Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Idrissa Deme

Um novo uso de simetrias de Lie não-locais na obtenção de quantidades conservadas

Rio de Janeiro
2023

Idrissa Deme

Um novo uso de simetrias de Lie não-locais na obtenção de quantidades conservadas

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antônio Campinho Pereira da Mota

Coorientador: Prof. Dr. Luiz Guilherme Silva Duarte

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

D376n Deme, Idrissa.
Um novo uso de simetrias de Lie não-locais na obtenção de quantidades conservadas / Idrissa Deme. – 2023.
81 f. : il.

Orientador: Luís Antônio Campinho Pereira da Mota.
Coorientador: Luiz Guilherme Silva Duarte
Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Integrais (Matemática) – Teses. 2. Equações diferenciais ordinárias – Teses. 3. Simetria (Matemática) – Teses. I. Mota, Luís Antônio Campinho Pereira da (Orient.). II. Duarte, Luiz Guilherme Silva (Coorient.). III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. IV. Título.

CDU 517.3

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Idrissa Deme

Um novo uso de simetrias de Lie não-locais na obtenção de quantidades conservadas

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 07 de novembro de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luís Antônio Campinho Pereira da Mota (Orientador)

Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Luiz Guilherme Silva Duarte (Coorientador)

Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Fernando Pereira Paulucio Reis

Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Rafael de Sousa Dutra

Instituto Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Sérgio Eduardo Silva Duarte

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

---

Profa. Dra. Zochil Gonzalez Arenas

Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Rafael Fernandes Aranha

Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes

Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

À memoria de Salif Tiemtoré e Mamadou Kaboré

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos e reconhecimentos:

A Deus em primeiro lugar pela vida, saúde e força necessárias para caminhar nesta jornada.

Aos meus pais, e particularmente a mãe que me deu a vida.

Ao Programa de Pós-graduação em Física (PPGF) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) pela realização desta formação de qualidade da qual beneficiei.

Aos meus orientadores, Doutores Luís Antônio Campinho Pereira da Mota e Luiz Guilherme Silva Duarte, pelo acolhimento no seu grupo de pesquisa, pelo suporte e ensinamentos inestimáveis, pelas orientações valiosas, pela paciência e os incentivos ao longo do desenvolvimento desta tese.

Ao corpo docente e administrativo, do programa de pós-graduação em Física da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) pela qualidade e a dedicação na transmissão do conteúdo do curso e a todos os professores com os quais estudei, pelo valioso conhecimento que me permitiram adquirir.

Aos professores prof. Dr. Fernando Pereira Paulucio Reis, Dr. Rafael de Sousa Dutra, Dr. Sérgio Eduardo Silva Duarte, Dra. Zochil Gonzalez Arenas, Dr. Rafael Fernandes Aranha, Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes pela participação da banca e as observações e correções carinhosamente incrementados ao trabalho.

Aos meus colegas de nosso grupo de pesquisa Iasmin, João Eires, Alex, Ígor pelos mútuos apoios preciosos para o desenvolvimento deste trabalho, e pela boa convivência.

Aos professores Dsc. Maria Helena Farias e Dsc. Edisio Alves de Aguiar Junior, Dr. Abdoulaye Ouedraogo pelos incentivos e apoio contínuos. Aos meus colegas de turma pela cordialidade, solidariedade e a troca de conhecimento durante o curso, em particular ao Rafael Gomes pela solidariedade em momentos difíceis.

Aos meus amigos e irmãos Samir Isbelle, Amana Nesimi, Simboro Abdul Aziz, Adama Gning, Claudia de Souza, Inoussa Compaoré, Moctar Congo, Tamyra Cybelle, Marcos Aquino, Priscila Castro, Carlos Leonardo Da Silva Azeredo pelo apoio e incentivo constante. Em especial A Regiane Soares e Vanderson Teixeira pela amizade, suporte, torcida contínua ao longo deste processo.

Ao Centro de Estudos Sobre o Islam e as Sociedades muçulmanas (CEP-FISM) e aos seus membros e colaboradores pelo apoio espiritual e fraterno.

Aos meus professores da vida e da escola e a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

DEME, I. *Um novo uso de simetrias de Lie não-locais na obtenção de quantidades conservadas*. 2023. 89 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Neste tese apresentamos um método eficiente para usar uma simetria não-local admitida por uma equação diferencial ordinária racional de segunda ordem (2EDO racional) para determinar uma integral primeira Liouvilliana. Construímos um algoritmo para calcular uma simetria não-local de uma 2EDO racional e, em seguida, mostramos que é possível, usar essa simetria de um modo alternativo ao método de Lie usual. Basicamente, a partir da simetria não-local, construimos três campos vetoriais polinomiais (no $\mathbb{R}^2$), que 'compartilham' a integral primeira Liouvilliana com a 2EDO racional. Esses campos vetoriais polinomiais 2D podem ser usados para determinar um fator integrante para a 2EDO racional. As principais vantagens do método proposto são: a obtenção da simetria não-local é semi-algorítmica e muito eficiente e, além disso, a sua utilização para encontrar um fator integrante é uma sequência de processos lineares ou quase lineares muito eficientes. Em uma última etapa, nós implementamos o algoritmo em um pacote computacional escrito em Maple.

Palavras-chave: Integrais primeiras (quantidades conservadas) liouvillianas. Equações diferenciais ordinárias racionais de segunda ordem. Simetrias não locais. Implementação computacional.

ABSTRACT

DEME, I. *A new use of non-local Lie symmetries in obtaining conserved quantities.* 2023. 89 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

In this thesis we present an efficient method to use a non-local symmetry admitted by a second-order rational ordinary differential equation (rational 2EDO) to determine a Liouvillian first integral. We build an algorithm to compute a non-local symmetry of a rational 2EDO and then show that it is possible to use this symmetry in an alternative way to the usual Lie method. Basically, from a non-local symmetry, we construct three polynomial vector fields (in $\mathbb{R}^2$), which 'share' the Liouvillian first integral with the rational 2EDO. These 2D polynomial vector fields can be used to determine an integrating factor for the rational 2EDO. The main advantages of the proposed method are: obtaining the non-local symmetry is semi-algorithmic and very efficient and, in addition, its use to find an integrating factor is a sequence of very efficient linear or quasi linear processes. In a last step, we implemented the algorithm in a computational package written in Maple.

Keywords: Liouvillian first integrals (conserved quantities). Rational second order ordinary differential equations. Non-local symmetries. Computational implementation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Com o surgimento das teorias científicas modernas, as equações diferenciais (EDs) passaram a ser usadas como modelos matemáticos para descrever fenômenos na maioria das áreas (física, química, biologia, engenharia, economia etc). Dessa maneira, o estudo do comportamento desses fenômenos está ligado ao entendimento das soluções, integrais primeiras, invariantes, características, simetrias etc dessas EDs. A necessidade de decifrar o comportamento dos fenômenos levou, portanto, a uma busca obstinada por métodos (procedimentos, abordagens, algoritmos etc) que pudessem fornecer as soluções, propriedades etc das equações diferenciais.

Os primeiros métodos de solução a surgir eram de natureza menos abrangente, isto é, começou a se formar uma espécie de catálogo com diferentes procedimentos, cada um destinado a resolver um tipo específico de ED (essa forma de abordagem é usualmente chamada de *classificatória*). Contudo, em fins do século XIX, apareceram (no espaço de uma década) duas teorias de uma essência muito mais generalista: as abordagens de Lie (1970) e Darboux (1878). Essas teorias, em oposição aos métodos classificatórios que agrupavam 'tipos' de EDs definidos por seu método de solução, se concentravam no estudo das estruturas matemáticas subjacentes a elas. O método de Lie é baseado no conceito de *simetria* de uma ED[1] e a abordagem de Darboux é centrada no conceito de *polinômio de Darboux* (PD)[2]. Devido à sua grande abrangência e potencial de generalização, essas duas abordagens têm sido extensivamente estudadas/desenvolvidas/generalizadas ao longo do último século (em especial nas últimas décadas em razão do grande desenvolvimento da computação simbólica).

Contudo, embora muito eficientes e amplamente aplicáveis, mesmo os métodos de Lie e Darboux apresentam seus obstáculos: o método de Lie pode ser aplicado a equações diferenciais ordinárias (EDOs) de qualquer ordem, a sistemas de EDOs, a equações diferenciais parciais (EDPs), a sistemas de EDPs etc, mas se as simetrias de uma dada EDO não forem de ponto, não existe uma maneira geral de obtermos as simetrias[3]. Os métodos Darbouxianos, que se baseiam na determinação dos polinômios de Darboux (PDs) que fazem parte do fator integrante da EDO, por outro lado, começam a apresentar dificul-

---

[1] De maneira sucinta, podemos dizer que uma simetria de uma ED é um grupo de transformações que mantém a forma da ED. Para um conhecimento mais profundo do método de Lie veja, por exemplo, Bluman (2002), Ibragimov (1999), Olver (1986), Schlomiuk (1993); Steeb (2007).

[2] Um PD é um polinômio que é uma autofunção do operador de Darboux associado com a ED em questão. A ideia base pode ser entendida consultando Prelle; Singer (1983).

[3] Pois neste caso não podemos separar a equação determinante (a EDP que as simetrias devem obedecer) nas potências das derivadas da variável dependente para obter um sistema sobredeterminado de EDPs.

dades quando o grau dos PDs são relativamente altos[4]. Para superar esses problemas, várias abordagens foram desenvolvidas:

- No contexto dos métodos de simetria, L.G.S. Duarte e L.A.C.P. da Mota (Cheb-Terrab; Duarte; Mota (1997, 1998)) criaram uma série de procedimentos heurísticos para encontrar simetrias de EDOs de primeira e segunda ordem (1EDOs e 2EDOs); Olver (1986, p. 185) introduziu o conceito de *campo vetorial exponencial*; Abraham-Shrauner (1996), Abraham-Shrauner; Govinder; Leach (1995), Abraham-Shrauner; Guo (1992; 1993), Adam; Mahomed (1998), Bruzon; Gandarias; Senthilvelan (2012), Govinder; Leach (1997), Gandarias; Bruzon (2011) e outros trabalharam com o conceito de *simetrias ocultas* e *simetrias não-locais*. Muriel; Romero (2001; 2003) desenvolveram o conceito de λ-simetria que inaugura uma rica área de pesquisa (Cicogna; Gaeta; Morando (2004), Cicogna; Gaeta; Walcher (2013), Muriel; Romero (2012, 2014) e suas referências). Pucci; Saccomandi (2002) criaram o conceito de simetria telescópica. Outra grande abordagem foi trazida por Nucci (2005, 2008) que usou o conceito de último multiplicador de Jacobi de uma forma muito inteligente.

- No contexto Darbouxiano, Cairó e Llibre (2000) mostraram que usando os fatores exponenciais, introduzidos por Cristopher (1994), os métodos de Darboux poderiam ser generalizados para lidar com integrais primeiras elementares (ao invés de apenas algébricas). Em 1983, Prelle e Singer (1983) encontraram uma abordagem semi-algorítmica para determinar integrais primeiras elementares de campos vetoriais no plano (ou, equivalentemente, 1EDOs racionais). Por conta de suas características, a abordagem Darbouxiana gerou muitas extensões Christopher (1999); Christopher; Llibre (2000); Collins (1993a, 1993b); Llibre (2004); Duarte; Da Mota, (2009); Duarte; Duarte, Da Mota (2002a, 2002b); Avellar *et al.* (2005); Duarte; Duarte; Da Mota; Skea (2001); Shtokhamer (1988); Singer (1992). Em particular, em Avellar; Duarte; Da Mota (2007a); Christopher (1999); Christopher; Llibre (2000); Duarte; Duarte, Da Mota (2002a, 2002b); Avellar *et al.* (2005) o método foi estendido para lidar com 1EDOs racionais apresentando soluções gerais Liouvillianas. Em Avellar; Duarte; Da Mota (2007b); Duarte; Da Mota, (2009) e Duarte; Duarte; Da Mota; Skea (2001), ele foi estendido para lidar com 2EDOs racionais que apresentam pelo menos uma integral primeira com um fator integrante algébrico. Em Duarte; Da Mota (2009) e Llibre; Zhang (2009) são tratados sistemas polinomiais de 1EDOs em mais de duas variáveis.

No entanto, apesar de todos esses esforços, o problema principal permanece: se

[4] Para 1EDOs racionais o grau 4 já costuma ser inviável se usarmos o *método de coeficientes indeterminados* (MCI); para EDOs racionais de segunda ordem (2EDOs racionais) o grau 2 já é problemático.

as simetrias não são de ponto ou se os PDs (que estão presentes no fator integrante) apresentam um grau relativamente elevado (na prática ≥ 3), é muito difícil (para os métodos em geral) determinar as integrais primeiras.

Para contornar o problema da determinação dos PDs, Avellar *et al.* (2019) desenvolveram, em Avellar *et al.* (2019), um método para determinar integrais primeiras Liouvillianas (IPLs) de 2EDOs racionais (esse procedimento foi chamado de método da função-S) com base em uma outra estrutura teórica. A ideia central do método desenvolvido em Avellar *et al. (2019)* é construir uma equação diferencial ordinária racional de primeira ordem (1EDO racional) de modo que a função que define sua solução geral na forma implícita seja precisamente a integral primeira Liouvilliana (IPL) da 2EDO original. Assim, naquele trabalho, a proposta era trocar o problema de encontrar uma IPL de uma 2EDO racional pelo problema de construir e resolver uma 1EDO racional associada à 2EDO original. Matematicamente, a primeira parte do método da função-S (encontrar a função-S) é equivalente a determinar uma simetria não-local ou uma λ-simetria. No entanto, na prática, o método da função-S tem como vantagem o fato que o procedimento para encontrar a função-S se baseia em um procedimento algébrico (que deriva de uma abordagem semelhante à de Darboux), ao passo que os métodos de simetria não fornecem, em geral, um método para determinar as simetrias, a menos que sejam simetrias de ponto ou simetrias dinâmicas de um formato predeterminado nas derivadas da variável dependente. Essa abordagem (o método da função-S) provou ser muito eficiente nos casos em que os métodos de Lie e Darboux apresentam problemas, ou seja, 2EDOs com simetrias complicadas (dinâmicas ou não locais) e com polinômios de Darboux (PDs) de grau relativamente alto no fator integrante. No entanto, o uso da simetria não-local ou da λ-simetria (ou mesmo da função-S) é o mesmo: é necessário resolver uma 1EDO que, na prática, também pode ser bastante complicada. Dessa maneira, é possível que, mesmo achando a simetria não-local (a λ-simetria / a função-S), o procedimento resulte em uma 1EDO muito complicada. Mas, como mostraremos ao longo dessa tese, há outra maneira de usar a simetria não-local na qual é possível criar um conjunto de procedimentos lineares (ou quase lineares), *que podem ser implementados computacionalmente de maneira muito prática*, para determinar um fator integrante para a 2EDO.

Nesta tese, apresentamos um procedimento que pode determinar LFIs para 2EDOs racionais nos casos em que suas simetrias são muito complicadas e, portanto, é bastante difícil tanto determiná-las como aplicar o caminho tradicional do método de simetria de Lie. Para tal, em primeiro lugar, usamos um algoritmo (que consiste em um aprimoramento da abordagem usada em Avellar *et al.* (2019)) para encontrar uma simetria não-local. A partir daí, começa o principal foco do meu trabalho, que consiste em empregar a simetria não-local de um modo muito diverso da maneira original: mostramos que é possível, a partir da simetria não-local, construir três campos vetoriais polinomiais em duas variáveis (campos vetoriais 2D) vinculados ao campo vetorial polinomial 3D (o operador de Darboux) que está associado à 2EDO racional. O conhecimento desses campos vetoriais nos permite calcular os polinômios de Darboux (PDs) presentes no fator integrante de uma maneira muito mais simples e eficiente[5]. Assim, vamos usar a função-S, que originalmente foi pensada para evitar o cálculo dos PDs, para construir um algoritmo que determina esses mesmos PDs. Para realizar essa tarefa nos baseamos em alguns resultados apresentados em Duarte; Da Mota (2021) e mostramos que é possível calcular os PDs presentes em um fator integrante da 2EDO resolvendo sistemas algébricos lineares de indeterminados.

Os resultados principais estão descritos no capítulo 3 e esta tese está estruturada da seguinte maneira:

1. O primeiro capítulo corresponde a esta introdução.
2. No segundo capítulo, vamos apresentar a base teórica para construir o nosso método: apresentamos (de forma breve) os fundamentos da abordagem Darbouxiana (Os métodos de Prelle-Singer e Chistopher-Singer e seus desdobramentos) e do método da função-S (que dispensa o uso dos PDs):
   (a) Na primeira seção apresentamos os principais conceitos e procedimentos envolvidos na abordagem Darbouxiana.
   (b) Na segunda seção, apresentamos o método da função-S para encontrar integrais primeiras Liouvillianas de 2EDOs racionais.
   (c) Na terceira, mostramos um refinamento da teoria apresentada em Avellar *et al.* (2019): um resultado que melhora o método de determinação de uma simetria admitida por um 2EDO racional que apresenta um LFI. Com esse reultado podemos construir um algoritmo (*NLS - Non-Local Symmetry*) que permite determinar uma simetria não-local em um processo extremamente eficiente.
3. No terceiro capítulo, desenvolvemos um procedimento (*DIF - Darboux Integrating Factor*) que usa a simetria não-local para determinar linearmente um fator integrante de Darboux (sem a necessidade de resolver qualquer equação diferencial) associado a uma integral primeira Liouvilliana da 2EDO racional:
   (a) Na primeira seção, demonstramos um resultado que é a base para que o procedimento *DIF* funcione: Uma 2EDO rational com uma integral primeira Liouvilliana I (pertencente a uma grande classe de funções Liouvillianas) admite

[5] Veremos, no corpo deste trabalho, que isso é possível porque esses três campos vetoriais 'compartilham' a mesma integral primeira e um fator integrante com a 2EDO original, embora em relação a variáveis diferentes.

um fator integrante de Darboux R. Além disso, ela admite uma simetria de Lie[6]

(b) Na segunda, no espírito da ideia apresentada em Duarte; Da Mota (2021), definimos outros três campos vetoriais polinomiais $\mathcal{X}_i$, $(i \in \{1, 2, 3\})$ associados a $\mathfrak{X}_i$, de modo que sua integral primeira $\mathcal{I}$ seja o fator integrante de Darboux R do 2EDO racional, ou seja $\mathcal{X}_i(R) = 0$. Mostramos que os campos vetoriais polinomiais $\mathcal{X}_i$ e o fator integrante de Darboux R podem ser calculados (no caso geral) com uma configuração linear. Portanto, propomos um procedimento (*DIF*) para determinar, a partir da simetria não-local $\mathfrak{S}$, um fator integrante de Darboux R para o 2EDO racional. Para tornar clara a compreensão do algoritmo, apresentamos um exemplo de trabalho passo a passo com os conceitos que desenvolvemos.

4. No capítulo 4 apresentamos uma implementação computacional dos algoritmos *NLS* e *DIF*:

   (a) Na primeira seção, mostramos um resumo dos comandos que compõe o pacote *NLSDIF* e sua funcionalidade e, logo em sequência, fazemos uma descrição um pouco mais detalhada de cada um dos comandos.

   (b) Na segunda seção, apresentamos exemplos práticos do uso dos comandos do pacote aplicados a exemplos específicos.

5. No capítulo 5, aplicamos o procedimento combinado *NLSDIF* a algumas 2EDOs racionais e discutimos seu desempenho:

   (a) Na primeira seção, aplicamos o procedimento *NLSDIF* a algumas 2EDOs racionais que são "difíceis" para os métodos de Lie e Darboux (bem como para o método da função-S) e analisamos o desempenho dos algoritmos.

   (b) No segundo, comentamos as vantagens e desvantagens do método e fazemos algumas considerações sobre possíveis desenvolvimentos e extensões do mesmo.

6. Por fim, no capítulo 6, apresentamos a nossa conclusão: fazemos algumas considerações sobre o trabalho desenvolvido, nossa avaliação sobre os resultados obtidos e possíveis direções a seguir.

[6] Essa simetria pode ser calculada com o algoritmo algébrico (*NLS*) apresentado na segundo capítulo. $\mathfrak{S}$ e, a partir dessa simetria, podemos construir três campos vetoriais polinomiais (2D) associados $\mathfrak{X}_i$, $(i \in \{1, 2, 3\})$ de modo que a integral primeira I da 2EDO (que está vinculada à simetria não-local $\mathfrak{S}$) também é uma integral primeira para os campos vetoriais polinomiais $\mathfrak{X}_i$ (i. e., $\mathfrak{X}_i(I) = 0$).

1 ABORDAGEM DARBOUXIANA E MÉTODO DA FUNÇÃO-S

Neste capítulo definiremos os conceitos e resultados necessários à compreensão e construção do procedimento apresentado no capítulo 3. Na primeira seção apresentaremos de forma breve a abordagem Darbouxiana e, na segunda seção, o método da função-S.

1.1 A abordagem de Darboux-Singer

Para descrever a ideia central da abordagem Darbouxiana (na busca de integrais primeiras Liouvillianas) de maneira bem simples, só precisamos do seguinte parágrafo:

Encontre os polinômios de Darboux (PDs) associados à 2EDO racional e, com eles, construa um fator integrante.

Observação 1.1. Da afirmação acima podemos inferir que a determinação dos PDs é a parte mais importante de todo o processo de determinação de integrais primeiras. Contudo, ela é também a parte mais complexa e custosa (do ponto de vista computacional). De maneira informal podemos dizer que a abordagem Darbouxiana é bem simples de descrever (bastam algumas definições e resultados) e, 'paradoxalmente', bem difícil de realizar praticamente no caso de 2EDOs com PDs de grau relativamente alto.

Na sequência vamos apresentar os fundamentos da abordagem Darbouxiana.

1.1.1 O método de Prelle-Singer (PS)

Considere um sistema dinâmico polinomial no plano ($\mathbb{R}^2$):

$$\begin{cases} \dot{x} = N(x,y), \\ \dot{y} = M(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

onde M e N são polinômios coprimos em $\mathbb{C}[x,y]$. Uma integral primeira I do sistema (1) é uma função que é constante sobre as soluções de (1).

Definição 1.1. Seja $L(x,y)$ uma extensão Liouvilliana do corpo $\mathbb{C}(x,y)$. Uma função $I \in L(x,y)$ é chamada **integral primeira Liouvilliana** do sistema *(1)* se $D(I) = 0$, onde $D \equiv N\,\partial_x + M\,\partial_y$ é o **campo vetorial associado** (ou o **operador de Darboux associado**) ao sistema.

Observação 1.2. Se $I \in E(x, y)$, onde $E(x, y)$ é uma extensão elementar[7] do corpo $\mathbb{C}(x, y)$, I é chamada **integral primeira elementar**.

Observação 1.3. Como o sistema *(1)* é autônomo, podemos dividir $\dot{y}$ por $\dot{x}$ e obter uma 1EDO rational.

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}. \tag{2}$$

Para esta 1EDO, a função I define sua solução geral na forma implícita: $I(x, y) = c$. Além disso, a 1-form $\gamma \equiv M\,dx - N\,dy$ é nula sobre as soluções da 1EDO *(2)* e, portanto, a 1-form exata $\omega \equiv dI$ é proporcional a γ, i.e., $\omega = R\,\gamma$. A função R é usualmente chamada **fator integrante**.

O método PS pode ser facilmente compreendido se prestarmos atenção aos seguintes resultados obtidos por Prelle e Singer (1983):

Teorema 1.1 (Prelle-Singer)**.**:
Se o sistema (1) *apresenta uma integral primeira elementar então*
(i) Ele apresenta uma da forma $I = W_0 + \sum_{j=1}^{K} c_j \ln(W_j)$*, onde os* W*'s são funções algébricas.*
(ii) A forma 1 $M\,dx - N\,dy$ *apresenta um fator integrante da forma* $R = \prod_i {p_i}^{n_i}$*, onde os* p_i *são polinômios irredutíveis e os* n_i *são números racionais.*

Prova: Para uma prova veja Prelle; Singer (1983).

Definição 1.2. Seja $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$. O polinômio p é dito ser um **polinômio de Darboux** do campo vetorial D se $D(p) = q\,p$, onde $D \equiv N\,\partial_x + M\,\partial_y$ e q é um polinômio em $\mathbb{C}[x, y]$ que é chamado **cofator** de p.

Corolário 1.1. *Se a hipótese do teorema 1.1 for satisfeita então*

$$\sum_i n_i \frac{D(p_i)}{p_i} = -\mathbf{div}(D),$$

onde D *é o campo vetorial associado a* (1)*,* p_i *são polinômios de Darboux de* D *e* **div** *significa divergente.*

Prova: Para uma prova veja a seção 2 de Duarte; Duarte; Da Mota; Skea (2002).

O corolário 1.1 é a chave para o método PS:

[7] Para uma definição formal veja Davenport; Siret; Tournier (1993).

Procedimento (esboço):

1. Construa os candidatos para p e q com coeficientes indeterminados. Vamos chamá-los de: p_c e q_c. Substitua então na equação $D(p_c) - q_c\, p_c = 0$.

2. Colete a equação nas variáveis (x, y) obtendo um conjunto de equações (quadráticas) para os coeficientes dos candidatos. Resolva este conjunto de equações para os coeficientes indeterminados.

3. Substitua as soluções na equação $\sum_i n_i\, q_i + N_x + M_y = 0$ (ver corolário 1.1) e colete a equação nas variáveis (x, y). Resolva o conjunto de equações para n_i.

4. Construa o fator integrador $R = \prod_i {p_i}^{n_i}$ e encontre (por quadraturas) a integral primeira elementar I.

1.1.2 O método de Christopher-Singer (CS)

O método CS segue dos resultados obtidos por Singer (1992) e Christopher (1994):

Teorema 1.2 (Singer)**.**:
Se a 1-forma $M\,dx - N\,dy$ associada ao sistema (1) *apresenta uma integral primeira Liouvilliana então ela apresenta um fator integrante da forma*

$$R(x,y) = \exp\left[\int U(x,y)\,dx + V(x,y)\,dy\right], \tag{3}$$

onde U e V são funções racionais com $U_y = V_x$ de modo que a integral de linha (3) *esteja bem definida.*

Prova: Para uma prova veja Singer (1992).

Teorema 1.3 (Christopher)**.**:
Se o sistema (1) *tem um fator integrante da forma* (3) *onde U e V são funções racionais com $U_y = V_x$, então existe um fator integrante do sistema* (1) *da forma*

$$R(x,y) = \exp\left(\frac{A}{B}\right)\prod_i {p_i}^{n_i}, \tag{4}$$

onde A, B e p_i são polinômios em x e y.

Prova: Para uma prova veja Christopher (1994) e Duarte; Duarte; Da Mota (2002).

Corolário 1.2. *B e p_i são polinômios de Darboux do campo vetorial D e $D\left(\dfrac{A}{B}\right)$ é um polinômio.*

Prova: Para uma prova veja Christopher (1994) e Duarte; Duarte; Da Mota (2002a).

O corolário 1.2 permite a construção de um semi-algoritmo na linha do método PS:
Procedimento (esboço):

1. Construa os candidatos para p e q com coeficientes indeterminados. Vamos chamá-los de: p_c e q_c. Substitua então na equação $D(p_c) - q_c\, p_c = 0$.

2. Colete a equação nas variáveis (x, y) obtendo um conjunto de equações (quadráticas) para os coeficientes dos candidatos. Resolva este conjunto de equações para os coeficientes indeterminados.

3. Construa todos os possíveis candidatos para B (até um grau determinado) e um candidato para A. Substitua os candidatos na equação $B_c\, D(A_c) - A_c\, D(B_c) + {B_c}^2\,(\sum_i n_i\, q_i + N_x + M_y) = 0$ (ver Duarte; Duarte, Da Mota (2002a)) e colete a equação nas variáveis (x, y). Resolva o conjunto de equações para n_i e os coeficientes de A_c.

4. Construa o fator integrante $R = \exp(A/B) \prod_i {p_i}^{n_i}$ e encontre (por quadraturas) a integral primeira elementar I.

Observação 1.4. Para campos vetorias em $\mathbb{R}^3$, a situação fica um pouco mais complicada: em primeiro lugar, o fator integrante R não é um multiplicador de Jacobi (como acontece em $\mathbb{R}^2$). Portanto, $X(R)/R$ não é um polinômio conhecido e depende de uma função racional não determinada a priori. Em segundo, necessitamos determinar os polinômios de Darboux (PDs) em três variáveis, o que é uma tarefa muito difícil, uma vez que já não é fácil determiná-los em duas variáveis[8]. Assim, para 2EDOs racionais 'difíceis' (PDs de grau relativamente alto), os métodos Darbouxianos 'clássicos' são muito custosos.

1.2 O método da função-S

O conceito da função-S surgiu quando tentamos adaptar a abordagem DPS para equações diferenciais ordinárias racionais de segunda ordem (2EDOs racionais). A ideia

[8] Aqui, as palavras *fácil* e *difícil* se referem ao fato que a partir do grau 4 é muito custoso computacionalmente (em geral, inviável) determinar PDs em duas variáveis. No caso de PDs em em três variáveis, o grau 2 já começa a ficar inviável computacionalmente.

era “adicionar” uma 1-forma nula à 1-forma que representava a 2EDO (veja Duarte; Duarte; Da Mota; Skea (2001) e Duarte.; Da Mota (2009)). No entanto, o problema de cálculo dos PDs era tão custoso, em termos computacionais, que desenvolvemos um procedimento misto que foi chamado de **método da função-S**. Resumidamente, o método da função-S não utiliza o cálculo de polinômios de Darboux mas depende da resolução de duas 1EDOs racionais.

1.2.1 Algumas definições e resultados básicos

Considere a 2EDO racional dada por

$$z' = \frac{dz}{dx} = \phi(x,y,z) = \frac{M(x,y,z)}{N(x,y,z)}, (z \equiv y'), \tag{5}$$

onde M e N são polinômios coprimos em $\mathbb{C}[x,y,z]$.

Definição 1.3. Uma função I(x,y,z) é chamada **integral primeira** da 2EDO (5) se I é constante sobre as soluções de (5).

Observação 1.5. Se $I(x,y,z)$ é uma integral primeira da 2EDO (5) então, sobre as curvas-solução de (5), a 1- forma exata $\omega = dI = I_x dx + I_y dy + I_z dz$ é nula.

Sobre as curvas-solução de (5), temos duas 1-formas não nulas:

$$\alpha = \phi\, dx - dz, \tag{6}$$

$$\beta = z\, dx - dy. \tag{7}$$

Então, a 1-forma ω é um vetor no espaço determinado pelas 1-formas α e β, i.e., podemos escrever $\omega = r_1(x,y,z)\,\alpha + r_2(x,y,z)\,\beta$:

$$\begin{aligned} dI &= I_x\, dx + I_y\, dy + I_z\, dz = r_1\,(\phi dx - dz) + r_2\,(z dx - dy) \\ &= (r_1\,\phi + r_2\, z) + (-r_2\,)dy + (-r_1)\, dz. \end{aligned} \tag{8}$$

Definindo $R \equiv r_1$ e $S \equiv \frac{r_2}{r_1}$, podemos escrever

$$dI \equiv R[(\phi + z\,S)\,dx - S\,dy - dz]. \tag{9}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} I_x &= R(\phi + z\,S), \\ I_y &= -R\,S, \\ I_z &= -R. \end{aligned}$$

Definição 1.4. Seja γ um 1-forma. Dizemos que R é um **fator integrante** para a 1-forma γ se $R\,\gamma$ é uma 1-forma exata.

Definição 1.5. Seja I uma integral primeira da 2EDO (5). A função definida por $S \equiv I_y/I_z$ é chamada uma **função-S** associada à 2EDO através da integral primeira I.

Observação 1.6. Das definições acima e, tendo em vista a definição (9) podemos ver que R é um fator integrante para a 1-forma $(\phi + z\,S)\,dx - S\,dy - dz$ e S é a função-S associada à 2EDO (5) através de I.

Teorema 1.4. *Seja $I(x, y, z)$ uma integral primeira da 2EDO (5). Se S e R são como em (9), então podemos escrever*

$$
\begin{aligned}
D_x(R) + R(S + \phi_x) &= 0, && (10)\\
S D_x(R) + R(D_X(S) + \phi_x) &= 0, && (11)\\
-(R_z S + R S_z) + R_y &= 0, && (12)
\end{aligned}
$$

onde $D_x \equiv \partial_x + z\partial_y + \phi(x, y, z)\partial_z$.

Para prova veja Duarte.; Da Mota (2009).

Corolário 1.3. *Seja S uma função-S associada à 2EDO $z' = \phi(x, y, z)$. Então S obedece a seguinte equação:*

$$D_x(S) = S^2 + \phi_z S - \phi_y. \qquad (13)$$

Para prova veja Avellar *et al.* (2019).

1.2.2 As 1EDOs associadas

De (13) vemos que a função-S associada com a 2EDO racional (5) satisfaz a uma equação diferencial parcial de ordem um (1EDP) quase linear nas variáveis (x, y, z). Sobre as soluções da 2EDO (5) temos que $y = y(x)$ e $z = z(x)$ e, portanto, o operador D_x é, formalmente, d_x [9]. Então, formalmente, sobre as soluções da 2EDO (5) podemos escrever a 1EDP (13) como uma 1EDO de Riccati:

$$\frac{ds}{dx} = s^2 + \phi_z(x)\,s - \phi_y(x). \qquad (14)$$

[9] $d_x \equiv \dfrac{d}{dx}$.

É de conhecimento comum que a transformação

$$y(x) = -\frac{r'(x)}{f(x)r(x)} \tag{15}$$

transforma a equação de Riccati

$$y'(x) = f(x)\,y(x)^2 + g(x)\,y(x) + h(x) \tag{16}$$

em uma 2EDO linear

$$r''(x) = \frac{(f'(x) + g(x)\,f(x))\,r'(x)}{f(x)} - f(x)\,h(x)\,r(x). \tag{17}$$

Então, com a transformação

$$s(x) = -\frac{w'(x)}{w(x)}, \tag{18}$$

a 1EDO de Riccatti para $s(x)$ (14), sobre as soluções da 2EDO (5) transforma-se na 2EDO linear homogênea

$$w''(x) = \phi_z(x)\,w'(x) + \phi_y\,w(x). \tag{19}$$

Portanto, podemos usar a equivalência formal $D_x \sim d_x$ para produzir uma conexão entre a função-S e as simetrias da 2EDO, escritas numa forma particular. Aplicando a transformação

$$S = -\frac{D_x(\nu)}{\nu} \tag{20}$$

na equação (13), obtemos

$$D_x^2(\nu) = \phi_z\,D_x(\nu) + \phi_y\,\nu. \tag{21}$$

A equação (21) é justamente a condição para que ν seja um infinitésimo que define o gerador de simetria na forma evolucionária. Então, temos

Teorema 1.5. *Seja ν uma função de (x,y,z) tal que $[\,0,\nu]$ define uma simetria da 2EDO (5) na forma evolucionária, i.e., $X_e \equiv \nu\,\partial_y$ gera uma transformação de simetria para (5). Então a função definida por $S \equiv -D_x(\nu)/\nu$ é uma função-S associada à 2EDO (5).*

Prova. Veja em Avellar *et al.* (2019)

Corolário 1.4. *Seja S uma função S associada a 2EDO (5). Então a função ν dada por*

$$\nu \equiv e^{\int_x (-S)}, \tag{22}$$

onde $\int_x$ é o operador inverso de D_x, i.e., $\int_x D_x = D_x \int_x = 1$ define uma simetria da 2EDO (5) na forma evolucionária.

Prova. Veja em Avellar *et al.* (2019).

O teorema (1.5) e o corolário (1.4) estabelecem uma conexão entre as funções-S e as simetrias de Lie. Foi esta conexão que permitiu evitar o uso de polinômios de Darboux na busca pelas integrais primeiras para a 2EDO (5). O conceito principal é a 1EDO [10], que é uma 1EDO que tem sua solução geral definida por uma das integrais primeiras da 2EDO.

Definição 1.6. Seja I uma integral primeira da 2EDO 5 e seja $S(x, y, z)$ a função-S associada com (5) através de I. A equação diferencial ordinária de primeira ordem definida por

$$\frac{dz}{dy} = -S(x, y, z), \tag{23}$$

onde x é tomado como um parâmetro, é chamada **1EDO associada** com a 2EDO (5) através de I.

Teorema 1.6. *Seja I uma integral primeira da 2EDO (5) e seja S(x,y,z) a função-S associada com (5) através de I. Então $I(x, y, z) = C$ é uma solução geral da 1EDO associada com (5) através de I.*

Prova. Veja em Avellar *et al.* (2019).

Observação 1.7. A variável x, que é a variável independente da 2EDO (5), é apenas um parâmetro na 1EDO (23), então, desde que qualquer função de x é um invariante para o operador $D_a \equiv \partial_y - S\partial_z$, i.e., $D_a(x) = 0$, a relação entre uma solução geral $H(x, y, z) = K$ de 1EDO (23) e a integral primeira $I(x, y, z)$ da 2EDO (5) é $I(x, y, z) = F(x, H)$, tal que

$$D_x(I) = \frac{\partial F}{\partial x} + (H_x + z\, H_y + \phi_z)\frac{\partial F}{\partial H} = 0. \tag{24}$$

Resumidamente, o método da função-S consiste em:

- Determinar a função-S.
- Resolver a 1EDO associada (23), encontrando a função H (veja a observação 1.7).
- Resolver a 1EDO que representa o sistema característico da equação diferencial parcial para F (a 1EDP (24)).

[10] Este conceito foi desenvolvido em Duarte.; Da Mota (2009)

Observação 1.8. Alguns comentários:

- Uma vez que a função-S é definida como a divisão de I_y por I_z, podemos pensar se as divisões I_x/I_z e I_x/I_y teriam algum significado ou utilidade. A resposta é sim. Podemos definir funções-S $\{S_1, S_2, S_3\}$ com significados similares (veja Avellar *et al.* (2019)).

- A principal vantagem do método da função-S é que, em geral, é mais eficiente determinar a função-S do que calcular os polinômios de Darboux, precisamente nos casos onde tais polinômios têm graus relativamente altos.

- A grande vantagem de podermos contar com três funções-S é que a dificuldade associada com a determinação de cada uma delas pode ser muito diferente, i.e., pode ser muito mais fácil (algoritmicamente) calcular uma delas do que outras duas.

- Para mais detalhes e exemplos da aplicação do método, recomendamos que o leitor veja a referência Avellar *et al.* (2019)

2 ENCONTRANDO UMA SIMETRIA NÃO-LOCAL

Neste capítulo, vamos apresentar algumas melhorias à primeira parte do método da função-S (ou seja, à determinação da função-S propriamente dita) e mudar alguns detalhas na descrição matemática do processo (que nos serão úteis no capítulo seguinte). Cabe aqui uma explicação: o método da função-S consiste, basicamente (como vimos na seção anterior), na determinação da função-S, na solução da 1EDO associada e da 1EDO característica. Mas precisamos ressaltar que a grande novidade do método consiste na maneira como a função-S é determinada. Os outros dois passos (a solução da 1EDO associada e da 1EDO característica) são os mesmos que seriam tomados se tivéssemos a nossa disposição uma λ-simetria ou uma simetria não-local. Em Avellar *et al.* (2019) esses dois passos eram dados pelo comando `dsolve` do Maple[11] e, caso as 1EDOs não fossem resolvidas, o método fracassava. Assim, neste capítulo, vamos tornar a determinação da simetria mais eficiente para que, no próximo capítulo, possamos passar ao principal ponto desta tese.

Neste capítulo vamos:

- Colocar a notação em um formato mais adequado ao que apresentaremos no capítulo seguinte.
- Apresentar algumas melhorias (algumas já consideradas em Eiras (2017)) que tornam a obtenção da simetria não-local muito mais eficaz e eficiente do que em Avellar *et al.* (2019).

2.1 Reescrevendo alguns conceitos e resultados

Considere uma 2EDO racional

$$z' = \frac{M_0(x, y, z)}{N_0(x, y, z)} = \phi(x, y, z), \quad (z \equiv y'), \tag{25}$$

onde M_0 e N_0 são polinômios coprimos em $\mathbb{C}[x, y, z]$. Uma integral primeira I da 2EDO (25) é uma função constante sobre as soluções de (25).

[11] Maple é um sistema de álgebra computacional de uso geral (ou seja, um ambiente de computação simbólica) que também é uma linguagem de programação multiparadigma. Ele pode manipular expressões matemáticas e encontrar soluções simbólicas para equações diferenciais ordinárias e parciais (EDOs e EDPs).

Definição 2.1. Seja L uma extensão Liouvilliana do corpo[12] $\mathbb{C}(x,y,z)$. Uma função $I(x,y,z) \in L$ é considerada uma **Integral Primeira Liouvilliana** (IPL) da *2EDO* racional *(25)* se $\mathfrak{X}(I) = 0$, onde $\mathfrak{X} \equiv N_0\,\partial_x + z\,N_0\,\partial_y + M_0\,\partial_z$ é o **campo vetorial polinomial associado** (também chamado de **operador de Darboux associado**) com a *2EDO (25)*.

Definição 2.2. Seja $p(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z]$. Diz-se que o polinômio p é um **polinômio de Darboux** (PD) do campo vetorial $\mathfrak{X}$ se $\mathfrak{X}(p) = q\,p$, em que q é um polinômio em $\mathbb{C}[x,y,z]$ que é chamado **cofator** de p.

Definição 2.3. Seja $I(x,y,z)$ uma IPL da *2EDO (25)* e considere que suas derivadas podem ser escritas como

$$I_x = R\,Q, \tag{26}$$

$$I_y = R\,P, \tag{27}$$

$$I_z = R\,N, \tag{28}$$

onde R é uma função Liouvilliana de (x,y,z) e Q, P, N são polinômios coprimos em $\mathbb{C}[x,y,z]$. Então, dizemos que I é um membro do conjunto $\boldsymbol{L_S}$ e que R é um **fator integrante** associado a I.

Definição 2.4. Seja γ a 1-forma polinomial definida por $\gamma \equiv Q\,dx + P\,dy + N\,dz$ onde Q, P, N são os polinômios coprimos em $\mathbb{C}[x,y,z]$ definidos acima e seja $\mathfrak{I}$ o campo vetorial definido por $\mathfrak{I} \equiv Q\,\partial_x + P\,\partial_y + N\,\partial_z$. Diz-se que uma função R é um **fator integrante** para a 1-forma γ se a 1-forma $R\,\gamma$ for exata.

Alguns comentários:

Observação 2.1. Se a *2EDO (25)* apresentar uma integral primeira Liouvilliana I conforme descrito na definição *2.3* (ou seja, $I \in L_S$), a função R (o fator integrante para a *2EDO (25)* associado a I) é um fator integrante para a 1-forma $\gamma \equiv Q\,dx + P\,dy + N\,dz$ e podemos escrever o campo vetorial definido pelo gradiente de I como $\nabla(I) = R\,\mathfrak{I}$[13]. Vamos usar a notação $\langle \mathfrak{I} | \mathfrak{I} \rangle$ significando $\gamma(\mathfrak{I})$.

Observação 2.2. Seja $I \in L_S$ uma integral primeira do racional *2EDO (25)* de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 2.3. Se o campo vetorial $\mathfrak{I}$ for definido por $\mathfrak{I} \equiv Q\,\partial_x + P\,\partial_y + N\,\partial_z$, então a condição $\mathfrak{X}(I) = 0$ é equivalente a $\langle \mathfrak{X} | \mathfrak{I} \rangle = N_0\,Q + z\,N_0\,P + M_0\,N = 0$.

[12] Para uma definição formal de extensão Liouvilliana, veja Davenport; Siret; Tournier (1993).

[13] No que se segue, os operadores $\nabla(.)$, $\langle \nabla | . \rangle$, $\nabla \wedge .$ representam **grad, div, rot**, respectivamente.

No resultado a seguir, mostramos que o campo vetorial $\mathfrak{I}$ pode ser usado para construir uma simetria para a 2EDO (25):

Teorema 2.1. *Seja $I \in L_S$ uma integral primeira do racional* 2EDO (25) *de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 2.3. Então,* 2EDO (25) *admite uma simetria dada por*

$$\mathfrak{S} = \mathrm{e}^{\int_x (-P/N)}\, \partial_y, \tag{29}$$

onde $\int_x$ é o operador inverso de D_x, ou seja, $\int_x D_x = D_x \int_x = \mathbf{1}$ ($D_x \equiv \frac{\mathfrak{X}}{N_0}$).

Prova. Se $\mathfrak{S} = \mathrm{e}^{\int_x (-P/N)}\, \partial_y$ é uma simetria (na forma evolucionária) da 2EDO racional (25), então sua primeira extensão é dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{(1)} &= \nu\, \partial_y + D_x(\nu)\, \partial_z = \mathrm{e}^{\int_x (-P/N)}\, \partial_y + \mathrm{e}^{\int_x (-P/N)}\, D_x\left(\int_x (-P/N) \right) \partial_z = \\ &= \mathrm{e}^{\int_x (-P/N)} (\partial_y - (P/N)\, \partial_z), \end{aligned}$$

e, portanto, $\mathfrak{S}^{(1)}(I) = \mathrm{e}^{\int_x (-P/N)}\, (I_y - (P/N)\, I_z)$. Pela hipótese do teorema, I é uma integral primeira Liouvilliana da 2EDO racional (25) tal que $I_y = R\,P$ e $I_z = R\,N$. Então $I_y - \frac{P}{N}\, I_z = R\,P - \frac{P}{N}\, R\,N = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{S}^{(1)}(I) = 0.$ $\square$

Portanto, para obter uma simetria, basta determinar o campo vetorial $\mathfrak{I}$ (ou melhor, duas de suas componentes). Para fazer isso, mostraremos que as condições que os polinômios $\{Q,\, P,\, N\}$ devem satisfazer podem ser escritas como equações diferenciais parciais de primeira ordem (1EDPs). Essas 1EDPs serão a base para a primeira parte do método (ou seja, a obtenção da simetria $\mathfrak{S}^{(1)}$).

Lema 2.1. *Seja $I \in L_S$ uma integral primeira da* 2EDO (25) *de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 2.3 e seja $\mathfrak{I}$ o campo vetorial definido por $\mathfrak{I} \equiv Q\, \partial_x + P\, \partial_y + N\, \partial_z$. Então, o campo vetorial definido por $\mathfrak{L} \equiv \nabla \wedge \mathfrak{I}$ obedece à condição $\langle \mathfrak{L}, \mathfrak{I} \rangle = 0$.*

Prova. A partir das hipóteses do lema $I_x = R\,Q,\ I_y = R\,P,\ I_z = R\,N$. Portanto, podemos escrever $\mathfrak{I}$ como $\frac{\nabla(I)}{R}$, o que implica que

$$\mathfrak{L} = \nabla \wedge \mathfrak{I} = \frac{1}{R} \underbrace{\nabla \wedge \nabla(I)}_{=0} + \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \nabla(I).$$

Portanto, $\langle \mathfrak{L}, \mathfrak{I} \rangle = \langle \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \nabla(I), \frac{\nabla(I)}{R} \rangle = 0.$ $\square$

Lema 2.2. *Seja $I \in L_S$ uma IPL da* 2EDO (25) *de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 2.3 e que $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{L}$ sejam campos vetoriais polinomiais definidos como acima. Então, $\mathfrak{X} \wedge \mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{X}(R)}{R}\, \mathfrak{I}$.*

Proof. Do lema 2.1 temos que $\mathfrak{L} = \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \wedge \nabla(I)$. Então[14]

$\mathfrak{X} \wedge \mathfrak{L} = \mathfrak{X} \wedge \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \wedge \nabla(I) = \underbrace{\langle \mathfrak{X} | \nabla(I) \rangle}_{\mathfrak{X}(I)} \nabla\left(\frac{1}{R}\right) - \langle \mathfrak{X} | \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \rangle \nabla(I).$

Como $\mathfrak{X}(I) = 0$, $\mathfrak{X} \wedge \mathfrak{L} = -\langle \mathfrak{X} | - \frac{\nabla(R)}{R^2} \rangle \nabla(I) = \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} \frac{\nabla(I)}{R} = \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} \mathfrak{I}$. □

Teorema 2.2. *Seja $I \in L_S$ uma IPL da* 2EDO (25) *de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 2.3 e seja $\mathfrak{X}$ o campo vetorial polinomial associado à* 2EDO (25)*. Então, os polinômios P, N obedecem às seguintes 1EDPs:*

$$P \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} + N_0 \, \partial_y \left(\frac{z \, N_0}{N_0} \right) P + N_0 \, \partial_y \left(\frac{M_0}{N_0} \right) N + \mathfrak{X}(P) = 0, \tag{30}$$

$$N \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} + N_0 \, \partial_z \left(\frac{z \, N_0}{N_0} \right) P + N_0 \, \partial_z \left(\frac{M_0}{N_0} \right) N + \mathfrak{X}(N) = 0. \tag{31}$$

Proof. Para evitar cálculos desnecessários, indicaremos apenas o processo para obter o resultado desejado: A partir das hipóteses do teorema, temos que $\langle \mathfrak{X} | \mathfrak{I} \rangle = N_0 \, Q + z \, N_0 \, P + M_0 \, N = 0$. Resolvendo a equação $N_0 \, Q + z \, N_0 \, P + M_0 \, N = 0$ para o polinômio Q e substituindo o resultado na equação vetorial $\mathfrak{X} \wedge \mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} \mathfrak{I}$ (lema 2.2) obtém-se (para as componentes y e z, após rearranjar os termos) as condições expressas pelas 1EDPs (30,31) para os polinômios P e N. □

Observação 2.3. A equação que resulta da componente x é dependente das equações *(30,31)*.

Observação 2.4. Há condições análogas para os outros dois pares $\{Q, N\}$ e $\{Q, P\}$ que resultam da solução da equação $N_0 \, Q + z \, N_0 \, P + M_0 \, N = 0$ para P e N, respectivamente, e substituindo os resultados na equação $\mathfrak{X} \wedge \mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} \mathfrak{I}$. Esses pares de equações são:

$$Q \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} + z \, N_0 \, \partial_x \left(\frac{N_0}{z \, N_0} \right) Q + z \, N_0 \, \partial_x \left(\frac{M_0}{z \, N_0} \right) N + \mathfrak{X}(Q) = 0, \tag{32}$$

$$N \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} + z \, N_0 \, \partial_z \left(\frac{N_0}{z \, N_0} \right) Q + z \, N_0 \, \partial_z \left(\frac{M_0}{z \, N_0} \right) N + \mathfrak{X}(N) = 0, \tag{33}$$

e

$$Q \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} + M_0 \, \partial_x \left(\frac{N_0}{M_0} \right) Q + M_0 \, \partial_x \left(\frac{z \, N_0}{M_0} \right) P + \mathfrak{X}(Q) = 0, \tag{34}$$

$$P \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} + M_0 \, \partial_y \left(\frac{N_0}{M_0} \right) Q + M_0 \, \partial_y \left(\frac{z \, N_0}{M_0} \right) P + \mathfrak{X}(P) = 0. \tag{35}$$

[14] Usando a identidade $A \wedge (B \wedge C) = \langle A, C \rangle \, B - \langle A, B \rangle \, C$.

Observação 2.5. Podemos eliminar o termo $\frac{\mathfrak{X}(R)}{R}$ das equações (30,31) e obter uma equação para os polinômios P e N. De forma análoga, podemos eliminá-lo dos pares de equações (32,33) e (34,35), obtendo assim uma equação para o par de polinômios $\{Q, N\}$ e outra para o par $\{P, Q\}$.

Teorema 2.3. *Seja $I \in L_S$ uma IPL da* 2EDO (25) *de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 2.3 e sejam $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{I}$ campos vetoriais polinomiais definidos como acima. Então, as componentes de $\mathfrak{I}$ obedecem às seguintes 1EDPs:*

$$\mathfrak{X}\left(\frac{P_j}{P_k}\right) = F_i\,\partial_k\!\left(\frac{F_j}{F_i}\right)\left(\frac{P_j}{P_k}\right)^2 + F_i\,\left(\partial_k\!\left(\frac{F_k}{F_i}\right) - \partial_j\!\left(\frac{F_j}{F_i}\right)\right)\left(\frac{P_j}{P_k}\right) - F_i\,\partial_j\!\left(\frac{F_k}{F_i}\right), \qquad (36)$$

where $P_1 = Q,\ P_2 = P,\ P_3 = N,\ F_1 = N_0,\ F_2 = z\,N_0,\ F_3 = M_0,\ \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i},\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,$ e (i, j, k) é qualquer permutação do conjunto $\{1, 2, 3\}$ (i.e., não há soma sobre os índices repetidos).

Prova. Das hipóteses do teorema, temos que $\langle \mathfrak{X}|\mathfrak{I}\rangle = \langle \mathfrak{L}, \mathfrak{I}\rangle = 0$, (onde $\mathfrak{L} \equiv \nabla \wedge \mathfrak{I}$). Essas condições implicam as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{X}|\mathfrak{I}\rangle &= N_0\,Q + z\,N_0\,P + M_0\,N = 0,\\
\langle \mathfrak{L}, \mathfrak{I}\rangle &= (N_y - P_z)\,Q + (Q_z - N_x)\,P + (P_x - Q_y)\,N = 0.
\end{aligned}$$

Como na prova do teorema 2.2 (para evitar cálculos desnecessários), indicamos apenas o caminho: resolvemos a equação $N_0\,Q + z\,N_0\,P + M_0\,N = 0$ para um dos polinômios Q, P, N e substituímos a solução na equação $(N_y - P_z)\,Q + (Q_z - N_x)\,P + (P_x - Q_y)\,N = 0$. Obtemos (dependendo de qual polinômio escolhemos) a condição expressa pela 1EDP (36) para as duas outras funções polinomiais. □

Como as equações (36) são escritas em termos de um par de polinômios (desconhecidos), podemos usá-las diretamente para criar um algoritmo para determinar os campos vetoriais associados. Um possível algoritmo seria:

Procedimento 1 (esboço): (NLS_1)

1. Escolha um par de componentes do campo vetorial polinomial $\mathfrak{I}$: $\{P, N\}$, $\{Q, N\}$ ou $\{P, Q\}$ ($\{P_2, P_3\}$, $\{P_1, P_3\}$ ou $\{P_2, P_1\}$).

2. Defina o grau (inicial) para os polinômios P_i e P_j. Construa dois polinômios P_{ic} e P_{j_c} com coeficientes indeterminados e substitua-os na equação (36) (a equação correspondente ao par de polinômios $\{P_i, P_j\}$).

3. Coletar a equação polinomial resultante nas variáveis (x, y, z), obtendo um conjunto de equações para os coeficientes indeterminados.

4. Resolva esse conjunto de equações e substitua a solução nos candidatos P_{ic} e P_{jc} para obter P_i e P_j.

5. Use a equação $N_0\,Q + z\,N_0\,P + M_0\,N = 0$ para obter o componente ausente.

6. Use o campo vetorial $\mathfrak{I}$ para construir a simetria $\mathfrak{S}$.

Observação 2.6. As equações *(36)* são equações quadráticas nos polinômios $\{Q, P, N\}$, o que implica que as equações para os coeficientes indeterminados (obtidos na etapa 3 do algoritmo NLS_1) também são quadráticas. Assim, o sistema quadrático resultante é, em alguns casos, muito difícil de resolver (em termos computacionais). Às vezes, é mais custoso do que encontrar os polinômios de Darboux que compõem o fator integrante.

2.2 Obtendo a simetria de modo mais eficiente

Uma maneira de evitar o problema apontado na observação 2.6 (logo acima) é presumir que $N = N_0$ (isso é o que foi feito em Avellar *et al.* (2019)). É razoável que, em um grande número de casos, a igualdade acima seja satisfeita porque, a partir do fato de que $I \in L_S$ é uma integral primeira da 2EDO (25), podemos escrever

$$\phi(x,y,z) = -\frac{I_x + z\,I_y}{I_z} = -\frac{R\,Q + z\,R\,P}{R\,N} = -\frac{Q + z\,P}{N} = \frac{M_0}{N_0}. \tag{37}$$

De fato, o único caso em que $N \neq N_0$ pode ocorrer é se os polinômios $Q + z\,P$ e N tiverem um fator polinomial não constante em comum. Lidaremos com esse caso "degenerado' mais tarde. Por enquanto, vamos mostrar como melhorar o procedimento NLS_1 para 2EDOs racionais em que a igualdade $N = N_0$ é contemplada. Nesse caso, temos (antecipadamente) conhecimento do componente N do campo vetorial $\mathfrak{I}$. Dessa forma, as equações (36) para os pares (P, N) e (Q, N) tornam-se condições para apenas um polinômio desconhecido. Veremos que, como consequência, o procedimento para determinar a outra componente de $\mathfrak{I}$ se torna um algoritmo completo.

Teorema 2.4. *Seja $I \in L_S$ uma IPL da* 2EDO (25) *e que $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{I}$ sejam campos vetoriais polinomiais definidos como acima. Se N e $Q + z\,P$ forem polinômios coprimos, então o cálculo das componentes do campo vetorial $\mathfrak{I}$ por meio das equações* (36) *é um algoritmo completo.*

Prova. Com base nas suposições do teorema ($I \in L_S$; N e $Q + z\,P$ são coprimos), a 2EDO pode ser escrita como

$$z' = -\frac{I_x + z\,I_y}{I_z} = -\frac{Q + z\,P}{N},$$

o que implica que $M_0 = -(Q + z\,P)$ e $N_0 = N$. Escolhendo $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ em (36), temos

$$\mathfrak{X}\left(\frac{P}{N_0}\right) = N_0\,\partial_z\left(\frac{z\,N_0}{N_0}\right)\left(\frac{P}{N_0}\right)^2 + N_0\left(\partial_z\left(\frac{M_0}{N_0}\right) - \partial_y\left(\frac{z\,N_0}{N_0}\right)\right)\left(\frac{P}{N_0}\right) - N_0\,\partial_y\left(\frac{M_0}{N_0}\right),$$

levando a $\mathfrak{X}\,(P) = P^2 + (N_x + z\,N_y + M_z)\,P + M\,N_y - M_y N$, $(N \equiv N_0,\ M \equiv M_0)$. Isolando P^2 no lado esquerdo, temos

$$P^2 = N\,P_x + z\,N\,P_y + M\,P_z - (N_x + z\,N_y + M_z)\,P - M\,N_y + M_y N. \tag{38}$$

O grau do termo P^2 no lado esquerdo da equação (38) é $2\,deg_P$ (já que o termo é um quadrado). Os graus (máximos) dos termos seguintes (no lado direito) são, respectivamente, $deg_P + deg_N - 1$, $deg_P + deg_N$, $deg_P + deg_M - 1$, $deg_P + deg_N - 1$, $deg_P + deg_N$, $deg_P + deg_M - 1$, $deg_M + deg_N - 1$, $deg_M + deg_N - 1$, $deg_M + deg_N - 1$.

Portanto, há quatro casos distintos:

Caso 1: $deg_P \leq deg_N - 1$;

Caso 2: $deg_P \leq deg_N$;

Caso 3: $deg_P \leq deg_M - 1$;

Caso 4: $deg_P \leq \dfrac{deg_M + deg_N - 1}{2}$.

O caso 1 implica o caso 2 e os casos 2 e 3 (combinados) implicam o caso 4. Portanto, se $deg_M > deg_N + 1$, então $deg_P \leq deg_M - 1$, caso contrário, se $deg_M \leq deg_N + 1$, então $deg_P \leq deg_N$. Em ambos os casos, o grau de P (deg_P) tem um limite superior que pode ser usado para construir um candidato polinomial P_c com coeficientes indeterminados a serem substituídos no 1EDP (38). O cálculo de coeficientes indeterminados (sistema algébrico de segundo grau) é um processo finito e, portanto, o cálculo termina. □

Corolário 2.1. *Seja $I \in L_S$ uma IPL da* 2EDO (25) *e sejam $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{I}$ campos vetoriais polinomiais definidos como acima. Além disso, suponha que N e $Q + z\,P$ sejam polinômios coprimos. Se R for um fator integrante para $\mathfrak{X}$ associado à integral primeira I, então $\frac{\mathfrak{X}(R)}{R} = -(\langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle + P)$.*

Prova. Das hipóteses ($I \in L_S$; N e $Q + z\,P$ são coprimos), temos que $M_0 = -(Q + z\,P)$ e $N_0 = N$. Do lema 2.2, temos que $\mathfrak{X} \wedge \mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{X}(R)}{R}\,\mathfrak{I}$. Assim, a terceira componente dessa equação vetorial implica que $N\,(-N_x + Q_z) - z\,N\,(N_y - P_z) = \frac{\mathfrak{X}(R)}{R}\,N \;\Rightarrow\; \frac{\mathfrak{X}(R)}{R} = -N_x - z\,N_y + Q_z + z\,P_z = -N_x - z\,N_y - M_{0z} - P$. □

Como o caso não degenerado (ou seja, o caso em que N e $Q + z\,P$ são polinômios coprimos) implica em $N = N_0$, a conclusão do teorema 2.4 nos permite criar um algoritmo muito mais eficiente do que NLS_1, pois agora estamos lidando com a indeterminação de apenas um polinômio em vez de dois. Uma possível sequência de etapas seria:

Procedimento 2 (esboço): (NLS_2)

1. Construa um candidato polinomial P_c com coeficientes indeterminados de grau $deg_{P_c} = deg_M - 1$ se $deg_M > deg_N + 1$ ou $deg_{P_c} = deg_N$ se $deg_M \leq deg_N + 1$.

2. Substitua P_c na equação $\mathfrak{X}\,(P) = P^2 + (N_x + z\,N_y + M_z)\,P + M\,N_y - M_y N$.

3. Recolha a equação polinomial resultante nas variáveis (x, y, z), obtendo um conjunto de equações para os coeficientes indeterminados.

4. Resolva esse conjunto de equações e substitua a solução no candidato P_c para obter P.

5. Construa a simetria $\mathfrak{S} = \mathrm{e}^{\int_x (-P/N)}\,\partial_y$.

O algoritmo NLS_2 é muito mais eficiente que seu predecessor NLS_1. No entanto, esse algoritmo não é válido para o caso 'degenerado' no qual N e $Q + z\,P$ têm um fator polinomial em comum. Para melhorar a eficiência do algoritmo NLS_1 (quando estivermos lidando com o caso degenerado), podemos usar o fato de que conhecemos parte do polinômio N.

Teorema 2.5. *Seja $I \in L_S$ uma IPL da* 2EDO (25) *e sejam $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{I}$ campos vetoriais polinomiais definidos como acima. Se N e $Q + z\,P$ tiverem um fator polinomial não constante ρ, ou seja, se $N = \rho\,N_0$ e $-(Q + z\,P) = \rho\,M_0$, então*

$$\frac{\mathfrak{X}(P) + \rho\,(N_0\,M_{0y} - M_0\,N_{0y})}{P} = \frac{\mathfrak{X}(\rho) + P}{\rho} + \langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle. \tag{39}$$

Prova. A hipótese "N e $Q + z\,P$ têm um fator polinomial não constante ρ" implica que P e ρ são coprimos, pois se P tivesse ρ como fator (ou se P e ρ tivessem um fator polinomial não constante em comum), isso implicaria que ρ (ou o fator polinomial não constante de P e ρ) também seria um fator de Q (já que $-(Q + z\,P) = \rho\,M_0$), uma contradição, pois Q, P e N são coprimos. Portanto, substituindo $N = \rho\,N_0$ na equação (38), temos

$$P^2 = \rho\,\mathfrak{X}(P) - ((\rho N_0)_x + z\,(\rho N_0)_y + (\rho M_0)_z)\,P - \rho^2 (N_0\,M_{0y} - M_0\,N_{0y}). \tag{40}$$

Observando que $((\rho N_0)_x + z\,(\rho N_0)_y + (\rho M_0)_z) = \rho\,\langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle + \mathfrak{X}(\rho)$ e dividindo a equação por $\rho\,P$ obtemos (após reorganizar alguns termos) o resultado desejado. □

O resultado expresso no teorema 2.2 permite o seguinte aprimoramento no algoritmo NLS_1:

Procedimento 3 (esboço): (NLS_{1I})

1. Construa dois candidatos polinomiais P_c e ρ_c com coeficientes indeterminados.

2. Substitua P_c e ρ_c na equação

$$\frac{\mathfrak{X}(P) + \rho\,(N_0\,M_{0y} - M_0\,N_{0y})}{P} - \frac{\mathfrak{X}(\rho) + P}{\rho} - \langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle = 0,$$

e colete o numerador polinomial da equação resultante nas variáveis (x, y, z), obtendo um conjunto de equações `Seq1` para os coeficientes indeterminados.

3. Resolva esse conjunto de equações e substitua a solução nos candidatos P_c e ρ_c para obter P, ρ e N $(= \rho\,N_0)$.

4. Construa a simetria $\mathfrak{S} = \mathrm{e}^{\int_x (-P/N)}\,\partial_y$.

Observação 2.7. Embora o conjunto de equações `Seq1` não seja linear nos coeficientes indeterminados dos candidatos P_c e ρ_c, como o grau de ρ é menor que o grau de N, o algoritmo NLS_{1I} é mais eficiente que o algoritmo NLS_1.

Vejamos agora um exemplo da aplicação de cada um desses dois procedimentos (NLS_{1I} e NLS_2):

Exemplo 2.1.: NLS_{1I}

Considere a 2EDO

$$z' = -\frac{x^2y^3 - 3\,x^2yz + y^2 - z}{x^2}. \tag{41}$$

Não podemos aplicar o procedimento NLS_2 à 2EDO (41) porque $N_0 = x^2$, mas $N = -\,(2\,xy + y + 2)\,x^2$. Isso acontece porque $Q + z\,P = -\,(2\,xy + y\ \ +2)\ (x^2y^3 - 3\,x^2yz + y^2 - z)$, ou seja, $Q + z\,P$ e N têm o fator $(2\,xy + y + 2)$ em comum.

Aplicando o procedimento NLS_{1I} à 2EDO (41):

- Para $deg_{P_c} = 4$ e $deg_{\rho_c} = 1$, construímos:

  $\rho_c = r_{21}\,x + r_{22}\,y + r_{23}\,z + r_{20}$,

  $P_c = p_0 + p_1\,x + p_2\,y + p_3\,z + p_4\,x^2 + p_5\,x^3 + p_6\,x^4 + p_7\,y^2 + p_8\,y^3 + p_9\,y^4 + p_{10}\,z^2 + p_{11}\,z^3 + p_{12}\,z^4 + p_{31}\,xyz + p_{32}\,xyz^2 + p_{33}\,xy^2z + p_{34}\,x^2yz + p_{25}\,yz + p_{13}\,xy + p_{19}\,x^2y + p_{21}\,x^2z + p_{16}\,xz + p_{15}\,xy^3 + p_{17}\,xz^2 + p_{22}\,x^2z^2 + p_{26}\,yz^2 + p_{27}\,yz^3 + p_{28}\,y^2z + p_{29}\,y^2z^2 + p_{30}\,y^3z + p_{24}\,x^3z + p_{14}\,xy^2 + p_{18}\,xz^3 + p_{20}\,x^2y^2 + p_{23}\,x^3y$.

- A partir das etapas 2 e 3, obtemos a solução:

  $\{p_0 = 0, p_1 = 0, p_{10} = 0, p_{11} = 0, p_{12} = 0, p_{13} = 0, p_{14} = 0, p_{15} = 0, p_{16} = 0, p_{17} = 0, p_{18} = 0, p_{19} = 0, p_2 = 0, p_{20} = -r_{22}, p_{21} = -r_{22}, p_{22} = 0, p_{23} = 0, p_{24} = 0, p_{25} = 0, p_{26} = 0, p_{27} = 0, p_{28} = 0, p_{29} = 0, p_3 = 0, p_{30} = 0, p_{31} = 0, p_{32} = 0, p_{33} = 0, p_{34} = 0, p_4 = 0, p_5 = 0, p_6 = 0, p_7 = 0, p_8 = 0, p_9 = 0, r_{20} = 0, r_{21} = 0, r_{22} = r_{22}, r_{23} = 0\}$

Substituindo-a nos candidatos P_c e ρ_c, obtemos: $-r_{22}\, x^2y^2 - zx^2r_{22}$, $r_{22}\, y$, levando a:

$P = x^2\,(y^2+z)$,

$N = -x^2y$.

- A partir de P e N, construímos a simetria

$$\mathfrak{S} = \mathrm{e}^{\int_x \frac{y^2+z}{y}}\,\partial_y.$$

Exemplo 2.2.: *NLS_2*

Agora considere a 2EDO

$$z' = -\frac{x\,(-2\,x^2yz^3 + 3\,xy^2z^2 + x^3z - 2\,xyz + 2\,y^2)}{x^5+y^4}. \tag{42}$$

Aplicando o procedimento NLS_2 à 2EDO (42):

- $deg_{P_c} = 6$ ($deg_{P_c} = deg_M - 1$ se $deg_M > deg_N + 1$); nós construímos:

  $P_c = p_{64}\,xyz + p_{65}\,xyz^2 + p_{66}\,xyz^3 + p_{67}\,xyz^4 + p_{68}\,xy^2z + p_{69}\,xy^2z^2 + \cdots$.

- Das etapas 2, 3 e 4, obtemos a solução:

  $\{p_0 = 0, p_1 = 0, p_{10} = 0, p_{11} = 0, p_{12} = 0, p_{13} = 0, p_{14} = 0, p_{15} = 0, p_{16} = 0, p_{17} = 0, p_{18} = 0, p_{19} = 0, p_2 = 0, p_{20} = 0, p_{21} = 0, p_{22} = 0, p_{23} = 0, p_{24} = 0, p_{25} = 0, p_{26} = 0, p_{27} = 0, p_{28} = 0, p_{29} = -2, p_3 = 0, p_{30} = 0, p_{31} = 0, p_{32} = 0, p_{33} = 0, p_{34} = 0, p_{35} = 0, p_{36} = 0, p_{37} = 0, p_{38} = 0, p_{39} = 0, p_4 = 0, p_{40} = 0, p_{41} = 0, p_{42} = 0, p_{43} = 0, p_{44} = 0, p_{45} = 0, p_{46} = 0, p_{47} = 0, p_{48} = 0, p_{49} = 0, p_5 = 0, p_{50} = 0, p_{51} = 0, p_{52} = 0, p_{53} = 0, p_{54} = 0, p_{55} = 0, p_{56} = 0, p_{57} = 0, p_{58} = 0, p_{59} = 0, p_6 = 0, p_{60} = 0, p_{61} = 0, p_{62} = 0, p_{63} = 0, p_{64} = 0, p_{65} = 0, p_{66} = 0, p_{67} = 0, p_{68} = 0, p_{69} = 0, p_7 = 0, p_{70} = 0, p_{71} = 0, p_{72} = 0, p_{73} = 0, p_{74} = 0, p_{75} = 0, p_{76} = 0, p_{77} = 0, p_{78} = 0, p_{79} = 0, p_8 = 0, p_{80} = -2, p_{81} = 0, p_{82} = 0, p_{83} = 0, p_9 = 0\}$

  Substituindo-o em P_c, obtemos: $P = -2\,yx^2\,(xz^2+1)$.

- Portanto, a simetria é

$$\mathfrak{S} = \mathrm{e}^{\int_x \frac{2\,yx^2\left(xz^2+1\right)}{x^5+y^4}}\,\partial_y.$$

Observação 2.8. Alguns comentários:

- Elaboramos no Maple (veja o capítulo 4) os procedimentos NLS_{1I} e NLS_2. Para a 2EDO mostrada no exemplo 2.1, o tempo de CPU e o consumo de memória para executar o procedimento NLS_{1I} foram, respectivamente, 0,3 s e 30 MB, aproximadamente. No exemplo 2.2, para a 2EDO *(42)*, o procedimento NLS_2 gastou aproximadamente 1,3 s e 15 MB.

- Embora os tempos pareçam muito bons (e, na verdade, para esses casos, eles são), para 2EDOs em que M_0, N_0 e os polinômios de Darboux (que aparecem no fator integrante) são polinômios de grau alto (na prática, cerca de 10), os algoritmos NLS_{1I} e NLS_2 podem não funcionar tão bem.

- Outro ponto importante a ser observado é o fato que o procedimento NLS_{1I} não é um algoritmo completo, mas um semi-algoritmo, ou seja, não temos um limite superior para o grau do polinômio P (nem para o grau do polinômio ρ). Assim, no exemplo 2.1, o tempo de CPU refere-se apenas ao tempo gasto no conjunto final ($deg_{P_c} = 4$ e $deg_{\rho_c} = 1$). Em uma implementação mais automática do semi-algoritmo NLS_{1I}, o tempo total da CPU pode aumentar dependendo da maneira como iteramos o procedimento para aumentar o grau dos candidatos polinomiais.

- No caso não degenerado (N e $Q + z\,P$ são polinômios coprimos), podemos supor que, para a grande maioria das 2EDOs, os monômios presentes nos polinômios Q e $z\,P$ são os mesmos que formam M_0. Isso realmente acontece, com exceção dos casos em que algum monômio de Q cancela outro de $z\,P$. Caso não haja cancelamentos, o algoritmo NLS_2 pode ser bastante aprimorado. Além disso, como veremos, os casos em que há cancelamentos podem ser facilmente tratados.

Podemos usar mais algumas consequências das suposições do teorema 2.4 para melhorar ainda mais o algoritmo NLS_2. Vamos usar o seguinte corolário:

Corolário 2.2. *Suponha que as hipóteses do teorema* 2.4 *sejam válidas. Se nenhum dos termos monomiais de* $z\,P$ *e* Q *se cancelarem, então todos os monômios de* P *estão em* M_{0z}.

Prova. A conclusão segue diretamente do fato de que $M_0 = -(Q + z\,P)$. □

Portanto, se as condições do corolário 2.2 forem válidas, podemos simplesmente usar os monômios de M_{0z} para construir o candidato P_c.

Procedimento 4 (esboço): (NLS_{2I})
Só precisamos construir o candidato a polinômio P_c usando os monômios de M_{0z}. As outras etapas permanecem as mesmas.

Exemplo 2.3.: NLS_{2I} (a *2EDO (42)* revisitada)

Aplicando o procedimento NLS_{2I} à 2EDO (42):

- Os monômios de M_{0z} são: $[x^3yz^2, x^2y^2z, x^4, x^2y]$. Portanto,

  $P_c = p_1\, x^3yz^2 + p_2\, x^2y^2z + p_3\, x^4 + p_4\, x^2y.$

- A partir das etapas 2, 3 e 4, obtemos a solução:

  $\{p_1 = -2, p_2 = 0, p_3 = 0, p_4 = -2\}$.

  Substituindo-a em P_c, obtemos: $P = -2\, yx^2\,(xz^2 + 1)$.

Observação 2.9. Agora, usando o algoritmo NLS_{2I} para a *2EDO (42)*, o tempo de CPU e o consumo de memória para executar o procedimento foram, respectivamente, 0,05 s e 0 MB aproximadamente (em vez de 1,3 s e 15 MB com o algoritmo NLS_2).

Observação 2.10. No caso em que alguns dos termos monomiais de $z\,P$ e Q se cancelam, podemos seguir uma estratégia semelhante à usada na técnica de blow up (que é usada na dessingularização de pontos singulares degenerados de campos vetoriais planares - ver Álvarez; Ferragut; Jarque (2011) e suas referências). A ideia é realizar uma transformação de variáveis que altere os monômios de $z\,P$ e Q de forma desproporcional, evitando o cancelamento.

Vamos ver como isso funciona na prática: Considere a seguinte 2EDO:

$$z' = \frac{z\,(x^2z^5 - x^2z^4 + 2\,xyz^3 - xz^4 - 2\,xyz^2 - yz^3 + xz^2 + y^2z - 2\,yz^2 - y^2 - yz)}{(xz^2 - xz + yz + y)\,(xz^2 - y)}. \tag{43}$$

Se aplicarmos o algoritmo NLS_{2I}, veremos que ele não consegue determinar a simetria. No entanto, aplicando a transformação $T = \{x = x^2, y = y\}$ à 2EDO, obtemos a seguinte 2EDO transformada:

$$\begin{aligned} z' \;=\;& -z(2\,x^3z^4 - z^5x^2 + 16\,x^3yz^2 - 8\,x^2yz^3 + 32\,x^3y^2 - 8\,x^3z^2 - \\ [2mm]\quad & 16\,x^2y^2z + 2\,x^2z^3 + xz^4 + 8\,x^2yz + 16\,xyz^2 + 2\,yz^3 + 16\,xy^2 + \\ & 8\,zy^2)/(x\left(-z^2 + 4\,y\right)\left(2\,zx^2 - xz^2 - 4\,xy - 2\,yz\right)) \end{aligned} \tag{44}$$

Desta vez, aplicando o algoritmo NLS_{2I} à 2EDO transformada, obtemos

$$P = -\big(xz^4 + 8\,xyz^2 + 8\,zx^2 + 16\,xy^2 - 4\,xz^2 - 16\,xy - 8\,yz\big)xz, \tag{45}$$

Observação 2.11. O tempo de CPU e o consumo de memória para executar o procedimento NLS_{2I} aplicado à *2EDO (44)* transformada foi de aproximadamente 0,08 s e 0 MB. O procedimento NLS_2 aplicado à *2EDO transformada (44)* resultou em 3,5 segundos de tempo de CPU e $\approx$ 50 MB de consumo de memória (e aproximadamente os mesmos resultados para a *2EDO (43)*).

3 USANDO UMA SIMETRIA NÃO-LOCAL PARA ENCONTRAR UMA INTEGRAL PRIMEIRA LIOUVILLIANA DE UMA 2EDO RACIONAL

Neste capítulo, mostramos como usar (de uma nova maneira) a simetria não-local (determinada com o procedimento *NLS*[15] – veja o capítulo 2) para construir um fator integrante de Darboux para a 2EDO (25):

Na primeira seção, usamos a simetria não-local para construir três campos de vetores polinomiais 2D (associados à 2EDO) de modo que eles 'compartilhem' a integral primeira e um fator integrante com a 2EDO.

Na segunda seção, mostramos que há outros três campos vetoriais polinomiais 2D cuja integral primeira é o fator integrante de Darboux da 2EDO. Esses campos vetoriais e os polinômios de Darboux presentes no fator integrante da 2EDO podem ser encontrados conjuntamente por meio da solução de certos sistemas lineares de indeterminados.

Por fim, propomos uma sequência de processos lineares para determinar um fator integrante de Darboux (associado à integral primeira Liouvilliana) para a 2EDO racional e apresentamos um exemplo.

3.1 Campos vetoriais (no $\mathbb{R}^2$) associados com a 2EDO

Teorema 3.1. *Seja $I \in L_S$ uma IPL da* 2EDO (25) *de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 2.3. Então, as seguintes afirmações são válidas:*
(a) *Os campos vetoriais polinomiais definidos por*

$$\mathfrak{X}_1 \equiv N\,\partial_y - P\,\partial_z,\;\; \mathfrak{X}_2 \equiv -N\,\partial_x + Q\,\partial_z,\;\; \mathfrak{X}_3 \equiv P\,\partial_x - Q\,\partial_y, \tag{46}$$

admitem I como integral primeira, ou seja, $\mathfrak{X}_1(I) = \mathfrak{X}_2(I) = \mathfrak{X}_3(I) = 0$,
(b) $\frac{\mathfrak{X}_i(R)}{R} = -\langle \nabla | \mathfrak{X}_i \rangle \;\; (i \in \{1,2,3\})$.

Prova.
(a) A afirmação (a) decorre diretamente da definição:

$$\mathfrak{X}_1(I) = N\,\partial_y(I) - P\,\partial_z(I) = N\,R\,P - P\,R\,N = 0\;;$$

$$\mathfrak{X}_2(I) = -N\,\partial_x(I) + Q\,\partial_z(I) = -N\,R\,Q + Q\,R\,N = 0\;;$$

$$\mathfrak{X}_3(I) = P\,\partial_x(I) - Q\,\partial_y(I) = P\,R\,Q - Q\,R\,P = 0.$$

[15] *NLS* sem índice está representando o conjunto de procedimentos NLS_j, $j \in \{1, 1i, 2, 2i\}$.

(b) Temos que

$$\nabla \wedge \nabla(I) = \nabla \wedge (R\,\mathfrak{I}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ R\,Q & R\,P & R\,N \end{vmatrix} = 0. \tag{47}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \partial_y(R\,N) - \partial_z(R\,P) &= R_y\,N + R\,N_y - R_z\,P - R\,P_z = 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{X}_1(R) + R\,(N_y - P_z) = 0, \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \partial_z(R\,Q) - \partial_x(R\,N) &= R_z\,Q + R\,Q_z - R_x\,N - R\,N_x = 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{X}_2(R) + R\,(Q_z - N_x) = 0, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} \partial_x(R\,P) - \partial_y(R\,Q) &= R_x\,P + R\,P_x - R_y\,Q - R\,Q_y = 0. \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{X}_3(R) + R\,(P_x - Q_y) = 0. \qquad \square \end{aligned} \tag{50}$$

Algumas observações:

Observação 3.1. Observe que os campos vetoriais associados $\mathfrak{X}_i$ (veja a afirmação (a) do teorema 3.1) apresentam I como uma integral primeira Liouvilliana (a mesma IPL admitida pelo campo vetorial $\mathfrak{X}$). Portanto, pelos resultados de Singer (1992) e Christopher (1994), eles apresentam um fator integrante de Darboux.

Observação 3.2. Observe também que, em vista da afirmação (b) (teorema 3.1), o fator integrante R do campo vetorial $\mathfrak{X}$ também é um fator integrante para os campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$.

Desenvolvendo o que foi apontado nas observações 3.1 e 3.2, podemos inferir o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Seja $I \in L_S$ uma IPL da* 2EDO (25). *Então, o campo vetorial polinomial 3D $\mathfrak{X}$ (associado a ela) tem um fator integrante de Darboux.*

A chave para provar esse teorema vem do resultado de Singer e Christopher (SC) para campos vetoriais polinomiais no plano (veja Christopher (1999); Duarte; Duarte; Da Mota (2002b); Singer (1992)): *A existência de uma integral primeira Liouvilliana admitida por um campo vetorial polinomial (no $\mathbb{R}^2$) implica na existência de um fator integrante de Darboux.*

Prova. A partir da hipótese do teorema ($I \in L_S$) e da afirmação (b) do teorema 3.1 ($\frac{\mathfrak{X}_i(R)}{R} = -\langle\nabla|\mathfrak{X}_i\rangle$), segue-se diretamente que há campos vetoriais polinomiais no plano $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$ admitindo R (o fator integrante do campo vetorial $\mathfrak{X}$) como um fator integrante.

O resultado de SC implica que os campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$ (para qualquer $i \in \{1,2,3\}$) admitem funções de Darboux R_i como fatores de integração de Darboux. Portanto, podemos escrever $R_i = \mathcal{F}_i(I)\,R$, onde $\mathcal{F}_i(I)$ são funções da integral primeira I. Portanto, os R_i também são fatores de integração para o campo vetorial $\mathfrak{X}$. Como cada R_i é um fator integrante de Darboux (em um dos pares (x,y), (x,z) ou (y,z)) e todos são fatores de integração para o campo vetorial $\mathfrak{X}$, então $R_i = \mathcal{F}_{ij}(I)\,R_j$, onde $\mathcal{F}_{ij}(I)$ são funções da integral primeira I. Isso implica que existe uma integral primeira de Darboux, pois $\mathcal{F}_{ij}(I) = \frac{R_i}{R_j}$ (pelo menos um dos jacobianos $\frac{\partial(R_i,R_j)}{\partial(x_k,x_l)}$ é $\neq 0, i,\, j,\, k,\, l \in \{1,2,3\},\, i \neq j,\, k \neq l$), caso em que há (certamente) um fator integrante de Darboux, ou $\mathcal{F}_{ij}(I) = k_{ij}$ (em que k_{ij} são constantes), implicando que os R_i são funções de Darboux nas três variáveis (x,y,z), de fato, apenas uma função que é um fator integrante de Darboux para o campo vetorial $\mathfrak{X}$. $\square$.

3.2 Construindo três campos vetoriais polinomiais 2D $\mathcal{X}_i$ tais que $\mathcal{X}_i(R) = 0$

Em Duarte; Da Mota (2021), os autores propuseram uma nova maneira de determinar os polinômios de Darboux presentes no fator integrante de campos vetoriais polinomiais em duas variáveis: A ideia básica é construir outro campo vetorial polinomial de modo que sua integral primeira seja um fator integrante de Darboux do campo vetorial original. Nesta seção, mostraremos como adaptar essa ideia ao problema atual.

Definição 3.1. Seja $X_0 \equiv f_0\,\partial_x + g_0\,\partial_y$ (f_0 e g_0 são polinômios coprimos em $\mathbb{C}[x,y]$) um campo vetorial polinomial que apresenta uma integral primeira Liouvilliana I_0 e, consequentemente, um fator integrante de Darboux R_0. Seja $X_1 \equiv f_1\,\partial_x + g_1\,\partial_y$ (em que f_1 e g_1 são polinômios coprimos em $\mathbb{C}[x,y]$) outro campo vetorial polinomial tal que $X_1(R_0) = 0$. Chamamos X_1 de **campo vetorial associado por meio do fator integrante** R_0.

Observação 3.3. Como qualquer função da integral primeira I_0 (que é invariante sob a ação do campo vetorial X_0) multiplicada pelo fator integrante R_0 é ela mesma um fator integrante, se a integral primeira I_0 for elementar, a equação $X_1(R_0) = 0$ define uma classe de equivalência de campos vetoriais: $[X_1]$.

Para provar o teorema a seguir, primeiro precisamos provar que sempre há um campo vetorial polinomial de modo que $X_1(R_0) = 0$.

Lema 3.1. *Seja X_0 um campo vetorial polinomial definido como acima. Então, existe um campo vetorial polinomial X_1 tal que $X_1(R_0) = 0$.*

Prova. Como R_0 é uma função de Darboux, ela pode ser escrita como $R_0 = \mathrm{e}^{Z_0} \prod_i {p_i}^{n_i}$, onde Z_0 é uma função racional de (x, y), p_i são polinômios irredutíveis em (x, y) e n_i são constantes. Portanto, temos

$$\frac{\partial_x(R_0)}{R_0} = \frac{e^{Z_0}\,\partial_x\left(\prod_i p_i^{n_i}\right) + e^{Z_0}\,\partial_x\left(Z_0\right)\,\prod_i p_i^{n_i}}{e^{Z_0}\,\prod_i p_i^{n_i}} = \partial_x\left(Z_0\right) + \frac{\partial_x\left(\prod_i p_i^{n_i}\right)}{\prod_i p_i^{n_i}}$$

e

$$\frac{\partial_y(R_0)}{R_0} = \frac{e^{Z_0}\,\partial_y\left(\prod_i p_i^{n_i}\right) + e^{Z_0}\,\partial_y\left(Z_0\right)\,\prod_i p_i^{n_i}}{e^{Z_0}\,\prod_i p_i^{n_i}} = \partial_y\left(Z_0\right) + \frac{\partial_y\left(\prod_i p_i^{n_i}\right)}{\prod_i p_i^{n_i}}.$$

Como $\partial_x\left(Z_0\right)$, $\partial_y\left(Z_0\right)$, $\partial_x\left(\prod_i p_i^{n_i}\right) / \prod_i p_i^{n_i}$ and $\partial_y\left(\prod_i p_i^{n_i}\right) / \prod_i p_i^{n_i}$ are rational functions of (x, y), então

$$\frac{\partial_x(R_0)}{\partial_y(R_0)} = \frac{\partial_x(R_0)/R_0}{\partial_y(R_0)/R_0} \tag{51}$$

é uma função racional de (x, y). Definindo $\phi_1 \equiv -\frac{\partial_x(R_0)}{\partial_y(R_0)}$, implica que o 1EDO racional $y' = \phi_1(x, y)$ tem $R_0(x, y) = C$ como solução geral. Em seguida, definindo f_1 e g_1 como o numerador e o denominador de ϕ_1 (respectivamente) e $X_1 \equiv f_1\,\partial_x + g_1\,\partial_y$, obtemos que $X_1(R_0) = 0$. $\square$

Teorema 3.3. *Sejam X_0 e X_1 campos vetoriais polinomiais definidos como na definição 3.1 acima. Então*

$$g_0\,f_1 - g_1\,f_0 = \frac{R_0}{R_1}\,\left(f_{0x} + g_{0y}\right), \tag{52}$$

onde R_1 é um fator integrante para o campo vetorial X_1.

Prova: Por hipótese, temos que $X_1(R_0) = 0$ (ou seja, R_0 é uma integral primeira de X_1). Portanto

$$\begin{aligned} R_{0x} &= R_1\,g_1, \\ R_{0y} &= -R_1\,f_1, \end{aligned}$$

o que implica que

$$g_0\,f_1 - g_1\,f_0 = g_0\,\frac{-R_{0y}}{R_1} - f_0\,\frac{R_{0x}}{R_1} = -\frac{X_0(R_0)}{R_1} = \frac{R_0}{R_1}\,\langle\nabla|X_0\rangle = \frac{R_0}{R_1}\,(f_{0x} + g_{0y}).\ \square$$

Corolário 3.1. $\dfrac{R_0}{R_1}$ *é um fator integrante inverso para o campo vetorial X_1.*

Prova: Como R_0 é uma integral primeira para o campo vetorial X_1, então $\frac{R_1}{R_0}$ também é um fator integrante para o campo vetorial X_1. $\square$

Corolário 3.2. $\dfrac{R_0}{R_1}$ *é um polinômio ou* $\langle\nabla|X_0\rangle$ *tem um fator polinomial em comum com* R_1 *ou* R_0.

Prova: Como $g_0\, f_1 - g_1\, f_0$ é um polinômio, então $\dfrac{R_0}{R_1}\,(f_{0x} + g_{0y})$ é um polinômio. Portanto, a conclusão segue diretamente. □

Observação 3.4. Observe que o caso em que R_0/R_1 não é um polinômio é facilmente tratável, pois $\langle\nabla|X_0\rangle$ é um polinômio conhecido. Por esse motivo, podemos nos concentrar no caso geral, ou seja, onde R_0/R_1 é um polinômio.

Observação 3.5. Se R_0/R_1 for um polinômio, podemos escrever a equação *(52)* como

$$g_0\, f_1 - g_1\, f_0 - \Upsilon\, \left(f_{0x} + g_{0y}\right) = 0, \quad \Upsilon \equiv \frac{R_0}{R_1}, \tag{53}$$

e observe que ela é linear nos polinômios desconhecidos f_1, g_1 e Υ.

No que se segue, vamos aplicar o conhecimento que foi destacado nas observações 3.4 e 3.5, juntamente com os resultados mostrados na seção anterior, para construir três campos vetoriais 2D polinomiais $\mathcal{X}_i$ associados a $\mathfrak{X}_i$. Primeiro, vamos lembrar que os três campos vetoriais polinomiais $\mathfrak{X}_i$ apresentam a mesma integral primeira Liouvilliana I e o mesmo fator integrante de Darboux R de $\mathfrak{X}$ (o campo vetorial polinomial 3D associado ao 2EDO racional (25)). Assim, podemos procurar três campos vetoriais polinomiais 2D $\mathcal{X}_i$, que apresentam R como sua integral primeira.

Definição 3.2. Seja $I \in L_S$ uma IPL da *2EDO (25)* de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 2.3 e seja R um fator integrante de Darboux para o campo vetorial $\mathfrak{X} \equiv N_0\, \partial_x + z\, N_0\, \partial_y + M_0\, \partial_z$ (ver a definição *2.1*). Além disso, sejam $\mathfrak{X}_i$ campos vetoriais polinomiais definidos como no teorema *3.1* por

$$\mathfrak{X}_1 \equiv N\, \partial_y - P\, \partial_z, \;\; \mathfrak{X}_2 \equiv -N\, \partial_x + Q\, \partial_z, \;\; \mathfrak{X}_3 \equiv P\, \partial_x - Q\, \partial_y. \tag{54}$$

Definimos os campos vetoriais polinomiais

$$\mathcal{X}_1 \equiv \mathcal{N}\, \partial_y - \mathcal{P}\, \partial_z, \;\; \mathcal{X}_2 \equiv -\mathcal{N}\, \partial_x + \mathcal{Q}\, \partial_z, \;\; \mathcal{X}_3 \equiv \mathcal{P}\, \partial_x - \mathcal{Q}\, \partial_y, \tag{55}$$

($\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ são polinômios coprimos em $\mathbb{C}[x, y, z]$) por $\mathcal{X}_1(R) = \mathcal{X}_2(R) = \mathcal{X}_3(R) = 0$.

Observação 3.6. Conforme observado na observação 3.3, como qualquer função da integral primeira I multiplicada pelo fator integrante R é ela mesma um fator integrante, a equação $\mathcal{X}_i(R) = 0$ (se a integral primeira I for elementar) define três classes de equivalência de campos vetoriais: $[\mathcal{X}_i]$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Teorema 3.4. *Seja $I \in L_S$ uma IPL da* 2EDO (25)*, de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 2.3, seja R um fator integrante de Darboux para o campo vetorial $\mathfrak{X}$ e sejam $\mathfrak{X}_i$ e $\mathcal{X}_i$ campos vetoriais polinomiais definidos como acima. Então, os campos vetoriais $\mathcal{X}_i$ apresentam um fator integrante de Darboux $\mathcal{R}$ de modo que $\Upsilon \equiv \frac{R}{\mathcal{R}}$ seja um fator integrante inverso para eles, ou seja, $\mathcal{X}_i(\Upsilon) = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathcal{X}_i\rangle$. Além disso, no caso geral (ou seja, no caso em que as divergências $\langle\nabla|\mathfrak{X}_i\rangle$ não têm um fator polinomial comum), Υ é um polinômio.*

Prova. A prova segue diretamente das provas dos corolários 3.1 e 3.2.

Teorema 3.5. *Sejam os polinômios $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, Q, P, N e Υ definidos como acima. Então, as seguintes equações se verificam:*

$$\mathcal{P}\,N - P\,\mathcal{N} = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_1\rangle, \tag{56}$$

$$\mathcal{Q}\,N - Q\,\mathcal{N} = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_2\rangle, \tag{57}$$

$$\mathcal{Q}\,P - Q\,\mathcal{P} = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_3\rangle. \tag{58}$$

Prova. A prova segue diretamente da observação 3.5.

Observação 3.7. As equações *(56,57,58)* são lineares nos polinômios desconhecidos $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, Υ.

3.3 Construindo um algoritmo linear

Nesta seção, vamos 'juntar as peças' e criar um procedimento (procedimento *DIF*) para determinar um fator integrante de Darboux R para a 2EDO (25). Começamos mostrando que os campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$ e $\mathcal{X}_i$ apresentam uma propriedade que será muito importante nessa construção: como $\mathfrak{X}_i$ compartilham o fator integrante R com $\mathfrak{X}$, eles também compartilham os polinômios de Darboux (presentes no fator integrante R) com $\mathfrak{X}$ e $\mathcal{X}_i$. Isso implica que o polinômio Υ é, em geral, formado por polinômios de Darboux que são compartilhados pelos campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$ e $\mathcal{X}_i$. Para provar isso, vamos primeiro discutir alguns conceitos e definir alguns pontos com mais precisão:

Considere que a 2EDO racional (25) apresenta uma integral primeira $I \in L_S$. Vimos que isso implica que o campo vetorial associado $\mathfrak{X} \equiv N_0\,\partial_x + z\,N_0\,\partial_y + M_0\,\partial_z$ tem um fator integrante de Darboux R. Como qualquer função da integral primeira I multiplicada por um fator integrante também é um fator integrante, se a integral primeira I for não-elementar, então $\mathfrak{X}$ tem apenas um fator integrante de Darboux (a menos de uma constante multiplicativa), pois, nesse caso, todos os outros fatores integrantes serão não-elementares.

Portanto, nesse caso, há uma escolha natural para definir o fator integrante que representa a classe de equivalência $[\mathcal{X}_i]$. No caso em que o campo vetorial $\mathfrak{X}$ apresenta uma integral primeira elementar não-racional, podemos aplicar o resultado de Prelle e Singer (*'Se um campo vetorial polinomial no $\mathbb{R}^2$ apresenta uma integral primeira elementar, existe um fator integrante que é uma raiz k^{th} ($k \in \mathbb{N}$) de uma função racional*) aos campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$ e escolher um fator integrante algébrico para representar a classe $[\mathcal{X}_i]$. Por fim, se a 2EDO apresentar uma integral primeira racional, consideraremos o representante R da classe como sendo o de grau mínimo[16].

Definição 3.3. Considere que a 2EDO racional (25) apresenta uma integral primeira $I \in L_S$. Então
(i) Se I for não-elementar, o fator integrante R será escrito como $R = \mathrm{e}^{A/B}\prod_j {p_j}^{n_j}$ (p_j, A e B são polinômios em $\mathbb{C}[x, y, z]$, p_j são irredutíveis, A e B são polinômios coprimos).
(ii) Se I for elementar, o fator integrante R será escrito como $R = \prod_j {p_j}^{n_j}$ (p_j em $\mathbb{C}[x, y, z]$ são polinômios irredutíveis e, se I for racional, os n_j serão inteiros, de modo que $\delta \equiv \max\{\deg(num_R), deg(den_R)\}$ seja mínimo).

Teorema 3.6. *Considere que a 2EDO racional (25) apresenta uma integral primeira $I \in L_S$. Sejam os campos vetoriais polinomiais $\mathfrak{X}_i$ e $\mathcal{X}_i$ e os fatores integrantes de Darboux R e $\mathcal{R}$ definidos como acima, e seja $\Upsilon \equiv R/\mathcal{R}$ um polinômio. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

(a) *Os polinômios de Darboux p_j de $\mathfrak{X}_i$ que são fatores de R ou fatores de B também são polinômios de Darboux de $\mathcal{X}_i$.*

(b) *O polinômio Υ tem a seguinte estrutura: $\Upsilon = \prod_j {p_j}^{k_j}$, $k_j \in \mathbb{N}$.*

Prova. (a) Por definição, temos que $\mathcal{X}_i(R) = 0$. Portanto, podemos escrever:

$$\frac{\mathcal{X}_i(R)}{R} = \mathcal{X}_i\left(\frac{A}{B}\right) + \sum_j n_j \frac{\mathcal{X}_i(p_j)}{p_j} = 0. \tag{59}$$

Multiplicando ambos os lados por $\prod_j p_j$, podemos escrever:

$$\prod_j p_j \; \frac{B\,\mathcal{X}_i(A) - A\,\mathcal{X}_i(B)}{B^2} + \sum_l c_l(\prod_{j,\, j\neq l} p_j)\mathcal{X}_i(p_l) = 0. \tag{60}$$

[16] Como nesse caso o fator integrante será racional, ou seja, $R = num_R/den_R$, o grau do fator integrante refere-se ao inteiro positivo δ definido por $\delta = \max\{\deg(num_R), \deg(den_R)\}$.

Como o termo $\sum_l c_l(\prod_{j,\, j\neq l} p_j)\mathcal{X}_i(p_l)$ é um polinômio, o mesmo ocorre com

$$\prod_j p_j \; \frac{B\,\mathcal{X}_i(A) - A\,\mathcal{X}_i(B)}{B^2}.$$

Como B^2 é um quadrado, ele não pode dividir $\prod_j p_j$. Portanto, temos duas situações possíveis:

- $\prod_j p_j$ e B não têm fatores polinomiais em comum.
- $\prod_j p_j$ e B têm fatores polinomiais em comum.

1. **Primeira situação:**

   $$\mathcal{X}_i\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{B\,\mathcal{X}_i(A) - A\,\mathcal{X}_i(B)}{B^2}$$

   é um polinômio. Isso implica que

   $$\sum_j n_j \frac{\mathcal{X}_i(p_j)}{p_j}$$

   é um polinômio $\Rightarrow p_j|\mathcal{X}_i(p_j)$. Portanto, multiplicando

   $$\mathcal{X}_i\left(\frac{A}{B}\right)$$

   por B, temos que

   $$B\,\mathcal{X}_i\left(\frac{A}{B}\right) = \mathcal{X}_i(A) - A\,\frac{\mathcal{X}_i(B)}{B}$$

   é um polinômio. Como A e B são coprimos, $B \,|\, \mathcal{X}_i(B)$ implica que os polinômios de Darboux irredutíveis dos campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$ que são fatores de B também são polinômios de Darboux de $\mathcal{X}_i$.

2. **Segunda situação:** Vamos definir a seguinte notação: $B = \beta\,\theta$, $\prod_j p_j = \Gamma\,\theta$, onde θ é o fator comum. Portanto,

   $$\prod_j p_j \, \frac{B\,\mathcal{X}_i(A) - A\,\mathcal{X}_i(B)}{B^2} = \frac{\Gamma}{\beta}\left(\mathcal{X}_i(A) - A\frac{\mathcal{X}_i(B)}{B}\right)$$

   é um polinômio. Multiplicando por β, obtemos

   $$\Gamma\,\mathcal{X}_i(A) - \Gamma A\frac{\mathcal{X}_i(B)}{B}.$$

   Como A e Γ não têm fatores comuns com B, então $B \,|\, \mathcal{X}_i(B)$ implica que $\theta \,|\, \mathcal{X}_i(\theta)$. Resta provar que os polinômios p_j que não são fatores de B (ou seja, os fatores de

Γ) também são polinômios de Darboux de $\mathcal{X}_i$. Temos que

$$\frac{\mathcal{X}_i(R)}{R} = \frac{\mathcal{X}_i\left(\mathrm{e}^{A/B}\prod_j {p_j}^{n_j}\right)}{\mathrm{e}^{A/B}\prod_j {p_j}^{n_j}} = \mathcal{X}_i\left(\frac{A}{B}\right) + \frac{\mathcal{X}_i(\prod_j {p_j}^{n_j})}{\prod_j {p_j}^{n_j}} = 0. \tag{61}$$

Como os polinômios que são fatores de θ são polinômios de Darboux de $\mathcal{X}_i$, então

$$\Gamma\,\frac{\mathcal{X}_i(\prod_j {p_j}^{n_j})}{\prod_j {p_j}^{n_j}} \tag{62}$$

é um polinômio. Portanto, temos que

$$\Gamma\,\mathcal{X}_i\left(\frac{A}{B}\right) = \Gamma\frac{B\,\mathcal{X}_i(A) - A\,\mathcal{X}_i(B)}{B^2}$$

é um polinômio. Como Γ e B^2 não têm fatores em comum, então

$$\mathcal{X}_i\left(\frac{A}{B}\right)$$

é um polinômio, o que implica que

$$\frac{\mathcal{X}_i(\prod_j {p_j}^{n_j})}{\prod_j {p_j}^{n_j}}$$

é um polinômio e, portanto, $p_j|\mathcal{X}_i(p_j)$.

Isso prova a primeira afirmação.

(b) Por definição, $\Upsilon = R/\mathcal{R}$ e $R_x = \mathcal{Q}\,\mathcal{R}$, $R_y = \mathcal{P}\,\mathcal{R}$, $R_z = \mathcal{N}\,\mathcal{R}$. Portanto:

$$\begin{aligned} R_x &= \left(\partial_x\left(\frac{A}{B}\right) + \frac{\sum_k n_k\,\partial_x(p_k)\,\prod_{l,l\neq k} p_l}{\prod_j p_j}\right)\mathrm{e}^{A/B}\prod_j {p_j}^{n_j} \\ &= \frac{(A_xB - B_xA)\prod_j p_j + B^2\sum_k n_k\,\partial_x(p_k)\,\prod_{l,l\neq k} p_l}{B^2\prod_j p_j}\,R = \frac{Pol_{[x]}\,R}{B^2\prod_j p_j} = \mathcal{Q}\,\mathcal{R}, \end{aligned}$$

$$R_y = \frac{(A_y B - B_y A)\prod_j p_j + B^2 \sum_k n_k\, \partial_y(p_k)\, \prod_{l,l\neq k} p_l}{B^2 \prod_j p_j} R = \frac{Pol_{[y]}\, R}{B^2 \prod_j p_j} = \mathcal{P}\,\mathcal{R},$$

$$R_z = \frac{(A_z B - B_z A)\prod_j p_j + B^2 \sum_k n_k\, \partial_z(p_k)\, \prod_{l,l\neq k} p_l}{B^2 \prod_j p_j} R = \frac{Pol_{[z]}\, R}{B^2 \prod_j p_j} = \mathcal{N}\,\mathcal{R},$$

$$\Rightarrow \Upsilon = \frac{R}{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{Q}}{Pol_{[x]}} B^2 \prod_j p_j = \frac{\mathcal{P}}{Pol_{[y]}} B^2 \prod_j p_j = \frac{\mathcal{N}}{Pol_{[z]}} B^2 \prod_j p_j. \tag{63}$$

Isso implica

$$\frac{\mathcal{Q}}{Pol_{[x]}} = \frac{\mathcal{P}}{Pol_{[y]}} = \frac{\mathcal{N}}{Pol_{[z]}}.$$

Como $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$ são coprimos e Υ é polinomial, então

$$\frac{Pol_{[x]}}{\mathcal{Q}} = \frac{Pol_{[y]}}{\mathcal{P}} = \frac{Pol_{[z]}}{\mathcal{N}} = \rho,$$

onde ρ é um polinômio (ou uma constante) tal que $\rho \,|\, B^2 \prod_j p_j$. Como

$$\Upsilon = \frac{B^2 \prod_j p_j}{\rho}$$

e o termo $B^2 \prod_j p_j$ é formado por produtos de polinômios de Darboux irredutíveis, então $\Upsilon = \prod_u {p_u}^{k_u},\ k_u \in \mathbb{N}$. Isso prova a segunda afirmação. $\square$

Observação 3.8. A base para a criação do procedimento é constituída pelas equações *(56,57,58)* e os pontos-chave para sua eficiência são:

- As equações $\mathcal{X}_i \wedge \mathfrak{X}_i = \Upsilon\, \langle \nabla | \mathfrak{X}_i \rangle\, \partial_i$ (ver *(56, 57,58)*) são lineares nos coeficientes dos polinômios desconhecidos $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, Υ.

- Há três delas.

- Υ é um polinômio formado por polinômios de Darboux presentes no fator integrante R.

- Υ é um fator integrante inverso para os campos vetoriais $\mathcal{X}_i$.

Vamos apresentar um exemplo e mostrar o papel que cada um dos pontos mencionados na observação 3.8 desempenha no ganho de eficiência do procedimento:

Exemplo 3.1.

Considere o seguinte 2EDO:

$$\begin{aligned} z' \;=\;& z\left(x^7yz^2 - x^6z^3 - 2\,x^5y^2z + x^5yz^2 + 2\,x^4yz^2 - x^4z^3 - x^5z - 2\,x^4y^2 + x^3y^3\right.\\ & -2\,x^3y^2z + x^3y^2 + 4\,x^3yz - x^2y^2z + 2\,x^2yz^2 + x^3y - x^3z - 2\,x^2yz - 2\,x^2z^2\\ & \left.+xy^3 + xz^2 - y^2z + yx\right) / \left(x^5yz^2 - x^4z^3 + x^4y^2 - 2\,x^3y^2z - 2\,x^3yz\right.\\ & \left.+2\,x^2yz^2 - x^3z + x^2z^2 + xy^3 - y^2z + yx\right) x. \end{aligned} \tag{64}$$

- O procedimento NLS_{2I} encontra a simetria (e, portanto, os campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$) em 0,031 segundos:

$$\begin{aligned} Q &= -z\left(x^5yz^2 - x^4z^3 - 2x^4y^2 - 2x^3y^2z + 4x^3yz + 2x^2yz^2 - x^3z - 2x^2z^2 + xy^3 - y^2z + yx\right),\\ P &= -\left(x^6yz^2 - x^5z^3 - 2x^4y^2z + 2x^3yz^2 - x^4z + x^2y^3 + x^2y^2 - xy^2z + x^2y - 2xyz + z^2\right)x,\\ N &= \left(x^5yz^2 - x^4z^3 + x^4y^2 - 2x^3y^2z - 2x^3yz + 2x^2yz^2 - x^3z + x^2z^2 + xy^3 - y^2z + yx\right)x. \end{aligned} \tag{65}$$

- A partir do conhecimento dos campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$, podemos usar o procedimento *DIF*, cuja primeira parte consiste em usar as equações $\mathcal{X}_i \wedge \mathfrak{X}_i = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_i\rangle\,\partial_i$ para eliminar grande parte da indeterminação em relação aos coeficientes dos campos vetoriais auxiliares $\mathcal{X}_i$. Usando a equação $\mathcal{Q}_c\,P - Q\,\mathcal{P}_c = \Upsilon_c\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_3\rangle$ (ver (58)), reduzimos 405 coeficientes desconhecidos para apenas 4 (em 0,14 segundos). Os candidatos $\mathcal{Q}_c$, $\mathcal{P}_c$ e Υ_c, dependendo desses 4 coeficientes ainda a serem determinados, podem ser expressos por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c =& -\frac{1}{2}x\left(2\,x^4yz + x^4z - 2\,x^3z^2 - 4\,x^2y^2 - x^2y + 6\,xyz - 2\,z^2\right)a_{29} + \frac{1}{4}\left(6\,x^4y^2z\right.\\ & +4x^4yz - 6x^3yz^2 + x^4z - 2x^3z^2 - 10x^2y^3 - 4x^2y^2 + 14xy^2z - 2x^2y + 4xyz - 4yz^2\\ & \left.-2z^2\right) c_{120} + x^2\left(2x^3yz - 2x^2z^2 - 2xy^2 + 2xy + 2yz - x - 2z\right) c_{86} + \frac{1}{2}\left(2x^5z^2\right.\\ & -6x^4z^3 + 6x^3y^2z - 8x^3yz + 10x^2yz^2 - x^3z - 6x^2z^2 - 10xy^3 - 4xz^3 + 18xy^2\\ & \left.+4y^2z + 2xy - 6yz - 2x - 4z\right) c_{94}, \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_c=&-\frac{1}{2}\big(7\,x^4y^2z-12\,x^3yz^2+x^3z^2-3\,x^2y^3+5\,x^2z^3+4\,xy^2z-xyz-yz^2\big)a_{29}\\&+\frac{1}{4}\big(14x^3y^3z+7x^3y^2z-22x^2y^2z^2-10x^2yz^2-6\,xy^4+8xyz^3+x^2z^2+5xz^3+6y^3z\\&-2y^2z-2yz\big)c_{120}+\big(2x^3yz^2-2x^2z^3+3x^2y^2-2xy^2z-4xyz+2yz^2-xz+z^2\big)c_{86}\\&-\frac{1}{2}\big(14\,x^4yz^2+14x^3yz^3-16x^3z^3-14x^2y^3z-8x^2z^4+15x^2y^2z+2xy^2z^2-2x^2yz\\&+6y^4-10x^2z-7\,xz^2-12\,y^3-z^3+6\,y^2+6\,y\big)\,c_{94},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_c=&-\frac{1}{2}\,x\,(xy-z)^2\,\big(x^2z-y\big)\,a_{29}+\frac{1}{4}\,\big(2x^2yz+x^2z-2y^2\big)\,(xy-z)^2\,c_{120}\\&+x\,(xy-z)^2\,c_{86}-\frac{1}{2}\,\big(2x^5yz^2+2x^4yz^3-2x^4z^3-2x^3y^3z-2x^3z^4+x^3y^2z\\&-2x^3yz+2xy^4+2xyz^3-2x^3z-4xy^3-xz^3-2y^3z+2y^2x+4y^2z+2xy\big)\,c_{94}.\end{aligned}$$

- A segunda parte do procedimento *DIF* consiste em buscar, entre os fatores polinomiais de Υ_c, os polinômios de Darboux do campo vetorial $\mathfrak{X}$. Ao fazer isso, obtemos $\{\,x,\ xy-z,\ x^2z-y\}$ (sem gastar nenhum tempo computacional mensurável).

- A parte final consiste em eliminar os coeficientes indeterminados restantes e determinar os expoentes k_j dos polinômios de Darboux encontrados no fator integrante inverso Υ (ver o teorema 3.6). Para realizar essa tarefa, usaremos a própria equação (58). Aplicando o campo vetorial $\mathfrak{X}_3$ a ela, obtemos:

$$\mathfrak{X}_3\,(\mathcal{Q}_c\,P-Q\,\mathcal{P}_c)=\mathfrak{X}_3\,(\Upsilon_c)\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_3\rangle+\Upsilon_c\,\mathfrak{X}_3\,(\langle\nabla|\mathfrak{X}_3\rangle)\,. \tag{67}$$

Como o polinômio Υ é formado pelos polinômios de Darboux do campo vetorial $\mathfrak{X}_3$ que já foram determinados, digamos $\Upsilon=\prod_j {p_j}^{k_j}$, podemos escrever $\mathfrak{X}_3(\Upsilon)$ como $\sum_j k_j q_{3j}$, onde os $q_{3j}=\dfrac{\mathfrak{X}_3(p_j)}{p_j}$ são os cofatores dos polinômios de Darboux p_j em relação ao campo vetorial $\mathfrak{X}_3$. Assim, podemos reescrever a equação (67) da seguinte forma:

$$\mathfrak{X}_3\,(\mathcal{Q}_c\,P-Q\,\mathcal{P}_c)=\Upsilon_c\left(\sum_j k_j q_{3j}\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_3\rangle+\mathfrak{X}_3\,(\langle\nabla|\mathfrak{X}_3\rangle)\right). \tag{68}$$

Podemos observar que os únicos termos não lineares que envolvem os indeterminados vêm dos expoentes k_j multiplicados pelos coeficientes indeterminados restantes de Υ_c. Por causa disso, a equação (68) resulta em muitas equações lineares para os coeficientes indeterminados restantes e, portanto, pode ser resolvida com muita eficiência. Em nosso exemplo, encontramos as soluções (em 0,422 segundos):

$$
\begin{aligned}
sol_1 &= \{a_{29} = 0, c_{120} = 0, c_{52} = c_{52}, c_{94} = 0, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 0\},\\
sol_2 &= \{a_{29} = 0, c_{120} = 0, c_{52} = 0, c_{94} = 0, k_1 = k_1, k_2 = k_2, k_3 = k_3\},\\
sol_3 &= \{a_{29} = a_{29}, c_{120} = 0, c_{52} = 0, c_{94} = 0, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1\},
\end{aligned}
$$

onde consideramos:

$$
\begin{aligned}
p_1 = x^2z - y \quad &\Rightarrow \quad q_{31} = -x\left(x^5yz^2 - x^4z^3 - 2\,x^3y^2z + 2\,x^3yz + 2\,x^2yz^2\right.\\
&\qquad\qquad \left. -x^3z - 2\,x^2z^2 + xy^3 + xy^2 - y^2z + xy - yz\right)\\
p_2 = xy - z \quad &\Rightarrow \quad q_{32} = -z\left(2\,x^3 + 1\right)\left(x^3yz - x^2z^2 - xy^2 + yz - x\right)\\
p_3 = x \quad &\Rightarrow \quad q_{33} = -x^6yz^2 + x^5z^3 + 2\,x^4y^2z - 2\,x^3yz^2 + x^4z - x^2y^3\\
&\qquad\qquad -x^2y^2 + xy^2z - x^2y + 2\,xyz - z^2
\end{aligned}
$$

- A solução 2 é a solução trivial, enquanto a solução 1 é incompleta (já que x^2z-y não é um polinômio próprio do operador obtido). Portanto, a solução na qual estamos interessados é a solução 3, que leva a:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= x\left(2\,x^4yz + x^4z - 2\,x^3z^2 - 4\,x^2y^2 - x^2y + 6\,xyz - 2\,z^2\right),\\
\mathcal{Q} &= 7\,x^4y^2z - 12\,x^3yz^2 + x^3z^2 - 3\,x^2y^3 + 5\,x^2z^3 + 4\,xy^2z - xyz - yz^2,\\
[2mm]\Upsilon &= \left(x^2z - y\right)(xy - z)^2\,x.
\end{aligned}
$$

- Como $\mathcal{R} = 1/\Upsilon$ é um fator integrante para o campo vetorial $\mathcal{X}_3 = \mathcal{P}\partial_x - \mathcal{Q}\partial_y$, podemos determinar a integral primeira de $\mathcal{X}_3$ (ou seja, o fator integrante R do campo vetorial $\mathfrak{X}$) com quadraturas simples:

$$
\mathcal{I} = R = \frac{e^{\frac{x}{xy-z}}}{(x^2z - y)\,(xy - z)^2\,x}. \tag{69}
$$

- Finalmente, com o fator integrante R, podemos obter a integral primeira Liouvilliana do campo vetorial $\mathfrak{X}$:

$$
I = \frac{e^{\frac{x}{xy-z}}}{(x^2z - y)} + Ei\left(1, -\frac{x}{xy - z}\right). \tag{70}
$$

Observação 3.9. Alguns comentários:

1. Se construirmos, para uma 2EDO racional $\in L_S$, candidatos para os polinômios desconhecidos $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, Υ com coeficientes indeterminados e os substituirmos nas equações *(56,57,58)*, obteremos uma determinação maciça de coeficientes. O exemplo que acabamos de apresentar, por exemplo, nos mostra uma redução de 405 coeficientes indeterminados para apenas 4. É importante enfatizar que essa enorme redução não é um caso isolado, pois ocorre na grande maioria dos casos.

2. Substituindo a solução encontrada (relacionada ao item acima) no candidato Υ_c e agrupando o resultado nos indeterminados restantes, obtemos, após fatorar cada termo da soma, vários dos polinômios de Darboux presentes em Υ. Se a determinação dos polinômios de Darboux não estiver completa, podemos iterar adicionando os polinômios de Darboux encontrados na reconstrução do candidato Υ_c e refazendo os cálculos (por exemplo, se encontrarmos um polinômio de Darboux p_1 de grau d_1, usando um candidato Υ_c de grau d_u, podemos reconstruir o candidato usando $\Upsilon_c = \Upsilon_p\, p_1$, onde o grau de Υ_p é $d_u - d_1$). Em todos os casos testados, encontramos todos os polinômios de Darboux necessários para construir Υ (no exemplo 3.1, o polinômio que multiplica o coeficiente a_{29} já é o próprio Υ e somente a equação (58) foi usada).

3. O número de coeficientes que permanecem indeterminados (após o processo de redução mencionado na primeira parte do procedimento *DIF*) pode variar dependendo da equação que usamos: (56), (57) ou (58). Por exemplo, no exemplo que acabamos de apresentar, se usarmos a equação (56) em vez da equação (58), a redução seria de 405 para 14. O número de polinômios de Darboux encontrados também pode variar. No entanto, em todos os casos estudados, sempre foi possível determinar todos eles com a estratégia mencionada no segundo item acima, ou seja, em todos os casos testados, o problema de determinar os polinômios de Darboux foi resolvido linearmente em sua totalidade.

4. Se começarmos com graus mais baixos para os polinômios $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, Υ, é possível (na verdade, bastante comum) encontrar polinômios de Darboux no meio do processo, ou seja, antes de atingir o grau necessário. Dessa forma, o processo de iteração se torna muito mais eficiente nos casos mais complicados, ou seja, em situações em que a iteração (se começarmos com graus mais altos para os candidatos) não resulta em novos polinômios de Darboux.

5. Embora a parte mais importante do procedimento *DIF* seja a determinação dos polinômios de Darboux, vale a pena mencionar que, se I for uma integral primeira não elementar (ou seja, nesse caso, o fator integrante R terá necessariamente um fator exponencial), a terceira parte do procedimento (determinar os expoentes dos polinômios de Darboux que são fatores de Υ) torna o processo muito mais efici-

ente. Isso ocorre porque, nesse caso, mesmo tendo todos os polinômios de Darboux necessários para a construção do fator integrante, não temos ideia de como eles aparecem no fator exponencial, e essa verificação (testar todas as combinações possíveis) aumenta exponencialmente o tempo do algoritmo (ver os comentários de Guillaume Chèze em Chèze (2011) e Chèze; Combot (2019) sobre o algoritmo desenvolvido em Avellar; Duarte; Duarte; Da Mota (2005) e Avellar; Duarte; Duarte; Da Mota (2007b)). No entanto, ao determinar os expoentes dos polinômios de Darboux que formam Υ, podemos usá-lo (já que Υ é um fator integrante inverso para os campos vetoriais $\mathcal{X}_i$) para obter o fator integrante R da 2EDO por quadraturas.

6. Se a 2EDO racional apresentar uma integral primeira elementar, a terceira parte do procedimento não será necessária porque, nesse caso, podemos encontrar diretamente os expoentes dos polinômios de Darboux que formam o fator integrante R usando o método de Prelle-Singer ($\sum_j n_{ij}q_{ij} + \langle \nabla | \mathfrak{X}_i \rangle = 0$, veja Prelle; Singer (1983)).

7. Se usarmos a solução de uma das equações *(56,57,58)* antes de resolver as outras, na grande maioria dos casos, determinaremos completamente o polinômio Υ e, consequentemente, os polinômios $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ (como aconteceu no exemplo que acabamos de mostrar).

8. A 2EDO racional *(3.1)* apresenta uma integral primeira Liouvilliana que não é determinada pelos métodos implementados no solver (`dsolve`) da plataforma Maple de computação simbólica e, acreditamos, muito difíceis de serem determinadas por quaisquer outros métodos.

Procedimento 5 (esboço): (*DIF*)

1. Construa os operadores $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$.

2. Construa quatro polinômios $\mathcal{Q}_c$, $\mathcal{P}_c$, $\mathcal{N}_c$, Υ_c de graus d_q, d_p, d_n e d_u, respectivamente, com coeficientes indeterminados.

3. Substitua então na equação $E_1 \colon \mathcal{P}\, N - P\, \mathcal{N} = \Upsilon\, \langle \nabla | \mathfrak{X}_1 \rangle$.

4. Colete a equação E_1 nas variáveis (x, y, z) obtendo um conjunto de equações (lineares) S_{E_1} para os coeficientes dos candidatos a polinômios.

5. Resolver S_{E_1} para os coeficientes indeterminados.

6. Substitua a solução de S_{E_1}na equação $E_2 \colon \mathcal{Q}\, N - Q\, \mathcal{N} = \Upsilon\, \langle \nabla | \mathfrak{X}_2 \rangle$.

7. Colete E_2 nas variáveis (x, y, z) obtendo um conjunto de equações S_{E_2} para os coeficientes indeterminados restantes.

8. Resolver S_{E_2} para os coeficientes indeterminados restantes.

9. Substitua a solução de S_{E_2} na equação E_3: $\mathcal{Q}\,P - Q\,\mathcal{P} = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_3\rangle$.

10. Colete E_3 nas variáveis (x, y, z) obtendo um conjunto de equações S_{E_3} para os coeficientes indeterminados restantes.

11. Resolver S_{E_3} para os coeficientes indeterminados restantes, obtendo uma solução S_{sys}.

12. Substitua a solução S_{sys} dos três sistemas lineares no candidato Υ_c, colete-a com relação aos coeficientes restantes e fatore os polinômios que multiplicam cada um deles (os coeficientes restantes).

13. Selecione quais desses fatores polinomiais são polinômios de Darboux do campo vetorial $\mathfrak{X}$.

14. Reconstrua o candidato Υ_c adicionando a ele os polinômios de Darboux encontrados e refaça as etapas $3 \to 13$ até que não apareçam novos polinômios de Darboux.

15. Calcule os cofatores dos polinômios de Darboux encontrados com relação aos campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$.

16. Substitua os resultados nas equações

$$\mathfrak{X}_j\left(\langle\partial_i|\mathcal{X}_i \wedge \mathfrak{X}_i\rangle\right) = \Upsilon\left(\sum_u k_{uj}q_{uj}\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_i\rangle + \mathfrak{X}_j\left(\langle\nabla|\mathfrak{X}_i\rangle\right)\right).$$

    e colete-os em $\{x, y, z\}$ obtendo nove sistemas de equações para os coeficientes restantes e para os expoentes K_{uj}.

17. Resolva o primeiro desses sistemas e (se uma solução for encontrada) substitua a solução nos candidatos para obter $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, Υ e teste se as equações $\mathcal{X}_i(\Upsilon) = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_i\rangle$ são identidades. Se forem identidades, vá para a etapa 19. Se não forem identidades, resolva o segundo sistema e (se for encontrada uma solução) substitua a solução nos candidatos e faça o teste novamente. Se forem identidades, vá para a etapa 19. Se não forem identidades, continue realizando esse processo até o último dos nove sistemas e, se uma solução válida for encontrada, vá para a etapa 19.

18. Aumente o grau dos polinômios candidatos $\mathcal{Q}_c$, $\mathcal{P}_c$, $\mathcal{N}_c$ e refaça as etapas $3 \to 17$.

19. Use $\mathcal{R} = 1/\Upsilon$ (o fator integrante dos campos vetoriais $\mathcal{X}_i$) para calcular R (a integral primeira dos campos vetoriais $\mathcal{X}_i$).

20. Use R (o fator integrante dos campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$) para calcular a integral primeira Liouvilliana I da 2EDO racional.

Observação 3.10. Mais alguns comentários:

1. Como não temos um limite superior para o grau dos polinômios $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ e Υ, o procedimento *DIF* pode não terminar (veja a etapa 18 acima) e, portanto, *DIF* é, na verdade, um semi-algoritmo.

2. O número de coeficientes indeterminados restantes após a solução de cada um dos sistemas de equações pode depender da equação de base usada: (56) ou (57) ou (58) e, portanto, o procedimento *DIF* (como foi descrito acima) resolve todos os sistemas (isso não foi feito no exemplo 3.1 para maior clareza na exposição e não foi implementado dessa forma no pacote).

3. O grau dos polinômios $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ (e, portanto, o grau de Υ) não é determinado (a priori) pelas etapas do método (ver os comentários posteriores na seção 5). Portanto, não está bem determinado qual é o melhor processo de iteração (ou seja, o mais eficiente) para irmos alterando o grau dos polinômios candidatos.

4. Também não está claro se é possível saber (a priori) se uma determinada equação de base (56) ou (57) ou (58) deve ser usada primeiro (ou se uma delas deve ser a única usada, ou se devemos usar duas equações e quais, ou se há uma ordem preferencial etc.). Por exemplo, no exemplo 3.1 mostrado acima, é muito mais eficiente usar a equação (58): $\mathcal{Q}\,P - Q\,\mathcal{P} = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_3\rangle$ (e somente ela).

5. Com relação à terceira parte do procedimento *DIF*, ou seja em relação à determinação dos expoentes dos polinômios de Darboux que são fatores de Υ (no caso em que o 2EDO apresenta uma integral primeira Liouvilliana não elementar), não sabemos se há uma maneira de determinar (em cada caso) qual é a maneira mais eficiente de determinar os expoentes: a) usando as iterações da pesquisa do polinômio de Darboux da parte dois ou b) depois de determinar alguns candidatos, tente a parte três: a determinação dos expoentes usando as equações

$$\mathfrak{X}_j\left(\langle\partial_i|\mathcal{X}_i \wedge \mathfrak{X}_i\rangle\right) = \Upsilon\left(\sum_u k_{uj}q_{uj}\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_i\rangle + \mathfrak{X}_j\left(\langle\nabla|\mathfrak{X}_i\rangle\right)\right).$$

4 O PACOTE *NLSDIF*

Neste capítulo apresentaremos uma implementação do procedimento *NLSDIF* em um pacote computacional escrito na linguagem Maple, com algumas modificações para melhorar sua flexibilidade e praticidade.

1. Na primeira seção, mostramos os comandos que compõe o pacote *NLSDIF*: fazemos uma descrição detalhada da funcionalidade e das chamadas de cada um dos comandos que compõe o pacote.

2. Na segunda seção, apresentamos exemplos práticos do uso dos comandos do pacote aplicados a exemplos específicos.

4.1 Os comandos do pacote *NLSDIF*

Nesta seção apresentaremos uma descrição (detalhada) dos comandos do pacote *NLSDIF*.

Resumo dos comandos:

- `Dx` constrói o operador D_x (o operador derivada total sobre as soluções) associado com a 2EDO (25).

- `XX` - constrói o operador $\mathfrak{X}$ associado com a 2EDO (25).

- `Tr2ode` - aplica uma transformação (dada pelo usuário) na 2EDO (25) e retorna a 2EDO transformada e a transformação inversa.

- `NLS` - tenta determinar a simetria (os polinômios Q, P, N) associada com o campo vetorial $\mathfrak{X}$.

- `Xn` - constrói os vetores $\mathfrak{X}_i$.

- `Soln` - obtém as soluções dos sistemas decorrentes das equações E_3, E_2, E_3.

- `DPs` - obtém os PDs a partir da substituição das soluções dos sistemas S_{E_1}, S_{E_2} e S_{E_3} no candidato polinomial Υ_c.

- `Ups` - determina os expoentes e, a partir deles, constrói o polinômio Υ.

- `RR` - obtém um fator integrante de Darboux para a 2EDO (25).
- `II` - determina uma integral primeira Liouvilliana para a 2EDO (25).

4.1.1 Comando: `Dx`

Funcionalidade: Este comando retorna o operador D_x, que é o operador derivada total (sobre as soluções da 2EDO).

Sequência de chamada:

[> `Dx(ode);`

Parâmetros:

`ode` - a 2EDO (25).

Sinopse:

O comando `Dx` retorna o *operador derivada total* sobre as soluções da 2EDO (25), i.e., o operador $\frac{d}{dx} = \partial_x + z\partial_y + z'\,\partial_z$ restrito às superfícies $I(x, y, z) = c$, que são as superfícies de nível da integral primeira. Uma vez que sobre as soluções $z' = \phi(x, y, z)$, isto implica que

$$D_x = \partial_x + z\,\partial_y + \phi\,\partial_z. \tag{71}$$

4.1.2 Comando: `XX`

Funcionalidade: Este comando retorna o campo vetorial polinomial (o operador de Darboux) $\mathfrak{X}$ associado com a 2EDO (25).

Linha de comando:

[> `XX (ode);`

Parâmetros:

`ode` - a 2EDO (25).

Sinopse:

O comando `XX` retorna o *campo vetorial* $\mathfrak{X}$ *associado com a 2EDO* (25), i.e., o comando retorna um operador $u \to N_0\partial_x(u) + z\, N_0\partial_y(u) + M_0\partial_z(u)$, onde N_0 e M_0 são os polinômios coprimos tais que $M_0/N_0 = \phi$.

4.1.3 Comando: `Tr2ode`

Funcionalidade: Este comando aplica uma transformação à 2EDO (25) e retorna a 2EDO transformada e a transformação inversa.

Linha de comando:

[> `Tr2ode(ode);`

Parâmetros:

`ode` - a 2EDO (25).

Parâmetros extras:

`TR = [x=F(x,y), y=G(x,y)]`, onde `[x=F(x,y), y=G(x,y)]` é uma transformação inversível - O *default* é a transfornação identidade.

Sinopse:

O comando `Tr2ode` aplica uma transformação T (fornecida pelo usuário) à 2EDO (25) e retorna uma lista com duas entradas: a 1EDO transformada e a transformação inversa T^{-1} da transformação fornecida (pelo parâmetro `TR`). Se a transformação inversa não puder ser obtida, o comando retorna somente a 2EDO transformada. Se nehuma transformação é fornecida, o *default* é a transformação identidade.

4.1.4 Comando: `NLS`

Funcionalidade: Este comando retorna os polinômios Q, P, N (as componentes do campo vetorial $\mathfrak{I}$ a 2EDO associada à 2EDO (25).

Linha de comando:

[> `NLS(ode);`

Parâmetros:

`ode` - a 2EDO (25).

Parâmetros extras:

`PS = k` - onde `k` é um inteiro ($k \in \{1, 2\}$). Se o parâmetro estiver presente na sequência de chamada do comando, então o comando usa a EDP correspondente ao inteiro 1 ou 2: $k = 1$ busca o polinômio P na EDP para $\{P, N\}$; $k = 2$ busca o polinômio Q na EDP para $\{Q, N\}$. Retorna os polinômios Q, P, N : $[Q, P, N]$.

Sinopse:

O comando `NLS` busca determinar os polinômios Q, P, N que são as componentes do campo vetorial $\mathfrak{I}$. O parâmetro `PS` diz ao comando qual EDP usar para o cálculo. É esperado que o polinômio N corresponda ao polinômio N_0, ou seja, ao denominador da função racional $\phi(x, y, z) = M_0(x, y, z)/N_0(x, y, z)$ da 2EDO (25) ($z' = \phi(x, y, z)$). Se o parâmetro extra `PS` não estiver presente na entrada do comando, o *default* corresponde a `PS = 1`.

4.1.5 Comando: `Xn`

Funcionalidade: Este comando constrói os campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$.

Linha de comando:

[> `Xn(qpn,vrs);`

Parâmetros:

`qpn` - uma lista com os polinômios Q, P, N: `[Q,P,N]`.

`vrs` - uma lista com as variáveis (x, y, z): `[x,y,z]`.

Parâmetros extras:

`VF = n` - onde `n` é um dos inteiros positivos 1, 2 ou 3 denotando qual o campo vetorial a ser construído: $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_1$ ou $\mathfrak{X}_3$. O *default* é 1.

Sinopse:

O comando `Xn` constrói os campos vetoriais $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_1$ ou $\mathfrak{X}_3$ (i.e., os operadores de Darboux correspondentes às 1EDOs associadas). Para tal, o comando `Xn` faz uso da saída do comando `NLS`.

4.1.6 Comando: `Soln`

Funcionalidade: Este comando determina as soluções dos sistemas de equações algébricas para os indeterminados $\mathcal{Q}_c$, $\mathcal{P}_c$, $\mathcal{N}_c$, Υ_c. O *default* é `[7,7,7,8]`. O comando retorna uma lista com a solução e a substituição da mesma nos candidatos.

Linha de comando:

[> `Soln(qpn,vrs);`

Parâmetros:

`qpn` - uma lista com os polinômios Q, P, N: `[Q,P,N]`.

`vrs` - uma lista com as variáveis (x, y, z): `[x,y,z]`.

Parâmetros extras:

`Eq = n` - onde `n` é um dos inteiros positivos 1, 2 ou 3 denotando a equação a ser usada: (56), (57) ou (58), respectivamente. O *default* é 1.

`dqpn = [degQ,degP,degN,degU]` - onde `[degQ,degP,degN]` é uma lista com quatro inteiros: os graus dos polinômios candidatos $\mathcal{Q}_c$, $\mathcal{P}_c$, $\mathcal{N}_c$, Υ_c, respectivamente. O *default* é `[7,7,7,8]`.

Sinopse:

O comando `Soln` usa as equações

$\mathcal{P}\,N - P\,\mathcal{N} = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_1\rangle$,

$\mathcal{Q}\,N - Q\,\mathcal{N} = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_2\rangle$,

$\mathcal{Q}\,P - Q\,\mathcal{P} = \Upsilon\,\langle\nabla|\mathfrak{X}_3\rangle$,

e as coleta em $\{x, y, z\}$, obtendo um sistema de equações lineares para os indeterminados. O parâmetro `Eq` diz ao comando qual das equações usar e o parâmetro `dqpn` fornece os graus para a montagem dos polinômios candidatos $\mathcal{Q}_c$, $\mathcal{P}_c$, $\mathcal{N}_c$, Υ_c. O comando retorna a lista `[sol,[qc,pc,nc,uc]]`, onde `sol` é a solução obtida e `[qc,pc,nc,uc]` resulta da substituição da solução nos candidatos.

4.1.7 Comando: `DPs`

Funcionalidade: Este comando tenta encontrar os polinômios de Darboux, presentes no fator integrante da 2EDO, que compõem o fator integrante inverso Υ.

Linha de comando:

[> `DPs(Ups,vrs,xx);`

Parâmetros:

`Ups` - o candidato Υ após a substituição da solução obtida com o comando `Soln`.

`vrs` - uma lista com as variáveis (x, y, z): `[x,y,z]`.

`xx` - o campo vetorial $\mathfrak{X}$ (o operador de Darboux associado à 2EDO).

Parâmetros extras: Nenhum.

Sinopse:

O comando `DPs` tenta encontar os polinômios de Darboux que compõem o fator integrante inverso Υ. O comando usa o candidato Υ_c após a substituição da solução encontrada pelo comando `Soln` e fatora os polinômios que multiplicam os indeterminados restantes. Após isso, usa o oerador de Darboux associado à 2EDO para determinar os fatores que são, possivelmente, os polinômios de Darboux que fazem parte de Υ. Este comando, embora simples do ponto de vista computacional, se constitui no 'coração' do algoritmo probabilístico *DIF*.

4.1.8 Comando: `UPS`

Funcionalidade: Este comando constrói o fator integrante inverso Υ.

Linha de comando:

[> `UPS(vrs,xi,dps,cands);`

Parâmetros:

`vrs` - uma lista com as variáveis (x, y, z): `[x,y,z]`.

`xi` - o operador $\mathfrak{X}_i$.

`dps` - um conjunto com os polinômios de Darboux.

`cand` - uma lista com os polinômios candidatos coeficientes de $\mathcal{X}_i$ e Υ_c.

Parâmetros extras: Nenhum.

Sinopse:
O comando `UPS` constrói o fator integrante inverso Υ, usando as equações

$$\mathfrak{X}_j\left(\langle\partial_i|\mathcal{X}_i \wedge \mathfrak{X}_i\rangle\right) = \Upsilon\left(\sum_u k_{uj} q_{uj}\left\langle\nabla|\mathfrak{X}_i\right\rangle + \mathfrak{X}_j\left(\langle\nabla|\mathfrak{X}_i\rangle\right)\right),$$

para calcular os k_u e os indeterminados restantes. No caso de uma integral primeira que admite um fator integrante algébrico, o uso do comando `UPS` é desnecessário.

4.1.9 Comando: `RR`

Funcionalidade: determina um fator integrante para a 2EDO (25).

Linha de comando:
[> `RR(qpn,vrs);`

Parâmetros:

`qpn` - uma lista com os polinômios Q, P, N: `[Q,P,N]`.

`vrs` - uma lista com as variáveis (x, y, z): `[x,y,z]`.

Parâmetros extras:

`ups = pp` - onde `pp` é o polinômio Υ.

`EL = dps` - onde `dps` é um conjunto de polinômios de Darboux. Se esse parâmetro estiver presente o comando `RR` determina o fator integrante R usando a parte final do método de Prelle-Singer.

Sinopse:
Este comando usa o fator integrante $1/\Upsilon$ para encontrar a integral primeira dos campos vetoriais $\mathcal{X}_i$, ou seja, o fator integrante R da 2EDO, usando apenas integrações simples (no caso de uma 2EDO que apresente uma integral primeira Liouvilliana não-elementar). No caso de um fator integrante algébrico, o comando `RR` determina o R usando a parte

final do método de Prelle-Singer: calcula os expoentes usando as equações

$$\sum_j n_{ij} q_{ij} + \langle \nabla | \mathfrak{X}_i \rangle = 0.$$

4.1.10 Comando: `II`

Funcionalidade: determina uma integral primeira Liouvilliana para a 2EDO (25).

Linha de comando:

[> `II(qpn,vrs,rr);`

Parâmetros:

`qpn` - uma lista com os polinômios Q, P, N: `[Q,P,N]`.

`vrs` - uma lista com as variáveis (x, y, z): `[x,y,z]`.

`rr` - um fator integrante para a 2EDO (25).

Parâmetros extras: Nenhum.

Sinopse:

Este comando usa o fator integrante R e as componentes de $\mathfrak{I}$ $(Q,\ P,\ N)$ para encontrar a integral primeira I usando integrações simples, pois temos $I_x = R\,Q$, $I_y = R\,P$, $I_z = R\,N$.

4.2 Exemplo da utilização dos comandos do pacote

Nesta seção vamos exemplificar o uso dos comandos do pacote *NLSDIF* simulando sua aplicação em uma plataforma Maple.

Considere a 2EDO

$$z' = -\frac{z\,(8\,y^3z^2 - 2\,x^2z^2 - 10\,xy^2z + 4\,z^2y^2 + 2\,x^2y - 2\,zxy + 2\,y^3 + x^2)}{x\,(4\,z^2y^2 - 6\,zxy - 2\,y^3 + x^2)}. \tag{72}$$

Depois de abrir uma sessão do Maple, carregaremos os seguintes pacotes:

```
[> with(DEtools):  read(‘NLSDIF.txt‘):
```

O sinal de dois pontos (:) no final de uma linha de comando evita a impressão (na tela) do resultado. O pacote *DEtools* carrega vários comandos para lidar com EDOs. O comando `read (‘NLSDIF.txt‘):` carrega nosso pacote. Vamos carregar a 2EDO (72) digitando[17]

```
[> _2ode := diff(y(x),x,x) = (...) :
```

Primeiro, podemos tentar resolvê-la com o resolvedor de EDOs do Maple: `dsolve`. Contudo, a aplicando o comando à 2EDO (72), obtemos uma saída vazia. Para usar o pacote, podemos começar com o comando `NLS`:

```
[> qpn := NLS( _2ode);
```

$$qpn := [z\left(4\,y^2z^2 - 2\,xyz + 2\,y^3 + x^2\right), 8\,y^3z^2 - 2\,x^2z^2 - 10\,xy^2z + 2\,x^2y, x\left(4\,y^2z^2 - 6\,xyz - 2\,y^3 + x^2\right)] \tag{73}$$

para determinar Q, P, N (`NLS` gasta apenas 0,016 seg de CPU e uso de memória desprezível). Logo em seguida, usando `Soln` e `DPs`, vamos obter:

```
[> sol := Soln(qpn,[x,y,z],Eq = 1,dqpn = [5,5,5,6]):
[> pol := sol[2][4]:
[> xx := XX(_2ode):
[> dps := DPs(qpn,[x,y,z],xx);
```

$$dps := \left\{(-2\,yz + x)^2, xz + y^2\right\} \tag{74}$$

Usando `RR`, obtemos

```
[> r0 := RR(qpn,[x,y,z],EL=dps);
```

$$r0 := \frac{1}{(-2\,yz + x)^2\,(xz + y^2)}. \tag{75}$$

Por fim, usando `II`, temos a integral primeira

```
[> i0 := II(qpn,[x,y,z],rr=r0);
```

$$i0 := \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{-2\,yz+x}}}{(xz + y^2)}. \tag{76}$$

---

[17] Não colocamos o ϕ para não aumentar desnecessariamente o texto.

5 DESEMPENHO DOS ALGORITMOS

Neste capítulo, faremos um estudo preliminar (breve) do desempenho do procedimento *NLSDIF* e teceremos algumas considerações: na primeira seção apresentamos os resultados da aplicação do método a um pequeno conjunto de 2EDOs e, na segunda, faremos algumas considerações sobre os resultados obtidos bem como sobre as questões teóricas ainda não respondidas. Também apontaremos possíveis melhorias e extensões da teoria/algoritmos desenvolvidos.

5.1 Algumas 2EDOs 'difíceis'

Nesta seção, fazemos uma breve análise do desempenho dos algoritmos construídos: comparamos a eficiência do procedimento *NLSDIF* (em uma pré-implementação do Maple) com o desempenho do método da função-S (ver Avellar *et al.* (2019)). Para isso, criamos um pequeno conjunto de sete 2EDOs racionais (apresentando uma integral primeira Liouvilliana) que são divididos em dois subconjuntos:

- No primeiro, construímos quatro 2EDOs, três deles com uma integral primeira não elementar, de acordo com os seguintes critérios: elas não são resolvidas por procedimentos canônicos implementados no CAS Maple; elas não têm simetrias de ponto e as λ-simetrias são muito complexas; o fator integrante é formado por polinômios de Darboux de grau relativamente alto; O método da função-S falha por um tempo limite de CPU de 30 segundos e um consumo máximo de memória de 300 MB; mesmo depois que a simetria é encontrada (após a aplicação do algoritmo *NLS*), a 1EDO associada não pode ser resolvida pelos métodos implementados no Maple (com um poderoso solucionador de EDOs, o comando `dsolve`).
- O segundo subconjunto apresenta três 2EDOs que métodos mais avançados podem resolver com um uso mais razoável de tempo/memória. Por métodos mais avançados, queremos dizer métodos modernos derivados de teorias de simetria de Lie (métodos que assumem ansätze para o formato de simetria ou métodos que procuram λ-simetrias/simetrias não-locais/simetrias dinâmicas etc.), derivados de abordagens darbouxianas (métodos que usam a moderna teoria de integrabilidade de Darboux etc.) e métodos "mistos"(método da função-S etc.).

Considere as seguintes 2EDOs:

Tabela 1 - Gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas do procedimento para 2ODE-1

Algoritmo	Tarefa	Memória (MB)	Tempo (seg)
NLS	Determinação de $\{N, P, Q\}$	1	0.047
DIF (parte 1)	Redução de Coeficientes	2	0.078
DIF (parte 2)	Cálculo de PDs	0	0.032
DIF (parte 3)	Cálculo do Υ	1	0.390
NLSDIF	Encontrar uma LFI I	4	0.547

Fonte: O autor, 2023.

5.1.1 Primeiro conjunto:

2EDO-1:

$$\begin{aligned} z' &= \left(2x^5y^4z^2 - x^5y^4 - 2x^5y^3z + 4x^3y^2z^4 - x^4y^4 - 4x^4y^2z^2 + 2x^5yz - 2x^3y^3z \right. \\ &\quad \left. -2x^3y^2z^2 - 2x^3yz^3 + 2xz^6 + x^4y^2 + 2xyz^3 - xz^4 - x^2z^2 + z^4\right) / \\ &\quad \left(-2x\left(x^4y^5 + 2\,x^2y^3z^2 - x^2y^2z + yz^4 - 2\,xyz^2 + x^2z - z^3\right)\right) \end{aligned} \tag{77}$$

A Tabela 1 descreve o gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas (em termos computacionais) do procedimento:

Procedimento *NLS*:

1) NLS_{2I} calcula $P = 2x\,(x^4y^4z - x^4y^3 + 2x^2y^2z^3 - 2x^3y^2z + x^4y - x^2yz^2 + z^5)$ and $Q = -x^5y^4 - x^4y^4 - 2\,x^3y^3z - 2\,x^3y^2z^2 + x^4y^2 + 2\,xyz^3 - xz^4 - x^2z^2 + z^4$.

Procedimento *DIF*:

2) Redução de coeficientes indeterminados (parte 1): $469 \to 14$

3) DPs encontrados (parte 2): $\{p_1 = x, p_2 = y, p_3 = z, p_4 = x^2y^2 + z^2\}$.

4) Exponentes encontrados (parte 3): $\{n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0, n_4 = 2\}$. Então, $\mathcal{N} = -2xz\,(2x^2y^2 + 2z^2 + x)$, $\mathcal{P} = -2x^3y\,(2x^2y^2 + 2z^2 + x)$, $\mathcal{Q} = -5x^4y^4 - 6x^2y^2z^2 - x^3y^2 - z^4 + xz^2$ e $\Upsilon = x\,(x^2y^2 + z^2)^2$.

Observação 5.1. As outras partes têm um custo algorítmico muito pequeno em comparação com as partes mostradas na Tabela 1.
Como Υ é um fator integrante inverso para $\mathcal{X}_i$, podemos encontrar R com quadraturas simples: $\mathcal{R}_z = \frac{\mathcal{N}}{\Upsilon}$, $\mathcal{R}_y = \frac{\mathcal{P}}{\Upsilon}$, $\mathcal{R}_x = \frac{\mathcal{Q}}{\Upsilon}$ e assim

$$R = \frac{e^{\frac{x}{x^2y^2+z^2}}}{(x^2y^2+z^2)\,x}. \tag{78}$$

Tabela 2 - Gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas do procedimento para a 2-ODE2

Algoritmo	Tarefa	Memória (MB)	Tempo (seg)
NLS	Determinação de $\{N, P, Q\}$	1	0,047
DIF (parte 1)	Redução de Coeficientes	6	0,422
DIF (parte 2)	Cálculo de PDs	0	0,141
DIF (parte 3)	Cálculo do Υ	1	0,125
NLSDIF	Encontre uma IPL I	8	0,735

Fonte: O autor, 2023.

Portanto, como $I_z = R\,N$, $I_y = R\,P$, $I_x = R\,Q$, temos

$$I = \mathrm{e}^{\frac{x}{x^2y^2+z^2}} \left(-2\,yz + x\right) + Ei\left(1, -\frac{x}{x^2y^2+z^2}\right). \tag{79}$$

2EDO-2:

$$z' = \left(x^9z^5+4x^9z^4-x^8yz^4-3x^6y^2z^3-2x^5y^3z^3-4x^5y^3z^2+2x^4y^4z^2-2x^5z^3+3x^2y^5z \right.$$
$$\left. +xy^6z\right) / \left(-2x^5z\left(x^5z^2-xy^3-x+y\right)\right). \tag{80}$$

Procedimento *NLS*:
1) NLS_{2I} calcula $P\!=\!(x^8z^4\!-\!3x^5y^2z^2\!-\!2x^4y^3z^2\!-\!2x^4z^2\!+\!3xy^5\!+\!y^6\!+\!3y^2x\!-\!y^3\!+\!1)x$ and $Q = 4\,x^9z^4 - x^8yz^4 - 4\,x^5y^3z^2 + 2\,x^4y^4z^2 - 4\,x^5z^2 + 6\,x^4z^2y - y^7 - 2\,y^4 - y$.

Procedimento *DIF***:**
2) Redução de coeficientes indeterminados (parte 1): $1235 \to 1$
3) PDs encontrados (parte 2): $\{p_1 = x, p_2 = y, p_3 = z, p_4 = x^4z^2 - y^3 - 1\}$.
4) Expoentes encontrados (parte 3): $\{n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0, n_4 = 2\}$. Portanto, $\mathcal{N} = 2x^5z\,(2x^4z^2\!-\!2y^3\!-\!3)$, $\mathcal{P} = -3xy^2\,(2x^4z^2\!-\!2y^3\!-\!3)$, $\mathcal{Q}\!=\!10x^8z^4\!-\!12x^4y^3z^2\!-\!16x^4z^2 + 2\,y^6 + 4\,y^3 + 2$.

Observação 5.2. O fator integrante é dado por

$$R = \frac{\mathrm{e}^{\frac{-1}{x^4z^2-y^3-1}}}{\left(x^4z^2-y^3-1\right)^2 x^2}, \tag{81}$$

e a integral primeira Liouvilliana (IPL) é

$$I = \frac{\mathrm{e}^{\left(-x^4z^2+y^3+1\right)^{-1}}y}{x} + Ei\left(1, -\left(-x^4z^2+y^3+1\right)^{-1}\right). \tag{82}$$

Tabela 3 - Gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas do procedimento para 2ODE-3a

Algoritmo	Tarefa	Memória (MB)	Tempo (seg)
NLS	Determinar $\{N, P, Q\}$	1	0.063
DIF (parte 1)	Redução de Coeficientes	4	1.750
DIF (parte 2)	Calcular os DPs	0	0.202
(parte 3)	Calcular Υ	0	0.000
NLSDIF	Encontrar uma LFI I	5	2.015

Fonte: O autor, 2023.

Tabela 4 - Gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas do procedimento para 2ODE-3b

Algoritmo	Tarefa	Memória (MB)	Tempo (seg)
NLS	Determinar $\{N, P, Q\}$	1	0.063
DIF (parte 1)	Redução de Coeficientes	17	10.500
DIF (parte 2)	Calcular os DPs	1	3.281
(parte 3)	Calcular Υ	0	0.000
NLSDIF	Encontrar uma LFI I	19	13.844

Fonte: O autor, 2023.

2EDO-3:

$$
\begin{aligned}
z' = \big(&16\,x^5y^7z^{11} - 16x^4y^8z^{10} + 4x^3y^9z^9 + x^3y^8z^9 + 32\,x^4y^3z^7 + 8\,x^4y^3z^6 - 40\,x^3y^4z^6 \\
&-4x^3y^4z^5 + 16x^2y^5z^5 + 4x^2y^4z^5 - 2xy^6z^4 - 16x^2z^2 - 4x^2z + 16xyz + 2xy + 4xz - 4y^2\big) \\
&/\big(-2x^2\,\big(8\,x^3y^8z^9 - 8x^2y^9z^8 + x^2y^8z^8 + 2xy^{10}z^7 + 16x^2y^4z^5 + 4x^2y^4z^4 - 16xy^5z^4 \\
&-2xy^5z^3 + 4xy^4z^4 + 4\,y^6z^3 + 4\big)\big)\,.
\end{aligned} \tag{83}
$$

Procedimento ***NLS*****:**

1) NLS_{2I} calcula $P = (16\,x^4y^7z^{10} - 16\,x^3y^8z^9 + 4\,x^2y^9z^8 - x^2y^8z^8 + 32\,x^3y^3z^6$ $+8\,x^3y^3z^5 - 32\,x^2y^4z^5 - 4\,x^2y^4z^4 + 8\,xy^5z^4 - 4\,xy^4z^4 - 4)x$ and $Q = 2\,(8\,x^3y^8z^9$ $-8\,x^2y^9z^8 + x^2y^8z^8 + 2\,xy^{10}z^7 + 16\,x^2y^4z^5 + 4\,x^2y^4z^4 - 16\,xy^5z^4 - 2\,xy^5z^3 + 4\,xy^4z^4$ $+4\,y^6z^3 + 4)\,x^2$.

Procedimento ***DIF*****:**

2) Redução de coeficientes (parte 1 - uma maneira): $1575 \to 4$ and $3083 \to 121$

2) Redução de coeficientes (parte 1 – outra maneira): $4851 \to 260$

3) Encontrando os DPs (part 2): $\{2\,xz - y, xy^4z^4 + 2\}$.

4) Encontrando os expoentes (part 3): $\{n_1 = 1, n_2 = 2\}$. So, $\mathcal{N} =$

Tabela 5 - Gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas do procedimento para 2ODE-4

Algoritmo	Tarefa	Memória (MB)	Tempo (seg)
NLS	Determinar $\{N, P, Q\}$	1	0.031
DIF (part 1)	Redução de Coeficientes	0	0.032
DIF (part 2)	Calcular DPs	0	0.016
DIF (part 3)	Calcular Υ	0	0.000
NLSDIF	Encontrar uma I	1	0.079

Fonte: O autor, 2023.

$-2\,x\,(5\,x^2y^8z^8 - 2\,xy^9z^7$
$+2\,x^2y^4z^4 - xy^5z^3 + 12\,xy^4z^4 - 4\,y^5z^3 + 4)$, $\mathcal{P} = -8\,x^3y^7z^9 + 5\,x^2y^8z^8 - 4\,x^3y^3z^5$
$+2\,x^2y^4z^4 - 16\,x^2y^3z^5 + 12\,xy^4z^4 + 4$, $\mathcal{Q} = -4\,x^2y^8z^9 + xy^9z^8 - 12\,xy^4z^5 + 2\,y^5z^4 + 2\,xz - y - 8\,z$.

Observação 5.3. O fator integrante é dado por:

$$R = \frac{e^{\frac{x}{xy^4z^4+2}}}{\left(xy^4z^4+2\right)^2\left(2\,xz-y\right)^2}, \tag{84}$$

e a IPL é:

$$I = e^{\frac{x}{xy^4z^4+2}}\left(-2\,xz+y\right)^{-1} + Ei\left(1, -\frac{x}{xy^4z^4+2}\right). \tag{85}$$

2EDO-4:

$$z' = \frac{3y^2z^5+3y^5z+2yz^5-9x^2y^2z+2xz^4-y^4z-9y^2z^3-2x^2yz+2xy^3+2x^3+2xy^2+6xz^2}{2z\left(-2\,z^6-2\,y^3z^2+6\,x^2z^2+2\,y^2z^2+3\,z^4-3\,y^3+3\,x^2\right)}. \tag{86}$$

Procedimento ***NLS*****:**
1)NLS_{2I} computa $P = y\,(-3\,yz^4 - 3\,y^4 - 2\,z^4 + 9\,x^2y + y^3 + 9\,yz^2 + 2\,x^2)$ e $Q = -2\,x\,(z^4 + y^3 + x^2 + y^2 + 3\,z^2)$.

Procedimento ***DIF*****:**
2) Redução de coeficientes (parte 1): $203 \to 11$
3) Encontrando os DPs (parte 2): $\{p_1 = x, p_2 = y, p_3 = z, p_4 = -z^4 - y^3 + x^2\}$.
4) Os expoentes de R encontram diretamente (integral primeira elementar): $\{n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 0, n_4 = -2\}$. Logo, $\mathcal{N} = 2x^5z\,(2x^4z^2 - 2y^3 - 3)$, $\mathcal{P} = -3xy^2\,(2x^4z^2 - 2y^3 - 3)$, $\mathcal{Q} = 10x^8z^4 - 12x^4y^3z^2 - 16x^4z^2 + 2\,y^6 + 4\,y^3 + 2$.

Observação 5.4. O fator integrante é dado por:

$$R = \frac{1}{\left(-z^4-y^3+x^2\right)^2}, \tag{87}$$

Tabela 6 - Gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas do procedimento para 2ODE-5

Algoritmo	Tarefa	Memória (MB)	Tempo (sec)
NLS	Determinar $\{N, P, Q\}$	1	0.031
DIF (part 1)	Redução de Coeficientes	0	0.032
DIF (part 2)	Calcular DPs	0	0.016
DIF (part 3)	Calcular Υ	0	0.000
NLSDIF	Encontrar uma LFI I	1	0.079

Fonte: O autor, 2023.

e a IPL é:

$$I = \frac{e^{\frac{2\,x^2+y^2+3\,z^2}{-z^4-y^3+x^2}}}{(-z^4 - y^3 + x^2)}. \tag{88}$$

5.1.2 Segundo conjunto:

2EDO-5:

$$z' = \frac{3y^2z^5+3y^5z+2yz^5-9x^2y^2z+2xz^4-y^4z-9y^2z^3-2x^2yz+2xy^3+2x^3+2xy^2+6xz^2}{2z\,(-2\,z^6 - 2\,y^3z^2 + 6\,x^2z^2 + 2\,y^2z^2 + 3\,z^4 - 3\,y^3 + 3\,x^2)}. \tag{89}$$

Procedimento ***NLS*****:**

1)NLS_{2I} computa $P{=}y\,(-3\,yz^4 - 3\,y^4 - 2\,z^4 + 9\,x^2y + y^3 + 9\,yz^2 + 2\,x^2)$ e $Q = -2\,x\,(z^4 + y^3 + x^2 + y^2 + 3\,z^2)$.

Procedimento ***DIF*****:**

2) Redução dos coeficientes (parte 1): 203 $\rightarrow$ 11

3) PDs encontrado (parte 2): $\{p_1 = x, p_2 = y, p_3 = z, p_4 = -z^4 - y^3 + x^2\}$.

4) Os expoentes de R são encontrados diretamente (integral primeira elementar): $\{n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 0, n_4 = -2\}$. Logo, $\mathcal{N} = 2x^5z\,(2x^4z^2-2y^3-3)$, $\mathcal{P} = -3xy^2\,(2x^4z^2-2y^3-3)$, $\mathcal{Q}{=}10x^8z^4-12x^4y^3z^2-16x^4z^2 + 2\,y^6 + 4\,y^3 + 2$.

Observação 5.5. O fator integrante é dado por:

$$R = \frac{1}{(-z^4 - y^3 + x^2)^2}, \tag{90}$$

Tabela 7 - Gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas do procedimento para 2ODE-6

Algoritmo	Tarefa	Memória (MB)	Tempo (sec)
NLS	Determinar $\{N, P, Q\}$	1	0.000
DIF (part 1)	Redução de Coeficientes	1	0.016
DIF (part 2)	Calcular DPs	0	0.047
DIF (part 3)	Calcular Υ	0	0.109
NLSDIF	Encontrar uma LFI I	2	0.172

Fonte: O autor, 2023.

e a integral primeira Liouvilliana é:

$$I = \frac{e^{\frac{2x^2+y^2+3z^2}{-z^4-y^3+x^2}}}{(-z^4 - y^3 + x^2)}. \tag{91}$$

2EDO-6:

$$z' = \frac{-x^3z^4+4z^7+x^4yz-x^2yz^3-8xyz^4+x^3y^2+4x^2y^2z-x^3z+4x^2z^2-x^2y+4xyz}{x\,(-3\,xz^5+4\,z^6+3\,x^2yz^2-8\,xyz^3+4\,x^2y^2-3\,xz^2+12\,z^3)}. \tag{92}$$

Procedimento ***NLS*****:**
1)NLS_{2I} computa $P = -\left(-xz^3 + x^2y - x + 4\,z\right)x^2$ e $Q = -4\,z^7 + x^2yz^3 + 8\,xyz^4 - x^3y^2 - 4\,x^2y^2z + x^2y - 4\,xyz$.

Procedimento ***DIF*****:**
2) Redução de Coeficientes (parte 1): $288 \to 24$
3) PDs encontrados (parte 2): $\{x, -z^3 + xy\}$.
4) Expoentes encontrados (parte 3): $\{n_1 = 1, n_2 = 2\}$. So, $\mathcal{N} = -3\,x\left(-2\,z^3 + 2\,xy + 1\right)z^2$, $\mathcal{P} = x^2\left(-2\,z^3 + 2\,xy + 1\right)$, $\mathcal{Q} = 2\,z^6 - 6\,xyz^3 + 4\,x^2y^2 + xy$.

O fator integrante e a IPL são

$$R = \frac{e^{\frac{x}{xy^4z^4+2}}}{\left(xy^4z^4+2\right)^2\left(2\,xz-y\right)^2}, \quad I = e^{\frac{x}{xy^4z^4+2}}\left(-2\,xz+y\right)^{-1} + Ei\left(1, -\frac{x}{xy^4z^4+2}\right). \tag{93}$$

2EDO-7:

$$z' = \frac{2x^4z-2x^3z^2-2x^2yz^2+2xyz^3-2x^2yz-2xz^3+2y^2z^2+yz^3+z^4-2x^3+4x^2z-2xz^2}{-\left(2\,x^3y+2\,x^3z-x^2z^2-2\,xy^2z-2\,xyz^2+yz^3+x^2y-2\,xyz+yz^2\right)}. \tag{94}$$

Procedimento ***NLS*****:**
1) NLS_{2I} computa $P = \left(2\,x^3 - 2\,xyz + xz - z^2\right)(x - z)$ and $Q = -2\,x^2yz - x^2z^2 + 2\,y^2z^2 +$

Tabela 8 - Gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas do procedimento para 2ODE-7

Algoritmo	Tarefa	Memória (MB)	Tempo (sec)
NLS	Determinar $\{N, P, Q\}$	1	0.047
DIF (part 1)	Redução de Coeficientes	0	0.015
DIF (part 2)	Calcular PDs	0	0.078
DIF (part 3)	Calcular Υ	0	0.000
NLSDIF	Encontrar uma IPL I	1	0.140

Fonte: O autor, 2023.

$yz^3 - 2\,x^3 + 4\,x^2z - 2\,xz^2$.

Procedimento *DIF*:

2) Redução de Coeficientes: $126 \rightarrow 26$

3) PDs encontrados (parte 2): $\{x - z, x^2 - yz\}$.

4) Expoentes encontrados (parte 3): $\{n_1 = 1, n_2 = 2\}$. Logo, $\mathcal{N} = -2\,x^3y - 2\,x^3z + x^2z^2 + 2\,xy^2z + 2\,xyz^2 - yz^3 - 2\,x^3 - 2\,x^2y + 2\,x^2z + 6\,xyz - 4\,yz^2$, $\mathcal{Q} = 2\,x^2yz + x^2z^2 - 2\,y^2z^2 - yz^3 + 6\,x^3 - 10\,x^2z - 2\,xyz + 4\,xz^2 + 2\,yz^2$, $\mathcal{P} = -2\,(x - z)\,(x^3 - xyz + xz - z^2)$.

O fator integrante e a IPL são

$$R = \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\,xy + z^2}{x - z}}}{(x - z)^2\,(x^2 - zy)^2}, \quad I = \frac{2\,xy + z^2}{x - z} - \ln\left(x^2 - zy\right). \tag{95}$$

5.2 Algumas considerações finais e possíveis desenvolvimentos

Embora as 2EDOs apresentadas na seção anterior estabeleçam uma primeira análise (resumida) da eficiência dos algoritmos desenvolvidos, vários pontos ainda precisam ser levantados/estudados. Nesta seção, destacaremos alguns desses pontos e discutiremos brevemente possíveis caminhos a seguir nesta linha:

1. Embora não tenhamos conseguido construir um exemplo em que o algoritmo probabilístico não encontrasse os polinômios de Darboux (PDs) que são fatores de Υ, é muito difícil estabelecer um conjunto 'estatisticamente confiável' de 2EDOs para estabelecer alguma medida da eficácia (no sentido do escopo de ação) do algoritmo. Uma possível alternativa para um possível caso onde o algoritmo probabilístico não encontre nenhum dos PDs seria a utilização de campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$ para tentar calcular algum PD de grau baixo (usando o MUC padrão na equação $\mathfrak{X}_i(p) = q_ip$) para iniciar o processo.

2. Os algoritmos básicos para o procedimento *DIF* são projetados para o caso em que $\Upsilon \equiv \frac{R}{\mathcal{R}}$ é um polinômio. Porém, se houver algum fator polinomial de $\mathcal{R}$ que não esteja em R, será necessariamente um fator de $\langle \nabla | \mathfrak{X}_i \rangle$ (ver corolário 3.2). Desta forma, podemos tratar este caso da seguinte maneira:

   Considere a 2EDO

$$z' = \frac{x^2y^2z^2 + x^2yz^3 + xy^2z^2 - x^2z^2 + 3xz^3 - 5xyz - 2\,xz^2 + 3yz^2 - 2yz + 4}{3\,x^2y^2z^2 - x^2y^2z + x^2y - 15\,xyz + 2\,xy + 12}. \tag{96}$$

   O procedimento *NLS* encontra $P = -xz\,(xyz - x + 3\,z - 2)$ ($N = N_0 = 3\,x^2y^2z^2 - x^2y^2z + x^2y - 15\,xyz + 2\,xy + 12$). Logo, $\langle \nabla | \mathfrak{X}_1 \rangle = N_y - P_z = 3\,xz\,(2\,xyz - 3)$, entretanto o procedimento *DIF* não consegue encontrar nenhum polinômio de Darboux. Acontece que para esta 2EDO Υ não é um polinômio e seu denominador é um fator de $\langle \nabla | \mathfrak{X}_i \rangle$. Como deve ser um polinômio darboux de $\mathcal{X}_i$ (ou um invariante absoluto), por ser um fator de $\mathcal{R}$, impomos $\mathcal{X}_i(2\,xyz - 3) = (2\,xyz - 3)q_i$ (equações lineares nos indeterminados). Resolvendo as equações encontramos $\mathcal{N} = -xy$, $\mathcal{P} = -xz$ e $\mathcal{Q} = -yz$ e portanto (ver equações (56,57,58)):

$$\mathcal{P}\,N - \mathcal{N}\,P = \Upsilon\,\langle \nabla | \mathfrak{X}_1 \rangle \;\; \Rightarrow \;\; \Upsilon = -\frac{(xyz - 2)^2}{(2\,xyz - 3)}. \tag{97}$$

   Desta forma, podemos encontrar o fator integrante R e a IPL I por quadraturas.

3. Outra maneira de usar o fato de que os campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$ e $\mathfrak{X}$ 'compartilham' os polinômios de Darboux é modificar ligeiramente as partes 1, 2 e 3 do procedimento *DIF* aumentando consideravelmente a eficiência dessas três partes. A ideia é aproveitar o fato de que os campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$ possuem apenas duas componentes e construir candidatos considerando apenas as variáveis de base (ou seja, considerando a variável x_i como uma constante). Na primeira parte (redução dos coeficientes), isso permite uma redução drástica dos coeficientes antes mesmo de usarmos as equações (56,57,58). À medida que os coeficientes diminuem, as partes dois e três (que também dependem do número de coeficientes indeterminados) tornam-se muito mais rápidas (em termos computacionais). Vejamos isso em um exemplo concreto: considere 2EDO-3 (veja 2EDO (83)). Após fazer o ajuste mencionado, os resultados são:

   Comparando os tempos de CPU (e gasto de memória) mostrados nas tabelas 3 e 4 com os das tabelas 9 e 10, podemos ver que a mudança melhora significativamente a eficiência do procedimento *DIF*. Para as outras seis 2EDOs os custos de tempo/memória (totais) estão na tabela 11:

Tabela 9 - Gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas do procedimento para 2ODE-3a após o ajuste

Algoritmo	Tarefa	Memória (MB)	Tempo (sec)
NLS	Determinar $\{N, P, Q\}$	1	0.063
DIF (parte 1)	Redução de Coeficientes	0	0.375
DIF (parte 2)	Calcular PDs	0	0.015
DIF (parte 3)	Calcular o Υ	0	0.000
NLSDIF	Encontrar uma IPL I	1	0.453

Fonte: O autor, 2023.

Tabela 10 - Gasto de tempo e memória das rotinas mais custosas do procedimento para 2ODE-3b após o ajuste

Algoritmo	Tarefa	Memória (MB)	Tempo (sec)
NLS	Determinar $\{N, P, Q\}$	1	0.063
DIF (parte 1)	Redução de Coeficientes	0	0.344
DIF (parte 2)	Calcular PDs	1	0.016
DIF (parte 3)	Calcular o Υ	4	0.984
NLSDIF	Encontrar uma IPL I	6	1.407

Fonte: O autor, 2023.

Tabela 11 - comparação do gasto de tempo e memória para o primeiro conjunto de 2-EDOs

2EDO	Memória (MB)	Tempo (sec)
1	1	0.200
2	1	0.031
4	1	0.016
5	1	0.126
6	1	0.031
7	1	1.078

Fonte: O autor, 2023.

Tabela 12 - comparação do gasto de tempo e memória para o o segundo conjunto de 2-EDOs

2EDO	Memória (MB)	Tempo (sec)
5	19	5.047 (*)
6	4	0.956 (*)
7	3	0.235

Fonte: O autor, 2023.

4. Para o primeiro conjunto (2EDOs 1 a 4) a primeira parte do método da função-S é incapaz de determinar a simetria em um curto espaço de tempo ($\leq$ a 30 segundos). Mesmo que a simetria tenha sido encontrada, a 1EDO associada não pode ser resolvida pelo comando `dsolve` do Maple. Para o segundo conjunto os custos de tempo/memória são:

   (*) - `dsolve` não conseguiu resolver a 1EDO associada, ou seja, apenas a primeira parte (cálculo da simetria) foi realizada.

5. A única etapa não linear do procedimento DIF consiste em determinar os expoentes dos polinômios de Darboux que são fatores de Υ (no caso em que o 2EDO apresenta uma IPL não elementar). Existem várias maneiras de calcular esses expoentes e algumas são computacionalmente mais custosas. Porém, na grande maioria dos casos, podemos evitar esta parte utilizando os expoentes fornecidos pelo próprio algoritmo probabilístico, principalmente se utilizarmos a melhoria descrita no item 3. Por exemplo, no exemplo 3.1 o algoritmo probabilístico (usando $\mathfrak{X}_3$) retorna os seguintes PDs: $\left\{x, (xy-z)^2, xy-z, x^2z-y\right\}$. Nesse exemplo $\Upsilon = (xy-z)^2\,(x^2z-y)\,x$ e assim, a terceira parte (custando 0,422 segundos) é desnecessária.

6. Existem algumas questões ligadas à estrutura dos fatores integrantes e integrais primeiras que, nesta fase do estudo, ainda não foram respondidas. Algumas das principais questões são:

   (a) Até agora não conseguimos estabelecer um limite para o grau dos polinômios $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ e Υ.

   Questão 1: No caso 'não degenerado' (Υ é um polinômio), podemos estabelecer um limite superior para o grau dos polinômios $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ e Υ?

   Observação 5.6. Em caso afirmativo, isso imporia um limite ao grau dos polinômios de Darboux que são fatores de Υ.

   (b) O espaço de soluções $\mathcal{V}$ do sistema linear de indeterminados $S_E \equiv \bigcup_i S_{E_i}$ é um espaço linear de certa dimensão d_s.

Pergunta 2: Como d_s está relacionado ao campo vetorial $\mathfrak{X}$?

Subquestões: Como são as dimensões d_{si} dos espaços lineares $\mathcal{V}_i$ ($\mathcal{V}_i \equiv$ o espaço de soluções do sistema S_{E_i}) relacionados aos campos vetoriais $\mathfrak{X}_i$? d_s está relacionado ao número de polinômios irredutíveis de Darboux presentes no fator integrante? Ou ao número de fatores exponenciais?

(c) Os polinômios que aparecem multiplicados pelos coeficientes restantes quando substituímos a solução S_{sys} em Υ_c são os vetores base de uma possível representação do espaço linear $\mathcal{V}$. No exemplo 3.1 vimos que um desses 'vetores base' era exatamente a solução que procurávamos (Υ).

Pergunta 3: Existe uma base 'canônica' $\boldsymbol{e}_{\mathcal{V}}$ para o espaço $\mathcal{V}$, em que a solução procurada para Υ é uma das os vetores de base na representação Sol_{Υ}?

Subquestões: Em $\boldsymbol{e}_{\mathcal{V}}$, o que os outros vetores de base podem representar? É possível calcular $\boldsymbol{e}_{\mathcal{V}}$ sem usar a etapa 16 do algoritmo *DIF* no caso de uma IPL não-elementar?

7. A ideia de campos vetoriais que 'compartilham' os polinômios de Darboux parece ser muito frutífera e ainda há muito a ser estudado e aprimorado. Uma das principais virtudes deste tipo de ideia é que ela parece ser generalizável para EDOs de ordem superior a dois e, possivelmente, para equações diferenciais parciais.

CONCLUSÃO

Neste trabalho desenvolvemos um novo método para utilizar uma simetria não-local na busca de integrais primeiras Liouvillianas para 2EDOs racionais. A ideia central consiste em construir campos vetoriais 2D que compartilham o fator integrante R e a integral primeira I com a 2EDO. A partir daí podemos construir um algoritmo probabilístico muito eficiente para determinar os polinômios de Darboux presentes no fator integrante R. O surpreendente é (alem da eficiência) a abrangência do algoritmo probabilístico: não conseguimos encontrar nenhum exemplo em que ele falhasse em determinar os polinômios de Darboux. Dessa forma, o método resultante é muito poderoso. O método foi implementado em um pacote computacional na plataforma de computação simbólica Maple. O pacote, além de encontrar a integral primeira usando os algoritmos desenvolvidos, apresenta comandos que materializam todas as etapas do processo de resolução. Os comandos também possuem vários parâmetros que ajudam tanto no processo de busca de soluções como também na pesquisa em física e matemática. Por fim, em relação a futuros desenvolvimentos, esse algoritmo probabilístico abre toda uma nova linha de pesquisa para este tipo de problema. Para maiores detalhes, veja a seção 5.2.

REFERÊNCIAS

ABRAHAM-SHRAUNER, B. Hidden symmetries and nonlocal group generators for ordinary differential equations. *IMA J. Appl. Math.*, [s. l.], v. 56, n. 3, p. 235-252, 1996.

ABRAHAM-SHRAUNER, B.; GOVINDER, K.S.; LEACH, P.G.L. Integration of second order ordinary differential equations not possessing Lie point symmetries. *Phys. Lett. A*, [s. l.], v. 203, p. 169-174, 1995.

ABRAHAM-SHRAUNER, B.; GUO, A. Hidden symmetries associated with the projective group of nonlinear first-order ordinary differential equations. *J. Phys. A: Math.Gen.*, [s. l.], v. 25, p. 5597-5608, 1992.

ABRAHAM-SHRAUNER, B.; GUO, A. Hidden and nonlocal symmetries of nonlinear differential equations. In: IBRAGIMOV, N. H.; TORRISSI, M.; VALENTI, G. A. (Ed.). *Modern group analysis*: advanced analytical and computational methods in mathematical physics. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 1-5.

ALVAREZ, M.J.; FERRAGUT, A.; JARQUE, X. A survey on the blow up technique. International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 21, n. 11, p. 3103-3118, 2011.

ADAM A. A.; MAHOMED, F. M. Non-local symmetries of first-order equations. *IMA J. Appl. Math.*, [s. l.], v. 60, n. 2, p. 187-198, 1998.

AVELLAR, J. *Determinação de integrais primeiras liouvillianas em equações diferenciais ordinárias de segunda ordem*. 2013. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

AVELLAR, J.; CARDOSO, M. S.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. Dealing with rational second order ordinary differential equations where both Darboux and Lie find it difficult: the S-function method. *Computer Physics Communications*, [s. l.], v. 234, p. 302-314, 2019.

AVELLAR, J.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. PSsolver: A Maple implementation to solve first order ordinary differential equations with Liouvillian solutions. *Computer Physics Communications*, [s. l.], v. 183, n. 10, p. 2313, Oct. 2012.

AVELLAR, J.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. A Maple package to find first order differential invariants of 2ODEs via a Darboux approach. *Computer Physics Communications*, [s. l.], v. 185, p. 307-316, 2014.

AVELLAR, J.; DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P. Integrating first-order differential equations with Liouvillian solutions via quadratures: a semi-algorithmic method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, [s. l.], 182, 327-332, 2005.

AVELLAR, J.; DUARTE, L.G.S. ; DUARTE, S.E.S.; DA MOTA, L.A.C.P. Determining Liouvillian first integrals for dynamical systems in the plane. *Computer Physics Communications*, [s. l.], v. 177, p. 584-596, 2007a.

AVELLAR, J.; DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P. A semi-algorithm to find elementary first order invariants of rational second order ordinary differential equations. *Appl. Math. Comp.*, [s. l.], v. 184, n. 1, p. 2-11, 2007b.

BLUMAN, G. W.; ANCO, S. C. *Symmetries and integration methods for differential equations*. New York: Springer, 2002. Applied Mathematical Series, v. 154.

BOSTAN, A.; CHÈZE, G.; CLUZEAU, T.; WEIL, J.-A. Efficient algorithms for computing rational first integrals and Darboux polynomials of planar polynomial vector fields. *Mathematics of Computation*, [s. l.], v. 85, p. 1393-1425, 2016.

BRAZ, A.; CARDOSO, M. S.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. A generalization of the S-function method applied to a Duffing–Van der Pol forced oscillator. *Computer Physics Communications*, [s. l.], v. 254, p. 107306, 2020.

BRUZÓN, M .S.; GANDARIAS M. L.; SENTHILVELAN, M. Nonlocal symmetries of Riccati and Abel chains and their similarity reductions. *Journal of Mathematical Physics*, [s. l.], v. 53, 10 p., 023512, 2012.

CAIRO L.; LLIBRE, J. Darboux Integrability for 3D Lotka-Volterra systems. *J. Phys. A*: Math. Gen., [s. l.], v. 33, p. 2395-2406, 2000.

CHEB-TERRAB, E. S.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. Computer algebra solving of first order EDOs using symmetry methods. *Comput. Phys. Commun.*, [s. l.], v. 101, n. 254, p. 1-13, 1997.

CHEB-TERRAB, E. S.; DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. Computer algebra solving of second order EDOs using symmetry methods. *Comput. Phys. Commun.*, [s. l.], v. 108, n. 90, p. 1-22, 1998.

CHÈZE, G. Computation of Darboux polynomials and rational first integrals with bounded degree in polynomial time. *Journal of Complexity*, [s. l.], v. 27, p. 246-262, 2011.

CHÈZE, G.; COMBOT, T. Symbolic computations of first integrals for polynomial vector fields. *Foundations of Computational Mathematics*, [s. l.], v. 20, p. 681-752, 2019.

CHRISTOPHER, C. Invariant algebraic curves and conditions for a center. *Proc. R. Soc. Edin. A*, [s. l.], v. 124, p. 1209, 1994.

CHRISTOPHER, C. Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations. *Electron. J. Differential Equations*, [s. l.], n. 49, 7 p., 1999.

CHRISTOPHER C.; J. LLIBRE, J. Integrability via invariant algebraic curves for Planar polynomial differential systems. *Ann. Differential Equations*, [s. l.], v. 16, n. 1, p. 5-19, 2000.

CHRISTOPHER, C.; LLIBRE, J.; PANTAZI C.; WALCHER, S. Inverse problems in Darboux' theory of integrability. *Acta Applicandae Mathematicae*, [s. l.], v. 120, p. 101-126, 2012.

CHRISTOPHER, C.; LLIBRE, J.; PANTAZI, C.; WALCHER, S. On planar polynomial vector fields with elementary first integrals. *J. Differential Equations*, [s. l.], v. 267, p. 4572–4588, 2019.

CICOGNA, G.; GAETA G.; MORANDO, P. On the relation between standard and μ-symmetries for PDEs. *Journal of Physics A*: Mathematical and General, [s. l.], v. 37, n. 40, p. 9467-9486, 2004.

CICOGNA, G.; GAETA G.; WALCHER, S. Dynamical systems and σ-symmetries. *Journal of Physics A:* Mathematical and Theoretical, [s. l.], v. 46, n. 23, 23 p., 2013.

COLLINS, C. B. Algebraic invariants curves of polynomial vector fields in the plane. [Waterloo]: University of Waterloo, 1993a. Preprint.

COLLINS, C. B. Quadratic vector fields possessing a centre. [Waterloo]: University of Waterloo, 1993b. Preprint.

DARBOUX, G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges). *Bull. Sci. Math. 2me. série* , [s. l.], t. 2, n. 1, p. 60-96, 123-144, 151-200, 1878.

DAVENPORT , J. H.; SIRET, Y.; TOURNIER, E. *Computer algebra*: systems and algorithms for algebraic computation. [S. l.]: Academic Press, 1993.

DEMINA, M. V. Novel algebraic aspects of Liouvillian integrability for twodimensional polynomial dynamical systems. *Physics Letters A*, [s. l.], v. 382, n. 20, p. 1353-1360, 2018.

DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. An efficient method for computing Liouvillian first integrals of planar polynomial vector fields. *Journal of Differential Equations*, [s. l.], v. 300, p. 356-385, 2021.

DUARTE, L. G. S.; DA MOTA, L. A. C. P. Finding elementary first integrals for rational second order ordinary differential equations. *J. Math. Phys.*, [s. l.], v. 50, 20 p., 2009.

DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P. A method to tackle first order ordinary differential equations with Liouvillian functions in the solution. J. Phys. A: Math. Gen., [s. l.], v. 35, p. 3899-3910, 2002a.

DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P. Analyzing the structure of the integrating factors for first order ordinary differential equations with Liouvillian functions in the solution. J. Phys. A: Math. Gen., [s. l.], v. 35, p. 1001-1006, 2002b.

DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L. A. C. P.; SKEA, J. F. E. Solving second order ordinary differential equations by extending the Prelle-Singer method. J. Phys. A: Math. Gen., [s. l.], v. 34, p. 3015-3024, 2001.

DUARTE, L. G.S.; DUARTE, S. E. S.; DA MOTA, L.A C. P.; SKEA, J. E. F. An extension of the Prelle–Singer method and a Maple implementation. *Computer Physics Communications*, [s. l.], v. 144, p. 46–62, 2002.

EIRAS, J. P. C. *Sistemas 3D de 1EDOs*: a busca por invariantes liouvillianos. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

FERRAGUT, A.; GALINDO, C.; MONSERRAT, F. On the computation of Darboux first integrals of a class of planar polynomial vector fields. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, [s. l.], v. 478, p. 743-763, 2019.

FERRAGUT A.; GASULL, A. Seeking Darboux Polynomials. *Acta Applicandae Mathematicae*, [s. l.], v. 139, p. 167–186, 2015.

FERRAGUT, A.; GIACOMINI, H. A New algorithm for finding rational first integrals of polynomial vector fields. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, [s. l.], v. 9, p. 89-99, 2010.

FITZHUGH, F. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes. *Biophysics Journal*, [s. l.], v. 1, n. 6, p. 445-466, 1961.

GANDARIAS M .L; BRUZÓN, M. S. Reductions for some ordinary differential equations through nonlocal symmetries. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, [s. l.], v. 18, Suppl. 1, p. 123–133, 2011.

GOVINDER, K.S.; LEACH, P.G.L. A group theoretic approach to a class of second-order ordinary differential equations not possesing Lie point symmetries. *J. Phys. A: Math. Gen.*, [s. l.], v. 30, n. 6, p. 2055-2068, 1997.

IBRAGIMOV, N. H. *Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations*. Wiley: Chichester, 1999.

KAMKE, E. *Differentialgleichungen*: Lösungsmethoden und Lösungen. New York: Chelsea, 1959.

LEVINSON, N.; SMITH, O. A general equation for relaxation oscillations. *Duke Mathematical Journal*, [s. l.], v. 9, n. 2, p. 382-403, 1942.

LIE, S. Theorie der Transformationsgruppen, v. I, II, III. Chelsea; New York: [s. n.],1970.

LIENARD, A. Etude des oscillations entretenues. *Revue Générale de l'Électricité*, [s. l.], v. 23, p. 901- 912; p. 946-954, 1928.

LLIBRE, J. Integrability of polynomial differential systems. In: CAÑADA, A.; DRÁBEK, P.; FONDA, A. *Handbook of differential equations, ordinary differential equations*. [S. l.]: Elsevier, 2004. P. 437-531.

LLIBRE J.; ZHANG, X. Darboux theory of integrability for polynomial vector fields in Rn taking into account the multiplicity at infinity. *Bull. Sci. Math.*, [s. l.], v. 133, p. 765–778, 2009.

MURIEL C.; ROMERO, J. L. New methods of reduction for ordinary differential equations. *IMA J. Appl. Math.*, [s. l.], v. 66, n. 2, p. 11-125, 2001.

MURIEL C.; ROMERO, J. L. C. ∞-Symmetries and reduction of equations without Lie point symmetries. *J. Lie Theory*, [s. l.], v. 13, n. 1, p. 167-188, 2003.

MURIEL C.; ROMERO, J. L. Nonlocal symmetries, telescopic vector fields and λ-symmetries of ordinary differential equations. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, [s. l.], v. 8, n. 106, 21 p., 2012.

MURIEL C.; ROMERO, J. L. The λ-symmetry reduction method and Jacobi last multipliers. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, [s. l.], v. 19, p. 807–820, 2014.

NUCCI, M. C. Jacobi last multiplier and lie symmetries: a novel application of an old relationship. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, [s. l.], v. 12, n. 2, p. 284-304, 2005.

NUCCI, M. C. Lie symmetries of a Painlev´e-type equation without Lie symmetries. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, [s. l.], v. 15, n. 2, p. 205-211, 2008.

OLVER, P. J. *Applications of Lie groups to differential equations*. [Berlin]: Springer, 1986.

PRELLE M.; SINGER, M. Elementary first integral of differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, [s. l.], v. 279, n. 1, p. 215-229, 1983.

PUCCI E.; SACCOMANDI, G. On the reduction methods for ordinary differential equations. *J. Phys. A*: Math. Gen., [s. l.], v. 35, p. 6145-6155, 2002.

RAN, Z. One exactly soluble model in isotropic turbulence. *Advances and Applications in Fluid Mechanics*, [s. l.], 5, n. 1, p. 41-47, 2009.

SCHLOMIUK, D. Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center. *Transactions of the American Mathematical Society*, [s. l.], v. 338, n. 2, p. 799-841, 1993.

SCHWARZ, F. *Algorithmic Lie theory for solving ordinary differential equations*. [S. l.]: Chapman Hall, 2008.

SHTOKHAMER, R. *Solving first order differential equations using the Prelle-Singer algorithm*. [Delaware]: University of Delaware. Center for Mathematical Computation, 1988. Technical report 88-09.

SINGER, M. Liouvillian first integrals of differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, [s. l.], v. 333, n. 2, p. 673-688, 1992.

STEEB, W. H. *Continuous symmetries, Lie algebras, differential equations and computer algebra*. [S. l.]: World Scientific, 2007.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos*. Reading: Addison-Wesley, 1994.

VAN DER POL, B. On relaxation-oscillations. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, [s. l.], v. 2, n, 11, p. 978-992, 1927.

VAN DER POL, B.; VAN DER MARK, J. The heart beat considered as a relaxation oscillations and an electrical model of the heart. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, [s. l.], v. 6, n. 38, p. 763-775, 1928.

ZHANG, X. Liouvillian integrability of polynomial differential systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, [s. l.], v. 368, p. 607-620, 2016.