moça com Bandolim (1910)

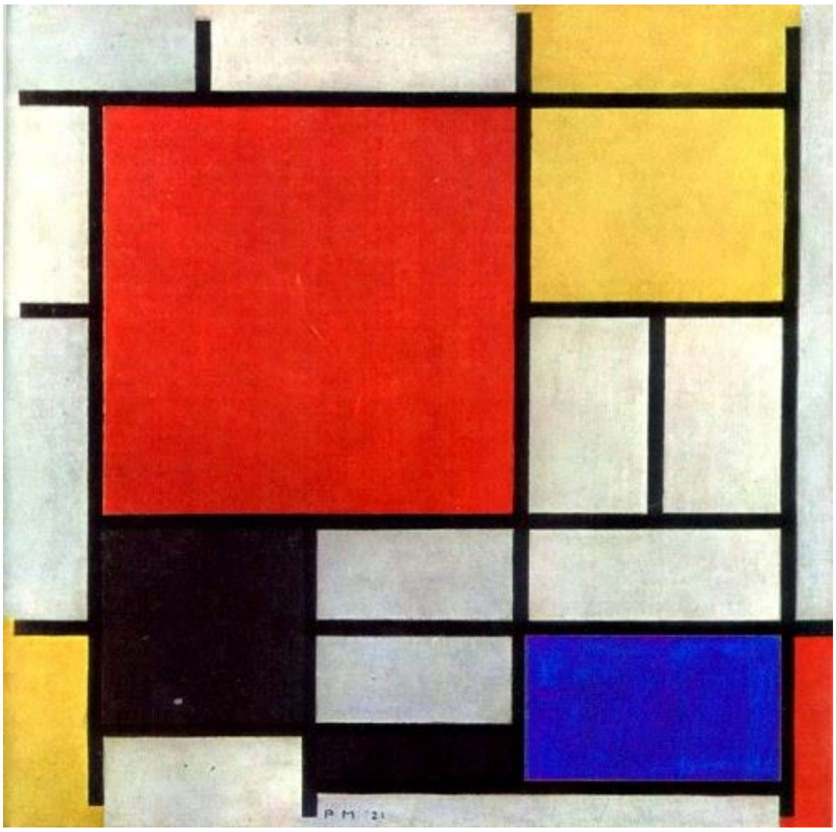


Fonte: FAINGUELERNT; NUNES, 2015, p. 26

As autoras acrescentam também, Piet Mondrian (1872-1994) que baseou toda sua obra, a partir de 1918, em linhas poligonais formando figuras geométricas, principalmente quadrados e retângulos, coloridos ou não.

Mostrando uma forte influência do Cubismo, este estilo o acompanhou por toda a sua vida artística, tornando-se sua marca registrada. Suas obras influenciaram designs de roupas, calçados, móveis e marcas de cosméticos.

Figura 6 – Composição em vermelho, amarelo, azul e preto (1921)



Fonte: RODRIGUES, 2016.

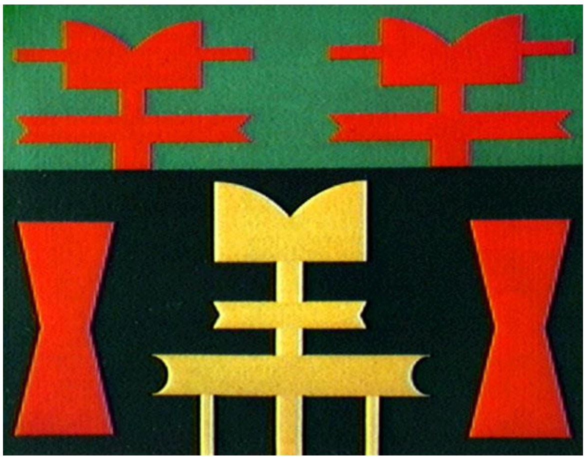
Além destes expoentes das artes, na pesquisa deste trabalho foram encontrados dois brasileiros que também fizeram uso de conceitos matemáticos em suas obras.

Um deles, é Rubem Valentim[5] (1922-1991). Nascido na Bahia, ele baseou suas obras em figuras geométricas e simetria. Além disso, ele também costumava mesclar elementos das religiões afro-brasileiras.

Na figura 7, vemos uma de suas obras e podemos notar tais influências.

[5] Disponível em <https://www.escritoriodearte.com/artista/rubem-valentim>. Acesso em 21 de Set. de 2019.

Figura 7 – Logotipo Poético (de 1975)



Fonte: EMBLEMA - Logotipo Poético.

Um outro pintor brasileiro que se encaixa no contexto Arte e Matemática é o pernambucano Vicente do Rego Monteiro[6] (1899-1970). Dentre sua extensa coleção de obras, encontramos algumas onde a preocupação com a simetria salta aos olhos. Temos um exemplo de uma dessas mostrada na figura abaixo.

Figura 8 – As Religiosas (1969).

Fonte: AS RELIGIOSAS.

---

[6] Disponível em <https://www.escritoriodearte.com/artista/vicente-do-rego-monteiro>. Acesso em 21 de Set. de 2019.

Para finalizar esta seção, podemos contemplar a obra do londrino Simon Beck (1958 -), inovadora por se tratar de uma obra feita na neve e que também se utiliza de conceitos matemáticos.

Figura 9 – Uma obra na neve de Simon Beck.

Fonte: ZIMMER, 2013.

2.2 Arte e Matemática na Escola

Ao fazer uma associação entre duas disciplinas que, aparentemente, pouco se comunicam no ambiente escolar, é provável que encontraremos barreiras. Este pode ser o caso de associar Arte e Matemática em uma escola.

Quando fazemos este tipo de proposta, nem sempre somos amparados, como professores, pela direção ou coordenação da escola, apesar deste tipo de orientação aparecer nos PCN.

> [...] o aluno que conhece arte pode estabelecer relações mais amplas quando estuda um determinado período histórico. Um aluno que exercita continuamente sua imaginação estará mais habilitado a construir um texto, a desenvolver estratégias pessoais para resolver um problema matemático. (BRASIL, 1998, p. 5, apud FAINGUELERNT; NUNES, 2015, p. 16).

A realidade acaba se afastando da teoria, mesmo com os outros colegas de profissão, que por vezes se recusam a adotar coleções de livros e material escolar mais inovadores neste e em outros sentidos. Se esta decisão não parte das cordenações e do projeto pedagógico da escola, não é simples encontrar apoio para executá-la.

Mas temos ciência que é preciso mudar, ou tentar mudar. Os resultados não favorecem a quem está levando “a culpa”, “carregando o peso”, que somos nós, professores. Se antes os responsáveis cobravam dos alunos um desempenho melhor, hoje vemos uma mudança total de concepção, pois se o aluno não vai bem, a escola e o professor são responsabilizados por tal. Vemos este contexto na charge do francês Emmnuel Chaunu, já traduzida:

Figura 10 – Charge de Emmanuel Chaunu (2009)

Fonte: MONTEIRO, 2012.

Não que parte desta responsabilidade não seja da escola, mas, de fato, cabe aos professores investirem nessa mudança, com inovações. Estas inovações não devem ser somente tecnológicas, mas é preciso ter a consciência que os estudantes já têm concepções novas de mundo, realidade e, logicamente, da escola, bem diferentes das gerações passadas. Como nos embasa Mendes (2012): “[...] com o acesso massificado à informação, não há mais a mística de que a aula é um momento único para o aprendizado. Se alguém quiser saber o que está sendo ensinado, pode buscar quando quiser, instantaneamente.”

Partindo dessa premissa de tentar uma mudança, por que não conceber um trabalho interdisciplinar da Matemática com as Artes Plásticas, se até mesmo as leis educacionais vigentes nos proporcionam essa hipótese?

> Por muitos anos, e infelizmente ainda hoje, os processos de ensino e aprendizagem têm estado associados mais a sofrimento e repetição do que a prazer e criação, principalmente nas salas de aula de matemática. Esse tipo de ensino costuma ser apresentado como um corpo imutável de conhecimentos que devemos ser capazes de utilizar e reproduzir, com pouquíssimo espaço para a criatividade, o desenvolvimento do raciocínio, a descoberta, a sensibilidade, a intuição, a visualização e a percepção. A matemática, em geral, é considerada uma disciplina difícil, fechada, enigmática, destinada a uns poucos que nasceram com talento especial para aprendê-la. Isso acaba gerando atitudes negativas, bloqueios, resistências e até repúdio em relação a ela. Muitos de nós não tiveram uma única oportunidade de perceber a aplicação da matemática no cotidiano, de vivenciar experiências matemáticas criadoras e prazerosas. (FAINGUELERNT; NUNES, 2015, p. 10)

Na verdade, não é difícil encontrar em trabalhos escolares de Artes Plásticas uma ligação com a Geometria, como mandalas e mosaicos. As aulas de Matemática é que não costumam funcionar desta maneira. Como conclui Ribeiro (2013), após entrevistar diversos professores de Matemática, para seu trabalho sobre essa “resistência” dos professores de Matemática:

> Os entrevistados argumentam que o professor deve experimentar inovações pedagógicas, dizem que estão dispostos para modificar, adquirir novas experiências. Apesar disso, questionam quando ou em que horário podem fazer isso, já que alguns afirmam chegar até duas horas da manhã corrigindo prova. Completam afirmando que a Universidade não lhes preparou para essas situações que necessitam de uma dedicação maior do professor, e por isso são enfáticos em dizer que não modificam suas práticas pedagógicas por falta de formação e de tempo. (RIBEIRO, 2013, p. 5)

Na experiência deste trabalho, por exemplo, quando procurou-se a professora de Artes da escola onde a experiência foi realizada em busca de ajuda, mesmo ela estando em fim de carreira, acabou por se surpreender com a atitude do professor-autor, que segundo ela, jamais havia acontecido em sua vida profissional.

Entretanto, muitas ideias, estudos e trabalhos têm surgido e sido aplicados, na Educação Matemática, usando essa concepção. Nos embasa Helbel (2013):

> Com base nessas atribuições, mais um motivo para que o ensino da Geometria esteja relacionado a demais áreas do conhecimento, pensando em tudo isto, tendo a Geometria e a Arte uma ligação intrínseca favorecida pela leitura de imagem nas obras de Arte o ensino a ser ministrado aos alunos pode e deve ser coroado de fascínio e prazer. (HELBEL, 2013, p. 3)

Além disso, a mesma autora afirma que “Se, com o encontro da Matemática com a Arte, pode-se colher muitos frutos e tornar mais atraente o ensino da Geometria, então se faça com que este encontro seja repleto de novas aprendizagens.” (HELBEL, 2013, p. 4)

Esse é um ponto que, de fato, retorna à questão da concepção nova de escola. Há alguns anos, tínhamos um grupo discente que via, na escola, um universo de novidades e possibilidades. Entretanto, com a inclusão digital, essas informações passaram a flutuar o universo destes alunos de forma mais rápida e com fácil acesso. Dessa forma, como coloca Mendes (2012): “Eles esperam da Escola, mas principalmente dos professores, respostas sobre este mundo tão diverso, rápido e desafiador. Eles se entediam e se irritam quando são convidados a aprender os conteúdos que seus pais tiveram e esqueceram.”

Assim sendo, é preciso inovar. Até mesmo, para atrair o grupo. E, assim como Helbel (2013), acreditamos que a Arte torna-se grande aliada neste quesito.

De fato, os alunos, nas aulas de Artes, estão acostumados a interagir, participar e produzir. Algo pouco aproveitado nas aulas comuns de Matemática. Em geral, nessas aulas ordinárias, se tem um livro ou uma apostila com o conteúdo descrito e exercícios onde o estudante vai observar, fazer contas, raciocinar, pesquisar, mas jamais participar da produção do material. É um universo restrito, por vezes maçante e cansativo. A questão da produção e interação são pouco abordadas e a Geometria permite esses procedimentos.

A ideia, ao contrário do que a maioria das pessoas possa imaginar, se torna agradável para os professores e para os alunos: “Nessa perspectiva, os estudantes se tornam partícipes de um mistério e protagonistas em um processo de investigação e descoberta.” (HELBEL, 2013, p.14).

> Corroboramos com os postulados de Helbel (2014) quando relata que precisamos renovar o modo de se ensinar Geometria em sala de aula, fazendo uso de Obras de Arte e, ainda, deve-se possibilitar aos alunos que visualizem, em seus próprios trabalhos artísticos, todo conteúdo matemático presente neles o que, possivelmente, tornaria o ensino da Matemática mais atraente e significativo. (MIYASAKI, 2014, p. 5)

Foi com esse pensamento que buscou-se, neste trabalho, elaborar a experiência descrita nele: deixar os alunos livres para produzir, trocar experiências e debater sobre suas produções etc. Desta forma, esta estratégia de ensino não somente pode ser aplicada em uma experiência com Artes, mas no ensino da Geometria e da Matemática, em geral.

Pensando por esta linha de raciocício, procurou-se, dentro da metodologia de ensino de Geometria usada na experiência com mosaicos deste trabalho, utilizar o Modelo de Van

Hiele. Como veremos no próximo capítulo, este Modelo nos diz que o aprendizado da Geometria pelos alunos se dá de forma progressiva e em níveis de compreensão e raciocínio, que são sequenciais e ordenados. Desta forma, ele permite avaliar em que nível de aprendizagem o aluno se encontra dentro do experimento, permitindo um maior controle do processo de ensino-aprendizagem como um todo.

O processo de transformação do espaço da sala de aula em um espaço produtivo, de troca, debate e produção, nos parece fazer todo sentido quando buscamos estratégias para atrair um público desinteressado e cansado do “quadro e giz”. É claro que já isto vem acontecendo há tempos, mas ainda encontra dificuldades de ser absorvido pelas pessoas que fazem parte do processo escolar – alunos, pais e professores – e para a sociedade, em geral.

> Assim, acima e além de conteúdos importante, a Escola deve ensinar habilidades, cultivando a capacidade de iniciativa dos alunos em relação à aquisição, à crítica e até mesmo à produção de conhecimento, [...] sobre a adequação de nossas atuais instituições à promoção de tal formação, parece merecer, pelo menos à primeira vista, uma resposta negativa: apesar do esforço coletivo para encontrar alternativas para reformar a Educação, o que se nota são alunos, professores e pais insatisfeitos. A sensação é, na verdade, de que os alunos estão cada vez mais desmotivados a aprender; os professores, cada vez mais soterrados em demandas diversas, tensos, frustrados; os pais, cada vez mais perdidos, diante da missão de educar para um mundo que não conhecem. (MENDES, 2012, p. 202)

Por exemplo, parece mais inteligente e lógico, ao ensinar a origem do número irracional “pi” (π), medir comprimentos e diâmetros de circunferências e fazer a razão entre eles, notando como, independente da circunferência que se considere, o valor do quociente é sempre constante próximo do valor três.

Um outro exemplo que podemos citar para uma melhor compreensão por parte do aluno é, ao trabalhar o cálculo das diagonais de um polígono, ao invés de, simplesmente, mostrar a fórmula, explicar qual é o significado do “$n - 3$” presente nela, deixando que o estudante perceba que de um vértice não partem diagonais para os vértices adjacentes e nem para ele mesmo, logo, de cada vértice partem três diagonais a menos que o total de vértices n.

Dar *significado* à aula e ao que se ensina e se aprende, isto sempre nos pareceu o caminho, quando é possível a execução.

> O maior, dentre todos os resultados, porém, é o resgate do significado do trabalho realizado em sala de aula, já que os alunos identificam imediatamente que estão cultivando uma habilidade fundamental para viver no mundo que exige formação, adaptação e aprendizado constante.(MENDES, 2012, p. 238)

No contexto do ensino da Matemática usando Arte, ainda podemos dizer que:

> A matemática e a arte caracterizam-se, principalmente, pela busca da verdade, no primeiro caso, e pela busca da beleza, no segundo. Uma constante em ambos os casos é a forte interação entre o racional e o intuitivo ou visual, predominando o primeiro na matemática e o segundo na arte. (CIFUENTES, 2003, apud GUSMÃO, 2013, p. 100)

Outra ideia que exploramos na nossa experiência, que une a Arte e a Geometria, é a utilização da visualização de imagens, que se faz presente continuamente nas aulas de Artes, como parte preponderante também da aprendizagem em Geometria.

Gusmão (2013) ressalta que, além da intuição e da imaginação, a construção e visualização de imagens se dá na aprendizagem da seguinte forma: "É um processo de formar imagens mentais, com o intuito de capturar, construir e comunicar determinados conceitos matemáticos, com vistas a auxiliar na resolução de diversos problemas, especialmente, os geométricos". (GUSMÃO, 2013, p. 115)

A autora também ressalta que, antes de pensarmos em termos abstratos, construímos imagens mentalmente. De fato, antes de estudarmos propriedades de qualquer figura geométrica, se não a "desenharmos" mentalmente podemos imaginar características que ela não possui. Assim, entendemos que, no processo de aprendizagem de Geometria, é necessário que a clareza da imagem da figura ligada à sua designação é o primeiro passo para desenvolver atividades relacionadas a ela. Em suma, quando pronunciamos o nome da figura, antes de qualquer ideia ou pensamento abstrato sobre suas propriedades, fazemos a construção concreta da imagem da figura mentalmente.

