



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Alex Fraga Rocha

Encontrando simetrias de Lie não-locais algoritmicamente

Rio de Janeiro

2023

Alex Fraga Rocha

Encontrando simetrias de Lie não-locais algoritmicamente



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antônio Campinho Pereira da Mota

Coorientador: Prof. Dr. Luiz Guilherme Silva Duarte

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

R672e Rocha, Alex Fraga.
Encontrando simetrias de Lie não-locais algoritmicamente / Alex Fraga
Rocha. – 2023.
75 f. : il.

Orientador: Luís Antônio Campinho Pereira da Mota.
Coorientador: Luiz Guilherme Silva Duarte.
Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Equações diferenciais ordinárias – Teses. 2. Simetria (Matemática) –
Teses. 3. Integrais (Matemática) – Teses. 4. Algoritmos – Teses. I. Mota,
Luís Antônio Campinho Pereira da (Orient.). II. Duarte, Luiz Guilherme Silva
(Coorient.). III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física
Armando Dias Tavares. IV. Título.

CDU 517.91

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Alex Fraga Rocha

Encontrando simetrias de Lie não-locais algoritmicamente

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de Novembro de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luís Antônio Campinho Pereira da Mota (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Luiz Guilherme Silva Duarte (Coorientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Alejandro Cabrera
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Rafael de Sousa Dutra
Instituto Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Jr.
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Sérgio Eduardo Silva Duarte
Centro Federal de Educação Tecnológica Suckow da Fonseca

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

À Ana Paula e João Victor

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus que é a minha fonte de vida e o motivo da minha existência.

Com carinho, à minha esposa Ana Paula e ao meu filho João Victor.

Ao meu Orientador, Luís Antônio Campinho Pereira da Mota, pelo cuidado, incentivo e paciência comigo.

Ao meu Coorientador, Luiz Guilherme Silva Duarte, pelo incentivo, motivação e mostrar que posso conquistar meus sonhos.

A todos que contribuíram, de alguma forma, para essa conquista

João 14:6 - Eu sou o caminho, e a verdade e a vida; ninguém vem ao Pai, senão por mim.

Jesus

RESUMO

ROCHA, A. F. **Encontrando simetrias de Lie não-locais algoritmicamente.** 2023. 75 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Neste trabalho apresentamos uma nova abordagem para calcular simetrias de equações diferenciais ordinárias racionais de segunda ordem (2EDOs racionais). Este método pode calcular simetrias de Lie (simetrias de pontos, simetrias dinâmicas e simetrias não locais) algoritmicamente. O procedimento baseia-se em uma ideia decorrente da equivalência formal entre o operador de derivada total e o campo vetorial associado à 2EDO sobre suas soluções (campo vetorial de Cartan). Basicamente, da representação formal de uma simetria de Lie é possível extrair informações que permitem usar essa simetria de forma prática (no processo de integração 2EDO) mesmo nos casos em que a operação formal não pode ser realizada, ou seja, nos casos em que a simetria é não local. Além disso, quando a 2EDO em questão depende de parâmetros, o procedimento permite uma análise que determina as regiões do espaço de parâmetros nas quais a 2EDO apresenta uma integral primeira (uma quantidade conservada) Liouvilliana, isto é, o método identifica as regiões em que os casos integráveis estão localizados. Apresentamos uma análise do desempenho dos algoritmos desenvolvidos e por fim, aplicamos o nosso método a um oscilador de Duffing-van der Pol forçado (que apresenta comportamento caótico para valores arbitrários dos parâmetros) e encontramos a região no espaço dos parâmetros em que o sistema é integrável. Além disso, encontramos uma integral primeira que não havia sido determinada até então.

Palavras-chave: Integrais primeiras liouvillianas. Equações diferenciais ordinárias racionais de segunda ordem. Simetrias não locais. Método algorítmico.

ABSTRACT

ROCHA, A. F. **Finding non-local Lie symmetries algorithmically**. 2023. 75 f.
Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

In this work we present a new approach to calculate symmetries of second-order rational ordinary differential equations (rational 2EDOs). This method can calculate Lie symmetries (point symmetries, dynamic symmetries and non-local symmetries) algorithmically. The procedure is based on an idea arising from the formal equivalence between the total derivative operator and the vector field associated with the 2EDO over its solutions (Cartan's vector field). Basically, from the formal representation of a Lie symmetry it is possible to extract information that allows using this symmetry in a practical way (in the 2EDO integration process) even in cases where the formal operation cannot be performed, that is, in cases where the symmetry is non-local. Furthermore, when the 2EDO in question depends on parameters, the procedure allows an analysis that determines the regions of the parameter space in which the 2EDO presents a first integral (a conserved quantity) Liouvillian, that is, the method identifies the regions in which the integrable cases are located. We present an analysis of the performance of the developed algorithms and finally, we apply our method to a forced Duffing-van der Pol oscillator (which presents chaotic behavior for arbitrary parameter values) and find the region in the parameter space in which the system is integrable. Furthermore, we found a first integral that had not been determined until then.

Keywords: Liouvillian first integrals. Rational Second order ordinary differential equations. Non-local symmetries. Algorithmic method.

LISTA DE SÍMBOLOS

μ	Fator integrante
σ	Função sigma
I	Integral primeira
ξ	Infinitésimo
η	Infinitésimo
ν	Infinitésimo
X	Gerador de simetria
y'	Derivada primeira de y
y''	Derivada segunda de y
∂_u	Derivada parcial em relação a u
D_x	Campo vetorial de Cartan
$\frac{d}{dx}$	Operador derivada total

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DE LIE	14
1.1	Simetrias	14
1.2	Grupos de transformações de Lie	15
1.3	Transformações infinitesimais do grupo de Lie	16
1.4	Gerador infinitesimal	16
1.5	Gerador infinitesimal estendido	17
1.6	Simetrias de Lie	19
1.7	Coordenadas canônicas	19
1.8	O uso das simetrias de Lie na integração de EDOs	21
1.8.1	<u>Integração de 1EDOs</u>	21
1.8.1.1	Uso de coordenadas canônicas	21
1.8.1.2	Determinação de um fator integrante	22
1.8.1.3	Exemplo	22
1.8.2	<u>O uso das simetrias de Lie na integração de 2EDOs</u>	23
1.8.2.1	Uma simetria de ponto	23
1.8.2.2	Uma simetria de Lie não de ponto	24
1.9	O problema com simetrias não de ponto	25
2	UM NOVO MÉTODO PARA DETERMINAR SIMETRIAS	27
2.1	Uma maneira útil de representar uma simetria	28
2.2	A relação com um fator integrante	30
2.3	Um possível algoritmo	31
2.3.1	<u>Os passos do semi-algoritmo</u>	35
2.3.2	<u>Exemplo</u>	36
3	CASOS INTERESSANTES DO SEMI-ALGORITMO	39
3.1	Algumas considerações gerais	39
3.2	N e q não apresentam fatores comuns	40
3.2.1	<u>$ASymm_{[1.1]}$</u>	41
3.2.2	<u>$ASymm_{[1.2]}$</u>	42
3.2.3	<u>$ASymm_{[1.3]}$</u>	43
3.3	N e q apresentam fatores comuns	44
3.3.1	<u>q tem fatores não presentes em N</u>	44
3.3.2	<u>$q N$ ou $q = uN$ onde $u \in \{x, y, y'\}$</u>	45
3.4	M e p apresentam fatores comuns ou monômios comuns	47
4	DESEMPENHO	49
4.1	2EDOs racionais não lineares do Manual de Kamke	49

4.2	2EDOs racionais apresentando simetrias não locais	50
5	ALGUMAS APLICAÇÕES EM FÍSICA	55
5.1	Oscilador de Helmholtz com fricção	55
5.2	Oscilador Duffing-Van der Pol	57
	CONCLUSÃO	62
	REFERÊNCIAS	64
	APÊNDICE A – Equações importantes	71

INTRODUÇÃO

O método da simetria de Lie é, provavelmente, o método mais poderoso para procurar integrais primeiras de equações diferenciais ordinárias (EDOs). A grande maioria das técnicas de integração pode ser vista como casos particulares de um método geral de integração com base no grupo estendido de simetrias admitidas pela equação diferencial (ED). O principal obstáculo à aplicação do método de Lie é, ironicamente, o próprio cálculo de simetrias porque, até o momento, não há uma maneira sistemática de encontrar as simetrias de uma EDO no caso geral. O próprio Lie criou alguns procedimentos para casos particulares: por exemplo, no caso de EDOs de segunda ordem (2EDOs) ele considerou sua invariância através de simetrias pontuais, ou seja, uma simetria que depende apenas das variáveis dependentes e independentes. Esta suposição permite que a equação diferencial parcial (EDP) que determina a condição de simetria (Equação determinante) seja 'separada' em potências da derivada, de forma que esta EDP resultaria em um sistema sobredeterminado de EDPs que (em princípio) poderia ser resolvido. Mas, no caso de uma EDO apresentando apenas simetrias dinâmicas ou não locais esta estratégia não pode ser aplicada. Assim, muitas abordagens foram desenvolvidas para superar esta dificuldade: em (10) Cheb-Terrab et al desenvolveram algumas heurísticas que podem encontrar simetrias dinâmicas de 2EDOs; P. J. Olver introduziu o conceito de campo vetorial exponencial (veja (3), p. 185); B. Abraham-Shrauner, A. Guo, K.S. Govinder, P.G.L. Leach, F. M. Mahomed, A. A. Adam, M. L. Gandarias, M. S. Bruzón, M. Senthilvelan e outros trabalharam com o conceito de simetrias ocultas e não locais (11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18). C. Muriel e J.L. Romero desenvolveram o conceito de λ -simetria (19, 20). Veja também (21, 22, 23, 24, 26, 27). No entanto, apesar de todos esses esforços, ainda não temos um algoritmo geral para encontrar as simetrias, mesmo em casos mais específicos.

Neste trabalho mostramos um procedimento semi-algorítmico para calcular as simetrias (sejam de ponto, dinâmicas ou não-locais) de uma 2EDO racional. A principal vantagem do nosso método é a sua natureza algorítmica e, por outro lado, a principal desvantagem é que ele se aplica apenas a 2EDOs racionais que apresentam uma integral primeira Liouvillianiana tal que suas derivadas são da forma $e^{A/B} \prod p_i^{n_i}$, onde A , B e p_i são polinômios em (x, y, y') e os n_i são constantes. No entanto, esperamos mostrar ao longo deste trabalho que essa restrição não é tão forte quanto parece à primeira vista.

Esta tese está organizada da seguinte forma:

1. Apresentamos a introdução deste trabalho.
2. No capítulo 1, abordamos, de forma sucinta, o *método de simetrias de Lie*:
 - (a) Na primeira seção, apresentamos os conceitos de *grupos de transformações de*

Lie a um parâmetro, suas transformações infinitesimais, geradores infinitesimais, geradores infinitesimais estendidos e o conceito de simetria de uma EDO.

- (b) Na segunda seção, listamos alguns resultados básicos sobre como resolver/reduzir EDOs usando o método de simetrias de Lie.
3. No capítulo 2, apresentamos alguns resultados que permitem a construção de um procedimento muito eficiente para determinar simetrias de 2EDOs racionais que apresentam ao menos uma integral primeira Liouvilliana:
- (a) Na primeira seção, apresentamos uma maneira de representar uma simetria não-local (na forma evolucionária) de uma 2EDO racional, baseando-nos na equivalência entre os operadores *derivada total* $\frac{d}{dx}$ e o campo vetorial de Cartan $D_x \equiv \partial_x + y' \partial_y + \phi \partial_{y'}$.
 - (b) Na segunda seção, estabelecemos uma ligação entre o fator integrante μ e uma simetria X da 2EDO. Usando essa ligação, mostramos que a derivada logarítmica do infinitésimo ν que define a simetria X (sobre as soluções da 2EDO) é uma função racional de (x, y, y') (denotada neste trabalho por $\sigma(x, y, y')$).
 - (c) Na terceira seção, apresentamos os passos do algoritmo e um exemplo para tornar mais clara a aplicação do método.
4. No capítulo 3, apresentamos os casos interessantes do nosso método:
- (a) Na primeira seção, mostramos algumas considerações gerais a respeito dos polinômios que formam a função σ .
 - (b) Na segunda seção, analisamos a relação entre os polinômios N e q quando os mesmos não apresentam fatores comuns.
 - (c) Na terceira seção, analisamos a relação entre os polinômios N e q quando os mesmos apresentam fatores comuns.
 - (d) Na quarta seção, analisamos a relação entre os polinômios M e p quando os mesmos apresentam fatores comuns ou monômios comuns.
5. No capítulo 4, apresentamos o desempenho do nosso algoritmo:
- (a) Na primeira seção, aplicamos o método às 2EDOs racionais não-lineares do livro de Kamke (64) que apresentam pelo menos uma integral primeira Liouvilliana.
 - (b) Na segunda seção, mostramos a eficiência do método em encontrar as integrais primeiras de algumas 2EDOs que apresentam simetrias não-locais. Acreditamos que essas 2EDOs sejam muito ‘difíceis’ para outros métodos em vista de elas apresentarem fatores integrantes com polinômios de Darboux de grau relativamente elevado e simetrias não-locais complicadas.

6. No capítulo 5, aplicamos o método a algumas 2EDOs que descrevem sistemas físicos. Aqui veremos em ação uma outra grande vantagem do método: em função de estarmos buscando uma função racional (σ) pela solução de sistemas algébricos (quadráticos) de indeterminados, se a 2EDO (que representa matematicamente o fenômeno físico que estamos estudando) depender de parâmetros, podemos usar o próprio sistema de equações algébricas para os indeterminados para determinar regiões do espaço dos parâmetros em que existe integrabilidade. Um dos exemplos (veja no capítulo) não se trata de um mero exercício acadêmico: encontramos uma região do espaço dos parâmetros para a 2EDO que modela um oscilador não-linear forçado de Duffing-van der Pol modificado, para a qual a 2EDO apresenta uma integral primeira Liouvilliana (não conhecida até então). Esse oscilador apresenta comportamento caótico para valores arbitrários dos parâmetros (solução caótica não integrável).
7. Por fim, no capítulo 5.2, apresentamos nossas conclusões e direcionamentos para a continuidade do nosso trabalho.

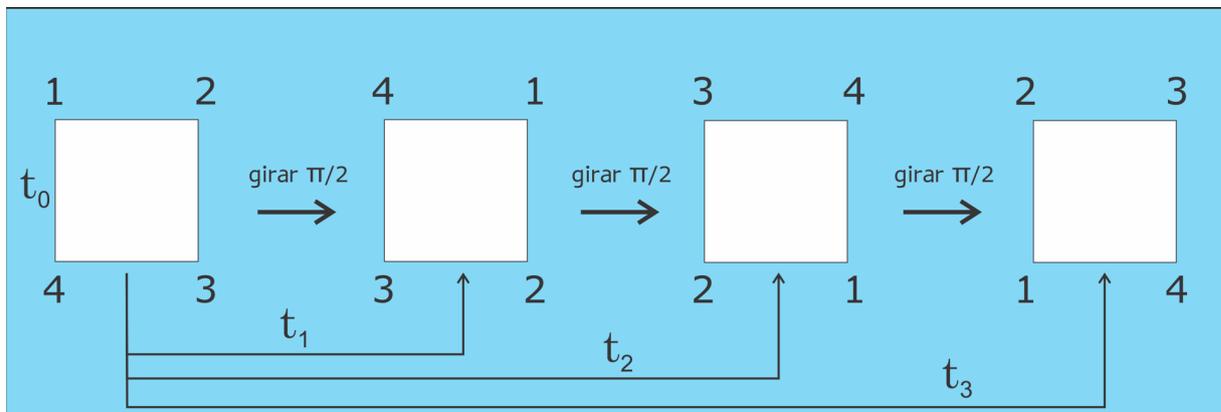
1 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DE LIE

Como foi observado na introdução deste texto, a descoberta das simetrias de uma determinada EDO é um dos nossos principais objetivos, uma vez que, de posse delas, podemos resolver ou baixar a ordem de uma EDO. Portanto, neste capítulo, mostraremos de forma sucinta alguns conceitos básicos da teoria de Lie, como as simetrias, os grupos de transformações, as transformações infinitesimais do grupo e os geradores infinitesimais de simetrias.

1.1 Simetrias

Uma simetria, de maneira geral, é uma configuração que não se distingue, uma da outra, após uma transformação. Por exemplo, a rotação de um quadrado de um ângulo de 90 graus entorno do seu centro, como mostra a figura 1. Observando o conjunto de

Figura 1 – Conjunto de simetrias



Legenda: Representação geométrica de um conjunto de simetrias.

Fonte: O autor, 2023.

configurações da figura 1, podemos obter uma relação entre elas.

Seja (T, \bullet) um grupo, tal que $T = (t_0, t_1, t_2, t_3)$. Algumas relações entre as configurações obtidas após a rotação da figura estão ilustradas a seguir:

- $t_1(t_2(\square)) = t_3(\square)$
- $t_1(t_3(\square)) = t_0(\square)$
- $t_1(t_1(\square)) = t_2(\square)$

- $t_2(t_2(\square)) = t_0(\square)$
- $t_2(t_3(\square)) = t_1(\square)$
- $t_3(t_3(\square)) = t_2(\square)$
- $t_0(t_i(\square)) = t_i(\square)$

1.2 Grupos de transformações de Lie

De maneira simplista, um grupo de Lie é uma variedade diferenciável que consiste em uma configuração de grupo no qual as operações de multiplicação e inversão são deriváveis. Desta forma, o grupo:

$$x^* = X(x; \epsilon), \quad (1)$$

onde X é infinitamente diferenciável em relação a x , ϵ é um parâmetro contínuo e $x = (x_1, \dots, x_n)$ representa um vetor, define um grupo de transformações de Lie a um parâmetro.

Definição 1.2.1 *Se eu tenho um conjunto G e uma operação \bullet tais que as propriedades de a até d são satisfeitas, então (G, \bullet) é dita ser um grupo.*

- a) g_1 e $g_2 \in G \Rightarrow g_1 \bullet g_2 \in G$
- b) $(g_1 \bullet g_2) \bullet g_3 = g_1 \bullet (g_2 \bullet g_3)$
- c) $\exists g_0 / g \bullet g_0 = g_0 \bullet g = g$
- d) Para todo $g, \exists g^{-1} / g^{-1} \bullet g = g \bullet g^{-1} = g_0$

Exemplo: O conjunto de transformações, representado pelo sistema 2,

$$\begin{cases} x^* = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y^* = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{cases} \quad (2)$$

representa um grupo de rotações no plano (\mathbb{R}^2), em torno da origem, gerado por uma transformação finita, que ao sofrer uma rotação de um ângulo α , se torna no sistema 3.

$$\begin{cases} x^{**} = x^* \cos(\alpha) - y^* \sin(\alpha) \\ y^{**} = x^* \sin(\alpha) + y^* \cos(\alpha) \end{cases} \quad (3)$$

Substituindo as coordenadas (x^*, y^*) no sistema 3, obtemos o sistema 4.

$$\begin{cases} x^{**} = x \cos(\theta + \alpha) - y \sin(\theta + \alpha) \\ y^{**} = x \sin(\theta + \alpha) + y \cos(\theta + \alpha), \end{cases} \quad (4)$$

O sistema 4 difere do sistema 2 pela adição do ângulo de rotação α .

