



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Faculdade de Engenharia

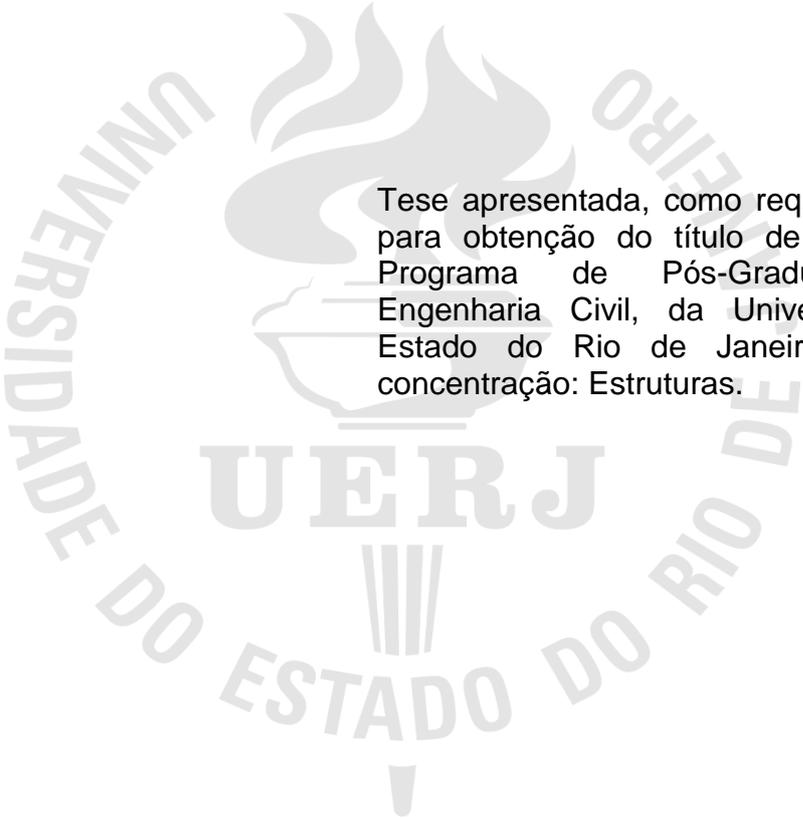
Thiago Cunha da Silva

**Análise e contribuição à Teoria de Grelha considerando a  
flexibilidade dos apoios**

Rio de Janeiro  
2023

Thiago Cunha da Silva

**Análise e contribuição à Teoria de Grelha considerando a flexibilidade dos apoios**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro Área de concentração: Estruturas.

Orientadores: Profa. Dra. Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares

Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S586 Silva, Thiago Cunha da.  
Análise e contribuição à Teoria de Grelha considerando a flexibilidade dos apoios / Thiago Cunha da Silva. – 2023.  
234 f.

Orientadores: Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares, Rodrigo Bird Burgos.

Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia civil - Teses. 2. Engenharia de estruturas - Teses. 3. Lajes de concreto - Teses. 4. Concreto armado - Teses. 5. Análise numérica - Teses. I. Tavares, Maria Elizabeth da Nóbrega. II. Burgos, Rodrigo Bird. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 624.073

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Thiago Cunha da Silva

**Análise e contribuição à Teoria de Grelha considerando a flexibilidade dos apoios**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro Área de concentração: Estruturas.

Aprovado em: 28 de novembro de 2023.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dra. Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares (Orientador)  
Faculdade de Engenharia – UERJ

---

Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos (Orientador)  
Faculdade de Engenharia – UERJ

---

Prof. Dra. Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira  
Faculdade de Engenharia – UERJ

---

Prof. Dra. Fernanda Lins Gonçalves Pereira  
Faculdade de Engenharia – UERJ

---

Prof. Dr. Júlio Jerônimo Holtz Silva Filho  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

---

Prof. Dr. André Maues Brabo Pereira  
Universidade Federal Fluminense – UFF  
Rio de Janeiro

2023

## DEDICATÓRIA

Dedico esse estudo ao meu pai e a minha mãe por estarem sempre presentes e serem minha fonte de inspiração e força.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Marcio e Jane, por todo apoio aos meus projetos e por estarem presentes em todos os momentos.

Ao programa de pós graduação em Engenharia Civil da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aos professores Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares e Rodrigo Bird Burgos, pela orientação.

A todos os meus Professores, antigos e atuais.

## RESUMO

SILVA, Thiago Cunha da. *Análise e contribuição à Teoria de Grelha considerando a flexibilidade dos apoios*. 2023. 234 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

O aumento do uso de *softwares* para o dimensionamento de estruturas apresenta diversos benefícios, entre eles a possibilidade de redução de custos ao se realizar análises mais precisas e otimizar o dimensionamento. Com a otimização do dimensionamento, mesmo apresentando condições de segurança satisfatórias, os elementos estruturais passam a ter comportamento mais flexível. As vigas de edifícios costumam apresentar, muitas vezes, deslocamentos consideráveis, que podem influenciar nas reações das lajes e também em suas propriedades dinâmicas. Os diversos modelos de análise e dimensionamento de lajes possuem algumas simplificações. Uma das simplificações mais amplamente empregada é a consideração de apoios rígidos. Essa configuração, embora comumente adotada, pode vir a alterar consideravelmente os esforços atuantes na laje podendo gerar patologias e desempenho insatisfatório da estrutura, haja vista que os apoios podem apresentar certo grau de flexibilidade. O modelo proposto de contribuição à Teoria de Grelha estabelece equações que alteram o cálculo de esforços e deslocamentos em lajes de forma a considerar a flexibilidade dos apoios para qualquer nível de flexibilidade das vigas de bordo. É realizado um estudo analítico do comportamento da influência da flexibilidade dos apoios na determinação das solicitações e deslocamentos da laje. Uma análise comparativa entre o modelo proposto e modelos numéricos desenvolvidos no *software* SAP2000 foi realizada. Foram analisados 192 modelos em lajes simplesmente apoiadas e 168 modelos em lajes engastadas nos bordos, totalizando 360 análises numéricas. Foi verificado que o modelo proposto trouxe resultados precisos na maioria dos casos ao se comparar com os resultados obtidos nos modelos numéricos para os casos de lajes com bordas rígidas e flexíveis. Além da análise numérica foram utilizados dados de ensaios em laje com apoios flexíveis. Os resultados ao se aplicar o modelo proposto aos dados experimentais indicaram boa precisão do modelo.

Palavras-chave: Teoria de Grelha; Lajes; Apoios Flexíveis; Concreto Armado.

## ABSTRACT

SILVA, Thiago Cunha da. *Analysis and contribution to Grid's Theory considering the flexibility of supports*. 2023. 234 f. Thesis (Civil Engineering) - Faculty of Engineering, State University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

The increase in the use of software for structural design has several benefits, including the possibility of cost reduction by carrying out more precise analysis and optimizing design. With optimized design, even when satisfactory safety conditions are presented, structural elements become more flexible. Building beams often exhibit considerable displacements, which can influence the reactions of slabs and also their dynamic properties. The various models for slab analysis and design have some simplifications. One of the most widely adopted simplifications is the consideration of rigid supports. Although commonly adopted, this configuration can considerably alter the forces acting on the slab, leading to pathologies and unsatisfactory structural performance, as the supports may have a certain degree of flexibility. The proposed model contribution to Grid Theory establishes equations that change the calculation of slabs to consider the flexibility of supports for any level of flexibility of the border beams. An analytical study of the influence of support flexibility on the determination of slab requests and displacements was carried out. A comparative analysis between the proposed model and numerical models developed in SAP2000 software was performed. 192 models were analyzed in simply supported slabs and 168 models in slabs fixed at the edges, totaling 360 numerical analyses. It was verified that the proposed model brought precise results in most cases when compared with the results obtained in numerical models for cases of slabs with rigid and flexible edges. In addition to numerical analysis, data from a test on a slab with flexible supports was used. The results obtained by applying the proposed model to the experimental data indicated good accuracy of the model.

Keywords: Grid Theory; Slabs; Flexible Supports; Reinforced Concrete.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 0.1 – Ilustração do esquema estrutural adotado no ensaio da laje, dimensões em mm. Adaptado de Shu et al (2015).....	26
Figura 3.1 – Valores mínimos de taxa de armadura, NBR 6118/2023. ....	49
Figura 3.2 – Valores mínimos de taxa de armadura em lajes, NBR 6118/2023.....	50
Figura 3.3 – Resistência à compressão do concreto em função das classes, FIB Model Code 2010.....	52
Figura 3.4 – Regiões de continuidade (B) e descontinuidade (D), adaptado de Tjen e Kuchma (2002).....	53
Figura 3.5 – Deformação limite, ACI 318, 2019.....	54
Figura 3.6 – Espessura mínima de laje armada em duas direções, adaptado de ACI 318, 2019. ....	54
Figura 3.7 – Classes do concreto de acordo com o Eurocode, 2004.....	56
Figura 4.1 – Influência da rigidez dos pilares no modelo estrutural de viga. a) Modelo de viga simplesmente apoiada; b) Modelo de viga apoiada e engastada	60
Figura 4.2 – Possível formação de fissura em devido a modelo estrutural inadequado. ....	61
Figura 4.3 – Modelo para cálculo momento fletor negativo para viga de pórtico.....	62
Figura 4.4 – Modelo de viga contínua utilizando apoios elásticos considerando a rigidez dos pilares.....	63
Figura 4.5 – Representação de apoios elásticos lineares. ....	66
Figura 5.1 – Faixa de laje apoiada sobre vigas. ....	70
Figura 5.2 – Deslocamento nas vigas de apoio da laje. ....	70
Figura 5.3 – Modelo estrutural para a faixa de laje e viga de apoio. ....	71
Figura 5.4 – Comparação entre o deslocamento de viga biapoiada com apoio rígido e flexível. ....	73
Figura 5.5 – Deslocamento no ponto de momento máximo devido à elasticidade dos apoios.....	73
Figura 5.6 – Comparação entre o deslocamento de viga biengastada com apoio rígido e flexível. ....	75

Figura 5.7 – Seção de viga biengastada, a partir do 1º apoio, para o equacionamento do momento. ....	75
Figura 5.8 – Localização do momento máximo, a partir do diagrama de força cortante, para o caso de viga biengastada com apoio elástico. ....	79
Figura 5.9 – Viga engastada e apoiada com apoios elásticos. ....	81
Figura 5.10 – Equacionamento do momento para viga engastada e apoiada a partir do engaste.....	81
Figura 5.11 – Local de força cortante nula em viga engastada e apoiada com apoios elásticos. ....	84
Figura 5.12 – Variáveis para determinar as solicitações na faixa de laje, condição de contorno: Apoiado – Apoiado. ....	88
Figura 5.13 – Variáveis para determinar as solicitações na faixa de laje, condição de contorno: Engastado – Engastado. ....	89
Figura 5.14 – Variáveis para determinar as solicitações na faixa de laje, condição de contorno: Engastado – Apoiado. ....	90
Figura 5.15 – Razão entre os deslocamentos do modelo proposto e da Teoria de grelha para a condição de contorno simplesmente apoiado. ....	92
Figura 5.16 – Razão entre os deslocamentos do modelo proposto e da Teoria de grelha para a condição de contorno biengastado.....	92
Figura 5.17– Razão entre os deslocamentos do modelo proposto e da Teoria de grelha para a condição de contorno engastado e apoiado.....	93
Figura 5.18 – Razão entre os momentos positivos do modelo proposto e da Teoria de Grelha para a condição de contorno biengastado.....	94
Figura 5.19 – Razão entre os momentos positivos do modelo proposto e da Teoria de Grelha para a condição de contorno engastado e apoiado.....	94
Figura 5.20 – Razão entre os momentos negativos do modelo proposto e da Teoria de Grelha para a condição de contorno biengastado.....	95
Figura 5.21 – Razão entre os momentos negativos do modelo proposto e da Teoria de Grelha para a condição de contorno engastado e apoiado.....	96
Figura 6.1 – Modelo estrutural de faixa de laje simplesmente apoiada.....	98
Figura 6.2 – Comportamento do deslocamento máximo em uma faixa de laje simplesmente apoiada em função da rigidez dos apoios, medidas em kN e m. ....	99
Figura 6.3 – Modelo estrutural de faixa de laje engastada e apoiada. ....	100

Figura 6.4 – Comportamento do coeficiente $\psi$ em função dos parâmetros de rigidez $k_1$ e $k_2$ , medidas em kN e m.....	100
Figura 6.5 – Comportamento da reação $R_1$ . Condição de contorno: engastada e apoiada, medidas em kN e m.....	102
Figura 6.6 – Comportamento da reação $R_2$ . Condição de contorno: engastada e apoiada, medidas em kN e m.....	103
Figura 6.7 – Comportamento do momento no engaste. Condição de contorno: engastada e apoiada, medidas em kN e m. ....	103
Figura 6.8 – Comportamento do momento máximo na viga. Condição de contorno: engastada e apoiada, medidas em kN e m. ....	104
Figura 6.9 – Deslocamento máximo em função da flexibilidade dos apoios, medidas em kN e m. Condição de contorno: Engastado-Apoiado.....	105
Figura 6.10 – Modelo estrutural de faixa de laje biengastada. ....	106
Figura 6.11 – Comportamento do coeficiente $\beta$ em função dos parâmetros de rigidez $k_1$ e $k_2$ , medidas em kN e m.....	107
Figura 6.12 – Comportamento da reação de apoio $R_1$ . Condição de contorno: biengastado, medidas em kN e m. ....	108
Figura 6.13 – Comportamento da reação de apoio $R_2$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: biengastado. ....	109
Figura 6.14 – Comportamento do momento no engaste $M_1$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: biengastado. ....	109
Figura 6.15 – Comportamento do momento no engaste $M_2$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: biengastado. ....	110
Figura 6.16 – Comportamento do momento máximo da faixa de laje, medidas em kN e m. Condição de contorno: biengastado. ....	111
Figura 6.17 – Deslocamento máximo em função da flexibilidade dos apoios, medidas em kN e m. Condição de contorno: Engastado-Engastado.....	112
Figura 6.18 – Representação de laje com apoios flexíveis. ....	113
Figura 6.19 – Laje simplesmente apoiada com apoios flexíveis com $L_x = L_y$ . ....	115
Figura 6.20 – Comportamento do coeficiente $K_x$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje simplesmente apoiada com $L_x = L_y$ .....	116
Figura 6.21 – Deslocamento máximo da laje, medidas em kN e m. Condição de contorno: Simplesmente apoiada nos bordos com $L_x = L_y$ . ....	117

Figura 6.22 – Laje simplesmente apoiada com apoios flexíveis com $L_x = 2L_y$ . ....	118
Figura 6.23 – Coeficiente $K_x$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje simplesmente apoiada com $L_x = 2L_y$ . ....	118
Figura 6.24 – Momento máximo na direção do maior vão, medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje simplesmente apoiada com $L_x = 2L_y$ . ....	119
Figura 6.25 – Momento máximo na direção do menor vão, medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje simplesmente apoiada nos bordos com $L_x = 2L_y$ . ....	120
Figura 6.26 – Deslocamento máximo da laje, medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje simplesmente apoiada com $L_x = 2L_y$ . ....	121
Figura 6.27 – Laje com apoios flexíveis engastada nos bordos com $L_x = L_y$ . ....	122
Figura 6.28 – Coeficiente $K_x$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje engastada em todos os bordos com $L_x = L_y$ . ....	123
Figura 6.29 – Momento máximo positivo na direção X, medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje engastada em todos os bordos com $L_x = L_y$ . ....	124
Figura 6.30 – Deslocamento máximo, medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje engastada em todos os bordos com $L_x = L_y$ . ....	125
Figura 6.31 – Laje com apoios flexíveis engastada nos bordos com $L_x = 2L_y$ . ....	126
Figura 6.32 – Coeficiente $K_x$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje engastada nos bordos com $L_x = 2L_y$ . ....	127
Figura 6.33 – Momento máximo positivo na direção X, medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje engastada em todos os bordos com $L_x = 2L_y$ . ....	128
Figura 6.34 – Momento máximo positivo na direção Y, medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje engastada em todos os bordos com $L_x = 2L_y$ . ....	129
Figura 6.35 – Deslocamento máximo, medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje engastada em todos os bordos com $L_x = 2L_y$ . ....	130
Figura 7.1 – Modelo 1 em laje quadrada e simplesmente apoiada. ....	133
Figura 7.2 – Variação do momento positivo na direção X do Modelo 1 em laje quadrada e simplesmente apoiada com vigas flexíveis. ....	135
Figura 7.3 – Modelo 2 em laje quadrada simplesmente apoiada. ....	136
Figura 7.4 – Calibragens para o cálculo do coeficiente de rigidez sugeridas para o modelo proposto. ....	143

Figura 7.5 – Viga de borda rígida (20x40): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 15cm de espessura. ....	144
Figura 7.6 – Viga de borda flexível (10x20): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 15cm de espessura. ....	145
Figura 7.7 – Viga de borda rígida (20x40): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 10 cm de espessura. ....	146
Figura 7.8 – Viga de borda flexível (10x20): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 10cm de espessura. ....	147
Figura 7.9 – Viga de borda rígida (20x40): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 8 cm de espessura. ....	148
Figura 7.10 – Viga de borda flexível (10x20): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 8 cm de espessura. ....	149
Figura 7.11 – Modelo 1 em laje retangular. ....	150
Figura 7.12 – Modelo 2 em laje retangular. ....	154
Figura 7.13 – Resultados do Modelo proposto calibrado: Momento positivo e deslocamento máximo em laje de 15 cm de espessura. ....	158
Figura 7.14 – Resultados do Modelo proposto calibrado: Momento positivo e deslocamento máximo em laje de 10 cm de espessura. ....	160
Figura 7.15 – Resultados do Modelo proposto calibrado: Momento positivo e deslocamento máximo em laje de 8 cm de espessura. ....	162
Figura 7.16 – Modelo 1 em laje quadrada e engastada. ....	164
Figura 7.17 – Momento fletores na direção X do Modelo 1: Vigas rígidas em laje quadrada e engastada de 15cm de espessura. ....	165
Figura 7.18 – Modelo 2 em laje quadrada e engastada. ....	166
Figura 7.19 – Momentos fletores ao longo do eixo X nas lajes do Modelo 2 – Vigas rígidas em laje quadrada de 15 cm de espessura. ....	167
Figura 7.20 – Momentos fletores ao longo do eixo X nas lajes do Modelo 2 – Vigas flexíveis em laje quadrada de 15cm de espessura. ....	168
Figura 7.21 – Modelo 3 em laje quadrada engastada. ....	169
Figura 7.22 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 5: Vigas rígidas em laje quadrada de 15cm de espessura. ....	170
Figura 7.23 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 5: Vigas flexíveis em laje quadrada de 15cm de espessura. ....	171
Figura 7.24 – Modelo 3 para laje quadrada e engastada. ....	172

Figura 7.25 – Momentos fletores ao longo do eixo X nas lajes do Modelo 4: Viga rígida em laje quadrada de 15cm de espessura.....	172
Figura 7.26 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 4: Viga flexível em laje quadrada de 15cm de espessura. ....	173
Figura 7.27 – Momentos fletores ao longo do eixo X nas lajes do Modelo 4A: Vigas rígidas em laje quadrada de 15cm de espessura. ....	174
Figura 7.28 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 4A: Vigas flexíveis em laje quadrada de 15cm de espessura.....	175
Figura 7.29 – Modelo 5 para análise de laje quadrada e engastada.....	176
Figura 7.30 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 5: Vigas rígidas em laje quadrada de 15cm de espessura.....	176
Figura 7.31 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 5: Vigas flexíveis em laje quadrada de 15cm de espessura.....	177
Figura 7.32 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 4A: Vigas rígidas em laje quadrada de 15cm de espessura.....	178
Figura 7.33 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 5A: Vigas flexíveis em laje quadrada de 15cm de espessura.....	179
Figura 7.34 – Modelo 1 em laje retangular engastada. ....	185
Figura 7.35 – Momento fletores na direção X (1° imagem) e Y (2° imagem) do Modelo 1: Vigas rígidas em laje retangular de 15cm de espessura. ....	186
Figura 7.36 – Modelo 2 em laje retangular engastada. ....	187
Figura 7.37 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) do Modelo 2: Vigas rígidas em laje retangular de 15cm de espessura. ....	188
Figura 7.38 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 2: Vigas flexíveis em laje retangular de 15cm de espessura. ....	189
Figura 7.39 – Modelo 3 em laje retangular engastada. ....	190
Figura 7.40 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 3: Vigas rígidas em laje retangular de 15cm de espessura. ....	190
Figura 7.41 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 3: Vigas flexíveis em laje retangular de 15cm de espessura. ....	191
Figura 7.42 – Modelo 4 em laje retangular engastada. ....	192
Figura 7.43 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 4: Viga rígida em laje retangular de 15cm de espessura.....	193

Figura 7.44 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 4: Viga flexível em laje retangular de 15cm de espessura.....	194
Figura 7.45 – Deformada do Modelo 4 em laje retangular de 15cm de espessura.	195
Figura 7.46 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 4A: Vigas rígidas em laje retangular de 15 cm de espessura. ...	196
Figura 7.47 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 4A: Vigas flexíveis em laje retangular de 15cm de espessura. ...	197
Figura 7.48 – Deformada do Modelo 4A em laje retangular de 15cm de espessura.....	198
Figura 7.49 – Modelo 5 em laje retangular engastada. ....	199
Figura 7.50 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 5: Vigas rígidas em laje retangular de 15cm de espessura. ....	200
Figura 7.51 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 5: Vigas flexíveis em laje retangular de 15cm de espessura. ....	201
Figura 7.52 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 5A: Vigas rígidas em laje retangular de 15cm de espessura. ....	202
Figura 7.53 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1° imagem) e Y (2° imagem) no Modelo 5A: Vigas flexíveis em laje retangular de 15cm de espessura. ...	203
Figura 8.1 – Configuração das armaduras e dimensões da laje ensaiada (medidas em mm), adaptado de Dat e Hai (2013). ....	211
Figura 8.2 – Características das fissuras em função dos deslocamentos na laje P1-1, adaptado de Dat e Hai (2013). ....	212
Figura 8.3 – Gráfico de Carregamento × Deslocamento da laje P1-1, adaptado de Dat e Hai (2013).....	212
Figura 8.4 – Modelo estrutural para o cálculo dos deslocamentos das vigas de apoio.....	214
Figura 8.5 – Características das fissuras em função dos deslocamentos na laje P1-2. ....	217
Figura 8.6 – Gráfico de Carregamento × Deslocamento da laje P1-2, adaptado de Dat e Hai (2013).....	218

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Resumo das variáveis do modelo proposto.....	90
Tabela 7.1 – Modelo 1 (15 cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo. .....	134
Tabela 7.2 – Modelo 2 (15 cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo. .....	137
Tabela 7.3 – Modelo 1 (10 cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo. .....	138
Tabela 7.4 – Modelo 2 (10 cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo. .....	139
Tabela 7.5 – Modelo 1 (8 cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo.....	141
Tabela 7.6 – Modelo 2 (8 cm espessura): Momento máximo e deslocamento máximo. .....	142
Tabela 7.7 – Modelo 1 em laje retangular (15cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo.....	151
Tabela 7.8 – Modelo 1 (10cm espessura) em laje retangular: Momento positivo e deslocamento máximo.....	152
Tabela 7.9 – Modelo 1 (8cm espessura) em laje retangular: Momento positivo e deslocamento máximo.....	153
Tabela 7.10 – Modelo 2 (15cm espessura) em laje retangular: Momento positivo e deslocamento máximo.....	155
Tabela 7.11 – Modelo 2 (10cm espessura) em laje retangular: Momento positivo e deslocamento máximo.....	156
Tabela 7.12 – Modelo 2 (8cm espessura) em laje retangular: Momento positivo e deslocamento máximo.....	157
Tabela 7.13 – Laje retangular (15cm espessura): Modelo proposto calibrado – Momento positivo e deslocamento máximo.....	159
Tabela 7.14 – Laje retangular (10 cm espessura): Modelo proposto calibrado – Momento positivo e deslocamento máximo.....	161
Tabela 7.15 – Laje retangular (8 cm espessura): Modelo proposto calibrado – Momento positivo e deslocamento máximo.....	163

Tabela 7.16 – Resumo dos valores obtidos nos modelos em laje quadrada de 15cm.....	180
Tabela 7.17 – Resumo dos valores obtidos nos modelos em laje quadrada de 10cm.....	180
Tabela 7.18 – Resumo dos valores obtidos nos modelos em laje quadrada de 8cm.....	181
Tabela 7.19 – Resumo dos resultados em laje retangular de 15cm de espessura.	204
Tabela 7.20 – Resumo dos resultados em laje retangular de 10cm de espessura.	205
Tabela 7.21 – Resumo dos resultados em laje retangular de 8cm de espessura. ...	206

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	American Concrete Institute
CSA	Canadian Standards Association
CST	Constant Strain Triangle
FIB	Federation Internationale du Beton
MEF	Método dos Elementos Finitos

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha_x$	Coeficiente da condição de contorno da faixa na direção X
$\alpha_y$	Coeficiente da condição de contorno da faixa na direção Y
$B$	Matriz da derivada das funções de forma em elementos finitos
$\beta$	Coeficiente para cálculo das reações em viga biengastada com apoios flexíveis
$\gamma_{xy}$	Distorção devido ao cisalhamento no plano XY
$\gamma_{yz}$	Distorção no plano YZ
$\gamma_{xz}$	Distorção no plano XZ
$C$	Matriz constitutiva
$d$	Vetor de deslocamentos do elemento. O subíndice indica se o deslocamento é local ou global
$\Delta_x$	Deslocamento na faixa X
$\Delta_y$	Deslocamento na faixa Y
$E$	Módulo de elasticidade do concreto
$EI_{laje}$	Rigidez à flexão da laje
$EI_{viga}$	Rigidez à flexão da viga
$\varepsilon$	Relação entre vãos da laje
$\varepsilon_x$	Deformação específica em X
$\varepsilon_y$	Deformação específica em Y
$\varepsilon_z$	Deformação específica em Z
$f_g$	Vetor de forças nodais global
$K_b$	Vetor de curvaturas pela teoria de Mindlin
$K_s$	Vetor de curvaturas pela teoria de Mindlin
$K_l$	Matriz de rigidez local do elemento
$K_g$	Matriz de rigidez global da estrutura

$K_x$	Coeficiente de distribuição de carga da laje na faixa X
$K_y$	Coeficiente de distribuição de carga da laje na faixa Y
$k$	Coeficiente de mola. Subíndice indica o local considerado
$k_{min}$	Rigidez mínima do apoio de faixa
$k_{max}$	Rigidez máxima do apoio de faixa
$L_{viga}$	Comprimento da viga
$L_x$	Comprimento da faixa de laje na direção X
$L_y$	Comprimento da faixa de laje na direção Y
$\lambda$	Coeficiente de ajuste para o deslocamento de referência
$M$	Reação de momento no apoio do modelo estrutural de viga
$M_x$	Momento na direção X
$M_y$	Momento na direção Y
$M_{xy}$	Momento torçor
$M_{max}$	Momento máximo na viga/laje
$M_{x,m}$	Momento positivo na direção X pelo método de Marcus
$M_{y,m}$	Momento positivo na direção Y pelo método de Marcus
$m^+$	Momento positivo de laje; subíndice indica a direção e faixa considerada
$m^-$	Momento negativo de laje; subíndice indica a direção e faixa considerada
$N$	Matriz das funções de forma em elementos finitos
$P$	Carga concentrada na viga
$q$	Carga total na laje
$q_x$	Carga na faixa X da laje
$q_y$	Carga na faixa Y da laje
$R$	Reação vertical de apoio do modelo estrutural de viga
$\sigma_x$	Tensão na direção X
$\sigma_y$	Tensão na direção Y

$\sigma_z$	Tensão na direção Z
$\tau_{xy}$	Tensão cisalhante no plano XY
$V$	Reação de apoio de laje. Subíndice indica a direção e faixa considerada
$v$	Função de deslocamento de viga
$v''$	Curvatura da viga
$\nu_p$	Coefficiente de Poisson
$\nu_x$	Coefficiente de Marcus referente à faixa X
$\nu_y$	Coefficiente de Marcus referente à faixa Y
$y$	Deslocamento máximo de viga biapoiada
$\psi$	Coefficiente para cálculo das reações em viga engastada e apoiada com apoios flexíveis
$\omega(x, y)$	Função de deslocamento vertical de placa

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>25</b>
Motivação .....	28
Objetivos .....	28
<b>1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>30</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>37</b>
2.1 Teoria de Placas .....	37
2.1.1 Estado plano de tensão.....	37
2.1.2 Estado plano de deformação.....	38
2.1.3 Teoria de Kirchhoff .....	39
2.1.4 Teoria de Mindlin.....	41
2.2 Método dos elementos finitos.....	42
2.3 Teoria de Grelha .....	43
2.4 Processo de Marcus.....	44
2.5 Método das faixas finitas.....	45
2.6 Analogia de grelha .....	46
<b>3 DIRETRIZES NORMATIVAS NA ANÁLISE À FLEXÃO DE LAJES.....</b>	<b>48</b>
3.1 NBR 6118/2023.....	48
3.2 FIB Model Code 2010 .....	51
3.3 American Concrete Institute – ACI 318 .....	53
3.4 Eurocode 2004 .....	55
3.5 Canadian Standards Association – CSA (2004).....	56
3.6 Resumo dos códigos.....	58
<b>4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A FLEXIBILIDADE EM SISTEMAS ESTRUTURAIIS .....</b>	<b>59</b>
4.1 Análise da rigidez dos pilares em vigas de pórticos .....	59
4.2 Considerações sobre apoios elásticos na interação solo-estrutura.....	64
4.3 Determinação do coeficiente de mola em apoios elásticos .....	65
4.4 Avaliação da flexibilidade dos apoios para o cálculo de lajes .....	67
<b>5 TEORIA DE GRELHA SOBRE APOIOS FLEXÍVEIS .....</b>	<b>70</b>
5.1 Faixa de laje biapoiada com apoios flexíveis .....	72
5.2 Faixa de laje biengastada com apoios flexíveis .....	74

5.3 Faixa de laje engastada e apoiada com apoios flexíveis .....	80
5.4 Cálculo das reações de laje pela Teoria de Grelha com apoios flexíveis.....	86
5.5 Relação entre os modelos de Teoria de Grelha com apoios rígidos e flexíveis ..	90
<b>6 COMPORTAMENTO DA FLEXIBILIDADE DO MODELO PROPOSTO .....</b>	<b>97</b>
6.1 Comportamento da flexibilidade dos apoios nas faixas de laje .....	97
6.1.1 Condição de contorno: Apoiado – Apoiado .....	98
6.1.2 Condição de contorno: Engastado – Apoiado .....	100
6.1.3 Condição de contorno: Engastado – Engastado .....	106
6.2 Análise do carregamento e reações em laje com apoios flexíveis .....	113
6.2.1 Laje simplesmente apoiada em todos os bordos com $L_x = L_y$ .....	114
6.2.1.2 Deslocamento máximo em laje apoiada – Geometria da laje: $L_x = L_y$ .....	117
6.2.2 Laje simplesmente apoiada em todos os bordos com $L_x = 2L_y$ .....	118
6.2.2.1 Coeficiente $K_x$ em laje apoiada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$ .....	118
6.2.2.2 Momento máximo $M_{x, max}$ em laje apoiada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$ .....	119
6.2.2.3 Momento máximo $M_{y, max}$ em laje apoiada – geometria da laje: $L_x = 2L_y$	120
6.2.2.4 Deslocamento máximo em laje apoiada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$ .....	121
6.2.3 Laje engastada em todos os bordos com $L_x = L_y$ .....	121
6.2.3.1 Coeficiente $K_x$ em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = L_y$ .....	123
6.2.3.2 Momento máximo $M_{x, max}$ em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = L_y$ .....	124
6.2.3.3 Deslocamento máximo em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = L_y$ ...	125
6.2.4 Laje engastada em todos os bordos com $L_x = 2L_y$ .....	126
6.2.4.1 Coeficiente $K_x$ em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$ .....	126
6.2.4.2 Momento máximo $M_{x, max}$ em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$ .....	127
6.2.4.3 Momento máximo $M_{y, max}$ em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$ .....	128
6.2.4.4 Deslocamento máximo em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$ .	129
<b>7 VERIFICAÇÃO DO MODELO.....</b>	<b>131</b>
7.1 Verificação do modelo – Laje simplesmente apoiada .....	131
7.1.1 Laje quadrada e simplesmente apoiada.....	131
7.1.2 Modelo 1 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 15 cm de espessura ..	132

7.1.3 Modelo 2 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 15cm de espessura...	135
7.1.4 Modelo 1 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 10 cm de espessura..	137
7.1.5 Modelo 2 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 10 cm de espessura..	138
7.1.6 Modelo 1 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 8 cm de espessura....	140
7.1.7 Modelo 2 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 8 cm de espessura....	141
7.1.8 Calibragem do modelo proposto .....	142
7.1.9 Calibragem do modelo proposto – Laje de 15 cm de espessura.....	143
7.1.10 Calibragem do modelo proposto – Laje de 10 cm de espessura.....	145
7.1.11 Calibragem do modelo proposto – Laje de 8 cm de espessura.....	147
7.2 Verificação do modelo: Laje retangular e simplesmente apoiada .....	149
7.2.1 Modelo 1 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 15 cm de espessura.	149
7.2.2 Modelo 1 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 10 cm de espessura.	151
7.2.3 Modelo 1 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 8 cm de espessura...	153
7.2.4 Modelo 2 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 15 cm de espessura.	154
7.2.5 Modelo 2 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 10 cm de espessura.	155
7.2.6 Modelo 2 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 8 cm de espessura...	156
7.2.7 Calibragem do modelo proposto – Laje retangular de 15 cm de espessura...	158
7.2.8 Calibragem do modelo proposto – Laje retangular de 10cm de espessura....	159
7.2.9 Calibragem do modelo proposto – Laje retangular de 8 cm de espessura ....	161
7.3 Verificação do modelo: Laje totalmente engastada.....	163
7.3.1 Laje quadrada e totalmente engastada .....	164
7.3.2 Modelo 1 – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura ....	164
7.3.3 Modelo 2 – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura ....	166
7.3.4 Modelo 3 – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura ....	168
7.3.5 Modelo 4 – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura ....	171
7.3.6 Modelo 4A – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura..	174
7.3.7 Modelo 5 – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura ....	175
7.3.8 Modelo 5A – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura..	178
7.3.9 Resumo dos resultados da análise numérica para laje quadrada e engastada .....	179
7.3.10 Considerações dos modelos numéricos em laje quadrada engastada .....	181
7.3.11 Análise dos resultados do modelo proposto em laje de 8cm de espessura .	182
7.3.12 Análise dos resultados do modelo proposto em laje de 10cm de espessura .....	182

7.3.13 Análise dos resultados do modelo proposto em laje de 15cm de espessura .....	183
7.3.14 Considerações do modelo proposto em laje quadrada e engastada.....	184
7.4 Laje retangular e totalmente engastada .....	184
7.4.1 Modelo 1 – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura ...	185
7.4.2 Modelo 2 – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura ...	187
7.4.3 Modelo 3 – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura ...	189
7.4.4 Modelo 4 – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura ...	192
7.4.5 Modelo 4A – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura .	195
7.4.6 Modelo 5 – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura ...	198
7.4.7 Modelo 5A – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura .	202
7.4.8 Resumo dos resultados da análise numérica para laje retangular e engastada.....	204
7.4.9 Considerações dos modelos numéricos em laje retangular engastada .....	206
7.4.10 Análise dos resultados do modelo proposto em laje retangular de 8cm de espessura .....	207
7.4.11 Análise dos resultados do modelo proposto em laje retangular de 10cm de espessura .....	208
7.4.12 Análise dos resultados do modelo proposto em laje retangular de 15cm de espessura .....	208
7.4.13 Considerações do modelo proposto em laje retangular e engastada.....	209
<b>8 VERIFICAÇÃO DO MODELO – ENSAIO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>210</b>
8.1 Características dos ensaios .....	210
8.2 Ensaio da Laje P1-1 .....	211
8.2.1 Modelo proposto aplicado ao ensaio da laje P1-1 .....	213
8.2.2 Laje P1-1 – Modelo proposto – Estágio de carregamento 1.....	213
8.2.3 Laje P1-1 – Modelo proposto – Estágio de carregamento 2.....	216
8.3 Análise dos resultados do modelo proposto aplicado à Laje P1-1 .....	216
8.4 Ensaio da Laje P1-2 .....	217
8.4.1 Modelo proposto aplicado ao ensaio da laje P1-2.....	218
8.4.2 Laje P1-2 – Modelo proposto – Estágio de carregamento 1.....	218
8.4.3 Laje P1-2 – Modelo proposto – Estágio de carregamento 2.....	220
8.5 Análise dos resultados do modelo proposto aplicado à Laje P1-2 .....	221
<b>9 CONCLUSÕES .....</b>	<b>222</b>

REFERÊNCIAS.....	226
------------------	-----

## INTRODUÇÃO

O avanço da utilização de métodos computacionais para a análise e dimensionamento de estruturas trouxe diversos benefícios relacionados à precisão dos cálculos e à economia de materiais.

Contudo, embora as análises sejam cada vez mais precisas algumas hipóteses simplificadoras ainda são adotadas. Entre as hipóteses mais amplamente utilizadas consta a consideração de apoios rígidos para a análise de lajes das edificações.

A hipótese de apoios rígidos em lajes permanece sendo considerada na análise e dimensionamento de estruturas, sendo muitas vezes uma configuração padrão dos programas de dimensionamento estrutural.

Entretanto, diversos estudos apontam que a rigidez dos apoios influencia de forma significativa o resultado das reações e deslocamentos das lajes. Nos ensaios realizados por Shu *et al* (2015) foi comparado os resultados obtidos em lajes armadas em duas direções com modelagem pelo método dos elementos finitos. Os autores constataram boa precisão no modelo de referência em comparação com os resultados obtidos em ensaio.

Shu *et al* (2015) verificou que a reação de apoio da laje é bastante influenciada pela rigidez das vigas de bordo. De forma a calcular de maneira mais precisa as reações da laje os autores recomendam que deva ser considerada a rigidez dos apoios, incluindo todo o conjunto do sistema estrutural (vigas e pilares). A Figura 1.1 ilustra o ensaio realizado.

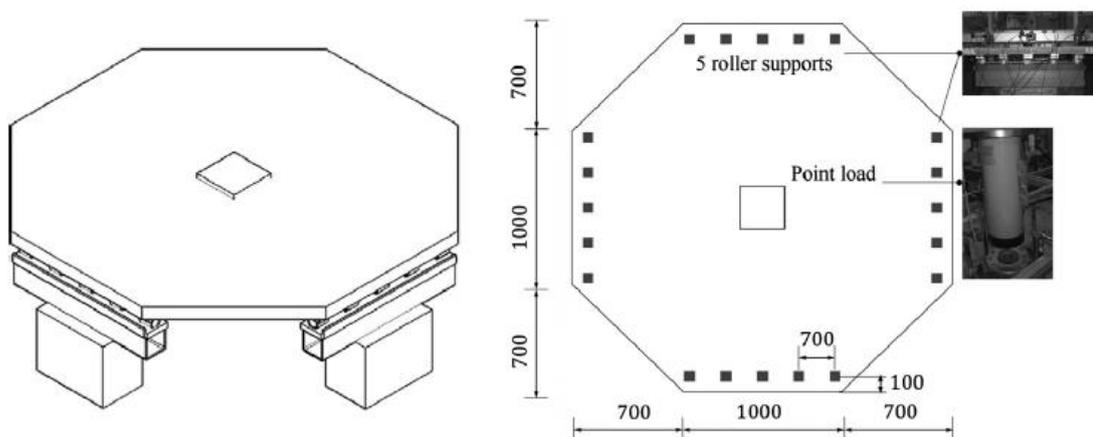


Figura 0.1 – Ilustração do esquema estrutural adotado no ensaio da laje, dimensões em mm.

Adaptado de Shu et al (2015).

Acerca da análise de lajes com apoios flexíveis, Chiai *et al* (2015) realizou ensaios em lajes apoiadas em suportes elásticos. Os apoios foram desenvolvidos de forma a ser possível analisar diversos parâmetros de rigidez. O foco principal dos ensaios foi a análise de laje submetida a carga dinâmica.

Os autores constataram que o uso de apoios na fase de plastificação resultaram em redução dos parâmetros de resistência da curva tensão-deformação da laje, também foi observado relação entre os deslocamentos e a força em função do tempo. Foi verificado que os efeitos mais notáveis ocorreram ao se utilizar apoios elásticos nas fases plástica e de encruamento do aço. Os resultados obtidos nos ensaios forneceram boa concordância com a análise numérica com elementos finitos considerando a não linearidade do material.

Ensaio realizado por Yilmaz et al (2020) em lajes com diferentes condições de apoio nas bordas também tiveram por objetivo a análise da resposta da laje para carregamento dinâmico. O experimento consistiu no estudo do carregamento dinâmico e os modos de falha das lajes para um determinado carregamento de impacto.

As análises demonstraram que para as lajes com menos bordos engastados houve um aumento expressivo da aceleração e deslocamento da estrutura. Ao se comparar os resultados foi verificado que a laje simplesmente apoiada nos bordos apresentou 58% maior aceleração, 74% maior deslocamento e 26% maior deslocamento residual em relação à laje engastada em todos os bordos. Também foi observado que as fissuras foram mais intensas nas lajes engastadas.

Ju e Lin (1999) realizaram um estudo sobre a diferença na modelagem de lajes rígidas e flexíveis em edifícios. O foco principal dos autores foi a influência de *Shear Walls* (paredes de contraventamento) na análise dos modelos de lajes dos edifícios. Ju e Lin (1999) constataram que a utilização de paredes de contraventamento influencia de forma considerável a modelagem das lajes como rígidas ou flexíveis.

O excesso de simplificações na análise de edifícios pode vir a gerar problemas de patologias nas estruturas de concreto. Embora os programas de computadores forneçam resultados precisos é necessário verificar se as hipóteses utilizadas nos modelos numéricos irão se configurar na prática.

Apesar de diversos estudos indicarem que a flexibilidade das vigas de bordo pode influenciar de maneira significativa a distribuição de reações e momentos de uma laje, essa ainda é uma das simplificações mais amplamente adotada na modelagem estrutural.

Existem diversos métodos de cálculo para a análise e dimensionamento de lajes de concreto armado, sendo os mais conhecidos e utilizados: Teoria de Grelha, Processo de Marcus, Método dos elementos finitos e Teoria de placas. Dentre os métodos citados, apenas é possível considerar a flexibilidade dos apoios no método dos elementos finitos e na teoria de placas.

Embora os métodos computacionais empregados em *softwares* sejam amplamente utilizados e conhecidos, não é recomendado elaborar projetos sem realizar uma avaliação minuciosa dos cálculos e averiguar se os resultados fornecidos condizem com a realidade a ser executada. Conforme é orientado em Sohler e Santos (2018) deve-se realizar uma verificação mínima dos resultados fornecidos pelos *softwares*.

Visando resultados mais precisos para a análise e dimensionamento de lajes em concreto armado, além de ressaltar a importância desse tema para a análise de sistemas estruturais, o presente estudo tem por objetivo contribuir na metodologia de cálculo da Teoria de Grelha de forma a considerar a flexibilidade dos apoios na análise.

Além da contribuição à Teoria de Grelha a ser proposta pretende-se estudar, de forma mais detalhada, como o grau de flexibilidade das vigas de apoio e as condições de contorno influenciam na obtenção das reações e deslocamentos da laje, apresentando o seu comportamento para uma determinada variação da faixa de rigidez dos apoios.

## Motivação

Análises estruturais mais refinadas tem proporcionado grande economia de material e concebido, conseqüentemente, estruturas mais flexíveis. Entretanto, a falta de uma avaliação mais rigorosa dos resultados fornecidos pelos *softwares* pode gerar patologias e resultar em estruturas atuando em serviço com níveis de segurança insatisfatórios.

Estruturas mais flexíveis, a depender de seu grau de flexibilidade, alteram consideravelmente o diagrama de esforços e deslocamentos das lajes. A falta de uma análise mais precisa e adequada da influência da flexibilidade nas vigas de suporte da laje pode resultar em subdimensionamento ou detalhamento inadequado do elemento, podendo ocorrer problemas de patologias, ou até mesmo de mau desempenho estrutural.

Assim, o presente trabalho tem por motivação apresentar uma metodologia de cálculo para lajes, baseada na Teoria de Grelha, considerando a flexibilidade dos apoios, apresentando uma forma de fácil aplicação podendo ser utilizada para o dimensionamento e verificação do cálculo de lajes em edifícios, além de demonstrar a relevância que a flexibilidade dos elementos estruturais pode gerar no modelo adotado.

## Objetivos

O objetivo deste trabalho é propor uma aprimoração da Teoria de Grelha com o intuito de possibilitar a consideração de apoios flexíveis para o cálculo das reações e deslocamentos de lajes. Essa modificação tem como propósito facilitar o estudo e análise de lajes ao se considerar os deslocamentos das vigas de bordo, gerando resultados mais precisos para a verificação, dimensionamento e detalhamento estrutural.

No estudo também é analisada a influência da rigidez das vigas de bordo e como elas alteram a distribuição de cargas e solicitações da laje. É realizada a análise da distribuição dos esforços, variando-se a rigidez dos apoios, para as faixas de laje. Nessa etapa não será analisado o efeito de grelha (compatibilidade de deslocamentos entre as faixas), sendo estudado apenas o comportamento da faixa de laje como uma laje isolada.

O efeito da variação da rigidez dos apoios, para as condições de laje simplesmente apoiada e de laje engastada em todos os bordos, é analisado examinando-se o percentual de carga destinado a cada faixa de laje em função da variação da rigidez dos apoios. É realizada a validação do modelo proposto com modelos numéricos elaborados no *software* SAP2000.

## 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica foi elaborada estudando os temas mais recentes associados à flexibilidade dos apoios em lajes, comportamento do material, carregamento aplicado, propriedades do concreto, análise e ensaios de lajes.

Alguns fenômenos são responsáveis pelo aumento da flexibilidade dos apoios em lajes, além de questões relacionadas à geometria das vigas de borda, entre os quais pode-se citar deslocamento excessivo, não linearidade física e resistência insuficiente do concreto. Assim, testes em lajes são necessários para análise da influência desses parâmetros.

Ensaio em lajes são procedimentos de análise e avaliação realizados para investigar o comportamento estrutural e as propriedades desses elementos. Esses procedimentos são essenciais para avaliar o comportamento da estrutura a determinados tipos de carregamento e verificar se as teorias propostas podem ser utilizadas como parâmetro para cálculo.

A taxa de armadura em estruturas de concreto armado está entre os fatores que podem influenciar seu comportamento estrutural. Agleílson et al (2009) realizou ensaios em lajes nervuradas bidirecionais quadradas onde a variável principal foi a taxa geométrica de armadura longitudinal nas nervuras. Foi verificado que os resultados forneceram valores próximos aos obtidos utilizando-se as prescrições normativas da NBR 6118/2023.

Os autores observaram também que a mesa das lajes pré-fabricadas se comporta de forma solidária com as nervuras, não havendo deslocamentos relativos na união entre a placa e as nervuras.

Apesar da taxa de armadura influenciar de forma significativa, o tipo de carregamento também pode vir a alterar a distribuição das solicitações na estrutura. Torabian et al (2019) realizou ensaios em placas finas sujeitas a carregamento concentrado sob diferentes taxas de armadura onde foi verificado que o comportamento da laje é bastante influenciado pela fase de encruamento do aço na curva tensão-deformação.

Assim, foi constatado que as fases posteriores à fase elástica do material são relevantes para o comportamento da estrutura. Foi observado também que a taxa de armadura na estrutura contribui para o aumento da resistência última da seção.

Torabian et al (2019) verificou que a distribuição das solicitações, após a fissuração, foi influenciada pela taxa de armadura à flexão da laje. Nesses casos a maior taxa de armadura trouxe maior rigidez para a laje. A fase de encruamento do aço teve um impacto significativo no comportamento das estruturas em situações com grandes deslocamentos.

Apesar dos carregamentos estáticos serem os mais utilizados na análise estrutural, carregamentos dinâmicos também devem ser verificados. Os efeitos de carregamentos de característica cíclica em lajes foram analisados por Zou et al (2020) utilizando como base o método dos elementos finitos em conjunto com análise não linear considerando o modelo de dano no concreto.

Os autores constataram, a partir dos resultados dos ensaios, que o modelo de dano do concreto, utilizado em conjunto com a análise em elementos finitos, forneceu resultados em acordo com os obtidos nos ensaios realizados.

Jia e Luin (2023) também fizeram uso do modelo de dano para a análise, por meio do método dos elementos finitos, da resistência de lajes sujeitas à punção, onde pôde ser constatado que o modelo adotado apresentou bons resultados em comparação com a análise experimental.

Em um estudo conduzido por Delibera et al. (2021), foram realizadas provas de carga em lajes existentes de uma edificação, nas quais os deslocamentos da estrutura foram medidos. Os autores constataram boa concordância dos resultados com o modelo gerado em elementos finitos, onde foi possível assegurar o bom desempenho da estrutura para o carregamento previsto.

Zaja et al (2021) analisou o efeito de carregamento de curta e longa duração em lajes simplesmente apoiadas, onde foi verificado que, entre os métodos utilizados na análise (elementos finitos, cálculo analítico com viga isostática e processo de Marcus), os que adotaram o comportamento de placa foram os que apresentaram resultados com menor índice de erros.

Os deslocamentos nas vigas de apoio podem modificar consideravelmente a distribuição das solicitações em lajes. Nesse sentido, Tao et al (2021) analisou o efeito dos deslocamentos de vigas mistas. Os autores verificaram que, para vigas sujeitas à

carregamentos uniformes, a rotação nos apoios influencia de forma significativa o deslocamento final e nas solicitações do elemento estrutural.

Diante de diversos relatos em literatura pôde-se constatar boa correlação da análise numérica em elementos finitos, considerando o regime elástico, com os resultados experimentais realizados. Acerca dos elementos finitos de casca, utilizados na análise de estruturas de laje, Silva e Horowitz (2022) apresentaram o desenvolvimento de uma metodologia de análise não linear com elementos de casca submetidos a carregamento monotônico.

Os autores observaram boa correlação dos resultados obtidos na análise numérica com ensaios disponibilizados em literatura, verificando, assim, que os elementos finitos de casca trazem resultados confiáveis na análise de estruturas de placa.

Silva e Silva (2019) apresentaram um modelo numérico para o cálculo de lajes do tipo *steel/ deck*. O modelo foi desenvolvido em elementos finitos, utilizando-se elementos de barra e de casca. As análises apresentaram boa concordância com ensaios disponibilizados no meio técnico.

Importante salientar que a rigidez das vigas de apoio e suas características influenciam no comportamento estrutural da laje. Bernardo (2019) analisou os modelos analíticos de cálculo de torção em vigas de seção T e L realizando ensaios experimentais. Foi verificada boa relação entre os resultados obtidos analiticamente com os ensaios.

Bernardo (2019) verificou que, a depender do tipo de seção, o fluxo de cisalhamento devido à torção pode vir a modificar consideravelmente a resistência à torção do elemento estrutural devido à fissuração. A não consideração do momento de torção em lajes, conforme destacado por Shin et al (2009), pode fornecer resultados contrários à segurança.

Em um estudo conduzido por Wang et al. (2022), foi analisada a influência da rigidez à flexão e à torção das vigas de borda na determinação do carregamento último em sistemas estruturais compostos por laje e viga após uma situação de incêndio. O modelo proposto pelos autores, baseado na teoria das linhas de ruptura, trouxe resultados compatíveis com ensaios realizados.

Uma das causas que podem alterar o comportamento dos elementos estruturais é a não linearidade física dos materiais, que influenciam as propriedades da rigidez em estruturas de concreto armado.

Acerca dos efeitos da rigidez de lajes nos edifícios, Darekar et al (2023) analisou numericamente o efeito de fissuração de laje em edifícios. A redução da rigidez à flexão da placa apresentou influência na redistribuição dos momentos nas vigas da estrutura, assim, no caso de edificações sujeitas às ações sísmicas, onde pode haver a formação de fissuras nos elementos estruturais, há a necessidade de se considerar a não linearidade do material.

Na análise de estruturas de concreto armado é importante determinar de forma precisa a rigidez após a fissuração. Bruun et al (2020) estudou o efeito do comportamento pós fissuratório de estruturas de concreto armado. Os autores constataram que a rigidez após o estágio de fissuração é influenciada pela taxa de armadura da seção.

Em estudo conduzido por Azizov et al (2019) foi analisada a formação de fissuras devido à torção em lajes alveolares. Foi verificado que a redistribuição de deformações depende da rigidez à torção e à flexão da laje. Os autores concluíram que as fissuras normais ao plano da laje reduzem sua inércia à torção, assim, de forma a preservar as propriedades do elemento estrutural é recomendado evitar a formação de fissuras, ou limitar sua abertura.

Utilizando-se análises numéricas Silva et al (2020) verificou que, a depender do tipo de laje e configuração da armadura, pode haver alterações na resistência última da estrutura. Apesar das diferenças observadas, as prescrições normativas apresentaram resultados a favor da segurança.

Florut et al (2020) realizou ensaios em lajes finas onde foi verificada boa precisão da análise numérica em elementos finitos com os resultados obtidos em laboratório. Os autores constataram que as prescrições normativas do Eurocode forneceram resultados conservadores para a verificação à punção da laje.

Em um estudo conduzido por Hassan (2022), foi analisada a contribuição de lajes rígidas e flexíveis na estabilidade global de edifícios. O trabalho se concentrou na análise sísmica de edifícios, indicando influência significativa na redistribuição dos momentos nas vigas e pilares, a depender do grau de flexibilidade da laje.

Acerca de solicitações dinâmicas, Fouad et al (2012) analisou numericamente o efeito da consideração da rigidez à flexão de lajes na resposta de ações sísmicas em edificações. Foi constatado que os modelos que consideraram a rigidez à flexão da laje foram os que geraram resultados mais próximos ao comportamento real da estrutura.

Os autores constataram que ao se desconsiderar a rigidez à flexão de lajes os deslocamentos laterais podem ser superestimados, influenciando os resultados em uma análise sísmica.

A geometria dos apoios em lajes pode vir a alterar de forma significativa a distribuição das solicitações no elemento estrutural. Considerando esse problema Algahtani et al (2018) desenvolveu um estudo cujo objeto foi determinar, de forma analítica, as solicitações de uma laje com suportes de geometrias variadas. Utilizando-se um programa em elementos finitos pode-se verificar que o método proposto pelos autores forneceu bons resultados.

Os deslocamentos também podem vir a alterar a distribuição de solicitações na estrutura. Nesse sentido, Lihua et al (2019) modelou uma placa flexível engastada e livre sujeita a grandes deslocamentos e rotações. As condições de contorno relativas à flexibilidade foram inseridas diretamente equações diferenciais que governam o problema de placa. Os resultados com carregamento estático foram coerentes com a modelagem realizada, incluindo as análises relativas às propriedades dinâmicas da placa.

Darshni et al (2021) realizaram um estudo analítico do comportamento de placas finas sujeitas à grandes deslocamentos onde foi constatado, por meio de análise em elementos finitos, que a Teoria dos Grandes Deslocamentos, proposta em Nishawala e Baruh (2011), trouxe resultados coerentes para lajes simplesmente apoiadas nos bordos. Pôde-se observar que ao se considerar grandes deslocamentos as tensões de membrana são elevadas em placas finas simplesmente apoiadas.

Considerando-se que existem diversas variáveis que podem influenciar o comportamento de lajes em concreto armado, alguns modelos estruturais podem ser mais adequados para descrever determinadas situações. Nesse sentido, Surma et al (2019) desenvolveu um método analítico para o cálculo de lajes alveolares protendidas considerando as interações entre as tensões de cisalhamento da laje.

Surma et al (2019) constatou que as tensões de cisalhamento dependem da espessura da laje. Em comparação com os ensaios realizados foi verificado que o carregamento de ruptura é na ordem de 19% superior em comparação com o carregamento de ruptura do modelo proposto em Surma et al (2019).

Foi desenvolvida por Mamatova et al (2020) uma solução analítica, a partir de equações diferenciais, para o cálculo à flexão de placas circulares com curvatura

inicial. Nessa solução foi utilizada a teoria não linear de placas circulares flexíveis para a análise da perda de estabilidade.

Um estudo comparativo realizado por Araújo et al (2021) utilizou os resultados obtidos em placas finas. Para o cálculo foram adotadas tabelas disponíveis na literatura, baseadas na teoria de placas, e o método das diferenças finitas. A análise considerou diversas condições de contorno, onde foi constatado que, de uma forma geral, os resultados trouxeram uma boa correlação entre o método numérico e o método analítico.

Entretanto, as simplificações adotadas nas tabelas podem vir a gerar detalhamento inadequado na estrutura, em especial ao se considerar a distribuição de tensões devido aos momentos volventes.

Diante do apresentado, verifica-se que existem diversas variáveis que podem influenciar na distribuição de solicitações na estrutura e na flexibilidade da laje. Pôde-se constatar que, apesar de haver bastante conhecimento sobre o assunto, ainda existe a necessidade do desenvolvimento de modelos analíticos de forma a aprofundar os conhecimentos sobre o comportamento na modelagem estrutural.

Observa-se que, majoritariamente, foram utilizados modelos numéricos para o cálculo e análise de lajes. Esses modelos, apesar de possuírem maior precisão, devem ser desenvolvidos de forma a retratar de maneira fidedigna as características da estrutura.

Conforme pôde ser observado, diversos pesquisadores constataram boa correlação entre os resultados obtidos para prever o comportamento estrutural por meio de modelagem numérica em relação aos ensaios realizados.

O processo de elaboração de um modelo numérico, caso não retrate de forma precisa os carregamentos e condições de contorno da estrutura, pode resultar em falhas que podem passar despercebidas e gerar patologias futuras na edificação.

Assim, faz-se necessário o uso de modelos analíticos como ferramenta para, além de permitir a análise e dimensionamento, servir como parâmetro para verificação estrutural.

Entretanto, cada modelo apresenta um determinado grau de imprecisão ou aplicabilidade em função das simplificações adotadas, sendo necessário um estudo de quais das variáveis são predominantes na análise e que possam retratar de forma precisa o comportamento da estrutura.

Um dos métodos analíticos mais amplamente utilizados no cálculo de lajes é a Teoria de Grelha. Conforme abordado em Araújo (2010), a Teoria de Grelha possui como hipótese simplificadora a não consideração da rigidez à torção da laje.

Portanto, pode-se considerar que a Teoria de Grelha representa um limite inferior no dimensionamento e verificação de lajes, uma vez que há um aumento nos valores dos momentos fletores devido à não consideração da rigidez à torção da laje.

Existem poucas pesquisas que abordam, de forma prática, a consideração da flexibilidade dos apoios nos métodos analíticos para o cálculo de lajes. Nesse sentido o estudo proposto nesta tese sobre a contribuição à Teoria de Grelha com apoios flexíveis, pretende preencher a lacuna no meio técnico de métodos de cálculo analíticos de lajes com apoios flexíveis.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem como propósito apresentar os diversos estudos relativos à análise e dimensionamento de lajes, contemplando os principais temas de interesse, assim como as teorias que fundamentam a análise do comportamento de lajes.

### 2.1 Teoria de Placas

A teoria de placas, embora de difícil aplicação prática, é a base para os modelos de cálculo de lajes. Lajes podem ser analisadas como estruturas bidimensionais as quais são consideradas estruturas de estado plano, ou seja, uma dimensão (espessura) é muito menor que as outras dimensões (comprimento e largura).

As equações de compatibilidade de uma estrutura em estado plano são dadas em função dos campos de deslocamentos  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$ . As deformações específicas associadas aos campos de deslocamentos são expressas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3)$$

Para se obter as equações constitutivas do elemento deve-se determinar o tipo de estrutura que está sendo analisada. As placas podem estar sujeitas ao estado plano de tensão ou estado plano de deformação, sendo o usual para lajes o estado plano de tensão.

#### 2.1.1 Estado plano de tensão

Os elementos em estado plano de tensão possuem a característica de apresentar tensão normal nula, ou seja,  $\sigma_z = 0$ . Assim, as deformações específicas correspondentes à direção do eixo  $Z$  são  $\varepsilon_z \neq 0$ .

Com as componentes de tensão  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ , e admitindo-se que o material segue a lei de Hook, obtém-se as seguintes relações

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_y = -\nu_p \varepsilon_x = -\nu_p \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.5)$$

Admitindo-se que o elemento esteja sujeito a um estado biaxial de tensões pode-se somar os efeitos da deformação resultando em

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu_p \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu_p \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.7)$$

Lembrando-se que a distorção por cisalhamento é dada por

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu_p)}{E} \tau_{xy} \quad (2.7)$$

Escrevendo-se matricialmente as equações 2.6, 2.7 e 2.8 obtém-se

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu_p & 0 \\ -\nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu_p) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

A equação 3.8 pode ser escrita de forma simples como

$$\varepsilon = L\sigma \quad (2.9)$$

Invertendo-se a matriz  $L$  da equação 2.9 pode-se relacionar o vetor das tensões com o vetor das deformações, assim

$$\sigma = C\varepsilon \quad (2.10)$$

onde  $C$  é a matriz constitutiva para o estado plano de tensão

$$C = \frac{E}{1 - \nu_p^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_p}{2} \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

### 2.1.2 Estado plano de deformação

As estruturas em estado plano de deformação possuem a característica de apresentar deformação específica normal nula, ou seja,  $\varepsilon_z = 0$  e tensões normais à superfície  $\sigma_z \neq 0$ . De forma análoga ao item anterior são apresentadas as deformações específicas para esse estado plano de deformação

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu_p \frac{\sigma_y}{E} - \nu_p \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu_p \frac{\sigma_x}{E} - \nu_p \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu_p \frac{\sigma_x}{E} - \nu_p \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.14)$$

Substituindo-se  $\sigma_z$  da equação 2.14 nas equações 2.12 e 2.13 obtém-se a expressão matricial

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1 + \nu_p}{E} \begin{Bmatrix} 1 - \nu_p & -\nu_p & 0 \\ -\nu_p & 1 - \nu_p & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

A equação 2.15 pode ser escrita de forma análoga à equação 2.9. Procedendo com os cálculos obtém-se a matriz constitutiva para o estado plano de deformação

$$C = \frac{E}{(1 + \nu_p)(1 - \nu_p)} \begin{Bmatrix} 1 - \nu_p & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 - \nu_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - 2\nu_p)}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

### 2.1.3 Teoria de Kirchhoff

Dentre as hipóteses adotadas na Teoria de Kirchhoff a principal é que a seção transversal da placa se mantém plana e perpendicular à linha neutra, de forma análoga à Teoria de Euler Bernoulli para vigas. Essa teoria é a mais indicada para a análise de placas delgadas.

As hipóteses de compatibilidade de deformações e cinemáticas adotadas são:

- existem apenas deslocamentos verticais;
- a deformação vertical é nula em qualquer ponto da placa ( $\varepsilon_z = 0$ );
- uma linha reta e normal à superfície média da placa e que intercepta o plano médio no ponto  $P(x,y)$  mantém-se reta e ortogonal ao plano tangente à superfície média no referido ponto.

Como consequência da 3ª hipótese as deformações por cisalhamento nos eixos YZ e XZ são nulas, ou seja,  $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ .

O campo de deslocamentos é dado em função do deslocamento vertical  $w(x,y)$  e expresso pelas equações

$$u(x,y,z) = -z \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \quad (2.17)$$

$$v(x,y,z) = -z \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \quad (2.18)$$

As deformações específicas do elemento infinitesimal são obtidas derivando-se as equações 2.17 e 2.18, conforme expresso nas equações

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} \quad (2.20)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.21)$$

Para o cálculo das tensões no elemento deve-se considerar que a placa está sujeita a um estado plano de tensões. Assim, o vetor de tensões é expresso matricialmente por

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu_p^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_p}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Substituindo-se os valores das deformações no vetor de deformações da equação 2.22 resulta em

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -z \frac{E}{1 - \nu_p^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_p}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{xx} \\ \omega_{yy} \\ 2\omega_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Os momentos resultantes são obtidos por meio de integração das tensões ao longo da espessura da placa, conforme expresso na equação 2.23

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2.24)$$

Integrando a equação 2.24, admitindo-se curvatura constante ao longo da espessura, tem-se

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -\left(\frac{t^3}{12}\right) \frac{E}{1 - \nu_p^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_p}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{xx} \\ \omega_{yy} \\ 2\omega_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$M = DK \quad (2.26)$$

onde  $D$  é expresso pela equação abaixo e denominado rigidez à flexão da placa de Kirchhoff, e o vetor  $K$  é o vetor de curvaturas

$$D = \frac{t^3}{12} C_k = \frac{t^3 E}{12(1 - \nu_p^2)} \begin{vmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_p}{2} \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

$$K = \begin{vmatrix} \omega_{xx} \\ \omega_{yy} \\ 2\omega_{xy} \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

Vale ressaltar a semelhança da expressão 2.26 em relação à equação da curvatura para vigas expressa por  $M = EIv''$ .

#### 2.1.4 Teoria de Mindlin

Dentre as hipóteses adotadas na Teoria de Mindlin a principal é que a seção transversal da placa se mantém plana, mas não necessariamente perpendicular à linha neutra, ou seja, é considerada a distorção devido ao cisalhamento, de forma análoga à Teoria de Timoshenko para vigas. Essa teoria é a mais indicada para a análise de placas delgadas e espessas.

As hipóteses de compatibilidade de deformações e cinemáticas adotadas são:

- existem apenas deslocamentos verticais;
- a deformação vertical é nula em qualquer ponto da placa ( $\varepsilon_z = 0$ );
- uma linha reta e normal à superfície média da placa e que intercepta o plano médio no ponto  $P(x,y)$  mantém sua linearidade após a aplicação do carregamento, sem estar ortogonal à seção.

A 3ª hipótese, diferentemente da Teoria de Kirchoff, permite a distorção por cisalhamento na seção para os demais eixos.

Os deslocamentos são dados por

$$u(x, y, z) = z \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} \quad (2.29)$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} \quad (2.30)$$

As deformações específicas são dadas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.32)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (2.33)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \quad (2.34)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (2.35)$$

Seguindo a mesma sistemática do item 2.1.3 pode-se desenvolver o vetor de momentos pela teoria de Mindlin, obtendo-se

$$\begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_b & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_b \\ K_s \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

$$D_b = \frac{t^3}{12} C_k = \frac{t^3 E}{12(1 - \nu_p^2)} \begin{vmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_p}{2} \end{vmatrix} \quad (2.37)$$

$$D_s = t \begin{vmatrix} \frac{E}{2(1 + \nu_p)} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1 + \nu_p)} \end{vmatrix} \quad (2.38)$$

$$K_b = \begin{vmatrix} \theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{vmatrix} \quad (2.39)$$

$$K_s = \begin{vmatrix} \omega_{,y} - \theta_x \\ \omega_{,x} - \theta_y \end{vmatrix} \quad (2.40)$$

Observa-se que em comparação à teoria de Kirchhoff, a teoria de Mindlin considera as solicitações devido à força cortante em todos os planos do elemento, podendo ser considerada uma metodologia de cálculo mais completa do ponto de vista teórico.

## 2.2 Método dos elementos finitos

O cálculo de lajes pelo método dos elementos finitos pode ser realizado com elementos bidimensionais ou tridimensionais. Devido à complexidade e elevado esforço computacional utiliza-se, normalmente, elementos bidimensionais para a análise de placas.

Para se determinar a matriz de rigidez de um elemento bidimensional é necessário estabelecer as funções de interpolação do elemento, que são dadas em função do número de nós do elemento.

Embora de uma forma geral existem diferenças entre os diversos elementos finitos bidimensionais (elementos CST, isoparamétricos, etc) a sistemática para o desenvolvimento da matriz de rigidez é semelhante, sendo abordada na sequência.

As funções de interpolação (matriz  $N$ ) fornecem os campos de deslocamentos no interior dos elementos em função dos deslocamentos nodais

$$u = Nd_l \quad (2.41)$$

O vetor de deformações no interior do elemento é obtido derivando-se essa expressão, resultando em

$$\varepsilon = Bd_l \quad (2.42)$$

Para o cálculo das tensões no elemento é necessário utilizar o vetor de deformações específicas dado pela equação 2.42, onde a matriz  $B$  é a derivada da matriz  $N$ . Admitindo-se que o material é homogêneo, e tem comportamento linear elástico, utiliza-se a matriz constitutiva  $C$ , que depende do tipo de estado plano adotado para o comportamento do elemento, assim

$$\sigma = C\varepsilon \quad (2.43)$$

A matriz de rigidez do elemento é obtida por meio do princípio dos deslocamentos virtuais, resultando em

$$K_l = \int B^T C B dV \quad (2.44)$$

A matriz de rigidez global  $K_g$  da estrutura é obtida associando as matrizes de rigidez locais  $K_l$  de cada elemento. Os deslocamentos globais são calculados a partir da equação de equilíbrio

$$K_g d_g = f_g \quad (2.45)$$

onde  $f_g$  é o vetor de cargas globais da estrutura.

### 2.3 Teoria de Grelha

Tendo em vista que os métodos de cálculo pela Teoria das placas são de difícil aplicação, alguns métodos práticos foram elaborados de forma a tornar a análise e dimensionamento de fácil aplicação prática.

A teoria de grelha consiste em dividir a laje em duas vigas fictícias de largura unitária cada uma em um eixo da laje. Calcula-se, em função das condições de contorno adotadas em cada viga, o deslocamento máximo para um dado carregamento. Com o deslocamento máximo calculado em cada faixa iguala-se o

valor obtido da faixa  $X$  com o da faixa  $Y$ , de forma a se compatibilizar os deslocamentos.

Com a compatibilidade de deslocamentos assegurada prossegue-se com os cálculos determinando as solicitações atuantes na laje em função das condições de contorno. Para aplicação do método existem diversos textos técnicos, entre os quais citam-se os livros de Souza e Cunha (1998) e Araújo (2010).

O carregamento atuante na laje é decomposto em duas parcelas de carga, onde cada parcela é atribuída a uma faixa, assim

$$q = q_x + q_y \quad (2.46)$$

Os deslocamentos devem ser iguais na interseção

$$\Delta_x = \Delta_y \quad (2.47)$$

Admitindo-se que os deslocamentos são dados pela forma

$$\Delta = \frac{\alpha}{384} \frac{ql^4}{EI} \quad (2.48)$$

onde o coeficiente  $\alpha$  é dado em função da condição de contorno da faixa em estudo. Prosseguindo com os cálculos obtém-se

$$\alpha_x q_x l_x^4 = \alpha_y q_y l_y^4 \quad (2.49)$$

Utilizando a equação 2.46 na equação 2.49 tem-se

$$\alpha_x q_x l_x^4 = \alpha_y (q - q_x) l_y^4 \quad (2.50)$$

Isolando-se  $q_x$  obtém-se

$$q_x = q \frac{\alpha_y l_y^4}{\alpha_x l_x^4 + \alpha_y l_y^4} \quad (2.51)$$

onde utilizam-se as variáveis auxiliares

$$K_x = \frac{\alpha_y l_y^4}{\alpha_x l_x^4 + \alpha_y l_y^4} \quad (2.52)$$

$$K_y = 1 - K_x \quad (2.53)$$

Com os coeficientes  $K_x$  e  $K_y$  pode-se obter os momentos e reações das lajes a partir de expressões amplamente divulgadas em literatura técnica.

## 2.4 Processo de Marcus

O processo de Marcus, de acordo com Souza e Cunha (1994) tem como base a equação diferencial de placas, sendo obtido suas equações pelo método das

diferenças finitas. Esse método considera o efeito da torção na laje, influenciando, assim, os resultados para os momentos positivos.

Para o cálculo dos momentos positivos é aplicado um fator  $v < 1$  nas equações de cálculo dos momentos positivos. Esses coeficientes são baseados em relações semiempíricas e são obtidos em função da geometria da laje e da condição de contorno dos bordos. Os coeficientes redutores são dados pelas equações

$$v_x = 1 - \frac{20}{3} \frac{K_x}{\alpha_x \varepsilon^2} \quad (2.54)$$

$$v_y = 1 - \frac{20}{3} \frac{K_y \varepsilon^2}{\alpha_y} \quad (2.55)$$

$$\varepsilon = \frac{l_y}{l_x} \quad (2.56)$$

os coeficientes  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  são dados em função das condições de contorno da laje,  $K_x$  e  $K_y$  são os coeficientes de distribuição de carga das faixas. O valor dessas variáveis é igual às obtidas pela Teoria de Grelha. Os momentos positivos pela teoria de Marcus são dados pelas equações abaixo

$$M_{x,m} = v_x M_x \quad (2.57)$$

$$M_{y,m} = v_y M_y \quad (2.58)$$

Onde  $M_{x,m}$  e  $M_{y,m}$  correspondem aos momentos fletores positivos atuantes na laje pela teoria de Marcus e  $M_x$  e  $M_y$  são os momentos fletores positivos obtidos pela teoria de grelha.

Contudo, vale destacar que, de acordo com Araújo (2010), o cálculo das reações de apoio da laje, para esse método, não deve ser considerado como um carregamento uniformemente distribuído nas vigas, devendo ser considerado um carregamento triangular.

Por considerar a torção é necessário dimensionar armaduras nos cantos com condição de contorno de apoio simples.

## 2.5 Método das faixas finitas

O cálculo pelo método das faixas finitas utiliza funções de forma polinomiais na direção transversal e funções e forma trigonométricas na direção longitudinal. O método das faixas finitas (MFF) difere do método dos elementos finitos (MEF) no

sentido de que a discretização do meio contínuo é feita com faixas longitudinais, enquanto no MEF é feito com elementos bidimensionais.

De acordo com Lazzari e Batista (2021) o campo de deslocamentos de cada faixa pode ser aproximado pela expressão 3.59

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum [N][d] = \sum \begin{pmatrix} N_{uv} & 0 \\ 0 & N_w \end{pmatrix} \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2\}^T \quad (2.59)$$

A matriz das funções de forma é obtida através de funções polinomiais. A formulação do método é realizada pelo princípio da mínima energia

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d} = 0 \quad (2.60)$$

O procedimento para o cálculo das reações e deslocamentos segue a mesma sistemática do método dos elementos finitos.

## 2.6 Analogia de grelha

O cálculo pela analogia de grelha é realizado subdividindo-se a laje em grelhas planas formadas por barras igualmente espaçadas. Assim, de acordo com Araújo (2010), a rigidez à torção e flexão da laje é dada pelos elementos de grelha constituintes.

A rigidez à flexão das barras de grelha é dada por

$$K = \frac{E_{cs}bh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.61)$$

A rigidez à torção das barras de grelha é dada por

$$K_t = \chi(1-\nu)K \quad (2.62)$$

Onde o coeficiente  $\chi$  é o coeficiente de redução da rigidez à torção da barra e possui valor menor ou igual a 1.

As barras de grelha são carregadas por

$$q = \frac{gA}{l_{tot}} \quad (2.63)$$

Onde  $g$  é o carregamento total da laje,  $A$  é a área da laje e  $l_{tot}$  é a soma dos comprimentos das barras de grelha.

Utilizando-se o método de rigidez para resolver a grelha obtém-se os deslocamentos nodais, momentos fletores e momentos de torção. Os momentos por unidade de comprimento são dados por

$$M_x = \frac{M_{x0}}{\Delta Y} \quad (2.64)$$

$$M_y = \frac{M_{y0}}{\Delta X} \quad (2.65)$$

Onde  $M_x$  e  $M_y$  são os momentos fletores na barra de grelha nas direções X e Y e  $\Delta Y$  e  $\Delta X$  é o espaçamento entre as barras.

### 3 DIRETRIZES NORMATIVAS NA ANÁLISE À FLEXÃO DE LAJES

As normas, nacionais e internacionais, trazem alguns requisitos mínimos que devem ser atendidos para a análise e dimensionamento de lajes. Majoritariamente as condições que devem ser atendidas dizem respeito à armadura mínima a ser adotada, à ductilidade da seção e a espessura mínima.

Neste capítulo serão avaliados os principais requisitos em relação à análise de lajes à flexão, principalmente em relação à análise de lajes com apoios flexíveis.

Assim, de forma a apresentar quais as prescrições normativas são usualmente adotadas os itens que seguem apresentam as recomendações dos principais códigos utilizados.

#### 3.1 NBR 6118/2023

Seguindo as diretrizes da NBR 6118/2023 elementos de placa podem ser analisados admitindo-se as seguintes hipóteses:

- a) manutenção da seção plana após a deformação, em faixas suficientemente estreitas;
- b) representação dos elementos por seu plano médio.

A norma destaca que deve ser estudada a necessidade de se avaliar a alternância de cargas na análise. Para estruturas com carga variável de até 5 kN/m<sup>2</sup>, e que seja no máximo de 50% da carga total, a análise pode ser efetuada sem a consideração da alternância de cargas.

Em relação à análise estrutural recomenda-se que em elementos de placa devam ser aplicados os métodos baseados na teoria da elasticidade adotando-se o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ .

Para caracterizar o comportamento dúctil da seção a posição da linha neutra, no Estado Limite Último, deve estar compreendida dentro dos limites abaixo descritos:

- $x/d \leq 0,45$  para concretos com  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ;
- $x/d \leq 0,35$  para concretos com  $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$ .

Quando a redistribuição dos momentos na laje é admitida, reduzindo o momento fletor de  $M$  para  $\delta M$  em determinada seção, a profundidade da linha neutra deve ser limitada aos seguintes valores:

- $x/d \leq (\delta - 0,44)/1,25$  para concretos com  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ;
- $x/d \leq (\delta - 0,56)/1,25$  para concretos com  $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$ .

onde o coeficiente de redistribuição  $\delta$  deve obedecer ao limite  $\delta \geq 0,75$ .

Na análise plástica é permitido utilizar, no cálculo no estado limite último, a teoria das charneiras plásticas. Para se garantir as condições apropriadas de ductilidade, sem a necessidade de verificação explícita da capacidade de rotação da seção, a linha neutra deve estar compreendida entre os limites:

- $x/d \leq 0,25$  para concretos com  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ;
- $x/d \leq 0,15$  para concretos com  $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$ .

O cálculo da armadura mínima em uma seção pode ser obtido em função do momento mínimo para o cálculo de armadura longitudinal de vigas, dado pela equação 3.1.

$$M_{d,min} = 0,8W_0f_{ctk,sup} \quad (3.1)$$

A armadura mínima também pode ser adotada em função das taxas mínimas de armadura, que são dadas em função do  $f_{ck}$  do concreto, conforme ilustra a Figura 3.1.

Forma da seção	Valores de $\rho_{\min}^a$ ( $A_{s,\min}/A_c$ ) %														
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Retangular	0,150	0,150	0,150	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226	0,233	0,239	0,245	0,251	0,256

<sup>a</sup> Os valores de  $\rho_{\min}$  estabelecidos nesta Tabela pressupõem o uso de aço CA-50,  $d/h = 0,8$  e  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ . Caso esses fatores sejam diferentes,  $\rho_{\min}$  deve ser recalculado.

Figura 3.1 – Valores mínimos de taxa de armadura, NBR 6118/2023.

Para lajes armadas em uma direção, cuja relação entre os vãos é superior a 2, a norma preconiza que na direção da armadura secundária seja respeitado os limites estabelecidos abaixo

$$\frac{A_s}{s} \geq 20\% \text{ da armadura principal} \quad (3.2)$$

$$\frac{A_s}{s} \geq 0,9 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \quad (3.3)$$

$$\rho_s \geq 0,5\rho_{\min} \quad (3.4)$$

De forma geral as armaduras mínimas para as lajes devem seguir as prescrições apresentadas na Figura 3.2.

Armadura	Elementos estruturais sem armaduras ativas	Elementos estruturais com armadura ativa aderente	Elementos estruturais com armadura ativa não aderente
Armaduras negativas	$\rho_s \geq \rho_{\min}$	$\rho_s \geq \rho_{\min} - \rho_p \geq 0,67 \rho_{\min}$	$\rho_s \geq \rho_{\min} - 0,5 \rho_p \geq 0,67 \rho_{\min}$ (ver 19.3.3.2)
Armaduras negativas de bordas sem continuidade	$\rho_s \geq 0,67 \rho_{\min}$		
Armaduras positivas de lajes armadas nas duas direções	$\rho_s \geq 0,67 \rho_{\min}$	$\rho_s \geq 0,67 \rho_{\min} - \rho_p \geq 0,5 \rho_{\min}$	$\rho_s \geq \rho_{\min} - 0,5 \rho_p \geq 0,5 \rho_{\min}$
Armadura positiva (principal) de lajes armadas em uma direção	$\rho_s \geq \rho_{\min}$	$\rho_s \geq \rho_{\min} - \rho_p \geq 0,5 \rho_{\min}$	$\rho_s \geq \rho_{\min} - 0,5 \rho_p \geq 0,5 \rho_{\min}$
Armadura positiva (secundária) de lajes armadas em uma direção	$A_s/s \geq 20\%$ da armadura principal $A_s/s \geq 0,9 \text{ cm}^2/\text{m}$ $\rho_s \geq 0,5 \rho_{\min}$		-
onde $\rho_s = A_s/b_w h$ e $\rho_p = A_p/b_w h$ . NOTA Os valores de $\rho_{\min}$ são definidos em 17.3.5.2.1.			

Figura 3.2 – Valores mínimos de taxa de armadura em lajes, NBR 6118/2023.

Assim, verifica-se que não há necessidade de se dimensionar armadura mínima quando se trata do detalhamento da armadura disposta na direção do maior vão para lajes armadas em uma direção, haja vista que os valores a serem adotados são dados em função de quantidades pré-estabelecidas em função de outros parâmetros.

### 3.2 FIB Model Code 2010

O FIB Model Code recomenda que a análise estrutural deva levar em consideração aspectos relativos à geometria, condições de contorno e transmissão das reações de apoios dos elementos.

A interação solo-estrutura também deve ser considerada de forma apropriada na modelagem, ou seja, os deslocamentos devido ao comportamento do solo devem ser previstos na análise do comportamento da estrutura.

Portanto, embora não exista uma indicação expressa da consideração flexibilidade dos apoios em lajes, pode-se interpretar que o código sugere que na análise esteja contemplada todas as possíveis causas de deslocamentos na estrutura e a forma como elas afetam na transmissão das reações de apoio nos elementos estruturais.

É permitida a redistribuição de momentos, sem a verificação da capacidade de rotação da seção plastificada, para lajes sujeitas preponderantemente à flexão e que tenham uma razão entre vãos variando de 0,5 a 2.

Para se adotar a redistribuição de momentos fletores sem a verificação explícita da capacidade de rotação da seção a profundidade da linha neutra deve estar compreendida dentro dos limites estabelecidos abaixo:

- $\delta \geq k_1 + k_2 x_u/d$  para  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ;
- $\delta \geq k_3 + k_4 x_u/d$  para  $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$ .

Onde  $\delta$  é o coeficiente de redistribuição,  $x_u$  é a linha neutra no estado limite de serviço após a redistribuição,  $d$  é a altura útil,  $k_1 = 0,44$ ,  $k_2 = 1,25(0,6 + 0,0014/\varepsilon_{cu2})$ ,  $k_3 = 0,7$  e  $k_4 = 0,8$ .

A norma sugere que nos locais onde há a possibilidade de formação de rótulas plásticas a linha neutra deve estar compreendida nos limites abaixo estipulados:

- $x/d \leq 0,45$  para concretos de classe  $\leq \text{C50/60}$ ;
- $x/d \leq 0,35$  para concretos de classe  $\geq \text{C55/67}$ .

A resistência à compressão, deformação máxima, resistência à tração e demais parâmetros associados às classes do concreto são apresentados na Figura 3.3.

Concrete grade	C12	C16	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C55	C60	C70	C80	C90	C100
$f_{ck}$ (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100
$f_{ck,cube}$ (MPa)	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	115
$f_{cm}$ (MPa)	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	108
$f_{ctm}$ (MPa)	1.6	1.9	2.2	2.6	2.9	3.2	3.5	3.8	4.1	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2
$f_{ctk,0.05}$ (MPa)	1.1	1.3	1.5	1.8	2.0	2.2	2.5	2.7	2.9	3.0	3.1	3.2	3.4	3.5	3.7
$f_{ctk,0.95}$ (MPa)	2.0	2.5	2.9	3.3	3.8	4.2	4.6	4.9	5.3	5.5	5.7	6.0	6.3	6.6	6.8
$E_{cm}$ (GPa)	27.1	28.8	30.3	32.0	33.6	35.0	36.3	37.5	38.6	39.7	40.7	42.6	44.4	46.0	47.5
$\epsilon_{e1}$ (‰)	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	2.3	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
$\epsilon_{cu1}$ (‰)	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.4	3.4	3.3	3.2	3.1	3.0	3.0
$\epsilon_{c2}$ (‰)	2.0									2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
$\epsilon_{cu2}$ (‰)	3.5									3.1	2.9	2.7	2.6	2.6	2.7
$n$	2.0									1.75	1.6	1.45	1.4	1.4	1.3
$\epsilon_{c3}$ (‰)	1.75									1.8	1.9	2.0	2.2	2.3	2.4
$\epsilon_{cu3}$ (‰)	3.5									3.1	2.9	2.7	2.6	2.6	2.4

Figura 3.3 – Resistência à compressão do concreto em função das classes, FIB Model Code 2010.

Para o cálculo da resistência à flexão, no estado limite último, é recomendado que sejam admitidas as seguintes hipóteses:

- as seções são planas;
- a resistência à tração do concreto é ignorada.

Acerca da análise estrutural a norma faz referências a regiões B (forças e momentos variam gradualmente) e D (força e momentos variam de forma descontínua), que devem ser levadas em consideração na análise.

Nas regiões B a hipótese de Bernoulli é válida, enquanto na região D essa hipótese não é válida. As regiões de descontinuidade podem ser dadas em função de alteração brusca de geometria do elemento estrutural ou carregamento concentrado. A Figura 3.4 ilustra características dessas regiões.

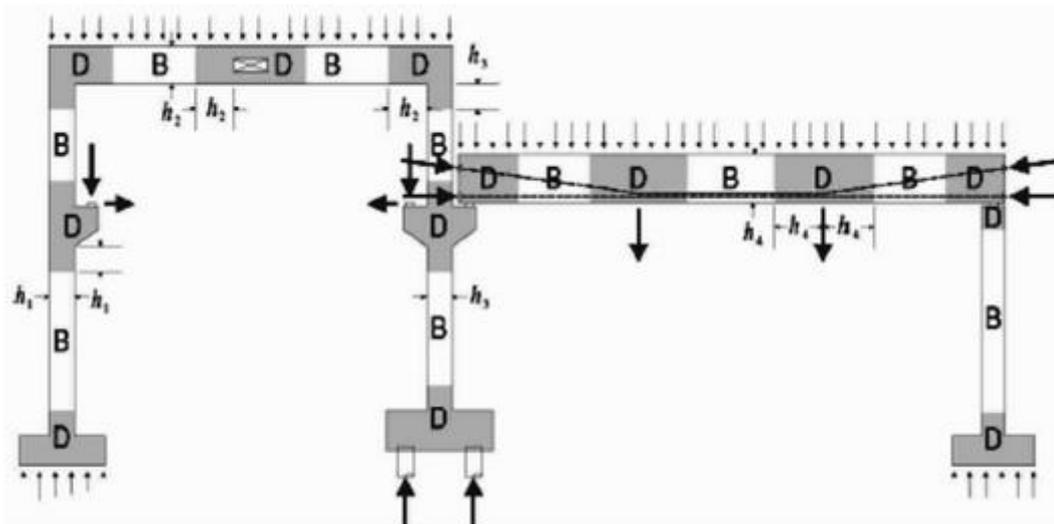


Figura 3.4 – Regiões de continuidade (B) e descontinuidade (D), adaptado de Tjen e Kuchma (2002).

A área de aço mínima em lajes deve ser adotada de modo a estar em conformidade com os critérios de serviço (tensão limite, abertura de fissuras, vibração e deformação excessiva).

A armadura longitudinal mínima em lajes pode ser calculada de forma análoga à armadura mínima de vigas dado pela equação 3.5.

$$A_{s,min} = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_w d \quad (3.5)$$

Em relação à armadura transversal (cisalhamento), quando há necessidade, o valor mínimo a ser adotado não deve ser menor que 20% do valor calculado da armadura mínima longitudinal.

Quando existe torção na laje devido à compatibilidade, e a estrutura não depende da torção para a estabilidade, não é necessário considerar a torção no estado limite último. Entretanto, nesses casos, armadura mínima de torção deve ser prevista para evitar fissuração excessiva.

### 3.3 American Concrete Institute – ACI 318

O ACI 318 (2019) permite o uso de qualquer método de cálculo para a análise de lajes, desde que sejam obedecidas as condições de equilíbrio, compatibilidade e as condições em serviço sejam atendidas.

Para lajes não protendidas deve haver controle da tensão atuante no concreto, que deve obedecer aos limites estabelecidos na Figura 3.5.

Net tensile strain $\epsilon_t$	Classification	$\phi$			
		Type of transverse reinforcement			
		Spirals conforming to 25.7.3		Other	
$\epsilon_t \leq \epsilon_{py}$	Compression-controlled	0.75	(a)	0.65	(b)
$\epsilon_{py} < \epsilon_t < \epsilon_{py} + 0.003$	Transition <sup>[1]</sup>	$0.75 + 0.15 \frac{(\epsilon_t - \epsilon_{py})}{(0.003)}$	(c)	$0.65 + 0.25 \frac{(\epsilon_t - \epsilon_{py})}{(0.003)}$	(d)
$\epsilon_t \geq \epsilon_{py} + 0.003$	Tension-controlled	0.90	(e)	0.90	(f)

<sup>[1]</sup>For sections classified as transition, it shall be permitted to use  $\phi$  corresponding to compression-controlled sections.

Figura 3.5 – Deformação limite, ACI 318, 2019.

A espessura mínima da laje, sem vigas em seu interior, é dada em função do comprimento de vão, da tensão de escoamento do aço e se existe capitel, conforme ilustra a Figura 3.6.

$f_y$ , psi <sup>[2]</sup>	Without drop panels <sup>[3]</sup>			With drop panels <sup>[3]</sup>		
	Exterior panels		Interior panels	Exterior panels		Interior panels
	Without edge beams	With edge beams <sup>[4]</sup>		Without edge beams	With edge beams <sup>[4]</sup>	
40,000	$\ell_n/33$	$\ell_n/36$	$\ell_n/36$	$\ell_n/36$	$\ell_n/40$	$\ell_n/40$
60,000	$\ell_n/30$	$\ell_n/33$	$\ell_n/33$	$\ell_n/33$	$\ell_n/36$	$\ell_n/36$
80,000	$\ell_n/27$	$\ell_n/30$	$\ell_n/30$	$\ell_n/30$	$\ell_n/33$	$\ell_n/33$

<sup>[1]</sup> $\ell_n$  is the clear span in the long direction, measured face-to-face of supports (in.).

<sup>[2]</sup>For  $f_y$  between the values given in the table, minimum thickness shall be calculated by linear interpolation.

<sup>[3]</sup>Drop panels as given in 8.2.4.

<sup>[4]</sup>Slabs with beams between columns along exterior edges. Exterior panels shall be considered to be without edge beams if  $\alpha_f$  is less than 0.8.

Figura 3.6 – Espessura mínima de laje armada em duas direções, adaptado de ACI 318, 2019.

A armadura mínima em lajes é dada pela equação 4.6 e deve estar localizada na região de tração da seção. A armadura mínima deve ser prevista em função do vão em análise.

$$A_{s,min} = 0,0018 A_g \quad (3.6)$$

Onde  $A_g$  é a área bruta da seção.

Para a análise dos deslocamentos de lajes armadas em uma direção o ACI 318 (2019) prevê que o cálculo deve ser realizado de forma análoga ao cálculo do deslocamento de vigas.

Apesar de não existir uma indicação explícita da consideração de apoios flexíveis na modelagem, o código recomenda que a rigidez dos elementos estruturais deve considerar os efeitos das deformações devido à flexão, cisalhamento, deformação axial e escorregamento de armadura.

Existe ainda a necessidade de se considerar o efeito da fissuração na determinação da rigidez dos elementos estruturais, caso seja verificada na combinação dos carregamentos que existe a possibilidade de formação de fissuras.

O ACI 318 (2019) faz uma ressalva em relação ao tipo de carregamento que pode alterar o comportamento de lajes armadas em uma direção. Cargas concentradas ou aberturas criam momentos locais e força cortante que podem fazer com que a laje armada em uma direção se comporte como laje armada em duas direções.

### 3.4 Eurocode 2004

Em relação à análise estrutural de lajes, o Eurocode permite que o dimensionamento considere que os apoios não gerem restrição à torção, ou seja, podem ser admitidos bordos simplesmente apoiados.

Quando se considera que a laje seja monolítica com os apoios, o momento crítico deve ser considerado na face do apoio. Assim, o código preconiza que o momento e a reação de dimensionamento deva ser o maior valor entre o obtido na análise elástica e o considerando a redistribuição.

Para se realizar a análise plástica de lajes alguns parâmetros devem ser respeitados, os quais seguem listados abaixo:

- os métodos de cálculo devem ser utilizados apenas para checagem do estado limite último;
- a ductilidade da seção deve ser suficiente para se garantir o mecanismo de rótulas plásticas;
- a análise plástica deve ser baseada no limite inferior (estático) ou no limite superior (cinemática).

Para se garantir a condição de ductilidade da seção, sem a necessidade de verificação explícita, a linha neutra deve estar compreendida entre os limites estabelecidos abaixo

- $x/d \leq 0,25$  para concretos de classe  $\leq C50/60$ ;
- $x/d \leq 0,15$  para concretos de classe  $\geq C55/67$ ;
- A razão entre os momentos nos suportes e no vão intermediário deve estar entre 0,5 e 2.

A resistência à compressão do concreto e suas respectivas classes são dadas pela Figura 3.7.

Strength classes for concrete														Analytical relation / Explanation	
$f_{ck}$ (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	
$f_{ck,cube}$ (MPa)	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	2.8
$f_{cm}$ (MPa)	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	$f_{cm} = f_{ck} + 8$ (MPa)
$f_{ctm}$ (MPa)	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	$f_{ctm} = 0,30 \times f_{ck}^{(2/3)} \leq C50/60$ $f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln(1 + (f_{cm}/10)) > C50/60$
$f_{ck,0.05}$ (MPa)	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	$f_{ck,0.05} = 0,7 \times f_{ctm}$ 5% fractile
$f_{ck,0.95}$ (MPa)	2,0	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6,0	6,3	6,6	$f_{ck,0.95} = 1,3 \times f_{ctm}$ 95% fractile
$E_{cm}$ (GPa)	27	29	30	31	33	34	35	36	37	38	39	41	42	44	$E_{cm} = 22[(f_{cm})/10]^{0,3}$ ( $f_{cm}$ in MPa)
$\varepsilon_{c1}$ (‰)	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,25	2,3	2,4	2,45	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	see Figure 3.2 $\varepsilon_{c1}^{(f_{ck})} = 0,7 f_{cm}^{0,31} \leq 2,8$
$\varepsilon_{cu1}$ (‰)	3,5								3,2	3,0	2,8	2,8	2,8	2,8	see Figure 3.2 for $f_{ck} \geq 50$ Mpa $\varepsilon_{cu1}^{(f_{ck})} = 2,8 + 27[(98 - f_{ck})/100]^4$
$\varepsilon_{c2}$ (‰)	2,0								2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	see Figure 3.3 for $f_{ck} \geq 50$ Mpa $\varepsilon_{c2}^{(f_{ck})} = 2,0 + 0,085(f_{ck} - 50)^{0,53}$
$\varepsilon_{cu2}$ (‰)	3,5								3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,6	see Figure 3.3 for $f_{ck} \geq 50$ Mpa $\varepsilon_{cu2}^{(f_{ck})} = 2,6 + 35[(90 - f_{ck})/100]^4$
$n$	2,0								1,75	1,6	1,45	1,4	1,4	1,4	for $f_{ck} \geq 50$ Mpa $n = 1,4 + 23,4[(90 - f_{ck})/100]^4$
$\varepsilon_{c3}$ (‰)	1,75								1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,3	see Figure 3.4 for $f_{ck} \geq 50$ Mpa $\varepsilon_{c3}^{(f_{ck})} = 1,75 + 0,55[(f_{ck} - 50)/40]$
$\varepsilon_{cu3}$ (‰)	3,5								3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,6	see Figure 3.4 for $f_{ck} \geq 50$ Mpa $\varepsilon_{cu3}^{(f_{ck})} = 2,6 + 35[(90 - f_{ck})/100]^4$

Figura 3.7 – Classes do concreto de acordo com o Eurocode, 2004.

O código determina que a armadura mínima das lajes deve seguir os mesmos requisitos para vigas, assim, a armadura mínima longitudinal é dada pela equação abaixo

$$A_{s,min} = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_w d \geq 0,0013 b_w d \quad (3.6)$$

Para o caso de lajes armadas em uma direção o código prevê que deve ser disposta, no mínimo, 20% da área de aço principal na direção do maior vão da laje.

### 3.5 Canadian Standards Association – CSA (2004)

Acerca da análise estrutural o código recomenda que a laje seja dimensionada garantindo o equilíbrio e compatibilidade com os apoios. Os limites relacionados aos deslocamentos máximos devem ser atendidos.

É permitido o uso da teoria de placa com aproximação clássica ou numérica. Para análise mais precisa deve-se levar em consideração a espessura da placa e o efeito de redistribuição dos momentos devido à fissuração, retração, fluência e carregamento.

Recomenda-se que, para qualquer tipo de laje a ser dimensionada, deve haver a previsão de uma armadura mínima a ser disposta em cada direção do vão. A armadura deve obedecer ao mínimo indicado na equação 4.7.

$$A_{s,min} = 0,002 A_g \quad (3.7)$$

Onde  $A_g$  é a área bruta da seção.

O CSA (2004) determina que a espessura mínima de uma laje seja dada em função dos critérios de estado limite de serviço e que não seja inferior a 12cm. Entretanto, espessura menor que o mínimo pode ser adotado, desde que os deslocamentos sejam inferiores aos limites estabelecidos.

Para o caso de existir vigas entre os suportes da laje a condição de espessura mínima da laje a ser calculada é dada em função da inércia da viga de bordo e outros parâmetros.

Em relação ao cálculo do deslocamento da laje é necessário considerar a geometria da placa, as condições de suporte e o tipo de vinculação dos elementos estruturais.

No cálculo de lajes armadas em duas direções os momentos resultantes devem ser ajustados de forma a considerar os efeitos da torção da laje. Assim, o momento final de dimensionamento deve ser a soma do momento de cálculo com o momento de torção, conforme apresentado abaixo.

- Momento positivo

$$M_{x,d} = m_x + |m_{xy}| \quad (3.8)$$

$$M_{y,d} = m_y + |m_{xy}| \quad (3.9)$$

- Momento negativo

$$M_{x,d} = m_x - |m_{xy}| \quad (3.10)$$

$$M_{y,d} = m_y - |m_{xy}| \quad (3.11)$$

O código permite que a análise plástica de lajes possa ser baseada no limite inferior ou limite superior, entretanto, para análise mais precisa os efeitos de fluência e retração devem ser considerados.

Além dos requisitos especificados anteriormente é necessário que na análise plástica o tamanho e a rigidez dos elementos de suporte sejam considerados.

### 3.6 Resumo dos códigos

Apesar de não existirem recomendações acerca das análises estruturais a serem realizadas nos casos de apoios flexíveis em lajes, verifica-se que algumas normas indicam a necessidade de se considerar os deslocamentos dos apoios.

O ACI 318 (2019) e o FIB Model Code (2010) indicam a necessidade de se considerar na modelagem da estrutura os efeitos que possam causar deslocamentos nas vigas de apoio.

As normas regulamentadoras analisadas recomendam a necessidade de se adotar uma armadura mínima nos elementos estruturais, de forma a suprir eventuais aproximações de cálculo.

Entretanto, alguns os códigos como a NBR 6118 (2023) e o Eurocode (2004) adotam armaduras mínimas diferentes nos casos em que as lajes são armadas em uma direção, podendo obter valores inferiores aos mínimos pré-estabelecidos.

De uma forma geral as normas permitem a plastificação dos apoios em lajes, desde que certos limites relacionados à posição da linha neutra sejam respeitados. Esses limites buscam permitir que a seção tenha capacidade de rotação suficiente.

Ressalta-se que apenas o código CSA (2004) apresenta uma recomendação acerca dos momentos de torção de lajes os quais devem ser somados aos momentos positivos e negativos das lajes.

## 4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A FLEXIBILIDADE EM SISTEMAS ESTRUTURAIS

Na análise e dimensionamento de estruturas é comum adotar aproximações nos modelos estruturais de forma a facilitar sua modelagem. Dentre as aproximações usualmente empregadas constam a utilização de nós rígidos e apoios que transmitem os esforços na sua totalidade.

Embora esse tipo de aproximação seja utilizado rotineiramente sabe-se que a transmissão total e esforços pelos apoios é uma arbitração matemática que não se configura na prática em sua totalidade, assim, deslocamentos relativos podem ocorrer na estrutura alterando o diagrama de esforços dos elementos estruturais.

Alguns fatores podem influenciar na capacidade de transmissão dos esforços nos nós e apoios da estrutura, dentre os quais pode-se citar:

- fissuração;
- comprimento de ancoragem insuficiente;
- escorregamento da armadura por falta de aderência;
- nichos de concretagem e baixa resistência do concreto na seção.

Embora a NBR 6118/2023 e diversas outras normas indiquem o uso de armadura mínima de modo a suprir as aproximações de cálculo, a depender do grau de rotação ocorrida no elemento estrutural, a armadura mínima prevista pode não ser suficiente para resistir ao carregamento aplicado.

Assim, uma forma de considerar esses fatores é utilizar apoios elásticos no modelo estrutural. Os itens que seguem apresentam formas de como pode ser considerado apoios elásticos na concepção da estrutura.

### 4.1 Análise da rigidez dos pilares em vigas de pórticos

No dimensionamento de pórticos é costume considerar a simplificação de que todos os apoios e ligações transmitem os esforços de forma perfeita, ou seja, as considerações de que engastes, apoios simples e nós transmitem integralmente as solicitações.

Em estruturas idealizadas como pórticos a dimensão dos pilares pode alterar o modelo estrutural a ser utilizado para o dimensionamento das vigas. A Figura 4.1

ilustra o caso de uma viga em que a rigidez do pilar altera o modelo estrutural a ser adotado em seu dimensionamento.

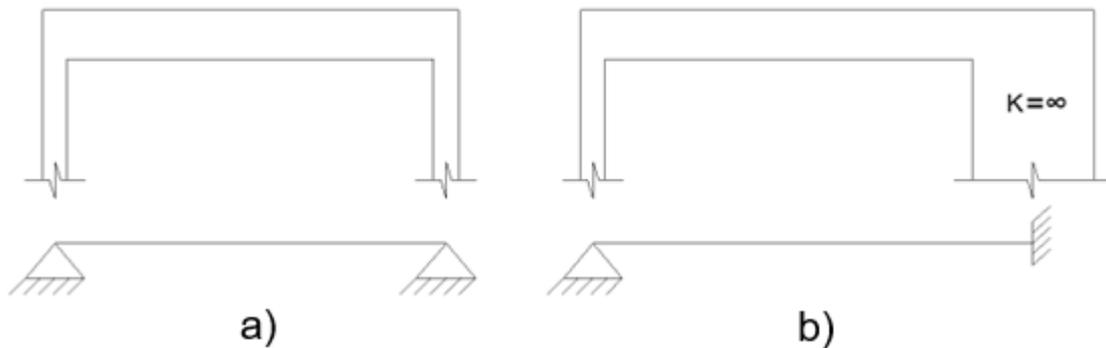


Figura 4.1 – Influência da rigidez dos pilares no modelo estrutural de viga. a) Modelo de viga simplesmente apoiada; b) Modelo de viga apoiada e engastada

O caso idealizado na Figura 4.1 ilustra o modelo estrutural comumente utilizado para o dimensionamento de vigas em pórticos. Entretanto, o modelo de apoios simples pode não se concretizar na prática (Figura 4.1a).

Por menor que seja a rigidez dos pilares eles oferecem certa restrição à rotação da viga, assim, o modelo que apresenta maior precisão dos resultados é o que considera apoios semirrígidos.

Devido à restrição parcial à rotação dos apoios da viga, em função da rigidez dos pilares, o dimensionamento como vigas simples ou contínuas pode resultar em patologias devido à ausência de armadura superior nos apoios. A Figura 4.2 ilustra esse tipo de problema.

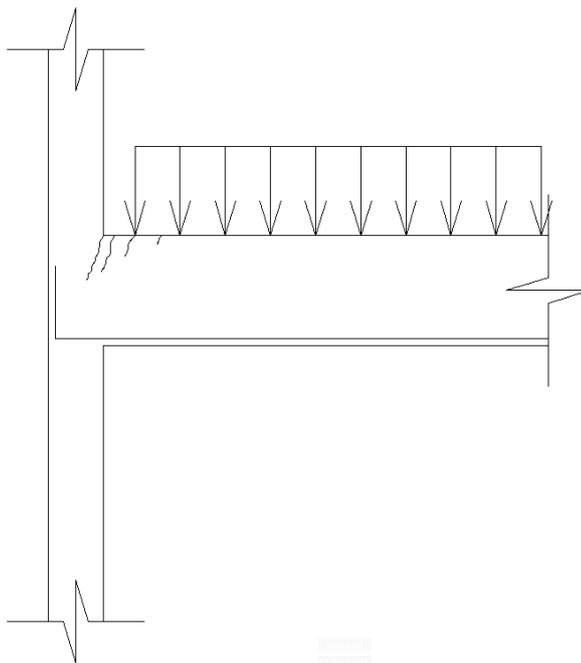


Figura 4.2 – Possível formação de fissura em devido a modelo estrutural inadequado.

Acerca da possibilidade de formação de fissuras no encontro de viga com pilar, conforme as ilustradas na Figura 4.2, as normas Eurocode (2004) e FIB model code (2010) recomendam dispor armadura para controle da fissuração quando esses membros são considerados rotulados nos pilares.

Além da rigidez dos pilares influenciar no modelo estrutural da viga, a não linearidade do material devido à possível abertura de fissuras também contribui para alterar o diagrama de esforços do elemento.

A NBR 6118/2023 permite admitir que as vigas de edifícios sejam contínuas sem ligações rígidas com os pilares, contudo devem ser respeitados os seguintes critérios:

- nos vãos intermediários das vigas contínuas não podem ser considerados momentos positivos inferiores aos obtidos quando se considera as extremidades da viga deste vão engastado;
- nos vãos extremos das vigas contínuas os momentos positivos não podem ser menores que os obtidos engastando-se o apoio interno;
- quando a viga for solidária com o pilar intermediário e a largura do apoio for superior a 25% da altura do pilar não poderá ser considerado momento

negativo de valor absoluto menor que o do engastamento perfeito nesse apoio.

A NBR 6118/2023 recomenda que em vigas contínuas apoiadas sobre pilares deva ser considerado um momento fletor negativo dado por

$$M = M_{eng} \left( \frac{r_{inf} + r_{sup}}{r_{viga} + r_{inf} + r_{sup}} \right) \quad (4.1)$$

Onde  $M_{eng}$  é o momento de engastamento perfeito do vão em questão e  $r$  é o coeficiente de rigidez dado por

$$r = \frac{I}{L} \quad (4.2)$$

Onde  $I$  é a inércia da seção transversal do elemento e  $l$  o comprimento do vão. Os subíndices *inf*, *sup* e *viga* são referentes ao pilar inferior, pilar superior e a viga do nó em análise.

Os coeficientes de rigidez da viga são obtidos com o modelo apresentado na Figura 4.3.

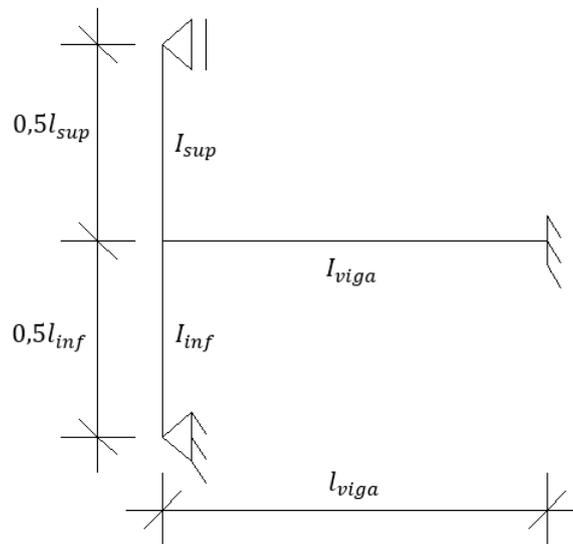


Figura 4.3 – Modelo para cálculo momento fletor negativo para viga de pórtico.

Quando a viga possuir um único vão o engaste perfeito deve ser substituído por um apoio simples. Neste caso o coeficiente é dado por

$$r_{viga} = 3 \frac{I_{viga}}{L_{viga}} \quad (4.3)$$

Para os demais casos deve-se adotar as expressões abaixo

$$r_{viga} = 4 \frac{I_{viga}}{L_{viga}} \quad (4.4)$$

$$r_{sup} = 6 \frac{I_{sup}}{L_{sup}} \quad (4.5)$$

$$r_{inf} = 6 \frac{I_{inf}}{L_{inf}} \quad (4.6)$$

Caso o dimensionamento da viga tenha como base o sistema de pórtico pode-se desconsiderar as premissas adotadas para o cálculo de viga contínua e utilizar os resultados obtidos diretamente da análise estrutural do pórtico.

A modelagem do elemento pode ser melhorada considerando a solidariedade dos pilares com a viga, adotando-se o modelo estrutural com molas, conforme ilustra a Figura 4.4.

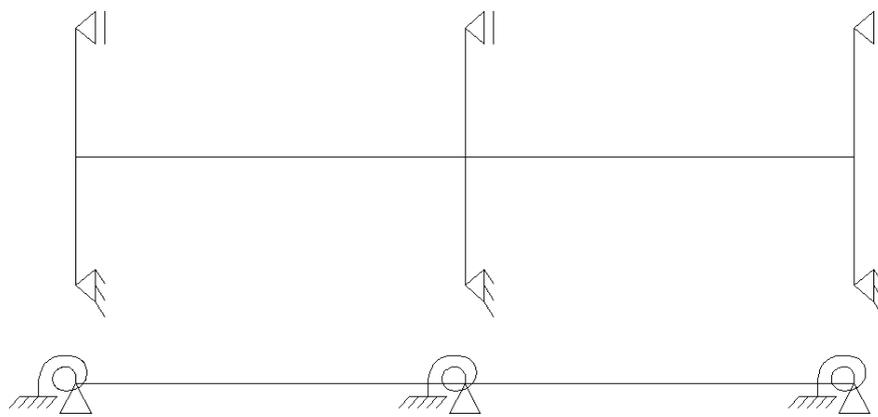


Figura 4.4 – Modelo de viga contínua utilizando apoios elásticos considerando a rigidez dos pilares.

De acordo com Araújo (2014), a rigidez rotacional dos apoios das molas é dada pela equação 4.7.

$$G = E_{cs} \left( 6 \frac{I_{sup}}{L_{sup}} + 6 \frac{I_{inf}}{L_{inf}} \right) \quad (4.7)$$

onde  $E_{cs}$  é o módulo de elasticidade secante do concreto.

A variável  $G$  deve ser substituída na matriz de rigidez global da viga no lugar do grau de liberdade correspondente à rotação do nó no apoio. Assim, deve-se prosseguir com os cálculos para se obter as solicitações de deslocamentos.

Os modelos apresentados buscam aproximar o dimensionamento de uma viga contínua considerando a influência da rigidez dos pilares no modelo estrutural. Portanto, verifica-se que as condições de contorno são essenciais para o dimensionamento mais preciso e a análise do comportamento da edificação.

Ressalta-se que existem outras formas de se obter as reações de elementos estruturais com apoios elásticos, conforme apresentado em Jaroszewicz et al (2014) onde foi utilizada uma função de influência capaz de calcular as reações de uma viga com apoios elásticos.

Além das questões relativas à rigidez dos apoios deve-se levar em consideração a formação de fissuras nos elementos estruturais. Zhang et al (2017) analisou, utilizando-se o método dos elementos finitos, o efeito da abertura de fissuras em viga engastada e livre com apoios elásticos, onde foi verificado que, além do aumento dos deslocamentos, há também uma redução da frequência natural da estrutura.

Assim, observa-se que para uma análise mais completa e precisa, além das considerações acerca da rigidez dos apoios, deve ser levado em consideração aspectos relativos à não linearidade do material como, por exemplo, a formação de fissuras.

#### 4.2 Considerações sobre apoios elásticos na interação solo-estrutura

A consideração da flexibilidade nos apoios é usualmente adotada na interação solo-estrutura, onde os deslocamentos oriundos do comportamento do solo costumam ter influência significativa na redistribuição dos esforços no sistema estrutural. O modelo mais amplamente utilizado para considerar a flexibilidade dos apoios é o modelo de Winkler.

O modelo de Winkler consiste em substituir os apoios por um coeficiente de mola que caracterize o grau de flexibilidade esperado na interação solo-estrutura. A modelagem considerando apoios elástico apresenta resultados mais precisos, pois consideram os deslocamentos previstos no apoio e fornecem diagramas de esforços mais próximos da realidade.

Contudo, uma das dificuldades em se utilizar o Modelo de Winkler é obter, de forma precisa, o coeficiente de mola nos apoios. Para o uso em solos a determinação do coeficiente de mola torna-se mais trabalhosa e apresenta um grau de imprecisão elevado, devido às características de heterogeneidade do solo.

O módulo de reação (coeficiente de mola) na análise de vigas sobre base elástica pode não ter a precisão adequada devido às propriedades do solo, conforme estudos de Baker et al (1989). Devido às dificuldades em se determinar esse valor

pode-se obter resultados que não correspondem à real distribuição dos esforços no elemento.

Uma das aplicações do modelo de Winkler é em estacas carregadas transversalmente. Froio e Rizzi (2017) analisaram esse tipo de modelagem admitindo-se a variação do coeficiente de mola horizontal ao longo da estaca, devido às características de heterogeneidade do solo. Os autores observaram que a solução analítica exata (equação diferencial ordinária) pode servir como referência para validar a precisão do modelo de Winkler, onde foi verificada precisão satisfatória dos resultados.

Sato et al (2008) verificou que ao se comparar a modelagem de uma viga utilizando-se apoios elásticos ou admitindo-se a interação solo-estrutura os resultados obtidos são bastante próximos.

Assim, verifica-se que a utilização de apoios elásticos busca trazer uma resposta mais precisa na estrutura, entretanto, a dificuldade maior na interação solo-estrutura consta na determinação do coeficiente de mola.

#### 4.3 Determinação do coeficiente de mola em apoios elásticos

Embora a utilização mais comum do coeficiente de mola na caracterização dos apoios em elementos estruturais seja na modelagem da interação solo-estrutura, pode-se utilizar a mesma sistemática para se analisar estruturas em geral.

Diferentemente do que ocorre na caracterização do coeficiente de mola na interação solo-estrutura onde é necessário determinar os parâmetros do solo, em estruturas de concreto ou metálicas pode-se determinar o coeficiente de mola de forma mais fácil a partir do cálculo dos deslocamentos do elemento estrutural.

Fazendo uso das equações 4.8, 4.9 e 4.10 pode-se determinar o coeficiente de mola ( $k_v$ ,  $k_h$  e  $k_\theta$ ) do apoio em função do deslocamento ou rotação e das solicitações associadas ao nó objeto de análise.

$$P = k_v y \quad (4.8)$$

$$F = k_h x \quad (4.9)$$

$$M = k_\theta \theta \quad (4.10)$$

A Figura 4.5 ilustra a representação dos coeficientes de mola associados a um determinado nó do elemento estrutural.

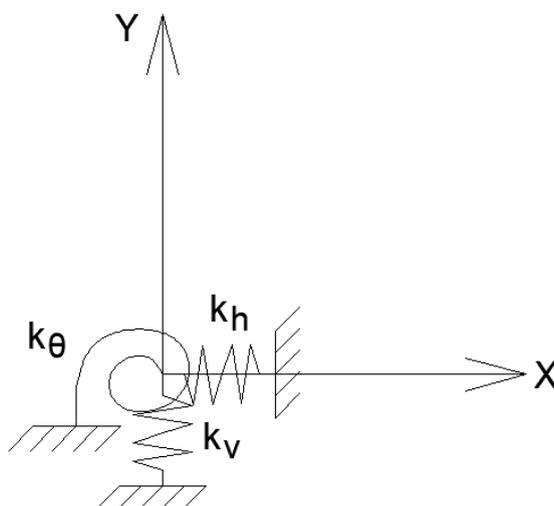


Figura 4.5 – Representação de apoios elásticos lineares.

Ressalta-se que, de acordo com Martha (2010), a relação utilizada para se determinar os coeficientes de mola abrangem apenas apoios elásticos com comportamento linear, ou seja, quando a estrutura apresenta deslocamentos e rotações do apoio de pequeno valor.

A distribuição dos apoios elásticos pode ser otimizada, conforme estudos realizados por Aydin (2020) onde foi analisada a otimização da distribuição de apoios elásticos em uma viga engastada e livre considerando as hipóteses de Timoshenko. Comparando-se os resultados obtidos pelo modelo com molas e sem mola pôde-se constatar boa correlação dos resultados.

Aydin (2020) observou que as condições dos suportes alteram de forma significativa o comportamento da força externa na viga. Alterar a rigidez do coeficiente de mola influencia os diferentes modos de vibração do elemento estrutural. A utilização de apoios elásticos altera a distribuição do carregamento na viga e as características dinâmicas, podendo causar escoamento do material devido ao aumento das solicitações internas.

A adoção de apoios elásticos também pode ser utilizada na alteração do modelo de estruturas existentes. A modificação na concepção visa melhorar o desempenho estrutural de forma a adequar novos carregamentos ou alterações arquitetônicas.

Cabe destacar que apoios elásticos também mudam as propriedades dinâmicas da estrutura. Jalali e Noohi (2017) verificaram que ao se considerar uma

viga engastada com apoios elásticos houve alteração nos resultados para a frequência natural da estrutura e seus modos de vibração.

Estudo conduzido por Park et al. (1997) teve como objetivo investigar o efeito da modificação da concepção estrutural das vigas em pontes, a partir da transformação de vigas simplesmente apoiadas em vigas contínuas. Para tal, foram realizados ensaios experimentais para estudar o comportamento das lajes em diferentes condições de suporte, especificamente em relação à alteração das condições de suporte de rígido para flexível em tabuleiros de pontes. Os resultados obtidos pelos pesquisadores indicaram um aumento significativo de 10 a 20% nas deformações quando foram utilizados suportes elásticos.

#### 4.4 Avaliação da flexibilidade dos apoios para o cálculo de lajes

Quando se considera a flexibilidade dos apoios para o cálculo das lajes pode-se determinar reações significativamente diferentes das que seriam obtidas considerando a condição de contorno de apoios rígidos.

Ressalta-se que não necessariamente a flexibilidade dos apoios deva estar associada à geometria das vigas de borda, mas sim ao deslocamento final do elemento de apoio, o qual pode haver um aumento devido ao carregamento na estrutura ou patologias.

A patologia associada à baixa resistência do concreto, ou à existência de nichos de concretagem (falha construtiva), pode aumentar a fissuração do elemento estrutural, reduzindo a sua rigidez à flexão e, conseqüentemente, aumentando os deslocamentos finais.

Em situações de incêndio também pode ocorrer aumento do deslocamento final da estrutura de apoio, assim como modificação das propriedades do concreto. Nguyen *et al* (2015) estudou os efeitos de lajes submetidas a condições de fogo extremas. Quando as lajes são submetidas a temperaturas elevadas pode haver a formação de rótulas plásticas nas vigas de borda, caracterizando um certo grau de flexibilidade dos apoios.

Os autores verificaram que a depender do grau de flexibilidade ocorrida nas vigas de borda o comportamento da laje pode alterar, havendo uma redistribuição das solicitações. Em situações de incêndio a laje pode experimentar, inclusive, grandes deformações inelásticas.

A configuração de apoios rígidos para o cálculo de lajes pode fornecer resultados imprecisos. Araújo (2008) destaca que em função da condição de contorno usualmente empregada (apoios rígidos) sempre irá ocorrer um maior momento fletor segundo a direção do menor vão da laje.

Entretanto, a depender do grau de flexibilidade das vigas de bordo essa pode não ser a direção da maior sollicitação. Dedução semelhante também pode ser verificada em Silva e Horowitz (2008), onde foi verificado que ao se considerar a flexibilidade das vigas de apoio resulta no aumento dos momentos fletores das lajes e redução dos momentos fletores das vigas.

De acordo com Araújo (2008) quando se engasta as lajes onde existe continuidade com a laje adjacente, utilizando-se a teoria de placas para se determinar as sollicitações, não se obtém valores confiáveis para as sollicitações das lajes apoiadas em vigas flexíveis.

Arman (2014) verificou que o deslocamento das lajes de concreto armado depende da rigidez dos apoios, observando que o deslocamento no meio da laje reduz com o aumento da rigidez das vigas de apoio. Estudos realizados por Abdel-Karim (2006) e Galyautdinov (2017) apresentaram conclusões similares.

Tangwongchai *et al* (2011) ressalta a importância de se considerar a flexibilidade das vigas de apoio das lajes para a correta análise estrutural dos momentos fletores na laje.

Além das propriedades estáticas que são influenciadas pela consideração da flexibilidade das vigas de apoio Bueno e Loriggio (2016) e Galyautdinov (2017) observaram que a rigidez das vigas de apoio também influencia nas propriedades dinâmicas da estrutura.

Cabe destacar que a razão entre a rigidez da laje e da viga de apoio influencia diretamente nos momentos fletores e no deslocamento final da laje, conforme estudos idealizados por Chen (2012).

Além dos parâmetros relativos à geometria da laje e propriedades do concreto também deve ser levado em consideração o tipo de carregamento adotado na análise estrutural. Ensaio realizado por Lantsoght *et al* (2015) analisaram o efeito do carregamento concentrado e distribuído em linha em lajes simplesmente apoiadas. Algumas das lajes ensaiadas foram colocadas em apoios elásticos sendo consideradas apoiadas em suportes flexíveis.

Os autores observaram que, nas situações em que os apoios são flexíveis, foi constatada que a ruína por cisalhamento apresentou comportamento mais dúctil que em apoios rígidos.

Acerca do efeito do carregamento em lajes Kezmane *et al* (2016) analisou a modelagem em elementos finitos para lajes submetidas a impactos dinâmicos. Foi verificado que o tipo de comportamento do material possui grande influência da resposta da estrutura. Os modelos de dano do concreto foram os que que apresentaram respostas mais precisas.

Apesar de ser notória a influência que a flexibilidade das vigas de bordo causa na laje existem poucos métodos analíticos de cálculo. Dentre os poucos métodos de cálculo existentes para o cálculo de lajes com apoios flexíveis pode-se citar o de McCutcheon (1984) que desenvolveu um método para cálculo de lajes de madeira utilizando como base sistema de molas para o desenvolvimento das equações.

O método proposto por McCutcheon (1984) apresentou boa correlação com o método dos elementos finitos e ensaios realizados. Apesar de boa correlação dos resultados alguns parâmetros de difícil determinação foram negligenciados na análise (variação do material, piso, conectores, etc).

Outro método utilizado no cálculo de lajes sobre apoios flexíveis é o apresentado em Araújo (2009). Nesse método as lajes do pavimento são calculadas como simplesmente apoiadas. Na ligação entre duas lajes adjacentes o valor do momento negativo é admitido como o maior valor absoluto do momento positivo na direção considerada.

Ressalta-se ainda que o tipo de modelagem adotada impacta diretamente no consumo de aço na estrutura. Estudo analítico realizado por Barrozo *et al* (2022) ilustra as diferenças no consumo de aço ao se utilizar diferentes modelos de concepção estrutural de lajes.

## 5 TEORIA DE GRELHA SOBRE APOIOS FLEXÍVEIS

Para se obter as solicitações utilizando-se apoios elásticos, considera-se a mesma sistemática da Teoria de Grelha. Assim, para se determinar as solicitações a laje é decomposta em uma série de faixas ortogonais entre si de largura unitária, conforme descrito em Silva e Tavares (2023). A Figura 5.1 apresenta a ilustração de uma faixa de laje apoiada sobre vigas.

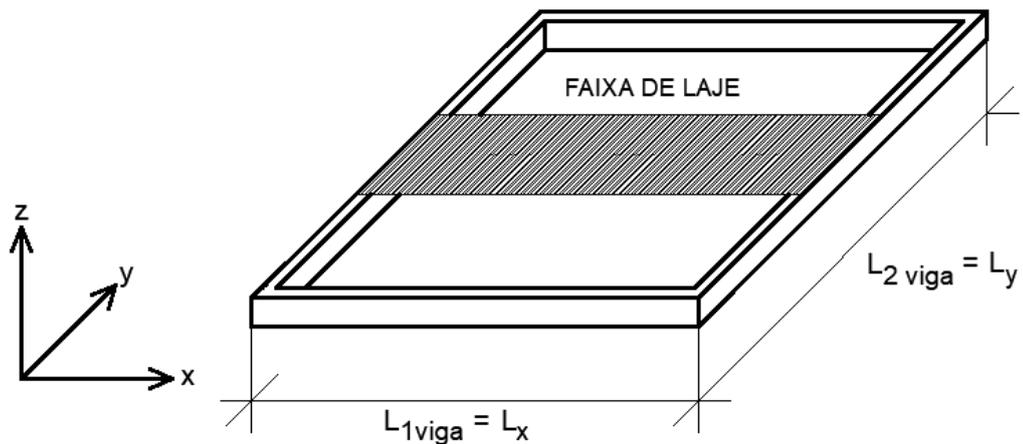


Figura 5.1 – Faixa de laje apoiada sobre vigas.

O modelo inicialmente adotado para a contribuição à Teoria de Grelha se baseia na premissa de que as vigas de bordo são simplesmente apoiadas nas extremidades e sofrem deslocamento devido à carga da faixa de laje, conforme ilustra a Figura 5.2.

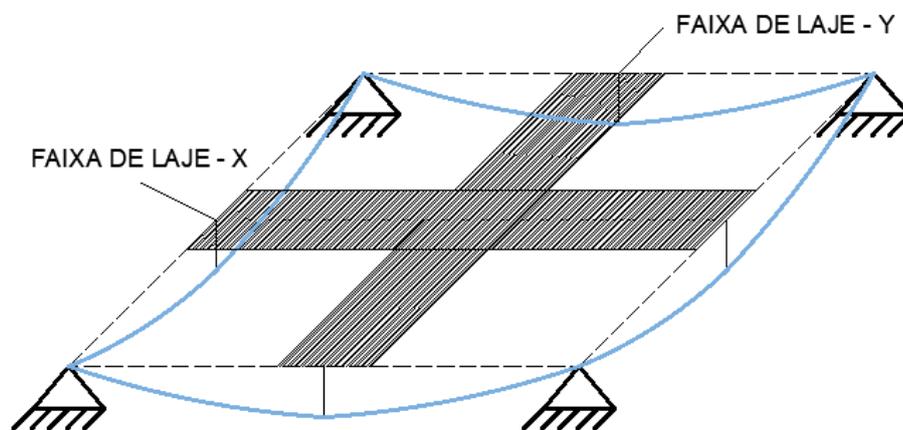


Figura 5.2 – Deslocamento nas vigas de apoio da laje.

O modelo estrutural utilizado para a faixa de laje e a viga de apoio, incluindo carregamento distribuído da laje, é o apresentado na Figura 5.3. O modelo estrutural de carga concentrada na viga de apoio foi escolhido apenas para simplificação do cálculo final do deslocamento.

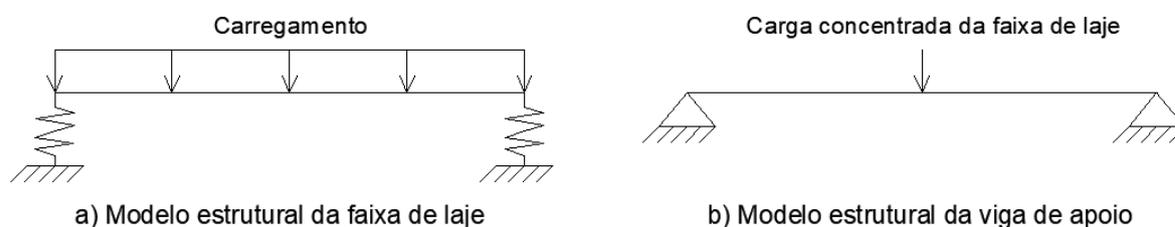


Figura 5.3 – Modelo estrutural para a faixa de laje e viga de apoio.

O carregamento atuante na laje é decomposto em duas parcelas de carga, onde cada parcela é atribuída a uma faixa, assim

$$q = q_x + q_y \quad (5.1)$$

Portanto, a parcela de carga  $q_x$  ou  $q_y$  ao atuar na sua respectiva faixa provoca um deslocamento na viga de bordo. De forma a garantir a compatibilidade de deformações, na interseção entre as faixas os deslocamentos entre as faixas devem ser iguais.

Admite-se como premissa básica que as vigas que oferecem as condições de contorno das lajes são simplesmente apoiadas nos pilares no referido trecho de laje (conforme apresentado na Figura 5.3). Assim, o deslocamento máximo em uma viga biapoiada devido à carga concentrada no meio do vão é dado pela equação 5.2:

$$y = \frac{PL_{viga}^3}{48EI_{viga}} \quad (5.2)$$

onde a carga  $P$  é a reação da faixa de laje,  $L_{viga}$  é o comprimento da viga onde a laje está apoiada e  $EI_{viga}$  é a rigidez da viga de apoio.

O coeficiente de mola no apoio da faixa da laje é obtido em função do deslocamento da viga de borda pela equação abaixo

$$P = k \cdot y \quad (5.3)$$

Substituindo o valor do deslocamento (equação 5.2) na expressão 5.3 obtém-se o coeficiente de mola do apoio da faixa de laje

$$k = \frac{P}{y} = \frac{P}{\frac{PL_{viga}^3}{48EI_{viga}}} = \frac{48EI_{viga}}{L_{viga}^3} \quad (5.4)$$

Ressalta-se que o deslocamento utilizado para obter a rigidez do coeficiente de mola considerou apenas o deslocamento devido à carga da laje, modelo mais refinado deve considerar todas as cargas que causam deslocamento na viga (carregamento permanente e acidental).

Um modo de contabilizar o deslocamento total das vigas de apoio é multiplicar o deslocamento de referência (equação 5.2) por uma constante que resulte no valor do deslocamento máximo da viga (incluindo o deslocamento devido à carga da faixa de laje) no ponto de estudo, assim

$$\frac{y_{max}}{y} = \lambda \rightarrow y_{max} = \lambda \frac{PL_{viga}^3}{48EI_{viga}} \quad (5.5)$$

Cabe destacar que o coeficiente  $\lambda$  pode ter qualquer valor, haja vista que este coeficiente busca apresentar o real deslocamento da viga de apoio em função do deslocamento de referência  $y$  devido à carga concentrada da faixa de laje.

Assim, considerando-se que as vigas de borda da faixa de laje podem ter propriedades distintas, o deslocamento em cada um dos apoios é dado pelas equações abaixo

$$y_1 = \lambda_1 \frac{R_1}{k_1} \quad (5.6)$$

$$y_2 = \lambda_2 \frac{R_2}{k_2} \quad (5.7)$$

onde  $R_1$  e  $R_2$  são as cargas concentradas da faixa de laje,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os coeficientes de ajuste de deslocamento, e  $k_1$  e  $k_2$  a rigidez da viga de borda dada pela equação 5.4.

### 5.1 Faixa de laje biapoiada com apoios flexíveis

O deslocamento máximo para uma faixa de laje, considerando as condições de contorno biapoiada com apoios elásticos e carregamento uniformemente distribuído, é dada pela soma do deslocamento máximo do meio do vão com o encurtamento elástico nos apoios.

A Figura 5.4 mostra a diferença nos deslocamentos para a condição de contorno de apoios simples e apoios elásticos, considerando-se a possibilidade de haver rigidez  $k_1$  e  $k_2$  diferentes na faixa de laje.

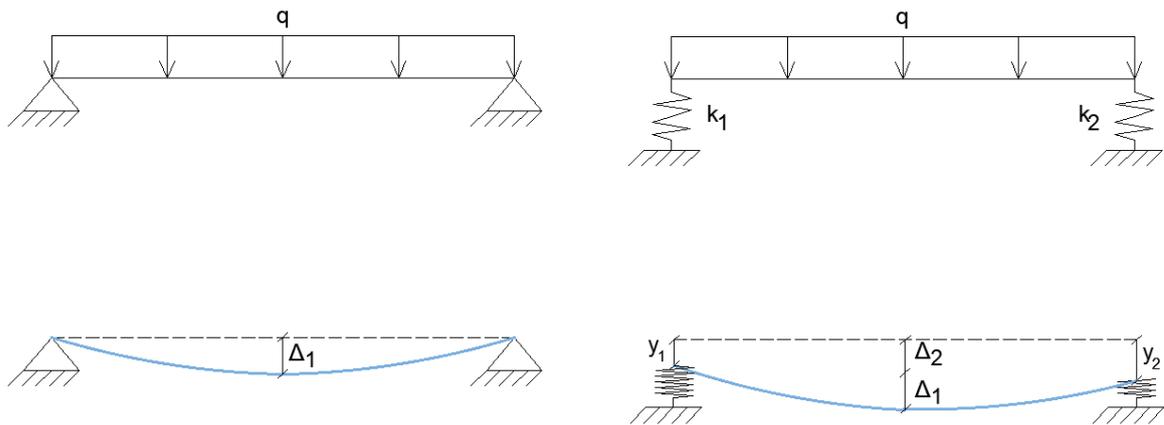


Figura 5.4 – Comparação entre o deslocamento de viga biapoiada com apoio rígido e flexível.

Por se tratar de um sistema isostático e simétrico o deslocamento máximo ( $\Delta_1$ ), devido ao carregamento distribuído, em ambos os sistemas é igual e dado pela equação 5.8.

$$\Delta_1 = -\frac{5}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} \quad (5.8)$$

Entretanto, o deslocamento máximo para a faixa de laje com apoios elásticos vai ser dada pela soma entre o deslocamento devido ao carregamento  $\Delta_1$  e o deslocamento devido ao movimento de corpo rígido  $\Delta_2$  no ponto de deslocamento máximo, assim

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \quad (5.9)$$

onde o deslocamento devido ao movimento de corpo rígido, no local onde o momento é máximo, é dado pela média entre o deslocamento ocorrido nos apoios elásticos, conforme ilustra a Figura 5.5.

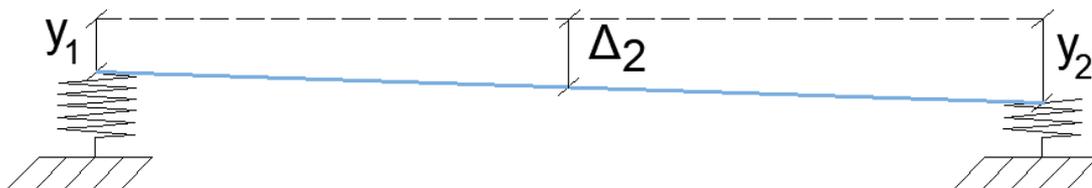


Figura 5.5 – Deslocamento no ponto de momento máximo devido à elasticidade dos apoios.

Assim, com o deslocamento nos apoios dado pelas equações 5.6 e 5.7, o deslocamento no meio do vão devido ao movimento de corpo rígido, é dado por

$$\Delta_2 = -\frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{\lambda_1}{2k_1}R_1 - \frac{\lambda_2}{2k_2}R_2 \quad (5.10)$$

Assim, o deslocamento total no meio do vão resulta em

$$\Delta = -\frac{5}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} - \frac{\lambda_1}{2k_1}R_1 - \frac{\lambda_2}{2k_2}R_2 \quad (5.11)$$

onde  $q$  é a carga distribuída na faixa de laje,  $R_1$  e  $R_2$  é a reação de apoio da faixa de laje devido ao carregamento distribuído  $q$ ,  $k_1$  e  $k_2$  são os apoios elásticos da faixa de laje,  $EI_{laje}$  é a rigidez à flexão da laje e  $L_{laje}$  é o comprimento da faixa de laje.

Destaca-se que as reações de apoio, por se tratar de um sistema isostático com carregamento uniformemente distribuído e simétrico, são as mesmas para a viga isostática. Portanto, a carga concentrada na viga de apoio é dada por

$$R_1 = R_2 = R = \frac{qL_{laje}}{2} \quad (5.12)$$

Deve-se lembrar que o valor de  $R$  é referente à faixa de laje. Assim, substituindo a reação na equação do deslocamento máximo resulta em

$$\Delta = -\frac{5}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} - \lambda_1 \frac{qL_{laje}}{4k_1} - \lambda_2 \frac{qL_{laje}}{4k_2} \quad (5.13)$$

que pode ser simplificado da seguinte forma

$$\Delta = -\frac{5}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} - \frac{qL_{laje}(k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1)}{4k_1k_2} \quad (5.14)$$

Utilizando-se a seguinte variável auxiliar obtém-se

$$k = 2 \frac{k_1k_2}{(k_1\lambda_2 + k_2\lambda_1)} \quad (5.15)$$

$$\Delta = -\frac{5}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} - \frac{qL_{laje}}{2k} \quad (5.16)$$

A consideração de que a equação 6.16 é o deslocamento máximo da faixa de laje é válida apenas para os casos em que a diferença entre os deslocamentos,  $y_2$  e  $y_1$ , das vigas de apoio seja menor ou igual ao deslocamento  $\Delta_1$  da laje, conforme pode ser observado na Figura 5.4.

## 5.2 Faixa de laje biengastada com apoios flexíveis

Para o modelo de viga biengastada é necessário obter a expressão geral para o cálculo das reações de apoio e deslocamento, haja vista que a condição de apoios flexíveis com rigidezes diferentes altera o valor das reações de apoio. A Figura 5.6

mostra a diferença nos deslocamentos para a condição de contorno de apoios simples e apoios elásticos.

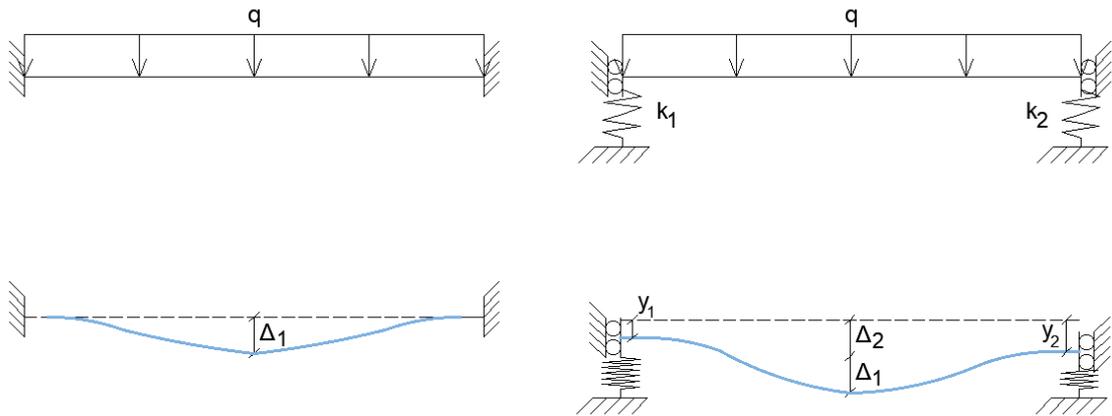


Figura 5.6 – Comparação entre o deslocamento de viga biengastada com apoio rígido e flexível.

Utilizando-se as equações de equilíbrio obtém-se as seguintes relações entre as reações de apoio

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_1 + R_2 = qL \quad (5.17)$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow M_1 - M_2 + R_2L - \frac{qL^2}{2} = 0 \quad (5.18)$$

A Figura 5.7 apresenta as variáveis a serem determinadas na equação do momento em função da distância a partir do 1º engaste.

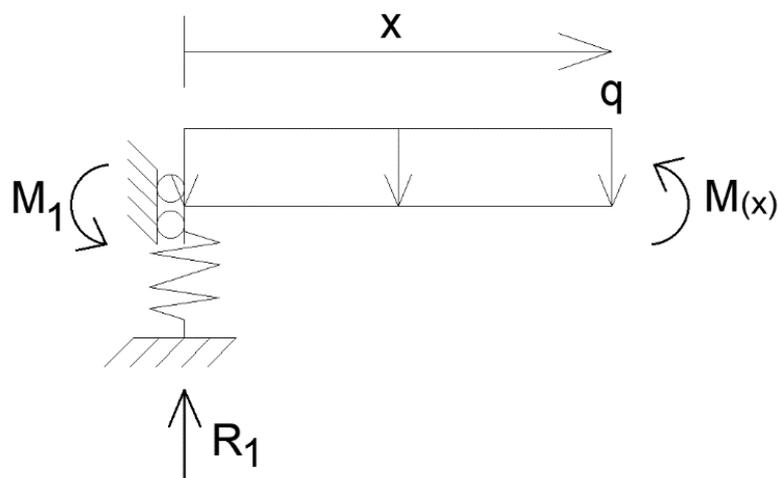


Figura 5.7 – Seção de viga biengastada, a partir do 1º apoio, para o equacionamento do momento.

A equação do momento fletor, a partir do 1º engaste, é dada em função da distância  $x$  pela equação 5.19

$$M(x) = -M_1 + R_1x - \frac{qx^2}{2} \quad (5.19)$$

Usando a relação momento curvatura prossegue-se para a determinação da linha elástica

$$EI_{laje}v'' = M(x) = -M_1 + R_1x - \frac{qx^2}{2} \quad (5.20)$$

Integrando-se a equação 5.20 resulta

$$EI_{laje}v' = \frac{R_1x^2}{2} - M_1x - \frac{qx^3}{6} + C1 \quad (5.21)$$

Utilizando-se a condição de contorno  $v' = 0$  em  $x = 0$ , ou seja, curvatura no engaste nula, obtém-se o valor da constante  $C1 = 0$ . Integrando-se novamente a expressão 5.21 obtém-se a equação da linha elástica da viga biengastada

$$EI_{laje}v = \frac{R_1x^3}{6} - \frac{M_1x^2}{2} - \frac{qx^4}{24} + C2 \quad (5.22)$$

Empregando-se como condição de contorno o deslocamento nos apoios elásticos (equação 5.6 e 5.7) determina-se a constante  $C2$  e as reações de apoio. Assim, para  $x = 0$  tem-se a seguinte condição de contorno

$$v = -\lambda_1y_1 \quad (5.23)$$

Substituindo o valor do deslocamento na equação da linha elástica obtém-se a constante  $C2$ .

$$C2 = -EI_{laje}(\lambda_1y_1) \quad (5.24)$$

Cabe destacar que a constante  $C2$ , embora seja dada em função de parâmetros da estrutura, trata-se de um adimensional.

Para a condição de contorno em que  $x = L_{laje}$  tem-se o seguinte deslocamento no apoio elástico

$$v = -\lambda_2y_2 \quad (5.25)$$

Substituindo na equação da linha elástica obtém-se

$$-EI_{laje}(\lambda_2y_2) = \frac{R_1L_{laje}^3}{6} - \frac{M_1L_{laje}^2}{2} - \frac{qL_{laje}^4}{24} - EI_{laje}(\lambda_1y_1) \quad (5.26)$$

Considerando-se que os deslocamentos dos apoios elásticos são dados pela equação 5.6 e 5.7, e substituindo-os na equação 5.26, e simplificando, obtém-se

$$\begin{aligned}
4R_1L_{laje}^3 - 12M_1L_{laje}^2 - qL_{laje}^4 - 24EI_{laje} \left( \lambda_1 \frac{R_1}{k_1} \right) \\
+ 24EI_{laje} \left( \lambda_2 \frac{R_2}{k_2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{5.27}$$

que resulta na seguinte equação

$$\begin{aligned}
R_1 \left( 4L_{laje}^3 - 24EI_{laje} \frac{\lambda_1}{k_1} \right) + R_2 \left( 24EI_{laje} \frac{\lambda_2}{k_2} \right) \\
- M_1(12L_{laje}^2) - qL_{laje}^4 = 0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Utilizando-se a condição de contorno  $v' = 0$  em  $x = L_{laje}$  tem-se

$$\frac{R_1L_{laje}^2}{2} - M_1L_{laje} - \frac{qL_{laje}^3}{6} = 0 \tag{5.29}$$

Colocando-se todas as variáveis da equação 5.29 em função de  $R_1$  tem-se

$$M_1 = \frac{R_1L_{laje}}{2} - \frac{qL_{laje}^2}{6} \tag{5.30}$$

Pelo somatório das forças verticais obtém-se a reação  $R_2$  em função de  $R_1$ .

$$R_2 = qL_{laje} - R_1 \tag{5.31}$$

Substituindo-se as duas variáveis (equações 5.30 e 5.31) na expressão da linha elástica (equação 5.28) obtém-se a reação  $R_1$ .

$$\begin{aligned}
R_1 \left( 4L_{laje}^3 - 24EI_{laje} \frac{\lambda_1}{k_1} \right) + (qL_{laje} - R_1) \left( 24EI_{laje} \frac{\lambda_2}{k_2} \right) \\
- \left( \frac{R_1L_{laje}}{2} - \frac{qL_{laje}^2}{6} \right) (12L_{laje}^2) - qL_{laje}^4 = 0
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Isolando-se  $R_1$

$$\begin{aligned}
R_1 \left[ \left( 4L_{laje}^3 - 24EI_{laje} \frac{\lambda_1}{k_1} \right) - \left( 24EI_{laje} \frac{\lambda_2}{k_2} \right) - 6L_{laje}^3 \right] \\
= qL_{laje} \left[ \left( -24EI_{laje} \frac{\lambda_2}{k_2} \right) - L_{laje}^3 \right]
\end{aligned} \tag{5.33}$$

que resulta em

$$R_1 = qL_{laje} \frac{\left[ \left( -24EI_{laje} \frac{\lambda_2}{k_2} \right) - L_{laje}^3 \right]}{\left[ -24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2} \right) - 2L_{laje}^3 \right]} \tag{5.34}$$

Utilizando-se a variável auxiliar

$$\beta = \frac{\left[ \left( 24EI_{laje} \frac{\lambda_2}{k_2} \right) + L_{laje}^3 \right]}{\left[ 24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2} \right) + 2L_{laje}^3 \right]} \tag{5.35}$$

$$R_1 = qL_{laje}\beta \quad (5.36)$$

Com o valor de  $R_1$  pode-se determinar as demais reações de apoio, assim

$$R_2 = qL_{laje} - R_1 = qL_{laje}(1 - \beta) \quad (5.37)$$

$$M_1 = \frac{R_1 L_{laje}}{2} - \frac{qL_{laje}^2}{6} = \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \beta - \frac{1}{3} \right) \quad (5.38)$$

Do somatório de momentos em 1 (equação 5.18) tem-se

$$M_1 - M_2 + R_2 L_{laje} - \frac{qL_{laje}^2}{2} = 0 \quad (5.39)$$

Isolando-se  $M_2$

$$M_2 = M_1 + R_2 L_{laje} - \frac{qL_{laje}^2}{2} \quad (5.40)$$

$$M_2 = \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \beta - \frac{1}{3} \right) + qL_{laje}^2 (1 - \beta) - \frac{qL_{laje}^2}{2} \quad (5.41)$$

$$M_2 = \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \frac{2}{3} - \beta \right) \quad (5.42)$$

Portanto, as reações de uma viga biengastada considerando-se apoios elásticos são dadas por

$$R_1 = qL_{laje}\beta \quad (5.43)$$

$$R_2 = qL_{laje}(1 - \beta) \quad (5.44)$$

$$M_1 = \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \beta - \frac{1}{3} \right) \quad (5.45)$$

$$M_2 = \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \frac{2}{3} - \beta \right) \quad (5.46)$$

onde a variável  $\beta$  é obtida pela equação 5.35. Admitindo-se que o deslocamento máximo irá ocorrer no ponto onde o momento positivo é máximo, o local onde o deslocamento máximo será o mesmo onde a força cortante é nula. Assim, a equação 5.47 determina o ponto de força cortante nula, conforme ilustra a Figura 5.8.

$$R_1 - qx = 0 \rightarrow x = L_{laje}\beta \quad (5.47)$$

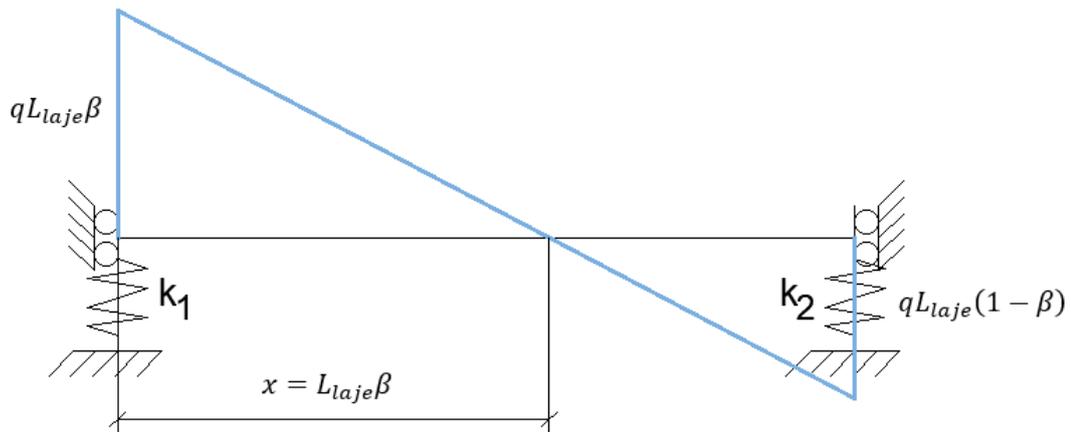


Figura 5.8 – Localização do momento máximo, a partir do diagrama de força cortante, para o caso de viga biengastada com apoio elástico.

O momento máximo positivo é dado pela área do diagrama de força cortante (Figura 5.8) subtraindo-se o momento fletor no engaste, assim

$$M_{max} = \frac{R_1 x}{2} - M_1 = \frac{qL_{laje}^2 \beta^2}{2} - \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \beta - \frac{1}{3} \right) \quad (5.48)$$

$$M_{max} = \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \beta^2 - \beta + \frac{1}{3} \right) \quad (5.49)$$

Substituindo-se o valor de  $x$  (equação 5.47) na equação da linha elástica obtém-se o deslocamento máximo na faixa de laje biengastada

$$EI_{laje} v = \frac{R_1 x^3}{6} - \frac{M_1 x^2}{2} - \frac{q x^4}{24} - EI_{laje} (\lambda_1 y_1) \quad (5.50)$$

$$EI_{laje} v = \frac{(qL_{laje}\beta)(L_{laje}\beta)^3}{6} - \frac{\left( \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \beta - \frac{1}{3} \right) \right) (L_{laje}\beta)^2}{2} - \frac{q(L_{laje}\beta)^4}{24} - EI_{laje} \left( \lambda_1 \left( \frac{R_1}{k_1} \right) \right) \quad (5.51)$$

Rearranjando a equação 5.51 tem-se o seguinte desenvolvimento das equações para se obter o deslocamento máximo.

$$EI_{laje} v = \frac{1}{6} qL_{laje}^4 \beta^4 - \frac{1}{4} qL_{laje}^4 \beta^3 + \frac{1}{12} qL_{laje}^4 \beta^2 - \frac{1}{24} qL_{laje}^4 \beta^4 - EI_{laje} \left( \lambda_1 \left( \frac{qL_{laje}\beta}{k_1} \right) \right) \quad (5.52)$$

$$EI_{laje}v = qL_{laje}^4 \left( \frac{3}{24}\beta^4 - \frac{1}{4}\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^2 \right) - EI_{laje} \left( \lambda_1 \left( \frac{qL_{laje}\beta}{k_1} \right) \right) \quad (5.53)$$

$$v = \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} \left( \frac{3}{24}\beta^4 - \frac{1}{4}\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^2 \right) - \left( \lambda_1 \left( \frac{qL_{laje}\beta}{k_1} \right) \right) \quad (5.54)$$

De forma a facilitar o equacionamento e obter uma expressão semelhante ao deslocamento máximo dos outros casos deve-se igualar o deslocamento obtido em 5.54 com a expressão 5.55

$$\Delta = \frac{\alpha}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} + \frac{qL_{laje}}{2k} \quad (5.55)$$

Igualando-se as parcelas da equação 5.54, conforme apresentado nas equações 5.56 e 5.57, pode-se obter as variáveis auxiliares  $\alpha$  e  $k$

$$\frac{\alpha}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} = \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} \left( \frac{3}{24}\beta^4 - \frac{1}{4}\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^2 \right) \quad (5.56)$$

$$\frac{qL_{laje}}{2k} = - \left( \lambda_1 \left( \frac{qL_{laje}\beta}{k_1} \right) \right) \quad (5.57)$$

que resulta nas seguintes variáveis auxiliares

$$k = - \frac{k_1}{2\lambda_1\beta} \quad (5.58)$$

$$\alpha = (48\beta^4 - 96\beta^3 + 32\beta^2) \quad (5.59)$$

Cabe ressaltar que ao se realizar o limite da rigidez dos apoios tendendo ao infinito a variável  $\beta$  tende a  $\beta = 0,5$ , que substituído nas equações de reações de apoios resulta em valores iguais às reações de viga biengastada com apoios rígidos.

### 5.3 Faixa de laje engastada e apoiada com apoios flexíveis

Para o caso de uma faixa de laje de apoios elástico com condição de contorno engastado e apoiado ocorre a alteração do diagrama das solicitações na estrutura, sendo necessário determinar os esforços por meio da linha elástica, de forma análoga ao realizado no item de viga biengastada. A Figura 5.9 apresenta o modelo estrutural da faixa de laje para a condição de contorno com engaste e apoio nas extremidades.

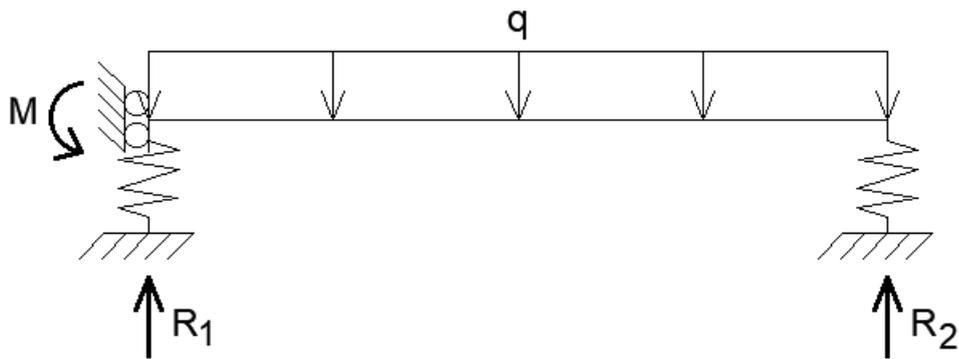


Figura 5.9 – Viga engastada e apoiada com apoios elásticos.

Utilizando-se as equações de equilíbrio obtém-se as seguintes relações para a determinação das reações de apoio

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_1 + R_2 = qL \quad (5.60)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M + R_2L - \frac{qL^2}{2} = 0 \quad (5.61)$$

A Figura 5.10 apresenta a equação do momento em função da distância a partir do engaste.

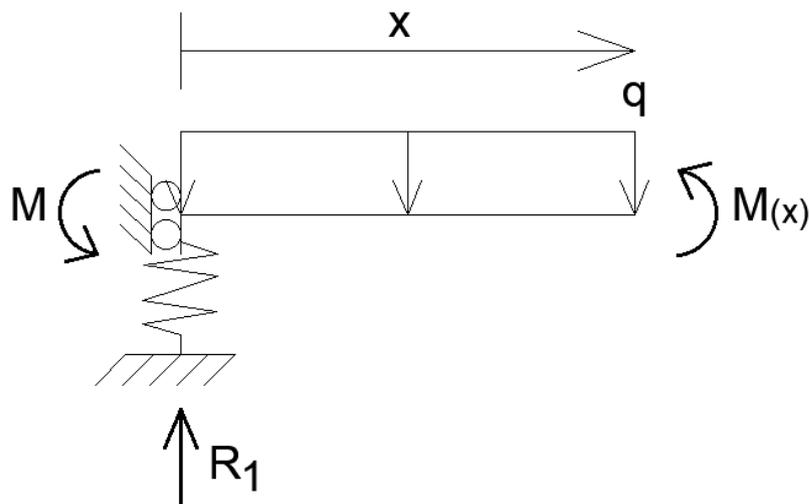


Figura 5.10 – Equacionamento do momento para viga engastada e apoiada a partir do engaste.

A equação do momento fletor é dada pela equação 5.62.

$$M(x) = -M + R_1x - \frac{qx^2}{2} \quad (5.62)$$

Usando a relação momento curvatura prossegue-se com a determinação da linha elástica

$$EI_{laje}v'' = M(x) = -M + R_1x - \frac{qx^2}{2} \quad (5.63)$$

Integrando-se a equação 5.63 resulta

$$EI_{laje}v' = \frac{R_1x^2}{2} - Mx - \frac{qx^3}{6} + C1 \quad (5.64)$$

Utilizando-se a condição de contorno  $v' = 0$  em  $x = 0$ , ou seja, a curvatura no engaste é nula, obtém-se o valor da constante  $C1 = 0$ .

Integrando-se novamente a expressão 6.64 obtém-se a equação da linha elástica da viga engastada e apoiada

$$EI_{laje}v = \frac{R_1x^3}{6} - \frac{Mx^2}{2} - \frac{qx^4}{24} + C2 \quad (5.65)$$

Adotando como condição de contorno o deslocamento nos apoios elásticos (equação 5.6 e 5.7) pode-se determinar a constante  $C2$  e as reações de apoio. Assim, para  $x = 0$  tem-se a seguinte condição de contorno

$$v = -\lambda_1 \left( \frac{R_1}{k_1} \right) \quad (5.66)$$

Substituindo o valor do deslocamento na equação da linha elástica obtém-se a constante  $C2$

$$C2 = -EI_{laje} \left( \lambda_1 \left( \frac{R_1}{k_1} \right) \right) \quad (5.67)$$

Ressalta-se que, embora a constante  $C2$  seja dada em função de parâmetros da estrutura, trata-se de um adimensional.

Para a condição de contorno em que  $x = L_{laje}$  tem-se o seguinte deslocamento no apoio elástico

$$v = -\lambda_2 \left( \frac{R_2}{k_2} \right) \quad (5.68)$$

Substituindo a expressão 5.68 na equação da linha elástica obtém-se

$$-EI_{laje}\lambda_2 \left( \frac{R_2}{k_2} \right) = \frac{R_1L_{laje}^3}{6} - \frac{ML_{laje}^2}{2} - \frac{qL_{laje}^4}{24} - EI_{laje} \left( \lambda_1 \left( \frac{R_1}{k_1} \right) \right) \quad (5.69)$$

Simplificando essa equação resulta em

$$-24R_2EI_{laje} \left( \frac{\lambda_2}{k_2} \right) = 4R_1L_{laje}^3 - 12ML_{laje}^2 - qL_{laje}^4 - 24R_1EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) \quad (5.70)$$

Utilizando as equações de equilíbrio e colocando os termos  $R_1$  e  $M$  em evidência tem-se

$$R_1 = qL_{laje} - R_2 \quad (5.71)$$

$$M = \frac{qL_{laje}^2}{2} - R_2L_{laje} \quad (5.72)$$

que substituídos na equação da linha elástica (equação 5.70) resulta

$$\begin{aligned} & -24R_2EI_{laje} \left( \frac{\lambda_2}{k_2} \right) \\ & = 4L_{laje}^3(qL_{laje} - R_2) - 12L_{laje}^2 \left( \frac{qL_{laje}^2}{2} - R_2L_{laje} \right) \\ & - qL_{laje}^4 - 24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) (qL_{laje} - R_2) \end{aligned} \quad (5.73)$$

Isolando-se os termos de  $R_2$

$$\begin{aligned} R_2 \left[ -24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_2}{k_2} \right) + 4L_{laje}^3 - 12L_{laje}^3 - 24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) \right] \\ = qL_{laje} \left[ 4L_{laje}^3 - 6L_{laje}^3 - L_{laje}^3 - 24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.74)$$

Colocando-se a reação  $R_2$  em evidência obtém-se

$$R_2 = qL_{laje} \left[ \frac{-24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) - 3L_{laje}^3}{-\left( 24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) + \left( \frac{\lambda_2}{k_2} \right) - 8L_{laje}^3 \right)} \right] \quad (5.75)$$

Utilizando-se a variável auxiliar  $\psi$  simplifica-se a equação 5.75

$$\psi = \frac{24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) + 3L_{laje}^3}{\left( 24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) + \frac{\lambda_2}{k_2} \right) + 8L_{laje}^3} \quad (5.76)$$

que resulta nas seguintes reações de apoio

$$R_2 = qL_{laje}\psi \quad (5.77)$$

$$R_1 = qL_{laje} - R_2 = qL_{laje}(1 - \psi) \quad (5.78)$$

$$M = \frac{qL_{laje}^2}{2} - R_2L_{laje} = qL_{laje}^2 \left( \frac{1}{2} - \psi \right) \quad (5.79)$$

Utilizando-se como hipótese que o deslocamento máximo ocorre no local onde o momento positivo é máximo, o cálculo do deslocamento vai ser dado no ponto de força cortante nula, conforme ilustra a Figura 5.11.

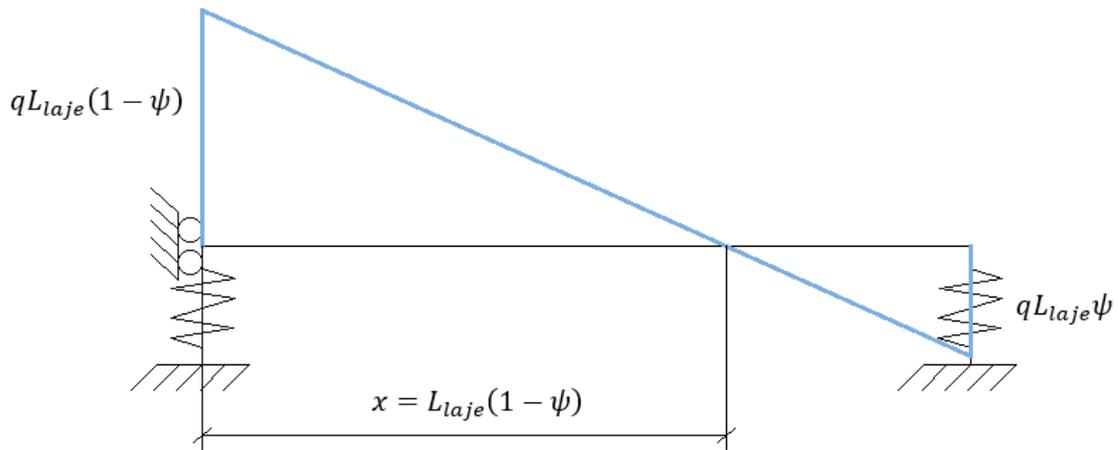


Figura 5.11 – Local de força cortante nula em viga engastada e apoiada com apoios elásticos.

Portanto, para um carregamento uniforme a localidade onde a força cortante é nula é dada pela equação 5.80.

$$R_1 - qx = 0 \rightarrow x = L_{laje}(1 - \psi) \quad (5.80)$$

O momento máximo positivo é calculado pela área do diagrama de força cortante subtraindo-se o momento no engaste, assim

$$M_{max} = \frac{R_1 x}{2} - M = \frac{qL_{laje}^2}{2} (1 - \psi)^2 - qL_{laje}^2 \left( \frac{1}{2} - \psi \right) \quad (5.81)$$

$$M_{max} = \frac{qL_{laje}^2}{2} ((1 - \psi)^2 - (1 - 2\psi)) = \frac{qL_{laje}^2}{2} \psi^2 \quad (5.82)$$

O deslocamento máximo é obtido pela linha elástica substituindo-se o valor de  $x$ , dado pela equação 5.80, que resulta

$$EI_{laje}v = \frac{R_1 x^3}{6} - \frac{Mx^2}{2} - \frac{qx^4}{24} - EI_{laje} \left( \lambda_1 \left( \frac{R_1}{k_1} \right) \right) \quad (5.83)$$

$$EI_{laje}v = \frac{(qL_{laje}(1 - \psi))(L_{laje}(1 - \psi))^3}{6} - \frac{\left( qL_{laje}^2 \left( \frac{1}{2} - \psi \right) \right) (L_{laje}(1 - \psi))^2}{2} - \frac{q(L_{laje}(1 - \psi))^4}{24} - (qL_{laje}(1 - \psi)) EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) \quad (5.84)$$

Simplificando

$$EI_{laj}v = qL_{laj}^4 \left[ \frac{(1-\psi)^4}{6} - \frac{\left(\frac{1}{2}-\psi\right)(1-\psi)^2}{2} - \frac{(1-\psi)^4}{24} \right] - qL_{laj}(1-\psi)EI_{laj} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) \quad (5.85)$$

Assim, o deslocamento máximo da estrutura, considerando que irá ocorrer no ponto de momento máximo, é dado pela equação

$$v = \frac{qL_{laj}^4}{EI_{laj}} \left[ \frac{18}{144}(1-\psi)^4 - \frac{(1-\psi)^2}{4} + \frac{\psi(1-\psi)^2}{2} \right] - \frac{qL_{laj}}{EI_{laj}}(1-\psi)EI_{laj} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) \quad (5.86)$$

Utilizando-se a variável auxiliar  $\alpha'$  (equação 5.87) pode-se simplificar a equação 5.86.

$$\alpha' = \left[ \frac{18}{144}(1-\psi)^4 - \frac{(1-\psi)^2}{4} + \frac{\psi(1-\psi)^2}{2} \right] \quad (5.87)$$

Deste modo, o deslocamento máximo fica simplificado

$$v = \frac{qL_{laj}^4}{EI_{laj}} \alpha' - qL_{laj}(1-\psi) \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) \quad (5.88)$$

De forma a facilitar o equacionamento e obter uma expressão semelhante ao deslocamento máximo dos outros casos deve-se seguir a mesma sistemática e igualar o deslocamento máximo da estrutura (equação 6.88) ao deslocamento de referência dado por

$$\Delta = \frac{\alpha}{384} \frac{qL_{laj}^4}{EI_{laj}} + \frac{qL_{laj}}{2k} \quad (5.89)$$

Igualando-se as parcelas, conforme apresentado nas equações 5.90 e 5.91, obtém-se as variáveis  $\alpha$  e  $k$

$$\frac{\alpha}{384} \frac{qL_{laj}^4}{EI_{laj}} = \frac{qL_{laj}^4}{EI_{laj}} \alpha' \quad (5.90)$$

$$\frac{qL_{laj}}{2k} = -qL_{laj}(1-\psi) \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) \quad (5.91)$$

que resulta nas seguintes variáveis auxiliares

$$k = -\frac{k_1}{2\lambda_1(1-\psi)} \quad (5.92)$$

$$\alpha = 48(1-\psi)^4 - 96(1-\psi)^2 + 192\psi(1-\psi)^2 \quad (5.93)$$

Realizando o limite da rigidez dos apoios tendendo ao infinito a variável  $\psi$  tende a  $\psi = 0,375$ , que substituído nas equações de reações de apoios resulta em valores iguais às reações de viga engastada e apoiada com apoios rígidos.

#### 5.4 Cálculo das reações de laje pela Teoria de Grelha com apoios flexíveis

As expressões para o deslocamento máximo foram derivadas considerando todas as possíveis condições de contorno com apoios elásticos. Dessa forma pode-se igualar os deslocamentos entre as faixas de laje e obter as relações necessárias para se determinar as reações e deslocamentos da laje.

Na determinação das equações pelo modelo proposto foi admitido que as rigidezes à flexão da laje nas direções X e Y são iguais. Assim, caso seja necessário atribuir rigidez à flexão diferente em cada direção, é necessário considerar essa situação no desenvolvimento das equações.

Admitindo-se que a laje seja dividida em duas faixas, sendo elas denominadas faixa  $x$  e faixa  $y$ , iguala-se os deslocamentos máximos entre as faixas, assim prossegue-se com os cálculos

$$\frac{\alpha_x q_x L_x^4}{384 EI_{laje}} + \frac{q_x L_x}{2k_x} = \frac{\alpha_y q_y L_y^4}{384 EI_{laje}} + \frac{q_y L_y}{2k_y} \quad (5.94)$$

$$\alpha_x \frac{q_x L_x^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{q_x L_x}{k_x} = \alpha_y \frac{q_y L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{q_y L_y}{k_y} \quad (5.95)$$

$$q_x \left( \alpha_x \frac{L_x^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_x}{k_x} \right) = q_y \left( \alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y} \right) \quad (5.96)$$

Sabendo-se que o carregamento distribuído é a soma das parcelas referentes às faixas  $x$  e  $y$ , tem-se

$$q = q_x + q_y \rightarrow q_y = q - q_x \quad (5.97)$$

$$q_x \left( \alpha_x \frac{L_x^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_x}{k_x} \right) = (q - q_x) \left( \alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y} \right) \quad (5.98)$$

Isolando-se a parcela de carga  $q_x$  obtém-se o quanto do carregamento total é atribuído à faixa  $x$ .

$$q_x = q \left( \frac{\left( \alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y} \right)}{\left( \alpha_x \frac{L_x^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_x}{k_x} \right) + \left( \alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y} \right)} \right) \quad (5.99)$$

onde os coeficientes  $\alpha$  e  $k$  são dados em função do tipo de vinculação na faixa de laje. Abaixo seguem os valores a serem adotados nas variáveis em função da condição de contorno

- Apoiado – Apoiado

$$\alpha = -5 \quad (5.100)$$

$$k = -2 \frac{k_1 k_2}{(k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1)} \quad (5.101)$$

- Engastado – Engastado

$$\alpha = (48\beta^4 - 96\beta^3 + 32\beta^2) \quad (5.102)$$

$$k = -\frac{k_1}{2\lambda_1\beta} \quad (5.103)$$

$$\beta = \frac{\left[ \left( 24EI_{laje} \frac{\lambda_2}{k_2} \right) + L_{laje}^3 \right]}{\left[ 24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2} \right) + 2L_{laje}^3 \right]} \quad (5.104)$$

- Engastado – Apoiado

$$\alpha = 48(1 - \psi)^4 - 96(1 - \psi)^2 + 192\psi(1 - \psi)^2 \quad (5.105)$$

$$k = -\frac{k_1}{2\lambda_1(1 - \psi)} \quad (5.106)$$

$$\psi = \frac{24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) + 3L_{laje}^3}{\left( 24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2} \right) + 8L_{laje}^3 \right)} \quad (5.107)$$

Para o cálculo das solicitações máximas na laje utilizam-se as equações abaixo, empregando-se a mesma sistemática apresentada em Souza e Cunha (1998), onde as variáveis são dadas em função da condição de contorno adotada.

$$q_x = K_x q \quad (5.108)$$

$$q_y = K_y q \quad (5.109)$$

$$V_{x1} = \beta_{x1} q_x L_x \quad (5.110)$$

$$V_{x2} = \beta_{x2} q_x L_x \quad (5.111)$$

$$V_{y1} = \beta_{y1} q_y L_y \quad (5.112)$$

$$V_{y2} = \beta_{y2} q_y L_y \quad (5.113)$$

$$m_x^+ = \frac{q_x L_x^2}{m_x'} \quad (5.114)$$

$$m_x^- = \frac{q_x L_x^2}{n_x'} \quad (5.115)$$

$$m_y^+ = \frac{q_y L_y^2}{m_y'} \quad (5.116)$$

$$m_y^- = \frac{q_y L_y^2}{n_y'} \quad (5.117)$$

onde as constantes  $K_x$  e  $K_y$  são dadas pelas equações 5.118 e 5.119

$$K_x = \left( \frac{\left( \alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y} \right)}{\left( \alpha_x \frac{L_x^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_x}{k_x} \right) + \left( \alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y} \right)} \right) \quad (5.118)$$

$$K_y = 1 - K_x \quad (5.119)$$

Para a condição de contorno apoiado-apoiado as variáveis a serem utilizadas na determinação das solicitações são apresentadas abaixo

$$\beta_1 = \beta_2 = 0,5 \quad (5.120)$$

$$n_1' = n_2' = \infty \quad (5.121)$$

$$m' = 8 \quad (5.122)$$

Onde a variável  $n'$  corresponde ao valor a ser aplicado referente ao engastamento na extremidade,  $m'$  o valor a ser utilizado no cálculo do momento fletor máximo e  $\beta$  o valor referente à reação de apoio, conforme ilustra a Figura 5.12.

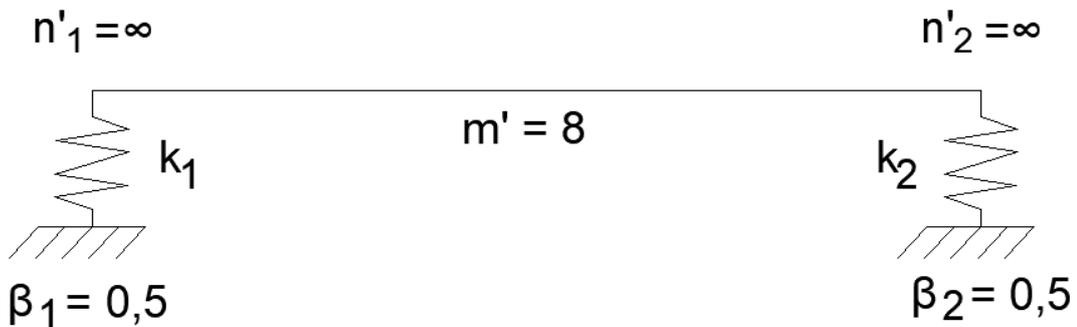


Figura 5.12 – Variáveis para determinar as solicitações na faixa de laje, condição de contorno: Apoiado – Apoiado.

Para a condição de contorno engastado-engastado as variáveis para o cálculo das reações de apoio foram obtidas igualando-se as equações 5.108 a 5.117 às solicitações correspondentes considerando os apoios flexíveis, resultando em

$$\beta_1 = \beta \quad (5.123)$$

$$\beta_2 = 1 - \beta \quad (5.124)$$

$$n_1' = \frac{2}{\left(\beta - \frac{1}{3}\right)} \quad (5.125)$$

$$n_2' = \frac{2}{\left(\frac{2}{3} - \beta\right)} \quad (5.126)$$

$$m' = \frac{2}{\left(\beta^2 - \beta + \frac{1}{3}\right)} \quad (5.127)$$

Lembrando-se que a variável  $\beta$  é dada pela equação 5.104. A Figura 5.13 mostra as variáveis adotadas.

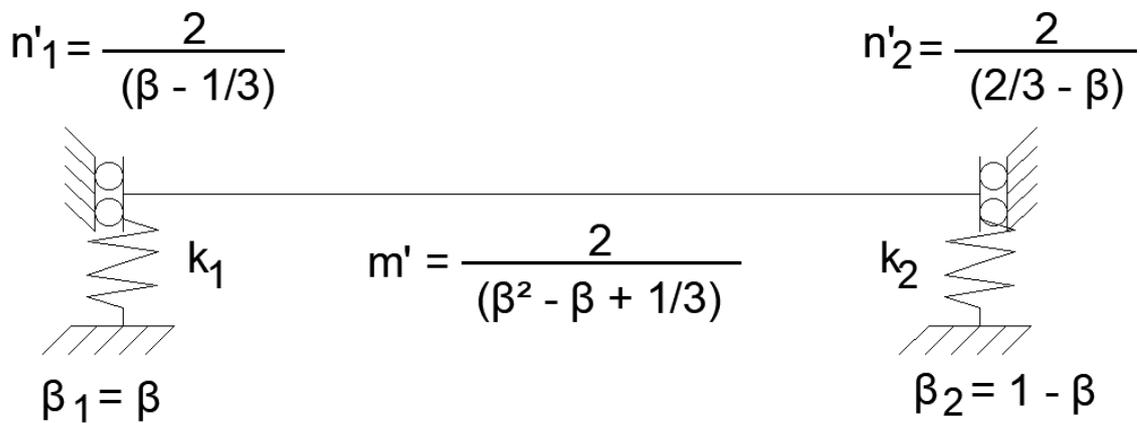


Figura 5.13 – Variáveis para determinar as solicitações na faixa de laje, condição de contorno: Engastado – Engastado.

Para a condição de contorno engastado-apoiado as reações são calculadas pelas equações abaixo, onde o subíndice indicada se a reação está localizada no engaste ou no apoio.

$$\beta_{1,engaste} = (1 - \psi) \quad (5.128)$$

$$\beta_{2,apoio} = \psi \quad (5.129)$$

$$n_{1,engaste}' = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - \psi\right)} \quad (5.130)$$

$$n_{2,apoio}' = \infty \quad (5.131)$$

$$m' = \frac{2}{\psi^2} \quad (5.132)$$

A variável  $\psi$  é dada pela equação 5.107. A Figura 5.14 mostra as variáveis adotadas.

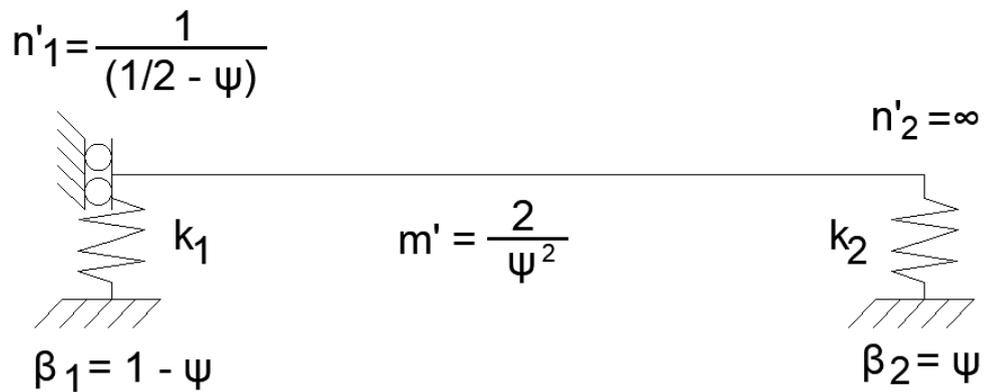


Figura 5.14 – Variáveis para determinar as solicitações na faixa de laje, condição de contorno: Engastado – Apoiado.

A Tabela 5.1 ilustra de forma resumida as variáveis a serem adotadas em função das condições de contorno, utilizando-se o modelo de contribuição à Teoria de grelha.

Tabela 5.1 – Resumo das variáveis do modelo proposto.

	TIPO DE VINCULAÇÃO DA FAIXA DE LAJE		
<b>Coefficiente <math>\alpha</math></b>	$\alpha = -5$	$\alpha = (48\beta^4 - 96\beta^3 + 32\beta^2)$	$\alpha = 48(1 - \psi)^4 - 96(1 - \psi)^2 + 192\psi(1 - \psi)^2$
<b>Variável auxiliar</b>	-	$\beta = \frac{[(24EI_{laje} \frac{\lambda_2}{k_2}) + L_{laje}^3]}{[24EI_{laje} (\frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2}) + 2L_{laje}^3]}$	$\psi = \frac{24EI_{laje} (\frac{\lambda_1}{k_1}) + 3L_{laje}^3}{(24EI_{laje} (\frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2}) + 8L_{laje}^3)}$
<b>Coefficiente k</b>	$k = -2 \frac{k_1 k_2}{(k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1)}$	$k = -\frac{k_1}{2\lambda_1 \beta}$	$k = -\frac{k_1}{2\lambda_1 (1 - \psi)}$
<b>Momento máximo positivo</b>	$M_{max} = \frac{(qK_x)L_x^2}{8}$	$M_{max} = \frac{(qK_x)L_x^2}{2} (\beta^2 - \beta + \frac{1}{3})$	$M_{max} = \frac{(qK_x)L_x^2}{2} \psi^2$
<b>Momento negativo</b>	0	Engaste 1: $M_{max}^- = \frac{(qK_x)L_x^2}{2} (\beta - \frac{1}{3})$	Engaste: $M_{max}^- = (qK_x)L_x^2 (\frac{1}{2} - \psi)$
		Engaste 2: $M_{max}^- = \frac{(qK_x)L_x^2}{2} (\frac{2}{3} - \beta)$	Apoio: 0

### 5.5 Relação entre os modelos de Teoria de Grelha com apoios rígidos e flexíveis

Pode-se analisar a relação entre as solicitações na faixa de laje pela Teoria de Grelha considerando apoios rígidos e o modelo proposto neste estudo de forma adimensional. A relação entre os deslocamentos é dada pela equação 5.133

$$\frac{\Delta_{flex}}{\Delta_{rig}} = \frac{\alpha_{flex}}{\alpha_{rig}} + \frac{192EI_{laje}}{\alpha_{rig}k(k_1, k_2)L^3} \quad (5.133)$$

Adotando-se as variáveis auxiliares 5.134 e 5.135 é possível analisar o problema de forma adimensional.

$$x = k_1 \frac{L^3}{EI_{laje}} \quad (5.134)$$

$$y = k_2 \frac{L^3}{EI_{laje}} \quad (5.135)$$

Utilizando-se as condições de contorno apresentadas nos itens 5.1, 5.2 e 5.3 e admitindo-se que o coeficiente ajuste dos deslocamentos seja unitário, ou seja,  $\lambda = 1$ , obtém-se a equação da razão entre os deslocamentos no modelo proposto e da Teoria de Grelha para as condições de contorno indicadas

- Simplesmente apoiada

$$\frac{\Delta_{flex}}{\Delta_{rig}} = 1 + \frac{96EI_{laje}}{5k_1L^3} + \frac{96EI_{laje}}{5k_2L^3} \quad (5.136)$$

$$\frac{\Delta_{flex}}{\Delta_{rig}} = 1 + \frac{96}{5x} + \frac{96}{5y} \quad (5.137)$$

- Biengastada

$$\beta(x, y) = \frac{\left[ \left( 24 \frac{1}{y} \right) + 1 \right]}{\left[ 24 \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) + 2 \right]} \quad (5.138)$$

$$\frac{\Delta_{flex}}{\Delta_{rig}} = (48\beta^4 - 96\beta^3 + 32\beta^2) + \frac{192}{x}\beta \quad (5.139)$$

- Engastada e apoiada

$$\psi(x, y) = \frac{\left[ \left( 24 \frac{1}{y} \right) + 3 \right]}{\left[ 24 \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) + 8 \right]} \quad (5.140)$$

$$\frac{\Delta_{flex}}{\Delta_{rig}} = \frac{48(1 - \psi)^4 - 96(1 - \psi)^2 + 192\psi(1 - \psi)^2}{2} + \frac{192}{2x}(1 - \psi) \quad (5.141)$$

As Figuras a seguir ilustram o comportamento da relação entre os deslocamentos.

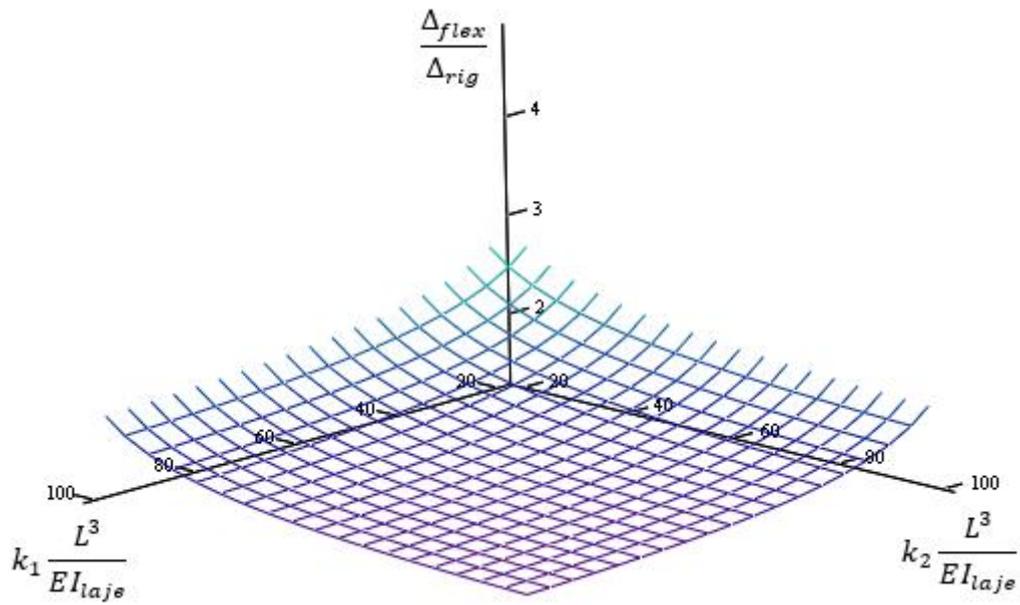


Figura 5.15 – Razão entre os deslocamentos do modelo proposto e da Teoria de grelha para a condição de contorno simplesmente apoiado.

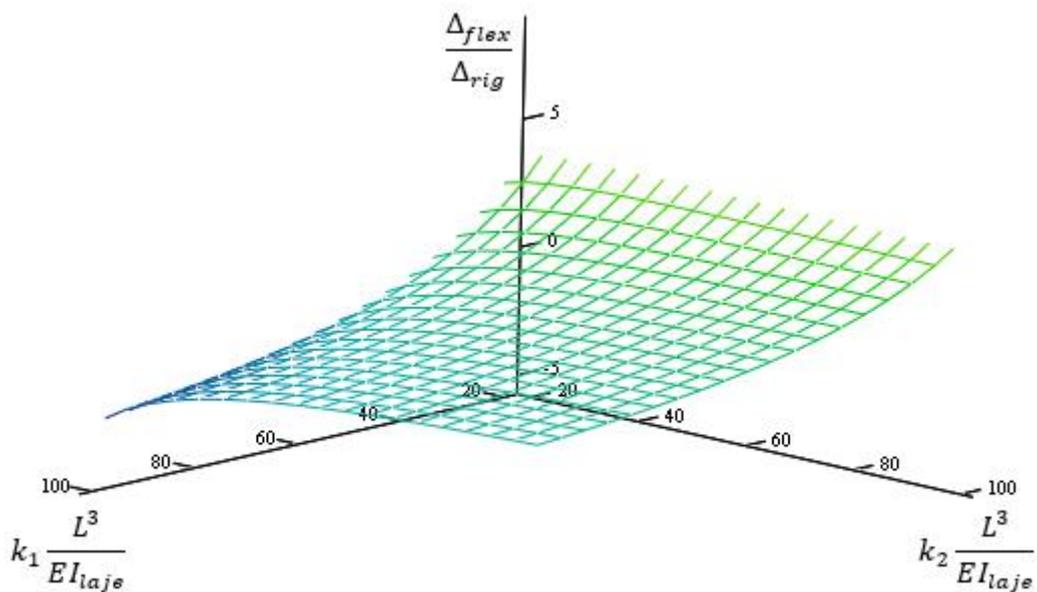


Figura 5.16 – Razão entre os deslocamentos do modelo proposto e da Teoria de grelha para a condição de contorno biengastado.

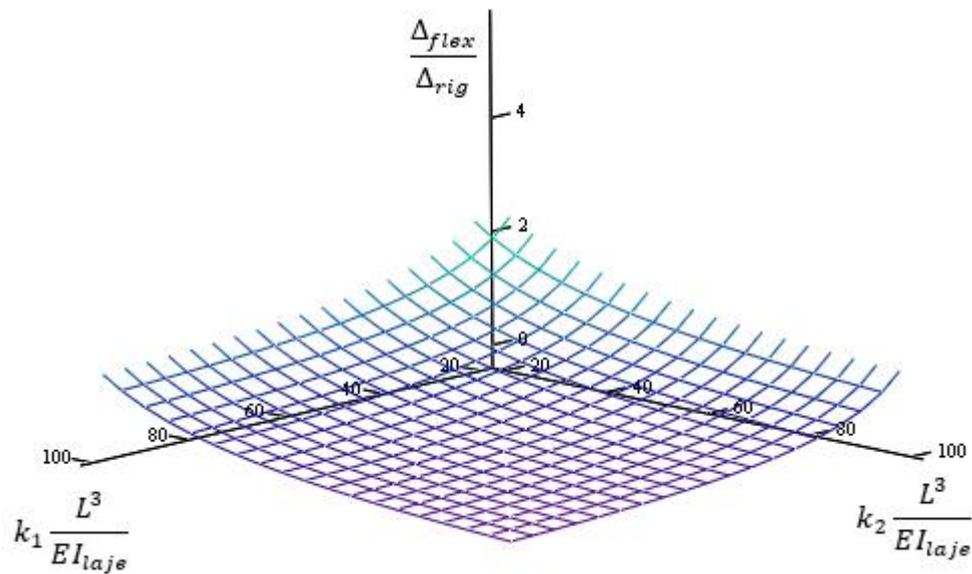


Figura 5.17– Razão entre os deslocamentos do modelo proposto e da Teoria de grelha para a condição de contorno engastado e apoiado.

Seguindo a mesma sistemática da razão entre os deslocamentos, obtém-se a razão entre os momentos positivos pelo modelo proposto e pela Teoria de Grelha.

- Simplesmente apoiada

$$\frac{M_{flex}^+}{M_{rig}^+} = 1 \quad (5.142)$$

- Biengastada

$$\frac{M_{flex}^+}{M_{rig}^+} = 12 \left( \beta^2 - \beta + \frac{1}{3} \right) \quad (5.143)$$

- Engastada e apoiada

$$\frac{M_{flex}^+}{M_{rig}^+} = 7,11\psi^2 \quad (5.144)$$

As Figuras 5.18 e 5.19 ilustram a razão entre os momentos positivos considerando a flexibilidade dos apoios para faixa de laje.

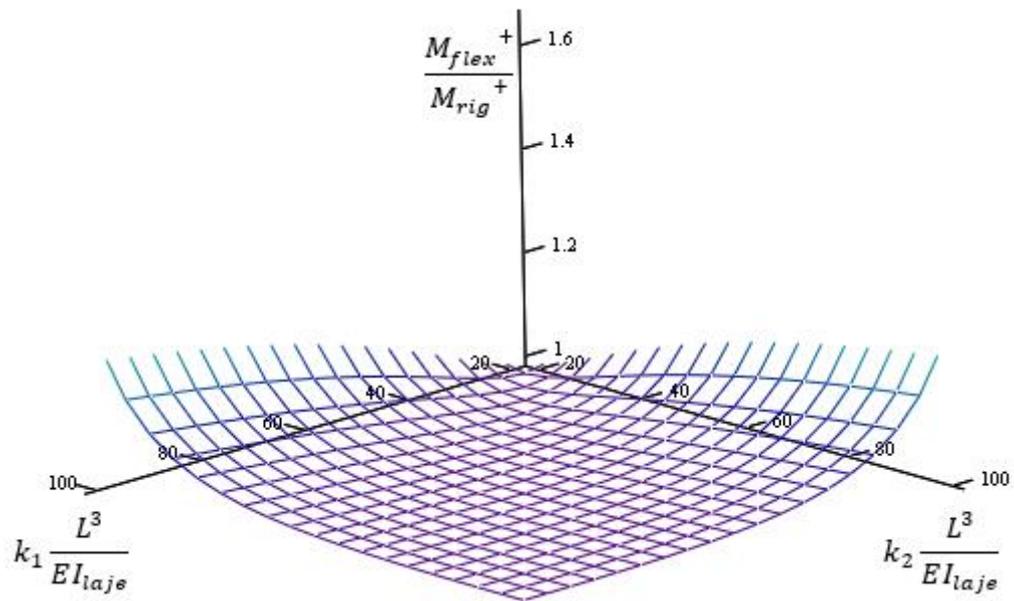


Figura 5.18 – Razão entre os momentos positivos do modelo proposto e da Teoria de Grelha para a condição de contorno biengastado.

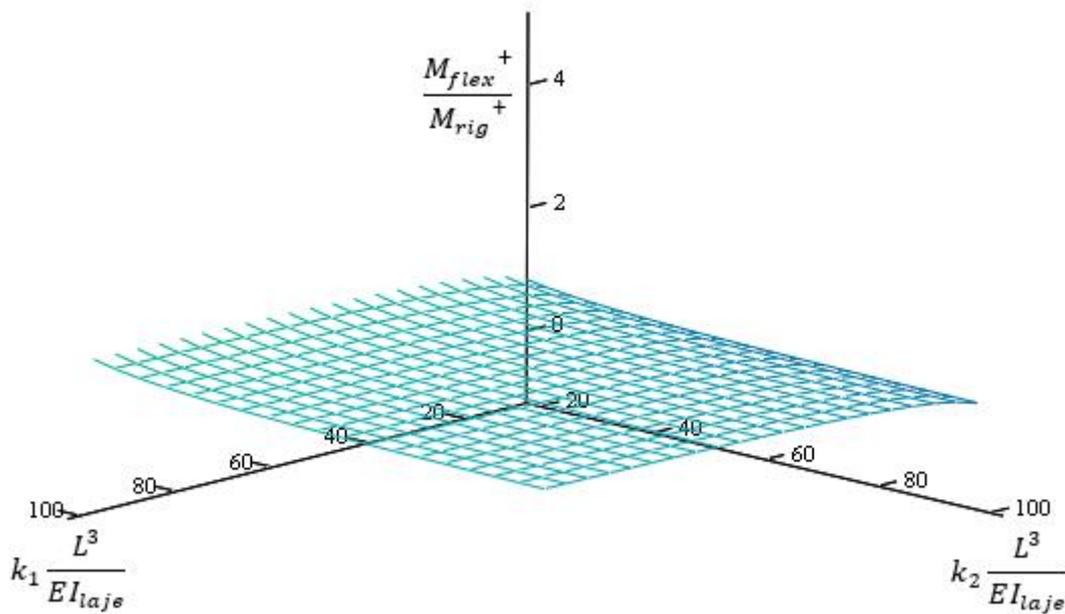


Figura 5.19 – Razão entre os momentos positivos do modelo proposto e da Teoria de Grelha para a condição de contorno engastado e apoiado.

De forma análoga ao item anterior, obtém-se a razão entre os momentos negativos pelo modelo proposto e pela Teoria de Grelha.

- Biengastada

$$\frac{M_{flex}^-}{M_{rig}^-} = 6 \left( \beta - \frac{1}{3} \right) \quad (5.145)$$

- Engastada e apoiada

$$\frac{M_{flex}^-}{M_{rig}^-} = 8 \left( \frac{1}{2} - \psi \right) \quad (5.146)$$

As Figuras 5.20 e 5.21 apresentam as razões entre os momentos negativos no engaste para as condições de contorno de laje biengastada e engastada e simplesmente apoiada.

Foi apresentada a razão de apenas um dos momentos negativos do apoio para a condição de viga biengastada (Figura 5.20), pois o resultado a ser obtido considerando-se o apoio oposto é simétrico ao apresentado.

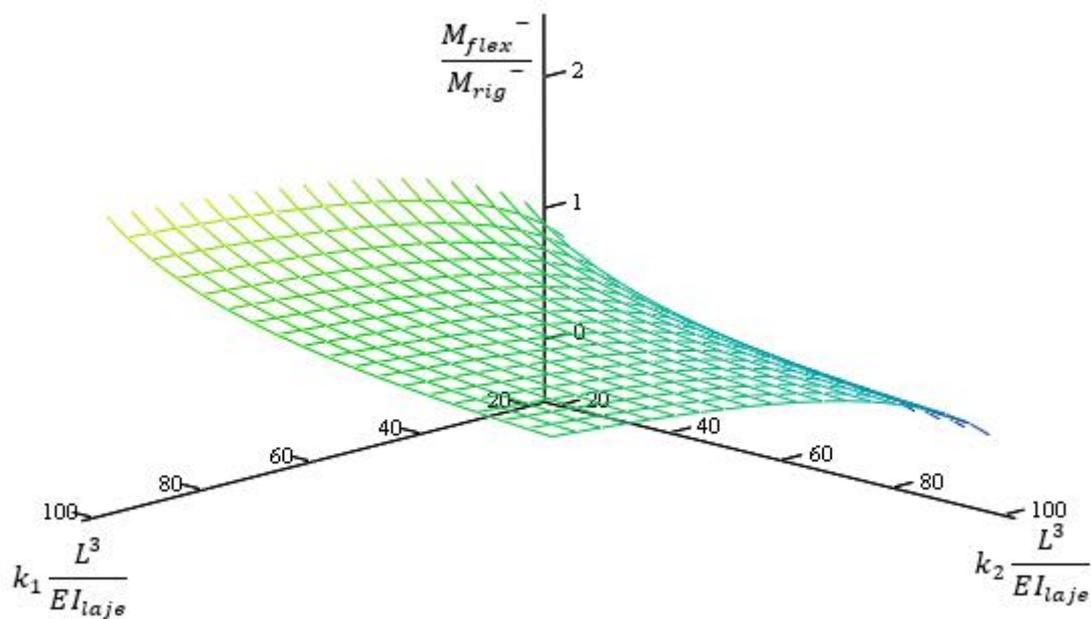


Figura 5.20 – Razão entre os momentos negativos do modelo proposto e da Teoria de Grelha para a condição de contorno biengastado.

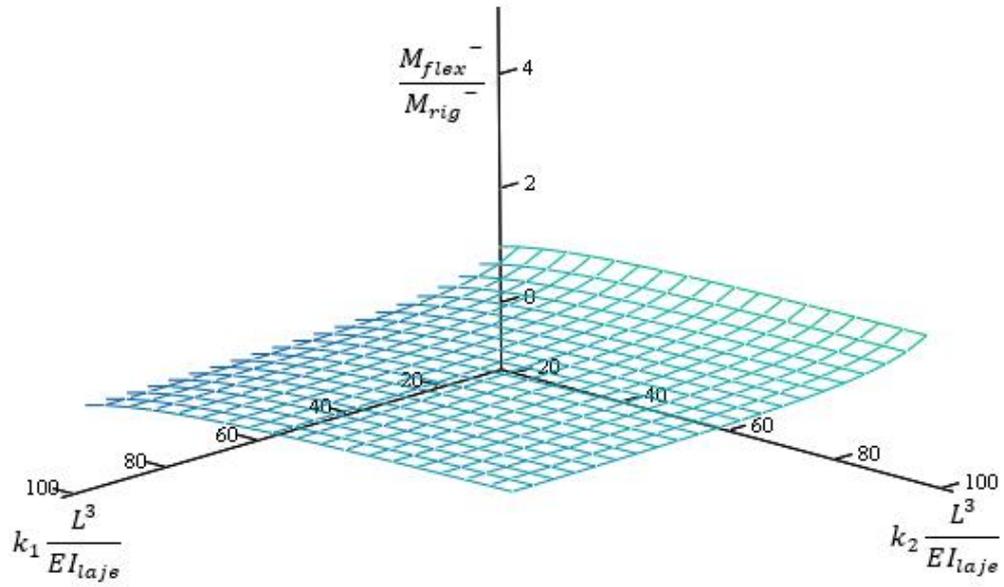


Figura 5.21 – Razão entre os momentos negativos do modelo proposto e da Teoria de Grelha para a condição de contorno engastado e apoiado.

## 6 COMPORTAMENTO DA FLEXIBILIDADE DO MODELO PROPOSTO

De forma a compreender o comportamento em função da flexibilidade dos apoios pelo modelo proposto são analisados os efeitos da variação da flexibilidade nas faixas de laje e da laje utilizando valores usuais de dimensionamento.

### 6.1 Comportamento da flexibilidade dos apoios nas faixas de laje

Com o intuito de compreender como a flexibilidade dos apoios influencia na determinação das reações e no cálculo dos deslocamentos na laje é realizado um estudo da variação da flexibilidade na resposta da estrutura.

Para as análises realizadas foram adotadas as seguintes variáveis

- Rigidez à flexão da faixa de laje:  $EI_{laje} = 2200 \text{ kN.m}^2$
- Comprimento da faixa de laje:  $L_{laje} = 3 \text{ m}$
- Carregamento distribuído:  $q = 10 \text{ kN/m}$
- Coeficiente de mola mínimo dos apoios:  $k = 1000 \text{ kN/m}$
- Coeficiente de mola máximo dos apoios:  $k = 5000 \text{ kN/m}$
- Coeficientes de ajustes unitários:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

O coeficiente de mola mínimo foi utilizado por não ser possível adotar um coeficiente de mola nulo, pois um coeficiente nulo indicaria um deslocamento infinito, que é uma incoerência do ponto de vista estrutural.

O valor do coeficiente de mola máximo foi adotado admitindo-se, na faixa de laje, um deslocamento nos apoios máximo de  $L_{laje}/1000$ , ou seja, apoios praticamente rígidos. O coeficiente de mola mínimo foi admitido como sendo 20% do valor adotado no coeficiente de mola máximo.

Ressalta-se que esse estudo é apenas para o comportamento da faixa de laje, não considerando a distribuição de cargas da laje pelo coeficiente  $K_x$ . Assim, para o cálculo dos deslocamentos e reações utiliza-se de forma direta o carregamento distribuído  $q$ .

### 6.1.1 Condição de contorno: Apoiado – Apoiado

Por se tratar de um sistema estrutural isostático, independente do grau de flexibilidade adotado nos apoios, as reações e o momento máximo na faixa de laje são iguais ao obtido para a condição de contorno de apoio rígido.

Posto isso, como não há alteração nos valores das reações, essas variáveis não serão analisadas, sendo objeto de análise apenas os deslocamentos. A Figura 6.1 apresenta o modelo estrutural estudado.

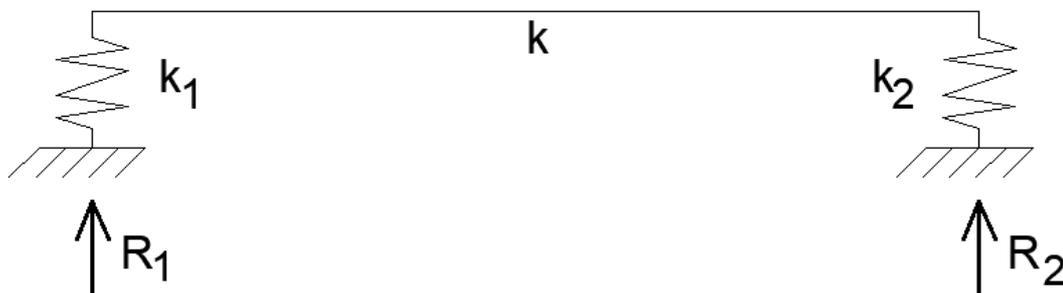


Figura 6.1 – Modelo estrutural de faixa de laje simplesmente apoiada.

A flexibilidade dos apoios altera o deslocamento da faixa de laje, pois a segunda parcela da equação possui em seu denominador o coeficiente  $k$ , dado em função das rigidezes dos apoios  $k_1$  e  $k_2$ , conforme expresso nas equações 6.1 e 6.2

$$k = 2 \frac{k_1 k_2}{(k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1)} \quad (6.1)$$

$$\Delta = -\frac{5}{384} \frac{q L_{laje}^4}{EI_{laje}} - \frac{q L_{laje}}{2k} \quad (6.2)$$

Utilizando-se o *software* Mathcad pode-se analisar o comportamento da faixa de laje variando-se os parâmetros de rigidez dos apoios. A Figura 6.2 ilustra o comportamento do deslocamento da faixa de laje.

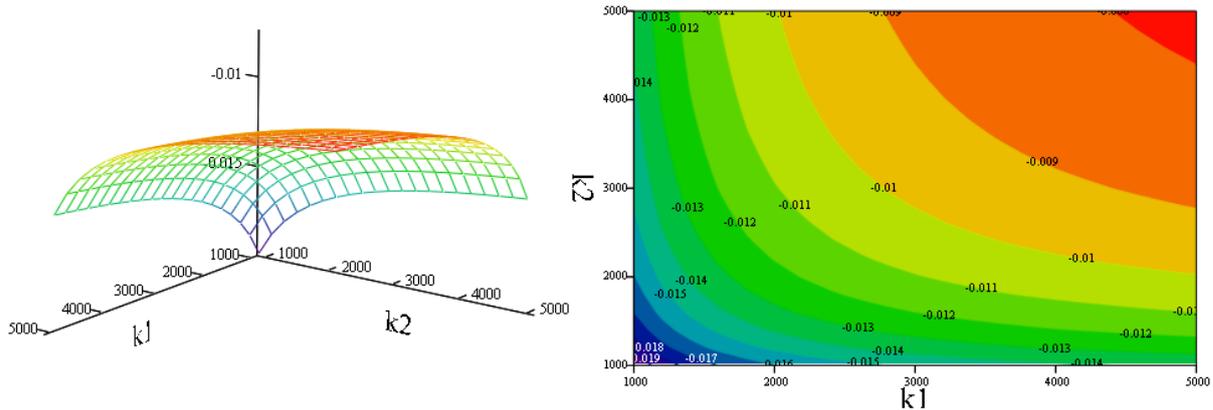


Figura 6.2 – Comportamento do deslocamento máximo em uma faixa de laje simplesmente apoiada em função da rigidez dos apoios, medidas em kN e m.

Embora o carregamento e o comprimento tenham influência significativa no deslocamento da estrutura, a configuração do deslocamento em função dos coeficientes  $k_1$  e  $k_2$  permanece o mesmo, apenas apresentando maior ou menor valor dos coeficientes no deslocamento da estrutura.

Os resultados extremos obtidos para os deslocamentos máximos da faixa de laje encontram-se resumidos abaixo

- $\Delta(5000,5000) = -0,78 \text{ cm}$ ;
- $\Delta(1000,1000) = -2 \text{ cm}$ ;
- $\Delta(1000,5000) = -1,38 \text{ cm}$ ;
- $\Delta(5000,1000) = -1,38 \text{ cm}$ .

Como esperado, quanto mais flexível forem os apoios maior é o deslocamento máximo da estrutura. Pôde-se verificar que em uma condição extrema de flexibilidade dos apoios a faixa de laje apresentou deslocamento de  $\Delta = -2 \text{ cm}$  e na condição oposta, de maior rigidez nos apoios, forneceu um valor de  $\Delta = -0,78 \text{ cm}$ . Verifica-se que a variação do deslocamento máximo entre esses extremos chega a ser superior a 100%.

Para a condição de apoios rígidos ( $k_1 = k_2 \cong \infty$ ) o deslocamento máximo na faixa de laje foi de  $\Delta = -0,48 \text{ cm}$ . Assim, mesmo adotando-se uma rigidez elevada nos apoios ( $\Delta = -0,78 \text{ cm}$ ), o deslocamento ainda é bastante superior ao resultado obtido com apoios rígidos.

### 6.1.2 Condição de contorno: Engastado – Apoiado

A Figura 6.3 ilustra o modelo estrutural analisado, assim como a localização dos parâmetros de rigidez.

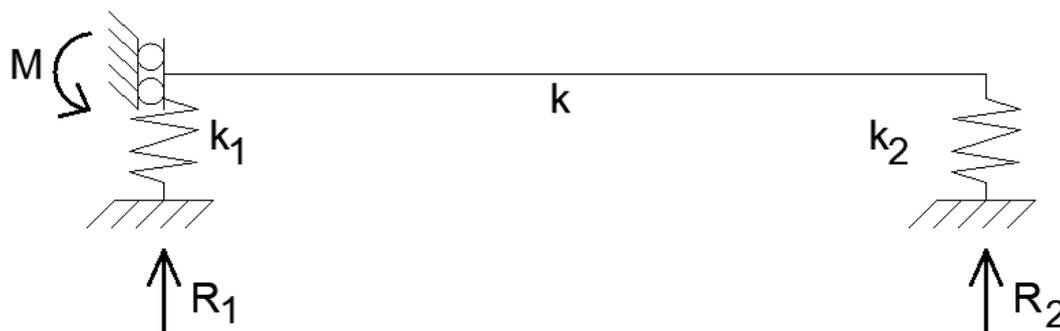


Figura 6.3 – Modelo estrutural de faixa de laje engastada e apoiada.

Para a condição de contorno de viga engastada e apoiada a flexibilidade dos apoios altera de forma considerável as reações e deslocamentos em função do coeficiente  $\psi$ . A Figura 6.4 apresenta o comportamento do coeficiente  $\psi$  em função da rigidez dos apoios.

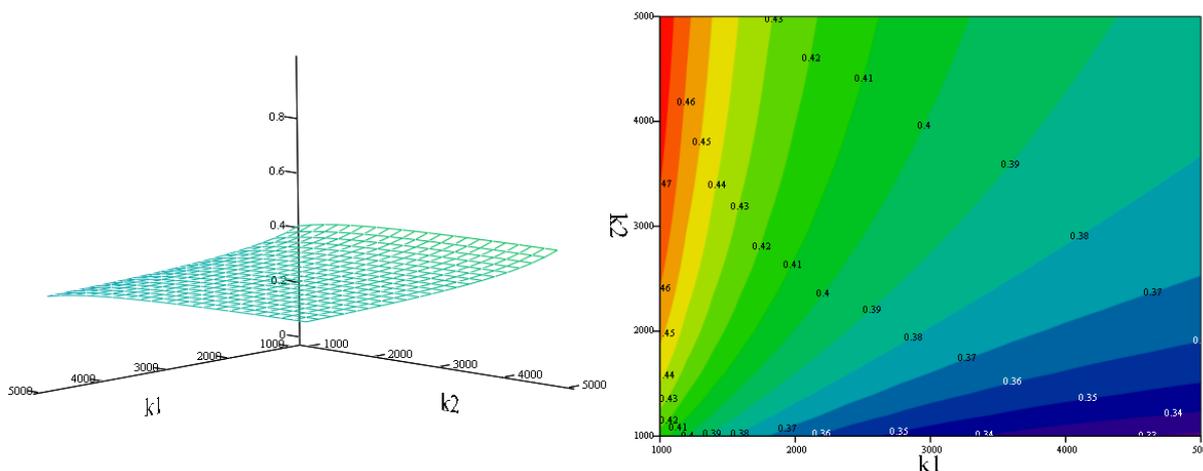


Figura 6.4 – Comportamento do coeficiente  $\psi$  em função dos parâmetros de rigidez  $k_1$  e  $k_2$ , medidas em kN e m.

De forma análoga ao item 6.1 são apresentados os resultados de  $\psi$  nos principais pontos da superfície de resposta

- $\psi(5000,5000) = 0,386$ ;
- $\psi(1000,1000) = 0,416$ ;
- $\psi(1000,5000) = 0,479$ ;
- $\psi(5000,1000) = 0,328$ .

Verifica-se que esse coeficiente possui pouca variação devido à flexibilidade dos apoios. Para a condição de maior flexibilidade, em ambos os apoios, o valor obtido foi de  $\psi = 0,416$  e na condição oposta de máxima rigidez, em ambos os apoios, foi obtido  $\psi = 0,386$ .

Pôde-se constatar que na condição de valores máximos houve uma variação do coeficiente  $\psi$  de aproximadamente 8%. Entretanto, maior variação pode ser observada quando há alternância entre as rigidezes dos apoios levando a uma diferença de aproximadamente 46% entre os valores extremos.

Para a condição de apoios infinitamente rígidos esse coeficiente é de  $\psi = 0,375$ . Portanto, verifica-se que existe uma pequena diferença (3%) quando se tem rigidez elevada em ambos os apoios.

As reações variam de forma linear com o coeficiente adotado. Apenas o cálculo do momento máximo possui uma relação não linear com o coeficiente  $\psi$ , conforme expresso nas equações abaixo

$$R_1(k_1, k_2) = qL_{laje}(1 - \psi(k_1, k_2)) \quad (6.3)$$

$$R_2(k_1, k_2) = qL_{laje}\psi(k_1, k_2) \quad (6.4)$$

$$M(k_1, k_2) = qL_{laje}^2 \left( \frac{1}{2} - \psi(k_1, k_2) \right) \quad (6.5)$$

$$M_{max}(k_1, k_2) = \frac{qL_{laje}^2}{2} \psi(k_1, k_2)^2 \quad (6.6)$$

Lembrando-se que o valor de  $\psi$  é dado pela equação 6.7

$$\psi(k_1, k_2) = \frac{24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} \right) + 3L_{laje}^3}{\left( 24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2} \right) + 8L_{laje}^3 \right)} \quad (6.7)$$

As figuras 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8 ilustram o comportamento de cada uma das reações de apoio e momento máximo do elemento estrutural.

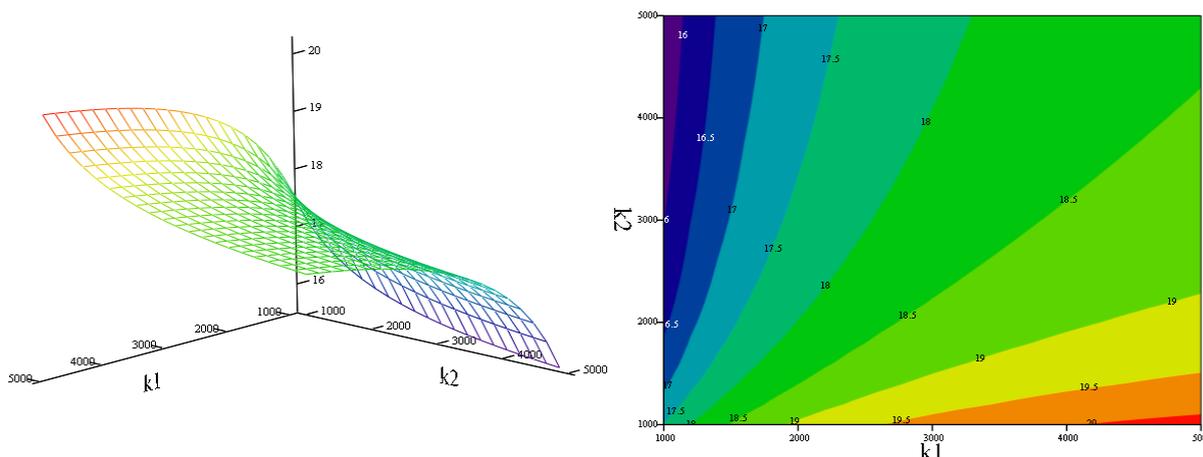


Figura 6.5 – Comportamento da reação  $R_1$ . Condição de contorno: engastada e apoiada, medidas em kN e m.

Os valores extremos da superfície de resposta da reação  $R_1$  encontram-se resumidos abaixo

- $R_1(5000,5000) = 18,4 \text{ kN}$ ;
- $R_1(1000,1000) = 17,5 \text{ kN}$ ;
- $R_1(1000,5000) = 20,2 \text{ kN}$ ;
- $R_1(5000,1000) = 15,6 \text{ kN}$ .

Para a reação  $R_1$  houve uma variação de  $R_1 = 17,5 \text{ kN}$  para a condição de extrema flexibilidade nos apoios e de  $R_1 = 18,4 \text{ kN}$  para a condição de rigidez máxima em ambos os apoios, que corresponde a uma variação de aproximadamente 5%.

Entretanto, conforme pode ser observado no gráfico da Figura 7.5, a condição que gera o maior e menor valor para a reação  $R_1$  é de máxima flexibilidade em um dos apoios e máxima rigidez no outro. A variação entre esses extremos corresponde a aproximadamente 29%.

Para a condição de apoios infinitamente rígidos o valor de  $R_1$  é de 18,75kN. Para as condições de máxima rigidez ou flexibilidade em ambos os apoios houve pouca diferença percentual em relação à reação com apoio rígido (máximo de 7%). Contudo, a maior diferença percentual (20% de variação) na reação  $R_1$  foi dada com a maior rigidez no engaste e maior flexibilidade no apoio.

As deduções obtidas para a reação  $R_1$  são semelhantes às da reação  $R_2$ , conforme pode ser verificado pela simetria entre as figuras 6.5 e 6.6, invertendo-se apenas os valores obtidos no uso de apoio rígido e flexível.

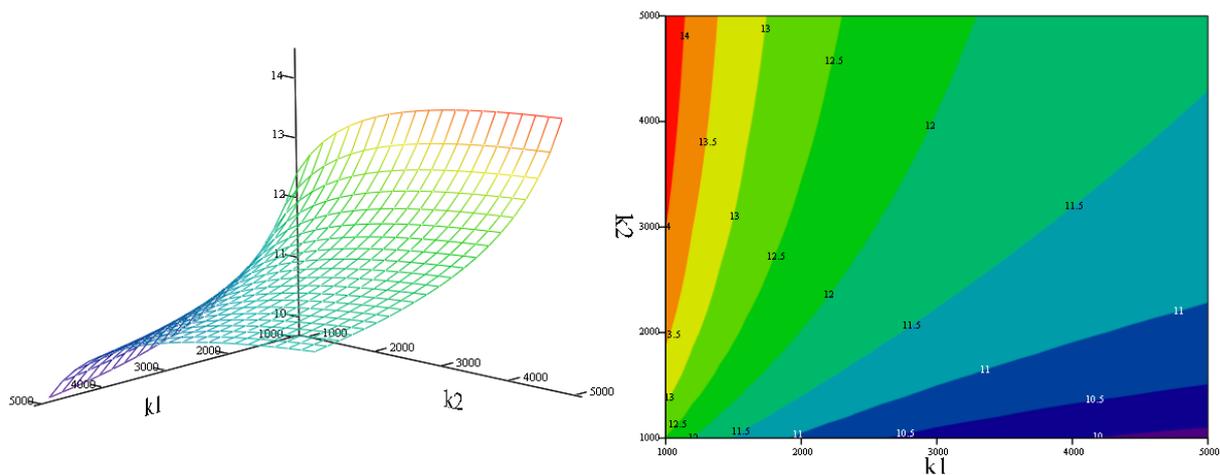


Figura 6.6 – Comportamento da reação  $R_2$ . Condição de contorno: engastada e apoiada, medidas em kN e m.

A superfície de resposta do momento no engaste em função dos parâmetros de rigidez dos apoios é apresentado na Figura 6.7.

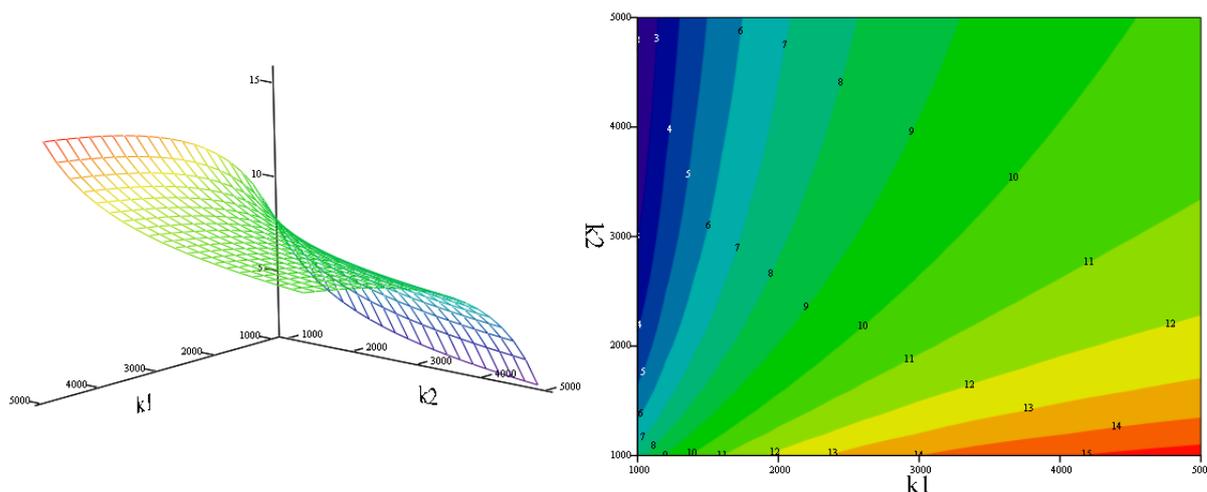


Figura 6.7 – Comportamento do momento no engaste. Condição de contorno: engastada e apoiada, medidas em kN e m.

Seguindo a mesma sistemática adotada para a análise da variação das reações de apoio obtém-se os valores de momento no engaste nos pontos especificados.

- $M(5000,5000) = 10,2 \text{ kN.m}$ ;
- $M(1000,1000) = 7,6 \text{ kN.m}$ ;
- $M(1000,5000) = 1,9 \text{ kN.m}$ ;
- $M(5000,1000) = 15,5 \text{ kN.m}$ .

Para o caso de extrema flexibilidade em ambos os apoios resulta  $M = 7,6 \text{ kN.m}$  e na condição oposta de máxima rigidez nos apoios  $M = 10,2 \text{ kN.m}$ , ou seja, uma variação de até 34% no momento fletor positivo.

Entretanto, utilizando-se as condições de alternância de flexibilidade dos apoios (apoio rígido com apoio flexível) pôde-se observar um aumento excessivo na variação do momento fletor no engaste, chegando a um valor de aproximadamente 8 vezes entre as condições extremas. Esses dados corroboram com a ideia de que a flexibilidade dos apoios não deve ser negligenciada na fase de dimensionamento e análise estrutural.

O momento no engaste, considerando os apoios infinitamente rígidos, é de  $M = 11,25 \text{ kN.m}$ . Assim, verifica-se como a rigidez dos apoios alterou consideravelmente os valores a serem obtidos para o momento no engaste neste modelo estrutural.

Cabe ressaltar que o coeficiente de mola no engaste ( $k_1$ ) influenciou de forma significativa os valores da reação de momento, mesmo a flexibilidade tendo sido considerada apenas por molas verticais (movimento vertical). Modelo mais refinado poderia considerar ainda a flexibilidade de rotação no apoio (formação de rótula), que pode vir a alterar ainda mais os resultados obtidos na análise.

O comportamento da superfície de resposta do momento máximo atuante na faixa de laje é ilustrado na Figura 6.8.

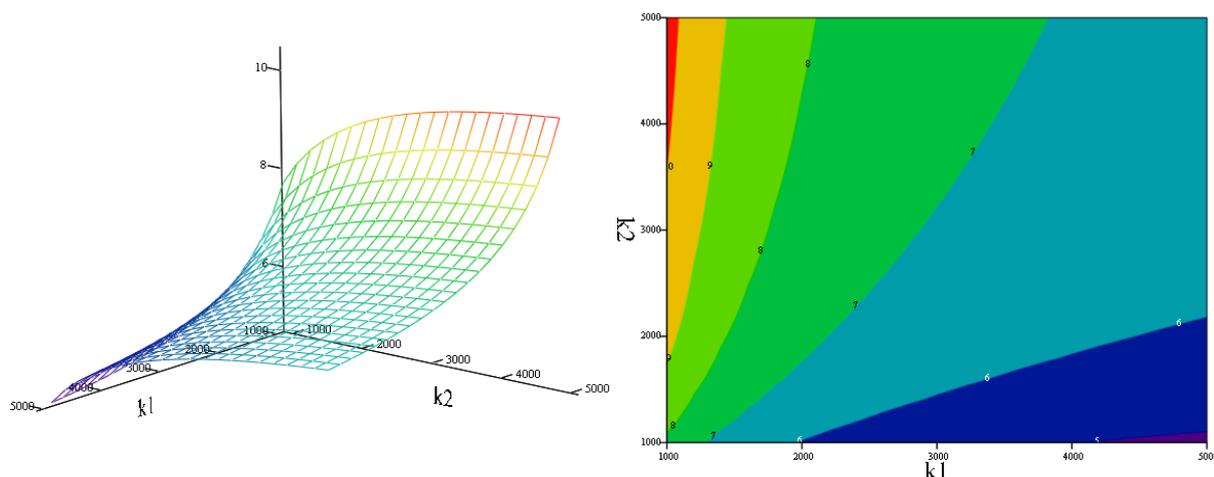


Figura 6.8 – Comportamento do momento máximo na viga. Condição de contorno: engastada e apoiada, medidas em kN e m.

Conforme observado na Figura 6.8, a variação do momento positivo máximo, em função da flexibilidade dos apoios, possui basicamente a mesma configuração das reações de apoio. Os valores de momento positivo máximo obtidos nos pontos principais do gráfico são apresentados

- $M_{max}(5000,5000) = 6,7 \text{ kN.m}$ ;
- $M_{max}(1000,1000) = 7,8 \text{ kN.m}$ ;

- $M_{max}(1000,5000) = 10,3 \text{ kN.m}$ ;
- $M_{max}(5000,1000) = 4,8 \text{ kN.m}$ .

Verifica-se que para a condição de máxima flexibilidade e rigidez em ambos os apoios houve uma variação de aproximadamente 16% no valor do momento máximo. O momento máximo para a condição de apoios infinitamente rígidos é de  $M_{max} = 6,3 \text{ kN.m}$ , valor próximo ao obtido considerando-se a condição de apoios rígidos do modelo ( $M_{max} = 6,7 \text{ kN.m}$ ).

Entretanto, conforme observado nas demais reações, os valores extremos a serem obtidos devem considerar um dos apoios extremamente flexível e outro de elevada rigidez. Pôde-se constatar que para a condição extrema ocorre uma variação superior em até 100% no valor do momento fletor máximo na estrutura.

Para o cálculo e análise do deslocamento máximo na faixa de laje foi utilizada a equação 6.8

$$\Delta = \frac{\alpha}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} + \frac{qL_{laje}}{2k} \quad (6.8)$$

Onde as variáveis  $\alpha$  e  $k$  são dadas pelas equações 6.9 e 6.10.

$$k = -\frac{k_1}{2\lambda_1(1-\psi)} \quad (6.9)$$

$$\alpha = 48(1-\psi)^4 - 96(1-\psi)^2 + 192\psi(1-\psi)^2 \quad (6.10)$$

A Figura 6.9 ilustra a variação do deslocamento máximo em função da flexibilidade dos apoios.

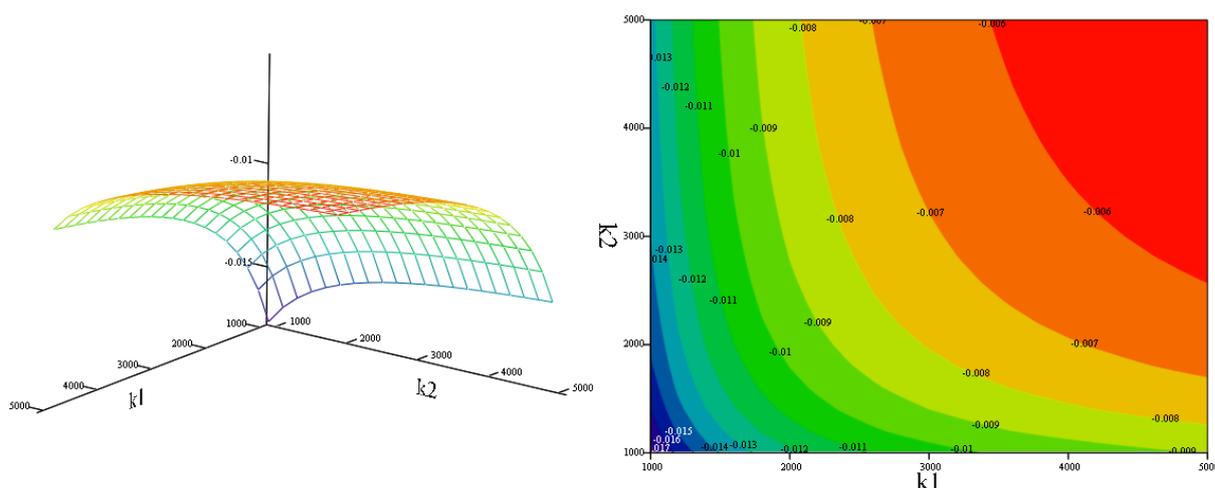


Figura 6.9 – Deslocamento máximo em função da flexibilidade dos apoios, medidas em kN e m. Condição de contorno: Engastado-Apoiado.

Seguindo a mesma sistemática dos itens anteriores, são obtidos os deslocamentos nos principais pontos da superfície de resposta do deslocamento máximo.

- $\Delta(5000,5000) = -0,5 \text{ cm};$
- $\Delta(1000,1000) = -1,7 \text{ cm};$
- $\Delta(1000,5000) = -1,3 \text{ cm};$
- $\Delta(5000,1000) = -0,9 \text{ cm}.$

O deslocamento máximo considerando apoios infinitamente rígidos ( $k_1 = k_2 = \infty$ ) foi de  $\Delta = -0,2 \text{ cm}$ . Verifica-se que o deslocamento máximo, ao se considerar a flexibilidade dos apoios, independente do grau de flexibilidade, gerou acréscimos superiores a 100% da condição de apoio rígido. Mesmo com rigidez elevada em ambos os apoios o valor obtido, em relação à condição de apoio infinitamente rígido, foi de aproximadamente 2,5 vezes.

Ressalta-se que os deslocamentos mais elevados do modelo estrutural foram observados quando o coeficiente de mola no engaste apresentou baixa rigidez.

### 6.1.3 Condição de contorno: Engastado – Engastado

A Figura 6.10 ilustra as reações e a rigidez do modelo estrutural analisado para a condição de engaste nas extremidades da faixa de laje.

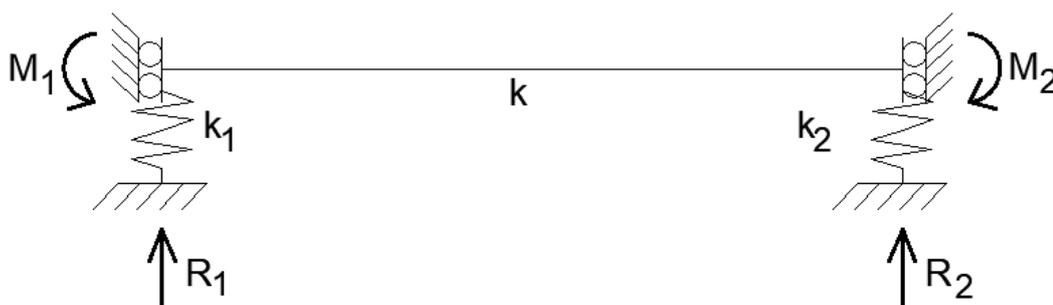


Figura 6.10 – Modelo estrutural de faixa de laje biengastada.

As reações de apoio, para essa condição de contorno, são alteradas em função dos coeficientes de mola  $k_1$  e  $k_2$  nos apoios, de forma semelhante ao apresentado na condição de contorno engastado-apoiado.

O coeficiente  $\beta(k_1, k_2)$  é utilizado para se determinar as reações de apoio, momento máximo e deslocamentos. A Figura 6.11 ilustra o comportamento do coeficiente  $\beta$

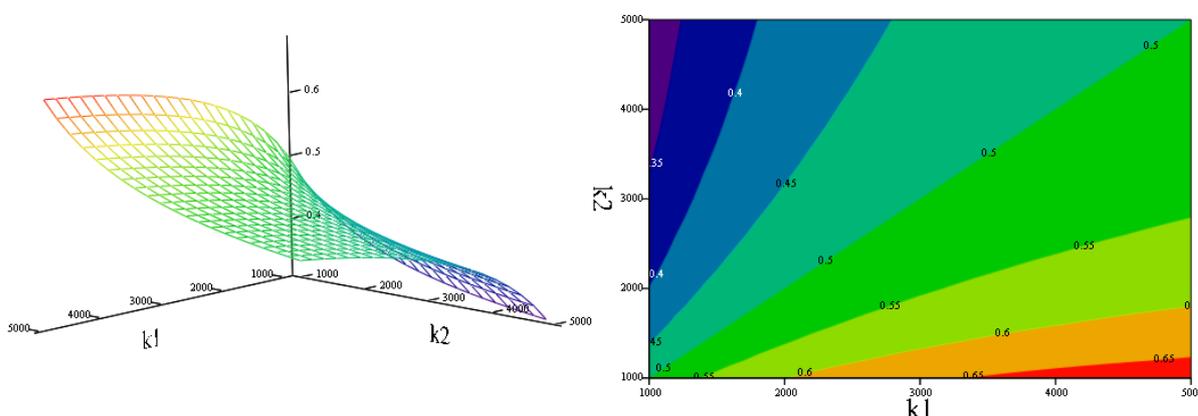


Figura 6.11 – Comportamento do coeficiente  $\beta$  em função dos parâmetros de rigidez  $k_1$  e  $k_2$ , medidas em kN e m.

De forma análoga aos itens anteriores, são obtidos os valores do coeficiente  $\beta(k_1, k_2)$  para os pontos principais da superfície de resposta.

- $\beta(5000, 5000) = 0,50$ ;
- $\beta(1000, 1000) = 0,50$ ;
- $\beta(1000, 5000) = 0,32$ ;
- $\beta(5000, 1000) = 0,68$ .

Pode-se constatar que o coeficiente  $\beta$ , tanto para a condição de flexibilidade extrema dos apoios como para a condição de elevada rigidez, possui o mesmo resultado  $\beta = 0,5$  que é o valor obtido na condição de apoios infinitamente rígidos. Verifica-se que, independente do grau de flexibilidade dos apoios, desde que  $k_1 = k_2$  o valor de  $\beta$  é constante e igual a 0,5.

Entretanto, quando se tem a condição de um apoio flexível e outro rígido há alteração considerável no coeficiente  $\beta$ , resultando em uma variação superior a 100% entre esses extremos. De posse dos valores calculados pode-se verificar que o coeficiente de mola mais flexível no apoio tende a reduzir o valor da reação neste apoio.

As reações de apoio variam de forma linear com o coeficiente adotado. Apenas o cálculo do momento máximo possui uma relação não linear com o coeficiente  $\beta$ , conforme expresso nas equações abaixo

$$R_1 = qL_{laje}\beta \quad (6.11)$$

$$R_2 = qL_{laje}(1 - \beta) \quad (6.12)$$

$$M_1 = \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \beta - \frac{1}{3} \right) \quad (6.13)$$

$$M_2 = \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \frac{2}{3} - \beta \right) \quad (6.14)$$

$$M_{max} = \frac{qL_{laje}^2}{2} \left( \beta^2 - \beta + \frac{1}{3} \right) \quad (6.15)$$

Lembrando-se que o coeficiente  $\beta$  é dado pela expressão 6.16

$$\beta = \frac{\left[ (24EI_{laje} \frac{\lambda_2}{k_2}) + L_{laje}^3 \right]}{\left[ 24EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2} \right) + 2L_{laje}^3 \right]} \quad (6.16)$$

As figuras 6.12, 6.13, 6.14, 6.15 e 6.16 ilustram o comportamento de cada uma das reações de apoio e momento máximo do elemento estrutural

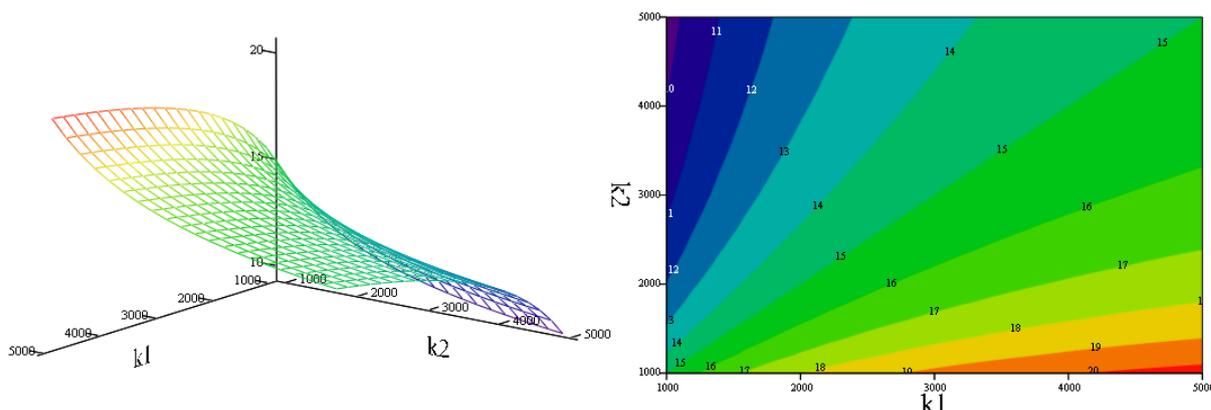


Figura 6.12 – Comportamento da reação de apoio  $R_1$ . Condição de contorno: biengastado, medidas em kN e m.

As reações apresentadas abaixo indicam os valores nos pontos extremos da superfície de resposta da Figura 6.12.

- $R_1(5000,5000) = 15 \text{ kN}$ ;
- $R_1(1000,1000) = 15 \text{ kN}$ ;
- $R_1(1000,5000) = 9,6 \text{ kN}$ ;
- $R_1(5000,1000) = 20,4 \text{ kN}$ .

Para a reação  $R_1$ , quando se tem rigidez iguais nos apoios, ou seja,  $k_1 = k_2$ , resulta em um valor constante de  $R_1 = 15 \text{ kN}$ . Portanto, mesmo que os apoios sejam extremamente flexíveis, desde que a magnitude da rigidez dos apoios seja igual, o valor obtido pela reação  $R_1$  é igual à adotada para a condição de apoios infinitamente rígidos.

Contudo, conforme pode ser observado no gráfico da Figura 6.12 e nos valores destacados acima, a condição que gera o maior e menor valor para a reação  $R_1$  é de máxima flexibilidade em um dos apoios e máxima rigidez no outro, chegando a uma diferença de praticamente 100% entre esses extremos.

A Figura 6.13 ilustra o comportamento da reação  $R_2$  em função da variação das rigidezes dos apoios.

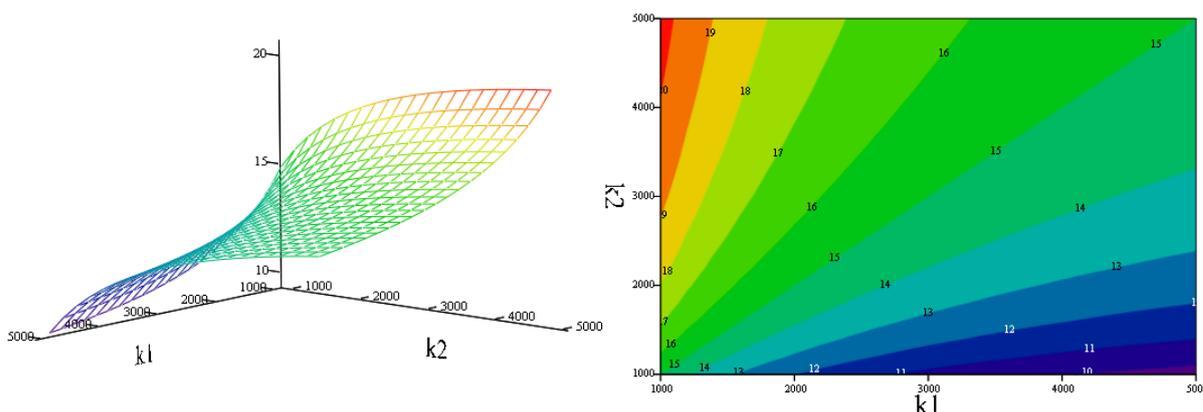


Figura 6.13 – Comportamento da reação de apoio  $R_2$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: biengastado.

Haja vista que o somatório de  $R_1$  e  $R_2$  deve ser igual à resultante das cargas verticais, as conclusões obtidas para a reação de apoio  $R_1$  são semelhantes às de  $R_2$ , invertendo-se apenas os valores obtidos para a condição de rigidezes diferentes nos apoios, conforme pode ser verificado pela simetria das Figuras 6.12 e 6.13.

A Figura 6.14 apresenta a variação, em função das rigidezes dos apoios, da reação de momento no 1º engaste.

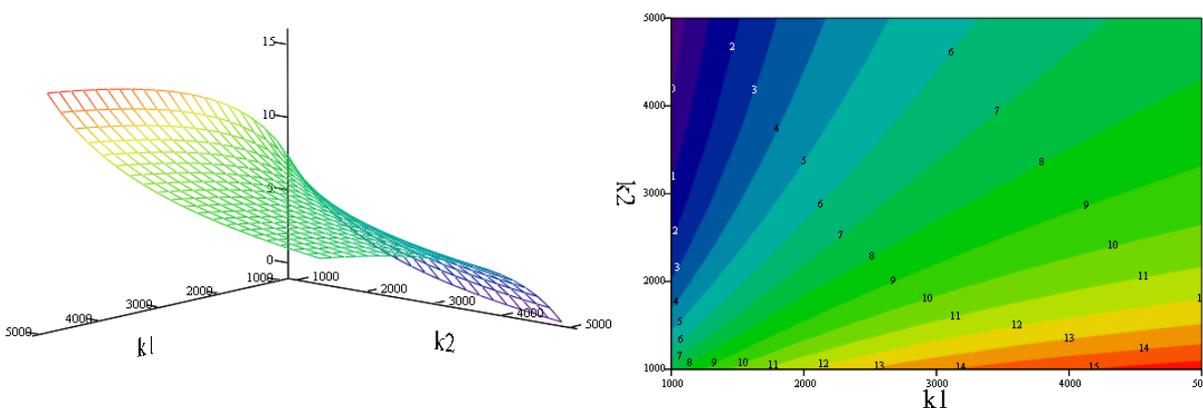


Figura 6.14 – Comportamento do momento no engaste  $M_1$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: biengastado.

As reações de momento no 1º engaste, para os pontos específicos da superfície de resposta, são apresentadas

- $M_1(5000,5000) = 7,5 \text{ kN.m}$ ;
- $M_1(1000,1000) = 7,5 \text{ kN.m}$ ;
- $M_1(1000,5000) = -0,6 \text{ kN.m}$ ;
- $M_1(5000,1000) = 15,6 \text{ kN.m}$ .

Para a análise da reação de momento no 1º engaste ( $M_1$ ) foi verificado comportamento análogo ao da reação  $R_1$ , ou seja, quando as rigidezes dos apoios são iguais ( $k_1 = k_2$ ) o momento no engaste tem o mesmo valor da condição de apoios rígidos  $M_1 = 7,5 \text{ kN.m}$ .

Na condição de alternância das flexibilidades dos apoios ocorre alteração significativa no valor, e até mesmo no sentido, da reação de momento no 1º engaste. Assim, verifica-se que, no caso de haver um apoio muito rígido e outro muito flexível, o apoio mais flexível tende a reduzir a sua reação vertical e a reação de momento, podendo inclusive alterar o sentido dessa reação.

A Figura 6.15 apresenta a variação, em função das rigidezes dos apoios, da reação de momento no 2º engaste.

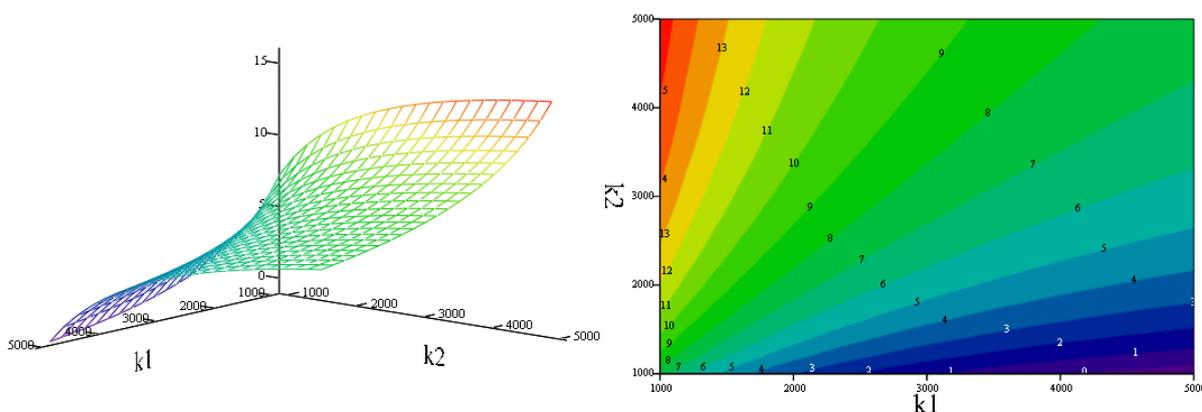


Figura 6.15 – Comportamento do momento no engaste  $M_2$ , medidas em kN e m.  
Condição de contorno: biengastado.

Pode-se observar um padrão de simetria entre a reação  $M_2$  e a reação  $M_1$ . Assim, as deduções obtidas para a reação  $M_1$  são as mesmas, apenas invertendo-se os valores obtidos para a condição de rigidezes diferentes nos apoios, conforme pode ser verificado pela simetria entre os gráficos das Figuras 6.14 e 6.15.

A partir das comparações entre as figuras 6.14 e 6.15, que em um caso extremo de máxima rigidez em um dos apoios e de extrema flexibilidade no outro há uma

tendência de inversão no sentido da reação de momento no apoio que apresenta maior flexibilidade.

A Figura 6.16 ilustra a variação do momento máximo no modelo estrutural de viga biengastada.

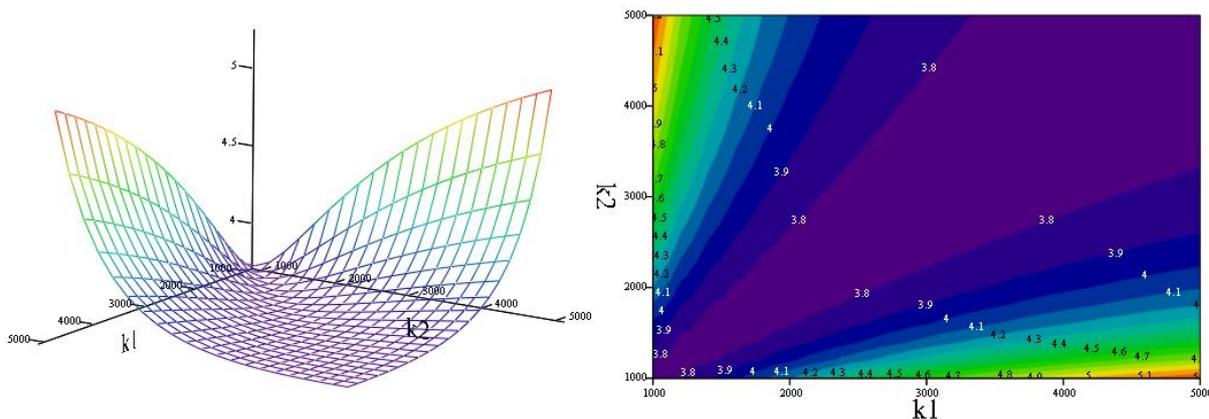


Figura 6.16 – Comportamento do momento máximo da faixa de laje, medidas em kN e m. Condição de contorno: biengastado.

O momento máximo no sistema estrutural apresenta os seguintes valores nos principais pontos da superfície de resposta.

- $M_{max}(5000,5000) = 3,75 \text{ kN.m};$
- $M_{max}(1000,1000) = 3,75 \text{ kN.m};$
- $M_{max}(1000,5000) = 5,2 \text{ kN.m};$
- $M_{max}(5000,1000) = 5,2 \text{ kN.m}.$

O comportamento do momento máximo na faixa de laje para a condição de apoios de mesma rigidez apresentou um valor constante e igual à condição de apoios infinitamente rígidos no valor de  $M_{max} = 3,75 \text{ kN.m}.$

Para a condição de flexibilidade dos apoios alternada foi obtido um momento máximo  $M_{max} = 5,2 \text{ kN.m}.$  Verifica-se que, para o cálculo do momento máximo, nesse sistema estrutural o modelo apresentou comportamento simétrico em relação ao grau de flexibilidade adotado nos apoios.

Para o cálculo e análise do deslocamento máximo na faixa de laje foi utilizada a equação 6.16

$$\Delta = \frac{\alpha}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} + \frac{qL_{laje}}{2k} \quad (6.16)$$

Onde

$$k = -\frac{k_1}{2\lambda_1\beta} \quad (6.17)$$

$$\alpha = (48\beta^4 - 96\beta^3 + 32\beta^2) \quad (6.18)$$

A Figura 6.17 ilustra o comportamento do deslocamento máximo da faixa de laje em função da variação das rigidezes dos apoios.

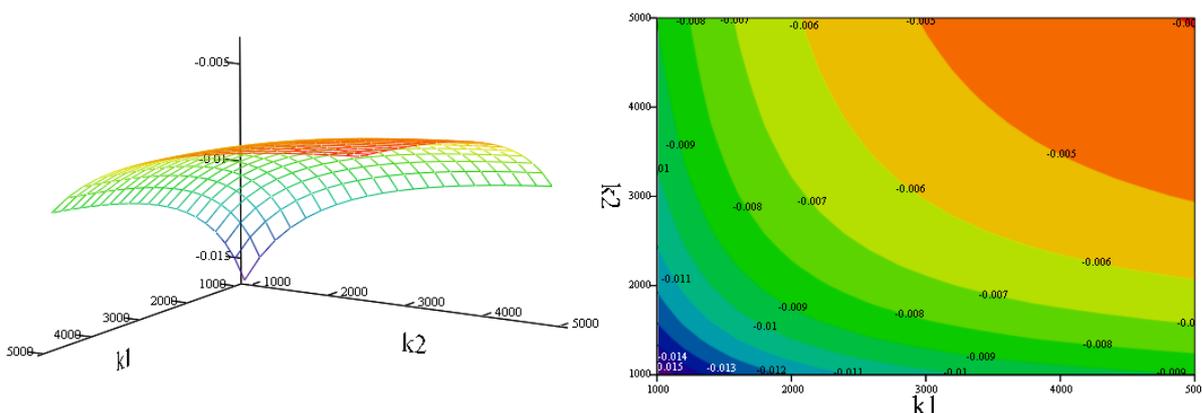


Figura 6.17 – Deslocamento máximo em função da flexibilidade dos apoios, medidas em kN e m. Condição de contorno: Engastado-Engastado.

Os deslocamentos nos pontos principais da superfície de resposta do modelo estrutural são dados

- $\Delta(5000,5000) = -0,4 \text{ cm};$
- $\Delta(1000,1000) = -1,6 \text{ cm};$
- $\Delta(1000,5000) = -0,9 \text{ cm};$
- $\Delta(5000,1000) = -0,9 \text{ cm}.$

O deslocamento máximo considerando o modelo de apoios infinitamente rígidos é de  $\Delta = -0,1 \text{ cm}$ . Verifica-se que, ao se considerar a flexibilidade dos apoios (independente do grau de flexibilidade), gerou acréscimos superiores a 100% da condição de apoio rígido.

Mesmo considerando-se a rigidez elevada em ambos os apoios o deslocamento obtido ( $\Delta = -0,4 \text{ cm}$ ), em relação à condição de apoio infinitamente rígido ( $\Delta = -0,1 \text{ cm}$ ), foi de aproximadamente 4 vezes.

## 6.2 Análise do carregamento e reações em laje com apoios flexíveis

No capítulo anterior foi estudado o comportamento das reações de apoio e deslocamentos da faixa de laje isolada variando-se o grau de rigidez dos apoios. Contudo, para estudar como a flexibilidade dos apoios influencia na distribuição das cargas nas respectivas faixas de laje é necessário analisar o comportamento do coeficiente  $K_x$  (coeficiente de distribuição do carregamento da faixa na direção X).

A Figura 6.18 ilustra a divisão de uma laje em faixas ortogonais e a representação da rigidez dos apoios elásticos na borda das lajes.

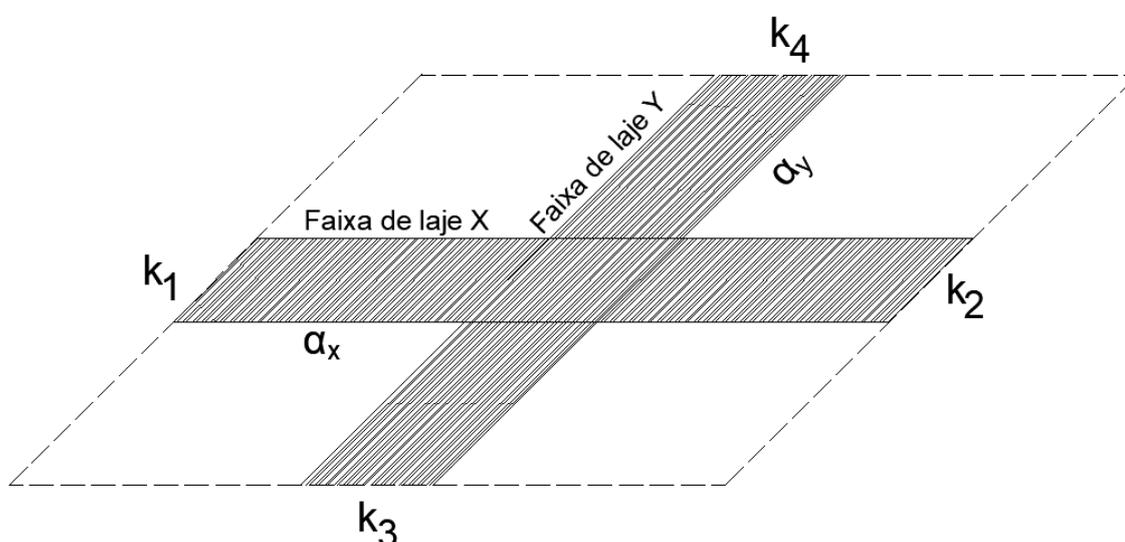


Figura 6.18 – Representação de laje com apoios flexíveis.

A análise do coeficiente  $K_x$  (equação 6.19), obtida no capítulo 6, em função das rigidezes dos apoios apresenta algumas dificuldades, haja vista que este coeficiente tem 10 variáveis, sendo elas  $\alpha_x(L_x, k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\alpha_y(L_y, k_3, k_4, \lambda_3, \lambda_4)$ ,  $L_y$ ,  $L_x$ ,  $k_x(k_1, k_2)$ ,  $k_y(k_3, k_4)$ .

$$K_x = \left( \frac{\left( \alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y(k_3, k_4)} \right)}{\left( \alpha_x \frac{L_x^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_x}{k_x(k_1, k_2)} \right) + \left( \alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y(k_3, k_4)} \right)} \right) \quad (6.19)$$

Além das variáveis mencionadas existem nove combinações das condições de contorno no bordo das lajes onde cada fator  $\alpha$ , referente ao tipo de vinculação da faixa, é dado em função das rigidezes dos apoios da laje.

Assim, de forma a estudar a influência do parâmetro  $K_x$  na distribuição das cargas, é necessário realizar algumas simplificações. Para as análises efetuadas foram adotados:

- coeficiente de ajuste unitário em ambas as faixas de laje:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ ;
- variação de rigidez diretamente nas faixas de laje  $k_x(k_1, k_2)$  e  $k_y(k_3, k_4)$ ;
- carga distribuída na laje:  $q = 10 \text{ kN/m}^2$ .

Em relação às dimensões da laje dois casos são objeto de estudo, conforme apresentado:

- comprimentos de faixa iguais:  $L_x = L_y = 3\text{m}$ ;
- comprimentos de faixa diferentes:  $L_x = 6\text{m}$  e  $L_y = 3\text{m}$ .

O segundo caso, no qual se adota uma razão entre comprimentos de laje igual a 2, foi escolhido pois esse tipo de laje é geralmente armada em apenas uma direção (menor vão) e utilizado uma armadura distribuição na direção do maior vão.

Assim, é válido analisar a influência da flexibilidade dos apoios para o cálculo das solicitações nas duas direções e verificar se essa premissa de detalhamento é apropriada.

As simplificações adotadas são necessárias para representar a superfície de resposta do coeficiente  $K_x$ , pois reduzem o número de variáveis para duas ( $k_x$  e  $k_y$ ), sendo possível analisar o comportamento desse coeficiente em função das rigidezes das faixas de laje.

### 6.2.1 Laje simplesmente apoiada em todos os bordos com $L_x = L_y$

O modelo de laje apoiada em todos os bordos pode ser visto como o limite inferior para o dimensionamento, pois se trata da condição de contorno com o menor grau de vínculos possíveis em uma laje, que gera os maiores momentos positivos no elemento estrutural. A Figura 6.19 ilustra a representação adotada para a laje de apoios flexíveis

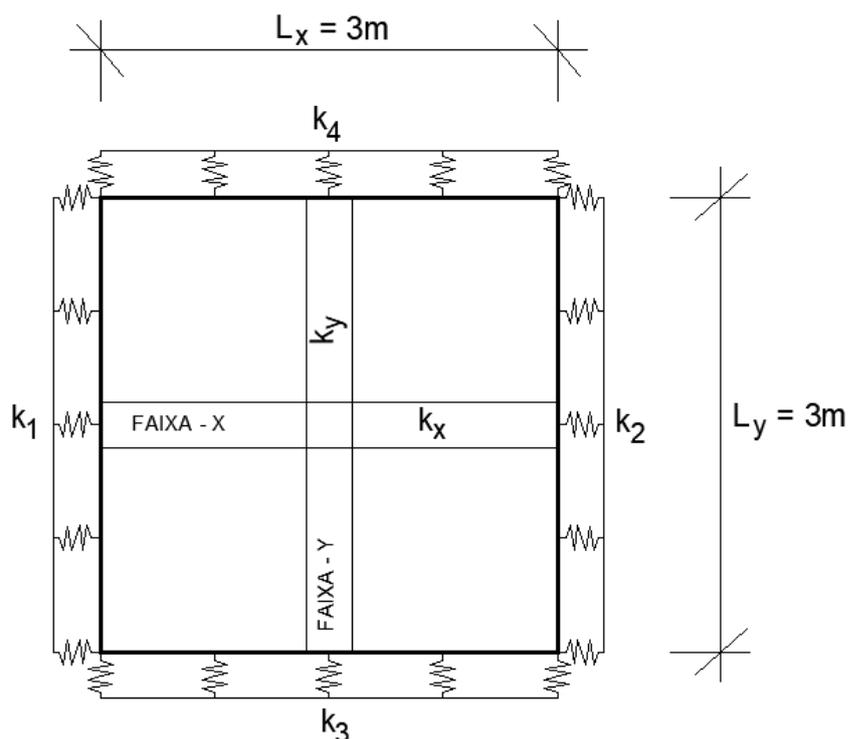


Figura 6.19 – Laje simplesmente apoiada com apoios flexíveis com  $L_x = L_y$ .

O coeficiente  $\alpha$  é igual em ambas as faixas (mesma condição de contorno nas faixas) e tem o valor de  $\alpha_x = \alpha_y = -5$ . Os coeficientes  $k_x$  e  $k_y$  são dados pelas equações

$$k_x = -2 \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)} \quad (6.20)$$

$$k_y = -2 \frac{k_3 k_4}{(k_3 + k_4)} \quad (6.21)$$

Seguindo a mesma sistemática do item anterior e admitindo-se que as rigidezes estejam compreendidas entre um mínimo de  $k_{min} = 1000 \text{ kN/m}$  e um máximo de  $k_{max} = 5000 \text{ kN/m}$  constata-se que as expressões de  $k_x$  e  $k_y$  têm essa mesma variação.

#### 6.2.1.1 Coeficiente $K_x$ em laje apoiada – Geometria da laje: $L_x = L_y$

A Figura 6.20 ilustra o comportamento da variável  $K_x$  em função dos parâmetros de rigidez  $k_x$  e  $k_y$  das faixas de laje.

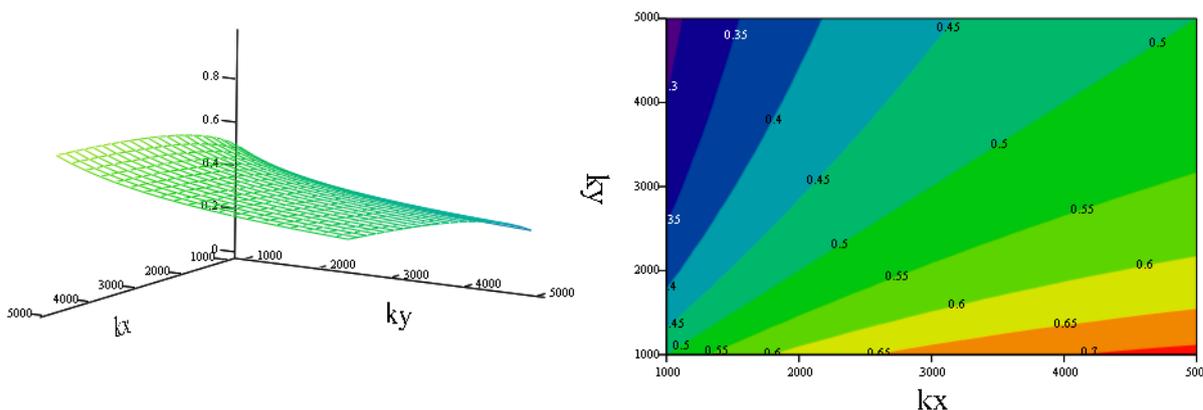


Figura 6.20 – Comportamento do coeficiente  $K_x$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje simplesmente apoiada com  $L_x = L_y$ .

Os valores de  $K_x$  nos pontos principais da superfície de resposta (Figura 6.20) são dados por

- $K_x(5000,5000) = 0,5$ ;
- $K_x(1000,1000) = 0,5$ ;
- $K_x(1000,5000) = 0,28$ ;
- $K_x(5000,1000) = 0,72$ .

Constata-se que caso as rigidezes sejam iguais,  $k_x = k_y$ , o valor de  $K_x$  é igual ao do caso de apoios infinitamente rígidos, ou seja,  $K_x = 0,5$ . Conclui-se que independente do grau de flexibilidade dos apoios, desde que os parâmetros  $k_x$  e  $k_y$  sejam iguais, não há alteração na distribuição de cargas entre as faixas de laje.

Entretanto, utilizando-se a condição de mínima rigidez em uma das faixas ( $k_x = 1000 \text{ kN/m}$ ) e de máxima rigidez na outra faixa ( $k_y = 5000 \text{ kN/m}$ ) obtém-se o valor de  $K_x = 0,28$ , e conseqüentemente o valor de  $K_y = 0,72$ , ou seja, 28% do carregamento da laje é atribuída à faixa mais flexível e 72% à faixa mais rígida.

Em comparação à condição de apoios infinitamente rígidos (teoria clássica de grelha), na condição extrema ocorre uma redução de aproximadamente 44% da carga que iria para a faixa de laje na direção mais flexível e um aumento de aproximadamente 44% na faixa de laje com apoios rígidos. Devido à simetria da laje ( $L_x = L_y$ ) dedução semelhante pode ser observada ao se alternar a condição de flexibilidade das faixas de laje.

Como o cálculo das reações e do momento máximo é diretamente proporcional aos coeficientes de distribuição de carga  $K_x$  e  $K_y$ , o percentual de aumento e redução

que ocorrem em função da flexibilidade das faixas de laje é o mesmo observado na Figura 6.3.

#### 6.2.1.2 Deslocamento máximo em laje apoiada – Geometria da laje: $L_x = L_y$

Para a análise do deslocamento máximo da laje utiliza-se a equação 6.22 em relação à faixa da direção  $X$ .

$$\Delta(k_x, k_y) = \frac{\alpha_x (qK_x)L_x^4}{384 EI_{laje}} - \frac{(qK_x)L_x}{2k_x} \quad (6.22)$$

A Figura 6.21 apresenta o comportamento do deslocamento máximo da laje ao se variar a rigidez das faixas de laje.

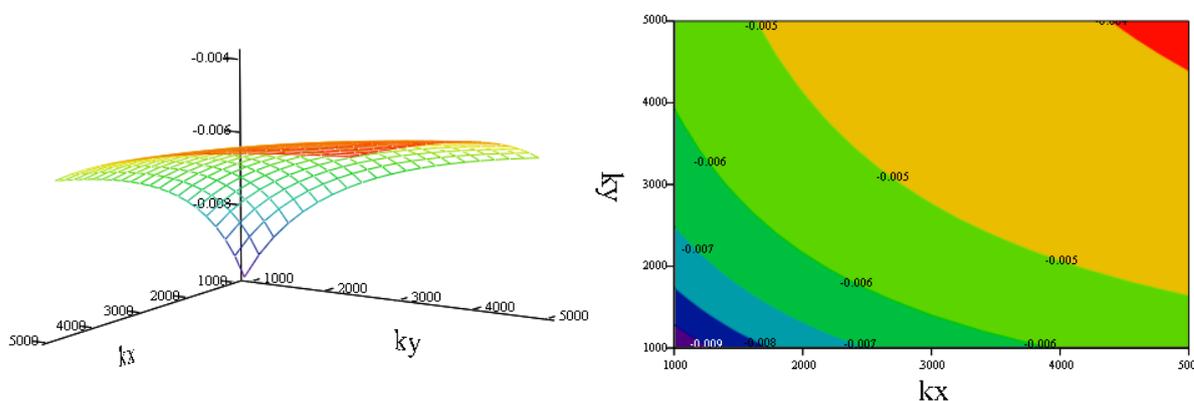


Figura 6.21 – Deslocamento máximo da laje, medidas em kN e m. Condição de contorno: Simplesmente apoiada nos bordos com  $L_x = L_y$ .

Os valores a seguir indicam os deslocamentos, nos pontos extremos, em função das rigidezes de faixa  $k_x$  e  $k_y$

- $\Delta(5000,5000) = -0,39 \text{ cm}$ ;
- $\Delta(1000,1000) = -0,99 \text{ cm}$ ;
- $\Delta(1000,5000) = -0,56 \text{ cm}$ ;
- $\Delta(5000,1000) = -0,56 \text{ cm}$ .

O cálculo do deslocamento considerando a Teoria de Grelha ( $k_x = k_y = \infty$ ) resultou no valor de  $\Delta = -0,24 \text{ cm}$ . Portanto, verifica-se que, mesmo considerando uma rigidez de faixa elevada ( $k_x = k_y = 5000 \text{ kN/m}$ ), há um aumento superior a 50% no deslocamento máximo da laje.

### 6.2.2 Laje simplesmente apoiada em todos os bordos com $L_x = 2L_y$

De forma análoga ao item 6.2.1, são realizadas as análises das reações e deslocamentos da laje considerando a condição geométrica de  $L_x = 6m$  e  $L_y = 3m$ . As demais características estruturais da laje permanecem as mesmas. A Figura 6.22 ilustra a configuração da laje objeto de estudo.

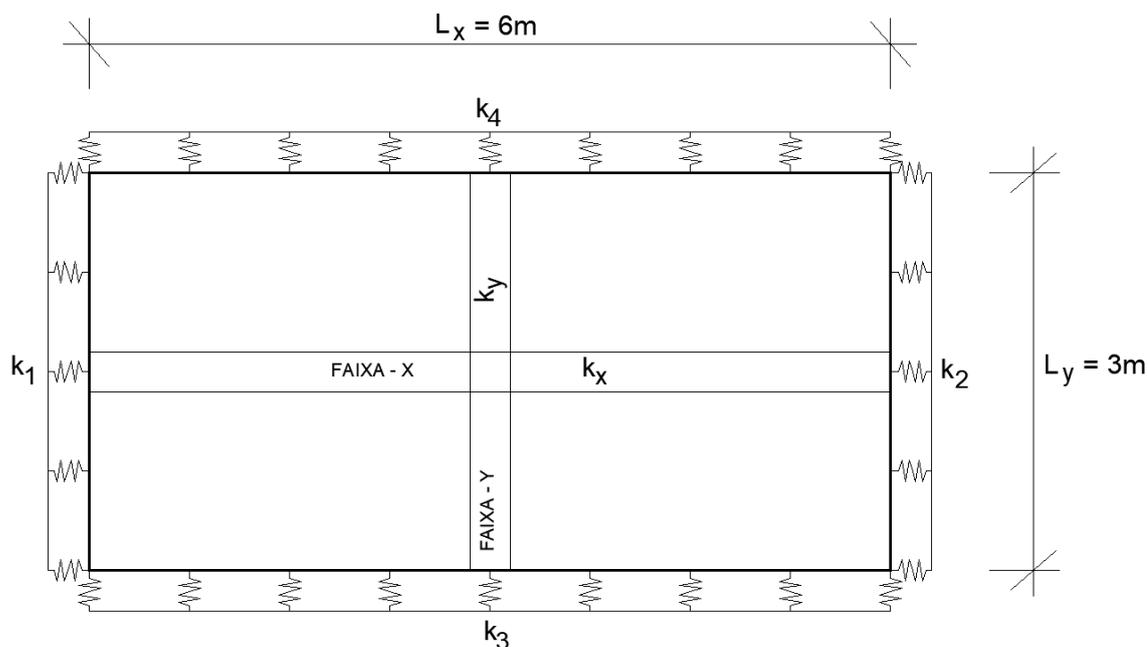


Figura 6.22 – Laje simplesmente apoiada com apoios flexíveis com  $L_x = 2L_y$ .

#### 6.2.2.1 Coeficiente $K_x$ em laje apoiada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$

A Figura 6.23 ilustra o comportamento da variação do coeficiente  $K_x$  em função da rigidez das faixas de laje.

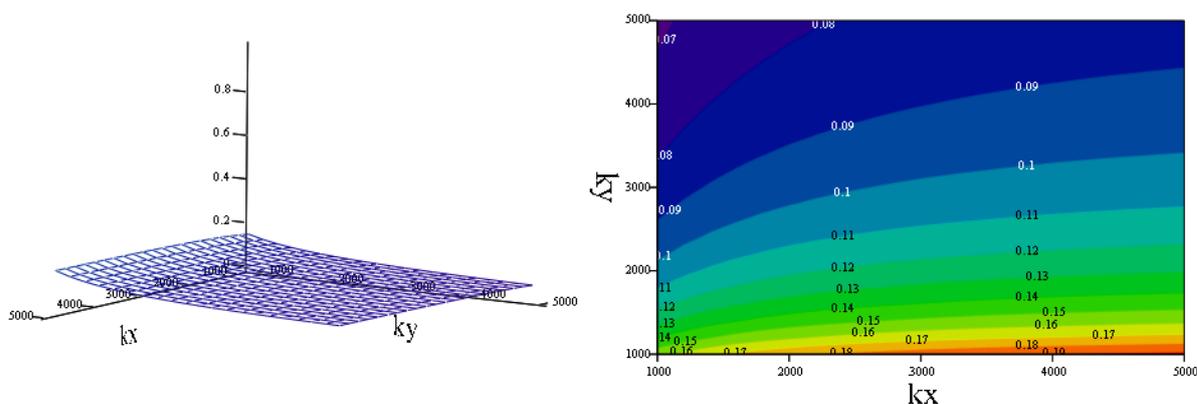


Figura 6.23 – Coeficiente  $K_x$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje simplesmente apoiada com  $L_x = 2L_y$ .

Seguindo a mesma sistemática do item 6.2.1.1 os valores de  $K_x$  nos pontos principais da superfície de resposta são listados

- $K_x(5000,5000) = 0,09$ ;
- $K_x(1000,1000) = 0,16$ ;
- $K_x(1000,5000) = 0,07$ ;
- $K_x(5000,1000) = 0,19$ .

Na condição de apoios infinitamente rígidos (Teoria de Grelha) foi obtido  $K_x = 0,06$ . Verifica-se que pela Teoria de Grelha apenas 6% da carga é atribuída à faixa de maior vão e quase a totalidade da carga (94%) é atribuída à faixa de menor vão.

Contudo, para a condição em que ambas as faixas apresentam elevada flexibilidade ocorreu um aumento considerável no carregamento da faixa de maior vão, sendo atribuído a essa faixa 16% do carregamento total da laje. No caso em que a maior flexibilidade consta na faixa  $L_y = 3m$  e elevada rigidez na faixa  $L_x = 6m$ , constata-se que 19% do carregamento total da laje é imputado à faixa de maior vão.

#### 6.2.2.2 Momento máximo $M_{x,max}$ em laje apoiada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$

A variação do momento máximo na direção do maior vão ( $L_x = 6m$ ) é apresentada pela superfície de resposta ilustrada na Figura 6.24.

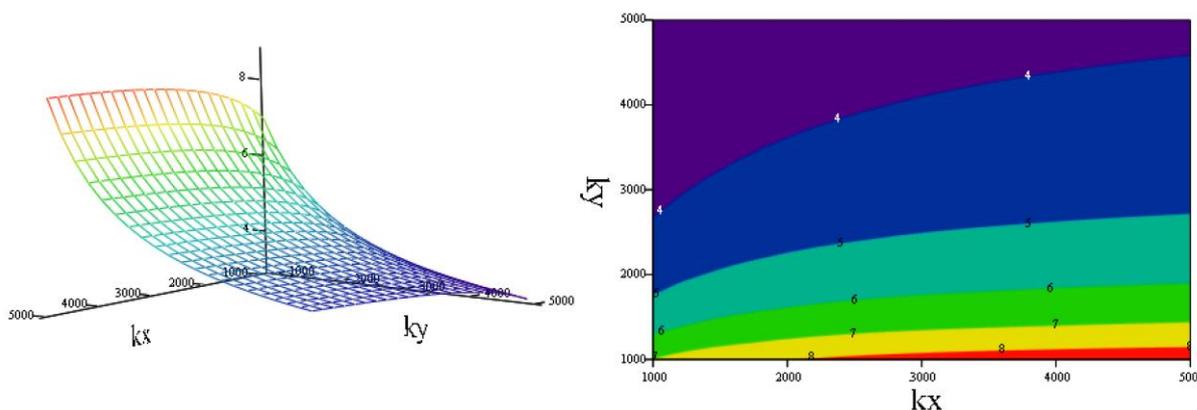


Figura 6.24 – Momento máximo na direção do maior vão, medidas em kN e m.

Condição de contorno: Laje simplesmente apoiada com  $L_x = 2L_y$ .

O momento máximo na direção do maior vão (direção X) é detalhado abaixo em função dos pontos principais das rigidezes das faixas.

- $M_{x,max}(5000,5000) = 3,88 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{x,max}(1000,1000) = 7,04 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{x,max}(1000,5000) = 3,06 \text{ kN.m/m}$ ;

- $M_{x,max}(5000,1000) = 8,69 \text{ kN.m/m}$ .

O momento máximo considerando rigidez infinita nos apoios resulta em  $M_{x,max} = 2,65 \text{ kN.m/m}$ . Diante dos resultados pode-se observar que o momento máximo na direção do maior vão pode aumentar em até três vezes, a depender do grau de flexibilidade dos apoios das faixas, em comparação com o resultado obtido utilizando apoios infinitamente rígidos.

Portanto, a indicação prática de utilizar armadura de distribuição em lajes armadas em uma direção (relação entre vãos maior ou igual a 2) pode não gerar resultados satisfatórios, a depender do grau de flexibilidade das vigas de bordo.

### 6.2.2.3 Momento máximo $M_{y,max}$ em laje apoiada – geometria da laje: $L_x = 2L_y$

Para a análise do momento máximo na direção do menor vão (direção Y) a superfície ilustrada na Figura 6.25 indica o seu comportamento em função das rigidezes das faixas.

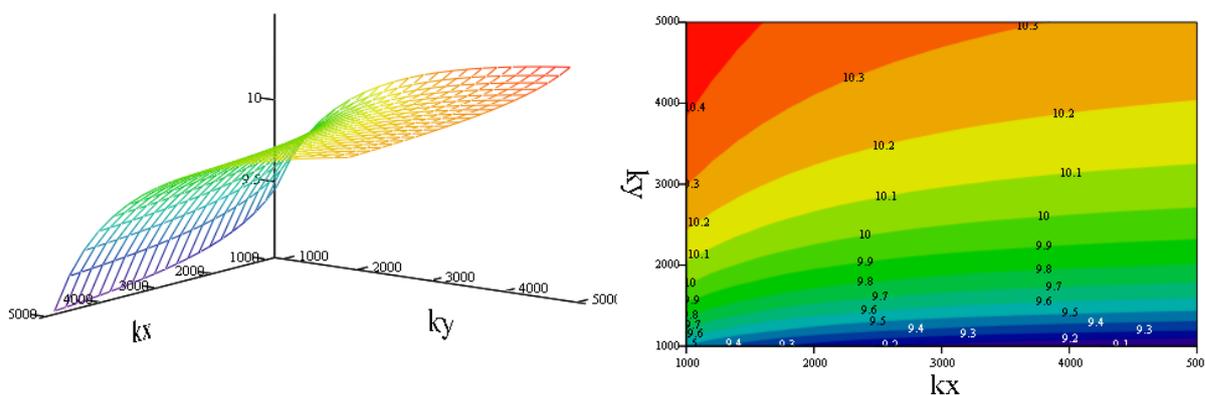


Figura 6.25 – Momento máximo na direção do menor vão, medidas em kN e m.

Condição de contorno: Laje simplesmente apoiada nos bordos com  $L_x = 2L_y$ .

O cálculo do momento máximo atuante no menor vão, nos principais pontos da superfície de resposta é

- $M_{y,max}(5000,5000) = 10,28 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{y,max}(1000,1000) = 9,49 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{y,max}(1000,5000) = 10,48 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{y,max}(5000,1000) = 9,08 \text{ kN.m/m}$ .

O momento máximo considerando rigidez infinita nos apoios resulta em  $M_{y,max} = 10,59 \text{ kN.m/m}$ . Verifica-se que, apesar de haver uma grande variabilidade

das rigidezes das faixas, o momento positivo atuante no menor vão (direção Y) tem pouca oscilação.

#### 6.2.2.4 Deslocamento máximo em laje apoiada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$

O deslocamento máximo na laje está representado no gráfico da Figura 6.26.

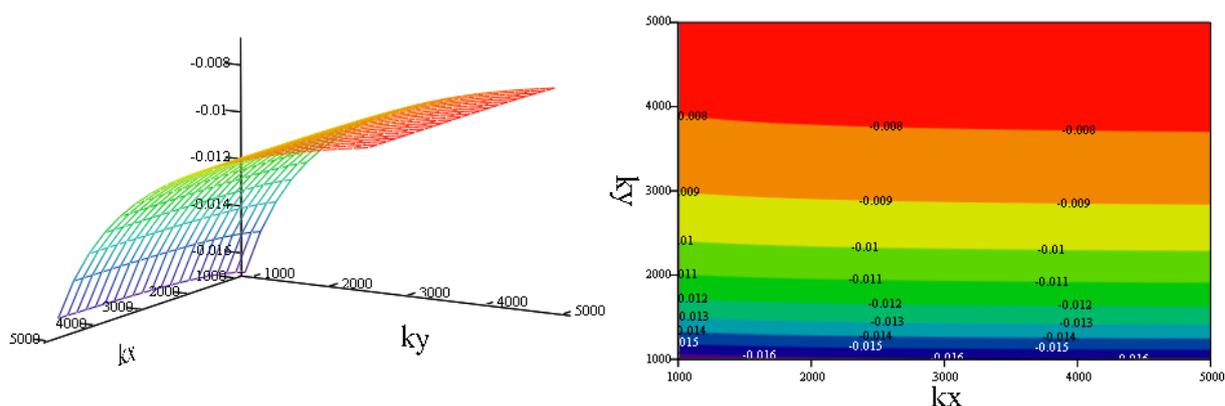


Figura 6.26 – Deslocamento máximo da laje, medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje simplesmente apoiada com  $L_x = 2L_y$ .

Os valores seguintes indicam os deslocamentos máximos da laje, nos pontos extremos, em função das rigidezes de faixa  $k_x$  e  $k_y$

- $\Delta(5000,5000) = -0,71 \text{ cm};$
- $\Delta(1000,1000) = -1,67 \text{ cm};$
- $\Delta(1000,5000) = -0,73 \text{ cm};$
- $\Delta(5000,1000) = -1,60 \text{ cm}.$

O cálculo do deslocamento, considerando os apoios infinitamente rígidos ( $k_x = k_y = \infty$ ), resultou no valor de  $\Delta = -0,45 \text{ cm}$ . Verifica-se que, mesmo utilizando uma rigidez de faixa elevada, há um aumento superior a 50% no deslocamento máximo da laje em se comparando com o cálculo considerando os apoios infinitamente rígidos (Teoria de Grelha).

#### 6.2.3 Laje engastada em todos os bordos com $L_x = L_y$

Para a análise da laje engastada em todos os bordos é utilizado o mesmo critério do item 6.2.1, onde a variação da rigidez dos apoios foi substituída pela rigidez da faixa. A Figura 6.27 ilustra a laje objeto de estudo.

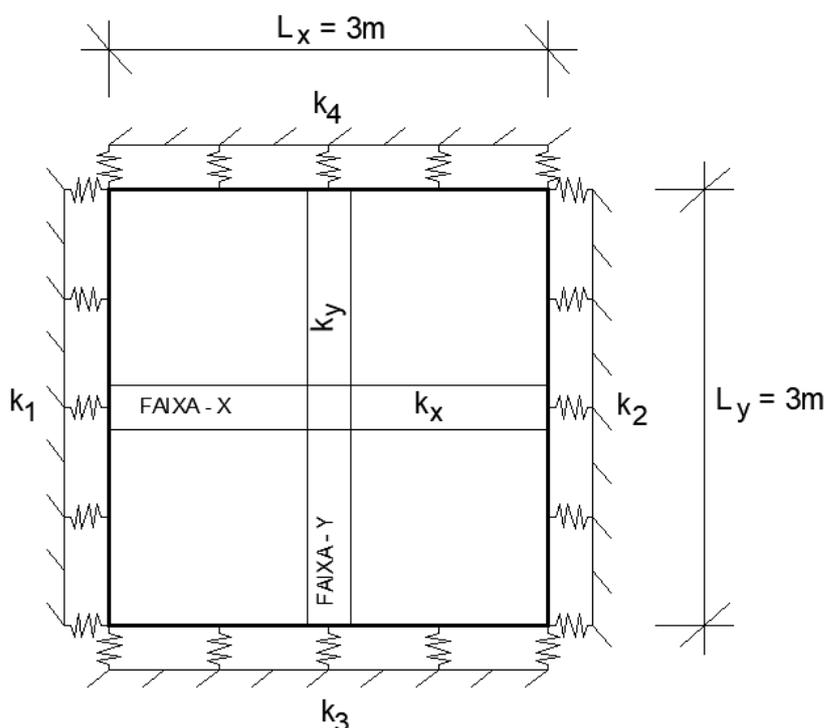


Figura 6.27 – Laje com apoios flexíveis engastada nos bordos com  $L_x = L_y$ .

Para se determinar as reações e deslocamentos é necessário calcular a variável  $\beta$  que depende das condições de rigidez dos apoios em cada faixa de laje, conforme expresso nas equações

$$\beta_x(k_1, k_2) = \frac{\left[ (24EI_{laje} \frac{1}{k_2}) + L_x^3 \right]}{\left[ 24EI_{laje} \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) + 2L_x^3 \right]} \quad (6.23)$$

$$\beta_y(k_3, k_4) = \frac{\left[ (24EI_{laje} \frac{1}{k_4}) + L_x^3 \right]}{\left[ 24EI_{laje} \left( \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} \right) + 2L_x^3 \right]} \quad (6.24)$$

Os coeficientes  $k_x$  e  $k_y$  são determinados pelas equações

$$k_x(k_1, k_2) = -\frac{k_1}{2\beta_x(k_1, k_2)} \quad (6.25)$$

$$k_y(k_3, k_4) = -\frac{k_3}{2\beta_y(k_3, k_4)} \quad (6.26)$$

Entretanto, não é possível representar o comportamento das superfícies de resposta em função das rigidezes individuais dos apoios, pois o número de variáveis é superior ao necessário para representar a superfície, assim, a variação da rigidez é

dada diretamente na rigidez de faixa (equações 6.25 e 6.26), admitindo-se que os coeficientes  $k_1 = k_2 = k_x$  e  $k_3 = k_4 = k_y$ .

As equações utilizadas para o cálculo das reações e deslocamentos são dadas em função dos parâmetros da faixa na direção X, conforme expresso nas equações 6.27 e 6.28. É possível utilizar apenas uma faixa para a análise dos resultados pois foi arbitrado que os comprimentos da laje são iguais, assim

$$\alpha_x = (48\beta_x(k_x)^4 - 96\beta_x(k_x)^3 + 32\beta_x(k_x)^2) \quad (6.27)$$

onde

$$\beta_x(k_x) = \frac{\left[ \left( 24EI_{laje} \frac{1}{k_x} \right) + L_x^3 \right]}{\left[ 24EI_{laje} \left( \frac{1}{k_x} + \frac{1}{k_x} \right) + 2L_x^3 \right]} \quad (6.28)$$

### 6.2.3.1 Coeficiente $K_x$ em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = L_y$

A Figura 6.28 ilustra o comportamento do coeficiente de distribuição de cargas nas faixas de laje  $K_x$ .

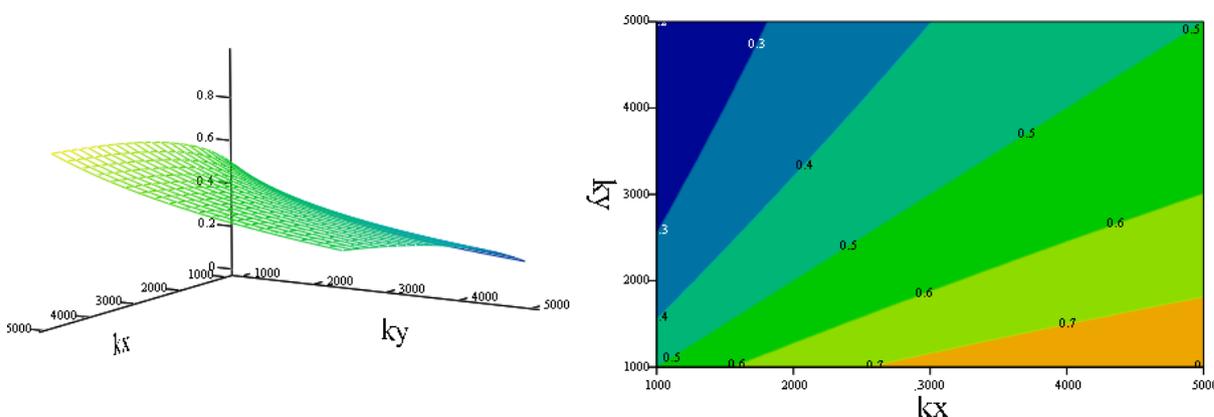


Figura 6.28 – Coeficiente  $K_x$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje engastada em todos os bordos com  $L_x = L_y$ .

De forma análoga aos itens anteriores, são apresentados os valores de  $K_x$  nos pontos extremos da superfície de resposta.

- $K_x(5000,5000) = 0,5$ ;
- $K_x(1000,1000) = 0,5$ ;
- $K_x(1000,5000) = 0,2$ ;
- $K_x(5000,1000) = 0,8$ .

Verifica-se, de forma semelhante ao observado para a condição de laje simplesmente apoiada em todos os bordos, que independente do grau de flexibilidade

dos apoios da laje, desde que o coeficiente de mola em cada faixa seja igual, a variável  $K_x$  é a mesma para o caso de apoios rígidos ( $K_x = 0,5$ ).

Portanto, nesses casos não há diferença no cálculo das reações de apoio e momento máximo ao se utilizar a Teoria de Grelha, haja vista que essa metodologia de cálculo admite que 50% do carregamento total é atribuído para cada faixa de laje para essa condição de contorno.

Porém, quando uma das faixas apresenta grande flexibilidade e a outra elevada rigidez ocorre uma redistribuição das cargas nas faixas de laje. Nas condições impostas nesse estudo, observou-se que apenas 20% do carregamento é atribuído à faixa mais flexível e 80% para a faixa de rigidez mais elevada.

### 6.2.3.2 Momento máximo $M_{x,max}$ em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = L_y$

Para a análise do momento máximo positivo na laje foi utilizada a equação 6.29 onde o momento obtido corresponde ao momento atuante na faixa de direção X.

$$M_{x,max} = \frac{(qK_x(k_x, k_y)) L_x^2}{2} \left( \beta_x(k_x)^2 - \beta_x(k_x) + \frac{1}{3} \right) \quad (6.29)$$

A superfície de resposta do momento máximo, em função da rigidez das faixas, está ilustrada na Figura 6.29.

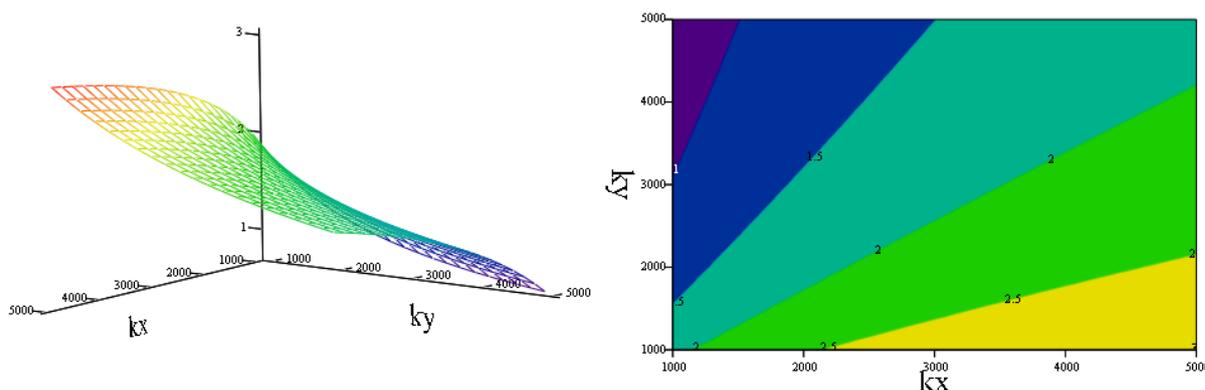


Figura 6.29 – Momento máximo positivo na direção X, medidas em kN e m.

Condição de contorno: Laje engastada em todos os bordos com  $L_x = L_y$ .

Os momentos positivos máximos da laje, na direção X, para os principais pontos do gráfico são

- $M_{x,max}(5000,5000) = 1,88 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{x,max}(1000,1000) = 1,88 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{x,max}(1000,5000) = 0,75 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{x,max}(5000,1000) = 3 \text{ kN.m/m}$ .

Verifica-se que no caso em que as faixas de laje possuem a mesma rigidez, independente do grau de flexibilidade, o resultado é igual ao obtido pela Teoria de Grelha, inclusive para o momento na direção Y.

No caso em que há alternância de flexibilidade das faixas o momento na direção Y é o que corresponde à inversão das faixas, ou seja, se  $M_{x,max}(1000,5000) = 0,75 \text{ kN.m/m}$  o momento na direção Y é de  $M_{y,max}(1000,5000) = 3 \text{ kN.m/m}$ .

Observa-se que, ao se alternar o grau de flexibilidade das faixas de laje, ocorre na direção da faixa mais flexível uma redução considerável no momento atuante, sendo o mesmo redistribuído para a faixa da outra direção.

### 6.2.3.3 Deslocamento máximo em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = L_y$

Para o cálculo dos deslocamentos utilizou-se a equação 6.22 em conjunto com as variáveis relativas à condição de contorno em estudo (equação 6.27 e 6.28), cujos resultados estão mostrados na Figura 6.30.

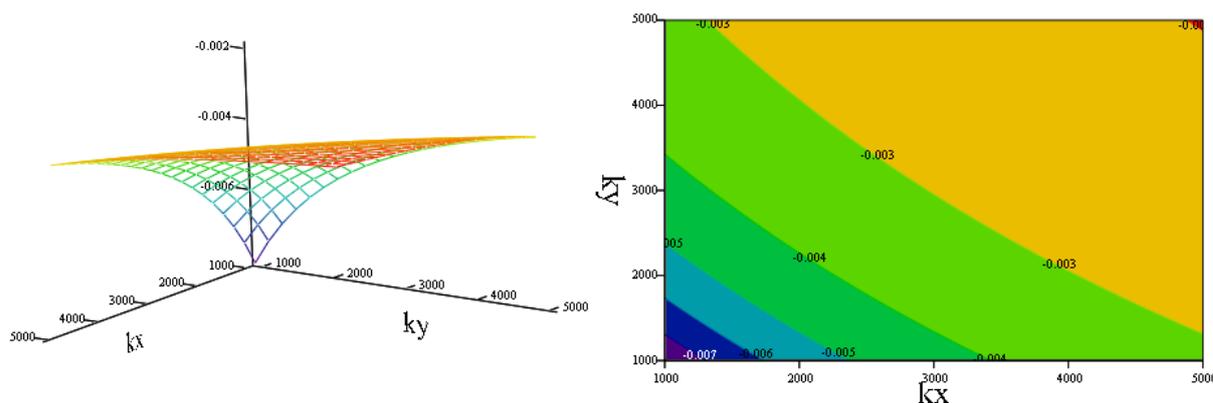


Figura 6.30 – Deslocamento máximo, medidas em kN e m. Condição de contorno:  
Laje engastada em todos os bordos com  $L_x = L_y$ .

Os seguintes valores indicam os deslocamentos, nos pontos extremos, em função das rigidezes  $k_x$  e  $k_y$  das faixas.

- $\Delta(5000,5000) = -0,20 \text{ cm}$ ;
- $\Delta(1000,1000) = -0,80 \text{ cm}$ ;
- $\Delta(1000,5000) = -0,32 \text{ cm}$ ;
- $\Delta(5000,1000) = -0,32 \text{ cm}$ .

O deslocamento pela Teoria de Grelha resultou em  $\Delta = -0,05 \text{ cm}$ . Assim, constata-se que mesmo sendo adotada uma rigidez elevada nas faixas de laje, o

deslocamento obtido é quatro vezes superior ao calculado pela Teoria de Grelha e de 16 vezes superior ao se considerar máxima flexibilidade nas faixas de laje.

#### 6.2.4 Laje engastada em todos os bordos com $L_x = 2L_y$

Seguindo a mesma sistemática dos itens anteriores é analisado o caso de uma laje engastada em todos os bordos com apoios flexíveis, conforme ilustra a Figura 6.31.

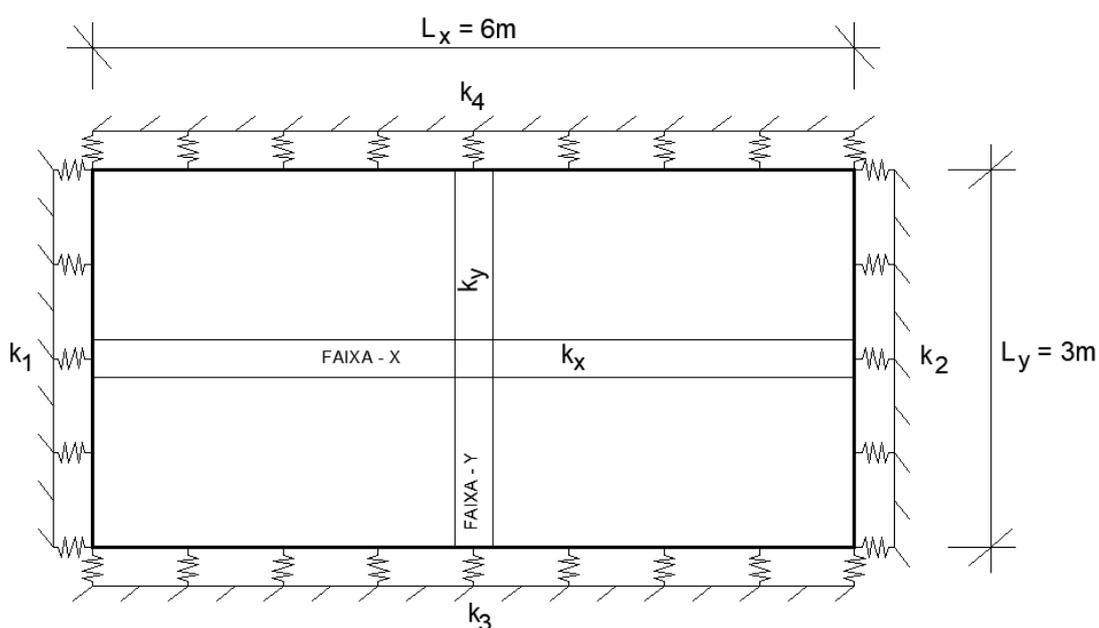


Figura 6.31 – Laje com apoios flexíveis engastada nos bordos com  $L_x = 2L_y$ .

##### 6.2.4.1 Coeficiente $K_x$ em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$

A Figura 6.32 ilustra o comportamento do coeficiente  $K_x$  relativas à laje apresentada na Figura 6.31.

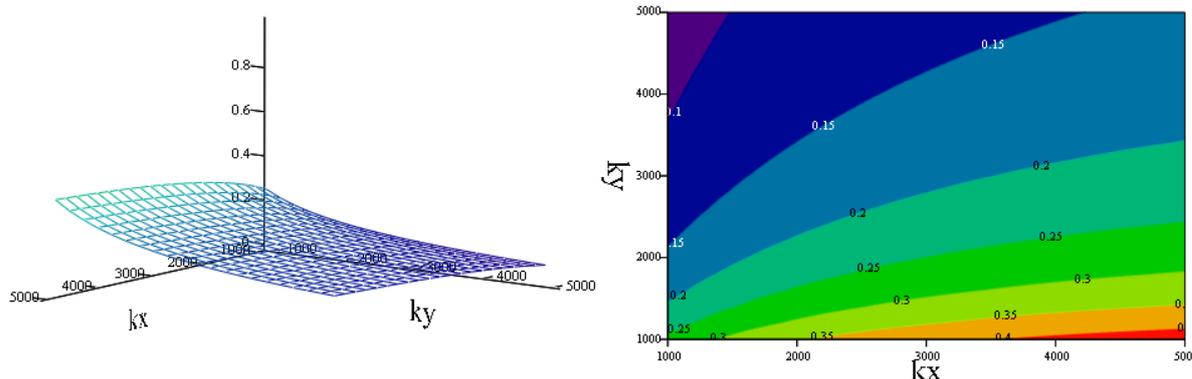


Figura 6.32 – Coeficiente  $K_x$ , medidas em kN e m. Condição de contorno: Laje engastada nos bordos com  $L_x = 2L_y$ .

Os valores da superfície de resposta da função  $K_x$  para os principais pontos são apresentados abaixo

- $K_x(5000,5000) = 0,16$ ;
- $K_x(1000,1000) = 0,26$ ;
- $K_x(1000,5000) = 0,08$ ;
- $K_x(5000,1000) = 0,43$ .

O valor do coeficiente  $K_x$  admitindo-se a hipótese de rigidez infinita nos apoios é dado por  $K_x = 0,06$ . Pode-se observar que mesmo ao se considerar uma rigidez elevada nas faixas de laje ( $k_x = k_y = 5000 \text{ kN/m}$ ) ocorre um aumento do percentual de carga atribuído à faixa de maior vão, aumento esse de aproximadamente 2,7 vezes o valor dado pela Teoria de Grelha.

Pode-se observar que ao se considerar uma elevada rigidez na faixa de maior vão ( $k_x = 5000 \text{ kN/m}$ ) e uma maior flexibilidade na faixa de menor vão ( $k_y = 1000 \text{ kN/m}$ ) ocorre uma redistribuição significativa no percentual de carga a ser atribuída às faixas de laje. Foi verificado que neste caso extremo 43% do carregamento total é atribuído à faixa de maior vão e 57% à faixa de menor vão.

#### 6.2.4.2 Momento máximo $M_{x,max}$ em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$

O momento máximo na direção de X é dado pela equação 6.29 e apresentado em função da rigidez das faixas de laje na Figura 6.33.

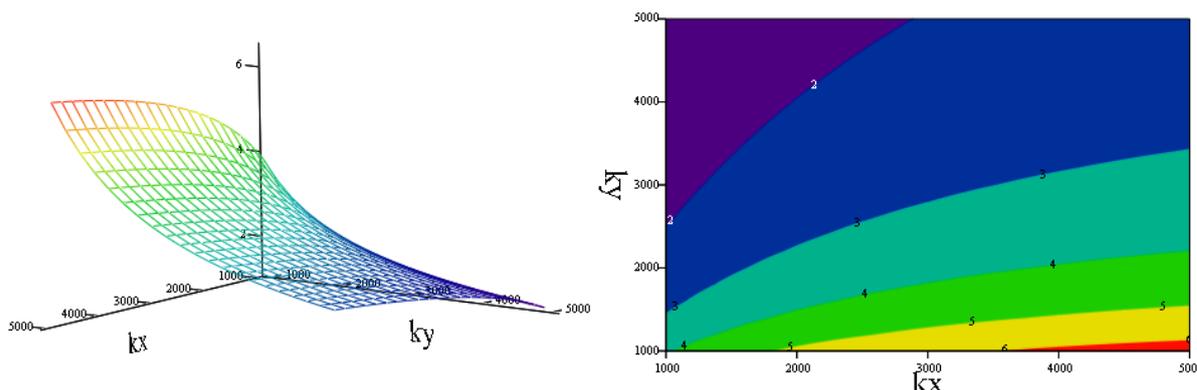


Figura 6.33 – Momento máximo positivo na direção X, medidas em kN e m.  
Condição de contorno: Laje engastada em todos os bordos com  $L_x = 2L_y$ .

De forma análoga aos itens anteriores os valores nos pontos extremos do gráfico são discretizados

- $M_{x,max}(5000,5000) = 2,35 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{x,max}(1000,1000) = 3,91 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{x,max}(1000,5000) = 1,21 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{x,max}(5000,1000) = 6,42 \text{ kN.m/m}$ .

O momento máximo considerando apoios infinitamente rígidos é de  $M_{x,max} = 0,88 \text{ kN.m/m}$ . Pode-se verificar que existe uma diferença considerável ao se comparar o valor do momento máximo com apoios infinitamente rígidos em relação ao momento máximo com apoios de rigidez elevada, sendo essa diferença de aproximadamente 2,7 vezes.

Conforme constatado em estudo, ocorre um aumento significativo na magnitude do momento positivo atuante na laje na direção do maior vão. Assim, a hipótese usualmente adotada para o dimensionamento de lajes armadas em uma direção, no qual no menor vão é dimensionado e o maior vão é utilizada armadura de distribuição pode gerar patologias estruturais a depender do grau de flexibilidade das vigas de bordo.

#### 6.2.4.3 Momento máximo $M_{y,max}$ em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$

O momento máximo na direção de Y é dado pela equação 6.30 e sua superfície de resposta pela Figura 6.34.

$$M_{y,max} = \frac{q(1 - K_x(k_x, k_y))L_y^2}{2} \left( \beta_y(k_y)^2 - \beta_y(k_y) + \frac{1}{3} \right) \quad (6.30)$$

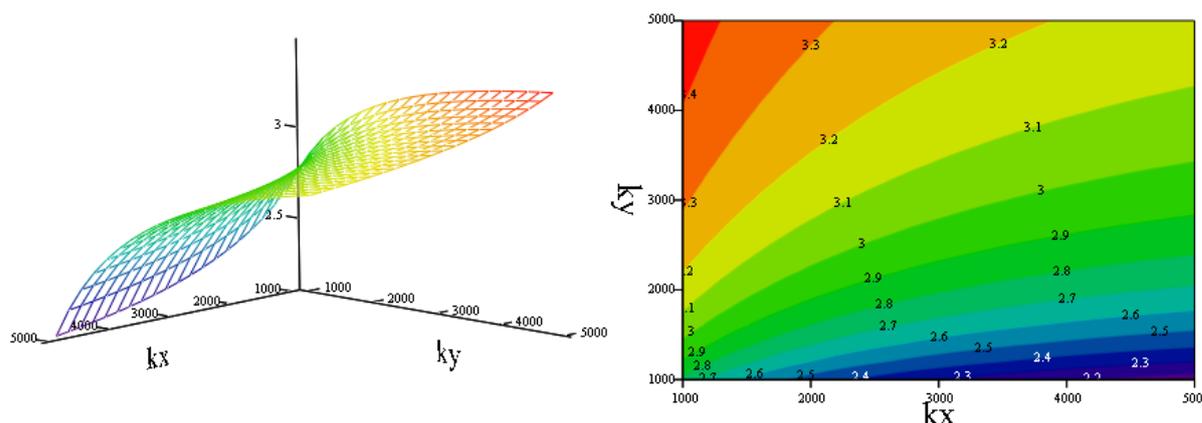


Figura 6.34 – Momento máximo positivo na direção Y, medidas em kN e m.  
Condição de contorno: Laje engastada em todos os bordos com  $L_x = 2L_y$ .

Os principais valores obtidos para o momento máximo na direção Y (maior vão) são listados

- $M_{y,max}(5000,5000) = 3,16 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{y,max}(1000,1000) = 2,77 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{y,max}(1000,5000) = 3,45 \text{ kN.m/m}$ ;
- $M_{y,max}(5000,1000) = 2,15 \text{ kN.m/m}$ .

O momento máximo considerando apoios infinitamente rígidos é de  $M_{y,max} = 3,53 \text{ kN.m/m}$ . Verifica-se que a hipótese de apoios infinitamente rígidos apresentou valor superior a todos os casos analisados. Assim, existe uma tendência, ao se utilizar a hipótese de apoios infinitamente rígidos, de superdimensionar a armadura da laje na direção do menor vão.

Pôde-se observar que caso os apoios na direção Y sejam flexíveis ocorre uma redução significativa no valor de  $M_{y,max}$ , podendo chegar a ocorrer uma redução de até 40% em uma situação extrema.

#### 6.2.4.4 Deslocamento máximo em laje engastada – Geometria da laje: $L_x = 2L_y$

Para o cálculo dos deslocamentos utilizou-se a equação 6.22 em conjunto com as variáveis relativas à condição de contorno em estudo (equação 6.23 e 6.24) resultando na Figura 6.35.

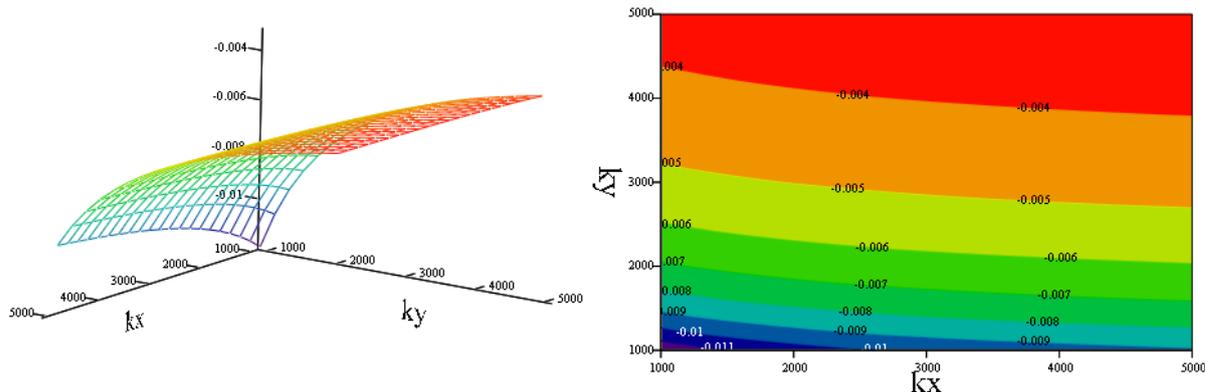


Figura 6.35 – Deslocamento máximo, medidas em kN e m. Condição de contorno:  
Laje engastada em todos os bordos com  $L_x = 2L_y$ .

Os deslocamentos máximos dados em função da rigidez das faixas de laje são apresentados

- $\Delta(5000,5000) = -0,33 \text{ cm};$
- $\Delta(1000,1000) = -1,18 \text{ cm};$
- $\Delta(1000,5000) = -0,36 \text{ cm};$
- $\Delta(5000,1000) = -0,91 \text{ cm}.$

O deslocamento máximo considerando apoios infinitamente rígidos é de  $\Delta = -0,09 \text{ cm}$ . Verifica-se que há um aumento da ordem de 3,7 vezes no deslocamento máximo da laje ao se considerar faixa de laje de elevada rigidez.

De uma forma geral há um aumento significativo em todos os casos, independente do grau de flexibilidade da faixa de laje adotada, podendo chegar a um valor 13 vezes superior ao modelo de cálculo de apoios infinitamente rígidos.

## 7 VERIFICAÇÃO DO MODELO

Para verificar os resultados obtidos com o modelo proposto é realizado um estudo comparativo utilizando o *software* SAP2000 (CSI, 2016). Nesse estudo são utilizadas lajes com apoios rígidos e flexíveis, além de geometria quadrada e retangular. São analisados os resultados para as espessuras de laje de 15, 10 e 8 centímetros. Os resultados apresentados também podem ser encontrados em Silva *et al* (2023).

### 7.1 Verificação do modelo – Laje simplesmente apoiada

Para a condição de contorno de laje simplesmente apoiada foram utilizados dois modelos no SAP2000, denominados Modelo 1 e Modelo 2, onde a diferença consiste apenas no tipo de apoio adotado. As características dos modelos adotados são descritas abaixo:

- Modelo 1: A laje é apoiada em vigas e os apoios das vigas são idealizados como apoios simples nos vértices da laje;
- Modelo 2: A laje é apoiada em vigas e os apoios das vigas são idealizados como barras de pilares (seção 30x30 e altura de 3 m) com as mesmas propriedades do concreto utilizado nos demais elementos estruturais.

Ressalta-se que em todos os casos analisados foi atribuído o carregamento uniforme de 2,5 kN/m<sup>2</sup>, sendo excluída a influência do peso próprio da estrutura. A exclusão do peso próprio foi adotada de forma a uniformizar os resultados em todos os casos, haja vista que a alteração da geometria das vigas e da espessura da laje aumenta o carregamento de peso próprio da estrutura.

#### 7.1.1 Laje quadrada e simplesmente apoiada

A laje objeto de estudo possui lados de 3 metros. O concreto utilizado tem a resistência de  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ . O cálculo do módulo de elasticidade foi obtido conforme diretrizes da NBR 6118/2023 por meio da expressão abaixo.

$$E = \alpha_e 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (7.1)$$

Para fins de estudo numérico foi adotado o valor constante de  $E = 30,672 \text{ GPa}$  para todos os elementos de concreto.

A inércia das vigas de borda foi variada, sendo utilizado neste estudo seções de 20x40 (vigas rígidas) e 10x20 (vigas flexíveis). Foram modificadas também as rigidezes à torção das vigas de bordo, sendo objeto de análise os seguintes percentuais da rigidez elástica à torção da viga de apoio: 100%, 15%, 1% e 0%.

A redução da rigidez à torção das vigas de bordo é baseada no item 14.6.6.2 da NBR 6118/2023, em que existe a previsão de se considerar um certo grau de redução da inércia à torção das vigas de bordo devido à fissuração.

Além do estudo comparativo descrito acima também foi realizada uma análise considerando a redução da rigidez à torção da laje a 15% do valor original na análise numérica, denominado modelo RIT. Para esse estudo as mesmas hipóteses de análise (redução da rigidez à torção da viga de bordo e espessura da laje) foram utilizadas. Essa análise foi adotada em função da possibilidade de formação de fissuras devido aos momentos volventes.

A redução da inércia à torção da laje foi aplicada diretamente no programa alterando-se as propriedades dos elementos de área utilizados na discretização da laje.

#### 7.1.2 Modelo 1 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 15 cm de espessura

A Figura 7.1 ilustra o modelo analisado no *software* SAP2000. As vigas foram analisadas como elementos de pórtico e a laje foi subdividida em elementos de área sendo utilizado o elemento SHELL-THIN para caracterizar esses elementos.

A ligação entre os elementos de laje e os elementos de viga foi feita pelo centroide da viga com a laje compartilhando o mesmo nó.

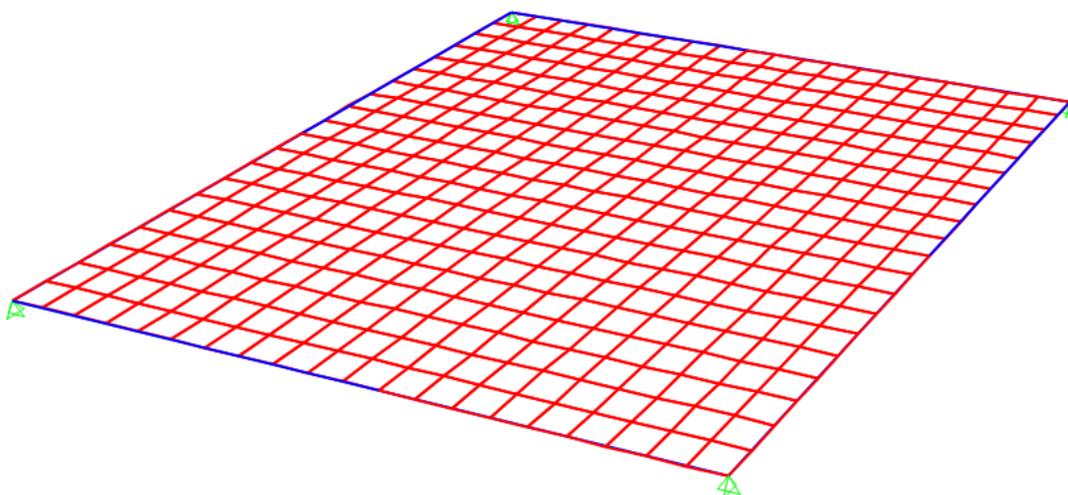


Figura 7.1 – Modelo 1 em laje quadrada e simplesmente apoiada.

Das análises efetuadas no Modelo 1 constata-se que, ao se considerar a redução da inércia à torção da viga de apoio, ocorre o aumento do momento fletor positivo da laje no modelo numérico e uma redução do momento negativo nas bordas. Esse fato é atribuído ao grau de engastamento na ligação entre a laje e a viga devido à tendência da viga de borda restringir a rotação da laje.

Considerando-se que a análise foi realizada sendo idealizado uma laje simplesmente apoiada foram apresentadas na Tabela 7.1 apenas os momentos positivos referentes à análise numérica.

Assim, quando se considera em sua totalidade a inércia à torção da viga de apoio a laje possui a tendência de se comportar como uma laje parcialmente engastada nas bordas. Ao se desconsiderar a inércia à torção das vigas de borda o comportamento da laje se aproxima de uma laje simplesmente apoiada em viga flexível.

Posto isso, os resultados obtidos com a redução da inércia à torção da viga são os que mais se aproximam da condição de contorno de laje simplesmente apoiada. Nos resultados apresentados a sigla RIT faz referência à análise com redução da inércia à torção da laje a 15% do valor total.

Ao se considerar a perda de rigidez à torção da laje (Modelo 1 – RIT) os resultados se aproximam do modelo analítico. A proximidade do resultado obtido no modelo numérico, com a redução da inércia à torção da laje, com o modelo analítico era esperada, pois o modelo analítico é desenvolvido desconsiderando-se a inércia à torção na laje.

Os deslocamentos, de forma análoga, tendem a aumentar com a redução da inércia à torção das vigas de borda, pelos motivos explicados. Verifica-se que os resultados do modelo numérico, ao se reduzir a inércia à torção da laje, ficaram mais próximos do modelo proposto.

Tabela 7.1 – Modelo 1 (15 cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo.

<b>MOMENTO POSITIVO MÁXIMO (kN.m/m) - LAJE DE 15CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 15cm	Modelo 1 - RIT Laje 15cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	1.406	1.406	1.210	1.310
	15%	1.406	1.406	1.260	1.440
	1%	1.406	1.406	1.280	1.500
	0%	1.406	1.406	1.280	1.500
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	1.406	1.406	2.480	2.560
	15%	1.406	1.406	2.480	2.570
	1%	1.406	1.406	2.480	2.550
	0%	1.406	1.406	2.480	2.550

<b>DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 15CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 15cm	Modelo 1 - RIT Laje 15cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	0.153	0.179	0.180	0.186
	15%	0.153	0.179	0.185	0.196
	1%	0.153	0.179	0.187	0.200
	0%	0.153	0.179	0.187	0.200
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	0.153	0.663	0.476	0.508
	15%	0.153	0.663	0.479	0.523
	1%	0.153	0.663	0.479	0.526
	0%	0.153	0.663	0.479	0.526

Ao se considerar que as vigas de apoio são flexíveis, pôde-se constatar que os momentos fletores possuem variação significativa entre o centro da laje e sua extremidade, conforme ilustra a Figura 7.2.

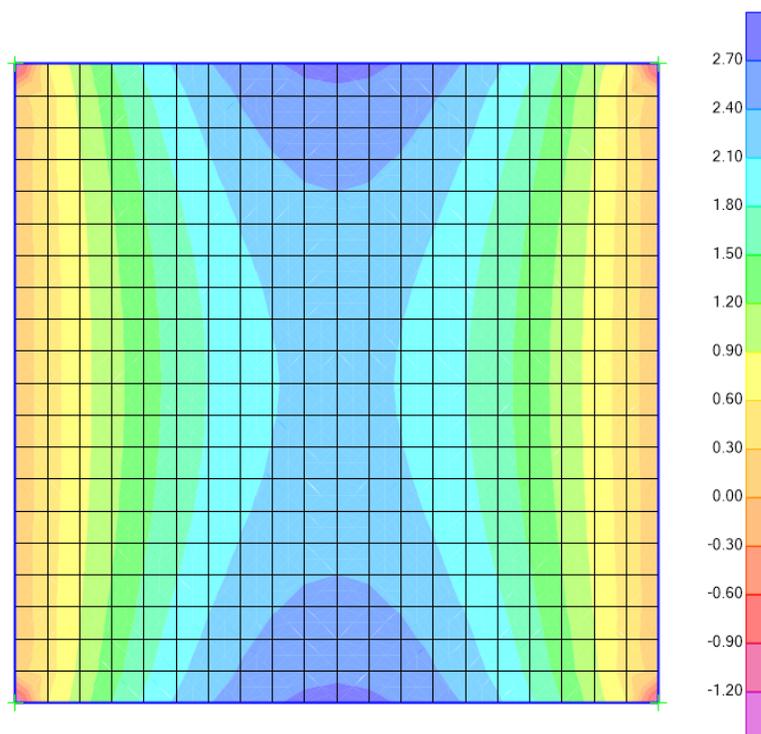


Figura 7.2 – Variação do momento positivo na direção X do Modelo 1 em laje quadrada e simplesmente apoiada com vigas flexíveis.

Assim, os resultados apresentados na análise numérica da Tabela 7.1, em relação ao caso de vigas de borda flexíveis ( $10 \times 20$ ), trazem a média entre os valores de momento fletor positivo mínimos e máximo na faixa central da laje.

Verifica-se que a diferença, em relação aos momentos positivos, entre o Modelo 1 e Modelo 1 – RIT é mínima e os valores foram superiores em aproximadamente 82% em comparação com o modelo proposto e a Teoria de Grelha nesses casos.

### 7.1.3 Modelo 2 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 15cm de espessura

A Figura 7.3 ilustra o Modelo 2 utilizado na análise numérica. A geometria e as propriedades da estrutura são as mesmas do Modelo 1. Os elementos utilizados para caracterizar os pilares foram elementos de pórtico (mesmo elemento utilizado nas vigas).

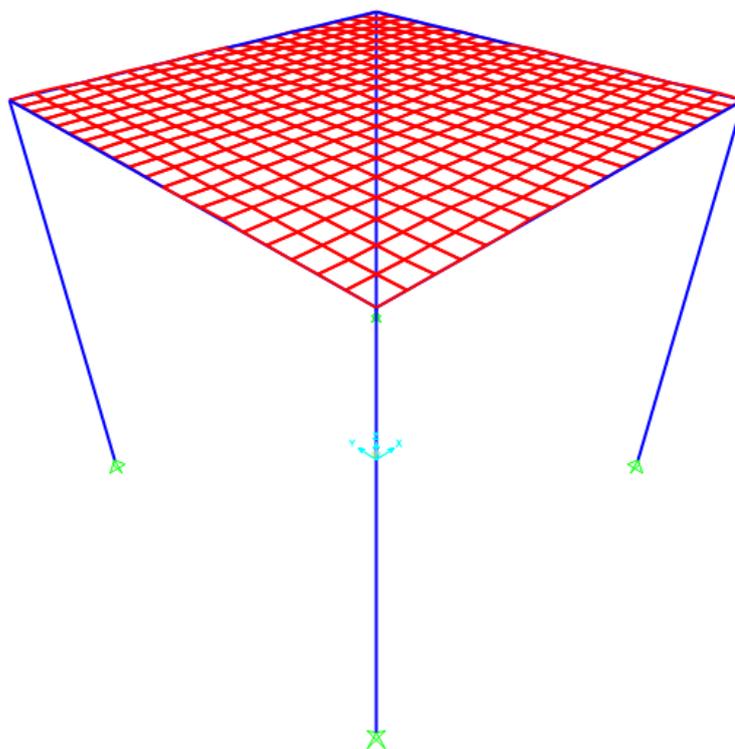


Figura 7.3 – Modelo 2 em laje quadrada simplesmente apoiada.

Ao se considerar que as vigas de apoio são flexíveis o mesmo comportamento observado na Figura 7.2 foi verificado no Modelo 2, assim, foi adotada a mesma sistemática de cálculo do momento positivo máximo, ou seja, foi utilizada a média dos valores no cálculo do momento positivo.

Os deslocamentos do Modelo 2 (Tabela 7.2), com e sem redução da inércia à torção da laje, foram bastante próximos. Contudo, o modelo proposto apresentou deslocamentos maiores que os obtidos na análise numérica. Apesar dessa diferença verifica-se que o modelo proposto configurou resposta mais coerente que a Teoria de Grelha.

Tabela 7.2 – Modelo 2 (15 cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo.

<b>MOMENTO POSITIVO MÁXIMO (kN.m/m) - LAJE DE 15CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 15cm	Modelo 2 - RIT Laje 15cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	1.406	1.406	1.040	1.170
	15%	1.406	1.406	1.150	1.410
	1%	1.406	1.406	1.180	1.510
	0%	1.406	1.406	1.190	1.520
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	1.406	1.406	1.650	1.710
	15%	1.406	1.406	1.690	1.780
	1%	1.406	1.406	1.700	1.790
	0%	1.406	1.406	1.700	1.790

<b>DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 15CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 15cm	Modelo 2 - RIT Laje 15cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	0.153	0.179	0.145	0.153
	15%	0.153	0.179	0.157	0.175
	1%	0.153	0.179	0.161	0.184
	0%	0.153	0.179	0.161	0.185
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	0.153	0.663	0.277	0.278
	15%	0.153	0.663	0.285	0.289
	1%	0.153	0.663	0.287	0.292
	0%	0.153	0.663	0.288	0.292

#### 7.1.4 Modelo 1 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 10 cm de espessura

A Tabela 7.3 indica os valores obtidos na análise da laje de 10 cm de espessura. Verifica-se que os momentos positivos foram majoritariamente inferiores à laje de espessura de 15 cm, em especial para o caso do Modelo 1 e nos casos em que há rigidez à torção nas vigas de bordo.

Os deslocamentos seguem o mesmo comportamento da laje de 15 cm de espessura, ou seja, com a redução da inércia à torção das vigas de apoio há um aumento nos deslocamentos.

Configuração semelhante à Figura 8.2 também foi observada ao se adotar vigas de apoio extremamente flexíveis. Nesses casos o critério de cálculo do momento máximo foi o mesmo utilizado para a laje de 15 cm de espessura.

Observa-se que o modelo analítico se aproximou dos resultados do Modelo 1 – RIT, em especial ao se considerar a redução da rigidez à torção da laje. Os valores obtidos no modelo numérico para a laje de espessura de 10 cm foram praticamente constantes e próximos aos do modelo analítico proposto.

Tabela 7.3 – Modelo 1 (10 cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo.

<b>MOMENTO POSITIVO MÁXIMO (kN.m/m) - LAJE DE 10CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	1.406	1.406	0.815	0.950
	15%	1.406	1.406	0.970	1.230
	1%	1.406	1.406	1.080	1.500
	0%	1.406	1.406	1.090	1.540
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	1.406	1.406	1.810	1.570
	15%	1.406	1.406	1.845	1.430
	1%	1.406	1.406	1.840	1.390
	0%	1.406	1.406	1.840	1.390

<b>DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 10CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	0.495	0.527	0.314	0.339
	15%	0.495	0.527	0.370	0.434
	1%	0.495	0.527	0.410	0.526
	0%	0.495	0.527	0.420	0.537
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	0.495	1.010	1.180	1.170
	15%	0.495	1.010	1.180	1.170
	1%	0.495	1.010	1.180	1.170
	0%	0.495	1.010	1.180	1.170

#### 7.1.5 Modelo 2 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 10 cm de espessura

A Tabela 7.4 apresenta os resultados obtidos considerando o Modelo 2 na análise numérica. Verifica-se que os valores no modelo com redução da inércia à torção da laje são os que mais se aproximam do modelo analítico.

Com relação aos deslocamentos, para o caso de vigas de borda rígida, o modelo com a redução da inércia à torção da laje foi o que mais se aproximou do modelo analítico, de forma similar aos valores obtidos no cálculo do momento máximo.

Os momentos fletores positivos no Modelo 2 foram próximos aos resultados do modelo analítico, sendo o Modelo 2 – RIT o modelo em que houve maior concordância dos resultados.

De forma análoga à laje de 15 cm de espessura os deslocamentos do Modelo 2, com e sem redução da inércia à torção da laje, foram próximos, a proposta de contribuição à Teoria de Grelha apresentou deslocamentos superiores aos da análise numérica.

Tabela 7.4 – Modelo 2 (10 cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo.

<b>MOMENTO POSITIVO MÁXIMO (kN.m/m) - LAJE DE 10CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 10cm	Modelo 2 - RIT Laje 10cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	1.406	1.406	0.730	0.870
	15%	1.406	1.406	0.910	1.200
	1%	1.406	1.406	1.040	1.500
	0%	1.406	1.406	1.060	1.540
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	1.406	1.406	1.190	1.300
	15%	1.406	1.406	1.260	1.430
	1%	1.406	1.406	1.280	1.470
	0%	1.406	1.406	1.280	1.470

<b>DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 10CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 10cm	Modelo 2 - RIT Laje 10cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	0.495	0.527	0.250	0.280
	15%	0.495	0.527	0.328	0.400
	1%	0.495	0.527	0.380	0.510
	0%	0.495	0.527	0.390	0.520
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	0.495	1.010	0.580	0.610
	15%	0.495	1.010	0.620	0.670
	1%	0.495	1.010	0.630	0.680
	0%	0.495	1.010	0.630	0.690

#### 7.1.6 Modelo 1 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 8 cm de espessura

As solicitações para a laje de 8 cm de espessura, apresentados na Tabela 7.5, foram praticamente os mesmos da laje de 10 cm de espessura, conforme pode ser verificado comparando-se a Tabela 7.4 com a Tabela 7.5. Assim, as conclusões são idênticas.

Apesar da diferença de valores, os resultados da Tabela 7.5 foram, proporcionalmente, os mesmos da laje de 10cm de espessura. Assim, as conclusões são semelhantes.

Para a situação de apoios flexíveis, verifica-se que quase não há alteração nos deslocamentos máximos no Modelo 1 (considerando ou não a inércia à torção da laje). Nesses casos a Teoria de Grelha apresentou valores bastante inferiores aos obtidos nos modelos numéricos.

Tabela 7.5 – Modelo 1 (8 cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo.

<b>MOMENTO POSITIVO MÁXIMO (kN.m/m) - LAJE DE 8CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 8cm	Modelo 1 - RIT Laje 8cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	1.406	1.406	0.680	0.810
	15%	1.406	1.406	0.830	1.070
	1%	1.406	1.406	1.020	1.480
	0%	1.406	1.406	1.040	1.550
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	1.406	1.406	1.550	1.520
	15%	1.406	1.406	1.540	1.470
	1%	1.406	1.406	1.530	1.450
	0%	1.406	1.406	1.530	1.450

<b>DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 8CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 8cm	Modelo 1 - RIT Laje 8cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	0.970	1.000	0.430	0.480
	15%	0.970	1.000	0.554	0.660
	1%	0.970	1.000	0.700	0.940
	0%	0.970	1.000	0.720	0.990
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	0.970	1.480	1.780	1.760
	15%	0.970	1.480	1.780	1.760
	1%	0.970	1.480	1.780	1.760
	0%	0.970	1.480	1.780	1.760

#### 7.1.7 Modelo 2 – Laje quadrada e simplesmente apoiada – 8 cm de espessura

Verifica-se, a partir dos dados da Tabela 7.6, que neste modelo numérico os resultados referentes ao momento positivo máximo no Modelo 2 – RIT foram semelhantes aos obtidos no Modelo 1 da laje com 8cm (Tabela 7.5) de espessura. Assim, as conclusões são as mesmas.

Os deslocamentos calculados no Modelo 2 foram inferiores aos obtidos analiticamente pelo modelo proposto. Esse resultado pode ser atribuído ao grau de engastamento proporcionado pelos apoios dos pilares.

Os valores de momento fletor positivo em laje com 8 cm de espessura foram mais próximos aos resultados do modelo analítico, sendo o Modelo 2 - RIT o modelo em que houve maior concordância dos resultados.

Tabela 7.6 – Modelo 2 (8 cm espessura): Momento máximo e deslocamento máximo.

<b>MOMENTO POSITIVO MÁXIMO (kN.m/m) - LAJE DE 8CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 8cm	Modelo 2 - RIT Laje 8cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	1.406	1.406	0.620	0.760
	15%	1.406	1.406	0.800	1.040
	1%	1.406	1.406	1.000	1.470
	0%	1.406	1.406	1.030	1.550
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	1.406	1.406	1.020	1.200
	15%	1.406	1.406	1.140	1.440
	1%	1.406	1.406	1.170	1.500
	0%	1.406	1.406	1.170	1.500

<b>DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 8CM</b>					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 8cm	Modelo 2 - RIT Laje 8cm
<b>VIGA DE 20X40</b>	100%	0.970	1.000	0.360	0.400
	15%	0.970	1.000	0.500	0.610
	1%	0.970	1.000	0.680	0.920
	0%	0.970	1.000	0.680	0.970
<b>VIGA DE 10X20</b>	100%	0.970	1.480	0.850	0.930
	15%	0.970	1.480	0.950	1.100
	1%	0.970	1.480	0.980	1.150
	0%	0.970	1.480	0.980	1.160

#### 7.1.8 Calibragem do modelo proposto

O cálculo do coeficiente de rigidez pelo modelo proposto é baseado nas condições de contorno das vigas de apoio. Assim, a depender do grau de engastamento e do tipo de distribuição de carga da viga de borda há alteração dos resultados.

A Figura 7.4 ilustra as situações que serão utilizadas como padrão para o cálculo do coeficiente de rigidez.

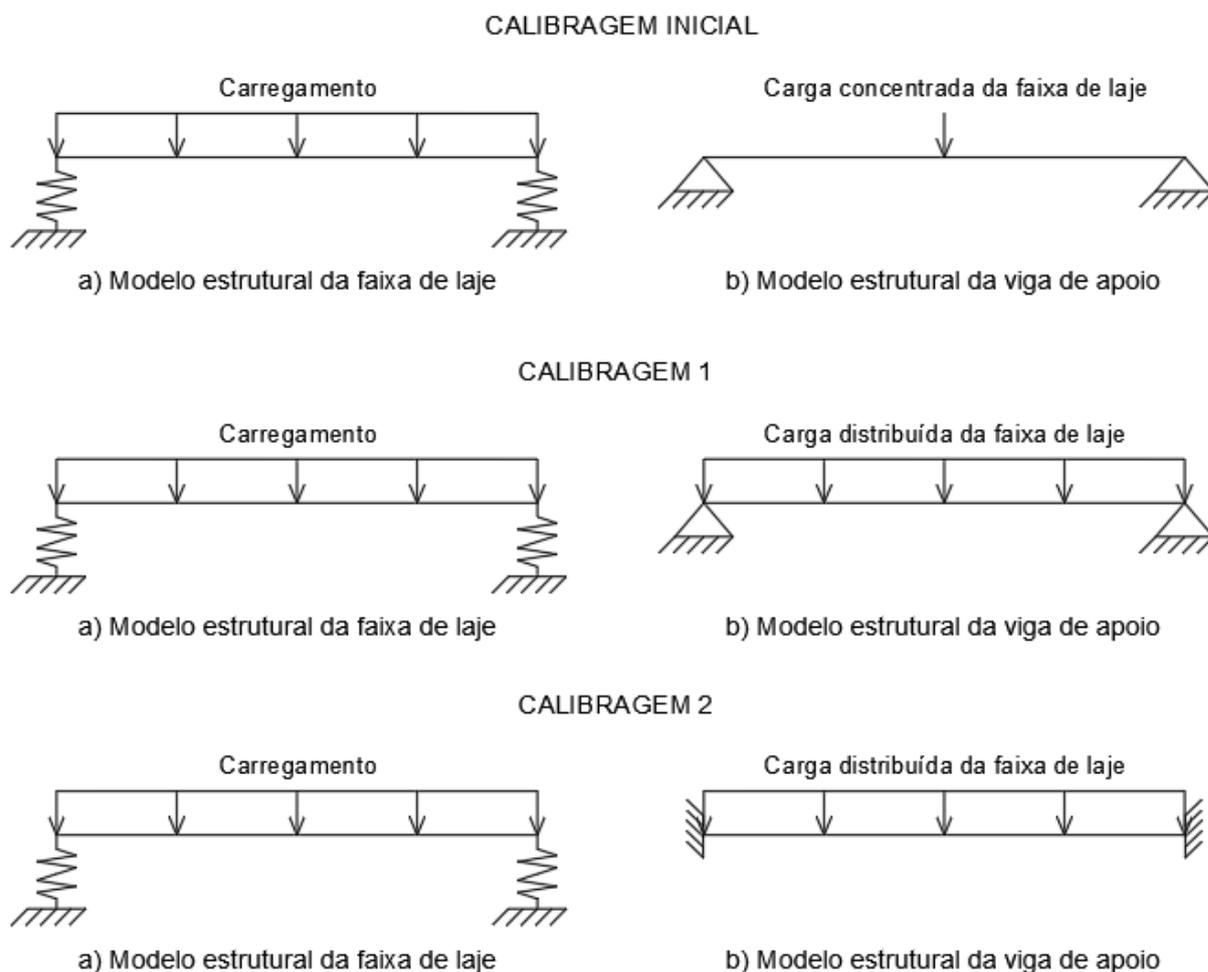


Figura 7.4 – Calibrações para o cálculo do coeficiente de rigidez sugeridas para o modelo proposto.

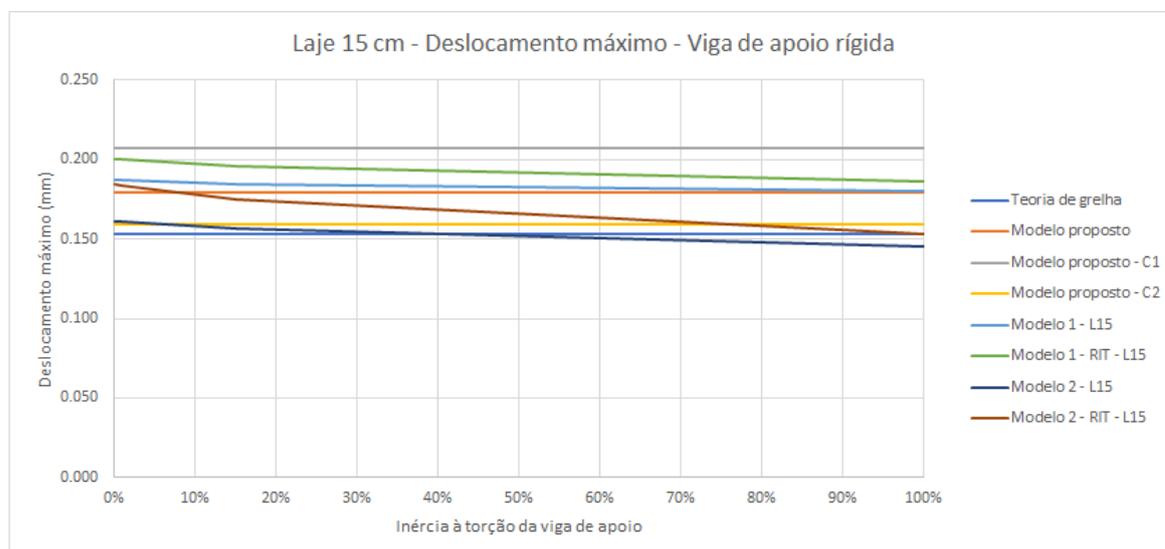
Devido à condição de laje simplesmente apoiada com geometria simétrica, mudanças no coeficiente de rigidez dos apoios no modelo proposto não alteram as solicitações.

Assim, nos itens que se seguem são apresentados apenas os resultados relativos aos deslocamentos.

#### 7.1.9 Calibragem do modelo proposto – Laje de 15 cm de espessura

Utilizando-se os valores de deslocamento indicados nos modelos estruturais da Figura 7.4 para o cálculo do coeficiente de apoio elástico do modelo proposto obtém-se os deslocamentos da Figura 7.5.

Verifica-se que, para a situação de viga de borda rígida, os resultados da Calibragem 1 foram os mais próximos do Modelo 1, Modelo 1 – RIT e Modelo 2 – RIT, enquanto a Calibragem 2 se aproximou mais do Modelo 2.



DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 15CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 15cm	Modelo 1 - RIT Laje 15cm	Modelo 2 Laje 15cm	Modelo 2 - RIT Laje 15cm
VIGA DE 20X40	100%	0.153	0.179	0.207	0.159	0.180	0.186	0.145	0.153
	15%	0.153	0.179	0.207	0.159	0.185	0.196	0.157	0.175
	1%	0.153	0.179	0.207	0.159	0.187	0.200	0.161	0.184
	0%	0.153	0.179	0.207	0.159	0.187	0.200	0.161	0.185

Figura 7.5 – Viga de borda rígida (20x40): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 15cm de espessura.

A Figura 7.6 ilustra os valores obtidos no cálculo dos deslocamentos ao se considerar vigas de borda flexíveis. A Calibragem inicial do modelo proposto se aproximou dos resultados do Modelo 1– RIT, enquanto a Calibragem 2 se aproximou dos resultados obtidos no Modelo 2 e Modelo 2 – RIT.

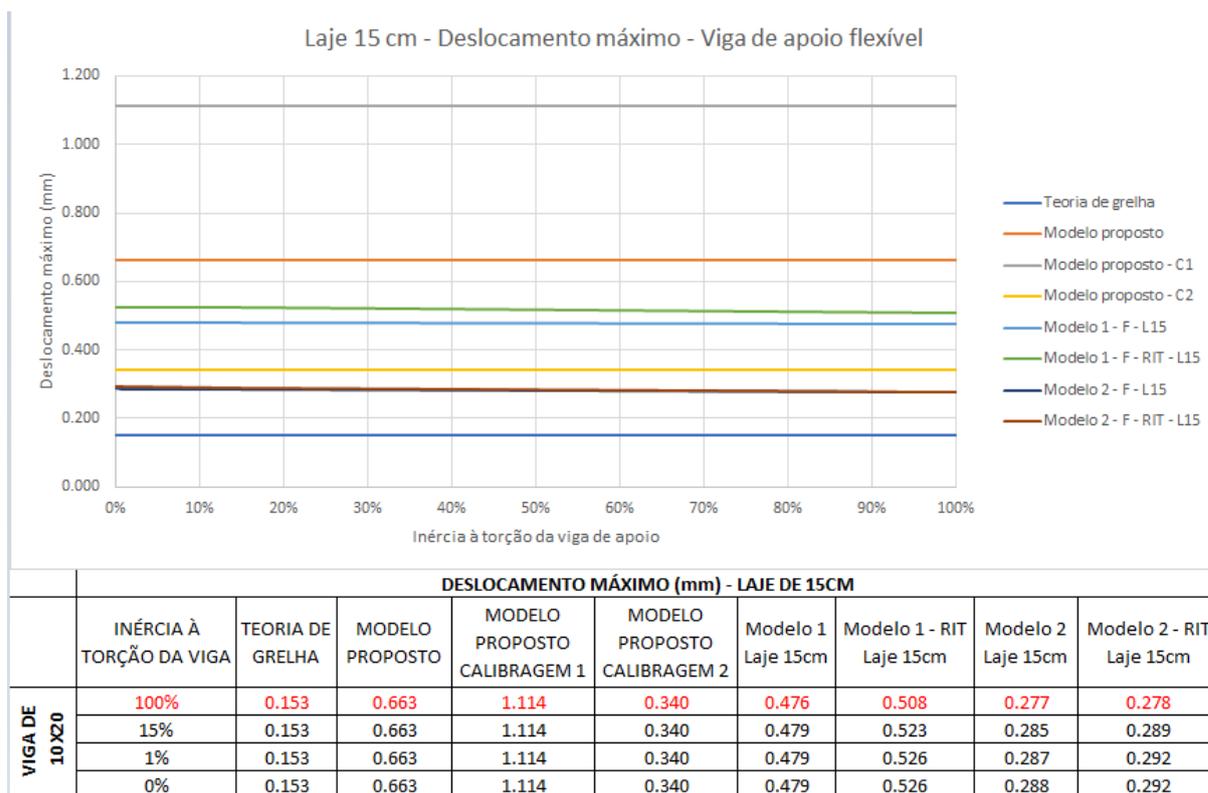
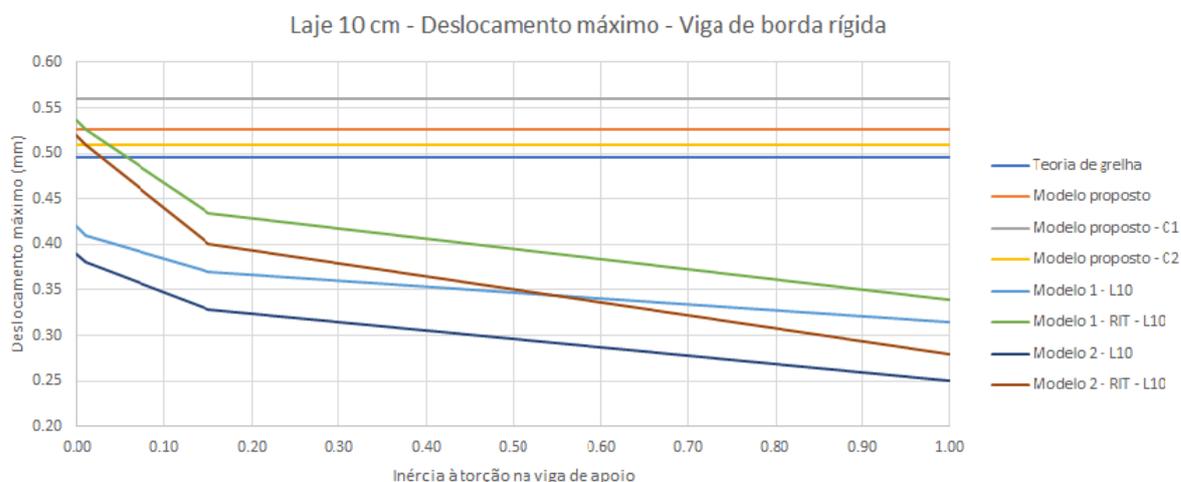


Figura 7.6 – Viga de borda flexível (10x20): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 15cm de espessura.

#### 7.1.10 Calibragem do modelo proposto – Laje de 10 cm de espessura

A Figura 7.7 apresenta o resumo dos deslocamentos máximos considerando a calibragem do modelo proposto. Verifica-se que os valores obtidos nas calibrações tiveram pouca variação e foram próximos aos valores obtidos nos modelos com redução da inércia à torção da laje.



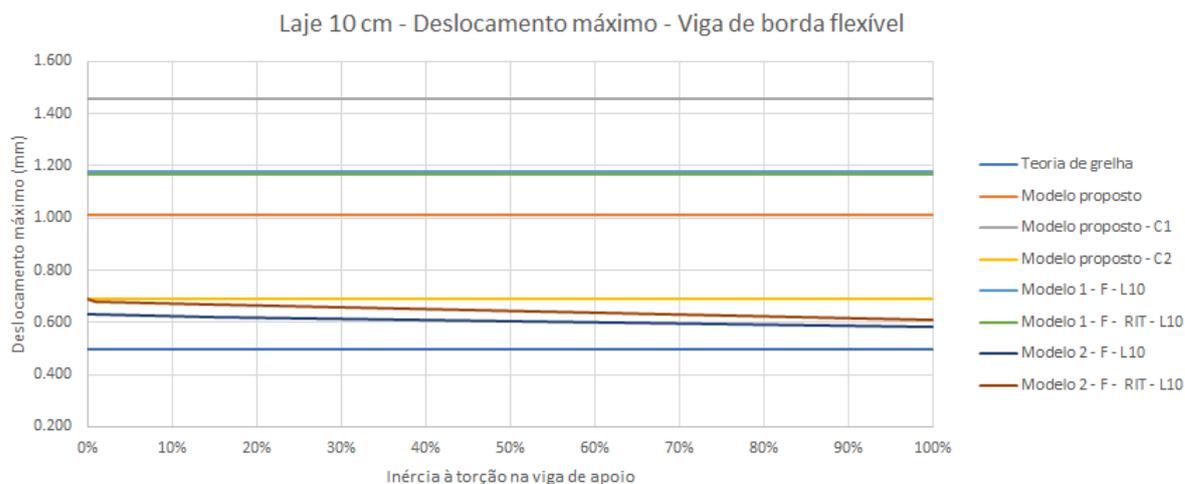
DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 10CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm	Modelo 2 Laje 10cm	Modelo 2 - RIT Laje 10cm
VIGA DE 20 X40	100%	0.495	0.527	0.560	0.510	0.314	0.339	0.250	0.280
	15%	0.495	0.527	0.560	0.510	0.370	0.434	0.328	0.400
	1%	0.495	0.527	0.560	0.510	0.410	0.526	0.380	0.510
	0%	0.495	0.527	0.560	0.510	0.420	0.537	0.390	0.520

Figura 7.7 – Viga de borda rígida (20x40): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 10 cm de espessura.

A Figura 7.8 apresenta os valores dos deslocamentos com vigas de borda flexíveis. Verifica-se que a calibragem inicial se aproximou do Modelo 1 e Modelo 1 – RIT enquanto a calibragem 2 se aproximou do Modelo 2 e Modelo 2 – RIT.

Pôde-se constatar que a calibragem 2 (viga de borda biengastada) gera resultados mais próximos do Modelo 2. Isso se deve ao fato da condição de viga de borda biengastada conseguir representar de forma mais precisa o efeito da rigidez dos pilares nos deslocamentos das vigas de borda.

De uma forma geral a contribuição à Teoria de Grelha desenvolvida nesta tese apresenta precisão nos resultados para os casos em que a inércia das vigas de bordo é baixa.



DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 10CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm	Modelo 2 Laje 10cm	Modelo 2 - RIT Laje 10cm
VIGA DE 10X20	100%	0.495	1.010	1.460	0.690	1.180	1.170	0.580	0.610
	15%	0.495	1.010	1.460	0.690	1.180	1.170	0.620	0.670
	1%	0.495	1.010	1.460	0.690	1.180	1.170	0.630	0.680
	0%	0.495	1.010	1.460	0.690	1.180	1.170	0.630	0.690

Figura 7.8 – Viga de borda flexível (10x20): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 10cm de espessura.

#### 7.1.11 Calibragem do modelo proposto – Laje de 8 cm de espessura

A Figura 7.9 ilustra os valores obtidos na análise com o modelo proposto calibrado. Verifica-se que quase não há diferença na resposta em função das calibrações utilizadas. Os valores obtidos se aproximam dos modelos com redução da inércia à torção da laje.

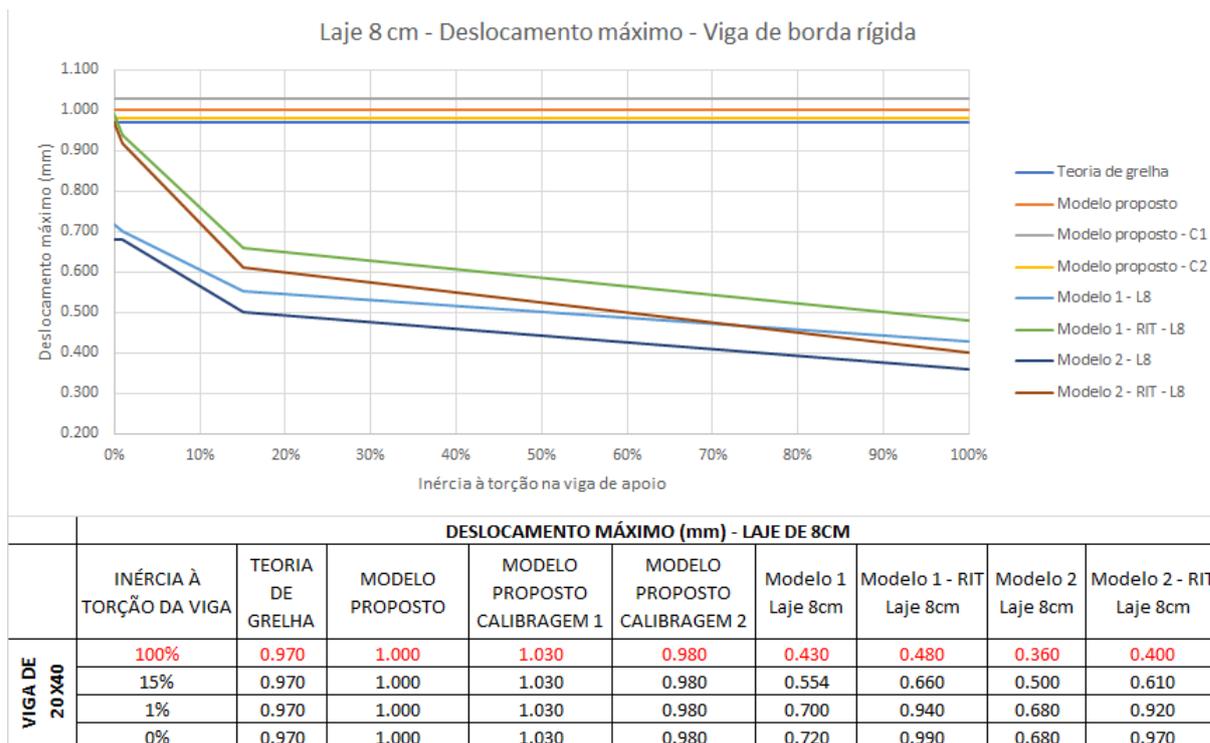


Figura 7.9 – Viga de borda rígida (20x40): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 8 cm de espessura.

Para a situação de borda flexível (Figura 7.10) pode-se constatar que a calibragem 2 (viga de borda biengastada) gera resultados mais próximos do Modelo 2 (com e sem redução da inércia à torção da laje), o Modelo 1 (com e sem redução da inércia à torção da laje) forneceu resultados mais próximos da calibragem 1.

Assim, verifica-se que o tipo de deslocamento adotado para o cálculo do coeficiente de rigidez influencia significativamente o resultado.

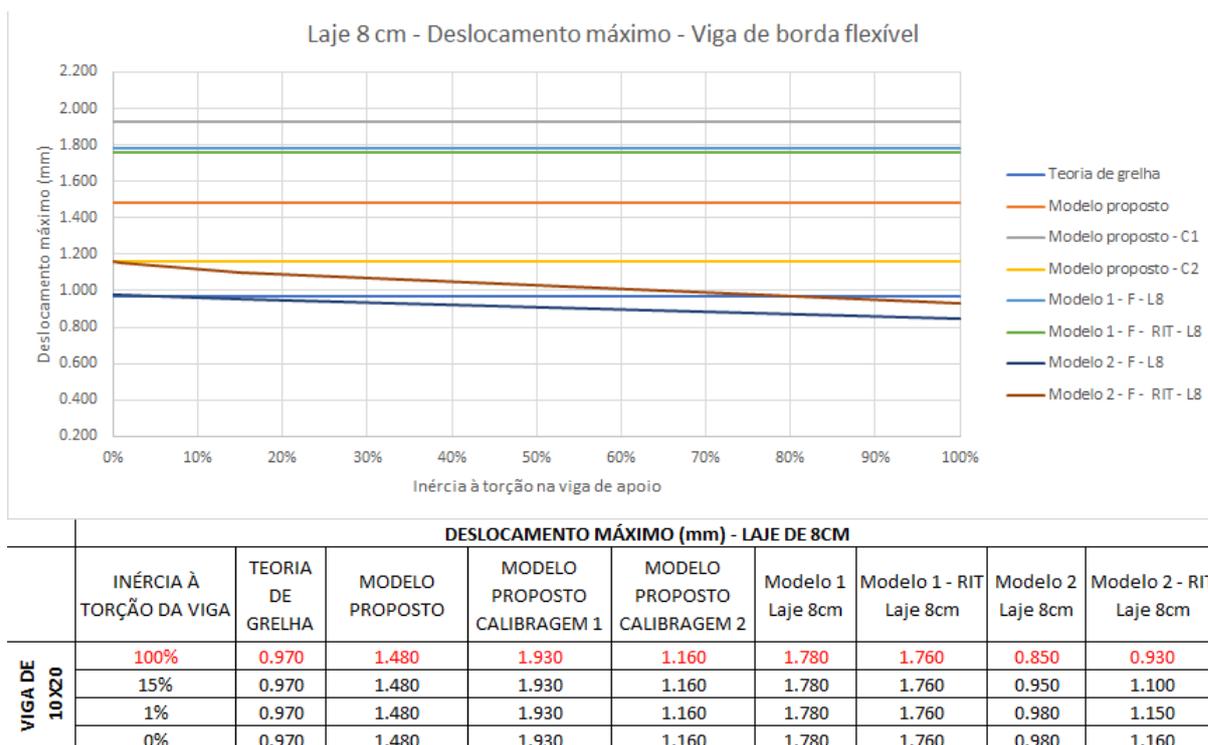


Figura 7.10 – Viga de borda flexível (10x20): Deslocamento máximo considerando a calibragem do modelo proposto. Laje de 8 cm de espessura.

## 7.2 Verificação do modelo: Laje retangular e simplesmente apoiada

Para a análise da laje retangular foram utilizadas as mesmas premissas do item 7.1.1 alterando-se apenas a geometria e a inércia das vigas de maior vão. Foi utilizado neste estudo seções de 20x80 para a viga de maior vão e de 20x40 para o menor vão, consideradas vigas rígidas.

Na redução da inércia das vigas foi utilizada a seção de 10x40 para a viga de maior vão e 10x20 para a viga de menor vão, consideradas vigas flexíveis. A laje possui lados de 3 e 6 metros.

### 7.2.1 Modelo 1 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 15 cm de espessura

A Figura 7.11 ilustra o Modelo 1 utilizado na análise numérica. Os elementos utilizados na análise numérica foram os mesmos do item 7.1.2.

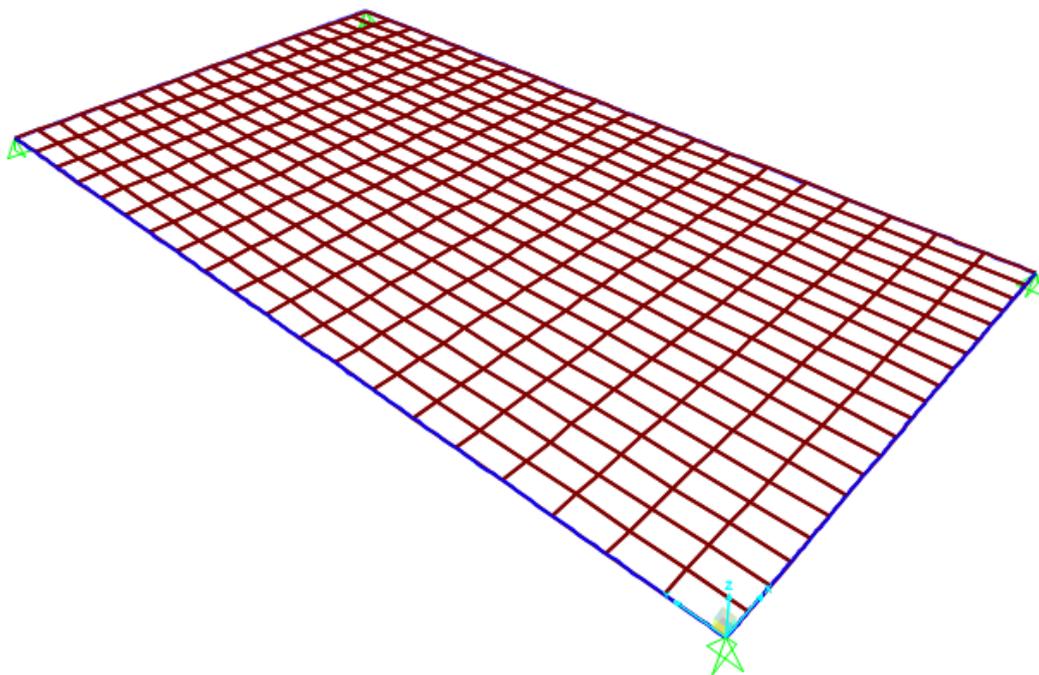


Figura 7.11 – Modelo 1 em laje retangular.

A Tabela 7.7 apresenta os resultados obtidos para o momento positivo máximo nas direções X (menor vão) e Y (maior vão), além do deslocamento máximo. Verifica-se que, com a calibragem inicial, apenas o momento na direção X apresentou valores próximos do modelo analítico.

Em relação à condição de contorno de vigas de apoio flexíveis, foi verificada a mesma configuração de variação do momento positivo da Figura 7.2, assim, foi adotado para o cálculo do momento positivo o mesmo critério dos itens anteriores.

Com a consideração de apoios flexíveis, o modelo proposto indicou um aumento expressivo na direção do maior vão (eixo Y) de forma semelhante ao modelo numérico, mas em uma magnitude inferior ao obtido numericamente.

Verifica-se que os resultados da análise numérica foram praticamente constantes em relação à condição de inércia à torção das vigas de apoio, em especial para as condições de vigas flexíveis.

Tabela 7.7 – Modelo 1 em laje retangular (15cm espessura): Momento positivo e deslocamento máximo.

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM X (kN.m/m) - LAJE DE 15CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 15cm	Modelo 1 - RIT Laje 15cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	2.647	2.618	2.040	2.200
	15%	2.647	2.618	2.250	2.550
	1%	2.647	2.618	2.320	2.710
	0%	2.647	2.618	2.320	2.720
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	2.647	2.351	2.770	3.130
	15%	2.647	2.351	2.750	3.200
	1%	2.647	2.351	2.750	4.710
	0%	2.647	2.351	2.750	4.710

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM Y (kN.m/m) - LAJE DE 15CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 15cm	Modelo 1 - RIT Laje 15cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.662	0.777	1.090	1.150
	15%	0.662	0.777	1.190	1.310
	1%	0.662	0.777	1.220	1.370
	0%	0.662	0.777	1.220	1.360
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.662	1.844	5.020	4.760
	15%	0.662	1.844	5.000	4.725
	1%	0.662	1.844	5.000	4.710
	0%	0.662	1.844	5.000	4.710

DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 15CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 15cm	Modelo 1 - RIT Laje 15cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.276	0.333	0.418	0.430
	15%	0.276	0.333	0.442	0.470
	1%	0.276	0.333	0.451	0.486
	0%	0.276	0.333	0.452	0.487
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.276	1.180	2.280	2.280
	15%	0.276	1.180	2.280	2.290
	1%	0.276	1.180	2.280	2.290
	0%	0.276	1.180	2.280	2.290

### 7.2.2 Modelo 1 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 10 cm de espessura

A Tabela 7.8 ilustra os resultados obtidos para a laje de 10cm de espessura. Verifica-se que nos modelos numéricos há pouca variação no momento positivo na maior direção no caso de vigas de apoio rígidas.

O Modelo 1 – RIT apresentou aumento significativo no momento fletor positivo para o caso de baixa inércia à torção das vigas de apoio, ou seja, no caso idealizado de laje simplesmente apoiada.

Pôde-se constatar que quase não há alteração nas solicitações dos modelos numéricos, em função da redução da inércia à torção das vigas de apoio, ao se considerar a baixa rigidez das vigas de apoio.

Tabela 7.8 – Modelo 1 (10cm espessura) em laje retangular: Momento positivo e deslocamento máximo.

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM X (kN.m/m) - LAJE DE 10CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm
VIGAS DE ELERVADA RIGIDEZ	100%	2.647	2.638	1.540	1.670
	15%	2.647	2.638	1.960	2.280
	1%	2.647	2.638	2.250	2.770
	0%	2.647	2.638	2.280	2.830
VIGAS DE BAIKA RIGIDEZ	100%	2.647	2.527	2.530	2.330
	15%	2.647	2.527	2.520	2.280
	1%	2.647	2.527	2.520	2.480
	0%	2.647	2.527	2.520	2.490

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM Y (kN.m/m) - LAJE DE 10CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm
VIGAS DE ELERVADA RIGIDEZ	100%	0.662	0.697	0.620	0.690
	15%	0.662	0.697	0.820	0.940
	1%	0.662	0.697	0.930	1.160
	0%	0.662	0.697	0.940	1.190
VIGAS DE BAIKA RIGIDEZ	100%	0.662	1.140	2.530	2.510
	15%	0.662	1.140	2.520	2.490
	1%	0.662	1.140	2.520	2.480
	0%	0.662	1.140	2.520	2.490

DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 10CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm
VIGAS DE ELERVADA RIGIDEZ	100%	0.932	0.989	0.687	0.719
	15%	0.932	0.989	0.869	0.966
	1%	0.932	0.989	0.991	1.150
	0%	0.932	0.989	1.000	1.180
VIGAS DE BAIKA RIGIDEZ	100%	0.932	1.820	3.720	3.710
	15%	0.932	1.820	3.710	3.700
	1%	0.932	1.820	3.710	3.690
	0%	0.932	1.820	3.710	3.690

## 7.2.3 Modelo 1 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 8 cm de espessura

A Tabela 7.9 ilustra os resultados obtidos para a laje de 8cm de espessura. Verifica-se que o Modelo 1 – RIT foi o que apresentou maior magnitude de momento fletor positivo e deslocamento para a condição de baixa inércia à torção das vigas de apoio. Verifica-se que com a redução da rigidez das vigas de apoio os resultados foram praticamente constantes.

Tabela 7.9 – Modelo 1 (8cm espessura) em laje retangular: Momento positivo e deslocamento máximo.

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM X (kN.m/m) - LAJE DE 8CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 8cm	Modelo 1 - RIT Laje 8cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	2.647	2.643	1.310	1.420
	15%	2.647	2.643	1.730	2.000
	1%	2.647	2.643	2.200	2.740
	0%	2.647	2.643	2.310	2.860
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	2.647	2.581	2.310	2.400
	15%	2.647	2.581	2.350	2.500
	1%	2.647	2.581	2.360	2.530
	0%	2.647	2.581	2.350	2.530

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM Y (kN.m/m) - LAJE DE 8CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 8cm	Modelo 1 - RIT Laje 8cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.659	0.680	0.500	0.560
	15%	0.659	0.680	0.680	0.790
	1%	0.659	0.680	0.870	1.100
	0%	0.659	0.680	0.900	1.160
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.659	0.927	1.720	1.760
	15%	0.659	0.927	1.740	1.810
	1%	0.659	0.927	1.750	1.820
	0%	0.659	0.927	1.750	1.820

DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 8CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 1 Laje 8cm	Modelo 1 - RIT Laje 8cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	1.820	1.880	0.931	0.979
	15%	1.820	1.880	1.300	1.440
	1%	1.820	1.880	1.690	2.030
	0%	1.820	1.880	1.740	2.120
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	1.820	2.720	4.710	4.760
	15%	1.820	2.720	4.740	4.820
	1%	1.820	2.720	4.750	4.840
	0%	1.820	2.720	4.750	4.840

#### 7.2.4 Modelo 2 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 15 cm de espessura

Seguindo a mesma sistemática das análises anteriores a Figura 7.12 ilustra o modelo adotado como base na análise numérica. Os elementos utilizados foram os mesmos do Modelo 2 da laje quadrada, alterando-se apenas a geometria da laje.

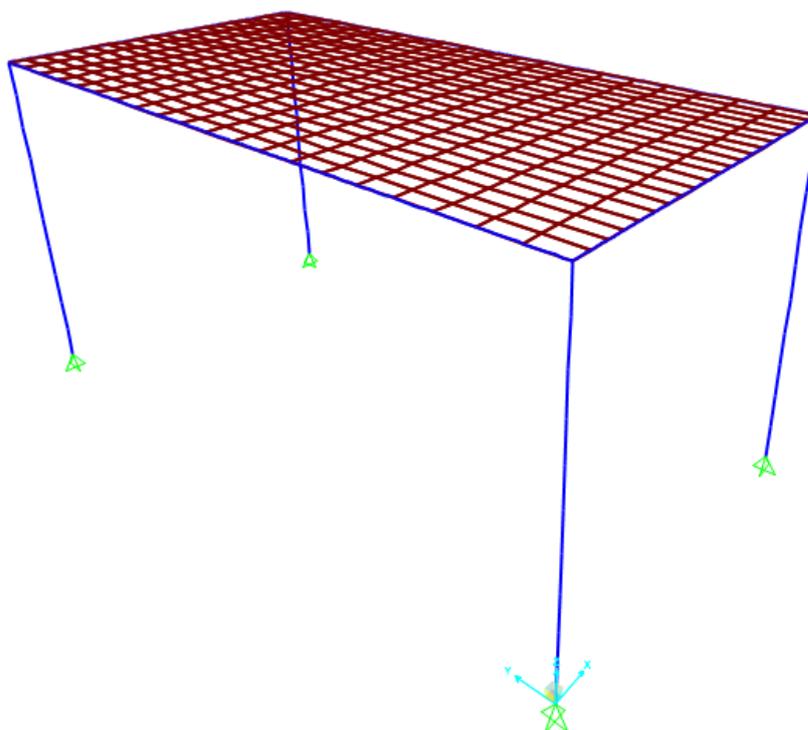


Figura 7.12 – Modelo 2 em laje retangular.

A Tabela 7.10 expressa os resultados das solicitações e deslocamentos da análise numérica. Verifica-se que os resultados da análise numérica referentes aos deslocamentos com vigas de apoio flexíveis apresentaram maior proximidade com modelo proposto.

Tabela 7.10 – Modelo 2 (15cm espessura) em laje retangular: Momento positivo e deslocamento máximo.

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM X (kN.m/m) - LAJE DE 15CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 15cm	Modelo 2 - RIT Laje 15cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	2.647	2.618	1.890	2.080
	15%	2.647	2.618	2.180	2.550
	1%	2.647	2.618	2.280	2.730
	0%	2.647	2.618	2.290	2.730
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	2.647	2.351	2.110	2.200
	15%	2.647	2.351	2.120	2.280
	1%	2.647	2.351	2.190	2.300
	0%	2.647	2.351	2.190	2.300

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM Y (kN.m/m) - LAJE DE 15CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 15cm	Modelo 2 - RIT Laje 15cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.662	0.777	1.030	1.100
	15%	0.662	0.777	1.150	1.290
	1%	0.662	0.777	1.180	1.340
	0%	0.662	0.777	1.190	1.340
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.662	1.844	3.040	2.920
	15%	0.662	1.844	3.040	2.880
	1%	0.662	1.844	3.040	2.870
	0%	0.662	1.844	3.040	2.870

DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 15CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 15cm	Modelo 2 - RIT Laje 15cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.276	0.333	0.381	0.396
	15%	0.276	0.333	0.416	0.450
	1%	0.276	0.333	0.428	0.469
	0%	0.276	0.333	0.429	0.469
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.276	1.180	1.190	1.200
	15%	0.276	1.180	1.200	1.210
	1%	0.276	1.180	1.210	1.210
	0%	0.276	1.180	1.210	1.210

#### 7.2.5 Modelo 2 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 10 cm de espessura

Seguindo a mesma sistemática do item anterior a Tabela 7.11 apresenta os resultados da laje de 10cm de espessura. Observa-se também neste caso que os deslocamentos do modelo proposto foram mais próximos da análise numérica.

Tabela 7.11 – Modelo 2 (10cm espessura) em laje retangular: Momento positivo e deslocamento máximo.

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM X (kN.m/m) - LAJE DE 10CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 10cm	Modelo 2 - RIT Laje 10cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	2.647	2.638	1.420	1.570
	15%	2.647	2.638	1.910	2.250
	1%	2.647	2.638	2.230	2.780
	0%	2.647	2.638	2.270	2.840
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	2.647	2.527	2.070	2.300
	15%	2.647	2.527	2.200	2.490
	1%	2.647	2.527	2.230	2.530
	0%	2.647	2.527	2.230	2.540

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM Y (kN.m/m) - LAJE DE 10CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 10cm	Modelo 2 - RIT Laje 10cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.662	0.697	0.590	0.660
	15%	0.662	0.697	0.810	0.930
	1%	0.662	0.697	0.920	1.160
	0%	0.662	0.697	0.940	1.190
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.662	1.140	1.600	1.660
	15%	0.662	1.140	1.620	1.670
	1%	0.662	1.140	1.620	1.660
	0%	0.662	1.140	1.620	1.660

DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 10CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 10cm	Modelo 2 - RIT Laje 10cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.932	0.989	0.619	0.652
	15%	0.932	0.989	0.828	0.932
	1%	0.932	0.989	0.963	1.140
	0%	0.932	0.989	0.977	1.170
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.932	1.820	1.890	1.960
	15%	0.932	1.820	1.950	2.050
	1%	0.932	1.820	1.960	2.070
	0%	0.932	1.820	1.960	2.070

#### 7.2.6 Modelo 2 – Laje retangular e simplesmente apoiada – 8 cm de espessura

De forma análoga aos itens anteriores a Tabela 7.12 ilustra os resultados obtidos na análise para a laje de 8cm de espessura. Verifica-se que, além da

proximidade com os deslocamentos, o momento na direção do menor vão (eixo X) do modelo proposto foi próximo ao resultado da análise numérica.

Tabela 7.12 – Modelo 2 (8cm espessura) em laje retangular: Momento positivo e deslocamento máximo.

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM X (kN.m/m) - LAJE DE 8CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 8cm	Modelo 2 - RIT Laje 8cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	2.647	2.643	1.230	1.340
	15%	2.647	2.643	1.690	1.970
	1%	2.647	2.643	2.190	2.750
	0%	2.647	2.643	2.260	2.860
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	2.647	2.581	1.940	2.220
	15%	2.647	2.581	2.190	2.600
	1%	2.647	2.581	2.240	2.690
	0%	2.647	2.581	2.250	2.690

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM Y (kN.m/m) - LAJE DE 8CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 8cm	Modelo 2 - RIT Laje 8cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.659	0.680	0.480	0.540
	15%	0.659	0.680	0.670	0.780
	1%	0.659	0.680	0.870	1.110
	0%	0.659	0.680	0.900	1.160
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.659	0.927	1.170	1.270
	15%	0.659	0.927	1.240	1.350
	1%	0.659	0.927	1.250	1.360
	0%	0.659	0.927	1.250	1.360

DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 8CM					
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	Modelo 2 Laje 8cm	Modelo 2 - RIT Laje 8cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	1.820	1.880	0.845	0.895
	15%	1.820	1.880	1.240	1.400
	1%	1.820	1.880	1.660	2.010
	0%	1.820	1.880	1.710	2.100
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	1.820	2.720	2.510	2.670
	15%	1.820	2.720	2.710	2.970
	1%	1.820	2.720	2.760	3.040
	0%	1.820	2.720	2.760	3.040

### 7.2.7 Calibragem do modelo proposto – Laje retangular de 15 cm de espessura

Utilizando-se para o cálculo da rigidez do apoio elástico os deslocamentos previstos nos casos apresentados na Figura 7.3, obtém-se os valores para os casos analisados, conforme ilustra a Figura 7.13.

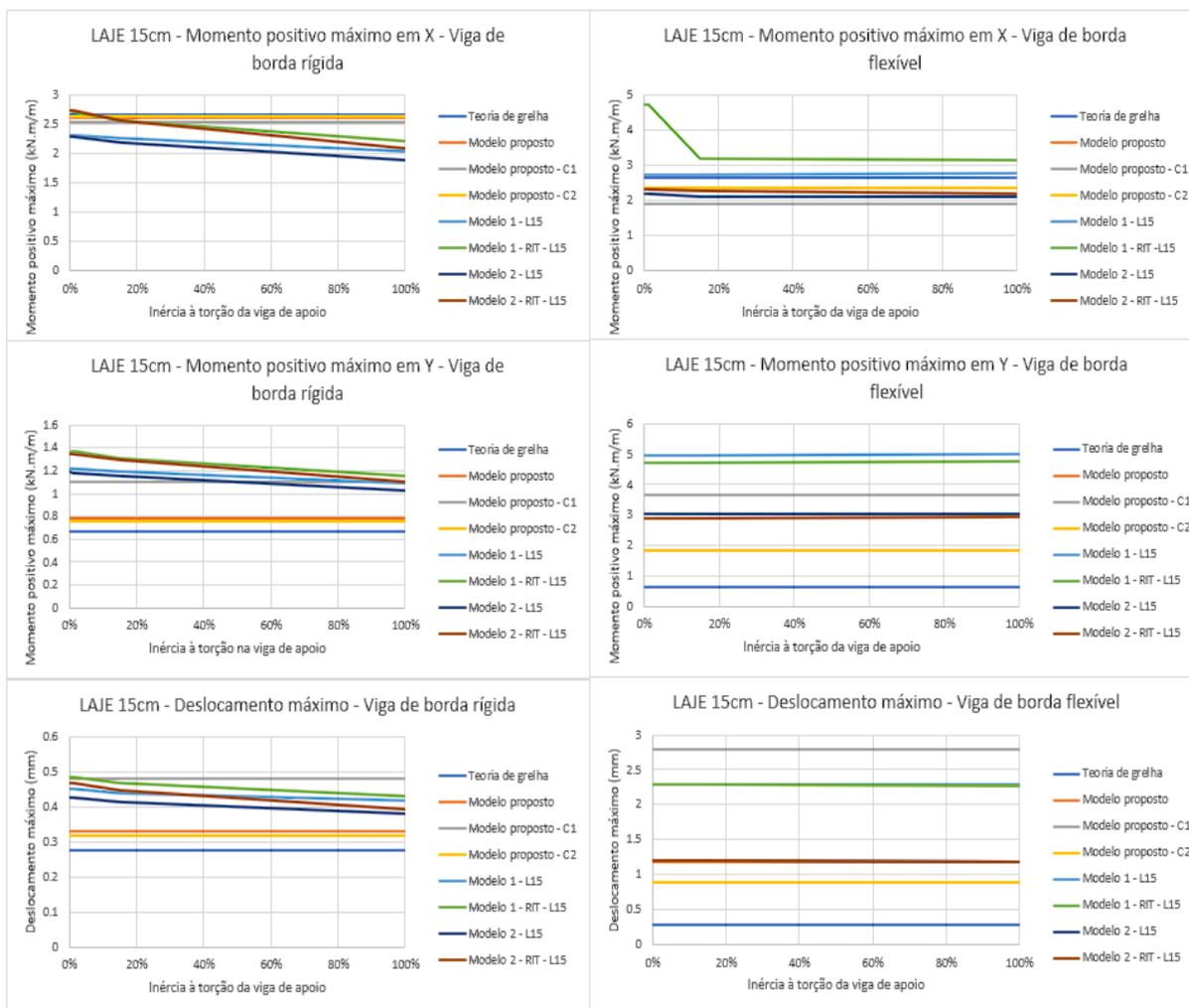


Figura 7.13 – Resultados do Modelo proposto calibrado: Momento positivo e deslocamento máximo em laje de 15 cm de espessura.

A Tabela 7.13 apresenta os valores, associados aos gráficos da Figura 7.13, das solicitações e deslocamentos. Pôde-se constatar que os momentos positivos, do modelo numérico, na direção do maior vão (eixo Y) forneceram resultados bastante diferentes em relação ao cálculo analítico.

Em relação aos deslocamentos, o modelo proposto com a calibragem inicial forneceu resultados próximos aos do Modelo 2.

Tabela 7.13 – Laje retangular (15cm espessura): Modelo proposto calibrado –  
Momento positivo e deslocamento máximo.

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM X (kN.m/m) - LAJE DE 15CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 15cm	Modelo 2 Laje 15cm	Modelo 1 - RIT Laje 15cm	Modelo 2 - RIT Laje 15cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	2.647	2.618	2.537	2.623	2.040	1.890	2.200	2.080
	15%	2.647	2.618	2.537	2.623	2.250	2.180	2.550	2.550
	1%	2.647	2.618	2.537	2.623	2.320	2.280	2.710	2.730
	0%	2.647	2.618	2.537	2.623	2.320	2.290	2.720	2.730
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	2.647	2.351	1.893	2.353	2.770	2.110	3.130	2.200
	15%	2.647	2.351	1.893	2.353	2.750	2.120	3.200	2.280
	1%	2.647	2.351	1.893	2.353	2.750	2.190	4.710	2.300
	0%	2.647	2.351	1.893	2.353	2.750	2.190	4.710	2.300

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM Y (kN.m/m) - LAJE DE 15CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 15cm	Modelo 2 Laje 15cm	Modelo 1 - RIT Laje 15cm	Modelo 2 - RIT Laje 15cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.662	0.777	1.100	0.756	1.090	1.030	1.150	1.100
	15%	0.662	0.777	1.100	0.756	1.190	1.150	1.310	1.290
	1%	0.662	0.777	1.100	0.756	1.220	1.180	1.370	1.340
	0%	0.662	0.777	1.100	0.756	1.220	1.190	1.360	1.340
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.662	1.844	3.680	1.837	5.020	3.040	4.760	2.920
	15%	0.662	1.844	3.680	1.837	5.000	3.040	4.725	2.880
	1%	0.662	1.844	3.680	1.837	5.000	3.040	4.710	2.870
	0%	0.662	1.844	3.680	1.837	5.000	3.040	4.710	2.870

DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 15CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 15cm	Modelo 2 Laje 15cm	Modelo 1 - RIT Laje 15cm	Modelo 2 - RIT Laje 15cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.276	0.333	0.483	0.319	0.418	0.381	0.430	0.396
	15%	0.276	0.333	0.483	0.319	0.442	0.416	0.470	0.450
	1%	0.276	0.333	0.483	0.319	0.451	0.428	0.486	0.469
	0%	0.276	0.333	0.483	0.319	0.452	0.429	0.487	0.469
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.276	1.180	2.801	0.893	2.280	1.190	2.280	1.200
	15%	0.276	1.180	2.801	0.893	2.280	1.200	2.290	1.210
	1%	0.276	1.180	2.801	0.893	2.280	1.210	2.290	1.210
	0%	0.276	1.180	2.801	0.893	2.280	1.210	2.290	1.210

### 7.2.8 Calibragem do modelo proposto – Laje retangular de 10cm de espessura

De forma análoga ao item anterior a Figura 7.14 apresenta, graficamente, o comportamento das solicitações e deslocamentos obtidos na análise numérica e analítica considerando as calibrações propostas.

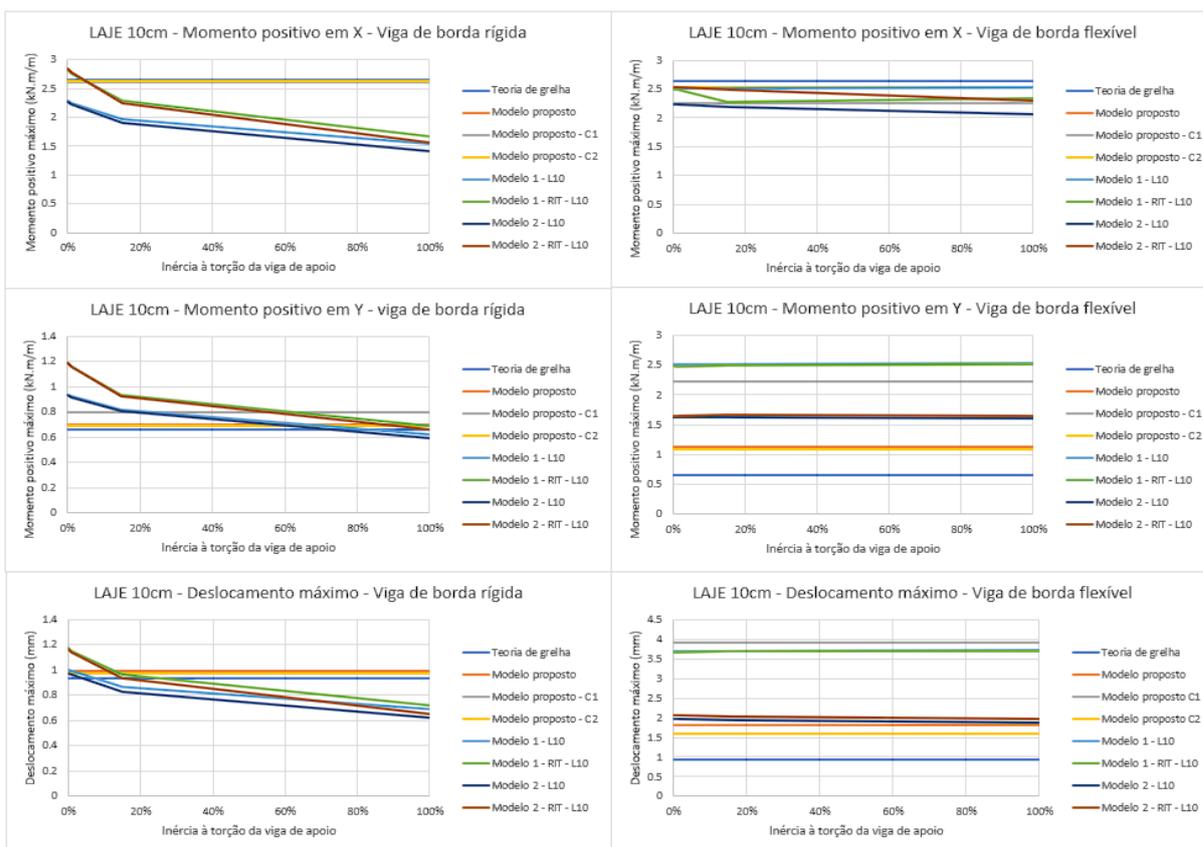


Figura 7.14 – Resultados do Modelo proposto calibrado: Momento positivo e deslocamento máximo em laje de 10 cm de espessura.

A Tabela 7.14 ilustra os valores associados à Figura 7.14. Verifica-se que no momento positivo na direção do menor vão (eixo X) as calibrações forneceram valores próximos aos obtidos na análise numérica, nos casos de baixa rigidez à torção nas vigas de apoio.

A calibragem 2 foi a que forneceu valores mais próximos do Modelo 2 para o momento na direção do menor vão (eixo X). Os deslocamentos, em relação à condição de apoios flexíveis, obtidos na calibragem 1 se aproximaram aos do Modelo 1 e a calibragem inicial se aproximou aos valores do Modelo 2.

Tabela 7.14 – Laje retangular (10 cm espessura): Modelo proposto calibrado – Momento positivo e deslocamento máximo.

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM X (kN.m/m) - LAJE DE 10CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 2 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm	Modelo 2 - RIT Laje 10cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	2.647	2.638	2.612	2.640	1.540	1.420	1.670	1.570
	15%	2.647	2.638	2.612	2.640	1.960	1.910	2.280	2.250
	1%	2.647	2.638	2.612	2.640	2.250	2.230	2.770	2.780
	0%	2.647	2.638	2.612	2.640	2.280	2.270	2.830	2.840
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	2.647	2.527	2.260	2.540	2.530	2.070	2.330	2.300
	15%	2.647	2.527	2.260	2.540	2.520	2.200	2.280	2.490
	1%	2.647	2.527	2.260	2.540	2.520	2.230	2.480	2.530
	0%	2.647	2.527	2.260	2.540	2.520	2.230	2.490	2.540

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM Y (kN.m/m) - LAJE DE 10CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 2 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm	Modelo 2 - RIT Laje 10cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.662	0.697	0.800	0.690	0.620	0.590	0.690	0.660
	15%	0.662	0.697	0.800	0.690	0.820	0.810	0.940	0.930
	1%	0.662	0.697	0.800	0.690	0.930	0.920	1.160	1.160
	0%	0.662	0.697	0.800	0.690	0.940	0.940	1.190	1.190
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.662	1.140	2.225	1.080	2.530	1.600	2.510	1.660
	15%	0.662	1.140	2.225	1.080	2.520	1.620	2.490	1.670
	1%	0.662	1.140	2.225	1.080	2.520	1.620	2.480	1.660
	0%	0.662	1.140	2.225	1.080	2.520	1.620	2.490	1.660

DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 10CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 10cm	Modelo 2 Laje 10cm	Modelo 1 - RIT Laje 10cm	Modelo 2 - RIT Laje 10cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.932	0.989	1.150	0.975	0.687	0.619	0.719	0.652
	15%	0.932	0.989	1.150	0.975	0.869	0.828	0.966	0.932
	1%	0.932	0.989	1.150	0.975	0.991	0.963	1.150	1.140
	0%	0.932	0.989	1.150	0.975	1.000	0.977	1.180	1.170
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.932	1.820	3.900	1.594	3.720	1.890	3.710	1.960
	15%	0.932	1.820	3.900	1.594	3.710	1.950	3.700	2.050
	1%	0.932	1.820	3.900	1.594	3.710	1.960	3.690	2.070
	0%	0.932	1.820	3.900	1.594	3.710	1.960	3.690	2.070

### 7.2.9 Calibragem do modelo proposto – Laje retangular de 8 cm de espessura

Seguindo a mesma sistemática dos itens anteriores, a Figura 7.15 apresenta os gráficos associados solicitações e deslocamentos obtidos na análise numérica e analítica considerando as calibrações propostas.

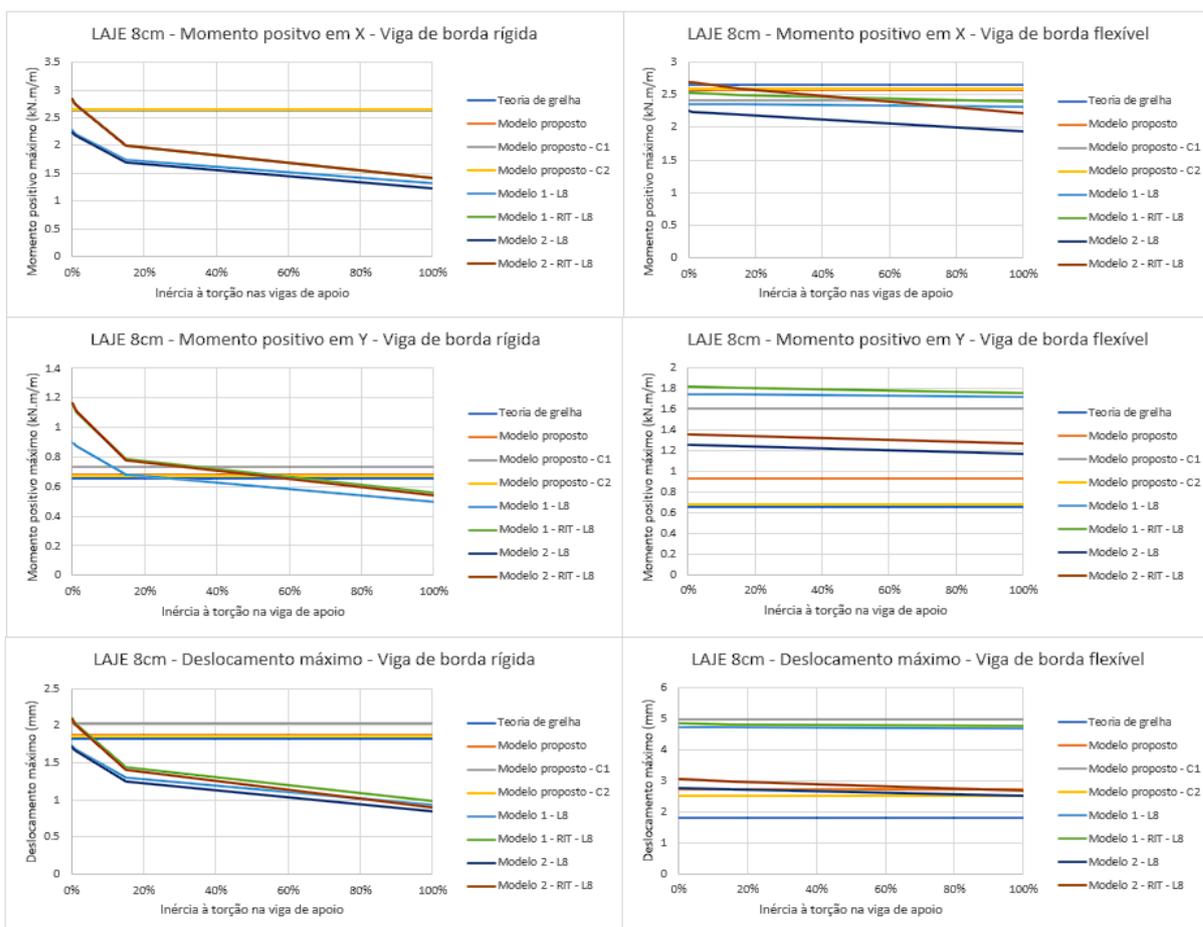


Figura 7.15 – Resultados do Modelo proposto calibrado: Momento positivo e deslocamento máximo em laje de 8 cm de espessura.

Na Tabela 7.15 são apresentados os valores correspondentes à Figura 7.15. Em relação ao momento positivo segundo o menor vão (eixo X) as calibrações forneceram valores próximos da análise numérica. Apenas a calibragem 1 apresentou valores para momento positivo nas duas direções próximos ao Modelo 1 para a condição de baixa rigidez das vigas de apoio.

Os deslocamentos da calibragem 1 ficaram próximos ao Modelo 1 enquanto a calibragem 2 e a calibragem inicial se aproximaram do Modelo 2. Assim, verifica-se que o modelo proposto pode vir a fornecer respostas mais precisas, caso o coeficiente de mola retrate de forma mais precisa o deslocamento previsto na viga de borda.

Tabela 7.15 – Laje retangular (8 cm espessura): Modelo proposto calibrado –  
Momento positivo e deslocamento máximo.

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM X (kN.m/m) - LAJE DE 8CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 8cm	Modelo 2 Laje 8cm	Modelo 1 - RIT Laje 8cm	Modelo 2 - RIT Laje 8cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	2.647	2.643	2.629	2.640	1.310	1.230	1.420	1.340
	15%	2.647	2.643	2.629	2.640	1.730	1.690	2.000	1.970
	1%	2.647	2.643	2.629	2.640	2.200	2.190	2.740	2.750
	0%	2.647	2.643	2.629	2.640	2.310	2.260	2.860	2.860
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	2.647	2.581	2.410	2.590	2.310	1.940	2.400	2.220
	15%	2.647	2.581	2.410	2.590	2.350	2.190	2.500	2.600
	1%	2.647	2.581	2.410	2.590	2.360	2.240	2.530	2.690
	0%	2.647	2.581	2.410	2.590	2.350	2.250	2.530	2.690

MOMENTO POSITIVO MÁXIMO EM Y (kN.m/m) - LAJE DE 8CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 8cm	Modelo 2 Laje 8cm	Modelo 1 - RIT Laje 8cm	Modelo 2 - RIT Laje 8cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	0.659	0.680	0.734	0.676	0.500	0.480	0.560	0.540
	15%	0.659	0.680	0.734	0.676	0.680	0.670	0.790	0.780
	1%	0.659	0.680	0.734	0.676	0.870	0.870	1.100	1.110
	0%	0.659	0.680	0.734	0.676	0.900	0.900	1.160	1.160
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	0.659	0.927	1.607	0.885	1.720	1.170	1.760	1.270
	15%	0.659	0.927	1.607	0.885	1.740	1.240	1.810	1.350
	1%	0.659	0.927	1.607	0.885	1.750	1.250	1.820	1.360
	0%	0.659	0.927	1.607	0.885	1.750	1.250	1.820	1.360

DESLOCAMENTO MÁXIMO (mm) - LAJE DE 8CM									
	INÉRCIA À TORÇÃO DA VIGA	TEORIA DE GRELHA	MODELO PROPOSTO	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 1	MODELO PROPOSTO CALIBRAGEM 2	Modelo 1 Laje 8cm	Modelo 2 Laje 8cm	Modelo 1 - RIT Laje 8cm	Modelo 2 - RIT Laje 8cm
VIGAS DE ELEVADA RIGIDEZ	100%	1.820	1.880	2.030	1.864	0.931	0.845	0.979	0.895
	15%	1.820	1.880	2.030	1.864	1.300	1.240	1.440	1.400
	1%	1.820	1.880	2.030	1.864	1.690	1.660	2.030	2.010
	0%	1.820	1.880	2.030	1.864	1.740	1.710	2.120	2.100
VIGAS DE BAIXA RIGIDEZ	100%	1.820	2.720	4.970	2.495	4.710	2.510	4.760	2.670
	15%	1.820	2.720	4.970	2.495	4.740	2.710	4.820	2.970
	1%	1.820	2.720	4.970	2.495	4.750	2.760	4.840	3.040
	0%	1.820	2.720	4.970	2.495	4.750	2.760	4.840	3.040

### 7.3 Verificação do modelo: Laje totalmente engastada

O estudo comparativo realizado neste capítulo é análogo ao apresentado no item 7.1, sendo utilizados os mesmos parâmetros de geometria, espessura, resistência, carregamento e rigidez da viga de apoio, alterando-se apenas a condição de contorno dos bordos da laje.

Como neste capítulo são analisadas lajes engastadas, não é necessário alterar a inércia à torção das vigas de bordo, portanto, não será objeto de estudo a influência da rigidez à torção das vigas de borda.

De forma a explorar as diversas possibilidades de modelo estrutural que possam vir a configurar um engaste nas bordas foram elaborados para análise 5 modelos distintos.

As condições de contorno adotadas em cada modelo são apresentadas nos itens seguintes. Para todos os casos analisados também foi realizada uma análise considerando a redução da rigidez à torção da laje para 15% de seu valor original.

### 7.3.1 Laje quadrada e totalmente engastada

A laje objeto de estudo possui as mesmas propriedades mecânicas e geométricas da laje apresentada no item 7.1.1. De forma análoga ao capítulo 7 foram utilizados elementos de pórtico para caracterização de vigas de pilares e o elemento de área SHELL-THIN para os elementos de área da laje.

### 7.3.2 Modelo 1 – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura

A Figura 7.16 ilustra o Modelo 1 objeto de análise. As condições de contorno deste modelo são de engastamento de todos os nós do bordo da laje.

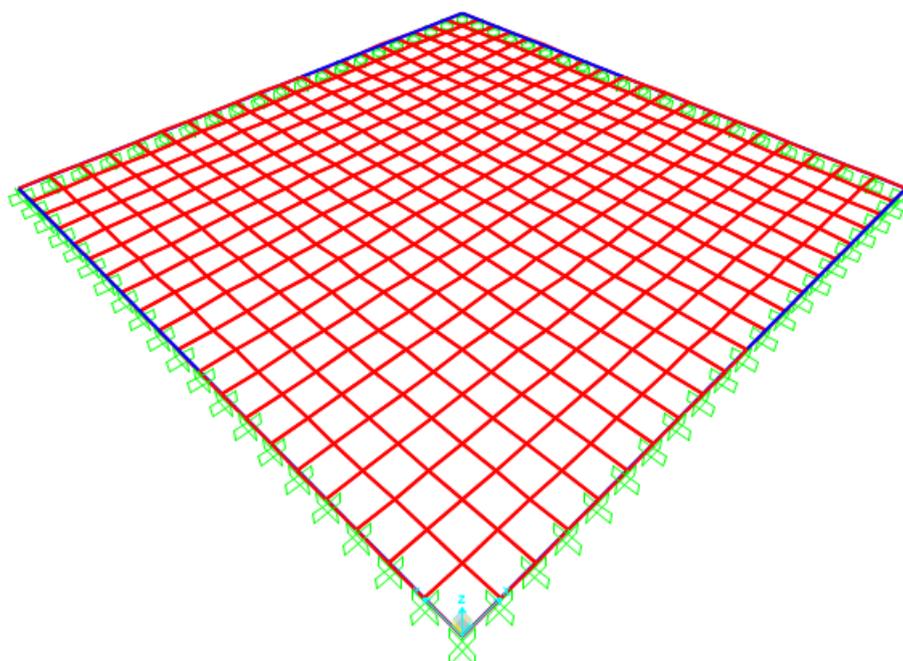


Figura 7.16 – Modelo 1 em laje quadrada e engastada.

A Figura 7.17 apresenta os momentos fletores na direção X. Devido à simetria o mesmo resultado é observado na direção Y. Nesta análise todas as vigas possuem seção de 20x40 e são consideradas rígidas.

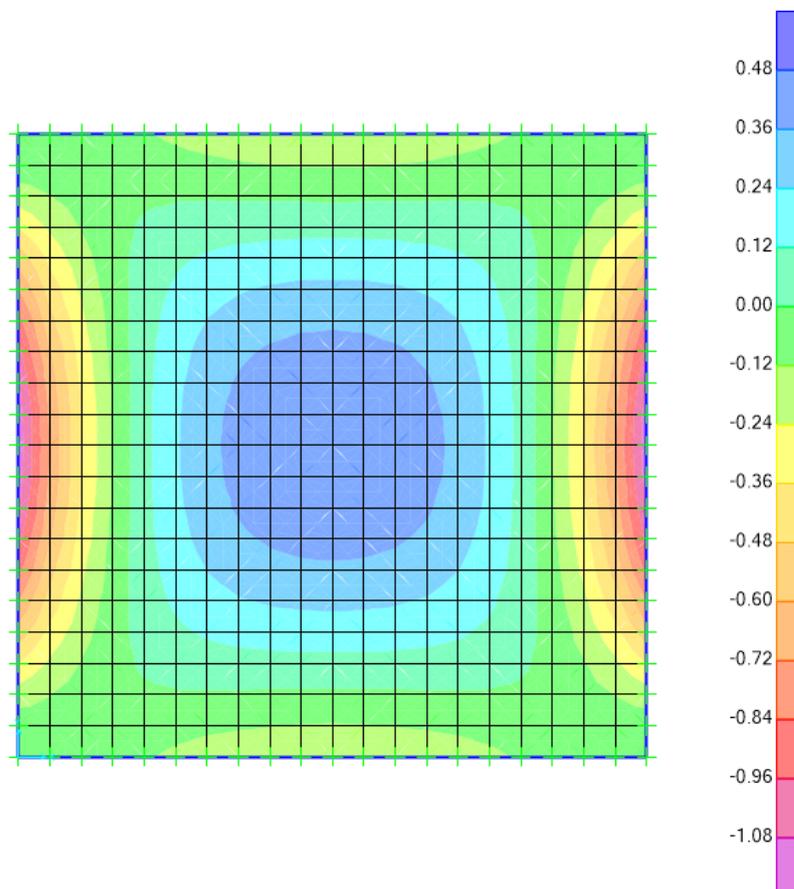


Figura 7.17 – Momento fletores na direção X do Modelo 1: Vigas rígidas em laje quadrada e engastada de 15cm de espessura.

Os valores calculados para os deslocamentos e solicitações nessa configuração são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo: 0,48 kN.m/m;
- momento negativo máximo: 1,15 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,029 mm.

Nesse modelo, independente da variação de inércia da viga, não ocorre alterações em seus deslocamentos devido à consideração de engaste em cada nó da borda da laje. Assim, os resultados acima são iguais aos obtidos para a condição de vigas de apoio flexíveis.

### 7.3.3 Modelo 2 – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura

A Figura 7.18 ilustra o 2º modelo utilizado. São adotadas basicamente as mesmas hipóteses do Modelo 1. A diferença consta nos nós das vigas de borda, onde foi estabelecido para esses nós a restrição apenas à rotação em todos os sentidos e nos vértices apoios simples do 2º gênero.

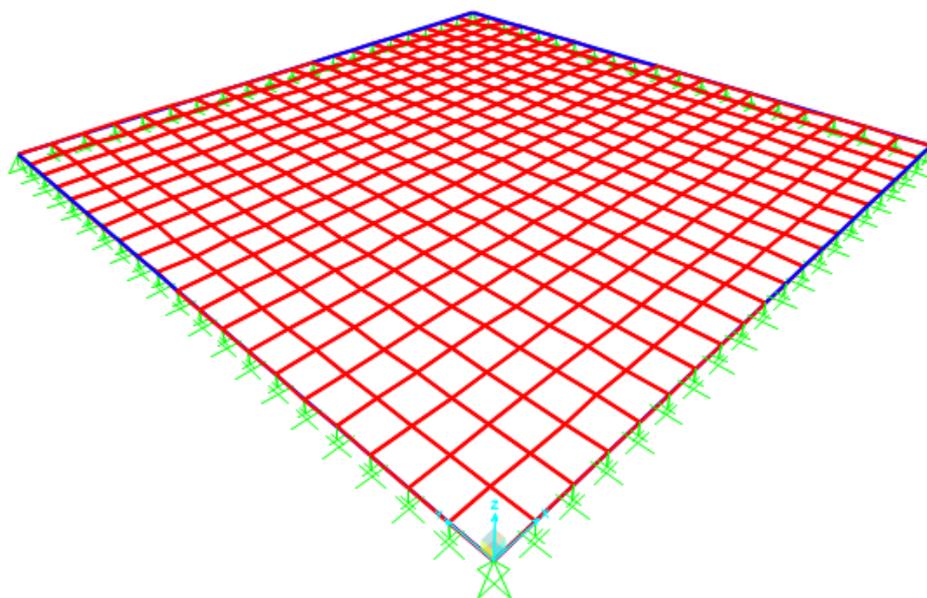


Figura 7.18 – Modelo 2 em laje quadrada e engastada.

A Figura 7.19 apresenta a distribuição dos momentos fletores na direção X, devido à simetria o mesmo resultado é observado na direção Y. Os resultados obtidos nesta análise consideraram vigas de borda de 20x40 (vigas rígidas).

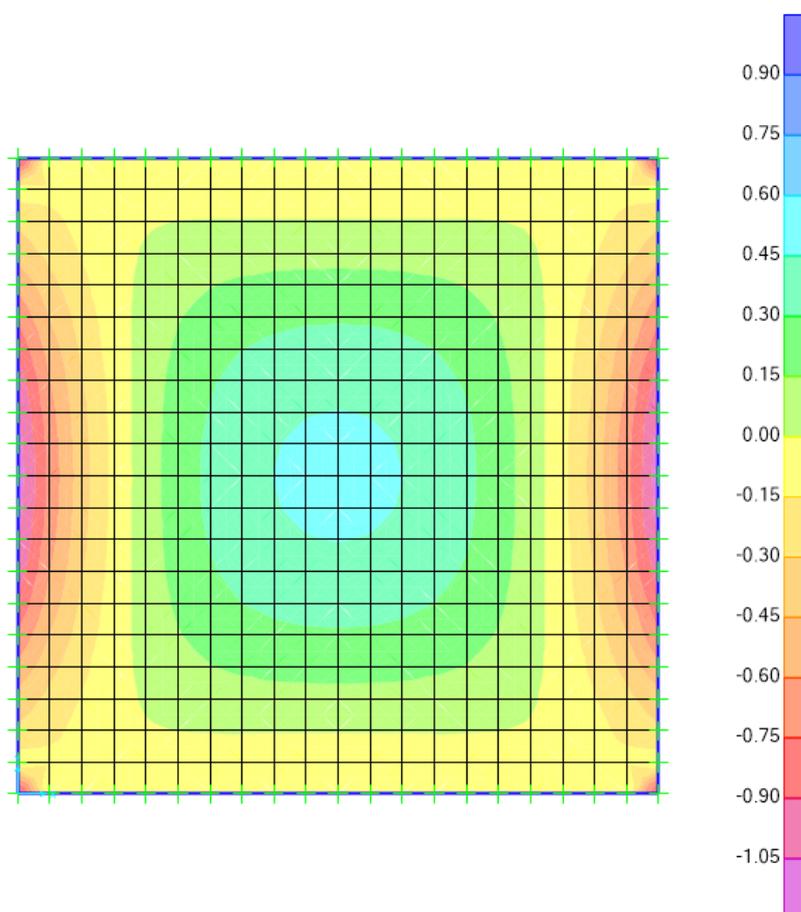


Figura 7.19 – Momentos fletores ao longo do eixo X nas lajes do Modelo 2 – Vigas rígidas em laje quadrada de 15 cm de espessura.

Os resultados para essa configuração são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo: 0,486 kN.m/m;
- momento negativo máximo: 1,13 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,032 mm.

Alterando-se a inércia das vigas que fazem o contorno da laje para vigas de baixa rigidez (seção de 10x20), obtém-se a seguinte distribuição de momentos fletores da laje (Figura 8.20).

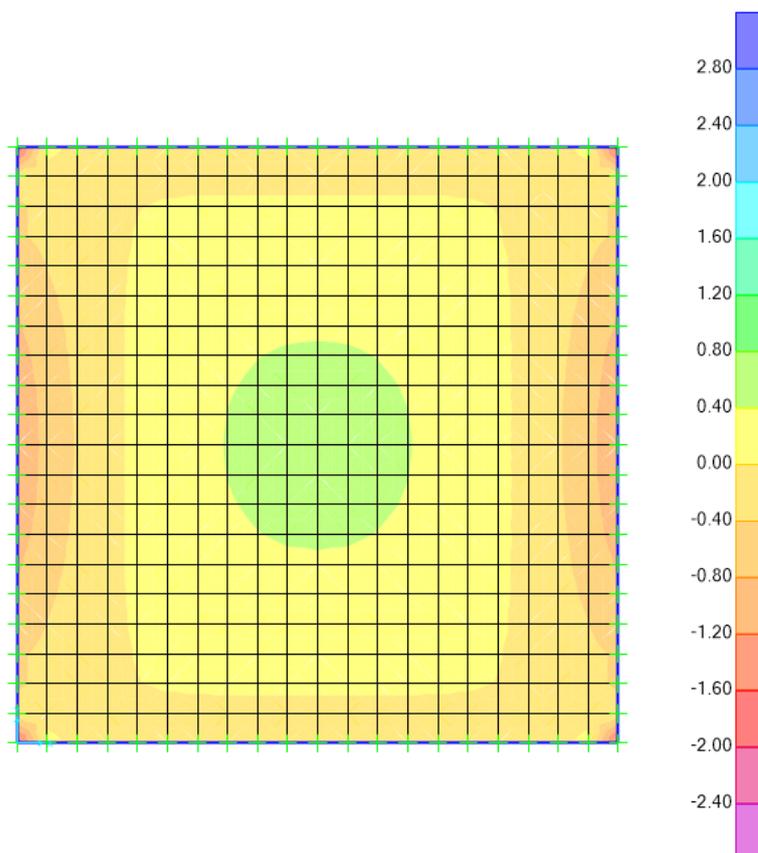


Figura 7.20 – Momentos fletores ao longo do eixo X nas lajes do Modelo 2 – Vigas flexíveis em laje quadrada de 15cm de espessura.

Os resultados máximos para o Modelo 2, considerando a flexibilidade dos apoios, é apresentado abaixo:

- momento positivo máximo: 0,5 kN.m/m;
- momento negativo máximo: 1,09 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,037 mm.

#### 7.3.4 Modelo 3 – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura

A Figura 7.21 ilustra o Modelo 3. Neste modelo os vértices da laje possuem como apoios pilares de seção de 30x30 com comprimento de 3 metros e os nós extremos da laje possuem restrição à rotação.

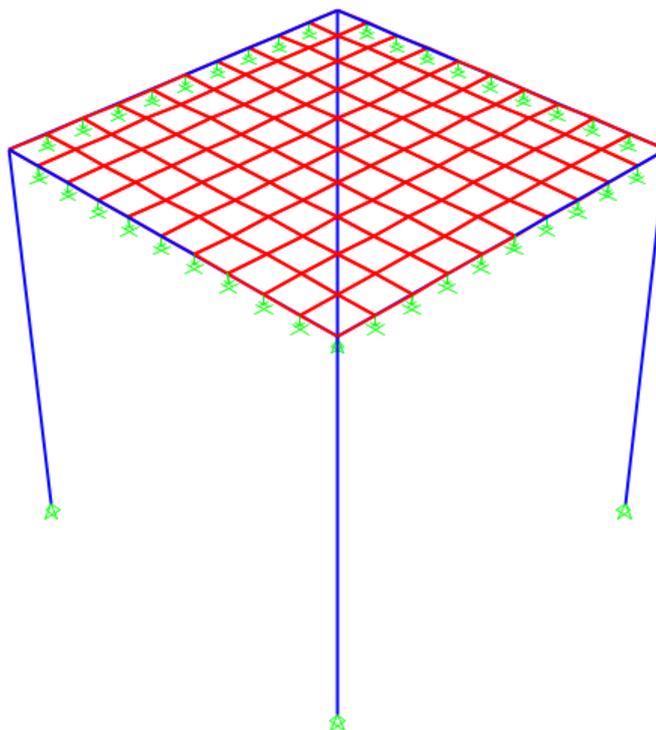


Figura 7.21 – Modelo 3 em laje quadrada engastada.

A Figura 7.22 apresenta os momentos fletores na direção X do modelo numérico. Os resultados apresentados são para o caso em que todas as vigas são rígidas.

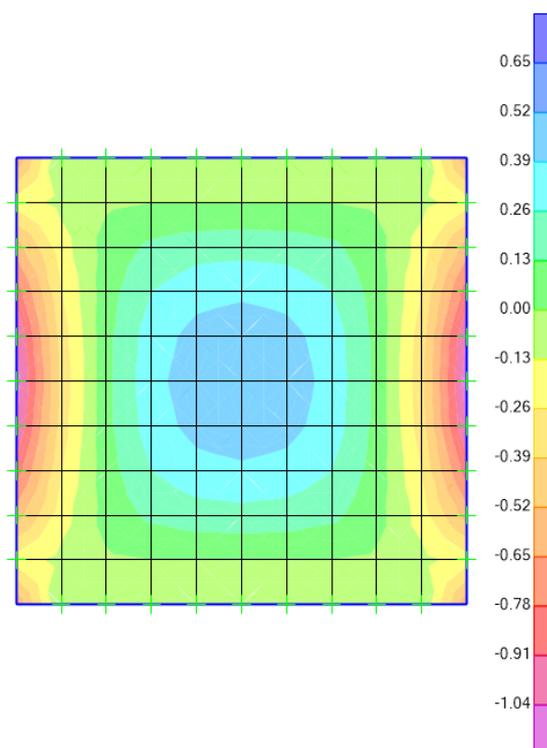


Figura 7.22 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 5: Vigas rígidas em laje quadrada de 15cm de espessura.

As solicitações e deslocamentos para a configuração de vigas com borda rígida do Modelo 5 são descritas abaixo:

- momento positivo máximo: 0,50 kN.m/m;
- momento negativo máximo: 1,11 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,039 mm.

A Figura 7.23 ilustra os momentos fletores na direção X do modelo. Os resultados apresentados são para o caso em que todas as vigas são de baixa rigidez (viga de 10x20).

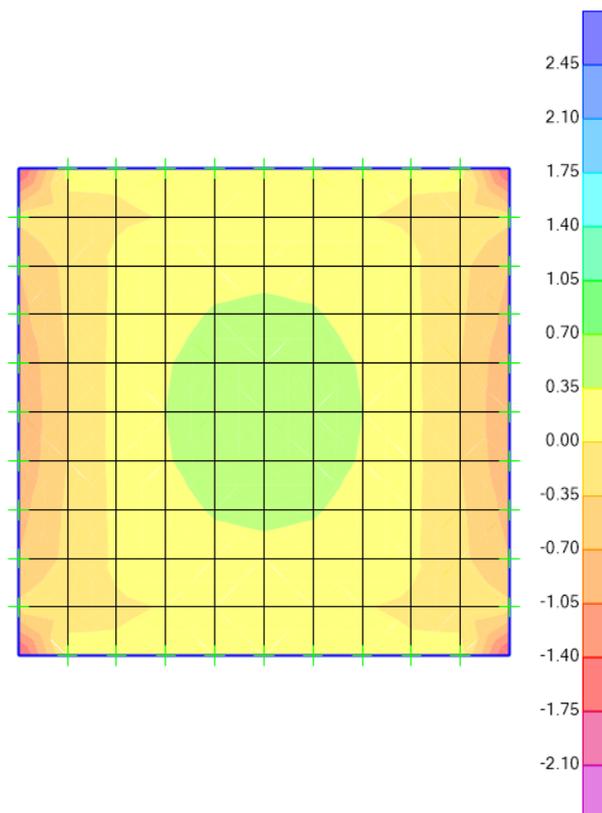


Figura 7.23 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 5: Vigas flexíveis em laje quadrada de 15cm de espessura.

Os momentos fletores e o deslocamentos máximo da análise numérica é descrita abaixo:

- momento positivo máximo: 0,52 kN.m/m;
- momento negativo máximo: 1 kN.m/m. Entretanto foi observado momento negativo de 1,74 kN.m próximo ao pilar. Como o momento negativo foi concentrado no pilar foi adotado o valor do centro da viga de bordo;
- deslocamento máximo: 0,05 mm.

#### 7.3.5 Modelo 4 – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura

A Figura 7.24 mostra o Modelo 4. Nesse modelo existem 9 lajes quadradas de 3 metros de lado. Em cada vértice da laje existe um apoio do 2º gênero. Todas as vigas possuem seção de 20x40. O objeto de estudo será a laje central, onde, teoricamente, seu comportamento é de laje engastada em todos os bordos.

O carregamento é considerado uniformemente distribuído e aplicado apenas na laje central no valor de 2,5 kN/m<sup>2</sup>, sendo excluída a influência do peso próprio de todas as lajes.

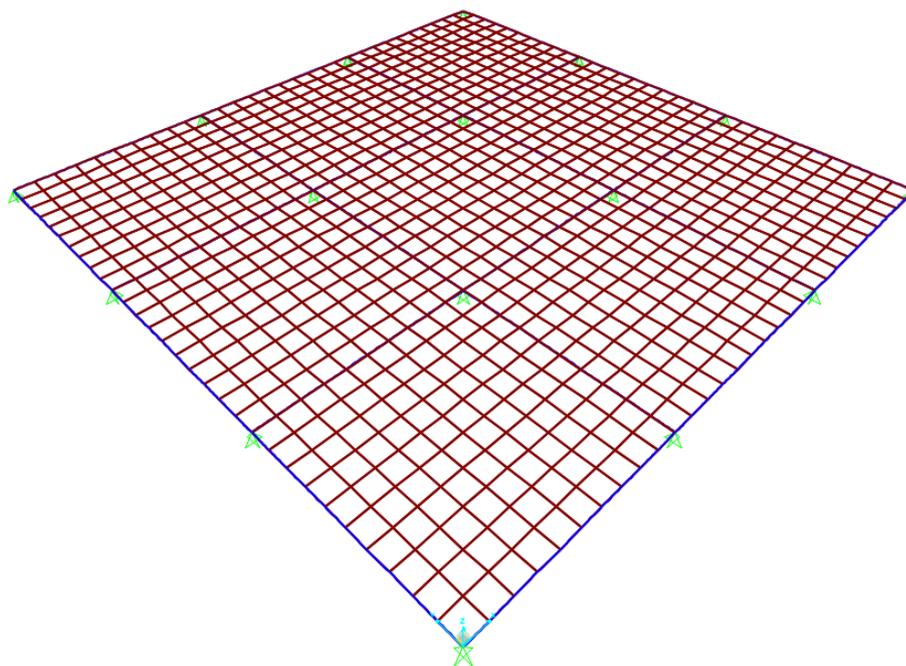


Figura 7.24 – Modelo 3 para laje quadrada e engastada.

A Figura 7.25 ilustra os momentos fletores, na direção X, do Modelo 3. Conforme pode ser verificado a laje central, objeto de estudo, possui momentos negativos nas bordas indicando um certo grau de engastamento das lajes. Os resultados da Figura 7.25 são referentes às vigas rígidas (viga de seção 20x40).

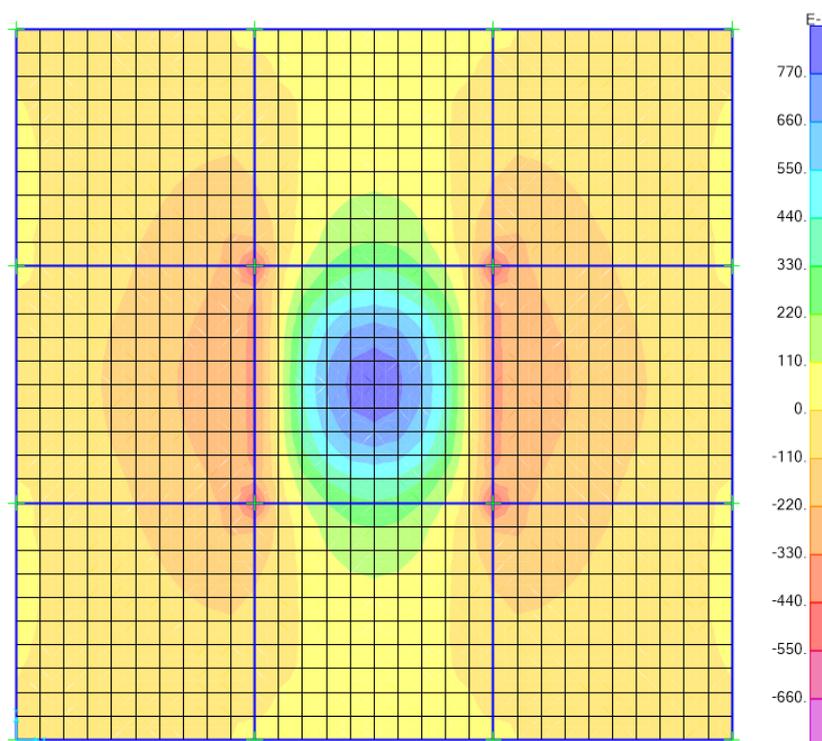


Figura 7.25 – Momentos fletores ao longo do eixo X nas lajes do Modelo 4: Viga rígida em laje quadrada de 15cm de espessura.

Os principais resultados da laje central obtidos na análise numérica são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo: 0,84 kN.m/m;
- momento negativo máximo: aumentando gradativamente de 0,37 kN.m/m (meio do vão da viga de bordo) até 0,5 kN.m/m (próximo ao apoio). Média de 0,435 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,097 mm.

Alterando-se a inércia das vigas que fazem o contorno da laje central para vigas de baixa rigidez (viga de 10x20) e mantendo as demais vigas com 20x40, obtém-se a seguinte distribuição de momentos fletores da laje (Figura 8.26).

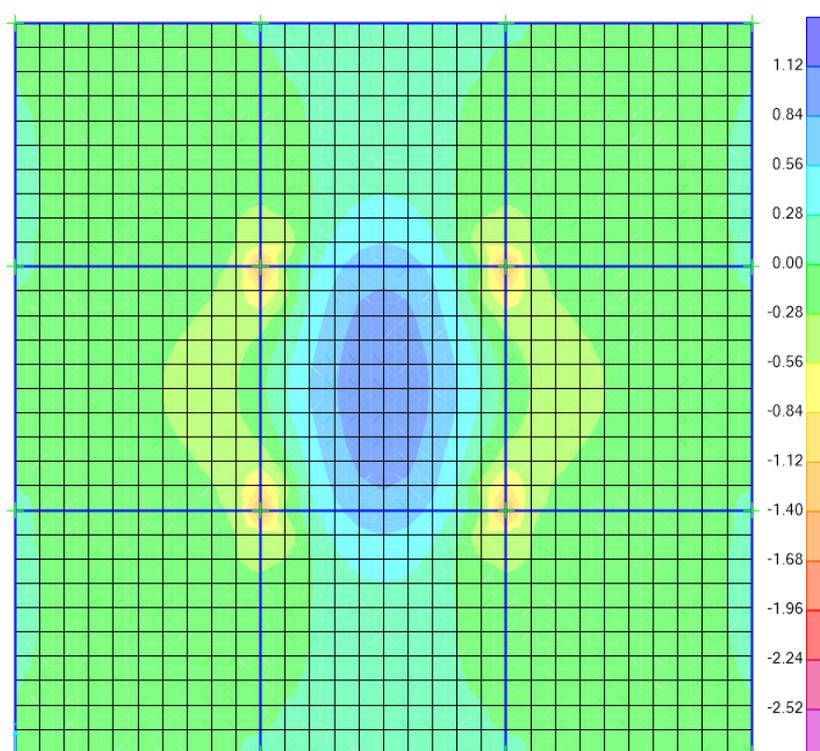


Figura 7.26 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 4: Viga flexível em laje quadrada de 15cm de espessura.

Os valores obtidos na laje central para a configuração com vigas de apoio flexíveis são:

- momento positivo máximo: 1,04 kN.m/m;
- momento negativo: aumentando gradativamente de 0,1 kN.m/m (meio do vão da viga de bordo) até 1,5 kN.m/m (próximo ao apoio). Média de 0,8 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,144 mm.

### 7.3.6 Modelo 4A – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura

O Modelo 4A utiliza as mesmas premissas do Modelo 4, entretanto, todas as lajes possuem o mesmo carregamento de  $2,5 \text{ kN/m}^2$ , excluindo a influência do peso próprio. A Figura 7.27 ilustra a distribuição dos momentos fletores na direção X do Modelo 4A.

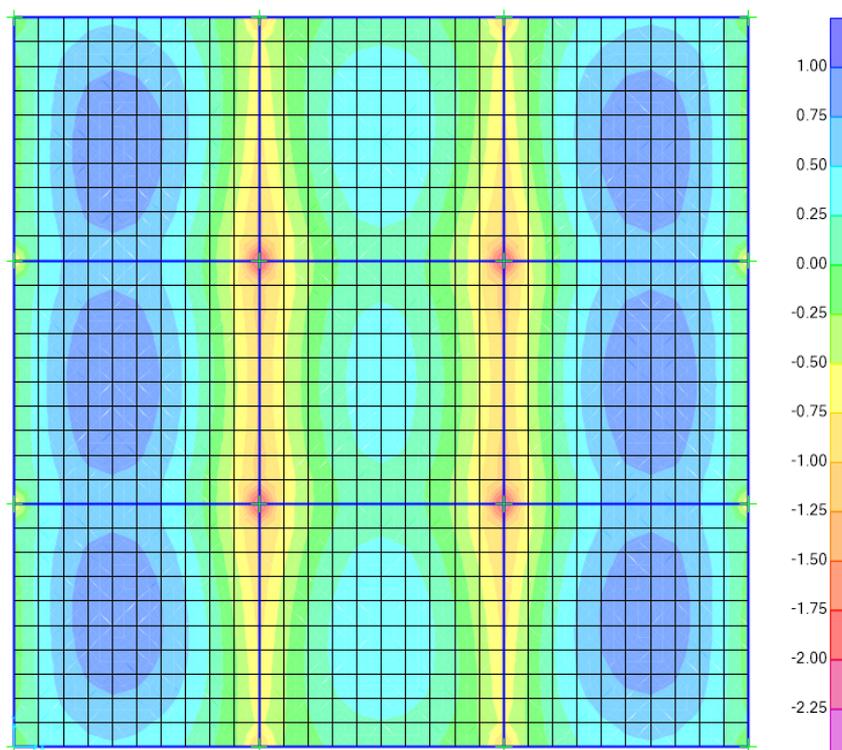


Figura 7.27 – Momentos fletores ao longo do eixo X nas lajes do Modelo 4A: Vigas rígidas em laje quadrada de 15cm de espessura.

Os resultados principais relativos à laje central do Modelo 4A são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo:  $0,38 \text{ kN.m/m}$ ;
- momento negativo máximo:  $1 \text{ kN.m/m}$ . Entretanto, foi observado momento negativo de  $2,33 \text{ kN.m}$  próximo ao pilar. Como não houve um aumento gradativo desse valor foi adotado para o momento negativo máximo o obtido no meio da viga de apoio, haja vista que esse valor se manteve praticamente constante ao longo da borda;
- deslocamento máximo:  $0,021 \text{ mm}$ .

A Figura 7.28 apresenta os resultados ao se alterar a inércia das vigas de bordo da laje central para vigas flexíveis e mantendo-se as demais vigas rígidas, seguindo a mesma sistemática adotada no item 7.3.5.

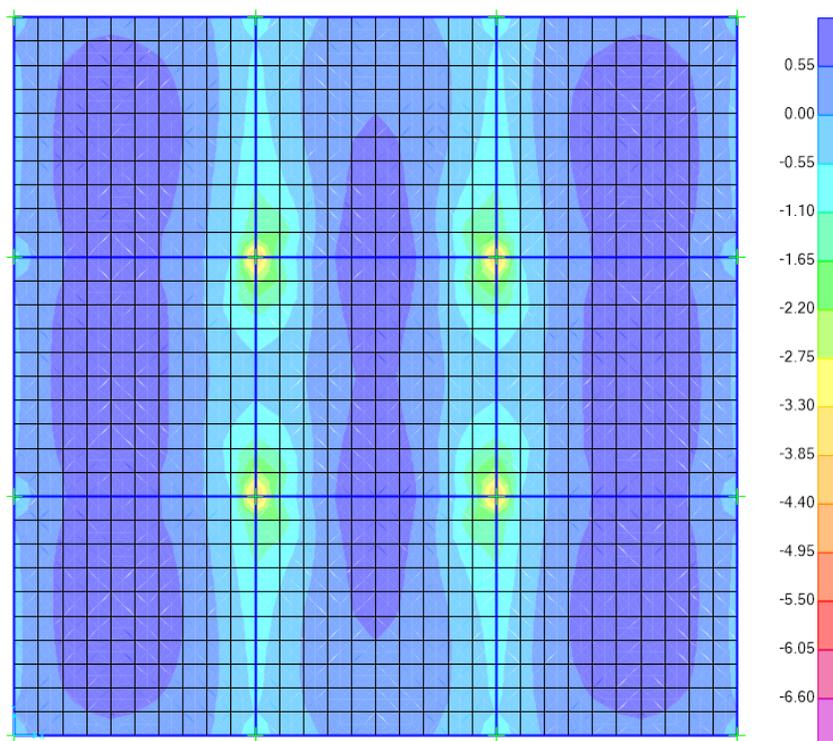


Figura 7.28 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 4A: Vigas flexíveis em laje quadrada de 15cm de espessura.

Os resultados da laje central para a configuração com vigas flexíveis são descritos abaixo:

- momento positivo máximo: Reduzindo gradativamente de 0,91 kN.m/m próximo à viga de borda a 0,625 kN.m/m no centro da laje. Média 0,768 kN.m/m;
- momento negativo máximo: aumentando de 0,46 kN.m/m (meio do vão da viga de borda) até 4,33 kN.m/m (próximo ao apoio). Entretanto, o aumento gradativo é dado a partir do valor de 1,38 kN.m/m, assim adotando-se a média até o valor gradativo obtém-se 0,92 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,086 mm.

### 7.3.7 Modelo 5 – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura

A Figura 7.26 ilustra o 5º modelo objeto de análise. As mesmas hipóteses adotadas no Modelo 4 foram utilizadas nessa análise, substituindo-se apenas o tipo de apoio adotado. Foi utilizado como apoio pilares de 30x30, com comprimento de 3 metros, engastados na base e com as mesmas propriedades mecânicas do concreto da laje.

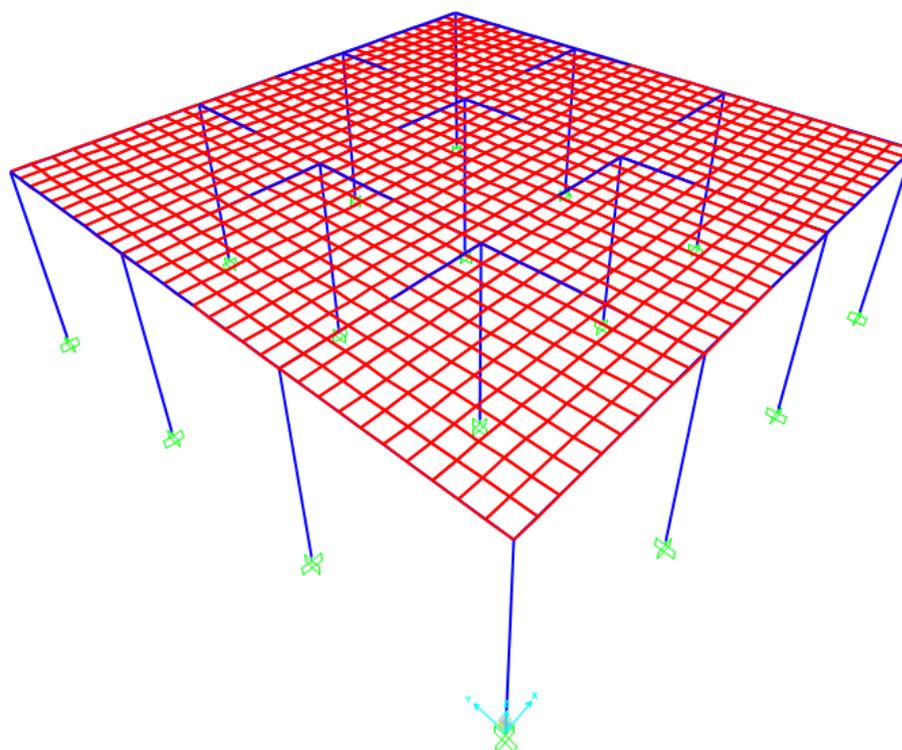


Figura 7.29 – Modelo 5 para análise de laje quadrada e engastada.

A Figura 7.30 ilustra os momentos fletores na direção X da análise numérica. Os resultados apresentados são para o caso em que todas as vigas são de 20x40.

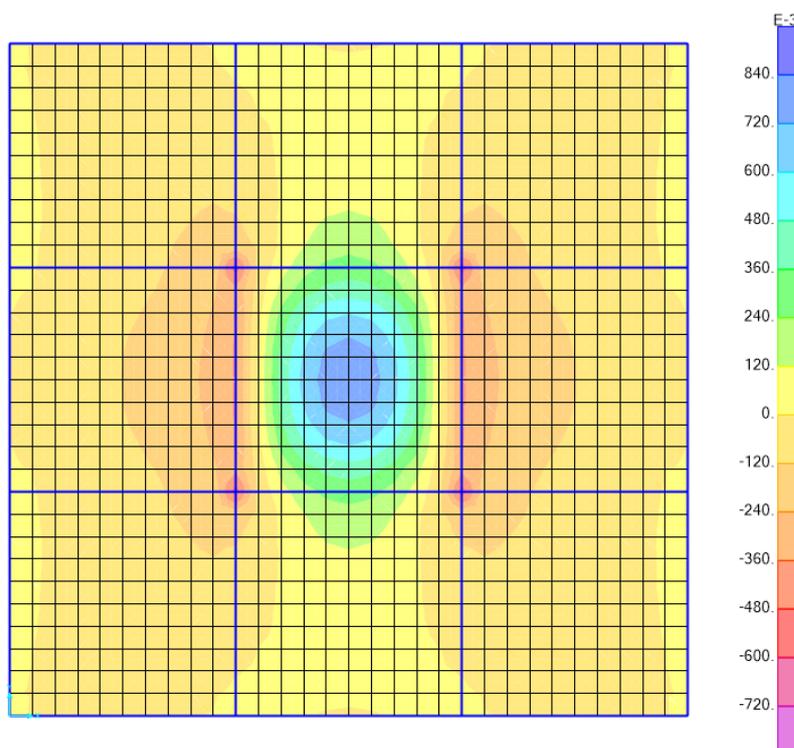


Figura 7.30 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 5: Vigas rígidas em laje quadrada de 15cm de espessura.

Os resultados das solicitações e deslocamentos desta análise são descritos abaixo:

- momento positivo máximo: 0,82 kN.m/m;
- momento negativo máximo: 0,38 kN.m/m. Entretanto, foi observado momento negativo de 0,55 kN.m próximo ao pilar. Como não houve um aumento gradativo desse valor, foi adotado o momento do centro da borda;
- deslocamento máximo: 0,099 mm.

Alterando-se a inércia das vigas que fazem o contorno da laje central para vigas de baixa rigidez (viga de 10x20) e mantendo as demais vigas com 20x40, obtém-se a seguinte distribuição de momentos da laje (Figura 7.31).

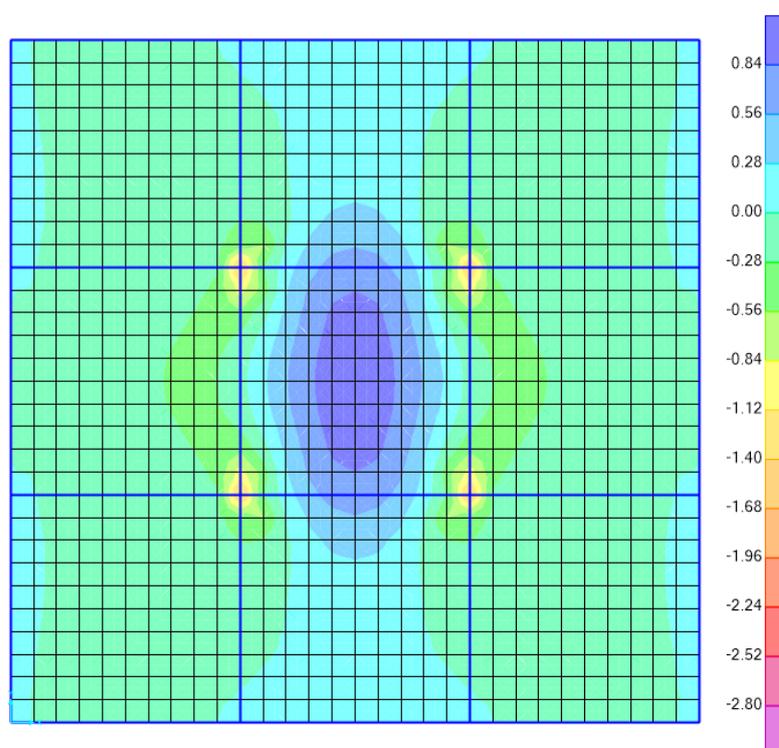


Figura 7.31 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 5: Vigas flexíveis em laje quadrada de 15cm de espessura.

As solicitações e deslocamentos da laje central do Modelo 5 são descritos abaixo:

- momento positivo máximo: 1,03 kN.m/m;
- momento negativo: aumentando gradativamente de 0,1 kN.m/m (meio do vão da viga de bordo) até 1,54 kN.m/m (próximo ao apoio). Média 0,82 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,147 mm.

### 7.3.8 Modelo 5A – Laje quadrada e totalmente engastada – 15cm de espessura

O Modelo 5A utiliza as mesmas premissas do Modelo 5, entretanto, todas as lajes possuem o mesmo carregamento de  $2,5 \text{ kN/m}^2$ , sendo desconsiderado o peso próprio. A Figura 7.32 apresenta os momentos fletores, na direção X, do Modelo 5A.

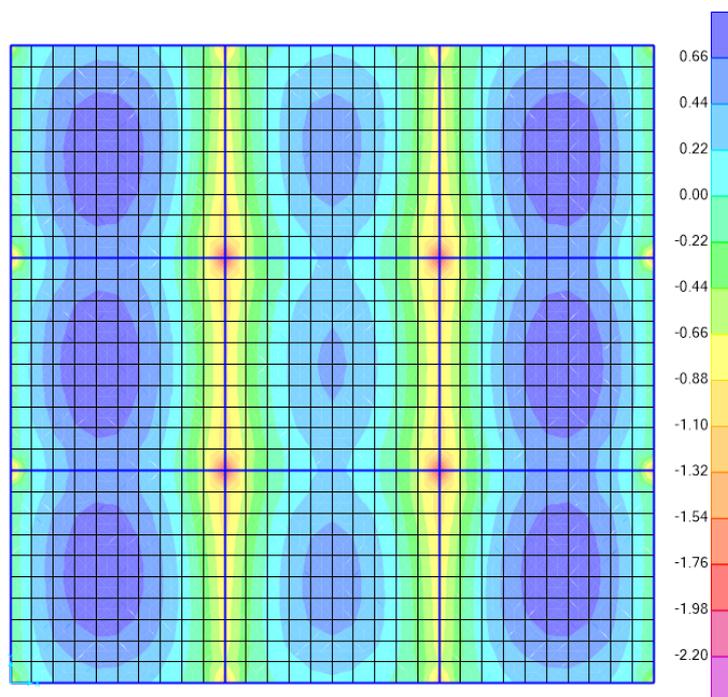


Figura 7.32 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 4A: Vigas rígidas em laje quadrada de 15cm de espessura.

Os resultados das solicitações e deslocamentos máximos são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo:  $0,48 \text{ kN.m/m}$ ;
- momento negativo máximo:  $0,93 \text{ kN.m/m}$ . Entretanto foi observado momento negativo de  $2,18 \text{ kN.m}$  próximo ao pilar. Como não houve um aumento gradativo desse valor foi adotado para o momento negativo máximo o obtido no meio da viga de apoio, haja vista que esse valor se manteve praticamente constante ao longo da borda;
- deslocamento máximo:  $0,069 \text{ mm}$ .

Alterando-se a inércia das vigas de bordo, seguindo a mesma sistemática adotada no item 7.3.6, obtém-se

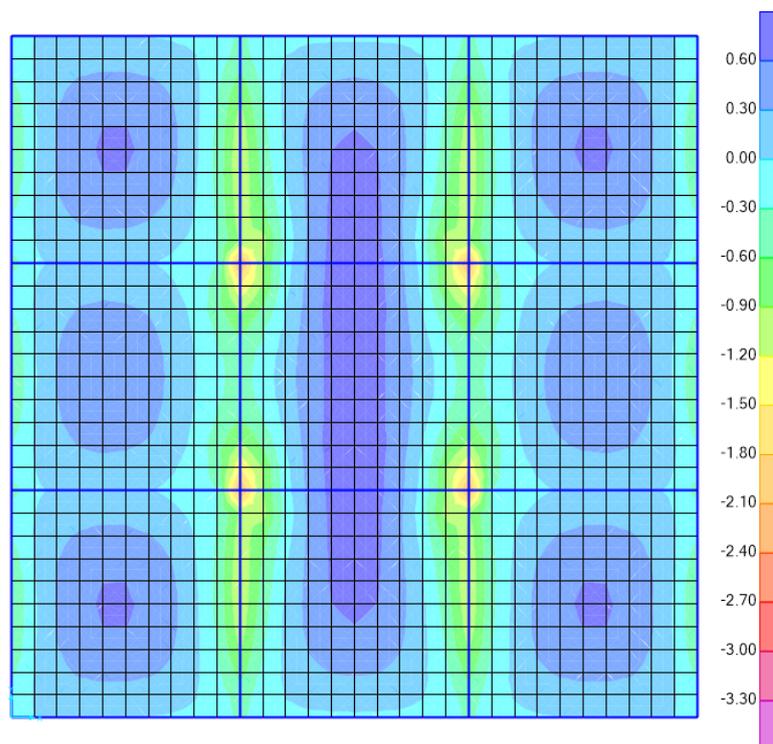


Figura 7.33 – Momentos fletores ao longo do eixo X no Modelo 5A: Vigas flexíveis em laje quadrada de 15cm de espessura.

As solicitações e deslocamentos máximos da laje central da Figura 7.33 são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo: 0,75 kN.m/m;
- momento negativo: aumentando de 0,37 kN.m/m (meio do vão da viga de bordo) até 4,05 kN.m/m (próximo ao apoio). Seguindo o mesmo critério do item 9.1.3.1 o aumento gradativo é dado até o valor de 1,76 kN.m/m, assim, a média é dada por 1,065 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,14 mm.

#### 7.3.9 Resumo dos resultados da análise numérica para laje quadrada e engastada

As figuras abaixo mostram, de forma concatenada, os resultados obtidos nas análises acima, incluindo os obtidos para as lajes de 10 e 8cm de espessura. Os critérios de cálculo dos momentos foram iguais para todas as espessuras de laje analisadas.

Os modelos que possuem “T” após a numeração fazem referência ao caso em que a laje foi analisada com redução da inércia à torção a 15% do valor original. Foram introduzidos também os valores referentes às solicitações e deslocamentos do modelo

proposto utilizando-se as calibragens apresentadas na Figura 7.4. As tabelas 7.16, 7.17 e 7.18 mostram os resultados.

Tabela 7.16 – Resumo dos valores obtidos nos modelos em laje quadrada de 15cm.

LAJE 15CM	VIGA DE BORDA RÍGIDA			VIGA DE BORDA FLEXÍVEL		
	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	Deslocamento (mm)	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	Deslocamento (mm)
Teoria de grelha	0.469	0.938	0.029	0.469	0.938	0.029
Modelo Proposto	0.469	0.938	0.062	0.469	0.938	0.545
Modelo proposto C1	0.469	0.938	0.090	0.469	0.938	1.000
Modelo proposto C2	0.469	0.938	0.041	0.469	0.938	0.223
Modelo 1	0.480	1.150	0.029	0.480	1.150	0.029
Modelo 1T	0.607	1.240	0.034	0.607	1.240	0.034
Modelo 2	0.486	1.130	0.032	0.500	1.090	0.037
Modelo 2T	0.604	1.210	0.037	0.600	1.160	0.041
Modelo 3	0.500	1.110	0.039	0.520	1.000	0.050
Modelo 3T	0.620	1.200	0.044	0.610	1.450	0.053
Modelo 4	0.840	0.435	0.097	1.040	0.800	0.144
Modelo 4T	0.970	0.510	0.107	1.130	0.860	0.161
Modelo 4A	0.380	1.000	0.021	0.768	0.920	0.086
Modelo 4AT	0.370	1.050	0.020	0.770	1.075	0.089
Modelo 5	0.820	0.380	0.099	1.030	0.820	0.147
Modelo 5T	0.950	0.410	0.108	1.110	0.870	0.164
Modelo 5A	0.480	0.930	0.069	0.750	1.065	0.140
Modelo 5AT	0.470	0.950	0.068	0.890	1.000	0.144

Tabela 7.17 – Resumo dos valores obtidos nos modelos em laje quadrada de 10cm.

LAJE 10CM	VIGAS DE BORDA RÍGIDA			VIGAS DE BORDA FLEXÍVEL		
	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	Deslocamento (mm)	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	Deslocamento (mm)
Teoria de Grelha	0.469	0.938	0.099	0.469	0.938	0.099
Modelo Proposto	0.469	0.938	0.131	0.469	0.938	0.615
Modelo proposto - C1	0.469	0.938	0.159	0.469	0.938	1.070
Modelo proposto - C2	0.469	0.938	0.111	0.469	0.938	0.292
Modelo 1	0.480	1.150	0.097	0.480	1.150	0.097
Modelo 1T	0.610	1.230	0.116	0.610	1.230	0.116
Modelo 2	0.480	1.140	0.100	0.490	1.120	0.110
Modelo 2T	0.610	1.220	0.118	0.600	1.200	0.126
Modelo 3	0.500	1.130	0.110	0.510	1.090	0.126
Modelo 3T	0.620	1.220	0.127	0.620	1.170	0.142
Modelo 4	0.660	0.520	0.206	0.910	0.410	0.379
Modelo 4T	0.810	0.570	0.231	1.000	0.430	0.421
Modelo 4A	0.440	1.120	0.079	0.705	1.030	0.287
Modelo 4AT	0.520	1.190	0.088	0.700	1.010	0.290
Modelo 5	0.650	0.520	0.200	0.890	0.515	0.370
Modelo 5T	0.790	0.580	0.224	0.990	0.565	0.413
Modelo 5A	0.490	1.060	0.140	0.770	0.980	0.362
Modelo 5AT	0.570	1.140	0.150	0.765	0.890	0.366

Tabela 7.18 – Resumo dos valores obtidos nos modelos em laje quadrada de 8cm.

LAJE 8CM	VIGAS DE BORDA RÍGIDA			VIGAS DE BORDA FLEXÍVEL		
	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	Deslocamento (mm)	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	Deslocamento (mm)
Teoria de Grelha	0.469	0.938	0.193	0.469	0.938	0.193
Modelo Proposto	0.469	0.938	0.226	0.469	0.938	0.709
Modelo proposto - C1	0.469	0.938	0.254	0.469	0.938	1.160
Modelo proposto - C2	0.469	0.938	0.206	0.469	0.938	0.387
Modelo 1	0.520	1.150	0.189	0.520	1.150	0.189
Modelo 1T	0.606	1.240	0.226	0.606	1.240	0.226
Modelo 2	0.480	1.150	0.190	0.485	1.130	0.204
Modelo 2T	0.605	1.230	0.229	0.604	1.220	0.238
Modelo 3	0.500	1.140	0.204	0.500	1.120	0.223
Modelo 3T	0.624	1.230	0.239	0.620	1.200	0.256
Modelo 4	0.600	0.550	0.320	0.820	0.520	0.608
Modelo 4T	0.738	0.608	0.362	0.935	0.535	0.677
Modelo 4A	0.460	1.140	0.169	0.650	1.020	0.487
Modelo 4AT	0.570	1.220	0.196	0.620	1.025	0.490
Modelo 5	0.590	0.560	0.308	0.810	0.520	0.593
Modelo 5T	0.726	0.613	0.351	0.920	0.535	0.663
Modelo 5A	0.490	1.100	0.236	0.690	0.985	0.573
Modelo 5AT	0.600	1.190	0.263	0.668	0.990	0.575

### 7.3.10 Considerações dos modelos numéricos em laje quadrada engastada

Os modelos 1, 2 e 3 forneceram, na maioria das análises, respostas bastante próximas. A redução da inércia à torção da laje nesses modelos gerou um aumento nos momentos positivos e negativos, além do deslocamento em cada caso. Pôde-se constatar também que a redução da inércia das vigas de borda trouxe pouca variação nos resultados.

Os modelos 4 e 5 apresentaram respostas de solicitações próximas, inclusive com a redução da inércia à torção da laje. Pôde-se constatar, para o caso de vigas de borda rígidas, que há uma tendência de aumento do momento fletor positivo e uma redução do momento fletor negativo com o aumento da espessura da laje para ambas as direções.

Ao se utilizar vigas de borda flexíveis nos modelos 4 e 5 é verificado, para ambas as direções, um aumento expressivo no momento positivo, enquanto no momento negativo quase não há alteração, exceto para a direção Y.

Os modelos 4A e 5A indicaram valores de momento fletor próximos, incluindo os casos de redução da inércia à torção da laje, entretanto, os deslocamentos foram mais acentuados no Modelo 5A.

Com o uso de vigas flexíveis nos modelos 4A e 5A há um aumento significativo do momento fletor positivo e uma redução no momento fletor negativo em ambas as direções, exceto para o momento negativo da direção Y, onde foi verificado um aumento considerável.

Em relação aos deslocamentos, de uma forma geral, os modelos 4, 4A, 5 e 5A, incluindo as variações com redução da inércia à torção da laje, apresentaram resultados relativamente próximos para os casos de vigas de borda flexível. Análise semelhante pode ser observada nos modelos 1, 2 e 3 e suas variações.

#### 7.3.11 Análise dos resultados do modelo proposto em laje de 8cm de espessura

Considerando os momentos positivos em ambas as direções para os modelos com vigas de borda rígida houve uma boa aproximação dos resultados dos modelos 1, 2, 3, 4A, 4AT e 5A com o modelo proposto.

Em relação aos momentos negativos, os modelos 1, 2, 3, 4A e 5A (incluindo os casos onde há redução da inércia à torção da laje) foram os que mais se aproximaram do modelo proposto para a direção X.

Ao se considerar que as vigas de borda são flexíveis os modelos 1, 2 e 3 foram os que forneceram valores mais próximos para os momentos positivos e os modelos 1, 2, 3, 4A, 4AT, 5A e 5AT para o momento negativo.

O modelo proposto apresentou um aumento nos deslocamentos de 6,7% (calibragem 2) até 31,6% (calibragem 1), em relação à Teoria de Grelha, para o caso de vigas de borda rígida.

Em comparação com os modelos analisados no SAP2000 verifica-se que os deslocamentos ficaram próximos aos da calibragem 2, exceto para os modelos 4, 4T, 5 e 5T que apresentaram um aumento dos deslocamentos superiores às calibrações do modelo proposto.

O modelo proposto apresentou aumento nos deslocamentos superior em até seis vezes (calibragem 1), em relação à Teoria de Grelha, para o caso de vigas de borda flexível.

Em comparação com os modelos numéricos verifica-se que, nos casos de viga de bordo de baixa rigidez, os modelos 4, 4T, 5, 5T, 5A e 5AT foram os que mais se aproximaram da calibragem inicial do modelo proposto.

#### 7.3.12 Análise dos resultados do modelo proposto em laje de 10cm de espessura

Para a situação de vigas de borda rígida os momentos positivos das análises numéricas que mais se aproximaram dos resultados do modelo proposto foram os modelos 1, 2, 3, 4A, 4AT, 5A e 5AT para ambas as direções. Nessas mesmas

condições os momentos negativos mais próximos foram os modelos 1, 2, 3, 4A, 5A e 5AT para a direção X, enquanto na direção Y foram os modelos 4, 4T, 5 e 5T.

Ao se considerar que as vigas de borda são flexíveis os modelos que foram considerados próximos para a laje de 8cm de espessura são os mesmos para a laje de 10cm de espessura.

Foi constatado um aumento nos deslocamentos de 12,1% (calibragem 2) até 60,6% (calibragem 1), em relação à teoria de grelha, para o caso de vigas de borda rígida em laje de 10cm de espessura.

Observa-se que os deslocamentos, considerando as vigas de borda rígida, ficaram de uma forma geral dentro dos obtidos nas calibrações, exceto para os modelos 4, 4T, 5 e 5T que apresentaram um aumento dos deslocamentos superiores às calibrações do modelo proposto e os modelos 4A e 4AT que apresentaram valores inferiores aos da Teoria de Grelha.

O modelo proposto apresentou aumento nos deslocamentos superior em até 10,8 vezes (calibragem 1), em relação à Teoria de Grelha, para o caso de vigas de borda flexível.

Pôde-se constatar que, nos casos de viga de bordo de baixa rigidez, os modelos 4, 4A, 4AT, 5, 5A e 5AT foram os que mais se aproximaram da calibragem 2 do modelo proposto.

### 7.3.13 Análise dos resultados do modelo proposto em laje de 15cm de espessura

Os resultados, para os momentos positivos e negativos, das análises numéricas que mais se aproximaram do modelo proposto no caso de vigas de borda rígidas foram os modelos 1, 2, 3, 4A, 4AT, 5A e 5AT, exceto para a direção Y onde os modelos 4AT, 5A, 5AT forneceram valores superiores aos obtidos no modelo proposto.

Ao se considerar que as vigas de borda são flexíveis os modelos 1, 2 e 3 foram os que apresentaram resultados mais próximos para os momentos positivos na direção X. Entretanto, para o momento negativo na direção X, houve um maior número de modelos que forneceram resultados próximos, sendo eles os modelos 1, 2, 3, 4, 4A, 4AT, 5, 5A e 5AT.

Para o caso de vigas de borda rígidas pôde-se observar um aumento nos deslocamentos do modelo proposto de 41,3% (calibragem 2) até 210% (calibragem 1), em relação à Teoria de Grelha.

Foi observado que os deslocamentos para vigas de borda rígida ficaram, de uma forma geral, dentro dos valores obtidos nas calibrações, exceto para os modelos 1, 1T, 2, 2T, 4A e 4AT que apresentaram resultados inferiores aos do modelo proposto.

O modelo proposto gerou resultados de deslocamentos superiores em até 34,48 vezes (calibragem 1), em relação à Teoria de Grelha, para o caso de vigas de borda flexível.

Pôde-se constatar que, nos casos de viga de bordo de baixa rigidez, o modelo proposto gerou resultados bastante superiores aos modelos numéricos, sendo a calibragem 2 a que forneceu resultados mais próximos de uma forma geral.

#### 7.3.14 Considerações do modelo proposto em laje quadrada e engastada

De uma forma geral a proposta de alteração da Teoria de Grelha desenvolvida nesta tese apresentou coerência nos valores dos deslocamentos para o caso de vigas de baixa rigidez, trazendo uma alternativa mais precisa para à Teoria de Grelha.

Pôde-se constatar que ao se utilizar apoios flexíveis a contribuição proposta apresentou deslocamentos próximos aos resultados da análise numérica, a depender do deslocamento adotado como base para o cálculo do coeficiente de rigidez do modelo.

Cabe destacar que foi analisado uma condição extrema de flexibilidade das vigas de bordo, que dificilmente se materializará na prática, pois o deslocamento excessivo levaria a necessidade de uma análise não linear física e geométrica.

Contudo, para condições usuais de flexibilidade dos apoios que podem vir a ocorrer a contribuição proposta fornece valores mais precisos para a distribuição de momentos na laje.

#### 7.4 Laje retangular e totalmente engastada

Para a análise da laje retangular foram utilizadas as mesmas premissas do item 7.3.1 alterando-se apenas a geometria e a inércia das vigas de maior vão. Foi utilizado

neste estudo seções de 20x80 para a viga de maior vão e de 20x40 para o menor vão, consideradas vigas rígidas. Na redução da inércia das vigas foi utilizado a seção de 10x40 para a viga de maior vão e 10x20 para a viga de menor vão, consideradas vigas flexíveis. A laje possui lados de 3 e 6 metros.

#### 7.4.1 Modelo 1 – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura

A Figura 7.34 ilustra o Modelo 1 em laje retangular. As condições de contorno deste modelo são de engastamento de todos os nós das vigas de bordo.

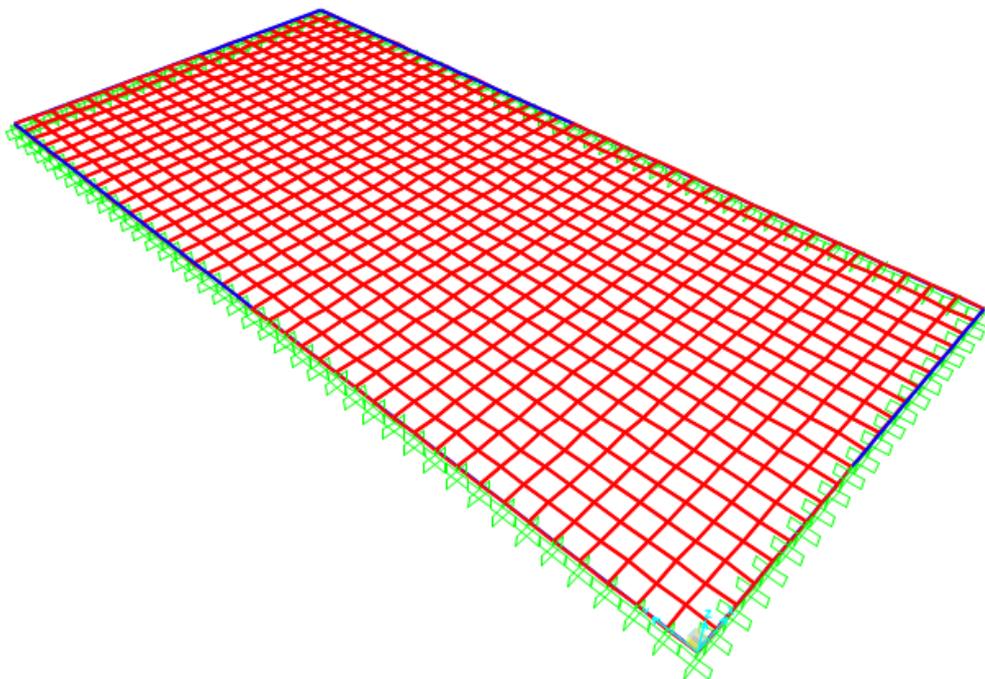


Figura 7.34 – Modelo 1 em laje retangular engastada.

A Figura 7.35 ilustra a distribuição dos momentos fletores nas direções X e Y. Nesta análise são apresentados os resultados para a condição de vigas de bordo rígidas.

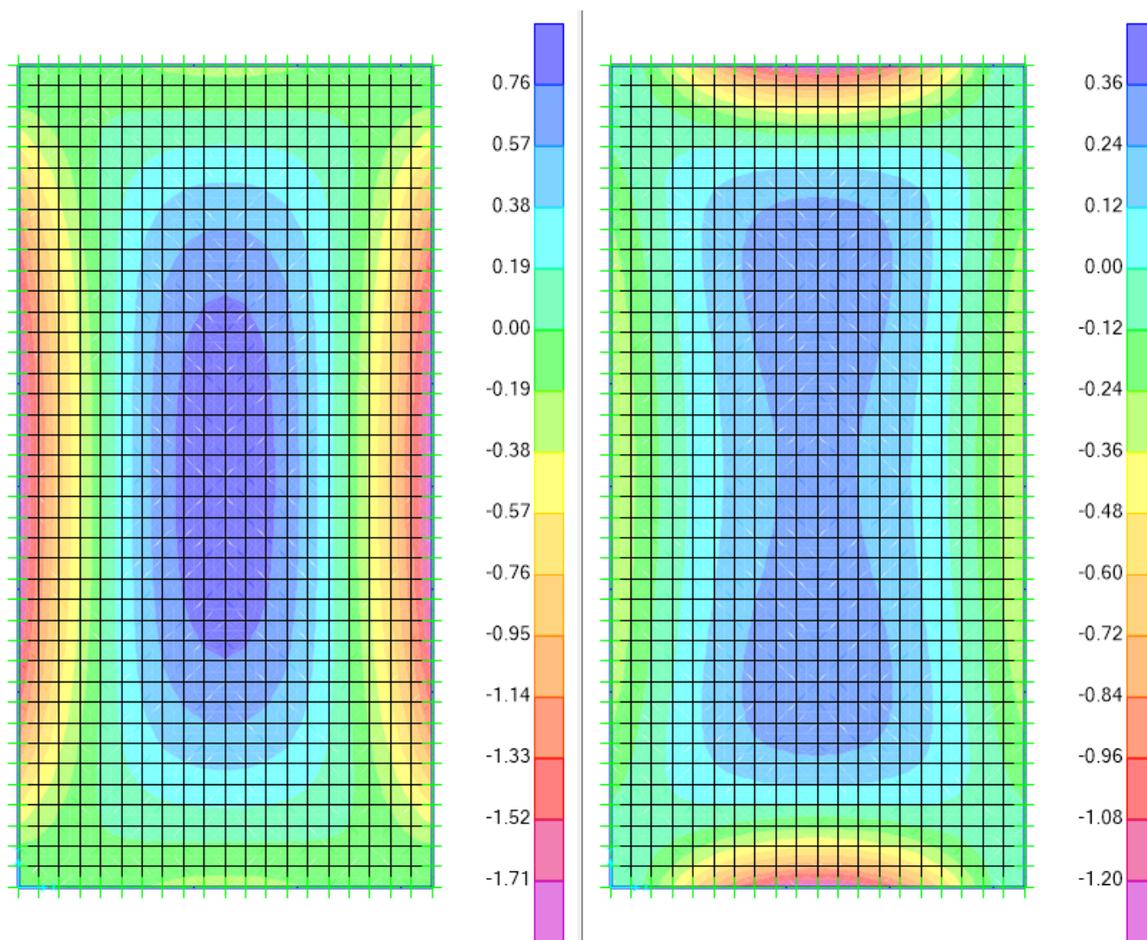


Figura 7.35 – Momento fletores na direção X (1° imagem) e Y (2° imagem) do Modelo 1: Vigas rígidas em laje retangular de 15cm de espessura.

As solicitações e deslocamentos máximos do Modelo 1 em laje retangular são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo em X: 0,92 kN.m/m;
- momento negativo máximo em X: 1,86 kN.m/m;
- momento positivo máximo em Y: 0,33 kN.m/m;
- momento negativo máximo em Y: 1,28 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,057 mm.

Nesse modelo, independente da variação de inércia da viga, não ocorre alterações em seus deslocamentos devido a condição de contorno adotada nos bordos. Portanto, os resultados são iguais aos obtidos para a condição de vigas flexíveis.

#### 7.4.2 Modelo 2 – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura

A Figura 7.36 mostra o 2º modelo utilizado em estudo. São adotadas basicamente as mesmas hipóteses do Modelo 1. A diferença consta nos nós das vigas de borda, onde foi estabelecido para esses nós a restrição apenas à rotação em todos os sentidos e nos vértices apoios simples do 2º gênero.

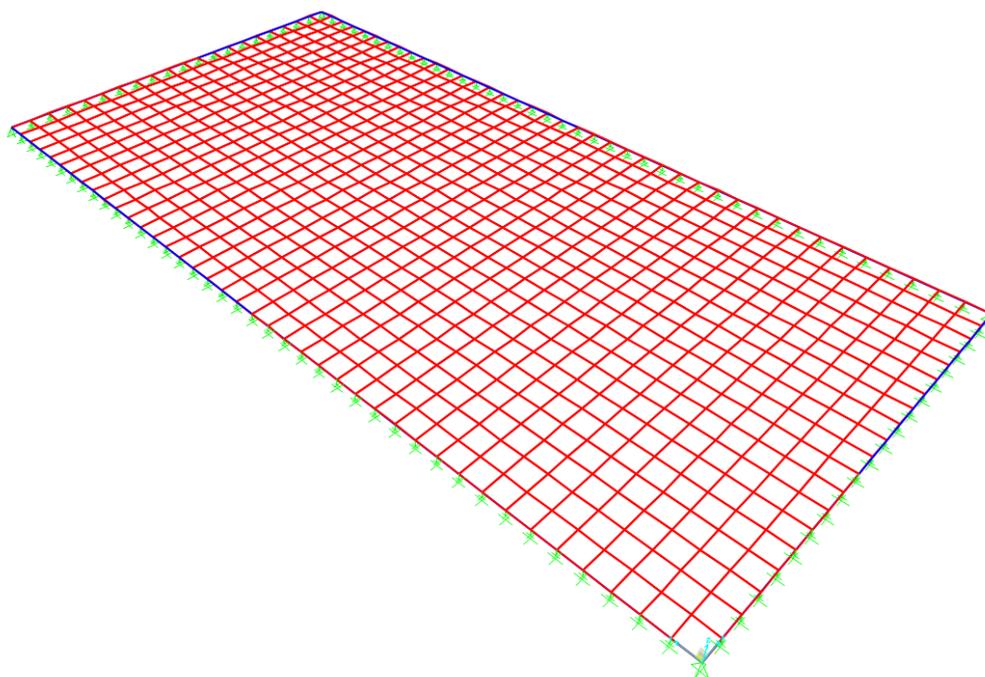


Figura 7.36 – Modelo 2 em laje retangular engastada.

A Figura 7.37 ilustra a distribuição dos momentos fletores nas direções X e Y para a condição de vigas de apoio rígidas.

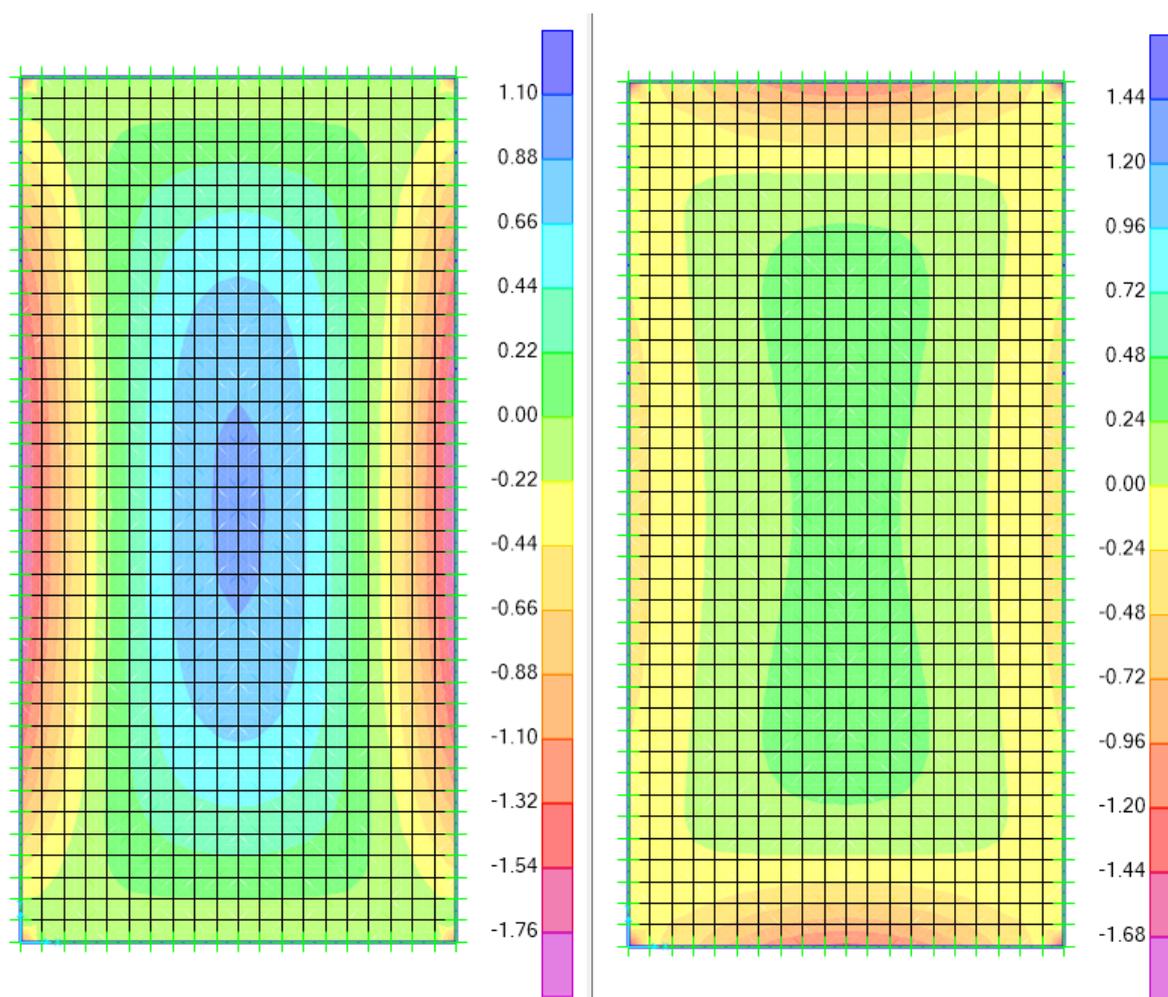


Figura 7.37 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) do Modelo 2: Vigas rígidas em laje retangular de 15cm de espessura.

Os resultados dos momentos e deslocamentos máximos para essa configuração são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo em X: 0,92 kN.m/m;
- momento negativo máximo em X: 1,845 kN.m/m;
- momento positivo máximo em Y: 0,32 kN.m/m;
- momento negativo máximo em Y: 1,27 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,065 mm.

Alterando-se a inércia das vigas que fazem a delimitação da laje para vigas de baixa rigidez, obtém-se a distribuição de momentos fletores da laje, conforme ilustra a Figura 7.38.

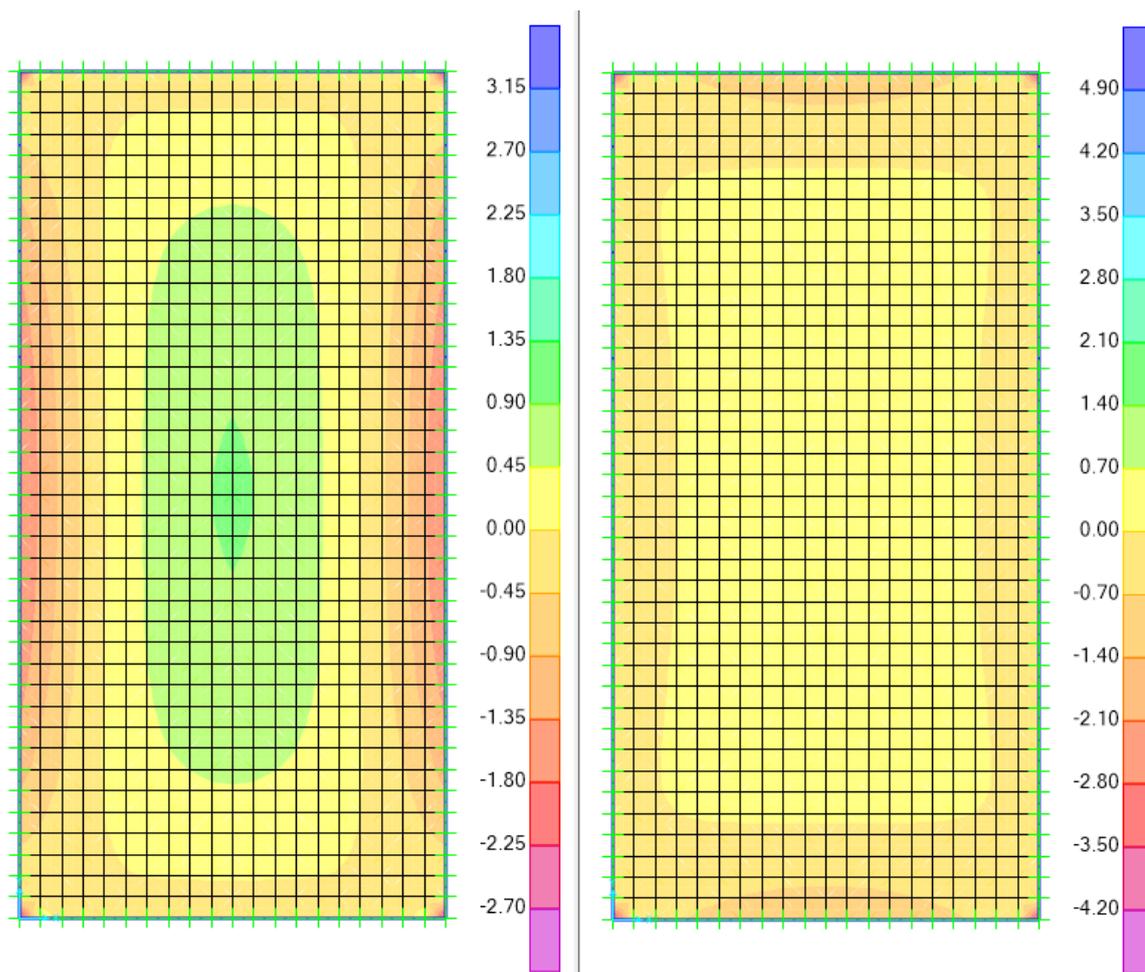


Figura 7.38 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 2: Vigas flexíveis em laje retangular de 15cm de espessura.

As solicitações e deslocamentos máximos obtidos nessa configuração são apresentadas abaixo:

- momento positivo máximo em X: 0,925 kN.m/m;
- momento negativo máximo em X: 1,81 kN.m/m;
- momento positivo máximo em Y: 0,345 kN.m/m;
- momento negativo máximo em Y: 1,32 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,082 mm.

#### 7.4.3 Modelo 3 – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura

A Figura 7.39 ilustra o Modelo 3. Neste modelo os vértices da laje possuem como apoios pilares de seção de 30x30 com comprimento de 3 metros e os nós das vigas de bordo possuem restrição à rotação em todas as direções. A laje possui lados de 3 e 6 metros.

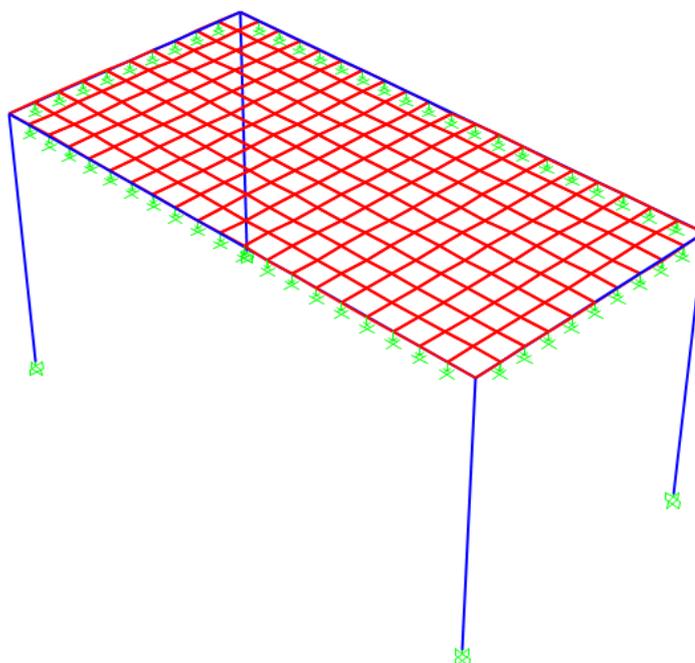


Figura 7.39 – Modelo 3 em laje retangular engastada.

A Figura 7.40 apresenta a distribuição dos momentos fletores do Modelo 3. Os resultados ilustrados são para o caso em que todas as vigas são rígidas.

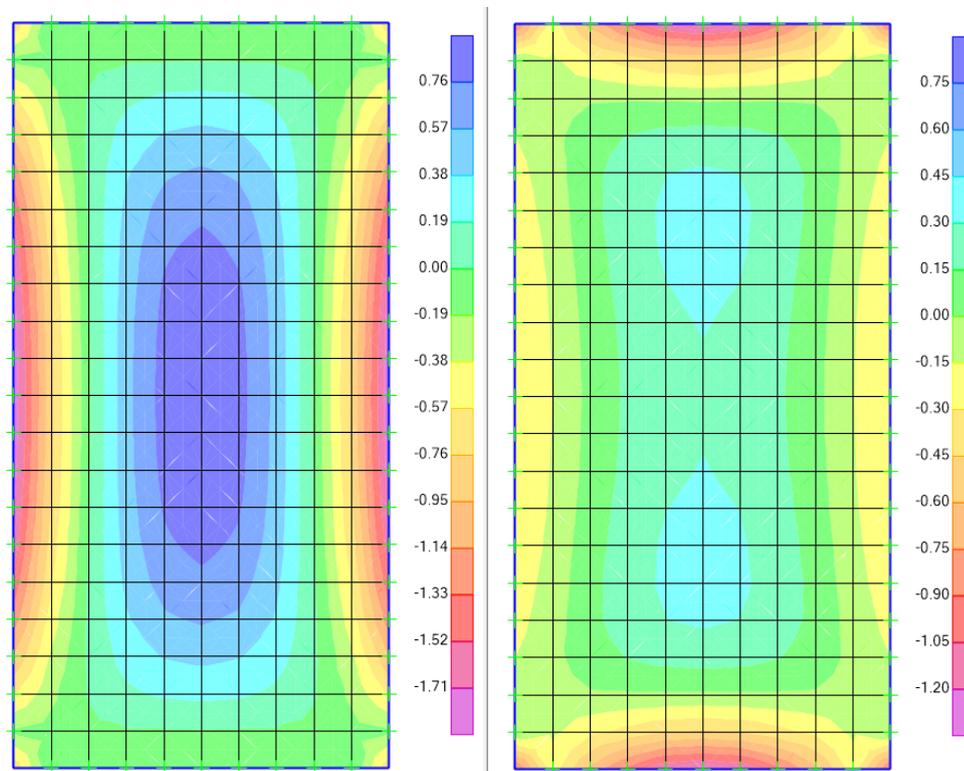


Figura 7.40 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 3: Vigas rígidas em laje retangular de 15cm de espessura.

Os momentos fletores (positivos e negativos) e deslocamentos do Modelo 3, para a condição de vigas rígidas, são descritos abaixo:

- momento positivo máximo em X: 0,94 kN.m/m;
- momento negativo máximo em X: 1,83 kN.m/m;
- momento positivo máximo em Y: 0,32 kN.m/m;
- momento negativo máximo em Y: 1,23 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,079 mm.

A Figura 7.41 mostra os resultados obtidos Modelo 3 ao se utilizar vigas de borda de baixa rigidez.

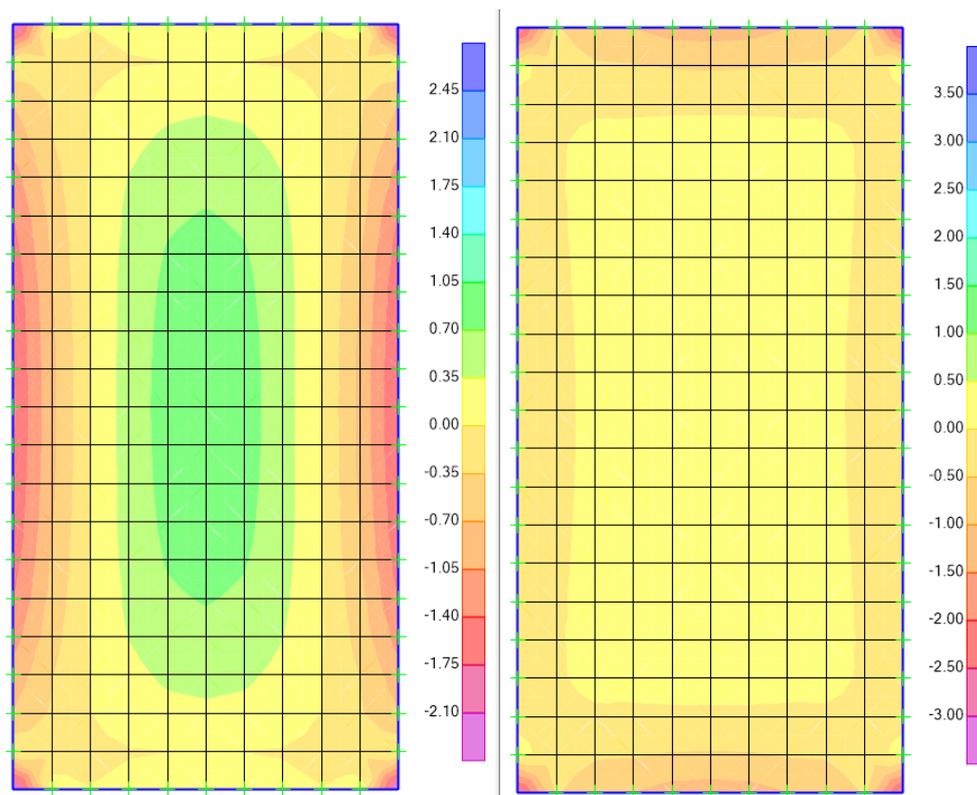


Figura 7.41 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 3: Vigas flexíveis em laje retangular de 15cm de espessura.

As solicitações e deslocamentos relativos ao uso de vigas de bordo flexíveis no Modelo 3 são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo em X: 0,94 kN.m/m;
- momento negativo máximo em X: 1,79 kN.m/m;
- momento positivo máximo em Y: 0,36 kN.m/m;
- momento negativo máximo em Y: 1,26 kN.m/m. Entretanto, foi observado próximo ao pilar um momento de 2,42 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,104 mm.

#### 7.4.4 Modelo 4 – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura

A Figura 7.42 ilustra o Modelo 4. Nesse modelo existem 9 lajes retangulares com dimensões de 3 metros (eixo X) e 6 metros (eixo Y). Em cada vértice da laje existe um apoio do 2º gênero. As vigas de maior comprimento têm seção de 20x80 e as de menor comprimento 20x40.

O objeto de estudo será a laje central, onde o comportamento preponderante é de laje engastada em todos os bordos. Nesta análise inicial apenas a laje central é carregada.

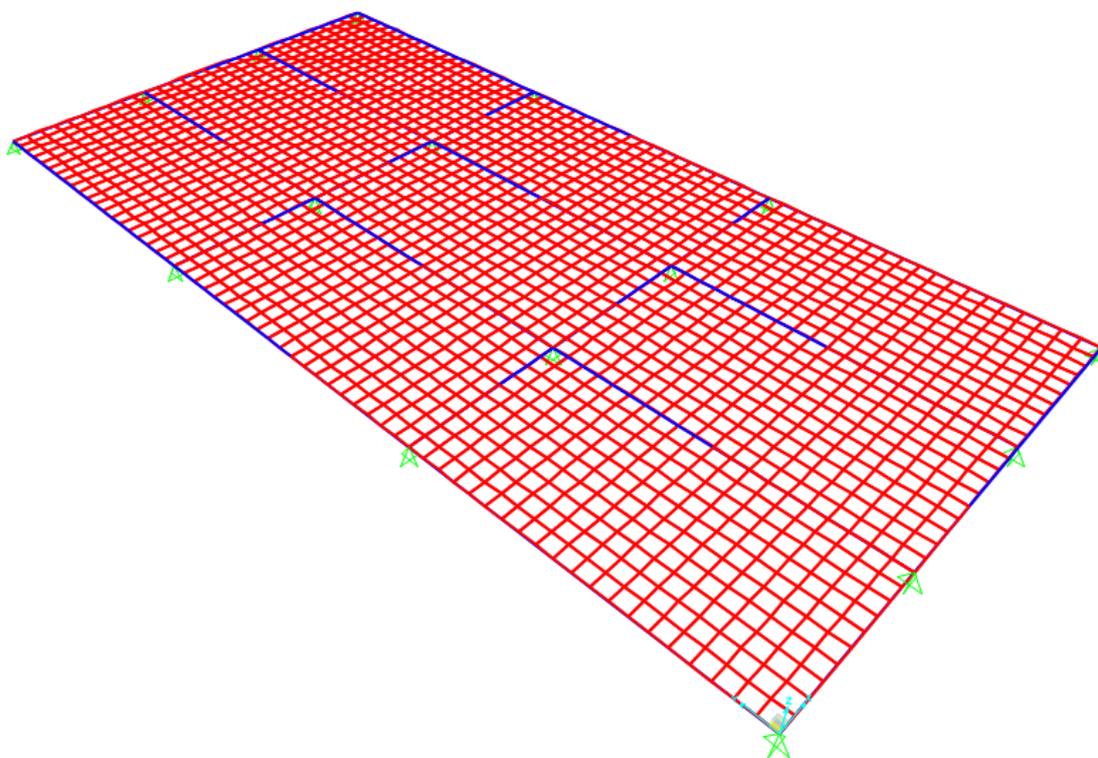


Figura 7.42 – Modelo 4 em laje retangular engastada.

A Figura 7.43 mostra a distribuição dos momentos fletores do Modelo 4. Conforme pode ser verificado a laje central possui momentos negativos nas bordas indicando um certo grau de engastamento das lajes. Os resultados da Figura 7.43 foram obtidos considerando-se todas as vigas rígidas.

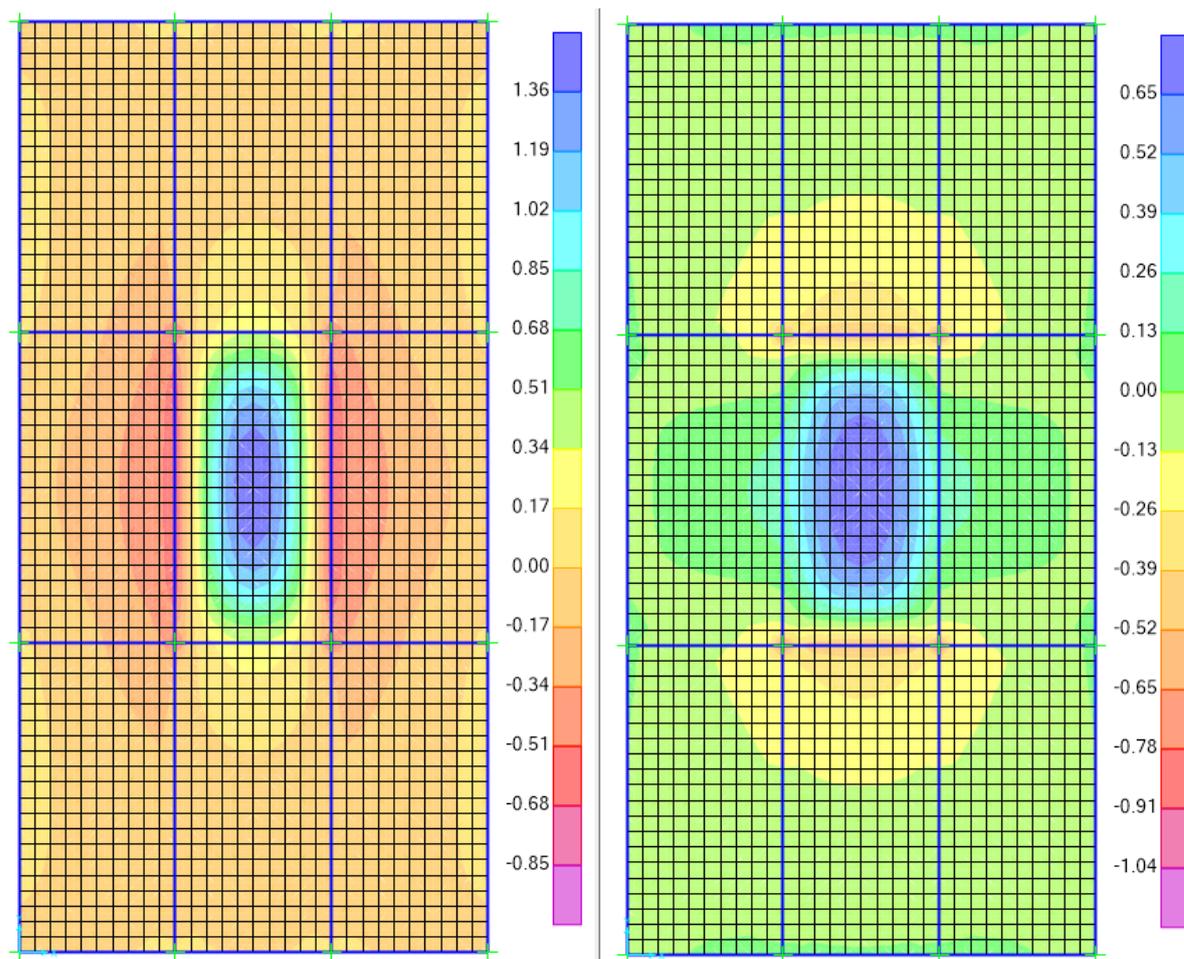


Figura 7.43 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 4: Viga rígida em laje retangular de 15cm de espessura.

As solicitações e deslocamentos calculados na laje central são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo em X: 1,53 kN.m/m;
- momento negativo máximo em X: 0,69 kN.m/m;
- momento positivo máximo em Y: 0,78 kN.m/m;
- momento negativo máximo em Y: 0,56 kN.m/m. Entretanto, foi observado, de forma isolada, momento negativo de 0,73 kN.m/m próximo aos pilares. Como não houve aumento gradativo foi adotado o valor obtido no meio da viga de borda;
- deslocamento máximo: 0,463 mm.

Alterando-se a inércia das vigas que fazem o contorno da laje central para vigas de baixa rigidez, vigas de 10x40 (maior vão) e 10x20 (menor vão), e mantendo as demais vigas rígidas, obtém-se a seguinte distribuição de momentos fletores da laje (Figura 7.44).

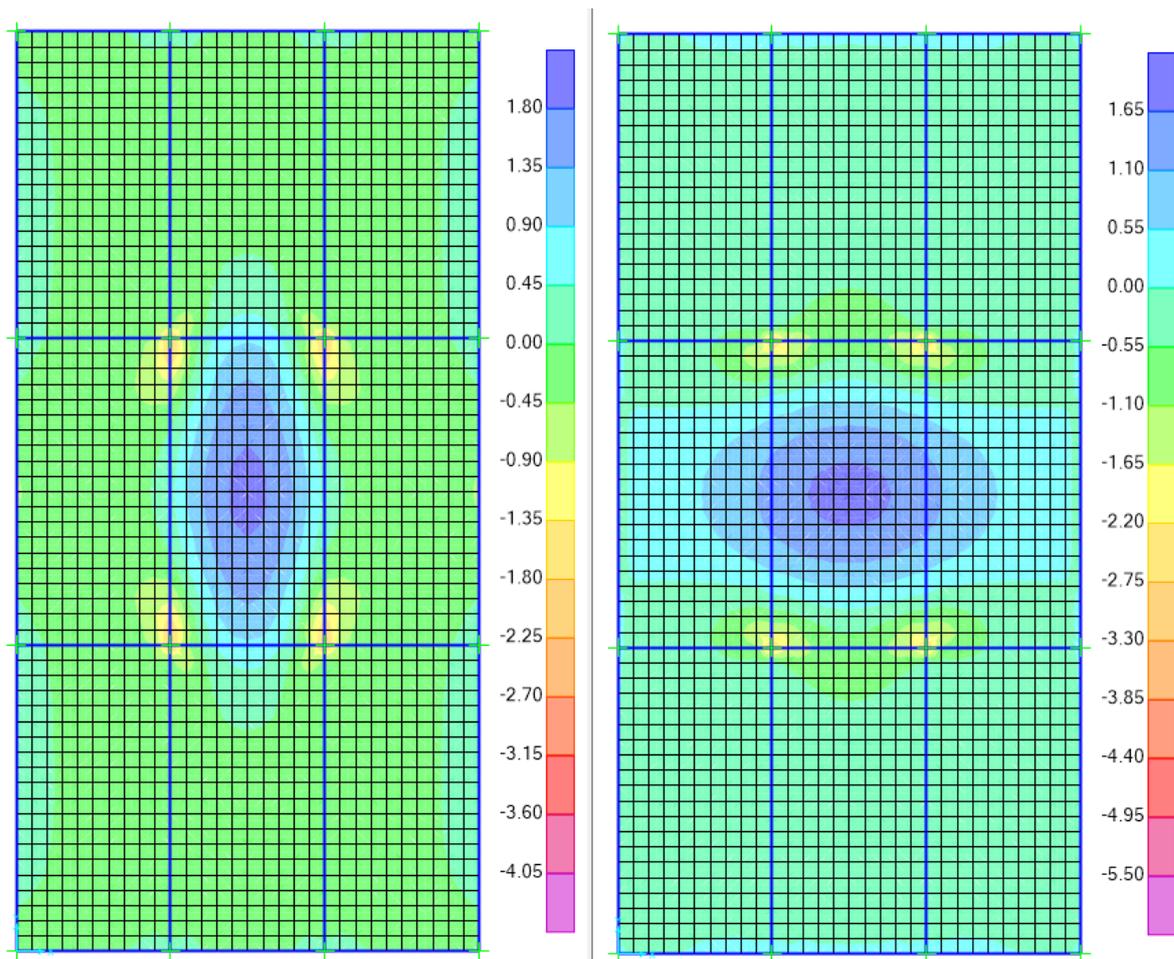


Figura 7.44 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 4: Viga flexível em laje retangular de 15cm de espessura.

Para essa condição de contorno os valores dos deslocamentos e momentos da laje central são descritos abaixo:

- momento positivo máximo em X: 1,92 kN.m/m;
- momento negativo máximo em X: Foi observado um momento positivo no meio da viga de borda no valor de 0,31 kN.m/m. Assim, admitiu-se o valor calculado próximo ao apoio de 2,28 kN.m/m distribuído ao longo do vão, resultando em 0,76 kN./m;
- momento positivo máximo em Y: 1,81 kN.m/m;
- momento negativo em Y: aumentando gradativamente de 0,81 kN.m/m (meio do vão da viga de borda) até 2,7 kN.m/m (próximo ao apoio). Média 1,755 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,557 mm.

Em relação ao momento positivo verificado na borda do eixo X da laje central observa-se, por meio da Figura 7.45, que a deformada da estrutura indica que a laje central se comporta como se parte do vigaamento, na direção do maior vão, fizesse

parte da estrutura da laje, conforme pode ser verificado pela curvatura da laje na região do vigamento.

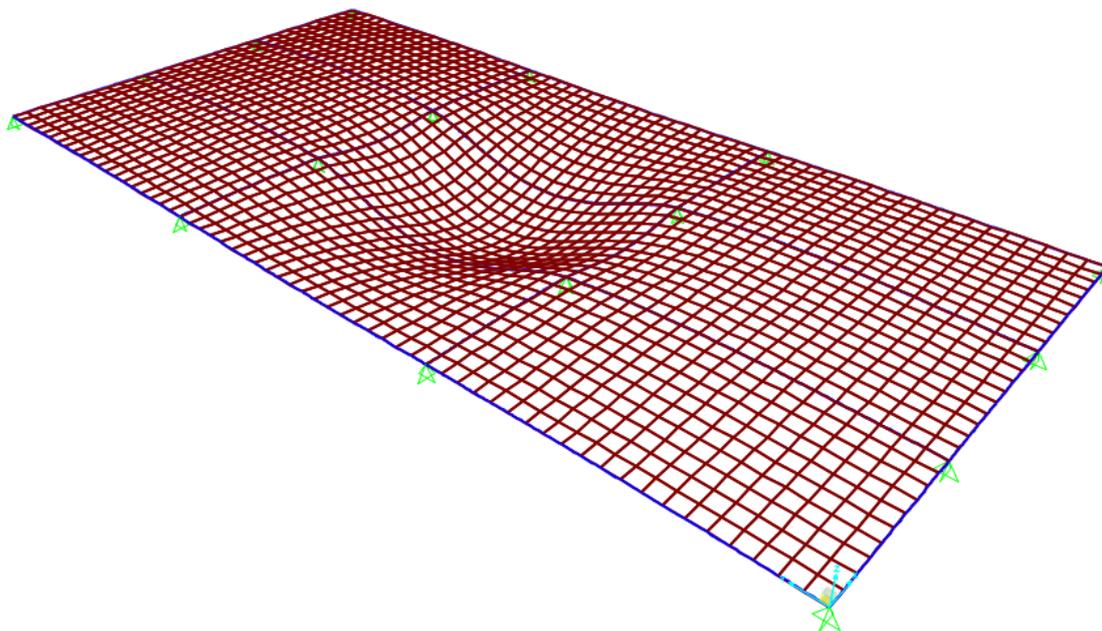


Figura 7.45 – Deformada do Modelo 4 em laje retangular de 15cm de espessura.

Ressalta-se ainda que, embora a seção da viga tenha sido considerada retangular, o *software* calcula a estrutura como um todo, assim, os deslocamentos das vigas de borda podem ser diferentes dos estimados pelo modelo proposto na direção do maior e menor vão.

Considerando-se que as vigas de borda flexíveis, na direção do maior vão, são mais suscetíveis aos deslocamentos e que a laje por ser espessa tenha deslocamentos relativamente inferiores, há uma tendência de que as vigas se comportem como parte da estrutura da laje, de forma análoga à análise de lajes unidirecionais.

#### 7.4.5 Modelo 4A – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura

O Modelo 4A utiliza as mesmas premissas do Modelo 4, entretanto, todas as lajes possuem o mesmo carregamento de 2,5 kN/m<sup>2</sup>. A Figura 7.46 apresenta os momentos fletores, nas direções X e Y, do Modelo 4A.

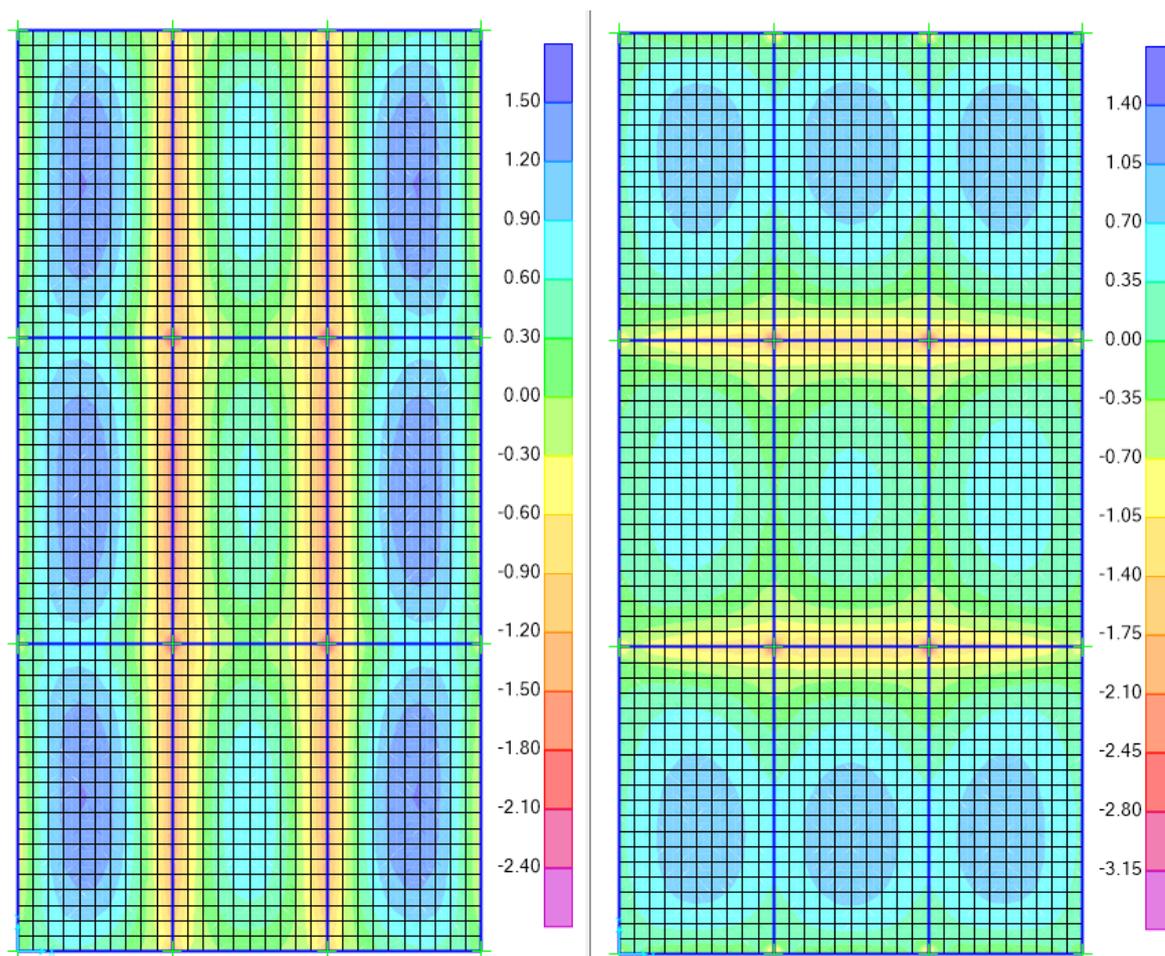


Figura 7.46 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 4A: Vigas rígidas em laje retangular de 15 cm de espessura.

Os resultados relativos aos momentos fletores e deslocamentos da análise do Modelo 4A são apresentados abaixo:

- Momento positivo máximo em X: 0,68 kN.m/m;
- Momento negativo máximo em X: 1,8 kN.m/m;
- Momento positivo máximo em Y: 0,435 kN.m/m;
- Momento negativo máximo em Y: aumentando gradativamente de 1,46 kN.m/m (meio do vão da viga de bordo) até 3 kN.m/m (próximo ao apoio). Média 2,23 kN.m/m;
- Deslocamento máximo: 0,066 mm.

Alterando-se a inércia das vigas de bordo, seguindo a mesma sistemática adotada nos itens anteriores, obtém-se a distribuição de momentos apresentada na Figura 7.47.

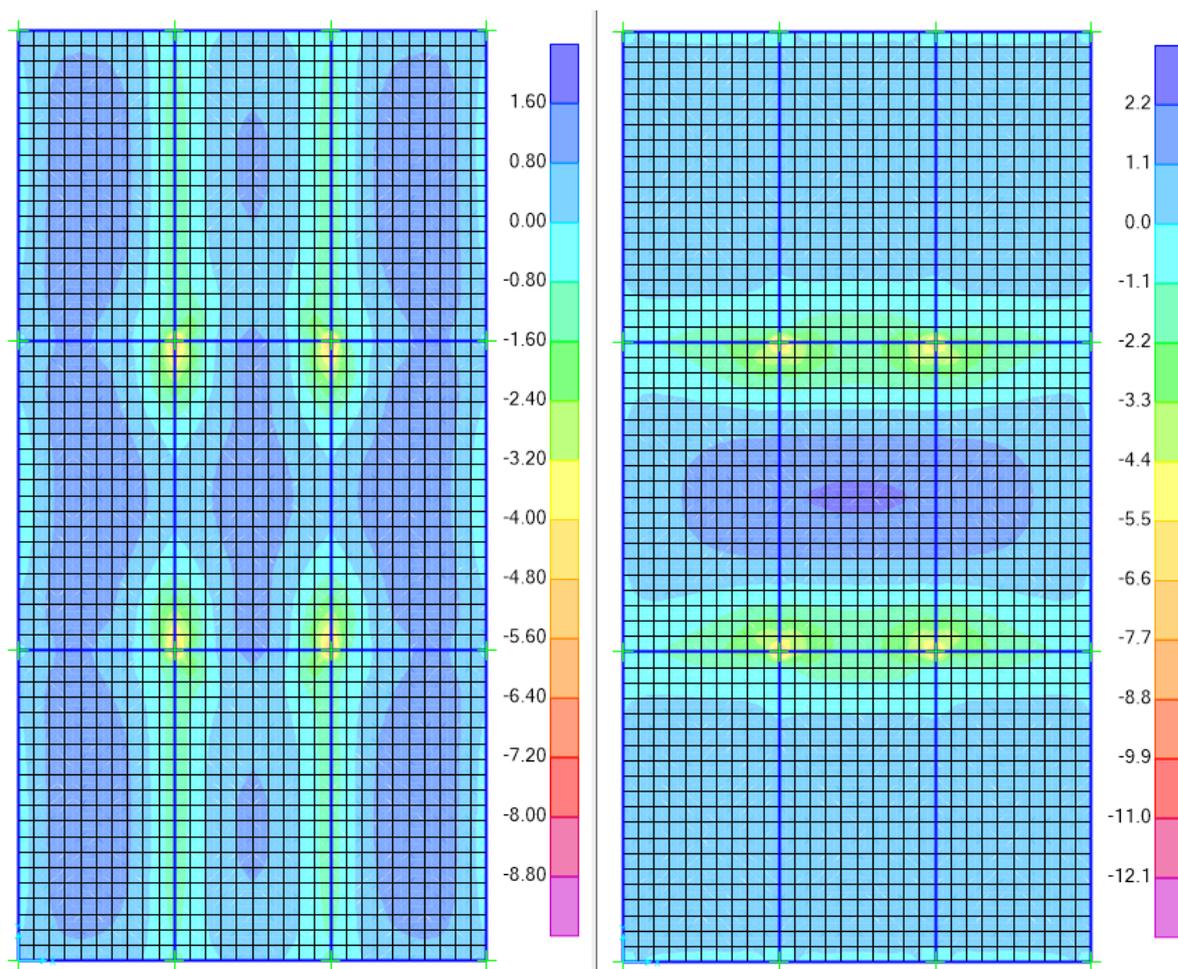


Figura 7.47 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 4A: Vigas flexíveis em laje retangular de 15cm de espessura.

Os valores obtidos para configuração de apoios flexíveis no Modelo 4A são apresentados abaixo:

- Momento positivo máximo em X: 1,11 kN.m/m;
- Momento negativo máximo em X: Foi observado um momento positivo no meio da viga de apoio no valor de 0,2 kN.m/m. Para o cálculo do momento negativo admitiu-se o valor calculado próximo ao pilar de 5,45 kN.m/m distribuído ao longo do vão, resultando em 2,725 kN.m/m;
- Momento positivo máximo em Y: 2,28 kN.m/m;
- Momento negativo máximo em Y: aumentando gradativamente de 1,96 kN.m/m (meio do vão da viga de bordo) até 3,37 kN.m/m (próximo ao apoio). Média 2,67 kN.m/m. Ressalta-se que foi observado um valor de 6,79 kN.m/m próximo ao pilar;
- Deslocamento máximo: 0.583 mm.

Em relação ao momento positivo constatado na borda da laje no eixo X, de forma análoga ao Modelo 4 com vigas flexíveis, a laje central se comporta como se o

maior vão fizesse parte da estrutura da laje conferindo, assim, a continuidade da curvatura da laje, conforme pode ver verificado na Figura 7.48.

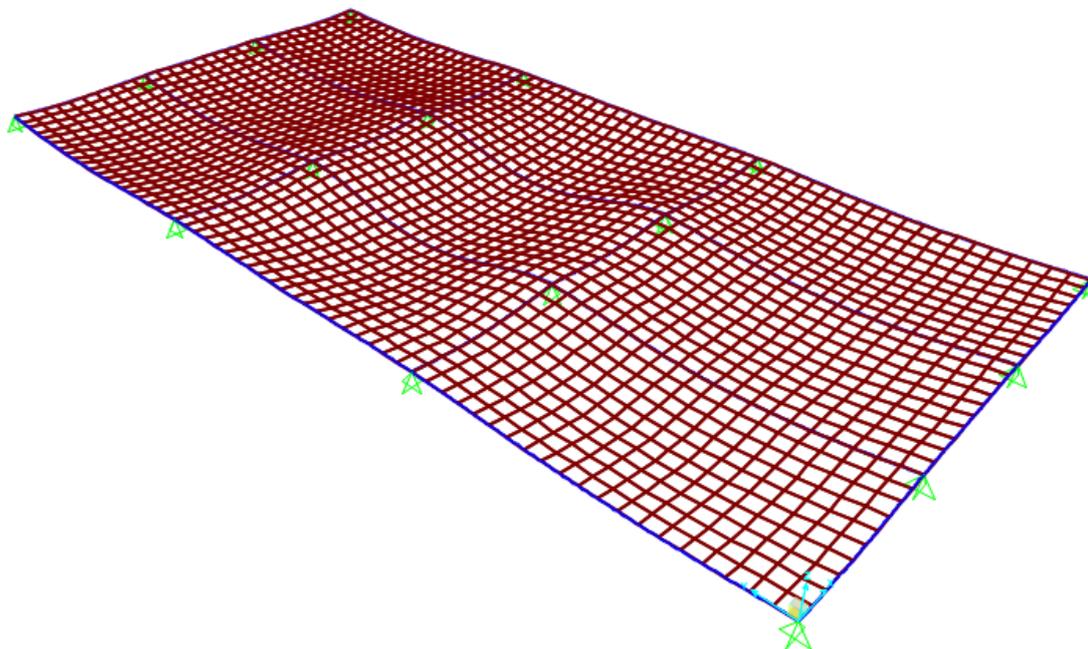


Figura 7.48 – Deformada do Modelo 4A em laje retangular de 15cm de espessura.

#### 7.4.6 Modelo 5 – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura

A Figura 7.49 ilustra o Modelo 5 idealizado na análise numérica. As mesmas hipóteses do Modelo 4 foram adotadas nessa análise, substituindo-se apenas o tipo de apoio utilizado. Foi admitido como apoio pilares de 30x30, com comprimento de 3 metros e engastados na base.

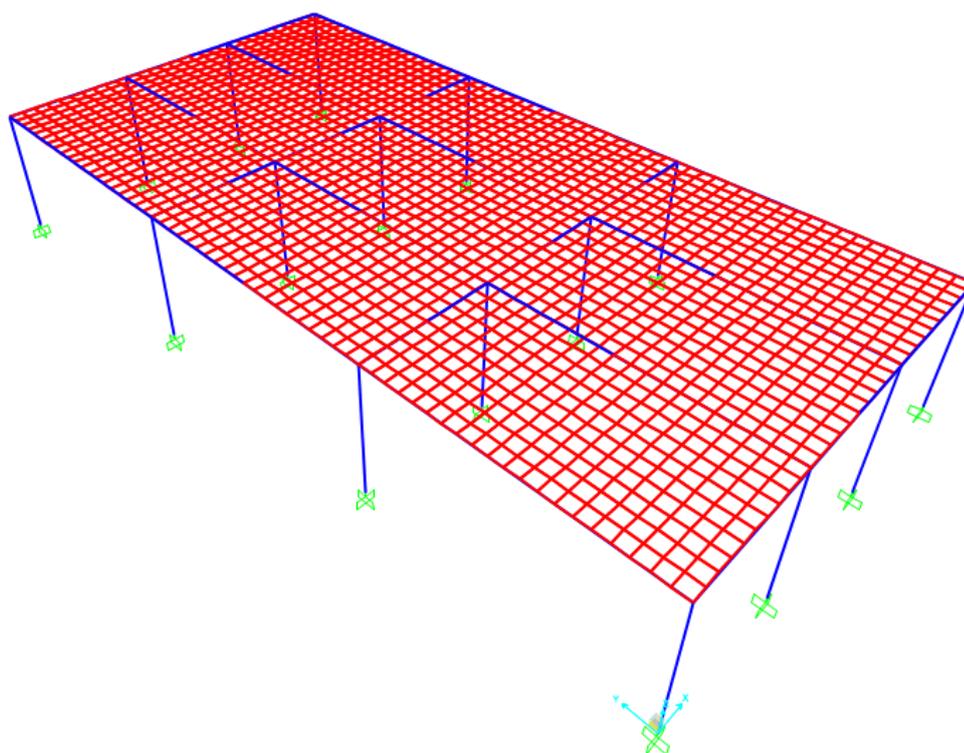


Figura 7.49 – Modelo 5 em laje retangular engastada.

A Figura 7.50 apresenta a distribuição dos momentos fletores do Modelo 5. Os resultados fornecidos na análise numérica são para o caso em que todas as vigas são rígidas.

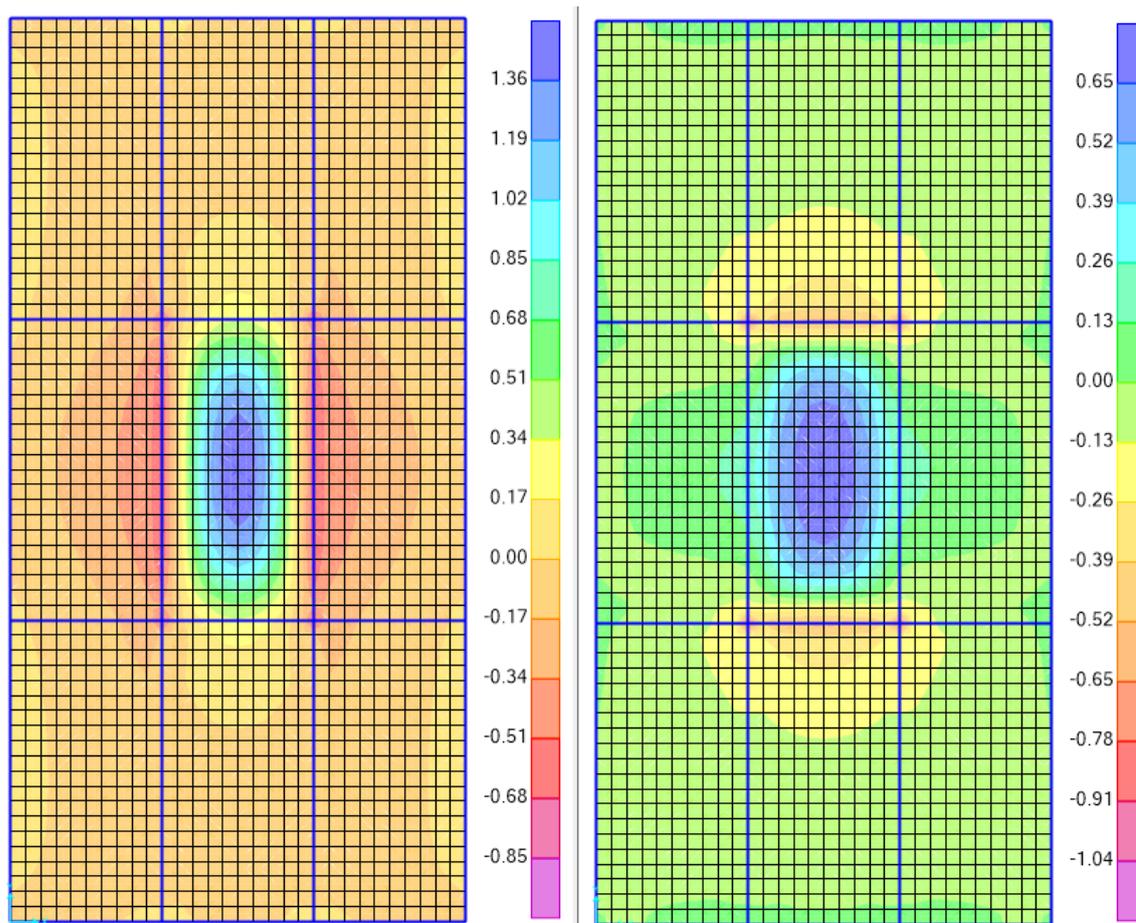


Figura 7.50 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 5: Vigas rígidas em laje retangular de 15cm de espessura.

Os resultados do momento fletor máximo (positivo e negativo) e deslocamento da Figura 7.50 é descrito abaixo:

- momento positivo máximo em X: 1,52 kN.m/m;
- momento negativo máximo em X: 0,69 kN.m/m;
- momento positivo máximo em Y: 0,77 kN.m/m;
- momento negativo máximo em Y: 0,58 kN.m/m no meio da viga de apoio. Entretanto, foi observado, de forma isolada, momento negativo de 0,74 kN.m/m próximo aos pilares. Como o momento de 0,58 kN.m/m reduz ao chegar nos vértices e o momento de 0,74 kN.m/m aparece de forma isolada foi adotado o valor do meio da viga de borda;
- deslocamento máximo: 0,254 mm.

Alterando-se a inércia das vigas que fazem o contorno da laje central para vigas de baixa rigidez (vigas de 10x40 e 10x20) e mantendo as demais vigas com seção constante, obtém-se a seguinte distribuição de momentos fletores da laje (Figura 7.51).

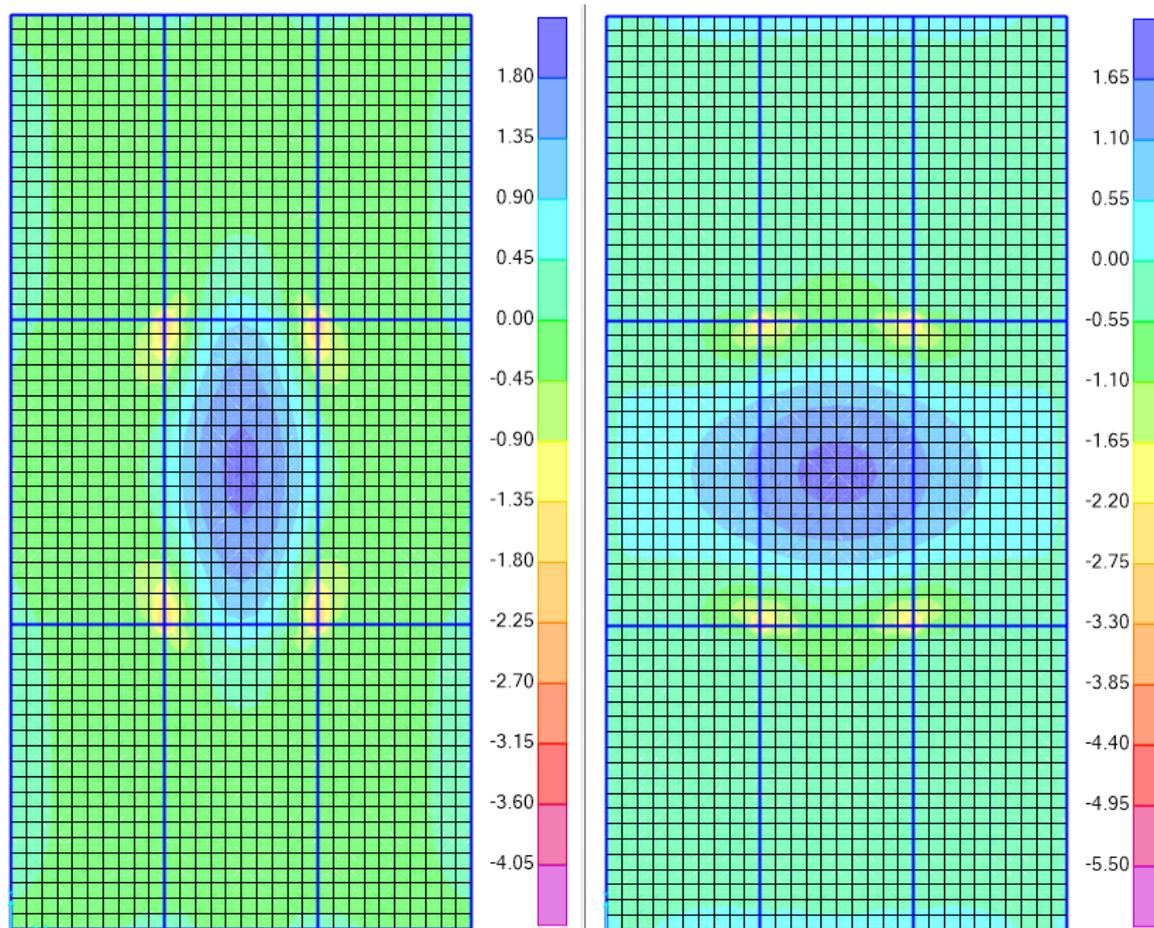


Figura 7.51 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 5: Vigas flexíveis em laje retangular de 15cm de espessura.

As solicitações e deslocamentos do Modelo 5, considerando-se vigas de bordo flexíveis, são apresentados abaixo:

- momento positivo máximo em X: 1,92 kN.m/m;
- momento negativo máximo em X: Foi observado um momento positivo no meio da viga de apoio no valor de 0,31 kN.m/m. Para o cálculo do momento negativo admitiu-se o valor calculado próximo ao pilar de 2,27 kN.m/m distribuído ao longo do vão, resultando em 0,76 kN.m/m;
- momento positivo máximo em Y: 1,8 kN.m/m;
- momento negativo máximo em Y: aumentando gradativamente de 0,82 kN.m/m (meio do vão da viga de bordo) até 2,61 kN.m/m (próximo ao apoio). Média 1,715 kN.m/m;
- deslocamento máximo: 0,564 mm.

O comportamento estrutural observado na Figura 7.45 foi verificado na análise dos momentos na direção X do Modelo 5.

#### 7.4.7 Modelo 5A – Laje retangular e totalmente engastada – 15cm de espessura

O Modelo 5A utiliza as mesmas premissas do Modelo 5. A mudança ocorre apenas no carregamento onde é aplicado em todas as lajes a carga de  $2,5 \text{ kN/m}^2$ , sendo desconsiderado o peso próprio. A Figura 7.52 apresenta a distribuição dos momentos fletores da análise numérica.

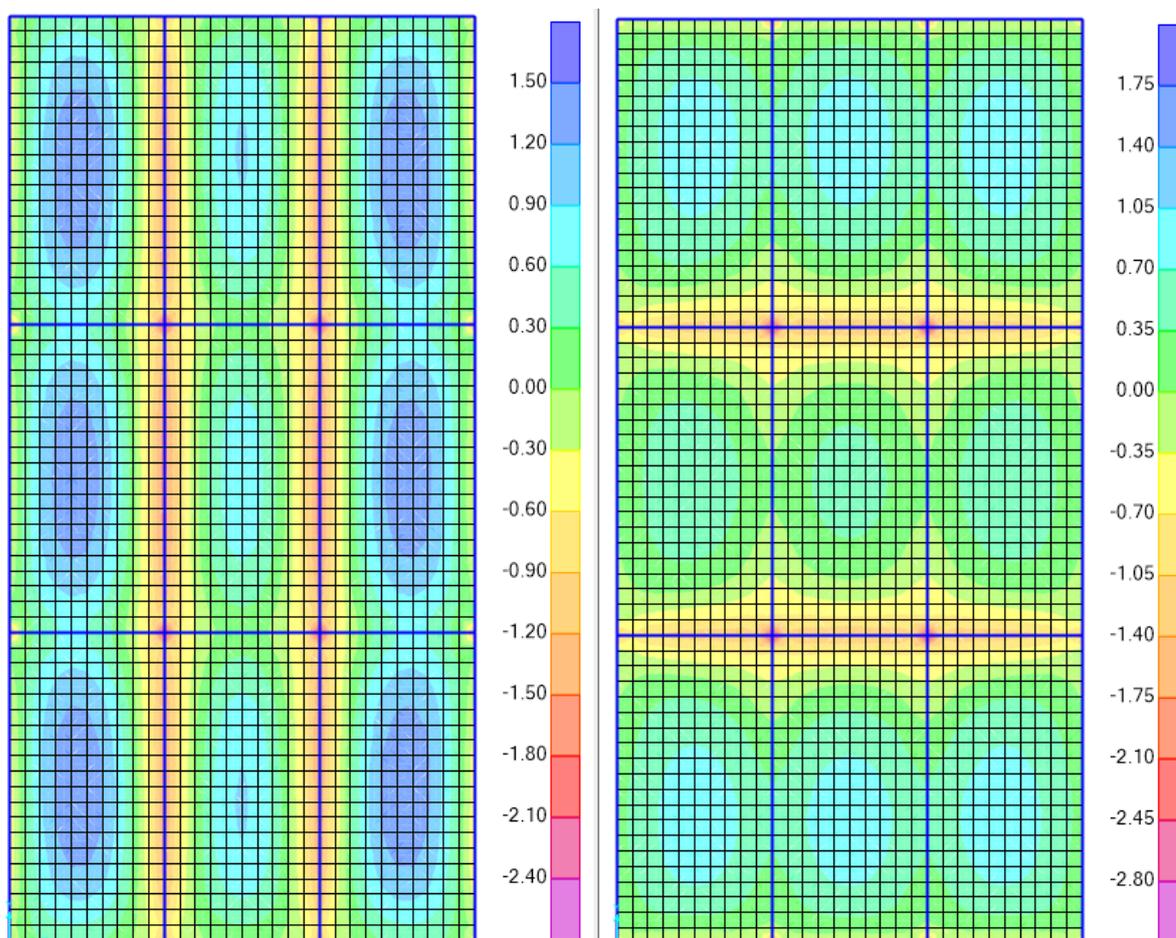


Figura 7.52 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 5A: Vigas rígidas em laje retangular de 15cm de espessura.

Os valores obtidos na laje central do Modelo 5A com vigas rígidas são descritos abaixo:

- momento positivo máximo em X:  $0,79 \text{ kN.m/m}$ ;
- momento negativo máximo em X:  $1,73 \text{ kN.m/m}$ ;
- momento positivo máximo em Y:  $0,49 \text{ kN.m/m}$ ;
- momento negativo máximo em Y: aumentando gradativamente de  $1,375 \text{ kN.m/m}$  (meio do vão da viga de bordo) até  $2,93 \text{ kN.m/m}$  (próximo ao apoio). Média  $2,153 \text{ kN.m/m}$ ;
- deslocamento máximo:  $0,154 \text{ mm}$ .

Alterando-se a inércia das vigas de bordo para vigas flexíveis, obtém-se a distribuição dos momentos fletores da laje (Figura 7.53).

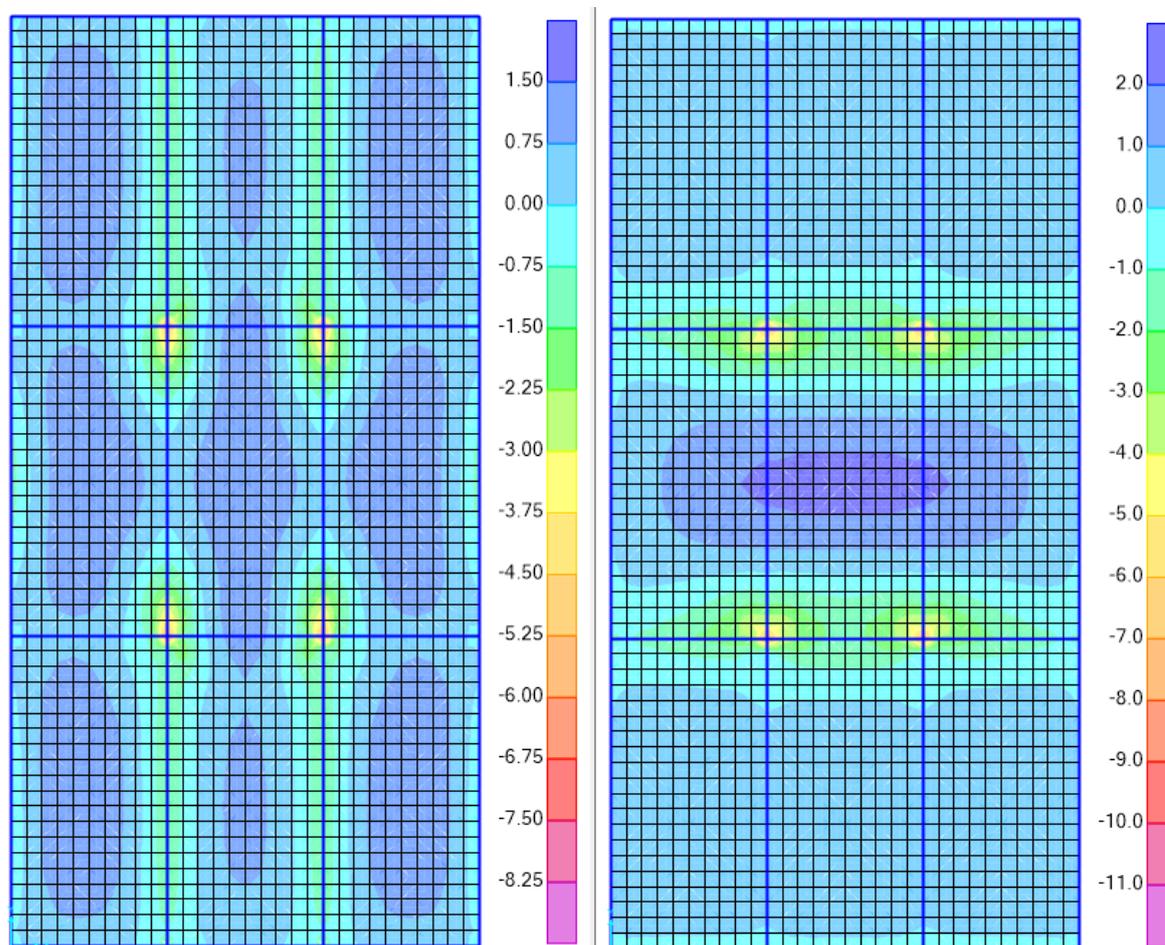


Figura 7.53 – Momentos fletores ao longo do eixo X (1º imagem) e Y (2º imagem) no Modelo 5A: Vigas flexíveis em laje retangular de 15cm de espessura.

Os deslocamentos e solicitações, considerando-se vigas de bordo flexíveis, na análise numérica do Modelo 5A são apresentados:

- momento positivo máximo em X: 1,25 kN.m/m;
- momento negativo máximo em X: Foi observado um momento positivo no meio da viga de apoio no valor de 0,28 kN.m/m. Para o cálculo do momento negativo admitiu-se o valor calculado próximo ao pilar de 5,56 kN.m/m distribuído ao longo do vão, resultando em 1,853 kN.m/m;
- momento positivo máximo em Y: 2,33 kN.m/m;
- momento negativo máximo em Y: aumentando gradativamente de 1,85 kN.m/m (meio do vão da viga de bordo) até 2,89 kN.m/m (próximo ao apoio). Média 2,37 kN.m/m. Ressalta-se que foi observado um valor de 6,86 kN.m/m próximo ao pilar;
- deslocamento máximo: 0.678 mm.

De forma similar ao Modelo 4A o vigamento na direção do maior vão tende a se comportar como parte integrante da laje. Configuração similar da Figura 7.48 foi verificada nessa análise.

#### 7.4.8 Resumo dos resultados da análise numérica para laje retangular e engastada

As tabelas 7.19, 7.20 e 7.21 apresentam os resultados obtidos nas análises, incluindo os resultados obtidos para as lajes de 10 e 8cm de espessura e as calibrações propostas na Figura 7.4.

A calibragem 1 está associada aos resultados do Modelo Proposto C1 e a calibragem 2 aos resultados do Modelo Proposto C2.

Tabela 7.19 – Resumo dos resultados em laje retangular de 15cm de espessura.

VIGAS DE BORDA RÍGIDAS - LAJE - 15cm					
	Momento positivo em X (kN.m/m)	Momento negativo em X (kN.m/m)	Momento positivo em Y (kN.m/m)	Momento negativo em Y (kN.m/m)	Deslocamento (mm)
Teoria de Grelha	0.882	1.765	0.221	0.441	0.055
Modelo Proposto	0.841	1.681	0.388	0.776	0.110
Modelo Proposto C1	0.747	1.495	0.761	1.521	0.240
Modelo Proposto C2	0.846	1.692	0.367	0.734	0.097
Modelo 1	0.920	1.860	0.300	1.280	0.057
Modelo 1T	1.000	1.940	0.335	1.260	0.061
Modelo 2	0.920	1.845	0.320	1.270	0.065
Modelo 2T	1.000	1.940	0.345	1.270	0.070
Modelo 3	0.940	1.830	0.320	1.230	0.079
Modelo 3T	1.020	1.930	0.350	1.250	0.083
Modelo 4	1.530	0.690	0.780	0.560	0.245
Modelo 4T	1.680	0.740	0.840	0.665	0.262
Modelo 4A	0.680	1.800	0.435	2.230	0.066
Modelo 4AT	0.700	1.880	0.440	2.155	0.065
Modelo 5	1.520	0.690	0.770	0.580	0.254
Modelo 5T	1.690	0.740	0.840	0.685	0.271
Modelo 5A	0.790	1.730	0.490	2.153	0.154
Modelo 5AT	0.800	1.800	0.480	2.175	0.153
VIGAS DE BORDA FLEXÍVEIS - LAJE - 15cm					
	Momento positivo em X (kN.m/m)	Momento negativo em X (kN.m/m)	Momento positivo em Y (kN.m/m)	Momento negativo em Y (kN.m/m)	Deslocamento (mm)
Teoria de Grelha	0.882	1.765	0.221	0.441	0.055
Modelo Proposto	0.668	1.375	0.999	1.998	0.800
Modelo Proposto C1	0.516	1.032	1.686	3.372	2.161
Modelo Proposto C2	0.631	1.262	1.226	2.453	0.560
Modelo 1	0.920	1.860	0.300	1.280	0.057
Modelo 1T	1.000	1.940	0.335	1.260	0.061
Modelo 2	0.925	1.810	0.345	1.320	0.082
Modelo 2T	1.000	1.900	0.370	1.310	0.086
Modelo 3	0.940	1.790	0.360	1.260	0.104
Modelo 3T	1.020	1.850	0.385	1.260	0.108
Modelo 4	1.920	0.760	1.810	1.755	0.557
Modelo 4T	2.110	0.770	2.040	1.880	0.623
Modelo 4A	1.110	1.817	2.280	2.670	0.583
Modelo 4AT	1.190	1.900	2.460	2.545	0.638
Modelo 5	1.920	0.760	1.800	1.715	0.564
Modelo 5T	2.130	0.813	2.020	1.810	0.629
Modelo 5A	1.250	1.853	2.330	2.370	0.678
Modelo 5AT	1.335	1.950	2.500	2.525	0.733

Tabela 7.20 – Resumo dos resultados em laje retangular de 10cm de espessura.

VIGAS DE BORDA RÍGIDAS - LAJE - 10cm					
	Momento positivo em X (kN.m/m)	Momento negativo em X (kN.m/m)	Momento positivo em Y (kN.m/m)	Momento negativo em Y (kN.m/m)	Deslocamento (mm)
Teoria de Grelha	0.882	1.765	0.221	0.441	0.186
Modelo Proposto	0.868	1.737	0.277	0.553	0.243
Modelo Proposto C1	0.830	1.661	0.428	0.857	0.390
Modelo Proposto C2	0.871	1.742	0.267	0.534	0.229
Modelo 1	0.920	1.860	0.330	1.280	0.193
Modelo 1T	1.000	1.960	0.387	1.260	0.207
Modelo 2	0.920	1.860	0.340	1.270	0.202
Modelo 2T	1.000	1.950	0.388	1.260	0.216
Modelo 3	0.940	1.850	0.350	1.230	0.216
Modelo T	1.020	1.940	0.400	1.250	0.230
Modelo 4	1.270	0.900	0.500	0.640	0.463
Modelo 4T	1.400	0.940	0.564	0.660	0.495
Modelo 4A	0.800	1.920	0.300	1.270	0.177
Modelo 4AT	0.860	2.000	0.330	1.270	0.185
Modelo 5	1.260	0.900	0.500	0.640	0.464
Modelo 5T	1.390	0.960	0.560	0.680	0.496
Modelo 5A	0.860	1.830	0.320	1.240	0.279
Modelo 5AT	0.920	2.000	0.357	1.250	0.287
VIGAS DE BORDA FLEXÍVEIS - LAJE - 10cm					
	Momento positivo em X (kN.m/m)	Momento negativo em X (kN.m/m)	Momento positivo em Y (kN.m/m)	Momento negativo em Y (kN.m/m)	Deslocamento (mm)
Teoria de Grelha	0.882	1.765	0.221	0.441	0.186
Modelo Proposto	0.759	1.518	0.714	1.427	0.996
Modelo Proposto C1	0.594	1.188	1.373	2.747	2.577
Modelo Proposto C2	0.752	1.504	0.741	1.483	0.780
Modelo 1	0.920	1.860	0.330	1.280	0.193
Modelo 1T	1.000	1.960	0.387	1.260	0.207
Modelo 2	0.920	1.840	0.350	1.270	0.226
Modelo 2T	1.000	1.940	0.394	1.635	0.240
Modelo 3	0.940	1.830	0.350	1.240	0.248
Modelo T	1.020	1.910	0.390	1.230	0.262
Modelo 4	1.660	0.755	1.170	1.010	1.150
Modelo 4T	1.840	0.760	1.280	1.030	1.250
Modelo 4A	1.070	1.590	1.350	2.000	1.170
Modelo 4AT	1.060	1.625	1.390	2.070	1.220
Modelo 5	1.650	0.760	1.170	0.980	1.150
Modelo 5T	1.830	0.770	1.280	1.010	1.250
Modelo 5A	1.150	1.560	1.370	1.980	1.280
Modelo 5AT	1.130	1.560	1.400	2.080	1.330

Tabela 7.21 – Resumo dos resultados em laje retangular de 8cm de espessura.

VIGAS DE BORDA RÍGIDAS - LAJE - 8cm					
	Momento positivo em X (kN.m/m)	Momento negativo em X (kN.m/m)	Momento positivo em Y (kN.m/m)	Momento negativo em Y (kN.m/m)	Deslocamento (mm)
Teoria de Grelha	0.882	1.765	0.221	0.441	0.364
Modelo Proposto	0.875	1.750	0.250	0.500	0.421
Modelo Proposto C1	0.854	1.708	0.334	0.668	0.573
Modelo Proposto C2	0.876	1.753	0.245	0.489	0.407
Modelo 1	0.920	1.860	0.330	1.280	0.377
Modelo 1T	1.000	1.950	0.388	1.260	0.405
Modelo 2	0.920	1.860	0.340	1.280	0.386
Modelo 2T	1.000	1.950	0.388	1.260	0.414
Modelo 3	0.940	1.850	0.350	1.260	0.400
Modelo T	1.020	1.950	0.397	1.250	0.428
Modelo 4	1.160	0.930	0.440	0.660	0.692
Modelo 4T	1.270	0.980	0.490	0.660	0.739
Modelo 4A	0.860	1.930	0.310	1.230	0.351
Modelo 4AT	0.930	2.000	0.354	1.260	0.373
Modelo 5	1.140	0.900	0.430	0.670	0.688
Modelo 5T	1.260	0.980	0.490	0.680	0.736
Modelo 5A	0.900	1.910	0.320	1.220	0.461
Modelo 5AT	0.970	2.000	0.365	1.250	0.479
VIGAS DE BORDA FLEXÍVEIS - LAJE - 8cm					
	Momento positivo em X (kN.m/m)	Momento negativo em X (kN.m/m)	Momento positivo em Y (kN.m/m)	Momento negativo em Y (kN.m/m)	Deslocamento (mm)
Teoria de Grelha	0.882	1.765	0.221	0.441	0.364
Modelo Proposto	0.800	1.600	0.550	1.100	1.210
Modelo Proposto C1	0.659	1.318	1.115	2.230	2.990
Modelo Proposto C2	0.804	1.607	0.536	1.071	0.995
Modelo 1	0.920	1.860	0.330	1.280	0.377
Modelo 1T	1.000	1.950	0.388	1.260	0.405
Modelo 2	0.920	1.850	0.340	1.270	0.412
Modelo 2T	1.000	1.950	0.389	1.260	0.440
Modelo 3	0.940	1.830	0.350	1.240	0.435
Modelo T	1.020	1.910	0.397	1.230	0.462
Modelo 4	1.530	0.735	0.890	0.725	1.640
Modelo 4T	1.700	0.735	0.970	0.750	1.770
Modelo 4A	1.020	1.280	0.930	1.335	1.550
Modelo 4AT	1.040	1.305	0.930	1.340	1.590
Modelo 5	1.510	0.740	0.890	0.725	1.630
Modelo 5T	1.690	0.775	0.970	0.775	1.770
Modelo 5A	1.070	1.280	0.940	1.345	1.680
Modelo 5AT	1.080	1.300	0.950	1.320	1.710

#### 7.4.9 Considerações dos modelos numéricos em laje retangular engastada

Pôde-se constatar que os modelos 1, 2 e 3, incluindo a análise com redução da inércia à torção da laje, possuem comportamento similar das solicitações e deslocamentos para todas as espessuras de laje. Ao se reduzir a inércia à flexão das vigas de borda nesses modelos quase não há alteração nas solicitações, apenas um aumento nos deslocamentos.

Os modelos 4 e 5 apresentaram, de uma forma geral, resultados semelhantes de solicitações e deslocamentos, inclusive nos casos onde houve redução da inércia à torção da laje. De forma análoga, os modelos 4A e 5A demonstraram resultados semelhantes, porém diferentes em magnitude dos modelos 4 e 5.

Nos modelos 4 e 5, ao se reduzir a inércia à flexão das vigas de bordo, foi constatado aumento significativo dos momentos (positivo e negativo) no sentido do maior vão (eixo Y) e de momento positivo na direção do menor vão (eixo X), além do aumento no deslocamento total da laje. Esse comportamento também foi observado ao se reduzir a inércia à torção da laje nessas análises.

Ao se utilizar vigas de bordo flexíveis os modelos 4A e 5A apresentaram aumento relevante no momento positivo na direção do maior vão e uma redução significativa no momento negativo na direção do menor vão, além do aumento no deslocamento total da laje. Os modelos 4AT e 5AT apresentaram resultados similares.

O momento positivo na borda da laje engastada dos modelos 4A e 5A na direção do eixo X (Figuras 7.45 e 7.48) foi observado apenas na laje de 15cm de espessura, nos demais casos analisados foi verificado momento negativo, conforme esperado.

Esse fato indica que, a depender do grau de flexibilidade das vigas de apoio e da espessura da laje, pode haver uma tendência de que as vigas de apoio se comportem como parte integrante do sistema estrutural da laje.

#### 7.4.10 Análise dos resultados do modelo proposto em laje retangular de 8cm de espessura

Para as análises de lajes com vigas de apoio rígidas o modelo proposto, incluindo os valores com as calibrações adotadas, trouxe resultados próximos aos dos modelos numéricos para os momentos positivos e negativos na direção X (menor vão), momentos positivos da direção Y (maior vão) e deslocamentos, exceto para os modelos 4, 4T, 5 e 5T. Entretanto, os momentos negativos na direção Y geraram resultados diferentes dos demais, se aproximando apenas dos modelos 4, 4T, 5 e 5T.

Ao se considerar vigas de borda flexíveis o modelo proposto apresentou grande variação de resultados nos momentos positivos e negativos na direção do maior vão (eixo Y) e nos deslocamentos, a depender do tipo de calibração utilizada.

Em relação aos momentos na direção X, considerando-se vigas de apoio flexíveis, há boa concordância com os modelos numéricos nos resultados para os momentos positivos e negativos, exceto nos modelos 4, 4T, 5 e 5T que apresentaram valores superiores aos do modelo proposto para o momento positivo e inferiores para o momento negativo.

Acerca dos momentos positivos na direção Y, no caso de vigas de apoio flexíveis, a calibragem 1 se aproximou dos resultados dos modelos 4, 4T, 4A, 4AT, 5, 5T, 5A, 5AT, enquanto as demais calibrações ficaram ligeiramente superiores aos demais modelos numéricos.

Em relação aos momentos negativos a calibragem 2 e a inicial forneceram resultados próximos à análise numérica, exceto nos modelos 4, 4T, 5 e 5T que foram inferiores aos do modelo proposto.

Verifica-se que os deslocamentos, na condição de vigas de apoio flexíveis, dos modelos 1, 2 e 3, incluindo suas variações, são mais próximos da Teoria de Grelha e são inferiores às obtidas no modelo proposto. Entretanto, o modelo proposto apresentou resultados que compreendem os valores obtidos nas demais análises, sendo a calibragem 1 a que forneceu valores mais elevados e a calibragem inicial que forneceu valores inferiores, mas, mais próximos que a calibragem 2.

#### 7.4.11 Análise dos resultados do modelo proposto em laje retangular de 10cm de espessura

Os resultados obtidos para a laje de 10cm de espessura são semelhantes aos da laje de 8cm de espessura, assim, as mesmas deduções obtidas no item 8.4.10 são válidas para a laje de 10cm de espessura.

#### 7.4.12 Análise dos resultados do modelo proposto em laje retangular de 15cm de espessura

Foi constatado que, na condição de apoios rígidos e flexíveis, os momentos positivos e negativos na direção X possuem o mesmo comportamento observado para a laje de 8 e 10cm de espessura, assim, as conclusões são similares.

Em relação aos momentos positivos na direção Y, para a condição de vigas de apoio rígidas, a calibragem 1 forneceu resultados próximos aos modelos 4, 4T, 5 e 5T, enquanto a calibragem 2 e a inicial geraram resultados próximos aos demais modelos e suas variações. Ao se considerar a flexibilidade dos apoios os modelos 4, 4T, 5 e 5T apresentaram resultados ligeiramente superiores aos da calibragem 1, os demais resultados da análise numérica ficaram mais próximos da Teoria de Grelha.

Para a condição de vigas de borda rígidas os momentos negativos na direção Y dos modelos numéricos se aproximaram da calibragem 1, exceto para os modelos

4, 4T, 5 e 5T que se aproximaram da calibragem 2 e dos modelos 4A, 4AT, 5A e 5AT que forneceram valores bastante superiores.

O modelo proposto forneceu, para os momentos negativos na direção Y na condição de apoios flexíveis, valores próximos aos modelos 4, 4A, 5 e 5A e suas variações, os demais modelos numéricos apresentaram valores inferiores aos do modelo proposto.

Em relação aos deslocamentos comportamento semelhante ao da laje de 8cm de espessura foi verificado para as condições de apoios rígidos e flexíveis, entretanto foi observada maior concordância de resultados com a calibragem 2 nos deslocamentos com apoios flexíveis para os modelos 4, 4A, 5 e 5A e suas variações.

#### 7.4.13 Considerações do modelo proposto em laje retangular e engastada

Verifica-se que ao se reduzir a inércia das vigas de borda todos os modelos analisados no SAP2000 apresentaram aumento em seus deslocamentos. Esse fato mostra que o modelo proposto apresenta coerência em seus resultados.

Ao se utilizar vigas de baixa rigidez o modelo proposto apresentou um aumento considerável nos valores dos momentos (positivo e negativo) na direção do maior vão (eixo Y) e uma pequena redução dos momentos (positivo e negativo) na direção do menor vão (eixo X), além do aumento nos deslocamentos.

A estimativa do deslocamento das vigas de bordo é um fator determinante para a boa precisão nos resultados. Como pôde ser observado, as calibrações analisadas apresentaram resultados bastante distintos, assim, maior precisão no cálculo dos deslocamentos das vigas de borda tende a fornecer resultados mais satisfatórios.

De uma forma geral a proposta de alteração da teoria de grelha desenvolvida nesta tese apresenta boa precisão nos resultados, em especial para os casos em que os apoios são flexíveis, onde a Teoria de Grelha fornece resultados imprecisos.

## 8 VERIFICAÇÃO DO MODELO – ENSAIO EXPERIMENTAL

Apesar de existirem ensaios experimentais acerca da capacidade resistente em lajes, são praticamente inexistentes dados relativos à análise do comportamento de lajes com apoios flexíveis.

Assim, utilizou-se os ensaios realizados por Dat e Hai (2013) para a verificação do modelo proposto de contribuição à Teoria de Grelha. Os ensaios foram adotados por fornecerem subsídios mínimos para a verificação analítica e, de certa forma, utilizar vigas com certo grau de flexibilidade.

Portanto, considerando que foi fornecido o comportamento dos deslocamentos da laje em função do carregamento, são utilizados esses dados, em conjunto com a estimativa da rigidez à flexão das vigas de bordo, para o cálculo do deslocamento da laje pelo modelo proposto.

### 8.1 Características dos ensaios

Os ensaios realizados por Dat e Hai (2013) tem por objetivo analisar o comportamento da laje após a remoção do apoio central. Os autores utilizaram a configuração apresentada na Figura 8.1 para a realização dos ensaios.

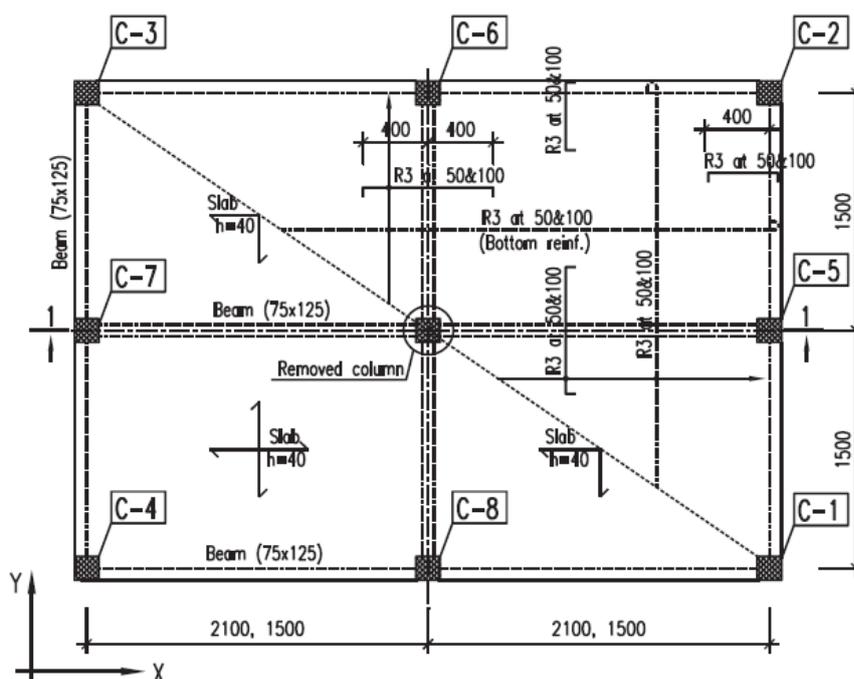


Figura 8.1 – Configuração das armaduras e dimensões da laje ensaiada (medidas em mm), adaptado de Dat e Hai (2013).

De acordo com os dados fornecidos em Dat e Hai (2013) a laje é maciça e tem espessura de 4cm, as vigas possuem seção constante de 7,5x12,5 cm e a resistência à compressão do concreto é  $f_{ck} = 29,6 \text{ MPa}$  e o aço utilizado possui tensão de escoamento de 424 MPa.

## 8.2 Ensaio da Laje P1-1

A laje P1-1 ensaiada possui lados iguais de 3m de comprimento e taxa de armadura inferior da laje de  $\rho_{inf} = 0,22\%$  na direção X e  $\rho_{inf} = 0,44\%$  na direção Y e superior de  $\rho_{sup} = 0,22\%$ . Os estágios de fissuração em função dos deslocamentos são apresentados na Figura 8.2.

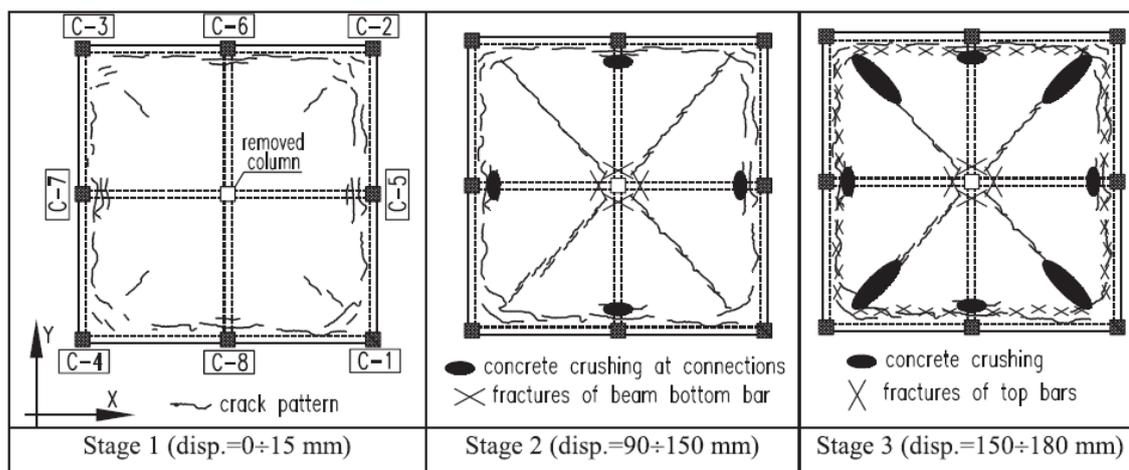


Figura 8.2 – Características das fissuras em função dos deslocamentos na laje P1-1, adaptado de Dat e Hai (2013).

A Figura 8.3 ilustra os resultados obtidos dos deslocamentos em função da carga distribuída na laje.

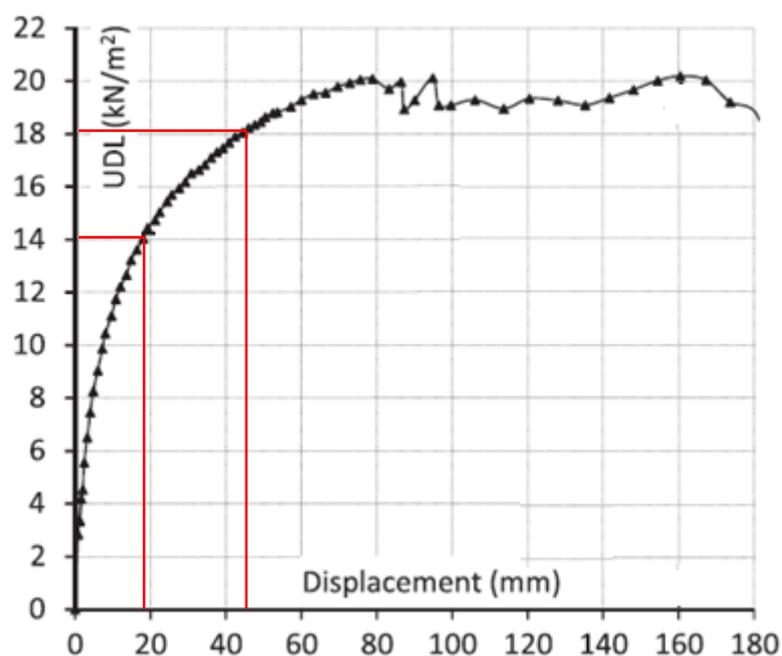


Figura 8.3 – Gráfico de Carregamento × Deslocamento da laje P1-1, adaptado de Dat e Hai (2013).

Os pontos marcados na Figura 8.3 são objeto de análise e aplicação do modelo proposto no item seguinte.

### 8.2.1 Modelo proposto aplicado ao ensaio da laje P1-1

São analisados dois estágios de carregamento da laje e os deslocamentos correspondentes são comparados com os deslocamentos obtidos pelo modelo analítico. A escolha dos estágios a serem analisados levou em consideração a não linearidade do gráfico da Figura 9.3. Os carregamentos objeto de análise são:

- Estágio 1:  $q = 14 \text{ kN/m}^2$
- Estágio 2:  $q = 18 \text{ kN/m}^2$

Foi utilizado o limite para a análise do carregamento de  $18 \text{ kN/m}^2$  pois acima desse valor a estrutura passou a apresentar comportamento bastante não linear próximo da ruptura e não foram fornecidos dados acerca das propriedades dos elementos estruturais que possibilitassem uma análise mais precisa.

Para se utilizar o modelo proposto é necessário estimar o módulo de elasticidade do concreto e os deslocamentos das vigas de extremidade. O cálculo do módulo de elasticidade é adotado seguindo as diretrizes da NBR 6118/2023, assim

$$E = 5600\sqrt{f_{ck}} = 30,467 \text{ GPa} \quad (8.1)$$

Devido à ausência de informações acerca do tipo de agregado utilizado foi adotado o valor de  $\alpha = 1$ .

Considerando-se que foram observadas fissuras no início dos ensaios, conforme pode ser verificado no desenho esquemático da Figura 8.2, o cálculo da rigidez à flexão da laje deve considerar a não linearidade física dos elementos estruturais.

Para o estágio 1 foi adotado o módulo de elasticidade secante nas vigas e lajes. No estágio 2, devido às características de não linearidade mais acentuada e fissuração elevada, foi adotado que nesse estágio a resistência à flexão é de apenas 30% da rigidez à flexão secante da laje.

$$EI_{sec} = 0,3EI_{laje} \quad (8.2)$$

### 8.2.2 Laje P1-1 – Modelo proposto – Estágio de carregamento 1

Nessa análise é utilizado o carregamento uniformemente distribuído de  $14 \text{ kN/m}^2$  que gerou um deslocamento aproximado na laje de  $1,8 \text{ cm}$ , conforme ilustra a Figura 8.3.

Para a aplicação da carga distribuída no modelo analítico foi adotado, além do valor  $q = 14 \text{ kN/m}^2$ , os valores referentes ao peso próprio da laje e das vigas internas, que resulta em aproximadamente  $q = 16 \text{ kN/m}^2$ .

Considerando-se que nesse estágio de carregamento há pouca fissuração na laje e o gráfico Carga  $\times$  deslocamento (Figura 8.3) é praticamente linear utiliza-se o módulo de elasticidade secante, conforme prescrições da NBR 6118/2023

$$E_{cs} = 0,85 \times 5600 \sqrt{f_{ck}} = 25,9 \text{ GPa} \quad (8.3)$$

Devido a pouca fissuração nesse primeiro estágio é adotado para o cálculo da rigidez à flexão da laje o mesmo módulo de elasticidade utilizado nas vigas.

O cálculo do deslocamento das vigas de borda varia em função do estágio de carregamento. Em função disso, foi estimado, devido à simetria da laje, que 0,25 do carregamento total, mais o peso próprio da viga, seja atribuído às vigas de borda.

Das hipóteses adotadas obtém-se o deslocamento máximo para a viga de borda, utilizando como modelo estrutural a viga da Figura 8.4.

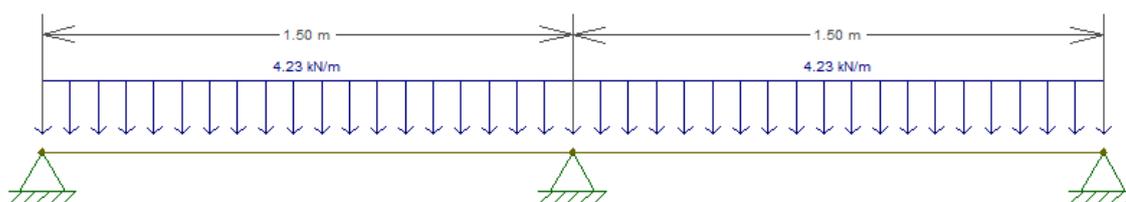


Figura 8.4 – Modelo estrutural para o cálculo dos deslocamentos das vigas de apoio.

O carregamento atribuído às vigas de borda no estágio 1 é de  $4,23 \text{ kN/m}$  que gerou um deslocamento de  $\Delta_{estágio1} = 0,37 \text{ mm}$ .

Para o cálculo do deslocamento de referência deve-se utilizar como base uma viga que tenha o mesmo comprimento da laje, assim, admite-se uma viga simplesmente apoiada com vão de  $3\text{m}$  submetida ao carregamento uniformemente distribuído igual ao do estágio correspondente, que resulta no deslocamento de referência

$$\Delta_{ref,estágio1} = \frac{5}{384} \frac{qL_{viga}^4}{EI_{viga}} = 0,014\text{m} = 14\text{mm} \quad (8.4)$$

Para se utilizar o modelo proposto deve-se ajustar o deslocamento de referência por meio do coeficiente  $\lambda$  que é a razão entre o deslocamento estimado na viga de apoio e o deslocamento de referência, assim

$$\lambda_{estagio1} = \frac{\Delta_{estagio1}}{\Delta_{ref,estagio1}} = 0,026 \quad (8.5)$$

O coeficiente de rigidez dos apoios elásticos da faixa de laje, considerando o coeficiente de ajuste  $\lambda$ , é dado pela expressão abaixo

$$\frac{y}{y_{ref}} = \lambda \quad (8.6)$$

$$P = k \cdot y = k \cdot (\lambda y_{ref}) \quad (8.7)$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \frac{k_{ref}}{\lambda_{estagio1}} = \frac{\frac{384 EI_{viga}}{5 L_{viga}^4}}{\lambda_{estagio1}} = 1,153 \times 10^4 \frac{kN}{m} \quad (8.8)$$

O cálculo da rigidez à flexão da laje considera o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e é dado pela equação 8.9.

$$EI_{laje} = \frac{E_{cs} I}{1 - \nu^2} = 143,873 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad (8.9)$$

Por se tratar de uma laje simétrica pode-se calcular as variáveis apenas para uma das direções. Os coeficientes para o cálculo pelo modelo proposto são obtidos utilizando-se os parâmetros estimados, assim

$$\beta_x = \beta_y = \frac{\left[ (24 EI_{laje} \frac{\lambda_2}{k_2}) + L_{laje}^3 \right]}{\left[ 24 EI_{laje} \left( \frac{\lambda_1}{k_1} + \frac{\lambda_2}{k_2} \right) + 2 L_{laje}^3 \right]} = 0,5 \quad (8.10)$$

$$\alpha_x = \alpha_y = (48\beta^4 - 96\beta^3 + 32\beta^2) = -1 \quad (8.11)$$

$$K_x = \frac{\left( \alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y} \right)}{\left( \alpha_x \frac{L_x^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_x}{k_x} \right) + \left( \alpha_y \frac{L_y^4}{EI_{laje}} + 192 \frac{L_y}{k_y} \right)} = 0,5 \quad (8.12)$$

$$k_x = k_y = k = -\frac{k_1}{2\beta} = -1,153 \times 10^4 \text{ kN/m} \quad (8.13)$$

Prosseguindo com o cálculo do deslocamento máximo da laje obtém-se

$$\Delta = \frac{\alpha_x q_x L_x^4}{384 EI_{laje}} + \frac{q_x L_x}{2k_x} = 1,28 \text{ cm} \quad (8.14)$$

O cálculo pela Teoria de Grelha, utilizando-se os mesmos parâmetros adotados na análise, resulta em um deslocamento de 1,17 cm.

### 8.2.3 Laje P1-1 – Modelo proposto – Estágio de carregamento 2

Nesse estágio foi utilizado o carregamento uniformemente distribuído de 18 kN/m<sup>2</sup> que gerou um deslocamento na laje de aproximadamente 4,2 cm.

De forma análoga ao item anterior foi considerado na análise a contribuição do peso próprio da laje e das vigas internas, resultando em  $q = 20 \text{ kN/m}^2$ .

Devido à maior fissuração da laje, conforme pode ser verificado pela não linearidade mais acentuada no gráfico da Figura 8.3, foi adotada a rigidez à flexão secante da laje.

$$EI_{sec} = 0,3EI_{laje} \quad (8.15)$$

Seguindo a mesma sistemática para o cálculo dos deslocamentos das vigas de apoio adota-se o carregamento na viga de  $q = 5,23 \text{ kN/m}$  que resulta em um deslocamento  $\Delta_{estágio2} = 0,454 \text{ mm}$ . O cálculo do deslocamento de referência é dado pela equação 8.16

$$\Delta_{ref,estágio2} = \frac{5}{384} \frac{qL_{viga}^4}{EI_{viga}} = 0,017\text{m} = 17\text{mm} \quad (8.16)$$

A razão entre o deslocamento das vigas no estágio 2 e o deslocamento de referência fornece o coeficiente de ajuste de deslocamento, assim

$$\lambda_{estágio2} = \frac{\Delta_{estágio2}}{\Delta_{ref,estágio2}} = 0,027 \quad (8.17)$$

Utilizando os parâmetros calculados e prosseguindo com a análise obtém-se o deslocamento na laje de 4,29cm.

Seguindo a mesma sistemática, mas utilizando-se apenas a Teoria de Grelha, foi obtido um deslocamento de 4,15cm.

### 8.3 Análise dos resultados do modelo proposto aplicado à Laje P1-1

Os deslocamentos no estágio 1 foram inferiores aos obtidos experimentalmente, entretanto, possuem a mesma ordem de grandeza. Ressalta-se que a dificuldade de se mensurar com exatidão as propriedades mecânicas do concreto, em especial em relação à fissuração, que influenciou de forma significativa os resultados.

Em relação aos deslocamentos calculados considerando o carregamento de 20 kN/m<sup>2</sup> foi superior em 2% ao obtido experimentalmente. Cabe destacar que nessa

análise foi utilizada a aproximação da NBR 6118/2023 para o cálculo da rigidez secante da laje e que forneceu resultados próximos, em acordo com o verificado em Agleílson *et al* (2009).

Alguns fatores relativos ao ensaio são difíceis de mensurar e podem ter contribuído para a menor precisão na utilização do modelo analítico, entre os quais cita-se:

- Ausência de dados específicos do módulo de elasticidade;
- Fissuração dos elementos de concreto armado;
- Contribuição das armaduras na rigidez da laje;
- Rigidez das vigas internas e seu carregamento associado;
- Rigidez à torção da laje.

Ressalta-se que a análise considerou condição de engastamento perfeito dos bordos da laje. Embora os autores não tenham observado escoamento do aço para os estágios de carregamento analisados o fato de ter sido verificada abertura de fissuras indica que as ligações nos bordos são semirrígidas.

#### 8.4 Ensaio da Laje P1-2

A laje P1-2 possui lados de  $l_x = 3m$  e  $l_y = 4,2m$  e taxa de armadura inferior da laje de  $\rho_{inf} = 0,44\%$  e superior de  $\rho_{sup} = 0,22\%$ . O comportamento da fissuração em função dos deslocamentos é apresentado na Figura 8.5.

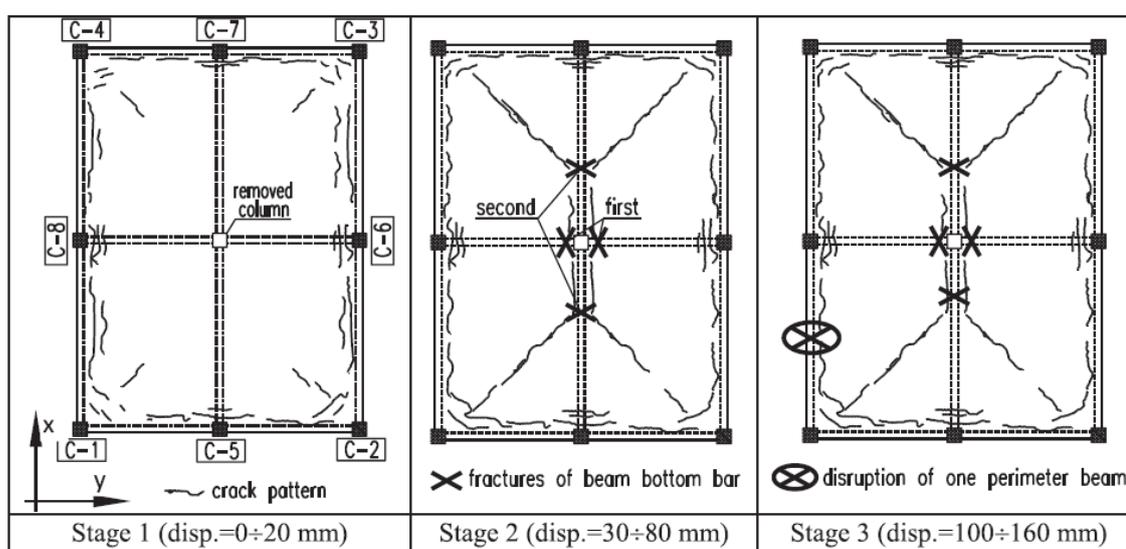


Figura 8.5 – Características das fissuras em função dos deslocamentos na laje P1-2.

Os deslocamentos associados às etapas de carregamento da Laje P1-2 são apresentados na Figura 8.6.

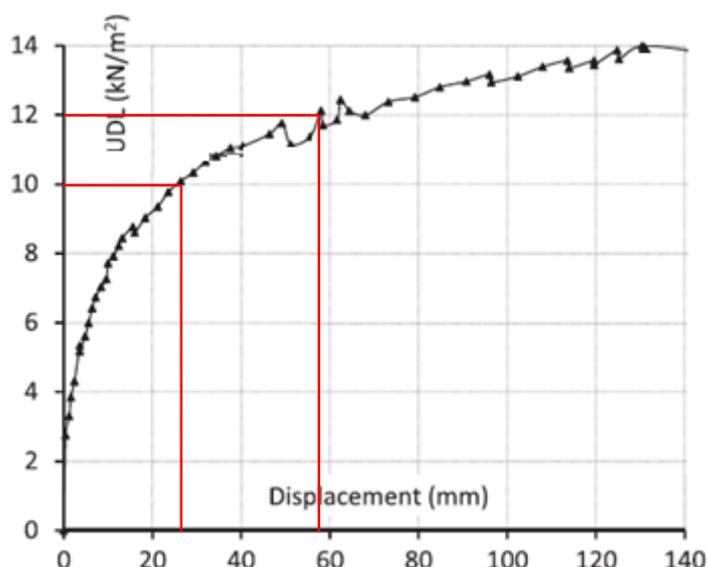


Figura 8.6 – Gráfico de Carregamento × Deslocamento da laje P1-2, adaptado de Dat e Hai (2013).

De forma análoga ao item 8.2 os estágios marcados na Figura 8.6 são aplicados ao modelo proposto.

#### 8.4.1 Modelo proposto aplicado ao ensaio da laje P1-2

Seguindo a mesma sistemática do item 8.2 são analisados dois estágios de carregamentos e comparado com os deslocamentos obtidos no modelo analítico. Os carregamentos objeto de análise são

- Estágio 1:  $q = 10 \text{ kN/m}^2$
- Estágio 2:  $q = 12 \text{ kN/m}^2$

As propriedades do concreto, o módulo de elasticidade secante e a rigidez secante da laje, foram as mesmas adotadas no item 8.2.

#### 8.4.2 Laje P1-2 – Modelo proposto – Estágio de carregamento 1

Utiliza-se o carregamento uniformemente distribuído de  $10 \text{ kN/m}^2$  que resultou em um deslocamento aproximado de 2,2 cm na laje, conforme ilustra a Figura 8.6. O carregamento, considerando o peso próprio da laje e das vigas, é  $q = 12,15 \text{ kN/m}^2$ .

Para o cálculo do deslocamento das vigas de bordo, utiliza-se o carregamento distribuído adotando como cálculo inicial os valores obtidos na Teoria de Grelha, assim, obtém-se os carregamentos que devem ser somados ao peso próprio da viga

- Carregamento distribuído nas vigas de menor vão:  $q_x = 5,50 \text{ kN/m}$
- Carregamento distribuído nas vigas de maior vão:  $q_y = 14,69 \text{ kN/m}$

Utilizando-se a mesma sistemática de cálculo dos itens anteriores obtém-se os deslocamentos máximos associados aos vãos da laje para o estágio de carregamento 1:

- Deslocamento máximo nas vigas de menor vão:  $\Delta_{estágio1,x} = 0,48 \text{ mm}$
- Deslocamento máximo nas vigas de maior vão:  $\Delta_{estágio1,y} = 4,94 \text{ mm}$

O cálculo do deslocamento de referência segue os mesmos princípios adotados no item 8.2, porém havendo diferenciação em função do vão adotado, conforme apresentado abaixo

- Deslocamento máximo nas vigas de menor vão

$$\Delta_{refx,estágio1} = \frac{5}{384} \frac{qL_{viga}^4}{EI_{viga}} = 0,018 \text{ m} = 18 \text{ mm} \quad (8.18)$$

- Deslocamento máximo nas vigas de maior vão

$$\Delta_{refy,estágio1} = \frac{5}{384} \frac{qL_{viga}^4}{EI_{viga}} = 0,188 \text{ m} = 188 \text{ mm} \quad (8.19)$$

Seguindo a mesma sistemática de cálculo verifica-se que o valor do coeficiente de ajuste é praticamente o mesmo, assim, adota-se para cada viga o valor de  $\lambda = 0,026$ .

Prosseguindo com os cálculos obtém-se os valores necessários para o cálculo dos deslocamentos pelo modelo proposto.

$$\beta_x = \beta_y = 0,5 \quad (8.20)$$

$$\alpha_x = \alpha_y = -1 \quad (8.21)$$

$$K_x = 0,747 \quad (8.22)$$

$$k_x = -3 \times 10^3 \text{ kN/m} \quad (8.23)$$

$$k_y = -1,15 \times 10^4 \text{ kN/m} \quad (8.24)$$

Substituindo-se as variáveis na equação do deslocamento, utilizando como base a direção X, obtém-se o deslocamento da laje

$$\Delta = \frac{\alpha_x q_x L_x^4}{384 EI_{laje}} + \frac{q_x L_x}{2k_x} = 1,79 \text{ cm} \quad (8.25)$$

Seguindo o mesmo procedimento e admitindo as mesmas hipóteses obtém-se o valor de 1,33cm para o deslocamento ao se considerar a Teoria de Grelha.

#### 8.4.3 Laje P1-2 – Modelo proposto – Estágio de carregamento 2

Para o estágio 2 foi utilizado o carregamento uniformemente distribuído de 12 kN/m<sup>2</sup> que provocou um deslocamento aproximado de 5,7 cm na laje, conforme ilustra a Figura 8.6.

De forma análoga ao item anterior foi considerado na análise a contribuição do peso próprio da laje e das vigas internas, resultando em um carregamento distribuído de  $q = 14,15 \text{ kN/m}^2$ .

Utilizando-se a Teoria de Grelha para o cálculo do carregamento distribuído nas vigas de borda obtém-se

- Carregamento distribuído nas vigas de menor vão:  $q_x = 6,37 \text{ kN/m}$
- Carregamento distribuído nas vigas de maior vão:  $q_y = 17,07 \text{ kN/m}$

Utilizando-se a mesma sistemática de cálculo dos itens anteriores determina-se os deslocamentos máximos associados aos vãos da viga para o estágio de carregamento 2:

- Deslocamento máximo nas vigas de menor vão:  $\Delta_{estágio2,x} = 0,55 \text{ mm}$
- Deslocamento máximo nas vigas de maior vão:  $\Delta_{estágio2,y} = 5,64 \text{ mm}$

O cálculo do deslocamento de referência segue as premissas adotadas no item 8.2, assim

- Deslocamento máximo nas vigas de menor vão

$$\Delta_{ref,x,estágio2} = \frac{5}{384} \frac{qL_{viga}^4}{EI_{viga}} = 0,021 \text{ m} = 21 \text{ mm} \quad (8.26)$$

- Deslocamento máximo nas vigas de maior vão

$$\Delta_{ref,y,estágio2} = \frac{5}{384} \frac{qL_{viga}^4}{EI_{viga}} = 0,219 \text{ m} = 219 \text{ mm} \quad (8.27)$$

Prosseguindo com os cálculos verifica-se que o coeficiente de ajuste de deslocamento tem o valor de  $\lambda = 0,026$  em ambos os vãos.

Considerando a maior fissuração da laje, conforme pode ser verificado pela não linearidade mais acentuada no gráfico da Figura 8.6, foi adotada a rigidez à flexão secante da laje. Substituindo as variáveis nas equações do modelo proposto obtém-se

$$\beta_x = \beta_y = 0,5 \quad (8.28)$$

$$\alpha_x = \alpha_y = -1 \quad (8.29)$$

$$K_x = 0,776 \quad (8.30)$$

$$k_x = -3 \times 10^3 \text{ kN/m} \quad (8.31)$$

$$k_y = -1,15 \times 10^4 \text{ kN/m} \quad (8.32)$$

O cálculo do deslocamento máximo da laje é dado por

$$\Delta = \frac{\alpha}{384} \frac{qL_{laje}^4}{EI_{laje}} + \frac{qL_{laje}}{2k} = 5,1 \text{ cm} \quad (8.33)$$

O cálculo do deslocamento pela Teoria de Grelha, utilizando-se os mesmos parâmetros adotados na análise, resulta em um deslocamento de 4,5 cm.

### 8.5 Análise dos resultados do modelo proposto aplicado à Laje P1-2

Verifica-se que o modelo proposto apresentou boa correlação com os deslocamentos obtidos experimentalmente na Laje P1-2. Os resultados obtidos com o modelo proposto foram superiores em relação aos ensaios em 23% para o estágio de carregamento 1 e 12% para o estágio de carregamento 2.

Ressalta-se que a calibragem adotada na análise pelo modelo proposto foi a de viga com carregamento uniformemente distribuído, entretanto, como foi utilizado o coeficiente de ajuste de deslocamento, qualquer calibragem adotada forneceria o mesmo valor.

Em comparação com os resultados da Laje P1-1 verifica-se que o maior vão da viga trouxe influência significativa nos resultados, conforme pode ser observado ao se comparar os gráficos de Carga  $\times$  Deslocamento das Figuras 8.3 e 8.6.

Apesar das aproximações adotadas no modelo analítico e da falta de dados que caracterizassem as propriedades mecânicas do concreto e do efeito da fissuração na rigidez à flexão dos elementos estruturais, ficou demonstrado que o Modelo proposto de contribuição à Teoria de Grelha forneceu resultados próximos aos obtidos experimentalmente.

Portanto, fica verificado que o modelo proposto de contribuição à Teoria de Grelha trouxe resultados mais precisos para o cálculo dos deslocamentos que a Teoria de Grelha.

## 9 CONCLUSÕES

Diversos estudos indicam que a flexibilidade dos apoios pode vir a alterar consideravelmente o resultado das solicitações, deslocamentos e as propriedades dinâmicas da laje. As análises numéricas demonstraram que existem alterações significativas nas solicitações de lajes em função do grau de flexibilidade dos apoios, sendo de forma mais relevante em lajes retangulares e engastadas.

Os métodos de cálculo usualmente empregados utilizam como padrão a condição de contorno de apoios rígidos que podem não ser ideais em determinados casos. A contribuição à Teoria de Grelha desenvolvida nessa tese, considerando a flexibilidade dos apoios, busca apresentar resultados mais precisos para a determinação das solicitações e deslocamentos da laje.

Verifica-se que os deslocamentos da laje, ao se considerar a flexibilidade das vigas de borda, são sempre maiores em comparação às lajes com apoios rígidos. Pôde-se observar que para as condições de faixas de laje hiperestáticas há alteração das reações em função do grau de flexibilidade dos apoios.

O artifício adotado de se multiplicar o deslocamento de referência por um coeficiente  $\lambda$  tem o intuito de obter maior precisão para o cálculo dos deslocamentos, evitando a necessidade de estabelecer expressões analíticas complexas.

Verifica-se que quanto maior o coeficiente  $\lambda$  menor é a rigidez dos apoios e maior é o deslocamento na faixa de laje. Ressalta-se que o coeficiente  $\lambda$  não necessariamente deve ser superior a 1, podendo obter valores inferiores a 1 caso seja considerado condições de contorno diferentes na viga de apoio. Esse fator busca apenas igualar o deslocamento teórico utilizado como referência ao deslocamento real da estrutura.

Em comparação à Teoria de Grelha verifica-se que os fatores que levam em consideração a rigidez dos apoios podem modificar de forma significativa as solicitações e deslocamentos da laje.

A consideração de apoios rígidos em local cuja condição de contorno não forneça rigidez suficiente pode vir a ocasionar problemas de vibração ou fissuração excessiva na laje.

Foi demonstrado que o modelo de apoios flexíveis é o que mais se aproxima do comportamento real da estrutura, sendo o mais recomendado para o cálculo e detalhamento de estruturas de placa.

O modelo proposto apresentou resultados bastante satisfatórios em relação à análise numérica para a condição de laje simplesmente apoiada, sendo a condição de lajes de lados iguais a que forneceu resultados mais precisos.

Verifica-se que, ao se reduzir a inércia à torção da laje, os resultados ficaram próximos aos do modelo analítico, conforme esperado, haja vista que na Teoria de Grelha não é considerada a inércia à torção da laje nos cálculos.

Assim, considerando-se que pode vir a surgir fissuras devido à ausência de armadura de torção da laje, recomenda-se, portanto, a disposição de armadura mínima para resistir aos momentos volventes de forma a evitar a formação desse tipo de patologia.

Pôde-se constatar que o coeficiente de rigidez utilizado no modelo analítico influencia de forma significativa nas solicitações e deslocamentos, a depender do tipo de deslocamento adotado como referência nas vigas de apoio.

Existe a tendência de que, ao se utilizar deslocamentos considerando as vigas de apoio com um certo grau de engastamento (calibragem 2), os resultados se aproximem dos modelos em que foram idealizados pilares como apoio nas lajes. Esse fato é atribuído ao grau de engastamento da viga no pilar.

Para a condição de vigas de borda rígida, com redução da inércia à torção da laje e baixa inércia à torção da viga de apoio, o modelo proposto em lajes simplesmente apoiadas com lados iguais forneceu resultados próximos à análise numérica. Entretanto, ao se considerar a flexibilidade dos apoios na laje de espessura de 15cm, o momento fletor positivo foi superior ao do modelo proposto, enquanto as demais espessuras forneceram resultados próximos ao do modelo proposto.

Pode-se atribuir a baixa precisão nos resultados para a laje de 15 cm de espessura, na condição de vigas flexíveis, devido à inércia adotada para as vigas flexíveis que foram bastante próximas da própria espessura da laje. Assim, possivelmente, devido aos métodos numéricos de análise, que consideram a análise do conjunto, houve influência no deslocamento final das vigas de borda, diferenciando dos utilizados como base de cálculo do modelo analítico.

Em relação aos deslocamentos, para as lajes com redução da inércia à torção da laje e baixa inércia à torção da viga de apoio houve boa concordância do modelo

proposto com os resultados obtidos no cálculo analítico, onde os resultados para a calibragem 2 ficaram próximos aos do Modelo 2 (apoio com pilar) e a calibragem inicial e a calibragem 1 ficaram próximas aos do Modelo 1 (apoio simples).

Nas lajes simplesmente apoiadas de geometria retangular com apoios rígidos o modelo proposto forneceu resultados próximos aos da análise numérica para as solicitações em ambas as direções e deslocamentos. Ao se considerar apoios flexíveis a laje de espessura de 15cm apresentou solicitações no Modelo 2 mais próximas à calibragem 1, enquanto as demais espessuras forneceram resultados próximos aos do Modelo 1 para esse mesmo tipo de calibragem.

De uma forma geral os deslocamentos em laje retangular simplesmente apoiada com apoios flexíveis apresentaram resultados compreendidos nas calibrações adotadas no modelo proposto.

Na análise numérica em lajes quadradas e engastadas, com vigas de borda rígidas, houve boa aproximação das solicitações e deslocamentos com a maior parte dos modelos analisados. Ao se considerar a flexibilidade dos apoios alguns modelos apresentaram resposta mais próxima aos momentos positivos e outros modelos ao momento negativo do modelo proposto.

Os deslocamentos dos modelos numéricos para a condição de laje quadrada e engastada em todos os bordos ficaram, de uma forma geral, compreendidos nas calibrações adotadas no modelo proposto.

Ao se considerar lajes engastadas e retangulares com vigas de borda rígidas as análises numéricas forneceram resultados próximos para grande parte dos modelos numéricos, exceto para os momentos negativos na direção do maior vão, onde alguns modelos apresentaram valores superiores aos obtidos no modelo proposto.

Nas análises numéricas considerando a flexibilidade dos apoios em laje engastada e retangular forneceram resultados diferentes dos obtidos pelo modelo proposto, onde pôde ser verificada uma tendência das solicitações na direção Y (maior vão) serem maiores que as obtidas no modelo numérico e as da direção X (menor vão) serem menores que as do modelo numérico.

Em relação aos deslocamentos, os valores obtidos para a condição de vigas rígidas e flexíveis, ficaram compreendidos dentro dos valores obtidos nos modelos numéricos, exceto para os deslocamentos com vigas de borda flexíveis nos Modelos 1, 2 e 3 que ficaram próximos aos deslocamentos da Teoria de Grelha.

Estima-se que a falta de precisão de alguns resultados pode ter como principal motivo a falta de exatidão na determinação do coeficiente de rigidez no modelo proposto, em conjunto com o grau de engastamento da análise numérica, onde não é possível garantir a condição de engaste perfeito das bordas.

Apesar de terem sido examinadas duas condições de contorno (laje simplesmente apoiada e engastada em todos os bordos) foram realizadas 360 análises numéricas, onde foi possível comprovar boa precisão na maioria das respostas. Assim, as análises demonstraram que o modelo proposto fornece resultados satisfatórios para a maior parte dos casos objeto de estudo.

Cabe ressaltar que os modelos numéricos também são influenciados pelo carregamento de lajes adjacentes. Assim, o cálculo do coeficiente de rigidez pelo modelo proposto pode vir a ser diferente dos deslocamentos pré-estabelecidos. Para maior precisão, é necessário que seja estabelecido de forma precisa os deslocamentos finais da viga de apoio.

A aplicação do modelo proposto em ensaios experimentais demonstrou boa precisão no cálculo dos deslocamentos e facilidade de aplicação, fornecendo respostas mais coerentes e próximas aos obtidos experimentalmente, corroborando com os resultados das análises numéricas.

Posto isso, verifica-se que a contribuição à Teoria de Grelha proposta nessa tese apresenta boa concordância nos resultados com os modelos numéricos analisados e com os ensaios experimentais. Entretanto, para se obter resultados mais precisos em aplicações práticas é necessário determinar o deslocamento das vigas de borda de forma mais exata.

### **Propostas e sugestões para pesquisas futuras**

- Considerar a rotação do engaste no desenvolvimento das equações do modelo proposto;
- Considerar a flexibilidade dos apoios no desenvolvimento das equações para o cálculo da frequência natural de lajes;
- Considerar a excentricidade na ligação entre a laje e as vigas de apoio nos modelos numéricos;
- Desenvolver ensaios em lajes considerando apoios flexíveis.

## REFERÊNCIAS

ABDEL-KARIM, Riyad; MAHMOOD, Ibrahim Mohammad. **“The Effect Of Beams Stiffnesses On The Load Distribution In A Single Simply Supported Two-Way Ribbed Slab”**. The Islamic University Journal (Series of Natural Studies and Engineering). v. 14, n° 1, pp. 191-208, 2006.

AGLEÍLSON, Reis; MELO, José Guilherme; OLIVEIRA, Dênio. **“Desenvolvimento e avaliação experimental de lajes nervuradas bidirecionais com mesas pré-fabricadas”**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, n° 13, pp. 19-25, maio, 2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS DE NORMAS TÉCNICAS, Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento, NBR 6118, ABNT, Rio de Janeiro, 2014.

ACI COMMITTEE 318 - Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and commentary (318R-19) - American Concrete Institute. Farmington Hills, Michigan, 2019.

AL-GAHTANI, Husain; MUSA, Abubakr. **“Analysis of Thin Plates with Internal Rigid Supports of Different Shapes and Layouts by the Boundary Point Method”**. Arabian Journal for Science and Engineering, 2018.

ARAÚJO, Carlos; XAVIER, João; PEREIRA, Robson. **“Determination of stresses in to-way slabs of concrete through the finite difference method”**. Revista Ingenio, Vol. 18, pp. 25-32 ,2021.

ARAÚJO, José Milton. **“Avaliação Dos Métodos Simplificados Para Cálculo De Lajes Maciças Apoiadas Em Vigas Flexíveis”**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, n° 12, pp. 1-11, outubro, 2008.

ARAÚJO, José Milton. **Curso de Concreto Armado**. Rio Grande do Sul. Editora: Dunas, 3° edição, Vol.2, 2010.

ARAÚJO, José Milton. **“Método simplificado para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis: Validação por meio de análise não linear”**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, nº 14, pp. 71-81, outubro, 2009.

ARAÚJO, José Milton. **Projeto Estrutural de Edifícios de Concreto Armado**. Rio Grande do Sul. Editora: Dunas, 3º edição, 2014.

ARMAN, Ibrahim Mohammad. **“Bending Moments in Beams of Two-Way Slab Systems”**. Global Journal of Researches in Engineering: e Civil And Structural Engineering, v. 14, nº 2, pp. 77-94, 2014.

AYDIN, E; DUTKIEWICZ, M; ÖZTÜRK, B; SONMEZ, M. **“Optimization of elastic spring supports for cantilever beams”**. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020.

AZIZOV, Taliat; DERKOWSKI, Wit; JURKOWSKA, Nadzieja. **“Consideration of the Torsional Stiffness in Hollow-Core Slabs Design”**. Materials Science Forum, Vol 968, pp. 330-341, 2019.

BAKER, R; ZEITOUN, D. G; UZAN, J. **“Analysis of a beam on random elastic support. Soils and foundations”**, V. 29, N°2, pp. 24-36, June, 1989.

BARROZO, Geovany Ferreira; SILVA, Sebastião Simão da; DIAS, Leonardo de Souza. **“Comparative study of the dimensioning of a floor of solid slabs using elastic, plastic, and numerical analysis”**. Revista Principia - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB, João Pessoa, v. 59, n. 3, p. 1051-1069, set. 2022.

BERNARDO, Luís. **“Modeling the Full Behavior of Reinforced Concrete Flanged Beams under Torsion”**. Applied Sciences, Vol, 9, 2019.

BRUUN, Edvard; KUAN, Allan; BENTZ, Evan. **“How to Model Post-Cracking Torsional Stiffness and Why it Matters in Design”**. Aci Structural Journal, Vol. 344, pp. 49-63, 2020.

BUENO, J. R.; LORIGGIO, D. D. **“Influence of the flexibility of beams and slabs in static response and dynamic properties”**. Ibracon Structures And Materials Journal, v.9, pp. 842-855, December, 2016.

CHEN, Haixia. **“Analysis of Slab and Beam’s moment influenced by Stiffness Ratio”**. Applied Mechanics and Materials, Vols 166-169, pp. 329-332, 2012.

CHIAIA, Bernardino; KUMPYAK, Oleg; PLACIDI, Luca; MAKSIMOV, Valerii. **“Experimental analysis and modeling of two-way reinforced concrete slabs over different kinds of yielding supports under short-term dynamic loading”**. Engineering Structures, Vol. 96, pp. 88-99, 2015.

CSI, **“SAP2000 Integrated Software for Structural Analysis and Design,”** Computers and Structures Inc., Berkeley, California, 2016.

DAREKAR, Sneha; BARBUDE, P. R; RASAL, S.A. **“IMPACT OF REDUCTION IN STIFFNESS OF SLAB ON THE BEHAVIOUR OF RCC STRUCTURE”**. International Research Journal of Engineering and Technology, Vol. 10, n°4, pp. 472-479, 2023.

DARSHNI, B; SENTHIL Kumar. **“Behavioral Study of Thin Plate Under Large Deflection Theory”**. International Journal of Advanced Research in Science, Communication and Technology, Vol 5, n° 2, 2021.

DAT, Pham; HAI, Tan. **“Experimental study of beam–slab substructures subjected to a penultimate-internal column loss”**. Engineering Structures, Vol. 55, pp. 2-15, 2013.

DELALIBERA, Rodrigo; PIRES, Cristiane; FERREIRA, Gercindo, OLIVEIRA, Igor. **“Prova de carga em lajes maciças”**. Revista Brasileira de engenharia Civil, Vol 1, n° 1, pp. 34-46, 2021.

EN 1992-1-1: Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings, CEN, Brussels, EN 1992-1-1:2004.

Federation International Du Béton, FIB Model Code for Concrete Structures, 2010.

FLORUT, S; POPESCU, D; STOIAN, V; DAN, D; NAGY-GYÖRGY, T; TODEA, V. **“Experimentally validated numerical analysis of reinforced concrete slab-column connections subjected to punching shear”**. Journal of applied engineering sciences, Vol 10, pp. 125-132, 2020.

FOUAD, Kehila; ALI, Zerzour; MUSTAPHA, Remki. **“Structural Analyses with Flexibility Effect of The Floor Slabs”**. 15 WCEE conference, Lisboa, 2012.

FROIO, D; RIZZI, E; **“Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a linearly variable Winkler support”**. International Journal of Mechanical Sciences. V. 128-129, pp. 680-694, 2017.

GALYAUTDINOV, Z. R. **“Deformation of reinforced concrete slabs on yielding supports under short-time dynamic loading”**. *AIP Conference Proceedings 1800:040002*, 2017.

HASSAN, Mohammed. **“Comparative study between using rigid diaphragm and flexible diaphragm slabs in multi-story buildings (solid slab system) under earthquake loads”**. Texas Journal of Engineering and Technology, Vol 9, 2022.

JALALI, H; NOOHI, F. **“Boundary Condition Identification of a Clamped Beam in Flexible Support”**. Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics, Vol. 28, n° 2, 2017.

JAROSZEWICZ, J; ŻUR, K; DRAGUN, L. **“The Influence Function In Analysis Of Bending Curve And Reactions Of Elastic Supports Of Beam With Variable Parameters”**. Journal Of Theoretical and Applied Mechanics, V. 52, N°1, Pp. 247-255, Warsaw, 2014.

JIA, Yueqiao; LUIN Jeffrey. "**Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slab-Rectangular Column Connections Using ABAQUS**". *Advances in Frontier Research on Engineering Structures*, vol 286, pp. 33-44, 2023.

JU, S. H.; LIN, M. C. "**Comparison Of Building Analyses Assuming Rigid Or Flexible Floors**". *Journal Of Structural Engineering*, v. 125, pp. 25-31, 1999.

KEZMANE, A; CHIAIA, A; KUMPYAK, O; MAKSIMOV, V; PLACIDI, L. "**3D modelling of reinforced concrete slab with yielding supports subject to impact load**". *European Journal Of Environmental and Civil Engineering*, July, 2016.

LANTSOGHT, Eva; VEEN, Cor; BOER, Ane; WALRAVEN, Joost. "**One-Way Slabs Subjected to Combination of Loads Failing in Shear**". *ACI Structural Journal*, N° 112, July-august, 2015.

LAZZARI, João Alfredo; BATISTA, Eduardo. "**Finite Strip method computer application for buckling analysis of thin-walled structures with arbitrary cross-sections**". *Revista Escola de Minas*, n°73, v. 3, pp. 337-344, July-September, 2021.

LIHUA, Chen; SHOUJIE, Cui; HAO, Jing; WEI, Zhang. "**Analysis and modeling of a flexible rectangular cantilever plate**". *Applied Mathematical Modelling*, 2019.

MAMATOVA, G. U; SUGIRBEKOVA, A. K; BEKAULOV, N. M. "**Bending of a circular flexible plate taking into account the initial curvature**". *VIBROENGINEERING PROCEDIA*, Vol 35, november, 2020.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro, Elsevier, 2010.

MCCUTCHEON, William J. "**Deflections of uniformly loaded floors: A beam-spring analog**". Res. Pap. FPL 449. Madison, WI: U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory; 1984.

NGUYEN, T; TAN, K. “**Ultimate load of composite floors in fire with flexible supporting edge beams**”. *Journal Of Constructional Steel Research*, Vol. 109, pp. 47-60, 2015.

NISHAWALA, Vinesh; BARUH, Haim. “**Study of Large Deflection of Beams and Plates**,” *Mech. Aerosp. Eng.*, vol. MSc, 2011.

PARK, J; MATSUI, S; CHO, H. “**Slab Behavior and Approximation of Transverse Strain Increase Due to the Change of Support Conditions from Rigid to Elastic Supports**”. *Structural Engineering*, V. 1, pp. 1-10, 1997.

SA Committee A23.3. *Design of Concrete Structures*, Canadian Standards Association (CSA), Mississauga, Ontario, Canada, 214 pp, 2004.

SATO, M; KANIE, S; MIKAMI, T. “**Mathematical analogy of a beam on elastic supports as a beam on elastic foundation**”. *Applied Mathematical Modelling*, V. 32, pp. 688–699, 2008.

SHIN, Myoungsu; BOMMER, Allan; DEATON, James; ALEMDAR, Bulent. “**Twisting moments in two-way slabs**”. *Concrete International*, pp. 35-40, 2009.

SHU, Jiangpeng; FALL, David; PLOS, Mario; ZANDI, kamyab; LUNDGREN, Karin. “**Development Of Modelling Strategies For Two-Way RC Slabs**”. *Engineering Structures*. V.101, pp. 439-449, 2015.

SILVA, A. R; SILVA, P.B. “**Nonlinear numerical analysis of composite slabs with steel decking**”. *Ibracon Structures and materials journal*, Vol. 12, n°5, pp. 972-997, outubro, 2019.

SILVA, F. A. N.; HOROWITZ, B. “**Bending Moments In Beams Of Reinforced Concrete Buildings**”. *Ibracon Structures And Materials Journal*, v.1, pp. 193-211, June, 2008.

SILVA, Jordlly; HOROWITZ, Bernardo. “**Nonlinear analysis of reinforced concrete structures using thin flat shell elements**” Ibracon Structures and materials journal, vol. 15, n°. 4, 2022.

SILVA, Ricardo; OLIVEIRA, Dênio; ALBUQUERQUE, Nívea; JUNIOR, Francisco; SACRAMENTO, Paulo. “**Computational modeling of flat slabs: Influence of ribs and flexural reinforcement on shear strength**”. Latin American Journal of Solids and Structures, Vol 27, 2020.

SILVA, Thiago; TAVARES, Maria Elizabeth. “**Estudo analítico do modelo proposto de Teoria de Grelha com apoios elásticos utilizando modelos numéricos para análise de solicitações**”. The Journal of Engineering and Exact Sciences, Vol 9, n° 3, 2023.

SILVA, Thiago; TAVARES, Maria Elizabeth; BURGOS, Rodrigo. “**Comparative Analysis of Grid Theory with Flexible Supports with Numerical Models in Building Slabs**”. Structural Engineering International, 2023.

SOHLER, Flavio.; SANTOS, Sérgio. “**Projeto, Execução e desempenho de estruturas e fundações**”. Editora: Ciência Moderna, Rio de Janeiro, RJ, 2018.

SORIANO, Humberto Lima. **Elementos Finitos – Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro. Editora: Ciência Moderna, 2009.

SOUZA, V. C. M.; CUNHA, A. J. P. “**Lajes em Concreto Armado e Protendido**”, 2º Ed., Rio de Janeiro, 1998.

SURMA, Mateusz; DERKOWSKI, Wit; CHOLEWICKI, Andrzej. “**Analytical model for determining the influence of support flexibility on shear capacity of hollow core slabs**”. MATEC Web Conferences, 262, 2019.

TANGWONGCHAI, Sudathip; ANWAR, Naveed; CHUCHEEPSAKUL, Somchai. “**Flexural Responses of Concrete Slab over Flexible Girders through FEA-Based**

**Parametric Evaluation**". *KSCE Journal of Civil Engineering*. V. 15, pp. 1057-1065, 2011.

TAO, Mu-Xuan; LI, Zi-Ang; ZHOU, Qi-Liang; XU, Li-Yan. "**Analysis of Equivalent Flexural Stiffness of Steel–Concrete Composite Beams in Frame Structures**" *Applied Sciences*, Vol. 11, 2021.

TJHIN, Tjen N.; KUCHMA, Daniel A., "**Computer-Based Tools for Design by Strut-and-Tie Method: Advances and Challenges**" *ACI Structural Journal*, V. 99, No. 5, September-October, Pp 586-594, 2002.

TORABIAN, Ala; ISUFI, Brisid; MOSTOFINEJAD, Davood; RAMOS, António. "**Behavior of thin lightly reinforced flat slabs under concentric loading**". *Engineering Structures*, Vol. 196, 2019.

VAZ, Luiz Eloy. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. RJ: Elsevier, 2011.

WANG, Yong; CHEN, Zhenxing; HUANG, Zhaohui; GU, Aolin; HAN, Guanxu; LIU, Weixin; ZHANG, Yajun; ZHONG, Bo. "**An Analytical Method for Determining the Residual Strength of Reinforced Concrete Beam-Slab Specimens**". *Frontiers in Built Environment*, Vol 8, 2022.

YILMAZ, Tolga; KIRAÇ, Nevzat; ANIL, Özgür; ERDEM, T, Recep; HOSKAL, Volkan. "**Experimental and numerical investigation of impact behavior of reinforced concrete slab with different support conditions**". *Structural Concrete*, pp. 1-19, 2020.

ZAJA, Jacob; DROBIEC, Łukasz; JASIN, Radosław; WIECZOREK, Mirosław; MAZUR, Wojciech; GRZYB, Krzysztof, KISIOŁEK, Artur. "**The Behaviour of Half-Slabs and Hollow-Core Slab in Four-Edge Supported Conditions**". *Applied Sciences*, Vol, 11, 2021.

ZHANG, W; MA, H; ZENG, J; WU, S; WEN, B. “**Vibration responses analysis of an elastic-support cantilever beam with crack and offset boundary**”. Mechanical Systems and Signal Processing, V. 95, pp. 205-218, 2017.

ZOU, Chuanlong; IBRAHIM, Zainah; HASHIM, Huzaifa; JAMADIN, Adiza; AYOUGH, Pauria. “**Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs under high-cyclic fatigue loading**”. Journal of materials research and technology, Vol 21, pp. 992-1012, 2020.