> Visualização é uma forma de estimular o pensamento, a imaginação, a intuição e a sensibilidade. É o mecanismo de expressão de uma linguagem visual e do raciocínio visual. Ela pode ser considerada o principal mecanismo para fazer "ver" um resultado matemático sem recorrer à demonstração no seu sentido rigoroso de dedução lógica. Visualizar é singularizar, exemplificar, mantendo a universalidade. É ser capaz de formular imagens mentais e está no início de todo processo de abstração (CIFUENTES, 2005 apud GUSMÃO, 2013, p. 115-116).

A aproximação com a Arte, que constrói e visualiza as imagens, foi a base de nosso trabalho. Não se trabalha com Arte sem visualização, assim como na Geometria.

> O pensamento geométrico se desenvolve inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. Por meio da observação e experimentação elas começam a discernir as características de uma

> figura, e a usar as propriedades para conceituar classes de formas (BRASIL, 1997, p. 82)

Gusmão (2013) ressalta que, de maneira diferente de seus conterrâneos que o antecederam, que primavam pela razão, ao desenvolver a Matemática, Euclides percebeu a Geometria, em seus estudos e demonstrações, pela lógica da visualização das imagens das construções geométricas. Mas os livros didáticos, com raras exceções, não trabalham com essa ideia.

> Em matemática, os mecanismos ligados à visualização, quando evidenciados, além de tornar a aula mais dinâmica, permite estabelecer comparações com o processo histórico de desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Permite, ainda, o alargamento da compreensão dos conceitos e pode permitir a organização do pensamento. A função das imagens no processo do pensamento não é apenas ilustrativa. O ato de pensar se processa, primeiramente, sob a forma de imagens. Sendo estas fundamentais para compreensão da linguagem, especialmente da linguagem e dos símbolos matemáticos. (GUSMÃO, 2013, p. 122)

Vemos, portanto, que a utilização de mosaicos na experiência deste trabalho vai de encontro a esta importante parte do ensino de Geometria que é a visualização das figuras geométricas para alcançar os objetivos de aprendizagem propostos. Na próxima seção, falaremos um pouco sobre mosaicos e sua história.

2.3 Mosaicos

A palavra mosaico possui várias definições e escritas ao longo da história. Por exemplo, temos esta definição vista em Simonini (2017):

> [...] segundo Sclovsky (2008), "é uma palavra de origem grega, que significa 'obra paciente, digna das musas'". "Obra paciente" porque seu processo de transformação requer muita calma, habilidade e concentração e "digna das musas", já que se trata de um produto de rara beleza, elaborado com materiais que atravessam os séculos. (SIMONINI, 2017, p. 23)

Já Gandulfo et al. (2013) definem a palavra mosaico da seguinte maneira:

> Um *mosaico* ou *pavimentação* P do plano é a união de um conjunto enumerável de figuras planas que recobrem o plano sem superposições e sem espaços vazios

> entre elas, isto é, P é a união das figuras planas {P1, P2, P3, ... }, chamadas de *ladrilhos* ou *peças* do mosaico. (GANDULFO et al., 2013, p. 3)

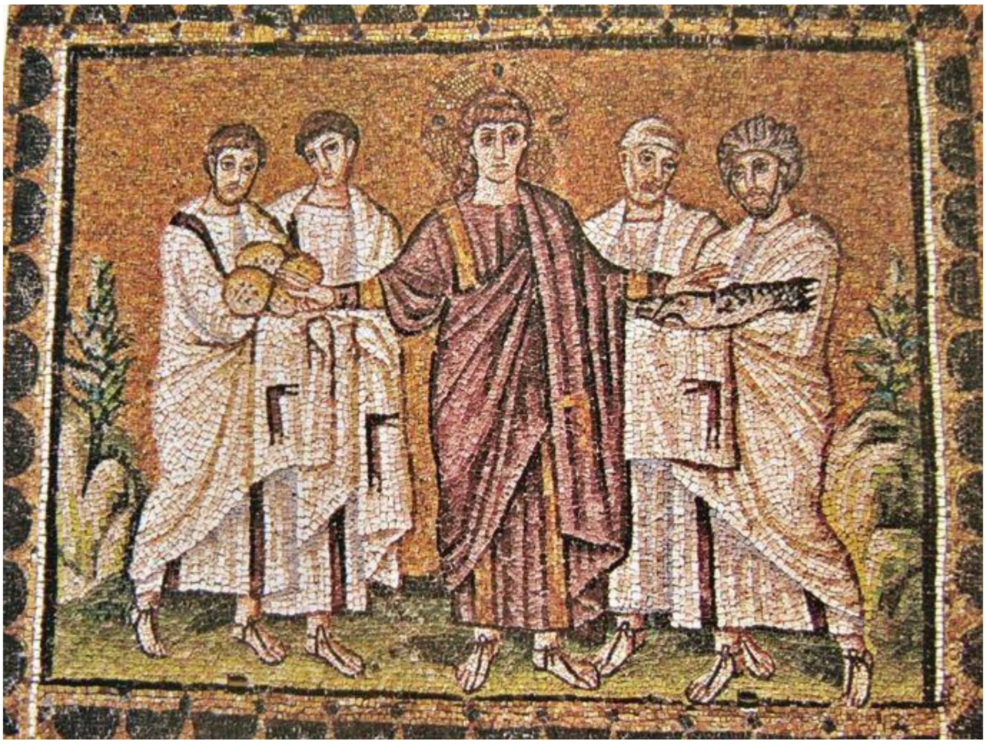
Historicamente, segundo Simonini (2017), os mosaicos existem desde a antiguidade, ficando difícil definir um ponto de partida.

Eles têm sido usados para decorar desde utensílios domésticos, pavimentações e até igrejas, atingindo o auge deste tipo de arte no Império Bizantino. “A arte dos mosaicos [...] durou do século IV ao século XV e estendeu-se por uma grande região da Europa, África e Ásia” (SIMONINI, 2017, p. 22-23). No caso da decoração de igrejas, os mosaicos tratavam de temas religiosos e imperiais.

Segundo AIDAR (sd), as peças eram fixadas com uma mistura de cal, areia e óleo, o que preenchia o espaço entre elas.

A seguir, na figura 11, vemos um mosaico bizantino, de cunho religioso feito com pedaços de pedra, de cores diferentes.

Figura 11 – Mosaico Bizantino: O milagre dos pães e dos peixes (520 ac)



Fonte: AIDAR, sd.

Sobre os mosaicos geométricos, eles são definidos por Imenes e Lellis (2012, p. 288) como: “Desenho formado por uma ou mais formas geométricas, que se encaixam perfeitamente e cobrem uma superfície”. Podemos perceber, a seguir, uma das ideias que motivaram seu surgimento:

> Algumas culturas desenvolveram mosaicos com motivos geométricos mais do que outras. É o caso do mosaico islâmico que sofreu grande influência do mosaico bizantino, embora possua suas características próprias. Uma de suas principais peculiaridades é a ausência da representação da figura humana, cuja proibição religiosa se aplica a qualquer tipo de representação artística islâmica. Com essa limitação, os islâmicos prestavam mais atenção na forma abstrata, criando composições geométricas (SCLOVSKY, 2008 apud SIMONINI, 2017, p. 24).

Abaixo, na figura 12 vemos um mosaico decorativo, com essa característica, na igreja de Alhambra, em Granada, na Espanha.

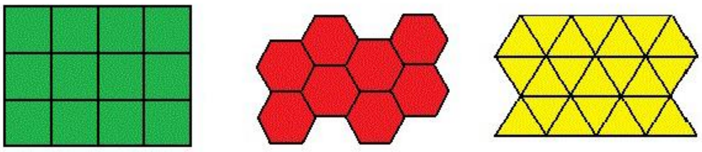
Figura 12 – Mosaico Islâmico na Igreja de Alhambra

Fonte: FREITAS, 2018

Cardoso e Gandulfo (2013) classificam os mosaicos geométricos em três tipos: regulares, semirregulares e irregulares.

Os regulares são aqueles formados por apenas um tipo de polígono regular, reproduzido diversas vezes. Estes polígonos podem ser somente três: quadrados, triângulos ou hexágonos.

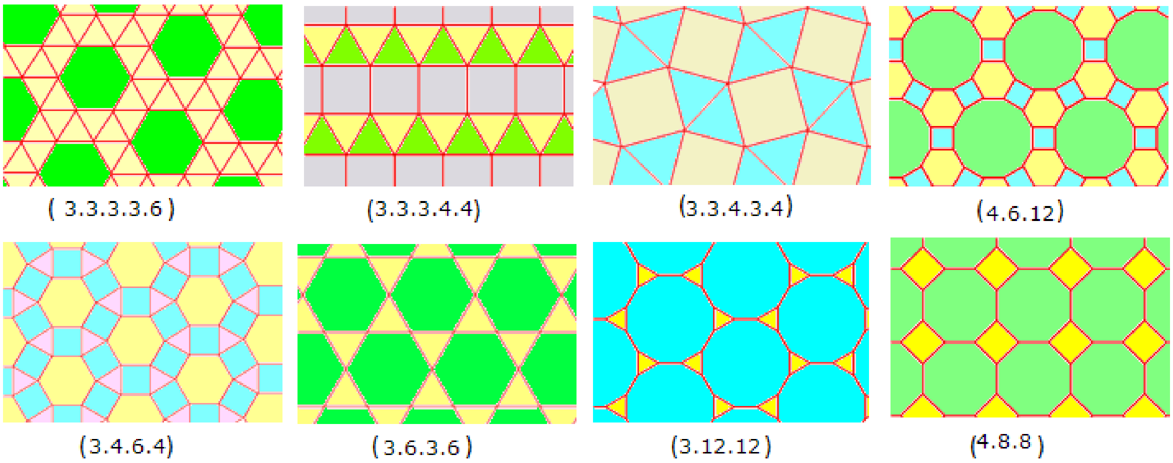
Figura 13 – Mosaicos regulares



Fonte: SIMONINI, 2017, p. 28.

Os mosaicos semirregulares são compostos por dois ou mais tipos de polígonos regulares diferentes entre si. Há oito tipos de combinações possíveis, que estão representadas na figura seguinte.

Figura 14 – Mosaicos Semirregulares



Fonte: SIMONINI, 2017, p. 34.

Finalmente, os mosaicos irregulares são formados por polígonos irregulares de qualquer tipo. Na figura abaixo, vemos dois exemplos de mosaicos deste tipo.

Figura 15 – Mosaicos irregulares

Fonte: CARDOSO; GANDULFO, 2013, p.3.

Quando se trata de Arte e Matemática, principalmente mosaicos, uma referência obrigatória são as obras de Maurits Cornelius Escher (1898-1972).

Mundialmente conhecidas e reverenciadas, as obras com mosaicos de Escher primam pela pavimentação do plano (ladrilhamento), criando mosaicos com uma concepção geométrica inédita até sua época.

De acordo com Simonini (2017), Escher explicou o conceito de divisão regular do plano, mostrando suas variações.

Segundo Fainguelernt e Nunes (2015, p. 27), “suas obras expressavam notável combinação de sensibilidade e precisão técnica, e a chave para os surpreendentes efeitos de suas gravuras foi a matemática, especialmente o campo da geometria.”

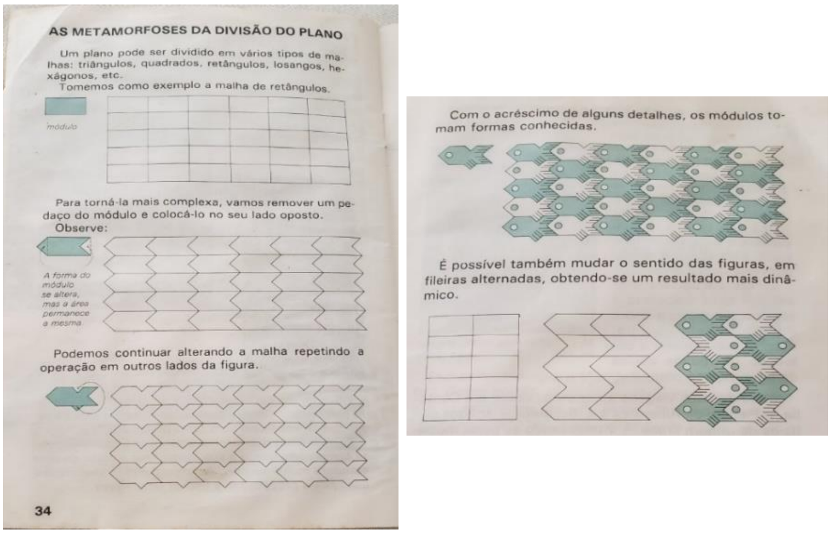
As mesmas autoras explicam que ele desenvolveu sua técnica influenciado pelo fascínio pela arte e cultura árabe que estudou de forma profunda, analisando as propriedades geométricas como a simetria. Entretanto, ao invés das figuras abstrato-geométricas, Escher utilizou os padrões geométricos para desenvolver obras com peixes, aves e répteis.

O artista conseguiu, com seu trabalho, impressionar matemáticos e demais artistas, unindo, como poucos na história, essa concepção de ladrilhamento.

> Escher considerava esses ladrilhamentos o seu tema mais importante. Primeiro,ele substituiu as formas geométricas nuas, tais como paralelogramos, por imagens realísticas. Depois, ele se mostrou capaz de transformar essas imagens. A natureza era um dos temas fundamentais do trabalho de Escher. Salamandras, aves, peixes, plantas, formigas, besouros e sapos surgiam constantemente, às vezes como parte de um ladrilhamento, metamorfose ou ciclo (ESCHER; TJABBES, 2011 apud SIMONINI, 2017, p. 26).

Para ilustrar essa “metamorfose”, reproduziremos as páginas 34 e 35 do livro Geometria dos Mosaicos de Luis Márcio Imenes (1988):

Figura 16 – Um exemplo de ladrilhaento de Escher


AS METAMORFOSES DA DIVISÃO DO PLANO

Um plano pode ser dividido em vários tipos de malhas: triângulos, quadrados, retângulos, losangos, hexágonos, etc.

Tomemos como exemplo a malha de retângulos.

módulo

Para torná-la mais complexa, vamos remover um pedaço do módulo e colocá-lo no seu lado oposto.

Observe:

A forma do módulo se altera, mas a área permanece a mesma.

Podemos continuar alterando a malha repetindo a operação em outros lados da figura.

34

Com o acréscimo de alguns detalhes, os módulos tomam formas conhecidas.

É possível também mudar o sentido das figuras, em fileiras alternadas, obtendo-se um resultado mais dinâmico.

Fonte: IMENES, 1988, p. 34-35.

De forma bem didática e elucidativa, Fainguelernt e Nunes (2015) nos mostram uma das técnicas de Escher e incentiva seus leitores em relação à Matemática, em particular a Geometria, utilizada nas obras dele:

> Com essa concepção, Escher utilizava a matemática como uma ferramenta que ampliava a percepção e a exploração, enriquecendo seu trabalho gráfico. Disso resultou uma obra primorosa na qual, em cada etapa, as representações se fazem presentes. Todo o seu trabalho é baseado em visualizações e representações. Podemos observar que ele não teve dificuldade em utilizar conhecimentos matemáticos para criar sua obra. Cabe ressaltar o fato de que a geometria, ensinada a partir do estudo das pavimentações e da obtenção de padrões, enriquece o potencial de conhecimentos, constituindo-se uma prazerosa fonte de aprendizagem. (FAINGUELERNT; NUNES, 2015, p. 30)

Figura 17 – The Sun and the Moon (1948)

Fonte: WIKIART, sd.

Figura 18 – Two Birds (1938)

Fonte: WIKIART, sd.

Neste trabalho, não utilizamos mosaicos tão complexos como os de Escher na experiência de ensino de Geometria, mas sim com figuras geométricas simples, pois o experimento foi feito com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental.

3 A TEORIA DE VAN HIELE

3.1 História

Silva e Cândido (2007), em seu artigo, afirmam que a Teoria de Van Hiele é um modelo de ensino e aprendizagem de Geometria e foi desenvolvida pelo trabalho do casal de professores holandeses Pierre M. Van Hiele e Dina Van Hiele-Geoldof.

A pesquisa feita pelo casal foi apresentada ao mundo, pela primeira vez por Pierre, em um artigo num congresso de Educação Matemática na França intitulado “O Pensamento da criança e a Geometria” (SANTOS F.; SANTOS M., 2016, p. 2).

Do trabalho mencionado acima, originaram-se duas teses de doutorado, sendo uma delas sobre a explicação do modelo em si e a outra, um exemplo concreto da aplicação do mesmo em cursos de geometria.

Como Dina faleceu logo após a conclusão da tese de doutorado, coube a Pierre toda a divulgação das obras sobre este trabalho, esclarecendo “os níveis, fases e propriedades do modelo.” (SILVA; CANDIDO, 2007, p. 1)

A princípio, o modelo de Van Hiele chamou atenção apenas na extinta União Soviética que, de forma pioneira, o usou para reformular seu currículo de Geometria na primeira metade dos anos 60.

No país de origem da pesquisa supracitada, Holanda, foi somente na década de 70 que ele teve ampla divulgação e aplicação, assim como nos Estados Unidos, pois nesta época muitos pesquisadores estadunidenses estavam “motivados por encontrar soluções para os problemas com ensino de geometria na escola secundária, [...]” (SILVA; CANDIDO, 2007, p. 1). Assim, traduções para o inglês dos textos de Van Hiele conseguiram uma maior divulgação do modelo.