1.3 Transformações infinitesimais do grupo de Lie

Para obtermos as transformações infinitesimais do grupo de Lie, devemos desenvolver o grupo (1) em série de Taylor. Sendo assim, temos:

$$x^* = x + \epsilon \frac{\partial X}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 X}{\partial \epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} + \dots \quad (5)$$

Desconsiderando os termos de ordem 2 na Eq.(5), e fazendo $\frac{\partial X}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \xi(x)$ obtemos:

$$x^* = x + \epsilon \xi(x) \quad (6)$$

A Eq.(6) é chamada transformação infinitesimal do grupo de Lie (1).

1.4 Gerador infinitesimal

Considere $I(x, y)$ uma quantidade conservada ou um invariante sobre as curvas soluções de uma 1EDO $y' = \phi(x, y)$. Aplicando a derivada total à I , em relação à ϵ , obtemos:

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{d\epsilon} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} \quad (7)$$

Fazendo $\xi(x, y) = \frac{dx}{d\epsilon}$ e $\eta(x, y) = \frac{dy}{d\epsilon}$, temos:

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \xi(x, y) \frac{\partial I}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial I}{\partial y} = \left(\xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) [I] \quad (8)$$

e fazendo,

$$X(I) = \frac{dI}{d\epsilon} \quad (9)$$

obtemos:

$$X(I) = \left(\xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) [I] \quad (10)$$

onde a Eq.(11) representa o gerador de simetrias:

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (11)$$

• **Aplicando a Eq.(9) à x , temos:**

$$\xi = \xi(x, y) = \frac{dx}{d\epsilon} = X(x) \quad (12)$$

$$\frac{d^2x}{d\epsilon^2} = \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{dx}{d\epsilon} \right) = \frac{dX(x)}{d\epsilon} = X(X(x)) = X^2(x) \quad (13)$$

$$\frac{d^2x}{d\epsilon^2} = \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{dx}{d\epsilon} \right) = \frac{d\xi(x, y)}{d\epsilon} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{d\epsilon} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} = \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \xi}{\partial y} = X(\xi) \quad (14)$$

• **Aplicando a Eq.(9) à x^* , temos:**

$$\xi^* = \xi(x^*, y^*) = \frac{dx^*}{d\epsilon} = X(x^*) \quad (15)$$

$$\frac{d^2x^*}{d\epsilon^2} = \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{dx^*}{d\epsilon} \right) = \frac{dX(x^*)}{d\epsilon} = X(X(x^*)) = X^2(x^*) \quad (16)$$

$$\frac{d^2x^*}{d\epsilon^2} = \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{dx^*}{d\epsilon} \right) = \frac{d\xi(x^*, y^*)}{d\epsilon} = \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} \frac{dx^*}{d\epsilon} + \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} \frac{dy^*}{d\epsilon} = \xi^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \eta^* \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} = X^*(\xi^*) \quad (17)$$

onde a Eq.(18) representa o gerador de simetrias:

$$X^* = \xi^* \frac{\partial}{\partial x^*} + \eta^* \frac{\partial}{\partial y^*} \quad (18)$$

1.5 Gerador infinitesimal estendido

O gerador estendido difere do gerador simples por conter o termo $\eta^{(1)}$, que depende da derivada primeira de y em relação a x , ou seja, de y' . O passo a passo para sua

determinação é mostrado à seguir:

$$x^* = x + dx \Rightarrow x^* = x + \xi d\epsilon \Rightarrow dx^* = dx + d\xi d\epsilon \quad (19)$$

$$y^* = y + dy \Rightarrow y^* = y + \eta d\epsilon \Rightarrow dy^* = dy + d\eta d\epsilon \quad (20)$$

dividindo a Eq.(20) pela Eq.(19), obtemos a Eq.(21),

$$y'^* = \frac{dy^*}{dx^*} = \frac{dy + d\eta d\epsilon}{dx + d\xi d\epsilon} = \frac{\frac{dy+d\eta d\epsilon}{dx}}{\frac{dx+d\xi d\epsilon}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{d\eta}{dx} \frac{d\epsilon}{1}}{\frac{dx}{dx} + \frac{d\xi}{dx} \frac{d\epsilon}{1}} \quad (21)$$

Aplicando a aproximação de Newton na Eq.(21), obtemos a Eq.(22),

$$y'^* = \left(y' + \frac{d\eta}{dx} \frac{d\epsilon}{1}\right) \left(1 + \frac{d\xi}{dx} \frac{d\epsilon}{1}\right)^{-1} = \left(y' + \frac{d\eta}{dx} \frac{d\epsilon}{1}\right) \left(1 - \frac{d\xi}{dx} \frac{d\epsilon}{1}\right) \quad (22)$$

realizando o produto notável na Eq.(22), obtemos:

$$y'^* = y' + \left(\frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}\right) d\epsilon. \quad (23)$$

Simplificando, obtemos:

$$y'^* = y' + \eta^{(1)} d\epsilon, \quad (24)$$

onde temos o gerador de simetrias estendido de 1ª ordem:

$$X^{(1)} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} \quad (25)$$

onde:

$$\eta^{(1)} = \left(\frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}\right) \quad (26)$$

• **Escrevendo o infinitésimo $\eta^{(1)}$ de outra maneira:**

$$\eta^{(1)} = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dy}{dx}\right) - y' \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{dy}{dx}\right) \quad (27)$$

$$\eta^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y' - y' \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} y'\right) \quad (28)$$

$$\eta^{(1)} = \eta_x + \eta_y y' - \xi_x y' - \xi_y y'^2 \quad (29)$$

1.6 Simetrias de Lie

Chamamos simetrias de Lie de uma EDO, a um grupo de Lie tal que essa EDO seja invariante frente as transformações desse grupo. Ou seja, consideremos o grupo de transformações de Lie a um parâmetro dado por:

$$\begin{cases} x^* = X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y^* = Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2), \end{cases} \quad (30)$$

e a EDO dada por:

$$y^{(n)} = \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (31)$$

Dizemos que o grupo (30) é uma simetria para a Eq.(31), se:

$$X^{(n)}(y^{(n)} - \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})) = 0, \quad (32)$$

quando $y^{(n)} = \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, onde $X^{(n)}$ é o gerador infinitesimal da n-ésima extensão do grupo (30). Ou seja, explicando de uma forma mais simples, as simetrias são compostas pelo par de infinitésimos $[\xi, \eta]$ que, por sua vez, compõem o gerador infinitesimal.

1.7 Coordenadas canônicas

Um resultado importante da teoria de Lie é que sempre existe uma transformação de coordenadas na qual um grupo de Lie a um parâmetro pode ser escrito como o grupo das translações. O ponto é que, escrita nestas coordenadas, uma EDO que seja invariante frente a um determinado grupo de Lie será uma *quadratura*¹.

Considere a seguinte transformação de coordenadas (biunívoca e C^∞ em um do-

¹ Uma EDO é chamada *quadratura* se puder ser resolvida com uma integração simples, ou seja, se é da forma $y' = \phi(x)$ ou $y' = \phi(y)$, aonde $y' = \frac{dy}{dx}$.

mínio apropriado):

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \dots, y_n(\mathbf{x})). \quad (33)$$

O gerador infinitesimal X será escrito como

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \eta_j(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} = Y \quad (34)$$

onde $\eta_j(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}$.

Definição 1.7.1 *Uma transformação de coordenadas $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \dots, y_n(\mathbf{x}))$ define um conjunto de coordenadas canônicas para um grupo de Lie se, em termos das novas coordenadas, o grupo se torna o grupo das translações no R^n , ou seja:*

$$\begin{aligned} y_i^* &= y_i, & i &= 1, \dots, n-1, \\ y_n^* &= y_n + \epsilon. \end{aligned} \quad (35)$$

Tal mudança de coordenadas sempre existe (veja (4)). Portanto, escrito nas coordenadas canônicas, o gerador infinitesimal se apresenta em sua forma mais simples:

$$Y = \frac{\partial}{\partial y_n}. \quad (36)$$

Exemplo: Considere o grupo de transformações de escala dado por

$$\begin{aligned} x^* &= e^\epsilon x = x + \epsilon x + O(\epsilon^2), \\ y^* &= e^{2\epsilon} y = y + \epsilon 2y + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (37)$$

Nas coordenadas canônicas $r(x, y)$ e $s(x, y)$ as transformações do grupo são escritas como

$$r^* = r, \quad s^* = s + \epsilon. \quad (38)$$

Mas, de (30),

$$r^* = r + \epsilon X r + \frac{\epsilon^2}{2!} X^2 r + \dots, \quad s^* = s + \epsilon X s + \frac{\epsilon^2}{2!} X^2 s + \dots. \quad (39)$$

Logo, as coordenadas canônicas $r(x, y)$ e $s(x, y)$ devem satisfazer às equações $X(r) = 0$ e

$X(s) = 1$, ou seja,

$$x \frac{\partial r}{\partial x} + 2y \frac{\partial r}{\partial y} = 0, \quad x \frac{\partial s}{\partial x} + 2y \frac{\partial s}{\partial y} = 1, \quad (40)$$

que têm como solução $r(x, y) = \frac{y}{x^2}$ e $s(x, y) = \ln(x)$.

1.8 O uso das simetrias de Lie na integração de EDOs

Nesta seção, vamos apresentar um resumo do uso de simetrias de Lie na solução/-redução de 1EDOs e 2EDOs:

1.8.1 Integração de 1EDOs

O procedimento para encontramos a solução geral de uma 1EDO

$$y' = \phi(x, y) \quad (41)$$

a partir dos infinitésimos ξ e η , se divide em dois métodos distintos: o uso de *coordenadas canônicas* ou a *determinação de um fator integrante*.

1.8.1.1 Uso de coordenadas canônicas

Vimos que uma EDO escrita nas *coordenadas canônicas* de seu grupo de simetrias torna-se uma quadratura e o gerador infinitesimal $X = \xi \partial_x + \eta \partial_y$ se torna $X = \partial_s$. Usando a transformação canônica, a 1EDO (41) se escreve

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_r + y_s \frac{ds}{dr}}{x_r + x_s \frac{ds}{dr}} = \phi(x(r, s), y(r, s)). \quad (42)$$

onde y_r significa $\frac{\partial y}{\partial r}$ etc. Resolvendo para $\frac{ds}{dr}$ temos:

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{y_r - x_r \phi(x(r, s), y(r, s))}{y_s - x_s \phi(x(r, s), y(r, s))} = \varphi, \quad (43)$$

onde φ é função apenas de r , pois $X = \partial_s(y' - \varphi) = 0$. Logo, podemos fazer uma integração e obter $s(r) = \int \varphi(r) dr + C_1 = \Phi(r) + C_1$ e a solução da (41) será

$$s(x, y) = \Phi(r(x, y)) + C_1. \quad (44)$$

1.8.1.2 Determinação de um fator integrante

A 1EDO (41) pode ser escrita como uma 1-forma diferencial

$$M(x, y) dx - N(x, y) dy = 0, \quad (45)$$

onde $\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \phi(x, y)$. Pode ser mostrado(4) que

$$\mu(x, y) = \frac{1}{M \xi - N \eta} \quad (46)$$

é um fator integrante para a (45), levando à solução

$$I(x, y) = \int M \mu dx - \int N \mu dy - \iint (\mu M_y + M \mu_y) dx dy = C. \quad (47)$$

1.8.1.3 Exemplo

Considere a 1EDO

$$y' = \frac{y}{(y^2 + x^2 + x)}, \quad (48)$$

que admite o grupo de Lie definido pelos infinitésimos $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = 1$.

Coordenadas canônicas: O gerador se escreve

$$X = \frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}. \quad (49)$$

De $X(r) = 0$ e $X(s) = 1$ temos que a transformação canônica é $\{r = \frac{y(x)}{x}, s(r) = y(x)\}$ e, portanto, a transformação inversa é $\{x = \frac{s(r)}{r}, y(x) = s(r)\}$. Assim, a 1EDO transformada é

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{y_r - x_r \phi(x(r, s), y(r, s))}{y_s - x_s \phi(x(r, s), y(r, s))} = -\frac{1}{1 + r^2}, \quad (50)$$

cuja solução é $s(r) = -\arctan(r) + C$. Dessa maneira, aplicando a transformação canônica à solução da 1EDO transformada, podemos obter a solução da 1EDO (48):

$$I(x, y) = y + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = C. \quad (51)$$

Fator integrante: Um fator integrante para a 1EDO (48) é:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{M\xi - N\eta} = \frac{1}{y\frac{x}{y} - (y^2 + x^2 + x)} = \frac{-1}{y^2 + x^2}. \quad (52)$$

Dessa maneira, a solução geral da 1EDO (48) será:

$$I(x, y) = y + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = C \quad (53)$$

1.8.2 O uso das simetrias de Lie na integração de 2EDOs

No caso em que estamos tentando resolver uma 2EDO as coisas se complicam pois pode ser que a 2EDO não seja integrável analiticamente, isto é, que não existam quantidades conservadas (integrais primeiras) analíticas para o sistema descrito pela 2EDO. Pode ser também que, apesar de possuir integrais primeiras, a 2EDO não admita simetrias de ponto (lembre que simetrias de ponto são simetrias em que os infinitésimos ξ e η dependem apenas de (x, y)). Vamos mostrar aqui apenas a ‘receita básica’ para o caso em que temos uma simetria.

1.8.2.1 Uma simetria de ponto

Considere uma 2EDO dada por

$$y'' = \phi(x, y, y'). \quad (54)$$

Podemos reduzir a ordem da 2EDO:

(a) Usando coordenadas canônicas: nas coordenadas (r, s) definidas por:

$$\xi(x, y) \frac{\partial r}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

$$\xi(x, y) \frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial s}{\partial y} = 1$$

a 2EDO não dependerá de r explicitamente: $\frac{d^2s}{dr^2} = \varphi(s, \frac{ds}{dr})$

(b) Usando invariantes diferenciais: Toda 2EDO que admite o grupo G pode ser escrita como,

$$\frac{dI^{(1)}}{dI^{(0)}} = F(I^{(0)}, I^{(1)}), \quad (55)$$

onde $I^{(0)}$ e $I^{(1)}$ são os invariantes de ordens zero e primeira do grupo G , respectivamente. Assim, nas coordenadas (u, v) definidas por,

$$u = I^{(0)}$$

$$v = I^{(1)}$$

a 2EDO será escrita como: $\frac{dv}{du} = \psi(u, v)$.

1.8.2.2 Uma simetria de Lie não de ponto

Suponha que a 2EDO (54) admita um grupo de simetrias dado por:

$$X^{(1)} = \xi(x, y, y') \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} \quad (56)$$

onde² $\zeta(x, y, y') = D_x[\eta(x, y, y')] - y' D_x[\xi(x, y, y')]$. No caso geral o grupo não apresenta um invariante de ordem zero. Então, para usar os invariantes diferenciais, temos que resolver o sistema característico da EDP,

$$\xi(x, y, y') \frac{\partial \psi}{\partial x} + \eta(x, y, y') \frac{\partial \psi}{\partial y} + \zeta(x, y, y') \frac{\partial \psi}{\partial y'} = 0 \quad (57)$$

que é dado por:

$$\frac{dx}{\xi(x, y, y')} = \frac{dy}{\eta(x, y, y')} = \frac{dy'}{\zeta(x, y, y')} \quad (58)$$

que é, talvez, mais difícil de resolver do que a 2EDO original. Nesse caso, o que geralmente é feito é usar o resultado descrito abaixo para colocar a simetria na forma evolucionária:

Teorema 1.8.1 *Se $X^{(1)} = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta^{(1)} \partial_{y'}$ é uma simetria admitida pela 2EDO (54),*

² Caso contrário, as transformações não formariam um grupo.

então,

$$\tilde{X}^{(1)} \equiv X^{(1)} + \rho(x, y, y')D_x \quad (59)$$

também é uma simetria.

Do teorema 1.8.1, escolhendo $\rho = -\xi$, temos que \tilde{X} não terá o coeficiente de³ ∂_x :

$$\tilde{X}^{(1)} = (\eta - y'\xi)\partial_y + (\eta^{(1)} - \phi\xi)\partial_{y'}, \quad (60)$$

e, além disso, o comutador $\left[D_x, \tilde{X}^{(1)} \right] = 0$. Assim, com uma simetria na forma evolucionária⁴, temos que $I^{(0)} = x$ e $I^{(1)}$ é solução da 1EDP $X^{(1)}(I^{(1)}) = 0$. Desta forma, para podermos usar o método dos invariantes diferenciais, precisamos primeiro resolver a 1EDO característica da 1EDP $X^{(1)}(I^{(1)}) = 0$.

1.9 O problema com simetrias não de ponto

Como mencionado na introdução deste trabalho, o método de simetrias é, provavelmente, o procedimento mais abrangente e eficiente para resolver/reduzir 2EDOs. Contudo, no caso em que a 2EDO não apresente simetrias de ponto, isto é, no caso em que a 2EDO

$$y'' = \phi(x, y, y') \quad (61)$$

não admita como simetria um campo vetorial X da forma

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad (62)$$

a condição de simetria, isto é, a 2EDP que resulta da condição $X^2(y'' - \phi(x, y, y')) = 0$, mod $(y' - \phi(x, y, y') = 0)$, não pode ser separada nas potências de y' e, portanto, é muito difícil resolvê-la (ou mesmo encontrar soluções particulares, o que já bastaria). A maioria dos métodos que buscam resolver esse problema (veja as referências citadas na introdução) tenta encontrar alguma simetria dinâmica ou não-local. Contudo, se a simetria buscada depende de (x, y, y') esses métodos vão acabar caindo no mesmo problema, ou seja, teremos dificuldade para encontrar a simetria dinâmica ou não-local por não podermos separar a

³ $\partial_u \equiv \frac{\partial}{\partial u}$

⁴ Diz-se que uma simetria com $\xi = 0$ está na forma evolucionária.

2EDP que representa a condição de simetria.

No capítulo seguinte, no caso de uma 2EDO racional que possua uma integral primeira Liouvilliana, vamos mostrar que podemos construir um procedimento para determinar uma simetria não-local (caso exista).

