



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciência

Faculdade de Engenharia

Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis

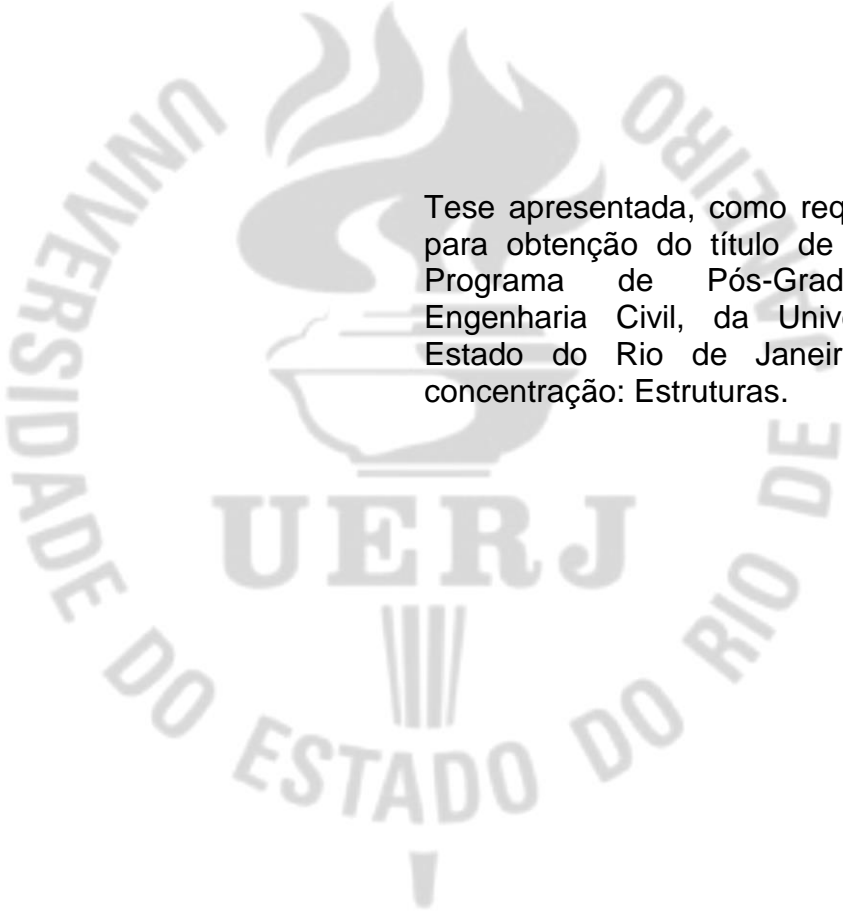
**Análise Dinâmica Não Linear de Estruturas Laminadas Compósitas
Considerando o Fenômeno da Explosão**

Rio de Janeiro

2023

Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis

**Análise Dinâmica Não Linear de Placas Laminadas Compósitas Considerando
o Fenômeno da Explosão**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

R375 Reis, Ana Waldila de Queiroz Ramiro.
Análise dinâmica não linear de placas laminadas compósitas considerando o fenômeno da explosão / Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis. – 2023.
275 f.

Orientador: Rodrigo Bird Burgos.
Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia civil - Teses. 2. Engenharia de estruturas - Teses. 3. Dinâmica estrutural - Teses. 4. Edifícios - Efeito da explosão - Teses. 5. Software - Desenvolvimento - Teses. I. Burgos, Rodrigo Bird. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 624.04:614.832

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis

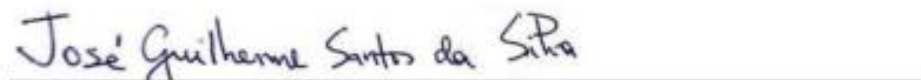
**Análise Dinâmica Não Linear de Placas Laminadas Compósitas Considerando
o Fenômeno da Explosão**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em 09 de novembro de 2023.


Banca examinadora:


Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos – Presidente/ Orientador
Faculdade de Engenharia – UERJ


Prof. Dr. José Guilherme Santos da Silva
Faculdade de Engenharia – UERJ


Prof. Dr. André Tenchini da Silva
Faculdade de Engenharia – UERJ


Prof. Dr. Marcos Antonio Campos Rodrigues
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES


Profa. Dra. Renata Machado Soares
Universidade Federal de Goiás - UFG

Rio de Janeiro

2023

AGRADECIMENTOS

Ao escrever sobre agradecimentos, não seguirei um *script* por completo conforme exigem o Manual da universidade (se é que exige, não fui consultar esse detalhe), apenas uma parte para não perder a formalidade. Ressalto que escrevi estes agradecimentos apenas após a banca de avaliação de Doutorado, ou seja, última “atividade” desta Tese. Também descobrirei apenas ao final se meus agradecimentos ultrapassarão uma página, acredito que sim.

Senhor Deus, meus agradecimentos são seus. O Senhor, pela fé e em nome do seu Filho, concedeu-me força para superar cada obstáculo, acalentou minha alma, protegeu-me das adversidades e concedeu-me conhecimentos para que eu pudesse realizar este trabalho de Tese. Toda a glória seja dada ao Senhor.

Aos meus pais, Márcia e Nilson (*in memoriam*), por estarem ao meu lado o tempo todo e por me apoiarem nas minhas decisões acadêmicas e profissionais. Obrigada, mãe, por sempre me incentivar a seguir em frente, sempre estar estudando e nunca esquecerei da sua fatídica frase “Não saia da universidade”. Você ficava feliz comigo quando eu sempre publicava algum artigo científico ou viajava à congresso. Além disso, você sabe que tenho um sonho maior e obrigada por sempre me incentivar a buscar este sonho. Espero um dia realizá-lo.

Meu pai, você não se encontra mais entre nós. Tivemos muitos momentos de risos e muitas discordâncias também. Tínhamos opiniões políticas opostas. Eu nunca falei para você, mas sempre o admirei como Engenheiro Civil e só vou poder dizer isso quando chegar a minha hora, algum dia. O ano de 2020 foi aquele que eu estava iniciando as pesquisas nesta Tese, em agosto você ficou doente e internado no hospital. Eu me lembro um pouco da nossa última conversa, mas a sua última frase eu me lembro vividamente: “Não largue o doutorado”. Naquele momento eu me virei para o lado para que você não me visse chorar (como está ocorrendo agora enquanto escrevo estes agradecimentos). Eu sabia que não iríamos mais poder conversar. Pois bem, pai, aqui está sua filha, formada no Doutorado e orgulhosa dela mesma, mas sem crer ainda que tenho o título de Doutora. Além disso, eu sinto felicidade de ser filha de um dos engenheiros da Ponte Rio-Niterói, do recapeamento da Rio-Santos e

tantas outras obras que você “tocou” aqui no Brasil e na Europa. Seus conhecimentos eram vastos. Obrigada, pai.

Fabricio, meu amigo, meu confidente, meu companheiro, meu amor. Obrigada por estar ao meu lado esse tempo todo, me apoiando na minha trajetória, me acompanhando a todos os congressos, ouvindo minhas reclamações, me abraçando nos meus medos, me falando que tudo vai ficar bem e que você sempre estará ao meu lado. São 9 anos juntos até então, um conhecendo o outro muito bem. Obrigada por ser quem você é e estar sempre ao meu lado me dando forças. Obrigada por ter compreendido os diversos e diversos momentos que não pude sair porque precisava escrever os códigos ou a Tese. Obrigada por me respeitar e amar.

Ao professor Rodrigo Burgos, meu orientador, meus sinceros agradecimentos. Recordo-me que começamos a trabalhar juntos em 2015, quando iniciei em uma iniciação científica para desenvolver um *software* de concreto de alto desempenho. Depois insisti em ir para a área de análise de estruturas sob sua orientação. Obrigada, professor, por acreditar em mim e desenvolver meu potencial. Obrigada por me orientar no trabalho de conclusão de curso da graduação, na dissertação de mestrado e agora na tese de doutorado. Obrigada por investir tempo e dinheiro de pesquisas nos estudos que eu desde então propusera e embarcar nessa “loucura” de explosão em estruturas! Obrigada por permitir que eu pudesse publicar meus estudos, ir aos congressos, ajudar nos estudos de outros alunos que são seus orientados, expor minha opinião e o senhor sempre ouvi-la. Obrigada por me dar apoio após a ida do meu pai e não me cobrar absolutamente nada acadêmico, dando a mim o tempo que eu precisava. Meus sinceros agradecimentos.

Keila Letícia, não escrever diretamente para você seria uma atrocidade da minha parte. Quero escrever sim para você, Keila. Segundo suas palavras, nosso primeiro encontro foi quando você estava no laboratório do Fonseca Teles (isso durante nossas graduações), preparando os corpos de prova, quando entrei perguntando de uma peneira de areia na “ignorância”. Só que eu lembro de você quando, em uma aula da pós-graduação, a professora queria saber se eu estava na Uerj e você me “dedurou” dizendo que eu estava no Labbas (nessa época nós não nos falávamos). Então tive que ir à sala de aula da pós para instalar o DCAD e eu lembro que olhei bem para você nesse dia. Mas acho que passamos a nos conhecer quando comecei a frequentar o Labbas e você já estava por lá, sempre rodando suas

análises. Keila, eu não tenho palavras para descrever os meus agradecimentos a você. A nossa amizade é incrível, simplesmente. Obrigada, Keila, pela sua amizade, por todo o carinho, apoio, orientações de vida, puxões de orelha, risos e bares nesses anos. Obrigada por sempre estar ao meu lado quando estou precisando, por me abraçar quando necessito, por limpar minhas lágrimas, pelas palavras de conforto quando preciso escutar. Obrigada pelos telefonemas que fazíamos uma para a outra durante a pandemia e que ficávamos 2 h direto conversando e rindo, a troca de “memes” pelo Whatsapp e outros detalhes que fogem à mente agora. Obrigada por sempre lembrar do meu aniversário e me dar um presente e pelos presentes surpresas (usualmente um chocolate para “adoçar” a vida). Obrigada por vir à minha casa assistir minha defesa de doutorado. Embora tenhamos pensamentos e jeitos diferentes, você está sempre disposta a me ouvir e me dar bronca! Eu gosto disso, confesso! Obrigada pela nossa amizade. Obrigada por ser quem você é.

Augusto Cezar, sempre achei seu nome bonito! Não teria como eu não lembrar de você quando são os agradecimentos. Recordo-me vividamente nossa época de graduação que ficávamos na varanda do 5º andar tomando um café e conversando sobre engenharia ou sobre a vida. Debatíamos mais sobre as matérias da faculdade, pesquisas científicas, publicações e carreira. Falávamos sobre vida pessoal e um dava conselhos ao outro. Riamos com nossas histórias também! Fiquei feliz quando você decidiu fazer o mestrado e se dedicar à vida acadêmica. Hoje você está em uma universidade da Europa. Estou muito orgulhosa de você, de verdade! Obrigada por sua amizade, continuarmos a nos falar, contarmos o progresso acadêmico um do outro, pelos *meets* que fazemos para treinar nossas apresentações (e aproveitar colocarmos as conversas “em dia”). Obrigada por você também ficar feliz pelo meu progresso, por fazer questão de assistir a minha defesa de doutorado. Muito obrigada, meu amigo.

Agradeço ao Vinícius Almada pelo seu apoio quando fiz matérias de programação na PUC, no caso estivemos na mesma turma de Fundamentos de Computação Gráfica Aplicada. Obrigada por sempre ter paciência em tirar minhas dúvidas, mesmo depois cada um seguindo seu caminho (você na dissertação na PUC e eu na tese na Uerj), ainda respondia aos meus e-mails de dúvidas sobre Matlab, na época que eu estava desenvolvendo o DYNAblast! E tempos depois, me indicou para o atual emprego no Tecgraf. Confesso que não esperava! Obrigada por todo o carinho,

amizade, consideração e recordação! E claro, por toda a paciência por tirar minhas dúvidas de programação (hoje, C++)!

Meus agradecimentos também aos meus amigos que me apoiaram na jornada: Anderson Rufino, Bárbara Cardoso, Chrysthyan Rhayhan, Jhonatan Tabajara, Karina Motta e Raphael de França. Obrigada a todos pelos risos, saídas com caipirinhas, conversas sobre a vida, gargalhadas, reclamações, absolutamente tudo foi especial com vocês!

Agradeço à Mayara Martins por permitir que eu colabore nos seus estudos de mestrado e que acabamos desenvolvendo amizade. Obrigada pelos momentos de ligamos uma para a outra para rir, reclamar, contar como foi o dia. Obrigada por se predispor em assistir à minha defesa de doutorado ao meu lado, junto com a Keila, e por ter ido ao *show* do RBD comigo! Realmente, “defender” o doutorado e logo em seguida ir ao *show* precisa de muita energia!

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil, por ter me recebido, passado o conhecimento e ter permitido com que eu desenvolvesse esta pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro concedido que viabilizaram a confecção deste trabalho.

À UERJ, por todo conhecimento e maturidade para eu me tornar uma pessoa melhor e uma profissional capacitada.

Elevo os meus olhos para os montes. Donde há de vir o meu socorro?

O meu socorro vem do Senhor, que fez o céu e a terra.

Salmos 121.1-2

And all this science

I don't understand

it's just my job five days a week

Elton John, Rocket Man

RESUMO

REIS, Ana Waldila de Queiroz Ramiro. *Análise dinâmica não linear de estruturas laminadas compósitas considerando o fenômeno da explosão*. 2023. 275 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Explosões são eventos de rara ocorrência em estruturas de engenharia civil, contudo a sua não previsão na concepção do projeto pode gerar um efeito catastrófico caso tal evento aconteça. Paralelamente, novas tecnologias de estruturas são desenvolvidas de forma que estas possam ser mais resistentes e, concebendo a possibilidade de combinação de materiais por meio das lâminas, observa-se aplicabilidade na literatura deste tipo de solução em solicitações de carregamentos explosivos. Desta forma, a presente tese visa verificar as respostas dinâmicas de placas laminadas e averiguar a validade da simplificação do modelo de cálculo para vigas laminadas. Ademais, também se torna o objetivo desta pesquisa expor uma metodologia para determinação da equação característica para o cálculo dos deslocamentos máximos de qualquer placa laminada do tipo ortotrópica, simplesmente apoiada, em função de sua espessura e dos parâmetros que caracterizam uma explosão, com base em análises paramétricas. Finalmente, de forma a possibilitar a análise paramétrica, foi desenvolvido um *software* de manuseio simples e rápido processamento para geração do output data utilizando o MATLAB R2021a. Os resultados de análise dinâmica apresentam-se com excelente congruência entre os exemplos em literatura e o uso do *software* desenvolvido. Ademais, confrontou-se a contribuição da fase negativa no carregamento explosivo e o uso somente da fase positiva, averiguando-se em um exemplo relevantes diferenças nos deslocamentos máximos. Com o auxílio do *software*, foram realizadas análises paramétricas e foram escritas equações características para cada estrutura. Por fim, a realização da simplificação de estruturas de placas em estruturas de vigas, em análise dinâmica de carregamento explosivo, demonstrou-se com resultados bons aproximados em amplitudes, porém discordantes em frequências.

Palavras-chave: Estruturas laminadas; Carregamento explosivo; Análise paramétrica; Desenvolvimento de *software*.

ABSTRACT

REIS, Ana Waldila de Queiroz Ramiro. *Nonlinear dynamic analysis of composite laminated structures considering the explosion phenomenon*. 2023. 275 p. Thesis (Civil Engineering PhD) – Faculty of Engineering, State University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Explosions are an event of rare occurrence in civil engineering structures, however its materialization and non-prediction in design of civil projects can generate a catastrophic effect. At the same time, new structural technologies are developed to be more resistant and the possibility to combine materials using layers allows the applicability of this type of structure to explosive loads, as observed in the literature. In this way, the aim of this thesis is to verify the dynamic response of laminated plates and investigate the validity of the simplification of the design model for laminated beams. Furthermore, another objective of this research is to present a methodology for determining the characteristic equation for determining the maximum displacements of any orthotropic laminated plate, simply supported, considering its thickness and the parameters of explosion, based on parametric analyses. Finally, to make the parametric analyses possible, a simple and fast processing software was developed using MATLAB R2021a. The dynamic analysis results present an excellent congruence between the examples in the literature and the software developed. Moreover, the contribution of the negative phase in an explosion and its comparison with the use of only the positive phase, showed relevant differences in maximum displacements. Using the software developed, parametric analyses were realized and the characteristic equation for each structure was obtained. Finally, the simplification of plate structures into beam structures, in dynamic analysis of explosive loading, was presented with satisfactory approximation results in amplitudes, but inconsistent in frequencies.

Keywords: Laminated structures; Blast load; Parametric analysis; Software development.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura laminar compósita e suas lâminas.....	58
Figura 2 - (a) Estrutura geral do tipo <i>angle ply</i> ; (b) Estrutura geral do tipo <i>cross ply</i> ; (c) Estrutura <i>angle ply</i> simétrica; (d) Estrutura <i>cross ply</i> simétrica; (e) Estrutura <i>angle ply</i> antissimétrica; (f) Estrutura <i>cross ply</i> antissimétrica.....	59
Figura 3 - Placa laminar compósita	66
Figura 4 - Comportamento de placas com base na Teoria Clássica	68
Figura 5 - Comportamento de placas com base na Teoria de Primeira Ordem no Cisalhamento	69
Figura 6 - Comportamento de placas com base na Teoria de Terceira Ordem no Cisalhamento	71
Figura 7 - Viga laminada compósita	84
Figura 8 - Explosão ao ar livre.....	91
Figura 9 - Confinamento de explosões.....	92
Figura 10 - Relação das pressões de incidência e reflexão	93
Figura 11 - Comportamento da reflexão de onda normal à superfície	94
Figura 12 - Parâmetros da carga explosiva esférica	95
Figura 13 - Parâmetros da carga explosiva hemisférica	96
Figura 14 - Influência da taxa de decaimento.....	98
Figura 15 - DYNAblast 1.0, janela principal.....	103
Figura 16 - DYNAblast 1.0, input data para Análise Avançada	105
Figura 17 - DYNAblast 1.0, janela de resultados.....	106
Figura 18 - DYNAblast 1.0, gráficos de resultados.....	106
Figura 19 - DYNAblast 1.0, resultados de Análise Avançada parte 1, (a) Caso 1, (b) Caso 2.....	107
Figura 20 - DYNAblast 1.0, resultados de Análise Avançada parte 2, (a) Caso 3, (b) Caso 4, (c) Caso 5, (d) Caso 6, (e) Caso 7	108
Figura 21 - DYNAblast 1.0, arquivo .txt.....	109
Figura 22 - DYNAblast 2.0, janela principal, parte 1; (a) <i>Input data</i> da placa; (b) <i>Input data</i> das lâminas	110

Figura 23 - DYNAblast 2.0, janela principal, parte 2; (a) <i>Input data</i> carregamento; (b) <i>Input data</i> tipo de análise	111
Figura 24 - DYNAblast 2.0, tipos de condições de contorno	111
Figura 25 - DYNAblast 2.0, tipos de equações para carregamento explosivo.....	112
Figura 26 - DYNAblast 2.0, tipos de análise.....	114
Figura 27 - DYNAblast 2.0, casos de análises	115
Figura 28 - DYNAblast 2.0, janela de resultado	115
Figura 29 - DYNAblast, fluxograma do <i>software</i>	118
Figura 30 - Comparação DYNAblast 2.0 e caso HSPT de Reddy (2003), $a/h = 4$..	121
Figura 31 - Caso FSPT Reddy (2003), $a/h = 10$	121
Figura 32 - Comparação DYNAblast 2.0 e caso HSPT de Reddy (2003), $a/h = 10$	122
Figura 33 - Comparação DYNAblast 2.0 e Reddy (2003), caso cross-ply lâminas $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$	123
Figura 34 - Comparação DYNAblast 2.0 e Reddy (2003), caso angle-ply lâminas - $45^\circ/45^\circ$	124
Figura 35 - Comparação DYNAblast 2.0 e Reddy (2003), caso cross-ply lâminas $0^\circ/90^\circ$	125
Figura 36 - Comparação DYNAblast 2.0 e Vo et al. (2017), caso HSPT, $L/h = 5$ e $0^\circ/90^\circ/0^\circ$	126
Figura 37 - Comparação DYNAblast 2.0 e Vo et al. (2017), caso HSPT, $L/h = 5$ e $0^\circ/90^\circ$	127
Figura 38 - Comparação DYNAblast 2.0 e Karamanli (2017), caso HSPT, $L/h = 5$ e $0^\circ/45^\circ/0^\circ$	127
Figura 39 - Comparação DYNAblast 2.0 e Karamanli (2017), caso HSPT, $L/h = 5$ e $0^\circ/45^\circ$	127
Figura 40 - Comparação DYNAblast 2.0 e Vo et al. (2017), caso HSPT, $L/h = 5$, $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ e $m = 1$	128
Figura 41 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga isotrópica, comparação DYNAblast 2.0 e Eshraghi e Dag (2018)	131
Figura 42 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga isotrópica, comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018).....	132
Figura 43 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB ₁ - CP ₁ , comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018).....	134

Figura 44 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB ₁ - CP ₂ , comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018).....	135
Figura 45 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB ₁ - AP ₁ , comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018).....	135
Figura 46 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB ₂ - CP ₃ , comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018).....	136
Figura 47 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB ₂ - CP ₄ , comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018).....	136
Figura 48 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB ₂ - AP ₄ , comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018).....	137
Figura 49 - Esquema de placa com razão $a/b = 2$	139
Figura 50 - Modelo de viga no <i>software</i> LESM.....	140
Figura 51 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)	142
Figura 52 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para $a' = 2$ usando os <i>softwares</i> DYNAblast e LESM, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990).....	142
Figura 53 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para $a' = 5$ usando os <i>softwares</i> DYNAblast e LESM, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990).....	143
Figura 54 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para $a' = 8$ usando os <i>softwares</i> DYNAblast e LESM, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990).....	143
Figura 55 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander e <i>software</i> DYNAblast 2.0, estrutura de viga, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990).....	144
Figura 56 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander e <i>software</i> DYNAblast 2.0, estrutura de placa, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990).....	144
Figura 57 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Kazanci e Mecitoglu (2008)	149
Figura 58 - Modelo de viga no <i>software</i> LESM, adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008).....	149

Figura 59 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para apenas a Fase Positiva usando os <i>softwares</i> DYNAblast e LESM, estrutura de vidro, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)	149
Figura 60 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para Fases Positiva e Negativa usando os <i>softwares</i> DYNAblast e LESM, estrutura de vidro, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)	150
Figura 61 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre Fases Positiva e negativa, estrutura de placa de vidro, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008).....	150
Figura 62 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre Fases Positiva e negativa, estrutura de viga de vidro, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008).....	151
Figura 63 - Esquema representativo placa e fonte explosiva (Librescu e Nosier, 1990).....	157
Figura 64 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo, comparação DYNAblast 2.0 e Librescu e Nosier (1990).....	157
Figura 65 - Esquema representativo placa e fonte explosiva (Wei e Dharani, 2006).....	159
Figura 66 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo, comparação DYNAblast 2.0 e Wei e Dharani (2006).....	160
Figura 67 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ para baixas e moderadas massas de TNT usando <i>software</i> DYNAblast 2.0, caso Wei e Dharani (2006)	162
Figura 68 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ para moderadas e altas massas de TNT usando <i>software</i> DYNAblast 2.0, caso Wei e Dharani (2006)	162
Figura 69 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times w/h$ para diferentes valores de Z usando <i>software</i> DYNAblast 2.0, caso Wei e Dharani (2006).....	164
Figura 70 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo usando o <i>software</i> DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Wei e Dharani (2006)	164
Figura 71 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ para onde $W_{TNT} = 2,62$ kg usando <i>software</i> DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Wei e Dharani (2006)	165

Figura 72 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times w/h $ usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Wei e Dharani (2006).....	166
Figura 73 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Wei e Dharani (2006).....	167
Figura 74 - Esquema representativo placa e fonte explosiva (Kazanci e Mecitoglu, 2008).....	169
Figura 75 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo, comparação DYNAblast 2.0 e Kazanci e Mecitoglu (2008).....	170
Figura 76 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ para baixas e moderadas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci e Mecitoglu (2008).....	171
Figura 77 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ para moderadas e altas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci e Mecitoglu (2008).....	171
Figura 78 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times w/h $ para diferentes valores de Z usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci e Mecitoglu (2008).....	172
Figura 79 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)	173
Figura 80 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo usando o software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008).....	174
Figura 81 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)	177
Figura 82 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times w/h $ usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)	177
Figura 83 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)	178
Figura 84 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ kg usando software DYNAblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)	178

Figura 85 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times w/h $ usando software DYNAblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)	179
Figura 86 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)	179
Figura 87 - Esquema representativo placa e fonte explosiva (Susler et al., 2012)..	181
Figura 88 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo, comparação DYNAblast 2.0 e Susler et al. (2012).....	182
Figura 89 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ para baixas e moderadas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Susler et al. (2012)	183
Figura 90 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ para moderadas e altas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Susler et al. (2012)	183
Figura 91 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times w/h $ para diferentes valores de Z usando software DYNAblast 2.0, caso Susler et al. (2012).....	185
Figura 92 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0, caso Susler et al. (2012)	185
Figura 93 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo usando o software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Susler et al. (2012)	186
Figura 94 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Susler et al. (2012)	187
Figura 95 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ kg usando software DYNAblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Susler et al. (2012)	187
Figura 96 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times w/h $ usando software DYNAblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Susler et al. (2012)	188
Figura 97 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, casoSusler et al. (2012)	188

Figura 98 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo, comparação DYNAblast 2.0 e Kazanci (2017).....	189
Figura 99 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ para baixas e moderadas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci (2017)	190
Figura 100 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ para moderadas e altas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci (2017)	191
Figura 101 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times w/h $ para diferentes valores de Z usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci (2017)	192
Figura 102 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci (2017).....	193
Figura 103 - Comportamento na análise $Z \times w/h $ usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci (2017).....	193
Figura 104 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times w/h $ usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci (2017).....	194
Figura 105 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci (2017).....	194
Figura 106 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)	196
Figura 107 - Esquema representativo viga e fonte explosiva, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)	196
Figura 113 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Wei e Dharani (2006).....	201
Figura 114 - Esquema representativo viga e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Wei e Dharani (2006)	201
Figura 115 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para apenas a Fase Positiva usando o <i>software</i> DYNAblast 2.0, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008).....	202
Figura 116 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Wei e Dharani (2006)	202

Figura 117 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de placa laminada, caso adaptado de Wei e Dharani (2006)	203
Figura 118 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de viga laminada, caso adaptado de Wei e Dharani (2006).....	203
Figura 119 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Kazanci e Mecitoglu (2008)	205
Figura 120 - Esquema representativo viga e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Kazanci e Mecitoglu (2006)	206
Figura 121 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para apenas a Fase Positiva usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008).....	207
Figura 122 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008).....	207
Figura 123 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de placa laminada, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008).....	208
Figura 124 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de viga laminada, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008).....	208
Figura 125 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Susler et al. (2012)	210
Figura 126 - Esquema representativo viga e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Susler et al. (2012)	211
Figura 127 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para apenas a Fase Positiva usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Susler et al. (2012).....	211

Figura 128 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Susler et al. (2012).....	211
Figura 129 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de placa laminada, caso adaptado de Susler et al (2012).....	212
Figura 130 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de viga laminada, caso adaptado de Susler et al (2012).....	212
Figura 131 - Relação entre deslocamento máximo e distância escalada Z para cada massa de W_{TNT} , parte 1.....	215
Figura 132 - Relação entre deslocamento máximo e distância escalada Z para cada massa de W_{TNT} , parte 2.....	216
Figura 133 - Relação entre deslocamento máximo e distância escalada Z para cada massa de W_{TNT} , parte 3.....	217
Figura 134 - Relação entre coeficientes p_i e massa de W_{TNT}	218
Figura C. 1 - Inicialização dos atributos Class_TNT.....	251
Figura C. 2 - Função da Class_TNT.....	251
Figura C. 3 - Função da Class_Layer.....	252
Figura C. 4 - Função da Class_Analysis.....	253
Figura C. 5 - Função da Class_AdvAnalysis.....	254
Figura C. 6 - Função da Class_Parameter.....	254
Figura C. 7 - Propriedades Class_Blast.....	256
Figura C. 8 - Funções Class_Blast.....	256
Figura C. 9 - Fluxograma Class_Blast.....	258
Figura C. 10 - Funções Class_Material.....	258
Figura C. 11 - Funções Class_Effort.....	259
Figura C. 12 - Funções Class_Energy.....	260
Figura C. 13 - Funções Class_BoundaryConditions.....	261
Figura C. 14 - Funções Class_Solution.....	263
Figura C. 15 - Funções Class_SolutionStatic.....	263

Figura C. 16 - Funções Class_SolutionrDynamic.....	264
Figura C. 17 - Fluxograma Parameter_Fourier()	267
Figura C. 18 - Funções Class_Result.....	267
Figura C. 19 - Funções Class_Stress.....	268
Figura C. 20 - Funções Class_Strain	268
Figura C. 21 - Funções Class_NaturalPeriod.....	269
Figura C. 22 - Fluxograma Advanced_Calculus1().....	272
Figura C. 23 - Nome das classes em propriedades públicas	273
Figura C. 24 - Funções Class_Control	274
Figura C. 25 - Função Dynamic_Analysis()	275

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Coeficientes α_i das equações de deslocamento	74
Tabela 2 - Parâmetros β_i na análise de placas.....	82
Tabela 3 - Condições de contorno de viga laminada	88
Tabela 4 - Propriedades de placa ortotrópica do tipo <i>cross-ply</i> , caso estático (Reddy, 2003).....	120
Tabela 5 - Propriedades de viga ortotrópica do tipo <i>cross-ply</i> de lâminas $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$, caso vibração livre (Reddy, 2003)	123
Tabela 6 - Propriedades de viga ortotrópica do tipo <i>cross-ply</i> de lâminas $0^\circ/90^\circ$, caso vibração livre (Reddy, 2003).....	124
Tabela 7 - Propriedades de vigas ortotrópicas, caso estático (Vo et al., 2017 e Karamanli, 2017)	126
Tabela 8 - Propriedades de viga ortotrópica do tipo <i>cross-ply</i> , caso vibração livre (Khdeir e Reddy, 1994)	128
Tabela 9 - Comparação de resultados entre Khdeir e Reddy (1997) e DYNAblast 2.0.....	129
Tabela 10 - Propriedades de viga isotrópicas, caso vibração forçada (Eshraghi e Dag, 2018)	130
Tabela 11 - Propriedades de viga isotrópicas, caso vibração forçada (Ahmed, 2018)	132
Tabela 12 - Propriedades de viga ortotrópica, caso vibração forçada (Ahmed, 2018)	133
Tabela 13 - Laminação das vigas ortotrópicas, Ahmed (2018)	133
Tabela 14 - Comparação de resultados, viga isotrópica e ortotrópicas, entre Ahmed (2018) e DYNAblast 2.0	137
Tabela 15 - Propriedades físico-geométricos da estrutura e carregamento, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)	141
Tabela 16 - Resultados $a' = 2$, usando os <i>softwares</i> DYNAblast 2.0 e LESM, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)	145
Tabela 17 - Resultados $a' = 5$, usando os <i>softwares</i> DYNAblast 2.0 e LESM, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)	145

Tabela 18 - Resultados $a' = 8$, usando os <i>softwares</i> DYNAblast 2.0 e LESM, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)	145
Tabela 19 - Resultados obtidos, usando o <i>software</i> DYNAblast 2.0, em estrutura de placa, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)	146
Tabela 20 - Resultados obtidos, usando o <i>software</i> DYNAblast 2.0, em estrutura de viga, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)	146
Tabela 21 - Modos de vibração para o caso 1, inspirado em Librescu e Nosier (1990)	147
Tabela 23 - Resultados obtidos usando equação Friedlander para apenas Fase Positiva, usando os <i>softwares</i> DYNAblast 2.0 e LESM, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008).....	151
Tabela 24 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre o uso da Fase Positivo com Fases Positiva e Negativa, usando os <i>softwares</i> DYNAblast 2.0 e LESM, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)	151
Tabela 25 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre o uso da Fase Positivo com Fases Positiva e Negativa, usando o <i>software</i> DYNAblast 2.0, em estrutura de placa, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)	152
Tabela 26 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre o uso da Fase Positivo com Fases Positiva e Negativa, usando o <i>software</i> DYNAblast 2.0, em estrutura de viga, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)	152
Tabela 27 - Modos de vibração para o caso 1, inspirado em Kazanci e Mecitoglu (2008)	153
Tabela 28 - Propriedades físico-geométricos da estrutura e carregamento, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)	156
Tabela 29 - Resultados obtidos, em estrutura de placa, na comparação de Librescu e Nosier (1990) e <i>software</i> DYNAblast 2.0.....	156
Tabela 30 - Propriedades físico-geométricos da estrutura e carregamento, caso adaptado de Wei e Dharani (2006)	159
Tabela 31 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, na comparação de Wei e Dharani (2008) e DYNAblast 2.0	160
Tabela 32 - Resultados obtidos de deslocamento para $Z = 23,168 \text{ m/kg}^{1/3}$, uso do <i>software</i> DYNAblast 2.0	163

Tabela 33 - Resultados obtidos usando equação Friedlander comparando a Fase Positiva com as Fases Positiva e Negativa, usando o softwares DYNAblast 2.0, caso Wei e Dharani (2006)	165
Tabela 34 - Propriedades físico-geométricos da estrutura e carregamento, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)	169
Tabela 35 - Resultados obtidos, em estrutura de placa, na comparação de Kazanci e Mecitoglu (2008) e software DYNAblast 2.0.....	170
Tabela 36 - Resultados obtidos de deslocamento para $Z = 8,5405 \text{ m/kg}^{1/3}$, uso do software DYNAblast 2.0	172
Tabela 37 - Propriedades físico-geométricos da estrutura e carregamento, caso adaptado de Susler et al. (2012)	180
Tabela 38 - Resultados obtidos, em estrutura de placa, na comparação de Susler <i>et al.</i> (2012) e software DYNAblast 2.0	182
Tabela 39 - Resultados obtidos de deslocamento para $Z = 8,539 \text{ m/kg}^{1/3}$, uso do software DYNAblast 2.0	184
Tabela 40 - Resultados obtidos, em estrutura de placa, na comparação de Kazanci (2017) e software DYNAblast 2.0.....	190
Tabela 41 - Resultados obtidos de deslocamento para $Z = 8,539 \text{ m/kg}^{1/3}$, uso do software DYNAblast 2.0	191
Tabela 42 - Resumo resultados apresentados na literatura e obtidos por DYNAblast 2.0.....	195
Tabela 48 - Resultados obtidos usando equação Friedlander para apenas Fase Positiva, usando os softwares DYNAblast 2.0, caso adaptado de Wei e Dharani (2008)	204
Tabela 49 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Wei e Dharani (2008)	204
Tabela 50 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de placa, caso adaptado de Wei e Dharani (2008)	204
Tabela 51 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de viga, caso adaptado de Wei e Dharani (2008)	205

Tabela 52 - Resultados obtidos usando equação Friedlander para apenas Fase Positiva, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008).....	206
Tabela 53 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)	206
Tabela 54 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de placa, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)	209
Tabela 55 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de viga, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)	209
Tabela 56 - Resultados obtidos usando equação Friedlander para apenas Fase Positiva, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Suler <i>et al.</i> (2012)	210
Tabela 57 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Suler <i>et al.</i> (2012)	213
Tabela 58 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de placa, caso adaptado de Suler <i>et al.</i> (2012)	213
Tabela 59 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de viga, caso adaptado de Suler <i>et al.</i> (2012)	213
Tabela 60 - Resumo resultados apresentados para aplicação das fases positiva e negativa do carregamento	214
Tabela 61 - Resumo resultados apresentados para aplicação da fase positiva do carregamento	214
Tabela 62 - Coeficientes p_i da equação polinomial representativa das curvas $ w/h \times Z$	217

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BC	T-300 30k/EA9396 Carbono Bidirecional (Bidiretional Carbon)
BG	E7781/EA9396 Vidro Bidirecional (Bidiretional Glass)
CLPT	Teoria Clássica de Placas Laminadas
CLBT	Teoria Clássica de Vigas Laminadas
CC	Condição de contorno engastado
CCCC	Placa totalmente engastada
CCSS	Placa engastada em $x = 0$, a e apoiada em $y = 0$, b
CFSS	Placa engastada em $x = 0$, livre em $x = a$ e apoiada em $y = 0$, b
Desloc.	Deslocamento
Dif.	Diferença
D-BE	<i>Domain-Boundary Element Method</i>
FAD	Fator de Amplificação Dinâmica
FF	Condição de contorno livre
FFSS	Placa livre em $x = 0$, a e apoiada em $y = 0$, b
Freq.	Frequência
FSPT	Teoria de Primeira Ordem de Cisalhamento de Placas Laminadas
FSBT	Teoria de Primeira Ordem de Cisalhamento de Vigas Laminadas
HSPT	Teoria de Alta Ordem de Cisalhamento de Placas Laminadas
HSPT-FD	Teoria de Terceira Ordem em Placas Laminadas com Deformação Finita
HSBT	Teoria de Alta Ordem de Cisalhamento de Vigas Laminadas
LESM	<i>Linear Elements Structure Model</i>
MDOF	<i>Multi Degree of Freedom</i> (Sistema com diversos graus de liberdade)
Neg.	Fase Negativa
NL	Não Linear
PVB	Polivinil Butiral
ref.	Referência (à uma análise, um <i>software</i> ou a um autor)
SDOF	<i>Single Degree of Freedom</i> (Sistema com um grau de liberdade)
SS	Condição de contorno simplesmente apoiado

SCSS	Placa apoiada em $x = 0$, engastada em $x = a$ e apoiada em $y = 0, b$
SFSS	Placa apoiada em $x = 0$, livre em $x = a$ e apoiada em $y = 0, b$
SSSS	Placa totalmente apoiada
SS1	Placa com orientação das lâminas do tipo cross-ply
SS2	Placa com orientação das lâminas do tipo angle-ply
TNT	Trinitrotolueno
TvK	Teoria de von Kármán
UC	T-300 15k/976 Carbono Unidirecional (Unidirectional Carbon)

LISTA DE SÍMBOLOS

Simbologia minúscula

a	Comprimento da placa na direção do eixo x
a'	Coefficiente de decaimento
b	Comprimento da placa na direção do eixo y
$c_{m,n}$	Coefficiente de amortecimento (c)
f_i	Expressão da equação diferencial quando a segunda derivada no tempo do termo de deslocamento correspondente é isolada
h	Espessura da placa
i_d	Impulso da fase positiva relacionado a onda de choque refletida
i_d^-	Impulso da fase negativa relacionado a onda de choque refletida
i_{so}^+	Impulso da fase positiva relacionado a onda de choque incidente
i_{so}^-	Impulso da fase negativa relacionado a onda de choque incidente
k	Número de lâminas na placa
m, n	Parâmetros de somatório
p_{\max}	Pico de sobrepressão refletido
p_{\min}	Pico de subpressão refletido
p_{so}	Pico de sobrepressão incidente
p_{so}^-	Pico de subpressão incidente
q_0	Carregamento na estrutura
$q(x, y, t)$	Carregamento dinâmico genérico aplicado sobre uma superfície
q_m	Carregamento a ser considerado na análise
$q_m(t)$	Carregamento variando no tempo considerado na estrutura

q_0	Carregamento na estrutura
t	Tempo
t_i	Intervalo de tempo
t_d	Duração de tempo da fase positiva relacionado a onda de choque
t_d^-	Duração de tempo da fase negativa relacionado a onda de choque
u	Deslocamento na direção do eixo x
u_0	Deslocamento do plano médio na direção do eixo x
v	Deslocamento na direção do eixo y
v_0	Deslocamento do plano médio na direção do eixo y
w	Deslocamento na direção do eixo z
w_0	Deslocamento do plano médio na direção do eixo z
z_i	Localização no eixo z das fibras da superfície superior de cada lâmina

Simbologia maiúscula

A	Área da superfície
A_i	Equação diferencial de 1° grau
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij},$ E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}	Parâmetros das matrizes de rigidezes de ordem superior (dependentes da espessura da lâmina)
$A_n, B_n,$ C_n, D_n	Parâmetros da solução homogênea a serem determinados com base nas condições de contorno
C_{ij}	Coefficientes constituintes da matriz constitutiva tensão-deformação
$[C]$	Matriz de amortecimento
E_i	Módulo de elasticidade com relação ao eixo i
$E_1^{(k)}$	Módulo de elasticidade na direção principal de cada lâmina
$E_2^{(k)}$	Módulo de elasticidade na direção secundária de cada lâmina

$\{F\}$	Vetor de forças
G_{ij}	Módulo de cisalhamento na direção do eixo i em relação ao eixo j
G_0	Módulo vítreo
$G_{ij}^{(k)}$	Módulo de cisalhamento na direção do eixo i em relação ao eixo j de cada lâmina
H_i	Equação diferencial de 1° grau (parcela isolada do deslocamento)
I_i	Momento de inércia da massa
K	Energia cinética da estrutura
K^2	Coeficiente cisalhante
K_0	Módulo de volume
$[K]$	Matriz de rigidez
L	Comprimento longitudinal da viga
L_i	Equação Lagrangeana
M_{str}	Massa total da estrutura
M_{ij}	Momento fletor da estrutura no plano perpendicular ao eixo j na direção do eixo i
$[M]$	Matriz de massa
$[\bar{M}]$	Matriz auxiliar para a determinação do vetor de esforços N_{xx} , M_{xx} e P_{xx}
$[M_i]$	Matrizes auxiliares para a determinação da matriz $[\bar{M}]$
N_k	Número total de lâminas
$[N_2]$	Matriz de parâmetros não lineares quadráticos
$[N_3]$	Matriz de parâmetros não lineares cúbicos
P_{ij}	Esforço de ordem superior (z^3) presente na estrutura, perpendicular ao eixo j na direção do eixo i
$P(t)$	Carregamento da onda de choque
Q_i	Esforço transversal da estrutura em relação ao eixo i

Q_n	Coeficiente em série trigonométrica para expansão do carregamento
$Q_{ij}^{(k)}$	Parâmetro da matriz de rigidez de cada lâmina com relação aos eixos locais
$\bar{Q}_{ij}^{(k)}$	Parâmetro da matriz de rigidez de cada lâmina com relação aos eixos globais
R	Amortecimento característico da estrutura
R_i	Esforço de ordem superior da estrutura em relação ao eixo transversal ao eixo i
R_{TNT}	Distância do explosivo ao anteparo
T_L	Período linear da estrutura
T_{NL}	Período não linear da estrutura
$[T]$	Matriz de transformação
U	Energia de deformação da estrutura
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}$	Coeficientes referentes à série de Fourier para estrutura de placa
$U_{mn}^0, V_{mn}^0, W_{mn}^0, X_{mn}^0, Y_{mn}^0$	Coeficientes referentes à solução dinâmica usando série de Navier
U_m, W_m, X_m	Coeficientes referentes à série de Fourier para estrutura de viga
$X_i(x), Y_j(y)$	Séries trigonométricas a depender das condições de contorno
W	Trabalho externo aplicado na estrutura
W_{mn}^h	Solução homogênea
W_{mn}^p	Solução particular
W_{TNT}	Massa de explosivo
Z	Distância escalada de Hopkinson

Simbologia grega

$\alpha_i, \beta_i,$ λ_i, Δ	Parâmetro auxiliar de cálculo
λ_1', λ_2'	Raízes da solução homogênea da equação de placa
$\{\Delta\}$	Vetor de parâmetros de deslocamentos/rotações da série de Fourier
ε_i	Deformação normal de uma estrutura de lâmina
ε_{ij}	Deformação normal perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
ε_{ij}^l	Deformação normal local perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
$\varepsilon_{ij}^{(0)}$	Deformação normal de primeira ordem perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
$\varepsilon_{ij}^{(k)}$	Deformação normal em relação aos eixos locais para cada lâmina no plano perpendicular ao eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
γ_{ij}	Deformação cisalhante perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
γ_{ij}^l	Deformação cisalhante local perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
$\gamma_{ij}^{(0)}$	Deformação cisalhamento de primeira ordem perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
$\gamma_{ij}^{(k)}$	Deformação normal em relação aos eixos locais para cada lâmina no plano perpendicular ao eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
$\kappa_{ij}^{(1)}$	Deformação de flexão (curvatura de 1ª ordem)
$\kappa_{ij}^{(2)}$	Curvatura no cisalhamento
$\kappa_{ij}^{(3)}$	Curvatura de 3º ordem
ν_{ij}	Coeficiente de Poisson na direção do eixo i em relação ao eixo j
$\nu_{ij}^{(k)}$	Coeficiente de Poisson na direção do eixo i em relação ao eixo j de cada lâmina

θ	Orientação das lâminas com relação ao eixo de coordenadas globais da placa
θ_i	Rotação em relação ao eixo i
ρ_0	Massa específica da lâmina analisada
σ_i	Tensão normal de uma estrutura de lâmina, onde $i \in \mathbb{N}^*$
σ_{ij}^l	Tensão normal local perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
$\sigma_{ij}^{(k)}$	Tensão em relação aos eixos locais para cada lâmina no plano perpendicular ao eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
$\zeta_{m,n}$	Razão adimensional de amortecimento
τ_{ij}^l	Tensão cisalhante local perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
τ_{ij}	Tensão cisalhante de uma estrutura de lâmina, onde $i \in \mathbb{N}^*$
$\tau_{ij}^{(k)}$	Tensão cisalhante em relação aos eixos locais para cada lâmina no plano perpendicular ao eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
ϕ_i	Rotação perpendicular ao eixo i
$\omega_{m,n}$	Frequência natural da estrutura
$\bar{\omega}$	Valor adimensional baseado na frequência natural

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	34
1. ESTRUTURAS LAMINADAS COMPÓSITAS	57
1.1. Introdução Teórica	57
1.2. Placas Laminadas Compósitas.....	60
1.2.1. Análise Macro mecânica de uma Lâmina	60
1.2.2. Lei de Hooke em Materiais Ortotrópicos.....	62
1.2.3. Relação Deslocamento-Deformação	65
1.2.4. Equações Governantes	74
1.2.5. Soluções adotadas	78
1.3. Vigas Laminadas Compósitas	83
1.3.1. Análise Macromecânica de uma Lâmina	83
1.3.2. Relação Deslocamento-Deformação	84
1.3.3. Equações Governantes	85
1.3.4. Soluções Adotadas.....	87
2. CARREGAMENTO EXPLOSIVO	89
2.1. Definição de Explosão	89
2.2. Categorias das Ondas de Explosão	90
2.3. Fenômenos das Ondas Explosivas	92
2.4. Parâmetros de Ondas de Reflexão.....	94
2.5. Equacionamento do Carregamento	99
2.5.1. Polinômio Cúbico.....	100
2.5.2. Equação Expandida de Friedlander.....	100
3. SOFTWARE DYNAblast 2.0	102
4. RESULTADOS: CALIBRAÇÃO DO SOFTWARE DYNABLAST	119
4.1. Placas Laminadas Compósitas SSSS.....	120
4.1.1. Caso Estático.....	120
4.1.2. Caso Dinâmico Vibração Livre.....	122
4.2. Vigas Laminadas Compósitas SS.....	125
4.2.1. Caso Estático.....	125
4.2.2. Caso Dinâmico Vibração Livre.....	128

4.2.3. Caso Dinâmico Vibração Forçada	129
4.3. Comparação: Modelos Placa e Viga Isotrópico CLPT	138
4.3.1. Caso 1	140
4.3.2. Caso 2	147
5. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES: ANÁLISE DINÂMICA DE EXPLOSÃO, ESTUDO PARAMÉTRICO E PROPOSTA DE METODOLOGIA	154
5.1. Placas Laminadas Compósitas SSSS e CCCC.....	155
5.1.1. Librescu e Nosier (1990).....	155
5.1.2. Wei e Dharani (2006).....	158
5.1.3. Kazanci e Mecitoglu (2008)	167
5.1.4. Susler et a. (2012)	180
5.1.5. Kazanci (2017).....	189
5.1.6. Comparação Resultados: Modelos Literatura e DYNAblast	194
5.2. Comparação: Modelos Placa e Viga.....	195
5.2.1. Caso 1: Adaptação do modelo de Librescu e Nosier (1990).....	196
5.2.2. Caso 2: Adaptação do modelo de Wei e Dharani (2006).....	200
5.2.3. Caso 3: Adaptação do modelo de Kazanci e Mecitoglu (2008)	205
5.2.4. Susler et al. (2012)	209
5.2.5. Comparação Resultados: Casos Avaliados.....	213
5.3. Equação $w(Z, W_{TNT}, h)$: Metodologia Sugerida.....	214
5.3.1. Análise dos Gráficos $ w/h \times Z$ (m/kg ^{1/3})	215
5.3.2. Análise dos Parâmetros e Equação.....	217
CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	221
Sugestões para Trabalhos Futuros	230
REFERÊNCIAS.....	231
ANEXOS.....	242

INTRODUÇÃO

Diversos estudos são conduzidos a respeito de estruturas laminadas compósitas, visto que possui a versatilidade de aplicação em diversas áreas de conhecimento, tais como engenharias civil, aeroespacial, mecânica e dentre outras especialidades.

Estruturas laminadas compósitas são formadas pelo conjunto de lâminas delgadas, que podem ser tratadas conforme os conceitos de Kirchhoff ou de Mindlin, baseando-se em sua espessura total, ou seja, no somatório das espessuras individuais das lâminas. Contudo, este processo apenas é possível quando se verificam algumas hipóteses de uniformização, já descritas em literatura (Reddy, 2003), como o caso de não haver deslizamento entre lâminas. Cada lâmina possui propriedades mecânicas que variam conforme o direcionamento das fibras com relação aos eixos globais e o nível de anisotropia da lâmina em questão.

Paralelamente ao caso do desenvolvimento matemático para elementos laminados, o estudo de carregamento dinâmico como solicitação é reconhecido como de grande importância na avaliação do comportamento das estruturas de Engenharia Civil. Outrossim, especificando nas análises dinâmicas, o fenômeno da explosão corresponde a um carregamento que pode ocasionar grandes danos estruturais, devido ao elevado impacto em curtos intervalos de tempo. Este tipo de fenômeno, naturalmente, é de recorrência rara, mas que possui elevada taxa de prejuízo às construções civis, podendo gerar sua perda parcial ou total.

No intuito de ilustrar o avanço dos estudos acerca dos temas mencionados, proceder-se-á a uma revisão bibliográfica separada em quatro grandes tópicos: placas laminadas compósitas, vigas laminadas compósitas, carregamento explosivo e placas laminadas submetidas ao carregamento explosivo.

Placas laminadas compósitas

Um dos maiores estudiosos sobre esta estrutura em particular é o professor PhD. J. N. Reddy. Em sua publicação, Reddy (1984) apresenta um estudo sobre placas laminadas compósitas considerando a aplicação da teoria de alta ordem no cisalhamento. Em seu estudo, considerou-se placas cujas lâminas são ortotrópicas e,

para o conjunto, aplicou-se o princípio dos deslocamentos virtuais, obtendo-se as equações de movimento do sistema. A análise estática avalia o comportamento de placas simétricas do tipo *cross-ply* e considera as condições de contorno como sendo totalmente apoiadas, utilizando as séries de Navier como solução adotada.

Seguidamente, Reddy (1987) apresenta a metodologia das teorias de primeira ordem considerando placas de Reissner-Mindlin, de forma a determinar os deslocamentos base, reduzindo a análise tridimensional para bidimensional. A placa de Mindlin consiste em uma estrutura ortotrópica.

Posteriormente, observa-se publicações do professor PhD. A. A. Khdeir, do Instituto Politécnico da Virgínia. Khdeir (1988a) apresenta um estudo sobre vibração livre e flambagem em placas laminadas simétricas. Neste estudo, os deslocamentos são considerados como de alta ordem no cisalhamento. Não tão apenas, o processo de solução é dado com base na teoria de Lèvy aplicada à análise dinâmica. No mesmo ano, Khdeir (1988b) apresenta estudos referentes a placas laminadas antissimétricas do tipo *angle-ply*. Neste caso, a solução apresentada considera o procedimento de Levy na avaliação do comportamento dinâmico na vibração livre. Seguidamente, Reddy e Khdeir (1989) contemplam um estudo a respeito do efeito de vibração livre e flambagem em placas compósitas laminadas, cujos procedimentos de solução adotados são a abordagem de Lèvy e a formulação de elementos finitos, de forma a comparar ambos os resultados.

Khdeir (1989a) estuda placas laminadas do tipo *cross-ply* para quando estas não são simétricas. No artigo apresentado, as análises consistem também em verificar o comportamento quanto a vibração livre e efeito de flambagem atreladas à solução de Lèvy. No mesmo ano, Khdeir (1989b) publica outro artigo divulgando um comparativo entre as análises de deformidade no cisalhamento e a teoria de Kirchhoff, considerando os efeitos de flexão, flambagem e vibração para placas laminadas antissimétricas do tipo *angle-ply*. No conteúdo, a solução adotada corresponde ao procedimento de Lèvy, tanto para a análise estática quanto para a dinâmica.

Nosier e Reddy (1992), com o objetivo de estudarem cascas cilíndricas, publicam um artigo contemplando o comportamento de vibração livre e estabilidade em cascas cilíndricas circulares do tipo *cross-ply*. O desenvolvimento é baseado nas equações de movimento da estrutura em questão. O procedimento de solução adotado consiste na aplicação da metodologia de Lèvy, com equações de movimento

atrelados a uma série simples trigonométrica e ao exponencial, que representa a fase dinâmica. Para a solução do problema, utiliza-se o procedimento *state space*.

Hadian e Nayfeh (1993) apresentam um estudo a respeito do efeito flambagem e a vibração livre considerando o deslocamento com efeito de alta ordem no cisalhamento. A metodologia abordada consiste na aplicação do princípio de Hamilton e para a solução contempla-se o método de Lèvy. No mesmo ano, Chung e Chung (1993) analisam dinamicamente placas ortotrópicas de Mindlin, considerando as condições de contorno restritas elasticamente à rotação. Para tal feito, avaliou-se o comportamento considerando o efeito para vigas do tipo Timoshenko aplicando-se vibrações harmônicas.

Reddy e Robbins Jr (1994) apresentam, através da publicação de um artigo pela American Society of Mechanical Engineers, diversos modelos e teorias para análise de placas laminadas compósitas, dentre elas as teorias clássicas, de primeira ordem e de alta ordem no cisalhamento, a teoria de *layerwise* e modelos hierárquicos.

Khdeir (1996) apresenta um formalismo matemático que auxilia na solução de Lèvy, utilizando o procedimento do *state space*. Esta nova abordagem tem por princípio facilitar no tratamento de dados e evitar problemas condicionais no cálculo de determinantes de matrizes de alta ordem. Este caso é aplicado para avaliações de comportamento de placas na vibração livre. Liew (1996) apresenta uma solução para vibração livre de placas laminadas simétricas do tipo Mindlin utilizando o método de Ritz. No processo, também é usada a equação da energia funcional de laminados, de forma a determinar as equações governantes. O método de Ritz aplicado a este caso, consiste em uma série dupla numérica com parâmetros desconhecidos, a ser determinados de acordo com as condições de contorno estabelecidas.

Chen et al. (1997) apresenta em sua publicação a análise do comportamento de placas laminadas compósitas finas na vibração livre. O referido estudo adota que a estrutura se comporta conforme a alta ordem no cisalhamento. Não tão apenas, a metodologia apresentada contempla a determinação das equações governantes através da energia total funcional. A solução adotada consiste no método de Ritz.

Luccioni e Dong (1998) apresentam a aplicação da análise de vibração livre e estabilidade em placas laminadas compósitas finas considerando a metodologia de elementos finitos, modelando em elementos lineares. O processo contempla essencialmente os deslocamentos e rotações considerando a teoria clássica de

placas e a primeira ordem no cisalhamento. Finalmente, para a análise dinâmica é utilizada a metodologia de Lévy.

Khdeir e Reddy (1999) apontam novamente a análise de vibrações livres em placas laminadas compósitas, porém considerando a segunda ordem de cisalhamento nos deslocamentos e rotações. O processo de determinação das equações de movimento é através do princípio de Hamilton e, para solução de tal problema, adota-se o método de Lévy, de forma a avaliar o comportamento para com diversas condições de contorno. Neste artigo, apresentou-se um procedimento para diminuir o sistema de equações obtidos e uma manipulação matemática que consiste em possibilitar um melhor processamento computacional dos dados para determinação dos resultados. Niyogi et al. (1999) apresentam uma formulação pelo método dos elementos finitos para avaliar a vibração de estruturas laminadas de placas do tipo *folded*. A metodologia é baseada na teoria clássica de placas.

Matsunaga (2000) também apresentou a avaliação no comportamento de vibrações e estabilidade de placas laminadas compósitas, do tipo *cross-ply*. Sua metodologia aborda a aplicação do princípio de Hamilton para determinação das equações de movimento do sistema. A solução adotada consiste na aplicação do método de Navier, tanto para o caso estático quanto para o caso dinâmico. Além disso, uma avaliação de tensões encontra-se presente na publicação.

Makhecha et al. (2001) publicaram um estudo a respeito da avaliação de placas laminadas compósitas, na análise dinâmica, considerando a teoria *zigzag* atrelada à teoria de alta ordem no cisalhamento, de forma que ambas possam criar uma precisão na resposta da estrutura. Efeitos mecânicos e térmicos são considerados nos vetores de carga externa atuantes na placa.

Desai et al. (2003) descreve o comportamento dinâmico de placas laminadas compósitas através da metodologia de elementos finitos, considerando-se elemento tridimensional de 18 nós. O efeito de cisalhamento é presente na consistência matemática do método.

Agaah et al. (2004) apresentam as frequências naturais de placas laminadas compósitas para quando os efeitos de alta ordem de cisalhamento são considerados nos deslocamentos. A avaliação das vibrações da estrutura considerada é dependente das condições de contorno adotadas.

Akavci (2005) contempla em seus estudos o efeito estático de carregamento uniforme e sinusoidal de placas laminadas compósitas considerando a base elástica. São abordadas as teorias clássicas de placas, efeitos de primeira ordem e superiores de deformação no cisalhamento de forma a ter um comparativo nas tensões das três abordagens. Chen e Lue (2005) apresentam uma análise de vibração livre considerando uma estrutura de análise 3D. As placas avaliadas são do tipo *cross-ply*, sendo as condições de contorno dois lados paralelos simplesmente apoiados. Os processos de solução apresentados são analíticos (*state space*¹) e semi analítico. Ainda no mesmo ano, Lundmark e Varna (2005) apresentam um trabalho de placas laminadas considerando que tais lâminas sofrem o efeito de fissuração quando submetidas a carregamento. Para o caso, considera-se a verificação da resistência do material com base nas matrizes constitutivas das lâminas e o vetor de tensões gerados. Também são consideradas as propriedades termo elásticas dos materiais constituintes das lâminas.

Em seu trabalho, Civalek (2008) apresenta o comportamento de vibração livre para placas laminadas compósitas utilizando o método da convolução singular discreta (em inglês *discrete singular convolution*, DSC). A metodologia foi aplicada em placas simétricas com a deformação para com o primeiro grau no cisalhamento. O processo de obtenção das equações de movimento é o mesmo, ou seja, a partir da aplicação do princípio de Hamilton. A solução destas, por sua vez, é diretamente relacionada com a aplicação do método DSC apresentado.

Alibeigloo e Kari (2009) apresentam a formulação básica de placas laminadas compósitas considerando um carregamento distribuído em uma região delimitada sobre a estrutura. Neste caso, é realizada a análise dinâmica de vibrações forçadas, proveniente deste carregamento, para placas do tipo *cross-ply* totalmente apoiadas utilizando a teoria de alta ordem do cisalhamento no deslocamento. Nik e Tahani (2009b) contemplam a análise de placas laminadas utilizando as relações lineares de tensão-deformação e, para determinação das equações estáticas de movimento, utiliza-se o princípio da energia total potencial mínima. O procedimento de solução

¹ Segundo Lobontiu (2018), *state space* pode ser definido como sendo a renderização de matrizes no domínio do tempo para modelos dinâmicos do tipo SISO (entrada única – saída única) ou MIMO (entrada múltipla – saída múltipla), aplicados a equações diferenciais para obtenção de soluções de determinado modelo.

adotado corresponde ao de Lévy, usando-se a metodologia do *state space* como solução da equação diferencial. No mesmo ano, Xiang e Wang (2009) publicam a respeito da análise dinâmica de vibrações livres de placas laminadas compósitas, considerando o cisalhamento nas deformações expressas por funções trigonométricas. A obtenção das equações de movimento descritas em função dos deslocamentos é por base das equações de Euler-Lagrange e para a solução é sugerida utilizar as funções bases radiais.

Bhar et al. (2010) contemplam em sua publicação os resultados comparativos entre a primeira ordem e a alta ordem do cisalhamento nas deformações utilizando a formulação de elementos finitos, considerando análises estática e dinâmica. Neste caso, a estrutura utilizada corresponde à uma placa laminada compósita associada com um enrijecedor, de forma a diminuir os deslocamentos verticais. Malekzadeh et al. (2010) contempla a formulação de placas circulares anulares laminadas compósitas sobre base elástica. A metodologia é baseada em pequenas deformações tridimensionais da teoria da elasticidade. Para a solução do problema, é adotada a teoria *layerwise* em conjunto com o método dos elementos finitos.

Chen et al. (2012) contempla a formulação para avaliar o comportamento de placas laminadas compósitas considerando a teoria *couple stress* modificado, aplicadas a placas de Mindlin. Neste procedimento, as equações são escritas em função de deslocamentos e rotações, de forma que, ao final da análise, seja possível realizar comparações entre o comportamento de placas do tipo Mindlin, Kirchhoff e Reddy.

Grover et al. (2014) apresenta o comportamento estático de placas do tipo *cross-ply* e *angle-ply* considerando as equações de deslocamento funções trigonométricas. As equações governantes são obtidas na implementação da equação de Lagrange. Já a solução adotada é com base em modelo de elementos finitos.

Shengqi e Wanji (2015) também apresentam o comportamento estático de placas laminadas compósitas com base na teoria modificada do *couple stress*. Neste caso, contempla-se a teoria clássica de placas, primeira e alta ordem de cisalhamento nas deformações, para então aplicação da teoria modificada *couple stress*. A solução analítica abordada corresponde a uma placa laminada simplesmente apoiada e sua solução é desenvolvida com base na metodologia de elementos finitos. Chen (2015) contempla uma análise de placas laminadas de Reddy baseada na teoria modificada

do *couple stress* e na teoria global-local. O procedimento é então avaliado para dois carregamentos sinusoidais transversais entre si.

Adim et al. (2016) publica o procedimento de análise estática de placas laminadas compósitas considerando a teoria alta ordem de cisalhamento na deformação escrita através de funções trigonométricas hiperbólicas, em seu modelo 1, e funções exponenciais, no modelo 2. O processo de obtenção das equações governantes é dado conforme precede a teoria de Reddy, ou seja, aplicação do princípio da energia de Hamilton. As soluções adotadas são para placas simplesmente apoiadas do tipo antissimétrica *cross-ply* e *angle-ply*.

Shi et al. (2017) analisa vibrações livres e forçadas e placas compósitas laminadas quando sobre fundações elásticas. Para o caso, adota-se a teoria de primeira ordem de cisalhamento na deformação. Já na determinação das equações governantes, é adaptada a função de energia Lagrangeana, considerando inclusive a energia gerada pela função, convertida em energia de deformação das molas. Zhang (2017) adota uma análise para vibrações livres de placas compósitas laminadas considerando as condições de contorno não uniforme. Ou seja, o autor separa a energia das molas em duas equações, a primeira referente a apoios pontuais distribuídos ao longo do contorno da estrutura e, para o segundo caso, apoios contínuos, porém sendo interrompidos sem seções ao longo do contorno. Para a análise, utiliza-se a teoria de primeira ordem do cisalhamento na deformação.

Qin et al. (2019) adota o método analítico de Jacobi-Ritz para vibrações livres de placas retangulares laminadas compósitas considerando condições de apoio arbitrárias. Para isso, é considerada a teoria de placas aplicando a primeira ordem do cisalhamento na deformação. Da mesma forma, utilizando a teoria FSDT, os deslocamentos globais são relacionados com os deslocamentos do meio do plano somados ainda ao deslocamento gerado pela rotação. São também obtidas relações para os esforços resultantes, além da expressão de energia de deformação. Para o caso, como é considerada uma análise de variadas condições de contorno, a energia de deformação da estrutura contempla a energia de alongamento, flexão e o par alongamento-flexão. A solução fornecida é dada por polinômios de Jacobi, que são incorporados nas soluções de expressões adotadas para os deslocamentos das lâminas, bem como as rotações de cada uma. Após isso, é adotado o método de Rayleigh-Ritz para solucionar o problema da estrutura.

Xue et al. (2019) apresenta um estudo a respeito de placas laminadas compósitas baseadas no modelo de Mindlin considerando condições de contorno arbitrárias. Para os deslocamentos, o referido autor considera a tradicional forma de apresentação em séries de Fourier. Nestes casos, as séries de Fourier são representadas como uma multiplicação de duas funções trigonométricas somadas à uma função polinomial auxiliar, que é usada para superar as descontinuidades da condição de contorno. Apesar de ser chamada de “função polinomial auxiliar”, ela é composta também por funções trigonométricas. No quesito de averiguar condições de vibração do laminado, é considerado o princípio de Hamilton, sendo analisado o fluxo de energia da estrutura. Para as análises sugeridas, é considerada uma estrutura laminada de placa *angle ply* antissimétrica. Já as condições de contorno são do tipo molas, que são restritas em situações translacionais, rotacionais e torcionais.

Tabasi et al. (2020) apresenta o comportamento de uma placa laminada com base elástica quando está sob vibração livre e vibração forçada utilizando o método da quadratura diferencial. É considerada a teoria de primeira ordem de deformação no cisalhamento e o princípio de Hamilton para determinação das equações governantes. Com relação a fundação, é introduzida a formulação de Heaviside, considerando um comportamento não homogêneo. Na teoria de primeira ordem de deformação no cisalhamento, é sabido que as expressões para os deslocamentos de meio de plano são dadas por polinômios de primeiro grau. Já no quesito de relações constitutivas, são abordadas as considerações de placa laminada com fibra de metal. As equações governantes são apresentadas com base no princípio de Hamilton e desenvolvidas considerando cálculo variacional. A função de Heaviside é utilizada por conta da consideração de parcialidade da fundação elástica, isto é, a base da placa não é totalmente contemplada por fundações elásticas.

Antunes et al. (2020) introduz que os modos de vibração de variáveis de rigidez para laminados compósitos foram obtidos pela análise modal experimental e comparando-os com os resultados de modelos teóricos/matemáticos. As frequências naturais e as formas de vibração foram comparadas com os modelos baseadas pelas Teoria da Placa Clássica e Teoria da Deformação por Cisalhamento de Primeira Ordem. O modelo teórico utilizado como base corresponde a teoria de placas de Kirchhoff (teoria clássica) e a Teoria de Primeira Ordem de Cisalhamento na

deformação. Os deslocamentos são apresentados conforme esta última teoria, considerando pequenos deslocamentos.

Beerhorst e Babo (2020) apresenta a análise retangular do tipo *buckling* de placas retangulares laminadas compósitas com simetria, considerando materiais isotrópicos ou “equilibrados” (*balanced lay-up*). Ao longo dos bordos, a placa é restrita rotacionalmente por molas, além das arestas transversais serem simplesmente apoiadas. O problema é resolvido através do método Rayleigh-Ritz. As equações governantes são presentes, apresentando inicialmente as equações de deslocamento da placa e as deformações. Como corresponde a uma placa de Mindlin, os esforços provenientes do cisalhamento são presentes. A análise flambagem considera o sistema de energia total elástica, minimizada pelo método de Rayleigh-Ritz.

Chen e Nie (2020) contemplam um modelo analítico com base no método generalizado de Rayleigh-Ritz, desenvolvido para lidar com problemas de pré flambagem e flambagem para moderadas espessuras de placas compósitas com condições de contorno generalizadas no plano da placa. Os com base no princípio de energia complementar mínima combinada com a função de tensão de Airy. Além disso, as equações governantes de flambagem para placas compósitas sob tensões não uniformes no plano da placa são baseadas na teoria de terceira ordem de deformação no cisalhamento. Ademais, é apresentado o método dos pontos de distribuição de Chebyshev-Gauss-Labotto e relacionado com a introdução dos coeficientes de contorno de tensões, oriundos do método multiplicador de Lagrange.

Observa-se nas referências bibliográficas diversos estudos contundentes sobre placas com diversas combinações de condições de contorno bem como as teorias de deslocamentos-deformações utilizadas. Ademais, a respeito destas teorias, entende-se que os estudos buscam aperfeiçoá-las matematicamente de modo que possam representar melhor a realidade do comportamento estrutural em questão. Contudo, averigua-se imediatamente que a maioria destes estudos são direcionados para os desenvolvimentos matemáticos de placas laminadas sob carregamento estático ou vibração livre. Especificamente no caso da vibração livre a manipulação matemática das equações governantes é facilitada, visto que a solitação externa se torna zero e as expressões são homogêneas. Desta forma, poucos estudos são explorados quando uma estrutura de placa está submetida a um carregamento dinâmico forçado, por acarretar um aumento da complexidade de manipulação e

solução matemática das equações governantes, principalmente quando as teorias de placas consideradas são não lineares.

Vigas laminadas compósitas

Ditaranto (1973) estudou sobre análise estática em vigas laminadas. No contexto, observa-se a utilização da teoria de Euler-Bernoulli na formulação das energias associadas à estrutura. As condições de contorno contempladas foram vigas simplesmente apoiadas e totalmente engastadas. Além da análise de deslocamentos, verifica-se resultados referentes às tensões.

Khdeir (1996b) investigou o comportamento dinâmico de vibração livre de vigas laminadas compósitas, do tipo *cross-ply* e *angle-ply* considerando diversas condições de contorno. As teorias de vigas utilizadas correspondem às de Euler-Bernoulli, Timoshenko e a desenvolvida por Reddy, Teoria de Alta Ordem no Cisalhamento. Considerou-se um estudo sobre a análise de vibração livre, determinando-se os autovalores e autovetores, e vibração forçada da estrutura.

Khdeir e Reddy (1997) apresentam uma análise de vigas laminadas do tipo *cross-ply* considerando a Teoria de Vigas Clássica, a Teoria de Vigas de Primeira Ordem, a Teoria de Vigas de Segunda Ordem e a Teoria de Vigas de Terceira Ordem. A solução adotada corresponde na utilização da abordagem *state space*, conforme explicação na nota de rodapé 1, em conjunto com a canônica de Jordan. A matriz de Jordan está associada a um autovalor em todas as coordenadas da diagonal principal de uma matriz quadrada, 1 nas entradas acima da diagonal principal e zero nas demais coordenadas, conforme explicação abordada por Pinto (2016). O processo de desenvolvimento da metodologia pode ser apreciado na publicação do referido autor.

Matsunada (2002) estuda as tensões interlaminares de vigas laminadas com base na teoria de alta ordem na deformação, considerando assim as solicitações normais e transversais. Nas equações governantes, estas são obtidas conforme o Princípio dos Trabalhos Virtuais e sua solução consiste em séries de Navier aplicadas para vigas do tipo simplesmente apoiadas.

Catapano et al. (2011) apresenta uma análise estática de vigas laminadas considerando diversas teorias. São observados os cálculos das variações das

energias relacionadas à estrutura e solução utilizando séries de Navier e aplicando-as a vigas simplesmente apoiadas.

Chakrabarti et al. (2012) realiza um modelo de análise de estabilidade de vigas do tipo sanduíche considerando o Método dos Elementos Finitos. A formulação matemática contempla a equação dos deslocamentos escrita como uma solução em série. Para o desenvolvimento das equações governantes, utiliza-se a energia potencial total do sistema e sua solução é aplicada para diferentes condições de contorno considerando vigas do tipo *cross-ply*.

Sayyad et al. (2015a) e Sayyad et al. (2015b) contemplam uma análise de uma viga laminada compósita e uma do tipo sanduíche, onde são considerados materiais isotrópicos. Na metodologia, é utilizada a teoria refinada de vigas e, na determinação das equações governantes, o Princípio dos Trabalhos Virtuais. A solução adotada é voltada para vigas simplesmente apoiadas submetidas a um carregamento estático. Na apresentação dos resultados, pode-se observar a comparação de teorias já conhecidas, tais como Timoshenko e Reddy, com as do trabalho referido, utilizando vigas do tipo *cross-ply*.

Su et al. (2016) faz um estudo de série de Fourier modificada para aplicação em vigas de distribuição funcional gradiente considerando condições de apoio arbitrárias e sobre uma base elástica. Na metodologia, apresentam-se as condições de transição de um material para outro, subdividido em dois casos, o primeiro referente ao mesmo tipo de material no topo e na base, porém com transição para um segundo tipo no meio. O segundo caso representa uma transição de um material no topo para um segundo na base. A teoria aplicada corresponde a Teoria de Primeira Ordem no Cisalhamento (Timoshenko) e as equações governantes sendo determinadas com base no princípio de Hamilton. Na solução, são adotadas as séries de Fourier com funções suplementadas e aplicadas para uma análise de vibração livre.

Vo et al. (2017) apresenta uma análise de flexão para vigas compósitas e do tipo sanduíche utilizando a teoria *quase-3D*, considerando os efeitos de flexão, cisalhamento e anisotropia dos materiais. No contexto de solução do problema, é utilizado o método dos elementos finitos, considerando seis graus de liberdade por nó. Na análise, são adotadas vigas do tipo *angle-ply* e *cross-ply* simplesmente apoiadas e totalmente engastadas submetidas a um carregamento estático.

Beg et al. (2018) contempla uma análise de vigas laminadas e de distribuição funcional graduada do material, considerando uma análise estática e de vibração livre. No contexto, são expressas funções de caracterização dos materiais que compõem o topo e a base da viga conforme a variação da altura. As teorias utilizadas para determinação das equações de deslocamento e deformações são baseadas nas teorias de alta ordem, sinusoidal, hiperbólica e exponencial. O princípio de Hamilton é utilizado para apontar as equações governantes do problema e sua solução é com base nas séries de Fourier para uma viga simplesmente apoiada.

Eshraghin e Dag (2018) trabalharam com uma nova abordagem do Método dos Elementos de Contorno, chamada *Domain-Boundary Element Method* (D-BEM), utilizando estruturas de vigas do tipo Timoshenko. Esse método é usualmente empregado em soluções fundamentais estáticas considerando uma função peso em demonstrativos de resíduos ponderados de forma a determinar as equações diferenciais parciais do sistema. Os resultados são validados com os métodos analíticos de solução, considerando carregamentos uniformemente distribuídos, carregamento pontual harmônico e carregamento impulsivo.

Bui et al. (2019) propõe uma análise de vigas laminadas compósitas considerando a teoria de terceira ordem de deformação para uma análise estática. Na metodologia, contempla-se a determinação do sistema de equações diferenciais com base na energia total da estrutura e, para a solução destas, o uso do método de Ritz com ainda a apresentação das funções de Navier para vigas totalmente apoiadas e totalmente engastadas. Na solução, são observados exemplos de vigas simétricas e assimétricas do tipo *cross-ply*.

Sayyad et al. (2019) estuda sobre vigas curvadas do tipo de distribuição dos materiais funcionalmente distribuídas, considerando teoria de alta ordem. O processo de desenvolvimento dos deslocamentos e deformações é baseado no raio de curvatura da viga, bem como a consideração de parâmetros para o cisalhamento. A solução adotada para a metodologia exposta corresponde a uma viga simplesmente apoiada. Ademais, de forma a demonstrar consistência nos resultados, são apresentados os obtidos por uma viga reta.

Ahmed (2018) e Ahmed et al. (2020) fizeram uma análise pelo *Domain Boundary Element Method* de alguns modelos de vigas laminadas, do tipo

Timoshenko, considerando carregamento uniformemente distribuído, pontual, pontual harmônico e aplicação de impulso, atuando durante um período de tempo.

Kirlangiç e Akbaş (2020) apontam um estudo sobre vigas laminadas e vigas do tipo de distribuição funcionalmente graduada do material, entre as fibras mais externas, submetidas a um carregamento estático. A teoria aplicada para classificação das vigas é a Teoria de Vigas de Timoshenko e é implicada uma consideração de caracterização de material de forma a variar gradualmente do topo à base. Na obtenção das equações diferenciais, o problema é encaminhado para a utilização da energia potencial total da estrutura e, para sua solução, é adotado o método de Ritz.

Zhang e Shi (2020) apresentam análise dinâmica de duas vigas laminadas sobrepostas uma à outra, conectadas por uma interface elástica, representada por molas, designada modelo LCDBS (*Laminated Composite Double Beam System*). No processo, é utilizada Teoria Clássica de Placas e Vigas e, na determinação do sistema de equações diferenciais, aplica-se o princípio de Hamilton. Nas equações de energia, naturalmente, contemplam-se as energias cinética e potencial de ambas as vigas e da camada elástica entre vigas. Para a solução, adotam-se as séries de Fourier com funções auxiliares de forma a acelerar a convergência da série.

Nas referências bibliográficas apresentadas a respeito de estudos baseados em vigas laminadas, pôde-se observar que este tipo de estrutura possui uma variedade maior de carregamentos aplicados quando comparados às placas laminadas. Ademais, combinações de diversas condições de contorno estão presentes. Naturalmente, isto é justificável devido ao fato de vigas possuírem, por simplificações matemáticas, menos incógnitas de deslocamentos em relação às placas, facilitando assim as manipulações matemáticas. Entretanto, a dificuldade deste tópico corresponde em encontrar referências que apresentem estudos de vigas do tipo laminadas, já que usualmente o carregamento é aplicado no eixo de menor inércia. Assim, a maioria dos estudos possui foco em vigas de um único material do tipo isotrópicos ou ortotrópicos.

Carregamento explosivo

O fenômeno da explosão é caracterizado por uma alta liberação de energia em um espaço de tempo curto, baseado no processo de reações ligadas aos

componentes químicos presentes no objeto. Ressalta-se que qualquer estudo químico do componente, fabricação e caracterização física do material que compõe um explosivo não são alvos de estudo deste trabalho, sendo limitada a caracterização matemática das curvas do fenômeno explosão e sua ação em estruturas.

Os estudos iniciais relacionados ao fenômeno da explosão são registrados por Friedlander (1940), o qual sugeriu uma fórmula simples para caracterização das ondas explosivas. Conhecida como equação de Friedlander, é uma expressão matemática para caracterizar as fases positiva e negativa de uma onda de choque e que, até a atualidade, é amplamente utilizada pelo meio científico para o estudo do referido fenômeno.

Posteriormente a Friedlander (1940) uma outra contribuição na caracterização da curva de ondas de choque foi realizada por Granström (1956) em que registrou estudos sobre o melhor equacionamento da fase negativa. Neste quesito, a onda de subpressão é formulada com base em um polinômio cúbico, cujo máximo absoluto encontra-se à $1/3$ do tempo registrado para a fase negativa. Para que este processo seja cientificamente viável, são apresentados cuidadosamente as metodologias e concepção dos ábacos com as propriedades do carregamento, tais como distância ao anteparo e massa de TNT utilizado. Estes dois dados fornecem parâmetros tais como as pressões máximas e mínimas, tempo de duração das fases positiva e negativa e impulsos das fases positiva e negativa.

Após os estudos realizados por Granström (1956), outras publicações sobre este tema foram divulgadas na literatura, de forma a melhorar a caracterização matemática do fenômeno da explosão, ou seja, seu equacionamento. Referências estas são de suma importância e representadas por Randers-Pehrson e Bannister (1997), Gantes e Pnevmatikos (2004), Wei e Dharani (2006), Krauthmmer e Atenberg (2000) e Theich e Gebberken (2010).

Com o avanço do processo de estudos relacionados ao fenômeno das explosões nas engenharias, Kinney e Graham (1985) e Needham (2010) contribuíram com o registro desse histórico de estudos, análises, processos demonstrativos, definições teóricas e aplicabilidade do carregamento em questão em seus respectivos livros, cujos quais são bem conhecidos na literatura.

De forma a contemplar o fenômeno da explosão em estruturas de Engenharia Civil (concreto armado e aço estrutural), US Department of Defense (2008) apresenta

um manual completo da caracterização matemática da onda de choque, bem como diversos ábacos representativos e como aplicar o carregamento nas estruturas de interesse. Este manual é referenciado na literatura para estudos específicos voltados para este carregamento dinâmico.

Rigby et al. (2013) e Rigby (2014) utilizam os ábacos contemplados pelo US Department of Defense (2008) de forma a equacionar as curvas e convertê-las para o sistema de medida internacional. Em Rigby et al. (2013), pode-se averiguar um estudo minucioso com algumas das equações existentes na literatura e averiguando quais destas são representativas de curvas de ensaios experimentais, particularmente para o caso da fase negativa. Tanto as curvas quanto os ábacos são apresentados neste trabalho, no Capítulo 2 que é específico para o estudo do fenômeno da explosão.

Rigby et al. (2020) apresenta uma avaliação preliminar sobre as características da explosão ocorrida em Beirute, no ano de 2020, com base em vídeos presentes em redes sociais. Neste caso, o autor realiza um estudo considerando a avaliação de 16 vídeos observando as cenas em intervalos de tempo de microssegundos e, finalmente, aplicando relações semi-empíricas para determinação dos parâmetros da onda de choque. Considerando as incertezas percorridas pelo autor, avaliou-se que a capacidade da explosão corresponde à de $1,12 \cdot 10^6$ kg de TNT.

Dennis e Rigby (2023) apresenta em sua publicação ferramentas de aprendizado de máquina com o objetivo de determinar os parâmetros explosivos (tamanho da carga, massa, composição e localização) com base em eventos explosivos de que não se possui o conhecimento de tais atributos a priori. Para isso, desenvolveu o Direction-encoded Neutral Network (DeNN) de forma a resolver tais problemas com base em rede neural artificial, estipulando assim os atributos de uma explosão com base em seu banco de dados previamente preenchido.

Neste tópico são apresentadas as referências bibliográficas cujas publicações são de estudos exclusivamente do fenômeno da explosão. Em outras palavras, as ondas de choque em seu estado puro, sem aplicabilidade em estruturas, salvo os manuais presentes. Com isto, observa-se que poucos estudos foram realizados deste tipo de fenômeno, visto a alta periculosidade dos ensaios experimentais, além das dificuldades de medição dos parâmetros desejados. Assim sendo, as pesquisas presentes em literatura que consideram estruturas submetidas ao carregamento

explosivo utilizam destas publicações como referências bases para o equacionamento da onda de choque.

Placas laminadas submetidas ao carregamento explosivo

Inicialmente, Gupta (1987) apresenta uma análise com formulação matemática e comparativo com resultados obtidos pelo método dos elementos finitos de uma placa delgada de única lâmina, considerando somente a fase positiva na onda de choque. O sistema é idealizado considerando linearidade geométrica e do material.

Librescu e Nosier (1990) apresentam análises dinâmicas teóricas considerando placas laminadas compósitas submetidas a carregamentos explosivos e explosões sônicas. Na questão da teoria de placas, as metodologias aplicadas consideram a relevância na diferença das aplicações das teorias de placas clássicas, primeira ordem de cisalhamento e alta ordem de cisalhamento.

Wei e Dharani (2006) realizaram estudos relacionados a placas laminadas do tipo sanduíche submetidas a carregamento explosivo. Neste contexto, a estrutura é composta por duas lâminas externas de vidro e uma fina lâmina de PVB (polivinil butiral). No processo de modelagem da estrutura, são consideradas as propriedades de viscoelasticidade do PVB e o desenvolvimento da formulação é realizado objetivando pequenos deslocamentos.

Kazanci e Mecitoglu (2008) apresentam o comportamento não linear de placas considerando explosão como carregamento. Nesta análise em particular, os autores apresentam a equação de Friedlander como sendo a equação que rege o efeito de ondas explosivas, para ambas as fases positiva e negativa.

Upadhyay et al. (2011) contempla em seu estudo o comportamento não linear de placas laminadas submetidas a grandes cargas explosivas utilizando a teoria de alta ordem no cisalhamento. A metodologia, inicialmente, é semelhante à desenvolvida por Reddy (2003), contudo a solução das equações governantes é feita com base em séries matemáticas utilizando o grau finito duplo da série de Chebyshev. As soluções contemplam placas totalmente apoiadas, totalmente engastadas e dois lados paralelos apoiados e engastados.

Susler et al. (2012) apresenta uma análise de placas utilizando o efeito de não linearidade geométrica agregado à variação de espessura da placa. Neste tipo de

trabalho, considerou-se a equação de Friedlander para caracterizar o efeito de explosão tanto para o caso de fase positiva quanto para a fase negativa.

Feldgun et al. (2016) abrange a análise de placas delgadas, de uma única lâmina, considerando a formulação de não linearidade geométrica do sistema, utilizando as tensões de membrana e o processo de solução por um grau de liberdade (SDOF). Paralelamente, na concepção dos parâmetros lineares e não lineares, o autor resgata a metodologia e formulação abordada por Yamaki (1961). Ao final, a equação governante da estrutura é solucionada com o método numérico de Runge-Kutta.

Kazanci (2017) apresenta uma formulação para placas considerando uma variação linear na sua espessura ao longo de seu comprimento. O processo de determinação das equações governantes utiliza como base a teoria de von Kàrman e, na solução dos parâmetros de deslocamentos, aplica-se a primeira parcela da série de Fourier. Suas soluções se aplicam a placas engastadas e apoiadas.

Amabili *et al.* (2020) apresentou o comportamento de uma placa do tipo sanduíche de vidro laminado submetido ao carregamento explosivo. Na apresentação da metodologia, foi considerado o efeito não linear de geométrico da estrutura contando ainda com a teoria de alta ordem do cisalhamento na deformação. Já para a configuração do material, considerou-se este como sendo ortotrópico. Não tão apenas, o efeito de amortecimento foi incluído na análise dinâmica, observando assim uma diminuição dos deslocamentos transversais ao longo do tempo. Considera-se, para a análise em questão, que a placa está totalmente apoiada.

Balkan et al. (2020) apresenta como campo de estudo o comportamento de placas laminadas compósitas submetidas a carregamentos explosivos, contudo, de forma a aumentar a resistência da estrutura, são implementados enrijecedores nas placas em questão.

A American Society of Civil Engineers (ASCE, 2021) publicou um documento referente as estruturas em geral submetidas ao carregamento explosivo. No manual, são contempladas a caracterização da onda de choque, os sistemas estruturais e seus comportamentos, componentes estruturais, métodos de testes experimentais e outros assuntos referentes especificamente a grandes estruturas e peças não estruturais.

Reis (2019), Reis et al. (2019) e Reis et al. (2022) apresentaram um estudo a respeito de placas delgadas submetidas a carregamento explosivo considerando a utilização de um sistema de um grau de liberdade (SDOF). Na concepção da

formulação, utilizou-se o procedimento adotado por Feldgun et al. (2016) na determinação das equações governantes utilizando o método de Galerkin e as tensões de membrana. Neste contexto, o carregamento dinâmico aplicado corresponde à onda de choque caracterizada pela equação de Friedlander para a fase positiva e o polinômio cúbico para a fase negativa. Reis et al. (2022a), especificamente, apresenta exemplos da literatura e compara os resultados para quando a explosão é equacionada pelo polinômio cúbico, ressaltando assim a diferença de resultados no deslocamento máximo da estrutura quando comparado com a referência. Ademais, Reis et al. (2022b) reitera a importância da consideração da fase negativa nas análises de placa, juntamente com uma análise paramétrica de dois exemplos conhecidos da literatura.

Finalmente, para este último tópico da contemplação das referências bibliográficas, foram apresentadas publicações que explorassem o comportamento de estruturas de placas laminadas submetidas ao carregamento explosivo considerando o desenvolvimento de uma metodologia matemática. Nota-se que são poucas as pesquisas realizadas, visto a alta complexidade da manipulação matemática para determinação das equações governantes acrescido ao fato de as ondas de choque serem apresentadas conforme equações exponenciais ou polinômios cúbicos, conforme é apresentado no Capítulo 2. Assim sendo, as soluções adotadas para estes casos se resumem em métodos numéricos.

Motivação

Ondas de choque ou carregamentos explosivos são solicitações consideradas raras, contudo possuem potencial catastrófico em estruturas que não foram dimensionadas ou analisadas para este objetivo. Tais fenômenos são originários com base em execuções intencionais dos explosivos ou provenientes de ocasiões acidentais. Para o primeiro caso observa-se diversos exemplares na história da humanidade, tal qual a Primeira e Segunda Guerras Mundiais e eventos da atualidade, a exemplificar os diversos bombardeios na Guerra Russo-Ucraniana, que se iniciou no mês de Fevereiro de 2022. Para o segundo caso, verifica-se o incidente ocorrido em Beirute – Líbano no ano de 2020, onde um armazém continha uma grande quantidade de nitrato de amônio, material altamente explosivo utilizado geralmente

como fertilizante, estocado “sem medidas preventivas”, segundo o primeiro-ministro do país (CNN Brasil, 2022). Naturalmente, em ambos os casos, as estruturas localizadas no epicentro entram em colapso, devido à grande pressão exercida. Estruturas em média distância são atingidas e usualmente pode-se verificar a condenação da edificação, proveniente as patologias apresentadas relacionadas à onda de choque. Em um raio maior de distância ao epicentro, construções são atingidas, relacionadas ao avanço da onda de choque, contudo observa-se que os elementos de vedação são mais atingidos, a exemplificar as janelas, enquanto a estrutura abala-se pela vibração imposta, mas sem acarretar sua ruína.

Observando o histórico de publicações a respeito de estruturas de placas e vigas laminadas submetidas a carregamentos explosivos, verifica-se que corresponde a uma linha de estudo não tão profundamente explorada. Isto pode ser atrelado ao fato da complexidade da implementação do carregamento ou ainda do tempo de análise, visto que o tempo de processamento varia conforme o número de lâminas que compõem a estrutura e o tipo de caracterização das relações deslocamento-deformação, estas podendo ter alto grau de não linearidade.

Observa-se também que em diversos casos, a análise de uma estrutura quando submetida por carregamento explosivo é obtida com base em resultados de *softwares* que utilizam elementos finitos ou ainda através da realização de um ensaio experimental. Neste segundo caso, o laboratório de pesquisa deve ser plenamente preparado para executar um ensaio de alta periculosidade, além de ser usual o autor realizar poucos ensaios para um mesmo estudo, o que reforça a necessidade de modelos numéricos que consigam prever o comportamento do fenômeno.

Com relação aos modelos analíticos compartilhados pela literatura, verifica-se que muitos autores se esforçam no desenvolvimento de novos modelos que possam melhor aproximar a realidade. Contudo, em muitos casos, o processo matemático é um tanto complexo, acarretando dificuldades na implementação computacional destes para novos estudos.

Desta forma, a motivação deste trabalho encontra-se pautada no baixo número de referências na aplicabilidade do carregamento explosivo em questão em estruturas de engenharia civil. Outrossim, considera-se um estudo aprofundado dos modelos de placas e vigas laminadas existentes na literatura, submetendo-os ainda ao carregamento explosivo, visto que pouco se é abordado, em particular o caso de

vigas, onde não se encontrou registros confiáveis. Ademais, com base nestes dois elementos estruturais, verificou-se que a análise de placas consideradas como elementos de vigas não é explorada, principalmente quando o carregamento é proveniente de uma fonte explosiva, sendo então um estudo promissor a se averiguar e apresentar à literatura atual. Paralelo a isto, estudos paramétricos quanto à verificação do comportamento dos deslocamentos máximos das estruturas, em uma análise de resposta dinâmica, com relação à variação dos valores das propriedades da explosão não são observados na literatura, tão pouco uma observação do padrão de comportamento de tais respostas. Finalmente, ainda notando a dificuldade na modelagem de estruturas e do carregamento em *softwares* comerciais, bem como a complexidade e periculosidade da execução de um ensaio experimental, é desenvolvido um *software* de fácil manipulação, com apresentação amigável e compreensível dos resultados e menor tempo de processamento, de forma a analisar placas e vigas laminadas isotrópicas/ortotrópicas submetidas ao carregamento explosivo.

Objetivos gerais

A primeira etapa corresponde na realização dos estudos de caracterização de placas e vigas, com base em referências presentes na literatura, conforme as equações de deslocamentos tratadas, como também as diferentes abordagens nas expressões de deformação. Tal caracterização tem por base apresentar a metodologia e solução adotadas para placas simplesmente apoiadas e totalmente engastadas e vigas bi apoiadas. Ademais, a apresentação das equações governantes com base numa formulação variacional é realizada.

No desenvolver das formulações, que são contempladas no Capítulo 1, são consideradas placas laminadas submetidas a um carregamento genérico P , que é substituível pela equação de carregamento dinâmico desejável. Para o caso de estudo dinâmico deste trabalho, são apresentados o comportamento para o caso de vibração livre e o caso das equações de caracterização do fenômeno da explosão. Ou seja, a segunda etapa é referente ao estudo do fenômeno da explosão, averiguando como é representado matematicamente pela literatura, as formulações relacionadas e sua

aplicabilidade em estruturas de placas. A maior parte da contribuição neste tema é baseada no que foi desenvolvido na dissertação de mestrado da autora (Reis, 2019).

A terceira etapa desta proposta é concernente ao comportamento das estruturas laminadas submetidas a diferentes carregamentos explosivos, conforme exemplos buscados pela literatura. Ademais, são realizadas análises paramétricas, de forma que se torne possível evidenciar um comportamento característico de qualquer placa quando ocorre variação nos parâmetros geométricos ou da fonte explosiva. Um segundo item de suma importância corresponde à identificação de equações através das curvas obtidas de análises paramétricas das placas submetidas ao carregamento explosivo. Assim, nesta presente proposta é sugerida uma metodologia para determinação das equações para cada estrutura de placa estudada, como forma de facilitar o processo de análise de deslocamento das estruturas, no centro do plano da placa, a partir da variação de apenas dois parâmetros característicos da explosão. Em outras palavras, espera-se obter equações que permitam prever diretamente o deslocamento máximo de uma determinada placa fornecendo para isso apenas a distância escalada (Z) e a quantidade de explosivo (W_{TNT}).

Para evidenciar a validade dos resultados do comportamento de placas e vigas laminadas mediante uma explosão, são também apresentadas as respostas estruturais para os seguintes casos: com relação a placas, as análises estática, de vibração livre e de carregamento explosivo, já para as vigas, são contemplados os casos estático, vibração livre e vibração forçada com carregamento sugerido por cada exemplo utilizado. Não foram observadas referências de vigas laminadas submetidas a carregamentos explosivos, objetivando-se na análise dinâmica de vibração forçada. Assim sendo, para o caso específico de vigas, este presente trabalho realizou as análises de tais comportamentos dinâmicos, conferindo os resultados com a literatura, para fim poder simular os comportamentos de carregamento explosivo.

Para que as análises supracitadas fossem possíveis de serem executadas, surgiu a necessidade da implementação do *software* DYNAblast, abrangendo os modelos analíticos que estão contemplados neste documento. O procedimento de cálculo é relacionado na implementação das principais teorias de placas e vigas no programa, tais como a Teoria Clássica de Placas/Vigas, Teoria de Timoshenko, Teoria de Placas de Primeira Ordem do Cisalhamento e a Teoria de Placas de Alta Ordem

de Cisalhamento, desenvolvida por Reddy. Na construção das equações governantes, é utilizado o Princípio de Hamilton e, para sua solução, o método de Runge-Kutta. Estes processos consideram a avaliação da placa sem avaliar suas deformações plásticas e/ou tipo de colapso envolvido. Desta forma, os materiais aqui presentes são do tipo ortotrópicos e, a depender, isotrópicos considerando ainda o caso de material elástico linear.

O *software*, DYNAblast, tem a capacidade de receber o *input* do usuário, correspondente às características físico-geométricas da estrutura e de suas lâminas, bem como a caracterização da onda explosiva e o tipo de análise desejada. O retorno dado corresponde ao interesse do usuário, seja este o simples comportamento deslocamento vs. tempo, tensões e deformações atuantes na seção escolhida para o deslocamento máximo encontrado, ou avaliação da estrutura com base na variação de parâmetros que caracterizem o carregamento explosivo.

Objetivos específicos

Este presente trabalho tem por objetivos específicos:

- Apresentar modelos matemáticos presentes na literatura com base nas teorias de deformação de placas e vigas;
- Apresentar modelos matemáticos de equacionamento das curvas características de explosão;
- Apresentar o desenvolvimento das equações governantes pelo Princípio de Hamilton;
- Implementação do método de solução Runge-Kutta para as equações governantes;
- Avaliar o comportamento de placas e vigas presentes na literatura com base no carregamento explosivo;
- Realizar um estudo paramétrico para verificar o comportamento dos deslocamentos com base na modificação da distância escalada e da massa do explosivo;
- Comparação entre os resultados considerando uso ou não da fase negativa (sucção) da explosão;

- Avaliar o comportamento da estrutura com base nos gráficos de FAD (Fator de Amplificação Dinâmica);
- Implementação do *software* DYNAblast e implementação de classes de caracterização das estruturas e explosivos, bem como cálculo geração das equações diferenciais, solução das mesmas e análise paramétrica;
- Sugestão de metodologia para determinação dos deslocamentos máximos de uma placa com base em sua espessura e parâmetros de explosão.

Estrutura do trabalho

Este trabalho é composto por 5 capítulos e conclusão, naturalmente divididos em subtópicos. Os capítulos apresentam-se abordando os seguintes temas:

- Capítulo 1: Formulação analítica de placas e vigas laminadas compósitas, as relações tensão-deformação e deformação-deslocamento, processo de determinação das equações governantes e sua solução;
- Capítulo 2: Definição e caracterização do carregamento explosivo, considerando o abordado pela literatura, que corresponde a processos semi-analíticos;
- Capítulo 3: Apresentação do *software* DYNAblast desenvolvido para a execução das análises feitas neste trabalho;
- Capítulo 4: Calibração dos resultados, utilizando o *software* DYNAblast, com base em exemplos retirados da literatura, para solicitações estáticas, vibração livre e vibração forçada, conforme a estrutura estudada.
- Capítulo 5: Apresentação dos resultados, comparando exemplos presentes na literatura com o *output* do *software*, considerando carregamento explosivo, acrescentando análises paramétricas e proposta de metodologia.
- Conclusão: Considerações finais com base na proposta realizada, metodologia formulada, resultados obtidos e sugestão de trabalhos futuros.

1. ESTRUTURAS LAMINADAS COMPÓSITAS

1.1. Introdução Teórica

Conforme abordado por Reddy (2003) e complementado por Mendonça (2019), materiais compósitos são aqueles constituídos por ao menos dois materiais que, em escala macroscópica, apresentam propriedades melhores que materiais convencionais, onde individualmente analisados, não conseguiriam obter as propriedades necessárias. Estas propriedades podem ser na melhora da rigidez, resistências ao calor, corrosão, diminuição da massa total, dentre outras que podem ser obtidas conforme o tipo de estrutura e o seu objetivo. Mendonça (2019) ressalta que este processo sugere que o engenheiro seja capaz de criar materiais, maximizando características desejáveis e minimizando as indesejáveis. A exemplificar sobre materiais compósitos, sugere-se a combinação entre dois ou mais destes materiais, gerando-se assim as fibras de carbono reforçadas com plástico, fibras de vidro reforçadas com alumínio, compósitos de nanotubos de carbono e dentre outros materiais (Amir *et al.*, 2019).

Essencialmente, materiais compósitos são subdivididos em 3 (três) categorias, conforme abordado por Reddy (2003) e por Mendonça (2019). A primeira classificação é a respeito de materiais compósitos fibrosos, cujos quais a matriz da estrutura é constituída de um material principal possuído por fibras que auxiliam a melhorar determinadas propriedades mecânicas do sistema. Tais fibras podem ser contínuas, longas ou curtas (entre 5 mm e 25 mm), orientadas em uma direção pré-determinada, unidirecionais, bidimensionais ou então dispostas de forma aleatória.

A segunda classificação referencia-se a partículas compósitas, que também são dispostas em toda a estrutura da matriz. Observando que as partículas não possuem dimensões, a depender do tipo de partícula inserida, os ganhos quanto à melhora dos componentes mecânicos da matriz podem ser de deveras relevante ou de pouca efetividade. Ademais, a implementação de partículas compósitas à matriz acarreta que outras propriedades sejam melhoradas, tais como, condutividade ou isolamento térmico/elétrico, resistência à altas temperaturas, redução do atrito, resistência ao desgaste superficial, melhora na usinabilidade, aumento da dureza superficial e redução dos custos. Contudo, deve-se atentar ao do caso de aumento da

rigidez em matrizes frágeis pode ocasionar diminuição drástica da resistência do sistema, visto o aumento da concentração de tensões na interface matriz-partícula, conforme afirma Mendonça (2019).

O terceiro caso, conforme preconiza Reddy (2003), é relacionado aos laminados compósitos, que correspondem às lâminas constituídas de diferentes materiais cada, usualmente. Tais laminados são compostos da mesma forma de fibras, cuja orientação destas definirá a capacidade de resistência e melhora das propriedades mecânicas da estrutura. A Figura 1 apresenta a disposição de algumas lâminas em diferentes direções fibrosas e que, todas juntas, constituem a estrutura laminada compósita. Na referida imagem ilustrativa, adaptada de Reddy (2003), as lâminas estão sendo representadas de forma espessa para melhor observação do leitor. Ademais, as fibras são apresentadas ilustrativamente como os filamentos cinzas para compreensão da angulação destas com relação ao eixo global da estrutura. De forma complementar e com maiores detalhes a respeito das concepções de estruturas laminadas fibrosas, Filho (2000) apresenta em sua publicação os comportamentos de placas constituídas por materiais com fibras longas em estruturas de lâminas.

Ressalta-se que o uso dos materiais compósitos (tais como fibras) não ocasiona que a resistência do sistema se iguale a tal compósito, mas sim os resultados chegam a valores intermediários. Isso se explica com base nas propriedades mecânicas da matriz, que usualmente são bastante inferiores as fibras. Desta forma, o aumento das propriedades desejadas está diretamente correlacionado com a taxa de fibras existente na matriz (Mendonça, 2019).

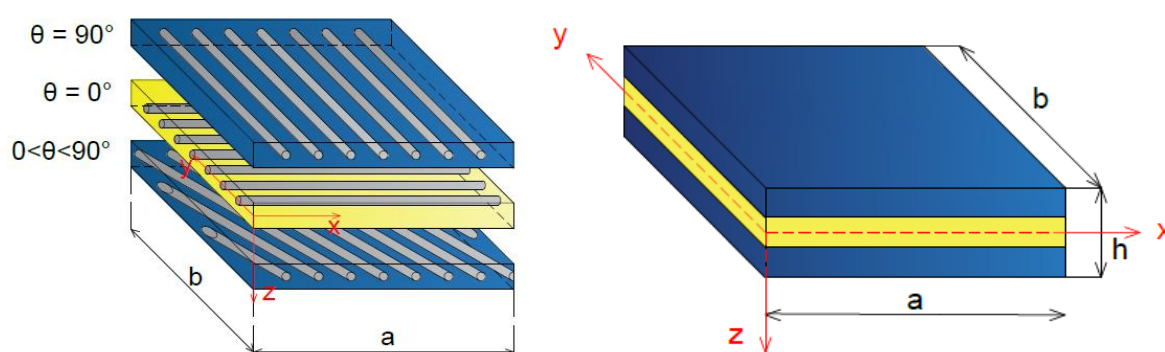


Figura 1 - Estrutura laminar compósita e suas lâminas

Fonte: Adaptado de Reddy (2003)

Há algumas classificações de estruturas laminadas compósitas conforme a orientação das fibras que estão presentes nas lâminas. Uma estrutura laminada geral possui suas lâminas com angulações a diversas direções, sendo as orientações $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Todas as configurações de angulações para estruturas laminadas são contempladas na Figura 2.

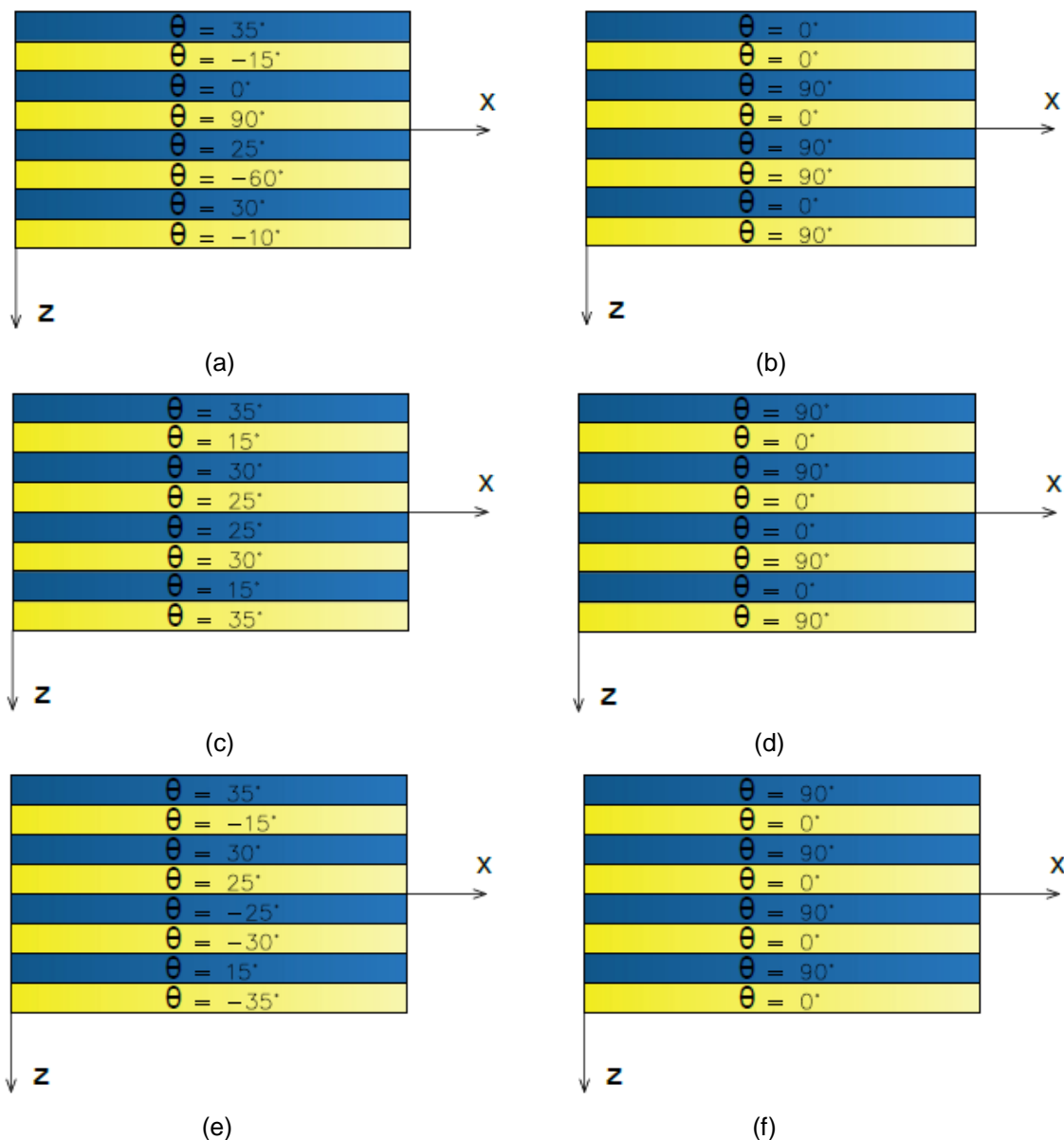


Figura 2 - (a) Estrutura geral do tipo *angle ply*; (b) Estrutura geral do tipo *cross ply*; (c) Estrutura *angle ply* simétrica; (d) Estrutura *cross ply* simétrica; (e) Estrutura *angle ply* antissimétrica; (f) Estrutura *cross ply* antissimétrica

Para o caso de uma placa do tipo *angle ply* é caracterizada por possuir suas lâminas com orientações $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, como pode ser observado na Figura 2 (a).

Estruturas do tipo *cross ply* são aquelas que possuem as orientações de suas fibras somente para 0° ou 90° , de acordo com a Figura 2 (b). Uma estrutura é chamada de simétrica quando suas lâminas são simétricas em relação ao plano médio, em questões de angulação das fibras e características físico-geométricas dos materiais. Neste caso, estruturas *angle ply* simétricas são presentes na Figura 2 (c) e estruturas *cross ply* podem ser observadas na Figura 2 (d). Assim, uma estrutura simétrica *angle ply* é composta por direções $[\theta, -\theta]_s$ ou $[-\theta, \theta]_s$ e uma estrutura simétrica *cross ply* é dada por $[0^\circ, 90^\circ]_k$ ou $[90^\circ, 0^\circ]_k$, sendo s a simetria. Finalmente, para o caso assimétrica, as Figura 2 (e) e (f) representam os casos *angle ply* e *cross ply*, respectivamente. Como o próprio nome informa, há uma antissimetria na placa, com relação as lâminas, com relação ao plano.

1.2. Placas Laminadas Compósitas

1.2.1. Análise Macro mecânica de uma Lâmina

Conforme afirma Mendonça (2019), o comportamento macromecânico é a manifestação macroscópica das propriedades da lâmina a ser analisada. Tais comportamentos são analisados quando ensaios experimentais são realizados no objeto em questão.

Neste trabalho, considera-se que os materiais utilizados são elásticos lineares e de característica ortotrópica, conforme ocorre na maioria das análises de laminados compósitos. Esta prerrogativa é básica e suficiente para análise até o ponto de ruptura de materiais tais como vidro-epóxi e boro-epóxi, conforme Mendonça (2019), ou ainda, para materiais em que seja suficiente a análise até o ponto de deformação.

A relação tensão-deformação base dos materiais é constituída com base nas tensões normais e cisalhantes, bem como as deformações normais e cisalhantes, onde são correlacionadas pela matriz constitutiva do material, **C**, Equação (1).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Onde:

- σ_i Tensão normal de uma estrutura de lâmina
- τ_{ij} Tensão cisalhante de uma estrutura de lâmina
- C_{ij} Coeficientes constituintes da matriz constitutiva tensão-deformação
- ε_i Deformação normal de uma estrutura de lâmina
- γ_{ij} Deformação cisalhante de uma estrutura de lâmina

A Equação (1) representa a relação tensão-deformação de um material elástico linear qualquer. Contudo, para o caso de materiais ortotrópicos, a matriz constitutiva \mathbf{C} do material pode ser simplificada a tal qual de forma que as direções principais locais sejam paralelas aos planos principais ortogonais ao sistema, como pode ser observado pela Equação (2).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

No geral, os componentes C_{ij} da matriz constitutiva para um material ortotrópico são representados com base nas constantes de engenharia, ou seja, módulo de Elasticidade nas três direções principais e os seis valores de coeficientes de Poisson, conforme Equação (3).

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
C_{12} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{44} &= G_{23}, C_{55} = G_{31}, C_{66} = G_{12} \\
\Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}
\end{aligned} \tag{3}$$

Onde:

- ν_{ij} Coeficiente de Poisson na direção do eixo i em relação ao eixo j
- E_i Módulo de elasticidade com relação ao eixo i
- G_{ij} Módulo de cisalhamento na direção do eixo i em relação ao eixo j
- Δ Constante auxiliar de cálculo

Em que, com base na afirmativa de Mendonça (2019), as constantes de engenharia presentes na Equação (3) devem obedecer aos critérios:

$$\begin{aligned}
E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{31} &> 0 \\
1 - \nu_{12}\nu_{21}, 1 - \nu_{13}\nu_{31}, 1 - \nu_{23}\nu_{31} &> 0 \\
1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} &> 0
\end{aligned}$$

Em casos particulares, para materiais transversalmente isotrópicos no plano 2-3, 1-3 e 1-2, as relações presentes na Equação (3) são simplificadas. Tanto estes casos quanto a demonstração da Equação (3) podem ser consultados em Reddy (2003) e Mendonça (2019).

1.2.2. Lei de Hooke em Materiais Ortotrópicos

Considera-se a aplicação da Lei de Hooke para um material ortotrópico submetido a um estado plano de tensões. Sendo assim, referindo-se as relações constitutivas da estrutura, é considerado que a placa possui espessura constante h , bem como as espessuras de suas lâminas também constantes. Ademais, cada lâmina obedece às relações de estado plano de tensões, sendo tensões como σ_{33} muito menor que as demais, podendo então serem consideradas nulas. Ressalta-se que o contato entre lâminas não é considerado na matriz constitutiva da estrutura, visto que,

é considerado que o material de ligação entre lâminas possui apenas a funcionalidade de mantê-las unidas, sem função estrutural, além de ter espessura infinitesimal.

Com isso, sabendo-se que as lâminas possuem orientações em suas fibras com angulação θ em relação ao eixo das abscissas, é dado que seu comportamento seja de material ortotrópico. Desta forma, sendo k lâminas presentes na placa e de acordo com Mendonça (2019), para uma lâmina ortotrópica sob estado plano de tensões, a matriz de flexibilidade pode ser invertida ocasionando na relação tensão-deformação, os parâmetros de rigidez são presentes pela Equação (4):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^l \\ \sigma_2^l \\ \tau_{12}^l \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^l \\ \varepsilon_2^l \\ \gamma_{12}^l \end{Bmatrix}^{(k)}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{23}^l \\ \tau_{13}^l \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{23}^l \\ \gamma_{13}^l \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (4)$$

Em que:

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, \quad Q_{12}^{(k)} = \frac{\nu_{12}^{(k)} E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, \quad Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \quad (5)$$

$$Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)}, \quad Q_{44}^{(k)} = G_{23}^{(k)}, \quad Q_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}$$

Onde:

- σ_{ij}^l Tensão normal local perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
- τ_{ij}^l Tensão cisalhante local perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
- ε_{ij}^l Deformação normal local perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
- γ_{ij}^l Deformação cisalhante local perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
- $Q_{ij}^{(k)}$ Parâmetro da matriz de rigidez de cada lâmina com relação aos eixos locais
- $E_1^{(k)}$ Módulo de elasticidade na direção principal de cada lâmina
- $E_2^{(k)}$ Módulo de elasticidade na direção secundária de cada lâmina
- G_{ij}^k Módulo de cisalhamento na direção do eixo i em relação ao eixo j de cada lâmina
- ν_{ij}^k Coeficiente de Poisson na direção do eixo i em relação ao eixo j de cada lâmina

k Número de lâminas

A Equação (4) apresenta as tensões para cada lâmina, considerando o estado de tensões em seus eixos locais. É possível determinar as tensões referentes a cada uma das lâminas considerando apenas os parâmetros de engenharia apresentados pela Equação (5), conforme abordado por Reddy (2003) e por Mendonça (2019).

Considerando a relação tensão-deformação para os eixos globais do sistema, tem-se a influência da orientação das fibras de cada lâmina. Assim, implica-se a matriz de transformação \mathbf{T} no sistema para mudança de coordenadas locais para globais, conforme Equação (6).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (6)$$

Em que:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}^{(k)}$$

Onde:

$\sigma_{ij}^{(k)}$ Tensão normal em relação aos eixos locais para cada lâmina no plano perpendicular ao eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j

$\tau_{ij}^{(k)}$ Tensão cisalhante em relação aos eixos locais para cada lâmina no plano perpendicular ao eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j

θ Orientação das lâminas com relação ao eixo de coordenadas globais da placa

$[T]$ Matriz de transformação

As tensões presentes na Equação (6) são reescritas conforme a Equação (7). Isto é, a Equação (7) apresenta a relação constitutiva e o vetor de tensões representantes para cada lâmina presente na estrutura.

Vale ressaltar que a demonstração da Equação (8), com base na matriz de transformação **T**, é contemplada no Capítulo 4 de Mendonça (2019).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (7)$$

Em que:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{(k)} &= Q_{11}^{(k)} \cos^4 \theta + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22}^{(k)} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 4Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}^{(k)} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} &= Q_{11}^{(k)} \sin^4 \theta + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22}^{(k)} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 2Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}^{(k)} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{44}^{(k)} &= Q_{44}^{(k)} \cos^2 \theta + Q_{55}^{(k)} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45}^{(k)} &= (Q_{55}^{(k)} - Q_{44}^{(k)}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{55}^{(k)} &= Q_{55}^{(k)} \cos^2 \theta + Q_{44}^{(k)} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (8)$$

Onde:

- $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ Parâmetro da matriz de rigidez de cada lâmina com relação aos eixos globais
- $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ Deformação normal em relação aos eixos locais para cada lâmina no plano perpendicular ao eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
- $\gamma_{ij}^{(k)}$ Deformação normal em relação aos eixos locais para cada lâmina no plano perpendicular ao eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j

1.2.3. Relação Deslocamento-Deformação

Considera-se uma placa retangular de comprimento a , largura b e altura h , composta por k lâminas de localização de suas fibras superiores z_i cada, conforme presente na Figura 3. As teorias principais de placas laminadas compósitas são dadas

pela Teoria Clássica de Placas Laminadas (CLPT), Teoria de Primeira Ordem de Cisalhamento de Placas Laminadas (FSPT) e Teoria de Alta Ordem de Cisalhamento de Placas Laminadas (HSPT), conforme apontadas por Reddy (2003). Contudo, novas abordagens quanto as determinações dos deslocamentos são estudadas de forma a considerar novos efeitos no sistema. Com isso, o comportamento mais abordado, além das teorias de placas, corresponde as de von Karman, que abordam os efeitos de segunda ordem nas deformações geométricas.

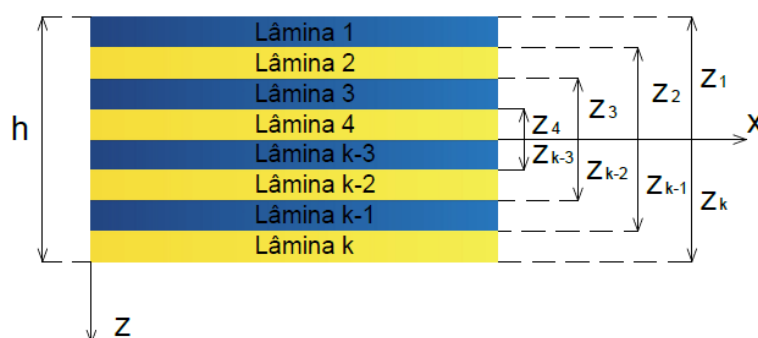


Figura 3 - Placa laminar compósita

Fonte: Adaptado de Reddy (2003)

1.2.3.1. Teoria Clássica de Placas Laminadas – CLPT

A análise mais simples em placas laminadas corresponde a aplicação da Teoria Clássica de Placas, que tem por base a aplicação das hipóteses de Kirchhoff, conforme Mendonça (2019) apresenta: Não há deslizamento entre lâminas; Camada de resina utilizada para colar as lâminas é infinitesimalmente fina, ou seja, muito menor que a espessura de cada lâmina e não deformável; A espessura total da placa deve ser muito menor que as dimensões de seu plano; um plano originalmente reto e perpendicular à superfície permanece reto e perpendicular mesmo após a superfície ser deformada; segmentos normais à superfície são inextensíveis. Esta abordagem pode ser observada a partir de um esquema apresentado na Figura 4.

Considerando que os deslocamentos são pequenos e que o tipo de estrutura analisada corresponde à um laminado, torna-se necessária a implementação dos efeitos de flexão e membrana. Desta forma, os efeitos de deslocamento uniformes ao longo da espessura e as rotações geradas, os três parâmetros de deslocamento para o caso CLPT são dados conforme as Equações (9) à (11).

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (9)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (10)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (11)$$

Onde:

- u Deslocamento na direção do eixo x
- v Deslocamento na direção do eixo y
- w Deslocamento na direção do eixo z
- u_0 Deslocamento do plano médio na direção do eixo x
- v_0 Deslocamento do plano médio na direção do eixo y
- w_0 Deslocamento do plano médio na direção do eixo z

A relação deformação-deslocamento é dada pela Equação (12).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Onde:

- ε_{ij} Deformação normal perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
- $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ Deformação normal de primeira ordem perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
- $\gamma_{ij}^{(0)}$ Deformação cisalhamento de primeira ordem perpendicular ao plano que cruza o eixo i cujo vetor seja paralelo ao eixo j
- $\kappa_{ij}^{(1)}$ Deformação de flexão (curvatura de 1ª ordem)

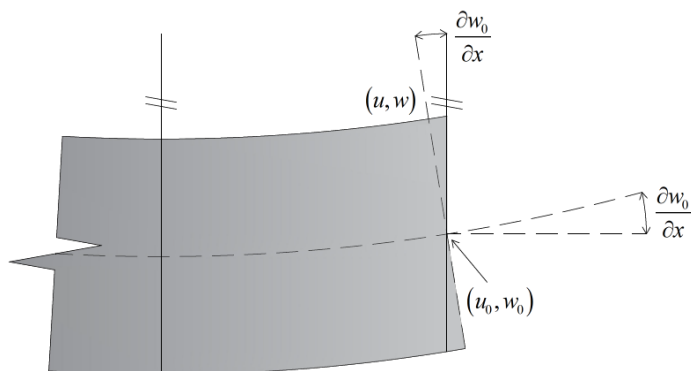


Figura 4 - Comportamento de placas com base na Teoria Clássica

Fonte: Adaptado de Reddy (2003)

1.2.3.2. Teoria de Primeira Ordem do Cisalhamento em Placas Laminadas (FSPT)

As hipóteses de Kirchhoff, apresentadas pela Teoria Clássica de Placas Laminadas, são mantidas para a Teoria de Primeira Ordem do Cisalhamento, a exceção do caso em que as seções perpendiculares ao plano da placa continuam a ser perpendiculares mesmo após a deformação. Ademais, para este caso em específico, considera-se a inclusão do cisalhamento proveniente das solicitações sobre a estrutura, como se observa na Figura 5 e nas Equações (13) à (15).

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \left[-\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right] \quad (13)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \left[-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right] \quad (14)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (15)$$

Onde:

θ_i Rotação em relação ao eixo i

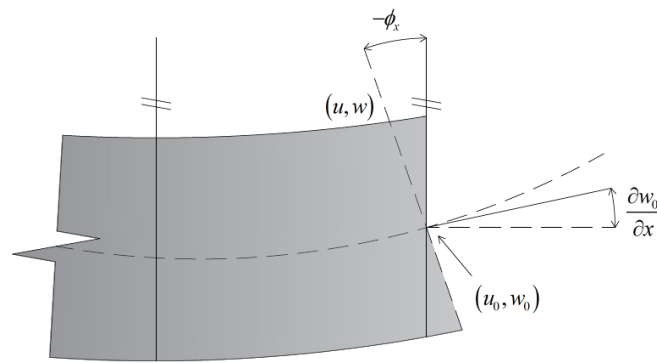


Figura 5 - Comportamento de placas com base na Teoria de Primeira Ordem no Cisalhamento
Fonte: Adaptado de Reddy (2003)

As deformações são igualmente pequenas e com comportamentos não lineares, como presente na Equação (16).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \\ \kappa_{yz}^{(1)} \\ \kappa_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \\ \kappa_{yz}^{(1)} \\ \kappa_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Onde:

ϕ_i Rotação perpendicular ao eixo i

1.2.3.3. Teoria de Terceira Ordem em Placas Laminadas (HSPT)

As teorias apresentadas pelos tópicos 1.2.3.1 e 1.2.3.2 são desenvolvidas com base na teoria de placas (equivalente a uma lâmina única) e adequadas para as necessidades cinemáticas das placas laminadas. As teorias de alta ordem, como a desenvolvida por Reddy (2003), representam melhor o comportamento das placas multilaminadas, apresentando uma melhor distribuição de tensões, deformações e

deslocamento do sistema, sem que haja necessidade de correção do cisalhamento. O esquema referente a uma placa considerando HSPT é observado na Figura 6.

Desta forma, os deslocamentos são escritos com base em um comportamento não linear de terceira ordem, como pode ser contemplado pelas Equações (17) à (19).

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (17)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (18)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (19)$$

Os deslocamentos permanecem pequenos e com comportamento não linear, sendo descrito pela Equação (20).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(3)} \\ \kappa_{yy}^{(3)} \\ \kappa_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \kappa_{yz}^{(2)} \\ \kappa_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(3)} \\ \kappa_{yy}^{(3)} \\ \kappa_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = -\frac{4}{3h^2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \kappa_{yz}^{(2)} \\ \kappa_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = -\frac{4}{h^2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \end{Bmatrix}$$

Onde:

h Espessura da placa

$\kappa_{ij}^{(2)}$ Curvatura no cisalhamento

$\kappa_{ij}^{(3)}$ Curvatura de 3° ordem

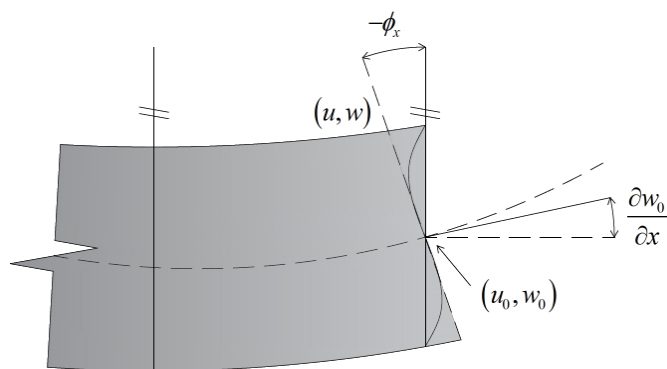


Figura 6 - Comportamento de placas com base na Teoria de Terceira Ordem no Cisalhamento

Fonte: Adaptado de Reddy (2003)

1.2.3.4. Teoria de von Kármán (TvK)

Considerando que uma placa está submetida a uma determinada solitação ao longo do plano, sendo os deslocamentos resultantes pequenos (na ordem de $w_0 < 0,1h$), pode-se desconsiderar o uso da não linearidade geométrica do problema e aplicar as teorias que utilizam os pequenos deslocamentos por base. Entretanto, caso os resultados do problema apontam para valores de $w_0 > 0,1h$, as teorias de grandes deslocamentos devem ser adotadas, sendo válido e necessário a incorporação da teoria de von Kármán (Nishawala, 2011; Reis, 2019; Reis *et al.*, 2022).

Tal teoria em questão é formulada por base da teoria clássica das placas, considerando a sua superfície média. Todavia, a relação deformação-deslocamento apresenta a particularidade desta teoria, contando com o efeito de membrana, como abordam Nishawala (2011) e Reis (2019).

A demonstração da teoria de von Karman consta em Reis (2019), não havendo necessidade de repeti-la neste trabalho. Para o presente momento, apenas a apresentação das equações de deslocamento e deformação tornam-se suficientes.

No caso dos deslocamentos, são os mesmos apresentados pela Teoria Clássica de Placas. Para as deformações, é acrescentada a parcela de segunda ordem proveniente do efeito de membrana, conforme presente pela Equação (21).

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{matrix} \right\} + z \left\{ \begin{matrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{matrix} \right\} \quad (21)$$

1.2.3.5. Teoria de Terceira Ordem em Placas Laminadas com Deformação Finita (HSPT - FD)

Esta teoria foi apresentada por Amabili (2018a), Amabili (2018b) e Amabili (2020), consiste no uso das expressões de deslocamentos desenvolvidas por Reddy (2003), conforme observa-se nas Equações (17) à (19), atreladas com a aplicação do tensor de deformações de Green-St.Venant. As demonstrações das equações de deformação estão presentes em Amabili (2018), sendo apenas necessário apresentá-las neste presente trabalho, conforme Equação (20) e com as particularidades presentes pela Equação (22).

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \kappa_{xx}^{(3)} \\ \kappa_{yy}^{(3)} \\ \kappa_{xy}^{(3)} \end{matrix} \right\} = - \frac{4}{3h^2} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{matrix} \right\} \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \frac{\partial v_0}{\partial y} + \theta_x \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \frac{\partial v_0}{\partial x} + \theta_x \frac{\partial u_0}{\partial x} \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \kappa_{yz}^{(2)} \\ \kappa_{xz}^{(2)} \end{matrix} \right\} = - \frac{4}{h^2} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \end{matrix} \right\}$$

Finalmente, com base em todas as expressões de deslocamentos e deformações apresentadas entre as Equações (9) à (22), torna-se mais fácil e prático reescrevê-las genericamente, de forma que abrangem as teorias supracitadas. Em termos de deslocamentos, as teorias podem ser escritas conforme Equações (23) à (25), de acordo com o apresentado por Akavci (2005), Kazanci e Mecitoglu (2006) e Amabili et al. (2020).

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \left[\alpha_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \alpha_2 \theta_x + \alpha_3 z^2 \left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \quad (23)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \left[\alpha_1 \frac{\partial w_0}{\partial y} + \alpha_2 \theta_y + \alpha_3 z^2 \left(\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] \quad (24)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (25)$$

Onde:

α_i Parâmetro auxiliar de cálculo

As deformações associadas com os deslocamentos apresentados pelas Equações (23) à (25) correspondem a relações não lineares de deformações-deslocamentos, apreciadas pelas Equações (26) e (27).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} + \kappa_{xx}^{(2)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} + \kappa_{yy}^{(2)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} + \kappa_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(3)} \\ \kappa_{yy}^{(3)} \\ \kappa_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Onde:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \alpha_4 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \alpha_5 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \alpha_4 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \alpha_5 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \alpha_5 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \alpha_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \alpha_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \alpha_2 \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 2\alpha_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \alpha_2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(2)} \\ \kappa_{yy}^{(2)} \\ \kappa_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(3)} \\ \kappa_{yy}^{(3)} \\ \kappa_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = \alpha_3 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \alpha_2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right) + \alpha_5 \left(\theta_y \frac{\partial v_0}{\partial y} + \theta_x \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) + \alpha_5 \left(\theta_y \frac{\partial v_0}{\partial x} + \theta_x \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} \kappa_{yz}^{(2)} \\ \kappa_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} &= 3\alpha_3 \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Os parâmetros α_i são escritos conforme a teoria aplicada, conforme Tabela 1.

Tabela 1 - Coeficientes α_i das equações de deslocamento

Teoria	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
CLPT	-1	0	0	0	0
FSPT	0	1	0	1	0
HSPT	0	1	$-\frac{4}{3h^2}$	1	0
TvK	-1	0	0	1	0
HSPT - DF	0	1	$-\frac{4}{3h^2}$	1	1

1.2.4. Equações Governantes

As equações governantes de movimento e cinemática podem ser determinadas com base no equilíbrio do sistema através do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff com o tensor de Cauchy ou com base no Princípio da Energia Potencial Total Mínima. O primeiro deste é apresentado e demonstrado em detalhes por Amabili (2020), enquanto o segundo caso é bem exposto por Reddy (2003). Para este trabalho, optou-se pelo uso do método da Energia Potencial Total Mínima. Tal energia

pode contemplar ainda o estado da energia de amortecimento do sistema, conforme Amabili et al. (2020). Desta forma, a expressão é apresentada pela Equação (28).

$$\delta \int_{t_i}^{t_2} (U - K + W + R) dt = 0 \quad (28)$$

Onde:

- U Energia de deformação da estrutura
- K Energia cinética da estrutura
- W Trabalho externo aplicado na estrutura
- R Amortecimento característico da estrutura
- t Tempo
- t_i Intervalo de tempo

Em que as energias presentes na estrutura podem ser descritas conforme as Equações (29) à (31), conforme presentes em Reddy (2003) e Amabili et al. (2020):

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_A \int_z (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dA \quad (29)$$

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_A \int_z \rho_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz dA \quad (30)$$

$$\delta W = \int_A q_0 \delta w_0 dA \quad (31)$$

$$\delta R = \frac{1}{2} c \int_A (\delta u_0^2 + \delta v_0^2 + \delta w_0^2) dA \quad (32)$$

Em que o coeficiente de amortecimento do sistema pode ser escrito:

$$\zeta_{m,n} = \frac{c_{m,n}}{2M_{str} \omega_{m,n}} \quad (33)$$

Onde:

- A Área da superfície aplicada
- ρ_0 Massa específica da lâmina analisada
- q_0 Carregamento na estrutura
- $c_{m,n}$ Coeficiente de amortecimento (c)
- $\zeta_{m,n}$ Razão adimensional de amortecimento
- M_{str} Massa total da estrutura
- $\omega_{m,n}$ Frequência natural da estrutura

Aplicando as Equações (29) à (32) na Equação (28) e manipulando matematicamente as expressões, obtém-se a Equação (34). Os parâmetros presentes na Equação (34) podem ser contemplados de acordo com as Equações (35) à (38). Ressalta-se que a demonstração da Equação (34) encontra-se no **ANEXO A**.

Importante salientar que as Equações (35) e (36) são referentes aos esforços e momentos gerados na estrutura, Equação (37) apresenta as matrizes de rigidezes referente a cada parcela de deformação e a Equação (38) apresenta os momentos de massa gerados pela dinâmica do sistema. Ressalta-se que as equações são devidamente demonstradas em Reddy (2003) e Amabili (2019).

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : & \left\{ \begin{aligned} & 2c\dot{u}_0 - N_{xx,x} - N_{xy,y} + I_0\ddot{u}_0 + I_1(\alpha_1\ddot{w}_{0,x} + \alpha_2\ddot{\theta}_x) + 2I_3\alpha_3(\ddot{\theta}_x + \ddot{w}_{0,x}) - \\ & \alpha_5 \left(\begin{aligned} & N_{xx,x}u_{0,x} + N_{xy,x}u_{0,y} + N_{xy,y}u_{0,x} + N_{yy,y}u_{0,y} + \\ & N_{xx}u_{0,xx} + N_{xy}u_{0,xy} + N_{yy}u_{0,yy} + \\ & Q_{xx,x}\theta_x + Q_{xx}\theta_{x,x} + Q_{yy,y}\theta_y + Q_{yy}\theta_{y,y} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} = 0 \\
 \delta v_0 : & \left\{ \begin{aligned} & 2c\dot{v}_0 - N_{yy,y} - N_{xy,x} + I_0\ddot{v}_0 + I_1(\alpha_1\ddot{w}_{0,y} + \alpha_2\ddot{\theta}_y) + 2I_3\alpha_3(\ddot{\theta}_y + \ddot{w}_{0,y}) - \\ & \alpha_5 \left(\begin{aligned} & N_{xx,x}v_{0,x} + N_{xy,x}v_{0,y} + N_{xy,y}v_{0,x} + N_{yy,y}v_{0,y} + \\ & N_{xx}v_{0,xx} + N_{xy}v_{0,xy} + N_{yy}v_{0,yy} + \\ & Q_{xx,x}\theta_y + Q_{xx}\theta_{y,x} + Q_{yy,y}\theta_y + Q_{yy}\theta_{y,y} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} = 0 \\
 \delta w_0 : & \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & 2P(u_{0,x} + v_{0,y} + v_{0,y}u_{0,x} + v_{0,x}u_{0,y} + 1) + 2c\dot{w}_0 - \\ & (2N_{xy}w_{0,xy} + N_{xy,x}w_{0,y} + N_{xy,y}w_{0,x} + I_0\ddot{w}_0) \end{aligned} \right] - \\ & \frac{1}{2}\alpha_1 \left\{ \begin{aligned} & M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} - I_1(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) \\ & -I_2[\alpha_1(\ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) + \alpha_2(\ddot{\theta}_{x,x} + \ddot{\theta}_{y,y})] \end{aligned} \right\} - \frac{1}{2}\alpha_2(Q_{y,y} + Q_{x,x}) + \\ & \frac{1}{2}\alpha_3 \left[\begin{aligned} & (P_{xx,xx} - 3R_{x,x} - 3R_{y,y} + 2P_{xy,xy} + P_{yy,yy}) - I_3(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) \\ & -I_4(2\alpha_1(\ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) + (\alpha_1 + \alpha_2)\ddot{\theta}_{x,x} + (\alpha_1 + \alpha_2)\ddot{\theta}_{y,y}) \\ & -I_6\alpha_3(\ddot{\theta}_{x,x} + \ddot{\theta}_{y,y} + \ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) \end{aligned} \right] - \\ & \frac{1}{2}\alpha_4(N_{xx,x}w_{0,x} + N_{yy,y}w_{0,y} + N_{xx}w_{0,xx} + N_{yy}w_{0,yy}) - \\ & \alpha_6(2N_{xy}w_{0,xy} + N_{xy,x}w_{0,y} + N_{xy,y}w_{0,x}) = 0 \end{aligned} \right. \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\delta\theta_x : \begin{cases} \alpha_2 \left[\begin{array}{c} 2I_1\ddot{u}_0 - M_{xy,y} - M_{xx,x} + Q_x \\ + I_2(\alpha_1\ddot{w}_{0,x} + \alpha_2\ddot{\theta}_x) \end{array} \right] + \alpha_3 \left[\begin{array}{c} 2I_3\ddot{u}_0 - P_{xy,y} - P_{xx,x} + 3R_x + \\ + I_6\alpha_3(\ddot{w}_{0,x} + \ddot{\theta}_x) + \\ I_4(2\alpha_2\ddot{\theta}_x + \alpha_1\ddot{w}_{0,x} + \alpha_2\ddot{w}_{0,x}) \end{array} \right] + \\ \alpha_5(Q_{xx}u_{0,x} + Q_{yy}u_{0,y}) = 0 \end{cases}$$

$$\delta\theta_y : \begin{cases} \alpha_2 \left[\begin{array}{c} 2I_1\ddot{v}_0 - M_{yy,y} - M_{xy,x} + Q_y \\ + I_2(\alpha_1\ddot{w}_{0,y} + \alpha_2\ddot{\theta}_y) \end{array} \right] + \alpha_3 \left[\begin{array}{c} 2I_3\ddot{v}_0 - P_{yy,y} - P_{xy,x} + 3R_y + \\ + I_6\alpha_3(\ddot{w}_{0,y} + \ddot{\theta}_y) + \\ I_4(2\alpha_2\ddot{\theta}_y + \alpha_1\ddot{w}_{0,y} + \alpha_2\ddot{w}_{0,y}) \end{array} \right] + \\ \alpha_5(Q_{xx}v_{0,x} + Q_{yy}v_{0,y}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} N_{xx} & M_{xx} & P_{xx} \\ N_{yy} & M_{yy} & P_{yy} \\ N_{xy} & M_{xy} & P_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^k \int_{z_{k+1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{bmatrix}^T dz$$

(35)

$$\begin{bmatrix} Q_y & R_y \\ Q_x & R_x \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^k \int_{z_{k+1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix}^T dz$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(3)} \\ \kappa_{yy}^{(3)} \\ \kappa_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(3)} \\ \kappa_{yy}^{(3)} \\ \kappa_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{yy}^{(1)} \\ \kappa_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}^{(3)} \\ \kappa_{yy}^{(3)} \\ \kappa_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix}$$

(36)

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{yz}^{(2)} \\ \kappa_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{yz}^{(2)} \\ \kappa_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]^{(k)} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, (i, j = 1, 2, 6)$$

(37)

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^{N_k} \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]^{(k)} (1, z^2, z^4) dz, (i, j = 4, 5)$$

$$I_i = \sum_{k=1}^k \int_z \rho_0 z^i dz$$

(38)

Onde:

N_{ij}	Força normal da estrutura no plano perpendicular ao eixo i na direção do eixo j
M_{ij}	Momento fletor da estrutura no plano perpendicular ao eixo j na direção do eixo i
P_{ij}	Esforço de ordem superior (z^3) presente na estrutura, perpendicular ao eixo j na direção do eixo i
R_i	Esforço de ordem superior da estrutura em relação ao eixo transversal ao eixo i
Q_i	Esforço transversal da estrutura em relação ao eixo i
I_i	Momento de inércia da massa
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$	Parâmetros das matrizes de rigidezes de ordem superior (dependentes da espessura da lâmina)

1.2.5. Soluções adotadas

1.2.5.1. Simplesmente Apoiado

Com base nas equações de movimento desenvolvidas a partir do tipo de teoria aplicada para com a placa e a consideração da aplicação da expressão de Hamilton, conforme Equação (28), agora é avaliado o conjunto de condições de contorno considerados na estrutura, para este caso correspondente à simplesmente apoiada, e a melhor forma de solução, seja ela exata ou aproximada.

Baseando-se em Reddy (2003), o autor apresentou o processo para os casos de placas *cross-ply*, classificadas como SS1 e *angle-ply*, dadas por SS2.

Ressalta-se que o processo de cálculo para ambos os casos é o mesmo, a única diferença dá-se pelas equações dos deslocamentos/rotações aplicadas, sendo a Equação (39) representa o caso SS1 e a Equação (40) o caso SS2.

$$\begin{aligned}
u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} U_{mn}(t) \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \\
v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} V_{mn}(t) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \\
w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} W_{mn}(t) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right)
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\phi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} X_{mn}(t) \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \\
\phi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \\
u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} U_{mn}(t) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \\
v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} V_{mn}(t) \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \\
w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} W_{mn}(t) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right)
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
\phi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} X_{mn}(t) \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \\
\phi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right)
\end{aligned}$$

Onde:

$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn},$ X_{mn}, Y_{mn}	Coeficientes referentes à série de Fourier para estrutura de placa
m, n	Parâmetros de somatório em relação aos eixos i e j , respectivamente
a	Comprimento da placa na direção do eixo x
b	Comprimento da placa na direção do eixo y

É importante ressaltar que as Equações (39) e (40) são aplicadas para os casos de CLPT, FSPT, HSPT e HSPT-DF. Para o caso de placas utilizando a teoria padrão de von Kármán (TvK), Kazanci e Mecitoglu (2008) aborda que a função de aproximação pode ser determinada considerando os resultados estáticos para análises de altas deformações em placas laminadas compósitas. Com isso, sabendo que a teoria de von Karman, conforme apresentado pelo tópico 1.2.3.4, não apresenta parâmetro de rotação, logo as expressões de deslocamentos são contempladas pela Equação (41).

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= U_{11}(t) y^2 (y-b)^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \\
 v_0(x, y, t) &= V_{11}(t) x^2 (x-a)^2 \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \\
 w_0(x, y, t) &= W_{11}(t) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)
 \end{aligned} \tag{41}$$

A aplicação das Equações (39) à (41) nas teorias que lhes são devidas pode criar um conjunto de equações governantes não lineares, tornando-se inviável a solução isolando-se as expressões trigonométricas. É altamente aconselhável e amplamente usado na literatura a solução pelo método de Galerkin. Tal método é demonstrado por Mendonça (2019) e utilizado na solução de trabalhos, como Kazanci (2009) e Kazanci e Mecitoglu (2008) por exemplo. A aplicação do método de Galerkin nas expressões governantes, Equação (34), é apresentada no **ANEXO B**.

Com a aplicação do método de Galerkin, encontram-se as equações em função dos parâmetros das séries de Fourier, isto é, $U_{mn}(t)$, $V_{mn}(t)$, $W_{mn}(t)$, $X_{mn}(t)$ e $Y_{mn}(t)$. Tais equações de deslocamento e rotação, conforme o tipo de placa a ser considerada e o tipo de análise a ser estudada, podem apresentar-se como altamente não lineares. Desta forma, a expressão geral é dada em função dos parâmetros referentes à série de Fourier, conforme Equação (42):

$$\begin{aligned}
 [M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + ([K] + N_2(\Delta) + N_3(\Delta, \Delta))\{\Delta\} &= \{F\} \\
 \{\Delta\} &= \{U_{mn}(t) \quad V_{mn}(t) \quad W_{mn}(t) \quad X_{mn}(t) \quad Y_{mn}(t)\}^T
 \end{aligned} \tag{42}$$

Onde:

$[M]$ Matriz de massa

$[C]$ Matriz de amortecimento

$[K]$ Matriz de rigidez

$[N_2]$ Matriz de parâmetros não lineares quadráticos

$[N_3]$ Matriz de parâmetros não lineares cúbicos

$\{F\}$ Vetor de forças

$\{\Delta\}$ Vetor de parâmetros de deslocamentos/rotações da série de Fourier

Considerando uma análise estática, a parcela da aceleração e velocidade não existem, a Equação (42) continua apresentando-se altamente não linear, porém com um grau de dificuldade menor, sendo ainda facilmente resolvida com um *software* algébrico, conforme presente na Equação (43).

$$([K] + N_2(\Delta) + N_3(\Delta, \Delta))\{\Delta\} = \{F\} \quad (43)$$

Desta forma, é possível determinar o valor numérico dos parâmetros constantes de deslocamento, conforme presentes nas Equações (39) e (40), a depender do tipo de placa, *cross ply* ou *angle ply*.

Com base na Equação (42), confere-se que corresponde a uma equação diferencial ordinária de alta não linearidade. Contudo, vale ressaltar que as parcelas de não linearidade presentes na referida equação são nulas quando considerados os casos de CLPT, FSPT e HSPT, com base em Reddy (2003). Isso ocorre porque estas três teorias abrangem o caso de pequenos deslocamentos. Para outros casos, como a teoria de von Kàrman e HSPT-FD, tais as parcelas não lineares são mantidas na equação. Desta forma, métodos numéricos tornam-se necessários e são os procedimentos ideais para determinar o vetor de valores dos parâmetros das séries de Fourier. Para este trabalho, decidiu-se utilizar o método de Runge-Kutta, adotado por Feldgun et al. (2016), Reis (2017), Reis et al. (2019) e Reis et al. (2022), como meio para a solução, visto que procedimento é amplamente conhecido e, tão importante quanto, há funções prontas para utilização deste em *softwares* algébricos.

Na adoção do método de Runge-Kutta, em *softwares* algébricos, como é o caso do Matlab, torna-se necessário desmembrar as equações diferenciais de alta ordem em diversas equações de primeira ordem, tantas quantas conforme a ordem da equação diferencial original e do número de variáveis em função do tempo, como é o caso. Com isso, com base na Equação (42), pode-se determinar até 10 equações diferenciais de primeira ordem, ou seja, duas equações para cada parâmetro de Δ , como indica a Equação (44).

$$\begin{aligned} \frac{dA_i}{dt} &= \{\dot{\Delta}_i\} \\ \frac{dH_i}{dt} &= f_i(\beta_1\{\Delta\}, \beta_2\{\Delta^2\}, \beta_3\{\Delta^3\}, \beta_4\{\dot{\Delta}\}, \beta_5\{\ddot{\Delta}\}) \end{aligned} \quad (44)$$

Onde:

- A_i Equação diferencial de 1º grau
 H_i Equação diferencial de 1º grau (parcela isolada do deslocamento)
 f_i Expressão da equação diferencial quando a segunda derivada no tempo do termo de deslocamento correspondente é isolada
 β_i Parâmetro auxiliar de cálculo

A depender do tipo de análise de placa sendo realizada, alguns parâmetros podem ser encontrados nas equações governantes relacionadas. Os parâmetros β_i presentes na Equação (44) existem para algumas análises, conforme Tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros β_i na análise de placas

Teoria	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
CLPT	∃	0	0	∃	0
FSPT	∃	0	0	∃	∃
HSPT	∃	0	0	∃	∃
TvK	∃	∃	0	∃	0
HSPT – FD	∃	∃	∃	∃	∃

1.2.5.2. Engastado

Os procedimentos adotados para o cálculo de deslocamentos referente a uma placa totalmente engastada seguem os mesmos preceitos dos já abordados no tópico 1.2.5.1. A diferença dá-se com relação as equações de deslocamento aplicadas, onde são sugeridas por Kazanci e Mecitoglu (2006), conforme Equação (45). O referido autor ainda ressalta que tais equações são determinadas com base em uma análise estática de grandes deslocamentos.

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} U_{mn}(t) x^{2m} (x-a)^{2m} \left(x - \frac{a}{2}\right)^m \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) \\
 v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} V_{mn}(t) y^{2n} (y-b)^{2n} \left(y - \frac{b}{2}\right)^n \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \\
 w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} W_{mn}(t) \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right)
 \end{aligned} \tag{45}$$

Ressalta-se que a aplicação desta Equação (45) foi utilizada por Kazanci e Mecitoglu (2006) somente para o caso da Teoria de von Karman.

1.3. Vigas Laminadas Compósitas

A constituição de uma viga laminada compósita segue o mesmo princípio das placas laminadas, ou seja, um conjunto de lâminas, cada qual com suas características físico-geométricas, sobrepostas umas às outras, conforme explanado no item 1.1 e de acordo com a Figura 1. Ademais, as definições de *cross ply* e *angle ply* são mantidas, seguindo os mesmos princípios da Figura 2, além da disposição das lâminas, como Figura 3.

Entende-se que as vigas laminadas correspondem a uma versão simplificada das placas (Khdeir, 1996). Desta forma, para o escopo deste trabalho, considera-se que as vigas apresentam seus deslocamentos apenas no plano xz e rotações na direção do eixo y , conforme Figura 7.

1.3.1. Análise Macromecânica de uma Lâmina

A análise macromecânica do material naturalmente é o comportamento de uma dada estrutura macroscopicamente. Este tópico é detalhadamente explanado no item 1.2.1, onde uma estrutura de placa possui as solicitações sendo executadas nas três direções cartesianas. No caso de vigas laminadas, as Equações (1) a (7) são as mesmas, contudo de forma simplificada, visto que a viga em questão apresenta apenas os deslocamentos na direção do eixo z e momentos fletores no plano xz , não havendo qualquer deslocamento na direção do eixo y .

Finalmente, considerando a relação tensão-deformação, a relação é construída inicialmente para cada lâmina. Considerando as propriedades da viga, a Equação (7) pode ser reescrita conforme a Equação (46).

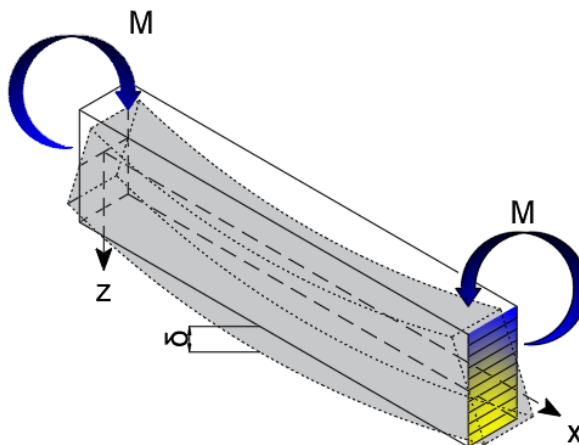


Figura 7 - Viga laminada compósita

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(k)} &= \bar{Q}_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} &= \bar{Q}_{55}^{(k)} \tau_{xz}^{(k)}\end{aligned}\quad (46)$$

Em que \bar{Q}_{11} e \bar{Q}_{55} seguem o processo de cálculo presente na Equação (8).

1.3.2. Relação Deslocamento-Deformação

A metodologia das vigas laminadas segue o mesmo processo das placas laminadas. Contudo, os deslocamentos da viga são desempenhados na direção do eixo z e os momentos gerados são em torno do eixo y . Assim, os deslocamentos podem ser expressos pela Equação (47) à (49), conforme aborda Khdeir (1996).

Naturalmente o comportamento das vigas é formulado com base nas teorias mais conhecidas, tais como a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli, a Teoria de Timoshenko e a Teoria de Alta Ordem no Cisalhamento, como pode se observar em Khdeir e Reddy (1994), que nada mais são do que uma simplificação das teorias das placas, conforme presente nos itens 1.2.3.1 a 1.2.3.3.

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \left[\alpha_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \alpha_2 \theta_x + \alpha_3 z^2 \left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \quad (47)$$

$$v(x, y, z) = 0 \quad (48)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (49)$$

No âmbito da relação deslocamento-deformação, as equações de vigas podem seguir os princípios das apresentadas pelo item 1.2.3, contudo, ressaltando que as deformações relacionadas a y são ignoradas, sendo então presentes ε_{xx} e γ_{xz} , de acordo com Equações (50) e (51).

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \left(\kappa_{xx}^{(1)} + \kappa_{xx}^{(2)} \right) + z^3 \kappa_{xx}^{(3)} \quad (50)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{(0)} + z^2 \gamma_{xz}^{(2)} \quad (51)$$

Onde:

$$\varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \alpha_4 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \alpha_5 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$\kappa_{xx}^{(1)} = \alpha_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \kappa_{xx}^{(2)} = 0, \kappa_{xx}^{(3)} = \alpha_3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$$

$$\gamma_{xz}^{(0)} = \alpha_2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) + \alpha_5 \left(\theta_y \frac{\partial v_0}{\partial x} \right), \kappa_{xz}^{(2)} = 3\alpha_3 \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right)$$

Em que parâmetros α_i são baseados na Tabela 1.

1.3.3. Equações Governantes

As equações governantes são determinadas de acordo com o Princípio da Energia Potencial Total Mínima, conforme apresentado por Reddy (2003) para placas laminadas. A equação governante é dada pela Equação (28), considerando uma constituição das energias de deformação, cinética, trabalho externo e amortecimento da estrutura. Esses parâmetros são apresentados pelas Equações (29) a (32); ao adaptá-las para o caso de vigas laminadas, têm-se as Equações (52) a (55).

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_A \int_z (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dA \quad (52)$$

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_A \int_z \rho_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz dA \quad (53)$$

$$\delta W = \int_A q_0 \delta w_0 dA \quad (54)$$

$$\delta R = \frac{1}{2} c \int_A (\delta u_0^2 + \delta w_0^2) dA \quad (55)$$

Nesse contexto, as Equações (34) e (36) são reescritas como:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : & \begin{cases} 2c\dot{u}_0 - N_{xx,x} + I_0\ddot{u}_0 + I_1(\alpha_1\ddot{w}_{0,x} + \alpha_2\ddot{\theta}_x) + 2I_3\alpha_3(\ddot{\theta}_x + \ddot{w}_{0,x}) \\ -\alpha_5(N_{xx,x}u_{0,x} + N_{xx}u_{0,xx}Q_{xx,x}\theta_x + Q_{xx}\theta_{x,x}) = 0 \end{cases} \\
\delta w_0 : & \begin{cases} 2P(u_{0,x} + 1) + 2c\dot{w}_0 - I_0\ddot{w}_0 - \alpha_4(N_{xx,x}w_{0,x} + N_{xx}w_{0,xx}) + \\ \alpha_3 \left[\begin{array}{l} (P_{xx,xx} - 3R_{x,x}) - I_3(\ddot{u}_{0,x}) - I_6\alpha_3(\ddot{\theta}_{x,x} + \ddot{w}_{0,xx}) - \\ I_4(2\alpha_1(\ddot{w}_{0,xx}) + (\alpha_1 + \alpha_2)\ddot{\theta}_{x,x}) \end{array} \right] - \\ \alpha_1[M_{xx,xx} - I_1\ddot{u}_{0,x} - I_2(\alpha_1\ddot{w}_{0,xx} + \alpha_2\ddot{\theta}_{x,x})] - \alpha_2Q_{x,x} = 0 \end{cases} \\
\delta \theta_x : & \begin{cases} \alpha_2 \left[\begin{array}{l} 2I_1\ddot{u}_0 - M_{xx,x} + Q_x \\ + I_2(\alpha_1\ddot{w}_{0,x} + \alpha_2\ddot{\theta}_x) \end{array} \right] + \alpha_3 \left[\begin{array}{l} 2I_3\ddot{u}_0 - P_{xx,x} + 3R_x + \\ + I_6\alpha_3(\ddot{w}_{0,x} + \ddot{\theta}_x) + \\ I_4(2\alpha_2\ddot{\theta}_x + \alpha_1\ddot{w}_{0,x} + \alpha_2\ddot{w}_{0,x}) \end{array} \right] + \alpha_5Q_{xx}u_{0,x} = 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ P_{xx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{11} & \bar{E}_{11} \\ \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} & \bar{F}_{11} \\ \bar{E}_{11} & \bar{F}_{11} & \bar{H}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{xx}^{(3)} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} Q_x \\ R_x \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{55} & D_{55} \\ D_{55} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \kappa_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{57}$$

Em que as matrizes presentes na Equação (57) são conforme aponta Chandrashekhara e Banger (1992), Obst e Kapania (1992) e Jun et al. (2009):

$$\begin{aligned}
[\bar{M}] &= [M_1] - [M_2] \cdot [M_3]^{-1} \cdot [M_2] \\
[\bar{M}] &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{11} & \bar{E}_{11} \\ \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} & \bar{F}_{11} \\ \bar{E}_{11} & \bar{F}_{11} & \bar{H}_{11} \end{bmatrix}, [M_1] = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & E_{11} \\ B_{11} & D_{11} & F_{11} \\ E_{11} & F_{11} & H_{11} \end{bmatrix}, \\
[M_2] &= \begin{bmatrix} A_{12} & A_{16} & B_{12} & B_{16} & E_{12} & E_{16} \\ B_{12} & B_{16} & D_{12} & D_{16} & F_{12} & F_{16} \\ E_{12} & E_{16} & F_{12} & F_{16} & H_{12} & H_{16} \end{bmatrix}, [M_3] = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{26} & B_{22} & B_{26} & E_{22} & E_{26} \\ A_{26} & A_{66} & B_{26} & B_{66} & E_{26} & E_{66} \\ B_{22} & B_{26} & D_{22} & D_{26} & F_{22} & F_{26} \\ B_{26} & B_{66} & D_{26} & D_{66} & F_{26} & F_{66} \\ E_{22} & E_{26} & F_{22} & F_{26} & H_{22} & H_{26} \\ E_{26} & E_{66} & F_{26} & F_{66} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Onde

$[\bar{M}]$ Matriz auxiliar para a determinação do vetor de esforços N_{xx} , M_{xx} e P_{xx}

$[M_i]$ Matrizes auxiliares para a determinação da matriz $[\bar{M}]$

1.3.4. Soluções Adotadas

Naturalmente, o processo de solução adotado depende da análise das condições de apoio da estrutura de viga. Considera-se assim que há três tipos em destaque: simplesmente apoiado, engastado e apoio livre. Segundo Khdeir (1996), cada um destes apoios possui uma expressão de restrição para cada tipo de teoria aplicada, conforme presente na Tabela 3.

Desta forma, conforme Sayyad et al. (2015a), Sayyad (2015b), Wen (2017) e Sayyad et al. (2019), as considerações de série de Fourier para uma viga simplesmente apoiada obedecem a Equação (58) e considerando ainda que o carregamento distribuído também obedece a uma série trigonométrica de Fourier, conforme Equação (59).

$$\begin{aligned}
 u_0(x,t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} U_m(t) \cos\left(\frac{\pi m}{L} x\right) \\
 w_0(x,t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} W_m(t) \sin\left(\frac{\pi m}{L} x\right)
 \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_x(x,t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} X_m(t) \cos\left(\frac{\pi m}{L} x\right) \\
 q(x,t) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} q_m(t) \sin\left(\frac{\pi m}{L} x\right)
 \end{aligned} \tag{59}$$

Onde:

$$q_m(t) = q_0, \quad \text{para carregamento sinusoidal (m = 1)}$$

$$q_m(t) = \frac{4q_0}{m\pi}, \quad \text{para carregamento uniformemente distribuído (m = 1, 3, 5\dots)}$$

U_m, W_m, X_m Coeficientes referentes à série de Fourier para estrutura de viga

$q_m(t)$ Carregamento variando no tempo considerado na estrutura

L Comprimento longitudinal da viga

Da mesma forma que a metodologia de placas, é aplicado o método de Galerkin utilizando-se as funções de séries de Fourier, de forma que o sistema de equações diferenciais esteja em função de $U_m(t)$, $W_m(t)$ e $X_m(t)$. Desta forma, para este caso em particular, a Equação (42) pode ser reescrita conforme a Equação (60).

Tabela 3 - Condições de contorno de viga laminada

Teoria	Restrições
Teoria Clássica de Vigas Laminadas (CLBT)	$SS : w = N_x = M_x = 0$ $CC : u = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ $F : N_x = M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0$
Teoria de Cisalhamento de Vigas de Primeira Ordem (FSBT)	$SS : w = N_x = M_x = 0$ $CC : u = \theta_x = w = 0$ $F : N_x = M_x = Q_x = 0$
Teoria de Terceira Ordem em Vigas Laminadas (HSBT)	$SS : w = N_x = M_x = P_x = 0$ $CC : u = \theta_x = w = \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$ $F : N_x = M_x = P_x = n_2 \frac{\partial P_x}{\partial x} - n_1 S_x + Q_x = 0$

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + ([K] + N_2(\Delta))\{\Delta\} = \{F\} \quad (60)$$

$$\{\Delta\} = \{U_m(t) \quad W_m(t) \quad X_m(t)\}^T$$

Naturalmente, considerando o caso de carregamento estático, a Equação (60) pode ser reescrita conforme a Equação (61).

$$([K] + N_2(\Delta))\{\Delta\} = \{F\} \quad (61)$$

Para a Equação (60), o processo de resolução adotado por este presente trabalho é o mesmo exposto para placas laminadas, no item 1.2.5.1, utilizando o método de Runge-Kutta. Embora seja uma estrutura com menos graus de liberdade e menos equações comparadas à placa, este método é bem avaliado na literatura por apresentar bons resultados.

2. CARREGAMENTO EXPLOSIVO

2.1. Definição de Explosão

Objetos explosivos ao serem detonados apresentam outros fenômenos tão importantes quanto a geração do fogo. O ato de detonar é caracterizado por uma reação química e que ocorre de forma extremamente rápida, usualmente em velocidade supersônica, chegando entre 6.700 m/s e 8.500 m/s. A detonação rapidamente converte a fonte explosiva em um gás extremamente quente, denso e de alta pressão. Desta forma, afirma-se que a consequência da detonação é o fenômeno da explosão, que corresponde a uma liberação de energia rápida, a partir de uma fonte explosiva e que modifica repentinamente o ambiente. No instante em que são formadas as ondas de choque, estas acarretam a geração de alta pressão, alta temperatura e velocidade supersônica da frente de onda da explosão, variando a pressão do ambiente, e gerando o esmagamento pela sobrepressão (Kinney e Graham, 1985; Department of Defense, 2008; Needham, 2010; Rigby, 2014; Reis, 2019; Reis et al., 2022).

O efeito da explosão, como supracitado, corresponde na onda de choque composta por uma massa densa de gás cujo qual se expande pelo ambiente (no caso, o ar). Após os primeiros instantes da detonação, a onda de choque perde força e velocidade. Tal fenômeno é causado pela divergência esférica, gerada pela reação química já completa. A magnitude da força da explosão é proveniente de algumas características, tais como propriedades explosivas (ou seja, tipo de explosivo), localização do explosivo em relação as estruturas e a interação entre a onda de choque e a resistência do anteparo que a recebe, conforme afirma US Department of Defense (2008).

Ainda de acordo com o US Department of Defense (2008), os materiais explosivos são divididos em sólido, líquido e gasoso. O primeiro corresponde aos mais altos explosivos, de maiores intensidades. Entretanto, em termos de inflamável, os demais apresentam melhores resultados. Explosivos líquidos e gasosos possuem maior versatilidade na fabricação e combinação dos materiais. Tratamento dos materiais, tais como produção, manuseio, armazenamento, aspectos físico-químicos alteram de forma considerável a onda de pressão gerada na detonação.

Finalmente, Department of Defense (2008) argumenta que os efeitos de ondas de choque estão diretamente ligados com o tipo de material de detonação utilizado, naturalmente. Contudo, por convenção, todo e qualquer combustível de detonação é convertido em termos de massa de TNT equivalente, que está diretamente relacionado também com a energia de detonação da fonte explosiva. Para conhecimento, a energia proveniente de 1 TNT corresponde à 4610 Joules/grama, também conhecido como grama padrão TNT. A escolha do TNT como medida padrão para as explosões é dada por ser este um explosivo quimicamente puro e relativamente seguro para calibração (Kinney e Graham, 1985; Reis, 2019).

2.2. Categorias das Ondas de Explosão

Conforme afirma US Department of Defense (2008), o carregamento explosivo se divide em duas grandes categorias, baseadas no grau de confinamento: confinados e não confinados.

Na categoria de explosões não confinadas há três subdivisões. A primeira são as explosões em ar livre, cujas detonações ocorrem ao ar livre, sem interrupções por estruturas ou anteparos, permitindo assim que a massa de gás se desloque como uma esfera livremente (subcategoria 1). Esta subcategoria pode ser contemplada na Figura 8. A segunda corresponde as explosões em ar que, diferentemente da primeira subcategoria, esta atinge um anteparo, impedindo que a propagação da onda de choque prossiga livremente, gerando ainda uma reflexão nas mesmas (subcategoria 2). A terceira e última é referida as ondas explosivas sobre uma superfície. Neste caso, a fonte é detonada no solo / próximo do solo, conseqüentemente choque inicial gerado na detonação é amplificado (subcategoria 3). Nisto, Rigby (2014) afirma que as explosões se dividem em esféricas e hemisféricas. A primeira é caracterizada por uma expansão do gás de forma totalmente esférica, ou seja, a fonte detonadora está no ar. Para a segunda subcategoria apresenta-se quando a fonte detonadora se encontra sobre / perto do solo, gerando uma expansão do gás em formato semiesférico.

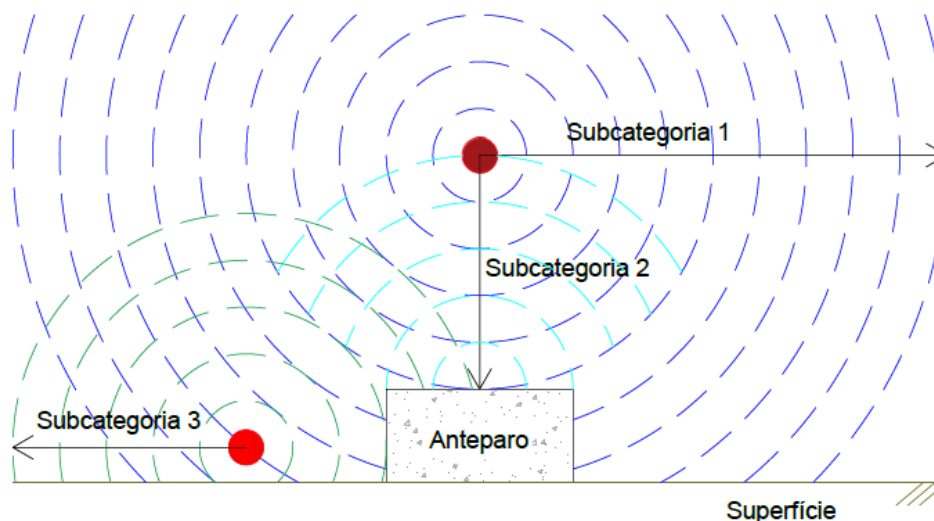


Figura 8 - Explosão ao ar livre

Fonte: Adaptado de US Department of Defense (2008)

No caso da categoria de explosões confinadas, também se apresentam três subcategorias. A primeira corresponde a explosão totalmente ventilada (subcategoria 4), caracterizada quando a fonte de detonação está presente em uma ou mais faces é aberta a atmosfera. A segunda é o parcialmente confinado, onde o explosivo encontra-se em um ambiente (estrutura cúbica fechada, usualmente) e que os anteparos possuem aberturas de tamanho limitado que permitem acesso à atmosfera externa (subcategoria 5). Essas aberturas podem ser totalmente vazadas ou protegidas por um material frágil. De forma a exemplificar a questão, pode-se entender que tais aberturas podem ser portas ou janelas, com ou sem o material de vedação. Finalmente, a terceira subcategoria é contemplada por um ambiente totalmente confinado (subcategoria 6). Sem muita dificuldade, tal ambiente caracteriza-se por ser uma estrutura cúbica fechada sem nenhuma abertura para o exterior, ou então que tal abertura seja tão resistente quanto o anteparo. Nesse caso, as explosões costumam durar mais tempo por causa dos diversos anteparos presentes que geram as reflexões das ondas de choque. As divisões dessas categorias e suas respectivas subcategorias podem ser contempladas na Figura 9.

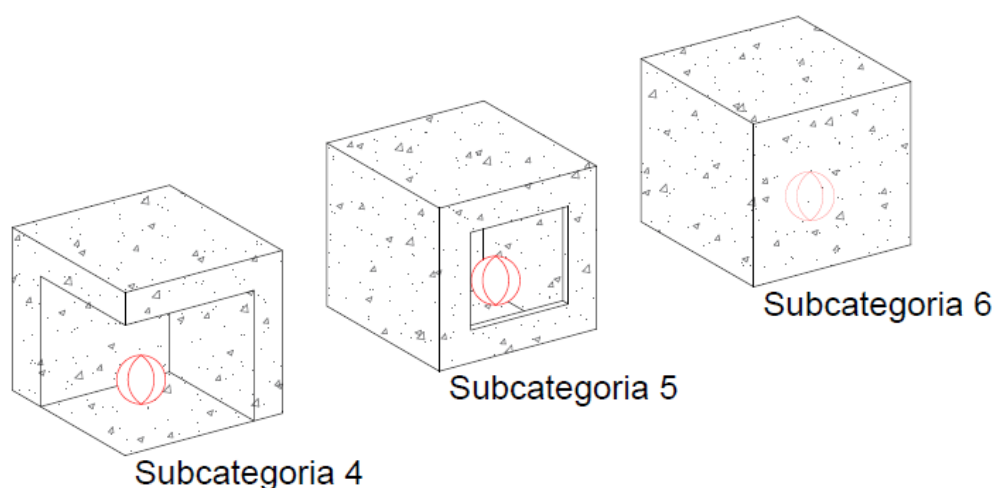


Figura 9 - Confinamento de explosões

Fonte: Adaptado de US Department of Defense (2008)

2.3. Fenômenos das Ondas Explosivas

O processo de liberação da energia gera uma formação de onda de explosão, caracterizada por alta pressão e temperatura. A frente de onda é associada ao gás de mais alta pressão, propagando-se na atmosfera que a circunda. Esta frente de onda é chamada por pico de pressão incidente ou sobrepressão incidente, p_{so} .

A sobrepressão, à medida que se expande, perde força e velocidade, ocasionando um decaimento até atingir o valor da atmosfera ambiente. Observa-se neste caso que a frente de onda possui uma variação de velocidade, isto é, diminuição da aceleração e percorrendo uma determinada distância até chegar à pressão ambiente. Desta forma, considera-se que este ocorrido levou um tempo t_d . Tal tempo é conhecido como duração da fase positiva, visto que as frentes de onda de choque, em um primeiro momento, são caracterizadas por estarem a uma pressão acima da pressão atmosférica local. Este decaimento da frente de onda juntamente com a duração da fase positiva geram o impulso i^+_{so} (Reis, 2019; Reis *et al.*, 2022).

Após atingir a pressão ambiente do local, a frente de onda continua a decair a uma pressão menor que a ambiente, até atingir o pico de subpressão, p^-_{so} . Posteriormente, a pressão retorna a subir até atingir novamente a atmosfera ambiente. Esta etapa é chamada de fase negativa, pois a frente de onda possui pressão menor que a ambiente e possui uma duração t_d usualmente maior que a fase

positiva. Da mesma forma que a fase positiva, a fase negativa é caracterizada por uma variação de pressão ao longo do seu tempo de duração, gerando assim um impulso, conhecido por i_{so} (Kinney e Graham, 1985; Department of Defense, 2008; Needham, 2010; Reis, 2019; Reis *et al.*, 2022).

Os parâmetros supracitados relacionados ao comportamento das ondas de choque são característicos de frentes de onda incidentes em uma dada superfície. Quando tal onda entra em contato com o anteparo, ela é refletida, apresentando uma pressão de reflexão consideravelmente maior que a incidente. Desta forma, todos os parâmetros de pressão, tempo e impulso são recalculados para parâmetros de reflexão, que são usados para a concepção dos projetos estruturais. Assim, as características da fase positiva são de sobre pressão refletida p_{max} , tempo de duração t_d e impulso da fase positiva i_d . A fase negativa não difere muito, sendo representada pela subpressão refletida p_{min} , período da fase negativa t_d e impulso da fase negativa, i_d . Todos estes parâmetros podem ser observados na Figura 10.

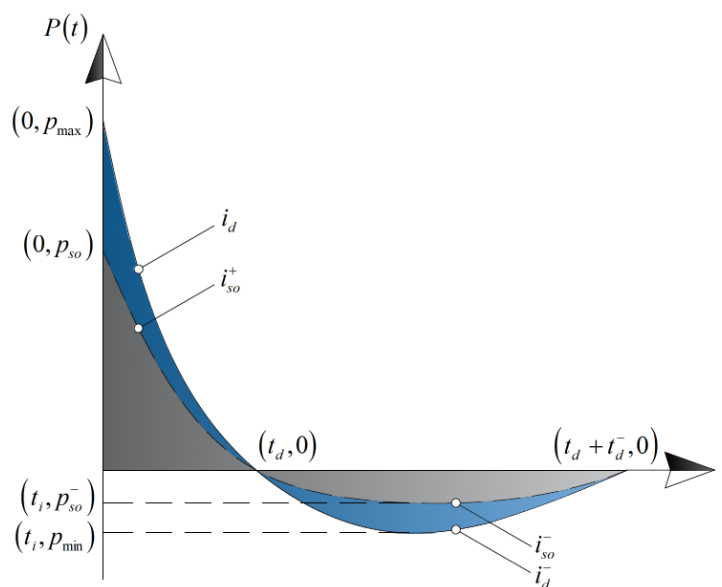


Figura 10 - Relação das pressões de incidência e reflexão

Fonte: Adaptado de Rigby (2014)

É de suma importância ressaltar que as frentes de ondas refletidas por um anteparo são consideradas, para este trabalho em específico, ondas que incidem em um ângulo de 90° , conforme apresenta Figura 11. Naturalmente, há outros tipos de reflexões das ondas de choque que podem ser contempladas em Kinney e Graham (1985), porém não são o escopo deste trabalho.

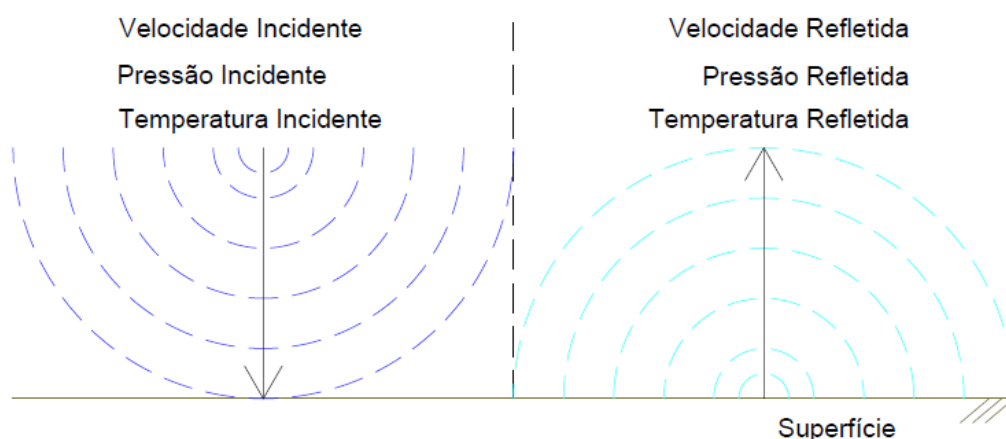


Figura 11 - Comportamento da reflexão de onda normal à superfície

Fonte: Adaptado de Reis (2019)

Demais caracterizações teóricas sobre ondas de choque refletidas podem ser encontradas em Kinney e Graham (1985) e Reis (2019). Ademais, vale ressaltar que, para este trabalho, para o cálculo do comportamento de estruturas laminadas, somente são consideradas frentes de onda refletidas no anteparo em questão e que não sofreram processo de reflexão precedente. Considera-se ainda que a frente de onda corresponde a um carregamento uniformemente distribuído no plano da placa e que sua intensidade varia com o tempo, como também US Department of Defense (2008) adota em um caso específico de análise, de acordo com o seu item 2-13.2.

2.4. Parâmetros de Ondas de Reflexão

Os parâmetros necessários para completa caracterização das curvas de pressão refletida nas fases positiva e negativa são os valores máximos de pressão (p_{max} , p_{min}), os tempos de duração (t_d e t_d^-) e os impulsos (i_d e i_d^-). Tais valores de parâmetros de reflexão dependem do tipo de explosão (esférica ou hemisférica), da quantidade de massa do explosivo equivalente em TNT (W_{TNT}) e da distância R_{TNT} ao anteparo. Com isso, foi desenvolvida uma relação entre a massa de TNT e a distância R_{TNT} gerando a distância escalada de Hopkinson, Z, conforme Equação (62).

$$Z = \frac{R_{TNT}}{W_{TNT}^{1/3}} \quad (62)$$

Onde:

- W_{TNT} Massa de explosivo
- R_{TNT} Distância do explosivo ao anteparo
- Z Distância escalada de Hopkinson

Considerando que todos os parâmetros característicos são relacionados à frente de onda refletida no anteparo desejado, US Department of Defense (2008) apresentou em seu relatório dois ábacos que correlacionam tais parâmetros com a distância escalar Z . Tais ábacos são separados entre o tipo de explosão, esférica e hemisférica, que podem ser observados na Figura 12 e Figura 13.

As Equações (63) à (67) apresentam as expressões obtidas para os parâmetros da explosão hemisférica, referente ao ábaco da Figura 13, enquanto as Equações (68) à (72) apresentam os parâmetros da explosão esférica, Figura 12. Do primeiro conjunto, as Equações (66) e (67) são referentes à pressão mínima e ao impulso negativo, propostas por Rigby et al. (2013). As demais foram elaboradas por Reis (2019), sendo que em todas as equações apresentadas, o coeficiente de regressão linear obtido foi superior a 0.99, indicando uma boa qualidade da linha de tendência nas equações geradas.

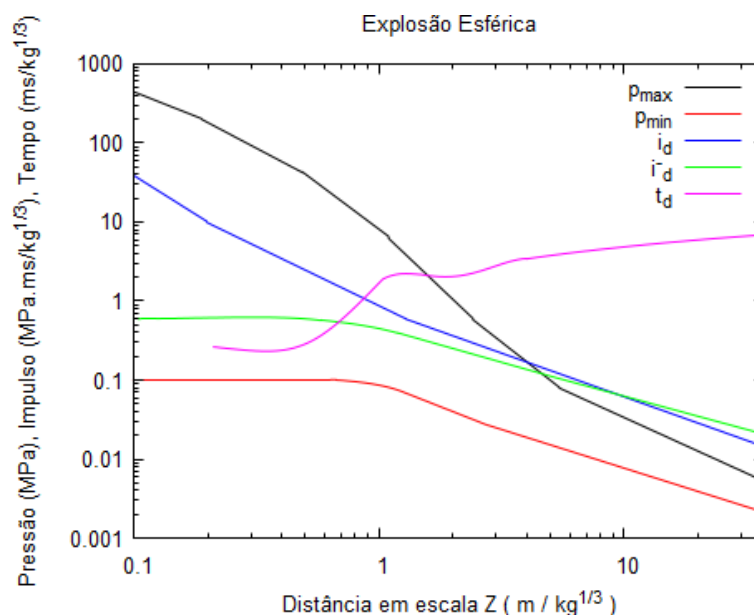


Figura 12 - Parâmetros da carga explosiva esférica

Fonte: Reis (2019)

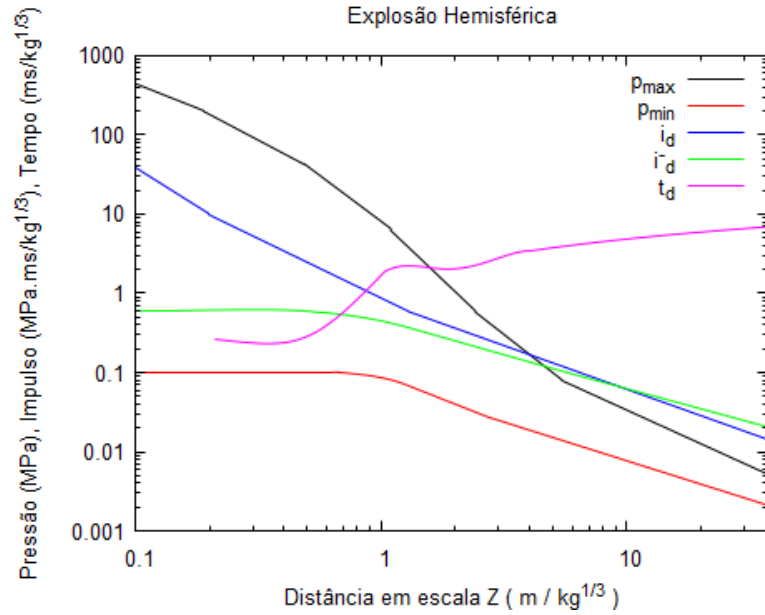


Figura 13 - Parâmetros da carga explosiva hemisférica

Fonte: Reis (2019)

$$p_{\max}(Z) = \begin{cases} 26.303Z^{-1.226} & , 0.07071 < Z \leq 0.1895 \\ 13.015Z^{-1.637} & , 0.1895 < Z \leq 0.48735 \\ 8.1Z^{-2.322} & , 0.48735 < Z \leq 1.096 \\ 8.0956Z^{-2.943} & , 1.096 < Z \leq 2.418 \\ 4.9419Z^{-2.427} & , 2.418 < Z \leq 5.442 \\ 0.8645Z^{-1.411} & , 5.442 < Z \end{cases} \quad (MPa) \quad (63)$$

$$t_d(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} \begin{pmatrix} 2.2064Z^3 - 0.3363Z^2 \\ -0.5644Z + 0.3756 \end{pmatrix} & , 0.20993 < Z \leq 1.0355 \\ \begin{pmatrix} 8.2395Z^3 - 34.896Z^2 \\ +48.909Z - 20.496 \end{pmatrix} & , 1.0355 < Z \leq 1.49339 \\ \begin{pmatrix} -0.2695Z^3 + 2.3907Z^2 \\ -6.1005Z + 6.8329 \end{pmatrix} & , 1.49339 < Z \leq 4.001 \\ 1.5602 \log(Z) + 1.2416 & , Z > 4.001 \end{cases} \quad \left(\frac{ms}{kg^{1/3}} \right) \quad (64)$$

$$i_d(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} 0.4352Z^{-1.949} & , 0.0717 < Z \leq 0.1985 \\ 0.8709Z^{-1.501} & , 0.1985 < Z \leq 1.2895 \\ 0.7805Z^{-1.104} & , Z > 1.2895 \end{cases} \quad \left(MPa \frac{ms}{kg^{1/3}} \right) \quad (65)$$

$$p_{\min}(Z) = \begin{cases} 101 & , 0.071 < Z \leq 0.668 \\ -32.9Z^2 + 13Z + 106 & , 0.668 < Z \leq 1.27 \\ 93Z^{-1.22} & , 1.27 < Z \leq 2.78 \\ 73Z^{-0.978} & , 2.78 < Z \leq 37.6 \end{cases} \quad (kPa) \quad (66)$$

$$i_d^-(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} -724Z^2 + 445Z + 553 & , 0.071 < Z \leq 0.580 \\ 11.4Z^2 - 315Z + 752 & , 0.580 < Z \leq 1.19 \\ 462Z^{-0.88} & , 1.19 < Z \leq 5.25 \\ 434Z^{-0.848} & , 5.25 < Z \leq 37.6 \end{cases} \quad (kPa.ms) \quad (67)$$

$$p_{\max}(Z) = \begin{cases} 24.974Z^{-1.154} & , 0.07457 < Z \leq 0.22794 \\ 7.6735Z^{-1.951} & , 0.22794 < Z \leq 0.62306 \\ 4.8029Z^{-2.885} & , 0.62306 < Z \leq 3.0697 \\ 1.9941Z^{-2.054} & , 3.0697 < Z \leq 6.06257 \\ 0.6288Z^{-1.436} & , 0.62306 < Z \end{cases} \quad (MPa) \quad (68)$$

$$t_d(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} \left(\begin{array}{l} -4.2668Z^3 - 1.9736Z^2 \\ + 0.132Z + 0.2145 \end{array} \right) & , 0.2210 < Z \leq 0.7790 \\ \left(\begin{array}{l} 7.5882Z^3 - 29.13Z^2 \\ + 36.646Z - 13.319 \end{array} \right) & , 0.7790 < Z \leq 1.5069 \\ \left(\begin{array}{l} -0.205Z^3 + 1.5627Z^2 \\ - 3.1864Z + 3.6534 \end{array} \right) & , 1.50769 < Z \leq 3.7612 \\ -0.0029Z^2 + 0.2159Z + 2.1382 & , 3.7612 < Z \end{cases} \quad \left(\frac{ms}{kg^{1/3}} \right) \quad (69)$$

$$i_d(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} 0.3108Z^{-1.876} & , 0.07073 < Z \leq 0.2953 \\ 0.5802Z^{-1.356} & , 0.2953 < Z \leq 2.1275 \\ 0.4716Z^{-1.084} & , Z > 2.1275 \end{cases} \quad \left(MPa \frac{ms}{kg^{1/3}} \right) \quad (70)$$

$$p_{\min}(Z) = \begin{cases} \left(\begin{array}{l} -0.0703Z^3 - 0.0698Z^2 \\ + 0.0528Z + 0.2846 \end{array} \right) & , 0.09014 < Z \leq 1.04853 \\ 0.1944Z^{-1.45} & , 1.04853 < Z \leq 2.8610 \\ 0.1553Z^{-1.208} & , 2.8610 < Z \end{cases} \quad (MPa) \quad (71)$$

$$i_d^-(Z) = W_{TNT}^{1/3} \begin{cases} \left(\begin{array}{l} -2.931Z^3 - 3.5747Z^2 \\ +1.1692Z + 0.5213 \end{array} \right) & , 0.08484 < Z \leq 0.4742 \\ 0.8315e^{-0.746Z} & , 0.4742 < Z \leq 1.602 \\ 0.3782Z^{-0.854} & , 1.602 < Z \end{cases} \left(MPa \frac{ms}{kg^{1/3}} \right) \quad (72)$$

Onde:

p_{max}	Pico de sobrepressão
t_d	Período da fase positiva
i_d	Impulso da fase positiva
p_{min}	Pico de subpressão
i_d^-	Impulso da fase negativa

A capacidade de causar danos na estrutura também está relacionada com o impulso da carga de pressão, que é calculada com base na integral da curva de pressão gerada. A Figura 14 ilustra duas cargas de pressão positivas, com mesma duração t_d e mesmo valor de pico p_{max} . Observa-se que o impulso positivo i_d da carga B é maior que o da carga A, logo seu impacto é maior em uma estrutura, já que a taxa de decaimento de A é mais acentuada que a curva B (Kinney e Graham, 1985).

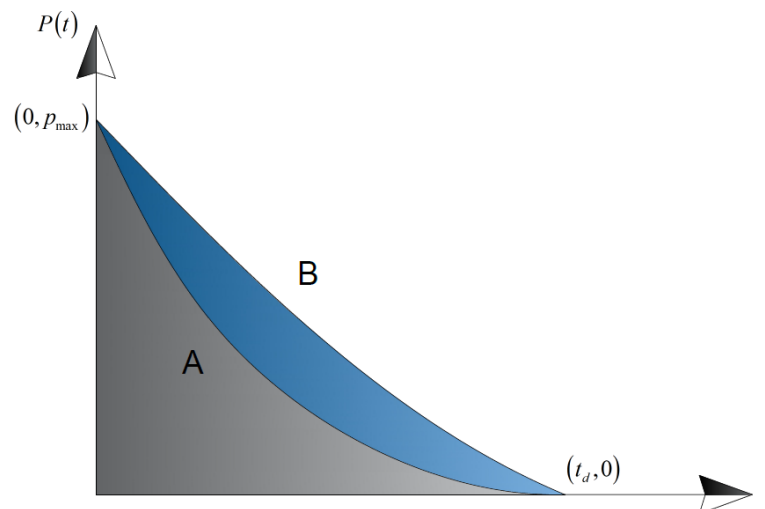


Figura 14 - Influência da taxa de decaimento

Fonte: Adaptado de Reis (2019)

2.5. Equacionamento do Carregamento

Em consenso com a literatura, o presente trabalho adota a equação de Friedlander para a caracterização da fase positiva ($t \leq t_d$), conforme Equação (73). Para a fase negativa ($t_d \leq t \leq t_d^- + t_d$), onde t_d^- corresponde ao período da fase negativa, Rigby (2014) apresenta algumas equações presentes na literatura que permitem uma boa caracterização desta. Neste caso, duas equações são apresentadas: o polinomial cúbico e a equação de Friedlander expandida. A primeira em consonância com os estudos de validação experimental realizados por Rigby et al. (2013) que concluiu que a curva cúbica é a mais apropriada e a equação estendida de Friedlander, muito adotada na solução de equacionamento das ondas explosivas. A segunda, por maior consenso na literatura por adoção da mesma, principalmente por maior facilidade de sua implementação na análise, visto que a consideração de equações distintas entre as fases positiva e negativa obriga que a derivada em $(t_d, 0)$ seja igual antes e depois do ponto.

$$P(t) = p_{\max} \left(1 - \frac{t}{t_d} \right) e^{-\frac{a't}{t_d}} \quad (73)$$

Onde:

$P(t)$ Carregamento da onda de choque

a' Taxa de decaimento

A equação de carregamento da fase positiva é um decaimento exponencial dependente da pressão máxima positiva (p_{\max}), tempo de duração desta fase (t_d) e taxa de decaimento da explosão (a'). O impulso da fase positiva nada mais é do que o cálculo da integral da equação de pressão da fase positiva, ou seja, Equação (74).

$$i_d = \int_0^{t_d} p_{\max} \left(1 - \frac{t}{t_d} \right) e^{-\frac{a't}{t_d}} dt = \frac{p_{\max} t_d}{(a')^2} (a' - 1 + e^{-a'}) \quad (74)$$

A Equação (74) é resolvida com o emprego do método de Newton-Raphson, desde que seja conhecido o valor do impulso da fase positiva, facilmente determinável pelos ábacos da Figura 12 e Figura 13 (Reis et al., 2022).

2.5.1. Polinômio Cúbico

O polinômio cúbico para caracterização da fase negativa de uma onda de choque é bem apreciado por Rigby et al. (2013) e é contemplada pela Equação (75).

A equação de polinômio cúbico foi proposta por Granström (1956) e construída impondo as condições de início em $t = t_d$, término em $t = t_d^- + t_d$ e valor máximo em $t = t_d + (t_d^-/3)$, como expresso na Equação (76). A explanação sobre a equação cúbica pode ser encontrada em Reis (2019).

$$P(t) = \begin{cases} p_{\max} \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-\frac{a't}{t_d}} & , t \leq t_d \\ -p_{\min} \left(\frac{6.75(t-t_d)}{t_d^-}\right) \left(1 - \frac{(t-t_d)}{t_d^-}\right)^2 & , t_d \leq t \leq t_d + t_d^- \\ 0 & , t \geq t_d + t_d^- \end{cases} \quad (75)$$

$$P(t_d) = 0, P\left(t_d + \frac{t_d^-}{3}\right) = -p_{\min}, P(t_d + t_d^-) = 0, \frac{d}{dt} P\left(t_d + \frac{t_d^-}{3}\right) = 0 \quad (76)$$

Onde:

t_d^- Período da fase negativa

O impulso negativo pode então ser expresso por:

$$i_d^- = \frac{9p_{\min}t_d^-}{16} \quad (77)$$

Assim, a equação cúbica depende de apenas dois parâmetros, sendo que nesse trabalho adotou-se a pressão máxima negativa (p_{\min}) e impulso negativo (i_d^-) como valores de entrada, cujos quais são obtidos das Figura 12 e Figura 13.

2.5.2. Equação Expandida de Friedlander

Este método de caracterização da fase negativa é bastante aplicado na literatura. Essencialmente, consiste na prorrogação da curva de Friedlander da fase positiva para pressões negativas. Contudo, é importante salientar que, ao contrário da equação cúbica que possui um período de duração t_d^- da fase negativa, na equação expandida de Friedlander não há tempo de duração fixo ou predeterminado da fase de subpressões. Neste caso, é considerado que o impulso negativo corresponde a solução de uma integral imprópria, como presente Equação (78). A solução de tal integral já apresenta que a equação de Friedlander, na fase negativa, tenha uma assíntota em $y = 0$.

$$i_d = \int_{t_d}^{\infty} p_{\max} \left(1 - \frac{t}{t_d} \right) e^{-\frac{a't}{t_d}} dt = \frac{p_{\max} t_d}{(a')^2} e^{-a'} \quad (78)$$

3. SOFTWARE DYNAblast 2.0

O *software* DYNAblast 1.0 (Reis et al., 2022 (a); Reis et al., 2022 (b)) possui o número de registro BR 512021001874-5 no INPI e tem por finalidade apresentar o comportamento de estruturas de placas finas de única camada, considerando o efeito de membrana, quando submetidas a um carregamento explosivo. Tais placas são caracterizadas como isotrópicas, podendo o usuário escolher dois tipos de condições de contorno de placa (totalmente apoiada ou engastada) e três tipos de condições de contorno de membrana (*immovable*, *movable* e *stress free*). Para o caso do carregamento, este é caracterizado pela fase positiva ser a equação de Friedlander e a fase negativa o polinômio cúbico. Na determinação dos parâmetros do fenômeno da explosão, o usuário pode ainda optar pela calibração realizada por Rigby et al. (2013), Reis (2019) ou simplesmente adicionar os parâmetros obtidos por ensaios experimentais, sendo estes máxima sobrepressão (Pa), máxima subpressão (Pa), tempo de duração da fase positiva (s) e impulsos das fases positiva e negativa (Pa.s). O *software* DYNAblast 1.0 apresenta seus resultados de forma satisfatória, visto que todas as análises realizadas e resultados obtidos foram publicados por Reis *et al.* (2022) (a) e Reis *et al.* (2022) (b).

A respeito do *software* DYNAblast 1.0, quando o programa é então executado uma janela é aberta ao usuário, apresentando a composição do *layout* bem como os *input data* referentes à estrutura e ao carregamento, conforme presente na Figura 15. Nesta composição, os dados necessários para as características físico geométricas da estrutura são: condições de contorno da placa (totalmente apoiada ou engastada), condições de contorno de membrana (imóvel, móvel ou livre de tensões), comprimento da estrutura no eixo x (m), relação *beta* (β) entre os comprimentos da placa na razão do eixo x para com o eixo y, espessura da estrutura (m), coeficiente de Poisson, módulo de Young (N/m^2) e densidade do material (kg/m^3). Em adição, as características da explosão se baseiam em: base de dados (inserção de dados experimentais, calibração dos ábacos com base em Rigby (2013) ou calibração dos ábacos com base em Reis (2019), tipo de explosão (esférica ou hemisférica) e características da onda de choque (massa total W_{TNT} (kg), distância escalada Z ($\text{kg/m}^{1/3}$), pressão máxima (Pa), pressão mínima, tempo da fase positiva, impulso

referente à fase positiva (Pa.s) e impulso referente à fase negativa (Pa.s)). Evidencia-se o fato de que caso o usuário deseja utilizar a base de dados de calibração dos ábacos realizados por Rigby (2013) ou Reis (2019), apenas a massa total W_{TNT} e a distância escalada Z apresentam-se editáveis. Caso seja de interesse utilizar uma base de dados experimental, estes dois componentes são desabilitados e os demais, referentes as características da onda de choque, são desbloqueados para o usuário, permitindo a edição dos parâmetros.

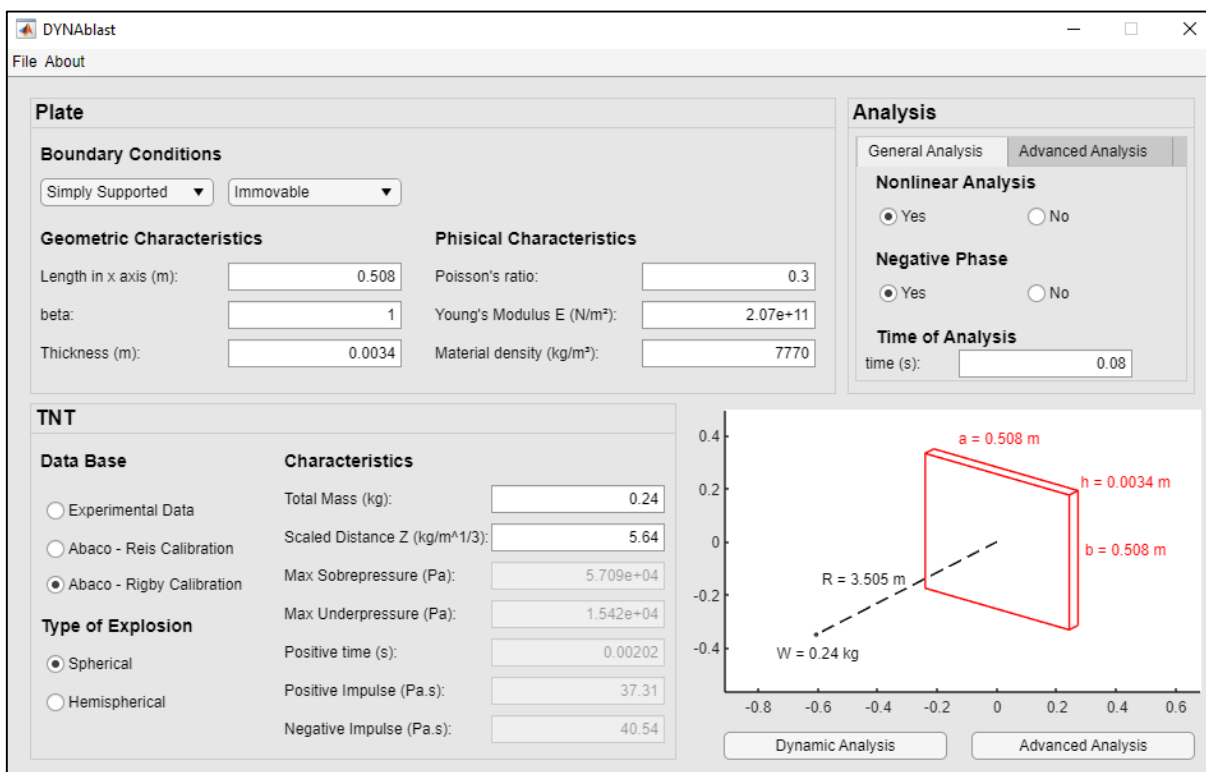


Figura 15 - DYNAblast 1.0, janela principal

Fonte: Reis (2022)

Para a realização da análise, são apresentadas a *General Analysis* (Análise Geral) e *Advanced Analysis* (Análise Avançada). Para o primeiro caso, é de suma importância o usuário informar se a análise desejada possui não linearidade geométrica, o que acarreta a consideração ou não do efeito de membrana nos cálculos, e se a fase negativa é considerada no carregamento explosivo. Por fim, o tempo de análise solicitado corresponde ao intervalo de tempo a ser considerado no comportamento dinâmico e não no tempo de processamento.

Para o segundo caso, são realizadas análises paramétricas conforme a opção do usuário e que são subdivididas em 8 casos, a saber:

- *Case 1 – $Z \times u_z/h$* : Análise do comportamento do deslocamento máximo, w/h , para cada passo de distância escalada Z ;
- *Case 2 – $W \times u_z/h$* : Análise do comportamento do deslocamento máximo, w/h , para cada passo de massa W_{TNT} . Nesse caso, o usuário precisa completar *Final TNT's mass (kg)* (Massa final de TNT (kg)) e *Number of intervals* (Número de intervalos). Naturalmente, para o caso, a análise paramétrica termina com base no valor final de massa informado pelo usuário;
- *Case 3 – $t_d/T_L \times FAD - Varying W$* : Caso específico para análise do comportamento da relação t_d/T_L (tempo da fase positiva e período linear da estrutura), quando FAD (Fator de Amplificação Dinâmica) está variando. Neste caso, a variação está com base na massa de TNT. Da mesma forma que o caso 2, o usuário precisa completar *Final TNT's mass (kg)* (Massa final de TNT (kg)) e *Number of intervals* (Número de intervalos). Naturalmente, para o caso, a análise paramétrica termina com base no valor final de massa informado pelo usuário;
- *Case 4 – $t_d / T_L \times u_z / h$* : Caso específico para análise dos deslocamentos máximos, w/h , para quando a relação t_d / T_L (tempo de fase positiva e período linear da estrutura) varia. Neste quesito, a variação paramétrica está com base na distância escalada Z ;
- *Case 5 – $t_d / T_{NL} \times u_z / h$* : Caso específico de análise dos deslocamentos máximos, w/h , para quando a relação t_d / T_{NL} (tempo da fase positiva e período não linear da estrutura) varia. Neste quesito, a variação paramétrica está com base na distância escalada Z ;
- *Case 6 – $u_z / h \times stress$* : Caso específico da análise dos deslocamentos máximos, w/h , para quando as tensões no centro da placa variam. Neste quesito, a variação paramétrica está com base na distância escalada Z ;
- *Case 7 – $t_d/T_L \times FAD - Varying Z$* : Caso específico para análise do comportamento da relação t_d/T_L (tempo da fase positiva e período linear da estrutura), quando FAD (Fator de Amplificação Dinâmica) está variando. Neste caso, a variação está com base na distância escalada Z ;

- *Case 8 – General Equation*: Caso específico que possui por base o Caso 1, porém apresenta a equação característica da curva, isto é, a relação de w/h , Z , e W_{TNT} .

Todos estes casos, da Análise Avançada, são apresentados conforme a Figura 16.

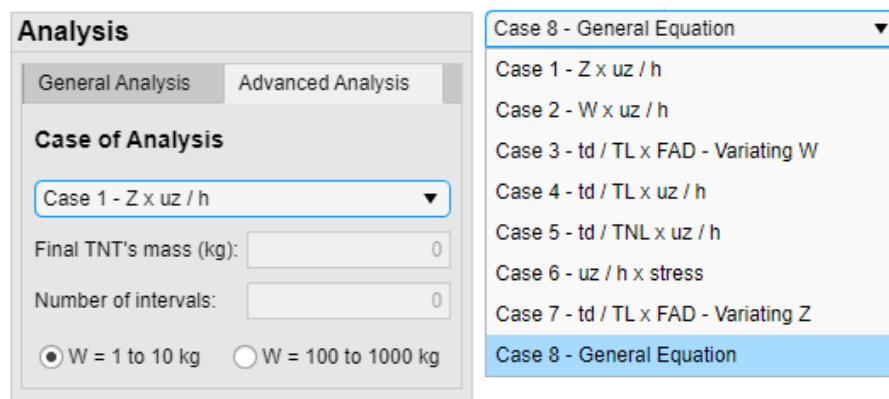


Figura 16 - DYNAblast 1.0, input data para Análise Avançada

Fonte: Reis (2022)

O pós processamento está correlacionado com o tipo de análise previamente selecionado pelo usuário. Assim, desta forma, considerando então a Análise Geral, é aberta uma nova janela ao usuário constando gráficos a respeito do deslocamento, tensões e deformações, todas estas em relação ao centro da superfície, com o intervalo de tempo da duração da fase dinâmica previamente estabelecido também pelo usuário. Ademais, são presentes o gráfico do carregamento e a Transformada de Fourier (FFT). Todas estas informações são também apresentadas em forma de tabela e com a possibilidade de exportar para Excel.

Anexo ao caso, são presentes os parâmetros de caracterização da equação diferencial, que é tratado em Reis (2019) e Reis (2022), máximos deslocamentos estático e dinâmico, períodos linear e não linear da estrutura e bem como as características da explosão. Neste último, caso a base de dados selecionada tenha sido experimental, as informações são apenas replicadas para a janela aberta. Caso a escolha tenha sido o uso da calibração dos ábacos ou por Rigby (2013) ou Reis (2019), as informações de massa de TNT, W_{TNT} , e distância escalada, Z , são convertidas para valores característicos de explosão.

Todas estas descrições do pós processamento, referente à Análise Geral, estão contidas na Figura 17, bem como para mais detalhes sobre os gráficos, são presentes na Figura 18.

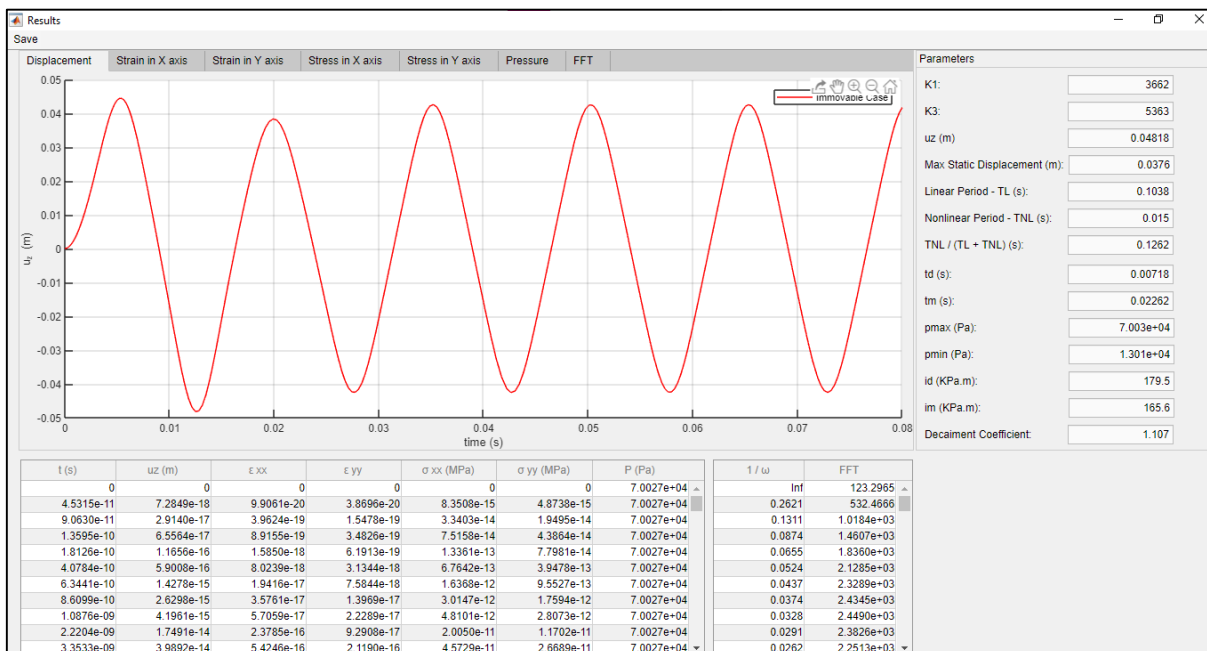


Figura 17 - DYNAblast 1.0, janela de resultados

Fonte: Reis (2022)

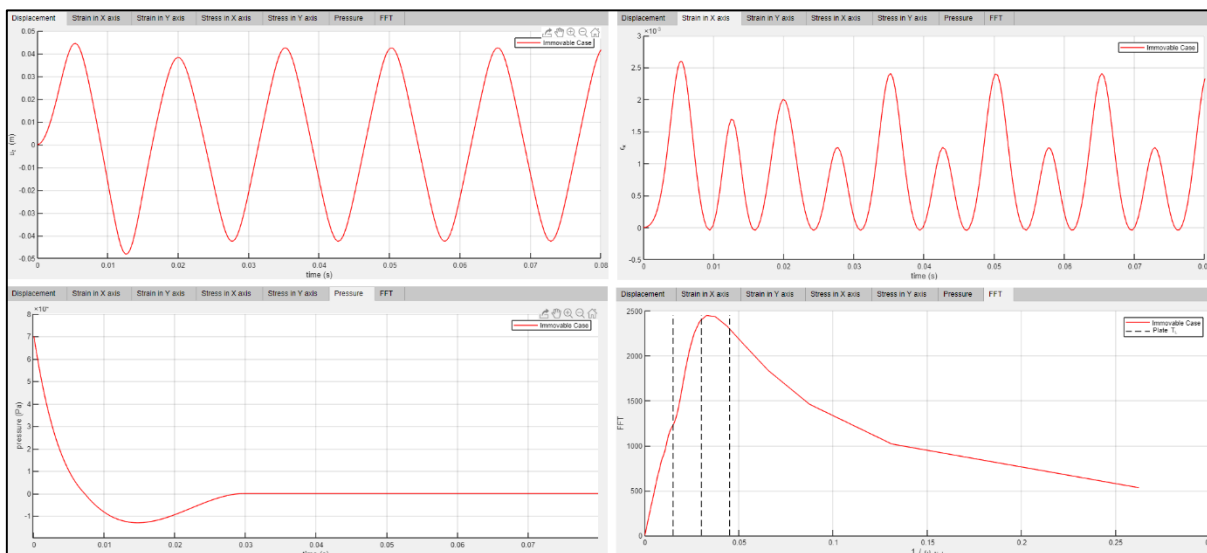


Figura 18 - DYNAblast 1.0, gráficos de resultados

Fonte: Reis (2022)

O caso dos resultados da Análise Avançada, já previamente explicado, apresenta-se nas Figura 19 e Figura 20.

Finalmente, DYNAblast 1.0 foi desenvolvido de forma que pudesse também exportar tais informações para arquivo Excel ou formato .txt. Ademais, o *software* permite a importação de informações em formato .txt. Para isso, tais informações precisam estar na ordem referente: Condições de contorno da placa (1 para simplesmente apoiada e 2 para totalmente engastada), condições de membrana (1 para imóvel, 2 para móvel e 3 para livre de tensões), comprimento no eixo x (em metros), relação β da razão entre o comprimento no eixo x e eixo y, espessura (em metros), coeficiente de Poisson, módulo de Young (N/m²), densidade do material (kg/m³), massa total de TNT (kg), distância escalada Z (kg/m^{1/3}), tipo de explosão (1 para hemisférico e 2 para esférico), tipo de base de dados (2 para calibração de Rigby (2013), 3 para calibração Reis (2019) e 4 para dados experimentais), máxima sobrepressão (Pa), máxima subpressão (Pa), tempo da fase positiva (s), impulso da fase positiva (Pa.s), impulso da fase negativa (Pa), análise não linear (1 para sim e 2 para não), consideração da fase negativa (1 para sim e 2 para não) e tempo de duração do comportamento dinâmico. Esta ordem de informações pode ser observada conforme a Figura 21.

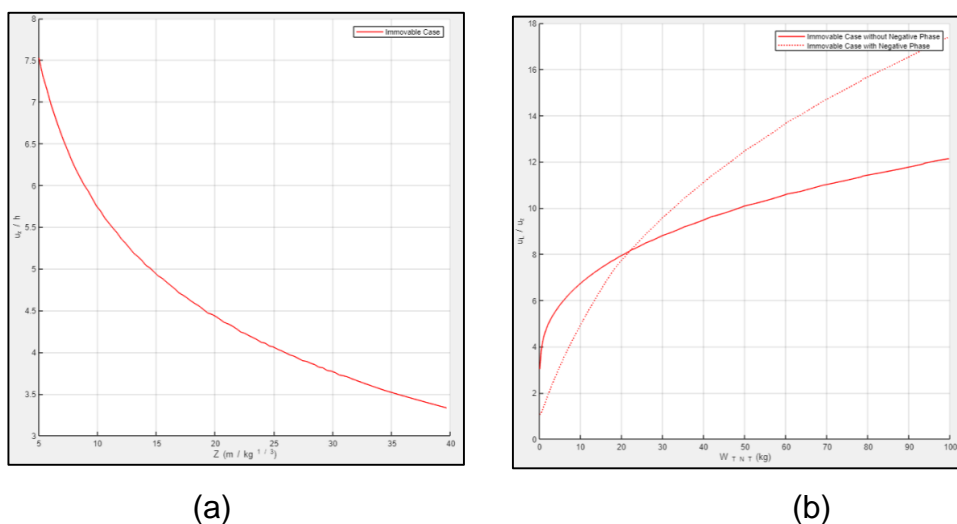
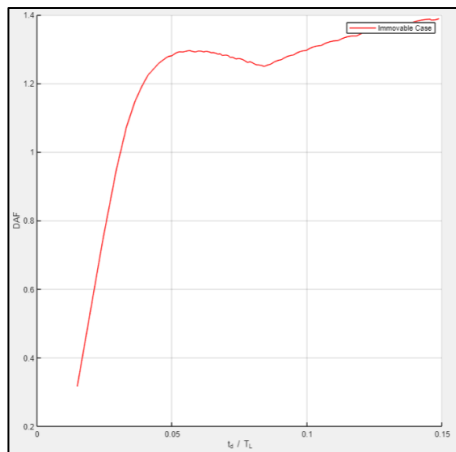
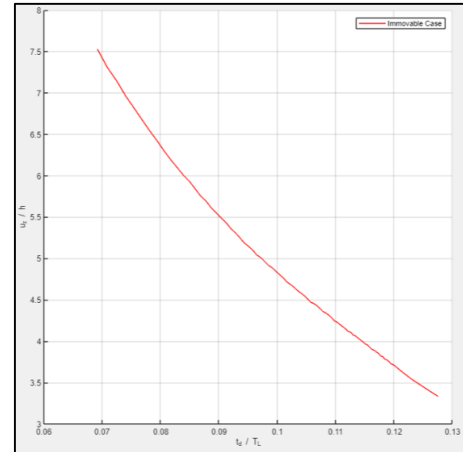


Figura 19 - DYNAblast 1.0, resultados de Análise Avançada parte 1, (a) Caso 1, (b) Caso 2

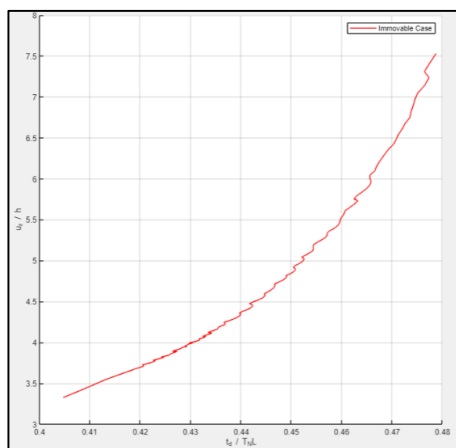
Fonte: Reis (2022)



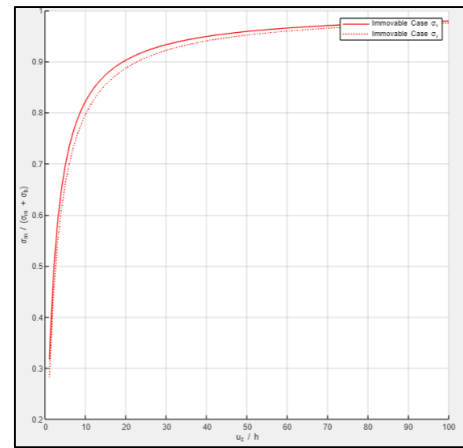
(a)



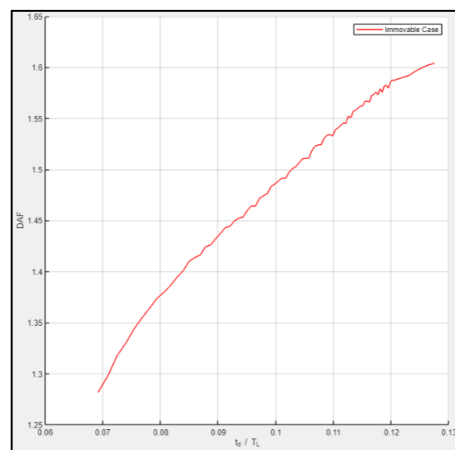
(b)



(c)



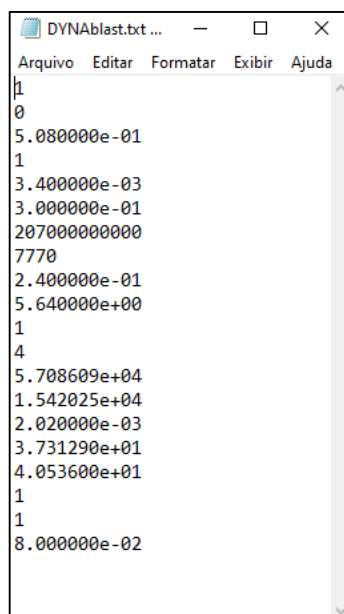
(d)



(e)

Figura 20 - DYNAblast 1.0, resultados de Análise Avançada parte 2, (a) Caso 3, (b) Caso 4, (c) Caso 5, (d) Caso 6, (e) Caso 7

Fonte: Reis (2022)



```

DYNAblast.txt ...
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
1
0
5.080000e-01
1
3.400000e-03
3.000000e-01
207000000000
7770
2.400000e-01
5.640000e+00
1
4
5.708609e+04
1.542025e+04
2.020000e-03
3.731290e+01
4.053600e+01
1
1
8.000000e-02

```

Figura 21 - DYNAblast 1.0, arquivo .txt

Fonte: Reis (2022)

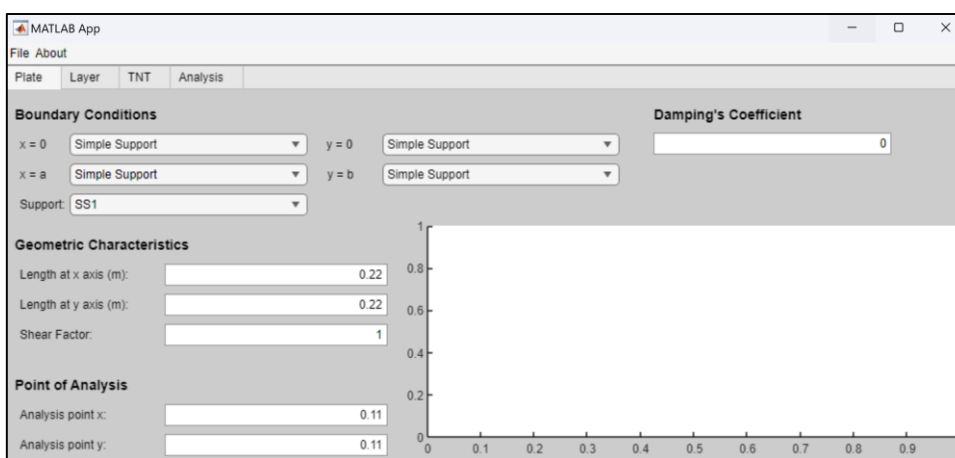
Atualmente, o *software* DYNAblast 2.0 encontra-se em estado de desenvolvimento, mas encontra-se em pleno uso para as análises de explosão de placas laminadas realizadas neste trabalho. As análises de vigas e os demais carregamentos para ambas as estruturas encontram-se em estágio de *scripts* de MATLAB R2023b e que serão implementados futuramente. Em outras palavras, o *software* DYNAblast 2.0 possui funções ampliadas e implementadas com relação à sua versão 1.0.

O *software* é iniciado por uma tela inicial de *input data* subdividida em quatro *tab groups*, cada qual recebendo as características provenientes da placa no geral, das lâminas, características do carregamento explosivo e, finalmente, o tipo de análise a ser realizada. As quatro telas são presentes conforme as Figura 22 e Figura 23.

Para conhecimento, na aba “Plate” os dados de entrada solicitados são as condições de contorno em todas as suas arestas, bem como o tipo de suporte a ser definido. Isto é estabelecido porque, de acordo com a literatura e conforme presente neste trabalho, placas totalmente apoiadas podem ser do tipo SS1 ou SS2, anteriormente já definido. Desta forma, é de grande importância o usuário estabelecer qual tipo de estrutura faz parte da análise. Na condição de contorno, todas as arestas encontram-se com as opções de “Simple Support”, “Clamped” e “Free” (simplesmente

apoiado, engastado e livre, respectivamente), conforme Figura 24, com o intuito para futuras implementações considerando diversas condições de contorno. Para o estado atual da arte, o que irá reger as condições de contorno da estrutura é o tipo de “Support”, sendo SS1 ou SS2.

São solicitadas também as características geométricas, dimensões somente do plano. Coeficiente de amortecimento e fator de cisalhamento também são importantes. Por fim, são solicitados os pontos de análise (coordenadas x e y) de forma que sejam apresentados nos resultados os deslocamentos, tensões e deformações na janela de Resultados.

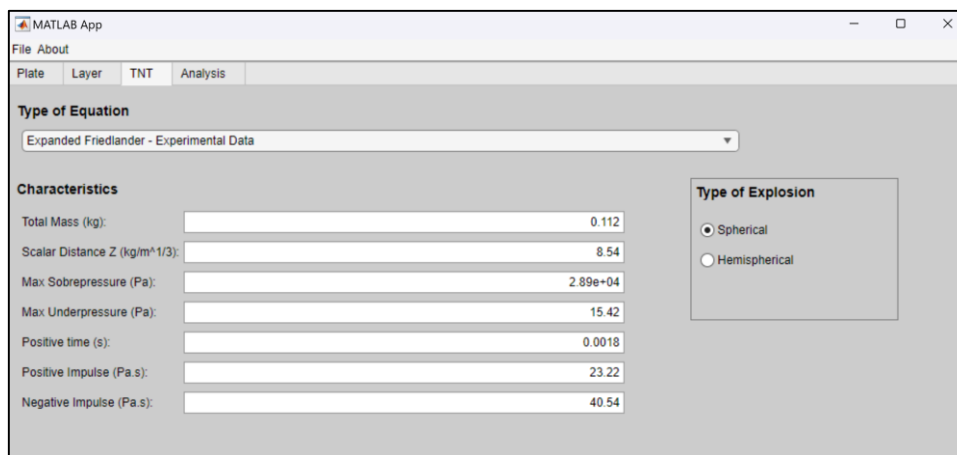


(a)

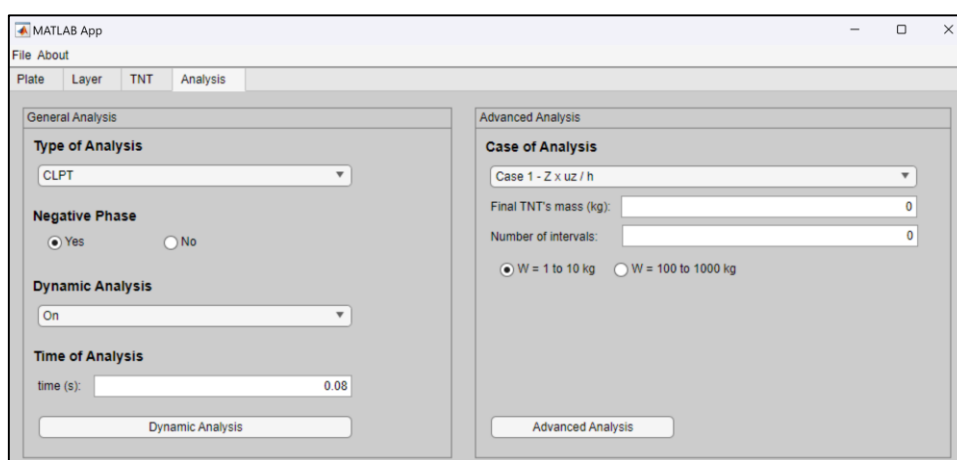
Layer	Height	Mass Density	Angle (rad)	nu12	nu21	E1	E2	G12	G13	G23
1	3.3000e-04	1620	0	0.3180	0.0217	1.3514e+11	9.2400e+09	6.2700e+09	6.2700e+09	0
2	3.3000e-04	1910	0	0.1150	0.1150	2.3370e+10	2.3370e+10	5.2300e+09	5.2300e+09	0
3	3.3000e-04	1450	0	0.0590	0.0590	6.2740e+10	6.2740e+10	4.3700e+09	4.3700e+09	0
4	3.3000e-04	1620	0	0.3180	0.0217	1.3514e+11	9.2400e+09	6.2700e+09	6.2700e+09	0
5	3.3000e-04	1910	0	0.1150	0.1150	2.3370e+10	2.3370e+10	5.2300e+09	5.2300e+09	0
6	3.3000e-04	1450	0	0.0590	0.0590	6.2740e+10	6.2740e+10	4.3700e+09	4.3700e+09	0

(b)

Figura 22 - DYNAblast 2.0, janela principal, parte 1; (a) *Input data* da placa; (b) *Input data* das lâminas



(a)



(b)

Figura 23 - DYNAblast 2.0, janela principal, parte 2; (a) *Input data* carregamento; (b) *Input data* tipo de análise

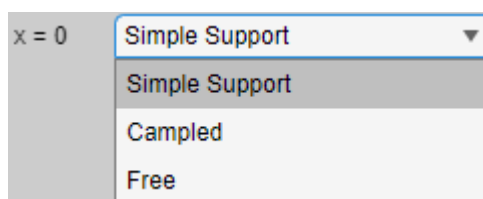


Figura 24 - DYNAblast 2.0, tipos de condições de contorno

Com relação à aba “Layer”, é apresentada uma tabela em branco que deve ser preenchida pelo usuário com ao menos uma lâmina, caso contrário, o *software* não será capaz de realizar a análise desejada, naturalmente. Desta forma, para acréscimo ou subtração de uma lâmina, há dois botões na parte inferior esquerda da janela, representados por “+” e “-”, com suas respectivas funções já mencionadas.

Vale ressaltar que o botão “-“ exclui a última lâmina acrescida. Este processo tende a atualizar de forma que o usuário possa selecionar a lâmina que deseja excluir.

Os dados de entrada pertinentes para a lâmina são conforme presentes já na Figura 22 (b), sendo esta altura (m), massa específica (kg/m^3), ângulo das fibras (rad), v_{12} , v_{21} , E_1 (Pa), E_2 (Pa), G_{12} (Pa), G_{13} (Pa) e G_{23} (Pa).

Para as características do carregamento explosivo (aba “TNT”), tem-se inicialmente o tipo de equação a ser aplicada para caracterizar a curva de carregamento. Para isso, são apresentadas as opções: “Friedlander + Cubic Equation - Rigby Calibration,” “Friedlander + Cubic Equation (calculating tm) - Rigby Calibration,” “Friedlander + Cubic Equation (calculating tm) - Ana Calibration”, “Friedlander + Cubic Equation (calculating tm) - Experimental Data”, “Expanded Friedlander - Rigby Calibration”, “Expanded Friedlander - Experimental Data”, conforme apresenta-se na Figura 25.

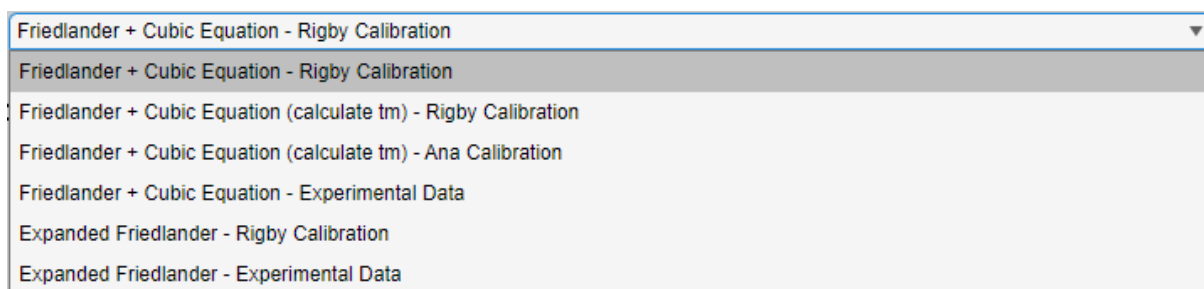


Figura 25 - DYNAblast 2.0, tipos de equações para carregamento explosivo

A primeira opção corresponde à caracterização da fase positiva como sendo a equação de Friedlander, Equação (73) e a fase negativa como sendo a equação do polinômio cúbico, Equação (75). Além disso, todos os parâmetros pertinentes ao equacionamento de ambas as fases são determinados com base nos ábacos presentes nas Figura 12 e Figura 13. Nesta opção, o usuário introduz a distância escalar ($\text{kg}/\text{m}^{1/3}$) e a massa de TNT (kg) utilizada para o cálculo.

A segunda opção possui a mesma estrutura base de cálculo da primeira opção, contudo para a determinação do tempo de duração da fase negativa, ao invés de ser usado o dado proveniente dos ábacos, o *software* utiliza a Equação (77), que corresponde a definição de impulso negativo utilizado por Granström (1956). Nesta opção, o usuário introduz a distância escalar ($\text{kg}/\text{m}^{1/3}$) e a massa de TNT (kg).

A terceira opção possui o mesmo processo de cálculo que a segunda opção, contudo a diferença é dada por Reis (2019) utilizar processos de calibração das curvas presentes pelas Figura 12 e Figura 13, o que pode gerar uma margem de diferença entre os resultados que podem ser gerados pelas primeira e segunda opções, calibradas por Rigby (2013). Nesta opção, o usuário introduz a distância escalar ($\text{kg/m}^{1/3}$) e a massa de TNT (kg) utilizada para o cálculo.

A quarta opção corresponde ao uso de dados obtidos experimentalmente como *input data* da caracterização da curva de explosão. Esses dados são aplicados considerando a fase positiva a equação de Friedlander e a fase negativa sendo o polinômio cúbico. Sendo assim, não são utilizados os dados implementados na caracterização dos ábacos fornecidos por US Department of Defense (2008).

A quinta opção apresenta a curva comumente usada na literatura, que corresponde a equação expandida de Friedlander, cuja definição é apresentada no item 2.5.2. Nesta opção, o usuário introduz a distância escalar ($\text{kg/m}^{1/3}$) e a massa de TNT (kg) utilizada para o cálculo, sabendo-se que o processo de calibração das curvas corresponde ao de Rigby (2013). Ressalta-se, ainda, que a equação expandida de Friedlander, diferentemente do polinômio cúbico, não utiliza a Equação (77) para a determinação do tempo de fase negativa. Conforme definido no item 2.5.2, esta opção de cálculo tem por definição que o impulso da fase negativa corresponde a uma integral imprópria, iniciando em t_d .

Finalmente, a última opção corresponde a utilização da equação expandida de Friedlander como caracterização de todo o comportamento de ondas de explosão. A diferença para a quinta opção se dá por esta utilizar como *input data* os parâmetros obtidos por algum ensaio experimental, não sendo necessário o conhecimento da distância escalar ($\text{kg/m}^{1/3}$) e da massa de TNT (kg).

Após a escolha da equação que é a caracterização ideal da curva de explosão (este caso varia conforme o estudo realizado), o usuário deve introduzir os valores experimentais dos parâmetros ou os dados pertinentes à distância escalar ($\text{kg/m}^{1/3}$) e da massa de TNT (kg). Estes parâmetros são, conforme a Figura 23 (a), a massa total de TNT (kg), distância escalar ($\text{m/kg}^{1/3}$), máxima sobrepressão (Pa), máxima subpressão (Pa), tempo da fase positiva (s), impulso da fase positiva (Pa.s), impulso da fase negativa (Pa.s) e coeficiente de decaimento. Não tão apenas, o tipo de

explosão deve ser determinado conforme as definições abordadas no item 2.3, ou seja, esférico ou hemisférico.

Finalmente, para a última aba “Analysis”, corresponde ao tipo de análise e algumas particularidades envolvidas. Neste caso, tem-se a “General Analysis”, que visa somente uma análise e geração de gráficos de pressão x tempo, deslocamento x tempo, deformações e tesões x espessura da placa. Para este, são necessárias informações do tipo de análise a ser aplicada, isto é, análise clássica (CLPT), primeira ordem de cisalhamento na deformação (FSPT), terceira ordem de cisalhamento na deformação (HSPT), von Karman (TvK) ou terceira ordem de cisalhamento com deformação finita (HSPT – FD), conforme Figura 26, onde tais análises constam no item 1.2.3 deste trabalho. Não tão apenas, deve-se considerar ou não a fase negativa, ativar ou não a análise dinâmica e o tempo de análise dinâmica. Apesar de serem processos relativamente simples de serem executados pelo computador, dependendo do input data e da quantidade de lâminas, o tempo de processamento pode chegar a mais de uma hora para definir os resultados, considerando a análise HSPT-FD e um computador com sistema operacional Windows 10, processador Intel^(R) Core^(TM) i5-7200U CPU @ 2.50GHz, RAM instalada 16 GB e SSD de 480 GB.

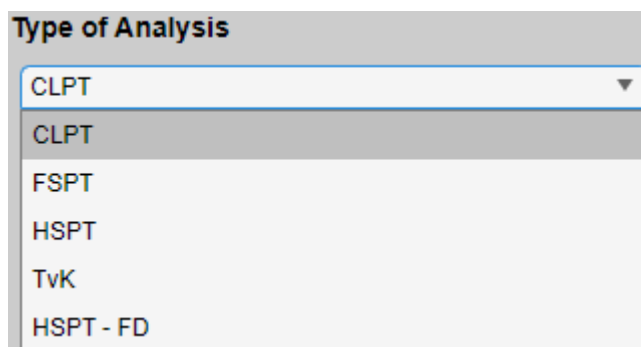


Figura 26 - DYNAblast 2.0, tipos de análise

O segundo caso corresponde a análises mais avançadas, ou seja, análises paramétricas, onde todos os processos de cálculo das classes presentes na programação devem ser refeitos a cada intervalo de massa TNT (kg) ou distância escalar ($m/kg^{1/3}$) acrescidos. Embora a apresentação final dos gráficos seja aparentemente simples, o processo de cálculo requer a atualização dos valores da classe construtora em cada passo de carga ou distância escalar, necessitando renovar os cálculos e salvá-los em uma variável do tipo *array*. Todas as opções são

presentes na Figura 27. Ressalta-se que os casos de análise são os mesmos já abordados na Figura 16. Este exige esforço computacional, sendo necessárias algumas horas para obtenção do resultado.

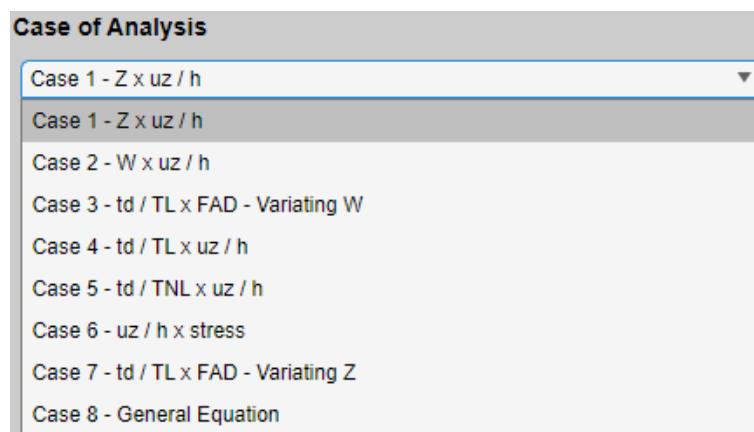


Figura 27 - DYNAblast 2.0, casos de análises

Após a inserção de dados, o usuário é redirecionado para uma janela com a apresentação dos resultados em forma de tabela e gráfico, conforme Figura 28. Neste caso, são apresentados os gráficos como deslocamento x tempo, pressão x tempo, relação z/h e as tensões σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , σ_{xz} e σ_{yz} , além da relação z/h e as deformações ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} , ϵ_{xz} e ϵ_{yz} em suas formas adimensionais. Ademais, o usuário tem a oportunidade de exportar para uma planilha no formato Excel os resultados obtidos.

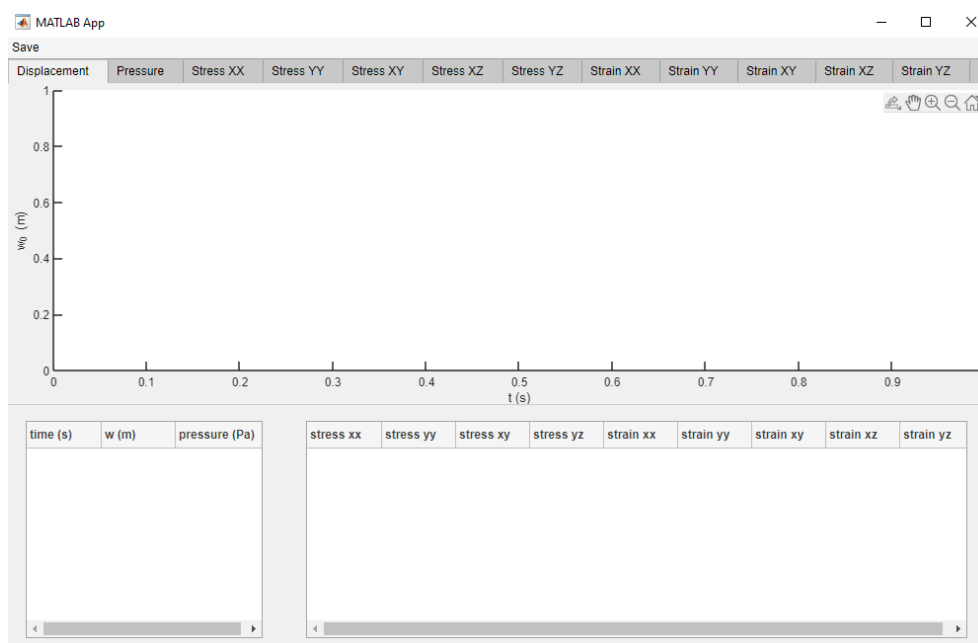


Figura 28 - DYNAblast 2.0, janela de resultado

O *software* DYNAblast 2.0 foi desenvolvido para seguir um fluxo de processo de cálculo de forma simples e linear. Neste procedimento, inicialmente é recebido dos dados de entrada das características físico-geométricas da estrutura, bem como de cada lâmina, seguindo-se pelos parâmetros do carregamento explosivo e o tipo de análise a ser considerado.

Após salvar os dados de entrada feitos pelo usuário, o programa inicia o processamento calculando os parâmetros do carregamento explosivo, caso o dado informado tenha sido a distância escalada Z e a massa de TNT, W_{TNT} , convertendo-as assim para os parâmetros de explosão, conforme Equações (63) à (72). Se as considerações do usuário tenham sido para utilizar valores de ensaios experimentais, os dados de pressão máxima, pressão mínima, tempo da fase positiva e impulsos positivo e negativa são salvos em uma variável e diretamente aplicados nas equações de carregamento explosivo.

Seguindo a ordem do fluxo de trabalho, o *software* então inicia os cálculos das matrizes constitutivas dos materiais de cada lâmina, sejam estas isotrópicas ou ortotrópicas. Com isso, de acordo com a inclinação de cada, são então determinadas tais matrizes para cada material com base nos eixos globais da estrutura e, por fim, em um processo de somatório, encontra-se as matrizes da estrutura. Naturalmente, são fornecidas as matrizes constitutivas para a flexão e cisalhamento, Equação (8).

Tendo-se conhecimento de tais matrizes, são prosseguidos os cálculos para o cálculo dos esforços internos da estrutura, vide Equações (35) à (38), com base na teoria de placas aplicada (item 1.2.3) e, então, determinação das Equações Governantes da estrutura, conforme Equação (34).

Observa-se que o *software* DYNAblast 2.0 encontra-se apto as análises considerando as condições de contorno do tipo SS1 e SS2, com base no item 1.2.5.1, aplicando-se assim as séries numéricas na Equação Governante e determinação dos valores das incógnitas U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn} .

Por fim, ao determinar os valores das incógnitas, torna-se possível calcular o valor do deslocamento de qualquer coordenada da estrutura para cada passo de tempo. Naturalmente, o *software* averigua se o usuário escolheu uma análise dinâmica simples, onde apenas apresenta o deslocamento x tempo de uma coordenada, com base em valores fixos de carregamento ou se corresponde à uma

análise paramétrica, em que os resultados de deslocamentos máximos para cada passo de incremento de parâmetro Z ou W_{TNT} de carregamento.

Todos estes passos podem ser observados conforme o fluxograma apresentado pela Figura 29.

Todo o projeto do DYNAblast 1.0 encontra-se hospedado no Github, através do link <https://github.com/AnaWaldila/dynablast>, podendo ser baixado gratuitamente e de código aberto. O projeto do *software* DYNAblast 2.0 também se encontra hospedado no Github, podendo ser acessado a partir do link <https://github.com/AnaWaldila/dynablast2.0>.

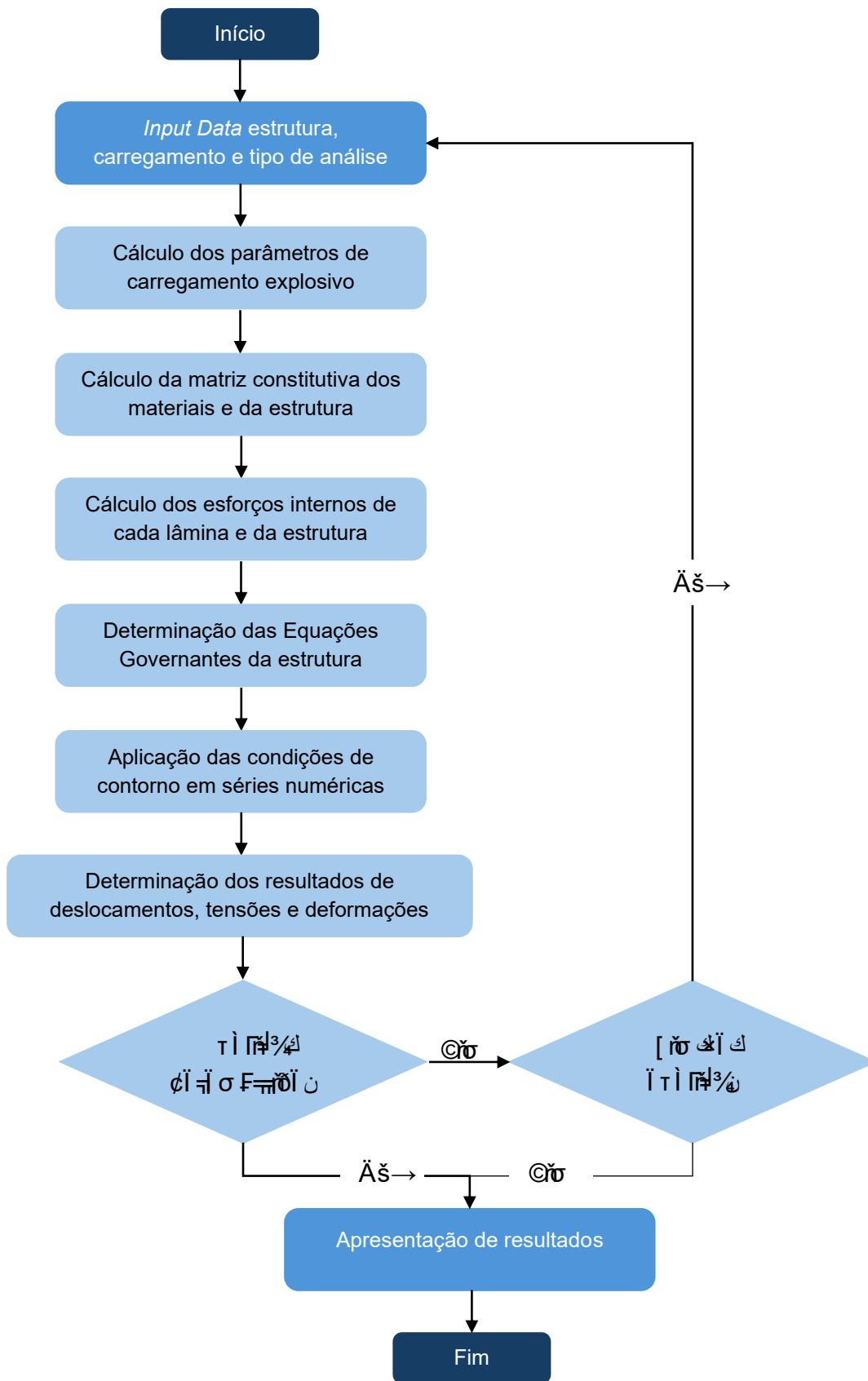


Figura 29 - DYNAblast, fluxograma do software

4. RESULTADOS: CALIBRAÇÃO DO SOFTWARE DYNABLAST

Abordou-se no Capítulo 1 o processo de formulação de estruturas laminadas com base em teorias de deformação apresentadas por Reddy (2003) e Amabili et al. (2020). Ademais, nota-se que as séries de Fourier, utilizadas como soluções das equações diferenciais, podem contemplar tanto o caso de múltiplos graus de liberdade (MDOF, *multi degrees of freedom*) quanto em um sistema de um grau de liberdade (SDOF, *single degree of freedom*). Em outras palavras, o caso de graus de liberdade a serem adotados varia conforme o número de termos da série.

Posteriormente a tal procedimento, o Capítulo 2 contempla as características referentes ao carregamento explosivo. É desenvolvido textualmente as categorias de uma explosão, seus graus de confinamento e sua influência nas respostas estruturais. São descritas as expressões de determinação dos parâmetros mais importantes de uma explosão, conforme os ábacos apresentados por US Department of Defense (2006) e posteriormente desenvolvidas por Rigby et al. (2014) e Reis (2019). Por fim, foram apresentados também as equações mais utilizadas na literatura para descrição de uma onda de choque, tanto na fase positiva quanto na fase negativa. Todas estas informações apresentadas no Capítulo 2 são de suma importância para determinação da(s) expressão(ões) de uma onda de choque, expressão(ões) esta(s) que é(são) usada(s) como carregamento dinâmico forçado da estrutura de placa e viga.

Assim sendo, considerando o estudo de placas e vigas laminadas e seu comportamento, este capítulo visa realizar a calibração do *software* DYNABlast 2.0 com base em carregamentos estáticos, vibrações livres e carregamentos dinâmicos genéricos. Em outras palavras, são avaliados os deslocamentos das estruturas em caso estático, vibração livre e vibração forçada (este aplicado somente a vigas), para depois determinar o processo vibratório de placas e vigas quando submetidos a uma explosão.

Para tal, primeiro compara-se os resultados de uma análise estática realizada por Reddy (1984) e Reddy (2003) utilizando as mesmas características de placas por ele formuladas. São então contemplados autores que apresentaram análises dinâmicas de placas em vibração livre, considerando ainda as placas presentes em Reddy (1984) e Reddy (2003). Posteriormente, são apresentados autores que estudaram a respeito de vigas laminadas em carregamentos estático, Vo et al. (2017)

e Karamanli (2017), vibração livre, Khdeir e Reddy (1994) e vibração forçada, com Eshraghi e Dag (2017) e Ahmed (2018).

Ressalta-se que a formulação utilizada corresponde à apresentada por Reddy (2003), que baseia-se em Teoria Clássica de Placas, Teoria da Primeira Ordem no Cisalhamento e Teoria de Alta Ordem no Cisalhamento, as quais foram implementadas no *software* DYNAblast 2.0. Em um primeiro momento, apresenta-se a comparação entre esta implementação e os resultados próprios de Reddy (2003) e com os demais autores mencionados de forma a apresentar a confiabilidade dos resultados gerados pelo programa.

4.1. Placas Laminadas Compósitas SSSS

4.1.1. Caso Estático

O caso estático analisado neste presente trabalho é baseado em Reddy (2003), que apresenta alguns resultados considerando uma estrutura do tipo *cross-ply* totalmente apoiada, sob as tensões σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xz} e σ_{yz} . Os parâmetros de entrada são presentes na Tabela 4, que corresponde as placas com relações $a/h = 4$ e $a/h = 10$, para casos de FSPT e HSPT.

Tabela 4 - Propriedades de placa ortotrópica do tipo *cross-ply*, caso estático (Reddy, 2003)

Dados	Valor
Ângulo das lâminas	0°/90°/90°/0°
E_1	175 GPa
E_2	7 GPa
$G_{12} = G_{13}$	3,5 GPa
G_{23}	1,4 GPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,25

Ambas as apresentações das tensões das Figura 30 à Figura 34 demonstram consonância entre os resultados obtidos neste trabalho com os anteriormente expostos por Reddy (2003). Na obtenção das tensões, considerou-se as equações constitutivas governantes, usualmente aplicadas em sistemas estruturais de placas e comparou-as com os gráficos gerados por Reddy (2003). Ainda pode-se avaliar o comportamento das tensões de flexão e cisalhamento na mesma placa adotada para

estudo neste item, considerando $a/h = 10$, conforme Figura 31, para o caso de análise FSPT e Figura 32, na análise HSPT.

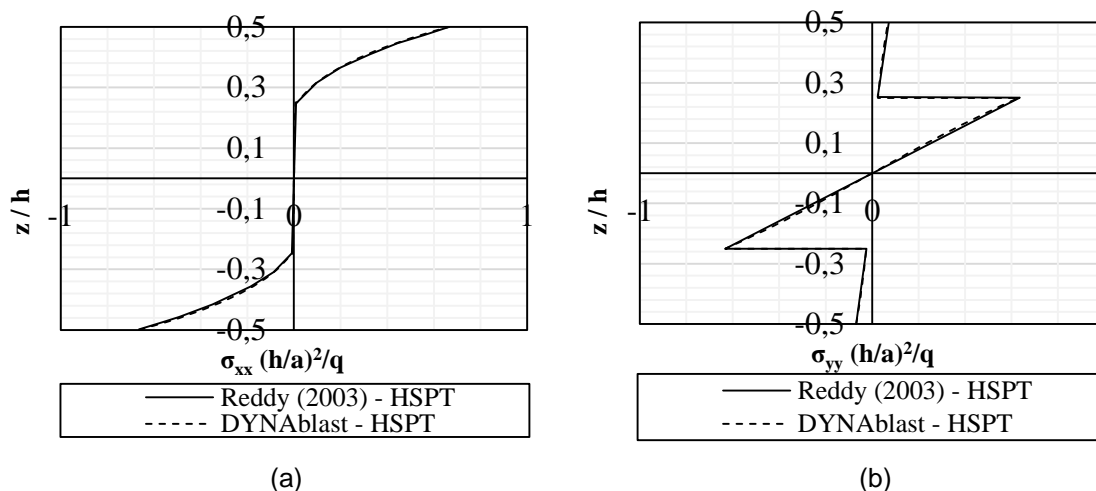


Figura 30 - Comparação DYNAblast 2.0 e caso HSPT de Reddy (2003), $a/h = 4$

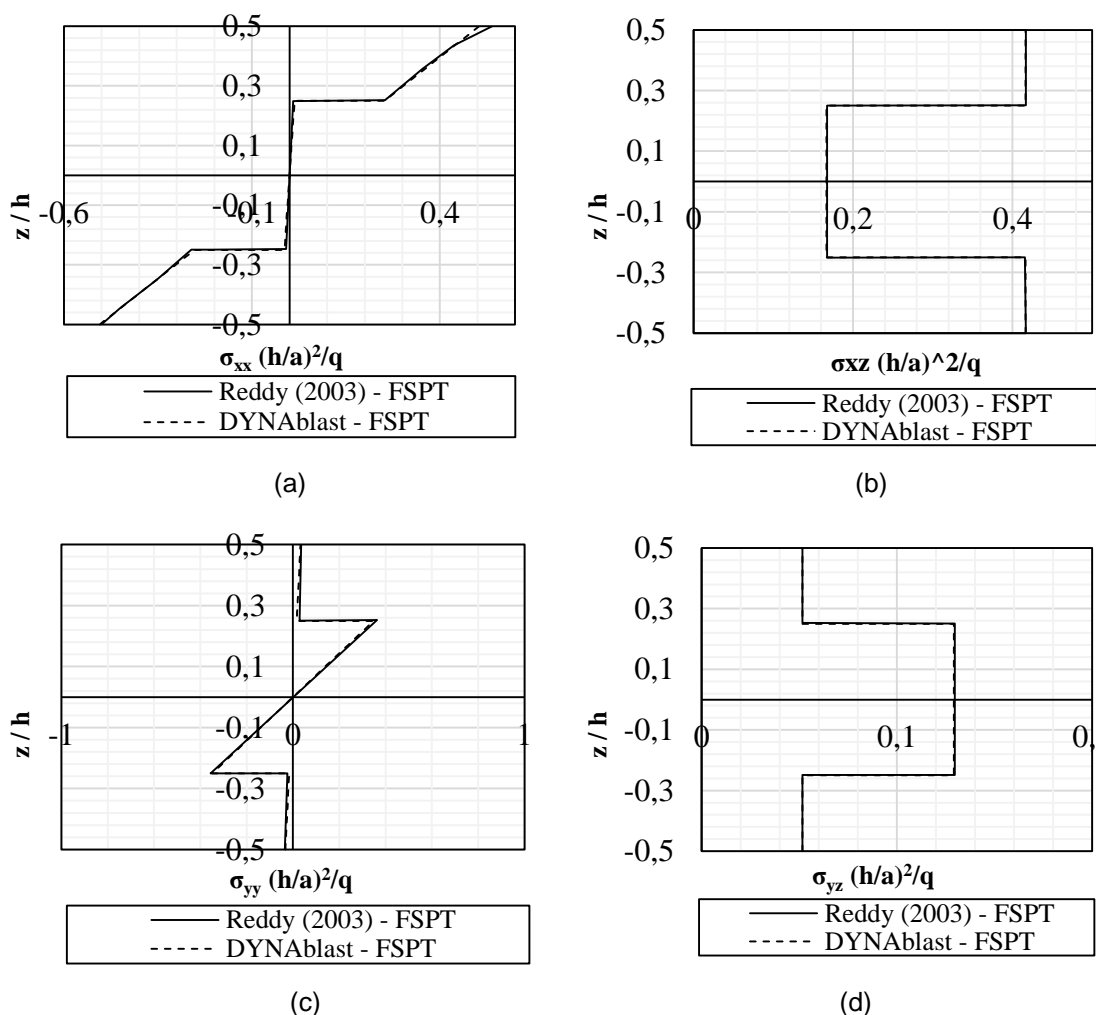


Figura 31 - Caso FSPT Reddy (2003), $a/h = 10$

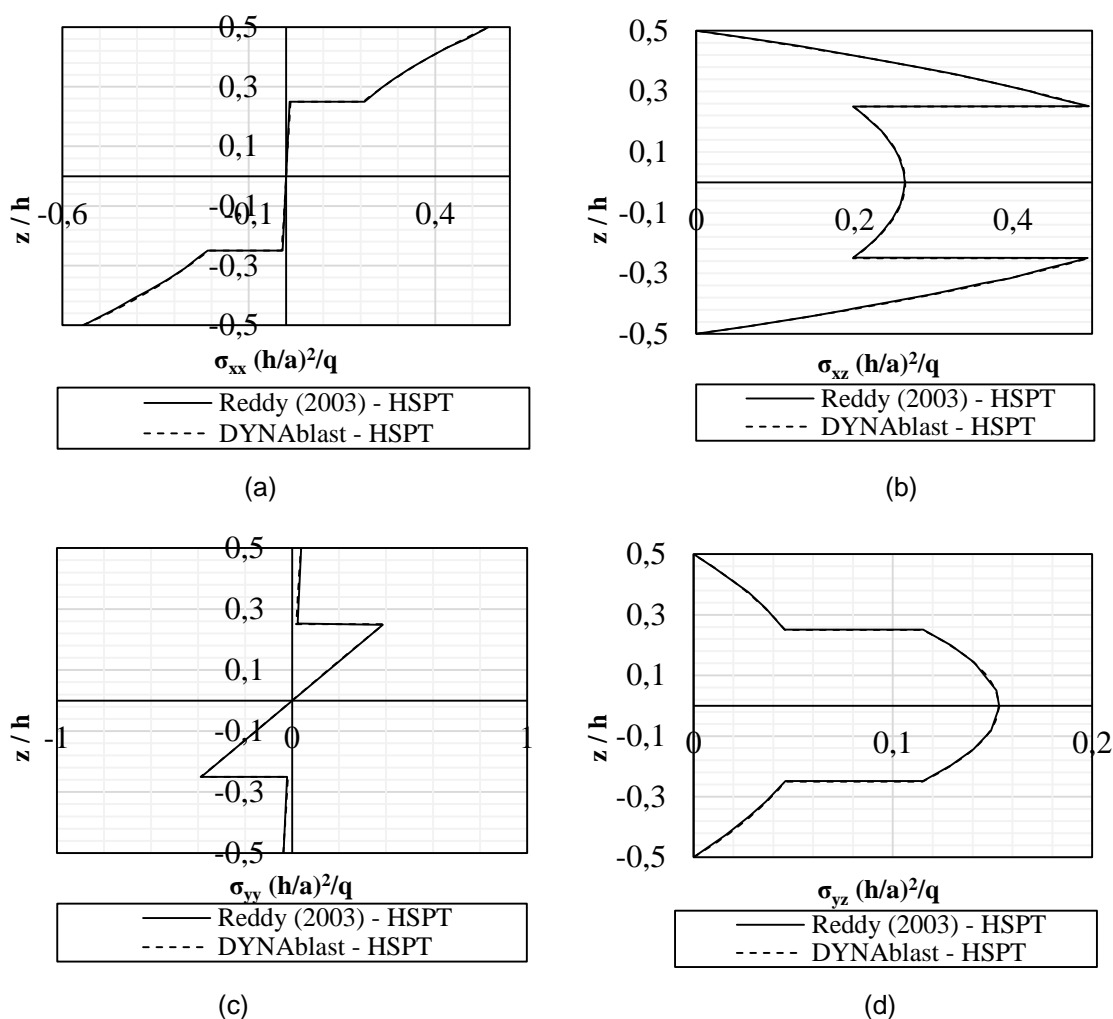


Figura 32 - Comparação DYNAblast 2.0 e caso HSPT de Reddy (2003), $a/h = 10$

4.1.2. Caso Dinâmico Vibração Livre

No caso de vibração livre, Reddy (2003) também apresenta resultados. Neste contexto, é realizada a comparação dos gráficos para quando há variação da relação a/h com relação a frequência fundamental da estrutura, sendo esta manipulada para ser adimensional, ω' . Para isto, a placa estudada possui as características presentes na Tabela 5. O parâmetro calculado corresponde a frequência natural da estrutura, de forma adimensional, conforme Equação (79).

$$\bar{\omega} = \left(\frac{\omega a^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (79)$$

Onde:

- ω Frequencia natural da estrutura
- $\bar{\omega}$ Valor adimensional baseado na frequencial natural

Além das características da placa serem representadas pela Tabela 5, é importante salientar que a placa continua sendo quadrada, mesmo para uma variação de a/h , como representada pela Figura 33.

Tabela 5 - Propriedades de viga ortotrópica do tipo *cross-ply* de lâminas $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$, caso vibração livre (Reddy, 2003)

Dados	Valor
Ângulo das lâminas	$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$
E_1 / E_2	25
$G_{12} = G_{13}$	$0,5 E_2$
G_{23}	$0,2 E_2$
ν_{12}	0,25

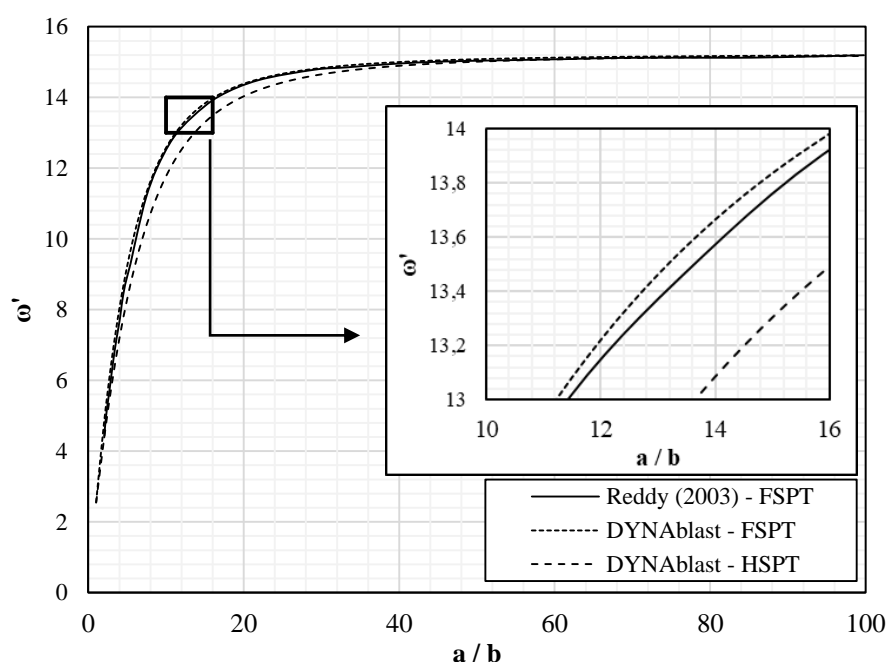


Figura 33 - Comparação DYNAblast 2.0 e Reddy (2003), caso *cross-ply* lâminas $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$

Pelo mesmo procedimento, uma segunda placa com as mesmas características da Tabela 5 é avaliada, apenas considera-se que a angulação das

lâminas seja do tipo *angle-ply* e seja constituída de apenas 2 delas. Com isso, são obtidas as curvas presentes na Figura 34.

Finalmente, como último exemplo comparativo desta seção, considera-se uma placa com as características da Tabela 6, conforme resultado da Figura 35. Com base nas respectivas imagens estudadas para o caso dinâmico – vibração livre, verifica-se uma consolidação e alta qualidade nos mesmos obtidos neste trabalho, quando comparados com os já apresentados por Reddy (2003), sendo assim os modelos estáticos e de vibração livre encontram-se devidamente calibrados.

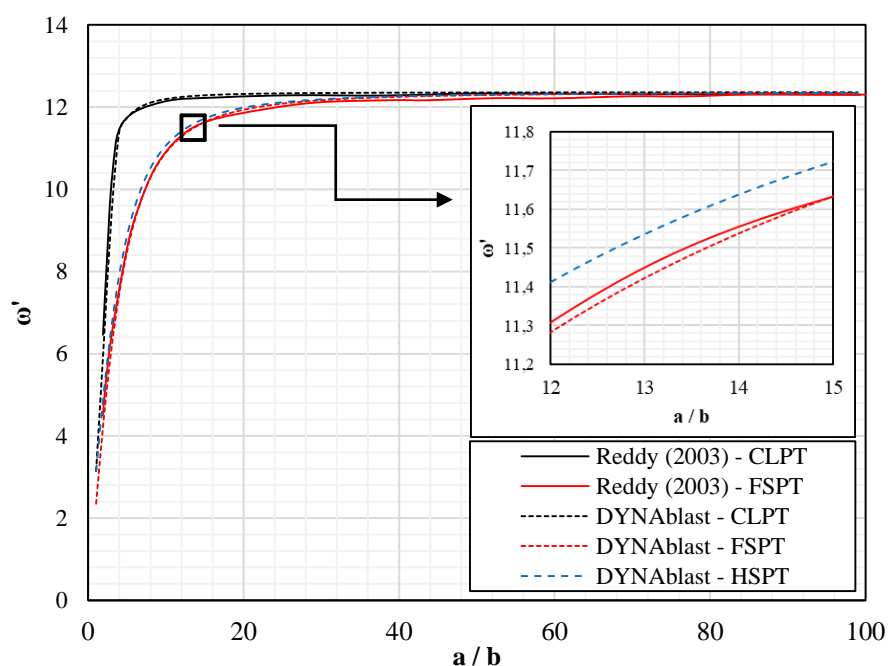


Figura 34 - Comparação DYNAblast 2.0 e Reddy (2003), caso angle-ply lâminas $-45^{\circ}/45^{\circ}$

Tabela 6 - Propriedades de viga ortotrópica do tipo *cross-ply* de lâminas $0^{\circ}/90^{\circ}$, caso vibração livre (Reddy, 2003)

Dados	Valor
Ângulo das lâminas	$0^{\circ}/90^{\circ}$
E_1 / E_2	25
$G_{12} = G_{13}$	$0,5 E_2$
G_{23}	$0,2 E_2$
ν_{12}	0,25

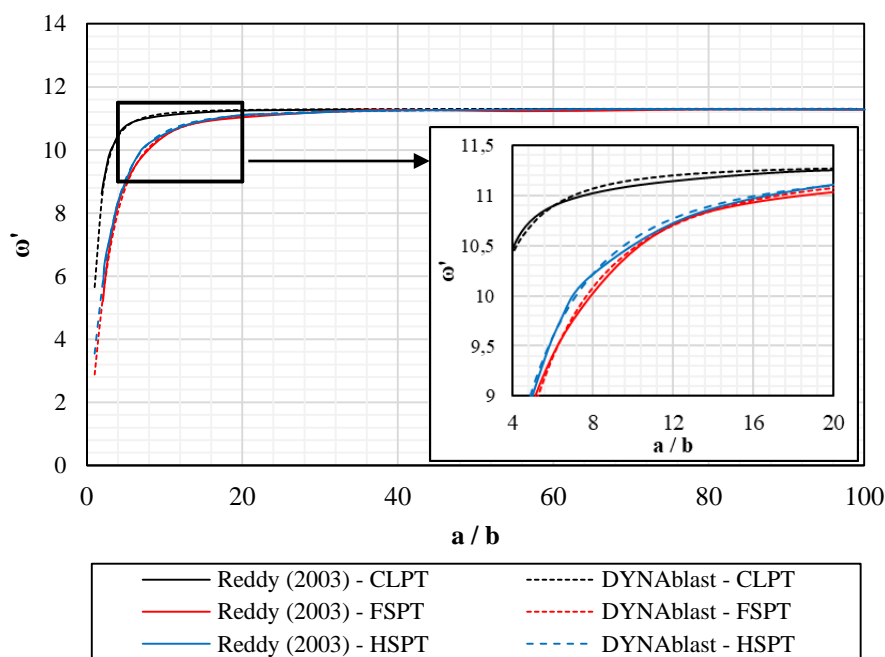


Figura 35 - Comparação DYNAblast 2.0 e Reddy (2003), caso cross-ply lâminas 0°/90°

4.2. Vigas Laminadas Compósitas SS

4.2.1. Caso Estático

Na avaliação do caso estático relacionado a vigas laminadas, a metodologia é baseada em Reddy (2003), considerando algumas adaptações para estruturas de vigas, conforme Kdheir e Reddy (1994). Para validar os resultados obtidos pelo DYNAblast 2.0, considera-se Vo *et al.* (2017) e Karamanli (2017), onde são representadas as tensões σ_{xx} e σ_{xz} . Os parâmetros são presentes na Tabela 7.

Com base nas características da Tabela 7, são apresentadas placas considerando as relações $L/h = 5$ para o caso HSPT. Inicialmente, aborda-se a validação com relação a Vo *et al.* (2017), conforme Figura 36 e Figura 37.

Ambas as apresentações das tensões da Figura 36 e Figura 37 demonstram que existe consonância entre os resultados obtidos neste trabalho com os anteriormente expostos por Vo *et al.* (2017). Na obtenção das tensões características da Tabela 7, considerou-se as equações constitutivas governantes, usualmente aplicadas em sistemas estruturais de vigas e comparou-as com os gráficos gerados por Kdheir e Reddy (1994), com base nas mesmas equações constitutivas.

Além deste resultado, pode-se avaliar o comportamento das tensões de flexão e cisalhamento na mesma viga adotada para estudo neste item, considerando a distribuição de lâminas $0^\circ/45^\circ/0^\circ$ e $0^\circ/45^\circ$, realizado por Karamanli (2017), com base na Figura 38 e Figura 39. Verifica-se, em todas as imagens referentes, que os resultados obtidos neste trabalho são coerentes com os da literatura.

Em todos estes casos de análise estática, considerou-se o uso de 8 termos da série de Fourier para melhor aproximação dos resultados com os obtidos pelas duas referências relacionadas, Vo *et al.* (2017) e Karamanli (2017). Na consideração de apenas um único termo, o comportamento da distribuição de tensões de σ_{xx} é similar aos apresentados, porém observa-se que o resultado não é satisfatório para σ_{xz} , conforme Figura 40. Nesta figura, Vo *et al.* (2017) encontra uma relação de tensão σ_{xz} igual a 0,8905, enquanto a análise realizada com um termo de série de Fourier resulta em 0,7962. Esta diferença nas tensões ocasiona um erro, em relação a Vo *et al.* (2017), de 10,59%. Assim sendo, torna-se necessário o uso de um maior número de componentes da série de Fourier para que este erro possa ser minimizado.

Tabela 7 - Propriedades de vigas ortotrópicas, caso estático (Vo *et al.*, 2017 e Karamanli, 2017)

Dados	Vo <i>et al.</i> (2017)	Karamanli (2017)
Ângulo das lâminas	$0^\circ/90^\circ/0^\circ$ e $0^\circ/90^\circ$	$0^\circ/45^\circ/0^\circ$ e $0^\circ/45^\circ$
E_1 / E_2		25
$G_{12} = G_{13}$		$0,5 E_2$
G_{23}		$0,2 E_2$
$V_{12} = V_{21}$		0,25

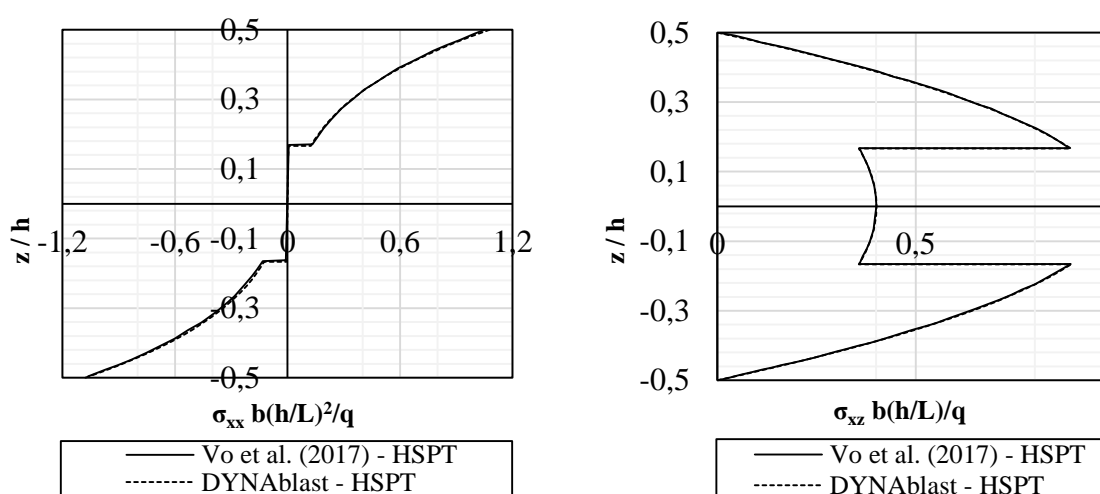


Figura 36 - Comparação DYNAblast 2.0 e Vo *et al.* (2017), caso HSPT, $L/h = 5$ e $0^\circ/90^\circ/0^\circ$

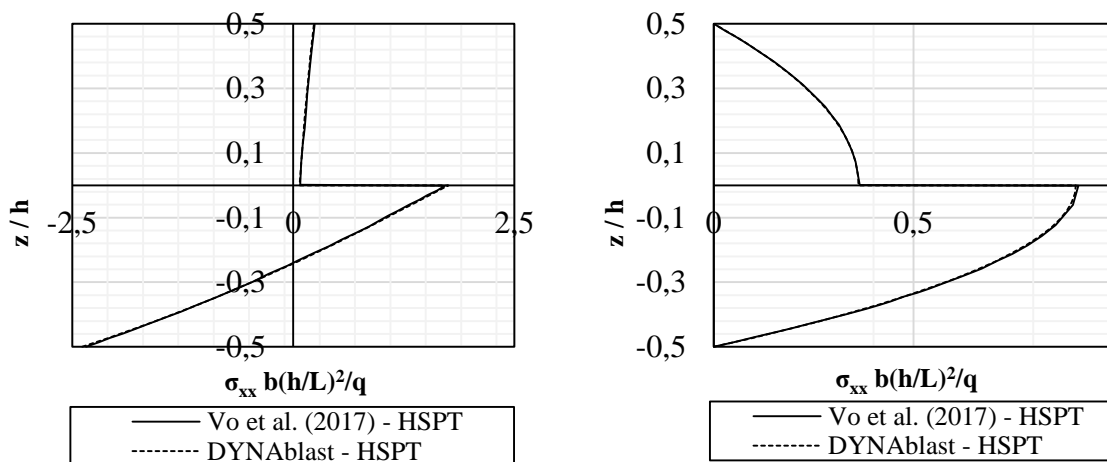


Figura 37 - Comparação DYNAblast 2.0 e Vo et al. (2017), caso HSPT, $L/h = 5$ e $0^\circ/90^\circ$

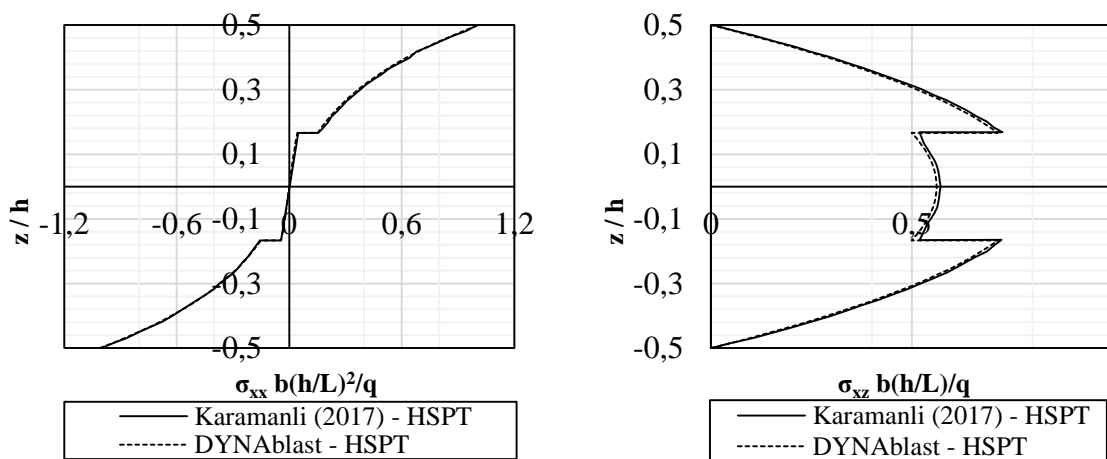


Figura 38 - Comparação DYNAblast 2.0 e Karamanli (2017), caso HSPT, $L/h = 5$ e $0^\circ/45^\circ/0^\circ$

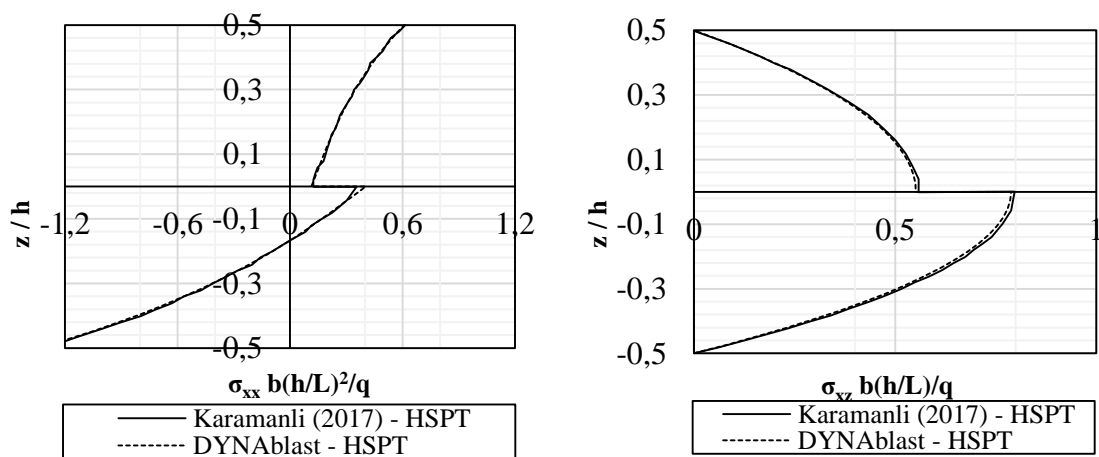


Figura 39 - Comparação DYNAblast 2.0 e Karamanli (2017), caso HSPT, $L/h = 5$ e $0^\circ/45^\circ$

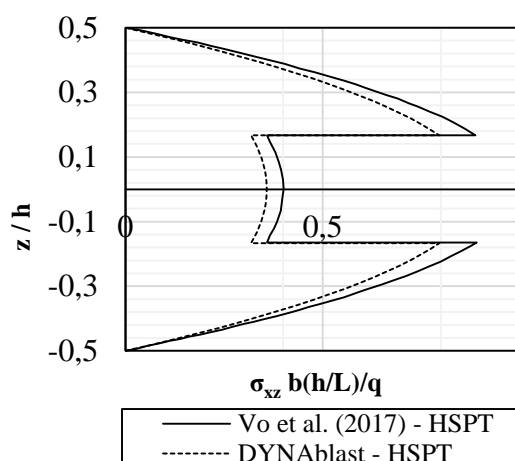


Figura 40 - Comparação DYNAblast 2.0 e Vo et al. (2017), caso HSPT, $L/h = 5$, $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ e $m = 1$

4.2.2. Caso Dinâmico Vibração Livre

Neste tópico, visa-se contemplar o comportamento de vibração livre de vigas laminadas, cujos exemplos são presentes na literatura. Assim sendo, compara-se os resultados do DYNAblast 2.0 com os de Khdeir e Reddy (1994).

Para este caso, Khdeir e Reddy (1994) realiza análises do tipo CLPT, FSPT e HSPT, considerando a estrutura uma viga laminada ortotrópica do tipo *cross-ply* constituída de várias lâminas. As características físico-geométricas da viga encontram-se na Tabela 8.

Tabela 8 - Propriedades de viga ortotrópica do tipo *cross-ply*, caso vibração livre (Khdeir e Reddy, 1994)

Dados	Khdeir e Reddy (1994)
Ângulo das lâminas	$0^\circ/90^\circ; 0^\circ/90^\circ/0^\circ; [0^\circ/90^\circ]_{10}$
L/h	5; 10
E_1 / E_2	40
$G_{12} = G_{13}$	$0,6 E_2$
G_{23}	$0,5 E_2$
ν_{12}	0,25

Ressalta-se que Khdeir e Reddy (1994) utilizaram a teoria *state space* (explicação apresentada na Nota de Rodapé 1), usual para a aplicação da teoria de Lèvi em estruturas de vigas e placas considerando diversas condições de contorno (desde que um par de lados paralelos sejam necessariamente apoiados), enquanto

neste trabalho utilizou-se as séries de Fourier para representar vigas simplesmente apoiadas, considerando $m = 3$ como número de termos. Todas as informações constam na Tabela 9.

Com base na Tabela 9, observa-se que são realizadas 18 análises comparativas, ou seja, 6 para cada teoria utilizada, considerando ainda 3 para cada relação L/h. Nisto, são averiguadas vigas laminadas considerando 2, 3 e 10 lâminas em sua constituição. Nota-se que os resultados obtidos pelo DYNAblast 2.0 são satisfatórios, visto que os erros se encontram abaixo de 0,01%.

Vale ressaltar que para a análise FSPT, considera-se que o coeficiente cisalhante de correção corresponde a $K^2 = 5/6$.

Tabela 9 - Comparação de resultados entre Khdeir e Reddy (1997) e DYNAblast 2.0

Teoria	L/h	Laminação	Khdeir e Reddy (1994) - $\bar{\omega}$	DYNAblast 2.0 - $\bar{\omega}$	Diferença (%)
HSPT	5	0°/90°	6,128	6,1285	0,008159
		0°/90°/0°	9,208	9,2084	0,004344
		[0°/90°] ₁₀	8,156	8,1557	0,003678
	10	0°/90°	6,945	6,9451	0,00144
		0°/90°/0°	13,614	13,613	0,007345
		[0°/90°] ₁₀	10,893	10,8934	0,003672
FSPT	5	0°/90°	5,953	5,9527	0,005039
		0°/90°/0°	9,205	9,2053	0,003259
		[0°/90°] ₁₀	8,139	8,1389	0,001229
	10	0°/90°	6,882	6,8826	0,008718
		0°/90°/0°	13,670	13,6698	0,001463
		[0°/90°] ₁₀	10,900	10,9003	0,002752
CPT	5	0°/90°	7,124	7,124	0
		0°/90°/0°	17,421	17,4207	0,001722
		[0°/90°] ₁₀	12,524	12,5236	0,003194
	10	0°/90°	7,269	7,2688	0,002751
		0°/90°/0°	17,632	17,6326	0,003403
		[0°/90°] ₁₀	12,680	12,6802	0,001577

4.2.3. Caso Dinâmico Vibração Forçada

Nesta etapa contempla-se a eficiência dos resultados obtidos pelo atual trabalho com relação a exemplos presentes na literatura. Assim sendo, são comparados os resultados da presente metodologia com dois autores, o primeiro

Eshraghi e Dag (2018) e o segundo por Ahmed (2018), posteriormente publicado por Ahmed et al. (2020).

4.2.3.1. Eshraghi e Dag (2018)

Eshraghi e Dag (2018) abordam a aplicabilidade do *Domain Boundary Element Method*, considerando uma análise elasto-dinâmica de vigas de Timoshenko. Desta forma, o autor discretiza o domínio de forma a determinar o número de elementos de contorno ideais para a estabelecer a resposta ideal da estrutura. Sendo assim, as características da viga são dadas conforme a Tabela 10.

Tabela 10 - Propriedades de viga isotrópicas, caso vibração forçada (Eshraghi e Dag, 2018)

Propriedade	Valor
θ	0°
E	50 GPa
G	20,8333 GPa
ν_{12}	0,2
ρ	2500 kg/m ³
K^2	5/6
a	4 m
b	0,2 m
h	0,6 m
q	100 kN/m

Considerando as características físico-geométricas da estrutura, bem como o carregamento, presentes na Tabela 10, executa-se a validação dos resultados do presente trabalho com os obtidos por Eshraghi e Dag (2018), conforme Figura 41.

Observa-se que as curvas da Figura 41 possuem uma aproximação muito satisfatória, visto que o deslocamento máximo registrado por Eshraghi e Dag (2018) (2018) é de $w = 0,003934161$ m, enquanto o presente trabalho aponta $w = 0,0039654586$ m, ocasionando um erro de 0,79%.

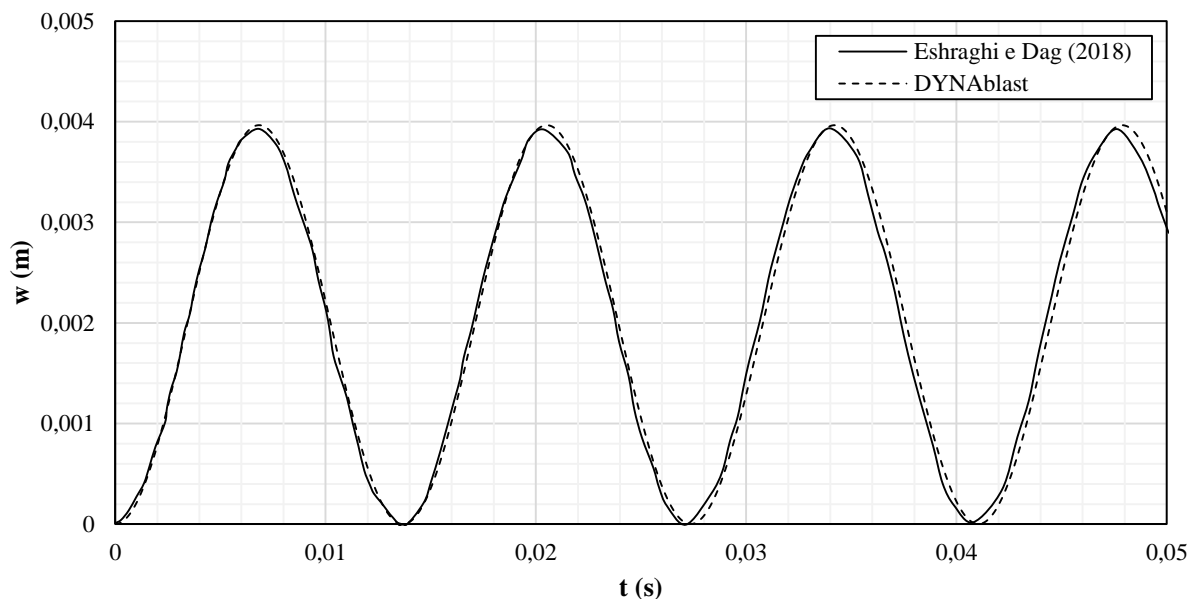


Figura 41 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga isotrópica, comparação DYNAblast 2.0 e Eshraghi e Dag (2018)

4.2.3.2. Ahmed (2018)

Ahmed (2018) e Ahmed et al. (2020) contribuem para a literatura com uma pesquisa a respeito de estruturas de vigas sendo modeladas conforme *Domain Boundary Element Method*. De forma a validar este método, ele comparou com os resultados obtidos pela Teoria de Timoshenko, além de considerar o comportamento do momento volvente em uma viga. As equações governantes são obtidas conforme o Princípio de Hamilton. Sendo assim, são apresentados o resultado referente a uma viga isotrópica de única lâmina, uma viga ortotrópica composta por 4 lâminas e uma viga ortotrópica formada por 8 lâminas. Para todos os exemplos, são considerados carregamentos uniformemente distribuídos atuando em um intervalo de tempo. Para o exemplo da viga isotrópica, são consideradas as propriedades da estrutura conforme a Tabela 11.

Considerando os dados presentes na Tabela 11, o resultado obtido por Ahmed (2018) e pelo presente trabalho são contemplados na Figura 42.

Tabela 11 - Propriedades de viga isotrópicas, caso vibração forçada (Ahmed, 2018)

Propriedade	Valor
θ	0°
E	50 GPa
G	20,8333 GPa
ν_{12}	0,2
ρ	2500 kg/m ³
k_s	5/6
a	0,2 m
b	0,02 m
h	0,016 m
q	5 kN/m

Observa-se na Figura 42 a concordância entre os resultados obtidos por Ahmed (2018) e os calculados por DYNAblast 2.0, utilizando a atual metodologia. O maior deslocamento calculado, para ambos os casos, corresponde a $w = 0,000621$ m.

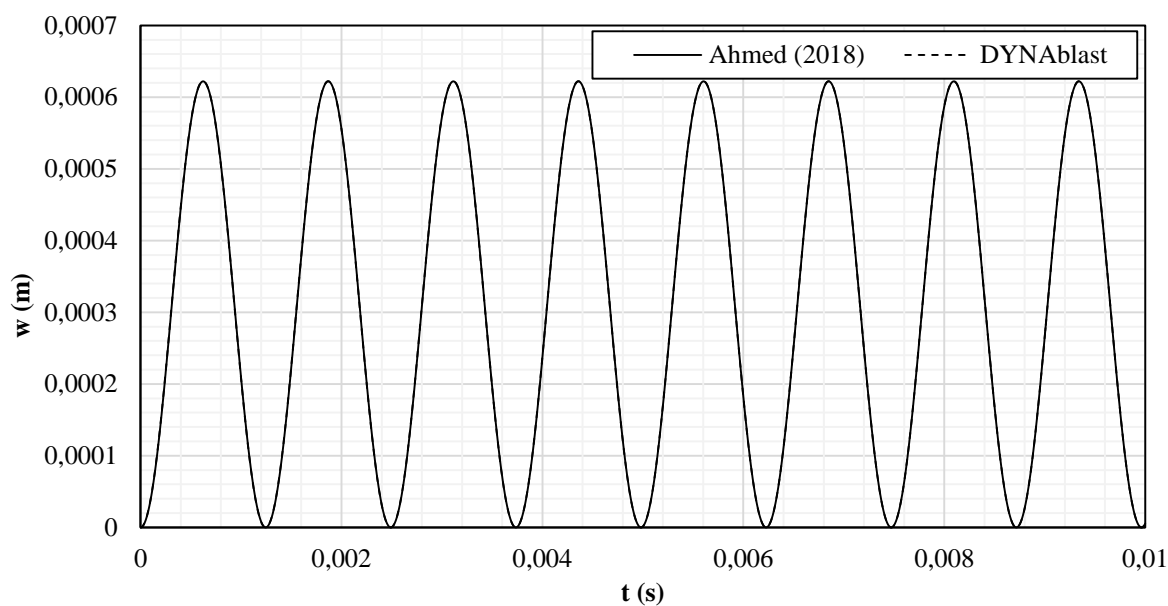


Figura 42 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga isotrópica, comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018)

Prosseguindo-se a esta análise, considera-se a validação com relação as vigas laminadas ortotrópicas. Para isto, são aplicadas as seguintes características físico-geométricas da viga, conforme Tabela 12.

Tabela 12 - Propriedades de viga ortotrópica, caso vibração forçada (Ahmed, 2018)

Propriedade	Valor
E ₁	144,8 GPa
E ₂	9.65 GPa
G ₁₂	4,14 GPa
G ₁₃	4,14 GPa
G ₂₃	3,45 GPa
v ₁₂	0,33
ρ	1389,23 kg/m ³
k _s	5/6
a	200 mm
b	20 mm
h	16 mm
q	5 kN/m

Outrossim, as propriedades presentes na Tabela 13 são aplicadas a algumas vigas laminadas testadas por Ahmed (2018). As vigas do tipo LCB₁ (*Laminated Composite Beam*, ou Viga Compósita Laminada) são compostas por 4 lâminas, enquanto as do tipo LCB₂ são formados por 8 lâminas. Ademais, os CP₁ à CP₄ são característicos por serem lâminas do tipo *cross-ply*, enquanto AP₁ à AP₄ são definidas por *angle-ply*.

Tabela 13 - Laminação das vigas ortotrópicas, Ahmed (2018)

Viga	Laminação
LCB ₁ – CP ₁	[0°/90°/0°/90°]
LCB ₁ – CP ₂	[0°/90°/90°/0°]
LCB ₁ – AP ₂	[45°/-45°/45°/-45°]
LCB ₂ – CP ₃	[0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°/90°]
LCB ₂ – CP ₄	[0°/90°/0°/90°/90°/0°/90°/0°]
LCB ₂ – AP ₃	[45°/-45°/45°/-45°/-45°/45°/-45°/45°]

Iniciando o processo de validação com LCB₁ – CP₁, de forma a comparar os resultados obtidos por Ahmed (2018) e utilizando o DYNAblast 2.0, no presente trabalho, encontra-se o comportamento conforme exposto na Figura 43. Observa-se na Figura 43 que ambas as curvas coincidem no comportamento, havendo somente uma pequena diferença de amplitudes máximas, sendo para Ahmed (2018) $w =$

0,000511988 m e para o presente trabalho tem-se $w = 0,000511741$ m, considerando um erro de 0,048%.

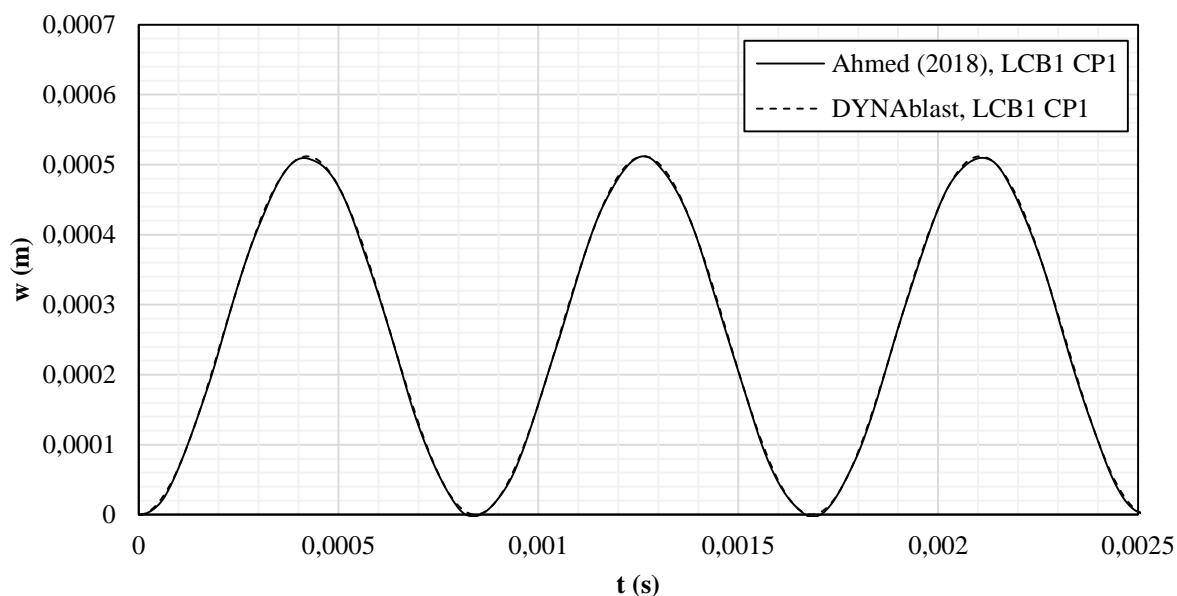


Figura 43 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB₁ - CP₁, comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018)

A segunda estrutura laminada a ser analisada corresponde ao LCB₁ – CP₂, representada pela Figura 44. Nota-se que, da mesma forma que na Figura 43, as curvas possuem uma aproximação muito satisfatória, visto que o deslocamento máximo registrado por Ahmed (2018) é de $w = 0,000289807$ m, enquanto o presente trabalho aponta $w = 0,000290266$ m, ocasionando um erro de 0,15%.

A terceira estrutura laminada é dada por LCB₁ – AP₂, conforme Figura 45. Nota-se que as curvas possuem uma aproximação muito satisfatória, visto que o deslocamento máximo registrado por Ahmed (2018) é de $w = 0,002122159$ m, enquanto o presente trabalho aponta $w = 0,002128239$ m, gerando um erro de 0,28%.

A quarta estrutura laminada é dada por LCB₂ – CP₃, conforme Figura 46. Nota-se que as curvas possuem uma aproximação excelente, visto que o deslocamento máximo registrado por Ahmed (2018) é de $w = 0,000460188$ m, enquanto o presente trabalho aponta $w = 0,000460194$ m, ocasionando um erro de 0,0013%.

A quinta estrutura laminada é dada por LCB₂ – CP₄, conforme Figura 47. Nota-se que as curvas possuem uma aproximação excelente, visto que o deslocamento máximo registrado por Ahmed (2018) é de $w = 0,000348077$ m, enquanto o presente trabalho aponta $w = 0,000348579$ m, ocasionando um erro de 0,144%.

Última estrutura laminada é dada por LCB₂ – AP₄, conforme Figura 48. Nota-se que as curvas possuem uma aproximação excelente, visto que o deslocamento máximo registrado por Ahmed (2018) é de $w = 0,00209711$ m, enquanto o presente trabalho aponta $w = 0,002097619$ m, ocasionando um erro de 0,024%.

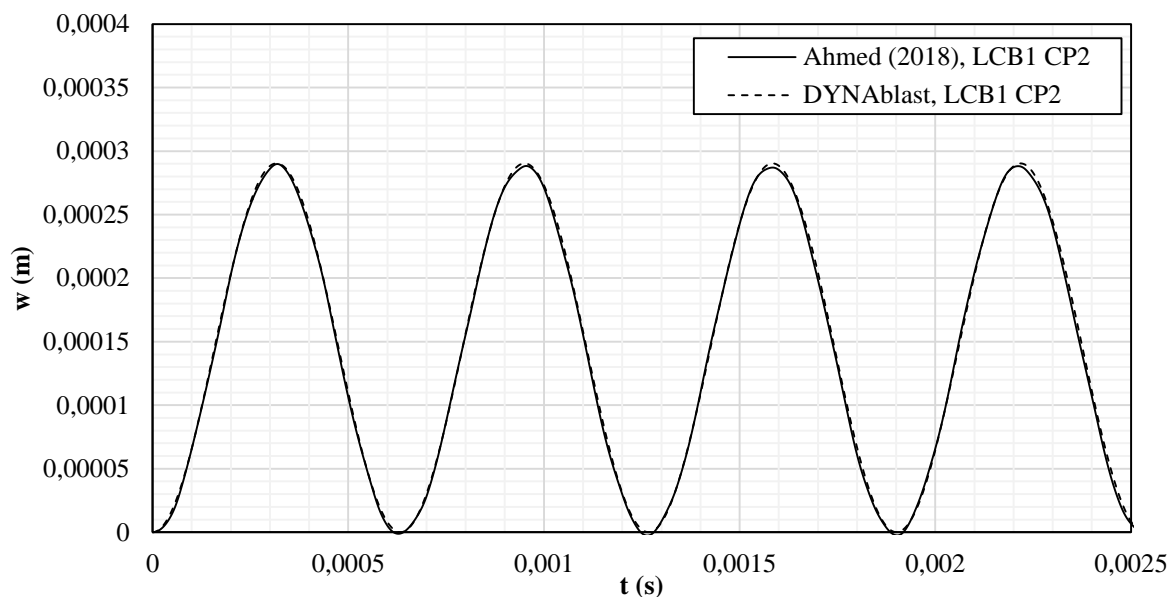


Figura 44 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB₁ - CP₂, comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018)

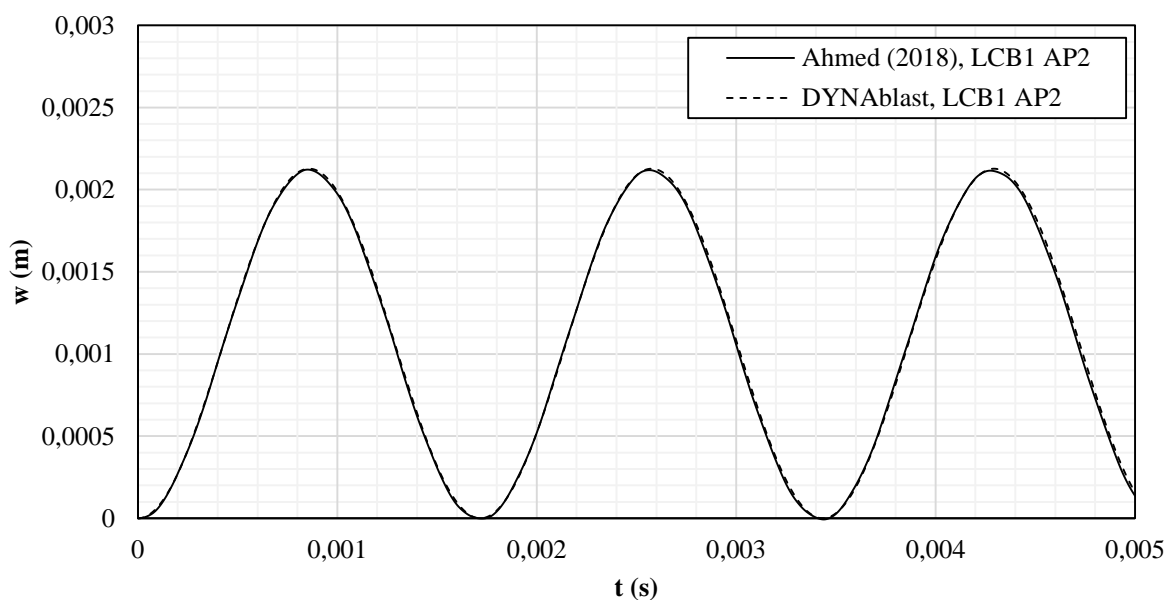


Figura 45 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB₁ - AP₁, comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018)

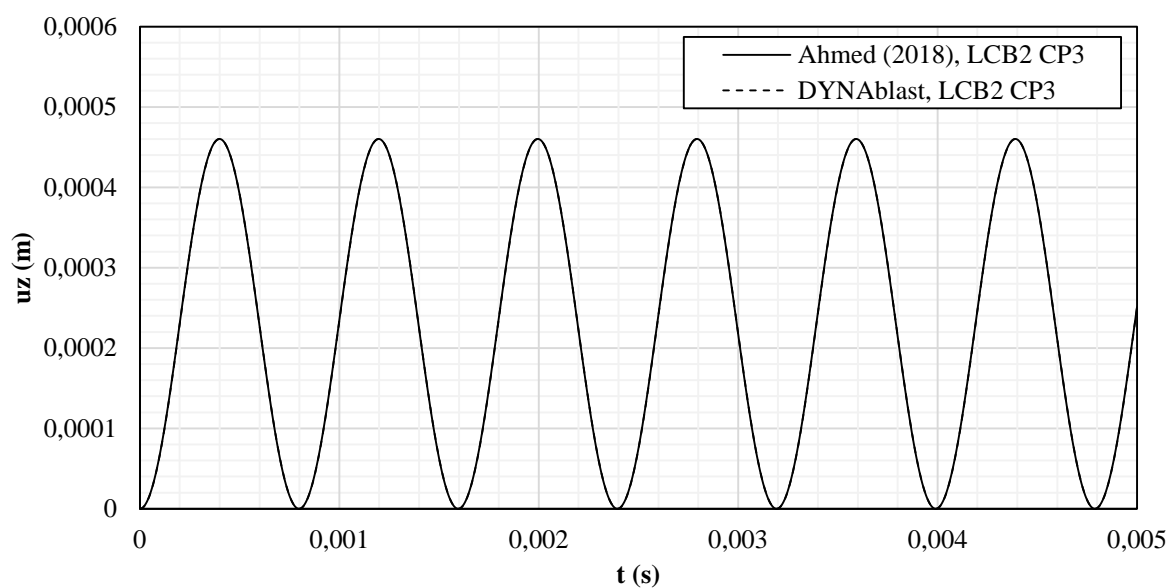


Figura 46 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB₂ - CP₃, comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018)

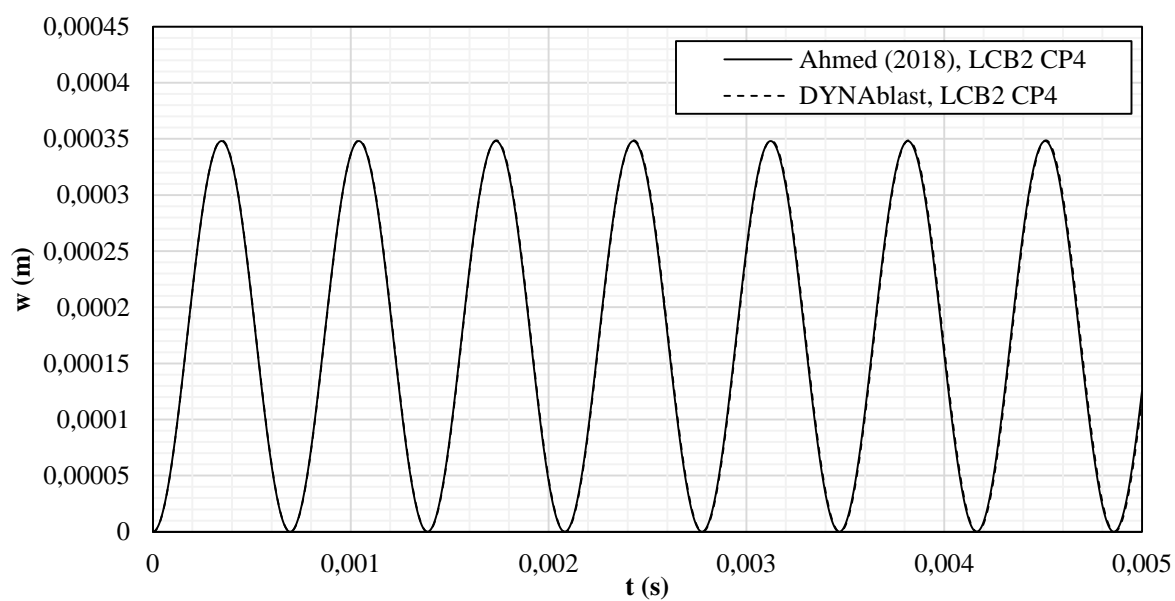


Figura 47 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB₂ - CP₄, comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018)

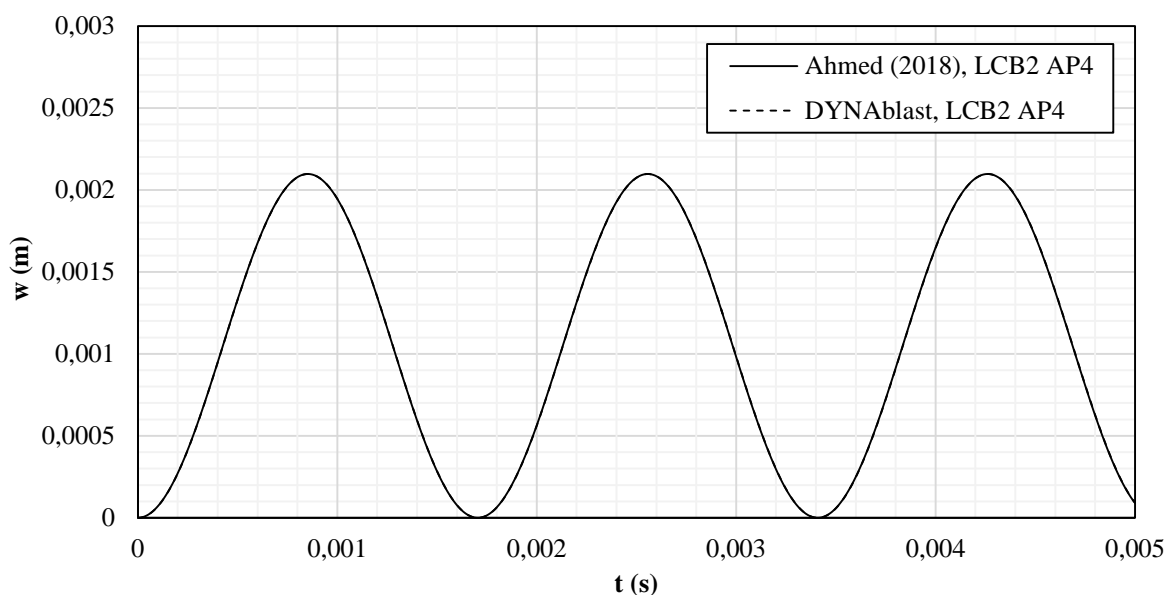


Figura 48 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo para viga LCB₂ - AP₄, comparação DYNAblast 2.0 e Ahmed (2018)

De maneira a resumir os resultados apresentados pelas Figura 42 à Figura 48, a Tabela 14 apresenta uma comparação entre as obtenções realizadas por Ahmed (2018) bem como o *software* DYNAblast 2.0. Assim sendo, em uma perspectiva quantitativa geral para os modelos isotrópico e ortotrópicos, a máxima diferença percentual de deslocamentos (metros) determinados por DYNAblast 2.0 com base em Ahmed (2018) encontra-se em 0,28%, o que é verificado um excelente resultado de calibração do *software* para vigas laminadas isotrópicas e ortotrópicas.

Tabela 14 - Comparação de resultados, viga isotrópica e ortotrópicas, entre Ahmed (2018) e DYNAblast 2.0

Modelo	Identificação	Laminação	Ahmed (2018)	DYNAblast	Diferença (%) ref.: Ahamed (2018)
Isotrópico	-	-	0,000621	0,000621	0
Ortotrópico	LCB ₁ – CP ₁	[0°/90°] ₂	0,000511	0,000511	0
Ortotrópico	LCB ₁ – CP ₂	[0°/90°/90°/0°]	0,000289	0,000290	0,346020
Ortotrópico	LCB ₁ – AP ₂	[45°/-45°] ₂	0,002122	0,002128	0,282752
Ortotrópico	LCB ₂ – CP ₃	[0°/90°] ₄	0,000460	0,000460	0
Ortotrópico	LCB ₂ – CP ₄	[0°/90°/0°/90°/ 90°/0°/90°/0°]	0,000348	0,000348	0
Ortotrópico	LCB ₂ – AP ₃	[45°/-45°/45°/-45°/- 45°/45°/-45°/45°]	0,002097	0,002097	0

4.3. Comparação: Modelos Placa e Viga Isotrópico CLPT

Em decorrência de um dos objetivos deste presente trabalho, esta seção tem por finalidade ressaltar os resultados provenientes de uma comparação de placa totalmente apoiada com sua respectiva representação como vigas biapoiadas, considerando ambas as estruturas isotrópicas e avaliando-as de acordo com a Teoria Clássica de Placas/Vigas, para uma razão entre dimensões igual a 2. Para este caso, a comparação é feita entre placas e vigas utilizando o *software* DYNAblast 2.0 e, de forma a equiparar tais formulações, é utilizado o *software* LESM (*Linear Elements Structure Model*), versão 3.0, desenvolvido pelo instituto Tecgraf/PUC-Rio (Resende *et al.*, 2023). Este *software* (LESM) permite que o usuário construa estruturas 3D por meio de elementos unidimensionais e seus nós, possibilitando a introdução de características físico-geométricas de cada elemento, aplicando a teoria linear das estruturas. Ademais, o *software* LESM foi escolhido para dar jus à comparação dos resultados por ser um programa de fácil manuseio e de rápido cálculo dos resultados, além de viabilizar análises dinâmicas utilizando como *input data* tabelas com os valores da variação do tempo e o carregamento correspondente.

Neste tópico, são utilizados por base alguns exemplos da literatura de placas laminadas compósitas ortotrópicas. Entretanto, de maneira que as comparações dos *softwares* DYNAblast 2.0 e LESM sejam válidas, tais estruturas precisam ser do tipo isotrópicas, de um único material (ou seja, não laminadas) de comportamento linear, considerando a Teoria de Euler-Bernoulli para vigas e Teoria de Kirchhoff para placas.

Assim sendo, foram selecionados 2 exemplos baseados na literatura: Librescu e Nosier (1990) e Kazancci e Mecitoglu (2008), chamados neste capítulo de “Caso 1” e “Caso 2”, respectivamente. Para estes casos, neste presente tópico, são avaliadas e comparadas estruturas de placas e vigas equivalentes com base nas características de material e carregamento utilizados pelos autores.

Um outro fator de extrema relevância corresponde na possibilidade de comparação entre uma placa e viga, de forma a avaliar o deslocamento no centro de ambas as estruturas e confrontar seus resultados, conforme prevê a literatura. Em outras palavras, com base em Kimura *et al.* (2022) as estruturas de placas isotrópicas lineares, com relação entre as dimensões geométricas $a/b \geq 2$, podem ser avaliadas da mesma forma que as vigas no que tange aos deslocamentos no centro do vão.

Assim, uma outra readaptação das estruturas estudadas pelos autores supracitados corresponde em avaliar os deslocamentos de uma placa com dimensões $a/b = 2$, conforme Figura 49.

Ademais, é importante salientar que as placas laminadas usualmente são compostas por lâminas de diferentes materiais. De forma a adaptá-las ao caso de um único material, neste tópico o número de estruturas modeladas corresponde ao mesmo número de materiais presentes utilizados na estrutura laminada, considerando apenas a espessura da lâmina composta pelo material analisado submetido ao carregamento original. Em outras palavras, considerando-se uma estrutura (placa ou viga) composta por diversas lâminas de materiais distintos, o modelo aplicado é uma estrutura de dimensões $a/b = 2$ e espessura igual ao somatório de todas as espessuras do mesmo material. Assim sendo, para cada modelo deste criado é aplicado o mesmo carregamento explosivo na estrutura original. Já as características dos materiais, de forma a adaptar para o caso isotrópico, utilizadas correspondem ao módulo de Young principal (E_1), coeficiente de Poisson ν_{12} , a densidade do material e a angulação de todas as lâminas é de 0° .

Para as análises da viga que são representativas à placa correspondente, as características físicas se mantêm as mesmas. No quesito de características geométricas, o comprimento de vão da viga possui a mesma medida do menor vão da placa e a largura da viga corresponderá a 1 metro de largura ou à largura da placa, caso este seja menor que este 1 metro, conforme. A espessura mantém-se a mesma para ambas as estruturas.

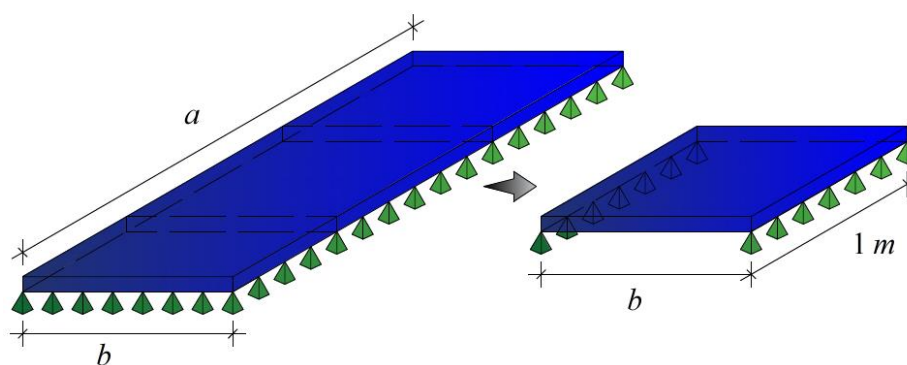


Figura 49 - Esquema de placa com razão $a/b = 2$

No que tange ao uso do *software* LESM, são modeladas vigas conforme as especificações físico-geométricas da placa, concordante com cada caso e baseado

nos conceitos da literatura para modelagem de viga de acordo com placas $a/b = 2$. Outrossim, ressalta-se que os modelos realizados no *software* LESM são todos compostos por 11 nós (incluindo os apoios), ou seja, divisão em 10 elementos e que os nós 2 ao 10 estão em concordância no quesito de recebimento do carregamento, Figura 50, já que o *software* em questão não realiza análises dinâmicas considerando carregamento distribuído. Desta forma, torna-se necessário converter o carregamento explosivo, que usualmente é aplicado uniformemente distribuído à superfície desejada, em um carregamento pontual, com base no número de nós. Assim sendo, torna-se simples esta conversão, multiplicando-se a pressão aplicada pela largura da viga, obtendo-se [N/m] e então dividindo-se pelo número de nós intermediários. Este processo é aplicado aos Casos 1 e 2, presentes nos itens 4.3.1 e 4.3.2.

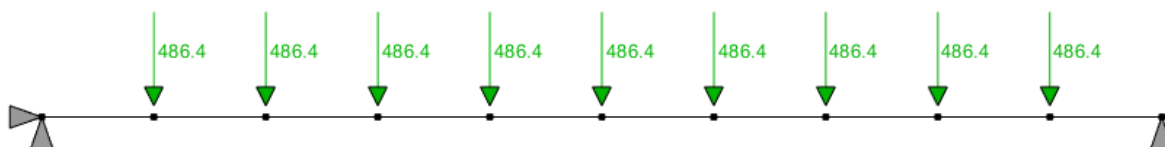


Figura 50 - Modelo de viga no *software* LESM

4.3.1. Caso 1

Neste primeiro caso é apresentada a análise de uma placa laminada simplesmente apoiada em todos os bordos, considerando os efeitos de alta ordem no cisalhamento (HSPT). Com relação ao carregamento, considerou-se o equacionamento da onda de choque como a equação de Friedlander expandida.

Desta forma, as características tanto da estrutura quanto do carregamento estão representadas pela Tabela 15, o esquema representativo da estrutura e da fonte explosiva pode ser contemplado na Figura 51 e o modelo de viga adotado para esta análise em específico é o mesmo explicitado na Figura 50. Ressalta-se que as características físicas da estrutura, bem como o carregamento aplicado, são inspirados no modelo de Librescu e Nosier (1990), com as devidas adaptações.

Tabela 15 - Propriedades físico-geométricos da estrutura e carregamento, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Dados	Valor
Número de lâminas	3
a/b	2
a	2,54 m
h	0,1693 m
E_1	13,237 GPa
ν_{12}	0,24
ρ	1389,31 kg/m ³
p_{max}	$3,447 \times 10^6$ Pa
a'	2/5/8
t_d	0,1 s

Observa-se em todas as imagens, Figura 52, Figura 53 e Figura 54, que as curvas provenientes das análises *softwares* DYNAblast e LESM são consistentes nos quesitos de deslocamentos e na frequência, na comparativa das análises das vigas de ambos os *softwares*. Além destas imagens, são apresentadas a Figura 55 e a Figura 56 como forma de comparação entre os resultados obtidos por cada estrutura, conforme a variação do coeficiente de decaimento a' . Os resultados de deslocamentos e frequências apresentam-se com excelente aproximação (para a comparação dos modelos de vigas) e as pequenas diferenças são justificadas pelo *software* LESM considerar os demais graus de liberdade na estrutura, quando comparado ao SDOF adotado pelo *software* DYNAblast, além da diferença na aproximação do carregamento distribuído como uma série de cargas concentradas. No fato de comparação entre a viga desenvolvida no LESM e a placa modelada no DYNAblast, nota-se diferenças em deslocamentos e frequências na ordem de 20%, sendo um resultado esperado, devido ao modelo de viga ser uma simplificação do modelo de placa. Detalhes sobre os resultados são contemplados nas Tabela 16 à Tabela 18.

No que tange à comparação dos resultados, para cada estrutura modelada no *software* DYNAblast, são avaliados os coeficientes de decaimento a' e averiguado a diferença com base em $a' = 2$. Observa-se uma consistência no comportamento de toda a curva, conforme apresentam-se nas Figura 55 e Figura 56. Os detalhes dos resultados podem ser observados nas Tabela 19 e Tabela 20.

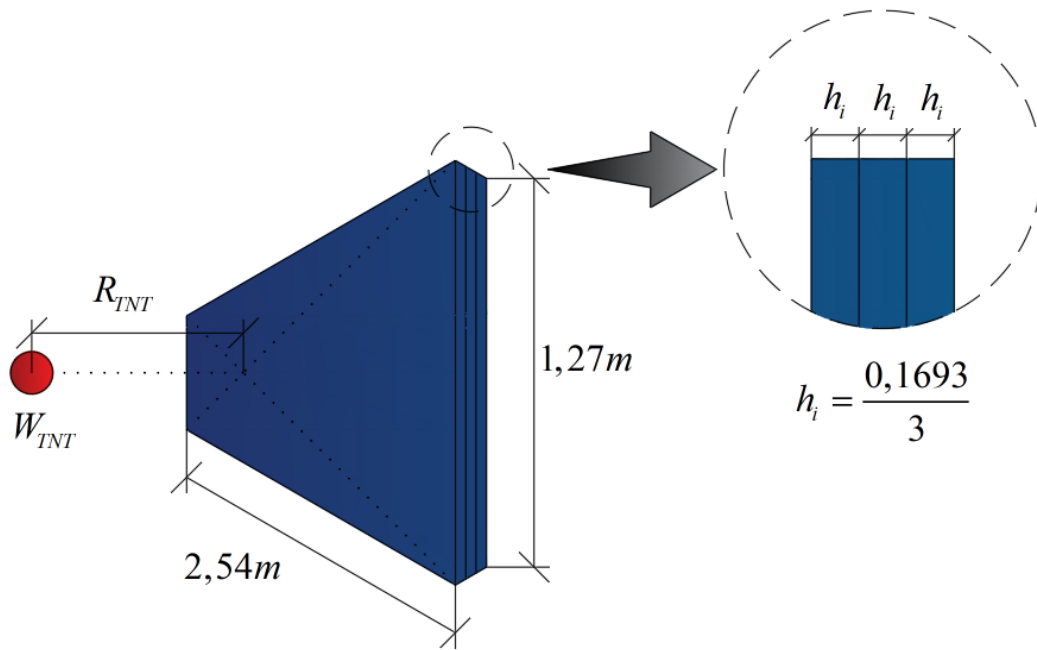


Figura 51 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

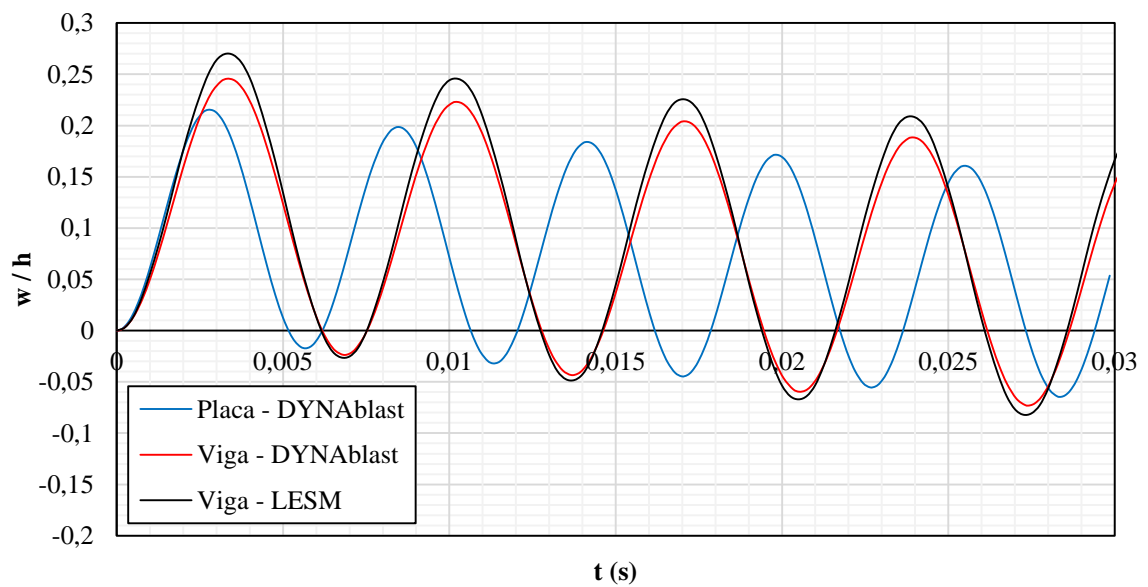


Figura 52 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para $a' = 2$ usando os softwares DYNAblast e LESM, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

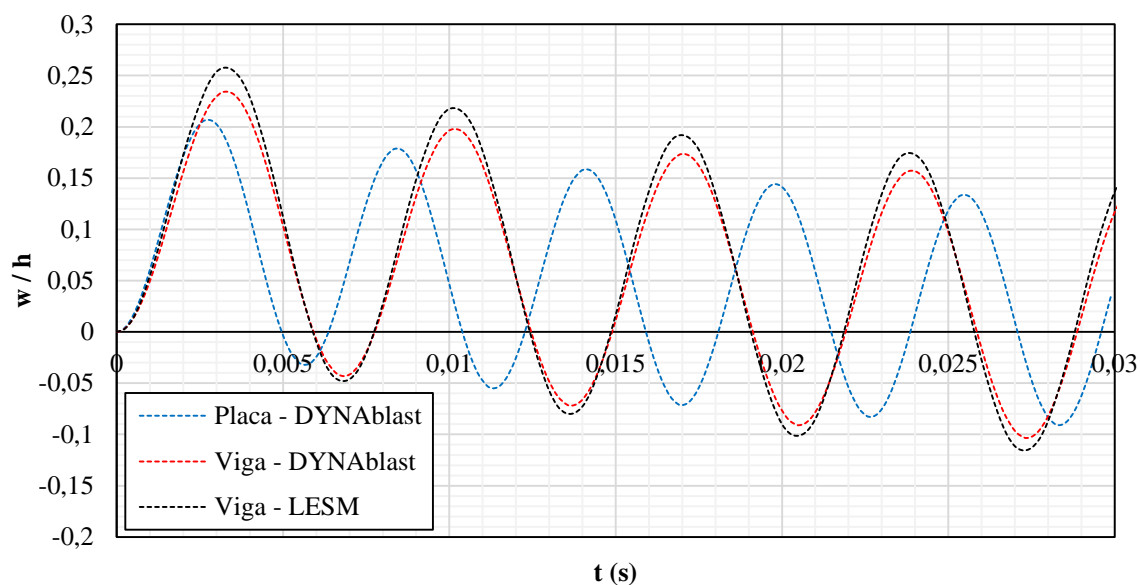


Figura 53 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para $a' = 5$ usando os *softwares* DYNAblast e LESM, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

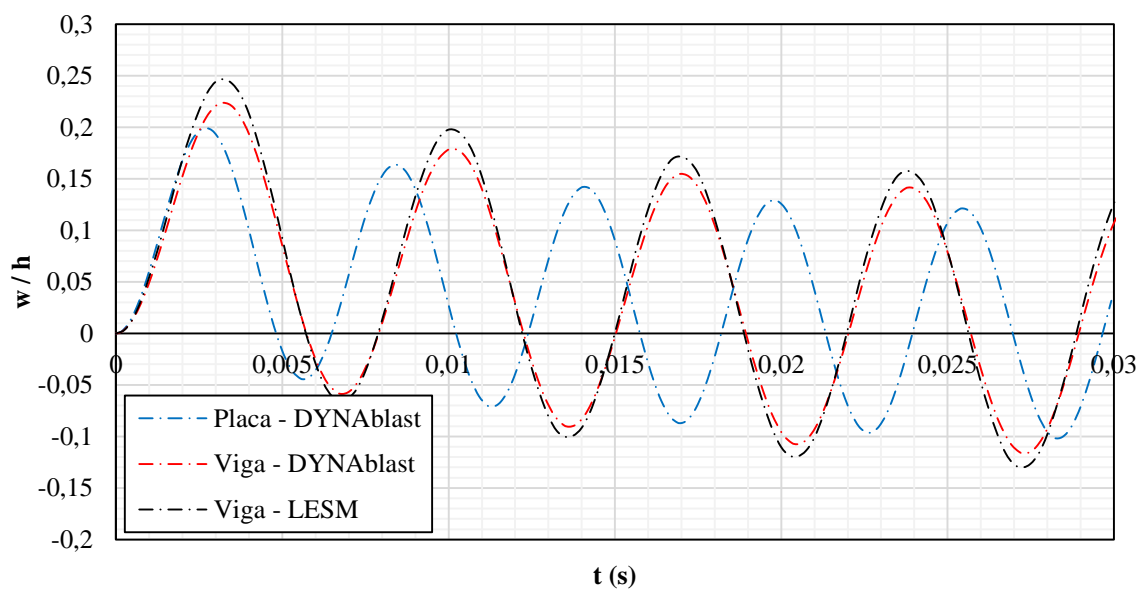


Figura 54 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para $a' = 8$ usando os *softwares* DYNAblast e LESM, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

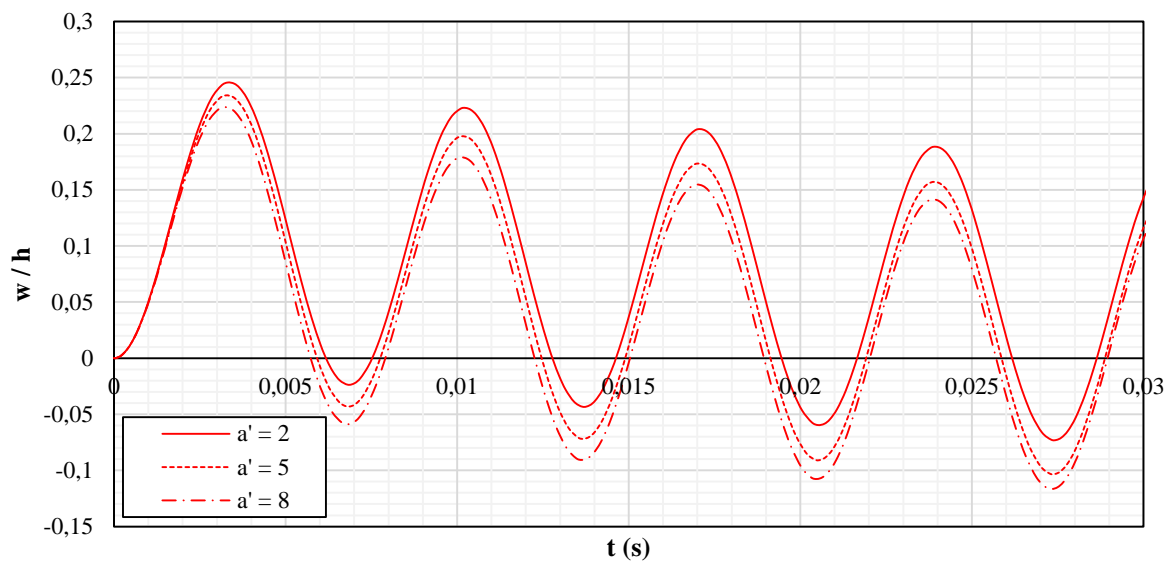


Figura 55 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander e *software* DYNAblast 2.0, estrutura de viga, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

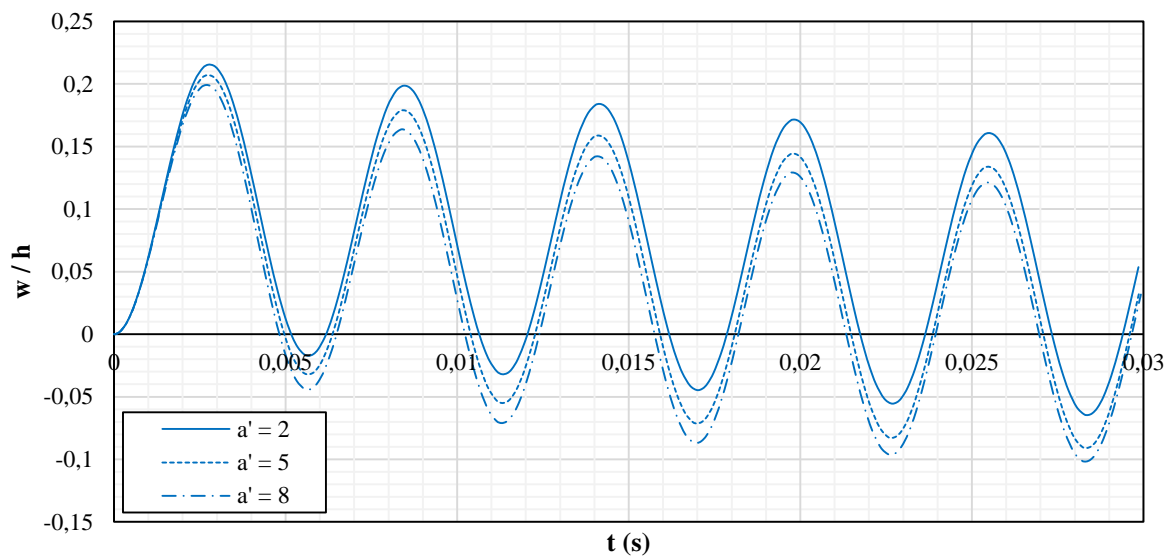


Figura 56 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander e *software* DYNAblast 2.0, estrutura de placa, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

Tabela 16 - Resultados $a' = 2$, usando os *softwares* DYNAblast 2.0 e LESM, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc.% (ref.: LESM)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:LESM)
Placa - DYNAblast	0,21534	0,00341	20,17384	173,72222	21,60555
Viga - DYNAblast	0,24561	0,00412	8,95118	144,26853	0,98797
Viga - LESM	0,26976	0,00425	-	142,85714	-

Tabela 17 - Resultados $a' = 5$, usando os *softwares* DYNAblast 2.0 e LESM, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc.% (ref.: LESM)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:LESM)
Placa - DYNAblast	0,20695	0,00338	19,71201	174,76876	22,33813
Viga - DYNAblast	0,23418	0,00406	9,14608	145,59135	1,91394
Viga - LESM	0,25775	0,00425	-	142,85714	-

Tabela 18 - Resultados $a' = 8$, usando os *softwares* DYNAblast 2.0 e LESM, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc.% (ref.: LESM)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:LESM)
Placa - DYNAblast	0,19915	0,00335	19,18995	172,80065	16,64044
Viga - DYNAblast	0,22375	0,00401	9,20965	144,71034	2,32052
Viga - LESM	0,24644	0,00425	-	148,14815	-

Tabela 19 - Resultados obtidos, usando o *software* DYNAblast 2.0, em estrutura de placa, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Placa - DYNAblast	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc.% (ref.: a' = 2)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.: a' = 2)
a' = 2	0,21534	0,00341	-	173,72222	-
a' = 5	0,20695	0,00338	3,89716	174,76876	0,60242
a' = 8	0,19915	0,00335	7,51729	172,80065	0,53049

Tabela 20 - Resultados obtidos, usando o *software* DYNAblast 2.0, em estrutura de viga, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Viga - DYNAblast	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc.% (ref.: a' = 2)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.: a' = 2)
a' = 2	0,21534	0,00412	-	144,26853	-
a' = 5	0,23418	0,00406	8,75002	145,59135	0,91691
a' = 8	0,24644	0,00425	14,44457	148,14815	2,68916

No que tange às pequenas diferenças presentes nos deslocamentos e frequências, para ambas as estruturas, entre os *softwares* DYNAblast 2.0 e LESM consiste-se na adoção de um modelo de um grau de liberdade no programa DYNAblast, enquanto o *software* LESM considera os demais graus de liberdade. Ademais, é possível determinar o fator de participação modal com base nos resultados de autovetores que são exportados pelo programa LESM, conforme Tabela 21. No quesito da determinação da matriz de massa da estrutura, é necessário identificar no código fonte do *software* onde tal matriz é calculada. Este caso é possível visto que o *download* do código fonte do programa é gratuito para usuários que possuem MATLAB instalado em seus computadores.

Para a Tabela 21, observa-se uma participação modal maior do primeiro modo de vibração sobre os demais modos. Além do mais, os 4°, 8°, 12°, 17°, 21°, 23°, 25° e 27° manifestaram também influência nas respostas, porém demasiadamente menor que o 1° modo.

Tabela 21 - Modos de vibração para o caso 1, inspirado em Librescu e Nosier (1990)

Modo	Participação Modal	Massa Efetiva	Massa Efetiva (%)
1	-0,00460	0,00002111	86,07980
2	0,00000	0,00000000	0,00000
3	0,00000	0,00000000	0,00000
4	0,00150	0,00000236	9,60910
5	0,00000	0,00000000	0,00000
6	0,00000	0,00000000	0,00000
7	0,00000	0,00000000	0,00000
8	0,00080	0,00000068	2,78370
9	0,00000	0,00000000	0,00000
10	0,00000	0,00000000	0,00000
11	0,00000	0,00000000	0,00000
12	0,00050	0,00000025	1,00230
13	0,00000	0,00000000	0,00000
14	0,00000	0,00000000	0,00000
15	0,00000	0,00000000	0,00000
16	0,00000	0,00000000	0,00000
17	-0,00030	0,00000011	0,44930
18	0,00000	0,00000000	0,00000
19	0,00000	0,00000000	0,00000
20	0,00000	0,00000000	0,00000
21	0,00010	0,00000001	0,05370
22	0,00000	0,00000000	0,00000
23	-0,00010	0,00000000	0,01790
24	0,00000	0,00000000	0,00000
25	0,00000	0,00000000	0,00360
26	0,00000	0,00000000	0,00000
27	0,00000	0,00000000	0,00050
28	0,00000	0,00000000	0,00000
29	0,00000	0,00000000	0,00000
30	0,00000	0,00000000	0,00000

4.3.2. Caso 2

Para o segundo caso de análise, também é representado um modelo de placas laminadas simplesmente apoiadas, aplicando a teoria de placas de von Karman. No quesito do carregamento explosivo, o mesmo é caracterizado pela equação de Friedlander expandida, utilizada tanto para a fase positiva quanto a negativa. As características físico-geométricas da estrutura e as propriedades da explosão são inspiradas na análise de Kazanci e Mecitoglu (2008), porém com as

devidas adaptações abordadas por este item 4.3. A imagem do modelo estrutural encontra-se na Figura 57.

Para a avaliação do deslocamento, considerou-se os dados presentes na Tabela 22. Na caracterização do carregamento, utilizou-se a equação expandida de Friedlander e todos os parâmetros necessários para a designação de tal, provenientes dos dados de entrada do usuário. Ou seja, o parâmetro como a taxa de decaimento (a') não é calculado pelo DYNAblast 2.0, sendo assim é apenas realizada a substituição dos valores na equação.

Esta simulação é breve quando comparada com as demais já apresentadas, visto que o autor original possui uma placa laminada, formada pelo mesmo material em todas as lâminas, e submetido a um único carregamento. Assim sendo, observando as Figura 59 e Figura 60, nota-se uma ótima aproximação dos resultados obtidos entre os *softwares* DYNAblast e LESM e, como mencionado anteriormente, a diferença entre as amplitudes se caracteriza pelo LESM considerar os demais modos de vibração na solução do sistema, enquanto o DYNAblast considera apenas o primeiro. Nas Figura 61 e Figura 62 são apresentados os resultados referentes à comparação entre o uso exclusivo da fase positiva com o uso também da fase negativa em ambas as estruturas. Os resultados considerando a aplicação somente da fase positiva, do carregamento de fase positiva e negativa e a comparação destes resultados para ambos os tipos de estruturas (placas e vigas), modelados no DYNAblast, são apresentados na Tabela 23 à Tabela 26.

Tabela 22 - Propriedades físico-geométricos da estrutura e carregamento, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Dados	Valor
a/b	2
a	0,22 m
h	0,00196 m
E_1	24,14 GPa
ν_{12}	0,11
ρ	1389,31 kg/m ³
p_{max}	28,9 kPa
a'	0,35
t_d	0,0018 s

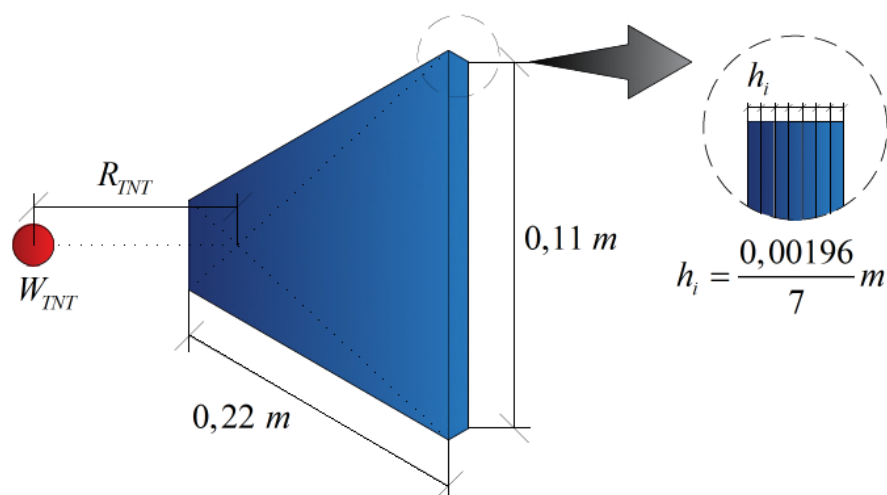


Figura 57 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Kazanci e Mecitoglu (2008)

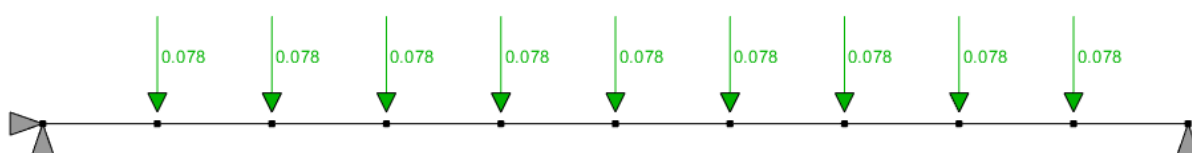


Figura 58 - Modelo de viga no *software* LESM, adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

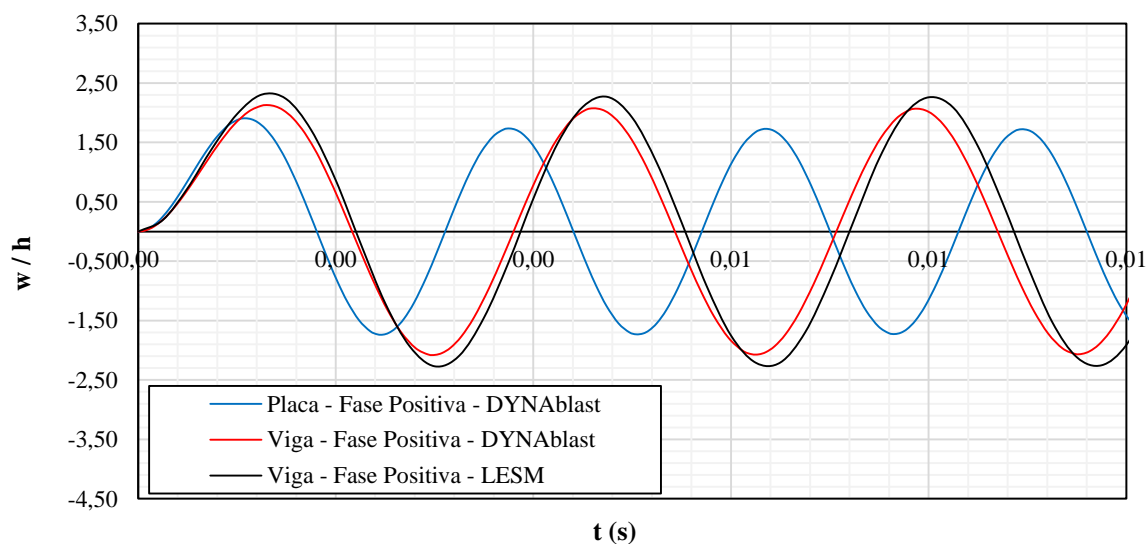


Figura 59 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para apenas a Fase Positiva usando os *softwares* DYNAbblast e LESM, estrutura de vidro, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

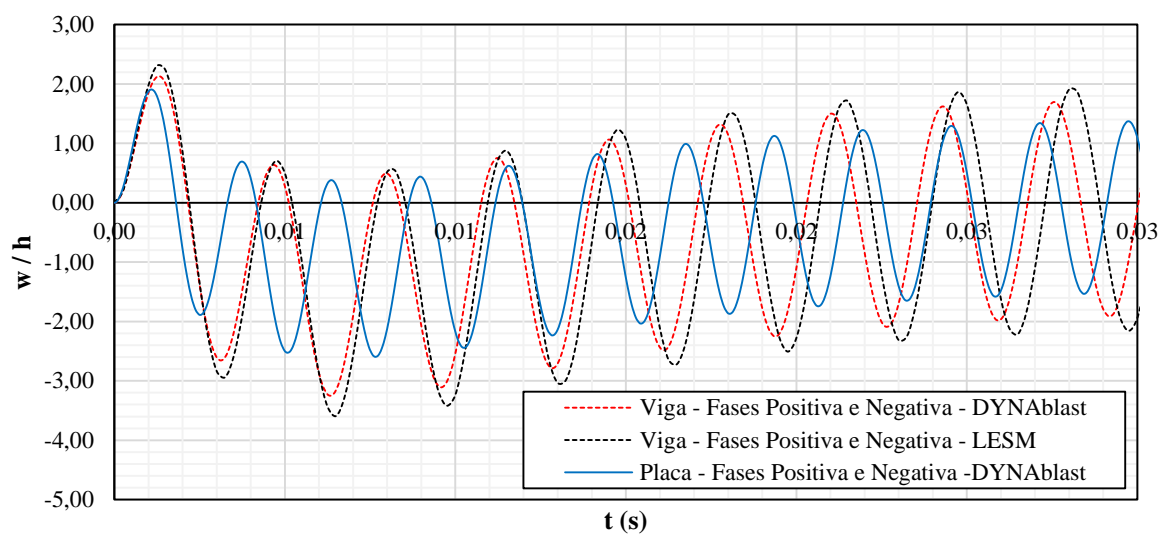


Figura 60 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para Fases Positiva e Negativa usando os *softwares* DYNAblast e LESM, estrutura de vidro, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

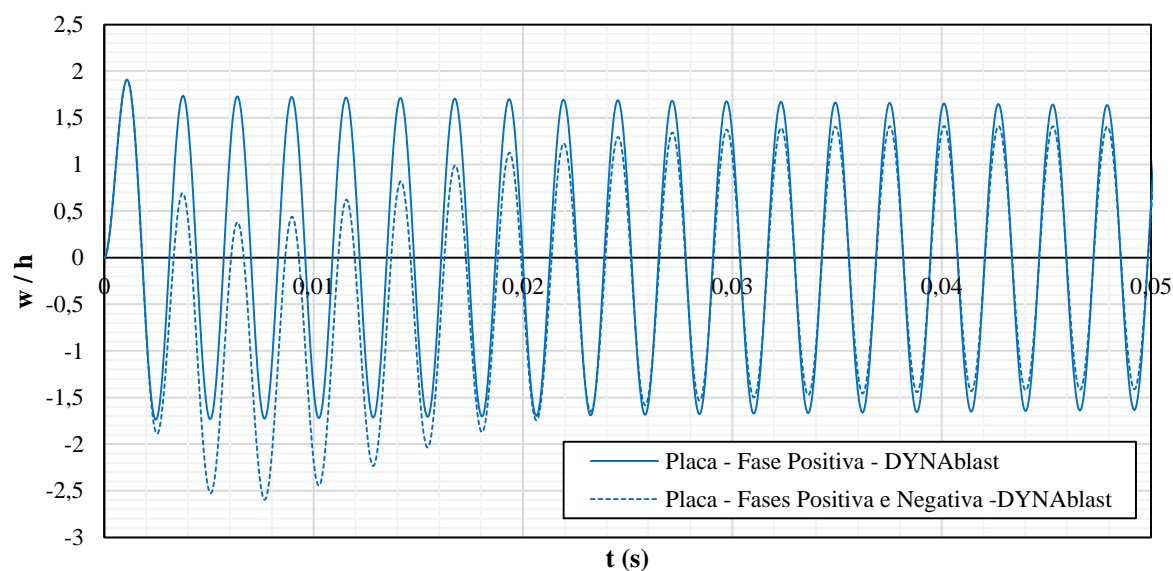


Figura 61 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre Fases Positiva e negativa, estrutura de placa de vidro, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

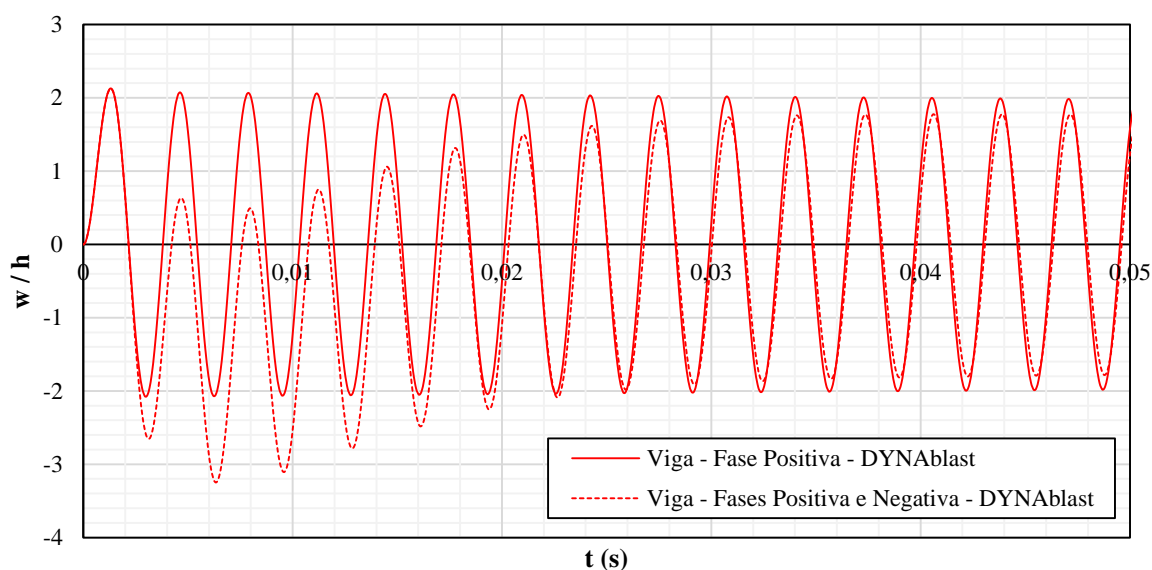


Figura 62 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre Fases Positiva e negativa, estrutura de viga de vidro, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Tabela 23 - Resultados obtidos usando equação Friedlander para apenas Fase Positiva, usando os softwares DYNAblast 2.0 e LESM, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:DYNAblast)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:DYNAblast)
Placa - DYNAblast	1,90705	0,00138	17,28331	373,87957	30,85785
Viga - DYNAblast	2,12895	0,00169	7,65852	303,98470	6,39464
Viga - LESM	2,30552	0,00225	-	285,71429	-

Tabela 24 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre o uso da Fase Positivo com Fases Positiva e Negativa, usando os softwares DYNAblast 2.0 e LESM, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:DYNAblast)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:DYNAblast)
Placa - DYNAblast	-2,59393	0,00795	27,82279	385,24427	25,20439
Viga - DYNAblast	-3,24916	0,00671	9,59088	305,83570	0,60340
Viga - LESM	-3,59384	0,00750	-	307,69231	-

Tabela 25 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre o uso da Fase Positivo com Fases Positiva e Negativa, usando o *software* DYNAblast 2.0, em estrutura de placa, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Carregamento	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Usos Fase Neg.)	Frequência (Hz)	Dif. Freq % (ref.:Usos Fase Neg.)
Fase Positiva	1,90705	0,00138	26,48031	373,87957	2,95000
Fases Positiva e Negativa	-2,59393	0,00795	-	385,24427	-

Tabela 26 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre o uso da Fase Positivo com Fases Positiva e Negativa, usando o *software* DYNAblast 2.0, em estrutura de viga, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Carregamento	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Usos Fase Neg.)	Frequência (Hz)	Dif. Freq % (ref.:Usos Fase Neg.)
Fase Positiva	2,12895	0,00169	34,47678	303,98470	0,60523
Fases Positiva e Negativa	-3,24916	0,00671	-	305,83570	-

Nas análises das participações modais referentes a presente estrutura de viga analisada, esta é realizada com base nos autovetores e matriz de massa obtidos pelo *software* LESM. Assim sendo, o fator de participação modal é calculado com base na estruturada modelada no referido programa. Tais resultados podem ser contemplados na Tabela 27 e observa-se inicialmente a supremacia da participação do primeiro modo de vibração sobre os demais modos.

Tabela 27 - Modos de vibração para o caso 1, inspirado em Kazanci e Mecitoglu (2008)

Modo	Participação Modal	Massa Efetiva	Massa Efetiva (%)
1	-9,35300E-08	8,74800E-15	87,40160
2	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
3	2,95500E-08	8,73000E-16	8,72510
4	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
5	1,58300E-08	2,51000E-16	2,50370
6	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
7	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
8	-9,49000E-09	9,00000E-17	0,89920
9	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
10	6,35000E-09	4,00000E-17	0,40270
11	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
12	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
13	-2,19000E-09	5,00000E-18	0,04800
14	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
15	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
16	1,27000E-09	2,00000E-18	0,01610
17	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
18	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
19	-5,70000E-10	0,00000E+00	0,00330
20	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
21	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
22	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
23	2,10000E-10	0,00000E+00	0,00040
24	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
25	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
26	-5,00000E-11	0,00000E+00	0,00000
27	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
28	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
29	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000
30	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000

5. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES: ANÁLISE DINÂMICA DE EXPLOSÃO, ESTUDO PARAMÉTRICO E PROPOSTA DE METODOLOGIA

Na particularidade das estruturas de placas, as ondas de choque podem ser estudadas em uma estrutura onde pode ser realizada uma análise de um sistema de um grau de liberdade. Este procedimento é amplamente utilizado por estudiosos da área, visto que resultados referentes aos deslocamentos costumam ser satisfatórios. Em uma avaliação mais aprofundada sobre a aplicação de SDOF em uma estrutura submetida a tal carregamento dinâmico, observa-se que o US Department of Defense (2018) alega que tal análise pode ser aplicada, e é recomendada, quando a estrutura possui uma geometria simples e seu material constituinte é caracterizado por estar presente no regime elástico ou possui características de elastoplástico perfeito.

Uma resposta categórica do uso do SDOF encontra-se no manual da American Society of Civil Engineers (ASCE, 2021). Neste manual afirma-se que modelos SDOF podem ser utilizados pois a energia proveniente das ondas explosivas é absorvida pelo anteparo e excita a estrutura em sua maior parte no primeiro modo de vibração. Desta forma, os resultados presentes neste trabalho, para placas e vigas, encontram-se dentro do que se denomina “estado da arte”, no que se refere à vibração de estruturas provenientes de ondas de choque.

Todos estes exemplos são comparados com exemplos presentes na literatura, à exceção de vigas laminadas com carregamento explosivo, onde não foi possível observar exemplos confiáveis na literatura. Neste caso, os resultados serão comparados com exemplos de placa que podem ter seu comportamento modelado como vigas, baseando-se na validade dos resultados observados para vigas na comparação com carregamentos estáticos e vibração livre vista no item 4.3.

Finalmente, após a comprovação da validade dos resultados em análises estáticas e dinâmicas (vibração livre), é então imposto o carregamento explosivo e comparado os resultados obtidos com exemplos de publicações de outros autores, com o auxílio do DYNAblast 2.0. Neste caso, são apresentados os resultados dos autores Librescu e Nosier (1990), Wei e Dharani (2006), Kazanci e Mecitoglu (2008), Susler et al. (2012) e Kazanci (2017), este último para bordos todos engastados.

Ademais, é importante ressaltar que este presente trabalho estuda também a colaboração da fase negativa (sucção) nas análises de vibração forçada mediante

uma explosão. Portanto, análises paramétricas são realizadas com o intuito de verificar o comportamento da estrutura à medida que parâmetros da explosão (Z e W_{TNT}) variam, tanto utilizando a fase negativa quanto somente com a fase positiva. Este procedimento é aplicado tanto para as placas laminadas quanto para vigas laminadas. Ao final, observa-se a diferença qualitativa e quantitativa do deslocamento de cada estrutura.

5.1. Placas Laminadas Compósitas SSSS e CCCC

5.1.1. Librescu e Nosier (1990)

Librescu e Nosier (1990) apresentaram uma pesquisa de análise teórica de uma placa laminada simplesmente apoiada em todos os bordos, considerando uma deformabilidade simétrica do cisalhamento, baseada em uma representação parabólica, além de efeitos de alta ordem. No quesito de solução das equações governantes, são implementados nos deslocamentos as séries de Fourier e então solucionadas com base nas transformações de Laplace. A partir disto, são associados os autovalores de frequências juntamente com a regra de Cramer para o processo de conclusão. Ressalta-se que a metodologia adotada por Librescu e Nosier (1990) não é contemplada neste presente trabalho.

Com relação ao carregamento, Librescu e Nosier (1990), neste trabalho adotou-se o equacionamento da onda de choque como a equação de Friedlander expandida. Para o caso do carregamento triangular, nada mais é do que o coeficiente de decaimento a' ser igual a zero.

Desta forma, as características tanto da estrutura quanto do carregamento estão representadas pela Tabela 28, o esquema representativo da estrutura e da fonte explosiva pode ser contemplado na Figura 63.

Em um primeiro momento, é realizada a comparação entre os resultados obtidos por Librescu e Nosier (1990) com os apresentados neste trabalho pelo DYNAblast 2.0, conforme Figura 64. Na referida figura, é realizada a comparação de 3 casos diferentes de carregamento, onde a relação a'/t_d é dada por 20, 50 e 80, considerando o período de duração da fase positiva igual a 0,1 s. Conforme o intervalo de tempo analisado por Librescu e Nosier (1990), que corresponde a 0,03 s, são

apresentados os detalhes a respeito do deslocamento máximo registrado pelo autor, bem como a comparativa com os resultados registrados pelo DYNAblast, que são contemplado na Tabela 29.

As análises paramétricas para a placa usada por Librescu e Nosier (1990) não foram realizadas. Ao calcular o valor da distância escalada Z ($m/kg^{1/3}$) e massa W (kg) que fossem representativos do carregamento utilizado, verificou-se que não há valores característicos que contemplassem todos os limites impostos.

Tabela 28 - Propriedades físico-geométricos da estrutura e carregamento, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Dados	Valor
Análise	HSPT
Número de lâminas	3
Angulação das lâminas	0°/90°/0°
a/b	1
a	2,54 m
h	0,1693 m
E_1	13,237 GPa
$E_2 = E_3$	1,0755 GPa
$G_{12} = G_{13}$	0,5653 GPa
G_{13}	0,5653 GPa
G_{23}	0,3605 GPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,24
ν_{23}	0,49
ρ	1389,31 kg/m ³
ρ_{max}	3,447 x 10 ⁶ Pa
a'	2/5/8
t_d	0,1 s

Tabela 29 - Resultados obtidos, em estrutura de placa, na comparação de Librescu e Nosier (1990) e *software* DYNAblast 2.0

Coefficiente de Decaimento	Librescu e Nosier (1990) - w/h	Tempo Decorrido (s)	DYNAblast - w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. % (ref.:DYNAblast)
$a' = 2$	0,41271	0,00417	0,42635	0,00390	3,20080
$a' = 5$	0,38800	0,00410	0,40348	0,00381	3,83653
$a' = 8$	0,36824	0,00313	0,38291	0,00375	3,83195

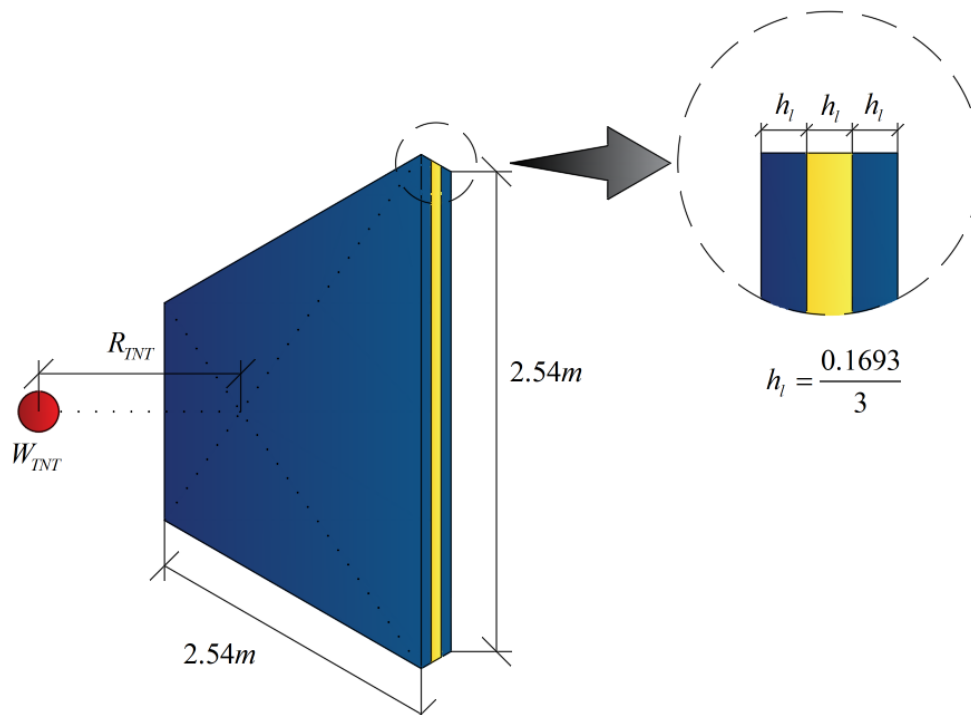


Figura 63 - Esquema representativo placa e fonte explosiva (Libresco e Nosier, 1990)

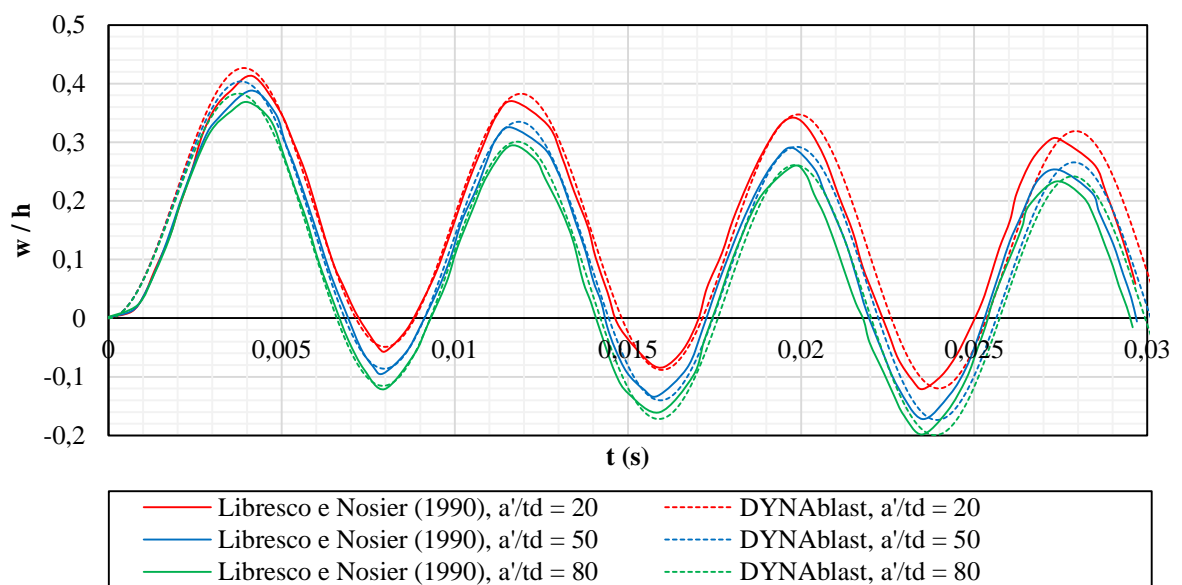


Figura 64 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo, comparação DYNAblast 2.0 e Libresco e Nosier (1990)

5.1.2. Wei e Dharani (2006)

Wei e Dharani (2006) apresentam um estudo a respeito de placas laminadas, na caracterização de placas sanduiche, compostas pelas camadas externas de vidro e a lâmina interna ser do tipo PVB (polivinil butiral). As propriedades do vidro e do PVB, bem como do carregamento aplicado, encontram-se na Tabela 30. Ressalta-se que o vidro é modelado com base em um material elástico linear. Já o PVB, no estudo realizado por Wei e Dharani (2006), é modelado com base em um material viscoelástico, porém como a estrutura é submetida a um carregamento muito curto (explosão), este material pode ser considerado também como elástico linear, com base no chamado módulo vítreo G_0 e no módulo de volume K_0 . Para o carregamento, Wei e Dharani (2006) consideraram a equação de Friedlander expandida como caracterização das ondas de choque.

Ainda assim, os dois materiais são considerados elásticos, particularmente ao fato de o PVB não variar seu comportamento mediante carregamentos de curta duração. Ademais, para angulação das fibras, considerou que todas estão a 0° com relação ao eixo coordenado.

O processo de solução adotado por Wei e Dharani (2006) corresponde na formulação da placa considerando somente os deslocamentos verticais, podendo ser considerados para pequenos ou grandes deslocamentos, com a possibilidade de seguir a metodologia de Feldgun *et al.* (2016). Para a presente pesquisa, compara-se os resultados obtidos por Wei e Dharani (2006) com os obtidos pela metodologia apresentada neste trabalho. Ademais, um esquema representativo da geometria da estrutura, bem como a distância da fonte explosiva à placa, encontra-se na Figura 65.

Observa-se na Figura 66 que a segunda meia onda determinada por Wei e Dharani (2006) encontra-se com uma relação w/h menor com relação aos encontrados pela atual metodologia. Neste caso, os resultados de deslocamentos máximos registrados por Wei e Dharani (2006) e pelo *software* DYNAblast são apresentados pela Tabela 31. Na última coluna da referida tabela, é calculado o erro porcentual dos deslocamentos máximos registrados com relação ao Caso Não Linear (NL) determinado por Wei e Dharani (2006).

Ademais, é possível calcular a diferença com relação ao tempo em que ocorreram os picos e vales para com relação a curva [1]. Desta forma, a Figura 66

apresenta que a [3] possui um erro de 3,09% no tempo de decorrência dos picos das duas ondas. Com relação aos vales, a diferença no tempo decorrido corresponde a 6,99%. Com isso, com base nos resultados apresentados, conclui-se que os resultados são condizentes com os determinados por Wei e Dharani (2006).

Tabela 30 - Propriedades físico-geométricos da estrutura e carregamento, caso adaptado de Wei e Dharani (2006)

Dados	Vidro	PVB
$a \times b$	1	
h_i	0,00476 m	0,00152 m
$E_1 = E_2$	72 GPa	0,98 GPa
$G_{12} = G_{13} = G_{23}$	28,8 GPa	-
G_0	-	0,33 GPa
K_0	-	20 GPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,25	0,4918
ρ	2500 kg/m ³	1100 kg/m ³
ρ_{max}	6894,8 Pa	
t_p	0,0077 s	
a'	0,55	

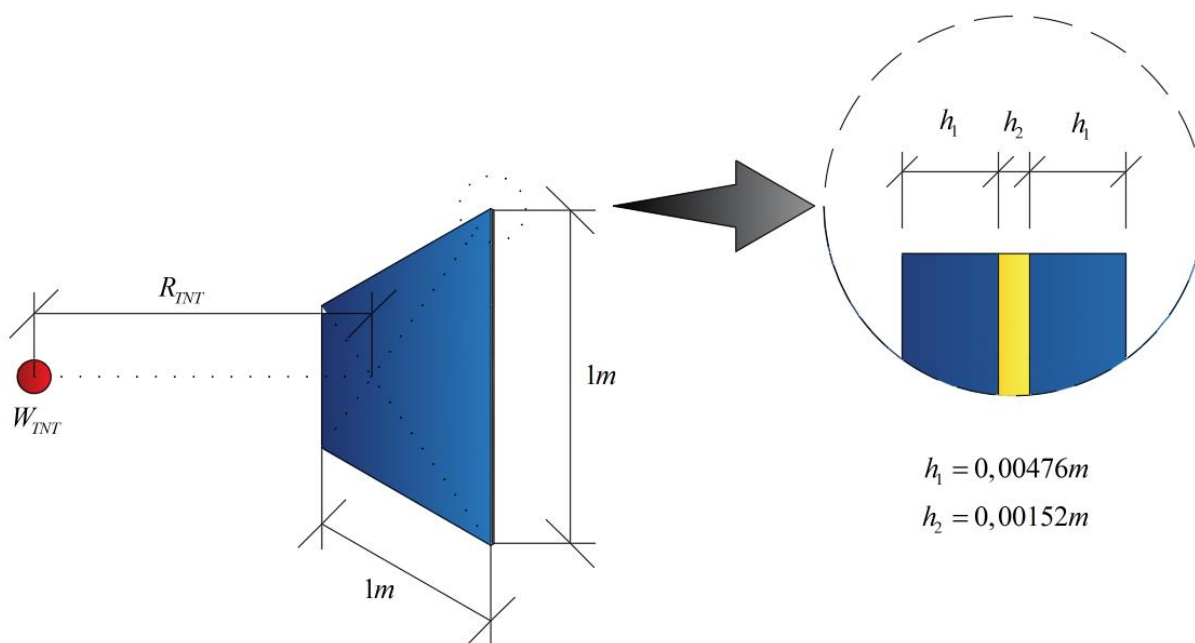


Figura 65 - Esquema representativo placa e fonte explosiva (Wei e Dharani, 2006)

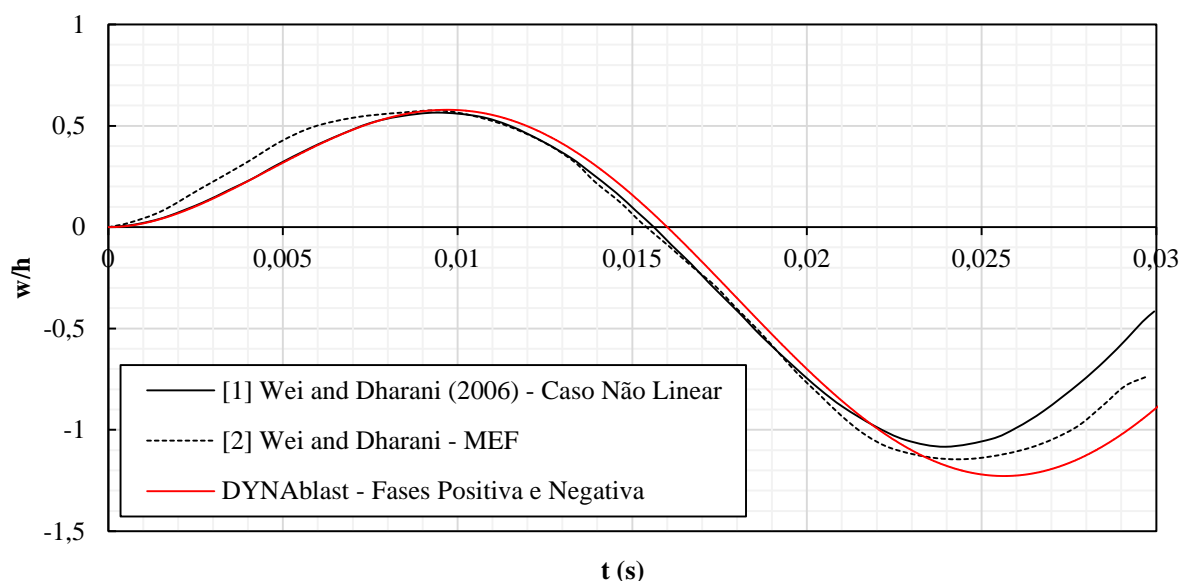


Figura 66 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo, comparação DYNAblast 2.0 e Wei e Dharani (2006)

Tabela 31 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, na comparação de Wei e Dharani (2008) e DYNAblast 2.0

Análise	Wei e Dharani (2006)	DYNAblast - w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. % ref.:Wei e Dharani (2006) NL
Caso Não Linear	-1,08322	-	0,01269	-
MEF	-1,13925	-	0,01119	5,17241
HSPT	-	-1,22748	0,02564	13,31797

Para a análise de variação da massa de TNT aplicado e distância escalar, utilizou-se o *Solver* do Excel de forma que pudesse encontrar valores ideais destes parâmetros com base nas informações de carregamento presentes na Tabela 30. Desta forma, os resultados obtidos foram de $W_{\text{TNT}} = 2,62 \text{ kg}$ e $Z = 23,168 \text{ m/kg}^{1/3}$. Este procedimento utiliza uma função do *software* Excel para otimizar as soluções de problemas matemáticos conforme as restrições impostas pelo usuário e as equações governantes. Neste caso, coloca-se como restrição os parâmetros da carga explosiva (p_{max} , p_{min} , t_d , t_m), já com seus valores definidos. As equações governantes como sendo Equações (63) à (72). Por fim, a restrição de que Z e W_{TNT} sejam maiores que zero. Ao prosseguir com o cálculo de valores ideais de Z e W_{TNT} , o *Solver* utiliza as equações governantes para calcular os parâmetros de explosão e compará-los com a restrição imposta pelo usuário. O *Solver* pode ou não encontrar uma solução ótima.

Isto pode ocorrer devido ao número de equações não lineares determinadas como equações governantes. Sendo assim, o usuário deve avaliar se as restrições impostas são coerentes ou de um tanto limitadas, forçando-se a flexibilizar alguma(s) desta(s) de forma a viabilizar o cálculo de uma solução ideal.

É avaliado o comportamento da estrutura considerando que o deslocamento seja estudado conforme a variação da distância escalar, para diversos valores de massas de TNT, apresentando os deslocamentos nas Figura 67 e Figura 68. Os valores determinados para $Z = 23,168 \text{ m/kg}^{1/3}$ são apresentados pela Tabela 32, juntamente com uma diferença percentual com relação à $W_{\text{TNT}} = 2,62 \text{ kg}$.

Ademais, Figura 67 e Figura 68 apresentam um comportamento semelhante da estrutura para quando é submetida a carregamentos explosivos entre $W_{\text{TNT}} = 10 \text{ kg}$ e $W_{\text{TNT}} = 100 \text{ kg}$. Claro que para massas abaixo de 10 kg o comportamento se assemelha, porém somente a partir $Z = 10 \text{ m/kg}^{1/3}$. Desta forma, com base nesta recorrência, pode-se determinar uma equação característica dessa placa, ou seja, uma relação entre w/h , Z e W_{TNT} , onde Z e W_{TNT} são os dados de entrada para a determinação da equação de deslocamento desta estrutura. Assim sendo, a expressão representativa da placa de Wei e Dharani (2006) é dada pela Equação (80).

A Equação (80) apresenta o comportamento principal das curvas expostas nas Figura 67 e Figura 68, verificando um polinômio de 5° grau e as recorrências dos coeficientes de cada parâmetro Z^i são bem representados por polinômios de 3° grau. O processo de determinação da Equação (80) é exposto no item 5.3.

Com base nos resultados apresentados pelas Figura 67 e Figura 68, averigua-se que para o caso em específico da estrutura de Wei e Dharani (2006), as diferenças dos deslocamentos são consideráveis, para variados W_{TNT} . Este processo depende da intensidade da carga bem como das características físico-geométricas da placa.

Da mesma forma, é considerada uma avaliação para $|w/h|$ com relação a W_{TNT} para diferentes valores de Z , conforme Figura 69. Conforme esperado, menores valores de distâncias escalares Z ($\text{m/kg}^{1/3}$) apresentam os maiores deslocamentos e, conseqüentemente, relações $|w/h|$, independentemente do valor da massa TNT.

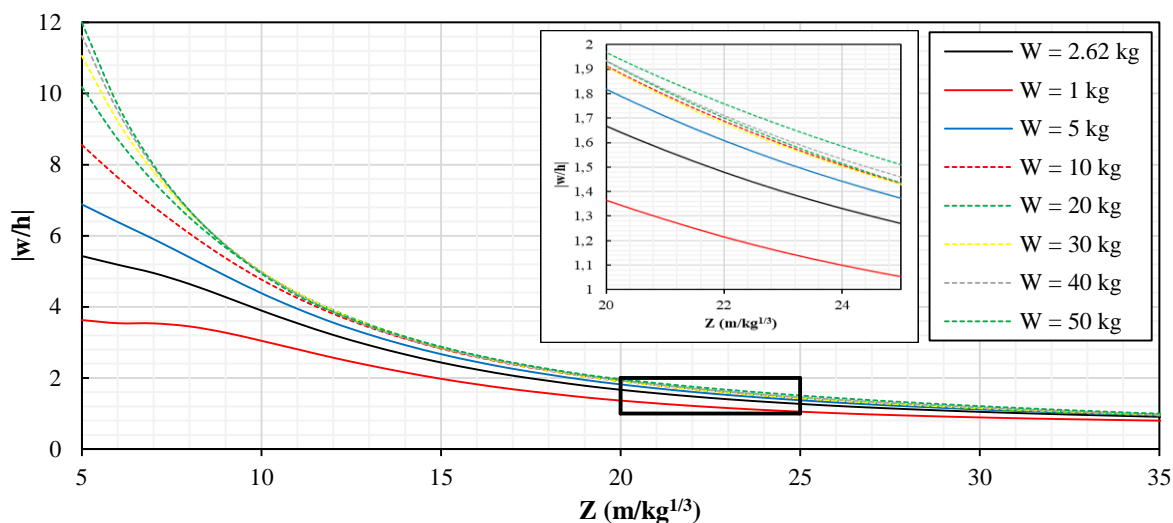


Figura 67 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ para baixas e moderadas massas de TNT usando *software* DYNAblast 2.0, caso Wei e Dharani (2006)

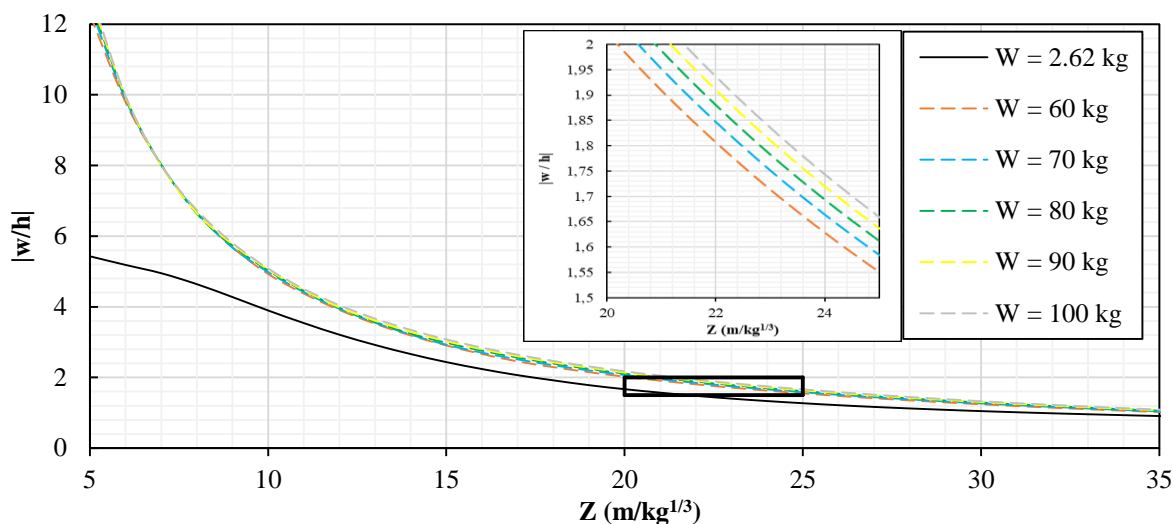


Figura 68 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ para moderadas e altas massas de TNT usando *software* DYNAblast 2.0, caso Wei e Dharani (2006)

Observa-se que todos os resultados apresentados, Figura 66 à Figura 69 são os resultados referentes às mesmas características da placa exibida pela Tabela 30, ou seja, a consideração de todo o comportamento da onda de choque. Conforme Reis *et al.* (2022), é de suma importância avaliar a estrutura considerando ou não a fase negativa de forma a averiguar qual dos dois casos ocasiona efeitos mais devastadores à estrutura. Desta forma, da mesma maneira que a Figura 66, são apresentados os deslocamentos da estrutura de Wei e Dharani (2006), considerando ou não todo o comportamento do carregamento explosivo, conforme Figura 70.

Tabela 32 - Resultados obtidos de deslocamento para $Z = 23,168 \text{ m/kg}^{1/3}$, uso do *software* DYNAblast 2.0

W_{TNT}	$ w/h $	Dif. (%) ref.: $W_{TNT} = 2,62 \text{ kg}$
2,62	1,38911	0,00000
1	1,14376	17,66278
5	1,50761	8,53062
10	1,57858	13,63950
20	1,58694	14,24146
30	1,57143	13,12471
40	1,60191	15,31870
50	1,65461	19,11292
60	1,69939	22,33612
70	1,73653	25,01020
80	1,76816	27,28662
90	1,79560	29,26256
100	1,81979	31,00389

$$\frac{w}{h} = aZ^5 + bZ^4 + cZ^3 + dZ^2 + eZ + f$$

Onde:

$$\begin{aligned} a &= -3,670 \cdot 10^{-12} W_{TNT}^3 + 1,145 \cdot 10^{-9} W_{TNT}^2 - 1,369 \cdot 10^{-7} W_{TNT} + 1,122 \cdot 10^{-6} \\ b &= 5 \cdot 10^{-10} W_{TNT}^3 - 1 \cdot 10^{-7} W_{TNT}^2 + 2 \cdot 10^{-5} W_{TNT} - 0,0001 \\ c &= -2 \cdot 10^{-8} W_{TNT}^3 + 7 \cdot 10^{-6} W_{TNT}^2 - 0,0008 W_{TNT} + 0,0045 \\ d &= 6 \cdot 10^{-7} W_{TNT}^3 - 0,0002 W_{TNT}^2 + 0,0175 W_{TNT} - 0,0631 \\ e &= -7 \cdot 10^{-6} W_{TNT}^3 + 0,0019 W_{TNT}^2 - 0,1908 W_{TNT} - 0,1046 \\ f &= 4 \cdot 10^{-5} W_{TNT}^3 - 0,0089 W_{TNT}^2 + 0,8027 W_{TNT} + 8,5545 \end{aligned} \quad (80)$$

Na Figura 70 são geradas pelo *software* DYNAblast 2.0, Reis et al. (2022b), as curvas de carregamento considerando somente a fase positiva em comparação com a inclusão da fase negativa. A comparação dos deslocamentos máximos é observada na Tabela 33, analisando que, para o caso em específico, a negligência do uso da fase negativa acarreta uma diferença nos deslocamentos máximos de até 57,94%.

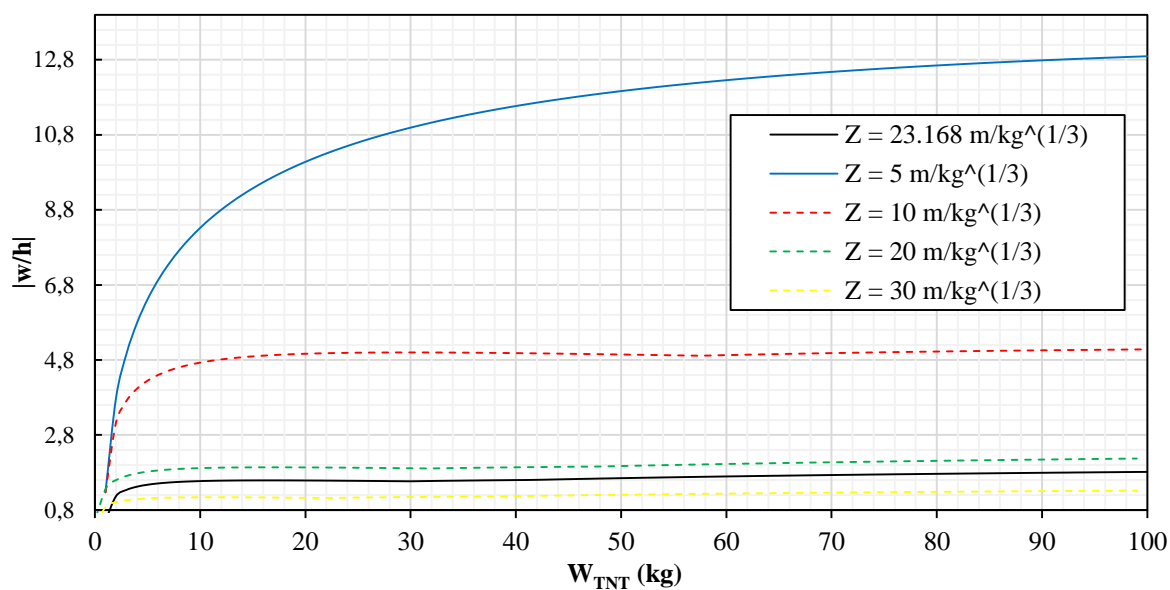


Figura 69 - Comportamento na análise W_{TNT} x w/h para diferentes valores de Z usando software DYNAblast 2.0, caso Wei e Dharani (2006)

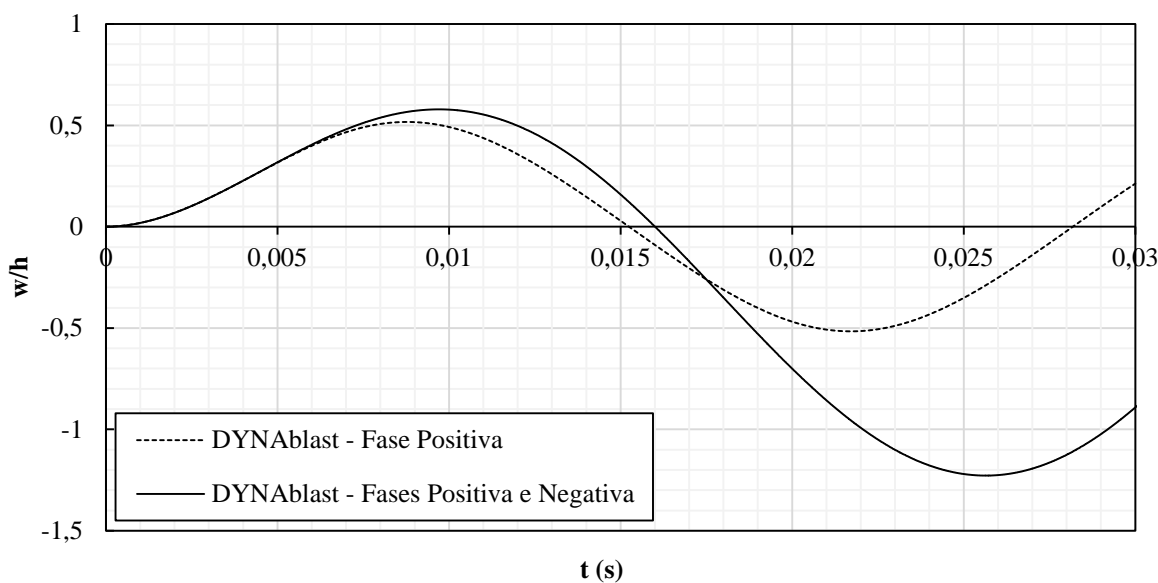


Figura 70 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo usando o software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Wei e Dharani (2006)

Não obstante, uma análise de relação Z x $|w/h|$ comparando os dois casos (considerando ou não a fase negativa) é de grande importância de forma a compreender se os maiores deslocamentos são representados pelo uso da fase negativa, de forma geral, ou se foi uma característica particular detectada com os

parâmetros usados com base na Tabela 30. Desta forma, considerando que a distância escalada equivalente desta solicitação seja $Z = 23,168 \text{ m/kg}^{1/3}$, o deslocamento da estrutura para a variação de Z é apresentado pela Figura 71.

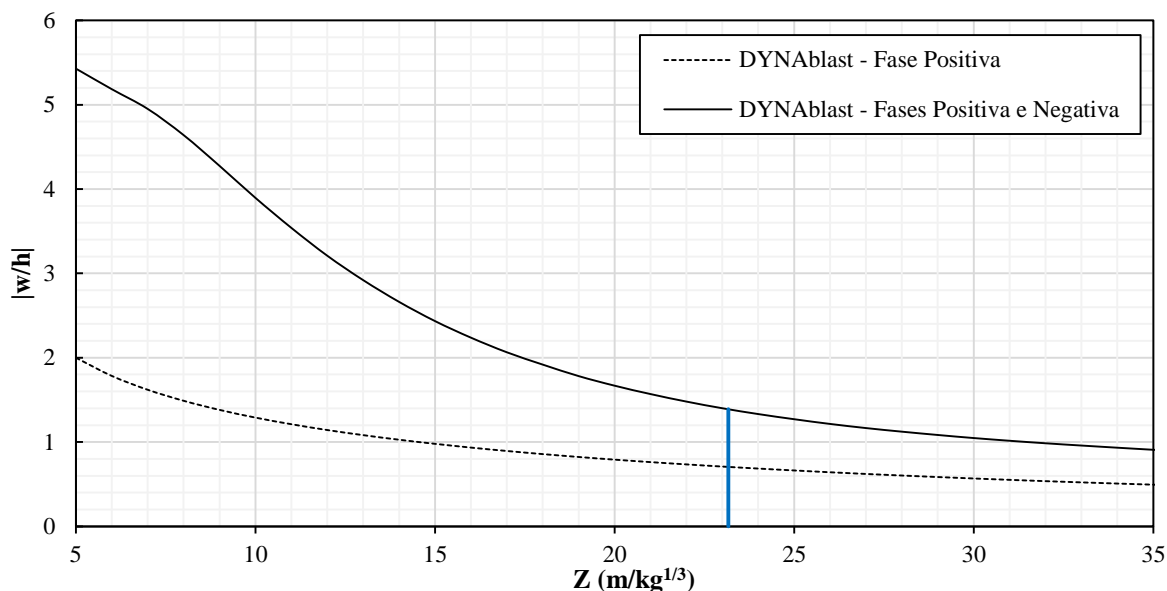


Figura 71 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ para onde $W_{TNT} = 2,62 \text{ kg}$ usando software DYNAbblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Wei e Dharani (2006)

Tabela 33 - Resultados obtidos usando equação Friedlander comparando a Fase Positiva com as Fases Positiva e Negativa, usando o softwares DYNAbblast 2.0, caso Wei e Dharani (2006)

Análise	DYNAbblast - w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. % ref.: Fase Negativa
Análise com Fase Negativa	-1,22763	0,02564	-
Análise sem Fase Negativa	0,51632	0,00877	57,94159

Observa-se claramente na Figura 71 que a desconsideração da fase negativa acarreta grandes diferenças, visto que os deslocamentos registrados são subestimados. A linha azul vertical presente no gráfico refere-se à abscissa de valor $Z = 23,168 \text{ m/kg}^{1/3}$. Considerando as aproximações realizadas por Rigby et al. (2013), a razão w/h sofrida pela estrutura em $Z = 23,168 \text{ m/kg}^{1/3}$ corresponde à 0,7061, ou seja, uma diferença de 49,16% em relação ao obtido por $W_{TNT} = 2,62 \text{ kg}$ na Figura 67. Ademais, este resultado de $|w/h|$ é superior ao registrado na Figura 70. Esta diferença refere-se ao tipo de *input data* utilizado, ou seja, enquanto que a Figura 70 tem por

dados de entrada todos os parâmetros característicos experimentais de uma explosão (p_{max} , t_d e a'), a Figura 71 tem por dado de entrada Z e W_{TNT} , que foram calculados utilizando o *Solver* do Excel, conforme explanação abordada em 5.1.2).

Outrossim, Rigby et al. (2013) calcula os demais parâmetros (p_{max} , t_d e a') com base nos ábacos desenvolvidos inicialmente por US Department of Defense (2008), gerando assim uma sequência de acúmulo de erros. Por fim, ressalta-se que na faixa entre $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$ e $Z = 14 \text{ m/kg}^{1/3}$ as diferenças são superiores a 60%.

A avaliação de $W \times |w/h|$ para os casos da utilização ou não da fase negativa também é realizada e, do mesmo modo que os casos anteriores apresentados, e uma diferença evidente de $|w/h|$ entre a utilização ou não da fase negativa é verificada, conforme Figura 72. A ordem de erro para este gráfico, com relação ao determinado pela curva utilizando a fase negativa, é de no mínimo 39,78%, em $W_{TNT} = 27,07 \text{ kg}$.

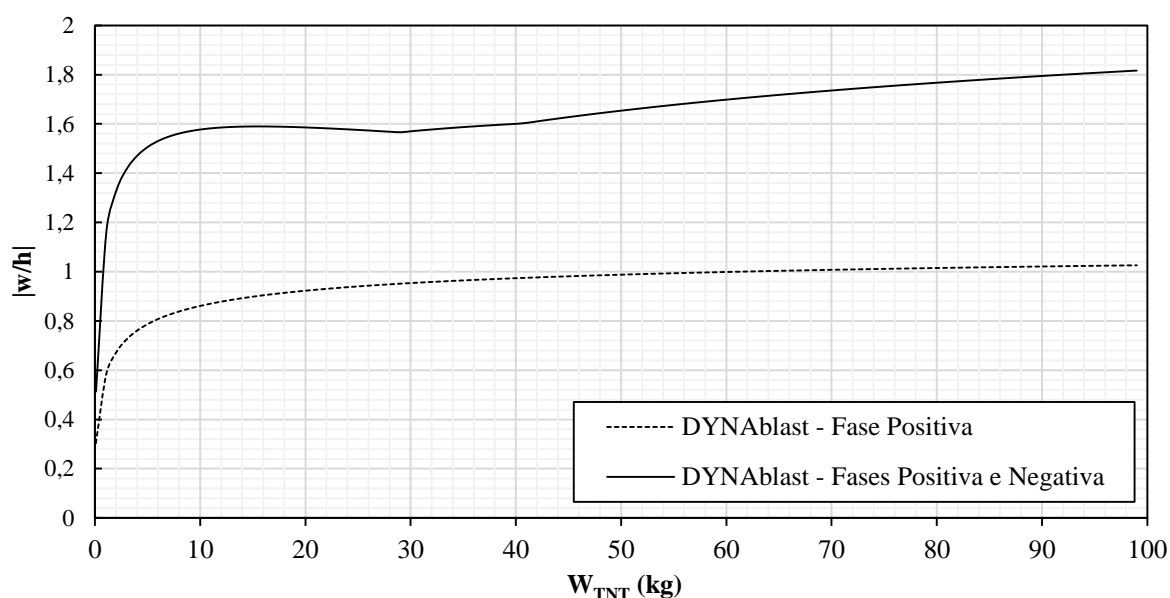


Figura 72 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times |w/h|$ usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Wei e Dharani (2006)

Na consideração em termos do Fator de Amplificação Dinâmica (FAD), é avaliado o comportamento da estrutura de Wei e Dharani (2006) considerando $Z = 23,168 \text{ m/kg}^{1/3}$. A obtenção da curva FAD é realizada com base na variação do carregamento, conforme Figura 73. Esse processo é realizado com base em um *looping* cujo passo é uma parcela finita da massa de TNT.

Um fator interessante a se ressaltar corresponde à crista presente no gráfico de FAD, em que Reis (2019) e Reis *et al.* (2022) abordam que tal elevação pode ser

a proeminência do efeito da fase negativa com relação a fase positiva. Este processo é claramente observado quando são comparadas as duas curvas, consideração ou não da fase negativa, na Figura 73. Neste caso, consideradas questões específicas de massa de TNT, distância escalar, e as características físico-geométricas da placa, o maior deslocamento, em números absolutos, ocorre durante a fase negativa.

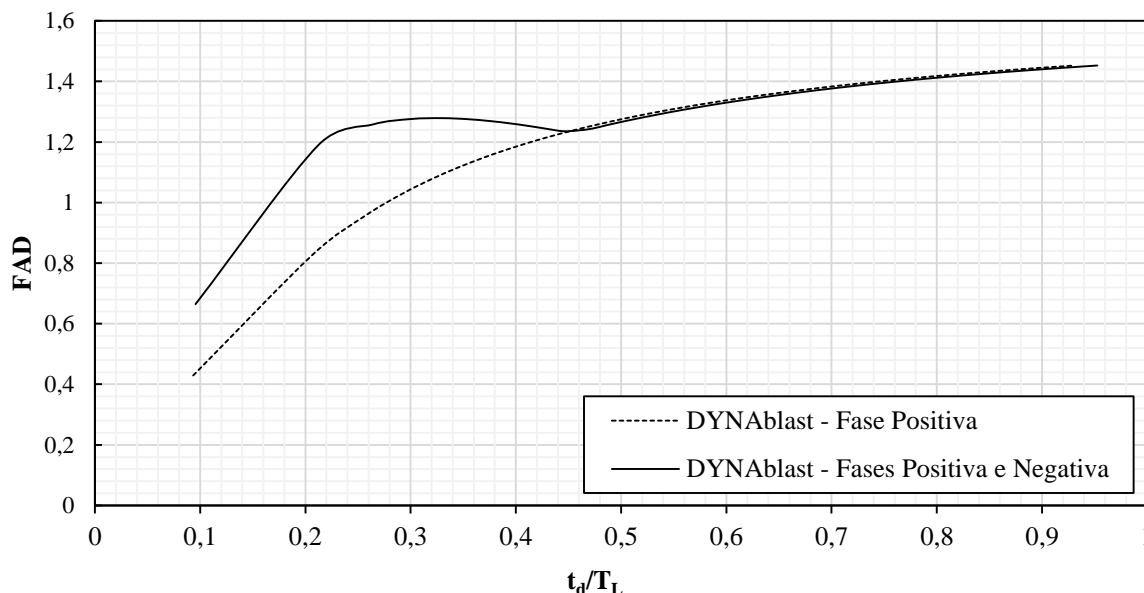


Figura 73 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Wei e Dharani (2006)

5.1.3. Kazanci e Mecitoglu (2008)

Kazanci e Mecitoglu (2008) apresentaram um estudo a respeito de vibração em placas laminadas simplesmente apoiadas. Neste caso, para a teoria de placa, é utilizada a placa de Kirchhoff juntamente com análise de grandes deslocamentos, isto é, aplicação da metodologia de von Karman.

Vale ressaltar ainda que o processo de von Karman e o método de solução deste adotado por este trabalho são contemplados e utilizados como base Kazanci e Mecitoglu (2008). Neste quesito, as séries de Fourier adotadas para os deslocamentos são limitadas apenas ao primeiro parâmetro, visto que o processo de cálculo com mais parâmetros torna-se complexo.

Quanto a solicitação na estrutura, corresponde ao carregamento explosivo, é caracterizado pela equação de Friedlander expandida, onde é utilizada tanto para a fase positiva quanto a negativa.

Kazanci e Mecitoglu (2008) apresentam o comportamento de uma placa laminada de fibra de vidro constituída por 7 lâminas submetida a um carregamento explosivo de menor impacto, conforme Tabela 34. Um esquema representativo da geometria da estrutura, bem como a distância da fonte explosiva à placa, encontra-se na Figura 74.

Para a avaliação do deslocamento, considerou-se os dados presentes na Tabela 34. Na caracterização do carregamento, considerou-se a equação expandida de Friedlander e todos os parâmetros necessários para a designação de tal, onde são provenientes dos dados de entrada do usuário. Ou seja, parâmetro como a taxa de decaimento (a^1) não é calculado pelo DYNAblast 2.0, sendo assim apenas realizada a substituição dos valores na equação.

Ademais, o procedimento de cálculo apresentado representa a utilização de um único termo das séries de Fourier atribuídas aos deslocamentos. Por este procedimento, o carregamento exercido na estrutura é ser do tipo sinusoidal.

Apesar da aplicação de uma única parcela da série de Fourier (SDOF), a análise dinâmica realizada pelo DYNAblast 2.0 representa bem o comportamento da estrutura, conforme observa-se na Tabela 35. Ambos os comportamentos podem ser contemplados pela Figura 75.

No quesito de análises do comportamento da estrutura quanto a variação da distância escalada Z , toma-se por necessário realizar um processo de otimização dos parâmetros que caracterizam a equação de Friedlander de forma que seja possível determinar valores de Z e W_{TNT} ideais que sejam representativos aos valores presentes pela Tabela 34. Desta forma, utilizando o *Solver* presente no Excel e, introduzindo os dados presentes pela Tabela 34 juntamente com as Equações (63) à (72), retornou-se um valor aproximado de $W_{TNT} = 0,1087$ kg e $Z = 8,5405$ m/kg^{1/3}. Assim, tona-se possível averiguar o comportamento da estrutura, considerando a razão w/h , para variados Z . Ademais, é praticável avaliar também tal atuação da mesma para outros valores de W_{TNT} , conforme presente nas Figura 76 e Figura 77.

Tabela 34 - Propriedades físico-geométricas da estrutura e carregamento, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Dados	Valor
Análise	Von Karman
Número de lâminas	7
Angulação das lâminas	0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°
a/b	1
a	0,22 m
h	0,00196 m
$E_1 = E_2$	24,14 GPa
G_{12}	3,79 GPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,11
ρ	1389,31 kg/m ³
ρ_{max}	28,9 kPa
a'	0,35
t_d	0,0018 s

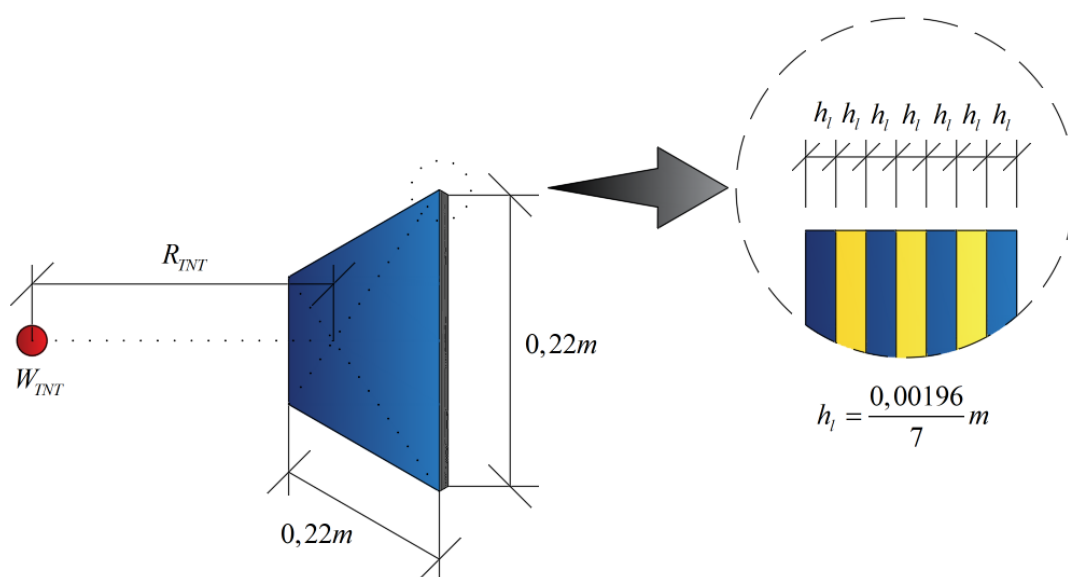


Figura 74 - Esquema representativo placa e fonte explosiva (Kazanci e Mecitoglu, 2008)

Na Figura 76 averigua-se que o comportamento do deslocamento da estrutura é similar para qualquer tipo de massa de TNT imposta no carregamento. Nesta, compara-se a atuação da curva de $W_{TNT} = 0,1087 \text{ kg}$ para com outras massas, em particular, $W_{TNT} = 1 \text{ kg}$, $W_{TNT} = 5 \text{ kg}$, $W_{TNT} = 10 \text{ kg}$, $W_{TNT} = 20 \text{ kg}$, $W_{TNT} = 30 \text{ kg}$, $W_{TNT} = 40 \text{ kg}$ e $W_{TNT} = 50 \text{ kg}$. O mesmo processo de análise é realizado para com a Figura

77, onde são verificados os casos de $W_{TNT} = 60$ kg, $W_{TNT} = 70$ kg, $W_{TNT} = 80$ kg, $W_{TNT} = 90$ kg e $W_{TNT} = 100$ kg. A comparação numérica dos deslocamentos máximos encontrados, para cada W_{TNT} , e a diferença percentual determinada para $W_{TNT} = 0,1087$ kg é apresentada pela Tabela 36. Observa-se, na referida Tabela, que à medida que aumenta a massa W_{TNT} , os deslocamentos também são intensificados. Conseqüentemente, a diferença percentual para com relação à $W_{TNT} = 0,1087$ kg também é intensificada.

Tabela 35 - Resultados obtidos, em estrutura de placa, na comparação de Kazanci e Mecitoglu (2008) e software DYNAblast 2.0

Análise	w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. % ref.:Kazanci e Mecitoglu (2008)
Kazanci e Mecitoglu (2008)	2,828614966	0,005535055	-
DYNAblast	2,951873655	0,005779134	4,175608551

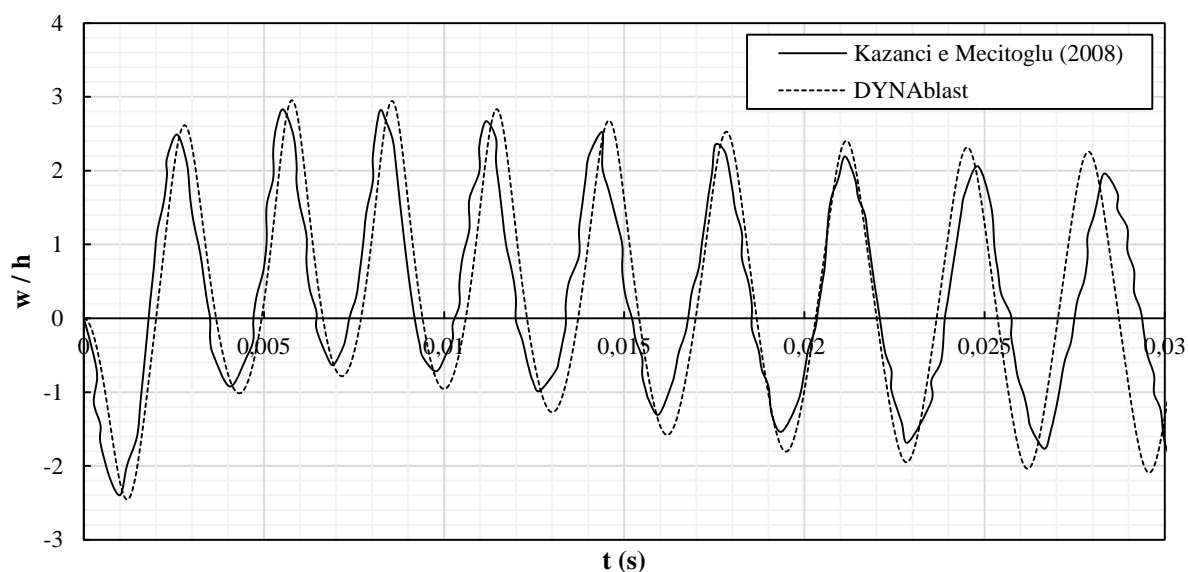


Figura 75 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo, comparação DYNAblast 2.0 e Kazanci e Mecitoglu (2008)

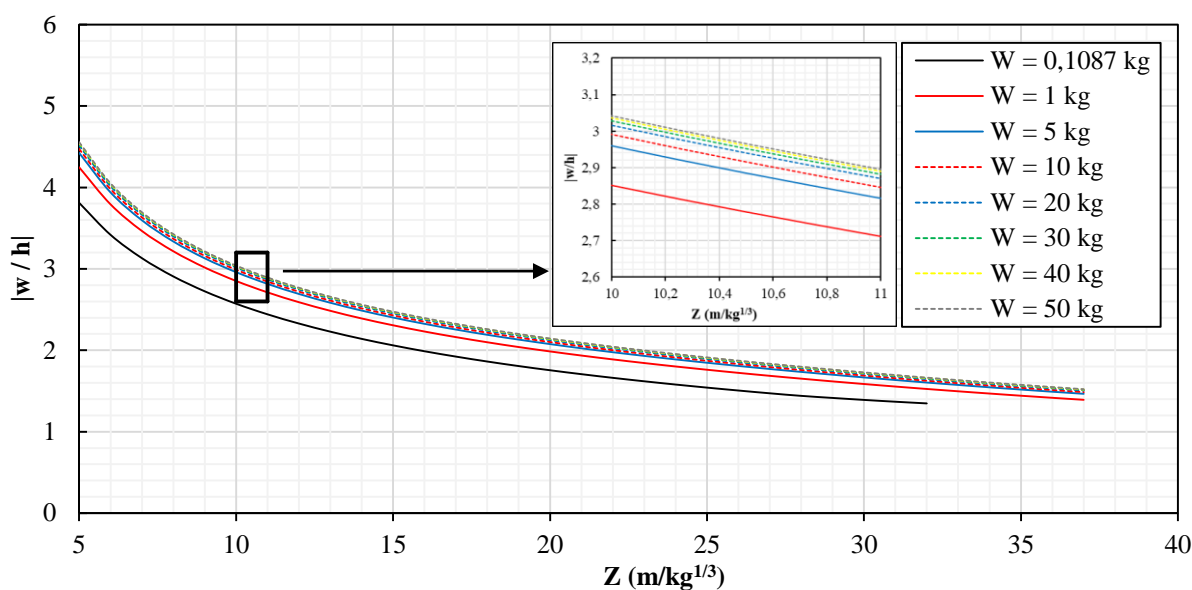


Figura 76 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ para baixas e moderadas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

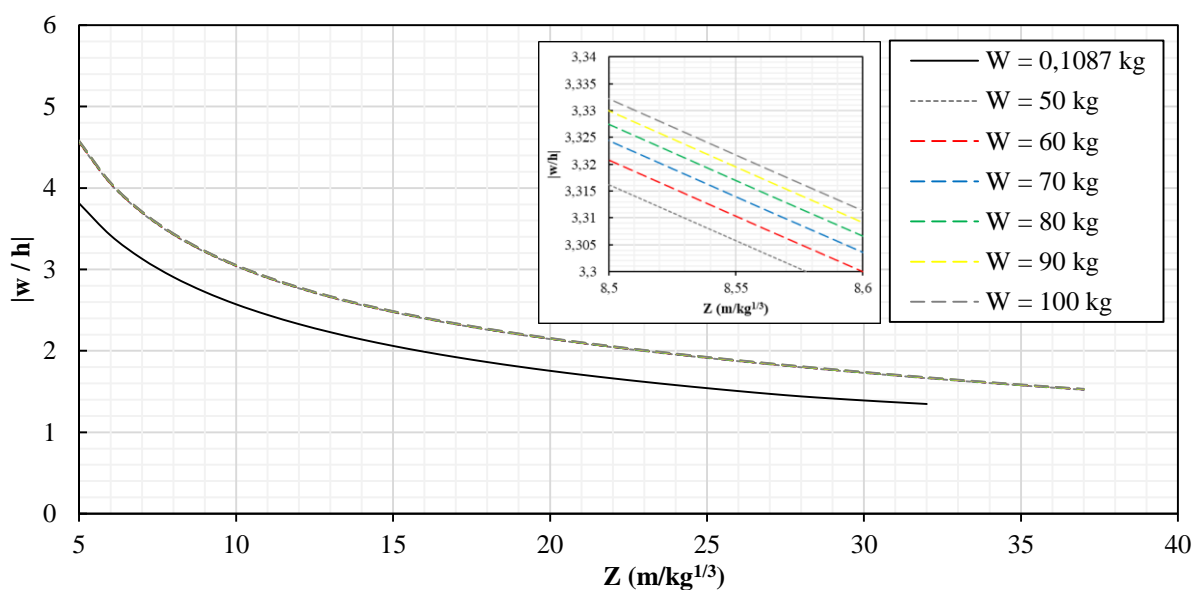


Figura 77 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ para moderadas e altas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

Os resultados apresentados pela Figura 78 foram calculados com base nos valores retornados pelo *Solver* do Excel, de forma que pudesse observar como a estrutura se comporta mediante diferentes valores de massa de TNT e distâncias escalares Z . Constata-se que as curvas presentes na Figura 78 está em consonância com a Figura 76. Observa-se que os maiores deslocamentos presentes na estrutura

são aqueles cujos quais $Z = 5 \text{ m/kg}^{1/3}$, principalmente quando se comparando com o comportamento da estrutura em questão, Kazanci e Mecitoglu (2008), que é representada pela curva $Z = 8,5405 \text{ m/kg}^{1/3}$. O valor atribuído à distância escalada é de suma importância que ocasiona uma variação na ordem de grandeza do resultado.

Tabela 36 - Resultados obtidos de deslocamento para $Z = 8,5405 \text{ m/kg}^{1/3}$, uso do software DYNAblast 2.0

W_{TNT}	$ w/h $	Dif. (%) ref.: $W_{TNT} = 0,1087 \text{ kg}$
0,1087	2,808148	0
1	3,108303	10,68871726
5	3,224526	14,82749485
10	3,258678	16,04367006
20	3,285777	17,0086833
30	3,299009	17,47988354
40	3,307511	17,78264536
50	3,313508	17,99620248
60	3,318089	18,15933491
70	3,321751	18,28974114
80	3,324775	18,39742777
90	3,327334	18,48855545
100	3,329539	18,56707695

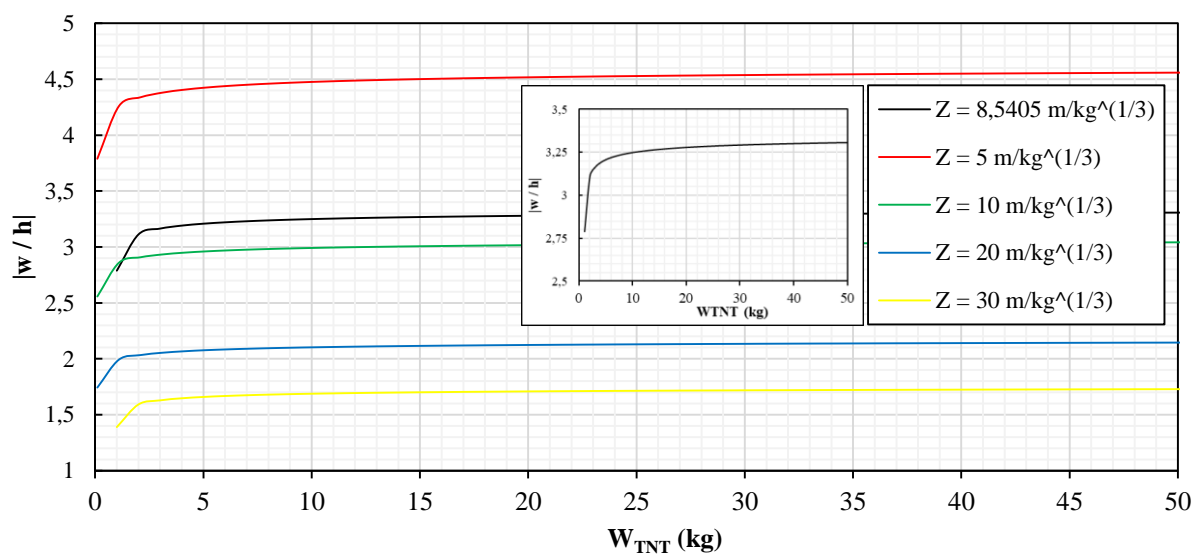


Figura 78 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times |w/h|$ para diferentes valores de Z usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

Da mesma forma apresentada no item anterior, é aqui contemplada a equação polinomial característica da placa, a saber a Equação (81).

$$\frac{w}{h} = aZ^5 + bZ^4 + cZ^3 + dZ^2 + eZ + f$$

Onde:

$$\begin{aligned} a &= -8,444 \cdot 10^{-14} W_{TNT}^3 + 1,810 \cdot 10^{-11} W_{TNT}^2 - 1,406 \cdot 10^{-9} W_{TNT} - 6,229 \cdot 10^{-7} \\ b &= 4,791 \cdot 10^{-12} W_{TNT}^3 - 1,266 \cdot 10^{-9} W_{TNT}^2 + 1,272 \cdot 10^{-7} W_{TNT} + 7,635 \cdot 10^{-5} \\ c &= -2,230 \cdot 10^{-10} W_{TNT}^3 + 5,920 \cdot 10^{-8} W_{TNT}^2 - 5,951 \cdot 10^{-6} W_{TNT} + 3,645 \cdot 10^{-3} \\ d &= 1,004 \cdot 10^{-8} W_{TNT}^3 - 2,195 \cdot 10^{-6} W_{TNT}^2 + 1,735 \cdot 10^{-4} W_{TNT} + 8,602 \cdot 10^{-2} \\ e &= -1,109 \cdot 10^{-7} W_{TNT}^3 + 2,427 \cdot 10^{-5} W_{TNT}^2 - 1,915 \cdot 10^{-3} W_{TNT} - 1,071 \\ f &= 6,420 \cdot 10^{-7} W_{TNT}^3 - 1,408 \cdot 10^{-4} W_{TNT}^2 + 1,103 \cdot 10^{-2} W_{TNT} + 8,002 \end{aligned} \quad (81)$$

A próxima análise a ser averiguada corresponde ao Fator de Amplificação Dinâmica (FAD), em que é avaliado o comportamento da estrutura de Kazanci e Mecitoglu (2008) considerando $Z = 8,5405 \text{ m/kg}^{1/3}$, conforme Figura 79.

A análise da estrutura, dada pela Figura 79, é realizada com base no tipo de caracterização feita pelo usuário para com o carregamento, isto é, o equacionamento das fases positiva e negativa. Neste caso, considera-se a equação expandida de Friedlander para ambas as fases, conforme abordado inicialmente.

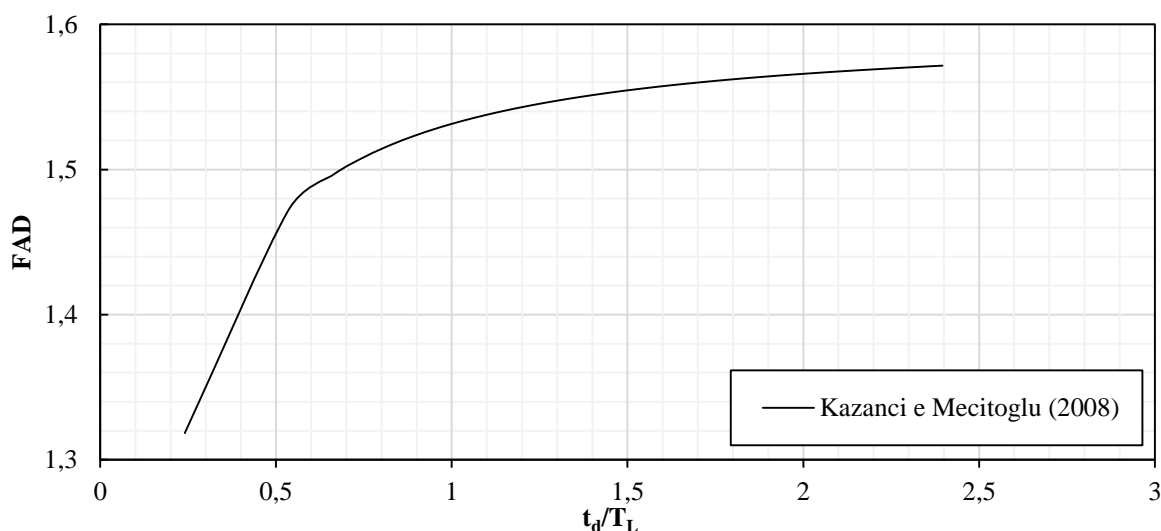


Figura 79 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

Os estudos realizados por Kazanci e Mecitoglu (2008) são objetivando o uso da equação de Friedlander completa no carregamento explosivo, em outras palavras, a equação exponencial de Friedlander é estendida do tempo $t = 0$ até $t = t_d + t_d$. Assim sendo, compreende-se que da Figura 75 à Figura 79 são apresentadas as respostas da estrutura de Kazanci e Mecitoglu (2008) mediante o uso da fase negativa no carregamento explosivo. Com o intuito de compreender como esta mesma estrutura se comportaria com um carregamento explosivo sem a fase negativa ($0 \leq t \leq t_d$) e a diferença no deslocamento dinâmico, é plotada a Figura 80 comparando estes casos.

Repara-se, na Figura 80, que ambas as curvas apresentam comportamentos distintos, contudo seus deslocamentos máximos são de ordem de grandeza próxima, onde $w/h = 2,951874$ para a curva considerando a fase negativa e $w/h = 2,379227$ para a sua desconsideração.

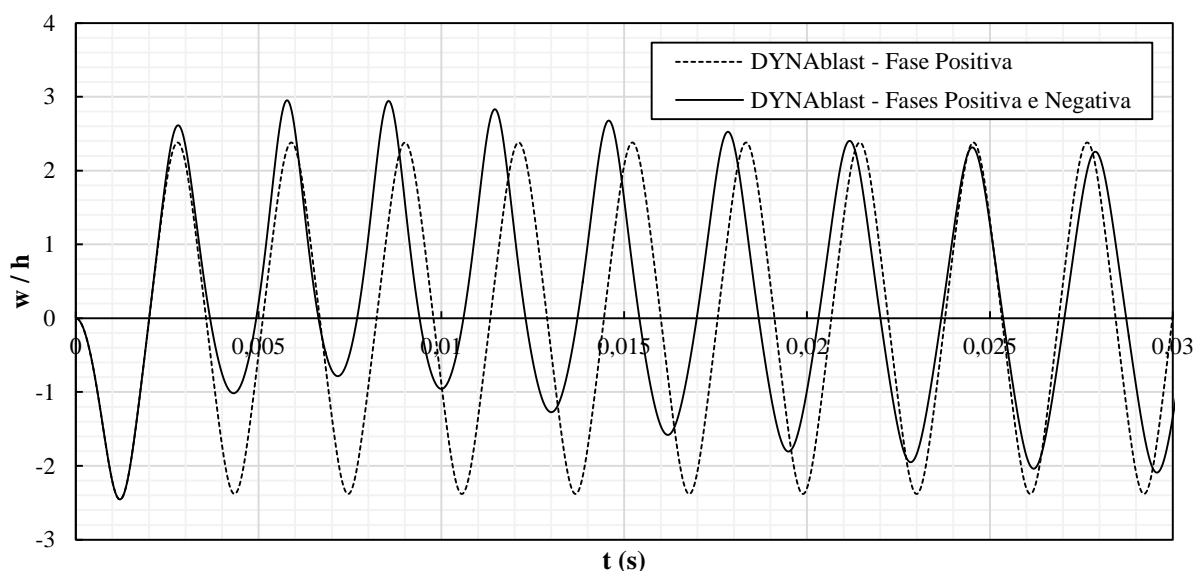


Figura 80 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo usando o software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

Para a Figura 80 e todas as demais curvas em análises, deve-se observar a frequência de onda. Considerando que são estruturas laminadas e as equações diferenciais governantes dos modelos são de alto grau de não linearidade, torna-se difícil determinar o valor da frequência. Neste caso, o cálculo do período de onda de ambas as curvas é feito considerando as última e antepenúltima coordenadas (x,y) cujo valor w/h seja zero, com base no tempo total de análise realizado por Kazanci e

Mecitoglu (2008), ou seja, $t = 0,03$ s. Esta escolha de coordenadas, de forma a facilitar o cálculo do período de onda, foi realizada porque a equação da fase negativa, na Equação (78) de Friedlander, possui tempo de atuação variando de $t_d \leq t \leq \infty$. Assim, quanto maior for o tempo transcorrido pós início do carregamento, a pressão da fase negativa tende a zero, ocasionando uma maior aproximação da resposta estrutural com a vibração livre.

Assim sendo, com base no tempo de análise de $t = 0,03$ s, pode-se esperar que o último comprimento de onda completo da análise, considerando a fase negativa, comece a ter uma similaridade ao comportamento de vibração livre. Desta forma, com base na Figura 80, a frequência de onda da curva considerando a fase negativa corresponde a 296,49 Hz, enquanto para o caso de avaliação com somente a fase positiva é de 321,60 Hz. Observa-se uma diferença de 8,469% com relação resultado obtido usando-se a fase negativa no carregamento.

Com relação ao comportamento paramétrico da estrutura, nota-se que a resposta, Figura 81, tanto para o caso de solicitação considerando a fase negativa quanto a sua não consideração é essencialmente a mesma, sendo a maior diferença de $|w/h|$ registrada em $Z = 37 \text{ m/kg}^{1/3}$ em 0,056736. Ou seja, a diferença entre os $|w/h|$ máximos entre as duas curvas da Figura 80, correspondente a 0,572647, que deveria ser identificado em $Z = 8,5405 \text{ m/kg}^{1/3}$ pela Figura 81 não foi detectado. Esta ocorrência é proveniente de alguns fatores, a citar: a solução do sistema de equações diferenciais, Equação (42), é feita neste trabalho utilizando o método numérico de Runge-Kutta, visto que não há solução analítica para carregamentos cuja expressão matemática tenha as características de uma onda de choque; utilizando os parâmetros de explosão dos estudos realizados por Kazanci e Mecitoglu (2008), Tabela 34, deve-se convertê-los para valores de Z ($\text{m/kg}^{1/3}$) e W_{TNT} (kg), ocasionando a possibilidade de realizar a análise paramétrica em relação a Z . Este tipo de comportamento, curvas coincidentes, é registrado também nas Figura 82 e Figura 83.

O processo de conversão de $(p_{\text{max}}, t_d, a')$ para (Z, W_{TNT}) é realizado com base no *Solver* do Excel, em que o princípio básico é encontrar os menores valores de (Z, W_{TNT}) com base em $(p_{\text{max}}, t_d, a')$, utilizando-se as equações desenvolvidas por Rigby et al. (2014) e Reis (2019), com base nos ábacos de US Department of Defense (2006). Naturalmente, ao se determinar os valores de (Z, W_{TNT}) , é necessário avaliar o erro encontrado entre os parâmetros $(p_{\text{max}}, t_d, a')$ calculados pelo próprio *Solver* com

relação aos estabelecidos por Kazanci e Mecitoglu (2008), sendo imprescindível que estes erros sejam os menores possíveis. Devido as expressões de Rigby et al. (2014) e Reis (2019) serem não lineares e a' , neste trabalho, ser determinado com base na igualdade das derivadas entre as fases positiva e negativa (utilizando-se o método de Newton-Raphson), pode-se ocasionar valores de erros relativamente consideráveis. Nesses casos, o mais indicado seria manipular as opções do *Solver* de forma que o resultado de %e (p_{max} , t_d , a') seja próximo de zero ou o menor possível.

Um fator interessante a considerar é a modificação do tipo de análise para HSPT (Teoria de Placa de Alta Ordem no Cisalhamento), desenvolvida por Reddy (2003), não utilizando as simplificações por ele adotadas. Em outras palavras, as teorias de placas apresentadas (CLPT, FSPT e HSPT) são voltadas para pequenos deslocamentos. As simplificações consistem em igualar a zero os parâmetros quadráticos. Desta forma, não realizando tais simplificações as equações diferenciais tornam-se com um grau maior de não linearidade. Supondo-se que a estrutura fosse modelada com base no modelo HSPT, sendo análise paramétrica de $Z \times |w/h|$, para $Z = 8,5405 \text{ m/kg}^{1/3}$, registrar-se-ia $|w/h| = 2,331674$ para ambos os casos presentes na Figura 84.

Observa-se, portanto, que para este caso em específico os resultados obtidos comparando-se a aplicação de somente a fase positiva com o uso também da fase negativa no carregamento explosivo ocasiona aproximadamente o mesmo deslocamento ao longo de $Z \text{ (m/kg}^{1/3})$. Contudo, para $Z \geq 33 \text{ m/kg}^{1/3}$ a diferença de deslocamentos entre ambos os casos começa a ser minimamente visível, embora seja pequena, conforme Figura 84. Isso sugere que os deslocamentos máximos gerados ocorrem durante a fase negativa. Naturalmente, é de grande importância averiguar pontualmente o comportamento da estrutura, ou seja, avaliação de $w/h \times t$ para valores específicos de Z e W_{TNT} .

Ainda, considerando uma análise de $W_{TNT} \times |w/h|$ para a Figura 85 e t_d/T_L para Figura 86, ambos os casos apresentam coincidência das curvas. Visto que ambos são ocorridos em $Z = 8,5405 \text{ kg/m}^{1/3}$, compreende-se que tal ocorrência apresenta os maiores deslocamentos na fase positiva do carregamento ou na vibração livre.

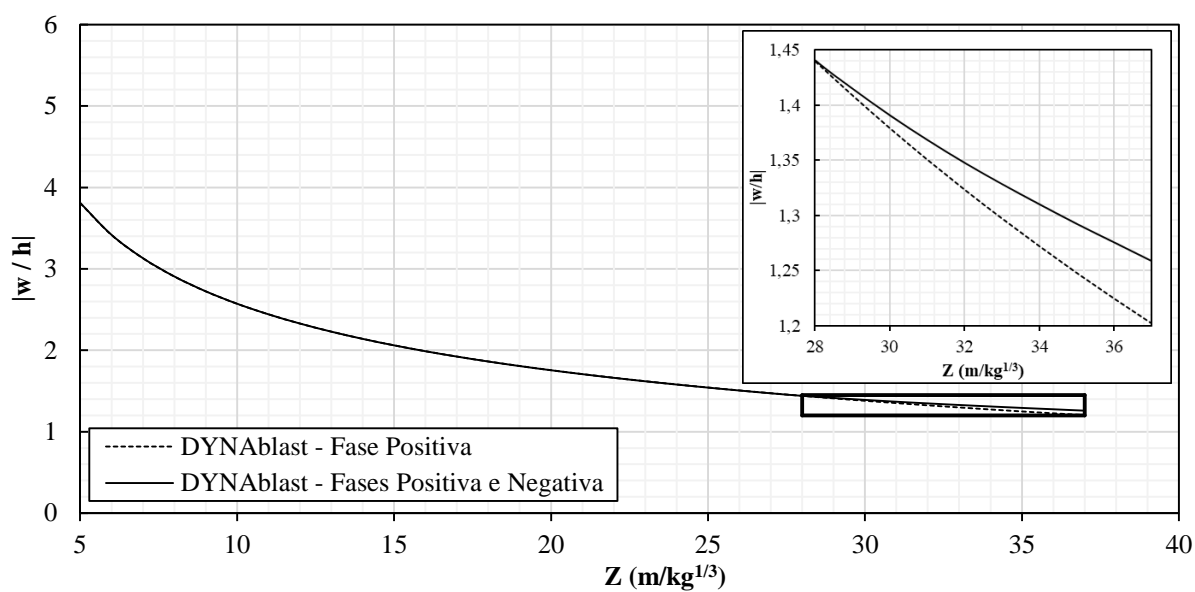


Figura 81 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ usando software DYNAbblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

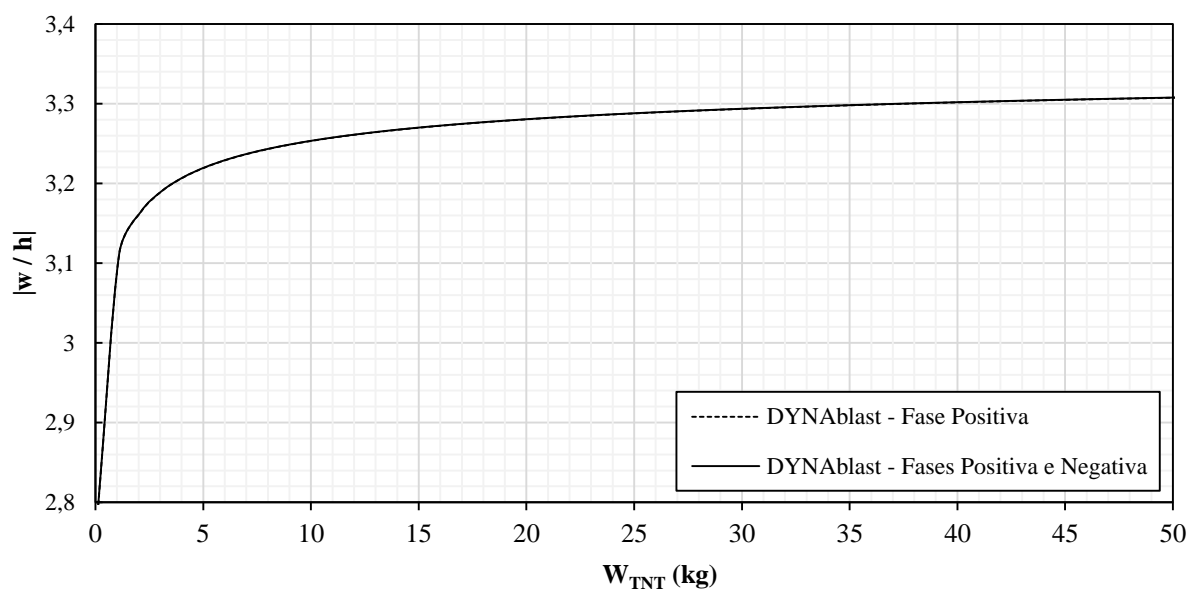


Figura 82 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times |w/h|$ usando software DYNAbblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

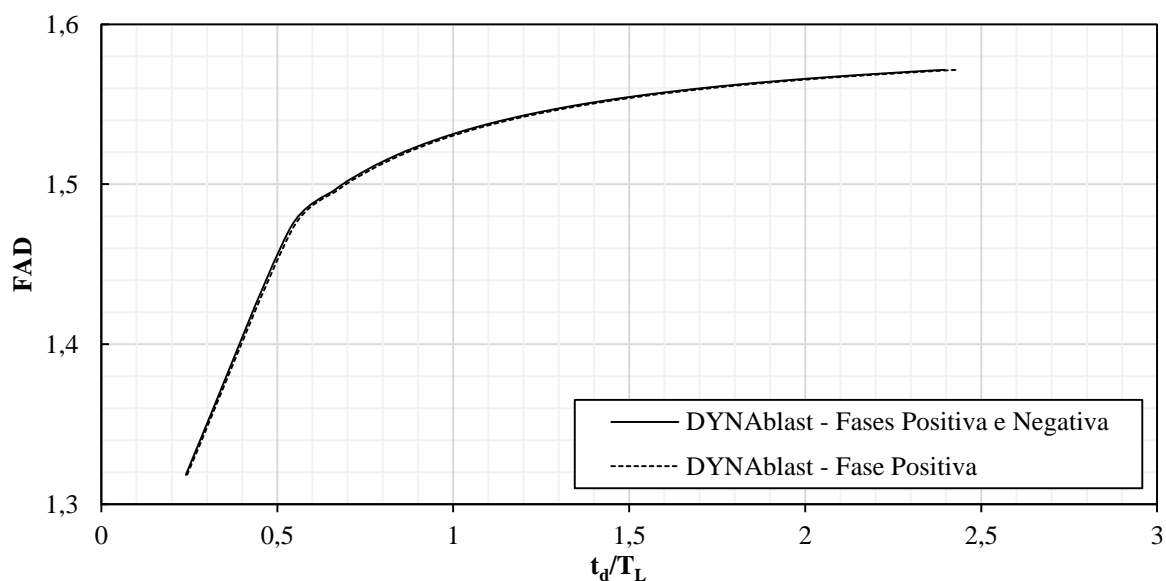


Figura 83 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAbblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

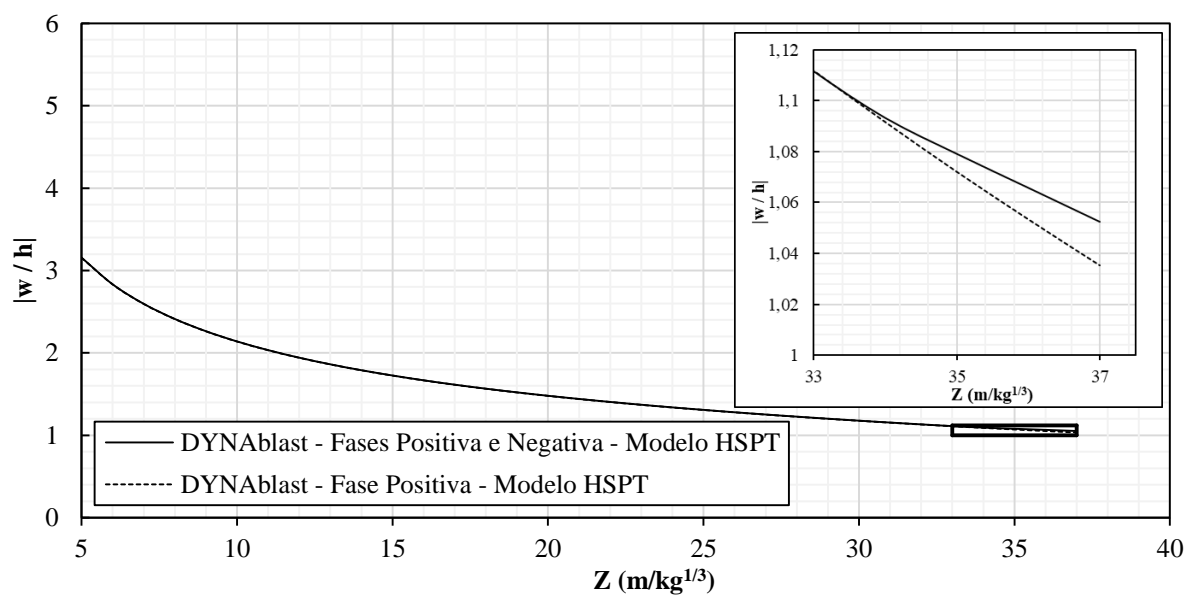


Figura 84 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ kg usando software DYNAbblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

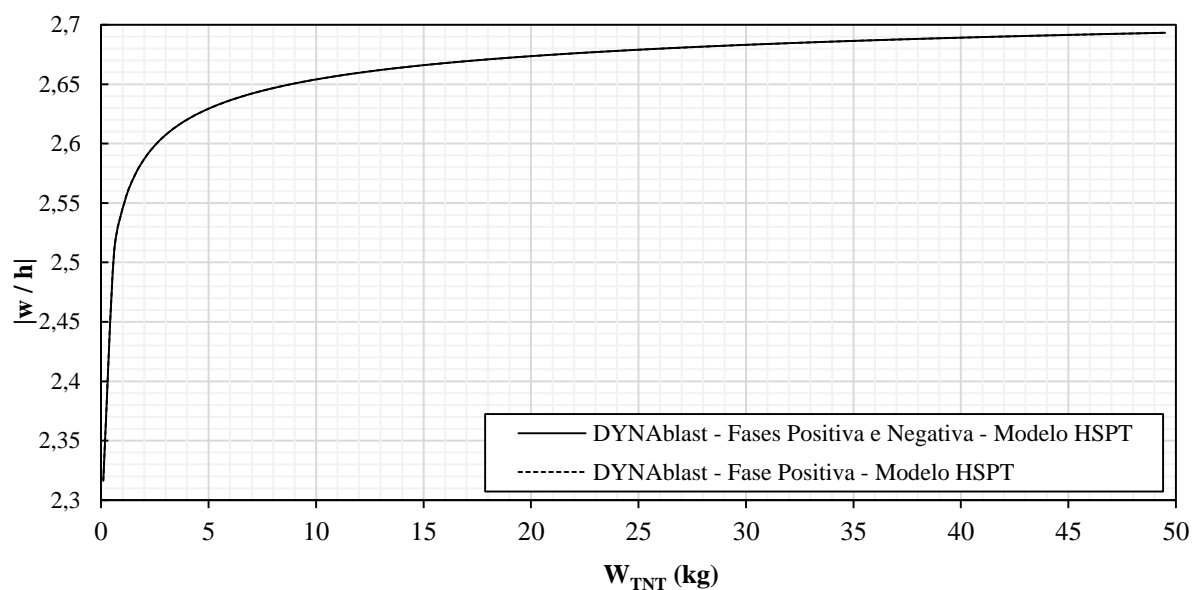


Figura 85 - Comportamento na análise W_{TNT} x $|w/h|$ usando software DYNAblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

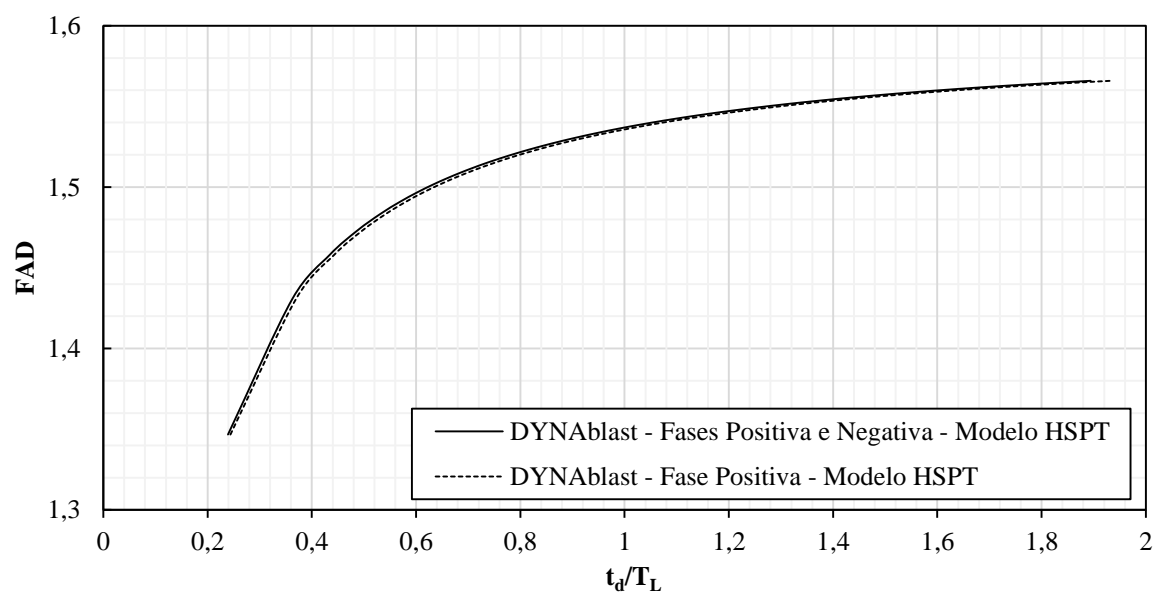


Figura 86 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci e Mecitoglu (2008)

5.1.4. Susler et al. (2012)

O estudo abordado por Susler et al. (2012) corresponde a análise de placa laminada simplesmente apoiada de espessura variável submetida a um carregamento explosivo. As características físico-geométricas da placa utilizada por Susler et al. (2012) estão presentes na Tabela 37.

Neste presente item é importante ressaltar que as lâminas permanecem com suas características ortotrópicas, conforme analisado por Susler *et al* (2012). De forma a reiterar, são utilizados 3 tipos de materiais para a placa, identificadas por E7781/EA9396 Vidro Bidirecional (BG, *Bidiretional Glass*), T-300 15k/976 Carbono Unidirecional (UC, *Unidirectional Carbon*) e T-300 3k/EA9396 Carbono Bidirecional (BC, *Bidiretional Carbon*). Um esquema representativo da geometria da estrutura encontra-se na Figura 87.

Desta forma, considerando que o estudo de Susler et al. (2012) utiliza a metodologia de von Karman e comparando-o com o resultado obtido neste trabalho, é possível averiguar o comportamento da estrutura pela Figura 88.

Tabela 37 - Propriedades físico-geométricos da estrutura e carregamento, caso adaptado de Susler et al. (2012)

Dados	Valor
Análise	von Karman
Número de lâminas	6
Angulação das lâminas	0° ₍₆₎
a/b	1
a	0,22 m
h	0,002 m
E ₁	23,37 GPa (BG); 135,14 GPa (UC); 62,74 GPa (BC)
E ₂	23,37 GPa (BG); 9,24 GPa (UC); 62,74 GPa (BC)
G ₁₂	5,23 GPa (BG); 6,27 GPa (UC); 4,37 GPa (BC)
v ₁₂	0,115 (BG); 0,318 (UC); 0,059 (BC)
ρ	1900 kg/m ³ (BG); 1620 kg/m ³ (UC); 1450 kg/m ³ (BC)
p _{max}	28906 Pa
a'	0,35
t _d	0,0018 s

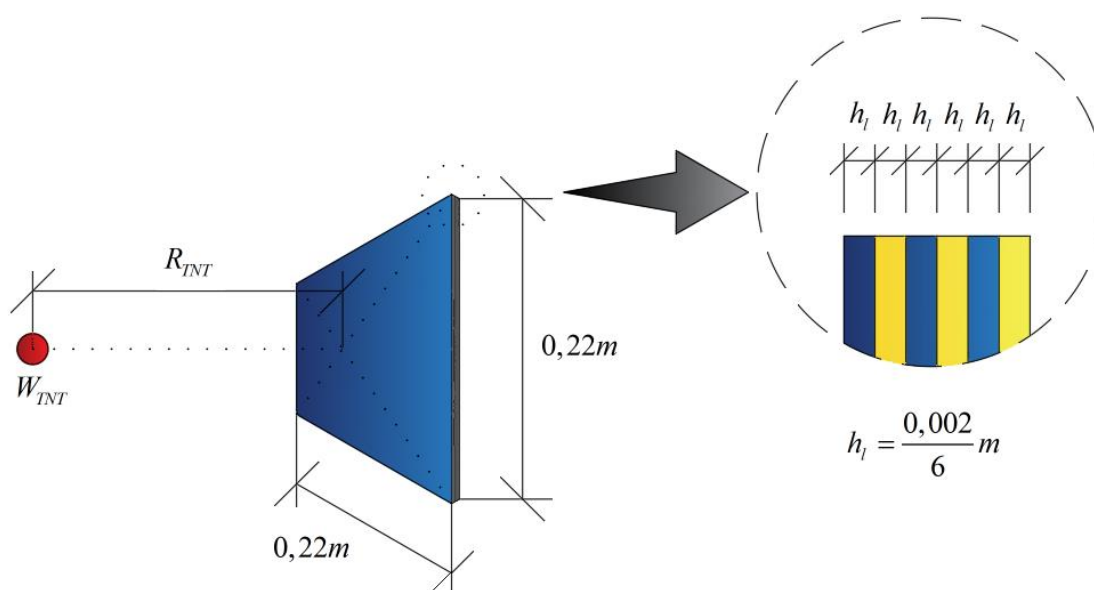


Figura 87 - Esquema representativo placa e fonte explosiva (Susler et al., 2012)

Ressalta-se que na Figura 88 são apresentadas 2 curvas. A primeira corresponde ao resultado obtido por Susler et al. (2012), cuja metodologia de von Karman adotada acrescenta uma parcela a mais no deslocamento vertical, isto é, w é uma soma de duas funções trigonométricas chamadas w_1 e w_2 . Sendo assim, o número de equações governantes da estrutura se resume em 4, sabendo que na adoção do método de von Karman não há consideração da rotação.

A segunda curva na referida Figura 88 é obtida pelo DYNAblast 2.0, considerando todas as características presentes na Tabela 37, ressaltando que a metodologia envolvida na determinação das equações governantes e sua solução são as descritas neste trabalho e a curva do carregamento explosivo é caracterizada pela equação expandida de Friedlander.

A análise dinâmica realizada pelo DYNAblast 2.0 representa bem o comportamento da estrutura, onde observa-se a análise numérica dos maiores deslocamentos explícita na Tabela 38.

Na determinação das análises, comparando o deslocamento da estrutura para variações de massas e distâncias escaladas em módulos de *looping*, torna-se necessário determinar a massa de TNT W_{TNT} (kg) e distância escalar Z ($m/kg^{1/3}$) que caracterizem os valores de pressão máxima, coeficiente de decaimento e tempo de duração da fase positiva do carregamento utilizado por Susler et al. (2012). Neste caso, com base no *Solver* do Excel, obteve-se $W_{TNT} = 0,1088$ kg e $Z = 8,539$ $m/kg^{1/3}$.

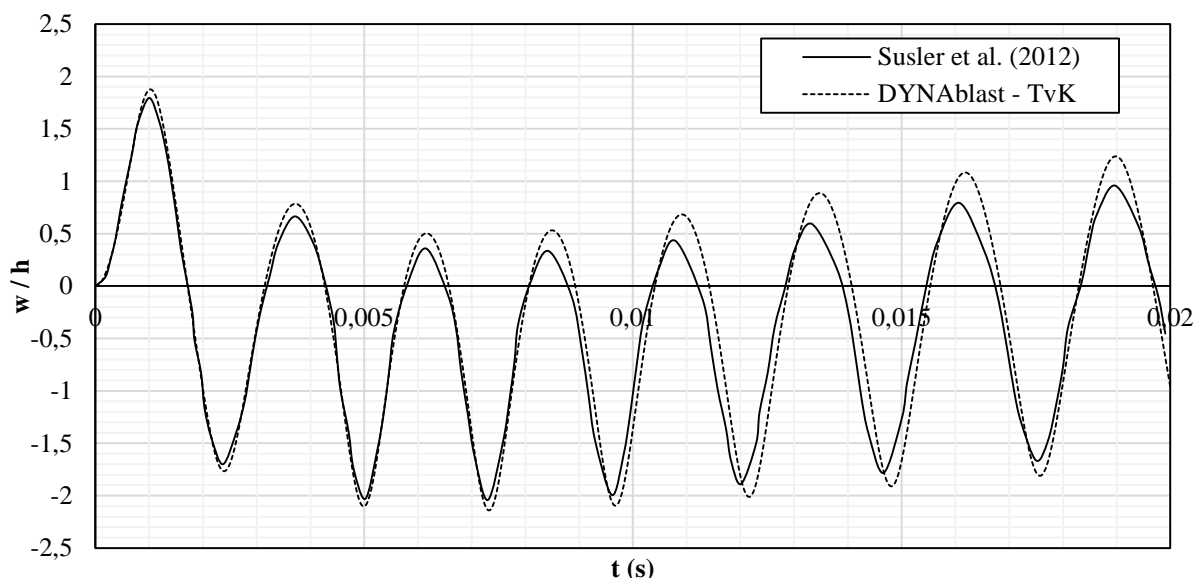


Figura 88 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo, comparação DYNAblast 2.0 e Susler et al. (2012)

Em uma primeira análise, tem-se as apresentações das Figura 89 e Figura 90. Na primeira figura é verificado a comparação do comportamento da estrutura em $W_{TNT} = 0,1088$ kg com outros valores de baixas massas de TNT.

Considerando os casos da Figura 89 e Figura 90, considerando $Z = 8,539$ $m/kg^{1/3}$, os casos de $W_{TNT} = 0,1088$ kg, $W_{TNT} = 1$ kg, $W_{TNT} = 5$ kg, $W_{TNT} = 10$ kg, $W_{TNT} = 20$ kg, $W_{TNT} = 30$ kg, $W_{TNT} = 40$ kg, $W_{TNT} = 50$ kg, $W_{TNT} = 60$ kg, $W_{TNT} = 70$ kg, $W_{TNT} = 80$ kg, $W_{TNT} = 90$ kg e $W_{TNT} = 100$ kg ocasionam relações os deslocamentos apontados pela Tabela 39, bem como a diferença em percentual com relação à $W_{TNT} = 0,1088$ kg. A equação polinomial característica da placa é dada por Equação (82).

Tabela 38 - Resultados obtidos, em estrutura de placa, na comparação de Susler *et al.* (2012) e software DYNAblast 2.0

Análise	w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Disp. % ref.: Susler et al. (2012)	Frequencia (Hz)	Dif. Freq. % ref.: Susler et al. (2012)
Susler et al. (2012)	-2,04117	0,00730	-	433,10810	-
DYNAblast	-2,13865	0,00732	4,55792	424,31727	2,07176

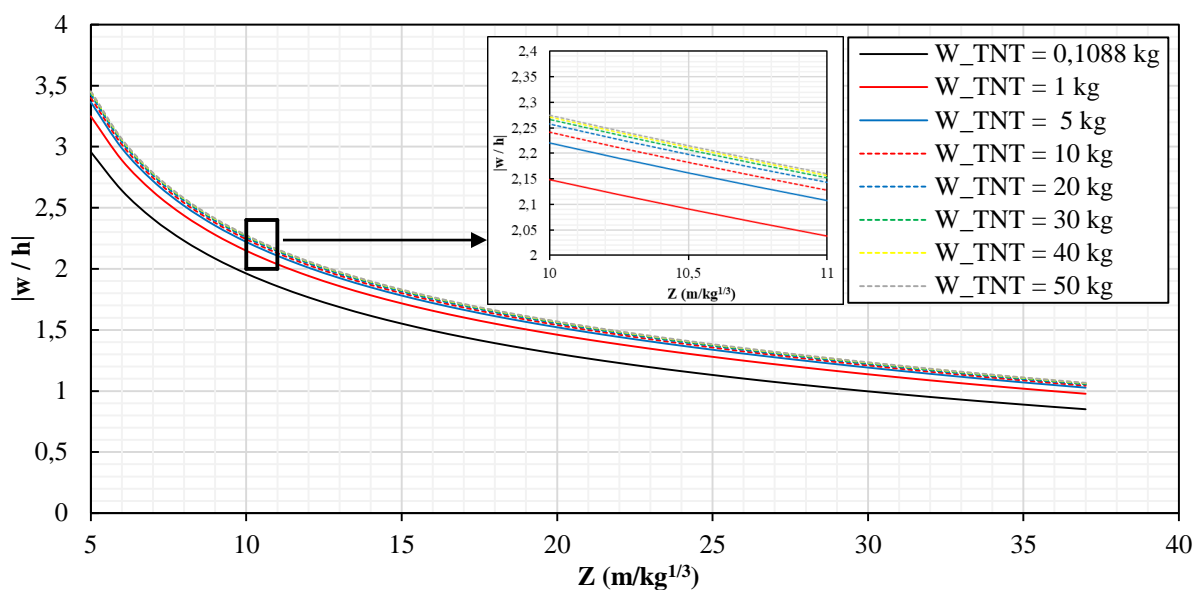


Figura 89 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ para baixas e moderadas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Susler et al. (2012)

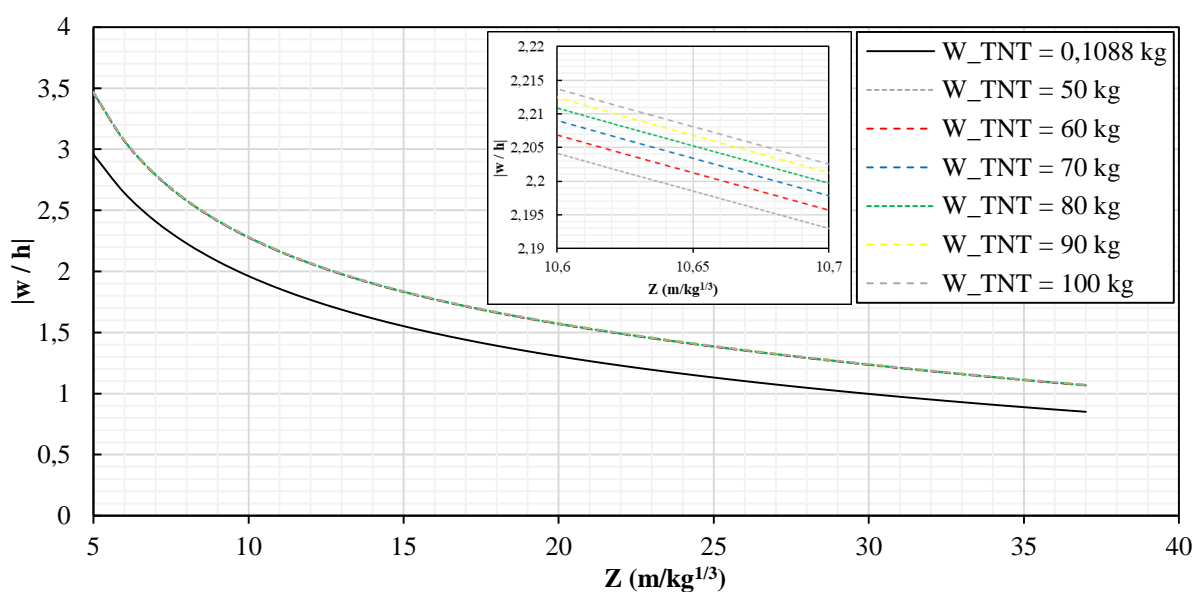


Figura 90 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ para moderadas e altas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Susler et al. (2012)

No caso da Figura 91 são apresentadas as variações de deslocamento para quando há aumento do carregamento quanto ao valor da massa de TNT, onde cada curva representa um valor fixo de distância escalar. Conforme nas Figura 89 e Figura 90, há um aumento progressivo de deslocamento para pequenas massas e que a taxa de crescimento diminui conforme o aumento da massa de TNT considerada.

Avaliação do FAD, conforme Figura 92. Observa-se que este é um caso parecido com Kazanci e Mecitoglu (2008), cujo qual não há pico no gráfico. Conforme estudado por Reis (2019) e Reis *et al.* (2022), os picos nos gráficos de FAD podem representar que os deslocamentos máximos são atingidos durante a fase negativa. Esta falta de pico pode ser verificada também na Figura 91.

Tabela 39 - Resultados obtidos de deslocamento para $Z = 8,539 \text{ m/kg}^{1/3}$, uso do software DYNAblast 2.0

W_{TNT}	$ w/h $	Dif. (%) ref.: $W_{TNT} = 0,1087 \text{ kg}$
0.1088	2,151212	0
1	2,351362	9,304057434
5	2,4288	12,90379563
10	2,451465	13,95738774
20	2,469478	14,79472967
30	2,478255	15,20273223
40	2,483823	15,46156306
50	2,487792	15,64606371
60	2,490798	15,78579889
70	2,493204	15,89764282
80	2,495214	15,99107852
90	2,496907	16,06977834
100	2,498355	16,13708923

$$\frac{w}{h} = aZ^5 + bZ^4 + cZ^3 + dZ^2 + eZ + f$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 a &= -5,629 \cdot 10^{-14} W_{TNT}^3 + 1,247 \cdot 10^{-11} W_{TNT}^2 - 9,712 \cdot 10^{-10} W_{TNT} - 4,829 \cdot 10^{-7} \\
 b &= 6,806 \cdot 10^{-12} W_{TNT}^3 - 1,508 \cdot 10^{-9} W_{TNT}^2 + 1,174 \cdot 10^{-7} W_{TNT} + 5,892 \cdot 10^{-5} \\
 c &= -3,167 \cdot 10^{-10} W_{TNT}^3 + 7,015 \cdot 10^{-8} W_{TNT}^2 - 5,461 \cdot 10^{-6} W_{TNT} - 2,815 \cdot 10^{-3} \\
 d &= 7,095 \cdot 10^{-9} W_{TNT}^3 - 1,571 \cdot 10^{-6} W_{TNT}^2 + 1,223 \cdot 10^{-4} W_{TNT} + 6,670 \cdot 10^{-2} \\
 e &= -7,723 \cdot 10^{-8} W_{TNT}^3 + 1,709 \cdot 10^{-5} W_{TNT}^2 - 1,331 \cdot 10^{-3} W_{TNT} - 0,832 \\
 f &= 4,355 \cdot 10^{-7} W_{TNT}^3 - 9,616 \cdot 10^{-5} W_{TNT}^2 + 7,485 \cdot 10^{-3} W_{TNT} + 6,148
 \end{aligned} \tag{82}$$

Do mesmo modo, também é realizado o estudo comparativo entre o uso da fase negativa e quando é negligenciado. Observando a Figura 93, a característica da resposta é distinta, a saber $|w/h| = 2,138654$ para o caso da fase negativa e $|w/h| = 2,147604$ para a desconsideração deste efeito, ocorrendo em $t = 0,007322$ s e $t = 0,000925$ s, respectivamente.

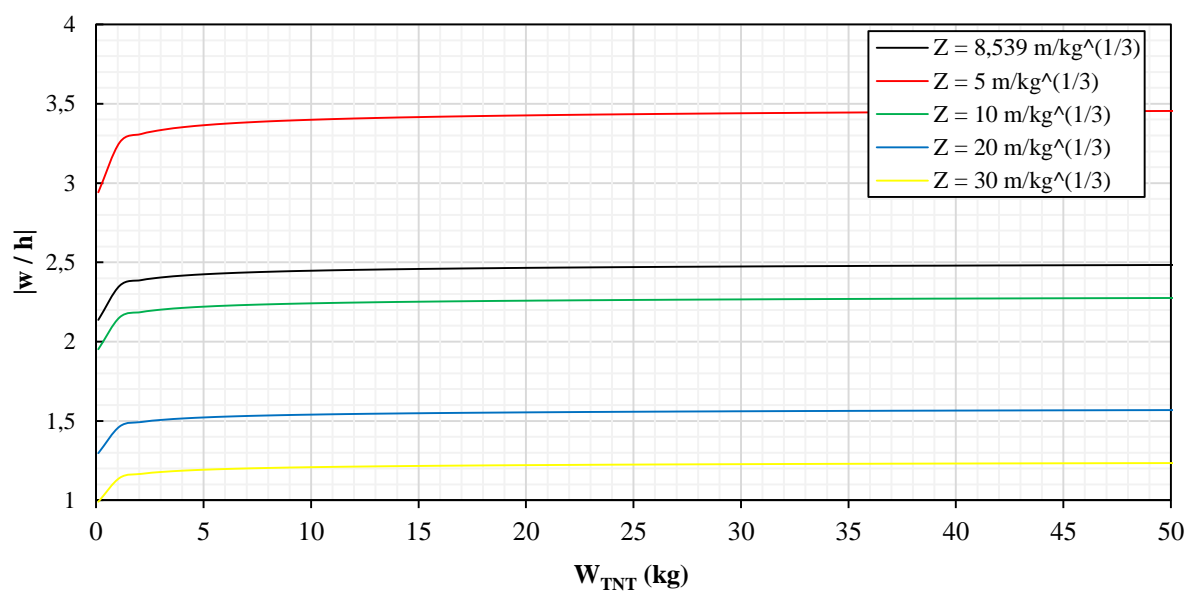


Figura 91 - Comportamento na análise W_{TNT} x $|w/h|$ para diferentes valores de Z usando software DYNAblast 2.0, caso Susler et al. (2012)

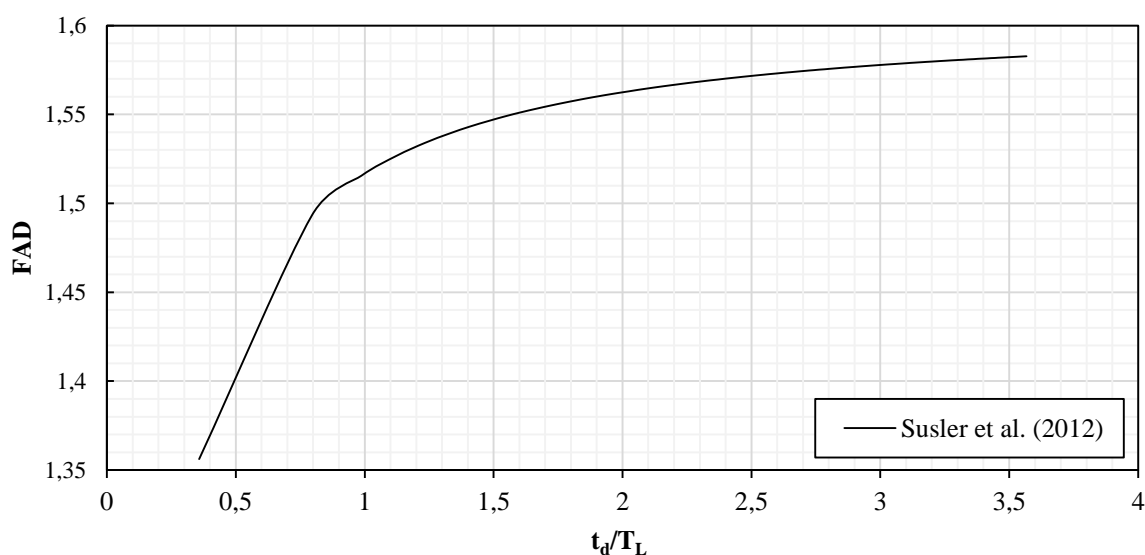


Figura 92 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0, caso Susler et al. (2012)

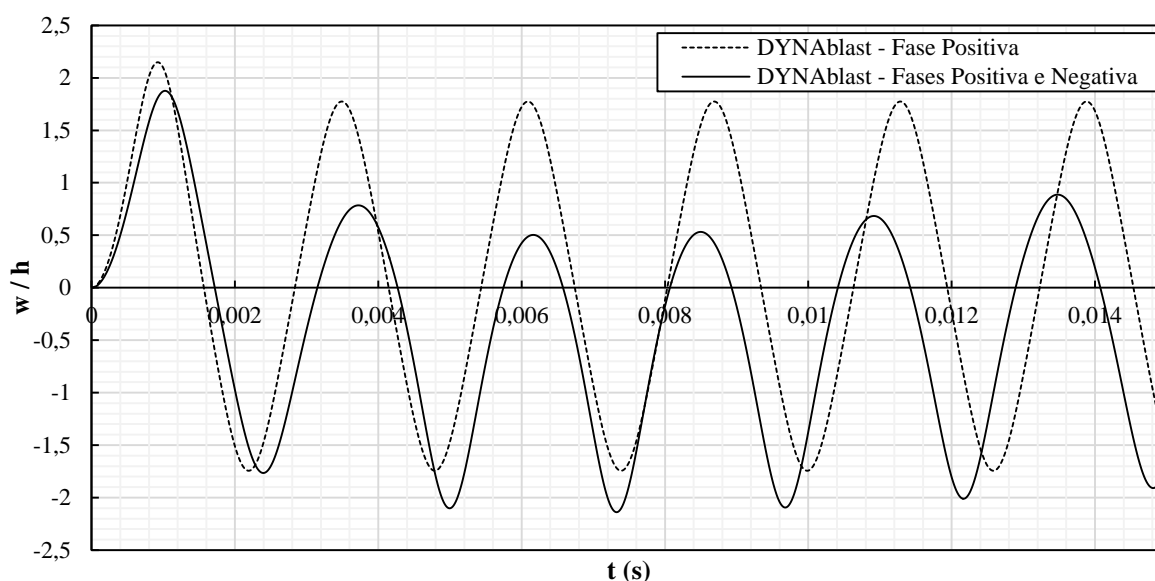


Figura 93 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo usando o software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Susler et al. (2012)

Ao realizar as análises paramétricas da placa de Susler et al. (2012) de forma a verificar a diferença de deslocamentos nas diferentes considerações de carregamento, o mesmo fenômeno ocorrido no item 5.1.3 repete-se neste presente subtópico, ou seja, não se detecta diferença significativa entre os deslocamentos considerando ou não a fase negativa, conforme Figura 94. Com isso, mesmo que se tenha registrado uma diferença nos deslocamentos máximos, conforme Figura 93, o equacionamento com base em US Department of Defense (2008) não detecta tal registro. Com base nisto, é natural que a resposta da estrutura seja a mesma já apresentada nas Figura 91 e Figura 92 para ambos os carregamentos.

Considerando uma análise do tipo HSPT e desconsiderando as simplificações adotadas por Reddy, o mesmo comportamento é observado, isto é, a concomitância nas respostas entre o uso exclusivo da fase positiva com relação a consideração da fase negativa no carregamento. Este tipo de comportamento pode ser observado na Figura 95, onde apresenta-se uma análise $Z \times |w/h|$.

Observa-se na Figura 95 que há uma linha vertical em azul, representativa do registro dos deslocamentos para quando $Z = 8,539 \text{ m/kg}^{1/3}$. Neste caso, considera-se para ambos os casos $|w/h| = 24,941$. O mesmo comportamento de resultados coincidentes pode ser observado nas Figura 96 e Figura 97.

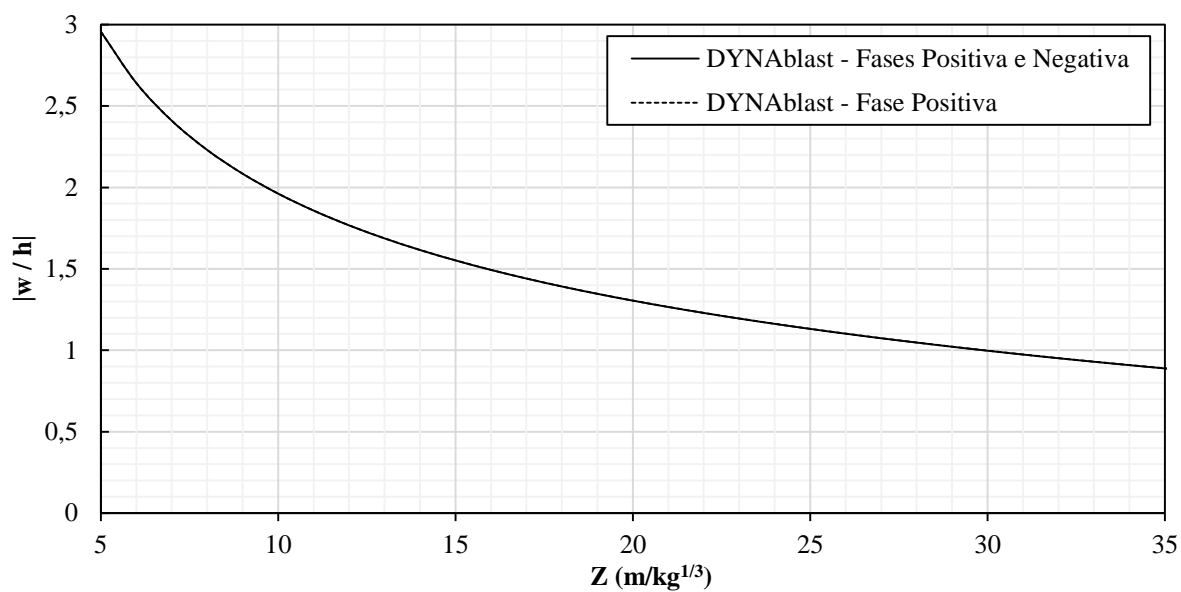


Figura 94 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ usando software DYNAbblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Susler et al. (2012)

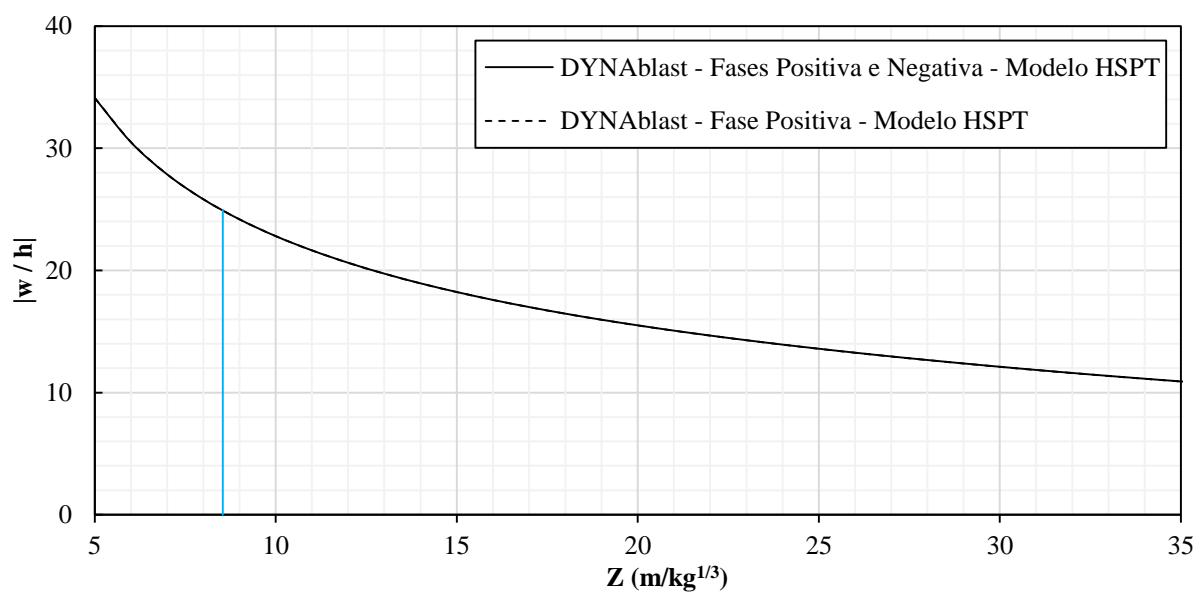


Figura 95 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ kg usando software DYNAbblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Susler et al. (2012)

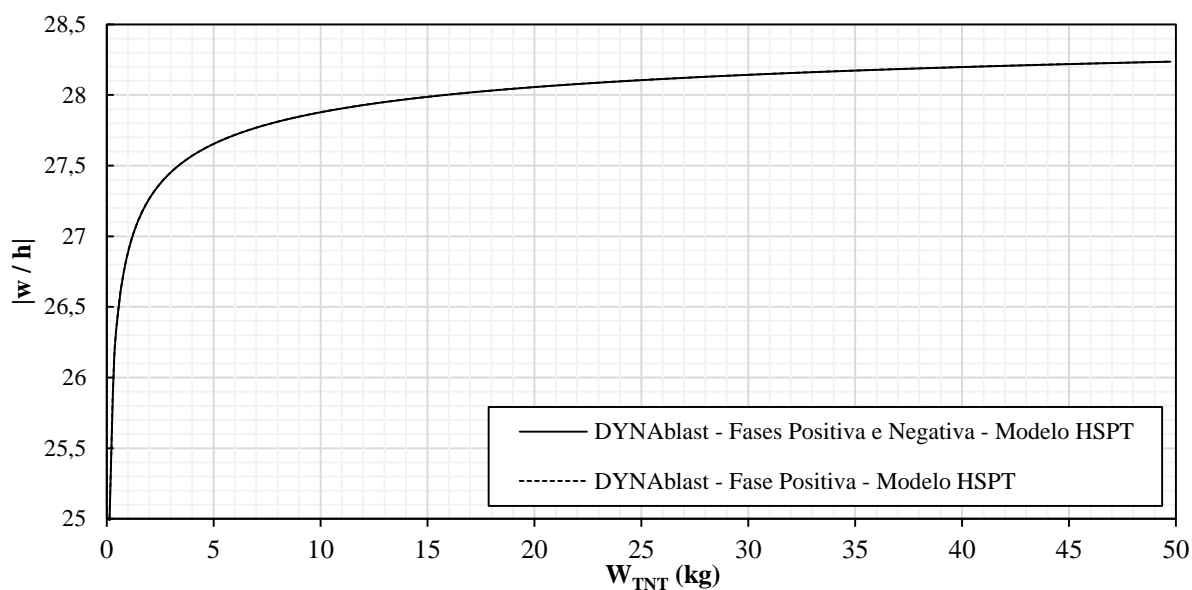


Figura 96 - Comportamento na análise W_{TNT} x $|w/h|$ usando software DYNAblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Susler et al. (2012)

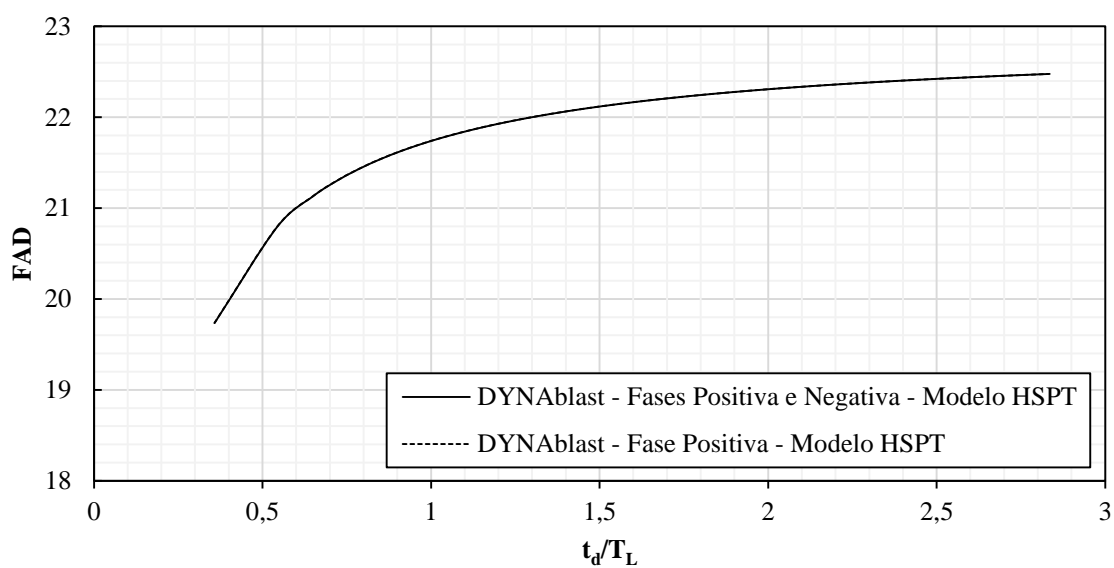


Figura 97 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0 usando o modelo HSPT, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Susler et al. (2012)

5.1.5. Kazanci (2017)

Kazanci (2017) estuda uma placa laminada com diversos ângulos diferentes para a variação da espessura submetida a um carregamento explosivo. Para o caso, a estrutura encontra-se totalmente engastada. Neste presente trabalho, é apresentado um resultado de Kazanci (2017) considerando uma variação nula de espessura, ou seja, h é o mesmo para toda a placa.

Para as características da placa, são as mesmas utilizadas por Kazanci e Mecitoglu (2008), Tabela 34, porém com a especificação de que para este caso a placa possui lâminas na angulação ($90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$). Para o carregamento, Kazanci e Mecitoglu (2008) consideraram a equação de Friedlander expandida como caracterização das ondas de choque.

A análise dinâmica realizada pelo DYNAblast 2.0 representa o comportamento da estrutura. De acordo com os resultados do autor Kazanci (2017), bem como os determinados pelo *software* DYNAblast, a diferença entre deslocamentos máximos e a frequência da estrutura são pequenos, de ótima consistência e podem ser verificados de acordo com a Tabela 40. Ademais, a representação gráfica pode ser contemplada na Figura 98.

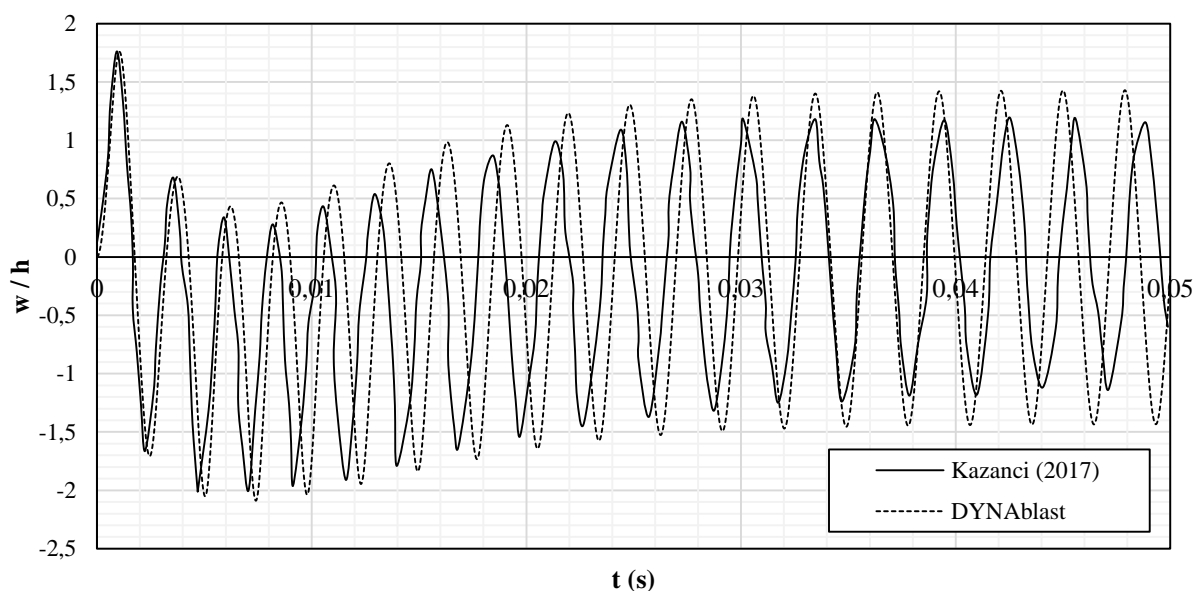


Figura 98 - Comportamento no histórico deslocamento x tempo, comparação DYNAblast 2.0 e Kazanci (2017)

Tabela 40 - Resultados obtidos, em estrutura de placa, na comparação de Kazanci (2017) e software DYNAblast 2.0

Análise	w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Disp. % ref.: Susler et al. (2012)	Frequencia (Hz)	Dif. Freq. % ref.: Kazanci (2017)
Kazanci (2017)	-2,01220	0,00469	-	422,46000	-
DYNAblast	-2,08909	0,00740	3,68050	418,51396	0,94286

Na determinação das análises comparando o deslocamento da estrutura para variações de massas e distâncias escaladas, torna-se necessário determinar a massa de W_{TNT} (kg) e distância escalar Z ($m/kg^{1/3}$) que caracterizem os valores de pressão máxima, coeficiente de decaimento e tempo de duração da fase positiva do carregamento utilizado. Neste caso, corresponde ao mesmo carregamento de Susler *et al.* (2012), $W_{TNT} = 0,1088$ kg e $Z = 8,539$ $m/kg^{1/3}$. As representações gráficas estão presentes nas Figura 99 e Figura 100 e a análise numérica é indicada na Tabela 41, onde é apresentado o deslocamento máximo para cada W_{TNT} e a diferença percentual para $W_{TNT} = 0,1088$ kg.

Da mesma forma apresentada no item anterior, é aqui contemplada a equação polinomial característica da placa, a saber a Equação (83).

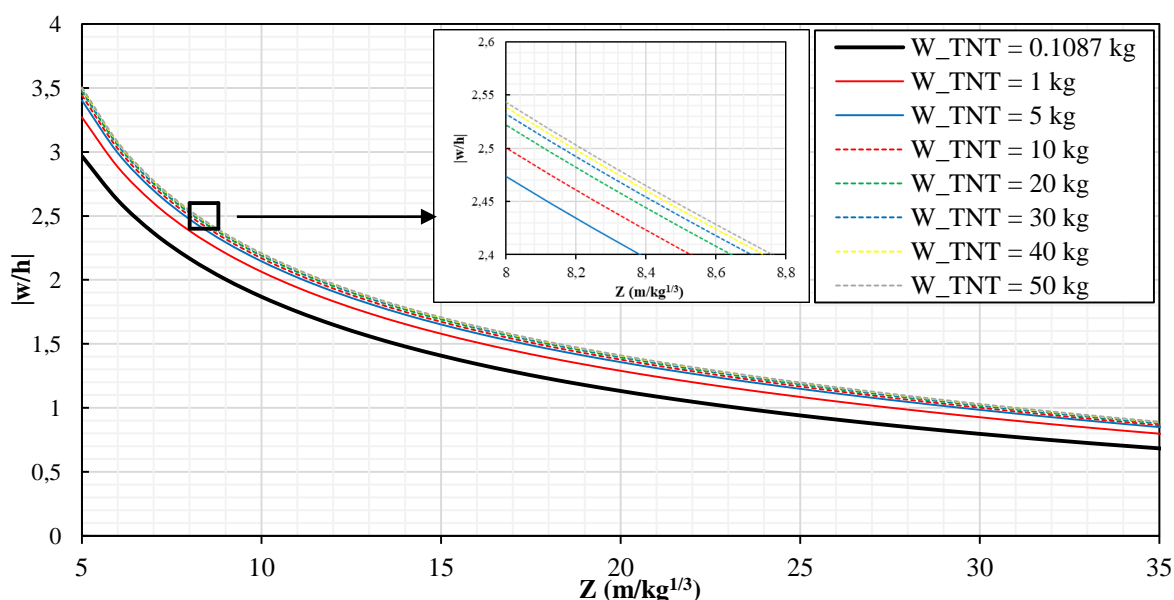


Figura 99 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ para baixas e moderadas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci (2017)

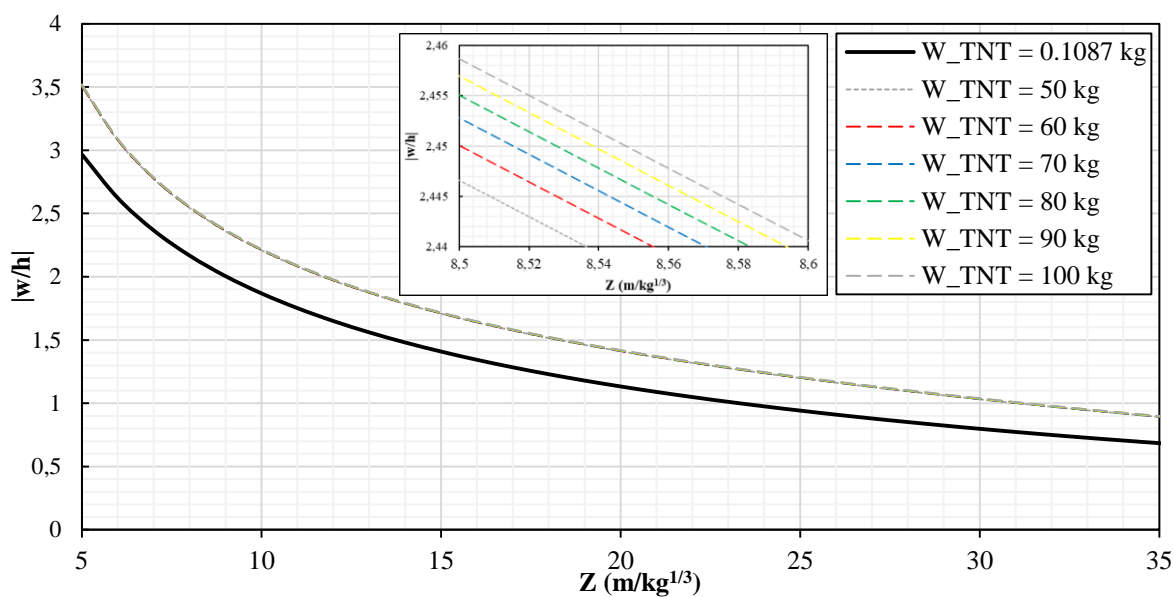


Figura 100 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ para moderadas e altas massas de TNT usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci (2017)

No caso da Figura 101 são apresentadas as variações de deslocamento para quando há aumento da massa de TNT. Conforme observado nas Figura 99 e Figura 100, há um aumento progressivo de deslocamento para pequenas massas e que a taxa de crescimento diminui conforme o aumento da massa de TNT.

Tabela 41 - Resultados obtidos de deslocamento para $Z = 8,539 \text{ m/kg}^{1/3}$, uso do software DYNAblast 2.0

W_{TNT}	$ w/h $	Dif. (%) ref.: $W_{\text{TNT}} = 0,1087 \text{ kg}$
0,1088	2,07921	0
1	2,28891	10,08552
5	2,37678	14,31154
10	2,40614	15,72337
20	2,42320	16,54392
30	2,43322	17,02588
40	2,43955	17,33046
50	2,44406	17,54737
60	2,44750	17,71301
70	2,45026	17,84541
80	2,45253	17,95469
90	2,45445	18,04713
100	2,45611	18,12677

$$\frac{w}{h} = aZ^5 + bZ^4 + cZ^3 + dZ^2 + eZ + f$$

Onde:

$$\begin{aligned} a &= -6,160 \cdot 10^{-14} W_{TNT}^3 + 1,337 \cdot 10^{-11} W_{TNT}^2 - 1,031 \cdot 10^{-9} W_{TNT} - 5,163 \cdot 10^{-7} \\ b &= 7,652 \cdot 10^{-12} W_{TNT}^3 - 1,662 \cdot 10^{-9} W_{TNT}^2 + 1,275 \cdot 10^{-7} W_{TNT} + 6,302 \cdot 10^{-5} \\ c &= -3,543 \cdot 10^{-10} W_{TNT}^3 + 7,708 \cdot 10^{-8} W_{TNT}^2 - 5,929 \cdot 10^{-6} W_{TNT} - 3,015 \cdot 10^{-3} \\ d &= 7,879 \cdot 10^{-9} W_{TNT}^3 - 1,717 \cdot 10^{-6} W_{TNT}^2 + 1,325 \cdot 10^{-4} W_{TNT} + 7,165 \cdot 10^{-2} \\ e &= -8,505 \cdot 10^{-8} W_{TNT}^3 + 1,858 \cdot 10^{-5} W_{TNT}^2 - 1,438 \cdot 10^{-3} W_{TNT} - 9,012 \cdot 10^{-1} \\ f &= 4,814 \cdot 10^{-7} W_{TNT}^3 - 1,056 \cdot 10^{-4} W_{TNT}^2 + 8,201 \cdot 10^{-3} W_{TNT} + 6,425 \end{aligned} \quad (83)$$

Na avaliação do FAD, conforme Figura 102, observa-se que este é um caso para o qual não há pico no gráfico. Conforme estudado por Reis (2019) e Reis *et al.* (2022), tais picos tendem a ocorrer quando a fase negativa ativa não-linearidades que alteram o período fundamental da placa. Ressalta-se que mais exemplos devem ser analisados para poder constatar tal conclusão.

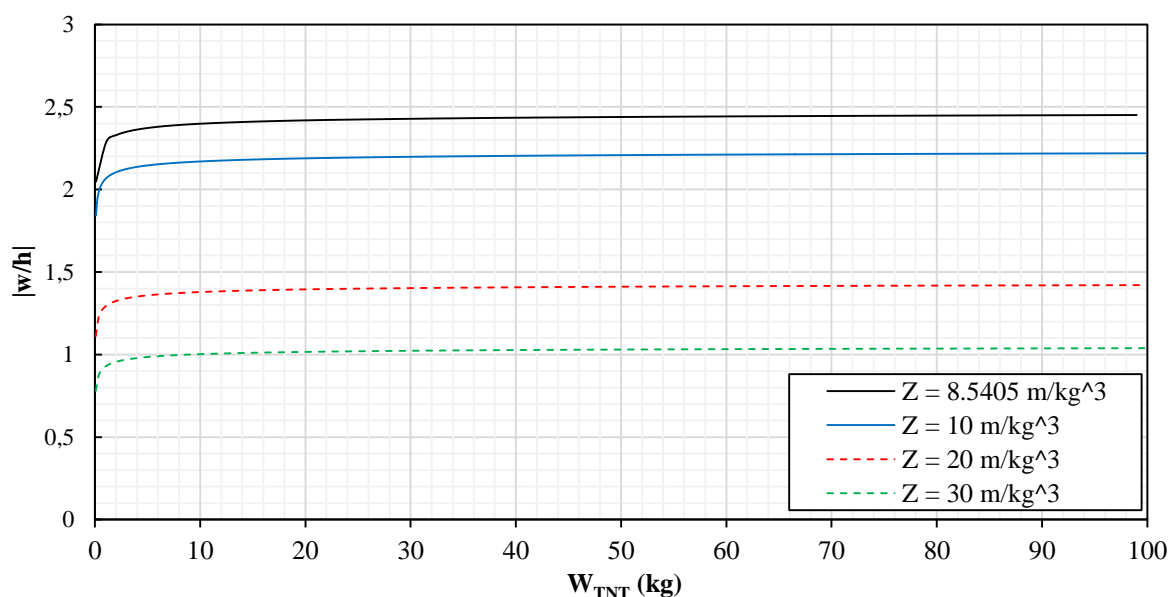


Figura 101 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times |w/h|$ para diferentes valores de Z usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci (2017)

Pelo mesmo modo que os tópicos anteriores, é avaliado o comportamento da estrutura de Kazanci (2017) desconsiderando a fase negativa no carregamento. De forma primeira, considera-se a análise paramétrica para $Z \times |w/h|$, conforme Figura

103. Nisto, conforme $Z = 8,539 \text{ m/kg}^{1/3}$, valor de distância escalada calculada para a placa de Kazanci (2017), registra-se $|w/h| = 2,079461$ enquanto desconsiderando a fase negativa esse valor cai ligeiramente, $|w/h| = 2,063500$.

Esse registro se repete na análise paramétrica de $W_{TNT} \times |w/h|$ e no gráfico de FAD, onde há uma pequena diferença entre os deslocamentos calculados.

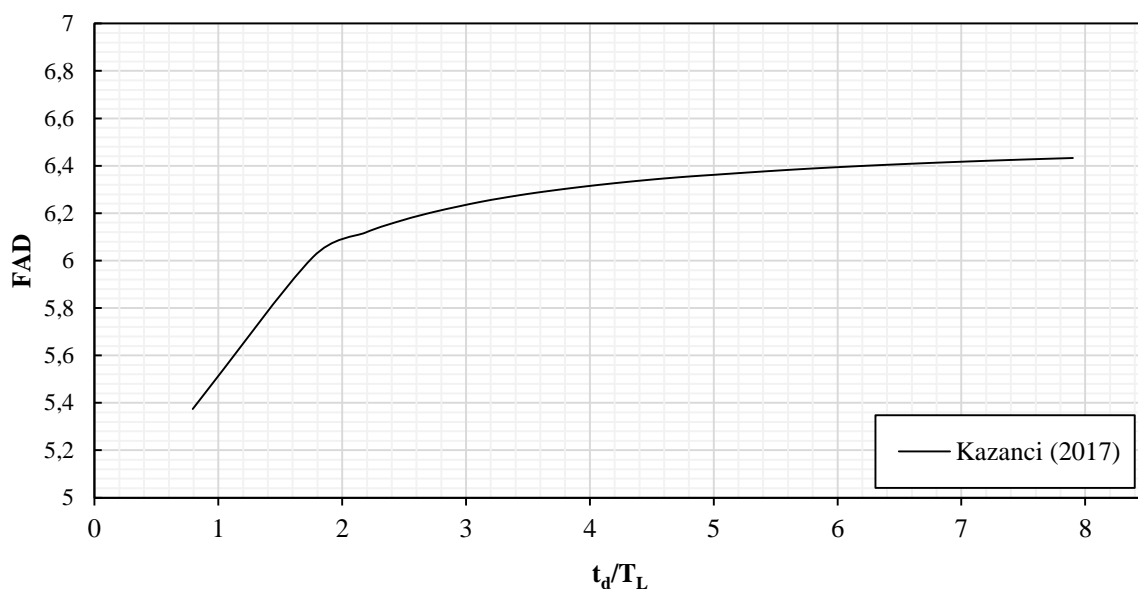


Figura 102 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAblast 2.0, caso Kazanci (2017)

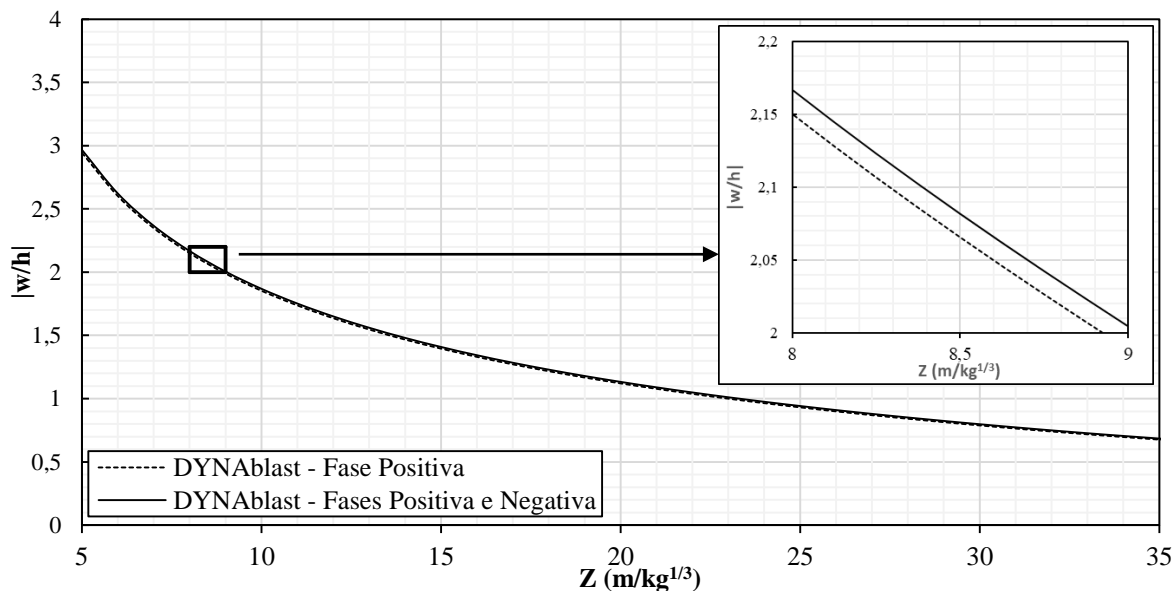


Figura 103 - Comportamento na análise $Z \times |w/h|$ usando software DYNAblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci (2017)

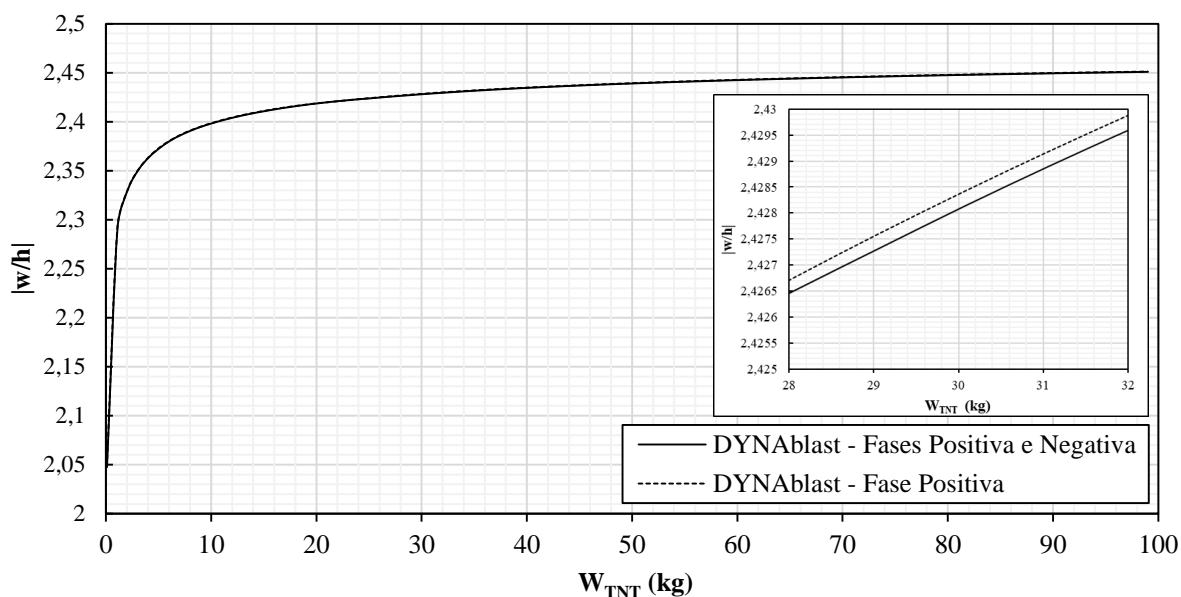


Figura 104 - Comportamento na análise $W_{TNT} \times |w/h|$ usando software DYNAbblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci (2017)

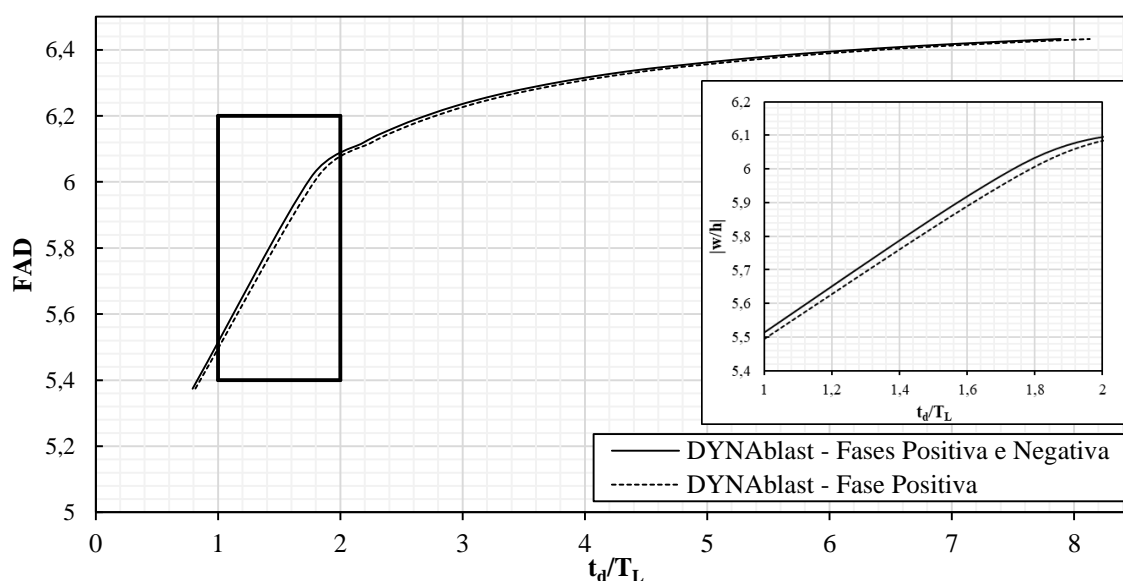


Figura 105 - Comportamento do FAD da estrutura usando software DYNAbblast 2.0, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, caso Kazanci (2017)

5.1.6. Comparação Resultados: Modelos da Literatura e DYNAbblast

Para melhor compreensão dos resultados apresentados neste tópico, apresenta-se, portanto, a Tabela 42 que corresponde ao resumo dos deslocamentos máximos obtidos entre cada autor apresentado e sua respectiva análise para com o uso do *software* DYNAbblast 2.0.

Nesta avaliação, observa-se que os erros predominam a uma faixa entre 2,07% e 4,17%, apresentando-se como resultados satisfatórios. Considerando Wei e Dharani (2006), deve-se salientar que, com base em todas as análises realizadas no item 5.1.2, também é dado como resultado suficiente, pois o estudo realizado pelo autor contempla somente um intervalo de tempo que não comporta um comprimento inteiro de onda.

Tabela 42 - Resumo resultados apresentados na literatura e obtidos por DYNAblast 2.0

Autor	w/h - Literatura	w/h - DYNAblast 2.0	Dif. % ref.: Autor
Librescu e Nosier (1990)	0,38800	0,40348	3,83653
Wei e Dharani (2006)	-1,08322	-1,22748	13,31797
Kazanci e Mecitoglu (2008)	2,82861	2,95187	4,17561
Susler et al. (2012)	-2,04117	-2,13865	2,07176
Kazanci (2017)	-2,01220	-2,08909	3,68050

5.2. Comparação: Modelos Placa e Viga

Durante o processo de estudo de vigas laminadas ortotrópicas, não foram observados exemplos na literatura dessas estruturas submetidas ao carregamento explosivo, de forma que pudessem gerar modelos no *software* DYNAblast e obter seus resultados de comportamento dinâmico. Assim sendo, para este presente tópico, são comparadas as estruturas de placa, de mesmo modelo físico-geométrico adotados no item 5.1 e realizando sua respectiva comparação com as vigas laminadas de mesmo material e estruturação. Contudo, de forma que ambos os casos sejam comparáveis, deve-se adotar a mesma premissa que foi abordada no item 4.3, isto é, o modelo de placa deve ser condicionado a uma relação geométrica de $a/b = 2$ e a estrutura de viga deve possuir comprimento igual à menor dimensão da placa e sua largura igual ao menor entre 1 m e a outra dimensão da placa. Ressalta-se ainda que neste caso não se usa o *software* LESM porque este apenas permite a análise de barras formadas por materiais de comportamento isotrópico, sendo impossível utilizá-lo para modelar seções laminadas.

O objeto de estudo deste presente item encontra-se na representação e avaliação da resposta estrutural dinâmica de modelos de placas laminadas em vigas laminadas. Para que este processo seja possível, observou-se na literatura que placas podem ser simplificadas para modelos de vigas, desde que sua relação de lados seja

$a/b \geq 2$ (Kimura, 2022). Com isso, decidiu-se extrapolar do caso estático para a análise dinâmica.

Ademais, uma análise comparativa entre o uso e não da fase negativa é presente, de forma a compreender o quanto sua consideração pode alterar os resultados de análise do deslocamento final da estrutura, em seu centro de vão.

5.2.1. Caso 1: Adaptação do modelo de Librescu e Nosier (1990)

Librescu e Nosier (1990) são contemplados na análise do item 5.1.1 na abordagem de uma placa composta por 3 lâminas, do tipo *cross-ply*, submetido a um alto carregamento explosivo, conforme Tabela 28. A geometria da placa é readaptada para $a/b = 2$, conforme Figura 106 e o modelo de viga é dado pela Figura 107. As características físicas de ambos podem ser lembradas na Tabela 28.

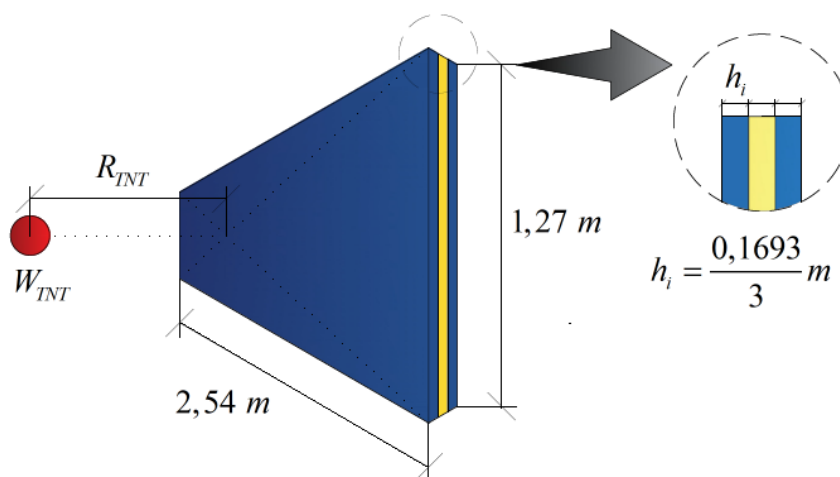


Figura 106 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

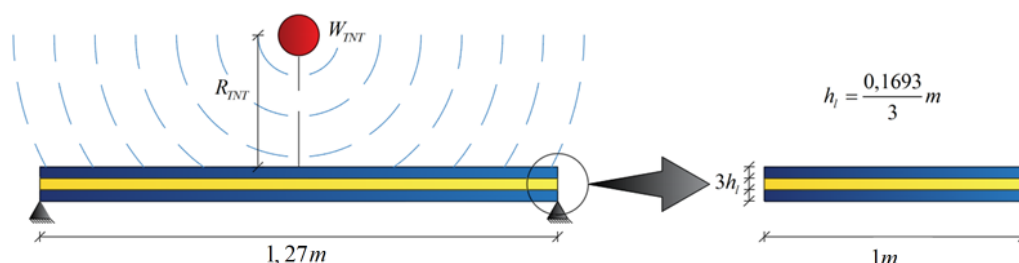


Figura 107 - Esquema representativo viga e fonte explosiva, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

A comparação entre a placa e viga são abordadas nas Figura 108 à Figura 112, conforme o valor do coeficiente de decaimento a' . Após, são abordados dois gráficos, um para cada estrutura, observando-se assim as comparações entre todos os a' e a diferença entre estes. Observa-se, em todos os casos, uma excelente aproximação de amplitude e frequência entre os resultados qualitativos da placa e da viga. Acrescentando, para todos os casos apresentados pelas imagens, contam-se as análises quantitativas são apresentadas na Tabela 43 à Tabela 47. Observa-se que nas tabelas são ressaltadas as comparações entre as cada estrutura submetida ao carregamento com os diferentes coeficientes de decaimento.

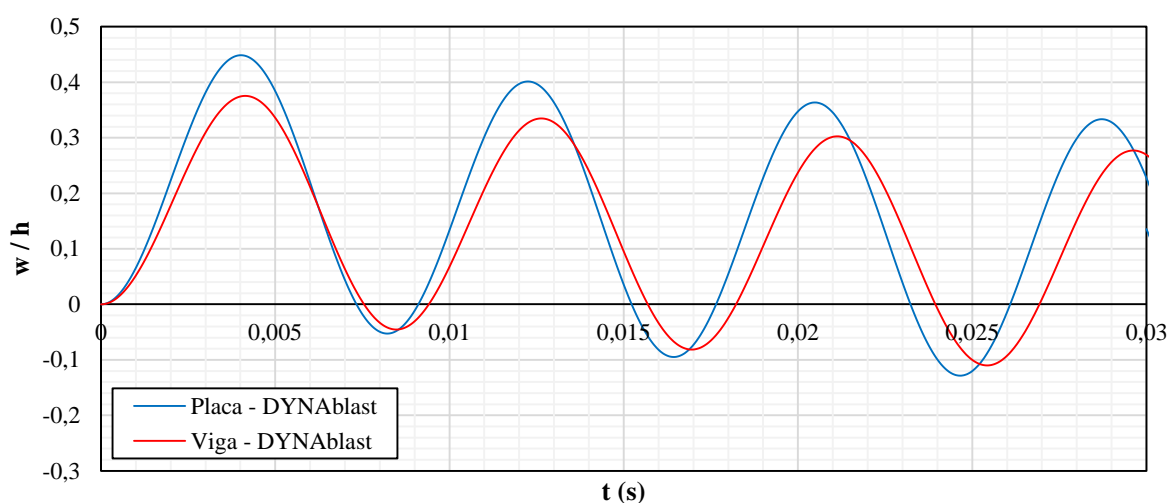


Figura 108 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para $a' = 2$ usando o *software* DYNAblast 2.0, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

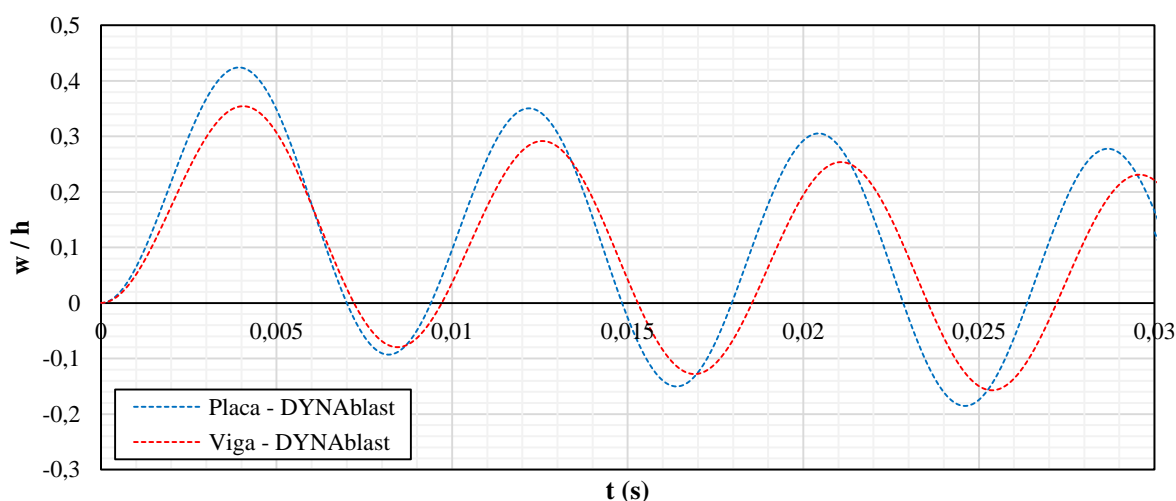


Figura 109 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para $a' = 5$ usando o *software* DYNAblast 2.0, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

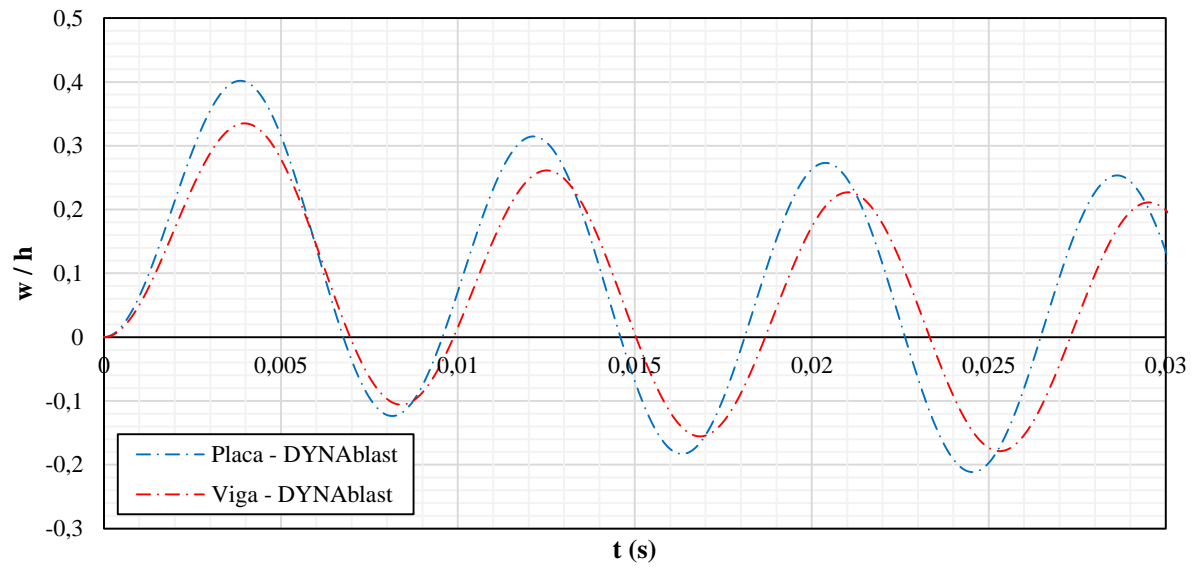


Figura 110 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para $a' = 8$ usando o *software* DYNAblast 2.0, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

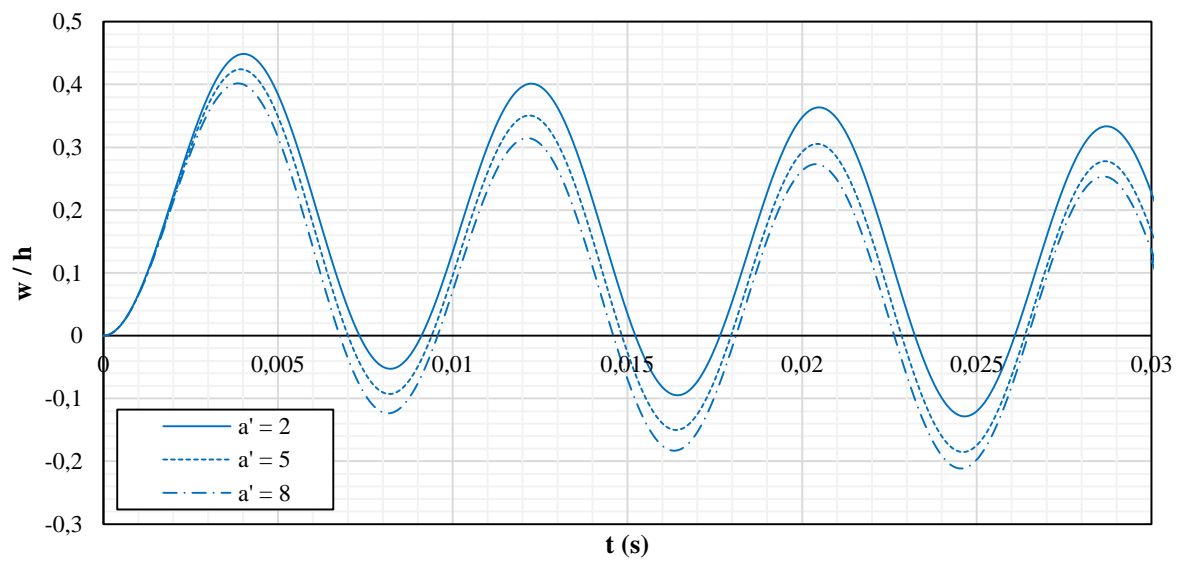


Figura 111 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander e *software* DYNAblast 2.0, estrutura de placa laminada, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

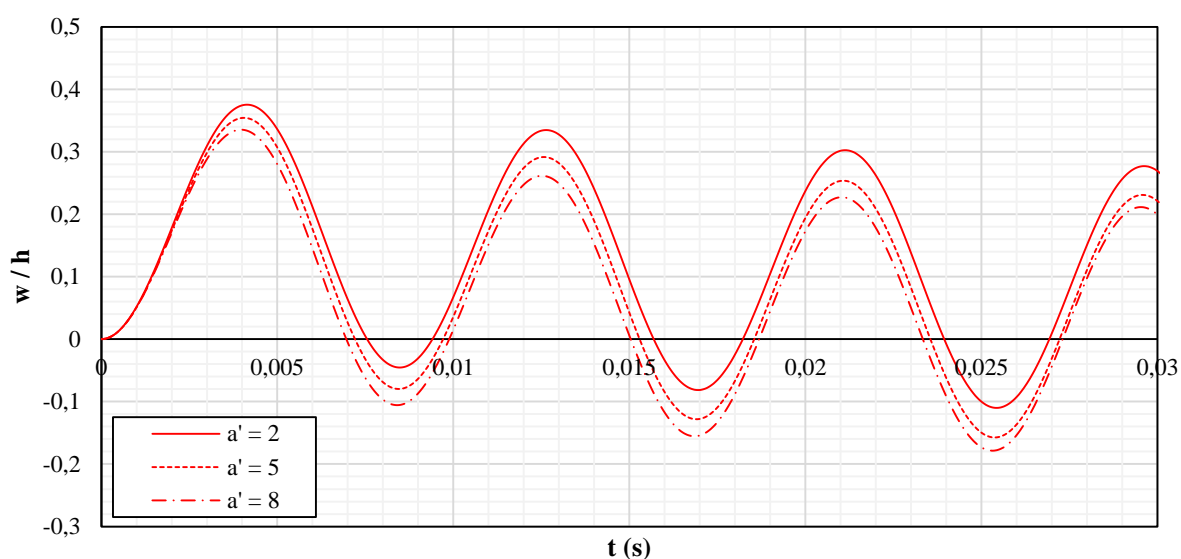


Figura 112 – Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander e software DYNAblast 2.0, estrutura de viga laminada, caso adaptado do modelo de Librescu e Nosier (1990)

Tabela 43 - Resultados $a' = 2$, usando os softwares DYNAblast 2.0, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Placa)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:Placa)
Placa - DYNAblast	0,44864	0,00400	-	121,16046	-
Viga - DYNAblast	0,37541	0,00415	16,32386	117,66925	2,88148

Tabela 44 - Resultados $a' = 5$, usando os softwares DYNAblast 2.0, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Placa)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:Placa)
Placa - DYNAblast	0,42398	0,00393	-	121,01568	-
Viga - DYNAblast	0,35419	0,00405	16,46001	117,57096	2,84651

Tabela 45 - Resultados $a' = 8$, usando os softwares DYNAblast 2.0, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Placa)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:Placa)
Placa - DYNAblast	0,40183	0,00385	-	120,70182	-
Viga - DYNAblast	0,33520	0,00396	16,58324	116,70279	3,31315

Tabela 46 - Resultados obtidos, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de placa laminada, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Placa - DYNAblast	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.: $a' = 2$)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.: $a' = 2$)
$a' = 2$	0,44864	0,00400	-	121,16046	-
$a' = 5$	0,42398	0,00393	5,49762	121,01568	0,11950
$a' = 8$	0,40183	0,00385	10,43377	120,70182	0,37854

Tabela 47 - Resultados obtidos, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de viga laminada, caso adaptado de Librescu e Nosier (1990)

Viga - DYNAblast	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.: $a' = 2$)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.: $a' = 2$)
$a' = 2$	0,44864	0,00415	-	117,66925	-
$a' = 5$	0,35419	0,00405	21,05272	117,57096	0,08354
$a' = 8$	0,33520	0,00396	25,28675	116,70279	0,82134

5.2.2. Caso 2: Adaptação do modelo de Wei e Dharani (2006)

Wei e Dharani (1990) são contemplados na análise do item 5.1.2 na abordagem de uma placa do tipo sanduíche, composta por 3 lâminas, todas com ângulo de 0° , submetido a um carregamento explosivo, conforme Tabela 30. A geometria permanece a mesma, com exceção de que o comprimento de b corresponde à 0,5 m, conforme presente nas Figura 113 e Figura 114, estrutura de placa e sua correspondente viga, respectivamente.

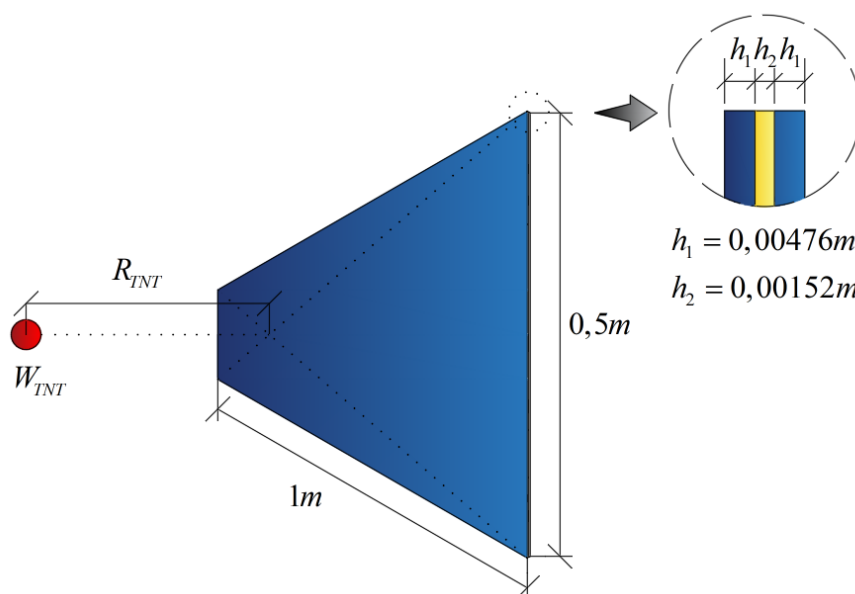


Figura 113 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Wei e Dharani (2006)

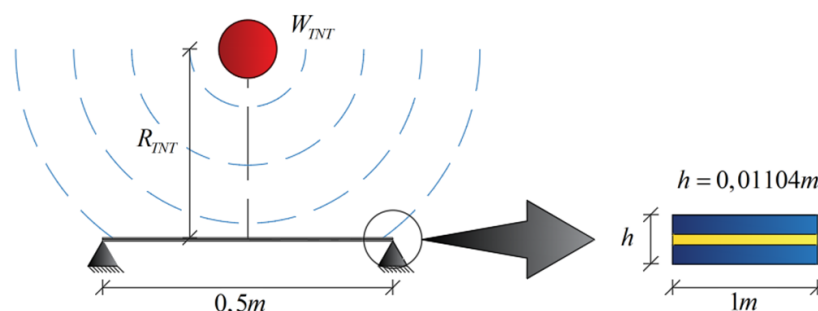


Figura 114 - Esquema representativo viga e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Wei e Dharani (2006)

Inicialmente, optou-se por gerar as Figura 115 e Figura 116 de forma a comparar o comportamento gerado por ambas as estruturas para com as solicitações de aplicação da fase positiva e o uso da fase negativa na análise, respectivamente. Nas Figura 117 e Figura 118 são fornecidas as respostas quanto à comparativa de ambas as solicitações para a placa e viga, nesta ordem. Em todos os gráficos há ótima aproximação do comportamento da viga para a placa, nos deslocamentos e frequências e suas análises quantitativas nas Tabela 48 à Tabela 51.

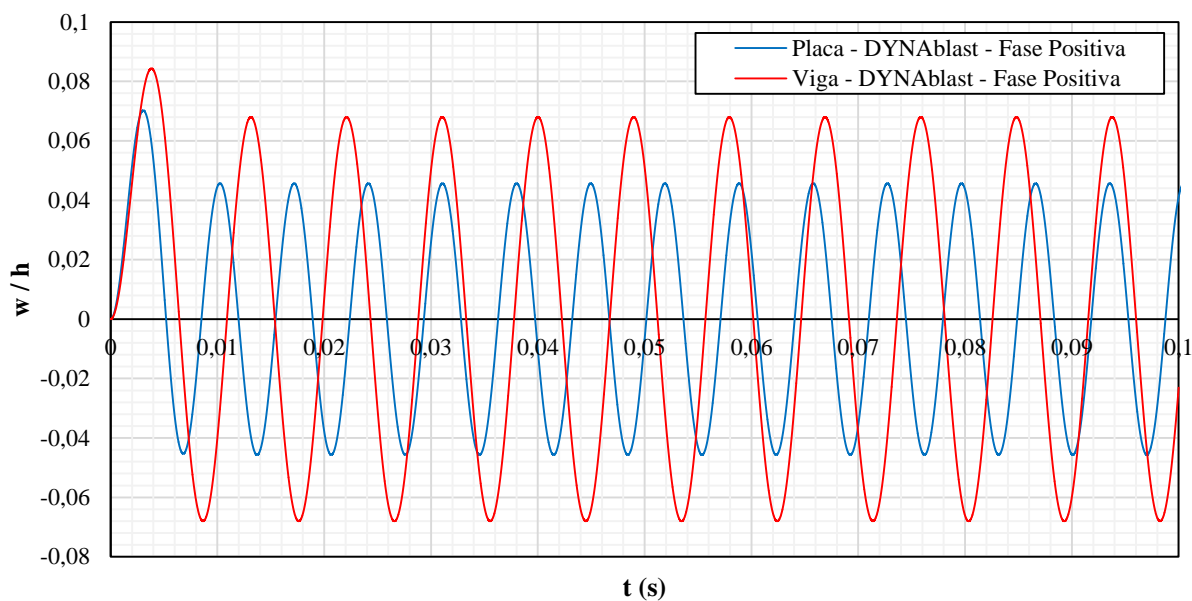


Figura 115 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para apenas a Fase Positiva usando o *software* DYNAbblast 2.0, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

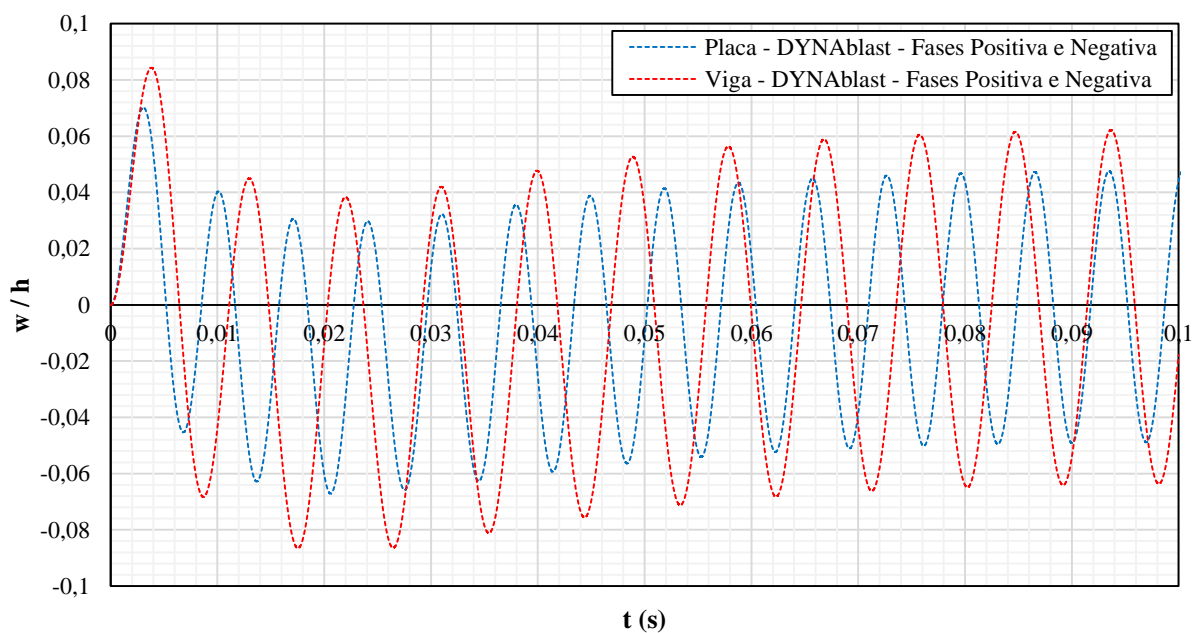


Figura 116 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o *software* DYNAbblast 2.0, caso adaptado de Wei e Dharani (2006)

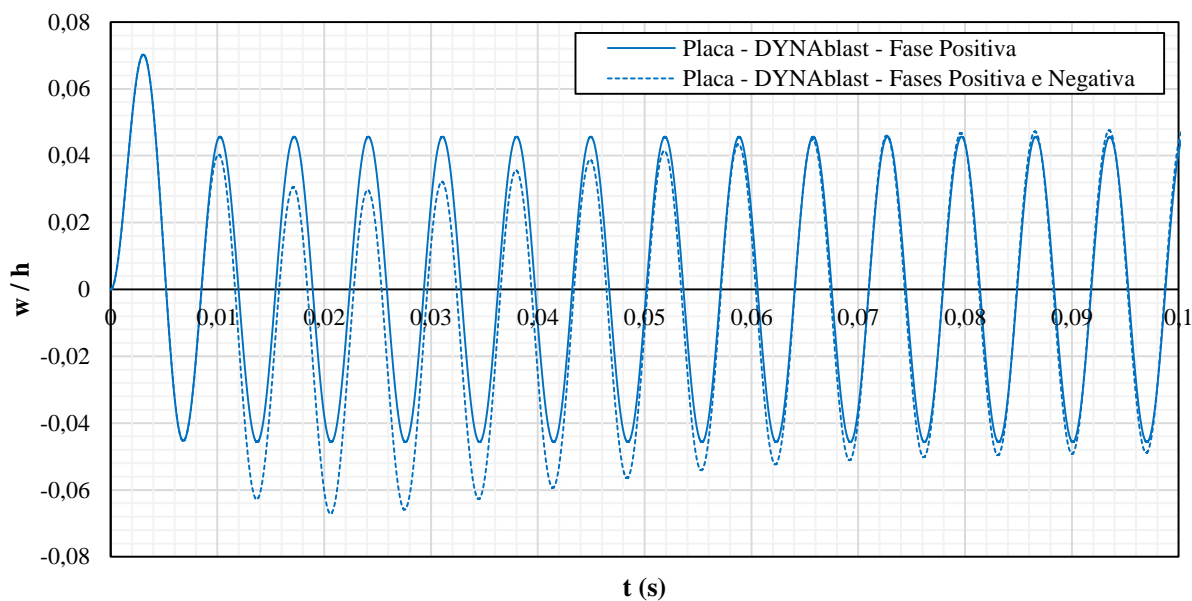


Figura 117 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de placa laminada, caso adaptado de Wei e Dharani (2006)

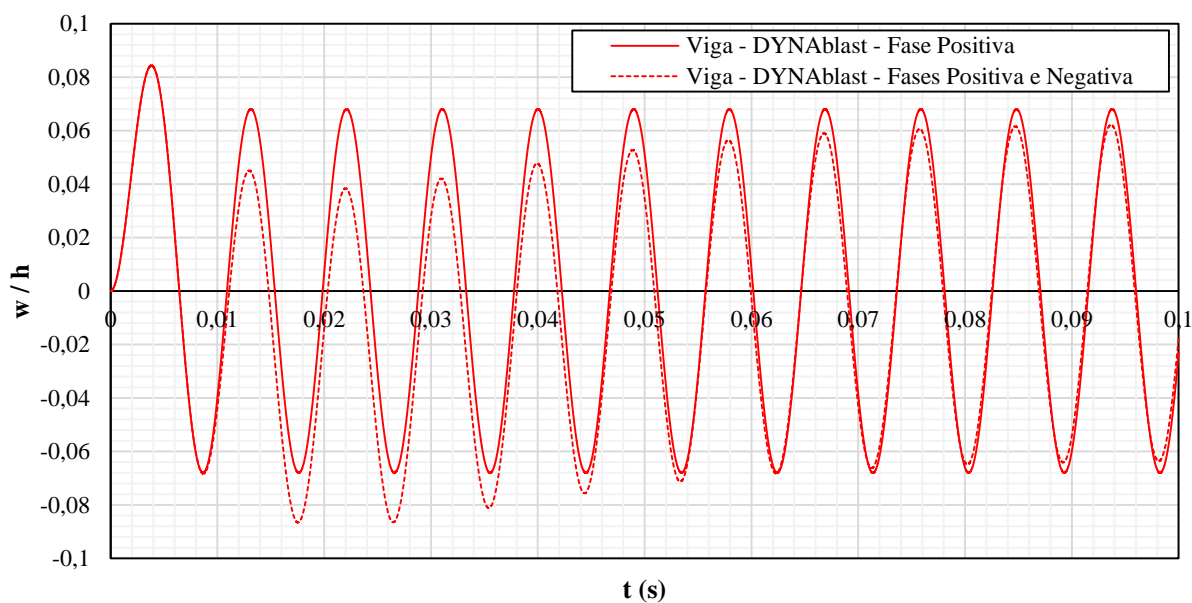


Figura 118 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de viga laminada, caso adaptado de Wei e Dharani (2006)

Tabela 48 - Resultados obtidos usando equação Friedlander para apenas Fase Positiva, usando os softwares DYNAblast 2.0, caso adaptado de Wei e Dharani (2008)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Placa)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:Placa)
Placa - DYNAblast	0,07023	0,00306	-	139,22496	-
Viga - DYNAblast	0,08435	0,00382	20,09863	107,38515	22,86933

Tabela 49 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Wei e Dharani (2008)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Placa)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:Placa)
Placa - DYNAblast	0,07023	0,00306	-	139,22496	-
Viga - DYNAblast	-0,08662	0,01753	23,32433	112,04149	21,02218

Tabela 50 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de placa, caso adaptado de Wei e Dharani (2008)

Carregamento	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Uso Fase Neg.)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.:Uso Fase Neg.)
Fase Positiva	0,07023	0,00306	0,00000	139,22496	1,86060
Fases Positiva e Negativa	0,07023	0,00306	-	141,86449	-

Tabela 51 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de viga, caso adaptado de Wei e Dharani (2008)

Carregamento	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Uso Fase Neg.)	Frequência (Hz)	Dif. Freq % (ref.:Uso Fase Neg.)
Fase Positiva	0,08435	0,00382	2,61562	107,38515	4,15591
Fases Positiva e Negativa	-0,08662	0,01753	-	112,04149	-

5.2.3. Caso 3: Adaptação do modelo de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Kazanci e Mecitoglu (2008) são contemplados na análise do item 5.1.3 na abordagem de uma placa composta por 7 lâminas, do tipo *cross-ply* [0°/90°], submetido a um carregamento explosivo, conforme Tabela 34. A geometria permanece a mesma, com exceção de que o comprimento de *a* corresponde à 0,11 m, conforme Figura 119 e sua respectiva representação de viga, Figura 120.

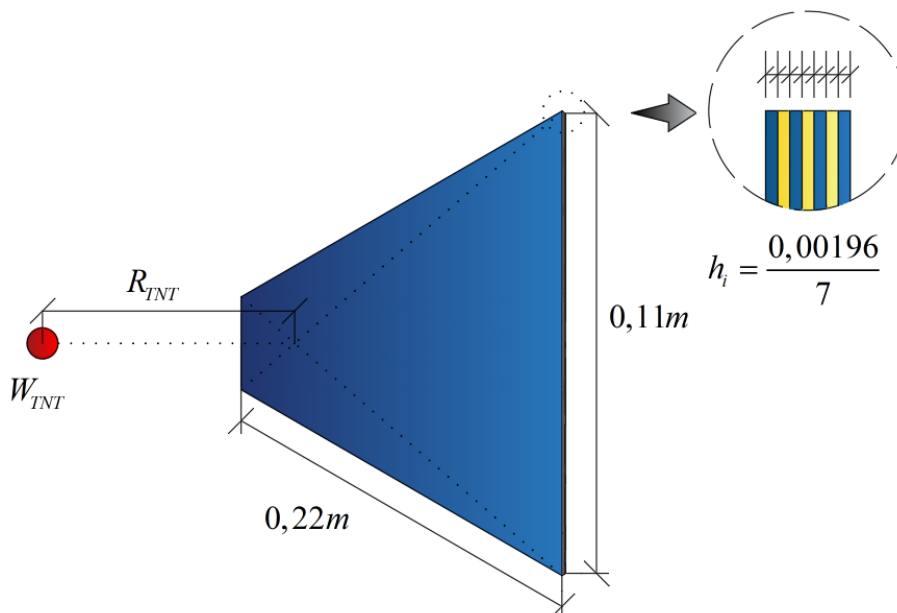


Figura 119 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Inicialmente, optou-se por gerar as Figura 121 e Figura 122 de forma a comparar o comportamento gerado por ambas as estruturas para com as solicitações de aplicação da fase positiva e o uso da fase negativa na análise, respectivamente.

Nas Figura 123 e Figura 124 são fornecidas as respostas estruturais quanto à comparativa de ambas as solicitações para a placa e viga, nesta ordem. Observa-se em todos os gráficos uma ótima aproximação do comportamento da viga para a placa, nos quesitos de deslocamentos e frequências. As análises quantitativas são verificadas nas Tabela 52 à Tabela 55.

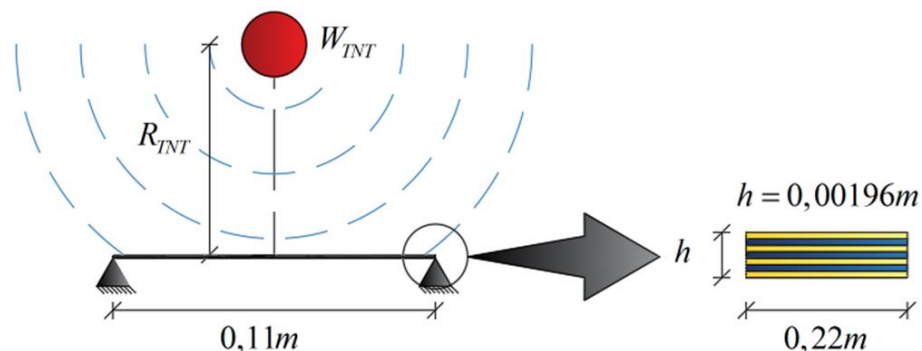


Figura 120 - Esquema representativo viga e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Kazanci e Mecitoglu (2006)

Tabela 52 - Resultados obtidos usando equação Friedlander para apenas Fase Positiva, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.: Placa)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.: Placa)
Placa - DYNAblast	1,90705	0,00108	-	373,87957	-
Viga - DYNAblast	2,13082	0,00131	11,73360	302,62193	19,05898

Tabela 53 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.: Placa)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.: Placa)
Placa - DYNAblast	-2,59393	0,00764	-	385,24427	-
Viga - DYNAblast	-3,26234	0,00634	25,76811	307,44005	20,19607

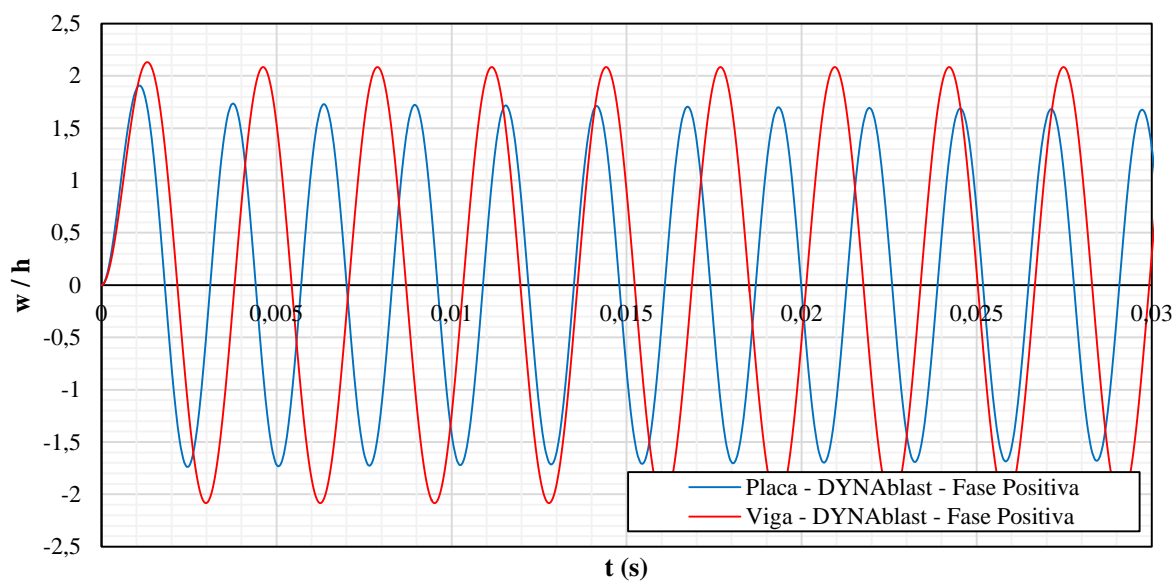


Figura 121 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para apenas a Fase Positiva usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

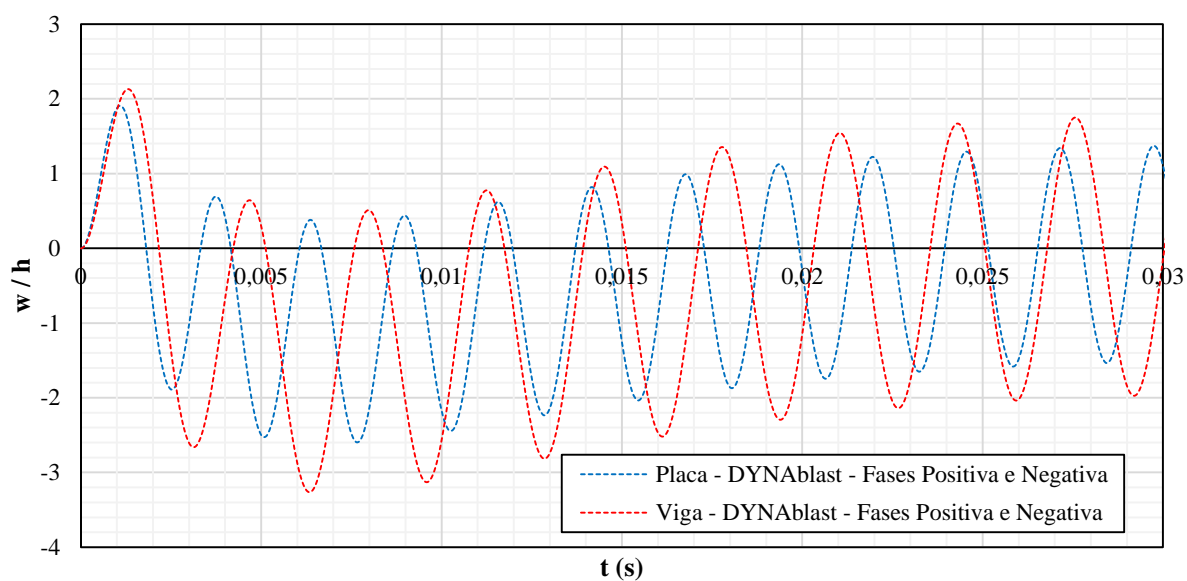


Figura 122 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

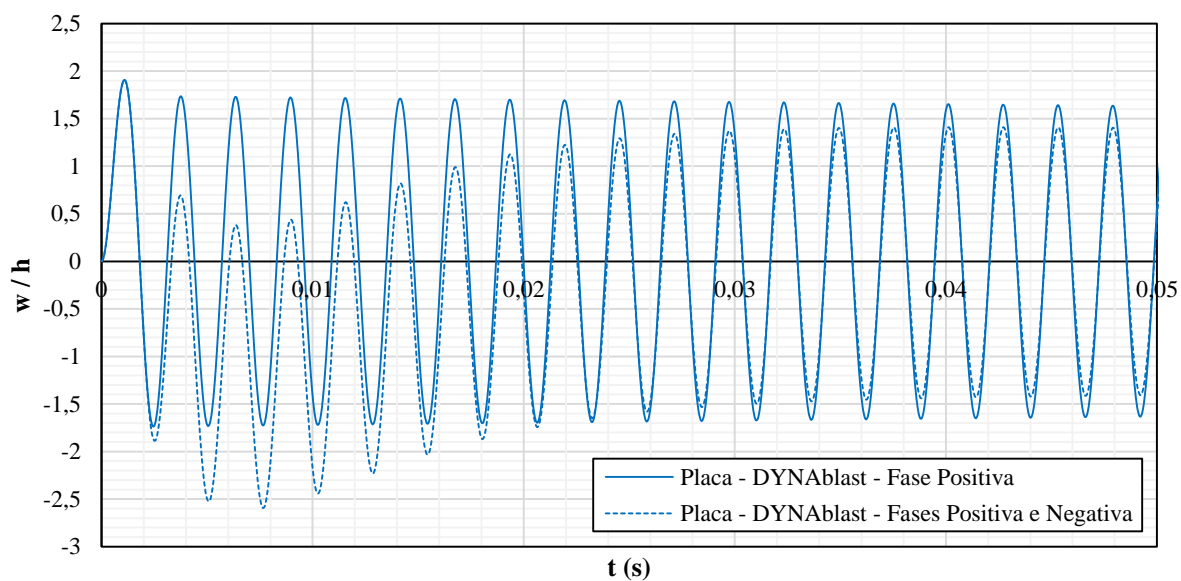


Figura 123 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de placa laminada, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

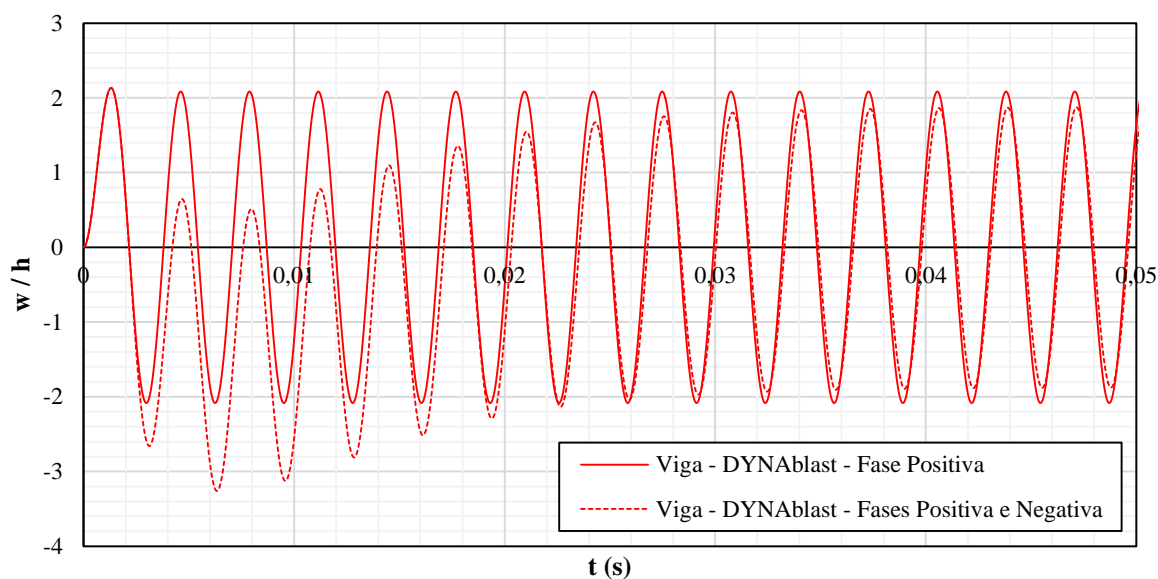


Figura 124 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de viga laminada, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Tabela 54 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de placa, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Carregamento	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Usos Fase Neg.)	Frequência (Hz)	Dif. Freq % (ref.:Usos Fase Neg.)
Fase Positiva	1,90705	0,00108	26,48031	373,87957	2,95000
Fases Positiva e Negativa	-2,59393	0,00764	-	385,24427	-

Tabela 55 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de viga, caso adaptado de Kazanci e Mecitoglu (2008)

Carregamento	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Usos Fase Neg.)	Frequência (Hz)	Dif. Freq % (ref.:Usos Fase Neg.)
Fase Positiva	2,13082	0,00131	34,68440	302,62193	1,56717
Fases Positiva e Negativa	-3,26234	0,00634	-	307,44005	-

5.2.4. Susler et al. (2012)

Susler et al. (2012) são contemplados na análise do item 5.1.4 na abordagem de uma placa composta por 6 lâminas e todas com angulação de 0° , submetido a um carregamento explosivo, conforme Tabela 37. A geometria permanece a mesma, com exceção de que o comprimento de b corresponde à 0,11 m, de acordo com Figura 125 e sua respectiva representação em viga na Figura 126. Utilizando o mesmo processo comparativo dos subitens presentes no item 5.1, observa-se uma aproximação consistente entre os resultados de solicitação de fase positiva para ambas as estruturas, conforme Figura 127, havendo apenas uma pequena diferença entre as amplitudes e nas frequências, que ocasionalmente acarretam em maiores números de ondas completas, para a placa, por unidade de tempo em comparação à viga. O ocorrido na Figura 128, para a solicitação considerando também a fase negativa, é

semelhante ao caso da fase positiva, com diferença maior destacando-se na frequência.

As Figura 129 e Figura 130 sobressaem pela comparativa entre o uso da fase positiva com relação à consideração da fase negativa, para o caso da placa e viga, respectivamente. Observa-se uma consistência nos resultados, mais uma vez correlacionada à amplitude obtida, particularmente durante a fase de vibração livre, bem como a frequência resultante. Por fim, as análises quantitativas são presentes nas Tabela 56 à Tabela 59.

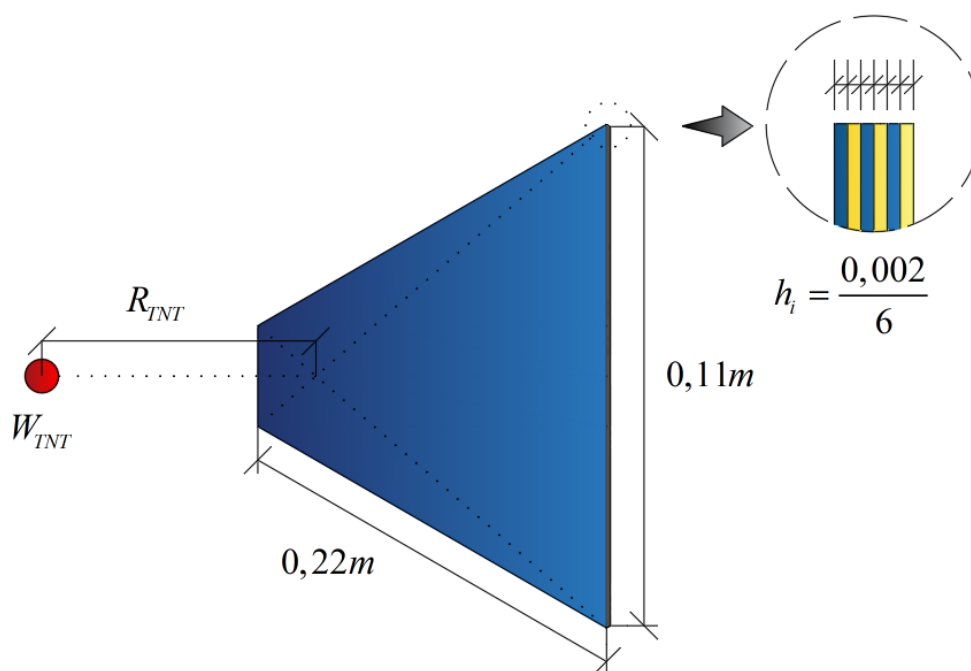


Figura 125 - Esquema representativo placa e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Susler et al. (2012)

Tabela 56 - Resultados obtidos usando equação Friedlander para apenas Fase Positiva, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Suler et al. (2012)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.: Placa)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.: Placa)
Placa - DYNAblast	0,68973	0,00067	-	632,32708	-
Viga - DYNAblast	0,69641	0,00082	0,96828	515,86832	18,41749

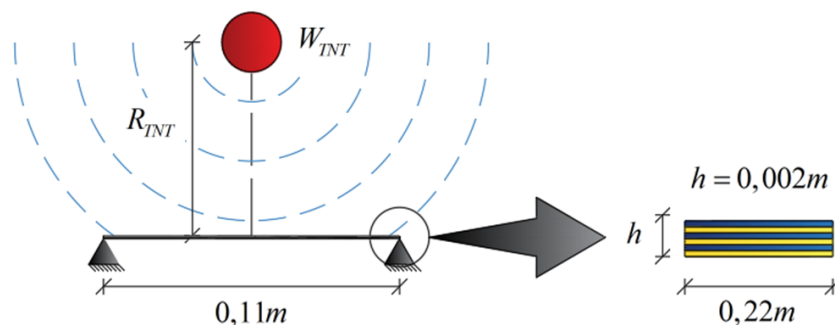


Figura 126 - Esquema representativo viga e fonte explosiva, caso adaptado do modelo de Susler et al. (2012)

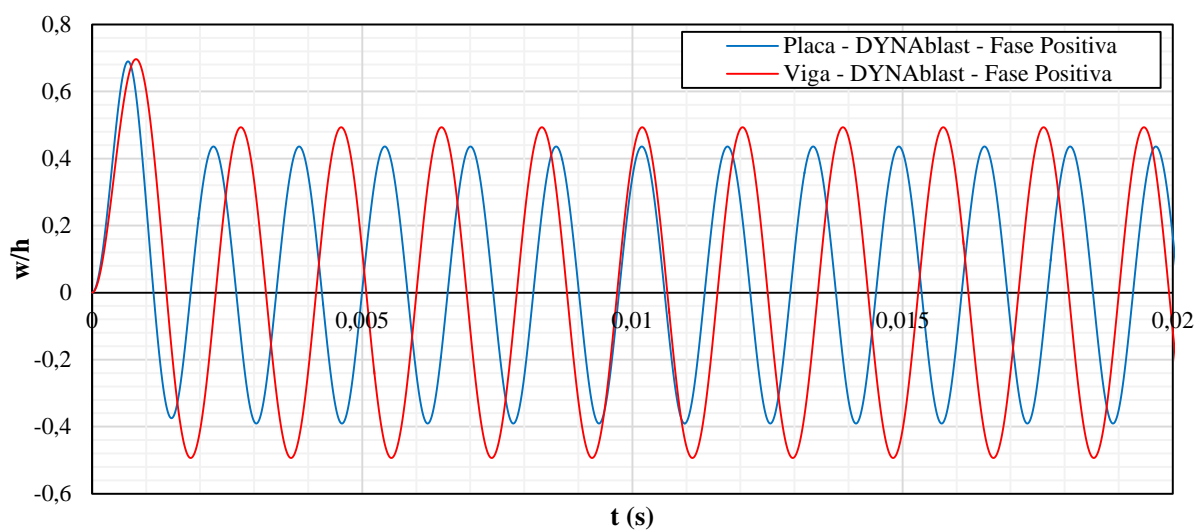


Figura 127 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander para apenas a Fase Positiva usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Susler et al. (2012)

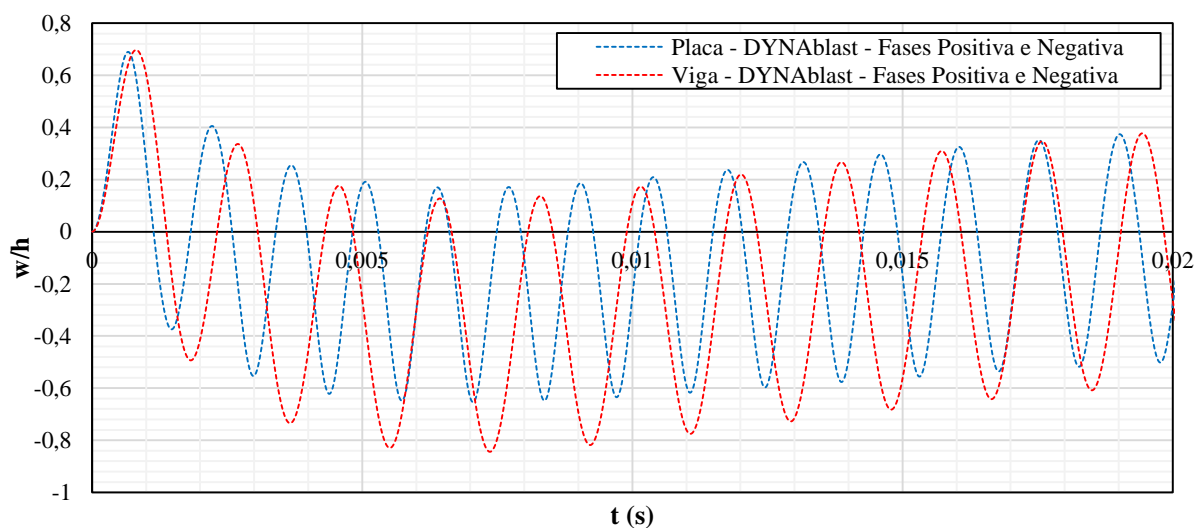


Figura 128 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Susler et al. (2012)

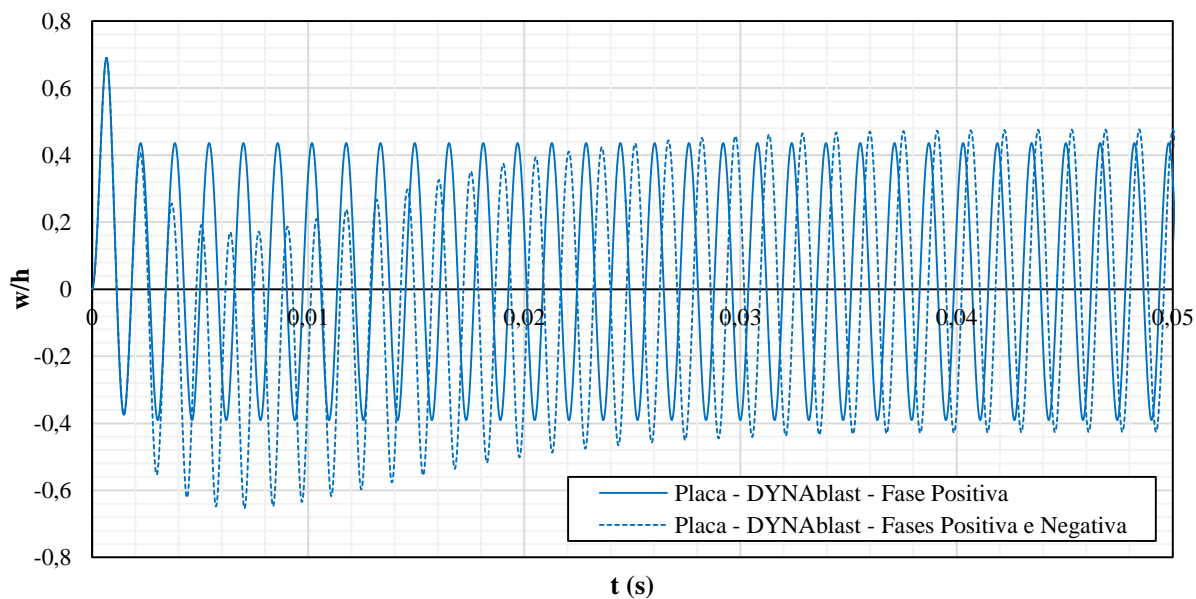


Figura 129 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de placa laminada, caso adaptado de Susler et al (2012)

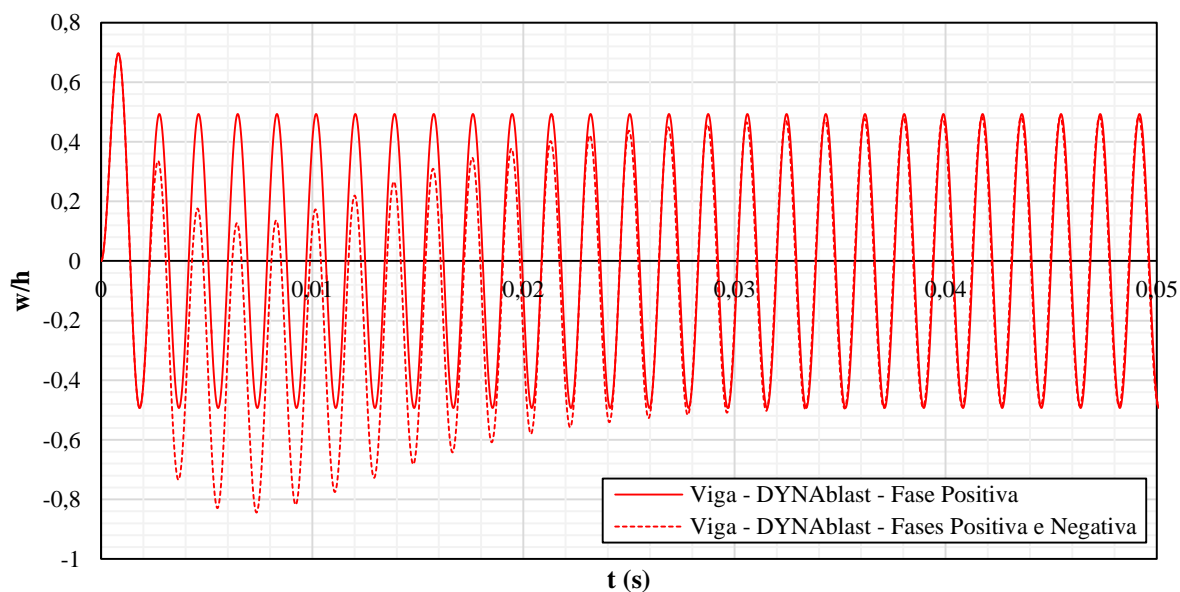


Figura 130 - Deslocamentos obtidos usando equação de Friedlander, comparação entre os casos de uso da Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, estrutura de viga laminada, caso adaptado de Susler et al (2012)

Tabela 57 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, caso adaptado de Suler *et al.* (2012)

Estrutura	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.: Placa)	Frequência (Hz)	Dif. Freq. % (ref.: Placa)
Placa - DYNAblast	0,68973	0,00067	-	643,43983	-
Viga - DYNAblast	-0,84370	0,00736	22,32222	538,79293	16,26366

Tabela 58 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de placa, caso adaptado de Suler *et al.* (2012)

Carregamento	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Uso Fase Neg.)	Frequência (Hz)	Dif. Freq % (ref.:Uso Fase Neg.)
Fase Positiva	0,68973	0,00067	0,00000	632,32708	1,72708
Fases Positiva e Negativa	0,68973	0,00067	-	643,43983	-

Tabela 59 - Resultados obtidos usando equação Friedlander, comparação entre Fase Positiva com Fases Positiva e Negativa, usando o software DYNAblast 2.0, em estrutura de viga, caso adaptado de Suler *et al.* (2012)

Carregamento	Razão w/h	Tempo Decorrido (s)	Dif. Desloc. % (ref.:Uso Fase Neg.)	Frequência (Hz)	Dif. Freq % (ref.:Uso Fase Neg.)
Fase Positiva	0,69641	0,00082	17,45712	515,86832	4,25481
Fases Positiva e Negativa	-0,84370	0,00736	-	538,79293	-

5.2.5. Comparação Resultados: Casos Avaliados

Para o presente tópico, apresentam-se as Tabela 60 e Tabela 61 como tabela resumo dos resultados gerais obtidos comparando as estruturas de placas e vigas, possuindo as mesmas características físico-geométricas e carregamentos, considerando a aplicação do *software* DYNAblast 2.0. Na Tabela 60 são apresentados

os resultados considerando o carregamento com a aplicação das fases positiva e negativa e, para a Tabela 61 são contemplados os resultados somente da fase positiva.

Tabela 60 - Resumo resultados apresentados para aplicação das fases positiva e negativa do carregamento

Caso	w/h - Placa	w/h - Viga	Dif. % ref.: Placa
Caso 1	0,40183	0,33520	16,58164
Caso 2	0,07023	-0,08662	23,33761
Caso 3	-2,59393	-3,26234	25,76824
Caso 4	0,68973	-0,84370	22,32323

Tabela 61 - Resumo resultados apresentados para aplicação da fase positiva do carregamento

Caso	w/h - Placa	w/h - Viga	Dif. % ref.: Placa
Caso 1	0,40183	0,33520	16,58164
Caso 2	0,07023	0,08435	20,10537
Caso 3	1,90705	2,13082	11,73383
Caso 4	0,68973	0,69641	0,96849

5.3. Equação $w(Z, W_{TNT}, h)$: Metodologia Sugerida

No decorrer do Capítulo 5, em especial o tópico 5.1, onde são estudados os comportamentos de placas laminadas do tipo SSSS, foram realizadas análises paramétricas de forma para averiguar o deslocamento máximo da estrutura quando submetida à variação do carregamento explosivo. Como abordado no mesmo capítulo, bastam apenas 2 parâmetros para determinar a curva característica de uma explosão: W_{TNT} (massa do explosivo) e Z (distância escalada do explosivo para o anteparo). Desta forma, variando estas duas propriedades, é possível determinar curvas características para cada estrutura analisada. Nestas, atenta-se que todas as curvas apresentadas, em especial $w/h \times Z$, possuem o mesmo comportamento, este diretamente relacionado com as características físico-geométricas da estrutura estudada, suas condições de contorno, o modelo de análise aplicado e o carregamento imposto. Sendo assim, este presente tópico sugere uma metodologia para determinar as equações características de uma placa que calculem os deslocamentos máximos com base nos parâmetros de explosão, isto é, W_{TNT} e Z . Para

esse processo, utiliza-se por base o caso Wei e Dharani (2006), podendo-se estender para os demais casos de placas do tipo SSSS.

5.3.1. Análise dos Gráficos $|w/h| \times Z$ ($m/kg^{1/3}$)

Observa-se que Figura 67 e Figura 68 são exibidas curvas referentes ao deslocamento da placa, na razão de sua altura, com relação a distância escalada Z ($m/kg^{1/3}$), para diversos valores de massas de TNT. Verificou-se que o comportamento da estrutura era semelhante, considerando $W_{TNT} \geq 10$ kg. Desta forma, analisou-se as equações pertinentes a cada uma dessas curvas, ou seja, é utilizado o *software* Excel de forma a gerar equações automáticas para cada uma destas curvas e constatou-se que todas estas apresentavam um bom comportamento para um polinômio do 5º grau, conforme apresentam as Figura 131 à Figura 133.

Na Figura 133 constata-se que há uma excelente concordância entre as curvas representadas pelas massas de TNT e os polinômios gerados pelo Excel, entendendo-se que polinômios de 5º são os mais adequados para a caracterização das curvas. Com isso, ponderando que um polinômio deste referido grau pode ser trabalhado como sendo $p(x) = p_1x^5 + p_2x^4 + p_3x^3 + p_4x^2 + p_5x + p_6$, tem-se os coeficientes das equações representadas na Tabela 62.

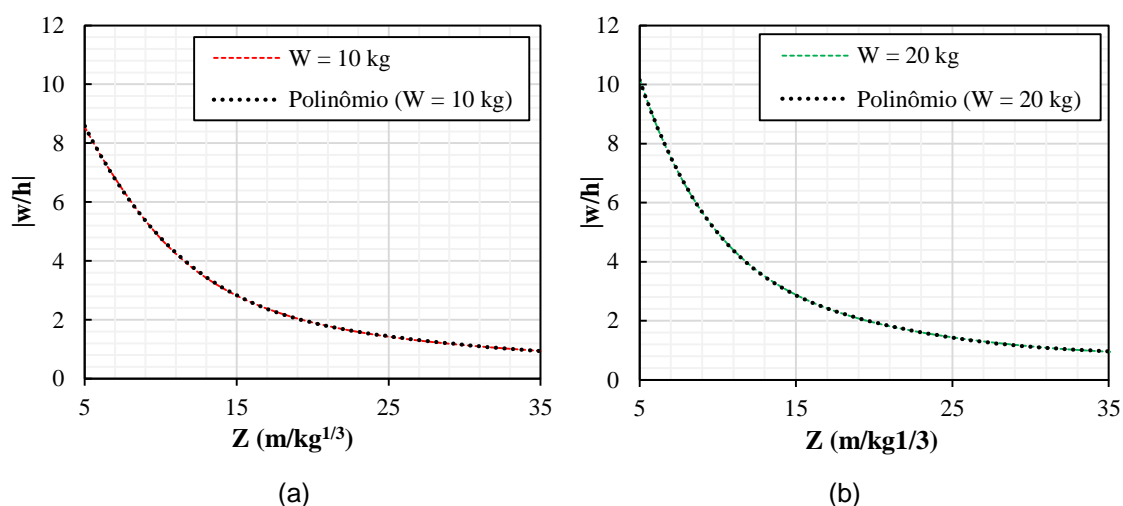


Figura 131 - Relação entre deslocamento máximo e distância escalada Z para cada massa de W_{TNT} , parte 1

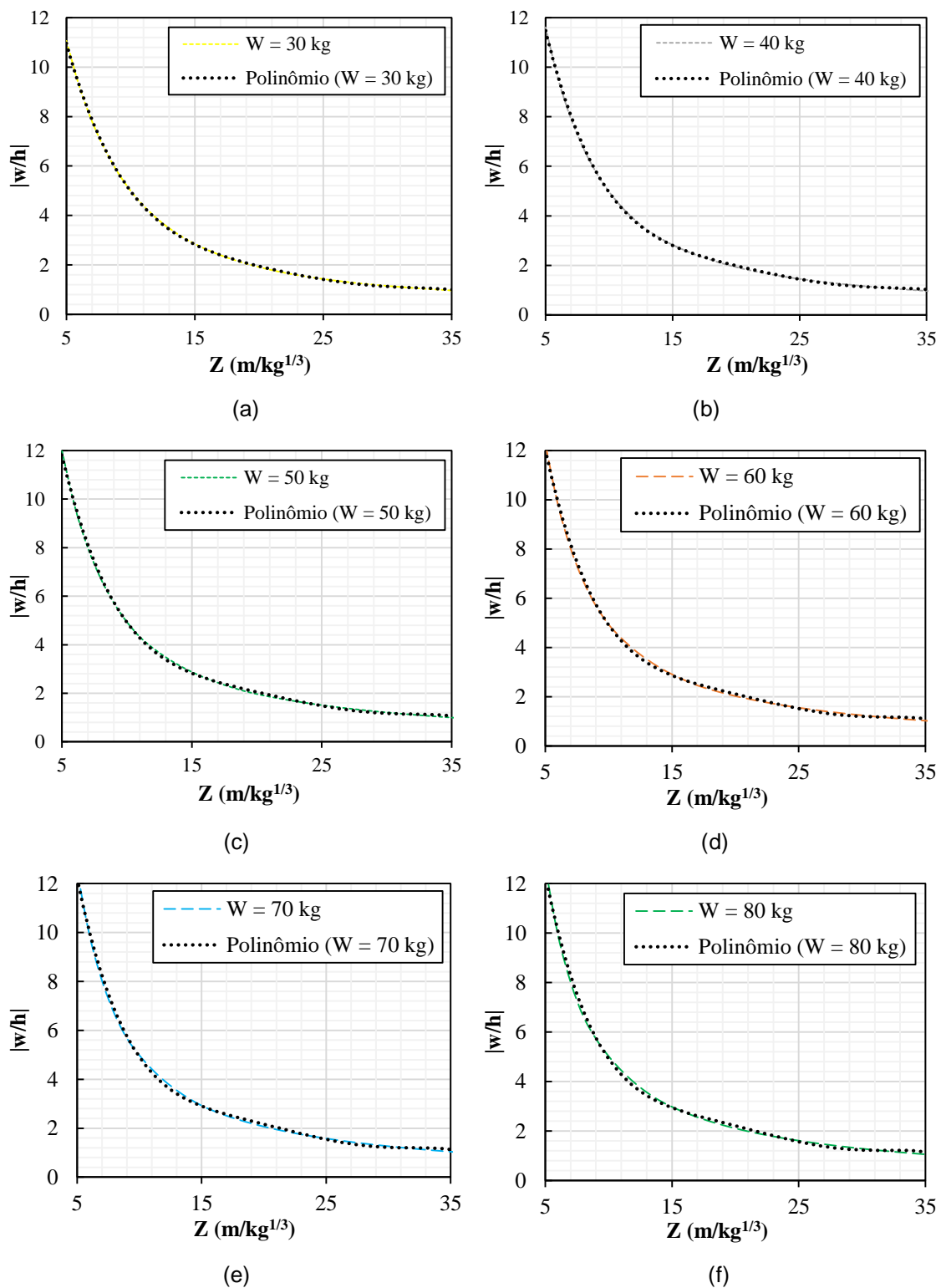


Figura 132 - Relação entre deslocamento máximo e distância escalada Z para cada massa de W_{TNT} ,
parte 2

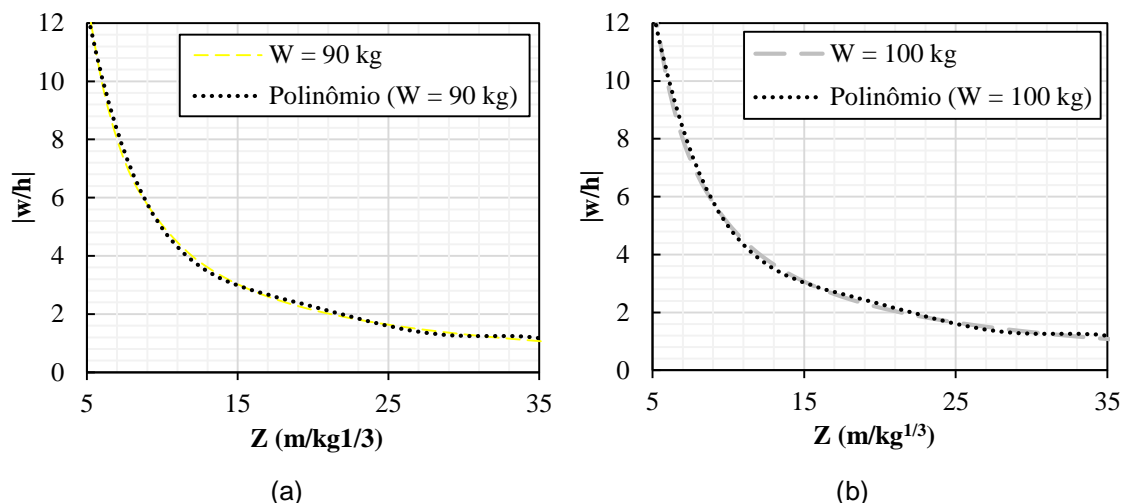


Figura 133 - Relação entre deslocamento máximo e distância escalada Z para cada massa de W_{TNT} , parte 3

Tabela 62 - Coeficientes p_i da equação polinomial representativa das curvas $|w/h| \times Z$

W_{TNT} (kg)	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
10	-8,75E-08	2,544E-05	-2,242E-03	8,945E-02	-1,757E+00	1,540E+01
20	-1,259E-06	1,665E-04	-8,782E-03	2,351E-01	-3,314E+00	2,185E+01
30	-2,096E-06	2,644E-04	-1,320E-02	3,306E-01	-4,300E+00	2,569E+01
40	-2,694E-06	3,362E-04	-1,651E-02	4,030E-01	-5,039E+00	2,846E+01
50	-3,298E-06	4,060E-04	-1,959E-02	4,669E-01	-5,653E+00	3,061E+01
60	-3,749E-06	4,579E-04	-2,186E-02	5,134E-01	-6,089E+00	3,212E+01
70	-4,110E-06	4,992E-04	-2,364E-02	5,493E-01	-6,421E+00	3,325E+01
80	-4,405E-06	5,325E-04	-2,506E-02	5,774E-01	-6,673E+00	3,409E+01
90	-4,634E-06	5,581E-04	-2,613E-02	5,982E-01	-6,857E+00	3,470E+01
100	-4,760E-06	5,718E-04	-2,670E-02	6,088E-01	-6,948E+00	3,503E+01

5.3.2. Análise dos Parâmetros e Equação

Para cada um dos coeficientes p_i , é gerado um gráfico de comportamento destes com relação ao avanço de W_{TNT} , de forma a averiguar se é possível evidenciar características de curvas que possam ser refletidas em forma de equação. Assim sendo, gerando-se as coordenadas (p_i, W_{TNT}) , que são presentes na Tabela 62, evidenciou-se que todos os coeficientes juntos à x^j em j seja ímpar apresentam comportamento descendente, enquanto para j sendo par o comportamento de p_i é crescente. Isso pode ser observado na Figura 134.

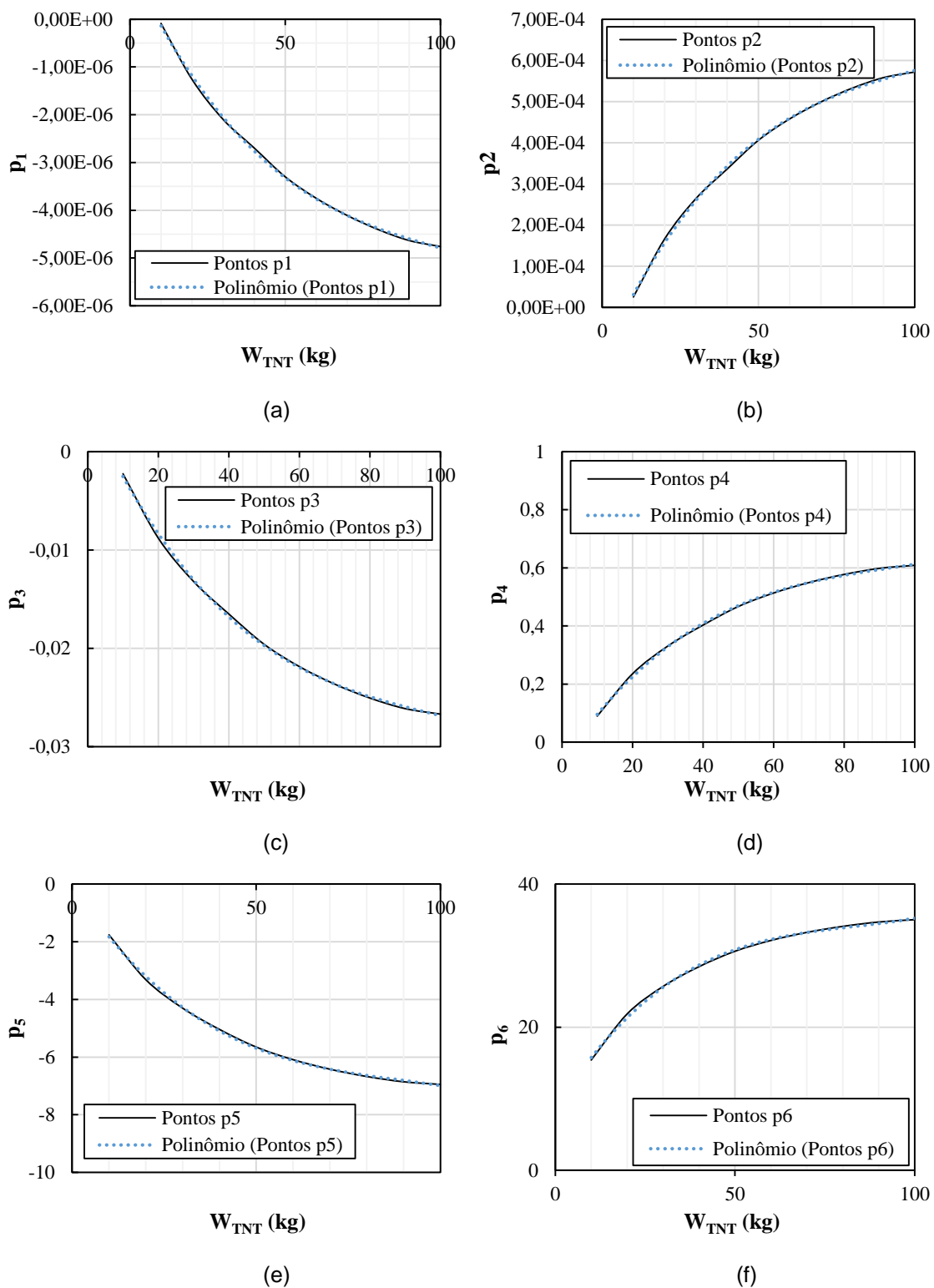


Figura 134 - Relação entre coeficientes p_i e massa de W_{TNT}

Os coeficientes, da mesma forma que as curvas $|w/h| \times Z$ ($m/kg^{1/3}$), apresentam um comportamento com base em um polinômio do 3º grau. Assim, pode-

se descrever a equação $|w/h|$ em função da distância escalada e da massa de TNT submetida, conforme contemplada na Equação (80), repetindo-a na Equação (84).

$$\frac{w}{h} = aZ^5 + bZ^4 + cZ^3 + dZ^2 + eZ + f$$

Onde:

$$\begin{aligned} a &= -3,670 \cdot 10^{-12} W_{TNT}^3 + 1,145 \cdot 10^{-9} W_{TNT}^2 - 1,369 \cdot 10^{-7} W_{TNT} + 1,122 \cdot 10^{-6} \\ b &= 5 \cdot 10^{-10} W_{TNT}^3 - 1 \cdot 10^{-7} W_{TNT}^2 + 2 \cdot 10^{-5} W_{TNT} - 0,0001 \\ c &= -2 \cdot 10^{-8} W_{TNT}^3 + 7 \cdot 10^{-6} W_{TNT}^2 - 0,0008 W_{TNT} + 0,0045 \\ d &= 6 \cdot 10^{-7} W_{TNT}^3 - 0,0002 W_{TNT}^2 + 0,0175 W_{TNT} - 0,0631 \\ e &= -7 \cdot 10^{-6} W_{TNT}^3 + 0,0019 W_{TNT}^2 - 0,1908 W_{TNT} - 0,1046 \\ f &= 4 \cdot 10^{-5} W_{TNT}^3 - 0,0089 W_{TNT}^2 + 0,8027 W_{TNT} + 8,5545 \end{aligned} \quad (84)$$

Entretanto, não é possível descrever uma equação simbólica visto que a caracterização do carregamento explosivo é dada por uma exponencial na fase positiva e em sua continuação, ou uma equação cúbica, na fase negativa juntamente com o tipo de análise aplicada (CLPT, FSPT, HSPT ou von Kármán), o nível de não linearidade das equações diferenciais é incrementado, aumentando a complexidade da solução. Sendo assim, a solução do sistema de equações diferenciais é dada utilizando-se modelos de soluções numéricas, que no caso deste trabalho é adotado o método de Runge-Kutta.

Este procedimento de realização da análise paramétrica das estruturas presentes no trabalho foi possível com base na implementação do *software* DYNAblast para estudo de placas e vigas laminadas, observando ainda assim que tais estruturas ortotrópicas são passíveis de apresentarem um comportamento consistente para com a variação dos parâmetros de explosão. Ademais, conforme apresentado no Capítulo 2, o programa é capaz de calcular a equação característica da estrutura para uma distância escalada Z ($m/kg^{1/3}$) específica.

Naturalmente, entende-se que a vantagem desta metodologia se encontra na determinação dos deslocamentos máximos de uma placa, do tipo SSSS, conforme varia-se os parâmetros de explosão, em que é economizado tempo de execução computacional no processo, bem como de uma maneira simples calcular o deslocamento desejado para qualquer valor de massa de TNT e distância escalada introduzida.

Em suma, observa-se neste presente tópico que a determinação das equações $w(Z, W_{TNT}, h)$ é concebida meio de uma calibração. Em outras palavras, ao observar as curvas dos gráficos $|w/h| \times Z$, compreende-se que existe um padrão na constituição das equações para cada variação de W_{TNT} . Assim sendo, a primeira formulação é dada considerando o equacionamento polinomial do quinto grau com base na função $w(Z, h)$ para cada curva W_{TNT} . Posteriormente, observando que os coeficientes dos polinômios também performam uma função polinomial, para o caso averiguou-se ser do terceiro grau, equacionou-as e pôde-se determinar que a função $w(Z, W_{TNT}, h)$ corresponde a uma expressão polinomial de 5° com coeficientes que são reescritos como polinômios do 3°.

Ressalta-se que todas as outras análises paramétricas e determinação das suas respectivas equações de deslocamento procedidas da mesma forma, observando também os polinômios característicos das curvas.

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho de pesquisa objetivou em realizar uma investigação do comportamento estrutural dinâmico de placas e vigas laminadas submetidas ao carregamento explosivo. Neste percurso, visou-se entender como tais elementos apresentam suas respostas estruturais mediante variações das características do carregamento, no caso a distância escalada Z e a massa do explosivo W_{TNT} , independente das características químicas deste, já que cada material químico possui uma quantidade de energia a ser liberada e é convertida em TNT, conforme já pesquisado por Reis (2019). A escolha do tema em questão, carregamentos extremos, deu-se ao fato de que é uma pesquisa pouco explorada no âmbito científico pela sua complexidade. Em contrapartida, observa-se exemplos recentes de ocorrências deste fenômeno em eventos mundiais, tais como a explosão envolvendo o armazenamento de 2750 toneladas de nitrato de amônio em Beirute – Líbano (Souza, 2022), a explosão da ponte da Criméia na guerra da Rússia na Ucrânia (BBC News Brasil, 2022), exemplos de explosões a caixas eletrônicos em bancos no Brasil, como apresenta-se nas matérias Polícia Federal (2021) e CNN Brasil (2022).

Para auxiliar o processo de análise das estruturas em questão e do carregamento escolhido, o Capítulo 3 apresenta o produto gerado por esta presente pesquisa, o *software* DYNAblast 2.0, que possibilita a análise estática e dinâmica de placas e vigas laminadas contempladas neste trabalho, bem como as teorias de estruturas utilizadas. Este *software* corresponde a uma atualização do DYNAblast, que recebia como *input data* estruturas de placas finas isotrópicas submetidas ao carregamento explosivo. Considerando a aplicação do carregamento explosivo, o usuário pode introduzir os dados determinados experimentalmente ou utilizar como base a distância escalada e a massa do explosivo, considerar ou não na análise a fase negativa e determinar as equações características do carregamento para cada fase. No que tange à estrutura, é permitido que os atributos mecânicos de cada lâmina sejam passados para o programa, não havendo empecilhos quanto a possibilidade de se trabalhar com materiais distintos. Ademais, o tipo de teoria a ser adotada também é de escolha do usuário, permitindo somente a não linearidade geométrica da estrutura, ou seja, no quesito dos materiais é considerada a teoria elástica linear. Finalmente, para o pós processamento, é possível observar diferentes gráficos

apresentando o comportamento da estrutura conforme o tipo de análise, ou seja, relações entre deslocamento x tempo, pressão x tempo, análise dinâmica das tensões e deformações. Todos os resultados podem ser exportados para uma tabela Excel^R de forma a serem trabalhadas conforme for do interesse do usuário.

No que relaciona à análise das estruturas de vigas e placas laminadas, o Capítulo 4 visa preencher dois objetivos, sendo o primeiro correspondente à calibragem do *software* desenvolvido, comparando as respostas estruturais de placas e vigas, em solicitações estáticas, de vibração livre e vibração forçada para com o mesmo modelo realizado no *software* DYNAblast 2.0. O segundo satisfaz a comparação entre estruturas de placas e sua correspondente viga com as mesmas características físicas, considerando o mesmo carregamento.

Neste procedimento, realizou-se uma longa pesquisa na literatura de exemplos de estruturas que fossem submetidas a carregamento extremos em placas e vigas laminadas. Ademais, precisou-se atentar se a configuração da estrutura era semelhante aos objetivos desse trabalho, caso contrário a equiparação dos resultados não seria coerente. Neste contexto, constatou-se que são poucos os exemplos que contemplassem as soluções numéricas desejadas, isto é, poucos trabalhos exibem um estudo sobre carregamentos extremos, além de trabalhos que utilizam de ensaios experimentais, porém com explosão confinada. Assim sendo, a necessidade de realizar primeiramente a comparação dos resultados de análises estáticas e vibração livre se tornam pertinentes. Dentre os artigos obtidos para reprodução da análise dinâmica considerando o carregamento explosivo, observa-se que as placas laminadas compósitas com todas as condições de contorno sendo simplesmente apoiadas são as mais trabalhadas pelos pesquisadores, visto a facilidade quanto a determinação dos resultados e a consideração das séries trigonométricas que possam representar os deslocamentos e rotações através das séries de Navier. Neste sentido, observa-se os itens 4.1 e 4.2 como sendo processo de análise de placas e vigas, em sua maioria, simplesmente apoiadas. Desta forma, as análises estática e de vibração livre são de calibração do resultado para assim dar prosseguimento nos cálculos de vibração sobre carregamento explosivo.

Para a análise de resultados observados com relação a placas simplesmente apoiadas, pode-se observar no item 4.1.1 a convergência dos resultados entre o *software* DYNAblast e os resultados presentes em Reddy (2003), naturalmente porque

é a mesma metodologia seguida deste trabalho para com Reddy (2003). No quesito de análise de vibração livre, item 4.1.2, há excelente convergência entre o *software* e os resultados obtidos por Reddy (2003). Além disso, nas mesmas Figura 33 à Figura 35 é exposto o comportamento da placa utilizando a teoria HSPT, cujos resultados de frequência relativa se aproximam da análise de FSPT.

Pode-se contemplar as análises realizadas envolvendo vigas laminadas compósitas do tipo simplesmente apoiadas. Para o primeiro caso, item 4.2, são apresentados os casos de análise estática e avaliação das tensões do meio do vão da estrutura, comparando-as com exemplos na literatura. Considerando que a metodologia seguida é a proposta por Reddy (1997), observa-se uma excelente aproximação tanto do *software* DYNAblast quanto dos exemplos envolvidos. Contudo, é de grande importância ressaltar que para se manter o bom resultado obtido, deve-se considerar mais de um termo na série de Fourier.

A avaliação da vibração livre, item 4.2.2, também é realizada e observa-se uma excelente congruência dos resultados do *software* DYNAblast para com Khdeir e Reddy (1994), constatando-se que o *software* apresenta boa calibração para as análises de vibração livre, visto o maior erro apresentando ser 0,0087%. Após esta avaliação, necessitou-se realizar a calibração do *software* para com vibração forçada, item 4.2.3, visto que não se encontrou referências na literatura que observasse vigas laminadas submetidas a carregamento explosivo. Assim sendo, tomou-se por referência dois exemplos, Eshraghi e Dag (2018) e Ahmed (2018), e averiguou-se que o *software* DYNAblast apresentou excelentes resultados em comparação com os exemplos, a saber as Figura 41 à Figura 48. Nestes casos, é importante salientar que tais análises são de cunho numérico, ou seja, os autores Eshraghi e Dag (2018) e Ahmed (2018), bem como todos os demais autores citados neste trabalho realizaram suas respectivas pesquisas utilizando modelos matemáticos. As corroborações dos resultados com análises experimentais foram conduzidas pela autora desta pesquisa em seus trabalhos Reis (2019), Reis et al (2020) e Reis *et al.* (2021).

O terceiro item, 4.3, corresponde na correlação das respostas estruturais de deslocamentos x tempo e frequências encontradas para placas e sua representação em viga. De forma que esta comparação possa ter validade, deve-se adotar a concepção já mencionada por Kimura *et al.* (2022) em que uma placa pode ser modelada como sendo viga se, e somente se, suas dimensões sejam $a/b \geq 2$.

Ademais, a sua respectiva representação em viga deve ser de forma que seu vão seja a menor dimensão da placa modelada (b) e sua largura seja de 1 metro ou o valor de a , desde que este seja menor que 1 metro.

Para a realização das análises, adotou-se, naturalmente, o *software* desenvolvido para este trabalho em específico, DYNAblast 2.0, e optou-se por utilizar para auxiliar nas análises o *software* LESM, desenvolvido pela PUC-Rio, que tem por propósito modelar estruturas (vigas, pórticos e grelhas) utilizando modelos lineares elásticos, tanto em análise estática quanto análise dinâmica. Entretanto, o programa LESM é capaz somente de tratar estruturas constituídas de um único material isotrópico para cada elemento, além de não modelar placas.

De forma a contornar algumas limitações do programa LESM, no tópico 4.3 utilizou-se 4 exemplos de placas laminadas submetidas ao carregamento explosivo presentes na literatura, Librescu e Nosier (1990), Wei e Dharani (2006), Kazanci e Mecitoglu (2008) e Susler *et al* (2012). Para adaptar tais problemas ao *software* LESM, avaliou-se os materiais de que cada placa era constituída e suas espessuras, assim sendo uma estrutura constituída de n lâminas e composta por m materiais era então subdividida em m novas estruturas e cuja espessura fosse a soma de cada lâmina composta pelo material em análise. Ademais, o que originalmente fosse constituído de material ortotrópico, necessitou a adaptação ao caso de isotropia. Em todos os casos de novas estruturas moldadas com base nos modelos originais, o carregamento explosivo continua sendo o primário. Assim sendo, para cada subtópico apresentado no tópico 4.3, foram realizados 3 modelos: placa e viga modelados pelo DYNAblast e viga modelado pelo LESM.

Na comparativa dos resultados de vigas entre ambos os *softwares*, pode-se observar que há uma excelente concordância entre os resultados, havendo variação dos destes entre 7% e 11% de diferença nos deslocamentos e 0.6% a 10% com base no programa LESM, cuja justificativa se dá por este programa (LESM) considerar os demais modos de vibração em sua base de cálculo, enquanto o DYNAblast considera apenas o primeiro. Já o caso da análise das placas, os deslocamentos variam de 10% a 33% e as frequências vão de 16% a 54%, considerando o cálculo dos erros com base nos resultados dos modelos de vigas realizados no *software* LESM. Assim sendo, observa-se já que a diferença de resultados é notória, naturalmente por ser um modelo que considera ambas as dimensões (x,y) na base de cálculos. Além disso, ao

longo das imagens de resposta estrutural apresentadas no item 4.3 observa-se um comportamento bem estabelecido e próximo da estrutura de placa com relação aos modelos de vigas, apesar das altas diferenças observadas nos erros. Desta forma, é possível entender que é uma resposta concisa da placa devido aos modelos apresentados e calibrados ao longo do item 4.1. Ao mesmo tempo, não é ainda satisfatório, mesmo para um modelo isotrópico de análise elástico linear, realizar uma simplificação de modelo de placa para vigas, devido principalmente à diferença nas frequências.

Tendo em vista que a calibração do *software* se apresentou satisfatória quanto a análise estática e a vibração livre, no Capítulo 5 avalia-se o comportamento de placas e vigas do tipo laminadas ortotrópicas submetidas ao carregamento explosivo. Considerando o item 5.1, foram realizados 5 modelos comparativos com os presentes na literatura, os quais são os mesmos adotados no item 4.1 de forma a avaliar os deslocamentos determinados pelo *software* e confrontá-los com as pesquisas utilizadas por base comparativa. Neste contexto, observa-se que no item referido a resposta do *software* DYNAblast fora bastante favorável no quesito de avaliação do deslocamento do centro da placa para com o tempo, isto é, $w/h \times t$, onde apresenta-se apenas pequenas diferenças relacionados ao deslocamento máximo ou no período do carregamento. Observado isto, torna-se extremamente pertinente a realização de uma análise que contribua na representação do comportamento da estrutura quando certos parâmetros de explosivo fossem modificados, isto é, a representação de w/h máximos para quando W_{TNT} e Z fossem alterados na análise. A criação dos gráficos $|w/h| \times Z$, para cada massa de TNT otimiza o tempo de análise no quesito de avaliação do deslocamento máximo para cada Z e W_{TNT} , como exemplificar a Figura 67, Figura 68 e semelhantes. É compreensível que este procedimento permite que seja avaliada com clareza os intervalos de Z que influenciam na determinação dos resultados de deslocamentos da placa, em outras palavras, comprova-se em todos os gráficos $Z \times |w/h|$ que a partir de valores consideráveis de Z , os deslocamentos do centro da placa tornam-se mínimos mesmo que aumentando a massa de explosivo. Este caso é claro nas Figura 68, Figura 77, Figura 90 e Figura 100 em que massas acima de 50 kg não influenciam na variação expressiva dos deslocamentos da estrutura, quando se é respeitada a Equação (62).

Ademais, com base nas análises realizadas pelos gráficos $Z \times |w/h|$, notou-se que as curvas, cada qual representando uma massa de TNT, comportam-se de forma semelhante além destas curvas apresentarem-se paralelas entre si. Visto isso, torna-se necessário desenvolver uma metodologia para determinar uma equação que possa representar este conjunto de curvas e que correlacionasse os deslocamentos máximos da placa, bem como as características do explosivo. Assim sendo, foram determinadas as Equações (80) à (83), onde compreendeu-se que equação polinomial melhor representa as curvas descritas. Ressalta-se que não há possibilidades de geração de uma equação única aplicada a qualquer estrutura e/ou carregamento explosivo, visto que as soluções das equações diferenciais são numéricas utilizando o método de Runge-Kutta.

Paralelamente aos gráficos $Z \times |w/h|$, é avaliado o comportamento da estrutura para $W_{TNT} \times |w/h|$ de forma a corroborar os resultados com $Z \times |w/h|$, a de se observar as Figura 69, Figura 72, Figura 78, Figura 82, Figura 85, Figura 91, Figura 96, Figura 101 e Figura 104. Neste caso, a análise corresponde na variação da massa para cada curva de Z e, mais uma vez, verifica-se a diminuição dos deslocamentos para quando se tem altos valores de Z e a estabilização destes para altos valores de W_{TNT} , reforçando a conclusão anterior, onde o aumento da massa de TNT não influencia nos deslocamentos do centro da placa, quando se é respeitada a relação presente na Equação (62).

Observando o comportamento da estrutura mediante variação das propriedades do explosivo (Z e W_{TNT}), há um segundo fator de grande importância deve ser avaliado que é referente a influência da fase negativa na mesma estrutura. Como observado anteriormente, o carregamento explosivo é constituído de uma fase de pressão positiva (fase positiva) e então uma região de pressão negativa ou abaixo da atmosférica (fase negativa). Neste contexto, verifica-se que é de grande importância avalia o quanto a influência da fase negativa pode modificar os resultados de deslocamento da estrutura de placa. Assim sendo, para cada exemplo da literatura presente no item 4.3 fora estudado o comportamento da estrutura nas circunstâncias de consideração ou não da fase negativa. Observou-se, para cada exemplo, que o resultado é numérico e depende diretamente das características físico-geométricas da placa bem como os parâmetros constituintes da expressão do carregamento, não podendo assim realizar apenas uma análise de $w/h \times t$ para avaliação da consideração

da fase negativa. Assim sendo, gráficos do tipo t_d/T_L x FAD auxiliam na interpretação dos resultados, tais como Figura 73, Figura 79, Figura 83, Figura 86, Figura 92, Figura 97, Figura 102 e Figura 105, onde a presença da crista no gráfico é um fator de que pode acusar os maiores deslocamentos ocorrendo na fase negativa, conforme havia afirmado Reis (2019), Reis *et al.* (2021) e Reis *et al.* (2022^a) e Reis *et al.* (2022^b). Por outro lado, a ausência desta mesma crista indica que a expressão de carregamento pode ser aplicada limitando-se à $0 < t < t_d$, visto que $t > t_d$ indicaria a presença da fase negativa e, especificamente para este caso, não influenciaria na identificação dos maiores deslocamentos. Em outras palavras, a ausência da crista indica que os maiores deslocamentos da placa se localizam durante a fase positiva e/ou vibração livre. Sendo assim, o gráfico w/h x t pode apresentar-se com períodos de onda distintos ou, em regiões específicas, deslocamentos maiores, contudo observa-se a eficácia do gráfico FAD para avaliar se é válida a avaliação da fase negativa. Vale ressaltar que para a realização dessas análises paramétricas deve-se determinar um Z e W_{TNT} equivalentes aos parâmetros de entrada de um carregamento explosivo (p_{max} , p_{min} , t_d , t_m , i_d , i_d^-), assim os resultados apresentados parametricamente são aproximados dos parâmetros de tal carregamento.

Paralelamente a este processo, em alguns exemplos da literatura, a saber Kazanci e Mecitoglu (2008) e Susler *et al.* (2012), verificou-se válido avaliar se a mudança do tipo para a análise HSPT ocasionaria modificações na resposta estrutural. Observou-se, em ambos os casos, modificação no deslocamento final, porém permanece a não diferença no uso ou não da fase negativa na análise, visto a comparação entre as Figura 81 com Figura 84 e Figura 94 com Figura 95.

No item 5.2 apresenta-se diretamente a correlação entre os modelos de placas e vigas já exibidos no item 4.3, contudo, para este presente caso, são considerados os modelos laminados originais, de material ortotrópico e modelados com base nas teorias de placas adotadas por cada autor exemplificado neste trabalho, i.e., Librescu e Nosier (1990), Wei e Dharani (2006), Kazanci e Mecitoglu (2008) e Susler *et al.* (2012). Outra diferença importante de se explanar é que neste caso não há utilização do *software* LESM, por ser limitado a análise considerando a teoria clássica de placas e materiais isotrópicos. Neste caso, a comparação de ambos os modelos, placas e vigas, desenvolvidas pelo DYNAblast apresentam-se como satisfatórias, com ordem de grandeza variando de 16% a 23% para os deslocamentos

e 2% a 23% nas frequências, comparando-se os resultados com as respostas da placa. Ou seja, observa-se uma consistência na diferença das soluções finais na comparativa placa-viga tanto em análise CLPT para material isotrópico quanto nas análises HSPT e von Karman em materiais ortotrópicos.

O último item do Capítulo 5, item 5.3, corresponde à complementação final do capítulo de análises das estruturas, em particular aos modelos de placa. Conforme discutido no referido item, observou-se atentamente que ao realizar as análises paramétricas $|w/h| \times Z$ de placas laminadas, variando-se os parâmetros explosivos, há um comportamento padrão das curvas, que se repetiam em modelos de placas das mais variadas características físicas-geométricas, já observado por Reis (2017) e Reis *et al* (2022) para placas finas isotrópicas. Desta forma, verificou-se tais curvas podem ser representadas, todas, como sendo polinômios do 5º, onde há uma correlação entre os deslocamentos máximos das curvas e as distâncias escaladas Z ($m/kg^{1/3}$). Ademais, entendeu-se que há um padrão de comportamento também nos coeficientes deste polinômio, observando que podem ser representados, cada por, por polinômios do 3º, correlacionando-se assim com a massa do explosivo W_{TNT} . Com isso, o último item deste trabalho apresenta uma proposta de metodologia para determinação de equações que $w(Z, W, h)$ característica de cada placa e que podem ser aplicadas a modelos de placas laminadas ortotrópicas e isotrópicas, totalmente apoiadas, de forma que facilite a determinação dos deslocamentos máximos da estrutura conforme varia-se os parâmetros do explosivo.

Mediante a metodologia utilizada e os resultados observados, compreende-se a complexidade sobre a análise de estruturas laminadas submetidas ao carregamento explosivo. Ondas de choque são consideradas como eventos de rara ocorrência, contudo de alto grau de impacto, levando ao colapso de grandes estruturas em um curto intervalo de tempo. O nível de dificuldade é compreendido quando são necessários estudos experimentais que correlacionem e simplifiquem os parâmetros explosivos (pressões máximas e mínimas, impulsos e tempos das fases positivas e negativas) para com a massa de explosivo e sua distância ao anteparo. Adicionalmente, as teorias de placas e vigas a serem utilizadas usualmente requerem que hipóteses de grandes deslocamentos sejam adotadas, devido à natureza do carregamento. Visto isto, na determinação das equações governantes estruturais, soluções numéricas são os melhores meios para os resultados serem determinados,

visto que não há na literatura uma expressão matemática geral que represente a solução de um sistema de equações diferenciais parciais (dependência do tempo e espaço) cuja função dependente do tempo (carregamento) seja uma expressão exponencial ou polinômio do terceiro grau.

Outra dificuldade encontra-se na modelagem computacional das estruturas e do carregamento em *softwares* comerciais, onde observa-se longos períodos de calibração do modelo para aproximar o comportamento à realidade, além do usuário ter conhecimento apenas do que é apresentado em manual e não como os dados são manipulados internamente a estes programas. Com isso, a primeira contribuição encontra-se no desenvolvimento do *software* DYNAblast 1.0 e sua implementação para placas laminadas ortotrópicas, gerando o DYNAblast 2.0.

Com o uso do *software* DYNAblast 2.0, tornou-se possível realizar as análises presentes nesta tese, gerando assim a segunda contribuição, no quesito da análise paramétrica de estruturas de forma rápida e prática. Em outras palavras, observar o comportamento da estrutura em seu deslocamento máximo considerando a variação dos passos de cargas, estes podendo ser a distância escalada (Z) ou a massa de explosivo (W_{TNT}). Notou-se que este tipo de comportamento era pouco explorado na literatura, onde é usualmente apresentado o gráfico dinâmico deslocamento x tempo utilizando valores pré-determinados e fixos, mas não há análise detalhada dos deslocamentos máximos gerados pela estrutura para cada incremento de carregamento.

Assim sendo, verificou-se que as estruturas de placas laminadas, independente da constituição do material (isotrópico ou ortotrópicos) apresentam comportamento semelhante quanto ao comparativo de deslocamentos máximos para cada passo de carga (em específico, distância escalada Z). Desta forma, a terceira contribuição constitui-se na proposta da metodologia para determinação de equações $w(Z, W_{TNT}, h)$ que descrevam as curvas $|w \times h| \times Z$.

Finalmente, observando que o tipo de carregamento a ser aplicado apresenta curtíssima duração, ou seja, uma onda de choque com tempo usual de milissegundos, decidiu-se averiguar a comparação do comportamento entre estruturas de placas e vigas, isotrópicas e ortotrópicas, de material único como também laminadas. Considerou-se, para a quarta contribuição desta pesquisa, a hipótese de que as estruturas de placas e vigas laminadas pudesse possuir o mesmo comportamento

mediante carregamento explosivo, proveniente ao seu período de extensão. Contudo, de acordo com os resultados apresentados e dissertados ao longo do Capítulo 5 e desta Conclusão, pode-se constatar que para tais estruturas, mesmo em curtos intervalos de tempo, considerar a simplificação da estrutura de placa para uma viga ocasionaria em diferenças percentuais substanciais tanto nos deslocamentos quanto, principalmente, nas frequências na resposta dinâmica da estrutura.

Sugestões para Trabalhos Futuros

A partir de todo o estudo envolvido estruturas laminadas e carregamento explosivo, observando que é uma linha de pesquisa ainda carente de investigações, são ofertadas a seguir sugestões para trabalhos futuros:

- Com base nos autores utilizados como referência para o presente trabalho, realizar análises comparativas de deslocamento x tempo quanto ao uso de diferentes equações representativas da fase negativa;
- Ainda utilizando os autores supracitados como exemplo, bem como a sugestão das outras equações característica da fase negativa, realização das análises paramétricas, de forma a evidenciar quão diferente são os deslocamentos máximos entre cada análise;
- Observou-se que tais comportamentos das curvas $|w/h|$ x Z são evidenciados em estruturas isotrópicas e ortotrópicas. Averiguar seu comportamento para as estruturas anisotrópicas;
- Introduzir o comportamento não linear do material, bem como adicionar a plasticidade nos materiais e realizar as análises paramétricas;
- Neste trabalho é considerado que o carregamento é uniformemente distribuído e que a onda de choque atinge por completo o anteparo no mesmo instante de tempo. Contudo, há estudos também que observam, que dependendo da distância entre a fonte explosiva e o anteparo, a primeira onda de choque atinge o centro da estrutura e então, milissegundos após, toda a superfície da placa fica submetida ao carregamento. Averiguar se a resposta em deslocamento é a mesma considerando que a onda atinge a estrutura por completo ao mesmo intervalo de tempo.

REFERÊNCIAS

- AAGAAH, M. R., MAHINFALAH, M., JAZAR, G. N. Natural Frequencies of Laminated Composite Plates Using Third Order Shear Deformation Theory. *Composite Structures*, v. 72, 2004.
- ADIM, B., DAOUADJI, T. H., RABAHI, A. A Simple Higher Order Shear Deformation Theory for Mechanical Behavior of Laminated Composite Plates. *International Journal of Advanced Structural Engineering*, v. 8, 2016.
- AHMED, Z. Forced Vibration Analysis of Generally Laminated Composite Beams Using Domain Boundary Element Method. Thesis of Master of Science, Middle East Technical University, Turkey, 2018.
- AHMED, Z., ESHRAGHI, I., DAG, S. Domain-boundary element method for forced vibrations of fiber-reinforced laminated beams. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 2020.
- AKAVCI, S. S. Analysis of Thick Laminated Composite Plates on an Elastic Foundation with the use of Various Plate Theories. *Mechanics of Composite Materials*, v. 41, 2005.
- ALIBEIGLOO, A., KARI, M. R. Forced Vibration Analysis of Antisymmetric Laminated Rectangular Plates with Distributed path Mass using Third Order Shear Deformation Theory. *Thin-Walled Structures*, v. 47, 2009.
- AMABILI, M. Nonlinear Damping in Nonlinear Vibrations of Rectangular Plates: Derivation from Viscoelasticity and Experimental Validation. *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, 2018a.
- AMABILI, M. Nonlinear Damping in Large-Amplitude Vibrations: Modeling and Experiments. *Nonlinear Dynamic*, 2018b.
- AMABILI, M., BALASUBRAMANIAN, P., GARZIERA, R., ROYER-CARFAGNI, G. Blast Loads and Nonlinear Vibration of Laminated Glass Plates in an Enhanced Shear Deformation Theory. *Composite Structures*, v. 252, 2020.
- AMIR, S.M.M., SULTAN, M.T.H.M, JAWAID, M., ARIFFIN, A.H., MOHD, S., SALLEH, K.A.M., ISHAK, M.R., SHAR, A.U.M. Nondestructive testing method for Kevlar and natural fiber and their hybrid composites. *Durability and Life Prediction in Biocomposites, Fibre-Reinforced Composite and Hybrid Composites*. Science Direct, 2019.

- ANTUNES, A.M., RIBEIRO, P., RODRIGUES, J.D., AKHAVAN, H. Modal Analysis of a Variable Stiffness Composite Laminated Plate with Diverse Boundary Conditions: Experiments and Modelling. *Composite Structure*, 2020.
- ASCE, American Society of Civil Engineers. *Structural Design for Physical Security*. ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice N° 142. Structural Engineering Institute, 2021.
- BALKAN, D., DEMIR, O., ARIKOGLU, A. Dynamic Analysis of a Stiffened Composite Plate Under Blast Load: A new Model and Experimental Validation. *International Journal of Impact Engineering*, 2020.
- BEERHORST, M., BABU, S.T.S. Closed-form Approximate Solution for Linear Buckling of Mindlin Plates with SRSR-Boundary Conditions. *Composite Structures*, 2020.
- BEG, M.S., YASIN, M.Y., KHALID, H.M. Analysis of Laminated and FGM Beams using Various Theories. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 404 012030, 2018.
- BISHAY, P. L., RODRIGUEZ, J. Analysis of Periodic Laminated Fiber-Reinforced Composite Beams in Free Vibration. *Journal of Vibration and Control*, 2021.
- BISWAS, D. RAY, C. Comparative Study on Transient Response Analysis of Hybrid Laminated Composite Plates with Experimental Verification. *Journal of Sound and Vibration*, 2019.
- BHAR, A., PHOENIX, S. S., SATSANGI, S. K. Finite Element Analysis of Laminated Composite Stiffened Plates Using FSDT e HSDT: A comparative Perspective. *Composite Structures*, v. 92, 2010.
- BUI, X.-B., NGO, P.-H., NGUYEN, T.-K, A Unified Third-Order Shear Deformation Theory for Static Analysis of Laminated Composite Beams. *Journal of Technical Education Science*, 2019.
- CATAPANO, A., GIUNTA, G., BELOUETTAR, S., CARRERA, E. Static Analysis of Laminated Beams via a Unified Formulation. *Composite Structures*, 2011.
- CIVALEK, C. Free Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Plates with First-Order Shear Deformation Theory (FSDT) by Discrete Singular Convolution Method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2008.

- CHAKRABARTI, A., CHALAK, H.D., IQBAL, A., SHEIKH, A.H. Buckling Analysis of Laminated Sandwich Beam with Soft Core. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2012.
- CHANDRASHEKHARA, K., BANGERA, K.M. Free Vibration of Composite Beams Using a Refined Shear Flexible Beam Element. *Computers & Structures*, 1992.
- CHEN, W. A Model of Composite Laminated Reddy Plate Based on the Global-Local Theory and New Modified Couple-Stress Theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2015.
- CHEN, C. C., LIEW K. M., LIM, C. W., KITIPORNCHAI, S. Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Thick Rectangular Plates Using the Higher-Order Theory and P-Ritz Method. *Acoustical Society of America*, 1997.
- CHEN, W. Q., LUE, C. F. 3D Free Vibration Analysis of Cross-Ply Laminated Plates with One Pair of Opposite Edges Simply Supported. *Composite Structures*, 2005.
- CHEN, W., XU, M., LI, L. A Model of Composite Laminated Reddy Plate Based on New Modified Couple Stress Theory. *Composite Structures*, v. 94, 2012.
- CHEN, X., NIE, G. Prebuckling and Buckling Analysis of Moderately Thick Variable Angle Tow Composite Plates Considering the Extension Shear Coupling. *Composite Structures*, v. 242, 2020.
- CHIAPPA, A., GROTH, C., REALI, A., BIANCOLINI, M. E. A Stress Recovery Procedure for Laminated Composite Plates Based on Strong Form Equilibrium Enforced via the RBF Kansa Method. *Composite Structures*, v, 244, 2020.
- CHUNG, J. H., CHUNG, T. Y. Vibration Analysis of Orthotropic Mindlin Plates with Edges Elastically Restrained Against Rotation. *Journal of Sound and Vibration*, 1993.
- DENNIS, A., RIGBY, S. Prediction of blast loads using machine learning approaches. *SECED Conference, Earthquake Engineering & Dynamics for a Sustainable Future*, 2023.
- DESAI, Y.M., RAMTEKKAR, G.S., SHAH, A.H. Dynamic Analysis of Laminated Composite Plates Using a Layer-wise Mixed Finite Element Model. *Composite Structures*, v. 59, 2003.
- DERBALE, A., BOUAZZA, M., BENSEDDIQ, N. Analysis of the Mechanical and Thermal Buckling of Laminated Beams by New Refined Shear Deformation Theory. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 2020.

- DITARANTO, R.A. Static Analysis of a Laminated Beam. *Journal of Engineering for Industry*, 1973.
- ESHRAHGI, I., DAG, S. Domain-boundary element method for elastodynamics of functionally graded Timoshenko beams. *Computer and Structures*, 2018.
- FAZELI, S., STOKES-GRIFFIN, C., GILBERT, J., COMPSTON, P. An Analytical Solution for the Vibrational Response of Stepped Smart Cross-Ply Laminated Composite Beams with Experimental Validation. *Composite Structures*, 2021.
- FELDGUN, V. R., YANKELEVSKY, Y. S., KARINSKI, Y. S. A nonlinear SDOF model for blast response simulation of elastic thin rectangular plates. *International Journal of Impact Engineering*, 2016.
- FILHO, N. M. Uma introdução a placas laminadas constituídas de materiais compostos em fibras longas. *Semina: Ci. Exatas/Tecnol. Londrina*, v. 21, n°4, p. 95-108, 2000.
- FRANKLIN, J. N. *Matrix Theory*. ISBN-13: 978-0486411798, 2012.
- FRIEDLANDER, F.G. (1940). The diffraction of sound pulses I. Diffraction by a semi-infinite plane. Communicated by G. I. Taylor, F.R.S., 1940.
- GANTES, C., PNEVMATIKOS, N. (2004). Elastic-plastic response spectra for exponential blast loading. *International Journal of Impact Engineering* 30(3):323-343.
- GRANSTRÖM, S.A. (1956). Loading characteristics of fair blasts from detonating charges. Technical Report 100, Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm.
- GROVER, N., MAITI, D. K., SINGH, B. N. Flexural Behavior of General Laminated Composite and Sandwich Plates Using a Secant Function Based Shear Deformation Theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v.11, 2014.
- GUPTA, A.D., GREGORY, F.H., BITTING, R.L., BHATTACHARY, S. Dynamic Analysis of an Explosive Loaded Hinged Rectangular Plate. Pergamon Journal Ltd, *Computers & Structures* 26339-344, 1987.
- HADIAN, J., NAYFEH, A. H. Free Vibration and Buckling of Shear-Deformable Cross-Ply Laminated Plates Using the State-Space Concept. *Computers & Structures*, vol. 48, 1993.
- JUN, L., XIAOBIN, L., HONGXING, H. Free Vibration Analysis of Third-Order Shear Deformable Composite Beams Using Dynamic Stiffness Method. *Arch Appl Mech*, 2009.

- JUNIOR, P.C.N., MENDONÇA, A.V. Fundamental Solutions and Integral Equations of First Order Laminated Composite Beams. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2021.
- KARAMANLI, A. F. Static Analysis of Reddy-Bickford Composite and Sandwich Beams via Ritz Method. *Celal Byar University Journal of Science*, 2017.
- KAZANCI, Z. Nonlinear Transient Response of a Laminated Composite Plate Under Time-Dependent Pulses. *IEEE*, 2009.
- KAZANCI, Z. Computational Methods to Predict the Nonlinear Dynamic Response of Blast Loaded Laminated Composite Plates. *Explosion Blast Response of Composites*. Woodhead Publishing, 2017. p. 85-112.
- KAZANCI, Z., MECITOGLU, Z., HACIOGLU, A. Effect of In-Plane Stiffness and Inertias on Dynamic Behavior of a Laminated Composite Plate Under Blast Load. *Engineering, Construction and Operations in Challenging Environments*, 2004.
- KAZANCI, Z., MECITOGLU, Z. Nonlinear Damped Vibrations of Laminated Composite Plate Subjected to Blast Load. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2006.
- KAZANCI, Z., MECITOGLU, Z. Nonlinear Dynamic Behavior of Simply Supported Laminated Composite Plates Subjected to Blast Loads. *Journal of Sound and Vibration*, 2008.
- KHDEIR, A. A. Free Vibration and Buckling of Symmetric Cross-Ply Laminated Plates by an Exact Method. *Journal of Sound and Vibration*, 1988a.
- KHDEIR, A. A. Free Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates Including Various Boundary Conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 1988b.
- KHDEIR, A. A. Free Vibration and Buckling of Unsymmetric Cross-Ply Laminated Plates Using a Refined Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 1989a.
- KHDEIR, A. A. Comparison between Shear Deformable and Kirchhoff Theories for Bending, Buckling and Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates. *Composite Structures*, 1989b.
- KHDEIR, A. A. A Remark on the State-Space Concept Applied to Bending, Buckling and Free Vibration of Composite Laminates. *Computers & Structures*, 1996a.
- KHDEIR, A.A., Dynamic Response of Antisymmetric Cross-Ply Laminated Composite Beams with Arbitrary Boundary Conditions. *International Journal of Engineering Science*, 1996b.

- KHDEIR, A.A., REDDY, J.N. Free Vibration of Cross-Ply Laminated Beams with Arbitrary Boundary Conditions. *International Journal of Engineering Science*, 1994.
- KHDEIR, A.A., REDDY, J.N. An Exact Solution for the Bending of Thin and Thick Cross-Ply Laminated Beams. *Composite Structures*, 1997.
- KHDEIR, A. A., REDDY, J. N. Free Vibrations of Laminated Composite Plates Using Second-Order Shear Deformation Theory. *Computers and Structures*, vol. 71, 1999.
- KIMURA, A.E., PARSEKIAN, G.A., ALMEIDA, L.C., SANTOS, S.H.C., BITTENCOURT, T.N. *Estruturas de Concreto Armado – Vol1*, Ibracon, 1ª edição. ISBN/ISSN 978-65-89675-05-1, 2022.
- KINNEY, G. F., GRAHAM, K. J. *Explosive Shocks in Air*. Springer Science + Business Media New York. ISBN 978-3-642-86684-5, 1985.
- KIRLANGIÇ, O., AKBAŞ, Ş.D. Comparison Study Between Layered and Functionally Graded Composite Beams for Static Deflection and Stress Analyses. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 2020.
- KRAUTHAMMER, T., ALTENBERG, A. (2000). Negative phase blast effects on glass panels. *International Journal of Impact Engineering* 24(1):1-17.
- LIBRESCU, L., NOSIER, A. Response of Laminated Composite Flat Plates to Sonic Boom and Explosive Blast Loadings. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1990.
- LIEW, K. M. Solving the Vibration of Thick Symmetric Laminates by Reissner/Mindlin Plate Theory and the P-Ritz Method. *Journal of Sound and Vibration*, 1996.
- LOBONTIU, N. Chapter 8 - State-Space Modeling, Editor(s): Nicolae Lobontiu, *System Dynamics for Engineering Students (Segunda Edição)*, Academic Press, Pages 379-427, ISBN 9780128045596, 2018.
- LUCCIONI, L.X., DONG, S.B. Levy-Type Finite Element Analyses of Vibration and Stability of thin and thick Laminated Composite Rectangular Plates. *Composites Part B*, 1998.
- LUNDMARK, P., VARNA, J. Constitutive Relationships for Laminates with Ply Cracks in In-plane Loading. *International Journal of Damage Mechanics*, 2005.
- MAKHECHA, D. P., GANAPATHI, M., PATEL, B. P. Dynamic Analysis of Laminated Composite Plates Subjected to Thermal/Mechanical Loads Using an Accurate Theory. *Composite Structures*, v. 51, 2001.

- MALEKZADEH, P., AFSARI, A., ZAHEDINEJAD, P., BAHADORI, R. Three-dimensional Layerwise-Finite Element Free Vibration Analysis of Thick Laminated Annular Plates on Elastic Foundation. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, 2010.
- MATLAB Documentation R2021a.
- MATSUNAGA, H. Interlaminar Stress Analysis of Laminated Composite Beams According to Global High-Order Deformation Theories. *Composite Structures*, 2002.
- MATSUNAGA, H. Vibration and Stability of Cross-Ply Laminated Composite Plates According to a Global Higher-Order Plate Theory. *Composite Structures*, v.48, 2000.
- MENDONÇA, P.T.R. *Materiais Compostos & Estruturas-Sanduiche: Projeto e Análise*. Editora Orsa Maggiore, 2ª edição. Florianópolis – Brasil, 2019.
- NEEDHAM, C. E., *Blast Waves, Shock Wave and High Pressure Phenomena*. DOI 10.1007/978-3-642-05288-0_1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- NIK, A. M. N., TAHANI, M. Analytical Solutions for Bending Analysis of Rectangular Laminated Plates with Arbitrary Lamination and Boundary Conditions. *Mechanical Science and Technology*, v. 23, 2009a.
- NIK, A. M. N., TAHANI, M. Bending Analysis of Laminated Composite Plates with Arbitrary Boundary Conditions. *Journal of Solid Mechanics*, 2009b.
- NISHAWALA, V. V. *A Study of Large Deflection of Beams and Plates*. The State University of New Jersey. New Jersey, 2011.
- NIYOGI, A. G., LAHA, M. K., SINHA, P. K. Finite Element Vibration Analysis of Laminated Composite Folded Plate Structures. *Shock and Vibration*, vol. 6, 1999.
- NGO-CONG, D., MAI-DUY, N., KARUNASENA, W., TRAN-CONG, T. Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Based on FSDT Using One-Dimensional IRBFN Method. *Computers and Structures*, v.89, 2011.
- No primeiro dia de pagamento do Auxílio Brasil, agência da Caixa é explodida no Rio. CNN Brasil, 2021. Disponível em: <<https://www.cnnbrasil.com.br/nacional/no-primeiro-dia-de-pagamento-do-auxilio-brasil-agencia-da-caixa-e-explodida-no-rio/>>.
- Acesso em: 13 de Março de 2023.
- NOSIER, A., REDDY, J. N. Vibration and Stability Analyses of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells. *Journal of Sound and Vibration*, 1992.
- OBST, A.W., KAPANIA, R.K. Nonlinear Static and Transient Finite Element Analysis of Laminated Beams, *Composites Engineering*, 1992.

PAWAR, E.G., BANERJEE, S., DESAI, Y.M. Stress Analysis of Laminated Composite and Sandwich Beams Using a Novel Shear and Normal Deformation Theory. Latin American Journal of Solids and Structures, 2014.

Pinto, M.S.S., Teorema da Decomposição Primária e a Forma Canônica de Jordan. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, 2016.

Polícia Federal investiga roubo praticado em agência da Caixa Econômica Federal em Botucatu/SP. Polícia Federal, Brasil. Disponível em: <<https://www.gov.br/pf/pt-br/assuntos/noticias/2021/06/policia-federal-investiga-roubo-praticado-em-agencia-da-caixa-economica-federal-em-botucatu-sp>>. Acesso em: 13 de Março de 2023.

Ponte na Crimeia: a explosão em 'obra do século' que abala russos e tensiona mais a guerra na Ucrânia. BBC NEWS Brasil, 2022. Disponível em: <<https://www.bbc.com/portuguese/internacional-63184903>>. Acesso em: 13 de Março de 2023.

QIN, B., ZHONG, R., WU, Q., WANG, T., WANG, Q. A Unified Formulation for Free Vibration of Laminated Plate Through Jacobi-Ritz Method. Thin-Walled Structures, 2019.

RANDERS - PEHRSON, G. BANNISTER, K. A. Airblast loading model for DYNA2D and DYNA3D. Technical Report ARL-TR-1310, U.S Army Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD, USA, 1997.

REDDY, J. N. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 51/745, 1984.

REDDY, J. N. A Generalization of Two-Dimensional Theories of Laminated Composite Plates. Communications in Applied Numerical Methods, vol. 3, 1987.

REDDY J. N., KHDEIR A. A. Buckling and Vibration of Laminated Composite Plates Using Various Plate Theories. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1989.

REDDY, J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis, 2nd ed, 2003.

REDDY, J. N., ROBBINS JR, D. H. Theories and Computational Models for Composite Laminates. American Society of Mechanical Engineers, 1994.

REIS, A. W. Q. R. Análise dinâmica de estruturas de placa submetidas a carregamentos explosivos. 2019. 164f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) –

Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

REIS, A.W.Q.R., BURGOS, R.B, OLIVEIRA, M.F.F. DYNAblast - Dynamic Analysis of Plates Submitted to Blast Load. Depositante: Universidade do Estado do Rio de Janeiro. BR n° 512021001874-5. Depósito: 01 jun. 2021. Concessão: 17 ago. 2021.

REIS, A.W.Q.R., BURGOS, R.B., OLIVEIRA, M.F.F. Blast Wave Analysis in Plate Structures Considering Membrane Effect, Proceedings of the Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (ABMEC), Natal/RN, Brazil, 2019.

REIS, A.W.Q.R., BURGOS, R.B, Oliveira, M.F.F. Nonlinear Dynamic Analysis of Plates Subjected to Explosive Loads. Latin American Journal of Solids and Structures, 2022a.

REIS, A.W.Q.R., BURGOS, R.B. Nonlinear Dynamic Analysis of Composite Laminate Plates Subjected to Explosive Loading. XLIII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Foz do Iguaçu, 2022b.

RESENDE, C.H.B., LOPES, P.C., RANGEL, P.L., PAULLO-MUÑOZ, L.F., MARTHA, L.F. An Educational GUI-Based Software for Dynamic Analysis of Framed Structural Models. Journal of Software Engineering and Applications, 2023.

RIGBY, S. E. Blast Wave Clearing Effects on Finite - Sized Targets Subjected to Explosive Loads. Doctor's thesis. The Department of Civil and Civil Structural Engineering at the University of Sheffield, 2014.

RIGBY, S. E., ANDREW, T., BENNETT, T., CLARKE, S. D., FAY, S. D. The Negative Phase of the Blast Load. International Journal of Protective Structures. Multi - Science Publishing ISSN 2041 --4196, 2013.

RIGBY, S.E., LODGE, T.J., ALOTAIBI, S., BARR, A.D., CLARKE, S.D., LANGDON, G.S., TYAS, A. Preliminary yield estimation of the 2020 Beirut explosion using video footage from social media. Shoke Wave, Springer, 2020.

SAYYAD, A.S., GHUGAL, Y.M., NAIK, N.S. Bending Analysis of Laminated Composite and Sandwich Beams According to Refined Trigonometric Beam Theory. Curved and Layered Structures, 2015a.

SAYYAD, A.S., GHUGAL, Y.M., SHINDE, P.N. Stress Analysis of Laminated Composite and Soft-Core Sandwich Beams Using a Simple Higher Order Shear Deformation Theory. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics, 2015b.

SAYYAD, R.A., RATHI, V.R., KOLASE, P.K. Bending Analysis of Functionally Graded Beam Curved in Elevation Using Higher Order Theory. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 2019.

SHENGQI, Y., WANJI, C. On Hypotheses of Composite Laminated Plates on new Modified Couple Stress Theory. *Composite Structures*, 2015.

SHI, D., ZHANG, H., WANG, Q., ZHA, S. Free and Forced Vibration of the Moderately Thick Laminated Composite Rectangular Plate on Various Elastic Winkler and Pasternak Foundations. *Shock and Vibration*, 2017.

SOUZA, R. Dois anos após a explosão, vítimas de Beirute registram queixa no tribunal dos EUA. *CNN Brasil*, 4 de Agosto de 2022. Disponível em: <[SU, Z., JIN, G., WANG, Y., YE, X. A General Fourier Formulation for Vibration Analysis of Functionally Graded Sandwich Beams with Arbitrary Boundary Condition and Resting on Elastic Foundations. *Acta Mechanica*, 2016.](https://www.cnnbrasil.com.br/internacional/dois-anos-apos-explosao-vitimas-de-beirute-registram-queixa-em-tribunal-dos-eua/#:~:text=Embora%20%C3%A0%20investiga%C3%A7%C3%A3o%20tenha%20progredido,que%20estavam%20armazenadas%20no%20porto.>. Acesso em: 10 de Outubro de 2023.</p></div><div data-bbox=)

SUSLER, S., TURKMEN, H. S., KAZANCI, Z. The Nonlinear Dynamic Behavior of Tapered Laminated Plates Subjected to Blast Loading. *Shock and Vibration*, 2012.

TABASI, H. M., JAM, J. E., FARD, K., M., BENI, M. H. Buckling and Free Vibration Analysis of Fiber Metal-Laminated Plates Resting on Partial Elastic Foundation. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2020.

TEICH, M., GEBBEKEN, N. (2010). The influence of the underpressure phase on the dynamic response of structures subjected to blast loads. *International Journal of Protective Structures* 1(2):219-233.

UPADHYAY, A.K., PANDEY, R., SHUKLA, K.K, Nonlinear Dynamic Response of Laminated Composite Plates Subjected to Pulse Loading. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2011.

US Department of Defense, Structures to resist the effects of accidental explosions, US DoD, Washington DC, USA, UFC-3-340-02, 2018.

- VO, T.P., THAI, H.-T., NGUYEN, T.-K., LANC, D., KARAMANLI, A. Flexural Analysis of Laminated Composite and Sandwich Beams using a Four-Unknown Shear and Normal Deformation Theory. *Composite Structures*, 2017.
- WANG, Y., QIAO, P. Improved Buckling Analysis of Stiffened Laminated Composite Plates by Spline Finite Strip Method. *Composite Structures*, 2021.
- WEI, J. DHARANI, L. R. Response of laminated architectural glazing subjected to blast loading. *International Journal of Impact Engineering* 32(12):2032-2047, 2006.
- WEN, J. An Analytical Model for Two-Layered Composite Beams with Partial Shear Interaction Based on a Higher Order Beam Theory. Thesis of Engineering, The University of Adelaide, 2017.
- XIANG, S., WANG, K-M. Free Vibration Analysis of Symmetric Laminated Composite Plates by Trigonometric Shear Deformation Theory and Inverse Multiquadric RBF. *Thin-Walled Structures*, v. 47, 2009.
- XIANG, S., JIANG, S. X., BI, Z. Y., JIN, Y. X., Y. M. S. A Nth-Order Meshless Generalization of Reddy's Third-Order Shear Deformation Theory for the Free Vibration on Laminated Composite Plates. *Composite Structure*, v. 93, 2011.
- XUE, Z., LI, Q., HUANG, W., GUO, Y., WANG, J. Vibration Characteristics Analysis of Moderately Thick Laminated Composite Plates with Arbitrary Boundary Conditions. *Journal Materials*, 2019.
- YAMAKI, N. Stress Distribution in a Rectangular Plate under a Pair of Concentrated Forces. *The Reports of the Institute of High Speed Mechanics, Tohoku University*, 8 (1957), pp.1-12.
- YE, T., JIN, G. Elasticity Solution for Vibration of Generally Laminated Beams by a Modified Fourier Expansion-Based Sampling Surfaced Method. *Computers and Structures*, 2016.
- ZHANG, Y., SHI, D. An Exact Fourier Series Method for Vibration Analysis of Elastically Connected Laminated Composite Double-Beam System with Elastic Constraints. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020.
- ZHANG, H., SHI, D., WANG, Q. An Improved Fourier Series Solution for Free Vibration Analysis of the Moderately thick Laminated Composite Rectangular Plate with Non-Uniform Boundary Conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017.

ANEXO A

Neste anexo, encontra-se a demonstração da Equação (34) com base nas Equações (28) à (32).

Iniciando-se pela energia de deformação, U , a expressão referente a mesma é presente através da Equação (29). Substituindo as Equações (26) e (27), e suas parcelas expandidas, na Equação (29), determina-se:

$$\delta U = \int_A \int_z \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \frac{1}{2} \delta \left[\alpha_5 (u_{0,x}^2 + v_{0,x}^2) + 2u_{0,x} + 2z^3 \alpha_3 (\theta_{x,x} + w_{0,xx}) + \right. \\ \left. \alpha_4 w_{0,x}^2 + 2z (\alpha_1 w_{0,xx} + \alpha_2 \theta_{x,x}) \right] + \\ \sigma_{yy} \frac{1}{2} \delta \left[\alpha_5 (u_{0,y}^2 + v_{0,y}^2) + 2v_{0,y} + 2z^3 \alpha_3 (\theta_{y,y} + w_{0,yy}) + \right. \\ \left. \alpha_4 w_{0,y}^2 + 2z (\alpha_1 w_{0,yy} + \alpha_2 \theta_{y,y}) \right] + \\ \tau_{xy} \delta \left[u_{0,y} + v_{0,x} + \alpha_5 (u_{0,x} u_{0,y} + v_{0,x} v_{0,y}) + w_{0,x} w_{0,y} + \right. \\ \left. \alpha_3 z^3 (2w_{0,xy} + \theta_{x,y} + \theta_{y,x}) + 2\alpha_1 z w_{0,xy} + z \alpha_2 (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \right] + \\ \tau_{yz} \delta \left[\alpha_2 (w_{0,y} + \theta_y) + \alpha_5 (u_{0,y} \theta_x + v_{0,y} \theta_y) + 3\alpha_3 z^2 (w_{0,y} + \theta_y) \right] + \\ \tau_{xz} \delta \left[\alpha_2 (w_{0,x} + \theta_x) + \alpha_5 (u_{0,x} \theta_x + v_{0,x} \theta_y) + 3\alpha_3 z^2 (w_{0,x} + \theta_x) \right] \end{array} \right\} dz dA \quad (A.1)$$

Aplicando o parâmetro variacional δ em cada uma das parcelas apresentadas, seguindo as regras de cálculo variacional apresentadas por Reddy (2003) na página 41 de seu livro e isolando os termos variacionais iguais, a Equação (A.1) pode ser desenvolvida conforme a Equação (A.2), em que os esforços apresentados pela Equação (A.2) são conforme a Equação (36).

Ademais, com base nas propriedades do parâmetro variacional, a Equação (A.2) ainda pode ser reescrita de forma que as variantes possam ser isoladas, isto é, conforme presente pela Equação (A.3).

$$\delta U = \int_A \left\{ \begin{array}{l} - \left[\begin{array}{l} (N_{xx,x} + N_{xy,y}) + \\ \alpha_5 \left(\begin{array}{l} N_{xx,x} u_{0,x} + N_{xy,x} u_{0,y} + N_{xy,y} u_{0,x} + N_{yy,y} u_{0,y} + \\ Q_{xx,x} \theta_x + Q_{xx} \theta_{x,x} + Q_{yy,y} \theta_x + Q_{yy} \theta_{x,y} + \\ N_{xx} u_{0,xx} + 2N_{xy} u_{0,xy} + N_{yy} u_{0,yy} \end{array} \right) \end{array} \right] \delta u_0 \\ - \left[\begin{array}{l} (N_{xy,x} + N_{yy,y}) \\ \alpha_5 \left(\begin{array}{l} N_{xx,x} v_{0,x} + N_{xy,x} v_{0,y} + N_{xy,y} v_{0,x} + N_{yy,y} v_{0,y} + \\ Q_{xx,x} \theta_y + Q_{xx} \theta_{y,x} + Q_{yy,y} \theta_y + Q_{yy} \theta_{y,y} + \\ N_{xx} v_{0,xx} + 2N_{xy} u_{0,xy} + N_{yy} u_{0,yy} \end{array} \right) \end{array} \right] \delta v_0 \\ + \left[\begin{array}{l} -(N_{xy,x} w_{0,y} + N_{xy,y} w_{0,x} + 2N_{xy} w_{0,xy}) \\ \alpha_1 (M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy}) - \alpha_2 (Q_{xx,x} + Q_{yy,y}) - \\ \alpha_3 (3R_{xx,x} + 3R_{yy,y} + P_{xx,xx} + P_{yy,yy} + 2P_{xy,xy}) - \\ \alpha_4 (N_{xx,x} w_{0,x} + N_{yy,y} w_{0,y} + N_{xx} w_{0,xx} + N_{yy} w_{0,yy}) \end{array} \right] \delta w_0 \\ + \left[\begin{array}{l} \alpha_2 (Q_x - M_{xy,y} - M_{xx,x}) - \alpha_3 (P_{xx,x} + P_{xy,y} - 3R_x) + \\ \alpha_5 (Q_{xx} u_{0,x} + Q_{yy} u_{0,y}) \end{array} \right] \delta \theta_x \\ + \left[\begin{array}{l} \alpha_2 (Q_y - M_{yy,y} - M_{xy,x}) - \alpha_3 (P_{yy,y} + P_{xy,x} - 3R_y) + \\ \alpha_5 (Q_{xx} v_{0,x} + Q_{yy} v_{0,y}) \end{array} \right] \delta \theta_y \end{array} \right\} dA \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} dz, \\
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} dz, \\
\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^3 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} z^3 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} dz, \\
\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} dz, \\
\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} z^2 \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} dz.
\end{aligned} \quad (A.3)$$

A energia cinética, dada por K na Equação (30), é considerada pela primeira variação no tempo, conforme assumido por Reddy (2003). Desta forma, pode-se escrevê-la conforme a Equação (A.4).

$$\delta K = \int_A \int_z \rho_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz dA \quad (\text{A.4})$$

Considerando que o deslocamento da estrutura é dado pelas Equações (23) à (25), substituindo-as na Equação (A.4), pode-se determinar a Equação (A.5).

$$\delta K = \int_A \left\{ \begin{array}{l} I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) \\ I_1 \alpha_2 \left[\begin{array}{l} \dot{\theta}_x \delta \dot{u}_0 + \dot{\theta}_y \delta \dot{v}_0 + \dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_x + \dot{v}_0 \delta \dot{\theta}_y + \\ (\alpha_1 / \alpha_2) (\dot{w}_{0,x} \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_{0,y} \delta \dot{v}_0 + \dot{u}_0 \delta \dot{w}_{0,x} + \dot{v}_0 \delta \dot{w}_{0,y}) \end{array} \right] + \\ I_2 \alpha_1^2 \left[\begin{array}{l} \dot{w}_{0,x} \delta \dot{w}_{0,x} + \dot{w}_{0,y} \delta \dot{w}_{0,y} + (\alpha_2 / \alpha_1)^2 (\dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \delta \dot{\theta}_y) + \\ (\alpha_2 / \alpha_1) (\dot{\theta}_x \delta \dot{w}_{0,x} + \dot{\theta}_y \delta \dot{w}_{0,y} + \dot{w}_{0,x} \delta \dot{\theta}_x + \dot{w}_{0,y} \delta \dot{\theta}_y) \end{array} \right] + \\ I_3 \alpha_3 \left[\begin{array}{l} (\dot{\theta}_x + \dot{w}_{0,x}) \delta \dot{u}_0 + (\dot{\theta}_y + \dot{w}_{0,y}) \delta \dot{v}_0 + \\ \dot{u}_0 \delta \dot{\theta}_x + \dot{v}_0 \delta \dot{\theta}_y + \dot{u}_0 \delta \dot{w}_{0,x} + \dot{v}_0 \delta \dot{w}_{0,y} \end{array} \right] + \\ I_4 \alpha_3 \left[\begin{array}{l} (\alpha_1 + \alpha_2) (\dot{\theta}_x \delta \dot{w}_{0,x} + \dot{\theta}_y \delta \dot{w}_{0,y} + \dot{w}_{0,x} \delta \dot{\theta}_x + \dot{w}_{0,y} \delta \dot{\theta}_y) \\ 2\alpha_1 (\dot{w}_{0,x} \delta \dot{w}_{0,x} + \dot{w}_{0,y} \delta \dot{w}_{0,y}) + 2\alpha_2 (\dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \delta \dot{\theta}_y) \end{array} \right] \\ I_6 \alpha_3^2 \left[\begin{array}{l} (\dot{\theta}_x + \dot{w}_{0,x}) \delta \dot{w}_{0,x} + (\dot{\theta}_y + \dot{w}_{0,y}) \delta \dot{w}_{0,y} + \\ (\dot{w}_{0,x} + \dot{\theta}_x) \delta \dot{\theta}_x + (\dot{w}_{0,y} + \dot{\theta}_y) \delta \dot{\theta}_y \end{array} \right] \end{array} \right\} dA \quad (\text{A.5})$$

O processo de resolução da Equação (A.5) exige a aplicação da integração por partes para poder solucionar o problema e que os parâmetros variacionais sejam apenas considerados tais como δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta_x$ e $\delta \theta_y$. Conforme pode ser visto, a Equação (A.5) é um tanto extensa. Desta forma, para melhor compreensão do processo de integração, é realizada a solução junto a I_0 da Equação (38).

Integrando por partes a Equação (A.5), com variação no tempo, e considerando que a parcela resultante variacional externa à integral equivale à zero, a expressão δK_0 pode ser reescrita conforme a Equação (A.6).

$$\delta K_0 = \int_A I_0 (\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0) dA \quad (\text{A.6})$$

As demais parcelas são trabalhadas com maior atenção, visto que os termos acompanhantes do coeficiente variacional possuem suas derivadas no tempo e no espaço, conforme o caso de $\delta \dot{w}_{0,x}$ e $\delta \dot{w}_{0,y}$. Para estes casos, deve-se aplicar a

integração por partes duas vezes, determinando-se a expressão final variacional para o caso da energia cinética, representada pela Equação (A.7)

$$\delta K = \int_A \left\{ \begin{array}{l} -\left[I_0 \ddot{u}_0 + I_1 (\alpha_1 \ddot{w}_{0,x} + \alpha_2 \ddot{\theta}_x) + I_3 \alpha_3 (\ddot{\theta}_x + \ddot{w}_{0,x}) \right] \delta u_0 \\ -\left[I_0 \ddot{v}_0 + I_1 (\alpha_1 \ddot{w}_{0,y} + \alpha_2 \ddot{\theta}_y) + I_3 \alpha_3 (\ddot{\theta}_y + \ddot{w}_{0,y}) \right] \delta v_0 \\ + \left[\begin{array}{l} -I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \alpha_1 (\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) + I_3 \alpha_3 (\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) \\ I_2 \alpha_1 (\alpha_1 (\ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) + \alpha_2 (\ddot{\theta}_{x,x} + \ddot{\theta}_{y,y})) + \\ I_4 \left(2\alpha_1 \alpha_3 (\ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) + \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2) \ddot{\theta}_{x,x} \right) + \\ + \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2) \ddot{\theta}_{y,y} \end{array} \right] \delta w_0 \\ + \left[I_6 \alpha_3^2 (\ddot{\theta}_{x,x} + \ddot{\theta}_{y,y} + \ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) \right] \\ - \left[\begin{array}{l} I_1 \alpha_2 \ddot{u}_0 + I_2 \alpha_2 (\alpha_1 \ddot{w}_{0,x} + \alpha_2 \ddot{\theta}_x) + I_3 \alpha_3 \ddot{u}_0 + \\ I_4 \alpha_3 (2\alpha_2 \ddot{\theta}_x + \alpha_1 \ddot{w}_{0,x} + \alpha_2 \ddot{w}_{0,x}) + I_6 \alpha_3^2 (\ddot{w}_{0,x} + \ddot{\theta}_x) \end{array} \right] \delta \theta_x \\ - \left[\begin{array}{l} I_1 \alpha_2 \ddot{v}_0 + I_2 \alpha_2 (\alpha_1 \ddot{w}_{0,y} + \alpha_2 \ddot{\theta}_y) + I_3 \alpha_3 \ddot{v}_0 + \\ I_4 \alpha_3 (2\alpha_2 \ddot{\theta}_y + \alpha_1 \ddot{w}_{0,y} + \alpha_2 \ddot{w}_{0,y}) + I_6 \alpha_3^2 (\ddot{w}_{0,y} + \ddot{\theta}_y) \end{array} \right] \delta \theta_y \end{array} \right\} dA \quad (A.7)$$

Para o cálculo da parcela variacional relacionado ao trabalho, W , presente na Equação (28), basta-se saber o valor do carregamento uniformemente distribuído sobre a placa. Este procedimento é contemplado pela Equação (31).

Finalmente, conduzindo o processo de cálculo variacional apresentado por Reddy (2003), na página 41, a Equação (32) é reescrita como:

$$\delta R = \frac{1}{2} c \int_A 2(\dot{u}_0 \delta u_0 + \dot{v}_0 \delta v_0 + \dot{w}_0 \delta w_0) dA \quad (A.8)$$

Aplicando-se as Equações (31), (A.2), (A.7) e (A.8) na Equação (28), isolando os termos variacionais e utilizando o Teorema do Princípio do Cálculo Variacional, determina-se a Equação (A.9).

No pertinente à determinação dos esforços presentes na estrutura, estes podem ser calculados com base nas expressões contempladas pela Equação (A.3), ou ainda serem escritas conforme a Equação (36).

Na presente Equação (A.9), torna-se possível observar as matrizes que a compõem para que os esforços, Equação (37), sejam escritos em termos de deformações e, conseqüentemente, deslocamentos. Desta forma, aplicando as Equações (36) à (38) nas expressões presentes pela Equação (A.9), é possível

determinar as equações de movimento da estrutura em função dos deslocamentos e rotações, de acordo com a teoria de placas escolhida.

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : & \left\{ \begin{aligned} & 2c\dot{u}_0 - N_{xx,x} - N_{xy,y} + I_0\ddot{u}_0 + I_1(\alpha_1\ddot{w}_{0,x} + \alpha_2\ddot{\theta}_x) + 2I_3\alpha_3(\ddot{\theta}_x + \ddot{w}_{0,x}) - \\ & \alpha_5 \left(\begin{aligned} & N_{xx,x}u_{0,x} + N_{xy,x}u_{0,y} + N_{xy,y}u_{0,x} + N_{yy,y}u_{0,y} + \\ & N_{xx}u_{0,xx} + N_{xy}u_{0,xy} + N_{yy}u_{0,yy} + \\ & Q_{xx,x}\theta_x + Q_{xx}\theta_{x,x} + Q_{yy,y}\theta_x + Q_{yy}\theta_{x,y} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} = 0 \\
\delta v_0 : & \left\{ \begin{aligned} & 2c\dot{v}_0 - N_{yy,y} - N_{xy,x} + I_0\ddot{v}_0 + I_1(\alpha_1\ddot{w}_{0,y} + \alpha_2\ddot{\theta}_y) + 2I_3\alpha_3(\ddot{\theta}_y + \ddot{w}_{0,y}) - \\ & \alpha_5 \left(\begin{aligned} & N_{xx,x}v_{0,x} + N_{xy,x}v_{0,y} + N_{xy,y}v_{0,x} + N_{yy,y}v_{0,y} + \\ & N_{xx}v_{0,xx} + N_{xy}v_{0,xy} + N_{yy}v_{0,yy} + \\ & Q_{xx,x}\theta_y + Q_{xx}\theta_{y,x} + Q_{yy,y}\theta_y + Q_{yy}\theta_{y,y} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} = 0 \\
\delta w_0 : & \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & 2P(u_{0,x} + v_{0,y} + v_{0,y}u_{0,x} + v_{0,x}u_{0,y} + 1) + 2c\dot{w}_0 - \\ & (2N_{xy}w_{0,xy} + N_{xy,x}w_{0,y} + N_{xy,y}w_{0,x} + I_0\ddot{w}_0) \end{aligned} \right] - \\ & \frac{1}{2}\alpha_1 \left\{ \begin{aligned} & M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} - I_1(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) \\ & -I_2[\alpha_1(\ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) + \alpha_2(\ddot{\theta}_{x,x} + \ddot{\theta}_{y,y})] \end{aligned} \right\} - \frac{1}{2}\alpha_2(Q_{y,y} + Q_{x,x}) + \\ & \frac{1}{2}\alpha_3 \left[\begin{aligned} & (P_{xx,xx} - 3R_{x,x} - 3R_{y,y} + 2P_{xy,xy} + P_{yy,yy}) - I_3(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) \\ & -I_4(2\alpha_1(\ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) + (\alpha_1 + \alpha_2)\ddot{\theta}_{x,x} + (\alpha_1 + \alpha_2)\ddot{\theta}_{y,y}) \\ & -I_6\alpha_3(\ddot{\theta}_{x,x} + \ddot{\theta}_{y,y} + \ddot{w}_{0,xx} + \ddot{w}_{0,yy}) \end{aligned} \right] - \\ & \frac{1}{2}\alpha_4(N_{xx,x}w_{0,x} + N_{yy,y}w_{0,y} + N_{xx}w_{0,xx} + N_{yy}w_{0,yy}) - \\ & \alpha_6(2N_{xy}w_{0,xy} + N_{xy,x}w_{0,y} + N_{xy,y}w_{0,x}) = 0 \end{aligned} \right. \tag{A.9} \\
\delta \theta_x : & \left\{ \begin{aligned} & \alpha_2 \left[\begin{aligned} & 2I_1\ddot{u}_0 - M_{xy,y} - M_{xx,x} + Q_x \\ & + I_2(\alpha_1\ddot{w}_{0,x} + \alpha_2\ddot{\theta}_x) \end{aligned} \right] + \alpha_3 \left[\begin{aligned} & 2I_3\ddot{u}_0 - P_{xy,y} - P_{xx,x} + 3R_x + \\ & + I_6\alpha_3(\ddot{w}_{0,x} + \ddot{\theta}_x) + \\ & I_4(2\alpha_2\ddot{\theta}_x + \alpha_1\ddot{w}_{0,x} + \alpha_2\ddot{w}_{0,x}) \end{aligned} \right] + \\ & \alpha_5(Q_{xx}u_{0,x} + Q_{yy}u_{0,y}) = 0 \end{aligned} \right. \\
\delta \theta_y : & \left\{ \begin{aligned} & \alpha_2 \left[\begin{aligned} & 2I_1\ddot{v}_0 - M_{yy,y} - M_{xy,x} + Q_y \\ & + I_2(\alpha_1\ddot{w}_{0,y} + \alpha_2\ddot{\theta}_y) \end{aligned} \right] + \alpha_3 \left[\begin{aligned} & 2I_3\ddot{v}_0 - P_{yy,y} - P_{xy,x} + 3R_y + \\ & + I_6\alpha_3(\ddot{w}_{0,y} + \ddot{\theta}_y) + \\ & I_4(2\alpha_2\ddot{\theta}_y + \alpha_1\ddot{w}_{0,y} + \alpha_2\ddot{w}_{0,y}) \end{aligned} \right] + \\ & \alpha_5(Q_{xx}v_{0,x} + Q_{yy}v_{0,y}) = 0 \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

ANEXO B

A demonstração do método de Galerkin, como abordado no Capítulo 1, é apresentada por Mendonça (2019), não sendo o escopo deste trabalho refazê-la ou reproduzi-la, visto que se encontra já bem-disposto na literatura. Para este trabalho visa apresentar de forma prática sua aplicação nas equações governantes e uma solução rápida.

Considera-se que as equações de deslocamento, Equações (39) à (41), são constituídas de uma parcela variável dependente do tempo e uma parcela que é em função das dimensões/coordenadas da placa, com base no método de Galerkin, pode-se reescrever as equações de deslocamento como sendo:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{m_1} c_{um} \bar{\phi}_{um}(x, y) \\
 v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{m_1} c_{vm} \bar{\phi}_{vm}(x, y) \\
 w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{m_1} c_{wm} \bar{\phi}_{wm}(x, y) \\
 \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{m_1} c_{\theta_x m} \bar{\phi}_{\theta_x m}(x, y) \\
 \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{m_1} c_{\theta_y m} \bar{\phi}_{\theta_y m}(x, y)
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Por questões de exemplificação, toma-se a placa SS1 como sendo a estrutura parâmetro para este cálculo. Com base nos deslocamentos e rotações presentes na Equação (39), os parâmetros desconhecidos da Equação (B.1) são reescritos tais como apresenta a Equação (B.2).

As equações governantes, Equação (34), devem ser reescritas conforme as expressões de deslocamento/rotação, para o caso, Equação (39). Com isso, as equações da estrutura ficam em função de parâmetros tais como U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} , Y_{mn} e expressões trigonométricas, cujas são em função das dimensões da placa.

Sabendo-se que as equações governantes, Equação (34), são obtidas e separadas conforme o variacional predominante (δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta_x$, $\delta \theta_y$), aplica-se o método de Galerkin como apresenta a Equação (B.3).

$$\begin{aligned}
u_0(x, y, t) &= \begin{cases} c_{1m} = U_{mn}(t) \\ \bar{\phi}_{1m}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi m}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right) \end{cases} \\
v_0(x, y, t) &= \begin{cases} c_{2m} = U_{mn}(t) \\ \bar{\phi}_{2m}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi m}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right) \end{cases} \\
w_0(x, y, t) &= \begin{cases} c_{3m} = W_{mn}(t) \\ \bar{\phi}_{3m}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi m}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right) \end{cases} \\
\theta_x(x, y, t) &= \begin{cases} c_{4m} = X_{mn}(t) \\ \bar{\phi}_{4m}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi m}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right) \end{cases} \\
\theta_y(x, y, t) &= \begin{cases} c_{5m} = Y_{mn}(t) \\ \bar{\phi}_{5m}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi m}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{b}y\right) \end{cases}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
\delta u_0 &: \int_0^b \int_0^a L_1 \bar{\phi}_{1m}(x, y) dx dy = 0 \\
\delta v_0 &: \int_0^b \int_0^a L_2 \bar{\phi}_{2m}(x, y) dx dy = 0 \\
\delta w_0 &: \int_0^b \int_0^a L_3 \bar{\phi}_{3m}(x, y) dx dy = 0 \\
\delta \theta_x &: \int_0^b \int_0^a L_4 \bar{\phi}_{4m}(x, y) dx dy = 0 \\
\delta \theta_y &: \int_0^b \int_0^a L_5 \bar{\phi}_{5m}(x, y) dx dy = 0
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Onde L_i corresponde a Equação Governante (34) em questão. De forma a clarificar, L_1 , por exemplo, seria representado pela Equação (B.4). Os demais L_i seguiriam a mesma lógica.

$$\begin{aligned}
L_1 = & -N_{xx,x} - N_{xy,y} + 2c\dot{u}_0 + I_0\ddot{u}_0 + I_1(\alpha_1\ddot{w}_{0,x} + \alpha_2\ddot{\theta}_x) + I_3\alpha_3(\ddot{\theta}_x + \ddot{w}_{0,x}) - \\
& 2\alpha_5 \begin{pmatrix} N_{xx,x}u_{0,x} + N_{xx}u_{0,xx} + \\ N_{yy,y}u_{0,y} + N_{yy}u_{0,yy} \end{pmatrix} - \alpha_7 \begin{pmatrix} N_{xy,x}u_{0,y} + N_{xy,y}u_{0,x} + Q_{xx,x}\theta_x + Q_{xx}\theta_{x,x} + \\ Q_{yy,y}\theta_x + Q_{yy}\theta_{x,y} + 2N_{xy}u_{0,xy} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Desta forma, a equação gerada após a aplicação do método de Galerkin ficaria somente em função dos parâmetros da série de Fourier, isto é, U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} , Y_{mn} , tornando-se possível determiná-los na resolução da equação diferencial.

Vale ressaltar que o procedimento de aplicação do método de Galerkin para os demais tipos de apoios (SS2 e totalmente engastado) segue a mesma lógica do abordado neste anexo.

ANEXO C

No tocante ao desenvolvimento do DYNAblast 2.0, este foi contemplado utilizando o ambiente de desenvolvimento Matlab R2021a associado com o AppDesigner para poder criar o visual de interação com o usuário.

A seguir, são apresentadas todas as estruturas utilizadas no desenvolvimento do *software* de forma a esclarecer como o programa é concebido e o processo lógico para desenvolvê-lo. Vale ressaltar que o *software* sempre está em processo de melhorias, podendo então haver modificações na constituição deste com o tempo.

1. Classes Construtoras

O DYNAblast 2.0 é constituído de 6 classes construtoras, cuja função é de inicializar os campos internos e alocar os recursos dos seus objetos. Estas classes recebem os valores de *input data* do usuário e alocam em parâmetros, que para o caso são as características da estrutura, das lâminas, do carregamento explosivo e do tipo de análise a ser considerado, sendo esta uma análise generalizada ou uma análise avançada. Com base nisso, determinou-se a criação das 6 classes construtoras, que são estas: Class_Plate, Class_Layer, Class_TNT, Class_Analysis, Class_AdvAnalysis e Class_Parameters, onde representam as características da placa, das lâminas, do carregamento, da análise generalizada e da classe de análise avançada, respectivamente.

A estruturação das classes construtoras dá-se inicialmente pela determinação de propriedades, ou atributos, para o caso deste *software* em específico. Neste caso, tais atributos são as características particulares do sistema, conforme explanação supracitada. Esta inicialização é observada na Figura C. 1, onde é uma exemplificação de como os atributos são inicializados na Class_TNT.

Considerando a exemplificação da Class_TNT, é possível fazê-la com que receba os valores associados aos atributos previamente definidos, isto é, receber os valores enviados pelo usuário, ou então atribuir valores default, conforme presente na Figura C. 2.


```

%% Public attributes
properties (SetAccess = public, GetAccess = public)

    Z          = 0;
    W          = 0;
    type       = 0;
    db_pmax    = 0;
    db_pmin    = 0;
    db_td      = 0;
    db_id      = 0;
    db_im      = 0;
    db_expo    = 0;
    equation   = 0;

end

```

Figura C. 1 - Inicialização dos atributos Class_TNT

```

% Constructor function
function tnt = Class_TNT(Z, W, type, ...
    db_pmax, db_pmin, db_td, db_id, db_im, db_expo, equation)

    if ( nargin > 0 )
        tnt.Z          = Z;
        tnt.W          = W;
        tnt.type       = type;
        tnt.db_pmax    = db_pmax;
        tnt.db_pmin    = db_pmin;
        tnt.db_td      = db_td;
        tnt.db_id      = db_id;
        tnt.db_im      = db_im;
        tnt.db_expo    = db_expo;
        tnt.equation   = equation;

    else

        % ----- %
        % Data base of Librescu and Nosier (1990)
        % ----- %

        tnt.Z          = 23.16841;
        tnt.W          = 2.6225;
        tnt.type       = 1;
        tnt.db_pmax    = 500 * 6894.76;
        tnt.db_pmin    = 0;
        tnt.db_td      = 0.1;
        tnt.db_id      = 0;
        tnt.db_im      = 0;
        tnt.db_expo    = 80 * tnt.db_td;
        tnt.equation   = 6;

    end

end

```

Figura C. 2 - Função da Class_TNT

A Class_Layer, em particular, é constituída de atributos do tipo array (vetores), visto que cada lâmina possui sua própria peculiaridade em termos de caracterização de materiais e geometria. Este caso pode ser observado na Figura C. 3.

```

% Constructor function
function this = Class_Layer(num_layer, h1, rho, theta, nul2, ...
    nu21, E1, E2, G12, G13, G23)

    if (nargin > 0)

        this.num_layer = num_layer;
        this.h1        = h1;
        this.rho        = rho;
        this.theta      = theta;
        this.nul2       = nul2;
        this.nu21       = nu21;
        this.E1         = E1;
        this.E2         = E2;
        this.G12        = G12;
        this.G13        = G13;
        this.G23        = G23;

    else

        % ----- %
        % Data base of Reddy (1984)
        % ----- %

        this.num_layer = 2;

        for i = 1 : this.num_layer

            this.h1(i,1) = 1 / 5 / this.num_layer;
            this.rho(i,1) = 1600;
            this.E2(i,1) = 1 * 10^9;
            this.E1(i,1) = 40 * this.E2(i,1);
            this.G12(i,1) = 0.6 * this.E2(i,1);
            this.G13(i,1) = 0.6 * this.E2(i,1);
            this.G23(i,1) = 0.5 * this.E2(i,1);
            this.nul2(i,1) = 0.25;
            this.nu21(i,1) = this.E2(i,1) * this.nul2(i,1) / ...
                this.E1(i,1);

        end

        this.theta(1,1) = 0;
        this.theta(2,1) = pi/2;
        this.theta(3,1) = pi/2;
        this.theta(4,1) = 0;

        this.theta(1,1) = -pi/4;
        this.theta(2,1) = pi/4;
    end
end
end

```

Figura C. 3 - Função da Class_Layer

As classes `Class_Analysis` é constituída por alguns poucos parâmetros que auxiliam na caracterização da análise a ser executada. Neste caso, verifica-se o tipo de teoria escolhida (CLPT, FSPT, HSPT, TvK, HSPT-FD), se a análise é dinâmica ou não, se há fase negativa ou não no carregamento explosivo, o tempo de análise (necessário para o cálculo de Runge-Kutta) e o chamado *gen_button*, conforme Figura C. 4. No caso particular de *gen_button*, este possui por única função averiguar se corresponde a uma análise de histórico do deslocamento ou uma análise paramétrica.

```

% Constructor function
function analysis = Class_Analysis...
    (theory, dynamic, negative, time, gen_button)
    if (nargin > 0)

        analysis.theory          = theory;
        analysis.dynamic         = dynamic;
        analysis.negative        = negative;
        analysis.time            = time;
        analysis.gen_button      = gen_button;

    else

        % ----- %
        % Data base of Reddy (1985)
        % ----- %

        analysis.theory          = 2;
        analysis.dynamic         = 2;
        analysis.negative        = 0;
        analysis.time            = 0.08;
        analysis.gen_button      = 1;

    end
end

```

Figura C. 4 - Função da `Class_Analysis`

Com relação a classe `Class_AdvAnalysis`, ela tem por único objetivo receber os parâmetros de cálculo que são utilizados quando o usuário escolhe fazer uma análise paramétrica.

Para finalizar, condicionou-se como classe também a classe `Class_Parameters`, a classe verifica se o usuário deseja uma análise geral ou paramétrica e, para o caso desta última, qual verificação ele deseja. Desta forma, conforme a escolha do tipo de análise e qual caso deseja avaliar, os valores iniciais de Z , massa de TNT, uso da fase negativa são alterados. Não tão apenas, a classe `Class_Parameters` dispõe de outras duas funções que enviam valores de parâmetros

que são usados em todo o código, tais como funções `Parameter_Boundary` e `Parameter_Fourier`, conforme Figura C.6.

```
% Constructor function
function adv = Class_AdvAnalysis...
    (adv_parameter, Z_initial, W_initial, ...
    W_final, interval, adv_negative)

    if ( nargin > 0)

        adv.adv_parameter = adv_parameter;
        adv.adv_negative = adv_negative;

        adv.Z_initial = Z_initial;
        adv.W_final = W_final;
        adv.W_initial = W_initial;
        adv.interval = interval;

    else

        adv.adv_parameter = 3;
        adv.adv_negative = 1;

        adv.Z_initial = 23.16841;
        adv.W_final = 100;
        adv.W_initial = 0.1;
        adv.interval = 2000;

    end
end
```

Figura C. 5 - Função da Class_AdvAnalysis

```
function this = Class_Parameters(tnt, plate, analysis, advanalysis)
    if ( nargin > 0)

        % Functions
        this = this.Parameter_Boundary(plate);
        this = this.Parameter_Fourier(analysis);
        this = this.Parameter_Z(tnt, analysis, advanalysis);
        this = this.Parameter_W(tnt, analysis, advanalysis);
        this = this.Parameter_Negative(tnt, analysis, advanalysis);

    end

end
```

Figura C. 6 - Função da Class_Parameter

A função `Parameter_Boundary` emite um parâmetro chamado *boundary* que avalia o tipo de combinação de condições de contorno feitos pelo usuário. Sendo assim, por exemplo, para uma combinação do tipo SSSS (placa totalmente apoiada) parâmetro responde com valor 1 e para combinações CCCC (placa totalmente

engastada) ele responde com valor 2, facilitando assim a manipulação dos dados ao longo do programa.

Para o caso da função `Parameter_Fourier`, é retornado um *array* de variáveis simbólicas que são dependentes do tipo de análise utilizada (estática ou dinâmica) e do tipo de teoria considerada, conforme presentes no item 1.2.3. Sendo assim, para o caso de análise estática com uma teoria de von Kármán, é retornado o vetor $[U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}]$. Para a mesma teoria, porém com o uso da análise dinâmica, o vetor resposta corresponde a $[U_{mn}(t), V_{mn}(t), W_{mn}(t)]$, ou seja, os parâmetros da série de Fourier dependentes do tempo. Para o caso de vibração livre, o vetor retornado é de $[U_0, V_0, W_0, X_0, Y_0] * e^{i\omega t}$, conforme sugere Reddy (2003).

As funções `Parameter_Z`, `Parameter_W`, `Parameter_Negative` são voltadas para as análises paramétricas, onde de acordo com o tipo de análise desejada pelo usuário, o DYNAblast 2.0 reconsidera os parâmetros iniciais de Z e W_{TNT} para os quais já introduzidos pelo usuário ou para aqueles que necessitam de novos parâmetros.

2. Classe de Carregamento Explosivo

Com a inserção dos dados completa, o próximo passo corresponde a caracterização e determinação das curvas de carregamento explosivo. Para isto, criou-se uma classe exclusiva que pudesse realizar essa análise, `Class_Blast`, cuja qual lhe compete executar as funções inseridas no método referente. A transferência dos dados das classes construtoras para as demais classes é facilitada através de construção de propriedades. Desta forma, o processo de transferência de dados é facilitado e a cadência de erros de chamadas de propriedades de outras classes diminui consideravelmente. Ainda na declaração das propriedades pode-se criar parâmetros que são usados na própria classe e que podem ser acessados por todo o DYNAblast 2.0. Estas propriedades são contempladas conforme a Figura C. 7.

Ainda em `Class_Blast`, são definidas as funções que são executadas para a determinação dos parâmetros presentes na Figura C. 7. Tais funções são divididas para o cálculo de cada parâmetro individualmente, conforme Figura C. 8, visto que corresponde a um processo de estruturação e lógica melhores.

```

%% Public attributes
properties (SetAccess = public, GetAccess = public)

    tnt          Class_TNT          % TNT's properties
    analysis     Class_Analysis     % Type Analysis propertie
    advanalysis  Class_AdvAnalysis  % Type of Advanced Analysis
    prt          Class_Parameters   % Advanced Considerations

    pmax = 0; % Variable about max pressure in positive phase
    pmin = 0; % Variable about min pressure in negative phase
    td   = 0; % Variable about the time that is during the
          % positive phase
    tm   = 0; % Negative time
    id   = 0; % Variable about positive impulse in positive phase
    im   = 0; % Variable about negative impulse in negative phase
    expo = 0; % Variable about the decaiment coefficient
    eq_p1 = 0; % Positive phase equation
    eq_p2 = 0; % Negative phase equation
    pos  = 0; % Positive pressure (depending by time parameter)
    neg  = 0; % Negative pressure (depending by time parameter)

end

```

Figura C. 7 - Propriedades Class_Blast

```

function this = Class_Blast(tnt, prt)
    if (nargin > 0)

        % Functions
        this = this.Max_Pressure(tnt, prt);
        this = this.Min_Pressure(tnt, prt);
        this = this.Positive_Time(tnt, prt);
        this = this.Positive_Impulse(tnt, prt);
        this = this.Exponent();
        this = this.Negative_Impulse(tnt, prt);
        this = this.Negative_Time(tnt, prt);
        this = this.Positive_Equation();
        this = this.Negative_Equation(tnt, prt);

    else
        this.tnt = Class_TNT(); % Empty constructor
    end

end

```

Figura C. 8 - Funções Class_Blast

As funções presentes na Figura C. 8 seguem a ordem estabelecida, visto que certos parâmetros só podem ser determinados com base em outros parâmetros previamente calculados, a saber o impulso e o tempo de duração da fase negativa. O impulso da fase negativa é diretamente dependente do coeficiente de decaimento da fase positiva, conforme Equação (73), a depender do tipo de equação escolhida pelo usuário. Já o tempo da fase negativa depende diretamente do impulso, conforme Equação (76), a depender também da equação de análise escolhida.

Em suma, pode-se definir que a `Class_Blast` obedece a um fluxograma linear, conforme Figura C. 9, seguindo-se o raciocínio da Figura C. 8.

Importante ressaltar que em todas as funções presentes na classe `Class_Blast`, exceto as que retornam equação das fases positiva e negativa, necessitam fazer a averiguação do tipo de explosão a ser considerada (esférica ou hemisférica) e o tipo de equacionamento escolhido pelo usuário, conforme explanação realizada na Figura 23 (c). As funções relacionadas com o cálculo de parâmetros da fase negativa são dispostas de forma que seja averiguado se a fase negativa é ou não negligenciada.

3. Classe de Cálculo das Características dos Materiais

`Class_Material` corresponde a uma classe pequena com o único objetivo de calcular as matrizes de rigidezes dos materiais presentes, conforme Equações (5) e (8), separando-as em rigidez à flexão e rigidez ao cisalhamento, caso houver. Calcula-se também a espessura total da placa e as coordenadas de início e fim de cada lâmina conforme a orientação dos eixos globais, podendo observar na Figura C. 10.

4. Classe de Cálculo de Esforços

A classe `Class_Effort` é concebida de forma que possa retornar ao usuário esforços da estrutura, conforme cada lâmina, isto é, parâmetros tais como vetor de deformação, conforme Equação (26) e (27), vetor de tensões, de acordo com Equação (7) e os esforços e momentos, de acordo com Equações (35) e (36). Tais funções da `Class_Effort` são contempladas na Figura C. 11.

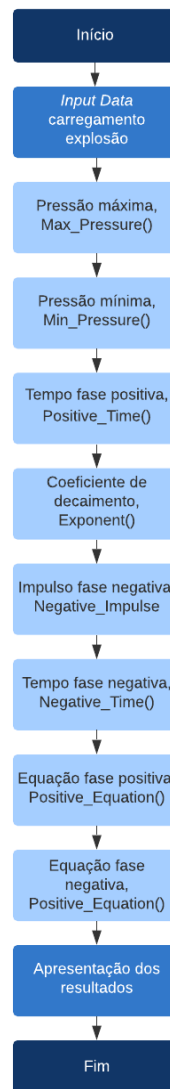


Figura C. 9 - Fluxograma Class_Blast

```

function this = Class_Material(layer)

    if (margin > 0)

        % Functions
        this = this.Height(layer);
        this = this.Layer_zi(layer);
        this = this.Matrix_Qij(layer);
        this = this.Matrix_Q(layer);
        this = this.Matrix_Qb(layer);
        this = this.Matrix_Qs(layer);

    end

end

```

Figura C. 10 - Funções Class_Material

A Class_Effort é constituída de 5 funções, conforme Figura C. 11, sendo cada uma desta responsável pela determinação de um ou mais parâmetros.

General_Displacements() faz o equacionamento dos deslocamentos u_0 , v_0 e w_0 , conforme Equações (23) à (25).

As funções Strain() e Stress() seguem o mesmo raciocínio de General_Displacement(), isto é, correspondem ao equacionamento das deformações e tensões, respectivamente. Para isto, são utilizadas as Equações (26) e (27) para deformação e Equação (7) para tensões.

A função Matrix_CoeffEffort() é a representação simbólica da Equação (36), ou seja, a representação das matrizes [A], [B], [D], [E], [F] e [H]. Após isso, elas são substituídas por seus valores numéricos na função Effort() e então são determinadas as expressões dos esforços e momentos presentes na estrutura.

```
function this = Class_Effort(plate, layer, analysis, material)

    if (margin > 0)

        % Functions
        this = this.General_Displacements(analysis, material);
        this = this.Strain(analysis, material);
        this = this.Stress(layer, material);
        this = this.Matrix_CoeffEffort(layer, material);
        this = this.Effort(plate, analysis);

    end

end
```

Figura C. 11 - Funções Class_Effort

5. Classe de Cálculo de Energia

A próxima etapa corresponde na determinação das equações de energia e, ao final, as equações governantes da estrutura. Neste caso, as equações de energia referentes são a energia de deformação, trabalho externo, energia cinética, equação variacional (isto é, aplicação do Cálculo Variacional) e, finalmente, substituição das devidas expressões de esforços pelos deslocamentos u_0 , v_0 e w_0 , podendo ser observados no item 1.2.4. Ademais, as funções de cada equação de energia podem ser observadas na Figura C. 12.

```

function this = Class_Energy(plate, analysis, effort)

    if (margin > 0)

        % Functions
        this = this.Strain_Energy(effort);
        this = this.Work_Energy(analysis);
        this = this.Kinetic_Energy(analysis, effort);
        this = this.Damping_Energy(plate, analysis);
        this = this.Variational_Equation(analysis);

    end

end

```

Figura C. 12 - Funções Class_Energy

As funções de cálculo de energia correspondem a Strain_Energy(), Work_Energy(), Kinetic_Energy() e Damping_Energy(). A função Strain_Energy() tem por finalidade calcular a equação de energia variacional da estrutura. A expressão utilizada para a determinação da mesma encontra-se na Equação (29). A segunda função é exclusivamente para a determinação da equação referente ao trabalho externo da estrutura, conforme apresentado pela Equação (31). A terceira, Kinetic_Energy(), é usada para a determinação da expressão de energia cinética, de acordo com a Equação (30). Finalmente, a energia de amortecimento é representada pela função Damping_Energy() e contemplada pela Equação (32).

A função que realiza o cálculo variacional das equações governantes corresponde a Variational_Equation(). O seu desenvolvimento, contemplado no **ANEXO A** e solução geram a Equação (34). Observa-se que tal equação está em função dos esforços e momentos gerados na estrutura, com isso a função Equation_Displacement() é responsável por converter tais esforços em função dos deslocamentos u_0 , v_0 e w_0 , baseado no tipo de análise escolhida pelo usuário. A equação final, de energia potencial mínima, é implementada na Equation_Displacement() e pode ser observada na Equação (28).

6. Classe Condições de Contorno

A classe para este caso corresponde a Class_BoundaryConditions(), que possui por objetivo definir as expressões de deslocamento e pressão conforme as condições de contorno, que para o caso do presente trabalho, totalmente apoiado ou

engastado. Nesta classe, tem-se a particularidade de na construção dos métodos públicos averiguar o tipo de condição de contorno para poder executar a função apropriada, conforme apresenta a Figura C. 13.

```
function this = Class_BoundaryConditions(plate, analysis, pmt)

    if (margin > 0)

        this.pmt = pmt;
        boundary = this.pmt.boundary;

        % Functions
        switch boundary
            case 1
                this = this.Simple_Support(plate, analysis, pmt);
            case 2
                this = this.Clamped(plate, analysis, pmt);
        end

        this = this.Load_Plate(plate, pmt);

    end

end
```

Figura C. 13 - Funções Class_BoundaryConditions

Observa-se que é realizada uma verificação para o tipo de condições de contorno escolhido pelo usuário e, a partir desta linha de código, o programa avalia qual das funções são executadas, Simple_Support() ou Clamped(). Naturalmente, todas as funções que estão fora dessa avaliação são executadas.

A função Simple_Support() tem por simples finalidade criar a variável que pudesse receber as Equações (39) à (41). Esta variável, por simplicidade e praticidade na programação, corresponde a um *array*, ou vetor, onde cada coordenada deste *array* comporta uma expressão, podendo chegar a 5 coordenadas, isto é, u_0 , v_0 , w_0 , θ_x e θ_y . Cada expressão varia conforme o tipo de placa é considerada pelo usuário, ou seja, cross-ply (SS1) ou angle-ply (SS2). Já a função Clamped() apresenta as expressões de deslocamento referentes a Equação (62).

Load_Plate() corresponde a uma função que calcula a expressão final do carregamento com base no número de termos existentes nas séries numéricas, m e n , e também de acordo com as condições de contorno consideradas.

7. Classe Solução

Conforme abordado no item 1.2.5, a solução adotada para o presente momento do trabalho corresponde a todos os bordos apoiados ou engastados. O conjunto de bordos apoiados são solucionados com base na solução de Navier, para as teorias placas clássicas, primeira ordem no cisalhamento e terceira ordem no cisalhamento. A adoção do método de Galerkin é usualmente aplicada para a teoria de von Karman e a terceira ordem de cisalhamento com deformação finita. Porém adotar o método de Galerkin para as teorias contempladas também gera o resultado que a solução de Navier proporcionaria. Desta forma, por questões de praticidade no processo matemático e, principalmente, na programação do *software*, decidiu-se utilizar o método de Galerkin para todos os casos, como afirmado em 1.2.5.

Baseado nisto, é contemplado no DYNAblast 2.0 uma classe dedicada a somente a determinar as equações de deslocamento com base nas equações governantes de esforços da estrutura. Esta classe é nomeada *Class_Solution()* e nesta, como nas demais supracitadas, são subdivididas em funções, onde cada função é responsável por um passo para as equações de deslocamento finais. Estas funções são apresentadas na Figura C. 14.

Equation_Displacement() tem por objetivo substituir nas equações governantes, Equação (34), pelas expressões de placas apoiadas ou engastadas. Explanando em termos de funções, são substituídos os parâmetros da função *Simple_Support()* ou *Clamped()*, da *Class_BoundaryConditions*, nas equações governantes, de forma a determinar as expressões finais em função das variáveis da série de Fourier, isto é, $U_{mn}(t)$, $V_{mn}(t)$, $W_{mn}(t)$, $X_{mn}(t)$ e $Y_{mn}(t)$. Contudo, é importante salientar que as expressões finais ainda são dependentes de variáveis x e y , ou seja, funções trigonométricas dependentes das coordenadas do plano da placa. Este objeto deve ser solucionado de forma que as expressões sejam inteiramente e puramente dependentes das variáveis da série de Fourier e independentes de coordenadas cartesianas. Com isso, a função *Galerkin()* é usada para calcular, via método de Galerkin, as expressões finais características da estrutura e de seu carregamento. O método de Galerkin é comentado no item 1.2.5 e demonstrada a sua aplicação no ANEXO B.

A função `Final_Equation()` tem por finalidade averiguar o tipo de teoria a ser utilizada na análise e realizar as simplificações necessárias, caso houver.

```
function this = Class_Solution(plate, layer, analysis, pmt, ...
    material, effort, energy, bc)

    if ( nargin > 0)

        % Functions
        this = this.Equation_Dis(analysis, effort, energy, bc);
        this = this.Gallerkin(plate, analysis, pmt, bc);
        this = this.Final_Equation(plate, layer, analysis, ...
            material);

    end

end
```

Figura C. 14 - Funções `Class_Solution`

8. Classe Solução Estática

A classe `Class_SolutionStatic()` contempla uma função, conforme Figura C. 15, em que a função `Parameter_Fourier()` determina os valores dos parâmetros U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn} (a depender da teoria utilizada) a partir da solução de um sistema de equações não lineares. Muitos casos, este sistema retorna um conjunto de soluções entre valores reais e complexos, sendo introduzido um código que opte sempre pelo conjunto de valores reais.

```
function this = Class_SolutionStatic(analysis, pmt, blast, sol)

    if ( nargin > 0)

        % Functions
        this = this.Parameter_Fourier(analysis, pmt, blast, sol);

    end

end
```

Figura C. 15 - Funções `Class_SolutionStatic`

9. Classe Solução Dinâmica

Após determinar as equações finais baseadas nos parâmetros das séries de Fourier, deve-se averiguar se tais equações apresentam-se em comportamento dinâmico ou estático. Considerando que o carregamento de ondas de explosão é em

função do tempo transcorrido, as equações da estrutura devem ser apresentadas com a suas respectivas segundas derivadas.

A classe que determina o comportamento dinâmico e calcula o valor de tais parâmetros é denominada `Class_SolutionDynamic` e que é composta apenas uma função, `Parameter_Fourier()`, conforme Figura C. 16.

```
function this = Class_SolutionDynamic...
    (tnt, analysis, pmt, blast, sol)

    if (nargin > 0)

        % Functions
        this = this.Parameter_Fourier(tnt, analysis, pmt, ...
            blast, sol);

    end

end
```

Figura C. 16 - Funções `Class_SolutionrDynamic`

A função `Parameter_Fourier()` é de grande importância na determinação dos valores dos parâmetros referentes a série de Fourier, $U_{mn}(t)$, $V_{mn}(t)$, $W_{mn}(t)$, $X_{mn}(t)$ e $Y_{mn}(t)$. Sabendo que as equações que comportam estes parâmetros são altamente não lineares, o presente trabalho utiliza o procedimento numérico de Runge-Kutta para a determinação dos valores para cada passo de tempo realizado. Desta forma, para a utilização de tal método na implementação do *software*, o Matlab disponibiliza uma função automática que calcula o valor dos parâmetros de interesse em função do passo de tempo dado, sendo chamada de `ode23`. Optou-se pelo uso da função `ode23` à `ode45` porque esta segunda gera muito mais pontos que o necessário, acarretando o tempo de uma simples análise de deslocamento x tempo (ou seja, um único *looping*) do tipo HSPT ou HSPT-FD maior que 4 horas. Já `ode23`, para o mesmo tipo de análise, gera menos pontos, acarretando o tempo de análise completa custa um pouco mais de 1 hora. Ressalta-se que estes tempos de esforço computacional estão relacionados com as especificações do computador utilizado, Capítulo 2.

É de suma importância salientar que as expressões de carregamento variam com base no tempo de atuação, na equação de carregamento escolhida e caso seja ativada ou não a fase negativa.

Inicia-se o processo calculando os parâmetros $U_{mn}(t)$, $V_{mn}(t)$, $W_{mn}(t)$, $X_{mn}(t)$ e $Y_{mn}(t)$ para o intervalo de 0 à t_d considerando a equação de Friedlander,

visto que para toda e qualquer avaliação de carregamento explosivo, a fase positiva sempre irá existir e o equacionamento sempre será por Friedlander, considerando que esta é a expressão comumente utilizada na literatura. Ressalta-se que as condições iniciais do sistema são todas nulas, visto que não há deslocamentos e velocidades iniciais. Esta adoção pode ser expandida para os parâmetros de Fourier, conforme apresenta Kazanci e Mecitoglu (2008).

Após esta primeira etapa, é verificada se há ou não fase negativa. Caso o usuário tenha selecionado a opção 'No', o código automaticamente calcula os parâmetros da fase positiva e os do sistema de vibração livre, considerando as condições iniciais desta vibração livre as condições finais da fase positiva.

Caso o usuário tenha concordado em utilizar a fase negativa como objeto também de análise, o código verifica imediatamente o tipo de equação utilizada para caracterizar o comportamento de carga explosiva, conforme descrição da Figura 23 (c). Se a opção escolhida esteja relacionada com a caracterização da fase negativa pelo polinômio cúbico, é realizado o cálculo do Runge-Kutta considerando o par de Bogacki e Shampine (ode23), conforme a documentação do Matlab R2021a, para um intervalo de t_d a $t_d + t_m$, considerando as condições iniciais da fase negativa as condições finais da fase positiva. Após isso, pelo mesmo raciocínio das condições iniciais de equações, é calculado o comportamento da vibração livre, em um intervalo $t_d + t_m$ à *time*, onde *time* corresponde o tempo de duração do carregamento, de acordo com a necessidade do usuário.

Se o usuário escolheu o equacionamento expandido de Friedlander, o código calcula somente a fase negativa do sistema. Isso justifica-se por conta do que pode ser observado na Equação (78), onde a determinação do impulso negativo corresponde a um intervalo de t_d ao infinito. Sendo assim, matematicamente, a fase negativa se estende ao infinito, podendo ser “confundida” com a vibração livre quando a pressão do carregamento tender a zero.

Todos estes passos que descrevem a função `Parameter_Fourier()` são contemplados no fluxograma da Figura C. 17.

Ao final do processo de cálculo de `Parameter_Fourier()`, este emite uma matriz de n linhas e 9 ou 11 colunas. As n linhas são referentes ao número de intervalos de tempo que o próprio programa MATLAB determina eficiente com base no intervalo de tempo que a estrutura encontra-se trabalhando. As colunas são dependentes do tipo

de análise escolhida. Para a análise clássica de placas e a de von Karman, não há consideração do cisalhamento no sistema, sendo a primeira coluna referente ao tempo e as demais são os resultados para $U_{mn}(t)$, $U'_{mn}(t)$, $V_{mn}(t)$, $V'_{mn}(t)$, $W_{mn}(t)$ e $W'_{mn}(t)$. Para as demais análises de placas, são apresentados os resultados de $U_{mn}(t)$, $U'_{mn}(t)$, $V_{mn}(t)$, $V'_{mn}(t)$, $W_{mn}(t)$, $W'_{mn}(t)$, $X_{mn}(t)$, $X'_{mn}(t)$, $Y_{mn}(t)$ e $Y'_{mn}(t)$.

10. Classe Resultado

A última classe a ser utilizada no cálculo da análise de placas corresponde a `Class_Result`, que em sua estrutura comporta um total de 2 funções destinadas a obter o resultado de vetores numéricos referente ao deslocamento vertical da placa e carga de pressão. Todos estes parâmetros são do tipo *array* por serem coordenadas relacionadas com o tempo de análise. As funções que são utilizadas para tal propósito estão apresentadas na Figura C. 18.

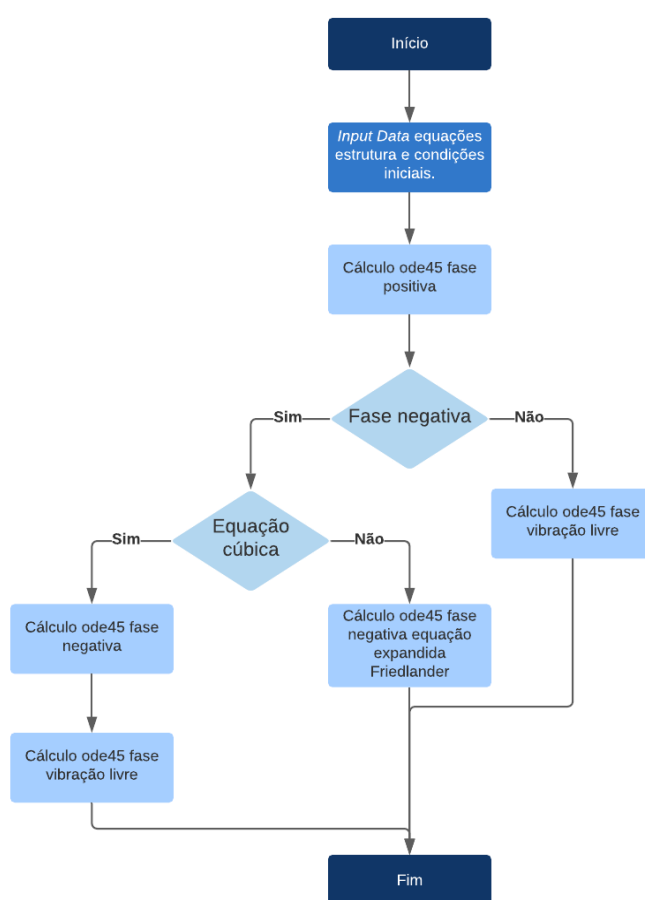


Figura C. 17 - Fluxograma Parameter_Fourier()

```

function this = Class_Result(plate, analysis, pmt, ...
    blast, effort, bc, static_analysis, dynamic_analysis)

    if (margin > 0)

        % Import parameters from Class_Analysis
        this.analysis = analysis;
        gen_button    = this.analysis.gen_button;

        % Pressure's function only will works if gen_button is
        % equal to zero.
        if gen_button == 0
            this        = this.Pressure(analysis, blast, ...
                dynamic_analysis);
        end

        this            = this.Displacement(plate, analysis, ...
            pmt, effort, bc, static_analysis, dynamic_analysis);

    end

end

```

Figura C. 18 - Funções Class_Result

As funções apresentadas na Figura C. 18 são destinadas a calcularem os parâmetros conforme o nome que lhe são dadas. Em outras palavras, Displacement() calcula o conjunto de vetores de deslocamento vertical da estrutura, bem como o deslocamento máximo, em módulo, e o tempo que o mesmo ocorre. Pressure() apresenta o carregamento para o passo de tempo da função Displacement(). Contudo, a função Pressure() só é executada caso o usuário opte pela opção de *general analysis*, visto que nas análises paramétricas não há necessidade de se conhecer a cada looping o comportamento da curva de explosão pelo tempo.

11. Classes de Tensões e Deformações

As classes Class_Stress e Class_Strain são compostas cada por uma única função, conforme Figura C. 19 e Figura C. 20, respectivamente.

Em ambas as classes o processo de cálculo é semelhante, sendo importada alguns parâmetros presentes nas classes construtoras, na Class_Blast, Class_Effort, Class_BoundaryConditions e Class_Result. É avaliado o tipo de análise efetuada (estática ou dinâmica) e calculado o comportamento das tensões e deformações na seção transversal à placa nas coordenadas estabelecidas inicialmente pelo usuário. Caso tenha-se escolhido uma análise dinâmica, o DYNAblast 2.0 importa o valor do

deslocamento máximo da estrutura e averigua as tensões na seção transversal correspondente.

```
function this = Class_Stress(plate, layer, analysis, pmt, ...
    blast, effort, bc, result)

    if ( nargin > 0)

        % Functions

        this = this.Stress(plate, layer, analysis, pmt, ...
            blast, effort, bc, result);

    end

end
```

Figura C. 19 - Funções Class_Stress

```
function this = Class_Strain(plate, layer, analysis, pmt, ...
    bc, blast, effort, result)

    if ( nargin > 0)

        % Functions

        this = this.Strain(plate, layer, analysis, pmt, ...
            blast, effort, bc, result);

    end

end
```

Figura C. 20 - Funções Class_Strain

12. Classe do Período Natural da Placa

Este tipo de classe é caracterizado por determinar os períodos naturais, linear e não linear, da placa laminada. Ao contrário de como se determina tais períodos em placas isotrópicas, conforme demonstrada por Reis (2019), no caso de placas laminadas torna-se um processo mais complexo, visto que é constituída de diversas lâminas e apresenta um conjunto de equações governantes.

Para o caso da função LinearPeriod() são considerados todos os parâmetros de entrada das classes construtoras, contudo o tipo de teoria de placas a ser aplicado é forçadamente modificada para a teoria clássica de placas (CLPT), onde não se considera as rotações e comportam-se os pequenos deslocamentos. A partir disto, são calculados os deslocamentos dinâmicos, considerando a input data para o carregamento explosivo.

A função `NonlinearPeriod()` segue o mesmo procedimento da função supracitada, porém neste caso não há modificações no tipo de teoria escolhida pelo usuário, determinando assim o período não linear da estrutura.

Como apresenta-se na literatura, o período linear natural de uma estrutura dá-se quando esta é submetida a vibração livre. Desta forma, alguns parâmetros são de suma importância para que tais valores do histórico deslocamento x tempo sejam escolhidos de forma correta.

```
function this = Class_NaturalPeriod(tnt, plate, layer, analysis, .
    advanalysis, blast)

    if (nargin > 0)

        this = this.NonlinearPeriod(tnt, plate, layer, analysis, .
            advanalysis, blast);
        this = this.LinearPeriod(tnt, plate, layer, analysis, ...
            advanalysis, blast);

    end

end
```

Figura C. 21 - Funções `Class_NaturalPeriod`

Ressalta-se que ambas as funções, `LinearPeriod()` e `NonlinearPeriod()` capturam os dois últimos valores de pico de deslocamento da estrutura. Com isso, retomando a classe `Class_SolutionDynamic`, verifica-se primeiro se o usuário deseja a fase negativa na análise. Caso o retorno seja nulo, significa que a fase negativa não é considerada e então é calculado diretamente os valores da vibração livre. Com isso, verifica-se os dois últimos picos do histórico e calcula-se o período natural.

O agravante desta questão encontra-se quando há consideração da fase negativa, sendo necessário o usuário colocar um tempo de análise grande o suficiente para o `DYNAblast 2.0` calcular a vibração livre e/ou considerar o comportamento do sistema estrutural próximo a uma vibração livre. Ou seja, para o caso em que as equações características de explosão sejam Friedlander (fase positiva) somado ao polinômio cúbico (fase negativa), naturalmente o programa calcula a vibração livre para o intervalo de tempo $t_d + t_d$ até o tempo introduzido pelo usuário, sendo assim determinado devidamente o período da estrutura. Para quando é escolhida a equação expandida de Friedlander, não há matematicamente uma vibração livre do sistema, o que se manifesta na estrutura é o comportamento semelhante à vibração livre quando

o tempo de duração da fase negativa tende ao infinito, conforme Equação (77). Assim sendo, o tempo de análise introduzido deve ser grande o suficiente para que a estrutura se comporte o mais próximo possível a uma vibração livre, visto que `LinearPeriod()` e `NonlinearPeriod()` buscam as duas últimas cristas do histórico para poderem calcular os respectivos períodos.

13. Classe de Resultados Avançados (Análise Paramétrica)

A classe de resultados mais avançados é assim chamada porque necessitam, em todos os casos, de mais de um *looping* por todas as classes do DYNAblast 2.0 para determinar uma curva de comportamento da estrutura de placa laminada em específico. Isto é, para averiguar o comportamento da estrutura com base em uma variação da massa de TNT aplicado, deve-se recalcular, por exemplo, o deslocamento máximo da placa laminada para cada passo de aumento de massa implantado, gerando uma análise paramétrica. Desta forma, uma análise que até então toma-se aproximadamente 1h e 30 min para ser realizada, passa a demorar mais algumas horas devido ao número de *looping* que o usuário desejar, dependendo do tipo de teoria escolhida pelo usuário.

Neste *software* é contemplada uma classe exclusiva para tal, `Class_Advanced`, que comporta 3 funções, onde todas possuem o mesmo nome, variando apenas o seu número, isto é, `Advanced_Calculus1()`, `Advanced_Calculus2()` e `Advanced_Calculus3()`.

A primeira função, `Advanced_Calculus1()`, determina o deslocamento máximo vertical da estrutura considerando uma variação na distância escalar Z . Neste caso, o passo corresponde a $1 \text{ m/kg}^{1/3}$, ou seja, Z inicia com $5 \text{ m/kg}^{1/3}$ e finaliza com $40 \text{ m/kg}^{1/3}$, conforme os ábacos do US Department of Defense (2008) são dimensionados, podendo ser observados na Figura 12 e Figura 13. Na melhor compreensão de como são realizados os processos de cálculo, a Figura C. 22 apresenta um fluxograma sobre a função `Advanced_Calculus1()` e que o procedimento lógico pode ser estendido para as demais funções.

Considerando assim o apresentado pela Figura C. 22, a cada *looping* realizado, é adicionado a um *array* o deslocamento máximo apresentado, em função absoluta, bem como o valor da distância escalar Z referente.

A função `Advanced_Calculus2()` apresenta o mesmo princípio que a função `Advanced_Calculus1()`. O processo de *looping* é composto por um número de intervalos conforme desejar o usuário, conforme Figura 23 (d). Desta forma, é criado um *array* que possa receber os valores resultados da função, sendo que se calcula todos os valores de deslocamento máximo considerando as características da placa introduzidas pelo usuário. É válido ressaltar que, ao contrário da primeira função, a variação desta é relacionada à carga (massa) de TNT.

A terceira função calcula o fator de amplificação dinâmica, FAD, com relação ao período de vibração linear da estrutura. Neste caso, são calculados os resultados referentes ao deslocamento máximo da `Class_SolutionDynamic()` e sua razão com o deslocamento obtido pela `Class_SolutionStatic()`. Para avaliar o período desejado, é calculado para cada passo de carga a razão entre o tempo de duração da fase positiva e o período linear da estrutura.

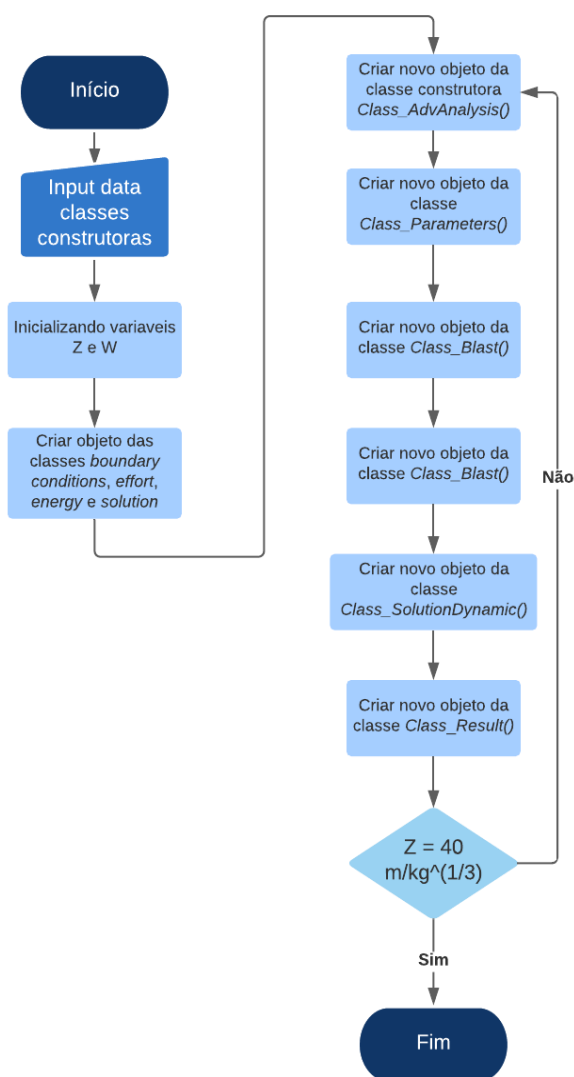


Figura C. 22 - Fluxograma Advanced_Calculus1()

14. Caracterização da chamada de Classes

Em todos os casos de criação de novas classes e funções verifica-se que são introduzidos parâmetros de entrada entre os parêntesis. Este caso caracteriza-se a chamada dos parâmetros públicos de outras classes, visto que novos retornos de dados são enviados ao programa (ou ao usuário, dependendo da classe). Com isso, de forma a facilitar o envio e recebimento de dados, são dados nomes as classes e são caracterizadas nos atributos públicos de cada classe. Desta forma, para facilitar a implementação do *software* e o entendimento da lógica de programação, sem correr

riscos de transferência errônea de dados, são atribuídos os mesmos nomes as classes, conforme Figura C. 23.

```

% Import classes
tnt                Class_TNT
plate              Class_Plate
layer              Class_Layer
analysis           Class_Analysis
advanalysis        Class_AdvAnalysis
pmt                Class_Parameters
blast              Class_Blast
bc                 Class_BoundaryConditions
material           Class_Material
effort             Class_Effort
energy             Class_Energy
sol                Class_Solution
static_analysis    Class_SolutionStatic
dynamic_analysis   Class_SolutionDynamic
result             Class_Result
stress             Class_Stress
strain             Class_Strain
period             Class_NaturalPeriod
advresult          Class_Advanced

```

Figura C. 23 - Nome das classes em propriedades públicas

15. Classe Controle

Finalmente, a classe `Class_Control` tem por objetivo final conectar o código base do *software* à interface GUI desenvolvida no AppDesigner, também do Matlab.

Neste caso, os introduzidos pelo usuário na interface são enviados as classes construtoras e a `Class_Control` define as funções que são executadas, conforme presente na Figura C. 24.

```

function this = Class_Control...
    (plate, layer, tnt, analysis, advanalysis)

    if ( nargin > 0)

        % Import parameters from Class_Analysis
        this.analysis      = analysis;
        dynamic            = this.analysis.dynamic;
        gen_button         = this.analysis.gen_button;

        switch gen_button

            case 0
                % General Analysis
                if (dynamic == 0)
                    this      = this.Static_Analysis(tnt, plate, ...
                        layer, analysis, advanalysis);
                else
                    this      = this.Dynamic_Analysis(tnt, plate, ...
                        layer, analysis, advanalysis);
                end

            case 1
                % Advanced Analysis
                this          = this.Advanced_Analysis...
                    (tnt, plate, layer, analysis, advanalysis);

        end

    end

end
end

```

Figura C. 24 - Funções Class_Control

Para cada uma das funções presentes na Class_Control, são criados novos objetos que chamam as classes específicas, executando-as. Este procedimento pode ser contemplado na Figura C. 25, onde é exemplificado o procedimento realizado pela função Dynamic_Analysis().


```

% Function to calculate dynamic analysis
function this = Dynamic_Analysis...
    (this, tnt, plate, layer, analysis, advanalysis)

% Import Constructor Classes
this.tnt          = tnt;
this.plate        = plate;
this.layer        = layer;
this.analysis     = analysis;
this.advanalysis  = advanalysis;

% Creating new objects based on their main classes
this.vt_pmt       = Class_Parameters...
    (tnt, plate, analysis, advanalysis);

this.vt_material  = Class_Material(layer);

this.vt_effort    = Class_Effort...
    (plate, layer, analysis, this.vt_material);

this.vt_energy    = Class_Energy...
    (plate, analysis, this.vt_effort);

this.vt_bc        = Class_BoundaryConditions...
    (plate, analysis, this.vt_pmt);

this.vt_blast     = Class_Blast(tnt, this.vt_pmt);

this.vt_sol       = Class_Solution...
    (plate, layer, analysis, this.vt_pmt, ...
    this.vt_material, this.vt_effort, ...
    this.vt_energy, this.vt_bc);

if (this.analysis.dynamic == 1)
    % Case considering the blast load

    this.vt_dynamic = Class_SolutionDynamic...
        (tnt, analysis, this.vt_pmt, this.vt_blast, this.vt_sol);

    this.vt_result  = Class_Result...
        (plate, analysis, this.vt_pmt, this.vt_material, ...
        this.vt_bc, this.vt_static, this.vt_dynamic);

    eq              = this.vt_result.final_displacement;
    plot(eq(:,1), eq(:,2))

    filename        = 'dynamic_displacement.xlsx';
    writematrix(this.vt_result.final_displacement,...
        filename,'Sheet',1)

end

end

```

Figura C. 25 - Função Dynamic_Analysis()