3.2 O Modelo de Van Hiele

A Teoria afirma que o aprendizado da geometria se dá de forma progressiva e em cinco níveis de compreensão e raciocínio, sequenciais e ordenados.

Compreende-se que a idade ou maturação do aluno têm uma relevância diminuta em relação ao esgotamento de cada nível de desenvolvimento geométrico. Para Nasser e Sant'anna (2010), "[..] cada nível é caracterizado por relações entre objetos de estudo e linguagens próprias. Consequentemente, pra que haja compreensão é necessário que o curso adote o nível de raciocínio adotado pela turma." (NASSER; SANT'ANNA, 2010 apud AZEVEDO; PUGGIAN; FRIEDMAN, 2014, p. 5)

Assim se constituem os níveis de desenvolvimento, segundo o Modelo de Van Hiele:

- Nível 1 – Reconhecimento ou Visualização.

Neste nível, os alunos, ainda com linguagem informal, são apresentados às figuras geométricas. Fazem uma observação e experimentação. Desta maneira, tentam, usando seu próprio vocabulário, explicar semelhanças, diferenças e características dessas figuras por comparações e apenas pela aparência física e posição no espaço de objetos com formas geométricas.

- Nível 2 – Análise.

Neste ponto, é onde os alunos começam a perceber conceitos geométricos através das propriedades das figuras. Eles podem estabelecer inter-relações de acordo com essa percepção e ainda resolver problemas propostos utilizando estas propriedades. Conseguem, através de exemplos, explicitar ou mostrar um conceito geométrico.

- Nível 3 – Abstração ou Classificação.

É o momento que o aluno percebe a necessidade de definições que possibilitem as classificações das figuras e seus agrupamentos. São capazes de realizar, informalmente, deduções e conseguem, desta maneira, ordenar classes de figuras geométricas que são objeto de estudo.

- Nível 4 – Dedução Formal.

Os estudantes assimilam o processo dedutivo, ou seja, conseguem sequenciar informações, deduzindo uma a partir da outra. Reconhecem condições necessárias e suficientes para demonstrar resultados e são capazes de produzir provas. Fazem a distinção entre teorema, postulado e definição.

- Nível 5 – Rigor.

É nesse nível final que o aluno já é capaz de compreender demonstrações formais e comparar sistemas de axiomas e teoremas distintos. É um nível onde a abstração é muito acentuada, pois não se faz mais necessário de figuras ou material concreto para análise.

Para o avançar de nível é necessário que o estudante já tenha esgotado o anterior. É nesse progresso que se eleva a importância do professor que aplica este Modelo, pois se faz necessária a definição de atividades adequadas, linguagem clara e esclarecedora e que possa abrager todo o contingente em questão, tendo em mente sempre, como descrevem Kallef, Henriques, Rei e Figueredo (1994, p. 4): "Numa sala de aula, as crianças pensam em diferentes níveis, diferem umas das outras e também do professor, usam freqüentemente palavras e objetos de formas diferentes das empregadas pelos seus professores e pelo livro texto."

Dentro destes níveis citados, no processo necessário para avançar para o nível seguinte, existem cinco fases de aprendizagem. Segundo Nasser e Sant'anna (2010), temos que

> A primeira fase refere-se à informação, a qual verifica os objetos de estudo; a segunda fase é a de orientação dirigida, em que os estudantes exploram o tópico de estudo através de atividades que o professor selecionou e ordenou cuidadosamente; já a terceira fase é a de explicação, fase em que os alunos expressam e modificam seus pontos de vista sobre estruturas que foram observadas; na quarta fase, de orientação livre, os alunos procuram soluções próprias para as tarefas mais complicadas, e por último a quinta fase, de integração, o aluno revê e resume o que aprendeu, formando uma visão geral do sistema de objetos e relações do nível atingido. (NASSER; SANT'ANNA, 2010 apud THUMS; MENEGHETTI, 2015, p. 13)

3.3 Duas aplicações do Modelo de Van Hiele e a experiência deste trabalho

Durante esta pesquisa, encontramos algumas experiências relatadas por professores que utilizaram a Teoria de Van Hiele em suas aulas.

Uma delas, feita pelas professoras Marcele da Silva Santos e Neide da Fonseca Parracho Sant'anna com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, teve por objetivo que os alunos fizessem a diferenciação entre formas planas e sólidos geométricos. (SANTOS; SANT'ANNA, 2015).

Comparando triângulos e pirâmides, quadrados e cubos, os alunos deveriam fazer essa diferenciação através de desenhos e análise das características entre as formas. A experimentação se utilizava de material concreto, planificações, entre outros materiais.

Junto com os alunos, as pesquisadoras caminharam fase a fase dentro da Teoria de ensino-aprendizagem de Van Hiele, orientando-os e notando a evolução dos estudantes. Elas destacaram a integração do grupo e a dificuldade que os estudantes tinham em argumentar e justificar suas respostas, além do fato deles não estarem acostumados com esse tipo de abordagem.

Dessa forma, concluíram que

> Ainda é cedo para concluir que as atividades aplicadas e a proposta adotada realmente produzem o esperado avanço cognitivo dos alunos participantes. Porém, é nítido o progresso na forma como os alunos passaram receber as novas informações, na maneira com a qual se empenham para realizar as atividades e nos depoimentos de que o conteúdo faz mais sentido.
> Apesar de ainda estar em andamento a pesquisa, é possível notar através da expressão corporal, do discurso e da transição da linguagem "técnica" utilizada pelos alunos que a aprendizagem está ocorrendo de maneira eficaz. Podemos observar em alguns casos avanços individuais dentro dos níveis até o momento. (SANTOS; SANT'ANNA, 2015, p. 9)

Uma outra pesquisa que julgamos merecer destaque foi aquela citada na introdução deste trabalho, feita com alunos ainda do terceiro ano do Ensino Fundamental.

Os pesquisadores tinham como objetivo "[...] criar e aplicar uma sequência de atividades de caráter interdisciplinar que envolvesse os alunos na apropriação dos conceitos matemáticos envolvidos." (LOPES; SILVA, 2015, p. 6)

Utilizando a Teoria de Van Hiele e fazendo uso de papel quadriculado para construção de mosaicos, trabalhos com arte e pintura, dobraduras e *softwares* educacionais, eles conseguiram um alto nível de participação dos estudantes, além de um ganho qualitativo no momento da avaliação da experiência.

Os autores desta pesquisa usaram, por exemplo, uma técnica que chama atenção por envolver a Arte, que foi o estudo da simetria produzida pelo grupo de alunos da seguinte maneira: a folha de papel sulfite era dobrada vertical ou horizontalmente e os alunos utilizavam "pingos de tinta", com tinta guache, das cores que escolhessem, em apenas uma das metades das folha, deixando a outra com o "lado limpo". Em seguida, dobrava-se o lado limpo sobre o pintado e obtinha-se um desenho simétrico já com o eixo de simetria marcado.

Ou seja, um estudo de simetria a partir de uma produção dos próprios alunos e não de figuras prontas.

Os pesquisadores concluíram que

> Consideramos que ocorreu a manifestação nítida da aprendizagem durante a aplicação dessas atividades, conforme verificamos em vários momentos durante as aulas, onde os alunos aumentaram quantitativamente e qualitativamente a participação e contribuição em aula, com ideias e comentários. Durante o momento da avaliação no final, houve alto índice de acerto da questão proposta. (LOPES; SILVA, 2015, p. 118)

No caso da experiência do presente trabalho no ensino de triângulos e quadriláteros, usando mosaicos geométricos e o Modelo de Van Hiele, objetivamos atingir até terceiro nível de aprendizagem com os alunos participantes, pois é neste nível que se encerra a necessidade de aprendizagem de um aluno de sétimo ano do Ensino Fundamental.

4 ATIVIDADES

4.1 Atividade “zero”

4.1.1 Introdução

Muitas pesquisas de campo, como o presente trabalho, costumam realizar um “pré-teste” para avaliar o nível de conhecimento dos alunos que participarão do experimento. Entretanto, concluímos que este tipo de teste não traria retorno à nossa pesquisa, visto que o conhecimento geométrico de ambas as turmas era mínimo. Notamos essa característica logo no início do ano letivo, ao trabalhar os Números Inteiros.

Costumamos fazer bastante uso da reta numérica e, com isso, utilizar suas carcterísticas, como infinitude de pontos, por exemplo. E foi justamente onde os alunos se mostraram leigos nesse sentido. Após algumas perguntas, um diálogo abordando o assunto e algumas questões primárias envolvendo figuras geométricas, notamos que muito pouco haviam aprendido de Geometria e teríamos que iniciar qualquer tipo de trabalho nesse campo dos conceitos primitivos.

Somado a este fato, o estudante, em geral, quando se vai fazer uma avaliação que, independente do resultado, não “conta” para a sua nota ou média, não se costuma dar a devida importância a ela. Infelizmente, na realidade, o pouco que motiva o aluno a tentar se sair bem em uma avaliação é o fato de obter uma nota, não necessariamente boa, mas suficiente. Esse é o perfil dos alunos da escola onde foi realizada a pesquisa deste trabalho.

Portanto, podemos classificá-la como uma Pesquisa-Ação e não experimental, pois além da ausência do pré-teste, houve interação do pesquisador com o público-alvo. Este era formado por duas turmas do sétimo ano do Ensino Fundamental com aproximadamente 30 alunos em cada.

Em uma delas, a turma B, trabalhamos com o livro, apostila e caderno, como é feito tradicionalmente. Na outra, a turma A, foi onde utilizamos a construção de mosaicos geométricos e baseando as atividades propostas na Teoria de Van Hiele. Em ambas as turmas, o trabalho foi realizado em doze tempos de cinquenta minutos, no mês de outubro de 2019.

Para iniciar o estudo dos elementos de Geometria necessários ao nosso trabalho, optamos por fazer uma aula inaugural, em ambas as turmas, para que os alunos partissem do mesmo ponto de conhecimento geométrico, dentro do experimento, e tivessem, enfim, algum contato com a disciplina de Geometria. Como observamos acima, os alunos tiveram pouquíssimo contato com esta disciplina até então.

A primeira atividade se iniciou da seguinte forma: foi pedido, primeiramente, que os estudantes levassem uma régua para a aula e foi fornecido, pelo professor-autor desta dissertação, papel branco para que eles pudessem produzir suas figuras. Em uma breve conversa com os alunos, verificou-se que poucos deles sabiam o que eram retas ou segmentos.

Em relação aos polígonos, a situação era um pouco pior: eles reconheciam quadrados e retângulos, mas poucos sabiam explicar a diferença entre eles. Sequer conheciam a palavra *quadrilátero.*

Quando foi pedido que desenhassem um triângulo, os alunos prontamente o fizeram, mas todos eles acutângulos, sem exceção.

Ângulo era uma palavra conhecida pela maioria deles, mas não através de uma conceituação geométrica, e sim na linguagem coloquial do futebol e em outras situações cotidianas.

Desta forma, os conteúdos escolhidos para serem abordados nesta atividade foram: a reta e seus subconjuntos, posições relativas entre duas retas e ângulos. Optamos por introduzir triângulos e quadriláteros posteriormente, de maneira distinta.

4.1.2 Aula 1 - a reta e seus subconjuntos

Nesta primeira parte da atividade, foi pedido que os alunos desenhassem uma reta na folha branca fornecida. Ninguém aparentou dificuldade em fazê-lo e, posteriormente, o professor-autor deste trabalho fez o mesmo no quadro.

Foi esclarecido que a reta poderia ser denominada por uma letra minúscula qualquer, mas que os livros, em geral, preferem usar as letras “r”, “s” e “t”. Assim, foi pedido que os alunos nominassem sua reta com a letra que preferissem.

Em seguida, os alunos tiveram que marcar um ponto na reta, e o mesmo foi feito pelo professor-autor no quadro. Mostrou-se que a representação do ponto se daria por uma letra maiúscula e foi pedido que os alunos escolhessem uma de sua preferência.

A tarefa seguinte dos alunos foi marcar outro ponto qualquer sobre a reta, mas não foi mencionado que não deveria ser no início ou no fim do desenho feito pelo aluno. Depois do professor-autor fazer o mesmo no quadro, esta observação foi referida, mas ninguém se manifestou.

Perguntou-se, então, quantos pontos poderiam ser marcados sobre a reta e foram obtidas respostas como: “Muitos.”, “Um monte.” etc. Quando foi dito aos alunos que, na verdade, poderiam ser marcados infinitos pontos, a surpresa deles foi geral, pois “Como é possível um desenho que cabe na folha ser infinito?”

De fato, a dúvida dos alunos mencionada acima procede, já que “infinito” é “algo que não tem fim”. No entanto, tanto a reta desenhada por eles quanto a do quadro tinham um tamanho finito: eles a enxergam como um segmento de reta e não como algo que não se possa ver ou conhecer o final.

Aproveitando este momento de indecisão, o professor-autor fez uma conexão com algo que a Aritmética explora bastante: a *reta numérica*. Em uma ocasião anterior, quando o professor-autor apresentou os números inteiros aos mesmos alunos, ele fez a colocação que a reta era infinita e, por isso, perfeita pra representar estes números. Se cada ponto representa um número e a reta possui infinitos pontos, ela seria um modelo ideal para a representação dos números inteiros. Entretanto, à época, poucos estudantes deram atenção a este fato, pois estavam preocupados com a novidade que era a introdução dos inteiros negativos.

Após a tentativa de relacionar conhecimentos prévios com o que estava sendo aprendido, foi introduzida uma outra forma de se nominar uma reta. Como os pontos que o professor-autor havia desenhado no quadro foram nominados por A e B, escreveu-se $\overleftrightarrow{AB}$ para representar a reta, explicando que as setas significam que a reta passa infinitamente pelos dois pontos.

Dessa forma, houve uma conversa com os alunos sobre o fato de ser possível representar algo infinito expressando-o de forma reduzida. No caso dos números, usamos reticências, como a maioria deles já dominava.

Deixou-se, então, que os alunos nomeassem suas retas e o professor-autor, junto com os alunos, desenhou duas retas idênticas à primeira, porém com um traçado mais fino e leve, fácil de apagar. Pediu-se que eles apagassem, na primeira reta copiada, a parte da reta anterior ao primeiro ponto da esquerda para a direita e, na segunda reta copiada, a parte posterior ao segundo ponto da esquerda para a direita, criando, assim, duas figuras diferentes. O professor-autor realizou o mesmo procedimento no quadro e, claramente, a maioria dos alunos já notou que não eram mais duas retas, pois um desenho tinha "início" e, o outro, um "fim".

A partir daí, estabeleceu-se o conceito de semirretas de vértices A, no caso do primeiro desenho, e de vértice B, no segundo. Somado a isso, nomou-se as semirretas como $\overrightarrow{AB}$ e $\overleftarrow{AB}$, respectivamente.

Em seguida, o professor-autor desenhou, no quadro, outra cópia da reta inicial, nomeou os pontos como na primeira vez, mas, desta vez, apagou as duas partes definidas como antes, a anterior ao ponto A e a posterior ao ponto B. Definiu-se, assim, o conceito de segmento de reta, que foi nomeada por $\overline{AB}$.

Reparou-se que, com os segmentos de reta, conseguimos desenhar figuras geométricas como triângulos, retângulos e todos os polígonos, além de podermos desenhar os sólidos geométricos, que, na teoria, os alunos haviam estudado no sexto ano, ou seja, no ano anterior ao deste experimento. Para comprovar este fato, o professor-autor desenhou um octógono e um cubo no quadro.

Para encerrar a aula, foi pedido para os alunos que fizessem figuras quaisquer na folha fornecida. A maioria deles acabou por desenhar muitos retângulos e triângulos.

4.1.3 Aula 2 - ângulos

O objetivo principal desta aula era definir ângulos, pois alguns alunos, realmente, não tinham noção alguma no que eles consistiam. Além disso, outros objetivos eram definir ângulos retos, agudos e obtusos.

O professor-autor começou a aula pedindo para os alunos que desenhassem um ponto, na folha branca fornecida, e traçassem, a partir dele, uma semirreta. Depois disso, foi pedido para os alunos traçarem outra semirreta partindo do mesmo ponto.

Para aqueles alunos que já tinham noção de ângulo, verificou-se que eles o reconheceram prontamente na figura feita. Já para os outros, foi dada a explicação. Assim, definiu-se ângulo, seus vértice e lados. Comentou-se sobre as formas diferentes de se nomear um ângulo e que, possivelmente, eles se deparariam com todas elas durante a sua vida escolar.

Pelo desenho feito no quadro pelo professor-autor, foi apresentada a notação $A\hat{B}C$ para o ângulo desenhado, como também a notação $\hat{B}$ para o mesmo. Além destas, foi observado que, em outros momentos, eles poderiam ver notações para ângulos usando letras gregas como “α” e “β” ou letras minúsculas com acento circunflexo, e que a notação com uma letra minúscula sem este acento era para indicar o valor do ângulo em graus.

Aproveitou-se essa explicação para passar para a próxima etapa da aula, que era ensinar para os alunos os conceitos de ângulo agudo, reto e obtuso.

Alguns estudantes sabiam o que era ângulo reto e qual era a sua medida, de 90º, mas não sabiam bem o porquê desse número. O professor-autor fez o seguinte questionamento: “Por que noventa? Não poderia ser um, dez ou cem graus?”

