



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Mauro Nigro Alves Junior

**Aspectos gerais sobre a conformabilidade de grafos**

Rio de Janeiro

2023

Mauro Nigro Alves Junior

**Aspectos gerais sobre a conformabilidade de grafos**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.



Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dra. Diana Sasaki Nobrega

Coorientador: Prof. Dr. Luerbio Faria

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC/A

A474      Alves Junior, Mauro Nigro.  
Aspectos gerais sobre a conformabilidade de grafos/ Mauro Nigro Alves  
Junior. – 2023.  
77 f.: il.

Orientadora: Diana Sasaki Nobrega

Coorientador: Luerbio Faria

Tese (Doutorado em Ciências Computacionais) - Universidade do Estado  
do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Teoria dos grafos - Teses. 2. Complexidade computacional - Teses. I.  
Nobrega, Diana Sasaki. II. Faria, Luerbio. III. Universidade do Estado do Rio  
de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 519.17

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Mauro Nigro Alves Junior

## Aspectos gerais sobre a conformabilidade de grafos

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 14 de agosto de 2023.

Banca Examinadora:

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Diana Sasaki Nobrega (Orientador)  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

---

Prof. Dr. Luerbio Faria (Coorientador)  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

---

Prof. Dr. Rubens André Sucupira  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Telma Silveira Pará  
Fundação de Apoio à Escola Técnica do Estado do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Fábio Protti  
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2023

## RESUMO

ALVES JUNIOR, Mauro Nigro *Aspectos gerais sobre a conformabilidade de grafos*. 2023. 77 f. Tese (Doutorado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Uma  $k$ -coloração de vértices de um grafo  $G = (V, E)$  é uma atribuição de  $k$  cores aos vértices de  $G$ , tal que vértices adjacentes têm cores diferentes. A deficiência de  $G$  é  $def(G) = \sum_{v \in V} (\Delta - d(v))$ . Um grafo  $G$  é conformável se  $G$  possui uma  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  em que o número de classes de cor (incluindo classes de cor vazias) com paridade diferente da paridade de  $|V|$  é no máximo  $def(G)$ . Nesse caso,  $\varphi$  é chamada de coloração conformável. O estudo sobre a coloração conformável abordado nesta tese foi motivado pela rica literatura existente e, principalmente, pelas lacunas envolvendo a determinação da complexidade computacional de decidir se um grafo  $G$  é conformável. Uma outra motivação está nas relações inerentes da coloração conformável com o problema de coloração total. Nesta tese, classificamos a conformabilidade para diversas classes de grafos. Determinamos quais colorações equilibradas são conformáveis. Provamos que se  $G$  é regular e *Classe 1*, então  $L(G)$  é conformável. Além disso, demonstramos que todo grafo linha do grafo completo  $K_n$  é conformável. Ademais, classificamos a conformabilidade dos grafos bipartidos regulares conexos e de todos os grafos subcúbicos, considerando também o caso não-conexo. Para tal, introduzimos uma nova  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices chamada de coloração anticonformável que auxilia em determinar se um grafo é ou não é conformável. Também definimos a coloração conformável forte que é a coloração conformável que se estende para uma  $(\Delta + 1)$ -coloração total. Mostramos três condições necessárias para uma coloração conformável ser forte e que determiná-la é NP-completo. Abordamos a coloração conformável na união disjunta de grafos. Mostramos um padrão nas uniões disjuntas entre grafos conformáveis, entre grafos anticonformáveis e também entre grafos conformáveis e anticonformáveis. Demonstramos que todo grafo  $k$ -regular com  $k$  par é não-anticonformável. No caso em que  $k$  é ímpar, mostramos que os grafos bipartidos  $k$ -regulares são anticonformáveis. Além disso, construímos um grafo não-anticonformável  $k$ -regular, denotado por  $H_k$ . Finalmente, mostramos que a união disjunta entre  $H_k$  e um número ímpar de componentes conexas de  $K_{k+1}$  é não-conformável.

Palavras-chave: Coloração conformável. Coloração total. Complexidade computacional.

## ABSTRACT

ALVES JUNIOR, Mauro Nigro *General aspects about conformability of graphs*. 2023. 77 f. Tese (Doutorado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

A  $k$ -vertex coloring of a graph  $G = (V, E)$  is an assignment of  $k$  colors to the vertices of  $G$  such that adjacent vertices have different colors. The deficiency of  $G$  is defined as  $def(G) = \sum_{v \in V} (\Delta - d(v))$ , where  $\Delta$  is the maximum degree of the graph and  $d(v)$  is the degree of vertex  $v$ . A graph  $G$  is conformable if it has a  $(\Delta + 1)$ -vertex coloring in which the number of color classes (including empty color classes) with a different parity from the parity of  $|V|$  is at most  $def(G)$ . The study of conformable coloring addressed in this thesis was motivated by the rich existing literature and, mainly, by the gaps involving the determination of the computational complexity to decide whether a graph  $G$  is conformable. Another motivation lies in the inherent relationships between conformable coloring and the total coloring problem. In this thesis, we classify conformability for several classes of graphs. We determine which balanced colorings are conformable. We prove that if  $G$  is regular and *Class 1*, then  $L(G)$  is conformable. Additionally, we demonstrate that every line graph of the complete graph  $K_n$  is conformable. Furthermore, we classify the conformability of connected regular bipartite graphs and all subcubic graphs, including the disconnected case. For this purpose, we introduce a new  $(\Delta + 1)$ -vertex coloring called anticonformable coloring, which aids in determining whether a graph is conformable or not. We also define strong conformable coloring, which is the conformable coloring that extends to a  $(\Delta + 1)$ -total coloring. We present three necessary conditions for a conformable coloring to be strong and show that determining it is NP-complete. We address conformable coloring in the disjoint union of graphs. We show pattern in the disjoint unions between conformable graphs, between anticonformable graphs, and also between conformable and anticonformable graphs. We demonstrate that every  $k$ -regular graph with an even  $k$  is non-anticonformable. In the case where  $k$  is odd, we show that bipartite  $k$ -regular graphs are anticonformable. Additionally, we construct a non-anticonformable  $k$ -regular graph, denoted by  $H_k$ . Finally, we show that the disjoint union between  $H_k$  and an odd number of connected components of  $K_{k+1}$  is non-conformable.

Keywords: Conformable coloring. Total coloring. Computational complexity.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Exemplo de um grafo subcúbico conformável, do grafo ciclo $C_4$ que é conformável e do grafo ciclo $C_5$ que é não-conformável. . . . .	11
Figura 2	- Exemplo de uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total do grafo de Petersen na Figura 2a. A coloração restrita aos vértices é conformável na Figura 2b.	13
Figura 3	- Exemplo de um grafo subcúbico anticonformável, do grafo Möbius ladder $M_8$ que é anticonformável e do grafo prisma triangular $L_3$ que é não-anticonformável. . . . .	17
Figura 4	- $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada para o grafo $G$ com $ V  = k(\Delta + 1) + s$ , $0 \leq s < \Delta + 1$ e a cardinalidade de suas classes de cor. . . . .	19
Figura 5	- A aresta $a_i$ com cor $i$ é adjacente a no máximo duas arestas $a_j^1$ e $a_j^2$ com cor $j$ . . . . .	25
Figura 6	- Um exemplo de coloração conformável do grafo $L(K_5)$ , onde são coloridas as arestas de $K_5$ . Para cada cópia de $K_5$ temos uma classe de cor $\mathcal{C}_p$ com $p \in \{1, \dots, n\}$ e temos que $\mathcal{C}_p = \emptyset$ , quando $p \in \{n+1, \dots, 2n-3\}$ .	27
Figura 7	- Um exemplo de coloração conformável para $L(K_7)$ , onde estão coloridas as arestas de $K_7$ . . . . .	28
Figura 8	- Uma $(\Delta(L(K_5)) + 1)$ -coloração total para $L(K_5)$ que possui a coloração conformável do Teorema 10. . . . .	28
Figura 9	- O nove subgrafos minimais que não são grafos linha. . . . .	30
Figura 10	- O grafo potência de ciclo $H = C_n^k$ com $k$ par, $j \in \{1, \dots, \frac{k}{2}\}$ e $n = 2k + 2j + 1$ . . . . .	32
Figura 11	- O grafo de potência do ciclo $H = C_n^k$ com $k$ ímpar, $j \in \{1, \dots, \frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}\}$ e $n = 2k + 2j + 1$ . . . . .	33
Figura 12	- Três casos possíveis para o subcúbico $G$ que nos leva a concluir que existe um vértice $v \in \mathcal{C}_1$ que não é adjacente a um vértice $u \in \mathcal{C}_3$ . Na Figura 12a, ambas as classes de cor ímpares $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ são unitárias. Na Figura 12b, apenas uma classe de cor ímpar é unitária para $G$ cúbico. Na Figura 12c, apenas uma classe de cor ímpar é unitária para $G$ subcúbico com deficiência 1. . . . .	36
Figura 13	- Exemplo de aplicação do algoritmo de coloração conformável do Teorema 15 para $ V $ par nas Figuras 13b e 13a e para $ V $ ímpar nas Figuras 13c e 13d. . . . .	38
Figura 14	- Um algoritmo linear para produzir uma coloração conformável para um grafo subcúbico conexo, se existir, obtido a partir da prova do Teorema 15.	39
Figura 15	- Dois possíveis casos da deficiência da união disjunta entre grafos conexos.	40

Figura 16 - Os três casos que nos faz concluir que $G_1$ é cúbico. Na Figura 16a, temos o grafo $G_1$ cúbico e o grafo $G_2$ é o $C_3$ . Na Figura 16b, temos o grafo $G_1$ cúbico e $G_2$ o grafo trivial. Na Figura 16c, temos o grafo cúbico $G_1$ e o grafo caminho $G_2$ . . . . .	41
Figura 17 - Coloração conformável para grafos com $def(G) = 3$ . . . . .	42
Figura 18 - Coloração conformável para grafos com $def(G) = 2$ . . . . .	43
Figura 19 - Exemplos de coloração conformável para $G$ com $def(G) = 1$ e $def(G) = 0$ . . . . .	43
Figura 20 - Três colorações de vértices auxiliares de $K_{3,3}$ . . . . .	49
Figura 21 - Três colorações de vértices auxiliares do prisma triangular. . . . .	50
Figura 22 - O grafo de Petersen com uma 4-coloração total em (22a). Um emparelhamento $M_i$ , para $i \in \{1, \dots, 4\}$ em (22b), (22c), (22d) e (22e), em que $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ particiona $E(G)$ . . . . .	57
Figura 23 - O grafo de Petersen generalizado $G(5, 1)$ e o grafo Möbius ladder $M_{10}$ com uma coloração conformável $\varphi_1$ e $\varphi_2$ , respectivamente, que não são fortes. . . . .	60
Figura 24 - Um esquema conciso baseado em conjuntos que expõe certos grafos conformáveis e não-conformáveis. . . . .	62
Figura 25 - Uma coloração anticonformável para um grafo bipartido $k$ -regular $G$ . . . . .	70
Figura 26 - Exemplos de grafos não-anticonformáveis com grau máximo par. . . . .	71
Figura 27 - Os grafos $H_5$ e $H_7$ . . . . .	72
Figura 28 - Um esquema conciso baseado em conjuntos que relaciona a existência de grafos não-conformáveis, não-anticonformáveis e anticonformáveis usando a paridade do grau máximo como critério de separação e os resultados deste capítulo. . . . .	73

## SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO . . . . .	8
1	TODAS AS COLORAÇÕES DE VÉRTICES EQUILIBRADAS QUE SÃO CONFORMÁVEIS . . . . .	19
2	SOBRE A CONFORMABILIDADE DE GRAFOS LINHA . . . . .	24
2.1	Os grafos linha de grafos regulares <i>Classe 1</i> são conformáveis . . . . .	24
2.2	Uma discussão sobre a existência de um grafo $L(G)$ não-conformável tal que $G$ é um grafo regular . . . . .	29
3	CONFORMABILIDADE DOS GRAFOS SUBCÚBICOS E DOS GRAFOS BIPARTIDOS REGULARES . . . . .	34
3.1	A conformabilidade dos grafos subcúbicos não-conexos . . . . .	37
3.2	Coloração anticonformável para grafos subcúbicos conexos e a conformabilidade dos grafos subcúbicos . . . . .	44
4	CONFORMABILIDADE FORTE: A COLORAÇÃO CONFOR- MÁVEL QUE ESTENDE PARA COLORAÇÃO TOTAL . . . . .	56
5	SOBRE A CONFORMABILIDADE DA UNIÃO DISJUNTA DOS GRAFOS . . . . .	63
5.1	A união de dois grafos regulares nas classes conformável e anti- conformável. . . . .	63
5.2	Sobre a união de dois grafos nas classes não-conformáveis e não- anticonformáveis . . . . .	65
5.3	Alguns grafos não-anticonformáveis conexos . . . . .	69
	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS . . . . .	74
	REFERÊNCIAS . . . . .	76

## INTRODUÇÃO

### Definições e notações básicas

Nesta seção, estão apresentados os conceitos e alguns resultados usados neste trabalho. Os conceitos referentes a Teoria dos Grafos podem ser encontrados no Bondy e Murty [1] e no Yap [2].

Um *grafo*  $G$  é um par ordenado  $(V(G), E(G))$  em que  $V(G)$  é um conjunto de *vértices* e  $E(G)$  é um conjunto de *arestas*, e com uma *função de incidência*  $\psi_G$ , que associa a cada aresta de  $E(G)$ , um par não-ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de  $G$ . Se  $u$  e  $v$  são vértices de  $V(G)$ ,  $x$  é uma aresta de  $E(G)$  e temos que se  $\psi_G(x) = \{u, v\}$ , então  $x$  é dita *incidente* em  $u$  e  $v$ , além disso, chamamos  $u$  e  $v$  de *extremos* de  $x$ . Arestas distintas com um extremo em comum são ditas *adjacentes* e arestas que não são adjacentes são ditas *independentes*. Analogamente, vértices que incidem na mesma aresta são ditos *adjacentes*.

Por questão de simplicidade denotamos o par não ordenado de vértices como  $uv$ , em vez de  $\{u, v\}$  e quando não houver ambiguidade de qual grafo está sendo discutido, denotamos os conjuntos de vértices como  $V$  e, de arestas como  $E$ , em vez de  $V(G)$  e  $E(G)$ . Denotamos a cardinalidade dos conjuntos  $V$  e  $E$  como  $n$  e  $m$ , respectivamente.

Se a aresta tem ambos os extremos num mesmo vértice, ela é chamada de *laço*. Se existe mais de uma aresta com mesmos extremos, elas são denominadas *arestas paralelas*. Um grafo é dito *simples* quando não contém arestas paralelas nem laços. A menos que haja menção em contrário, todos os grafos nesta tese são grafos simples.

O *grau*  $d(v)$  de um vértice  $v$  é o número de arestas incidentes em  $v$ . O *grau máximo* e o *grau mínimo* de um grafo  $G$  são denotados por  $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$  e  $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in G\}$ , respectivamente. Em particular, um grafo  $G$  é dito *subcúbico* quando  $\Delta(G) = 3$ . Um grafo é dito  *$k$ -regular*, quando todos os seus vértices têm mesmo grau  $k$ ; grafos 3- regulares são chamados de *grafos cúbicos*.

Um *caminho* é um grafo simples cujos vértices podem ser representados como termos de uma sequência finita tal que dois vértices são adjacentes quando eles são consecutivos na sequência e, não são adjacentes, caso contrário. Um grafo  $G = (V, E)$  é dito *conexo* quando existe um caminho entre cada par de vértices de  $G$ . Caso contrário,  $G$  é *não-conexo*. Denominam-se componentes conexas de um grafo  $G$  aos subgrafos conexos de  $G$  que sejam maximais. A *união disjunta* de grafos  $G$  e  $H$  é o grafo  $G \cup H$  com conjunto de vértices  $V(G) \cup V(H)$  e conjunto de arestas  $E(G) \cup E(H)$  tal que  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ .

Um *grafo completo* é um grafo simples em que quaisquer par de vértices desse grafo são adjacentes. Denotamos o grafo completo com  $n$  vértices por  $K_n$ . Um *grafo ciclo*, denotado por  $C_n$  consiste em um conjunto de vértices  $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$  e

de arestas  $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_0\}$ .

Um grafo  $H$  é dito *subgrafo* de  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$ . Como exemplo temos que os grafos ciclos  $C_n$  são subgrafos dos grafos completos  $K_n$ . Um *subgrafo de  $G$  induzido por  $S \subseteq V(G)$*  é denotado por  $G[S]$  e definido por  $V(G[S]) = S$  e  $E(G[S]) = \{xy \in E(G) \mid x \in S \text{ e } y \in S\}$ . Chamamos *clique* de um grafo  $G$  a um subgrafo induzido de  $G$  que seja um grafo completo.

Um grafo  $G$  é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em duas partes  $V_1$  e  $V_2$  de tal forma que toda aresta tem um extremo em  $V_1$  e um extremo em  $V_2$ . Denotamos o grafo por  $G[V_1, V_2]$ . Um grafo *bipartido completo* possui uma aresta para cada par de vértices  $v_1$  e  $v_2$  com  $v_1 \in V_1$  e  $v_2 \in V_2$  e se  $n_1 = |V_1|$  e  $n_2 = |V_2|$ , denotamos este grafo por  $K_{n_1, n_2}$ ; note que  $E(K_{n_1, n_2}) = n_1 \cdot n_2$ . Para  $n \geq 1$ , o grafo bipartido completo  $K_{1, n}$  é chamado de *grafo estrela* e denotado por  $S_n$ .

Um conjunto  $S$  de vértices é dito *independente* se quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  em  $S$  são independentes. Um conjunto independente é dito *maximal* se qualquer vértice que não está neste conjunto é adjacente a ao menos um vértice de  $S$ . Se  $S$  é o conjunto com maior cardinalidade possível, então é chamado de *conjunto independente máximo* e sua cardinalidade de *número de independência em vértices* de  $G$ , denotada por  $\alpha(G)$ .

Um conjunto  $M$  de arestas independentes de um grafo  $G$  é dito um *emparelhamento* em  $G$ . As arestas pertencentes a  $M$  são ditas *emparelhadas*, enquanto um vértice incidente em alguma aresta emparelhada é dito *saturado*. Um emparelhamento é *maximal* se qualquer aresta não emparelhada por  $M$  possuir pelo menos um extremo saturado por  $M$ . Se  $M$  é um emparelhamento de cardinalidade máxima, dentre todos os emparelhamentos de  $G$ , então  $M$  é *máximo* e sua cardinalidade é dita o *número de independência em arestas* de  $G$ , denotado por  $\alpha'(G)$ . Um emparelhamento  $M$  é *perfeito* quando todo vértice do grafo for saturado por  $M$ . Naturalmente, todo emparelhamento perfeito é máximo e todo emparelhamento máximo é maximal.

Um grafo  $G$  é um *grafo quase-linha* se para todo vértice  $v$ , o conjunto da vizinhança de  $v$  pode ser expresso como a união de duas cliques. Um *grafo linha* de um grafo  $G$  é o grafo  $L(G)$  tal que seus vértices são arestas de  $G$ , com  $ef \in E(L(G))$  quando  $e$  e  $f$  de  $E(G)$  possuem um extremo em comum em  $G$ .

Seja uma sequência de números inteiros positivos crescentes  $(d_1, d_2, \dots, d_\ell)$  tal que para todo  $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ , temos que  $1 \leq d_i \leq \lfloor n/2 \rfloor$ . Um *grafo circulante*  $C_n(d_1, d_2, \dots, d_\ell)$  é um grafo que contém um conjunto de vértices  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  e um conjunto de arestas  $E = \bigcup_{i=1}^{\ell} E_i$ , onde  $E_i = \{e_0^i, e_1^i, \dots, e_{n-1}^i\}$  e  $e_j^i = v_j v_{j+d_i \pmod n}$ . Uma aresta de  $E_i$  é dita *aresta com alcance  $d_i$* . Em particular, o grafo circulante  $C_n(1, 2, \dots, k)$  é chamado de *potência de ciclo* e é denotado por  $C_n^k$ . Em particular, para  $k \geq \lfloor n/2 \rfloor$  o grafo  $C_n^k$  é isomorfo a  $K_n$ . Além disso, se  $k = 1$ , então  $C_n^k$  é isomorfo a  $C_n$ . O grafo circulante  $C_{2n}(1, n)$  para  $n \geq 2$  é chamado de *Möbius ladder* e é denotado por  $M_{2n}$ .

O *grafo de Petersen generalizado*  $G(n, k)$ ,  $n \geq 3$  e  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , é o grafo

com conjunto de vértices  $V(G(n, k)) = \{u_i, v_i \mid i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$  e conjunto de arestas  $E(G(n, k)) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} \mid i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$ , com índices tomados módulo  $n$ . Claramente, o grafo  $G(n, k)$  e o grafo  $G(n, n-k)$  são isomorfos. Sendo assim, podemos considerar que  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Além disso, o grafo  $G(5, 2)$  é o conhecido grafo de Petersen.

## Sobre o problema da coloração conformável

Nesta seção, estão apresentados os conceitos envolvendo o problema de coloração em grafos e, além disso, apresentamos uma breve história sobre a origem da coloração conformável e seu estado da arte.

Uma *coloração de vértices* de um grafo  $G$  é uma atribuição de cores aos seus vértices de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Seja  $C$  um subconjunto não-vazio de  $\mathbb{N}$ . Precisamente, uma coloração de vértices é uma função  $\varphi : V(G) \rightarrow C$  tal que para todo par de vértices adjacentes  $u, v \in V(G)$ ,  $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ . Uma *k-coloração de vértices* é uma coloração de vértices  $\varphi$  tal que  $|C| = k$ . Dada uma *k-coloração de vértices*  $\varphi$ , o conjunto  $\mathcal{C}_i = \{v \mid \varphi(v) = i\}$  é chamado de *classe de cor i*. Note que  $\varphi$  não é necessariamente sobrejetiva, isso permite que uma *k-coloração de vértices* possua classes de cor vazias. A cardinalidade de um conjunto  $X$  é denotada por  $|X|$ . Chamamos  $\mathcal{C}_i$  de *classe de cor par*, quando  $|\mathcal{C}_i|$  é par e de *classe de cor ímpar*, caso contrário. Dizemos que um grafo  $G$  é *k-colorível em vértices* quando esse possui uma *k-coloração de vértices*. O menor número de cores para o qual existe uma *k-coloração de vértices* é chamado *número cromático de G* e denotado por  $\chi(G)$ .

O problema de determinar o número cromático de um grafo  $G$  é um problema bem conhecido e com diversas aplicações. Sabe-se que decidir se um grafo  $G$  é 2-colorível em vértices é um problema para o qual existe algoritmo eficiente, pois determinar se um grafo  $G$  é 2-colorível é equivalente a determinar se  $G$  é bipartido. Em contraste, decidir se um grafo  $G$  é 3-colorível em vértices é um problema NP-completo. Outro resultado bastante conhecido é que o algoritmo guloso devolve uma coloração que usa no máximo  $\Delta(G) + 1$  cores. Logo, é possível concluir que todo grafo  $G$  possui uma coloração de vértices com  $\Delta(G) + 1$  cores. Um resultado que também é bastante conhecido é o chamado Teorema de Brooks (Teorema 1), que afirma que um grafo  $G$  não sendo um ciclo ímpar ou um grafo completo é  $\Delta(G)$ -colorível em vértices.

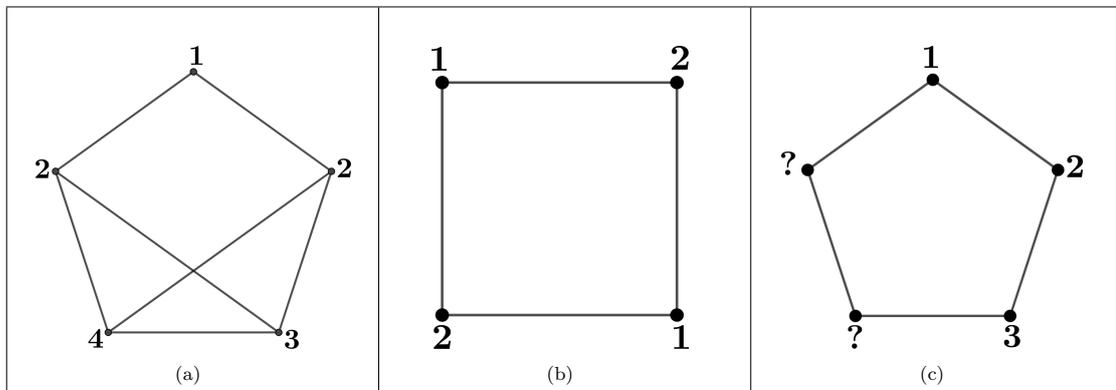
**Teorema 1** (Brooks [3], 1941). *Se  $G$  não é um ciclo ímpar nem um grafo completo, então  $G$  possui uma  $\Delta(G)$ -coloração de vértices.*

Uma conjectura proposta por Paul Erdős em 1964 afirma que todo grafo  $G$  admite uma coloração de vértices com  $\Delta(G) + 1$  cores em que a cardinalidade de cada classe de cor difere no máximo em uma unidade. Essa conjectura foi provada em 1970 por Hajnal e

Szemerédi [4]. Essa coloração de vértices é chamada de *coloração de vértices equilibrada*. Apesar da prova realizada por Hajnal e Szemerédi resolver a conjectura, a demonstração feita por eles não devolve um algoritmo eficiente. Posteriormente, Kierstead et al. [5], em 2010, construíram um algoritmo eficiente para o problema de determinar uma coloração de vértices equilibrada com  $\Delta(G) + 1$  cores.

Uma outra coloração de vértices que usa  $\Delta(G) + 1$  cores é a chamada coloração *conformável*. Esta coloração foi introduzida em 1988 por Chetwynd e Hilton [6]. Sua motivação deve-se à sua conexão com o problema de coloração total, que será definido posteriormente. A *deficiência* de  $G$  é a soma das diferenças entre o grau máximo  $\Delta(G)$  de  $G$  (ou simplesmente  $\Delta$ ) e o grau de cada vértice  $v$  em  $G$ , isto é,  $def(G) = \sum_{v \in V} (\Delta - d(v))$ . Um grafo  $G$  é *conformável* se possui uma  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  em que o número de classes de cor com paridade diferente da paridade de  $|V|$  é no máximo  $def(G)$ . Nesse caso, chamamos  $\varphi$  de *coloração conformável*. Um grafo  $G$  é chamado de *não-conformável* se não possui uma coloração conformável. Note que, para grafos regulares, tem-se que  $def(G) = 0$  e, por consequência, para  $\varphi$  ser conformável, toda classe de cor deve ter a mesma paridade da ordem do grafo regular  $G$ . Para exemplificar, considere os três grafos na Figura 1.

Figura 1 - Exemplo de um grafo subcúbico conformável, do grafo ciclo  $C_4$  que é conformável e do grafo ciclo  $C_5$  que é não-conformável.



Legenda: A interrogação atribuída aos vértices significa que não há cor que possamos atribuir a eles de tal forma que seja possível definir uma coloração conformável.

Fonte: O autor, 2023.

O grafo subcúbico  $G$  na Figura 1a possui  $\Delta(G) = 3$  e  $def(G) = 1$ . Logo, para existir uma coloração conformável para  $G$ , devemos exibir uma 4-coloração de vértices em que o número de classes de cor com paridade diferente da paridade de  $|V(G)| = 5$  é no máximo  $def(G) = 1$ . Nesse caso, tomemos a 4-coloração de vértices exibida nessa figura. Note que  $|\mathcal{C}_2| = 2$  possui paridade diferente da paridade de  $|V(G)|$ , enquanto as restantes  $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_3| = |\mathcal{C}_4| = 1$  possuem paridade ímpar. Por esses fatos, a coloração dada é conformável e  $G$  é conformável.

O grafo ciclo  $C_4$  na Figura 1b possui  $\Delta(C_4) = 2$  e  $def(C_4) = 0$ . Logo, para existir uma coloração conformável para  $C_4$ , devemos exibir uma 3-coloração de vértices em que cada classe de cor possui a mesma paridade que a paridade de  $|V(C_4)| = 4$ . Nesse caso, tomemos a 3-coloração de vértices exibida nessa figura. Tem-se que essa coloração possui cada classe de cor par  $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_2| = 2$  e  $|\mathcal{C}_3| = 0$ . Como  $|V(C_4)|$  é par, temos que a coloração dada é conformável e que  $C_4$  é conformável.

O grafo ciclo  $C_5$  na Figura 1c possui  $\Delta(C_5) = 2$  e  $def(C_5) = 0$ . Logo, para existir uma coloração conformável para  $C_5$ , devemos exibir uma 3-coloração de vértices em que cada classe de cor possui a mesma paridade que a paridade de  $|V(C_5)| = 5$ . Note que o conjunto independente máximo de  $C_5$  possui cardinalidade 2. Logo, por contradição, se  $C_5$  possuísse uma coloração conformável, teríamos que  $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_2| = |\mathcal{C}_3| = 1$ . Porém,  $|V(C_5)| = 5$ . Assim,  $C_5$  é não-conformável.

Uma *coloração de arestas* de um grafo  $G$  é uma função  $\varphi$  entre o conjunto de arestas  $E$  e o conjunto  $C$  de cores, tal que se  $e$  e  $f$  são arestas adjacentes, temos que  $\varphi(e) \neq \varphi(f)$ . Se  $\varphi : E \rightarrow C$  é uma coloração de arestas e  $|C| = k$ , então dizemos que  $G$  é *k-colorável em arestas* e  $\varphi$  é uma *k-coloração de arestas*. A menor cardinalidade de  $C$  para o qual existe uma coloração de arestas em  $G$  é o *índice cromático* de  $G$ , e escrevemos  $\chi'(G)$ .

**Teorema 2.** (*Teorema de Vizing*) *Seja um grafo simples  $G$  de grau máximo  $\Delta(G)$ . Temos que,*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Por consequência deste teorema podemos classificar os grafos em duas classes:

- $G$  é *Classe 1* se  $\chi'(G) = \Delta(G)$ ;
- $G$  é *Classe 2* se  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ .

Uma *coloração total* de um grafo  $G$  é uma atribuição de cores aos vértices e às arestas do grafo de tal forma que: vértices ou arestas adjacentes têm cores diferentes; e cada vértice tem cor diferente das suas arestas incidentes. Dizemos que uma cor  $i$  está *representada em um vértice  $v$*  de  $G$  quando em uma coloração total de  $G$  ou  $i$  está atribuída ao  $v$ ; ou  $i$  está atribuída à alguma aresta incidente em  $v$ .

Uma coloração total de  $G$  que usa  $k$  cores é chamada de *k-coloração total* de  $G$  e chamamos  $G$  de *k-total colorível*. O menor número de cores para o qual existe uma *k-coloração total* é o chamado *número cromático total de  $G$*  e denotado por  $\chi''(G)$ . Note que  $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ . Com efeito, seja  $v \in V(G)$  com  $d(v) = \Delta(G)$ . Para definirmos uma coloração total em  $G$  é necessário que arestas adjacentes tenham cores diferentes, portanto, para cada aresta incidente em  $v$  devemos atribuir uma cor diferente, isto é, são

usadas nas arestas  $\Delta(G)$  cores. Como a atribuição de cor ao vértice  $v$  tem de ser diferente à das arestas incidentes, temos que no mínimo essa atribuição possuirá  $\Delta(G) + 1$  cores.

Em 1965, Behzad [7] e Vizing [8] conjecturaram de forma independente um limite superior para o número cromático total; essa conjectura é denominada Conjectura da Coloração Total (*Total Coloring Conjecture*).