2 UM NOVO MÉTODO PARA DETERMINAR SIMETRIAS

Neste capítulo, vamos mostrar como construir um método semi-algorítmico para determinar as simetrias de uma 2EDO racional que apresenta (pelo menos) uma integral primeira Liouvilliana. A ideia básica surgiu a partir de uma maneira formal de representar uma simetria não-local de uma 2EDO racional que possuísse um fator integrante de Darboux. Esse capítulo terá a seguinte estrutura:

- Na primeira seção, apresentamos um modo formal de representar uma simetria não-local (na forma evolucionária) de uma 2EDO racional. Em resumo, a partir da equivalência entre os operadores *derivada total* $\frac{d}{dx}$ e o campo vetorial de Cartan $D_x \equiv \partial_x + z\partial_y + \phi\partial_{y'}$, podemos escrever a condição de simetria (uma equação diferencial parcial de segunda ordem (2EDP) linear homogênea para o infinitésimo ν) como uma equação diferencial parcial de primeira ordem (1EDP) para a derivada logarítmica de ν .
- Na segunda seção, estabelecemos uma ligação (muito útil) entre o fator integrante μ e uma simetria X da 2EDO. Usando essa ligação, mostramos que a derivada logarítmica do infinitésimo ν que define a simetria X (sobre as soluções da 2EDO) é uma função racional de (x, y, z) (denotada neste trabalho por $\sigma(x, y, z)$)⁵ para o caso considerado (i.e., 2EDO racional com uma integral primeira Liouvilliana).
- Na terceira seção, mostramos que uma vasta classe de 2EDOs racionais que apresentam (ao menos) uma integral primeira Liouvilliana I admitem um *fator integrante* μ de Darboux⁶. Em seguida, mostramos como construir um procedimento semi-algorítmico para determinar σ . Por fim, apresentamos os passos do algoritmo e um exemplo para tornar mais clara a aplicação do método.
- Na quarta seção, apresentamos diversos casos em que podemos tornar o algoritmo bem mais eficiente.

⁵ No caso de 2EDOs a definição da função σ ‘coincide’ com as definições de λ -simetria (associada com o campo vetorial ∂_y) e com a definição de função-S (veja (39)).

⁶ Ou seja, um fator integrante que é uma função de Darboux (veja a definição na sequência do texto).

2.1 Uma maneira útil de representar uma simetria

Voltemos à 2EDO racional (54). Considere que $X_e^{(1)}$ define uma simetria para (54) na forma evolucionária

$$X_e^{(1)} = \nu \partial_y + D_x[\nu] \partial_{y'}, \quad (63)$$

onde $\nu \equiv \eta - y'\xi$. Neste caso, a condição de simetria é $X_e^{(2)}[y'' - \phi(x, y, y')] = 0$, mod $[y'' - \phi(x, y, y') = 0]$, onde $X_e^{(2)} = \nu \partial_y + D_x[\nu] \partial_{y'} + D_x^2[\nu] \partial_{y''}$. Então, ν obedece à equação diferencial parcial (EDP):

$$D_x^2[\nu] - D_x[\nu] \phi_{y'} - \nu \phi_y = 0, \quad (64)$$

que é uma EDP homogênea linear de segunda ordem (2EDP linear homogênea). A ideia fundamental (que culminou neste trabalho) veio da equivalência formal entre os operadores D_x e $\frac{d}{dx}$ sobre as soluções da 2EDO (54) racional. Devido a esta equivalência, (sobre as soluções), podemos considerar a 2EDP (64) como uma 2EDO linear e homogênea. É um fato bem conhecido que qualquer 1EDO de Riccati está relacionada (por uma mudança de variáveis) com uma 2EDO linear homogênea. Vejamos como isso acontece:

Definição 2.1.1 (Equação de Riccati) *Qualquer uma 1EDO que pode ser escrita como,*

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x), \quad (65)$$

onde $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são funções infinitamente diferenciáveis (C^∞), é denominada equação de Riccati ou 1EDO de Riccati.⁷

Fazendo a seguinte mudança de variáveis,

$$y = -\frac{1}{f(x)} \frac{\omega'}{\omega}, \quad (66)$$

na equação de Riccati (65), obtemos:

$$\omega'' = \frac{f'(x) + g(x)f(x)}{f(x)} \omega' - h(x)f(x)\omega, \quad (67)$$

que é uma 2EDO linear homogênea. Assim, considerando a 2EDP (64) como uma 2EDO homogênea e linear (sobre as soluções da 2EDO (54)), o análogo da transformação (66) é

⁷ Essas equações são as 1EDOs mais gerais cujas singularidades móveis são pólos.

$$\sigma = -\frac{D_x[\nu]}{\nu} \quad (68)$$

e sua inversa é dada pela solução formal de (68) para ν :

$$\nu = e^{-\int_x[\sigma]} \quad (69)$$

Observação 2.1.1 Observe que o operador D_x é uma derivada total apenas sobre as soluções da 2EDO. Assim, \int_x é o operador⁸ inverso de D_x , ou seja,

$$\int_x D_x = D_x \int_x = 1. \quad (70)$$

Dos resultados acima, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1 Se a 2EDO racional (54) admite uma simetria dada por $X_\epsilon^{(1)} = \nu\partial_y + D_x[\nu]\partial_{y'}$, então a função σ definida por:

$$\sigma = -\frac{D_x[\nu]}{\nu}, \quad (71)$$

obedece a 1EDP:

$$D_x[\sigma] = \sigma^2 + \partial_{y'}[\phi]\sigma - \partial_y[\phi]. \quad (72)$$

Reciprocamente, se a função σ é uma solução da 1EDP (72) então a função $\nu = e^{-\int_x[\sigma]}$ define uma simetria para a 2EDO racional (54).

Prova do Teorema 2.1.1 Se a hipótese do teorema for satisfeita, existe uma função ν satisfazendo $D_x^2[\nu] = D_x[\nu]\partial_{y'}[\phi] + \nu\partial_y[\phi]$. Substituindo $\nu = e^{-\int_x[\sigma]}$ nesta 2EDP, já que

$$\begin{aligned} D_x[\nu] &= D_x\left[e^{-\int_x[\sigma]}\right] = e^{-\int_x[\sigma]}D_x\left[-\int_x[\sigma]\right] = -\sigma e^{-\int_x[\sigma]}, \\ D_x^2[\nu] &= D_x\left[-\sigma e^{-\int_x[\sigma]}\right] = D_x[-\sigma]e^{-\int_x[\sigma]} - \sigma D_x\left[e^{-\int_x[\sigma]}\right] \Rightarrow \\ D_x^2[\nu] &= -D_x[\sigma]e^{-\int_x[\sigma]} - \sigma\left(-\sigma e^{-\int_x[\sigma]}\right), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} -D_x[\sigma]e^{-\int_x[\sigma]} - \sigma\left(-\sigma e^{-\int_x[\sigma]}\right) &= -\sigma e^{-\int_x[\sigma]}\partial_{y'}[\phi] + e^{-\int_x[\sigma]}\partial_y[\phi] \Rightarrow \\ D_x[\sigma] &= \sigma^2 + \partial_{y'}[\phi]\sigma - \partial_y[\phi]. \end{aligned}$$

⁸ Em outras palavras, \int_x é um operador não local

Agora, vamos provar a volta. Considere a função definida por $\nu = e^{-\int_x[\sigma]}$ onde σ é uma solução da 1EDP (72). Então,

$$\begin{aligned} D_x^2[\nu] - D_x[\nu]\partial_{y'}[\phi] - \nu\partial_y[\phi] &= -D_x[\sigma]e^{-\int_x[\sigma]} - \sigma\left(-\sigma e^{-\int_x[\sigma]}\right) + \\ \phi_{y'}\sigma e^{-\int_x[\sigma]} - \phi_y e^{-\int_x[\sigma]} &= e^{-\int_x[\sigma]}(-D_x[\sigma] + \sigma^2 + \phi_{y'}\sigma - \phi_y) \end{aligned}$$

Como, por hipótese, σ é uma solução da 1EDP (72), então o termo $-D_x[\sigma] + \sigma^2 + \phi_{y'}\sigma - \phi_y$ é igual a zero. Então, $D_x^2[\nu] - D_x[\nu]\partial_{y'}[\phi] - \nu\partial_y[\phi] = 0$.

2.2 A relação com um fator integrante

Vamos assumir agora que a 2EDO possui uma integral primeira que pode ser expressa em ‘forma fechada’, ou seja, que a 2EDO apresenta uma integral primeira Liouviliana. O conhecimento de um fator integrante permite obter essa integral primeira por meio de quadraturas. À seguir, mostraremos como esse fator integrante está relacionado a uma simetria (na forma evolucionária).

Definição 2.2.1 (Fator integrante) *Seja $y'' = \phi(x, y, y')$ uma 2EDO racional apresentando uma integral primeira Liouviliana $I(x, y, y')$. Qualquer função $\mu(x, y, y')$ satisfazendo*

$$\mu(x, y, y')(\phi(x, y, y') - y'') = \frac{d}{dx}[I(x, y, y')], \quad (73)$$

é denominada um fator integrante para a 2EDO.

De (73) podemos escrever⁹:

$$\mu\phi - \mu y'' = d_x[I(x, y, y')] = \partial_x[I] + y'\partial_y[I] + y''\partial_{y'}[I], \quad (74)$$

Então, como em (74) nem μ nem ϕ nem I são funções de y'' , temos que:

$$\mu = -\partial_{y'}[I]. \quad (75)$$

Por outro lado, suponha que $X_e^{(1)} = \nu\partial_y + D_x[\nu]\partial_{y'}$ seja um campo vetorial de simetria da 2EDO racional $y'' = \phi(x, y, y')$ de tal modo que:

$$X_e^{(1)}[I] = \nu\partial_y[I] + D_x[\nu]\partial_{y'}[I] = 0. \quad (76)$$

⁹ $d_x \equiv \frac{d}{dx}$.

Podemos escrever (76) como:

$$-\frac{D_x[\nu]}{\nu} = \frac{\partial_y[I]}{\partial_{y'}[I]}. \quad (77)$$

e notando que $-\frac{D_x[\nu]}{\nu}$ é σ (como definido em (71)), temos que:

$$\sigma = \frac{\partial_y[I]}{\partial_{y'}[I]}. \quad (78)$$

Com base em (75) e (78) podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 *Seja $y'' = \phi(x, y, y')$ uma 2EDO racional apresentando uma integral primeira Liouvillianiana $I(x, y, y')$. Além disso, seja μ um fator integrante tal que $\mu = -\partial_{y'}[I]$ e seja ν uma função definindo uma simetria (na forma evolutiva) tal que $X_e^{(1)}[I] = \nu\partial_y[I] + D_x[\nu]\partial_{y'}[I] = 0$. Então, vale a seguinte equação:*

$$-\frac{D_x[\mu]}{\mu} = -\frac{D_x[\nu]}{\nu} + \partial_{y'}[\phi]. \quad (79)$$

Prova do Teorema 2.2.1 *Se as hipóteses do teorema forem satisfeitas, então $\mu = -\partial_{y'}[I]$. Aplicando D_x , obtemos:*

$$D_x[\mu] = -D_x[\partial_{y'}[I]]. \quad (80)$$

Onde o comutador $[\partial_{y'}, D_x]$ é dado por:

$$[\partial_{y'}, D_x] = \partial_{y'}D_x - D_x\partial_{y'} = \partial_y + \partial_{y'}[\phi]\partial_{y'}, \quad (81)$$

então

$$\begin{aligned} [\partial_{y'}, D_x][I] &= \partial_{y'}[D_x[I]] - D_x[\partial_{y'}[I]] = \partial_y[I] + \partial_{y'}[\phi]\partial_{y'}[I] = \\ &= \underbrace{\partial_{y'}[D_x[I]]}_{=0} + \underbrace{D_x[-\partial_{y'}[I]]}_{=D_x[\mu]} = \partial_y[I] - \partial_{y'}[\phi]\mu. \end{aligned} \quad (82)$$

Dividindo (82) por $\partial_{y'}[I]$ e observando a equação (77), obtemos finalmente:

$$\frac{D_x[\mu]}{\partial_{y'}[I]} = \frac{\partial_y[I]}{\partial_{y'}[I]} - \partial_{y'}[\phi]\frac{\mu}{\partial_{y'}[I]} \Rightarrow -\frac{D_x[\mu]}{\mu} = -\frac{D_x[\nu]}{\nu} + \partial_{y'}[\phi]. \quad (83)$$

2.3 Um possível algoritmo

Neste trabalho, estamos interessados em encontrar simetrias para usá-las com o mesmo sentido da teoria de Lie, isto é, integrar 2EDOs usando quadraturas. Nesse sen-

tido, ao falar sobre 2EDOs racionais com uma integral primeira Liouvillian, estamos procurando fatores integrantes para integrarmos, que sejam da forma¹⁰:

$$\mu = e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i}, \quad (84)$$

onde Z_0 é uma função racional de (x, y, y') , os p_i são polinômios irredutíveis em (x, y, y') e os n_i são números racionais. Neste caso, podemos formular o seguinte teorema:

Teorema 2.3.1 *Seja $y'' = \phi(x, y, y')$ uma 2EDO racional apresentando uma integral primeira Liouvillian $I(x, y, y')$ e seja μ um fator integrante dado pela equação (84), ou seja,*

$$\mu = e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i},$$

onde Z_0 é uma função racional de (x, y, y') , os p_i são polinômios irredutíveis em (x, y, y') , os n_i são constantes, tal que $\mu = -\partial_{y'}[I]$. Além disso, seja ν uma função definindo uma simetria (na forma evolucionária) tal que $X_e^{(1)}[I] = \nu \partial_y[I] + D_x[\nu] \partial_{y'}[I] = 0$. Então a função σ definida por (68), ou seja,

$$\sigma \equiv -\frac{D_x[\nu]}{\nu}$$

(onde D_x é o campo vetorial associado à 2EDO), é uma função racional de (x, y, y') .

Prova do Teorema 2.3.1 *Assumindo que $\mu = e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i}$, temos*

$$\frac{D_x[\mu]}{\mu} = \frac{e^{Z_0} D_x \left[\prod_i p_i^{n_i} \right] + e^{Z_0} D_x [Z_0] \prod_i p_i^{n_i}}{e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i}} = D_x [Z_0] + \frac{D_x \left[\prod_i p_i^{n_i} \right]}{\prod_i p_i^{n_i}}.$$

Como $D_x = \partial_x + y' \partial_y + \phi(x, y, y') \partial_{y'}$, Z_0 é uma função racional de (x, y, y') e os p_i são polinômios em (x, y, y') , então temos que $\frac{D_x[\mu]}{\mu}$ é uma função racional de (x, y, y') . No entanto, do resultado do teorema 2.2.1

$$-\frac{D_x[\mu]}{\mu} = -\frac{D_x[\nu]}{\nu} + \partial_{y'}[\phi] = \sigma + \partial_{y'}[\phi]. \quad (85)$$

Finalmente, como ϕ é racional, $\partial_{y'}[\phi]$ também é racional. Portanto, σ é uma função racional de (x, y, y') .

¹⁰ Na verdade, não conseguimos encontrar nenhum caso em que isso não fosse válido. Então, diríamos que a grande maioria dos casos são cobertos por esta estrutura.

Observação 2.3.1 *Observe que, embora μ seja uma função elementar da forma mostrada acima, a simetria ν não precisa ter tal formato, ou seja, tudo o que temos é que $\nu = e^{-\int_x [\sigma]}$, onde σ é uma função racional. Por outro lado, se ν fosse uma função elementar do formato mostrado acima, então σ também seria uma função racional, mas agora o fator integrante não seria necessariamente uma função elementar.*

A partir dos teoremas 2.1.1 e 2.3.2, podemos estabelecer um resultado que permite a construção de um algoritmo para busca de simetrias de 2EDOs racionais:

Teorema 2.3.2 *Seja*

$$y'' = \frac{M(x, y, y')}{N(x, y, y')} = \phi(x, y, y'),$$

onde M e N são polinômios coprimos, seja uma 2EDO racional apresentando uma integral primeira analítica global $I(x, y, y')$ e um campo vetorial de simetria $X_e^{(1)} = \nu \partial_y + D_x[\nu] \partial_{y'}$ tal que a função σ definida como

$$\sigma \equiv -\frac{D_x[\nu]}{\nu}$$

é uma função racional, ou seja, $\sigma = \frac{p}{q}$ onde p e q são polinômios coprimos. Sejam \deg_M , \deg_N , \deg_p e \deg_q os graus dos polinômios M , N , p e q , respectivamente. Se $\deg_M \leq \deg_N + 1$ então $\deg_p \leq \deg_q$. Caso contrário, se $\deg_M > \deg_N + 1$ então, $\deg_p \leq \deg_q + \deg_M - \deg_N - 1$.

Prova do Teorema 2.3.2 *Do teorema 2.1.1, a função σ obedece à equação*

$$D_x[\sigma] = \sigma^2 + \partial_{y'}[\phi]\sigma - \partial_y[\phi].$$

Substituindo $\sigma = \frac{p}{q}$, temos

$$\frac{qD_x[p] - pD_x[q]}{q^2} = \frac{p^2}{q^2} + \partial_{y'}[\phi]\frac{p}{q} - \partial_y[\phi],$$

implicando que¹¹

$$\frac{p_x}{q} + \frac{y'p_y}{q} + \frac{Mp_{y'}}{Nq} - \frac{pq_x}{q^2} - \frac{y'pq_y}{q^2} - \frac{Mpq_{y'}}{Nq^2} = \frac{p^2}{q^2} + \frac{pM_{y'}}{qN} - \frac{PMN_{y'}}{qN^2} - \frac{M_y}{N} + \frac{MN_y}{N^2}. \quad (86)$$

¹¹ Onde v_u significa $\partial_u[v]$

Multiplicando a equação (86) por q^2N^2 e isolando o termo p^2N^2 , obtemos

$$p^2N^2 = -pqNM_{y'} + pqMN_{y'} + q^2NM_y - q^2MN_y + qp_xN^2 + y'qp_yN^2 + qp_{y'}NM - pq_xN^2 - y'pq_yN^2 - pq_{y'}NM \quad (87)$$

O grau do termo no lado esquerdo da equação (87) é $2deg_p + 2deg_N$, pois é um quadrado (p^2N^2). Os graus (máximos) dos seguintes termos (no lado direito) são, respectivamente,

$$deg_p + deg_q + deg_M + deg_N - 1,$$

$$deg_p + deg_q + deg_M + deg_N - 1,$$

$$2deg_q + deg_M + deg_N - 1,$$

$$2deg_q + deg_M + deg_N - 1,$$

$$deg_p + deg_q + 2deg_N - 1,$$

$$deg_p + deg_q + 2deg_N,$$

$$deg_p + deg_q + deg_M + deg_N - 1,$$

$$deg_p + deg_q + 2deg_N - 1,$$

$$deg_p + deg_q + 2deg_N,$$

$$deg_p + deg_q + deg_M + deg_N - 1$$

Existem quatro casos:

caso 1: $2deg_p + 2deg_N \leq deg_p + deg_q + deg_M + deg_N - 1$

caso 2: $2deg_p + 2deg_N \leq 2deg_q + deg_M + deg_N - 1$

caso 3: $2deg_p + 2deg_N \leq deg_p + deg_q + 2deg_N - 1$

caso 4: $2deg_p + 2deg_N \leq deg_p + deg_q + 2deg_N$;

Assim, as desigualdades acima podem ser escritas como:

1. $deg_p \leq deg_q + deg_M - deg_N - 1$;

2. $deg_p \leq deg_q + \frac{deg_M - deg_N - 1}{2}$;

3. $deg_p \leq deg_q - 1$;

4. $deg_p \leq deg_q$;

A terceira desigualdade implica na quarta desigualdade e a segunda desigualdade implica na primeira. Então, se $deg_M > deg_N + 1$ então $deg_p \leq deg_q + deg_M - deg_N - 1$, caso contrário, se $deg_M \leq deg_N + 1$ então $deg_p \leq deg_q$.

A partir do resultado acima, podemos estabelecer um semi-algoritmo¹² para en-

¹² Um algoritmo (no sentido que estamos considerando aqui) é um conjunto de regras que podem ser traduzidas em uma linguagem de programação para que o conjunto de regras possa ser executado por um computador em um número finito de etapas. Nosso procedimento (no caso geral) é um semi-algoritmo porque não é possível determinar a priori o grau da função racional σ .

contrar as simetrias de uma 2EDO racional. A ideia é usar a equação (87) como base do nosso procedimento: basicamente construímos dois polinômios com coeficientes indeterminados (candidatos para p e q) e substituímos na equação (87). Em seguida, coletamos o resultado da equação polinomial em monômios de (x, y, y') e igualamos cada um dos coeficientes a zero. Fazendo isso, encontramos um sistema de equações algébricas para os coeficientes que, se resolvido, nos permitirá escrever formalmente a seguinte simetria:

$$X_e^{(1)} = \nu \partial_y + D_x[\nu] \partial_{y'} = e^{-\int_x [\sigma]} (\partial_y - \sigma \partial_{y'}), \quad (88)$$

onde σ é construído com a solução (p/q) do sistema de equações algébricas. Embora a simetria seja escrita em termos do funcional $\int_x [\sigma]$, seu uso para o cálculo dos invariantes $I^{(0)}$ e $I^{(1)}$ não depende disso: $I^{(0)} = x$ (forma evolucionária) e $I^{(1)}$ é tal que $e^{-\int_x [\sigma]} (\partial_y - \sigma \partial_{y'}) [I^{(1)}] = 0$, implicando que $(\partial_y - \sigma \partial_{y'}) [I^{(1)}] = 0$. Assim, podemos usar o método dos invariantes diferenciais da mesma forma que fizemos na subsubseção 1.8.2.2.

2.3.1 Os passos do semi-algoritmo

Os últimos parágrafos da seção anterior descrevem (coloquialmente) um possível semi-algoritmo para encontrar as simetrias de uma 2EDO racional.

Algoritmo 2.3.1 (ASymm)

1. *Construa o operador D_x .*
2. *Seja $n_{m\acute{a}x} = \text{algum n\acute{u}mero inteiro}$, $d_M = \text{grau}(M)$ e $d_N = \text{grau}(N)$.*
3. *Faça $n = 0$.*
4. *Faça $n = n + 1$.*
5. *Se $n > n_{m\acute{a}x}$, então Fracasso.*
6. *Se $d_M > d_N + 1$, então construa um polinômio genérico q_c de grau n em (x, y, y') com coeficientes b_i indeterminados e um polinômio genérico p_c de grau $n + d_M - d_N - 1$ em (x, y, y') com coeficientes a_i indeterminados, senão construa dois polinômios genéricos p_c e q_c de grau n em (x, y, y') com coeficientes indeterminados a_i e b_i , respectivamente.*
7. *Substitua p_c e q_c na equação (87), colete a equação polinomial resultante nas variáveis x, y, y' e iguale os coeficientes de cada monômio a zero, obtendo um sistema AE de equações algébricas.*

8. Resolva o sistema AE em relação a a_i e b_i . Se nenhuma solução for encontrada, então vá para o passo 4.
9. Substitua a solução em p_c/q_c (obtendo σ).

2.3.2 Exemplo

Considere a seguinte 2EDO racional:

$$y'' = \frac{(y' - 1)(x^4 y' + 2x^3 y - x^2 y + y')}{(x^2 y - 1)x^2}. \quad (89)$$

Vamos aplicar as etapas do procedimento para a 2EDO (89):¹³

1. $D_x = \partial_x + y' \partial_y + \frac{(y'-1)(x^4 y' + 2x^3 y - x^2 y + y')}{(x^2 y - 1)x^2} \partial_{y'}$.
2. $n_{max} = 7$, $d_M = 6$ e $d_N = 5$.
3. $n = 0$.
4. $n = n + 1 = 1$.
5. $1 < 7$ (continue).
6. $d_M = d_N + 1 \Rightarrow$
 $p_c = a_1 x + a_2 y + a_3 y' + a_0$,
 $q_c = b_1 x + b_2 y + b_3 y' + b_0$.
7. O sistema AE possui apenas a solução trivial (vá para o passo 4).
8. $n = n + 1 = 2$.
9. $2 < 7$ (continue).
10. $p_c = a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 y'^2 + a_7 xy' + a_8 yx + a_9 y'y + a_1 x + a_2 y + a_3 y' + a_0$,
 $q_c = b_4 x^2 + b_5 y^2 + b_6 y'^2 + b_7 xy' + b_8 yx + b_9 y'y + b_1 x + b_2 y + b_3 y' + b_0$.
11. O sistema AE possui apenas a solução trivial (vá para o passo 4).
12. $n = n + 1 = 3$.

¹³ Neste exemplo mostramos em detalhes os passos do algoritmo ASymm.

13. $3 < 7$ (continue).

$$14. \begin{aligned} p_c &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 y' + a_4 x^2 + a_5 x^3 + a_6 y^2 + a_7 y^3 + a_8 y'^2 + a_9 y'^3 + a_{10} xy^2 + \\ & a_{11} xy' + a_{12} xy'^2 + a_{13} x^2 y + a_{14} x^2 y' + a_{15} yx + a_{16} yy'^2 + a_{17} y^2 y' + a_{18} y' y + a_{19} xyy', \\ q_c &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 y' + b_4 x^2 + b_5 x^3 + b_6 y^2 + b_7 y^3 + b_8 y'^2 + b_9 y'^3 + b_{10} xy^2 + \\ & b_{11} xy' + b_{12} xy'^2 + b_{13} x^2 y + b_{14} x^2 y' + b_{15} yx + b_{16} yy'^2 + b_{17} y^2 y' + b_{18} y' y + b_{19} xyy'. \end{aligned}$$

15. O sistema AE tem a solução

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, a_1 = 0, a_{10} = 0, a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{14} = b_0, a_{15} = 0, a_{16} = 0, a_{17} = \\ & 0, a_{18} = 0, a_{19} = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = -b_0, a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = 0, a_8 = 0, a_9 = \\ & 0, b_0 = b_0, b_1 = 0, b_{10} = 0, b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{13} = -b_0, b_{14} = 0, b_{15} = 0, b_{16} = 0, b_{17} = \\ & 0, b_{18} = 0, b_{19} = 0, b_2 = 0, b_3 = 0, b_4 = 0, b_5 = 0, b_6 = 0, b_7 = 0, b_8 = 0, b_9 = 0. \end{aligned}$$

$$16. \sigma = -\frac{x^2(y' - 1)}{x^2y - 1}.$$

Assim, a 2EDO (89) admite a simetria

$$X_e^{(1)} = e^{-\int_x \left[-\frac{x^2(y'-1)}{x^2y-1}\right]} \left(\partial_y + \frac{x^2(y'-1)}{x^2y-1} \partial_{y'} \right). \quad (90)$$

Observação 2.3.2 *Observe que, embora a 2EDO (89) não tenha simetrias locais, podemos, usando o método de invariantes diferenciais (consulte a seção 1.8.2.2), encontrar uma integral primeira:*

- De $X_e^{(1)}[I^{(1)}] = 0$ temos que

$$e^{-\int_x \left[-\frac{x^2(y'-1)}{x^2y-1}\right]} \left(\partial_y + \frac{x^2(y'-1)}{x^2y-1} \partial_{y'} \right) [I^{(1)}] = 0 \Rightarrow \left(\partial_y + \frac{x^2(y'-1)}{x^2y-1} \partial_{y'} \right) [I^{(1)}] = 0.$$

- Um invariante é $I^{(0)} = x$. O outro é I , tal que $D_x(I) = 0$ e $X_e^{(1)}(I) = 0$. Note que $I^{(0)}$ e $I^{(1)}$ são os invariantes do grupo, ao passo que I é o invariante (integral primeira) da 2EDO. Explicando melhor, o invariante I (da 2EDO) deve ser dado por $I = F(I^{(0)}, I^{(1)}) = F(x, I^{(1)})$ tal que $D_x(I) = D_x(F(I^{(0)}, I^{(1)})) = D_x(F(x, I^{(1)})) = 0$. Dessa forma, teremos

$$D_x(F(x, I^{(1)})) = \frac{\partial F}{\partial x} + D_x(I^{(1)}) \frac{\partial F}{\partial I^{(1)}} = 0. \quad (91)$$

- De $X_e^{(1)}(I^{(1)}) = 0$, podemos encontrar $I^{(1)}$ resolvendo o sistema característico

$$\frac{dy}{x^2y - 1} = \frac{dy'}{x^2(y' - 1)}, \quad (92)$$

cuja solução é

$$I^{(1)} = \frac{y' - 1}{x^2y - 1}. \quad (93)$$

- De (91) temos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + D_x(I^{(1)}) \frac{\partial F}{\partial i_1} = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{(z-1)(x^2y-z)}{(x^2y-1)^2 x^2} \frac{\partial F}{\partial i_1} = 0. \quad (94)$$

Como $i_1 = \frac{y' - 1}{x^2y - 1}$, temos que

$$y' = i_1(x^2y - 1) + 1. \quad (95)$$

Substituindo (95) em (94), vamos obter

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{(i_1 - 1)i_1}{x^2} \frac{\partial F}{\partial i_1} = 0, \quad (96)$$

cujos sistema característico é

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{di_1}{(i_1 - 1)i_1} \Rightarrow F = \frac{(i_1 - 1)e^{\frac{1}{x}}}{i_1}. \quad (97)$$

- Substituindo $i_1 = I^{(1)}$ em F obtemos, finalmente, a integral primeira:

$$I = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2y - y')}{y' - 1}. \quad (98)$$

Observação 2.3.3 O método que apresentamos é um semi-algoritmo porque¹⁴ não podemos determinar o grau máximo dos polinômios p e q que formam a função. Porém, até o grau analisado, podemos ter certeza de que se não encontrarmos o função, então ela não existe dentro do intervalo considerado.

¹⁴ Um algoritmo completo deve terminar em um número finito de passos.

3 CASOS INTERESSANTES DO SEMI-ALGORITMO

No capítulo 3, apresentamos um método que pode calcular simetrias de Lie de uma 2EDO racional semi-algorítmicamente. No entanto, o método descrito acima pode melhorar muito em alguns casos especiais. Essas melhorias podem (dependendo da 2EDO em questão) simplificar muito o semi-algoritmo ASymm. Por exemplo, a maioria dos Sistemas de Álgebra Computacional (CAS) usa bases Gröbner para resolver sistemas de equações polinomiais, e visto que a complexidade do problema cresce exponencialmente com o aumento do número de coeficientes, qualquer diminuição no número de coeficientes (e/ou termos não lineares) pode representar a diferença entre o sucesso e o fracasso.

Neste capítulo, discutiremos algumas dessas possíveis melhorias.

Observação 3.0.1 *Em alguns pontos desta seção e da próxima, os tempos serão atribuídos a determinados conjuntos de operações. O que isso significa? Estes tempos resultam da simples execução dos passos (destas operações) no CAS Maple 17 (Neste trabalho, todos os dados computacionais, tempo de execução, etc, foram obtidos no mesmo computador com a seguinte configuração: Intel(R) Core(TM) i5-8265U @ 1,8 GHz).*

3.1 Algumas considerações gerais

Em primeiro lugar, vamos lembrar que estamos procurando uma função racional $\sigma = \frac{p}{q}$ que obedece a 1EDP $D_x[\sigma] = \sigma^2 + \partial_{y'}[\phi]\sigma - \partial_y[\phi]$, onde $D_x \equiv \partial_x + y'\partial_y + \phi(x, y, y')\partial_{y'}$. Então, se σ não é uma função de uma das variáveis (x, y, y') então podemos separar a 1EDP acima em um sistema sobredeterminado de EDPs, e neste caso, já há um algoritmo¹⁵ para determinar sua solução. Portanto, no que segue, iremos considerar que (pelo menos em princípio) σ é uma função das três variáveis (x, y, y'). Com isso em mente, vamos dividir a equação (87) por MN , obtendo

$$\frac{p^2N + pqM_{y'} - q^2M_y - qp_xN - y'qp_yN + pq_xN + y'pq_yN}{M} + q\frac{qN_y - pN_{y'}}{N} - qp_{y'} + pq_{y'} = 0 \quad (99)$$

Uma análise mais detalhada da equação (99) revela uma série de melhorias que podem ser feitas ao algoritmo ASymm para certas situações particulares: o termo $-qp_{y'} + pq_{y'}$ é polinomial desde que p e q sejam polinomiais. Além disso, este termo não pode ser nulo

¹⁵ Veja, por exemplo, (4).

porque é igual a $-q^2\partial_{y'}[\sigma]$ e, por hipótese, nem q nem $\partial_{y'}[\sigma]$ pode ser nulo. Como M e N são coprimos, os termos

$$\frac{p^2N + pqM_{y'} - q^2M_y - qp_xN - y'qp_yN + pq_xN + y'pq_yN}{M} \quad (100)$$

e

$$q\frac{qN_y - pN_{y'}}{N} \quad (101)$$

são (cada um deles) polinômios. A seguir, discutiremos algumas particularidades casos que nos permitem melhorar o (semi)algoritmo apresentado na seção 2.3.

Observação 3.1.1 *Como comentamos anteriormente, as diferentes melhorias estão diretamente relacionadas com o formato e o grau dos candidatos p_c e q_c . Assim, para evitar muitas apresentações redundantes, iremos apenas descrever (em cada um dos seguintes casos) a mudança no formato (e grau) dos polinômios p_c e q_c .*

3.2 N e q não apresentam fatores comuns

Para resolver este caso, vamos nos concentrar no fato de que o termo

$$q\frac{qN_y - pN_{y'}}{N} \quad (102)$$

(veja a equação (99)) é um polinômio. Isso leva ao seguinte resultado:

Teorema 3.2.1 *Sejam q , p e N polinômios como definidos acima. Considere que $q\frac{qN_y - pN_{y'}}{N}$ é um polinômio. Se N e q não apresentam fatores polinomiais comuns, então uma das seguintes condições é válida:*

1. Nem N_y nem $N_{y'}$ são nulos e $N \mid qN_y - pN_{y'}$.
2. N é uma função (somente) de x .
3. $N_y = 0$, $N_{y'} \neq 0$ e $N \mid pN_{y'}$.

Prova do Teorema 3.2.1

1. Como N e q não apresentam fatores comuns e nem N_y nem $N_{y'}$ são nulos, então $\frac{qN_y - pN_{y'}}{N}$ tem que ser um polinômio, ou seja, $N \mid qN_y - pN_{y'}$.
2. N é uma função (somente) de x , então $N_y = N_{y'} = 0$. Todo o termo é nulo.

3. Segue diretamente da substituição $N_y = 0$ em $q \frac{qN_y - pN_{y'}}{N}$. O outro caso aparente $N_y \neq 0, N_{y'} = 0$ não é possível porque N não pode dividir $N_{y'}$. \square

A primeira condição permite usar o fato de que $qN_y - pN_{y'} = NP$ (onde P é um polinômio) para alguns 'pré-cálculos' dos coeficientes de p e q . Essas condições podem reduzir significativamente a dificuldade de resolver as equações algébricas para os coeficientes de p e q que foram extraídos da equação (87) como um todo.

A segunda condição ($N = N(x)$) implica que

$$q \frac{pM_{y'} - qM_y}{M} + N \frac{p^2 - qp_x - y'qp_y + pq_x + y'pq_y}{M} - qp_{y'} + pq_{y'} = 0. \quad (103)$$

Multiplicando (103) por $\frac{M}{Nq}$ obtemos:

$$\frac{pM_{y'} - qM_y - Mp_{y'}}{N} + p \frac{p + q_x + y'q_y}{q} - p_x - y'p_y - \frac{pq_{y'}M}{Nq} = 0. \quad (104)$$

O termo $-p_x - y'p_y$ é um polinômio ou zero. Em ambos os casos podemos melhorar nosso algoritmo: por exemplo, no caso em que $-p_x - y'p_y$ não é zero, temos que os termos

$$\frac{pM_{y'} - qM_y - Mp_{y'}}{N}, \quad \frac{p + q_x + y'q_y}{q} \quad e \quad \frac{pq_{y'}M}{Nq} \quad (105)$$

devem se combinar para formar um polinômio, e como (por hipótese) N e q não apresentam fatores comuns obtemos que

$$\frac{pM_{y'} - qM_y - Mp_{y'} - pq_{y'}M}{N} \quad e \quad \frac{N(p + q_x + y'q_y) - pq_{y'}M}{q} \quad (106)$$

são polinômios. Um caso muito provável é que $q_{y'}$ seja nulo, e se for, este fato simplifica bastante o algoritmo.

A terceira condição: $N_y = 0$ e N e p têm fatores comuns, novamente simplificam bastante o algoritmo porque, como N não pode dividir N_y , a única maneira de N_y e N terem fatores comuns é no caso de N ter fatores polinomiais elevados a um expoente inteiro maior que 1. Caso contrário, N divide p .

3.2.1 ASymm_[1.1]

Este subcaso está vinculado à condição:

O termo $\frac{qN_y - pN_{y'}}{N}$ é em si um polinômio (nem N_y nem $N_{y'}$ são nulos).

Algoritmo 3.2.1 (ASymm_[1.1])

1. Construa o operador D_x .
2. Seja $n_{m\acute{a}x} = \text{algum n\acute{u}mero inteiro}$, $d_M = \text{grau}(M)$ e $d_N = \text{grau}(N)$.
3. Faça $n = 0$.
4. Faça $n = n + 1$.
5. Se $n > n_{m\acute{a}x}$, ent\~{a}o Fracasso.
6. Se $d_M > d_N + 1$, ent\~{a}o construa um polin\~{o}mio gen\~{e}rico q_c de grau n em (x, y, y') com coeficientes b_i indeterminados e um polin\~{o}mio gen\~{e}rico p_c de grau $n + d_M - d_N - 1$ em (x, y, y') com coeficientes a_i indeterminados, sen\~{a}o construa dois polin\~{o}mios gen\~{e}ricos p_c e q_c de grau n em (x, y, y') com coeficientes indeterminados a_i e b_i , respectivamente.
7. Construa um polin\~{o}mio gen\~{e}rico P_c de grau $\max(\deg_{q_c}, \deg_{p_c})$ em (x, y, y') com coeficientes indeterminados c_k .
8. Substitua p_c , q_c e P_c na equa\~{c}\~{a}o $q_c N_y - p_c N_{y'} - N P_c = 0$ e colete a equa\~{c}\~{a}o polinomial resultante nas vari\~{a}veis x, y, y' e iguale os coeficientes de cada mon\~{o}mio a zero, obtendo um sistema $AE[1.1]$ de equa\~{c}\~{o}es alg\~{e}bricas.
9. Resolva o sistema $AE[1.1]$ em rela\~{c}\~{a}o a a_i e b_i (em fun\~{c}\~{a}o de c_k). Se nenhuma solu\~{c}\~{a}o for encontrada, ent\~{a}o v\~{a} para o passo 4.
10. Substitua o resultado nos polin\~{o}mios p_c e q_c (obtendo σ).

Observa\~{c}\~{a}o 3.2.1 A solu\~{c}\~{a}o obtida no passo 9 \acute{e} o ponto principal deste sub-algoritmo particular ($ASym_{[1.1]}$). Na pr\~{a}tica, o n\~{u}mero de coeficientes indeterminados pode diminuir bastante, auxiliando no sucesso do passo 8.

3.2.2 $ASym_{[1.2]}$

Este subcaso est\~{a} vinculado \`{a} condi\~{c}\~{a}o:
 N \acute{e} uma fun\~{c}\~{a}o (somente) de x (e $q_{y'} = 0$).

Algoritmo 3.2.2 ($ASym_{[1.2]}$)

1. Construa o operador D_x .
2. Seja $n_{m\acute{a}x} = \text{algum n\acute{u}mero inteiro}$, $d_M = \text{grau}(M)$ e $d_N = \text{grau}(N)$.
3. Faça $n = 0$.

4. Faça $n = n + 1$.
5. Se $n > n_{\text{máx}}$, então Fracasso.
6. Se $d_M > d_N + 1$, então construa um polinômio genérico q_c , de grau n em (x, y) , com coeficientes indeterminados b_i , e um polinômio genérico p_c , de grau $n + d_M - d_N - 1$ em (x, y, y') , com coeficientes indeterminados a_i . Senão, construa dois polinômios genéricos p_c e q_c , de grau n em (x, y, y') e em (x, y) , com coeficientes indeterminados a_i e b_j , respectivamente.
7. Substitua p_c e q_c na equação (87), colete a equação polinomial resultante nas variáveis x, y, y' e iguale os coeficientes de cada monômio a zero, obtendo um sistema AE de equações algébricas.
8. Resolva o sistema AE em relação a a_i e b_i . Se nenhuma solução for encontrada, então vá para o passo 4.
9. Substitua a solução em p_c/q_c (obtendo σ).

Vamos pegar, por exemplo, a 2EDO (2EDO não linear 41 com $f(x) = 1/x^2$ do livro do Kamke's (64))

$$y'' = -\frac{x^2 y^3 - 3x^2 y y' + y^2 - y'}{x^2} \quad (107)$$

com $N = N(x)$, com uma função σ dada por:

$$\sigma = -\frac{2xy^2 + 2xy' + y^2 + 4y + y'}{2xy + y + 2}, \quad (108)$$

onde o fato de que $q_{y'} = 0$ melhora a eficiência do algoritmo em mais de 10 vezes.

3.2.3 ASymm_[1.3]

Este subcaso está vinculado à condição:

$N_y = 0$ e N e p têm fatores comuns.

Algoritmo 3.2.3 (ASymm_[1.3])

1. Construa o operador D_x .
2. Seja $n_{\text{máx}} = \text{algum número inteiro}$, $d_M = \text{grau}(M)$ e $d_N = \text{grau}(N)$.
3. Faça $n = 0$.
4. Faça $n = n + 1$.

5. Se $n > n_{\text{máx}}$, então Fracasso.
6. Se $d_M > d_N + 1$, então construa um polinômio genérico q_c de grau n em (x, y, y') com coeficientes indeterminados b_i e um polinômio genérico pp_c de grau $n + d_M - d_N - 1 - d_f$, onde d_f é o grau dos fatores comuns (CF) de N e p em (x, y, y') , com coeficientes indeterminados a_i , sendo $p_c = pp_c CF$. Caso contrário, construa dois polinômios genéricos pp_c e q_c de grau $n - d_f$ e n em (x, y, y') , com coeficientes indeterminados a_i e b_j , respectivamente, e sendo $p_c = pp_c CF$.
7. Substitua p_c e q_c na equação (87), colete a equação polinomial resultante nas variáveis x, y, y' e iguale os coeficientes de cada monômio a zero, obtendo um sistema AE de equações algébricas.
8. Resolva o sistema AE em relação a a_i e b_i . Se nenhuma solução for encontrada, então vá para o passo 4.
9. Substitua a solução em p_c/q_c (obtendo σ).

3.3 N e q apresentam fatores comuns

Em relação a melhorar a eficiência do nosso semi-algoritmo, é mais prático dividir as diferentes situações em um ou em outro, dentre os dois casos distintos a seguir:

- q tem fatores não presentes em N .
- Todos os fatores de q são fatores de N

3.3.1 q tem fatores não presentes em N

Para esta situação podemos (por exemplo) usar $q_c = Nq_m$ ou $q_c = N_f q_m$ onde q_m tem um grau inferior e N_f é um fator (ou um produto de alguns fatores) de N . Por exemplo, a 2EDO (consulte a seção 5.1 2EDO 180)

$$y'' = \frac{2(x^2 y'^2 + yy'x - y^3 - xy' + 2y^2 - y)}{x^2(y - 1)} \quad (109)$$

tem um σ dado por:

$$\sigma = -\frac{y'(2y - 1)}{y(y - 1)} \quad (110)$$

e, para determiná-lo, não precisamos de um candidato a polinômio de segundo grau, mas um candidato de grau um: $q_c = (y - 1)(b_0 + b_1x + b_1y + b_1y')$. Isso simplifica muito a

determinação do porque além de reduzir o número de coeficientes indeterminados, também reduz o número de termos não lineares.

Na seção seguinte trataremos dos casos em que todos os fatores de q estão em N . Contudo, trataremos também um caso que aparece com certa frequência e que pertence a esta vertente, a saber, o caso $q = uN$ onde $u \in \{x, y, y'\}$. Veremos que esse caso é mais facilmente tratado considerando que conhecemos o q de antemão.

3.3.2 $q|N$ ou $q = uN$ onde $u \in \{x, y, y'\}$

Nesta seção, discutiremos dois casos muito comuns: $q|N$ e $q = y'N$ (ou $q = xN$ ou $q = yN$). O ponto principal é que, além de aparecer com frequência (e simplificar muito os cálculos) eles transformam o algoritmo ASymm em um algoritmo completo.

O caso $q|N$:

Para provar o resultado expresso no teorema a seguir, temos apenas que considerar o caso $q = N$ onde p e q não são necessariamente primos entre si.

Teorema 3.3.1 *Seja $y'' = \phi(x, y, y') = M(x, y, y')/N(x, y, y')$, onde M e N são polinômios coprimos, uma 2EDO racional apresentando uma integral primeira global analítica $I(x, y, y')$ e um campo vetorial de simetria $X_e^{(1)} = \nu\partial_y + D_x[\nu]\partial_{y'}$, tal que a função σ definida como $\sigma \equiv -\frac{D_x[\nu]}{\nu}$ é uma função racional dada por $\sigma = \frac{p}{N}$, onde p é um polinômio. Sejam \deg_M , \deg_N e \deg_p os graus dos polinômios M , N e p , respectivamente. Se $\deg_M \leq \deg_N + 1$ então $\deg_p \leq \deg_N$. Pelo contrário, se $\deg_M > \deg_N + 1$ então $\deg_p \leq \deg_M - 1$.*

Prova do Teorema 3.3.1 *A prova segue diretamente da prova do teorema 2.3.2.*

Corolário 3.3.1 *Se as hipóteses do teorema 3.3.1 forem satisfeitas, então ASymm torna-se um algoritmo completo.*

Prova do Corolário 3.3.1 *Do teorema 3.3.1 temos que o grau do polinômio p depende apenas dos graus dos polinômios M e N . Como eles são finitos, o grau máximo para o polinômio p é finito, e portanto, o procedimento ASymm sempre terminará.*

O caso $q = N$:

$$y'' = -\frac{x^2yy' - x^2y'^2 - xy^3 - xy^2y' - xy'^2 + y^3 + y^2y' + 2yy'^2 - y'^2}{y(x^2 - y)} \quad (111)$$

tem um σ dado por:

$$\sigma = -\frac{x^2y' + xy^2 - 2yy'}{y(x^2 - y)}, \quad (112)$$

onde o fato de $q = N$ simplifica bastante o cálculo de σ (o cálculo leva 0,5 segundo). Com a simetria,

$$X_e^{(1)} = e^{-\int_x \left[-\frac{x^2 y' + xy^2 - 2yy'}{y(x^2 - y)} \right]} \left(\partial_y + \frac{x^2 y' + xy^2 - 2yy'}{y(x^2 - y)} \partial_{y'} \right), \quad (113)$$

podemos obter a integral primeira

$$\frac{(xy' - y^2)e^x}{xy - y'} \quad (114)$$

e a solução geral

$$y(x) = \frac{e^{\int \frac{C_1 x}{e^x x + C_1} dx}}{\int -e^{\int \frac{C_1 x}{e^x x + C_1} dx} e^x dx + C_2} \quad (115)$$

em menos de 0.1 segundo.

O caso $q = y'N$:

Este caso é muito semelhante ao discutido anteriormente. Para evitar repetições vamos apenas citar o resultado: como q é conhecido (ou seja, bem definido), o grau máximo de p será limitado (como no caso anterior), e como no caso anterior, ASymm torna-se um algoritmo completo. Por exemplo, a 2EDO

$$y'' = -\frac{2x^3 y'^5 - 4x^2 y y'^3 - x^2 y'^4 - x^2 y'^3 + x^2 y'^2 + 2xy^2 y' + 2xy y'^2 - y^2 + yy' - y}{2x(x^3 y'^4 - 2x^2 y y'^2 - x^2 y'^2 + xy^2 + y)} \quad (116)$$

tem um σ dado por:

$$\sigma = -\frac{x^2 y'^4 - x^2 y'^2 - 2xy y'^2 + y^2 + y}{2xy'(x^3 y'^4 - 2x^2 y y'^2 - x^2 y'^2 + xy^2 + y)}, \quad (117)$$

que pode ser calculado em 4.3 segundos. A partir do conhecimento de σ podemos calcular a integral primeira

$$\frac{\ln(x^2 y'^2 - y)xy'^2 - y \ln(x^2 y'^2 - y) + 1}{xy'^2 - y}, \quad (118)$$

em cerca de 1 segundo.

3.4 M e p apresentam fatores comuns ou monômios comuns

Voltemos à equação 99, onde o termo

$$\frac{p^2N + pqM_{y'} - q^2M_y - qp_xN - y'qp_yN + pq_xN + y'pq_yN}{M}$$

é um polinômio. Podemos escrevê-lo como

$$p \frac{pN + qM_{y'} + q_xN + y'q_yN}{M} - q \frac{qM_y + p_xN + y'p_yN}{M} \quad (119)$$

e desta forma, podemos ver que, em muitos casos, alguns fatores de M e p podem ser comuns. Além disso, como ϕ e σ são dados respectivamente, por

$$\phi = -\frac{\partial_x[I] + z\partial_y[I]}{\partial_{y'}[I]} \quad e \quad \sigma = \frac{\partial_y[I]}{\partial_{y'}[I]} \Rightarrow \phi = -\frac{\partial_x[I]}{\partial_{y'}[I]} + y' \frac{p}{q} \quad (120)$$

é muito provável (na verdade, este é frequentemente o caso) que os polinômios M e p tenham muitos monômios comuns (caso $N \neq q$) ou que os polinômios $M_{y'}$ e p tenham muitos monômios comuns (caso $N = q$). Cada uma dessas situações simplifica muito o problema. Tomemos, por exemplo, as 2EDOs não lineares 94 e 183 (ver seção 5.1) do livro do Kamke.

2EDO 94:

$$y'' = \frac{2y^3x^3 - 2yy'x^3 - 3x^2y^2 - axy - 9x^2y' - b}{2x^3},$$

$$\sigma = \frac{-2y^3x^3 + 2yy'x^3 + 3x^2y^2 + axy + 5x^2y' + b}{2x^2(xy' + y)}.$$

2EDO 183:

$$y'' = \frac{x^2y'^2 + x^2 - y^2}{2x^2y},$$

$$\sigma = \frac{x^2y'^2 + x^2 - y^2}{-2xy(xy' - y)}.$$

Podemos ver que na 2EDO 94, os monômios nos polinômios M e p são o mesmo, enquanto na 2EDO 183 temos que $M = p$. Também nas duas 2EDOs N e q têm fatores comuns ($2x^2$ na 2EDO 94 e $2xy$ na 2EDO 183). Portanto, o tempo para calcular σ é (em ambas as 2EDOs) décimos de segundo.

Como outro exemplo, temos para a 2EDO (111) $q = N$.

2EDO 111:

$$y'' = -\frac{x^2yy' - x^2y'^2 - xy^3 - xy^2y' - xy'^2 + y^3 + y^2y' + 2yy'^2 - y'^2}{y(x^2 - y)}.$$

Usando os monômios presentes em $M_{y'} = -x^2y + 2x^2y' + xy^2 + 2xy' - y^2 - 4y'y + 2y'$, podemos calcular $p = -x^2y' - xy^2 + 2yy'$ (e assim, σ) quase instantaneamente.

4 DESEMPENHO

Neste capítulo, apresentamos a aplicação do nosso procedimento em dois tipos de arena. O primeiro consiste em um conjunto bem conhecido de 2EDOs, ou seja, as 2EDOs não lineares do conhecido Manual de E. Kamke de soluções exatas para EDOs (64). O segundo tipo de arena de teste consiste em um conjunto de 2EDOs que exibem principalmente simetrias não locais.

4.1 2EDOs racionais não lineares do Manual de Kamke

Nesta seção, mostramos nosso algoritmo lidando com as equações diferenciais do manual de Kamke: com isso, queremos dizer as 2EDOs racionais não lineares que apresentam (pelo menos) uma integral primeira Liouvillian. Além disso, vamos apenas considerar o subconjunto daquelas que não possuem simetrias triviais como $[\xi = 1, \eta = 0]$ ou $[\xi = 0, \eta = 1]$, ou seja, vamos deixar de fora 2EDOs para que ϕ não apresente explicitamente uma das variáveis (x, y) . Vamos nos referir a elas pelos números dados no livro de Kamke. Elas são as 2EDOs contidas na tabela 1 e referenciadas pelos números: [78, 79, 80, 87, 90, 92, 93, 94, 97, 98, 99, 108, 133, 156, 169, 172, 173, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 189, 190, 193, 206, 226, 227, 228, 229, 231]. As equações 94, 156 e 185 não couberam na tabela e foram colocadas separadas.

Análise da equação 94:

$$\begin{aligned}\phi_{94} &= \frac{2y^3x^3 - 2yy'x^3 - 3x^2y^2 - axy - 9x^2y' - b}{2x^3} \\ \sigma_{94} &= \frac{-2y^3x^3 + 2yy'x^3 + 3x^2y^2 + axy + 5x^2y' + b}{2x^2(xy' + y)} \\ \xi_{94} &= -x \\ \eta_{94} &= y \\ \nu_{94} &= xy' + y\end{aligned}$$

Análise da equação 156:

$$\begin{aligned}\phi_{156} &= \frac{ax^2 + bx + 2y'^2 + c}{3y} \\ \sigma_{156} &= \frac{2a^2x^4 + 4abx^3 + 4ax^2y'^2 + 4acx^2 - 6axy y' + 2b^2x^2 + 4bxy'^2 - 18ay^2 + 4bcx - 3byy' + 4cy'^2 + 2c^2}{-3y(2ax^2y' - 6axy + 2xy'b - 3by + 2cy')} \\ \xi_{156} &= \frac{ax^2 + bx + c}{b} \\ \eta_{156} &= 3y \left(\frac{ax}{b} + \frac{1}{2} \right) \\ \nu_{156} &= \frac{2ax^2y' - 6axy + 2xy'b - 3by + 2cy'}{-2b}\end{aligned}$$

Análise da equação 185:

$$\phi_{185} = \frac{y'^2 x^3 + y^2 a x - 2 x^2 y y' + 2 x^2 y'^2 + 2 a y^2 - 4 y y' x + x y'^2 - 2 y y'}{y x (x^2 + 2 x + 1)}$$

$$\sigma_{185} = -\frac{y'}{y}$$

$$\xi_{185} = 0$$

$$\eta_{185} = y$$

$$\nu_{185} = y$$

Alguns comentários:

- Nosso método foi capaz de encontrar as simetrias para todas as 2EDOs racionais não lineares no livro de Kamke que apresentou (pelo menos) uma integral primeira Liouvilliana.
- Existem algumas 2EDOs não lineares do livro de Kamke que apresentam funções genéricas de x , y ou y' . Para testar nosso método, fizemos várias substituições dessas funções genéricas por funções racionais. Percebemos que o algoritmo é capaz de lidar bem com todas as 2EDOs que possuem uma integral primeira Liouvilliana.
- As 37 2EDOs (que se encaixam nas condições para as quais o algoritmo foi construído) possuem simetrias muito simples. O mesmo resultado foi encontrado para as 2EDOs apresentando funções arbitrárias (quando substituídas por funções racionais).
- O tempo gasto no cálculo da função σ não foi colocado na tabela por ser muito curto (décimos de segundo na maioria dos casos). Apenas nas 2EDOs 108 e 156 o algoritmo gastou alguns segundos.
- O tempo gasto calculando as simetrias pelo comando Maple Computer Algebra System (CAS) `symgen` (ver (10)) foi ainda menor.

Embora satisfeitos com o resultado apresentado pelo algoritmo nesta arena de testes, concluímos que ele não é adequado para testar o desempenho do método em lidar com 2EDOs que possuem simetrias não locais.

4.2 2EDOs racionais apresentando simetrias não locais

Nesta seção, veremos o desempenho de nosso algoritmo em uma arena de teste composta por um conjunto de 2EDOs racionais que não possuem simetrias locais. Para as duas primeiras 2EDOs, apresentaremos os passos do algoritmo com mais detalhes.

Tabela 1 – 2EDOs, funções sigma e simetrias

EDO	ϕ	σ	ξ, η, ν
78	$-\frac{(y-1)y'}{x}$	$\frac{y-2}{x}$	$x, 0, -xy'$
79	$-\frac{-x^2y'^2+y^2+2y'}{x}$	$-xy' + y$	$x, -y, -xy' - y$
80	$-\frac{ax^2y'^2-2yy'ax+ay^2-b}{x}$	$-\frac{1}{x}$	$0, x, x$
87	$-\frac{ayy'^2+bx}{x^2}$	$\frac{ayy'^2+bx}{x(xy'-y)}$	$x, y, -xy' + y$
90	$\frac{x^4y'^2-4y}{4x^2}$	$\frac{x^4y'^2+12xy'-4y}{-4x(xy'+2y)}$	$x, -2y, -xy' - 2y$
92	$\frac{y^3x^3-yy'x^3-12yx-24}{x^3}$	$-\frac{y^3x^3-yy'x^3+2x^2y'-12yx-24}{x^2(xy'+y)}$	$-x, y, xy' + y$
93	$\frac{a(-xy'+y)^2}{x^3}$	$-\frac{1}{x}$	$0, x, x$
97	$-\frac{-y'x^3-2xyy'+4y^2}{x^4}$	$-\frac{2y}{x^3}$	$x, 2y, -xy' + 2y$
98	$-\frac{-y'x^3-x^2y'^2+4y^2}{x^4}$	$-\frac{xy'+2y}{x^3}$	$x, y, y - xy'/2$
99	$\frac{(-xy'+y)^3}{x^4}$	$-\frac{1}{x}$	$0, x, x$
108	$-\frac{-ax+y'^2-b}{y}$	$\frac{2a^2x^2-2axy'^2+4bxa-ayy'-2by'^2+2b^2}{-y(2xy'a-3ay+2by')}$	$\frac{2(ax+b)}{3a}, y, \frac{2xy'a-3ay+2by'}{3a}$
133	$-\frac{y'(y'-1)}{x+y}$	$\frac{y'(y'-1)}{(x+y)(1+y')}$	$1, -1, -1 - y'$
169	$-\frac{y'(xy'-y)}{yx}$	$-\frac{y'}{y}$	$0, y, y$
172	$-\frac{-bxy^3-ayy'+xy'^2}{yx}$	$\frac{bxy^3+ayy'-xy'^2-3yy'}{y(xy'+2y)}$	$x, -2y, -xy' - 2y$
173	$-\frac{y'(ay+2xy')}{yx}$	$-\frac{y'}{y}$	$0, y, y$
174	$\frac{y'(2xy'-y-1)}{yx}$	$-\frac{2xy'-1}{yx}$	$x, 0, -xy'$
175	$\frac{y'(-ay+2xy')}{yx}$	$-\frac{y'}{y}$	$0, y, y$
176	$\frac{4y'(xy'-y)}{yx}$	$-\frac{y'}{y}$	$0, y, y$
178	$-\frac{xy'^2+xy'-yy'-y}{x(x+y)}$	$\frac{xy'-x-2y}{x(x+y)}$	$-x, x, xy' + x$
179	$\frac{y'(xy'-y)}{2yx}$	$-\frac{y'}{y}$	$0, y, y$
180	$\frac{2(x^2y'^2+yy'x-y^3-xy'+2y^2-y)}{x^2(y-1)}$	$-\frac{y'(2y-1)}{y(y-1)}$	$0, y^2 - y, y^2 - y$
181	$\frac{x^2y'^2-2yy'x+y^2}{x^2(x+y)}$	$-\frac{xy'-y}{x(x+y)}$	$x, y, y - xy'$
182	$\frac{a(x^2y'^2-2yy'x+y^2)}{x^2(y-x)}$	$\frac{(xy'-y)a}{x(x-y)}$	$x, y, y - xy'$
183	$\frac{x^2y'^2+x^2-y^2}{2x^2y}$	$\frac{x^2y'^2+x^2-y^2}{-2xy(xy'-y)}$	$x, y, y - xy'$
184	$-\frac{bx^2y'^2+cxyy'+dy^2}{ax^2y}$	$-\frac{y'}{y}$	$0, y, y$
189	$-\frac{yy'^2+ax}{y^2}$	$\frac{(yy'^2+ax)x}{y^2(xy'-y)}$	$x, y, y - xy'$
190	$-\frac{yy'^2-ax-b}{y^2}$	$-\frac{(-yy'^2+ax+b)(ax+b)}{y^2(xy'a-ay+by')}$	$x + \frac{a}{b}, y, \frac{ay-xy'a-by'}{a}$
193	$\frac{y'(2y^2y'^2-2xy'^2+4yy'+1)}{-(y^2+x)}$	$\frac{2(y^2y'-xy'+y)y'}{y^2+x}$	$-2y, 1, 2yy' + 1$
206	$\frac{y'(y'a^2-x^2yy'-a^2x+xy^2)}{-a^4+a^2x^2+a^2y^2-x^2y^2}$	$\frac{yy'}{a^2-y^2}$	$0, \sqrt{a^2 - y^2}, \sqrt{a^2 - y^2}$
226	$\frac{yx(xy'+y)}{y'}$	$-\frac{y'}{y}$	$0, y, y$
227	$-\frac{4y'^2}{xy'-y}$	$-\frac{y'}{y}$	$0, y, y$
228	$\frac{y'^4+2y'^2+1}{xy'-y}$	$-\frac{(y'^2+1)y'}{xy'-y}$	$-y, x, yy' + x$
229	$-\frac{by'}{ay'x^3}$	$-\frac{y'}{y}$	$0, y, y$
231	$-\frac{2yy'^3+3xy'+y}{2y^2y'+x^2}$	$\frac{(2yy'^3+3xy'+y)x}{(2y^2y'+x^2)(xy'-y)}$	$x, y, y - xy'$

Legenda: Resultado da análise de um conjunto de 2EDOs feita pelo algoritmo ASymm

Fonte: O autor, 2023.

• **2EDO₁:**

$$y'' = -\frac{xyy' - 2xy'^2 + yy' - y'^2 - y + 2y'}{xy - 1} \quad (121)$$

Assim, os passos do algoritmo são:

1. Partindo da hipótese de que q divide N (o que transforma $ASymm$ em um algoritmo completo e simplifica muito os cálculos) temos como consequência do teorema 3.3.1 que o grau máximo de p é 2 e, portanto, teremos como candidatos:

$$p_c = a_4x^2 + a_5y^2 + a_6y'^2 + a_7xy + a_8yy' + a_9xy' + a_1x + a_2y + a_3y' + a_0,$$

$$q_c = N = xy - 1.$$

2. Substituindo σ por p_c/q_c na equação (87), coletando a equação polinomial resultante em (x, y, y') e igualando os coeficientes de cada monômio a zero, obtemos o seguinte sistema AE de equações algébricas para a_i :

$$AE = \{a_4^2, a_5^2, a_6^2, 2a_1a_4, 2a_2a_5, 2a_3a_6, 2a_5a_9, 2a_6a_9, 2a_4a_7 + 5a_4, 2a_4a_8 - a_4,$$

$$2a_5a_8 - a_5, 2a_6a_7 + a_6, 2a_5a_6 + a_9^2, 2a_0a_4 + a_1^2 - 2a_4, 2a_0a_1 - 2a_1 + 2a_4, 2a_4a_5 + a_8^2$$

$$- a_8, 2a_4a_9 + 2a_7a_8 + 4a_8, 2a_5a_7 + 2a_8a_9 + 3a_5, a_0^2 - 2a_0 + a_1 + 1, 2a_4a_6 + a_7^2 + 3a_7$$

$$+ 2, 2a_0a_2 - 2a_2 - a_3 + a_8, 2a_0a_5 + a_2^2 - 2a_5 - a_9, 2a_1a_8 + 2a_2a_4 - a_1 - 2a_4, 2a_1a_5 +$$

$$2a_2a_8 - a_2 - a_8, 2a_1a_7 + 2a_3a_4 + 5a_1 + 2a_4, 2a_2a_9 + 2a_3a_5 + 2a_5 + a_9, 2a_2a_6 +$$

$$2a_3a_9 + 2a_6 + a_9, 2a_6a_8 + 2a_7a_9 + a_6 + 2a_9, 2a_0a_3 + 2a_0 + a_2 + a_7 - 1, 2a_0a_6 + a_3^2 +$$

$$a_3 + 2a_6 + a_9, 2a_1a_6 + 2a_3a_7 + 3a_3 + a_7 + 1, 2a_1a_9 + 2a_2a_7 + 2a_3a_8 + 4a_2 + 2a_8, 2a_0a_8$$

$$+ 2a_1a_2 - a_0 - a_1 - a_7 - 2a_8, 2a_0a_7 + 2a_1a_3 + 5a_0 + 2a_1 + a_8 - 3, 2a_0a_9 + 2a_2a_3 + 2a_2$$

$$+ a_3 + 2a_5 - 2a_6\}.$$

3. O sistema AE tem como solução:

$$\{a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = -1, a_8 = 0, a_9 = 0\}.$$

4. Substituindo em p_c/q_c temos que $\sigma = -\frac{xy' - 1}{xy - 1}$.

Portanto, a 2EDO (121) admite a simetria:

$$X_e^{(1)} = e^{-\int_x \left[-\frac{xy'-1}{xy-1}\right]} \left(\partial_y + \frac{xy' - 1}{xy - 1} \partial_{y'} \right). \quad (122)$$

Usando o método de Lie, podemos determinar a integral primeira:

$$I(x, y, y') = \frac{(y - y') e^{-x}}{xy' - 1} \quad (123)$$

e a solução:

$$y(x) = \left(\int \frac{C_1 e^{-\int \frac{e^{-x}}{C_1 x + e^{-x}} dx}}{(C_1 x + e^{-x})} dx + C_2 \right) e^{\int \frac{e^{-x}}{C_1 x + e^{-x}} dx} \quad (124)$$

• **2EDO₂:**

$$y'' = \frac{x^2 y^2 + x^2 y y' - 2 y'^2 x y - x y'^3 + y'^4 - x^2 y' + x y^2 - y y'^2 - y x}{2 y' (y x - y'^2 - x)} \quad (125)$$

Assim, os passos do algoritmo são:

1. Partindo da hipótese de que q divide N (e que é um fator de N) obteremos uma solução positiva com os candidatos:

$$p_c = a_1 x + a_2 y + a_3 y' + a_0,$$

$$q_c = y'.$$

2. Substituindo σ por p_c/q_c na equação (87), coletando a equação polinomial resultante em (x, y, y') e igualando os coeficientes de cada monômio a zero, obtemos o seguinte sistema AE de equações algébricas para a_i :

$$\begin{aligned} AE = \{ & -4a_0^2, -2a_0^2, -2a_2^2, 4a_2^2, -4a_1 a_3, -4a_1^2 - 2a_1, -2a_1^2 - a_1, 4a_1^2 + 2a_1, \\ & -4a_0 a_1 - a_0, -4a_2 a_3 + 2a_2, 8a_2 a_3 - 4a_2, -4a_0 a_2 + a_3, -8a_1 a_3 + 4a_1 + 2, -4a_1 a_3 \\ & + 2a_1 + 1, 8a_1 a_3 - 4a_1 - 2, -2a_3^2 + 2a_2 + a_3, -4a_0 a_3 + 2a_1 + 1, -4a_0 a_2 + 4a_2^2 + a_3, \\ & 8a_0 a_2 - 4a_2^2 - 2a_3, 4a_0^2 - 8a_0 a_2 + 2a_3, 4a_0^2 - 4a_0 a_2 + a_3, -4a_1 a_2 - a_2 + a_3, 8a_0 a_1 \\ & - 4a_1 a_2 + 2a_0 - a_2, -8a_0 a_3 + 4a_0 + 4a_1 + 2, -4a_0 a_3 + 2a_0 + 2a_1 + 1, -2a_0^2 + 8a_0 a_2 \\ & - 2a_2^2 - 2a_3, -4a_1 a_2 + 4a_3^2 - 5a_2 - a_3, 8a_1 a_2 - 2a_3^2 + 4a_2 - a_3, -8a_0 a_1 - 2a_3^2 - 2a_0 \\ & + 2a_2, 8a_0 a_3 - 4a_2 a_3 - 4a_0 - 4a_1 - 2, -4a_0 a_1 - 4a_3^2 - a_0 + 4a_2 + 3a_3, -4a_0 a_1 + 8a_1 a_2 \\ & - a_0 + 2a_2 - a_3, -4a_0 a_3 + 8a_2 a_3 + 2a_0 + 2a_1 - 4a_2 + 1, 8a_0 a_3 - 8a_2 a_3 - 4a_0 - 4a_1 + \\ & 4a_2 - 2, 8a_0 a_1 - 8a_1 a_2 + 4a_3^2 + 2a_0 - 6a_2 - 2a_3 \}. \end{aligned}$$

3. A solução do sistema AE é:

$$\{a_0 = 0, a_1 = -1/2, a_2 = 0, a_3 = 0\}.$$

4. Substituindo em p_c/q_c temos que $\sigma = -\frac{x}{2y'}$.

Portanto, a 2EDO (125) admite a simetria

$$X_e^{(1)} = e^{-\int_x \left[-\frac{x}{2y'}\right]} \left(\partial_y + \frac{x}{2y'} \partial_{y'} \right), \quad (126)$$

levando à integral primeira:

$$I(x, y, y') = Ei \left(1, -\frac{1}{yx - y'^2} \right) + x e^{\left(\frac{1}{yx - y'^2}\right)}. \quad (127)$$

A seguir, apresentaremos a tabela 2 com a 2EDO (ϕ) e a função σ juntamente com o tempo gasto por *ASymm* para determiná-la.

Tabela 2 – 2EDOs com simetrias não locais e cálculo dos σ 's

2EDO	ϕ	σ	Time
1	$-\frac{x^3 y'^3 - x^2 y y'^2 - x y^2 y' + y^3}{-x^2 y'^2 + x^2 y + 2 y y' x - x y' - y^2}$	$\frac{x^3 y'^2 - 2 x^2 y y' + x y^2 - y x + y'}{-x^2 y'^2 + x^2 y + 2 y y' x - x y' - y^2}$	0.95
2	$\frac{x^2 y'^2 - 2 x y'^3 + y'^4 - y^2 + y' y}{y(x^2 - 2 y' x + y'^2 - y + y')}$	$-\frac{y'(x^3 - 2 y' x + y'^2)}{y(x^2 - 2 y' x + y'^2 - y + y')}$	0.2
3	$\frac{x^2 y'^2 - 2 x y^2 y' - 2 x y y'^2 + y^4 + 2 y^3 y' + 2 x y y' + x y'^2 - y^2 y' - y' x}{-x(y' x - y^2 - x)}$	$-\frac{2y}{x}$	0.17
4	$\frac{(-y' y + x + y')(y'^2 - 1)}{y^2 y'^2 - 2 x y y' + y^2 y' + x^2 - x y - y' y}$	$\frac{-y'(-y y' + x + y')}{y^2 y'^2 - 2 x y y' + y^2 y' + x^2 - x y - y' y}$	0.07
5	$\frac{(x y - y'^2 + y')(x y' + y)}{2 x y y' - 2 y'^3 + x y + y'^2}$	$-\frac{x(x y - y'^2 + y')}{2 x y y' - 2 y'^3 + x y + y'^2}$	0.09

Legenda: Resultado da análise de um conjunto de 2EDOs feita pelo algoritmo *ASymm*

Fonte: O autor, 2023.

Mais alguns comentários:

- Nesta arena, nosso método foi capaz de encontrar as simetrias para 2EDOs racionais, apresentando apenas simetrias não locais, em um tempo muito curto.
- Nenhuma dessas 2EDOs pode ser resolvida ou reduzida pelo comando *dsolve* (o solucionador de EDO do Maple).
- Nossa abordagem funciona 'melhor' (ou seja, comparativamente gasta tempos mais curtos) quando as simetrias não são locais.

5 ALGUMAS APLICAÇÕES EM FÍSICA

2EDOs não lineares modelam uma vasta quantidade de fenômenos físicos, químicos e biológicos, diretamente ou como parte do processo final de resolução de sistemas de equações diferenciais parciais (sistemas EDP) que modelam matematicamente fenômenos mais complexos. Dentro do conjunto das 2EDOs não lineares, uma categoria que ocupa um grande destaque são os osciladores não lineares, geralmente conectados a uma fonte que fornece excitação periódica ao sistema. Esses osciladores não lineares geralmente apresentam diversos parâmetros que representam grandezas envolvidas no fenômeno descrito, e em geral, apresentam comportamento caótico para uma determinada região do espaço dos parâmetros. Portanto, é muito importante determinar os valores dos parâmetros para os quais o sistema é integrável (valores em torno dos quais é possível fazer uma variação progressiva dos parâmetros para estudar a bifurcação das trajetórias e a transição do regular ao caótico regime). Uma das grandes vantagens do nosso método é que ele pode realizar uma análise de integrabilidade (quando a 2EDO depende de parâmetros) se considerarmos que alguma combinação algébrica deles pode levar a novas soluções. Nas próximas subseções apresentaremos algumas aplicações de nosso método para algumas 2EDOs representando osciladores não lineares.

5.1 Oscilador de Helmholtz com fricção

A 2EDO que representa o oscilador de Helmholtz com atrito (77) é:

$$y'' = ay' + by - cy^2, \quad (128)$$

onde a , b e c são parâmetros. Como a 2EDO (128) não depende explicitamente de x temos ∂_x como uma simetria. Isso permite uma redução de ordem, conforme mostrado na subsubseção 1.8.2.1. Na análise que se segue, vamos pular esse caso mais trivial e focar nossa atenção em possíveis relações entre os parâmetros da 2EDO que os permitem obter as integrais primeiras liouvillianas.

para a escolha:

$$p_c = a_4x^2 + a_5y^2 + a_6y'^2 + a_7xy' + a_8xy + a_9yy' + a_1x + a_2y + a_3y' + a_0,$$

$$q_c = b_1x + b_2y + b_3y' + b_0,$$

resolvendo o sistema AE para os coeficientes de p_c e q_c e para os parâmetros a , b e c obtemos três soluções (estamos apenas considerando as soluções onde c não é nulo, ou

seja, onde a 2EDO (128) não é linear):

Case 1: $b = \frac{6}{25} a^2$:

Para esta solução, a 2EDO torna-se

$$y'' = -cy^2 + ay' + \frac{6}{25} a^2 y \quad (129)$$

e

$$\sigma = \frac{12 a^4 - 200 a^2 c y + 625 c^2 y^2 - 250 a c y'}{5 (12 a^3 - 50 a c y + 125 c y')}. \quad (130)$$

Usando a simetria

$$X_e^{(1)} = e^{\int_x \left[\frac{12 a^4 - 200 a^2 c y + 625 c^2 y^2 - 250 a c y'}{-5 (12 a^3 - 50 a c y + 125 c y')} \right]} \left(\partial_y - \frac{12 a^4 - 200 a^2 c y + 625 c^2 y^2 - 250 a c y'}{5 (12 a^3 - 50 a c y + 125 c y')} \partial_{y'} \right), \quad (131)$$

podemos determinar a integral primeira

$$\left(72 a^4 y - 600 a^2 c y^2 + 1250 c^2 y^3 + 360 a^3 y' - 1500 a c y y' + 1875 c y'^2 \right) e^{-\frac{6a}{5}x} \quad (132)$$

levando à 1EDO reduzida

$$y' = \frac{2a}{5} y - \frac{12a^3}{125c} + \frac{\sqrt{432 a^6 - 5400 a^4 c y + 22500 a^2 c^2 y^2 - 31250 c^3 y^3 + 75 C_1 c e^{\frac{6a}{5}x}}}{125\sqrt{3}c}, \quad (133)$$

que admite a simetria de Lie

$$e^{-\frac{a}{5}x} \partial_x - \frac{2(6a^2 - 25cy) a e^{-\frac{a}{5}x}}{125c} \partial_y. \quad (134)$$

Usando a simetria (134) acima podemos integrar a 1EDO reduzida (133) para obter a solução geral da 2EDO (129):

$$y = \frac{6a^2}{25c} + \text{RootOf} \left(\int^{-z} \frac{\sqrt{-3750c^3 - a^3 + 3cC_1}}{-1250 - a^3c^2 + C_1} d_{-}a + C_2 - \frac{e^{\frac{a}{5}x}}{5a} \right) e^{\frac{2a}{5}x}. \quad (135)$$

Case 2: $b = -\frac{6}{25} a^2$:

Para esta solução, a 2EDO torna-se

$$y'' = -cy^2 + ay' - \frac{6}{25} a^2 y \quad (136)$$

e

$$\sigma = \frac{4a^2y + 25cy^2 - 10ay'}{-5(2ay - 5y')}. \quad (137)$$

Usando a simetria

$$X_e^{(1)} = e^{\int_x \left[\frac{4a^2y + 25cy^2 - 10ay'}{5(2ay - 5y')} \right]} \left(\partial_y + \frac{4a^2y + 25cy^2 - 10ay'}{5(2ay - 5y')} \partial_{y'} \right), \quad (138)$$

podemos determinar a integral primeira

$$\left(12y^2a^2 + 50cy^3 - 60ayy' + 75y'^2 \right) e^{-\frac{6a}{5}x} \quad (139)$$

e, portanto, a 1EDO reduzida

$$y' = \frac{2a}{5}y + \sqrt{-\frac{2c}{3}y^3 + \frac{C_1}{75}e^{\frac{6a}{5}x}}, \quad (140)$$

que admite a simetria de Lie

$$e^{-\frac{a}{5}x} \partial_x + \frac{2a}{5}e^{-\frac{a}{5}x} y \partial_y. \quad (141)$$

Usando a simetria (141) acima podemos integrar a 1EDO reduzida (140) para obter a solução geral da 2EDO (136):

$$y = \text{RootOf} \left(\int^{-Z} \frac{1}{\sqrt{-150c_-a^3 + 3C_1}} d_-a + C_2 - \frac{e^{\frac{a}{5}x}}{3a} \right) e^{\frac{2a}{5}x}. \quad (142)$$

Observação 5.1.1 *Alguns comentários:*

1. *Essas soluções não são novas. Podemos encontrá-las no artigo de Almendral e Sanjuán (77) juntamente com uma discussão/descrição detalhada dos casos integráveis (sem força), bem como uma análise do comportamento físico do oscilador de Helmholtz com atrito. Em relação ao presente artigo, a novidade consiste no método utilizado para encontrar as soluções.*
2. *Outro elemento digno de nota é a forma como os casos integráveis são analisados. Toda a análise das equações diferenciais usadas em (77) para encontrar as simetrias é aqui substituída por condições algébricas que vêm naturalmente da imposição da existência de um fator de integração de Darboux (o que implica que σ é uma função racional).*

5.2 Oscilador Duffing-Van der Pol

Uma grande quantidade de fenômenos pode ser modelada por osciladores não lineares e, dentre estes, o oscilador Duffing-Van der Pol ocupa uma posição de destaque,

sendo capaz de descrever desde circuitos elétricos até oscilações de baixa frequência de ondas sonoras de íons. A equação de Duffing-Van der Pol é uma combinação da equação do oscilador de Duffing (um oscilador com uma não linearidade cúbica),

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0, \quad (143)$$

que aparece em inúmeras aplicações de física (veja (68) e referências nele contidas) com a equação:

$$\ddot{x} + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (144)$$

proposto por Van der Pol para modelar oscilações em um circuito triodo de tubo de vácuo (ver (69, 70)). Quando submetidas a excitação periódica forçada, essas equações exibem, em geral, um comportamento caótico (ver (71)). Assim, a equação forçada de Duffing-Van der Pol é geralmente escrita como:

$$\ddot{x} + \alpha(1 - x^2)\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = f \cos(\omega t). \quad (145)$$

Para aplicações em Física de Plasma (72, 73) a equação de Duffing-Van der Pol pode ser modificada para:

$$\ddot{x} + \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x + \alpha x \dot{x} + \beta x^2 + \gamma x^3 = f \cos(\omega t), \quad (146)$$

onde $\{\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, f, \omega\}$ são parâmetros¹⁶. Como a 2EDO (146) apresenta comportamento caótico para valores de parâmetros arbitrários, é de grande importância para o estudo dos sistemas representados, a determinação (se houver) de conjuntos de valores de parâmetros para os quais a 2EDO apresenta comportamento regular. Desta forma, a existência de uma simetria de Lie, mesmo do tipo abordado neste trabalho (ou seja, não local), garante a integrabilidade do sistema (para o conjunto particular de valores dos parâmetros que admite a simetria). Para verificar a existência (ou não) de uma simetria de Lie podemos usar o método desenvolvido nos capítulos 3 e 4. Como o procedimento requer que a 2EDO

¹⁶ A equação modificada de Duffing-Van der Pol (146) é mais geral do que a (145), então pode ser usada para encontrar as integrais primeiras para a equação original de Duffing-Van der Pol também.

seja racional, podemos fazer a transformação $\{e^{i\omega t} \rightarrow x\}$, que leva a

$$\begin{cases} \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right), \\ x = y, \\ \dot{x} = i\omega y' x, \\ \ddot{x} = -\omega^2 x (y' + y'' x), \end{cases} \quad (147)$$

e, portanto, a 2EDO (146) é transformada em:

$$y'' = \frac{2i\epsilon\omega x^2 y'(1-y^2) + 2ia\omega x^2 y y' - 2\omega^2 x^2 z + 2\gamma x y^3 + 2\beta x y^2 - 2\omega x^2 y' + 2x y - f x^2 - f}{2\omega^2 x^3}. \quad (148)$$

Como as soluções do conjunto de indeterminados que levam a uma simetria (e, portanto, a um caso integrável) são muito numerosas, a seguir apresentaremos apenas dois casos em que podemos encontrar integrais primeiras Liouvillianas para o regime forçado (f e ω são $\neq 0$) que, para valores de parâmetros arbitrários, é caótico.

Case 1: Encontramos uma solução para $\{\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{6}e^2 + \frac{1}{6}iek, \epsilon = \epsilon, f = f\}$, onde $k \equiv \sqrt{4 - e^2}$ (equação forçada de Duffing-van der Pol):

$$\sigma = \frac{i(2ey^2 + ik - e)}{2\omega x}. \quad (149)$$

A 2EDO torna-se

$$y'' = -\frac{(6i\epsilon\omega x^2 y^2 - 6i\epsilon\omega x^2 + 6\omega^2 x^2) y' + i\epsilon k x y^3 + \epsilon^2 x y^3 + 3f x^2 - 6y x + 3f}{6x^3 \omega^2}. \quad (150)$$

A simetria é

$$X_e^{(1)} = e^{\int_x \left[-\frac{i(2ey^2 + ik - e)}{2\omega x} \right]} \left(\partial_y - \frac{i(2ey^2 + ik - e)}{2\omega x} \partial_{y'} \right). \quad (151)$$

Usando a simetria para determinar a integral primeira e aplicando a transformação inversa

$$\begin{cases} x = e^{i\omega t}, \\ y = x, \\ y' = -\frac{i\dot{x}}{\omega e^{i\omega t}}, \end{cases} \quad (152)$$

obtemos a integral primeira da 2EDO:

$$\begin{aligned}
I &= (\cos(kt/2) + i \sin(kt/2)) \left(i\epsilon^2 k x^3 - 3 i k x - 3 \epsilon \omega^2 x + 3 i \cos(\omega t) f k + \right. \\
&\quad \left. 3 \cos(\omega t) \epsilon f + 6 \sin(\omega t) f \omega + 2 \epsilon \omega^2 x^3 - 3 \epsilon x - 3(i\epsilon k + \epsilon^2 + 2\omega^2 - 2)x + \right. \\
&\quad \left. - 2 \epsilon x^3 + \epsilon^3 x^3 + 3 i k \omega^2 x \right) e^{\epsilon t/2} / (i k \epsilon + \epsilon^2 + 2\omega^2 - 2)
\end{aligned} \tag{153}$$

Case 2: Temos uma solução para $\left\{ \alpha = \alpha, \beta = \beta, \gamma = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \epsilon = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} + 2 \frac{\beta}{\alpha}, f = f \right\}$ (Equação de Duffing-van der Pol forçada modificada):

$$\sigma = \frac{-i(2\alpha^2\beta y - \alpha^2 y^2 - 4\beta^2 y^2 + \alpha^2)}{2\alpha\beta\omega x}. \tag{154}$$

A 2EDO torna-se

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{iy'(2\alpha^2\beta y - \alpha^2 y^2 - 4\beta^2 y^2 + \alpha^2 + 4\beta^2)}{2\omega x \alpha \beta} - \frac{y'}{x} + \\
&\quad \frac{6\beta y^2 x \alpha^2 - 2\alpha^2 x y^3 - 8\beta^2 x y^3 - 3f x^2 \alpha^2 + 6y x \alpha^2 - 3f \alpha^2}{6\omega^2 \alpha^2 x^3}.
\end{aligned} \tag{155}$$

A simetria é

$$X_e^{(1)} = e^{\int_x \left[\frac{i(2\alpha^2\beta y - \alpha^2 y^2 - 4\beta^2 y^2 + \alpha^2)}{2\alpha\beta\omega x} \right]} \left(\partial_y + \frac{i(2\alpha^2\beta y - \alpha^2 y^2 - 4\beta^2 y^2 + \alpha^2)}{2\alpha\beta\omega x} \partial_{y'} \right), \tag{156}$$

e, com ela, podemos determinar a integral primeira que nas coordenadas originais pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
I &= \left(-\dot{x} + \frac{(\alpha^2 + 4\beta^2)x^3}{6\alpha\beta} - \frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\alpha x}{2\beta} \right) e^{\frac{2\beta}{\alpha} t} + \\
&\quad \frac{f\alpha(\sin(\omega t)\alpha\omega + 2\cos(\omega t)\beta)}{\alpha^2\omega^2 + 4\beta^2} e^{\frac{2\beta}{\alpha} t}.
\end{aligned} \tag{157}$$

Observação 5.2.1 *Alguns comentários:*

1. Como mencionado, o oscilador Duffing-van der Pol forçado (modificado) apresenta comportamento caótico para valores arbitrários dos parâmetros e , e, assim, pelas relações encontradas entre os parâmetros temos as regiões onde o comportamento do sistema é regular.
2. Até onde sabemos, as integrais primeiras encontradas nos casos 1 e 2 ainda não haviam sido descobertas. Isso nos mostra que o método é muito útil na determinação de integrais primeiras.
3. Por fim, mas não menos importante, a determinação de regiões dos parâmetros para as quais existe uma simetria (mesmo que não local) implica que o sistema (nesta

região de parâmetros) é analiticamente integrável, ou seja, apresenta uma integral primeira analítica. Isso permanece válido mesmo se a integral primeira não for Liouvilliana, ou seja, mesmo nos casos em que as 2EDOs não tenham integrais primeiras Liouvillianas.

CONCLUSÃO

Neste trabalho introduzimos uma nova abordagem para a busca de simetrias (incluindo as não-locais) algoritmicamente para equações diferenciais ordinárias racionais de segunda ordem (2EDOs racionais). Nosso método é projetado para lidar com 2EDOs apresentando pelo menos um primeiro invariante diferencial liouvilliano.

Em poucas palavras, nosso método é baseado em alguns pilares: Usamos uma equivalência formal da derivada total “usual” d/dx e D_x (a derivada total sobre as soluções).

Também restringimos nosso método ao caso em que o fator de integração μ é dado por:

$$\mu = e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i}$$

para a definição precisa dos termos, consulte a seção 2.3.

Esta escolha não é de todo muito restritiva, não encontramos efetivamente nenhum caso em que não estivesse abrangido por esta hipótese. Além disso, vale ressaltar que a expressão acima é bastante geral no que diz respeito às funções elementares.

Além disso, a expressão acima para μ provou ser a expressão geral para o fator de integração para o caso de 1EDOs racionais e, na verdade, esse fato foi o que nos motivou a estudá-la em primeiro lugar, embora, atualmente, para o caso de 2EDOs racionais.

Outra característica importante de nossa abordagem é que ela é projetada para, basicamente, transformar o núcleo do problema em cálculos algébricos. Isso, por exemplo, além de tornar todos os cálculos, via de regra, muito mais eficientes, torna a descoberta de regiões de integrabilidade, nos parâmetros presentes na 2EDO, um esforço mais simples e rápido (veja o capítulo 5.2).

Vale ressaltar que, em princípio, nossa abordagem é um semi-algoritmo, pois um algoritmo completo deve terminar em um número finito de etapas. No nosso caso, não podemos determinar o grau máximo dos polinômios p e q que formam a função σ . No entanto, até o grau analisado, podemos ter certeza de que se não encontrarmos a função σ , então ela não existe dentro do intervalo considerado.

Observação importante: Nosso algoritmo (semi) torna-se um algoritmo (completo) nos casos (muito **frequentes**) apontados (e demonstrados) na subseção 3.3.2, onde $q|N$ ou $q = uN$ onde $u \in \{x, y, y'\}$.

Com relação aos exemplos de aplicações aqui apresentados, gostaríamos de apontar a evidência da eficiência de nossa abordagem incorporada pela 2EDO na seção 5.2, onde acreditamos ter encontrado um novo resultado.

Esperamos ter conseguido demonstrar que nosso algoritmo proposto é uma contribuição válida para o arsenal para lidar com 2EDOs racionais. Além disso, os resultados matemáticos aqui apresentados podem contribuir para o desenvolvimento de outras li-

nhas de pesquisa, ampliando as possibilidades de integração da classe de 2EDOs aqui escrutinada.

REFERÊNCIAS

- 1 LIE, S. *Theorie der Transformationsgruppen*, v. I, II, III. Chelsea; New York: [s. n.], 1970.
- 2 DARBOUX, G. *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*. Bull. Sci. Math., 2ème série 2, 60-96, 2, 123-144, 2, 151-200, 1878.
- 3 OLVER, P. J. *Applications of Lie groups to differential equations*. [S. l.]: Springer, 1986.
- 4 BLUMAN, G. W.; ANCO, S. C. *Symmetries and integration methods for differential equations*. New York: Springer, 2002. (Applied Mathematical Series, v. 154).
- 5 IBRAGIMOV, N. H. *Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations*. Wiley: Chichester, 1999.
- 6 SCHWARZ, F. *Algorithmic Lie theory for solving ordinary differential equations*. [S. l.]: Chapman Hall / CRC, 2008.
- 7 STEEB, W. H. *Continuous symmetries, Lie algebras, differential equations and computer algebra*. [S. l.]: World Scientific, 2007.
- 8 PRELLE M.; SINGER, M. *Elementary first integral of differential equations*. Trans. Amer. Math. Soc., v. 279, n. 1, p. 215-229, 1983.
- 9 CHEB-TERRAB, E. S.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *Computer algebra solving of first order EDOs using symmetry methods*. Comput. Phys. Commun., v. 101, p. 254-268, 1997.
- 10 CHEB-TERRAB, E. S.; DUARTE L. G. S.; L.A.C.P. DA MOTA, L. A. C. P. *Computer algebra solving of second order EDOs using symmetry methods*. Comput. Phys. Commun., v. 108, n. 1, p. 90-114, 1998.
- 11 ABRAHAM-SHRAUNER, B.; GUO, A. *Hidden symmetries associated with the projective group of nonlinear first-order ordinary differential equations*. J. Phys. A: Math.Gen., v. 25, n. 21, p. 5597-5608, 1992.
- 12 ABRAHAM-SHRAUNER, B.; GUO, A. *Hidden and nonlocal symmetries of nonlinear differential equations, modern group analysis: advanced analytical and computational methods in mathematical physics, hidden symmetries of differential equations*. In: IBRAGIMOV, N. H.; TORRISI, M.; VALENTI, A. (Eds.). *Modern Group Analysis:*

- advanced analytical and computational methods in mathematical physics. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 1-5.
- 13 ABRAHAM-SHRAUNER, B.; GOVINDER, K. S.; LEACH, P. G. L. *Integration of second order ordinary differential equations not possessing Lie point symmetries*. Phys. Lett. A, [s. l.], v. 203, n. 4, p. 169-174, 1995.
 - 14 ABRAHAM-SHRAUNER, B. *Hidden symmetries and nonlocal group generators for ordinary differential equations*. IMA J. Appl. Math., [s. l.], v. 56, n. 3, p. 235-252, 1996.
 - 15 GOVINDER K. S.; LEACH, P. G. L. *A group theoretic approach to a class of second-order ordinary differential equations not possessing Lie point symmetries*. J. Phys. A: Math. Gen., [s. l.], v. 30, n. 6, p. 2055-2068, 1997.
 - 16 ADAM A. A.; MAHOMED, F. M. *Non-local symmetries of first-order equations*. IMA J. Appl. Math., [s. l.], 60, 187-98, 1998.
 - 17 GANDARIAS M .L; BRUZÓN, M. S. *Reductions for some ordinary differential equations through nonlocal symmetries*. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, [s. l.], v. 18, Suppl. 1, p. 123–133, 2011.
 - 18 BRUZÓN, M .S.; GANDARIAS M. L.; SENTHILVELAN, M. *Nonlocal symmetries of Riccati and Abel chains and their similarity reductions*. Journal of Mathematical Physics, [s. l.], V. 53, P. 023512, 2012.
 - 19 MURIEL C.; ROMERO, J. L. *New methods of reduction for ordinary differential equations*. IMA J. Appl. Math., [s. l.], v. 66, n. 2, p. 111-125, 2001.
 - 20 MURIEL C.; ROMERO, J. L. *C^∞ -Symmetries and reduction of equations without Lie point symmetries*. J. Lie Theory, [s. l.], v. 13, n. 1, p. 167-188, 2003.
 - 21 MURIEL C.; ROMERO, J. L. *The λ -symmetry reduction method and Jacobi last multipliers*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., [s. l.], v. 19, p. 807–820, 2014.
 - 22 MURIEL C.; ROMERO, J. L. *Nonlocal symmetries, telescopic vector fields and λ -Symmetries of ordinary differential equations*. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, [s. l.], v. 8, p. 106-126, 2012.
 - 23 CICOGNA, G.; GAETA G.; WALCHER, S. *Dynamical systems and σ -symmetries*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, [s. l.], v. 46, n. 23, p. 235204, 2013.

- 24 CICOGNA, G.; GAETA G.; MORANDO, P. *On the relation between standard and μ symmetries for PDEs*. Journal of Physics A: Mathematical and General, [s. l.], v. 37, n. 40, p. 9467-9486, 2004.
- 25 PUCCI E.; SACCOMANDI, G. *On the reduction methods for ordinary differential equations*. J. Phys. A: Math. Gen., [s. l.], v. 35, p. 6145-6155, 2002.
- 26 NUCCI, M. C. *Jacobi Last Multiplier and Lie Symmetries: A Novel Application of an Old Relationship*. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, [s. l.], v. 12, n. 2, p. 284-304, 2005.
- 27 NUCCI, M. C. *Lie symmetries of a Painlevé-type equation without Lie symmetries*. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, [s. l.], v. 15, n. 2, p. 205-211, 2008.
- 28 CAIRÓ L.; LLIBRE, J. *Darboux Integrability for 3D Lotka-Volterra systems*. J. Phys. A: Math. Gen., [s. l.], v. 33, p. 2395-2406, 2000.
- 29 CHRISTOPHER, C. *Invariant algebraic curves and conditions for a center*. Proc. R. Soc. Edin. A, [s. l.], v. 124, p. 1209, 1994.
- 30 SHTOKHAMER, R. *Solving first order differential equations using the Prelle- Singer algorithm*. University of Delaware: Center for Mathematical Computation, 1988. Technical report 88-09.
- 31 SINGER, M. *Liouvillian First Integrals*. Trans. Amer. Math. Soc., [s. l.], v. 333, p. 673-688 1992.
- 32 COLLINS, C. B. *Algebraic Invariants Curves of Polynomial Vector Fields in the Plane*. Canada: University of Waterloo, 1993. Preprint; COLLINS, C. B. *Quadratic Vector Fields Possessing a Centre*. Canada: University of Waterloo, 1993. Preprint.
- 33 CHRISTOPHER, C. *Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations*. Electron. J. Differential Equations, [s. l.], n. 49, 1-7 p., 1999.
- 34 CHRISTOPHER C.; J. LLIBRE, J. *Integrability via invariant algebraic curves for Planar polynomial differential systems*. Ann. Differential Equations, [s. l.], 16, n. 1, p. 5-19 2000.
- 35 LLIBRE, J. *Integrability of polynomial differential systems*. In: CAÑADA, A.; DRÁBEK P.; FONDA, A. (Eds.). *Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations*. [S. l.]: Elsevier, 2004. V. 1, Ch. 5, p. 437-531.
- 36 DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *A method to tackle first order ordinary differential equations with Liouvillian functions in the solution*. J. Phys. A: Math. Gen., [s. l.], v. 35, p. 3899-3910, 2002.

- 37 DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *Analyzing the Structure of the Integrating Factors for First Order Ordinary Differential Equations with Liouvillian Functions in the Solution*. J. Phys. A: Math. Gen., [s. l.], v. 35, p. 1001-1006, 2002.
- 38 AVELLAR, J.; DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *Integrating First Order Differential Equations with Liouvillian Solutions via Quadratures: a semialgorithmic Method*. Journal of Computational and Applied Mathematics, [s. l.], v. 182, p. 327-332, 2005.
- 39 DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P.; SKEA, J. F. E. *Solving second order ordinary differential equations by extending the Prelle- Singer method*. J. Phys. A: Math.Gen., [s. l.], v. 34, p. 3015-3024, 2001.
- 40 AVELLAR, J.; DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *Determining Liouvillian first integrals for dynamical systems in the plane*. Computer Physics Communications, [s. l.], v. 177, p. 584-596, 2007.
- 41 AVELLAR, J.; DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *A semi-algorithm to find elementary first order invariants of rational second order ordinary differential equations*. Appl. Math. Comp., [s. l.], v. 184, p. 2- 11, 2007.
- 42 DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *Finding elementary first integrals for rational second order ordinary differential equations*. J. Math. Phys., [s. l.], v. 50, p. 1-20, 2009.
- 43 DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *Finding elementary first integrals for rational second order ordinary differential equations*. J. Phys. A: Math. Theor., [s. l.], v. 43, n.6, 2010.
- 44 LLIBRE J.; ZHANG, X. *Darboux theory of integrability for polynomial vector fields in R^n taking into account the multiplicity at infinity*. Bull. Sci. Math., [s. l.], v. 133, p. 765–778, 2009.
- 45 SCHLOMIUK, D. *Algebraic Particular Integrals, Integrability and the Problem of the Center*. Transactions of the American Mathematical Society, [s. l.], v. 338, n. 2, p. 799-841, 1993. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2154430> . Acesso em: 29 nov. 2023.
- 46 CHRISTOPHER, C.; LLIBRE, J.; PANTAZI C.; WALCHER, S. *Inverse Problems in Darboux' Theory of Integrability*. Acta Applicandae Mathematicae, [s. l.], 120, p. 101–126, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10440-012-9671-9> . Acesso em: 29 nov. 2023.

- 47 ZHANG, X. *Liouvillian integrability of polynomial differential systems*. Trans. Amer. Math. Soc., [s. l.], v. 368, p. 607-620, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06387-3> . Acesso em: 29 nov. 2023.
- 48 FERRAGUT, A.; GIACOMINI, H. *A new algorithm for finding rational first integrals of polynomial vector fields*. Qual. Theory Dyn. Syst., [s. l.], v. 9, p. 89–99. 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s12346-010-0021-x> . Acesso em: 29 nov. 2023.
- 49 CHÈZE, G. *Computation of Darboux polynomials and rational first integrals with bounded degree in polynomial time*. Journal of Complexity, [s. l.], v. 27, n. 201, p. 246-262, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jco.2010.10.004> . Acesso em: 29 nov. 2023.
- 50 BOSTAN, A.; CHÈZE, G.; CLUZEAU, T.; WEIL, J.-A. *Efficient algorithms for computing rational first integrals and Darboux polynomials of planar polynomial vector fields*. Mathematics of Computation, [s. l.], v. 85, p. 1393-1425, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/mcom/3007>. Acesso em: 29 nov. 2023.
- 51 FERRAGUT A.; GASULL, A. *Seeking Darboux Polynomials*. Acta Applicandae Mathematicae. [s. l.], v. 139, p. 167–186, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10440-014-9974-0> . Acesso em: 29 nov. 2023.
- 52 DEMINA, M. V. *Novel algebraic aspects of Liouvillian integrability for two-dimensional polynomial dynamical systems*. Physics Letters A, [s. l.], v. 382, Issue 20, p. 1353-1360, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.03.037>. Acesso em: 29 nov. 2023.
- 53 FERRAGUT, A.; GALINDO, C.; MONSERRAT, F. *On the computation of Darboux first integrals of a class of planar polynomial vector fields*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, [s. l.], v. 478, p. 743-763, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.05.052> . Acesso em: 29 nov. 2023.
- 54 CHÈZE, G.; COMBOT, T. *Symbolic computations of first integrals for polynomial vector fields*. Foundations of Computational Mathematics, [s. l.], 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10208-019-09437-9> . Acesso em: 29 nov. 2023.
- 55 CHRISTOPHER, C.; LLIBRE, J.; PANTAZI, C.; WALCHER, S. *On planar polynomial vector fields with elementary first integrals*. J. Differential Equations, [s. l.], v. 267, p. 4572–4588, 2019.
- 56 AVELLAR, J.; CARDOSO, M. S.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *Dealing with rational second order ordinary differential equations where both darboux and lie find it difficult: the S-function method*. Computer Physics Communications, [s. l.], v. 234, p. 302-314, 2019.

- 57 DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *An efficient method for computing Liouvillian first integrals of planar polynomial vector fields*. Journal of Differential Equations, [s. l.], v. 300, p. 356-385, 2021.
- 58 BRAZ, A.; CARDOSO, M. S.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *A generalization of the Sfunction method applied to a Duffing–Van der Pol forced oscillator*. Computer Physics Communications, [s. l.], v. 254, p. 107306, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107306>. Acesso em: 29 nov. 2023.
- 59 DAVENPORT, J. H.; SIRET, Y.; TOURNIER, E. *Computer algebra: systems and algorithms for algebraic computation*. [London]: Academic Press, 1993.
- 60 DUARTE, L. G.S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L.A C. P.; SKEA, J. E. F. *An extension of the Prelle–Singer method and a Maple implementation*. Computer Physics Communications, [s. l.], v. 144, p. 46–62, 2002.
- 61 AVELLAR, J.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *A Maple package to find first order differential invariants of 2ODEs via a Darboux approach*. Computer Physics Communications, [s. l.], v. 185, p. 307-316, 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2013.08.014> . Acesso em: 29 nov. 2023.
- 62 AVELLAR, J. *Determinação de integrais primeiras liouvillianas em equações diferenciais ordinárias racionais de segunda ordem*. 2013. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.
- 63 EIRAS, J. P. C. *Sistemas 3D de 1EDOs: a busca por invariantes liouvillianos*. 2017. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.
- 64 KAMKE, E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*. New York: Chelsea Publishing, 1959.
- 65 LEVINSON, N.; SMITH, O. *A general equation for relaxation oscillations*. Duke Mathematical Journal, [s. l.], v. 9, p. 382-403, 1942.
- 66 RAN, Z. *One exactly soluble model in isotropic turbulence*. Advances and Applications in Fluid Mechanics, [s. l.], v. 5, p. 41-47, 2009.
- 67 LIÉNARD, A. *Etude des oscillations entretenues*. Revue générale de l'électricité, [s. l.], v. 23, p. 901- 912, p. 946-954, 1928.
- 68 SALAS, A. H. S.; HERNÁNDEZ, J. E. C.; HERNÁNDEZ, L. J. M. *The Duffing Oscillator Equation and Its Applications in Physics*. Mathematical Problems in

- Engineering, [s. l.], 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2021/9994967> .
Acesso em: 29 nov. 2023.
- 69 VAN DER POL, B. *On relaxation-oscillations*. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, [s. l.], v. 2, p. 978- 992, 1927.
- 70 VAN DER POL, B. The non linear theory of electrical oscillations. Proc. Inst. Radio Eng., [s. l.], v. 22, p. 1051–1086, 1934.
- 71 VAN DER POL, B.; VAN DER MARK, J. *The heart beat considered as a relaxation oscillations and an electrical model of the heart*. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, [s. l.], v. 6, p. 763-775, 1928.
- 72 KADJI, H. G. E.; NBENDJO, B. R. N.; OROU, J. B. C.; TALLA, P. K. *Nonlinear dynamics of plasma oscillations modeled by an anharmonic oscillator*. Physics of Plasmas, [s. l.], v. 15, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.2841032>.
Acesso em: 29 nov. 2023.
- 73 MIWADINOU, C. H.; HINVI, L. A.; MONWANOU, A. V.; CHABI OROU, J. B. *Nonlinear dynamics of plasma oscillations modeled by a forced modified Van der Pol-Duffing oscillator*. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1308.6132> .
Acesso em: 29 nov. 2023. arXiv:1308.6132 [physics.flu-dyn].
- 74 FITZHUGH, F. *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes*. Biophysics Journal, [s. l.], v. 1, p. 445-466, 1961.
- 75 STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos*. Reading: Addison- Wesley, 1994.
- 76 AVELLAR, J.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. *PSsolver: A Maple implementation to solve first order ordinary differential equations with Liouillian solutions*. Computer Physics Communications, [s. l.], v. 183, Issue 10, p. 2313, Oct. 2012.
- 77 ALMENDRAL J. A.; SANJUÁN, M. A. F. *Integrability and symmetries for the Helmholtz oscillator with friction*. J. Phys. A: Math. Gen., [s. l.], v. 36, p. 695– 710, 2003.

APÊNDICE A – Equações importantes

A.1 Equações contendo a função σ - 2EDO

Considere a 2EDO $y'' = \frac{M(x,y,y')}{N(x,y,y')} = 0$ não exata. Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$M(x, y, y') - N(x, y, y')y'' = 0 \quad (158)$$

Para transformarmos a Eq.(158) numa EDO exata, devemos multiplicá-la pelo fator integrante $\mu(x, y, y')$, obtendo a seguinte equação:

$$\mu(x, y, y')M(x, y, y') - \mu(x, y, y')N(x, y, y')y'' = 0 \quad (159)$$

Suponha agora que $I(x, y, y') = C$ represente uma família de superfícies tal que seu valor não varie sobre as soluções da 2EDO. Por $I(x, y, y')$ não variar sobre as soluções da 2EDO, I recebe o nome de invariante. Aplicando a derivada total de I em relação a x , obtemos a equação:

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial I}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \quad (160)$$

Como $I = C$, onde C é uma constante, então $dI/dx = 0$. Com isso, temos:

$$\frac{dI}{dx} = I_x + I_y y' + I_{y'} y'' = 0 \quad (161)$$

Comparando a Eq.(161) com a Eq.(159), obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} I_x + I_y y' = \mu(x, y, y')M(x, y, y') \\ I_{y'} = -\mu(x, y, y')N(x, y, y') \end{cases} \quad (162)$$

- **Demonstrando as equações que contém a função $\sigma(x, y, y')$**

$$dI = \frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy + \frac{\partial I}{\partial y'} dy' = 0 \quad (163)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y' dx - dy = 0 \Rightarrow \mu \sigma y' dx - \mu \sigma dy = 0 \quad (164)$$

$$\phi = y'' \Rightarrow \phi = \frac{dy'}{dx} \Rightarrow \mu\phi dx - \mu dy' = 0 \quad (165)$$

Somando as Eq.(164) e Eq.(165), obtemos a Eq.(166)

$$0 = \mu(\phi + \sigma y')dx - \mu\sigma dy - \mu dy' \quad (166)$$

$$0 = I_x dx + I_y dy + I_{y'} dy' \quad (167)$$

Comparando as Eq.(166) e Eq.(167), temos:

$$\begin{cases} I_x = \mu(\phi + \sigma y') \\ I_y = -\mu\sigma \\ I_{y'} = -\mu \end{cases} \quad (168)$$

Sendo: $I_{xy} = I_{yx}$; $I_{xy'} = I_{y'x}$; $I_{yy'} = I_{y'y}$

• **Calculando o valor de $I_{xy} = I_{yx}$**

$$\frac{\partial(\mu(\phi + \sigma y'))}{\partial y} = \frac{\partial(-\mu\sigma)}{\partial x} \quad (169)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}(\phi + \sigma y') + \mu \frac{\partial(\phi + \sigma y')}{\partial y} = -[\sigma \frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial\sigma}{\partial x}] \quad (170)$$

$$\phi \frac{\partial\mu}{\partial y} + \sigma y' \frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu [\frac{\partial\phi}{\partial y} + y' \frac{\partial\sigma}{\partial y} + \sigma \frac{\partial y'}{\partial y}] + \sigma \frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0 \quad (171)$$

$$\phi\mu_y + \sigma y'\mu_y + \mu\phi_y + \mu y'\sigma_y + \sigma\mu_x + \mu\sigma_x = 0 \quad (172)$$

Após os cálculos anteriores, obtemos a equação final:

$$\mu_y(\phi + \sigma y') + \mu(\phi_y + y'\sigma_y) + (\sigma\mu_x + \mu\sigma_x) = 0 \quad (173)$$

• **Calculando o valor de $I_{xy'} = I_{y'x}$**

$$\frac{\partial(\mu(\phi + \sigma y'))}{\partial y} = \frac{\partial(-\mu)}{\partial x} \quad (174)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y'}(\phi + \sigma y') + \mu \frac{\partial(\phi + \sigma y')}{\partial y'} = -\frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (175)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y'}(\phi + \sigma y') + \mu \left[\frac{\partial \phi}{\partial y'} + y' \frac{\partial \sigma}{\partial y'} + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial y'} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (176)$$

Após os cálculos anteriores, temos:

$$\mu_{y'}(\phi + \sigma y') + \mu[\phi_{y'} + y'\sigma_{y'} + \sigma] + \mu_x = 0 \quad (177)$$

• **Calculando o valor de $I_{yy'} = I_{y'y}$**

$$\frac{\partial(-\mu\sigma)}{\partial y'} = \frac{\partial(-\mu)}{\partial y} \quad (178)$$

$$-\frac{\partial \mu}{\partial y'}\sigma - \mu \frac{\partial \sigma}{\partial y'} = -\frac{\partial \mu}{\partial y} \quad (179)$$

Após os cálculos anteriores, temos:

$$-(\mu_{y'}\sigma + \mu\sigma_{y'}) + \mu_y = 0 \quad (180)$$

• **Calculando o operador derivada total D_x**

$$D_x = \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \quad (181)$$

Após simplificação, obtemos o operador derivada total:

$$D_x = \partial_x + \partial_y y' + \partial_{y'} \phi \quad (182)$$

• **Demonstrando a equação $D_x[\mu] = -\mu(\phi_{y'} + \sigma)$**

Fazendo a Eq.(177) + Eq.(180)·y'

$$\mu_{y'}(\phi + \sigma y') + \mu[\phi_{y'} + y'\sigma_{y'} + \sigma] + \mu_x + [-(\mu_{y'}\sigma + \mu\sigma_{y'}) + \mu_y]y' = 0 \quad (183)$$

$$\mu_{y'}\phi + \sigma y'\mu_{y'} + \mu\phi_{y'} + \mu y'\sigma_{y'} + \mu\sigma + \mu_x - \sigma y'\mu_{y'} - \mu y'\sigma_{y'} + y'\mu_y = 0 \quad (184)$$

$$\mu_x + y'\mu_y + \phi\mu_{y'} + \mu\phi_{y'} + \mu\sigma = 0 \quad (185)$$

Após algumas simplificações, obtemos a equação desejada:

$$D_x[\mu] = -\mu(\phi_{y'} + \sigma) \quad (186)$$

- **Demonstrando a equação** $D_x[\mu\sigma] = -\mu\phi_y$

Fazendo a Eq.(173) - Eq.(180)· ϕ , obtemos:

$$\mu_y(\phi + \sigma y') + \mu(\phi_y + y'\sigma_y) + (\sigma\mu_x + \mu\sigma_x) - [-(\mu_{y'}\sigma + \mu\sigma_{y'}) + \mu_y]\phi = 0 \quad (187)$$

$$\mu_y\phi + \mu_y\sigma y' + \mu\phi_y + \mu y'\sigma_y + \sigma\mu_x + \mu\sigma_x + \mu_{y'}\sigma\phi + \mu\phi\sigma_{y'} - \mu_y\phi = 0 \quad (188)$$

$$\mu\sigma_x + \mu y'\sigma_y + \mu\phi\sigma_{y'} + \sigma\mu_x + \sigma y'\mu_y + \sigma\phi\mu_{y'} = -\mu\phi_y \quad (189)$$

$$\mu[\sigma_x + y'\sigma_y + \phi\sigma_{y'}] + \sigma[\mu_x + y'\mu_y + \phi\mu_{y'}] = -\mu\phi_y \quad (190)$$

$$\mu D_x[\sigma] + \sigma D_x[\mu] = -\mu\phi_y \quad (191)$$

Simplificando, obtemos:

$$D_x[\mu\sigma] = -\mu\phi_y \quad (192)$$

- **Demonstrando a equação** $D_x[\sigma] = \sigma^2 + \sigma\phi_{y'} - \phi_y$

Escrevendo a Eq.(173) de uma maneira diferente, temos:

$$\mu y'\sigma_y + \mu\sigma_x = -\mu_y\phi - \mu_y\sigma y' - \mu\phi_y - \sigma\mu_x \quad (193)$$

Multiplicando a Eq.(180) por ϕ e a escrevendo de uma forma diferente, temos:

$$\phi\mu\sigma_{y'} = -\sigma\phi\mu_{y'} + \phi\mu_y \quad (194)$$

Somando os dois resultados anteriores, obtemos:

$$\mu\sigma_x + \mu y'\sigma_y + \mu\phi\sigma_{y'} = -\sigma\mu_x - \sigma y'\mu_y - \sigma\phi\mu_{y'} - \mu\phi_y \quad (195)$$

Simplificando essa última equação, obtemos:

$$\mu D_x[\sigma] = -\sigma D_x[\mu] - \mu\phi_y \quad (196)$$

Mas sabemos que:

$$D_x[\mu] = -\mu(\phi_{y'} + \sigma) \quad (197)$$

Logo, encontramos a seguinte equação:

$$\mu D_x[\sigma] = \sigma\mu(\phi_{y'} + \sigma) - \mu\phi_y \quad (198)$$

E, finalmente, obtemos a equação desejada:

$$D_x[\sigma] = \sigma^2 + \sigma\phi_{y'} - \phi_y \quad (199)$$