Para que os alunos compreendessem a questão acima, o professor-autor desenhou vários ângulos no quadro, com aberturas cada vez maiores, até que um lado dos ângulos encostou no outro, fazendo, assim, um ângulo de uma volta. Como foi pedido para que os alunos sentassem em dupla, solicitou-se que um aluno de cada uma pegasse a régua do colega ao lado e, junto com a sua, fixasse uma das réguas a partir do ponto inicial das duas réguas e fosse abrindo o ângulo entre elas, mexendo a segunda régua, até que elas ficassem sobrepostas. Essa ideia de percorrer o papel com um dos lados do ângulo feito pelas réguas deu uma excelente noção de tamanho de ângulo.

Feito isso, perguntou-se: “No *surf* ou *skate*, com se chama a manobra de uma volta completa?”

A maioria não tinha dúvidas de que a manobra se chama “trezentos e sessenta”, mas, novamente, não sabiam explicar o motivo. Dessa forma, tentou-se estimular a aprendizagem dos alunos através de uma curiosidade histórica, fornecendo uma explicação conhecida pelo professor-autor para esta situação.

Contou-se, então, que a civilização da Suméria, que ficava na atual região do Iraque, era bastante desenvolvida matematicamente e que seu povo se interessava por astronomia. Os sumérios acreditavam que o ano durava 360 dias e, por isso, para representar o ciclo anual, dividiram a circunferência em 360 partes iguais, uma parte pra cada dia do ano. Como uma curiosidade, depois, na Babilônia, o ano passou a ter 354 dias.

Portanto, fazendo alusão à manobra feita nos esportes citados acima, a noção dada pelos sumérios para o ciclo de um ano era uma referência ao ângulo da manobra, que corresponde a uma volta ou um ciclo, e que cada parte da divisão feita na circunferência correspondia a um ângulo de 1 grau. Assim, concluiu-se que um ângulo de uma volta tinha a medida de trezentos e sessenta graus, ou 360º.

Prosseguindo, o professor-autor desenhou no quadro um ângulo de meia volta e, em seguida, pediu para que os alunos de cada dupla que estavam com as duas réguas novamente fizessem o movimento com a régua móvel até que ambas ficassem alinhadas.

Com isso, os alunos observaram que o ângulo formado era metade de uma volta, correspondente a 360º, ou seja, ele tinha a medida de 180º.

Em seguida, construiu-se, no quadro, outro ângulo de meia volta e, bem no vértice, traçou-se uma perpendicular. O professor-autor pediu que os alunos fizessem o mesmo, sem precisão, apenas pra dar a ideia da divisão do ângulo de 180º em duas partes iguais.

A partir daí, alguns já compreenderam que aqueles dois ângulos gerados eram ângulos retos e que sua medida era 90º pelo fato de ser “metade da metade de 360º” .

Em seguida, mostrou-se o símbolo universal de um ângulo reto e pediu-se que os estudantes o localizassem na sala de aula. Esta tarefa se mostrou bem simples, visto que, até no canto da folha que eles estavam desenhando, aparecia um ângulo reto entre seus lados. Os alunos se mostraram surpresos apenas quando o professor-autor mostrou os quatro cantos superiores da sala, onde poderiam visualizar três ângulos retos formados pelas paredes e/ou o teto.

Fixada essa noção de ângulo reto, iniciou-se a definição de ângulo agudo e obtuso, definições totalmente novas para as turmas desta experiência.

Antes disso, porém, desenhou-se, no quadro, dois ângulos retos, um com lados bem curtos e outro com lados grandes, e perguntou-se aos alunos qual era o maior. Alguns não caíram na “armadilha”, mas outros ficaram em dúvida. Dessa forma, para esclarecer, prolongou-se os lados do primeiro ângulo até que ficassem do mesmo tamanho que o segundo e, depois, até maiores. “Como são semirretas, temos essa prerrogativa”, comentou-se.

O professor-autor destacou que, mesmo com esses procedimentos, não alterou-se a abertura do ângulo e, portanto, eles continuavam com a mesma medida.

Sanada esta dúvida, desenhou-se, no quadro, dois ângulos: um agudo e um obtuso, e pedi-se que os alunos tentassem reproduzir os mesmos desenhos na folha branca. Utilizando o mesmo vértice e aproveitando um dos lados de cada ângulo feito, o professor-autor desenhou, no quadro, um ângulo reto sobre estes, ficando claro que um deles possuía uma abertura menor que o ângulo reto e, o outro, uma abertura maior.

Os estudantes reproduziram os mesmos desenhos e assim, definiu-se ângulos agudo e obtuso. Em seguida, pediu-se que eles desenhassem livremente outros exemplos, sem medidas prévias, apenas pelo aspecto visual em comparação com um ângulo reto.

O professor-autor deixei livre para que, aqueles alunos que se sentissem à vontade, mostrassem seus desenhos para ele. No fundo, tinha-se a esperança que algum aluno fizesse um ângulo maior que 180º, mas isto não aconteceu.

Dessa forma, precisou-se intervir pra informar que o ângulo obtuso era o que possuía medida maior que noventa, mas menor que cento e oitenta graus. E que essa informação era importante, pois não encontraríamos ângulos maiores ou iguais a 180º em figuras geométricas convexas, objeto de estudo do Ensino Fundamental.

Neste momento, aproveitou-se para definir e desenhar, apenas a título de curiosidade, o que seria um polígono não-convexo. Fez-se, também, a observação para os alunos que este tipo de polígono não faria parte dos estudos em questão.

4.1.4 Aula 3 - posições relativas entre duas retas

Para finalizar esta primeira atividade, era necessária a noção de paralalelismo, o que a maioria dos alunos ainda desconhecia.

Assim, pediu-se que os alunos colocassem a régua no papel em branco e desenhassem duas retas, uma sobre e outra sob a régua. Assim, eles acabaram por desenhar duas retas de mesma direção.

O professor-autor fez o mesmo no quadro e comentou que aquelas retas, por mais que se prologassem, não se cruzariam, isto é, não se “tocariam” em nenhum ponto.

Aproveitou-se o ladrilhamento da sala de aula para dar uma outra visualização pra os estudantes sobre retas paralelas.

Com isso, explicou-se o que eram retas paralelas: retas que não possuem nenhum ponto em comum.

O professor-autor, então, nomeou as duas retas por r e s e escreveu o símbolo $r \,//\, s$ para representar que as retas eram paralelas.

Na sequência, desenhou-se dois pares de retas concorrentes, sendo um deles formando um ângulo reto.

Perguntou-se aos alunos se as retas desenhadas no quadro eram paralelas. Sem dúvidas, eles responderam que não.

Então, pediu-se que explicassem o porquê. “Essas aí se encontram, se cortam.”, disseram.

Questionou-se se, prolongando mais as retas, elas ainda se cruzariam em outro ponto. Nessas horas, onde os alunos tentam atingir um certo grau de abstração, vemos que isto, em geral, é muito difícil para eles, pois talvez nunca tenham sido testados a fazê-lo.

Alguns alunos pensaram na proposição do professor-autor e concluíram que as retas não se cruzariam mais. Confirmou-se que esta era a resposta correta.

Dessa maneira, definiu-se o que eram retas concorrentes, aquelas que tinham um ponto em comum.

Pediu-se, para os alunos, que visualizassem a diferença entre os desenhos e, de fato não foi difícil para eles concluírem que um dos pares de retas desenhado no quadro pelo professor-autor se cruzava fazendo um ângulo reto (na realidade, quatro).

Com isso, definiu-se que ambas as retas eram concorrentes, mas o outro par, por formar um ângulo reto, eram chamadas perpendiculares ou ortogonais.

Além disso, informou-se aos alunos que eles escutariam e leriam muito esse primeiro adjetivo: perpendiculares, e deveriam associar imediatamente ao ângulo reto, independente de serem retas, segmentos de reta etc.

Com relação à definição de retas coincidentes, o professor-autor deste trabalho, embora não acredite que esta definição faça algum sentido, na fase escolar em que se encontram os alunos desta experiência, comentou sobre ela, pois a mesma está prevista no planejamento e consta na apostila fornecida pela Prefeitura, base da avaliação bimestral que a mesma envia à escola ao fim do bimestre.

Sendo assim, desenhou-se, no quadro, uma reta, e perguntou-se quantas retas havia ali: “Uma, claro!”, responderam os alunos. Era a resposta mais do que óbvia, entretanto, mostrou-se que poderiam haver infinitas retas ali mesmo, sobrepostas àquela, mas que só seria possível identificá-las pelo seu símbolo, ou se estivesse escrito no texto, por exemplo.

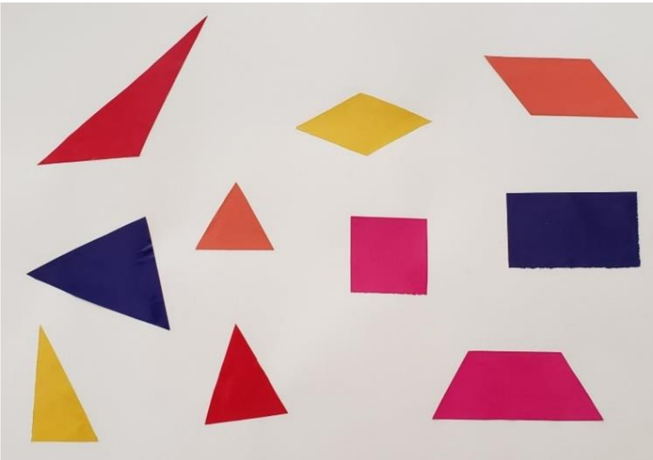
Finalmente, escreveu-se a notação $a = b$ para representar as retas coincidentes a e b e pediu-se aos alunos que fizessem o mesmo na folha branca.

4.2 Atividade 1 – Apresentação dos triângulos e quadriláteros

Nesta parte do trabalho, falaremos apenas das atividades realizadas na turma A, onde foi realizada a experiência de ensino de triângulos e quadriláteros sob a ótica da Teoria de Van Hiele. Aqui, começamos no nível 1 desta Teoria, o *Reconhecimento* ou *Visualização*.

Os alunos receberam, cortados pelo professor-autor deste trabalho, triângulos e quadriláteros, feitos com papel glacê, de vários tipos e sem denominação. Havia triângulos equiláteros, isósceles e escalenos e logicamente, entre estes, triângulos retângulos, acutângulos e obtusângulos. Em relação aos quadriláteros dados, os alunos obtiveram quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios isósceles, losangos e quadriláteros irregulares.

Figura 19 – Triângulos e quadriláteros fornecidos aos alunos da turma A

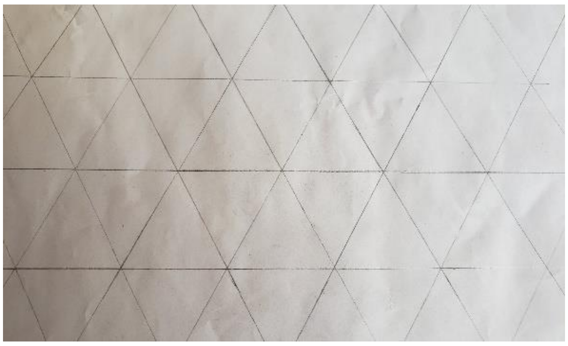


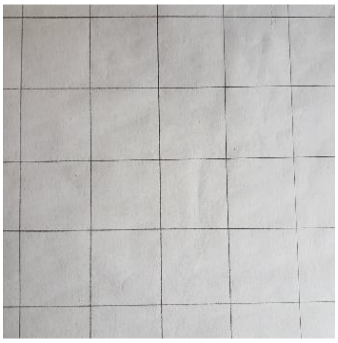
Fonte: O autor, 2019.

Os triângulos equiláteros, trapézios, losangos e paralelogramos foram construídos em malhas triangulares iguais, desenhadas no verso das folhas de papel glacê. Assim foram pensados para facilitar o encaixe na construção dos mosaicos.

Com a mesma intenção, os quadrados e retângulos em malhas quadriculadas, cujos lados eram da mesma medida do lado do triângulo como mostra a figura 20.

Figura 20 – Malhas utilizadas na confecção das figuras.





Fonte: O autor, 2019.

Em relação aos triângulos, os alunos se mostraram surpresos ao manipularem o triângulo obtusângulo, pois o acharam “esquisito”. O professor-autor deste trabalho acredita que este tipo de triângulo tenha chamado tanta atenção por jamais ter sido apresentado antes aos estudantes. Nos anos iniciais, quando os triângulos são estudados, geralmente se utilizam triângulos acutângulos e retângulos.

Já em relação aos quadriláteros, os alunos reconheceram o quadrado e o retângulo de imediato, enquanto os outros quadriláteros fornecidos eram todos uma novidade para eles.

Nesse momento de visualização e manipulação dos polígonos pelos alunos, aproveitou-se para introduzir a palavra “quadrilátero” e o que ela significa.

Ao serem perguntados sobre o nome da figura de três lados, respondem: “triângulo”, sem dúvida, da mesma maneira que responderam “quadrado”, quando a pergunta foi sobre o polígono de quatro lados.

Então, o professor-autor questionou: “Mas o quadro e o mural da sala, então, são quadrados?”. Nesse momento, fez-se surgir a dúvida, pois os alunos sabem que os dois são retângulos. Desta dúvida, que os fez pensar e, consequentemente aprender, pois “O quadro é retângulo, mas não é um quadrado e ambos tem quatro lados. Tem alguma coisa errada!”. Sequências de pensamento dedutivo como estas são fundamentais à aprendizagem.

Dessa forma, o professor-autor e os alunos acabaram por esclarecer, juntos, que todas as figuras que estavam ali, além dos triângulos, eram quadriláteros, uma palavra nova no vocabulário dos estudantes, e que só poderiam chamar de “quadrado” se o quadrilátero tivesse os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos.

Deixou-se, em seguida, que os alunos associassem as figuras fornecidas a objetos conhecidos por eles, numa tentativa de resgatar pela memória algo que os fizessem reconhecer estas figuras, invertendo, assim, o processo de ensino de Geometria, onde a figura já vem nominada.

Os alunos, então, separaram o “balãozinho”, o “retângulo torto”, “potinho”, entre outros apelidos que deram às figuras.

Permitiu-se, portanto, que os estudantes reconhecessem, manipulassem, e analisassem as características das figuras dadas, para, só posteriormente em outra atividade, “batizá-las”.

Desta forma, pela Teoria de Van Hiele, completou-se o nível 1 de aprendizagem de Geometria desta experiência com a observação e experimentação das figuras fornecidas aos estudantes.

4.3 Atividade 2 – Apresentação dos mosaicos

Antes de começar esta atividade, perguntou-se aos alunos o que a palavra “mosaico” significava pra eles, se já haviam ouvido falar. Alguns se pronunciaram em relação aos mosaicos das torcidas de futebol e mais nada.

Em seguida, os estudantes foram encaminhados ao laboratório de informática, onde, infelizmente, não há disponibilidade de uma máquina por aluno. Assim, fizeram essa atividade em dupla ou trio.

Pedi-se que pesquisassem na internet a palavra “mosaicos” e qualificassem a pesquisa na categoria “imagem”.

Com isso, apareceram na tela dos computadores vários tipos de mosaicos: azulejos, pisos, livros à venda sobre o assunto, mosaicos feitos com pedaços de papel, caquinhos, os de torcidas de futebol etc., além de algumas obras de arte.

Mosaico é algo visual, não requer muita explicação. Assim, decidiu-se por não dar uma definição formal para os alunos e o professor-autor interviu apenas fazendo comentários sobre as imagens. Alguns estudantes reconheceram, principalmente, as imagens dos pisos formados por mosaicos.

Além disso, a professora de Artes Plásticas havia feito, com os alunos de uma outra turma, o preenchimento de um mural, formando um mosaico no ano anterior. Alguns alunos lembraram do fato, pois o mesmo ficou exposto na sala de Artes. Abaixo temos a imagem deste mosaico.

Figura 21 – Mural preenchido com um mosaico na sala de Artes

Fonte: O autor, 2019.

Em seguida, pediu-se aos alunos que pesquisassem no computador o termo “mosaicos geométricos”. A partir deste momento, eles começaram a ter alguma noção do trabalho que faríamos posteriormente.

Os estudantes encontraram vários tipos de mosaicos formados por figuras geométricas, inclusive figuras curvas. Nesta hora, um estudante notou que a parede da sala era um mosaico formado por quadrados. Todos concordaram quando perguntei se era verdade, apenas o acharam “sem graça”.

O professor-autor, então, explicou aos alunos o que eram mosaicos regulares: aqueles que utilizavam uma mesma figura repetidas vezes.

Aproveitou-se que esse tipo de mosaico já estava definido e pediu-se aos alunos que pesquisassem o termo “mosaicos geométricos semirregulares” no computador.

Foi explicado para os estudantes que este tipo de mosaico é formado por duas ou mais figuras de mesmo formato. Os alunos notaram, de imediato, que muitos utilizavam triângulos e quadrados e se viram capazes de construí-los.

Além da beleza visual destes mosaicos, os estudantes repararam, também, a presença de outras figuras geométricas como hexágonos e octógonos, que eles não conheciam.

Alguns alunos chamaram a atenção para o fato dos triângulos e demais figuras serem “iguais”, assim como os quadrados, já bem dominados por eles, eram todos “certinhos”. De fato, todas as figuras que formam os mosaicos semirregulares são equiláteras.

Para exemplificar um mosaico irregular, os alunos foram encaminhados até a sala de Artes Plásticas, para que visualizassem, alguns pela primeira vez, o mosaico que tinha sido construído pela outra turma no ano anterior. Muitos acharam este mosaico “feio” e “confuso”.

4.4 Atividade 3 – Construção dos mosaicos

O objetivo desta atividade foi fazer os estudantes passarem para o nível 2 de aprendizagem da Teoria de Van Hiele, o da *Análise*, ao usarem triângulos e quadriláteros para construirem mosaicos.

Chegado o dia da construção dos mosaicos, foi interessante observar que já havia um clima de empolgação no ar por parte dos estudantes. O professor-autor deste trabalho acredita que, em uma aula de Matemática, os alunos nunca tivessem produzido o próprio material de estudo. Além disso, a aula de Artes Plásticas tinha sido, para a maioria da turma, quase uma distração em relação às outras disciplinas. Normalmente, os alunos têm mais liberdade de se movimentar e de utilizar os materiais, fazendo desenhos, pinturas, esculturas e demais obras. Em geral, esta é uma aula que os anima.

É importante a observação acima pelo fato de que, em relação a alguns alunos que, no decorrer do ano, jamais demonstraram interesse em nenhuma atividade nas aulas de Matemática, desta vez pareciam mais dispostos a executá-la.

O professor-autor começou, então, a atividade separando o material a ser utilizado, mas antes que prosseguisse, aconteceu algo que, de fato, mudou o andamento da experiência proposta. Uma das “melhores” alunas, tanto na participação, quanto no aproveitamento, fez o comentário que “aqueles mosaicos bonitos, semirregulares” eram formados por figuras “iguais”. E portanto, ela buscaria somente aqueles triângulos que fossem “iguais”, “certinhos”, para trabalhar.

Outros haviam tido a mesma percepção no laboratório de informática, mas só agora, após o pronunciamento da colega, explanaram a ideia.

Questionou-se a aluna sobre o que ela havia dito e explicando que haviam vários tipos diferentes de figuras geométricas, mas ela, que não estava se fazendo entender, tentou descrever que as figuras eram todas “iguais, pois tinham todos os lados iguais”, independente de qual figura era. Na verdade, o professor-autor falou, eram “equiláteras”, e não “iguais” ao que ela se referia. Mesmo assim, como isto que ela acabara de dizer era um fato, acabou-se concordando com a aluna pelo seu pensamento correto.

Mesmo antes de começar a experiência com mosaicos, pela reação dos alunos ao verem o mosaico da sala de Artes, o professor-autor já imaginava que eles não fossem utilizar as figuras totalmente irregulares, como os triângulos escalenos e o quadrilátero irregular. Mas, apesar disso, seria interessante que os próprios alunos concluíssem isto de forma individual, seja observando, tentando montar, excluindo-os ou até com a colaboração do professor-autor que as figuras regulares eram mais fáceis para se criar um mosaico.

O professor-autor cortou, então, as figuras utilizando a mesma malha triangular para os triângulos equiláteros, losangos, paralelogramos e trapézios. Dessa forma, os polígonos feitos possuíam dois, três ou, no caso do losango, quatro lados de mesma medida dos quadrados também cortados. Da mesma maneira, a altura dos retângulos e a base do triângulo isósceles possuíam esta mesma medida.

A escolha da aluna que queria lados “certinhos” se fez presente e a mesma separou os quadrados e triângulos equiláteros pra trabalhar, assim como a maioria dos alunos.

Como o lado do triângulo equilátero e o do quadrado tinham a mesma medida, ficou ainda mais claro para os alunos que eles tinham tomado uma decisão correta para a construção se seus mosaicos.

Apesar disso, este fato não deixou de ser um ponto interessante da experiência, pois mesmo sem saber o que exatamente é um triângulo equilátero, sem ter isso ainda definido, muitos alunos haviam notado suas caraterísticas regulares: lados e ângulos iguais.

Esse também era um dos objetivos desta atividade: que os alunos percebessem a regularidade ou não das figuras fornecidas pelo professor-autor durante a sua manipulação, observação e construção dos mosaicos.

Aproveitou-se essa situação de escolha por parte dos alunos e definiu-se o que são polígonos regulares, além de reforçar a ideia da definição de um quadrado.

Com isso, os alunos foram moldando seus mosaicos usando as figuras regulares a partir da ideia do que iriam produzir. Ainda assim, alguns deles tentaram utilizar as outras figuras. O professor-autor incentivou a iniciativa destes alunos e disse que os ajudaria, mas não se precisou de muito tempo pra que eles desistissem desta tentativa e partissem para o uso das figuras regulares fornecidas.

Durante a experimentação de construção dos mosaicos, os alunos foram montando os triângulos equiláteros e quadrados e verificaram seu perfeito encaixe, uma figura com a outra e entre figuras iguais.

Em seguida, distribuiu-se uma folha de papel canson A4 para os alunos e, assim, os alunos começaram a produzir livremente seus mosaicos.

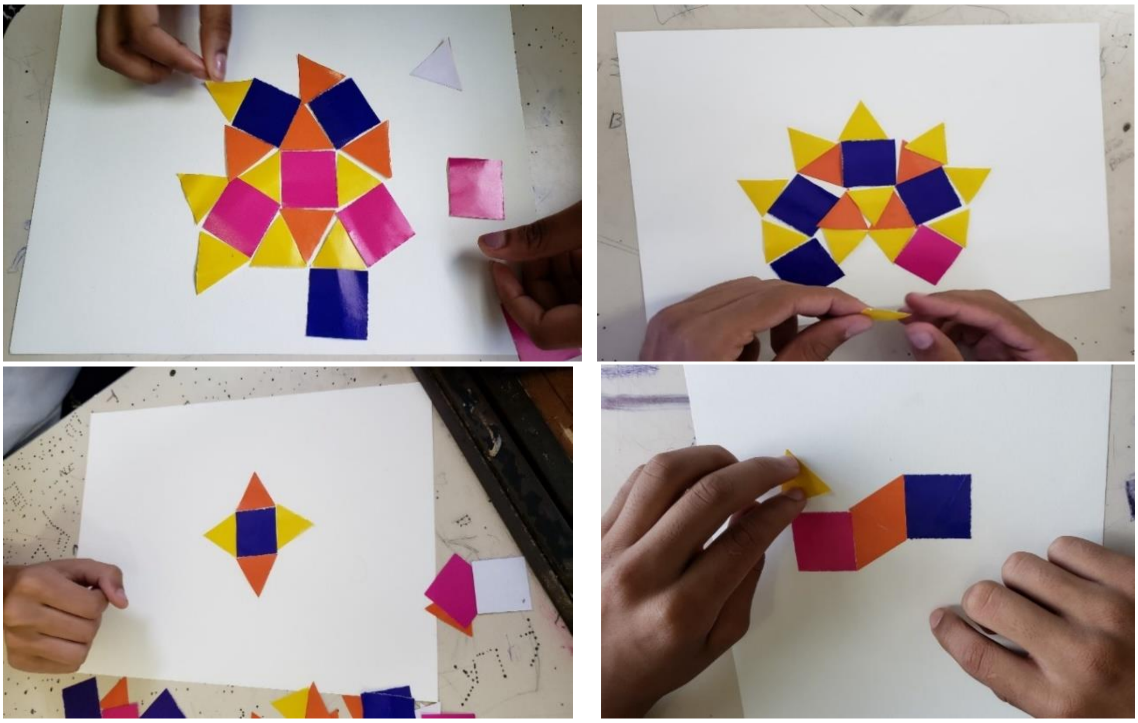
Não foi definido, pelo professor-autor, um formato final para o mosaico, apenas foi dito para os alunos não deixassem espaços entre as figuras e que não utilizassem apenas uma figura na construção do seu mosaico.

Durante a construção, o professor-autor foi fazendo intervenções de forma pontual, sem tentar chamar a atenção de todos os alunos. Agiu-se assim para que a dúvida de um alunos não intervisse na confecção do mosaico de um outro aluno.

Seguem, abaixo, algumas imagens da construção dos mosaicos feitos pelos alunos nesta atividade.

.

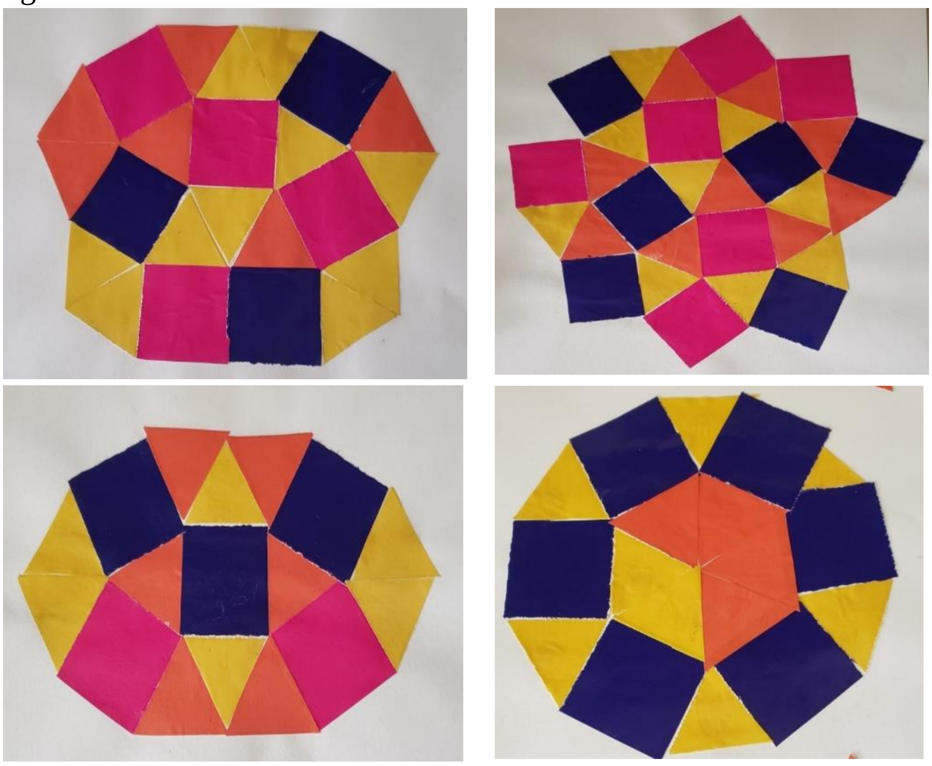
Figura 22 – Construção de mosaicos pelos alunos



Fonte: O autor, 2019

A seguir, apresentamos alguns dos mosaicos prontos dos alunos.

Figura 23 – Mosaicos dos alunos finalizados



Fonte: O autor, 2019.

4.5 Atividade 4 – Análise dos mosaicos e demais triângulos e quadriláteros

Ainda dentro do nível 2 da Teoria de Van Hiele, o da Análise, no experimento deste trabalho usamos os mosaicos, na turma A, para comparar as figuras geométricas e discutir sobre elas e suas características.

Para isso, antes de começar esta atividade, os alunos foram novamente divididos em duplas e tiveram seus mosaicos devolvidos, juntamente com as figuras que eles não utilizaram na atividade anterior, de construção dos mosaicos.

Uma parte dos alunos já notou que havia um losango, mesmo sem saber o nome desta figura geométrica, pois eles haviam comparado esta figura que foi distribuída pelo professor-autor com a formação que surgiu na montagem do mosaico, pois estes alunos haviam juntado dois triângulos. Com isso, interviu-se para comentar que, assim como o quadrado, esse quadrilátero que eles observaram é, também, uma figura de quatro lados iguais.

Nessa hora, tavez pela primeira vez para estes alunos, eles puderam ter contato com um raciocínio lógico-dedutivo, tão importante na Geometria e tão simples de ser observado, neste caso.

Assim, o professor-autor fez as seguintes perguntas aos alunos: “Vocês decidiram usar esse triângulo porque ele tem os lados iguais, certo? Então, quando você usa outro triângulo idêntico ao primeiro, ele possui lados com a mesma medida, senão não encaixariam um no outro de forma perfeita, correto? A figura formada foi um quadrilátero, que tem os quatro lados com a mesma medida, não é verdade? Mas essa figura então é um quadrado?”

Prontamente, os alunos responderam que não, ou seja, eles acabaram de descobrir outro quadrilátero que possui os quatro lados iguais, mas não era o quadrado. Isto foi uma surpresa total pra eles.

Apesar de não se ter programado, nesta atividade, de “batizar” o losango, tampouco definí-lo e diferenciá-lo do quadrado, o interesse gerado na turma foi tão bom que o professor-autor resolveu escrever o nome desse quadrilátero no quadro. Em seguida, perguntou-se aos alunos qual a diferença do losango e do quadrado.

Foram ouvidas frases como: “Ele é assim, tortinho, professor.” ou “Ele nem parece que tem os lados iguais, é difícil explicar!”, entre outras. Até que, finalmente, surgiu esta: “O quadrado é que nem o retângulo, tem os ângulos de 90º, mas o losango não”.

Com este fato, pode-se observar que, sem qualquer pré-definição ou desenho, os alunos estavam definindo o losango a partir da análise das figuras e das construções dos mosaicos, assim como diz o nível 2 da Teoria de Van Hiele.

Esse era um dos objetivos da experiência com mosaicos, pois:

> O aprendizado da Geometria inclui muito mais que identificar e nomear figuras. Ele envolve, principalmente, conhecer as propriedades que diferenciam as formas geométricas umas das outras. Para que as crianças dominem esse conteúdo, o mais indicado é propor a solução de problemas que desafiem os conhecimentos iniciais delas. A garotada deve ser levada a explorar, identificar e sistematizar algumas dessas propriedades. Propostas que mesclem a reprodução de figuras e o reconhecimento e a diferenciação de corpos geométricos podem ser bons pontos de partida para o trabalho nos anos iniciais. (NICONIELLO; QUEEN, 2012, p. 1)

Este trecho do artigo cita a expressão “anos iniciais”. É claro que o sétimo ano do Ensino Fundamental não se enquadra neste caso, mas, para a realidade dos alunos que participaram da experiência deste trabalho, em se tratando de figuras geométricas, era desssa maneira que esta se apresenta: inicial, como foi citado anteriormente na Introdução da Atividade “Zero”.

Logicamente, toda essa discussão em torno do losango acabou por utilizar mais tempo que se imaginava para a atividade proposta, que era bem menos pretensiosa. Entretanto, o professor-autor entendeu que, apesar disso, não se podia abrir mão de uma oportunidade de ensino-aprendizagem como esta.

Dando sequência, pediu-se que os alunos comparassem os triângulos que foram utilizados na construção de seus mosaicos com os outros triângulos que não usaram. Nesse momento, houve uma satisfação geral por terem tomado a decisão correta, na concepção deles. Manipulando os outros triângulos, os estudantes fizeram comentários como este: “Ainda bem que nem tentei usar esse aqui (obtusângulo escaleno), isso não ia encaixar em nada!”. Agiram com o escaleno acutângulo da mesma forma, considerarando-o “feio”. Quanto ao triângulo retângulo, alguns tiveram uma impressão diferente pela presença do ângulo reto e comentaram que talvez fosse possível “fechar os cantos” das figuras com ele. Como não foi uma afirmação, o professor-autor preferiu não fazer comentários e deixar que os alunos continuassem suas observações e deduções.

Em relação aos quadriláteros, os estudantes tiveram uma concepção bem diferente daquela com os triângulos. Além do losango, que já haviam notado que se encaixaria perfeitamente se fosse utilizado na construção de um mosaico, os alunos comentaram o fato de que o paralelogramo e o retângulo talvez tivessem encaixe com os triângulos equiláteros, o que era uma afirmação verdadeira. Os estudantes, para chegarem à esta conclusão, foram sobrepondo essas figuras nos mosaicos e quase acabaram por produzir novos mosaicos!

Nesse momento, o professor-autor comentou que ele havia insistido para que os alunos tivessem tentado usar esses quadriláteros antes, mas o anseio deles para construir os mosaicos acabou por prevalecer e eles escolheram as figuras "mais simples".

Assim como o losango, que os alunos já haviam notado suas características, eles também teceram comentários sobre o retângulo, figura já bem conhecida por eles e ficaram curiosos em relação ao paralelogramo. A sua semelhança com losango e talvez o paralelismo dos lados os fez refletir sobre esse "novo" quadrilátero.

Foi interessante observar que muitos alunos lamentaram não terem utilizados esses outros quadriláteros na construção de seus mosaicos. Com isso, o professor-autor comentou que, se houvesse tempo, deixaria que eles construíssem novos mosaicos, mas que seria apenas por distração e lazer, sem compromisso.

Sobre o trapézio e os outros quadriláteros irregulares, os estudantes nada comentaram. Eles não se arrependeram e nem se vangloriaram por não tê-los experimentado na atividade de construção dos mosaicos.

O professor-autor, então, perguntou o que eles achavam destes quadriláteros e eles disseram que iriam esperar a sua explicação sobre eles. Não tiveram o mesmo interesse por estas figuras como antes e estes quadriláteros acabaram por ser "ignorados" pelos alunos.

O quadrilátero irregular realmente não despertou interesse algum neles, pois, além de não se assemelhar com qualquer coisa do cotidiano dos estudantes, ele não aparece muito nos livros e textos didáticos.

No entanto, o caso do trapézio isósceles realmente causou uma certa surpresa ao professor-autor, pois este não conseguiu concluir o motivo do seu desprezo pelos alunos, dada a sua simetria. Apesar de ser uma surpresa, este fato acabou sendo uma outra aba, um adendo, que experiências como a deste trabalho podem originar.

4.6 Atividade 5 – Classificação dos triângulos

4.6.1 <u>Quanto aos ângulos</u>

Esgotada a análise dos triângulos e quadriláteros e a percepção das características destas figuras, pelos alunos, na atividade anterior, concluíram-se as atividades relativas ao nível 2, de acordo com a Teoria de Van Hiele. Desta forma, passou-se para o nível 3 desta Teoria, o da *Classificação*, onde os alunos necessitam de definições para classificar e agrupar as figuras geométricas.

Para começar esta nova atividade, o professor-autor distribuiu para a turma todos os tipos de triângulos, em relação à diferença dos ângulos, e pediu que os alunos, formados em dupla, agrupassem estes triângulos de acordo com os ângulos das figuras recebidas.

Quase unanimemente, os estudantes separaram suas figuras em dois grupos: os que foram usados nos mosaicos e os outros que não foram.

Dentre os outros que eles não usaram nas construções, havia os três tipos de triângulos quanto à classificação dos ângulos. Entretanto, mesmo o triângulo escaleno fornecido, apesar de ser acutângulo, como não foi utilizado nos mosaicos pelos alunos terminou por fazer parte do grupo dos “excluídos”, como os estudantes os nomearam.

Interviu-se, nessa hora, pedindo que, dentro deste grupo dos “excluídos”, os alunos separassem aqueles que tivessem um ângulo reto. Assim o fizeram sem maiores problemas e criaram, desta forma, mais um outro grupo de triângulos.

Após essa separação, pediu-se aos alunos que também removessem do grupo dos “excluídos” os triângulos que tivessem um ângulo maior que 90º, este tipo de triângulo que tinha chamado tanta atenção na apresentação inicial nos triângulos e quadriláteros, como observamos. Novamente, os alunos não tiveram dificuldade em separá-los e obtiveram, assim, quatro grupos de triângulos: o dos equiláteros, que eles já haviam separado, os acutângulos escalenos e isósceles, o dos obtusângulos e dos retângulos.

Notamos que, mesmo sem definir nomes ou fazer explicações, essas classificações dos triângulos se tornaram simples à medida que foi permitindo que a própria aparência das figuras formassem o conhecimento dos alunos, e não o inverso. É o “pensamento geométrico”, tão cobrado por alguns professores e pesquisadores:

> “[..] é preciso ter percepção geométrica, raciocínio geométrico e linguagem geométrica, fatores estes essenciais na relação real/formal e que pouco têm sido desenvolvidos em nossas escolas devido à quase ausência do estudo da Geometria.” (LORENZATO, 1995, p .5)

Para os estudantes, a atividade havia termiado nesta última divisão dos grupos de triângulos, já que haviam separado os quatro grupos possíveis de triângulos, de acordo com seus ângulos e sua concepção. Foi uma surpresa para eles quando o professor-autor informou aos estudantes que eram somente três grupos que deveriam ser formados a partir dos seus ângulos, ou seja, dois daqueles grupos precisavam se unir por terem “o mesmo tipo de ângulo”.

O professor-autor deixou os alunos pensando, mas, no final, a maioria deles desistiu e preferiu esperar a explicação.

Um aspecto interessante da experiência deste trabalho foi a concepção dos alunos percebida pelo professor-autor: o triângulo equilátero era tão perfeito e intocável na ideia dos alunos que não poderia se misturar com mais nenhum. Ele tinha os lados iguais, se encaixavam entre si, formavam juntos outras figuras como losangos e hexágonos, que eram também “iguais”. Eram, de certa maneira, “imaculados” na visão dos estudantes.

Com essa percepção do professor-autor, para tornar mais simples o processo e incentivar ainda mais a iniciativa deles, escreveu-se no quadro os nomes da classificação dos triângulos quanto aos ângulos e deixou-se bem claro as suas definições. Depois disso, insistiu-se que os alunos analisassem os ângulos de seus triângulos novamente.

Nessa hora, para surpresa geral, um aluno “ousou” unir todos os triângulos acutângulos com o seguinte argumento: “Esses aqui não servem pro mosaico, nem são perfeitos, mas os ângulos são mais fechados que 90º!”.

A princípio, os outros alunos desconfiaram da investida do colega, mas o seu argumento era muito bom. As expressões que foram utilizadas por ele como “perfeitos” e “fechados” podem não fazer parte dos livros didáticos e do nosso vocabulário como professor, mas cabem bem para estudantes que, pela primeira vez, estavam aprendendo Geometria de fato.

O professor-autor, então, exclamou: “Certíssimo!” e foi surpreendido por uma salva de palmas pro o jovem que acabara de resolver o “mistério” dos triângulos acutângulos.

Conversou-se com os alunos sobre a definição de triângulo acutângulo, ressaltando que a medida dos ângulos importava, mas não a medida dos seus lados.

Apesar dos alunos acharem os nomes “acutângulo” e obtusângulo” bem “estranhos”, eles acabaram por compreender bem suas diferenças.

O nome “retângulo” já era bem conhecido deles, mas como substantivo e não como um adjetivo, ainda que eles não fizessem essa distinção. De fato, um retângulo eles conheciam bem, pois era fácil de “apontar”.

O professor-autor viu que precisava fazer essa diferenciação observada acima. Para facilitar a compreensão dos alunos, ele desenhou no quadro um retângulo e traçou uma de suas diagonais, mostrando a formação de dois triângulos retângulos. Assim, para os alunos, ficaram mais claros os conceitos de retângulo e de triângulo retângulo.

4.6.2 Quanto aos lados

Distribuiu-se, novamente, os mesmos triângulos da construção dos mosaicos aos alunos e pediu-se que, dessa vez, eles separassem os triângulos que tivessem os lados iguais daqueles que não tivessem essa propriedade.

Mais uma vez, os alunos prontamente separaram os triângulos nos dois grupos pedidos: o dos triângulos equiláteros, usados nos seus mosaicos, e o dos outros triângulos.

Comentou-se que, desta vez, eles estavam certos e que o grupo dos triângulos de lados iguais não seria mais mexido por eles.

O professor-autor, então, pediu para os estudantes que olhassem para o grupo “não equilátero” e notassem que alguns deles tinham lados iguais, ainda que não fossem todos.

Para ter certeza na hora de responder, alguns alunos recorreram à régua e começaram a medir os lados dos triângulos.

Nesta hora, o professor-autor lembrou os alunos do grupo deles que tentou usar este tipo de triângulo com apenas dois lados iguais na construção do mosaico. Mostrou-se a todos, então, um triângulo isósceles no quadro e comentou-se que ele se assemelhava aos triângulos que foram usados por eles nos mosaicos, os equiláteros, mas que ele tinha uma “pequena” diferença.

Com isso, logo eles notaram que aqueles triângulos com só dois lados iguais, mesmo não sendo “ideais” para a construção dos mosaicos, eram diferentes dos que eles usaram, inclusive dos outros triângulos acutângulos com todos os lados diferentes, os escalenos.

Na verdade, essa foi a única dificuldade dessa aula: destacar os triângulos isósceles, pois os equiláteros já estavam bem definidos pra eles, mesmo sem a sua nomenclatura dada pelo professor-autor.

Dessa maneira, os alunos separaram o grupo dos triângulos isósceles do grupo dos escalenos, mostrando que eles haviam percebido bem suas diferenças quanto aos lados.

A partir desse momento, o professor-autor concluiu a atividade informando aos alunos as classificações dos triângulos quanto aos lados e suas características.

Além disso, mostrou-se, aos estudantes, que todo triângulo tem sempre dois tipos de classificação, uma de acordo com seus ângulos e outra de acordo com seus lados.

Há de se reparar que esta tarefa acima não é muito simples. No cotidiano, mesmo na escola, em geral classificam-se os triângulos de acordo com apenas uma dessas definições. Não é fácil para um aluno absorver a ideia de que um triângulo qualquer pode sempre ter duas classificações ou, como eles disseram, “dois nomes”.

Aproveitando a discussão acima, o professor-autor ressaltou a importância de sempre, ao resolver um problema ou uma questão, ler e interpretar bem o seu enunciado. Pode parecer óbvio, mas não é a realidade da escola, que procura soluções para esse desafio.

> As dificuldades de leitura que porventura os alunos possuam devem ser encaradas pelo professor de matemática de frente, isto é, se o aluno tem dificuldade não cabe nesse momento procurar os culpados, mas ter clareza que se não houver a correta interpretação a prática fica sem efeito e a tarefa fica vazia de significado desinteressando o aluno de resolvê-la. (BITTENCOURT, 2008, p. 13)

Especificamente, no caso das classificações dos triângulos, a única certeza é que o triângulo equilátero é sempre acutângulo. Entretanto, optou-se por debater com os alunos essa condição somente na atividade de soma dos ângulos internos.

4.7 Atividade 6 – Classificação dos Quadriláteros

Antes de mais nada, é importante observar que essa atividade, na verdade, já se encontrava adiantada, devido, primeiramente, ao conhecimento prévio que os alunos traziam de quadrado e retângulo, suas características e, principalmente, a diferença entre eles.

O objetivo desta atividade era que os alunos formassem seis grupos de quadriláteros: o dos quadrados, dos retângulos, dos losangos, dos paralelogramos, dos trapézios e aquele cujos quadriláteros tivessem lados não-paralelos. Além disso, era esperado dos alunos que, de forma clara, soubessem explicar, ou pelo menos compreendessem, cada característica dos grupos formados.

Primeiramente, distribuiu-se os quadriláteros usados na construção dos mosaicos para a turma e foi pedido para os alunos que se sentassem em dupla e, como no caso dos triângulos, agrupassem os quadriláteros obtidos de acordo com as suas características.

Foi interessante observar que os alunos já começaram a separar os quadriláteros, de forma tranquila e sem qualquer intervenção do professor-autor, em cinco grupos, mantendo o trapézio junto aos quadriláteros irregulares.

O losango já havia sido previamente definido na atividade de discussão dos mosaicos, mas mesmo assim ele ainda foi agrupado, por algumas duplas de alunos, junto com o grupo dos paralelogramos.

Assim, os alunos ficaram com quatro ou cinco grupos de quadriláteros distintos, que precisariam ainda ser separados.

Focou-se, primeiramente, nas duplas que ainda puseram losangos e paralelogramos num mesmo grupo. Nesse caso, bastou apenas pedir para os alunos que verificassem a medida dos lados e logo eles notaram ou, até mesmo, lembraram da aula anterior, que o losango tem os quatro lados iguais, já o outro quadrilátero do grupo não tem. Não se fez necessária uma medição para essa diferenciação, pois estava visualmente clara e, neste ponto, os alunos conseguiram separar o grupo do losango do grupo dos paralelogramos.

Aproveitou-se esse momento para fazer algo que sempre acompanha o professor-autor em suas aulas, independente da metodologia usada por ele no ensino de geometria: estabelecer a diferença entre losango e paralelogramo utilizando algo que eles têm já bem enraizado, que é a diferença entre quadrado e retângulo. A ideia da medida dos lados é semelhante, entretanto essas outras figuras não possuem ângulo reto.

Após essa separação descrita acima, restaram os grupos que estavam com os trapézios e quadriláteros irregulares agrupados juntos.

Para isso, ao invés de fazer qualquer intervenção, deixou-se que os alunos que já haviam notado a diferença entre os quadriláteros percorressem a sala ajudando, trocando informações com os outros alunos e tentando verificar se eles falariam a palavra-chave “paralelos”, referindo-se aos lados do trapézio.

Infelizmente, não foi exatamente o que aconteceu. Na realizade, estes alunos acabaram por se utilizar de expressões elogiosas em relação ao formato do trapézio como: “bem mais bonito”, “certinho”, e até frases como: “Olha o visual desse, nem se compara!”. Da mesma forma, eles narraram expressões depreciativas em relação aos quadriláteros irregulares como: “todo torto”, “sem noção”.

Apesar disso, o professor-autor resolveu esperar que os alunos separassem os dois grupos de quadriláteros, mas, de fato, o paralelelismo das figuras estava claro para os alunos somente no visual, não teoricamente, nem mesmo em relação às figuras anteriores como os quadrados e retângulos.

Esta reação foi até esperada e natural, pois o apelo de toda esta atividade inicial foi visual e não técnico. A noção de paralalelismo não é difícil de compreender, de visualizar, pois existem exemplos cotidianos bem claros para os alunos, mas essa passagem de conhecimento na hora de separar os quadriláteros pela forma como se apresentavam aos seus olhos seria pretensiosa demais. A palavra “paralelo”, para eles, era totalmente nova e seria esperar muito que os alunos a trouxessem da atividade “zero”, onde ela foi trabalhada com retas, para que a usassem como explicação para seus colegas na manipulação dos quadriláteros.

Na verdade, mesmo sem conhecer a simetria do trapézio isósceles teoricamente, mas que também aparece nos outros quadriláteros já separados, foi o aspecto visual que “pesou” para que os alunos separassem os trapézios dos quadriláteros irregulares, pois simetria é atraente aos olhos.

Para a sequência da atividade, começou-se a debater com os alunos justamente o trapézio, que se tornaria uma definição nova para eles.

O professor-autor reproduziu o trapézio isósceles no quadro e mostrou aos alunos que o que o diferenciava do quadrilátero irregular “não-trapézio” não era a “beleza” ou qualquer outra coisa, e sim o par de lados paralelos que ele possuía.

Para que os estudantes pudessem notar isso, pediu-se para que eles observassem esse par de lados paralelos e tentassem, mentalmente, prolongá-los, de forma que fossem retas, ou seja, “linhas infinitas”.

Alguns dos alunos acabaram por se recordar da palavra “paralelos”, enquanto outros lembravam da definição, mas não da palavra exatamente. O mais importante foi passar a ideia do paralelismo de um par de lados que define os trapézios.

Para fazer melhor essa diferenciação, desenhou-se no quadro trapézios retângulos e escalenos, que, apesar de não serem “simétricos”, possuem um par de lados paralelos.

Para nomeá-los, pediu-se aos alunos que viessem ao quadro e prolongassem os lados não paralelos dos trapézios, formando, assim, os triângulos que também “batizam” os trapézios.

Finalmente, restava apenas o paralelogramo a ser nomeado e assim o foi feito pelo professor-autor em seguida.

Mostrou-se que, assim como nos triângulos, no caso dos quadriláteros os alunos também usariam as medidas dos lados e dos ângulos para diferenciar algumas figuras.

De fato, já estava claro para os alunos que, com relação às medidas dos lados, quais eram as diferenças entre losangos e paralelogramos, assim como entre quadrados e retângulos.

Aproveitou-se, também, a ideia que foi concluída na atividade de análise dos mosaicos, onde diferenciou-se losangos e quadrados pelo fato de possuírem ou não ângulos retos, para que os alunos pudessem diferenciar retângulos e paralelogramos.

Novamente, o fato de se utilizar algo inesperado, que havia sido visto em uma atividade anterior, como um facilitador na experiência de ensino-aprendizagem deste trabalho, foi uma observação importante percebida pelo professor-autor, visto que isto não havia sido planejado.

4.8 Atividade 7 – Soma dos ângulos internos

Como feito na atividade de análise dos mosaicos, distribuiu-se novamente, para os alunos, os mosaicos que eles haviam confeccionado e pediu-se que eles observassem que, nos pontos em que se uniam ângulos de triângulos equiláteros, se nota um outro ângulo conhecido.

Com isso, os alunos começaram a fazer comentários do tipo: “Juntando 6 aqui, forma uma volta toda, 360º!”. O professor-autor perguntou aos alunos, então: “Mas o triângulo não tem 6 ângulos, não é?”

Outro aluno fez a seguinte observação: “Se pegar três, como está aqui, dá uma linha retinha!”. Complementou-se o raciocínio deste aluno relembrando que uma “linha retinha” correspondia a um ângulo de meia volta e perguntou-se se algum deles se lembrava a medida desse ângulo. Em pouco tempo, um deles acertou a resposta.

Desta forma, o professor-autor mostrou aos alunos que os três ângulos juntos formavam 180º, mas eram ângulos de triângulos equiláteros diferentes, não eram do mesmo triângulo. Foi dito isso na esperança que alguém questionasse o fato dos triângulos serem todos iguais e fizesse tal associação. No entanto, isto não aconteceu.

Com isso, foi necessária a intervenção do professor-autor para informar aos alunos que, se todos os triângulos eram equiláteros, além dos lados de mesma medida eles possuíam ângulos congruentes. Agindo assim, facilitou-se para que os alunos concluíssem que todos os ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais e sua soma é 180º.

Feito isso, distribuiu-se aos alunos todos os triângulos, exceto os equiláteros, e pediu-se que escolhessem um qualquer para eles e um para o professor-autor. Com auxílio de uma tesoura, separou-se os três ângulos internos do triângulo fornecido pelos alunos e eles, mesmo lamentando “destruir” a figura, fizeram o mesmo com seu triângulo.