**Conjectura 1.** (*Conjectura da Coloração Total*) Para todo grafo  $G$  simples,

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

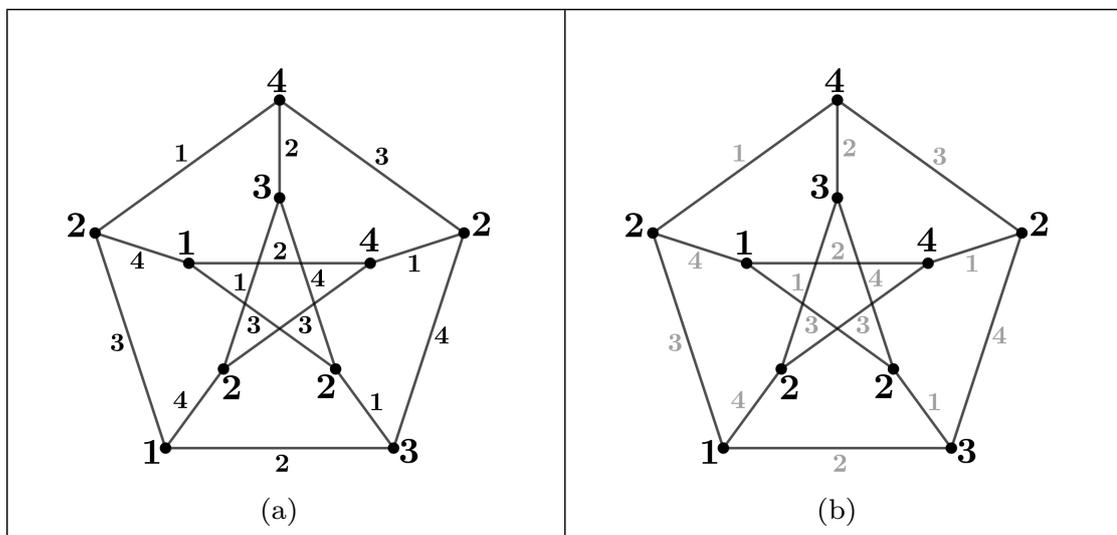
Para os grafos onde a *TCC* é válida, temos a seguinte classificação:

- $G$  é *Tipo 1* se  $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ ;
- $G$  é *Tipo 2* se  $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ .

Note que provar que um grafo  $G$  é *Tipo 1* é mostrar que  $G$  é  $(\Delta(G) + 1)$ -total-colorível; e provar que é *Tipo 2* é mostrar que o grafo  $G$  não é  $(\Delta(G) + 1)$ -total-colorível e que é  $(\Delta(G) + 2)$ -total-colorível.

Um fato importante que motivou a definição de conformabilidade é que a coloração conformável é uma condição necessária para um grafo  $G$  ser *Tipo 1*. Isto é, se existe uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total para um grafo  $G$ , a coloração restrita aos vértices é conformável. A Figura 2 exemplifica isso, considerando uma 4-coloração total do conhecido grafo de Petersen. Quando restringimos essa coloração aos vértices, temos uma coloração conformável.

Figura 2 - Exemplo de uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total do grafo de Petersen na Figura 2a. A coloração restrita aos vértices é conformável na Figura 2b.



Fonte: O autor, 2023.

**Teorema 3** (Chetwynd e Hilton [6], 1988). *Se  $G$  é um grafo Tipo 1, então  $G$  é conformável.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo Tipo 1 com uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total  $\varphi$  de  $G$ . Para algum  $i \in \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$  de  $\varphi$ , considere a classe de cor  $T_i = \mathcal{C}_i \cup M_i$  consistindo do conjunto de arestas  $M_i$  e vértices  $\mathcal{C}_i$  atribuídos com a cor  $i$ . Observe que  $M_i$  é um emparelhamento de  $G$ .

Considere  $G_i$  o subgrafo induzido dos vértices não saturados por  $M_i$ . Como cada aresta em  $M_i$  compreende dois vértices saturados, temos que  $|V(G_i)|$  possui mesma paridade que a paridade de  $|V(G)|$ . Além disso, como  $\mathcal{C}_i$  é o conjunto de vértices com a cor  $i$ , temos que  $|V(G_i)| \geq |\mathcal{C}_i|$ . Se  $|\mathcal{C}_i|$  possui paridade diferente da paridade de  $|V(G)|$ , então existe ao menos um vértice  $v$  que não possui a cor  $i$  representada. Isso implica que  $d(v) < \Delta(G)$ , porque todo vértice de grau máximo possui toda cor representada em uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices.

Portanto,  $d(v) < \Delta(G)$  implica que  $\Delta(G) - d(v) > 0$ . Concluimos que  $v$  contribui em no mínimo uma unidade para a deficiência. Logo, o número de classes de cor  $\mathcal{C}_i$  com paridade diferente da paridade de  $|V(G)|$  está limitado pela deficiência de  $G$ . Resultando que  $G$  é conformável.  $\square$

Por consequência do Teorema 3 é possível concluir, por contrapositiva, que todo grafo não-conformável não é Tipo 1.

**Corolário 1** (Chetwynd e Hilton [6], 1988). *Se  $G$  é não-conformável, então  $G$  não é Tipo 1.*

A conformabilidade não é uma condição suficiente. Por exemplo, sabe-se que o grafo ciclo  $C_n$  é Tipo 2 quando  $n$  não é múltiplo de 3. Entretanto,  $C_n$  é conformável, exceto para  $n = 5$ . Sendo assim, Chetwynd e Hilton [6] investigaram casos em que  $G$  ser conformável é uma condição necessária e suficiente para  $G$  ser Tipo 1.

Com esta motivação, conjecturaram isso para grafos com grau máximo maior que a metade do número de vértices. Eles apresentaram 3 classes de grafos que evidenciaram a conjectura. Estes grafos são: aqueles com  $|V(G)| = \Delta(G) - 1$ , os regulares de ordem ímpar com  $\Delta(G) \geq \frac{19}{21}|V(G)| - \frac{3}{7}$  e os regulares de ordem par com  $\Delta(G) \geq |V(G)| - 2$ .

Entretanto, Chen e Fu [9], em 1992, mostraram uma classe de grafos que é contra-exemplo para essa conjectura quando  $|V(G)|$  é par e  $\Delta(G) = |V(G)| - 2$ . Isto é, provaram que o grafo completo de ordem ímpar com uma única aresta subdividida, conhecido como *grafo Chen e Fu* e denotado por  $K_{2n+1}^*$ , é Tipo 2 e conformável.

**Conjectura refutada** (Chetwynd e Hilton [6], 1988). *Seja  $G$  um grafo simples com  $|V(G)| \leq 2\Delta(G)$ . Então  $G$  é Tipo 2 se, e somente se,  $G$  contém um subgrafo não-conformável  $H$  com  $\Delta(H) = \Delta(G)$ .*

**Contraexemplo** (Chen e Fu [9], 1992). *O grafo  $K_{2n+1}^*$  é Tipo 2 e conformável.*

Hamilton et al. [10], em 1999, modificaram a conjectura, excluindo o grafo Chen e Fu das hipóteses. Além disso, mostraram que todo grafo  $G$  de ordem par com  $\frac{4(\Delta(G)+1)}{3} \leq |V(G)| \leq 2\Delta(G)$  são não-conformáveis quando são regulares e possuem um subgrafo bipartido gerador ou tripartido com partes de ordem ímpar.

**Conjectura 2** (Conjectura da Conformabilidade). *Seja  $G$  um grafo simples com  $|V(G)| \leq 2\Delta(G)$ . Então,  $G$  é Tipo 2 se, e somente se,  $G$  contém um subgrafo não-conformável  $H$  com  $\Delta(H) = \Delta(G)$ , ou  $\Delta(G)$  é par e  $G$  contém um subgrafo  $H$  com  $H = K_{\Delta(G)+1}^*$ .*

Hilton e Hind [11], em 2002, estudaram a conjectura da conformabilidade e concluíram que, necessariamente, o subgrafo  $H$  possui o mesmo número de vértices do grafo  $G$ , isto é,  $|V(H)| = |V(G)|$ . Além disso, provaram que os grafos não-conformáveis possuem deficiência pequena, conforme estabelecido pelo Teorema 4. Pela contrapositiva dessa propriedade, temos que grafos com deficiência grande possuem um algoritmo em tempo polinomial para classificação da conformabilidade.

**Teorema 4** (Hilton e Hind [11], 2002). *Se  $G$  é um grafo conexo não-conformável com  $\Delta(G) \geq 2$ , então*

$$def(G) \leq \begin{cases} \Delta(G) - 3 & \text{se } |V(G)| \text{ é par e } \Delta(G) \text{ é ímpar,} \\ \Delta(G) - 2 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O problema de conformabilidade pode ser visto como um problema de decisão, chamado CONFORMABILIDADE e que é apresentado da seguinte forma:

CONFORMABILIDADE

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$ .

**Questão:** Existe uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices de  $G$  tal que o número de classes de cor com paridade diferente da paridade de  $|V(G)|$  é no máximo  $def(G)$  (i.e.,  $G$  é conformável)?

Recentemente, diversos estudos foram realizados sobre conformabilidade. Em 2006, Campos e de Mello [12] provaram que para inteiros positivos  $n$  e  $k$  com  $n > 2k + 1$ , se  $n$  é ímpar e  $n < 3(k + 1)$ , então a potência de ciclo  $C_n^k$  é não-conformável. Em 2022, Zorzi et al. [13] provaram que se  $C_n^k$  é não-conformável, então  $n$  é ímpar e  $n < 3(k + 1)$ , determinando assim a conformabilidade para os grafos potência de ciclo.

Portanto, CONFORMABILIDADE possui sua classificação para diversas classes de grafos, porém é desconhecido um algoritmo em tempo polinomial que o resolva em um grafo  $G$  qualquer. Ademais existem, como visto anteriormente, diversos resultados que nos levam a acreditar que CONFORMABILIDADE é pertencente à classe  $P$ . Neste sentido, essa

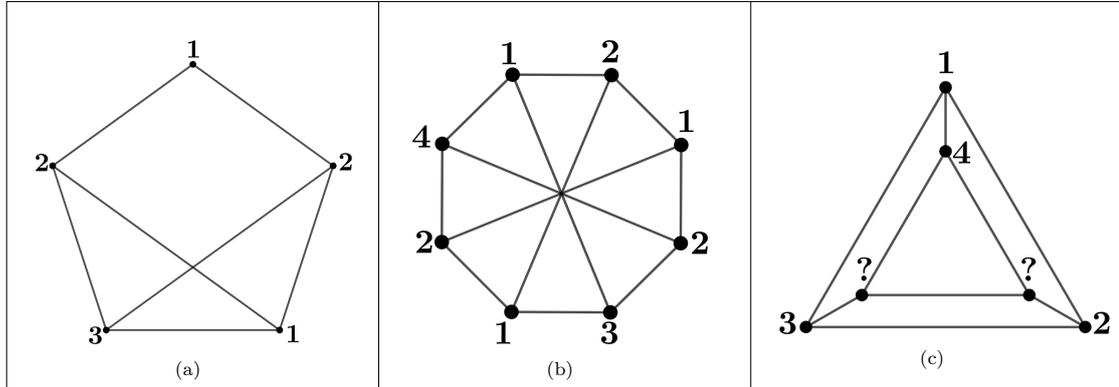
tese visa investigar a complexidade desse problema tanto para o caso de grafos conexos e não-conexos como um problema aplicado ao problema de coloração total.

No Brasil, diversas dissertações de mestrado e teses de doutorado foram produzidas no sentido de se investigar o problema da coloração total:

- Em 2006, Christiane Neme Campos desenvolveu a tese intitulada “O problema da coloração total em classes de grafos” sob orientação da Prof.<sup>a</sup> Dra. Célia Picinin de Mello [14].
- Em 2010, Raphael Carlos Santos Machado desenvolveu a tese intitulada “Decomposições para coloração de arestas e coloração total de grafos” sob orientação da Prof.<sup>a</sup> Dra. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo [15].
- Em 2013, Diana Sasaki desenvolveu a tese intitulada “Sobre coloração total de grafos cúbicos” sob orientação das Profas. Dras. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, Simone Dantas de Souza e Myriam Preissmann [16].
- Em 2017, Luana Cordeiro de Almeida desenvolveu a dissertação intitulada “Coloração total e coloração total equilibrada de família de Snarks” sob orientação das Prof.<sup>a</sup> Dras. Simone Dantas de Souza e Diana Sasaki [17].
- Em 2018, Anderson Gomes da Silva desenvolveu a dissertação intitulada “Um estudo sobre coloração de arestas e coloração total de grafos” sob orientação da Prof. Dr. Simon Richard Griffiths e a Prof.<sup>a</sup> Dra. Diana Sasaki [18].
- Em 2019, Alesom Zorzi desenvolveu a dissertação intitulada “Coloração total em grafos potência de ciclo” sob orientação da Prof.<sup>a</sup> Dra. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo e do Prof. Dr. Raphael Carlos Santos Machado [19].
- Em 2021, Caroline da Silva Reis Patrão desenvolveu a tese intitulada “Sobre Coloração Total de Grafos Kneser e de Grafos Produto Direto de Completos e de Ciclos” sob orientação das Prof.<sup>a</sup> Dras. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo e Diana Sasaki e o Prof. Dr. Luis Antonio Brasil Kowada [20].

Uma das contribuições teóricas dessa tese é a introdução do conceito da coloração anticonformável. Essa coloração auxilia na classificação do problema de conformabilidade em grafos não-conexos. Um grafo  $G$  é *anticonformável* se possui uma  $(\Delta(G)+1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  em que o número de classes de cor com paridade igual a paridade de  $|V(G)|$  é no máximo  $def(G)$ . Nesse caso, chamamos  $\varphi$  de *coloração anticonformável*. Um grafo  $G$  é chamado de *não-anticonformável* se não possuir uma coloração anticonformável. Note que, para grafos regulares, tem-se que  $def(G) = 0$  e, por consequência, para  $\varphi$  ser anticonformável, toda classe de cor deve ter paridade diferente da paridade da ordem do grafo regular  $G$ . Para exemplificar, considere os três grafos na Figura 3.

Figura 3 - Exemplo de um grafo subcúbico anticonformável, do grafo Möbius ladder  $M_8$  que é anticonformável e do grafo prisma triangular  $L_3$  que é não-anticonformável.



Legenda: A interrogação atribuída aos vértices significa que não há cor que possamos atribuir a eles de tal forma que seja possível definir uma coloração anticonformável.

Fonte: O autor, 2023.

O grafo subcúbico  $G$  na Figura 3a possui  $\Delta(G) = 3$  e  $def(G) = 1$ . Logo, para existir uma coloração anticonformável para  $G$ , devemos exibir uma 4-coloração de vértices em que o número de classes de cor com a mesma paridade que a paridade de  $|V(G)| = 5$  é no máximo  $def(G) = 1$ . Nesse caso, tomemos a 4-coloração de vértices exibida nessa figura. Note que  $|\mathcal{C}_3| = 1$  possui a mesma paridade que a paridade de  $|V(G)|$ , enquanto as restantes  $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_2| = 2$  e  $|\mathcal{C}_4| = 0$  possuem paridade par. Por esses fatos, a coloração dada é anticonformável e  $G$  é anticonformável.

O grafo Möbius ladder  $M_8$  na Figura 3b possui  $\Delta(M_8) = 3$  e  $def(M_8) = 0$ . Logo, para existir uma coloração anticonformável para  $M_8$ , devemos exibir uma 4-coloração de vértices em que cada classe de cor possui paridade diferente da paridade de  $|V(M_8)| = 8$ . Nesse caso, tomemos a 4-coloração de vértices exibida nessa figura. Tem-se que essa coloração possui cada classe de cor ímpar, pois  $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_2| = 3$ ,  $|\mathcal{C}_3| = |\mathcal{C}_4| = 1$ . Como  $|V(M_8)|$  é par, temos que a coloração dada é anticonformável e que  $M_8$  é anticonformável.

O grafo prisma triangular  $L_3$  na Figura 3c possui  $\Delta(L_3) = 3$  e  $def(L_3) = 0$ . Logo, para existir uma coloração anticonformável para  $L_3$ , devemos exibir uma 4-coloração de vértices em que cada classe de cor possui paridade diferente da paridade de  $|V(L_3)| = 6$ . Note que o conjunto independente máximo de  $L_3$  possui cardinalidade 2. Logo, por contradição, se  $L_3$  possuísse uma coloração anticonformável, teríamos as classes de cor  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4$  unitárias. Porém  $|V(L_3)| = 6 \neq 4 = |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| + |\mathcal{C}_3| + |\mathcal{C}_4|$ , resultando em uma contradição.

## Organização da tese

Nesta tese, nós classificamos a conformabilidade para diversas classes de grafos. Determinamos quais colorações equilibradas são conformáveis. Provamos que se  $G$  é regular e *Classe 1*, então  $L(G)$  é conformável, e com auxílio dessa propriedade, determinamos a conformabilidade dos grafos linha dos completos. Além disso, classificamos a conformabilidade de todos os grafos subcúbicos, considerando também o caso não-conexo, fazendo uso da coloração anticonformável que auxilia na construção de colorações conformáveis para grafos não-conexos. Também definimos a coloração conformável forte e provamos que o problema de determiná-la é NP-difícil. Por fim, investigamos o problema de conformabilidade para união de grafos.

Os resultados do Capítulo 1 foram publicados na revista "Discrete Applied Mathematics" [21], em colaboração com os orientadores Luerbio Faria e Diana Sasaki, e também com a pesquisadora da Université Grenoble Alpes, Myriam Preissmann. O Capítulo 2 engloba resultados que foram aceitos para publicação na revista "RAIRO-Operations Research" [22], sendo que alguns dos resultados foram apresentados no "4º Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais (WPCCG 2021)" [23]. Alguns resultados do Capítulo 3 foram apresentados no "LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO 2022)" [24], e alguns também foram apresentados no "VII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2022)" [25]. Um manuscrito englobando todos os resultados dos Capítulos 3 e 4 está em preparo para submissão à revista "Theoretical Computer Science". Além disso, alguns resultados do Capítulo 5 foram apresentados no "VIII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2023)" [26], e um manuscrito está em preparo para submissão à revista "Discrete Mathematics".

## 1 TODAS AS COLORAÇÕES DE VÉRTICES EQUILIBRADAS QUE SÃO CONFORMÁVEIS

Neste capítulo, usamos  $(\Delta + 1)$ -colorações de vértices equilibradas para obter colorações conformáveis e apresentamos famílias infinitas de grafos que são conformáveis.

**Lema 1** (Hilton e Hind [11], 2002). *Seja  $def(G)$  a deficiência de  $G$ . Então  $def(G)$  é ímpar se, e somente se,  $|V|$  e  $\Delta$  são ambos ímpares.*

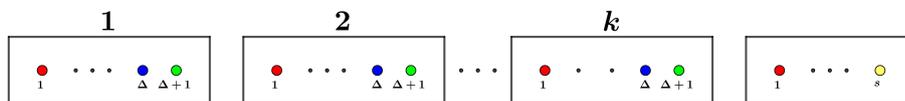
**Lema 2** (Hajnal e Szemerédi [4], 1970). *Todo grafo com grau máximo  $\Delta$  possui uma  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada.*

Considerando o número de vértices em cada classe de cor para toda  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada de um grafo  $G$  com  $def(G) > 0$ , motivados pelo Teorema 4 e usando o Lema 2, Lema 3 e o Teorema 5, obtemos infinitas famílias de grafos conformáveis apresentadas no Teorema 6. Considere para o Lema 3 e Teorema 5 os inteiros  $s, k, r \geq 0$  e o grafo  $G$  com conjunto de vértices  $|V|$  definidos como segue: .

**Lema 3.** *Toda  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  de  $G$  possui  $r$  classes de cor com cardinalidade  $k$  e  $s$  classes de cor com cardinalidade  $k + 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $\phi$  uma  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada de  $G$ , obtida pelo Lema 2. Se  $|V| \equiv s \pmod{\Delta + 1}$ , então temos que  $|V| = (\Delta + 1)k + s$ , com  $0 \leq s < \Delta + 1$ . Note que  $|V| = (\Delta + 1 - s)k + s(k + 1) = rk + s(k + 1)$  o que mostra que existem  $r$  classes de cor com cardinalidade  $k$  e  $s$  classes de cor com cardinalidade  $k + 1$ . Perceba que  $r + s = \Delta + 1$ .  $\square$

Figura 4 -  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada para o grafo  $G$  com  $|V| = k(\Delta + 1) + s$ ,  $0 \leq s < \Delta + 1$  e a cardinalidade de suas classes de cor.



Fonte: O autor, 2023.

Para conveniência do leitor apresentamos a Figura 4 e a Tabela 1 que ilustram a coloração equilibrada com a cardinalidade destas classes de cor.

**Teorema 5.** *Seja  $\varphi$  uma  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada. Então  $\varphi$  é conformável se, e somente se,  $k$  possui a mesma paridade que  $|V|$  e  $def(G) \geq s$ , ou,  $k + 1$  possui a mesma paridade que  $|V|$  e  $def(G) \geq r$ .*

Tabela 1 - Particionamento em  $s$  classes de cor com cardinalidade  $k + 1$  e  $r = \Delta + 1 - s$  classes de cor com cardinalidade  $k$ .

Classes de cor	1	2	...	$k$	$k + 1$	
$\mathcal{C}_1$	●	●	...	●	●	} $s$ classes de cor
$\mathcal{C}_2$	●	●	...	●	●	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\mathcal{C}_s$	●	●	...	●	●	
$\mathcal{C}_{s+1}$	●	●	...	●		} $r$ classes de cor
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		
$\mathcal{C}_\Delta$	●	●	...	●		
$\mathcal{C}_{\Delta+1}$	●	●	...	●		

Fonte: O autor, 2023.

*Demonstração.* Seja  $\varphi$  uma  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada. Pelo Lema 3, temos que  $\varphi$  possui  $r$  classes de cor com cardinalidade  $k$  e  $s$  classes de cor com cardinalidade  $k + 1$ .

1. Suponha que  $\varphi$  é conformável. Considere os dois casos, fazendo uso da Tabela 1 para auxiliar na prova.
  - (a) Se  $k$  possui mesma paridade que  $|V|$ , então  $G$  possui  $r$  classes de cor com mesma paridade que  $|V|$  e  $s$  classes de cor com paridade diferente que  $|V|$ . Como  $\varphi$  é conformável, temos que  $def(G) \geq s$ .
  - (b) Se  $k + 1$  possui mesma paridade que  $|V|$ , então  $G$  possui  $s$  classes de cor com mesma paridade que  $|V|$  e  $r$  classes de cor com paridade diferente que  $|V|$ . Como  $\varphi$  é conformável, temos que  $def(G) \geq r$ .
2. Suponha que:
  - (a)  $def(G) \geq s$  e  $k$  possui a mesma paridade que  $|V|$ . Portanto,  $G$  possui  $r$  classes de cor com mesma paridade que  $|V|$  e  $s$  classes de cor com paridade diferente que  $|V|$ . Como  $def(G) \geq s$ , concluímos que  $\varphi$  é conformável.
  - (b)  $def(G) \geq r$  e  $k + 1$  possui a mesma paridade que  $|V|$ . Portanto,  $G$  possui  $s$  classes de cor com mesma paridade que  $|V|$  e  $r$  classes de cor com paridade diferente que  $|V|$ . Como  $def(G) \geq r$ , concluímos que  $\varphi$  é conformável.

□

**Teorema 6.** *Toda  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  de  $G$  com  $def(G) > 0$  é conformável, se:*

1.  $|V| = 2q + 1$  e  $\Delta$  são ímpares, onde  $q \equiv (\Delta \pm 1)/2 \pmod{\Delta + 1}$  ou;
2.  $|V| = 2q$  e  $\Delta$  são pares, onde  $q \equiv \pm i \pmod{\Delta + 1}$  e  $i \in \{0, 1\}$  ou;
3.  $|V| = 2q$  é par e  $\Delta$  é ímpar, onde  $q \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$  ou;
4.  $|V| = 2q + 1$  é ímpar e  $\Delta$  é par, onde  $q \equiv \frac{\Delta}{2} \pm i \pmod{\Delta + 1}$  e  $i \in \{0, 1\}$ .

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com grau máximo  $\Delta$  e  $k = \lfloor \frac{|V|}{\Delta+1} \rfloor$ . Suponha que  $def(G) > 0$ . Pelo Lema 2, existe uma  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  de  $G$ . Pelo Lema 1 e pelo fato que  $def(G) > 0$ , se  $|V|$  e  $\Delta$  são ambos ímpares, então  $def(G) \geq 1$ ; de outra forma, se  $|V|$  e  $\Delta$  não são ambos ímpares, então  $def(G) \geq 2$ . Considere cada um dos quatros casos:

1. Suponha que  $|V| = 2q + 1$  e  $\Delta$  são ímpares, onde  $q \equiv \frac{(\Delta \pm 1)}{2} \pmod{\Delta + 1}$ .
  - (a) Se  $q \equiv \frac{\Delta+1}{2} \pmod{\Delta+1}$ , então  $|V| \equiv 1 \pmod{\Delta+1}$ . Pelo Lema 3, a coloração equilibrada  $\varphi$  possui  $s = 1$  classes de cor com cardinalidade  $k + 1$  e  $r = \Delta$  classes de cor com cardinalidade  $k$ . Como  $|V| = 2q + 1$  e  $|V| = kr + s(k + 1) = k(\Delta + 1 - s) + s(k + 1) = k(\Delta + 1 - 1) + 1(k + 1) = k(\Delta + 1) + 1$ , temos que  $k(\Delta + 1) = 2q$ . Como  $q \equiv \frac{\Delta+1}{2} \pmod{\Delta + 1}$ , temos que  $q - \frac{\Delta+1}{2} = (\Delta + 1)d$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $q = (\Delta + 1)\left(\frac{2d+1}{2}\right)$ . Assim,  $k(\Delta + 1) = (2d + 1)(\Delta + 1) = 2q$  e então  $k = 2d + 1$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ . Pelo Teorema 5,  $\varphi$  é conformável.
  - (b) Se  $q \equiv \frac{\Delta-1}{2} \pmod{\Delta + 1}$ , então  $|V| \equiv \Delta \pmod{\Delta + 1}$ . Pelo Lema 3, temos que  $\varphi$  possui  $s = \Delta$  classes de cor com cardinalidade  $k + 1$  e  $r = 1$  classes de cor com cardinalidade  $k$ . Como  $|V| = 2q + 1$  e  $|V| = kr + s(k + 1) = k(\Delta + 1 - s) + s(k + 1) = k + \Delta(k + 1) = k(\Delta + 1) + \Delta$ , temos que  $2q + 1 = k(\Delta + 1) + \Delta$ . Como  $q \equiv \frac{\Delta-1}{2} \pmod{\Delta + 1}$ , então  $q - \frac{\Delta-1}{2} = (\Delta + 1)d$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $q = (\Delta + 1)d + \frac{\Delta-1}{2}$ . Portanto,  $2q = (\Delta + 1)2d + (\Delta - 1)$  e então  $2q + 1 = (\Delta + 1)2d + \Delta = k(\Delta + 1) + \Delta$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ , concluindo que  $k + 1 = 2d + 1$ . Pelo Teorema 5,  $\varphi$  é conformável.
2. Suponha que  $|V| = 2q$  e  $\Delta$  são pares, onde  $q \equiv \pm i \pmod{\Delta + 1}$  e  $i \in \{0, 1\}$ . Se  $q \equiv \pm i \pmod{\Delta + 1}$ , então  $|V| \equiv \pm 2i \pmod{\Delta + 1}$ . Considere os dois casos:
  - (a) Se  $i = 0$ , então  $|V| \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$ . Pelo Lema 3, a coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  possui  $r = \Delta + 1$  classes de cor com cardinalidade  $k$ . Como  $|V| = k(\Delta + 1)$  é par e  $\Delta + 1$  é ímpar, concluímos que  $k$  é par. Pelo Teorema 5, concluímos que  $\varphi$  é conformável.
  - (b) Se  $i = 1$ , então  $|V| \equiv 2 \pmod{\Delta + 1}$  ou  $|V| \equiv -2 \pmod{\Delta + 1}$ , isto é,  $|V| \equiv \Delta - 1 \pmod{\Delta + 1}$ .

- Suponha que  $|V| \equiv 2 \pmod{\Delta + 1}$ . Pelo Lema 3, a coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  possui  $s = 2$  classes de cor com cardinalidade  $k+1$  e  $r = \Delta - 1$  classes de cor com cardinalidade  $k$ . Como  $|V|$  é par,  $|V| = kr + s(k+1) = k(\Delta + 1 - s) + s(k+1) = k(\Delta - 1) + 2(k+1) = k(\Delta + 1) + 2$  é par e  $\Delta + 1$  é ímpar, concluímos que  $k$  é par. Como  $def(G) \geq 2$ , concluímos pelo Teorema 5 que  $\varphi$  é conformável.
  - Suponha que  $|V| \equiv \Delta - 1 \pmod{\Delta + 1}$ . Pelo Lema 3, a coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  possui  $s = \Delta - 1$  classes de cor com cardinalidade  $k + 1$  e  $r = 2$  classes de cor com cardinalidade  $k$ . Como  $|V|$  é par e  $|V| = kr + s(k+1) = k(\Delta + 1 - s) + s(k+1) = 2k + (\Delta - 1)(k+1) = k(\Delta + 1) + \Delta - 1$ , tem-se que  $(\Delta - 1)$  e  $(\Delta + 1)$  são ímpares, concluímos que  $k$  é ímpar. Pelo Teorema 5, concluímos que  $\varphi$  é conformável.
3. Suponha que  $|V| = 2q$  é par e  $\Delta$  é ímpar, onde  $q \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$ . Se  $q \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$ , então  $|V| \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$ . Pelo Lema 3, a coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  possui exatamente  $r = \Delta + 1$  classes de cor com cardinalidade  $k$ . Como  $|V| = 2q$  e  $|V| = k(\Delta + 1)$ , temos que  $2q = k(\Delta + 1)$ . Como  $q \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$ , concluímos que  $q = (\Delta + 1)d$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ . Portanto  $2q = (\Delta + 1)2d$ , concluindo que  $k = 2d$ . Pelo Teorema 5, temos que  $\varphi$  é conformável.
4. Suponha que  $|V| = 2q + 1$  é ímpar e  $\Delta$  é par, onde  $q \equiv \frac{\Delta}{2} \pm i \pmod{\Delta + 1}$  e  $i \in \{0, 1\}$ . Se  $q \equiv \frac{\Delta}{2} \pm i \pmod{\Delta + 1}$ , então  $|V| \equiv \Delta \pm 2i + 1 \pmod{\Delta + 1}$ . Considere os dois casos.
- (a) Se  $i = 0$ , então  $|V| \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$ . Pelo Lema 3, a coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  possui exatamente  $r = \Delta + 1$  classes de cor com cardinalidade  $k$ . Como  $|V| = k(\Delta + 1)$  é ímpar e  $\Delta + 1$  é ímpar, então  $k$  é ímpar. Pelo Teorema 5, temos que  $\varphi$  é conformável.
- (b) Se  $i = 1$ , então  $|V| \equiv 2 \pmod{\Delta + 1}$  ou  $|V| \equiv \Delta - 1 \pmod{\Delta + 1}$ .
- Suponha que  $|V| \equiv 2 \pmod{\Delta + 1}$ . Pelo Lema 3, a coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  possui  $s = 2$  classes de cor com cardinalidade  $k+1$  e  $r = \Delta - 1$  classes de cor com cardinalidade  $k$ . Como  $|V|$  é ímpar,  $|V| = kr + s(k+1) = k(\Delta + 1 - s) + s(k+1) = k(\Delta - 1) + 2(k+1) = k(\Delta + 1) + 2$  e  $\Delta + 1$  é ímpar, concluímos que  $k$  é ímpar. Pelo Teorema 5, concluímos que  $\varphi$  é conformável.
  - Suponha que  $|V| \equiv \Delta - 1 \pmod{\Delta + 1}$ . Pelo Lema 3, a coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  possui  $s = \Delta - 1$  classes de cor com cardinalidade  $k + 1$  e  $r = 2$  classes de cor com cardinalidade  $k$ . Como  $|V|$  é ímpar,  $|V| = kr + s(k+1) = k(\Delta + 1 - s) + s(k+1) = 2k + (\Delta - 1)(k+1) =$

$k(\Delta + 1) + \Delta - 1$  e  $\Delta + 1$  é ímpar, concluímos que  $k$  é par. Pelo Teorema 5, concluímos que  $\varphi$  é conformável.

□

Note que no segundo (com  $i = 0$ ), no terceiro e no quarto casos (com  $i = 0$ ) da prova, cada classe de cor possui mesma paridade que  $|V|$ , portanto é possível incluímos o caso onde  $\text{def}(G) = 0$ .

**Corolário 2.** *Toda  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  de  $G$  com  $\text{def}(G) \geq 0$  é conformável, se  $|V| = 2q$  é par, onde  $q \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$ .*

**Corolário 3.** *Toda  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada  $\varphi$  de  $G$  com  $\text{def}(G) \geq 0$  é conformável, se  $|V| = 2q + 1$  é ímpar e  $\Delta$  é par, onde  $q \equiv \frac{\Delta}{2} \pmod{\Delta + 1}$ .*

Do ponto de vista algorítmico, Hilton e Hind [11] classificaram uma ampla família de grafos para o qual CONFORMABILIDADE é resolvido em tempo polinomial. Note que Hajnal e Szemerédi [4] provaram que todo grafo possui uma  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices equilibrada e devido a Kierstead et al. [5] temos que estas colorações são produzidas em tempo polinomial. Assim, uma família infinita de grafos, sob as restrições do Teorema 6, é definida onde CONFORMABILIDADE é resolvida em tempo polinomial. O Teorema 7 apresenta uma família infinita de grafos circulantes conformáveis com  $\Delta = 2k$  par, obtida por meio de uma aplicação direta dos Corolários 2 e 3. Observamos que, se  $\Delta = 2k$ , existe uma sequência de alcances  $(d_1, d_2, \dots, d_k)$  com  $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_k < \frac{|V|}{2}$ . Em particular, um grafo circulante tem  $\Delta = 2k$  par se, e somente se,  $d_k < \frac{|V|}{2}$ .

**Teorema 7.** *O grafo circulante  $C_{(2k+1)n}(d_1, d_2, \dots, d_k)$  com  $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_k < \frac{(2k+1)n}{2}$  é conformável.*

*Demonstração.* Seja  $G := C_{(2k+1)n}(d_1, d_2, \dots, d_k)$ . Note que  $\Delta = 2k$  e  $|V| \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$ . Se  $n$  é ímpar, então  $|V|$  é ímpar. Sejam  $n = 2p + 1$  e  $|V| = 2q + 1$  tais que  $p$  e  $q$  são inteiros positivos. Logo,  $|V| = (\Delta + 1)(2p + 1)$  implicando que  $q = (\Delta + 1)p + \frac{\Delta}{2}$ , isto é,  $q \equiv \frac{\Delta}{2} \pmod{\Delta + 1}$ . Pelo Corolário 3,  $G$  é conformável com classes de cor com cardinalidade  $\frac{|V|}{\Delta + 1} = n$ . Analogamente, se  $n$  é par, então  $|V|$  é par. Sejam  $n = 2p$  e  $|V| = 2q$  tais que  $p$  e  $q$  são inteiros positivos. Portanto,  $|V| = 2p(\Delta + 1)$  implicando que  $q = p(\Delta + 1)$ , isto é,  $q \equiv 0 \pmod{\Delta + 1}$ . Pelo Corolário 2,  $G$  é conformável. □

## 2 SOBRE A CONFORMABILIDADE DE GRAFOS LINHA

Em 2018, Vignesh et al. [27] conjecturaram que todos os grafos linha dos grafos completos  $L(K_n)$  são *Tipo 1*. Em 2021, Mohan et al. [28] mostraram a TCC para grafos quase-linha que é uma superclasse dos grafos linha, e apresentaram algumas subfamílias infinitas de grafos quase-linha *Tipo 1*. Em 2022, Jayaraman et al. [29] determinaram o número cromático total para algumas subclasses de grafos linha.

Neste capítulo, estabelecemos uma relação entre o índice cromático de um grafo regular  $G$  e a conformabilidade de  $L(G)$ , provando que: se  $G$  é  $k$ -regular e *Classe 1*, então  $L(G)$  é conformável. Aplicamos essa relação para provar que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L(K_n)$  é conformável, colaborando para a investigação da conjectura de Vignesh et al. [27].

### 2.1 Os grafos linha de grafos regulares *Classe 1* são conformáveis

Nesta seção, provamos o Teorema 8 e para tanto, apresentamos resultados auxiliares. Além disso, aplicamos o Teorema 8, que é usado na demonstração do Teorema 10. O Lema 4 relaciona a regularidade do grafo  $G$  com o grafo linha  $L(G)$ .

**Lema 4.** *Se  $G$  é  $k$ -regular, então  $L(G)$  é  $(2k - 2)$ -regular.*

**Lema 5.** *Se  $G = (V, E)$  é um grafo  $k$ -regular e *Classe 1*, então  $|V(G)|$  é par.*

*Demonstração.* Como  $G$  é *Classe 1*, temos que  $G$  possui uma  $k$ -coloração de arestas  $\varphi$  com classes de cor  $\mathcal{C}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Como  $G$  é  $k$ -regular, cada classe de cor  $\mathcal{C}_i$  é um emparelhamento perfeito. Concluímos que  $|\mathcal{C}_i| = q$  e  $|V(G)| = 2q$ .  $\square$

**Lema 6.** *Se  $G = (V, E)$  é  $k$ -regular e *Classe 1* com  $|V(G)| \geq 6$ , então em qualquer  $k$ -coloração de arestas  $\varphi$ , cada classe de cor  $\mathcal{C}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , possui ao menos três elementos.*

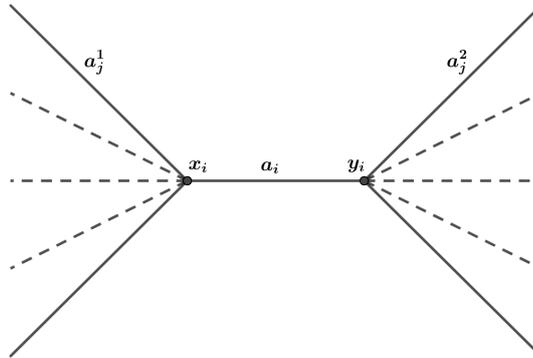
*Demonstração.* Sejam  $G = (V, E)$  um grafo  $k$ -regular e *Classe 1* e  $\varphi$  uma  $k$ -coloração de arestas de  $G$ . Note que cada classe de cor de  $\varphi$  particiona  $E$  em  $k$  emparelhamentos perfeitos. Como  $|V(G)| \geq 6$ , temos que, no mínimo, cada emparelhamento perfeito possui cardinalidade 3.  $\square$

**Lema 7.** *Seja  $G$  um grafo com uma  $k$ -coloração de arestas  $\varphi$ . Se cada classe de cor  $\mathcal{C}_i$  de  $\varphi$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , tem ao menos três arestas, então, para todo par  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  com  $i \neq j$ , existe um par de arestas  $a_i \in \mathcal{C}_i$  e  $a_j \in \mathcal{C}_j$  tal que  $\{a_i, a_j\}$  é um emparelhamento.*

*Demonstração.* Sejam  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  com  $i \neq j$ . Tome  $a_i = x_i y_i \in \mathcal{C}_i$ . Sejam  $a_j^1, a_j^2, a_j^3 \in \mathcal{C}_j$ . Como  $\varphi$  é uma coloração de arestas, as arestas de  $\mathcal{C}_j$  formam um emparelhamento

e afirmamos que no máximo 2 destas arestas compartilham um mesmo vértice extremo com  $a_i$  (veja a Figura 5). Digamos que  $a_j^1$  e  $a_j^2$  são adjacentes à  $a_i$ . Portanto  $\{a_i, a_j^3\}$  é um emparelhamento.

Figura 5 - A aresta  $a_i$  com cor  $i$  é adjacente a no máximo duas arestas  $a_j^1$  e  $a_j^2$  com cor  $j$ .



Fonte: O autor, 2023.

□

**Teorema 8.** *Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular. Se  $G$  é Classe 1, então  $L(G)$  é conformável.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular. Se  $k = 1$ , então  $G \simeq K_2$  e  $L(G)$  é o grafo trivial que é conformável. Se  $k = 2$ , temos que para  $n \geq 1$ ,  $G = C_{2n}$  e  $L(G) = C_{2n}$  que é conformável. Suponha que  $k \geq 3$ . Como  $G$  é  $k$ -regular e Classe 1, temos que  $G$  possui uma  $k$ -coloração de arestas  $\varphi$  com classes de cor  $\mathcal{C}_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Pelo Lema 5, temos que  $|V(G)| = 2q$  é par e  $|\mathcal{C}_i| = q$ . Pelo Lema 4,  $L(G)$  é  $(2k - 2)$ -regular. Construimos uma  $(2k - 1)$ -coloração de vértices  $\phi$  para  $L(G)$  usando a  $k$ -coloração de arestas  $\varphi$  de  $G$ . Note que  $l = |V(L(G))| = \frac{|V(G)| \cdot k}{2} = qk$  e considere os dois casos:

1. Se  $k$  é par, então  $l$  é par e consideremos os seguintes dois casos:
  - (a) Se  $q$  é par, então definimos uma  $(2k - 1)$ -coloração de vértices  $\phi$  para  $L(G)$  com classes de cor  $\mathcal{D}_i = \mathcal{C}_i$  onde  $i \in \{1, \dots, k\}$ ; e  $\mathcal{D}_i = \emptyset$  onde  $i \in \{k + 1, \dots, 2k - 1\}$ .
  - (b) Se  $q$  é ímpar, então definimos uma  $(2k - 1)$ -coloração de vértices  $\phi$  para  $L(G)$  onde cada classe de cor é par. Nossa abordagem consiste em tomar, para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , um vértice  $a_i$  de  $\mathcal{C}_i$  e atribuir a cor  $j$  aos vértices  $a_{2j-2k-1}$  e  $a_{2j-2k}$  de  $L(G)$ , onde  $j \in \{k + 1, \dots, \frac{3k}{2}\}$ . Como  $q$  é ímpar, temos que  $G \not\cong K_4$ . Assim temos que  $|V(G)| = 2q \geq 6$  e pelo Lema 6, cada classe de cor tem cardinalidade três. Pelo Lema 7, temos que, para cada  $j \in \{k + 1, \dots, \frac{3k}{2}\}$ ,  $\{a_{2j-2k-1}, a_{2j-2k}\}$  é um emparelhamento de  $G$ , isto é, um conjunto independente de  $L(G)$ . Assim, usando o Lema 7, construimos uma coloração conformável para  $L(G)$ , tomando como classes de cor de  $\phi$  os conjuntos:  $\mathcal{D}_i = \mathcal{C}_i \setminus \{a_i\}$  onde  $a_i \in \mathcal{C}_i$  e  $i \in \{1, \dots, k\}$ ;  $\mathcal{D}_i = \{a_{2i-2k-1}, a_{2i-2k}\}$  onde  $i \in \{k + 1, \dots, \frac{3k}{2}\}$ ; e  $\mathcal{D}_i = \emptyset$  onde

$i \in \{\frac{3k}{2} + 1, \dots, 2k - 1\}$ . Como  $\phi$  possui  $k$ ,  $\frac{k}{2}$  e  $\frac{k}{2} - 1$  classes de cor com cardinalidade  $q - 1$ ,  $2$  e  $0$ , respectivamente, concluímos que  $\phi$  é conformável e assim  $L(G)$  é conformável.

2. Se  $k$  é ímpar, então consideremos dois casos:

- (a) Se  $q$  é par, então  $l$  é par. Considere a  $(2k - 1)$ -coloração de vértices  $\phi$  para  $L(G)$  do Caso (1a) e como  $l$  e  $q$  são pares, concluímos que  $L(G)$  é conformável.
- (b) Se  $q$  é ímpar, então lembre que  $l = k \cdot q$  que é ímpar. Assim, definimos uma  $(2k - 1)$ -coloração de vértices  $\phi$  para  $L(G)$  onde cada classe de cor é ímpar. Nossa abordagem consiste em tomar para cada  $i \in \{1, \dots, \frac{k-1}{2}\}$  dois vértices  $a_i$  e  $b_i$  de  $\mathcal{C}_i$  e atribuímos, respectivamente, as cores  $k + 2i - 1$  e  $k + 2i$ . Sejam as classes de cor de  $\phi$  definidas como:  $\mathcal{D}_i = \mathcal{C}_i \setminus \{a_i, b_i\}$  onde  $i \in \{1, \dots, \frac{k-1}{2}\}$ ;  $\mathcal{D}_i = \mathcal{C}_i$  com  $i \in \{\frac{k+1}{2}, \dots, k\}$  e;  $\{a_i\}, \{b_i\}$  com  $i \in \{1, \dots, \frac{k-1}{2}\}$ . Como  $\phi$  possui  $\frac{k-1}{2}$ ,  $\frac{k+1}{2}$  e  $k - 1$  classes de cor com cardinalidade  $q - 2$ ,  $q$  e  $1$ , respectivamente, concluímos que cada classe de cor de  $\phi$  é ímpar e  $L(G)$  é conformável.

□

**Corolário 4.** *Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular. Se  $L(G)$  é não-conformável, então  $G$  é Classe 2.*

**Teorema 9** (Baranyai [30], 1971). *O grafo completo  $K_n$  é Classe 1 se, e somente se,  $n$  é par.*

**Teorema 10.** *Os grafos linha dos grafos completos são conformáveis.*

*Demonstração.* Primeiro considere que  $V(K_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ . Pela definição de grafo linha, cada aresta do  $K_n$  é identificada como um vértice em  $L(K_n)$ . Lembre que  $L(K_n)$  é  $(2n - 4)$ -regular (Lema 4). Em cada caso, nós exibimos uma  $(2n - 3)$ -coloração conformável para  $L(G)$ , onde cada classe de cor possui mesma paridade que  $|V(L(K_n))|$ . Dividiremos a prova em dois casos de acordo com a paridade de  $n$ .

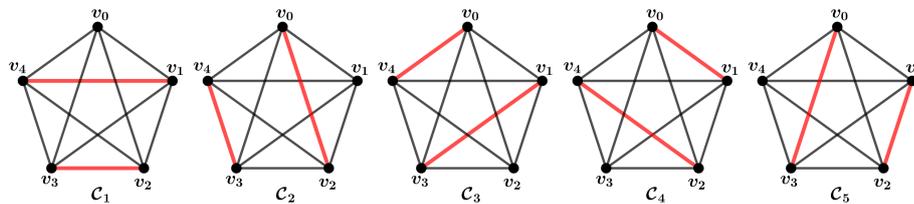
- 1. Suponha que  $n$  seja par. Pelo Teorema 8 e pelo Teorema 9,  $L(K_n)$  é conformável.
- 2. Suponha que  $n$  seja ímpar e seja  $n = 2k - 1$  tal que  $k$  é um inteiro positivo. Observe que o número de vértices do  $L(K_n)$  é  $\frac{n(n-1)}{2} = (2k - 1)(k - 1)$ . Considere os seguintes dois casos: ou quando  $k$  é ímpar, ou quando  $k$  é par.

- (a) Suponha que  $k$  seja ímpar.

Neste caso, o número de vértices do  $L(K_n)$  é par porque  $k - 1$  é par. Definimos uma  $(2n - 3)$ -coloração conformável para  $L(K_n)$  tomando para cada  $p \in \{1, \dots, n\}$ , a classe de cor  $\mathcal{C}_p = \{v_{(p-1-q) \bmod n}, v_{(p-1+q) \bmod n} \mid 1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}\}$

(Figura 6) e para cada  $p \in \{n+1, \dots, 2n-3\}$ ,  $\mathcal{C}_p = \emptyset$ , com  $v_i \in V(K_n)$  em que os índices dos vértices são considerados em módulo  $n$ . Note que  $\mathcal{C}_p$  é um emparelhamento máximo em  $K_n$  e este é um conjunto independente máximo do  $L(K_n)$ . Além disso,  $\bigcup_{p=1}^n \mathcal{C}_p = E(K_n) = V(L(K_n))$ . Consequentemente essa coloração é conformável, pois:  $|V(L(K_n))|$  é par; para cada  $p \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|\mathcal{C}_p| = \frac{n-1}{2} = k-1$  é par; e, para  $p \in \{n+1, \dots, 2n-3\}$  temos  $n-3$  classes de cor vazias.

Figura 6 - Um exemplo de coloração conformável do grafo  $L(K_5)$ , onde são coloridas as arestas de  $K_5$ . Para cada cópia de  $K_5$  temos uma classe de cor  $\mathcal{C}_p$  com  $p \in \{1, \dots, n\}$  e temos que  $\mathcal{C}_p = \emptyset$ , quando  $p \in \{n+1, \dots, 2n-3\}$ .



Fonte: O autor, 2023.

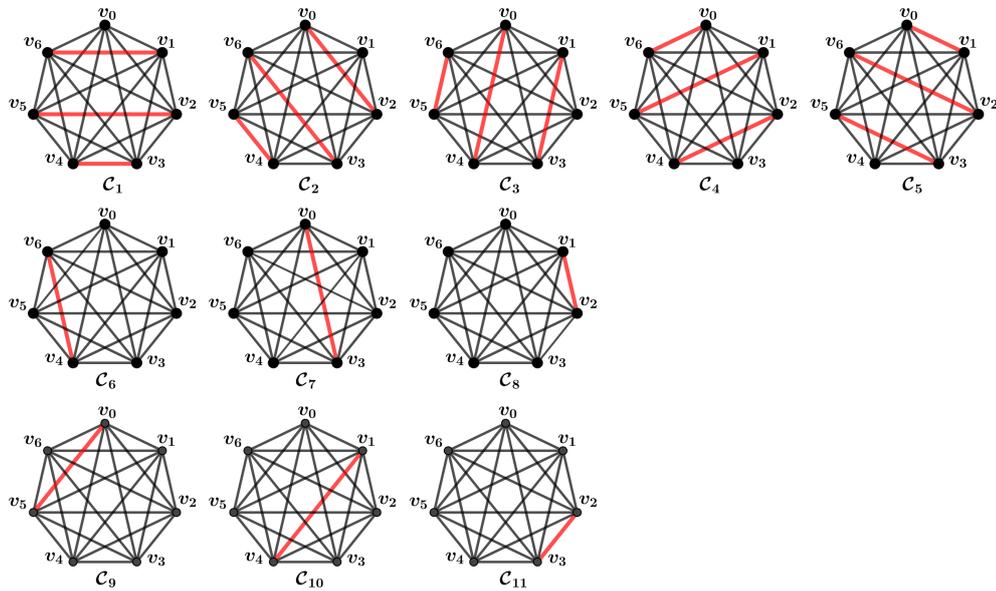
(b) Suponha que  $k$  seja par.

Neste caso, o número de vértices  $|V(L(K_n))| = (2k-1)(k-1)$  do  $L(K_n)$  é ímpar. A nossa coloração conformável será formada por  $n-2$  emparelhamentos maximais de  $K_n$  de cardinalidade  $\frac{n-1}{2}$  e  $n-1$  emparelhamentos unitários de  $K_n$ . Observamos que o número total de arestas de  $K_n$  pode ser escrito  $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1)$ .

Definimos uma  $(2n-3)$ -coloração conformável para  $L(K_n)$  tomando para cada  $p \in \{1, \dots, n-2\}$ ,  $\mathcal{C}_p = \{v_{(p-1-q) \bmod n} v_{(p-1+q) \bmod n} \mid 1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}\}$  (veja a Figura 7). Como temos  $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$  arestas coloridas, temos  $n-1$  arestas que faltam ser coloridas. Seja  $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  o conjunto de elementos não coloridos pelas cores  $1, 2, \dots, n-2$ . Defina para cada  $p \in \{n-1, \dots, 2n-3\}$ ,  $\mathcal{C}_p = \{a_{p-(n-2)}\}$ . Como, para cada  $p \in \{1, \dots, n-2\}$ ,  $|\mathcal{C}_p| = \frac{n-1}{2} = k-1$  é ímpar, para cada  $p \in \{n-1, \dots, 2n-3\}$ ,  $\mathcal{C}_p$  é unitário e usamos  $(n-2) + (n-1) = 2n-3 = \Delta(L(K_n)) + 1$  classes de cor, concluímos que essa coloração de vértices é conformável. □

Embora existam grafos conformáveis e *Tipo 2*, a prova do Teorema 10 representa uma abordagem promissora para verificar a conjectura de Vignesh et al. [27]. Como exemplo, a coloração conformável vista na prova pode ser estendida para uma coloração total para o grafo linha de  $K_5$  (Figura 8). No entanto, isso é apenas uma instância de um grafo *Tipo 1* que conhecemos. É necessário mais pesquisa para determinar se isso é verdadeiro para outras instâncias.

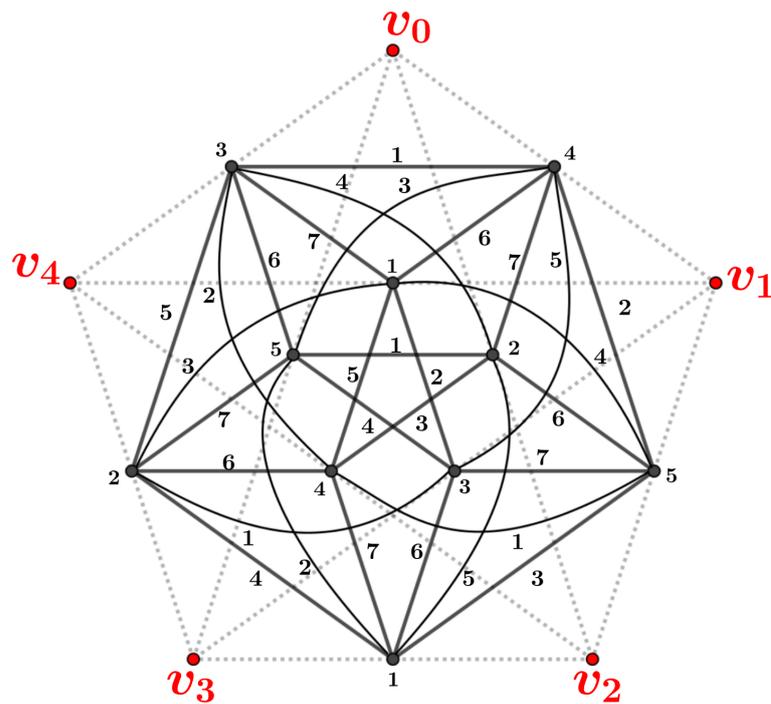
Figura 7 - Um exemplo de coloração conformável para  $L(K_7)$ , onde estão coloridas as arestas de  $K_7$ .



Legenda: Na primeira linha, para cada cópia de  $K_7$  apresentamos a classe de cor  $\mathcal{C}_p$  com  $p \in \{1, \dots, n - 2\}$ ; na segunda linha apresentamos as classes de cor unitárias  $v_{n-2+q}v_{n-2-q}$  e na terceira linha apresentamos as classes de cor unitárias  $v_{n-1+q}v_{n-1-q}$ .

Fonte: O autor, 2023.

Figura 8 - Uma  $(\Delta(L(K_5)) + 1)$ -coloração total para  $L(K_5)$  que possui a coloração conformável do Teorema 10.



Fonte: O autor, 2023.

## 2.2 Uma discussão sobre a existência de um grafo $L(G)$ não-conformável tal que $G$ é um grafo regular

Nesta seção, apresentamos uma discussão sobre a existência de grafo linha  $L(G)$  não-conformável tal que  $G$  é  $k$ -regular. König [31] provou que os grafos bipartidos são *Classe 1*. Como consequência deste resultado, juntamente com o Teorema 8, temos o seguinte corolário.

**Corolário 5.** *Se  $G$  é regular e bipartito, então  $L(G)$  é conformável.*

A condição de regularidade é necessária no Teorema 8. Por exemplo, o grafo estrela  $S_{2n}$  é não-regular e *Classe 1*, enquanto  $L(S_{2n}) = K_{2n}$  é não-conformável. Para  $k = 2$ , existe um grafo  $k$ -regular  $G = C_5$ , tal que o grafo linha  $L(G) = C_5$  é não-conformável. Isso nos motiva a formular a Questão 1.

**Questão 1.** *Existe um grafo  $G$   $k$ -regular, com  $k \geq 3$ , tal que  $L(G)$  é não-conformável?*

Beineke [32] provou que existem nove grafos minimais que não são grafos linha, de modo que qualquer grafo que não é um grafo linha tem pelo menos um desses nove grafos como um subgrafo induzido.

**Teorema 11** (Beineke [32]). *Seja  $H$  um grafo. Existe um grafo  $G$  tal que  $H = L(G)$  é o grafo linha de  $G$  se, e somente se,  $H$  não contém nenhum subgrafo induzido do seguinte conjunto de grafos apresentado na Figura 9.*

Esses grafos na Figura 9 são chamados de *subgrafos induzidos proibidos para grafos linha*. Em uma tentativa de responder a Questão 1, sabendo todas as potências de ciclo  $C_n^k$  que são não-conformáveis, nos perguntamos se existe um grafo  $k$ -regular  $G$ , tal que algum  $C_n^k = L(G)$  é não-conformável; e respondendo, nesse caso, positivamente à Questão 1. Infelizmente, provamos que não existe tal grafo  $G$ , uma vez que usamos a caracterização de Beineke para provar que toda potência de ciclo não-conformável  $C_n^k$  não é um grafo linha.

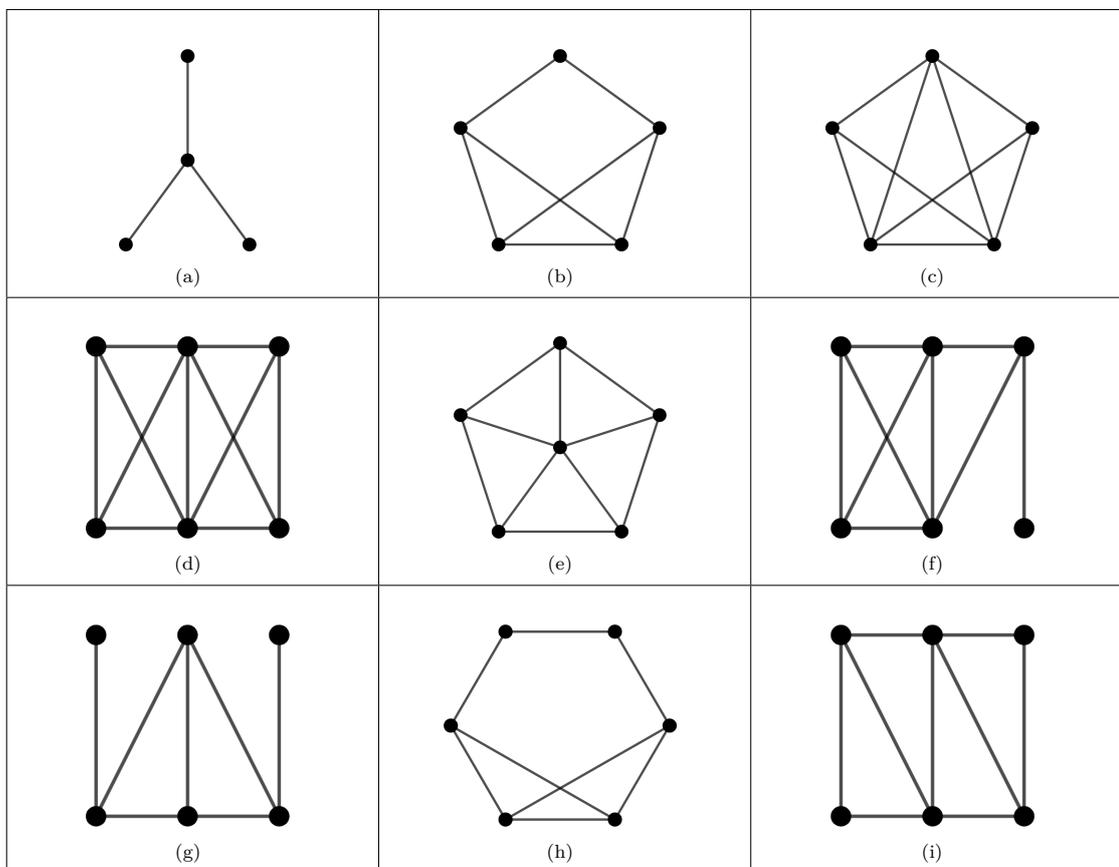
Observamos que Zorzi et al. [13] caracterizaram as potências não-conformáveis dos grafos potências de ciclo.

**Teorema 12** (Zorzi et al. [13]). *Seja  $C_n^k$  uma potência de ciclo que não é um ciclo nem um grafo completo. A potência de ciclo  $C_n^k$  é não-conformável se, e somente se,  $n$  é ímpar e  $n < 3(k + 1)$ .*

**Teorema 13.** *Seja  $C_n^k$  uma potência de ciclo que não é um ciclo nem um grafo completo. Se  $C_n^k$  é não-conformável, então  $C_n^k$  não é um grafo linha.*

*Demonstração.* Suponha que  $H = C_n^k$  seja uma potência de ciclo não-conformável que não é um ciclo nem um grafo completo. A partir do Teorema 12, sabemos que  $C_n^k$  possui  $n$  ímpar e  $n < 3(k + 1)$ . Como  $C_n^k$  não é um grafo completo, temos que  $n > 2k + 1$ . Como  $n$  é ímpar, temos que  $n \geq 2k + 3$ .

Figura 9 - O nove subgrafos minimais que não são grafos linha.



Fonte: O autor, 2023.

1. Se  $k$  é par, então  $3(k+1)$  é ímpar. Como  $n < 3(k+1) = 3k+3$ , temos que  $n \leq 3k+1$ , e concluímos que  $2k+3 \leq n \leq 3k+1$ . Então,  $n$  pertence ao intervalo  $2k+3 = 2k+(2+1) \leq n \leq 2k+(2\binom{k}{2}+1) = 3k+1$ , ou seja,  $n = 2k+2j+1$  com  $j \in \{1, \dots, \frac{k}{2}\}$ . Seja  $C_n^k = C_{2k+2j+1}^k$  a potência de ciclo com  $j \in \{1, \dots, \frac{k}{2}\}$ . Vamos fornecer o subgrafo induzido proibido  $H[S]$  de  $H = C_n^k$  induzido pelo conjunto  $S = \{v_0, v_1, v_k, v_{k+2j}, v_{2k+2j}\}$  correspondente ao grafo de Beineke da Figura 9b. A partir da definição de potência de ciclo:

- $N(v_0) = \{v_{k+2j+1}, \dots, v_{2k+2j}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  e portanto:
  - o vértice  $v_0$  é adjacente aos vértices  $v_1, v_k$  e  $v_{2k+2j}$  em  $H[S]$ ;
  - o vértice  $v_0$  não é adjacente ao vértice  $v_{k+2j}$  em  $H$ .
- $N(v_1) = \{v_{k+2j+2}, \dots, v_{2k+2j}, v_0\} \cup \{v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}\}$  e portanto:
  - o vértice  $v_1$  é adjacente ao vértice  $v_0, v_k$  e  $v_{2k+2j}$  em  $H[S]$ ;
  - o vértice  $v_1$  não é adjacente ao vértice  $v_{k+2j}$  em  $H$ .
- $N(v_k) = \{v_0, \dots, v_{k-1}\} \cup \{v_{k+1}, \dots, v_{2k}\}$  e portanto:
  - o vértice  $v_k$  é adjacente ao vértice  $v_0, v_1$  e  $v_{k+2j}$  em  $H[S]$ ;
  - o vértice  $v_k$  não é adjacente ao vértice  $v_{2k+2j}$  em  $H$ .
- $N(v_{k+2j}) = \{v_{2j}, \dots, v_{k+2j-1}\} \cup \{v_{k+2j+1}, \dots, v_{2k+2j}\}$  e portanto:
  - o vértice  $v_{k+2j}$  é adjacente aos vértices  $v_k$  e  $v_{2k+2j}$  em  $H[S]$ ;
  - o vértice  $v_{k+2j}$  não é adjacente aos vértices  $v_0$  e  $v_1$  em  $H$ .

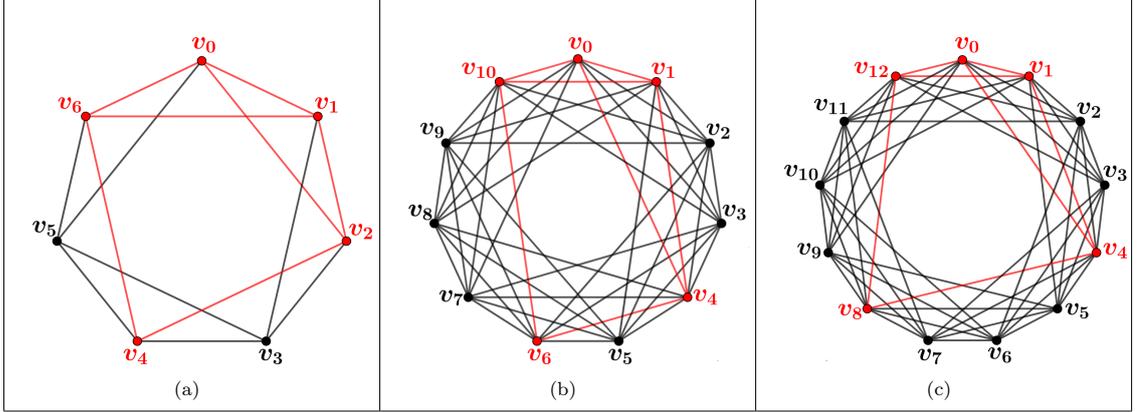
Assim,  $H[S]$  é isomorfo ao grafo de Beineke representado na Figura 9b e, portanto, existe um subgrafo induzido proibido de  $C_n^k$  com 5 vértices. A partir da caracterização de Beineke [32], concluímos que  $C_n^k$  não é um grafo linha. Para a conveniência do leitor, oferecemos na Figura 10 um exemplo com  $k=2$  e  $n=2 \cdot 2 + 2j + 1$  com  $j \in \{1\}$ ; e dois exemplos com  $k=4$  e  $n=2 \cdot 4 + 2j + 1$  com  $j \in \{1, 2\}$ .

2. Se  $k$  é ímpar, então  $3(k+1)$  é par. Como  $n < 3(k+1) = 3k+3$ , temos que  $n \leq 3k+2$  e  $2k+3 \leq n \leq 3k+2$ . Logo,  $n = 2k+2j+1$  com  $j \in \{1, \dots, \frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}\}$ .

(a) Suponha que  $j \in \{1, \dots, \frac{k-1}{2}\}$ . Considere o grafo de potência de ciclo  $C_{2k+2j+1}^k$ . Nós fornecemos  $H[S]$ , o subgrafo induzido proibido para grafos linha, subgrafo de  $C_n^k$  induzido pelo conjunto  $S = \{v_0, v_1, v_k, v_{k+2j}, v_{2k+2j}\}$  correspondente ao grafo de Beineke na Figura 9b. A partir da definição de potência de ciclo:

- $N(v_0) = \{v_{k+2j+1}, \dots, v_{2k+2j}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  e portanto:
  - o vértice  $v_0$  é adjacente aos vértices  $v_1, v_k$  e  $v_{2k+2j}$  em  $H[S]$ ;
  - o vértice  $v_0$  não é adjacente ao vértice  $v_{k+2j}$  em  $H$ .
- $N(v_1) = \{v_{k+2j+2}, \dots, v_{2k+2j}, v_0\} \cup \{v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}\}$  e portanto:

Figura 10 - O grafo potência de ciclo  $H = C_n^k$  com  $k$  par,  $j \in \{1, \dots, \frac{k}{2}\}$  e  $n = 2k + 2j + 1$ .



Legenda: Na Figura 10, temos em (10a) o grafo  $H = C_7^2$ ; em (10b),  $H = C_{11}^4$ ; e em (10c),  $H = C_{13}^4$ . Em cada caso, representamos o subgrafo induzido proibido  $H[S]$ , tal que  $S = v_0, v_1, v_k, v_{k+2j}, v_{2k+2j}$  (arestas em vermelho) isomorfo ao grafo de Beineke representado na Figura 9b.

Fonte: O autor, 2023.

- o vértice  $v_1$  é adjacente aos vértices  $v_0, v_k$  e  $v_{2k+2j}$  em  $H[S]$ ;
- o vértice  $v_1$  não é adjacente ao vértice  $v_{k+2j}$  em  $H$ .
- $N(v_k) = \{v_0, \dots, v_{k-1}\} \cup \{v_{k+1}, \dots, v_{2k}\}$  e portanto:
  - o vértice  $v_k$  é adjacente aos vértices  $v_0, v_1$  e  $v_{k+2j}$  em  $H[S]$ ;
  - o vértice  $v_k$  não é adjacente ao vértice  $v_{2k+2j}$  em  $H$ .
- $N(v_{k+2j}) = \{v_{2j}, \dots, v_{k+2j-1}\} \cup \{v_{k+2j+1}, \dots, v_{2k+2j}\}$  e portanto:
  - o vértice  $v_{k+2j}$  é adjacente aos vértices  $v_k$  e  $v_{2k+2j}$  em  $H[S]$ ;
  - o vértice  $v_{k+2j}$  não é adjacente aos vértices  $v_0$  e  $v_1$  em  $H$ .

Portanto,  $H[S]$  é isomorfo a um grafo de Beineke representado na Figura 9b e, portanto, há um subgrafo induzido proibido de  $C_n^k$  com 5 vértices. A partir da caracterização de Beineke [32],  $C_n^k$  não é um grafo linha. Para a conveniência do leitor, apresentamos na Figura 11 um exemplo com  $k = 3$  e  $n = 2 \cdot 3 + 2j + 1$  com  $j \in \{1\}$ .

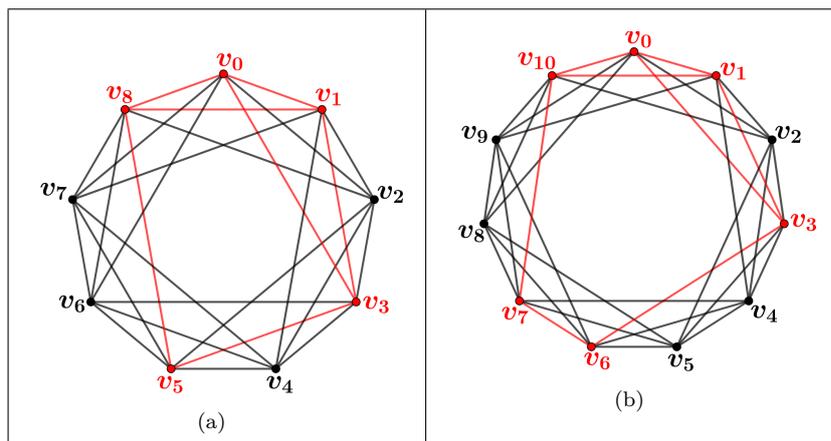
- (b) Suponha que  $j = \frac{k+1}{2}$ . Considere o grafo potência do ciclo  $C_{3k+2}^k$ . Fornecemos  $H[S]$ , o subgrafo proibido induzido para grafos linha, subgrafo de  $C_n^k$  induzido pelo conjunto  $S = v_0, v_1, v_k, v_{2k}, v_{2k+1}, v_{3k+1}$  correspondente ao grafo de Beineke na Figura 9h. A partir da definição de grafo potência do ciclo:

- $N(v_0) = \{v_{2k+2}, \dots, v_{3k+1}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  e portanto:
  - o vértice  $v_0$  é adjacente aos vértices  $v_1, v_k$  e  $v_{3k+1}$  em  $H[S]$ ;
  - o vértice  $v_0$  não é adjacente aos vértices  $v_{2k}$  e  $v_{2k+1}$  em  $H$ .
- $N(v_1) = \{v_{2k+3}, \dots, v_{3k+1}, v_0\} \cup \{v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}\}$  e portanto:

- o vértice  $v_1$  é adjacente aos vértices  $v_0, v_k$  e  $v_{3k+1}$  em  $H[S]$ ;
- o vértice  $v_1$  não é adjacente aos vértices  $v_{2k}$  e  $v_{2k+1}$  em  $H$ .
- $N(v_{2k}) = \{v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k-1}\} \cup \{v_{2k+1}, \dots, v_{3k}\}$  e portanto:
  - o vértice  $v_{2k}$  é adjacente aos vértices  $v_k$  e  $v_{2k+1}$  em  $H[S]$ ;
  - o vértice  $v_{2k}$  não é adjacente aos vértices  $v_0, v_1$  e  $v_{3k+1}$  em  $H$ .
- $N(v_{2k+1}) = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{2k}\} \cup \{v_{2k+2}, \dots, v_{3k+1}\}$  e portanto:
  - o vértice  $v_{2k+1}$  é adjacente aos vértices  $v_{2k}$  e  $v_{3k+1}$  em  $H[S]$ ;
  - o vértice  $v_{2k+1}$  não é adjacente aos vértices  $v_0, v_k$  e  $v_1$  em  $H$ .

Portanto, existe um subgrafo induzido proibido de  $C_n^k$  com 6 vértices e, pela caracterização de Beineke [32],  $C_n^k$  não é um grafo linha. Para a conveniência do leitor, oferecemos na Figura 11 um exemplo com  $k = 3$  e  $n = 2 \cdot 3 + 2j + 1$  com  $j = \frac{3+1}{2} = 2$ .

Figura 11 - O grafo de potência do ciclo  $H = C_n^k$  com  $k$  ímpar,  $j \in \{1, \dots, \frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}\}$  e  $n = 2k + 2j + 1$ .



Legenda: Na (11a),  $H = C_9^3$ ,  $S = \{v_0, v_1, v_k, v_{k+2j}, v_{2k+2j}\}$  e um grafo de Beineke é representado na Figura 9b. Na (11b),  $H = C_{11}^3$ ,  $S = \{v_0, v_1, v_k, v_{2k}, v_{2k+1}, v_{3k+1}\}$  e um grafo de Beineke é representado na Figura 9h.

Fonte: O autor, 2023.

□

### 3 CONFORMABILIDADE DOS GRAFOS SUBCÚBICOS E DOS GRAFOS BIPARTIDOS REGULARES

Neste capítulo, nós damos uma classificação dos grafos subcúbicos e de grafos bipartidos regulares conformáveis. Nossa classificação conduz a um algoritmo polinomial para identificar grafos subcúbicos e grafos bipartidos regulares. Em particular, provamos que  $G$  é conexo e não-conformável se, e somente se,  $G$  é  $K_4$  ou  $K_{3,3}$ . A estratégia para estabelecer a classificação da conformabilidade da classe dos subcúbicos conexos consiste em usar o algoritmo polinomial de Brooks [3] para produzir uma 3-coloração de vértices para um grafo subcúbico conexo que não é o  $K_4$ . Prosseguimos provando que se  $G$  não é o  $K_{3,3}$ , então esta 3-coloração de vértices pode ser modificada de forma a obter uma coloração conformável para  $G$ . Nós então introduzimos um novo conceito de grafo  $G$  anticonformável, que não significa que  $G$  é não-conformável. Este conceito é utilizado para obter a classificação dos grafos subcúbicos.

**Teorema 14.** *Um grafo bipartido regular  $G$  é conformável se, e somente se,  $G$  não é o grafo bipartido completo com partes ímpares.*

*Demonstração.* Seja  $G := G[V_1, V_2]$ . Como  $G$  é regular, pelo Teorema de Hall [33], temos que  $|V_1| = |V_2|$ . Como  $|V| = |V_1| + |V_2|$  é par e  $G$  é regular, devemos construir uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  onde cada classe de cor  $\mathcal{C}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, \Delta + 1\}$  é par. Considere os seguintes casos:

1. Se  $|V_1|$  e  $|V_2|$  são pares, então construímos  $\varphi$  da seguinte forma:  $\mathcal{C}_1 = V_1$ ,  $\mathcal{C}_2 = V_2$  e  $\mathcal{C}_i = \emptyset$  com  $i \in \{3, \dots, \Delta + 1\}$ . Como cada classe de cor  $\mathcal{C}_i$  possui paridade par, concluímos que  $\varphi$  é uma coloração conformável e  $G$  é conformável.
2. Se  $|V_1|$  e  $|V_2|$  são ímpares, então:
  - (a) Supondo que  $G$  é o grafo bipartido completo, temos que pelo resultado de Hamilton et al. [10],  $G$  é não-conformável.
  - (b) Supondo que  $G$  não é o grafo bipartido completo, temos que existe um vértice  $v \in V_1$  que é independente de um vértice  $u \in V_2$ . Portanto, construímos  $\varphi$  da seguinte forma:  $\mathcal{C}_1 = V_1 \setminus \{v\}$ ,  $\mathcal{C}_2 = V_2 \setminus \{u\}$ ,  $\mathcal{C}_3 = \{u, v\}$  e  $\mathcal{C}_i = \emptyset$ ,  $i \in \{4, \dots, \Delta + 1\}$ . Como cada classe de cor possui paridade  $|\mathcal{C}_1| = |V_1| - 1$ ,  $|\mathcal{C}_2| = |V_2| - 1$ ,  $|\mathcal{C}_3| = 2$  e  $|\mathcal{C}_i| = 0$  com  $i \in \{4, \dots, \Delta(G) + 1\}$  par, temos que  $\varphi$  é uma coloração conformável e  $G$  é conformável.

□

A seguir, apresentamos um resultado bem conhecido de Hilton e Hind [11] e provamos uma propriedade auxiliar que será usada nesse processo.

**Lema 8** (Hilton e Hind [11], 2002). *A deficiência  $def(G)$  de  $G$  é ímpar se, e somente se,  $\Delta$  e  $|V|$  são ambos ímpares.*

**Lema 9.** *Seja  $G$  um grafo conexo subcúbico que não é o completo  $K_4$  nem o bipartido completo  $K_{3,3}$  com  $def(G) \leq 1$  e seja uma 3-coloração de vértices  $\varphi$  com classes de cor  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  obtidas através de uma coloração de Brooks. Se  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_3$  são classes de cor ímpares, então existe um vértice  $v \in \mathcal{C}_1$  que não é adjacente a um vértice  $u \in \mathcal{C}_3$ .*

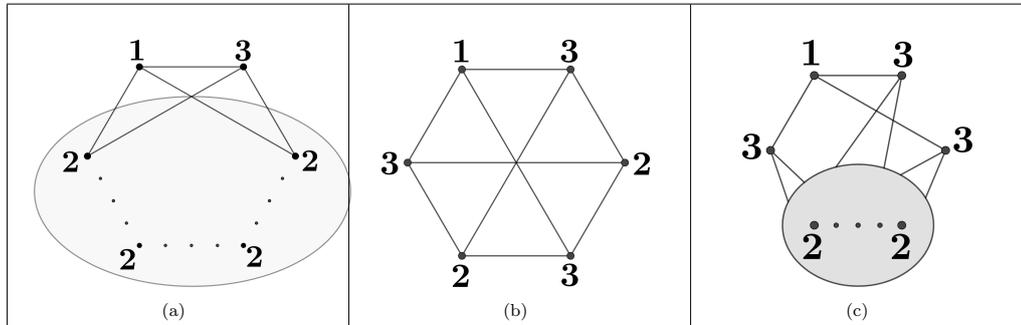
*Demonstração.* Suponha por absurdo que não existe um vértice  $v \in \mathcal{C}_1$  que não é adjacente a um vértice  $u \in \mathcal{C}_3$ . Então cada vértice  $v \in \mathcal{C}_1$  é adjacente aos vértices  $u \in \mathcal{C}_3$ .

Se  $|V|$  é par, então pelo Lema 8  $def(G) = 0$  e  $G$  é cúbico. Portanto, as classes de cor ímpares  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_3$  têm cardinalidade no máximo 3. Se considerarmos que ambas as classes  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_3$  são unitárias, então existe um vértice  $w \in \mathcal{C}_2$  com  $d(w) < 3$ , pois todo vértice  $w \in \mathcal{C}_2$  tem no máximo duas adjacências: com os vértices de cor 1 e 3, assim conclui-se que  $G$  não é cúbico (veja a Figura 12a). Se apenas uma classe de cor é unitária, isto é,  $|\mathcal{C}_1| = 1$ , então temos que o vértice  $v \in \mathcal{C}_1$  é adjacente a três vértices em  $\mathcal{C}_3$ . Então existem no máximo dois vértices em  $\mathcal{C}_2$  para  $G$  ser cúbico. Porém, este grafo resulta no  $K_{3,3}$ , pois  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  formam uma bipartição em  $G$  e os vértices em  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  são todos adjacentes aos vértices em  $\mathcal{C}_3$  (veja a Figura 12b). Analogamente, se ambas as classes de cor ímpares forem de cardinalidade 3, tem-se que  $G$  é o  $K_{3,3}$ . Como em quaisquer dos casos temos uma contradição, concluímos que existe um vértice  $v \in \mathcal{C}_1$  que não é adjacente a um vértice  $u \in \mathcal{C}_3$ .

Se  $|V|$  é ímpar, então pelo Lema 8  $def(G) = 1$ . Assim  $G$  tem um vértice  $a \in V$  com  $d(a) = 2$ . Como  $G$  é subcúbico, pela hipótese de absurdo, as classes de cor ímpares  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_3$  têm cardinalidade no máximo 3. Analogamente ao caso de  $|V|$  par, suponha que ambas as classes  $\mathcal{C}_1 = \{v\}$  e  $\mathcal{C}_3 = \{u\}$  são unitárias. Note que se  $d(v) = d(u) = 3$ , então existem pelo menos dois vértices de cor 2 com grau 2, contrariando que  $def(G) = 1$  (veja a Figura 12a). Suponha que  $u$  ou  $v$  tenha grau igual a 2. Assuma que  $d(v) = 2$ . Então existe um vértice  $w$  de cor 2 com  $N(w) \subset \{u, v\}$ , onde  $d(w) \leq 2$ . O que é uma contradição, porque  $def(G) = 1$ ,  $d(v) = 2$  e  $d(w) \leq 2$  (veja a Figura 12a). Se apenas uma classe de cor ímpar é unitária, assumamos que  $\mathcal{C}_1 = \{v\}$ . Pela hipótese de absurdo, temos que  $v$  é adjacente aos três vértices de cor 3 (veja a Figura 12c). Portanto os vértices de cor 2 são adjacentes somente aos vértices de cor 3. Como  $def(G) = 1$ , existem 5 ou 6 arestas com uma extremidade em  $\mathcal{C}_3$  e outra extremidade em  $\mathcal{C}_2$ . Como  $|V|$  é ímpar, então  $\mathcal{C}_2$  é uma classe de cor ímpar. Se  $|\mathcal{C}_2| = 1$ , então existem 2 ou 3 arestas com extremidade em  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$ , portanto a cardinalidade  $|\mathcal{C}_2| \geq 3$ . Dessa forma, existem pelo menos 8 ou 9 arestas com extremidade em  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$ , uma contradição. Por fim, se  $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_3| = 3$ , então  $G$  é o  $K_{3,3}$ , contradição final.

Portanto, existe um vértice  $v \in \mathcal{C}_1$  que não é adjacente a um vértice  $u \in \mathcal{C}_3$ .  $\square$

Figura 12 - Três casos possíveis para o subcúbico  $G$  que nos leva a concluir que existe um vértice  $v \in \mathcal{C}_1$  que não é adjacente a um vértice  $u \in \mathcal{C}_3$ . Na Figura 12a, ambas as classes de cor ímpares  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_3$  são unitárias. Na Figura 12b, apenas uma classe de cor ímpar é unitária para  $G$  cúbico. Na Figura 12c, apenas uma classe de cor ímpar é unitária para  $G$  subcúbico com deficiência 1.



Fonte: O autor, 2023.

**Teorema 15.** *Um grafo subcúbico conexo  $G$  é não-conformável se, e somente se,  $G$  é o completo  $K_4$  ou  $G$  é o bipartido completo  $K_{3,3}$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $G$  seja o  $K_4$  ou o  $K_{3,3}$ . Como  $\Delta = 3$  e  $G$  é cúbico, então  $def(G) = 0$ . Se  $G$  é o  $K_4$ , então  $G$  é não-conformável, pois toda 4-coloração de vértices têm todas as classes de cor unitárias e assim ímpares. Se  $G$  é o  $K_{3,3}$ , então  $G$  é não-conformável, pois em toda 4-coloração de vértices de  $G$  existem no mínimo 2 classes de cor ímpares. De fato, sejam  $X$  e  $Y$  as partes do  $K_{3,3}$ . Note que se desejamos que cada classe de cor seja par em uma 4-coloração de vértices do  $K_{3,3}$ , então esta só poderá ter no máximo cardinalidade 2, pois as partes da bipartição têm cardinalidade 3. Assim, ao atribuir a mesma cor a dois vértices  $a, b \in X$ , existirá um único vértice em  $X \setminus \{a, b\}$  que não poderá pertencer a uma classe de cor par, pois este é adjacente a todos os vértices em  $Y$ . Como este argumento é análogo à parte  $Y$ , temos que toda 4-coloração de vértices em  $G$  tem no mínimo 2 classes de cor ímpares.

Suponha que  $G$  não seja o  $K_4$  nem seja o  $K_{3,3}$ . Pelo Teorema de Brooks [3], existe uma 3-coloração de vértices  $\varphi$ , que pode ser obtida em tempo polinomial para  $G$ . Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  as classes de cor de  $\varphi$ . A partir de agora, construímos uma 4-coloração de vértices  $\phi$  com as classes de cor  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  de  $\varphi$  e uma nova classe de cor  $\mathcal{C}_4$ .

Se  $|V|$  é par, então pelo Lema 8, a deficiência de  $G$  é par. Além disso, em qualquer 3-coloração de vértices ou cada classe de cor é par, ou existe uma única classe de cor par, pois  $|V|$  é par. Para o primeiro caso, a 4-coloração de vértices  $\phi$  com  $\mathcal{C}_4 = \emptyset$  é uma coloração conformável, pois todas as classes de cor são pares.

Para o segundo caso, considere  $\mathcal{C}_2$  a única classe de cor par em  $\varphi$ . Se  $def(G) > 0$ , então  $def(G) \geq 2$  porque  $def(G)$  é par. Assim  $\phi$  é uma coloração conformável, pois o número de classes de cor com paridade diferente (classes de cor ímpares) da paridade de  $|V|$  é 2. Portanto, devemos considerar  $def(G) = 0$ , ou seja,  $G$  é cúbico. Siga um exemplo

na Figura 13. Como  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_3$  são classes de cor ímpares e  $def(G) = 0$ , pelo Lema 9 existe um vértice  $v \in \mathcal{C}_1$  que não é adjacente a um vértice  $u \in \mathcal{C}_3$ . Podemos atribuir a cor 4 aos vértices  $v$  e  $u$  em  $\phi$ , resultando que  $\phi$  é uma 4-coloração de vértices, onde  $\mathcal{C}_1 \setminus \{v\}$  e  $\mathcal{C}_3 \setminus \{u\}$  têm cardinalidade par e  $|\mathcal{C}_4| = 2$ . Como por hipótese,  $\mathcal{C}_2$  é uma classe de cor par, resulta que toda classe de cor têm mesma paridade que  $|V|$ , resultando que  $G$  é conformável.

Se  $|V|$  é ímpar, então pelo Lema 8 a deficiência de  $G$  é ímpar. Além disso, em qualquer 3-coloração de vértices ou cada classe de cor é ímpar, ou existe uma única classe de cor ímpar, pois  $|V|$  é ímpar. No primeiro caso, temos que a 4-coloração de vértices  $\phi$  com  $\mathcal{C}_4 = \emptyset$  é conformável, pois o número de classes de cor com paridade diferente de  $|V|$  é 1 e a deficiência de  $G$  é ímpar, isto é,  $def(G) \geq 1$ . Para o segundo caso, note que existe ao menos uma classe de cor par não-vazia, pois se as duas classes de cor pares fossem vazias, o grafo  $G$  seria um conjunto de vértices isolados. Seja  $\mathcal{C}_2$  uma classe de cor par não-vazia e  $\mathcal{C}_1$  a única classe de cor ímpar de  $\varphi$ . Siga um exemplo na Figura 13. Tome  $v \in \mathcal{C}_2$  e atribua ao vértice  $v$  a cor 4 em  $\phi$ . Como  $\mathcal{C}_2 \setminus \{v\}$  é ímpar e  $|\mathcal{C}_4| = 1$ , temos que apenas  $\mathcal{C}_3$  difere da paridade de  $|V|$ , isto é,  $\mathcal{C}_3$  é par. Como  $def(G) \geq 1$ , conclui-se que  $G$  é conformável.  $\square$

A demonstração do Teorema 15 conduz a um algoritmo de tempo polinomial para produzir uma coloração conformável para um grafo subcúbico  $G$ , se  $G$  não é o  $K_4$  nem o  $K_{3,3}$ . As Figuras 13a e 13b mostram um exemplo deste processo para o grafo de Petersen e as Figuras 13c e 13d mostram um exemplo para um grafo com  $|V|$  ímpar e  $def(G) = 1$ .

### 3.1 A conformabilidade dos grafos subcúbicos não-conexos

Nesta seção, investigamos o problema de conformabilidade para os grafos subcúbicos não-conexos. Apesar destes resultados não serem motivados ou aplicados ao problema de coloração total, é interessante trabalharmos na perspectiva de resolução do problema de conformabilidade.

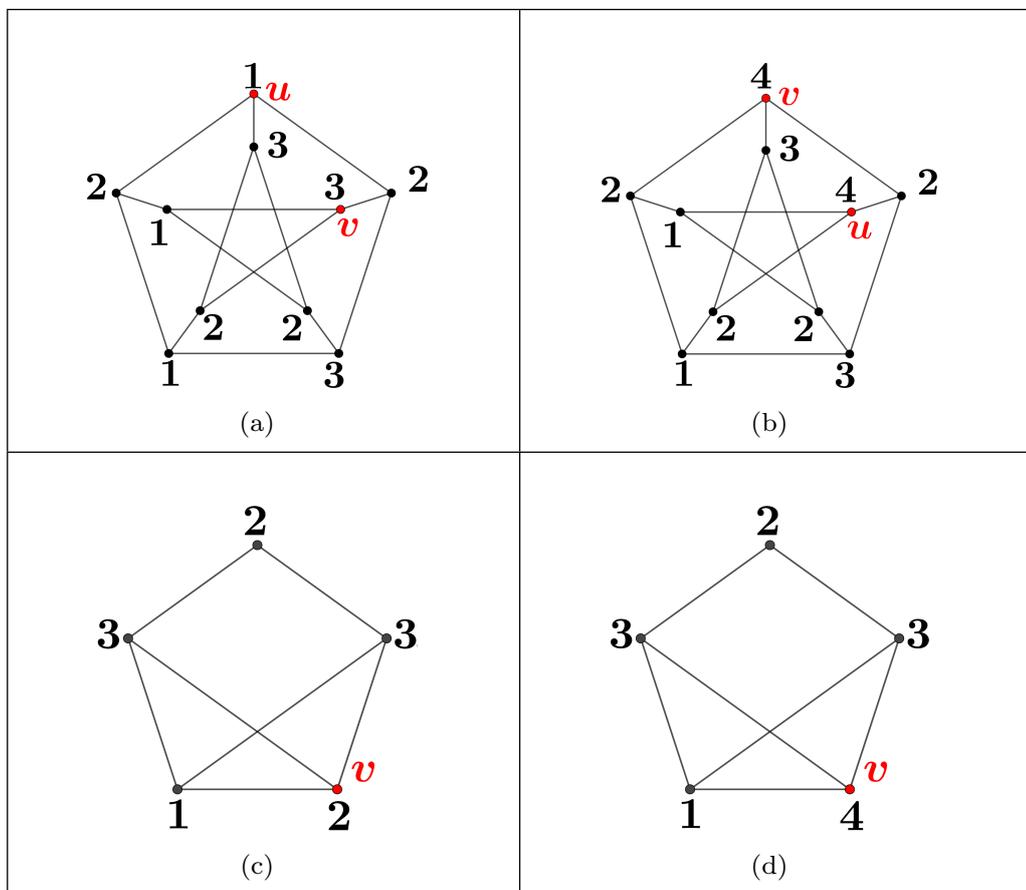
A seguir, provamos que a união disjunta entre grafos conformáveis é conformável. Note que nossa investigação é restrita a grafos com  $def(G) < 4$ . Caso contrário, temos que  $G$  é conformável, como vemos.

**Observação 1.** *Se  $G$  é um grafo subcúbico e  $def(G) \geq 4$ , então  $G$  é conformável.*

*Demonstração.* Seja  $G$  subcúbico, isto é,  $\Delta = 3$ . Como  $def(G) \geq 4$ , qualquer 4-coloração de vértices trivialmente discorda da paridade de  $|V|$  em no máximo  $def(G)$  cores.  $\square$

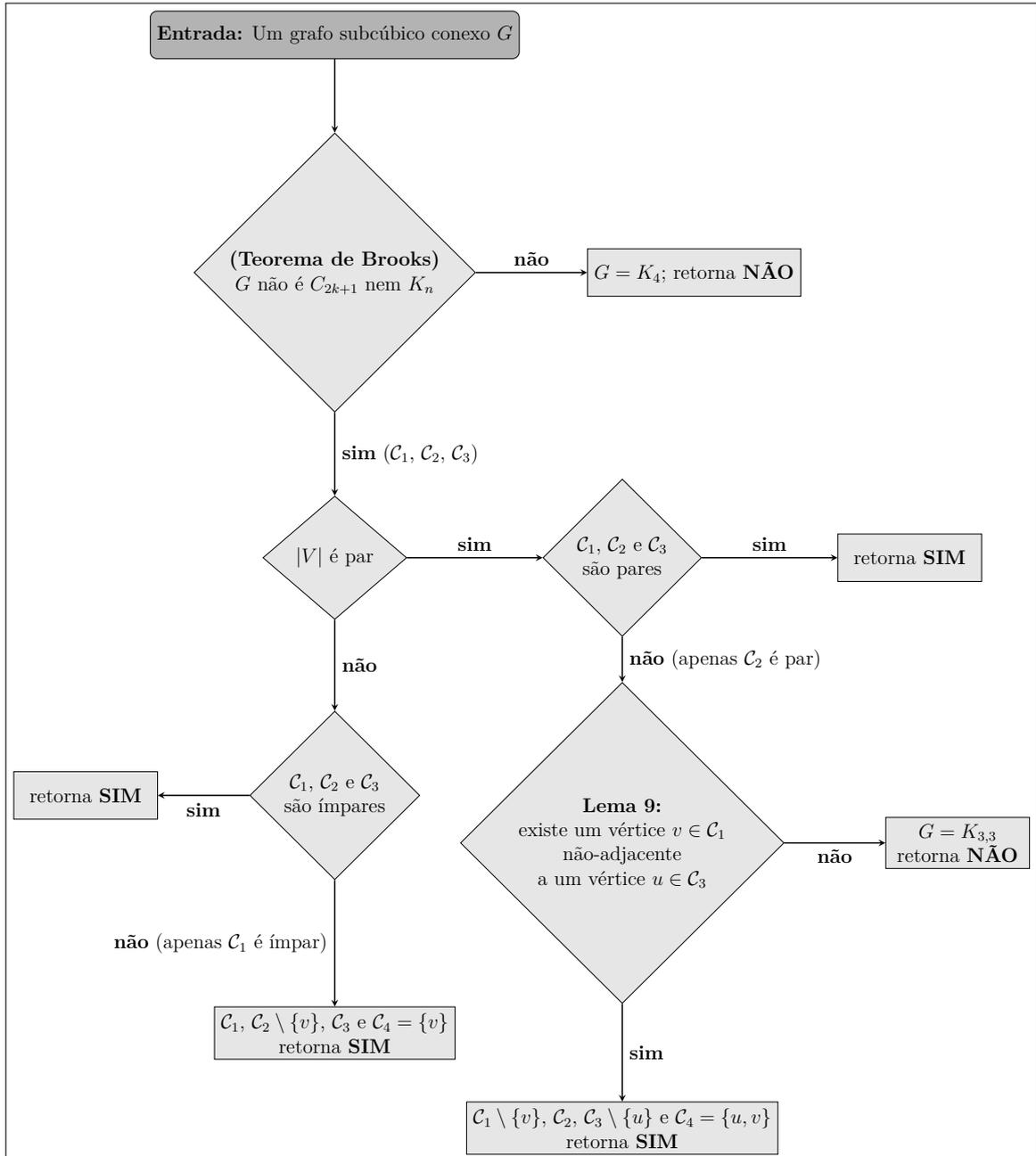
Assim, mostramos que o grafo subcúbico  $G$ , que é união disjunta de grafos conformáveis, é conformável. Note que se  $G = G_1 \cup G_2$ , então ao menos uma das suas

Figura 13 - Exemplo de aplicação do algoritmo de coloração conformável do Teorema 15 para  $|V|$  par nas Figuras 13b e 13a e para  $|V|$  ímpar nas Figuras 13c e 13d.



Fonte: O autor, 2023.

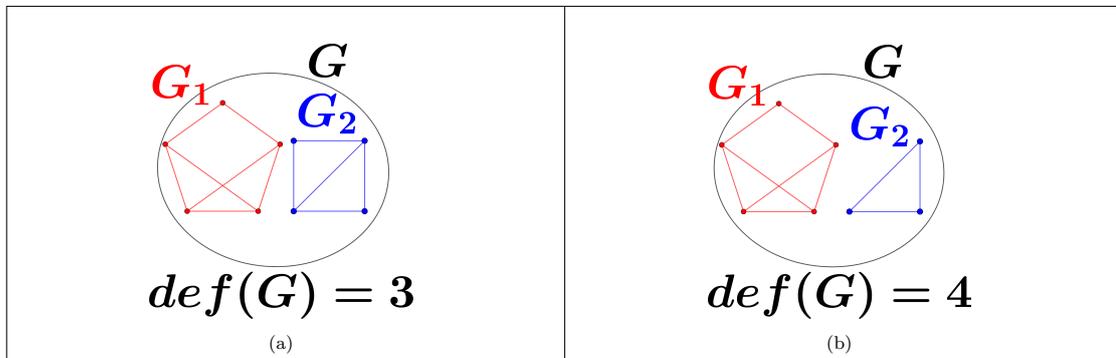
Figura 14 - Um algoritmo linear para produzir uma coloração conformável para um grafo subcúbico conexo, se existir, obtido a partir da prova do Teorema 15.



Fonte: O autor, 2023.

componentes conexas possui grau máximo 3. Se ambas componentes conexas são subcúbicas então  $def(G) = def(G_1) + def(G_2)$  (Figura 15a). Se apenas  $G_1$  possui grau máximo 3, então  $def(G) = def(G_1) + \sum_{v \in V(G_2)} (\Delta(G_1) - d_{G_2}(v))$  (Figura 15b).

Figura 15 - Dois possíveis casos da deficiência da união disjunta entre grafos conexos.



Fonte: O autor, 2023

Um caso importante é o que apenas  $G_1$  possui grau máximo 3, pois resultará que  $G_1$  é cúbico e  $G_2$  é o  $C_3$  ou o grafo trivial. Além disso, nesse caso se  $G_1$  é conformável, temos que  $G$  é conformável.

**Lema 10.** *Se  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $\Delta(G_1) = 3$ ,  $\Delta(G_2) \leq 2$  e  $def(G) \leq 3$ , então o grafo  $G_1$  é cúbico,  $G_2 = C_3$  ou  $G_2$  é o grafo trivial. Além disso, se  $G_1$  é conformável, então  $G$  é conformável.*

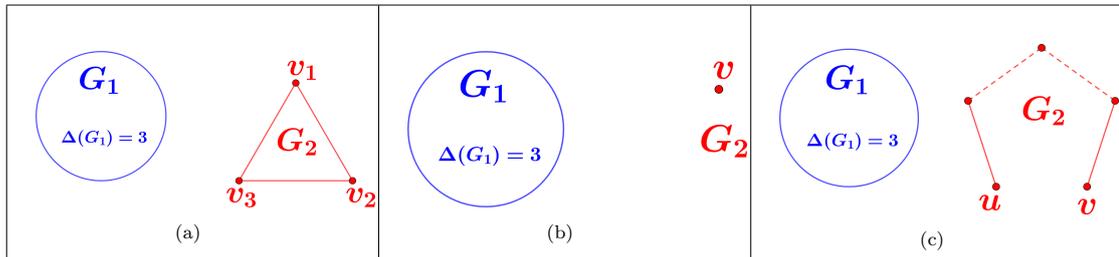
*Demonstração.* Observe que  $G_2$  é a união de ciclos com caminhos, pois  $\Delta(G_2) \leq 2$ .

1. Se  $G_2$  tem uma componente conexa que é um ciclo, então necessariamente  $G_2$  é o  $C_3$  e é única, pois cada vértice em  $G_2$  aumenta a deficiência de  $G$  em uma unidade (Figura 16a). Caso contrário,  $def(G) > 3$ .
2. Se  $G_2$  tem um vértice isolado, então necessariamente  $G_2$  é o grafo trivial, pois  $\Delta(G_1) = 3$  e, se  $V(G_2) = \{v\}$ , resulta que  $def(G) = 3$ . Caso contrário,  $def(G) > 3$  (Figura 16b).
3. Se  $G_2$  tem algum caminho  $P_k$  com  $k > 1$ , então  $def(G) \geq 4$ , pois existem dois vértices  $u$  e  $v$  em  $G_2$  de grau 1 (Figura 16c).

Em quaisquer dos casos  $G_1$  é um grafo cúbico, pois  $def(G) \leq 3$ .

Agora provamos que se  $G_1$  é conformável, então  $G$  é conformável. Seja  $\varphi_1$  uma coloração conformável para  $G_1$  com classes de cor  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4$ . Seja  $\varphi_2$  uma coloração de vértices com classes de cor  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$  e  $\mathcal{D}_4$  com pelo menos uma classe de cor vazia, digamos  $\mathcal{D}_4$ , para  $G_2$ . Como  $G_1$  é cúbico e conformável, as quatro classes de cor de  $\varphi_1$  são pares. Considere os dois casos:

Figura 16 - Os três casos que nos faz concluir que  $G_1$  é cúbico. Na Figura 16a, temos o grafo  $G_1$  cúbico e o grafo  $G_2$  é o  $C_3$ . Na Figura 16b, temos o grafo  $G_1$  cúbico e  $G_2$  o grafo trivial. Na Figura 16c, temos o grafo cúbico  $G_1$  e o grafo caminho  $G_2$ .



Fonte: O autor, 2023.

1. Se  $G_2 = C_3$ , então  $|V(G_1 \cup G_2)|$  é ímpar. Assim, a união, duas a duas, das classes de cor de  $\varphi_1$  e de  $\varphi_2$ , isto é,  $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{D}_i$ , com  $1 \leq i \leq 4$ , produzem uma coloração  $\varphi$  com três classes de cor ímpares e uma par. Conclui-se que  $\varphi$  é conformável, pois  $\varphi$  discorda em apenas uma cor da paridade de  $|V(G)|$ ,  $def(G) = 3$ , e  $|V(G)|$  é ímpar.
2. Se  $G_2$  é o grafo trivial, então  $|V(G_1 \cup G_2)|$  é ímpar. Assim, a união, duas a duas, das classes de cor de  $\varphi_1$  e de  $\varphi_2$ , isto é,  $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{D}_i$ , com  $1 \leq i \leq 4$ , produzem uma coloração  $\varphi$  com três classes de cor pares e uma ímpar. Conclui-se que  $\varphi$  é conformável, pois  $\varphi$  discorda em três cores da paridade de  $|V(G)|$ ,  $def(G) = 3$ , e  $|V(G)|$  é ímpar.

Portanto, se  $G_1$  é conformável, então  $G = G_1 \cup G_2$  é conformável.  $\square$

**Lema 11.** *O grafo subcúbico obtido através da união disjunta entre dois grafos conformáveis é conformável.*

*Demonstração.* Sejam  $G_1$  e  $G_2$  grafos conformáveis onde no mínimo um destes é subcúbico e sejam  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  suas colorações conformáveis, respectivamente. Considere  $G$  a união disjunta entre  $G_1$  e  $G_2$ . Se  $def(G) \geq 4$ , pela Observação 1 temos que  $G$  é conformável. Logo, devemos considerar que  $def(G) \leq 3$ . Vamos usar  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  para definir uma coloração conformáveis  $\varphi$  para  $G$ . A prova é dividida em dois casos, ou ambos  $G_1$  e  $G_2$  são subcúbicos ou apenas  $G_1$  é subcúbico.

Considere que  $G_1$  e  $G_2$  são grafos subcúbicos. Note que  $def(G) = def(G_1) + def(G_2)$  e considere os seguintes casos:

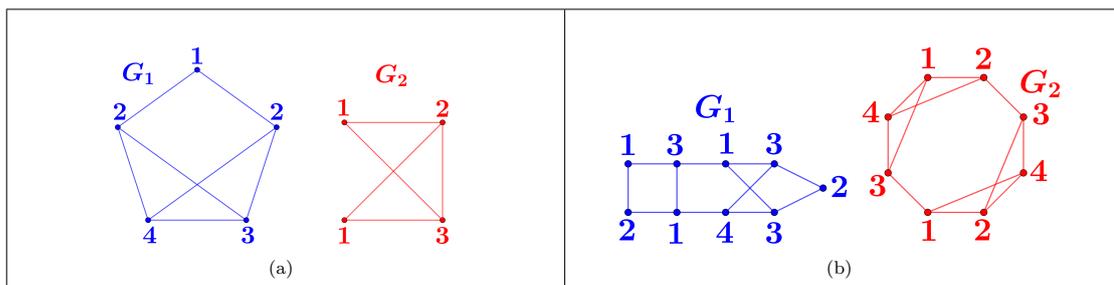
1. Se  $def(G) = 3$ , então  $def(G_1) = 1$  e  $def(G_2) = 2$  ou  $def(G_1) = 3$  e  $def(G_2) = 0$ . Em qualquer caso, do Lema 8 extraímos que em um grafo subcúbico,  $def(G)$  e  $|V(G)|$  possuem a mesma paridade. Assim,  $|V(G_1)|$  é ímpar e  $|V(G_2)|$  é par, concluindo-se que  $|V(G)|$  é ímpar.

(a) Suponha que  $def(G_1) = 1$  e  $def(G_2) = 2$ . Assim,  $\varphi_1$  tem pelo menos três classes de cor ímpares e  $\varphi_2$  tem pelo menos duas classes de cor pares. Logo,

existe uma classe de cor ímpar  $\mathcal{C}_1$  em  $\varphi_1$  e uma classe de cor par  $\mathcal{D}_1$  em  $\varphi_2$ , as quais podemos unir  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{D}_1$  definindo uma classe de cor ímpar. As demais classes de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são unidas, duas a duas, em qualquer ordem, definindo uma coloração conformável  $\varphi$  para  $G$ , pois  $def(G) = 3$  e  $|V(G)|$  é ímpar. A Figura 17a apresenta um exemplo para este caso.

- (b) Suponha que  $def(G_1) = 3$  e  $def(G_2) = 0$ . Como  $G_2$  é cúbico e conformável, cada classe de cor em  $\varphi_2$  de  $G_2$  é par e como  $G_1$  é conformável e de ordem ímpar, existe ao menos uma classe de cor ímpar em  $\varphi_1$ . Portanto, como no caso anterior, existe uma classe de cor ímpar  $\mathcal{C}_1$  em  $\varphi_1$  e uma classe de cor par  $\mathcal{D}_1$  em  $\varphi_2$  e podemos uní-las  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{D}_1$  para definir uma classe de cor ímpar. As demais classes de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são unidas, duas a duas, em qualquer ordem, definindo uma coloração conformável  $\varphi$  para  $G$ , pois  $def(G) = 3$  e  $|V(G)|$  é ímpar. A Figura 17b apresenta um exemplo para este caso.

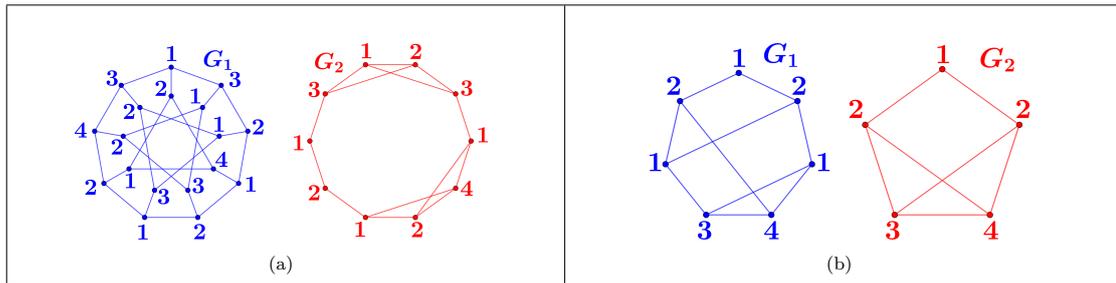
Figura 17 - Coloração conformável para grafos com  $def(G) = 3$ .



Fonte: O autor, 2023.

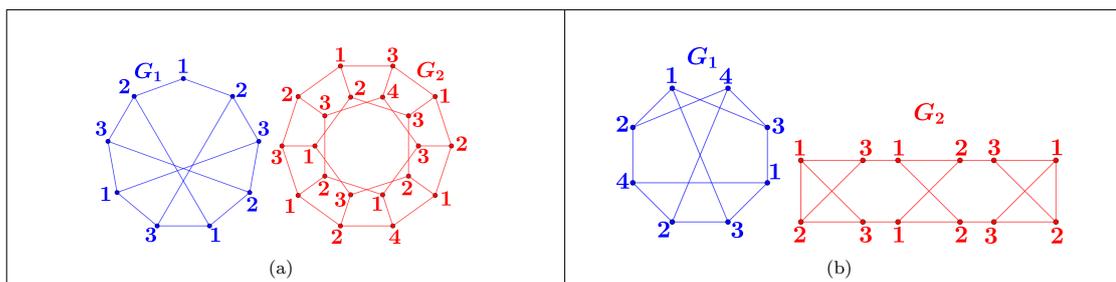
2. Se  $def(G) = 2$ , então  $def(G_1) = 0$  e  $def(G_2) = 2$  ou  $def(G_1) = 1$  e  $def(G_2) = 1$ . Pelo Lema 8, temos que ambos  $V(G_1)$  e  $V(G_2)$  possuem a mesma paridade e portanto  $|V(G)|$  é par.

- (a) Suponha que  $def(G_1) = 0$  e  $def(G_2) = 2$ . Como  $G_1$  é cúbico, cada classe de cor em  $\varphi_1$  é par e como  $def(G_2) = 2$ , então existem no máximo duas classes de cor ímpares. Logo, uma união, duas a duas, das classes de cor de  $\varphi_1$  com  $\varphi_2$ , terá no máximo duas classes de cor ímpares, pois  $def(G) = 2$  e  $|V(G)|$  é par. Conclui-se que  $\varphi$  é conformável e portanto  $G$  é conformável. A Figura 18a apresenta um exemplo para este caso.
- (b) Suponha que  $def(G_1) = 1$  e  $def(G_2) = 1$ . Pelo Lema 8 sabemos que  $|V(G_1)|$  e  $|V(G_2)|$  são ímpares. Assim,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  tem, cada uma, pelo menos três classes de cor ímpares. Realizando a união, duas a duas, de cada classe de cor ímpar de  $\varphi_1$  e de  $\varphi_2$  e das duas demais classes, obtendo pelo menos três classes de cor pares, definimos uma coloração conformável  $\varphi$  para  $G$ , pois  $def(G) = 2$  e  $|V(G)|$  é par. A Figura 18b apresenta um exemplo para este caso.

Figura 18 - Coloração conformável para grafos com  $def(G) = 2$ .

Fonte: O autor, 2023.

3. Se  $def(G) = 1$ , então  $def(G_1) = 1$  e  $def(G_2) = 0$ . Temos pelo Lema 8 que  $|V(G_1)|$  é ímpar e  $|V(G_2)|$  é par e conclui-se que  $|V(G)|$  é ímpar. Como  $G_2$  é cúbico, então toda classe de cor de  $\varphi_2$  é par. Como  $def(G_1) = 1$  e  $|V(G_1)|$  é ímpar, existem pelo menos três classes de cor ímpares em  $\varphi_1$ . Logo a união, duas a duas, das três classes de cor ímpares de  $\varphi_1$  com três das classes de cor pares de  $\varphi_2$  e a união das demais duas classes, produzem uma coloração conformável  $\varphi$  para  $G$ , pois  $def(G) = 1$  e  $|V(G)|$  é ímpar. A Figura 19a apresenta um exemplo para este caso.
4. Se  $def(G) = 0$ , então  $def(G_1) = 0$  e  $def(G_2) = 0$ . É imediato que  $G$  é conformável, pois  $G_1$  e  $G_2$  são cúbicos e possuem apenas classes de cor pares. A união, duas a duas, das classes de cor de  $\varphi_1$  e de  $\varphi_2$  produzem uma coloração conformável  $\varphi$  para  $G$ , pois cada classe de cor em  $\varphi$  é par. A Figura 19b apresenta um exemplo para este caso.

Figura 19 - Exemplos de coloração conformável para  $G$  com  $def(G) = 1$  e  $def(G) = 0$ .

Fonte: O autor, 2023.

Se apenas  $G_1$  é subcúbico, isto é,  $\Delta(G_1) = 3$ , então  $\Delta(G_2) \leq 2$ . Como  $def(G) \leq 3$ , pelo Lema 10, tem-se que  $G_1$  é cúbico e  $G_2 = C_3$  ou  $G_2$  é o grafo trivial e, além disso,  $G = G_1 \cup G_2$  é conformável.  $\square$

Note que as argumentações no Lema 11 se baseiam essencialmente na definição de conformabilidade e na restrição da deficiência de  $G$ , isto é,  $def(G) \leq 3$ . Logo, é fácil ver que esta propriedade pode ser generalizada quando  $G$  possui  $n$  componentes conexas.

Note também que o caso quando  $\Delta(G_2) \leq 2$  no Lema 11 é válido até mesmo quando  $G_2$  é não-conformável, pois  $def(G) \geq 4$ .

### 3.2 Coloração anticonformável para grafos subcúbicos conexos e a conformabilidade dos grafos subcúbicos

Nesta seção, introduzimos uma coloração de vértices que nos auxiliará na investigação da conformabilidade de grafos subcúbicos não-conexos. Nos resultados anteriores, sempre consideramos o caso das componentes conexas de  $G$  serem conformáveis e pelo Lema 11 concluímos que  $G$  é conformável. Porém, os resultados anteriores não são suficientes ao tratarmos da união disjunta onde um dos grafos é não-conformável, por exemplo,  $G \cup K_4$  ou  $G \cup K_{3,3}$ , com  $G$  subcúbico.

Portanto, desenvolvemos uma outra coloração de vértices que nos auxilia na prova de conformabilidade para essa situação. Por exemplo, considere um grafo  $G = G_1 \cup K_4$  cúbico, onde  $G_1$  não é o  $K_4$  e nem o  $K_{3,3}$ . Pelo Teorema 15, tem-se que  $G_1$  é conformável e assim  $G_1$  possui uma 4-coloração de vértices  $\varphi$  tal que cada classe de cor de  $\varphi$  é par. Seja  $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  uma 4-coloração de vértices que estende  $\varphi$ , isto é,  $\varphi(v) = f(v)$ , se  $v \in V(G_1)$ . Note que  $f$  não é uma coloração conformável, pois  $|V(G)|$  é par e cada classe de cor de  $f$  é ímpar. Porém, se  $\gamma$  é coloração anticonformável para  $G_1$ , a extensão  $g: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  onde  $\gamma(v) = g(v)$ , se  $v \in V(G_1)$ , é conformável para  $G$ . Portanto, é necessário determinar a coloração anticonformável para auxiliar na determinação da conformabilidade.

Um resultado de coloração anticonformável é que o grafo obtido da união disjunta entre grafos regulares anticonformáveis é conformável.

**Teorema 16.** *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos  $k$ -regulares. Se  $G$  e  $H$  são anticonformáveis, então  $G \cup H$  é conformável.*

*Demonstração.* Sejam  $\pi$  e  $\mu$  colorações anticonformáveis, respectivamente, para  $G$  e  $H$ . Considere os seguintes casos:

1. Se  $|V(G)|$  e  $|V(H)|$  são pares, então  $|V(G \cup H)|$  é par. Como  $G$  e  $H$  são ambos anticonformáveis e regulares, cada classe de cor de  $\pi$  e  $\mu$  é ímpar. Seja  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor ímpares de  $\pi$  e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_{k+1}$  as classes de cor ímpares de  $\mu$ . Portanto, ao tomarmos a união par-a-par de  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  com  $i \in 1, \dots, k+1$  como as classes de cor de uma coloração  $\varphi$  para  $G \cup H$ , temos que cada classe de cor de  $\varphi$  para  $G \cup H$  é par. Consequentemente,  $G \cup H$  é conformável.
2. Se  $|V(G)|$  é ímpar e  $|V(H)|$  é par, então  $|V(G \cup H)|$  é ímpar. Como  $G$  e  $H$  são ambos anticonformáveis e regulares, então cada classe de cor de  $\pi$  é par e cada classe de cor de  $\mu$  é ímpar. Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor pares de  $\pi$  e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2,$

$\mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_{k+1}$  as as classes de cor ímpares de  $\mu$ . Logo, tomando a união par-a-ímpar de  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  com  $i \in 1, \dots, k+1$  como as classes de cor de uma coloração  $\varphi$  para  $G \cup H$ , temos que cada classe de cor de  $\varphi$  para  $G \cup H$  é ímpar. Concluimos que  $G \cup H$  é conformável.

3. Se  $|V(G)|$  e  $|V(H)|$  são ímpares, então  $|V(G \cup H)|$  é par. Como  $G$  e  $H$  são ambos anticonformáveis e regulares, então todas as classes de cores de  $\pi$  e  $\mu$  são pares. Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor par de  $\pi$  e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_{k+1}$  as classes de cor par de  $\mu$ . Assim, ao tomarmos a união par-a-par de  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  com  $i \in 1, \dots, k+1$  como as classes de cor de uma coloração  $\varphi$  para  $G \cup H$ , temos que cada classe de cores de  $\varphi$  para  $G \cup H$  é par. Concluimos que  $G \cup H$  é conformável.

□

**Teorema 17.** *Um grafo subcúbico conexo  $G$  é não-anticonformável se, e somente se,  $G$  é o prisma triangular.*

*Demonstração.* Seja  $\Delta(G) = 3$ . Se  $G$  é o prisma triangular, então  $G$  é não-anticonformável, pois em toda 4-coloração de vértices de  $G$  existem no mínimo duas classes de cor par. Note que  $K_4$  é anticonformável, porque  $def(K_4) = 0$  e toda classe de cor é unitária em qualquer 4-coloração de vértices. Considere que  $G$  não é o prisma triangular nem é o  $K_4$ . Pelo Teorema de [3], existe uma 3-coloração de vértices  $\varphi$  de  $G$ . Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  as classes de cor de  $\varphi$ . Nós lembramos que o Lema 8 afirma que  $def(G)$  possui mesma paridade que  $|V(G)|$ , pois  $\Delta(G) = 3$ . Veja que  $|V(G)| = |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| + |\mathcal{C}_3|$ . Dessa forma, ou apenas uma classe de cor possui mesma paridade que  $|V(G)|$  ou todas possuem a mesma paridade que  $|V(G)|$ . A partir de agora, construiremos uma 4-coloração de vértices  $\phi$  com as classes de cor  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  de  $\varphi$  e uma nova classe de cor  $\mathcal{C}_4$ .

1. Suponha que  $|V(G)|$  é par. Vamos considerar os dois casos: quando somente uma das classes, digamos  $\mathcal{C}_2$  é par e o caso em que as três classes de cor  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  são pares.
  - (a) Suponha que somente uma das classes, digamos  $\mathcal{C}_2$  é par. Se  $def(G) > 0$ , pelo Lema 8 temos que  $def(G)$  é par e logo  $def(G) \geq 2$ . Tomemos a 4-coloração de vértices  $\phi$  com as classes de cor  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4 = \emptyset$ . Como o número de classes de cor de mesma paridade (classes de cor par) é 2, isto é, não ultrapassa sua deficiência, temos que  $G$  é anticonformável. Logo, devemos supor que  $def(G) = 0$ .
    - i. Se  $\mathcal{C}_2$  é vazio, isto implica que  $G$  é bipartido. Pelo Teorema de Hall [33], as partes têm mesma cardinalidade, isto é,  $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_3|$ . Se  $G = K_{3,3}$ , podemos definir uma coloração anticonformável  $\varphi$  exposta na Figura 20. Se  $G \neq K_{3,3}$  cada parte tem cardinalidade pelo menos 5. Seja  $G[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3]$  a

bipartição de  $G$ . Assim, existe um vértice  $v \in \mathcal{C}_1$  e vértices  $u, w \in \mathcal{C}_3$  não adjacentes a  $v$ . Atribuímos a cor 4 para  $u$  e  $w$  em  $\phi$  de  $G$ . Atribuímos também uma cor 2 a outro vértice  $z \in \mathcal{C}_1$  em  $\phi$  de  $G$ . Dessa forma,  $\phi$  é uma coloração anticonformável para  $G$  com classes de cor  $\mathcal{C}_1 \setminus \{v, z\}$ ,  $\mathcal{C}_2 = \{z\}$ ,  $\mathcal{C}_3 \setminus \{u, w\}$  e  $\mathcal{C}_4 = \{u, v, w\}$  que são classes de cor ímpar.

- ii. Se  $\mathcal{C}_2$  não é vazio, então podemos tomar um vértice  $v \in \mathcal{C}_2$  e atribuir a cor 4 em  $\phi$  de  $G$ . Temos que  $\phi$  é uma 4-coloração de vértices com classes de cor  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2 \setminus \{v\}$ ,  $\mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4$  que são classes de cor ímpar e conclui-se que  $G$  é anticonformável.

(b) Suponha que  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  são pares.

- i. Suponha que  $def(G) > 0$ . Como  $|V(G)|$  é par, pelo Lema 1, temos que  $def(G)$  também é par. Portanto,  $def(G) \geq 2$ . Modificamos a coloração  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$  para definir uma coloração anticonformável para  $G$ , atribuindo a cor 4 a um vértice  $v$  de uma classe de cor não vazia, digamos  $\mathcal{C}_1$ , obtendo a coloração  $(\mathcal{C}_1 \setminus v, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4 = v)$  para  $G$ , onde as partes  $\mathcal{C}_1 \setminus v$  e  $\mathcal{C}_4 = v$  são ímpares, e as partes  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  são pares. Como o número de classes de cor com a mesma paridade que  $|V(G)|$  é  $2 \leq def(G)$ ,  $G$  é anticonformável.

- ii. Suponha que  $def(G) = 0$ . Logo,  $G$  é cúbico.

- Suponha que exista uma classe de cor vazia, digamos  $\mathcal{C}_1 = \emptyset$ . Portanto,  $G$  é cúbico bipartido com bipartição  $(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$ . Dado  $v \in \mathcal{C}_2$ , produzimos uma coloração  $(\mathcal{C}_1 = v, \mathcal{C}_2 \setminus v, \mathcal{C}_3)$ , que é uma coloração para  $G$  com uma parte par ( $\mathcal{C}_3$ ) e duas partes ímpares ( $\mathcal{C}_1 = v$  e  $\mathcal{C}_2 \setminus v$ ). Portanto, uma coloração anticonformável correspondente foi exibida no Caso 1a desta prova.

- Suponha que não exista nenhuma classe de cor vazia. Dividimos em três casos:

Suponha que cada classe de cor  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  de  $\varphi$  possua cardinalidade 2. Portanto,  $|V(G)| = 6$ . Existem apenas dois grafos cúbicos com  $|V(G)| = 6$ : o  $K_{3,3}$  e o grafo do prisma triangular. Se  $G$  é o  $K_{3,3}$ , então há uma coloração anticonformável  $\varphi$  para  $K_{3,3}$  representada na Figura 20. Se  $G$  é o grafo do prisma triangular, então  $G$  não é anticonformável, pois em toda coloração de  $G$  com 4 vértices, existem pelo menos duas classes de cor pares.

Suponha que exista uma classe de cor com cardinalidade pelo menos 4, digamos  $|\mathcal{C}_1| \geq 4$ . Vamos considerar dois casos possíveis.

- Suponha que  $|\mathcal{C}_2| = |\mathcal{C}_3| = 2$ . Como existem 6 arestas incidentes em cada classe de cor  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$ , e  $G$  é cúbico, então  $|\mathcal{C}_1| = 4$ . Portanto, não há vértices em  $\mathcal{C}_2$  que sejam adjacentes a vértices em  $\mathcal{C}_3$ , concluimos

que todo vértice de  $\mathcal{C}_2$  é adjacente a vértices em  $\mathcal{C}_1$ . Suponha que  $v \in \mathcal{C}_3$  e  $N(v) \subset \mathcal{C}_1$ . Modificamos a coloração  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$  a fim de definir uma coloração  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \cup v, \mathcal{C}_3 \setminus v)$  para  $G$ , tendo duas classes de cor ímpares e uma classe de cor par. Portanto, uma coloração anticonformável correspondente foi exibida no Caso 1a desta prova.

– Suponha que  $|\mathcal{C}_2| \geq 4$ .

Suponha que algum vértice  $c \in \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$  possui três vértices adjacentes em  $\mathcal{C}_1$ . Assumindo que  $c \in \mathcal{C}_3$  e  $N(c) \subset \mathcal{C}_1$ , modificamos a coloração  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$  para definir a coloração  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \cup c, \mathcal{C}_3 \setminus c)$  em  $G$ , tendo duas classes de cor ímpares  $(\mathcal{C}_2 \cup c, \mathcal{C}_3 \setminus c)$  e uma classe de cor par  $(\mathcal{C}_1)$ . Portanto, uma coloração anticonformável correspondente foi exibida no Caso 1a desta prova.

Suponha que nenhum vértice  $c \in \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$  possui três vértices adjacentes em  $\mathcal{C}_1$ . Nossa estratégia é definir um conjunto independente  $S = \{a, b, c\}$  com  $a \in \mathcal{C}_1$ ,  $b \in \mathcal{C}_2$  e  $c \in \mathcal{C}_3$ , e atribuir a cor 4 aos vértices  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Escolhamos  $c \in \mathcal{C}_3$ . Pela hipótese,  $c$  é adjacente exatamente a dois vértices com a mesma cor, assumindo que  $N(c) = \{x, y, z\}$  com  $x, y \in \mathcal{C}_2$  e  $z \in \mathcal{C}_1$ . Como  $|\mathcal{C}_2| \geq 4$ , existe um vértice  $b \in \mathcal{C}_2 \setminus N(c)$ . Pela hipótese,  $b$  é adjacente exatamente a dois vértices com a mesma cor. Como  $|\mathcal{C}_1| \geq 4$  e há no máximo três vértices em  $\mathcal{C}_1$  que são adjacentes a  $b$  e  $c$ , existe um vértice  $a \in \mathcal{C}_1 \setminus (N(b) \cup N(c))$ . Modificamos a coloração  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$  para definir a coloração  $(\mathcal{C}_1 \setminus a, \mathcal{C}_2 \setminus b, \mathcal{C}_3 \setminus c, \mathcal{C}_4 = \{a, b, c\})$ , onde cada parte é ímpar. Como  $|V(G)|$  é par e o número de classes de cor com a mesma paridade que  $|V(G)|$  é  $0 \leq def(G) = 0$ ,  $G$  é anticonformável.

2. Suponha que  $|V(G)|$  é ímpar. Devemos considerar dois casos: ou apenas uma classe de cor, digamos  $\mathcal{C}_1$ , é ímpar, ou  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  são classes de cor ímpares.

(a) Suponha que  $\mathcal{C}_1$  é ímpar e  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  são pares. Como  $|V(G)|$  é ímpar, pelo Lema 1,  $def(G)$  é ímpar. Portanto,  $def(G) \geq 1$ . Considere 4-coloração de vértices  $\varphi$  com as classes de cor  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4 = \emptyset$ . Como o número de classes de cor com a mesma paridade  $(\mathcal{C}_1)$  que  $|V(G)|$  é  $1 \leq def(G)$ ,  $G$  é anticonformável.

(b) Suponha que  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  são ímpares. Considere os dois casos a seguir:

i. Suponha que  $def(G) > 1$ . Portanto,  $def(G) \geq 3$ . Considere uma 4-coloração de vértices  $\phi$  com as classes de cor  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4 = \emptyset$ . Como o número de classes de cor com a mesma paridade  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3)$  que  $|V(G)|$  é  $3 \leq def(G)$ ,  $G$  é anticonformável.

ii. Suponha que  $def(G) = 1$ . Como  $G$  é subcúbico com  $def(G) = 1$ ,  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  são obtidos pela coloração de Brooks e  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_3$  são classes de cores

ímpares, pelo Lema 9, existe um vértice  $v \in \mathcal{C}_1$  que não é adjacente a um vértice  $u \in \mathcal{C}_3$ . Modificamos a coloração  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$  para definir uma coloração anticonformável para  $G$ , atribuindo a cor 4 a  $u$  e  $v$ , obtendo a coloração  $(\mathcal{C}_1 \setminus v, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3 \setminus u, \mathcal{C}_4 = u, v)$  para  $G$ , onde as partes  $\mathcal{C}_1 \setminus v, \mathcal{C}_3 \setminus u$  e  $\mathcal{C}_4$  são classes de cor par e  $\mathcal{C}_2$  é a única classe de cor ímpar. Como o número de classes de cor com a mesma paridade ( $\mathcal{C}_2$ ) que  $|V(G)|$  é  $1 \leq def(G) = 1$ ,  $G$  é anticonformável.

Portanto, temos que  $G$  é anticonformável, exceto se  $G$  é o prisma triangular.  $\square$

**Teorema 18.** *Um grafo subcúbico  $G$  é não-conformável se, e somente se:*

1.  $G$  é uma união disjunta entre um número ímpar de componentes de  $K_4$  ou;
2.  $G$  é uma união disjunta entre um número ímpar de componentes de  $K_4$  com o prisma triangular ou;
3.  $G$  é uma união disjunta entre um número par de componentes de  $K_4$  com o  $K_{3,3}$ .

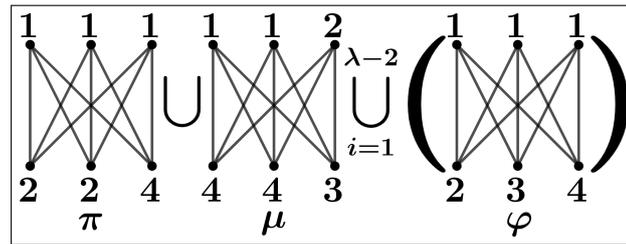
*Demonstração.* Se  $G$  é conexo, então pelo Teorema 15 temos que  $G$  é conformável, exceto se  $G$  é o  $K_4$  ou  $K_{3,3}$ , isto é,  $G$  é a união disjunta de uma única componente de  $K_4$  ou  $G$  é a união disjunta entre zero componentes de  $K_4$  com o  $K_{3,3}$ . Logo, devemos considerar o caso do grafo  $G$  ser não-conexo. Seja  $G$  um grafo subcúbico não-conexo. Vamos descrever  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ , onde  $G_1$  possui apenas componentes conexas que não são  $K_4$  nem  $K_{3,3}$ ,  $G_2$  possui apenas componentes conexas isomorfas a  $K_4$  e  $G_3$  possui apenas componentes conexas isomorfas a  $K_{3,3}$ . Observamos que se  $def(G_1) \geq 4$ , então  $G$  é conformável, pela Observação 1. Dessa forma, vamos considerar  $def(G_1) \leq 3$ .

Vamos considerar os 7 casos possíveis nos quais os grafos  $G_1, G_2$  e  $G_3$  são ou não vazios.

1. Suponha que  $G = G_1$ . Pelo Lema 11 e pelo Lema 10, temos que  $G$  é conformável.
2. Suponha que  $G = G_2$  e que  $G$  tenha  $\lambda > 1$  componentes conexas. Veja que  $|V(G)| = 4\lambda$  e portanto par. Como  $K_4$  possui uma única 4-coloração de vértices, temos que cada classe de cor tem cardinalidade  $\lambda$ .
  - (a) Se  $\lambda$  é par, então temos  $G$  é conformável, pois cada classe de cor tem cardinalidade par.
  - (b) Se  $\lambda$  é ímpar, então temos que  $G$  é não-conformável, pois cada classe de cor de  $G$  é ímpar e  $|V(G)|$  é par.
3. Suponha que  $G = G_3$  e que  $G$  tenha  $\lambda \geq 1$  componentes conexas. Se  $\lambda = 1$ , então pelo Teorema 15 temos que  $G$  é não-conformável. Suponha que  $\lambda \geq 2$ . Vamos dar

uma receita para colorir  $G$  e mostrar que  $G$  é conformável. Sejam  $\pi$ ,  $\mu$  e  $\varphi$  as 4-colorações de vértices de  $K_{3,3}$ , apresentadas na Figura 20. Se  $\lambda$  é par, então podemos atribuir a cada componente a coloração  $\varphi$ . Se  $\lambda$  é ímpar, então atribuímos a duas componentes a coloração de  $\pi$  e  $\mu$ , respectivamente, e para  $\lambda - 2$  componentes a coloração  $\varphi$ . Logo as cardinalidades das classes de cor são  $|\mathcal{C}_1| = 5 + 3(\lambda - 2) = 3\lambda - 1$ ,  $|\mathcal{C}_2| = |\mathcal{C}_4| = 3 + (\lambda - 2) = \lambda + 1$  e  $|\mathcal{C}_3| = 1 + (\lambda - 2) = \lambda - 1$  pares e portanto a coloração com as classe de cor  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$  é conformável para  $G$ .

Figura 20 - Três colorações de vértices auxiliares de  $K_{3,3}$ .



Fonte: O autor, 2023.

4. Suponha que  $G = G_1 \cup G_2$  e que  $G_2$  tem  $\lambda \geq 1$  componentes conexas.

Consideremos os dois casos:

(a) Suponha que  $\lambda$  é par. Pelos Casos 1 e 2a desta prova, temos respectivamente que  $G_1$  e  $G_2$  são conformáveis. Assim, pelo Lema 11 temos que  $G$  é conformável.

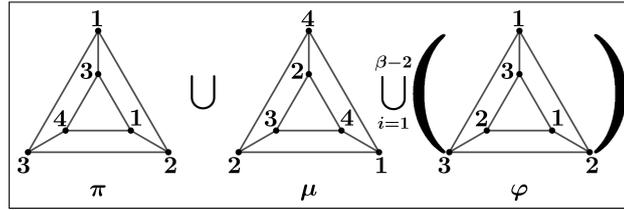
(b) Suponha que  $\lambda$  é ímpar. Vamos considerar dois subcasos.

i.  $G_1$  consiste em  $\beta \geq 1$  componentes conexas isomorfas ao prisma triangular. Observe que  $G$  é um grafo cúbico. Consideremos os dois subcasos seguintes:

A. Suponha que  $\beta = 1$ . Pelo Teorema 17, temos que  $G_1$  é não-anticonformável, isto é, em qualquer 4-coloração de vértices ao menos uma classe de cor de  $G_1$  é par. Pelo Caso 2 da prova temos que cada classe de cor em  $G_2$  é ímpar. Assim,  $G$  possui ao menos uma classe de cor ímpar. Como  $def(G) = 0$  e  $|V(G)|$  é par, temos que  $G$  é não-conformável.

B. Suponha que  $\beta \geq 2$ . Vamos dar uma receita para colorir  $G$  e mostrar que  $G$  é conformável. Sejam  $\pi$ ,  $\mu$  e  $\varphi$  as 4-colorações de vértices do prisma triangular, apresentadas na Figura 21. Atribuiremos  $\pi$  e  $\mu$  a duas componentes e  $\varphi$  a  $\beta - 2$  componentes. Logo as classes de cor de  $G_1$ ,  $|\mathcal{C}_i| = 3 + 2(\beta - 2) = 2\beta - 1$  com  $1 \leq i \leq 3$  e  $|\mathcal{C}_4| = 3$  são ímpares. Pelo Caso 2 da prova temos que cada classe de cor de  $G_2$  é ímpar. Conclui-se que  $G$  possui uma 4-coloração de vértices com classe de cor par e portanto  $G$  é conformável.

Figura 21 - Três colorações de vértices auxiliares do prisma triangular.



Fonte: O autor, 2023.

ii. Suponha que ao menos uma componente conexa de  $G_1$  não seja o prisma triangular.

A. Suponha que  $G_1$  possui ao menos uma componente conexa  $H$  com  $\Delta(H) < 3$ . Como  $def(G) \leq 3$ , tem-se pelo Lema 10, que  $G_1$  é o grafo  $C_3$  ou o grafo trivial.

- Suponha que  $G_1$  seja o grafo  $C_3$ . Como  $|V(G_2)|$  é par, temos que  $|V(C_3 \cup G_2)|$  é ímpar. Além disso, temos que cada classe de cor de  $G_2$  é ímpar e as três classes de cor de  $C_3$  são unitárias. Portanto,  $C_3 \cup G_2$  possui em qualquer 4-coloração de vértices, três classes de cor par e uma única classe de cor ímpar. Como  $def(C_3 \cup G_2) = 3$  e temos exatamente três classes de cor com paridade diferente a paridade de  $|V(C_3 \cup G_2)|$ , isto é, o número de classes de cor de paridade diferente a ordem de  $C_3 \cup G_2$  não excede a deficiência, conclui-se que  $G = C_3 \cup G_2$  é conformável.
- Suponha que  $G_1$  é o grafo trivial e seja  $V(G_1) = \{v\}$ . Analogamente ao caso anterior, temos que  $|V(G_2)|$  é par e conseqüentemente  $|V(G_1 \cup G_2)|$  é ímpar. Como no caso anterior,  $G_2$  possui cada classe de cor ímpar e temos que  $G_1$  possui uma única classe de cor que é unitária. Logo,  $G_1 \cup G_2$  possui em qualquer 4-coloração de vértices, três classes de cor ímpar e uma única classe de cor par, isto é, o número de classes de cor com paridade diferente a  $|V(G_1 \cup G_2)|$  é 1. Como  $def(G_1 \cup G_2) = 3$ , temos que  $G = G_1 \cup G_2$  é conformável.

Logo, devemos supor que cada componente conexa  $H$  de  $G_1$  é subcúbica. E neste caso, provaremos de acordo com a paridade da ordem de  $G_1$ .

B. Suponha que toda componente conexa de  $H$  é subcúbica e  $|V(G_1)|$  é par. Neste caso, pelo Lema 8 temos que  $def(G_1) = 0$  ou  $def(G_1) = 2$ .

- Suponha que  $def(G_1) = 0$ , então toda componente conexa de  $G$  é cúbica. Seja  $H$  uma componente conexa cúbica de  $G_1$  não isomorfa ao prisma triangular. Pelo Teorema 17,  $H$  é anticonformável. Como  $def(H) = 0$ , temos que  $|V(H)|$  é par. Assim, existe uma 4-coloração

de vértices para  $H$  tal que cada classe de cor é ímpar. Pelo Caso 2 da prova, temos que  $H \cup G_2$  é conformável. Pelo Caso 1 e pelo Lema 11,  $G = (G_1 \setminus H) \cup (H \cup G_2)$  é conformável.

- Suponha que  $def(G_1) = 2$ . Logo existe uma componente conexa subcúbica  $H$  de  $G_1$  não isomorfa ao prisma triangular com  $def(H) = 1$  ou  $def(H) = 2$ .
  - Suponha que  $def(H) = 1$ . Note que como  $def(H)$  é ímpar, pelo Lema 8,  $|V(H)|$  é ímpar. Como  $def(H) = 1$ , temos que  $H$  não é o prisma triangular. Assim, pelo Teorema 17 temos que  $H$  é anticonformável. Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4$  as classes de cor de uma coloração anticonformável para  $H$ . Pela definição de anticonformável,  $H$  possui o número de classes de cor com paridade igual a paridade de sua ordem  $|V(H)|$  em no máximo  $def(H) = 1$ . Como  $|V(H)|$  é ímpar, temos que exatamente três classes de cor têm cardinalidade par e uma única, digamos  $\mathcal{C}_1$ , tem cardinalidade ímpar. Pelo Caso 2 da prova, temos que cada classe de cor em  $G_2$  é ímpar. Logo  $H \cup G_2$  possui uma única classe de cor par. Como  $|V(H \cup G_2)|$  é ímpar, pela definição de coloração conformável, temos que  $H \cup G_2$  é conformável. Pelos Caso 1 e Lema 11, temos que  $G = (G_1 \setminus H) \cup (H \cup G_2)$  é conformável.
  - Suponha que  $def(H) = 2$ . Note que como  $def(H)$  é par, pelo Lema 8,  $|V(H)|$  é par. Como  $def(H) = 2$ , temos que  $H$  não é o prisma triangular. Assim, pelo Teorema 17 temos que  $H$  é anticonformável. Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4$  as classes de cor de uma 4-coloração de vértices anticonformável para  $H$ . Pela definição de coloração anticonformável, existem no máximo duas classes de cor com mesma paridade que  $|V(H)|$ .

Suponha que exista exatamente duas classes de cor par, digamos  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_4$ . Neste caso,  $H \cup G_2$  possui duas classes de cor ímpar e duas classes de cor par. Como  $|V(H \cup G_2)|$  é par e  $def(H \cup G_2) = 2$ , pela definição de coloração conformável,  $H \cup G_2$  é conformável.

Suponha que  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4$  são classes de cor ímpar. Neste caso,  $H \cup G_2$  possui cada classe de cor par e portanto  $H \cup G_2$  é conformável.

- C. Suponha que toda componente conexa de  $H$  é subcúbica e  $|V(G_1)|$  é ímpar. Neste caso, pelo Lema 8 temos que  $def(G_1) = 1$  ou  $def(G_1) = 3$ .
- Suponha que  $def(G_1) = 1$ . Logo existe uma componente conexa

subcúbica  $H$  de  $G_1$  não isomorfa ao prisma triangular com  $def(H) = 1$  e todas as outras componentes conexas não-vazias de  $G_1$  são cúbicas. Pelo Teorema 17,  $H$  é anticonformável. Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4$  as classes de cor de uma coloração anticonformável para  $H$ . Pela definição de anticonformável,  $H$  possui o número de classes de cor com paridade igual a paridade de sua ordem  $|V(H)|$  em no máximo  $def(H) = 1$ . Assim, esta possui uma única classe de cor ímpar, digamos  $\mathcal{C}_1$ . Como  $H \cup G_2$  possui ordem ímpar,  $def(H \cup G_2) = 1$  e  $H \cup G_2$  possui uma única classe de cor par, temos que  $H \cup G_2$  é conformável. Pelo Lema 11,  $G = (G_1 \setminus H) \cup (H \cup G_2)$  é conformável.

- Suponha que  $def(G_1) = 3$ . Logo existe uma componente conexa subcúbica  $H$  de  $G_1$  não isomorfa ao prisma triangular com  $def(H) \leq 3$ .
  - Se  $def(H) = 1$ , temos que o processo é feito analogamente ao caso anterior.
  - Se  $def(H) = 2$ , então existirá outra componente conexa  $H'$  de  $G_1$  com  $def(H') = 1$  e realiza-se processo similar ao caso anterior.
  - Suponha que  $def(H) = 3$ . Como  $def(H)$  é ímpar, pelo Lema 8,  $|V(H)|$  é ímpar. É suficiente provar  $H \cup G_2$  é conformável. Sabemos que a paridade de  $|V(H \cup G_2)|$  é ímpar e que cada classe de cor de  $G_2$  é ímpar. Como  $def(H \cup G_2) = 3$ , se mostrarmos que existe uma 4-coloração de vértices  $\varphi$  de  $H$  com uma classe de cor par em  $H$ , concluímos que  $H \cup G_2$  é conformável. Como  $def(H) = 3$ , pelo Teorema 17 sabemos que  $H$  é anticonformável. Se  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4$  são classes de cor de uma coloração anticonformável para  $H$ , então pela definição no máximo três dessas classes de cor são ímpares e portanto existe pelo menos uma classe de cor par, isto é,  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  e  $\mathcal{C}_4$  é a coloração  $\varphi$  procurada. Conclui-se que  $H \cup G_2$  é conformável e pelo Lema 11,  $G = (G_1 \setminus H) \cup (H \cup G_2)$  é conformável.

5. Suponha que  $G = G_1 \cup G_3$ .

- (a) Se  $G_3$  consiste em  $\lambda > 1$  componentes conexas de  $K_{3,3}$ , então temos que pelos casos 1 e 3,  $G_1$  e  $G_3$  são conformáveis, respectivamente, e portanto, pelo Lema 11,  $G = G_1 \cup G_3$  é conformável.
- (b) Se  $G_3 = K_{3,3}$ , então temos os seguintes casos:
  - i. Se  $G_1$  possui alguma componente conexa  $H$  com  $\Delta(H) < 3$ , então pelo Lema 10 temos que  $H$  é o  $C_3$  ou o grafo trivial.

- Suponha que  $G_1$  é o grafo  $C_3$ . Como  $|V(G_3)|$  é par, temos que  $|V(C_3 \cup G_3)|$  é ímpar. Além disso, temos que  $G_3$  possui no mínimo duas classes de cor ímpar e as três classes de cor de  $C_3$  são unitárias. Portanto,  $C_3 \cup G_2$  possui uma 4-coloração de vértices com três classes de cor par e uma única classe de cor ímpar. Como  $def(C_3 \cup G_3) = 3$  e temos exatamente três classes de cor com paridade diferente a paridade de  $|V(C_3 \cup G_3)|$ , isto é, o número de classes de cor de paridade diferente a ordem de  $C_3 \cup G_3$  não excede a deficiência, conclui-se que  $G = C_3 \cup G_3$  é conformável.
- Suponha que  $G_1$  é o grafo trivial e seja  $V(G_1) = \{v\}$ . Analogamente ao caso anterior, temos que  $|V(G_3)|$  é par e conseqüentemente  $|V(G_1 \cup G_3)|$  é ímpar. Como no caso anterior,  $G_3$  possui no mínimo duas classe de cor ímpar e temos que  $G_1$  possui uma única classe de cor que é unitária. Logo,  $G_1 \cup G_3$  possui uma 4-coloração de vértices com três classes de cor par e uma única classe de cor ímpar, isto é, o número de classes de cor com paridade diferente a  $|V(G_1 \cup G_3)|$  é 3. Como  $def(G_1 \cup G_3) = 3$ , temos que  $G = G_1 \cup G_2$  é conformável.

Logo, devemos supor que cada componente conexa  $H$  de  $G_1$  é subcúbico. Neste caso, provaremos de acordo com a paridade da ordem de  $G_1$  visto nos dois casos posteriores.

- ii. Suponha que cada componente conexa  $H$  de  $G_1$  seja subcúbica e  $|V(G_1)|$  é par. Pelo Lema 8 e como  $def(G) \leq 3$ , temos que  $def(G_1) = 0$  ou  $def(G_1) = 2$ .
  - Suponha que  $def(G_1) = 0$ . Logo  $G_1$  possui apenas componentes conexas cúbicas.
    - Se  $G_1$  é o prisma triangular, temos que  $G$  é conformável, pois podemos tomar a coloração  $\varphi$  da Figura 21.
    - Se  $G_1$  são  $\lambda > 1$  componentes conexas do prisma triangular, então tomamos  $\varphi$ ,  $\pi$  e  $\mu$ , 4-colorações de vértices do prisma triangular, apresentadas na Figura 21. Atribuiremos  $\pi$  e  $\mu$  a duas componentes conexas de  $G_1$  e  $\varphi$  a  $\beta - 2$  componentes conexas de  $G_1$ . Logo as classes de cor  $|C_i| = 3 + 2(\lambda - 2) = 2\lambda - 1$  com  $1 \leq i \leq 3$  e  $|C_4| = 3$  são ímpares. E tomando a coloração  $\varphi$  para  $G_3 = K_{3,3}$  da Figura 20, temos que cada classe de cor em  $G$  é par e assim  $G$  é conformável.
    - Se  $G_1$  possui ao menos uma componente conexa que não é o prisma triangular, então temos que existe uma componente conexa  $H$  que é anticonformável. Isto é, cada classe de cor desta coloração é ímpar. Tomando a coloração  $\varphi$  para  $G_3 = K_{3,3}$ , temos que cada classe de

cor de  $H \cup G_3$  é par e assim existe uma coloração conformável de  $G_3 \cup H$ . Logo  $G$  é conformável.

- Suponha que  $def(G_1) = 2$ . Como  $G_1$  é conformável, então este possui no máximo duas classes de cor ímpares. Logo, existem duas classes de cor par. Sejam  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_4$  estas classes. Se tomarmos a coloração  $\mu$  para  $G_3 = K_{3,3}$  da Figura 20, temos que as classes de cor 1 e 4 para  $G$  se mantêm pares, isto é,  $G$  possui no máximo duas classes de cor ímpares. Como  $def(G) = 2$ , temos que  $G$  é conformável.
- iii. Suponha que cada componente conexa  $H$  de  $G_1$  é subcúbica e  $|V(G_1)|$  é ímpar. Pelo Lema 8 e como  $def(G) \leq 3$ , temos que  $def(G_1) = 1$  ou  $def(G_1) = 3$ .
  - Suponha que  $def(G_1) = 1$ . Logo existe uma componente conexa  $H$  de  $G_1$  com  $def(H) = 1$ . Se considerarmos uma coloração anticonformável para  $G_3 = K_{3,3}$ , temos que cada classe de cor de  $G_3$  é ímpar e o caso é análogo ao caso (ii) do caso 2b na demonstração.
  - Suponha que  $def(G_1) = 3$ . O mesmo argumento do caso anterior é aplicado.

6. Suponha que  $G = G_2 \cup G_3$ . Observe que  $G$  é um grafo cúbico.

(a) Suponha que  $G_2$  tem um número ímpar de componentes conexas de  $K_4$ .

- i.  $G_3$  possui  $\gamma = 1$  componentes conexas de  $K_{3,3}$ . Como  $G_2$  é anticonformável, pois cada classe de cor de  $G_2$  é ímpar e  $|V(G_2)|$  é par, e  $G_3$  é anticonformável pelo Teorema 17. Pelo Teorema 16 temos que  $G$  é conformável.
- ii. Suponha que  $G_3$  possui  $\gamma > 1$  componentes conexas de  $K_{3,3}$ .
  - A. Se  $\gamma = 2$ , podemos considerar a coloração  $\pi$  e  $\mu$  de  $K_{3,3}$  dada pela Figura 20. Como cada classe de cor em 2 componentes de  $K_{3,3}$  é ímpar e cada classe de cor de  $G_2$  é ímpar, temos que  $G$  possui uma coloração conformável.
  - B. Se  $\gamma \geq 3$ , pelo Caso 6ai sabemos que  $G_2 \cup K_{3,3}$  é conformável. Se  $H$  é o grafo formado pela união disjunta de  $\gamma - 1 \geq 2$  componentes conexas de  $K_{3,3}$ , pelo Caso 3 temos que  $H$  é conformável. Usando o Lema 11 temos que  $G = G_2 \cup K_{3,3} \cup H = G_2 \cup G_3$  é conformável.

(b) Suponha que  $G_2$  tem um número par de componentes conexas de  $K_4$ .

- i. Suponha que  $G_3$  possui  $\gamma = 1$  componentes conexas de  $K_{3,3}$ . Como  $K_{3,3}$  possui no mínimo duas classes de cor ímpar e  $G_2$  possui cada classe de cor de cardinalidade  $\lambda$ , isto é, par temos que existirá ao menos uma classe de

cor de  $G_2 \cup G_3$  que é ímpar. Como  $|V(G)|$  é par e  $def(G) = 0$ , temos que  $G$  é não-conformável.

- ii. Suponha que  $G_3$  possua  $\gamma > 1$  componentes conexas de  $K_{3,3}$ . Como pelo Caso 2 da prova  $G_2$  é conformável e pelo Caso 3 da prova  $G_3$  é conformável, então temos que pelo Lema 11,  $G$  é conformável.

7. Suponha que  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ . Considere os seguintes casos:

- (a)  $G_2$  tem um número par de componentes conexas.

Pelos Casos 2 e 5 temos que  $G_2$  e  $G_1 \cup G_3$  são conformáveis. Pelo Lema 11, temos que  $G$  é conformável.

- (b)  $G_2$  tem um número ímpar de componentes conexas. Pelo Caso 6a, temos que  $G_2 \cup G_3$  é conformável e pelo Caso 1, temos que  $G_1$  é conformável. Pelo Lema 11,  $G$  é conformável.

□

## 4 CONFORMABILIDADE FORTE: A COLORAÇÃO CONFORMÁVEL QUE ESTENDE PARA COLORAÇÃO TOTAL

Neste capítulo, discutimos sobre os aspectos algorítmicos da complexidade de tempo do problema CONFORMABILIDADE. Provamos que CONFORMABILIDADE é um problema polinomial para grafos subcúbicos em contraste com o problema COLORAÇÃO TOTAL [34] que é NP-completo para grafos cúbicos.

Lembramos que a conformabilidade é a coloração de vértices que é herdada de uma coloração total *Tipo 1*. Chetwynd e Hilton [6] observaram que uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total de um grafo  $G$  induzia uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração dos vértices que possuía algumas propriedades que eles definiram como uma coloração cuja a paridade das classes de cor diferiam da paridade do conjunto de vértices em no máximo  $def(G)$  classes.

Quando temos uma coloração conformável de um grafo sabemos que esse grafo pode ser *Tipo 1* ou *Tipo 2*. Praticamente, encontramos diversas colorações conformáveis que não se estendem imediatamente para uma coloração total *Tipo 1*. Ou porque o grafo é *Tipo 2*, ou porque a coloração conformável não se encaixa naturalmente na estrutura de uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total do grafo.

Idealmente, quando o grafo fosse do *Tipo 1*, nós gostaríamos de fazer a “engenharia reversa”, isto é, dada uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração conformável especial dos vértices, nós gostaríamos de estender essa coloração para uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total do grafo.

Dando início a nossa formulação, nós levantamos a seguinte questão: será que a definição de conformabilidade feita por Chetwynd e Hilton [6] não capturou todas as propriedades que definem a coloração induzida dos vértices em uma coloração *Tipo 1*? Ou de outra maneira: será que a definição de conformabilidade *per se* feita por Chetwynd e Hilton [6] representa totalmente a coloração dos vértices herdada de uma coloração total *Tipo 1*? Ou de uma outra forma diferente: quais as propriedades adicionais que temos que requerer em uma coloração conformável, além dela *per se* para que ela se estenda para uma  $(\Delta + 1)$ -coloração total em um grafo?

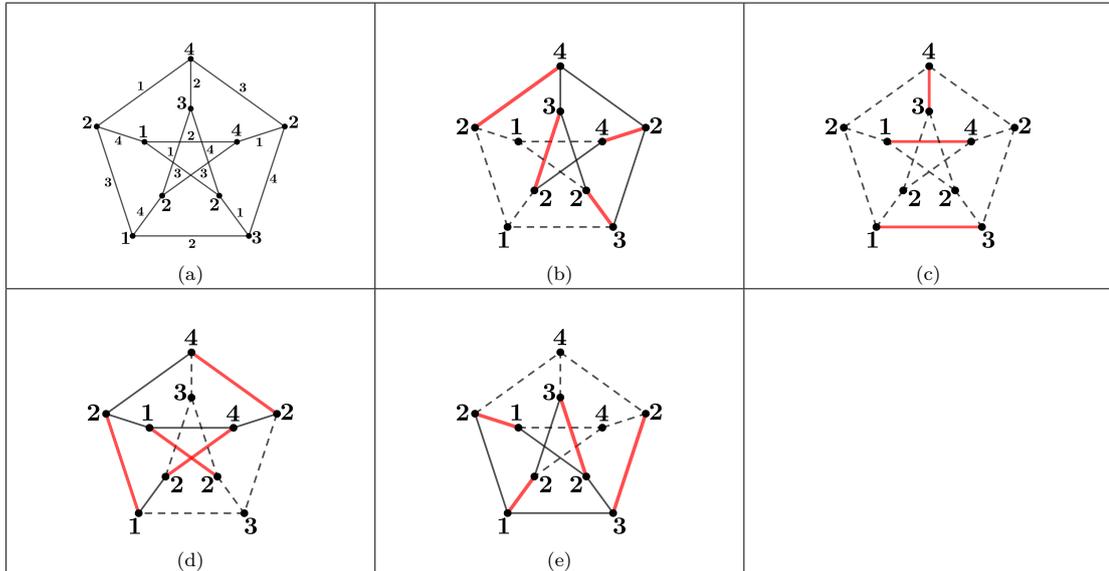
Seja  $G = (V, E)$  um grafo conexo com grau máximo  $\Delta$ . Seja  $V_\Delta$  o conjunto de vértices  $v$  tal que  $d(v) = \Delta$ . Dizemos que uma  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices  $\phi$  é uma *coloração conformável forte* com cada classe de cor  $\mathcal{C}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, \Delta + 1\}$  se:

1. Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ , existe um emparelhamento  $M_i$  saturando cada vértice  $V_\Delta \setminus \mathcal{C}_i$ ;
2. A coleção  $\{M_1, M_2, \dots, M_{\Delta+1}\}$  particiona  $E(G)$ .

Um grafo  $G$  é *conformável forte* se existe uma coloração conformável forte para  $G$ . A Figura 22a apresenta um exemplo de uma coloração conformável forte para o grafo de

Petersen e as Figuras 22b, 22c, 22d, e 22e apresentam quatros emparelhamentos  $M_i$  que satura os vértices em  $V_\Delta \setminus \mathcal{C}_i$  com  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  que particiona  $E(G)$ .

Figura 22 - O grafo de Petersen com uma 4-coloração total em (22a). Um emparelhamento  $M_i$ , para  $i \in \{1, \dots, 4\}$  em (22b), (22c), (22d) e (22e), em que  $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$  particiona  $E(G)$ .



Fonte: O autor, 2023.

**Lema 12.** *Se  $G$  é conformável forte, então  $G$  é conformável.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conformável forte com  $(\Delta + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  para  $G$ . Considere os dois casos seguintes:

1. Suponha que  $M_i$  satura cada vértice em  $V \setminus \mathcal{C}_i$ . Neste caso,  $|\mathcal{C}_i|$  possui mesma paridade que  $|V|$ .
2. Suponha que  $M_i$  não satura cada vértice em  $V \setminus \mathcal{C}_i$ . Neste caso, pela primeira parte da definição de conformável forte, existe um vértice  $v \in V \setminus \mathcal{C}_i$  tal que  $d(v) < \Delta$ . Logo,  $\Delta - d(v) > 0$  e portanto a cor  $i$  não está representada em  $v$ , pois existe a ausência de uma aresta com a cor  $i$ . Se a paridade de  $|\mathcal{C}_i|$  é diferente de  $|V|$ , então  $def(G)$  é computada pela falta dessa aresta. Portanto, o número de classes de cor com paridade diferente não excede a deficiência, isto é,  $G$  é conformável.

□

**Teorema 19.** *O grafo  $G$  é conformável forte se, e somente se,  $G$  é Tipo 1.*

*Demonstração.* Suponha que  $G$  é Tipo 1. Seja  $\alpha : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ . Pelo Teorema 3, a restrição de  $\alpha$  para  $V$  é conformável. Como  $G$  é Tipo 1, cada classe de cor está representada em cada vértice em  $V_\Delta$ . Portanto, se  $v \in V_\Delta \setminus \mathcal{C}_i$ , então existe

exatamente uma aresta incidente a  $v$  com a cor  $i$ . Como as arestas com a cor  $i$  estão definidas por  $\alpha$ , essas arestas correspondem ao emparelhamento  $M_i$ , saturando os vértices em  $V_\Delta \setminus \mathcal{C}_i$ . Além disso, pela definição de  $\alpha$ , cada aresta de  $G$  pertence a exatamente um emparelhamento  $M_i$ . Concluimos que a restrição de  $\alpha$  para  $V$  é uma coloração conformável forte para  $G$ .

Suponha que existe uma coloração conformável forte  $\varphi: V \rightarrow \{1, \dots, \Delta + 1\}$  para  $G$ . Logo, pelo Lema 12,  $G$  é conformável. Definiremos uma  $(\Delta + 1)$ -coloração total  $\alpha$  de  $G$  através de  $\varphi$ . Atribuimos a cor  $i$  da classe de cor  $\mathcal{C}_i$  de  $\varphi$  para as arestas saturadas do emparelhamento  $M_i$  que satura os vértices em  $V_\Delta \setminus \mathcal{C}_i$ . É suficiente mostrar que nenhum par de arestas adjacentes possuem mesma cor e nenhuma aresta  $e = uv$  incidente ao vértice  $v$  possui mesma cor que  $v$ . De fato, duas arestas com mesma cor possuem ao mesmo emparelhamento  $M_i$ , portanto não são adjacentes. Como  $M_i$  é um emparelhamento de  $V_\Delta \setminus \mathcal{C}_i$ , nenhuma aresta de cor  $i$  incide no vértice  $v \in \mathcal{C}_i$ . Logo,  $\alpha$  é uma  $(\Delta + 1)$ -coloração total de  $G$ . Concluimos que  $G$  é Tipo 1.  $\square$

Outro fato importante é que existem grafos em que *toda* coloração conformável nesses grafos é forte. No estado da arte esta característica é conhecida, por exemplo, nos grafos completos de ordem ímpar, no grafo de Petersen e no grafo ciclo  $C_n$  com  $n = 6$ . Verificamos isso pelo fato de todos esses grafos possuírem uma única coloração conformável. Naturalmente, podemos definir um problema de decisão chamado CONFORMABILIDADE FORTE. Estamos preocupados com o seguinte problema de decisão.

#### COLORAÇÃO CONFORMÁVEL FORTE

**Instância:** Um grafo conexo  $G = (V, E)$ .

**Questão:** Existe uma coloração conformável forte para  $G$ ?

**Corolário 6.** *O problema de decisão COLORAÇÃO CONFORMÁVEL FORTE é NP-completo até para grafos bipartidos regulares.*

**Teorema 20.** *Sejam  $G$  um grafo conformável com uma coloração conformável  $\varphi$  e os vértices  $u$  e  $v$  de  $V(G)$  são adjacentes e possuem grau máximo  $\Delta(G)$ . Se  $\varphi$  é uma coloração conformável forte, então*

1. o vértice  $v$  tem pelo menos dois vizinhos com cores diferentes;
2. se  $N(v) \setminus \{u\}$  possui cada um, uma única cor  $i$  e  $N(u) \setminus \{v\}$  possui cada um, uma única cor  $j$ , então  $i = j$ .

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conformável com uma coloração conformável forte  $\varphi$ .

1. Suponha por absurdo que  $v$  não tem pelo menos dois vértices vizinhos de cores diferentes. Seja  $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_{\Delta(G)}\}$ . Logo, temos que todo  $v_i$ ,  $i \in$

$\{1, \dots, \Delta(G)\}$ , pertencem a uma mesma classe de cor, digamos  $\mathcal{C}_k$ . Como para todo  $i \in \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$ ,  $\varphi(v_i) = k$ , concluímos que  $\varphi(v) \neq k$ . Assim, o vértice  $v$  pertence a  $V_\Delta \setminus \mathcal{C}_k$  e não é saturado pelo emparelhamento  $M_k$  de  $G[V_\Delta \setminus \mathcal{C}_k]$ . Portanto,  $v$  não possui a cor  $k$  representada, resultando em uma contradição.

2. Suponha por absurdo  $N(v) \setminus \{u\}$  possui uma única cor  $i$ ,  $N(u) \setminus \{v\}$  possui uma única cor  $j$  e que  $i \neq j$ . Sejam  $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_{\Delta(G)-1}\} \cup \{u\}$  e  $N(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_{\Delta(G)-1}\} \cup \{v\}$ . Como  $v$  possui grau máximo, para algum  $i \in \{1, 2, \dots, \Delta(G)-1\}$ ,  $\varphi(v_i) = i$  e  $\varphi(v) \neq i$ , conclui-se que  $uv \in M_i$ . Similarmente, como  $u$  possui grau máximo, para algum  $j \in \{1, 2, \dots, \Delta(G)-1\}$  com  $i \neq j$ ,  $\varphi(u_j) = j$  e  $\varphi(u) \neq j$ , conclui-se que  $uv \in M_j$ . Como  $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ , resulta em uma contradição.

□

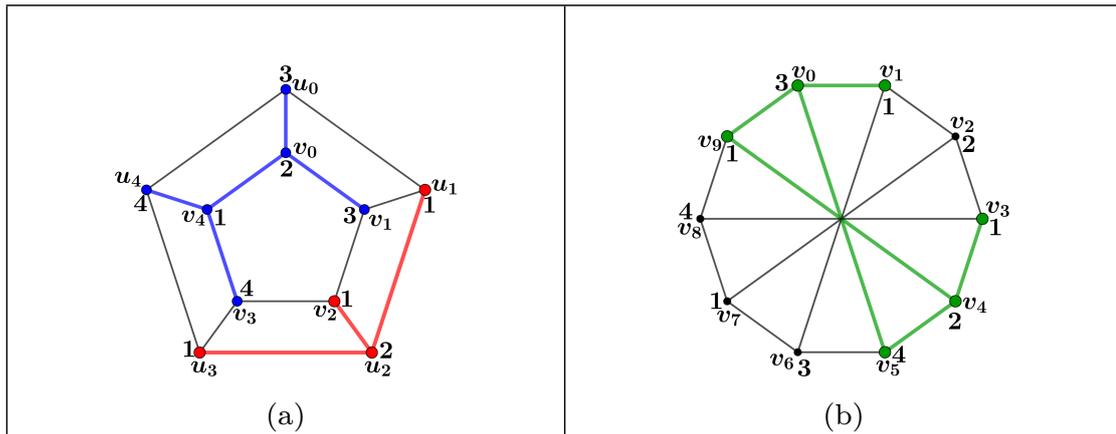
**Teorema 21.** *Sejam  $G$  um grafo conformável com uma coloração conformável  $\varphi$ ,  $uv$  e  $vw$  de  $E(G)$  tal que  $u$  e  $w$  possuem grau máximo  $\Delta(G)$ . Se  $\varphi$  é uma coloração conformável forte, então  $N(u) \setminus \{v\}$  e  $N(w) \setminus \{v\}$  possuem pelo menos dois elementos com cores diferentes.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que  $N(u) \setminus \{v\}$  e  $N(w) \setminus \{v\}$  não possuem pelo menos dois elementos com cores diferentes. Sejam  $N(u) \setminus \{v\} = \{u_1, u_2, \dots, u_{\Delta(G)-1}\}$  e  $N(w) \setminus \{v\} = \{w_1, w_2, \dots, w_{\Delta(G)-1}\}$ . Logo, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, \Delta(G)-1\}$ ,  $u_i$  e  $w_i$  pertencem a mesma classe de cor, digamos  $\mathcal{C}_k$ . Sendo assim,  $\varphi(u_i) = \varphi(w_i) = k$  e concluímos que  $\varphi(u) \neq k$  e  $\varphi(w) \neq k$ . Assim o vértice  $u$  e  $w$  pertencem a  $V_\Delta \setminus \mathcal{C}_k$ . Como  $\varphi$  é uma coloração conformável forte, existe um emparelhamento  $M_k$  de  $G[V_\Delta \setminus \mathcal{C}_k]$ . Se  $\varphi(v) = k$ , então todas as adjacências de  $v$  e  $w$  possuem mesma cor e pelo Teorema 20, temos que  $\varphi$  não é forte, uma contradição. Logo, considere que  $\varphi(v) \neq k$ , portanto, note que se  $uv \in M_k$ , então  $vw \notin M_k$ . Concluímos que  $w$  não é saturado por  $M_k$  de  $G[V_\Delta \setminus \mathcal{C}_k]$ , uma contradição. □

Note que os Teoremas 20 e 21 nos fornecem uma forma alternativa de determinar se uma coloração conformável de um grafo  $G$  não é forte. Isto é, dada uma coloração conformável  $\varphi$ , temos que se alguma das proibições na Figura 23 ocorrem em  $\varphi$ , então não existe uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total  $\phi$  para  $G$  tal que  $\phi|_V = \varphi$ . Na Figura 23a apresentamos o grafo  $G(5, 1)$ . O subgrafo induzido por  $\{u_1, u_2, u_3, v_2\}$  (em vermelho) apresenta um exemplo da aplicação do Teorema 20.1. Observe que  $\varphi_1(u_1) = \varphi(v_2) = \varphi(u_3) = 1$  e como  $N(u_2) = \{u_1, v_2, u_3\}$ , concluímos que  $\varphi_1$  não é forte. Além disso, o subgrafo induzido  $\{u_0, u_4, v_0, v_1, v_3\}$  (em azul) apresenta um exemplo da aplicação do Teorema 21. Sejam  $u := v_0$  e  $v := v_4$ . Observe que  $N(u) \setminus \{v\}$  possui cada uma a cor 3 e  $N(v) \setminus \{u\}$  possui cada um a cor 1, porém  $1 \neq 3$ , e concluímos que  $\varphi_1$  não é forte. Na Figura 23b apresentamos o grafo Möbius ladder  $M_{10}$ . O subgrafo induzido por  $\{v_0, v_1, v_3, v_4, v_5, v_9\}$  apresenta um exemplo da aplicação do Teorema 20.2. Sejam  $u := v_0$ ,

$v := v_5$  e  $w := v_4$ . Observe que  $uv \in M_1$  e como  $w$  não é saturado por  $M_k$ , temos que  $\varphi$  não é forte. Além disso, se provado que qualquer coloração conformável de um grafo  $G$  não é forte, então  $G$  não é *Tipo 1*. Os Teoremas 20 e 21 também nos permitem observar candidatos a colorações fortes e que pode possibilitar no estudo de determinar o número cromático total.

Figura 23 - O grafo de Petersen generalizado  $G(5, 1)$  e o grafo Möbius ladder  $M_{10}$  com uma coloração conformável  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , respectivamente, que não são fortes.



Legenda: Na Figura 23a,  $\varphi_1$  não satisfaz as condições necessárias do Teorema 20. Em vermelho, temos o subgrafo induzido que faz  $\varphi_1$  não satisfazer o Teorema 20.1 e em azul, temos o subgrafo induzido que faz  $\varphi_1$  não satisfazer o Teorema 20.2. Na Figura 23b, em verde, temos o subgrafo induzido que faz  $\varphi_2$  não satisfazer a condição necessária do Teorema 21. Além disso, o vértice  $v_2$  possui três vizinhos de mesma cor, e assim  $\varphi_2$  não satisfaz a condição necessária do Teorema 20.1 e os vértices  $v_2$  e  $v_4$  possuem a cor 2 e os vértices  $v_1$  e  $v_3$  possuem a cor 1, porém  $1 \neq 2$  e assim  $\varphi_2$  não satisfaz a condição necessária do Teorema 20.2.

Fonte: O autor, 2023.

O grafo ciclo  $C_n$  tal que  $n$  não é múltiplo de 3 e  $n \neq 5$ ; o grafo de Petersen generalizado  $G(5, 1)$  e o grafo Möbius ladder  $M_{10}$  exemplificam classes de grafos em que nenhuma coloração conformável satisfaz a condição necessária dada pelo Teorema 20.1.

**Teorema 22.** *Toda coloração conformável para o grafo:*

1. ciclo  $C_n$  tal que  $n$  não é múltiplo de 3 e  $n \neq 5$
2. de Petersen generalizado  $G(5, 1)$
3. Möbius ladder  $M_{10}$

possui ao menos um vértice  $v$  com grau máximo tal que  $v$  possui todos os vizinhos com mesma cor.

*Demonstração.* Supomos por absurdo que para esses grafos todo vértice  $v$  com grau máximo possui pelo menos dois vizinhos com cor diferente.

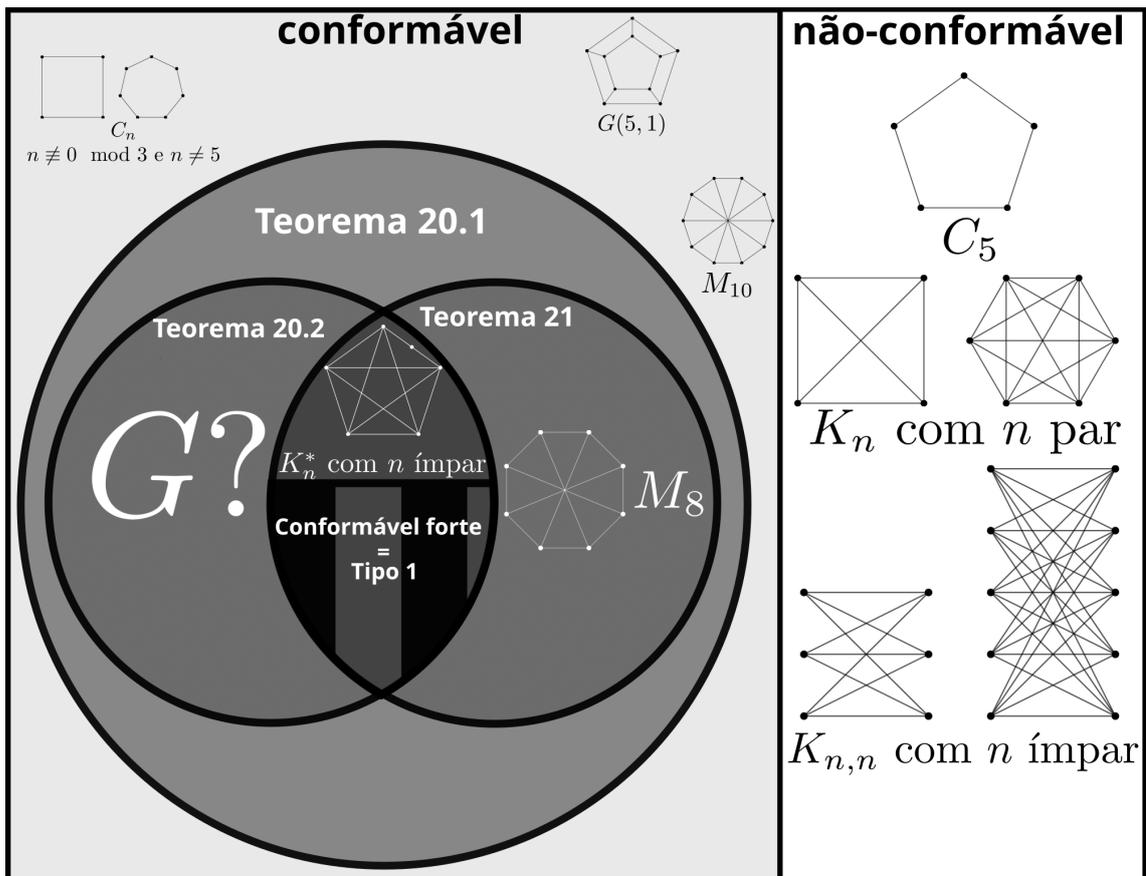
1. Seja  $V(C_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ . Observe que em qualquer coloração conformável  $\varphi$  de  $C_n$  em que todo vértice com grau máximo possui pelo menos dois vizinhos com cor diferente, os vértices consecutivos  $v_{i-1}$ ,  $v_i$  e  $v_{i+1}$  devem possuir três cores distintas, isto é,  $\varphi$  é definido, sem perda de generalidade, como  $\varphi(v_i) = i \pmod 3$ . Como  $n$  não é múltiplo de 3, temos que para  $n \equiv 1 \pmod 3$ ,  $\varphi$  não é uma coloração de vértices, pois  $\varphi(v_{n-1}) = \varphi(v_0) = 0$  e se ajustarmos como  $\varphi(v_{n-1}) = 1$ , temos que  $\varphi(v_{n-3}) = 1$  e portanto existe um vértice  $v = v_{n-2}$  que possui todos os vizinhos com mesma cor. Se  $n \equiv 2 \pmod 3$ , então  $\varphi(v_1) = 1$  e  $\varphi(v_{n-2}) = 1$ , resultando em que existe um vértice  $v$  de grau máximo que possui todos os vizinhos com mesma cor.
2. Observe que o grafo  $G(5, 1)$  é cúbico e possui 10 vértices. Logo, para qualquer coloração conformável do grafo  $G(5, 1)$ , existe uma classe de cor com cardinalidade 4, digamos  $\mathcal{C}_1$ . Pela estrutura do grafo, temos que essa classe de cor com cardinalidade 4 possui dois vértices no ciclo externo e dois no ciclo interno. Sem perda de generalidade, assumamos que  $u_1, u_3 \in \mathcal{C}_1$  e, por consequência  $u_2, u_4, u_0, v_1, v_3 \notin \mathcal{C}_1$ . Pelo Teorema 20, temos que  $v_2 \notin \mathcal{C}_1$ . Caso contrário, o vértice  $u_2$  possuirá todos os vértices vizinhos de mesma cor. Logo,  $v_4, v_0 \in \mathcal{C}_1$ , porém  $v_4$  é adjacente a  $v_0$ , uma contradição.
3. Observe que o grafo  $M_{10} \simeq C_{10}(1, 5)$  é bipartido com bipartições  $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9\}$  e  $V_2 = \{v_0, v_2, v_4, v_6, v_8\}$ , é cúbico e possui 10 vértices. Logo, para qualquer coloração conformável do grafo  $M_{10}$ , existe uma classe de cor com cardinalidade 4, digamos  $\mathcal{C}_1$ . É fácil ver, por inspeção que  $\mathcal{C}_1 \subset V_1$ . Podemos assumir, sem perda de generalidade que  $v_1 \notin \mathcal{C}_1$  e assim  $\mathcal{C}_1 = \{v_3, v_5, v_7, v_9\}$ . Como  $N(v_4) = \{v_3, v_5, v_9\}$ , temos que  $v_4$  possui todos os vizinhos com mesma cor, uma contradição.

□

Em contraste com os grafos do Teorema 22, a Möbius ladder  $M_8$  possui toda coloração conformável, satisfazendo a condição necessária dada pelo Teorema 20.1, e isso é verificado facilmente, pois toda coloração conformável do  $M_8$  possui cada classe de cor com cardinalidade 2.

Além disso, é possível mostrar por exaustão que  $M_8$  possui colorações conformáveis que satisfazem a condição necessária do Teorema 21, e que toda coloração conformável do  $M_8$  não satisfaz a condição necessária do Teorema 20.2. Um exemplo fácil de verificar, em que toda coloração conformável satisfaz as condições necessárias dos três teoremas, é o grafo de Chen e Fu, porém ele é *Tipo 2*. Ademais não é conhecido um grafo  $G$  em que qualquer coloração conformável satisfaça a condição necessária do Teorema 20.2 e não satisfaça a do Teorema 21. A Figura 24 apresenta uma esquematização em conjuntos, mostrando conjuntos intermediários dos grafos que satisfazem algumas condições necessárias dos teoremas.

Figura 24 - Um esquema conciso baseado em conjuntos que expõe certos grafos conformáveis e não-conformáveis.



Legenda: Observe que no conjunto de grafos conformáveis, há uma relação de conjuntos entre as condições necessárias de cada teorema. O grafo ciclo  $C_n$  tal que  $n \neq 0 \pmod{3}$  e  $n \neq 5$ ,  $G(5, 1)$  e  $M_{10}$  são exemplos de grafos que qualquer coloração conformável não satisfaz a condição necessária para o Teorema 20.1.

Fonte: O autor, 2023.

## 5 SOBRE A CONFORMABILIDADE DA UNIÃO DISJUNTA DOS GRAFOS

Neste capítulo, consideramos várias uniões disjuntas de grafos de acordo com serem ou não conformáveis ou anticonformáveis. Classificamos a união de dois grafos  $k$ -regulares na classe de grafos conformáveis e anticonformáveis. Classificamos várias uniões de grafos na classe de grafos não-conformáveis e não-anticonformáveis. Além disso, mostramos três classes de grafos não-anticonformáveis conexos: duas de grafos não regulares e uma do grafo  $k$ -regular  $H_k$  com  $k$  ímpar. Por fim, provamos que a união disjunta entre  $H_k$  e um número ímpar de componentes conexas de  $K_{k+1}$  é não-conformável.

### 5.1 A união de dois grafos regulares nas classes conformável e anticonformável.

Nesta seção, provamos que para grafos regulares, a união de grafos conformáveis é conformável; a união de grafos anticonformáveis é conformável; e a união de um grafo conformável com um grafo anticonformável é anticonformável.

No Capítulo 3, temos o Teorema 16 que caracteriza a união disjunta entre grafos anticonformáveis regulares. Esse teorema é usado como auxílio na classificação de grafos subcúbicos conformáveis. Assim, é natural questionarmos sobre a união onde os grafos  $k$ -regulares são conformáveis e onde um  $k$ -regular é conformável e um  $k$ -regular é anticonformável. O Teorema 23 caracteriza a união entre grafos  $k$ -regulares conformáveis e o Teorema 24 caracteriza a união entre um grafo  $k$ -regular conformável e um grafo  $k$ -regular anticonformável.

**Teorema 23.** *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos  $k$ -regulares. Se  $G$  e  $H$  são conformáveis, então  $G \cup H$  é conformável.*

*Demonstração.* Sejam  $\pi$  e  $\mu$  colorações conformáveis, respectivamente, para  $G$  e  $H$ . Considere os seguintes casos:

1. Se  $|V(G)|$  e  $|V(H)|$  são pares, então  $|V(G \cup H)|$  é par. Como  $G$  e  $H$  são ambos conformáveis e regulares, cada classe de cor de  $\pi$  e  $\mu$  é par. Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor par de  $\pi$  e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_{k+1}$  as classes de cor par de  $\mu$ . Assim, tomando a junção par-a-par de  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  com  $i \in 1, \dots, k+1$  como as classes de cor de uma coloração  $\varphi$  para  $G \cup H$ , temos que cada classe de cor de  $\varphi$  é par. Logo,  $G \cup H$  é conformável.
2. Se  $|V(G)|$  é ímpar e  $|V(H)|$  é par, então  $|V(G \cup H)|$  é ímpar. Como  $G$  e  $H$  são ambos conformáveis e regulares, cada classe de cor de  $\pi$  é ímpar e cada classe de cor de  $\mu$

é par. Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor ímpar de  $\pi$  e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_{k+1}$  as classes de cor par de  $\mu$ . Assim, tomando a junção par-a-par de  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  com  $i \in 1, \dots, k+1$  como as classes de cor de uma coloração  $\varphi$  para  $G \cup H$ , temos que cada classe de cor de  $\varphi$  é ímpar. Concluimos que  $G \cup H$  é conformável.

3. Se  $|V(G)|$  e  $|V(H)|$  são ímpares, então  $|V(G \cup H)|$  é par. Como  $G$  e  $H$  são ambos conformáveis e regulares, cada classe de cor de  $\pi$  e  $\mu$  é ímpar. Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor ímpar de  $\pi$  e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_{k+1}$  as classes de cor ímpar de  $\mu$ . Assim, tomando a junção par-a-par de  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  com  $i \in 1, \dots, k+1$  como as classes de cor de uma coloração  $\varphi$  para  $G \cup H$ , temos que cada classe de cor de  $\varphi$  é par. Logo,  $G \cup H$  é conformável.

□

**Teorema 24.** *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos  $k$ -regulares. Se  $G$  é anticonformável e  $H$  é conformável, então  $G \cup H$  é anticonformável.*

*Demonstração.* Seja  $\pi$  uma coloração anti-conformável de  $G$  e  $\mu$  uma coloração conformável de  $H$ . Considere os seguintes casos:

1. Se  $|V(G)|$  e  $|V(H)|$  são pares, então  $|V(G \cup H)|$  é par. Como  $G$  é anticonformável e regular, cada classe de cor de  $\pi$  é ímpar. Como  $H$  é conformável e regular, cada classe de cor de  $\mu$  é par. Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor ímpar de  $\pi$  e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_{k+1}$  as classes de cor par de  $\mu$ . Assim, tomando a união par a par de  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  com  $i \in 1, \dots, k+1$  como as classes de cor de uma coloração  $\varphi$  de  $G \cup H$ , temos que cada classe de cor de  $\varphi$  em  $G \cup H$  é ímpar. Portanto,  $G \cup H$  é anticonformável.
2. Se  $|V(G)|$  é ímpar e  $|V(H)|$  é par, então  $|V(G \cup H)|$  é ímpar. Como  $G$  é anticonformável e regular, cada classe de cor de  $\pi$  é par. Como  $H$  é conformável e regular, cada classe de cor de  $\mu$  é par. Seja  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor par de  $\pi$ , e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_{k+1}$  as classes de cor par de  $\mu$ . Então, tomando a união par a par de  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  com  $i \in 1, \dots, k+1$  como as classes de cor de uma coloração  $\varphi$  de  $G \cup H$ , temos que cada classe de cor de  $\varphi$  em  $G \cup H$  é par. Portanto,  $G \cup H$  é anticonformável.
3. Se  $|V(G)|$  é par e  $|V(H)|$  é ímpar, então  $|V(G \cup H)|$  é ímpar. Como  $G$  é anticonformável e regular, cada classe de cor de  $\pi$  é ímpar. Como  $H$  é conformável e regular, cada classe de cor de  $\mu$  é ímpar. Seja  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor ímpar de  $\pi$  e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_{k+1}$  as classes de cor ímpar de  $\mu$ . Assim, ao tomar a união par a par de  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  com  $i \in 1, \dots, k+1$  como as classes de cor de uma coloração  $\varphi$  para  $G \cup H$ , temos que cada classe de cor de  $\varphi$  para  $G \cup H$  é ímpar. Portanto,  $G \cup H$  é anticonformável.

4. Se  $|V(G)|$  e  $|V(H)|$  são ímpares, então  $|V(G \cup H)|$  é par. Como  $G$  é anticonformável e regular, cada classe de cor de  $\pi$  é par. Como  $H$  é conformável e regular, cada classe de cor de  $\mu$  é ímpar. Seja  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor par de  $\pi$  e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_{k+1}$  as classes de cor ímpar de  $\mu$ . Portanto, tomando a união par a par de  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  com  $i \in 1, \dots, k+1$  como as classes de cor de uma coloração  $\varphi$  para  $G \cup H$ , temos que cada classe de cor de  $\varphi$  em  $G \cup H$  é ímpar. Então,  $G \cup H$  é anticonformável.

□

## 5.2 Sobre a união de dois grafos nas classes não-conformáveis e não-anticonformáveis

Quando dois grafos  $G$  e  $H$  pertencem às classes não-conformável e não-anticonformável, podemos considerar o grafo  $G \cup H$ , que é a união desses dois grafos. Nesse caso, não podemos afirmar nada diretamente sobre a conformabilidade ou anticonformabilidade de  $G \cup H$ . A união de dois grafos nessas classes não segue um padrão determinístico em relação à conformabilidade. Portanto, a conformabilidade ou anticonformabilidade de  $G \cup H$  precisa ser verificada caso a caso.

Em resumo, a união de dois grafos que pertencem às classes não-conformável e não-anticonformável não apresenta uma propriedade específica e requer uma análise individual para determinar sua conformabilidade. Sendo assim, a união entre as classes de grafos não conformáveis e não anticonformáveis ainda é um problema em aberto. Nesta seção, descrevemos a inclusão de algumas classes de uniões de grafos na tentativa de esboçar o panorama geral do diagrama de união entre as classes não conformáveis e não anticonformáveis (Figura 28). Escolhemos a paridade do grau máximo da união como parâmetro separador neste diagrama.

**Fato 1** (Chetwynd and Hilton [6], 1988). *O grafo completo  $K_n$  é não-conformável se, e somente se,  $n$  é par.*

**Fato 2.** *O grafo completo  $K_n$  é não-anticonformável se, e somente se,  $n$  é ímpar.*

**Teorema 25.** *Seja  $G$  um grafo com  $\Delta(G)$  ímpar.*

1. *Se  $G$  é não-conformável, então*
  - (a) *a união disjunta de um número par de componentes conexas do  $K_{\Delta(G)+1}$  com  $G$  é não-conformável.*
  - (b) *a união disjunta de um número ímpar de componentes conexas do  $K_{\Delta(G)+1}$  com  $G$  é não-anticonformável.*

2. Se  $G$  é não-anticonformável, então

- (a) a união disjunta de um número ímpar de componentes conexas do  $K_{\Delta(G)+1}$  com  $G$  é não-conformável.
- (b) a união disjunta de um número par de componentes conexas do  $K_{\Delta(G)+1}$  com  $G$  é não-anticonformável.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com  $\Delta(G)$  ímpar. Como  $\Delta(G)$  é ímpar,  $|V(K_{\Delta(G)+1})|$  é par. Como  $|V(K_{\Delta(G)+1})|$  é par, a união disjunta das componentes do  $K_{\Delta(G)+1}$ , denotada por  $\mathcal{K}$ , tem uma ordem par. Observamos que  $def(G \cup \mathcal{K}) = def(G)$ .

1. Suponha que  $G$  seja não-conformável.

- (a) Se  $\mathcal{K}$  é a união disjunta de um número par de componentes do  $K_{\Delta(G)+1}$ , então qualquer  $(\Delta(\mathcal{K}) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K}$  possui cada classe de cor par.
  - i. Suponha que  $|V(G)|$  é par. Como  $G$  é não-conformável e tem ordem par, qualquer  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  contém pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cores ímpares. Portanto, em qualquer  $(\Delta(\mathcal{K} \cup G) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K} \cup G$ , existem pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cores ímpares. Como  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$  é par,  $\mathcal{K} \cup G$  é não-conformável.
  - ii. Suponha que  $|V(G)|$  é ímpar. Como  $G$  é não-conformável e tem ordem ímpar, qualquer  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  contém pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cores pares. Portanto, em qualquer  $(\Delta(\mathcal{K} \cup G) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K} \cup G$ , existem pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cores pares. Como  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$  é ímpar,  $\mathcal{K} \cup G$  é não-conformável.
- (b) Se  $\mathcal{K}$  é a união disjunta de um número ímpar de componentes de  $K_{\Delta(G)+1}$ , então qualquer  $(\Delta(\mathcal{K}) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K}$  tem cada classe de cor ímpar.
  - i. Suponha que  $|V(G)|$  é par. Como  $G$  é não-conformável e tem ordem par, qualquer  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices,  $\varphi$ , contém pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cores ímpares. Portanto, em qualquer  $(\Delta(\mathcal{K} \cup G) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K} \cup G$ , existem pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cores pares. Como  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$  é par,  $\mathcal{K} \cup G$  é não-anticonformável.
  - ii. Suponha que  $|V(G)|$  é ímpar. Como  $G$  é não-conformável e tem ordem ímpar, qualquer  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices,  $\varphi$ , contém pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cores pares. Portanto, em qualquer coloração de vértices com  $(\Delta(\mathcal{K} \cup G) + 1)$  cores de  $\mathcal{K} \cup G$ , existem pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cores ímpares. Como  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$  é ímpar,  $\mathcal{K} \cup G$  é não-anticonformável.

2. Suponha que  $G$  é não-anticonformável.

- (a) Se  $\mathcal{K}$  é a união disjunta de um número ímpar de componentes de  $K_{\Delta(G)+1}$ , então qualquer  $(\Delta(\mathcal{K}) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K}$  tem cada classe de cor ímpar.
- i. Suponha que  $|V(G)|$  é par. Como  $G$  é não-anticonformável e tem ordem par, qualquer  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices,  $\varphi$ , contém pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor par. Portanto, qualquer  $(\Delta(\mathcal{K} \cup G) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K} \cup G$  tem pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor ímpar. Como  $\mathcal{K}$  e  $G$  têm ordem par,  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$  é par. Assim,  $\mathcal{K} \cup G$  é não-conformável.
  - ii. Suponha que  $|V(G)|$  é ímpar. Como  $G$  é não-anticonformável e tem ordem ímpar, qualquer  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices,  $\varphi$ , contém pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor ímpar. Portanto, qualquer  $(\Delta(\mathcal{K} \cup G) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K} \cup G$  tem pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor par. Como  $\mathcal{K}$  tem ordem par e  $G$  tem ordem ímpar,  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$  é ímpar. Logo,  $\mathcal{K} \cup G$  é não-conformável.
- (b) Se  $\mathcal{K}$  é a união disjunta de um número par de componentes de  $K_{\Delta(G)+1}$ , então qualquer  $(\Delta(\mathcal{K}) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K}$  possui cada classe de cor par.
- i. Suponha que  $|V(G)|$  é par. Como  $G$  é não-anticonformável e tem ordem par, qualquer  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  contém pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor par. Portanto, qualquer  $(\Delta(\mathcal{K} \cup G) + 1)$ -coloração de vértices para  $\mathcal{K} \cup G$  possui pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor par. Como  $\mathcal{K}$  e  $G$  têm ordem par,  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$  é par. Portanto,  $\mathcal{K} \cup G$  é não-anticonformável.
  - ii. Suponha que  $|V(G)|$  é ímpar. Como  $G$  é não-anticonformável e tem ordem ímpar, qualquer  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  contém pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor ímpar. Portanto, qualquer  $(\Delta(\mathcal{K} \cup G) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K} \cup G$  tem pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor ímpar. Como  $\mathcal{K}$  tem ordem par e  $G$  tem ordem ímpar,  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$  é ímpar. Assim,  $\mathcal{K} \cup G$  é não-anticonformável.

□

**Teorema 26.** *Seja  $G$  um grafo com  $\Delta(G)$  par.*

1. *Se  $G$  é não-conformável,*

- (a) *e  $|V(G)|$  é ímpar, então a união disjunta de um número ímpar de componentes conexas do  $K_{\Delta(G)+1}$  com  $G$  é não-conformável.*
- (b) *e  $|V(G)|$  é par, então a união disjunta de um número par de componentes conexas do  $K_{\Delta(G)+1}$  com  $G$  é não-conformável.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com  $\Delta(G)$  par. Como  $\Delta(G)$  é par,  $|V(K_{\Delta(G)+1})|$  é ímpar. Suponha que  $G$  é não-conformável.

- (a) Suponha que  $G$  é não-conformável e possui ordem ímpar. A união disjunta de um número ímpar de componentes de  $K_{\Delta(G)+1}$ , denotado por  $\mathcal{K}$ , possui ordem ímpar. Observe que para qualquer  $(\Delta(\mathcal{K}) + 1)$ -coloração de vértices de  $\mathcal{K}$  possui cada classe de cor ímpar. Como  $G$  é não-conformável e tem ordem ímpar, qualquer  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  contém pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor par. Portanto, qualquer  $(\Delta(\mathcal{K} \cup G) + 1)$ -coloração de vértices tem pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor ímpar. Como  $\mathcal{K}$  tem ordem ímpar e  $G$  tem ordem ímpar,  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$  é par. Como  $def(\mathcal{K} \cup G) = def(G)$  e há pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor com paridade diferente de  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$ ,  $\mathcal{K} \cup G$  é não-conformável.
- (b) Suponha que  $G$  é não-conformável com  $|V(G)|$  par. Como  $|V(K_{\Delta(G)+1})|$  é ímpar, a união disjunta de um número par de componentes de  $K_{\Delta(G)+1}$ , denotada por  $\mathcal{K}$ , tem ordem par. Observe que, para qualquer  $(\Delta(\mathcal{K}) + 1)$ -coloração de vértices em  $\mathcal{K}$  possui cada classe de cor par. Como  $G$  é não-conformável e tem ordem par, qualquer  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  contém pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor ímpar. Portanto, qualquer  $(\Delta(\mathcal{K} \cup G) + 1)$ -coloração de vértices tem pelo menos  $def(G) + 1$  classes de cor ímpar. Como  $\mathcal{K}$  tem ordem par e  $G$  tem ordem par,  $|V(\mathcal{K} \cup G)|$  é par e  $\mathcal{K} \cup G$  é não-conformável.

□

**Teorema 27.** *Se  $G$  é  $k$ -regular com  $k$  par, então  $G$  é não-anticonformável.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular com  $k$  par. Suponha, por contradição, que há uma coloração anticonformável  $\varphi$  para  $G$ . Sejam  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_{k+1}$  as classes de cor de  $\varphi$ . Pela definição de anticonformável e  $def(G) = 0$ , cada classe de cor tem paridade diferente da paridade de  $|V(G)|$ . Consideramos dois casos:

1. Suponha que  $|V(G)|$  seja par. Como  $|\mathcal{C}_i|$  é ímpar para  $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ , então  $|V(G)| = |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| + \dots + |\mathcal{C}_{k+1}|$  é ímpar, o que resulta em uma contradição.
2. Suponha que  $|V(G)|$  seja ímpar. Como  $|\mathcal{C}_i|$  é par, para  $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ , então  $|V(G)| = |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| + \dots + |\mathcal{C}_{k+1}|$  é par, resultando também em uma contradição.

Portanto,  $G$  é não-anticonformável.

□

Uma conclusão direta do Teorema 27 é que grafos  $k$ -regulares anticonformáveis têm  $k$  ímpar.

**Corolário 7.** *Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular. Se  $G$  é anticonformável, então  $k$  é ímpar.*

**Teorema 28.** *Um grafo  $k$ -regular bipartido  $G$  é anticonformável se, e somente se,  $k$  é ímpar.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo bipartido com partições  $V_1$  e  $V_2$ . Como  $G$  é  $k$ -regular, pelo Teorema de Hall [33],  $|V_1| = |V_2|$ . Considere os seguintes casos:

1. Suponha que  $G$  é anticonformável, pelo Corolário 7,  $k$  é ímpar.
2. Suponha que  $k$  é ímpar. Como  $|V| = |V_1| + |V_2|$  é par e  $G$  é  $k$ -regular, mostremos que existe uma  $(k + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  onde cada classe de cor  $\mathcal{C}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k + 1\}$ , é ímpar.
  - (a) Suponha que ambos  $|V_1|$  e  $|V_2|$  são pares. Seja  $v \in V_1$ . Apresentamos uma  $(k + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  para  $G$  com classes de cor  $\mathcal{C}_i = \{v_i\}$  para  $i \in \{1, \dots, k - 2\}$  tal que  $v_i$  é adjacente a  $v$ ;  $\mathcal{C}_{k-1} = \{v\}$ ;  $\mathcal{C}_k = V_1 \setminus \{v\}$ ; e  $\mathcal{C}_{k+1} = V_2 \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{k-2}\}$ . Como a cardinalidade de cada classe de cor é para  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ ,  $|\mathcal{C}_i| = 1$ ;  $|\mathcal{C}_k| = |V_1| - 1$ ; e  $|\mathcal{C}_{k+1}| = |V_2| - (k - 2)$  ímpar,  $G$  é anticonformável. Veja um exemplo na Figura 25a.
  - (b) Suponha que  $|V_1|$  e  $|V_2|$  são ímpares. Seja  $v \in V_1$ . Apresentamos uma  $(k + 1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  para  $G$  com classes de cor para  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ ,  $\mathcal{C}_i = \{v_i\}$  tal que  $v_i$  é adjacente a  $v$ ;  $\mathcal{C}_k = V_2 \setminus \{v_i \mid i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}\}$ ; e  $\mathcal{C}_{k+1} = V_1$ . Como a cardinalidade das classes de cor  $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ ,  $|\mathcal{C}_i| = 1$ ;  $|\mathcal{C}_k| = |V_2| - (k - 1)$ ; e  $|\mathcal{C}_{k+1}| = |V_1|$  são ímpares,  $G$  é anticonformável. Veja um exemplo na Figura 25b.

Portanto para grafos bipartidos  $k$ -regulares,  $G$  é anticonformável se, e somente se,  $k$  é ímpar. □

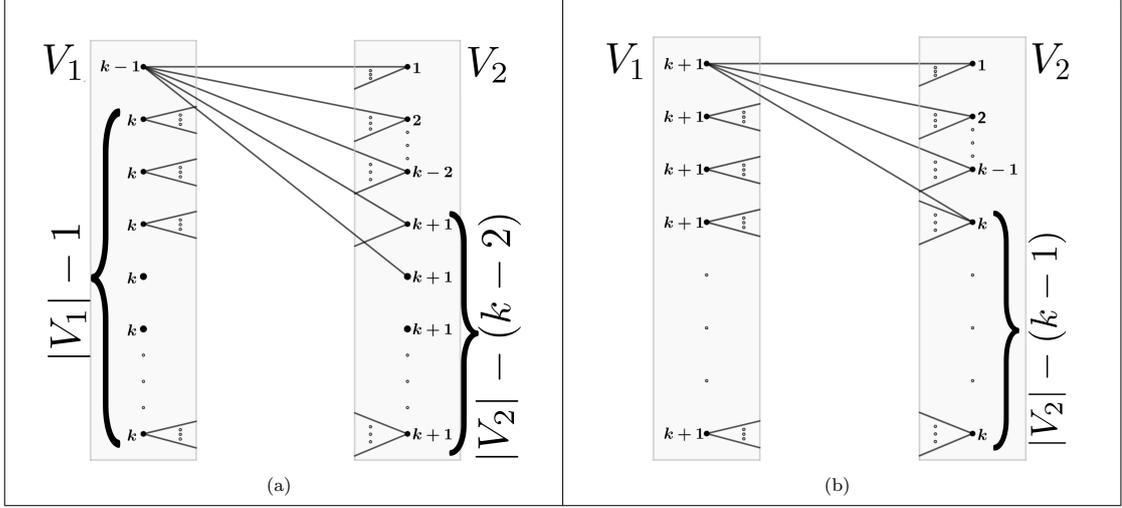
**Corolário 8.** *Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular com  $k$  ímpar. Se  $G$  é não-anticonformável, então  $G$  não é bipartido.*

### 5.3 Alguns grafos não-anticonformáveis conexos

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos de grafos não-anticonformáveis. Os Teoremas 29 e 30 apresentam exemplos de grafos não-anticonformáveis com grau máximo par. O Teorema 31 determina um grafo  $k$ -regular  $H_k$  que pode ser aplicado ao Teorema 25.2. Com a construção de grafos não-anticonformáveis com grau máximo ímpar, possibilitamos determinar grafos não-conformáveis.

**Teorema 29.** *Seja  $K_{4q-1}$  um grafo completo com  $4q - 1$  vértices,  $q \geq 3$  e  $\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$  arestas com mesmo extremo  $K_{4q-1}$ . Se  $G = K_{4q-1} \setminus \{e_1, \dots, e_q\}$ , então  $G$  é não-anticonformável.*

Figura 25 - Uma coloração anticonformável para um grafo bipartido  $k$ -regular  $G$ .



Legenda: Em (25a), apresentamos uma coloração anticonformável para um grafo  $G$  bipartido  $k$ -regular em que ambas as bipartições são pares. As classes de cor  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k-1}$  são unitárias e as classes de cor ímpar  $\mathcal{C}_k$  e  $\mathcal{C}_{k+1}$  possuem cardinalidade  $|\mathcal{C}_k| = |V_1| - 1$  e  $|\mathcal{C}_{k+1}| = |V_2| - (k - 2)$ . Em (25b), apresentamos uma coloração anticonformável para um grafo  $G$  bipartido  $k$ -regular em que ambas as bipartições são ímpares. As classes de cor  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k-1}$  são unitárias e cada classes de cor  $\mathcal{C}_k$  e  $\mathcal{C}_{k+1}$  possui cardinalidade  $|\mathcal{C}_k| = |V_1|$  e  $|\mathcal{C}_{k+1}| = |V_2| - (k - 1)$ , respectivamente.

Fonte: O autor, 2023

*Demonstração.* Seja  $v_1 \in K_{4q-1}$  o vértice com mesmo extremo em  $e_1, \dots, e_q$  e sejam  $w_1, w_2, \dots, w_q$  os vértices que são o outro extremo dessas arestas, respectivamente. Observe que  $K_{4q-1} \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$  possui uma clique de cardinalidade  $3q - 1$ , que é induzida pelo conjunto  $S = V(K_{4q-1}) \setminus \{w_1, w_2, \dots, w_q\}$ . Como os vértices  $S \setminus \{v_1\}$  são adjacentes a  $w_1, w_2, \dots, w_q$  e  $v_1$ ,  $G$  possui ao menos  $3q - 2$  classes de cor unitárias. Como  $def(G) = 2q$ ,  $G$  é não-anticonformável (veja a Figura 26a).  $\square$

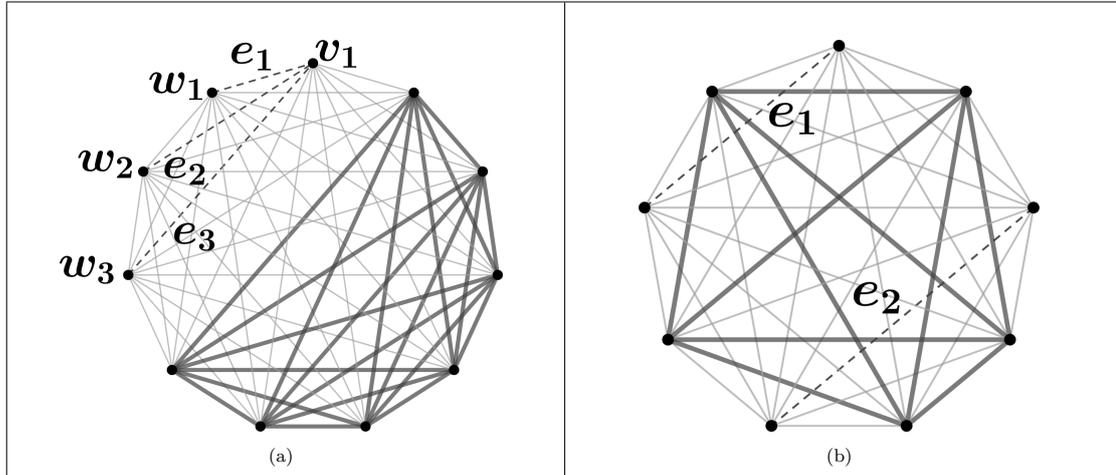
**Teorema 30.** *Seja  $K_{4q+1}$  um grafo completo com  $4q + 1$  vértices,  $q \geq 2$  e um emparelhamento  $M_q = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ . Se  $G = K_{4q+1} \setminus M_q$ , então  $G$  é não-anticonformável.*

*Demonstração.* Seja  $M_q = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$  um emparelhamento de  $K_{4q+1}$ . Observe que  $G = K_{4q+1} \setminus M_q$  possui uma clique com cardinalidade  $2q + 1$  consistindo de vértices não saturados por  $M_q$ . Como cada vértice dessa clique é adjacente aos extremos dos saturados de  $M_q$ ,  $G$  possui ao menos  $2q + 1$  classes de cor ímpar. Como  $def(G) = 2q$ ,  $G$  é não-anticonformável (veja a Figura 26b).  $\square$

Seja  $q$  um inteiro positivo. O grafo  $k$ -regular  $H_k$ ,  $k = 2q + 1$ , satisfazendo que  $V(H_k) = U \cup V$  tal que  $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{q+1}\}$  e  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{q+1}\}$  são cliques de  $H_k$  e  $E(H_k) = \{u_i u_j, v_i v_j \mid i \neq j \text{ e } i, j \in \{0, \dots, q+1\}\} \cup \{u_i v_i, u_i v_{i+1}, \dots, u_i v_{i+(q-1)} \mid$

$i \in \{0, \dots, q+1\}$ , onde o índice  $p$  de  $v_p$  é considerado em  $p \bmod (q+2)$ . A Figura 27 apresenta os grafos  $H_5$  e  $H_7$ .

Figura 26 - Exemplos de grafos não-anticonformáveis com grau máximo par.



Legenda: Em (26a), apresentamos  $K_{11} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ , as arestas pontilhadas são arestas removidas  $e_1, e_2$  e  $e_3$  de  $K_{11}$  e as arestas em negrito são as arestas pertencentes a clique de cardinalidade  $3q - 1 = 8$ . Em (26b), apresentamos  $K_9 \setminus M_2$ , as arestas pontilhadas são as arestas  $e_1$  e  $e_2$  de  $M_2$  e as arestas em negrito são arestas pertencentes a clique de cardinalidade  $2q + 1 = 5$ .

Fonte: O autor, 2023.

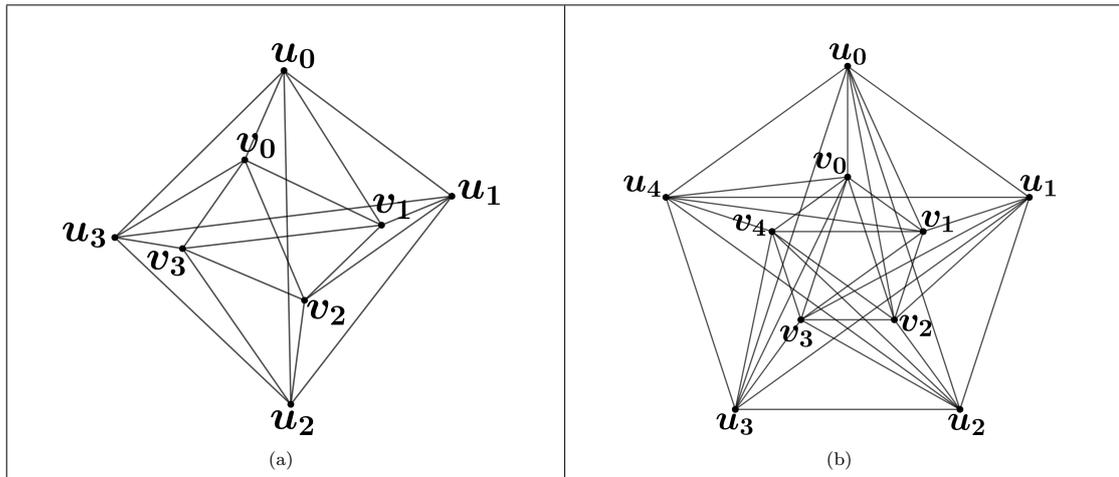
**Teorema 31.** *Seja  $q$  um inteiro positivo com  $k = 2q + 1$ . Então o grafo  $k$ -regular  $H_k$  é não-anticonformável.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $H_k$  é anticonformável. Seja  $\varphi$  uma coloração anticonformável de  $H_k$  com classes de cor  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_{2q+2}$ . Pela definição de coloração anticonformável,  $\text{def}(H_k) = 0$  e  $|V(H_k)|$  é par, cada classe de cor  $\mathcal{C}_i$  é ímpar. Logo, cada classe de cor é não-vazia. Como  $U$  e  $V$  particionam o grafo  $H_k$  em duas cliques, cada classe de cor é unitária. Sendo assim,  $|\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| + \dots + |\mathcal{C}_{2q+2}| = 2q + 2 \neq 2q + 4 = |V(H_k)|$ , uma contradição. Portanto,  $H_k$  é não-anticonformável.  $\square$

**Corolário 9.** *A união disjunta de componentes ímpares de  $K_{k+1}$  com  $H_k$  é não-conformável, onde  $k$  é ímpar.*

**Teorema 32.** *Seja  $q$  um inteiro positivo com  $k = 2q + 1$ . Então o grafo  $k$ -regular  $H_k$  é conformável.*

*Demonstração.* Como  $|V(H_k)|$  é par e  $H_k$  é  $k$ -regular com  $k = 2q + 1$ , apresentamos uma  $(k+1)$ -coloração de vértices  $\varphi$  para  $H_k$ , em que cada classe de cor é par. Sejam  $\mathcal{C}_i = \{u_{i-1}, v_{(i-1)+q}\}$  para  $i \in \{1, 2, \dots, q+2\}$ ; e  $\mathcal{C}_i = \emptyset$  para  $i \in \{q+3, \dots, 2q+1\}$  as classes de cor de  $\varphi$  em  $H_k$ . Como  $|\mathcal{C}_i| = 2$  para  $i \in \{1, 2, \dots, q+2\}$  e  $|\mathcal{C}_i| = 0$  para

Figura 27 - Os grafos  $H_5$  e  $H_7$ .

Legenda: Em (27a), o grafo  $H_5 = H_{2,2+1}$ , onde  $V(H_5) = \{u_0, u_1, u_2, u_3\} \cup \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  e  $|V(H_5)| = 2 \cdot 2 + 4$ . Em (27b), o grafo  $H_7 = H_{2,3+1}$ , onde  $V(H_7) = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\} \cup \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e  $|V(H_7)| = 2 \cdot 3 + 4$ .

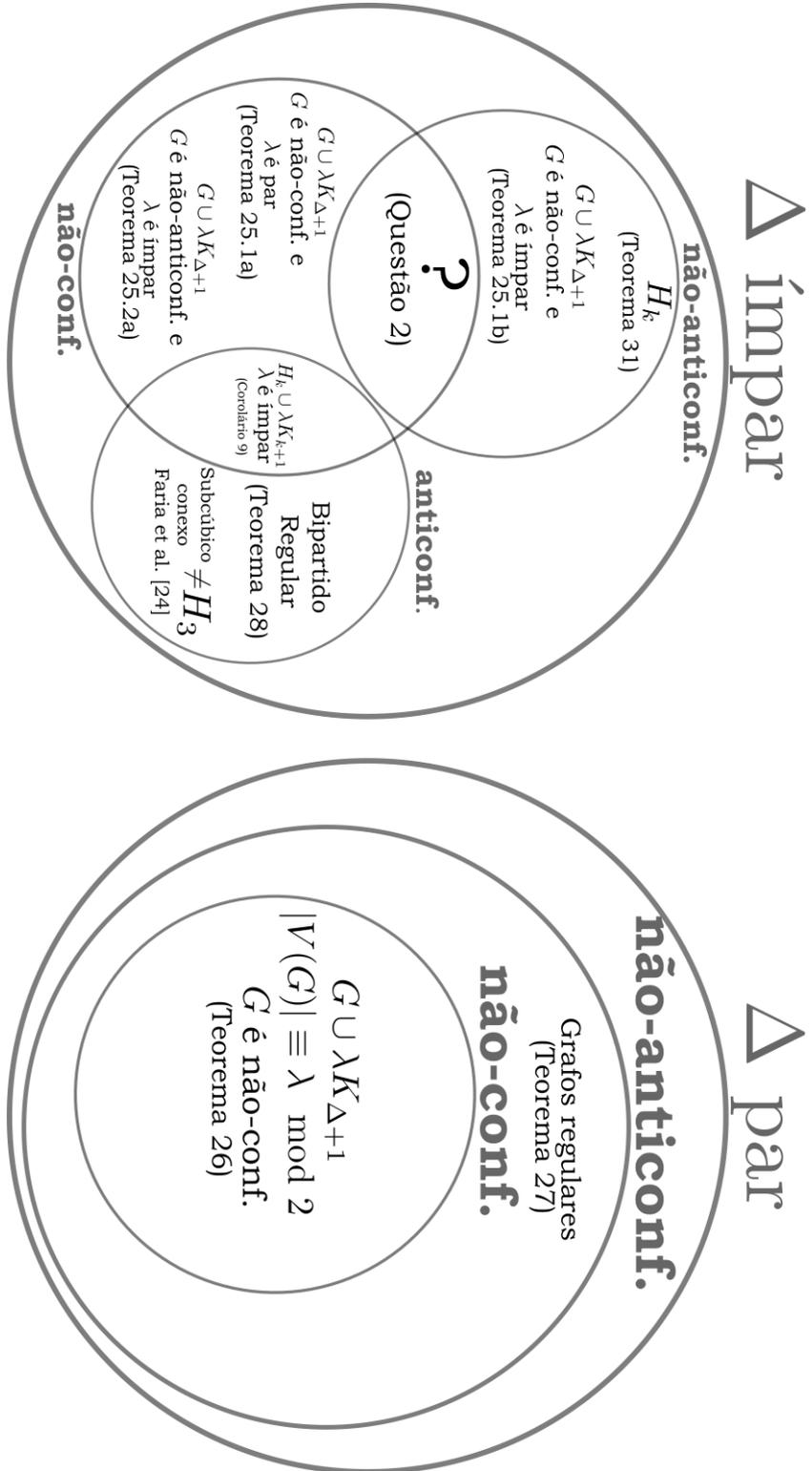
Fonte: O autor, 2023.

$i \in \{q + 3, \dots, 2q + 1\}$ , cada classe de cor em  $\varphi$  é par. Portanto, cada classe de cor em  $\varphi$  possui mesma paridade que  $|V(H_k)|$  e  $H_k$  é conformável.  $\square$

É fácil verificar a existência de grafos  $k$ -regulares com  $k$  par que sejam não-conformáveis e não-anticonformáveis, como o grafo  $C_5$ , assim como grafos conformáveis e não-anticonformáveis, como o grafo  $C_4$ . Além disso, não existem grafos anticonformáveis nessa classe. Para grafos  $k$ -regulares com  $k$  ímpar, temos o grafo  $H_k$  com  $k$  ímpar, que é conformável e não-anticonformável. O grafo  $H_k \cup \lambda K_{k+1}$  com  $\lambda$  ímpar e  $k$  é um exemplo de um grafo que é anticonformável e não-conformável. No entanto, ainda não se sabe se existe um grafo  $k$ -regular com  $k$  ímpar que seja não-conformável e não-anticonformável. Portanto, propomos a Questão 2 e apresentamos a Figura 28 como um panorama geral de grafos nas classes envolvendo a conformabilidade e a anticonformabilidade.

**Questão 2.** *Existe um grafo  $k$ -regular  $G$  com  $k$  ímpar, tal que  $G$  é não-anticonformável e não-conformável?*

Figura 28 - Um esquema conciso baseado em conjuntos que relaciona a existência de grafos não-conformáveis, não-anticonformáveis e anticonformáveis usando a paridade do grau máximo como critério de separação e os resultados deste capítulo.



Fonte: O autor, 2023.

## CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nesta tese, investigamos o problema da coloração total e da CONFORMABILIDADE. A coloração total é naturalmente motivada pela famosa Conjectura da Coloração Total, e a CONFORMABILIDADE devido ao fato de sua complexidade computacional ser desconhecida e, além disso, pela conexão intrínseca de ambos os problemas. Contribuímos tanto com o problema da coloração total quanto com a CONFORMABILIDADE. A seguir, apresentamos em tópicos os resultados obtidos em cada capítulo desta tese, seguidos de questões que serão investigadas no futuro.

- No Capítulo 1, motivados pela existência de um algoritmo em tempo polinomial que determina uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices equilibrada para um grafo  $G$ , mostramos todas as classes de grafos em que a  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de vértices equilibrada é conformável. Como uma aplicação direta na determinação dessas classes, mostramos que os grafos circulantes  $C_{\frac{(2k+1)n}{2}}(d_1, d_2, \dots, d_k)$  com  $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_k < \frac{(2k+1)n}{2}$  são conformáveis.
- No Capítulo 2 abordamos a conformabilidade e o número cromático total de alguns grafos linha. Mostramos que se  $G$  é um grafo *Classe 1*, então  $L(G)$  é conformável. Como uma aplicação desta propriedade, mostramos que  $L(K_n)$  é conformável, contribuindo para a investigação da Conjectura de Vignesh et al. [27], proposta em 2018, afirmando que  $L(K_n)$  é *Tipo 1*. Propomos uma discussão sobre a existência de um grafo linha  $L(G)$  não-conformável. Provamos que o grafo potência de ciclo não-conformável  $C_n^k$  não é grafo linha e propomos a Questão 1.

**Questão 1.** *Existe um grafo  $k$ -regular  $G$ , com  $k \geq 3$ , tal que  $L(G)$  é não-conformável?*

- No Capítulo 3, classificamos a conformabilidade para todos os grafos subcúbicos. Essa classificação induz a um algoritmo em tempo polinomial. Para isso, também consideramos o caso em que  $G$  é não-conexo, o que exigiu a definição da coloração anticonformável, sendo uma ferramenta auxiliar na construção de um algoritmo em tempo polinomial para CONFORMABILIDADE.

Além disso, mostramos que o grafo prisma triangular é o único grafo subcúbico que não possui coloração anticonformável. Portanto, com os resultados produzidos nesse capítulo e também no Capítulo 1, propomos a seguinte conjectura:

**Conjectura 3.** *CONFORMABILIDADE  $\in P$ .*

- No Capítulo 4, definimos a coloração conformável forte. Provamos que essa coloração é a coloração conformável que se estende para uma  $(\Delta + 1)$ -coloração total. Por

consequente, determinar se um grafo  $G$  possui uma coloração conformável forte é um problema NP-completo. Apresentamos três propriedades necessárias para que uma coloração conformável seja forte. Portanto, criamos critérios para verificar certas colorações conformáveis que não são fortes e, consequentemente, auxiliamos na determinação do número cromático total de um grafo.

- No Capítulo 5, abordamos a coloração conformável para união de grafos. Para grafos regulares, mostramos que a união de grafos conformáveis resulta em grafos conformáveis e a união de um grafo conformável e um grafo anticonformável é anticonformável. Quando a união disjunta possui um grafo não-conformável  $G$  com grau máximo  $\Delta(G)$  par, mostramos que se  $|V(G)|$  é par, então a união disjunta de  $G$  com um número par de componentes conexas de  $K_{\Delta(G)+1}$  é não-conformável. Também mostramos que se  $|V(G)|$  é ímpar, então a união disjunta de  $G$  com um número ímpar de componentes conexas de  $K_{\Delta(G)+1}$  é não-conformável.

Supondo que  $\Delta(G)$  seja ímpar, provamos que se  $G$  é não-conformável, então a união disjunta de um número par de componentes conexas de  $K_{\Delta(G)+1}$  com  $G$  é não-conformável, e a união disjunta de um número ímpar de componentes conexas de  $K_{\Delta(G)+1}$  com  $G$  é não-anticonformável. Também mostramos que se  $G$  é não-anticonformável, então a união disjunta de um número ímpar de componentes conexas de  $K_{\Delta(G)+1}$  com  $G$  é não-conformável, e a união disjunta de um número par de componentes conexas de  $K_{\Delta(G)+1}$  com  $G$  é não-anticonformável.

Por fim, mostramos que grafos  $k$ -regulares com  $k$  par são não-anticonformáveis. Para o caso de  $k$  ímpar, mostramos que todo grafo bipartido  $k$ -regular é anticonformável se, e somente se,  $k$  é ímpar; também construímos o grafo  $H_k$ , que é  $k$ -regular com  $k$  ímpar e é não-anticonformável. Por fim, mostramos que  $H_k$  é conformável e propomos a Questão 2.

**Questão 2.** *Existe um grafo  $k$ -regular  $G$  com  $k$  ímpar, tal que  $G$  é não-anticonformável e não-conformável?*

## REFERÊNCIAS

- 1 BONDY, J.; MURTY, U. *Graph Theory*. New York: Springer, 2008.
- 2 YAP, H. P. *Total colourings of graphs*. Berlin: Springer, 1996.
- 3 BROOKS, R. L. On colouring the nodes of a network. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, Cambridge University Press, p. 194–197, 1941.
- 4 HAJNAL, A.; SZEMEREDI, E. Proof of a conjecture of P. Erdos. *Combinatorial Theory and its Application*, p. 601–623, 1970.
- 5 KIERSTEAD, H. et al. A fast algorithm for equitable coloring. *Combinatorica*, v. 30, p. 217–224, 2010.
- 6 CHETWYND, A. G.; HILTON, A. J. W. Some refinements of the total chromatic number conjecture. *Congr. Numer.*, p. 195–216, 1988.
- 7 BEHZAD, M. *Graphs and their chromatic numbers*. Tese (Doutorado) — Michigan State University, 1965.
- 8 VIZING, V. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Metody Diskret. Analiz.*, p. 25–30, 1964.
- 9 CHEN, B.-L.; FU, H.-L. Total colorings of graphs of order  $2n$  having maximum degree  $2n - 2$ . *Graph. Comb.*, v. 8, n. 2, p. 119–123, 1992.
- 10 HAMILTON, G. M.; HILTON, A. J. W.; HIND, H. R. F. Totally critical even order graphs. *J. Comb. Theory Ser. B.*, v. 76, n. 2, p. 262–279, 1999.
- 11 HILTON, A. J. W.; HIND, H. R. Non-conformable subgraphs of non-conformable graphs. *Discrete Math.*, p. 203–224, 2002.
- 12 CAMPOS, C. N.; MELLO, C. P. de. A result on the total colouring of powers of cycles. *Discret. Appl. Math.*, v. 155, p. 585–597, 2007.
- 13 ZORZI, A. et al. Compositions, decompositions, and conformability for total coloring on power of cycle graphs. *Discret. Appl. Math.*, v. 323, p. 349–363, 2022.
- 14 CAMPOS, C. N. *O problema da coloração total em classes de grafos*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- 15 MACHADO, R. C. S. *Decomposições para coloração de arestas e coloração total de grafos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.
- 16 PEREIRA, D. S. de S. *Sobre coloração total de grafos cúbicos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.
- 17 ALMEIDA, L. C. de. *Coloração total e coloração total equilibrada de famílias de Snarks*. 2017.
- 18 SILVA, A. G. da. *Um estudo sobre coloração de arestas e coloração total de grafos*. 2018.

- 19 ZORZI, A. *Coloração total em grafos potência de ciclo*. 43 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.
- 20 PATRÃO, C. S. R. *Sobre Coloração Total de Grafos Kneser e de Grafos Produto Direto de Completos e de Ciclos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2021.
- 21 FARIA, L. et al. Results about the total chromatic number and the conformability of some families of circulant graphs. *Discret. Appl. Math.*, v. 340, p. 123–133, 2023.
- 22 FARIA, L.; NIGRO, M.; SASAKI, D. On the conformability of regular line graphs. *RAIRO - Operations Research*, (aceito) 2023.
- 23 FARIA, L.; NIGRO, M.; SASAKI, D. On conformability of line graphs of complete graphs. In: *Anais do IV Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais*. Ponta Grossa, PR, Brasil: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021.
- 24 NIGRO, M.; FARIA, L.; SASAKI, D. A conformabilidade dos grafos subcúbicos. In: *Anais do LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Campinas: Galoá, 2022.
- 25 FARIA, L.; NIGRO, M.; SASAKI, D. A conformabilidade dos grafos subcúbicos conexos. In: *Anais do VII Encontro de Teoria da Computação*. Porto Alegre, RS, Brasil: Sociedade Brasileira de Computação, 2022.
- 26 FARIA, L.; NIGRO, M.; SASAKI, D. On the conformable colorings of  $k$ -regular graphs. In: *Anais do VIII Encontro de Teoria da Computação*. Porto Alegre, RS, Brasil: Sociedade Brasileira de Computação, 2023. p. 25–29.
- 27 VIGNESH, R.; GEETHA, J.; SOMASUNDARAM, K. Total coloring conjecture for certain classes of graphs. *Algorithms*, v. 11, n. 10, 2018.
- 28 MOHAN, S.; GEETHA, J.; SOMASUNDARAM, K. Total coloring of quasi-line graphs and inflated graphs. *Discrete Math. Algorithms Appl.*, v. 13, n. 05, 2021.
- 29 JAYARAMAN, G.; MUTHURAMAKRISHNAN, D.; KUMAR, S. V. Total coloring of line graph and square graph for certain graphs. *Adv. Appl. Math. Sci.*, v. 21, n. 11, 2022.
- 30 BARANYAI, Z. On the factorization of the complete uniform hypergraph. *Proc. Coll. Keszthely*, p. 91–107, 1971.
- 31 KÖNIG, D. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Math. Ann.*, v. 77, p. 453–465, 1916.
- 32 BEINEKE, L. W. Characterizations of derived graphs. *J. Comb. Theory*, v. 9, n. 2, p. 129–135, 1970.
- 33 HALL, P. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, v. 10, n. 1, p. 26–30, 1935.
- 34 SÁNCHEZ-ARROYO, A. Determining the total colouring number is NP-hard. *Discrete Math.*, p. 315–319, 1989.