



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Mauro Nigro Alves Junior

Sobre coloração total dos grafos circulantes

Rio de Janeiro

2021

Mauro Nigro Alves Junior

Sobre coloração total dos grafos circulantes



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Profa. Dra. Diana Sasaki Nobrega

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

A474 Alves Junior, Mauro Nigro.
Sobre coloração total dos grafos circulantes / Mauro Nigro Alves
Junior. - 2021.
92 f. : il.

Orientadora: Diana Sasaki Nóbrega.
Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) - Universidade
do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística.

1. Teoria dos Grafos – Teses. I. Nobrega, Diana Sasaki. II.
Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e
Estatística. III. Título.

CDU 519.17

Patrícia Bello Meijinhos – CRB7- 5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica.

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta
dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Mauro Nigro Alves Junior

Sobre coloração total dos grafos circulantes

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 19 de fevereiro de 2021.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Diana Sasaki Nobrega (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística– UERJ

Profa. Dra. Telma Silveira Pará
Fundação de Apoio à Escola Técnica do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Luerbio Faria
Instituto de Matemática e Estatística– UERJ

Prof. Dr. Rubens André Sucupira
Instituto de Matemática e Estatística– UERJ

Rio de Janeiro

2021

AGRADECIMENTOS

À minha família por sempre acreditar no meu amor e dedicação pela pesquisa acadêmica e por estarem ao meu lado desde o princípio de minha vida.

À minha orientadora Diana Sasaki, pela excelente orientação e amizade que resultou nesta Dissertação e no meu desenvolvimento profissional e acadêmico.

Ao Prof. Luerbio Faria, por suas excelentes aulas sobre Teoria da Computação e Teoria dos Grafos.

Ao Prof. Rubens Sucupira, por ministrar excelentes aulas e em específico, as aulas ministradas de Complexidade Parametrizada.

À todos membros da banca por aceitarem avaliar este trabalho.

Ao Prof. Fabiano Oliveira, por suas aulas que me deram outros olhares para área de lógica.

À todos os professores do Instituto de Matemática e Estatística da UERJ que conheço desde a graduação e que agregaram a minha formação.

Aos meus amigos que conheci na graduação em Matemática na UERJ que estiveram comigo desde o início.

Aos meus amigos do programa, em especial tenho uma gratidão intelectual pelo Igor Morgado que me ajudou bastante na compreensão e aprendizado sobre a Linguagem C que me auxiliou num melhor aprendizado sobre estruturas de dados.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro através da bolsa de mestrado.

“Quando você tenta provar um teorema, você simplesmente não lista as hipóteses e começa a deduzir os fatos. É tentativa e erro, experimentação, um verdadeiro trabalho de adivinhação.” *Halmos, Paul (1916-2006), in I want to be a Mathematician, 1985.*

RESUMO

NIGRO, M. *Sobre coloração total dos grafos circulantes*. 2021. 92 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Um grafo circulante $C_n(d_1, d_2, \dots, d_l)$ com $1 \leq d_i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, e $d_i \neq d_j$, tem um conjunto de vértices $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e um conjunto de arestas $E = \bigcup_{i=1}^l E_i$, em que $E_i = \{e_0^i, e_1^i, \dots, e_{n-1}^i\}$ e $e_j^i = v_j v_{j+d_i}$, sendo os índices dos vértices considerados em módulo n . Uma aresta de E_i é chamada de aresta de distância d_i . Uma k -coloração total de um grafo G é uma atribuição de k cores aos vértices e arestas de G tal que elementos adjacentes ou incidentes têm cor diferente. O número cromático total de G é o menor número inteiro k que G tem uma k -coloração total, denotado por $\chi''(G)$. A Conjectura da Coloração Total afirma que o número cromático total ou é $\Delta(G)+1$ ou é $\Delta(G)+2$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo de G . Grafos com $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ são chamados de Tipo 1 e grafos com $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ são chamados de Tipo 2. Alguns grafos circulantes clássicos, como os grafos ciclos $C_n \simeq C_n(1)$, os grafos completos $K_n \simeq C_n(1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor)$ e os grafos bipartidos completos $K_{n,n} \simeq C_{2n}(1, 3, 5, \dots, k)$ em que k é o maior número ímpar tal que $k \leq n$, têm seus números cromáticos totais determinados. Além disso, os números cromáticos totais de todos os grafos circulantes cúbicos $C_{2n}(d, n)$ foram determinados por Hackmann e Kemnitz em 2004. Existem vários resultados conhecidos sobre as potências de ciclo, uma família infinita de grafos circulantes $C_n(1, 2, \dots, k)$. Em 2003, Campos provou que $C_n(1, 2)$ é Tipo 1, exceto $C_7(1, 2)$ que é Tipo 2 e conjecturou que $C_n(1, 2, \dots, k)$ com $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ é Tipo 2, se e somente se, n é ímpar e $k > n/3 - 1$. Recentemente esta conjectura foi provada para $k = 3$ e $k = 4$. Em 2008, Khennoufa e Togni provaram que todo grafo circulante 4-regular $C_{5p}(1, k)$ é Tipo 1, para qualquer inteiro positivo p e $k < 5p/2$ com $k \equiv 2 \pmod{5}$ e $k \equiv 3 \pmod{5}$; e provaram que $C_{6p}(1, k)$ é Tipo 1, para $p \geq 3$ e $k < 3p$ com $k \equiv 1 \pmod{3}$ ou $k \equiv 2 \pmod{3}$. Além disso, eles verificaram casos particulares com o auxílio de um computador. Neste mesmo artigo, Khennoufa e Togni conjecturaram que exceto por uma coleção finita de Tipo 2, os grafos circulantes 4-regulares $C_n(1, k)$ são Tipo 1. Neste trabalho, nós estudamos todos os resultados que abrangem o estado da arte sobre coloração total de grafos circulantes. E por fim, contribuímos para esta conjectura, determinando o número cromático total de todos os grafos das três seguintes famílias infinitas de circulantes 4-regulares: $C_n(2k, 3)$, $k \geq 1$ e $n = (8\mu + 6\lambda)k$, para inteiros não negativos μ e λ ; $C_{3n}(1, 3)$, para $n > 1$; e $C_{3\lambda p}(1, p)$, $\lambda \geq 1$ e $p \equiv 0 \pmod{3}$, sugerindo que a conjectura é verdadeira.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos. Coloração total. Grafos circulantes.

ABSTRACT

NIGRO, M. *About total coloring of circulant graphs*. 2021. 92 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

A circulant graph $C_n(d_1, d_2, \dots, d_l)$ with $1 \leq d_i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, where $d_i \neq d_j$, has vertex set $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ and edge set $E = \bigcup_{i=1}^l E_i$, where $E_i = \{e_0^i, e_1^i, \dots, e_{n-1}^i\}$ and $e_j^i = v_j v_{j+d_i}$, where the indexes of the vertices are considered modulo n . An edge of E_i is called edge of length d_i . A k -total coloring of a graph G is an assignment of k colors to the vertices and edges (elements) of G so that adjacent or incident elements have different colors. The total chromatic number of G is the smallest integer k for which G has a k -total coloring. The well known Total Coloring Conjecture states that the total chromatic number of a graph is either $\Delta(G) + 1$ or $\Delta(G) + 2$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G . Graphs with $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ are known as Type 1, and graphs with $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ are known as Type 2. Some classical circulant graphs, such as the cycle graphs $C_n \simeq C_n(1)$, the complete graphs $K_n \simeq C_n(1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor)$, and the complete bipartite graphs $K_{n,n} \simeq C_{2n}(1, 3, 5, \dots, k)$, where k is the biggest odd number such that $k \leq n$, have their total chromatic number determined. Furthermore, the total chromatic number of every cubic circulant graph $C_{2n}(d, n)$ was determined by Hackmann and Kemnitz in 2004. There are many results in the well known powers of cycles graphs, an infinite family of circulant graphs $C_n(1, 2, \dots, k)$. In 2003, Campos and de Mello proved that $C_n(1, 2)$ is Type 1, except for graph $C_7(1, 2)$ which is Type 2, and they conjectured that $C_n(1, 2, \dots, k)$, with $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, is Type 2 if and only if n is odd and $k < n/3 - 1$. Recently, it was proved that this conjecture holds for $k = 3$ and $k = 4$. In 2008, Khennoufa and Togni proved that every 4-regular circulant graph $C_{5p}(1, k)$ is Type 1, for any positive integer p and $k < 5p/2$ with $k \equiv 2 \pmod{5}$ or $k \equiv 3 \pmod{5}$; and proved that $C_{6p}(1, k)$ is Type 1, for $p \geq 3$ and $k < 3p$ with $k \equiv 1 \pmod{3}$ or $k \equiv 2 \pmod{3}$. Furthermore, they vericated some particular cases with the help of the computer. In the same paper, Khennoufa and Togni conjectured that except for a finite number of Type 2, 4-regular circulant graphs are all Type 1. In this work, we studied all the results that envolved the state of art about total coloring of circulant graphs. Futhermore, we contribute to this conjecture by determining the total chromatic number of all graphs of the following three infinite families of 4-regular circulant graphs: $C_n(2k, 3)$, $k \geq 1$ and $n = (8\mu + 6\lambda)k$, for non negative integers μ and λ ; $C_{3n}(1, 3)$, for $n > 1$; and $C_{3\lambda p}(1, p)$, $\lambda \geq 1$ and $p \equiv 0 \pmod{3}$, suggesting that the conjecture has a positive answer.

Keywords: Graph Theory. Total coloring. Circulant graphs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Representações das pontes de Königsberg.	10
Figura 2	- Exemplo do problema das quatro cores.	12
Figura 3	- Exemplo de coloração de arestas.	13
Figura 4	- Exemplo de coloração total.	14
Figura 5	- Exemplo de um semigrafo.	15
Figura 6	- Exemplos de conjuntos independentes.	15
Figura 7	- Exemplo de emparelhamento.	16
Figura 8	- Exemplo de conjunto independente total.	17
Figura 9	- Exemplo de dois grafos isomorfos.	17
Figura 10	- Alguns exemplos de grafos.	18
Figura 11	- Alguns exemplos de grafos circulantes.	19
Figura 12	- Möbius Ladder.	19
Figura 13	- Exemplos de grafos de Petersen generalizados.	20
Figura 14	- Exemplos de coloração total.	23
Figura 15	- $G(3, 1)$ particionado em 4 emparelhamentos maximais.	25
Figura 16	- M_8 , um grafo Tipo 2 e harmônico.	26
Figura 17	- 21 problemas \mathcal{NP} -completos de Karp.	28
Figura 18	- Os grafos ciclos C_n , completos K_n e bipartidos completos $K_{n,n}$ são grafos circulantes.	30
Figura 19	- Exemplo de T_i para K_7	31
Figura 20	- Exemplo de B_i para $K_{3,4}$ com $1 \leq i \leq m$	32
Figura 21	- Exemplos de $(\Delta + 2)$ -coloração total para C_n quando $n \equiv 1 \pmod{3}$ ou $n \equiv 2 \pmod{3}$	33
Figura 22	- Möbius Ladder na descrição $C_{2n}(1, n)$	34
Figura 23	- Três possíveis colorações.	34
Figura 24	- Possíveis extensões da coloração e a contradição decorrente dessas extensões.	35
Figura 25	- 4-colorações totais do $G(4, 1)$ e do $G(8, 1)$	36
Figura 26	- O grafo $C_{16}(6, 8)$	37
Figura 27	- Esquema do grafo $C_{5p}(1, k)$ com sua 5-coloração-total.	39
Figura 28	- Grafo $C_5(1, 2)$ e a aplicação do Teorema 14.	40
Figura 29	- Os grafos $C_{18}(1, 7)$ e $C_{18}(1, 8)$	42
Figura 30	- Colagem entre os grafos C_7^2 e C_9^2	44
Figura 31	- Representação de um vértice especial v_i	45
Figura 32	- Coloração total dos grafos básicos.	46
Figura 33	- Aplicação do Teorema 16.	49

Figura 34 - Exemplos de $C_n(2, 3)$ para n par.	50
Figura 35 - Exemplos de $C_n(3, 4)$ para n múltiplo de 4.	51
Figura 36 - O semigrafo $B(15, 3)$	52
Figura 37 - 3-fechamento resultando no $C_8(2, 3)$	54
Figura 38 - $C_8(2, 3)$ e $B(8, 2)$ após a aplicação da função f	54
Figura 39 - Aplicação da permutação f com o intuito de provar que o p -fechamento de $B(n, a)$ é o grafo $C_n(a, p)$	56
Figura 40 - 5-coloração-total válida para um 2-fechamento de $B(15, 3)$	57
Figura 41 - 5-coloração-total de $C_{15}(2, 3)$	57
Figura 42 - $B(8, 2)$ e $B(6, 2)$	59
Figura 43 - 5-coloração-total válida e compatível de $B(6k\lambda, 2k)$	61
Figura 44 - 5-coloração-total válida e compatível de $B(8k\mu, 2k)$	61
Figura 45 - 5-coloração total válida para 1-fechamento de $B(6, 2)$	62
Figura 46 - O semigrafo $B(14, 2)$	63
Figura 47 - Grafo $C_{14}(2, 3)$ com 5 cores.	64
Figura 48 - 5-coloração total de $C_{10}(2, 3)$	64
Figura 49 - 5-coloração total válida para um 1-fechamento de $B(9, 3)$, $B(21, 3)$ e $B(15, 3)$	65
Figura 50 - Todos os casos considerados para coloração harmônica de $C_{12}(1, 3)$	66
Figura 51 - 5-coloração total de $C_{18}(1, 3)$	67
Figura 52 - Grafo $C_7(1, 3)$	68
Figura 53 - Pôster apresentado no LATIN 2020.	91
Figura 54 - Pôster apresentado no LAWCG 2020.	92

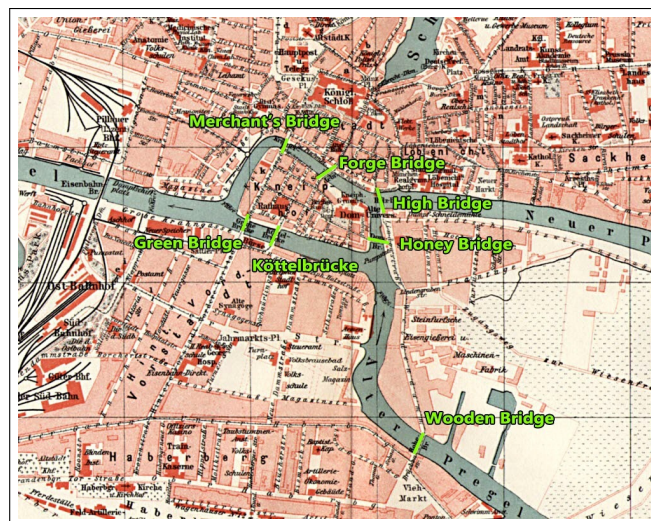
SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	COLORAÇÃO TOTAL DOS GRAFOS CIRCULANTES	30
1.1	Grafos circulares cúbicos	33
1.2	Grafos potências de ciclo	42
2	NOSSAS CONTRIBUIÇÕES	50
	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	70
	REFERÊNCIAS	72
	ÍNDICE DE ASSUNTOS	74
	APÊNDICE A – Produções acadêmicas.	75

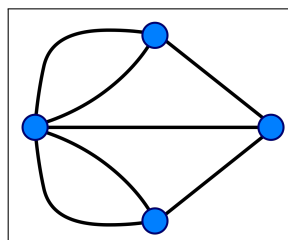
INTRODUÇÃO

Um grafo é uma estrutura matemática consistindo em um conjunto de vértices conectados por arestas, onde as arestas descrevem relações entre os vértices. Representamos um grafo graficamente por pontos e linhas. Esta estrutura matemática é capaz de modelar problemas práticos da vida real. Um dos problemas clássicos que deu origem a Teoria dos Grafos é o PROBLEMA DAS SETE PONTES DE KÖNIGSBERG. Este problema consiste em saber se é possível sair de alguma ilha ou margem, passar pelas setes pontes (cada ponte podendo ser atravessada uma única vez) e voltar ao ponto de origem, na antiga região da Prússia representada na Figura 1.

Figura 1 - Representações das pontes de Königsberg.



(a)



(b)

Fonte: (a) <<https://www.amusingplanet.com/2018/08/the-seven-bridges-of-konigsberg.html>> (b) <https://www.wikiwand.com/pt/Sete_pontes_de_Königsberg>

O matemático Leonhard Euler em 1736, mostrou que não é possível realizar tal trajeto. Para tal, foram desconsiderados o tamanho das ilhas e das pontes, representando portanto as ilhas e margens por vértices e as pontes por arestas, utilizando um grafo como modelo (Figura 1b).

A história que origina os grafos circulantes desde à sua definição a sua aplicação é bastante extensa e podemos encontrar diversas referências em [1]. Em 1846, Eugène Charles Catalan introduziu matrizes circulantes e suas propriedades que foram estudadas por diversos autores. A relação entre grafos circulantes e matrizes circulantes se deve ao fato da matriz de adjacência de um grafo circulante ser uma matriz circulante.

Os grafos circulantes são um caso particular de uma estrutura de grafo mais abstrata, chamados de grafos de Cayley. Os grafos de Cayley foram introduzidos por Arthur Cayley em 1878, com o intuito de associar a Teoria dos Grupos à Teoria dos Grafos. A Teoria dos Grupos estuda as estruturas algébricas conhecidas como grupos¹.

Um grafo de Cayley é um grafo formado por um grupo e um conjunto gerador do grupo, onde os vértices estão associados aos elementos do grupo (em particular, nesta definição \mathbb{Z}_n é o conjunto de vértices dos grafos circulantes) e as arestas estão associadas aos elementos do conjunto gerador.

Em 1974, Wong e Coppersmith [2] usaram os grafos circulantes como modelo para resolução de um problema de performance em arquiteturas de computadores da época. Uma limitação fundamental da época, era a baixa taxa na qual podia-se acessar dados e restaurá-los em memórias de alta velocidade. Para superar este problema é utilizada a técnica de aumento da paralelização de operações nesta memória, por meio da incorporação de um módulo de memória independente.

Neste contexto, foi desenvolvida uma componente chamada de memória circular, consistindo na conexão entre registradores. Cada registrador é conectado a outros $n - 1$ registradores de maneira ciclicamente simétrica e está completamente determinado pela seleção de n diferentes cordas. O problema está em selecionar o conjunto das cordas que minimizará o máximo ou a média de número de transferência de um registrador para outro registrador necessários em uma arbitrária circulação de dados.

Posteriormente, diversos estudos envolvendo aplicações em grafos circulantes foram desenvolvidos nas áreas de projeto de rede de computadores, rede de telecomunicações e computação distribuída. Neste trabalho, focaremos em uma classe de grafos circulantes.

Um problema famoso e motivador, relacionado ao estudo que propomos é o PROBLEMA DAS QUATRO CORES, surgiu em 1852, quando o matemático Francis Guthrie estava colorindo o mapa da Inglaterra e conjecturou que qualquer mapa podia ser colorido com no máximo 4 cores, com a restrição de que regiões com mesma fronteira tivessem cores diferentes. Note que assim como na Figura 2, é comum serem usados rótulos numéricos para indicar cores.

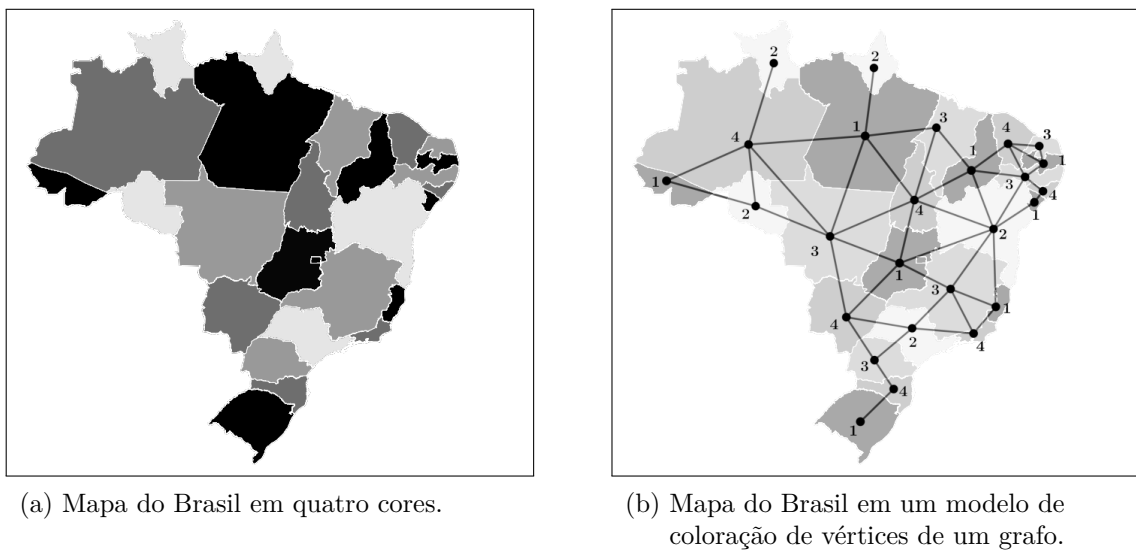
Esta conjectura foi posteriormente provada por Kenneth Appel e Wolfgang Haken com o auxílio de um computador em 1976 e tornou-se então o *Teorema das Quatro Co-*

¹ Grupos são conjuntos não-vazios, fechados, associativos e com a existência de inverso para cada elemento do conjunto.

res. A resolução deste problema é difícil pelo fato de não apenas se referir aos mapas do mundo, usualmente conhecidos, mas de qualquer formato de mapa concebível, que possa ser desenhado no papel. O problema usualmente é reformulado desconsiderando o tamanho das regiões, levando em conta apenas a relação de fronteiras.

É utilizado um modelo de um grafo onde as regiões são os vértices e existe uma aresta entre dois vértices quando existe uma fronteira entre as regiões. A atribuição de cor ocorre nos vértices deste grafo. Temos portanto que vértices conectados a uma mesma aresta possuem cores diferentes. Trata-se de um problema de coloração de vértices.

Figura 2 - Exemplo do problema das quatro cores.



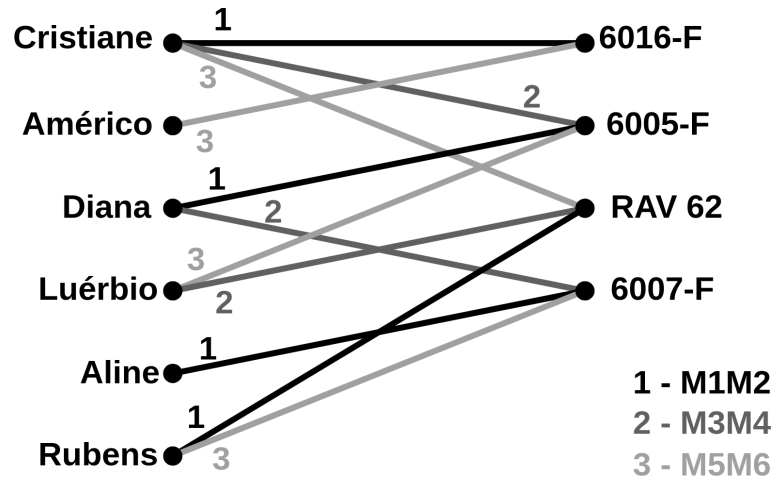
Fonte: O autor, 2021.

Coloração de vértices aparece também na área de otimização de compiladores, num processo chamado *alocação de registradores*. Alocação de registradores é o processo de atribuir um grande número de variáveis de programa de destino a um pequeno número de registradores de CPU. Registradores são unidades de armazenamento internas do processador. No desenvolvimento de programas, o programador necessita usar diversas variáveis. O computador deve ler e gravar registros na CPU. Cada vértice é uma variável e existe uma aresta entre os vértices de tal forma que ambas variáveis estão sendo usadas ao mesmo tempo. Uma cor indica a atribuição do registrador para cada variável. Para maiores detalhes, recomendamos a leitura de [3].

Coloração de arestas aparece nos problemas de otimização de recursos. Por exemplo, na Universidade do Estado do Rio de Janeiro temos uma lista de cursos oferecidos e desejamos determinar a forma mais econômica de se alocar professores em sala de aula, de forma que dois professores não usem uma mesma sala simultaneamente. Em um modelo de grafo, os professores e salas de aula serão representados como vértices do grafo e a existência de aresta é determinada se um professor dará aula na sala. Procura-se o

menor número de horários possível para ocorrer todas as aulas. A Figura 3 representa um exemplo deste problema.

Figura 3 - Exemplo de coloração de arestas.



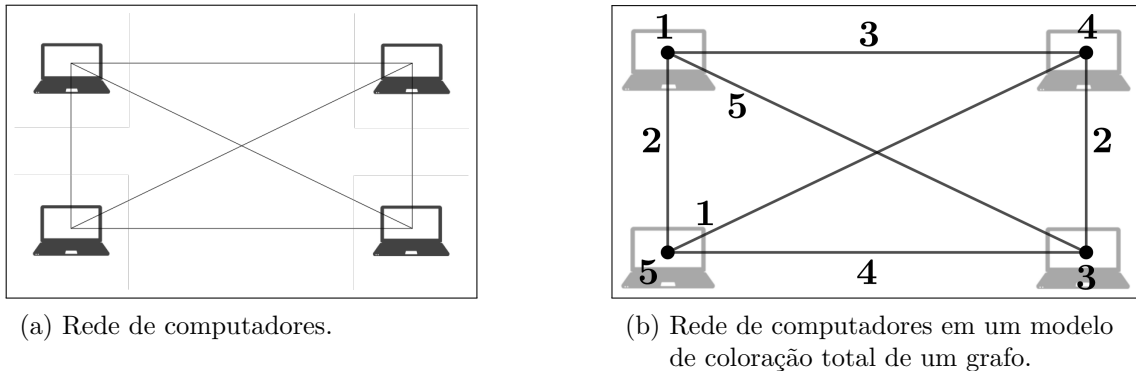
Fonte: O autor, 2021.

Em coloração total temos como exemplo a motivação retirada de [4] que trata de problemas de busca da realização de tarefas em rede de maneira eficiente. Suponhamos que temos uma rede de computadores. Estas serão representadas por vértices e estes vértices serão conectados a outros computadores desta rede por meio de uma rede cabeada, representadas por arestas. Em determinado momento, os computadores, assim como as conexões deverão passar por uma tarefa, seja manutenção ou atualização. Sempre que a tarefa é realizada no computador ou conexão, esta deve ser desligada até a finalização da tarefa. Suponhamos que cada tarefa levará a mesma quantidade de tempo. A administração desta rede deseja que essas tarefas sejam realizadas, respeitando as seguintes regras:

1. Dois computadores conectados entre si não podem estar desligados ao mesmo tempo (vértices adjacentes têm cores diferentes).
2. Quando um computador está operacional, no máximo uma conexão poderá estar desligada a qualquer momento (arestas adjacentes têm cores diferentes).
3. Quando um computador está desligado, todas suas conexões devem estar operacionais (cada vértice tem cor diferente a suas arestas incidentes).

Seja i o tempo que certa tarefa esteja sendo realizada no computador ou conexão da rede. Desejamos realizar em menor quantidade de tempo toda a manutenção da rede, deste modo temos um exemplo na Figura 4.

Figura 4 - Exemplo de coloração total.



Fonte: O autor, 2021.

Portanto, todo problema de coloração em grafos envolve intrinsecamente um problema de conflito, problemas destes que em geral são de difícil resolução. Estes problemas estão em classes em que é desconhecida a existência de um algoritmo eficiente capaz de resolvê-los.

O assunto principal de nosso estudo é o problema de coloração total. No exemplo anterior mostramos uma solução possível ao caso ilustrado, porém podemos questionar se esta solução é a melhor possível. A seguir veremos as principais definições necessárias a compreensão deste trabalho.

Assuntos preliminares

Nesta seção serão apresentados os conceitos e alguns resultados usados neste trabalho. Os conceitos referentes a Teoria dos Grafos foram retirados de [5] e [6] e os conceitos referentes a Teoria da Complexidade Clássica foram retirados de [7] e [8].

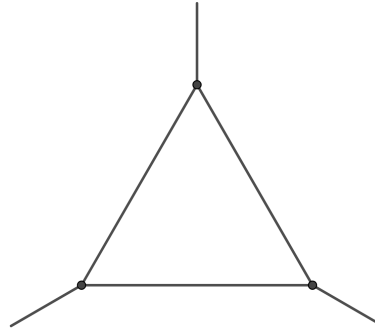
Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$ com conjuntos de vértices $V(G)$ e de arestas $E(G)$, e com uma função de incidência ψ_G que associa a cada aresta um par não ordenado de vértices de G . Se e é uma aresta e u e v são vértices e temos que $\psi_G(e) = \{u, v\}$, então e é dita *incidente* a u e v , e também chamamos u e v de *extremos* de e . Arestas com pelo menos um extremo igual são ditas *adjacentes* e arestas que não são adjacentes são ditas *independentes*. Analogamente, vértices que incidem na mesma aresta são ditos adjacentes.

Por questão de simplicidade denotamos o par não ordenado de vértices como uv , ao invés de $\{u, v\}$ e quando não houver ambiguidade de qual grafo está sendo discutido, denotamos os conjuntos de vértices como V e de arestas como E , ao invés de $V(G)$ e $E(G)$. Denotamos a cardinalidade dos conjuntos V e E como n e m , respectivamente.

Um *semigrafo* é uma tripla $G = (V(G), E(G), S(G))$, onde $V(G)$ é o conjunto de

vértices de G , $E(G)$ é o conjunto de arestas possuindo dois vértices extremos em $V(G)$ e $S(G)$ é o conjunto das semiarestas possuindo um vértice extremo em $V(G)$. Note que um grafo é um semigrafo sem semiarestas.

Figura 5 - Exemplo de um semigrafo.

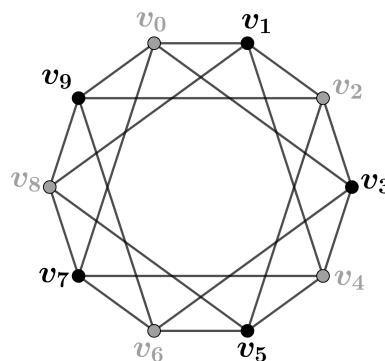


Fonte: O autor, 2021.

Seja S um conjunto arbitrário. Diz-se que S é maximal em relação a certa propriedade P , quando S satisfaz P e não existe um conjunto $S' \supsetneq S$ (S' contém S e $S' \neq S$) que também satisfaz P .

Um conjunto S de vértices é dito *independente* se quaisquer dois vértices u e v em S são independentes. Um conjunto independente é dito *maximal* se qualquer vértice que não está neste conjunto é adjacente a ao menos um vértice de S . Se S é o conjunto com maior cardinalidade possível, então é chamado de *conjunto independente máximo* e sua cardinalidade de *número de independência em vértices* de G , denotado por $\alpha(G)$. A Figura 6 apresenta dois exemplos de conjuntos independentes, isto é, o conjunto de vértices de índice par é um conjunto independente, pois para quaisquer que sejam os pares de vértices deste conjunto estes não serão adjacentes, o mesmo ocorre no caso do conjunto de vértices de índice ímpar. Além disso, ambos conjuntos independentes são máximos, concluindo que $\alpha(G) = 5$.

Figura 6 - Exemplos de conjuntos independentes.



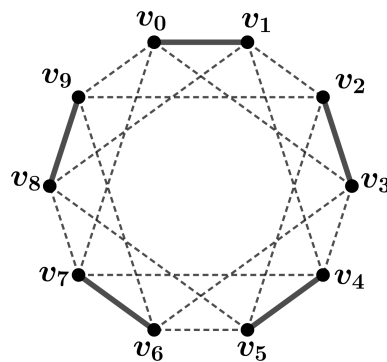
Fonte: O autor, 2021.

Um conjunto M de arestas independentes de um grafo G é dito um *emparelhamento*

em G . As arestas pertencentes a M são ditas *emparelhadas*, enquanto um vértice incidente a alguma aresta emparelhada é dito *saturado*. Um emparelhamento é *maximal* se qualquer aresta não emparelhada por M possuir uma das extremidades saturadas por M . Se M é um emparelhamento de maior cardinalidade do grafo, então M é *máximo* e sua cardinalidade é dita o *número de independência em arestas* de G , denotado por $\alpha'(G)$.

Um emparelhamento M é *perfeito* quando todo vértice do grafo for saturado por M . Naturalmente, todo emparelhamento perfeito é máximo e todo emparelhamento máximo é maximal. A Figura 7 apresenta um exemplo de emparelhamento, isto é, o conjunto $\{v_0v_1, v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7, v_8v_9\}$ é um emparelhamento, pois todas as arestas são independentes entre si, duas a duas. As arestas emparelhadas são representadas como segmentos grossos e as arestas incidentes a elas como segmentos pontilhados. Além disso, é um emparelhamento perfeito, pois todo vértice deste grafo está saturado. E portanto, por ser um emparelhamento perfeito, ele é máximo e assim $\alpha'(G) = 5$.

Figura 7 - Exemplo de emparelhamento.



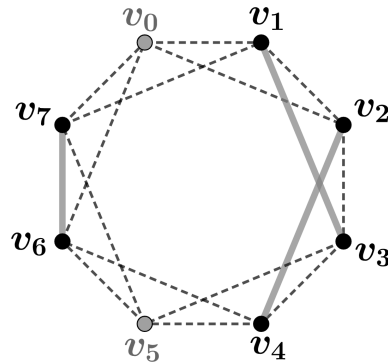
Fonte: O autor, 2021.

Um conjunto T de vértices independentes e de arestas emparelhadas de $V(G) \cup E(G)$ em G , tal que os vértices não são saturados é dito um *conjunto independente total*. A maior cardinalidade possível para um conjunto independente total em G é dita *número de independência total*, denotado por $\alpha''(G)$. A Figura 8 apresenta um exemplo de conjunto independente total. O conjunto $\{v_0, v_5, v_1v_3, v_2v_4, v_6v_7\}$ é um conjunto independente total, pois $\{v_1v_3, v_2v_4, v_6v_7\}$ é um emparelhamento e $\{v_0, v_5\}$ são vértices independentes e não são saturados.

Se a aresta tem ambos os extremos num mesmo vértice, ela é chamada de *laço*. Se existe mais de uma aresta com mesmos extremos, elas são denominadas *arestas paralelas*. Um grafo é dito *simples* quando não contém arestas paralelas nem laços.

O *grau* $d(v)$ de um vértice v é o número de arestas incidentes a v . O *grau máximo* e o *grau mínimo* de um grafo G são denotados por $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ e $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in G\}$, respectivamente. Um grafo é dito *k-regular*, quando todos os seus vértices têm mesmo grau k , grafos 3- regulares são chamados de *grafos cúbicos*. Na Figura 6 temos como exemplo um grafo 4-regular, pois cada vértice do grafo possui

Figura 8 - Exemplo de conjunto independente total.



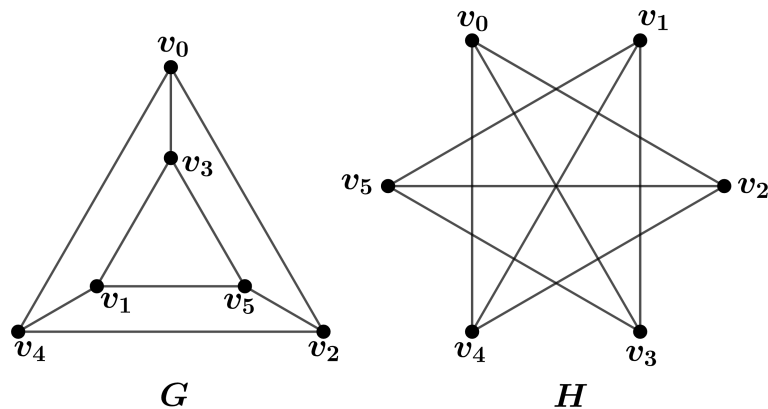
Fonte: O autor, 2021.

4 vértices adjacentes.

Chamamos de *passeio* uma sequência de vértices $v_0v_1 \cdots v_k$ tal que $v_{i-1}v_i \in E$ com $1 \leq i \leq k$. Se o passeio possuir todos os vértices distintos, então o chamamos de *caminho*. Um passeio fechado é o passeio que começa e termina no mesmo vértice. Um *ciclo* é um passeio fechado e um caminho, simultaneamente. A *cintura* de um grafo G , denotada por $g(G)$ é o tamanho do menor ciclo contido em G . Se G não contém ciclos $g(G) = 0$.

Dois grafos G e H são chamados *isomorfos* e denotamos por $G \simeq H$ se existir uma bijeção $f : V(G) \rightarrow V(H)$ e $g : E(G) \rightarrow E(H)$ tal que $\psi_G(e) = uv$ se, e somente se, $\psi_H(g(e)) = f(u)f(v)$ e chamamos f e g de isomorfismo entre G e H . A Figura 9 apresenta um exemplo onde o grafo G é isomorfo ao grafo H .

Figura 9 - Exemplo de dois grafos isomorfos.



Fonte: O autor, 2021.

Um grafo H é dito *subgrafo* de G , se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$. Como exemplo temos que os grafos ciclos C_n são subgrafos dos grafos completos K_n . Um subgrafo G induzido por S denotado por $G[S]$ é definido por $V(G[S]) = S$ e $E(G[S]) = \{xy \in E(G) \mid x \in S \text{ e } y \in S\}$.

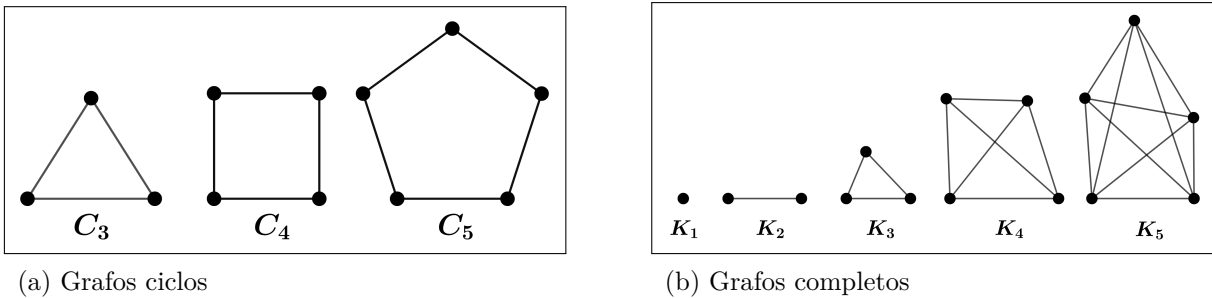
Um grafo $G = (V, E)$ é dito *conexo* quando existe um caminho entre cada par de vértices de G . Caso contrário, G é *desconexo*. Denomina-se *distância* $d(v, w)$ entre os

vértices v e w de um grafo ao comprimento do menor caminho entre v e w . Denominam-se componentes conexas de um grafo G aos subgrafos maximais de G que sejam conexos.

Um grafo G é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em duas partes V_1 e V_2 de tal forma que toda aresta tem um extremo em V_1 e um extremo em V_2 . Denotamos o grafo por $G[V_1, V_2]$. Um grafo *bipartido completo* possui uma aresta para cada par de vértices v_1 e v_2 com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ e se $n_1 = |V_1|$ e $n_2 = |V_2|$, denotamos este grafo por K_{n_1, n_2} com $n_1 \cdot n_2$ arestas. A Figura 6 apresenta um exemplo de grafo bipartido $G[S_0, S_1]$, onde o conjunto de vértices de índice par S_0 e o conjunto de vértices de índice ímpar S_1 formam as duas partes.

Um *grafo ciclo*, denotado por C_n consiste em um conjunto de vértices $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ e de arestas $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_0\}$. O comprimento de um ciclo C_n é o número de arestas do ciclo. A Figura 10a apresenta alguns exemplos. Um grafo é *com-*

Figura 10 - Alguns exemplos de grafos.



(a) Grafos ciclos

(b) Grafos completos

Fonte: O autor, 2021.

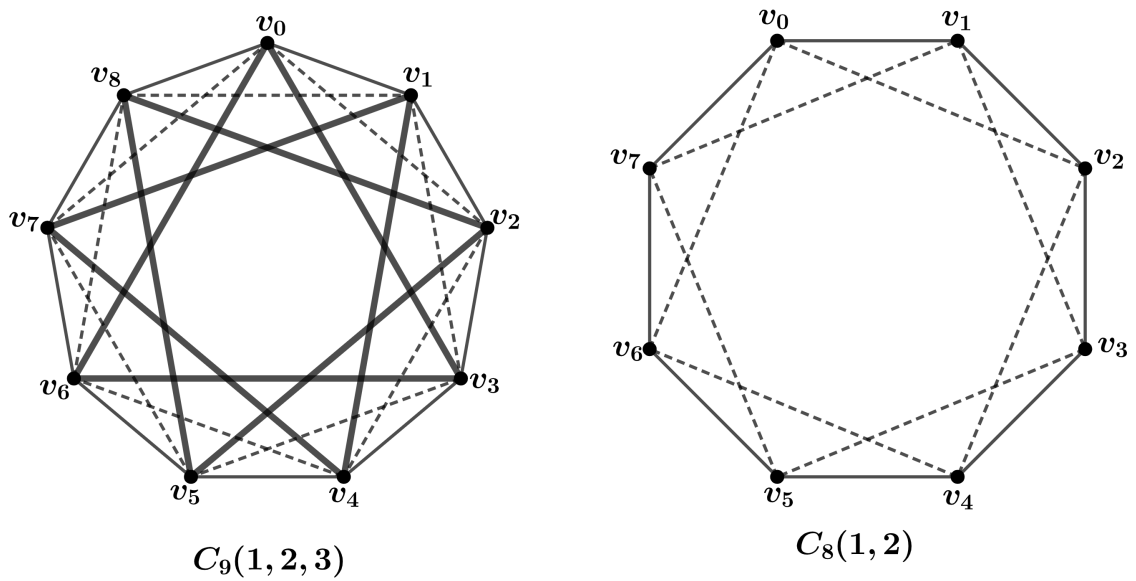
pleto quando existe uma aresta entre cada par de seus vértices. Utiliza-se a notação K_n para um grafo completo com n vértices. A Figura 10b apresenta alguns exemplos.

Um *grafo circulante* $C_n(d_1, d_2, \dots, d_l)$ é um grafo simples que contém um conjunto de vértices $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e um conjunto de arestas $E = \bigcup_{i=1}^l E_i$, onde $E_i = \{e_0^i, e_1^i, \dots, e_{n-1}^i\}$ e $e_j^i = v_j v_{j+d_i \pmod n}$. Uma aresta de E_i é dita aresta de distância d_i , com $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_l \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Alguns exemplos podem ser vistos na Figura 11. É possível ver que os grafos ciclos, completos e bipartidos completos são exemplos de grafos circulantes.

Os grafos *Möbius Ladder* são uma família dos grafos circulantes, definida por Chetwynd e Hilton [9], e são denotados por M_{2n} . Estes consistem em um conjunto de vértices $V = V_1 \cup V_2$, onde $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, onde $E_1 = \{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{n-1}u_n, v_nv_{n-1}, \dots, v_2v_1\}$, $E_2 = \{u_iv_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ e $E_3 = \{u_nv_1, v_nv_1\}$. A Figura 12 apresenta alguns exemplos.

Um grafo é uma *potência de ciclo*, denotado por C_n^k , com n e k inteiros positivos, $1 < k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, se $V(C_n^k) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e $E(C_n^k) = E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^k$, onde $E^i = \{e_0^i, e_1^i, \dots, e_{n-1}^i\}$ e $e_j^i = v_j v_{(j+i) \pmod n}$ com $0 \leq j \leq n-1$ e $1 \leq i \leq k$. Note que

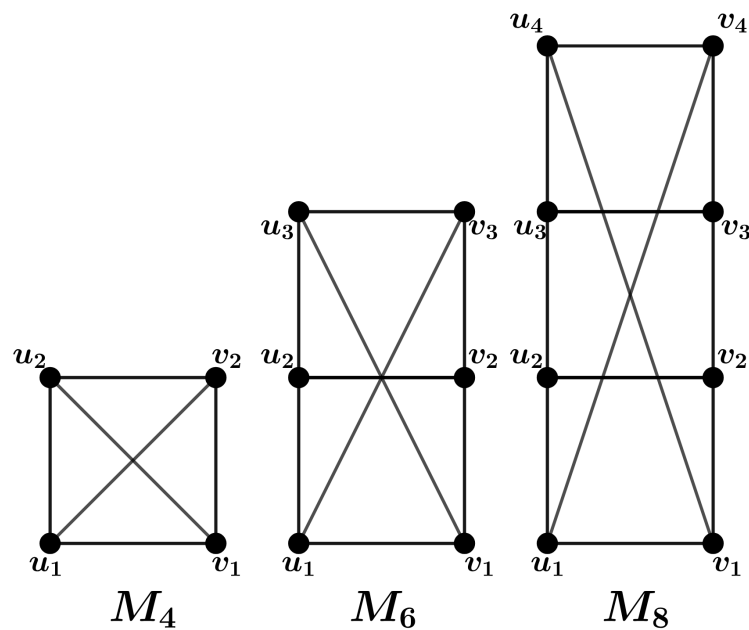
Figura 11 - Alguns exemplos de grafos circulares.



Legenda: As arestas de distância 1 estão como segmentos de reta finos, as arestas de distância 2 estão como segmentos de reta pontilhados e de distância 3 estão como segmentos de reta grossos.

Fonte: O autor, 2021.

Figura 12 - Möbius Ladder.



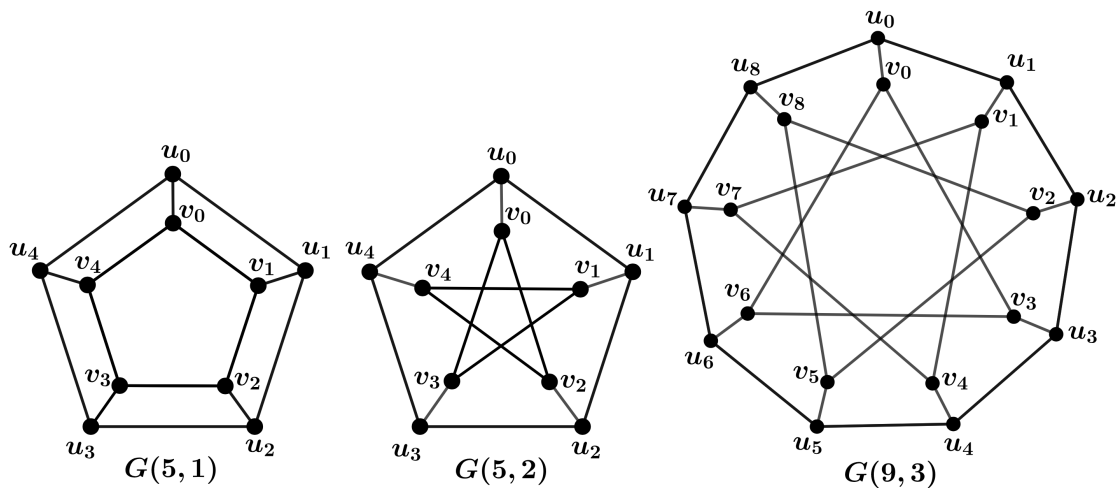
Fonte: O autor, 2021.

$C_n^1 = C_n$ e que $C_n^k = C_n(1, 2, \dots, k)$. A Figura 11 apresenta o grafo potência de ciclo C_9^3 e C_8^2 .

Dados números inteiros k e n , satisfazendo $1 \leq k \leq n - 1$ e $2k \leq n$, chamamos de *grafo de Petersen generalizado*, denotado por $G(n, k)$, o grafo com o conjunto de vértices $V(G(n, k)) = \{u_0, \dots, u_{n-1}, v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e o conjunto de arestas $E(G(n, k)) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} \mid 0 \leq i \leq n - 1\}$. Os índices deste grafo estão em \mathbb{Z}_n . Em particular temos que o $G(5, 2)$ é o *grafo de Petersen* e chamamos a família $G(n, 1)$ de *grafos Prismas*.

O polígono gerado pelos vértices u_0, u_1, \dots, u_{n-1} é chamado de *borda externa* de $G(n, k)$. Cada componente conexa do subgrafo de $G(n, k)$ induzido por v_0, \dots, v_{n-1} é chamado de *borda interna*. Se (n, k) é o máximo divisor comum entre n e k , temos que $G(n, k)$ tem exatamente (n, k) bordas internas, cada componente com $\frac{n}{(n, k)}$ arestas. As arestas $u_i v_i$, para $0 \leq i \leq n - 1$ são chamadas de *radiais*. A Figura 13 apresenta alguns exemplos destes grafos.

Figura 13 - Exemplos de grafos de Petersen generalizados.



Fonte: O autor, 2021.

Coloração de grafos

Uma *coloração de vértices* de um grafo G é uma função φ entre o conjunto de vértices V e o conjunto C de cores, tal que se u e v são adjacentes, temos que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Se $\varphi : V \rightarrow C$ é uma coloração de vértices e $|C| = k$, então dizemos que G é k -colorível em vértices e φ é uma k -coloração de vértices. A menor cardinalidade de C para o qual existe uma coloração de vértices de G é o *número cromático* de G , e escrevemos $\chi(G)$. O próximo teorema é um dos principais sobre coloração de vértices.

Teorema 1. (*Teorema de Brooks*) *Se G é um grafo simples e conexo com grau máximo $\Delta(G)$, que não é um grafo completo e nem ciclo ímpar. Então,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Para os grafos circulantes, é fácil ver que se $C_n(a)$ é conexo, então este tem número cromático 2 quando n é par e número cromático 3 quando n é ímpar. Basta notar que quando n é par este é bipartido, logo 2-colorível em vértices. Caso contrário, este resulta num ciclo ímpar, donde $\chi(C_n(a)) = 3$, quando n ímpar. Pelo Teorema 1 sabe-se que $\chi(C_n(a, b)) \leq 4$, exceto $C_5(1, 2) \simeq K_5$ que tem número cromático 5. Quando as distâncias a e b são ímpares e n par, $C_n(a, b)$ será bipartido, portanto, 2-colorível em vértices. Heuberger [10], provou casos onde $C_n(a, b)$ é 3-colorível e 4-colorível em vértices, determinando por fim totalmente o número cromático dos grafos circulantes 4-regulares, isto é, quando $C_n(a, b)$ com $1 < a < b < \lfloor n/2 \rfloor$.

Teorema 2. (*Heuberger, [10]*) *Se $C_n(a, b)$ é um grafo circulante conexo, então*

$$\chi(C_n(a, b)) = \begin{cases} 2, & \text{se } a \text{ e } b \text{ são ímpares e } n \text{ é par,} \\ 4, & \text{se } n \nmid 3, n \neq 5 \text{ e } b \equiv \pm 2a \pmod{n} \text{ ou } a \equiv \pm 2b \pmod{n}, \\ 4, & \text{se } n = 13 \text{ e } b \equiv \pm 5a \pmod{13} \text{ ou } a \equiv \pm 5b \pmod{13}, \\ 5, & \text{se } n = 5, \\ 3, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para os grafos circulantes 6-regulares tem-se resultados parciais. Yeh e Zhu [11], provaram que $C_n(1, b, b+1)$ é 4-colorível em vértices. Barajas e Serra [12], desenvolveram um algoritmo para determinar o número cromático de $C_n(a, b, a+b)$. No geral, para $k \geq 4$ pouco é conhecido. Sabe-se que se as distâncias a_1, a_2, \dots, a_k são ímpares e o número de vértices n é par, então $C_n(a_1, a_2, \dots, a_k)$ será bipartido (e consequentemente 2-colorível em vértices). Caso contrário, veremos ao final deste capítulo a existência

de um algoritmo exato para a determinação de uma 3-coloração em vértices para uma subclasse de $C_n(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Uma *coloração de arestas* de um grafo G é uma função φ entre o conjunto de arestas E e o conjunto C de cores, tal que se e e f são arestas adjacentes, temos que $\varphi(e) \neq \varphi(f)$. Se $\varphi : E \rightarrow C$ é uma coloração de arestas e $|C| = k$, então dizemos que G é *k-colorível em arestas* e φ é uma *k-coloração de arestas*. A menor cardinalidade de C para o qual existe uma coloração de arestas em G é o *índice cromático* de G , e escrevemos $\chi'(G)$.

Teorema 3. (*Teorema de Vizing*) *Seja um grafo simples G de grau máximo $\Delta(G)$. Temos que,*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Por consequência deste teorema podemos classificar os grafos em duas classes:

- G é Classe 1, se $\chi'(G) = \Delta(G)$;
- G é Classe 2, se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Uma *coloração total* ϕ de um grafo G é uma função entre o conjunto $V \cup E$ e o conjunto C de cores, tais que:

1. vértices e arestas adjacentes têm cores diferentes.
2. cada vértice tem cor diferente das arestas incidentes.

Se $\phi : V \cup E \rightarrow C$ é uma coloração total de G e $|C| = k$, então dizemos que G é *k-total-colorível*. A menor cardinalidade de C para o qual existe uma coloração total é o *número cromático total* e denotamos como $\chi''(G)$.

Observe que estes conceitos de coloração podem ser estendidos para os semigrafos.

Note que $\chi''(G) \geq \Delta + 1$, pois dado um vértice de grau $\Delta(G)$, são necessárias $\Delta(G)$ cores para colorir suas arestas incidentes e uma a mais para colorir o vértice. Behzad [13] e Vizing [14] conjecturaram de forma independente um limite superior para o número cromático total, esta conjectura é denominada Conjectura da Coloração Total (*Total Coloring Conjecture*).

Conjectura 1. (*TCC*) *Para todo grafo G simples,*

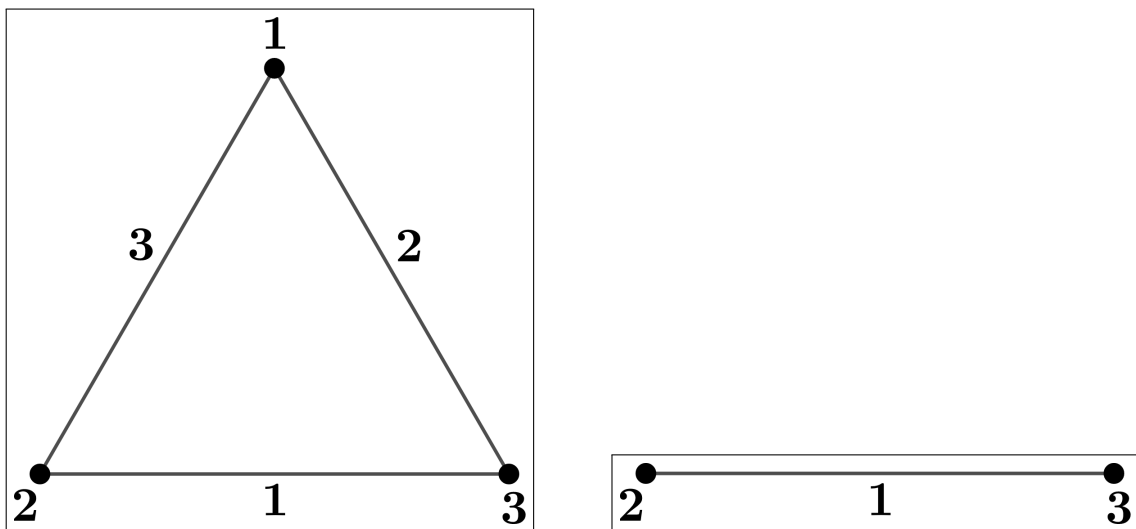
$$\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Para os grafos onde a *TCC* é válida, temos a seguinte classificação:

- G é Tipo 1, se $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$;
- G é Tipo 2, se $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$.

Note que provar que um grafo G é Tipo 1, é mostrar que G é $(\Delta(G) + 1)$ -total-colorível. E que provar que é Tipo 2 é mostrar que o grafo G não é $(\Delta(G) + 1)$ -total-colorível ainda que seja $(\Delta(G) + 2)$ -total-colorível. A Figura 14 apresenta exemplos de um grafo Tipo 1 e um grafo Tipo 2. Note que, na Figura 14a o grafo é Tipo 1, pois $\Delta(G) = 2$ e o grafo possui uma $(\Delta + 1)$ -coloração total. Porém, na Figura 14b, tem-se que $\Delta(G) = 1$, porém como os três elementos deste grafo são adjacentes entre si, dois a dois, teremos o uso de uma cor para cada um, necessitando portanto usar $\Delta(G) + 2$ cores, sendo assim Tipo 2.

Figura 14 - Exemplos de coloração total.



(a) Exemplo de grafo Tipo 1.

(b) Exemplo de grafo Tipo 2.

Fonte: O autor, 2021.

Para certas classes de grafos, temos que a TCC é válida. Rosenfeld [15] e Vijayaditya [16] provaram de forma independente que a TCC vale para a classe de grafos cúbicos.

Watkins [17] introduziu o estudo sobre coloração de arestas dos grafos de Petersen generalizados, mostrando que os grafos de famílias infinitas de $G(n, k)$ são Classe 1 e conjecturou que todo grafo de Petersen generalizado é Classe 1, exceto $G(5, 2)$ (grafo de Petersen), que seria Classe 2. Posteriormente, Castagna e Prins [18], confirmaram sua conjectura.

Sasaki [19] no seu estudo de grafos cúbicos provou que todos os membros de uma família de grafos de Petersen generalizados são Tipo 1 e provou que existe no máximo uma quantidade finita de grafos de Petersen generalizados que são Tipo 2. Sabe-se que $G(5, 1)$ e $G(9, 3)$ são Tipo 2 e até então são os únicos Tipo 2 conhecidos desta classe.

Teorema 4. (Sasaki [19], 2014) O grafo de Petersen generalizado $G(n, k)$ é Tipo 1 para $k \geq 2$ e $n = 2k\lambda + (2k - 1)\mu$ para inteiros não-negativos λ e μ .

Dada uma 4-coloração-total de um grafo cúbico G Tipo 1, seja M_i o conjunto de arestas com a cor i . Pela definição de uma coloração total, M_i é um emparelhamento. Note que, todo vértice que não saturado por uma aresta deste emparelhamento deve ser colorido com a cor i . Assim, estes vértices formam um conjunto independente e nenhuma outra aresta pode ser adicionada ao emparelhamento, ou seja, M_i é um emparelhamento maximal, isso nos dá uma caracterização para grafos cúbicos Tipo 1.

Teorema 5. (Sasaki [19], 2014) Um grafo cúbico é Tipo 1 se e somente se seu conjunto de arestas pode ser particionado em quatro emparelhamentos maximais.

Como exemplo, podemos particionar o $G(3, 1)$ em quatro emparelhamentos maximais, apresentados na Figura 15.

Corolário 1. (Sasaki [19], 2014) Se um grafo cúbico G não possui emparelhamento maximal de tamanho no máximo $\lfloor \frac{|E|}{4} \rfloor$, então G é Tipo 2.

Como exemplo do Corolário 1, temos que o K_4 é Tipo 2. De fato, temos que $|E(K_4)| = 6$ e suponha por absurdo que possui emparelhamento maximal M de tamanho no máximo $\lfloor \frac{6}{4} \rfloor = 1$. Porém, todo emparelhamento maximal de K_4 é perfeito, logo $|M| = 2$, contradição.

Observe que o Corolário 1 pode ser generalizado como segue.

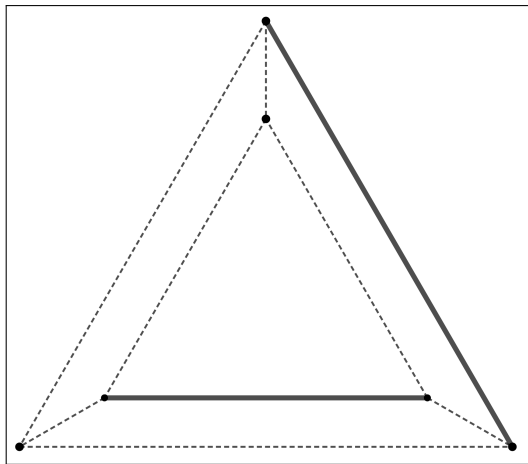
Teorema 6. (Sasaki [19], 2014) Se um grafo G k -regular não possui emparelhamento maximal de tamanho máximo $\lfloor \frac{|E|}{k+1} \rfloor$ então G não possui $(k + 1)$ -coloração-total.

Quando discute-se sobre coloração de arestas de um grafo, geralmente para decidirmos se o grafo é Classe 1 ou Classe 2 utiliza-se uma condição numérica para tal. Um grafo é dito *sobrecarregado* se o número de arestas é no mínimo $\lfloor \frac{1}{2}V(G) \rfloor \Delta(G) + 1$. Todos os grafos sobrecarregados são Classe 2. Tem-se um resultado similar para coloração total.

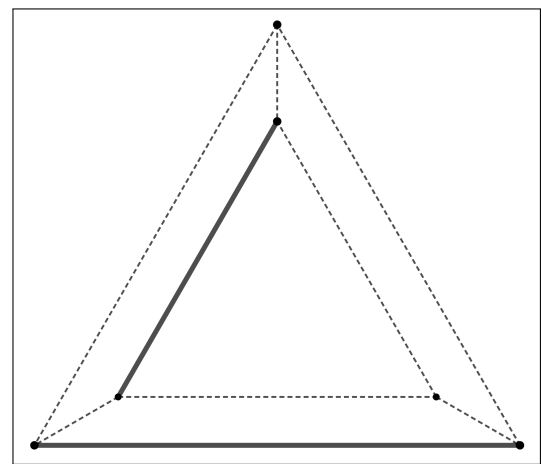
Grafos harmônicos

Para determinarmos se o grafo é Tipo 2, temos um resultado semelhante, introduzido por Chetwynd e Hilton [9]. Para grafos regulares, dizemos que G é *harmônico* (conformable) se possui uma coloração de vértices com $\Delta(G) + 1$ cores $c_1, c_2, \dots, c_{\Delta(G)+1}$ tal que $i_1 \equiv i_2 \equiv \dots \equiv i_{\Delta(G)+1} \equiv |V(G)| \pmod{2}$, onde i_j , com $1 \leq j \leq \Delta(G) + 1$, é o número de vértices coloridos com cor c_j , esta coloração de vértices é chamada de *coloração harmônica*. Por um resultado de Chetwynd e Hilton [9], tem-se que se um grafo G não é harmônico, então ele é Tipo 2. Por exemplo, tem-se que K_4 não é harmônico, pois não

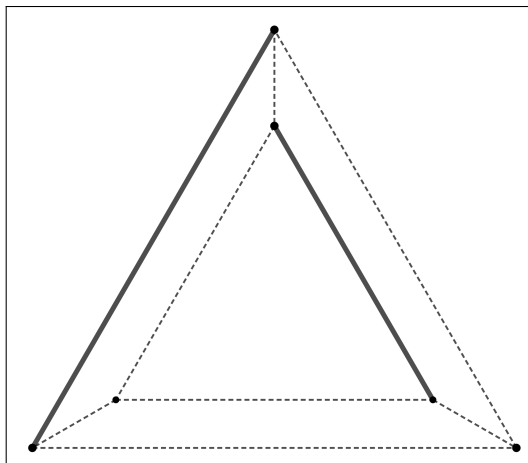
Figura 15 - $G(3,1)$ particionado em 4 emparelhamentos maximais.



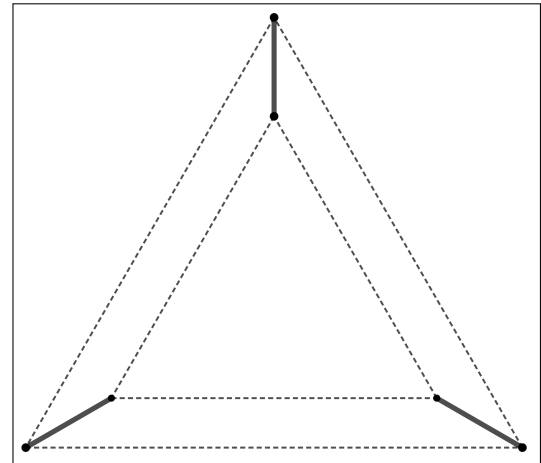
(a)



(b)



(c)



(d)

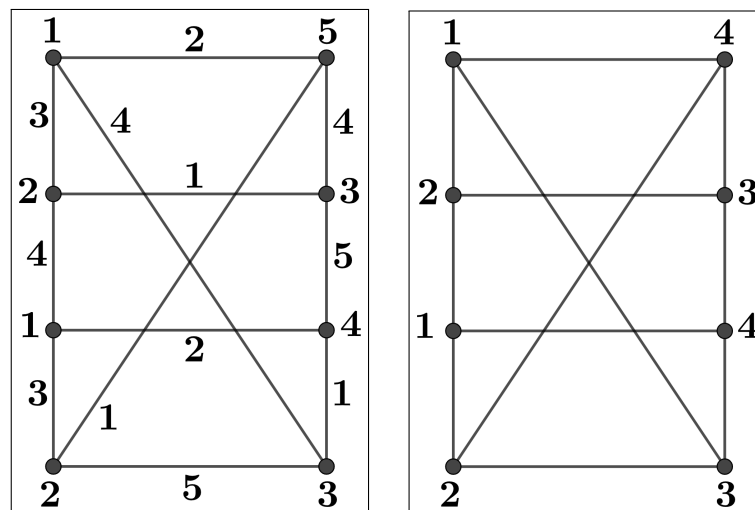
Fonte: O autor, 2021.

possui uma coloração de vértices com 4 cores c_1, c_2, c_3, c_4 tal que $i_1 \equiv i_2 \equiv i_3 \equiv i_4 \equiv 4 \pmod{2}$. Além disso, eles apresentaram a seguinte conjectura para grafos harmônicos.

Conjectura 2. (*Conjectura dos Grafos Harmônicos [9]*) Dado um grafo G simples com $|V(G)| \leq 2\Delta(G) - 1$. Então G é Tipo 2, se e somente se, G contém um subgrafo não-harmônico H com $\Delta(G) = \Delta(H)$.

A condição de ser harmônico não é garantia do grafo ser Tipo 1. O grafo M_8 é um exemplo de grafo Tipo 2 e harmônico, apresentado na Figura 16. Mais que isso, tem-se para $n > 3$ que M_{2n} é Tipo 2 e harmônico.

Figura 16 - M_8 , um grafo Tipo 2 e harmônico.



(a) $(\Delta + 2)$ -coloração total de M_8 .

(b) Coloração harmônica de M_8 .

Fonte: O autor, 2021.

Complexidade Computacional

Dados $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que:

- $f = O(g)$ se existem $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que para todo $n > n_0$, tem-se $g(n) \leq \alpha f(n)$ e dizemos que $f(n)$ é assintoticamente limitado superiormente;
- $f = \Omega(g)$ se existem $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que para todo $n > n_0$ tem-se $f(n) \leq \alpha g(n)$ e dizemos que f é assintoticamente limitado inferiormente.
- $f = \theta(g)$ se $f = O(g)$ e $f = \Omega(g)$.

Um problema de decisão Π é aquele cujas respostas possíveis são SIM ou NÃO. Em Teoria dos Grafos, temos diversos problemas de decisão amplamente conhecidos. Por exemplo, temos o problema abaixo.

k -COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Entrada: Um grafo $G = (V, E)$ e $k \in \mathbb{N}$

Pergunta: Existe uma k -coloração de vértices do grafo G ?

A classe \mathcal{P} (polinomial) consiste nos problemas de decisão Π tais que dada uma instância I_Π de Π com $|I_\Pi| = n$, existe um algoritmo A que resolve I_Π para SIM e NÃO em tempo $O(p(n))$, onde p é um polinômio. E neste caso, dizemos que A é um algoritmo em tempo polinomial no tamanho da entrada. Dizemos que Π é tratável e que A é um algoritmo eficiente para Π . Quando não existe algoritmo eficiente para um problema de decisão Π dizemos que Π é intratável.

Um certificado C_{I_Π} para a resposta SIM de I_Π consiste em um subconjunto de I_Π cuja existência permite garantir que I_Π tem resposta SIM. Define-se analogamente um certificado para resposta NÃO.

A classe \mathcal{NP} (não determinístico em tempo polinomial) consiste nos problemas de decisão Π tais que existe um algoritmo em tempo polinomial A que checa se C_{I_Π} é um certificado para a resposta SIM de uma instância I_Π de Π .

É bem conhecido que $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$, porém se $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ é uma das questões em aberto na área de Ciência da Computação. Para qualquer problema de decisão em \mathcal{P} temos algoritmos eficientes que respondem SIM ou NÃO. Então somos capazes de decidir de maneira eficiente a resposta do problema. E para qualquer problema de decisão em \mathcal{NP} temos algoritmo eficiente para verificar a resposta SIM. Então dado um certificado para a resposta SIM do problema, pode-se verificar de maneira eficiente se este é solução para o problema.

Supondo que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, então a distinção entre \mathcal{P} e $\mathcal{NP} \setminus \mathcal{P}$ é relevante, pois todos os problemas de decisão em \mathcal{P} podem ser resolvidos em tempo polinomial, enquanto todos os problemas de decisão em $\mathcal{NP} \setminus \mathcal{P}$ são intratáveis. Porém, se $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, seríamos capazes de verificar e decidir em tempo polinomial a solução para qualquer problema de decisão. Temos portanto, que a questão \mathcal{P} versus \mathcal{NP} reside na simples questão de: decidir e verificar tem o mesmo grau de dificuldade?

Uma transformação em tempo polinomial do problema de decisão Π_1 para o problema de decisão Π_2 é uma função $f : D_1 \rightarrow D_2$, onde D_1 e D_2 são os conjuntos de instâncias dos respectivos problemas em que tais condições são satisfeitas:

1. f pode ser computada em tempo polinomial;
2. para toda instância $I \in D_1$ nas quais a instância é SIM para Π_1 , temos que $f(I) \in D_2$ é uma instância SIM para Π_2 .

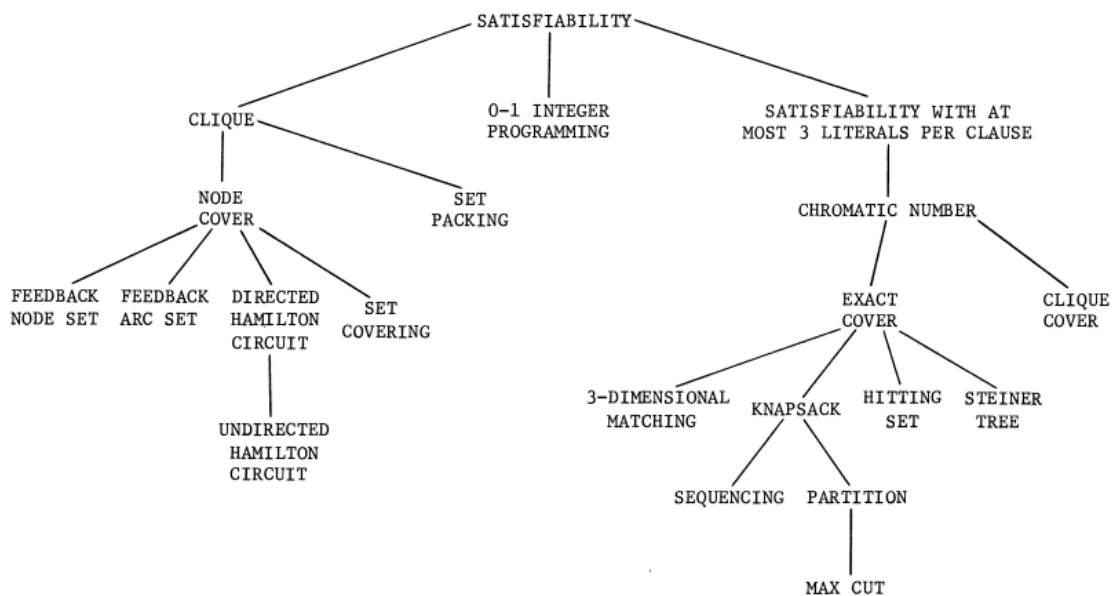
Dizemos que Π_1 é polinomialmente redutível a Π_2 e escrevemos que $\Pi_1 \propto \Pi_2$.

Uma das utilidades cruciais de uma transformação em tempo polinomial está no fato dela ser transitiva, isto é, se $\Pi_1 \propto \Pi_2$ e $\Pi_2 \propto \Pi_3$, então $\Pi_1 \propto \Pi_3$. Este fato faz com que isso se torne útil para o desenvolvimento de uma classe importante em Teoria da Complexidade Clássica, os problemas \mathcal{NP} -completos.

Um problema de decisão Π é dito \mathcal{NP} -completo se $\Pi \in \mathcal{NP}$ e, para todo problema de decisão Π' em \mathcal{NP} , tem-se que $\Pi' \propto \Pi$. Quando todos os problemas de decisão em \mathcal{NP} são polinomialmente redutíveis a Π , dizemos que Π é \mathcal{NP} -difícil.

Os problemas \mathcal{NP} -completos são vistos como os problemas importantes da classe \mathcal{NP} , pois se qualquer problema \mathcal{NP} -completo é resolvido em tempo polinomial, então todos os problemas em \mathcal{NP} também são.

Figura 17 - 21 problemas \mathcal{NP} -completos de Karp.



Fonte: [20]

Teorema 7. *Dados Π_1 e Π_2 pertencentes a \mathcal{NP} , se Π_1 é \mathcal{NP} -completo e $\Pi_1 \propto \Pi_2$, então Π_2 é \mathcal{NP} -completo.*

Um dos teoremas importantes da origem do desenvolvimento da teoria dos problemas \mathcal{NP} -completos foi o *Teorema de Cook* [21]. Após, Karp [20] desenvolveu provas de \mathcal{NP} -completude para 21 problemas combinatórios, com auxílio do Teorema 7, entre eles a determinação do número cromático de um grafo. A Figura 17 apresenta os 21 problemas de Karp.

Holyer [22] em 1981 desenvolveu uma prova para \mathcal{NP} -completude da determinação do índice cromático para grafos cúbicos e logo após, Leven e Galil [23] provaram que também vale para qualquer grafo regular. Usando estes resultados para coloração de

arestas, Sánchez-Arroyo [24] em 1989 provou que determinar o número cromático total de um grafo cúbico bipartido é \mathcal{NP} -difícil.