Juntou-se os três ângulos internos junto com os alunos e obteve-se um ângulo raso, fazendo com que os alunos notassem que a nova descoberta sobre a soma dos ângulos internos não é só válida para os triângulos equiláteros, mas para todos os triângulos, visto que cada aluno optou por uma figura distinta.

Dessa forma, concluiu-se, finalmente, que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo mede 180º. Foi observado pelo professor-autor que, em Geometria, esta informação seria utilizada por toda a vida escolar dos alunos.

Para o caso dos quadriláteros, distribuiu-se os quadrados e retângulos aos alunos, pois estas figuras já eram bem familiarizadas. Perguntou-se quanto mediam os ângulos internos destes quadriláteros e todos responderam com facilidade. Pediu-se, então, que somassem as medidas dos 4 ângulos e eles concluíram rapidamente: “Professor, dá 360º!”.

Então, questionou-se se isso seria suficiente para concluir que o mesmo aconteceria com todos os quadriláteros.

Alguns se calaram, mas outros alunos, instigados, responderam que não, que teríamos que testar os outros. E assim o fizeram, repetindo o procedimento de corte feito para o triângulo, recortando e separando os ângulos para juntá-los e formar uma volta completa, de 360º. Desta forma, concluiu-se esta atividade e finalizou-se o nível 3 da Teoria de Van Hiele de aprendizagem dos alunos da turma A proposta neste trabalho sobre triângulos e quadriláteros com o uso de mosaicos.

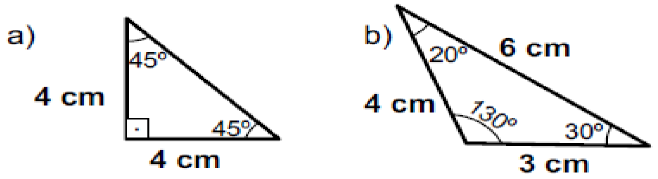
4.9 Exercícios e Avaliação

Findadas as atividades, foram propostos os exercícios do livro e da apostila sobre os temas tratados.

É importante observar que o livro utilizado não aborda os tipos de quadriláteros. Entretanto, o tema consta no programa oficial da Prefeitura, no qual é baseada a prova bimestral que a Secretaria de Educação envia às escolas. Assim, tornou-se imprescindível a utilização da apostila. Fizemos uma avaliação, com questões que abordavam apenas os temas tratados na atividades. Nesta, tentamos mesclar questões semelhantes ao do livro e da apostila, para que todos tivessem igual oportunidade. Claro, foi a parte do experimento que todos tiveram as mesmas aulas.

Figura 24 – 1ª questão da avaliação

1: Classifique os triângulos abaixo, de acordo com os lados e ângulos:



lados: ______________ lados: _______________ lados: _____________
ângulos: ____________ ângulos: _____________ ângulos: ___________

Fonte: O autor, 2019.

Como no decorrer do ano e da vida escolar em geral, eles se saem melhor nas questões mais diretas ou objetivas. No caso da avaliação, as questões 1 e 3, respondendo diretamente ou completando.

Figura 25 - 3ª questão da avaliação

3. Complete: a) O ___________________ é o quadrilátero que possui 4 ângulos retos, mas não tem os 4 lados iguais. b) O ___________________ é o quadrilátero que possui 4 lados iguais e 4 ângulos retos. c) O ___________________ é o quadrilátero que possui 4 lados iguais e ângulos não retos.

Fonte: O autor, 2019.

Nesta questão, como se refere às classificações, trabalha no terceiro nível da teoria de Van Hiele. Podemos dizer que a questão 3 aborda as classificações dos quadriláteros e está no terceiro nível, mas como destaca as diferenças e semelhanças entre eles, podemos afirmar que ela foi "iniciada" no segundo nível da teoria.

Vale observar que os alunos, em geral, apresentaram mais dificuldades nas questões 4 e 5, que exigem alguma argumentação, seja escrevendo ou armando equações. Fato que notamos acontecer em quase todas as turmas que trabalhamos normalmente.

Figura 26 – 4ª e 5ª questões da avaliação

4. Qual é a diferença do losango e do paralelogramo? 5. (Fesp -RJ – Adaptada) A soma dos lados de um triângulo equilátero é um número inteiro menor do que 17 e maior do que 13. Assim, qual a medida dos seus lados?

Fonte: O autor, 2019.

Notemos que a questão 4 cita os nomes dos quadriláteros, mas por perguntar a diferença entre as figuras, podemos dizer que engloba os níveis 2 e 3 da teoria de van Hiele.

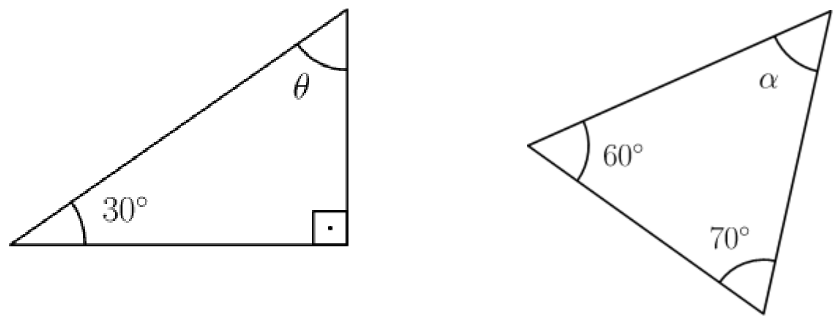
Na questão 5, precisa estar claro pro aluno a definição da palavra equilátero para, assim, o mesmo poder refletir. Esta definição foi obtida bem cedo na turma A, eles não sabiam a nomenclatura, mas entenderam, na análise das figuras, a noção de equilátero, da passagem do primeiro pro segundo nível onde, prematuramente, optamos por citá-la.

Para as questões 2 e 6, como trabalhamos, nas aulas de exercícios, como calcular o ângulo que falta de um triângulo ou quadrilátero sem ter que, necessariamente, montar a equação, e sim, subtraindo os ângulos conhecidos do total. Dessa forma, alguns dos alunos se sentiram mais à vontade para executá-las desta forma na avaliação.

Ensinamos e permitimos esse tipo de resolução, mesmo tendo em mente que a montagem/resolução de equações é uma ferramenta importante no decorrer do ensino.

Figura 27 – 2ª questão da avaliação

2. Determine os ângulos θ e α dos triângulos abaixo:

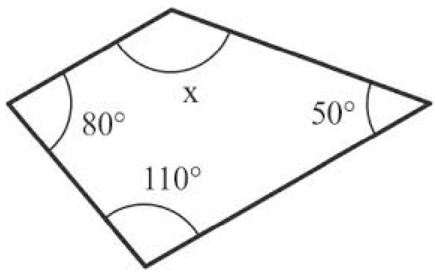


Fonte: O autor, 2019

Na questão 2, temos o detalhe do ângulo reto, trabalhado na atividade “zero”. Fizemos essa escolha baseados no fato de ter sido uma atividade comum às duas turmas e que esteve presente nos exercícios de revisão. Já em relação ao conteúdo da desta questão, consideramos que ele está no terceiro nível da teoria de Van Hiele, assim como no da questão 6.

Figura 28 – 6ª questão da avaliação

6. Determine o valor do ângulo “x” no quadrilátero abaixo:



Fonte: O autor, 2019.

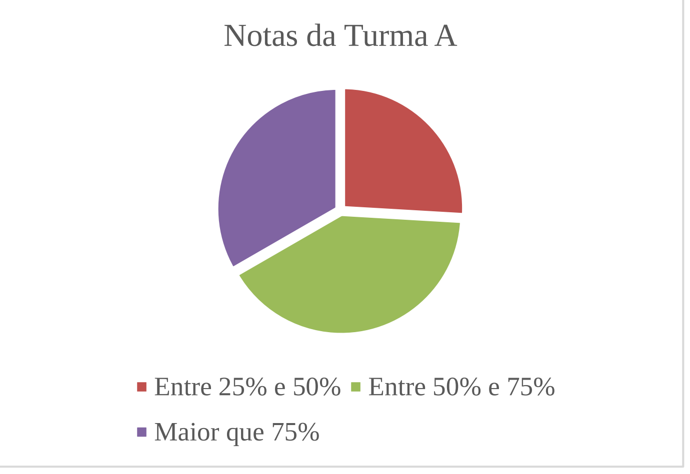
Em relação ao desempenho na avaliação descrita, obtivemos uma melhora da turma A no geral. Além desta se sair melhor que a turma B, como podemos ver nos gráficos, estes também se saíram melhor em relação às avaliações anteriores, dos outros bimestres.

A postura dos alunos, frente às aulas e avaliações, foi um avanço, sem dúvida, pois nos assuntos ensinados depois do experimento: ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice, incentivou-se, também, que desenhassem as figuras ao invés de apenas acompanhar os desenhos da apostila para uma melhor fixação do conteúdo estudado.

Nos gráficos que seguem, podemos visualizar a comparação quantitativa entre as notas obtidas pelos alunos das duas turmas na avaliação.

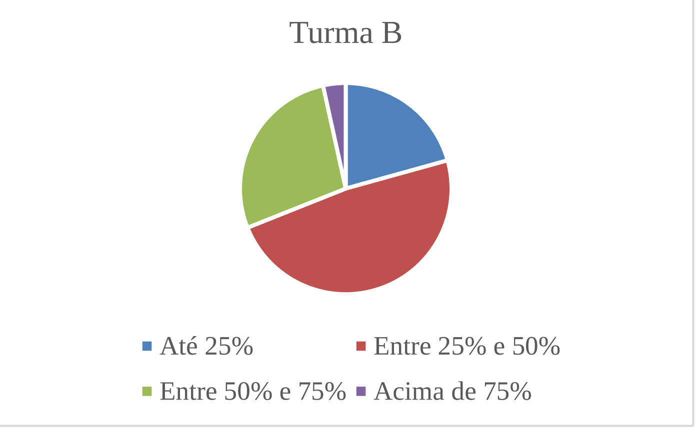
Os primeiros dois gráficos, mais específicos, mostram o aproveitamento quantitativo dos alunos por faixa de notas na avaliação.

Gráfico 1: Notas da turma A por faixa de aproveitamento



Fonte: O autor, 2019.

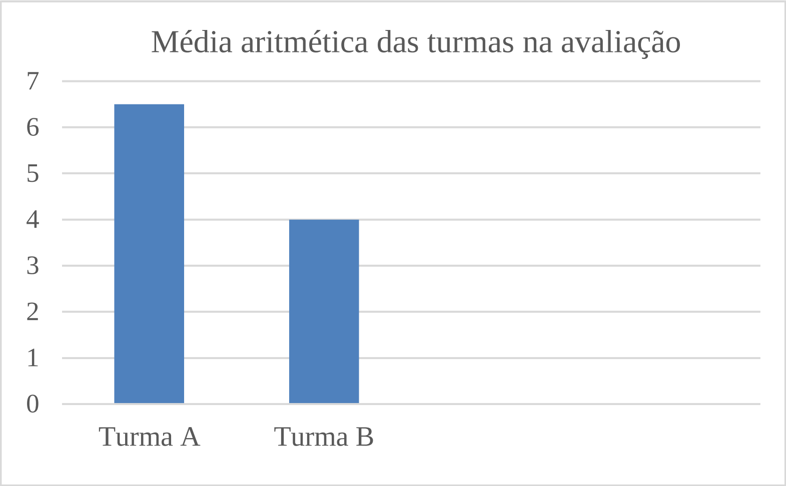
Gráfico 2: Notas da turma B por faixa de aproveitamento



Fonte: O autor, 2019.

Em seguida, temos a comparação das médias aritméticas das turmas

Gráfico 3: Média das turmas



Fonte: O autor, 2019.

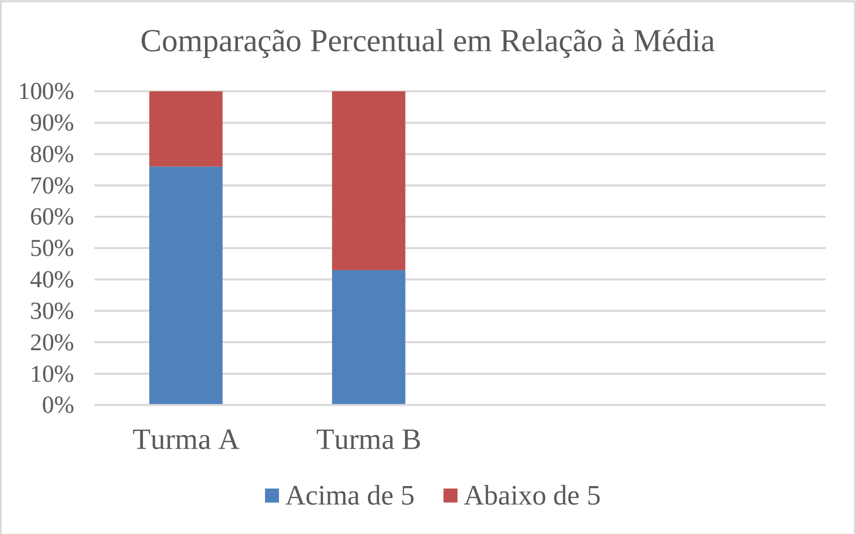
Infelizmente, a média da turma B ficou na faixa de 4,0; o que é, de fato, um baixo desempenho, mas que não difere do decorrer das notas obtidas pelos alunos ao longo do ano.

Na turma A, com média maior que 6,0, verificamos um aumento em relação às anteriores.

A média da escola e de toda a rede municipal do Rio de Janeiro para aprovação é 5,0.

Abaixo, no Gráfico 4, temos as porcentagens dos alunos que ficaram abaixo ou acima da média.

Gráfico 4: Comparação percentual em relação à média



Fonte: O autor, 2019.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Independente do resultado positivo nas avaliações comparativas entre as duas turmas, devemos ressaltar outros pontos igualmente importantes e que podem contribuir para a prática docente do professor-autor de deste trabalho e outros que tiverem acesso à leitura: a participação dos estudantes, por exemplo.

Parece meio reticente mas, na realidade atual, isto é uma verdadeira conquista. Em geral, não se consegue envolver toda a turma em qualquer atividade, seja ela inovadora ou não. E nós conseguimos, alguns alunos sendo mais participativos e ativos, claro, mas todos se envolveram, produziram e aprenderam, o que não havia acontecido ainda no ano letivo em questão. Esse ganho não se compara aos outros.

Esse envolvimento, infelizmente menos comum que gostaríamos, pode ser um grande facilitador, não somente para o estudante, mas para o professor também. Quando há tempo hábil, deveria ser utilizado em todas as áreas em que fosse possível criar, de fato, um “grupo de trabalho”, em um modelo onde todos conseguissem se ajudar e produzir.

Este tipo de prática se torna cada vez mais necessária de ser aplicada no cotidiano escolar. Em uma realidade onde a tendência das pessoas é de se comunicar à distância, nada mais facilitador para uma criança que o espaço físico da sala de aula, onde todos estão próximos e devem ser colaborativos.

Mas sabemos, como professores, que nem sempre se consegue apoio e tempo disponíveis para tal prática.

Ensinar Matemática, Geometria em especial, pode e deve ser algo onde essa colaboração deve objetivar que todos busquem se desenvolver e construir o conhecimento de forma prática e visual, fazendo comparações, construções, análises e tomando decisões.

Outro ponto importante é que uma experiência como a deste trabalho seria bem proveitosa sendo feita no início do ano e não do meio para o final, tocando no ponto já explorado no desenvolvimento desta dissertação: o fato da Geometria sempre ser deixada de ser vista para os últimos bimestres. Isto, se mostra totalmente equivocado, pois conseguir essa participação e desenvolvimento dos alunos os motivaria no decorrer do ano letivo e ajudaria a quebrar esse “quase tabu” da Geometria parecer uma disciplina à parte, que se estuda “quando dá tempo”.

A utilização da teoria de Van Hiele também merece destaque. Tomar conhecimento e aplicá-la de fato, ver a evolução da turma dentro dos níveis, como eles foram construindo o conhecimento e aplicando nas aulas seguintes, foi uma sensação realmente recompensadora para o professor-autor deste trabalho.

O fato do grupo ser praticamente leigo em Geometria dificulta ou atrasa o trabalho de qualquer professor. Entretanto, no caso de se usar a teoria em questão, não foi necessariamente um problema no decorrer do experimento, pois os alunos, partindo juntos, mesmo com visões e evoluções individuais diferentes, tornaram o trabalho nos primeiros dois níveis da Teoria mais fácil e agradável, onde eles mesmos iam tentando aprender com as figuras, descobrindo suas características de acordo com o que viam e tocavam, sem uma definição preliminar e determinada. Isto fez com que a visão da Matemática que alguns possuíam fosse, aos poucos, se extinguindo e, com isso, se deu a estimulação da curiosidade por parte do aluno, fundamental para a aprendizagem em qualquer área.

Já nas atividades do terceiro nível da Teoria, notamos como alguns demonstraram uma inclinação natural para a área, enquanto outros necessitavam de uma intervenção do professor, em forma de estímulo.

Quem se propõe a usar a Teoria de Van Hiele precisa primeiramente ter essa consciência do papel ativo do estudante.

O trabalho conjunto com Artes Plásticas, ainda inédito para os estudantes e para o professor-autor, também foi extremamente interessante.

Ao trabalhar em escola sócio-interacionista, tivemos oportunidade de utilizar, em sala, experiências bem práticas e lúdicas em Matemática, mas com Artes Plásticas isto ainda não havia sido executado.

Esta interação com Artes se mostrou uma maneira muito proveitosa de se desenvolver o raciocínio geométrico utilizando a criatividade, ponderação e produção.

Desta maneira, acreditamos que os objetivos da pesquisa foram cumpridos, no sentido da comparação. Ficou expresso, de forma clara, a diferença de interesse e aproveitamento das duas turmas trabalhadas. O interesse fica bem evidente nas fases das atividades em que elas tiveram que ser modificadas ou antecipadas. Estas só se deram devido à participação ativa do grupo da truma experimental A

A forma como nos envolvemos na construção dos mosaicos e como este foi o nosso material de estudo, nos instigou a tentar repetir a experiência nos próximos anos.

Além da já citada época do ano para ser feita, acreditamos que variações desta experiência seriam válidas, como construir os mosaicos somente com as figuras equiláteras, de forma intencional, utilizando o losango, obviamente. Outra sugestão seria, na hora de unir os ângulos internos e utilizar cópias das mesmas figuras, para evitar cortá-las.

Para os docentes que tiverem tempo disponível, aplicar testes entre os níveis para verificar o progresso do grupo, como é sugerido por autores que abordam a Teoria de Van Hiele, seria algo interessante.

Enfim, esperamos que este trabalho possa ser, para todos que tenham acesso, uma porta aberta para outras pesquisas na busca do aprimoramento do ensino-aprendizagem de Geometria.

REFERÊNCIAS

AIDAR, L. *Arte bizantina*. In: Cultura Genial. Disponível em <https://www.culturagenial.com/arte-bizantina/>. Acesso em 1 de Jun. 2019.

ALVES, A. M. M.; SILVEIRA, D. N. *Uma leitura sobre as origens do movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil*. Tópicos Educacionais, Recife , n. 2, jul./dez., 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/topicoseducacionais/article/view/22667>. Acesso em 8 de Ago. 2019.

ANDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. *Praticando matemática*. 4. ed. renovada, São Paulo, Editora do Brasil, 2015.

AS RELIGIOSAS. In: ENCICLOPÉDIA Itaú Cultural de Arte e Cultura Brasileiras. São Paulo: Itaú Cultural, 2019. Disponível em: <http://enciclopedia.itaucultural.org.br/obra1659/as-religiosas>. Acesso em: 09 de Mai. 2019. Verbete da Enciclopédia. ISBN: 978-85-7979-060-7.

ÁVILA, G. *O ensino da matemática*. Revista do Professor de Matemática, n. 23, p. 5-10, 1983. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/23/1.htm>. Acesso em: 17 de Abr. 2019.

AZEVEDO, M. C.; PUGGIAN, C.; FRIEDMAN, C. V. P. *Ensino de Geometria com Webquests:* resultados de uma pesquisa-ensino. Revista UNIABEU, v. 7, n. 17, set./dez., Belford Roxo, 2014. Disponível em <https://revista.uniabeu.edu.br/index.php/RU/article/view/1596/0>. Acesso em: 18 de Abr. 2019.

BIESDORF, R. K.; WANDSCHEER, M. F. *Arte, uma necessidade humana: função social e educativa.* Revista Eletrônica do Curso de Pedagogia do Campus Jataí, UFG, vol. 2, n. 11, 2011. Disponível em < https://www.revistas.ufg.br/rir/article/view/20333>. Acesso em 5 de Jul. 2019.

BITTENCOURT, J. F; *A importância da leitura e interpretação do texto do problema matemático.* Universidade Estadual de Ponta Grossa: 2008. Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1797-8.pdf>. Acesso em 20 de Jul. 2019.

BRASIL. Lei nº 5692. *Lei de Diretrizes e Bases de Educação Nacional***.** Brasília, DF. Congresso Nacional, 1971. Disponível em <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html> . Acesso em 18 de Jun. 2019

______. Lei nº 9.394. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília, DF. Congresso Nacional, 1996. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1996/lei-9394-20-dezembro-1996-362578-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em 21 de Ago. 2019

______. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf> . Acesso em 11 de Mai. 2019

______. Ministério da Educação. *A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*, Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.> Aceso em 5 de Mai. 2019

______. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática /Secretaria de Educação Fundamental. –Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> . Acesso em 10 de Jun. 2019

BUORO, Anamelia Bueno. *O olhar em construção: uma experiência de ensino e aprendizagem da arte na escola.* 4º ed. Cortez. São Paulo, 2000.

CARDOSO, L. de A.; GANDULFO, A. M. R. *Mosaicos*: construção e aplicação dos conceitos geométricos. Anais. VII CIBEM, Montevideo, 2013. Disponível em: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1072.pdf>. Acesso em: 20 de Mai. de 2019.

CIFUENTES, J. C. *Fundamentos estéticos da matemática*: *da habilidade à sensibilidade*. In: BICUDO, M. A. V. (Org). Filosofia da Educação Matemática: concepções e movimento. Editora Plano. Brasília, 2003.

CLEMENTE, J. C. et al. *Ensino e aprendizagem da geometria:* um estudo a partir dos periódicos em educação matemática. GREPEM – UFJF, Juiz de Fora, 2015. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/programacao/comunicacoes-cientificas/cc-textos-completos/>. Acesso em: 17 de Abr. 2019.

COSTA, E. A. S.; ROSA, M. *Fragmentos históricos do Desenho Geométrico no currículo matemático brasileiro*. Ouro Preto, 2015. Disponível em: <https://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/FRAGMENTOS-HISTÓRICOS-DO-DESENHO-GEOMÉTRICO-NO-CURRÍCULO.pdf> Acesso em 26 de Ago. 2019.

EMBLEMA - Logotipo Poético. In: ENCICLOPÉDIA Itaú Cultural de Arte e Cultura Brasileiras. São Paulo: Itaú Cultural, 2019. Disponível em: <http://enciclopedia.itaucultural.org.br/obra9785/emblema-logotipo-poetico>. Acesso em: 09 de Mai. 2019. Verbete da Enciclopédia. ISBN: 978-85-7979-060-7

ESCHER, M. C.; TJABBES, P. O mundo mágico de Escher. [S.l.]: Brasília: Centro Cultural
Banco do Brasil, 2011. ISBN 9788564170001.

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. *Fazendo arte com matemática*. 2ª ed. Edição do Kindle, 2015.

FREITAS, C. *Arte islâmica e moçárabe.*2016. Disponível em <https://www.slideshare.net/bolotinha73/mdulo-3-arte-islmica-e-morabe>. Acesso em 1 de Jun. 2019.

GANDULFO, A. M. R. et al. *Explorando a Geometria Euclidiana com Materiais manipuláveis: polígonos e mosaicos*. In: XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, julho, 2013, Paraná. Anais eletrônicos do Encontro Nacional de Educação Matemática Paraná, PUC, 2013. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6418_3183_ID.pdf>. Acesso em 17 de Jul. 2019.

GUSMÃO, L. D. *Educação Matemática pela arte*: uma defesa da educação da sensibilidade no campo da matemática. 2013. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) – Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013. Disponível em <http://www.exatas.ufpr.br/portal/ppgecm/wp-content/uploads/sites/27/2016/03/021_LucimarDonizeteGusm%C3%A3o.pdf>. Acesso em: 20 de Abr. 2019.

HAMAZAKI, A. C. *O ensino da geometria sob a ótica dos Van Hiele*. Universidade Guarulhos. Guarulhos, 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/07/2PO13912905851.pdf>. Acesso em 27 de Abr. 2019.

HELBEL, A. P. T. *Matemática e arte:possibilidades para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria*. Produção Didático - Pedagógica. Cadernos PDE, Santa Mariana, PR, 2013. Disponível em < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_uenp_mat_pdp_ana_paula_tomazini.pdf>. Acesso em: 04 de Abr. 2019.

IMENES, L. M. *Geometria dos mosaicos.* 2ª ed., ed. Scipione, São Paulo, 1988.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática.* 2ª ed., ed. Moderna, São Paulo, 2012.

KALLEF, A. M. et al. *Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de Van Hiele.* Bolema, v. 9, n. 10, Rio Claro, 1994. Disponível em: <file:///C:/Users/N%C3%B3s/AppData/Local/Temp/10671-Texto%20do%20artigo-56822-1-10-20150921.pdf >. Acesso em 31 de Mar. 2019

KLINE, M. *O fracasso da matemática moderna*. Tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo, IBRASA, 1976.

LIMA, E. L. *Conceituação, Manipulação e Aplicações, dois problemas e duas soluções*. Revista do Professor de Matemática n. 41, p. 1-6, 1999. Disponível em <http://rpm.org.br/cdrpm/41/1.htm>. Acesso em 17 de Abr. 2019.

LOBO, J. S.; BAYER, A. *O ensino de Geometria no Ensino Fundamental*. Acta Scientiae, v. 6, n. 1, jan/jun, p. 19-26, Canoas, 2004. Disponível em:

<http://wwwp.fc.unesp.br/~hsilvestrini/O%20ensino%20de%20Geometria.pdf> . Acesso em 5 de Ago. 2019

LOPES, D. C. V.; SILVA, R. S. *Uma experiência de ensino-aprendizagem sobre simetria nos anos iniciais através do uso de materiais concretos e digitais*. Cadernos do Aplicação, v. 28, p. 111-118, Porto Alegre, 2015. Disponível em <https://seer.ufrgs.br/CadernosdoAplicacao/article/view/32223/38171>. Acesso em 19 de Abr. 2019.

LORENZATO, S. *Por que não ensinar Geometria?* A educação matemática em revista. SBEM, n. 4, p. 3-13, Blumenau, 1995. Disponível em: <http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf>. Acesso em 27 de Mar. 2019

MENDES, F. R. *A nova sala de aula*. Autonomia Editora. Edição do Kindle. Porto Alegre, 2012.

MIYASAKI, C. H. *Matemática é arte: uma intervenção com alunos do 7º ano.* Cadernos PDE, 2014. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unespar-campomourao_mat_pdp_cristiane_hiroko_miyasaki.pdf>. Acesso em 17 de Abr. 2019.

MONTEIRO, A. D. *1969x2009*. In: Ensino médio em diálogo. 2012. Disponível em <www.emdialogo.uff.br/node/3719.>. Acesso em 2 de Mai. 2019

MOURA, C. F.; CAVALCANTE, C.; GOMES, R. L. R. *A geometria no ensino fundamental*. Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo, jun., 2016. Disponível em: <http://www.eumed.net/rev/atlante/2016/06/geometria.html>. Acesso em 18 de Abr. 2019.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. *Geometria segundo a teoria de Van Hiele*. 2. ed., IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2017.

NICONIELLO, B.; QUEEN, M. *Geometria, três atividades que não podem faltar.* Revista Nova Escola, 2012. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2039/geometria-tres-atividades-que-nao-podem-faltar>. Acesso em 20 de Jul. 2019.

NOGUEIRA, D. *Mosaicos multicoloridos ornamentam o piso de construções históricas de Curitiba*. Arquitetura, Haus, Gazeta do Povo, Curitiba, 2016. Disponível em <https://www.gazetadopovo.com.br/haus/arquitetura/mosaicos-multicoloridos-ornamentam-o-piso-de-construcoes-historicas/> Acesso em 15 de Jun. 2019.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências.* Revista Zetetiké, Ano I, n.1, p. 7-17, Campinas, 1993. Disponívem em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822/13724>. Acesso em 27 de Mar. 2019.

RIBEIRO, D. F. *O motivo da resistência de professores de matemática às mudanças em relação à organização de conteúdos, recursos tecnológicos e métodos de avaliação*. Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2013. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/19347/1/Ferreira2013O.pdf>. Acesso em 7 de Ago. 2019

RODRIGUES, J. *O de stijl de Piet Mondrian: seu estilo e influência*. In: Sala 7 Disgn, Arte. 2016 Disponível em <https://sala7design.com.br/2016/02/o-de-stijl-de-piet-mondrian-arte-moderna-ontem-e-hoje.html> Acesso em 25 de Mai. 2019

SANTOS, F. T. M.; SANTOS, M. C. *Níveis do Pensamento Geométrico de Van-Hiele com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.* Anais IX EPBEM, v. 1, 2016. Disponível em <https://www.editorarealize.com.br/revistas/epbem/anais.php>. Acesso em 18 de Abr. 2019.

SANTOS, M. S.; SANT'ANNA, N. F. P. *O Ensino de Geometria e a Teoria de van Hiele:* Uma Abordagem através do Laboratório de Ensino de Matemática no 8º Ano do Ensino Fundamental. Anais do XIX EBRAPEM, Juiz de Fora, 2015. Disponível em <http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd2_marcele_santos.pdf>. Acesso em 19 de Abr. 2019.

SCLOVSKY, I. *História do Mosaico*. 2008. Disponível em <https://www.cursosdemosaico.com.br/historia-do-mosaico.php>. Acesso em: 10 de Mai. 2019.

SILVA, L.; CANDIDO, C. C. *Modelo de aprendizagem de geometria do casal Van Hiele*. IME-USP, São Paulo, 2007. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2404060/mod_resource/content/1/Silva%20%20Candido%20%20Modelo%20de%20Aprendizagem%20da%20Geometria%20do%20Casal%20Van%20Hiele.pdf> . Acesso em 13 de Ago. 2019

SILVEIRA, E.; MARQUES, C. *Matemática – compreensão e prática*. 4 ed. São Paulo, Moderna, 2017.

SIMONINI. A. R. F. *Mosaicos geométricos:* estudo de ângulos e simetrias. 2017. 100 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytazes, 2017. Disponível em: < http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2018/05/20171412Andrea-Ribeiro-Fernandes-Simonini.pdf>. Acesso em: 10 de Mai. 2019.

THUMS, C. M.; MENEGHETTI, M. R. N. *O Ensino de Quadriláteros e suas propriedades com o uso do GeoGebra: uma análise segundo o modelo de Van Hiele*. Trabalho de Conclusão de Especialização, LUME-UFRGS, 2015. Disponível em <http://hdl.handle.net/10183/134109>. Acesso em 19 de Abr. 2019.

ZALESKI FILHO, Dirceu. *Matemática e Arte*. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

ZIMMER, L. *Snow Artist Simon Beck Stamps a Crop of Gorgeous Snow Patterned Fields in France*. El Segundo, CA 90245, Estados Unidos: Inhabitat, 2013. Disponível em

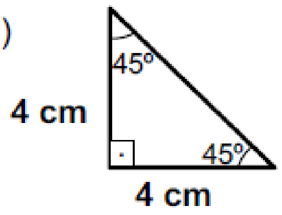
<https://inhabitat.com/snow-artist-simon-beck-stamps-a-new-crop-of-gorgeous-snow-patterned-fields-in-france/simon-beck-snow-art2-2/>. Acesso em: 09 de Abr. 2019.

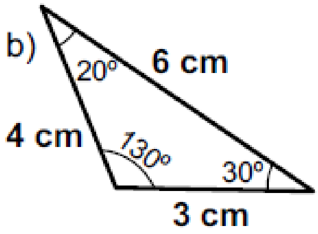
WIKIART. *Two Birds*. Artists, Surrealism, M. C. Escher Disponível em <https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/two-birds>. Acesso em 2 de Jun. 2019.

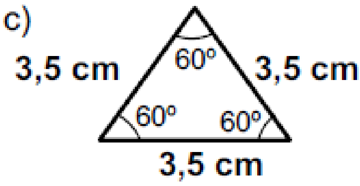
________. *Sun and Moon.* Artists, Surrealism, M. C. Escher. Disponível em <https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/sun-and-moon>. Acesso em 2 de Jun. 2019

ANEXO – Avaliação com conteúdo das atividades

1. Classifique os triângulos abaixo, de acordo com os lados e ângulos:

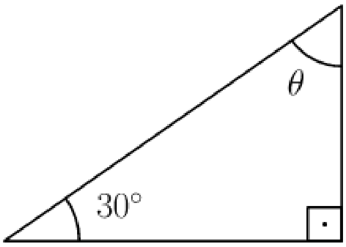
a)


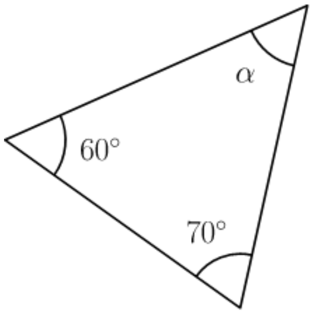
b)


c)


lados: ______________ lados: _______________ lados: _______________
ângulos: ____________ ângulos: _____________ ângulos: _____________

2. Determine os ângulos θ e α dos triângulos abaixo:





3. Complete:

a) O ___________________ é o quadrilátero que possui 4 ângulos retos, mas não tem os 4 lados iguais.
b) O ___________________ é o quadrilátero que possui 4 lados iguais e 4 ângulos retos.
c) O ___________________ é o quadrilátero que possui 4 lados iguais e ângulos não retos.

4. Qual é a diferença do losango e do paralelogramo?

5. (Fesp -RJ – Adaptada) A soma dos lados de um triângulo equilátero é um número inteiro menor do que 17 e maior do que 13. Assim, qual a medida dos seus lados?

6. Determine o valor do ângulo “x” no quadrilátero abaixo: