



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Patrícia Reis Martins

A maximização da assimetria na seleção de carteiras eficientes

Rio de Janeiro

2023

Patrícia Reis Martins

A maximização da assimetria na seleção de carteiras eficientes



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof^a Dra. Patrícia Nunes da Silva
Coorientador: Prof. Dr. Carlos Frederico F. B. Vasconcellos

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC/A

M386 Martins, Patrícia Reis
A maximização da assimetria na seleção de carteiras eficientes/ Patrícia Reis Martins. – 2023.
116 f.: il.

Orientadora: Patricia Nunes da Silva
Coorientador: Carlos Frederico F. B. Vasconcellos
Tese (Doutorado em Ciências Computacionais) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Estatística matemática - Teses. 2. Análise de variância - Teses. 3. Investimentos - Teses. I. Silva, Patricia Nunes da. II. Vasconcellos, Carlos Frederico F. B. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística.IV. Título.

CDU 519.2

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Patrícia Reis Martins

A maximização da assimetria na seleção de carteiras eficientes

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 13 de abril de 2023.

Banca Examinadora:

Prof^a Dra. Patrícia Nunes da Silva (Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Carlos Frederico F. B. Vasconcelos (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof^a Dra. Lucelina Batista dos Santos
Departamento de Matemática – UFPR

Prof^a Dra. María Soledad Aronna
Escola de Matemática Aplicada – FGV

Prof^a Dra. Cristiane Oliveira de Faria
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof^a Dra. Zochil González Arenas
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

Aos meus grandes amores, Lúcio, Júlia, Mia e Mel.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, agradeço a Deus, que está presente em todos os momentos de nossas vidas, promove nossas melhores oportunidades, nos inspira , nos motiva, e fortalece nossa alma.

Agradeço aos meus orientadores, Patrícia Nunes e Carlos Frederico que me acompanharam nesta trajetória e em outras, e foram fundamentais em todos os nossos trabalhos.

Agradeço à minha família, que agora e sempre são a base de tudo que eu sou, e do muito que aprendi, influenciando permanentemente as minhas escolhas.

E em especial, agradeço às duas pessoas mais importantes da minha vida, meu marido Lúcio e minha filha Júlia, que me incentivam, me fortalecem, são a luz da minha vida e representam tudo o que realmente importa, o Amor.

No princípio era o Verbo, e o Verbo estava com Deus, e o Verbo era Deus.

Tudo foi feito por Ele; e nada do que tem sido feito, foi feito sem Ele.

Nele estava a vida, e a vida era a luz dos homens.

João 1:1 - 4

RESUMO

MARTINS, Patricia Reis. *A maximização da assimetria na seleção de carteiras eficientes*. 2023. 11 f. Tese (Doutorado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Este trabalho trata de modelos de seleção de carteiras de investimento que consideram momentos de ordem superior. Analisa as estruturas e dá suporte à teoria matemática nestes modelos, a partir de um modelo que considera os três primeiros momentos da distribuição multivariada de n ativos de risco presentes em uma carteira, que inclui um ativo livre de risco e permite vendas a descoberto. Exploramos a dualidade dos problemas de otimização envolvidos, para propor outras abordagens para o mesmo modelo e novas generalizações. Resolvemos a questão da existência de solução nestes problemas de otimização, e delineamos a região de dualidade no modelo a três momentos, onde as carteiras ótimas serão eficientes, definindo condições para que, dada uma tripla ótima associada à solução, qualquer que seja a abordagem do problema, seja possível saber se ela pertence ou não à região de dualidade e é de fato uma solução eficiente. Introduzimos ainda um modelo a quatro momentos pela incorporação da curtose, com a apresentação das quatro possíveis abordagens do problema de otimização com três restrições, associadas a este modelo. Complementamos toda a teoria apresentada, com simulações numéricas para os modelos a três e a quatro momentos, utilizando o programa Octave nestes testes numéricos. Com isso verificamos a eficácia na aplicação de ambos os modelos, discutindo os resultados obtidos.

Palavras-chave: Seleção de portfólio. Assimetria máxima. Fronteira eficiente. Dualidade.

ABSTRACT

MARTINS, Patricia Reis. *Maximizing skewness in the selection of efficient portfolios*. 2023. 11 f. Tese (Doutorado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

This work deals with investment portfolio selection models that consider higher order moments. It analyzes the structures and supports the mathematical theory in these models, based on a model that considers the first three moments of the multivariate distribution of n risky assets present in a portfolio, which includes a risk-free asset and allows short sales. We explore the duality of the optimization problems involved, to propose other approaches for the same model and new generalizations. We solve the question of the existence of a solution in these optimization problems, and we delineate the region of duality in the three-moment model, where the optimal portfolios will be efficient, defining conditions so that, given an optimal triple associated with the solution, for any approach of the problem, it is possible to know whether or not it belongs to the duality region and if it is in fact an efficient solution. We also introduce a four-moment model by incorporating kurtosis, with the presentation of four possible approaches to the three-constraint optimization problem associated with this model. We complement all the theory presented, with numerical simulations for the three and four moment models, verifying the effectiveness in the application of both models, and discussing the obtained results.

Keywords: Portfolio selection. Maximum skewness. Efficient frontier. Duality.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|----------|---|----|
| Figura 1 | - Tabela das triplas de assimetria máxima | 81 |
| Figura 2 | - Superfície de assimetria máxima | 82 |
| Figura 3 | - Superfície de assimetria máxima | 83 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|----------|---|-----|
| Tabela 1 | - Discriminação dos ativos, classificação e risco segundo a corretora XP. . | 75 |
| Tabela 2 | - Retornos mensais por ativos | 76 |
| Tabela 3 | - Confronto dos resultados Média-Variância e Modelo a três momentos | 79 |
| Tabela 4 | - Resultados no modelo a três momentos para a combinação dos Ativos 678 . | 109 |
| Tabela 5 | - Resultados no modelo a quatro momentos para a combinação dos Ativos 6, 7 e 8 | 110 |
| Tabela 6 | - Resultados no modelo a três momentos para a combinação dos Ativos 2, 4 e 6 | 111 |
| Tabela 7 | - Resultados no modelo a quatro momentos para a combinação dos Ativos 2, 4 e 6 | 112 |

SUMÁRIO

| | | |
|-------|--|----|
| | INTRODUÇÃO | 12 |
| 1 | RESULTADOS E CONCEITOS PRELIMINARES | 15 |
| 1.1 | Conceitos e resultados de estatística | 15 |
| 1.2 | Configuração do modelo | 19 |
| 1.3 | Método de Lagrange | 21 |
| 1.4 | Teorema de Euler | 23 |
| 1.5 | Modelo Média-Variância de Markowitz | 24 |
| 1.5.1 | <u>Modelo Média-Variância original</u> | 24 |
| 1.5.2 | <u>Modelo Média-Variância com n ativos de risco e um ativo livre de risco</u> . . | 26 |
| 1.6 | Problema da carteira de variância mínima de Athayde e Flôres . | 28 |
| 1.6.1 | <u>Uma generalização do problema de variância mínima</u> | 29 |
| 1.7 | Dualidade | 30 |
| 2 | MODELO A TRÊS MOMENTOS | 32 |
| 2.1 | Seleção de portfólio como um problema de otimização a três momentos | 33 |
| 2.1.1 | <u>Existência de solução</u> | 34 |
| 2.2 | Maximizando a assimetria | 35 |
| 2.2.1 | <u>Solução trivial</u> | 35 |
| 2.2.2 | <u>Solução não trivial para o problema de assimetria máxima</u> | 36 |
| 2.3 | Minimização da variância - algumas contribuições | 39 |
| 2.3.1 | <u>Dependência linear e a solução trivial - problema de variância mínima</u> . . | 41 |
| 2.4 | Maximizando o retorno esperado. | 44 |
| 2.5 | Resultados de dualidade no modelo a três momentos | 48 |
| 2.5.1 | <u>Alguns aspectos da dependência linear – novos resultados</u> | 53 |
| 2.5.2 | <u>Tratamento para os pontos ótimos</u> | 55 |
| 2.5.3 | <u>Dualidade na solução trivial</u> | 56 |
| 2.5.4 | <u>Dualidade na solução não-trivial</u> | 58 |
| 2.6 | Homotetia no modelo a três momentos | 64 |
| 2.6.1 | <u>Homotetia no problema de assimetria máxima</u> | 65 |
| 2.6.2 | <u>Homotetia no problema de variância mínima</u> | 67 |
| 2.6.3 | <u>Homotetia no problema de retorno máximo</u> | 68 |
| 3 | SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO A TRÊS MOMENTOS | 71 |
| 3.1 | Etapas de aplicação do modelo a três momentos | 72 |
| 3.2 | Resultados | 74 |
| 3.3 | Expandindo os resultados | 80 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 4 | A GENERALIZAÇÃO DO MODELO A TRÊS MOMENTOS PARA MOMENTOS ÍMPARES DE ORDEM SUPERIOR . . . | 85 |
| 4.1 | Um caso particular associado ao modelo que minimiza um mo- mento par de ordem p | 85 |
| 4.1.1 | <u>Generalização do modelo de Markowitz para momentos de ordem superior</u> | 86 |
| 4.2 | Maximização da assimetria fixados um momento de ordem par e o retorno | 88 |
| 4.2.1 | <u>O problema dual quando maximizamos a assimetria</u> | 88 |
| 4.3 | Generalizando o modelo a três momentos pela maximização de um momento ímpar de ordem superior | 91 |
| 4.3.1 | <u>Maximizando um momento ímpar de ordem $q \geq 3$</u> | 92 |
| 4.3.2 | <u>Maximizando um momento de ordem ímpar qualquer</u> | 93 |
| 5 | MINIMIZANDO A CURTOSE EM UM MODELO A QUATRO MOMENTOS | 96 |
| 5.1 | Três problemas duais ao problema de curtose mínima a quatro momentos | 101 |
| 5.1.1 | <u>Minimizando a variância a quatro momentos</u> | 101 |
| 5.1.2 | <u>Maximizando a assimetria a quatro momentos</u> | 103 |
| 5.1.3 | <u>Maximizando o retorno a quatro momentos</u> | 105 |
| 5.2 | Simulação numérica para o modelo a quatro momentos | 107 |
| | CONCLUSÃO | 114 |
| | REFERÊNCIAS | 115 |

INTRODUÇÃO

Na busca pelos melhores resultados em uma aplicação financeira, optar por uma carteira que proporcione maior retorno e menor risco é sem dúvida vista como uma boa estratégia. Assim, como sugeriu Markowitz (1952), o criador da Teoria Moderna do Portfólio, o melhor seria escolher uma carteira com o maior retorno para uma dada variância ou, equivalentemente, uma carteira com a menor variância dado um retorno esperado. Segundo a Teoria Moderna do Portfólio, selecionar carteiras eficientes consiste em determinar os ponderadores, referentes à contribuição do capital investido, dos ativos que compõem a carteira de investimento, de modo a otimizar o resultado esperado pela diversificação. Markowitz (1952) resolveu este problema de seleção de portfólio considerando um cenário de distribuição normal de retornos de ativos, e sua teoria continua prevalecendo até hoje.

Muito se discute ainda sobre o fato da distribuição dos retornos dos ativos apresentar uma assimetria significativa e nem sempre seguir uma Distribuição de Probabilidade Normal. Han e Wog (2021) estudaram um problema de seleção de portfólio de média-variância de Markowitz em tempo contínuo sob um ambiente estocástico, o modelo Volterra Heston, e Tsang, Sit e Wong (2022) consideraram um problema de otimização de carteira multi-período distributivamente robusto com função objetivo dada por uma medida de risco espectral sob correlações de ambiguidade. No entanto, estudos posteriores apontaram inconsistências no modelo de média-variância, uma vez que a distribuição de ativos raramente retorna seguindo um padrão de distribuição normal. Trabalhos como Arditti e Levy (1975) e Kraus e Litzenberger (1976), defendem a relevância dos momentos de ordem superior, fora de um contexto de distribuição normal, entendendo-se que a forma da distribuição é caracterizada pelos momentos centrados. É visto que o interesse pela otimização de um portfólio onde figuram momentos de ordem superior à ordem 2 dos retornos dos ativos que compõem a carteira vem se renovando nos últimos anos, e a influência desses momentos tem sido amplamente investigada, dada a possibilidade de se obter uma melhor aproximação para a função utilidade. Estudos como Athayde e Flôres (2004), Barone-Adesi (1985), Harvey e Siddique (2000) também argumentam sobre a importância dos momentos de ordem superior para a escolha de uma carteira mais eficiente. Kane (1982) discute o impacto da assimetria na tomada de riscos. Scott e Horvath (1980) fornecem um suporte formal para a aplicação desta teoria, mostrando que, no contexto da otimização, para maximizar a função utilidade, os momentos ímpares devem ser maximizados, enquanto que os momentos pares devem ser minimizados, o que se traduz na satisfação do investidor. Sob a hipótese de que a assimetria na distribuição dos retornos decorre de um ruído estocasticamente independente adicionado à distribuição Gaussiana multivariada dos retornos dos ativos, Gamba e Rossi (1998) estudaram um modelo de

seleção de portfólio baseado em três momentos. Abordando a questão de lidar com momentos mais altos e incerteza de parâmetro, Harvey et al. (2010) usou a estrutura teórica de decisão bayesiana para um modelo de seleção de portfólio ideal. Neste sentido, Athayde e Flôres (2004) propõem um modelo que incorpora o momento centrado na média de ordem 3 dos retornos dos ativos, aqui tratado por assimetria, ao problema de selecionar carteiras de investimento, estendendo o modelo Média-Variância de Markowitz (1952). Afirmam que a seleção de portfólio pode ser vista como um problema de minimização da variância sujeito a retorno esperado e assimetria fixos, o que corresponde a um problema de otimização com duas restrições. Indicam uma solução para o problema de minimizar a variância, apresentando uma configuração ótima para a carteira de variância mínima, e com isso sugerem uma maneira de obter resultados mais eficientes. Em seu trabalho, eles apresentam um modelo matemático que considera os três primeiros momentos na seleção do portfólio e um importante resultado de dualidade. A dualidade em problemas de otimização garante, sob certas condições, a mesma solução para duas configurações do mesmo problema.

Contribuições, como as verificadas nos trabalhos de Athayde e Flôres (2006, 2004), lançam luz a uma série de questões que antes impediam o desenvolvimento matemático desta importante abordagem na seleção de carteiras de investimento, mas trazem novas questões a serem investigadas, que surgem a partir desta nova possibilidade. Quando se replica o modelo Média-Variância com a incorporação da assimetria, para um modelo a três momentos, observam-se três problemas de otimização associados a ele, que suscitam uma relação de dualidade. As condições para que a dualidade ocorra, a estrutura geométrica de cada abordagem dual associada ao mesmo modelo, a forma como os problemas duais se relacionam e a existência de uma solução para o modelo proposto tornam-se objeto de interesse, pois tais elementos são cruciais para garantia dos resultados já alcançados. Estes são alguns dos objetos centrais do nosso trabalho.

A assimetria agora assume o lugar de destaque, demandando uma atenção especial na análise do modelo. O modelo Média-Variância por sua vez se mostrou crucial, a medida que norteia a imposição dos parâmetros no conjunto factível onde a assimetria será maximizada.

Em nosso primeiro capítulo, reunimos alguns conceitos e resultados preliminares, que consideramos mais importantes, para facilitar o entendimento e dar suporte aos demais capítulos. Dentre eles apresentamos o modelo de Média-Variância de Markowitz, apresentamos o problema de Athayde e Flôres (2004, 2006) associado ao modelo a três momentos com sua generalização para momentos pares de ordem p , e um resultado preliminar de dualidade. O Capítulo 2, apresenta novos resultados na caracterização do conjunto de soluções para um problema de seleção de portfólio, em que são considerados os três primeiros momentos de uma distribuição multivariada, sendo permitidas vendas a descoberto, para n ativos com risco e um sem risco. Nele resolvemos a questão da existên-

cia de solução no modelo a três momentos, abordando as três possíveis versões associadas a este modelo, para verificar e explorar a condição de dualidade entre os problemas de otimização envolvidos, incluindo seus casos particulares. Essa abordagem unificadora pretende esclarecer a compreensão da fronteira eficiente no modelo a três momentos e sua relação com o modelo Média-Variância. O Capítulo 3 faz uma simulação numérica para o modelo a três momentos, onde são considerados: média, variância e assimetria dos retornos dos ativos. A aplicação do modelo, a partir de dados coletados na plataforma de uma corretora brasileira de valores, permitiu obter carteiras de assimetria máxima para determinados valores fixos de retorno esperado e variância ponderados da carteira. Os resultados são analisados e apresentados graficamente dando origem a uma superfície ótima de triplas dos momentos, associadas às carteiras de assimetria máxima. Este experimento permitiu confirmar tanto a relevância em se considerar momentos de ordem superior na seleção de carteiras de investimento, como as vantagens quando o problema é abordado pela perspectiva da maximização da assimetria. Além disso verifica-se a eficiência do modelo a três momentos tendo como referência a solução de Markowitz que é obtida através do modelo Média-Variância. No Capítulo 4, apresentamos um modelo geral para selecionar carteiras de investimento a partir da maximização de um momento ímpar de ordem superior quando fixados os dois primeiros momentos. Deduzimos propriedades geométricas de suas soluções. Propomos ainda uma generalização ao modelo Média-Variância de Markowitz, pela minimização de um momento par de ordem superior sujeita a um retorno fixo. O Capítulo 5 propõe um modelo a quatro momentos, com a incorporação da curtose, que será minimizada por se tratar de um momento par da distribuição, estendendo o modelo a três momentos para uma melhor aproximação da função utilidade. Finalizamos este capítulo com uma breve simulação numérica para o modelo a quatro momentos a partir dos dados utilizados no Capítulo 3. E então concluímos, ressaltando nossos resultados mais expressivos e de maior relevância, indicando potenciais continuidades para este trabalho.

1 RESULTADOS E CONCEITOS PRELIMINARES

Um dos problemas fundamentais em finanças é a seleção de carteiras de investimento. Desde o trabalho pioneiro de Markowitz (1952), a seleção de carteiras é feita levando-se em conta os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos: a média e a variância.

O modelo de Markowitz é um modelo matemático cujo objetivo é determinar a participação de cada um dos ativos em uma carteira de investimentos, a fim de proporcionar ao investidor um retorno desejado, minimizando o risco desta aplicação.

Sob o ponto de vista matemático a abordagem de Markowitz para a otimização de carteiras é um problema de Programação Não Linear, especificamente um problema de Otimização Quadrática.

Athayde e Flôres (2004) propõem um modelo para seleção de uma carteira eficiente levando em conta os três primeiros momentos: média, variância e assimetria. Ao considerar momentos de ordem mais alta, a utilidade esperada ainda será maximizada, agora com a incorporação do terceiro momento central, que corresponde à assimetria da distribuição dos retornos dos ativos, contribuindo para uma melhor aproximação da função utilidade.

Este capítulo trata de alguns conceitos preliminares de matemática e estatística necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes e alguns resultados iniciais que são a base de todo o trabalho.

1.1 Conceitos e resultados de estatística

Os conceitos e resultados apresentados nesta seção foram retirados de Mood, Graybill e Boes (1974).

Suponha que para cada ponto de um espaço amostral atribuímos um número. Temos, então, uma função definida no espaço amostral. Esta função é chamada de variável aleatória (ou variável estocástica) ou mais precisamente uma função aleatória (função estocástica).

O valor esperado ou expectativa de uma variável aleatória é a soma das probabilidades de cada possibilidade de saída da experiência multiplicada pelo seu valor. Ele representa o valor médio esperado de uma experiência se ela for repetida muitas vezes.

Definição 1.1.1 (Valor Esperado). *Para uma variável discreta X com valores possíveis x_1, x_2, \dots e com suas probabilidades representadas pela função $p(x_i)$, o valor esperado é calculado por*

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i).$$

Teorema 1.1.1. *Sejam X, Y variáveis aleatórias, α, β constantes. As seguintes propriedades de valor esperado são verificadas:*

$$\begin{aligned} E[\alpha] &= \alpha; \\ E[\alpha X + \beta Y] &= \alpha E[X] + \beta E[Y]; \\ E[X] &\leq E[Y] \quad \text{se } X \leq Y. \end{aligned}$$

Os momentos de uma variável aleatória ou de uma distribuição são os valores esperados das potências da variável aleatória que tem a distribuição dada.

Definição 1.1.2 (Momentos). *Se X é uma variável aleatória, o i -ésimo momento de X , denotado por μ'_i , é definido como*

$$\mu'_i = E[X^i],$$

se o valor esperado existe.

Desta forma para $i = 1$, $\mu'_1 = E[X] = \mu_X$, a média de X .

Definição 1.1.3 (Momentos Centrais). *Se X é uma variável aleatória, o i -ésimo momento central de X sobre a é definido como $E[(X - a)^i]$. Se $a = \mu_X$, temos o i -ésimo momento central de X sobre μ_X , denotado por $\mu_i = E[(X - \mu_X)^i]$.*

A variância, o segundo momento central de X sobre sua média μ_X , será calculada por

$$\mu_2 = E[(X - \mu_X)^2].$$

Agora, seja Y uma variável aleatória e suponha que Y pode assumir um número finito de valores y_1, y_2, \dots, y_n . Seja p_1 a probabilidade de que $Y = y_1$, p_2 a probabilidade de que $Y = y_2$ etc. O valor esperado (ou média) de Y será definido por:

$$E[Y] = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n.$$

Neste caso, a variância de Y é definida como:

$$\text{var}(Y) = p_1 (y_1 - E)^2 + p_2 (y_2 - E)^2 + \dots + p_n (y_n - E)^2.$$

onde $var(Y)$ é o desvio médio de Y , ao quadrado, a partir do seu valor esperado. A variância é uma medida de dispersão comumente utilizada.

Suponha que temos n variáveis aleatórias: X_1, \dots, X_n . Se r_p é uma soma ponderada (combinação linear) dos X_i ,

$$r_p = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n, \quad (1)$$

então r_p também é uma variável aleatória.

É importante saber como o valor esperado e a variância da soma ponderada estão relacionados com a distribuição de probabilidade de X_1, \dots, X_n .

O valor esperado de uma soma ponderada é a soma ponderada dos valores esperados. Isto é

$$E(r_p) = \alpha_1 E(X_1) + \alpha_2 E(X_2) + \dots + \alpha_n E(X_n). \quad (2)$$

Já a variância da soma ponderada é um pouco mais complexa. Para expressá-la precisamos primeiro definir a covariância.

A covariância entre X_i e X_j é um momento conjunto de primeira ordem das variáveis aleatórias X_i e X_j centrados nas respectivas médias. Essa é uma medida do grau de interdependência numérica entre as variáveis aleatórias, e é definida por:

$$cov(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))].$$

Por outro lado, sabe-se que a variância de r_p , que é a **variância de uma soma ponderada**, é por definição:

$$var(r_p) = E[(r_p - E(r_p))^2]. \quad (3)$$

Substituindo-se (1) e (2) na equação (3) teremos:

$$var(r_p) = E[(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n - (\alpha_1 E(X_1) + \alpha_2 E(X_2) + \dots + \alpha_n E(X_n)))^2],$$

ou seja,

$$var(r_p) = E[((\alpha_1 X_1 - \alpha_1 E[X_1]) + (\alpha_2 X_2 - \alpha_2 E[X_2]) + \dots + (\alpha_n X_n - \alpha_n E[X_n]))^2].$$

Desenvolvendo a equação teremos:

$$\begin{aligned} var(r_p) = & E[\alpha_1^2 (X_1 - E[X_1])^2 + \dots + \alpha_n^2 (X_n - E[X_n])^2 + 2\alpha_1 \alpha_n (X_1 - E[X_1])(X_n - E[X_n]) + \\ & + \dots + 2\alpha_{n-1} \alpha_n (X_{n-1} - E[X_{n-1}](X_n - E[X_n])], \end{aligned}$$

onde $E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$ é por definição a covariância entre as variáveis X_i e X_j .

Desta forma a variância de r_p fica definida por:

$$var(r_p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{i>j}^n \alpha_i \alpha_j cov(X_i, X_j).$$

Se usarmos o fato de que a variância de X_i é $cov(X_i, X_i)$ então a variância da variável aleatória r_p é calculada por:

$$var(r_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j cov(X_i, X_j).$$

A variância, assim como o desvio padrão, é uma das medidas de dispersão, que mostra o comportamento dos dados de uma amostra em relação a uma medida central, indicando “o quão longe” em geral os seus valores se encontram do valor esperado.

Já a assimetria é o grau de desvio ou afastamento da simetria de uma distribuição. Quando a distribuição é assimétrica a direita ou esquerda, indica que os valores se concentram em uma das extremidades da curva de distribuição.

De forma análoga, chega-se à assimetria de r_p , que representa o terceiro momento centrado, que é por definição:

$$ass(r_p) = E[(r_p - E(r_p))^3].$$

A co-assimetria entre X_i , X_j e X_k é um momento conjunto das variáveis aleatórias X_i , X_j e X_k centrados nas respectivas médias, definida por:

$$coass(X_i, X_j, X_k) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))(X_k - E(X_k))],$$

e a assimetria de X_i será então $coass(X_i, X_i, X_i)$. Logo, a assimetria da variável aleatória r_p será calculada por:

$$ass(r_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_j \alpha_k coass(X_i, X_j, X_k).$$

A curtose, que representa o quarto momento centrado, mede a concentração ou dispersão dos valores em relação às medidas de tendência central, indicando o grau de achatamento de uma distribuição, em relação a distribuição normal. A curtose de r_p por definição será:

$$kur(r_p) = E[(r_p - E(r_p))^4].$$

A co-curtose entre X_i, X_j, X_k e X_l é um momento conjunto das variáveis aleatórias X_i, X_j, X_k e X_l centrados nas respectivas médias, definida por:

$$cokur(X_i, X_j, X_k, X_l) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))(X_k - E(X_k))(X_l - E(X_l))],$$

e a curtose de X_i , será $cokur(X_i, X_i, X_i, X_i)$. Logo, a curtose da variável aleatória r_p será calculada por:

$$kur(r_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l cokur(X_i, X_j, X_k, X_l).$$

1.2 Configuração do modelo

Como em Athayde e Flôres (2004), neste trabalho, a carteira de investimento é composta por n ativos considerados de risco, mais um ativo que é livre de risco. Além disso, são permitidas vendas a descoberto – uma prática financeira que consiste na venda de um ativo que não se têm de fato – o que no modelo, significa que os pesos poderão ser negativos.

Os pesos, ponderadores dos ativos na carteira, são representados pelo vetor n -dimensional α , um ponto no \mathbb{R}^n :

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

A variável aleatória X_i corresponde ao retorno do i -ésimo ativo presente na carteira. Através da observação dos retornos destes ativos, em determinado intervalo de tempo, podemos inferir sobre seu valor esperado $E[X_i]$.

Dada a matriz \tilde{X} , de dimensão $n \times m$, dos retornos observados dos n ativos de risco durante o período de m meses,

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nm} \end{bmatrix},$$

podemos inferir o valor esperado do retorno de cada ativo, por seu retorno médio neste período. Desta forma, calculando o retorno médio de cada um dos n ativos, no período

de m meses, obtêm-se a matriz M_1 de retornos médios dos ativos com risco:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{bmatrix}.$$

Além disso, define-se r_f como sendo a taxa de retorno do ativo sem risco, e calcula-se a matriz x , que será denominada matriz de retornos excedentes, segundo notação em Athayde e Flôres (2004), na forma:

$$x = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - r_f \\ \bar{X}_2 - r_f \\ \vdots \\ \bar{X}_k - r_f \end{bmatrix}.$$

A partir dos dados da matriz \tilde{X} , são calculados os co-momentos centrados de ordem 2 e de ordem 3, dando origem as matrizes M_2 e M_3 , de co-variâncias e co-assimetrias, respectivamente:

$$M_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{111} & \cdots & \sigma_{1n1} & \cdots & \sigma_{11n} & \cdots & \sigma_{1nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n11} & \cdots & \sigma_{nn1} & \cdots & \sigma_{n1n} & \cdots & \sigma_{nnn} \end{bmatrix},$$

em que $\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$ é a co-variância entre os retornos X_i e X_j , e σ_{ijk} , a co-assimetria entre X_i , X_j e X_k .

As estatísticas ponderadas referentes aos momentos são obtidas através de produtos matriciais, gerando o retorno, a variância e a assimetria ponderadas do conjunto de ativos:

- Retorno esperado (ponderado) do conjunto de ativos com risco:

$$\alpha_1(\bar{X}_1) + \alpha_2(\bar{X}_2) + \dots + \alpha_n(\bar{X}_n) = \alpha^t M_1;$$

- Retorno ponderado pelo peso complementar do ativo livre de risco:

$$\alpha_f r_f = [1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)] r_f = (1 - \alpha^t [\mathbf{1}]) r_f;$$

- Variância ponderada da carteira:

$$\alpha_1^2 \sigma_{11} + 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma_{12} + \dots + \alpha_n^2 \sigma_{nn} = \alpha^t M_2 \alpha;$$

- Assimetria ponderada da carteira:

$$\alpha_1^3 \sigma_{111} + 3\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \sigma_{112} + \dots + \alpha_n^3 \sigma_{nnn} = \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}.$$

M_1 , M_2 e M_3 são, respectivamente, as matrizes contendo os retornos médios, co-variâncias e co-assimetrias calculados a partir dos retornos observados de cada um dos n ativos de risco que compõem a carteira, $[\mathbf{1}]$ é um vetor n -dimensional composto por 1's, \otimes refere-se ao produto de Kronecker, e $\alpha^t M_p (\alpha \otimes \dots \otimes \alpha) = \alpha^t M_p \alpha^{\otimes (p-1)}$ será a notação utilizada ao longo deste trabalho, para denotar o p -ésimo momento.

O retorno esperado da carteira, $E(r_p)$, é uma composição do retorno esperado para o conjunto dos ativos com risco, mais o retorno do ativo livre de risco:

$$E(r_p) = \alpha^t M_1 + (1 - \alpha^t [\mathbf{1}]) r_f.$$

O retorno excedente da carteira será expresso por $R = E(r_p) - r_f$. A matriz de retornos excedentes dos ativos com risco será expressa por $x = M_1 - [\mathbf{1}] r_f$. Assim, pode-se expressar a restrição do retorno excedente esperado como:

$$R = \alpha^t x.$$

Esta configuração garante que a soma dos pesos de todos os ativos, com e sem riscos, presentes na carteira será igual a 1, segundo o retorno esperado $E(r_p)$, sem que com isso seja necessário incluir uma restrição específica aos pesos da carteira no problema de otimização.

1.3 Método de Lagrange

Em problemas de otimização, o método de Lagrange ou método dos multiplicadores de Lagrange permite encontrar os extremos de uma função de uma ou mais variáveis sujeita a uma ou mais restrições.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Lagrange). *Seja $\Omega \subseteq R^n$ um aberto e suponhamos f e g funções com valores reais de classe $C^1(\Omega)$. Seja $c \in \Omega$ tal que $g(c) = 0$ e que exista uma vizinhança U de c tal que*

$$f(x) \leq f(c) \quad [\text{ou } f(x) \geq f(c)],$$

para todos os pontos $x \in U$ que satisfaçam $g(x)=0$. Então existem números reais μ , λ ,

não simultaneamente nulos, tais que

$$\mu Df(c) = \lambda Dg(c).$$

Além disso, se $Dg(c) \neq 0$, podemos tomar $\mu = 1$.

A demonstração do Teorema 1.3.1 encontra-se em Bartle (1983).

Para o caso de haver mais de uma restrição utiliza-se o resultado a seguir.

Teorema 1.3.2. *Seja $\Omega \subseteq R^n$ aberto e suponhamos f e g_1, \dots, g_k funções com valores reais em $C^1(\Omega)$. Suponhamos ainda que $c \in \Omega$ satisfaça as condições*

$$g_1(c) = 0, \dots, g_k(c) = 0,$$

e que exista uma vizinhança U de C tal que $f(x) \leq f(c)$ [ou $f(x) \geq f(c)$] para todo $x \in U$ satisfazendo aquelas condições. Então existem números reais $\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, não simultaneamente nulos, tais que

$$\mu Df(c) = \lambda_1 Dg_1(c) + \dots + \lambda_k Dg_k(c).$$

A demonstração do Teorema 1.3.2 encontra-se em Bartle (1983).

Logo, para maximização (ou minimização) de uma função sujeita a uma restrição de igualdade, usamos o método de Lagrange. Por exemplo, para resolver o problema $\max f(x)$ sujeito a $g(x) = a$, definimos o Lagrangiano

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda(g(x) - a),$$

e maximizamos com respeito a x e λ :

$$\begin{cases} \nabla f - \lambda \nabla g = 0, \\ g(x) - a = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Na solução para (4), x^* contém os argumentos maximizadores e λ representa o custo marginal da restrição. Isto é,

$$\frac{df(x^*)}{da} = \sum \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \frac{dx_i^*}{da} = \lambda.$$

Uma condição de segunda ordem para este problema de otimização com restrição

é obtida através da Hessiana Orlada.

$$H^B \equiv \begin{pmatrix} Hf & \nabla g \\ (\nabla g)^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Para um máximo, a Hessiana Orlada deve ser semidefinida negativa. Para um mínimo, a Hessiana Orlada deve ser semidefinida positiva.

Para múltiplas restrições $g_i(x) = a_i$, funcionalmente independentes, as condições de primeira e segunda ordens para um máximo são

$$\nabla f - \sum \lambda_i \nabla g_i = 0,$$

$$g_i(x) = a_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

$$z^t \begin{pmatrix} Hf & \nabla g_1 & \cdots & \nabla g_k \\ (\nabla g_1)^t & & & \\ \vdots & & 0 & \\ (\nabla g_k)^t & & & \end{pmatrix} z \leq 0, \quad \forall z.$$

1.4 Teorema de Euler

Considere a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Diz-se que f é homogênea de grau p se $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, \dots, x_n)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Uma propriedade importante das funções homogêneas é o fato de que, se conhecermos o valor da função num ponto p então conhecemos o valor da função em qualquer ponto p' que tenha coordenadas proporcionais às coordenadas de p .

Como consequência desta propriedade temos um importante resultado apresentado no teorema abaixo:

Teorema 1.4.1 (Teorema de Euler). *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau p , então*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = p f(x_1, \dots, x_n).$$

Esta propriedade nos permite obter, de maneira mais simples, o gradiente de funções homogêneas mais complicadas. Por exemplo, o gradiente da função homogênea:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha^t M_2 \alpha = \alpha_1^2 \sigma_{11} + \dots + \alpha_n^2 \sigma_{nn} + 2\alpha_1 \alpha_2 + \dots + 2\alpha_1 \alpha_n,$$

pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= 2\alpha_1\sigma_{11} + 2\alpha_2\sigma_{12} + \dots + 2\alpha_n\sigma_{1n} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} &= 2\alpha_1\sigma_{n1} + 2\alpha_2\sigma_{n2} + \dots + 2\alpha_n\sigma_{nn} \\ \nabla f(\alpha) &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 2M_2\alpha, \end{aligned}$$

ou simplesmente aplicando o Teorema de Euler 1.4.1, para o cálculo da derivada de uma função homogênea.

1.5 Modelo Média-Variância de Markowitz

O problema de seleção de portfólio foi resolvido por Markowitz¹ (1952), em um contexto de distribuição normal, considerando os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos dos ativos: o vetor de retornos e a matriz de covariâncias. A solução proposta para este problema, desde então é fonte de pesquisa e base de estudos em diversos trabalhos na área econômico-financeira. O processo de seleção de uma carteira de investimentos, segundo Markowitz, começa pela observação, que irá definir as crenças sobre futuras performances dos ativos, e é a partir de crenças relevantes sobre futuras performances, que será realizada a escolha da carteira. Para Markowitz, os principais fatores a serem considerados na observação dos ativos são: o risco e o retorno, onde o retorno esperado da carteira é definido como a média dos retornos médios dos ativos, a ser ponderada pelos pesos, e o risco é mensurado como o desvio dos resultados esperados em relação à sua média, ou seja, é a variância dos retornos dos ativos, uma medida de dispersão ligada ao grau de incerteza, e que caracteriza a volatilidade associada ao retorno esperado.

1.5.1 Modelo Média-Variância original

Seja n o número de ativos disponíveis na carteira, seja X_i o retorno do i -ésimo ativo. Seja α_i o percentual do valor investido que será alocado no i -ésimo ativo. O rendimento r_p da carteira é calculado como uma soma ponderada dos retornos de cada

¹ Prêmio Nobel de Ciências Econômicas- 1990

ativo:

$$r_p = \sum \alpha_i X_i.$$

Os X_i , e conseqüentemente $E[X_i]$, são considerados variáveis aleatórias. Os α_i não são variáveis aleatórias, e sim definidos pelo investidor, de modo a otimizar seu investimento, representando frações deste investimento. Temos que $\sum \alpha_i = 1$. Além disso, como Markowitz (1952) não considera vendas a descoberto, então $\alpha_i \geq 0$ para todo i .

Seja $E[X_i]$ o retorno esperado do i -ésimo ativo, aqui definido como retorno médio. Seja $cov[X_i, X_j]$ a covariância entre X_i e X_j , e conseqüentemente $cov[X_i, X_i]$, a variância do i -ésimo ativo.

Assim, o retorno r_p da carteira é uma soma ponderada de variáveis aleatórias. Os pesos α_i serão escolhidos de forma a proporcionar o melhor investimento possível, sendo o retorno esperado $E[r_p]$ definido por:

$$E[r_p] = \sum_{i=1}^n \alpha_i E[X_i] = \alpha^t M_1,$$

e a variância definida por:

$$var[r_p] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j cov[X_i, X_j] = \alpha^t M_2 \alpha.$$

A satisfação máxima do investidor está diretamente relacionada ao retorno e ao risco que a carteira de investimentos pode oferecer. Supondo que o investidor busca maximizar o retorno de sua carteira a certo risco aceitável, ou minimizar o risco para um retorno desejado, previamente estabelecido, carteiras de investimento que apresentam este perfil são ditas carteiras eficientes.

Definição 1.5.1. *Uma carteira admissível α^* (Média-Variância) é chamada eficiente se não existir nenhuma carteira admissível α com*

$$E[r_p(\alpha)] \geq E[r_p(\alpha^*)], \quad var[r_p(\alpha)] < var[r_p(\alpha^*)].$$

Esta definição nos diz que não há como superar o retorno de uma carteira eficiente sem que ocorra o aumento do risco.

Para determinar o conjunto de carteiras eficientes é formulado um problema de otimização quadrática, e o modelo matemático para sua solução utiliza o método de máximos e mínimos com restrição. Dependendo do caso a ser considerado, a solução para o problema pode basear-se no teorema de Kuhn-Tucker ou Lagrange.

Se considerarmos o caso em que são permitidas vendas a descoberto, podemos utilizar o método dos Multiplicadores de Lagrange no modelo.

Estamos supondo que o investidor maximiza sua função utilidade. De acordo com Scott e Horvath (1980), se admitirmos que a função utilidade depende apenas de sua riqueza e de seus rendimentos, o valor esperado de sua função utilidade pode ser expresso em função dos momentos centrais da seguinte maneira:

$$E(U) = U(\mu) + \frac{U^2(\mu)}{2} var(r_p) + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\mu_i}{i!} U^i(\mu),$$

onde U^i denota a i -ésima derivada de U , μ denota o retorno esperado da carteira e μ_i é o i -ésimo momento central.

Sob as hipóteses de que a função utilidade U de um típico investidor avesso ao risco satisfaz $U^1(w)$ é positivo e $U^2(w)$ é negativo para todo w (nível de riqueza do investidor) e de que o investidor é estritamente consistente em sua preferência pelo n -ésimo momento, Scott e Horvath (1980) mostram analiticamente que os investidores preferem maximizar momentos de ordem ímpar e minimizar momentos de ordem par. Neste contexto, podemos interpretar que no modelo de Markowitz, a série de Taylor da função utilidade é truncada no termo de ordem 2, e que maximizar a utilidade exigiria minimizar a variância $var(r_p)$ para um dado nível de retorno μ ou maximizar o retorno μ para uma dada variância $var(r_p)$. Caputo (2000) mostra através de um resultado de dualidade que estes dois problemas são equivalentes.

Para o caso em que se deseja minimizar o risco da carteira de investimentos para um retorno desejado fixado R , as restrições do problema serão: o retorno esperado da carteira fixado em R , e o somatório dos pesos, componentes do vetor α , ser igual a 1.

$$\begin{cases} \min \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t M_1 = R \\ \alpha^t [\mathbf{1}] = 1 \end{cases}$$

Minimizar a variância sob a restrição de retorno esperado R , onde a quantia a ser alocada em cada ativo é uma variável de decisão, está associado ao Lagrangiano:

$$L(\alpha; \lambda_1, \lambda_2) = \alpha^t M_2 \alpha - \lambda_1 (\alpha^t [\mathbf{1}] - 1) - \lambda_2 (\alpha^t M_1 - R).$$

1.5.2 Modelo Média-Variância com n ativos de risco e um ativo livre de risco

Considerando agora, para o mesmo problema de otimização, a configuração da carteira com n ativos de risco, mais um ativo livre de risco, e permitindo venda a descoberto,

seja $R > 0$ um valor fixo para o retorno excedente esperado de um portfólio, e sejam M_1 e M_2 as matrizes contendo as médias e covariâncias dos retornos observados dos ativos de risco presentes neste portfólio. Então, o problema de otimização para o modelo de Markowitz se resume a:

$$\begin{cases} \min \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t x = R \end{cases}, \quad (5)$$

que corresponde a um problema de otimização restrita que minimiza a variância da carteira, sob a única restrição do retorno excedente igualar-se a R .

A configuração para o portfólio ótimo de variância mínima, de acordo com o modelo de Markowitz, é facilmente calculada usando o método dos multiplicadores de Lagrange que fornece a solução α_M :

$$\alpha_M = \frac{R}{A_0} M_2^{-1} x, \quad (6)$$

em que $A_0 = x^t M_2^{-1} x$.

De (6), obtém-se a variância mínima σ_{p^2M} , associada ao portfólio ótimo α_M :

$$\sigma_{p^2M} = \frac{R^2}{A_0}.$$

Markowitz considerou apenas os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos dos ativos. Ao considerar momentos maiores que a ordem dois, haverá um refinamento na seleção da carteira ótima, por meio do controle de parâmetros importantes como assimetria e curtose, que podem se traduzir em carteiras mais eficientes. Assim, é útil considerar o modelo Média-Variância como ponto de partida para esse refinamento, pois esse modelo fornece o portfólio com a menor variância para um determinado retorno e para o qual a assimetria e a curtose podem ser facilmente calculadas.

A partir de (6), é possível obter uma expressão para a assimetria associada à solução de Markowitz em função de α_M e do retorno R fixado no problema:

$$\sigma_{p^3M} = \frac{A_{2M}}{A_0} R,$$

com $A_{2M} = x^t M_2^{-1} M_3 \alpha_M^{\otimes 2}$.

Quando considerados os três primeiros momentos, a carteira de Markowitz α_M é considerada eficiente. Uma vez calculada a assimetria desse portfólio, os três parâmetros, média, variância e assimetria, podem ser usados para confirmar a eficiência do portfólio fixando dois dos parâmetros associados à solução ótima de Markowitz e obtendo o terceiro por sua otimização. Apesar de eficiente, a solução obtida de acordo com o modelo de Markowitz pode apresentar uma assimetria indesejada, não sendo possível nenhum tipo

de controle sobre este parâmetro.

No entanto pode-se, tomando o par (R, σ_{p^2M}) obtido pelo modelo Média-Variância como ponto de partida, impor um acréscimo nesta variância permanecendo com o mesmo retorno, ou ainda uma redução neste retorno mantendo-se a variância inalterada. A aplicação do modelo a três momentos, tomando este novo par (R, σ_{p^2}) obtido como parâmetros no conjunto de restrições, propõe alterar positivamente a assimetria da carteira, levando a encontrar um portfólio eficiente do ponto de vista dos três momentos, onde o terceiro momento passa a ser otimizado.

A partir daqui, denotamos o portfólio de Markowitz α_M como solução trivial.

1.6 Problema da carteira de variância mínima de Athayde e Flôres

Todos os resultados desta seção foram obtidos de Athayde e Flôres (2004) e (2006).

Em seu modelo, Athayde e Flôres buscam carteiras eficientes no caso de n ativos com risco mais um ativo sem risco, permitindo venda a descoberto de modo que não há restrições sobre os pesos da carteira. Consideram aqui os três primeiros momentos de distribuição verificados para os n ativos de risco. Para encontrar um portfólio ótimo, eles minimizam o Lagrangeano:

$$\min_{\alpha} L = \alpha^t M_2 \alpha + \lambda_1 (\sigma_{p^3} - \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}) + \lambda_2 [E(r_p) - (\alpha^t M_1 + (1 - \alpha^t [\mathbf{1}]) \mathbf{r}_f)], \quad (7)$$

onde M_1 , M_2 , e M_3 são as matrizes contendo os retornos médios, covariâncias e coassimetrias dos n ativos de risco, $E(r_p)$ é um retorno esperado fixo, r_f , a taxa do ativo livre de risco, $[\mathbf{1}]$ é o vetor n dimensional de 1's, e $\alpha^{\otimes 2} = \alpha \otimes \alpha$. Assim, as condições de primeira ordem são:

$$\begin{cases} 2M_2 \alpha = 3\lambda_1 M_3 \alpha^{\otimes 2} + \lambda_2 x \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases},$$

e uma solução para (7) é encontrada resolvendo o sistema de n -equações não lineares,

$$M_2 \alpha = \frac{A_0 \sigma_{p^3} - A_2 R}{A_0 A_4 - (A_2)^2} M_3 \alpha^{\otimes 2} + \frac{A_4 R - A_2 \sigma_{p^3}}{A_0 A_4 - (A_2)^2} x, \quad (8)$$

em que os escalares:

$$\begin{aligned} A_0 &= x^t M_2^{-1} x, \\ A_2 &= x^t M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}, \\ A_4 &= (M_3 \alpha^{\otimes 2})^t M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}; \end{aligned}$$

tem subscritos correspondentes ao seu grau de homogeneidade como funções reais do vetor α . Em particular, A_0 e A_4 são positivos, uma vez que a inversa da matriz de covariância é positiva definida.

Multiplicando a Equação (8) pelas próprias soluções α^t , obtêm-se a variância ótima:

$$\sigma_{p^2} = \frac{A_4 R^2 - 2A_2 R \sigma_{p^3} + A_0 (\sigma_{p^3})^2}{A_0 A_4 - (A_2)^2}.$$

Proposição 1.6.1. *Para um dado k positivo, seja $\bar{\alpha}$ o portfólio de variância mínima quando $R = 1$ e $\sigma_{p^3} = k^3$, e $\bar{\sigma}_{p^2}$ a variância mínima correspondente, então, para todo portfólio ótimo relacionado ao par assimetria/retorno tal que $\sigma_{p^3} = k^3 R^3$, uma solução para (7) será $\alpha = \bar{\alpha} R$, com variância mínima correspondente $\sigma_{p^2} = \bar{\sigma}_{p^2} R^2$.*

1.6.1 Uma generalização do problema de variância mínima

Dado um vetor de pesos $\alpha \in \mathbb{R}^n$, na notação introduzida por Athayde e Flôres (2004), o p -ésimo momento do portfólio com estes pesos é representado por

$$\alpha^t M_p (\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha \cdots \otimes \alpha) \equiv \alpha^t M_p \alpha^{\otimes (p-1)},$$

em que M_p representa a matriz que contém os p -ésimos momentos do vetor aleatório de n ativos.

Para o caso geral de minimizar um momento par de ordem p quando fixados os dois primeiros momentos ímpares, o problema será:

$$\min_{\alpha} L = \alpha^t M_p \alpha^{\otimes (p-1)} + \lambda (\sigma_{p^3} - \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}) + \gamma (R - \alpha^t x). \quad (9)$$

Logo as condições de primeira ordem serão:

$$\begin{cases} p M_p \alpha^{\otimes (p-1)} = 3 \lambda M_3 \alpha^{\otimes 2} + \gamma x \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases} . \quad (10)$$

Notando que $M_p \alpha^{\otimes(p-1)} = M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)\alpha$, e que a matriz $M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)$ é simétrica e definida positiva, o seguinte sistema pode ser formado a partir da primeira equação de (10) para obter os valores dos multiplicadores:

$$\begin{cases} pR = 3\lambda x^t(M_p \alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2} + \gamma x^t(M_p \alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)^{-1} x \\ p\sigma_{p^3} = 3\lambda(M_3 \alpha^{\otimes 2})^t(M_p \alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2} + \gamma(M_3 \alpha^{\otimes 2})^t(M_p \alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)^{-1} x. \end{cases}$$

Definindo

$$\begin{aligned} B_{2-p} &= x^t[M_p(\alpha \otimes I_n)^{-1}]x, \\ B_{4-p} &= x^t[M_p(\alpha \otimes I_n)^{-1}]M_3 \alpha^{\otimes 2} \quad \text{e} \\ B_{6-p} &= (M_3 \alpha^{\otimes 2})^t[M_p(\alpha \otimes I_n)]^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}, \end{aligned}$$

com os subscritos correspondentes ao grau de homogeneidade com respeito ao vetor de pesos, a solução final vem do sistema:

$$(B_{2-p}B_{6-p} - (B_{4-p})^2)M_p \alpha^{\otimes(p-1)} = (B_{2-p}\sigma_{p^3} - B_{4-p}R)M_3 \alpha^{\otimes 2} + (B_{6-p}R - B_{4-p}\sigma_{p^3})x.$$

O p -ésimo momento do portfólio ótimo será dado por:

$$\sigma_{p^p} = \frac{B_{6-p}R^2 - 2B_{4-p}R\sigma_{p^3} + B_{2-p}(\sigma_{p^3})^2}{B_{2-p}B_{6-p} - (B_{4-p})^2}.$$

Proposição 1.6.2. *Para um dado k positivo, seja $\bar{\alpha}$ o portfólio que minimiza o momento par de ordem p quando $R = 1$ e $\sigma_{p^3} = k^3$, e $\bar{\sigma}_{p^p}$ o p -ésimo momento mínimo correspondente, então, para todo portfólio ótimo relacionado ao par assimetria/retorno tal que $\sigma_{p^3} = k^3 R^3$, uma solução para (9) será $\alpha = \bar{\alpha}R$, com p -ésimo momento mínimo correspondente $\sigma_{p^p} = \bar{\sigma}_{p^p} R^p$.*

A próxima seção traz resultados preliminares relacionados à dualidade em problemas de otimização para suporte no desenvolvimento dos capítulos seguintes.

1.7 Dualidade

O problema de seleção de portfólio que considera os três momentos de distribuição dos retornos dos ativos é um problema de otimização com duas restrições, em que um dos parâmetros considerados será otimizado sob a restrição dos outros dois fixos. A dualidade, em problemas de otimização, garante o mesmo resultado entre duas configurações do mesmo problema sob certas condições, e a eficiência do resultado obtido está intrin-

secamente relacionada a ela. O resultado de dualidade a seguir relaciona o máximo da função objetivo $g(x)$, restrita pelas condições de igualdade $\bar{f} - f(x) = 0$ e $\bar{h} - h(x) = 0$, ao mínimo da função na condição, $f(x)$, agora restrita pela função objetivo: $\bar{g} - g(x) = 0$, e por $\bar{h} - h(x) = 0$; “condições estritas de segunda ordem”, em suas hipóteses, significa que todas as desigualdades de sinal das Hessianas de borda são estritas. A prova deste resultado é baseada em Panik (1976), Teorema 10.5, sendo semelhante ao apresentado em Athayde e Flôres (2004) e o complementa:

Lema 1.7.1 (Lema da Dualidade). *Sejam $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ funções reais, continuamente diferenciáveis de classe C^2 , definidas em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Se $x^* \in A$ é um máximo estrito (local) de $g(x)$; sujeito à $\bar{f} - f(x) = 0$ e $\bar{h} - h(x) = 0$; \bar{f} e \bar{h} escalares; com os valores correspondentes dos multiplicadores de Lagrange γ_1 e γ_2 , com $\gamma_1 > 0$ e condições estritas de segunda ordem, então $x^* \in A$ é também um mínimo estrito (local) de $f(x)$ sujeito à $g(x^*) - g(x) = 0$, e $\bar{h} - h(x) = 0$, com os valores correspondentes dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_1 = 1/\gamma_1$ e $-\lambda_2 = \gamma_2/\gamma_1$.*

Para maior clareza em nosso trabalho, enunciamos a seguir o Lema da Dualidade visto em Athayde e Flôres (2004):

Lema 1.7.2 (Lema da Dualidade). *Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções reais, continuamente diferenciáveis de classe C^2 , definidas em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Se $x^* \in A$ é um mínimo estrito (local) de $g(x)$; sujeito à $\bar{g} - g(x) = 0$ e $\bar{h} - h(x) = 0$; \bar{g} e \bar{h} escalares; com os valores correspondentes dos multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2 , com $\lambda_1 > 0$ e condições estritas de segunda ordem, então $x^* \in A$ é também um máximo estrito (local) de $f(x)$ sujeito à $f(x^*) - f(x) = 0$, e $\bar{h} - h(x) = 0$, com os valores correspondentes dos multiplicadores de Lagrange $\gamma_1 = 1/\lambda_1$ e $-\gamma_2 = \lambda_2/\lambda_1$.*

O modelo a três momentos relaciona três problemas de otimização através de uma condição de dualidade. Em cada um deles, um dos momentos, retorno esperado, variância ou assimetria, será otimizado de acordo com as preferências em Scott e Horvath (1980). Assim, se for verificada dualidade entre cada um dos problemas de máximo, assimetria e retorno com o problema de variância mínima, então os três problemas serão duais entre si e a solução será considerada eficiente.

2 MODELO A TRÊS MOMENTOS

Ao longo deste capítulo, exploramos a natureza dual dos problemas de otimização, tendo em mente as preferências como em Scott e Horvath (1980) - os investidores gostam de momentos ímpares e não gostam dos pares. Aqui, apresentamos os modelos duais ao visto em Athayde e Flôres (2004), alternando os papéis dos parâmetros de forma a tomar, por vez, um dos três primeiros momentos como função objetivo e os demais como restrições. Primeiro, da perspectiva de maximizar a assimetria quando a variância e o retorno são fixos e, em seguida, maximizar o retorno com os outros dois momentos fixos. Analisamos qualitativamente esses modelos duais e estabelecemos novos resultados estudando os problemas de otimização envolvidos nessas duas novas perspectivas. Por fim, relacionamos os resultados obtidos em ambas as configurações com o modelo original de Athayde e Flôres (2004) para verificar as vantagens em um novo contexto. Acreditamos que as contribuições teóricas essenciais deste trabalho são relevantes no sentido de complementar trabalhos anteriores e verificar as melhores estratégias para a aplicabilidade do modelo a três momentos.

Indicamos em cada seção nossas principais contribuições. Na Seção 2.1, usamos resultados de análises matemáticas para provar a existência de solução em cada uma das três abordagens para o problema de otimização associado ao modelo a três momentos, apoiando e fortalecendo a teoria dessa incorporação complexa de momentos de ordem superior na seleção de portfólio. A Seção 2.2 apresenta o modelo sob a perspectiva de maximizar a assimetria. Induzimos uma norma natural e comum para os três problemas que nos permitiu determinar quando é possível resolver o problema pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange e estabelecer uma relação entre o modelo a três momentos e o modelo clássico de Markowitz. Para esta abordagem, foi obtida uma expressão para a assimetria máxima associada ao portfólio ótimo. Na Seção 2.3, discutimos casos deixados em aberto em Athayde e Flôres (2004) associados à dependência linear entre os gradientes de retorno esperado e assimetria. A Seção 2.4 inclui os resultados relacionados ao problema de otimização através da maximização do retorno esperado onde a variância e a assimetria são fixadas, contemplando assim as três abordagens possíveis para o modelo a três momentos. A Seção 2.5 traz uma análise para a dualidade no problema a três momentos, com novos resultados. Finalmente, na Seção 2.6, são apresentadas e discutidas proposições sobre a estrutura geométrica dos problemas de maximização da assimetria e de maximização do retorno, contribuindo para uma compreensão mais profunda de ambos os modelos.

2.1 Seleção de portfólio como um problema de otimização a três momentos

Ao considerar os três primeiros momentos, há três configurações possíveis. Pode-se minimizar o momento de ordem par fixando os dois momentos de ordem ímpar; ou, de forma equivalente, maximizar um momento de ordem ímpar fixando os outros dois.

O modelo a três momentos proposto por Athayde e Flôres (2004) é um problema de otimização restrita que minimiza a variância e incorpora a assimetria:

$$\begin{cases} \min \alpha^t M_2 \alpha, \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \quad . \\ \alpha^t x = R \end{cases} \quad (11)$$

Tendo em mente o resultado de dualidade da Seção 1.7, invertemos os papéis da assimetria e da variância no problema de otimização. Assim, ao invés de restrição para o problema, a assimetria será tomada como função objetivo, e os dois primeiros momentos, variância e retorno, irão figurar como as restrições no problema de otimização. Agora, a assimetria será maximizada, por ser um momento de ordem ímpar da distribuição dos retornos dos ativos de risco:

$$\begin{cases} \max \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \quad . \\ \alpha^t x = R \end{cases} \quad (12)$$

Uma das vantagens obtidas neste novo contexto é a estrutura apresentada pelo novo conjunto factível. Observe que quando a variância é fixada, obtêm-se a equação de um hiperelipsóide no espaço n -dimensional dos pesos α , que é um conjunto fechado e limitado. Por sua vez, o retorno excedente da carteira quando fixado em R representa um hiperplano neste mesmo espaço, um conjunto fechado. Dessa forma, a interseção dos conjuntos definidos pelas restrições do problema é um conjunto compacto, o que garante a existência de solução para o problema de assimetria máxima.

Além desta, também é possível obter uma terceira configuração para o mesmo modelo a três momentos, tomando como função objetivo o retorno excedente, que será também maximizado, fixando agora, como restrições para o problema de otimização, valores para variância e assimetria:

$$\begin{cases} \max \alpha^t x, \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \quad , \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \end{cases} \quad (13)$$

que completa o conjunto de duais possíveis para o problema de otimização.

A seguir, são apresentados os nossos três resultados de existência, sob a forma de teoremas, que garantem a existência de solução para cada um dos três problemas de otimização associados ao modelo a três momentos.

2.1.1 Existência de solução

Teorema 2.1.1. *Dados $\sigma_{p^2} > 0$ e $R > 0$, seja $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha$ e $R = \alpha^t x\}$. Se $D \neq \emptyset$, então o problema de otimização (12) admite solução.*

Prova. Observe que $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha$ e $R = \alpha^t x\}$ é um conjunto compacto não vazio, e que $\alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}$ é uma função contínua em \mathbb{R}^n . Sendo assim, pelo Corolário 16.7 em Bartle (1983), o problema de otimização (12) admite solução. \square

Teorema 2.1.2. *Dados $\sigma_{p^2} > 0$ e $\sigma_{p^3} > 0$, seja $G = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}$ e $\sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha\}$. Se $G \neq \emptyset$, então o problema de otimização (13) admite solução.*

Prova. Como na demonstração anterior, note que $G = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}$ e $\sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha\}$ é um conjunto compacto não vazio, e $\alpha^t x$ é uma função contínua em \mathbb{R}^n . Logo, o corolário 16.7 em Bartle (1983), irá garantir a existência de solução para este problema de otimização. \square

Considerando a natureza dual do problema, seria natural obter-se resultado semelhante para o problema de minimizar a variância, mas nesta configuração o conjunto admissível não é um compacto. Porém, como neste caso a função objetivo é quadrática, e sendo a interseção das restrições um conjunto fechado, também conseguimos demonstrar a existência de solução para este problema através de um resultado de Análise Matemática.

Teorema 2.1.3. *Dados $\sigma_{p^3} \in \mathbb{R}$ e $R > 0$, seja $F = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}$ e $R = \alpha^t x\}$. Se $F \neq \emptyset$, então o problema de otimização (11) admite solução.*

Prova. Como M_2 é uma matriz definida positiva, o produto interno $\langle \alpha, \beta \rangle_0 = \alpha^t M_2 \beta$ induz uma norma $\|\alpha\|_0^2 = \alpha^t M_2 \alpha$. Logo, $J(\alpha) = \alpha^t M_2 \alpha$ é um funcional não negativo. Sabendo que em \mathbb{R}^n todas as normas são equivalentes, temos que existem constantes positivas a e b tais que $a\|\alpha\| \leq \|\alpha\|_0 \leq b\|\alpha\|$. Logo J é um funcional contínuo, coercivo e possui cota inferior em F , um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n . Seja $p = \inf\{J(\alpha) : \alpha \in F\} \in \mathbb{R}$, o ínfimo de J em F . Então existe uma sequência $\{\alpha_n\}$ em F tal que $J(\alpha_n) \rightarrow p$. Como J é coercivo, $\{\alpha_n\}$ é uma sequência limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|\alpha_n\| \leq M$ para todo n . Logo, pelo Teorema de Bolzano Weierstrass, existe pelo menos uma subsequência de $\{\alpha_n\}$ que converge, $\alpha_{n_k} \rightarrow \alpha_0$. Como F é fechado então $\alpha_0 \in F$. Daí, como J é contínuo, temos que $J(\alpha_{n_k}) \rightarrow J(\alpha_0)$. Por outro lado, sabemos que $J(\alpha_{n_k}) \rightarrow p$. Então, pela unicidade do limite, $p = J(\alpha_0)$. Assim, J tem mínimo em F e $J(\alpha_0) = \min\{J(\alpha) : \alpha \in F\}$. \square

A partir daqui, vamos considerar restrições tais que o conjunto admissível seja sempre não vazio. Desta forma, o problema sempre terá solução. Assim, podemos relacionar os problemas de modo a determinar em que condições haverá solução simultânea, ou seja, como caracterizar a região da dualidade.

2.2 Maximizando a assimetria

Depois de mostrarmos que o problema (12) admite solução, vamos deduzir algumas propriedades qualitativas das soluções. O problema de seleção de portfólio por meio da maximização da assimetria corresponde a tratar um problema de otimização com duas restrições:

$$\begin{cases} \max \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases} .$$

A função objetivo a ser maximizada é contínua e representa a assimetria do portfólio. A variância fixada em σ_{p^2} corresponde geometricamente a um hiper-elipsóide no espaço de pesos α , enquanto o retorno fixo representa um hiperplano neste mesmo espaço. Desta forma, se a interseção dos conjuntos de restrições for não vazia, temos duas configurações possíveis para o conjunto factível: o hiperplano pode cruzar o hiperelipsóide ou tocá-lo, interceptando-o em um único ponto. Se o hiperplano de retorno cruza o hiperelipsóide de variância, a função de assimetria admite máximo e mínimo nesta interseção. No entanto, se o hiperplano de retorno tocar o hiperelipsóide de variância, teremos uma única solução onde a assimetria máxima e mínima coincidem. Além disso, os gradientes das restrições são linearmente dependentes do ponto de tangência. Assim, podemos tratar a tangência entre as hipersuperfícies como um caso particular.

2.2.1 Solução trivial

Quando as restrições são tais que o hiperplano de retorno toca o hiper-elipsóide de variância, os gradientes das restrições são linearmente dependentes e temos

$$M_2 \alpha = \delta x \tag{14}$$

para algum $\delta \in \mathbb{R}$. Neste caso, existe um único α no conjunto factível e este portfólio é a solução para o problema de otimização. Para determinar esta solução, multiplicamos (14) por $x^t M_2^{-1}$, definimos o fator de dependência entre os gradientes e determinamos o

portfólio ótimo

$$\alpha^* = \frac{R}{A_0} M_2^{-1} x,$$

em que $A_0 = x^t M_2^{-1} x$. Esta solução fornece uma assimetria única, calculada a partir da solução:

$$\sigma_{p^3}^* = \frac{A_2^*}{A_0} R,$$

em que $A_2^* = \alpha^{*t} M_2^{-1} M_3 \alpha^{*\otimes 2}$. Também podemos obter uma expressão para a variância fixa no problema:

$$\sigma_{p^2}^* = \frac{R^2}{A_0}.$$

A solução α^* , neste caso, coincide com a solução clássica de Markowitz α_M , obtida em (6) através do modelo Média-Variância, e aqui é denominada solução trivial.

2.2.2 Solução não trivial para o problema de assimetria máxima

Agora, o conjunto admissível associado ao problema de otimização restrita (12) é denotado por $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } R = \alpha^t x\}$. Quando o conjunto admissível D é não vazio e não unitário, não há dependência linear entre os gradientes das restrições em qualquer lugar deste conjunto (consulte Proposição 2.2.1). Assim, uma das hipóteses para a utilização do método do multiplicador de Lagrange na resolução do problema de otimização é satisfeita. O Teorema 2.1.1 garante pelo menos uma solução em D para o problema (12), então podemos usar o método do multiplicador de Lagrange para escrever o gradiente da função objetivo como uma combinação linear dos gradientes das restrições. Quando as restrições de retorno e variância são tais que D é não vazio e não unitário, obtemos uma solução não trivial para maximizar a assimetria:

$$\begin{cases} 3M_3 \alpha^{\otimes 2} = 2\gamma_1 M_2 \alpha + \gamma_2 x \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases} . \quad (15)$$

Para determinar as expressões para γ_1 e γ_2 , consideramos $\alpha \in D$ e multiplicamos a primeira equação em (15) por α^t e $x^t M_2^{-1}$, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2\gamma_1 \sigma_{p^2} + \gamma_2 R = 3\alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \\ 2\gamma_1 R + \gamma_2 A_0 = 3A_2 \end{cases}, \quad (16)$$

em que $A_0 = x^t M_2^{-1} x$ e $A_2 = x^t M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}$.

Vamos discutir a resolução do sistema (16) com base no determinante de sua matriz de coeficientes:

$$A_M = \begin{bmatrix} \sigma_{p^2} & R \\ R & A_0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de coeficientes do sistema (16) depende apenas dos parâmetros fixos do problema de otimização (12). A matriz A_M não depende do $\alpha \in D$ que gerou o sistema (16). Portanto, é natural que seu determinante tenha um comportamento único em todo o conjunto factível. A proposição a seguir nos mostra que o determinante de A_M se anula se e somente se o conjunto admissível for unitário.

Proposição 2.2.1. *Dados $x \in \mathbb{R}^n$, M_2 , $\sigma_{p^2} > 0$, e $/, R > 0$, seja $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha$ e $R = \alpha^t x\}$ para todo $\alpha \in D$, $\det A_M > 0$ se e somente se os vetores x e $M_2 \alpha$ são linearmente independentes. Além disso, se x e $M_2 \alpha$ são linearmente dependentes, então $A_0 M_2 \alpha = Rx$.*

Prova. Considere a norma $\|\alpha\|_1^2 = \alpha^t M_2^{-1} \alpha$, induzida pelo produto interno $\langle \alpha, \beta \rangle_1 = \alpha^t M_2^{-1} \beta$, como a inversa de uma matriz de covariâncias é definida positiva. Portanto, para qualquer $\alpha \in D$, pode-se escrever

$$\det A_M = \sigma_{p^2} A_0 - R^2 = \|x\|_1^2 \|M_2 \alpha\|_1^2 - (\langle x, M_2 \alpha \rangle_1)^2 \geq 0,$$

a última desigualdade, usando Cauchy-Schwarz. Esta será igual a zero se e somente se x e $M_2 \alpha$ forem linearmente dependentes. Para a segunda parte, usando a mesma norma,

$$\begin{aligned} A_0[\det A_M] &= A_0^2 \sigma_{p^2} - A_0 R^2 - A_0 R^2 + A_0 R^2 \\ &= \{A_0 M_2 \alpha - Rx\}^t M_2^{-1} \{A_0 M_2 \alpha - Rx\} \\ &= \|A_0 M_2 \alpha - Rx\|_1^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

a igualdade a zero implica necessariamente que $A_0 M_2 \alpha - Rx = \mathbf{0}$.

Conseqüentemente, se $\alpha \in D$ é tal que $\det A_M = 0$, então x e $M_2 \alpha$ são linearmente dependentes, e por (17), temos $A_0 M_2 \alpha = Rx$. \square

Observação 2.2.1. 1. No início desta seção, argumentamos geometricamente que,

quando o conjunto admissível D é não vazio e não unitário, os vetores dos gradientes associados às restrições de retorno e variância são linearmente independentes para qualquer ponto em D . A Proposição 2.2.1 captura novamente essa característica do conjunto D , mostrando que se $D \neq \emptyset$, então é não unitário se e somente se para todo $\alpha \in D$, os vetores $M\alpha$ e x são linearmente independentes.

2. A Proposição 2.2.1 nos mostra que o determinante de A_M é um marcador para a presença ou ausência da solução de Markowitz no conjunto admissível. A opção de tratar o problema de seleção de carteiras sob a ótica da maximização da assimetria permite analisar com muita clareza a relação do modelo a três momentos com o modelo clássico de Markowitz. Observe que o determinante de A_M se anula se e somente se fixarmos a variância em $\sigma_{p^2} = R^2/A_0$.

A Proposição 2.2.1 nos mostra que o caso $\det A_M > 0$ corresponde à totalidade dos casos em que a hipótese de independência linear do gradiente das restrições é satisfeita. Portanto, é possível obter os multiplicadores γ_1 e γ_2 usando a inversa da matriz A_M :

$$\gamma_1 = \frac{3}{2} \frac{A_0 \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} - A_2 R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 3 \frac{\sigma_{p^2} A_2 - \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2}. \quad (18)$$

Substituindo (18) na primeira equação de (15), encontramos o seguinte sistema de n equações não lineares em α que satisfaz a equação de Lagrange:

$$\left(\frac{A_0 \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} - A_2 R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2} \right) \alpha = M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2} - \left(\frac{\sigma_{p^2} A_2 - \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2} \right) M_2^{-1} x. \quad (19)$$

Segue do método dos multiplicadores de Lagrange e do Teorema 2.1.1 que (19) fornece uma solução para o problema de otimização (12) e, portanto, determina a configuração eficiente do portfólio quando são considerados os três primeiros momentos.

A partir de (19), podemos calcular a assimetria máxima associada ao portfólio ótimo, multiplicando ambos os lados por $(M_3 \alpha^{\otimes 2})^t$:

$$\begin{aligned} \sigma_{p^3} &= \frac{2A_2 R \pm \sqrt{4A_2^2 R^2 - 4A_0(\sigma_{p^2}(A_0 A_4 - (A_2)^2) + A_4 R^2)}}{2A_0} \\ &= \frac{A_2 R \pm \sqrt{(A_0 A_4 - (A_2)^2)(\sigma_{p^2} A_0 - R^2)}}{A_0}, \end{aligned} \quad (20)$$

em que os coeficientes A_2 e A_4 estão associados a α , o vetor de pesos de um portfólio de assimetria máxima, sendo $A_4 = (M_3 \alpha^{\otimes 2})^t M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}$.

Considerando que a dualidade entre os problemas de otimização está condicionada ao multiplicador positivo γ_1 de acordo com o Lema 1.7.1, podemos afirmar que a solução

eficiente estará sempre associada à assimetria em (20) com raiz quadrada positiva:

$$\sigma_{p^3} = \frac{A_2 R + \sqrt{(A_0 A_4 - (A_2)^2)(\sigma_{p^2} A_0 - R^2)}}{A_0} . \quad (21)$$

Observação 2.2.2. Quando $\det A_M = 0$, a solução α^* de (12) coincide com a solução clássica de Markowitz α_M , e a assimetria máxima associada é dada por $\sigma_{p^3} = (A_{2M}/A_0)R$, com $A_{2M} = x^t M_2^{-1} M_3 \alpha_M^{\otimes 2}$. Observe que (21) também pode ser usado quando $\det A_M = 0$ para obter a assimetria ótima associada a α_M .

2.3 Minimização da variância - algumas contribuições

Agora, denotamos por F o conjunto admissível associado ao problema de otimização restrita (11), ou seja, $F = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \text{ e } R = \alpha^t x\}$. Como usual, Athayde e Flôres (2004) utilizaram o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar a existência de uma solução para o problema de otimização restrita (11) diretamente:

$$\begin{cases} 2M_2 \alpha = 3\lambda_1 M_3 \alpha^{\otimes 2} + \lambda_2 x \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases} . \quad (22)$$

Do sistema anterior, para $\alpha \in F$, candidato a solução, deduziram um sistema para os multiplicadores associados

$$\begin{cases} 3\lambda_1 A_4 + \lambda_2 A_2 = 2\sigma_{p^3} \\ 3\lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_0 = 2R \end{cases} , \quad (23)$$

em que $A_0 = x^t M_2^{-1} x$, $A_2 = x^t M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}$ e $A_4 = (M_3 \alpha^{\otimes 2})^t M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}$.

A partir de (23), obtiveram uma expressão para os multiplicadores λ_1 e λ_2 , tomando a inversa da matriz de coeficientes do sistema:

$$A_F = \begin{bmatrix} A_4 & A_2 \\ A_2 & A_0 \end{bmatrix} ,$$

quando seu determinante é não nulo. No entanto, Athayde e Flôres (2004) apresentaram apenas uma condição necessária para a solução de (11). Eles deduziram que se $\alpha \in F$ é uma solução para o problema de otimização, deve satisfazer

$$M_2 \alpha = \frac{A_0 \sigma_{p^3} - A_2 R}{A_0 A_4 - (A_2)^2} M_3 \alpha^{\otimes 2} + \frac{A_4 R - A_2 \sigma_{p^3}}{A_0 A_4 - (A_2)^2} x, \quad (24)$$

e calcularam a variância mínima associada

$$\sigma_{p^2} = \frac{A_4 R^2 - 2A_2 \sigma_{p^3} R + A_0 (\sigma_{p^3})^2}{A_0 A_4 - (A_2)^2}, \quad (25)$$

em que os coeficientes A_2 e A_4 estão relacionados a α , uma carteira de variância mínima.

Observação 2.3.1. 1. *Sob a perspectiva de minimizar a variância, o método dos multiplicadores de Lagrange nos diz que para cada $\alpha \in F$, solução do problema (11) tal que os gradientes $M_3 \alpha^{\otimes 2}$ e x são linearmente independentes, existem multiplicadores λ_1 e λ_2 satisfazendo a primeira equação em (22). O Teorema 2.1.3 permite o uso do método dos multiplicadores de Lagrange na análise do problema (11) na medida em que garante a existência de uma solução para (11). Além disso, reforça a condição necessária (24) obtida por Athayde e Flôres (2004) ao garantir que pelo menos um $\alpha \in F$ a satisfaça. Resta discutir a questão da independência linear.*

2. *A condição necessária (24) e a variância associada (25) obtida por Athayde e Flôres (2004) só são válidas para $\alpha \in F$ para o qual $\det A_F$ é não nulo.*

Ao contrário do caso em que se maximiza a assimetria, a matriz de coeficientes A_F associada ao sistema dos multiplicadores (23) depende do $\alpha \in F$ que gerou o sistema. Para enfatizar tal dependência, escreveremos $A_F(\alpha)$. Introduzimos então uma nova proposição e mostramos que tratar $\det A_F(\alpha) > 0$ equivale a assumir independência linear entre os gradientes das restrições.

Proposição 2.3.1. *Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e M_3 . Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\det A_F(\alpha) > 0$ se e somente se os vetores x e $M_3 \alpha^{\otimes 2}$ são linearmente independentes. Além disso, se x e $M_3 \alpha^{\otimes 2}$ são linearmente dependentes, então $A_0 M_3 \alpha^{\otimes 2} = A_2 x$.*

Prova. Considere a norma $\|\alpha\|_1^2 = \alpha^t M_2^{-1} \alpha$ induzida pelo produto interno $\langle \alpha, \beta \rangle_1 = \alpha^t M_2^{-1} \beta$. Portanto, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}^n$, o determinante de $A_F(\alpha)$ pode ser reescrito na forma

$$\det A_F(\alpha) = A_0 A_4 - (A_2)^2 = \|x\|_1^2 \|M_3 \alpha^{\otimes 2}\|_1^2 - (\langle x, M_3 \alpha^{\otimes 2} \rangle_1)^2. \quad (26)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, deduzimos que $\det A_F(\alpha) \geq 0$. Além disso, sabemos que o lado direito de (26) se anula se e somente se os vetores x e $M_3 \alpha^{\otimes 2}$ forem linearmente dependentes. Athayde e Flôres (2004) deduziram a seguinte identidade:

$$A_0 [A_0 A_4 - (A_2)^2] = \{A_0 M_3 \alpha^{\otimes 2} - A_2 x\}^t M_2^{-1} \{A_0 M_3 \alpha^{\otimes 2} - A_2 x\}.$$

que, com o produto interno aqui induzido, pode ser reescrita como:

$$A_0 [A_0 A_4 - (A_2)^2] = \|A_0 M_3 \alpha^{\otimes 2} - A_2 x\|_1^2 \geq 0 \quad (27)$$

a igualdade a zero implica necessariamente que $M_3\alpha^{\otimes 2}A_0 - xA_2 = \mathbf{0}$. Consequentemente, se $\alpha \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\det A_F = 0$, isso implica que x e $M_3\alpha^{\otimes 2}$ são linearmente dependentes, e por (27), $A_0M_3\alpha^{\otimes 2} = A_2x$. \square

Observação 2.3.2. 1. *Pela Proposição 2.3.1, o caso $\det A_F(\alpha) > 0$ corresponde à totalidade dos casos em que os gradientes das restrições atendem à hipótese de independência linear. Assim, permite o uso do método dos multiplicadores de Lagrange por Athayde e Flôres (2004) para determinar soluções para o problema de otimização (11). Eles deduziram uma condição necessária para que um elemento do conjunto factível F , que satisfaça a hipótese de posto completo nos gradientes das restrições, seja uma solução de (11).*

2. *Ao contrário do que ocorre na configuração em que se maximiza a assimetria, nem todo elemento α do conjunto admissível F é tal que os gradientes $M_3\alpha^{\otimes 2}$ e x são linearmente independentes. Portanto, requer uma investigação mais aprofundada sobre o conjunto factível F de soluções potenciais para o problema (11) para o qual $\det A_F(\alpha) = 0$. Não podemos usar o método clássico dos multiplicadores de Lagrange nesses casos, e eles foram deixados em aberto em Athayde e Flôres (2004).*

2.3.1 Dependência linear e a solução trivial - problema de variância mínima

Na Seção 2.2, foi verificado que o problema de assimetria máxima, admite apenas duas possibilidades para um conjunto factível não vazio, que se referem a configurações geométricas da interseção entre um hiperplano (definido pelo retorno fixo) e a hiper-superfície associada à restrição da variância. Além disso, cada possibilidade está associada exclusivamente a $\det A_M = 0$ ou $\det A_M > 0$. No problema de minimizar a variância, tratado nesta seção, isto não acontece. O conjunto admissível agora é definido pela interseção de um hiperplano de retorno fixo e uma hiper-superfície de assimetria fixa. Como a restrição de assimetria é uma superfície nivelada de um polinômio multivariado de terceiro grau, não temos apenas duas configurações não vazias possíveis para o conjunto admissível.

É evidente que se a solução trivial

$$\alpha_M = \frac{R}{A_0}M_2^{-1}x$$

pertence ao conjunto admissível F , então esta é a solução para o problema de otimização (11). Duas configurações geométricas possíveis estão associadas a α_M pertencentes ao conjunto factível F . Em uma delas, os gradientes x e $M_3\alpha_M^{\otimes 2}$ das restrições são linearmente independentes e temos $\det A_F(\alpha_M) > 0$. Se $\alpha_M \in F$, necessariamente $\sigma_{p^3} = (A_{2M}/A_0)R$,

com $A_{2M} = x^t M_2^{-1} M_3 \alpha_M^{\otimes 2}$. Consequentemente, $\lambda_1 = 0$ (como esperado) e $\lambda_2 = R/A_0$ em (22). Por outro lado, se o hiperplano de retorno fixo toca a hipersuperfície de assimetria em α_M , os gradientes de restrição são linearmente dependentes no ponto de tangência e $\det A_F(\alpha_M) = 0$. Além disso, a solução trivial não pode ser obtida por (24). Nenhuma solução para o problema de otimização (11) em que o hiperplano de retorno fixo é tangente à hipersuperfície de assimetria pode ser obtida por (24), pois, pela Proposição 2.3.1, $\det A_F(\alpha) = 0$. Portanto, é crucial analisar as possíveis soluções para (11) para as quais os gradientes de restrição são linearmente dependentes. Se $\alpha_T \in F$ é tal que

$$M_3 \alpha_T^{\otimes 2} = \frac{A_2}{A_0} x,$$

onde A_2 está associado a α_T , a assimetria e o retorno guardam a seguinte relação:

$$\sigma_{p^3} = \frac{A_2}{A_0} R,$$

que é formalmente a mesma relação obtida entre retorno e assimetria quando $\alpha_M \in F$. Para analisar o problema de otimização, nos casos em que existe uma dependência linear entre os gradientes das restrições para algum ponto do conjunto factível, utilizamos o seguinte teorema (Theorem 2, p. 177 – Caratheodory (2006)):

Teorema 2.3.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f, g_1, \dots, g_m : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Seja x^* um ótimo local de f sujeito a $g(x) = 0$. Suponha que f, g_1, \dots, g_m sejam diferenciáveis em x^* . Existem números reais $\mu^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$, dos quais pelo menos um é diferente de zero, tais que*

$$\mu^* f'(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g'_i(x^*) = 0.$$

Além disso, se $g'_1(x^), \dots, g'_m(x^*)$ são linearmente independentes, podemos tomar $\mu^* = 1$.*

O método clássico dos multiplicadores de Lagrange corresponde ao caso $\mu^* = 1$. O Teorema 2.3.1 aplicado ao problema (11) fornece o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2\lambda_0 M_2 \alpha = 3\lambda_1 M_3 \alpha^{\otimes 2} + \lambda_2 x \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases}, \quad (28)$$

e nos permite lidar com casos de dependência linear no conjunto admissível F .

Se $\alpha \in F$ e $\det A_F(\alpha) = 0$, pela Proposição 2.3.1, sabemos que $A_0 M_3 \alpha^{\otimes 2} = A_2 x$. Note que neste caso,

$$A_0 \sigma_{p^3} = A_2 R,$$

nos pontos de tangência entre as hipersuperfícies das restrições.

Vamos agora considerar casos não analisados em Athayde e Flôres (2004) para o problema (11). Assumimos que $\alpha \in F$, solução de (11), é tal que $\det A_F(\alpha) = 0$, ou seja, os gradientes das restrições $M_3\alpha^{\otimes 2}$ e x são linearmente dependentes. Como α é solução, pelo Teorema 2.3.1, existem λ_0, λ_1 e λ_2 , dos quais pelo menos um é diferente de zero, tal que (28) está satisfeito. Portanto, basta olhar para os casos em que $\lambda_0 = 0$ ou $\lambda_0 = 1$. No caso em que $\lambda_0 = 1$, o vetor $M_2\alpha$ pertence ao espaço unidimensional gerado por $M_3\alpha^{\otimes 2}$ e x . No caso em que $\lambda_0 = 0$, $M_2\alpha$ não pertence a esse espaço gerado (este caso é trivialmente satisfeito, uma vez que $M_3\alpha^{\otimes 2}$ e x são linearmente dependentes).

Se $M_2\alpha$ não pertence ao espaço gerado, então (28) só admite uma solução para $\lambda_0 = 0$.

Neste caso, podemos tomar, por exemplo, $\lambda_1 = A_0$ e $\lambda_2 = -3A_2$. Mas como $M_2\alpha$ não pertence ao espaço gerado, podemos concluir que α , uma solução de (11), não é a solução clássica de Markowitz e $\det A_M(\alpha) \neq 0$. Com isso, sabemos que existe uma solução que ocorre no ponto de tangência entre a hiper-superfície de assimetria e o hiperplano de retorno, mais não ocorre a tripla tangência, e a solução não é trivial.

Se $M_2\alpha$ pertence ao espaço gerado, podemos tomar $\lambda_0 = 1$.

Como antes, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 3\lambda_1 A_4 + \lambda_2 A_2 = 2\sigma_{p^3} \\ 3\lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_0 = 2R \end{cases}.$$

No entanto, não podemos resolvê-lo como feito em Athayde e Flôres (2004), tomando a inversa da matriz de coeficientes do sistema (23), pois seu determinante agora se anula. Por outro lado, como estamos considerando uma solução $\alpha \in F$ de (11), sabemos que existem multiplicadores que satisfazem o sistema e permitem escrever

$$M_2\alpha = \frac{3\lambda_1}{2}M_3\alpha^{\otimes 2} + \frac{\lambda_2}{2}x. \quad (29)$$

Assim, novamente, dividimos a análise em dois casos: $A_2 = 0$ e $A_2 \neq 0$.

Caso 1: $A_2 = 0$. Segue de $A_0M_3\alpha^{\otimes 2} = A_2x$ que $M_3\alpha^{\otimes 2} = 0$ e $\sigma_{p^3} = 0$. Portanto:

$$\lambda_2 A_0 = 2R \quad \text{e} \quad \lambda_1 \in \mathbb{R},$$

que, introduzidos na equação (29), dá:

$$M_2\alpha = \frac{R}{A_0}x.$$

Caso 2: $A_2 \neq 0$. Neste caso, para encontrar uma solução, seguindo o Teorema de Cramer, deve-se expressar um multiplicador em função do outro e então inserir ambos em (29). Como A_0 é sempre estritamente positivo, expressamos λ_2 em função de λ_1 :

$$\lambda_2 = 2\frac{R}{A_0} - 3\lambda_1\frac{A_2}{A_0}, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R},$$

que, introduzidos na equação (29), dá:

$$\alpha = \frac{R}{A_0}M_2^{-1}x.$$

- Observação 2.3.3.** 1. Como esperado, a solução trivial α_M quando os gradientes x e $M_3\alpha_M^{\otimes 2}$ são linearmente dependentes está associada ao caso $\lambda_0 = 1$. Além disso, se para uma solução α de (11), temos $\det A_F(\alpha) = 0$, e $M_2\alpha$ pertence ao espaço unidimensional gerado por x e $M_3\alpha^{\otimes 2}$, então $\alpha = \alpha_M$.
2. Pela Proposição 2.3.1, temos que o caso $\det A_F(\alpha) > 0$ corresponde à totalidade dos casos em que os gradientes das restrições atendem à hipótese de independência linear. Os resultados desta seção, juntamente com os resultados de Athayde e Flôres (2004), completam a análise das soluções de (11).
3. Para uma compreensão mais profunda das possíveis soluções α de (11) para as quais $\det A_F(\alpha) = 0$, e $M_2\alpha$ não pertence ao espaço unidimensional gerado por x e $M_3\alpha^{\otimes 2}$, precisamos de mais informações sobre a natureza do subconjunto de \mathbb{R}^n onde $A_0M_3\alpha^{\otimes 2} = A_2x$.
4. Ao maximizar a assimetria, não precisamos usar o Teorema 2.3.1 porque o caso de dependência linear se reduz a um conjunto unitário cujo elemento é a solução trivial.

2.4 Maximizando o retorno esperado.

Agora é dado $\sigma_{p^2} > 0$ e $\sigma_{p^3} > 0$, e $G = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2\alpha \text{ e } \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3\alpha^{\otimes 2}\}$ é o conjunto admissível: o objetivo é maximizar o retorno esperado em G . Como no caso em que a assimetria é maximizada, se $G \neq \emptyset$, pelo Teorema 2.1.2, o problema de

otimização tem solução. A variância fixa em σ_{p^2} , representada geometricamente por um hiper-elipsóide em \mathbb{R}^n , é um conjunto fechado e limitado. A hiper-superfície representada pela assimetria fixa neste mesmo espaço é um conjunto fechado. Portanto, a função de retorno, sendo contínua em \mathbb{R}^n , admite valores máximos e mínimos nesta interseção.

O problema de otimização restrita é:

$$\begin{cases} \max \alpha^t x \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \end{cases},$$

levando a encontrar uma solução no conjunto admissível G que resolve o sistema:

$$\begin{cases} x = 3\mu_1 M_3 \alpha^{\otimes 2} + 2\mu_2 M_2 \alpha \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \end{cases}. \quad (30)$$

Para determinar μ_1 e μ_2 , considere $\alpha \in G$, multiplicando a primeira equação em (30) por $(M_3 \alpha^{\otimes 2})^t M_2^{-1}$ e α^t para obter um sistema para os multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 3\mu_1 A_4 + 2\mu_2 \sigma_{p^3} = A_2 \\ 3\mu_1 \sigma_{p^3} + 2\mu_2 \sigma_{p^2} = \alpha^t x \end{cases}, \quad (31)$$

onde A_0 e A_2 são como antes. Aqui, como em (23), os elementos da matriz de coeficientes A_R do sistema (31) dependem de $\alpha \in G$:

$$A_R = \begin{bmatrix} A_4 & \sigma_{p^3} \\ \sigma_{p^3} & \sigma_{p^2} \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.4.1. *Dados M_2 , M_3 , e $\sigma_{p^2} > 0$, $\sigma_{p^3} \in \mathbb{R}$, fixos, seja $G = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}\}$. Para todo $\alpha \in G$, o determinante de A_R , $\det A_R(\alpha) = \sigma_{p^2} A_4 - \sigma_{p^3}^2$, é estritamente positivo se e somente se os vectores $M_2 \alpha$ e $M_3 \alpha^{\otimes 2}$ forem linearmente independentes. Além disso, se $M_2 \alpha$ e $M_3 \alpha^{\otimes 2}$ forem linearmente dependentes, então $\sigma_{p^3} M_3 \alpha^{\otimes 2} = A_4 M_2 \alpha$.*

Prova. Como antes, sabendo que a inversa de uma matriz de covariância é definida positiva, considere a norma $\|\alpha\|_1^2 = \alpha^t M_2^{-1} \alpha$ induzida pelo produto interno $\langle \alpha, \beta \rangle_1 = \alpha^t M_2^{-1} \beta$. Portanto, para qualquer $\alpha \in G$, pode-se escrever

$$\det A_R(\alpha) = A_4 \sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2 = \|M_2 \alpha\|_1^2 \|M_3 \alpha^{\otimes 2}\|_1^2 - (\langle M_2 \alpha, M_3 \alpha^{\otimes 2} \rangle_1)^2 \geq 0,$$

a última desigualdade, usando Cauchy-Schwarz. Esta será igual a zero se e somente se $M_2 \alpha$

e $M_3\alpha^{\otimes 2}$ forem linearmente dependentes. Para a segunda parte, para qualquer $\alpha \in G$, usando a mesma norma, o produto de A_4 , que é estritamente positivo, pelo determinante de $A_R(\alpha)$ pode ser escrito como:

$$A_4[\det A_R(\alpha)] = \|A_4M_2\alpha - \sigma_{p^3}M_3\alpha^{\otimes 2}\|_1^2 \geq 0,$$

a igualdade a zero implica necessariamente que

$$A_4M_2\alpha - \sigma_{p^3}M_3\alpha^{\otimes 2} = \mathbf{0},$$

ou que $A_4M_2\alpha = \sigma_{p^3}M_3\alpha^{\otimes 2}$. Consequentemente, se $\alpha \in G$ é tal que a quantidade acima é zero, isso implica que $M_2\alpha$ e $M_3\alpha^{\otimes 2}$ são linearmente dependentes. \square

A Proposição 2.4.1 nos mostra que $\det A_R > 0$ corresponde à totalidade dos casos em que a hipótese de independência linear do gradiente das restrições é satisfeita. Portanto, para $\det A_R > 0$, podemos obter os multiplicadores μ_1 e μ_2 usando a inversa de $A_R(\alpha)$ matriz:

$$3\mu_1 = \frac{\sigma_{p^2}A_2 - \sigma_{p^3}\alpha^t x}{\sigma_{p^2}A_4 - \sigma_{p^3}^2} \quad \text{e} \quad 2\mu_2 = \frac{A_4\alpha^t x - \sigma_{p^3}A_2}{\sigma_{p^2}A_4 - \sigma_{p^3}^2}. \quad (32)$$

Substituindo (32) na primeira equação de (30), encontra-se o seguinte sistema de n equações não lineares em α que satisfaz a equação de Lagrange:

$$\frac{A_4\alpha^t x - \sigma_{p^3}A_2}{\sigma_{p^2}A_4 - \sigma_{p^3}^2}\alpha = M_2^{-1}x - \frac{\sigma_{p^2}A_2 - \sigma_{p^3}\alpha^t x}{\sigma_{p^2}A_4 - \sigma_{p^3}^2}M_2^{-1}M_3\alpha^{\otimes 2}. \quad (33)$$

Colocando α^* , a solução para (13) cuja existência é garantida, em (33), e multiplicando ambos os lados por x^t , após alguma álgebra, temos uma expressão para retorno máximo/mínimo associado ao portfólio eficiente:

$$R = \frac{A_2\sigma_{p^3} \pm \sqrt{(\sigma_{p^2}A_4 - \sigma_{p^3}^2)(A_0A_4 - A_2^2)}}{A_4}.$$

onde A_2 e A_4 são calculados em α^* , um conjunto de pesos que fornece o portfólio ideal, e R^* é o retorno ótimo (máximo): Tendo em mente o resultado da dualidade e considerando o sinal do multiplicador μ_2 , podemos considerar apenas a raiz quadrada positiva:

$$R^* = \frac{A_2\sigma_{p^3} + \sqrt{(\sigma_{p^2}A_4 - \sigma_{p^3}^2)(A_0A_4 - A_2^2)}}{A_4}.$$

Para analisar o problema de otimização, nos casos em que existe dependência linear entre os gradientes das restrições para algum ponto do conjunto admissível, assumimos primeiro que $\alpha \in G$ é uma solução de (13), tal que o determinante no sistema (31) é

zero. Então, há que se considerar dois casos: quando o vetor x pertence ou não ao espaço unidimensional gerado por $M_2\alpha$ e $M_3\alpha^{\otimes 2}$. No primeiro caso, sabemos que existem multiplicadores que satisfazem o sistema e permitem escrever

$$x = 3\mu_1 M_3\alpha^{\otimes 2} + 2\mu_2 M_2\alpha. \quad (34)$$

Dividimos novamente a análise em dois casos: $A_4 = 0$ e $A_4 \neq 0$.

Caso 1: $A_4 = 0$. Segue que $M_3\alpha^{\otimes 2} = 0$. Assim $\sigma_{p^3} = 0$. Portanto, de (34), $x = 2\mu_2 M_2\alpha$.

De onde temos que

$$\mu_2 = \frac{R^*}{2\sigma_{p^2}} \quad \text{e} \quad \sigma_{p^2} = \frac{(R^*)^2}{A_0}.$$

Portanto, α é a solução de Markowitz α_M .

Caso 2: $A_4 \neq 0$. Como A_4 é estritamente positivo, expressamos μ_1 como uma função de μ_2 :

$$3\mu_1 = \frac{A_2}{A_4} - 2\mu_2 \frac{\sigma_{p^3}}{A_4},$$

que, introduzido na primeira equação de (30), dá:

$$x = \frac{A_2}{A_4} M_3\alpha^{\otimes 2}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $x^t M_2^{-1}$, temos:

$$A_0 A_4 - A_2^2 = 0.$$

Pela proposição 2.3.1, esta igualdade implica que $A_0 M_3\alpha^{\otimes 2} = A_2 x$, que determina a dependência linear do vetor gradiente $M_3\alpha^{\otimes 2}$ também com o vetor x . Porém, como $\det A_R = 0$, pela Proposição 2.4.1, $A_4 M_2\alpha = \sigma_{p^3} M_3\alpha^{\otimes 2}$. Assim, combinando as duas implicações, obtemos:

$$\alpha = \frac{\sigma_{p^3}}{A_4} M_2^{-1} M_3\alpha^{\otimes 2} = \frac{\sigma_{p^3}}{A_0 A_4} M_2^{-1} A_2 x.$$

Além disso, como $M_2\alpha$ e $M_3\alpha^{\otimes 2}$ são linearmente dependentes, então $A_2 \sigma_{p^3} = A_4 R$, que substituindo na equação anterior, chega-se à:

$$\alpha = \frac{A_4 R}{A_0 A_4} M_2^{-1} x = \frac{R}{A_0} M_2^{-1} x.$$

Portanto, quando os vetores $M_2\alpha$ e $M_3\alpha^{\otimes 2}$ são linearmente dependentes, e o vetor

x pertence ao espaço gerado por eles, a solução de (13) é a solução clássica de Markowitz, e há uma tangência tripla entre todas as três hipersuperfícies. Caso contrário, quando $\sigma_{p^2}A_4 - \sigma_{p^3}^2 = 0$ mas x não pertence ao espaço unidimensional gerado por $M_2\alpha$ e $M_3\alpha^{\otimes 2}$, a solução de (13) não é a clássica de Markowitz, e tanto $\det A_M(\alpha)$ como $\det A_F(\alpha)$ são não nulos, já que o hiperplano de retorno não tangencia as demais hiper-superfícies em α , solução de (13).

Quando $\sigma_{p^2}A_4 - \sigma_{p^3}^2 \neq 0$, informações adicionais podem ser obtidas considerando o caso interessante quando a restrição de assimetria é não vinculativa, o que equivale a $\mu_1 = 0$. Segue de (31) que

$$2\mu_2 = \frac{\alpha^t x}{\sigma_{p^2}}.$$

Substituindo na primeira equação de (30) para em seguida multiplicar ambos os lados por $x^t M_2^{-1}$, chegamos à variância mínima:

$$\sigma_{p^2} = \frac{(R^*)^2}{A_0},$$

onde R^* é o valor ótimo (máximo) para o retorno esperado com variância e assimetria definidas antecipadamente. Portanto, pela Proposição 2.2.1:

$$\alpha = \frac{R^*}{A_0} M_2^{-1} x = \alpha_M.$$

A solução clássica de Markowitz é a solução de (13) quando $\sigma_{p^2}A_4 - \sigma_{p^3}^2 \neq 0$ e a restrição de assimetria é não vinculativa.

Na próxima seção apresentamos novos resultados para a dualidade no modelo a três momentos, relacionando as três abordagens para o problema de otimização.

2.5 Resultados de dualidade no modelo a três momentos

A partir dos resultados apresentados até aqui, sabe-se que três problemas de otimização restrita estão associados ao modelo de seleção de carteiras a três momentos, e que a existência de solução de cada um deles é garantida, (I) problema de variância mínima, (II) problema de assimetria máxima e (III) problema de retorno máximo:

$$(I) \begin{cases} \min \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases} \quad (II) \begin{cases} \max \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases} \quad (III) \begin{cases} \max \alpha^t x \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \end{cases}.$$

A seguir, reunimos alguns dos principais elementos vistos nas seções anteriores, em cada uma das três configurações do problema a três momentos, para em seguida propor novos resultados de dualidade.

Problema de variância mínima

Condições de primeira ordem e o sistema de Lagrange associado ao problema de variância mínima:

$$\begin{cases} \min \alpha^t M_2 \alpha, \\ \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2M_2 \alpha = 3\lambda_1 M_3 (\alpha \otimes \alpha) + \lambda_2 x \\ \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases} .$$

Sistema para obter os multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 A_4 + \lambda_2 A_2 = 2\sigma_{p^3} \\ 3\lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_0 = 2R \end{cases} \Rightarrow A_F \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sigma_{p^3} \\ 2R \end{bmatrix} .$$

Determinante da matriz A_F , associada ao sistema dos multiplicadores, e a condição para dependência linear entre os gradientes das restrições:

$$\det A_F = 3(A_0 A_4 - (A_2)^2) \geq 0, \quad (35)$$

$$\det A_F = 0 \Leftrightarrow A_0 M_3 (\alpha \otimes \alpha) - A_2 R = 0.$$

Expressão obtida para os multiplicadores λ_1 e λ_2 :

$$\lambda_1 = 2/3 \frac{A_0 \sigma_{p^3} - A_2 R}{A_0 A_4 - (A_2)^2} \quad \lambda_2 = 2 \frac{A_4 R - A_2 \sigma_{p^3}}{A_0 A_4 - (A_2)^2}. \quad (36)$$

Equação, obtida a partir do sistema de equações implícitas não lineares em α^* solução, onde figuram os parâmetros fixados no problema juntamente com o momento ótimo, $\sigma_{p^2}^*$:

$$(A_0 A_4 - (A_2)^2) \sigma_{p^2}^* - A_4 R^2 + 2A_2 \sigma_{p^3} R - A_0 (\sigma_{p^3})^2 = 0.$$

Expressão da variância mínima associada à carteira ótima α^* :

$$\sigma_{p^2}^* = \frac{A_4 R^2 - 2A_2 \sigma_{p^3} R + A_0 (\sigma_{p^3})^2}{A_0 A_4 - (A_2)^2}.$$

Problema de assimetria máxima

Condições de primeira ordem e o sistema de Lagrange associado ao problema de assimetria máxima:

$$\begin{cases} \max \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3M_3 (\alpha \otimes \alpha) = 2\gamma_1 M_2 \alpha + \gamma_2 x \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases} .$$

Sistema para obter os multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 2\gamma_1 \sigma_{p^2} + \gamma_2 R = 3\alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) \\ 2\gamma_1 R + \gamma_2 A_0 = 3A_2 \end{cases} \Rightarrow A_M \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) \\ 3A_2 \end{bmatrix} .$$

Determinante da Matriz A_M , associada ao sistema dos multiplicadores, e a condição para dependência linear entre os gradientes das restrições:

$$\det A_M = 2(A_0 \sigma_{p^2} - R^2) \geq 0, \quad (37)$$

$$\det A_M = 0 \Leftrightarrow A_0 M_2 \alpha - R x = 0.$$

Expressão obtida para os multiplicadores γ_1 e γ_2 :

$$\gamma_1 = 3/2 \frac{A_0 \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) - A_2 R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2} \quad \gamma_2 = 3 \frac{\sigma_{p^2} A_2 - \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2}. \quad (38)$$

Equação, obtida a partir do sistema de equações implícitas não lineares em α^* solução, onde figuram os parâmetros fixados no problema juntamente com o momento ótimo, $\sigma_{p^3}^*$:

$$(A_0 A_4 - (A_2)^2) \sigma_{p^2} - A_4 R^2 + 2A_2 \sigma_{p^3} R - A_0 (\sigma_{p^3}^*)^2 = 0.$$

Expressão da assimetria máxima associada à carteira ótima α^* :

$$\sigma_{p^3}^* = \frac{A_2 R \pm \sqrt{(A_0 A_4 - (A_2)^2) (\sigma_{p^2} A_0 - R^2)}}{A_0}.$$

Problema de retorno máximo

Condições de primeira ordem e o sistema de Lagrange associado ao problema de retorno máximo:

$$\begin{cases} \max \alpha^t x \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\mu_1 M_3 (\alpha \otimes \alpha) + 2\mu_2 M_2 \alpha \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \end{cases} .$$

Sistema para obter os multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 3\mu_1 A_4 + 2\mu_2 \sigma_{p^3} = A_2 \\ 3\mu_1 \sigma_{p^3} + 2\mu_2 \sigma_{p^2} = \alpha^t x \end{cases} \Rightarrow A_R \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 \\ \alpha^t x \end{bmatrix}.$$

Determinante da matriz A_R , associada ao sistema dos multiplicadores, e a condição para dependência linear entre os gradientes das restrições:

$$\det A_R = 6(A_4 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^3})^2) \geq 0, \quad (39)$$

$$\det A_R = 0 \Leftrightarrow A_4 M_2 \alpha - \sigma_{p^3} M_3 (\alpha \otimes \alpha) = 0.$$

Expressão obtida para os multiplicadores μ_1 e μ_2 :

$$\mu_1 = 1/3 \frac{\sigma_{p^2} A_2 - \sigma_{p^3} \alpha^t x}{\sigma_{p^2} A_4 - \sigma_{p^3}^2} \quad \mu_2 = 1/2 \frac{A_4 \alpha^t x - \sigma_{p^3} A_2}{\sigma_{p^2} A_4 - \sigma_{p^3}^2}. \quad (40)$$

Equação, obtida a partir do sistema de equações implícitas não lineares em α^* solução, onde figuram os parâmetros fixados no problema juntamente com o momento ótimo, R^* :

$$(A_0 A_4 - A_2^2) \sigma_{p^2} - A_4 R^{*2} + 2A_2 \sigma_{p^3} R^* - A_0 \sigma_{p^3}^2 = 0.$$

Expressão do retorno máximo associado à carteira ótima α^* :

$$R^* = \frac{A_2 \sigma_{p^3} \pm \sqrt{(A_4 \sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2)(A_0 A_4 - A_2^2)}}{A_4}.$$

Para cada um dos problemas de otimização associados ao modelo a três momentos é possível obter o momento ótimo pela imposição dos outros dois momentos, ou seja: Fixando um par (R, σ_{p^3}) , obtêm-se uma carteira de variância mínima $\alpha^{(1)}$ e sua respectiva variância ótima $\sigma_{p^2}^{(1)}$; fixando um par (R, σ_{p^2}) , obtêm-se uma carteira de assimetria máxima $\alpha^{(2)}$ e sua respectiva assimetria ótima $\sigma_{p^3}^{(2)}$; e fixando um par $(\sigma_{p^2}, \sigma_{p^3})$, obtêm-se uma carteira de retorno máximo $\alpha^{(3)}$ e seu respectivo retorno ótimo $R^{(3)}$. Note que o par de parâmetros fixado em cada problema define o conjunto admissível onde o momento tomado por função objetivo será otimizado.

Sabe-se que, considerados os três problemas de otimização associados ao modelo de seleção de carteiras a três momentos, uma solução ótima α^* , obtida a partir de uma destas três abordagens, será considerada eficiente quando ela for uma solução ótima para os três problemas simultaneamente, ou seja, quando ela pertencer à região de dualidade. A seguir, apresentamos uma definição formal para carteira eficiente no modelos a três momentos.

Definição 2.5.1 (Carteira eficiente no modelo a três momentos). *Dada uma carteira*

α^* com sua respectiva tripla de momentos $(R^*, \sigma_{p^2}^*, \sigma_{p^3}^*)$, sejam $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2}^* = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } R^* = \alpha^t x\}$, $F = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^3}^* = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \text{ e } R^* = \alpha^t x\}$ e $G = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2}^* = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } \sigma_{p^3}^* = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}\}$. A carteira α^* é considerada eficiente se não existir nenhuma carteira admissível $\beta \in F, G$ ou H tal que

$$\beta^t x \geq R^*, \quad \beta^t M_2 \beta \leq \sigma_{p^2}^* \quad \text{e} \quad \beta^t M_3 \beta^{\otimes 2} > \sigma_{p^3}^*$$

A Definição 2.5.1 nos diz que não há como superar a assimetria sem que haja uma redução no retorno e/ou aumento na variância. Além disso, para ser uma carteira eficiente, α^* deve ser solução dos três problemas de otimização simultaneamente.

Note que se em α^* , o problema de minimizar a variância for dual com cada um dos outros dois problemas, então os três problemas serão duais entre si, e α^* será eficiente, bastando assim verificar duas relações:

- a dualidade entre o problema de variância mínima e o problema de assimetria máxima, e
- a dualidade entre o problema de variância mínima e o problema de retorno máximo.

Para garantir a dualidade entre os problemas de otimização a partir do Lema 1.7.1 e do Lema de Dualidade visto em Athayde e Flôres (2004), o sinal do multiplicador, associado à restrição que comuta com a função objetivo no problema dual deve ser positivo.

Problema de variância mínima:

Problema de assimetria máxima:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2M_2\alpha = 3\lambda_1 M_3(\alpha \otimes \alpha) + \lambda_2 x \\ \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{array} \right. \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3M_3(\alpha \otimes \alpha) = 2\gamma_1 M_2\alpha + \gamma_2 x \\ \alpha^t M_2\alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{array} \right.$$

Problema de variância mínima:

Problema de retorno máximo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2M_2\alpha = 3\lambda_1 M_3(\alpha \otimes \alpha) + \lambda_2 x \\ \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{array} \right. \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = 3\mu_1 M_3(\alpha \otimes \alpha) + 2\mu_2 M_2\alpha \\ \alpha^t M_2\alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \end{array} \right.$$

Como as expressões dos multiplicadores (36), (38) e (40) são obtidas a partir do sistema de Lagrange, o Lema da dualidade 1.7.1 só pode ser considerado nos casos em que os gradientes das restrições não são colineares em seus respectivos problemas, o que ocorre quando:

$$A_0 A_4 - (A_2)^2 > 0 \quad \text{no problema de variância mínima;}$$

$A_0\sigma_{p^2} - R^2 > 0$ no problema de assimetria máxima;

$A_4\sigma_{p^2} - (\sigma_{p^3})^2 > 0$ no problema de retorno máximo.

Desta forma, se os parâmetros forem tais que os vetores x , $M_2\alpha^*$ e $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$ sejam linearmente independentes dois a dois, então para atender a condição de dualidade entre o problema de variância mínima e o problema de assimetria máxima os multiplicadores λ_1 e γ_1 devem ser positivos, o que corresponde a:

$$A_0\sigma_{p^3} - A_2R > 0,$$

e, para atender a condição de dualidade entre o problema de minimizar a variância e o problema de maximizar o retorno, λ_2 e μ_2 devem ser positivos, o que corresponde a:

$$A_4R - A_2\sigma_{p^3} > 0.$$

2.5.1 Alguns aspectos da dependência linear – novos resultados

Inicialmente, apresentamos três lemas que trazem condições adicionais obtidas para que cada um dos determinantes em (35), (37) e (39) sejam nulos:

Lema 2.5.1 (Condição para $\det A_F = 0$).

$$A_0A_4 - (A_2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0 \quad e \quad A_4R - A_2\sigma_{p^3} = 0.$$

Prova.

$$\det A_F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_0M_3(\alpha \otimes \alpha) - A_2x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0$$

e usando a expressão que pode ser deduzida acima para A_2 em $A_0A_4 - (A_2)^2 = 0$, obtemos:

$$A_0A_4 - (A_2)^2 = (A_0A_4 - A_2) \frac{A_0\sigma_{p^3}}{R} = 0$$

$$A_0(A_4R - A_2\sigma_{p^3}) = 0$$

Assim

$$A_0A_4 - (A_2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0 \quad e \quad A_4R - A_2\sigma_{p^3} = 0$$

Por outro lado, suponha que $A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0$ e $A_4R - A_2\sigma_{p^3} = 0$. Então,

combinando as condições:

$$A_4R - A_2\sigma_{p^3} = A_4R - A_2 \cdot \frac{A_2R}{A_0} = 0$$

$$R(A_0A_4 - (A_2)^2) = 0$$

Logo

$$A_0A_4 - (A_2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0 \quad \text{e} \quad A_4R - A_2\sigma_{p^3} = 0$$

□

Lema 2.5.2 (Condição para $\det A_M = 0$).

$$A_0\sigma_{p^2} - R^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0 \quad \text{e} \quad A_2\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}R = 0, \quad A_2 \neq 0.$$

Prova.

$$\det A_M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_0M_2\alpha - Rx = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0$$

e usando $A_0\sigma_{p^2} = R^2$ na assimetria que pode ser deduzida da expressão acima:

$$\sigma_{p^3} = \frac{A_2}{A_0} \frac{A_0\sigma_{p^2}}{R}$$

$$R\sigma_{p^3} - A_2\sigma_{p^2} = 0$$

Assim

$$A_0\sigma_{p^2} - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0 \quad \text{e} \quad A_2\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}R = 0$$

Por outro lado, suponha que $A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0$ e $A_2\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}R = 0$, então combinando as condições,:

$$A_2\sigma_{p^2} = \frac{A_2}{A_0}R^2$$

Logo, se $A_2 \neq 0$:

$$A_0\sigma_{p^2} - R^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0 \quad \text{e} \quad A_2\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}R = 0$$

No entanto, se $A_2 = 0$, nada podemos afirmar. □

Lema 2.5.3 (Condição para $\det A_R = 0$).

$$A_4\sigma_{p^2} - (\sigma_{p^3})^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_4R - \sigma_{p^3}A_2 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{p^2}A_2 - \sigma_{p^3}R = 0.$$

Prova.

$$\det A_R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_4 M_2 \alpha - \sigma_{p^3} M_3 (\alpha \otimes \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_4 R - \sigma_{p^3} A_2 = 0$$

Se $\sigma_{p^3} = 0$, segue de $A_4 R - \sigma_{p^3} A_2 = 0$ que $A_4 = 0$, o que implica em $A_2 = 0$. Logo, $\sigma_{p^2} A_2 - \sigma_{p^3} R = 0$. Se $\sigma_{p^3} \neq 0$, usando a expressão que pode ser deduzida de $A_4 R = \sigma_{p^3} A_2$ para A_4 em $A_4 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^3})^2 = 0$, obtemos:

$$0 = A_4 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^3})^2 = \frac{\sigma_{p^3} A_2}{R} (\sigma_{p^2} - (\sigma_{p^3})^2)$$

$$\sigma_{p^3} (A_2 \sigma_{p^2} - \sigma_{p^3} R) = 0$$

Assim

$$A_4 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_4 R - \sigma_{p^3} A_2 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{p^2} A_2 - \sigma_{p^3} R = 0$$

Por outro lado, suponha que $A_4 R - \sigma_{p^3} A_2 = 0$ e $\sigma_{p^2} A_2 - \sigma_{p^3} R = 0$. Então, combinando as condições:

$$A_4 R - \sigma_{p^3} A_2 = A_4 R - \sigma_{p^3} \frac{\sigma_{p^3} R}{\sigma_{p^2}} = 0$$

$$\sigma_{p^2} (A_4 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^3})^2) = 0$$

Logo

$$A_4 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^3})^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_4 R - \sigma_{p^3} A_2 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{p^2} A_2 - \sigma_{p^3} R = 0$$

□

Os Lemas 2.5.1, 2.5.2 e 2.5.3, apresentados nesta seção, trazem novas condições para o determinante nulo, em cada uma das abordagens, fornecendo uma forma alternativa de verificar a dependência linear entre os gradientes.

A seguir, desenvolvemos estratégias para determinar se uma solução é eficiente, a partir da tripla ótima dos momentos.

2.5.2 Tratamento para os pontos ótimos

Seja α^* uma solução obtida através de uma das três abordagens para o problema a três momentos, e seja $(R^*, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3})$, $(R, \sigma_{p^2}^*, \sigma_{p^3})$ ou $(R, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3}^*)$ a respectiva tripla dos momentos associada a α^* . Como a existência é garantida nos três problemas de otimização, partindo de qualquer um dos problemas, sempre é possível obter uma tripla

para a respectiva carteira ótima, desde que o conjunto admissível seja não vazio.

O objetivo é determinar condições para que, dada uma tripla ótima associada a α^* , qualquer que seja a abordagem do problema, seja possível saber se α^* pertence ou não a região de dualidade, isto é, saber se ela é de fato uma solução eficiente.

Geometricamente, dada uma tripla ótima, as equações dos momentos definem: um hiperplano de retorno, um hiper elipsóide de variância e uma hiper superfície de grau três de assimetria no espaço dos pesos α . Dependendo da abordagem do problema, duas superfícies definem o conjunto admissível onde a terceira será otimizada.

Quando a solução α^* coincide com a solução de Markowitz, significa que α^* é o ponto de tangência entre o hiperplano de retorno e o hiper elipsóide de variância. Denotamos a solução de Markowitz como solução trivial.

A seguir, analisamos o caso em que α_M pertence ao conjunto factível, com o objetivo de obter nossa primeira condição de dualidade a partir de uma tripla ótima.

2.5.3 Dualidade na solução trivial

No problema a três momentos, a solução de Markowitz só irá ocorrer se α_M pertencer ao conjunto admissível, e sempre que pertencer ao conjunto admissível, esta será a solução para o problema, independente da abordagem. Isto significa que neste caso a dualidade está garantida, pois se a solução é trivial em uma das três abordagens então ela será trivial nas outras duas, já que α_M estará sempre no conjunto factível.

De fato:

Partindo do problema que maximiza a assimetria, onde são fixados retorno e variância, é fácil ver que a solução de Markowitz ocorre se e somente se o conjunto admissível é unitário, e neste caso $\alpha^* = \alpha_M$ é o ponto de tangência entre as hipersuperfícies das restrições do problema. Mais ainda, Markowitz pertence ao conjunto admissível se e somente se a variância foi fixada em σ_{p^2M} . Tal variância define um limite para que o conjunto admissível seja não vazio:

$$\sigma_{p^2M} = \frac{R^2}{A_0}.$$

Partindo do problema que minimiza a variância, temos sempre um conjunto admissível não vazio e não unitário de interseção entre as hiper-superfícies de retorno e assimetria. Quando minimizamos a variância em um conjunto que contém α_M , que é a solução de Markowitz, sabemos que este é o ponto de menor variância para o retorno fixado R , logo é o ponto de menor variância no conjunto admissível considerado, e neste

caso a assimetria σ_{p^3} fixada coincide com σ_{p^3M} :

$$\sigma_{p^3} = \frac{A_2}{A_0}R.$$

Partindo do problema que maximiza o retorno, o raciocínio é similar, pois em um conjunto admissível que contém α_M , solução de Markowitz, sabe-se previamente que este é o ponto de maior retorno possível para a variância fixada σ_{p^2} , logo este será o ponto de maior retorno no conjunto admissível considerado, e neste caso a variância fixada coincide com σ_{p^2M} . Nesta abordagem do problema, a escolha dos parâmetros, variância e assimetria, pode produzir um conjunto admissível vazio, e o limite mínimo para a variância em relação à assimetria fixada será:

$$A_4\sigma_{p^2} \geq \sigma_{p^3}^2.$$

Se $A_0\sigma_{p^2} = R^2$ e $A_4\sigma_{p^2} = \sigma_{p^3}^2$, os três gradientes são l.d. dois a dois. Neste caso, ou $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ é o vetor nulo, ou ocorre a tripla tangência entre as hiper superfícies.

De fato:

$M_3(\alpha \otimes \alpha) = \vec{0} \Rightarrow \sigma_{p^3} = 0, A_2 = 0$ e $A_4 = 0$, logo $A_4\sigma_{p^2} = \sigma_{p^3}^2$ e $A_0A_4 = A_2^2$, sendo os três gradientes l.d.

$A_4\sigma_{p^2} = \sigma_{p^3}^2$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha) \neq \vec{0} \Rightarrow \sigma_{p^3} \neq 0$, como $A_0\sigma_{p^2} = R^2 \Rightarrow A_0\sigma_{p^3} = A_2R$ e $A_4\sigma_{p^2} = \sigma_{p^3}^2 \Rightarrow A_4R = A_2\sigma_{p^3}$ então, pelo Lema 2.5.1, $A_0A_4 = A_2^2$ e α^* define o ponto de tripla tangência.

Se $\sigma_{p^2} = \frac{R^2}{A_0}$ mas $\sigma_{p^2} > \frac{\sigma_{p^3}^2}{A_4}$ a tangência ocorre somente entre o hiperplano de retorno e o hiper elipsóide de variância.

De fato:

Como $A_4\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2 > 0$, então $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ é não nulo – pois $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ nulo implicaria em $A_4\sigma_{p^2} = \sigma_{p^3}^2$ – e não colinear com $M_2\alpha$, o que implica em $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ não ser colinear com x , logo $A_0A_4 - A_2^2 > 0$.

Além disso, como a solução de Markowitz implica em $A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0$, então α^* é ortogonal a combinação linear $A_0M_3(\alpha \otimes \alpha) - A_2x$. Segue que

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{A_0} = \sigma_{p^2M} &> \frac{\sigma_{p^3}^2}{A_4} \\ R^2 &> \frac{A_0\sigma_{p^3}}{A_4}\sigma_{p^3} \\ R &> \frac{A_2\sigma_{p^3}}{A_4} \end{aligned}$$

atendendo sempre a condição de sinal dos multiplicadores λ_2 e μ_2 , o que confirma a dua-

lidade entre os problemas de minimizar a variância e maximizar o retorno.

Assim, fica definida a primeira condição que garante a dualidade para uma tripla ótima dada:

Condição 1: Se $\sigma_{p^2} = \frac{R^2}{A_0}$ então $\alpha^* = \alpha_M$ é eficiente, sendo $\sigma_{p^2} \geq \frac{\sigma_{p^3}^2}{A_4}$

2.5.4 Dualidade na solução não-trivial

Quando a solução de Markowitz não pertence ao conjunto admissível, a solução é não trivial e pode ocorrer:

1. Fora de qualquer tangência, se x , $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente independentes dois a dois;
2. No ponto de tangência entre as hiper superfícies de variância e assimetria, se apenas $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente dependentes, $A_4M_2\alpha - \sigma_{p^3}M_3(\alpha \otimes \alpha) = 0$;
3. No ponto de tangência entre as hiper superfícies de assimetria e retorno, se apenas x e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ são linearmente dependentes, $A_0M_3(\alpha \otimes \alpha) - A_2x = 0$; ou
4. Quando $A_0M_3(\alpha \otimes \alpha) - A_2x = 0$ e $A_4M_2\alpha - \sigma_{p^3}M_3(\alpha \otimes \alpha) = 0$.

A seguir, analisamos os quatro casos possíveis para uma solução não trivial, com o objetivo de obter uma condição que garanta a dualidade em cada um destes casos.

Caso 1 – Fora de qualquer tangência

Análise da dualidade no Caso 1: quando uma solução não trivial ocorre fora de qualquer tangência.

Seja $(R, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3})$, uma tripla ótima associada a uma solução α^* , obtida a partir de uma das três abordagens do problema a três momentos, tal que:

$$A_0\sigma_{p^3} > A_2R \quad \text{e} \quad A_4R > A_2\sigma_{p^3}, \quad (41)$$

sendo A_2 e A_4 calculados em α^* .

Pelos Lemas 2.5.1 e 2.5.3, segue das desigualdades em (41), que:

$$A_0A_4 - A_2^2 > 0, \quad A_0\sigma_{p^2} - R^2 > 0 \quad \text{e} \quad A_4\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2 > 0.$$

Sendo assim, os determinantes associados aos problemas de otimização serão não nulos nas três abordagens simultaneamente.

Como vimos na seção anterior, para garantir a dualidade neste caso basta que os numeradores das expressões dos multiplicadores λ_1 ou γ_1 e λ_2 ou μ_2 sejam positivos, o que coincide com as relações entre R e σ_{p^3} em (41).

Deste modo, podemos afirmar que dada a tripla para uma carteira ótima α^* , se os parâmetros R e σ_{p^3} forem tais que:

$$\sigma_{p^3} > \frac{A_2}{A_0}R \quad \text{e} \quad R > \frac{A_2}{A_4}\sigma_{p^3},$$

então α^* pertence à região de dualidade, e é considerada uma carteira eficiente.

Note que uma vez que $A_0\sigma_{p^3} > A_2R$ implica em $A_0\sigma_{p^2} > R^2$, e que $A_4R > \sigma_{p^3}A_2$ implica $A_4\sigma_{p^2}^* > \sigma_{p^3}^2$, esta condição pode ser utilizada para qualquer das três abordagens do problema, e a região de dualidade para o caso em que os determinantes são simultaneamente não nulos fica completamente caracterizada. Assim, definimos a segunda condição que caracteriza uma tripla ótima eficiente.

Condição 2: Se $\sigma_{p^3} > \frac{A_2}{A_0}R$ e $R > \frac{A_2}{A_4}\sigma_{p^3}$, então α^* é eficiente.

Caso 2 – dependência linear entre $M_2\alpha^*$ e $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$

Análise da dualidade no Caso 2: uma solução não trivial ocorre no ponto de tangência entre as hiper-superfícies de variância e assimetria, ou seja, $A_4M_2\alpha^* = \sigma_{p^3}M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$.

Seja α^* uma solução não trivial para o problema de otimização a três momentos obtida a partir de uma das três abordagens tal que:

$$A_4M_2\alpha^* - \sigma_{p^3}M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*) = 0,$$

sendo $\sigma_{p^3} \neq 0$ – o que implica em $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$ não nulo – e A_4 calculado em α^* . Como a solução de Markowitz não pertence ao conjunto factível, segue que x e $M_2\alpha^*$ são linearmente independentes, o que implica em x e $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$ também serem l.i. Desta forma apenas os gradientes $M_2\alpha^*$ e $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$ são linearmente dependentes em α^* , que define o ponto de tangência entre as hiper superfícies de variância e assimetria.

Neste caso, no ponto α^* , a variância e a assimetria guardam uma relação entre si:

$$A_4\sigma_{p^2} = \sigma_{p^3}^2$$

Como no caso em que se obtêm a solução de Markowitz no problema Média-Variância, podemos antes considerar o problema a dois momentos Variância-Assimetria,

onde um parâmetro é fixado para otimização do outro:

$$\begin{cases} \min \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3}, \end{cases} \quad (42)$$

Condições de primeira ordem:

$$\begin{cases} 2M_2 \alpha = 3\lambda M_3 (\alpha \otimes \alpha) \\ \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3}, \end{cases} \quad (43)$$

Multiplicando a primeira equação em (43) por $(M_3(\alpha \otimes \alpha))^t M_2^{-1}$:

$$\lambda = \frac{2\sigma_{p^3}}{3A_4}$$

Substituindo o multiplicador λ na primeira equação de (43):

$$\alpha^* = \frac{\sigma_{p^3}}{A_4} M_2^{-1} M_3 (\alpha^* \otimes \alpha^*)$$

Em princípio, podem ocorrer mais de uma solução $\alpha_i^* \in B$, $B = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, A_4 \sigma_{p^2}^* = \sigma_{p^3}^2\}$, todas associadas a mesma variância mínima $\sigma_{p^2}^*$ para a assimetria fixada:

$$\sigma_{p^2}^* = \frac{\sigma_{p^3}^2}{A_4},$$

onde A_4 é calculado no respectivo α^* . Deste modo, as soluções α_i^* definem os pontos de tangência entre as hiper superfícies de variância e assimetria.

É possível ainda, calcular o retorno para cada uma das soluções α^* :

$$R_i = \frac{A_2}{A_4} \sigma_{p^3}$$

sendo A_2 e A_4 calculados no respectivo α_i^* .

A resolução do problema dual, em que se maximiza a assimetria fixando a variância, é análoga, e pelo Lema da dualidade 1.7.2 a solução será considerada dual quando σ_{p^3} for positivo, pois implica no sinal positivo para o multiplicador. Assim, sendo $\sigma_{p^3} > 0$, as mesmas soluções são obtidas no problema dual para a variância fixada em $\sigma_{p^2}^*$.

Voltando ao problema de otimização a três momentos, sob as mesmas condições dadas no início da seção, dada uma tripla ótima $(R, \sigma_{p^2}^*, \sigma_{p^3})$ associada a uma carteira α_1^* de variância mínima, é possível avaliar se α_1^* é um ponto de tangência entre as hiper superfícies de variância e assimetria, mas isso não garante a dualidade entre os três problemas. Observe que se $A_4 \sigma_{p^2}^* = \sigma_{p^3}^2$, $A_0 \sigma_{p^2}^* > R^2$ e $\sigma_{p^3} > 0$, então $\sigma_{p^2}^*$ é a menor variância para a assimetria fixada, logo é a menor variância no conjunto admissível consi-

derado, mas podem existir outros pontos em B com mesma variância, mesma assimetria e retorno maior. O mesmo ocorre se a tripla ótima considerada está associada a uma carteira de assimetria máxima, $(R, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3}^*)$, se a carteira é um ponto de tangência, tal que $A_4\sigma_{p^2} = (\sigma_{p^3}^*)^2$, $A_0\sigma_{p^2} > R^2$ e $\sigma_{p^3}^* > 0$, então $\sigma_{p^3}^*$ é a assimetria máxima para a variância fixada, e portanto a assimetria máxima no conjunto admissível considerado, mas podem haver retornos maiores para este mesmo par $(\sigma_{p^2}, \sigma_{p^3}^*)$.

Agora, considere uma tripla ótima $(R^*, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3})$ de retorno máximo, associada a α^* obtida a partir do problema de otimização a três momentos pela maximização do retorno, tal que $A_4\sigma_{p^2} = \sigma_{p^3}^2$, $A_0\sigma_{p^2} > (R^*)^2$ e $\sigma_{p^3} > 0$. Neste caso, todo $\alpha \in B$, que define um ponto de tangência entre as hiper superfícies definidas pela imposição das restrições, pertence ao conjunto admissível, e R^* estará associado a $\alpha^* = \alpha_i^*$ de retorno máximo. Deste modo, pode-se definir uma condição para a dualidade a partir de uma tripla de retorno máximo:

Condição 3: Se $\sigma_{p^3} > 0$, $\sigma_{p^2} > \frac{R^2}{A_0}$ e $\sigma_{p^2} = \frac{\sigma_{p^3}^2}{A_4}$ então $\alpha^* = \alpha^*$ é eficiente.

Note que a possibilidade de múltiplas tangências permite a existência de retornos diferentes para cada ponto de tangência, desta forma não é possível inferir sobre a tripla ótima quando ela é obtida a partir das outras duas abordagens do problema a três momentos, pois não garante o maior retorno para o par $(\sigma_{p^2}, \sigma_{p^3})$.

Caso 3 – dependência linear entre $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$ e x

Análise do Caso 3: quando uma solução não trivial ocorre no ponto de tangência entre as hiper-superfícies de retorno e assimetria, ou seja, $A_0M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*) = A_2x$.

Agora, considere uma tripla ótima $(R, \sigma_{p^2}^*, \sigma_{p^3})$ associada a uma carteira α^* não trivial de variância mínima, tal que $A_0M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*) = A_2x$, e $A_4\sigma_{p^2} > (\sigma_{p^3})^2$, ou seja, a tangência ocorre somente entre as hiper superfícies de retorno e assimetria.

No caso (b) e no caso em que a solução é trivial, a dependência linear funciona como um limitador do conjunto admissível para uma das abordagens do problema. A dependência linear entre x e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ não representa um limitador para o conjunto admissível, apenas indica um ponto de tangência entre as hiper superfícies.

Além disso pelo Lema 2.5.1 se α^* está no ponto de tangência, sabemos que:

$$A_0A_4 = (A_2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad A_0\sigma_{p^3} = A_2R \quad \text{e} \quad A_4R = A_2\sigma_{p^3}.$$

Como $A_4\sigma_{p^2} > (\sigma_{p^3})^2$, sabe-se previamente que $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$ é não nulo. Agora,

observe que:

$$\sigma_{p^2} > \frac{R^2}{A_0} \quad \text{e} \quad \sigma_{p^2} > \frac{\sigma_{p^3}^2}{A_4}.$$

Suponha que para a tripla ótima considerada temos:

$$\sigma_{p^2} > \frac{R^2}{A_0} > \frac{\sigma_{p^3}^2}{A_4}.$$

Lembrando que $A_0\sigma_{p^3} = A_2R$, isto implicaria $A_4R > A_2\sigma_{p^3}$ que por sua vez implica em $A_0A_4 > (A_2)^2$ o que contraria a hipótese. Por outro lado se

$$\sigma_{p^2} > \frac{\sigma_{p^3}^2}{A_4} > \frac{R^2}{A_0},$$

então $A_4R < A_2\sigma_{p^3}$ que também implica $A_0A_4 > (A_2)^2$ contrariando a hipótese.

Logo, neste caso

$$\sigma_{p^2} > \frac{R^2}{A_0} = \frac{\sigma_{p^3}^2}{A_4}.$$

Também sabemos, pelos Lemas 2.5.2 e 2.5.3, que $A_2\sigma_{p^2} \neq \sigma_{p^3}R$.

Após análise, conclui-se que ainda não há elementos para decidir se a solução é eficiente ou não neste caso. Logo, para este caso não foi possível definir nenhuma condição que garanta que a solução pertence a região de dualidade.

Caso 4 – dependência linear entre $M_3(\alpha \otimes \alpha)$ e x , e entre $M_2\alpha$ e $M_3(\alpha \otimes \alpha)$

Análise o Caso 4: para uma solução não trivial, temos $A_0M_3(\alpha \otimes \alpha) = A_2x$ e $A_4M_2\alpha = \sigma_{p^3}M_3(\alpha \otimes \alpha)$, simultaneamente

Quando a solução α^* não trivial é tal que $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*) = 0$, temos dependência linear do gradiente $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$ com x e com $M_2\alpha^*$, mas x e $M_2\alpha^*$ são l.i. Além disso $\sigma_{p^3} = 0$ assim como $A_2 = 0$ e $A_4 = 0$, e todas as relações que envolvem estes termos também se anulam:

$$A_0A_4 - A_2^2 = 0;$$

$$A_4\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2 = 0;$$

$$A_4R - A_2\sigma_{p^3} = 0;$$

$$A_0\sigma_{p^3} - A_2R = 0.$$

Quando a solução é trivial, coincidindo com a solução de Markowitz, e x e $M_2\alpha^*$ também são colineares, vimos que a dualidade está garantida. No entanto, se $M_3(\alpha \otimes \alpha) = 0$, mas a solução de Markowitz não pertence ao conjunto admissível, então $M_2\alpha^*$ não pode ser escrito como combinação linear de x e $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$. Neste caso ainda não há elementos para decidir se a solução é eficiente ou não, e não podemos definir uma condição para que a solução pertença a região de dualidade.

Na próxima proposição, reunimos as três condições de dualidade obtidas, a partir das quais é possível afirmar que uma solução pertence a região de dualidade, ou seja, é uma solução eficiente.

Proposição 2.5.1 (Condições de dualidade). *Dada uma tripla $(R^*, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3})$ de retorno máximo associada a solução α^* , a solução pertence a região de dualidade, sendo considerada uma solução eficiente, se uma das condições abaixo for atendida:*

1. $\sigma_{p^2} = \frac{R^{*2}}{A_0}$ (solução trivial);
 - se $A_4\sigma_{p^2} = \sigma_{p^3}^2$: tripla tangência, ou $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*) = 0$
 - se $A_4\sigma_{p^2} > \sigma_{p^3}^2$: α^* ortogonal a $A_0M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*) - A_2x$
2. $\sigma_{p^3} > \frac{A_2}{A_0}R^*$ e $R^* > \frac{A_2}{A_4}\sigma_{p^3}$ (solução não trivial - tripla independência linear);
3. $\sigma_{p^2} > \frac{R^{*2}}{A_0}$, $\sigma_{p^2} = \frac{\sigma_{p^3}^2}{A_4}$ e $\sigma_{p^3} > 0$ (solução não trivial - $M_2\alpha^*$ e $M_3(\alpha^* \otimes \alpha^*)$ l.d.).

As duas possibilidades na condição 1 tratam da solução de Markowitz. Em ambos os casos a dualidade é garantida, sendo que na primeira ocorrem as três tangências simultaneamente, ou $M_3(\alpha \otimes \alpha) = 0$.

$$A_0\alpha M_2 = Rx \quad A_0M_3(\alpha \otimes \alpha) = A_2x \quad A_4M_2\alpha = \sigma_{p^3}M_3(\alpha \otimes \alpha)$$

e na segunda, somente a tangência de Markowitz

$$A_0\alpha M_2 = Rx.$$

As condições 2 e 3 tratam os casos em que a solução de Markowitz não pertence ao conjunto admissível. Na condição 3, a solução ocorre em um ponto de tangência

$$A_4M_2\alpha = \sigma_{p^3}M_3(\alpha \otimes \alpha),$$

e na condição 2, fora de qualquer tangência

$$A_0\sigma_{p^2} - R^2 > 0 \quad A_0A_4 - A_2^2 > 0 \quad A_4\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2 > 0.$$

Na Proposição 2.5.1, consideramos uma carteira obtida a partir do problema de retorno máximo, dada a peculiaridade da terceira condição. Mas, triplas obtidas a partir de qualquer das três restrições que atendam as condições 1 e 2 da Proposição 2.5.1, podem ser consideradas eficientes.

Nos demais casos de dependência linear em uma solução não trivial, casos (3) e (4), analisados na seção anterior, não foi possível garantir a dualidade:

No caso (3), $A_0M_3(\alpha \otimes \alpha) = A_2x$, $A_0\sigma_{p^2} > R^2$ e $A_4\sigma_{p^2} > \sigma_{p^3}^2$, $M_3(\alpha \otimes \alpha) \neq 0$.

No caso (4), $A_0M_3(\alpha \otimes \alpha) = A_2x$, $A_0\sigma_{p^2} > R^2$ e $A_4\sigma_{p^2} = \sigma_{p^3}^2$, $M_3(\alpha \otimes \alpha) = 0$. Em ambos os casos,

$$\sigma_{p^3} = \frac{A_2}{A_0}R \quad \text{e} \quad R = \frac{A_2}{A_4}\sigma_{p^3}.$$

A próxima seção complementa os resultados em Athayde e Flôres (2004) relativos a estrutura da superfície eficiente associada ao modelo a três momentos.

2.6 Homotetia no modelo a três momentos

Em Athayde e Flôres (2004), com o objetivo de relacionar os valores de retorno e assimetria fixados nas restrições do problema, e sem perda de generalidade, um número real positivo k é fixado, e são considerados pares (R, σ_{p^3}) tais que $\sigma_{p^3} = k^3R^3$, ou ainda $y_3 = kR$, onde y_3 é a raiz cubica da assimetria, também chamada de assimetria padronizada. Com isso é possível reescrever (24) quando $\sigma_{p^3} = k^3R^3$,

$$M_2\alpha = \frac{A_4R - A_2k^3R^3}{A_0A_4 - (A_2)^2}x + \frac{A_0k^3R^3 - A_2R}{A_0A_4 - (A_2)^2}M_3(\alpha \otimes \alpha). \quad (44)$$

Note que, para qualquer valor de retorno e assimetria positivos fixados, sempre é possível encontrar k positivo tal que $\sigma_{p^3} = k^3R^3$. Com isso, é apresentada por eles a seguinte proposição:

Proposição 2.6.1. *Para um dado k , sejam $\bar{\alpha}$ o portfólio de variância mínima quando $R = 1$ e $y_3 = k$, e $\bar{\sigma}_{p^2}$, $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ respectivamente a variância mínima e os multiplicadores correspondentes, então para todo portfólio ótimo relacionado ao par assimetria/retorno tal que $\sigma_{p^3} = k^3R^3$, ou $y_3 = kR$:*

- (i) *A solução para (24) será $\alpha = \bar{\alpha}R$, com variância mínima correspondente $\sigma_{p^2} = \bar{\sigma}_{p^2}R^2$;*
- (ii) *Os respectivos multiplicadores de Lagrange, em (??), são dados por $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1R$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2R$;*
- (iii) *A propriedade de separação de dois fundos é válida.*

Considerando o espaço tridimensional definido pelo retorno médio, desvio padrão e assimetria padronizada ($R \times y_2 \times y_3$), provamos, para os problemas de maximização da assimetria e maximização do retorno, uma proposição análoga à apresentada por Athayde e Flôres (2004). Primeiro, dados $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_{p^2} > 0$, $R > 0$ e o conjunto admissível $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } R = \alpha^t x\}$, analisamos as propriedades das soluções $\alpha \in D$ de (12), verificando a homotetia no problema de máxima assimetria. E em seguida, dado $\sigma_{p^3} > 0$, $\sigma_{p^2} > 0$ e $G = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}\}$, analisamos as propriedades das soluções $\alpha \in G$ de (13), mostrando que o problema do retorno máximo também admite propriedades homotéticas semelhantes.

2.6.1 Homotetia no problema de assimetria máxima

Observe que para todo par (R, σ_{p^2}) , com R e σ_{p^2} números reais positivos, sempre é possível obter um k positivo tal que $\sigma_{p^2} = k^2 R^2$, ou mesmo $y_2 = kR$, onde y_2 é o desvio padrão. Isto permite relacionar os parâmetros fixos de retorno e variância do problema de otimização (12). Notamos que se $k < 1/\sqrt{A_0}$, o conjunto admissível associado $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } R = \alpha^t x\}$ é vazio. De fato, para cada R fixo, temos $\alpha^t M_2 \alpha \geq R^2/A_0, \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$, e a igualdade é verificada se e somente se $\alpha = (R/A_0)M_2^{-1}x$. Segue-se que os seguintes resultados são válidos:

Lema 2.6.1. *Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e k maior que $1/\sqrt{A_0}$, seja $\bar{\alpha}$ um portfólio de assimetria máxima (mínima) quando $R = 1$ e $y_2 = k$. Seja $\bar{\sigma}_{p^3}$, $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ a assimetria máxima (mínima) e os multiplicadores correspondentes, respectivamente, então*

(i) *Para retorno fixo R e variância $k^2 R^2$, $\alpha = \bar{\alpha}R$ é um candidato a solução de (12).*

(ii) *Os respectivos multiplicadores de Lagrange são dados por $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1 R$ e $\gamma_2 = \bar{\gamma}_2 R^2$.*

Prova. Seja $\bar{\alpha}$ um portfólio de assimetria máxima quando $R = 1$ e $\bar{\sigma}_{p^2} = k^2$. Seja $\bar{A}_2 = x^t M_2^{-1} M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2}$. Como $k > 1/\sqrt{A_0}$, $\bar{\alpha}$ não é a solução trivial. A partir de (18), para

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{3 A_0 \bar{\alpha}^t M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2} - \bar{A}_2}{k^2 A_0 - 1} \quad \text{e} \quad \bar{\gamma}_2 = 3 \frac{k^2 \bar{A}_2 - \bar{\alpha}^t M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2}}{k^2 A_0 - 1},$$

com $\bar{A}_2 = x^t M_2^{-1} M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2}$, (15) é satisfeita. Logo,

$$3M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2} = 2\bar{\gamma}_1 M_2 \bar{\alpha} + \bar{\gamma}_2 x. \tag{45}$$

Seja $\alpha = \bar{\alpha}R$. Utilizando as propriedades do produto de Kronecker,

$$\begin{aligned} A_2 &= x^t M_2^{-1} M_3 (R\bar{\alpha})^{\otimes 2} = R^2 \bar{A}_2, \\ \alpha^t M_3 (R\alpha)^{\otimes 2} &= R^3 \bar{\alpha}^t M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2}, \\ M_3 \alpha^{\otimes 2} &= R^2 M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2}, \end{aligned}$$

substituindo no lado direito de (45), temos:

$$M_3 \alpha^{\otimes 2} = \frac{A_0 \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} - A_2 R}{k^2 R^2 A_0 - R^2} M_2 \alpha + \frac{k^2 R^2 A_2 R - \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}}{k^2 R^2 A_0 - R^2} x. \quad (46)$$

Portanto, $\alpha = \bar{\alpha}R$ satisfaz (15) com os multiplicadores γ_1 e γ_2 , conforme definido em (18). Novamente, usando as propriedades do produto Kronecker, a relação entre os multiplicadores será

$$\gamma_1 = \bar{\gamma}_1 R \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \bar{\gamma}_2 R^2.$$

Note que (46) nos mostra que α é um candidato a resolver o problema de maximização da assimetria sujeita ao retorno R e variância $k^2 R^2$. \square

Proposição 2.6.2. *Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e k maior que $1/\sqrt{A_0}$, seja $\bar{\alpha}$ um portfólio de assimetria máxima (mínima) quando $R = 1$ e $y_2 = k$. Seja $\bar{\sigma}_{p^3}$, $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ respectivamente a assimetria máxima (mínima) e os multiplicadores correspondentes, então para cada portfólio ótimo relacionado ao par variância/retorno tal que $\sigma_{p^2} = k^2 R^2$, ou $y_2 = kR$, uma solução para (12) será $\alpha = \bar{\alpha}R$, com assimetria máxima correspondente $\sigma_{p^3} = \bar{\sigma}_{p^3} R^3$.*

Prova. Seja $\bar{\alpha}$ um portfólio de assimetria máxima quando $R = 1$ e $\bar{\sigma}_{p^2} = k^2$. Seja $\bar{A}_2 = x^t M_2^{-1} M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2}$. Do Lema 2.6.1, sabemos que $\alpha = \bar{\alpha}R$ é um candidato para resolver o problema de maximização da assimetria sujeita ao retorno R e variância $k^2 R^2$. É o suficiente para provar que a assimetria associada a α é máxima. Observe que $((M_3 \bar{\alpha} R)^{\otimes 2})^t \bar{\alpha} R = \bar{\sigma}_{p^3} R^3$.

Suponha por contradição que α não seja uma solução; ou seja, existe um vetor β , cujo retorno é R e variância $k^2 R^2$, que satisfaz (19) e é tal que $\sigma_{p^3}(\beta) > \sigma_{p^3}(\alpha) = \bar{\sigma}_{p^3} R^3$. Tome $\delta = (1/R)\beta$. Observe que o retorno associado ao vetor δ é dado por $x^t \delta = (1/R)x^t \beta = 1$, e sua variância é dada por $\delta^t M_2 \delta = (1/R^2)\beta^t M_2 \beta = k^2$. Além disso, é fácil ver que o vetor δ satisfaz (19) quando $R = 1$ e a variância é igual a k^2 . Como $\bar{\alpha}$ é uma solução, a assimetria associada a δ deve ser menor ou igual a $\bar{\sigma}_{p^3}$, porém

$$\sigma_{p^3}(\delta) = \left(\frac{1}{R} \beta \otimes \frac{1}{R} \beta \right)^t M_3^t \frac{1}{R} \beta = \frac{1}{R^3} \sigma_{p^3}(\beta) > \frac{1}{R^3} \sigma_{p^3}(\alpha) = \bar{\sigma}_{p^3}.$$

Contradição! Consequentemente, α é uma solução para o problema de maximizar a assimetria sujeita ao retorno R e variância $k^2 R^2$. \square

Como Athayde e Flôres (2004) apontam, este resultado nos diz que conhecendo a solução $\bar{\alpha}$ para o retorno $R = 1$ e variância fixada em k^2 , todas as outras carteiras são múltiplas desta para um k adequadamente escolhido.

- Observação 2.6.1.** 1. Para o caso $k = 1/\sqrt{A_0}$, o item (i) da Proposição 2.6.2 é trivialmente satisfeito. A solução trivial associada a $k = 1/\sqrt{A_0}$ e $R = 1$ é dada por $\bar{\alpha} = (1/A_0)M_2^{-1}x$, e para cada $R > 0$, $\alpha = \bar{\alpha}R$ é a solução trivial de (11) associada a um retorno fixo em R e variância em R^2/A_0 .
2. Athayde e Flôres (2004) analisaram apenas os casos em que $\det A_F(\alpha) > 0$.
3. O Lema 2.6.1 e sua prova são análogos aos resultados correspondentes aos itens (i) e (ii) da Proposição 2.6.1 apresentada em Athayde e Flôres (2004) para o problema (11). Em Athayde e Flôres (2004), a prova da Proposição 2.6.1 apenas garante que $\alpha = \bar{\alpha}R$ é uma solução candidata para (11) quando o retorno é fixado em R , e a assimetria é fixada em k^3R^3 .

2.6.2 Homotetia no problema de variância mínima

Seguindo o mesmo argumento utilizado para provar a Proposição 2.6.2, é possível concluir a prova do item (i) da Proposição 2.6.1 dada por Athayde e Flôres (2004). A seguir, por completude, apresentaremos a Proposição 2.6.3, análoga à Proposição 2.6.2, para o problema (11).

Proposição 2.6.3. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e k positivo, seja $\bar{\alpha}$ um portfólio de variância mínima quando $R = 1$ e $y_3 = k$. Suponha que $\det A_F(\bar{\alpha}) > 0$. Sejam $\bar{\sigma}_{p^2}$, $\bar{\lambda}_1$ e $\bar{\lambda}_2$ respectivamente a variância mínima e os multiplicadores correspondentes, então para qualquer portfólio ótimo relacionado ao par assimetria/retorno tal que $\sigma_{p^3} = k^3R^3$, uma solução para (11) será $\alpha = \bar{\alpha}R$, com correspondente variância mínima $\sigma_{p^2} = \bar{\sigma}_{p^2}R^2$.

Prova. Seja $\bar{\alpha}$ uma carteira de variância mínima quando $R = 1$. Pela Proposição 2.6.1, sabemos que $\alpha = \bar{\alpha}R$ satisfaz (22). Isso é,

$$2M_2\alpha = 3\lambda_1M_3\alpha^{\otimes 2} + \lambda_2x$$

onde $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1R$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2R$. A variância associada é $\sigma_{p^2} = \bar{\sigma}_{p^2}R^2$. Ou seja, a Proposição 2.6.1 nos mostra que $\alpha = \bar{\alpha}R$ é um candidato a solução para o problema de minimizar a variância sujeita ao retorno R e assimetria k^3R^3 . Resta provar que a variância associada a α é a mínima. Observe que $(\bar{\alpha}R)^t M_2 \bar{\alpha}R = \bar{\sigma}_{p^2}R^2$.

Suponha por contradição que α não é uma solução; ou seja, existe um vetor β , cujo retorno é R e a assimetria k^3R^3 , que satisfaz (22), e é tal que $\sigma_{p^2}(\beta) < \sigma_{p^2}(\alpha) = \bar{\sigma}_{p^2}R^2$.

Tome $\delta = (1/R)\beta$. Observe que o retorno associado ao vetor δ é $x^t\delta = (1/R)x^t\beta = 1$, e sua assimetria é $\delta^t M_3 \delta^{\otimes 2} = (1/R^3)\beta^t M_3 (\beta \otimes \beta) = k^3$. Além disso, é fácil ver que o vetor δ satisfaz (24), então $R = 1$, e assimetria é igual a k^3 . Como $\bar{\alpha}$ é uma solução, a variância associada a δ deve ser maior ou igual a $\bar{\sigma}_{p^2}$; Contudo

$$\sigma_{p^2}(\delta) = \left(\frac{1}{R}\beta\right)^t M_2 \frac{1}{R}\beta = \frac{1}{R^2}\sigma_{p^2}(\beta) < \frac{1}{R^2}\sigma_{p^2}(\alpha) = \bar{\sigma}_{p^2}.$$

Contradição! □

A partir desse resultado, pode-se afirmar que todas as carteiras de variância mínima, na mesma direção k no espaço $R \times y_3$, são múltiplas da carteira $\bar{\alpha}$ de retorno $R = 1$.

2.6.3 Homotetia no problema de retorno máximo

Note que para cada par $(\sigma_{p^2}, \sigma_{p^3})$ com σ_{p^2} e σ_{p^3} números reais positivos, é sempre possível obter um k positivo tal que $\sigma_{p^3} = k^3 y_2^3$, ou $y_3 = k y_2$, onde y_2 é o desvio padrão e y_3 é a raiz cúbica da assimetria, também chamado de assimetria padronizada. Isto nos permite relacionar os parâmetros de variância e assimetria fixas no problema de otimização.

Agora, dados $x \in \mathbb{R}$, $\sigma_{p^2} > 0$, $\sigma_{p^3} > 0$ e o conjunto admissível $G = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}\}$, da análise das propriedades das soluções $\alpha \in G$ de (13), o seguinte resultado é válido:

Lema 2.6.2. *Dado M_1, M_2, M_3 e $k > 0$, seja $\bar{\alpha}$ uma carteira de retorno máximo (mínimo) quando $\sigma_{p^2} = 1$ e $y_3 = k$. Seja \bar{R} , $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ o retorno máximo (mínimo) e os multiplicadores correspondentes, respectivamente, então:*

(i) *Para variância σ_{p^2} e assimetria $k^3 y_2^3$ fixas, o vetor $\alpha = \bar{\alpha} y_2$ é candidato à solução de (13).*

(ii) *Os respectivos multiplicadores são dados por $\mu_1 = \bar{\mu}_1(1/y_2^2)$ e $\mu_2 = \bar{\mu}_2(1/y_2)$.*

Prova. Seja $\bar{\alpha}$ uma carteira de retorno máximo quando $\sigma_{p^2} = 1$ e $\bar{\sigma}_{p^3} = k^3$. Sejam $\bar{A}_2 = x^t M_2^{-1} M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2}$ e $\bar{A}_4 = (M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2})^t M_2^{-1} M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2}$. Se $\det A_R \neq 0$, por (32), os multiplicadores serão:

$$3\bar{\mu}_1 = \frac{1}{3} \frac{\bar{A}_2 - k^3 \bar{\alpha}^t x}{\bar{A}_4 - (k^3)^2} \quad \text{e} \quad 2\bar{\mu}_2 = \frac{1}{2} \frac{\bar{A}_4 \bar{\alpha}^t x - k^3 \bar{A}_2}{\bar{A}_4 - (k^3)^2}$$

Seja $\alpha = \bar{\alpha} y_2$. Usando as propriedades do produto de Kronecker, o sistema (33)

pode ser escrito como:

$$\left(\frac{A_4 \alpha^t x - k^3 y_2^3 A_2}{y_2^2 A_4 - (k^3 y_2^3)^2} \right) \alpha = M_2^{-1} x - \left(\frac{y_2^2 A_2 - k^3 y_2^3 \alpha^t x}{y_2^2 A_4 - (k^3 y_2^3)^2} \right) M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}. \quad (47)$$

Portanto, $\alpha = \bar{\alpha} y_2$ satisfaz (30) com os multiplicadores μ_1 e μ_2 , conforme definido em (32). Novamente, usando as propriedades do produto de Kronecker, obtemos:

$$\mu_1 = \bar{\mu}_1 \frac{1}{y_2^2} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \bar{\mu}_2 \frac{1}{y_2}.$$

Observe que (47) nos mostra que α é um candidato para resolver o problema de maximização do retorno sujeito à variância y_2^2 e assimetria $k^3 y_2^3$. \square

Argumentando como antes, β/y_2 resolveria o problema com os parâmetros fixados em $(1, k^3)$, gerando um retorno maior que R , o que é uma contradição. Daí segue a próxima proposição.

Proposição 2.6.4. *Dados $\sigma_{p^2} > 0$ e $k > 0$, seja $\bar{\alpha}$ uma carteira de retorno máximo (mínimo) quando $y_2 = 1$ e $y_3 = k$. Seja \bar{R} , $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ respectivamente o retorno máximo (mínimo) e os multiplicadores correspondentes, então para cada portfólio ótimo relacionado ao par variância/assimetria tal que $\sigma_{p^3} = k^3 y_2^3$, ou $y_3 = k y_2$, uma solução para (12) será $\alpha = \bar{\alpha} y_2$, com retorno máximo correspondente $R = \bar{R} y_2^2$.*

Prova. Seja $\bar{\alpha}$ uma carteira de retorno máximo quando $y_2 = 1$ e $\bar{\sigma}_{p^3} = k^3$. Seja $\bar{A}_2 = x^t M_2^{-1} M_3 \bar{\alpha}^{\otimes 2}$. Do Lemma 2.6.2, sabemos que $\alpha = \bar{\alpha} y_2$ é um candidato a resolver o problema de maximização do retorno sujeito à variância σ_{p^2} e assimetria $k^3 y_2^3$. Basta provar que o retorno associado a α é o máximo. Observe que $x^t(\bar{\alpha} y_2) = R y_2$.

Suponha por contradição que α não é uma solução; ou seja, existe um vetor β , cuja variância é σ_{p^2} e a assimetria $k^3 y_2^3$, que satisfaz (33) e é tal que $R(\beta) > R(\alpha) = \bar{R} y_2^2$. Tome $\delta = (1/y_2)\beta$. Observe que a variância associada ao vetor δ é dada por

$$\delta M_2 \delta = \frac{1}{y_2^2} \beta^t M_2 \beta = 1,$$

e sua assimetria é dada por

$$\delta M_3 \delta^{\otimes 2} = \frac{1}{y_2^3} \beta^t M_3 \beta^{\otimes 2} = \sigma_{p^3}(\beta) = k^3.$$

Além disso, é fácil ver que o vetor δ satisfaz (33) quando $y_2 = 1$ e a assimetria é igual a k^3 . Como $\bar{\alpha}$ é uma solução, o retorno associado a δ deve ser menor ou igual a \bar{R} , porém

$$R(\delta) = \left(\frac{1}{y_2} \beta \right)^t x = \frac{1}{y_2} R(\beta) > \frac{1}{y_2} R(\alpha) = \bar{R}.$$

Contradição! Consequentemente, α é uma solução para o problema de maximizar o retorno sujeito à variância σ_p^2 e assimetria $k^3 y_2^3$. \square

Ao longo deste capítulo, foram verificadas vantagens na análise do problema de otimização relacionado à seleção de portfólios pela perspectiva da maximização da assimetria. No modelo a três momentos, dentre as configurações possíveis, maximizar a assimetria se apresenta como a melhor estratégia para resolução do problema, dada a estrutura singular de seu conjunto admissível que permite tomar a solução de Markowitz como ponto de partida na escolha dos parâmetros a serem definidos quando se propõe incorporar a assimetria ao problema de seleção de carteiras. A partir desta abordagem foram obtidos resultados significativos para o modelo a três momentos, fortalecendo a tendência à incorporação dos momentos de ordem superior em problemas de seleção de portfólio. Ao provarmos a existência de solução para o modelo de maximização da assimetria, considerando a estrutura do conjunto admissível, tivemos pistas que nos levaram a demonstrar a existência de solução para os outros dois problemas associados ao modelo a três momentos. Assim, além de validar e dar robustez aos resultados em Athayde e Flôres (2004), delineamos o local onde podem ocorrer soluções simultâneas de problemas para garantir que a solução encontrada seja um portfólio eficiente que seja a melhor opção de portfólio de investimentos.

3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO A TRÊS MOMENTOS

Após a análise do modelo proposto em Athayde e Flôres (2004), e tendo em vista a natureza dual deste problema, amplamente investigada, invertemos os parâmetros no problema, tomando a assimetria como função objetivo para então propor a maximização da assimetria, quando fixados o momento ordinário de ordem 1 e o momento centrado de ordem 2. Esta nova perspectiva possibilitou obter até aqui resultados quanto à existência de solução para o problema de otimização e determinar a configuração ótima para uma carteira de assimetria máxima. A solução se apresenta em ambos os problemas, como um sistema de n equações implícitas não lineares em função dos pesos ótimos.

Com o objetivo de investigar as relações entre os três momentos considerados no problema, bem como a relevância da incorporação de momentos de ordem superior na seleção de carteiras de investimentos, através da aplicação numérica do modelo de seleção de carteiras inicialmente proposto em Martins (2015), foi selecionada uma amostra de nove ativos presentes no mercado brasileiro de ações, onde alguns apresentavam assimetria considerada expressiva na distribuição dos seus retornos mensais. Os dados sobre os fundos de investimento foram obtidos através da plataforma de uma corretora brasileira de valores que permitiu obter as matrizes das médias, co-variâncias e co-assimetrias para retornos mensais destes ativos com o uso de uma planilha eletrônica. A assimetria ótima da carteira foi calculada a partir do modelo que considera os três primeiros momentos, sob a perspectiva da maximização da assimetria, como visto em Martins (2015), resolvendo um problema de otimização com duas restrições. Sob a ótica das Ciências Econômicas, a assimetria mais expressiva conduz a uma variabilidade maior, ou seja, há um aumento no risco da carteira que ocasionará a assimetria mais expressiva. Observando-se os limites extremos da cauda à direita referente à assimetria positiva expressiva dos ativos da carteira, observa-se a possibilidade de ocorrência de um evento raro, traduzido por baixa probabilidade, que irá modificar a expectativa de ganho na carteira positivamente. Logo, o aumento da assimetria positiva sugere uma carteira mais eficiente para investidores mais arrojados. A configuração ótima de uma carteira de investimento pode ser obtida pela maximização da assimetria sob as condições de fixar o retorno esperado e a variância ponderada da carteira, definindo o conjunto admissível pela interseção destas duas restrições. Devem-se inicialmente estabelecer os valores de retorno e variância adequados, de modo a garantir que o conjunto admissível seja não vazio e não unitário. A proposta deste capítulo é analisar um modelo de seleção de carteiras de investimento que considera os três primeiros momentos dos retornos de ativos: retorno médio, variância e assimetria. A próxima seção apresenta as etapas para aplicação numérica do modelo a três momentos, pela maximização da assimetria. Na Seção 3.2, é feita a aplicação do modelo para obtenção de uma carteira de assimetria máxima para valores pré estabelecidos de retorno

esperado e variância ponderada da carteira, utilizando-se os dados coletados referentes aos fundos de investimentos da plataforma de uma corretora brasileira de valores, e analisa os resultados obtidos para 5 diferentes combinações de ativos. Na Seção 3.3, os resultados são expandidos com a obtenção de triplas dos momentos $(R, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3})$ para carteiras de assimetria máxima a cada nova configuração do conjunto admissível, definido pelo par (R, σ_{p^2}) fixado. A visualização destes resultados reporta-se a um gráfico tridimensional das triplas referentes aos momentos centrados, obtendo-se uma estrutura para a superfície ótima de assimetria máxima. A última seção agrega considerações adicionais.

3.1 Etapas de aplicação do modelo a três momentos

Para aplicação do modelo a três momentos, foi considerada uma combinação de três ativos, para a qual foram obtidas as matrizes M_1 , M_2 e M_3 , das médias mensais, co-variâncias e co-assimetrias respectivamente.

Em seguida, são estabelecidos os parâmetros, de retorno esperado e variância ponderada, a serem fixados de modo a definir as restrições do problema.

No problema de selecionar carteiras a três momentos, em que se propõe obter uma carteira ótima de assimetria máxima, a imposição das restrições iniciais do problema que considera o momento ordinário de ordem um e o momento centrado de ordem 2, define o conjunto admissível no qual a função para a assimetria será maximizada no problema a três momentos. Com o objetivo de definir este conjunto admissível para o problema a três momentos, obteve-se inicialmente a carteira ótima de variância mínima, utilizando o modelo Média-Variância de Markowitz, em que apenas os dois primeiros momentos são considerados, para a qual a solução é dada por α_M :

$$\alpha_M = \frac{R}{A_0} M_2^{-1} x,$$

e a variância mínima para R , associada à α_M é dada por σ_{p^2M} :

$$\sigma_{p^2M} = \frac{R^2}{A_0}$$

Geometricamente, as equações dos dois primeiros momentos (5), quando fixados em valores obtidos através do modelo Média-Variância, definem um hiperplano de retorno que tangencia um hiper-elipsóide de variância no espaço dos pesos α , determinando a solução

de Markowitz no ponto de tangência.

$$R = \alpha^t x = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - r_f \\ \bar{X}_2 - r_f \\ \bar{X}_3 - r_f \end{bmatrix}$$

$$R = \alpha_1(\bar{X}_1 - r_f) + \alpha_2(\bar{X}_2 - r_f) + \alpha_3(\bar{X}_3 - r_f)$$

$$\sigma_{p^2M} = \alpha^t M_2 \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{p^2M} = \alpha_1^2 \sigma_{11} + \alpha_2^2 \sigma_{22} + \alpha_3^2 \sigma_{33} + 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma_{12} + 2\alpha_1 \alpha_3 \sigma_{13} + 2\alpha_2 \alpha_3 \sigma_{23}$$

Neste cenário, o conjunto interseção $M = \{\alpha \in \mathbb{R}^k, \alpha^t x = R \text{ e } \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2M}\}$ é unitário, sendo σ_{p^2M} a menor variância para R . Para compor o conjunto admissível do problema a três momentos, a variância deve ser fixada em um valor σ_{p^2} maior que σ_{p^2M} , mantendo-se o mesmo valor R para o retorno, de modo a produzir um conjunto admissível, interseção entre as restrições, não vazio e não unitário.

Optou-se por definir o retorno inicial R a partir da média dos retornos médios excedentes, ou seja, a média dos valores resultantes da subtração do retorno médio de cada ativo pela taxa do ativo livre de risco $r_f = 0.5$. Em seguida a variância mínima σ_{p^2M} é obtida para R pela aplicação do modelo Média-Variância. Os parâmetros a serem fixados como restrições no problema a três momentos são definidos por R , o mesmo retorno fixado no modelo Média-Variância, e pela variância σ_{p^2} maior que a mínima σ_{p^2M} obtida para R segundo o modelo Média-Variância.

A carteira de variância mínima para R , segundo o modelo Média-Variância de Markowitz, foi obtida pela utilização do método Programação Quadrática Linear (SQP), que resolve problemas de otimização restrita para uma função não linear sujeita uma ou mais restrições. A utilização deste método foi feita recorrendo ao programa Octave, e não necessitou de implementação uma vez que faz parte das rotinas implementadas pelo programa Octave.

Os ponderadores, componentes do vetor α_M , obtidos através do modelo Média-Variância para R , definem a carteira ótima, e a variância mínima σ_{p^2M} é calculada a partir da carteira ótima α_M , não havendo outra configuração possível para os ponderadores que forneça menor variância com o mesmo retorno fixado.

$$\sigma_{p^2M} = \alpha_M^t M_2 \alpha_M = \frac{R^2}{A_0}$$

A carteira ótima de variância mínima σ_{p^2M} e retorno R apresenta uma assimetria

ponderada, calculada a partir de α_M :

$$\sigma_{p^3M} = \alpha_M^t M_3 (\alpha_M \otimes \alpha_M)$$

Para compor o conjunto de restrições, com o objetivo de definir o conjunto admissível F para o problema a três momentos, foi mantido o retorno R , elevando-se a variância inicialmente em 5%, criando um conjunto admissível – interseção entre as restrições – não vazio e não unitário. Com isso, dentre as diversas carteiras $\alpha \in F$ com retorno igual a R e variância igual a σ_{p^2} , é possível selecionar uma que apresente maior assimetria.

$$\begin{cases} \max \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases}$$

Para isso foi utilizado o método SQP, recorrendo ao programa Octave. O programa também fornece a assimetria máxima associada à carteira ótima α_s^* , que corresponde à assimetria calculada a partir da solução α_s^* , utilizando a expressão (20), cuja raiz do discriminante é positiva.

3.2 Resultados

A seleção dos nove ativos, correspondendo a Fundos de Investimentos, constituiu uma amostra considerada diversificada em relação a assimetria, que atende a proposta deste estudo, obtida do site referente à corretora XP no período de janeiro a dezembro 2017, Tabela 1. Este período foi definido com o objetivo de minimizar a influência de eventos externos que poderiam alterar a volatilidade da carteira, evitando períodos de conturbação político social.

Uma vez que o método proposto demanda por um ativo sem risco, optou-se pela poupança, tendo a taxa de retorno r_f , 0.5% para rendimento mensal, ocorrido no mês de dezembro de 2017, atendendo à composição da carteira no modelo proposto em Athayde e Flôres (2004).

Os valores dos retornos mensais dos ativos permitiram obter o momento centrado de ordem três para verificar se estes têm distribuição assimétrica. Dos nove, dois tendiam à simetria, Ativo 5 e Ativo 9, apresentando 5 e 1 centésimos de desvio padrão, respectivamente. Cinco ativos indicaram assimetria à direita com valores 93, 52, 42 e 26 centésimos de desvio padrão, para o Ativo 4, Ativo 1, Ativo 8 e 3, e Ativo 2, respectivamente, sendo que os Ativos 3 e 8 apresentaram valores muito próximos de 42 centésimos de desvio padrão. Os Ativos 6 e 7 mostraram assimetria negativa da ordem de 52 e 6 centésimos de

Tabela 1 - Discriminação dos ativos, classificação e risco segundo a corretora XP.

| ATIVOS: Fundos de investimentos | Classificação | Avaliação de Risco (0-100) |
|------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| XP Corporate Plus FIC FIM CP | | 26 |
| XP Debêntures Incentivadas CP | Multimercado | 10 |
| Kinea Chronos FIM | | 6 |
| Selection RF Light FIC FI CP LP | Renda Fixa | 6 |
| IP Value Hedge FIC | | 15 |
| Indie FIC FIA | Ações | 39 |
| Kiron FIC FIA | | 41 |
| Leblon Ações FIC FIA | Renda Variável Long Only Livre | 41 |
| Alaska Black FIC FIA - BDR Nível I | | 68 |

Legenda: <(https://www.xpi.com.br/investimentos/fundos-de-investimento/lista/#/).>

Fonte: Plataforma da corretora de valores brasileira XP Investimentos, set/2021

desvio padrão à esquerda, respectivamente. As estatísticas encontram-se na Tabela 2.

A forma da distribuição dos retornos de um ativo é caracterizada pela assimetria e pela curtose, sendo que a primeira já foi descrita anteriormente. A curtose, momento centrado de ordem 4, mede a concentração ou dispersão dos valores em relação às medidas de tendência central. O coeficiente de curtose, tido como a razão entre o quarto momento central e o quadrado do segundo momento central, caracteriza o achatamento da curva, que será: mesocúrtica se ($=3$), leptocúrtica se (>3) e platicúrtica se (<3). Os índices de curtose desses ativos também foram obtidos para verificar a sua classificação, uma vez que a forma leptocúrtica pode ser considerada desejada na otimização do cenário de risco da carteira de ativos.

A proposta deste trabalho corresponde a combinar ativos de investimento com características diversificadas, uma vez que o objetivo do modelo é maximizar o momento centrado de ordem 3 (assimetria), considerando acréscimos na variância mínima obtida através do Modelo Média-Variância.

A diversidade de características dos ativos estimularam a combinar três ativos para compor cada carteira, de modo a obter cinco configurações diferentes. Primeiramente, optou-se por combinações em que o Ativo 4 faz parte de cada grupamento, tendo como característica a distribuição Leptocúrtica.

Na carteira cuja combinação inclui os Ativos 2, 4 e 6, apresentaram distribuições assimétricas à direita os Ativos 2 e 4, e o Ativo 6 assimétrica à esquerda. Somente o Ativo 4 apresentou distribuição Leptocúrtica, as demais, Platicúrtica. Para a simulação da carteira seguinte foi conservado o Ativo 4 e incluídos os Ativos 1 e 3, ambos com

Tabela 2 - Retornos mensais por ativos

| Ativos | Jan | Fev | Mar | Abr | Mai | Jun | Jul | Ago | Set | Out | Nov | Dez | Média Variância Assimetria Coef.Variação Coef.Assimetria Coef.Curtose |
|--|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|------|------|-------|-------|-------|--|
| Ativo 1 XP Corporate Plus FIC FIM CP | 1.38 | 1.27 | 1.3 | 0.76 | 0.9 | 0.95 | 1.02 | 0.86 | 0.76 | 0.71 | 0.57 | 0.7 | 0.93 0.06 0.01 27.0% 0.516 2.008 |
| Ativo 2 XP Debentures Incentivadas Crédito Privado FIC | 1.64 | 2.02 | 1.64 | 0.31 | -1.17 | 0.51 | 3.29 | 0.93 | 1.03 | -0.39 | -0.34 | 0.78 | 0.85 1.34 0.41 135.4% 0.263 2.753 |
| Ativo 3 Kinea Chronos FIM | 1.55 | 1.78 | 0.91 | 1.23 | -0.31 | 0.85 | 2.83 | 1.07 | 1.7 | 0.35 | 0.21 | 0.53 | 1.06 0.65 0.22 76.1% 0.421 2.915 |
| Ativo 4 IP Value Hedge FIC | 3.12 | 3.49 | 0.24 | 1.49 | 1.1 | 0.81 | 1.37 | 1.82 | 1.07 | 1.72 | 0.58 | 1.34 | 1.51 0.84 0.71 60.4% 0.931 3.061 |
| Ativo 5 Selection RF Light FIC FI CP LP | 1.17 | 0.91 | 1.08 | 0.69 | 0.91 | 0.85 | 0.82 | 0.86 | 0.59 | 0.61 | 0.44 | 0.48 | 0.79 0.05 0.00 27.7% 0.046 2.065 |
| Ativo 6 Indie FIC FIA | 7.89 | 4.95 | 2.29 | 1.79 | -3.43 | 1.45 | 5.7 | 6.6 | 6.44 | 1.12 | -2.36 | 5.92 | 3.20 12.15 -21.85 109.1% -0.516 2.115 |
| Ativo 7 Kiron FIC FIA | 7.59 | 4.45 | -1 | 1.32 | -3.98 | -1.48 | 4.19 | 6.65 | 7.05 | -0.42 | -2.25 | 4.4 | 2.21 14.64 -3.50 173.1% -0.062 1.572 |
| Ativo 8 Leblon Ações FIC FIA | 15.12 | 5.63 | 1.32 | -0.6 | -3.38 | -2.18 | 6.17 | 9.03 | 9.01 | 0.57 | -3.8 | 5.69 | 3.55 31.29 73.98 157.6% 0.423 2.257 |
| Ativo 9 Alaska Black FIC FIA BDR Nível I | 16.28 | 18.45 | -2.71 | -3.89 | -15.81 | -1.18 | 24.19 | 17.6 | 4.58 | -2.58 | -2.65 | 12.52 | 5.40 134.64 10.76 214.9% 0.007 1.915 |

Legenda: <(https://www.xpi.com.br/investimentos/fundos-de-investimento/lista/#>).

Fonte: Plataforma da corretora de valores brasileira XP Investimentos, set/2021

distribuição assimétrica à direita, Platicúrtica. A terceira carteira foi composta pelo Ativo 4 agregando-se os Ativos 5 e 6, sendo que o Ativo 5 tende a simetria e o Ativo 6, assimétrico à direita, ambos de forma Platicúrtica.

Notou-se, em todas as combinações de ativos, que acréscimos de 5%, 10%, 15% e 20% na variância ponderada de Markowitz, acarretam em aumentos de 2.5%, 4.9%, 7.2% e 9.5% no respectivo coeficiente de variação.

Na carteira de Ativos 2, 4 e 6, quando implementado um acréscimo de 5% na variância ponderada de Markowitz, houve um aumento de 105% no coeficiente de assimetria, pela implementação do modelo a três momentos, com pesos segundo o vetor α_5 :

$$\alpha_5 = \begin{bmatrix} -0.116129 \\ 1.185507 \\ 0.072387 \end{bmatrix}$$

Similarmente, acréscimos de 10%, 15% e 20% na variância de Markowitz, refletem em aumentos de 147%, 175% e 197% no coeficiente de assimetria do modelo a três momentos segundo os respectivos ponderadores:

$$\alpha_{10} = \begin{bmatrix} -0.0019298 \\ 1.2664000 \\ 0.0270160 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{15} = \begin{bmatrix} 0.0866110 \\ 1.3278000 \\ -0.0076613 \end{bmatrix} \quad e \quad \alpha_{20} = \begin{bmatrix} 0.161958 \\ 1.378666 \\ -0.036660 \end{bmatrix}$$

Observou-se que o aumento da variância de 5% para 10% incidiu num aumento de 42% no coeficiente de assimetria, de 10% para 15%, 32%, de 15% para 20%, 22%, em tendência decrescente. Observa-se então uma desaceleração no aumento da assimetria proporcionado pela implementação do modelo.

Para a combinação dos Ativos 1, 3 e 4, os acréscimos de 5%, 10%, 15% e 20% na variância de Markowitz refletiram em aumentos de 41.62%, 57.70%, 67.67% e 74.26% nos respectivos coeficientes de assimetria pela implementação do modelo a três momentos, apresentando a mesma tendência decrescente, tendo os seguintes ponderadores:

$$\alpha_5 = \begin{bmatrix} 1.144836 \\ -0.059181 \\ 0.203808 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{10} = \begin{bmatrix} 1.045199 \\ -0.061830 \\ 0.247747 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{15} = \begin{bmatrix} 0.969861 \\ -0.063653 \\ 0.280872 \end{bmatrix} \quad e \quad \alpha_{20} = \begin{bmatrix} 0.906500 \\ -0.065313 \\ 0.308801 \end{bmatrix}$$

A mesma tendência decrescente foi verificada na combinação de Ativos 4, 5 e 6. Nesta combinação, para acréscimos da variância de 5%, 10%, 15% e 20% verificou-se aumentos de 65.47%, 86.35%, 98.38% e 105.71% nos coeficientes de assimetria, cujos

ponderadores foram:

$$\alpha_5 = \begin{bmatrix} 0.659093 \\ 2.206986 \\ 0.013578 \end{bmatrix}, \alpha_{10} = \begin{bmatrix} 0.759980 \\ 1.945500 \\ 0.003249 \end{bmatrix}, \alpha_{15} = \begin{bmatrix} 0.837810 \\ 1.749700 \\ -0.005339 \end{bmatrix} \text{ e } \alpha_{20} = \begin{bmatrix} 1.122971 \\ 1.541341 \\ -0.027814 \end{bmatrix}$$

Além destas três combinações contendo o Ativo 4 com distribuição Leptocúrtica, foram feitas mais duas simulações compostas somente por Ativos da forma Platicúrtica, variando a característica de assimetria: a combinação dos Ativos 6, 7 e 8, em que os Ativos 6 e 7 apresentaram assimetria à esquerda e o Ativo 8, assimetria à direita; e a combinação dos Ativos 5, 6 e 9, Ativos 5 e 9 com tendência a simetria e Ativo 6 com assimetria à esquerda mais expressiva.

Embora o foco do desempenho da carteira seja para distribuições Leptocúrticas, optou-se por simular o modelo proposto para grupamentos de ativos todos da forma Platicúrtica, com o objetivo de comparar a eficiência do modelo em diferentes cenários, e verificar se comportamentos análogos são percebidos nas demais carteiras.

Nas duas combinações adicionais foram aplicados os mesmos percentuais de aumento de 5%, 10%, 15% e 20% para a variância de Markowitz, com conseqüente aumento de 2.5%, 4.9%, 7.2% e 9.5% nos respectivos coeficientes de variação, ocasionando aumentos da ordem de 86.08%, 119.34%, 142.36% e 159.66% nos respectivos coeficientes de assimetria, para a combinação dos Ativos 6, 7 e 8, e 181.25%, 233.38%, 274.30% e 309.54%, para a combinação dos Ativos 5, 6 e 9. Para estas duas últimas combinações foi percebida a mesma tendência decrescente no aumento do coeficiente de assimetria. No entanto, além de um aumento mais expressivo do coeficiente de assimetria verificou-se a alteração da forma, inicialmente assimétricas à esquerda, com a implementação do modelo tornaram-se assimétricas à direita, Tabela 3.

Pode-se notar, em todas as combinações de ativos, que a otimização da carteira segundo o modelo que considera os três primeiros momentos permitiu um aumento da assimetria considerado significativo, a partir de pequenos acréscimos da variância, tornando as distribuições de cauda mais pesada. Notou-se também um decréscimo no aumento da assimetria, a medida que foram aplicados aumentos maiores em relação à variância de Markowitz. Além disso, verificou-se que o comportamento dos ponderadores obtidos pelo aumento proporcional da variância de Markowitz, a partir da aplicação do modelo proposto, não apresenta regularidade para as combinações de ativos. Dentre os resultados obtidos, a combinação dos Ativos 6, 7 e 8 se destacou por apresentar uma mudança no sinal da assimetria, alterando a forma da distribuição, a partir de um aumento da variância de 10%.

Na próxima seção, variamos os valores de retorno e variância a serem fixados, de modo a obter diversas triplas $(R, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3}^*)$, para a combinação dos Ativos 6, 7 e 8.

Tabela 3 - Confronto dos resultados Média-Variância e Modelo a três momentos

| Combinação | Modelo Média-Variância | | | | | | Modelo a três momentos | | | | | | |
|-------------------------------|------------------------|-----------------------------------|-------|--------|------|-------|--------------------------------------|-------|--------|------|-------|------|---------|
| | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | -0.3985 0.9962 0.1806 | 1.327 | 0.558 | 0.85 | 0.36 | -0.1161290 1.1855070 0.0723870 | 1.394 | 1.214 | 0.87 | 0.74 | 2.5% | 102.18% |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | | | | | | -0.0019298 1.2664000 0.0270160 | 1.460 | 1.565 | 0.89 | 0.89 | 4.9% | 143.04% |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | | | | | | 0.0866110 1.3278000 -0.0076613 | 1.526 | 1.868 | 0.91 | 0.99 | 7.2% | 171.47% |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | | | | | | 0.161958 1.378666 -0.036660 | 1.593 | 2.148 | 0.93 | 1.07 | 9.5% | 192.78% |
| Ativo 1 Ativo 3 Ativo 4 | 0.6675 | 1.366748 -0.040390 0.098836 | 0.145 | 0.039 | 0.57 | 0.72 | 1.144836 -0.059181 0.203808 | 0.152 | 0.060 | 0.58 | 1.01 | 2.5% | 41.62% |
| Ativo 1 Ativo 3 Ativo 4 | 0.6675 | | | | | | 1.045199 -0.061830 0.247747 | 0.159 | 0.072 | 0.60 | 1.13 | 4.9% | 57.70% |
| Ativo 1 Ativo 3 Ativo 4 | 0.6675 | | | | | | 0.969861 -0.063653 0.280872 | 0.166 | 0.081 | 0.61 | 1.20 | 7.2% | 67.67% |
| Ativo 1 Ativo 3 Ativo 4 | 0.6675 | | | | | | 0.906500 -0.065313 0.308801 | 0.173 | 0.090 | 0.62 | 1.25 | 9.5% | 74.26% |
| Ativo 4 Ativo 5 Ativo 6 | 1.3311 | 0.419014 2.857043 0.035218 | 0.799 | 0.377 | 0.67 | 0.53 | 0.659093 2.206986 0.013578 | 0.839 | 0.671 | 0.69 | 0.87 | 2.5% | 65.47% |
| Ativo 4 Ativo 5 Ativo 6 | 1.3311 | | | | | | 0.759980 1.945500 0.003249 | 0.879 | 0.810 | 0.70 | 0.98 | 4.9% | 86.35% |
| Ativo 4 Ativo 5 Ativo 6 | 1.3311 | | | | | | 0.837810 1.749700 -0.005339 | 0.919 | 0.922 | 0.72 | 1.05 | 7.2% | 98.38% |
| Ativo 4 Ativo 5 Ativo 6 | 1.3311 | | | | | | 1.122971 1.541341 -0.027814 | 1.300 | 1.657 | 0.76 | 1.12 | 9.5% | 105.71% |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 1.758259 -1.424110 0.058652 | 3.963 | -4.367 | 0.80 | -0.55 | 1.884300 -1.703900 0.104100 | 4.161 | -0.654 | 0.82 | -0.08 | 2.5% | 86.08% |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | | | | | | 1.952864 -1.799843 0.097268 | 4.360 | 0.974 | 0.84 | 0.11 | 4.9% | 119.34% |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | | | | | | 2.008345 -1.868159 0.086511 | 4.558 | 2.282 | 0.86 | 0.23 | 7.2% | 142.36% |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | | | | | | 2.055833 -1.923710 0.075664 | 4.756 | 3.425 | 0.88 | 0.33 | 9.5% | 159.66% |
| Ativo 5 Ativo 6 Ativo 9 | 2.6269 | 6.769982 0.401643 -0.077551 | 3.315 | -0.497 | 0.69 | -0.08 | 7.600807 0.201955 -0.015837 | 3.481 | 0.435 | 0.71 | 0.07 | 2.5% | 181.25% |
| Ativo 5 Ativo 6 Ativo 9 | 2.6269 | | | | | | 7.591702 0.149107 0.013775 | 3.647 | 0.765 | 0.73 | 0.11 | 4.9% | 233.38% |
| Ativo 5 Ativo 6 Ativo 9 | 2.6269 | | | | | | 7.561608 0.115364 0.034091 | 3.812 | 1.068 | 0.74 | 0.14 | 7.2% | 274.30% |
| Ativo 5 Ativo 6 Ativo 9 | 2.6269 | | | | | | 7.540403 0.087793 0.050494 | 3.978 | 1.369 | 0.76 | 0.17 | 9.5% | 309.54% |

Legenda: (a) Retorno excedente esperado fixado (média das médias mensais dos retornos excedentes);
(b) Carteira de variância mínima (ponderadores);
(c) Variância mínima ponderada;
(d) Assimetria ponderada da carteira de variância mínima;
(e) Coef.Var ponderada da carteira de variância mínima;
(f) Coef.Ass ponderada da carteira de variância mínima;
(g) Carteira de assimetria máxima (ponderadores);
(h) Variância ponderada fixada (aumentada em 5%,10%,15% e 20%);
(i) Assimetria máxima ponderada da carteira;
(j) Coef.Var ponderado da carteira de assimetria máxima;
(k) Coef.Ass ponderado da carteira de assimetria máxima;
(l) Percentual de acréscimo do coeficiente de variância;
(m) Percentual de acréscimo do coeficiente de assimetria.

Fonte: A autora, 2022

3.3 Expandindo os resultados

Na Seção 3.2 verificou-se, a partir do aumento proporcional a intervalos de 5% na variância de Markowitz, que o resultado da aplicação do modelo a três momentos foi favorável em relação ao aumento esperado da assimetria, nas cinco combinações de três ativos propostas, porém nas combinações de Ativos 6, 7 e 8 e Ativos 5, 6 e 9, este aumento propiciou a mudança na forma da assimetria, à esquerda para à direita, o que mostra uma relevância ainda maior do experimento. Esta mudança na forma da assimetria ocorreu a partir do aumento de 5% na variância de Markowitz, para a combinação de Ativos 5, 6 e 9, enquanto que para a combinação de Ativos 6, 7 e 8 esta mudança só ocorreu a partir do aumento de 10% na variância de Markowitz. No entanto, para percentuais maiores de aumento da variância de Markowitz, a combinação de Ativos 6, 7 e 8 alcançou uma assimetria à direita mais expressiva que na outra combinação. Desta forma, para dar prosseguimento ao experimento, optou-se pela combinação de Ativos 6, 7 e 8, por esta apresentar mudança na direção da cauda de forma mais expressiva.

Anteriormente, para a combinação de Ativos 6, 7 e 8, o retorno havia sido fixado em $R = 2.4585$, para o qual se obteve a variância mínima $\sigma_{p^2M} = 3.963$, segundo o modelo de Markowitz, e calculou-se a assimetria $\sigma_{p^3M} = -4.367$ para esta carteira de variância mínima, obtendo-se uma tripla $T_M = (2.485, 3.963, -4.367)$ dos momentos desta carteira. Em seguida aumentou-se a variância de Markowitz em 5% obtendo, pela aplicação do modelo a três momentos, a assimetria máxima $\sigma_{p^3s}^* = -0.654$ para o par $R = 2.4585$ e $\sigma_{p^2} = 4.161$. Assim uma tripla de assimetria máxima $T_{5\%} = (2.485, 4.161, -0.654)$ é obtida. De forma análoga, para aumentos de 10%, 15% e 20% da variância de Markowitz, e mantendo o mesmo retorno, novas triplas de assimetria máxima $(R, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3}^*)$ foram obtidas pela aplicação do modelo a três momentos:

$$T_{10\%} = (2.485, 4.360, 0.974) \quad T_{15\%} = (2.485, 4.558, 2.282) \quad T_{20\%} = (2.485, 4.756, 3.425)$$

Com o objetivo de compreender melhor o que acontece à forma da assimetria, pela aplicação do modelo a três momentos, quando os parâmetros fixos são alterados pelo aumento sistemático da variância ponderada em diferentes valores de retorno, arbitrou-se valores para retorno e variância de modo a sempre garantir um conjunto admissível não vazio, obtendo-se 378 triplas de assimetria máxima. Variou-se o retorno no intervalo $[1.70, 3.00]$, estabelecido em função do comportamento dos retornos médios excedentes dos Ativos 6, 7 e 8, onde adotou-se amplitude igual a 0.05, aproximadamente 2% da média dos retornos médios excedentes. Os extremos deste intervalo correspondem ao menor e maior retornos médios excedentes dos ativos da carteira. O intervalo de variância $[1.8548, 5.7762]$ foi definido obtendo-se a variância mínima segundo o modelo de Markowitz para cada valor de retorno do intervalo $[1.70, 3.00]$, de modo a iniciar o experimento em

Figura 1 - Tabela das triplas de assimetria máxima

| Assimetria máxima para o par retorno e variância segundo o modelo a três momentos - Combinação de Ativos 6, 7 e 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------|
| Percentual de aumento da variância | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | - | 5.97 | 5.79 | 5.63 | 5.48 | 5.33 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.82 | 4.71 | 4.60 | 4.49 | 4.39 | 4.30 | 4.21 | 4.12 | 4.04 | 3.96 | 3.88 | 3.81 | 3.74 | 3.67 | 3.60 | 3.54 | 3.48 | 3.42 | |
| Variância | Var min Markowitz res=1.70 | Var min Markowitz res=1.75 | Var min Markowitz res=1.80 | Var min Markowitz res=1.85 | Var min Markowitz res=1.90 | Var min Markowitz res=1.95 | Var min Markowitz res=2.00 | Var min Markowitz res=2.05 | Var min Markowitz res=2.10 | Var min Markowitz res=2.15 | Var min Markowitz res=2.20 | Var min Markowitz res=2.25 | Var min Markowitz res=2.30 | Var min Markowitz res=2.35 | Var min Markowitz res=2.40 | Var min Markowitz res=2.45 | Var min Markowitz res=2.50 | Var min Markowitz res=2.55 | Var min Markowitz res=2.60 | Var min Markowitz res=2.65 | Var min Markowitz res=2.70 | Var min Markowitz res=2.75 | Var min Markowitz res=2.80 | Var min Markowitz res=2.85 | Var min Markowitz res=2.90 | Var min Markowitz res=2.95 | Var min Markowitz res=3.00 | |
| | 1.70 | -1.3982 | -0.0950 | 0.4970 | 0.9855 | 1.4240 | 1.8316 | 2.2186 | 2.5901 | 2.9504 | 3.3016 | 3.6456 | 3.9838 | 4.3172 | 4.6468 | 4.9732 | 5.2972 | 5.6189 | 5.9392 | 6.4649 | 7.1790 | 7.9256 | 8.7049 | 9.5172 | 10.3630 | 11.2420 | 12.1540 | 13.1020 |
| 1.75 | | -1.5253 | -0.1253 | 0.5091 | 1.0322 | 1.5005 | 1.9362 | 2.3489 | 2.7455 | 3.1296 | 3.5039 | 3.8703 | 4.2304 | 4.5852 | 4.9358 | 5.2831 | 5.6272 | 5.9693 | 6.3092 | 6.6656 | 7.4041 | 8.1760 | 8.9815 | 9.8207 | 10.6940 | 11.6010 | 12.5440 | |
| 1.80 | | | -1.6598 | -0.1590 | 0.5201 | 1.0783 | 1.5784 | 2.0425 | 2.4826 | 2.9050 | 3.3138 | 3.7119 | 4.1016 | 4.4843 | 4.8614 | 5.2339 | 5.6024 | 5.9678 | 6.3304 | 6.6911 | 7.0501 | 7.6285 | 8.4259 | 9.2577 | 10.1240 | 11.0250 | 11.9620 | |
| 1.85 | | | | -1.8020 | -0.1955 | 0.5289 | 1.1246 | 1.6569 | 2.1512 | 2.6194 | 3.0684 | 3.5028 | 3.9257 | 4.3394 | 4.7456 | 5.1458 | 5.5407 | 5.9315 | 6.3185 | 6.7028 | 7.0848 | 7.4648 | 7.8519 | 8.6751 | 9.5336 | 10.4270 | 11.3570 | |
| 1.90 | | | | | -1.9520 | -0.2363 | 0.5364 | 1.1700 | 1.7366 | 2.2619 | 2.7590 | 3.2356 | 3.6965 | 4.1451 | 4.5837 | 5.0144 | 5.4381 | 5.8565 | 6.2699 | 6.6797 | 7.0863 | 7.4901 | 7.8918 | 8.2917 | 8.9235 | 9.8088 | 10.7310 | |
| 1.95 | | | | | | -2.1102 | -0.2802 | 0.5415 | 1.2154 | 1.8169 | 2.3743 | 2.9016 | 3.4067 | 3.8950 | 4.3701 | 4.8347 | 5.2902 | 5.7387 | 6.1808 | 6.6182 | 7.0512 | 7.4807 | 7.9072 | 8.3312 | 8.7532 | 9.1736 | 10.0840 | |
| 2.00 | | | | | | | -2.2768 | -0.3288 | 0.5449 | 1.2601 | 1.8979 | 2.4885 | 3.0469 | 3.5816 | 4.0982 | 4.6009 | 5.0917 | 5.5734 | 6.0470 | 6.5142 | 6.9759 | 7.4330 | 7.8861 | 8.3359 | 8.7830 | 9.2278 | 9.6710 | |
| 2.05 | | | | | | | | -2.4518 | -0.3808 | 0.5462 | 1.3041 | 1.9795 | 2.6044 | 3.1948 | 3.7600 | 4.3063 | 4.8369 | 5.3554 | 5.8635 | 6.3635 | 6.8563 | 7.3432 | 7.8250 | 8.3025 | 8.7763 | 9.2472 | 9.7158 | |
| 2.10 | | | | | | | | | -2.6356 | -0.4371 | 0.5451 | 1.3472 | 2.0614 | 2.7218 | 3.3454 | 3.9425 | 4.5185 | 5.0786 | 5.6251 | 6.1611 | 6.6879 | 7.2071 | 7.7199 | 8.2272 | 8.7298 | 9.2285 | 9.7240 | |
| 2.15 | | | | | | | | | | -2.8284 | -0.4978 | 0.5415 | 1.3893 | 2.1436 | 2.8406 | 3.4989 | 4.1281 | 4.7356 | 5.3254 | 5.9013 | 6.4656 | 7.0202 | 7.5666 | 8.1061 | 8.6396 | 9.1681 | 9.6925 | |
| 2.20 | | | | | | | | | | | -3.0304 | -0.5631 | 0.5353 | 1.4303 | 2.2259 | 2.9612 | 3.6544 | 4.3175 | 4.9567 | 5.5777 | 6.1837 | 6.7773 | 7.3604 | 7.9347 | 8.5016 | 9.0622 | 9.6175 | |
| 2.25 | | | | | | | | | | | | -3.2417 | -0.6331 | 0.5262 | 1.4700 | 2.3089 | 3.0827 | 3.8127 | 4.5098 | 5.1825 | 5.8354 | 6.4722 | 7.0958 | 7.7083 | 8.3115 | 8.9066 | 9.4952 | |
| 2.30 | | | | | | | | | | | | | -3.4627 | -0.7082 | 0.5143 | 1.5090 | 2.3913 | 3.2057 | 3.9727 | 4.7058 | 5.4125 | 6.0982 | 6.7668 | 7.4213 | 8.0640 | 8.6967 | 9.3212 | |
| 2.35 | | | | | | | | | | | | | | -3.6934 | -0.7883 | 0.4999 | 1.5459 | 2.4741 | 3.3293 | 4.1354 | 4.9051 | 5.6467 | 6.3661 | 7.0673 | 7.7537 | 8.4274 | 9.0908 | |
| 2.40 | | | | | | | | | | | | | | | -3.9342 | -0.8727 | 0.4817 | 1.5817 | 2.5561 | 3.4544 | 4.3002 | 5.1074 | 5.8850 | 6.639 | 7.3738 | 8.0928 | 8.7988 | |
| 2.45 | | | | | | | | | | | | | | | | -4.1853 | -0.9635 | 0.4608 | 1.6152 | 2.6382 | 3.5803 | 4.4669 | 5.3128 | 6.1273 | 6.9169 | 7.6862 | 8.4391 | |
| 2.50 | | | | | | | | | | | | | | | | | -4.4468 | -1.0589 | 0.4357 | 1.6474 | 2.7199 | 3.7070 | 4.6355 | 5.521 | 6.3735 | 7.1996 | 8.0047 | |
| 2.55 | | | | | | | | | | | | | | | | | | -4.7190 | -1.1612 | 0.4077 | 1.6777 | 2.8009 | 3.8342 | 4.8059 | 5.7322 | 6.6236 | 7.4876 | |
| 2.60 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | -5.0020 | -1.2682 | 0.3759 | 1.7058 | 2.8812 | 3.9621 | 4.9779 | 5.9461 | 6.8779 | |
| 2.65 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | -5.2962 | -1.3814 | 0.3403 | 1.7316 | 2.9607 | 4.0903 | 5.1516 | 6.1631 | |
| 2.70 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | -5.6017 | -1.5007 | 0.3005 | 1.7551 | 3.0392 | 4.2188 | 5.3272 | |
| 2.75 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | -5.9187 | -1.6266 | 0.2565 | 1.776 | 3.1167 | 4.3482 | | |
| 2.80 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | -6.2474 | -1.759 | 0.2081 | 1.7942 | 3.1935 | | |
| 2.85 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | -6.5881 | -1.898 | 0.1552 | 1.8104 | | |
| 2.90 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | -6.9410 | -2.0443 | 0.0985 | |
| 2.95 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | -7.3062 | -2.196 |
| 3.00 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | -7.6841 |

Legenda: Cada célula da tabela apresenta a assimetria máxima para o par retorno e variância fixados.

Fonte: A autora, 2022.

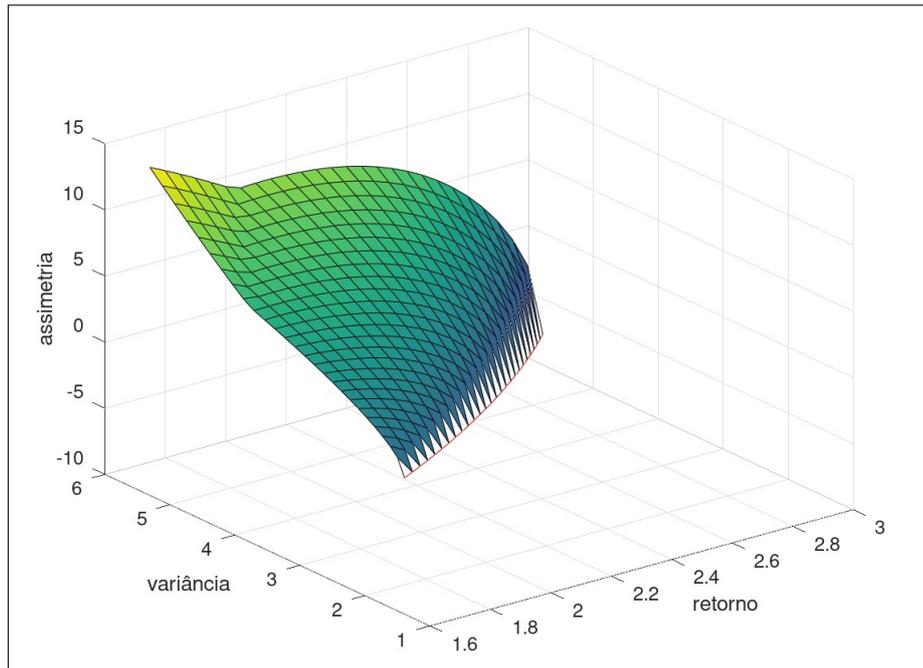
cada um dos retornos do intervalo, a partir da respectiva variância mínima de Markowitz, e aplicar o modelo a três momentos para este retorno combinado às variâncias maiores obtidas a partir dos retornos seguintes segundo Markowitz. Assim, para cada par (R, σ_{p^2}) , sendo $R \in [1.70, 3.00]$ e $\sigma_{p^2} \in [\sigma_{p^2M}, 5.7762]$ prosseguiu-se obtendo novos valores para a assimetria ótima $\sigma_{p^3}^*$, associada a cada nova configuração do conjunto admissível, obtendo-se 378 triplas para os valores dos três momentos $(R, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3}^*)$, das quais 27 são triplas de Markowitz. A aplicação do modelo a três momentos permitiu obter a assimetria máxima para cada par de retorno e variância nos respectivos intervalos, e os resultados deste tratamento foram apresentados na tabela da Figura 1.

Observou-se que as assimetrias máximas associadas às carteiras de Markowitz, nesta combinação de Ativos, eram negativas em todos os retornos do intervalo $[1.70, 3.00]$. Na aplicação do modelo a três momentos, ao aumentar a variância para o mesmo retorno, obtêm-se novos ponderadores que produzem assimetrias máximas cada vez maiores. É possível perceber que a forma da assimetria se altera a partir de um acréscimo de 12% na variância de Markowitz quando $R = 1.70$, e a partir de um acréscimo de 7% da variância de Markowitz quando $R = 2.90$.

O gráfico no espaço tridimensional dos momentos, com as 378 triplas, indica a superfície ótima de assimetria máxima, ao variar o par (R, σ_{p^2}) que define o conjunto admissível.

Pôde-se ainda obter um gráfico no espaço tridimensional, em função do retorno, desvio-padrão e raiz cúbica da assimetria, o que evidenciou os resultados esperados da

Figura 2 - Superfície de assimetria máxima



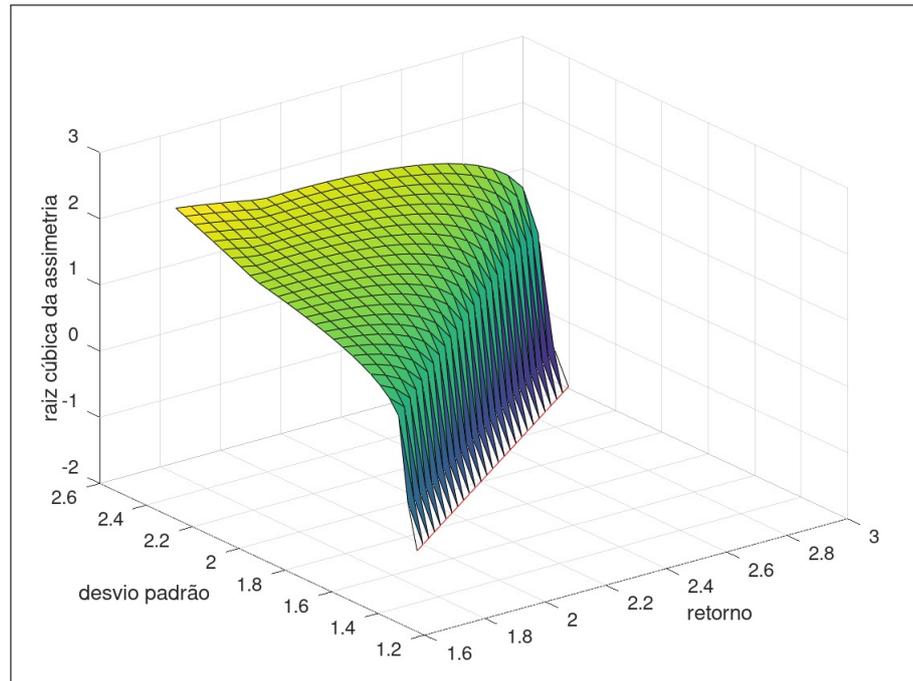
Legenda: Triplas de assimetria máxima no espaço tridimensional dos momentos. A curva em vermelho representa as triplas de Markowitz.

Fonte: A autora, 2022.

aplicação do modelo a três momentos, Figura 3.

Comparando as triplas obtidas, na tabela da Figura 1, nota-se que um pequeno acréscimo na variância, para o mesmo retorno, produz um aumento significativo da assimetria máxima, tendo sido o aumento mais expressivo verificado logo na primeira iteração, próximo à variância mínima de Markowitz. De forma análoga, é importante analisar o comportamento da assimetria máxima na tabela da Figura 1 a partir do decréscimo do retorno, para um mesmo valor de variância. A partir de uma pequena redução no retorno esperado, mantendo-se a mesma variância, percebe-se um aumento expressivo da assimetria máxima, e alteração da forma da assimetria à esquerda para à direita, a partir de uma redução de 4% no retorno da carteira de Markowitz. É possível ainda notar uma leve ondulação da superfície na Figura 2, que corresponde a uma leve oscilação na intensidade deste aumento de assimetria quando variamos ora o retorno, ora a variância. Acompanhando o comportamento das triplas a partir do decréscimo do retorno para a mesma variância, na tabela da Figura 1, nota-se ainda uma região em que a assimetria se comporta diferente do esperado, apresentando uma redução inesperada, voltando a crescer nas iterações seguintes. A assimetria apresenta um crescimento inicial muito expressivo a partir de um decréscimo de 2% do retorno em Markowitz, continua crescendo desaceleradamente a cada decréscimo do retorno, até um certo retorno, quando apresenta assimetria máxima menor para retorno menor e mesma variância. Esse comportamento

Figura 3 - Superfície de assimetria máxima



Legenda: Triplas de assimetria máxima no espaço tridimensional dos momentos padronizados. A curva em vermelho representa as triplas de Markowitz.

Fonte: A autora, 2022.

foi verificado em nosso experimento, para a combinação de Ativos 6, 7 e 8, para os valores de variância a partir de 4.0112, nas células em azul na tabela da Figura 1. Esta ocorrência deverá ser melhor estudada, podendo indicar perda da dualidade, uma vez que para um retorno menor e mesma variância, uma assimetria menor indicaria uma carteira considerada menos eficiente.

O comportamento da superfície ótima de assimetria máxima evidenciou a eficiência do modelo a três momentos, tendo sua relevância acentuada quando há, na carteira, predominância de ativos com distribuição assimétrica à esquerda. Percebeu-se que a presença de ativos com assimetria expressiva à direita nas combinações pode reduzir a relevância do modelo a três momentos, uma vez que nestes casos a aplicação do Modelo de Markowitz pode já produzir carteiras com a assimetria à direita desejada. Mesmo nestes casos, o modelo a três momentos também apresenta resultados positivos porém de menor relevância.

O modelo de seleção de carteiras a três momentos, que considera momentos superior a ordem 2, irá permitir ajustar a assimetria de uma carteira a partir de um aumento controlado do risco segundo a variância, em relação a variância mínima de Markowitz para determinado retorno, de modo a torná-la mais eficiente.

Constatou-se, a partir deste experimento, na superfície das Figura 2 e 3 obtidas para a carteira de Ativos 6, 7 e 8, que numa região muito próxima a curva de Markowitz, o

ganho com a assimetria se mostrou extremamente relevante, o que sugere a possibilidade de expressivo ganho de um ponto de vista econômico para investidores arrojados. Observa-se ainda, que esta combinação apresenta altos valores de variância e assimetria em seus ativos individualmente, o que sugere uma maior relevância na utilização do modelo de seleção a três momentos para estes casos.

Durante o procedimento de obtenção das triplas, a partir do SQP no Octave, verificou-se que a solução numérica destes problemas requer cuidados, uma vez que o aplicativo utilizado fornece também um máximo local, dependendo do valor inicial utilizado. Além disso sabemos que a região de dualidade nos problemas de otimização envolvidos é delimitada pela variância de Markowitz no conjunto factível do problema em que se maximiza a assimetria, no entanto, pouco sabemos sobre outros limitadores para a região de dualidade, o que deverá ser objeto de uma futura investigação.

Apesar do tratamento quantitativo ter se fixado sobre o momento centrado de ordem 3, cabe avaliar o momento centrado de ordem 4 que classifica a curtose da distribuição dos ativos pois percebe-se que uma distribuição assimétrica à direita leptocúrtica poderia otimizar a seleção da carteira, como fator atenuante para os investidores arrojados.

Os resultados aqui obtidos, possibilitaram confirmar a relevância em se considerar momentos de ordem superior na seleção de carteiras de investimento, bem como verificar a eficiência do modelo a três momentos sob a perspectiva da maximização da assimetria proposto por Martins (2015).

4 A GENERALIZAÇÃO DO MODELO A TRÊS MOMENTOS PARA MOMENTOS ÍMPARES DE ORDEM SUPERIOR

Em nossas contribuições neste capítulo, exploramos a dualidade existente no problema de variância mínima proposto em Athayde e Flôres (2004), para obter as mesmas estruturas e resultados vistos em sua generalização para momentos pares proposto em Athayde e Flôres (2006). Além disso obtemos uma generalização para o modelo Média-Variância de Markowitz (1952). Isto é, analisamos os problemas de maximização da assimetria, fixados o retorno e um momento de ordem par da carteira, e de minimização de um momento de ordem par quando fixado apenas o retorno da carteira. Apresentamos ainda, um modelo para maximizar um momento ímpar qualquer sujeito à restrição dos dois primeiros momentos, tendo em vista que os investidores gostam de momentos ímpares e não gostam de pares, e discutimos a propriedade homotética presente na estrutura que surge a partir desta otimização no espaço dos momentos. Ao longo de todo o texto, assumimos que os gradientes das restrições nos pontos ótimos são linearmente independentes, além de indicar quando e o quê ocorre no caso da dependência linear entre eles.

O objetivo central aqui é explorar a dualidade no modelo geral proposto em Athayde e Flôres (2004) para, invertendo o papel dos parâmetros no modelo, investigar as mesmas estruturas através da abordagem de maximização da assimetria. Com isso, como observado em Athayde e Flôres (2004), verificamos a existência de padrões também na maximização de um momento de ordem ímpar, em complementação ao modelo geral proposto para a minimização de um momento de ordem par.

Na Seção 4.1, propomos uma generalização para o modelo Média-Variância de Markowitz e utilizamos este resultado na Seção 4.2, obtendo a estrutura e alguns resultados para o problema dual ao modelo geral de ordem par a três momentos, visto na Seção 1.6. A Seção 4.3 generaliza os resultados da Seção 2.2, para momentos de ordem ímpar quaisquer. Por fim, explicamos como nossos resultados complementam o estudo de modelos de seleção de carteira que consideram momentos de ordem superior, dando maior relevância à abordagem dos modelos duais.

4.1 Um caso particular associado ao modelo que minimiza um momento par de ordem p

Desde Martins (2015), investigamos a dualidade nos problemas de otimização relacionados a modelos de seleção de carteiras eficientes. Quando incorpora-se um terceiro momento ao problema de seleção de carteiras, a dualidade passa a relacionar três problemas que, sob certas condições, são duais entre si. Deste modo, a eficiência da carteira

está condicionada à existência de solução simultânea nos problemas, para cada uma das abordagens. Um estudo mais cuidadoso acerca da dualidade nos problemas a três momentos, aponta a solução obtida no modelo Média-Variância, de Markowitz (1952), como sendo o ponto chave nesta questão.

Os modelos apresentados na Seção 1.6, que consideram momentos de ordem superior, em que são considerados três momentos, definem problemas de otimização com duas restrições, nos quais um dos momentos é otimizado enquanto que os outros dois são fixados e determinam as restrições do problema. Deste modo, os problemas duais podem ser obtidos trocando o objetivo de otimização por um dos momentos fixos no problema primal. Além disso, Em Athayde e Flôres (2006, 2004) as soluções para estes problemas de otimização são condicionadas a $B_{2-p}B_{6-p} - (B_{4-p})^2 > 0$ que, quando $p = 2$, corresponde a $A_0A_4 - A_2^2 > 0$, sendo necessária uma análise dos casos em que a solução está associada a $B_{2-p}B_{6-p} - (B_{4-p})^2 = 0$, ou ainda, $A_0A_4 - A_2^2 = 0$.

Resultados preliminares, por ocasião de nosso estudo, indicam que quando a solução para o problema proposto em Athayde e Flôres (2004) resulta em $A_0A_4 - A_2^2 = 0$, tal solução não pode ser obtida pelo método dos multiplicadores de Lagrange, pois implica que os gradientes das restrições são linearmente dependentes. Estes casos estão associados, em sua maioria, à solução de Markowitz obtida a partir do modelo Média-Variância.

Para investigar a dualidade no modelo geral que minimiza o momento par de ordem p proposto em Athayde e Flôres (2006), apresentamos a seguir uma generalização para o modelo Média-Variância de Markowitz.

4.1.1 Generalização do modelo de Markowitz para momentos de ordem superior

Podemos nos perguntar quais seriam as implicações de um modelo que, para selecionar carteiras de investimento, minimiza um momento par qualquer de ordem p , tendo como restrição um retorno fixo. Neste caso, o problema de otimização teria uma estrutura semelhante à observada no modelo de Markowitz, de modo que um portfólio ótimo é obtido pela minimização do Lagrangiano:

$$\min_{\alpha} L = \alpha^t M_p \alpha^{\otimes(p-1)} + \lambda_p [E(r_p) - (\alpha^t M_1 + (1 - \alpha^t [1])r_f)], \quad (48)$$

em que M_1 e M_p são, respectivamente, as matrizes que contêm os retornos médios, e os co-momentos de ordem p dos n ativos de risco. Assim, as condições de primeira ordem são:

$$\begin{cases} pM_p\alpha^{\otimes(p-1)} = \lambda_p x \\ \alpha^t x = R \end{cases} . \quad (49)$$

Para obter o valor do multiplicador λ_p , multiplicamos a primeira equação de (49) por $x^t(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}$:

$$px^t\alpha = \lambda_p x^t(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x ,$$

$$\lambda_p = \frac{pR}{x^t(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x} .$$

Substituindo em (49) o valor λ_p encontrado, obtemos um candidato a extremo, que será, devido à convexidade, a solução para o problema (48):

$$\alpha^* = \frac{R}{x^t(M_p(\alpha^{*\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x} (M_p(\alpha^{*\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x . \quad (50)$$

Sendo α^* uma solução para o problema (48), multiplicam-se ambos os lados de (50) por $\alpha^{*t}M_p(\alpha^{*\otimes(p-2)} \otimes I_n)$, para obter o momento mínimo de ordem p associado a carteira ótima,

$$\sigma_{p^p}^* = \frac{R^2}{x^t(M_p(\alpha^{*\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x} .$$

Definindo:

$$B_{2-p} = x^t(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x ,$$

temos um sistema de n equações não lineares em α :

$$\alpha^* = \frac{R}{B_{2-p}^*} (M_p(\alpha^{*\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x ,$$

e a expressão que representa o p -ésimo momento mínimo:

$$\sigma_{p^p}^* = \frac{R^2}{B_{2-p}^*} .$$

Quando $p > 2$, ou seja, a partir do quarto momento, a expressão que caracteriza a carteira ótima, bem como a expressão que define o momento mínimo associado, vão depender de α .

A seguir, analisamos os problemas duais ao problema de otimização associado ao modelo geral proposto por Athayde e Flôres (2006) e apresentado na Seção 1.6.

4.2 Maximização da assimetria fixados um momento de ordem par e o retorno

O Princípio da Dualidade, na teoria da otimização matemática, permite que os problemas de otimização possam ser vistos a partir de duas perspectivas, de modo que o ponto de mínimo obtido no problema primal corresponderá ao ponto de máximo em seu dual.

Tendo em vista a natureza dual dos problemas de otimização associados ao modelo de seleção de carteiras de investimento que considera os três primeiros momentos, tomamos o problema de minimizar o p -ésimo momento par, visto na Seção 1.6, como primal e construímos seus duais.

4.2.1 O problema dual quando maximizamos a assimetria

Para maximizar a assimetria quando fixados o primeiro momento e um momento par de ordem p o lagrangiano do problema será:

$$\max_{\alpha} L = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} + \gamma_{1p} (\sigma_{p^p} - \alpha^t M_p \alpha^{\otimes (p-1)}) + \gamma_{2p} (R - \alpha^t x). \quad (51)$$

Logo as condições de primeira ordem serão:

$$\begin{cases} 3M_3 \alpha^{\otimes 2} = p\gamma_{1p} M_p \alpha^{\otimes (p-1)} + \gamma_{2p} x \\ \alpha^t M_p \alpha^{\otimes (p-1)} = \sigma_{p^p} \\ \alpha^t x = R \end{cases} . \quad (52)$$

Como $M_p \alpha^{\otimes (p-1)} = M_p (\alpha^{\otimes (p-2)} \otimes I_n) \alpha$, e a matriz $M_p (\alpha^{\otimes (p-2)} \otimes I_n)$ é simétrica e definida positiva, o seguinte sistema pode ser formado multiplicando a primeira equação de (52) por α^t e $x^t (M_p (\alpha^{\otimes (p-2)} \otimes I_n))^{-1}$ para obter um sistema para os multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 3\alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = p\gamma_{1p} \sigma_{p^p} + \gamma_{2p} R \\ 3x^t (M_p (\alpha^{\otimes (p-2)} \otimes I_n))^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2} = p\gamma_{1p} R + \gamma_{2p} x^t (M_p (\alpha^{\otimes (p-2)} \otimes I_n))^{-1} x \end{cases} .$$

Definindo, como no caso par,

$$\begin{aligned} B_{2-p} &= x^t [M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)]^{-1} x, \\ B_{4-p} &= x^t [M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)]^{-1} M_3(\alpha^{\otimes 2}) \quad \text{e} \\ B_{6-p} &= (\alpha^{\otimes 2})^t M_3^t [M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)]^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}, \end{aligned}$$

com os subscritos correspondentes ao grau de homogeneidade com respeito ao vetor de pesos, temos:

$$\begin{cases} p\gamma_{1p}\sigma_{p^p} + \gamma_{2p}R = 3\alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2}) \\ p\gamma_{1p}R + \gamma_{2p}B_{2-p} = 3B_{4-p} \end{cases} .$$

Deste modo, para resolver este sistema basta encontrar a inversa da matriz

$$B_S = \begin{bmatrix} \sigma_{p^p} & R \\ R & B_{2-p} \end{bmatrix},$$

quando seu determinante for não nulo.

Note que o determinante da matriz B_S se anula quando

$$\sigma_{p^p} = \frac{R^2}{B_{2-p}}.$$

Neste caso, os vetores x e $M_p\alpha^{\otimes(p-1)}$ são linearmente dependentes, dando origem à mesma solução encontrada na generalização do modelo de Markowitz apresentada na seção anterior, que denotaremos aqui como solução trivial. Isto pode ser verificado na proposição a seguir.

Proposição 4.2.1. *Os vetores x e $M_p\alpha^{\otimes(p-1)}$ são linearmente independentes se e somente se $\det B_S > 0$. Além disso, se x e $M_p\alpha^{\otimes(p-1)}$ são linearmente dependentes, então $RM_p\alpha^{\otimes(p-1)} = \sigma_{p^p}x$.*

Prova. Considere a norma $\|\alpha\|_p^2 = \alpha^t (M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I)^{-1} \alpha$, induzida pelo produto interno $\langle \alpha, \beta \rangle_p = \alpha^t (M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I)^{-1} \beta$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle x, (M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I)\alpha \rangle_p| &\leq \|x\|_p \|M_p\alpha^{\otimes(p-1)}\|_p \\ |\langle x, M_p\alpha^{\otimes(p-1)} \rangle_p|^2 &\leq \|x\|_p^2 \|M_p\alpha^{\otimes(p-1)}\|_p^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\det B_S = \sigma_{p^p} B_{2-p} - R^2 = \|x\|_p^2 \|M_p\alpha^{\otimes(p-1)}\|_p^2 - (\langle x, M_p\alpha^{\otimes(p-1)} \rangle_p)^2 \geq 0.$$

Sabemos que a igualdade se verifica se e somente se os vetores x e $M_p \alpha^{\otimes(p-1)}$ são linearmente dependentes. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sigma_{p^p} [\sigma_{p^p} B_{2-p} - R^2] &= \sigma_{p^p}^2 B_{2-p} - \sigma_{p^p} R^2 - \sigma_{p^p} R^2 + \sigma_{p^p} R^2 \\ &= \{\sigma_{p^p} x - RM_p \alpha^{\otimes(p-1)}\}^t (M_p \alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I)^{-1} \{\sigma_{p^p} x - RM_p \alpha^{\otimes(p-1)}\} \\ &= \|\sigma_{p^p} x - RM_p \alpha^{\otimes(p-1)}\|_p^2. \end{aligned}$$

Sendo σ_{p^p} estritamente positivo, $\sigma_{p^p} B_{2-p} - R^2 = 0$ se e somente se $\sigma_{p^p} x = RM_p \alpha^{\otimes(p-1)}$. \square

A Proposição 4.2.1 nos mostra que o caso $\det B_S > 0$ corresponde à totalidade dos casos em que a hipótese de independência linear dos gradientes das restrições é satisfeita. Logo, podemos através da inversa da matriz B_S , obter os multiplicadores γ_{1p} e γ_{2p} ,

$$\gamma_{1p} = \frac{3 B_{2-p} \alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2}) - B_{4-p} R}{2 \sigma_{p^p} B_{2-p} - R^2} \quad \text{e} \quad \gamma_{2p} = 3 \frac{\sigma_{p^p} B_{4-p} - \alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2}) R}{\sigma_{p^p} B_{2-p} - R^2}. \quad (53)$$

Substituindo (53) na primeira equação de (52) obtém-se o seguinte sistema de n equações não lineares, satisfeito pela solução do problema,

$$\begin{aligned} \left(\frac{B_{2-p} \alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2}) - B_{4-p} R}{\sigma_{p^p} B_{2-p} - R^2} \right) \alpha &= (M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1} M_3(\alpha^{\otimes 2}) \\ - \left(\frac{\sigma_{p^p} B_{4-p} - \alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2})}{\sigma_{p^p} B_{2-p} - R^2} \right) &(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1} x. \end{aligned} \quad (54)$$

Sendo α_s a solução para (51), multiplicando ambos os lados da equação (54) por $(\alpha_s^{\otimes 2})^t M_3^t$ e sendo $\sigma_{p^3}^*$ a assimetria ótima (máxima), chega-se à equação:

$$(B_{2-p} B_{6-p} - (B_{4-p})^2) \sigma_{p^p} - B_{6-p} R^2 + 2 B_{4-p} \sigma_{p^3}^* R - B_{2-p} (\sigma_{p^3}^*)^2 = 0,$$

onde B_{2-p} , B_{4-p} e B_{6-p} são calculados em α_s , o conjunto de pesos do portfólio ótimo, cuja assimetria máxima figura na equação junto com os outros dois momentos, R e σ_{p^p} . A partir desta equação, uma expressão para a assimetria máxima associada ao portfólio ótimo é obtida,

$$\sigma_{p^3}^* = \frac{B_{4-p} R \pm \sqrt{(B_{2-p} B_{6-p} - (B_{4-p})^2) (\sigma_{p^p} B_{2-p} - R^2)}}{B_{2-p}}. \quad (55)$$

Tendo em vista o Lema 1.7.1, a dualidade entre os problemas está condicionada ao sinal do multiplicador associado a restrição definida a partir da função objetivo do problema primal. Neste caso, para haver dualidade, γ_{p1} terá que ser estritamente positivo,

ou seja

$$B_{2-p}\alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2}) > B_{4-p}R.$$

Além disso, sabemos que o discriminante em (55) é sempre positivo. Deste modo, podemos concluir que a assimetria máxima associada a carteira ótima eficiente, ou seja, que pertence a região de dualidade, é dada pela expressão:

$$\sigma_{p^3}^* = \frac{B_{4-p}R + \sqrt{(B_{2-p}B_{6-p} - (B_{4-p})^2)(\sigma_{p^p}B_{2-p} - R^2)}}{B_{2-p}}.$$

Todos os resultados obtidos nesta seção podem ser reproduzidos para o segundo problema dual associado ao modelo geral apresentado na Seção 1.6, de modo a obter uma carteira de retorno máximo quando fixados o momento par de ordem p e a assimetria da carteira.

Ao desenvolvermos o modelo geral, como o que minimiza um momento de ordem par proposto em Athayde e Flôres (2004), agora sob a perspectiva da maximização da assimetria, explorando a natureza dual dos problemas de otimização envolvidos, ampliamos a visão do modelo, o que permite confirmar a existência de um padrão nas estruturas dos problemas, bem como a preservação das características de homotetia.

Agora, propomos um modelo geral semelhante, onde um momento de ordem ímpar será maximizado. Esta é uma perspectiva que generaliza o problema dual ao problema de minimizar a variância quando fixados os dois primeiros momentos e apresenta estruturas distintas da generalização anterior.

A próxima seção apresenta uma generalização à nossa versão para o modelo a três momentos, sob a perspectiva da maximização da assimetria, vista na Seção 2.2, para momentos ímpares de ordem superior, contemplando todas as possíveis variações e permitindo uma comparação entre as possíveis generalizações.

4.3 Generalizando o modelo a três momentos pela maximização de um momento ímpar de ordem superior

Seguindo a máxima de que momentos de ordem superior fornecem um melhor cenário na análise de investimentos, após obter os problemas duais associados ao modelo geral de Athayde e Flôres (2006), introduzimos um modelo geral para maximizar um momento ímpar de ordem $q \geq 3$, e em seguida um modelo geral que maximiza um momento de ordem ímpar qualquer.

4.3.1 Maximizando um momento ímpar de ordem $q \geq 3$

Dado um vetor de pesos $\alpha \in \mathbb{R}^n$, na notação introduzida por Athayde e Flôres (2004), o q -ésimo momento do portfólio com estes pesos é representado por

$$\alpha^t M_q (\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha \cdots \otimes \alpha) \equiv \alpha^t M_q \alpha^{\otimes(q-1)},$$

em que \otimes denota o produto de Kronecker e M_q representa a matriz que contém os q -ésimos momentos do vetor aleatório de n ativos. Para este modelo geral consideramos $q \geq 3$.

Para o caso geral de maximizar um momento ímpar de ordem $q \geq 3$ quando fixados os dois primeiros momentos, o problema será:

$$\max_{\alpha} L = \alpha^t M_q \alpha^{\otimes(q-1)} + \lambda(\sigma_{p^2} - \alpha^t M_2 \alpha) + \gamma(R - \alpha^t x), \quad (56)$$

$$\begin{cases} q M_q \alpha^{\otimes(q-1)} = 2\lambda M_2 \alpha + \gamma x \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases} .$$

Como estamos lidando com momentos de ordem ímpar, a matriz M_2 não se altera. De modo que definindo

$$\begin{aligned} A_0 &= x^t M_2^{-1} x, \\ A_{q-1} &= x^t M_2^{-1} M_q \alpha^{\otimes(q-1)}, \\ A_{2(q-1)} &= (M_q \alpha^{\otimes(q-1)})^t M_2^{-1} M_q \alpha^{\otimes(q-1)} \end{aligned}$$

obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} 2\lambda \sigma_{p^2} + \gamma R = q \alpha^t M_q \alpha^{\otimes(q-1)} \\ 2\lambda R + \gamma A_0 = q A_{q-1} \end{cases} .$$

Assim, resolvendo (4.3.1) quando $\sigma_{p^2} A_0 - R^2 > 0$, determinamos um sistema de n equações não lineares em α , que satisfaz a equação de Lagrange, e define a configuração ótima da carteira com o momento ímpar de ordem q máximo:

$$\left(\frac{A_0 \alpha^t M_q \alpha^{\otimes(q-1)} - A_{q-1} R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2} \right) \alpha = M_2^{-1} M_q \alpha^{\otimes(q-1)} - \left(\frac{\sigma_{p^2} A_{q-1} - \alpha^t M_q \alpha^{\otimes(q-1)} R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2} \right) M_2^{-1} x, \quad (57)$$

em que os coeficientes A_{q-1} e $A_{2(q-1)}$ estão associados a α , a carteira ótima. Do sistema (57), uma expressão para o q -ésimo momento associado ao portfólio eficiente é obtida:

$$\begin{aligned}\sigma_{p^q} &= \frac{2A_{q-1}R \pm \sqrt{4(A_{q-1})^2R^2 - 4A_0(\sigma_{p^2}(A_0A_{2(q-1)} - (A_{q-1})^2) + A_{2(q-1)}R^2)}}{2A_0} \\ &= \frac{A_{q-1}R \pm \sqrt{(A_0A_{2(q-1)} - (A_{q-1})^2)(\sigma_{p^2}A_0 - R^2)}}{A_0}.\end{aligned}\tag{58}$$

Tendo em vista a condição para dualidade no Lema 1.7.1, podemos considerar apenas a raiz positiva de (58):

$$\sigma_{p^q} = \frac{A_{q-1}R + \sqrt{(A_0A_{2(q-1)} - (A_{q-1})^2)(\sigma_{p^2}A_0 - R^2)}}{A_0}.$$

Neste trabalho, obtivemos também o seguinte resultado de propriedade de homotetia, semelhante ao obtido em Athayde e Flôres (2004).

Proposição 4.3.1. *Para um dado k positivo, seja $\bar{\alpha}$ o portfólio que maximiza o momento ímpar de ordem q quando $R = 1$ e $\sigma_{p^2} = k^2$, e $\bar{\sigma}_{p^q}$ o q -ésimo momento máximo correspondente, então, para todo portfólio ótimo relacionado ao par variância/retorno tal que $\sigma_{p^2} = k^2R^2$, uma solução para (56) será $\alpha = \bar{\alpha}R$, com q -ésimo momento máximo correspondente $\sigma_{p^q} = \bar{\sigma}_{p^q}R^q$.*

Note que, no modelo geral de ordem ímpar apresentado, como o primeiro momento é fixado para definir uma das restrições no problema, o momento ímpar a ser maximizado estava restrito a ordem $q \geq 3$.

Uma possibilidade alternativa a esta, seria fixar o segundo e quarto momentos para então maximizar um momento de ordem ímpar qualquer. A seguir, propomos um modelo geral alternativo, no qual maximizamos um momento ímpar qualquer de ordem i .

4.3.2 Maximizando um momento de ordem ímpar qualquer

Quando maximizamos um momento ímpar de ordem i , fixadas a variância e a curtose, o lagrangiano do problema será:

$$\max_{\alpha} L = \alpha^t M_i(\alpha^{\otimes(i-1)}) + \mu_1(\sigma_{p^2} - \alpha^t M_2 \alpha) + \mu_2(\sigma_{p^4} - \alpha^t M_4(\alpha^{\otimes 3})).\tag{59}$$

Neste caso as condições de primeira ordem

$$\begin{cases} iM_i(\alpha^{\otimes(i-1)}) = 2\mu_1 M_2 \alpha + 4\mu_2 M_4(\alpha^{\otimes 3}) \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_4(\alpha^{\otimes 3}) = \sigma_{p^4} \end{cases},$$

nos levam ao sistema:

$$\begin{cases} 2\mu_1 \sigma_{p^2} + 4\mu_2 \sigma_{p^4} = i\alpha^t M_i(\alpha^{\otimes(i-1)}) \\ 2\mu_1 \sigma_{p^4} + 4\mu_2 A_6 = iB_{2(i-1)} \end{cases}, \quad (60)$$

em que

$$\begin{aligned} B_{2(i-1)} &= (\alpha^{\otimes(i-1)})^t M_i^t M_2^{-1} M_i(\alpha^{\otimes(i-1)}), \\ B_{i+2} &= (\alpha^{\otimes(i-1)})^t M_i^t M_2^{-1} M_4(\alpha^{\otimes 3}), \\ A_6 &= (\alpha^{\otimes 3})^t M_4^t M_2^{-1} M_4(\alpha^{\otimes 3}). \end{aligned}$$

Resolvemos o sistema quando $A_6 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^4})^2 > 0$, o que ocorre quando os gradientes das restrições são linearmente independentes.

De fato,

$$\begin{aligned} \sigma_{p^2} (A_6 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^4})^2) &= \\ &= (\sigma_{p^2} M_4(\alpha^{\otimes 3}) - \sigma_{p^4} M_2 \alpha)^t M_2^{-1} (\sigma_{p^2} M_4(\alpha^{\otimes 3}) - \sigma_{p^4} M_2 \alpha) \geq 0, \end{aligned}$$

como σ_{p^2} é estritamente positivo e a inversa da matriz de covariância é definida positiva, então $\sigma_{p^2} M_4(\alpha^{\otimes 3}) - \sigma_{p^4} M_2 \alpha$ se anula se e somente se os gradientes das restrições forem linearmente dependentes.

Assim, obtemos um sistema de n equações não lineares que define a configuração da carteira ótima com o momento ímpar de ordem i máximo:

$$\frac{A_6 \sigma_{p^i}^* - B_{i+2} \sigma_{p^4}}{A_6 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^4})^2} M_2 \alpha = M_i \alpha^{\otimes(i-1)} - \frac{B_{i+2} \sigma_{p^2} - \sigma_{p^4} \sigma_{p^i}^*}{A_6 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^4})^2} M_4(\alpha^{\otimes 3}),$$

onde $\sigma_{p^i}^*$ é o momento de ordem ímpar máximo associado a carteira eficiente, para o qual também obtemos uma expressão:

$$\sigma_{p^i}^* = \frac{B_{i+2} \sigma_{p^4} \pm \sqrt{(B_{2(i-1)} A_6 - B_{i+2}^2)(A_6 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^4})^2)}}{A_6}.$$

A generalização para momentos ímpares de um dado portfólio, complementa o método geral proposto em Athayde e Flôres (2004) para tratar a escolha do portfólio em um contexto de momentos de ordem superior, vista como uma vantagem inquestionável. A introdução da generalização do modelo clássico de Markowitz permite a análise completa tanto dos problemas de minimização de momentos pares de ordem superior, quanto da maximização de momentos ímpares de ordem superior e seus respectivos duais. O teste final dos ganhos obtidos com momentos de ordem superior ainda depende de extensas aplicações práticas dos novos resultados. Estes, por sua vez, exigem ferramentas de software adequadas para resolver os sistemas não lineares e os problemas de otimização envolvidos. Um melhor conhecimento das superfícies relacionadas a elas pode melhorar muito o entendimento do modelo.

5 MINIMIZANDO A CURTOSE EM UM MODELO A QUATRO MOMENTOS

Até aqui, foram apresentados diversos resultados obtidos para um modelo a três momentos, além da análise da estrutura e das relações de dualidade dos problema de otimização envolvidos. Com isso, verificou-se que a maximização da assimetria, terceiro momento centrado, de fato promove uma melhor aproximação da função utilidade, confirmando que a aplicação do modelo tende a ser muito promissora. Neste sentido, seria importante inferir sobre a relevância em se considerar a curtose, quarto momento centrado, na seleção de carteiras de investimento, tendo em vista a importância deste momento, que mede a concentração ou dispersão dos valores em relação às medidas de tendência central. Seguindo as preferências como em Scott e Horvath (1980) – investidores são avessos à variância assim como também são avessos à curtose em sua carteira – a curtose, ao ser incorporada à seleção dando origem a um modelo a quatro momentos, será minimizada por se tratar de um momento par da distribuição dos retornos dos ativos.

A seleção de carteiras eficientes a partir dos quatro primeiros momentos da distribuição dos retornos de seus ativos, pode ser vista como um problema de otimização em que se minimiza um momento de ordem par ou maximiza um momento de ordem ímpar, fixando os outros três parâmetros. Deste modo seria possível obter a carteira ótima a partir de quatro perspectivas distintas, dando origem a quatro possíveis problemas de otimização:

| | | | |
|--|---|---|---|
| Retorno máximo: | Variância mínima: | Assimetria máxima: | Curtose mínima: |
| $\left\{ \begin{array}{l} \max \alpha^t x \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} \min \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} \max \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} \min \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \end{array} \right.$ |

Seguindo o raciocínio anterior, pode-se partir de uma carteira de assimetria máxima para estabelecer valores iniciais para os parâmetros a serem fixados no problema, tomando a curtose como função objetivo. Assim, vamos inicialmente analisar o problema sob a perspectiva da minimização da curtose, fixando os demais parâmetros: retorno, variância e assimetria. Como antes, buscamos carteiras eficientes para o caso de n ativos de risco mais um ativo livre de risco, permitindo vendas a descoberto, sem que nenhuma restrição seja imposta aos pesos da carteira. Iremos considerar os quatro primeiros momentos de distribuição verificados para os n ativos de risco. Assim, um portfólio ótimo será obtido

pela minimização do Lagrangiano:

$$\min_{\alpha} L = \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} + \lambda_1 [E(r_p) - (\alpha^t M_1 + (1 - \alpha^t [1]) r_f)] + \lambda_2 (\sigma_{p^2} - \alpha^t M_2 \alpha) + \lambda_3 (\sigma_{p^3} - \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2})$$

onde M_1 , M_2 , M_3 e M_4 são as matrizes que contêm os retornos médios, covariâncias, co-assimetrias e co-curtoses dos n ativos de risco, $E(r_p)$ é um retorno esperado fixado, r_f a taxa de retorno livre de risco e \otimes denota o produto de Kronecker.

Denotando como antes, $R = E(r_p) - r_f$ e $x = M_1 - [1]r_f$, onde R é o retorno excedente da carteira, e a soma dos pesos é igual a 1, o problema de otimização fica assim estruturado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \end{array} \right. \quad (61)$$

A questão da existência de solução para este problema de otimização se reporta aos argumentos anteriormente utilizados para garantir existência de solução no problema a três momentos, uma vez que o conjunto admissível aqui é definido geometricamente pela interseção de três hiper-superfícies, duas delas sendo conjuntos fechados e a terceira um conjunto fechado e limitado.

Desta forma, sejam $R > 0$, $\sigma_{p^2} > 0$ e $\sigma_{p^3} > 0$, e seja $H_{(4)} = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, R = \alpha^t x, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}\}$. Como $H_{(4)}$ é um conjunto compacto e $\alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3}$ é uma função contínua em \mathbb{R}^n , se $H_{(4)} \neq \emptyset$, então o problema de otimização (61) admite solução.

Vamos considerar o caso em que os gradientes das restrições são linearmente independentes entre si, para utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4M_4 \alpha^{\otimes 3} = \lambda_1 x + 2\lambda_2 M_2 \alpha + 3\lambda_3 M_3 \alpha^{\otimes 2} \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \end{array} \right. \quad (62)$$

Definimos, como antes, as seguintes funções homogêneas:

$$\begin{aligned}
A_0 &= x^t M_2^{-1} x, \\
A_2 &= x^t M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}, \\
A_3 &= x^t M_2^{-1} M_4 \alpha^{\otimes 3}, \\
A_4 &= (M_3 \alpha^{\otimes 2})^t M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}, \\
A_5 &= (M_3 \alpha^{\otimes 2})^t M_2^{-1} M_4 \alpha^{\otimes 3} \\
A_6 &= (M_4 \alpha^{\otimes 3})^t M_2^{-1} M_4 \alpha^{\otimes 3}.
\end{aligned}$$

De modo que, multiplicando a primeira equação de (62) por $x^t M_2^{-1}$, α^t e $(M_3 \alpha^{\otimes 2})^t M_2^{-1}$, obtêm-se um sistema para os multiplicadores:

$$\begin{cases} \lambda_1 A_0 + 2\lambda_2 R + 3\lambda_3 A_2 = 4A_3 \\ \lambda_1 R + 2\lambda_2 \sigma_{p^2} + 3\lambda_3 \sigma_{p^3} = 4\sigma_{p^4}^* \\ \lambda_1 A_2 + 2\lambda_2 \sigma_{p^3} + 3\lambda_3 A_4 = 4A_5 \end{cases} \quad (63)$$

Para deduzir uma expressão para os multiplicadores λ_1 , λ_2 e λ_3 basta obter a inversa da matriz W :

$$W = \begin{bmatrix} A_0 & R & A_2 \\ R & \sigma_{p^2} & \sigma_{p^3} \\ A_2 & \sigma_{p^3} & A_4 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é:

$$\det W = A_0 A_4 \sigma_{p^2} + 2A_2 R \sigma_{p^3} - A_2^2 \sigma_{p^2} - A_0 \sigma_{p^3}^2 - A_4 R^2.$$

Note que o determinante de W pode ser representado, agrupando seus termos de três formas distintas:

$$\det W = \sigma_{p^2} (A_0 A_4 - A_2^2) + \sigma_{p^3} (A_2 R - A_0 \sigma_{p^3}) + R (A_2 \sigma_{p^3} - A_4 R); \quad (64)$$

$$\det W = A_4 (A_0 \sigma_{p^2} - R^2) + \sigma_{p^3} (A_2 R - A_0 \sigma_{p^3}) + A_2 (R \sigma_{p^3} - A_2 \sigma_{p^2}); \quad (65)$$

$$\det W = A_0 (A_4 \sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2) + R (A_2 \sigma_{p^3} - A_4 R) + A_2 (R \sigma_{p^3} - A_2 \sigma_{p^2}). \quad (66)$$

Se olharmos para as expressões entre parênteses em cada um dos termos do determinante da matriz W , em (64) veremos que, pelo Lema 2.5.1, se os gradientes $M_3 \alpha^{\otimes 2}$ e x são linearmente dependentes, então $\det W = 0$. Da mesma forma, em (65), se os gradientes $M_2 \alpha$ e x são l.d., pelo Lema 2.5.2, o determinante de W também se anula, desde que $A_2 \neq 0$. E, em (66), pelo Lema 2.5.3, o mesmo acontece se $M_3 \alpha^{\otimes 2}$ e x são l.d. Logo, qualquer dependência linear entre os gradientes das restrições produz $\det W = 0$,

inviabilizando o uso do método dos Multiplicadores de Lagrange. (com exceção do caso x e $M_2\alpha$ l.d., com $A_2 = 0$, em que nada podemos afirmar)

Considere R , σ_{p^2} e σ_{p^3} , parâmetro fixos no problema, tais que $\det W$ é não nulo. Então, é possível obter a inversa da matriz W . Para isso, basta calcular a matriz adjunta de W :

$$Adj(W) = \begin{bmatrix} A_4\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2 & A_2\sigma_{p^3} - A_4R & \sigma_{p^3}R - A_2\sigma_{p^2} \\ A_2\sigma_{p^3} - A_4R & A_0A_4 - A_2^2 & A_2R - A_0\sigma_{p^3} \\ \sigma_{p^3}R - A_2\sigma_{p^2} & A_2R - A_0\sigma_{p^3} & A_0\sigma_{p^2} - R^2 \end{bmatrix}$$

A inversa de W será:

$$W^{-1} = \frac{1}{\det W} Adj(W).$$

A partir daí deduzimos uma expressão para os multiplicadores, resolvendo o sistema (63):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \\ 3\lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det W} \begin{bmatrix} A_4\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2 & A_2\sigma_{p^3} - A_4R & \sigma_{p^3}R - A_2\sigma_{p^2} \\ A_2\sigma_{p^3} - A_4R & A_0A_4 - A_2^2 & A_2R - A_0\sigma_{p^3} \\ \sigma_{p^3}R - A_2\sigma_{p^2} & A_2R - A_0\sigma_{p^3} & A_0\sigma_{p^2} - R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4A_3 \\ 4\sigma_{p^4}^* \\ 4A_5 \end{bmatrix},$$

podendo tomar, para o denominador de cada multiplicador, a expressão para $\det W$ mais conveniente, ou simplesmente utilizar a forma geral:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{4} &= \frac{A_3(A_4\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2) + \sigma_{p^4}^*(A_2\sigma_{p^3} - A_4R) + A_5(\sigma_{p^3}R - A_2\sigma_{p^2})}{A_0A_4\sigma_{p^2} + 2A_2R\sigma_{p^3} - A_2^2\sigma_{p^2} - A_0\sigma_{p^3}^2 - A_4R^2} \\ \frac{2\lambda_2}{4} &= \frac{A_3(A_2\sigma_{p^3} - A_4R) + \sigma_{p^4}^*(A_0A_4 - A_2^2) + A_5(A_2R - A_0\sigma_{p^3})}{A_0A_4\sigma_{p^2} + 2A_2R\sigma_{p^3} - A_2^2\sigma_{p^2} - A_0\sigma_{p^3}^2 - A_4R^2} \\ \frac{3\lambda_3}{4} &= \frac{A_3(\sigma_{p^3}R - A_2\sigma_{p^2}) + \sigma_{p^4}^*(A_2R - A_0\sigma_{p^3}) + A_5(A_0\sigma_{p^2} - R^2)}{A_0A_4\sigma_{p^2} + 2A_2R\sigma_{p^3} - A_2^2\sigma_{p^2} - A_0\sigma_{p^3}^2 - A_4R^2} \end{aligned}$$

Substituindo os multiplicadores encontrados na primeira equação de (62), encontramos o sistema de n equações, não lineares em α , como solução para o problema de otimização,

$$\begin{aligned} M_4\alpha^{\otimes 3} &= \frac{A_3(A_4\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2) + \sigma_{p^4}^*(A_2\sigma_{p^3} - A_4R) + A_5(\sigma_{p^3}R - A_2\sigma_{p^2})}{A_0A_4\sigma_{p^2} + 2A_2R\sigma_{p^3} - A_2^2\sigma_{p^2} - A_0\sigma_{p^3}^2 - A_4R^2}x + \\ &+ \frac{A_3(A_2\sigma_{p^3} - A_4R) + \sigma_{p^4}^*(A_0A_4 - A_2^2) + A_5(A_2R - A_0\sigma_{p^3})}{A_0A_4\sigma_{p^2} + 2A_2R\sigma_{p^3} - A_2^2\sigma_{p^2} - A_0\sigma_{p^3}^2 - A_4R^2}M_2\alpha + \\ &+ \frac{A_3(\sigma_{p^3}R - A_2\sigma_{p^2}) + \sigma_{p^4}^*(A_2R - A_0\sigma_{p^3}) + A_5(A_0\sigma_{p^2} - R^2)}{A_0A_4\sigma_{p^2} + 2A_2R\sigma_{p^3} - A_2^2\sigma_{p^2} - A_0\sigma_{p^3}^2 - A_4R^2}M_3\alpha^{\otimes 2} \end{aligned}$$

Multiplicando o sistema anterior por $(M_4\alpha^{\otimes 3})^t M_2^{-1}$, temos:

$$\begin{aligned} A_6 &= \frac{A_3(A_4\sigma_{p^2} - \sigma_{p^3}^2) + \sigma_{p^4}^*(A_2\sigma_{p^3} - A_4R) + A_5(\sigma_{p^3}R - A_2\sigma_{p^2})}{A_0A_4\sigma_{p^2} + 2A_2R\sigma_{p^3} - A_2^2\sigma_{p^2} - A_0\sigma_{p^3}^2 - A_4R^2} A_3 + \\ &+ \frac{A_3(A_2\sigma_{p^3} - A_4R) + \sigma_{p^4}^*(A_0A_4 - A_2^2) + A_5(A_2R - A_0\sigma_{p^3})}{A_0A_4\sigma_{p^2} + 2A_2R\sigma_{p^3} - A_2^2\sigma_{p^2} - A_0\sigma_{p^3}^2 - A_4R^2} \sigma_{p^4}^* + \\ &+ \frac{A_3(\sigma_{p^3}R - A_2\sigma_{p^2}) + \sigma_{p^4}^*(A_2R - A_0\sigma_{p^3}) + A_5(A_0\sigma_{p^2} - R^2)}{A_0A_4\sigma_{p^2} + 2A_2R\sigma_{p^3} - A_2^2\sigma_{p^2} - A_0\sigma_{p^3}^2 - A_4R^2} A_5, \end{aligned}$$

e após alguns algebrismos, chega-se à equação em que a curtose mínima figura junto aos demais momentos fixados no problema:

$$\begin{aligned} &(A_0A_4 - A_2^2)\sigma_{p^4}^{*2} + 2[(A_2A_3 - A_0A_5)\sigma_{p^3} + (A_2A_5 - A_3A_4)R]\sigma_{p^4}^* + \\ &+ 2(A_3A_5 - A_2A_6)R\sigma_{p^3} + (A_0A_6 - A_3^2)\sigma_{p^3}^2 + (A_4A_6 - A_5^2)R^2 - \\ &- (A_0A_4A_6 + 2A_2A_3A_5 - A_3^2A_4 - A_2^2A_6 - A_0A_5^2)\sigma_{p^2} = 0, \end{aligned} \quad (67)$$

onde os coeficientes A_2 , A_3 , A_4 , A_5 e A_6 estão associados a α^* , uma carteira ótima de curtose mínima. Para deduzir uma expressão para a curtose mínima, basta resolver a equação acima na variável $\sigma_{p^4}^*$.

É possível ainda fazer comparações entre resultados do modelo a quatro com os resultados anteriores do modelo a três momentos. Por exemplo, calculamos a curtose de uma carteira ótima a três momentos. Para isso optamos pela carteira de variância mínima a três momentos (8):

$$\alpha = \frac{A_0\sigma_{p^3} - A_2R}{A_0A_4 - (A_2)^2} M_2^{-1} M_3(\alpha \otimes \alpha) + \frac{A_4R - A_2\sigma_{p^3}}{A_0A_4 - (A_2)^2} M_2^{-1} x,$$

que multiplicada por $(M_4\alpha^{\otimes 3})^t$ reproduz a curtose desta carteira:

$$\sigma_{p^4}^{(s)} = \frac{(A_0A_5 - A_2A_3)\sigma_{p^3} + (A_3A_4 - A_2A_5)R}{A_0A_4 - (A_2)^2},$$

Note que na equação (67), denotando

$$a.\sigma_{p^4}^{*2} + b.\sigma_{p^4}^* + c,$$

temos o termo

$$-b/2a = -\frac{(A_2A_3 - A_0A_5)\sigma_{p^3} + (A_2A_5 - A_3A_4)R}{(A_0A_4 - A_2^2)}.$$

Comparando a curtose calculada para uma carteira ótima a três momentos $\sigma_{p^4}^{(s)}$, com a expressão acima, vemos que ela é formalmente idêntica à expressão da curtose mínima a

quatro momentos quando o discriminante de (67) é nulo.

5.1 Três problemas duais ao problema de curtose mínima a quatro momentos

Considerando a natureza dual dos problemas de otimização, alternamos o papel dos parâmetros no modelo, para obter os três possíveis problemas duais ao problema de minimizar a curtose, para investigar e correlacionar as estruturas em cada um deles.

5.1.1 Minimizando a variância a quatro momentos

Agora são dados R , σ_{p^3} e σ_{p^4} positivos, e $F_{(4)} = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, R = \alpha^t x, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}$ e $\sigma_{p^4} = \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3}\}$ é o conjunto admissível. O objetivo é minimizar a variância em $F_{(4)}$. Como no caso anterior, em que a curtose é minimizada, se $F_{(4)} \neq \emptyset$, o problema de otimização tem solução. Aqui, a curtose fixada garante um conjunto admissível compacto. Deste modo, um portfólio ótimo de variância mínima a quatro momentos, será obtido pela minimização do Lagrangiano:

$$\min_{\alpha} L = \alpha^t M_2 \alpha + \lambda_1 [E(r_p) - (\alpha^t M_1 + (1 - \alpha^t [1]) r_f)] + \lambda_2 (\sigma_{p^3} - \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}) + \lambda_3 (\sigma_{p^4} - \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3})$$

dando origem a um problema de otimização com três restrições, em que a função a ser minimizada é a variância:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{array} \right. \quad (68)$$

Para o caso em que os gradientes das restrições são linearmente independentes, utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange e obtemos os multiplicadores para o problema de otimização:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2M_2 \alpha = \lambda_1 x + 3\lambda_2 M_3 \alpha^{\otimes 2} + 4\lambda_3 M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{array} \right. \quad (69)$$

De modo que, multiplicando a primeira equação de (69) por $x^t M_2^{-1}$, $(M_3 \alpha^{\otimes 2})^t M_2^{-1}$

e $(M_4\alpha^{\otimes 3})^t M_2^{-1}$, obtemos um sistema para os multiplicadores:

$$\begin{cases} \lambda_1 A_0 + 3\lambda_2 A_2 + 4\lambda_3 A_3 = 2R \\ \lambda_1 A_2 + 3\lambda_2 A_4 + 4\lambda_3 A_5 = 2\sigma_{p^3} \\ \lambda_1 A_3 + 3\lambda_2 A_5 + 4\lambda_3 A_6 = 2\sigma_{p^4} \end{cases} .$$

Para deduzir uma expressão para os multiplicadores λ_1 , λ_2 e λ_3 calculamos a inversa da matriz

$$K = \begin{bmatrix} A_0 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_4 & A_5 \\ A_3 & A_5 & A_6 \end{bmatrix} .$$

quando seu determinante for não nulo.

$$\det K = A_0 A_4 A_6 + 2(A_2 A_3 A_5) - A_2^2 A_6 - A_3^2 A_4 - A_5^2 A_0,$$

Como visto para $\det W_{(4)}$ na abordagem anterior, em que se minimiza a curtose a quatro momentos, aqui os termos que compõem o determinante da matriz K também podem ser agrupado de três maneiras distintas:

$$\det K = A_6(A_0 A_4 - A_2^2) + A_3(A_2 A_5 - A_3 A_4) + A_5(A_2 A_3 - A_5 A_0);$$

$$\det K = A_4(A_0 A_6 - A_3^2) + A_2(A_3 A_5 - A_2 A_6) + A_5(A_2 A_3 - A_5 A_0);$$

$$\det K = A_0(A_4 A_6 - A_5^2) + A_2(A_3 A_5 - A_2 A_6) + A_3(A_2 A_5 - A_3 A_4).$$

além disso, note que:

$$(A_0 A_4 - A_2^2)(\det K) = \|(A_2 A_5 - A_3 A_4)x + (A_2 A_3 - A_0 A_5)M_3\alpha^{\otimes 2} + (A_0 A_4 - A_2^2)M_4\alpha^{\otimes 3}\|_1^2 \quad (70)$$

Quando $\det K$ é não nulo, a inversa da matriz K será:

$$K^{-1} = \frac{1}{\det K} \begin{bmatrix} A_4 A_6 - A_5^2 & A_3 A_5 - A_2 A_6 & A_2 A_5 - A_3 A_4 \\ A_3 A_5 - A_2 A_6 & A_0 A_6 - A_3^2 & A_2 A_3 - A_0 A_5 \\ A_2 A_5 - A_3 A_4 & A_2 A_3 - A_0 A_5 & A_0 A_4 - A_2^2 \end{bmatrix} .$$

A partir daí basta deduzir uma expressão para os multiplicadores, obter uma expressão para o sistema de equações não lineares que é satisfeito pela solução, e multiplicar este sistema por $M_2\alpha$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{p^2}^* &= \frac{R^2(A_4A_6 - A_5^2) + R\sigma_{p^3}(A_3A_5 - A_2A_6) + R\sigma_{p^4}(A_2A_5 - A_3A_4)}{A_0A_4A_6 + 2(A_2A_3A_5) - A_2^2A_6 - A_3^2A_4 - A_5^2A_0} + \\
&+ \frac{R\sigma_{p^3}(A_3A_5 - A_2A_6) + \sigma_{p^3}^2(A_0A_6 - A_3^2) + \sigma_{p^3}\sigma_{p^4}(A_2A_3 - A_0A_5)}{A_0A_4A_6 + 2(A_2A_3A_5) - A_2^2A_6 - A_3^2A_4 - A_5^2A_0} + \\
&+ \frac{R\sigma_{p^4}(A_2A_5 - A_3A_4) + \sigma_{p^3}\sigma_{p^4}(A_2A_3 - A_0A_5) + \sigma_{p^4}^2(A_0A_4 - A_2^2)}{A_0A_4A_6 + 2(A_2A_3A_5) - A_2^2A_6 - A_3^2A_4 - A_5^2A_0}
\end{aligned}$$

para obter uma equação onde a variância mínima figura junto aos outros três momentos fixados no problema de otimização:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{p^4}^2(A_0A_4 - A_2^2) + 2R\sigma_{p^4}(A_2A_5 - A_3A_4) + 2\sigma_{p^3}\sigma_{p^4}(A_2A_3 - A_0A_5) + \\
&R^2(A_4A_6 - A_5^2) + 2R\sigma_{p^3}(A_3A_5 - A_2A_6) + \sigma_{p^3}^2(A_0A_6 - A_3^2) - \\
&- (A_0A_4A_6 + 2A_2A_3A_5 - A_3^2A_4 - A_2^2A_6 - A_0A_5^2)\sigma_{p^2}^* = 0
\end{aligned} \tag{71}$$

em que os coeficientes A_2 , A_3 , A_4 , A_5 e A_6 estão associados a uma carteira α^* de variância mínima a quatro momentos. De modo que para deduzir uma expressão para a variância mínima a quatro momentos basta resolver a equação acima na variável $\sigma_{p^2}^*$.

5.1.2 Maximizando a assimetria a quatro momentos

Para o problema de otimização a quatro momentos em que se maximiza a assimetria, são fixados R , σ_{p^2} e σ_{p^4} positivos, definindo o conjunto admissível $D_{(4)} = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, R = \alpha^t x, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } \sigma_{p^4} = \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3}\}$. Neste caso, a existência de solução também é garantida para $D_{(4)} \neq \emptyset$, e a carteira ótima é obtida pela maximização do Lagrangiano:

$$\max_{\alpha} L = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} + \gamma_1 [E(r_p) - (\alpha^t M_1 + (R - \alpha^t x))] + \gamma_2 (\sigma_{p^2} - \alpha^t M_2 \alpha) + \lambda_3 (\sigma_{p^4} - \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3}),$$

dando origem a um problema de otimização com três restrições, em que a função a ser maximizada é a assimetria:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{array} \right. \tag{72}$$

Para o caso em que os gradientes das restrições são linearmente independentes, utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange.

Condições de primeira ordem:

$$\begin{cases} 3M_3\alpha^{\otimes 2} = \gamma_1 x + 2\gamma_2 M_2\alpha + 4\lambda_3 M_4\alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_2\alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_4\alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{cases} \quad (73)$$

De modo que, multiplicando a primeira equação de (73) por $x^t M_2^{-1}$, α^t e $(M_4\alpha^{\otimes 3})^t M_2^{-1}$, obtemos um sistema para os multiplicadores

$$\begin{cases} \gamma_1 A_0 + 2\gamma_2 R + 4\gamma_3 A_3 = 3A_2 \\ \gamma_1 R + 2\gamma_2 \sigma_{p^2} + 4\gamma_3 \sigma_{p^4} = 3\alpha^t M_3\alpha^{\otimes 2} \\ \gamma_1 A_3 + 2\gamma_2 \sigma_{p^4} + 4\gamma_3 A_6 = 3A_5 \end{cases}$$

Para deduzir uma expressão para os multiplicadores γ_1 , γ_2 e γ_3 calculamos a inversa da matriz

$$Y = \begin{bmatrix} A_0 & R & A_3 \\ R & \sigma_{p^2} & \sigma_{p^4} \\ A_3 & \sigma_{p^4} & A_6 \end{bmatrix}.$$

quando seu determinante for não nulo.

$$\det Y = A_0 A_6 \sigma_{p^2} + 2(A_3 R \sigma_{p^4}) - \sigma_{p^2} A_3^2 - A_0 \sigma_{p^4}^2 - A_6 R^2$$

A partir daí basta deduzir uma expressão para os multiplicadores, obter uma expressão para o sistema de equações não lineares que é satisfeito pela solução, a partir da qual obtêm-se a expressão para a assimetria máxima associada a uma carteira ótima.

Quando $\det Y$ é não nulo, basta calcular a inversa da matriz Y :

$$Y^{-1} = \frac{1}{\det Y} \begin{bmatrix} A_6 \sigma_{p^2} - \sigma_{p^4}^2 & A_3 \sigma_{p^4} - A_6 R & R \sigma_{p^4} - A_3 \sigma_{p^2} \\ A_3 \sigma_{p^4} - A_6 R & A_0 A_6 - A_3^2 & A_3 R - A_0 \sigma_{p^4} \\ R \sigma_{p^4} - A_3 \sigma_{p^2} & A_3 R - A_0 \sigma_{p^4} & A_0 \sigma_{p^2} - R^2 \end{bmatrix},$$

e deduzir uma expressão para os multiplicadores:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ 2\gamma_2 \\ 4\gamma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det Y} \begin{bmatrix} A_6 \sigma_{p^2} - \sigma_{p^4}^2 & A_3 \sigma_{p^4} - A_6 R & R \sigma_{p^4} - A_3 \sigma_{p^2} \\ A_3 \sigma_{p^4} - A_6 R & A_0 A_6 - A_3^2 & A_3 R - A_0 \sigma_{p^4} \\ R \sigma_{p^4} - A_3 \sigma_{p^2} & A_3 R - A_0 \sigma_{p^4} & A_0 \sigma_{p^2} - R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3A_2 \\ 3\alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) \\ 3A_5 \end{bmatrix}.$$

para, substituindo na primeira equação de (73), obter um sistema de n equações, não linear em α , solução para o problema de otimização:

$$\begin{aligned} M_3(\alpha \otimes \alpha) &= \frac{A_2(A_6\sigma_{p^2} - \sigma_{p^4}^2) + \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha)(A_3\sigma_{p^4} - A_6R) + A_5(R\sigma_{p^4} - A_3\sigma_{p^2})}{A_0A_6\sigma_{p^2} + 2(A_3R\sigma_{p^4}) - \sigma_{p^2}A_3^2 - A_0\sigma_{p^4}^2 - A_6R^2}x + \\ &+ \frac{A_2(A_3\sigma_{p^4} - A_6R) + \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha)(A_0A_6 - A_3^2) + A_5(A_3R - A_0\sigma_{p^4})}{A_0A_6\sigma_{p^2} + 2(A_3R\sigma_{p^4}) - \sigma_{p^2}A_3^2 - A_0\sigma_{p^4}^2 - A_6R^2}M_2\alpha + \\ &+ \frac{A_2(R\sigma_{p^4} - A_3\sigma_{p^2}) + \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha)(A_3R - A_0\sigma_{p^4}) + A_5(A_0\sigma_{p^2} - R^2)}{A_0A_6\sigma_{p^2} + 2(A_3R\sigma_{p^4}) - \sigma_{p^2}A_3^2 - A_0\sigma_{p^4}^2 - A_6R^2} \end{aligned}$$

Para o cálculo da assimetria máxima $\sigma_{p^3}^*$, multiplica-se o sistema acima por $(M_3\alpha^{*\otimes 2})^t M_2^{-1}$:

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{A_2^2(A_6\sigma_{p^2} - \sigma_{p^4}^2) + A_2\sigma_{p^3}^*(A_3\sigma_{p^4} - A_6R) + A_2A_5(R\sigma_{p^4} - A_3\sigma_{p^2})}{A_0A_6\sigma_{p^2} + 2(A_3R\sigma_{p^4}) - \sigma_{p^2}A_3^2 - A_0\sigma_{p^4}^2 - A_6R^2} + \\ &+ \frac{A_2\sigma_{p^3}^*(A_3\sigma_{p^4} - A_6R) + \sigma_{p^3}^{*2}(A_0A_6 - A_3^2) + A_5\sigma_{p^3}^*(A_3R - A_0\sigma_{p^4})}{A_0A_6\sigma_{p^2} + 2(A_3R\sigma_{p^4}) - \sigma_{p^2}A_3^2 - A_0\sigma_{p^4}^2 - A_6R^2} + \\ &+ \frac{A_2A_5(R\sigma_{p^4} - A_3\sigma_{p^2}) + A_5\sigma_{p^3}^*(A_3R - A_0\sigma_{p^4}) + A_5^2(A_0\sigma_{p^2} - R^2)}{A_0A_6\sigma_{p^2} + 2(A_3R\sigma_{p^4}) - \sigma_{p^2}A_3^2 - A_0\sigma_{p^4}^2 - A_6R^2}, \end{aligned}$$

obtendo uma equação onde a assimetria máxima figura junto aos outros três momentos fixados no problema:

$$\begin{aligned} &\sigma_{p^4}^2(A_0A_4 - A_2^2) + 2R\sigma_{p^4}(A_2A_5 - A_3A_4) + 2\sigma_{p^3}^*\sigma_{p^4}(A_2A_3 - A_0A_5) + \\ &R^2(A_4A_6 - A_5^2) + 2R\sigma_{p^3}^*(A_3A_5 - A_2A_6) + \sigma_{p^3}^{*2}(A_0A_6 - A_3^2) - \\ &-(A_0A_4A_6 + 2A_2A_3A_5 - A_3^2A_4 - A_2^2A_6 - A_0A_5^2)\sigma_{p^2} = 0, \end{aligned} \quad (74)$$

em que os coeficientes A_2 , A_3 , A_4 , A_5 e A_6 estão associados a α^* . A expressão para a assimetria máxima a quatro momentos é deduzida resolvendo (74) na variável $\sigma_{p^3}^*$.

5.1.3 Maximizando o retorno a quatro momentos

Nesta perspectiva do problema a quatro momentos para seleção de uma carteira ótima, o objetivo é maximizar o retorno, de modo que são fixados σ_{p_2} , σ_{p_3} e σ_{p_4} positivos dando origem ao conjunto admissível $G_{(4)} = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}\}$. Como nas abordagens anteriores, $G_{(4)} \neq \emptyset$ garante existência de solução, de modo que a carteira ótima de retorno máximo é obtida pela maximização do Lagrangiano:

$$\max_{\alpha} L = \alpha^t x + \mu_1(\sigma_{p^2} - \alpha^t M_2 \alpha) + \mu_2(\sigma_{p^2} - \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}) + \mu_3(\sigma_{p^3} - \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3}),$$

dando origem a um problema de otimização com três restrições, em que a função a ser maximizada corresponde a expressão do retorno:

$$\begin{cases} \max \alpha^t x \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{cases} . \quad (75)$$

Para o caso em que os gradientes das restrições são linearmente independentes, utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange, em que as condições de primeira ordem são:

$$\begin{cases} x = 2\mu_1 M_2 \alpha + 3\mu_2 M_3 \alpha^{\otimes 2} + 4\mu_3 M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{cases} . \quad (76)$$

Multiplicando a primeira equação de (76) por α^t , $(M_3 \alpha^{\otimes 2})^t M_2^{-1}$ e $(M_4 \alpha^{\otimes 3})^t M_2^{-1}$, obtemos um sistema para os multiplicadores

$$\begin{cases} 2\mu_1 \sigma_{p^2} + 3\mu_2 \sigma_{p^3} + \mu_3 \sigma_{p^4} = R^* \\ 2\mu_1 \sigma_{p^3} + 3\mu_2 A_4 + \mu_3 A_5 = A_2 \\ 2\mu_1 \sigma_{p^4} + 3\mu_2 A_5 + \mu_3 A_6 = A_3 \end{cases} ,$$

Para deduzir uma expressão para os multiplicadores μ_1 , μ_2 e μ_3 , calculamos a inversa da matriz Y :

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_{p^2} & \sigma_{p^3} & \sigma_{p^4} \\ \sigma_{p^3} & A_4 & A_5 \\ \sigma_{p^4} & A_5 & A_6 \end{bmatrix} ,$$

quando seu determinante for não nulo.

$$\det R = A_4 A_6 \sigma_{p^2} + 2(A_5 \sigma_{p^3} \sigma_{p^4}) - A_4 \sigma_{p^4}^2 - A_5^2 \sigma_{p^2} - A_6 \sigma_{p^3}^2$$

A partir daí basta deduzir uma expressão para os multiplicadores, obter uma expressão para o sistema de equações não lineares que é satisfeito pela solução, a partir da qual obtêm-se a equação onde a curtose mínima associada uma carteira ótima figura junto

aos outros três momentos fixados no problema:

$$\begin{aligned} & \sigma_{p^4}^2(A_0A_4 - A_2^2) + 2R^*\sigma_{p^4}(A_2A_5 - A_3A_4) + 2\sigma_{p^3}\sigma_{p^4}(A_2A_3 - A_0A_5) + \\ & R^{*2}(A_4A_6 - A_5^2) + 2R^*\sigma_{p^3}(A_3A_5 - A_2A_6) + \sigma_{p^3}^2(A_0A_6 - A_3^2) - \\ & -(A_0A_4A_6 + 2A_2A_3A_5 - A_3^2A_4 - A_2^2A_6 - A_0A_5^2)\sigma_{p^2} = 0, \end{aligned} \quad (77)$$

onde os coeficientes A_2 , A_3 , A_4 , A_5 e A_6 estão associados a α^* , de modo que para deduzir uma expressão para retorno máximo, basta resolver a equação acima na variável R^* .

Nota-se que as equações (67), (71), (74) e (77), a partir das quais o momento ótimo é deduzido em cada um dos quatro problemas de otimização a quatro momentos, são formalmente idênticas, assim como também ocorre nos problemas associados ao modelo a três momentos.

Na próxima seção, apresentamos uma breve simulação numérica para o modelo a quatro momentos a partir da minimização da curtose quando fixados os três primeiros momentos.

5.2 Simulação numérica para o modelo a quatro momentos

O modelo a quatro momentos considera os quatro primeiros momentos de distribuição dos ativos presentes na carteira, onde três dos momentos serão fixados para a otimização do quarto, tendo em mente as preferências do investidor como em (SCOTT; HORVATH, 1980), de forma que os momentos pares serão minimizados e os ímpares maximizados. Se tomarmos, por exemplo, o quarto momento centrado, aqui chamado curtose, como função objetivo, teremos um problema de otimização com três restrições, dadas pela imposição dos três primeiros momentos que irão definir o conjunto admissível onde o quarto momento será minimizado, por se tratar de um momento par da distribuição. É claro que, para uma mesma variância, quanto menor for o quarto momento centrado de uma distribuição, menor será seu coeficiente de curtose, dado que o coeficiente de curtose é definido como a razão entre o quarto momento central e o desvio padrão elevado à quarta potência: $\sigma_{p^4}/\sigma_{p^2}^2$. Com isso entende-se que, segundo Scott e Horvath (1980), o investidor tem preferência pelas distribuições platicúrticas, cujo coeficiente de curtose é menor que 3, às leptocúrticas, em que esse coeficiente é maior que 3. Nesta seção, fazemos uma simulação numérica do modelo a quatro momentos momentos, utilizando os dados dos Ativos 2, 4, 6, 7 e 8 da Seção 3.2, com o objetivo de obter insights sobre a relevância em se considerar o quarto momento na seleção de carteiras e a eficiência do modelo a quatro momentos.

Para esta simulação, consideramos duas combinações, compostas por três ativos cada uma, selecionadas anteriormente na Seção 3.3: a combinação dos Ativos 6, 7 e 8,

pelos resultados satisfatórios apresentados na aplicação do modelo a três momentos, e a combinação dos Ativos 2, 4 e 6, devido a assimetria negativa observada no Ativo 6 e a forma leptocúrtica, verificada para o Ativo 4, sendo todos considerados ativos de risco, e adotando como antes a taxa $r_f = 0.5$ para o ativo sem risco.

Iniciamos o experimento com a combinação de Ativos 6, 7 e 8, para a qual os resultados da aplicação do modelo a três momentos foram apresentados no Capítulo 3. Primeiro, calculamos os quatro primeiros momentos para a carteira de Markowitz α_M ,

$$\alpha_M = \begin{bmatrix} 1.758259 \\ -1.424110 \\ 0.058652 \end{bmatrix},$$

obtida na Seção 3.2, seguindo as etapas descritas na Seção 3.1 com a devida incorporação da matriz M_4 de co-curtoses, obtendo assim uma quádrupla dos momentos $(R, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3}, \sigma_{p^4})$ para a carteira de variância mínima de Markowitz:

$$Q_M = (2.485, 3.963, -4.367, 36.207).$$

Em seguida, para cada carteira de assimetria máxima obtida a partir do modelo a três momentos com aumentos de 5% 10%, 15% e 20% da variância de Markowitz para a combinação dos Ativos 6, 7 e 8, apresentada na Tabela 3, calcula-se a curtose, apresentando agora os dados referentes aos quatro momentos das carteiras de assimetria máxima na Tabela 4, e formando quatro quádruplas de assimetria máxima:

$$\begin{aligned} Q_{5\%} &= (2.485, 4.161, -0.654, 36.643) & Q_{10\%} &= (2.485, 4.360, 0.974, 40.188) \\ Q_{15\%} &= (2.485, 4.558, 2.282, 44.305) & Q_{20\%} &= (2.485, 4.756, 3.425, 48.784) \end{aligned}$$

Nota-se nas quádruplas obtidas, que os aumentos de 5% 10%, 15% e 20% na variância ocasionaram aumentos nas respectivas curtoses. Calculando o coeficiente de curtose em cada quádrupla, obtêm-se os valores 2.3052, 2.1160, 2.1146, 2.1329, 2.1569, respectivamente para a carteira de Markowitz, e para as carteiras de assimetria máxima obtidas pelo acréscimo de 5% 10%, 15% e 20% da variância de Markowitz, nesta ordem. Avaliando esses coeficientes, podemos observar que todas as carteiras têm distribuição da forma platicúrtica. Comparando os coeficientes, verifica-se que um aumento na variância, inicialmente, ocasionou uma diminuição no coeficiente de curtose, mas que a partir de certo índice, o coeficiente de curtose passou a aumentar juntamente com a variância.

Optou-se por iniciar a simulação numérica a quatro momentos a partir das triplas de assimetria máxima obtidas pelo aumento de variância a 15% e 20% para as quais o aumento na variância da carteira e aplicação do modelo a três momentos ocasionou um aumento no coeficiente de curtose, que pode ser observado na Tabela 4. Considerando

Tabela 4 - Resultados no modelo a três momentos para a combinação dos Ativos 678

| Combinação | Retorno excedente fixado | Variância fixada (Markowitz, e aumentada 5, 10, 15 e 20%) | Modelo a três momentos | | | | | |
|-------------------------------|--------------------------|---|--|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|------------------|
| | | | Carteira de Assimetria máxima (ponderadores) | Assimetria máxima | Curtose calculada | Coef. de Variação | Coef. de Assimetria | Coef. de Curtose |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 3.963 | 1.758259 -1.424110 0.058652 | -4.367 | 36.207 | 0.80 | -0.55 | 2.31 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.161 | 1.884300 -1.703900 0.104100 | -0.654 | 36.643 | 0.82 | -0.08 | 2.12 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.360 | 1.952864 -1.799843 0.097268 | 0.974 | 40.188 | 0.84 | 0.11 | 2.11 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.558 | 2.008345 -1.868159 0.086511 | 2.282 | 44.305 | 0.86 | 0.23 | 2.13 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.756 | 2.055833 -1.923710 0.075664 | 3.425 | 48.784 | 0.88 | 0.33 | 2.16 |

Fonte: A autora, 2022

que para o problema de assimetria máxima não há garantia de unicidade, utilizou-se inicialmente as próprias triplas $T_{15\%}$ e $T_{20\%}$ para compor o conjunto de restrições e definir o conjunto admissível para cada um dos problemas a quatro momentos:

$$T_{15\%} \rightarrow \begin{cases} \min \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = 2.485 \\ \alpha^t M_2 \alpha = 4.558 \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = 2.282 \end{cases} \quad \text{e} \quad T_{20\%} \rightarrow \begin{cases} \min \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = 2.485 \\ \alpha^t M_2 \alpha = 4.756 \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = 3.425 \end{cases},$$

obtendo para cada tripla $(R, \sigma_{p^2}, \sigma_{p^3})$, uma carteira ótima de curtose mínima α^* , com a utilização do Método SQP no programa Octave,

$$\alpha_{(15)}^* = \begin{bmatrix} 2.008345 \\ -1.868159 \\ 0.086511 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha_{(20)}^* = \begin{bmatrix} 2.055834 \\ -1.923711 \\ 0.075663 \end{bmatrix},$$

e os respectivos valores de curtose mínima associados a cada carteira ótima, que em ambos os casos, coincidiram com os valores obtidos para a carteira de assimetria máxima no modelo a três momentos.

Agora, para compor o conjunto admissível no problema de otimização a quatro momentos, seguindo o mesmo raciocínio utilizado para determinar o conjunto admissível no modelo a três momentos, diminui-se o valor da assimetria, a partir das triplas de assimetria máxima $T_{15\%}$ e $T_{20\%}$ obtidas após o aumento da variância, aplicando agora

reduções de 5%, 10%, 15%, 20% da assimetria máxima de cada tripla, pela mesma lógica anterior, e mantêm-se os valores de retorno e variância aumentada em 15% e 20% da variância de Markowitz. As novas triplas obtidas pela redução sistematizada da assimetria definem o conjunto admissível a ser utilizado em cada iteração para aplicação do modelo a quatro momentos. Os resultados destas iterações podem ser vistos na Tabela 5.

Tabela 5 - Resultados no modelo a quatro momentos para a combinação dos Ativos 6, 7 e 8

| Modelo a quatro momentos | | | | | | | | |
|-------------------------------|--------------------------|---------------------------------------|---|---|----------------|-------------------|---------------------|------------------|
| Combinação | Retorno excedente fixado | Variância fixada (aumentada 15 e 20%) | Assimetria fixada (reduzida 5, 10, 15, 20%) | Carteira de curtose mínima (ponderadores) | Curtose mínima | Coef. de Variação | Coef. de Assimetria | Coef. de Curtose |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.558 | 2.168 | 1.884300 -1.703900 0.104100 | 43.750 | 0.86 | 0.22 | 2.11 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.558 | 2.054 | 1.952864 -1.799843 0.097268 | 43.493 | 0.86 | 0.21 | 2.09 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.558 | 1.939 | 2.008345 -1.868159 0.086511 | 43.298 | 0.86 | 0.20 | 2.08 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.558 | 1.825 | 2.055833 -1.923710 0.075664 | 43.141 | 0.86 | 0.19 | 2.08 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.756 | 3.254 | 1.884300 -1.703900 0.104100 | 47.661 | 0.88 | 0.31 | 2.11 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.756 | 3.083 | 1.952864 -1.799843 0.097268 | 47.152 | 0.88 | 0.30 | 2.08 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.756 | 2.911 | 2.008345 -1.868159 0.086511 | 46.769 | 0.88 | 0.28 | 2.07 |
| Ativo 6 Ativo 7 Ativo 8 | 2.485 | 4.756 | 2.740 | 2.055833 -1.923710 0.075664 | 46.463 | 0.88 | 0.26 | 2.05 |

Fonte: A autora, 2022

Para a combinação de Ativos 2, 4 e 6, também foram calculados os quatro primeiros momentos para a carteira de Markowitz α_M , vista anteriormente na Seção 3.2,

$$\alpha_M = \begin{bmatrix} -0.3985 \\ 0.9962 \\ 0.1806 \end{bmatrix},$$

dando origem a respectiva quádrupla dos momentos para a carteira de variância mínima de Markowitz:

$$Q_M = (1.3544, -0.3985, 0.558, 3.953),$$

e apresentados na primeira linha da Tabela 6. Na mesma tabela, apresentamos os quatro

momentos calculados para as quatro carteiras de assimetria máxima, obtidas para a combinação dos Ativos 2, 4, 6 na Seção 3.2, a partir do aumento da variância em 5%, 10%, 15% e 20% da variância de Markowitz, de modo a formar quádruplas dos momentos para as respectivas carteiras de assimetria máxima.

$$Q_{5\%} = (1.3544, 1.394, 1.214, 5.305) \quad Q_{10\%} = (1.3544, 1.460, 1.565, 6.289)$$

$$Q_{15\%} = (1.3544, 1.526, 1.868, 7.254) \quad Q_{20\%} = (1.3544, 1.593, 2.148, 8.224)$$

Tabela 6 - Resultados no modelo a três momentos para a combinação dos Ativos 2, 4 e 6

| Modelo a três momentos | | | | | | | | |
|-------------------------------|--------------------------|---|--|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|------------------|
| Combinação | Retorno excedente fixado | Variância fixada (Markowitz, e aumentada 5, 10, 15 e 20%) | Carteira de Assimetria máxima (ponderadores) | Assimetria máxima | Curtose calculada | Coef. de Variação | Coef. de Assimetria | Coef. de Curtose |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.327 | -0.3985 0.9962 0.1806 | 0.558 | 3.953 | 0.85 | 0.36 | 2.24 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.394 | -0.6200 1.1723 0.6229 | 1.214 | 5.305 | 0.87 | 0.74 | 2.73 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.460 | -0.5702 1.2445 0.5642 | 1.565 | 6.289 | 0.89 | 0.89 | 2.95 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.526 | -0.5319 -1.2997 0.5191 | 1.868 | 7.254 | 0.91 | 0.99 | 3.11 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.593 | -0.4996 1.3463 0.4812 | 2.148 | 8.224 | 0.93 | 1.07 | 3.24 |

Fonte: A autora, 2022

Para as quádruplas obtidas nesta combinação de ativos, os aumentos de 5%, 10%, 15% e 20% na variância também ocasionaram aumentos nas respectivas curtoses. Os coeficientes de curtose, 2.24, 2.73, 2.95, 3.11, 3.24, calculados para a carteira de Markowitz, e para as carteiras de assimetria máxima obtidas pelo acréscimo de 5%, 10%, 15% e 20% da variância de Markowitz, respectivamente, também aumentaram a cada acréscimo da variância. Com isso, observou-se que a carteira de Markowitz obtida pelo modelo Média-Variância, para aquele retorno específico, apresentava a forma platicúrtica desejada, mas a medida que aplicamos o modelo a três momentos, as carteiras foram apresentando coeficientes de curtose cada vez maiores até atingirem a forma leptocúrtica nas carteiras de assimetria máxima para aumentos de 15% e 20% na variância. Desta forma, para a combinação dos Ativos 2, 4 e 6, optou-se pelas triplas de assimetria máxima obtidas pelo aumento de variância a 15% e 20% para simulação numérica a quatro momentos. Utilizamos, inicialmente as próprias triplas $T_{15\%}$ e $T_{20\%}$ na composição do conjunto de

restrições que definem o conjunto admissível para cada problema a quatro momentos:

$$T_{15\%} \rightarrow \begin{cases} \min \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = 1.3544 \\ \alpha^t M_2 \alpha = 1.526 \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = 1.868 \end{cases} \quad \text{e} \quad T_{20\%} \rightarrow \begin{cases} \min \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = 1.3544 \\ \alpha^t M_2 \alpha = 1.593 \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = 2.148 \end{cases},$$

obtendo para cada tripla de assimetria máxima fixada, uma carteira ótima de curtose mínima α^* :

$$\alpha_{(15)}^* = \begin{bmatrix} -0.5319 \\ 1.2997 \\ 0.5191 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha_{(20)}^* = \begin{bmatrix} -0.4996 \\ 1.3463 \\ 0.4812 \end{bmatrix},$$

e seus respectivos valores de curtose mínima que coincidiram com os valores obtidos para a carteira de assimetria máxima no modelo a três momentos.

Tabela 7 - Resultados no modelo a quatro momentos para a combinação dos Ativos 2, 4 e 6

| Modelo a quatro momentos | | | | | | | | |
|-------------------------------|--------------------------|---------------------------------------|---|---|----------------|-------------------|---------------------|------------------|
| Combinação | Retorno excedente fixado | Variância fixada (aumentada 15 e 20%) | Assimetria fixada (reduzida 5, 10, 15, 20%) | Carteira de curtose mínima (ponderadores) | Curtose mínima | Coef. de Variação | Coef. de Assimetria | Coef. de Curtose |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.5262 | 1.775 | 0.142551 1.239861 0.018005 | 6.905 | 0.91 | 0.94 | 2.96 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.5262 | 1.681 | 0.152981 1.195728 0.033206 | 6.679 | 0.91 | 0.89 | 2.87 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.5262 | 1.588 | 0.155334 1.158686 0.046805 | 6.483 | 0.91 | 0.84 | 2.78 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.5262 | 1.495 | 0.153127 1.125183 0.059674 | 6.304 | 0.91 | 0.79 | 2.71 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.5925 | 2.040 | 0.224570 1.282000 -0.008596 | 7.777 | 0.93 | 1.02 | 3.07 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.5925 | 1.933 | 0.237080 1.234000 0.007779 | 7.494 | 0.93 | 0.96 | 2.96 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.5925 | 1.825 | 0.240828 1.194008 0.022314 | 7.250 | 0.93 | 0.91 | 2.86 |
| Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6 | 1.3544 | 1.5925 | 1.718 | 0.239714 1.157930 0.036006 | 7.030 | 0.93 | 0.85 | 2.77 |

Fonte: A autora, 2022

Na Tabela 7 apresentamos os resultados para a aplicação do modelo a quatro momentos, quando o conjunto admissível no problema de otimização é composto, como

antes, a partir das triplas de assimetria máxima $T_{15\%}$ e $T_{20\%}$, reduzindo sistematicamente o valor da assimetria em 5%, 10%, 15%, 20%, e mantendo os valores de retorno e variância aumentada em 15% e 20% da variância de Markowitz.

Os resultados obtidos para as duas combinações de ativos, foram satisfatórios, pois alcançaram o objetivo de reduzir o quarto momento, e seu respectivo coeficiente de curtose. No caso da primeira combinação, Ativos 6, 7, 8, a curtose não apresentou uma redução muito expressiva, uma vez que as carteiras, obtidas a partir do modelo a quatro momentos, para esta combinação, já apresentavam coeficientes de curtose abaixo de 3. Para a combinação de Ativos 2, 4, 6, os resultados se mostraram mais favoráveis. Nesta combinação, o coeficiente de curtose da carteira de Markowitz se reportava à forma platicúrtica, mas após a aplicação do modelo a três momentos o coeficiente apresentou um aumento muito expressivo alterando a forma da distribuição para leptocúrtica a partir da terceira iteração. Neste sentido, a aplicação do modelo a quatro momentos possibilitou um maior controle da curtose, indicando a relevância do modelo a quatro momentos e sugerindo uma maior eficiência quanto maior o número de momentos considerados no problema.

CONCLUSÃO

Começamos nosso trabalho com uma análise detalhada do modelo de seleção de carteiras de investimento proposto por Athayde e Flôres (2004), completando lacunas e acrescentando resultados cruciais de um ponto de vista matemático. Os resultados apresentados neste trabalho, contribuem para a consolidação de toda a teoria em torno da incorporação de momentos de ordem superior no problema de seleção de portfólio. Os teoremas de existência de solução, apresentados aqui, validam a aplicação do Método de Lagrange, tanto no problema de variância mínima proposto por Athayde e Flôres (2004), como em todas as abordagens e demais generalizações introduzidas neste trabalho, e com isso reforçam a condição necessária obtida em cada um dos problemas de otimização associados aos modelos apresentados. Todas as questões de dependência linear entre os gradientes das restrições dos problemas de otimização, que impossibilitariam a aplicação do Método de Lagrange, também foram discutidas, e a solução de Markowitz, associada ao modelo Média-Variância, encontrou seu lugar nestes casos, ocupando a posição de solução trivial, à medida que se apresenta como um limite mínimo para a variância. A questão da dualidade, foi cuidadosamente investigada, assegurando a existência de uma região em que as carteiras ótimas são eficientes. Além de caracterizar as carteiras eficientes, e de apresentar as diversas estruturas obtidas para os problemas duais no modelo a três momentos e das várias possíveis generalizações para este modelo, foram apresentadas aqui simulações numéricas para o modelo a três momentos com resultados favoráveis à incorporação da assimetria, mostrando que a aplicação deste modelo de fato promove um controle sobre a assimetria de maneira bastante expressiva, podendo ser tomada como uma importante ferramenta. Para concluir nosso trabalho, avançamos no modelo a quatro momentos, com a incorporação da curtose, delineando as primeiras estruturas, comparando os problemas duais entre si, garantindo a existência de solução e apresentando uma simulação numérica, o que permitiu verificar a eficácia do modelo a quatro momentos e reforçar a relevância em se considerar momentos de ordem superior na seleção de carteiras eficientes. A partir daqui, surgem novas possibilidades como desdobramento da análise deste novo modelo a quatro momentos, tais como o estudo da região de dualidade e das condições de homotetia, sendo necessário antes discutir a dependência linear entre os gradientes das restrições nos problemas de otimização envolvidos.

REFERÊNCIAS

- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- HAN, B.; WONG, H. Mean-variance portfolio selection under volterra heston model. *Applied Mathematics & Optimization*, v. 84, p. 683–710, 2021.
- TSANG, M.; SIT, T.; WONG, H. Robust portfolio optimization with respect to spectral risk measures under correlation uncertainty. *Applied Mathematics & Optimization*, v. 86, p. 1–29, 2022.
- ARDITTI, F. D.; LEVY, H. Portfolio efficiency analysis in three moments: The multiperiod case. *Journal of Finance*, v. 30, n. 3, p. 797–809, 1975.
- KRAUS, A.; LITZENBERGER, R. H. Skewness preference and the valuation of risk assets. *The Journal of Finance*, v. 31, n. 4, p. 1085–1100, 1976.
- ATHAYDE, G. M.; FLÔRES, R. G. Finding a maximum skewness portfolio—a general solution to three-moments portfolio choice. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 28, n. 7, p. 1335–1352, 2004.
- BARONE-ADESI, G. Arbitrage equilibrium with skewed asset returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 20, p. 299–313, 9 1985. ISSN 1756-6916.
- HARVEY, C. R.; SIDDIQUE, A. Conditional skewness in asset pricing tests. *The Journal of Finance*, Blackwell Publishers, Inc., v. 55, n. 3, p. 1263–1295, 2000.
- KANE, A. Skewness preference and portfolio choice. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 17, n. 1, p. 15–25, 1982.
- SCOTT, R. C.; HORVATH, P. A. On the direction of preference for moments of higher order than the variance. *The Journal of Finance*, v. 35, n. 4, p. 915–919, 1980.
- GAMBA, A.; ROSSI, F. A three-moment based portfolio selection model. *Decisions in Economics and Finance*, v. 21, n. 1, p. 25–48, June 1998.
- HARVEY, C. et al. Portfolio selection with higher moments. *Quantitative Finance*, v. 10, n. 5, p. 469–485, 2010.
- ATHAYDE, G. M.; FLÔRES, R. G. On certain geometric aspects of portfolio optimisation with higher moments. In: _____. *Multi-moment asset allocation and pricing models*. England: John Wiley and Sons Ltd, 2006. cap. 2, p. 37–50.
- MOOD, A.; GRAYBILL, F.; BOES, D. *Introduction to the theory of statistics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1974. (International Student edition).
- BARTLE, R. G. *Elementos de análise real*. [S.l.]: Editora Campus Ltda, 1983.
- CAPUTO, M. R. Lagrangian transposition identities and reciprocal pairs of constrained optimization problems. *Economics Letters*, v. 66, n. 3, p. 265–273, mar. 2000.
- PANIK, M. *Classical optimization: foundations and extensions*. Amsterdam: North-Holland Pub., 1976.

CARATHEODORY, C. *Calculus of variations and partial differential equations of the first order*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2006.

MARTINS, P. R. *Aplicação de teorema de ponto fixo a um modelo de seleção de carteiras de investimento*. Dissertação (Mestrado) — IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2015.