Mesmo que o problema de determinação do número cromático seja \mathcal{NP} -completo no caso geral, existem situações para as quais é possível encontrar um algoritmo em tempo polinomial para resolução do problema. Nicoloso e Pietropaoli [25] demonstraram a existência de um algoritmo exato de complexidade $\mathcal{O}(k^3 \log^2 n + n)$ para 3-coloração em vértices de uma subclasse de $C_n(a_1, a_2, \dots, a_k)$ com $k \geq 2$.

Outro exemplo é o problema de determinação do isomorfismo entre grafos, onde no geral ainda não se sabe se este problema de decisão está em \mathcal{P} ou é \mathcal{NP} -completo. Porém, já foi descoberto um algoritmo em tempo polinomial que determina o isomorfismo para grafos circulantes $C_n(a_1, a_2, \dots, a_k)$ [26].

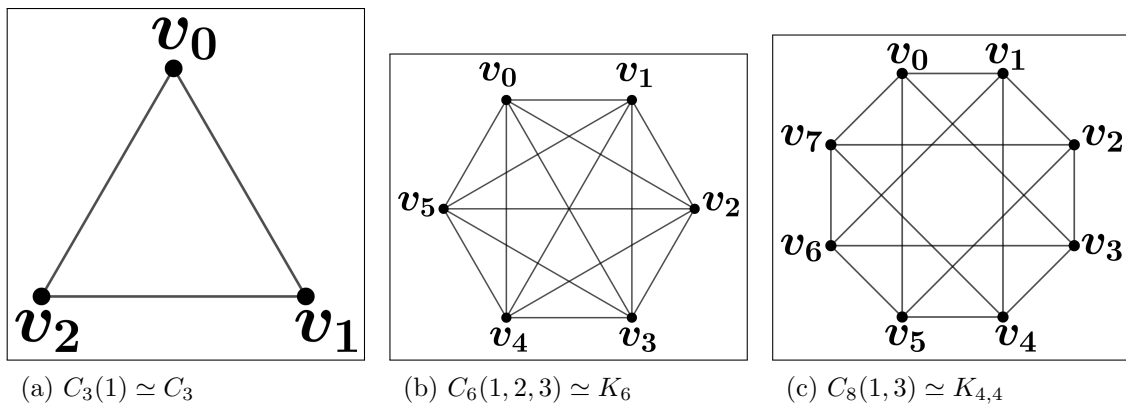
Neste trabalho, será estudada a coloração total dos grafos circulantes. No Capítulo 1, apresentamos os principais resultados existentes na área. No Capítulo 2, apresentamos resultados novos obtidos envolvendo certas coleções infinitas de grafos circulantes. E por fim, no Capítulo 4, apresentamos conclusões do que foi discutido.

1 COLORAÇÃO TOTAL DOS GRAFOS CIRCULANTES

Nesta seção, apresentamos os principais resultados de coloração total de grafos circulantes. Veremos como foi feita a determinação do número cromático total dos grafos ciclos, completos, grafos circulantes cúbicos, famílias infinitas 4- regulares de grafos circulantes e dos grafo potência de ciclo. E por fim, veremos a conjectura da coloração total para grafos potência de ciclo.

Sabe-se que os grafos completos, grafos ciclos e grafos bipartidos completos são grafos circulantes, isto é, temos que $K_n \simeq C_n(1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$, $C_n(1) \simeq C_n$ e por fim os grafos bipartidos completos são $K_{n,n} \simeq C_{2n}(1, 3, 5, \dots, k)$ onde k é o maior ímpar tal que $k \leq n$ (veja exemplos na Figura 18). Todos estes grafos tiveram seu número cromático total determinado. A seguir veremos alguns lemas que serão utilizados para determinar o número cromático total destes grafos.

Figura 18 - Os grafos ciclos C_n , completos K_n e bipartidos completos $K_{n,n}$ são grafos circulantes.



Fonte: O autor, 2021.

Lema 1. (Yap [6], 1996) Se G contém um conjunto independente maximal de vértices S e $G - S$ contém um emparelhamento E' tal que $E' = \lfloor \frac{|G| - |S|}{2} \rfloor$, então $\alpha''(G) = |S| + |E'|$.

Em geral, teremos $\alpha''(G) \leq \alpha(G) + \lfloor \frac{|G| - \alpha(G)}{2} \rfloor$.

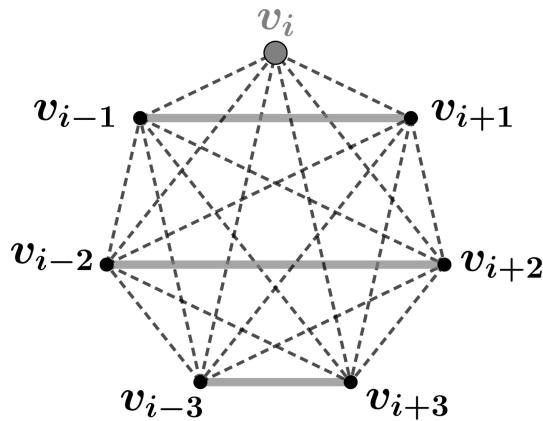
Lema 2. (Campos [27], 2006) Seja P um caminho e sejam e_1 e e_2 dois elementos distintos de P , adjacentes ou incidentes, coloridos com duas cores distintas. Então, existe uma única 3-coloração total que preserva as cores e_1 e e_2 .

Teorema 8. (Yap [6], 1996) O grafo completo K_n é Tipo 1 quando n é ímpar e, caso contrário é Tipo 2.

Demonstração. Seja $V(K_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ e suponhamos que n seja ímpar. Note primeiramente que $\alpha(K_n) = 1$ e seja $\{v_i\}$ o conjunto independente. Então pelo Lema 1, teremos um emparelhamento (maximal) da seguinte forma: $M_i = \{v_{i+j}v_{i-j} \mid 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}\}$ com $1 \leq i \leq n$, onde os índices $i+j$ e $i-j$ são calculados em módulo n . Denotemos o conjunto de elementos com cores i , o conjunto $T_i = M_i \cup \{v_i\}$, este é um conjunto independente total (veja como exemplo na Figura 19) e que $\bigcup_{i=1}^n T_i = V(K_n) \cup E(K_n)$, conclui-se portanto que $\chi''(K_n) = \Delta(K_n) + 1 = n$, para n ímpar.

Supondo que n é par, tem-se que $\alpha''(K_n) \leq 1 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = 1 + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} \Rightarrow \alpha''(K_n) \leq \frac{n}{2}$. E como $|V(K_n) \cup E(K_n)| = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, então $\chi''(K_n) \geq n+1$. E por fim, como K_n é subgrafo de K_{n+1} , sabe-se que $\chi''(K_n) \geq \chi''(K_{n+1}) = n+1$, donde $n+1 \leq \chi''(K_n) \leq n+1 \Rightarrow \chi''(K_{n+1}) = \Delta(G) + 2 = n+1$. \square

Figura 19 - Exemplo de T_i para K_7 .



Fonte: O autor, 2021.

Teorema 9. (Yap [6], 1996) O grafo bipartido completo K_{n_1, n_2} é Tipo 1 quando $n_1 \neq n_2$ e, caso contrário é Tipo 2.

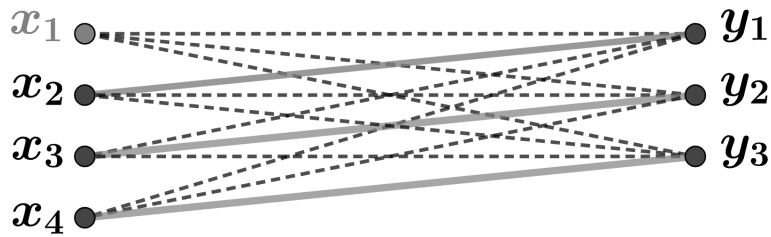
Demonstração. Assumiremos que $G = K_{m, n}$, sendo $m \geq n$. Considere $G[X, Y]$ uma bipartição de G com partes $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Definiremos para $1 \leq i \leq m$:

$$A_i = \{y_j x_{j+i} \mid 1 \leq j \leq n\}$$

onde os índices são vistos em módulo m . Note que A_i é um emparelhamento de G com $1 \leq i \leq m$ e $E(G) = \bigcup_{i=1}^m A_i$.

Suponha que $m > n$, então $\Delta(G) = m$ e $\chi''(G) \geq m+1$. Para cada $1 \leq i \leq m$, nós definiremos os conjuntos de cores i como, $B_i = A_i \cup \{x_i\}$ e $B_{m+1} = Y$. Note que B_i é um conjunto independente total e $\bigcup_{i=1}^{m+1} B_i = V(K_{m, n}) \cup E(K_{m, n})$ (veja como exemplo na Figura 20) e portanto, $\chi''(K_{m, n}) = m+1$.

Figura 20 - Exemplo de B_i para $K_{3,4}$ com $1 \leq i \leq m$.



Fonte: O autor, 2021.

Supondo que $m = n$, pelo Lema 1, temos que $\alpha''(K_{m,n}) \leq m$. Pelo fato de que $|V(K_{m,n} \cup E(K_{m,n}))| = m^2 + 2m = m(m + 2)$, segue que $\chi''(K_{m,n}) \geq m + 2$. Tomando os conjuntos de cores $1 \leq i \leq m$, A_i , definidos anteriormente, podemos definir $A_{m+1} = X$ e $A_{m+2} = Y$ resultando que $V(K_{m,n}) \cup E(K_{m,n}) = \bigcup_{i=1}^{m+2} A_i$, isto é, são $m + 2$ conjuntos independentes totais. Portanto, $\chi''(K_{m,n}) = m + 2$. \square

Teorema 10. (Yap [6], 1996) O grafo ciclo C_n é Tipo 1 quando n é múltiplo de 3 e, caso contrário é Tipo 2.

Demonstração. Suponhamos que $n \equiv 0 \pmod{3}$. Definimos que $u_{2i} = v_i$ e $u_{2i+1} = v_i v_{i+1}$, com $0 \leq i < n$. Seja $\varphi : V \cup E \rightarrow \{0, 1, 2\}$ uma atribuição de cor definida da seguinte forma $\varphi(u_i) = i \pmod{3}$. Desta forma, note que, por construção de φ , as cores associadas são intercaladas na ordem de 0, 1 e 2 aos elementos $u_0, u_1, \dots, u_{2n-1}$. Pelo fato do número de vértices ser múltiplo de 3, então o número de elementos do grafo também é, pois o número de elementos é $2n$. Assim, conclui-se que φ é uma 3-coloração total, pois para qualquer $0 \leq k < 2n$, tem-se que $\varphi(u_k) \neq \varphi(u_{k\pm 1})$ e $\varphi(u_k) \neq \varphi(u_{k\pm 2})$. Como $\Delta(C_n) = 2$, então C_n é Tipo 1, para $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Para os casos de $n \equiv 1 \pmod{3}$ e $n \equiv 2 \pmod{3}$. Construiremos uma 4-coloração total para C_n e logo após provaremos que não existe uma 3-coloração total para estes casos.

Supondo que $n \equiv 1 \pmod{3}$. Pela construção anterior de φ , temos que $\varphi(v_0) = \varphi(v_{n-1}v_0)$. Assim, modificamos φ para obter uma 4-coloração total da seguinte forma:

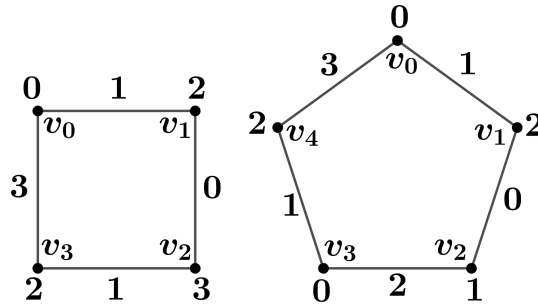
$$\varphi(v_{n-2}) := 3; \quad \varphi(v_{n-2}v_{n-1}) := 1; \quad \varphi(v_{n-1}) := 2; \quad \text{e} \quad \varphi(v_{n-1}v_0) = 3$$

Supondo que $n \equiv 2 \pmod{3}$. Neste caso, da construção de φ decorre que $\varphi(v_0) = \varphi(v_{n-1}v_0)$ e fazemos $\varphi(v_{n-1}v_0) = 3$. Na Figura 21 estão apresentados um exemplo para cada caso.

A seguir mostraremos que não é possível construir uma 3-coloração total para o C_n quando n não é múltiplo de 3.

Seja P o caminho obtido a partir de C_n pela remoção da aresta $v_{n-1}v_0$ e seja

Figura 21 - Exemplos de $(\Delta + 2)$ -coloração total para C_n quando $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n \equiv 2 \pmod 3$.



Fonte: O autor, 2021.

φ análogo definido primeiro caso, isto é, ao caso $n \equiv 0 \pmod 3$. Pelo Lema 2, φ está unicamente determinada. Assim por contagem, concluímos que:

$$\varphi(v_{n-2}v_{n-1}) = \begin{cases} 2, & \text{se } n \equiv 1 \pmod 3 \\ 1, & \text{se } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \quad \varphi(v_{n-1}) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \equiv 1 \pmod 3 \\ 2, & \text{se } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

E em cada caso concluímos que não existe uma 3-coloração total para C_n , pois quando $n \equiv 1 \pmod 3$, tem-se que $\varphi(v_0) = \varphi(v_{n-1})$ e quando $n \equiv 2 \pmod 3$ não há cor disponível à aresta $v_{n-1}v_0$. Portanto, C_n é Tipo 2 para $n \equiv 1 \pmod 3$ e $n \equiv 2 \pmod 3$. \square

1.1 Grafos circulantes cúbicos

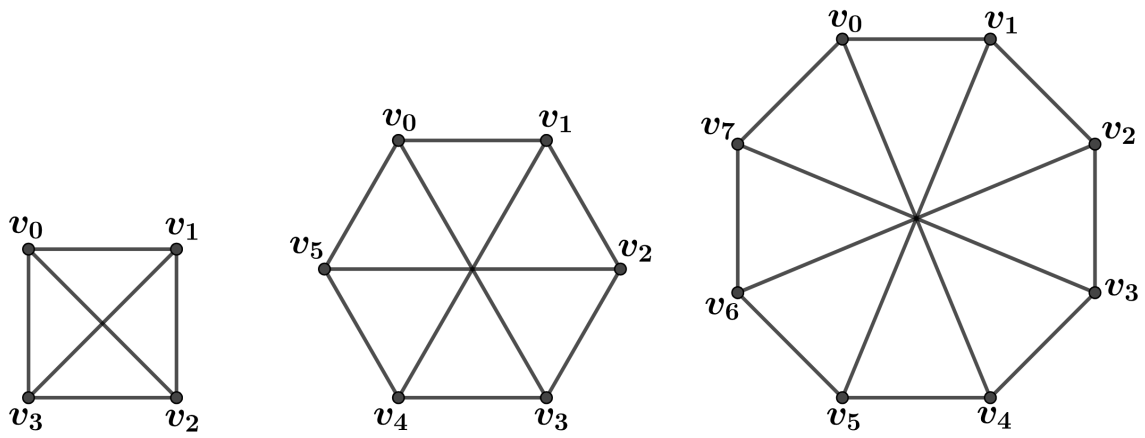
Os grafos circulantes, quando cúbicos são descritos por $C_{2n}(d, n)$, com $n \in \mathbb{N}$. Todos os membros da família $C_{2n}(1, n)$ foram provados por Chetwynd e Hilton [9] serem Tipo 2. Note que $M_{2n} \simeq C_{2n}(1, n)$ que é Tipo 2. São apresentados alguns exemplos do grafo Möbius Ladder na forma de grafo circulante na Figura 22 e vejamos a seguir que esta classe de grafos é Tipo 2.

Teorema 11. (Chetwynd e Hilton [9], 1988) *Os grafos Möbius Ladder M_{2n} , com $n \geq 2$ são Tipo 2.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que M_{2n} é 4-total-colorível com as cores 1, 2, 3, 4. Podemos supor, sem perda de generalidade, que aos vértices u_1, v_1 e à aresta u_1v_1 podem ser atribuídas as cores 1, 2 e 3, respectivamente, tendo três possibilidades de estendermos a uma 4-coloração total, como podemos ver no subgrafo das Figuras 23a, 23b e 23c.

A coloração na Figura 23c não pode ser estendida aos demais vértices e arestas do grafo. De fato, suponhamos que u_2v_2 tem a cor 3 (análogo à cor 4), então o vértice v_2 terá a cor 4, pois um dos vértices adjacentes já tem cor 2, implicando que os vértices adjacentes a u_2 tenham cores 1 e 4 e as arestas incidentes tenham cores 2 e 3, logo u_2 necessitaria de uma quinta cor. Assim, devemos supor que temos a coloração mostrada

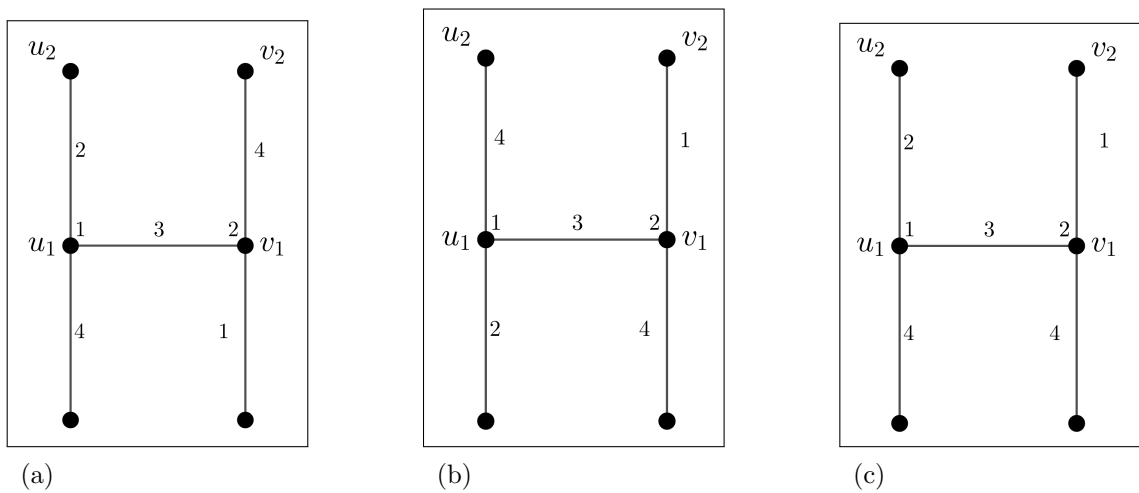
Figura 22 - Möbius Ladder na descrição $C_{2n}(1, n)$.



Legenda: Os grafos $C_4(1, 2)$, $C_6(1, 3)$ e $C_8(1, 4)$, respectivamente.

Fonte: O autor, 2021.

Figura 23 - Três possíveis colorações.

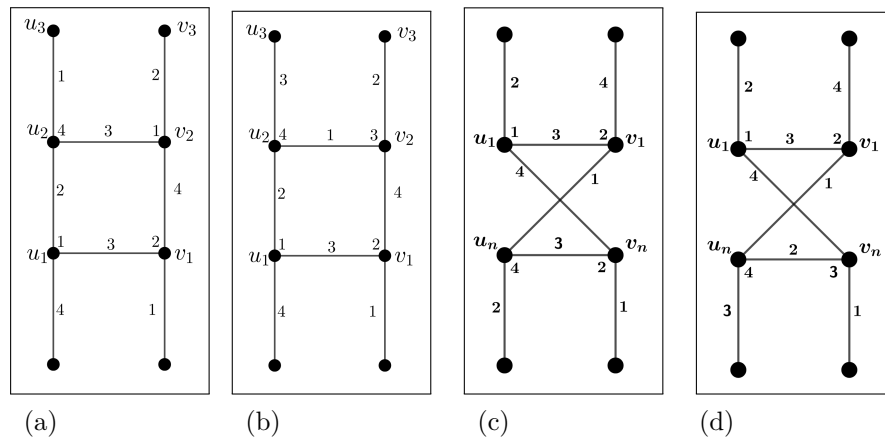


Fonte: O autor, 2021.

na Figura 23a (mesmo argumento funciona para a Figura 23b). Existem exatamente duas formas em que esta coloração pode ser estendida para arestas incidentes com u_2 e v_2 e elas são mostradas na Figura 24.

Note que as arestas u_1u_2 e v_2v_3 têm cores iguais e que as arestas v_1v_2 e u_2u_3 têm cores diferentes. Este fato acontecerá para $1 \leq i \leq n-2$: u_iu_{i+1} e $v_{i+1}v_{i+2}$ têm a mesma cor e v_iv_{i+1} e $u_{i+1}u_{i+2}$ têm cores diferentes. Segue que $u_{n-1}u_n$ e v_nu_1 têm mesma cor e $v_{n-1}v_n$ e u_nv_1 têm cores diferentes. Mas se estendemos a cor de u_1v_1 para u_nv_n e às arestas incidentes a ele, então podemos considerar sem perda de generalidade que temos as colorações apresentadas na Figura 24c e na Figura 24d.

Figura 24 - Possíveis extensões da coloração e a contradição decorrente dessas extensões.



Fonte: O autor, 2021.

Claramente em ambos os casos temos que $u_{n-1}u_n$ e v_nu_1 têm cores diferentes. Esta contradição mostra que M_{2n} é Tipo 2. \square

Outra família de circulares amplamente estudada por Chetwynd e Hilton [9] é a dos grafos Prismas. Note que $C_{2n}(2, n) \simeq G(n, 1)$ para n ímpar, e temos o seguinte resultado.

Teorema 12. (Chetwynd e Hilton [9], 1988) Os grafos Prismas $G(n, 1)$ são Tipo 1, exceto $G(5, 1)$ o qual é Tipo 2.

Demonstração. Para n múltiplo de 3, tem-se a seguinte 4-coloração total.

$$\varphi : V(G(n, 1)) \cup E(G(n, 1)) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$

Intuitivamente, esta coloração é feita da seguinte forma, para $0 \leq i < n$:

- atribuir a cor 3 às arestas radiais, isto é, $\varphi(u_iv_i) = 3$.

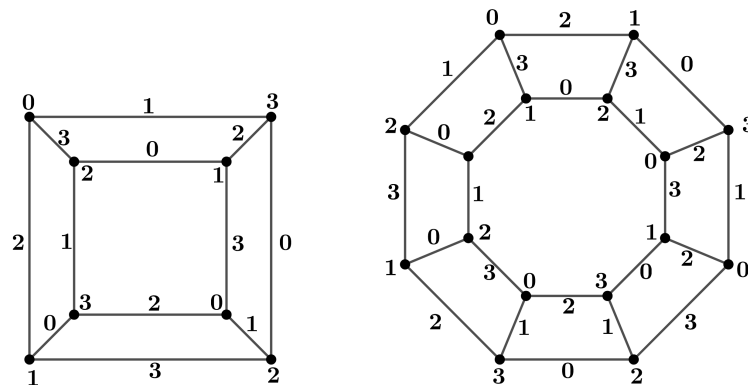
- Intercalar entre as cores 0, 1, 2 nos dois ciclos, de forma que os vértices u_i e v_i não tenham mesma cor.

Logo, φ está definida como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(u_i v_i) = 3 \\ \varphi(u_i) = (-i) \pmod{3} \\ \varphi(v_i) = (-i + 1) \pmod{3} \\ \varphi(u_i u_{i+1}) = (\varphi(u_i) + 1) \pmod{3} \\ \varphi(v_i v_{i+1}) = (\varphi(v_i) + 1) \pmod{3} \end{array} \right. \quad (1)$$

Para $n \equiv 1 \pmod{3}$ (ou $n \equiv 2 \pmod{3}$), inicialmente, realiza-se a 4-coloração total do $G(4, 1)$ (ou do $G(8, 1)$), apresentados na Figura 25. Com o processo indutivo de acrescentar 3 radiais ao grafo Prisma, segue que $G(n, 1)$ é Tipo 1, para $n \neq 5$. Por fim, suponha

Figura 25 - 4-colorações totais do $G(4, 1)$ e do $G(8, 1)$.



Fonte: O autor, 2021.

por absurdo que $G(5, 1)$ é Tipo 1. Note que como C_5 é Tipo 2, logo os radiais não podem ter mesma cor. Como na prova do Teorema 11, assumiremos que os radiais, as bordas internas/externas assim como os vértices estão coloridos como na Figura 23a. Segue que, se $\varphi(u_i) = \alpha$ então $u_{i+1}v_{i+1}$ ou v_{i+1} terão cor α . Então suponha que $u_{i+1}v_{i+1}$ tem a cor α e isto ocorra em r radiais consecutivos, seja $u_{i+1}v_{i+1}, \dots, u_{i+r}v_{i+r}$ e não ocorre em $u_{i+r+1}v_{i+r+1}$ onde $1 \leq r \leq 4$. Porém, disto segue que $\varphi(v_{i+r+1}) = \alpha$ e que u_{i+r+2} e v_{i+r+2} não terão cor α e assim $\varphi(u_{i+r+3}) = \alpha$. Isto é verdade para $r = 2$. Porém, teremos que ocorrerão no mínimo três cores em cada ciclo C_5 , então cada uma das três cores ocorrem em dois radiais consecutivos. Isto implica que $G(5, 1)$ tem no mínimo seis radiais, uma contradição. Portanto, $G(5, 1)$ não é Tipo 1.

□

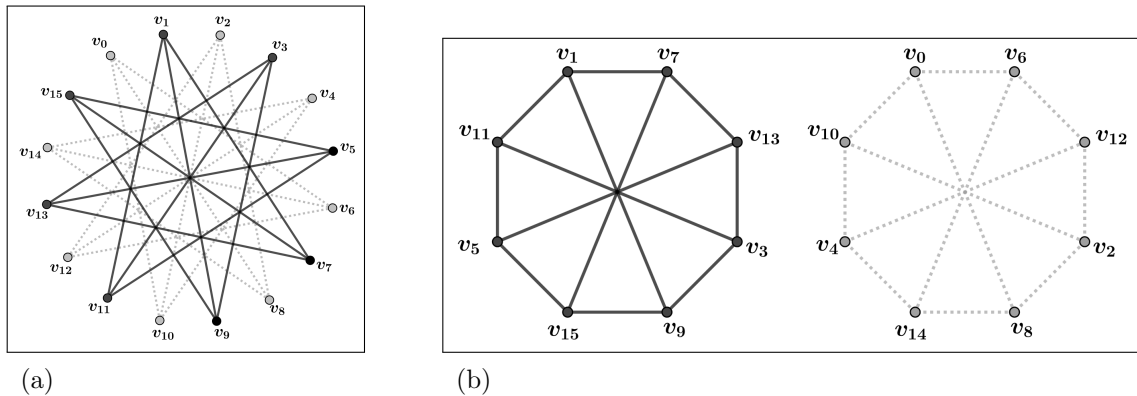
Além disso, Hackmann e Kemnitz [28] determinaram o número cromático total de todos os grafos circulantes cúbicos. Como vimos $G(5, 1) \simeq C_{10}(2, 5)$ e $M_{2n} \simeq C_{2n}(1, n)$ são grafos cúbicos circulantes Tipo 2. Veremos a seguir que estes serão os únicos. Isto é, os grafos circulantes cúbicos $C_{2n}(d, n)$ serão Tipo 1 a menos da existência de um isomorfismo entre eles e $C_{10}(2, 5)$ ou $C_{2n}(1, n)$. O lema a seguir explicita quando teremos a existência deste isomorfismo.

Lema 3. (Hackmann e Kemnitz [28], 2004) *Se l é o máximo divisor comum de d e n com $d = lm$ e $n = lp$, então $C_{2n}(d, n)$ é isomorfo a l cópias de $C_{2p}(1, p)$ se m é ímpar ou $C_{2p}(2, p)$ se m é par.*

Vejam os grafos $C_{16}(6, 8)$ como exemplo do lema. Tem-se que $l = \text{mdc}(6, 8) = 2$ e $m = 3$, e também que $p = \frac{16}{2} = 8$, note pela Figura 26 que $C_{16}(6, 8)$ é isomorfo a 2 cópias de $C_8(1, 4)$, sendo assim Tipo 2. Assim veremos que os grafos circulantes cúbicos serão Tipo 2, quando isomorfos a alguma cópia da Möbius Ladder $C_{2p}(1, p)$, isto é, quando m for ímpar. E quando m for par, este grafo é isomorfo a algum grafo Prisma $C_{10}(2, 5)$.

Teorema 13. (Hackmann e Kemnitz [28], 2004) *O grafo circulante $C_{2n}(d, n)$ é Tipo 1 se, e somente se, m é par e $C_{2n}(d, n)$ não é isomorfo a l cópias de $C_{10}(2, 5)$, caso contrário é Tipo 2.*

Figura 26 - O grafo $C_{16}(6, 8)$.



Legenda: Em (a) temos a representação usual do grafo circulante $C_{16}(6, 8)$, onde existe o contraste entre as duas cópias de $C_8(1, 4)$, estando uma preenchida (subgrafo induzido nos vértices ímpares) outra em pontilhado (subgrafo induzido nos vértices pares), vistos explicitamente em (b).

Fonte: O autor, 2021.

Os grafos circulantes 4- regulares são descritos como $C_n(a, b)$, com $1 \leq a < b < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Khennoufa e Togni [29] desenvolveram 5-colorações-totais para todos os membros de famílias de grafos circulantes 4- regulares. Como mencionamos na Introdução, a ideia por

trás de mostrar que um grafo é Tipo 1 está em mostrar que um grafo G é $(\Delta + 1)$ -total-colorível. Para tal, devemos esboçar a função que associa o conjunto de elementos do grafo ao conjunto de cores.

Teorema 14. (Khennoufa e Togni [29], 2008) *Todo grafo circulante 4-regular $C_{5p}(1, k)$ é Tipo 1 para qualquer inteiro positivo p e $k < \frac{5p}{2}$ com $k \equiv 2 \pmod{5}$ ou $k \equiv 3 \pmod{5}$.*

Demonstração. Para começar, reescrevemos os elementos de $V(G) \cup E_1(G)$ como $u_0 = v_0, u_1 = v_0v_1, u_2 = v_1, \dots, u_{10p-2} = v_{5p-2}v_{5p-1}, u_{10p-1} = v_{5p-1}$. Defina a função para coloração total φ para $0 \leq i \leq 10p - 1$ como:

$$\varphi(u_i) = i \pmod{5}$$

Para atribuição de cores das arestas internas de G , devemos considerar dois casos (os índices u_i estão em módulo $10p$ e as cores em módulo 5):

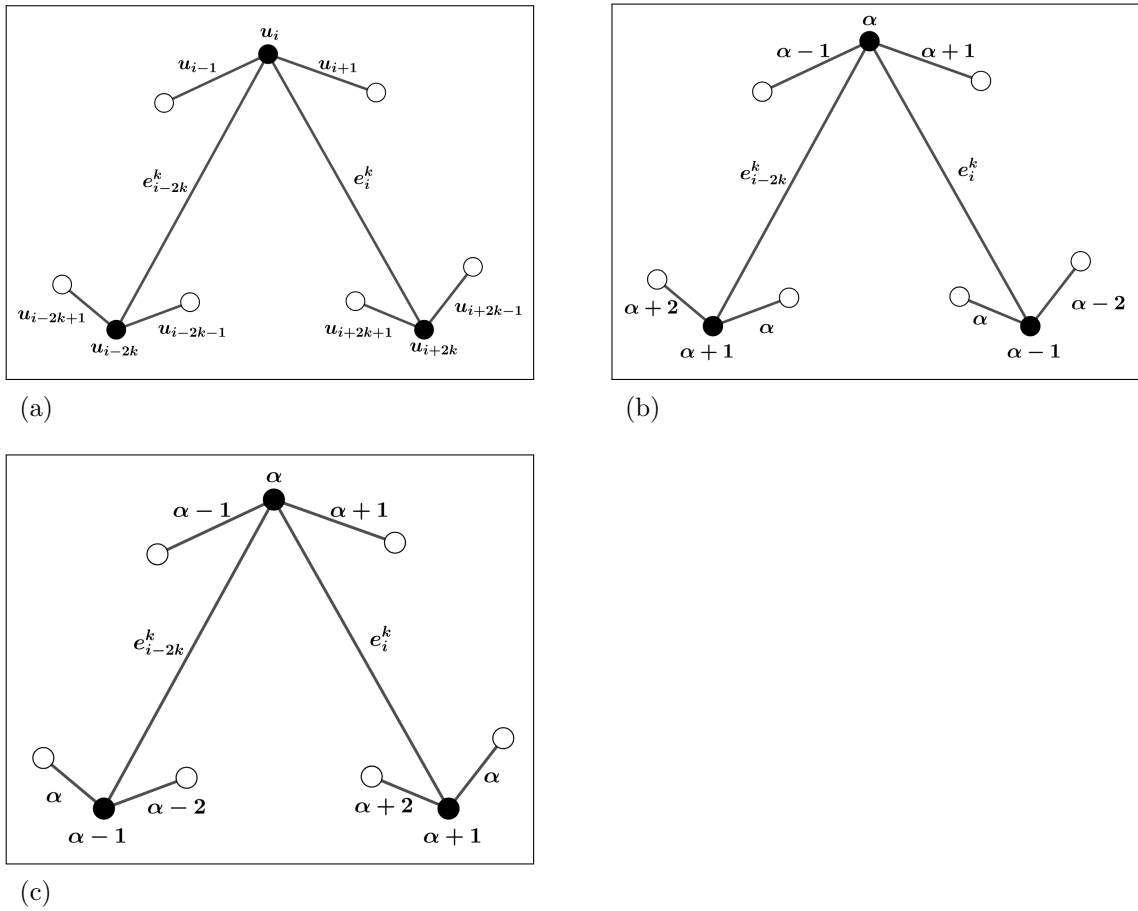
1. $k \equiv 2 \pmod{5}$: Suponha que o elemento u_i é um vértice e $\varphi(u_i) = \alpha$. Então pela definição de φ , temos $\varphi(u_{i-1}) = \alpha - 1$ e $\varphi(u_{i+1}) = \alpha + 1$. Os dois vértices incidentes a aresta de distância k são u_{i-2k} e u_{i+2k} e por definição de φ temos que $\varphi(u_{i-2k-1}) = \alpha$, $\varphi(u_{i-2k}) = \alpha + 1$, $\varphi(u_{i-2k+1}) = \alpha + 2$, $\varphi(u_{i+2k-1}) = \alpha - 2$, $\varphi(u_{i+2k}) = \alpha - 1$ e $\varphi(u_{i+2k+1}) = \alpha$, como podemos ver na Figura 27b.

Para atribuição de cor às duas arestas internas $e_{i-2k}^k = u_i u_{i-2k}$ e $e_i^k = u_i u_{i+2k}$ temos que $\varphi(e_{i-2k}^k) \notin \{\alpha - 1, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2\}$ e $\varphi(e_i^k) \notin \{\alpha - 2, \alpha - 1, \alpha, \alpha + 1\}$. Portanto, $\varphi(e_{i-2k}^k) = \alpha + 3$ e $\varphi(e_i^k) = \alpha + 2$. Como foram usadas cinco cores, pois $\alpha + 3 \equiv \alpha - 2 \pmod{5}$, temos que $\chi''(C_{5p}(1, k)) = 5$.

2. $k \equiv 3 \pmod{5}$: Analogamente ao caso anterior, suponhamos que u_i é um vértice e $\varphi(u_i) = \alpha$, então $\varphi(u_{i-1}) = \alpha - 1$ e $\varphi(u_{i+1}) = \alpha + 1$. Os dois vértices adjacentes a u_i e incidentes a aresta de distância k são u_{i-2k} e u_{i+2k} e por definição de φ , temos que $\varphi(u_{i-2k-1}) = \alpha - 2$, $\varphi(u_{i-2k}) = \alpha - 1$, $\varphi(u_{i-2k+1}) = \alpha$, $\varphi(u_{i+2k-1}) = \alpha$, $\varphi(u_{i+2k}) = \alpha + 1$ e $\varphi(u_{i+2k+1}) = \alpha + 2$ (Figura 27c). Para atribuição de cor às duas arestas internas $e_{i-2k}^k = u_i u_{i-2k}$ e $e_i^k = u_i u_{i+2k}$ temos que $\varphi(e_{i-2k}^k) \notin \{\alpha - 2, \alpha - 1, \alpha, \alpha + 1\}$ e $\varphi(e_i^k) \notin \{\alpha - 1, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2\}$. Portanto, $\varphi(e_{i-2k}^k) = \alpha + 2$ e $\varphi(e_i^k) = \alpha + 3$. Como foram usadas cinco cores, pois $\alpha + 3 \equiv \alpha - 2 \pmod{5}$, temos que $\chi''(C_{5p}(1, k)) = 5$. (Veja um exemplo de aplicação deste teorema na Figura 28 □)

E por fim, apresentamos mais um resultado de Khennoufa e Togni [29].

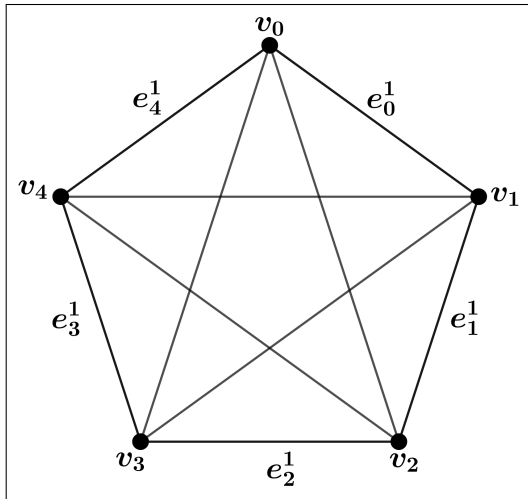
Figura 27 - Esquema do grafo $C_{5p}(1, k)$ com sua 5-coloração-total.



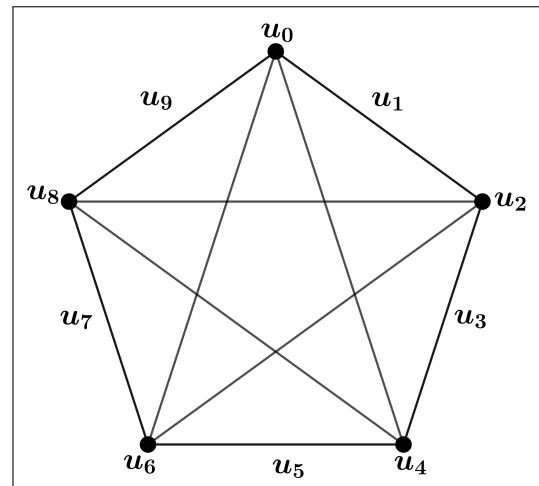
Legenda: (a) Estrutura do grafo $C_{5p}(1, k)$; (b) Coloração total quando $k \equiv 2 \pmod{5}$; (c) Coloração total quando $k \equiv 3 \pmod{5}$

Fonte: O autor, 2021.

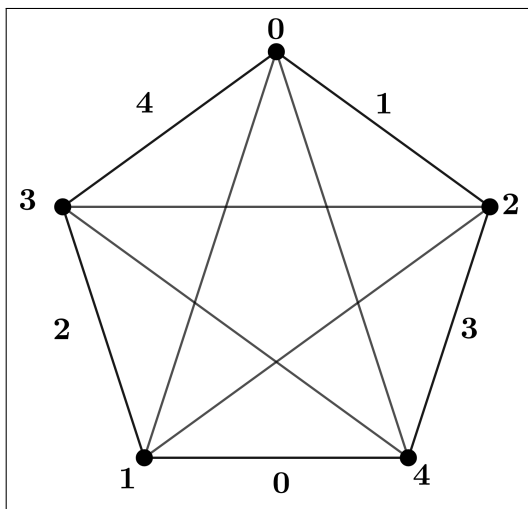
Figura 28 - Grafo $C_5(1, 2)$ e a aplicação do Teorema 14.



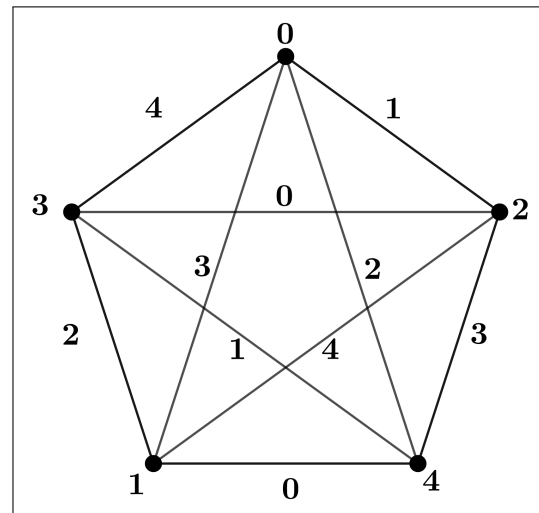
(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: O autor, 2021.

Teorema 15. (Khennoufa e Togni [29], 2008) *Todo grafo circulante 4-regular $C_{6p}(1, k)$ é Tipo 1 para qualquer inteiro positivo $p \geq 3$ e $k < 3p$ com $k \equiv 1 \pmod{3}$ ou $k \equiv 2 \pmod{3}$.*

Demonstração. Dados $G = C_{6p}(1, k)$ e $q = (6p, k)$. Como $k \not\equiv 0 \pmod{3}$, então 3 divide $\frac{6p}{q}$.

Note que se $6p$ e k são relativamente primos, então existe um único ciclo C_0 formado pelas arestas de distância k . Seja $C_0 = (u_0, \dots, u_{\frac{6p}{q}-1})$, com $u_{2j} = v_{jk \pmod{6p}}$ e $u_{2j+1} = e_{jk \pmod{6p}}^k$, $0 \leq j \leq \frac{6p}{q} - 1$ (veja, por exemplo na Figura 29a, onde C_0 é o ciclo $v_0v_7v_{14} \dots v_{11}v_0$).

Atribua cor aos vértices e arestas com as cores 0, 1, 2, ciclicamente, isto é, $\varphi(u_i) = i \pmod{3}$. Às arestas de distância um, teremos a atribuição de cor $\varphi(e_i^1) = i \pmod{3} + 2$ com $0 \leq i \leq 6p - 1$.

Caso contrário, isto é, $6p$ e k não são relativamente primos, teremos C_i ciclos formados pelos conjuntos de arestas de distância k , tal que $0 \leq i \leq q - 1$. (Veja, por exemplo na Figura 29b, onde C_0 é o ciclo induzido em vértices de índice par e C_1 é o ciclo induzido em vértices de índice ímpar.).

Definiremos C_0 e iremos colori-lo analogamente ao caso anterior e teremos os ciclos C_i com $1 \leq i \leq q - 1$, sendo coloridos de forma similar pela aplicação:

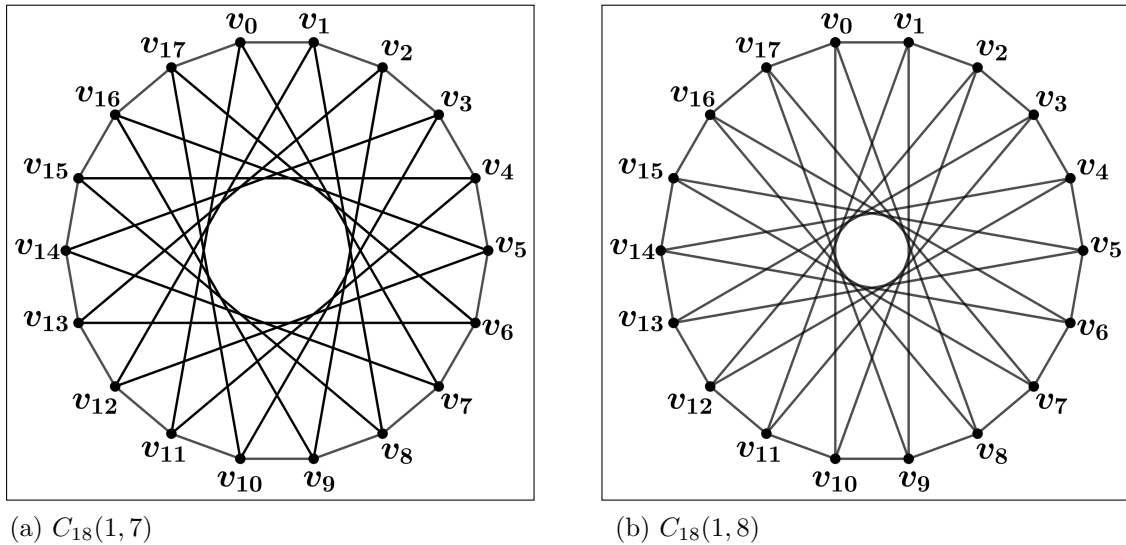
- $\varphi(C_{2i+1}) = \varphi(C_{2i}) + 1 \pmod{3}$;
- $\varphi(C_{2i+2}) = \varphi(C_{2i})$, $0 \leq i \leq \frac{q-3}{2}$;
- $\varphi(C_{q-1}) = \varphi(C_0) + 2$, se q é par.
- Se $v_j \in C_0$ para algum j , então:

- $\varphi(v_{j+2i+1}) = \varphi(v_j) + 1 \pmod{3}$;
- $\varphi(v_{j+2i+2}) = \varphi(v_j)$, $0 \leq i \leq \frac{q-3}{2}$;
- $\varphi(v_{j+q-1}) = \varphi(v_j) + 2 \pmod{3}$, se q é par.

E de maneira análoga à anterior, para as arestas de distância um, temos $\varphi(e_i^1) = i \pmod{3} + 2$, $0 \leq i \leq 6p - 1$.

Pela definição de φ é uma coloração de arestas de G . Devemos mostrar que a atribuição de φ também é uma coloração de vértices.

Dois vértices de C_i e C_{i+1} não tem mesma cor por definição. Então, resta vermos os vértices v_{q-1} de C_{q-1} tem cor diferente do vértice v_q de C_0 . Temos que $\varphi(v_{q-1}) = \varphi(v_0) = 0$ se q é ímpar ou $\varphi(v_{q-1}) = \varphi(v_0) + 2$ se q é par e $\varphi(v_q) = 1$. Portanto φ é uma 5-coloração-total de G e assim, temos que $\chi''(C_{6p}(1, k)) = 5$, quando $p \geq 3$, $k < 3p$ e $k \equiv 1 \pmod{3}$ ou $k \equiv 2 \pmod{3}$. \square

Figura 29 - Os grafos $C_{18}(1, 7)$ e $C_{18}(1, 8)$.

Legenda: (a) O ciclo C_0 é o ciclo $v_0v_7v_{14}v_3v_{10}v_{17}v_6v_{13}v_2v_9v_{16}v_5v_{12}v_1v_8v_{15}v_4v_{11}v_0$;
 (b) O ciclo C_0 é o ciclo $v_0v_8v_{16}v_6v_{14}v_4v_{12}v_2v_{10}v_0$ o caso é análogo para C_1 , porém considerando os vértices ímpares.

Fonte: O autor, 2021.

1.2 Grafos potências de ciclo

Nesta seção, estudamos o número cromático total de alguns grafos potências de ciclo. O grafo potência de ciclo é um grafo circulante amplamente estudado para o qual temos alguns resultados com relação ao seu número cromático total. Campos [27] provou que C_n^2 é Tipo 1, exceto quando $n = 7$ e que a TCC é válida para C_n^k com n par, isto é, $\chi''(C_n^k) \leq \Delta(C_n^k) + 2$. E também que nos casos em que $k = 3$ ou $k = 4$ a TCC é válida para qualquer n . Além disso, propôs a seguinte conjectura.

Conjectura 3. (Campos [27], 2006) Para todo grafo C_n^k com $2 \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ temos:

$$\chi''(C_n^k) = \begin{cases} \Delta(C_n^k) + 2, & \text{se } k > \frac{n}{3} - 1 \\ \Delta(C_n^k) + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A técnica para determinar o número cromático total de C_n^2 consiste em exibir a 5-coloração-total de C_n^2 , com $n \neq 7$. Para tal usam-se as 5-colorações-totais de quatro grafos iniciais C_6^2 , C_8^2 , C_9^2 e C_{11}^2 , denominados *grafos básicos* e realiza-se a colagem de cada um com C_{n-4}^2 sendo possível assim construir uma 5-coloração-total para C_n^2 .

Sejam G_1 e G_2 dois grafos potência de ciclo. Considere $V(G_i) = \{v_j^i \mid 0 \leq j \leq n_i\}$ o conjunto de vértices de G_i , $v_i^1 \in V(G_1)$ e $v_j^2 \in V(G_2)$ vértices quaisquer. O grafo G

resultante da *colagem* de G_1 e G_2 é definido como:

$$V(G) := (V(G_1) \cup V(G_2)) \setminus \{v_i^1, v_j^2\}$$

$$E(G) := \{(E(G_1) \cup E(G_2) \cup E_{in}) \setminus E_{out}\}$$

onde $E_{in} = \{v_{i-2}^1 v_{j+1}^2, v_{i-1}^1 v_{j+1}^2, v_{i+2}^1 v_{j+1}^2, v_{i+2}^1 v_{j-1}^2, v_{i+1}^1 v_{j-2}^2, v_{i+1}^1 v_{j-1}^2\}$ e $E_{out} = \{v_{i-2}^1 v_i^1, v_{i-1}^1 v_i^1, v_i^1 v_{i+1}^1, v_i^1 v_{i+2}^1, v_{i-1}^1 v_{i+1}^1, v_{j-2}^2 v_j^2, v_{j-1}^2 v_j^2, v_j^2 v_{j+1}^2, v_j^2 v_{j+2}^2, v_{j-1}^2 v_{j+1}^2\}$. Os grafos G_1 e G_2 são ditos *geradores* e os vértices v_i^1 e v_j^2 são ditos *pivôs* da operação de colagem. Note que o grafo G possui $n_1 + n_2 - 2$ vértices. Vejamos um exemplo para a colagem entre $G_1 := C_7^2$ e $G_2 := C_9^2$, gerando C_{16}^2 , apresentado na Figura 30. O processo de colagem permitiu que dois grafos da classe da potência de ciclo C_n^2 , formassem outro grafo e de fato isto é valido, como veremos no lema a seguir.

Esta operação de colagem é útil para construir a coloração total de C_n^2 a partir da coloração total dos grafos básicos. Veremos a seguir como este processo é possível utilizando os dois lemas seguintes.

Lema 4. (Campos [27], 2006) *O grafo G obtido pela colagem de dois grafos, G_1 e G_2 , pertencentes à classe dos C_n^2 , também é um grafo pertencente a essa classe.*

Demonstração. De fato, é evidente que o grafo obtido G é 4-regular. Observe que os únicos vértices com vizinhança alterada após a colagem obtendo G são $v_{i-2}^1, v_{i-1}^1, v_{i+1}^1, v_{i+2}^1, v_{j-2}^2, v_{j-1}^2, v_{j+1}^2$ e v_{j+2}^2 , ficando todos os outros vértices com a vizinhança inalterada. Tendo assim as suas arestas de alcance 1 e 2 são mantidas. Para provarmos que G está na classe de potência de ciclo C_n^2 basta mostrarmos que as arestas acrescentadas no processo de colagem são as arestas de alcance 1 ou 2 que formam o grafo desta classe. De fato, note que $v_{i-1}^1 v_{j+1}^2, v_{i+1}^1 v_{j-1}^2 \in E^1(G)$ e $v_{i-2}^1 v_{i-1}^1, v_{i-1}^1 v_{j+2}^2, v_{i+2}^1 v_{j-1}^2, v_{i+2}^1 v_{j-1}^2 \in E^2(G)$. \square

Seja φ uma coloração total de C_n^2 . Um vértice $v_i \in V(C_n^2)$ é dito *especial* quando

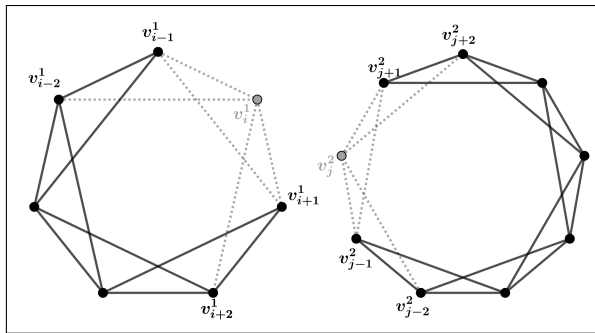
$$\varphi(v_i) = \varphi(v_{(i-1) \bmod n} v_{(i+1) \bmod n})$$

O vértice v_i e a aresta $v_{(i-1) \bmod n} v_{(i+1) \bmod n}$ são ditos *equivalentes*. Note que a propriedade de um vértice ser especial está relacionada com uma coloração total. Uma coloração total em que todos os vértices são especiais é denominada coloração total especial. Vejamos alguns exemplos na Figura 32.

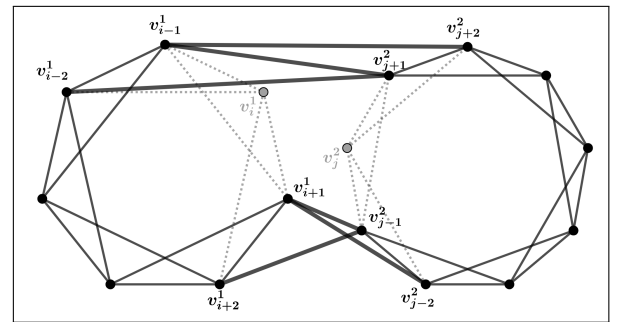
Lema 5. (Campos [27], 2006) *O grafo C_n^2 pode ser gerado a partir da colagem do C_6^2 e do C_{n-4}^2 para todo $n \geq 10$.*

Demonstração. Pelo Lema 4, sabemos que o grafo gerado pela colagem de duas potências de ciclo é uma potência de ciclo. Além disso, o grafo obtido pela colagem de C_6^2 e C_{n-4}^2 contém $6 + (n - 4) - 2 = n$ vértices, e é o grafo C_n^2 . \square

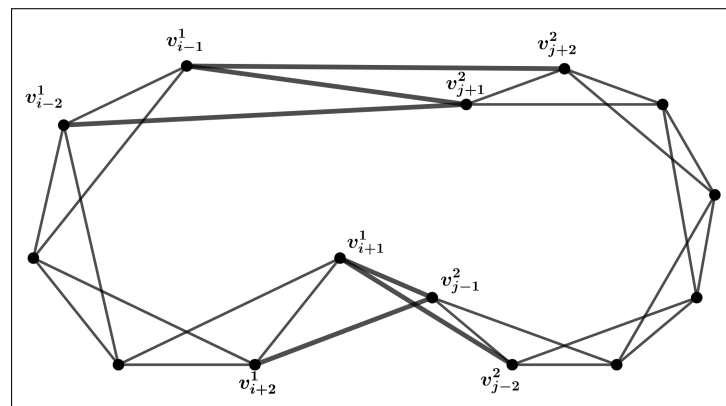
Figura 30 - Colagem entre os grafos C_7^2 e C_9^2 .



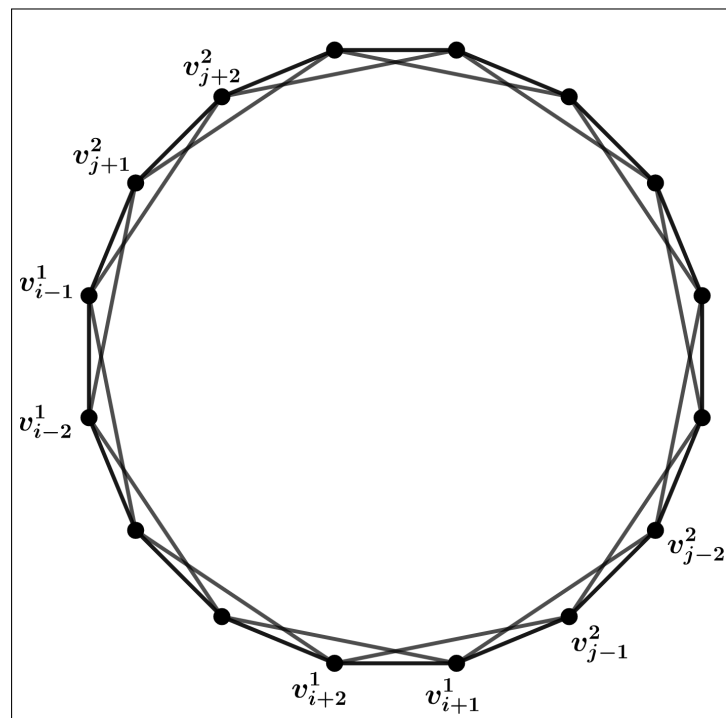
(a) E_{out} estão pontilhadas



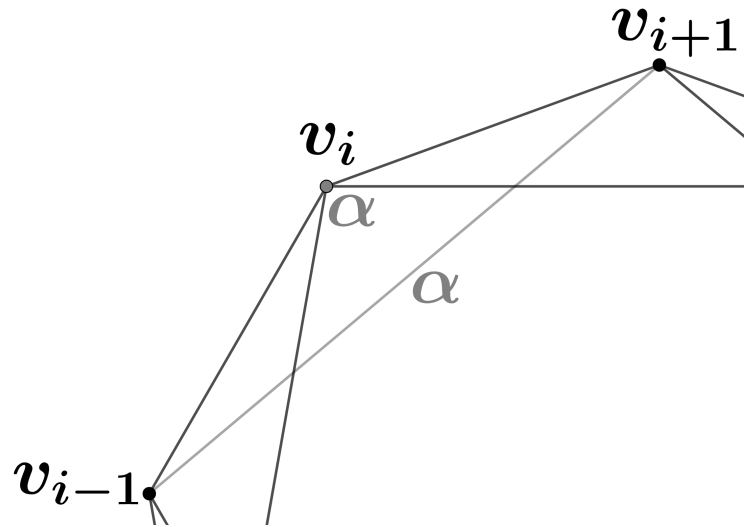
(b) E_{in} estão em negrito.



(c) Grafo após realizar a colagem.



(d) O grafo C_{16}^2

Figura 31 - Representação de um vértice especial v_i .

Legenda: Considere que $\varphi(v_i) = \varphi(v_{(i-1) \bmod n} v_{(i+1) \bmod n}) = \alpha$
 Fonte: O autor, 2021.

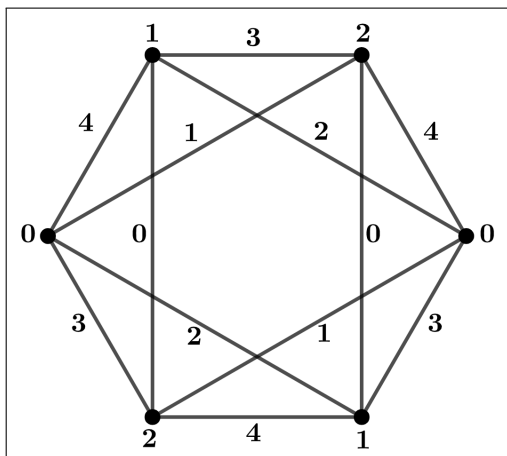
Teorema 16. (Campos [27], 2006) *Todo C_n^2 com $n \geq 6$ e $n \neq 7$ é Tipo 1.*

Demonstração. A Figura 32 exibe uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial para os grafos básicos. Isto é suficiente para mostrar que estes grafos são Tipo 1. A demonstração que o grafo C_n^2 , $n \geq 10$ e $n \neq 11$ é Tipo 1 é indutiva. Suponha que o grafo C_{n-4}^2 possui uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial. Faremos a colagem do C_6^2 com o C_{n-4}^2 e mostraremos como estender as colorações originais para uma 5-coloração total especial do C_n^2 . Seja π_1 a coloração do C_6^2 exibida na Figura 32a. Ajuste a notação para que $\pi_1(v_0) = 0$, $\pi_1(v_1) = 1$ e $\pi_1(v_0 v_1) = 3$. Seja $\pi_2 : V(C_{n-4}^2) \cup E(C_{n-4}^2) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial para o grafo C_{n-4}^2 . Suponha sem perda de generalidade, que $\pi_2(v_0) = 0$. Por hipótese, este vértice é especial, então $\pi_2(v_1 v_{n-5}) = 0$. Como o grafo é 4-regular, as cores 1, 2, 3 e 4 incidem sobre v_0 . Ajuste a notação para que estas cores estejam distribuídas da seguinte forma:

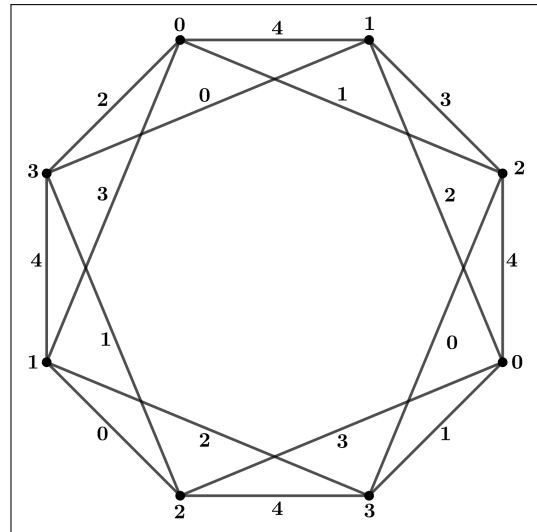
$$\pi_2(v_0 v_1) = 2, \quad \pi_2(v_0 v_2) = 4, \quad \pi_2(v_{n-6} v_0) = 3, \quad \pi_2(v_{n-5} v_0) = 1$$

Como todos os vértices são especiais esta distribuição de cores implica que $\pi_2(v_1) = 4$, $\pi_2(v_{n-5}) = 3$, $\pi_2(v_2) \in \{1, 3\}$ e $\pi_2(v_{n-6}) \in \{2, 4\}$. Gerar C_n^2 a partir do C_6^2 e C_{n-4}^2 implica em remover as arestas do conjunto E_{out} juntamente com os pivôs, adicionando-se por fim as arestas em E_{in} , isto é, a definição de colagem. Portanto, cada elemento de C_n^2 corresponde a algum elemento dos geradores, isto é, de C_6^2 e C_{n-4}^2 , exceto os pertencentes a E_{in} . Seja x um elemento de C_n^2 que não pertence a E_{in} . Consideremos que a cor de x em C_n^2 é a cor que o elemento correspondente a x possui no grafo gerador. Desta

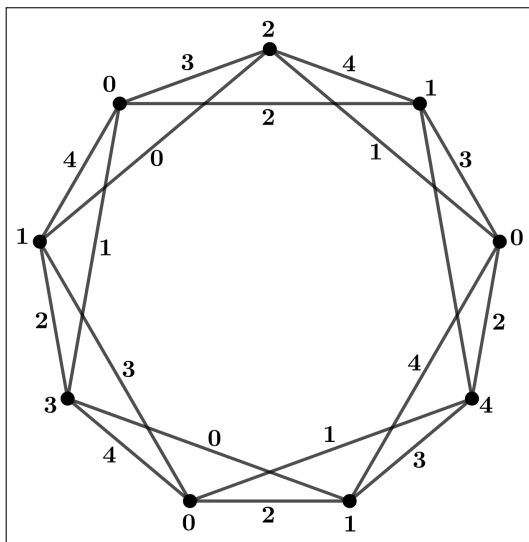
Figura 32 - Coloração total dos grafos básicos.



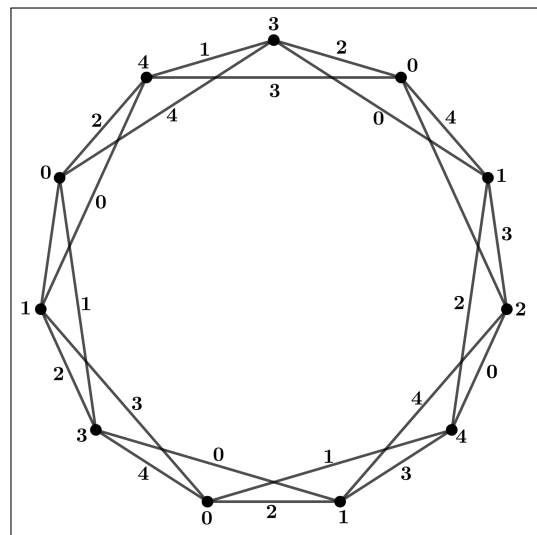
(a) $\chi''(C_6^2) = 5$



(b) $\chi''(C_8^2) = 5$



(c) $\chi''(C_9^2) = 5$



(d) $\chi''(C_{11}^2) = 5$

Fonte: O autor, 2021.

forma, os únicos elementos sem cores são as arestas em E_{in} . Definimos então π uma $(\Delta + 1)$ -coloração total de C_n^2 de tal forma que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(v_i) := \pi_1(v_{i+1}) \text{ para } i \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \pi(v_i v_{i+1}) := \pi_1(v_{i+1} v_{i+2}) \text{ para } i \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \pi(v_i v_{i+2}) := \pi_1(v_{i+1} v_{i+3}) \text{ para } i \in \{0, 1, 2\} \\ \pi(v_{i+5}) := \pi_2(v_{i+1}) \text{ para } i \in \{0, 1, \dots, n-6\} \\ \pi(v_{i+5} v_{i+6}) := \pi_2(v_{i+1} v_{i+2}) \text{ para } i \in \{0, 1, \dots, n-7\} \\ \pi(v_{i+5} v_{i+7}) := \pi_2(v_{i+1} v_{i+3}) \text{ para } i \in \{0, 1, \dots, n-8\} \end{array} \right.$$

E as arestas em E_{in} :

$$\pi(v_3 v_5) := 2, \quad \pi(v_4 v_5) := 0, \quad \pi(v_4 v_6) := 4$$

$$\pi(v_{n-2} v_0) := 3, \quad \pi(v_{n-1} v_0) := 0, \quad \pi(v_{n-1} v_1) := 1$$

Na Figura 33 temos um exemplo desta coloração para o grafo C_{10}^2 .

Mostremos que π de fato é uma $(\Delta + 1)$ -coloração total para C_n^2 . As colorações π_1 e π_2 são $(\Delta + 1)$ -colorações totais de C_6^2 e C_{n-4}^2 , respectivamente. Os vértices e arestas de C_n^2 correspondentes aos vértices e arestas de C_6^2 (ou C_{n-4}^2) possuem a mesmas cores de π_1 (ou π_2). Conclui-se que π restrito a π_1 (ou π_2) não possui conflito. Por construção de π , os extremos em E_{in} recebem as cores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(v_0) := \pi_1(v_1) = 1, \\ \pi(v_1) := \pi_1(v_2) = 2, \\ \pi(v_3) := \pi_1(v_4) = 1, \\ \pi(v_4) := \pi_1(v_5) = 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(v_5) := \pi_2(v_1) = 4, \\ \pi(v_6) \pi_2(v_2) \in \{1, 3\}, \\ \pi(v_{n-2}) := \pi_2(v_{n-6}) \in \{2, 4\}, \\ v_{n-1} := \pi_2(v_{n-5}) = 3 \end{array} \right.$$

Portanto, ao adicionarmos as arestas de E_{in} não ligamos dois vértices que possuem a mesma cor. Desta forma, não há conflito em π . Precisamos agora mostrar que as cores atribuídas às arestas de E_{in} não geram conflito. As arestas de E_{out} foram removidas e cada uma delas tinha uma cor atribuída. Logo, esta cor falta nos vértices que são extremos

destas arestas no C_n^2 . Então, percebe-se que em v_0 faltam as cores 0 e 3, em v_1 falta a cor 1, em v_3 falta a cor 2, em v_4 faltam as cores 0 e 4, em v_5 faltam as cores 0 e 2, em v_6 falta a cor 4, em v_{n-2} falta a cor 3 e em v_{n-1} faltam as cores 0 e 1.

Portanto as cores atribuídas às arestas de E_{in} não geram conflitos. Isto conclui a demonstração que π é uma $(\Delta + 1)$ -coloração total. \square

Para demonstrar que C_7^2 é Tipo 2, prova-se que para n ímpar e $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ tem-se que se $k > \frac{n}{3} - 1$, então C_n^k não é harmônico, portanto, não é Tipo 1. Por consequência, para $k = 2$, tem-se $5 < n < 9$, donde C_7^2 não é Tipo 1, e portanto, temos o seguinte resultado.

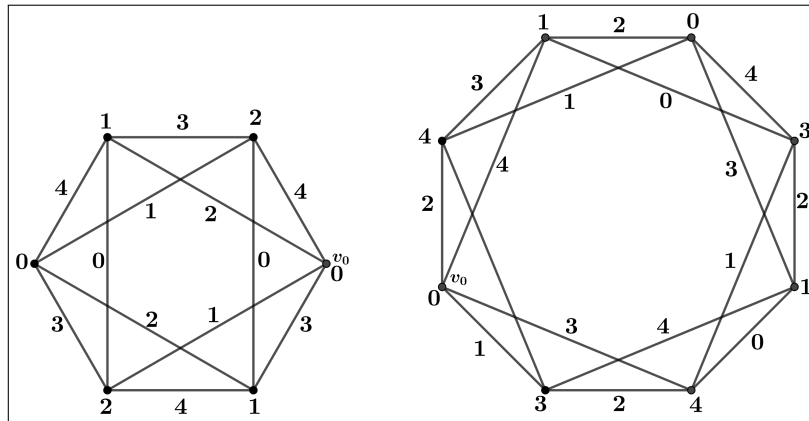
Teorema 17. (Campos [27], 2006) *Seja C_n^2 um grafo potência de ciclo não completo, tem-se que:*

$$\chi''(C_n^2) = \begin{cases} \Delta(C_n^2) + 1, & \text{se } n \neq 7 \\ \Delta(C_n^2) + 2, & \text{se } n = 7 \end{cases}$$

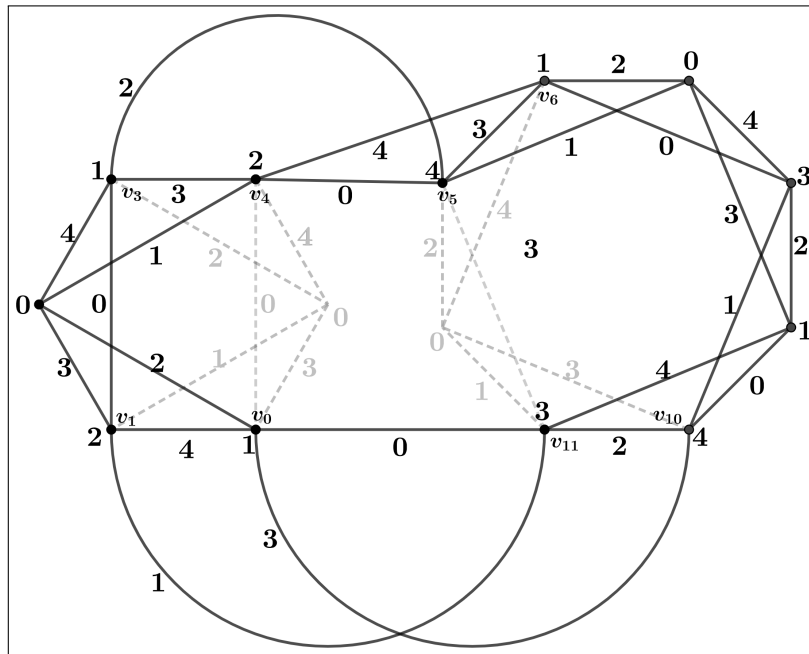
Após, Campos [27] provou que para C_n^k a TCC é verificada quando n é par ou $k \in \{3, 4\}$ ou $n \equiv k \pmod{k+1}$.

Recentemente, Zorzi [30] em sua dissertação demonstrou que a Conjectura 3 vale para $k = 3$ e $k = 4$.

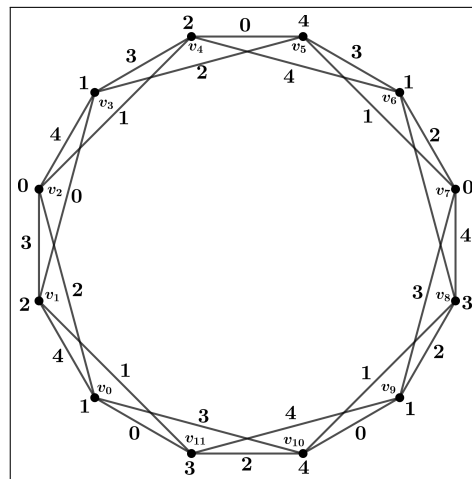
Figura 33 - Aplicação do Teorema 16



(a) 5-coloração total de C_6^2 e C_8^2 .



(b) Colagem entre C_6^2 e C_8^2 coloridos.



(c) A 5-coloração total de C_{12}^2 .

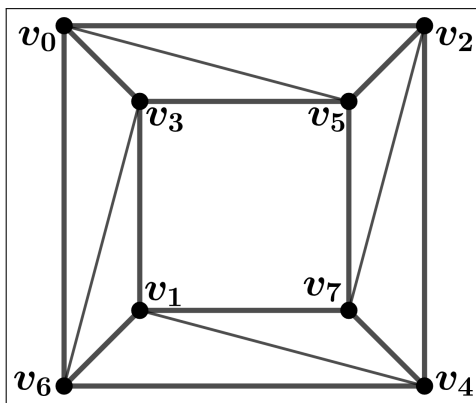
2 NOSSAS CONTRIBUIÇÕES

Neste capítulo, determinamos o número cromático total de todos os membros de três famílias infinitas de grafos circulantes, $C_n(2k, 3)$, $k \geq 1$ e $n = (8\mu + 6\lambda)k$, para inteiros não negativos μ e λ ; $C_{3n}(1, 3)$, para $n > 1$; e $C_{3\lambda p}(1, p)$, $\lambda \geq 1$ e $p \equiv 0 \pmod{3}$. Khennoufa e Togni [29] conjecturaram que $C_n(a, b)$ é Tipo 1, exceto pela existência de uma família finita Tipo 2. Estas três famílias infinitas de grafos circulantes 4-regulares darão a sugestão que esta conjectura é verdadeira.

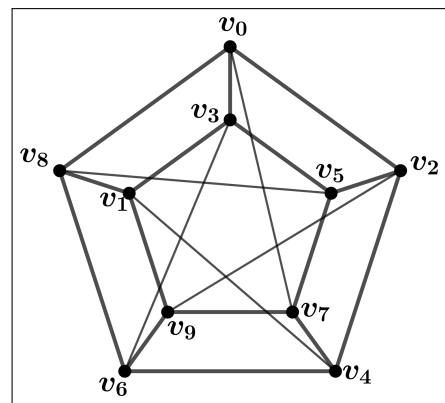
Sabe-se que o grafo de Petersen generalizado $G(n, 1)$ é Tipo 1, exceto $G(5, 1)$ [19, 9]. A determinação da 4-coloração-total para esta família será útil no estudo de famílias de grafos circulantes 4-regulares nas quais $G(n, 1)$ é subgrafo. A condição para que este fato ocorrer é quando a distância de alguma das arestas de $C_n(a, b)$ seja divisível pelo número de vértices. Isto é, sem perda de generalidade, quando n múltiplo de a tem-se que $C_n(a, b)$ tem como subgrafo $G(n/a, 1)$.

Por exemplo, $C_n(2, 3)$ para n par tem $G(\frac{n}{2}, 1)$ como subgrafo, pois dado $V_{ex} = \{v_{2i} \mid 0 \leq i < \frac{n}{2}\}$ e $V_{in} = \{v_{2i+1} \mid 0 < \frac{n}{2}\}$, tomemos $V(G(\frac{n}{2})) = V_{in} \cup V_{ex} \subset V(C_n(2, 3))$ e arestas $E_{ex} = \{v_0v_2, v_2v_4, \dots, v_{n-2}v_0\}$, $E_{in} = \{v_3v_5, v_5v_7, \dots, v_1v_3\}$ e $E_r = \{v_0v_3, v_2v_5, \dots, v_{n-2}v_1\}$. Como $E(G(\frac{n}{2})) = E_{ex} \cup E_{in} \cup E_r \subset E(C_n(2, 3))$ para n par, conclui-se que $G(\frac{n}{2}, 1)$ é subgrafo de $C_{2n}(2, 3)$. Na Figura 34 são apresentados dois exemplos de grafos circulantes $C_n(2, 3)$, para n par, nos quais $G(\frac{n}{2}, 1)$ é subgrafo (em **negrito**). E também, na Figura 35 são apresentados dois exemplos de grafos circulantes $C_n(3, 4)$ para n múltiplo de 4, nos quais $G(\frac{n}{4}, 1)$ é subgrafo. Note que a representação gráfica de ambos os casos explicita o grafo Prisma e esta representação será útil para construção da coloração total destas famílias de grafos.

Figura 34 - Exemplos de $C_n(2, 3)$ para n par.

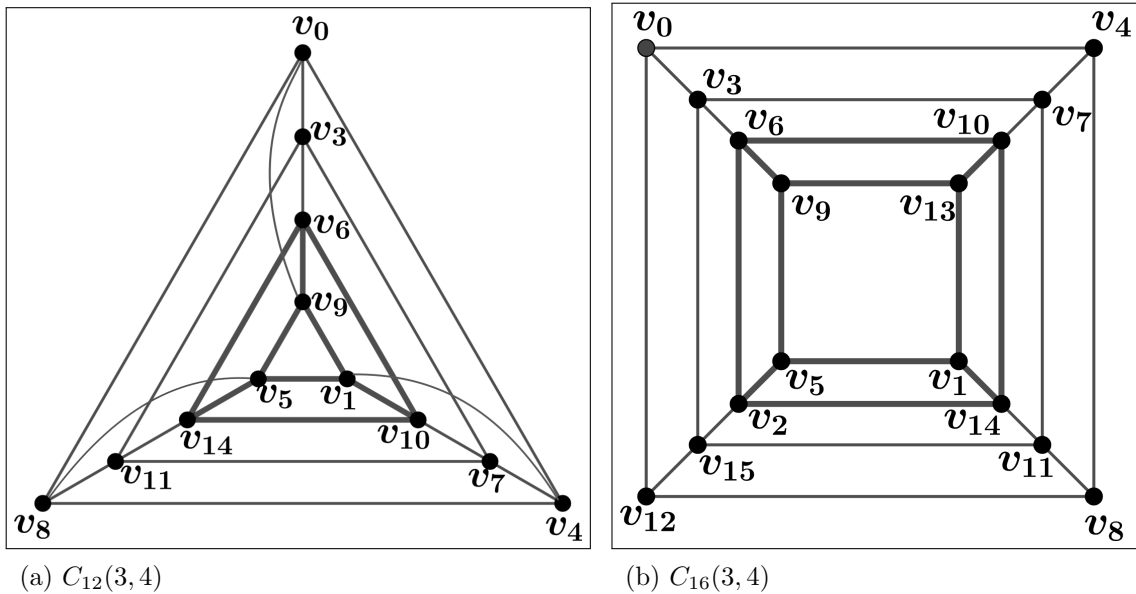


(a) $C_8(2, 3)$



(b) $C_{10}(2, 3)$

Fonte: O autor, 2021.

Figura 35 - Exemplos de $C_n(3, 4)$ para n múltiplo de 4.

Fonte: O autor, 2021.

Note que, usando-se uma 4-coloração-total para $G(4, 1)$ é possível construir uma 5-coloração-total para $C_8(2, 3)$, pois $v_0v_5, v_2v_7, v_1v_4, v_6v_3$ formam um emparelhamento perfeito, sendo assim possível colorir todas estas arestas com uma quinta cor. Além disso, a partir desta coloração e de uma 4-coloração-total de $G(3, 1)$ será possível construir uma 5-coloração-total para uma subfamília infinita de grafos circulares 4-regulares, que apresentaremos adiante.

Como ferramenta para provar o próximo teorema, definimos o seguinte semigrafo. Sejam n e a inteiros positivos com n múltiplo de a , onde $n = a \cdot k$. O semigrafo $B(n, a)$ é definido da seguinte forma:

- Os vértices de $B(n, a)$ são:

$$V(B(n, a)) := \bigcup_{i=0}^{a-1} V_i, \text{ com } V_i = \{v_{k \cdot i + j} \mid 0 \leq j < k\}.$$

- As arestas de $B(n, a)$ são:

$$E(B(n, a)) := \left(\bigcup_{i=0}^{a-1} E_i^H \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{a-2} E_i^V \right), \text{ com } E_i^H = \{v_{k \cdot i + j - 1} v_{k \cdot i + j} \mid 1 \leq j < k\} \text{ e } E_i^V = \{v_{i \cdot k + j} v_{(i+1) \cdot k + j} \mid 0 \leq j < k\}.$$

- As semiarestas de $B(n, a)$ são divididas em duas classes, chamadas de semiarestas verticais e semiarestas horizontais:

- Semiarestas verticais: $\{v_{i \cdot} \mid 0 \leq i < k\} \cup \{v_{(a-1) \cdot k + i \cdot} \mid 0 \leq i < k\}$. Cada parte é chamada de semiarestas superiores e semiarestas inferiores, respectivamente. Para $0 \leq i < k$, $v_{i \cdot}$ é i -ésima semiaresta superior e $v_{(a-1) \cdot k + i \cdot}$ é a i -ésima semiaresta inferior.

- Semiarestas horizontais: $\{v_{i \cdot k} \mid 0 \leq i < a\} \cup \{v_{(i+1) \cdot k-1} \mid 0 \leq i < a\}$. Cada parte é chamada de semiarestas à esquerda e semiarestas à direita, respectivamente.

Todo semigrafo isomorfo a $B(n, a)$ é chamado de n -grade de a andares. Temos como exemplo, a 15-grade de 3 andares, $B(15, 3)$, apresentada na Figura 36 com:

- Vértices $V = \bigcup_{i=0}^2 V_i$, onde $V_i = \{v_{5i+j} \mid 0 \leq j < 5\}$. Isto é, $V_0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $V_1 = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ e $V_2 = \{v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$.
- Arestas: $E = \left(\bigcup_{i=0}^2 E_i^H \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^1 E_i^V \right)$, onde $E_i^H = \{v_{5i+(j-1)}v_{5i+j} \mid 1 \leq j < 5\}$ e $E_i^V = \{v_{5i+j}v_{5(i+1)+j} \mid 0 \leq j < 5\}$.

Isto é:

$$E_0^H = \{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\};$$

$$E_1^H = \{v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9\};$$

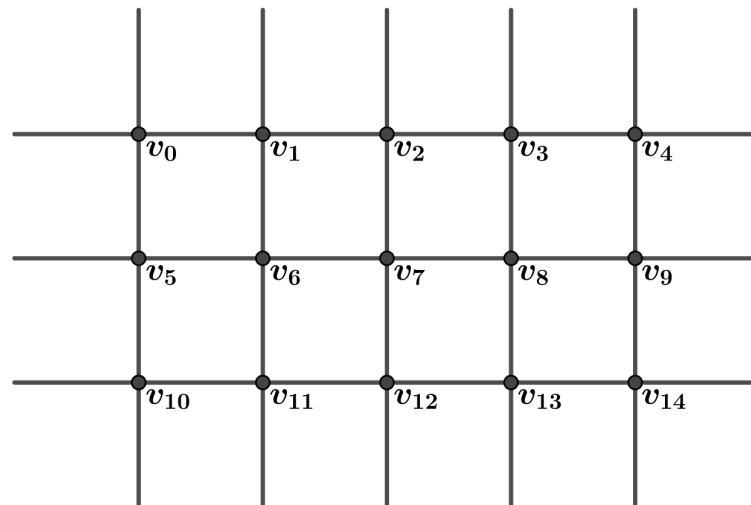
$$E_2^H = \{v_{10}v_{11}, v_{11}v_{12}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_{14}\};$$

$$E_0^V = \{v_0v_5, v_1v_6, v_2v_7, v_3v_8, v_4v_9\};$$

$$E_1^V = \{v_5v_{10}, v_6v_{11}, v_7v_{12}, v_8v_{13}, v_9v_{14}\}.$$

- Semiarestas:
 - Verticais: $\{v_{0 \cdot}, v_{1 \cdot}, v_{2 \cdot}, v_{3 \cdot}, v_{4 \cdot}\} \cup \{v_{10 \cdot}, v_{11 \cdot}, v_{12 \cdot}, v_{13 \cdot}, v_{14 \cdot}\}$. Onde $v_{i \cdot}$ é a i -ésima semiaresta superior e $v_{10+i \cdot}$ é a i -ésima semiaresta inferior, para $0 \leq i < 5$.
 - Horizontais: $\{v_{0 \cdot}, v_{5 \cdot}, v_{10 \cdot}\} \cup \{v_{4 \cdot}, v_{9 \cdot}, v_{14 \cdot}\}$.

Figura 36 - O semigrafo $B(15, 3)$.



Fonte: O autor, 2021.

Sejam duas semiarestas $x\cdot$ e $y\cdot$, a *junção* de $x\cdot$ com $y\cdot$ é dada pela aresta xy .

Sejam n, m, a e b inteiros positivos tal que $n/a = m/b = k$, a *colagem vertical* entre uma n -grade de a andares G e uma m -grade de b andares G' , como a $(n+m)$ -grade de $a+b$ andares GG' obtida pela junção das semiarestas inferiores de G com as semiarestas superiores de G' , isto é, a junção de $v_{(a-1)k+i}\cdot$ de G com $v_i\cdot$ de G' , para $0 \leq i < k$.

Sejam m, n, a, k e q inteiros positivos, tais que $n = a \cdot k$ e $m = a \cdot q$, a *colagem horizontal* entre uma n -grade de a andares G e m -grade de a andares G' , como a $(n+m)$ -grade de a andares GG' obtida pela junção das semiarestas à direita de G com as semiarestas à esquerda de G' , isto é, a junção de $v_{ik}\cdot$ de G com $v_{(i+1)q-1}\cdot$ de G' , para $0 \leq i < a$.

Sejam a, n, p inteiros positivos tal que $0 \leq p \leq k-1$, o p -*fechamento* de uma n -grade de a andares é o grafo obtido pela junção das:

- semiarestas horizontais à esquerda com as semiarestas horizontais à direita, isto é, a junção de $v_{ik}\cdot$ com $v_{(i+1)k-1}\cdot$ para $0 \leq i < a$, respectivamente.
- semiarestas verticais superiores com as semiarestas verticais inferiores. Para cada i -ésima semiaresta superior tem-se a junção com a $(i-p)$ -ésima semiaresta inferior, e as numerações são representadas em módulo k .

Como exemplo, ao realizar o 3-fechamento de $B(8, 2)$, isto é, a junção da:

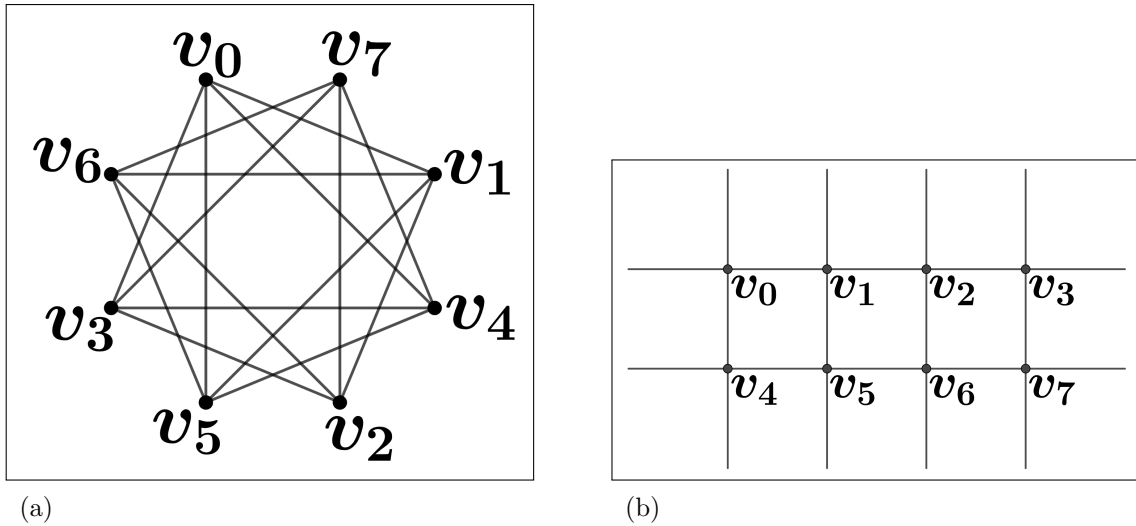
- 0-ésima semiaresta superior com a 1-ésima semiaresta inferior, pois $i-p = 0-3 = -3 \equiv 1 \pmod{4}$, isto é, a junção de $v_0\cdot$ e $v_5\cdot$;
- 1-ésima semiaresta superior com a 2-ésima semiaresta inferior, pois $i-p = 1-3 = -2 \equiv 2 \pmod{4}$, isto é, a junção de $v_1\cdot$ com $v_6\cdot$;
- 2-ésima semiaresta superior com a 3-ésima semiaresta inferior; pois $i-p = 2-3 = -1 \equiv 3 \pmod{4}$, isto é, a junção de $v_2\cdot$ com $v_7\cdot$.
- 3-ésima semiaresta superior com a 0-ésima semiaresta inferior, pois $i-p = 3-3 = 0$, isto é, a junção de $v_3\cdot$ com $v_4\cdot$;

Resultamos no grafo $C_8(2, 3)$ apresentado na Figura 37a.

Note que os índices dos vértices de $B(8, 2)$ não correspondem aos índices definidos para grafos circulantes, pois se referem ao semigrafo auxiliar definido até então. Porém, realizando uma permutação f entre os vértices da Figura 37b podemos ter estes índices correspondidos. Seja esta permutação definida como $f(v_0) = v_0$, $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_4$, $f(v_3) = v_6$, $f(v_4) = v_3$, $f(v_5) = v_5$ e $f(v_6) = v_7$ e $f(v_7) = v_1$, resultando no semigrafo da Figura 38b.

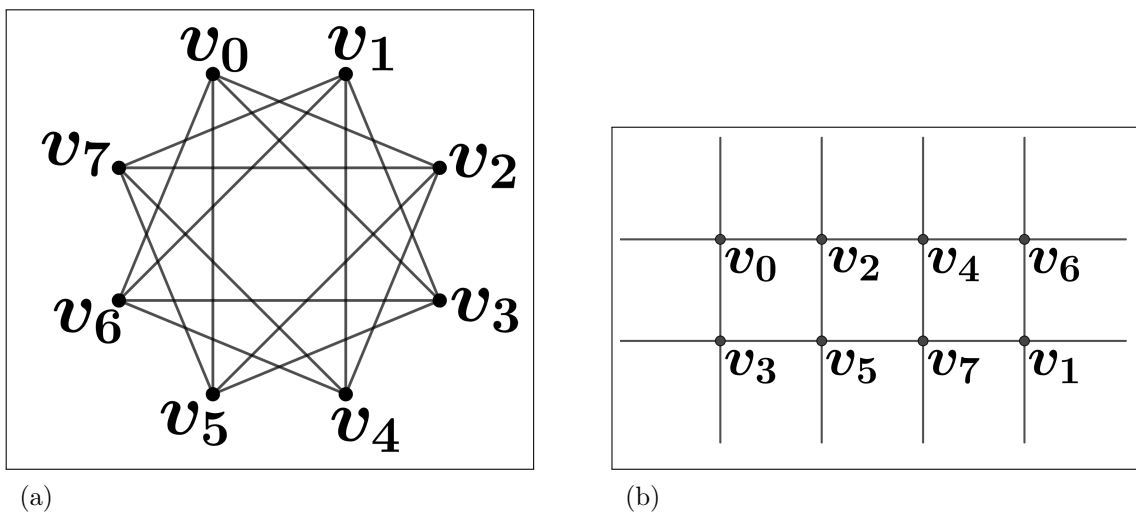
Note também que a construção de um p -fechamento de $B(n, a)$ é feita de maneira conveniente para sempre se obter um grafo circulante $C_n(a, p)$. O processo de prova é

Figura 37 - 3-fechamento resultando no $C_8(2,3)$.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 38 - $C_8(2,3)$ e $B(8,2)$ após a aplicação da função f .



Fonte: O autor, 2021.

similar ao exemplo anterior, onde realizando a permutação dos vértices e verificando as adjacências conclui-se que é o grafo circulante $C_n(a, p)$.

Lema 6. *Seja n múltiplo de a , p um número positivo e $\text{mdc}(a, p) = 1$ com $p < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. O p -fechamento de uma n -grade de a andares $B(n, a)$ é isomorfo ao grafo circulante $C_n(a, p)$.*

Demonstração. Denotemos o grafo resultante de $B(n, a)$ para um p -fechamento como G . Mostraremos que $G \simeq C_n(a, p)$. Para tal apresentaremos uma permutação dos vértices de $B(n, a)$ $V(B(n, a)) = \bigcup_{i=0}^{a-1} V_i$, com $V_i = \{v_{k \cdot i + j} \mid 0 \leq j < k\}$, de modo que estes vértices estabeleçam mesmas adjacências que os vértices de $C_n(a, p)$. Seja $f : V(B(n, a)) \rightarrow V(B(n, a))$ a permutação, definida como:

$$f(v_{k \cdot i + j}) = v_{i \cdot p + a \cdot j}$$

A realização desta permutação está representada na Figura 39. Note que após a aplicação de f , tem-se que as arestas horizontais e as semiarestas horizontais (após o p -fechamento) formam o conjunto de arestas de distância a e o conjunto de arestas verticais e semiarestas verticais formam o conjunto de arestas de distância p . Isto é, as adjacências de cada vértice correspondem aos vértices $C_n(a, p)$, como queríamos. \square

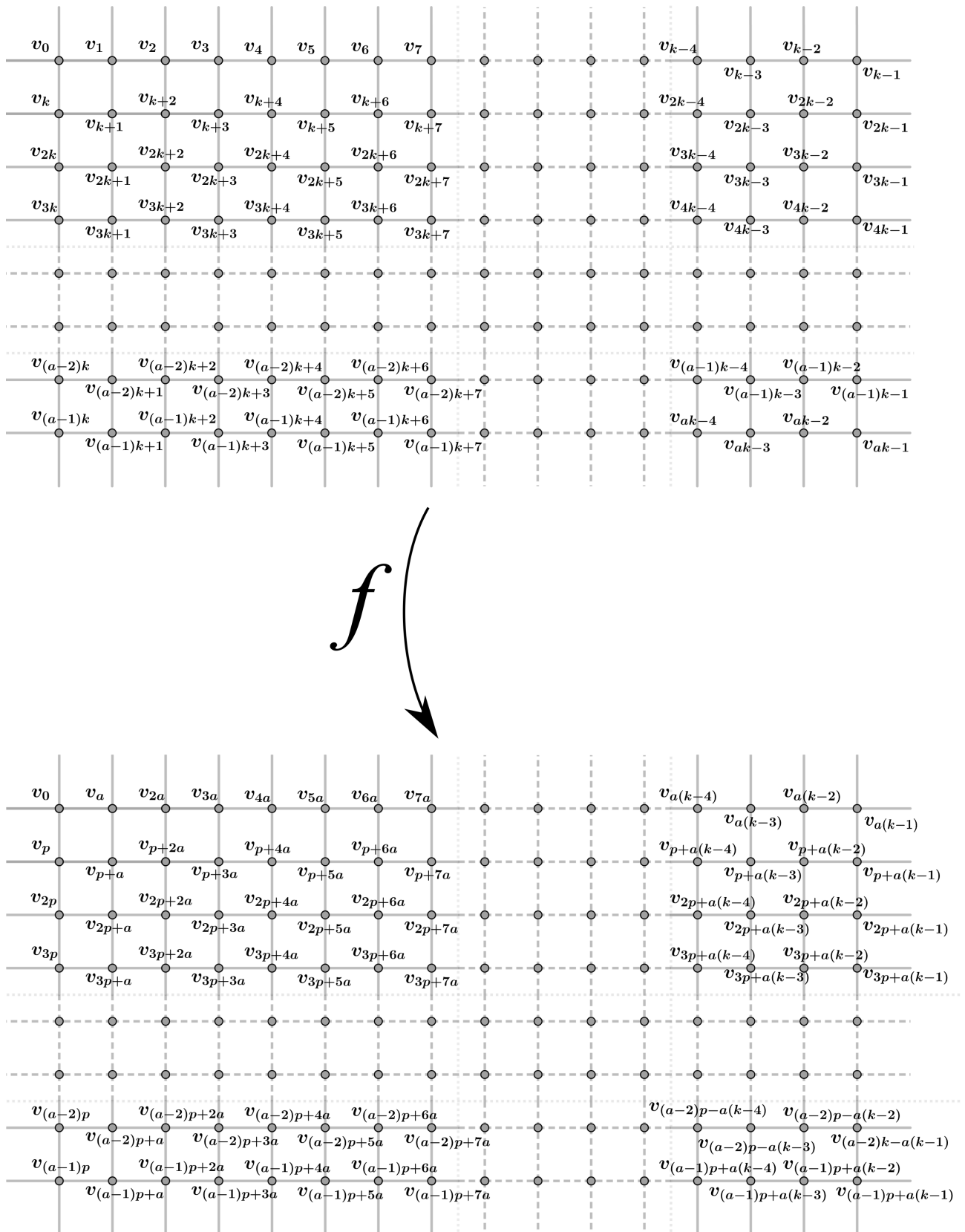
As representações dos semigrafos e dos grafos obtidos pelo p -fechamento podem estar com os índices de vértices tanto $v_{i \cdot k + j}$, quanto $f(v_{k \cdot i + j})$. Em geral, representamos os vértices com a permutação f para sinalizar diretamente quais semiarestas terão uma junção.

Uma 5-coloração-total ϕ de uma n -grade de a andares para um p -fechamento é chamada de *válida*, se:

- A cor atribuída por ϕ à semiaresta horizontal $v_{i \cdot k}$ é a mesma atribuída à $v_{(i+1)k-1}$, para $0 \leq i < a$.
- As cores atribuídas por ϕ aos vértices $v_{i \cdot k}$ e $v_{(i+1)k-1}$ são diferentes, para $0 \leq i < a$.
- A cor atribuída por ϕ à i -ésima semiaresta superior é a mesma atribuída à $(i - p)$ -ésima semiaresta inferior.
- A cor atribuída por ϕ ao vértice incidente à i -ésima semiaresta superior é diferente da cor atribuída ao vértice incidente à $(i - p)$ -ésima semiaresta inferior.

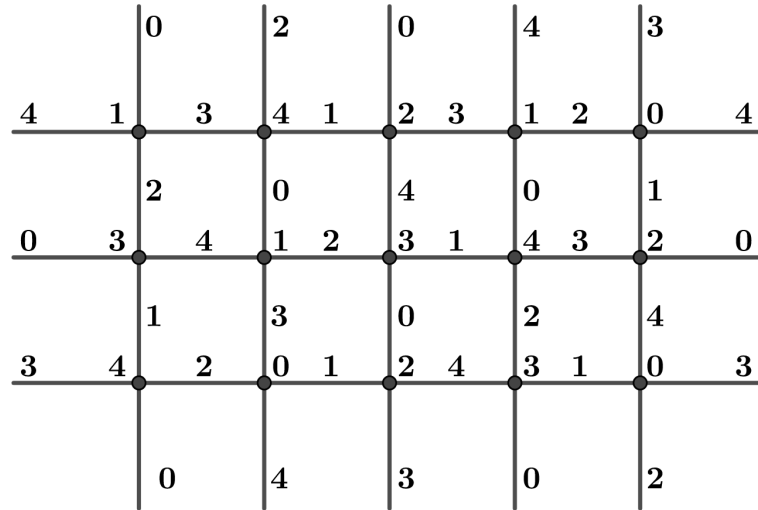
Como exemplo, temos apresentada na Figura 40 uma 5-coloração-total válida para um 2-fechamento de $B(15, 3)$. Com ela pode-se concluir que o grafo circulante $C_{15}(2, 3)$ é Tipo 1, pois o 2-fechamento de $B(15, 3)$ resulta no $C_{15}(2, 3)$. Vemos a 5-coloração-total de $C_{15}(2, 3)$ obtida a partir de $B(15, 3)$ na Figura 41.

Figura 39 - Aplicação da permutação f com o intuito de provar que o p -fechamento de $B(n, a)$ é o grafo $C_n(a, p)$.



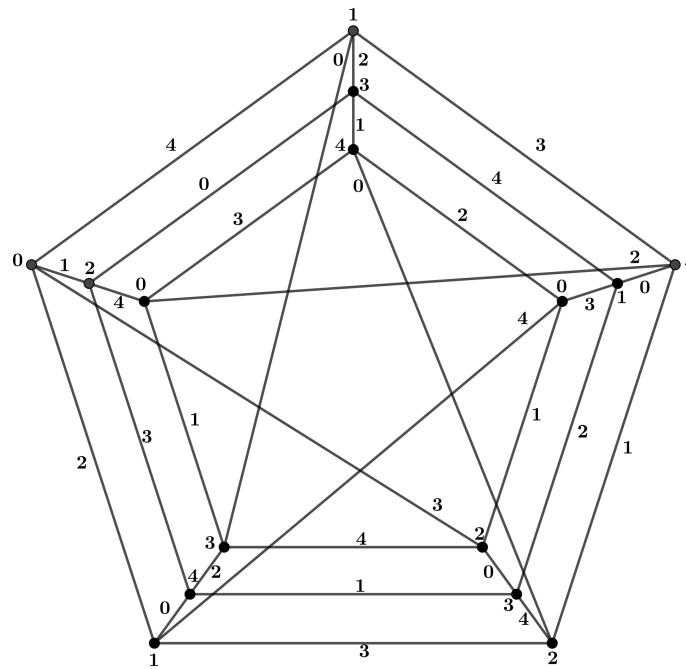
Fonte: O autor, 2021.

Figura 40 - 5-coloração-total válida para um 2-fechamento de $B(15, 3)$.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 41 - 5-coloração-total de $C_{15}(2, 3)$.



Fonte: O autor, 2021.

Uma 5–coloração-total de uma n –grade de a andares é chamada de *totalmente válida* se existe uma 5–coloração-total válida para qualquer p –fechamento, onde $p \in \mathbb{Z}_k$.

Sejam duas 5–colorações-totais válidas ϕ e ϕ' das n –grade de a andares e m –grade de b andares para um p –fechamento. Dizemos que ϕ é *compatível* com ϕ' , se a colagem horizontal e colagem vertical entre $B(n, a)$ e $B(m, b)$ resultam em uma 5–coloração-total válida. Quando ϕ e ϕ' resultam em uma 5–coloração-total válida apenas com a colagem vertical de $B(n, a)$ com $B(m, b)$, falamos que ϕ é *compatível verticalmente* com ϕ' (a definição é análoga para a colagem horizontal).

Temos como exemplo que $B(10, 2)$ não tem 5–coloração total válida e compatível verticalmente. De fato, note que $B(10, 2)$ com um 3–fechamento tem como subgrafo o grafo de Petersen generalizado $G(5, 1)$ na Figura 34a. Se existisse uma 5–coloração-total válida compatível verticalmente, as arestas v_0v_7 , v_2v_9 , v_4v_1 e v_8v_5 teriam a mesma cor, isto é, formariam um emparelhamento maximal (e perfeito), isto implicaria que o grafo $G(5, 1)$ é Tipo 1, uma contradição.

Veremos também que toda 5–coloração-total válida de $B(n, a)$ é compatível horizontalmente como indica o seguinte lema.

Lema 7. *Seja p um inteiro positivo tal que $0 \leq p \leq k - 1$, se $B(n, a)$ possui uma 5–coloração-total válida para um p –fechamento, então para qualquer $\lambda \geq 1$, $B(n\lambda, a)$ também possui uma 5–coloração-total válida para um p –fechamento.*

Demonstração. De fato, suponhamos que $B(n, a)$ tem uma 5–coloração-total válida para um p –fechamento, denotemos por ϕ . Provemos que ϕ é compatível horizontalmente consigo mesma, isto é, que após a colagem horizontal com λ cópias esta coloração mantém-se válida. Note que, pelo fato de ϕ ser válida, tem-se que não há conflito de cor na colagem da cópia de $B(n, a)$ consigo mesma, pois por definição a cor atribuída à semiaresta horizontal à esquerda é igual a cor atribuída à semiaresta horizontal à direita, assim como os vértices respectivos têm cores diferentes. E também, note que a cor atribuída à $(i - p)$ –ésima semiaresta inferior de $B(n, a)$ é a mesma cor atribuída à $(i - p)$ –ésima semiaresta inferior de $B(\lambda n, a)$, deste fato, para cada i –ésima semiaresta superior, temos que as $(i - p)$ –ésimas semiarestas inferiores têm mesma cor e seus respectivos vértices incidentes, cores diferentes. Conclui-se que $B(\lambda n, a)$ possui uma 5–coloração-total válida para um p –fechamento. \square

Uma consequência importante com o uso dos dois lemas anteriores é que ao determinar se um grafo é Tipo 1, estamos provando que infinitos outros grafos da família também são Tipo 1.

Teorema 18. *Seja n múltiplo de a , $\text{mdc}(a, b) = 1$ e $b < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Se $C_n(a, b)$ é Tipo 1, então para qualquer λ inteiro positivo $C_{\lambda n}(a, b)$ é Tipo 1.*

Demonstração. Suponhamos que $C_n(a, b)$ é um grafo Tipo 1, então pelo Lema 6, $B(n, a)$ para um b –fechamento possui uma 5–coloração total válida, pois esta operação resulta

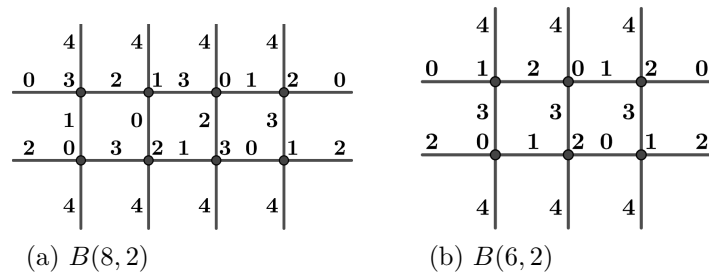
em $C_n(a, b)$. Pelo Lema 7, para qualquer λ inteiro positivo, tem-se que $B(\lambda n, a)$ possui uma 5-coloração total válida para um b -fechamento, portanto ao realizar esta operação para $B(\lambda n, a)$, tem-se que $C_{\lambda n}(a, b)$ é Tipo 1. \square

Teorema 19. *O grafo circulante 4-regular $C_n(2k, 3)$ é Tipo 1 para cada $k \geq 1$ e n tal que $n = (8\mu + 6\lambda)k$ para inteiros não negativos μ e λ .*

Demonstração. No caso que $C_{(8\mu+6\lambda)k}(2k, 3)$ é conexo a prova segue da seguinte forma:

Façamos as 5-colorações totais válidas para 3-fechamento de $B(8, 2)$ e $B(6, 2)$ de forma que ambas as colorações sejam compatíveis horizontalmente entre si e sejam compatíveis verticalmente com elas mesmas.

Figura 42 - $B(8, 2)$ e $B(6, 2)$



Fonte: O autor, 2021.

A consequência desta coloração e pelo auxílio do Lema 7 é que para cada $k \geq 1$, podemos definir duas 5-colorações-totais válidas para um 3-fechamento compatíveis entre si, uma para $B(6k\lambda, 2k)$, denotada por ϕ e outra para $B(8k\mu, 2k)$, denotada por ψ , onde μ e λ são inteiros não negativos. Como podemos obter $C_n(2k, 3)$ pela colagem horizontal de uma $6k\lambda$ -grade de $2k$ andares e com uma $8k\mu$ -grade de $2k$ andares e realizando em seguida o 3-fechamento de $B(8k\mu + 6k\lambda, 2k)$, temos que a afirmação está provada.

Vamos definir uma 5-coloração-total ϕ com as cores 0, 1, 2, 3, 4 para $B(6k\lambda, 2k)$, apresentada na Figura 43.

Para $0 \leq i < 2k$ e $0 \leq j < 3\lambda$ tem-se:

- As semiarestas verticais:

$$\phi(v_{j\cdot}) = \phi(v_{(2k-1)3\lambda+j\cdot}) = 4 \quad (2)$$

- As semiarestas horizontais:

$$\phi(v_{i(3\lambda)\cdot}) = \phi(v_{(i+1)(3\lambda)-1\cdot}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ é par} \\ 2, & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (3)$$

- Os vértices $\bigcup_{i=0}^{2k-1} V_i$:

$$\phi(v_{i(3\lambda)+j}) = \begin{cases} 2j + 1 \pmod 3, & \text{se } i \text{ é par} \\ 2j \pmod 3, & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (4)$$

- As arestas em $\bigcup_{i=0}^{2k-1} E_i^H$, para $j \neq 0$:

$$\phi(v_{i(3\lambda)+j-1}v_{i(3\lambda)+j}) = \begin{cases} 2(j-1) + 2 \pmod 3, & \text{se } i \text{ é par} \\ 2(j-1) + 1 \pmod 3, & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (5)$$

- As arestas em $\bigcup_{i=0}^{2k-2} E_i^V$:

$$\phi(v_{i(3\lambda)+j}v_{(i+1)(3\lambda)+j}) = \begin{cases} 3, & \text{se } i \text{ é par} \\ 4, & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (6)$$

Agora, vamos definir uma 5-coloração-total ψ com as cores 0, 1, 2, 3, 4 para $B(8k\mu, 2k)$, apresentada na Figura 44:

Para $0 \leq i < 2k$ e $0 \leq j < 4\mu$ tem-se:

- As semiarestas verticais:

$$\psi(v_{j\cdot}) = \psi(v_{(2k-1)(4\mu)+j}) = 4 \quad (7)$$

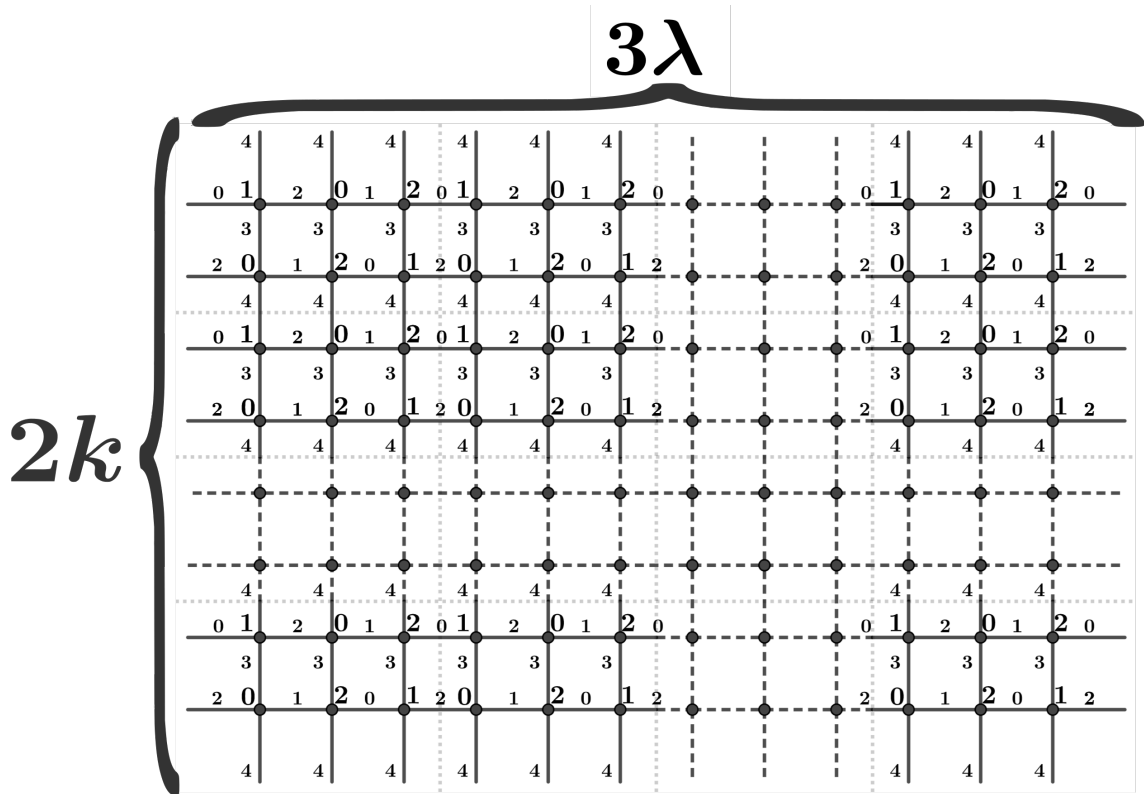
- As semiarestas horizontais:

$$\psi(v_{i(4\mu)\cdot}) = \psi(v_{(i+1)(4\mu)-1\cdot}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ é par} \\ 2, & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (8)$$

- Os vértices $\bigcup_{i=0}^{2k-1} V_i$:

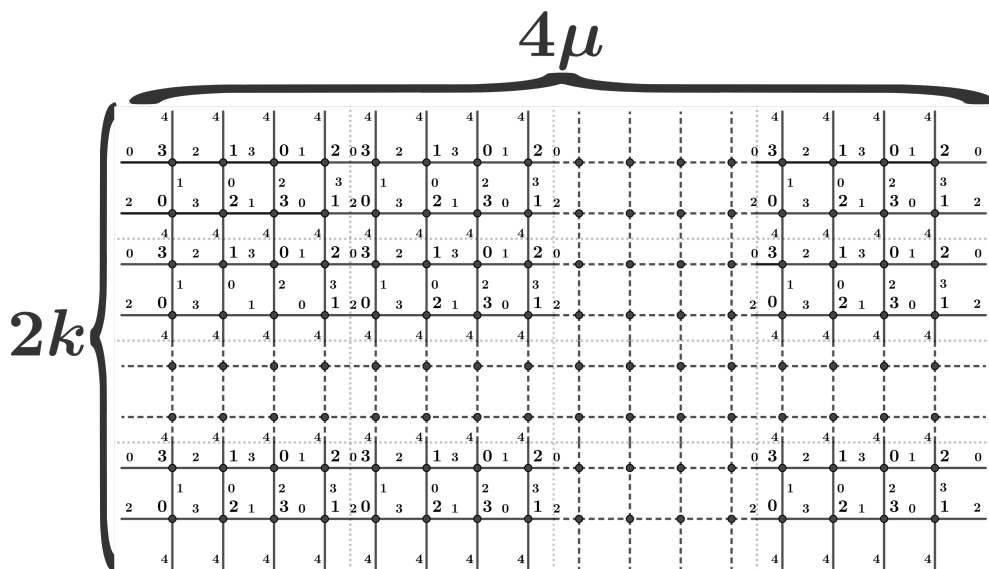
$$\psi(v_{i(4\mu)+j}) = \begin{cases} 0, & \text{se } (i \text{ é par e } j \equiv 3 \pmod 4) \text{ ou } (i \text{ é ímpar e } j \equiv 0 \pmod 4) \\ 1, & \text{se } (i \text{ é par e } j \equiv 1 \pmod 4) \text{ ou } (i \text{ é ímpar e } j \equiv 3 \pmod 4) \\ 2, & \text{se } (i \text{ é par e } j \equiv 3 \pmod 4) \text{ ou } (i \text{ é ímpar e } j \equiv 1 \pmod 4) \\ 3, & \text{se } (i \text{ é par e } j \equiv 0 \pmod 4) \text{ ou } (i \text{ é ímpar e } j \equiv 2 \pmod 4) \end{cases}$$

Figura 43 - 5-coloração-total válida e compatível de $B(6k\lambda, 2k)$.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 44 - 5-coloração-total válida e compatível de $B(8k\mu, 2k)$.



Fonte: O autor, 2021.

(9)

- As arestas em $\bigcup_{i=0}^{2k-1} E_i^H$, para $j \neq 0$:

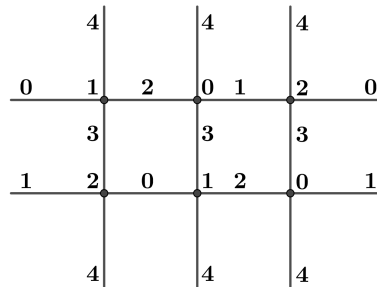
$$\psi(v_{i(4\mu)+j-1}v_{i(4\mu)+j}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ é par e } j \equiv 3 \pmod{4} \\ 1, & \text{se } (i \text{ é par e } j \equiv 3 \pmod{4}) \text{ ou } (i \text{ é ímpar e } j \equiv 2 \pmod{4}) \\ 2, & \text{se } i \text{ é par e } j \equiv 1 \pmod{4} \\ 3, & \text{se } (i \text{ é par e } j \equiv 2 \pmod{4}) \text{ ou } (i \text{ é ímpar e } j \equiv 1 \pmod{4}) \end{cases} \quad (10)$$

- As arestas em $\bigcup_{i=0}^{2k-2} E_i^V$:

$$\psi(v_{i(4\mu)+j}v_{(i+1)(4\mu)+j}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ é par e } j \equiv 1 \pmod{4} \\ 1, & \text{se } i \text{ é par e } j \equiv 0 \pmod{4} \\ 2, & \text{se } i \text{ é par e } j \equiv 2 \pmod{4} \\ 3, & \text{se } i \text{ é par e } j \equiv 3 \pmod{4} \\ 4, & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (11)$$

Conclui-se que as 5-colorações-totais válidas φ e ψ dos semigrafos $B(6k\lambda, 2k)$ e $B(8k\mu, 2k)$, respectivamente, por serem compatíveis (tanto verticalmente como horizontalmente) entre si, possibilitam na 5-coloração total do grafo $C_n(2k, 3)$.

Figura 45 - 5-coloração total válida para 1-fechamento de $B(6, 2)$.



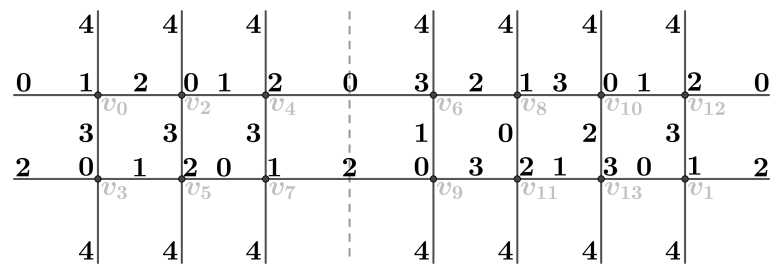
Fonte: O autor, 2021.

Caso contrário, isto é, quando $C_{(8\mu+6\lambda)k}(2k, 3)$ é desconexo, temos que $k \equiv 0 \pmod{3}$. Neste caso, denote $k = 3\alpha$. Note também que $C_{(8\mu+6\lambda)3\alpha}(3, 6\alpha)$ é composto por 3 cópias do grafo $C_{(8\mu+6\lambda)\alpha}(1, 2\alpha)$. A coloração segue o mesmo raciocínio anterior, porém temos os casos que $\mu \neq 0$ ou $\mu = 0$. No primeiro caso, usa-se a colagem entre $B(8k\mu, 2k)$ e

$B(6k\lambda, 2k)$, com colorações ϕ e μ , respectivamente, donde a colagem entre ambos resultam em uma 5-coloração total válida para 1-fechamento. No segundo caso, note que a coloração ψ em $B(6, 2)$ não é válida para 1-fechamento. Logo, ajustaremos a coloração de ψ usando como base a 5-coloração total válida para 1-fechamento apresentada na Figura 45. Esta coloração é compatível verticalmente consigo mesma, sendo assim possível definir a coloração total válida para 1-fechamento de $B(6k\lambda, 2k)$. Isto finaliza a prova. \square

Como exemplo, temos uma aplicação deste teorema para o caso do grafo conexo $C_{14}(2, 3)$. Neste caso, tem-se que $k = 1$ e a coloração do semigrafo $B(14, 2)$ é obtida através da colagem horizontal de $B(6, 2)$ com $B(8, 2)$ coloridos (definidos por φ e ψ), apresentados na Figura 46 (onde os vértices na figura já estão permutados para adjacência de um grafo circulante). Esta coloração é válida para um 3-fechamento, isto é, a junção das semiarestas horizontais $v_0\cdot$ com $v_6\cdot$ e $v_7\cdot$ com $v_{13}\cdot$ e, também a junção das semiarestas verticais $v_0\cdot$ com $v_{11}\cdot$, $v_1\cdot$ com $v_{12}\cdot$, $v_2\cdot$ com $v_{13}\cdot$, $v_3\cdot$ com $v_7\cdot$, $v_4\cdot$ com $v_8\cdot$, $v_5\cdot$ com $v_9\cdot$ e $v_6\cdot$ com $v_{10}\cdot$ não trazem conflito. Assim, obtemos o grafo $C_{14}(2, 3)$ com uma 5-coloração total, apresentado na Figura 47.

Figura 46 - O semigrafo $B(14, 2)$.



Fonte: O autor, 2021.

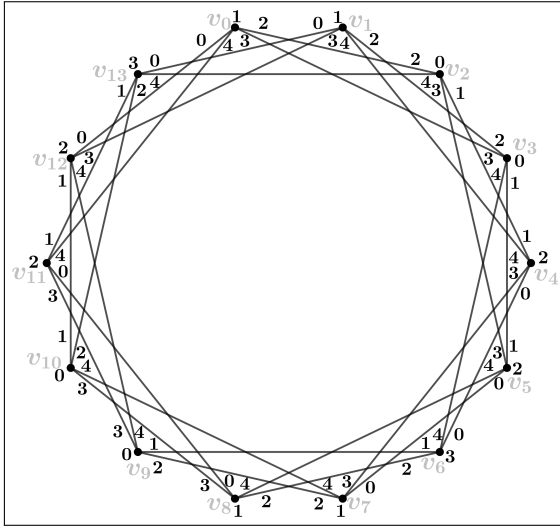
Como para quaisquer inteiros positivos μ, λ tem-se que $4\mu + 3\lambda \neq 5$ então $(8\mu + 6\lambda)k \neq 10k$. Para $k = 1$, tem-se que, por exemplo o grafo $C_{10}(2, 3)$ não está abrangido neste teorema. Porém por meio de força bruta é possível encontrar a 5-coloração total deste, apresentado na Figura 48.

Corolário 2. *O grafo circulante $C_n(2, 3)$, para n par e $n \geq 6$ é Tipo 1.*

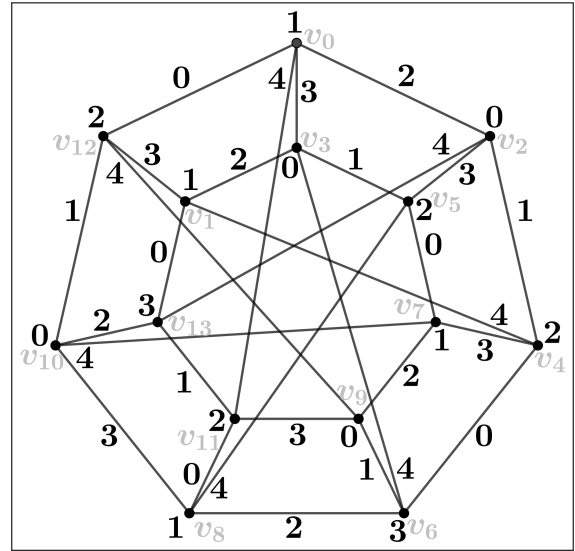
Outra consequência está na coloração do caso desconexo, isto é, para μ e λ inteiros positivos, tem-se que o grafo $C_{(8\mu+6\lambda)k}(1, 2k)$ é Tipo 1. Este fato para $k = 1$ resulta em uma potência de ciclo, para a qual Campos [27] já determinou o número cromático total.

Sabe-se pelo Teorema 15 que $C_{6n}(1, k)$ é Tipo 1, para $k \equiv 1 \pmod{3}$ ou $k \equiv 2 \pmod{3}$ com $k < 3n$. Logo para quando $k \equiv 0 \pmod{3}$ não se sabe seu número cromático total. O uso do Teorema 19 no caso desconexo, possibilita para o caso $\mu = 0$, concluir o seguinte corolário.

Figura 47 - Grafo $C_{14}(2, 3)$ com 5 cores.



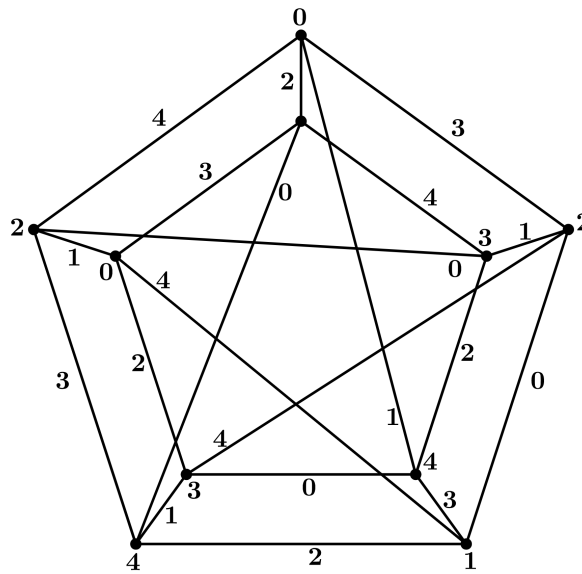
(a) O grafo $C_{14}(2, 3)$ na forma usual



(b) O grafo $C_{14}(2, 3)$ com o subgrafo $G(7, 1)$.

Fonte: O autor, 2021.

Figura 48 - 5-coloração total de $C_{10}(2, 3)$



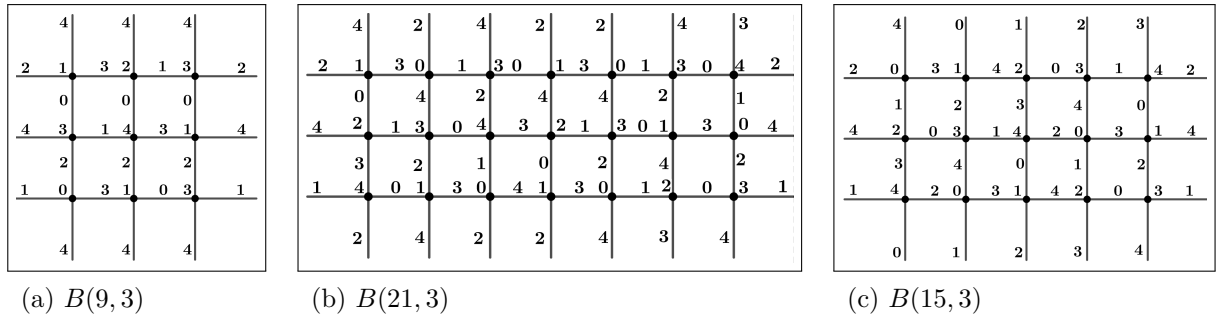
Fonte: O autor, 2021.

Corolário 3. Para k par e $n \neq 5k$, os grafos $C_{3nk}(1, k)$ são Tipo 1.

Teorema 20. Os grafos $C_{3n}(1, 3)$ são Tipo 1, exceto $C_{12}(1, 3)$ que é Tipo 2.

Demonstração. A prova é realizada em três casos.

Figura 49 - 5-coloração total válida para um 1-fechamento de $B(9, 3)$, $B(21, 3)$ e $B(15, 3)$.



Fonte: O autor, 2021.

- Para $n \equiv 0 \pmod{3}$:

Note que existe uma 5-coloração total válida para um 1-fechamento de $B(9, 3)$, apresentada na Figura 49a. Pelo Lema 7, tem-se que existe uma 5-coloração válida para 1-fechamento de $B(9\lambda, 3)$, donde $n = 3\lambda$. Portanto, possui uma 5-coloração total para $C_{3n}(1, 3)$ com $n \equiv 0 \pmod{3}$.

- Para $n \equiv 1 \pmod{3}$:

Provemos agora que $C_{3n}(1, 3)$, para $n \equiv 1 \pmod{3}$, com $n \neq 4$ é Tipo 1. Para tal, apresentamos uma 5-coloração total válida para 1-fechamento de $B(21, 3)$, apresentada na Figura 49b.

Note também que as colorações entre $B(21, 3)$ e $B(9, 3)$ são compatíveis horizontalmente, pois a colagem de $B(21, 3)$ com $B(9, 3)$ coloridos não traz conflitos para 1-fechamento. Logo, podemos realizar a colagem de forma recursiva ao ponto de gerar uma 5-coloração total válida para 1-fechamento de $B(21 + 9\lambda, 3)$, donde $n = 1 + 3(\lambda + 2)$. Portanto, $C_{3n}(1, 3)$ é Tipo 1, para $n \equiv 1 \pmod{3}$ e $n \neq 4$.

- $n \equiv 2 \pmod{3}$: Analogamente ao caso anterior, note que pelo Teorema 14, $C_{15}(1, 3)$ é Tipo 1. Portanto, existe uma 5-coloração total válida para 1-fechamento de $B(15, 3)$, apresentada na Figura 49c.

Analogamente, as colorações entre $B(15, 3)$ e $B(9, 3)$ são compatíveis horizontalmente, pois a colagem de $B(15, 3)$ com $B(9, 3)$ coloridos não traz conflitos para 1-fechamento. Logo, podemos realizar a colagem de forma recursiva ao ponto de gerar uma 5-coloração total válida para 1-fechamento de $B(15 + 9\lambda, 3)$, donde $n = 2 + 3(\lambda + 1)$. Portanto, $C_{3n}(1, 3)$ é Tipo 1, para $n \equiv 2 \pmod{3}$.

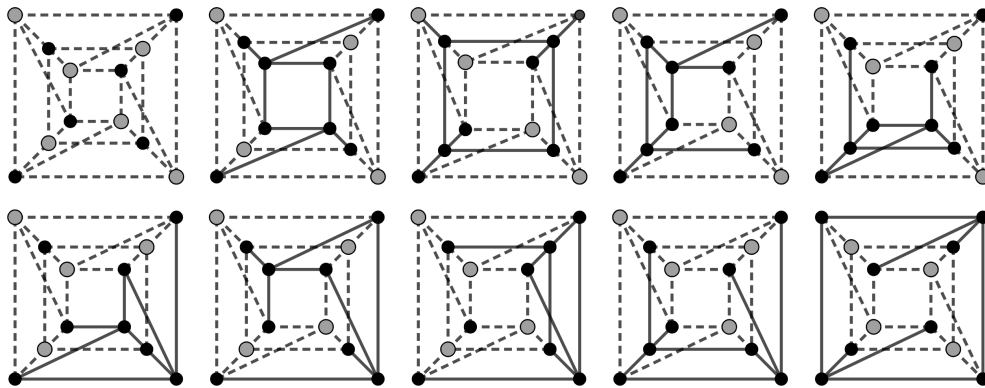
Por fim, mostraremos que $C_{12}(1, 3)$ é Tipo 2. Para tal, mostraremos que para qualquer coloração harmônica deste grafo, não haverá uma coloração total. Primeiramente, seja i_j o número de vértices coloridos com a cor c_j , note que toda coloração harmônica deve respeitar a seguinte condição: $i_1 \equiv i_2 \equiv i_3 \equiv i_4 \equiv i_5 \equiv |V(C_{12}(1, 3))| \pmod{2}$.

Portanto, tem-se que $i_j \leq 6$, onde $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pois o conjunto independente máximo é 6. Suponhamos que para algum $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tem-se que $i_k = 6$. Então a menos de alguma rotação, existe uma única coloração para c_k , representada em vértices cinzas e suas arestas incidentes de forma pontilhada, significando que estas arestas não poderão ter a cor c_k . A Figura 50 ilustra essa situação. Note que nenhuma aresta do grafo poderá ser colorida com a cor c_k , pois cada vértice não colorido terá como vizinhos 4 vértices com a cor c_k . Logo todas as arestas incidentes a este vértice não poderão ter cor c_k . Conclui-se que não pode existir uma 5-coloração total com $i_k = 6$.

Se para algum $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tem-se $i_k = 4$, a coloração de c_k poderá ocorrer de 3 formas, ou quando há 2 vértices coloridos no ciclo $v_0v_3v_6v_9v_0$, ou quando há 1 vértice colorido neste ciclo, ou quando há nenhum vértice colorido neste ciclo.

No primeiro caso a coloração ocorre de 4 formas, no segundo caso ocorre de 4 formas também e o último caso ocorre de forma única, todos apresentados na Figura 50.

Figura 50 - Todos os casos considerados para coloração harmônica de $C_{12}(1, 3)$.



Fonte: O autor, 2021.

De qualquer forma, teremos ao menos uma das contradições.

1. Haverá algum vértice onde todos os vizinhos tem cor c_k , como no caso anterior e assim nenhuma de suas arestas incidentes poderá ter essa cor.
2. A componente restante (de arestas não pontilhadas) tem emparelhamento máximo de tamanho 2, impossibilitando todos vértices que não têm cor c_k de terem ao menos uma aresta incidente de cor c_k .

Portanto, neste caso não poderá existir uma 5-coloração total para $C_{12}(1, 3)$.

Dessa forma, não existe coloração harmônica com $i_k = 6$ ou $i_k = 4$ que não resulte em uma das contradições. E assim concluímos que não existe uma 5-coloração total para $C_{12}(1, 3)$.

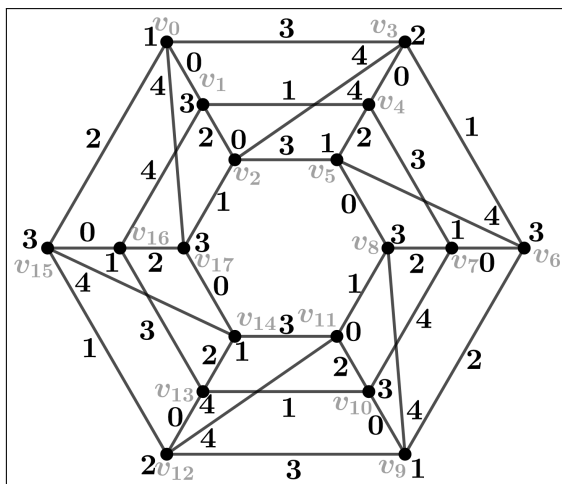
□

Apresentamos a 5-coloração total do $C_{18}(1, 3)$ na Figura 51, como um exemplo.

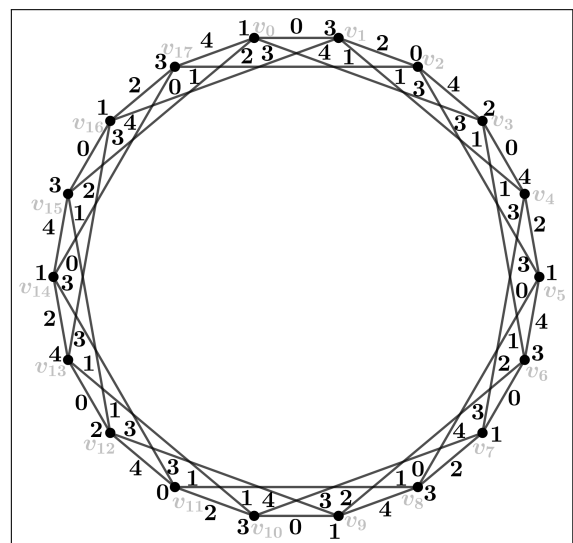
Figura 51 - 5-coloração total de $C_{18}(1, 3)$.

	4	4	4	...	4	4	4		
2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
	v_0	v_3	v_6	...	v_9	v_{12}	v_{15}		
	0	0	0	...	0	0	0		
4	3	1	4	3	1	4	3	1	4
	v_1	v_4	v_7	...	v_{10}	v_{13}	v_{16}		
	2	2	2	...	2	2	2		
1	0	3	1	0	3	1	0	3	1
	v_2	v_5	v_8	...	v_{11}	v_{14}	v_{17}		
	4	4	4	...	4	4	4		

(a) 5-coloração total válida de $B(18, 3)$ para 1-fechamento.



(b) Representação de $C_{18}(1, 3)$ com grafo Prisma $G(6, 1)$ como subgrafo.



(c) $C_{18}(1, 3)$ na sua representação usual.

Fonte: O autor, 2021.

Teorema 21. Para qualquer λ inteiro positivo e $k \equiv 0 \pmod 3$, os grafos $C_{3\lambda k}(1, k)$ são Tipo 1.

Demonstração. Para k par e múltiplo de 3 já está provado, conforme o Corolário 3. Fazemos a prova para o caso em que k é ímpar e múltiplo de 3.

Observe a 5-coloração total válida para 1-fechamento φ de $B(9, 3)$ apresentado na Figura 49a. Note que φ não é compatível verticalmente consigo mesma, pois $\varphi(v_2) =$

$\varphi(v_8) = 3$, isto é, teremos dois vértices adjacentes de mesma cor após a colagem. Definimos ψ como a 5-coloração total válida para 1-fechamento de $B_1(9, 3)$, uma cópia de $B(9, 3)$:

- $\psi(v_0) = 3, \psi(v_0v_1) = 1, \psi(v_1v_2) = 3, \psi(v_2) = 1;$
- $\psi(v_3) = 1, \psi(v_3v_4) = 3, \psi(v_4v_5) = 1, \psi(v_5) = 3;$
- $\psi(v_6) = 3, \psi(v_6v_7) = 0, \psi(v_7v_8) = 3, \psi(v_8) = 0.$

Assim temos que φ e ψ são compatíveis verticalmente.

Façamos então o processo de atribuir a coloração φ a $B_i(9, 3)$ quando i é par e ψ quando i é ímpar, onde $0 \leq i \leq \frac{k}{3} - 1$. Portanto, no processo de colagem vertical entre $B_0(9, 3), B_1(9, 3), \dots, B_{\frac{k}{3}-1}(9, 3)$, respectivamente, não haverá conflito de cor. Resultando

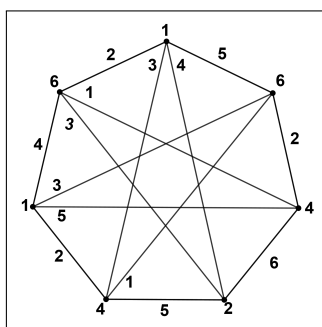
em uma 5-coloração total válida para 1-fechamento de $B(\overbrace{9+9+\dots+9}^{\frac{k}{3}}, \overbrace{3+3+\dots+3}^{\frac{k}{3}}) \simeq B(3k, k)$. Concluímos que $C_{3k}(1, k)$ é Tipo 1. Além disso, pelo Teorema 18, temos que para qualquer λ inteiro positivo, $C_{3\lambda k}(1, k)$ é Tipo 1, o que completa a prova. \square

Sabe-se pelo Teorema 10 que $C_7(1) \simeq C_7$ é Tipo 2 e pelo Teorema 17 que $C_7(1, 2)$ é Tipo 2. Veremos a seguir, que este fato continua ocorrendo para $C_7(1, 3)$.

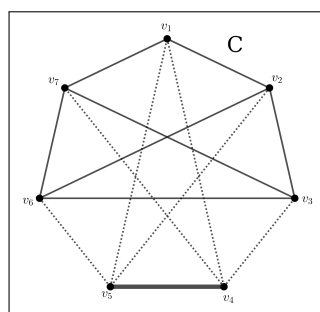
Com o estudo do Teorema 6 exposto na Introdução, podemos provar que $C_7(1, 3)$, apresentado na Figura 52, é Tipo 2.

Teorema 22. *O grafo $C_7(1, 3)$ é Tipo 2.*

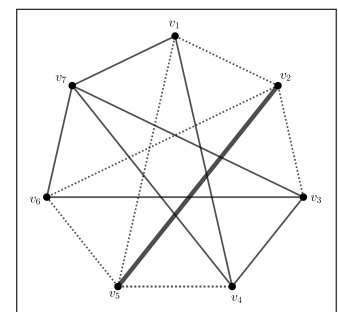
Figura 52 - Grafo $C_7(1, 3)$.



(a) $C_7(1, 3)$ com 6 cores



(b) $e \in E_1(C_7(1, 3))$ é emparelhada



(c) $e \in E_2(C_7(1, 3))$ é emparelhada

Fonte: O autor, 2021.

Demonstração. Suponha por absurdo que $C_7(1, 3)$ possui um emparelhamento maximal de tamanho no máximo $\lfloor \frac{14}{5} \rfloor = 2$. Se emparelharmos uma aresta $e \in E_1(C_7(1, 3))$, então restará uma componente conexa com 7 possíveis arestas a serem emparelhadas (Figura 52b, com $e = v_4v_5$ como exemplo). Tomando qualquer outra aresta desta componente

para o emparelhamento, tem-se que este não será maximal, logo $|M| > 2$. De maneira análoga, ao emparelharmos a aresta $e \in E_2(C_7(1, 3))$, restará uma componente com um vértice de grau 4 e seus vértices adjacentes com grau 2, como é visto na Figura 52c, onde $e = v_2v_5$ como exemplo. Deste modo, emparelhar qualquer aresta resta sempre uma aresta não emparelhada. Assim, concluímos que $|M| > 2$, contradição. A Figura 52a ilustra uma coloração de $C_7(1, 3)$ com 6 cores, o que encerra a prova. \square

Encerramos este capítulo com as informações sobre a divulgação dos resultados. O Teorema 19 foi aceito para apresentação oral no ETC² do CSBC 2020 e o Teorema 22 foi aceito para apresentação de pôster no LATIN 2020³ e por fim foram submetidos os resultados dos Teoremas 17 ao 20 para o LAGOS 2021⁴ com posterior publicação no *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*.

² V Encontro de Teoria da Computação, link: <<https://sol.sbc.org.br/index.php/etc/article/view/11095>>

³ 14th Latin American Theoretical Informatics Symposium

⁴ 9th Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium

CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação, apresentamos um estudo detalhado sobre os resultados existentes sobre o problema de coloração total na classe dos grafos circulantes e desenvolvemos novos resultados para contribuir com o estado da arte deste tema.

No Capítulo 1, exibimos os resultados existentes, valendo ressaltar que todos os grafos circulantes cúbicos tiveram seus números cromáticos totais determinados, bem como todos os membros de duas subfamílias de circulantes 4-regulares. Ainda neste capítulo, citamos alguns problemas em aberto que conseguimos contribuir e ainda serão tópicos de nosso interesse.

No Capítulo 2, criamos técnicas que nos possibilitaram provar que todos os membros de três famílias infinitas de circulantes 4-regulares são Tipo 1, e apresentamos a prova de que um grafo circulante 4-regular é Tipo 2. Estes resultados contribuíram com a conjectura de 2008 de que todos os circulantes 4-regulares são Tipo 1, exceto por uma quantidade finita de grafos que são Tipo 2.

A Tabela 1 apresenta o estado da arte no tema (onde há as contribuições deste trabalho grifados em cinza), através da classificação dos circulantes quanto ao seu número cromático total. Dentre os grafos circulantes $C_n(a, b)$ com $1 \leq a < b < \lfloor n/2 \rfloor$ sabemos que existe muitos que são Tipo 1 e que conhecemos três ($C_7(1, 2)$, $C_8(1, 3)$ e $C_{12}(1, 3)$) que são Tipo 2. Isto nos leva a conjecturar o seguinte:

Conjectura 4. *Os grafos circulantes $C_n(a, b)$ com $1 \leq a < b < \lfloor n/2 \rfloor$ são Tipo 1, exceto para uma coleção finita Tipo 2.*

Para o futuro

Temos as seguintes ideias para o futuro:

- Determinar o número cromático total de $C_n(a, b)$, verificando se é válida a conjectura que propomos.
- Determinar o número cromático total de $C_n(a_1, a_2, \dots, a_k)$ para $k > 2$.
- Investigar a conjectura das potências de ciclo proposta por Campos em 2006 e verificar se esta pode ser estendida à alguma classe de circulantes.

Tabela 1 - Estado da arte.

Teorema / Referência	Grafos circulares	Tipo 1	Tipo 2
Teorema 10 (Yap [6], 1996)	$C_n(1)$ Ciclo	$n \equiv 0 \pmod 3$	caso contrário.
Teorema 8 (Yap [6], 1996)	$C_n(1, 2, 3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor)$ Completo	n é ímpar	caso contrário.
Teorema 9 (Yap [6], 1996)	$C_{2n}(1, 3, \dots, k)$ Bipartido completo		k é o maior ímpar tal que $k \leq n$
Teorema 13 (Hackmann e Kemnitz [6], 2004)	$C_{2n}(d, n)$ Cúbico	$l = \text{mdc}(d, n)$, $d = lm$, m é par e $C_{2n}(d, n) \notin \mathcal{LC}_{10}(2, 5)$	caso contrário
Teorema 16 (Campos [27], 2006)	$C_n(1, 2)$ Potência de ciclo	$n \neq 7$	caso contrário.
Teorema 14 (Khennoufa e Togni [29], 2008)	$C_{5n}(1, k)$	$k \equiv 2 \pmod 5$ ou $k \equiv 3 \pmod 5$	
Teorema 15 (Khennoufa e Togni [29], 2008)	$C_{6n}(1, k)$	$k \equiv 1 \pmod 3$ ou $k \equiv 2 \pmod 3$	
Teorema 19	$C_n(2k, 3)$	$n = (8\mu + 6\lambda)k$ e $k \geq 1$	
Teorema 20	$C_{3n}(1, 3)$	$n \neq 4$	caso contrário.
Teorema 21	$C_{3nk}(1, k)$	$k \equiv 0 \pmod 3$	

Legenda: Denotamos $\mathcal{LC}_{10}(2, 5)$ para l cópias de $C_{10}(2, 5)$.

Fonte: O autor, 2021.

REFERÊNCIAS

- 1 MONAKHOVA, E. A. A survey on undirected circulant graphs. *Discrete Math. Algorithms Appl.*, v. 04, n. 01, 2012.
- 2 WONG, C. K.; COPPERSMITH, D. A combinatorial problem related to multimodle memory organizations. *J. Assoc. Comput. Mach.*, p. 392–402, 1974.
- 3 AHO, A.; SETHI, R.; ULLMAN, J. *Compiladores: princípios, técnicas e ferramentas*. Massachusetts: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1995.
- 4 LEIDNER, M. E. *A study of the total coloring of graphs*. 103 f. Tese (Doutorado) — University of Louisville, Kentucky, 2012.
- 5 BONDY, J.; MURTY, U. *Graph Theory*. New York: Springer, 2008.
- 6 YAP, H. *Total Colorings of Graphs*. Germany: Springer, 1996.
- 7 GAREY, M.; JOHNSON, D. *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-Completeness*. United States of America: W. H. Freeman/Worth Publishers, 1979.
- 8 SIPSER, M. *Introduction to the theory of computation*. Massachusetts: PWS Publishing Company, 1997.
- 9 CHETWYND, A. G.; HILTON, A. J. W. Some refinements of the total chromatic number conjecture. *Congr. Numer.*, p. 195–216, 1988.
- 10 HEUBERGER, C. On planarity and colorability of circulant graphs. *Discrete Math.*, p. 153–169, 2003.
- 11 YEH, H.; ZHU, X. 4-colorable 6-regular toroidal graphs. *Discrete Math.*, p. 261–274, 2003.
- 12 BARAJAS, J.; SERRA, O. On the chromatic number of circulant graphs. *Discrete Math.*, v. 309, n. 18, p. 5687–5696, 2009.
- 13 BEHZAD, M. *Graphs and and their chromatic numbers*. Tese (Doutorado) — Michigan State University, 1965.
- 14 VIZING, V. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Metody Diskret. Analiz.*, p. 25–30, 1964.
- 15 ROSENFELD, M. On the total coloring of certain graphs. *Israel J. Math.*, p. 396–402, 1971.
- 16 VIJAYADITYA, N. On total chromatic number of a graph. *J. London Math.*, p. 405–40, 1971.
- 17 WATKINS, M. A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. *J. Comb. Theory*, p. 152–164, 1969.
- 18 CASTAGNA, F.; PRINS, G. Every generalized Petersen graph has a Tait coloring. *Pac. J. Math.*, p. 53–58, 1972.

- 19 SASAKI, D. *Sobre coloração total de grafos cúbicos*. 98 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.
- 20 KARP, R. Reducibility among combinatorial problems. *Plenum. Press.*, p. 85–103, 1972.
- 21 COOK, S. The complexity of theorem proving procedures. In: *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*. [S.l.: s.n.], 1971. p. 151–158.
- 22 HOLYER, I. The NP-completeness of edge-colouring. *SIAM J. Comput.*, p. 718–720, 1981.
- 23 LEVEN, D.; GALIL, Z. NP completeness of finding the chromatic index of regular graphs. *J. Algorithm*, p. 35–44, 1981.
- 24 SÁNCHEZ-ARROYO, A. Determining the total colouring number is NP-hard. *Discrete Math.*, p. 315–319, 1989.
- 25 NICOLOSO, S.; PIETROPAOLI, U. Vertex-colouring of 3-chromatic circulant graphs. *Discrete Appl. Math.*, p. 121–138, 2017.
- 26 MUZYCHUK, M. A solution of the isomorphism problem for circulant graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, p. 1–41, 2004.
- 27 CAMPOS, C. *O problema da coloração total em classes de grafos*. 125 f. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2006.
- 28 HACKMANN, A.; KEMNITZ, A. Circular total colorings of cubic circulant graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, p. 65–72, 2004.
- 29 KHENNOUFA, R.; TOGNI, O. Total and fractional total colourings of circulant graphs. *Discrete Math.*, p. 6316–3329, 2008.
- 30 ZORZI, A. *Coloração total em grafos potência de ciclo*. 43 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

ÍNDICE DE ASSUNTOS

- Coloração
 - de arestas, 12, 22
 - de vértices, 12, 21
 - Harmônica, 24, 66
 - Total, 13, 22, 50, 66
- Conexo, 17, 21, 59, 63
- Conjectura
 - da Coloração Total, 22
 - dos Grafos Harmônicos, 26
- Conjunto
 - independente, 15, 31
 - independente total, 16, 31
- Emparelhamento, 15, 24, 51
- Grafo
 - Bipartido completo, 18, 30, 31
 - Ciclo, 18, 30, 32
 - Circulante, 11, 18, 21, 30, 33, 37, 38, 41, 42, 70
 - Circulante cúbico, 37
 - Completo, 18, 30
 - de Petersen generalizado, 20
 - Harmônico, 24, 48
 - Möbius ladder, 18, 33
 - Potência de ciclo, 18, 42
 - Prisma, 20, 35
 - Regular, 16, 24, 28
- Número cromático total, 22, 30, 37, 42, 50, 63, 70
- Semigrafo, 14, 22, 51–53, 62
- Subgrafo, 17, 20, 26, 31, 33, 37, 50
- Teorema
 - de Brooks, 21
 - de Vizing, 22

APÊNDICE A – Produções acadêmicas.

Neste apêndice veremos na íntegra as produções obtidas dos resultados do Capítulo 3.

- Resumo intitulado “On total chromatic number of circulant graphs” aceito no Latin American Theoretical Informatics 2020 (LATIN 2020), apresentado oralmente no LATIN e publicado nos anais em forma de pôster (Figura 53).
- Resumo intitulado “A result on total coloring of circulant graphs” apresentado oralmente no evento satélite V Encontro de Teoria da Computação do XL Congresso da Sociedade Brasileira de Computação e publicado nos anais em forma de resumo estendido.
- Pôster exibido no 9th Latin American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCG 2020) apresentado na Figura 54.
- Artigo completo intitulado “On total coloring of 4-regular circulant graphs” aceito à conferência internacional XI Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2021), com resultado previsto para o dia 15 de fevereiro de 2021.

On total chromatic number of circulant graphs^{*}

Mauro Nigro Alves Junior¹ and Diana Sasaki¹

State University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro
mauronigro94@gmail.com
diana.sasaki@ime.uerj.br

Abstract. In this work we investigate the total chromatic number of circulant graphs $C_n\left(1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$. We present some previous results about the total coloring and prove that the graph $C_7(1, 3)$ is Type 2.

Keywords: total coloring · circulant graph · regular graph

1 Introduction and main result

A k -vertex coloring of a graph G is an assignment of k colors to the vertices of G so that adjacent vertices have different colors. The chromatic number $\chi(G)$ is the smallest k for which G has a k -vertex coloring. A k -edge coloring of a graph G is an assignment of colors to the edges so that adjacent edges have different colors. The chromatic index $\chi'(G)$ is the smallest k for which G has a k -edge coloring.

Total colorings combine the vertex and edge colorings by coloring both vertices and edges of a graph G so that adjacent elements (vertices and edges) have different colors. A k -total coloring of a graph G is a total coloring that uses k colors, and the total chromatic number $\chi''(G)$ is the smallest k for which G has a k -total coloring. The Total Coloring Conjecture (TCC) was proposed by Vizing and Behzad [1] and states that for any simple graph G , $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G .

The TCC implies that for any simple graph G , $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ and in this case we say that G is Type 1; or $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ then G is said to be Type 2. The TCC was verified for several classes of graphs.

A circulant graph $C_n(d_1, d_2, \dots, d_l)$ has vertex set $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ and edge set $E(G) = \bigcup_{i=1}^l E_i(G)$ where $E_i(G) = \{e_0^i, e_1^i, \dots, e_{n-1}^i\}$ and $e_j^i = (v_j, v_{j+d_i \pmod n})$. An edge of $E_i(G)$ is called edge of length d_i . Khennoufa and Togni [3] proved that all members of infinite families of circulant graphs are Type 1.

The main goal of this current work is to determine the total chromatic number of all circulant graphs $C_n\left(1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$. It is well known by Chetwynd [2] that when n is even the graph is Type 2. So, we focus on the odd case.

^{*} Supported by CAPES and CNPq

For $n = 5$, the circulant graph $C_5(1, 2)$ is the complete graph K_5 that is Type 1. We prove that $C_7(1, 3)$ is Type 2, by using the following theorem to prove that this graph does not have any 5-total coloring.

Theorem 1. *If a k -regular graph G does not have maximal matching of maximum length $\left\lfloor \frac{|E|}{k+1} \right\rfloor$, then does not exist $(k+1)$ -total coloring of G [4].*

Theorem 2. *The graph $C_7(1, 3)$ is Type 2.*

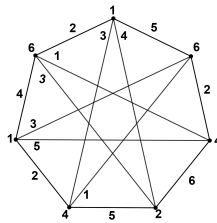


Fig. 1. The graph $C_7(1, 3)$ with a 6-total coloring.

Proof. Suppose that $C_7(1, 3)$ has a maximal matching M of length $\left\lfloor \frac{14}{5} \right\rfloor = 2$. If an edge e in the cycle $v_1v_2 \cdots v_7v_1$ belongs to M , then we have a connected component with 7 edges and 5 vertices to match. In any case, we do not have a maximal matching of length 2. If an edge $e = v_iv_{i \pm 3 \pmod 7} \in M$, then we have a connected component with an edge having 6 adjacent edges, and following that it remains 2 edges to obtain a maximal matching (of length 3). Then $C_7(1, 3)$ does not have a maximal matching of length 2. Since the graph has a total coloring with 6 colors (Figure 1), it is Type 2. \square

2 Future Work

The goal of this work is to determine the total chromatic number of infinite families of circulant graphs, contributing to the Total Coloring Conjecture and to the state of the art in this area.

References

1. Behzad, M. Graphs and Their Chromatic Numbers. *PhD Thesis, Michigan University*, 1965.
2. Chetwynd, A. G and Hilton, A. J. W. Some refinements of the total chromatic number conjecture, *Congr. Numer.*, v. 66, pp. 195–216, 1988.
3. Khennoufa, R and Togni, O. Total and fractional total colourings of circulant graphs. *Discrete Math.*, v. 309, pp. 6316–6329, 2008.
4. Sasaki, D. On total coloring of cubic graphs. *PhD thesis, PESC-UFRJ*, 2013.

A result on total coloring of circulant graphs

Mauro N. Alves Junior¹, Diana Sasaki¹

¹IME, Rio de Janeiro State University, Brazil

Abstract. *In this work we determine that all members of an infinite family of 4-regular circulant graphs are Type 1.*

Resumo. *Neste trabalho, nós provamos que todos os membros de uma família infinita de grafos circulares 4-regulares são Tipo 1.*

1. Introduction

Total colorings combine the vertex and edge colorings by coloring both vertices and edges of a graph G so that adjacent elements (vertices and edges) have different colors. A k -total coloring of a graph G is an assignment of k colors to the elements of G such that adjacent elements have different colors. The total chromatic number $\chi''(G)$ is the smallest integer k for which G has a k -total coloring. Clearly, $\chi''(G) \geq \Delta + 1$, and the Total Coloring Conjecture (TCC) states that for any simple graph G , $\chi''(G) \leq \Delta + 2$, where Δ is the maximum degree of G [Behzad 1965, Vizing 1968]. Graphs with $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ are said to be Type 1, and graphs with $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ are said to be Type 2. The TCC has been verified for several classes of graphs.

A circulant graph $C_n(d_1, d_2, \dots, d_l)$ with $1 \leq d_1 < \dots < d_l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ has vertex set $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ and edge set $E = \bigcup_{i=1}^l E_i$ where $E_i = \{e_0^i, e_1^i, \dots, e_{n-1}^i\}$ and $e_j^i = (v_j, v_{j+d_i})$ where the indices of the vertices are considered modulo n . An edge of E_i is called edge of length d_i . Examples of circulant graphs include the cycle graphs $C_n \simeq C_n(1)$ and the complete graphs $K_n \simeq C_n(1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$, and their total chromatic number are well known [Yap 1996]. Furthermore, the total chromatic number of the cubic circulant graphs (which are of the form $C_{2n}(d, n)$) was determined in 2004 [Hackmann and Kemnitz 2004]. The well known Möbius Ladder graphs are the cubic circulant graphs $C_{2n}(1, n)$, and they are known to be Type 2 [Chetwynd and Hilton 1988]. In 2008, it was proved that every 4-regular circulant graph, for any positive integer p , $C_{5p}(1, k)$ is Type 1 for $k < 5p/2$ with $k \equiv 2 \pmod{5}$ or $k \equiv 3 \pmod{5}$; and $C_{6p}(1, k)$ is Type 1 for $p \geq 3$ and $k < 3p$ with $k \equiv 1 \pmod{3}$ or $k \equiv 2 \pmod{3}$ [Khennoufa and Togni 2008].

Another infinite family of circulant graphs which have been extensively studied in the literature is the power of cycles, denoted by C_n^k , and consisting of a cycle C_n with additional edges between any pair of vertices of distance at most k . It was conjectured that C_n^k , with $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, is Type 2 if and only if n is odd and $k < n/3 - 1$ [Campos 2006]. This implies that for each $k \geq 2$, there is a finite number of Type 2 graphs. This conjecture has been proved when $k = 2$ and in the same work, she proved that the TCC holds for n even and for C_n^3 and C_n^4 [Campos 2006]. Recently Campos' conjecture has been proved for C_n^3 and C_n^4 [Zorzi 2019].

In this work, we determine the total chromatic number of another family of circulant graphs. The technique uses total colorings of the well known Ladder graphs, also

named as Prism graphs $G(n, 1)$. For these graphs it was proved that they are all Type 1, except for $G(5, 1)$ which is Type 2 [Chetwynd and Hilton 1988].

2. Preliminaries

A semigraph is a triple $B = (V, E, S)$ where V is the set of vertices of B , E is a set of edges having two distinct endpoints in V , and S is a set of semiedges having one endpoint in V . We denote an edge having endpoints v and w by vw and a semiedge having endpoint v as $v\cdot$. When vertex v is an endpoint of $e \in E \cup S$ we say that e is incident to v . Two elements of $E \cup S$ incident to the same vertex, or two vertices incident to the same edge, are called adjacent. In this work, we are mainly interested in graphs and semigraphs such that there are exactly four elements (edges and/or semiedges) incident to every vertex. These are called 4-regular graphs and 4-regular semigraphs, respectively. Notice that a k -total coloring of a semigraph B is an assignment of k colors to the edges, semiedges and vertices of B such that adjacent elements have different colors.

Every 4-regular circulant graph is denoted by $C_n(a, b)$, with $1 \leq a < b < n/2$. We investigate the circulant graphs that are a subclass of the class of graphs $C_n(a, b)$, with a multiple by n or b multiple by n . All graphs of this class have the Ladder graphs $G(\frac{n}{a}, 1)$ (or $G(\frac{n}{b}, 1)$) as a subgraph (see Figure 1). We use appropriate total colorings previously obtained for this class [Chetwynd and Hilton 1988] to construct 5-total colorings of Theorem 1.

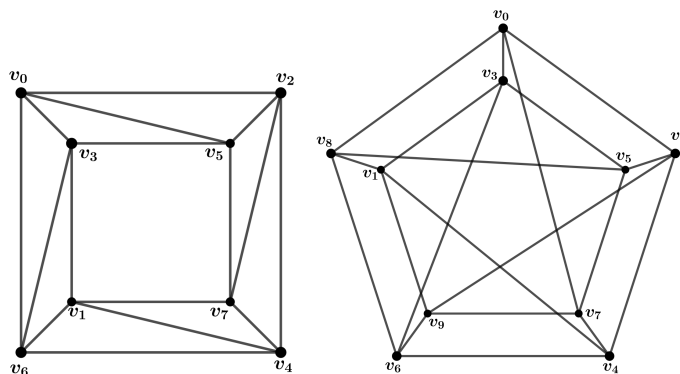


Figure 1. The 4-regular circulant graphs $C_8(2, 3)$ and $C_{10}(2, 3)$ with the Ladder graphs $G(4, 1)$ and $G(5, 1)$ as subgraphs, respectively.

3. An infinite family of Type 1 circulant graphs

The main result of this work is presented below.

Theorem 1. *Let $C_n(2k, 3)$ be a 4-regular connected circulant graph. The graph $C_n(2k, 3)$ is Type 1 for $n = (8\mu + 6\lambda)k$, with $k \geq 1$ and non-negative integers μ and λ .*

Sketch of proof. Since the considered circulant graph on $2n$ vertices consists of the Ladder graph on $2n$ vertices as a subgraph plus a set of independent edges, by using an optimal total coloring of the Ladder graph and one new color for the independent set of edges, we obtain the desired total coloring. The technique applied to obtain the total colorings is to construct the circulant graphs by making operations between semigraphs with compatible total colorings. Consider the semigraph $B(n, a)$ with a multiple by n , set $n = a \cdot k$ as follows.

- The vertices of $B(n, a)$ are:

$$V = \bigcup_{i=0}^{a-1} V_i, \text{ with } V_i = \{v_{k \cdot i + j} \mid 0 \leq j < k\}.$$

- The edges of $B(n, a)$ are:

$$E = \left(\bigcup_{i=0}^{a-1} E_i^C \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{a-2} E_i^R \right), \text{ with } E_i^C = \{v_{k \cdot i + j - 1} v_{k \cdot i + j} \mid 1 \leq j < k\} \text{ e } E_i^R = \{v_{i \cdot k + j} v_{(i+1) \cdot k + j} \mid 0 \leq j < k\}.$$

- The semiedges of $B(n, a)$ are partitioned into two classes, called vertical semiedges and horizontal semiedges:

- (i) Vertical semiedges: $\{v_{i \cdot} \mid 0 \leq i < k\} \cup \{v_{(a-1) \cdot k + i \cdot} \mid 0 \leq i < k\}$, where the sets are called top semiedges and bottom semiedges, respectively, and for $0 \leq i < k$, $v_{i \cdot}$ is the i -th top semiedge and $v_{(a-1) \cdot k + i \cdot}$ is the i -th bottom semiedge.
- (ii) Horizontal semiedges: $\{v_{i \cdot k \cdot} \mid 0 \leq i < a\} \cup \{v_{(i+1) \cdot k - 1 \cdot} \mid 0 \leq i < a\}$, where the sets are called left semiedges and right semiedges, respectively.

In the following, we present additional definitions and operations that will be used in the construction of total colorings. Given two semiedges $x \cdot$ and $y \cdot$, the junction of $x \cdot$ with $y \cdot$ means replacing $x \cdot$ and $y \cdot$ by an edge xy . The vertical merge between $B(n, a)$ and $B(m, b)$ is the semigraph $B(n+m, a+b)$ obtained by the junction of the bottom semiedges of $B(n, a)$ with the top semiedges of $B(m, b)$, that is, the junction of $v_{(a-1) \cdot k + i \cdot}$ of $B(n, a)$ with $v_{i \cdot}$ of $B(m, b)$, for $0 \leq i < k$. The horizontal merge between $B(n, a)$ and $B(m, a)$ is the semigraph $B(n+m, a)$ obtained by junction of the right semiedges of $B(n, a)$ with the left semiedges of $B(m, a)$, that is, the junction of $v_{i \cdot k \cdot}$ of $B(n, a)$ with $v_{(i+1) \cdot k - 1 \cdot}$ of $B(m, a)$, for $0 \leq i < a$. Finally, the p -closure of $B(n, a)$ is the graph obtained by the junction of the following semiedges: (i) the left semiedges with the right semiedges, that is, for each $0 \leq i < a$, the junction of $v_{i \cdot k + 1 \cdot}$ with $v_{(i+1) \cdot k \cdot}$; and (ii) the top semiedges with the bottom semiedges, that is, the junction of each i -th top semiedge with the $(i-p)$ -th bottom semiedge (the positions are taken modulo k).

We construct 5-total colorings of the investigated class of graphs by using 5-total colorings of appropriate copies of semigraphs $B(6, 2k)$ and $B(8, 2k)$. For each $k \geq 1$, by merging semigraphs $B(8, 2k)$ with semigraphs $B(6, 2k)$ (or with copies of the same one) with 5-total colorings and making the closure of the resulting semigraph in a way that the colorings do not conflict in the process, we construct all circulant graphs of Theorem 1 with a 5-total coloring. Figure 2 presents a 5-total coloring of $C_8(2, 3)$ and the semigraph $B(8, 2)$ with a 5-total coloring. By making the 3-closure of this semigraph, we obtain the graph $C_8(2, 3)$.

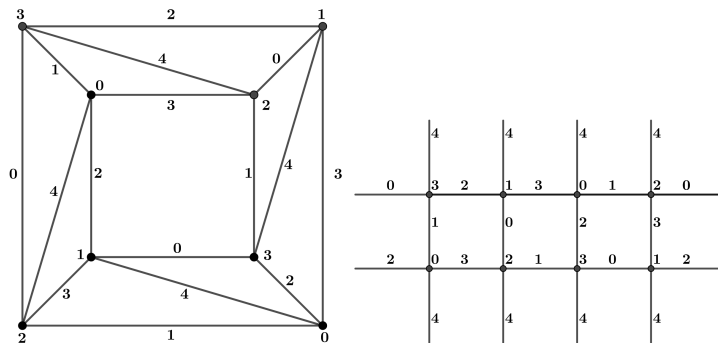


Figure 2. Graph $C_8(2, 3)$ with a 5-total coloring by using the semigraph $B(8, 2)$.

Another example is presented in the following. By merging semigraphs $B(8, 2)$ and $B(6, 2)$ and by making the 3-closure of the resulting semigraph with a 5-total coloring, we obtain the graph $C_{14}(2, 3)$ with a 5-total coloring, presented in Figure 3. \square

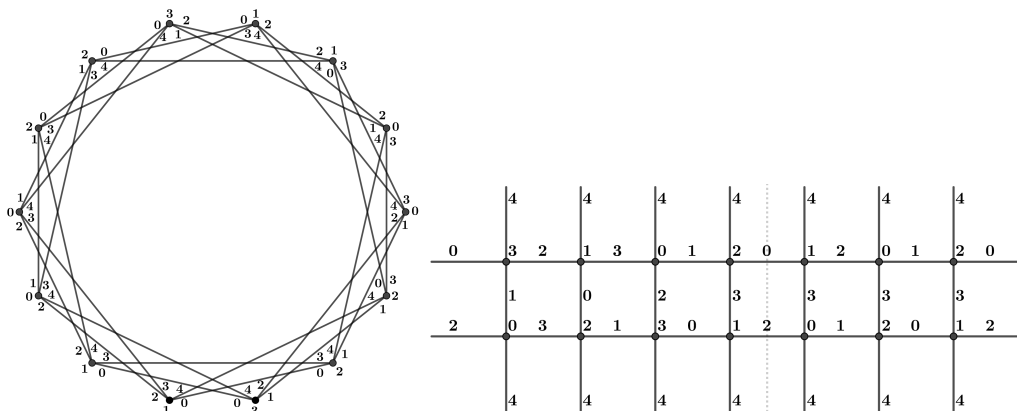


Figure 3. A 5-total coloring of graph $C_{14}(2, 3)$ and the horizontal merging between semigraphs $B(8, 2)$ and $B(6, 2)$.

It is well known that $G(5, 1)$ is Type 2 [Chetwynd and Hilton 1988] and we could not determine the Type of $C_{10}(2, 3)$. So, from Theorem 1 for $k = 1$, $n \geq 6$ and $n \neq 10$, we conclude this work with the following consequence.

Corollary 1. *The circulant graphs $C_n(2, 3)$, for even $n \geq 6$ and $n \neq 10$, are Type 1.*

References

- Behzad, M. (1965). *Graphs and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan University.
- Campos, C. (2006). *O problema da coloração total em classes de grafos*. PhD thesis, University of Campinas, São Paulo.
- Chetwynd, A. G. and Hilton, A. J. W. (1988). Some refinements of the total chromatic number conjecture. *Congr. Numer.*, pages 195–216.
- Hackmann, A. and Kemnitz, A. (2004). Circular total colorings of cubic circulant graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, pages 65–72.
- Khenoufa, R. and Togni, O. (2008). Total and fractional total colourings of circulant graph. *Discrete Math.*, pages 6316–3329.
- Vizing, V. (1968). Some unsolved problems in graph theory. *Russian Math. Surveys*, 23:125–141.
- Yap, H. (1996). *Total colourings of graphs*. Springer, Berlin.
- Zorzi, A. (2019). *Coloração total em grafos potências de ciclo*. Master’s thesis, Federal University of Rio de Janeiro.

On total coloring of 4-regular circulant graphs²

Mauro Nigro^{a,1}, Matheus Nunes Adauto^{b,1}, Diana Sasaki^{a,1}

^a Rio de Janeiro State University, Brazil

^b Federal University of Rio de Janeiro, Brazil

Abstract

A k -total coloring of a graph G is an assignment of k colors to the vertices and edges (elements) of G so that adjacent or incident elements have different colors. The *total chromatic number* of G is the smallest integer k for which G has a k -total coloring. The well known Total Coloring Conjecture states that the total chromatic number of a graph is either $\Delta(G) + 1$ or $\Delta(G) + 2$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G . Graphs with $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ are known as *Type 1*, and graphs with $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ are known as *Type 2*.

In this work, we investigate the total coloring of circulant graphs. We establish that all members of three infinite families of 4-regular circulant graphs are *Type 1*, except for one graph which is *Type 2*. These results contribute to the conjecture proposed by Khennoufa and Togni in 2008, which states that, except for a finite number of *Type 2*, 4-regular circulant graphs are all *Type 1*.

Keywords: total coloring, circulant graph, regular graph.

1 Introduction

Circulant graphs were first introduced in 1846 and they have several applications in the computer network design, telecommunication network, distributed computing, and others [7,11]. Coloring is a challenging problem that models many real situations where the adjacencies represent conflict. In this work we investigate the total coloring of 4-regular circulant graphs.

Let $G = (V, E)$ be a simple connected graph. A k -total coloring of G is an assignment of k colors to the vertices and edges of G so that adjacent or incident elements have different colors. The total chromatic number of G , denoted by $\chi''(G)$, is the smallest k for which G has a k -total coloring. Clearly, $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ and the Total Coloring Conjecture (TCC) states that the total chromatic number of any graph is at most $\Delta(G) + 2$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of the graph [1,10]. If the TCC holds, graphs with $\chi''(G) = \Delta + 1$ are called *Type 1*, and graphs with $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ are called *Type 2*. In 1989, Sánchez-Arroyo [8] proved that determining the total chromatic number of an arbitrary graph is a NP-hard problem.

A circulant graph $C_n(d_1, d_2, \dots, d_\ell)$ with integers numbers $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_\ell \leq \lfloor n/2 \rfloor$, where $\ell \leq \lfloor n/2 \rfloor$, has vertex set $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ and edge set $E = \bigcup_{i=1}^{\ell} E_i$, where $E_i = \{e_0^i, e_1^i, \dots, e_{n-1}^i\}$ and $e_j^i = (v_j, v_{j+d_i})$, where the indexes of the vertices are considered modulo n . An edge of E_i is called edge of length d_i . Some classical circulant graphs, such as the cycle graphs $C_n \simeq C_n(1)$, the complete graphs $K_n \simeq C_n(1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor)$, and the complete bipartite graphs $K_{n,n} \simeq C_{2n}(1, 3, 5, \dots, k)$, where k is the biggest odd number such that $k \leq n$, have their total chromatic number determined [9]. Furthermore, the total chromatic number of every cubic circulant graph $C_{2n}(d, n)$ was determined by Hackmann and Kemnitz [5] in 2004. There are many results on total coloring of the well known powers of cycles graphs, an infinite family of circulant graphs $C_n(1, 2, \dots, k)$. In 2003, Campos and de Mello [2] proved that $C_n(1, 2)$ is Type 1, except for graph $C_7(1, 2)$ which is Type 2, and they conjectured that $C_n(1, 2, \dots, k)$, with $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, is Type 2 if

¹ Emails: mauro.nigro@pos.ime.uerj.br, adauto@cos.ufrj.br, diana.sasaki@ime.uerj.br

² Partially supported by CNPq, FAPERJ and CAPES.

and only if n is odd and $k < n/3 - 1$. Recently, it was proved that this conjecture holds for $k = 3$ and $k = 4$ [12]. In 2008, Khennoufa and Togni [6] proved that every 4-regular circulant graph $C_{5p}(1, k)$ is Type 1, for any positive integer p and $k < 5p/2$ with $k \equiv 2 \pmod{5}$ or $k \equiv 3 \pmod{5}$; and proved that $C_{6p}(1, k)$ is Type 1, for $p \geq 3$ and $k < 3p$ with $k \equiv 1 \pmod{3}$ or $k \equiv 2 \pmod{3}$. Furthermore, they verified some particular cases with the help of the computer.

In the same paper, Khennoufa and Togni conjectured that except for a finite number of Type 2, 4-regular circulant graphs $C_n(1, k)$ are all Type 1. In this work, we contribute to this conjecture by determining the total chromatic number of all graphs of the following three infinite families of 4-regular circulant graphs: $C_n(2k, 3)$, $k \geq 1$ and $n = (8\mu + 6\lambda)k$, for nonnegative integers μ and λ ; $C_{3n}(1, 3)$, for $n > 1$; and $C_{3\lambda p}(1, p)$, for $\lambda \geq 1$ and p multiple of 3, suggesting that the conjecture has a positive answer.

A *semigraph* is a 3-tuple $G = (V, E, S)$ where V is the set of vertices of G , E is a set of edges having two distinct endvertices in V , and S is a set of *semiedges* having one endvertex in V . We will write $e = v_1v_2$ or $s = v_1\cdot$, though the endvertices of a semiedge do not determine it uniquely. When vertex v is an endvertex of $e \in E \cup S$, we will say that v and e are *incident*. Two elements of $E \cup S$ incident to the same vertex, respectively two vertices incident to the same edge, will be called *adjacent*.

A *simple graph* G is a semigraph with an empty set of semiedges. In that case we can write $G = (V, E)$. All definitions given below for semigraphs, that do not require the existence of semiedges, are also valid for graphs.

Let $G = (V, E, S)$ be a semigraph. The *degree* $d(v)$ of a vertex v of G is the number of elements of $E \cup S$ that are incident to v . We say that G is *d-regular* if the degree of each vertex is equal to d . In this work we are mainly interested in 4-regular graphs.

For $k \in \mathbb{N}$, a *k-vertex coloring* of G is a map $C^V: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, such that $C^V(x) \neq C^V(y)$ whenever x and y are two adjacent vertices. The *chromatic number* of G , denoted by $\chi(G)$, is the least k for which G has a k -vertex coloring.

Similarly, a *k-edge coloring* of G is a map $C: E \cup S \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, such that $C(e) \neq C(f)$ whenever e and f are adjacent elements of $E \cup S$. The *chromatic index* of G , denoted by $\chi'(G)$, is the least k for which G has a k -edge coloring. By Vizing's theorem [10] we have that $\chi'(G)$ is equal to either $\Delta(G)$ or to $\Delta(G) + 1$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of the vertices of G .

More formally, a *k-total coloring* of G is a map $C^T: V \cup E \cup S \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, such that

- (a) $C^T|_V$ is a k -vertex coloring,
- (b) $C^T|_{E \cup S}$ is a k -edge coloring,
- (c) $C^T(e) \neq C^T(v)$ whenever $e \in E \cup S$, $v \in V$, and e is incident to v .

The *total chromatic number* of G , denoted by $\chi''(G)$, is the least k for which G has a k -total coloring. Clearly $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$. The Total Coloring Conjecture [1,10] claims that $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$. If $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$, then G is said to be *Type 1*, and if $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$, then G is said to be *Type 2*.

The paper is organized as follows. In Section 2, we present the useful definitions and preliminary results. In Section 3 we present the main results of the paper.

2 Results: useful definitions

In the following, we define the auxiliary semigraph $B(n, a)$ that will build the graph $C_n(a, b)$, when a divides n , by an operation that will be presented. The auxiliary 4-regular semigraph $B(n, a)$ is just a $(a \times k)$ -grid plus the horizontal and vertical semiedges, where $n = a \cdot k$. Let n and a be positive integers with n multiple by a and $n = a \cdot k$. The semigraph $B(n, a)$ is defined as follows.

- The vertices of $B(n, a)$ are:

$$V = \bigcup_{i=0}^{a-1} V_i, \text{ with } V_i = \{v_{k \cdot i + j} \mid 0 \leq j < k\}.$$

- The edges of $B(n, a)$ are:

$$E = \left(\bigcup_{i=0}^{a-1} E_i^H \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{a-2} E_i^V \right), \text{ with } E_i^H = \{v_{k \cdot i + j - 1} v_{k \cdot i + j} \mid 1 \leq j < k\} \text{ and } E_i^V = \{v_{i \cdot k + j} v_{(i+1) \cdot k + j} \mid 0 \leq j < k\}.$$

- The semiedges of $B(n, a)$ are partitioned into two classes, called vertical semiedges and horizontal semiedges:

- (i) Vertical semiedges: $\{v_{i \cdot} \mid 0 \leq i < k\} \cup \{v_{(a-1) \cdot k + i \cdot} \mid 0 \leq i < k\}$, where the sets are called top semiedges and bottom semiedges, respectively, and for $0 \leq i < k$, $v_{i \cdot}$ is the i -th top semiedge and $v_{(a-1) \cdot k + i \cdot}$ is the i -th bottom semiedge.

- (ii) Horizontal semiedges: $\{v_{i,k} \mid 0 \leq i < a\} \cup \{v_{(i+1),k-1} \mid 0 \leq i < a\}$, where the sets are called left semiedges and right semiedges, respectively.

Given two semiedges $x\cdot$ and $y\cdot$, the *junction* of $x\cdot$ with $y\cdot$ means replacing $x\cdot$ and $y\cdot$ by an edge xy .

Let n, m, a, b be positive integers such that $n/a = m/b = k$, the *vertical merge* between $B(n, a)$ and $B(m, b)$ is the semigraph $B(n + m, a + b)$ obtained by the junction of the bottom semiedges of $B(n, a)$ with the top semiedges of $B(m, b)$, that is, the junction of $v_{(a-1)k+i}$ of $B(n, a)$ with v_i of $B(m, b)$, for $0 \leq i < k$.

Let m, n, a, k, q be positive integers, such that $n = a \cdot k$ and $m = a \cdot q$, the *horizontal merge* between $B(n, a)$ and $B(m, a)$ is the semigraph $B(n + m, a)$ obtained by the junction of the right semiedges of $B(n, a)$ with the left semiedges of $B(m, a)$, that is, the junction of $v_{i,k}$ of $B(n, a)$ with $v_{(i+1),q-1}$ of $B(m, a)$, for $0 \leq i < a$.

Let a, n, p be positive integers such that p ranges from 0 to $k - 1$, where $n = a \cdot k$. The p -closure of $B(n, a)$ is the graph obtained by the junction of the following semiedges: (i) the left semiedges with the right semiedges, that is, for each $0 \leq i < a$, the junction of $v_{i,k+1}$ with $v_{(i+1),k}$; and (ii) the top semiedges with the bottom semiedges, that is, the junction of each i -th top semiedge with the $(i - p)$ -th bottom semiedge (the positions are taken modulo k). In Figure 1, we can see how we obtain $C_8(2, 3)$ from the 3-closure of $B(8, 2)$. From this operation we obtain the circulant graph $C_8(2, 3)$ in Figures 1b and 1c (the right one is $C_8(2, 3)$ in the usual representation) from the semigraph $B(8, 2)$ in Figure 1a.

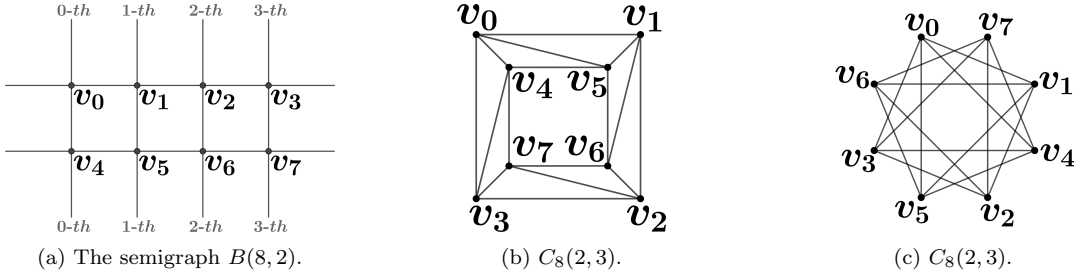


Fig. 1. The circulant graph $C_8(2, 3)$ obtained from the semigraph $B(8, 2)$ by making the 3-closure.

Lemma 2.1 *Let n be multiple of a , p a positive integer and $\gcd(a, p) = 1$ with $p < \lfloor n/2 \rfloor$. The p -closure of $B(n, a)$ is isomorphic to the circulant graph $C_n(a, p)$.*

Proof. Let G be the resulting graph of $B(n, a)$ from the p -closure. We will show that $G \simeq C_n(a, p)$ by permutating the vertices $V(B(n, a)) = \bigcup_{i=0}^{a-1} V_i$, with $V_i = \{v_{k \cdot i + j} \mid 0 \leq j < k\}$. Let $f : V(B(n, a)) \rightarrow V(B(n, a))$ be this permutation defined as $f(v_{k \cdot i + j}) = v_{i \cdot p + a \cdot j}$. Note that after the permutation f , we get that the horizontal edges and the horizontal semiedges form the set of edges with distance a and the set of vertical edges and vertical semiedges form the set of edges with distance p . That is, the adjacencies of each vertex correspond to the adjacencies of $C_n(a, p)$, and the result follows. See an example in Figure 4a. \square

We determine total colorings of some circulant graphs using the previous operation of semigraphs with compatible total colorings. A 5-total coloring ϕ of $B(n, a)$ for the p -closure is called *valid* if: (i) the color assigned by ϕ to the horizontal semiedge $v_{i,k}$ is the same as assigned to $v_{(i+1),k-1}$, for $0 \leq i < a$; (ii) the colors assigned by ϕ to the vertices $v_{i,k}$ and $v_{(i+1),k-1}$ are different, for $0 \leq i < a$; (iii) the color assigned by ϕ to the i -th top semiedge is the same as assigned to $(i - p)$ -th bottom semiedge; (iv) the color assigned by ϕ to the incident vertex to the i -th top semiedge is different from the color assigned to the incident vertex to the $(i - p)$ -th bottom semiedge. Let ϕ and ϕ' be two valid 5-total colorings of $B(n, a)$ and $B(m, b)$ in the p -closure, resp. We say that ϕ is *compatible* with ϕ' if the horizontal merge and the vertical merge between $B(n, a)$ and $B(m, b)$ result in a valid 5-total coloring for the p -closure. When only the vertical (resp. horizontal) merge between $B(n, a)$ and $B(m, b)$ colored by ϕ and ϕ' , resp. results in a valid 5-total coloring, then we say that ϕ is *vertically* (resp. *horizontally*) *compatible* with ϕ' .

The next result shows that any valid 5-total coloring of $B(n, a)$ for the p -closure is horizontally compatible.

Lemma 2.2 *Let p be a positive integer such that p ranges 0 to $k - 1$. If $B(n, a)$ has a valid 5-total coloring for the p -closure, then for any integer $\lambda \geq 1$, $B(n\lambda, a)$ also has a valid 5-total coloring for the p -closure.*

Proof. Denote by ϕ a valid 5-total coloring of $B(n, a)$ for the p -closure. We prove that ϕ is horizontally compatible with itself, that is, after the horizontal merge between λ copies of ϕ , the obtained coloring remains valid. Note that since ϕ is valid, there is no color conflict on the horizontal merge between $B(n, a)$ and itself. Indeed, by definition, the colors assigned to the horizontal semiedges on the left are equal to the colors assigned

to the corresponding horizontal semiedges on the right, and the respective endvertices have different colors. Moreover, note that the color assigned to the $(i-p)$ -th bottom semiedge of $B(n, a)$ is the same color assigned to the $(i-p)$ -th bottom semiedge of $B(\lambda n, a)$. From this fact, for each i -th top semiedge, we get that the $(i-p)$ -th bottom semiedge has the same color and their respective endvertices have different colors. It follows that $B(\lambda n, a)$ has a valid 5-total coloring for the p -closure. \square

Note that Lemma 2.2 is about horizontal compatible colorings. The vertical compatible ones need convenient colors to vertical semiedges (the i -th top semiedge should have the same color of the $(i-p)$ -th bottom semiedge).

Nevertheless, this lemma is useful because in the considered class of circulant graphs, we could established that many graphs are Type 1 by using a single 5-total coloring.

3 Results: total colorings

In this section, we determine the total chromatic number of all graphs of the following three infinite families of 4-regular circulant graphs: $C_n(2k, 3)$, $k \geq 1$ and $n = (8\mu + 6\lambda)k$, for nonnegative integers μ and λ ; $C_{3n}(1, 3)$, for $n > 1$; and $C_{3\lambda p}(1, p)$, $\lambda \geq 1$ and p multiple of 3. For this, we use the results and definitions presented in the previous section.

Theorem 3.1 *Let n be multiple of a , $\gcd(a, b) = 1$ and $b < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. If $C_n(a, b)$ is Type 1, then $C_{\lambda n}(a, b)$ is Type 1, for any positive integer λ .*

Proof. Suppose that $C_n(a, b)$ has a 5-total coloring then, by Lemma 2.1, $B(n, a)$ has a valid 5-total coloring for the b -closure. By Lemma 2.2, for any positive integer λ , we get that $B(\lambda n, a)$ has a valid 5-total coloring for the b -closure. Therefore, by applying the b -closure of $B(\lambda n, a)$, we get a 5-total coloring of $C_{\lambda n}(a, b)$, and so this graph is Type 1. \square

In the following, we consider the first infinite family of 4-regular circulant graphs and determine the total chromatic number of all its members. Remark that this family can also be described as $C_n(2k, 3)$, $k \geq 1$ and n multiple of $2k$. Or, equivalently, $C_{kn}(k, 3)$, k even.

Theorem 3.2 *The circulant graph $C_n(2k, 3)$ is Type 1 for each $k \geq 1$ and $n = (8\mu + 6\lambda)k$, for nonnegative integers μ and λ .*

Proof. When $C_{(8\mu+6\lambda)k}(2k, 3)$ is connected the proof goes as follows. We construct two horizontally compatible 5-total colorings for the 3-closure of $B(8, 2)$ and $B(6, 2)$, presented in Figure 2. In addition, the 5-total colorings of $B(8, 2)$ and $B(6, 2)$ are compatible with themselves.

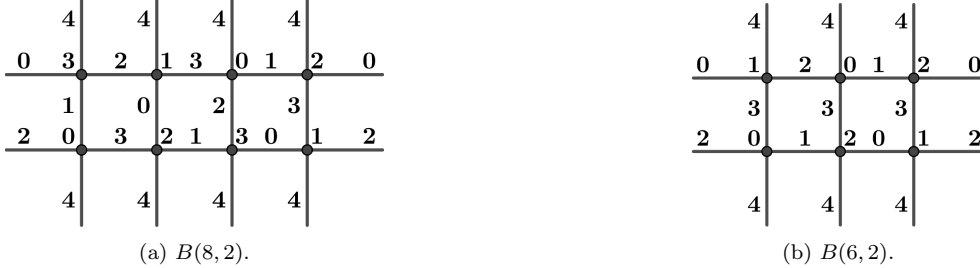


Fig. 2. The two horizontally compatible 5-total colorings with colors 0, 1, 2, 3, 4 for the 3-closure of $B(8, 2)$ and $B(6, 2)$ used in Theorem 3.2.

By making the horizontal and vertical merges of the 5-total colorings of $B(8, 2)$ and $B(6, 2)$ themselves (see Figure 2), we obtain semigraphs $B(6k\lambda, 2k)$ and $B(8k\mu, 2k)$ with 5-total colorings for the 3-closure. Therefore, by Lemma 2.2 and by the fact that the 5-total colorings of $B(8, 2)$ and $B(6, 2)$ are vertically compatible, for each $k \geq 1$, we define two valid 5-total colorings for the 3-closure that are compatible: ϕ for $B(6k\lambda, 2k)$ and ψ for $B(8k\mu, 2k)$, for nonnegative integers μ and λ .

The horizontal merge between $B(6k\lambda, 2k)$ and $B(8k\mu, 2k)$ gives the colored semigraph $B(8k\mu + 6k\lambda, 2k)$. Finally, we get the circulant graph $C_n(2k, 3)$ with a 5-total coloring, by making the 3-closure of $B(8k\mu + 6k\lambda, 2k)$.

Let us define a 5-total coloring ϕ with colors 0, 1, 2, 3, 4 for $B(6k\lambda, 2k)$. For $0 \leq i < 2k$ and $0 \leq j < 3\lambda$, we have for:

- the vertical semiedges:

$$\phi(v_{j\cdot}) = \phi(v_{(2k-1)3\lambda+j\cdot}) = 4 \quad (1)$$

- the horizontal semiedges:

$$\phi(v_{i(3\lambda)\cdot}) = \phi(v_{(i+1)(3\lambda)-1\cdot}) = \begin{cases} 0, & \text{if } i \text{ is even} \\ 2, & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \quad (2)$$

- the vertices $\bigcup_{i=0}^{2k-1} V_i$:

$$\phi(v_{i(3\lambda)+j}) = \begin{cases} 2j+1 \pmod 3, & \text{if } i \text{ is even} \\ 2j \pmod 3, & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \quad (3)$$

- the edges in $\bigcup_{i=0}^{2k-1} E_i^H$, for $j \neq 0$:

$$\phi(v_{i(3\lambda)+j-1}v_{i(3\lambda)+j}) = \begin{cases} 2(j-1)+2 \pmod 3, & \text{if } i \text{ is even} \\ 2(j-1)+1 \pmod 3, & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \quad (4)$$

- the edges $\bigcup_{i=0}^{2k-2} E_i^V$:

$$\phi(v_{i(3\lambda)+j}v_{(i+1)(3\lambda)+j}) = \begin{cases} 3, & \text{if } i \text{ is even} \\ 4, & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \quad (5)$$

Now, let us define a 5-total coloring ψ with colors 0, 1, 2, 3, 4 for $B(8k\mu, 2k)$. For $0 \leq i < 2k$ and $0 \leq j < 4\mu$, we have for:

- the vertical semiedges:

$$\psi(v_{j\cdot}) = \psi(v_{(2k-1)(4\mu)+j}) = 4 \quad (6)$$

- the horizontal semiedges:

$$\psi(v_{i(4\mu)\cdot}) = \psi(v_{(i+1)(4\mu)-1\cdot}) = \begin{cases} 0, & \text{if } i \text{ is even} \\ 2, & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \quad (7)$$

- the vertices $\bigcup_{i=0}^{2k-1} V_i$:

$$\psi(v_{i(4\mu)+j}) = \begin{cases} 0, & \text{if } (i \text{ is even and } j \equiv 3 \pmod 4) \text{ or } (i \text{ is odd and } j \equiv 0 \pmod 4) \\ 1, & \text{if } (i \text{ is even and } j \equiv 1 \pmod 4) \text{ or } (i \text{ is odd and } j \equiv 3 \pmod 4) \\ 2, & \text{if } (i \text{ is even and } j \equiv 2 \pmod 4) \text{ or } (i \text{ is odd and } j \equiv 1 \pmod 4) \\ 3, & \text{if } (i \text{ is even and } j \equiv 0 \pmod 4) \text{ or } (i \text{ is odd and } j \equiv 2 \pmod 4) \end{cases} \quad (8)$$

- The edges in $\bigcup_{i=0}^{2k-1} E_i^H$, for $j \neq 0$:

$$\psi(v_{i(4\mu)+j-1}v_{i(4\mu)+j}) = \begin{cases} 0, & \text{if } i \text{ is even and } j \equiv 3 \pmod 4 \\ 1, & \text{if } (i \text{ is even and } j \equiv 3 \pmod 4) \text{ or } (i \text{ is odd and } j \equiv 2 \pmod 4) \\ 2, & \text{if } i \text{ is even and } j \equiv 1 \pmod 4 \\ 3, & \text{if } (i \text{ is even and } j \equiv 2 \pmod 4) \text{ or } (i \text{ is odd and } j \equiv 1 \pmod 4) \end{cases} \quad (9)$$

- The edges in $\bigcup_{i=0}^{2k-2} E_i^V$:

$$\psi(v_{i(4\mu)+j}v_{(i+1)(4\mu)+j}) = \begin{cases} 0, & \text{if } i \text{ is even and } j \equiv 1 \pmod 4 \\ 1, & \text{if } i \text{ is even and } j \equiv 0 \pmod 4 \\ 2, & \text{if } i \text{ is even and } j \equiv 2 \pmod 4 \\ 3, & \text{if } i \text{ is even and } j \equiv 3 \pmod 4 \\ 4, & \text{if } i \text{ is odd} \end{cases} \quad (10)$$

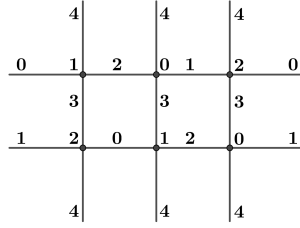


Fig. 3. A valid 5-total coloring for the 1-closure of $B(6, 2)$.

Now, we consider the disconnected case of $C_{(8\mu+6\lambda)k}(2k, 3)$. The graph is disconnected when $k \equiv 0 \pmod 3$. In this case, let us denote $k = 3\alpha$. Note that $C_{(8\mu+6\lambda)3\alpha}(3, 6\alpha)$ consists of three copies of $C_{(8\mu+6\lambda)\alpha}(1, 2\alpha)$. The coloring is obtained in the same way as before, but we must consider the cases where $\mu \neq 0$ and $\mu = 0$ differently, since we need to consider another 5-total coloring of $B(6, 2)$ in the second case.

In the first case, the valid desired 5-total coloring of the graph $C_{(8\mu+6\lambda)\alpha}(1, 2\alpha)$ is obtained by making the 1-closure of the semigraph obtained from the horizontal merge between $B(8k\mu, 2k)$ and $B(6k\lambda, 2k)$, with 5-total colorings ϕ and ψ , resp. as in the previous case.

In the second case, first note that the coloring of $B(6, 2)$ presented in Figure 2 is not valid for the 1-closure. So, we use the other coloring presents in Figure 3 in order to obtain a convenient coloring (instead of ψ) ψ' of $B(6k\lambda, 2k)$. We obtain the desired coloring of $C_{(8\mu+6\lambda)\alpha}(1, 2\alpha)$ by making the 1-closure of the semigraph obtained from the horizontal merge between $B(8k\mu, 2k)$ and $B(6\lambda, 2k)$, with 5-total colorings ϕ and ψ' , resp. (the same technique used in the previous case). The result follows and we present an example in Figure 4. \square

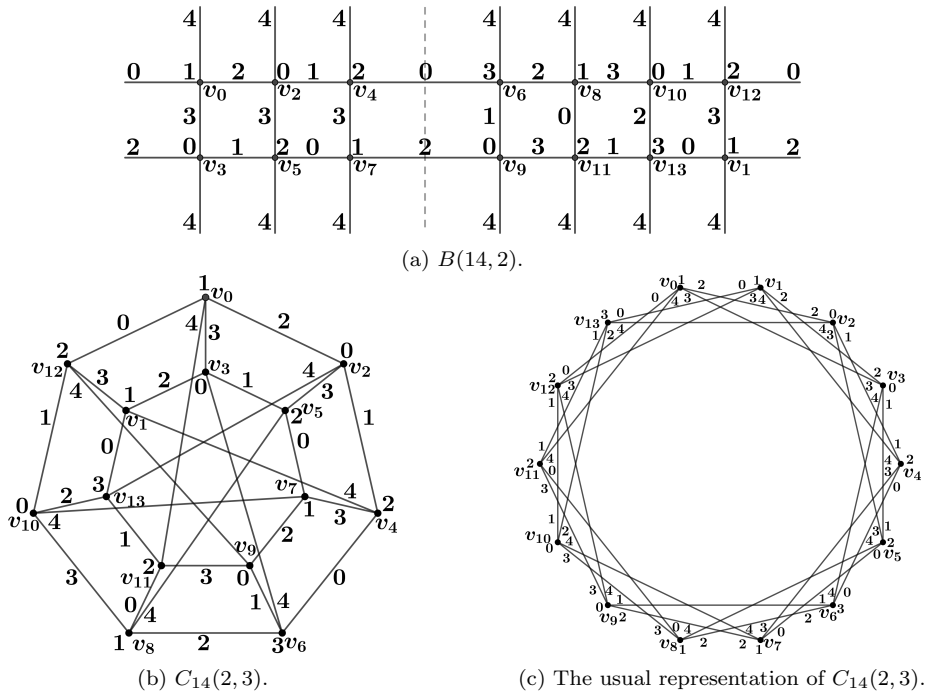


Fig. 4. A 5-total coloring of graph $C_{14}(2, 3)$ obtained by Theorem 3.2.

Note that for any nonnegative integers μ and λ , we have that $(8\mu + 6\lambda)k \neq 10k$, and so $C_{10k}(2k, 3)$ is not covered by Theorem 3.2. However, we could find a 5-total coloring of $C_{10}(2, 3)$ (see Figure 5).

An immediate consequence of Theorem 3.2 and of this result is the following corollary.

Corollary 3.3 *The circulant graph $C_n(2, 3)$ is Type 1, for even $n \geq 6$.*

An interesting consequence of the disconnected case is that for positive integers μ and λ , the power of a cycle $C_{(8\mu+6\lambda)}(1, 2)$ is Type 1 (note that in this case we have $k = 1$).

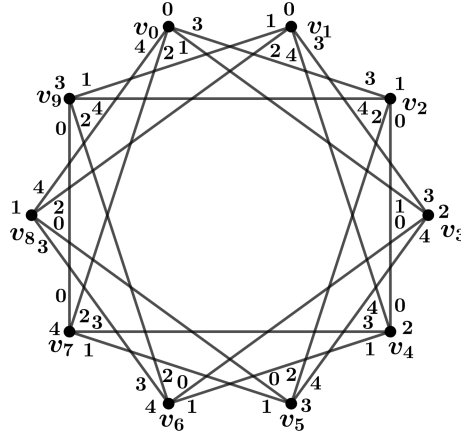


Fig. 5. A 5-total coloring of $C_{10}(2,3)$.

It is known that $C_{6n}(1,k)$ is Type 1, for $k \equiv 1 \pmod 3$ or $k \equiv 2 \pmod 3$ for $k < 3n$ [6]. The total chromatic number of $C_{6n}(1,k)$, when $k \equiv 0 \pmod 3$, is not known. Theorem 3.2 for the disconnected case and $\mu = 0$, allowed us to determine the total chromatic number of a part of this family:

Corollary 3.4 *The circulant graph $C_{3n}(1,k)$ is Type 1, for even k .*

The next result uses the following well known definition due to Chetwynd and Hilton. A regular graph G is *conformable* [3] if G admits a vertex coloring with $\Delta(G) + 1$ colors such that the number of vertices in each color class has the same parity as $|V(G)|$. Every $(\Delta(G) + 1)$ -total coloring ϕ of G restricted to $V(G)$ is a conformable coloring.

Given a total coloring of G , we say that a color c is *represented* in a vertex v if it has color c or one of its incident edges has color c . Notice that in every $(\Delta(G) + 1)$ -total coloring of a $\Delta(G)$ -regular graph G all colors must be represented in every vertex of G .

Theorem 3.5 *The graph $C_{3n}(1,3)$ is Type 1, except for $C_{12}(1,3)$, which is Type 2.*

Proof. The proof is divided into three cases.

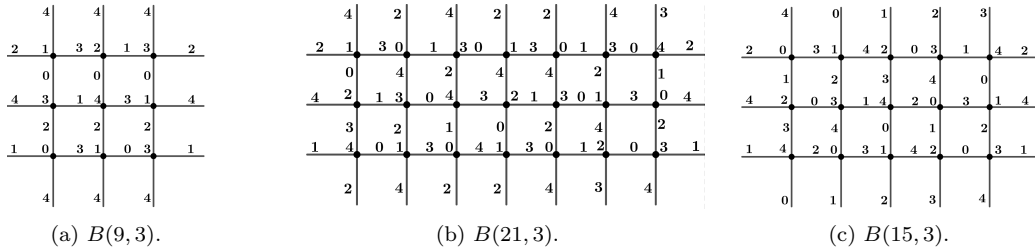


Fig. 6. Valid 5-total colorings for the 1-closure of $B(9,3)$, $B(21,3)$ and $B(15,3)$, resp.

- For $n \equiv 0 \pmod 3$: Notice that there exists a valid 5-total coloring for the 1-closure of $B(9,3)$, presented in Figure 6a. And so, by Lemma 2.2, there exists a valid 5-total coloring for the 1-closure of $B(9\lambda,3)$ when $n = 3\lambda$. Therefore, there exists a 5-total coloring of $C_{3n}(1,3)$, with $n \equiv 0 \pmod 3$, and it is Type 1.
- For $n \equiv 1 \pmod 3$: We consider graph $C_{3n}(1,3)$, $n \equiv 1 \pmod 3$, with $n \neq 4$ and prove that it is Type 1. There exists a valid 5-total coloring for the 1-closure of $B(21,3)$ shown in Figure 6b. Note that the colorings of $B(21,3)$ and $B(9,3)$ are horizontally compatible (see Figure 6). So, making the horizontal merge recursively, one obtains a valid 5-total coloring for the 1-closure of $B(21 + 9\lambda,3)$, with $n = 1 + 3(\lambda + 2)$. Therefore, $C_{3n}(1,3)$ is Type 1, for $n \equiv 1 \pmod 3$ and $n \neq 4$ (see an example in Figure 8).
- For $n \equiv 2 \pmod 3$: There exists a valid 5-total coloring for the 1-closure of $B(15,3)$ shown in Figure 6c. Similarly to the previous case, the colorings of $B(15,3)$ and $B(9,3)$ are horizontally compatible. So, making the horizontal merge recursively, one obtains a valid 5-total coloring for the 1-closure of $B(15 + 9\lambda,3)$, with $n = 2 + 3(\lambda + 1)$. Therefore, $C_{3n}(1,3)$ is Type 1, for $n \equiv 2 \pmod 3$.

Finally, let us show that $C_{12}(1,3)$ is Type 2. For this, we show that there are no conformable coloring of this graph that extends to a 5-total coloring. First, let i_j be the number of vertices colored with the color c_j .

Notice that a conformable coloring of $C_{12}(1,3)$ must respect the following condition: $i_1 \equiv i_2 \equiv i_3 \equiv i_4 \equiv i_5 \equiv |V(C_{12}(1,3))| \pmod 2$. Note that $i_j \leq 6$, with $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, because the size of the maximum independent set is 6.

Suppose for some $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ that $i_k = 6$. Unless some rotation, there exists a unique set of vertices colored with color c_k (represented in gray in the first left top copy of $C_{12}(1,3)$ in Figure 7). So, their incident edges (dotted) cannot have color c_k and in this case, they are all edges of the graph. Therefore, the remaining vertices (black) cannot have color c_k represented, which implies that there is no 5-total coloring with $i_k = 6$.

If for some $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ we have $i_k = 4$, then color c_k (represented in gray in Figure 7) can be assigned in three ways: either there are two colored vertices in the external cycle, or there is one colored vertex in the external cycle, or there is no colored vertex in the external cycle. In any case, we have at least one of the following contradictions (see Figure 7).

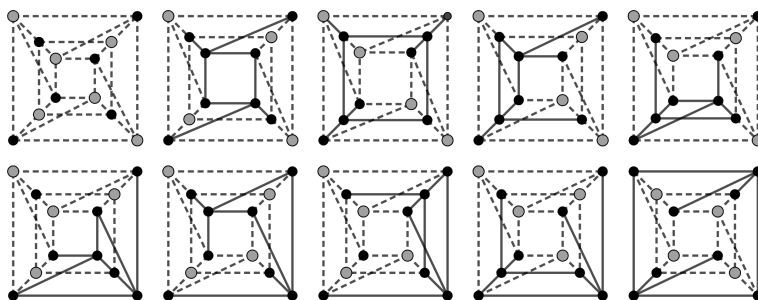


Fig. 7. All cases considered of conformable colorings of graph $C_{12}(1,3)$.

- (i) There is some vertex such that all its neighbors have color c_k in the first case ($i_k = 6$), and thus none of its incident edges can have this color.
- (ii) The remaining graph with no dotted edges has maximum matching of size 2, and so color c_k cannot be represented in all vertices of the graph.

Thus, no conformable colorings of this graph can be extended to a 5-total coloring of circulant graph $C_{12}(1,3)$, and the result holds. \square

The last result of this paper establish the total chromatic number of all graphs of the third considered infinite family of 4-regular circulant graphs and it uses the same technique presented before.

Theorem 3.6 *The circulant graph $C_{3\lambda p}(1,p)$ is Type 1, for any positive integer λ and p multiple of 3.*

Proof. The case when p is even was already considered in Corollary 3.4. Let us consider the case when p is odd and multiple of 3. The 5-total coloring is obtained by alternating two colorings of $B(9,3)$ in the construction of the members of the family by making vertical merges between the copies of $B(9,3)$ following by the 1-closure to obtain the considered circulant graphs.

Let φ be the valid 5-total coloring for the 1-closure of $B(9,3)$ presented in Figure 6a. Note that φ is not vertically compatible with itself. Indeed, $\varphi(v_2) = \varphi(v_8) = 3$, meaning that two adjacent vertices would have the same color after the vertical merge.

We define a valid 5-total coloring ψ for the 1-closure of $B(9,3)$, such that $\psi(x) = \varphi(x)$, where x is an element of $B(9,3)$, except for the following cases:

- $\psi(v_0) = 3, \psi(v_0v_1) = 1, \psi(v_1v_2) = 3, \psi(v_2) = 1;$
- $\psi(v_3) = 1, \psi(v_3v_4) = 3, \psi(v_4v_5) = 1, \psi(v_5) = 3;$
- $\psi(v_6) = 3, \psi(v_6v_7) = 0, \psi(v_7v_8) = 3, \psi(v_8) = 0.$

We have that φ and ψ are vertically compatible. The desired coloring is obtained by assigning coloring φ to $B_i(9,3)$ when i is even and coloring ψ when i is odd, with $0 \leq i \leq \frac{p}{3} - 1$. By using these two colorings in the copies of $B(9,3)$, the vertical merge between $B_0(9,3), B_1(9,3), \dots, B_{\frac{p}{3}-1}(9,3)$ preserves the total colorings without conflict and we obtain a valid 5-total coloring for the 1-closure of $B(3p,p)$. So, we have that $C_{3p}(1,p)$ is Type 1. By Theorem 3.1, graph $C_{3\lambda p}(1,p)$ is Type 1, for any positive integer λ . It concludes the proof. \square

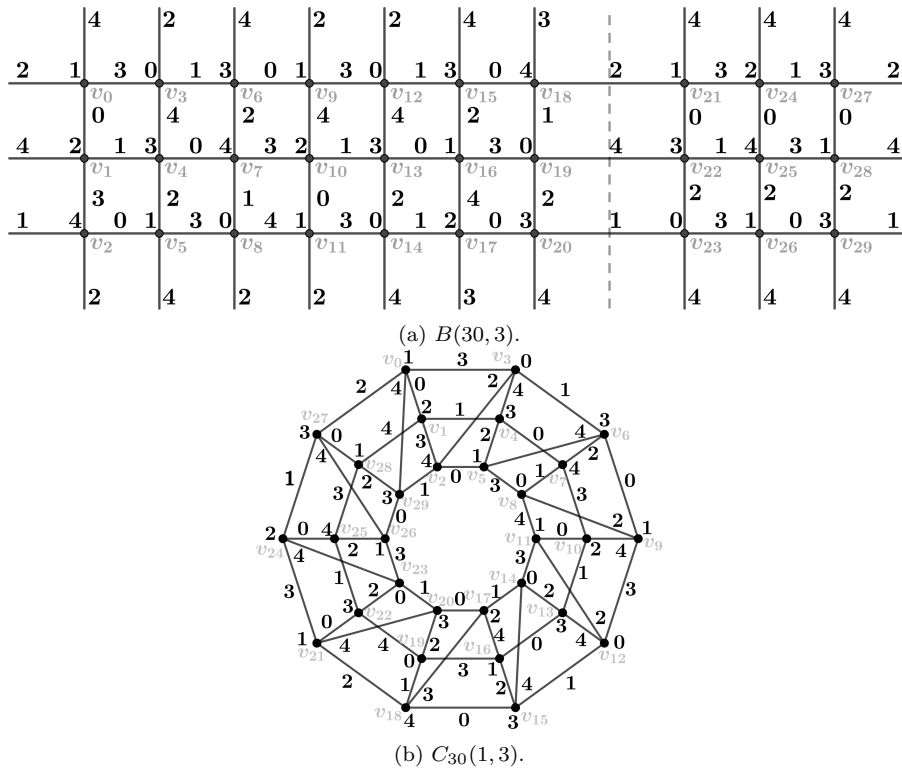



Fig. 8. A 5-total coloring of graph $C_{30}(1, 3)$ obtained by Theorem 3.5.

References

- [1] Behzad, M., Chartrand G. and Cooper Jr J. K., *The Colour Numbers of Complete Graphs*, J. London Math. Soc., (1967), pp. 226-228.
- [2] Campos, C. N. and de Mello C. P., *Total colouring of C_n^2* , Tend. Math. Apl. Comput., **4** (2003), pp. 177-186.
- [3] Chetwynd, A. G. and Hilton A. J. W., *Some refinements of the total chromatic number conjecture*, Congr. Numer., (1988), pp. 195-216.
- [4] Dantas, S, de Figueiredo C. M. H., Mazzuocolo G., Preissmann M., dos Santos V. F. and Sasaki D., *On the total coloring of generalized Petersen graphs*, Discrete Math. **5**, (2016), pp. 1471-1475.
- [5] Hackmann, A. and Kemnitz A., *Circular total colorings of cubic circulant graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput., (2004), pp. 65-72.
- [6] Khenoufa, R. and Togni O., *Total and fractional total colourings of circulant graphs*, Discrete Math, (2008), pp. 6316-3329.
- [7] Monakhova, E. A., *A survey on undirected circulant graphs*, Discrete Math. Algorithms Appl., (2012).
- [8] Sánchez-Arroyo, A., *Determining the total colouring number is NP-hard*, Discrete Math, (1989), pp. 315-319.
- [9] Yap, H. P., "Total colourings of graphs", Springer, Berlin, 1996.
- [10] Vizing, V. G. *Some Unsolved Problems In Graph Theory*, Russian Math. Surveys, 23:6 (1968), pp. 125-141.
- [11] Wong, C. K. and Coppersmith D., *A Combinatorial Problem Related to Multimodule Memory Organizations*, J. Assoc. Comput. Mach., **21** (1974), pp. 392-402.
- [12] Zorzi, A. *Total coloring on Power of Cycle graphs*, Master Thesis, Federal University of Rio de Janeiro, 2019.

Figura 53 - Pôster apresentado no LATIN 2020.



On total chromatic number of circulant graphs

Mauro Nigro Alves Junior - Diana Sasaki Nobrega

State University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - PPGCCOMP

Total Coloring and Circulant Graph

A k -total coloring of a graph G is an assignment of k colors to the elements of G such that adjacent elements have different colors. The total chromatic number $\chi''(G)$ is the smallest integer k for which G has a k -total coloring. Clearly, $\chi''(G) \geq \Delta + 1$, and the Total Coloring Conjecture (TCC) states that for any simple graph G , $\chi''(G) \leq \Delta + 2$, where Δ is the maximum degree of G [1]. Graphs with $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ are called Type 1, and graphs with $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ are called Type 2.

A circulant graph $C_n(d_1, d_2, \dots, d_t)$ with $1 \leq d_1 < \dots < d_t \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ has vertex set $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ and edge set $E = \cup_{i=1}^t E_i$ where $E_i = \{e_0^i, e_1^i, \dots, e_{n-1}^i\}$ and $e_j^i = (v_j, v_{j+d_i})$ where the indexes of the vertices are considered modulo n . An edge of E_i is called edge of length d_i .

The main goal of this current work is to determine the total chromatic number of all circulant graphs $C_n(1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$. It is well known by Chetwynd [2] that when n is even the graph is Type 2. So, we focus on the odd case.

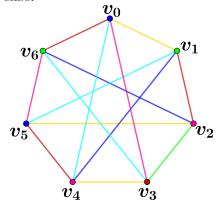


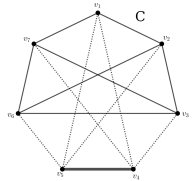
Figure 1: Example of circulant graph $C_7(1, 3)$

Main Result

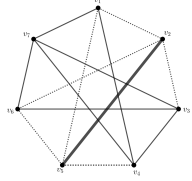
Theorem 1. [Sasaki [4], 2013] If a k -regular graph G does not have maximal matching of maximum length $\lfloor \frac{|E|}{k+1} \rfloor$, then does not exist $(k+1)$ -total coloring of G

Theorem 2. The graph $C_7(1, 3)$ is Type 2. Supposing that $C_7(1, 3)$ has a maximal matching M of length $\lfloor \frac{14}{5} \rfloor = 2$. Let $e \in M$, we can consider two cases:

- if an edge has length 1, that is, $e \in E_1(C_7(1, 3))$



- if an edge has length 3, that is, $e \in E_2(C_7(1, 3))$






In any case, we do not have a maximal matching of length 2 for $C_7(1, 3)$. Concluding that there is no 5-total coloring of $C_7(1, 3)$.

Auxiliar Result

We prove that $C_7(1, 3)$ is Type 2, by using the following theorem to prove that this graph does not have any 5-total coloring.


Agradecimentos


Referências

- [1] Behzad, M. Graphs and Their Chromatic Numbers. *PhD Thesis, Michigan University*, 1965.
- [2] Chetwynd, A. G and Hilton, A. J. W. Some refinements of the total chromatic number conjecture. *Congr. Numer.*, v. 66, pp. 195-216, 1988.
- [3] Khemoufa, R and Togni, O. Total and fractional total colourings of circulant graphs. *Discrete Math.*, v. 309, pp. 6316-6329, 2008.
- [4] Sasaki, D. On total coloring of cubic graphs. *PhD Thesis, PESC-UFRJ*, 2013.


Figura 54 - Pôster apresentado no LAWCG 2020.



remote
9th LAWCG
and
MDA
November 25th, 2020



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



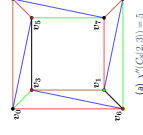
CCOMP PESC
Programa de Engenharia de Matemática e Computação

On total coloring of circulant graphs

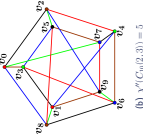
Matheus Aduato¹, Sérgio Fusquino², Mauro Nigro², Diana Sasaki²
¹IPESC/COPPE - UFRJ, ²PPCCOMP and IME - UERJ - aduato@cos.ufrj.br - sergio.fusquino@gmail.com - mauronigro@ime.uerj.br - diana.sasaki@ime.uerj.br

Introduction

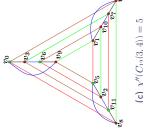
A k -total coloring of a graph G is an assignment of k colors to the elements of G such that adjacent elements have different colors. The total chromatic number $\chi'(G)$ is the smallest integer k for which G has a k -total coloring. Clearly, $\chi'(G) \geq \Delta + 1$, and the Total Coloring Conjecture (TCC) states that for any simple graph G , $\chi'(G) \leq \Delta + 2$, where Δ is the maximum degree of G [2, 8]. Graphs with $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ are called Type 1, and graphs with $\chi'(G) = \Delta(G) + 2$ are called Type 2. A circulant graph $C_n(d_1, d_2, \dots, d_t)$ with $1 \leq d_1 < \dots < d_t \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ has vertex set $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ and edge set $E = \cup_{i=1}^t E_i$, where $E_i = \{e_{i,0}, e_{i,1}, \dots, e_{i,n-1}\}$ and $e_{i,j} = (v_j, v_{j+d_i})$ where the indexes of the vertices are considered modulo n . An edge of E_i is called edge of length d_i . In this work, we determine the Type of an infinite family of 4-regular circulant graphs, that is, $C_n(a, b)$. When a divide n (or b divide n), we will have a Prism graph $G_{\frac{n}{a}}^{\frac{n}{a}}$ as a subgraph of $C_n(a, b)$. A Prism graph $G(n, 1)$ is defined by $V(G(n, 1)) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ and $E(G(n, 1)) = \{e_{0,1}, e_{1,1}, \dots, e_{n-1,1}, e_{i,0}, e_{i,1} \mid 0 \leq i < n\}$. See some examples of $C_n(a, b)$ with $G_{\frac{n}{a}}^{\frac{n}{a}}$ as a subgraph in Figure 1.



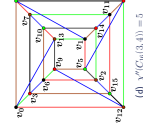
(a) $\chi'(C_n(2,3)) = 5$



(b) $\chi'(C_n(3,4)) = 5$



(c) $\chi'(C_n(5,6)) = 5$



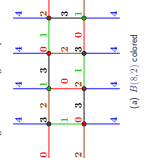
(d) $\chi'(C_n(3,12)) = 5$

General results

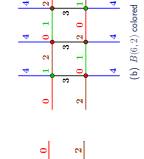
In the table below, we present some results already known about the total coloring of circulant graphs.

Circulant graph	Type 1	Type 2
$C_n(1)$ [9]	$n \equiv 0 \pmod 3$	otherwise
$C_n(1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ [9]	n is odd	otherwise
$C_n(d, n)$ [5]	$d = \gcd(d, n)$ with $d = l m$, m is even and $C_{\frac{n}{m}}(d, n) \neq 1$ copies of $C_{\frac{n}{m}}(2, 5)$	otherwise
$C_n(1, 2)$ [3]	$n \neq 7$	otherwise
$C_n(1, k)$ [6]	$k \equiv 2 \pmod 5$ or $k \equiv 3 \pmod 5$	
$C_n(1, k)$ [6]	$k \equiv 1 \pmod 3$ or $k \equiv 2 \pmod 3$	
$C_n(1, 3)$ [9]		$tn = 8$

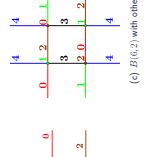
Table 1: State of the art



(a) $B(n, 2)$ colored



(b) $B(n, 2)$ colored



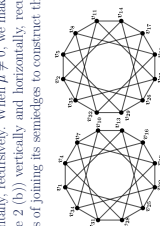
(c) $B(n, 2)$ with other coloring

Figure 2: Semigraph $B(n, a)$


Our results

It is known that the Prism graphs $G(n, 1)$ are Type 1, except $G(5, 1)$ [7, 4]. The 4-total coloring for this family will be useful in the proof of the following theorem about 4-regular circulant graphs in which $G(n, 1)$ is a subgraph.

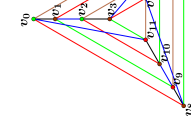
Theorem 1. Let $C_n(2k, 3)$ be a 4-regular circulant graph. The graph $C_n(2k, 3)$ is Type 1 for $n = (8\mu + 6)k$, with $k \geq 1$ and non-negative integers μ and λ .



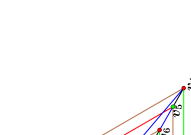
(a) $C_n(2k, 3)$ is connected



(b) $B(12, 4)$



(c) $\chi'(C_n(3, 12)) = 5$



(d) $\chi'(C_n(4, 4)) = 5$

Figure 3: The graph $C_n(3, 12)$ with a total coloring with 5 colors.


Conclusion

The total chromatic number of several circulant graphs has been determined, including the total chromatic number of the cubic circulant graphs $C_n(d, n)$. As a future work, we would like to determine the total chromatic number of all 4-regular circulant graphs $C_n(a, b)$.

References

- [1] M. N. ALVES JUNIOR AND D. SASAKI. A result on total coloring of circulant graphs in ENCONTRO DE TEORIA DA COMPUTAÇÃO (ETC), vol. 3, Porto Alegre, 2020, pp. 81–84.
- [2] M. BEHZAD. *Graphs and Their Chromatic Numbers*, PhD thesis, Michigan University, 1965.
- [3] C. CAMPOS. *O problema de coloração total em classes de grafos*, PhD thesis, State University of Campinas, São Paulo, 2006.
- [4] A. G. CHETWYND AND A. J. W. HILTON. Some refinements of the total chromatic number conjecture. *Comg Numer.* (1988), pp. 195–216.
- [5] A. HACKGUANN AND A. KEANTZ. Greater total colorings of cubic circulant graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* (2003), pp. 67–72.
- [6] R. KHANOUFA AND O. TOGNI. Total and fractional total colorings of circulant graphs. *Discrete Math.* (2006), pp. 536–542.
- [7] D. SASAKI ET AL., On the total coloring of generalized Petersen graphs. *Discrete Math.* (2014), pp. 1471–1475.
- [8] V. VIZING. Some unsolved problems in graph theory. *Russian Mathematical Surveys*, 23 (1968), pp. 127–141.
- [9] H. YAP. *Total colorings of graphs*. Springer, Berlin, 1996.

Acknowledgment



Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior