



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Felippe Vieira Benicio dos Santos

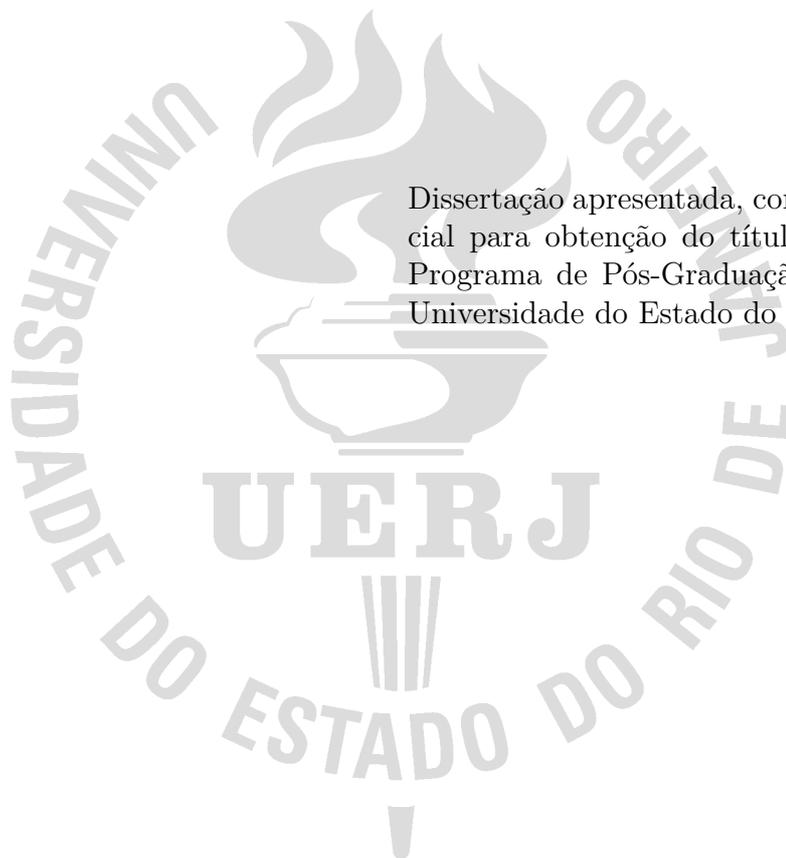
**Estrelas de nêutrons e propriedades microscópicas da matéria
ultradensa**

Rio de Janeiro

2023

Felippe Vieira Benicio dos Santos

Estrelas de nêutrons e propriedades microscópicas da matéria ultradensa



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof.^a Dr.^a Leticia Faria Domingues Palhares

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

S237e Santos, Felipe Vieira Benicio dos.
Estrelas de nêutrons e propriedades microscópicas da matéria ultradensa /
Felipe Vieira Benicio dos Santos. – 2023.
65 f. : il.

Orientadora: Letícia Faria Domingues Palhares.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de
Física Armando Dias Tavares.

1. Estrelas de nêutrons – Modelos matemáticos – Teses. 2. Relatividade geral
(Física) - Teses. 3. Equações - Astrofísica – Teses. I. Palhares, Letícia Faria Domingues
(Orient.). II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando
Dias Tavares. III. Título.

CDU 524.354.6:519.6

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Felippe Vieira Benicio dos Santos

Estrelas de nêutrons e propriedades microscópicas da matéria ultradensa

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 23 de Novembro de 2023.

Banca Examinadora:

Prof.^a Dr.^a Leticia Faria Domingues Palhares (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Marcelo Chiapparini
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

Dedico a todos alunos, professores e pesquisadores aspirantes em física que buscam conhecer, entender e discutir sobre o mundo. Afinal, não há física sem o ambiente social e cultural. Compartilhar o conhecimento é divulgar, atualizar e cultivar a ciência da natureza.

E para todos que estejam passando por dificuldades na vida, que esta dissertação sirva como prova que desistir de tudo não é uma opção viável, as coisas fluem bem se der o tempo e a dedicação necessária. Não é um processo linear, muito pelo contrário, mas mesmo que pouco, cada desenvolvimento, ação a favor ou experiência adquirida é uma vitória contra a dificuldade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus amigos, principalmente aos doutorandos João Paulo Sampaio e Rodolfo Rocha, minha orientadora, Dr.^a Letícia Palhares e minha família. Mesmo com toda dificuldade sofrida nos últimos anos, não desistiram de mim e todos juntos foram de grande ajuda para a conclusão deste estudo.

Agradeço aos instrutores e aos alunos da escola de artes marciais *Pa-Kua*. Quando fundo na depressão, fazer parte desta escola foi o que mais me incentivou a erguer-me e seguir com a vida.

Por fim, mas não menos importante, obrigado CAPES pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

The cosmos is within us. We are made of star-stuff. We are a way for the universe to know itself.
Carl Sagan

RESUMO

SANTOS, F. V. B. **Estrelas de nêutrons e propriedades microscópicas da matéria ultradensa**. 2023. 65 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

O presente trabalho aborda o tema da modelagem de estrelas compactas, sendo retrata a anã branca e a estrela de nêutron. As estrelas de nêutrons são objetos astronômicos extremamente densos e compactos que surgem após a explosão de uma supernova. Essas estrelas são compostas principalmente por nêutrons e possuem características únicas e complexas que desafiam nossa compreensão atual da física. A dissertação tem como objetivo fornecer uma introdução abrangente e detalhada sobre a modelagem dessas estrelas, explorando as teorias e os métodos utilizados para entender sua estrutura interna, suas propriedades físicas e seu comportamento dinâmico. A compreensão desses aspectos é fundamental para a astrofísica, pois as estrelas de nêutrons desempenham um papel crucial em uma ampla gama de fenômenos astrofísicos, como pulsares, emissão de raios-X e fusão de estrelas de nêutrons. O trabalho começa fornecendo uma revisão completa da literatura existente, abrangendo desde os fundamentos da física nuclear e de partículas até as teorias astrofísicas relacionadas às estrelas de nêutrons. São discutidos os modelos teóricos mais recentes, como a equação de estado da matéria de nêutrons e as simulações numéricas utilizadas para estudar a estrutura e evolução dessas estrelas. Em seguida, são apresentados os métodos observacionais e os dados disponíveis que nos ajudam a restringir e validar os modelos teóricos. São abordadas técnicas de observação, como a análise de espectros de raios-X e a detecção de ondas gravitacionais, que oferecem informações cruciais sobre as propriedades das estrelas de nêutrons. Por fim, a dissertação discute os desafios e as lacunas no conhecimento atual, almejando áreas de pesquisa futura. A importância de avançar na modelagem de estrelas de nêutrons é destacada, considerando-se a evolução contínua da tecnologia observacional e a necessidade de aprimorar nossos modelos teóricos para explicar fenômenos ainda não compreendidos. Em suma, esta dissertação de mestrado fornece uma visão geral abrangente e atualizada sobre a modelagem de estrelas de nêutrons, destacando a importância desses objetos astrofísicos fascinantes e delineando as mudanças futuras da pesquisa nesse campo em constante evolução.

Palavras-chave: Estrela de nêutrons. Modelagens numéricas. Relatividade Geral.
Equação de TOV.

ABSTRACT

SANTOS, F. V. B. **Neutron stars and microscopic properties of ultradense matter**. 2023. 65 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

The present work addresses the subject of the modeling of neutron stars. Neutron stars are extremely dense and compact astronomical objects that arise after a supernova explosion. These stars are composed mostly of neutrons and have unique and complex characteristics that challenge our current understanding of physics. The dissertation aims to provide a comprehensive and detailed introduction to the modeling of these stars, exploring the theories and methods used to understand their internal structure, their physical properties and their dynamic behavior. Understanding these aspects is fundamental to astrophysics, as neutron stars play a crucial role in a wide range of astrophysical phenomena such as pulsars, X-ray emission and neutron star mergers. The work begins by providing a thorough review of the existing literature, ranging from the fundamentals of nuclear and particle physics to astrophysical theories related to neutron stars. The most recent theoretical models are discussed, such as the approval of the state of matter of neutrons and the numerical simulations used to study the structure and evolution of these stars. Then, observational methods and available data are presented that help us to restrict and validate the theoretical models. Observation techniques such as the analysis of X-ray spectra and the detection of gravitational waves, which provide crucial information about the properties of neutron stars, are covered. Finally, the dissertation discusses the challenges and gaps in current knowledge, targeting areas of future research. The importance of advancing neutron star modeling is highlighted, considering the continuous evolution of observational technology and the need to improve our theoretical models to explain phenomena not yet understood. In short, this Master's thesis provides a comprehensive and up-to-date overview of neutron star modeling, highlighting the importance of these fascinating astrophysical objects and outlining future research changes in this ever-evolving field.

Keywords: Neutron star. Numeric models. General Relativity. TOV equation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Gráfico 1 - Diferentes anãs brancas de gás não-relativístico	49
Gráfico 2 - Diferentes anãs brancas de gás relativístico	51
Gráfico 3 - Estrela de nêutron com gás não-relativístico e ultrarrelativístico	52
Gráfico 4 - Comparação de diferentes estrelas de nêutron	54
Gráfico 5 - Massa e Raio para diferentes pressões iniciais	56
Figura 1 - Representação do equilíbrio hidrostático em uma estrela esférica	61

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 - Solução da anã branca de Newton	64
Algoritmo 2 - Gráfico da anã branca de Newton	64
Algoritmo 3 - Solução da anã branca de TOV	64
Algoritmo 4 - Gráfico da anã branca de TOV	65
Algoritmo 5 - Solução da estrela de nêutron de gás não-relativístico	65
Algoritmo 6 - Gráfico da estrela de nêutron de gás não-relativístico	65
Algoritmo 7 - Solução da estrela de nêutron de gás ultrarrelativístico	65
Algoritmo 8 - Gráfico da estrela de nêutron de gás ultrarrelativístico	65
Algoritmo 9 - Solução da estrela de nêutron de gás relativístico	65

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkoff
RG	Relatividade Geral (de Einstein)
RR	Relatividade Restrita
QCD	Cromodinâmica Quântica; do inglês, <i>Quantum chromodynamics</i>
EoS	Equação de Estado; do inglês, <i>Equation of State</i>
SI	Sistema Internacional (de unidades)
NR	Não-relativístico
UR	Ultrarrelativístico

LISTA DE SÍMBOLOS

Γ	Símbolo de Christoffel.
δ_{ν}^{μ}	Delta de Kronecker, vale 1 se $\mu = \nu$ ou 0 caso contrário.
M_{\odot}	Massa solar = $1,989 \times 10^{33}g$.
\bar{P}_o	Equivale a $\bar{P}(r = 0)$.

SUMÁRIO

	CONSIDERAÇÕES INTRODUTÓRIAS	13
1	INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL DE EINSTEIN	17
1.1	Origem da teoria	17
1.2	Noções de tensores	19
1.3	Métrica, simetria e símbolo de Christoffel	21
1.4	Derivada covariante em tensores	23
1.5	Tensor de curvatura Riemann-Christoffel e propriedades	24
1.6	Tensor Energia-Momento e a Equação de campo de Einstein	27
2	ESTUDO DE UMA ESTRELA COM SIMETRIA ESFÉRICA	31
2.1	A equação do campo de Einstein	33
2.2	A Equação de Euler relativística	37
2.3	A Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	38
3	SOLUÇÕES NUMÉRICAS	42
3.1	Equação de Estado do Gás Ideal de Fermi	42
3.2	Gravitação de Newton	44
3.3	Gravitação da RG	45
3.4	Modelos de Anã Branca	46
3.5	Modelos de Estrela de Nêutron	52
	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A – Equilíbrio Hidrostático Newtoniano	61
	APÊNDICE B – Alguns códigos usados no <i>Mathematica</i>	64

CONSIDERAÇÕES INTRODUTÓRIAS

As estrelas de nêutrons são objetos celestes fascinantes e enigmáticos que intrigam os astrônomos e físicos há décadas (GLENDENNING, 2000). Essas estruturas cósmicas extremamente densas e compactas são formadas a partir das explosões de supernovas e, apesar do nome, não se conhece precisamente sua composição. Essas estrelas têm um diâmetro típico de cerca de 20 quilômetros, mas sua massa chega a ser maior do que a do Sol. Isso resulta em uma densidade incrivelmente alta, em que uma colher de chá de matéria de uma estrela de nêutrons pode ter uma massa de dezenas de milhões de toneladas. Sua natureza peculiar e características físicas desafiadoras despertaram um interesse considerável na comunidade científica. (HORVARTH, 2011).

Um acontecimento relevante a ser ressaltado é sobre como começou a idealização de estrelas compactas. No começo do século XX havia uma discussão sobre as supernovas, em que se fosse somente considerada a explosão a energia não se conservava. (YAKOVLEV et al., 2013).

No início da década de 1930, Lev Landau estudava sobre anãs brancas já conhecidas e calculou a massa máxima que elas poderiam atingir. Junto desse estudo ele imaginou que estrelas mais massivas ao colapsar gerariam uma estrela feita de núcleos atômicos sem carga elétrica (na época apenas o próton era conhecido). Por coincidência seu artigo discutindo a ideia foi publicado poucos dias após o descobrimento do nêutron, o que gerou uma repercussão na época. O artigo de Landau não citava nêutrons, mas estes eram compatíveis com o que ele idealizou.

Alguns anos depois, Fritz Zwicky escreveu um artigo mais detalhado sobre como as estrelas de nêutrons seriam, incluindo que massa e raio em média elas teriam (ZWICKY, 1939). A estrela de nêutron foi de fato detectada na forma de pulsares apenas na década de 1980, pouco antes da morte de Landau.

Com os estudos avançando, concluiu-se que as estrelas compactas ainda são mantidas pelo equilíbrio hidrostático, mas as equações de estado são diferentes. Por sinal, a equação de estado da estrela de nêutrons ainda é bastante discutida, pois várias modelagens microscópicas dessas estrelas geram resultados compatíveis com as observações disponíveis. (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 1983).

Há um número significativo de investigadores e instituições científicas envolvidas no estudo das estrelas de nêutrons. Esses estudos incluem pesquisas teóricas e observaci-

onais para entender melhor a estrutura interna dessas estrelas, sua formação, evolução e propriedades físicas. Exemplo de artigo em (GONCALVES; LAZZARI, 2020).

Os artigos sobre estrelas de nêutrons podem abordar uma ampla variedade, como:

- (a) Estrutura interna: Exploração da composição e propriedades da matéria no interior das estrelas de nêutrons, incluindo a física nuclear de altas densidades e a natureza dos estados exóticos da matéria;
- (b) Observações e fenômenos relacionados: Estudos sobre os diferentes tipos de pulsares, que são estrelas de nêutrons altamente magnetizadas que emitem radiação eletromagnética continuamente, sendo esta radiação observada em pulsos regulares, devido a rotação e inclinação da estrela (efeito farol). Também podem abordar fenômenos associados, como rajadas de raios gama, emissões de raios X e eventos de ondas gravitacionais;
- (c) Formação e evolução: Investigação dos processos físicos que levam à formação de estrelas de nêutrons durante explosões de supernovas e fusões de estrelas de nêutrons. Isso inclui modelagem teórica e simulações computacionais; e
- (d) Propriedades astrofísicas: Estudos sobre a influência das estrelas de nêutrons em seu ambiente astrofísico, como a formação de campos magnéticos intensos, interação com materiais circundantes e sua relação com outros objetos celestes, como buracos negros.

A modelagem de estrelas de nêutrons desempenha um papel fundamental na compreensão desses objetos celestes. Ao utilizar teorias e simulações numéricas avançadas, é possível explorar a estrutura interna, a evolução temporal e as propriedades físicas dessas estrelas. Além disso, a modelagem é essencial para interpretar e correlacionar os dados observacionais coletados por meio de reconhecimentos e instrumentos de detecção.

A análise de dados espectroscópicos de raios-X e a detecção de ondas gravitacionais emergiram como ferramentas cruciais para investigar as propriedades das estrelas de nêutrons e testar os modelos teóricos propostos. Por isso, existe uma intensa demanda atual pela descrição teórica desses objetos compactos.

Esta dissertação de mestrado tem como objetivo fornecer uma introdução à modelagem de estrelas de nêutrons, abordando conceitos teóricos, técnicas computacionais e métodos observacionais empregados nessa área de pesquisa. Uma compreensão aprofundada desses aspectos é crucial para avançarmos em nosso conhecimento sobre a física nuclear, astrofísica e cosmologia.

Essa modelagem, ainda, revela-se uma área de pesquisa extremamente importante na astrofísica e física nuclear, pois envolve o estudo de objetos celestes extremamente densos e compactos, com uma gravidade extremamente forte que afeta a estrutura do espaço e do tempo ao seu redor. Neste estudo, exploramos aspectos da modelagem de estrelas de nêutrons, incluindo a equação de estado da matéria nuclear, as equações hidrostáticas, a estrutura interna desses objetos e suas propriedades observáveis.

Discutiremos também aplicações da modelagem de estrelas de nêutrons, incluindo a interpretação de observações astronômicas, a investigação de processos astrofísicos extremos, como explosões de supernovas e fusões de estrelas de nêutrons, e a compreensão da física nuclear em condições extremas de temperatura e densidade. Além disso, analisaremos as principais limitações e desafios na modelagem de estrelas de nêutrons, bem como as possíveis direções futuras da pesquisa nesta área.

Ademais, serão discutidos os métodos numéricos utilizados para simular a estrutura desses objetos, relacionando-a com a física microscópica através da equação de estados.

Como objetos cósmicos que apresentam densidades extremas e características únicas, sua modelagem requer o uso da Relatividade Geral de Einstein, uma teoria fundamental da física que descreve a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo (CARROLL, 2019). Nesta dissertação de mestrado, revisaremos alguns fundamentos teóricos e métodos numéricos utilizados na modelagem de estrelas de nêutrons, considerando sua simetria esférica.

No Capítulo 1, fornecemos uma introdução à Relatividade Geral de Einstein, abordando a origem da teoria e apresentando as noções básicas de tensores, que são ferramentas matemáticas essenciais para descrever a geometria do espaço-tempo. Discutiremos a métrica, que descreve uma distância infinitesimal entre pontos no espaço-tempo, e o símbolo de Christoffel, que está relacionado à curvatura do espaço-tempo.

Em seguida, exploraremos a derivada covariante em tensores, um conceito essencial na Relatividade Geral, e discutiremos o tensor de curvatura Riemann-Christoffel e suas propriedades. Além disso, abordaremos o tensor energia-momento, que descreve a distribuição de energia e momento no espaço-tempo e é essencial para entender a influência da matéria na curvatura do espaço-tempo.

No Capítulo 2, concentramos nosso estudo em estrelas de nêutrons esfericamente simétricas. Calcularemos a equação do campo de Einstein, que relaciona a curvatura do espaço-tempo à distribuição de matéria e energia presente na estrela de nêutrons. Em

seguida, investigamos a prescrição de Euler relativística, que descreve o equilíbrio hidrostático no interior da estrela. Finalmente, exploraremos a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, a qual determina a estrutura interna de um objeto auto-gravitante estático e esfericamente simétrico, que pode ser usada como um modelo introdutório para o estudo de estrelas compactas.

No Capítulo 3, consideramos soluções numéricas para estudar as estrelas de nêutrons. Apresentaremos métodos computacionais utilizados para resolver as equações diferenciais e discutiremos as limitações e os desafios associados a essas abordagens numéricas. Em particular, mostraremos os efeitos das correções relativísticas na estrutura das estrelas, comparando também com o caso de anãs brancas.

Para finalizar, concluímos a dissertação resumindo os estudos desenvolvidos. Além disso, delinearemos possíveis planejamentos futuros para aprimorar a modelagem de estrelas de nêutrons, como a inclusão de efeitos magnéticos, rotação e outros fenômenos físicos relevantes.

1 INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL DE EINSTEIN

Neste capítulo é introduzido de forma resumida o necessário da Relatividade Geral de Einstein para a obtenção da equação do campo de Einstein e modelagem das estrelas compactas. O formato desta introdução é principalmente baseada em (WEBER, 2015), mas também foi usado os livros (WEBER, 1999; SCHAFFNER-BIELICH, 2020; SCHUTZ, 2009) para mais informações sobre o tema.

As constantes da velocidade da luz no vácuo c e a gravitacional universal G , que aparecem nos cálculos, são consideradas 1 (muda-se as unidades). Isto facilita as contas, visto que essas constantes aparecem muito nos cálculos.

1.1 Origem da teoria

A teoria da relatividade geral, desenvolvida por Albert Einstein em 1915 (EINSTEIN, 1915; EINSTEIN et al., 1916; EINSTEIN, 1920), é um dos pilares da física moderna e da nossa compreensão do universo. A origem dessa teoria pode ser traçada a partir de dois pilares fundamentais: a teoria da relatividade especial e a gravitação newtoniana.

A origem da teoria da Relatividade Geral de Einstein é um marco fundamental na história da física moderna. No início do século XX, a compreensão da gravidade era baseada na teoria da gravitação de Newton, que descreve a atração mútua entre corpos massivos em termos de força. No entanto, essa teoria não explicava completamente certos fenômenos observados, como a órbita de Mercúrio e a deflexão da luz ao passar perto de objetos maciços.

Foi nesse contexto que Albert Einstein, por meio de uma série de trabalhos revolucionários publicados entre 1905 e 1915, desenvolveu a teoria da Relatividade Geral. Sua motivação era encontrar uma descrição mais abrangente e precisa da gravidade, incorporando os princípios da relatividade e da geometria do espaço-tempo.

Assim, essa teoria revolucionou a nossa compreensão do espaço e do tempo para além do que a relatividade restrita já tinha feito. Na relatividade especial, Einstein mostrou que a velocidade da luz é uma constante universal e que o espaço e o tempo são relativos ao observador, dependendo da sua velocidade e posição relativa. Essa teoria levou a várias consequências importantes, incluindo a famosa equação $E = mc^2$, que descreve a relação entre massa e energia. No entanto, a teoria da relatividade especial não

lidava com a gravidade ou aceleração, que eram descritas pelas leis de Newton.

A Relatividade Geral propõe que a gravidade é resultado da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. Em vez de ser uma força que atua à distância, como postulado por Newton, a gravidade é interpretada como uma manifestação da geometria do espaço-tempo, que é distorcida pela presença de massa e energia.

A teoria de Einstein apresenta a ideia de que a gravidade é uma curvatura do espaço-tempo ao redor de objetos massivos. Essa curvatura é governada por uma entidade matemática que descreve como as distâncias e os intervalos de tempo são modificados na presença de massa e energia.

A origem da teoria da Relatividade Geral representa um salto conceitual significativo na compreensão da gravidade e da natureza do espaço-tempo. Suas previsões foram confirmadas por experimentos e observações subsequentes (VANKOV, 2020; EARMAN; GLYMOUR, 1980).

O grande diferencial da Teoria da Relatividade Geral de Einstein é a introdução do Princípio de Equivalência. Esta teoria passa a trabalhar não só com referenciais inerciais, mas também com referenciais acelerados, ainda buscando manter as leis da física invariantes independente do referencial. Por isso, trabalha-se com equações tensoriais, pois estas não mudam sob transformações gerais nas coordenadas.

O Princípio da Equivalência introduz a ideia de que o efeito de um campo gravitacional é localmente equivalente a um observador acelerado. Um clássico exemplo disso é imaginar duas pessoas em sistemas isolados distintos: uma que está em queda livre na gravidade da Terra, e outra que está no espaço com aceleração constante igual a gravidade da Terra, no sentido dos pés do indivíduo. Para as pessoas que não tem noção de onde estão (ou um observador externo), não há diferença de movimento. Em outras palavras, as leis físicas são as mesmas. O que muda é que um sistema está acelerado e outro está sob efeito do campo gravitacional da Terra. (WEBER, 2015).

A origem da teoria da Relatividade Geral de Einstein é fundamental para compreender a natureza complexa das estrelas de nêutrons. Ao introduzir um novo paradigma no campo da física, Einstein revolucionou nossa compreensão do espaço, do tempo e da gravidade. Sua teoria, desenvolvida no início do XX, revelou que a gravidade não é uma força misteriosa ocorrida à distância, mas sim uma manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia do século. Essa perspectiva abriu caminho para uma compreensão mais profunda das estrelas de nêutrons, que são objetos astronômicos

extremamente densos e massivos. Ao considerar a curvatura do espaço-tempo, a Relatividade Geral oferece um arcabouço teórico robusto para descrever as propriedades físicas e os fenômenos observados nessas estrelas.

1.2 Noções de tensores

A teoria da Relatividade Geral de Einstein é formulada em termos de tensores que são objetos matemáticos que podem descrever várias características físicas, como o espaço-tempo.

Em RG, tensores são usados para descrever a curvatura do espaço-tempo e como ela é afetada pela presença de massa e energia. Ao contrário da geometria euclidiana tradicional, em que as distâncias e os ângulos são invariantes, a geometria do espaço-tempo é dinâmica e pode variar dependendo da distribuição de massa e energia no universo.

Os tensores podem ser representados por matrizes multidimensionais que transformam de acordo com as leis da matemática. Eles possuem componentes que representam diferentes propriedades físicas, como o tensor métrico, que descreve a métrica do espaço-tempo e permite calcular intervalos de tempo e distância em diferentes sistemas de referência. Além disso, os tensores de curvatura, como o tensor de Riemann e o tensor de Einstein, são usados para descrever a curvatura do espaço-tempo devido à presença de massa e energia.

A compreensão dos tensores é essencial para o estudo da modelagem de estrelas de nêutrons, uma vez que esses objetos astronômicos extremamente densos e compactos estão sujeitos a condições extremas de gravidade. Através da teoria da Relatividade Geral e do uso de tensores, é possível descrever corretamente a estrutura interna e o comportamento das estrelas de nêutrons, levando em consideração a curvatura do espaço-tempo em suas proximidades.

Na teoria da relatividade geral, o tensor mais fundamental é o tensor métrico, que descreve a distância entre pontos no espaço-tempo. O tensor métrico é usado para definir a distância infinitesimal entre dois pontos próximos em termos de um produto interno entre vetores. A curvatura do espaço-tempo é descrita por um tensor chamado tensor de curvatura de Riemann, que é construído a partir do tensor métrico.

Além desses, há muitos outros tensores importantes na teoria da relatividade geral, como o tensor de energia-momento, que descreve a distribuição de massa e energia no

espaço-tempo, e o tensor de Einstein, que relaciona a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de massa e energia.

Na Relatividade Geral é considerado um espaço quadridimensional, chamado de espaço-tempo, quando o tempo passa a ser uma variável dependente do referencial e suas coordenadas. As coordenadas generalizadas são representadas por $x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3$; em que os índices com letra grega (μ, ν, σ, \dots) podem ser 0, 1, 2 ou 3. Neste estudo, o x^0 representa o tempo e x^i (índices com letra do alfabeto podem ser 1, 2 ou 3) o espaço. É considerado $c = 1$ para que as quatro coordenadas tenham as mesmas dimensões. (WEBER, 1999).

A ordem do tensor é dada pela quantidade de índices que este possui. Quando o índice é superior, se diz que é um tensor contravariante e, quando o índice é inferior, se diz covariante.

O produto interno entre dois tensores de ordem 2 com índices iguais, um contravariante e outro covariante por exemplo, resulta em um escalar (ou tensor de ordem 0) dado por:

$$a^{\mu\nu}b_{\mu\nu} \equiv \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 a^{\mu\nu}b_{\mu\nu} = a^{00}b_{00} + a^{01}b_{01} + \dots + a^{10}b_{10} + a^{11}b_{11} + \dots + a^{33}b_{33}. \quad (1)$$

Para transformação de um tensor deve-se ter atenção à posição dos índices. O caso de um tensor misto de ordem 2 (um índice contravariante e outro covariante), tem-se:

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} T_{\beta}^{\alpha}. \quad (2)$$

Percebe-se que, para o índice contravariante, o mesmo fica por baixo na derivada, enquanto para o covariante, é o contrário. Portanto, no caso geral, tem-se:

$$T_{\lambda\sigma\dots}^{\mu\nu\dots} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\sigma}} \dots T_{\gamma\delta\dots}^{\alpha\beta\dots}. \quad (3)$$

Embora a matemática dos tensores possa parecer complexa e abstrata, é essencial para a formulação da teoria da relatividade geral e para a compreensão da geometria do espaço-tempo em presença de objetos massivos. A compreensão dos tensores é fundamental para a compreensão da física em geral e é uma das ferramentas matemáticas mais poderosas disponíveis para a descrição da natureza.

No âmbito desta dissertação de mestrado, é necessário compreender as noções fundamentais de tensores, em particular no contexto do capítulo sobre a Relatividade Geral de Einstein. Os tensores desempenham um papel crucial na descrição matemática da física relativística, permitindo uma representação precisa e elegante das leis físicas em espaços curvos.

1.3 Métrica, simetria e símbolo de Christoffel

A métrica, a simetria e o símbolo de Christoffel desempenham papéis fundamentais para introduzir conceitos e definições da Relatividade Geral de Einstein. Esses conceitos estão intrinsecamente ligados à compreensão da geometria do espaço-tempo curvo, que é essencial para descrever os fenômenos gravitacionais em escalas cosmológicas.

A métrica é uma ferramenta matemática que permite quantificar as distâncias e intervalos de tempo em um espaço-tempo curvo. No contexto da Relatividade Geral, a métrica descreve como a geometria do espaço-tempo é modificada pela presença de matéria e energia e é dada pelo tensor métrico, que descreve a distância entre pontos próximos. Para modelar estrelas de nêutrons, a métrica desempenha um papel crucial na determinação das propriedades gravitacionais em torno desses objetos maciços, onde a curvatura do espaço-tempo é extremamente significativa. A métrica é afetada pela distribuição de massa e energia no espaço-tempo, e sua curvatura é descrita pelo tensor de curvatura de Riemann. No entanto, o intervalo entre dois pontos do espaço-tempo, calculado a partir da métrica, é uma função que não muda de forma sob transformações de coordenadas, tornando-o um objeto matemático invariante sob transformações.

A simetria é outro aspecto importante na Relatividade Geral e na modelagem de estrelas compactas. A simetria está associada a propriedades invariantes de um sistema físico, que são preservadas mesmo quando se transformam. Neste contexto, pode-se considerar a simetria esférica para descrever, de forma aproximada, as estrelas compactas, já que, em um caso ideal de estrela estacionária, se acredita que elas possuem uma distribuição de matéria aproximadamente esférica.

O símbolo de Christoffel, por sua vez, é uma ferramenta matemática utilizada para descrever as conexões entre os diferentes pontos do espaço-tempo curvo, sendo um objeto matemático que descreve como a métrica varia de um ponto para outro no espaço-tempo. É usado para descrever como as linhas geodésicas (as curvas que minimizam a distância entre dois pontos) são afetadas pela curvatura do espaço-tempo. O símbolo

de Christoffel é um objeto matemático que surge naturalmente na derivada covariante, uma generalização da derivada comum para levar em conta a curvatura do espaço-tempo.

Essas conexões são fundamentais para entender como a matéria e a energia influenciam a geometria e a curvatura do espaço-tempo. Na modelagem de estrelas de nêutrons, o símbolo de Christoffel é utilizado para calcular as acelerações gravitacionais, descrevendo como os corpos em órbita ao redor dessas estrelas se comportam no espaço-tempo.

Um dos princípios da RG diz que as equações são invariantes, independente da coordenada. Para isso, é introduzido o conceito de derivada covariante. Mas antes disso, é relevante ter conhecimento de intervalo invariante.

O intervalo invariante é definido como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4)$$

em que g é a métrica e $dx^\mu dx^\nu$ são coordenadas generalizadas. A métrica, que neste estudo determina as distâncias e intervalos de tempo entre eventos, possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= a^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}, & a^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} &= a^\mu_\nu, \\ g^{\mu\nu} &= g^{\nu\mu}, & g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} &= g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu, & g &\equiv |g_{\mu\nu}|. \end{aligned} \quad (5)$$

em que δ^μ_ν é o Delta de Kronecker. Com isto definido, é introduzido o Símbolo de Christoffel. Este símbolo é uma combinação de derivadas da métrica que se mostram importantes para o desenvolvimento dos cálculos na RG. O símbolo é definido como:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{g^{\sigma\lambda}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\mu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} \right) \equiv \frac{g^{\sigma\lambda}}{2} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}). \quad (6)$$

Nota-se que é utilizada a notação de vírgula-índice para representar a derivada parcial em x^μ , uma anotação muito útil para evitar a escrita de muitas derivadas.

Vale ressaltar que o Símbolo de Christoffel não é um tensor por não se transformar como um. Entretanto, ele possui certas propriedades e simetrias, como:

$$\Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\ln \sqrt{-g}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \sqrt{-g}. \quad (7)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} \implies \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} = \Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}. \quad (8)$$

Em resumo, a métrica e o símbolo de Christoffel são objetos fundamentais na teoria da relatividade geral de Einstein, e são usados para descrever a geometria do espaço-tempo e como ela é afetada pela presença de massa e energia. Em particular, o símbolo de Christoffel descreve as conexões entre diferentes pontos do espaço-tempo.

1.4 Derivada covariante em tensores

A derivada parcial, no estudo da RG, não é suficiente para se manter invariante com a mudança de coordenadas. Para resolver esta questão, é definida a derivada covariante. Abaixo, é listada a definição de derivada covariante em vetores (ou tensores de ordem 1) contravariante e covariante. Assim, uma derivada covariante em vetores contravariante e covariante, respectivamente, é:

$$a^{\mu}_{;\nu} = \frac{\partial a^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} a^{\lambda} = a^{\mu}_{,\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} a^{\lambda}, \quad (9)$$

$$a_{\mu;\nu} = \frac{\partial a_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} a_{\lambda} = a_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} a_{\lambda}. \quad (10)$$

Aqui também é adotada a notação contraída para derivada covariante, de $;\mu$. Ademais, um vetor a^{μ} contraído em $;\mu$ pode também ser descrito como:

$$a^{\mu}_{;\mu} = \frac{\partial a^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\mu} a^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{-g} a^{\lambda}). \quad (11)$$

Já é observada uma útil aplicação do símbolo de Christoffel, evidenciando assim a importância de sua definição. Além disso, é possível generalizar para um tensor misto de ordem N :

$$\left(T^{\dots\nu\dots}\right)_{;\sigma} = T^{\dots\nu\dots}_{\dots\mu\dots,\sigma} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda} T^{\dots\lambda\dots}_{\dots\mu\dots} + \dots - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} T^{\dots\nu\dots}_{\dots\lambda\dots} - \dots \quad (12)$$

Na teoria da Relatividade Geral, a derivada covariante é uma generalização da derivada comum que leva em conta a curvatura do espaço-tempo. A derivada covariante é usada para definir como um tensor varia de um ponto para outro no espaço-tempo. Em uma variedade curva, a derivada comum não leva em conta a curvatura do espaço-tempo, o que pode levar a resultados incorretos. A derivada covariante é definida para levar em conta a curvatura do espaço-tempo, garantindo que as propriedades dos tensores permaneçam invariantes sob transformações de coordenadas.

Além disso, a derivada covariante é usada para definir as equações fundamentais da relatividade geral, como a equação de campo de Einstein, que relaciona a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de massa e energia. A compreensão da derivada covariante é, portanto, essencial para a formulação e compreensão da teoria da RG.

1.5 Tensor de curvatura Riemann-Christoffel e propriedades

Na teoria da relatividade geral, o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel é um objeto matemático que descreve como a curvatura do espaço-tempo varia de um ponto para outro. Ele é definido em termos das segundas derivadas da métrica do espaço-tempo, que é uma função que determina as distâncias e intervalos de tempo entre eventos, conforme discutido na seção 1.3.

No estudo de estrelas de nêutrons, que são remanescentes altamente compactas de estrelas massivas que colapsaram sob sua própria gravidade, o tensor de curvatura Riemann-Christoffel é fundamental para modelar e entender as propriedades desses objetos. A alta densidade e a enorme pressão interna nas estrelas de nêutrons criam um ambiente onde a curvatura do espaço-tempo é significativa, com uma descrição precisa da teoria da Relatividade Geral.

Ao investigar as propriedades das estrelas de nêutrons, como sua estrutura interna, massa, momento angular e campos gravitacionais, uma análise do Tensor de Curvatura Riemann-Christoffel permite-nos obter informações essenciais sobre esses objetos astrofísicos extremos. Além disso, a compreensão da curvatura do espaço-tempo fornecida pelo tensor de curvatura é crucial para estudar fenômenos relacionados, como ondas gravitacionais e buracos negros, que também desempenham um papel importante no campo da

astrofísica.

É essencial a discussão acerca das propriedades do Tensor de Curvatura Riemann-Christoffel para a formulação e compreensão da teoria da relatividade geral de Einstein.

Uma das principais propriedades do Tensor de Curvatura Riemann-Christoffel é a sua simetria. Esse tensor possui quatro índices, e sua simetria em relação a esses índices impõe restrições nas suas componentes. Essa simetria é importante para a formulação das equações de campo de Einstein e desempenhar um papel essencial na compreensão da geometria curva do espaço-tempo.

Outra propriedade relevante é a interpretação física das componentes do tensor de curvatura, relacionadas à interferência de uma partícula que se move em um campo gravitacional. Isso significa que o tensor de curvatura está diretamente associado à forma como objetos físicos se movem na presença de campos gravitacionais.

Além disso, o Tensor de Curvatura Riemann-Christoffel também possui uma propriedade importante chamada de identidade de Bianchi. Essa identidade estabelece uma relação entre as derivadas do tensor de curvatura, sendo crucial para a consistência da teoria. (EINSTEIN, 1950).

Pode-se deduzir, ainda, que o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel tem outras várias propriedades importantes. Algumas dessas incluem:

- (a) Simetria: O tensor de curvatura de Riemann-Christoffel é simétrico em seus dois primeiros índices, o que significa que a sua resposta não depende da ordem em que se calcula a curvatura em dois pontos próximos;
- (b) Contratibilidade: O tensor de curvatura de Riemann-Christoffel é completamente contrátil, o que significa que é possível reduzi-lo a um tensor de curvatura de Ricci, que por sua vez pode ser reduzido a um escalar de curvatura;
- (c) Curvatura nula: Um espaço-tempo com tensor de curvatura de Riemann-Christoffel nulo em todos os lugares é chamado de espaço-tempo plano. Este tipo de espaço-tempo corresponde à geometria euclidiana familiar;
- (d) Singularidades: O tensor de curvatura de Riemann-Christoffel pode se tornar infinito em regiões do espaço-tempo onde a curvatura é muito grande. Essas regiões são conhecidas como singularidades e podem ocorrer em pontos de massa e energia extremamente concentrados, como em buracos negros.

Por fim, é definido o tensor de Curvatura Riemann-Christoffel:

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\tau} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\kappa} \Gamma_{\kappa\nu}^{\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\tau}. \quad (13)$$

O tensor de Riemann é de ordem 4 e é composto de uma combinação de derivadas e símbolos de Christoffel. Ele é responsável pela curvatura no espaço-tempo, sendo totalmente nulo em um espaço plano. É interessante ressaltar que, apesar de Γ não ser um tensor, esta definição do tensor de Riemann assim se caracteriza como um.

Portanto, além das propriedades de tensor, suas componentes $R_{\mu\nu\sigma}^{\tau}$ possuem as seguintes propriedades:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (14)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (15)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (16)$$

Em que (16) é a Identidade de Bianchi.

Com mais análise, percebe-se uma simetria em dois índices que podem ser contraídos e gerar o denominado Tensor de Ricci, de ordem 2 e simétrico ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$). Ele é definido como:

$$R_{\mu\sigma\nu}^{\tau} g_{\tau}^{\sigma} = R_{\mu\tau\nu}^{\tau} \equiv R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\kappa} \Gamma_{\kappa\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\sigma}. \quad (17)$$

Além do tensor, é possível contrair mais índices e gerar o chamado Escalar de Ricci, de forma que:

$$R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu} \equiv R. \quad (18)$$

Com todas essas propriedades do tensor de Riemann, é possível definir o Tensor de Einstein, com suas componentes dadas por:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (19)$$

Este tensor é o que define a curvatura produzida por uma distribuição de massa-energia. Por isso, ele é composto pelo tensor e escalas variadas do tensor de Riemann. Além disso, é proporcional ao Tensor de Energia-Momento (analisado na próxima seção).

Mais cálculos que envolvem o tensor de Einstein e o resto estudado neste capítulo serão vistos mais à frente, nos estudos a exemplo da aproximação newtoniana, com a Lei Clássica da Gravidade, que demonstra a validade deste tensor para um ambiente de mecânica clássica (agregar o limite clássico na teoria da Relatividade Geral ajuda na sua aprovação). (WEBER, 2015).

1.6 Tensor Energia-Momento e a Equação de campo de Einstein

O tensor energia-momento (T) descreve a distribuição de energia, momento e pressão em um sistema físico. Na Relatividade Geral, o tensor energia-momento é crucial para entender como a matéria e a energia influenciam a curvatura do espaço-tempo. No caso das estrelas de nêutrons, o tensor energia-momento é utilizado para descrever a distribuição de massa, energia e momento desses objetos extremamente densos. A compreensão das propriedades do tensor energia-momento permite modelar com precisão as propriedades gravitacionais em torno das estrelas de nêutrons, incluindo a curvatura do espaço-tempo e a influência que essas estrelas exercem sobre o ambiente ao seu redor.

O Tensor Energia-momento tem várias propriedades importantes, algumas das quais incluem:

- (a) Conservação: A equação de conservação da energia-momento. Demonstra como a densidade de energia e o fluxo de momento mudam no tempo;
- (b) Traço: O traço do tensor energia-momento é proporcional à densidade de energia, o que significa que quanto maior a densidade de energia, maior será o traço do tensor energia-momento;
- (c) Tensão: A parte não diagonal do tensor energia-momento representa a densidade de tensão e o fluxo energia-tensão em um ponto do espaço-tempo. A tensão é uma medida da força que um objeto exerce em uma direção específica.

O Tensor Energia-Momento (ou Energia-Tensão) é relevante para chegar na equação de campo do Einstein. T é definido na ordem 2, é simétrico e cada componente tem um significado físico: T^{00} representa a densidade de energia ϵ ; T^{0i} é o fluxo de energia através da superfície x^i ; T^{i0} é a densidade de momento ρ^i ; T^{ij} é o fluxo de momento ρ^i através da superfície x^j . (SCHUTZ, 2009)

Será analisado agora um fluido ideal em dois referenciais: um próprio L^0 de coordenadas x^0 (espaço-tempo plano, ou seja, fora da RG) e um L de coordenadas x^0 (espaço-tempo curvo) que se move em relação a L^0 . Ademais, é considerado um fluido ideal perfeito sem viscosidade ($\dot{T}^{ij} = \dot{P}\delta_j^i$) e sem condução de calor ($\dot{T}^{0i} = \dot{T}^{i0} = 0$). Portanto, o tensor pode ser escrito como uma matriz diagonal 4×4 , conforme abaixo:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{P} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

sendo $\dot{\epsilon}$ a densidade de energia e \dot{P} a pressão do fluido perfeito no referencial L^0 .

Pelo Princípio de Equivalência, é possível então dizer que, para qualquer fluido perfeito:

$$T^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu (\dot{\epsilon} + \dot{P}) + g^{\mu\nu} \dot{P}, \quad (21)$$

em que u^μ é a velocidade quadridimensional, definida, no espaço-tempo plano, como:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau} \right) = (1, 0, 0, 0),$$

de modo que $dx^\mu/d\tau = \delta_0^\mu$, sendo $dx^\mu/d\tau$ a derivada do espaço-tempo em relação ao tempo próprio (τ) e δ_0^μ o delta de Kronecker (igual a 1 se $\mu = 0$ e igual a 0 caso contrário). Assim, pode-se substituir esses valores na equação (21):

$$\dot{\epsilon} = T^{00}, \quad e \quad \dot{P} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 T^{ij}. \quad (22)$$

Lembrando que, como a equação (21) é uma equação tensorial, consequentemente é válida em qualquer sistema de coordenadas co-móvel (localmente inercial). Portanto, pode-se dizer que:

$$T^{\mu\nu} = w^\mu w^\nu (\epsilon + P) + g^{\mu\nu} P, \quad (23)$$

sendo ϵ a densidade de energia e P a pressão do fluido perfeito no referencial L .

O Princípio da Equivalência garante que a equação (23) é válida no espaço-tempo plano bem como no espaço-tempo curvo. Por fim, com as propriedades da métrica na equação(5), é possível chegar ao tensor misto de componentes T^μ_ν e demonstrar a lei da conservação de energia local, conforme listados abaixo:

$$T^\mu_\nu = w^\mu u_\nu (\epsilon + P) + \delta^\mu_\nu P. \quad (24)$$

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = T^\mu_{\nu;\mu} = 0. \quad (25)$$

Considere a lei clássica da gravidade, $\nabla^2 U = 4\pi\epsilon$, em que U é o potencial gravitacional gerado por uma distribuição de densidade de massa-energia ϵ (NUSSENZVEIG, 2013). Já que na RG a fonte de curvatura (gravidade) é a massa-energia, a qual faz parte do Tensor Energia-Momento, não é estranho imaginar que ϵ possa ser relacionado a $T^{\mu\nu}$ no caso relativístico.

Como T é um tensor de ordem 2, é imaginado um tensor de mesma ordem (G , o tensor de Einstein) que seja o equivalente ao clássico $\nabla^2 U$ e proporcional a T ($G^{\mu\nu} \propto T^{\mu\nu}$). Com isso, entra a equação (25) para concluir que, também, $G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ usando a na relação mostrada na equação (19).

Os cálculos para que, de $G^{\mu\nu}$, se chegue ao limite clássico, desenvolvido em (WEBER, 2015), geram:

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}. \quad (26)$$

A equação (26) é a equação de Einstein. O 8π é justamente a constante de proporcionalidade que inclui o limite clássico. As constantes da velocidade da luz no vácuo c e a gravitacional universal G são consideradas 1. Isto facilita as contas, visto que essas constantes aparecem muito nos cálculos.

Em suma, o estudo do tensor energia-momento é essencial para compreender as propriedades gravitacionais de objetos muito massivos. O tensor energia-momento fornece informações sobre a distribuição de massa, energia e momento das estrelas de nêutrons, permitindo uma modelagem precisa de sua influência gravitacional. Além disso, está intimamente relacionado às equações de campo de Einstein, fundamentais na descrição da dinâmica gravitacional.

2 ESTUDO DE UMA ESTRELA COM SIMETRIA ESFÉRICA

Neste capítulo o ponto de partida são os conceitos e definições discutidos em “Introdução à Relatividade Geral de Einstein” e realiza-se uma análise das propriedades de uma estrela compacta considerada esfericamente simétrica, sem rotação e com modelo de gás ideal.

A simetria esférica é uma aproximação adequada para uma estrela de nêutrons estática em um espaço vazio. Este é um objeto de estudo que favorece na compreensão da formação de uma estrela de nêutrons. (WEINBERG, 1972)

Através desse estudo, busca-se investigar as características intrínsecas da estrela, como sua massa, raio, densidade e distribuição de energia. Além disso, são determinadas as propriedades gravitacionais em torno da estrela esfericamente simétrica, utilizando ferramentas matemáticas como o tensor de curvatura e o tensor energia-momento.

O estudo detalhado dessa configuração simétrica fornece compreensões valiosas sobre o comportamento gravitacional e físico das estrelas de nêutrons, garantindo uma modelagem mais precisa desses objetos extremamente densos e enriquecendo a compreensão geral do universo e da Relatividade Geral de Einstein.

Nesta modelagem da estrela compacta esfericamente simétrica, cada partícula dentro da estrela está sujeita à força da gravidade, puxando-a radialmente para o interior da estrela, e a uma força de pressão, atuando também radialmente para fora (esta força depende da equação de estado escolhida).

Estabelece-se o chamado equilíbrio hidrostático. Nesse cenário, a pressão na estrela diminui com o aumento da distância ao seu centro, sendo nula na borda.

Para um estudo mais analítico, é descrita uma distribuição de massa esfericamente simétrica definida, de forma generalizada, pelo elemento de linha dado por:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)r^2d\theta^2 + D(r)r^2\text{sen}^2(\theta)d\phi^2, \quad (27)$$

em que s é a simetria do espaço-tempo, t é a variável temporal, (r, θ, ϕ) são as variáveis espaciais e (A, B, C, D) são, no momento, funções arbitrárias do raio.

Como as coordenadas são invariantes independentemente da escolha e a simetria angular torna θ e ϕ fixos, $C(r)$ e $D(r)$ são iguais e constantes. Com isso, é possível absorver estas funções em uma nova coordenada radial sem alterar os resultados.

Já para as funções $A(r)$ e $B(r)$, elas são transformadas em funções exponenciais por conveniência nos cálculos. Assim é obtida a equação da métrica de Schwarzschild (VASILIEV; FEDOROV, 2018):

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (28)$$

em que $\Phi(r)$ e $\Lambda(r)$ são funções métricas das quais se obtêm as propriedades da estrela. Há algumas formas de obter estas funções, conforme será visto mais à frente nesta seção. Veja, por exemplo, a referência (SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Essas funções métricas são fundamentais para a compreensão e modelagem precisa das estrelas de nêutrons, permitindo uma análise de propriedades como o comportamento gravitacional, a curvatura do espaço-tempo e as características físicas intrínsecas desses objetos compactos. Além disso, na modelagem de estrelas de nêutrons, a comparação dos casos relativístico e não-relativístico, seja com relação à RR ($v/c \ll 1$) ou à RG ($R = 0$), desempenha um papel importante.

No caso relativístico, é considerado a alta densidade e energia desses objetos e é necessário levar em conta os efeitos da Relatividade Geral de Einstein. Nesse contexto, as equações de campo de Einstein são utilizadas para descrever a curvatura do espaço-tempo causada pela distribuição de massa-energia da estrela. O caso relativístico permite uma análise mais precisa das propriedades físicas das estrelas de nêutrons, levando em consideração os efeitos gravitacionais provocados e a interação entre a matéria e o campo gravitacional.

O caso não-relativístico, é uma simplificação para o estudo de estrelas compactas. Nesse cenário, as equações de campo de Einstein podem ser substituídas pela mecânica clássica, permitindo uma análise mais simples das propriedades da estrela. Embora os efeitos gravitacionais sejam considerados, os efeitos relativísticos são negligenciados. O caso não-relativístico é especialmente útil para estudar sistemas menos densos, como fases iniciais de evolução estelar ou anã branca, apesar de esta também poder ser considerada a RG, como será analisado no próximo capítulo.

2.1 A equação do campo de Einstein

A Equação do Campo de Einstein é um dos pilares principais da Relatividade Geral de Einstein e desempenha um papel essencial na modelagem de estrelas de nêutrons. Nesta seção, apresentamos a Equação do Campo de Einstein, que relaciona a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de massa e energia presente no sistema. Para estrelas de nêutrons, que possuem altas densidades e campos gravitacionais intensos, é fundamental levar em consideração os efeitos relativísticos sentidos pela Equação do Campo de Einstein. Por meio desse cálculo, é possível obter informações cruciais sobre a curvatura do espaço-tempo em torno da estrela e entender como a matéria e a energia influenciam a geometria do universo próximo à estrela de nêutrons.

Segue-se uma explicação conceitual do estudado da equação do campo de Einstein no caso relativístico. Einstein relaciona a geometria do espaço-tempo com a distribuição de energia e matéria presente nele. No caso relativístico, é necessário considerar a teoria da relatividade geral de Einstein, que descreve a gravitação como uma curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. A equação do campo de Einstein pode ser escrita como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (29)$$

em que $R_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor métrico do espaço-tempo (4), R é o escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de energia-momento, sendo o caso covariante de (23). Tudo definido no capítulo anterior, Introdução à Relatividade Geral de Einstein.

Para resolver essa equação, é necessário conhecer o tensor de energia-momento, que descreve a distribuição de energia e matéria no espaço-tempo. No caso de estrelas de nêutrons, o tensor de energia-momento leva em consideração a densidade de massa, a pressão, a energia cinética e outros fatores relevantes, conforme discutido na seção 1.6, Tensor Energia-Momento e a Equação de campo de Einstein.

Uma abordagem comum para modelar estrelas de nêutrons relativísticas é supor simetria esférica e utilizar as equações de estrutura estelar. Elas descrevem o equilíbrio hidrostático, a conservação da massa em cada camada da estrela e são obtidas a partir da equação de Einstein. Com base nesta equação, é possível determinar a dependência radial da densidade de massa, da pressão e da curvatura do espaço-tempo.

A resolução da equação do campo de Einstein envolve a aplicação de técnicas matemáticas avançadas, como a geometria diferencial. É necessário considerar as condições de contorno, como a necessidade de que a solução seja regular no centro da estrela e atender aos requisitos físicos esperados. Essa abordagem permite obter uma descrição detalhada da geometria do espaço-tempo ao redor da estrela de nêutrons, levando em consideração os efeitos relativísticos presentes nessas condições extremas.

Para resolver a equação do campo de Einstein, é necessário conhecer a equação de estado da matéria que irá definir a composição de T , que é obtida a partir de teorias físicas avançadas, como modelos de física nuclear ou a cromodinâmica quântica (QCD) para interações fortes. Neste estudo é considerado um composição de gás com temperatura constante, o que leva a equação de estado da matéria descrever a relação apenas entre densidade de energia (ϵ) e pressão (P), sem depender da temperatura (gás barotrópico).

Em uma abordagem não-relativística (sem RG), podemos usar a aproximação de um espaço-tempo plano (tensor $R = 0$), em que as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é aproximado como a identidade, $\delta_{\mu\nu}$. Assumindo essa simplificação, a equação do campo de Einstein se torna $8\pi T = 0$. Assim, a gravidade é tratada como um campo externo que influencia a estrutura estelar, mas não é suportada pela geometria do espaço-tempo. Essa aproximação é adequada para estrelas menos massivas ou com baixa compactação.

No que segue, vamos supor uma equação de estado barotrópica $P(\epsilon)$ e analisar a solução da equação de Einstein para uma estrela esfericamente simétrica.

Ainda no contexto do estudo de uma estrela esfericamente simétrica, o cálculo da equação do Campo de Einstein tem como primeiro objetivo chegar nos valores de $g^{\mu\nu}$ neste espaço em função do tensor de Riemann. Começando com o tensor métrico covariante e contravariante, tem-se que, a partir das equações (4) e (5), seus elementos são, respectivamente:

$$g_{tt} = -e^{2\Phi} \quad , \quad g_{rr} = e^{2\Lambda} \quad , \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad , \quad g_{\phi\phi} = r^2 \text{sen}^2\theta, \quad (30)$$

$$g^{tt} = -e^{-2\Phi} \quad , \quad g^{rr} = e^{-2\Lambda} \quad , \quad g^{\theta\theta} = r^{-2} \quad , \quad g^{\phi\phi} = r^{-2} \text{sen}^{-2}\theta; \quad (31)$$

em que qualquer outro termo de $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$) é nulo. Com isso definido, é possível calcular as componentes do Símbolo de Christoffel. Lembrando da equação (6), tem-se que as componentes não nulas são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= e^{2\phi-2\Lambda} \Phi' \quad , \quad \Gamma_{tr}^t = \Phi' \quad , \quad \Gamma_{rr}^r = \Lambda' \quad , \quad \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r e^{-2\Lambda} \quad , \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad , \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2(\theta) e^{-2\Lambda} \quad , \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin(\theta) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (32)$$

Nestes cálculos em diante, as derivadas em r de Φ e Λ serão denotadas com 's. Sendo assim:

$$\Phi' \equiv \frac{d\Phi}{dr} \quad , \quad \Phi'' \equiv \frac{d^2\Phi}{dr^2} \quad ; \quad \Lambda' \equiv \frac{d\Lambda}{dr} \quad , \quad \Lambda'' \equiv \frac{d^2\Lambda}{dr^2}.$$

Prosseguindo as contas, são determinadas as componentes do Tensor de Riemann utilizando a equação (13). Suas componentes não nulas são:

$$\begin{aligned} R_{rtr}^t &= \Phi' \Lambda' - \Phi'' - \Phi'^2 \quad , \quad R_{\theta r\theta}^r = r \Lambda' e^{-2\Lambda} \quad , \quad R_{\phi r\phi}^r = r \Lambda' \sin^2(\theta) e^{-2\Lambda} \quad , \\ R_{\theta t\theta}^t &= -r \Phi' e^{-2\Lambda} \quad , \quad R_{\phi t\phi}^t = -r \Phi' \sin^2(\theta) e^{-2\Lambda} \quad , \quad R_{rr\phi}^\phi = -\Lambda' r^{-1} \quad , \\ R_{ttr}^r &= (\Phi' \Lambda' - \Phi'' - \Phi'^2) e^{2\Phi-2\Lambda} \quad , \quad R_{\theta\theta\phi}^\phi = -(1 - e^{-2\Lambda}) \quad , \quad R_{rr\theta}^\theta = -\Lambda' r^{-1} \quad , \\ R_{tt\theta}^\theta &= -r \Phi' e^{2\Phi-2\Lambda} \quad , \quad R_{\phi\theta\phi}^\theta = (1 - e^{-2\Lambda}) \sin^2 \theta \quad , \quad R_{tt\phi}^\phi = -r \Phi' e^{2\Phi-2\Lambda}. \end{aligned} \quad (33)$$

Com as propriedades já analisadas do tensor, os cálculos seguem buscando agora o Tensor de Ricci, dado pela equação (17). Novamente, as componentes não nulas do tensor são:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -(\Phi' \Lambda' - \Phi'' - \Phi'^2 + 2r^{-1} \Phi') e^{2\Phi-2\Lambda} \quad , \quad R_{\theta\theta} = (r \Lambda' - r \Phi' + e^{2\Lambda} - 1) e^{-2\Lambda} \quad , \\ R_{rr} &= \Phi' \Lambda' - \Phi'' - \Phi'^2 + 2r^{-1} \Lambda' r^{-1} \quad , \quad R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta (r \Lambda' - r \Phi' + e^{2\Lambda} - 1) e^{-2\Lambda}. \end{aligned} \quad (34)$$

Por conveniência em cálculos futuros, é obtido o Tensor misto de Ricci. A partir da equação (18), tem-se que:

$$\begin{aligned} R_t^t &= \left(\frac{1}{4} \Phi' \Lambda' - \frac{1}{2} \Phi'' - \frac{1}{4} \Phi'^2 - \frac{1}{r} \Phi' \right) e^{-\Lambda} \quad , \\ R_r^r &= \left(\frac{1}{4} \Phi' \Lambda' - \frac{1}{2} \Phi'' - \frac{1}{4} \Phi'^2 + \frac{1}{r} \Lambda' \right) e^{-\Lambda} \quad , \quad R_\phi^\phi = R_\theta^\theta \quad , \\ R_\theta^\theta &= \frac{1}{r^2} + \left(\frac{r}{2} \Lambda' - \frac{r}{2} \Phi' - 1 \right) \frac{e^{-\Lambda}}{r^2} = \left(\frac{e^\Lambda}{r^2} + \frac{1}{2r} \Lambda' - \frac{1}{2r} \Phi' - \frac{1}{r^2} \right) e^{-\Lambda}. \end{aligned} \quad (35)$$

E por fim, é possível chegar no Escalar de Ricci. Com a equação (18), o resultado sai de forma direta:

$$R = (2r^2\Phi'\Lambda' - 2r^2\Phi'' - 2r^2\Phi'^2 - 4r\Phi' + 4r\Lambda' + 2e^{2\Lambda} - 2)r^{-2}e^{-2\Lambda}. \quad (36)$$

Finalmente, lembrando da equação (19) e de suas propriedades e de todo cálculo feito nesta seção, obtém-se as componentes mistas do Tensor de Einstein. A forma mista deste tensor pode ser definida rapidamente a partir da equação (19) e das propriedades da métrica mostradas na equação (5), concluindo assim:

$$G_{\nu}^{\mu} = R_{\nu}^{\mu} - \delta_{\nu}^{\mu} \frac{1}{2}R. \quad (37)$$

Como, neste caso estudado, apenas há componentes não nulas com índices repetidos no Tensor de Ricci, então as componentes não nulas G_{ν}^{μ} são dadas por:

$$\begin{aligned} G_t^t &= R_t^t - \frac{1}{2}R = e^{-2\Lambda} \left(\frac{1}{r^2} - 2\frac{\Lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{e^{-2\Lambda}}{r^2} (1 - 2\Lambda'r - e^{2\Lambda}), \\ G_r^r &= R_r^r - \frac{1}{2}R = e^{-2\Lambda} \left(\frac{1}{r^2} + 2\frac{\Phi'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{e^{-2\Lambda}}{r^2} (1 + 2\Phi'r - e^{2\Lambda}), \\ G_{\theta}^{\theta} &= R_{\theta}^{\theta} - \frac{1}{2}R = e^{-2\Lambda} \left(\Phi'' - \Phi'\Lambda' + \Phi'^2 + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} \right), \quad G_{\phi}^{\phi} = G_{\theta}^{\theta}. \end{aligned} \quad (38)$$

Analogamente, pode-se fazer o mesmo para a equação do campo dada pela equação (26) e obter sua forma mista:

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi T_{\nu}^{\mu}; \quad (39)$$

em que,

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx_{\nu}}{d\tau} (\epsilon + P) + \delta_{\nu}^{\mu} P = u^{\mu} u_{\nu} (\epsilon + P) + \delta_{\nu}^{\mu} P,$$

como já mostrado na equação (24).

Lembrando que trata-se de uma estrela estática, a qual implica que as derivadas dos elementos de linhas, neste caso, são:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \equiv u^i \equiv \frac{dr}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad \implies \quad \frac{dx^0}{d\tau} \equiv u^0 \equiv \frac{dt}{d\tau} = e^{-\Phi}, \quad (40)$$

em que o índice i equivale a r, θ, ϕ e o índice 0 equivale a t . Este resultado ocorre devido às propriedades da métrica e a condição estática, em que $T_t^t = -\epsilon$, $T_i^i = P$ (como já visto na seção anterior, na sua forma contravariante).

Assim, conclui-se que as componentes não nulas da Equação do Campo são:

$$\begin{aligned}
\mu = \nu = t : \quad e^{-2\Lambda} \left(2\frac{\Lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} &= \frac{e^{-2\Lambda}}{r^2} (2\Lambda'r - 1 + e^{2\Lambda}) = 8\pi\epsilon, \\
\mu = \nu = r : \quad e^{-2\Lambda} \left(2\frac{\Phi'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} &= \frac{e^{-2\Lambda}}{r^2} (2\Phi'r + 1 - e^{2\Lambda}) = 8\pi P, \\
\mu = \nu = \theta : \quad e^{-2\Lambda} \left(\Phi'' - \Phi'\Lambda' + \Phi'^2 + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} \right) &= \\
&= r^{-1}e^{-2\Lambda}(\Phi''r - \Phi'\Lambda'r + \Phi'^2r + \Phi' - \Lambda') = 8\pi P, \\
\mu = \nu = \phi : \quad G_\phi^\phi = G_\theta^\theta \quad , \quad T_\phi^\phi = T_\theta^\theta.
\end{aligned} \tag{41}$$

Nessa abordagem, técnicas matemáticas avançadas são aplicadas, como a geometria diferencial e matemática computacional, para obter uma descrição detalhada da geometria do espaço-tempo em torno da estrela compacta. No caso não-relativístico (sem RG), a equação pode ser simplificada considerando um espaço-tempo plano e a atuação de campos gravitacionais, podendo usar a hidrostática newtoniana.

2.2 A Equação de Euler relativística

O cálculo da Equação de Euler Relativística desempenha um papel fundamental no estudo de estrelas de nêutrons com simetria esférica. Nesse contexto, a equação de Euler relativística é uma diferenciação de segunda ordem que descreve a estrutura e as propriedades dessas estrelas sob a influência da relatividade geral.(WEBER, 2015)

A equação de Euler Relativística é obtida a partir das equações de Einstein e das leis da termodinâmica, levando em consideração a distribuição de massa e energia ao longo do interior da estrela de nêutrons. Essa descrição descreve o equilíbrio hidrostático que deve existir dentro da estrela, levando em conta a interação entre a pressão do nêutron degenerado, o campo gravitacional e as propriedades físicas do material.

No caso de uma estrela esfericamente simétrica, do cálculo da Equação de Euler relativística apontados nas equações (24) e (25) e da definição de T_ν^μ , tem-se:

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = (\epsilon + P)_{;\mu} u^{\mu} u_{\nu} + (\epsilon + P)(u^{\mu}_{;\mu} u_{\nu} + u^{\mu} u_{\nu;\mu}) + \delta_{\nu}^{\mu} P_{;\mu} = 0. \quad (42)$$

Ao trabalhar com a projeção do tensor T em u^i ($(u^{\lambda} u^{\nu} + g^{\lambda\nu}) T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$) e utilizar as seguintes propriedades;

$$\begin{aligned} u^{\mu} u_{\mu} &= u^{\mu} g_{\mu\nu} u^{\nu} = g_{00}(u^0)^2 + g_{ii}(u^i)^2 = -1, \\ g^{\lambda\nu} u_{\nu;\mu} &= (g^{\lambda\nu} u_{\nu})_{;\mu} = u^{\lambda}_{;\mu}, \\ (u^{\mu} u_{\mu})_{\nu} &= u^{\mu}_{;\nu} u_{\mu} + u^{\mu} u_{\mu;\nu} = 0; \end{aligned}$$

se chega na Equação de Euler definida por:

$$(\epsilon + P) u^{\mu} u_{\nu;\mu} + P_{;\nu} + P_{;\mu} u^{\mu} u_{\nu} = 0. \quad (43)$$

Esta equação define as linhas de fluxo tangentes a u^{μ} .

2.3 A Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

A equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff é de extrema importância para a modelagem de estrelas de nêutrons, uma vez que permite calcular as condições internas de equilíbrio hidrostático das estrelas de nêutrons, como a densidade, a pressão, a massa e o raio. Essas informações são cruciais para compararmos os resultados obtidos pelos modelos teóricos com as observações astronômicas.

O estudo da equação de TOV envolve a Relatividade Restrita e Geral, além da pressão de degenerescência dos nêutrons, que envolve repulsão entre as partículas, que equilibram a ação da gravidade e impedem o colapso gravitacional desses objetos compactos. Esse cálculo é essencial para uma modelagem precisa das estrelas de nêutrons e para o avanço do conhecimento sobre as características internas dessas fascinantes estruturas astrofísicas.

A Equação de TOV é uma equação diferencial de segunda ordem que descreve o equilíbrio hidrostático no interior de um objeto auto-gravitante, estático e esfericamente simétrico, que pode ser aplicado no modelo de estrela de nêutrons neste estudo, levando em consideração a distribuição de massa, a pressão, a gravidade e os efeitos da relatividade geral.

Quando os efeitos da relatividade geral podem ser negligenciados, a Equação de TOV simplifica-se e permite analisar o equilíbrio hidrostático do interior da estrela de nêutrons com base na física newtoniana.

À medida que nos aproximamos de condições extremas, em que a relatividade geral deve ser levada em consideração, a equação de TOV precisa ser implementada. A equação de TOV permite investigar os efeitos da contração gravitacional intensa, como a deformação do espaço-tempo e a compressão da matéria a níveis extremos. Além disso, a pressão de degenerescência dos nêutrons e outras partículas subatômicas se tornam cada vez mais relevantes para sustentar a estrela contra o colapso gravitacional. O cálculo da Equação de TOV é essencial para obter uma descrição precisa das propriedades físicas dessas estrelas extremas e fornecer uma melhor visão sobre a física, como a matéria nuclear densa, a física de altas energias e a relatividade geral em condições extremas de pressão.

Retornando ao contexto do cálculo da equação de TOV desta dissertação, no estudo de uma estrela estática esfericamente simétrica, tem-se que, de antemão, é introduzida uma nova função $m(r)$, que representa a energia associada à massa (gravitacional) contida na esfera dentro do raio r . Assim, ela pode ser definida como:

$$m(r) = \int_0^r dr' r'^2 \epsilon(r') \quad \implies \quad \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r). \quad (44)$$

Da primeira linha da equação (41), multiplicando por r^2 em ambos os lados, obtêm-se:

$$\begin{aligned} e^{-2\Lambda} (2\Lambda' r - 1 + e^{2\Lambda}) &= 8r^2 \pi \epsilon \\ 2e^{-2\Lambda} \Lambda' r - e^{-2\Lambda} + 1 &= 8r^2 \pi \epsilon \\ \frac{d}{dr} (r - r e^{-2\Lambda}) &= 8r^2 \pi \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, é possível igualar à equação diferencial (44) (multiplicando ambos os lados desta por 2). De forma direta, tem-se então:

$$e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2m}{r} \quad \implies \quad \Lambda(r) = \ln \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1/2}. \quad (45)$$

Com as equações (44) e (45), é feita a soma da primeira com a segunda linha da equação (41). Desta forma:

$$\frac{2}{r}e^{-2\Lambda}(\Lambda' + \Phi') = 8\pi(\epsilon + P) \quad \Longrightarrow \quad \frac{2\Phi'}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \frac{2m}{r^3} = 8\pi P,$$

$$\Phi' = \left(4\pi r P + \frac{m}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} = \frac{m}{r^2} \left(\frac{4\pi r^3 P}{m} + 1\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (46)$$

Pode-se ter outra equação diferencial relacionando $P(r)$ e $\Phi(r)$ a partir da equação (43). Como trata-se de um fluido estático com simetria esférica, o único termo não nulo de u^μ é u^t . Para a derivada de P em r ($P_{,r} = P'$), a equação de Euler é escrita como:

$$(\epsilon + P)u^\mu u_{r;\mu} + P_{,r} = 0,$$

sendo que,

$$u_{r;\mu} = u_{r,\mu} - \Gamma_{r\mu}^\nu u_\nu = -\Gamma_{\mu r}^\nu u_\nu.$$

Lembrando que somente u^t é diferente de zero, que $u^t u_t = -1$ e da equação (32), então a equação fica:

$$P' = (\epsilon + P)\Gamma_{tr}^t u^t u_t = (\epsilon + P)\Phi' u^t u_t = -(\epsilon + P)\Phi'. \quad (47)$$

Com esta equação, se substitui o valor de Φ' encontrado na equação (46), para enfim chegar à equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), definida abaixo: (OP-PENHEIMER; VOLKOFF, 1939).

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\epsilon(r)m(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right) \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (48)$$

Esta equação é essencial para o estudo da estrutura de uma estrela compacta. Suas condições de contorno são $P(0) = \epsilon_c$, sendo ϵ_c a densidade de energia máxima da estrela, porque P decresce com r , como mostra a TOV ($P' < 0$), e $P(R) = 0$, em que R é o raio da estrela. A mesma ideia vale para a função da massa, $m(0) = 0$ e $m(R) = M$ (em que M é a massa da estrela).

Entretanto, há uma questão: são duas equações (as (44) e (48)) para três funções (P, m, ϵ). Tem a equação (46), mas ela introduz outra função (Φ). Portanto, é necessário buscar uma relação do tipo $P = P(\epsilon)$, que é a equação de estado.

Para concluir este capítulo, é comparado a equação de TOV (48) com o caso da gravitação newtoniana, em que o equilíbrio hidrostático é dado por: (Determinação da equação newtoniana no apêndice A).

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{m(r)\epsilon(r)}{r^2}; \quad (49)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\epsilon(r)r^2, \quad M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \epsilon(r') dr'. \quad (50)$$

Nota-se que a equação de TOV é semelhante com o caso newtoniano, com três fatores adicionais, que justamente são de correções relativística. Da esquerda para direita, o primeiro fator da (48) se refere ao equilíbrio hidrostático na gravitação de Newton, os segundo e terceiro fatores aparecem da RR, da equivalência entre massa e energia, e o quarto fator aparece da RG. Dito isso, é possível adotar um limite em que a TOV se transforma no caso newtoniano (49). O fator c^2 , quando não embutido nas unidades, divide o termo fora dos parenteses em ambos os casos (Newton e TOV) e divide o segundo termo do segundo e terceiro parenteses da TOV. Então, se $P(r) \ll \epsilon(r)$, $c^2 \gg m(r)$ e $c^2 \gg P(r)$ (ou seja, pressão e massa baixas), os termos entre parenteses se aproximam de 1 e a TOV entra no limite newtoniano. (WEBER, 2015).

A equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff descreve o equilíbrio hidrostático e fornece informações sobre a densidade, pressão, massa e raio dessas estrelas. Através do cálculo detalhado da solução, é possível obter resultados que podem ser comparados com observações astronômicas e modelos teóricos existentes, validando assim o modelo proposto. No capítulo que segue, discutiremos algumas soluções numéricas das equações de TOV.

3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS

O capítulo “Soluções Numéricas” é de extrema importância para a presente dissertação de mestrado, uma vez que aborda diversas ferramentas e conceitos fundamentais para a modelagem e compreensão de estrelas de nêutrons sob a perspectiva da relatividade geral.

3.1 Equação de Estado do Gás Ideal de Fermi

Antes de entrar na questão numérica, como dito na seção anterior, precisamos definir uma equação de estado que será trabalhada neste estudo. Para chegar nessa equação, consideramos um gás ideal puro de Fermi (elétrons, prótons ou nêutrons), sem interação entre as partículas. Dessa forma, considerando um gás de elétrons, a densidade do número de estados com um momentum k é dado por: (TIPLER; LLEWELLYN, 2017).

$$dn = \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (51)$$

Ou, integrando para todos os estados, obtemos a densidade de número de elétron:

$$n = \int_0^{k_F} \frac{2(4\pi)k^2}{(2\pi\hbar)^3} dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3}, \quad (52)$$

em que é multiplicado por 2 devido a ter dois estados de *spin* para um estado de energia. k_F indica o momentum máximo que um elétron pode ter dentro das condições da estrela, relacionado à Energia de Fermi, ou seja, a energia máxima.

Neste caso estudado, há um elétron para cada próton e um número de nêutrons igual ou maior que o número de prótons. Portanto, desprezando a massa do elétron com relação à massa do núcleon (próton ou nêutron, que aqui é considerado com massas iguais), a densidade de massa deste modelo é dada por:

$$\rho = nm_N A/Z, \quad (53)$$

em que m_N é a massa do núcleon e A/Z é o número de núcleons por elétron. Nota-se que esta densidade também se relaciona com a densidade de energia, devido a relação massa-energia das partículas, obtendo $\epsilon \approx \rho c^2$ (NUSSENZVEIG, 2014a).

A equação acima é aproximada, pois é apenas a parte dos núcleons. A densidade de energia também depende da energia do elétron (incluindo a energia de repouso), dada por: (SILBAR; REDDY, 2004).

$$\epsilon_e = \int_0^{k_F} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} (k^2c^2 + m_e^2c^4)^{1/2} k^2 dk = \frac{\dot{\epsilon}}{8} \left[(2x^3 + x)(1 + x^2)^{1/2} - \operatorname{senh}^{-1}(x) \right], \quad (54)$$

em que $\dot{\epsilon} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3}$ e $x = \frac{k_F}{m_e c}$.

Logo, a densidade total de energia é: $\epsilon = \rho c^2 + \epsilon_e$.

Por fim, é feita uma relação entre a densidade de energia e a pressão da estrela. Para isso, é considerado a 1ª Lei da Termodinâmica $dU = dQ - PdV$ (NUSSENZVEIG, 2014b), com temperatura constante e nula, que é aceitável para um gás ideal de Fermi degenerado (SAGERT et al., 2006). Portanto, a pressão se comporta da seguinte forma:

$$P = - \left[\frac{\partial U}{\partial V} \right]_{T=0} = n^2 \frac{d\epsilon/n}{dn} = n \frac{d\epsilon}{dn} = \epsilon, \quad (55)$$

em que ϵ/n é o potencial químico, um propriedade do gás relevante para uma mistura de partículas que interagem entre si (prótons, elétrons e nêutrons). Neste estudo é considerado apenas gases de um tipo de partícula sem interação entre as mesmas, então o potencial químico não será aprofundado. Para mais informações a respeito, recomenda-se o livro (SALINAS, 1999).

Com as equações (54) e (55), finalmente chegamos em uma equação para a pressão:

$$P = \int_0^{k_F} \frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3} (k^2c^2 + m_e^2c^4)^{-1/2} k^4 dk = \frac{\dot{\epsilon}}{24} \left[(2x^3 - 3x)(1 + x^2)^{1/2} + 3\operatorname{senh}^{-1}(x) \right]. \quad (56)$$

Entretanto, a equação acima não é intuitiva para ser trabalhada neste estudo de caráter introdutório. Então, fazemos aproximação para dois tipos de gases: relativístico (RR) e não-relativístico.

Para um gás relativístico, é considerado $k_F \gg m_e$, fazendo com que a integral na equação (56) seja simplificada, de forma que:

$$P = \frac{\epsilon}{3} \int_0^x (t^2 + 1)^{-1/2} t^4 dt \approx \frac{\epsilon}{3} \int_0^x t^3 dt = \frac{\epsilon}{3} \frac{x^4}{4}, \quad (57)$$

em que a variável de integração é $t = k/m_e c$, ou seja, a aproximação feita foi $t \gg 1$. Então, substituindo os valores de ϵ , x e k_F , chegamos na equação de estado para um gás ideal de Fermi relativístico:

$$P = K_R \epsilon^{4/3}, \quad K_R = \frac{c \hbar}{12 \pi^2} \left(\frac{3 \pi^2 Z}{m_N c^2 A} \right)^{4/3}. \quad (58)$$

Para o gás não-relativístico, é considerado $k_F \ll m_e$, ou, para a variável de integração, $t \ll 1$. Então, seguindo os mesmos passos do caso anterior, chegamos na equação de estado para um gás ideal de Fermi não-relativístico:

$$P = K_{NR} \epsilon^{5/3}, \quad K_{NR} = \frac{\hbar^2}{15 \pi^2 m_e} \left(\frac{3 \pi^2 Z}{m_N c^2 A} \right)^{5/3}. \quad (59)$$

O tipo de EoS $P = K \epsilon^\gamma$ é chamada de equação de estado politrópica, em que K depende de γ , o qual indica o regime do gás composto na estrela. Esta equação descreve a relação pressão \times densidade de energia para um gás ideal de Fermi (SILBAR; REDDY, 2004).

Para concluir esta seção, nota-se que o c está explícito nas equações. Isto foi uma escolha feita para fins didáticos, com o intuito de mostrar como chegar na EoS politrópica de um gás ideal de elétrons não interagentes.

3.2 Gravitação de Newton

Ainda antes de começar a solução numérica, é relevante ressaltar detalhadamente como funciona o equilíbrio hidrostático, em outras palavras, como a estrela se mantém ativa sem se colapsar. Nesta seção, com gravitação da mecânica clássica, o equilíbrio se dá pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2}, \quad \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r); \quad (60)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 = 4\pi\epsilon(r)r^2c^{-2}, \quad m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'. \quad (61)$$

Aqui, G é a constante gravitacional de Newton (futuramente será embutido nas unidades, assim como o c), $\rho(r)$ é a densidade de massa da esfera de raio r e ϵ é o correspondente da densidade de energia, definido em termo da densidade de massa, de acordo com a relatividade restrita. A grandeza $m(r)$ é o total de massa dentro da esfera de raio r .

Para resolver este conjunto de equações para $P(r)$ e $m(r)$, pode-se integrar da origem ($r = 0$) até o ponto $r = R$, onde a pressão vai a zero. Este ponto define R como o raio da estrela. Para essa finalidade, é necessário um valor inicial da pressão na origem, chamado de P_0 . Os valores do raio R e da massa total da estrela $m(R) \equiv M$ serão obtidos a partir da solução numérica nestas condições.

É aqui que entra a importância da EoS. Como discutido na final do capítulo anterior, a equação de estado escolhida é a informação final para a solução que buscamos, caracterizando a matéria que compõe o modelo da estrela.

A gravitação newtoniana funciona bem em regimes no qual a massa da estrela não é tão grande a ponto de deformar significativamente o espaço-tempo. Ou seja, ao integrar as equações (60) e (61), é obtido uma boa aproximação de resultado, como é realizado para as estrelas compactas conhecidas como anãs brancas. Vale destacar que o gás ainda pode ser relativístico (RR) na gravitação clássica (fora do regime da RG). Em casos que GM/c^2R passa a ter valores consideráveis, os efeitos da relatividade geral passam a ser relevantes, como no caso da estrela de nêutron.

3.3 Gravitação da RG

Agora, no caso em que as correções da relatividade de Einstein passam a ser significantes, são adicionados os três fatores adimensionais na equação (60), como já visto:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)m(r)}{r^2c^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{c^2 m(r)}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1}; \quad (62)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 = 4\pi\epsilon(r)r^2c^{-2}, \quad m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'. \quad (63)$$

A equação diferencial para $m(r)$ permanece inalterada. Os dois primeiros fatores entre parênteses na equação (62) representam correções de relatividade restrita de ordem v^2/c^2 . Outrossim, esses fatores reduzem-se para 1 no limite $v \ll c \implies v/c \approx 0$. O último fator é a correção da RG proporcional a $GM/c^2 R$.

Observa-se que os fatores de correção incrementam o valor da pressão em relação ao caso newtoniano, visto que são multiplicados termos maiores que 1. É como se a gravidade de Newton fosse mais fraca, enquanto as modificações relativísticas, restrita e geral, fazem com que a gravidade da RG seja mais forte.

Em suma, essas equações invocam um equilíbrio entre forças gravitacionais e a pressão interna de fusão, em caso de estrelas primárias. As EoS relacionam a pressão com a densidade de energia, o que possibilita resolver as equações diferenciais acopladas. Certas equações de estado podem não ser suficientes para obter um resultado aceitável para uma estrela (SANTOS, 2020).

3.4 Modelos de Anã Branca

Por motivo de completude, passa-se agora a analisar o que pode ser obtido para estrela pura de elétrons, usando o modelo de gás ideal de Fermi para um gás de elétrons não interagentes, o qual funciona de forma satisfatória para a estrela compacta anã branca, que se mantém com a pressão de degenerescência do elétron (MACIEL, 2018). Vale ressaltar que tal modelo é irreal por duas razões: primeiro, uma estrela real consiste não apenas de elétrons, mas também contém prótons e nêutrons; em segundo lugar, o modelo do gás ideal de Fermi ignora as fortes interações entre as partículas, que dão importantes contribuições para a densidade de energia (TIPLER; LLEWELLYN, 2017). Todavia, como o objetivo principal é ter uma ideia do comportamento da massa e pressão de uma estrela compacta, o caso estudado é uma aproximação satisfatória.

Sabe-se que, para uma anã branca, é possível trabalhar com a equação de Lane-Emden (SAGERT et al., 2006). Entretanto, o objetivo deste estudo é analisar o comportamento do equilíbrio hidrostático e comparar com a gravitação clássica e da RG em diferentes tipos de estrelas compactas.

Seguindo com a análise, para trabalhar com soluções numéricas é ideal usar variáveis adimensionais. Com isso, são definidas:

$$P = \epsilon_o \bar{P}, \quad m = M_\odot \bar{m}, \quad \epsilon = \epsilon_o \bar{\epsilon}, \quad R_o = \frac{GM_\odot}{c^2}, \quad (64)$$

em que R_o é uma constante com valor de $1,473km$; M_\odot é a massa do Sol; \bar{P} , \bar{m} e $\bar{\epsilon}$ são, respectivamente, pressão, massa e densidade de energia adimensionais e ϵ_o é uma constante com dimensões de densidade de energia e com valor arbitrário para os cálculos, ou seja, esta varia dependendo do caso aplicado. A relação $P = \epsilon_o \bar{P}$ é possível devido a pressão e densidade de energia terem as mesmas dimensões. Então, a equação de estado politrópica usada neste estudo, como discutida na seção 3.1, pode ser reescrita como:

$$\bar{P} = \bar{K} \bar{\epsilon}^\gamma, \quad (65)$$

em que $\bar{K} = K \epsilon_o^{\gamma-1}$ é adimensional.

Logo, juntando a equação de estado acima com a equação (60), é obtido o seguinte resultado:

$$\frac{d\bar{P}}{dr} = -R_o \frac{\bar{m}(r) \bar{P}(r)^{1/\gamma}}{r^2 \bar{K}^{1/\gamma}} \implies \frac{d\bar{P}}{dr} = -\alpha \frac{\bar{m}(r) \bar{P}(r)^{1/\gamma}}{r^2}, \quad (66)$$

em que $\alpha = R_o / \bar{K}^{1/\gamma}$ é uma constante com dimensão de comprimento, assim como R_o . Com o definido até então, é possível relacionar ϵ_o e α de forma que:

$$\alpha = \frac{R_o}{(K \epsilon_o^{\gamma-1})^{1/\gamma}} \implies \epsilon_o^{\gamma-1} = \left(\frac{R_o}{K^{1/\gamma} \alpha} \right)^\gamma \implies \epsilon_o = \left[\frac{1}{K} \left(\frac{R_o}{\alpha} \right)^\gamma \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (67)$$

Por fim, voltando à equação diferencial da massa (61), é definida uma outra constante arbitrária, obtendo:

$$\frac{d\bar{m}}{dr} = \beta \bar{P}(r)^{1/\gamma} r^2, \quad \beta = \frac{4\pi \epsilon_o}{c^2 M_\odot \bar{K}^{1/\gamma}}. \quad (68)$$

Nota-se que β carrega a dimensão de km^{-3} , de forma que a equação diferencial da massa (68), assim como a da pressão (68), possuem dimensão km^{-1} . O que faz sentido, visto que são integradas em r (km).

O mesmo processo de aplicação destas constantes pode ser implementado na equação de TOV, para evidenciar como que a gravitação newtoniana é boa para anã branca.

Portanto, a equação trabalhada numericamente neste estudo é a equação diferencial acoplada abaixo:

$$\frac{d\bar{P}}{dr} = -\alpha \frac{\bar{m}(r)\bar{P}(r)^{1/\gamma}}{r^2} \left[1 + \frac{R_o\bar{P}(r)^{1-1/\gamma}}{\alpha} \right] \left[1 + \frac{r^3\beta\bar{P}(r)R_o}{\bar{m}(r)\alpha} \right] \left[1 - \frac{2R_o\bar{m}(r)}{r} \right]^{-1}; \quad (69)$$

$$\frac{d\bar{m}}{dr} = \beta\bar{P}(r)^{1/\gamma}r^2. \quad (70)$$

Conclui-se que R_o é uma constante definida, α e β são valores definidos a partir de constantes já discutidas e do parâmetro de ajuste ϵ_o . Vale ressaltar que estas constantes são definidas para chegar no resultado numérico de forma mais prática. Deduzindo os valores corretos na tentativa e erro, chega-se ao resultado ideal do modelo, que é desenvolvido a seguir.

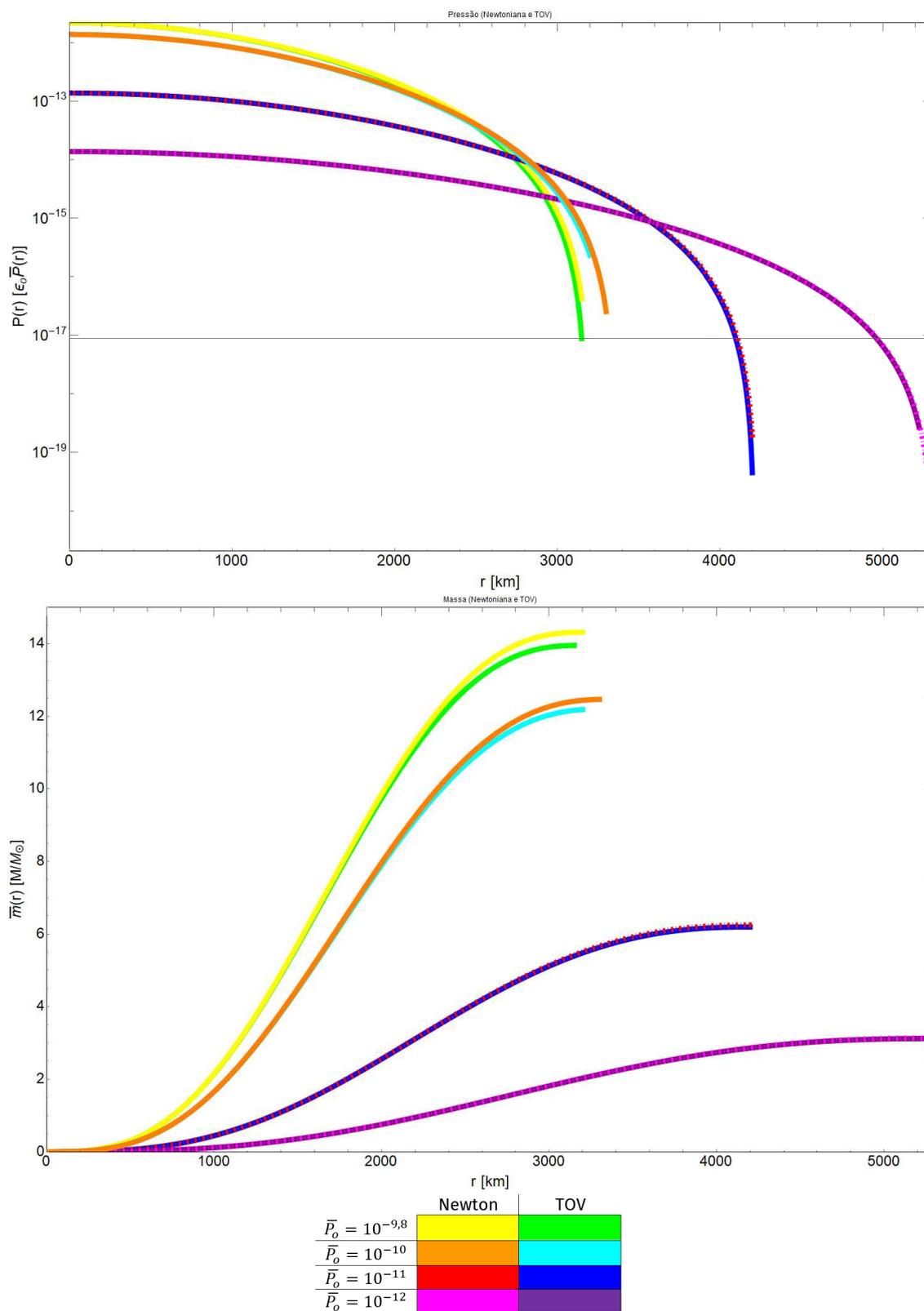
Primeiramente é analisado o caso do gás não-relativístico, no regime clássico (gravitação newtoniana) o no regime da RG, para justamente evidenciar que a aproximação no limite clássico é aceitável para a anã branca. Como feito no artigo (SILBAR; REDDY, 2004), os valores mais apropriados das constantes e parâmetros para o gás ideal de Fermi não-relativístico são:

$$\alpha = 0,05km; \quad \beta = 0,005924km^{-3}; \quad \epsilon_o = 0,01392M_\odot c^2km^{-3}; \quad \gamma = 5/3.$$

Para resolver a equação diferencial acoplada é usada a função *NDSolve* do *Mathematica*, a qual resolve a equação diferencial de forma numérica e retorna o resultado na forma de dados interpolados (WOLFRAM RESEARCH, 2019). Para as condições iniciais, sendo duas necessárias para resolver as equações, foram consideradas: a massa no centro da estrela ($r = 0$) nula, visto que não há espaço para ter matéria, e a pressão possui um valor inicial e máximo, visto que esta diminui com o aumento da distância ao centro, comprovada com sua derivada negativa. Entretanto, evita-se a singularidade no $r = 0$, fazendo a aproximação de raio inicial $r = 0,01$ que não interfere de forma significativa neste estudo. Para qualquer singularidade que surgia no programa, por causa de um valor nulo, este valor foi alterado para um muito próximo de zero, em relação aos outros valores da equação.

Com o intuito de analisar o comportamento das equações, o gráfico 1 mostra o resultado da solução numérica do gás não-relativístico com distribuição radial de pressão e massa da anã branca para diferentes valores de pressão inicial.

Gráfico 1 – Diferentes anãs brancas de gás não-relativístico



Legenda: Pressão \times Raio e Massa \times Raio para diferentes pressões iniciais \bar{P}_o .

Fonte: O autor, 2023.

Antes de realizar a análise, é feito o mesmo processo para o caso da estrela com gás relativístico. Com isso, as constantes e parâmetros têm outros valores, mas as condições iniciais permanecem as mesmas:

$$\alpha = 1,473km; \quad \beta = 52,46km^{-3}; \quad \epsilon_o = 4,17M_{\odot}c^2km^{-3}; \quad \gamma = 4/3.$$

O gráfico 2, na página seguinte, mostra o resultado da solução numérica do gás relativístico com distribuição radial de pressão e massa da anã branca para diferentes valores de pressão inicial.

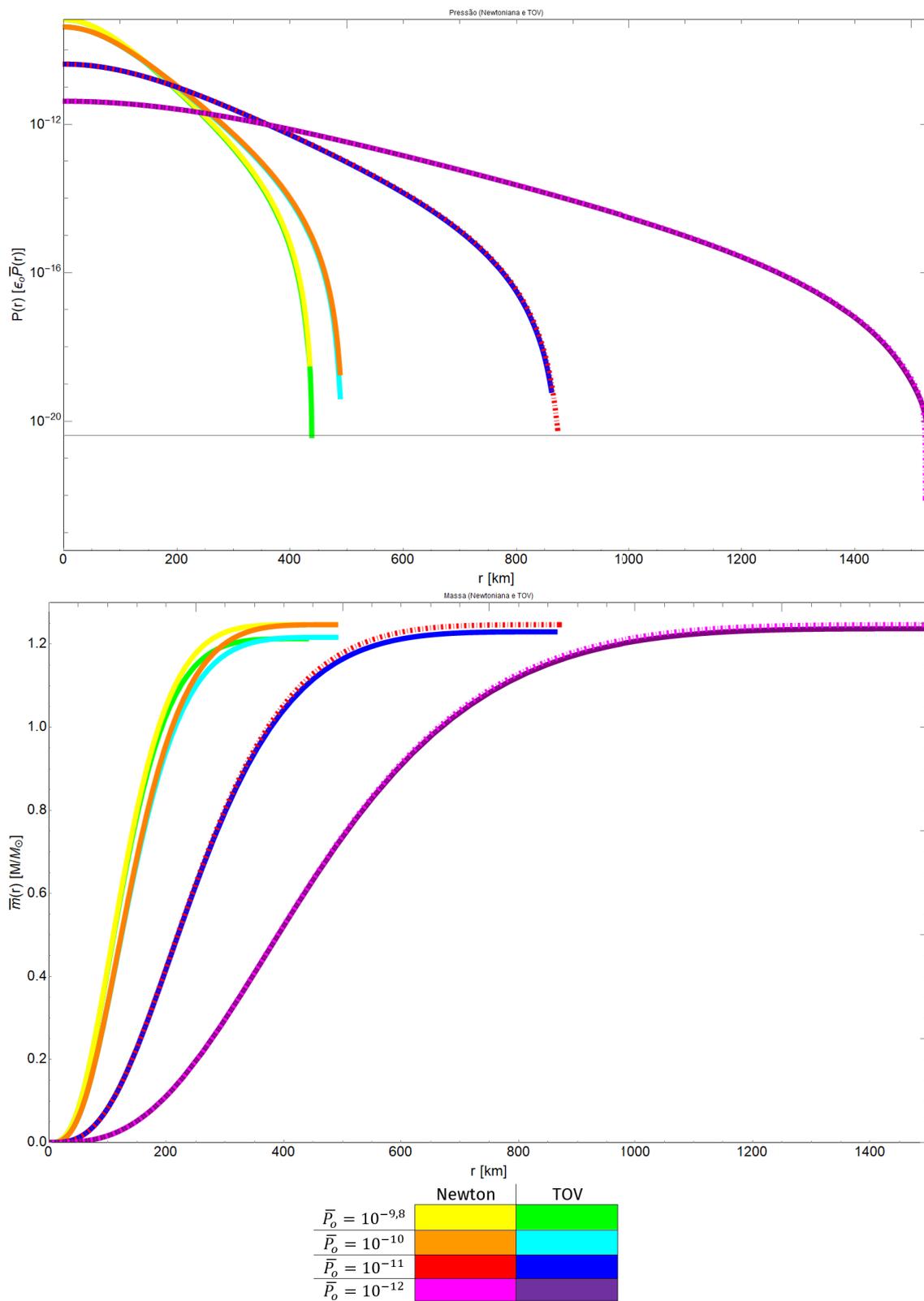
Após observar os gráficos 1 e 2, fica evidente a diferença entre o gás não-relativístico e o relativístico. Em primeira análise, nota-se que que as estrelas têm raio na ordem de $1000km$ e massa menor que $1,4M_{\odot}$, o que respeita com o teorizado e está dentro do limite de Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR, 1931), e a curva da pressão no gás relativístico é mais acentuada, indo mais rápido a zero. Percebe-se também que no caso não-relativístico não há limite de massa (CHANDRASEKHAR; MILNE, 1931).

Uma segunda análise pode ser feita ao notar a diferença entre os dois casos, evidenciando a importância que as EoS possuem na descrição do modelo. Para o gás não-relativístico, a estrela possui um raio mais próximo do esperado, enquanto para o gás relativístico o raio é de ordem menor e diminui rapidamente conforme aumenta a pressão inicial, mantendo-se inferior a $1000km$. Por outro lado, a gás não-relativístico não possui um limite de massa, chegando a $14M_{\odot}$, enquanto o gás relativístico possui um limite perto de $1,2M_{\odot}$.

Já ao analisar cada caso isolado, percebe-se a aproximação que tem entre os dois regimes de gravitação. No caso do gás não-relativístico, o limite clássico se mostra quase equivalente à gravitação da RG até a pressão inicial na ordem de $10^{-11}M_{\odot}c^2km^{-3}$, pressões maiores começam a causar divergência entre os dois regimes tanto na pressão como na massa. No caso do gás relativístico também ocorre a convergência entre o clássico e a TOV, até uma pressão inicial na ordem de $10^{-12}M_{\odot}c^2km^{-3}$.

Em conclusão, este modelo introdutório de anã branca serviu para mostrar como as aproximações do limite clássico e do gás ideal são satisfatórias para este caso, gerando uma boa análise no estudo. Em seguida, entraremos no modelo de estrela de nêutron e veremos que essas aproximações não podem ser consideradas, até no modelo mais simples, pois os dois regimes de gravitação não são muito convergentes.

Gráfico 2 – Diferentes anãs brancas de gás relativístico



Legenda: Pressão \times Raio e Massa \times Raio para diferentes pressões iniciais \bar{P}_o .

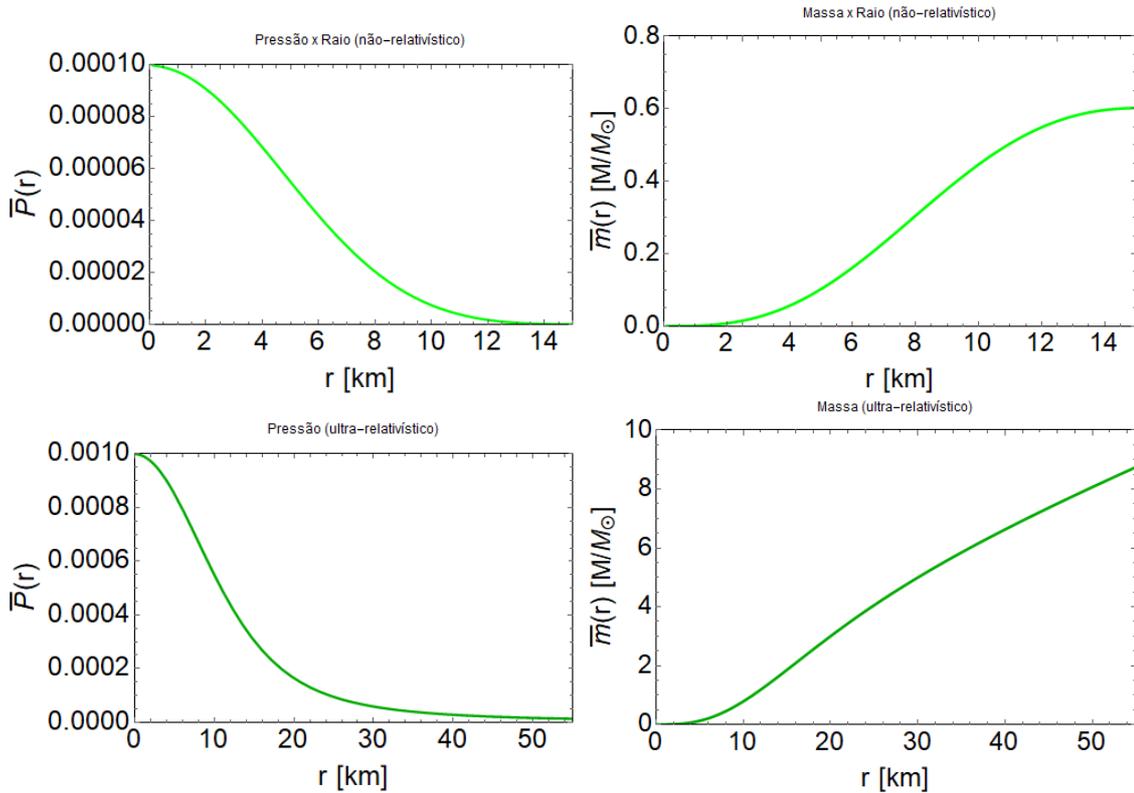
Fonte: O autor, 2023.

3.5 Modelos de Estrela de Nêutron

O processo de modelagem das estrelas de nêutron segue o mesmo passo-a-passo de antes. Então, de início, a EoS considerada será a mesma, mas para um gás ideal puro de nêutrons agora. Uma abordagem teórica inicial define este modelo de estrela de nêutron estudado com um raio na ordem de 10km (HORVARTH, 2011) e massa limite de $0,8M_{\odot}$ (SILBAR; REDDY, 2004). Ademais, é de se esperar que a pressão interna seja maior que da anã branca.

Primeiramente é considerada a estrela com gás não-relativístico (NR), para depois considerar o caso limite com gás ultrarrelativístico (UR), com a gravitação da RG em ambos, pois este tipo de estrela causa uma distorção no espaço-tempo que não pode ser desconsiderada. Novamente, muda-se os valores das constantes de forma que o resultado seja viável para analisar. As pressões e massas de cada caso então são mostradas no gráfico 3:

Gráfico 3 – Estrela de nêutron com gás não-relativístico e ultrarrelativístico



Legenda: Pressão \times Raio e Massa \times Raio da estrela de nêutron.
Verde claro: não-relativístico; Verde escuro: ultrarrelativístico.

Fonte: O autor, 2023.

$$NR : \alpha = 1km; \quad \beta = 0,7636km^{-3}; \quad \epsilon_o = 0,08969M_\odot c^2 km^{-3}; \quad \gamma = 5/3.$$

$$UR : \alpha = 4,428km; \quad \beta = 3,374km^{-3}; \quad \epsilon_o = 0,08969M_\odot c^2 km^{-3}; \quad \gamma = 1.$$

Destaca-se que o caso do gás ultrarrelativístico é com $\gamma = 1$, ou seja, a EoS se resume a $P \propto \epsilon$. Logo, as partículas do gás não possuem massa-energia de repouso. É um caso extremo que, evidente no gráfico 3, não é capaz de modelar uma estrela, pois esta fica com raio e massa infinitos, devido à pressão não chegar a ser nula, mas será relevante para o que virá a seguir (SAGERT et al., 2006). Já para o gás não-relativístico ($\gamma = 5/3$), os valores de massa, raio e pressão são dentro do esperado. Porém, esta EoS não descreve as características relativísticas (RR) do gás, as quais são importantes para a modelagem de estrela de nêutron, principalmente com o aumento da massa do modelo.

Dessa forma, fica mais que evidente que somente considerar um dos casos é insuficiente para uma discussão sobre o modelo de uma estrela de nêutron. Portanto, buscamos uma EoS menos simplificada que abrange do caso não-relativístico até o caso limite do ultrarrelativístico. Em outras palavras, uma combinação dos dois casos se faz necessária, podendo considerar, de forma intuitiva, uma equação de estado de um gás relativístico ideal puro de nêutrons: (SILBAR; REDDY, 2004).

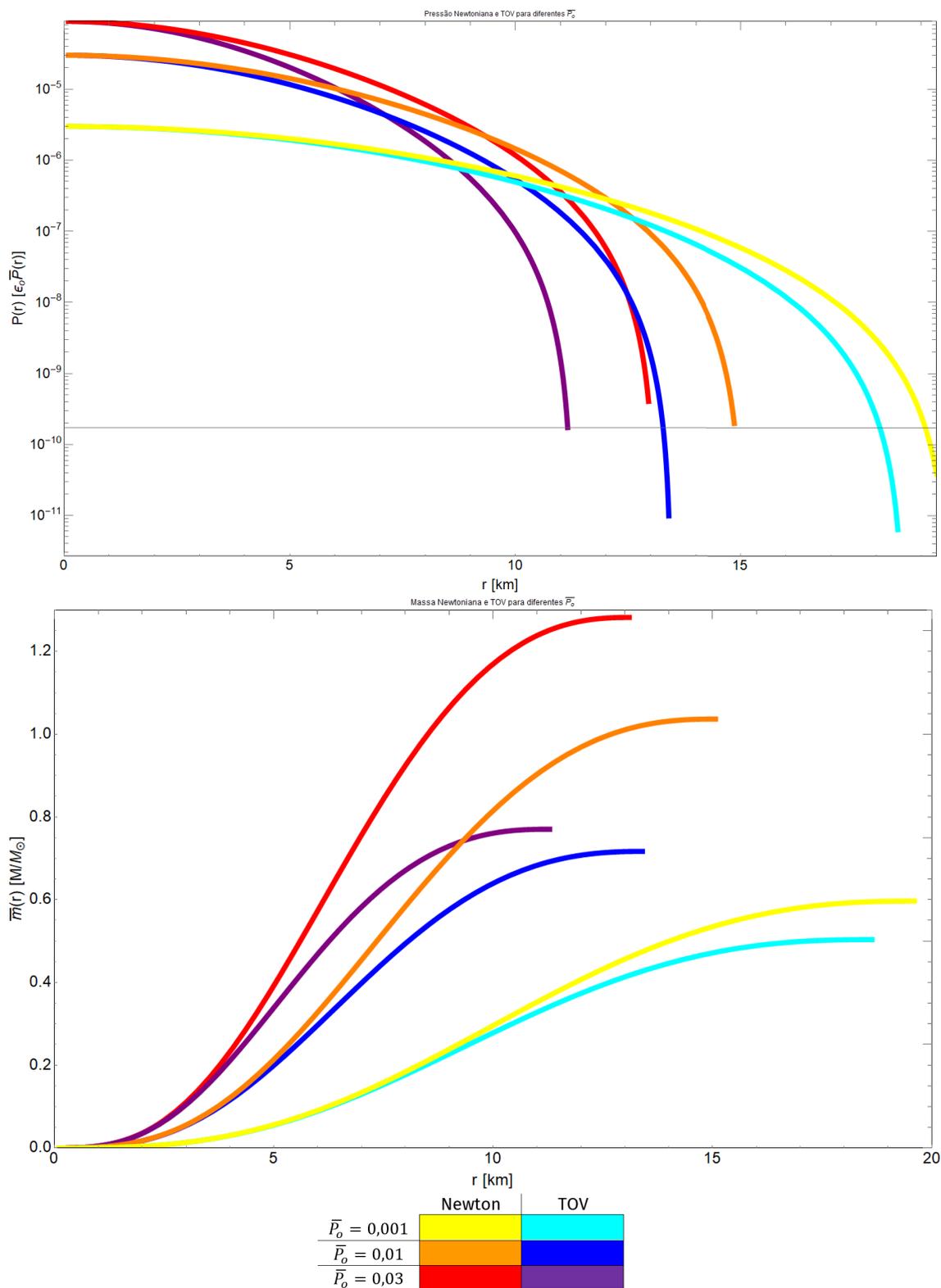
$$\bar{P}(\bar{\epsilon}) = B_{NR}\bar{\epsilon}^{5/3} + B_{UR}\bar{\epsilon} \implies \bar{\epsilon}(\bar{P}) = A_{NR}\bar{P}^{3/5} + A_{UR}\bar{P}. \quad (71)$$

Em que B_{NR} , B_{UR} , A_{NR} e A_{UR} são constantes arbitrárias adimensionais. Desta forma, para pressões pequenas o termo não-relativístico é dominante e conforme a pressão aumenta as correções relativísticas ganham destaque. Este terceiro caso é dito como “gás relativístico” de agora em diante, por simplicidade.

Seguindo o trabalho com a pressão nas equações, é preciso definir os valores de A_{NR} e A_{UR} , como feito com α e β . Seguindo o artigo (SILBAR; REDDY, 2004), os valores das constantes são: $A_{NR} = 2,4216$; $A_{UR} = 2,8663$; $\alpha = 1,476km$; $\beta = 0,03778km^{-3}$; $\epsilon_o = 0.003006M_\odot c^2 km^{-3}$. $\bar{P}(r)^{1/\gamma}$ nas equações (69) e (70) é substituído pela (71).

No gráfico 4 é mostrado resultados para diferentes pressões iniciais: $\bar{P}_o = 0,001$, $\bar{P}_o = 0,01$ e $\bar{P}_o = 0,03$, considerando a equação de TOV e a equação da gravitação de Newton, por motivos de completude e para demonstrar como, de fato, a gravitação newtoniana não é mais uma boa aproximação. Confere-se:

Gráfico 4 – Comparação de diferentes estrelas de nêutron



Legenda: Pressão \times Raio e Massa \times Raio para diferentes pressões iniciais.

Fonte: O autor, 2023.

Algumas observações obtidas desse gráfico: No caso da $\bar{P}_o = 0,001$, trata-se de uma pressão baixa, que forma pouca massa, então espera-se uma menor diferença entre TOV e Newton, apesar de já ser significativa. Além disso, nota-se que o caso clássico possui um raio ainda maior, devido à falta de correções da RG, e que este caso possui massa maior que o caso de TOV. Reforçando que, diferente das anãs brancas, as estrelas de nêutron não respeitam a gravitação clássica.

O gráfico 4 deixa clara a discrepância entre TOV e as soluções newtonianas. Com o que é estudado, as estrelas de nêutron neste modelo básico sem interações entre as partículas possuem um limite de $0,8M_\odot$, mostrando que o gás considerado é fraco para suportar maiores massas. Entretanto, adicionando mais um motivo do porquê de não usar a gravitação clássica, conforme aumenta a pressão inicial no caso da gravitação de Newton, o gráfico não apenas se distancia do caso de TOV, como ultrapassa o limite da massa.

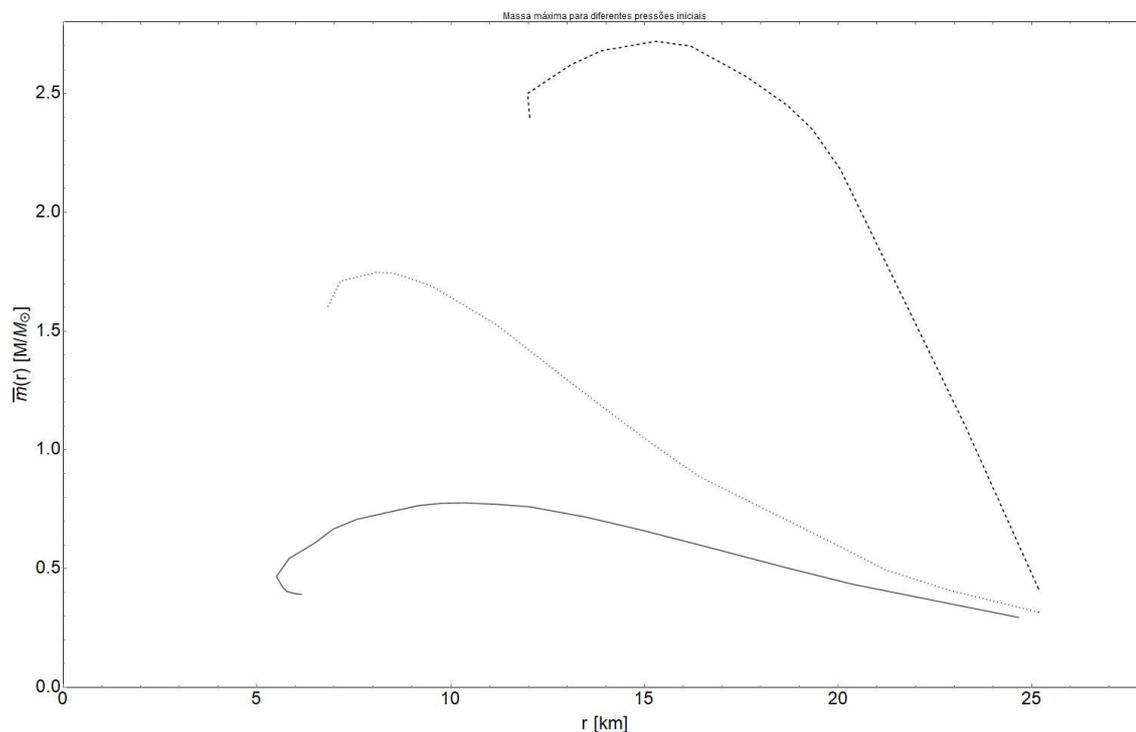
Nota-se também que a pressão no caso de TOV é mais concentrada no núcleo da estrela, o que leva a ter um raio menor, e que mesmo com um pressão inicial baixa, a diferença entre a gravitação de Newton e da TOV é bem considerável. Não somente isso, como também o raio diminui conforme a pressão inicial aumenta, enquanto a massa inclusive aumenta junto. Percebe-se que o raio se aproxima da ordem de $10km$ (aproximadamente $12km$), a massa se aproxima de $0,8M_\odot$, o que indica que, aumentando mais o \bar{P}_o , como não pode passar do limite de massa deste modelo, a estrela se torna instável. O equilíbrio entre pressão e gravidade é quebrado (SILBAR; REDDY, 2004) e a estrela se colapsa em um buraco negro (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 1983).

Por fim, vale ressaltar que este modelo é uma aproximação, visto, por exemplo, a existência de estrelas de nêutrons com massas maiores que $2M_\odot$ (KALOGERA; BAYM, 1996). Para se aproximar da realidade, pode-se considerar as interações entre os núcleons, um gás com diferentes partículas, considerar a crosta de ferro que a estrela possui (o qual o gás ultrarrelativístico de antes certamente não considera), rotação, campo magnético, e a lista se estende. Entretanto, como a ideia desta dissertação é de introduzir a modelagem de estrelas compactas, o que deve ser levado em conta são os conceitos que se devem conhecer e, não menos importante, gerar discussão e desenvolvimento de pesquisas para quem se interessar por esta área de estudos.

Para uma melhor completude, foi feito o gráfico 5 com as massas e raios das estrelas com diferentes pressões iniciais, sendo considerado o caso de Newton, TOV sem interação entre os nêutrons e TOV com interação nuclear, seguindo o modelo apresentado em (SILBAR; REDDY, 2004). Considerando o pico de cada curva, a parte da direita são estrelas estáveis, enquanto a parte da esquerda são estrelas instáveis que colapsam.

Nota-se como o caso newtoniano e de TOV se aproximam para baixas massas, mas rapidamente se separam, sendo o caso newtoniano inadequado para o modelo. Já no caso de TOV com interação entre as partículas do gás, as proporções massa e raio são mais compatíveis com o que é observado (massa crítica perto de $2.8M_{\odot}$ e raio próximo de $15km$), mostrando ser um modelo menos idealizado e mais próximo das observações astronômicas.

Gráfico 5 – Massa e Raio para diferentes pressões iniciais



Legenda: Massa da estrela \times Raio da estrela.

Pontilhado: Newton; Linha: TOV; Tracejado: TOV interação nuclear.

Fonte: O autor, 2023.

CONCLUSÃO

Esta dissertação é uma sucinta introdução do que é preciso saber para a modelagem de estrelas compactas. A partir daqui, o plano é buscar equações de estado mais realistas, como politrópicas de gás de férmions relativísticos com interação entre as partículas. Os livros e artigos citados utilizam algumas EoS que abrangem bem a análise de modelos de estrelas compactas.

Em conclusão, a teoria da Relatividade Geral de Einstein representa um marco imprescindível na história da física moderna. Sua origem pode ser traçada a partir da insatisfação com a teoria da gravitação de Newton e da busca por uma descrição mais abrangente e precisa da gravidade. A teoria propõe que a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia, em contraste com a ideia de uma força que atua à distância.

A introdução do Princípio de Equivalência na Relatividade Geral foi um diferencial importante, permitindo trabalhar não apenas com referenciais inerciais, mas também com referenciais acelerados. Isso levou ao uso de tensões tensoriais, que são invariantes sob transformações gerais de coordenadas. Essa abordagem revolucionária expandiu nossa compreensão da física, especialmente no estudo de estrelas de nêutrons, objetos celestes densos e maciços.

Os tensores desempenham um papel fundamental na formulação matemática da Relatividade Geral. Eles descrevem a geometria do espaço-tempo e como ela é modificada pela presença de massa e energia. Os tensores mais importantes incluem o tensor métrico, que descreve a distância entre pontos no espaço-tempo, e os tensores de curvatura, que descrevem a curvatura do espaço-tempo devido à presença de massa e energia.

Embora a matemática dos tensores possa parecer complexa, é essencial para a compreensão da física relativística e fornece uma ferramenta poderosa para descrever a natureza em espaços curvos. Portanto, uma compreensão das noções de tensores é crucial para uma modelagem adequada de estrelas de nêutrons e para uma compreensão mais profunda da Relatividade Geral.

Constata-se, ainda, que o estudo de uma estrela esféricamente simétrica desempenha um papel importante na compreensão e modelagem precisa das estrelas de nêutrons. Através desse estudo, é possível investigar as características intrínsecas da estrela, como massa, raio, densidade e distribuição de energia, bem como analisar as propriedades gravi-

tacionais em torno dela. A simetria esférica é uma aproximação adequada para estrelas de nêutrons devido à sua alta densidade e distribuição de matéria aproximadamente esférica.

Na presença de simetria esférica, as equações de Einstein levam à equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Esta permite determinar as condições de equilíbrio hidrostático dessas estrelas, como densidade, pressão, massa e raio, dada uma composição da matéria no interior da estrela e a equação de estados associada. Essas informações são fundamentais para estudar o comportamento das estrelas de nêutrons sob condições diferentes e comparar os resultados com observações astronômicas. A comparação com modelos teóricos e observacionais é crucial para validar o modelo e fornecer melhor clareza para pesquisas futuras.

O capítulo “Soluções Numéricas” é indispensável para esta dissertação de mestrado, pois a aplicação concreta do estudo realizado. Foi destacado também o uso do software *Mathematica* e a necessidade de trabalhar com unidades adimensionais e valores adequados para realizar as simulações computacionais. Uma análise comparativa entre as abordagens clássica e da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff mostrou a importância da relatividade geral para obter massas maiores e resultados mais precisos na modelagem de estrelas de nêutrons.

Por fim, conclui-se esta breve introdução à modelagem das estrelas de nêutrons como objetos extremamente densos e compactos, cujo estudo envolve pesquisas teóricas e observacionais.

Perspectivas nesta área de pesquisa específica envolvem a exploração de previsões de estrutura estelar (massa \times raio, por exemplo) para diferentes composições da matéria através de variadas EoS, efeitos de rotação e campos magnéticos altos. Novos observáveis relacionados a ondas gravitacionais também são alvo de pesquisa intensa e podem trazer muita informação nos próximos anos.

REFERÊNCIAS

- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. 513 p.
- CHANDRASEKHAR, S. The maximum mass of ideal white dwarfs. *Astrophysical Journal*, SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS), [s.l.], v. 74, p. 81, jul 1931.
- CHANDRASEKHAR, S.; MILNE, E. A. The highly collapsed configurations of a stellar mass. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS), [s.l.], v. 91, n. 5, p. 456–466, mar 1931. ISSN 0035-8711.
- EARMAN, J.; GLYMOUR, C. Relativity and eclipses: The british eclipse expeditions of 1919 and their predecessors. *Historical Studies in the Physical Sciences*, University of California Press, [s.l.], v. 11, n. 1, p. 49–85, 1980.
- EINSTEIN, A. The field equations of gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, [s.l.], v. 1915, p. 844–847, 1915.
- EINSTEIN, A. *Relativity: The special and general theory*. New York: Methuen & Co Ltd, 1920.
- EINSTEIN, A. The bianchi identities in the generalized theory of gravitation. *Canadian Journal of Mathematics*, Cambridge University Press, [s.l.], v. 2, p. 120–128, 1950.
- EINSTEIN, A. et al. The foundation of the general theory of relativity. *Annalen Phys*, [s.l.], v. 49, n. 7, p. 769–822, 1916.
- GLENDENNING, N. *Compact Stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity*. 2^a. ed. New York: Springer, 2000. 467 p. (Astronomy and Astrophysics Library).
- GONCALVES, V. P.; LAZZARI, L. d. S. Uma introdução às estrelas estranhas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, [s.l.], Brasil, v. 42, jun 2020.
- HORVARTH, J. E. *Fundamentos da Evolução Estelar, Supernovas e Objetos Compactos*. 1^a. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 392 p.
- KALOGERA, V.; BAYM, G. The maximum mass of a neutron star. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, [s.l.], v. 470, n. 1, p. L61, 1996.
- MACIEL, W. J. *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar*. 1^a. ed. São Paulo: Edusp, 2018. 288 p.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Mecânica*. 5^a. ed. São Paulo: Blücher, 2013. 394 p.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Ótica, relatividade, física quântica*. 2^a. ed. São Paulo: Blücher, 2014. 359 p.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Fluidos, oscilações e ondas, calor*. 5^a. ed. São Paulo: Blücher, 2014. 375 p.

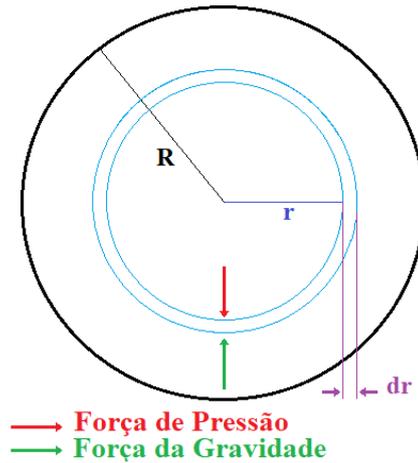
- OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. *Physical Review*, APS, [s.l.], v. 55, n. 4, p. 374–381, fev 1939.
- SAGERT, I. et al. Compact stars for undergraduates. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, [s.l.], Europa, v. 26, n. 3, p. 577–610, abr 2006.
- SALINAS, S. R. A. *Introdução à física estatística*. 2^a. ed. São Paulo: Edusp, 1999. 472 p.
- SANTOS, F. V. B. dos. *Introdução à modelagem de estrelas compactas*. 51 f. Monografia (Bacharelado em Física) — Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.
- SCHAFFNER-BIELICH, J. *Compact Star Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020.
- SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2^a. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. *Black holes, White dwarfs and Neutron stars: The physics of compact objects*. New York: Wiley-VCH, 1983. 672 p.
- SILBAR, R. R.; REDDY, S. Neutron stars for undergraduates. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers (AAPT), [s.l.], EUA, v. 72, n. 7, p. 892–905, jul 2004.
- TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. *Física Moderna*. 6^a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 1692 p.
- VANKOV, A. A. Einstein’s paper: “explanation of the perihelion motion of mercury from general relativity theory”. *General Science Journal*, IPPE, [s.l.], v. 20, 06 2020.
- VASILIEV, V. V.; FEDOROV, L. V. To the schwarzschild solution in general relativity. *Journal of Modern Physics*, Scientific Research Publishing, [s.l.], v. 9, n. 14, p. 2482–2494, 2018.
- WEBER, F. *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*. 1^a. ed. [S.l.]: Taylor and Francis, 1999. (Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation).
- WEBER, F. *Introdução à Relatividade Geral e à Física de Estrelas Compactas*. 1^a. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015. 142 p. (Coleção CBPF - Tópicos de Física).
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. New York: John Wiley and Sons, 1972.
- WOLFRAM RESEARCH. *NDSolve*. 2019. Disponível em: <https://reference.wolfram.com/language/ref/NDSolve.html>. [Acesso em: 11 nov. 2023].
- YAKOVLEV, D. G. et al. Lev Landau and the concept of neutron stars. *Physics-Uspekhi, Uspekhi Fizicheskikh Nauk (UFN) Journal*, [s.l.], v. 56, n. 3, p. 289–295, mar 2013.
- ZWICKY, F. On the theory and observation of highly collapsed stars. *Phys. Rev.*, American Physical Society, [s.l.], v. 55, p. 726–743, Abr 1939.

APÊNDICE A – Equilíbrio Hidrostático Newtoniano

O autor estudou algumas soluções newtonianas de objetos compactos em sua monografia de graduação (SANTOS, 2020). Segue o trecho da obtenção do equilíbrio hidrostático clássico.

O equilíbrio hidrostático ocorre quando a força de pressão que os átomos geram ao se colidirem compensa a gravidade e assim a estrela para de se colapsar. Ou seja, voltando às aproximações feitas nos cálculos na subseção anterior, uma partícula terá sua aceleração anulada, consequentemente tendo uma força resultante nula também (vide figura abaixo).

Figura 1 – Representação do equilíbrio hidrostático em uma estrela esférica.



Fonte: O autor, 2023.

A força resultante é a soma das forças de pressão (F_P) e gravitacional (F_G). Para a força de pressão, a massa dm sofre a força vindo por baixo dela e por cima dela. Como a pressão é inversamente proporcional ao raio, a força de baixo ($F(r)$) terá maior módulo que a força de cima ($F(r + dr)$), sendo assim, F_P tem valor positivo. Lembrando que força é pressão (P) vezes a área de atuação (A), tem-se que:

$$F_P = F(r) - F(r + dr) \implies F_P = P(r)A(r) - P(r + dr)A(r + dr).$$

Como foi considerado que a partícula tem a forma de um paralelogramo, $A(r) = A(r + dr)$, logo, é constante. Portanto:

$$F_P = [P(r) - P(r + dr)]A \implies F_P = -[P(r + dr) - P(r)]A.$$

A diferença $P(r + dr) - P(r)$ é a parte infinitesimal da pressão (dP), logo:

$$F_P = -dP A. \quad (72)$$

Para a força gravitacional é usada a conhecida fórmula da gravitação de Newton (NUSSENZVEIG, 2013):

$$F_G = -G \frac{m(r) dm}{r^2},$$

em que $m(r)$ é a massa da esfera de raio r , que por sua vez pode ser escrita como a densidade vezes o volume, ou seja:

$$dm = \rho(r) dV,$$

em que $\rho(r)$ é a densidade em r e dV é o volume da massa infinitesimal, podendo ser escrito na forma $dV = V(r + dr) - V(r)$. Assim, como dr é muito pequeno em relação a r , pode-se fazer expansão de Taylor no termo $V(r + dr)$, que então fica:

$$V(r + dr) = V(r) + \frac{dV}{dr} dr + \frac{d^2V}{dr^2} dr^2 + \dots$$

Sendo dr pequeno, uma aproximação de até a primeira ordem na expansão se mostra satisfatória, tendo $dm = \rho(r) \frac{dV}{dr} dr$. Além disso, o volume, nesse caso, um paralelogramo, é a área da base (A) vezes a altura (dr). Portanto:

$$dm = \rho(r) A dr. \quad (73)$$

Sendo assim, a força gravitacional pode ser reescrita como:

$$F_G = -G \frac{m(r) \rho(r) A dr}{r^2}. \quad (74)$$

Finalmente, com as forças de pressão e gravitacional, se calcula a força resultante somando as forças. Esta resultante deverá ser nula para que o equilíbrio ocorra, portanto:

$$F_P + F_G = 0 \implies -dP A - G \frac{m(r) \rho(r) A dr}{r^2} = 0,$$

$$\left[-dP - G \frac{m(r) \rho(r) dr}{r^2} \right] A = 0 \implies dP = -G \frac{m(r) \rho(r) dr}{r^2},$$

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} = -G \frac{m(r)\epsilon(r)}{c^2 r^2}. \quad (75)$$

A equação (75) pode ser escrita em termos de $\rho(r)$ ou $\epsilon(r)/c^2$, pois, considerando a relatividade restrita, $\epsilon = c^2\rho$. (NUSSENZVEIG, 2014a).

Uma dessas equações pode ser obtida pela massa $m(r)$ da esfera. Como vimos antes, trabalhando com unidades infinitesimais, a massa de uma casca esférica pode ser definida como:

$$dm = \rho(r)Adr.$$

Em que Adr é o volume da casca esférica, cuja área é definida por $4\pi r^2$. Logo:

$$dm = \rho(r)4\pi r^2 dr,$$

E assim obtemos a segunda equação diferencial que compõe o sistema para determinar a estrutura de uma estrela Newtoniana:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 = 4\pi\epsilon(r)r^2/c^2. \quad (76)$$

APÊNDICE B – Alguns códigos usados no *Mathematica*

Algoritmo 1 – Solução da anã branca de Newton

```

In[9]:= a = 0.05;
b = 0.005924;
Ro = 1.473;
e = 0.01392;
l = 0.6;
SltNew = NDSolve[{D[p[r], r] == -(a * p[r]^l) * m[r] / r^2, D[m[r], r] == b * r^2 * p[r]^l, p[0.1] == 10^(-15), m[0.1] == 10^(-16)}, {p, m}, {r, 0.1, 10600}]
Out[9]:= {{p -> InterpolatingFunction[...], m -> InterpolatingFunction[...]}

```

Algoritmo 2 – Gráfico da anã branca de Newton

```

In[9]:= Pn = Plot[Evaluate[p[r] /. SltNew], {r, 0.1, 10600}, ImageSize -> 500, Frame -> True, FrameStyle -> Large, FrameLabel -> {"r [km]", "P̄(r)"},
LabelStyle -> Black, PlotStyle -> {Pink, Thickness[0.006]}, PlotRange -> {{0, 10500}, {0, 10^(-15)}}, PlotLabel -> "Pressão x Raio (Newtoniano)"]
Mn = Plot[Evaluate[m[r] /. SltNew], {r, 0.1, 10600}, ImageSize -> 500, Frame -> True, FrameStyle -> Large, FrameLabel -> {"r [km]", "m̄(r) [M/M⊙]"},
LabelStyle -> Black, PlotStyle -> {Pink, Thickness[0.006]}, PlotRange -> {{0, 10500}, {0, 0.8}}, PlotLabel -> "Massa x Raio (Newtoniano)"]

```

Algoritmo 3 – Solução da anã branca de TOV

```

In[9]:= a = 1.473;
b = 52.46;
Ro = 1.473;
e = 4.17;
l = 0.75;
SltTOV = NDSolve[{D[p[r], r] == -(a * p[r]^l) * m[r] / r^2 + (1 + (Ro * p[r]^(1 - l)) / a) * (1 + ((b * r^3 * p[r] + Ro) / (a * m[r]))) * ((1 - (2 * Ro * m[r] / r))^(1 - l)),
D[m[r], r] == b * r^2 * p[r]^l, p[0.1] == 10^(-15), m[0.1] == 10^(-16)}, {p, m}, {r, 0.1, 9070}]
Out[9]:= {{p -> InterpolatingFunction[...], m -> InterpolatingFunction[...]}

```

Algoritmo 4 – Gráfico da anã branca de TOV

```

In[ ]:= Pr = Plot[Evaluate[p[r] /. SltTOV], {r, 0.1, 9070}, ImageSize -> 500, Frame -> True, FrameStyle -> Large, FrameLabel -> {"r [km]", "P̄(r)"},
  |gráf- |calcula |tamanho da imagem |quadro |verd- |estilo de moldura |grande |legenda do quadro
  LabelStyle -> Black, PlotStyle -> {Magenta, Thickness[0.006]}, PlotRange -> {{0, 9000}, {0, 10-15}}, PlotLabel -> "Pressão x Raio (TOV)"
  |estilo de etiqueta |preto |estilo do gráfico |magenta |espessura |intervalo do gráfico |etiqueta de gráfico

Mr = Plot[Evaluate[m[r] /. SltTOV], {r, 0.1, 9070}, ImageSize -> 500, Frame -> True, FrameStyle -> Large, FrameLabel -> {"r [km]", "m̄(r) [M/M0]"},
  |gráf- |calcula |tamanho da imagem |quadro |verd- |estilo de moldura |grande |legenda do quadro
  LabelStyle -> Black, PlotStyle -> {Magenta, Thickness[0.006]}, PlotRange -> {{0, 9000}, {0, 1.5}}, PlotLabel -> "Massa x Raio (TOV)"
  |estilo de etiqueta |preto |estilo do gráfico |magenta |espessura |intervalo do gráfico |etiqueta de gráfico

```

Algoritmo 5 – Solução da estrela de nêutron de gás não-relativístico

```

In[ ]:= a = 1;
b = 0.7636;
Ro = 1.473;
e = 0.08969;
l = 0.6;
Slt = NDSolve[{D[p[r], r] == -(a * p[r]^l) * m[r] / r^2 * (1 + (Ro * p[r]^(1 - l)) / a) + (1 + ((b * r^3 * p[r] * Ro) / (a * m[r]))) * ((1 - (2 * Ro * m[r] / r))^(l - 1)),
  |resolve n- |derivada
  D[m[r], r] == b * r^2 * p[r]^l}, {p, m}, {r, 0.1, 15.25}]
  |derivada

Out[ ]:= {{p -> InterpolatingFunction[...], m -> InterpolatingFunction[...]}]}

```

Algoritmo 6 – Gráfico da estrela de nêutron de gás não-relativístico

```

In[ ]:= Plot[Evaluate[p[r] /. Slt], {r, 0.1, 15.25}, ImageSize -> 500, Frame -> True, FrameStyle -> Large, FrameLabel -> {"r [km]", "P̄(r)"},
  |gráf- |calcula |tamanho da imagem |quadro |verd- |estilo de moldura |grande |legenda do quadro
  LabelStyle -> Black, PlotStyle -> {Green, Thickness[0.006]}, PlotRange -> {{0, 15}, {0, 0.0001}}, PlotLabel -> "Pressão x Raio (não-relativístico)"
  |estilo de etiqueta |preto |estilo do gráfico |verde |espessura |intervalo do gráfico |etiqueta de gráfico

Plot[Evaluate[m[r] /. Slt], {r, 0.1, 15.25}, ImageSize -> 500, Frame -> True, FrameStyle -> Large, FrameLabel -> {"r [km]", "m̄(r) [M/M0]"},
  |gráf- |calcula |tamanho da imagem |quadro |verd- |estilo de moldura |grande |legenda do quadro
  LabelStyle -> Black, PlotStyle -> {Green, Thickness[0.006]}, PlotRange -> {{0, 15}, {0, 0.8}}, PlotLabel -> "Massa x Raio (não-relativístico)"
  |estilo de etiqueta |preto |estilo do gráfico |verde |espessura |intervalo do gráfico |etiqueta de gráfico

```

Algoritmo 7 – Solução da estrela de nêutron de gás ultrarrelativístico

```

In[ ]:= a = 4.428;
b = 3.374;
Ro = 1.473;
e = 0.08969;
l = 1;
Slt = NDSolve[{D[p[r], r] == -(a * p[r]^l) * m[r] / r^2 * (1 + (Ro * p[r]^(1 - l)) / a) + (1 + ((b * r^3 * p[r] * Ro) / (a * m[r]))) * ((1 - (2 * Ro * m[r] / r))^(l - 1)),
  |resolve n- |derivada
  D[m[r], r] == b * r^2 * p[r]^l}, {p, m}, {r, 0.1, 60}]
  |derivada

Out[ ]:= {{p -> InterpolatingFunction[...], m -> InterpolatingFunction[...]}]}

```

Algoritmo 8 – Gráfico da estrela de nêutron de gás ultrarrelativístico

```

In[ ]:= Plot[Evaluate[p[r] /. Slt], {r, 0.1, 60}, ImageSize -> 500, Frame -> True, FrameStyle -> Large, FrameLabel -> {"r [km]", "P̄(r)"},
  |gráf- |calcula |tamanho da imagem |quadro |verd- |estilo de moldura |grande |legenda do quadro
  LabelStyle -> Black, PlotStyle -> {Green, Thickness[0.006]}, PlotRange -> {{0, 55}, {0, 0.001}}, PlotLabel -> "Pressão (ultra-relativístico)"
  |estilo de etiqueta |preto |estilo do gráfico |verde |espessura |intervalo do gráfico |etiqueta de gráfico

Plot[Evaluate[m[r] /. Slt], {r, 0.1, 60}, ImageSize -> 500, Frame -> True, FrameStyle -> Large, FrameLabel -> {"r [km]", "m̄(r) [M/M0]"},
  |gráf- |calcula |tamanho da imagem |quadro |verd- |estilo de moldura |grande |legenda do quadro
  LabelStyle -> Black, PlotStyle -> {Green, Thickness[0.006]}, PlotRange -> {{0, 55}, {0, 10}}, PlotLabel -> "Massa (ultra-relativístico)"
  |estilo de etiqueta |preto |estilo do gráfico |verde |espessura |intervalo do gráfico |etiqueta de gráfico

```

Algoritmo 9 – Solução da estrela de nêutron de gás relativístico

```

In[ ]:= a = 1.476;
b = 0.03778;
Ro = 1.473;
e = 0.003006;
An = 2.4216;
Ar = 2.8663;
Slt =
  |resolve numericamente equação diferencial
  NDSolve[
  |derivada
  {D[p[r], r] == -(a * (An * p[r]^(3/5) + Ar * p[r])) * m[r] / r^2 * (1 + ((Ro * p[r]) / (a * ((An * p[r]^(3/5) + Ar * p[r]))))) + (1 + ((b * r^3 * p[r] * Ro) / (a * m[r]))) *
  |derivada
  ((1 - (2 * Ro * m[r] / r))^(l - 1)), D[m[r], r] == b * r^2 * (An * p[r]^(3/5) + Ar * p[r]), p[0.1] == 0.001, m[0.1] == 0.00001}, {p, m}, {r, 0.1, 20}]

Out[ ]:= {{p -> InterpolatingFunction[...], m -> InterpolatingFunction[...]}]}

```