



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Carlos Stivens Mena Correa

**Observáveis em modelos efetivos confinantes:
Potencial quark–antiquark e momento magnético de núcleons**

Rio de Janeiro

2023

Carlos Stivens Mena Correa

**Observáveis em modelos efetivos confinantes:
Potencial quark–antiquark e momento magnético de núcleons**

Tese apresentada, como requisito parcial
para obtenção do título de Doutor, ao Pro-
grama de Pós-Graduação em Física, da Uni-
versidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Profa. Dra. Letícia Faria Domingues Palhares

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

M534o Mena Correa, Carlos Stivens.
Observáveis em modelos efetivos confinantes:
Potencial quark-antiquark e momento magnético de núcleons /
Carlos Stivens Mena Correa. - 2023.
191 f.: il.

Orientadora: Letícia Faria Domingues Palhares.
Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Cromodinâmica quântica - Teses. 2. Confinamento de
quarks - Teses. 3. Glúons - Teses. 4. Interações quark-glúon
- Teses. I. Palhares, Letícia Faria Domingues (Orient.). II.
Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física
Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 539.184

Bibliotecária: : Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Carlos Stivens Mena Correa

**Observáveis em modelos efetivos confinantes:
Potencial quark–antiquark e momento magnético de núcleons**

Tese apresentada, como requisito parcial
para obtenção do título de Doutor, ao Pro-
grama de Pós-Graduação em Física, da Uni-
versidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 19 de dezembro de 2023.

Banca Examinadora:

Prof.a. Dra. Letícia Faria Domingues Palhares (Orientadora)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Marcio André Lopes Capri
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Cristian Luis Villavicencio Reyes
Universidad del Bio-Bio, Chile

Prof. Dr. José Abdalla Helayël Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho às minhas sobrinhas, Alisse e Daphne, que me permitiram perceber como o espírito científico é inerente ao ser humano.

AGRADECIMENTOS

Quero aproveitar este espaço para agradecer às pessoas que contribuíram na minha vida, tanto pessoal quanto acadêmica, até o momento da finalização desta tese. Eu sei que nem sempre as palavras serão suficientes para expressar a minha gratidão pelo todo o apoio recebido mas sempre será necessário tentar mostra-lo.

Em primeiro lugar, quero agradecer a minha família pelo seu apoio.

Agradeço a minha orientadora Letícia pelo seu apoio, paciência e dedicação desde o início do meu mestrado e até o fim deste doutorado, que me permitiu aprender e entender muitas coisas da vida acadêmica, em especial sobre teoria de campos. Também quero lhe agradecer pelo apoio e consideração durante o difícil tempo da pandemia.

Agradeço também a dona Iranilde pelo seu apoio, cuidado e grata companhia durante os anos da pandemia.

Agradeço aos meus amigos e embora não mencione alguns deles, quero agradecer especialmente àqueles com quem compartilhei tempo no Rio de Janeiro: José, Jilder, Apóllo, Ranna, Katrine, Rui, Nathan, Rodolfo e João.

Gostaria também de agradecer aos professores da UERJ que me permitiram melhorar minha formação durante a toda minha estadia lá.

Também quero agradecer aos membros da secretaria, Samir e Ranna, pela eficácia e ajuda com a burocracia da Pós na UERJ.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro direto neste doutorado. Agradeço também à Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo apoio financeiro direto e indireto.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Nos indivíduos, a loucura é algo raro – mas nos grupos, nos partidos, nos povos, nas
épocas, é regra.

F. Nietzsche

Já foi dito que astronomia é uma experiência de humildade e criadora de caráter. Não há, talvez, melhor demonstração da tola presunção humana do que esta imagem distante do nosso minúsculo mundo. Para mim, destaca a nossa responsabilidade de sermos mais amáveis uns com os outros, e para preservarmos e protegermos o “pálido ponto azul”, o
único lar que conhecemos até hoje.

C. Sagan

O bem da humanidade deve consistir em que cada um goze o máximo de felicidade que possa, sem diminuir a felicidade dos outros.

A. Huxley

So put your glasses on...

Penpals

RESUMO

MENA CORREA, C. S. *Observáveis em modelos efetivos confinantes:*

Potencial quark-antiquark e momento magnético de núcleons. 2023. 191 f. Tese

(Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

A compreensão da física hadrônica, em função de quarks e glúons, continua sendo um problema em aberto já que o mecanismo do confinamento de cor ainda carece de uma descrição analítica satisfatória a partir de primeiros princípios. Porém, com o intuito de abordar o confinamento, têm sido desenvolvidos alguns enfoques que exploram ou até conseguem acessar a informação da região de baixas energias da Cromodinâmica quântica (QCD), i.e. a parte não perturbativa da QCD, onde é considerado que pode residir a explicação ao confinamento. Dentre os diferentes métodos, encontramos aqueles que surgem a partir das consequências não perturbativas das cópias de Gribov, que modificam o comportamento infravermelho dos propagadores da Yang–Mills, em especial o do propagador do glúon. Ao mesmo tempo, esses enfoques são motivados nos resultados não perturbativos da QCD na rede. Nesta tese, estudaremos os seguintes modelos: Gribov–Zwanziger (GZ), Gribov–Zwanziger refinado (RGZ) e Curci-Ferrari (CF, ou modelo do glúon massivo). No caso do propagador do glúon, a informação não-perturbativa presente nessas abordagens gera uma estrutura de pólos complexos, que viola o axioma de reflexão de positividade relacionado à interpretação física de uma partícula, o que poderia ser considerado como um indício de confinamento do glúon. A busca de outros indícios de confinamento nesses formalismos é obviamente de grande importância para estabelecer o seu papel como realizações infravermelhas consistentes da QCD. Com isso em mente, e supondo o confinamento como algo intrínseco à QCD, nesta tese investigamos em alguns observáveis as consequências e o impacto fenomenológico das características não perturbativas dos diferentes enfoques mencionados. Primeiro, relacionado ao observável do espectro de energia, focamos no cálculo e análise do potencial estático entre um par quark-antiquark pesado, cujo comportamento linear, corroborado pela QCD na rede, é considerado um indício do confinamento. Nosso objetivo é ainda verificar o regime de validade dos enfoques mencionados e a sua compatibilidade com as previsões perturbativas, e também se tais modelos podem produzir confinamento de quarks através de um potencial linear. Nossos resultados indicam que os potenciais calculados estão em concordância com o resultado perturbativo de altas energias e também que esses potenciais apresentam correções não perturbativas interessantes. No caso de Curci-Ferrari (glúon massivo), devido à inclusão sistemática de mais efeitos da interação que incluem correções a um e dois *loops*, estas se tornam muito significativas dado o surgimento de um comportamento semilinear do seu potencial na região de distâncias intermediárias. O outro observável estudado nesta tese é o momento magnético, em particular o do próton. Devido à dificuldade que o cálculo apresenta, adotamos o modelo de quark constituinte (CQM), que dentro das suas próprias limitações nos permite calcular o momento magnético dos hádrons em função dos momentos magnéticos dos seus quarks constituintes. A fim de extrair o momento magnético dos quarks e com o objetivo de estudar nele o impacto fenomenológico dos diferentes tipos de propagadores dos enfoques GZ, RGZ e CF, analisamos o vértice quark-fóton (QPV) (até a ordem de um *loop*) focando na contribuição vinda da QCD, que depende do propagador do glúon.

Nossos resultados indicam que as contribuições dos diferentes enfoques ao momento magnético dos quarks são menores em relação ao resultado perturbativo (glúon sem massa), já que estas são suprimidas devido aos termos de massa presentes nos propagadores do glúon, que nos casos GZ e CF apresentam um comportamento muito similar mesmo quando o caso GZ apresenta pólos imaginários e o CF não (em nível de árvore). No caso RGZ, devido à estrutura mais elaborada e com pólos complexos do seu propagador, aparecem mais contribuições ao momento magnético dos quarks, podendo inclusive superar o valor do resultado perturbativo para certos valores dos parâmetros RGZ. Referente ao momento magnético do próton, calculado no CQM, o resultado mais interessante surge ao ajustar a massa do quark constituinte para reproduzir a massa do próton. Neste caso, ao ajustar os parâmetros de massa dos enfoques mencionados, podemos reproduzir o momento do próton. Os valores obtidos inclusive são comparáveis a outros valores de massa obtidos para a massa do glúon.

Palavras-chave: Cromodinâmica Quântica. Confinamento e Modelos Efetivos para QCD. Momento magnético anômalo. Potenciais não Relativísticos.

ABSTRACT

MENA CORREA, C. S. *Observables in effective confining models:*

Quark–antiquark potential and magnetic moment of nucleons. 2023. 191 f. Tese

(Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

The understanding of hadronic physics, in terms of quarks and gluons, is still an open problem, since the color confinement mechanism still lacks a satisfactory analytical description from first principles. However, in order to address confinement, some approaches have been developed that explore or even manage to access information from the low-energy region of Quantum Chromodynamics (QCD), i.e. the nonperturbative part of QCD, where it is considered that the explanation for confinement may lie. Among the different methods, we focus on those that arise from the nonperturbative consequences of Gribov copies, which modify the infrared behavior of Yang-Mills propagators, especially that of the gluon propagator. At the same time, these approaches are motivated by the nonperturbative first-principle numerical results of lattice QCD. In this thesis, we will study the following models: Gribov–Zwanziger (GZ), refined Gribov–Zwanziger (RGZ), and Curci-Ferrari (CF, or massive gluon model). In the case of the gluon propagator, the nonperturbative information present in these approaches generates a structure of complex poles, which violates the positivity reflection axiom related to the physical interpretation of a particle, which could be considered as an indication of gluon confinement. The search for other signs of confinement in these formalisms is obviously of great importance to establish their role as consistent infrared realizations of QCD. With this in mind, and assuming confinement as something intrinsic to QCD, in this thesis we investigate in some observables the consequences and phenomenological impact of the non-perturbative characteristics of the different approaches mentioned. First, related to the observable of the energy spectrum, we focus on the calculation and analysis of the static potential between a heavy quark–antiquark pair, whose linear behavior, corroborated by lattice QCD, is considered a sign of confinement. Our objective is also to verify the validity of the mentioned approaches and their compatibility with perturbative predictions, and also whether such models can produce quark confinement through a linear potential. Our results indicate that the calculated potentials are in agreement with the high-energy perturbative result and also that these potentials present interesting non-perturbative corrections. In the case of Curci-Ferrari (massive gluon), due to the systematic introduction of more interaction effects that include corrections at one and two loops, these become very significant due to the emergence of a semilinear behavior of its potential in the region of intermediate distances. The other observable studied in this thesis is the magnetic moment, in particular that of the proton. Due to the difficulty that the calculation presents, we adopted the constituent quark model (CQM), which within its own limitations allows us to calculate the magnetic moment of hadrons as a function of the magnetic moments of their constituent quarks. In order to extract the magnetic moment of the quarks and with the aim of studying the phenomenological impact of the different types of propagators of the GZ, RGZ, and CF approaches, we analyzed the quark-photon vertex (QPV) (up to the order of one loop) focusing on the contribution coming from QCD, which depends on the gluon propagator. Our results indicate that the contributions of the different approaches to the magnetic moment of the quarks are smaller in relation to the perturbative result

(massless gluon) since these are suppressed due to the mass terms present in the gluon propagators, which in the GZ and CF cases present a very similar behavior even if the GZ case has imaginary poles and the CF case does not (at tree level). In the RGZ case, due to the more elaborate structure and complex poles of its propagator, more contributions to the magnetic moment of the quarks appear, which may even exceed the value of the perturbative result for certain values of the RGZ parameters. Regarding the magnetic moment of the proton, calculated in CQM, the most interesting result arises when the mass of the constituent quark is adjusted to reproduce the mass of the proton. In this case, by adjusting the mass parameters of the mentioned approaches, we can reproduce the moment of the proton. The values obtained are even comparable to other mass values obtained for the gluon mass.

Keywords: Quantum Chromodynamics. Confinement and Effective Models for QCD.
Anomalous magnetic moment. Non-Relativistic Potentials.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Modelo (espinorial) do próton e constante de acoplamento forte	22
Figura 2	- Relação qualitativa entre o modelo de tensão na corda e o potencial $q\bar{q}$ estático.	24
Figura 3	- Orbitas de calibre	33
Figura 4	- Regiões de Gribov e condição de não pólo	35
Figura 5	- Propagador e vértice para o <i>ghost</i> nas SDE	44
Figura 6	- Acoplamento <i>ghost</i> -glúon e propagador do <i>ghost</i> na SDE vs QCD na rede	48
Figura 7	- QCD na rede, discretização e resultados	49
Figura 8	- Propagador do glúon e energia do vácuo na RGZ	66
Figura 9	- Ajuste do propagador do glúon massivo (CF) a um <i>loop</i>	71
Figura 10	- Ajustes do propagador do glúon massivo (CF) a dois <i>loops</i> e o fluxo do RG	74
Figura 11	- <i>Running</i> dos parâmetros do modelo CF em $SU(3)$ no esquema IS . . .	75
Figura 12	- Fluxo RG do parâmetro de expansão e ajuste do acoplamento da rede .	76
Figura 13	- Diagramas do processo quark-antiquark	79
Figura 14	- Potencial $q\bar{q}$ – Caso Perturbativo, massivo e GZ.	83
Figura 15	- Resultados do Potencial RGZ – Nível de árvore e fenomenológico . . .	88
Figura 16	- Ajuste do potencial ph RGZ	89
Figura 17	- Zona D no Potencial RGZ – Nível de árvore e fenomenológico	90
Figura 18	- Propagador do glúon (Curci-Ferrari) a 1 <i>loop</i>	91
Figura 19	- Potenciais $q\bar{q}$ no modelo Curci-Ferrari	93
Figura 20	- Ajuste ao potencial CF a 1 <i>loop</i> – 1L V_m	94
Figura 21	- Uso do IS-RGE no acoplamento e no propagador do glúon	97
Figura 22	- Potencial IS	98
Figura 23	- Ajuste ao potencial IS a 2 <i>loops</i>	100
Figura 24	- Constante de acoplamento TS e diagramas de Feynmann	101
Figura 25	- Potencial IS e IS no esquema TS	102
Figura 26	- Ajustes no potencial da rede para curtas distâncias	103
Figura 27	- Zona D dos potenciais IS e IS-TS	106
Figura 28	- Comportamento semi-linear dos potenciais IS e IS-TS	107
Figura 29	- Potencial saturado e <i>ad hoc</i> linear	109
Figura 30	- Diagramas de Feynman do vértice férmion-fóton	114
Figura 31	- Função $\bar{F}_2(0)$ para os modelos massivo e GZ	120
Figura 32	- Função $\bar{F}_2(0)$ para os modelos Massivo, GZ e RGZ	123
Figura 33	- Momento magnético do próton no CQM-MM	127

Figura 34 - Momento magnético do próton no CQM-GZ	130
Figura 35 - Momento magnético do próton no CQM-RGZ	132
Figura 36 - Momento magnético do próton no CQM-RGZ variando os parâmetros RGZ	134
Figura 37 - Momento magnético do próton para uma massa constituinte fixada no CQM-QCD	136
Figura 38 - Diagrama no Espaço Euclideo do Processo Quark-Antiquark.	169
Figura 39 - Integrandos dos potenciais IS e IS-TS em 3D.	173

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
1	INTRODUÇÃO À CROMODINÂMICA QUÂNTICA E O PROBLEMA DE GRIBOV	20
1.1	A Lagrangiana da Cromodinâmica Quântica	25
1.2	Quantização da QCD e o propagador do glúon	27
1.3	Fixação de gauge e problema de Gribov	31
1.3.1	<u>Região de Gribov</u>	34
1.3.2	<u>Região Modular Fundamental</u>	35
1.3.3	<u>Condição de não pólo</u>	36
1.3.3.1	Propagador do glúon e do <i>ghost</i> na região de Gribov	38
2	MODELOS EFETIVOS CONFINANTES PARA QCD	42
2.1	Alguns enfoques não perturbativos para a QCD	43
2.1.1	<u>Equações de Schwinger-Dyson</u>	44
2.1.2	<u>QCD na rede</u>	49
2.2	Modelo Gribov–Zwanziger	55
2.2.1	<u>Propagador do glúon no modelo GZ</u>	59
2.3	Modelo Gribov–Zwanziger Refinado	60
2.3.1	<u>Condensados</u>	61
2.3.2	<u>Propagador do glúon no modelo RGZ</u>	65
2.4	Modelo Curci–Ferrari ou Modelo Massivo	68
2.4.1	<u>Equações do grupo de renormalização (RGE) e o esquema <i>Infrared safe</i> (IS)</u>	72
3	POTENCIAIS QUARK–ANTIQUARK	78
3.1	Potencial com parâmetros constantes nos modelos massivo, GZ e RGZ	80
3.2	Potencial RGZ – Propagador fenomenológico	85
3.3	Potencial massivo do modelo Curci–Ferrari	90
3.4	Potencial massivo: IS-RGE no modelo Curci–Ferrari	96
3.4.1	<u>Propagador do glúon a um e dois <i>loops</i> – IS-RGE</u>	96
3.4.2	<u>Potencial a partir do propagador do glúon IS-RGE</u>	97
3.5	Potencial massivo: Acoplamento no esquema de Taylor	101
3.5.1	<u>Potencial para distâncias curtas</u>	103
3.5.2	<u>Potencial para intermediárias e longas distâncias</u>	105
3.6	Potenciais saturado e <i>ad hoc</i> linear	108
3.7	Comentários finais sobre o potencial quark–antiquark	110
4	MOMENTO MAGNÉTICO E VÉRTICE QUARK-FÓTON	112
4.1	Momento magnético	113

4.1.1	<u>Modelo do quark constituinte</u>	115
4.2	Vértice quark-fóton	116
4.2.1	<u>Contribuição da QED no vértice quark-fóton</u>	118
4.3	Contribuição da QCD no vértice quark-fóton	118
4.3.1	<u>QCD Perturbativa</u>	118
4.3.2	<u>Modelo massivo</u>	119
4.3.3	<u>Modelo Gribov-Zwanziger</u>	120
4.3.4	<u>Modelo Gribov-Zwanziger Refinado</u>	121
4.4	Correções do vértice quark-fóton no CQM	125
4.4.1	<u>CQM – Modelo massivo</u>	126
4.4.2	<u>CQM – Modelo GZ</u>	129
4.4.3	<u>CQM – Modelo RGZ</u>	132
4.5	Fixando a massa do quark constituinte ao resultado do CQM – QCD	135
4.6	Fixando a massa do quark constituinte aos resultados do CQM–QFT (modelos confinantes)	137
4.6.1	<u>Modelo Massivo</u>	137
4.6.2	<u>Modelo GZ</u>	138
4.6.3	<u>Modelo RGZ</u>	139
	CONCLUSÕES	141
	REFERÊNCIAS	145
	APÊNDICE A – Potencial quark-antiquark	167
	APÊNDICE B – Potencial quark-antiquark no Espaço Euclideo	169
	APÊNDICE C – Integração dos potenciais Massivo, GZ e RGZ	171
	APÊNDICE D – Integrandos IS e IS-TS em 3D	173
	APÊNDICE E – Convenções e Fórmulas para o espaço euclideo	174
	APÊNDICE F – Contribuições no vértice quark-fóton a um <i>loop</i>	179
	APÊNDICE G – Função $F_2(0)$ e a expressão do vértice quark-fóton	181
	APÊNDICE H – Contribuições dos modelos na função $F_2(0)$ da QCD	184
	APÊNDICE I – Solução da integral $\bar{F}_2(0)$	187
	APÊNDICE J – Equação do gap da massa de Gribov no modelo GZ	191

INTRODUÇÃO

Por meio da árdua viagem do ser humano pela busca do conhecimento e entendimento de como o mundo funciona chegou-se à descrição da natureza mediante quatro forças fundamentais: gravitacional, eletromagnética, fraca e forte. Essa última constitui o nosso principal interesse nesta tese.

As partículas observadas na natureza que respondem à interação forte são conhecidas como hádrons, subdivididas em bárions (férmions) e mésons (bósons). Hoje, após mais de meio século da proposta do modelo de quarks, inspirado pela busca de um modelo que pudesse explicar a grande quantidade de hádrons descobertos experimentalmente ((Griffiths, 2008), Cap. 1), não há dúvidas de que os hádrons são partículas compostas, cujas características podem ser explicadas por meio da atual teoria formal dos quarks: a Cromodinâmica Quântica (QCD)¹. Uma revisão abrangente pode ser encontrada em diversos livros, como, por exemplo, na Ref. (Muta, 2010).

A QCD descreve a interação forte em função de partículas fundamentais coloridas, i.e. com carga de cor: quarks, férmions de spin $1/2$ e carga elétrica fracionária, e glúons, bósons de spin 1, mediadores desta interação que, diferentemente dos fótons da Eletrodinâmica Quântica (QED), podem auto-interagir, conferindo-lhe propriedades não triviais à QCD. Uma dessas propriedades é a liberdade assintótica, que faz com que a sua constante de acoplamento (α_s) se torne pequena para altas energias. Esse fenômeno nos permite usar a teoria de perturbação (PT) para calcular, por meio do formalismo da teoria quântica de campos (QFT), processos de interação entre quarks e glúons no regime de altas energias (Bethke, 2007). Por outro lado, para baixas energias (da ordem da massa do próton ~ 1 GeV), a constante de acoplamento forte aumenta, o que dificulta o uso da mesma como parâmetro de expansão e restringe o uso da PT. Além disso, a predição perturbativa da constante de acoplamento, devido às sutilezas da quantização da QCD (das quais falaremos mais adiante), padece do chamado pólo de Landau ($\alpha_s \rightarrow \infty$) que impede o uso da PT tradicional além desta região.

Além da liberdade assintótica, que permite tratar as partículas coloridas como partículas quase livres para altas energias, a QCD apresenta uma outra característica, o confinamento de cor (Greensite, 2011), que estabelece que as partículas coloridas como os quarks e os glúons não podem ser observadas de forma livre, estando elas confinadas em estados ligados incolores (hádrons). Esta característica foi inicialmente associada à QCD devido à ausência experimental de quarks e glúons livres e à observação exclusiva

¹ Isso também é válido para os chamados hádrons exóticos, entre eles os tetraquarks (mésons) e pentaquarks (bárions) (Aaij *et al.*, 2020; Aaij *et al.*, 2021).

de hádrons no espectro físico da interação forte (Workman *et al.*, 2022)².

A compreensão do mecanismo do confinamento tanto quanto das propriedades hadrônicas em função de quarks e glúons são atualmente questões não resolvidas completamente. Porém, é considerado que a explicação desses fenômenos reside na região de baixas energias, i.e. na região não-perturbativa da QCD, cuja resolução representa um grande desafio.

A dificuldade de acessar as informações não-perturbativas deve-se em parte ao comportamento da constante de acoplamento forte em baixas energias que, como mencionado anteriormente, não permite, pelo método perturbativo usual, calcular analiticamente e de primeiros princípios as propriedades da interação forte em baixas energias. Por essa razão, se faz necessário abordar a QCD infravermelha por meio de fenomenologia, teorias efetivas ou técnicas numéricas, que possuem as suas próprias vantagens e desvantagens, mas que nos permitem obter informações (aproximadas) da região de baixas energias da interação forte. E, mesmo que ainda não exista uma demonstração formal do mecanismo do confinamento, atualmente uma grande quantidade de evidências numéricas respaldam a ideia de uma QCD confinante (Greensite, 2003; Alkofer; Greensite, 2007).

Na busca por entender o confinamento pode ser tentador acreditar que a sua origem reside simplesmente no grande valor do acoplamento forte. Essa ideia pode ser um mal entendido devido ao comportamento do acoplamento perturbativo nas proximidades do pólo de Landau ($\alpha_s \rightarrow \infty$). Porém, tudo isso deve ser analisado com cuidado, já que o pólo de Landau não é físico e sim um resultado espúrio na região de baixas energias devido às limitações do enfoque perturbativo usual na QCD.

As evidências parecem indicar que o acoplamento forte em baixas energias é finito, e que não necessariamente os acoplamentos quark-glúon, tri-glúon, etc nos processos infravermelhos devem ter o mesmo comportamento, podendo ter valores relativamente grandes ou inclusive nulos ((Deur; Brodsky; Teramond, 2016), Tab. 5.2). Por outro lado, no regime perturbativo todas essas definições do acoplamento devem coincidir com o resultado de altas energias ((Peskin; Schroeder, 1995), Cap. 16).

Em si, mais do que a causa, o comportamento do acoplamento forte é mais um ingrediente no confinamento de cor. Outro ingrediente, devido à sua auto-interação, parece ser a capacidade dos glúons de formarem tubos de fluxo de cor entre os quarks. Algumas tentativas de entender o confinamento apontam para um potencial entre um par quark-antiquark pesado que cresce linearmente com a distância entre eles, garantindo assim que eles permanecerão confinados dentro de estados ligados, os mésons. Do ponto de vista fenomenológico, isto seria devido à formação de um tubo de fluxo de cor entre o

² Uma outra característica da QCD é a quebra de simetria quiral (χ SB) (simetria aproximada), responsável pela massa dos hádrons ser muitas vezes maior do que a soma das massas de seus constituintes isolados.

par quark–antiquark, formando uma espécie de corda (modelo de tensão na corda). Por outro lado, a propriedade de crescimento linear do potencial é bem conhecida por estar conectada com a noção de confinamento da lei de área do *loop* de Wilson na teoria de calibre puro (QCD sem quarks) e tem sido explorada em diferentes contextos, recebendo corroboração robusta das simulações numéricas (Greensite, 2011).

Outra abordagem para tentar entender o confinamento e outras propriedades não-perturbativas é construir uma teoria consistente que seja simultaneamente válida no regime de baixas energias da interação forte e passível de investigações (semi-)analíticas. Porém, esse tipo de formulação representa ainda um obstáculo formidável. Seguindo essa linha, foram propostos modelos baseados na presença de ambiguidades na integral de caminho dos glúons, as chamadas cópias de Gribov (Gribov, 1978). A principal técnica analítica de quantização de uma teoria de campos no contínuo requer a fixação do gauge, pois na integração funcional os campos de gauge apresentam uma redundância de estados físicos equivalentes devido à simetria local da teoria. Na QCD, isso geralmente é feito através da proposta de Faddeev e Popov (Faddeev; Popov, 1967), que é consistente no nível perturbativo. Porém, como mostrou Gribov, campos equivalentes continuavam sendo integrados.

A proposta de Gribov foi então restringir a integração do campo a uma região – chamada de região de Gribov – livre de ambiguidades³. Mais tarde, Zwanziger formulou uma ação local que implementa a ideia de Gribov modificando a teoria por meio da chamada condição de horizonte (Zwanziger, 1989b), que define o valor de um novo parâmetro com unidade de massa. De fato, na obra seminal de Gribov já está presente um parâmetro massivo, sendo conhecido como massa de Gribov.

O enfoque de Gribov–Zwanziger (GZ) mostrou-se em compatibilidade com as simulações numéricas da época (Furui; Nakajima, 2004; Oliveira; Silva, 2005), mas as predições desse formalismo para propagadores da teoria entrariam em conflito com os resultados numéricos posteriores (Cucchieri; Mendes, 2008b; Cucchieri; Mendes, 2008a). Isso motivou um “refinamento” do formalismo originando o que hoje é conhecido como formalismo de Gribov–Zwanziger refinado (RGZ), que inclui na ação da teoria informações não-perturbativas adicionais, como são os termos massivos relacionados a condensados de dimensão 2, que permitem alcançar uma boa compatibilidade com as simulações numéricas atuais (Dudal *et al.*, 2008a; Dudal; Oliveira; Silva, 2018).

Antes de Gribov já tinham sido considerados termos de massa para o glúon na ação do mesmo. um exemplo disso foi o trabalho proposto por Curci e Ferrari (Curci; Ferrari, 1976b), mas o modelo foi abandonado por algumas inconsistências (Curci; Ferrari, 1976c; Delbourgo; Twisk; Thompson, 1988). Apesar disso, devido ao comportamento

³ Apesar disso, nesta região configurações equivalentes do campos ainda estão presentes (Baal, 1992)

do propagador do glúon nas simulações numéricas, há alguns anos surgiu novamente o interesse nesse modelo e no seu termo de massa gluônica (Tissier; Wschebor, 2011). A lagrangiana massiva do glúon usada em (Tissier; Wschebor, 2011) é um caso particular do modelo de Curci–Ferrari. Em (Serreau; Tissier, 2012), foi mostrado que é possível relacionar o termo de massa do glúon com as cópias de Gribov. Porém, os autores de (Tissier; Wschebor, 2011) preferem abordar o problema da origem do termo de massa do glúon de um ponto de vista fenomenológico. Isso permitiu a esses autores mostrar, de uma forma mais simples, que a lagrangiana massiva do seu modelo consegue capturar o comportamento não perturbativo do setor gluônico da QCD em compatibilidade com as simulações numéricas atuais (Gracey *et al.*, 2019).

Em particular, nosso interesse reside nesse tipo de formalismo que estuda o comportamento do propagador do glúon devido às consequências não-perturbativas das cópias de Gribov e que ao mesmo tempo são motivados pelas simulações numéricas de QCD na rede, que mostram que o glúon se comporta como um ente (partícula) com um massa dinâmica de valor finito a baixas energias, mas que desaparece a altas energias, tal como o prediz o enfoque perturbativo usual (de Faddeev e Popov). Devido ao confinamento não podemos pensar nesse termo de massa como uma massa física e nem conceber o glúon como uma partícula física.

O propagador do glúon (gauge de Landau) é modificado pela inclusão de escalas não-perturbativas como, por exemplo, uma massa efetiva para o glúon, tal como no caso do modelo de Curci-Ferrari (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019), ou modificado pela presença do horizonte de Gribov, que gera o parâmetro de massa de Gribov no caso GZ (Gribov, 1978; Zwanziger, 1989b; Zwanziger, 1990), ou pela inclusão adicional de condensados não-perturbativos no caso RGZ (Dudal *et al.*, 2008b). Esses enfoques tentam construir uma teoria consistente a altas energias e que ao mesmo tempo seja capaz de reproduzir resultados da região não-perturbativa. E tudo isso é feito sondando o problema da fixação de gauge em baixas energias na abordagem da integração funcional (principalmente, nos casos GZ e RGZ). Esses modelos provam ser funcionais, obtendo uma boa concordância com o propagador do glúon na rede e outras quantidades. Ao ajustar o propagador do glúon na rede, esses modelos adquirem propagadores com pólos complexo-conjugados (Tissier; Wschebor, 2011; Reinosa *et al.*, 2017; Gracey *et al.*, 2019; Oliveira; Silva, 2012; Dudal; Oliveira; Silva, 2018).

A estrutura do propagador com pólos complexos, dos formalismos mencionados, viola o axioma de reflexão de positividade, o que leva a não poder identificar o glúon como uma partícula física (estado assintótico). Esta característica é consistente com a noção do confinamento. A busca de outras propriedades confinantes nesses formalismos é obviamente de grande importância para estabelecer o seu papel como realizações infravermelhas consistentes da QCD.

Como isso em mente, a partir dos diferentes modelos mencionados, estudamos

alguns observáveis nesta tese. Nossa abordagem será supor o confinamento como algo intrínseco à QCD, em vez de tentar prová-lo, e então examinar em alguns observáveis as consequências e o impacto fenomenológico das características não-perturbativas dos modelos que serão estudados.

Primeiro, focamos no cálculo do potencial estático entre um par quark–antiquark pesado, relacionado com a propriedade do confinamento linear. Nosso objetivo é investigar o regime de validade dessas descrições e a sua compatibilidade com as previsões perturbativas, e também se tais modelos podem produzir confinamento de quarks através de um potencial linear. Por sua vez, esse potencial está relacionado ao espectro dos níveis de energia do Quarkônio, que pode ser observado indiretamente (Brambilla; Sumino; Vairo, 2001; Mateu *et al.*, 2019).

O outro observável analisado nesta tese é o momento magnético, em particular o do próton. Sabendo da dificuldade que o cálculo apresenta, optamos por usar o modelo de quark constituinte (CQM), que como qualquer modelo possui as suas próprias vantagens e limitações. O CQM basicamente condensa os efeitos das interações fortes em quarks de valência vestidos, tratando-os como quarks constituintes responsáveis pelas propriedades do hádron.

Uma vez que esse modelo (CQM) permite calcular o momento magnético do próton em função dos momentos magnéticos de seus quarks (constituintes), analisamos o vértice quark–fóton (QPV) a fim de extrair o momento magnético dos quarks. O vértice quark–fóton (até a ordem de um *loop*) recebe contribuições da QED e da QCD. As correções de QED possuem parâmetros perturbativos bem definidos, enquanto a contribuição da QCD depende do propagador do glúon, que, conforme mencionado acima, pode apresentar diferentes estruturas analíticas de acordo com o modelo efetivo empregado. Com essa análise, foi possível estudar o impacto fenomenológico desses diferentes tipos de propagadores do glúon no cálculo do momento magnético dos quarks e, conseqüentemente, dos prótons.

A tese está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 1 faremos uma rápida revisão sobre a história da Cromodinâmica Quântica por meio das previsões teóricas e alguns enfoques fenomenológicos que, junto aos resultados experimentais, contribuíram com a aceitação dessa teoria fundamental que rege a interação de quarks e glúons. Em seguida, revisaremos brevemente o formalismo funcional da QCD e das respectivas ferramentas matemáticas envolvidas nele, terminando com o problema da fixação de gauge e as cópias de Gribov.

No Capítulo 2, faremos uma breve descrição de diferentes abordagens não-perturbativas para a QCD. Em particular, descreveremos os modelos que serão usados nesta tese, mas antes disso achamos prudente focar em algumas abordagens não perturbativas que tentam explorar a região de baixas energias da QCD, tais como o formalismo das Equações de Schwinger–Dyson (SDE) e as simulações numéricas de QCD na rede. Finalizaremos retomando a descrição dos modelos de: (i) Gribov–Zwanziger, como uma reformulação do

enfoque de Gribov e as suas consequências no propagador do glúon; (ii) Gribov–Zwanziger refinado, como uma generalização do enfoque GZ por meio de condensados que permitem recuperar a harmonia com os resultados não perturbativos do propagador do glúon; e por último falaremos do (iii) modelo massivo de Curci–Ferrari como uma extensão massiva do enfoque perturbativo e a sua abordagem segura no infravermelho (sem geração do pólo de Landau), que permite, por meio do termo de massa efetiva para o glúon, capturar informação não perturbativa.

No Capítulo 3, apresentamos os resultados para o potencial quark–antiquark estático calculado com os 3 modelos mencionados no Cap. 2 (GZ, RGZ, Massivo). Faremos uma rápida introdução ao cálculo do potencial estático entre quarks massivos para depois analisar os diferentes comportamentos do potencial, de cada modelo mencionado, nas regiões de curtas, intermediárias e longas distâncias. Nesta análise, ênfase é dada aos resultados do modelo de Curci–Ferrari, devido ao comportamento semilinear do seu potencial na região de distâncias intermediárias.

No Capítulo 4, apresentamos os resultados para o momento magnético dos quarks e do próton. Fazemos uma breve introdução ao momento magnético e ao modelo de quark constituinte (CQM) para depois detalhar os resultados da contribuição da QCD ao vértice quark–fóton e a extração, a partir desse vértice, do momento magnético dos quarks para os modelos GZ, RGZ e Massivo (Curci–Ferrari). Finalizamos com a análise do comportamento do momento magnético do próton de cada modelo mencionado.

Finalmente, no Capítulo 5, apresentaremos as conclusões e algumas perspectivas desta tese.

Encerrando esta seção, queremos também indicar as nossas publicações que serviram para o desenvolvimento dos capítulos desta tese: *Quark-antiquark potentials in non-perturbative models* (Mena; Palhares, 2018), *Quark-antiquark potential in the Curci–Ferrari model (work in progress)*, e *Quark-photon vertex in confining models* (Mena; Palhares, 2023) (*PRD under review*).

1 INTRODUÇÃO À CROMODINÂMICA QUÂNTICA E O PROBLEMA DE GRIBOV

Embora atualmente seja bem mais estabelecido que quarks e glúons formem estados ligados incolores, conhecidos como hádrons, a aceitação destas partículas coloridas como entes físicos e não puramente matemáticos precisou percorrer um grande caminho de resultados experimentais, cálculos fenomenológicos e previsões teóricas. Diferentemente dos hádrons, quarks e glúons nunca foram observados de forma direta no espectro da força forte, levando ao fenômeno do confinamento na QCD.

O modelo inicial de quarks (Zweig, 1964; Gell-Mann, 1964) ditava que existiam 3 tipos ou sabores (número quântico) de quarks e que todos os diferentes tipos de hádrons eram formados por combinações desses quarks e/ou antiquarks, que no caso dos bárions (próton, nêutron, etc) corresponderia a 3 quarks, e no caso dos mésons (píons, káons, etc), a pares quark-antiquark⁴. Atualmente, entende-se os hádrons como partículas mais complexas. No caso do próton por exemplo, sendo este um bárion, ele estaria formado não só por 3 quarks, hoje considerados como quarks de valência, mas também por um “mar” de quarks e glúons virtuais que permeiam a sua estrutura (Fig. (1a)).

Na busca por entender do que o próton era feito, experimentos com processos de aniquilação $e^- e^+$ em hádrons e de espalhamento profundamente inelástico (DIS), feitos no SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) por volta de 1968 (Friedman, 1991; Bloom *et al.*, 1969), levaram à conclusão de que o próton possuía uma estrutura interna com constituintes pontuais, que no seu momento foram chamados de partons (Feynman, 1969). As previsões teóricas (Callan; Gross, 1969; Bjorken, 1969) indicavam que esses constituintes deveriam se comportar como entes livres a altas energias, algo que seria corroborado experimentalmente (Bjorken; Paschos, 1969). Tudo isso e algumas coisas mais aportariam as evidências teóricas e experimentais (embora indiretas) de que os hádrons, e em particular o próton, eram partículas compostas por quarks (Kuti; Weisskopf, 1971; Friedman; Kendall, 1972).

O comportamento assintoticamente livre dos partons permitiu identificá-los como sendo os quarks⁵ e mostrar também que a teoria formal dos quarks e glúons, a cromodinâmica quântica (Fritzsch; Gell-Mann; Leutwyler, 1973), que mostrava a propriedade da liberdade assintótica para altas energias (Gross; Wilczek, 1973; Politzer, 1973), era compatível com a natureza.

⁴ Nos anos 1960, existia o método de classificação de hádrons chamado de *Eightfold Way* (Gell-Mann, 1961), mas este não permitia entender o porquê da extensa variedade dos mesmos.

⁵ Mais tarde os partons foram identificados como sendo os quarks, glúons e o mar virtual de partículas coloridas que compõem os hádrons.

Os quarks, que inicialmente foram propostos como partículas hipotéticas para tentar explicar a fenomenologia dos hádrons, hoje em dia, junto aos glúons, possuem suficiente evidência experimental (indireta) (Workman *et al.*, 2022) que consolida o seu lugar na física da interação forte e a descrição da mesma através da QCD (Fritzsch; Gell-Mann; Leutwyler, 1973) em função destas partículas coloridas. Porém, como já mencionamos, a ideia dos quarks enfrentava resistência na época, mesmo quando o modelo de quarks começou a fazer sucesso no entendimento dos hádrons, em parte devido a não observação experimental direta destas partículas coloridas, o que entre outras coisas levaria à proposição do fenômeno do confinamento de cor, no qual se estabeleceu que as partículas com carga de cor não podem ser encontradas de forma livre na natureza mas só formando estados singletos de cor (cor neutra), neste caso os hádrons.

Apesar disso, ainda não se tem uma demonstração formal analítica de como o confinamento, e a sua relação com essas propriedades da QCD, pode ser extraído a partir de primeiros princípios. O confinamento continua sendo hoje em dia um problema em aberto.

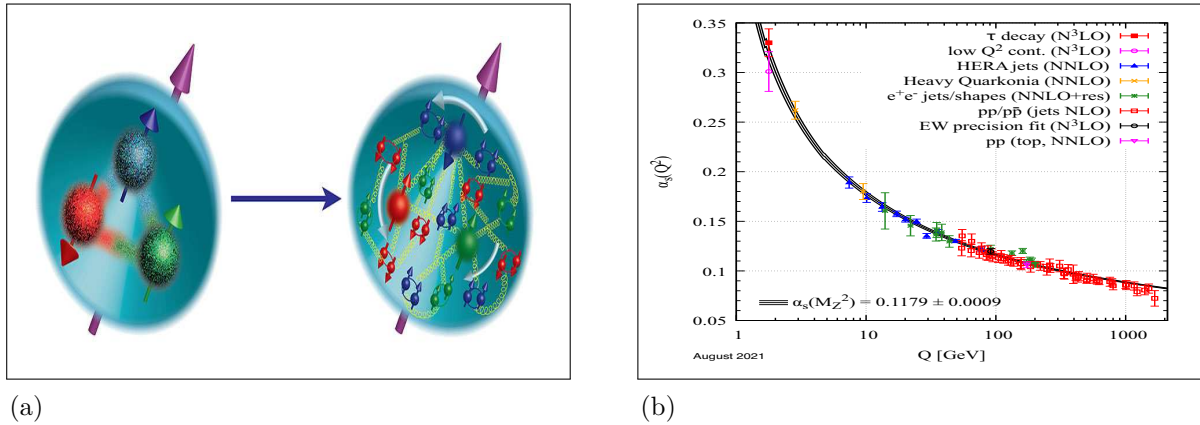
Essa propriedade tão importante, a carga de Cor dos quarks, que confere o nome à QCD, mesmo sendo inicialmente introduzida para solucionar problemas com o princípio de exclusão de Pauli (Fritzsch; Gell-Mann, 1971) (destacando o problema com o Bárion Δ^{++})⁶ possui evidência experimental, mostrando que os quarks realmente possuem 3 tipos de carga de cor (Halzen; Martin, 1984).

Podemos citar outros resultados experimentais que consolidaram a QCD como a teoria das interações fortes. Entre elas estão a já mencionada evidência da Cor, a espectroscopia de hádrons, a confirmação da existência do glúon através da produção de tri jatos (Brandelik *et al.*, 1979), os dados do DIS, das seções de choque, etc. Esses resultados experimentais podem ser achados em (Soding; Wolf, 1981).

Devemos destacar a espectroscopia de hádrons, já que a partir dela aumentaria a aceitação dos quarks e posteriormente permitiria a abordagem fenomenológica de sistemas de quarks pesados. Um sucesso importante corresponde à descoberta do méson J/ψ (Augustin *et al.*, 1974; Aubert *et al.*, 1974), cuja melhor explicação era que essa partícula correspondia a um estado ligado quark-antiquark de um novo tipo de quark: o *Charm*, de modo que essa partícula ficou conhecida como Charmonium (Appelquist; Politzer, 1975a; Rújula; Glashow, 1975b). Este acontecimento marcaria o início da chamada Revolução de Novembro (Griffiths, 2008) com posteriores descobertas de partículas que só eram bem explicadas em termos de quarks. Estes deveriam, então, ser algo físico e não puramente matemático (Gilman, 1985).

⁶ O. Greenberg (Greenberg, 1964) sugeriu que os quarks poderiam obedecer um outro tipo de estatística, a chamada “paraestatística” resolvendo o problema com o princípio de exclusão, mas não ficou claro se a paraestatística fazia sentido numa teoria de campo dos quarks.

Figura 1 - Modelo (espinorial) do próton e constante de acoplamento forte



Legenda: (a) Evolução do modelo do próton (spin) a partir do modelo mais simples (dos anos 1980) versus o modelo atual que inclui os quarks de valência, glúons e o mar de partículas virtuais coloridas. (b) Variação da constante de acoplamento: Diminuição da sua intensidade a altas energias (liberdade assintótica) e, aumento da mesma para baixas energias.

Fonte: (a) Accardi *et al.*, 2016, p. 4. (b) Workman *et al.*, 2022, p. 164.

A descoberta do quark *Charm* no méson J/ψ teve um grande impacto na espectroscopia de hádrons (Appelquist *et al.*, 1975b), já que devido a sua grande massa, comparada com a massa dos outros quarks, era possível a abordagem efetiva não relativística de sistemas contendo quarks pesados (Appelquist; Politzer, 1975a; Eichten *et al.*, 1975). Por sua vez, naquela época a QCD não ofereceu expressões analíticas para sistemas como o Charmonium ou estados ligados de quarks, em grande parte devido ao confinamento de cor e sua relação com a sua constante de acoplamento que aumenta para baixas energias (Fig. (1b)) limitando o uso da teoria de perturbação. Ao não poder descrever esses sistemas de quarks a partir de primeiros princípios, os investigadores optaram por recorrer a modelos efetivos para a QCD nos quais fosse possível manter características e propriedades da QCD e ao mesmo tempo realizar cálculos fenomenológicos que pudessem ser contrastados com resultados experimentais (DeGrand *et al.*, 1975).

Um modelo fenomenológico que teve (Quigg; Rosner, 1977; Eichten *et al.*, 1978; Stanley; Robson, 1980; Godfrey; Isgur, 1985) e ainda tem sucesso na descrição da espectroscopia de estados ligados de quarks pesados (vide (Mateu *et al.*, 2019) e referências ali citadas), foi o proposto em (Eichten *et al.*, 1975) para descrever o espectro do Charmonium. Este é o bem conhecido potencial de Cornell, que mistura as propriedades da liberdade assintótica, com um potencial do tipo Coulomb para curtas distâncias e as ideias de confinamento linear para intermediárias e longas distâncias (baixas energias).

Já desde o início dos anos 1960 (Regge, 1959; Chew; Frautschi, 1962; Godfrey; Isgur, 1985) era conhecido que os mésons e bárions podiam ser ordenados em trajetórias oblíquas quase lineares em função do seu momento total J versus a sua massa ao quadrado,

as chamadas trajetórias de Regge. Estas levariam à idealização de um modelo onde os quarks poderiam estar conectados (ingenuamente) por uma “barra” (ou corda) e o giro ao redor do seu eixo perpendicular permitia explicar a relação linear de J vs m^2 , $J = (2\pi\sigma)^{-1} m^2$, onde σ tem unidades de massa/comprimento ou de tensão na corda. Esse enfoque indicava também que a energia entre os quarks dependia de forma linear com a distância de separação (Bali, 2001).

Uma maneira um tanto mais elegante de abordar a formação de tal objeto (barra ou corda) entre os quarks, foi propor de forma fenomenológica a formação de um tubo de fluxo de cor entre eles (Kogut; Susskind, 1975; Casher; Neuberger; Nussinov, 1979; Takahashi *et al.*, 2002). Neste cenário, as linhas de campo de cor estariam contidas numa região aproximadamente cilíndrica cuja área transversal se mantém quase constante à medida que os quarks se afastam. Dessa maneira, a energia potencial contida no tubo de fluxo cresce linearmente, mantendo os quarks confinados a estados ligados (Greensite, 2011). Uma representação pictórica desse processo, para um par quark-antiquark ($q\bar{q}$), pode ser visto na Fig. (2).

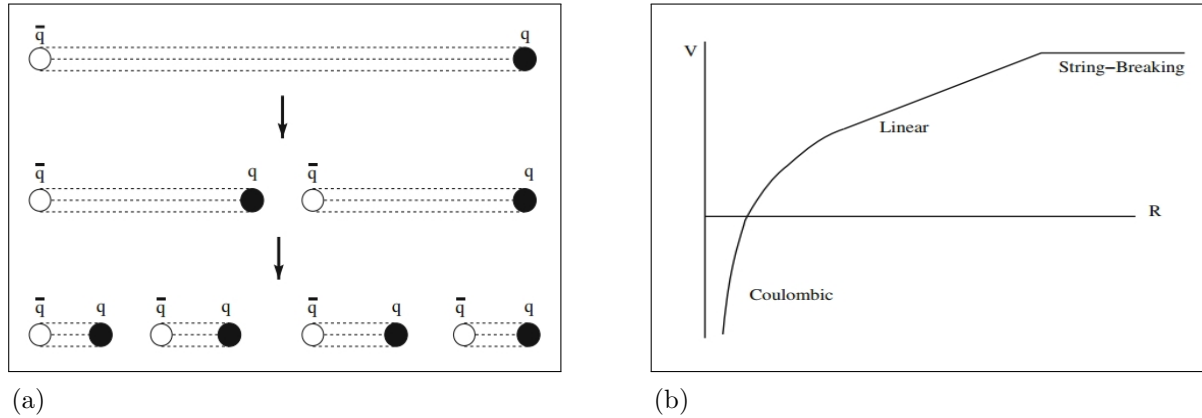
Essa tentativa de entender o confinamento através de um potencial quark-antiquark estático, que cresce linearmente com a escala de separação entre eles, teve apoio nos resultados das simulações numéricas de potenciais estáticos (Bali; Schilling; Wachter, 1997; Bali, 2001) feitas usando a formulação da QCD na rede (Lattice QCD) (Wilson, 1974). De fato, é bem conhecido que essa propriedade de crescimento linear do potencial esta relacionada com a lei de área do *loop* de Wilson na teoria de calibre puro⁷, que indica que no limite de quarks muito massivos, os estados ligados podem ser descritos através de um potencial linear efetivo.

Na época, o método desenvolvido por K. Wilson (Wilson, 1974) tinha como intenção implementar um enfoque não perturbativo da QCD a partir de primeiros princípios e que mantivesse a invariância de calibre. Essa formulação fez uso de uma discretização do espaço-tempo Euclidean, permitindo assim abordar a QCD através de recursos computacionais (Creutz, 1979; Creutz, 1980; Bali, 2001), os quais obviamente estavam e estão (um pouco menos) limitados pela potência computacional da época. Este tipo de formulação numa rede regula a própria teoria e aceita tratamentos em termos do inverso da constante de acoplamento para valores grandes da mesma, complementando assim a expansão perturbativa em função da constante de acoplamento. Em particular, as ideias e técnicas presentes no desenvolvimento do método de Wilson estimularam a proposição de um modelo de tubo de fluxo para hádrons (Isgur; Paton, 1985).

O critério do confinamento linear para grandes distâncias não é completamente satisfatório para uma teoria completa da QCD, já que a inclusão de quarks dinâmicos ou

⁷ Isto tem sido explorado também em diferentes contextos, recebendo corroboração robusta de investigações de QCD na rede (Greensite, 2011).

Figura 2 - Relação qualitativa entre o modelo de tensão na corda e o potencial $q\bar{q}$ estático.



Legenda: (a) Formação do tubo de fluxo de cor entre um par $q\bar{q}$ e posterior formação de pares $q\bar{q}$ devido à quebra do mesmo. (b) Representação pictórica do potencial $q\bar{q}$ estático para QCD, cujo comportamento, em distâncias intermediárias e longas, estaria relacionado à formação e ruptura do tubo de fluxo, respectivamente.

Fonte: Greensite, 2011, p. 23-24.

de massa pequena, leva à quebra do tubo de fluxo (Philipsen; Wittig, 1998; Laermann *et al.*, 1999; Detar; Heller; Lacock, 2000) e a posterior formação de pares quark-antiquark, já que isso seria mais favorável energeticamente (Fig. (2a)). A quebra da corda implica que o potencial deixa de ser linear e se torna constante, tal como é mostrado na Fig. (2b). Por outro lado, a quebra da corda não implica a falta do confinamento mas sim que este poderia estar relacionado à transição entre o potencial linear e o potencial constante após a ruptura do tubo de fluxo e a formação dos novos pares quark-antiquark. Porém, como muitas coisas relacionadas ao confinamento, o mecanismo do mesmo não é bem entendido, inclusive nestes casos. Além de tudo, o mais prudente é esperar que a ideia do potencial só seja aplicável a casos de quarks massivos como o *Charm* ou *Bottom*, já que para eles o uso da aproximação não-relativística de um potencial efetivo faz mais sentido do que no caso de quarks leves.

Até este ponto, e sem intenção de fazer uma revisão histórica, mencionamos resultados experimentais, previsões teóricas e abordagens fenomenológicas, que permitem ter uma ideia do porquê da QCD ser considerada a teoria da interação forte. Também mencionamos algumas maneiras de como tem sido abordado o confinamento dos quarks por meio de modelos simples mas funcionais, como o do potencial linear, que permitiram explicar em grande parte os resultados da espectroscopia dos hádrons.

O considerável sucesso das abordagens fenomenológicas não elimina o desafio de tentar entender como as propriedades associadas ao confinamento, tal como o crescimento linear do potencial $q\bar{q}$ estático, surgem a partir da própria QCD. Porém, antes de abordar essa questão nos próximos capítulos, apresentaremos de maneira formal uma breve

introdução ao formalismo da QCD e ao chamado problema de Gribov nas seções que seguem.

1.1 A Lagrangiana da Cromodinâmica Quântica

A cromodinâmica quântica descreve a interação forte em função de quarks e glúons através de uma teoria de gauge não-Abeliana (Yang; Mills, 1954; Park *et al.*, 1989), invariante sob a transformação do grupo de simetria SU(3), que está associada à carga de Cor dessas partículas⁸. Tal descrição é feita através da sua lagrangiana quantizada no espaço de Minkowski (Peskin; Schroeder, 1995):

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi}_{i\alpha}[(i\not{D} - m)^{\alpha\beta} \delta_{ij}] \psi_{j\beta} + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac}) c^c, \quad (1)$$

onde a parte que descreve puramente os glúons, chamada de lagrangiana de Yang-Mills, é:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a, \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2)$$

sendo A_μ^a o campo dos glúons, $G_{\mu\nu}^a$ o seu tensor do campo associado, g_s um parâmetro que depois será associado à constante de acoplamento forte α_s . Mais adiante, falaremos da necessidade de fixação do calibre, que introduzirá um termo extra na lagrangiana dos glúons.

O fator f^{abc} corresponde às chamadas constantes de estrutura do grupo SU(N) (SU(3) no nosso caso), relacionadas aos geradores do grupo t^a (matrizes hermitianas), os quais não comutam e têm a seguinte relação:

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c \quad \wedge \quad \text{Tr}[t^a t^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (3)$$

com a, b, c sendo índices de cor, assumindo valores $1, 2, \dots, d[G(N)] = 8$, onde $d[G(N)] = N^2 - 1$ é a dimensão da representação adjunta ($G(N)$) à qual pertencem os geradores do grupo e também o campo dos glúons.

A parte fermiônica, às vezes chamada de matéria, que descreve os quarks é:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}_{i\alpha} [(i\not{D} - m_q)^{\alpha\beta} \delta^{ij}] \psi_{j\beta} = \bar{\psi}_{i\alpha} [(i\not{D} - m_q)^{\alpha\beta} \delta^{ij} + g_s (\gamma^\mu)^{\alpha\beta} A_\mu^a t_{ij}^a] \psi_{j\beta}, \quad (4)$$

onde $\psi_{j\beta}$ é um spinor que corresponde ao campo dos quarks, α e β a índices de Dirac, e i, j aos índices da representação fundamental do grupo de simetria SU(N), i.e. $i, j =$

⁸ A QCD é um caso particular das teorias de gauge não-Abelianas do Grupo SU(N), sendo a primeira construída por C. Yang e R. Mills (Yang; Mills, 1954).

$1, \dots, N = 3$. Sabe-se que existem 6 sabores de quarks⁹, logo precisaríamos de 6 termos $\mathcal{L}_F$ (Eq. (4))¹⁰. Tais quarks pertencem à representação fundamental do grupo $SU(3)$, de modo que a derivada covariante, D , está definida na representação fundamental em termos das matrizes t^a :

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu^a t^a. \quad (5)$$

A notação $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$ corresponde à contração da derivada covariante com a matriz gama de Dirac, γ^μ .

Na parte fermiônica da lagrangiana da QCD, a derivada covariante acopla o campo dos quarks ao campo dos glúons através dos geradores do grupo t^a com a intensidade do parâmetro g_s . Em física de partículas esta surge devido à exigência de manter a invariância local da lagrangiana e portanto do termo cinético $\bar{\psi}\not{D}\psi$ do campo ψ sob transformações $SU(N)$: $\psi(x) \rightarrow V(x) \psi(x)$, com $V(x) = \text{Exp}[i\theta^a(x)t^a]$, sendo $\theta^a(x)$ os parâmetros da transformação.

Isso é obtido através do comparador: uma matriz unitária $N \times N$ que conecta de forma contínua pontos diferentes do espaço-tempo, com a seguinte lei de transformação:

$$U(y, x) = V(y) U(y, x) V^+(x) \quad , \quad U(y, y) = 1. \quad (6)$$

A forma infinitesimal do comparador, em termos dos seus geradores (hermitianos), fica escrita como:

$$U(x + \epsilon n, x) \simeq 1 + i g_s \epsilon n^\mu A_\mu^a(x) t^a + O(\epsilon^2), \quad (7)$$

que dá origem de forma natural a um campo vetorial, $A_\mu^a(x)$, o qual, na QCD, é associado ao campo dos glúons. Outras expressões úteis que podem ser extraídas dessas definições, Eqs. (6) e (7), são a lei de transformação do campo $A_\mu^a(x)$:

$$A_\mu^{'a} t^a \rightarrow V(x) \left(A_\mu^a t^a + \frac{i}{g_s} \partial_\mu \right) V^+(x), \quad (8)$$

e a sua forma infinitesimal:

$$A_\mu^{'a} t^a \rightarrow A_\mu^a t^a + \frac{1}{g_s} (\partial_\mu \theta^a) t^a + i [\theta^a t^a, A_\mu^b t^b]. \quad (9)$$

Desta ultima equação pode ser extraída a seguinte relação infinitesimal:

$$\delta A_\mu^a \rightarrow \frac{1}{g_s} \left(D_\mu^{ac} \theta^c(x) \right) \wedge D_\mu^{ac} = \delta^{ac} \partial_\mu - g_s f^{acb} A_\mu^b, \quad (10)$$

⁹ A saber: *Up* (u), *Down* (d), *Strange* (s), *Charm* (c), *Bottom* (b) e *Top* (t) (Workman *et al.*, 2022).

¹⁰ Na Eq.(4), não explicitamos o índice de sabor a fim de manter a notação o mais simples possível.

sendo D_μ^{ac} a derivada covariante na representação adjunta.

Para a construção da Lagrangiana do campo A_μ^a (Eq. (2)), é usado um resultado obtido através da lei de transformação do comutador das derivadas covariantes:

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = V(x)[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = [\partial_\mu - igA_\mu^a t^a, \partial_\nu - igA_\nu^b t^b]\psi(x) \equiv -ig G_{\mu\nu}^a t^a \psi(x),$$

onde definimos $G_{\mu\nu}^a t^a = \partial_\mu A_\nu^a t^a - \partial_\nu A_\mu^a t^a - ig_s A_\mu^a A_\nu^b [t^a, t^b]$, que não é invariante de gauge:

$$\begin{aligned} [D'_\mu, D'_\nu]\psi'(x) &= V(x)[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \\ G_{\mu\nu}^{'a} t^a \psi'(x) &= V(x) G_{\mu\nu}^a t^a V^+(x) \psi'(x) \\ G_{\mu\nu}^a t^a &\rightarrow G_{\mu\nu}^a t^a + [i\alpha^a t^a, G_{\mu\nu}^b t^b], \end{aligned} \quad (11)$$

onde no último passo foi aplicada uma transformação infinitesimal. Com essas relações, é possível escrever um termo invariante, sendo este:

$$\text{Tr}[(G_{\mu\nu}^{'a} t^a)^2] = \text{Tr}[V G_{\mu\nu}^a t^a V^+ V G_{\mu\nu}^{ab} t^b V^+] = \text{Tr}[(G_{\mu\nu}^a t^a)^2] = \frac{1}{2}(G_{\mu\nu}^a)^2, \quad (12)$$

que corresponde à Lagrangiana de Yang-Mills.

A não comutatividade dos geradores do grupo (Eq. (3)) gera na lagrangiana dos glúons (vide Eqs. (2) e (11)) termos de auto-interações triplas e quárticas:

$$-g_s f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{1}{4} g_s^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e}, \quad (13)$$

o que confere aos glúons, mediadores das interações na QCD, propriedades de auto-interação não triviais.

1.2 Quantização da QCD e o propagador do glúon

O estudo de algum aspecto da natureza sempre envolve o uso de teorias que permitem-nos obter algum tipo de informação através de ferramentas matemáticas. No caso das interações fundamentais, isso é feito através da quantização da sua respectiva teoria clássica, o que nos deixa com uma teoria quântica de campos¹¹, cuja informação pode ser codificada nas chamadas funções de Green de n pontos (ou de correlação). Para este procedimento, existem algumas ferramentas matemáticas tais como o formalismo canônico ou de operadores, o qual é o ponto de partida para uma outra ferramenta, o

¹¹ A abordagem da gravitação, diferentemente do restante das interações fundamentais, ainda não foi formulada de maneira consistente como uma QFT.

formalismo funcional (Feynman, 1948). Esta última será adotada nesta tese.

A relação entre o formalismo funcional e o canônico para funções de n pontos, calculadas como o valor esperado no vácuo do produto dos n operadores do campo em tempo ordenado ($\mathcal{T}$), pode ser escrita como (Peskin; Schroeder, 1995; Ryder, 1996; Muta, 2010):

$$\langle 0 | \mathcal{T} [\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}}}, \quad (14)$$

sendo $\mathcal{L}$ a lagrangiana clássica e ϕ um tipo de campo geral (escalar, espinorial, vetorial, etc, para os quais devem ser levadas em conta as suas respectivas propriedades).

A Eq. (14) guarda uma estreita relação com o formalismo da mecânica estatística já que, a não ser pelo fator i nas integrais, nos lembra do cálculo de valores esperados usando a função de partição canônica. Em certos casos, como por exemplo em simulações numéricas, é mais conveniente trabalhar com o cálculo desse tipo de funções, no espaço Euclideano. A conexão entre estes formalismos pode ser feita através da rotação de Wick (Peskin; Schroeder, 1995) usando $t \rightarrow -i\tau$ (τ : “tempo euclideano”), que nos permite escrever (vide apêndice E):

$$\frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_M}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_M}} \equiv \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{- \int d^4x \mathcal{L}_E}}{\int \mathcal{D}\phi e^{- \int d^4x \mathcal{L}_E}}, \quad (15)$$

sendo $\mathcal{L}_M$ e $\mathcal{L}_E$ as lagrangianas no espaço de Minkowski e Euclideano, respectivamente. É útil mencionar estas relações já que alguns enfoques ou modelos para QCD que serão usados nesta tese foram desenvolvidos no espaço euclideano, e quando for necessário indicaremos que tipo de espaço esta sendo usado.

No formalismo funcional, um objeto crucial é o chamado Funcional Gerador $Z[J]$, que permite obter as funções de correlação através da incorporação de uma fonte artificial J (Schwinger, 1951a) e o uso da derivação funcional¹²:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \text{Exp} \left[i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)] \right]. \quad (16)$$

Por exemplo, a função de correlação de 2 pontos pode ser escrita como:

$$\langle 0 | \mathcal{T} [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}}} = \frac{1}{Z[J]} \frac{(-i)^2 \delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0}, \quad (17)$$

expressão esta que pode ser generalizada para qualquer função de n pontos:

¹² Detalhes disto podem ser achados em diversos livros de QFT. Em particular, encontra-se uma apresentação bastante instrutiva nas Refs. (Das, 2006; Ryder, 1996).

$$\langle 0 | \mathcal{T} [\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle = \frac{(-i)^n}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (18)$$

É importante também definir o Funcional Gerador das funções de correlação conectadas, $W[J]$, definido como $Z[J] = e^{iW[J]}$, já que são realmente estas últimas as que contribuem diretamente no cálculo de amplitudes de processos físicos numa teoria quântica de campos (Peskin; Schroeder, 1995; Ryder, 1996; Muta, 2010).

Se tentarmos calcular a função de 2 pontos para o campo A_μ^a , o chamado propagador do glúon, usando as Eqs. (14), (16) e (18), veremos rapidamente que surge um problema: o resultado diverge. Para ver isso, partamos da ação S_0 e da lagrangiana clássica do glúon sem interação $\mathcal{L}_0$ (os termos de interação correspondem à Eq. (13)):

$$S_0[A] = \int d^4x \mathcal{L}_0 \quad \wedge \quad \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad \wedge \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a, \quad (19)$$

e do funcional gerador do glúon livre $Z_{J=0}[A]$ (sem incluir a fonte por simplicidade):

$$Z_0[A] = \int \mathcal{D}A e^{iS_0[A]} \quad \wedge \quad S_0[A] = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a(x) \left[\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu^a(x). \quad (20)$$

É justamente no termo $[\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu]$ onde origina-se o problema do propagador do glúon¹³. Olhando para a sua representação no espaço de Fourier, $-p^2 g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu$, é evidente que qualquer fator do tipo $p_\mu f(p)$ faz com que esse termo se anule, o que nos deixa com $Z_0[A] = \int \mathcal{D}A \rightarrow \infty$. Esta divergência é entendida como um problema relacionado à invariância de gauge da teoria, pois estaríamos integrando sobre configurações que são fisicamente equivalentes, já que a integração funcional leva em conta todas as configurações possíveis do campo, inclusive aquelas conectadas por transformações de gauge.

De fato, analisando a transformação infinitesimal do campo de gauge A_μ^a (Eq. (10)): $A_\mu^{a'} \equiv A_\mu^{a\theta} \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu^{ac} \theta^c(x)$, percebe-se que, mesmo quando $A_\mu^a = 0$, há contribuições do tipo $\partial_\mu \theta^a(x)$, o que mostra que estamos diante de uma redundância na contagem de estados físicos. Faz-se necessária alguma maneira de escolher apenas uma configuração representativa frente a todas as possíveis.

Faddeev e Popov (Faddeev; Popov, 1967) propuseram resolver esse problema mediante uma condição de fixação do gauge $\mathcal{F}(A)$, que no gauge de Lorenz corresponde à condição¹⁴: $\mathcal{F}(A) = \partial_\mu A_\mu^a = 0$ (invariante de Lorentz). No procedimento de Faddeev-Popov (FP) foi feito uso de uma generalização da integral da Delta de Dirac:

$$1 = \int \mathcal{D}\theta(x) \delta(\mathcal{F}(A^\theta)) \left| \det \left(\frac{\delta \mathcal{F}(A^\theta)}{\delta \theta(x)} \right) \right|, \quad (21)$$

¹³ Nesse termo foi feita uma integração por partes desprezando termos de superfície.

¹⁴ Outros exemplos de condições são a de Coulomb: $\nabla \cdot \vec{A}$, a temporal: $A_0 = 0$ e a axial: $A_3 = 0$.

onde $\mathcal{D}\theta(x)$ nos permite integrar sobre as possíveis configurações, enquanto o $\delta(\mathcal{F}(A^\theta))$ garante que a integração seja feita apenas sobre as configurações representativas que cumprem com a condição da fixação do gauge. O jacobiano que aparece na equação acima, $|\det(\mathcal{F}')|$, é o módulo do chamado determinante de Faddeev–Popov. Uma hipótese crucial do enfoque de FP é considerar tal determinante como sendo sempre positivo¹⁵, algo que, como veremos mais adiante, nem sempre será verdade.

Ao incluir o fator “1” na integral funcional do campo A , $Z[A] = \int \mathcal{D}A e^{iS[A]}$, onde $S[A] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}\right)$, e usar a transformação de gauge do campo A , $A \rightarrow A^\theta$, e a invariância da sua ação, $S[A] = S[A^\theta]$, e da medida de integração, $\mathcal{D}A \rightarrow \mathcal{D}A^\theta$ (A^θ é uma transformação linear sobre A), obtém-se:

$$Z[A] = \int \mathcal{D}A^\theta \mathcal{D}\theta \delta(\mathcal{F}(A^\theta)) \det\left(\frac{\delta\mathcal{F}(A^\theta)}{\delta\theta}\right) \text{Exp}[iS[A^\theta]]. \quad (22)$$

A condição de fixação do gauge pode ser escolhida de uma forma mais geral dentro de uma família de gauges covariantes onde $\mathcal{F}(A) = \partial_\mu A_a^\mu - \omega_a$, sendo $\omega_a(x)$ uma função escalar arbitrária. Ao usar essa condição geral e examinar o determinante de Faddeev e Popov para uma transformação infinitesimal do campo A (Eq. (10)), temos que:

$$\det\left(\frac{\delta\mathcal{F}(A^\theta)}{\delta\theta}\right) = \det\left(\frac{\delta}{\delta\theta}\left[\partial_\mu A_a^\mu + \frac{1}{g_s}\partial_\mu D^\mu \theta_a - \omega_a\right]\right) = \det\left(\frac{1}{g_s}\partial_\mu D^\mu\right). \quad (23)$$

Logo, a única dependência em A^θ na Eq. (22) fica nos fatores: $\mathcal{D}A^\theta \delta(\mathcal{F}(A^\theta)) e^{iS[A^\theta]}$, que podem ser reescritos em função de A novamente aproveitando a invariância de gauge:

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A \delta(\partial_\mu A_a^\mu - \omega_a) \det\left(\frac{1}{g_s}\partial_\mu D^\mu\right) e^{iS[A]}. \quad (24)$$

Neste ponto, adota-se uma técnica que consiste em multiplicar e integrar sobre todos os possíveis valores de uma função Gaussiana $\omega_a^2(x)/2\xi$ para um parâmetro arbitrário ξ . O fator $\omega_a(x)$ podem então, ser eliminado da equação devido às propriedades da delta de Dirac, chegando a:

$$Z[A] = \int \mathcal{D}A \det\left(\frac{1}{g_s}\partial_\mu D^\mu\right) \text{Exp}\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4}(G_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_a^\mu)^2\right)\right], \quad (25)$$

onde os termos constantes, da forma $\int \mathcal{D}\theta$, podem ser desconsiderados (embora possam ser infinitos), pois acabam sendo cancelados ao calcular as funções de n pontos (Eq. (14)) e, conseqüentemente, não afetam os observáveis.

O segundo termo do fator exponencial da última equação representa a parte da

¹⁵ Isso permite deixar de lado o uso do valor absoluto no determinante.

fixação do gauge:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_a^\mu)^2. \quad (26)$$

Com estes resultados agora sim é possível obter o propagador do glúon (Apêndice E, Eqs. (278) – (280)), onde duas escolhas muito usadas do parâmetro ξ são $\xi = 0$ e $\xi = 1$, que correspondem aos chamados gauge de Landau e Feynman, respectivamente¹⁶.

Quanto ao determinante de FP, que depende do campo A , este pode ser representado como uma integral funcional de campos anticomutativos c e $\bar{c}$ na representação adjunta¹⁷:

$$\det \left(\frac{1}{g_s} \partial_\mu D^\mu \right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \text{Exp} \left[i \int d^4x \bar{c}_a (-\partial_\mu D_{ab}^\mu) c_b \right]. \quad (27)$$

Estes são os chamados fantasmas de Faddeev e Popov (Faddeev; Popov, 1967), cuja lagrangiana $\mathcal{L}_{ghost} = \bar{c}_a (-\partial_\mu D_{ab}^\mu) c_b$, junto com a parte da fixação do gauge $\mathcal{L}_{GF}$, acaba sendo agregada à lagrangiana clássica da QCD, terminando aparentemente com o processo de quantização.

É importante notar que c e $\bar{c}$ correspondem a campos escalares anticomutativos, que violam o teorema Spin-Estatística¹⁸ e portanto não podem ser considerados como partículas físicas. Estes campos só se acoplam de forma virtual (*loops*) ao campo de gauge A_μ^a cancelando os estados de polarização não-físicos do mesmo (Peskin; Schroeder, 1995), mas não aparecem no espectro da QCD, sendo considerados um artifício necessário para a quantização da teoria.

1.3 Fixação de gauge e problema de Gribov

Como foi discutido rapidamente na seção anterior, a proposta de Faddeev e Popov trabalha com as hipóteses de que o determinante de FP é sempre positivo, de que a condição da fixação do gauge é respeitada e de que apenas as configurações representativas dos campos de gauge físicos são levadas em conta.

Dentre as diferentes configurações de um determinado campo A (Eq. (8)), conjunto contínuo este também chamado de órbita de calibre, as configurações representativas são

¹⁶ No gauge em que $\xi = 0$ (Landau), o propagador é transverso e existe uma formulação de QCD na rede amplamente utilizada, enquanto que a escolha $\xi = 1$ permite simplificar consideravelmente os cálculos perturbativos.

¹⁷ Faddeev e Popov escolheram representar dessa maneira o determinante usando uma identidade para integrais Gaussianas de variáveis anticomutativas (Berezin, 1966).

¹⁸ Campos escalares tradicionais comutam e obedecem à estatística de Bose-Einstein enquanto que os anticomutativos obedecem à estatística de Fermi-Dirac.

aquelas que intersectam apenas uma vez a condição da fixação do gauge como podemos ver na curva dada por L na Fig. (3a).

O método de Faddeev e Popov funciona muito bem a nível perturbativo, permitindo obter predições para a QCD no regime em que o acoplamento é muito pequeno. No entanto, V. Gribov mostrou (no gauge de Landau) que a fixação do gauge à la Faddeev–Popov apresenta um problema: ela não consegue realmente remover todas as configurações equivalentes do campo A , e portanto existem órbitas de calibre que intersectam mais de uma vez a condição da fixação do gauge (Gribov, 1978). Tais configurações remanescentes são as chamadas cópias de Gribov¹⁹. Isso é representado pela curva L' na Fig. (3a)²⁰.

A abordagem de Gribov foi desenvolvida no espaço euclidiano e portanto faremos uso do mesmo nas contas a seguir²¹. A lagrangiana de Yang–Mills (sem férmions e incluindo o termo de fixação do gauge) no espaço euclidiano pode ser escrita como (Vandersickel, 2011):

$$\mathcal{L}_{QCD} = +\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a (\partial_\mu D_\mu^{ac}) c^c, \quad (28)$$

onde $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ mantém uma forma matemática similar à Eq. (2), mas no espaço euclidiano.

A transformação dos campos só depende da álgebra de Lie dos geradores do grupo e não da natureza euclidiana ou Minkowskiana dos campos. Portanto, as relações de transformação obtidas anteriormente podem ser mantidas da forma já mostrada²². Neste contexto, também é definido o operador de FP, $\mathcal{M} = \delta \mathcal{F}(A^\theta)/\delta \theta(x)$, sendo esta a sua forma mais geral possível. Para calibres covariantes lineares, esse operador pode ser escrito como (Vandersickel, 2011):

$$\mathcal{M}^{ab}(x, y) := -\partial_\mu D_\mu^{ab} \delta(x - y) |_{\partial A=0} = -\partial_\mu \left(\partial_\mu \delta^{ab} - g_s f^{abc} A_\mu^c \right) \delta(x - y) |_{\partial A=0}. \quad (29)$$

Podemos identificar mais claramente as configurações remanescentes se analisarmos as configurações $(A_\mu^a t^a)^\theta \equiv (A)^\theta$ que são cópias de Gribov de $A_\mu^a t^a \equiv A$. Nesse caso, elas estão relacionadas pela transformação de gauge $A_\mu^a t^a = V(A_\mu^a t^a + i \partial_\mu/g_s)V^+$ (Eq. (8)), e tanto A quanto A^θ satisfazem a condição de Lorenz para a fixação do gauge $\mathcal{F} = \partial A = 0$:

$$\partial A^\theta \equiv \partial \left(V(A + i\partial/g_s)V^+ \right) \equiv 0, \quad (30)$$

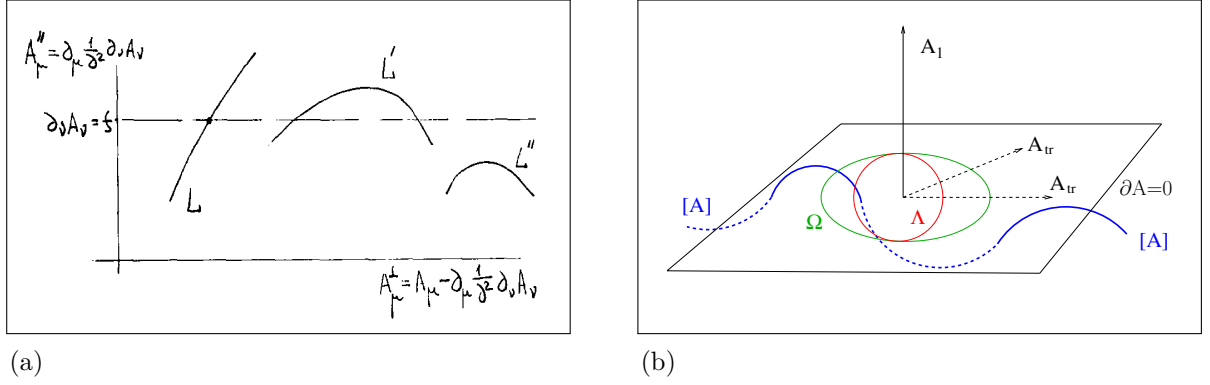
¹⁹ Singer (Singer, 1978) mostrou que tais cópias de Gribov aparecem para qualquer calibre covariante.

²⁰ Gribov menciona que não há casos conhecidos do tipo L'' .

²¹ Uma formulação semi-euclidiana da QCD pode ser encontrada no apêndice E.

²² Em (Vandersickel, 2011) é usado $V(x) = \text{Exp}[-i\theta^a(x)t^a]$ enquanto que nós usamos o sinal $+$. Isto não gera problemas, já que o sinal menos que pode ser absorvido por $\theta(x)$.

Figura 3 - Orbitas de calibre



Legenda: a) Possíveis órbitas de calibre para uma dada condição de fixação do gauge. Os eixos representam as componentes transversal e longitudinal do campo A_μ , respectivamente. b) Órbita de calibre $[A]$, Região de Gribov (Ω) e região Modular (Λ).

Fonte: a) Gribov, 1978, p 1. b) Alkofer, 2007, p. 2.

que, desenvolvendo as contas, pode ser escrita como:

$$g_s(\partial V^+)AV + g_sV^+A(\partial V) + i(\partial V^+)(\partial V) + iV^+\partial^2V = 0. \quad (31)$$

A partir da equação anterior (Eq. (31)), podem ser estudadas as cópias de Gribov para os diferentes valores do campo A e de g_s . Uma descrição detalhada e didática, pode ser encontrada, por exemplo, na Ref. (Sobreiro; Sorella, 2005).

Considerando apenas cópias infinitesimais, podemos verificar a relação entre as cópias de Gribov e os autovalores do operador de FP. Usando $(A)^\theta = A - \frac{1}{g_s}D^{ab}\theta^b$ (infinitesimal), com $\partial A = 0$ e $\partial A^\theta = 0$, obtemos:

$$\partial A^\theta = \partial A - \frac{1}{g_s}\partial D\theta = 0 \rightarrow \mathcal{M}^{ab}\theta^b = -\partial_\mu D_\mu^{ab}\theta^b = -\partial_\mu (\delta^{ab}\partial_\mu - g_s f^{abe}A_\mu^e)\theta^b = 0, \quad (32)$$

que nos diz que a existência de autovalores nulos do operador de Faddeev-Popov implica na existência de cópias de Gribov.

Observa-se que a equação de autovalores do operador de FP,

$$\mathcal{M}^{ab}\theta^b = \left(-\partial^2\delta^{ab} + g_s f^{abe}A_\mu^e\partial_\mu\right)\theta^b = \mathcal{E}\theta^b, \quad (33)$$

é análoga a uma equação de autovalores do tipo Schrödinger com A_μ atuando como um potencial (Sobreiro; Sorella, 2005). Para valores pequenos de A_μ (ou g_s):

$$\mathcal{M}_0^{ab}\theta^b \approx \left(-\partial^2\delta^{ab}\right)\theta^b = \mathcal{E}_0\theta^b, \quad (34)$$

esta última equação só possui autovalores positivos, $\mathcal{E}_0 > 0$. Isto significa que para valores pequenos de A_μ (ou g_s) de fato o operador de Faddeev-Popov é positivo definido.

No entanto, isso não pode mais ser garantido para valores maiores de A_μ (ou g_s), já que em algum ponto o menor autovalor da Eq. (33), $\mathcal{E}_1$, vai se tornar zero e depois negativo (Gribov, 1978). No caso análogo da Eq. de Schrödinger, isso significa que o campo A_μ é grande o suficiente para garantir soluções de energia negativa (estados ligados) (Sobreiro; Sorella, 2005). O mesmo acontece com os outros autovalores $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, etc²³. Isso permite dividir o espaço funcional dos campos em regiões $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$, nas quais o operador $\mathcal{M}$ de FP possui $0, 1, \dots, n-1$ autovalores negativos²⁴ (Gribov, 1978). Essas regiões estão separadas respectivamente pelos “horizontes” $l_1, l_2, \dots, l_n$, conhecidos como horizontes de Gribov, onde o operador $\mathcal{M}$ de FP tem autovalor zero (Fig. (4a)).

É importante ressaltar que o fato do operador de FP possuir autovalores negativos faz com que não seja possível garantir a positividade do determinante de FP (Eq. (21)). Dessa forma, torna-se necessário manter o valor absoluto do determinante, $|\det \mathcal{F}'(A^\theta)|$, na medida de integração funcional dos campos de gauge, invalidando a hipótese do procedimento de Faddeev e Popov.

1.3.1 Região de Gribov

Uma possível solução diante deste problema proposta por V. Gribov (Gribov, 1978), foi restringir a integração funcional dos campos a uma região Ω (Fig. (3b)), onde a condição da fixação do gauge fosse respeitada e intersectada apenas uma vez, i.e., que apenas as configurações representativas do campo A sejam levadas em conta, o que implica que o operador de FP seja positivo definido. Matematicamente, tem-se:

$$\Omega \equiv \left\{ A_\mu^a, \partial_\mu A_\mu^a = 0 \mid \mathcal{M}^{ab} > 0 \right\}. \quad (35)$$

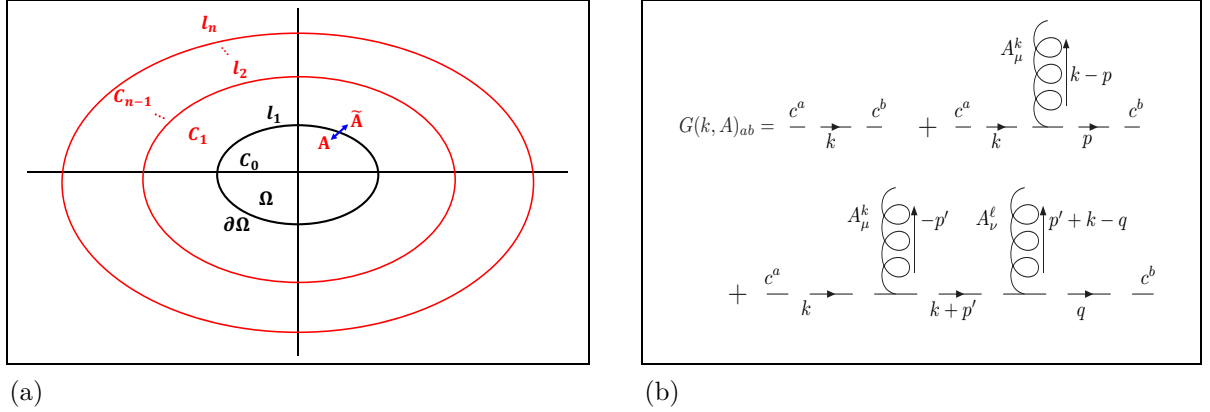
A fronteira desta região, $\partial\Omega$, é o chamado horizonte de Gribov. Faz-se evidente que a região C_0 é a região Ω , já que na região C_0 o operador de FP só possui autovalores positivos, e que l_1 é $\partial\Omega$ ($\mathcal{M}^{ab} = 0$) (Fig. (4a)). Algo importante que devemos mencionar é que as configurações $A_\mu \sim 0$, ou seja, o enfoque perturbativo, estão contidas na região de Gribov, já que neste caso o operador de FP é positivo (Eq. (34)).

Outro ponto relevante sobre a região de Gribov é que as órbitas de gauge a cruzam pelo menos uma vez (Dell’Antonio; Zwanziger, 1991), significando assim que um campo externo à região Ω terá sempre um equivalente na região de Gribov, tal como é mostrado em (Zwanziger, 1982).

²³ Se olharmos para o operador “restante” da Eq. (33), o traço deste termo é zero devido ao fator f^{abc} . Logo, este operador possui autovalores negativos e positivos que somados anulam o traço do mesmo.

²⁴ A condição $\partial_\mu A_\mu^a = 0$ permite mostrar que o operador de FP é hermitiano, $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}$, logo só possui autovalores reais (Sobreiro; Sorella, 2005).

Figura 4 - Regiões de Gribov e condição de não pólo



Legenda: (a) Mostra-se um esquema das regiões C_{n-1} e horizontes l_n de Gribov. (b) Contribuições até ordem g_s^2 na inversa do operado de FP $G(k, A)_{ab}$.

Fonte: (a) O autor, 2023. (b) Vandersickel, 2011, p. 58.

Tudo isto justificaria a restrição da integração funcional à região C_0 (Ω) pelo fato de sempre ser possível encontrar um campo $\tilde{A}$ na região C_n equivalente a um campo A na região C_{n-1} , tal como podemos ver na Fig. (4a). Uma demonstração para campos muito próximos do horizonte l_1 , $\tilde{A}$ e A nas regiões C_1 e C_0 , respectivamente, como podemos ver na Fig. (4a), pode ser encontrada em (Gribov, 1978; Sobreiro; Sorella, 2005).

Outras propriedades da região Ω foram demonstradas pelo próprio Gribov em 1977 e estão demonstradas, de forma mais pedagógica e com grande detalhe nas Refs. (Sobreiro; Sorella, 2005; Vandersickel, 2011; Vandersickel; Zwanziger, 2012).

1.3.2 Região Modular Fundamental

Restringir a integração funcional à região de Gribov parece uma opção viável. Porém, nesta região ainda existem configurações equivalentes (Baal, 1992; Vandersickel; Zwanziger, 2012). Mais exemplos disto, incluindo cálculos analíticos, são dados em (Ilderton; Lavelle; McMullan, 2007; Landim *et al.*, 2014). Cópias de Gribov na região Ω foram verificadas também em teorias de gauge na rede (Cucchieri, 1997; Hughes; Mehta; Skullerud, 2013).

Já que a região de Gribov ainda contém cópias, uma alternativa seria procurar uma região, contida em Ω , ainda mais fundamental e livre de cópias (Zwanziger, 1994). Essa região, representada por Λ (Fig. (3b)), é conhecida como a região modular fundamental (FMR). Pelo fato de Λ estar contida em Ω ($\Lambda \in \Omega$), ela naturalmente herda propriedades da região de Gribov, i.e., Λ é uma região fechada e com fronteira $\partial\Lambda$, que

coincide parcialmente com a fronteira $\partial\Omega$, $\partial\Lambda \cap \partial\Omega$ (Fig. (3b))²⁵. Enquanto ainda não se conhece uma maneira satisfatória de implementar a FMR na integração funcional (Williams, 2003), na região de Gribov podem ser efetuados os cálculos para as funções de correlação. Em 2003, Zwanziger apresentou a conjectura de que não há uma diferença significativa entre os cálculos obtidos para as funções de correlação através da FMR ou da região de Gribov (Zwanziger, 2004). Além disso, na Ref. (Cucchieri, 1998b) é mostrado que não há diferenças significativas nas funções de correlação calculadas na rede para Λ , quando comparadas com as calculadas para Ω (Cucchieri, 1997).

Em conclusão, a quantização e restrição da integral funcional, na teoria de Yang-Mills, deveria ser feita através da FMR, mas, como aparentemente as cópias remanescentes na região de Gribov não desempenham um papel significativo, as mesmas poderiam ser desprezadas, efetuando-se os cálculos de interesse da teoria apenas usando a região Ω . Conjectura-se, assim, que as configurações representativas se encontram na região definida pela interseção da região de Gribov e a FMR, $\partial\Omega \cap \partial\Lambda$ (Zwanziger, 2004; Greensite; Olejnik; Zwanziger, 2004.).

1.3.3 Condição de não pólo

Gribov (Gribov, 1978) foi o primeiro a mostrar que restringir a integração funcional à região Ω , no gauge de Landau, traz profundas consequências para as características dos propagadores dos glúons e dos *ghosts*. Essas novas características dos propagadores parecem indicar que as cópias de Gribov desempenham um papel importante no estudo e compreensão da teoria de Yang-Mills na região infravermelha.

A restrição da integração funcional se faz mediante a implementação do fator $V(\Omega)$ no funcional gerador, onde $Z[J] \rightarrow Z_\Omega[J]$:

$$Z_\Omega[J_{src}] = \int [\mathcal{D}\phi] V(\Omega) \text{Exp} \left[- \int d^4x (\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{src}) \right], \quad (36)$$

sendo a medida $[\mathcal{D}\phi]$ dada pelo produto $[\mathcal{D}A][\mathcal{D}\bar{c}][\mathcal{D}c]$, e J_{src} representa as fontes J, χ_* e χ que correspondem aos campos A, c e $\bar{c}$, respectivamente. As lagrangianas são (Eq. (28)):

$$\mathcal{L}_{YM} = +\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \wedge \mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 \wedge \mathcal{L}_{FP} = \bar{c}^a (\partial_\mu D_\mu^{ac}) c^c, \quad (37)$$

enquanto que os termos proporcionais às fontes encontram-se em $\mathcal{L}_{src} = J_\mu^a A_\mu^a + \chi_*^a c^a + \bar{c}^a \chi^a$.

²⁵ Λ apresenta cópias na fronteira $\partial\Lambda$, enquanto que a região interna é livre das mesmas (Baal, 1997).

Para chegar no resultado da expressão de $V(\Omega)$, Gribov usou o fato de que a função de correlação de dois pontos dos *ghosts* esta relacionada à inversa do operador de FP (valor esperado). A expressão dessa função de correlação dos *ghosts* (acoplados a uma fonte externa), na integral funcional, é:

$$\langle \bar{c}^a(x) c^b(y) \rangle \propto \int [\mathcal{D}\bar{c}][\mathcal{D}c] \bar{c}(x) c(y) e^{-\int d^4x (\bar{c}^a (\partial_\mu D_\mu^{ac}) c^c + \mathcal{L}_{src})} \propto \left(-\partial_\mu D_\mu^{ab} \right)_{xy}^{-1}. \quad (38)$$

Na última passagem, usando uma identidade²⁶, foram integrados os campos de FP.

Esta relação dada na Eq. (38) foi muito importante, porque permitiu obter informação de como construir o fator $V(\Omega)$. Como este precisa restringir a integração numa região onde o operador de FP seja positivo definido ($\mathcal{M}^{ab} > 0$), então a sua respectiva inversa precisa existir e não pode apresentar divergências. A associação com a função de correlação de *ghosts* permitiu sondar sob quais circunstâncias a inversa do operador $\mathcal{M}^{ab}$ não apresentaria pólos. Para isso, o passo seguinte de Gribov foi obter o resultado do propagador do *ghost* renormalizado a 1 *loop*, que no espaço de momentos é:

$$\mathcal{G}(k^2) = \frac{1}{k^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{11g_s^2 N}{48\pi^2} \text{Log}(\Lambda^2/k^2)\right)^{(3/22)(3/2-\xi/2)}}, \quad (39)$$

onde Λ é um *cutoff* ultravioleta e ξ é o parâmetro de gauge ($\xi = 0$ no gauge de Landau).

Ao analisar a Eq. (39), podemos notar rapidamente que existem 2 pólos, um deles para $k_1^2 = 0$ e o outro para $k_2^2 = \Lambda^2 e^{-\frac{48\pi^2}{11g_s^2 N}}$. O primeiro pólo, vindo de $1/k^2$, corresponderia a um valor nulo do operador de FP. Dado que, para qualquer outro valor de k , o fator $1/k^2$ é positivo, então $\mathcal{M} > 0$, o que significa que estamos dentro de Ω . Portanto, quando $k^2 \rightarrow 0$ estaríamos nos aproximando do horizonte de Gribov, onde $\mathcal{M}|_{\partial\Omega} = 0$. O termo restante da Eq. (39) nem sempre será positivo para um dado k^2 . De fato, para um $k^2 < k_2^2$, a expressão se torna complexa ($\mathbb{C}$), indicando que não estamos mais dentro da região de Gribov, onde há apenas autovalores reais do operador de FP.

A partir dessa análise, pode-se argumentar que o papel do fator $V(\Omega)$ é restringir a integração funcional a uma região onde o operador de FP seja sempre positivo e que ao mesmo tempo não desenvolva pólos, além da singularidade em $k^2 = 0$. Esta é a chamada condição de não pólo. Ela é construída a partir do cálculo da transformada de Fourier

²⁶ Para variáveis de Grassmann $\bar{c}$, c , χ , χ_* e um operador B , pode-se obter a seguinte equivalência (Peskin; Schroeder, 1995; Ryder, 1996; Vandersickel, 2011):

$$\begin{aligned} I &= \int [\mathcal{D}\bar{c}][\mathcal{D}c] \text{Exp} \left[\int d^4x d^4y \bar{c}^a(x) B^{ab}(x, y) c^b(y) + \int d^4x \chi_*^a(x) c^a(x) + \bar{c}^a(y) \chi^a(y) \right] \\ I &= \mathcal{N}_c \det(B) \text{Exp} \left[- \int d^4x d^4y \chi_*^a(x) [B^{ab}(x, y)]^{-1} \chi^b(y) \right]. \end{aligned}$$

$G(k, A)_{ab}$ da inversa do operado de FP. Até ordem g_s^2 , esta recebe contribuições vindas dos diagramas mostrados na Fig. (4b), onde o campo A é considerado um campo clássico externo (aproximação semi-clássica de Gribov). O resultado é o seguinte:

$$G(k, A)_{ab} = \frac{1}{k^2} (1 + \sigma(k, A)) \approx \frac{1}{k^2} \frac{1}{[1 - \sigma(k, A)]}, \quad (40)$$

sendo $\sigma(k, A)$ o fator de forma de Gribov, cuja expressão é:

$$\sigma(k, A) = \frac{1}{V} \frac{1}{d-1} \frac{g^2 N}{N^2 - 1} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{A_\alpha^l(-q) A_\alpha^l(q)}{(k-q)^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right), \quad (41)$$

onde foi introduzido um fator de volume V a fim de manter a dimensionalidade correta.

A condição de não pólo dita, então, que $\sigma(k, A)$ (Eq. (41)) seja menor que um, ou seja $\sigma(k, A) < 1, \forall k$. Como também já foi mostrado que $\sigma(k, A)$ decresce com k , temos que $\sigma(k, A) < \sigma(0, A)$, e $\sigma(k, A)$ atinge o seu valor máximo quando $k \rightarrow 0$, ou seja, na fronteira da região de Gribov. Logo, a condição de não pólo, que garante a positividade do operador de FP, esta ligada à relação:

$$\sigma(0, A) < 1 \quad \wedge \quad \sigma(0, A) = \lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k, A) = \frac{1}{V} \frac{1}{d} \frac{g^2 N}{N^2 - 1} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{A_\alpha^l(-q) A_\alpha^l(q)}{q^2}. \quad (42)$$

Finalmente, usando a condição de não pólo, Gribov propôs construir explicitamente o fator $V(\Omega)$ fazendo uso da representação integral da função degrau (função de Heaviside), de modo que²⁷:

$$V(\Omega) = \theta(1 - \sigma(0, A)) = \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{d\beta}{2\pi i \beta} e^{\beta(1-\sigma(0, A))}. \quad (43)$$

1.3.3.1 Propagador do glúon e do *ghost* na região de Gribov

Ao usar a restrição $V(\Omega)$ no gerador funcional (Eq. (36)), esta só modifica a ação de Yang–Mills, pois $\sigma(0, A)$ só depende do campo A_μ^a . Portanto, o cálculo do propagador livre do glúon será afetado, para o qual apenas é necessária a parte quadrática da lagrangiana de Yang–Mills, $(F_{\mu\nu}^a)^2 = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2$, e sua respectiva fonte J :

$$Z_\Omega[J] = \int [\mathcal{D}A] V(\Omega) \text{Exp} \left[- \int d^d x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 - J_\mu^a(x) A_\mu^a(x) \right) \right], \quad (44)$$

²⁷ Detalhes sobre o cálculo das Eqs. (40)–(42) podem ser encontrados em (Gribov, 1978), e com mais detalhes em (Sobreiro; Sorella, 2005; Vandersickel, 2011).

No espaço de Fourier, tem-se (vide Apêndice E, Eqs. (278) – (280)):

$$\tilde{Z}_\Omega[\tilde{J}] \propto \int d\beta [\mathcal{D}\tilde{A}] \frac{e^\beta}{2\pi i \beta} \text{Exp} \left[- \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(-\frac{1}{2} \tilde{A}_\mu^a(-p) (K_{\mu\nu}^{ab}) \tilde{A}_\mu^a(p) - \tilde{J}(-p) \tilde{A}(p) \right) \right], \quad (45)$$

sendo:

$$K_{\mu\nu}^{ab}(p) = \left[\frac{\beta}{V} \frac{2}{d} \frac{N g^2}{N^2 - 1} \frac{1}{k^2} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu} k^2 + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) k_\mu k_\nu \right], \quad (46)$$

onde o termo adicional, proporcional a $1/k^2$, vem do fator $e^{-\beta\sigma(0,A)}$ (Eq. (42)).

Com isso, pode-se obter o propagador do glúon no espaço de Fourier²⁸:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \rangle &= \frac{\delta^2}{\delta \tilde{J}_{\mu'}^{a'}(p) \delta \tilde{J}_{\nu'}^{b'}(-p)} \tilde{Z}[\tilde{J}] = \mathcal{C} \int d\beta \frac{e^\beta}{\beta} (\det K_{\mu\nu}^{ab}(p))^{-1/2} (K_{\mu\nu}^{ab}(p))^{-1} \\ \langle \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \rangle &= \mathcal{C} \int d\beta e^{f(\beta)} (K_{\mu\nu}^{ab}(p))^{-1}, \end{aligned} \quad (47)$$

com $f(\beta)$ sendo uma função que contém o fator $(\det K)^{-1/2}$ (Vandersickel, 2011):

$$f(\beta) = \beta - \text{Log}[\beta] - V \frac{d-1}{2} (N^2 - 1) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \text{Log} \left(q^2 + \frac{\beta}{V} \frac{2N g^2}{(N^2 - 1)d} \frac{1}{q^2} \right). \quad (48)$$

O parâmetro β da Eq. (47) é integrado usando a aproximação de ponto de sela (no limite termodinâmico, $V \rightarrow \infty$) considerando que: (i) a principal contribuição à integral venha das vizinhanças do seu ponto estacionário β_0 e (ii) $(K_{\mu\nu}^{ab}(p))^{-1}$ não seja uma função muito oscilante. A integral pode então ser aproximada pelo seu valor em β_0 :

$$\int d\beta e^{f(\beta)} \sim e^{f(\beta_0)} \wedge f'(\beta_0) = 0. \quad (49)$$

A partir da equação anterior, é obtida a seguinte relação:

$$1 = \frac{1}{\beta_0} + \frac{d-1}{d} N g^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^4 + \gamma^4} \wedge \gamma^4 = \frac{\beta_0}{V} \frac{2N g^2}{(N^2 - 1)d} \quad (50)$$

onde, a fim de se obter um fator γ finito, foi considerado que $\beta_0 \sim V$, e portanto o fator β_0^{-1} tem contribuição nula na Eq. (50), chamada de equação de gap. Sendo assim, conclui-

²⁸ Para variáveis vetoriais $\{A_\mu^a, J_\mu^a\}$ e um operador B , pode-se obter a seguinte equivalência (Peskin; Schroeder, 1995; Ryder, 1996; Vandersickel, 2011):

$$\begin{aligned} I_A &= \int [\mathcal{D}A] \text{Exp} \left[\int d^4 x d^4 y A_\mu^a(x) B_{\mu\nu}^{ab}(x, y) A_\nu^b(y) + \int d^4 x J_\mu^a(x) A_\mu^a(x) \right] \\ I_A &\propto (\det(B))^{-1/2} \text{Exp} \left[+\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J_\mu^a(x) [B_{\mu\nu}^{ab}(x, y)]^{-1} J_\nu^b(y) \right], \end{aligned}$$

se que o fator γ , que possui unidades de massa e é conhecido como parâmetro de massa de Gribov, não é um parâmetro livre; seu valor é determinado de maneira auto-consistente pela equação do gap, onde este funciona também como um regulador infravermelho.

Finalmente, o propagador do glúon no gauge de Landau modificado pela restrição à região de Gribov será, a partir da Eq. (47):

$$\langle \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \rangle = \mathcal{C} \int d\beta e^{f(\beta)} \left(K_{\mu\nu}^{ab}(p) \right)^{-1} \Big|_{\beta=\beta_0} = \delta^{ab} \frac{p^2}{p^4 + \gamma^4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right), \quad (51)$$

onde foi escolhido $\mathcal{C}e^{f(\beta_0)} = 1$ como normalização do propagador.

Usando os resultados do propagador do glúon, podemos calcular o propagador do *ghost*, a partir das Eqs. (38), (40) e (41):

$$\mathcal{G}_{ab}(k^2) = \delta^{ab} \frac{1}{k^2 [1 - \sigma(k)]} \wedge \sigma(k) = g^2 N \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{q^4 + \gamma^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (k - q)^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right), \quad (52)$$

que, quando $k^2 \rightarrow 0$ ($d = 4$), comporta-se como (Vandersickel, 2011):

$$\mathcal{G}_{ab}|_{d=4} \approx \frac{128\pi^2 \gamma^2}{N g^2} \frac{\delta^{ab}}{k^4}. \quad (53)$$

Em conclusão, ao implementar a restrição de Gribov $V(\Omega)$ à integração funcional, os propagadores tanto do glúon quanto do *ghost* sofreram modificações. O primeiro (Eq. (51)) é suprimido no infravermelho, $\langle \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \rangle \Big|_{p \rightarrow 0} \rightarrow 0$, diferente do resultado divergente, $1/p^2|_{p \rightarrow 0} \rightarrow \infty$, do enfoque perturbativo usual, enquanto que o segundo (Eq. (53)) adquire um comportamento mais singular ($1/k^4$) do que aquele previsto pelo enfoque perturbativo à la FP ($1/k^2$). Vários anos depois, Zwanziger (Zwanziger, 1989b; Zwanziger, 1993) formularia uma ação local²⁹ para a teoria de Yang–Mills implementando também a restrição da região de Gribov à integral funcional: a ação de Gribov-Zwanziger (GZ).

Os resultados das Eqs. (51) e (53) foram considerados corretos durante muito tempo (Cucchieri, 1998a; Cucchieri, 1999; Bloch *et al.*, 2004; Furui; Nakajima, 2004; Oliveira; Silva, 2005), até que nas Refs. (Cucchieri; Mendes, 2008b; Cucchieri; Mendes, 2008a) foi mostrado (para $d = 3$ e 4) que realmente o propagador do glúon satura num valor não nulo no infravermelho e que o propagador do *ghost* não é ampliado no infravermelho. Esses resultados levariam à proposta de um “refinamento” do modelo GZ em compatibilidade com os resultados da rede (Dudal *et al.*, 2008b) – a chamada teoria de Gribov-Zwanziger refinada, que será apresentada brevemente no próximo capítulo.

Um ponto importante que devemos ressaltar é que o propagador do glúon obtido por Gribov (Eq. (51)), apresenta pólos imaginários em $p^2 = \pm i \gamma^2$. Essa estrutura

²⁹ Lembrar que a abordagem de Gribov se vale da inversa (não local) do operador de FP.

com pólos imaginários, que no modelo RGZ se tornarão complexos, viola o axioma de reflexão de positividade. Dessa maneira, não é mais possível interpretar o glúon como uma partícula que faça parte do espectro físico, o que poderia indicar a presença de confinamento. Ou seja, matematicamente, isto pode ser entendido como os glúons estando confinados pela presença do vínculo do horizonte de Gribov, através do fator da massa de Gribov.

2 MODELOS EFETIVOS CONFINANTES PARA QCD

Atualmente, é bem aceito que a QCD consegue descrever as propriedades da interação forte. Por um lado, uma delas, a liberdade assintótica, permite que o enfoque perturbativo forneça uma excelente descrição da fenomenologia da interação forte em altas energias. Por outro lado, em baixas energias, temos o fenômeno do confinamento, para o qual ainda não existe uma descrição e/ou demonstração analítica derivada a partir de primeiros princípios, que seja completamente satisfatória e que nos permita entender o mecanismo que o gera.

O estudo do comportamento da QCD em baixas energias é fundamental, entre outras coisas, para entender um pouco mais sobre o confinamento e ter uma descrição completa da fenomenologia da física hadrônica no infravermelho. Esta última, mesmo não entendida completamente, em geral nos leva a aceitar que tanto os quarks quanto os glúons estão confinados. A tudo isso devemos acrescentar o fato de que existem simulações numéricas que respaldam as propriedades confinantes da QCD neste regime de energia.

O problema do confinamento, ainda hoje, é uma das questões não resolvidas mais importantes da física teórica, e portanto uma fonte de estudo muito ativa. Dentre os diversos estudos e abordagens que tentam entender alguns aspectos do confinamento, aparecem os modelos fenomenológicos que, mesmo incompletos ou com aproximações, oferecem boas informações sobre a região infravermelha da QCD.

Dentre os diferentes modelos fenomenológicos estão aqueles motivados pelas consequências das cópias de Gribov (Seção 1.3) nos propagadores da QCD (YM especificamente) e, ao mesmo tempo, pelo comportamento desses propagadores nas simulações numéricas de QCD na rede. Em particular, estamos interessados nesse tipo de modelo baseado no comportamento do propagador do glúon.

Hoje em dia, é bem aceito que o propagador do glúon, diferente da predição perturbativa, não diverge para momentos baixos, mas pelo contrário satura num valor finito na região de baixos momentos. O fato do propagador do glúon saturar num valor finito, para momento nulo, exige uma análise teórica cuidadosa, mas esse valor finito é comumente entendido como a aparição de uma escala de massa na região infravermelha.

Como já discutimos no capítulo anterior, a QCD é uma teoria invariante de gauge, e tal invariância exige que o glúon seja uma partícula sem massa. Porém, diante dos resultados obtidos até a atualidade nas simulações do propagador do glúon em QCD na rede, opta-se por interpretar esse comportamento como uma geração dinâmica de massa para o glúon devido às fortes interações e auto-interações da QCD na região infravermelha.

Tal termo de massa não deve ser confundido como a massa de uma partícula (ou estado assintótico) mas deve ser pensado como um termo de massa efetiva que depende da escala de energia e que desaparece para altos momentos, preservando assim a renor-

malizabilidade e invariância de gauge da teoria.

Nas seções seguintes discutiremos as diferentes propriedades e características de alguns modelos que apresentam termos de massas (infravermelhas) no propagador do glúon. Finalmente, nos capítulos seguintes usaremos esses propagadores com massas infravermelhas e estudaremos o impacto fenomenológico deste tipo de propagador em alguns observáveis da teoria.

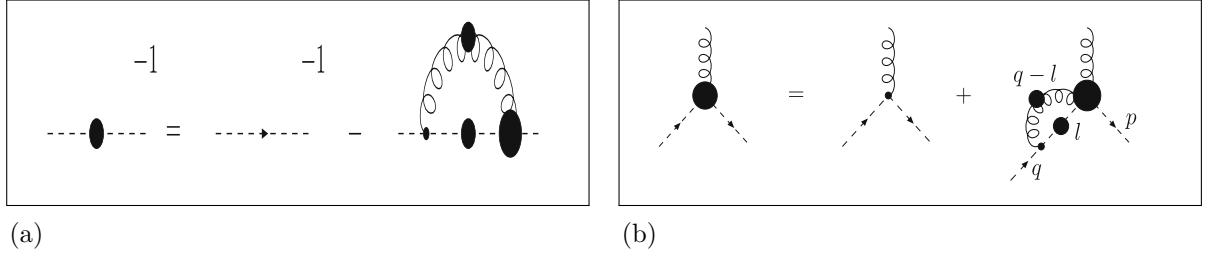
2.1 Alguns enfoques não perturbativos para a QCD

Antes de entrar na descrição dos modelos usados nesta tese, achamos conveniente fazer uma rápida descrição de alguns enfoques não perturbativos que complementam o estudo da QCD no infravermelho, e que de um ou outro modo têm relação direta ou indireta com os cálculos apresentados aqui, seja por meio da comparação com os dados dos seus resultados ou com expressões analíticas.

Dentre os enfoques que resumiremos nesta seção estão o método numérico (computacional) de QCD na rede, cujos resultados atualmente servem como um ponto de referência para outros métodos. Além disso, faremos uma breve revisão de uma abordagem numérica ou semi-analítica amplamente utilizada: as equações de Schwinger–Dyson (SDE), que pertencem ao conjunto de métodos funcionais (Huber, 2020) (p. 18–30), entre os quais, por exemplo, também se encontra o método do grupo de renormalização funcional (FRG).

Este último não abordaremos em detalhes aqui, mas podemos dizer que é uma abordagem não perturbativa com uma implementação moderna da ideia de Wilson sobre o grupo de renormalização e a sua integração por camadas de momento. O elemento principal deste enfoque é a ação efetiva Γ_k , cujas flutuações quânticas para momentos $p^2 > k^2$ são integradas, e k atua como uma escala de corte no infravermelho. A ação efetiva Γ_k , por meio das suas equações de fluxo exatas, pode interpolar entre a ação clássica no UV e a ação efetiva quântica no infravermelho (Wegner; Houghton, 1973; Wilson; Kogut, 1974; Ellwanger, 1994; Gies, 2012; Litim, 2001; Braun, 2012; Dupuis *et al.*, 2021). Podemos citar alguns dos resultados do método FRG: o cálculo do potencial entre quarks no gauge de Landau (Ellwanger; Hirsch; Weber, 1998), propagadores da QCD e interações efetivas entre quarks (Bergerhoff; Wetterich, 1998), condensado e massa efetiva para o glúon (Horak *et al.*, 2022), ou resultados ligados à teoria da QCD em geral (Pawlowski, 2001; Gies; Wetterich, 2004; Pawlowski *et al.*, 2004; Dupuis *et al.*, 2021).

Figura 5 - Propagador e vértice para o *ghost* nas SDE



Legenda: Representação esquemática das SDE para o (a) propagador do *ghost* (b) Vértice *ghost*-glúon.

Em ambos os casos os círculos pretos representam quantidades vestidas.

Fonte: Fischer, 2006, p. 12-13.

2.1.1 Equações de Schwinger-Dyson

As equações de Schwinger-Dyson (SDE) (Dyson, 1949; Schwinger, 1951a; Schwinger, 1951b) são um conjunto infinito de equações acopladas não lineares, derivadas no contexto da integração funcional, que representam as equações de movimento de uma teoria quântica de campos e portanto estão relacionadas às funções de Green. Conforme discutido anteriormente, estas funções fornecem toda a informação quântica da teoria, o que em princípio permite calcular qualquer observável em termos delas.

Essas equações podem ser derivadas a partir da consideração de que a integral funcional de uma derivada total é zero³⁰. Aplicando tal propriedade ao gerador funcional, $Z[J]$, obtém-se:

$$\int [\mathcal{D}\Phi] \left(-\frac{\partial S}{\partial \Phi} + J(x) \right) e^{(-S + \int d^d x \Phi(x) J(x))} \equiv \left\langle -\frac{\partial S}{\partial \Phi} + J(x) \right\rangle = 0, \quad (54)$$

onde, após mais uma derivada com respeito à fonte $J(x)$, obtemos as SDE para o campo Φ .

O exemplo mais simples das SDE na QCD, cuja derivação pode ser encontrada na ampla literatura das SDE (Roberts; Williams, 1994; Alkofer; Smekal, 2001; Fischer, 2006; Papavassiliou, 2022), é o do propagador do *ghost*. Para se ter uma ideia da estrutura desse propagador neste formalismo, podemos partir de:

$$S_{QCD} + S_{fontes} = S' + \int d^d x \bar{c}^a \partial_\mu \left(\partial_\mu \delta^{ac} + g f^{abc} A_\mu^b \right) c^c + \int d^d x (\chi_*^a c^a + \bar{c}^a \chi^a), \quad (55)$$

onde S' contém os outros termos relacionados aos glúons, quarks, termo de gauge e fontes relacionadas à QCD (Eq. (37)), que não se misturam com os *ghosts*. Usando a Eq. (55)

³⁰ Dadas as condições de contorno apropriadas (cf. (Collins, 1986), p. 13-15).

e tomando a derivada com respeito a χ^c , a Eq. (54) para o anti-*ghost* $\bar{c}^a$ pode ser escrita como:

$$\left\langle \frac{\partial S_{gh}}{\partial \bar{c}^a(x)} \bar{c}^c(y) \right\rangle = \delta^{ac} \delta(x-y) \quad \wedge \quad S_{gh} = \int d^d x \bar{c}^a \partial_\mu \left(\partial_\mu \delta^{ac} + g f^{abc} A_\mu^b \right) c^c. \quad (56)$$

Usando $\frac{\partial S}{\partial \bar{c}^a(x)} = \partial_\mu D_\mu^{ac} c^c$ e manipulando os termos resultantes com ajuda das propriedades da delta de Dirac, o lado esquerdo da Eq. (56) pode ser reescrito como:

$$\partial_x^2 \langle c^a(x) \bar{c}^c(y) \rangle + \int d^d z d^d w \left(g f^{abd} \partial_{\mu,z} \delta(z-x) \delta(z-w) \langle A_\mu^b(z) c^d(w) \bar{c}^c(y) \rangle \right), \quad (57)$$

onde $\langle c^a(x) \bar{c}^c(y) \rangle$ e $\langle A_\mu^b(z) c^d(w) \bar{c}^c(y) \rangle$ correspondem às funções de correlação completas de 2 e 3 pontos, respectivamente, e podem ser relacionadas ao propagador do *ghost*, $\mathcal{G}^{ac}(x-y)$, e ao vértice *ghost*-glúon, $\propto -D_{\mu\nu}^{be}(z-t) \mathcal{G}^{df}(w-u) \Gamma_\nu^{efg}(t,u,v) \mathcal{G}^{gc}(v-y)$ (funções conectadas)³¹. Após uma série de manipulações (Alkofer; Smekal, 2001) na Eq. (57), teremos que a Eq. (56) para o *ghost* fica:

$$\left[\int d^d v \delta(x-v) \partial_v^2 \delta^{ag} - \int d^d z d^d w d^d t d^d u d^d v \left(g f^{abd} \partial_{\mu,z} \delta(z-x) \delta(z-w) \right) \times \right. \\ \left. D_{\mu\nu}^{be}(z-t) \mathcal{G}^{df}(w-u) \Gamma_\nu^{efg}(t,u,v) \right] \mathcal{G}^{gc}(v-y) = \delta^{ac} \delta(x-y), \quad (58)$$

da onde, por definição, podemos reconhecer que a expressão em colchetes na equação anterior (58) representa a inversa do propagador completo ou vestido do *ghost*, i.e. incluindo todas as interações referentes a esse propagador.

O formalismo não perturbativo das SDE faz uso de diagramas provenientes da interpretação à la Feynman da teoria de perturbação. Assim a interpretação pictórica da Eq. (58) pode ser expressada pelos diagramas da Fig. (5a), onde o inverso do propagador vestido do *ghost*, representado como uma linha tracejada com uma bola cheia, é dado pela soma do inverso do propagador livre (linha tracejada), que corresponde ao termo ∂^2 na Eq. (58), mais a correção a um *loop*. Esta última é, por sua vez, dada pelo resto dos termos da mesma equação, em que pode-se reconhecer que o termo proporcional a $g f^{abd} \partial_{\mu,z}$ representa o vértice *ghost*-glúon a nível de árvore, enquanto que os termos $D_{\mu\nu}^{be}(z-t)$, $\mathcal{G}^{df}(w-u)$ e $\Gamma_\nu^{efg}(t,u,v)$ representam os propagadores vestidos do glúon (linha espiral) e do *ghost* e o vértice *ghost*-glúon completo, respectivamente³².

Outro exemplo relativamente simples de mostrar, é o do vértice *ghost*-glúon³³, que aparece na Fig. (5b). O vértice *ghost*-glúon vestido pode ser expressado como a soma da

³¹ No capítulo 11 da Ref. (Peskin; Schroeder, 1995) pode-se encontrar detalhes sobre estas manipulações.

³² Nesta derivação, por simplicidade, fatores de renormalização foram omitidos.

³³ Contas sobre a derivação desse vértice podem ser achadas, por exemplo, no apêndice da Ref. (Schleifenbaum *et al.*, 2005) ou no apêndice B da Ref. (Schleifenbaum, 2004).

contribuição a nível de árvore mais a correção a um *loop*, que envolve o próprio vértice *ghost*-glúon vestido e as correções dos propagadores vestidos do *ghost* e do glúon. A partir das Figs. (5a) e (5b), podemos observar a natureza recursiva (infinita) das funções de correlação calculadas no contextos das SDE. Em geral, neste formalismo, as quantidades completas aparecem com um círculo vazio ou cheio.

Usando a Eq. (54), podemos obter todas as funções de correlação de uma teoria. No caso da QCD, além do propagador do *ghost* (Eq. (58)), podemos obter os propagadores do glúon e do quark, e os vértices tri-glúon, quadri-glúon, quark-glúon e *ghost*-glúon. Nós não vamos nos aprofundar no cálculo dessas funções, mas sim focar um pouco nas consequências dos seus comportamentos infravermelhos.

Um caso interessante é o do vértice *ghost*-glúon, já que pode ser mostrado que no limite de baixos momentos, o vértice completo se comporta como o vértice a nível de árvore (Marciano; Pagels, 1978; Smekal; Alkofer; Hauck, 1997; Smekal; Alkofer; Hauck, 1998; Fischer; Alkofer; Reinhardt, 2002; Fischer; Alkofer, 2002). Essa característica do vértice *ghost*-glúon foi usada nas SDE para mostrar uma relação no infravermelho entre os propagadores do glúon ($D(p)$) e do *ghost* (função vestida $F(p)$):

$$D(p^2 \rightarrow 0) \propto (p^2)^{K_A-1} \quad \wedge \quad F(p^2 \rightarrow 0) \propto (p^2)^{-K_c}. \quad (59)$$

Nesse limite e em quatro dimensões, os fatores K têm a relação $K_A/2 = K_c = \kappa$, onde $\kappa \sim 0.595$ (Zwanziger, 2002; Lerche; Smekal, 2002)³⁴.

Da Eq. (59), pode ser rapidamente percebido que, no infravermelho e para $\kappa > 0.5$, o propagador do glúon tende a zero, $D(p^2 \rightarrow 0) \rightarrow 0$, enquanto que o propagador do *ghost*, $1/(p^2)^{1+\kappa}$, é mais divergente que a nível de árvore, $1/p^2$. Essa ficou conhecida como solução *scaling*, e na época foi considerado como um indício do confinamento de cor (Kugo; Ojima, 1979; Zwanziger, 2004).

Os acoplamentos da Yang-Mills (sem quarks), definidos a partir dos próprios vértices e de forma não perturbativa e invariante pelo RG (Alkofer; Fischer; Llanes-Estrada, 2005), quando considerados os resultados da solução *scaling* (Eq.(59)), tendem a valores constantes não-nulos (dependentes do esquema de renormalização), $\mathcal{C}_i$:

$$4\pi\alpha^{gh}(p) = g^2 p^2 D(p) F^2(p) \stackrel{p^2 \rightarrow 0}{\sim} \mathcal{C}_1 \quad \wedge \quad \alpha^{3g}(p) \stackrel{p^2 \rightarrow 0}{\sim} \mathcal{C}_2 \quad \wedge \quad \alpha^{4g}(p) \stackrel{p^2 \rightarrow 0}{\sim} \mathcal{C}_3. \quad (60)$$

Tal propriedade foi interpretada como um ponto fixo no infravermelho (Aguilar; Natale; Rodrigues, 2003; Pawłowski *et al.*, 2004).

Acredita-se que o comportamento infravermelho das funções de correlação da QCD pode nos revelar indícios do confinamento. O exemplo mais prático disso, é o do potencial estático linear entre um par quark-antiquark, que depende da convolução do propagador

³⁴ Os cálculos iniciais mostravam um valor maior, $\kappa \sim 0.92$ (Smekal; Alkofer; Hauck, 1997).

do glúon com a constante do acoplamento (vértice quark–glúon), integrando este que deve se comportar como $1/p^4$ no infravermelho. Diante de um acoplamento constante como o suposto acima, esse comportamento recai sobre o propagador. Mandelstam (Mandelstam, 1979), que realizou a primeira aproximação nas SDE para o propagador *quenched* (sem quarks) do glúon no gauge de Landau, obteve um comportamento $1/p^4$ no infravermelho. Outro tipo de solução viria depois (Cornwall, 1982; Cornwall; Papavassiliou, 1989; Papavassiliou; Cornwall, 1991; Aguilar; Natale, 2005), onde o propagador do glúon se comportava como $(p^2 + m^2(p))^{-1}$, com $m^2(p^2 \rightarrow 0) \rightarrow m_g$ (constante), sendo o fator de massa $m(p)$, interpretado como uma massa dinâmica para o glúon. Ambos os tipos de soluções reproduzem o comportamento perturbativo para o propagador do glúon³⁵. A solução *scaling* entrava em conflito com a ideia do potencial $\propto 1/p^4$ no espaço de Fourier no limite infravermelho. Uma forma de contornar isso foi propor (Alkofer *et al.*, 2009) que, diferentemente do vértice *ghost*–glúon, o vértice quark–glúon era singular no infravermelho, levando a um acoplamento quark–glúon singular, $\alpha^{qg}(p^2 \rightarrow 0) \propto 1/p^2$. No cálculo do kernel do espalhamento quark-quark, junto com o propagador *scaling* do glúon, isto gerava um comportamento $1/p^4$, produzindo um potencial linear confinante.

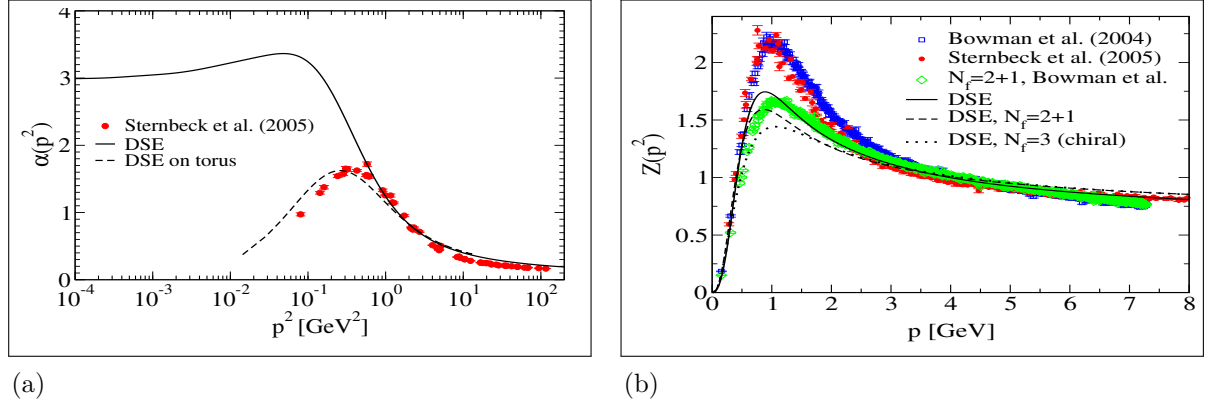
Na Fig. (6a), mostram-se resultados (*quenched*) para o acoplamento calculado a partir do vértice *ghost*–glúon obtidos a partir da solução *scaling* das SDE (Fischer; Alkofer, 2002; Fischer; Pennington, 2006), e na rede (Sternbeck *et al.*, 2005). Atualmente (Duarte; Oliveira; Silva, 2016), o acoplamento do vértice *ghost*–glúon possui um comportamento similar aos dados da Fig. (6a), tendendo a zero como p^2 (Fig. (12b)), algo que outras soluções no formalismo das SDE conseguem reproduzir também (Ferreira, 2022; Aguilar *et al.*, 2022).

Na Fig. (6b), é mostrada a função vestida do glúon, comparando entre os resultados das SDE e os da rede. Em ambos os casos, são mostrados resultados na aproximação *quenched* (SDE: (Fischer; Alkofer, 2003) e rede: (Sternbeck *et al.*, 2005; Bowman *et al.*, 2004)) e *unquenched*, que inclui quarks dinâmicos (SDE: (Fischer; Alkofer, 2003) e rede: (Bowman *et al.*, 2004)).

Os dados atuais da rede no gauge de Landau (Cucchieri; Mendes, 2008b; Cucchieri; Mendes, 2008a; Bogolubsky *et al.*, 2009; Dudal; Oliveira; Silva, 2018) mostram que os propagadores da Yang–Mills no infravermelho, não se comportam como na solução *scaling*, i.e., o propagador do glúon não é nulo e sim tende a um valor constante D_0 , como o faria um propagador massivo. Por outro lado, o propagador do *ghost* se comporta como a nível

³⁵ Em (Buttner; Pennington, 1995b; Buttner; Pennington, 1995a), podemos encontrar uma discussão interessante sobre o comportamento do propagador do glúon no infravermelho ($1/p^2$ e/ou $1/p^4$) e suas possíveis implicações relacionadas ao confinamento.

Figura 6 - Acoplamento *ghost*-glúon e propagador do *ghost* na SDE vs QCD na rede



Legenda: (a) Comparação do *running (quenched)* do acoplamento *ghost*-glúon calculado nas SDE e na rede. Em ambos os casos o acoplamento é definido pela Eq. (60). (b) Função vestida do glúon, $Z(p) = p^2 D(p)$, comparada com dados da rede. Mais detalhes no texto.

Fonte: Fischer, 2006, p. 23, 31.

de árvore, com uma função vestida constante F_0 :

$$D(p^2 \rightarrow 0) \rightarrow D_0 \quad \wedge \quad F(p^2 \rightarrow 0) \rightarrow F_0. \quad (61)$$

Esses novos resultados da rede levaram à procura de um outro tipo de solução nas SDE que fosse consistente com a rede. Na verdade, soluções das SDE que utilizavam aproximações diferentes e obtinham um propagador do glúon finito no infravermelho já existiam antes das simulações da rede (Boucaud *et al.*, 2008a; Boucaud *et al.*, 2008b; Aguilar; Binosi; Papavassiliou, 2008). Essa solução é conhecida como *decoupling*³⁶, também chamada de solução massiva. A solução *scaling* é um caso particular da família de soluções *decoupling* (Fischer; Maas; Pawłowski, 2009)³⁷.

Em princípio, a formulação das SDE gera um sistema de equações exato, mas recursivo e infinito, sendo muito complicado ou até impossível de resolver sem alguma aproximação. Por isso, neste formalismo são usados esquemas de truncamento na ordem das equações (Smekal; Alkofer; Hauck, 1998; Maris; Roberts, 2003; Bashir; Raya, 2006; Aguilar; Binosi; Papavassiliou, 2008; Huber; Smekal, 2013; Aguilar *et al.*, 2022), e implementados *Ansätze*, i.e. hipóteses sobre a forma funcional e tensorial, para o comportamento das diferentes funções de correlação completas. Tudo isso é feito cuidando para que as SDE preservem as propriedades e simetrias da teoria.

Atualmente, e usando a solução *decoupling* com seus respectivos truncamentos, o formalismo das SDE consegue manter resultados que concordam com os dados de QCD

³⁶ Nomeada assim porque os expoentes das funções do glúon e do glúon não estão mais vinculados.

³⁷ Uma análise rápido disto pode ser achado em (Greensite, 2011), p. 155-157.

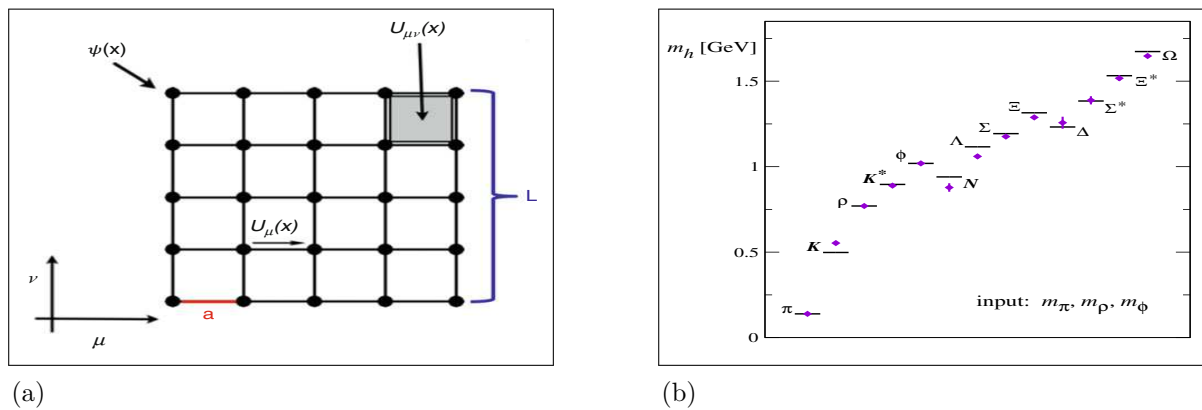
na rede (dentro das incertezas dos dados). No caso do propagador do glúon, podemos citar (Binosi; Ibáñez; Papavassiliou, 2012; Strauss; Fischer; Kellermann, 2012; Ibáñez; Papavassiliou, 2013; Aguilar; Ibáñez; Papavassiliou, 2013; Aguilar; Binosi; Papavassiliou, 2016). Para os propagadores do glúon, do *ghost* e do quark, há também a Ref. (Meyers; Swanson, 2014), que resolve o caso *unquenched*. Para os vértices, temos: o vértice *ghost*-glúon (Aguilar; Ibáñez; Papavassiliou, 2013), o tri-glúon (Aguilar *et al.*, 2020; Aguilar *et al.*, 2023), o quadri-glúon (Binosi; Ibáñez; Papavassiliou, 2014; Cyrol; Huber; Smekal, 2015), o quark-glúon (Alkofer; Fischer; Llanes-Estrada, 2005; Alkofer *et al.*, 2009; Aguilar *et al.*, 2012; Oliveira; Frederico; Paula, 2020). Sobre as constantes de acoplamento associadas a esses vértices, que até onde a rede mostra possuem valores finitos (Aguilar; Binosi; Papavassiliou, 2010; Binosi; Ibáñez; Papavassiliou, 2013).

2.1.2 QCD na rede

O formalismo de QCD na rede (Lattice QCD), se valendo de simulações numéricas, é atualmente uma das principais ferramentas não perturbativas e de primeiros princípios que permitem estudar as propriedades da interação forte no regime infravermelho e conectar a física dos hádrons com a dos seus constituintes: quarks, glúons e o mar de partículas virtuais coloridas (Montvay; Munster, 1997; Ratti; Bellwied, 2021).

O método de QCD na rede, originalmente idealizado para provar o confinamento dos quarks (Wilson, 1974), consiste na quantização de uma teoria de campos de gauge

Figura 7 - QCD na rede, discretização e resultados



Legenda: (a) Representação esquemática de uma rede de tamanho L e espaçamento a . (b) Massas dos hádrons m_h calculadas na rede (pontos) vs. valores experimentais (linhas).

Fonte: (a) Ratti; Bellwied, 2021, p. 7. (b) Aoki *et al.*, 2003; Luscher, 2003, p. 5.

numa rede discretizada no espaço euclideo³⁸ (x_E^μ). Este método preserva a invariância de gauge da teoria e não precisa de fixação de gauge, já que os campos são quantidades discretas (variáveis angulares). Por outro lado, o método quebra a simetria rotacional e a de Lorentz, mas espera-se que esses efeitos possam ser eliminados com uma análise sistemática do comportamento conforme o espaçamento de rede (vide Fig.7a diminui).

O objetivo deste método é proporcionar uma maneira de calcular, por meio do formalismo funcional e de forma não perturbativa, algumas quantidades de interesse, como funções de correlação, massas, acoplamentos, constantes de decaimentos, etc, que estejam relacionadas com a teoria de campos em questão (Montvay; Munster, 1997; Ratti; Bellwied, 2021). Dentre os resultados de QCD na rede, podemos destacar os de alguns observáveis, como as massas hadrônicas, por exemplo. Em particular, a massa do próton (Durr *et al.*, 2008) e a dos hádrons leves (Luscher, 2003; Aoki *et al.*, 2003; Ishikawa *et al.*, 2008; Durr *et al.*, 2008) (Fig. (7b)), assim como constantes de decaimentos para mésons (Bali *et al.*, 2013; Bali *et al.*, 2021).

A mudança ao espaço euclideo permite que a quantização implementada por meio da integral funcional, onde a integração feita sobre todas configurações possíveis do campo com um “peso” e^{iS_M} (Eqs. (14)) no espaço de Minkowski torna-se uma soma sobre as configurações com um peso estatístico e^{-S_E} (Eq. (15)), de forma equivalente à formulação da mecânica estatística:

$$\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS_M} \rightarrow \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S_E}. \quad (62)$$

Soma-se a isso a discretização do espaço euclideo, permitindo obter resultados numéricos por meio da implementação de algoritmos e simulações computacionais³⁹, como o método de Monte Carlo, por exemplo (Landau; Binder, 2021).

Diferentemente do contínuo, onde a integral funcional cobre todas as configurações possíveis, na rede, a integração é feita sobre um certo número de configurações e pontos no espaço $\{x_i\}$, ambos finitos. Em geral, os cálculos de QCD na rede são feitos sobre uma rede isotrópica quadridimensional⁴⁰ (euclidea) de lados L , espaçamento a e espaços N , tal que $L = Na$, onde a comumente é usado em unidades de Fermis (fm). Uma representação bidimensional dessa rede pode ser vista na Fig. (7a), onde cada sítio, i.e. ponto na rede, é associado ao campo fermiônico $\psi(x)$ e cada conexão, i.e. espaço entre os pontos na rede, é associada aos glúons.

³⁸ Lembramos que este é uma continuação analítica do espaço-tempo de Minkowski (x_M^μ), onde $t \rightarrow -i\tau$, tal que $x_M^\mu = (t, \vec{x}) \rightarrow x_E^\mu = (\vec{x}, x_4 = \tau)$.

³⁹ Embora limitado a quantidades independentes do tempo e à limitação de precisão do cálculo computacional, além de enfrentar obstáculos importantes em algumas teorias que apresentam o chamado Problema do Sinal.

⁴⁰ A forma da rede e os espaçamentos pode mudar como é feito nos estudos com redes anisotrópicas (Gong *et al.*, 2009; Fodor; Hoelbling, 2012; Forcrand; Unger; Vairinhos, 2018).

A discretização na rede permite definir os momentos (Skullerud *et al.*, 1999):

$$q_\mu = \frac{2}{a} \text{Sin} \left(\frac{p_\mu a}{2} \right) \wedge p_\mu = \frac{2\pi n_\mu}{aL_\mu}, \quad n_\mu = 0, 1, \dots, L_\mu - 1, \quad (63)$$

onde L_μ é o comprimento da rede na direção μ . A discretização do momento impõe regularizações infravermelha e ultravioleta na rede, através do seu comprimento finito L e do seu espaçamento de rede finito a , respectivamente. Ou seja, os momentos mínimo ($\propto 1/L$) e máximo ($\propto 1/a$) são ambos finitos. Matematicamente, e diferentemente do contínuo, a discretização da rede leva a quantidades bem definidas desde o começo, o que na verdade deve ser tomado com cuidado quando se trabalha com quarks (Eq. (71)).

Após a realização dos cálculos na rede, a estrutura da mesma deve ser eliminada aplicando o limite do contínuo $a \rightarrow 0$, cuja implementação não é trivial (Bonnet *et al.*, 2001; Davies *et al.*, 2004). Idealmente, extrapola-se esse limite numa extensão fixa da rede $L = Na \sim \text{const.}$ Também, após isso, deve ser tomado o limite termodinâmico $V \rightarrow \infty$ ($V = L^4$). Em geral, o procedimento completo tem um alto custo computacional, pois na prática faz-se vários cálculos mudando a e L , tentando mostrar que os resultados não dependem fortemente desses parâmetros. Ou seja, a fim de extrair corretamente a física a partir da rede, devem ser tidas em conta algumas coisas, como, por exemplo, que o espaçamento a da mesma seja pequeno o suficiente para emular o contínuo. Sempre haverá, no entanto, erros ou incertezas de discretização. Também deve ser considerado que o tamanho da rede seja grande o suficiente para acomodar as distâncias físicas relevantes do fenômeno que está sendo estudado, o que por sua vez introduz os chamados erros de tamanho finito. Em geral, o objetivo final é que os erros mencionados anteriormente, junto aos erros estatísticos inerentes aos cálculos, estejam todos sob o maior controle possível.

Para muitos processos hadrônicos, um espaço de rede $a < 0.1$ fm pode ser considerado perto do limite do contínuo, enquanto que um valor de $L = Na \sim 2$ fm tende a ser suficiente para acomodar mésons e bárions no seu estado fundamental (Bali, 1998). Por outro lado, para outras quantidades, como por exemplo os propagadores da Yang–Mills, esses valores da rede não são o suficiente para poder observar corretamente o que acontece em baixos momentos. Isso foi inicialmente discutido em cálculos semi-analíticos no formalismo de Schwinger–Dyson (Fischer *et al.*, 2007), que sugeriram que o comportamento do propagador do glúon observado na rede, que se anulava a momento zero, $D(0) \rightarrow 0$ ⁴¹ (Cucchieri, 1998a; Furui; Nakajima, 2004; Oliveira; Silva, 2005), estaria sendo afetado por efeitos de tamanho finito da rede.

Nesse mesmo ano, os resultados apresentados em (Bogolubsky *et al.*, 2007; Sternbeck *et al.*, 2007; Cucchieri; Mendes, 2007) (conferência Lattice 2007), para redes de tamanho L ($V = L^4$) igual a 13 (SU(3)), 19 (SU(2)) e 27 fm (SU(2)), respectivamente,

⁴¹ O formalismo de Schwinger–Dyson também previa esse comportamento.

mostraram que, para baixos momentos e no gauge de Landau, o propagador do glúon não era nulo ($D(0) \neq 0$). Além disso, também verificou-se na rede que o propagador do *ghost* não era mais ampliado ($\{1/p^{2\kappa}, \kappa > 0\} \rightarrow 1/p^2$)⁴², algo totalmente diferente ao já encontrado na rede anteriormente⁴³. Esses resultados foram extrapolados ao infinito ($V \rightarrow \infty$), confirmando que, em dimensões 3 e 4, esse era realmente o comportamento infravermelho dos propagadores da Yang-Mills (Cucchieri; Mendes, 2008b; Cucchieri; Mendes, 2008a).

Um ponto que queremos destacar é que, mesmo não sendo necessária a fixação de gauge na rede, existe na mesma uma grande quantidade de resultados no gauge de Landau⁴⁴. Alguns deles, de interesse especial para nós (propagadores da Yang-Mills), estão relacionados com o propagador do glúon na aproximação *quenched*, ou seja, sem *loops* de quark (Bonnet *et al.*, 2000; Cucchieri; Mendes, 2007; Bogolubsky *et al.*, 2009; Bornyakov; Mitrjushkin; Muller-Preussker, 2010; Maas, 2013; Oliveira; Silva, 2012; Gracey *et al.*, 2019), e outros na aproximação *unquenched* (Bowman *et al.*, 2004; Silva; Oliveira, 2010; Binosi, 2012), onde pode ser apreciado o efeito supressor dos *loops* de quarks no propagador do glúon em baixos momentos⁴⁵. Outros resultados *unquenched* concentram-se no propagador do quark (Bowman *et al.*, 2005), no cálculo de massas hadrônicas (Ishikawa *et al.*, 2008) e no vértice de interação quark-glúon (Kizilersü *et al.*, 2021), entre outros. A formulação da QCD na rede é bastante complexa. Na maioria dos casos, é mais conveniente inicialmente trabalhar separando a parte da Yang-Mills pura e a parte dos quarks.

Voltando agora à formulação matemática da teoria de Yang-Mills discretizada, apresentaremos uma breve introdução às grandezas utilizadas. Primeiramente, na rede não é usado diretamente o campo dos glúons, mas sim a função de conexão ou vínculo (*link*) $U_\mu(x)$ (Leinweber *et al.*, 1999b):

$$U_\mu(x) = \mathcal{P} \left\{ \text{Exp} \left[ig \int_0^1 d\tau A_\mu(x + a\hat{\mu}\tau) \right] \right\}, \quad (64)$$

onde $\mathcal{P}$ denota um ordenamento ao longo do caminho de integração entre os pontos x e $x + a\hat{\mu}$, e neste caso, $\hat{\mu}$ representa um vetor unitário na rede (Fig. (7a)). Essa função serve para construir uma quantidade invariante de gauge, que por sua vez serve para escrever uma versão discretizada da ação da Yang-Mills.

⁴² Em (Cucchieri *et al.*, 2007; Sternbeck *et al.*, 2007), foi mostrado que não existe uma diferença qualitativa entre os resultados para os propagadores da Yang-Mills nos casos SU(2) e SU(3).

⁴³ Em $d = 2$ (L^2) esses comportamentos se mantiveram (Maas, 2007).

⁴⁴ A fixação do gauge na rede é feita gerando um conjunto de configurações a partir da ação invariante, para depois aplicar transformações de gauge nas mesmas e pegar aquelas configurações (na Órbita de gauge) que satisfaçam a condição da fixação de gauge (Cucchieri; Mendes, 1996).

⁴⁵ No formalismo de SDE (Aguilar; Binosi; Papavassiliou, 2012) também é visto este efeito, o que pode ser um reflexo do aumento da massa efetiva do glúon.

Tal invariante de gauge é construído a partir do traço da função conhecida como plaqueta $U_{\mu\nu}(x)$, que numa rede hipercúbica é definida como o menor quadrado possível (menor caminho fechado), como pode ser visto na Fig. (7a):

$$U_{\mu\nu}(x) = U_{\mu\nu,x} = U_{\mu,x} U_{\nu,x+\hat{\mu}} U_{\nu,x+\hat{\mu}}^\dagger U_{\mu,x}^\dagger, \quad (65)$$

onde a equação anterior pode ser escrita como:

$$U_{\mu\nu}(x) = 1 + ig a^2 G_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g^2 a^4 G_{\mu\nu}^2(x) + \mathcal{O}(a^6), \quad (66)$$

da onde podemos identificar rapidamente o termo cinético da Yang–Mills ($G_{\mu\nu}^2$). A partir disso, é escrita a chamada ação de Wilson (SU(N)) (Wilson, 1974):

$$S_W = \beta \sum_x \sum_{1 \leq \mu \leq \nu \leq 4} \left(1 - \frac{1}{N} \mathbb{R} \{ \text{Tr}[U_{\mu\nu}(x)] \} \right), \quad \beta \equiv \frac{2N}{g^2}, \quad (67)$$

que deve recuperar a forma da ação de Yang–Mills no espaço euclideano no limite do contínuo, quando $a \rightarrow 0$:

$$S_W \sim \frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr} [G_{\mu\nu}^2(x)], \quad (68)$$

em que β foi definido de maneira tal que isso seja cumprido.

O fato de que os glúons sejam definidos a partir da função *link* $U_\mu(x)$ é devido a esta fazer parte de uma versão discretizada da matriz de transporte paralelo (Leinweber *et al.*, 1999b). Lembrando que no contínuo os glúons aparecem naturalmente a partir do comparador e da sua lei de transformação (Eq. (6)):

$$U(y, x) = V(y) U(y, x) V^+(x) \quad , \quad U(y, y) = 1 \quad , \quad V(x) = \text{Exp} [i \alpha^a(x) t^a], \quad (69)$$

onde, ao levar em conta argumentos geométricos na covariância da derivada e a preservação da invariância de gauge, estes aparecem na derivada covariante (transporte paralelo), com os glúons sendo chamados de conexão (vínculo, *link*).

Nesse sentido, o comparador é usado para distâncias infinitesimais, mas quando este é usado para distâncias finitas x e y , ele torna-se dependente do caminho tomado entre x e y . Isso leva à formulação da chamada linha de Wilson (Peskin; Schroeder, 1995), que é uma espécie de versão contínua da Eq. (64):

$$U_P(z, y) = \mathcal{P} \left\{ \text{Exp} \left[ig \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu(x(s)) \right] \right\} \quad , \quad x|_y^z \rightarrow s|_0^1. \quad (70)$$

Ao considerar um caminho fechado C na linha de Wilson $U_P(z, y)$ é gerado o chamado *loop* de Wilson, definido como $W_C = \text{Tr} U_P(z, C)$. A plaqueta (Eq. (65)) é um análogo discreto disso. De forma semelhante à Eq. (66), o *loop* de Wilson é um invariante

de gauge e também permite escrever o termo cinético da Yang–Mills⁴⁶.

Quanto à discretização da ação dos quarks, esta tende a ser muito mais complicada. Por exemplo, se a discretizarmos diretamente, escrevendo as derivadas na aproximação de diferenças finitas, $\partial\psi(x) \rightarrow \frac{1}{a}(\psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x))$, obtém-se um inverso de propagador para o quark no espaço de momentos na forma:

$$-i\gamma_\mu \frac{\text{Sin}(\hat{p}_\mu a)}{a} + m, \quad (71)$$

que, devido à periodicidade da função seno, destrói o limite do contínuo nos zeros de $\hat{p}_\mu a$, e os pólos no propagador levam ao problema da duplicidade de quarks, onde estes se comportam como 2^d espécies de férmions (16 na rede quadridimensional).

Essa questão é bastante complexa e está fora do escopo desta breve revisão, mas podemos dizer que existem algumas estratégias para tentar contornar o problema (Kogut; Susskind, 1975; Susskind, 1977; Frezzotti *et al.*, 2001; Bazavov *et al.*, 2010), embora estas introduzam outros inconvenientes, como violação de simetria quiral ou não localidade. A ideia geral para lidar com isso é escrever uma ação fermiônica, S_q , de tal maneira que:

$$\int [\mathcal{D}\bar{\psi}][\mathcal{D}\psi] \text{Exp} \left[-S_q = -a^4 \sum_x \bar{\psi}_x Q_{xy} \psi_y \right] \equiv \det(Q), \quad (72)$$

onde a matriz dos quarks Q_{xy} , que depende também do *link* $U_\mu(x)$, contém as correções que permitem eliminar os férmions espúrios que apareceram na discretização da ação fermiônica livre. Como existem diversas maneiras de contornar esse problema, estaríamos diante de uma certa arbitrariedade na definição da ação fermiônica.

Tratado esse problema (Eq. (72)), a ação para a QCD na rede pode ser escrita como:

$$S_{QCD} = \beta \sum_x \sum_{1 \leq \mu \leq \nu \leq 4} \left(1 - \frac{1}{N} \mathbb{R} \{ \text{Tr}[U_{\mu\nu}(x)] \} \right) - \text{Log} [\det(Q)], \quad (73)$$

onde a contribuição dos quarks estaria contida no fator $\text{Log} [\det(Q)]$.

Anteriormente mencionamos que existe a aproximação *quenched*, que não leva em conta os quarks. Na prática, neste formalismo a contribuição deles pode ser desprezada se considerarmos que $\det(Q) = 1$. Tal aproximação corresponde a considerar quarks infinitamente massivos, i.e. sem dinâmica, que suprimem os *loops* de quarks. Por outro lado, também se tem a formulação completa, *unquenched*, que leva em conta os quarks, ou seja $\det(Q) \neq 1$.

O *loop* de Wilson W_C , na aproximação *quenched* e no limite de um tempo τ (euclidiano) assintoticamente grande, se comporta como $W_C \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau V(r)}$, o que por sua vez

⁴⁶ Em (Peskin; Schroeder, 1995) (Cap. 15) pode ser encontrado um exemplo de como o invariante de gauge $\text{Tr} [G_{\mu\nu}^2]$ pode ser construído a partir de argumentos geométricos em teorias não-Abelianas.

permite calcular o potencial estático entre um par quark–antiquark⁴⁷:

$$V(r) \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \text{Log} \langle W_C \rangle, \quad r = |\vec{r}|. \quad (74)$$

A Eq. (74) implementada na rede permitiu confirmar que o potencial estático quark–antiquark se comporta de forma linear para longas e intermediárias distâncias. Podemos citar alguns resultados para a aproximação *quenched* (Stack, 1983; Griffiths; Michael; Rakow, 1983; Otto; Stack, 1984; Booth *et al.*, 1992; Bali, 1998; Bali, 2001) e outros para o caso completo, *unquenched* (Bali *et al.*, 1998; Aoki *et al.*, 1999; Bali *et al.*, 2000; Bernard *et al.*, 2000; Koma; Wittig; Koma, 2008; Kawanai; Sasaki, 2012).

2.2 Modelo Gribov–Zwanziger

No capítulo anterior, na seção 1.3, discutimos rapidamente a problemática das cópias de Gribov e a solução proposta (Gribov, 1978) para a sua respectiva eliminação (ou quase eliminação) através da restrição do domínio da integral funcional à região de Gribov Ω , fazendo uso da chamada condição de não pólo e trazendo importantes consequências para o comportamento infravermelho dos propagadores dos glúons e dos *ghosts*.

Posteriormente, baseado nas ideias de Gribov, D. Zwanziger (Zwanziger, 1989a; Zwanziger, 1989b; Zwanziger, 1993) construiu um novo procedimento para restringir a integração funcional à região de Gribov, implementando a condição de não pólo a todas as ordens na PT, através da chamada condição de horizonte $H(A)$, onde aparece um termo de massa que pode ser identificado com o termo da massa de Gribov. Zwanziger, fazendo uso da teoria de perturbação degenerada, abordou a condição de não pólo avaliando os autovalores $\lambda(A)$ do operador de Faddeev–Popov (FP), $\mathcal{M}^{ab}\theta^b = \lambda(A)\theta^a$. Isso, no limite termodinâmico, leva à seguinte expressão⁴⁸:

$$\text{Tr}(\mathcal{M}) = Vd(N^2 - 1) - H(A) \geq 0, \quad (75)$$

sendo $H(A)$ a função horizonte:

$$H(A) = g^2 \int d^d x d^d y f^{abc} A_\mu^b(x) (\mathcal{M}^{-1})_{xy}^{ad} f^{dec} A_\mu^e(y). \quad (76)$$

A condição de positividade do operador de FP (Eq. (75)), equivalente à condição de não pólo, pode ser incorporada à integral funcional usando a função de Heaviside

⁴⁷ Em (Brambilla; Vairo, 1999) (p. 15–20) encontramos uma derivação resumida disso.

⁴⁸ Uma revisão detalhada e didática da obtenção dos autovalores e do traço do operador de FP pode ser encontrada em (Vandersickel, 2011; Vandersickel; Zwanziger, 2012).

($\theta(x)$), de uma maneira similar a como foi feito no caso de Gribov. Neste caso, a restrição do domínio da integral funcional estaria dada por (Eqs. (75) e (43)):

$$V_{GZ}(\Omega) = \theta(\lambda(A)) = \theta(d(N^2 - 1) - H(A)/V) = \int \frac{d\beta}{2\pi i \beta} e^{\beta(d(N^2-1)-H(A)/V)}. \quad (77)$$

O fato de $H(A)$ ser um operador não local, que depende da inversa do operador de FP, $\mathcal{M}^{-1}$, indica que as maiores contribuições à integral funcional virão dos campos perto da fronteira de Gribov onde $\mathcal{M}^{-1}$ começa a divergir. Dado esse comportamento, pode-se argumentar que seria válido usar a aproximação de ponto de sela no gerador funcional, desconsiderando o fator $1/\beta$ na Eq. (77) no limite termodinâmico, tal como foi feito no caso de Gribov (Eq. (50)). Isso permitiria trocar $\theta(\lambda(A))$ por $\delta(\lambda(A))$, já que, por meio de uma rotação de Wick, pode ser visto que a representação integral da função delta de Dirac é equivalente à função de Heaviside, a não ser pelo fator $1/\beta$ desta última⁴⁹ (Eqs. (43) e (77)) (Gribov, 1978; Vandersickel, 2011). Ou seja, de forma equivalente, podemos considerar desde o início na integral funcional uma função $\delta(\lambda(A))$ ao invés da função degrau $\theta(\lambda(A))$.

D. Zwanziger baseou-se então na equivalência entre os ensembles microcanônico e canônico no limite termodinâmico (Zwanziger, 1989a; Zwanziger, 1989b; Zwanziger, 1993) e conseguiu mostrar que a variação de $H(A)$ tende a zero quando $V \rightarrow \infty$, justificando assim o uso da aproximação de ponto de sela (Vandersickel; Zwanziger, 2012). Isto permite expressar o funcional gerador como:

$$\begin{aligned} Z &= \int [\mathcal{D}A] [\mathcal{D}c] [\mathcal{D}\bar{c}] \delta(d(N^2 - 1) - H(A)/V) e^{-\mathcal{S}_{FP}} \\ Z &= \int [\mathcal{D}A] [\mathcal{D}c] [\mathcal{D}\bar{c}] e^{-[\mathcal{S}_{FP} + \gamma^4 H(A)/V - \gamma^4 d(N^2 - 1)]} = \int [\mathcal{D}A] [\mathcal{D}c] [\mathcal{D}\bar{c}] e^{-\mathcal{S}_{GZ}^{nl}} \end{aligned} \quad (78)$$

com a ação de Gribov–Zwanziger não local $\mathcal{S}_{GZ}^{nl}$ sendo dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{GZ}^{nl} &= \mathcal{S}_{FP} + \gamma^4 H(A)/V - \gamma^4 d(N^2 - 1) \\ \mathcal{S}_{FP} &= \int d^4x \left(\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b \right), \end{aligned} \quad (79)$$

onde $H(A)$ é dada pela Eq. (76). Temos que lembrar que sempre será escolhido o limite $\xi = 0$, já que a teoria foi desenvolvida no calibre de Landau.

O parâmetro γ que aparece na ação GZ tem unidades de massa, tal como no caso

⁴⁹ Representação integral das funções degrau ($\theta(x)$) e delta ($\delta(x)$):

$$\theta(x) = \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{d\beta}{2\pi i} \frac{e^{\beta x}}{\beta} \quad \wedge \quad \delta(x) = \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{d\beta}{2\pi i} e^{\beta x}.$$

de Gribov. Este parâmetro também não é livre, mas sim determinado pela condição de Horizonte (Zwanziger, 1989b; Zwanziger, 1993):

$$\langle H(A) \rangle / V = d(N^2 - 1), \quad (80)$$

que também permite estabelecer uma equação de gap para esse parâmetro massivo em $\mathcal{O}(g^2)$ de forma muito similar ao caso de Gribov:

$$1 = \frac{d-1}{d} N g^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^4 + \lambda^4} \wedge \lambda^4 = 2g^2 N \gamma^4. \quad (81)$$

Nesta última equação, a não ser por alguns fatores constantes, o termo de massa γ no cenário GZ é equivalente à massa de Gribov (Eq. (50)). De fato, em (Capri *et al.*, 2013), foi demonstrado que para todas as ordens na PT, mesmo que as abordagens de Gribov e Zwanziger sejam bastante diferentes, as duas formas de implementar a restrição da integral funcional à região de Gribov são completamente equivalentes.

Para garantir previsões finitas para as quantidades úteis numa teoria quântica de campos, desde as funções de correlação até os observáveis, é preciso ter uma teoria local e renormalizável. Dessa maneira, se faz necessário desenvolver uma expressão local e renormalizável para a ação GZ. Zwanziger (Zwanziger, 1989b; Zwanziger, 1993; Vandersickel; Zwanziger, 2012), conseguiu obter tal ação local pagando o preço de introduzir novos campos auxiliares $(\varphi_\mu^{ab}, \bar{\varphi}_\mu^{ab}, \omega_\mu^{ab}, \bar{\omega}_\mu^{ab})$ à sua ação não local, Eq. (79). Os campos $(\varphi_\mu^{ab}, \bar{\varphi}_\mu^{ab})$ representam campos bosônicos que aparecem na ação local quando se localiza o operador $(-\mathcal{M}^{-1})$ da função horizonte $H(A)$. A introdução destes novos campos, por sua vez, gera um fator $\det(-\mathcal{M})^{50}$. Este fator pode então ser exponenciado tal como foi feito com no procedimento de FP que introduziu os *ghosts* $c, \bar{c}$ (vide a identidade usada na Eq. (38)). Na teoria de Gribov-Zwanziger, os campos auxiliares introduzidos nesse procedimento de exponenciação do determinante são os novos campos anti-comutantes $(\omega_\mu^{ab}, \bar{\omega}_\mu^{ab})$. Mais detalhes pedagógicos sobre a localização da ação GZ podem ser encontrados em (Vandersickel; Zwanziger, 2012).

O funcional gerador da ação local GZ, que denotaremos como $\mathcal{S}_{GZ}$ fica então escrito

⁵⁰ Para variáveis complexas conjugadas $\{\varphi_\mu^{ab}, \bar{\varphi}_\mu^{ab}, J_\mu^{ab}, \bar{J}_\mu^{ab}\}$ e um operador B , pode-se obter a seguinte equivalência (Vandersickel, 2011). Mais detalhes em (Vandersickel; Zwanziger, 2012):

$$I = \int [\mathcal{D}\bar{\varphi}][\mathcal{D}\varphi] \text{Exp} \left[- \int d^4x d^4y \bar{\varphi}_\mu^{ac}(x) B_{\mu\nu}^{ab}(x, y) \varphi_\nu^{bc}(y) + \int d^4x \left(\bar{\varphi}_\mu^{ac} J_\mu^{ac}(x) + \varphi_\mu^{ac} \bar{J}_\mu^{ac}(x) \right) \right]$$

$$I = \mathcal{N} (\det(B))^{-1} \text{Exp} \left[+ \int d^4x d^4y J_\mu^{ac}(x) [B_{\mu\nu}^{ab}(x, y)]^{-1} \bar{J}_\nu^{bc}(y) \right],$$

sendo $\mathcal{N}$ uma constante que será cancelada no cálculo das funções de correlação.

como:

$$Z = \int [\mathcal{D}A] [\mathcal{D}c] [\mathcal{D}\bar{c}] [\mathcal{D}\bar{\varphi}] [\mathcal{D}\varphi] [\mathcal{D}\bar{\omega}] [\mathcal{D}\omega] e^{-\mathcal{S}_{GZ}} \quad (82)$$

onde $\mathcal{S}_{GZ}$ pode ser expressada como a soma:

$$\mathcal{S}_{GZ} = \mathcal{S}_{\text{FP}} + \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_\gamma, \quad (83)$$

do termo de Faddeev-Popov $\mathcal{S}_{\text{FP}}$, dado pela Eq. (79), com duas novas contribuições referentes aos campos auxiliares e à função horizonte, $\mathcal{S}_0$ e $\mathcal{S}_\gamma$:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^d x \left(\bar{\varphi}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \varphi_\mu^{bc} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \omega_\mu^{bc} - g \left(\partial_\nu \bar{\omega}_\mu^{ac} \right) f^{abm} \left(D_\nu^{bd} c^d \right) \varphi_\mu^{mc} \right), \quad (84)$$

$$\mathcal{S}_\gamma = -\gamma^2 g \int d^d x \left(f^{abc} A_\mu^a \left(\varphi_\mu^{bc} + \bar{\varphi}_\mu^{bc} \right) + \frac{d}{g} (N^2 - 1) \gamma^2 \right). \quad (85)$$

Note que o último termo da Eq. (84) não provém diretamente da localização da ação GZ, mas é adicionado a esta a fim de se obter uma ação renormalizável (Zwanziger, 1993; Dudal *et al.*, 2005). Na Ref. (Dudal; Sorella; Vandersickel, 2010), este termo é discutido em mais detalhes.

A partir das ações local (Eq. (83)) e não local (Eq. (79)), a condição de horizonte (não local) pode ser expressada de forma local através da seguinte relação (Zwanziger, 1993; Vandersickel; Zwanziger, 2012):

$$\int [\mathcal{D}A] [\mathcal{D}c] [\mathcal{D}\bar{c}] e^{-\mathcal{S}_{GZ}^{\text{nl}}} \equiv \int [\mathcal{D}A] [\mathcal{D}c] [\mathcal{D}\bar{c}] [\mathcal{D}\bar{\varphi}] [\mathcal{D}\varphi] [\mathcal{D}\bar{\omega}] [\mathcal{D}\omega] e^{-\mathcal{S}_{GZ}}, \quad (86)$$

onde, tomando a derivada parcial com respeito a γ^2 e usando a Eq. (80), temos que:

$$-2\gamma^2 \langle H(A) \rangle / V = -2\gamma^2 d(N^2 - 1) \equiv \left\langle g f^{abc} A_\mu^a \left(\varphi_\mu^{bc} + \bar{\varphi}_\mu^{bc} \right) \right\rangle. \quad (87)$$

A equação anterior por sua vez permite reescrever a condição do horizonte usando a definição da ação quântica Γ , tal que⁵¹:

$$\left. \frac{\partial \Gamma_{\text{GZ}}}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma^2 \neq 0} = 0 \quad \wedge \quad e^{-\Gamma_{\text{GZ}}} = \int [\mathcal{D}\phi]_{\text{GZ}} e^{-\mathcal{S}_{GZ}}. \quad (88)$$

Aqui utilizamos uma notação simplificada da medida de integração da ação GZ (Eq. 82).

⁵¹ A solução $\gamma = 0$ em $\frac{\partial \Gamma_{\text{GZ}}}{\partial \gamma^2} = 0$ indicaria que a restrição à região de Gribov ainda não foi considerada ou que as cópias não surtem efeito de geração de escala na ação quântica.

2.2.1 Propagador do glúon no modelo GZ

As ideias de Gribov, implementadas à quantização das teorias de Yang–Mills por meio do formalismo proposto por Zwanziger, também levam a mudanças nos propagadores da teoria. O propagador do glúon em nível de árvore pode ser obtido considerando apenas a parte livre da ação de GZ que envolve os campos relacionados com o campo A . Tem-se:

$$S_0^{GZ} = \int d^d x \left[\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\varphi}_\mu^{ab} \partial^2 \varphi_\mu^{ab} - \gamma^2 g f^{abc} A_\mu^a (\varphi_\mu^{bc} + \bar{\varphi}_\mu^{bc}) \right]. \quad (89)$$

Usando as equações de movimento (Euler–Lagrange) na equação anterior (89), pode ser obtida uma relação entre os campos $\{\varphi, \bar{\varphi}\}$ e o campo A :

$$\varphi_\mu^{bc} = \bar{\varphi}_\mu^{bc} = \frac{1}{\partial^2} \gamma^2 g f^{abc} A_\mu^a, \quad (90)$$

permitindo assim, depois de um pouco de álgebra (e usando $f^{abc} f^{dbc} = N \delta^{ad}$), expressar a Eq. (89) apenas em função do campo A :

$$S_0^{GZ}[A] = \int d^d x \left[\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 - A_\mu^a \left(N g^2 \gamma^4 \frac{1}{\partial^2} \right) A_\mu^a \right]. \quad (91)$$

A expressão anterior (91), reescrita no espaço de Fourier (Apêndice E, Eqs. (278) – (280)), permite obter o propagador do glúon, de forma similar ao que foi feito nas Eqs. (45)–(47), por meio da inversa do operador $\Delta_{\mu\nu}^{ab}$, tal que $\Delta_{\mu\alpha}^{ac} (\Delta_{\alpha\nu}^{cb})^{-1} = \delta^{ab} \delta_{\mu\nu}$:

$$S_0^{GZ}[\tilde{A}] = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{2} \tilde{A}_\mu^a(-p) \Delta_{\mu\nu}^{ab}(p) \tilde{A}_\nu^b \right], \quad (92)$$

sendo

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(p) = \left[\left(\frac{\lambda^4}{p^2} + p^2 \right) \delta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) p_\mu p_\nu \right] \wedge \lambda^4 = 2N g^2 \gamma^4, \quad (93)$$

onde o termo λ^4/p^2 vem do último fator da Eq. (91). A inversa de Δ é:

$$(\Delta_{\mu\nu}^{ab}(p))^{-1} = \delta^{ab} \left[\frac{p^2}{p^4 + \lambda^4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \xi \frac{p^2}{p^4 + \xi \lambda^4} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \quad (94)$$

Portanto, no calibre de Landau ($\xi = 0$), o propagador do glúon será:

$$\langle \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \rangle = (\Delta_{\mu\nu}^{ab}(p))^{-1} = \delta^{ab} \frac{p^2}{p^4 + \lambda^4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right), \quad (95)$$

que, basicamente, é o mesmo resultado encontrado por Gribov (Eq. (51)).

Como o propagador do glúon possui a mesma estrutura com pólos imaginários ($p^2 = \pm i\lambda^2$) tanto na abordagem GZ quanto na de Gribov, a interpretação do glúon como uma partícula que pertence ao espectro físico também é invalidada, mantendo assim a ideia

de que os glúons estão confinados por meio do horizonte de Gribov. Neste cenário, tal como na abordagem de Gribov, o propagador do *ghost* também é ampliado no infravermelho, adquirindo um comportamento $\sim 1/p^4$ (Gracey, 2006; Vandersickel; Zwanziger, 2012).

2.3 Modelo Gribov–Zwanziger Refinado

Até meados da década 2000, o formalismo GZ no gauge de Landau conseguiu reproduzir dados e características então vistas em simulações na rede sobre o comportamento dos propagadores dos glúons e dos *ghosts*. Dentre elas estavam algumas características no infravermelho como um propagador do glúon suprimido (nulo) a momento zero e um propagador do *ghost* ampliado, com comportamento $1/p^4$. Além disto, tinha-se correspondência com alguns indícios atribuídos ao confinamento, tal como a violação de positividade do propagador do glúon, um potencial linear confinante vindo do comportamento $1/p^4$ no propagador do *ghost* (Gribov, 1978) no gauge de Coulomb. Esse conjunto de resultados era obtido a partir da restrição do domínio da integral funcional devido às cópias de Gribov.

Apesar de todo o sucesso inicial e compatibilidade do formalismo GZ com a rede e outras abordagens não-perturbativas, quando foi possível simular grandes volumes da mesma⁵², esta mostraria novos resultados para os propagadores do glúon e do *ghost* que contradiziam o regime infravermelho de achados anteriores (Cucchieri; Mendes, 2008b; Cucchieri; Mendes, 2008a) (para $d = 3, 4$). A diferença consistia em um propagador do glúon que, agora, saturava num valor não nulo, $D(0) \neq 0$, mas mantendo a sua violação de positividade, enquanto que o propagador do *ghost* se comportava como $1/p^2$.

O conflito que passaram a apresentar as predições da GZ com os dados da rede levaria à busca de uma maneira de reconciliar tais resultados. Isso foi logrado por meio de um “refinamento” da ação de GZ, no qual foram considerados condensados de dimensão 2, $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ e $\langle \bar{\varphi}_\mu^{ac} \varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \omega_\mu^{ac} \rangle$, que ainda preservam a renormalizabilidade da teoria e dão como resultado o que hoje é conhecido como formalismo de Gribov–Zwanziger Refinado (Dudal *et al.*, 2008a; Dudal *et al.*, 2008b; Dudal; Oliveira; Vandersickel, 2010; Dudal; Sorella; Vandersickel, 2011; Dudal *et al.*, 2019), em atual compatibilidade com a rede.

⁵² Quanto maior o volume da rede simulada menor o valor do momento que pode ser atingido.

2.3.1 Condensados

Os condensados ou, mais precisamente, o valor esperado no vácuo de um certo operador local composto (LCO⁵³) são um recurso muito importante em QFT, já que, entre outras coisas, eles permitem ter acesso a efeitos não perturbativos. Exemplos deles são: o famoso condensado de quark–antiquark, relacionado à quebra de simetria chiral, $\langle q\bar{q} \rangle \neq 0$ (Shifman; Vainshtein; Zakharov, 1979a; Abramchuk; Simonov, 2021), e o condensado do tensor do campo do glúon, $\langle \alpha_s G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle \neq 0$, com várias aplicações fenomenológicas (Shifman; Vainshtein; Zakharov, 1979a; Shifman; Vainshtein; Zakharov, 1979b). Um valor não-nulo deste condensado não é associado à quebra de simetrias, mas à presença não-perturbativa de campos no vácuo da teoria. Ambos os condensados têm valor nulo perturbativamente, mas diferente de zero no infravermelho (Miller, 2007).

Outro exemplo de condensado é $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$, que poderia estar relacionado a um fator de massa para o glúon. Este tipo de condensado tem sido muito estudado (Gubarev; Zakharov, 2001; Kondo, 2001; Kondo *et al.*, 2002; Boucaud *et al.*, 2006; Gubarev; Morozov, 2005), com bastante ênfase no gauge de Landau (Gubarev; Stodolsky; Zakharov, 2001; Verschelde *et al.*, 2001; Dudal; Verschelde; Sorella, 2003; Dudal *et al.*, 2003b; Arriola; Bowman; Broniowski, 2004; Gracey, 2005; Li; Shakin, 2005; Gracey, 2022).

A ideia do glúon poder desenvolver uma massa efetiva sempre teve um grande interesse teórico e fenomenológico (Parisi; Petronzio, 1980; Consoli; Field, 1994; Field, 2002; Giacosa; Gutsche; Faessler, 2005; Luna *et al.*, 2005), já que ela está atrelada às ideias do confinamento e ao gap de massa da teoria de Yang–Mills. Em (Verschelde *et al.*, 2001; Dudal; Verschelde; Sorella, 2003; Browne; Gracey, 2003; Dudal *et al.*, 2003b), sob o formalismo do LCO e no gauge de Landau, foi apresentado e calculado até segunda ordem um potencial efetivo renormalizável para $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ ⁵⁴, mostrando que a presença deste condensado minimiza a energia do vácuo, favorecendo assim um valor não nulo do termo de massa proveniente deste condensado⁵⁵.

O fator de massa dinâmico previsto para $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ era da ordem dos 500 MeV (Verschelde *et al.*, 2001), que não se encontrava muito longe das predições da rede. O fator de massa também servia para explicar algumas discrepâncias entre funções de correlação e dados da rede (Gubarev; Stodolsky; Zakharov, 2001; Gubarev; Zakharov, 2001), em particular para o gauge de Landau (Langfeld; Reinhardt; Gattnar, 2002) (propagador do glúon SU(2), massa ~ 600 MeV) ou inclusive com outros métodos como a rede (Amemiya;

⁵³ Em (Knecht; Verschelde, 2001) se mostra uma boa introdução e explicação do método LCO.

⁵⁴ Atualmente tem-se o cálculo até três *loops* (Gracey, 2022).

⁵⁵ Este tipo de potencial tem sido estendido a outros calibres, como por exemplo: Curci–Ferrari (Dudal *et al.*, 2003c; Dudal *et al.*, 2003a), calibres lineares covariantes (Dudal *et al.*, 2003d; Dudal *et al.*, 2004b; Capri *et al.*, 2016b) e o calibre máximo abeliano (MAG) (Dudal *et al.*, 2004a).

Suganuma, 1999; Langfeld; Reinhardt; Gattnar, 2002; Alexandrou; Forcrand; Follana, 2002a; Alexandrou; Forcrand; Follana, 2002b; Bornyakov *et al.*, 2003). Posteriormente, as simulações da rede também explicitariam a necessidade de se implementar parâmetros massivos no propagador de glúon a fim de se obter uma boa compatibilidade com os resultados⁵⁶.

No formalismo GZ, por meio do método LCO (Verschelde, 1995), foi estudado (Dudal *et al.*, 2005) o impacto do fator de massa proveniente do condensado $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ ⁵⁷. A presença deste condensado não prejudicava a renormalizabilidade da GZ e mantinha as previsões da mesma, i.e. propagadores do glúon e do *ghost* suprimido ($D(0) \rightarrow 0$) e ampliado ($1/p^4$), respectivamente, em compatibilidade com os resultados da rede da época. De fato, tal fator de massa, m^2 , reforçava a supressão do propagador do glúon (GZ, Eq. (95)) no infravermelho:

$$D(p)|_{\text{GZ}+A^2} = \frac{p^2}{p^4 + m^2 p^2 + \lambda^4}. \quad (96)$$

Os efeitos desse tipo de condensado no propagador do glúon já tinham sido estudados previamente (Greensite; Halpern, 1986; Lavelle; Schaden, 1988). De fato, a ideia de que os condensados desempenham um papel importante no vácuo da teoria de Yang–Mills também já tinha sido investigada anteriormente, e era relacionada à geração de massa devido a instabilidades do vácuo da mesma (Savvidy, 1977; Fukuda, 1978; Fukuda; Kugo, 1978; Cornwall, 1982).

Em (Dudal *et al.*, 2005), é discutido que a energia do vácuo da GZ sem o condensado $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ é sempre positiva a um *loop*, independentemente do esquema e escala de renormalização⁵⁸. O fato de se ter uma energia positiva na GZ, diferente da energia negativa da Yang–Mills (Verschelde *et al.*, 2001), indicaria que a GZ não possui um mínimo, fazendo ela suscetível a instabilidades dinâmicas não-perturbativas, que, neste caso, favorecem a formação de condensados (Dudal *et al.*, 2008a).

Podemos ver da Eq. (96) que a inclusão do condensado $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ não é suficiente para gerar um propagador do glúon não-nulo no infravermelho, $D(0) \neq 0$, como indicavam os mais novos resultados da rede. Isso seria resolvido com a inclusão do condensado $\langle \bar{\varphi}_\mu^{ac} \varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \omega_\mu^{ac} \rangle$, que aparece ao considerar efeitos não perturbativos provenientes da dinâmica dos campos $\{\bar{\varphi}_\mu^{ac}, \varphi_\mu^{ac}, \bar{\omega}_\mu^{ac}, \omega_\mu^{ac}\}$. Tais campos auxiliares inicialmente só foram usados para localizar a ação GZ, mas, olhando para o acoplamento $A\varphi$ (Eq. (84)),

⁵⁶ Nessa época ainda não havia resultados para grandes volumes da rede (baixos momentos), pelo que não se podia concluir que o glúon tivesse um comportamento massivo no infravermelho.

⁵⁷ Em (Sobreiro *et al.*, 2004), já tinha sido estudado o efeito do condensado A^2 , mas seguindo o formalismo de Gribov.

⁵⁸ Por outro lado, dentro da implementação da região de Gribov, e no esquema de renormalização $\overline{MS}$, foi mostrado que para obter $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle > 0$, é necessário que $m^2 < 0$.

suspeitou-se que efeitos não considerados no campo φ poderiam ter impacto no campo do glúon. Ao mesmo tempo, analisando a condição de horizonte, $-2\gamma^2 d(N^2 - 1) \equiv \langle gf^{abc} A_\mu^a (\varphi + \bar{\varphi})_\mu^{bc} \rangle$ (Eq. (87)), poder-se-ia pensar na condensação destes campos, já que a condição de horizonte escrita desta maneira é equivalente a um condensado de dimensão dois. O passo a passo e os detalhes técnicos da construção da ação RGZ, a partir da inclusão dos condensados $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ e $\langle \bar{\varphi}_\mu^{ac} \varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \omega_\mu^{ac} \rangle$ podem ser encontrados em (Dudal *et al.*, 2008a).

Para investigar a existência desses condensados na GZ, pode-se introduzir nessa ação os operadores $A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a}$ e $\bar{\varphi}_\mu^{ac} \varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \omega_\mu^{ac}$ por meio das fontes constantes, ζ e J , respectivamente, o que nos fornece (Capri *et al.*, 2016c):

$$e^{-\Gamma(\zeta, J)} = \int [\mathcal{D}\phi]_{\text{GZ}} e^{-(S_{\text{GZ}} + \zeta \int d^d x A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a} - J \int d^d x (\bar{\varphi}_\mu^{ac} \varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \omega_\mu^{ac}))}. \quad (97)$$

A um *loop*, e usando regularização dimensional (Peskin; Schroeder, 1995), obtém-se o seguinte resultado para os condensados:

$$\langle \bar{\varphi}_\mu^{ac} \varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \omega_\mu^{ac} \rangle = - \left. \frac{\partial \Gamma(\zeta, J)}{\partial J} \right|_{\zeta=J=0} = + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(d-1)(N^2-1)Ng^2\gamma^4}{k^2(k^4 + 2Ng^2\gamma^4)}, \quad (98)$$

$$\langle A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a} \rangle = + \left. \frac{\partial \Gamma(\zeta, J)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=J=0} = -2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(d-1)(N^2-1)Ng^2\gamma^4}{k^2(k^4 + 2Ng^2\gamma^4)}, \quad (99)$$

onde foi usada a expressão da ação efetiva $\Gamma(\zeta, J)$:

$$\Gamma(\zeta, J) = \frac{(d-1)(N^2-1)}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Log} \left(k^2 + \frac{2Ng^2\gamma^4}{k^2 + J} + 2\zeta \right) - d\gamma^4(N^2-1). \quad (100)$$

As Eqs. (98) e (99) são convergentes no UV e finitas para dimensões⁵⁹ $d = 3, 4$. Logo, a nível perturbativo, os condensados, Eqs. (98) e (99), calculados usando integração convencional ou dimensional (Peskin; Schroeder, 1995), possuem uma dependência γ^2 no parâmetro de Gribov⁶⁰. Portanto, esses condensados estão presentes inclusive a nível perturbativo, desde que $\gamma \neq 0$, o que naturalmente relaciona-se à restrição à região de Gribov⁶¹, mostrando que a geração dinâmica do parâmetro não-perturbativo γ^2 favorece o aparecimento de condensados.

Em (Dudal *et al.*, 2008a), é discutido que o parâmetro de Gribov não é apenas um parâmetro que aparece num determinado gauge, mas sim uma escala física, que pode

⁵⁹ Para $d = 2$ os condensados não estão bem definidos. Isto corresponde a uma patologia própria das teorias em $d = 2$ (Dudal *et al.*, 2009a).

⁶⁰ O resultado também pode ser consultado em (Mintz *et al.*, 2019) (Eq. 33).

⁶¹ É importante lembrar que $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ calculado através do potencial efetivo para A^2 é não nulo (Verschelde *et al.*, 2001; Browne; Gracey, 2003), mesmo na ausência da restrição do horizonte ($\gamma = 0$). Logo, na GZ, um cálculo mais completo deveria dar um valor não-nulo para este condensado.

entrar no cálculo de funções de correlação invariantes de gauge e até de observáveis. Dessa maneira, os condensados da RGZ (Eqs. (99) e (98)), que dependem do parâmetro de Gribov e são independentes do parâmetro de gauge, podem ter também um significado físico associado.

Os condensados mencionados, $\langle A A \rangle$ e $\langle \bar{\varphi} \varphi - \bar{\omega} \omega \rangle$ não necessariamente são os únicos que podem ser considerados no refinamento do formalismo GZ. Já foi estudada a inclusão de mais condensados (super RGZ) (Gracey, 2010; Dudal; Sorella; Vandersickel, 2011), no entanto, $\langle A A \rangle$ e $\langle \bar{\varphi} \varphi - \bar{\omega} \omega \rangle$ parecem capturar completamente o comportamento infravermelho das funções de correlação da Yang–Mills, quando comparadas com a rede (Dudal; Oliveira; Silva, 2018).

Um ponto não tratado e no qual não entraremos em muitos detalhes, é que, tanto no formalismo GZ quanto no RGZ, acontece a quebra da simetria Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST) usual (Becchi; Rouet; Stora, 1974; Becchi; Rouet; Stora, 1976). Esta é uma simetria fundamental remanescente após a perda da simetria de gauge na fixação do gauge e é usada para provar a renormalizabilidade e unitariedade de uma teoria (Taylor, 1971; Slavnov, 1972). Tal quebra da simetria é causada pelo parâmetro de Gribov, i.e. pela restrição da integral funcional à região de Gribov.

Apesar disso, recentemente foi proposta uma maneira de impor a restrição à região de Gribov de forma invariante de BRST, permitindo assim estender o formalismo GZ e RGZ, desenvolvidos inicialmente no gauge de Landau (e Coulomb), a gauges lineares covariantes (Capri *et al.*, 2015; Capri *et al.*, 2016a; Capri *et al.*, 2016c; Capri *et al.*, 2017b; Capri *et al.*, 2017a): $\partial_\mu A_\mu = \xi b$, onde b é um multiplicador de Lagrange e ξ é o parâmetro de gauge. Para isso, foi necessário introduzir um operador BRST modificado por efeitos não-perturbativos.

O campo $A_\mu^{h,a}$, presente no condensado $\langle A_\mu^{h,a} A_\mu^{h,a} \rangle$ (Eq. (99)), é um campo transversal não local que faz parte da formulação BRST não perturbativa da RGZ (Capri *et al.*, 2015), denominada assim, porque as modificações propostas, que dependem explicitamente do parâmetro de Gribov, não desaparecem no infravermelho, mas preservam a simetria BRST intacta no regime perturbativo ($\gamma^2 \rightarrow 0$). Esse campo $A_\mu^{h,a}$ é construído de forma invariante de gauge por meio da minimização do funcional $f[V] = \int d^d x A_\mu^V A_\mu^V$ e pode ser localizado com ajuda do campo auxiliar de Stueckelberg, ξ^a :

$$\begin{aligned} A_\mu^h &= \left(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu / \partial^2 \right) (A_\nu + \mathcal{O}(\partial A A)) \rightarrow \partial_\mu A_\mu^h = 0 \\ A_\mu^h &= (A_\mu^a)^h t^a = h^+ A_\mu^a t^a h + \frac{i}{g} h^+ \partial_\mu h, \quad h = \text{Exp}[ig \xi^a t^a]. \end{aligned} \quad (101)$$

A consideração do campo A_μ^h leva a uma reformulação da RGZ que mantém a forma da ação RGZ original (Landau), com termos que modificam a função horizonte $H(A) \rightarrow H^h(A)$ e o campo $b \rightarrow b^h$. Ao impor a condição do gauge de Landau, $\partial A = 0$,

a formulação original é recuperada. Neste último gauge, tanto o campo A_μ^h quanto o operador $A_\mu^h A_\mu^h$ se reduzem ao campo A_μ e ao operador AA , respectivamente.

Retomando o gauge de Landau, a ação RGZ $\mathcal{S}_{RGZ}$ pode ser expressa como:

$$\mathcal{S}_{RGZ} = \mathcal{S}_{GZ} + \frac{m^2}{2} \int d^4x A_\mu^a A_\mu^a + M^2 \int d^4x \left(\bar{\varphi}_\mu^{ac} \varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \omega_\mu^{ac} \right) + \mathcal{S}', \quad (102)$$

onde $\mathcal{S}_{GZ}$ é a ação do modelo GZ (Eq. 83), e os termos proporcionais a m^2 e M^2 correspondem às contribuições dos condensados $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ e $\langle \bar{\varphi}_\mu^{ac} \varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \omega_\mu^{ac} \rangle$, respectivamente. Por outro lado, $\mathcal{S}'$ representa outros termos necessários para que, por exemplo, a ação RGZ seja consistente com a formulação de (Gribov) Zwanziger e a integração funcional dentro da região de Gribov seja preservada (Dudal *et al.*, 2008b).

Os parâmetros massivos M e m , da mesma maneira que o parâmetro de Gribov γ , não são parâmetros livres. Como discutimos, esse parâmetros são gerados dinamicamente (Dudal *et al.*, 2008b; Dudal; Sorella; Vandersickel, 2011; Dudal *et al.*, 2019) e respondem às equações de gap:

$$\left. \frac{\partial \Gamma_{RGZ}}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma^2 \neq 0} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{RGZ}}{\partial M^2} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{RGZ}}{\partial m^2} = 0, \quad (103)$$

que, em princípio, podem ser resolvidas por meio da minimização da ação efetiva (Eq. (100)), onde as fontes serão associadas aos termos massivos: $J \rightarrow M^2$ e $\zeta \rightarrow m^2/2$.

Mais recentemente, em (Dudal *et al.*, 2019), onde também é mostrado detalhadamente o surgimento dinâmico dos condensados, foi calculado e mostrado como a presença dos condensados $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ e $\langle \bar{\varphi}_\mu^{ac} \varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \omega_\mu^{ac} \rangle$ minimiza a energia da GZ, o que leva ao refinamento da teoria. Na Fig. (8a), podemos ver como a ação efetiva é minimizada em presença do condensado $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ (m^2) tomando um valor fixo para M^2 . O caso contrário, com m^2 fixo, é qualitativamente similar.

2.3.2 Propagador do glúon no modelo RGZ

Usando a parte livre da ação RGZ (Eq. (102)), junto à nova relação: $\varphi_\mu^{bc} = \bar{\varphi}_\mu^{bc} = \frac{1}{\partial^2 - M^2} \gamma^2 g f^{abc} A_\mu^a$ (Eq. (90)), obtém-se:

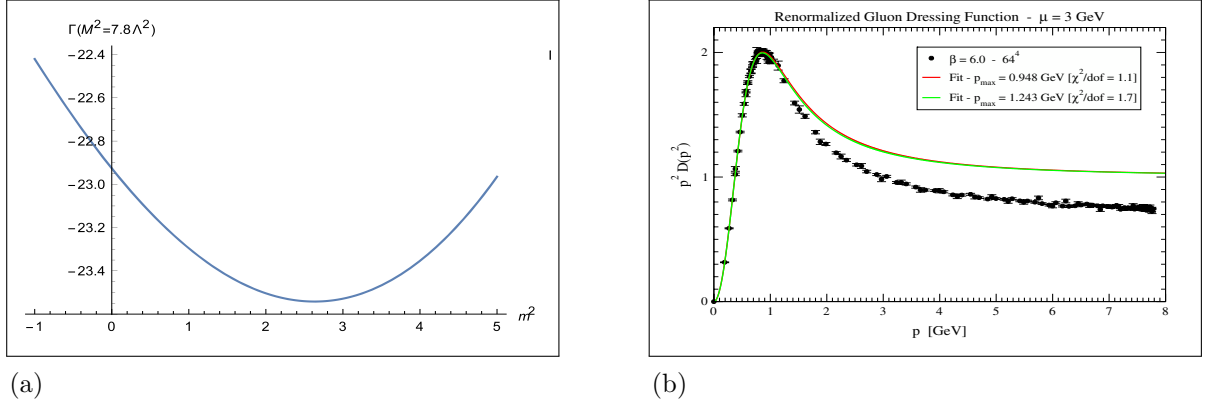
$$\mathcal{S}_0^{RGZ}[A] = \int d^4x \left[\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + A_\mu^a \left(\frac{m^2}{2} - N g^2 \gamma^4 \frac{1}{\partial^2 - M^2} \right) A_\mu^a \right], \quad (104)$$

cujas expressões no espaço de Fourier (vide Apêndice E, Eqs. (278) – (280)),

$$\mathcal{S}_0^{RGZ}[\tilde{A}] = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{2} \tilde{A}_\mu^a(-p) \Delta_{\mu\nu}^{ab}(p) \tilde{A}_\nu^b(p) \right], \quad (105)$$

permite obter o propagador RGZ do glúon no espaço de momento por meio da inversa do

Figura 8 - Propagador do glúon e energia do vácuo na RGZ



Legenda: (a) Mínimo da ação efetiva da RGZ em função de m^2 para um valor fixo de M^2 . (b) Fits do propagador RGZ do glúon comparado com a rede.

Fonte: (a) Dudal *et al.*, 2019, p. 10. (b) Dudal; Oliveira; Vandersickel, 2010, p. 6.

operador $\Delta_{\mu\nu}^{ab}$, tal que $\Delta_{\mu\alpha}^{ac}(\Delta_{\alpha\nu}^{cb})^{-1} = \delta^{ab}\delta_{\mu\nu}$, sendo $\Delta_{\mu\nu}^{ab}$:

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(p) = \left[\left(\frac{\lambda^4}{p^2 + M^2} + m^2 + p^2 \right) \delta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) p_\mu p_\nu \right] \wedge \lambda^4 = 2N g^2 \gamma^4. \quad (106)$$

No gauge de Landau, o propagador do glúon $\langle \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \rangle = (\Delta_{\mu\nu}^{ab}(p))^{-1}$ será:

$$\langle \tilde{A}_\mu^a(-p) \tilde{A}_\nu^b(p) \rangle = \frac{p^2 + M^2}{p^4 + p^2(M^2 + m^2) + \lambda^4 + M^2 m^2} (\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2) \delta^{ab}. \quad (107)$$

Neste cenário, o propagador do *ghost* não é mais ampliado com um comportamento tipo $1/p^4$, tal como acontece na abordagem de Gribov e GZ, mas nós não entraremos em detalhes neste caso já que acaba não sendo necessário para nossos interesses.

Levando em conta as contribuições dos condensados m^2 e M^2 , é facilmente reconhecível, pelo menos de forma qualitativa, que o propagador RGZ do glúon pode reproduzir o resultado da rede, $D(0) \neq 0$. Isso pode ser atingido mesmo se considerarmos $m^2 = 0$. Por outro lado, os resultados da rede mostraram que a inclusão do condensado do glúon (m^2) é fundamental para lograr uma boa concordância. Isso foi tomado como uma evidência indireta da rede sobre o formalismo RGZ e o condensado do glúon $\langle AA \rangle$ (Oliveira; Silva, 2012).

Pelo fato do propagador RGZ do glúon, quando comparado com a rede (Oliveira; Silva, 2012; Dudal; Oliveira; Silva, 2018), apresentar pólos complexos, a interpretação do glúon como uma partícula que pertence ao espectro físico também é invalidada, mantendo assim a ideia – já presente na GZ – de que os glúons estão confinados pelo horizonte de Gribov e as suas consequências no infravermelho.

Quando falamos que o glúon não pertence ao espectro físico por causa dos pólos

complexos, nos referimos à interpretação que se tem a partir da violação de positividade da função espectral $\rho(m_p^2)$, na representação de Källén–Lehmann do seu propagador (Kallen, 1952; Lehmann, 1954)⁶², $D(p) = \int_0^\infty d(m_g^2) \rho(m_g^2)/(p^2 + m_g^2)$, onde essa representação permite associar as excitações dos campos com estados assintóticos ou partículas, e o pólo do propagador com a massa da partícula m_g desde que $\rho(m_g^2)$ seja positiva. Portanto, quando $\rho(m_g^2) < 0$, esse propagador não pode ser associado a uma partícula que pertence ao espectro físico, algo que é considerado como mais uns dos indícios de confinamento (Alkofer; Smekal, 2001).

Abordagens teóricas (Cornwall, 2013) e simulações da rede (Oliveira *et al.*, 2017) sugerem que a função espectral do glúon possui um comportamento intercalado entre uma função positiva e negativa. Uma maneira de analisar o comportamento da função espectral $\rho(m_g^2)$ é por meio da função de correlação temporal $C(t)$, definida como (Cucchieri; Mendes; Taurines, 2005):

$$C(t) = \int_0^\infty dm_g \rho(m_g^2) e^{-m_g t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D(p) e^{-ipt}. \quad (108)$$

Nos formalismos GZ e RGZ, que apresentam pólos imaginários e complexos, respectivamente, mostrou-se que $C(t)$ assume valores negativos num certo intervalo de t (Zwanziger, 1989b; Cucchieri; Mendes; Taurines, 2005; Vandersickel; Zwanziger, 2012), o que implica em violação de positividade.

De fato, pode ser mostrado que, sempre que o propagador na Eq. (108) apresenta pólos complexo-conjugados $z_\pm^2 \in \mathbb{C}$, $C(t)$ pode ser expressado como⁶³:

$$C(t) \propto e^{-yt} (A(z_+, z_-) \text{Cos}(xt) + B(z_+, z_-) \text{Sin}(xt)), \quad (109)$$

onde, sem perda de generalidade, podemos escrever $z_\pm = \pm x - iy$, para $\{x, y\} > 0$. Isso nos permite intuir que quando houver pólos complexos, $C(t)$ poderá apresentar regiões onde a função espectral não será positiva.

O formalismo RGZ apresenta muitas características e cálculos enriquecedores, mas que não serão discutidos aqui já que estão além das intenções desta tese. Estes, por sua vez, podem ser encontrados nos artigos já citados e na literatura correspondente. Por outro lado, queremos terminar esta seção indicando algumas das previsões, além das funções de correlação, obtidas a partir da RGZ, como são o caso dos cálculos das massas das *glueballs* (Dudal *et al.*, 2009b; Sorella *et al.*, 2010; Dudal; Guimaraes; Sorella, 2011; Dudal; Guimaraes; Sorella, 2014) – ou seja, estados ligados incolores formados puramente por glúons –, o cálculo da energia do efeito Casimir (Canfora; Rosa, 2013) e outras incursões em temperatura finita (Canfora; Pais; Salgado-Rebolledo, 2014; Canfora

⁶² Uma discussão da violação de positividade pode ser encontrada em (Cornwall, 2013).

⁶³ Uma análise similar encontra-se no apêndice C.

et al., 2015; Wu *et al.*, 2023).

2.4 Modelo Curci–Ferrari ou Modelo Massivo

Sendo a QCD uma teoria invariante de gauge, os termos quadráticos ou massivos para o glúon estão proibidos em sua ação clássica ou com correções quânticas perturbativas, mas, por outro lado, as simulações atuais de QCD na rede (nível não-perturbativo) mostram um comportamento infravermelho para o propagador do glúon que pode ser associado a uma massa dinâmica. Tal contribuição é entendida como produto dos efeitos quânticos não-perturbativos da interação forte⁶⁴.

Tal como discutimos na subseção 2.3.1, a possibilidade do glúon adquirir uma massa dinâmica através de algum mecanismo sempre foi de grande interesse. Muito antes dos resultados do glúon massivo da rede, que serviram de base numérica para acreditar que o glúon poderia se comportar massivamente no infravermelho, já tinha sido estipulada uma massa efetiva para o glúon considerando ideias fenomenológicas (aplicadas a seções de choque, potenciais, etc) e vários enfoques teóricos e computacionais como as equações de Schwinger–Dyson e a própria rede (Greensite, 2011), entre outros (Cornwall, 1979; Bernard, 1982; Cornwall, 1982; Bernard, 1983; Donoghue, 1984). Tudo isso serviu também para que depois esse fator de massa continuasse sendo explorado e estudado com os mesmos métodos e outros diferentes (Mandula; Ogilvie, 1987; Cornwall; Papavassiliou, 1989; Lavelle, 1991; Wilson *et al.*, 1994; Kondo, 2001; Philipsen, 2002; Doff; Machado; Natale, 2012; Ibañez; Papavassiliou, 2013; Siringo, 2016; Machado, 2016; Comitini; Siringo, 2020; Comitini *et al.*, 2021; Papavassiliou, 2022).

Por outro lado, nos anos 1970, Curci e Ferrari (Curci; Ferrari, 1976b) propuseram um modelo com uma lagrangiana renormalizável com fixação de calibre não-linear que incluía um operador de dimensão dois, $\frac{1}{2}A_\mu^a{}^2 + \xi \bar{c}^a c^a$, que fornecia massa aos campos da Yang-Mills (Kondo, 2001; Kondo *et al.*, 2002)⁶⁵. Este modelo foi abandonado devido a problemas com a nilpotência do operador BRST e a falta de unitariedade da teoria (Curci; Ferrari, 1976a; Curci; Ferrari, 1976c; Ojima, 1982; Delbourgo; Twisk; Thompson, 1988; Blasi; Maggiore, 1996; Boer *et al.*, 1996; Hurth, 1997). Porém, nos últimos anos tem surgido um novo interesse no uso desta teoria para o glúon massivo graças ao comportamento infravermelho das funções de correlação da Yang-Mills.

Em particular, o modelo do glúon massivo ao que nos referimos (Tissier; Wschebor, 2010; Tissier; Wschebor, 2011) é um caso específico do modelo de Curci–Ferrari no gauge

⁶⁴ Como já discutido, uns desses efeitos podem ser os condensados, como os de glúons (Horak *et al.*, 2022).

⁶⁵ Na época, a ideia desta massa servia como uma alternativa ao mecanismo de Higgs.

de Landau⁶⁶. Porém, no resto da tese nos referiremos a este caso em particular como o modelo Curci–Ferrari (CF) ou simplesmente modelo do glúon massivo.

A lagrangiana do modelo CF, baseada fenomenologicamente no comportamento do propagador do glúon (Tissier; Wschebor, 2011), comporta-se como uma deformação massiva da lagrangiana de Yang–Mills na quantização de Faddeev–Popov⁶⁷:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + i b^a \partial_\mu A_\mu^a + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^a A_\mu^a, \quad (110)$$

sendo b^a o campo bosônico de Nakanishi-Lautrup (Nakanishi, 1966; Lautrup, 1967), $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ e $(D_\mu c)^a = \partial_\mu c^a + g f^{abc} A_\mu^b c^c$.

A ideia por trás do modelo é mostrar que essa lagrangiana massiva (Eq. (110)) é a forma mais simples de se obter uma teoria que capture informações não-perturbativas do setor gluônico da QCD⁶⁸ em compatibilidade com os resultados da rede.

Embora os autores de (Tissier; Wschebor, 2011) se inclinem mais por um aspecto fenomenológico sobre a ideia do fator de massa para o glúon, a consideração de tal fator também pode ser inspirada por uma abordagem de quantização não-perturbativa (Serreau; Tissier, 2012) na qual esse fator de massa gluônica pode ser conectado com as cópias de Gribov (vide também (Serreau; Tissier; Tresmontant, 2014; Peláez; Tissier; Wschebor, 2013; Serreau; Tissier; Tresmontant, 2015; Tissier, 2018)). Em (Serreau; Tissier, 2012), apresenta-se inicialmente como, ao se tomar uma média sobre as cópias de Gribov presentes em cada órbita, a múltipla contagem poderia ser controlada, ao mesmo tempo em que surge um termo de massa para o glúon.

Como é sabido, para se obter previsões finita com uma teoria fundamental, válida para todas as escalas de energia, precisamos que esta seja renormalizável. A renormalização do modelo CF foi provada, usando uma versão modificada da simetria BRST (Curci; Ferrari, 1976b; Boer *et al.*, 1996; Tissier; Wschebor, 2009)). Os fatores de renormalização do modelo são:

$$A_{\mu,B}^a = \sqrt{Z_A} A_\mu^a, \quad c_B^a = \sqrt{Z_c} c^a, \quad \bar{c}_B^a = \sqrt{Z_c} \bar{c}^a, \quad g_B = Z_g g, \quad m_B^2 = Z_{m^2} m^2, \quad (111)$$

onde o subíndice B indica as quantidades nuas (do inglês: *bare*). Os fatores Z introduzem novas contribuições chamados de contratermos que, escolhidos adequadamente, permitem eliminar os termos divergentes gerados na expansão perturbativa. Neste modelo, são

⁶⁶ Isso elimina termos proporcionais ao condensado de *ghosts* e interações quárticas.

⁶⁷ A fixação de gauge pode ser reescrita mais convenientemente introduzindo o campo bosônico b^a :

$$\text{Exp} \left[-\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \right] \rightarrow \int [\mathcal{D}b^a] \text{Exp} \left[-\int d^4x \left(i b^a \partial_\mu A_\mu^a + \frac{\xi}{2} (b^a)^2 \right) \right].$$

⁶⁸ O modelo também tem sido estendido para incluir quarks (Barrios *et al.*, 2021).

usadas as seguintes relações – chamadas de teoremas de não-renormalização – para os fatores de renormalização Z :

$$\sqrt{Z_A Z_c Z_g} = 1, \quad (112)$$

$$Z_A Z_c Z_{m^2} = 1. \quad (113)$$

As partes finitas e divergentes dos fatores de renormalização Z satisfazem esses teoremas de não-renormalização (Eqs. (112) e (113)) (Dudal; Verschelde; Sorella, 2003; Taylor, 1971), embora a forma das partes finitas dependa do esquema de renormalização⁶⁹.

Como realmente só estamos interessados nos propagadores do modelo CF, nos centraremos nas relações vinculadas aos mesmos. Os propagadores do glúon e do *ghost* são parametrizados da seguinte forma:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = D(p) \delta^{ab} (\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2) \quad \wedge \quad F^{ab}(p) = \delta^{ab} F(p) / p^2, \quad (114)$$

sendo $F(p)$ a chamada função vestida do campo fantasma (*ghost dressing function*) e $D(p)$ simplesmente a parte escalar do propagador do glúon. Também é definido:

$$\Gamma_A^{(2)}(p) = D^{-1}(p) \quad \wedge \quad \Gamma_{\bar{c}c}^{(2)}(p) = p^2 F^{-1}(p), \quad (115)$$

onde, em geral, a função $\Gamma^{(2)}(p)$ representa a soma das contribuições dos diagramas de Feynman relacionadas aos propagadores⁷⁰, cujas condições de renormalização são:

$$\Gamma_A^{(2)}(p=0) = m^2, \quad \Gamma_A^{(2)}(p=\mu) = m^2 + \mu^2, \quad \Gamma_{\bar{c}c}^{(2)}(p=\mu) = \mu^2. \quad (116)$$

Neste caso particular do modelo CF, foi usado o esquema de renormalização denominado *Taylor scheme* (Taylor, 1971), que modifica os acoplamentos da teoria através da modificação dos fatores Z dos acoplamentos. A constante de acoplamento neste esquema é definida a partir do vértice *ghost*-glúon quando o momento do *ghost* é zero, o que garante que não aparecerão correções quânticas ao vértice. Dessa maneira, o teorema da Eq. (112) é satisfeito também pela parte finita dos fatores de renormalização Z .

Usando todas as condições mencionadas até primeira ordem e para $SU(3)$ e $d = 4$,

⁶⁹ Em (Tissier; Wschebor, 2009; Wschebor, 2008) foi demonstrado, para qualquer calibre ξ , que estes teoremas de não renormalização são casos particulares dos encontrados no modelo CF.

⁷⁰ No gauge de Landau, só a parte transversa desta função é relacionada com o propagador do glúon. Por isso a parte longitudinal não pode ser acessada pelas simulações da rede nesse gauge.

o propagador do glúon obtido é (Tissier; Wschebor, 2011) :

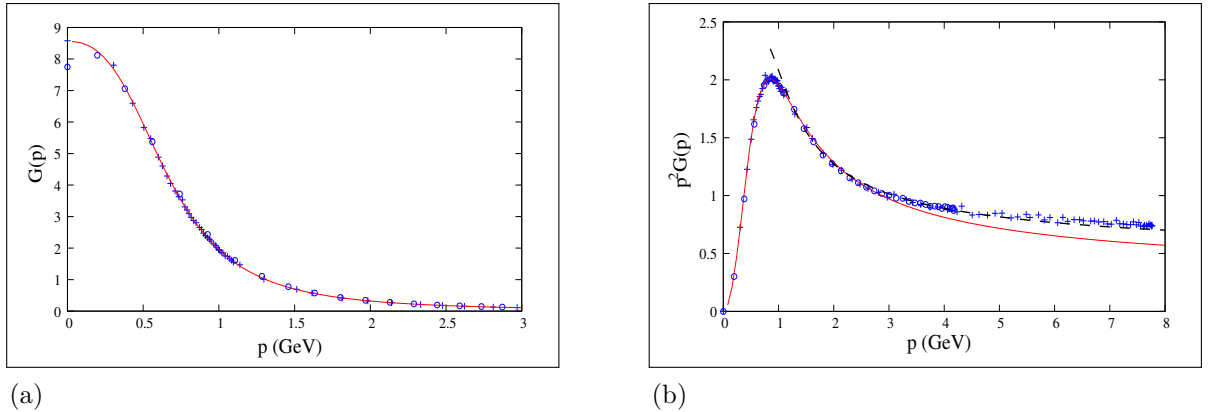
$$\frac{D^{-1}(p)}{m^2} = s + 1 + \frac{s\lambda}{24} \left\{ (2 - s^2)\log(s) + 2(1 + s^{-1})^3 (s^2 - 10s + 1)\log(1 + s) + 111s^{-1} \right. \\ \left. - 2s^{-2} + (4s^{-1} + 1)^{\frac{3}{2}} (s^2 - 20s + 12) \log\left(\frac{\sqrt{4+s} - \sqrt{s}}{\sqrt{4+s} + \sqrt{s}}\right) - \left(s \rightarrow \frac{\mu_0^2}{m^2}\right) \right\}, \quad (117)$$

sendo $\lambda = 3\alpha_s/(4\pi)$, $s = p^2/m^2$ e μ_0 a escala de renormalização.

O comportamento deste propagador do glúon (Eq. (117)) pode ser observado nas Figs. (9a) e (9b)⁷¹, nas quais podemos ver uma boa concordância com os resultados do propagador da rede. Vale destacar que para momentos além da escala de renormalização (escolhida como $\mu_0 = 1$ GeV) é entendível que não haja uma completa correspondência com a rede já que neste ponto aparecem termos logarítmicos, próprios da expansão perturbativa, que precisam dos conceitos do grupo de renormalização para serem levados em conta corretamente. Sobre isso falaremos na seção seguinte.

De qualquer maneira, é muito interessante como a adição de um termo de massa na lagrangiana de Yang-Mills, junto às condições de renormalização escolhidas neste modelo, leva à captura de informação não-perturbativa (IR) dos propagadores da teoria.

Figura 9 - Ajuste do propagador do glúon massivo (CF) a um *loop*



Legenda: Fits para: (a) Propagador do glúon (b) Função vestida do glúon. Os dados da rede: círculos (Bogolubsky *et al.*, 2009) e cruzes (Dudal; Oliveira; Vandersickel, 2010).

Fonte: Tissier; Wschebor, 2011, p. 6.

⁷¹ Nos trabalhos das referências citadas sobre o modelo CF é usado $G(p)$ ao invés de $D(p)$.

2.4.1 Equações do grupo de renormalização (RGE) e o esquema *Infrared safe* (IS)

Nesta subseção, faremos uma revisão rápida sobre renormalização e as equações do grupo de renormalização (RGE)⁷² no caso da lagrangiana do modelo CF (Eq. (110)). Temos as seguintes equações de Callan-Symanzik:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{1}{2} (n_A \gamma_A + n_c \gamma_c) + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_{m^2} \frac{\partial}{\partial m^2} \right) \Gamma^{\{n_A, n_c\}} = 0, \quad (118)$$

onde as funções β e as dimensões anômalas γ dos campos são definidas como:

$$\beta_g(g, m^2) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{g_B, m_B^2} \quad \wedge \quad \beta_{m^2}(g, m^2) = \mu \frac{\partial m^2}{\partial \mu} \Big|_{g_B, m_B^2}, \quad (119)$$

$$\gamma_A(g, m^2) = \mu \frac{\partial Z_A}{\partial \mu} \Big|_{g_B, m_B^2} \quad \wedge \quad \gamma_c(g, m^2) = \mu \frac{\partial Z_c}{\partial \mu} \Big|_{g_B, m_B^2}. \quad (120)$$

A solução da equação de Callan-Symanzik (Eq. (118)) permite estabelecer uma relação entre as funções do vértice de n pontos renormalizadas $\Gamma^{(n)}$ avaliadas em duas escalas diferentes, μ_0 e μ ⁷³:

$$\Gamma^{\{n_A, n_c\}}(p, \mu, g(\mu), m(\mu)) = Z^{\{n_A, n_c\}/2}(\mu, \mu_0) \Gamma^{\{n_A, n_c\}}(p, \mu_0, g(\mu_0), m(\mu_0)). \quad (121)$$

Na teoria de perturbação, à medida que aumenta a ordem n no parâmetro de expansão g , é usual que apareçam termos do tipo $(g^2)^n \text{Log}^n[p^2/\mu^2]$ que comprometem a consistência da expansão perturbativa. Em (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019), é escolhido um tipo de solução a esse problema, na qual a escala de renormalização μ pode mudar com o momento $\mu \rightarrow \mu(p)$, especificamente na forma $\mu = p$. Solucionado isso, junto às condições de renormalização (Eq. (116)) e as Eqs. (115) e (121), podem ser obtidos o propagador do glúon e a função vestida do *ghost*, respectivamente:

$$D(p, \mu_0) = \frac{Z_A(p, \mu_0)}{p^2 + m^2(p)} \quad \wedge \quad F(p, \mu_0) = Z_c(p, \mu_0). \quad (122)$$

Para obter tais funções, cujos parâmetros mudam com o momento (e/ou escala de renormalização), precisamos dos fatores Z que dependem das funções β e γ . Usando as Eqs. (111) e (112), podemos obter a função beta de g , tal que:

⁷² Uma descrição geral sobre renormalização e o RGE podem ser encontradas em diversos livros de QFT. Vide, por exemplo, os Caps. 10 e 11 em (Peskin; Schroeder, 1995).

⁷³ Em geral, esta equação permite estabelecer uma relação entre duas escalas μ' e μ'' redefinindo os acoplamentos e fatores Z em função da nova escala μ'' .

$$\beta_g = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{g_B, m_B^2} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{g_B}{Z_g} \right) = -g \mu \frac{\partial \text{Log}[Z_g]}{\partial \mu} = g \mu \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \text{Log}[Z_A]}{\partial \mu} + \frac{\partial \text{Log}[Z_c]}{\partial \mu} \right)$$

$$\beta_g = g \left(\frac{1}{2} \gamma_A(g, m^2) + \gamma_c(g, m^2) \right). \quad (123)$$

Por meio das Eqs. (111) e (113), podemos obter a função beta de m^2 :

$$\beta_{m^2} = \mu \frac{\partial m^2}{\partial \mu} \Big|_{g_B, m_B^2} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{m_B^2}{Z_{m^2}} \right) = -m^2 \mu \frac{\partial \text{Log}[Z_{m^2}]}{\partial \mu} = m^2 \mu \left(\frac{\partial \text{Log}[Z_A]}{\partial \mu} + \frac{\partial \text{Log}[Z_c]}{\partial \mu} \right)$$

$$\beta_{m^2} = m^2 \left(\gamma_A(g, m^2) + \gamma_c(g, m^2) \right), \quad (124)$$

onde as funções da dimensão anômala do glúon e do *ghost* podem ser reescritas como:

$$\gamma_A(g, m^2) = 2 \left(-\frac{\beta_g}{g} + \frac{\beta_{m^2}}{m^2} \right) \quad \wedge \quad \gamma_c(g, m^2) = 2 \frac{\beta_g}{g} - \frac{\beta_{m^2}}{m^2}, \quad (125)$$

e integradas, para depois obter os fatores $Z_A(\mu)$ e $Z_c(\mu)$ através de:

$$\text{Log} Z_A(\mu) = \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu' \frac{\gamma_A(\mu')}{\mu'} = -2 \text{Log} \left(\frac{g(\mu)}{g(\mu_0)} \right) + 2 \text{Log} \left(\frac{m^2(\mu)}{m^2(\mu_0)} \right) \quad (126)$$

$$\text{Log} Z_c(\mu) = \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu' \frac{\gamma_c(\mu')}{\mu'} = +2 \text{Log} \left(\frac{g(\mu)}{g(\mu_0)} \right) - \text{Log} \left(\frac{m^2(\mu)}{m^2(\mu_0)} \right), \quad (127)$$

Estes fatores podem ser reescritos em função do parâmetro de expansão⁷⁴ λ ,

$$\lambda = \frac{g^2 N_c}{16\pi^2}, \quad (128)$$

de modo que chegamos aos resultados para os fatores $Z_A(\mu)$ e $Z_c(\mu)$ na forma:

$$Z_A(\mu) = \frac{\lambda(\mu_0)}{\lambda(\mu)} \frac{m^4(\mu)}{m^4(\mu_0)} \quad \wedge \quad Z_c(\mu) = \frac{\lambda(\mu)}{\lambda(\mu_0)} \frac{m^2(\mu)}{m^2(\mu_0)}. \quad (129)$$

Podemos, então, expressar o propagador do glúon e a função vestida do *ghost* como:

$$D(p, \mu_0) = \frac{\lambda(\mu_0)}{\lambda(p)} \frac{m^4(\mu)}{m^4(\mu_0)} \frac{1}{p^2 + m^2(p)} \quad \wedge \quad F(p, \mu_0) = \frac{\lambda(p)}{\lambda(\mu_0)} \frac{m^2(\mu_0)}{m^2(p)}, \quad (130)$$

expressões estas que são válidas para qualquer ordem na teoria de perturbação, o que nos permite calcular as correções à função vestida do *ghost* e, em particular, ao propagador do glúon, que é a função na qual estamos mais interessados nesta tese.

⁷⁴ Neste modelo é discutido que o real parâmetro de expansão não é λ e sim a sua versão efetiva, $\tilde{\lambda}(p)$.

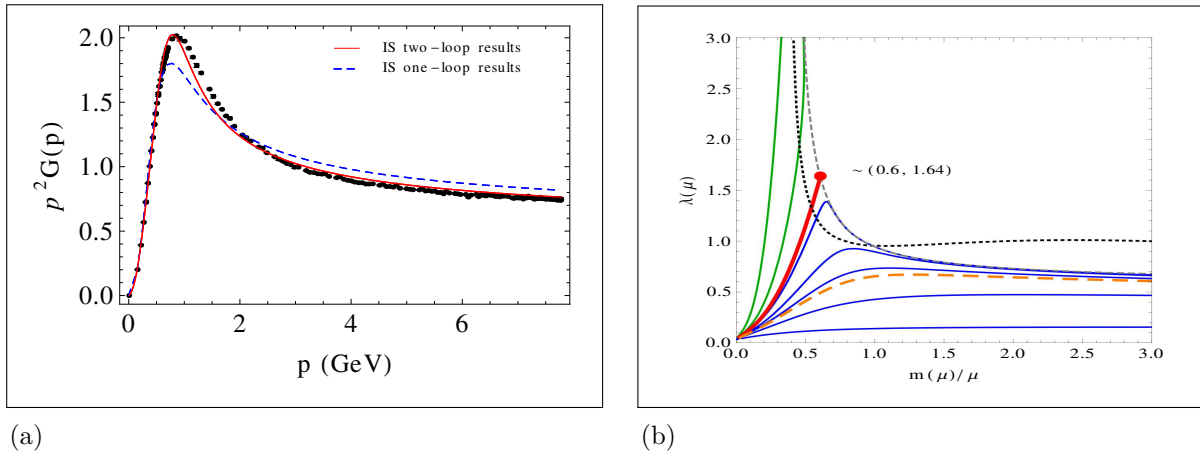
Para poder obter o propagador do glúon (e a função do *ghost*), resta resolver as RGE: Eqs. (119) e (120), usando as Eqs. (123) e (124), para assim obter $g(p)$ (ou, alternativamente, $\lambda(p)$) e $m^2(p)$. Devido à complexidade destas funções, o grupo que trabalhou o modelo CF fez uso de recursos computacionais para resolver tais equações (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019)⁷⁵.

Os resultados para o propagador do glúon a um *loop*, incluindo o fluxo do grupo de renormalização, ou o que chamaremos simplesmente de “*running*” dos parâmetros, usando o que chamaremos de esquema IS (*Infrared safe scheme*) (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019), mostram uma melhoria na compatibilidade com os dados da rede para altos momentos, mas com uma perda do ajuste num valor próximo à escala de renormalização, $\mu_0 = 1$ GeV. A inclusão da correção a dois *loops* (Gracey *et al.*, 2019) consegue melhorar o ajuste com os dados da rede, como pode ser visto na Fig. (10a).

O valor da massa do glúon, obtida sem e com a inclusão do RGE, oscila ao redor de 350 MeV. Tal valor encontra-se também na mesma faixa dos valores obtidos por outros métodos (500 ± 200 MeV) (Aguilar; Mihara; Natale, 2002; Aguilar *et al.*, 2020).

Ao resolver as equações do RG deste modelo, observa-se que o fluxo da constante de acoplamento pode desenvolver trajetórias onde ela mantém-se finita no infravermelho (Reinosa *et al.*, 2017), tal como podemos ver na Fig. (10b). As trajetórias à esquerda da linha que conecta a origem com o ponto fixo no IR (separatrix), $\{0.6, 1.64\}$, desenvolvem um pólo de Landau, enquanto aquelas à direita não, representando assim trajetórias

Figura 10 - Ajustes do propagador do glúon massivo (CF) a dois *loops* e o fluxo do RG



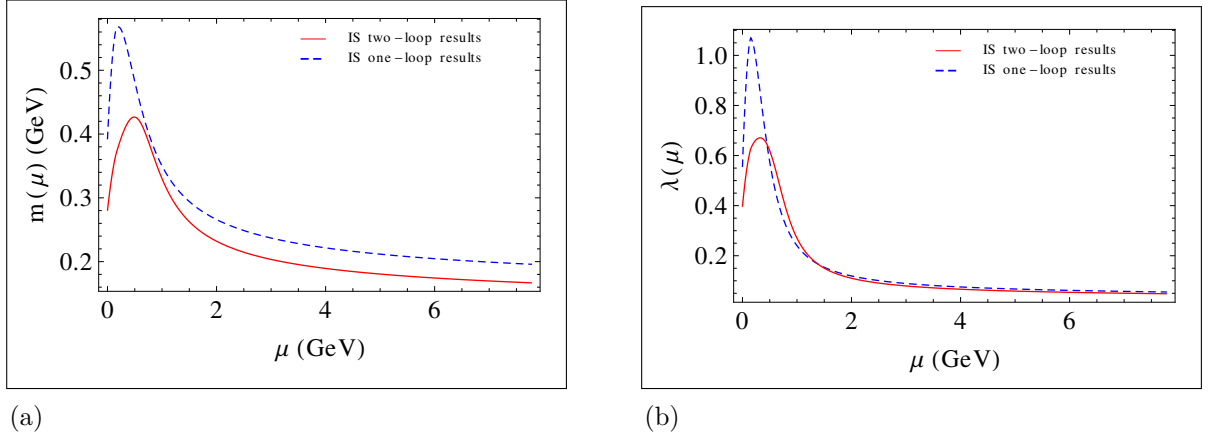
Legenda: (a) Fits da função vestida do glúon no esquema IS a um (linha tracejada) e dois (linha contínua) *loops*. (b) Fluxo do RG no plano $\lambda(\mu)$ vs. $m(\mu)/\mu$ no esquema IS.

Fonte: (a) Gracey *et al.*, 2019, p. 9. (b) Gracey *et al.*, 2019, p. 7.

“seguras” no infravermelho (*Infrared safe*). A linha tracejada (laranja), com origem no

⁷⁵ Vide as referências em (Gracey *et al.*, 2019) para mais detalhes.

Figura 11 - *Running* dos parâmetros do modelo CF em $SU(3)$ no esquema IS



Legenda: Fluxo RG a um (linha tracejada) e dois (linha contínua) *loops* de: (a) Massa do glúon $m(\mu)$; (b) Parâmetro de expansão $\lambda(\mu)$.

Fonte: Gracey *et al.*, 2019, p. 9.

zero, representa a trajetória usada para ajustar os parâmetros da teoria a fim de se obter uma boa concordância com os dados da rede (Gracey *et al.*, 2019).

As Figs. (11a) e (11b) mostram o *running* dos parâmetros do modelo CF calculados no esquema IS para a teoria $SU(3)$ que permitem reproduzir o propagador do glúon da rede (Fig. (10a)). Na Fig (11b), podemos observar o comportamento do parâmetro de expansão efetivo, $\lambda(p)$, cujo valor diminui a dois *loops*, melhorando o controle da teoria de perturbação.

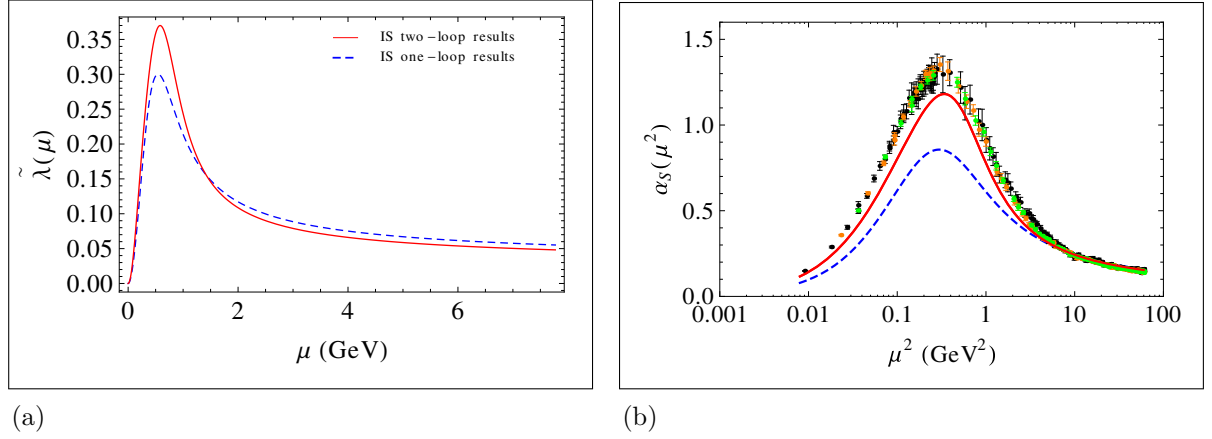
Os autores deste modelo argumentam que mesmo que o parâmetro de expansão desenvolva valores relativamente grandes para escalas menores que $\mu_0 = 1$ GeV, a teoria de perturbação pode estar controlada pelos efeitos da massa do glúon, onde o parâmetro de expansão efetivo estaria suprimido por um fator que interpola o parâmetro de expansão no UV com aquele relevante no IR (Tissier; Wschebor, 2011):

$$\tilde{\lambda}(p) = \lambda(p) \frac{p^2}{p^2 + m^2(p)}, \quad (131)$$

cujos comportamento pode ser observado na Fig. (12a), o qual é notavelmente menor que o do fator $\lambda(p)$, conforme esperado. Isso supõe que o modelo mantém um bom controle sobre a teoria de perturbação, podendo assim capturar informações sobre a região infravermelha da teoria por meio de uma expansão perturbativa.

A partir do teorema de não-renormalização do vértice *ghost*-glúon (Eq. (112)) (Taylor, 1971), pode ser definida uma constante de acoplamento não-perturbativa e invariante sob o grupo de renormalização (Smekal; Alkofer; Hauck, 1998; Gracey *et al.*, 2019), $\alpha^{TS}(p)$, que, reescrita em função do parâmetro $\lambda(p) = 3\alpha(p)/4\pi$,

Figura 12 - Fluxo RG do parâmetro de expansão e ajuste do acoplamento da rede



Legenda: (a) Parâmetro de expansão relevante $\tilde{\lambda}(\mu)$ (b) Ajuste da constante de acoplamento no esquema de Taylor com os valores da rede (Duarte; Oliveira; Silva, 2016)

Fonte: (a) Gracey *et al.*, p. 9. (b) Gracey *et al.*, p. 10.

fica:

$$\tilde{\lambda}^{TS}(p) = \lambda(\mu_0) p^2 D(p, \mu_0) F^2(p, \mu_0) = \lambda(p) \frac{p^2}{p^2 + m^2(p)}, \quad (132)$$

onde o parâmetro de expansão relevante (131), se mostra idêntico ao parâmetro de expansão no esquema de Taylor (Eq. (132)).

A constante de acoplamento no esquema de Taylor, que chamaremos simplesmente de constante de acoplamento de Taylor, $\alpha_s^{TS}(p) = 4\pi\tilde{\lambda}^{TS}(p)/3$ (Eq. (132)), pode ser comparada com os resultados da rede (Duarte; Oliveira; Silva, 2016) para o acoplamento α_s de Taylor extraído do acoplamento no vértice *ghost*-gluon. O resultado a dois *loops* calculado no modelo CF (linha contínua da Fig. (12b)), no qual foi adicionado um fator de correção no UV, mostra uma boa concordância com o resultado da rede.

Finalmente, é importante mencionar que este modelo massivo também apresenta bons resultados quando são considerados quarks dinâmicos, mas que as correções considerando quarks devem ser mais cuidadosas, já que, ao que parece, a constante de acoplamento revela-se maior no setor de quarks (Peláez; Tissier; Wschebor, 2014; Peláez; Tissier; Wschebor, 2015; Peláez *et al.*, 2017; Barrios *et al.*, 2021; Peláez, 2023). Devemos destacar que não é esperado poder reproduzir completamente a QCD no IR, já que os quarks estão relacionados a fenômenos puramente não-perturbativos, como a quebra de simetria quiral. Uma revisão, considerando o setor de Yang–Mills e o da QCD, com muitos detalhes sobre o modelo de CF, é apresentada em (Peláez, 2021).

Tendo discutido as diferentes propriedades não-perturbativas e características relacionadas ao confinamento dos modelos GZ, RGZ e CF e, em especial, o comportamento dos seus propagadores, procederemos nos dois capítulos seguintes com o estudo do impacto

fenomenológico desses modelos no cálculo do potencial quark–antiquark e o momento magnético de quarks (e do prótons), respectivamente. Primeiro, investigaremos o cálculo do potencial quark–antiquark para os diferentes modelos com a finalidade de testar sua compatibilidade com o enfoque perturbativo e principalmente indagar se esses modelos podem produzir o termo linear do potencial ligado ao confinamento. Em seguida, nos concentraremos no momento magnético de quarks e estudaremos como os propagadores destes modelos modificam a contribuição da QCD no vértice quark–fóton. Finalmente, discutiremos sobre o momento magnético do próton calculado com a aproximação do modelo de quark constituinte incluindo as contribuições do vértice quark–fóton de cada modelo.

3 POTENCIAIS QUARK–ANTIQUARK

Uma das formas de abordar as propriedades do confinamento é através de modelos não-perturbativos e/ou fenomenológicos, tais como o potencial quark-antiquark estático ($q\bar{q}$), que tem demonstrado sucesso na descrição de sistemas mesônicos de baixa energia tal como o Quarkônio (Eichten *et al.*, 1978; Lucha; Schöberl; Gromes, 1991; Soni *et al.*, 2018; Mateu *et al.*, 2019). O modelo do potencial estático é respaldado por dados da rede que validam suas propriedades fenomenológicas e o seu comportamento de confinamento linear para distâncias grandes e intermediárias (Bali; Schilling; Schlichter, 1995a; Bali, 1998; Brambilla; Vairo, 1999). Atualmente, o potencial de Cornell é o modelo mais simples para ajustar o potencial da QCD na rede:

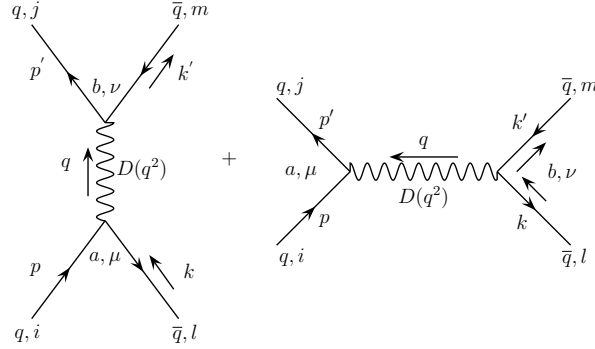
$$V_c = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_c}{r} + \sigma r, \quad (133)$$

onde α_c é o acoplamento de Cornell, que está relacionado à constante de acoplamento forte e, σ é a tensão da corda, sendo ambas, constantes fenomenológicas. Este modelo relaciona duas características importantes da QCD: I) liberdade assintótica para pequenas distâncias, e II) o fenômeno de confinamento para longas distâncias (confinamento linear). Normalmente, α_c é usado como uma constante para ajustar o potencial da rede, mas como os dados indicam, esse fator diminui para pequenas distâncias podendo ser parametrizado com um fator $1/r^2$. Porém, não há uma motivação física para esse termo. O enfraquecimento do acoplamento de Cornell é interpretado como um sinal da liberdade assintótica (Booth *et al.*, 1992; Bali, 2001). Embora o primeiro termo do potencial de Cornell esteja relacionado com o resultado perturbativo, a PT não consegue descrever o potencial da rede (quenched) (mesmo para curtas distâncias (Bali, 1999)), pelo qual em alguns casos, recorre-se à inclusão de termos adicionais aos resultados perturbativos para poder reproduzir os dados. Por isso, é comum encontrar em alguns trabalhos a adição *ad hoc* do termo linear, σr , no potencial $q\bar{q}$ para tentar completar a sua descrição.

Por outro lado, através do potencial estático podemos estudar certos aspectos de alguns modelos para a QCD, seja aqueles com *inputs* não-perturbativos ou os chamados de efetivos. Aspectos tais como o seu desempenho e/ou a sua validade na região perturbativa, junto a modificações na mesma região vindas das informações não-perturbativas desses modelos⁷⁶ podem ser investigados. Além disso, podemos tentar explorar a influência dos ingredientes não-perturbativos desses modelos nas regiões de distâncias intermediárias e longas do potencial estático. Por esses motivos, calculamos o potencial para os diferentes modelos mencionados nesta tese, com a intenção de saber se as suas diferentes caracterís-

⁷⁶ Os modelos efetivos não necessariamente são pensados para funcionar em regimes perturbativos.

Figura 13 - Diagramas do processo quark-antiquark



Legenda: Diagramas de Feynman para os processos de criação-aniquilação e espalhamento do par quark-antiquark, respectivamente.

Fonte: O autor, 2023.

ticas e informações não-perturbativas trarão melhorias consideráveis ao potencial, tais como um termo linear relacionado ao confinamento de quarks pesados.

O potencial $q\bar{q}$ pode ser calculado através do processo quark-antiquark, que na mais baixa ordem pode ser representado pela Fig. (13). O diagrama relacionado à criação e à destruição do par não gerará uma contribuição no potencial (Lucha; Schoberl; Gromes, 1991), já que para uma configuração do tipo singleto, onde $i = j$ e $l = m$, seu resultado é nulo, pois ele é proporcional ao fator $t_{li}^a t_{jm}^a$ (vide o apêndice A):

$$t_{li}^a t_{jm}^a \rightarrow t_{li}^a t_{il}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{li} \delta_{ii} - \frac{1}{N} \delta_{li} \delta_{il} \right) = 0. \quad (134)$$

O diagrama restante (processo de espalhamento), no qual podem ser adicionadas correções de ordem mais alta, permite obter um potencial $q\bar{q}$ invariante de gauge (dentro dos gauges covariantes, Ap. A – Eq. (242)), que na aproximação não relativística e de troca de um glúon (ou *One gluon exchange* (OGE)) gera (Apêndices A e B)⁷⁷:

$$V(r) = \frac{i\mathcal{C}_F}{\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} dp p \alpha(p) D(p) e^{i p r} \quad / \quad p = |\vec{p}|. \quad (135)$$

Como é sabido, a forma mais simples de obter um potencial $q\bar{q}$ estático, através da Eq. (135), que reproduz o comportamento linear do potencial de Cornell é gerando uma divergência quártica no potencial no espaço de momentos. Isso pode ser feito adicionando uma contribuição do tipo Gribov $1/p^4$ ao produto $\alpha(p) D(p)$ ⁷⁸. Outra maneira é colocar uma divergência $1/p^2$ na constante de acoplamento junto com o propagador perturbativo

⁷⁷ Usaremos as notações p^2 e p^2 para o quadrado do módulo do quadri-momento e do momento vetorial, respectivamente.

⁷⁸ Não necessariamente $1/p^4$ deve ser pensada como uma divergência, pois pode ser analisada no sentido de uma distribuição (Hersbach, 1993).

do glúon $1/p^2$ (Richardson, 1979). Alguns pesquisadores analisaram o comportamento do potencial $q\bar{q}$ colocando também a divergência ausente na constante de acoplamento, obtendo boa concordância com o potencial da rede (Vento, 2013; Ayala; Gonzalez; Vento, 2016). No entanto, uma divergência no propagador do glúon não é compatível com os resultados atuais de QCD na rede, que mostram um propagador do glúon finito para baixos momentos. Aparentemente, uma situação semelhante ocorre com a constante de acoplamento que apresenta um comportamento finito nesta região (Bogolubsky *et al.*, 2009; Deur; Brodsky; Teramond, 2016; Duarte; Oliveira; Silva, 2016). A constante de acoplamento não tem uma definição única para baixas energias e também pode ser concebida sob o conceito de cargas efetivas de Grunberg⁷⁹ (Deur; Brodsky; Teramond, 2016).

Mesmo que tentar obter conclusões de aspectos não-perturbativos usando apenas uma equação perturbativa para o potencial $q\bar{q}$ pareça um pouco ousado, pelo menos nos permite pensar em possíveis explicações para este problema, ainda que pareçam ingênuas. Embora não haja uma descrição do mecanismo do confinamento, esses formalismos obtêm uma descrição razoável do espectro do Quarkônio (Richardson, 1979; Gonzalez; Mathieu; Vento, 2011; Vento, 2013; Ayala; Gonzalez; Vento, 2016; Cucchieri; Mendes; Serenone, 2019), com a adição a mão de um termo linear no potencial (Cucchieri; Mendes; Serenone, 2019).

3.1 Potencial com parâmetros constantes nos modelos massivo, GZ e RGZ

Já que estamos interessados em calcular o potencial quark–antiquark, analisaremos a forma geral que ele pode assumir dependendo da estrutura do seu integrando, que, como vimos (Eq. (135), depende do produto da constante de acoplamento e do propagador do glúon. Para este último, muitos modelos e/ou abordagens prevêm a existência de pólos puramente imaginários ou complexos quando parâmetros são ajustados com os dados da rede (Gribov, 1978; Stingl, 1986; Zwanziger, 1990; Dudal *et al.*, 2008b; Baulieu *et al.*, 2010; Dudal; Oliveira; Silva, 2018), enquanto outros analisam a influência desses pólos no propagador de glúon e suas funções derivadas (Cucchieri; Mendes; Serenone, 2019; Hayashi; Kondo, 2019; Hayashi; Kondo, 2020). Os pólos mais simples têm a forma: $z_{\pm}^2 = -a^2 \pm i b^2$ onde $\{a^2, b^2\} \in \mathbb{R}^+$, que de forma geral podem ser expressados como $z_1 = x + i y$ e $z_2 = -x + i y$, com $\{x\} \in \mathbb{R}$ e $\{y\} \in \mathbb{R}^+$.

A fim de calcular o potencial, precisamos integrar a Eq. (135). Para isso, definiremos:

⁷⁹ Grunberg propôs que o acoplamento forte poderia ser definido a partir de qualquer observável (experimental) que seja previsível em pQCD, estabelecendo um conceito de carga efetiva que se adapta ao fenômeno que estiver sendo estudado (Grunberg, 1984).

$$f(z) = z \alpha_s(z) \mathcal{D}(z) \text{Exp}[i z r]. \quad (136)$$

O teorema do resíduo permite resolver essa integral com a fórmula:

$$\oint f(z) dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \sum_j \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_j)^n f(z)] \Big|_{z=z_j}, \quad (137)$$

sendo z_j um pólo da função $f(z)$ e n a ordem do mesmo.

Nossa análise inicial para o potencial $q\bar{q}$ estático usará parâmetros constantes. Consideraremos a constante de acoplamento como um parâmetro fixo ($\alpha_s(z) = \alpha_s$), pois esta hipótese funciona como uma boa aproximação em todos os regimes de distâncias, dando uma boa descrição também para o espectro mesônico (Kalashnikova; Nefediev; Simonov, 2001). Isso significa que por enquanto o propagador do glúon será o principal responsável pelo comportamento do potencial. O uso de parâmetros constantes simplifica muito o cálculo do potencial $q\bar{q}$, pelo menos na ordem inicial. Ao fixar α_s , temos que:

$$f(z) = \alpha_s z \mathcal{D}(z) \text{Exp}[i z r]. \quad (138)$$

No caso de ter apenas dois pólos simples ($n = 1$), $z_1 = x + i y$ e $z_2 = -x + i y$, ($\{x, y\} \in \mathbb{R}^+$), podemos usar as Eqs. (137) e (138) para resolver o potencial na Eq. (135). Isso é possível, pois $f(z_j) \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$ (Eq. (138)). Chega-se, então, na seguinte expressão (Apêndice C):

$$\begin{aligned} \oint f(z) dz &= (i \pi \alpha_s) \sum_{j=1}^2 e^{i z_j r} 2 z_j ((z - z_j) \mathcal{D}(z)) \Big|_{z=z_j}, \\ \oint f(z) dz &= (i \pi \alpha_s) e^{-y r} (\mathcal{A}(z_1, z_2) \text{Cos}(x r) + \mathcal{B}(z_1, z_2) \text{Sin}(x r)). \end{aligned} \quad (139)$$

Assim, a partir de parâmetros constantes e dois pólos simples, o potencial $q\bar{q}$ (Eq. (135)) sempre pode ser escrito da seguinte forma:

$$V(r) = -\frac{\alpha_s \mathcal{C}_F}{r} e^{-y r} (\mathcal{A}(x, y) \text{Cos}(x r) + \mathcal{B}(x, y) \text{Sin}(x r)), \quad (140)$$

onde $\mathcal{A}(x, y)$ e $\mathcal{B}(x, y)$ são funções que dependem dos pólos do integrando do potencial, que são oriundos do propagador neste caso⁸⁰. Não haverá pólos reais positivos no integrando do potencial se as funções envolvidas forem finitas e contínuas, como indicam os resultados atuais da rede para o propagador do glúon e da constante de acoplamento, nos quais não aparecem descontinuidades.

Os integrandos dos modelos perturbativo, massivo (CF) e GZ são, respectivamente,

⁸⁰ Os pólos do propagador estão em função do invariante de Lorentz p^2 enquanto que os pólos do potencial estão em função de p .

no nível de árvore e sem incluir o fator e^{ipr} por simplicidade:

$$I_p(p) = \frac{\alpha_s}{p} \quad , \quad I_m(p) = \frac{\alpha_s p}{p^2 + m^2} \quad , \quad I_{GZ}(p) = \frac{\alpha_s p^3}{p^4 + \gamma^4}. \quad (141)$$

O resultado para o caso perturbativo é quase imediato e pode ser resolvido no plano complexo com pólo no eixo real ($p = 0$), logo:

$$V_p(r) = \frac{i \mathcal{C}_F}{\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{\alpha_s e^{ipr}}{p} = \frac{i \alpha_s \mathcal{C}_F}{\pi r} \oint dz \frac{e^{izr}}{z} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}, \quad (142)$$

sendo este o conhecido resultado perturbativo do potencial $q\bar{q}$: basicamente um potencial de Coulomb vezes um fator de cor ($C_F = 4/3$). No entanto, a Eq. (142) representa um potencial de longo alcance, o que não é compatível com a noção de confinamento dos quarks.

Para o caso massivo, temos apenas um pólo, $z_1 = 0 + im$. Logo, a Eq. (140) com $\mathcal{A}(0, im) = 1$ (vide detalhes no Apêndice C)) fornece:

$$V_m(r) = \frac{i \mathcal{C}_F}{\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p \alpha_s e^{ipr}}{p^2 + m^2} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} e^{-mr}, \quad (143)$$

onde este potencial, além do termo de Coulomb, tem um termo de decaimento exponencial que depende da massa da partícula, o que faz diminuir o alcance da interação. Esse comportamento corresponde ao bem conhecido potencial de Yukawa.

No caso GZ, temos dois pólos complexos, $z_1 = x + ix$ e $z_2 = -x + ix$, onde $x = \gamma/\sqrt{2}$. Isso nos diz que $\mathcal{A} = 1$ e $\mathcal{B} = 0$ (Apêndice C)), logo o potencial GZ será:

$$V_{GZ}(r) = \frac{i \mathcal{C}_F}{\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p^3 \alpha_s e^{ipr}}{p^4 + \gamma^4} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} e^{-\gamma r/\sqrt{2}} \text{Cos}(\gamma r/\sqrt{2}), \quad (144)$$

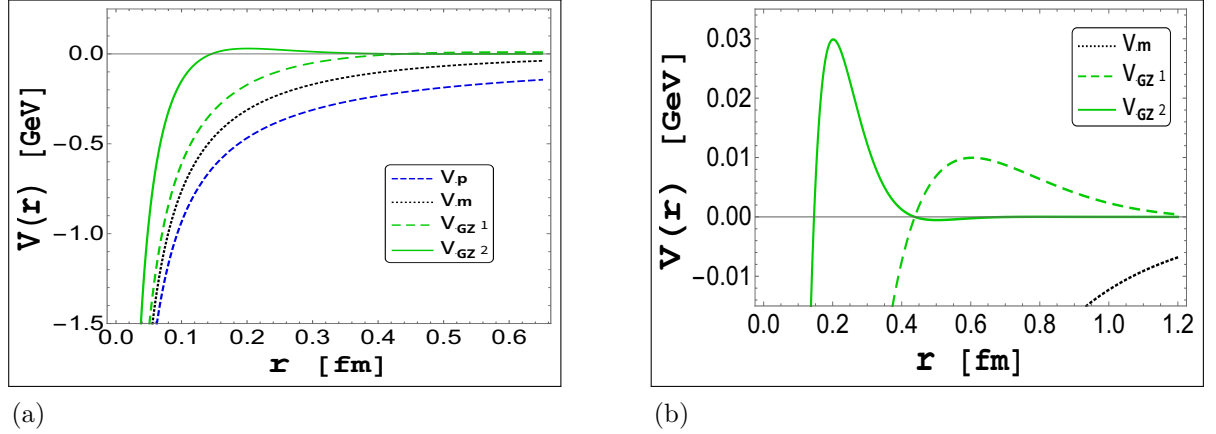
que, graças aos pólos complexos do integrando, provenientes da massa do Gribov, apresenta o típico fator de decaimento massivo vezes um fator oscilante adicional.

A presença de um fator cosseno indica que o potencial GZ se anula quando $\gamma r/\sqrt{2} = (2k + 1)\pi/2$, onde $k \in \mathbb{Z}$. O primeiro ponto onde $V_{GZ}(r_0) = 0$ acontece quando $r_0 = \pi/(\sqrt{2}\gamma)$, e a partir desse ponto $V_{GZ}(r)$ aumenta com a distância ($V_{GZ}(r) > 0$) até um certo máximo. Naturalmente, depois de cada máximo a função cosseno diminui gradualmente, o que certamente não gerará um potencial confinante para intermediárias ou longas distâncias. O máximo do potencial GZ é dado por:

$$\left. \frac{\partial V_{GZ}}{\partial r} \right|_{r_1} = 0 \quad \rightarrow \quad -\left(\frac{1 + \theta}{\theta} \right) = \text{Tan}[\theta] \quad \wedge \quad \theta = \gamma r_1/\sqrt{2}, \quad (145)$$

onde o valor que corresponde ao máximo do potencial é para $\theta \approx 2.1712$. Assim, obtemos as seguintes relações:

Figura 14 - Potencial $q\bar{q}$ – Caso Perturbativo, massivo e GZ.



Legenda: (a) A linha (verde) tracejada corresponde ao potencial GZ para $\gamma = 1$ GeV, enquanto que a linha sólida a $\gamma = 3$ GeV. (b) Zona D do potencial GZ. Foi usado $\alpha_s = 0.356$.

Fonte: O autor, 2023.

$$r_1 = \left(\frac{0.605}{\gamma} \right) \text{ fm} \wedge V_{GZ}^{Max}(r_1, \gamma) \approx (0.056 \gamma \alpha_s) \text{ GeV}. \quad (146)$$

as quais mostram que o ponto do máximo depende da inversa da massa do Gribov e o máximo do potencial depende diretamente do valor da mesma. Ou seja, quanto mais longe esse máximo acontecer, menor será a amplitude do potencial GZ. Isto pode ser observado na Fig. (14), onde são comparados o caso perturbativo, massivo e o próprio potencial GZ. De qualquer forma, mesmo que o valor máximo do potencial GZ não seja relativamente grande, as características deste potencial são algo que os outros modelos considerados, tanto o perturbativo quanto o massivo (em nível de árvore), não podem gerar.

Daqui em diante vamos analisar o potencial $q\bar{q}$ dividindo-o em 3 regiões: a de curta (0.00 – 0.20 fm), intermediária (0.20 – 0.80 fm) e de longa distância ($r > 0.80$ fm)⁸¹.

A breve análise do potencial GZ nos serve de preâmbulo para entender as características do potencial RGZ, cujo integrando é:

$$I_{RGZ}(p) = \frac{\alpha_s p (p^2 + M^2)}{p^4 + (M^2 + m^2)p^2 + \lambda^4 + M^2 m^2}, \quad (147)$$

que também gera dois pólos complexos, $z_1 = x + iy$ e $z_2 = -x + iy$, onde:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{\lambda^4 + M^2 m^2} \sin \left[\tan^{-1} \left[\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 - m^2)^2} / (M^2 - m^2) \right] / 2 \right] \\ y &= \sqrt[4]{\lambda^4 + M^2 m^2} \cos \left[\tan^{-1} \left[\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 - m^2)^2} / (M^2 - m^2) \right] / 2 \right] > 0, \end{aligned} \quad (148)$$

⁸¹ A escolha de onde cada região começa e termina é debatível, mas a discussão que segue será geral.

cujo resultado mostra que $\mathcal{A}(x, y) = 1$ e $\mathcal{B}(x, y) = \kappa$ (vide Apêndice C)), logo:

$$V_{RGZ}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} e^{-y r} (\text{Cos}(x r) + \kappa \text{Sin}(x r)) \quad \wedge \quad \kappa = \frac{M^2 - m^2}{\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 - m^2)^2}}. \quad (149)$$

Este potencial, devido aos pólos complexos do seu integrando, provenientes dos termos de massa dos condensados e do parâmetro de Gribov, apresenta, além do típico fator de decaimento massivo, uma combinação de fatores oscilantes. A contribuição total resultante dos condensados do propagador RGZ é o novo fator $\kappa \text{Sin}(x r)$. Tal combinação sinusoidal (Eq. (149)) permite que o potencial RGZ tenha características similares ao potencial GZ. O ponto onde $V_{RGZ}(r_0) = 0$ será dado por:

$$\text{Tan}[x r_0] = -\frac{1}{\kappa}. \quad (150)$$

Se o valor de κ não for muito pequeno (algo que acontece com os dados da rede, onde $1/\kappa \sim [0.1 - 0.25]$), podemos obter a seguinte aproximação:

$$r_0 \approx \frac{1}{x} \left(\pi - \frac{1}{\kappa} \right) \approx \left(\frac{0.6}{x} \right) \text{fm}, \quad (151)$$

ou seja, aproximadamente, o ponto onde o potencial RGZ troca de sinal depende do valor da parte real dos pólos, algo bem similar com o que acontece com o potencial GZ.

As expressões do ponto máximo e o máximo do potencial RGZ são:

$$\text{Tan}[x r_1] = \frac{r_1(x\kappa - y) - 1}{r_1(x + y\kappa) + \kappa} \quad \wedge \quad V_{RGZ}^{RGZ}(r_1) = \left(\frac{-x \text{Cos}[x r_1](1 + \kappa^2)e^{-y r_1}}{x r_1 + (1 + y r_1)\kappa} \right) \alpha_s C_F, \quad (152)$$

que, comparadas com as relações para o potencial GZ (Eq. (146)), estas são um pouco mais complexas de analisar, já que agora estamos em presença de mais parâmetros. Um estudo mais detalhado do potencial RGZ será feito na seção seguinte.

Algo que podemos destacar é que analisar os pólos complexos que aparecem no propagador do glúon ($p^2 \in \mathbb{C}$, segundo ajustes da rede), nos permite entender melhor o comportamento dos potenciais GZ e RGZ, principalmente para distâncias longas e intermediárias. Como vimos, esses pólos marcam a diferença entre os potenciais perturbativo e massivo (pólo real no propagador) comparados com os potenciais GZ e RGZ (pólos complexos no propagador) e com qualquer outro potencial $q\bar{q}$ calculado usando a Eq.(135) (veja as Eqs. (138) e (140)). A presença de pólos complexos no integrando do potencial ($p \in \mathbb{C}$) sempre afetará o seu resultado. Por exemplo, quando temos dois pólos simples como na previsão em nível de árvore do modelo RGZ (Dudal *et al.*, 2008b; Dudal; Oliveira; Silva, 2018), uma possibilidade é que apareçam termos do tipo: $\text{Exp}(-y r) (\text{Cos}(x r) + \kappa \text{Sin}(x r))$ (Eqs. (140) e (149)). Na ordem subsequente de cálculo em teoria de perturbação (NLO), essa expressão seria modificada devido aos fatores de logaritmos provenientes da implementação do grupo de renormalização. Essas correções

perturbativas irão gerar termos de complexidade algébrica no potencial devido aos cortes de ramificação no integrando, de modo que obter uma expressão analítica completa será uma tarefa difícil ou mesmo impossível de ser feita. Todos esses termos, principalmente os de seno e cosseno, irão gerar uma região na qual o sinal do potencial $q\bar{q}$ muda e ele começa a aumentar com a distância até certo ponto em que aquela função atinge o primeiro máximo e entra em um comportamento oscilante devido aos fatores senoidais, tal qual já foi discutido brevemente no potencial GZ (vide Fig. (14b)). Esta região vai depender do valor dos pólos complexos e vamos nos referir a ela usando o termo: zona D⁸².

Poderíamos pensar em atribuir algum significado a essa zona D e tentar vinculá-la a algum aspecto do confinamento, pois esse comportamento surge pela presença dos pólos complexos no potencial devidos à incorporação de escalas não-perturbativas vindas da região IR do propagador do glúon (e também da constante de acoplamento). Por outro lado, esse comportamento pode ser o resultado de forçar a aplicação da aproximação perturbativa. Esta última alternativa requer uma análise mais cuidadosa, pois estamos usando uma fórmula derivada de uma expressão perturbativa para tentar entender resultados que pertencem à região não-perturbativa. Porém, caso houvesse uma teoria efetiva que pudesse obter informação não-perturbativa através de uma abordagem perturbativa, poderíamos usá-la para explorar a região não-perturbativa do potencial $q\bar{q}$ através da sua equação perturbativa. Esse caso será analisado nas próximas seções.

3.2 Potencial RGZ – Propagador fenomenológico

Atualmente se sabe que o modelo RGZ é compatível com o propagador do glúon no IR, mas não se tem uma expressão analítica que mostre como as correções perturbativas afetam a estrutura ultravioleta do mesmo. Assim, inspirados no comportamento infravermelho e ultravioleta do propagador do glúon, em (Dudal; Oliveira; Silva, 2018), é construída uma função que interpola ambos os resultados, dominando no IR a forma dada pelo propagador RGZ, enquanto que no UV se tem um comportamento do tipo Log, próprio do resultado perturbativo incluindo o grupo de renormalização:

$$D(p) = Z \frac{p^2 + M_1^2}{p^4 + M_2^2 p^2 + M_3^4} \left(1 + \omega \text{Log} \left[(p^2 + m_g^2(p)) / \Lambda_{QCD}^2 \right] \right)^{-13/22}, \quad (153)$$

⁸² O nome é para fazer referência ao fato de que esses pólos vêm da parte escalar do propagador do glúon: $D(p)$.

sendo Z o fator de renormalização da rede, e $\omega = 11N\alpha_s(\mu)/(12\pi)$. Os fatores M_i podem ser expressados em função dos parâmetros do propagador RGZ:

$$M_1^2 = M^2 \quad \wedge \quad M_2^2 = M^2 + m^2 \quad \wedge \quad M_3^4 = \lambda^4 + M^2 m^2. \quad (154)$$

Na Eq. (153), o termo massivo $m_g^2(p)$ regulariza o fator logarítmico e deve se tornar desprezível a altos momentos a fim de recuperar o resultado perturbativo.

Como mostrado em muitos artigos (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019; Dudal; Oliveira; Silva, 2018; Duarte; Oliveira; Silva, 2016), é comum usar aquele fator de renormalização Z (Leinweber *et al.*, 1999a) no propagador do glúon para obter uma boa concordância com os dados da rede, devido a razões técnicas, como as diferentes condições de renormalização entre o contínuo e a rede. Poderíamos incluir esse fator no potencial (Eq. (135)). Uma forma seria:

$$V(r) = \frac{i\mathcal{C}_F}{\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} dp \, p \alpha(p) \left(\frac{D_{Lt}(p)}{Z_L} \right) e^{ipr} \quad / \quad D_{Lt}(p) = Z_L D(p), \quad (155)$$

onde basicamente estaríamos usando o propagador da rede, mas redimensionando-o ao mesmo tempo, o que seria equivalente a não usar o fator Z (ou fixar seu valor em 1) e pegar os valores do parâmetros obtidos na rede. Outra maneira é apenas incluir esse fator como um fator multiplicativo (fator de escala) no potencial ou em outras palavras, usando $D_{Lt}(p)$ em vez de $D(p)$, ou seja, $\mathcal{V}(r) = Z V(r)$.

A influência do fator Z no potencial $q\bar{q}$, que será aplicável a qualquer modelo que use esse fator, corresponde apenas a um deslocamento nos valores do potencial, pois Z é um parâmetro multiplicativo. Por outro lado, fixar $Z = 1$ mantém o potencial independente do fator Z que é o apropriado, já que o potencial não deve depender de um fator não físico. Isso também permite que o propagador corresponda ao seu resultado perturbativo para grandes momentos.

Antes de analisar os resultados do potencial RGZ fenomenológico, partamos do potencial RGZ a nível de árvore (Eq. (149)), que foi calculado usando os parâmetros $M_1^2 = 2.521$, $M_2^2 = 0.5082$, $M_3^4 = 0.2795$ (Dudal; Oliveira; Silva, 2018), que são relativamente parecidos aos mostrados na tabela 1:

$$V_{RGZ}(r) = -\frac{4}{3} \left(\frac{0.3837}{r} \right) e^{-0.6256r} (\text{Cos}[0.3705r] + 4.8897 \text{Sin}[0.3705r]). \quad (156)$$

Já que estamos interessados nas novas contribuições que esses potenciais trazem ao resultado perturbativo, podemos calcular como se comportam esses potenciais para distâncias curtas e até talvez distâncias intermediárias:

$$V_m(r \sim 0) \approx -\frac{4\alpha_s}{3r} + \frac{4\alpha_s m}{3} - \frac{2m^2\alpha_s}{3} r + \mathcal{O}(r^2), \quad (157)$$

Tabela 1 - Parâmetros do propagador RGZ fenomenológico

Reg.	Z	M_1^2	M_2^2	M_3^2	m_0^2	λ^2	λ_0^2
RGZ	1.36522	2.518	0.6379	0.3927	—	—	—
Massa Const.	1.36486	2.510	0.471	0.3621	0.216	—	—
Cornwall	1.36636	2.394	0.413	0.3963	0.1196	0.109	—
Cornwall corrigido	1.36992	2.333	0.514	0.2123	1.1533	0.100	-0.954

Legenda: Diferentes tipos de regularização do fator logarítmico do propagador fenomenológico. Os fatores de massa estão em unidades de GeV.

Fonte: O autor, 2023.

$$V_{GZ}(r \sim 0) \approx -\frac{4\alpha_s}{3r} + \frac{4\alpha_s \gamma}{3\sqrt{2}} + \mathcal{O}(r^2), \quad (158)$$

$$V_{RGZ}(r \sim 0) \approx -\frac{4\alpha_s}{3r} - \frac{4\alpha_s(x\kappa - y)}{3} + \frac{2(2xy\kappa + x^2 - y^2)\alpha_s}{3}r + \mathcal{O}(r^2), \quad (159)$$

onde vemos que o termo linear presente no potencial massivo (Eq. (157)) não pode ser interpretado como um fator de tensão na corda, pois ele tem o sinal errado, algo já esperado uma vez que o potencial massivo não é linear confinante. Já o potencial GZ (Eq. (158)) não apresenta contribuições do tipo linear, nem para curtas nem intermediárias distâncias, algo inesperado já que se supõe que ele conta com contribuições não-perturbativas vindas do propagador do glúon. Para o caso RGZ, o panorama parece mais alentador (Eq. (159)) já que este aparentemente contém uma contribuição linear para r pequeno. Tal contribuição, dependendo do valor dos seus parâmetros pode ser positiva e análoga a um fator de tensão na corda aparecendo para curtas distâncias. Porém, se usarmos a Eq. (156), podemos verificar que tal termo linear, apesar de ser positivo, não necessariamente pode ser interpretado como um fator de tensão na corda σ :

$$V_{RGZ}(r \sim 0) \approx -\frac{0.1001}{r} - 0.6068 + 2.6136r - 4.1555r^2 + \mathcal{O}(r^3), \quad (160)$$

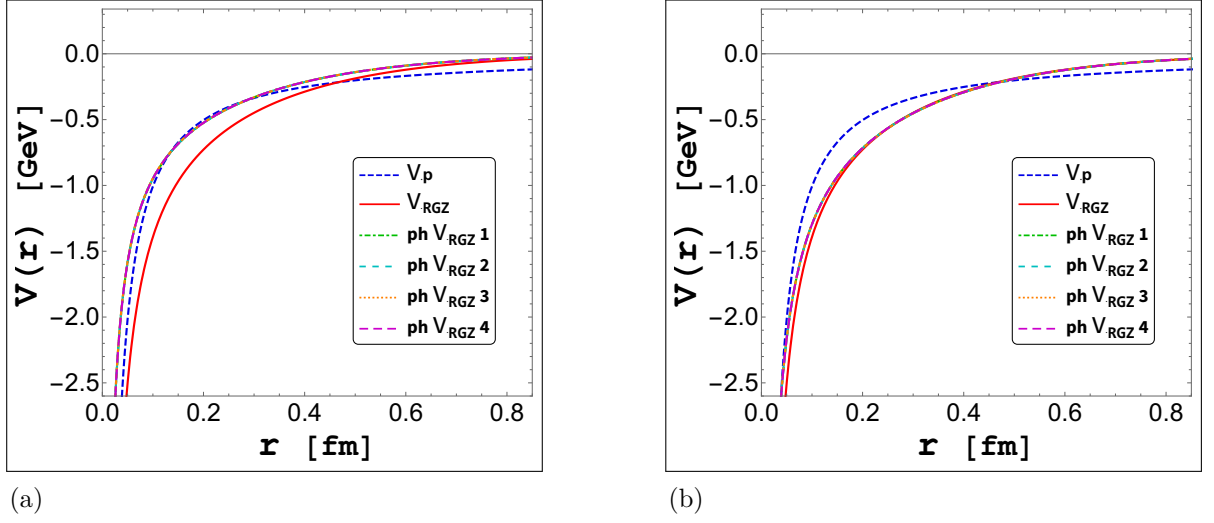
com $\sqrt{\sigma} \approx 0.718$ (r fm), pois as contribuições de ordem maior ainda são relevantes e acabam suprimindo-o (algo que não acontece no potencial massivo a um e dois *loops*, tal como veremos mais adiante, na seção 3.4). Este comportamento do potencial RGZ a distâncias curtas pode ser melhor entendido como correções no valor do acoplamento.

Agora, voltando ao potencial RGZ fenomenológico (ph V_{RGZ}), este foi calculado numericamente usando o propagador RGZ fenomenológico (Eq. (153)) para as diferentes parametrizações de $m_g^2(p)$, as quais são:

$$m_g^2(p) = m_0^2 \quad \text{Massa constante,} \quad (161)$$

$$m_g^2(p) = \frac{m_0^4}{p^2 + \lambda^2} \quad \text{Cornwall,} \quad (162)$$

Figura 15 - Resultados do Potencial RGZ – Nível de árvore e fenomenológico



Legenda: Potenciais até a região intermediária, usando : (a) $Z = 1$. (b) $Z \neq 1$. Mais detalhes no texto.
Fonte: O autor, 2023.

$$m_g^2(p) = \lambda_0^2 + \frac{m_0^4}{p^2 + \lambda^2} \quad \text{Cornwall corrigida,} \quad (163)$$

$$m_g^2(p) = \frac{M_3^4 + (M_2^2 - M_1^2)p^2}{M_1^2 + p^2} \quad \text{Tipo RGZ.} \quad (164)$$

O resultados dos potenciais são mostrados na Fig. (15) e (17), para os casos (a) $Z = 1$ e (b) $Z \neq 1$, respectivamente (vide tabela 1). Nessas figuras, $\text{ph } V_{\text{RGZ } 1}$, $\text{ph } V_{\text{RGZ } 2}$, $\text{ph } V_{\text{RGZ } 3}$ e $\text{ph } V_{\text{RGZ } 4}$, correspondem às parametrizações de massa constante (161), tipo Cornwall (162), Cornwall corrigida (163) e tipo RGZ (164), respectivamente.

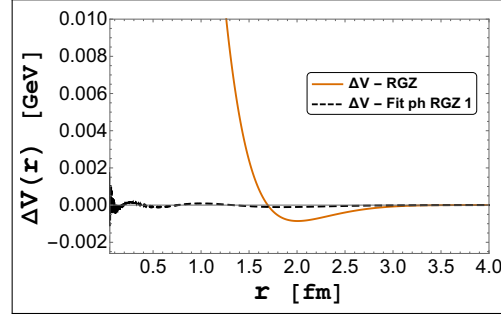
Para investigar melhor sobre o comportamento dos potenciais $\text{ph } V_{\text{RGZ}}$, podemos analisar seus integrandos. Por exemplo, quando $p \rightarrow \infty$ todos os seus integrandos tendem ao fator $1/p \log(p^2)$:

$$\frac{Z}{p \left(\omega \text{Log} \left[p^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2 \right] \right)^{13/22}}, \quad (165)$$

o que gera um comportamento assintótico do tipo $-1/r \log(1/r^2)$ quando $r \rightarrow 0$ (Levine; Tomozawa, 1979; Lucha; Schoberl; Gromes, 1991).

O resultado quase idêntico entre os potenciais (Fig. (15)), se deve ao fato de que todas as parametrizações da Eq. (153) têm uma boa concordância com o propagador do glúon na rede. (Vide Fig. (3) em (Dudal; Oliveira; Silva, 2018)). Portanto, os seus integrandos serão uma função parecida, cuja diferença só será notada na região de longas distâncias devido aos diferentes pontos de ramificação de cada parametrização (Fig. (17)). Já que todos os potenciais $\text{ph } \text{RGZ}$ se comportam de forma muito similar, pode-

Figura 16 - Ajuste do potencial ph RGZ



Legenda: Diferença entre o ph V_{RGZ} 1, V_{RGZ} (Eq. (166)) (linha laranja sólida) e o *fit* do ph V_{RGZ} 1 – ajuste modificado com um fator logarítmico (Eq. (167)) (linha preta tracejada).

Fonte: O autor, 2023.

mos escolher um deles para explorar a forma analítica deste potencial. Primeiro vamos considerar só os pólos do integrando e não o corte de ramificação devido ao logarítmico no propagador e assim calcular o potencial. Procedendo como na Eq. (149) e usando os pólos da parametrização (161), $z_{1,2} = \pm 0.4280 + 0.6470i$, obtemos:

$$V_{RGZ}(r) = -\frac{4}{3} \left(\frac{0.3837}{r} \right) e^{-0.6470r} (\cos[0.4280r] + 4.1074 \sin[0.4280r]), \quad (166)$$

que difere ligeiramente do potencial ph V_{RGZ} 1 para r pequeno e grande (Fig. (16), linha laranja sólida).

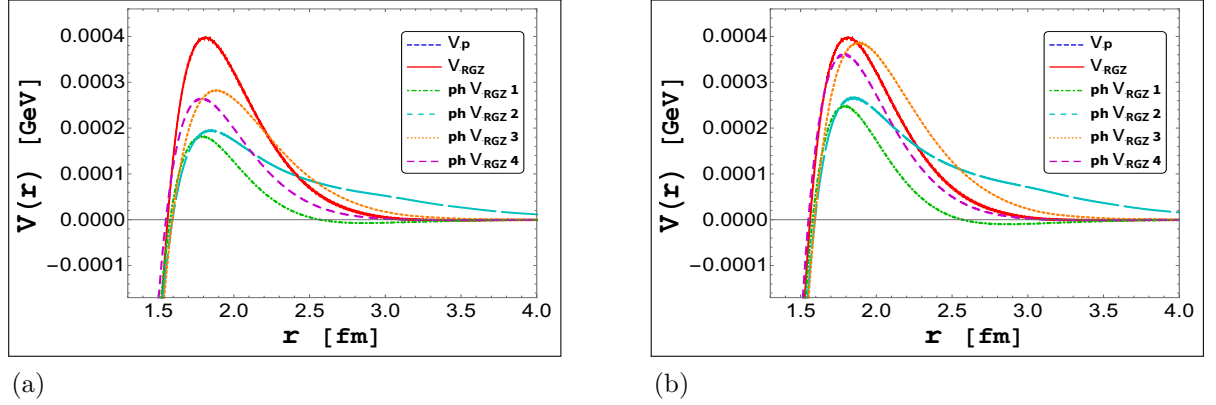
Por outro lado, sabemos que quando $r \rightarrow 0$, o potencial deve tender ao fator $-1/(r \log(1/r^2))$. Então, modificando a Eq. (166) com um fator logarítmico, e deixando livre o argumento ($Re(z_{1,2})$) e os coeficientes dos fatores seno e cosseno, e também o fator exponencial ($Im(z_{1,2})$), podemos obter um potencial do tipo $-1/(r \log(1/r^2))$:

$$V_{RGZ}^{Fit}(r) = -\frac{4}{3} \left(\frac{0.3837}{r} \right) e^{-0.6831r} \frac{(0.5424 \cos[0.3632r] + 1.9545 \sin[0.3632r])}{[\log(1 + (0.0727)^2/r^2)]^{0.103}}. \quad (167)$$

Este último potencial tem uma boa concordância com o potencial ph V_{RGZ} 1 para r pequeno e grande (Fig. (16), linha preta tracejada).

Por outro lado, mesmo quando as parametrizações do propagador RGZ fenomenológico melhoraram os *fits* do propagador da rede, o resultado para o potencial RGZ a nível de árvore e fenomenológico não é muito diferente. O potencial RGZ fenomenológico tende a ter um comportamento mais perturbativo do que no nível de árvore justamente pela inclusão do fator Log. Por outro lado, devemos esclarecer que nada pode ser dito sobre o potencial RGZ a ordens superiores já que as parametrizações vistas anteriormente carecem da riqueza dos termos de interação adicionais próprios da teoria RGZ. Mesmo assim, usar esse propagador fenomenológico nos permitiu mostrar que um potencial com pólos complexos e fatores logarítmicos pode ser escrito na forma da Eq. (167), que será de

Figura 17 - Zona D no Potencial RGZ – Nível de árvore e fenomenológico



Legenda: Comportamento dos potenciais na zona D, usando: (a) $Z = 1$. (b) $Z \neq 1$.

Fonte: O autor, 2023.

utilidade na próxima seção, quando estudaremos o potencial massivo a ordens superiores.

Os pontos de ramificação só modificam os potenciais ph RGZ na região de longas distâncias tal como podemos corroborar na chamada zona D do potencial na Fig. (17). Podemos destacar também que a amplitude do potencial RGZ nesta região é muito menor do que a amplitude do potencial GZ, sendo que os termos de massa da RGZ (M_i) se encontram no intervalo escolhido para a massa de Gribov ($1 < \gamma < 3$). Isto é devido à complexa relação entre os termos de massa da RGZ com o ponto de mudança de sinal (Eq. (151)), o ponto do máximo e o máximo do próprio potencial RGZ (Eqs. (151) e (152)). Para o potencial RGZ, calculado na Eq. (156), com valores de $x = 0.37053$, $y = 0.6256$ e $\kappa = 4.8897$, se tem os valores aproximados do ponto de mudança de sinal $r_0 \approx 1.62$ fm, do ponto do máximo $r_1 \approx 1.81$ fm e o máximo do potencial $V_{RGZ}(r_1) \approx 4 \times 10^{-4}$ GeV, coincidindo com o resultado da Fig. (17) (linha vermelha sólida).

3.3 Potencial massivo do modelo Curci–Ferrari

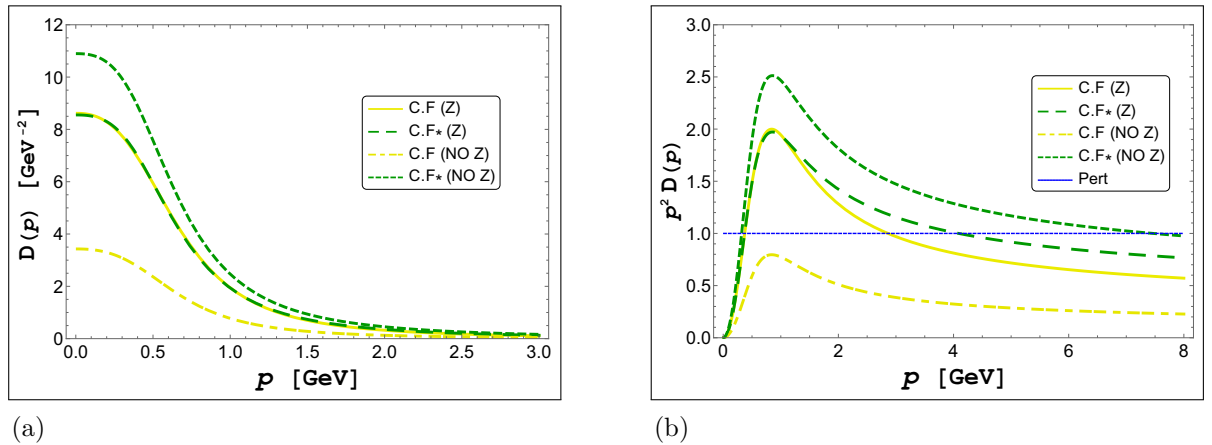
Como já foi mencionado, estamos interessados em calcular as melhorias que os modelos efetivos podem trazer para o potencial $q\bar{q}$. Neste caso, calculamos o potencial não-relativístico no modelo Curci-Ferrari (CF) (Curci; Ferrari, 1976b), na verdade, num caso particular desse modelo (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019; Reinosa *et al.*, 2017) que é capaz de obter informação não perturbativa da QCD, em particular, para o propagador do glúon, logrando um bom acordo com os dados da rede, tudo isso, através de uma abordagem perturbativa “segura” no infravermelho, já que evita um comportamento divergente para a constante de acoplamento. Nosso objetivo é saber até que profundidade podemos explorar, com este modelo, as regiões de distância do potencial, em particular,

as regiões de intermediárias e longas distâncias.

É bem conhecido que tanto o propagador do glúon perturbativo quanto o massivo (nível de árvore, Curci-Ferrari) falham em reproduzir os dados da rede, mas como mostrado em (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019), o uso de condições de renormalização adequadas e um parâmetro de expansão relativamente pequeno permitem que o propagador do glúon, no modelo Curci-Ferrari, obtenha uma boa concordância com os dados do propagador do glúon na rede (também reproduz o resultado perturbativo do acoplamento da QCD). A 1 *loop*, usando parâmetros constantes, a melhor concordância do propagador CF é para valores menores que 2 GeV (Fig. (9b)). Em parte isso seria esperado, uma vez que para grandes momentos, comparados aos parâmetros utilizados, seria necessário incorporar as equações do grupo de renormalização (RGE) e analisar a influência da escala de energia sobre os parâmetros como está claramente explicado nas referências citadas recentemente.

O modelo CF tem um parâmetro de expansão, λ , relativamente pequeno mas sua constante de acoplamento associada ($\alpha_s = 4\pi\lambda/3$) pode herdar um valor relativamente grande (Tabela 2). Esse valor relativamente grande do acoplamento ($\alpha_s > 1$) (comparado com o acoplamento perturbativo, $\alpha_s < 1$) afetará o comportamento de seu potencial associado na forma de um deslocamento em relação ao potencial perturbativo. Particularmente, gostaríamos de obter cálculos para pequenos valores da constante de acoplamento. Por tanto, exploramos um resultado do propagador CF do glúon a 1 *loop* usando um valor da constante do acoplamento relativamente menor, o valor da constante de acoplamento de Cornell (Mateu *et al.*, 2019) ($\alpha_s^{Bott} \sim 0.356$, Tabela 2), como podemos ver nas Figs.

Figura 18 - Propagador do glúon (Curci-Ferrari) a 1 *loop*



Legenda: (a) A linha amarela representa o ajuste de (Tissier; Wschebor, 2011). A linha tracejada verde representa nosso ajuste. (b) Função vestida do glúon. A linha horizontal é o resultado perturbativo em nível de árvore. Valores dos parâmetros na tabela 2.

Fonte: O autor, 2023.

(18a) e (18b) (linha tracejada verde). Obtivemos um resultado semelhante para valores inferiores a 2 GeV, mas também obtemos discrepâncias para valores superiores a ele devido à ausência do RGE, conforme mencionado acima.

Para o potencial CF a 1 *loop*, optamos por integrá-lo numericamente devido à complexidade algébrica do propagador e à existência de cortes de ramificação na integração:

$$V_m(r) = \frac{i\mathcal{C}_F}{\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} dp \, p \, \alpha_s D_{CF}(p) e^{ipr}, \quad (168)$$

sendo o propagador CF do glúon a 1 *loop* (Tissier; Wschebor, 2011):

$$\begin{aligned} \frac{D^{-1}(p)}{m^2} = & s + 1 + \frac{s\lambda}{24} \left\{ (2 - s^2)\log(s) + 2(1 + s^{-1})^3 (s^2 - 10s + 1)\log(1 + s) + 111s^{-1} \right. \\ & \left. - 2s^{-2} + (4s^{-1} + 1)^{\frac{3}{2}} (s^2 - 20s + 12) \log\left(\frac{\sqrt{4+s} - \sqrt{s}}{\sqrt{4+s} + \sqrt{s}}\right) - \left(s \rightarrow \frac{\mu_0^2}{m^2}\right) \right\}, \quad (169) \end{aligned}$$

onde $\lambda = 3\alpha_s/(4\pi)$, $s = p^2/m^2$ e μ_0 é a escala de renormalização.

Nas Figs. (19a) e (19b), comparamos os resultados para os potenciais perturbativo, Cornell, massivo a nível árvore – CF – (V_m), massivo a 1 *loop* – 1L CF* (1L V_m^*) e 1L CF (1L V_m) onde usamos o conjunto de parâmetros da tabela (2). Todos esses potenciais aparentemente tendem a reproduzir o resultado perturbativo conhecido (Eq. (142)), embora se espere que os resultados a 1 *loop* sejam diferentes do resultado em nível árvore pelo menos até a região perturbativa profunda.

Para ter uma ideia melhor sobre o comportamento desses potenciais, podemos analisar seus integrandos. Por exemplo, quando $p \rightarrow \infty$ todos os integrandos tendem ao fator $1/p \log(p^2)$ (Valores dos parâmetros na tabela 2):

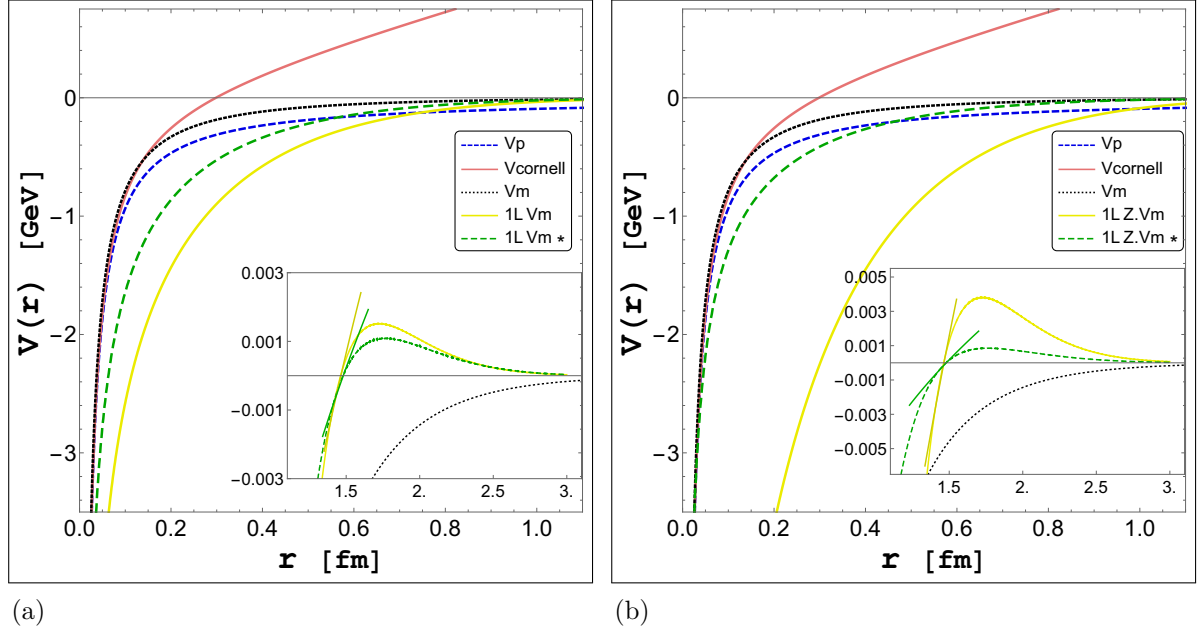
$$\lim_{p \rightarrow \infty} Z_L p \alpha_s D_{CF}(p) \sim \frac{4.8564}{p \log(p^2/1.1433)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^3 \log^2(p^2)}\right), \quad (170)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} Z_L p \alpha_s D_{CF^*}(p) \sim \frac{1.5176}{p \log(p^2/2.0076)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^3 \log^2(p^2)}\right), \quad (171)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \alpha_s D_{CF}(p) \sim \frac{1.9333}{p \log(p^2/1.1433)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^3 \log^2(p^2)}\right), \quad (172)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \alpha_s D_{CF^*}(p) \sim \frac{1.9333}{p \log(p^2/2.0076)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^3 \log^2(p^2)}\right), \quad (173)$$

onde, como vimos anteriormente, isso vai gerar um comportamento assintótico do tipo $-1/r \log(1/r^2)$ quando $r \rightarrow 0$. Isso significa que, para grandes momentos ou curtas distâncias, esses potenciais se comportam como uma família de curvas, aproximadamente. As equações (170) e (171), pelo menos na primeira ordem, são similares a não ser por

Figura 19 - Potenciais $q\bar{q}$ no modelo Curci–Ferrari

Legenda: As linhas azul (tracejada), rosa (sólida), preta (pontilhada), amarela (sólida) e verde (tracejada) representam os potenciais perturbativo, Cornell, massivo V_m (CF), $1L V_m$ e $1L V_m^*$, respectivamente. (a) $Z_L = 1$ (b) $Z_L \neq 1$. Vide Tab. (2). Mais detalhes no texto.

Fonte: O autor, 2023.

uma constante (~ 3.2 vezes), que explica o resultado muito afastado entre seus potenciais (Fig. (19b)), enquanto que as equações (172) e (173) tem um limite muito parecido, que por sua vez explica o resultado mais próximo entre seus potenciais mesmo para um conjunto diferente de parâmetros tal como podemos ver na Fig. (19a).

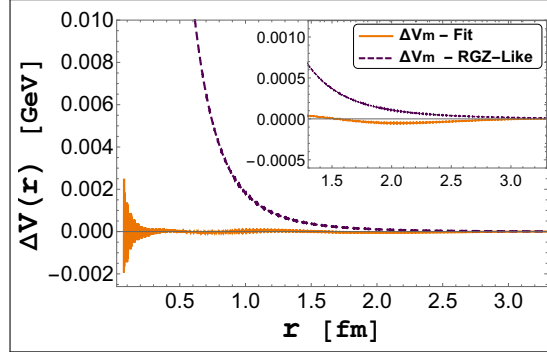
Na região de distâncias intermediárias⁸³ (Fig. (19)), notamos no potencial $1L V_m$ o peso das contribuições não perturbativas provenientes do propagador e do grande valor da sua constante de acoplamento, o que é manifestado como um deslocamento do potencial em relação ao resultado perturbativo, que resulta menor para o caso $1L V_m^*$ onde usamos uma constante de acoplamento menor. A grande diferença entre os deslocamentos do potencial $1L$ CF (Figs. (19a) e (19b)) é devida ao grande valor de $Z = 2.512$ (Tab. 2).

Para entender melhor o comportamento destes potenciais em intermediárias e longas distâncias, precisamos analisar os pólos complexos que aparecem no propagador CF do glúon ($p^2 \in \mathbb{C}$) tal como fizemos no caso do potencial RGZ.

Da SubFig. (19b), podemos notar que a zona D só aparece para os potenciais $1L V_m$ e $1L V_m^*$ mas não para o potencial em nível de árvore (V_m) devido à presença de pólos

⁸³ Nesta região é difícil estabelecer uma relação aproximada entre o integrando e o potencial, pois não podemos usar um limite assintótico na região intermediária.

Figura 20 - Ajuste ao potencial CF a 1 *loop* – 1L V_m



Legenda: Diferença entre os potenciais 1L V_m e V_m^{1L} RGZ-like (Eq. (176)) (linha tracejada roxa) e 1L V_m vs. o fit RGZ-like modificado com um fator logarítmico (Eq. (177)) (linha solida laranja).
 Fonte: O autor, 2023.

complexos nos primeiros. Os pólos para o potencial 1L V_m são:

$$\begin{aligned} p^2 &= -0.21012 \pm 0.44037 i && \rightarrow \text{propagador do glúon,} \\ p_i &= \pm 0.37270 + 0.59078 i && \rightarrow \text{Integrando do potencial,} \end{aligned} \quad (174)$$

enquanto que para o caso 1L V_m^* , temos que:

$$p^2 = -0.16965 \pm 0.35658 i \quad \wedge \quad p_i = \pm 0.33558 + 0.53128 i. \quad (175)$$

Devido ao valor semelhante dos pólos (Eqs. (174) e (175)), a mudança de sinal desses potenciais ocorre praticamente no mesmo ponto (Vide SubFig. (19)).

Para explorar uma forma analítica aproximada do potencial 1L V_m vamos considerar só os pólos simples do integrando como fizemos no caso do potencial RGZ fenomenológico e não os cortes de ramificação do propagador 1L CF. Procedendo como nas Eqs. (138) e (140), e usando os pólos $z_{1,2} = \pm 0.37270 + 0.59078 i$, obtemos:

$$V_m^{1L}(r) \rightarrow -\frac{4}{3} \frac{(\alpha_s = 1.9107)}{r} e^{-0.5908 r} (0.5850 \text{Cos}(0.3727 r) + 1.747 \text{Sin}(0.3727 r)). \quad (176)$$

Sabemos também que quando $r \rightarrow 0$, o potencial deve-se comportar como o fator $-1/(r \log(1/r^2))$, então modificando a Eq. (176) com um fator logarítmico e deixando livre o argumento ($\text{Re}(z_{1,2})$) e os coeficientes dos fatores seno e cosseno, bem como o fator expoente ($\text{Im}(z_{1,2})$), podemos obter um potencial do tipo $-1/(r \log(1/r^2))$:

$$V_m^{1L}(r) = -\frac{4}{3} \frac{1.9107}{r} e^{-0.6385 r} \frac{(0.3031 \text{Cos}(0.3055 r) + 0.2542 \text{Sin}(0.3055 r))}{(\log(1 + 0.1236^2/r^2))^{0.2592}}, \quad (177)$$

onde o fator exponencial e o argumento dos fatores seno e cosseno foram levemente modi-

Tabela 2 - Conjunto de parâmetros usados para calcular os potenciais $q\bar{q}$

	λ_0	$(\alpha_s)_0$	m_0 GeV	μ_0 GeV	Z_L	α_n	$\sqrt{\sigma_n}$ GeV
1L V_m	0.4562	1.9107	0.540	1.00	2.512	0.181	0.066
					–	0.076	0.043
1L V_m^*	0.0850	0.3560	0.303	7.50	0.785	0.037	0.030
					–	0.050	0.034
1L IS V_m	0.2580	1.0807	0.342	1.00	–	0.300	0.061
2L IS V_m	0.2700	1.1310	0.330	1.00	–	0.338	0.094

Legenda: λ_0 corresponde ao parâmetro de expansão, $(\alpha_s)_0$ à constante de acoplamento, m_0 ao termo de massa, μ_0 ao escala de renormalização, Z ao fator de renormalização da rede (propagador do glúon) e, α_n e $\sqrt{\sigma_n}$ são termos ingênuos que emulam os fatores de Cornell. $\sqrt{\sigma_{Ltt}} \approx 0.455\text{GeV}$.

Fonte: O autor, 2023.

ficados. Seus coeficientes foram os mais modificados. De qualquer forma, como podemos ver pela linha roxa tracejada na Fig. (20) ($\Delta V_m - \text{RGZ} - \text{Like}$), a Eq. (176) é uma boa aproximação para o potencial 1L V_m (CF), diferindo ligeiramente apenas na região de curta e longa distância profunda. Por outro lado, a Eq. (177) está em concordância com o potencial 1L V_m como podemos ver na linha laranja sólida ($\Delta V_m - \text{Fit}$) da Fig. (20).

Então, similar ao potencial RGZ fenomenológico, aparentemente no potencial 1L V_m , os fatores logarítmicos e seus pontos de ramificação não afetam tanto o comportamento do potencial na região de longas distâncias.

Posteriormente analisaremos a modificação do potencial devido à implementação do RGE no cálculo do propagador do glúon, e por isso usaremos uma fórmula naïve (ingênua) do potencial de Cornell para fazer um ajuste exploratório na zona D e estudar sua melhoria devido à inclusão de mais termos de interação vindas das correções dos *loops*:

$$V_n = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_n}{r} + \sigma_n r, \quad (178)$$

onde α_n e σ_n são parâmetros análogos ao acoplamento e tensão da corda, respectivamente.

Da Fig. (19b) (veja a tabela (2) também) podemos notar que o potencial 1L $\mathcal{V}_m$ (ZV_m) tem um valor maior no fator σ_n do que o potencial 1L V_m , mas ainda ambos são menores em comparação com o valor do σ de Cornell na rede, $\sqrt{\sigma_n} \sim 0.455\text{GeV}$ (Mateu *et al.*, 2019). Além disso, precisamos de um valor α_n maior para ajustar a zona D do 1L $\mathcal{V}_m$ do que no caso 1L V_m , sendo ambos menores em comparação com o valor $\alpha_c = 0.356$. Tudo o oposto ocorre com os parâmetros do tipo Cornell no potencial 1L CF* devido a que usamos um $\alpha_s < 1$ e $Z_L < 1$, contrário do usado no potencial 1L CF onde esses parâmetros são maiores que um.

Daqui em frente só mostraremos resultados do potencial para $Z_L = 1$, pois como foi mencionado é o mais apropriado já que o potencial não deve depender de um fator não físico. Também não usaremos mais o resultado do potencial 1L CF*, mesmo quando

foi de bastante utilidade, já que como mostraram os ajustes em (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019), os melhores valores para o propagador do glúon no modelo CF giram em torno de $\mu = 1$.

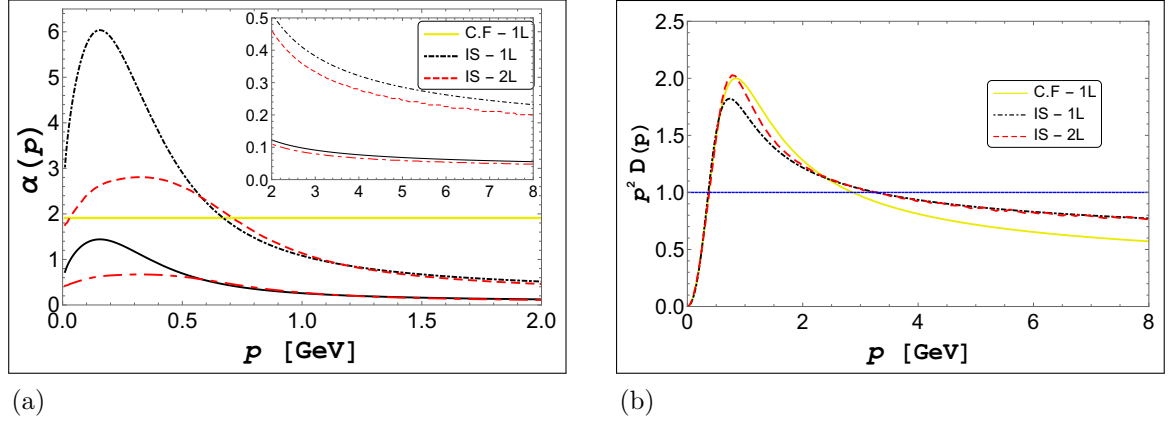
3.4 Potencial massivo: IS-RGE no modelo Curci–Ferrari

Como mencionamos no início deste capítulo, gostaríamos de analisar o potencial $q\bar{q}$ fazendo uso de uma teoria efetiva perturbativa e assim obter um cálculo para o potencial mais consistente com a sua equação perturbativa. De fato, como já discutido, o modelo CF suporta uma abordagem perturbativa, que entre outras coisas pode reproduzir o propagador do glúon na rede, usando um esquema seguro (sem pólo de Landau) no infravermelho (IS) através das equações do grupo de renormalização. O resultado deste potencial, que chamamos de potencial IS, será analisado nesta seção.

3.4.1 Propagador do glúon a um e dois *loops* – IS–RGE

O uso do IS–RGE na correção a um *loop* do modelo CF melhora sua concordância com o propagador do glúon na rede, principalmente para grandes momentos, mas, por sua vez, gera uma leve incompatibilidade com os mesmos dados em torno a 1 GeV (Fig. 5 da Ref. (Tissier; Wschebor, 2011)). Essa discrepância é melhorada com a correção IS a dois *loops*, obtendo-se uma descrição muito boa dos dados da rede (Fig. 6 da Ref. (Gracey *et al.*, 2019)). Na Fig. (21b) podemos analisar esses resultados. Lembrando que o resultado em um *loop* (linha amarela sólida) é o mais próximo dos dados da rede para momentos menores que 2 GeV, enquanto o resultado em um e dois *loops* (linhas tracejadas) com o IS - RGE estão mais próximos dos dados para maiores valores que isso. Sabendo disso, analisaremos a influência dessas melhorias do propagador do glúon no comportamento do potencial $q\bar{q}$. Ao mesmo tempo, temos que lembrar que aparentemente apenas o fator $1/p^4 = \alpha(p) D(p)$ quando $p \rightarrow 0$ (Eq. (135)) geraria um termo linear e não deveríamos esperar obter um comportamento do tipo Cornell no potencial, mesmo quando o IS–RGE é incorporado, pois estamos usando um acoplamento e um propagador do glúon, ambos finitos. Aparentemente, se estivermos usando a equação perturbativa, Eq. (135), não importa a abordagem que usemos para calcular o potencial $q\bar{q}$, não obteremos um comportamento linear para a região de longa distância, não pelo menos se integrarmos sobre todos os momentos dessa forma. Por exemplo, em (Vento, 2013) é discutido que o potencial $q\bar{q}$ calculado da mesma forma (Eq. (135)) a partir de um propagador do glúon e uma constante de acoplamento (ambos finitos), na abordagem de Schwinger-Dyson, também não possui um comportamento de confinamento linear.

Figura 21 - Uso do IS-RGE no acoplamento e no propagador do glúon



Legenda: (a) IS “running” do acoplamento em um (linha preta ponto-tracejada) e dois (linha vermelha tracejada) *loops*. A linha amarela sólida é o acoplamento fixo do 1L CF. A linha preta (sólida) e vermelha (ponto-tracejada) representam ao parâmetro de expansão $\lambda(p)$ em um e dois *loops*, respectivamente. (b) Função vestida do glúon. Comparação entre os resultados do CF e o IS (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019). A linha tracejada azul representa o resultado perturbativo no nível de árvore.

Fonte: O autor, 2023.

3.4.2 Potencial a partir do propagador do glúon IS-RGE

Quanto muda o potencial 1L V_m quando o IS-RGE é implementado no propagador do glúon e na constante de acoplamento? Comparando com o resultado anterior do 1L V_m (Fig. (19a)), notamos uma clara diferença em todo o regime de distância deste novo “potencial seguro no infravermelho” (potencial IS) (Fig. (22)). Isso seria esperado, pois agora o constante de acoplamento (Fig. (21a)) e o termo de massa dependem do momento. O comportamento do parâmetro de massa é qualitativamente semelhante ao do “running” da constante de acoplamento, mas atinge um valor máximo próximo a 0.5 GeV (Fig. (11a) (Cap. 2) ou Fig. (7) da Ref. (Gracey *et al.*, 2019)). A implementação do IS-RGE transforma o propagador do glúon a um (Eq. (169)) e dois *loops* na Eq. (179) (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019), onde o reescrevemos em função da constante de acoplamento em vez do parâmetro de expansão $\lambda = 3\alpha/4\pi$:

$$D(p) = \frac{\alpha(\mu_0)}{m^4(\mu_0)} \frac{m^4(p)}{\alpha_s(p)} \frac{1}{p^2 + m^2(p)}. \quad (179)$$

Agora podemos escrever o integrando IS como:

$$p \alpha_s(p) D(p) = \frac{\alpha_s(\mu_0)}{m^4(\mu_0)} \frac{p m^4(p)}{p^2 + m^2(p)}, \quad (180)$$

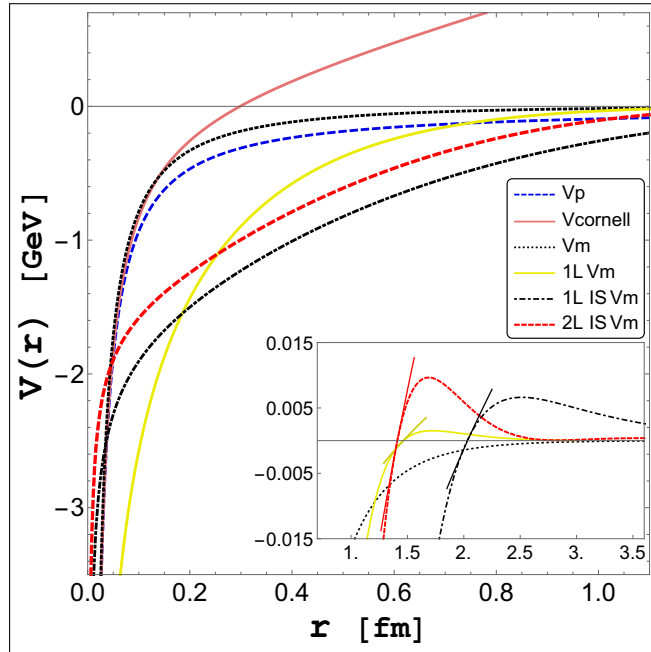
que nos mostra que o integrando IS dependerá basicamente do “running” do fator de massa do glúon e, conseqüentemente, também o comportamento do potencial $q\bar{q}$. Integramos numericamente o integrando IS para obter o potencial.

Para distâncias curtas (Fig. (22)), o potencial IS (em um e dois *loops*) foi melhorado em relação ao potencial 1L V_m e agora tende a reproduzir o resultado perturbativo de uma melhor maneira, o que até certo ponto era esperado, pois agora a constante de acoplamento tem valores menores nesta região. Era esperado também que na região profunda de curtas distâncias não tivéssemos uma concordância completa com os potenciais anteriores, pois o potencial IS inclui o “running” do acoplamento enquanto os demais potenciais foram calculados usando uma constante de acoplamento fixa (parâmetros constantes).

Podemos entender melhor esses resultados examinando o integrando do potencial IS (Eq. (180)), assim como fizemos para o potencial 1L V_m (1L CF) (Eq. (172)). Quando $p \rightarrow \infty$, o integrando a 2 *loops* do potencial IS tendem ao fator $1/p \log(p^2)$ ⁸⁴:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \alpha_s(p) D(p) \sim \frac{0.4917}{p (\log(p^2))^{1.34}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^3 (\log(p^2))}\right), \quad (181)$$

Figura 22 - Potencial IS



Legenda: A linha tracejada azul, sólida rosa, preta pontilhada, sólida amarela, preta ponto-tracejada e vermelha tracejada representam os potenciais perturbativo, Cornell, massivo (CF), 1L V_m (1L CF), 1L IS V_m e 2L IS V_m , respectivamente.

Fonte: O autor, 2023.

⁸⁴ A um *loop* temos uma expressão análoga, porém mais complexa para escrever aqui.

onde, novamente, esse tipo de fator vai gerar um comportamento assintótico do tipo $-1/r \log(1/r^2)$ para o potencial $q\bar{q}$ quando $r \rightarrow 0$. Mas desta vez, o resultado será mais próximo do potencial perturbativo devido aos coeficientes mais baixos nos integrandos.

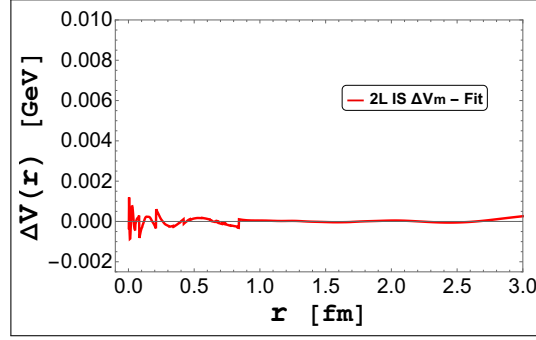
Nesta região notamos que as contribuições não-perturbativas vindas do potencial e da constante do acoplamento ainda afetam o potencial IS, sendo menor para o potencial em dois *loops* (linha tracejada vermelha) do que para um *loop* (linha ponto-tracejada preta). Isso porque, para grandes momentos, o valor do integrando em dois *loops* será menor que para um *loop*. As contribuições não-perturbativas do propagador e da constante de acoplamento afetam o potencial IS deslocando seus valores em relação ao resultado perturbativo, como podemos ver na Fig. (22). Este comportamento pode ser observado para todos os regimes de distância do potencial.

As regiões de distâncias intermediárias e longas são as mais afetadas devido à inclusão do “running” nos parâmetros. Na região de distância intermediária, os valores relativamente grandes da constante de acoplamento (Fig. (21a)) geram um deslocamento considerável em relação ao potencial perturbativo, ao contrário do potencial 1L V_m .

Conforme discutido na análise do potencial 1L V_m , a presença de pólos complexos no propagador do glúon e, portanto, no integrando do potencial (Eq. (180)) irá gerar a chamada zona D na região de longas distâncias. Podemos entender melhor a diferença entre os potenciais IS a um e dois *loops* nesta região se prestarmos atenção à compatibilidade incompleta do propagador IS do glúon a um *loop* (Fig. (21b)) com os dados da rede (e comparado com o resultado 2L IS). Isso gera uma estrutura completamente diferente no plano complexo devido à diferença dos pólos (e também aos cortes de ramificação) presentes no integrando IS em um e dois *loops* (Figs. (39a) e (39c)), onde este último tem uma melhor concordância com os dados da rede em torno de 1 GeV, tal como o resultado 1L CF. Portanto, como comparação, vamos focar nos resultados de um *loop* sem RGE (potencial 1L V_m) e no de dois *loops* incluindo o RGE (potencial 2L IS) devido à melhor concordância de ambos com os dados da rede para momentos em torno de 1 GeV. Em ambos os potenciais, a mudança de sinal e o aparecimento da zona D ocorrem em distâncias semelhantes ($r \sim 1.4$ fm), mas o potencial 2L IS, ao contrário do potencial 1L V_m , é melhorado devido à inclusão de mais termos de interação (SubFig. (22)). Essa melhoria foi quantificada usando o ajuste do tipo Cornell da Eq. (178) como podemos ver na Tabela (2). Também podemos notar que tanto os potenciais 1L IS V_m quanto o 2L IS V_m têm um fator σ_n maior que o do 1L V_m , mas ainda menor que o valor da rede.

Podemos obter uma forma analítica aproximada para o potencial 2L IS, considerando novamente os pólos do integrando como pólos simples, tal como já fizemos anteriormente, e incluindo novamente fatores logarítmicos devidos ao limite assintótico do integrando IS (Eq. (181)). Os pólos do integrando 2L IS são:

Figura 23 - Ajuste ao potencial IS a 2 loops



Legenda: Diferença entre o 2L IS V_m e o ajuste modificado tipo RGZ (Eq. (183)).

Fonte: O autor, 2023.

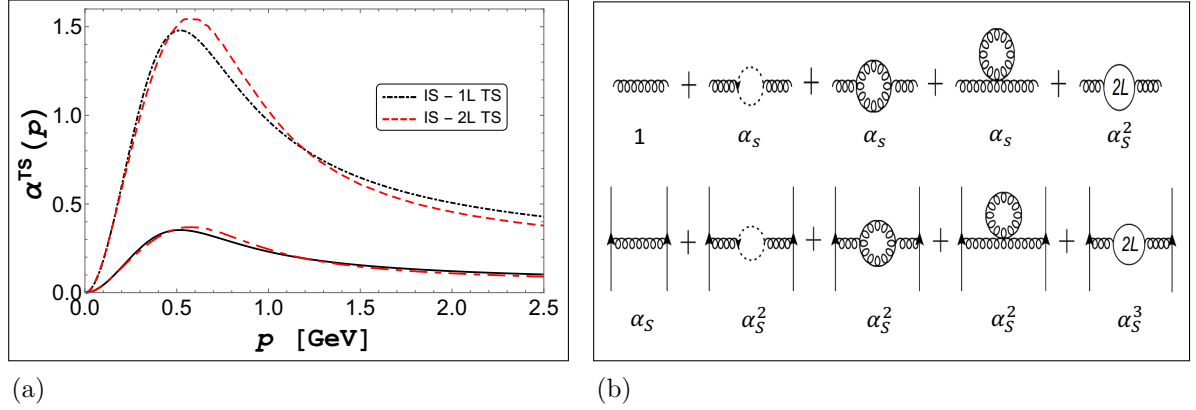
$$\begin{aligned}
 \pm p_{1,2} &= \pm (\pm 0.0470 + 0.2511 i) , \\
 \pm p_{3,4} &= \pm (\pm 0.5467 + 0.5653 i) , \\
 \pm p_{5,6} &= \pm (\pm 0.5873 + 0.4861 i) .
 \end{aligned} \tag{182}$$

Usando a Eq. (138), os pólos $p_{1,2}$ irão gerar coeficientes aproximadamente nulos. Apesar disso, ainda podemos pensar que o potencial terá uma estrutura composta, do tipo RGZ, como na Eq. (177), devido aos outros dois pólos restantes. O ajuste produz o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 V_m^{2L}(r) = & -\frac{4}{3} \left(\frac{95.3667}{r} \right) \left\{ e^{-0.8951 r} \frac{(0.0081 \cos(0.7940 r) - 0.0396 \sin(0.7940 r))}{(\log(1 + 5.1416^2/r^2))^{0.9201}} + \right. \\
 & \left. e^{-0.4986 r} \frac{(-0.0006 \cos(1.3077 r) + 0.0440 \sin(0.4487 r))}{(\log(1 + 0.5182^2/r^2))^{0.0810}} \right\} , \tag{183}
 \end{aligned}$$

onde o fator 95.3667 vem do fator $\alpha_s(p_0)/m^4(p_0)$ presente no integrando 2L IS. Basicamente, a última equação é uma soma de um fator seno e cosseno corrigidos com termos logarítmicos. O potencial da Eq. (183) concorda com o potencial 2L IS, como podemos ver pela pequena diferença entre seus valores na Fig. (23) (linha vermelha, 2L IS $\Delta V_m - \text{Fit}$). A presença de mais pólos complexos no integrando IS, que vem da inclusão de mais termos de interação no propagador do glúon e da constante de acoplamento, levam a mais fatores no potencial IS melhorando seu comportamento para longas e intermediárias distâncias tal como vimos nos últimos resultados.

Figura 24 - Constante de acoplamento TS e diagramas de Feynmann



Legenda: (a) Acoplamento de Taylor em um (linha pontilhada preta) e dois (linha tracejada vermelha) *loops*. As linhas preta (sólida) e vermelha (ponto-tracejada) representam o parâmetro de expansão de Taylor efetivo $\tilde{\lambda}^{TS}(p) = 3\tilde{\alpha}_s^{TS}(p)/4\pi$ em um e dois *loops*, respectivamente (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019). (b) Diagramas de Feynman: para o propagador do glúon (acima) e para o potencial $q\bar{q}$ (OGE) (abaixo).

Fonte: O autor, 2023.

3.5 Potencial massivo: Acoplamento no esquema de Taylor

A partir dos diagramas de Feynman (Fig. (24b)) sabemos que a ordem da expansão na constante de acoplamento para o potencial OGE é uma ordem maior do que para o propagador do glúon e como o cálculo do potencial depende do propagador do glúon, pode parecer que algum cálculo perturbativo para o potencial, aproveitando o resultado perturbativo do propagador do glúon (IS), seria razoável porque cada contribuição em função da constante de acoplamento seria cada vez menor como seria de esperar de um cálculo perturbativo. Mas isso não é tão simples quanto parece porque mesmo quando a abordagem perturbativa IS for ótima para o propagador do glúon, a aplicação direta dessas características no cálculo do potencial $q\bar{q}$ não parece tão fácil como percebemos neste estudo exploratório do modelo IS. Isto se deve em parte a que o potencial $q\bar{q}$ contém muita mais informação não perturbativa do que o propagador do glúon, que pode ser percebido inclusive se usarmos a aproximação OGE, onde o potencial depende do produto $\alpha(p) D(p)$ onde se a constante de acoplamento (e não o parâmetro de expansão) não for moderadamente pequena, nossos resultados se desviarão um pouco do resultado perturbativo (ou Cornell), como já vimos na Fig. (22).

Sabemos que o resultado físico do potencial $q\bar{q}$ não deve depender do calibre, do esquema ou da forma de calculá-lo, mas devido às aproximações feitas até este ponto, não esperamos atingir o valor exato do resultado do potencial da rede (Linear), mas pelo menos esperamos que as características da abordagem perturbativa IS nos forneçam boas informações sobre o potencial $q\bar{q}$. É por isso que vamos explorar outro resultado do

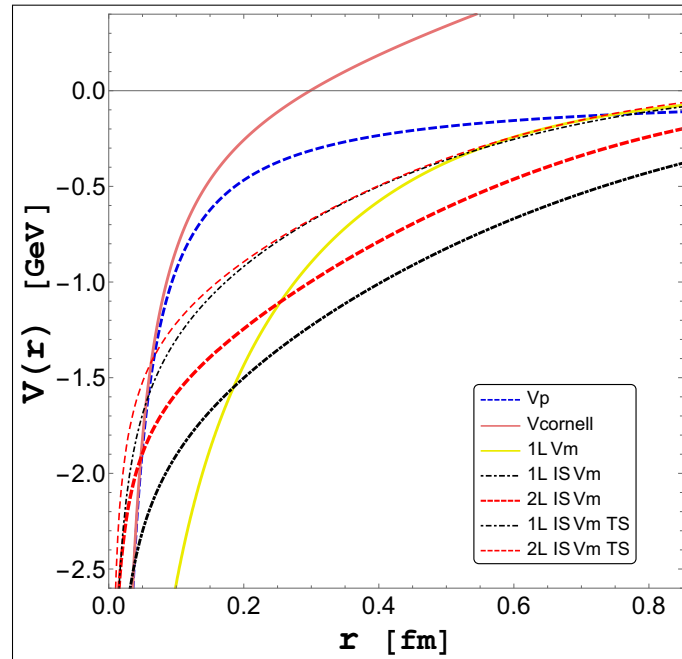
modelo IS usando o acoplamento de Taylor, que concorda com o resultado da constante de acoplamento da rede (Duarte; Oliveira; Silva, 2016) e possui valores moderadamente menores que o último acoplamento usado. Como é mencionado em (Gracey *et al.*, 2019) (e discutido em (Duarte; Oliveira; Silva, 2016)) ele vem do parâmetro de expansão efetiva relevante $\tilde{\lambda}$ do modelo CF no esquema IS (ao invés de λ) e pode ser escrito como (Eq. (132) (Cap. 2) –Veja (Gracey *et al.*, 2019)):

$$\tilde{\alpha}^{TS}(p) = \frac{4\pi}{3}\tilde{\lambda}(p) = \alpha_s(p_0) p^2 D(p, p_0) F^2(p, p_0) = \alpha_s(p) \left(\frac{p^2}{p^2 + m^2(p)} \right), \quad (184)$$

onde $F(p, p_0)$ é a função vestida do *ghost*.

Em uma análise rápida, podemos ver que para momentos intermediários e baixos, o acoplamento $\tilde{\alpha}_s^{TS}(p)$ possui valores menores (Fig. (24a)) do que o acoplamento $\alpha_s(p)$ que foi usado nos últimos cálculos (Fig. (21a)). Assim, em comparação com os resultados dos potenciais anteriores, esperamos pelo menos uma melhoria na região de distâncias intermediárias devido ao menor “peso” do acoplamento, ou seja, que este novo resultado seja mais próximo do resultado do potencial perturbativo. Raciocinando dessa forma, não esperaríamos a mesma melhoria para a região de longa distância devido a tal diminuição no valor da constante de acoplamento.

Figura 25 - Potencial IS e IS no esquema TS



Legenda: A linha tracejada azul, sólida rosa, preta pontilhada, sólida amarela, preta ponto-tracejada, vermelha tracejada, preta ponto-tracejada (fina), vermelha tracejada (fina) representam os potenciais perturbativo, Cornell, massivo V_m (CF), 1L V_m , 1L IS, 2L IS, 1L IS - TS e 2L IS - TS respectivamente.

Fonte: O autor, 2023.

3.5.1 Potencial para distâncias curtas

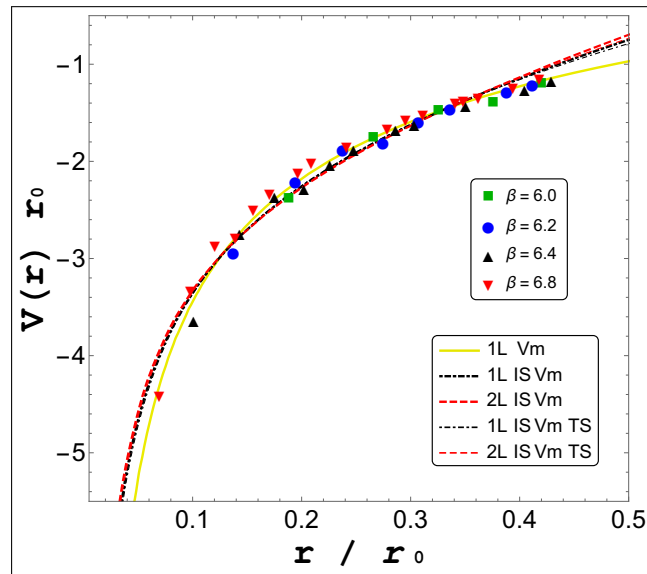
Para grandes momentos, o acoplamento $\tilde{\alpha}_s^{TS}(p)$ (Eq. (184)) tende a reproduzir o resultado perturbativo $\alpha_s(p)$. Então, em grandes momentos o integrando do potencial não será modificado e corresponderá aos resultados anteriores para o integrando IS em um e dois *loops*. Portanto, isso significaria que para distâncias curtas esse potencial IS no esquema de Taylor (IS TS) não seria afetado, o que será mais válido para a região profunda de distâncias curtas, pois podemos notar que a região abaixo e próxima de 0.2 fm é levemente afetada, assim o uso do acoplamento $\tilde{\alpha}_s^{TS}(p)$ no potencial $q\bar{q}$ também traz uma melhoria em relação ao resultado perturbativo na região de curtas distâncias, como podemos ver na Fig. (25).

Sabe-se que o potencial $q\bar{q}$ obtido a partir da teoria de perturbação padrão não pode reproduzir os dados da rede para distâncias curtas (Bali, 1999), pelo menos não sem incluir algumas correções. Bem, neste caso usaremos nossos resultados dos potenciais 1L V_m , IS e IS no esquema TS para testar se esses potenciais podem ter alguma concordância com o potencial da rede naquela região. Para isso, usamos a seguinte equação:

$$V_{ShortD}(r) = \mathcal{A}V(r) + \mathcal{B}r + \mathcal{C} \quad (185)$$

onde, para obter concordância com os dados da rede, tivemos que reajustar os valores dos potenciais usando um fator adimensional $\mathcal{A}$. Os fatores $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ emulariam a tensão da corda e o fator de auto-energia do potencial, respectivamente.

Figura 26 - Ajustes no potencial da rede para curtas distâncias



Legenda: Ajustes do potencial da rede (quenched) (Bali, 1999) usando a Eq. (185) (Veja o texto principal para mais detalhes.). Os dados estão em unidades da escala $r_0 \approx 0.5$ fm

Fonte: O autor, 2023.

Na Fig. (26), a linha amarela sólida, preta ponto-tracejada, vermelha tracejada, preta ponto-tracejada fina e vermelha tracejada fina representam os potenciais 1L V_m , 1L IS, 2L IS, 1L IS-TS e 2L IS-TS, respectivamente. Usando a Eq. (185), esses potenciais podem reproduzir o potencial da rede para curtas distâncias. Os valores dos parâmetros $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são mostrados na Tabela (3).

Realmente gostaríamos que o valor de $\mathcal{A}$ fosse 1, ou seja, não precisar redimensionar o valor dos potenciais pois isso afeta seus parâmetros principais. Quanto menor ou maior que 1 esse for esse valor, significa que temos que redimensionar mais o menos o potencial. Conforme mostrado na Tabela (3), o potencial 1L V_m é o mais afetado, em parte, porque a sua constante de acoplamento é grande. Para o potencial 1L IS, $\mathcal{A}$ apresenta um valor muito próximo de 1 que não muda muito quando o acoplamento TS é utilizado. Para os resultados de 2 *loops* temos uma situação semelhante, com um valor de reescalonamento próximo de 1 também. Isso é importante porque significa que o potencial representa melhor o resultado dos dados em distâncias curtas.

Espera-se que um potencial obtido a partir da PT precise de um termo linear adicional para compensar a falta de aspectos não perturbativos. Os parâmetros $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ foram adicionados para ver se precisamos incluir tais fatores não perturbativos. Conforme indicado pelos valores de $\mathcal{B}$ na Tabela (3), esse fator acaba sendo desnecessário. Isso pode ser facilmente entendido se analisarmos o comportamento desses potenciais para distâncias curtas. O parâmetro $\mathcal{C}$ foi necessário para obter uma boa concordância com os dados.

A partir da Eq. (177), temos que o potencial 1L V_m para distâncias curtas é:

$$V_m^{1L}(r \sim 0) \approx \left(-\frac{\alpha_{eff}^{1L}(r)}{r} + (1.0323)^2 r + 0.1903 + \mathcal{O}(r^2) \right), \quad (186)$$

onde:

$$\alpha_{eff}^{1L}(r) = \frac{0.7721}{(\log(1 + 0.1236^2/r^2))^{0.2592}}. \quad (187)$$

O fator 1.0323 (Eq. (186)) é um termo de tensão na corda com um valor grande que aparentemente indica que existem contribuições não perturbativas aparecendo em curtas distâncias (Bali, 1999).

Para distâncias curtas, o potencial IS 2L (Eq. (183), pode ser escrito como:

$$V_m^{2L}(r \sim 0) \approx -\frac{\alpha_{eff}^{2L}(r)}{r} + (0.7122)^2 r + \mathcal{O}(r^2), \quad (188)$$

onde:

$$\alpha_{eff}^{2L}(r) = \left(\frac{1.0276}{(\log(1 + 5.1416^2/r^2))^{0.9201}} - \frac{0.0706}{(\log(1 + 0.5182^2/r^2))^{0.0810}} \right). \quad (189)$$

Tabela 3 - Conjunto de parâmetros usados para ajustar o potencial em distâncias curtas

	$\mathcal{A}$	$\sqrt{\mathcal{B}}$ GeV	$\mathcal{C}$ GeV
1L V_m	0.3314	~ 0	~ 0
1L IS V_m	1.1013	~ 0	1.2044
2L IS V_m	1.3505	~ 0	1.2381
1L IS $V_m - \text{TS}$	1.1434	~ 0	0.5970
2L IS $V_m - \text{TS}$	1.4000	~ 0	0.8055

Legenda: Ajuste da Eq. (185) com os dados de curtas distâncias (Bali, 1999). $\mathcal{A}$ é um fator de escala, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são termos de tensão de corda e energia própria, respectivamente.

Fonte: O autor, 2023.

Desta vez obtemos um valor de tensão da corda menor (0.7122 GeV) do que para o potencial 1L V_m , mas ainda maior que a tensão da corda da rede (0.455 GeV). Pelo que podemos ver, para este caso também existem contribuições lineares não perturbativas aparecendo em curtas distâncias, as quais serão relevantes ainda na região intermediária.

Assim, devido à existência desses fatores lineares, não é necessário adicionar um fator linear adicional ($\mathcal{B}$) no ajuste para curtas distâncias tal como vemos na Tabela (3).

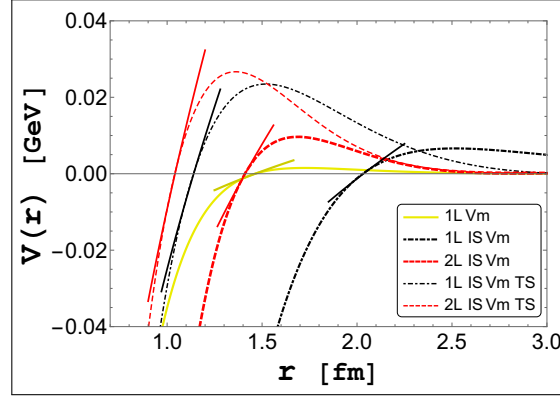
3.5.2 Potencial para intermediárias e longas distâncias

Mesmo quando $\tilde{\alpha}_s^{TS}(p)$ tem valores menores no IR (comparado com $\alpha_s(p)$ IS), as regiões de intermediárias e longas distâncias do potencial são melhoradas devido à estrutura IR do acoplamento $\tilde{\alpha}_s^{TS}(p)$. O fator extra $1/(p^2 + m^2(p))$ (Eq. (184)) altera a ordem dos pólos no integrando do potencial IS porque o propagador do glúon já contribui com o mesmo termo. Na Eq. (269) (Apêndice C), podemos ver um exemplo simples para isso, onde no caso de pólos simples de ordem dois aparecem contribuições adicionais em relação ao pólo simples de ordem um, então tais termos contribuiriam na “melhoria” do comportamento do potencial tanto na região de distâncias intermediárias como na já mencionada zona D. Devido a isso, poderíamos pensar que o comportamento desses potenciais na zona D (Fig. (27)) não depende completamente do valor grande ou pequeno do acoplamento, mas das contribuições que vêm dos pólos complexos, pelo menos com este modelo.

Como já mencionamos nas últimas análises dos potenciais 1L V_m e IS, comparamos sua melhoria devido à implementação do RGE no propagador do glúon. Agora, focando na região de longas distâncias, particularmente na zona D, usamos novamente a fórmula do potencial do tipo Cornell (Eq. (178)) para ajustar esta parte do potencial (Tabela 4).

Os primeiros resultados (Tabela (2)), na zona D, mostraram para o potencial 1L V_m um valor de tensão da corda (naïve) de 0.043 GeV. Esse valor aumentou ligeiramente

Figura 27 - Zona D dos potenciais IS e IS-TS



Legenda: A linha amarela, preta ponto-tracejada, vermelha tracejada, ponto-tracejada (fina) e vermelha tracejada (fina) representam os resultados 1L V_m , 1L IS, 2L IS, 1L IS-TS e 2L IS-TS, respectivamente.

Fonte: O autor, 2023.

Tabela 4 - Parâmetros usados para ajustar a zona D do potencial IS-TS.

	α_n	$\sqrt{\sigma_n}$ GeV
1L IS V_m - TS	0.412	0.128
2L IS V_m - TS	0.451	0.147

Legenda: Ajuste na região de longas distâncias do potencial IS-TS usando a Eq. (178).

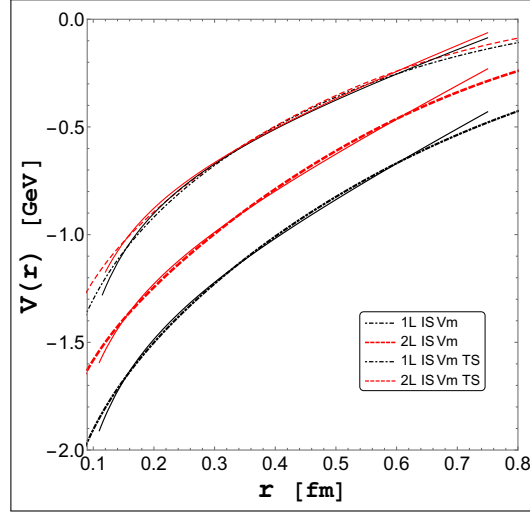
Fonte: O autor, 2023.

à medida que usamos os resultados do propagador de glúon com o RGE. O penúltimo resultado foi o do potencial 2L IS (2L IS V_m), com um valor de 0.094 GeV (tabela (2)). Agora, os últimos resultados para a tensão da corda também mostram um aumento em seu valor, algo que também pode ser verificado graficamente na Fig. (27). Os maiores valores obtidos foram para o potencial 2L IS TS, com um valor de 0.147 GeV (Tabela 4). Esses valores ainda representam uma fração do valor da tensão da corda na rede.

Como vimos, o uso do acoplamento $\tilde{\alpha}_s^{TS}(p)$ trouxe melhorias interessantes para a região de longas distâncias. Além disso, seu uso também trouxe melhorias na região de distâncias intermediárias como pudemos verificar na Fig. (25) onde os potenciais IS-TS ($\tilde{\alpha}_s^{TS}(p)$) se aproximam mais do potenciais perturbativo do que os resultados anteriores.

Mas isso não é tudo. Embora não tenhamos enfatizado nisto primeiro, a presença de pólos complexos também afetou o comportamento desses potenciais na região de distâncias intermediárias. Infelizmente devido à presença de termos de seno e cosseno (Eqs. (177) e (183)) não podemos usar aproximações e obter uma expressão mais clara sobre o comportamento do potencial nessa região. Mesmo assim, a Fig. (25) mostra um fato interessante, nessa região, os potenciais são aproximadamente lineares, o que podemos verificar usando um ajuste do tipo Cornell (Eq. (178)).

Figura 28 - Comportamento semi-linear dos potenciais IS e IS-TS



Legenda: A linha preta ponto-tracejada, vermelha tracejada, ponto-tracejada (fina) e vermelha tracejada (fina) representam os potenciais 1L IS, 2L IS, 1L IS-TS e 2L IS-TS, respectivamente. As linhas finas sólidas são um ajuste linear. Veja a tabela 5.

Fonte: O autor, 2023.

Tabela 5 - Parâmetros do ajuste da região intermediária dos potenciais IS e IS-TS

	α_n	$\alpha_s(p)$ $\sqrt{\sigma_n}$ GeV	S_c GeV	α_n	$\tilde{\alpha}_s^{TS}(p)$ $\sqrt{\sigma_n}$ GeV	S_c GeV
1L IS V_m	0.275	0.532	-1.413	0.308	0.431	-0.685
2L IS V_m	0.220	0.530	-1.225	0.243	0.456	-0.770

Legenda: α_n , $\sqrt{\sigma_n}$ e S_c são termos que emulam os fatores de Cornell.

Fonte: O autor, 2023.

Lembrando que para curtas distâncias os potenciais apresentaram fatores lineares maiores que o valor da tensão da corda (Eqs. (186) e (188)) e, que também os potenciais obtidos não apresentam um comportamento linear para longas distâncias, era esperado que as contribuições adicionais aparecendo em distâncias intermediárias fossem mitigado gradualmente o termo linear como a Fig. (28) mostra a partir de 0.20 fm, onde o potencial tem um aumento suave e estável com a distância, até 0.65 fm, aproximadamente.

Os resultados do ajuste entre 0.11 fm e 0.70 fm são mostrados na tabela (5). Precisamos aumentar um fator constante S_c para obter uma boa concordância com os potenciais. Analisando esses valores podemos ver que o ajuste dos potenciais oferece resultados próximos aos encontrados na rede, destacando aqueles que vêm dos potenciais IS-TS, onde encontramos que a tensão da corda assume valores de $\sigma_{1L}^{TS} = (0.431)^2 = 0.19 \text{ GeV}^2$ e $\sigma_{2L}^{TS} = (0.456)^2 = 0.21 \text{ GeV}^2$.

É realmente surpreendente encontrar esses resultados usando apenas a aproximação OGE para o potencial $q\bar{q}$. Especialmente, aquele para o potencial 2L IS TS onde a tensão

da corda está em concordância com o valor encontrado na rede. Embora este resultado seja válido apenas na região de distâncias intermediárias, é muito importante, pois como mencionado em (Bali; Schilling; Wachter, 1995b), as energias de ligação dos estados de baixo nível são menos sensíveis à forma do potencial fora da faixa de 0.2 fm - 1.0 fm, que na verdade é o intervalo que estamos tratando como a região de distâncias intermediárias, e como praticamente temos um potencial linear nessa região, poderíamos testar se esse potencial consegue reproduzir essas energias de ligação.

3.6 Potenciais saturado e *ad hoc* linear

Como já foi mencionado, uma forma de se obter um fator linear é considerar uma divergência no IR do integrando do potencial. Isto não parece uma opção válida já que os resultados da rede são finitos tanto para a constante de acoplamento como para o propagador de glúon, logo:

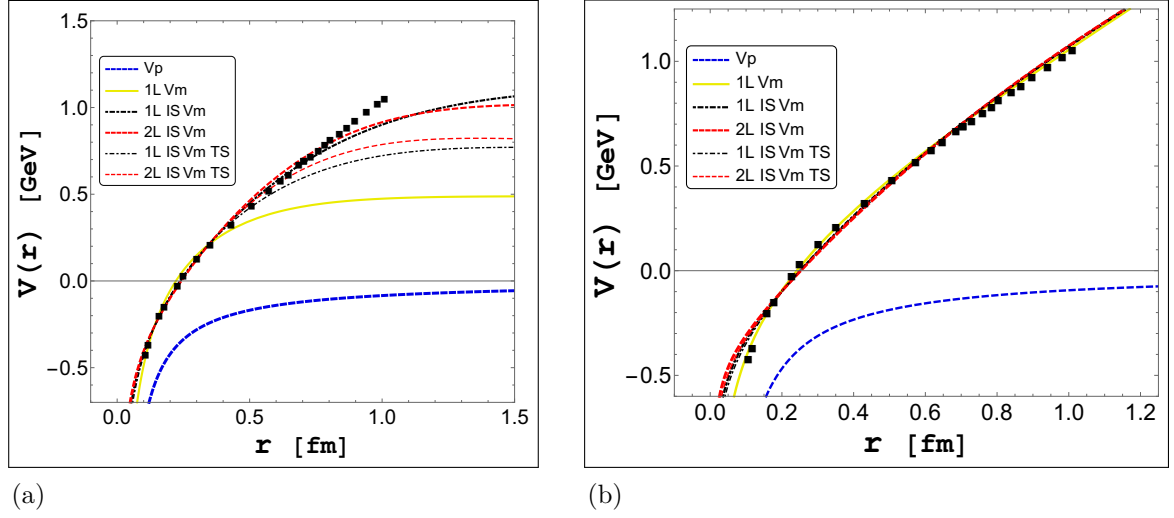
$$V(r \rightarrow \infty) \approx \frac{i\mathcal{C}_F}{\pi r} \int_{p \rightarrow 0} dp p \alpha_0 D_0 e^{i p r} \rightarrow 0, \quad (190)$$

onde $\alpha_0 = \alpha(p \rightarrow 0)$, $D_0 = D(p \rightarrow 0)$, ambos finitos⁸⁵. Isso pode significar que a abordagem perturbativa só pode produzir um potencial saturado a partir de quantidades finitas, uma vez que este pode ser definido mais uma constante adicional. Esse comportamento é observado em dados na rede quando são considerados quarks dinâmicos na aproximação unquenched, algo que não está sendo considerado em nossos cálculos. Tudo isso parece um resultado estranho, mas também temos que ter em mente que nossos resultados não são um resultado exato do potencial $q\bar{q}$ e talvez essa aproximação não pode ir mais longe. No momento podemos ajustar os potenciais obtidos mais uma constante para comparar até que ponto eles podem dar uma semi-descrição do potencial de Cornell e/ou da rede. Poderíamos também considerar um termo linear adicional como é feito em outros trabalhos, citados anteriormente, para tentar encaixar o potencial em toda a sua extensão. Definimos um potencial saturado ($V_{SC}(r)$) e um potencial *ad hoc* linear ($V_{PL}(r)$):

$$V_{SC}(r) = a V(r) + c \quad (191)$$

$$V_{PL}(r) = A V(r) + B r + C, \quad (192)$$

⁸⁵ Discutir as consequências de um potencial $V(r) \rightarrow 0$ para grandes distâncias: possibilidade de tunelamento e de espectro contínuo (ausência de confinamento) é por si mesmo um tema bastante interessante mas que infelizmente não abordaremos nesta tese, mas deixaremos para incluir em análises posteriores.

Figura 29 - Potencial saturado e *ad hoc* linear

Legenda: A linha tracejada azul, preta pontilhada, sólida amarela, preta ponto-tracejada, vermelha tracejada, preta ponto-tracejada (fina), vermelha tracejada (fina) representam os potenciais perturbativo, Cornell, massivo (CF), 1L CF, 1L IS, 2L IS, 1L IS - TS e 2L IS - TS (modificados) respectivamente. Potenciais (a) Saturados (b) Linear *ad hoc*.

Fonte: O autor, 2023.

onde a e A são fatores adimensionais de escala, B é um termo de tensão de corda e, c e C correspondem a um termo de auto-energia.

Os resultados para os potenciais saturados ($V_{SC}(r)$) são mostrados na Fig. (29a) e também na Tabela (6). Os ajustes com o potencial da rede (Bali; Schilling; Wachter, 1997) foram feitos no intervalo $[0.2 - 0.45]$ fm, onde foi encontrado um melhor resultado. Na seção 3.5.1 foi discutida a influência dos fatores a e c no potencial. Novamente o potencial mais afetado foi o 1L CF. Seu fator de escala “ a ” deve ser pequeno para se adequar aos resultados. Os fatores de escala para os potenciais IS e IS-TS são próximos de 1. Como observamos na seção 3.5.1, para distâncias curtas, o potencial 1L CF tem um melhor ajuste com o potencial da rede. Nesta mesma região, podemos notar novamente um ligeiro desvio dos potenciais IS e IS - TS em relação ao potencial da rede. O fator c foi necessário para obter um melhor ajuste com o potencial da rede, e por sua vez indica o valor máximo que cada potencial atinge.

Finalmente, temos os resultados para o potencial *ad hoc* linear ($V_{PL}(r)$). Para o ajuste do potencial da rede usamos o intervalo: $[0.1 - 1.60]$ fm. Em geral, os resultados de ajuste não são tão bons, pois o fator de escala é pequeno em todos os potenciais. Isso porque, como vimos anteriormente, esses potenciais já apresentam um fator de tensão na corda maior que o fator da rede. Por essa razão, o ajuste força o fator de escala a ser pequeno para reduzir a influência do fator linear de curtas e intermediárias distâncias e assim poder dar prioridade ao fator linear de longas distâncias que colocamos de forma

Tabela 6 - Parâmetros usado no ajuste do potencial da rede

	Saturado		<i>ad hoc</i> linear		
	a	c GeV	A	$\sqrt{B}$ GeV	C GeV
1L V_m	0.379	0.487	0.181	0.470	-0.058
1L IS V_m	0.801	1.109	0.346	0.427	0.236
2L IS V_m	0.891	1.009	0.332	0.442	0.117
1L IS $V_m - TS$	0.909	0.749	0.374	0.454	0.034
2L IS $V_m - TS$	0.996	0.796	0.373	0.455	0.023

Legenda: Ajustes dos potenciais saturado e *ad hoc* linear com o resultado da rede (Bali; Schilling; Wachter, 1997) (Ver Eqs. (191) e (192)).

Fonte: O autor, 2023.

ad hoc. Por tudo isso, em geral, o fator B está muito próximo do valor de tensão da corda da rede, o que é necessário para obter um bom ajuste. O fator C acaba sendo quase desnecessário, pois possui valores próximos de zero em quase todos os casos.

3.7 Comentários finais sobre o potencial quark–antiquark

Foi observado em todas as equações do potencial que, em relação aos pólos reais, a presença de pólos complexos no propagador do glúon, contribui com termos adicionais ao potencial. Os pólos reais do propagador contribuem com termos proporcionais a exponenciais que decaem em função da distância, o que mitigam suas contribuições para grandes distâncias, enquanto que os pólos complexos não apenas contribuem com termos de decaimento, mas também com termos proporcionais a fatores seno e cosseno. Isto foi próprio dos casos GZ, RGZ e CF (a 1 *loop* sem RGE), onde os pólos complexos deram origem a chamada zona D, que no contexto dessas resultados, poderíamos ter pensado em associá-la a um surgimento de um indicio de confinamento cuja melhoria poderia vir da inclusão de mais termos de interação. E, já que uma divergência IR no integrando do potencial talvez não seja a solução para o potencial linear, poderíamos ingenuamente perguntar se uma contribuição multigluônica no potencial poderia oferecer melhores resultados, pois estaríamos na presença de múltiplas contribuições de seno e cosseno devidas aos pólos complexos do propagador do glúon e da constante de acoplamento, algo assim como uma soma de Fourier onde os termos sinusoidais se aproximassem a um termo linear para distâncias maiores. Por outro lado, tem trabalhos indicando que a contribuição multigluônica no potencial não muda significativamente a dependência radial do potencial mas sim renormaliza a sua força efetiva e o seu alcance de interação (Ding; Huang; Chen, 1987; Liu; Chen; Huang, 1990; Belkov; Dillig; Pilotto, 1996).

Por outro lado, os últimos resultados para o potencial do modelo CF incluindo

o RGE nos seus parâmetros, mostraram novamente a aparição da zona D, pois estamos na presença de pólos complexos novamente. Porém, um tanto mais importante e devido principalmente ao fator de massa efetiva do glúon deste modelo, foi a aparição de um comportamento semilinear nesses potenciais (IS e IS-TS, Fig. (28)) na região de distâncias intermediárias, onde agora a contribuição multigluônica no potencial poderia ser um recurso interessante de adicionar já que este não mudaria significativamente a sua dependência radial e sim o alcance do potencial, e poderia nos ajudar a estender o comportamento semilinear desses potenciais para longas distâncias. Diante disto, esperaríamos então que a chamada zona D acabe desaparecendo pela extensão do comportamento linear. Isto plantea um inconveniente na existência da zona D no potencial, já que mesmo que ela sempre possa aparecer produto dos pólos complexos, torna complicado relacioná-la com algum vínculo ou indicio de confinamento e terminaria sendo mais um produto das aproximações matemáticas envolvidas.

4 MOMENTO MAGNÉTICO E VÉRTICE QUARK-FÓTON

Os processos de física de altas energias são extremamente importantes, pois oferecem muita informação sobre o comportamento das interações fundamentais envolvidas nesses processos. Sendo assim, nos permitem testar previsões teóricas e compará-las com seus respectivos dados experimentais, obtendo-se em muitos casos uma boa concordância entre eles (Soding; Wolf, 1981; Workman *et al.*, 2022). No caso da QCD, embora esses processos a altas energias sejam tão relevantes, nos experimentos em aceleradores de partículas que envolvem processos de espalhamento ou condições iniciais dos estados hadrônicos, os diferentes estágios e/ou ingredientes nessas colisões podem envolver escalas de energia relativamente baixas, de modo que o enfoque perturbativo não seja suficiente e precisemos de informações não-perturbativas.

A compreensão das propriedades hadrônicas em função de quarks e glúons é atualmente uma questão não resolvida, já que não podemos calcular analiticamente suas propriedades a partir de primeiros princípios, razão pela qual a QCD acaba sendo abordada através do uso de teorias efetivas ou aproximações numéricas que podem nos permitir obter grandezas não-perturbativas. Fatores de forma, por exemplo, são um campo de estudo interessante, pois oferecem informação sobre a estrutura e o comportamento elétrico e magnético das partículas envolvidas. Mesmo quando não podemos calcular analiticamente os fatores de forma para os hádrons (prótons, nêutrons, ETC.) ou mesmo para os quarks diretamente devido ao confinamento, podemos explorar os fatores de forma desses constituintes hadrônicos uma vez que eles podem interagir com os fótons. Isso nos leva a estudar o vértice quark-fóton (QPV), pois ele codifica todas as informações da interação. Para o estudo do momento magnético dos hádrons e dos quarks, além do vértice quark-fóton, existem algumas abordagens: sejam elas efetivas (fenomenológicas) (Rújula; Georgi; Glashow, 1975a; Chao, 1990; Jido; Weise, 2005; Jovanovic *et al.*, 2010), semi-analíticas, como o uso das equações de Schwinger-Dyson (SDE) (Frank, 1995; Chang; Liu; Roberts, 2011; Fomin *et al.*, 2020; Xing; Raya; Chang, 2021) ou numéricas, como a QCD na rede (Martinelli *et al.*, 1982; Beane *et al.*, 2014; Leutnant; Sternbeck, 2018; Sternbeck; Leutnant; Eichmann, 2019; Alexandrou *et al.*, 2019).

Por outro lado, fazendo certas aproximações, podemos tentar explorar analiticamente os fatores de forma eletromagnéticos dos quarks usando o enfoque perturbativo. Nas ordens mais baixas, eles receberão contribuições eletro (QED) e cromo (QCD) magnéticas vindas do QPV. Em particular, focaremos na contribuição da QCD que depende do propagador do glúon. E, como já mencionamos no Cap. 2, existem alguns modelos que tentam abordar o confinamento inspirados no comportamento do propagador do glúon na rede, cuja modelagem do seu propagador no gauge de Landau inclui a consideração de ingredientes não-perturbativos como as escalas de massa presentes. Temos o modelo de

Curci-Ferrari (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019), com uma massa efetiva para o glúon, o formalismo de Gribov-Zwanziger (GZ), que inclui a chamada massa de Gribov, e o seu modelo refinado (RGZ), que introduz ainda alguns condensados de dimensão dois (Gribov, 1978; Zwanziger, 1989b; Zwanziger, 1990; Dudal *et al.*, 2008b).

Nesse contexto, nosso objetivo é explorar o impacto fenomenológico desses tipos de propagadores do glúon no vértice QPV em um *loop*. Especificamente, investigaremos o fator de forma magnético, mostrando que as modificações que aparecerão devido às escalas não-perturbativas dos modelos mencionados são consistentes. Por outro lado, queremos ver quão profundamente podemos sondar a região de baixas energias e tentar obter algumas informações ou valores dos parâmetros dos modelos estudados. Vale ressaltar que os resultados apresentados em (Tissier; Wschebor, 2011; Reinoso *et al.*, 2017; Gracey *et al.*, 2019) mostram que em alguns casos a região de baixas energias da QCD pode ser explorada através do enfoque perturbativo mesmo quando a constante de acoplamento não é pequena o suficiente, mas sim o parâmetro de expansão associado. Isso é muito interessante, pois em baixas energias não há consenso sobre um valor fixo da constante de acoplamento, já que dependendo do vértice de interação do qual é extraída, esta pode ter diferentes comportamentos e valores, nulos ou até grandes (vide a Tabela 5.2 na Ref. (Deur; Brodsky; Teramond, 2016) e também as referências ali citadas). Mesmo assim, para um conjunto grande de modelos de acoplamento que saturam no infravermelho, o parâmetro de expansão no modelo de Curci-Ferrari, por exemplo, mantém-se abaixo de 1.

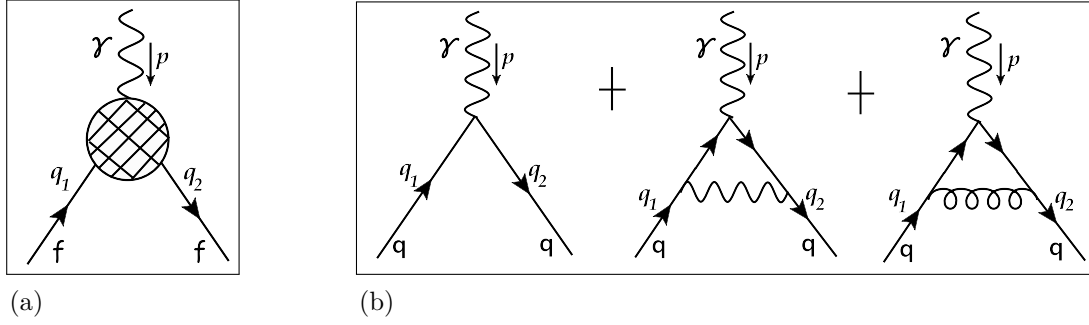
Outro objetivo é apresentar cálculos e discussões sobre o momento magnético do próton, obtido por meio de um modelo efetivo, o modelo de quark constituinte (CQM). Nele, introduziremos as modificações do fator de forma dos quarks devido aos modelos mencionados acima. Todos esses resultados serão tratados com cuidado, explicitando as limitações do modelo mesmo quando este consegue obter uma boa concordância com o momento magnético e o espectro dos hádrons (Rújula; Georgi; Glashow, 1975a; Perkins, 2000; Jovanovic *et al.*, 2010).

4.1 Momento magnético

Para uma partícula de massa m , spin s e carga e , o momento magnético do spin é dado pela seguinte equação:

$$\mu_{part} = g \left(\frac{e}{2m} \right) \mathbf{S}, \quad (193)$$

Figura 30 - Diagramas de Feynman do vértice férmion-fóton



Legenda: (a) Diagrama geral do vértice férmion-fóton. p , q_1 e q_2 são os momentos do processo. (b) Contribuições ao vértice quark-fóton na ordem de um *loop*. As linhas retas, onduladas e enroladas representam o quark, o fóton e o glúon, respectivamente.

Fonte: O autor, 2023.

onde g^{86} é o fator de Landé, que representa a força relativa entre o momento magnético e o seu acoplamento spin-órbita.

O momento magnético de spin ou apenas o momento magnético também pode ser calculado através da QFT via o vértice férmion-fóton (Fig. (30)). O momento magnético é um excelente observável para explorar com QFT. Prova disso é a concordância entre a previsão do momento magnético do elétron (múon), através do vértice elétron (múon) –fóton em Eletrodinâmica Quântica (QED), comparado com seu valor experimental (Aoyama; Kinoshita; Nio, 2019; Zyla *et al.*, 2020; Aoyama *et al.*, 2020).

O vértice férmion-fóton (FPV), pode ser representado com um diagrama geral de Feynman como o da Fig. (30), que pode ser descrito de forma geral com a próxima expressão (Minkowsky e on-shell) (Peskin; Schroeder, 1995; Schwartz, 2014):

$$i\mathcal{M}_\mu = -ie \bar{\mathcal{U}}(q_2) \left[F_1(p^2) \gamma^\mu + i \frac{p_\nu \sigma^{\mu\nu}}{2m} F_2(p^2) \right] \mathcal{U}(q_1). \quad (194)$$

onde $\mathcal{U}(q_1)$ e $\bar{\mathcal{U}}(q_2)$ são espinores de Dirac, $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, sendo γ^μ uma matriz de Dirac, $p_\nu = q_{2\nu} - q_{1\nu}$, e F_1 e F_2 são os fatores de forma onde F_1 está relacionado à carga elétrica e F_2 ao momento magnético.

Sabe-se (Schwartz, 2014; Peskin; Schroeder, 1995) que a partir da expressão anterior (Eq. (194)) pode ser obtido o fator g , que é quasi como obter o momento magnético da partícula (Eq. (193)), em função dos fatores de forma:

$$g = 2 [F_1(0) + F_2(0)], \quad (195)$$

onde $F_1(0) = 1$, devido à conservação de carga, e $F_2 = 0$ no nível de árvore.

⁸⁶ Não confundir com o fator g relacionado com a constante do acoplamento forte, $\alpha_s = g^2/4\pi$.

O fator g_e e o momento magnético do elétron (QED a 1 *loop*), são dados por:

$$\mu_e = g_e \left(\frac{e}{2m_e} \right) \frac{1}{2} = [1 + F_2(0)] \left(\frac{e}{2m_e} \right) = \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \mu_B, \quad (196)$$

onde α é o acoplamento da QED, $\mu_B = e/2m_e$ é o magneton de Bohr e $F_2(0) = \alpha/2\pi$, sendo $\alpha/2\pi$ o conhecido resultado do Schwinger para QED. (Schwinger, 1948).

Mas e as outras partículas? O próton, por exemplo. Se calcularmos o momento magnético do próton da mesma forma que para o elétron, obteremos um resultado semelhante (Eq. (196)) já que em 1 *loop* o fator g da última expressão é independente da massa da partícula. Porém, diferentemente do elétron ($g_e \approx 2.002319$ (Zyla *et al.*, 2020)), o momento magnético experimental do próton tem um valor muito diferente ($g_p \approx 5.585694$ (Zyla *et al.*, 2020)) do esperado para uma partícula elementar o que é uma indicação da estrutura complexa do próton. Nos dias atuais, sabemos que o próton é uma partícula composta e também bastante complexa. Atualmente, a QCD modela o próton como uma partícula composta por três quarks de valência e um mar de quarks e glúons virtuais.

Como já mencionamos, mesmo conhecendo a estrutura do próton, não podemos calcular analiticamente, a partir de primeiros princípios, o seu momento magnético apenas usando o momento magnético dos seus componentes fundamentais, em parte devido aos efeitos do fenômeno do confinamento e seu efeito no comportamento da constante de acoplamento forte. Por outro lado, podemos recorrer a algum modelo efetivo que simplifique um pouco as coisas e tentar calcular o momento magnético do próton. Neste caso, usaremos o modelo do quark constituinte (CQM).

4.1.1 Modelo do quark constituinte

O modelo do quark constituinte (Perkins, 2000; Griffiths, 2008) trata os quarks de valência como quarks efetivos constituintes responsáveis pelas propriedades dos hádrons. Esses quarks aparecem como quarks de corrente vestidos pela interação com a nuvem de quarks e glúons virtuais e por causa disso, sua massa, chamada de massa do quark constituinte, é muito maior que sua massa nua, sendo aproximadamente 1/3 da massa do núcleon para os quarks leves, Up (u) e Down (d).

Neste modelo assume-se que os quarks se comportam como partículas de Dirac pontuais (spin 1/2, $g = 2$), então seu momento magnético será:

$$\boldsymbol{\mu}_q = g Q_q \left(\frac{e}{2m_q} \right) \mathbf{S} \rightarrow \mu_q = Q_q \left(\frac{M_p}{m_q} \right) \mu_N, \quad (197)$$

onde m_q é a massa do quark, M_p é a massa do próton, $\mu_N = e/2M_p$ é o magnetão nuclear e Q_q é um fator numérico que caracteriza a carga da partícula, o quark neste caso.

No CQM, o momento magnético do próton vem das somas vetoriais dos momentos magnéticos dos seus quarks constituintes devido às propriedades de simetria da função de onda de três quarks, que produz (Fayyazuddin, 2012; Perkins, 2000):

$$\mu_p = \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d = \left[\frac{4Q_u}{m_u} - \frac{Q_d}{m_d} \right] \frac{M_p}{3} \mu_N = \frac{M_p}{m_q} \mu_N = 2.7925 \mu_N, \quad (198)$$

onde no resultado acima usamos a Eq. (197), $Q_u = 2/3$, $Q_d = -1/3$, $M_p = 938.2720$ MeV (Zyla *et al.*, 2020) e, $m_u = m_d = m_q = 336$ MeV (Rújula; Georgi; Glashow, 1975a; Perkins, 2000; Griffiths, 2008), onde esta última aproximação permite ter uma boa concordância com o valor experimental $\mu_p = 2.7928... \mu_N$ (Zyla *et al.*, 2020).

A massa do quark constituinte pode ser fixada a partir de ajustes com o resultado do espectro de massa dos hádrons. No contexto do CQM, a massa dos hádrons é modelada como a soma das massas dos quarks constituintes mais um termo que leva em conta as energias de ligação vinculadas a uma interação hiperfina tipo Coulomb entre quarks (potencial de interação). No caso dos núcleons (p e n), e baixo a aproximação $m_u = m_d = m_q$, podemos escrever sua massa de forma fenomenológica:

$$M_N = 3m_q - 3K/m_q^2, \quad (199)$$

onde K é um parâmetro livre, que ajustado ao espectro de massa dos bárions fornece um valor de $K/m_q^2 \approx 50$ MeV (Gasiorowicz; Rosner, 1981; Perkins, 2000; Jovanovic *et al.*, 2010). Logo, no caso do próton, a massa do quark constituinte que se ajusta ao espectro de massa será de 363 MeV, próximo ao valor 336 MeV que se ajusta ao momento magnético do mesmo.

É importante ressaltar que a Eq. (197) implica a ausência de interações quark-quark ($g = 2$), de modo que $F_2 = 0$. Mas, o que aconteceria se considerássemos as correções vindas da QFT para o fator g dos quarks no CQM ao invés do valor fixo $g = 2$, e também quais seriam as consequências no momento magnético do próton? Claro, dentro dos limites deste modelo. Bem, seguindo essa linha de raciocínio, podemos incluir tais correções no fator g_q do quark usando o vértice quark-fóton (QPV) que, independentemente do modelo CQM, pode ser representado com o diagrama da Fig. (30a) ($f \rightarrow q$).

4.2 Vértice quark-fóton

No vértice quark-fóton, até a ordem de um *loop*, as contribuições para o momento magnético do quark podem ser descritas com os diagramas de Feynman da Fig. (30b), que exibem contribuições por parte da QED e da QCD através dos diagramas com um propagador do fóton interno (linha ondulada) e um propagador do glúon interno (linha enrolada), respectivamente. Dessas contribuições, estamos considerando como uma con-

tribuição fixa a contribuição da QED já que os valores dos parâmetros envolvidos são muito conhecidos até mesmo o valor do acoplamento da QED, $\alpha(0)$ (Zyla *et al.*, 2020). Então, focaremos nossa atenção apenas na contribuição da QCD que depende do propagador do glúon para o qual existem alguns modelos, modelos confinantes, que tentam explicar o comportamento do mesmo. Pelas regras de Feynman (euclidianas, Ap. E.0.1.2) as contribuições a um *loop* na Fig. (30.b) podem ser escritas como:

$$\mathbf{M}_\mu \rightarrow e Q_q \mathcal{N} \bar{U}(q_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{\gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + im_q) \gamma_\mu (\not{k} + im_q) \gamma_\nu}{[(k - q_1)^2] [(p + k)^2 + m_q^2] [k^2 + m_q^2]} \right) U(q_1). \quad (200)$$

onde $\mathcal{N}$, para o diagrama com o propagador do fóton interno será $e^2 Q_q^2$, e para o diagrama com propagador interno do glúon será $g^2 C_F$ (a contribuição do gauge-covariante não aparece nesta equação, pois afetará apenas ao fator F_1 que não é de nosso interesse no momento. Consulte o apêndice F.). Sabe-se que a equação acima (200) pode ser reescrita em função dos parâmetros de Feynman (x, y e z) (Apêndice G), o que fornece:

$$\mathbf{M}_\mu \rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \frac{2e \mathcal{N} Q_q N_\mu}{[xA + yB + zC]^3}, \quad (201)$$

onde $N_\mu = \bar{U}(q_2) [\gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + im_q) \gamma_\mu (\not{k} + im_q) \gamma_\nu] U(q_1)$, $A = k^2 + m_q^2$, $B = (p + k)^2 + m_q^2$ e $C = (k - q_1)^2$. O fator $xA + yB + zC$ no denominador pode ser escrito como:

$$xA + yB + zC = K^2 + \Delta_E, \quad (202)$$

sendo $K = k + yp - zq_1$ e $\Delta_E = xy p^2 + (1 - z)^2 m_q^2$, onde K e Δ_E foram obtidos para um propagador do glúon perturbativo (massa zero) e como foi mencionado, existem alguns modelos confinantes para esse propagador e um de nossos interesses é estudar o seu impacto no fator g_q do quark, portanto, daremos atenção especial à modificação de C (que depende da estrutura do propagador) devida aos outros modelos do propagador e a sua contribuição para o fator Δ_E . Por exemplo, para o modelo do glúon massivo, onde a massa do glúon será diferente de zero, $m_g \neq 0$, o fator zC será $zC \rightarrow z(k - q_1)^2 + z m_g^2$ que obviamente apenas modifica os termos proporcionais a z , então, o fator Δ_E recebe apenas correções do fator de massa presente no modelo do glúon (Ver apêndice H):

$$\Delta_{Mass}^E = xy p^2 + (1 - z)^2 m_q^2 + z m_g^2. \quad (203)$$

O numerador N_μ (Eq. (201)) pode ser simplificado usando as relações dos momentos, da álgebra das matrizes gama e dos espinores. Logo (Apêndice G, Eq. 322):

$$N_\mu = \gamma_\mu [K^2 - 2(1 - x)(1 - y)p^2 + 2(1 - 4z + z^2)m_q^2] + p_\nu \sigma_{\mu\nu} [2z(1 - z)m_q], \quad (204)$$

que pode ser comparada com a próxima expressão geral do vértice quark-fóton no espaço euclidiano (análoga à do espaço de Minkowski (Eq. (194)). Ver Ap. (E.0.1.2), Eq. (299)):

$$\mathbf{M}_\mu = e Q_q \bar{U}(q_2) \left[\gamma_\mu F_1(p^2) + \frac{p_\nu \sigma_{\mu\nu}}{2m_q} F_2(p^2) \right] U(q_1), \quad (205)$$

onde assumimos que as funções (euclidianas) F_1 e F_2 acima desempenharão um papel análogo às da Eq. (194) (Minkowsky). Então, para estudar a contribuição para o momento magnético precisamos apenas do termo proporcional a $p_\nu \sigma_{\mu\nu}$ da Eq. (204), que juntamente com as Eqs. (201) e (202) nos fornecem a seguinte expressão (Apêndice G):

$$\left(\frac{e Q_q}{2m_q} \right) \left[\int_0^1 dx dy dz \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{8 \mathcal{N} z(1-z) m_q^2}{[K^2 + \Delta_E]^3} \right] p_\nu \sigma_{\mu\nu} \rightarrow \left(\frac{e Q_q}{2m_q} \right) F_2(p^2) p_\nu \sigma_{\mu\nu}, \quad (206)$$

onde o fator $F_2(p^2)$ foi definido como o coeficiente do operador acima (Eq.(205)). Resolvendo a integral em K usando uma relação no espaço euclidiano (Apêndice G), obtemos:

$$F_2(p^2) = \frac{\mathcal{N}}{4\pi^2} \left[\int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z) m_q^2}{\Delta_E} \right]. \quad (207)$$

4.2.1 Contribuição da QED no vértice quark-fóton

Para a contribuição da QED no vértice quark-fóton, temos que $\Delta_E = xy p^2 + (1-z)^2 m_q^2$ e $\mathcal{N} = e^2 Q_q^2$ (propagador interno do fóton), então a Eq. (207) torna-se:

$$F_2(p^2) = Q_q^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \left[\int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z) m_q^2}{xy p^2 + (1-z)^2 m_q^2} \right], \quad (208)$$

onde, $\alpha = e^2/4\pi$, é a constante de acoplamento da QED. A Eq. (208) em $p^2 = 0$ produz:

$$F_2(0) = Q_q^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = Q_q^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right), \quad (209)$$

onde para $Q_{q \rightarrow e} = -1$, recuperamos o resultado de Schwinger para a QED, $\alpha/2\pi$.

4.3 Contribuição da QCD no vértice quark-fóton

4.3.1 QCD Perturbativa

Para a contribuição perturbativa da QCD no QPV, temos que $\Delta_E = xy p^2 + (1-z)^2 m_q^2$ e $\mathcal{N} = g^2 C_F$, então a Eq. (207) torna-se:

$$F_2(p^2) = C_F \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z) m_q^2}{xy p^2 + (1-z)^2 m_q^2}, \quad (210)$$

onde $\alpha_s = g^2/4\pi$, é a constante de acoplamento da QCD. Da Eq. (209), a contribuição perturbativa da QCD (Eq. (210)) em $p^2 = 0$ será:

$$F_2(0) = C_F \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right), \quad (211)$$

que é semelhante à contribuição da QED vezes o fator de cor, C_F .

Ao contrário do acoplamento da QED, o acoplamento da QCD para momento zero não é tão simples de definir e/ou calcular, mas muitos estudos mostram que este poderia ter um valor finito a momento nulo (Deur; Brodsky; Teramond, 2016) (ver também as referências nele). Assim, pode ser muito útil para nós redefinirmos a função F_2 independentemente do acoplamento da QCD, como:

$$\bar{F}_2(0) = \frac{\pi F_2(0)}{C_F \alpha_s}. \quad (212)$$

onde para o caso da QCD perturbativa, $\bar{F}_2(0) = 0.5$.

4.3.2 Modelo massivo

Para o modelo massivo o fator Δ_E é modificado devido ao termo massivo, m_g^2 , no propagador de glúon (Veja apêndice H.0.1):

$$\frac{1}{(k - q_1)^2} \rightarrow \frac{1}{(k - q_1)^2 + m_g^2}, \quad (213)$$

que modifica o denominador na Eq. (200) e, como foi discutido para a Eq. (203), o fator Δ_E será $\Delta_{Mass} = xy p^2 + (1 - z)^2 m_q^2 + z m_g^2$. Usando a Eq. (207), semelhante à Eq. (210), e a Eq. (212), para $p^2 = 0$ obtemos:

$$\bar{F}_2^{Mass}(0, a) = \frac{\pi F_2^{Mass}(0)}{C_F \alpha_s} = \int_0^1 dz \frac{z(1 - z)^2}{(1 - z)^2 + z a}, \quad (214)$$

onde $\bar{F}_2^{Mass}(0, a)$ depende apenas de $a = (m_g^2/m_q^2)$, ou seja, a razão entre as massas do glúon e o quark. Resolvendo a integral acima obtemos (Apêndice I.0.1):

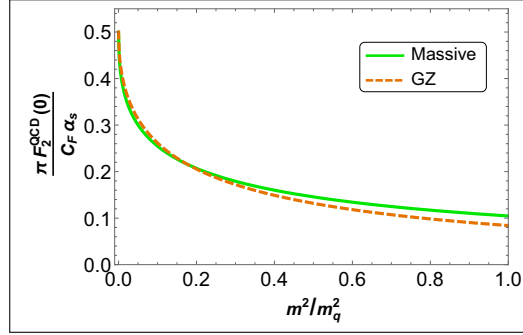
$$\bar{F}_2^{Mass}(0, a) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2} \left[2 - (a - 2) \text{Log}[a] + \frac{(a - 2)^2 - 2}{\sqrt{a(a - 4)}} \text{Log} \left[\frac{\sqrt{a(a - 4)} + a - 2}{2} \right] \right], \quad (215)$$

cujo comportamento da $\bar{F}_2^{Mass}(0, a)$ é mostrado na Fig. (31) (linha verde sólida).

Os casos limitantes da Eq. (215) para $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$ são:

$$\bar{F}_2^{Mass}(0, a \rightarrow 0) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} a^{1/2} - \frac{(1 + 2 \text{Log}[a])}{2} a + \frac{15\pi}{16} a^{3/2} + \mathcal{O}(a^2), \quad (216)$$

Figura 31 - Função $\bar{F}_2(0)$ para os modelos massivo e GZ



Legenda: m^2 corresponde à massa do glúon (m_g^2) ou de Gribov (γ^2), respectivamente, e m_q , à massa do quark (veja mais detalhes no texto) .

Fonte: O autor, 2023.

que nos mostra que para $a \rightarrow 0$ (ou $m_g = 0$) a função $\bar{F}_2^{Mass}(0, a)$ terá um valor máximo de $1/2$ como era esperado. No outro extremo temos:

$$\bar{F}_2^{Mass}(0, a \rightarrow \infty) = \frac{1}{3a} - \frac{12\text{Log}[a] - 25}{12a^2} - \frac{60\text{Log}[a] - 97}{10a^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a^4}\right). \quad (217)$$

4.3.3 Modelo Gribov–Zwanziger

Para o modelo Gribov–Zwanziger (GZ) (Gribov, 1978; Zwanziger, 1990) teremos duas contribuições Δ_E provenientes da decomposição do propagador GZ do glúon:

$$\left(\frac{l^2}{l^4 + \gamma^4}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l^2 + i\gamma^2} + \frac{1}{l^2 - i\gamma^2}\right), \quad (218)$$

onde γ^2 é a massa de Gribov. O propagador acima também modifica o denominador na Eq. (200) e como discutido para a Eq. (203), as contribuições Δ_E serão (Ap. H.0.2):

$$\Delta_{GZ}^{\pm} = xy p^2 + (1 - z)^2 m_q^2 + z(\pm i \gamma^2), \quad (219)$$

então, para $p^2 = 0$ e sob os mesmos argumentos usados na Eq. (214), obteremos:

$$\bar{F}_2^{GZ}(0, a) = \frac{\pi F_2^{GZ}(0)}{C_F \alpha_s} = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \left[\frac{z(1-z)^2}{(1-z)^2 + i z a} + \frac{z(1-z)^2}{(1-z)^2 - i z a} \right], \quad (220)$$

onde o fator $1/2$ na equação acima aparece pelo resíduo do propagador (Eq. (218)). $\bar{F}_2^{GZ}(0, a)$ depende apenas de $a = (\gamma^2/m_q^2)$, ou seja, da razão entre as massas de Gribov e do quark. Resolvendo essa integral obtemos (Apêndice I.0.2):

$$\begin{aligned} \bar{F}_2^{GZ}(0, a) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2} \left(a \operatorname{Log}[a] - \pi + \frac{[(a+2i)^2 + 2]}{\sqrt{a(a+4i)}} \operatorname{Log} \left[\frac{+i a - 2 - i\sqrt{a(a+4i)}}{2} \right] \right. \\ \left. - \frac{[(a-2i)^2 + 2]}{\sqrt{a(a-4i)}} \operatorname{Log} \left[\frac{-i a - 2 - i\sqrt{a(a-4i)}}{2} \right] \right). \end{aligned} \quad (221)$$

O caso limitante da função $\bar{F}_2^{GZ}(0, a)$, quando $a \rightarrow 0$, é:

$$\bar{F}_2^{GZ}(0, a \rightarrow 0) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) a^{1/2} + \frac{\pi}{2} a - \frac{15\pi}{16} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) a^{3/2} + \mathcal{O}(a^2), \quad (222)$$

mostrando que para $a \rightarrow 0$ (ou $\gamma = 0$) essa função terá um valor máximo de $1/2$ como era esperado, e também, pela comparação de seus coeficientes podemos corroborar que para $a < 0.2$, a função $\bar{F}_2^{GZ}(0, a)$ terá um valor maior que a função $\bar{F}_2^{Mass}(0, a)$ (Eq. (216)) como podemos ver na Fig. (31) (linha laranja tracejada). No outro extremo temos que:

$$\bar{F}_2^{GZ}(0, a \rightarrow \infty) = + \frac{12 \operatorname{Log}[a] - 25}{12 a^2} + \frac{3\pi}{a^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a^4}\right), \quad (223)$$

onde, comparado ao caso massivo, a função $\bar{F}_2^{GZ}(0, a)$ não possui um termo linear inverso, o que nos permite entender mais claramente porque $\bar{F}_2^{GZ}(0, a)$ decai mais rápido que a função $\bar{F}_2^{Mass}(0, a)$ quando $a \rightarrow \infty$, como podemos ver na Fig. (31).

4.3.4 Modelo Gribov–Zwanziger Refinado

O propagador do glúon do modelo Gribov-Zwanziger Refinado também pode ser decomposto como um par de propagadores “massivos” através da parametrização:

$$\frac{p^2 + M^2}{p^4 + (M^2 + m^2)p^2 + \lambda^4 + M^2 m^2} \equiv \frac{A_+}{p^2 + \alpha'_-} + \frac{A_-}{p^2 + \alpha'_+}, \quad (224)$$

onde M^2 , m^2 e λ^2 são termos de massa provenientes dos condensados usados para localizar a ação RGZ (Dudal *et al.*, 2008b; Dudal; Oliveira; Vandersickel, 2010). $A_{\pm}$ e $\alpha'_{\mp}$ podem ser escritos em função dos termos de massa RGZ, tal que:

$$A_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{M^2 - m^2}{\sqrt{(M^2 - m^2)^2 - 4\lambda^4}} \right), \quad \alpha'_{\mp} = \frac{M^2 + m^2 \mp \sqrt{(M^2 - m^2)^2 - 4\lambda^4}}{2}, \quad (225)$$

que neste caso e como mostram os dados da QCD na rede, teremos pólos complexos ($(M^2 - m^2)^2 - 4\lambda^4 < 0$) (Oliveira; Silva, 2012; Dudal; Oliveira; Silva, 2018). Além disso, esses dados mostram que $m^2 < 0$, então vamos definir $\bar{m}^2 = -m^2 > 0$, e:

$$\kappa = \frac{M^2 + \bar{m}^2}{\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 + \bar{m}^2)^2}} > 0, \quad s = \frac{M^2 - \bar{m}^2}{2}, \quad t = \frac{\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 + \bar{m}^2)^2}}{2}. \quad (226)$$

Tal como no caso GZ, no modelo RGZ teremos duas contribuições Δ_E provenientes da decomposição do propagador do glúon (Eqs. (224), (225) e (226)), como:

$$\Delta_{RGZ}^{\mp} = xy p^2 + (1-z)^2 m_q^2 + z(s \mp it), \quad (227)$$

então, sob os mesmos argumentos usados nos últimos modelos e, para $p^2 = 0$, obteremos:

$$\bar{F}_2^{RGZ}(0, a, b, \kappa) = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \left[\frac{(1-i\kappa)z(1-z)^2}{(1-z)^2 + z(a-ib)} + \frac{(1+i\kappa)z(1-z)^2}{(1-z)^2 + z(a+ib)} \right], \quad (228)$$

onde $a = s/m_q^2$ e $b = t/m_q^2$. Os detalhes da solução da Eq. (228) ($\{a, b\} > 0$) podem ser encontrado no Apêndice I.0.3. Os casos limitantes da função $\bar{F}_2^{RGZ}(0, a, b, \kappa)$ para $\{a, b\} \rightarrow 0$ e $\{a, b\} \rightarrow \infty$ (em ambos os casos κ é fixo), são:

$$\begin{aligned} \bar{F}_2^{RGZ}(0, a \rightarrow 0, b \rightarrow 0, \kappa) &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\kappa - 1) b^{1/2} + \frac{b}{2} (\pi + \kappa(1 + 2\text{Log}[b])) + \mathcal{O}(b^{3/2}) \\ &+ a \left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{8} \frac{\kappa + 1}{b^{1/2}} + \frac{\pi\kappa - 3 - 2\text{Log}[b]}{2} - \frac{45\sqrt{2}\pi}{64} (\kappa - 1) b^{1/2} + \mathcal{O}(b) \right) + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned} \quad (229)$$

que tem uma estrutura mais complexa do que o caso Massivo ou GZ. Para obter uma visão um pouco mais clara do que essa equação representa podemos considerar $a \approx b \sim 0$:

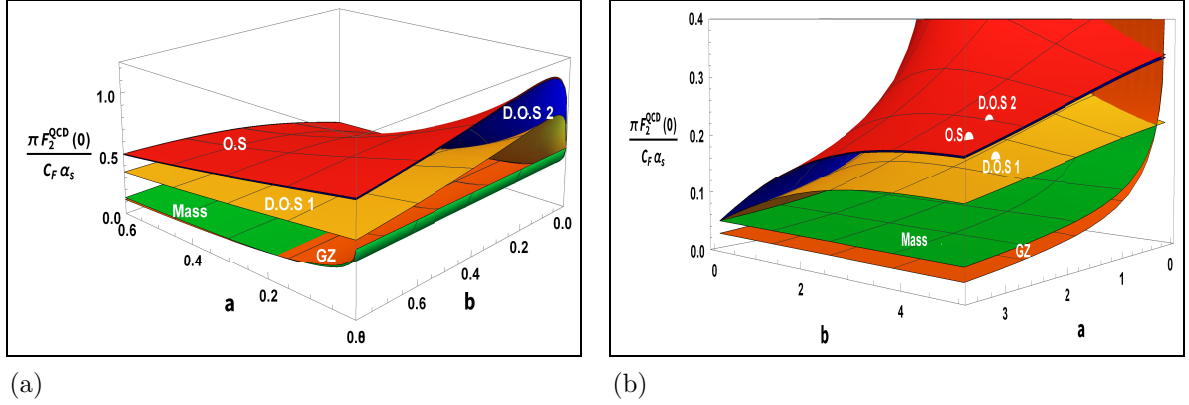
$$\bar{F}_2^{RGZ}(0, a \sim 0, \kappa) \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}(3\kappa - 1)}{8} a^{1/2} + (\kappa(\pi + 1) + \pi - 3 + 2(\kappa - 1)\text{Log}[a]) \frac{a}{2},$$

onde o esse resultado mostra que a função $\bar{F}_2^{RGZ}(0)$ pode ter um valor maior que $1/2$, para um κ fixo e a e b próximos de 0, já que seus termos dominantes podem ser positivos em contraste com o caso Massivo e GZ (Eqs. (216) e (222)) (κ pode ter um valor grande ($\kappa > 1$) como vimos anteriormente). No outro extremo, para $\{a, b\} \rightarrow \infty$, temos que:

$$\begin{aligned} \bar{F}_2^{RGZ}(0, a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty, \kappa) &= \frac{1}{3a} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{b\kappa}{3} - \frac{12\text{Log}[b] - 25}{12} \right) \\ &+ \frac{1}{a^3} \left(-\frac{b^2}{3} - \frac{180\text{Log}[a] - 291}{30} - \frac{b\kappa}{30} (60\text{Log}[a] - 155) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{b^3}{a^4}\right), \end{aligned} \quad (230)$$

que mostra um termo linear inverso como no caso Massivo, indicando um decaimento menos pronunciado do que o caso GZ. Outra característica importante é que a expansão de segunda ordem da função RGZ $\bar{F}_2(0)$ (considerando $a \approx b$) é semelhante ao caso Massivo exceto pelo termo adicional proporcional a κ onde a e b competem em magnitude:

Figura 32 - Função $\overline{F}_2(0)$ para os modelos Massivo, GZ e RGZ



Legenda: a e b são razões entre os parâmetros de massa e a massa do quark (mais detalhes no texto).

Fonte: O autor, 2023.

$$\overline{F}_2^{RGZ}(0, a \approx b \rightarrow \infty, \kappa) \approx \frac{\kappa}{3a} - \frac{12\text{Log}[a] - 25}{12a^2}, \quad (231)$$

onde este resultado difere do caso massivo e GZ devido ao termo proporcional a κ , que pode ser grande como já mencionamos. Este termo fará com que a função RGZ $\overline{F}_2(0)$ decaia mais lentamente do que para os casos Massivo e GZ (Eqs. (217) e (223)).

Ajustando a zero todos os parâmetros desses modelos confinantes recuperamos o resultado da QCD perturbativa $\overline{F}_2(0)$ (Eq. (211)) tal como podemos verificar a partir das equações (214), (220) e (228) e corroborar com a Fig. (32a) para $a = b = 0$, sendo $a = m_g^2/m_q^2$ ou γ^2/m_q^2 para os modelos Massivo ou GZ, respectivamente. Em ambos os casos não há dependência do parâmetro b . Para o modelo RGZ a e b possuem uma relação mais complexa com os parâmetros conforme vimos recentemente (Eq. (228)).

Da Fig. (32) notamos que a função $\overline{F}_2(0)$ dos modelos massivo e GZ tem um comportamento semelhante com um valor máximo de 0.5 que diminui à medida que o parâmetro “ a ” aumenta ou o que é o mesmo, à medida que o parâmetro de massa do modelo aumenta para uma massa do quark constituinte fixa. Em outras palavras, os termos de massa desses modelos tem um efeito supressor no valor de $\overline{F}_2(0)$, que não excede o valor do resultado perturbativo. Pode parecer surpreendente que o modelo GZ, mesmo tendo pólos imaginários no seu propagador do glúon (Eq. (218)), produza uma função $\overline{F}_2(0)$ semelhante a o modelo massivo. Isso é porque na sua decomposição o propagador do modelo GZ é semelhante a um par de propagadores “massivos” com contraparte conjugada o que faz com que as contribuições imaginárias adicionais acabem se cancelando deixando-nos com um resultado real e um comportamento similar entre tais funções. Mesmo assim, comparado com $\overline{F}_2^{Mass}(0)$, essas contribuições adicionais aumentam o valor da $\overline{F}_2^{GZ}(0)$ para pequenos valores do parâmetro “ a ” ($a \leq 0.177$) (para $m_q = 336$ MeV, $m_g = \gamma \approx 141$ MeV). Para valores do parâmetro “ a ” maiores do que isso,

Tabela 7 - Valor dos parâmetros RGZ

	Z	M_1^2	M_2^2	M_3^4	M	m	λ
O.S DATA	0.8333	4.473	0.704	0.3959	2.1150	1.9414 i	2.0381
D.O.S DATA 1	1	2.525	0.510	0.2803	1.5890	1.4195 i	1.5222
D.O.S DATA 2	0.7296	4.157	0.5922	0.3350	2.0389	1.8881 i	1.9730

Legenda: Parâmetros RGZ das Refs. (Oliveira; Silva, 2012) (O.S) e (Dudal; Oliveira; Silva, 2018) (D.O.S). Todos os parâmetros estão em potências de GeV exceto Z .

Fonte: O autor, 2023.

tais contribuições fazem que $\bar{F}_2^{GZ}(0)$ diminua mais rápido que $\bar{F}_2^{Mass}(0)$ (Ver Fig. (32)).

Como já mencionamos, no modelo RGZ, o propagador do glúon (Eq. (224)) também pode ser decomposto como um par de propagadores do tipo massivo com pólos complexos conjugados neles (Oliveira; Silva, 2012; Dudal; Oliveira; Silva, 2018). Então, o comportamento da função RGZ $\bar{F}_2(0)$ será mais complexo algebricamente porque os pólos complexos adicionam contribuições adicionais àquelas que apareciam quando havia apenas pólos imaginários ou reais no propagador, que também é aumentado, em parte, devido ao valor grande que o parâmetro κ pode adquirir (que depende do valor dos parâmetros da RGZ, Eq. (228). Veja a Tabela 8). Por tudo isso, e em contraste com a abordagem perturbativa e os modelos Massivo e GZ, o valor da função $\bar{F}_2^{RGZ}(0)$ pode ser maior que 0.5 em uma certa combinação de valores pequenos dos parâmetros a e b (Eq. (229) – Fig. (32a)). Para valores grandes de a e b , $\bar{F}_2^{RGZ}(0)$ diminui como os outros modelos também, mas mesmo assim, sua contribuição sempre pode ser maior que a dos outros modelos, como já foi discutido (Ver Eq. (230) e Fig. (32b)).

Os fits do propagador do glúon na rede (SU(3)) nos permitem obter valores para os parâmetros da RGZ. Neste caso temos usado os dados de (Oliveira; Silva, 2012), que chamamos de O.S DATA, e os da Ref. (Dudal; Oliveira; Silva, 2018), que chamamos de D.O.S 1 e D.O.S 2 DATA (Ver tabela 7). Com esta combinação de valores, e usando o valor da massa de quark constituinte $m_q = 336$ MeV, o valor de $\bar{F}_2(0)$ é menor que 0.5, sendo os valores $\bar{F}_2(0) = 0.2229$, $\bar{F}_2 = 0.1768$ e $\bar{F}_2(0) = 0.2416$ para O.S DATA, D.O.S 1 e D.O.S 2 DATA, respectivamente (Ver Fig. (32b) e Tabela 8). Os valores semelhantes para O.S e D.O.S 2 DATA são devidos ao valor muito semelhante de seus parâmetros. Eles compartilham um valor semelhante e menor que um para o fator de normalização na rede (Z), que é compensado com um valor maior para o parâmetro M no modelo RGZ, que afeta o valor do propagador do glúon para momento zero. D.O.S 2 DATA tem um valor de Z igual a 1, o que torna o valor do parâmetro M menor que os dois casos anteriores. De qualquer forma, o parâmetro Z é um parâmetro não físico útil para ajustar o propagador do glúon. Se aplicarmos ao resultado de $\bar{F}_2$ para O.S e D.O.S 2 DATA, seus valores correspondentes seriam diminuídos porque o Z atuaria como um fator multiplicativo menor que um.

Tabela 8 - Parâmetros usados para calcular a função $\overline{F}_2(0)$ – RGZ

	a	b	κ	$\overline{F}_2(0)$
O.S DATA	3.117	4.624	7.89	0.2229
D.O.S DATA 1	2.525	4.106	4.90	0.1768
D.O.S DATA 2	2.624	4.405	7.76	0.2416

Legenda: $\overline{F}_2(0)$ para uma massa de quark fixa, $m_q = 336$ MeV.

Fonte: O autor, 2023.

4.4 Correções do vértice quark-fóton no CQM

Da QFT sabemos que o momento magnético do quark pode ser escrito como:

$$\mu_q = Q_q \left(\frac{e}{2m_q} \right) \frac{1}{2} [2(1 + F_2^q(0))] = Q_q \left(\frac{M_p}{m_q} \right) [1 + F_2^q(0)] \mu_N, \quad (232)$$

que a 1 *loop*, para a QED e QCD perturbativa (Eqs. (209) e (211)), será:

$$\mu_q = Q_q \left(\frac{M_p}{m_q} \right) \left(1 + Q_q^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) + C_F \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right) \right) \mu_N, \quad (233)$$

enquanto que para os modelos confinantes usados (Eqs. (209), (214), (220) e (228)), será:

$$\mu_q = Q_q \left(\frac{M_p}{m_q} \right) \left(1 + Q_q^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) + C_F \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \overline{F}_2(0) \right) \mu_N, \quad (234)$$

onde $\overline{F}_2(0)$ depende da razão entre as massas desses modelos e a massa do quark.

Usando as relações acima no μ_p calculado no CQM (μ_p^{CQM} , Eq. (198)):

$$\mu_p^{CQM} = \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d = \left[\frac{4}{3}Q_u \left(\frac{M_p}{m_q} \right) - \frac{1}{3}Q_d \left(\frac{M_p}{m_q} \right) \right] \mu_N = \left(\frac{M_p}{m_q} \right) \mu_N, \quad (235)$$

podemos incluir de forma simples as correções quânticas dos modelos (Eq. (234)). Assim, a nova expressão para o momento magnético (μ_p^{+QFT}) será:

$$\mu_p^{+QFT} = \mu_p^{CQM} \left[1 + \left(Q_u^2 + \frac{Q_d}{3} (Q_u^2 - Q_d^2) \right) \frac{\alpha}{2\pi} + C_F \overline{F}_2(0) \frac{\alpha_s}{\pi} \right], \quad (236)$$

onde a contribuição da QED será considerada como um valor fixo porque o valor do acoplamento QED é bem conhecido e, portanto, nos concentraremos apenas em como a contribuição da QCD afeta a equação acima.

Se escolhermos alguma massa constituinte m_q (tipo $m_q = 336$ MeV) de modo que o resultado de μ_p^{CQM} seja próximo ao valor experimental e considerarmos α e α_s diferentes de zero, então o μ_p^{+QFT} calculado a partir dessas correções (QFT) será maior que μ_p^{CQM} e μ_p^{Expt} , e vice-versa.

4.4.1 CQM – Modelo massivo

Como análise inicial para calcular o momento magnético do próton, a partir das modificações aplicadas ao CQM, usaremos o valor de $m_q = 336 \text{ MeV}$ ⁸⁷ para a massa do quark constituinte. Logo, usando a Eq. (236), onde $\bar{F}_2(0)$ vem das Eqs. (212) e (214), podemos analisar o comportamento do momento magnético do próton através do CQM modificado com correções da abordagem perturbativa da QCD e do modelo do glúon massivo (MM), respectivamente.

Na Fig. (33a) vemos que o momento magnético calculado através do CQM (linha amarela tracejada), para um $m_q = 336 \text{ MeV}$, está muito próximo do valor experimental (linha azul sólida (horizontal)) e como mencionamos acima, se o valor μ_p^{CQM} estiver muito próximo do valor experimental, então o μ_p^{+QFT} calculado a partir da Eq. (236) será maior que o μ_p^{CQM} e μ_p^{Expt} devido aos termos adicionais das correções da QFT. Esse valor maior pode ser apreciado para o momento magnético calculado com a QCD perturbativa (linha vermelha sólida (oblíqua)) e correções do modelo do glúon massivo na Sub-Fig. (33.a). Para o MM, como exemplo, escolhemos uma massa para o glúon de $m_g = 140 \text{ MeV}$ (linha celeste mais tracejada) e 600 MeV (linha preta ponto-tracejada). Para cada valor de massa do glúon a partir de zero, observa-se uma diminuição no valor do momento magnético e ao mesmo tempo um crescimento linear em função da constante de acoplamento. De qualquer forma, para o modelo perturbativo QCD ou Massivo, com a escolha de $m_q = 336 \text{ MeV}$ o μ_p^{+QFT} será sempre maior que o valor experimental.

Tal como na Fig. (33a), o resultado para μ_p^{CQM} (linha amarela tracejada) na Fig. (33b) está em concordância com o valor experimental (linha azul sólida (horizontal)). Neste caso, fixamos o valor da constante de acoplamento e expressamos o μ_p^{+QFT} em função da massa do glúon. O resultado para o caso QCD perturbativo corresponderá a $m_g = 0$ para cada valor fixo da constante de acoplamento. Para o modelo Massivo, os valores definidos para α_s foram 0.1 (linha verde sólida), 0.4 (linha roxa mais tracejada) e 1.0 (linha laranja ponto-tracejada). Neste caso, para cada valor fixo do acoplamento observamos uma diminuição no momento magnético à medida que o valor do termo de massa do glúon aumenta. Obviamente, para o mesmo valor de $m_q = 336 \text{ MeV}$, o valor de μ_p^{+QFT} será sempre maior que o valor experimental, como na análise anterior.

No modelo CQM temos alguns valores para m_q , um deles é 336 MeV , que produz um valor muito próximo do momento magnético do próton. O outro valor é 363 MeV que não reproduz o momento magnético do próton, mas sim sua massa (e outras massas dos hádrons) (Eq. (199)), e vice-versa. Então, se usarmos $m_q = 363 \text{ MeV}$ para calcular o momento magnético do próton a partir do CQM não obteremos um valor tão próximo

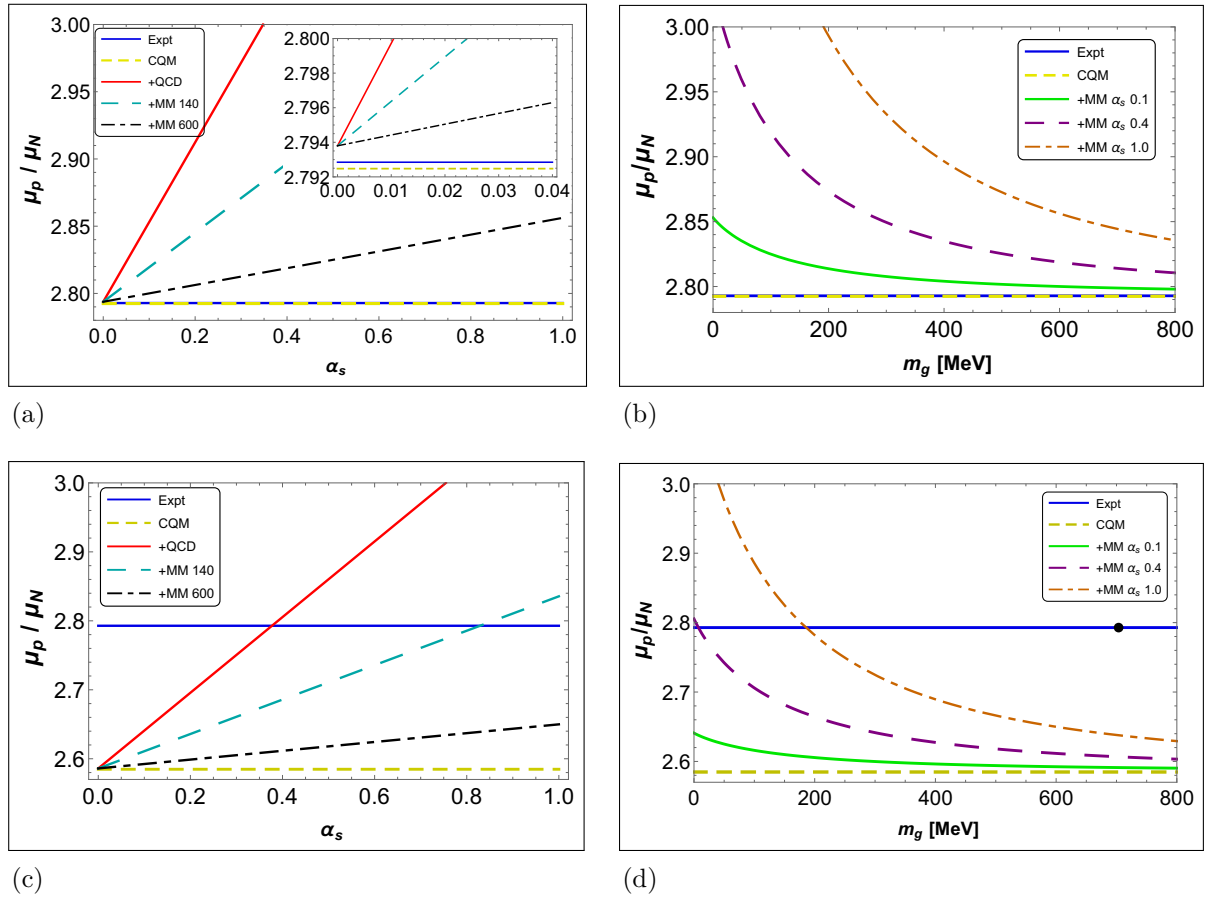
⁸⁷ Valor que sempre pode ser ajustado para reproduzir o valor experimental do momento magnético.

(≈ 2.58477) mas não tão absurdamente diferente do seu valor experimental (≈ 2.79285). Esse resultado difere do valor experimental apenas em um 7.45%.

Por outro lado, dentro dos limites do CQM, usar o valor de 363 MeV nos dá a oportunidade de explorar outras restrições nos valores dos parâmetros dos modelos que estamos estudando. Como mencionamos acima, podemos ver nas Figs. (33c) e (33d) que o momento magnético calculado para o valor $m_q = 363$ MeV no CQM (linha amarela tracejada), é um pouco diferente do valor experimental (linha azul sólida (horizontal)). Devido a isso poderíamos tentar preencher as informações faltantes com as contribuições da QFT (Eq. (236)) para atingir o valor do momento magnético e ao mesmo tempo reproduzir o valor da massa do próton.

Da Fig. (33c) (linha vermelha sólida) notamos que para o caso da QCD perturbativa uma concordância é obtida quando $\alpha_s = 0.38$ (Tabela (9) para $m = m_g = 0$)).

Figura 33 - Momento magnético do próton no CQM-MM



Legenda: Comparação entre o momento magnético do próton (experimental –Expt) (μ_p) e os resultados do CQM e do CQM modificado pela QCD e o MM. Para $m_q = 336$ MeV: (a) μ_p vs α_s (b) μ_p vs m_g . Para $m_q = 363$ MeV: (c) μ_p vs α_s . (d) μ_p vs m_g . O ponto preto é para $\alpha_s = 4$ e $m_g = 703.83$ MeV. Mais detalhes no texto principal e nas tabelas 9 e 10.

Fonte: O autor, 2023.

Tabela 9 - Ajuste do momento magnético do próton para um fator de massa fixo

	m [MeV]	0	140	600
Mass	$\alpha_s \parallel \lambda_{CF}$	0.38 $\parallel$ 0.091	0.83 $\parallel$ 0.198	3.24 $\parallel$ 0.773
G.Z.			0.83 $\parallel$ 0.196	5.30 $\parallel$ 1.265

Legenda: Valor do acoplamento para o qual o resultado dos modelos QCD, Massivo e GZ concordam com o valor experimental μ_p .

Fonte: O autor, 2023.

Para o modelo massivo (MM), usando novamente m_g igual a 140 MeV (linha celeste mais tracejada) e 600 MeV (linha preta ponto-tracejada), a concordância é obtida quando α_s é igual a 0.83 e 3.24, respectivamente.

Tal como na Fig. (33c), o resultado do μ_p^{CQM} , para $m_q = 363$ MeV, na Fig. (33d) (linha amarela tracejada) difere do seu valor experimental (linha azul sólida (horizontal)), mas desta vez notamos também que para um determinado conjunto de parâmetros esse valor pode ser atingido. Assim como na Fig. (33b), na Fig. (33d) também fixamos o valor do acoplamento e expressamos μ_p^{+QFT} como uma função de massa do glúon. Novamente, $m_g = 0$ corresponderá ao caso da QCD perturbativa para cada valor da constante de acoplamento. Os valores obtidos para o modelo massivo são $\alpha_s = 0.4$ e $m_g = 7.30$ MeV (linha roxa mais tracejada) e $\alpha_s = 1.0$ e 185.64 MeV (linha laranja ponto-tracejada). Para um $\alpha_s = 0.1$ (linha verde sólida) o valor do momento magnético não pode ser atingido com nenhum valor de m_g . De fato, para qualquer valor abaixo de $\alpha_s = 0.38$ o momento magnético não pode ser atingido para qualquer m_g diferente de zero, o que nos traz de volta ao caso da QCD perturbativa (Ver Fig. (33c)). O ponto preto que se encontra na linha azul sólida (horizontal) indica o valor extremo de $\alpha_s = 4$ e $m_g = 703.83$ MeV para o qual o modelo Massivo está de acordo com o valor do momento magnético (Ver Tab. 10).

Esses valores (ingênuos) estimados para o termo de massa do glúon m_g , no modelo massivo, estão dentro da faixa de valores obtidos por outros métodos mais complexos ($m_g = 500 \pm 200$ MeV), como as Equações de Schwinger–Dyson e QCD na rede (Aguilar; Mihara; Natale, 2002; Bicudo; Oliveira, 2010; Aguilar *et al.*, 2020). Mesmo assim, isto não significa que nossos resultados sejam valores definitivos para a massa do glúon. Por outro lado, na referência (Deur; Brodsky; Teramond, 2016), um grande número de valores obtidos para α_s em momento zero são mostrados, dentro dos quais escolhemos um intervalo entre 0 e 4. Este último é um valor extremo. Como já discutido, nos artigos (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019) foi mostrado que o glúon massivo (Curci-Ferrari) pode adotar um tratamento perturbativo para calcular o propagador de glúons devido, entre outras coisas, ao comportamento do acoplamento no IR (QCD na rede) (Bogolubsky *et al.*, 2009; Duarte; Oliveira; Silva, 2016)). Nesse modelo, o parâmetro de expansão é proporcional ao acoplamento tal que $\lambda_{CF} = 3\alpha_s/4\pi$ (para SU(3)). Portanto, mesmo que a constante de acoplamento não seja pequena, o modelo pode ser tratado através da teoria

Tabela 10 - Ajuste do momento magnético do próton para um acoplamento fixo

	$\alpha_s \parallel \lambda_{CF}$	0.38 $\parallel$ 0.091	0.40 $\parallel$ 0.095	1.00 $\parallel$ 0.239	4.00 $\parallel$ 0.955
Mass	m_g [MeV]	0	7.30	185.64	703.83
G.Z.	γ [MeV]	0	9.70	179.77	516.80

Legenda: Valor dos parâmetros de massa onde o resultado dos modelos QCD, Massivo e GZ concordam com o valor experimental μ_p .

Fonte: O autor, 2023.

de perturbação devido ao valor pequeno do parâmetro λ_{CF} (Como vimos no Cap. 2, o parâmetro de expansão efetivo $\tilde{\lambda}_{CF}(p)$ é menor que λ_{CF} (Tissier; Wschebor, 2011; Gracey *et al.*, 2019)).

Para $\alpha_s = 4$, temos que λ_{CF} teria um valor próximo a 0.95 que tomamos como valor extremo no cálculo do momento magnético (Tabela 8). Pensando em tais resultados no modelo Curci-Ferrari, poderíamos buscar resultados para α_s maiores que 1 ($\lambda_{CF} < 1$), pois aparentemente em alguns casos o regime de baixa energia da QCD poderia ser explorado de forma um tanto perturbativa, mas também tendo em mente que o comportamento infravermelho da constante de acoplamento não é totalmente compreendido.

4.4.2 CQM – Modelo GZ

Assim como no modelo massivo, no modelo GZ começaremos usando $m_q = 336$ MeV para calcular o momento magnético do próton através do CQM. Usando novamente a Eq. (236), onde $\bar{F}_2(0)$ agora vem da Eq. (220), analisaremos o comportamento do momento magnético no CQM modificado com as correções do modelo GZ. Incluiremos também o caso da QCD perturbativa.

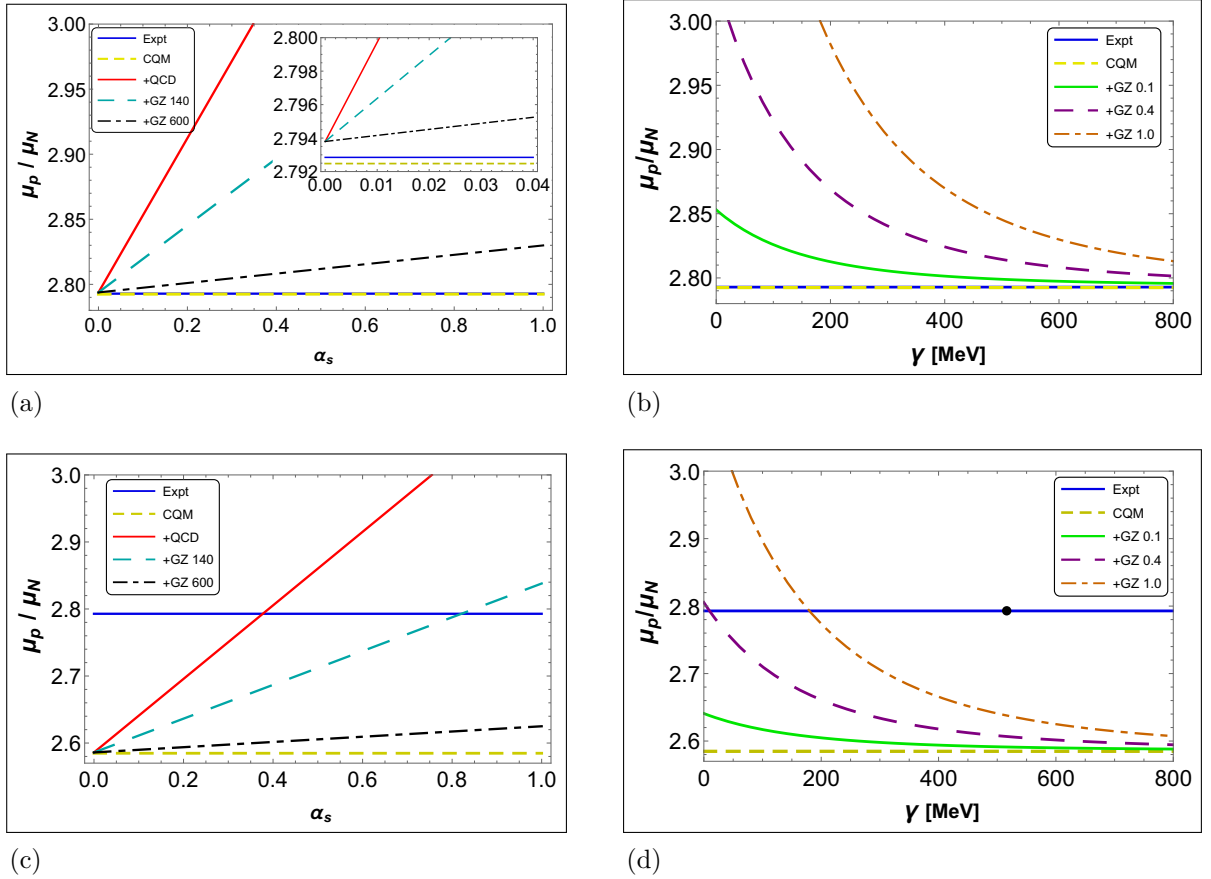
Na Fig. (34a) podemos ver que o momento magnético do próton calculado com o CQM (linha tracejada amarela) é próximo do valor experimental (linha sólida azul (horizontal)) tal como vimos no caso do modelo massivo. Como já mencionamos, esta situação nos deixa com um μ_p^{+QFT} maior que μ_p^{CQM} e μ_p^{Expt} . Como a função $\bar{F}_2^{GZ}(0)$ se comporta de maneira muito semelhante ao $\bar{F}_2(0)$ do modelo massivo (Ver Figs. (31) e (32)), esperamos que o momento magnético proveniente do modelo GZ se comporte de forma semelhante ao modelo massivo. De fato, isso pode ser verificado comparando as sub-figuras das Figs. (33) e (34).

Da Fig. (34a) podemos apreciar um valor maior para o momento magnético calculado com correções QCD (linha sólida vermelha (oblíqua)) e GZ do que para o μ_p^{CQM} sem correções vindas da QFT. Para o modelo GZ, escolhemos um termo de massa de Gribov γ igual a 140 MeV (linha celeste mais tracejada) e 600 MeV (linha preta ponto tracejada) tal como fizemos para o termo de massa no modelo massivo. Desta vez também vemos

que para cada valor de massa de Gribov a partir de zero, há uma diminuição no valor do momento magnético e ao mesmo tempo um crescimento linear em função da constante de acoplamento. Como o momento magnético GZ se comporta de maneira semelhante ao do modelo massivo, a escolha de $m_q = 336$ MeV nos deixa com um momento magnético sempre maior que o valor experimental mesmo que a massa de Gribov aumente (lembre-se que a contribuição da QED tem um valor fixo).

Na Fig. (34b) o momento magnético é expressado como uma função da massa de Gribov para cada valor fixo do acoplamento. O resultado para μ_p^{CQM} (linha tracejada amarela) tem concordância com o valor experimental (linha azul sólida (horizontal)) tal como na Fig. (34a). O resultado da QCD perturbativa corresponde a $\gamma = 0$ para cada

Figura 34 - Momento magnético do próton no CQM-GZ



Legenda: Comparação entre o momento magnético do próton (experimental –Expt) (μ_p) e, os resultados do CQM e do CQM modificado pela QCD e o GZ. Para $m_q = 336$ MeV: (a) μ_p vs α_s (b) μ_p vs m_g . Para $m_q = 363$ MeV: (c) μ_p vs α_s . (d) μ_p vs m_g . O ponto preto é para $\alpha_s = 4$ e $\gamma = 516.80$ MeV. Mais detalhes no texto principal e nas tabelas 9 e 10.

Fonte: O autor, 2023.

valor fixo do acoplamento. Para o modelo GZ, os valores definidos para α_s foram 0.1

(linha verde s3lida), 0.4 (linha roxa mais tracejada) e 1.0 (linha laranja ponto tracejada). Tal como para o caso massivo, para cada valor de acoplamento fixo observamos uma diminui33o do momento magn33tico 33 medida que o valor da massa de Gribov aumenta.

Agora continuaremos nossa an33lise usando o valor $m_q = 363$ MeV. Das Figs. (34c) e (34d) notamos que o μ_p^{CQM} calculado (linha amarela tracejada) 33 um pouco diferente do valor experimental (linha s3lida azul (horizontal)) tal como vimos na an33lise do modelo Massivo para $m_q = 363$ MeV. Novamente, poder33amos tentar preencher a informa33o faltante com as contribui33es vindas da GZ (Eq. (236)) tal como fizemos para o modelo massivo, e atingir tanto o momento magn33tico quanto o valor da massa do pr33ton.

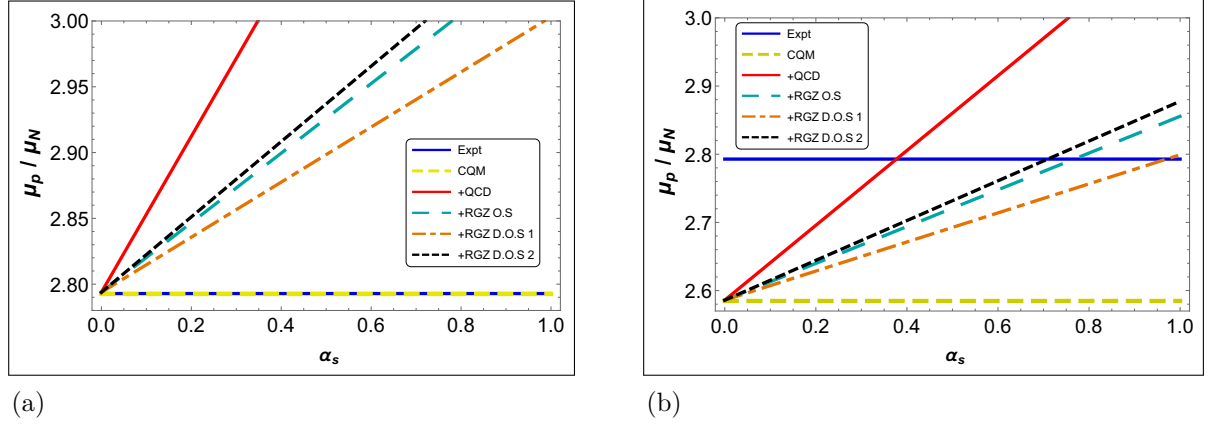
Como n33o alteramos as condi33es para o caso da QCD perturbativa, sua concord33ncia permanece para $\alpha_s = 0.38$ (Tabela (9) para $m = \gamma = 0$) tal como vemos na Fig. (34c). Para o modelo GZ, usando (novamente) um valor de γ igual a 140 MeV (linha azul mais tracejada) e 600 MeV (linha preta ponto tracejada), a concord33ncia 33 obtida quando α_s 33 0.82 e 5.3, respectivamente. O primeiro valor 33 muito semelhante ao obtido para o caso massivo, mas o segundo 33 muito maior (consulte a tabela (9)).

Na Fig. (34d) expressamos o μ_p^{QFT} como uma fun33o da massa de Gribov para cada acoplamento fixo como fizemos na Fig. (34b). Mais uma vez, $\gamma = 0$ corresponder33 ao caso da QCD perturbativa. Os valores obtidos para o modelo GZ s3o $\alpha_s = 0.4$ e $\gamma = 9.70$ MeV (linha roxa mais tracejada) e $\alpha_s = 1.0$ e 179.77 MeV (linha laranja menos tracejada). Em compara33o com o modelo massivo, o primeiro valor de γ 33 maior que o valor de m_g , mas o segundo 33 menor. Isso pode ser entendido a partir das Figs. (31) e (32) onde para cada valor fixo de α_s , quando o termo de massa m 33 pequeno ($a = m^2/m_q^2$), seja m_g ou γ , o valor da fun33o $\bar{F}_2^{GZ}(0)$ 33 maior que a fun33o $\bar{F}_2(0)$ massiva, e quando o termo de massa m 33 maior, a fun33o $\bar{F}_2^{GZ}(0)$ 33 menor que a fun33o $\bar{F}_2(0)$ massiva.

Tal como na an33lise do modelo massivo, para qualquer valor abaixo de $\alpha_s = 0.38$, o momento magn33tico n33o pode ser atingido para qualquer valor do termo de massa a n33o ser zero, porque no limite de $\gamma \rightarrow 0$ voltamos ao caso da QCD perturbativa onde a concord33ncia 33 obtida para $\alpha_s = 0.38$ (Ver Fig. (34c)).

Lembrando que poder33amos pensar em buscar resultados de $\alpha_s > 1$, como discutido para o modelo massivo (Curci-Ferrari), colocamos um ponto preto na linha azul s3lida (horizontal) da Fig. (34d) para indicar a concord33ncia do momento magn33tico do modelo GZ com o valor experimental, sendo o par33metro definido $\alpha_s = 4$ e $\gamma = 516.80$ MeV, onde γ 33 menor que o termo de massa m_g (Veja Tabela 10) devido ao comportamento das suas fun33es $\bar{F}_2(0)$, como explicamos anteriormente.

Figura 35 - Momento magnético do próton no CQM–RGZ



Legenda: Comparação entre o momento magnético do próton (experimental –Expt) (μ_p) e, os resultados do CQM e do CQM modificado pela QCD e o RGZ. Para $m_q = 336$ MeV: (a) μ_p vs α_s . Para $m_q = 363$ MeV: (b) μ_p vs α_s . Mais detalhes no texto principal.

Fonte: O autor, 2023.

4.4.3 CQM – Modelo RGZ

Finalmente, para o modelo Gribov–Zwanziger refinado, começaremos usando o valor $m_q = 336$ MeV e, em seguida, o valor $m_q = 363$ MeV para calcular o momento magnético do próton através do CQM. Mais uma vez, usando a Eq. (236), onde desta vez $\bar{F}_2(0)$ vem da Eq. (228), analisaremos o comportamento do momento magnético RGZ através da abordagem CQM modificada. Incluiremos também o caso da QCD perturbativa.

O modelo RGZ tem três parâmetros que podem ser ajustados para reproduzir o propagador do glúon na rede. De momento, usaremos apenas os valores de QCD na rede que chamamos de O.S DATA, D.O.S 1 e D.O.2 DATA na seção anterior (Tabelas 2 e 8).

Como vimos para o modelo Massivo e GZ, usar $m_q = 336$ MeV nos deixa com um momento magnético maior que o resultado vindo do CQM (linha amarela tracejada) e do valor experimental (linha azul sólida (horizontal), que não é exceção para o modelo RGZ como vemos na Fig. (35a). Os resultados semelhantes para O.S DATA e D.O.S 2 DATA, devem-se ao valor semelhante de seus parâmetros (Tabela 7) e isso é refletido no resultado semelhante do seu fator $\bar{F}_2(0)$, com valores de 0.2229 e 0.2416, respectivamente, tal como vimos na Tabela 8. Como consequência, o valor do seu momento magnético, vindo do CQM modificado com correções RGZ, é ligeiramente semelhante. Para D.O.S 1 DATA, $\bar{F}_2(0)$ foi 0.1768 (Tabela 8), que não é muito menor que os resultados de O.S DATA e D.O.S 2 DATA, mas como o momento magnético cresce com o acoplamento, o resultado D.O.S 1 acaba ficando cada vez mais distante dos demais resultados à medida que o acoplamento cresce tal como podemos ver na Fig. (35). A combinação dos parâmetros RGZ utilizados nos dá um valor para o momento magnético dentro do valor obtido para

Tabela 11 - Variação dos parâmetros RGZ para calcular o μ_p no CQM-RGZ

$\alpha_s \parallel \lambda_{CF}$	0.40 $\parallel$ 0.095	1.00 $\parallel$ 0.239	4.00 $\parallel$ 0.955
$\{m, \lambda\}$ fixed $\parallel M$ [GeV]	1.6234	1.5870	1.3662
$\{M, \lambda\}$ fixed $\parallel m$ [GeV]	1.4487 i	1.4178 i	1.2013 i
$\{M, m\}$ fixed $\parallel \lambda$ [GeV]	1.5064	1.5231	1.6262

Legenda: Valores $\{M, m, \lambda\}$ para $m_q = 363$ MeV. Os valores fixos são os de D.O.S 1 DATA (Tab. (7)).

Fonte: O autor, 2023.

QCD (linha vermelha sólida) e não maior que isso como poderia acontecer para uma certa combinação deles como já vimos acontecer no fator $\bar{F}_2(0)$ na Fig. (32a).

Para o valor de $m_q = 363$ MeV, o momento magnético RGZ pode obter uma concordância para algum valor de α_s devido a que o μ_p^{CQM} é menor que o valor experimental como podemos ver na Fig. (35b) (linha amarela tracejada). A concordância corresponde a α_s igual a 0.77 e 0.71 para o O.S DATA e D.O.S 2 DATA, respectivamente. Esses valores α_s são semelhantes devido a que os valores dos parâmetros para O.S e D.O.S 2 DATA são semelhantes conforme já foi discutido. Enquanto ao caso D.O.S 1, o valor $\alpha_s = 0.97$ é maior do que nos outro casos devido ao menor valor da sua função $\bar{F}_2(0)$ o que faz necessário um valor maior de α_s para atingir o momento magnético.

Por outro lado, se no modelo RGZ ao invés de usar os valores de QCD na rede deixamos “livres” os seus parâmetros podemos explorar como se comporta o momento magnético RGZ para uma maior gama de valores. O comportamento do momento magnético no CQM-RGZ, para diferentes valores de $\{M, m, \lambda\}$ ([GeV]) e uma massa de quark constituinte $m_q = 363$ MeV, pode ser visto na Fig. (36).

Nas Figs. (36a) e (36b) temos o comportamento do momento magnético para valores fixos do parâmetro “m”. Nesses casos decidimos usar valores de $m = 0.5i, 1.4195i$ e $2.0i$, que correspondem aos planos verde, vermelho e amarelo, respectivamente. Esses valores estão devidamente indicados nas figuras também.

Nesses casos podemos ver que para cada valor fixo de m, existem muitos valores que podem ajudar a atingir o valor experimental do momento magnético (plano preto). M e λ aumentam juntos mas M aumenta em maior medida.

O valor $m = 1.4195i$, não foi escolhido aleatoriamente, ele corresponde ao valor de “m” para D.O.S 1 DATA (tabela 7), e isso foi feito com a intenção de comparar os resultados para os diferentes valores dos parâmetros RGZ com os já conhecidos.

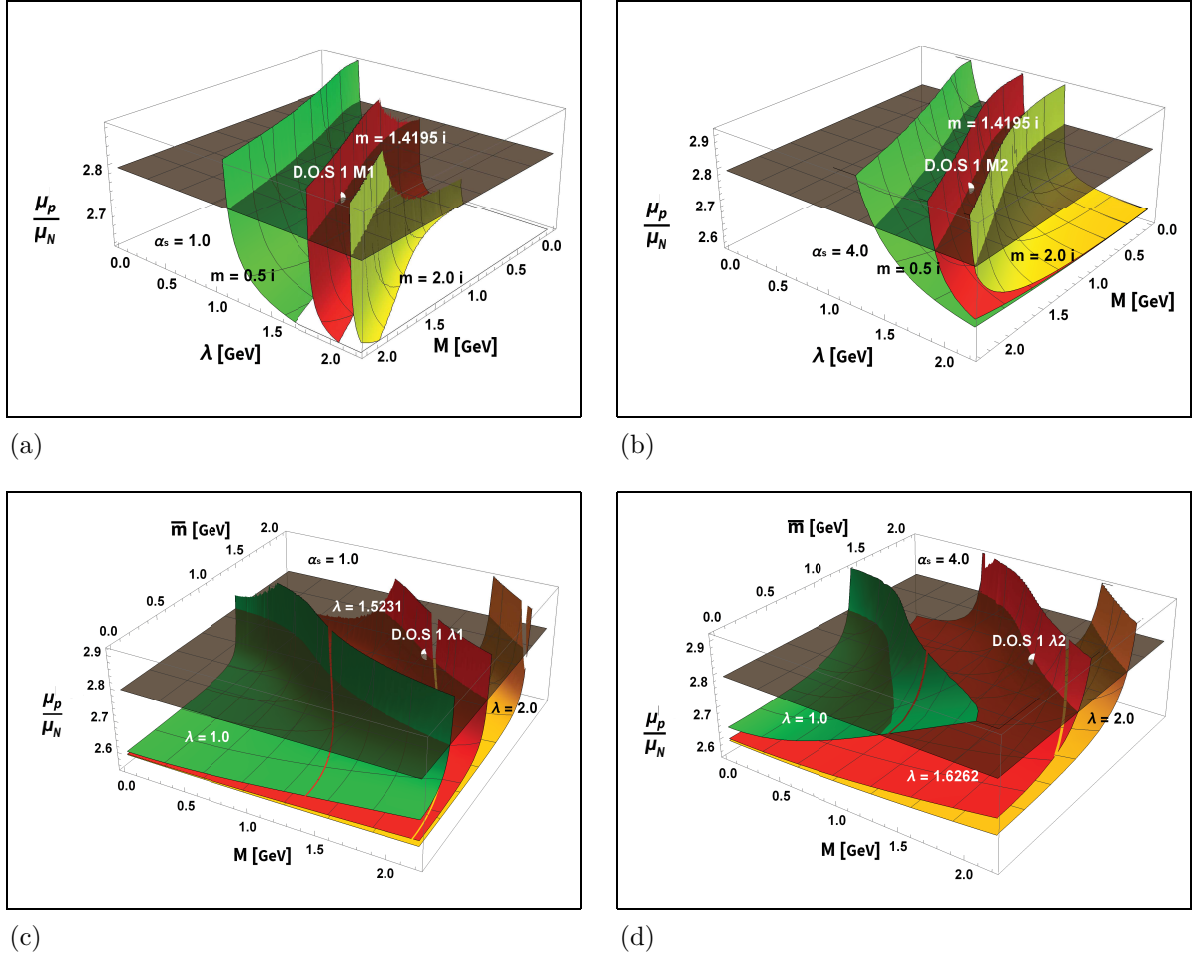
Nas Figs. (36a) e (36b), foi usado um valor de $\alpha_s = 1.0$ e $\alpha_s = 4.0$, respectivamente, com a finalidade de ver um pouco melhor a variação do comportamento do momento magnético RGZ. Nessas figuras, respectivamente, as siglas D.O.S 1 M1 e D.O.S 1 M2 correspondem aos valores de M de M1= 1.5870 e M2= 1.3662, respectivamente, para os valores fixos do D.O.S 1 DATA, $m = 1.4195i$ e $\lambda = 1.5222$ com os quais é possível reproduzir o momento magnético do próton. Esses valores são mostrados na tabela 11.

Destacamos que o valor de M1 é parecido com o valor de $M = 1.5890$ do D.O.S 1 DATA.

Nas Figs. (36c) e (36d) também mostramos o comportamento do momento magnético, mas neste caso é para valores fixos do parâmetro λ , para o qual decidimos usar valores de $\lambda = 1.0, 1.5231(1.6262)$ e 2.0 , que correspondem aos planos verde, vermelho e amarelo, respectivamente. Esses valores estão devidamente indicados nessas figuras.

Nas Figs. (36c) e (36d), onde usamos valores de $\alpha_s = 1.0$ e $\alpha_s = 4.0$, respectivamente, as siglas D.O.S 1 $\lambda 1$ e D.O.S 1 $\lambda 2$ correspondem aos valores de λ de $\lambda 1 = 1.5231$ e $\lambda 2 = 1.6262$, respectivamente, para os valores fixos do D.O.S 1 DATA, $M = 1.5890$ e $m = 1.4195 i$ com os quais também é possível reproduzir o momento magnético do próton. Esses valores são mostrados na tabela 11. Cabe destacar também que o valor de $\lambda 2$ é muito parecido ao valor de $\lambda = 1.5222$ do D.O.S 1 DATA.

Figura 36 - Momento magnético do próton no CQM-RGZ variando os parâmetros RGZ



Legenda: μ_p para diferentes valores de $\{M, m, \lambda\}$ ($\overline{m} = im$), α_s e $m_q = 363$ MeV. Com m fixo: (a) $\alpha_s = 1$ e (b) $\alpha_s = 4$. Com λ fixo (c) $\alpha_s = 1$ e (d) $\alpha_s = 4$. O plano preto é o valor μ_p^{Expt} . Os pontos brancos correspondem ao caso em que dois parâmetros de massa assumem os valores dos ajustes da rede (Tab. (7)), enquanto o terceiro pode ser encontrado na (Tab. (11)).

Fonte: O autor, 2023.

Tabela 12 - Massa do quark constituinte no CQM-QCD

	α_s	$\parallel \lambda_{CF}$	m_q [MeV]	M_p [MeV]	% ΔM_p
QCD	0.4	$\parallel$ 0.095	364.63	943.89	0.60
	4.0	$\parallel$ 0.955	621.28	1713.85	82.7

Legenda: Conjunto de parâmetros usado para ajustar o μ_p através do CQM-QCD para um α_s fixo.

Fonte: O autor, 2023.

4.5 Fixando a massa do quark constituinte ao resultado do CQM – QCD

Já que no modelo CQM a massa do quark constituinte é uma função de observáveis tais como o valor do momento magnético ou a massa do próton (hádrons em geral), poderíamos explorar variações para a massa dos quarks constituintes e ver como isso afeta os modelos que estamos usando. Neste caso, podemos fixar o valor da massa do quark constituinte através do CQM modificado com as correções da QFT, μ_p^{+QFT} (Eq. (236)). Começaremos com o resultado para a QCD perturbativa (Eqs. (212)) e analisaremos como os valores dos parâmetros dos modelos Massivo, GZ e RGZ são afetados.

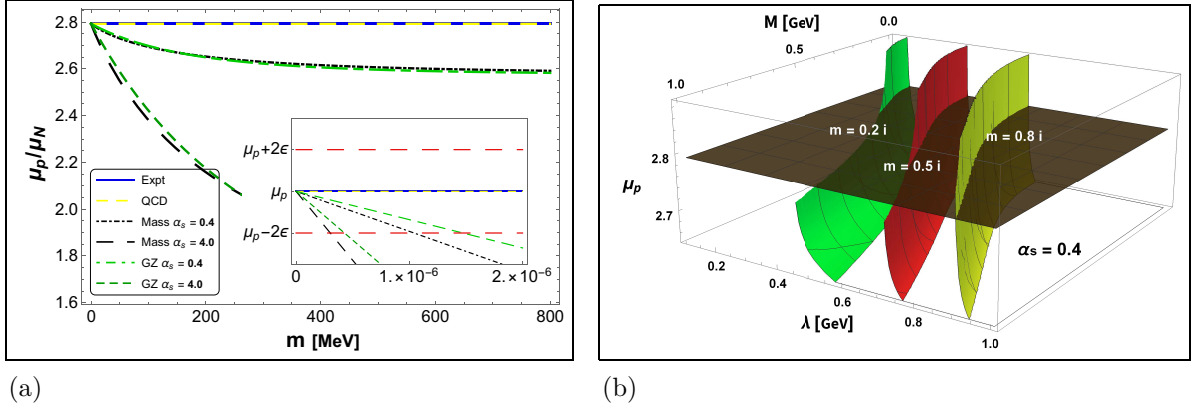
Lembrando que o acoplamento da QCD não possui um valor único para $p^2 = 0$, vamos escolher alguns valores para poder realizar a nossa análise. Escolhendo um valor de $\alpha_s = 0.4$, é necessária uma massa do quark constituinte igual a $m_q = 364.63$ MeV⁸⁸ para reproduzir o momento magnético do próton no caso perturbativo. Com essa escolha de parâmetros podemos atingir ao mesmo tempo o valor do momento magnético e a massa do próton (com uma discrepância de 0.6%, (Eq. (199), $M_p \approx 3m_q - 150$)) (Tab. 12).

Como já mencionamos, mesmo quando o acoplamento da QCD seja grande o seu parâmetro de expansão pode ser pequeno, tal como discutimos para o parâmetro λ_{CF} do modelo CF. Escolhemos um valor extremo para $\alpha_s = 4.0$ que corresponde a $\lambda_{CF} = 0.955$. Para ajustar o μ_p através do CQM – QCD para $\alpha_s = 4.0$ é necessária uma massa do quark constituinte de $m_q = 621.28$ MeV. Esse valor de massa constituinte é maior do que o usado para reproduzir a massa do próton através do CQM. Portanto, para esses parâmetros não podemos atingir o valor do momento magnético e a massa do próton ao mesmo tempo, onde para este último há uma discrepância de 82.7% (Tab. 12).

Devido a essa discrepância, vamos nos concentrar principalmente no caso $\alpha_s = 0.4$ e $m_q = 364.63$ MeV. Como mencionamos na análise dos modelos confinantes, seus termos de massa têm um efeito supressor no valor do $\bar{F}_2(0)$ e portanto no valor do seu momento magnético calculado a partir do CQM modificado. Logo, se fixarmos o resultado da QCD para ser compatível com o momento magnético do próton, os outros modelos nos darão

⁸⁸ Esse valor está muito próximo do valor $m_q = 363$ MeV já que ele, junto ao valor $\alpha_s = 0.38$, foram usados para reproduzir a massa do próton através do CQM como vimos anteriormente.

Figura 37 - Momento magnético do próton para uma massa constituinte fixada no CQM-QCD



Legenda: Ajuste do μ_p através do CQM mais correções de QCD (linha tracejada amarela) com o momento magnético experimental (linha azul, Expt). Para o conjunto de parâmetros fixos de QCD da Tabela 12: (a) Comportamento Massivo e GZ (ϵ é o erro experimental do μ_p (Zyla *et al.*, 2020)), e (b) comportamento no caso RGZ com seus parâmetros livres para $\alpha_s = 0.4$.

Fonte: O autor, 2023.

um valor menor do momento magnético à medida que seus parâmetros de massa aumentam. Isto pode ser apreciado de uma forma mais simples para os modelos Massivo e GZ na Fig. (37a) que apenas obtêm uma concordância com o momento magnético para um termo de massa m (m_g ou γ) da ordem de $\mathcal{O}(10^{-7})$ ($\alpha_s = 4.0$, linhas ponto-tracejadas preta e verde) até $\mathcal{O}(10^{-6})$ MeV ($\alpha_s = 0.4$, linhas tracejadas pretas e verdes), praticamente no valor zero dos seus parâmetros de massa (Sub-Fig. (37.a)), ou seja, quando tais modelos tendem a comportar-se como o caso perturbativo.

Para o caso do modelo RGZ, a situação pode ser diferente do que para os casos Massivo e GZ, já que ao contrario desses modelos, os termos de massa da RGZ não sempre tinham um efeito supressor no fator de forma RGZ, $F_2^{RGZ}(0, a, b)$ (Eq. (229)). Isso acontecia para combinações de valores pequenos dos parâmetros a e b da função $F_2^{RGZ}(0, a, b)$, sendo $a = (M^2 - \bar{m}^2)/2m_q^2$ e $b = \sqrt{4\lambda^4 - (M^2 + \bar{m}^2)^2}/2m_q^2$ (com $\bar{m}^2 = -m^2 > 0$), onde essa função podia ter um valor igual o maior do que o caso perturbativo (0.5). Por tanto, podemos obter uma concordância com o resultado fixado a partir do caso perturbativo para diferentes combinações dos parâmetros RGZ e os valores fixos de $\alpha_s = 0.4$ e $m_q = 364.63$ MeV. Isso pode ser visto na Fig. (37b), começando a partir de valores pequenos para o conjunto $\{M, m, \lambda\}$, que não vai poder reproduzir o propagador do glúon na rede como os valores dos conjuntos O.S e D.O.S, mas esses valores podem ir aumentando a fim de produzir o momento magnético do próton e em algum ponto reproduzir o propagador do glúon na rede. Algo semelhante a esse comportamento foi visto nas Figs. (36) da subseção anterior (4.4.3).

Tabela 13 - Massa do quark constituinte a partir do CQM-MM. Caso GZ

$\alpha_s = 0.4 \parallel \lambda_{CF} = 0.095$					$\alpha_s = 4.0 \parallel \lambda_{CF} = 0.955$			
m_g	m_q	γ	M_p	$\% \Delta M_p$	m_g	γ	M_p	$\% \Delta M_p$
300	342.94	263.07	878.82	6.34	418.13	273.39	1104.40	17.71
500	339.96	392.14	869.89	7.29	380.15	402.20	990.44	5.56
700	338.58	505.85	865.73	7.73	363.22	514.76	939.67	0.15

Legenda: Parâmetros usados para ajustar o μ_p através do CQM com correções do modelo massivo usando um valor fixo para a massa do glúon. As massas estão em potências de MeV.

Fonte: O autor, 2023.

4.6 Fixando a massa do quark constituinte aos resultados do CQM-QFT (modelos confinantes)

Assim como fixamos o valor da massa do quark constituinte através do CQM modificado com correções da QCD na seção anterior, podemos fixar o valor da massa do quark constituinte a partir dos valores dos parâmetros de um dos modelos estudados, e analisar as consequências nos parâmetros dos outros modelos.

4.6.1 Modelo Massivo

Em QCD na rede (Bogolubsky *et al.*, 2009; Oliveira; Silva, 2012; Duarte; Oliveira; Silva, 2016) é mostrado que o propagador do glúon no infravermelho se comporta como um propagador com uma massa efetiva, e embora não tenhamos um valor exato para a massa do glúon nessa região, na literatura podemos encontrar que a massa do glúon é de aproximadamente 500 ± 200 MeV (Aguilar; Mihara; Natale, 2002) (ver também as referências citadas ali). Então, para o caso do modelo do glúon massivo vamos explorar os valores que os parâmetros dos outros modelos adotam para tal faixa da massa do glúon.

Escolhemos ajustar o momento magnético do próton no caso massivo para um valor de $\alpha_s = 0.4$ e os valores de massa do glúon de 300, 500 e 700 [MeV], que fixam a massa do quark constituinte em 342.94, 339.96 e 338.58 [MeV], respectivamente. Com esses respectivos valores obtemos um valor da massa do próton ($M_p \approx 3m_q - 150$) de 878.82, 869.89 e 865.73 [MeV], com uma discrepância de 6.34, 7.29 e 7.73 % do seu valor experimental, respectivamente (Veja a tabela 13).

Para o caso extremo de $\alpha_s = 4.0$, a massa do quark constituinte correspondente aos valores da massa do glúon de 300, 500 e 700 [MeV] é 418.13, 380.15 e 363.22 [MeV], respectivamente. Por sua vez, esses valores produzem uma massa do próton de 1104.40, 990.44 e 939.67 com uma discrepância de 17.71, 5.56 e 0.15 %, respectivamente (Veja a tabela 13). Em geral, o ajuste para $\alpha_s = 0.4$ oferece melhores resultados do que o ajuste

Tabela 14 - Massa do quark constituinte a partir do CQM-MM. Caso perturbativo e RGZ

DATA	m_q	$\alpha_s = 0.4 \parallel \lambda_{CF} = 0.095$		$\alpha_s = 4.0 \parallel \lambda_{CF} = 0.955$	
		μ_p	$\% \mu_p$	μ_p	$\% \mu_p$
pQCD	342.94	2.9695	6.32	4.1498	48.59
	339.96	2.9955	7.26	4.5644	63.43
	338.58	3.0078	7.70	4.7771	71.05
O.S	342.94	2.8436	1.82	3.3518	20.01
	339.96	2.8673	2.67	3.5586	27.42
	338.58	2.8785	3.07	3.6631	31.16
D.O.S 1	342.94	2.8214	1.02	3.1185	11.66
	339.96	2.8452	1.87	3.3301	19.24
	338.58	2.8564	2.28	3.4373	23.08
D.O.S 2	342.94	2.8524	2.13	3.4388	23.13
	339.96	2.8761	2.98	3.6464	30.56
	338.58	2.8873	3.38	3.7511	34.31

Legenda: Parâmetros usado para ajustar o μ_p através do CQM com correções do modelo massivo para um valor fixo de massa do glúon. As massas estão em potências de MeV.

Fonte: O autor, 2023.

para $\alpha_s = 4.0$ para a massa do quark constituinte e a massa do próton.

Tendo fixado, a partir do modelo massivo, a massa do quark constituinte que reproduz o momento magnético do próton, podemos analisar como isso afeta os outros modelos. No caso do modelo GZ, para $\alpha_s = 0.4$, os valores da massa de Gribov que reproduzem o μ_p são: 263.94, 392.14 e 338.58 MeV, para uma massa do quark constituinte de 342.94, 339.96 e 338.58 MeV, respectivamente. Os valores da massa do Gribov para o ajuste em $\alpha_s = 4.0$ podem ser achados na tabela 13.

Para o caso perturbativo e o conjunto de dados do RGZ, os valores mais interessantes são para $\alpha_s = 0.4$ já que a diferença entre o seu momento magnético e o valor experimental é percentualmente pequena. Já para a configuração de $\alpha_s = 4.0$ os valores do momento magnético se afastam do resultado experimental tal como podemos ver na tabela 14.

4.6.2 Modelo GZ

No caso do modelo GZ sabemos que o seu propagador não reproduz o comportamento infravermelho do propagador do glúon na rede. Isso dificulta obter um valor para a massa de Gribov. Porém, supondo que tivéssemos algum valor semelhante ao caso massivo, vamos designar um valor para a massa de Gribov de 300, 500 e 700 [MeV], onde, junto ao valor de $\alpha_s = 0.4$, o momento magnético do próton calculado no caso GZ com esses valores vai fixar a massa do quark constituinte no valor de 341.86, 338.63 e 337.38

Tabela 15 - Massa do quark constituinte a partir do CQM-GZ. Caso Massivo

$\alpha_s = 0.4 \parallel \lambda_{CF} = 0.095$					$\alpha_s = 4.0 \parallel \lambda_{CF} = 0.955$			
γ	m_q	m_g	M_p	$\%M_p$	m_q	m_g	M_p	$\%M_p$
300	341.86	354.17	875.59	6.68	407.91	338.58	1073.73	14.44
500	338.63	689.19	865.89	7.71	364.91	672.53	944.73	0.69
700	337.38	1089.95	862.14	8.11	349.80	1075.00	899.40	4.14

Legenda: Parâmetros usados para ajustar o μ_p através do CQM com correções do modelo GZ para um valor fixo da massa do Gribov. As massas estão em potências de MeV.

Fonte: O autor, 2023.

MeV, respectivamente. Com esses valores, e usando novamente a Eq. (199), obtemos um valor de massa do próton de 875.59, 865.89 e 862.14 MeV, com uma discrepância do 6.68, 7.71 e 8.11 % do seu valor experimental, respectivamente (Veja a tabela 15).

Para o caso extremo de $\alpha_s = 4.0$, a massa do quark constituinte, correspondente ao valor de 300, 500 e 700 [MeV] da massa de Gribov, é 407.91, 364.91 e 349.80 [MeV], o que produz uma massa do próton de 1073.73, 944.73 e 899.40 MeV com uma discrepância do 14.44, 0.68 e 4.14 %, respectivamente

Tendo fixado, a partir do modelo GZ, a massa do quark constituinte que reproduz o μ_p , também podemos analisar como isso afeta os demais modelos. Neste caso só olharemos para o modelo massivo, onde os valores da massa do glúon que reproduzem o μ_p , junto ao valor de $\alpha_s = 0.4$, são: 354.17, 689.19 e 1089.95 MeV, para uma massa de quark constituinte de 341.86, 338.63 e 337.38 MeV, respectivamente. Os valores de massa do glúon para o ajuste em $\alpha_s = 4.0$ podem ser encontrados na tabela 15.

Poderíamos analisar os valores para o caso perturbativo e o conjunto de dados RGZ, tal como fizemos a partir do modelo massivo (Tabela 14), mas a fim de não tornar muito pesada esta análise não colocaremos uma tabela de valores já que lembrando que o caso Massivo e GZ se comportam muito parecido, ambos os resultados serão muito parecidos também.

4.6.3 Modelo RGZ

Neste caso, ao invés de usar a massa do glúon ou de Gribov para fixar a massa do quark constituinte, usamos o conjunto de dados do modelo RGZ, para $\alpha_s = 0.4$, obtendo um valor de 349.49, 346.59 e 350.65 MeV para a massa constituinte para o conjunto de dados O.S, D.O.S 1 e D.O.S 2 DATA, respectivamente. Com esses valores, e usando novamente a Eq. (199), obtemos um valor da massa do próton igual a 898.46, 889.76 e 901.95 MeV, com uma discrepância do 4.24, 5.17 e 3.87 % respeito ao seu valor experimental, respectivamente (Veja a tabela 16).

Tabela 16 - Massa do quark constituinte a partir do CQM-RGZ. Caso Massivo e GZ

DATA	$\alpha_s = 0.4 \parallel \lambda_{CF} = 0.095$					$\alpha_s = 4.0 \parallel \lambda_{CF} = 0.955$		
	m_q	m_g	γ	M_p	$\%M_p$	m_q	M_p	$\%M_p$
O.S	349.49	128.12	130.92	898.46	4.24	560.89	1532.68	63.35
D.O.S 1	346.59	183.81	176.90	889.76	5.17	491.56	1324.67	41.18
D.O.S 2	350.65	110.78	115.74	901.95	3.87	587.00	1610.98	71.70

Legenda: Parâmetros usados para ajustar o μ_p através do CQM com correções do modelo RGZ para um valor fixo dos parâmetros RGZ. As massas estão em potências de MeV.

Fonte: O autor, 2023.

Tendo fixado, a partir do modelo RGZ, a massa do quark constituinte que reproduz o μ_p , analisaremos como isso afeta os termos de massa dos modelos Massivo e GZ. Para o modelo Massivo, os valores de massa de glúon que reproduzem o μ_p são 128.12, 183.81 e 110.78 MeV, enquanto que para o modelo GZ, os valores da massa de Gribov que reproduzem o μ_p são 130.92, 176.90 e 115.74 MeV, todos esses valores correspondem às configurações dos DADOS O.S, D.O.S 1 e D.O.S 2, respectivamente.

Para a configuração $\alpha_s = 4.0$ e o conjunto de dados RGZ, os resultados obtidos para a massa do quark constituinte não são muito interessantes já que quando calculamos a massa do próton a partir deles, os resultados ultrapassam o seu valor experimental, tal como podemos ver na tabela 16.

Tendo estudado e analisado o momento magnético do próton a partir do CQM modificado com as correções vindas do QPV para os diferentes modelos usados, perceberemos que existe uma grande liberdade na escolha dos valores dos parâmetros, mas que mesmo assim podemos encontrar valores para o termo de massa do glúon que seja compatível com os resultados obtidos por outros meios (Cap. 2). Por outro lado, os pólos complexos vindos dos propagadores dos modelos estudados não tiveram um impacto não físico no momento dos quarks nem do próton, pelo menos dentro dos limites das aproximações feitas.

CONCLUSÕES

Hoje, após o longo caminho de predições teóricas, resultados experimentais, cálculos fenomenológicos e simulações numéricas, que deram forma e consolidaram a cromodinâmica quântica como a teoria que pode descrever as propriedades da interação forte em função de quarks e glúons, ainda carecemos de uma descrição satisfatória sobre o mecanismo por trás do fenômeno que mantém os quarks e os glúons confinados em estados ligados de hádrons. Esta questão é ainda hoje um problema em aberto. Porém, como discutido ao longo desta tese, o problema do confinamento é uma fonte de estudo muito ativa para a qual existem muitos enfoques ou abordagens que se centram, especialmente, na informação não perturbativa da região de baixas energias da QCD, onde é conjecturado que o confinamento ocorre.

Nesta tese, estudamos principalmente três desses enfoques: Gribov–Zwanziger (GZ), Gribov–Zwanziger refinado (RGZ) e Curci-Ferrari (CF, ou modelo do glúon massivo). Como discutido no Cap. 2, tais modelos são influenciados, em especial, pelo comportamento do propagador do glúon no infravermelho: (i) devido às consequências não-perturbativas da análise de Gribov sobre as condições do método de quantização de Faddeev e Popov para a QCD, e (ii) pelos resultados não-perturbativos da QCD na rede.

Uma característica muito importante dos propagadores do glúon dos modelos estudados é que, por causa das suas escalas de massa não-perturbativas, eles possuem uma estrutura com pólos complexos que leva à violação do axioma de reflexão de positividade. Isso geralmente é considerado um indício de confinamento, já que essa violação do axioma pode levar a interpretar o glúon como uma partícula que não faz parte do espectro físico.

Supondo o confinamento como algo intrínseco à QCD, e na busca por algum outro indício do confinamento presente nos modelos mencionados, nesta tese investigamos em dois observáveis as consequências e o impacto fenomenológico das suas características não-perturbativas, principalmente daquelas contidas nos seus propagadores. No Cap. 3, investigamos o comportamento do potencial quark–antiquark estático (não-relativístico) para quark pesados, que por sua vez pode ser relacionado ao observável (indireto) do espectro de energia do quarkônio ($c\bar{c}$, $b\bar{b}$). Os potenciais resultantes dos modelos GZ, RGZ e CF foram contrastados com o resultado perturbativo e o potencial de Cornell (fenomenológico), que por sua vez, é uma boa aproximação ao potencial linear da QCD na rede. Os nossos resultados indicam que todos os potenciais obtidos, em maior ou menor medida, tendem a reproduzir o resultado perturbativo para altas energias ou curtas distâncias. Na seção 3.1, foi discutido o cálculo dos potenciais por meio de parâmetros constantes (constante de acoplamento e termos de massa), o que permitiu ter uma ideia do impacto dos pólos complexos provenientes dos termos de massas não-perturbativas dos modelos. Mais especificamente, mostramos como a nível de árvore esses pólos geram

termos trigonométricos de seno e cosseno nos casos GZ e RGZ, que embora não acabem tendo um comportamento linear em distâncias intermediárias ou longas, são modificações que nem o resultado perturbativo nem o massivo (nível de árvore) podem gerar.

A partir da seção 3.3 até o final do capítulo, centramo-nos nos resultados do potencial do modelo CF. Primeiro, investigamos o potencial para o seu propagador a um *loop*, que era capaz de reproduzir o propagador do glúon na rede para baixos momentos fazendo uso de um acoplamento grande cujo valor, junto à inclusão de informação não-perturbativa por meio da massa efetiva do glúon, resultaram num potencial bastante afastado da predição perturbativa. Em seguida, estudamos o potencial para o propagador deste modelo a um e dois *loops* incluindo o fluxo do grupo de renormalização chamado de seguro no infravermelho por não desenvolver o pólo de Landau. Os resultados destes potenciais melhoraram significativamente o resultado perturbativo do potencial devido à inclusão do *running* tanto no acoplamento quanto no termo de massa. Outra melhoria aconteceu quando incluímos o chamado acoplamento de Taylor, que, em relação ao acoplamento anterior, possui valores menores para baixos momentos, mas reproduz o resultado perturbativo.

Os resultados mais interessantes surgiram ao analisar as regiões de distâncias intermediárias e longas do potencial massivo a um e dois *loops* incluindo o RGE (seção 3.5). No caso da região intermediária, apareceu um comportamento semilinear no potencial cuja parametrização nos indicou que esses potenciais apresentam um fator de tensão na corda similar ao da QCD na rede ($\sigma \sim 0.21 \text{ GeV}^2$). Lembrando que o comportamento linear do potencial é considerado um indício do confinamento que em princípio tem origem no comportamento não-perturbativo da QCD, é algo bastante relevante que possamos obter tal resultado por meio da abordagem perturbativa efetiva do modelo CF. Tudo isto mostrou que a introdução sistemática de mais efeitos da interação incluindo as correções a um e dois *loops* é significativa devido ao surgimento do comportamento semilinear no potencial CF na região de distâncias intermediárias.

Finalmente, neste capítulo, discutimos sobre o comportamento do potencial a longas distâncias e como a inclusão da interação multigluônica pode ajudar a estender o comportamento linear do potencial massivo. Outra perspectiva referente ao resultado do potencial CF com RGE é calcular o espectro de energia do mesmo, já que, mesmo que este resultado seja válido apenas na região de distâncias intermediárias, é ali (0.2 fm – 1.0 fm) onde as energias de ligação dos estados de baixo nível podem ser reproduzidas pelo comportamento linear.

Referente ao outro observável estudado nesta tese, este foi desenvolvido e investigado no Cap. 4. Neste caso nos concentramos no momento magnético, com ênfase no do próton. Para calcular este último usamos o modelo de quark constituinte (CQM) (subseção 4.1.1), que nos permitiu calcular o momento magnético do próton em função do momento magnético dos seus quarks constituintes. Tudo isso foi brevemente explicado

na tese.

Com a finalidade de obter o momento magnético dos quarks, na seção 4.2), primeiro analisamos o vértice quark-fóton (QPV) até a ordem de um *loop*, onde, focando na contribuição da QCD, investigamos o impacto fenomenológico da estrutura dos pólos dos propagadores dos enfoques GZ, RGZ (complexos – nível de árvore) e CF (reais – nível de árvore) neste vértice. Os nossos resultados indicaram que, na aproximação de nível de árvore para o propagador, o momento magnético não possui características não-físicas oriundas dos pólos complexos, o que é mantido para o momento do próton calculado em função dos momentos dos quarks, dentro das respectivas aproximações. Nossos resultados também mostraram que as contribuições ao momento magnético dos quarks dos enfoques GZ, RGZ e CF são suprimidas devido às escalas de massa não-perturbativas desses modelos. No caso GZ e CF (nível de árvore), cujos comportamentos são muito similares apesar da diferença da estrutura de pólos do propagador, essas contribuições sempre serão menores ou no máximo iguais ao resultado perturbativo quando a razão entre seus termos de massa e a massa do quark constituinte seja relativamente grande ou nula, respectivamente. Por outro lado, no caso RGZ, esse modelo possui um comportamento mais complexo, podendo ter valores iguais, menores ou até maiores que o resultado perturbativo dada uma certa combinação dos valores de seus parâmetros e a massa do quark constituinte. Esse comportamento permitiria ajustar o resultado da RGZ ao momento magnético do próton com maior facilidade do que para os modelos GZ e CF. Para uma combinação de valores nulos dos parâmetros massivos dos modelos, recuperamos o comportamento perturbativo usual.

Uma vez calculado o momento magnético dos quarks, incluímos as correções quânticas dos formalismos GZ, RGZ e CF ao modelo CQM. Para obter uma melhor limitação nos parâmetros dos modelos mencionados, é necessário possuir informações não-perturbativas como o valor do acoplamento no infravermelho (a momento zero especificamente) e também um valor para a massa do quark constituinte. Esta última pode, de forma aproximada, ser calculada a partir do espectro de bárions, tal como foi indicado na tese. Como não existe um consenso a respeito da constante de acoplamento a momento zero, escolhemos usar alguns valores, indicados ao longo do Cap. 4, que nos permitissem estudar o comportamento do momento magnético. Escolhidos os valores para os parâmetros do estudo do momento magnético, analisamos as previsões dos modelos. Devido ao resultado similar do momento magnético dos quarks nos formalismos GZ e CF, o comportamento do momento magnético do próton extraído desses modelos foi muito semelhante. Por sua vez, pudemos notar que existem muitas combinações de valores dos parâmetros desses modelos que podem reproduzir o momento magnético do próton. Porém, os valores de massa encontrados para o glúon podem encaixar dentro dos outros valores achados na literatura para a massa do glúon. Quanto ao modelo RGZ, esse modelo possui o respaldo de valores numéricos extraídos da QCD na rede, que em princípio nos deixa com menos

parâmetros livres para ajustar ao momento do próton. Por outro lado, se mexemos nos valores dos parâmetros RGZ, vemos que estes possuem muita liberdade dentro do modelo CQM corrigido (com os efeitos quânticos da RGZ), existindo um número muito grande de combinações que podem reproduzir o momento do próton a partir de um dado valor da constante de acoplamento e da massa de quark constituinte. Esses valores dos parâmetros RGZ podem ser pequenos e ir aumentando até serem compatíveis com os valores da rede ou inclusive ser maiores.

Temos algumas perspectivas sobre os resultados deste último capítulo. Primeiro, nossos resultados podem ser estendidos a escalas de momento diferentes de zero, o que poderia nos permitir investigar outros fatores de forma presentes no vértice quark-fóton (Chang; Liu; Roberts, 2011) ou no futuro fazer comparações com dados da rede (Leutnant; Sternbeck, 2018). Também, a extensão dos cálculos a ordens superiores seriam bastante úteis para verificar quão convergentes são nossos resultados obtidos a partir dos formalismos estudados.

Uma outra perspectiva, um pouco inspirada no cálculo do momento magnético dos quarks, é realizar o cálculo do momento cromomagnético dos quarks a partir dos modelos mencionados nesta tese e comparar aos resultados existentes, como o do quark top na escala da massa do boson Z ($\alpha_s(m_Z^2)$) (Aranda *et al.*, 2021). O cálculo do momento cromomagnético apresenta uma divergência infravermelha que não pode ser solucionada por meio da regularização dimensional, mas que propagadores finitos no infravermelho podem ajudar a solucionar. Esses cálculos poderiam ajudar a obter valores para os parâmetros do formalismo GZ (RGZ) para altas energias e estabelecer quão pequenos devem ser nessas escalas. No caso do modelo GZ podemos comparar diretamente com o resultado da equação do gap da massa de Gribov (Apêndice J).

REFERÊNCIAS

- AAIJ, R. et al. Observation of structure in the J/ψ -pair mass spectrum. *Sci. Bull.*, [s.l.], v. 65, n. 23, p. 1983–1993, 2020.
- _____. Observation of new resonances decaying to $J/\psi K^{++}$ and $J/\psi \phi$. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 127, n. 8, p. 082001, 2021.
- ABRAMCHUK, R. A.; SIMONOV, Y. A. *Quark condensate from confinement in QCD. arXiv preprint arXiv:2109.03887*, [S.l.: s.n.], 2021.
- AGUILAR, A. C. et al. Nonperturbative results on the quark-gluon vertex. *PoS*, [s.l.], ConfinementX, p. 103, 2012.
- AGUILAR, A. C.; BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 78, p. 025010, 2008.
- _____. QCD effective charges from lattice data. *JHEP*, [s.l.], v. 07, p. 002, 2010.
- _____. Unquenching the gluon propagator with Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 86, p. 014032, 2012.
- _____. The Gluon Mass Generation Mechanism: A Concise Primer. *Front. Phys. (Beijing)*, [s.l.], v. 11, n. 2, p. 111203, 2016.
- AGUILAR, A. C. et al. Schwinger–Dyson truncations in the all-soft limit: a case study. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 82, n. 11, p. 1068, 2022.
- _____. Schwinger poles of the three-gluon vertex: symmetry and dynamics. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 83, n. 10, p. 889, 2023.
- AGUILAR, A. C.; IBÁÑEZ, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Ghost propagator and ghost-gluon vertex from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 87, n. 11, p. 114020, 2013.
- AGUILAR, A. C.; MIHARA, A.; NATALE, A. A. Freezing of the QCD coupling constant and solutions of Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 65, p. 054011, 2002.
- AGUILAR, A. C.; NATALE, A. A. A Dynamical gluon mass solution in Mandelstam’s approximation. *Int. J. Mod. Phys. A*, [s.l.], v. 20, p. 7613–7632, 2005.
- AGUILAR, A. C.; NATALE, A. A.; RODRIGUES, P. S. Relating a gluon mass scale to an infrared fixed point in pure gauge QCD. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 90, p. 152001, 2003.
- AGUILAR, A. C. et al. Gluon propagator and three-gluon vertex with dynamical quarks. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 80, n. 2, p. 154, 2020.
- ALEXANDROU, C. et al. Proton and neutron electromagnetic form factors from lattice QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 100, n. 1, p. 014509, 2019.
- ALEXANDROU, C.; FORCRAND, P. De; FOLLANA, E. The Gluon propagator without lattice Gribov copies on a finer lattice. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 65, p. 114508, 2002a.

- ALEXANDROU, C.; FORCRAND, P. De; FOLLANA, E. The Laplacian gauge gluon propagator in $SU(N(c))$. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 65, p. 117502, 2002b.
- ALKOFER, R.; FISCHER, C. S.; LLANES-ESTRADA, F. J. Vertex functions and infrared fixed point in Landau gauge $SU(N)$ Yang-Mills theory. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 611, p. 279–288, 2005. [Erratum: *Phys.Lett.B* 670, 460–461 (2009)].
- ALKOFER, R. et al. The Quark-gluon vertex in Landau gauge QCD: Its role in dynamical chiral symmetry breaking and quark confinement. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 324, p. 106–172, 2009.
- ALKOFER, R.; GREENSITE, J. Quark Confinement: The Hard Problem of Hadron Physics. *J. Phys. G*, [s.l.], v. 34, p. S3, 2007.
- ALKOFER, R.; SMEKAL, L. von. The Infrared behavior of QCD Green's functions: Confinement dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 353, p. 281, 2001.
- AMEMIYA, K.; SUGANUMA, H. Off diagonal gluon mass generation and infrared Abelian dominance in the maximally Abelian gauge in lattice QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 60, p. 114509, 1999.
- AOKI, S. et al. The Static quark potential in full QCD. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, [s.l.], v. 73, p. 216–218, 1999.
- _____. Light hadron spectrum and quark masses from quenched lattice qcd. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 67, p. 034503, Feb 2003.
- AOYAMA, T.; KINOSHITA, T.; NIO, M. Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron. *Atoms*, [s.l.], v. 7, n. 1, p. 28, 2019.
- AOYAMA, T. et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 887, p. 1–166, 2020.
- APPELQUIST, T.; POLITZER, H. D. Heavy quarks and e^+e^- annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 34, p. 43–45, Jan 1975a.
- APPELQUIST, T. et al. Spectroscopy of the new mesons. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 34, p. 365–369, Feb 1975b.
- ARANDA, J. I. et al. Revisiting the top quark chromomagnetic dipole moment in the SM. *Eur. Phys. J. Plus*, [s.l.], v. 136, n. 2, p. 164, 2021.
- ARRIOLA, E. R.; BOWMAN, P. O.; BRONIOWSKI, W. Landau-gauge condensates from the quark propagator on the lattice. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 70, p. 097505, 2004.
- AUBERT, J. J. et al. Experimental observation of a heavy particle J. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 33, p. 1404–1406, Dec 1974.
- AUGUSTIN, J. E. et al. Discovery of a narrow resonance in e^+e^- annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 33, p. 1406–1408, Dec 1974.
- AYALA, C.; GONZALEZ, P.; VENTO, V. Heavy quark potential from QCD-related effective coupling. *J. Phys. G*, [s.l.], v. 43, n. 12, p. 125002, 2016.

BAAL, P. V. More (thoughts on) gribov copies. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 369, n. 1, p. 259 – 275, 1992. ISSN 0550-3213.

_____. Gribov ambiguities and the fundamental domain. In: *NATO Advanced Study Institute on Confinement, Duality and Nonperturbative Aspects of QCD*. [S.l.]: [s.l.], 1997. p. 161–178.

BALI, G. S. The Mechanism of quark confinement. In: QUARK CONFINEMENT AND THE HADRON SPECTRUM, 3., 1998, Newport News. *Proceedings*, Newport News, USA, June 7-12, 1998., [S.l.: s.n.], 1998. P. 17–36., 1998.

_____. Are there short distance nonperturbative contributions to the QCD static potential? *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 460, p. 170, 1999.

_____. QCD forces and heavy quark bound states. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 343, p. 1–136, 2001.

BALI, G. S. et al. Static potentials and glueball masses from QCD simulations with Wilson sea quarks. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 62, p. 054503, 2000.

_____. Masses and decay constants of the η and η' mesons from lattice QCD. *JHEP*, [s.l.], v. 08, p. 137, 2021.

_____. Mesons in large-N QCD. *JHEP*, [s.l.], v. 06, p. 071, 2013.

BALI, G. S.; SCHILLING, K.; SCHLICHTER, C. Observing long color flux tubes in SU(2) lattice gauge theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 51, p. 5165–5198, 1995a.

BALI, G. S.; SCHILLING, K.; WACHTER, A. Quark - anti-quark forces from SU(2) and SU(3) gauge theories on large lattices. In: *RCNP Workshop on Color Confinement and Hadrons (CONFINEMENT 95)*. [S.l.: s.n.], 1995b.

_____. Complete $O(v^2)$ corrections to the static interquark potential from su(3) gauge theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 56, p. 2566–2589, Sep 1997.

BALI, G. S. et al. Glueballs and string breaking from full QCD. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, [s.l.], v. 63, p. 209–211, 1998.

BARRIOS, N. et al. Two-loop corrections to the QCD propagators within the Curci-Ferrari model. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 104, n. 9, p. 094019, 2021.

BASHIR, A.; RAYA, A. Gauge symmetry and its implications for the Schwinger-Dyson equations. *Trends in Boson Research*, [s.l.], p. 183, 2006.

BAULIEU, L. et al. Gribov horizon and i -particles: About a toy model and the construction of physical operators. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 82, p. 025021, Jul 2010.

BAZAVOV, A. et al. Nonperturbative QCD Simulations with 2+1 Flavors of Improved Staggered Quarks. *Rev. Mod. Phys.*, [s.l.], v. 82, p. 1349–1417, 2010.

BEANE, S. R. et al. Magnetic moments of light nuclei from lattice quantum chromodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 113, p. 252001, 2014.

- BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. The Abelian Higgs-Kibble Model. Unitarity of the S Operator. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 52, p. 344–346, 1974.
- _____. Renormalization of Gauge Theories. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 98, p. 287–321, 1976.
- BELKOV, A. A.; DILLIG, M.; PILOTTO, F. Dynamics of heavy mesons in the instant and the front form. *Acta Phys. Polon. B*, [s.l.], v. 27, p. 3371–3375, 1996.
- BEREZIN, F. A. The method of second quantization. *Pure Appl. Phys.*, [s.l.], v. 24, p. 1–228, 1966.
- BERGERHOFF, B.; WETTERICH, C. Effective quark interactions and QCD propagators. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 57, p. 1591–1604, 1998.
- BERNARD, C. W. Monte Carlo Evaluation of the Effective Gluon Mass. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 108, p. 431–434, 1982.
- _____. Adjoint Wilson Lines and the Effective Gluon Mass. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 219, p. 341–357, 1983.
- BERNARD, C. W. et al. The Static quark potential in three flavor QCD. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 034503, 2000.
- BETHKE, S. Experimental tests of asymptotic freedom. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, [s.l.], v. 58, p. 351–386, 2007.
- BICUDO, P.; OLIVEIRA, O. Gluon Mass in Landau Gauge QCD. *PoS*, [s.l.], LATTICE2010, p. 269, 2010.
- BINOSI, D. Unquenching the infrared sector of QCD. *PoS*, [s.l.], ConfinementX, p. 092, 2012.
- BINOSI, D.; IBÁÑEZ, D.; PAPAVALASSILOU, J. The all-order equation of the effective gluon mass. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 86, p. 085033, 2012.
- _____. QCD effective charge from the three-gluon vertex of the background-field method. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 87, n. 12, p. 125026, 2013.
- _____. Nonperturbative study of the four gluon vertex. *JHEP*, [s.l.], v. 09, p. 059, 2014.
- BJORKEN, J. D. Asymptotic sum rules at infinite momentum. *Phys. Rev.*, [s.l.], v. 179, p. 1547–1553, Mar 1969.
- BJORKEN, J. D.; PASCHOS, E. A. Inelastic Electron Proton and gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon. *Phys. Rev.*, [s.l.], v. 185, p. 1975–1982, 1969.
- BLASI, A.; MAGGIORE, N. Infrared regularization of Yang-Mills theories. *Mod. Phys. Lett. A*, [s.l.], v. 11, p. 1665–1674, 1996.
- BLOCH, J. C. R. et al. Propagators and running coupling from SU(2) lattice gauge theory. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 687, p. 76–100, 2004.
- BLOOM, E. D. et al. High-Energy Inelastic e p Scattering at 6-Degrees and 10-Degrees. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 23, p. 930–934, 1969.

BOER, J. de et al. On the renormalizability and unitarity of the Curci-Ferrari model for massive vector bosons. *Phys. Lett. B*, v. 367, p. 175–182, 1996.

BOGOLUBSKY, I. L. et al. The Landau gauge gluon and ghost propagators in 4D SU(3) gluodynamics in large lattice volumes. *PoS*, [s.l.], LATTICE2007, p. 290, 2007.

_____. Lattice gluodynamics computation of Landau gauge Green's functions in the deep infrared. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 676, p. 69–73, 2009.

BONNET, F. D. R. et al. Infrared behavior of the gluon propagator on a large volume lattice. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 62, p. 051501, 2000.

_____. Infinite volume and continuum limits of the Landau gauge gluon propagator. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 64, p. 034501, 2001.

BOOTH, S.P. et al. The Running coupling from SU(3) lattice gauge theory. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 294, p. 385–390, 1992.

BORNYAKOV, V. G. et al. Abelian dominance and gluon propagators in the maximally Abelian gauge of SU(2) lattice gauge theory. *Phys. Lett. B*, v. 559, p. 214–222, 2003.

BORNYAKOV, V. G.; MITRJUSHKIN, V. K.; MULLER-PREUSSKER, M. SU(2) lattice gluon propagator: Continuum limit, finite-volume effects and infrared mass scale $m(\text{IR})$. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 81, p. 054503, 2010.

BOUCAUD, P. et al. IR finiteness of the ghost dressing function from numerical resolution of the ghost SD equation. *JHEP*, [s.l.], v. 06, p. 012, 2008a.

_____. On the IR behaviour of the Landau-gauge ghost propagator. *JHEP*, [s.l.], v. 06, p. 099, 2008b.

_____. Artefacts and $\langle A^{*2} \rangle$ power corrections: Revisiting the MOM $Z_\psi(p^{*2})$ and $Z(V)$. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 74, p. 034505, 2006.

BOWMAN, P. O. et al. Unquenched gluon propagator in Landau gauge. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 70, p. 034509, 2004.

_____. Unquenched quark propagator in Landau gauge. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 71, p. 054507, 2005.

BRAMBILLA, N.; SUMINO, Y.; VAIRO, A. Quarkonium spectroscopy and perturbative QCD: A New perspective. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 513, p. 381–390, 2001.

BRAMBILLA, N.; VAIRO, A. Quark confinement and the hadron spectrum. In: ANNUAL HAMPTON UNIVERSITY GRADUATE STUDIES - HUGS'98, 13., 1998, Newport News. Strong interactions at low and intermediate energies. *Proceedings*, Newport News, USA, May 26-June 12, 1998., [S.l.: s.n.], 1999. P. 151–220., 1999.

BRANDELIK, R. et al. Evidence for Planar Events in $e^+ e^-$ Annihilation at High-Energies. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 86, p. 243–249, 1979.

BRAUN, J. Fermion Interactions and Universal Behavior in Strongly Interacting Theories. *J. Phys. G*, [s.l.], v. 39, p. 033001, 2012.

- BROWNE, R. E.; GRACEY, J. A. Two loop effective potential for $\langle A(u)^{**\mu} \rangle$ in the Landau gauge in quantum chromodynamics. *JHEP*, [s.l.], v. 11, p. 029, 2003.
- BUTTNER, K.; PENNINGTON, M. R. Should the Pomeron and imaginary parts be modelled by two gluons and real quarks? *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 356, p. 354–358, 1995a.
- _____. Infrared behavior of the gluon propagator: Confining or confined? *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 52, p. 5220–5228, 1995b.
- CALLAN, C. G.; GROSS, D. J. High-energy electroproduction and the constitution of the electric current. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 22, p. 156–159, Jan 1969.
- CANFORA, F.; PAIS, P.; SALGADO-REBOLLEDO, P. Gribov gap equation at finite temperature. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 74, p. 2855, 2014.
- CANFORA, F.; ROSA, L. Casimir energy in the Gribov-Zwanziger approach to QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 88, p. 045025, 2013.
- CANFORA, F. E. et al. Effect of the Gribov horizon on the Polyakov loop and vice versa. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 75, n. 7, p. 326, 2015.
- CAPRI, M. A. L. et al. Exact nilpotent nonperturbative BRST symmetry for the Gribov-Zwanziger action in the linear covariant gauge. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 92, n. 4, p. 045039, 2015.
- _____. Local and BRST-invariant Yang-Mills theory within the Gribov horizon. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 94, n. 2, p. 025035, 2016a.
- _____. An all-order proof of the equivalence between Gribov's no-pole and Zwanziger's horizon conditions. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 719, p. 448–453, 2013.
- _____. Nonperturbative aspects of Euclidean Yang-Mills theories in linear covariant gauges: Nielsen identities and a BRST-invariant two-point correlation function. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 95, n. 4, p. 045011, 2017a.
- _____. Local and renormalizable framework for the gauge-invariant operator A_{min}^2 in Euclidean Yang-Mills theories in linear covariant gauges. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 94, n. 6, p. 065009, 2016b.
- _____. More on the nonperturbative Gribov-Zwanziger quantization of linear covariant gauges. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 93, n. 6, p. 065019, 2016c.
- _____. Aspects of the refined Gribov-Zwanziger action in linear covariant gauges. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 376, p. 40–62, 2017b.
- CASHER, A.; NEUBERGER, H.; NUSSINOV, S. Chromoelectric-flux-tube model of particle production. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 20, p. 179–188, Jul 1979.
- CHANG, L.; LIU, Y. X.; ROBERTS, C. D. Dressed-quark anomalous magnetic moments. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 106, p. 072001, 2011.
- CHAO, K.T. Baryon magnetic moments with confined quarks. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 41, p. 920–923, 1990.

CHEW, G. F.; FRAUTSCHI, S. C. Regge trajectories and the principle of maximum strength for strong interactions. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 8, p. 41–44, 1962.

COLLINS, J. C. *Renormalization: An Introduction to Renormalization, The Renormalization Group, and the Operator Product Expansion*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. v. 26. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, v. 26). ISBN 978-0-521-31177-9, 978-0-511-86739-2.

COMITINI, G. et al. Screened massive expansion of the quark propagator in the Landau gauge. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 104, n. 7, p. 074020, 2021.

COMITINI, G.; SIRINGO, F. One-loop RG improvement of the screened massive expansion in the Landau gauge. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 102, n. 9, p. 094002, 2020.

CONSOLI, M.; FIELD, J. H. Effective gluon mass and the determination of α_s from $\frac{J}{\psi}$ and Υ branching ratios. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 49, p. 1293–1301, 1994.

CORNWALL, J. M. Quark Confinement and Vortices in Massive Gauge Invariant QCD. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 157, p. 392–412, 1979.

_____. Dynamical mass generation in continuum quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 26, p. 1453–1478, Sep 1982.

_____. Positivity violations in QCD. *Mod. Phys. Lett. A*, [s.l.], v. 28, p. 1330035, 2013.

CORNWALL, J. M.; PAPAVALASSIOU, J. Gauge Invariant Three Gluon Vertex in QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 40, p. 3474, 1989.

CREUTZ, M. Confinement and the critical dimensionality of space-time. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 43, p. 553–556, 1979.

_____. Monte carlo study of quantized $su(2)$ gauge theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 21, p. 2308–2315, 1980.

CUCCHIERI, A. Gribov copies in the minimal Landau gauge: The Influence on gluon and ghost propagators. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 508, p. 353–370, 1997.

_____. Infrared behavior of the gluon propagator in lattice Landau gauge. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 422, p. 233–237, 1998a.

_____. Numerical study of the fundamental modular region in the minimal Landau gauge. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 521, p. 365–379, 1998b.

_____. Infrared behavior of the gluon propagator in lattice Landau gauge: The Three-dimensional case. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 60, p. 034508, 1999.

CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Critical slowing down in $SU(2)$ Landau gauge fixing algorithms. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 471, p. 263–292, 1996.

_____. What's up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices. *PoS*, [s.l.], LATTICE2007, p. 297, 2007.

_____. Constraints on the IR behavior of the gluon propagator in Yang-Mills theories. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 100, p. 241601, 2008a.

- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Constraints on the IR behavior of the ghost propagator in Yang-Mills theories. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 78, p. 094503, 2008b.
- CUCCHIERI, A. et al. Just how different are SU(2) and SU(3) Landau propagators in the IR regime? *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 76, p. 114507, 2007.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; SERENONE, W. M. Lattice Gluon Propagator and One-Gluon-Exchange Potential. *Braz. J. Phys.*, [s.l.], v. 49, n. 4, p. 548–563, 2019.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; TAURINES, A. R. Positivity violation for the lattice Landau gluon propagator. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 71, p. 051902, 2005.
- CURCI, G.; FERRARI, R. An Alternative Approach to the Proof of Unitarity for Gauge Theories. *Nuovo Cim. A*, [s.l.], v. 35, p. 273, 1976a.
- _____. On a Class of Lagrangian Models for Massive and Massless Yang-Mills Fields. *Nuovo Cim. A*, [s.l.], v. 32, p. 151–168, 1976b.
- _____. The Unitarity Problem and the Zero-Mass Limit for a Model of Massive Yang-Mills Theory. *Nuovo Cim. A*, [s.l.], v. 35, p. 1, 1976c. [Erratum: *Nuovo Cim. A* 47, 555 (1978)].
- CYROL, A. K.; HUBER, M. Q.; SMEKAL, L. V. A Dyson–Schwinger study of the four-gluon vertex. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 75, p. 102, 2015.
- DAS, A. *Field theory: A Path Integral Approach*. [S.l.]: World Scientific, 2006.
- DAVIES, C. T. H. et al. High precision lattice QCD confronts experiment. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 92, p. 022001, 2004.
- DEGRAND, T. et al. Masses and other parameters of the light hadrons. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 12, p. 2060–2076, 1975.
- DELBOURGO, R.; TWISK, S.; THOMPSON, G. Massive Yang-Mills theory: Renormalizability versus unitarity. *Int. J. Mod. Phys. A*, [s.l.], v. 3, p. 435, 1988.
- DELL’ANTONIO, G.; ZWANZIGER, D. Every gauge orbit passes inside the Gribov horizon. *Commun. Math. Phys.*, [s.l.], v. 138, p. 291–299, 1991.
- DETAR, C. E.; HELLER, U. M.; LACOCK, P. First signs for string breaking in two flavor QCD. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, [s.l.], v. 83, p. 310–312, 2000.
- DEUR, A.; BRODSKY, S. J.; TERAMOND, G. F. de. The QCD Running Coupling. *Nucl. Phys.*, [s.l.], v. 90, p. 1, 2016.
- DING, Y.; HUANG, T.; CHEN, Z. A possible unified quarkonium potential. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 196, n. 2, p. 191–195, 1987.
- DOFF, A.; MACHADO, F. A.; NATALE, A. A. Chiral symmetry breaking in QCD-like gauge theories with a confining propagator and dynamical gauge boson mass generation. *Annals Phys.*, v. 327, p. 1030–1049, 2012.
- DONOGHUE, J. F. Gluon “mass” in the bag model. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 29, p. 2559–2562, 1984.

DUARTE, A. G.; OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. Lattice gluon and ghost propagators and the strong coupling in pure SU(3) Yang-Mills theory: Finite lattice spacing and volume effects. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 94, n. 1, p. 014502, 2016.

DUDAL, D. et al. An Analytic study of the off-diagonal mass generation for Yang-Mills theories in the maximal Abelian gauge. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 70, p. 114038, 2004a.

_____. The Anomalous dimension of the gluon ghost mass operator in Yang-Mills theory. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 569, p. 57–66, 2003a.

_____. The BRST-invariant vacuum state of the Gribov–Zwanziger theory. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 79, n. 9, p. 731, 2019.

_____. A Determination of $A^{**2}(\mu)$ and the nonperturbative vacuum energy of Yang-Mills theory in the Landau gauge. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 562, p. 87–96, 2003b.

_____. Dynamical gluon mass generation from $\langle A^{**2}(\mu) \rangle$ in linear covariant gauges. *JHEP*, [s.l.], v. 01, p. 044, 2004b.

_____. The Effects of Gribov copies in 2D gauge theories. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 680, p. 377–383, 2009a.

_____. Gluon ghost condensate of mass dimension 2 in the Curci-Ferrari gauge. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 308, p. 62–77, 2003c.

_____. The Gribov parameter and the dimension two gluon condensate in Euclidean Yang-Mills theories in the Landau gauge. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 72, p. 014016, 2005.

_____. New features of the gluon and ghost propagator in the infrared region from the Gribov-Zwanziger approach. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 77, p. 071501, 2008a.

_____. Refinement of the gribov-zwanziger approach in the landau gauge: Infrared propagators in harmony with the lattice results. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 78, p. 065047, Sep 2008b.

_____. Renormalizability of the local composite operator A_μ^2 in linear covariant gauges. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 574, p. 325–331, 2003d.

_____. A Renormalization group invariant scalar glueball operator in the (Refined) Gribov-Zwanziger framework. *JHEP*, [s.l.], v. 08, p. 110, 2009b.

DUDAL, D.; GUIMARAES, M. S.; SORELLA, S. P. Glueball masses from an infrared moment problem and nonperturbative Landau gauge. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 106, p. 062003, 2011.

_____. Pade approximation and glueball mass estimates in $3d$ and $4d$ with $N_c = 2, 3$ colors. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 732, p. 247–254, 2014.

DUDAL, D.; OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. High precision statistical landau gauge lattice gluon propagator computation vs. the Gribov–Zwanziger approach. *Annals of Physics*, [s.l.], v. 397, p. 351 – 364, 2018. ISSN 0003-4916.

DUDAL, D.; OLIVEIRA, O.; VANDERSICKEL, N. Indirect lattice evidence for the Refined Gribov-Zwanziger formalism and the gluon condensate $\langle A^2 \rangle$ in the Landau gauge. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 81, p. 074505, 2010.

DUDAL, D.; SORELLA, S. P.; VANDERSICKEL, N. More on the renormalization of the horizon function of the Gribov-Zwanziger action and the Kugo-Ojima Green function(s). *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 68, p. 283–298, 2010.

_____. The dynamical origin of the refinement of the Gribov-Zwanziger theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 84, p. 065039, 2011.

DUDAL, D.; VERSCHELDE, H.; SORELLA, S. P. The Anomalous dimension of the composite operator A^{**2} in the Landau gauge. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 555, p. 126–131, 2003.

DUPUIS, N. et al. The nonperturbative functional renormalization group and its applications. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 910, p. 1–114, 2021.

DURR, S. et al. Ab-Initio Determination of Light Hadron Masses. *Science*, [s.l.], v. 322, p. 1224–1227, 2008.

DYSON, F. J. The S matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, [s.l.], v. 75, p. 1736–1755, 1949.

EICHTEIN, E. et al. Spectrum of charmed quark-antiquark bound states. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 34, p. 369–372, 1975.

_____. Charmonium: The model. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 17, p. 3090–3117, 1978.

ELLWANGER, U. Flow equations for N point functions and bound states. *Z. Phys. C*, [s.l.], v. 62, p. 503–510, 1994.

ELLWANGER, U.; HIRSCH, M.; WEBER, A. The Heavy quark potential from Wilson's exact renormalization group. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 1, p. 563–578, 1998.

FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 25, p. 29–30, 1967.

FAYYAZUDDIN, R. *Modern introduction to particle physics*. River Edge, N.J: World Scientific, 2012. ISBN 978-981-4338-83-7.

FERREIRA, M. N. Ghost dynamics from Schwinger-Dyson equations. *Rev. Mex. Fis. Suppl.*, [s.l.], v. 3, n. 3, p. 0308100, 2022.

FEYNMAN, R. P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, [s.l.], v. 20, p. 367–387, 1948.

_____. Very high-energy collisions of hadrons. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 23, p. 1415–1417, Dec 1969.

FIELD, J. H. A Phenomenological analysis of gluon mass effects in inclusive radiative decays of the J/ψ and Upsilon. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 66, p. 013013, 2002.

- FISCHER, C. S. Infrared properties of QCD from Dyson-Schwinger equations. *J. Phys. G*, [s.l.], v. 32, p. R253–R291, 2006.
- FISCHER, C. S.; ALKOFFER, R. Infrared exponents and running coupling of $SU(N)$ Yang-Mills theories. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 536, p. 177–184, 2002.
- _____. Nonperturbative propagators, running coupling and dynamical quark mass of Landau gauge QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 67, p. 094020, 2003.
- FISCHER, C. S.; ALKOFFER, R.; REINHARDT, H. The Elusiveness of infrared critical exponents in Landau gauge Yang-Mills theories. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 65, p. 094008, 2002.
- FISCHER, C. S.; MAAS, A.; PAWLOWSKI, J. M. On the infrared behavior of Landau gauge Yang-Mills theory. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 324, p. 2408–2437, 2009.
- FISCHER, C. S. et al. Large volume behaviour of Yang-Mills propagators. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 322, p. 2916–2944, 2007.
- FISCHER, C. S.; PENNINGTON, M. R. Finite volume effects in a quenched lattice-QCD quark propagator. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 73, p. 034029, 2006.
- FODOR, Z.; HOELBLING, C. Light Hadron Masses from Lattice QCD. *Rev. Mod. Phys.*, [s.l.], v. 84, p. 449, 2012.
- FOMIN, A. S. et al. The prospect of charm quark magnetic moment determination. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 80, n. 5, p. 358, 2020.
- FORCRAND, P. de; UNGER, W.; VAIRINHOS, H. Strong coupling lattice QCD on anisotropic lattices. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 97, n. 3, p. 034512, 2018.
- FRANK, M. R. Nonperturbative aspects of the quark-photon vertex. *Phys. Rev. C*, [s.l.], v. 51, p. 987–998, 1995.
- FREZZOTTI, R. et al. Lattice QCD with a chirally twisted mass term. *JHEP*, [s.l.], v. 08, p. 058, 2001.
- FRIEDMAN, J. I. Deep inelastic scattering: Comparisons with the quark model. *Rev. Mod. Phys.*, [s.l.], v. 63, p. 615–629, 1991.
- FRIEDMAN, J. I.; KENDALL, H. W. Deep inelastic electron scattering. *Annual Review of Nuclear Science*, [s.l.], v. 22, n. 1, p. 203–254, 1972.
- FRITZSCH, H.; GELL-MANN, M. *Proceedings of the International Conference on Duality and Symmetry in Hadron Physics*. Jerusalem: Weizmann Science Press, 1971.
- FRITZSCH, H.; GELL-MANN, M.; LEUTWYLER, H. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. *Phys. Lett.*, [s.l.], v. 47B, p. 365–368, 1973.
- FUKUDA, R. String-Like Phase in Yang-Mills Theory. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 73, p. 305, 1978. [Erratum: *Phys.Lett.B* 74, 433 (1978)].
- FUKUDA, R.; KUGO, T. Theory of Yang-Mills Field. 1. Instability of the Vacuum and Singlet Pair Condensation. *Prog. Theor. Phys.*, [s.l.], v. 60, p. 565, 1978.

- FURUI, S.; NAKAJIMA, H. Infrared features of the Landau gauge QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 69, p. 074505, 2004.
- GASIOROWICZ, S.; ROSNER, J. L. Hadron Spectra and Quarks. *Am. J. Phys.*, [s.l.], v. 49, p. 954, 1981.
- GELL-MANN, M. *The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry*. [S. l.: s. n.], 1961.
- _____. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, [S. l.], v. 8, p. 214–215, 1964.
- GIACOSA, F.; GUTSCHE, T.; FAESSLER, A. A Covariant constituent quark / gluon model for the glueball-quarkonia content of scalar - isoscalar mesons. *Phys. Rev. C*, v. 71, p. 025202, 2005.
- GIES, H. Introduction to the functional RG and applications to gauge theories. *Lect. Notes Phys.*, [s.l.], v. 852, p. 287–348, 2012.
- GIES, H.; WETTERICH, C. Universality of spontaneous chiral symmetry breaking in gauge theories. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 69, p. 025001, 2004.
- GILMAN, F. The november revolution. *Slac Beam Line*, [s.l.], p. 3–5, 1985.
- GODFREY, S.; ISGUR, N. Mesons in a relativized quark model with chromodynamics. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 32, p. 189–231, 1985.
- GONG, M. et al. Lattice Gluon Propagator in the Landau Gauge: A Study Using Anisotropic Lattices. *Mod. Phys. Lett. A*, [s.l.], v. 24, p. 1925–1935, 2009.
- GONZALEZ, P.; MATHIEU, V.; VENTO, V. Heavy meson interquark potential. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 84, p. 114008, 2011.
- GRACEY, J. A. Two loop MS-bar gluon pole mass from the LCO formalism. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 39, p. 61–69, 2005.
- _____. Two loop correction to the Gribov mass gap equation in Landau gauge QCD. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 632, p. 282–286, 2006. [Erratum: *Phys.Lett.B* 686, 319–319 (2010)].
- _____. Alternative refined Gribov-Zwanziger Lagrangian. *Phys. Rev. D*, v. 82, p. 085032, 2010.
- _____. Three loop effective potential for $\langle 1/2 A\mu a^2 \rangle$ in the Landau gauge in QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 106, n. 6, p. 065006, 2022.
- GRACEY, J. A. et al. Two loop calculation of Yang-Mills propagators in the Curci-Ferrari model. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 100, n. 3, p. 034023, 2019.
- GREENBERG, O. W. Spin and unitary-spin independence in a paraquark model of baryons and mesons. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 13, p. 598–602, Nov 1964.
- GREENSITE, J. The confinement problem in lattice gauge theory. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, [s.l.], v. 51, p. 1, 2003.

- GREENSITE, J. An introduction to the confinement problem. *Lect. Notes Phys.*, [s.l.], v. 821, p. 1–211, 2011.
- GREENSITE, J.; HALPERN, M. B. Variational Computation of Glueball Masses in Continuum QCD. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 271, p. 379–401, 1986.
- GREENSITE, J.; OLEJNIK, S.; ZWANZIGER, D. Coulomb energy, remnant symmetry, and the phases of nonAbelian gauge theories. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 69, p. 074506, 2004.
- GRIBOV, V. N. Quantization of Nonabelian Gauge Theories. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 139, p. 1, 1978.
- GRIFFITHS, D. *Introduction to elementary particles*. New York, NY: Wiley, 2008. ISBN 978-3-527-40601-2.
- GRIFFITHS, L. A.; MICHAEL, C.; RAKOW, P. E. L. Mesons With Excited Glue. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 129, p. 351–356, 1983.
- GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 30, p. 1343–1346, Jun 1973.
- GRUNBERG, G. Renormalization Scheme Independent QCD and QED: The Method of Effective Charges. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 29, p. 2315–2338, 1984.
- GUBAREV, F. V.; MOROZOV, S. M. $\langle A^{*2} \rangle$ condensate, Bianchi identities and chromomagnetic fields degeneracy in SU(2) YM theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 71, p. 114514, 2005.
- GUBAREV, F. V.; STODOLSKY, L.; ZAKHAROV, V. I. On the significance of the vector potential squared. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 86, p. 2220–2222, 2001.
- GUBAREV, F. V.; ZAKHAROV, V. I. On the emerging phenomenology of $\langle (A_\mu^a)^2 \rangle$. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 501, p. 28–36, 2001.
- HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quarks and Leptons: an introductory course in modern particle physics*. [S.l.: s.n.], 1984. ISBN 0471887412, 9780471887416.
- HAYASHI, Y.; KONDO, K. I. Complex poles and spectral function of Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 99, n. 7, p. 074001, 2019.
- _____. Complex poles and spectral functions of Landau gauge QCD and QCD-like theories. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 101, n. 7, p. 074044, 2020.
- HERSBACH, H. Relativistic linear potential in momentum space. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 47, p. 3027–3033, Apr 1993.
- HORAK, J. et al. Gluon condensates and effective gluon mass. *SciPost Phys.*, [s.l.], v. 13, n. 2, p. 042, 2022.
- HUBER, M. Q. Nonperturbative properties of Yang–Mills theories. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 879, p. 1–92, 2020.
- HUBER, M. Q.; SMEKAL, L. von. On the influence of three-point functions on the propagators of Landau gauge Yang-Mills theory. *JHEP*, [s.l.], v. 04, p. 149, 2013.

- HUGHES, C.; MEHTA, D.; SKULLERUD, J. Enumerating Gribov copies on the lattice. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 331, p. 188–215, 2013.
- HURTH, T. Higgs - free massive nonAbelian gauge theories. *Helv. Phys. Acta*, [s.l.], v. 70, p. 406–416, 1997.
- IBAÑEZ, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Gluon mass generation in the massless bound-state formalism. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 87, n. 3, p. 034008, 2013.
- ILDERTON, A.; LAVELLE, M.; MCMULLAN, D. Colour, copies and confinement. *JHEP*, [s.l.], v. 03, p. 044, 2007.
- ISGUR, N.; PATON, J. E. Flux Tube Model for Hadrons in QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 31, p. 2910–2929, Jun 1985.
- ISHIKAWA, T. et al. Light quark masses from unquenched lattice QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 78, p. 011502, 2008.
- JIDO, D.; WEISE, W. Strange magnetic moment of the nucleon and SU(3) breaking: Group theoretical approach. *Phys. Rev. C*, [s.l.], v. 72, p. 045203, 2005.
- JOVANOVIĆ, V. B. et al. Constituent quark masses obtained from hadron masses with contributions of Fermi-Breit and Glazman-Riska hyperfine interactions. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 82, p. 117501, 2010.
- KALASHNIKOVA, Y. S.; NEFEDIEV, A. V.; SIMONOV, Y. A. QCD string in light - light and heavy - light mesons. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 64, p. 014037, 2001.
- KALLEN, G. On the definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics. *Helv. Phys. Acta*, [s.l.], v. 25, n. 4, p. 417, 1952.
- KAWANAI, T.; SASAKI, S. Charmonium potential from full lattice QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 85, p. 091503, 2012.
- KIZILERSÜ, A. et al. Quark-gluon vertex from Nf=2 lattice QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 103, n. 11, p. 114515, 2021.
- KNECHT, K.; VERSCHELDE, H. A New start for local composite operators. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 64, p. 085006, 2001.
- KOGUT, J. B.; SUSSKIND, L. Hamiltonian formulation of wilson's lattice gauge theories. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 11, p. 395–408, Jan 1975.
- KOMA, M.; WITTIG, H.; KOMA, Y. Determination of the relativistic corrections to the static inter-quark potential from lattice qcd. *PoS*, [s.l.], p. 105, 2008.
- KONDO, K. I. Vacuum condensate of mass dimension 2 as the origin of mass gap and quark confinement. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 514, p. 335–345, 2001.
- KONDO, K. I. et al. Renormalizing a BRST invariant composite operator of mass dimension 2 in Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 65, p. 085034, 2002.
- KUGO, T.; OJIMA, I. Local Covariant Operator Formalism of Nonabelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, [s.l.], v. 66, p. 1–130, 1979.

- KUTI, J.; WEISSKOPF, V. F. Inelastic lepton - nucleon scattering and lepton pair production in the relativistic quark parton model. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 4, p. 3418–3439, 1971.
- LAERMANN, E. et al. String breaking in lattice QCD. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, [s.l.], v. 73, p. 447–449, 1999.
- LANDAU, D.; BINDER, K. *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*. 5. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2021. ISBN 110849014X, 9781108490146.
- LANDIM, R. R. et al. Revisiting Gribov's copies inside the horizon. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 74, n. 11, p. 3069, 2014.
- LANGFELD, K.; REINHARDT, H.; GATTNAR, J. Gluon propagators and quark confinement. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 621, p. 131–156, 2002.
- LAUTRUP, B. Canonical quantum electrodynamics in covariant gauges. *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.*, [s.l.], v. 35, n. 11, p. 3, 1967.
- LAVELLE, M. Gauge invariant effective gluon mass from the operator product expansion. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 44, p. 26–28, 1991.
- LAVELLE, M. J.; SCHADEN, M. Propagators and Condensates in QCD. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 208, p. 297–302, 1988.
- LEHMANN, H. On the Properties of propagation functions and renormalization constants of quantized fields. *Nuovo Cim.*, [s.l.], v. 11, p. 342–357, 1954.
- LEINWEBER, D. B. et al. Modeling the gluon propagator. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, [s.l.], v. 73, p. 629–631, 1999a.
- _____. Asymptotic scaling and infrared behavior of the gluon propagator. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 60, p. 094507, 1999b. [Erratum: *Phys. Rev. D* 61, 079901 (2000)].
- LERCHE, C.; SMEKAL, L. von. On the infrared exponent for gluon and ghost propagation in Landau gauge QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 65, p. 125006, 2002.
- LEUTNANT, M.; STERNBECK, A. Quark-photon vertex from lattice QCD in Landau gauge. *PoS*, [s.l.], Confinement2018, p. 095, 2018.
- LEVINE, R.; TOMOZAWA, Y. Effective potential for heavy-quark-antiquark bound systems. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 19, p. 1572–1581, 1979.
- LI, X.; SHAKIN, C. M. Description of gluon propagation in the presence of an A^{**2} condensate. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 71, p. 074007, 2005.
- LITIM, D. F. Optimized renormalization group flows. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 64, p. 105007, 2001.
- LIU, T.; CHEN, Z.; HUANG, T. A study of a possible unified potential model. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, [s.l.], v. 46, n. 1, p. 133–140, 1990.
- LUCHA, W.; SCHOBERL, F. F.; GROMES, D. Bound states of quarks. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 200, p. 127–240, 1991.

- LUNA, E. G. S. et al. Influence of a dynamical gluon mass in the pp and p anti-p forward scattering. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 72, p. 034019, 2005.
- LUSCHER, M. Lattice QCD: From quark confinement to asymptotic freedom. *Annales Henri Poincare*, [s.l.], v. 4, p. S197–S210, 2003.
- MAAS, A. Two and three-point Green's functions in two-dimensional Landau-gauge Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 75, p. 116004, 2007.
- _____. Describing gauge bosons at zero and finite temperature. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 524, p. 203–300, 2013.
- MACHADO, F. A. Transversality of gluon mass generation through an effective loop expansion in covariant and background field gauges. 1 2016.
- MANDELSTAM, S. Approximation scheme for quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 20, p. 3223–3238, 1979.
- MANDULA, J. E.; OGILVIE, M. The Gluon Is Massive: A Lattice Calculation of the Gluon Propagator in the Landau Gauge. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 185, p. 127–132, 1987.
- MARCIANO, W. J.; PAGELS, H. Quantum Chromodynamics: A Review. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 36, p. 137, 1978.
- MARIS, P.; ROBERTS, C. D. Dyson-Schwinger equations: A Tool for hadron physics. *Int. J. Mod. Phys. E*, [s.l.], v. 12, p. 297–365, 2003.
- MARTINELLI, G. et al. The proton and neutron magnetic moments in lattice qcd. *Physics Letters B*, [s.l.], v. 116, n. 6, p. 434–436, 1982.
- MATEU, V. et al. Calibrating the Naïve Cornell Model with NRQCD. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 79, n. 4, p. 323, 2019.
- MENA, C.; PALHARES, L. F. *Quark-antiquark potentials in non-perturbative models. arXiv preprint arXiv:1804.09564*, [S.l.: s.n.], 2018.
- _____. *Quark-photon vertex in confining models. arXiv preprint arXiv:2311.14178*, [S.l.: s.n.], 11 2023.
- MEYERS, J.; SWANSON, E. S. The Gluon Propagator with Two-loop Schwinger-Dyson Equations. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 90, n. 4, p. 045037, 2014.
- MILLER, D. E. Lattice QCD Calculation for the Physical Equation of State. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 443, p. 55–96, 2007.
- MINTZ, B. W. et al. Infrared massive gluon propagator from a BRST-invariant Gribov horizon in a family of covariant gauges. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 99, n. 3, p. 034002, 2019.
- MONTVAY, I.; MUNSTER, G. *Quantum fields on a lattice*. New York, NY: Cambridge University Press, 1997. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-59917-7, 978-0-511-87919-7.
- MUTA, T. *Foundations of Quantum Chromodynamics, 3. ed.* Hackensack, N.J.: World Scientific, 2010. v. 78. (World scientific Lecture Notes in Physics, v. 78). ISBN 9789812793539.

- NAKANISHI, N. Covariant Quantization of the Electromagnetic Field in the Landau Gauge. *Prog. Theor. Phys.*, [s.l.], v. 35, p. 1111–1116, 1966.
- NOVIKOV, V. A. et al. ABC of instantons. In: *ITEP Lectures on Particle Physics and Field Theory: Volume 1*. [S.l.]: World Scientific, 1999. p. 201–299.
- OJIMA, I. Comments on Massive and Massless Yang-Mills Lagrangians With a Quartic Coupling of Faddeev-Popov Ghosts. *Z. Phys. C*, [s.l.], v. 13, p. 173, 1982.
- OLIVEIRA, O. et al. Gluon and Ghost Dynamics from Lattice QCD. *Few Body Syst.*, [s.l.], v. 58, n. 2, p. 99, 2017.
- OLIVEIRA, O.; FREDERICO, T.; PAULA, W. de. The soft-gluon limit and the infrared enhancement of the quark-gluon vertex. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 80, n. 5, p. 484, 2020.
- OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. The Infrared Landau gauge gluon propagator from lattice QCD. *AIP Conf. Proc.*, [s.l.], v. 756, n. 1, p. 290–292, 2005.
- _____. Lattice landau gauge gluon propagator: Lattice spacing and volume dependence. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 86, p. 114513, Dec 2012.
- OTTO, S. W.; STACK, J. D. The SU(3) Heavy Quark Potential with High Statistics. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 52, p. 2328, 1984.
- PAPAVASSILIOU, J. Emergence of mass in the gauge sector of QCD*. *Chin. Phys. C*, [s.l.], v. 46, n. 11, p. 112001, 2022.
- PAPAVASSILIOU, J.; CORNWALL, J. M. Coupled fermion gap and vertex equations for chiral symmetry breakdown in QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 44, p. 1285–1297, 1991.
- PARISI, G.; PETRONZIO, R. On Low-Energy Tests of QCD. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 94, p. 51–53, 1980.
- PARK, I. H. et al. Experimental Evidence for the Nonabelian Nature of QCD. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 62, p. 1713, 1989.
- PAWLOWSKI, J. M. On Wilsonian flows in gauge theories. *Int. J. Mod. Phys. A*, [s.l.], v. 16, p. 2105–2110, 2001.
- PAWLOWSKI, J. M. et al. Infrared behavior and fixed points in Landau gauge QCD. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 93, p. 152002, 2004.
- PELÁEZ, M.; TISSIER, M.; WSCHEBOR, N. Three-point correlation functions in Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 88, p. 125003, 2013.
- _____. Two-point correlation functions of QCD in the Landau gauge. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 90, p. 065031, 2014.
- _____. Quark-gluon vertex from the Landau gauge Curci-Ferrari model. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 92, n. 4, p. 045012, 2015.
- PELÁEZ, M. et al. Small parameters in infrared quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 96, n. 11, p. 114011, 2017.

- PELÁEZ, M. et al. A window on infrared QCD with small expansion parameters. *Rept. Prog. Phys.*, [s.l.], v. 84, n. 12, p. 124202, 2021.
- _____. Small parameters in infrared QCD: The pion decay constant. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 107, n. 5, p. 054025, 2023.
- PERKINS, D. H. *Introduction to high energy physics*. London, UK: Cambridge University Press, 2000. ISBN 978-0-521-62196-0.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN 9780201503975, 0201503972.
- PHILIPSEN, O. On the nonperturbative gluon mass and heavy quark physics. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 628, p. 167–192, 2002.
- PHILIPSEN, O.; WITTIG, H. String breaking in nonAbelian gauge theories with fundamental matter fields. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 81, p. 4056–4059, 1998. [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 83, 2684 (1999)].
- POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 30, p. 1346–1349, Jun 1973.
- QUIGG, C.; ROSNER, J. L. Quarkonium Level Spacings. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 71, p. 153–157, 1977.
- RATTI, C.; BELLWIED, R. The deconfinement transition of QCD: Theory meets experiment. *Lect. Notes Phys.*, [s.l.], v. 981, p. 1–216, 2021.
- REGGE, T. Introduction to complex orbital momenta. *Nuovo Cim.*, [s.l.], v. 14, p. 951, 1959.
- REINOSA, U. et al. How nonperturbative is the infrared regime of Landau gauge Yang-Mills correlators? *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 96, n. 1, p. 014005, 2017.
- RICHARDSON, J. L. The heavy quark potential and the Υ , J/ψ systems. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 82, n. 2, p. 272 – 274, 1979.
- ROBERTS, C. D.; WILLIAMS, A. G. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, [s.l.], v. 33, p. 477–575, 1994.
- RÚJULA, A. De; GEORGI, H.; GLASHOW, S. L. Hadron Masses in a Gauge Theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 12, p. 147–162, 1975a.
- RÚJULA, A. De; GLASHOW, S. L. Is bound charm found? *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 34, p. 46–49, 1975b.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- SAVVIDY, G. K. Infrared Instability of the Vacuum State of Gauge Theories and Asymptotic Freedom. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 71, p. 133–134, 1977.
- SCHLEIFENBAUM, W. *The ghost-gluon vertex in Landau gauge Yang-Mills theory in four and three dimensions*. 2004. 56 f. Tese (doutorado) — TU Darmstadt, Darmstadt, 2004.

SCHLEIFENBAUM, W. et al. Infrared behaviour of the ghost-gluon vertex in Landau gauge Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 72, p. 014017, 2005.

SCHWARTZ, M.D. *Quantum field theory and the Standard Model*. New York, USA: Cambridge University Press, 2014. ISBN 978-1-107-03473-0, 978-1-107-03473-0.

SCHWINGER, J. S. On Quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, [s.l.], v. 73, p. 416–417, 1948.

_____. On the Green's functions of quantized fields. 1. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, [s.l.], v. 37, n. 7, p. 452–455, 1951a.

_____. On the Green's functions of quantized fields. 2. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, [s.l.], v. 37, n. 7, p. 455–459, 1951b.

SERREAU, J.; TISSIER, M. Lifting the Gribov ambiguity in Yang-Mills theories. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 712, p. 97–103, 2012.

SERREAU, J.; TISSIER, M.; TRESMONTANT, A. Covariant gauges without Gribov ambiguities in Yang-Mills theories. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 89, p. 125019, 2014.

_____. Influence of Gribov ambiguities in a class of nonlinear covariant gauges. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 92, p. 105003, 2015.

SHIFMAN, M. A.; VAINSHTEIN, A. I.; ZAKHAROV, V. I. QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 147, p. 385–447, 1979a.

_____. QCD and Resonance Physics: Applications. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 147, p. 448–518, 1979b.

SILVA, P. J.; OLIVEIRA, O. Unquenching the Landau Gauge Lattice Propagators and the Gribov Problem. *PoS*, [s.l.], LATTICE2010, p. 287, 2010.

SINGER, I. M. Some Remarks on the Gribov Ambiguity. *Commun. Math. Phys.*, [s.l.], v. 60, p. 7–12, 1978.

SIRINGO, F. Analytical study of Yang–Mills theory in the infrared from first principles. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 907, p. 572–596, 2016.

SKULLERUD, J. I. et al. The Structure of the gluon propagator. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, [s.l.], v. 73, p. 626–628, 1999.

SLAVNOV, A. A. Ward Identities in Gauge Theories. *Theor. Math. Phys.*, [s.l.], v. 10, p. 99–107, 1972.

SMEKAL, L. V.; ALKOFER, R.; HAUCK, A. The Infrared behavior of gluon and ghost propagators in Landau gauge QCD. *Phys. Rev. Lett.*, v. 79, p. 3591–3594, 1997.

_____. A Solution to Coupled Dyson–Schwinger Equations for Gluons and Ghosts in Landau Gauge. *Annals Phys.*, [s.l.], v. 267, p. 1–60, 1998. [Erratum: *Annals Phys.* 269, 182 (1998)].

- SOBREIRO, R. F.; SORELLA, S. P. Introduction to the Gribov ambiguities in Euclidean Yang-Mills theories. In: JORGE ANDRE SWIECA SUMMER SCHOOL ON PARTICLE AND FIELDS, 13., 2005, Campos do Jordão, Brazil. [*Proceedings...*]. [S.l.: s.n.], 2005.
- SOBREIRO, R. F. et al. Gribov horizon in the presence of dynamical mass generation in Euclidean Yang-Mills theories in the Landau gauge. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 590, p. 265–272, 2004.
- SODING, P.; WOLF, G. Experimental evidence on QCD. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, [s.l.], v. 31, p. 231–293, 1981.
- SONI, N. R. et al. $Q\bar{Q}$ ($Q \in \{b, c\}$) spectroscopy using the Cornell potential. *Eur. Phys. J. C*, [s.l.], v. 78, n. 7, p. 592, 2018.
- SORELLA, S. P. et al. Features of the Refined Gribov-Zwanziger theory: Propagators, BRST soft symmetry breaking and glueball masses. *PoS*, [s.l.], FACESQCD, p. 022, 2010.
- STACK, J. D. The Heavy Quark Potential in SU(2) Lattice Gauge Theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 27, p. 412, 1983.
- STANLEY, D. P.; ROBSON, D. Nonperturbative potential model for light and heavy quark-antiquark systems. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 21, p. 3180–3196, 1980.
- STERNBECK, A.; LEUTNANT, M.; EICHMANN, G. Towards lattice-assisted hadron physics calculations based on QCD n-point functions. *PoS*, [s.l.], LATTICE2018, p. 068, 2019.
- STERNBECK, A. et al. Towards the infrared limit in SU(3) Landau gauge lattice gluodynamics. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 72, p. 014507, 2005.
- _____. Comparing SU(2) to SU(3) gluodynamics on large lattices. *PoS*, [s.l.], LATTICE2007, p. 340, 2007.
- STINGL, M. Propagation properties and condensate formation of the confined Yang-Mills field. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 34, p. 3863–3881, Dec 1986.
- STRAUSS, S.; FISCHER, C. S.; KELLERMANN, C. Analytic structure of the Landau gauge gluon propagator. *Phys. Rev. Lett.*, [s.l.], v. 109, p. 252001, 2012.
- SUSSKIND, L. Lattice Fermions. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 16, p. 3031–3039, 1977.
- TAKAHASHI, T. T. et al. Detailed analysis of the three quark potential in SU(3) lattice QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 65, p. 114509, 2002.
- TAYLOR, J. C. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 33, p. 436–444, 1971.
- TISSIER, M. Gribov copies, avalanches and dynamic generation of a gluon mass. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 784, p. 146–150, 2018.
- TISSIER, M.; WSCHEBOR, N. Gauged supersymmetries in Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 79, p. 065008, 2009.

TISSIER, M.; WSCHEBOR, N. Infrared propagators of Yang-Mills theory from perturbation theory. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 82, p. 101701, 2010.

_____. Infrared safe perturbative approach to Yang-Mills correlators. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 84, p. 045018, Aug 2011.

VANDERSICKEL, N. *A Study of the Gribov-Zwanziger action: from propagators to glueballs*. 2011. 326 f. Tese (doutorado) — Gent University, Gent, 2011.

VANDERSICKEL, N.; ZWANZIGER, D. The Gribov problem and QCD dynamics. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 520, p. 175–251, 2012.

VENTO, V. Confinement, the gluon propagator and the interquark potential for heavy mesons. *Eur. Phys. J. A*, [s.l.], v. 49, p. 71, 2013.

VERSCHELDE, H. Perturbative calculation of nonperturbative effects in quantum field theory. *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 351, p. 242–248, 1995.

VERSCHELDE, H. et al. The Nonperturbative groundstate of QCD and the local composite operator A_μ^2 . *Phys. Lett. B*, [s.l.], v. 516, p. 307–313, 2001.

WEGNER, F. J.; HOUGHTON, A. Renormalization group equation for critical phenomena. *Phys. Rev. A*, [s.l.], v. 8, p. 401–412, 1973.

WILLIAMS, A. G. Nonperturbative QCD, gauge fixing, Gribov copies, and the lattice. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, [s.l.], v. 151, p. 154–160, 2003.

WILSON, K. G. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 10, p. 2445–2459, Oct 1974.

WILSON, K. G.; KOGUT, J. B. The Renormalization group and the epsilon expansion. *Phys. Rept.*, [s.l.], v. 12, p. 75–200, 1974.

WILSON, K. G. et al. Nonperturbative QCD: A Weak coupling treatment on the light front. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 49, p. 6720–6766, 1994.

WORKMAN, R. L. et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, v. 2022, p. 083C01, 2022.

WSCHEBOR, N. Some non-renormalization theorems in Curci-Ferrari model. *Int. J. Mod. Phys. A*, [s.l.], v. 23, p. 2961–2973, 2008.

WU, W. et al. Heavy-quark potential in the Gribov-Zwanziger approach around the deconfinement phase transition. *Phys. Rev. D*, v. 107, n. 11, p. 114033, 2023.

XING, Z.; RAYA, K.; CHANG, L. Quark anomalous magnetic moment and its effects on the ρ meson properties. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 104, n. 5, p. 054038, 2021.

YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, [s.l.], v. 96, p. 191–195, Oct 1954.

ZWANZIGER, D. Action From the Gribov Horizon. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 321, p. 591–604, 1989a.

_____. Local and renormalizable action from the gribov horizon. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 323, n. 3, p. 513–544, 1989b.

ZWANZIGER, D. Nonperturbative Modification of the Faddeev-Popov Formula and Banishment of the Naive Vacuum. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 209, p. 336–348, 1982.

_____. Quantization of gauge fields, classical gauge invariance and gluon confinement. *Nuclear Physics B*, [s.l.], v. 345, n. 2, p. 461 – 471, 1990. ISSN 0550-3213.

_____. Renormalizability of the critical limit of lattice gauge theory by BRS invariance. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], B399, p. 477–513, 1993.

_____. Fundamental modular region, Boltzmann factor and area law in lattice gauge theory. *Nucl. Phys. B*, [s.l.], v. 412, p. 657–730, 1994.

_____. Nonperturbative Landau gauge and infrared critical exponents in QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 65, p. 094039, 2002.

_____. Nonperturbative Faddeev-Popov formula and infrared limit of QCD. *Phys. Rev. D*, [s.l.], v. 69, p. 016002, 2004.

ZWEIG, G. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2. In: LICHTENBERG, D.B.; ROSEN, S. P. (Ed.). *Developments in the quark theory of hadrons. Vol. 1. 1964 - 1978*. [S.l.: s.n.], 1964. p. 22–101.

ZYLA, P. A. et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, [s.l.], v. 2020, n. 8, p. 083C01, 2020.

APÊNDICE A – Potencial quark–antiquark

Os diagramas da Fig. (13) nos permitem obter a seguinte expressão:

$$i\mathcal{M} = \bar{\mathcal{V}}^r(k) [ig \gamma^\mu t_{li}^a] \mathcal{U}^s(p) [\mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(q^2 = (p+k)^2)] \bar{\mathcal{U}}^{s'}(p') [ig \gamma^\nu t_{jm}^b] \mathcal{V}^{r'}(k') \\ - \bar{\mathcal{U}}^{s'}(p') [ig \gamma^\mu t_{ji}^a] \mathcal{U}^s(p) [\mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(q^2 = (p'-p)^2)] \bar{\mathcal{V}}^r(k) [ig \gamma^\nu t_{lm}^b] \mathcal{V}^{r'}(k'), \quad (237)$$

onde $\bar{\mathcal{U}}$ e $\bar{\mathcal{V}}$ são os espinores do quark e o antiquark em função dos seus 4-momentos respectivamente. A primeira linha da equação acima é referente ao processo de aniquilação enquanto que a ultima linha ao processo de espalhamento.⁸⁹

Se sabe que os gerados do grupo t^a cumprem a seguinte relação (Peskin; Schroeder, 1995):

$$t_{ji}^a t_{lm}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{jm} \delta_{il} - \frac{1}{N} \delta_{ji} \delta_{lm} \right). \quad (238)$$

Logo, para o processo de aniquilação na configuração de singlete ($i = j$ e $l = m$) teremos que:

$$t_{li}^a t_{jm}^a \rightarrow t_{li}^a t_{il}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{ii} - \frac{1}{N} \delta_{li} \delta_{il} \right) = 0, \quad (239)$$

enquanto que para o processo de espalhamento:

$$t_{ji}^a t_{lm}^a \rightarrow t_{ii}^a t_{ll}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{il} - \frac{1}{N} \delta_{ii} \delta_{ll} \right) = \left(\frac{N^2 - 1}{2N} \right) \mathbf{I} = C_F \mathbf{I}. \quad (240)$$

Portanto, só o processo de espalhamento contribuirá com o potencial $q\bar{q}$, o qual também depende do propagador do glúon:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(q^2) = -i D(q^2) \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \quad (241)$$

sendo este ultimo uma quantidade dependente do gauge, mas cuja contribuição, para um mesmo tipo de quark, por parte do termo de gauge, é nula⁹⁰:

$$i\mathcal{M}_\xi \propto \frac{(1 - \xi)}{q^2} [\bar{\mathcal{U}}^{s'}(p') [\not{q}] \mathcal{U}^s(p)] [\bar{\mathcal{V}}^r(k) [\not{q}] \mathcal{V}^{r'}(k')] = 0, \quad (242)$$

⁸⁹ O sinal negativo é consequência da não comutatividade das partículas (Peskin; Schroeder, 1995).

⁹⁰ Isso pode ser considerado válido enquanto não houver uma troca no sabor do quark (interação fraca).

já que $\not{q} = \not{p}' - \not{p}$, e portanto $\bar{\mathcal{U}}^{s'}(p') [\not{q}] \mathcal{U}^s(p) = \bar{\mathcal{U}}^{s'}(p') [m_q - m_q] \mathcal{U}^s(p) = 0$.

Considerando a aproximação NR para quarks muito massivos, a Eq. (237) pode ser conectada com a amplitude de espalhamento (aproximação de Born da Mecânica Quântica NR) (Peskin; Schroeder, 1995; Lucha; Schoberl; Gromes, 1991):

$$\langle \vec{p}' | i \mathcal{M} | \vec{p} \rangle = -i \tilde{V}(\vec{q}) (2\pi)^4 \delta^4(p + k - p' - k') \quad , \quad \vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} . \quad (243)$$

Os espinores não-relativísticos podem ser expressados como:

$$\mathcal{U}^s(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \mathcal{V}^s(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \eta^s \\ -\eta^s \end{pmatrix} , \quad (244)$$

o que permite simplificar a parte restante da Eq. (237), $[\bar{\mathcal{U}} \gamma^\mu \mathcal{U}] [\bar{\mathcal{V}} \gamma_\mu \mathcal{V}]$, onde teremos termos proporcionais a:

$$\bar{\mathcal{U}}^{s'}(p') [\gamma^0] \mathcal{U}^s(p) = \mathcal{U}^{+s'}(p') \mathcal{U}^s(p) = m_1 \begin{pmatrix} \xi^{+s'} & \xi^{+s'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m_q \delta^{s's} \quad (245)$$

$$\bar{\mathcal{V}}^r(k) [\gamma_0] \mathcal{V}^{r'}(k') = 2m_q \delta^{rr'} \quad (246)$$

$$\bar{\mathcal{U}}^{s'}(p') [\gamma^i] \mathcal{U}^s(p) = m_q \begin{pmatrix} \xi^{+s'} & \xi^{+s'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 0 , \quad (247)$$

o que finalmente nos permite escrever⁹¹:

$$i\mathcal{M} = -4\pi i \alpha_s C_F D(q^2) [2m_q \delta^{s's}] [2m_q \delta^{rr'}] , \quad (248)$$

e:

$$\tilde{V}(|\vec{q}|) = 4\pi \alpha_s C_F D(|\vec{q}|^2). \quad (249)$$

Logo, podemos aplicar a transformada de Fourier para calcular o potencial em função da distância de separação entre as partículas, tal que:

$$V(r) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(|\vec{q}|) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} = \frac{-i}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{q} \, \mathbf{q} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} ,$$

sendo isto válido para um potencial central e par no espaço de momento $\tilde{V}(\mathbf{q})$.

⁹¹ Em mecânica quântica não relativística os estados são normalizados como:

$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$, enquanto que em TQC é usada a normalização invariante de Lorentz: $\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$. Isto nos será útil no momento de comparar com as expressões da amplitude de espalhamento da TQC, além disso, na nossa aproximação de quarks muito massivos teremos: $E \simeq m$.

APÊNDICE B – Potencial quark–antiquark no Espaço Euclideo

A análise do potencial $q\bar{q}$ no espaço Euclideo será feita de maneira análoga ao apêndice anterior (A). A expressão da amplitude $\mathcal{M}_E$ do processo será⁹²:

$$\mathcal{M}_E = g^2 t_{ji}^a t_{lm}^a \bar{\mathcal{U}}^{s'}(p_3) [\gamma_\mu^E] \mathcal{U}^s(p_1) [\mathcal{D}_{\mu\nu}(q_E^2)] \bar{\mathcal{V}}^r(p_2) [\gamma_\nu^E] \mathcal{V}^{r'}(p_4). \quad (250)$$

Analogamente o termo $\mathcal{D}_{\mu\nu}(q_E^2)$ é expressado também como o produto de uma função quadrática em q_E^2 e outra de forma tensorial:

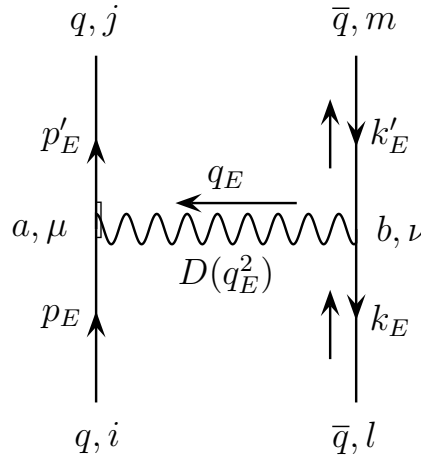
$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(q_E^2) = D(q_E^2) \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)_E. \quad (251)$$

Assim teremos também uma expressão geral para $\mathcal{M}_E$:

$$\mathcal{M}_E = 4\pi \alpha \mathcal{C}_F D(q_E^2) [\bar{\mathcal{U}}^{s'}(p'_E) [\gamma_\mu^E] \mathcal{U}^s(p_E)] [\bar{\mathcal{V}}^r(k_E) [\gamma_\mu^E] \mathcal{V}^{r'}(k'_E)]. \quad (252)$$

Novamente precisamos dos produtos dos espinores e matrizes gama, os quais não mudam nesta aproximação de quarks muito massivos. Então teremos que:

Figura 38 - Diagrama no Espaço Euclideo do Processo Quark-Antiquark.



Legenda: Diagrama do processo quark-antiquark.

Fonte: O autor, 2023.

⁹² Estritamente falando um espalhamento é em princípio um processo de evolução no tempo, sendo bem definido apenas no espaço de Minkowski. Como estamos tratando quarks supermassivos, o potencial obtido está relacionado com a correlação entre correntes estacionárias, como é feito em QCD na rede (Greensite, 2011).

$$\mathcal{M}_E = 4\pi \alpha \mathcal{C}_F D(q_E^2) 2m_q \delta^{s's} 2m_q \delta^{r'r} , \quad (253)$$

e essa equação sera comparada com uma expressão análoga à Eq. (243):

$$\langle \vec{p}' | \mathcal{M}_E | \vec{p} \rangle = -\tilde{V}(\vec{q}) (2\pi)^4 \delta^4(p'_E + k'_E - p_E - k_E) , \quad \vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} , \quad (254)$$

de maneira que teremos uma expressão análoga ao caso de Minkowski, onde $\tilde{V}(\vec{q})$ pode ser calculado como⁹³:

$$\tilde{V}(\vec{q}) = -4\pi \alpha \mathcal{C}_F D(q_E^2) \quad , \quad q_E^2 = |\vec{q}|^2 = q^2 \quad , \quad q_4 = 0 \quad (255)$$

As Eqs. (255) e (250) podem ser usadas para calcular o potencial $q\bar{q}$.

⁹³ Onde consideramos $q_4 = 0$, porque os nossos potenciais estão em função do momento vetorial, e essa variável poderia ser tomada como uma constante

APÊNDICE C – Integração dos potenciais Massivo, GZ e RGZ

Partindo do teorema do resíduo:

$$\oint f(z) dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \sum_j \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_j)^n f(z)] \Big|_{z=z_j}, \quad (256)$$

e considerando uma função $f(z) = z \alpha_s(z) \mathcal{D}(z) \text{Exp}[i z r]$, com pólos simples ($n=1$), $z_{1,2} = (-1)^j x_1 + i y_1$, $z_{3,4} = (-1)^j x_3 + i y_3$, etc / $\{x_j, y_j\} \in \mathbb{R}^+$, e que cumpre que $f(z_j) \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$, podemos obter que:

$$\begin{aligned} \oint f(z) dz &= (i\pi) \sum_j e^{i z_j r} 2 z_j (S(z)|_{z=z_j}) \ \& \ S(z) = (z - z_j) \alpha_s(z) \mathcal{D}(z), \\ \oint f(z) dz &= (i\pi) e^{-y r} (A(z_1, z_2) \text{Cos}(x r) + B(z_1, z_2) \text{Sin}(x r)), \end{aligned} \quad (257)$$

onde para o caso apenas de 2 pólos simples, $z_1 = x + i y$ e $z_2 = -x + i y$, teremos que:

$$A(z_1, z_2) = (2 z_1 S(z_1) + 2 z_2 S(z_2)) \ \wedge \ B(z_1, z_2) = i (2 z_1 S(z_1) - 2 z_2 S(z_2)) \quad (258)$$

No caso particular de $\alpha_s(z) = \alpha_s$, faremos $S(z) = (z - z_j) \mathcal{D}(z)$, logo:

$$\oint f(z) dz = (i\pi\alpha) e^{-y r} (\mathcal{A}(z_1, z_2) \text{Cos}(x r) + \mathcal{B}(z_1, z_2) \text{Sin}(x r)), \quad (259)$$

com $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ cumprindo a Eq. (258).

O coeficiente para o caso Massivo (Eq. (259)), com pólos, $z_1 = 0 + i m$ e $z_2 = 0$, é:

$$\mathcal{A}(0, i m) = 2(i m) (z - i m) \frac{1}{z^2 + m^2} \Big|_{z=i m} = 1. \quad (260)$$

Os coeficientes para o caso GZ (Eq. (259)), serão:

$$\mathcal{A} \rightarrow \frac{2 z_1 (z - z_1) z^2}{(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)} \Big|_{z=z_1} + \frac{2 z_2 (z - z_2) z^2}{(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)} \Big|_{z=z_2} = 1. \quad (261)$$

$$\mathcal{B} \rightarrow \frac{2 i z_1 (z - z_1) z^2}{(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)} \Big|_{z=z_1} - \frac{2 i z_2 (z - z_2) z^2}{(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)} \Big|_{z=z_2} = 0. \quad (262)$$

Os pólos no caso GZ são:

$$z_1 = \gamma (1 + i) / \sqrt{2} \ \wedge \ z_2 = \gamma (-1 + i) / \sqrt{2}. \quad (263)$$

Os coeficientes da Eq. (259) para o caso RGZ serão:

$$\mathcal{A} \rightarrow \frac{2z_1(z-z_1)(z^2+M^2)}{(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)} \Big|_{z=z_1} + \frac{2z_2(z-z_2)(z^2+M^2)}{(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)} \Big|_{z=z_2} = 1. \quad (264)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\rightarrow \frac{2iz_1(z-z_1)(z^2+M^2)}{(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)} \Big|_{z=z_1} + \frac{2iz_2(z-z_2)(z^2+M^2)}{(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)} \Big|_{z=z_2} \\ \mathcal{B} &\rightarrow i \frac{z_1^2 + z_2^2 + 2M^2}{z_1^2 - z_2^2} = \frac{M^2 - m^2}{\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 - m^2)^2}} = \kappa. \end{aligned} \quad (265)$$

Os pólos do propagador são os seguintes:

$$\begin{aligned} z_1^2 &= \frac{1}{2} \left(- (M^2 + m^2) + \sqrt{(M^2 - m^2)^2 - 4\lambda^4} \right) \\ z_2^2 &= \frac{1}{2} \left(- (M^2 + m^2) - \sqrt{(M^2 - m^2)^2 - 4\lambda^4} \right). \end{aligned} \quad (266)$$

Como já foi mencionado, no caso RGZ aparecem pólos complexos quando se fita o propagador da rede, tal que:

$$z_1 = x + iy \quad \wedge \quad z_2 = -x + iy. \quad (267)$$

onde:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{\lambda^4 + M^2 m^2} \sin \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 - m^2)^2} / (M^2 - m^2) \right] \right] \\ y &= \sqrt[4]{\lambda^4 + M^2 m^2} \cos \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 - m^2)^2} / (M^2 - m^2) \right] \right]. \end{aligned} \quad (268)$$

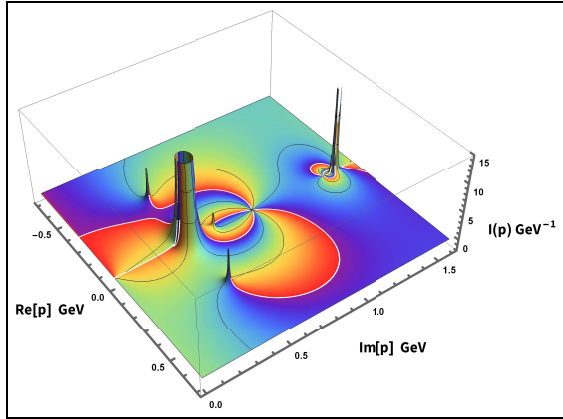
Para pólos complexos de ordem 2, teremos:

$$\begin{aligned} f(z) &= z \alpha_s(z) \mathcal{D}(z) \text{Exp}[i z r] / n = 2 \ \& \ S_2(z) = (z - z_j)^2 \alpha_s(z) \mathcal{D}(z) \\ \oint f(z) dz &= (i \pi) \sum_j 2 e^{i z_j r} \frac{d}{dz} (z S_2(z) \text{Exp}[i z r]) \\ \oint f(z) dz &= (i \pi) \sum_j 2 e^{i z_j r} \left(i r z_j S_2(z_j) + z_j S_2'(z)|_{z=z_j} + S_2(z_j) \right) \end{aligned} \quad (269)$$

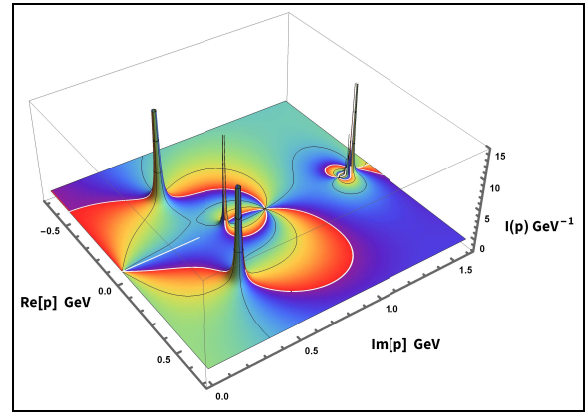
que comparado aos pólos de ordem um, agora temos um termo adicional $z_j S(z_j)$ vezes r que contribuirá como uma constante devido ao termo $1/r$ no potencial. Os termos $z_j S_2'(z)|_{z=z_j} + S_2(z_j)$ contribuem para o resultado perturbativo $1/r$.

APÊNDICE D – Integrandos IS e IS-TS em 3D

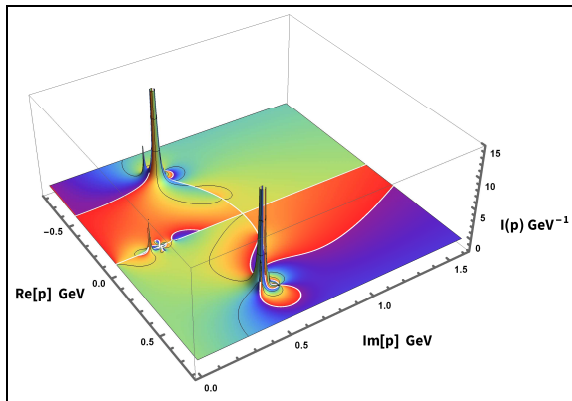
Figura 39 - Integrandos dos potenciais IS e IS-TS em 3D.



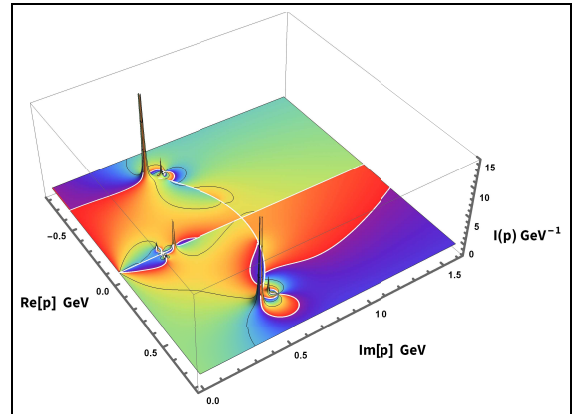
(a)



(b)



(c)



(d)

Legenda: (a) e (c) correspondem ao caso IS de um e dois *loops*, enquanto (b) e (d) ao caso IS de um e dois *loops* com acoplamento TS, respectivamente.

Fonte: O autor, 2023.

APÊNDICE E – Convenções e Fórmulas para o espaço euclidiano

Convenções euclidianas Para trabalhar com modelos euclidianos da QCD temos usado as convenções da Ref. (Novikov *et al.*, 1999). Primeiro, partimos da métrica convencional de Minkowsky:

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (t, \vec{x}) \quad \& \quad x_\mu = (x_0, x_i) = (t, -\vec{x}) \quad \& \quad g^{\mu\nu} \equiv (+, -), \quad (270)$$

sendo μ e ν índices de Lorentz. A transcrição para a métrica euclidiana, $\delta_{\mu\nu} \equiv (+, +)$, é:

$$\begin{aligned} x^0 &= -i x_4 = x_0 & \& \quad x^i &= -x_i = x_i^E \\ p^0 &= -i p_4 = p_0 & \& \quad p^i &= -p_i = p_i^E \\ A^0 &= i A_4 = A_0 & \& \quad A^i &= -A_i = -A_i^E \\ \partial^0 &= i \partial_4 = \partial_0 & \& \quad \partial_j &= -\partial^j = \partial_j^E = \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla, \end{aligned} \quad (271)$$

onde o índice E indicará uma quantidade euclidiana.

E.0.1 Formulação euclidiana

E.0.1.1 **Parte Bosônica**

Usando as Eqs. (271) e (2), o produto $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ e a quantidade invariante de gauge, $G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$, se transformam como (Minkowsky)(Peskin; Schroeder, 1995):

$$G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + 4g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c} + g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e}, \quad (272)$$

onde:

$$F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = F_{00}^a F_a^{00} + F_{0j}^a F_a^{0j} + (F_{i0}^a) (F_a^{i0}) + (F_{ij}^a) (F_a^{ij}),$$

e

$$\begin{aligned} F_{j0}^a F_a^{j0} &= F_{j0}^a (\partial^j A_a^0 - \partial^0 A_a^j) = (\partial_j^E A_4^a - \partial_4 A_j^{E,a}) (\partial_j^E A_4^a - \partial_4 A_j^{E,a}) = (F_{j4}^a F_{j4}^a)^E \\ F_{0j}^a F_a^{0j} &= (-F_{j0}^a) (-F_a^{j0}) = F_{j4}^a F_{j4}^a = (F_{4j}^a F_{4j}^a)^E \\ F_{ij}^a F_a^{ij} &= F_{ij}^a F_{ij}^a = (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) F_{ij}^a = (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a)^E (F_{ij}^a)^E = (F_{ij}^a F_{ij}^a)^E, \end{aligned} \quad (273)$$

$$\text{logo: } (F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu})^{Mink} \rightarrow (F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a)^E.$$

Os fatores $(\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c}$ e $A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e}$, se transformam como:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c} &= (\partial_0 A_0^a) A^{0b} A^{0c} + (\partial_j A_0^a) A^{jb} A^{0c} + (\partial_0 A_k^a) A^{0b} A^{kc} + (\partial_j A_k^a) A^{jb} A^{kc} \\ &= (\partial_4 A_4^a) A_4^b A_4^c + (\partial_j^E A_4^a) A_j^{E,b} A_4^c + (\partial_4 A_k^{E,a}) A_4^b A_k^{E,c} + (\partial_j^E A_k^{E,a}) A_j^{E,b} A_k^{E,c} \\ (\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c} &\equiv (\partial_\mu^E A_\nu^{E,a}) A_\mu^{E,b} A_\nu^{E,c}, \end{aligned} \quad (274)$$

$$\begin{aligned} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} &= A_0^b A_0^c A^{0d} A^{0e} + A_0^b A_j^c A^{0d} A^{je} + A_j^b A_0^c A^{jd} A^{0e} + A_j^b A_k^c A^{jd} A^{ke} \\ &= A_4^b A_4^c A_4^d A_4^e + A_4^b A_j^{E,c} A_4^d A_j^{E,e} + A_j^{E,b} A_4^c A_j^{E,d} A_4^e + A_j^{E,b} A_k^{E,c} A_j^{E,d} A_k^{E,e} \\ A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} &= \left(A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e \right)^E \end{aligned} \quad (275)$$

Portanto:

$$\left(G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \right)^{Mink} \rightarrow \left(G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \right)^E, \quad (276)$$

então, a ação de Minkowsky torna-se uma ação euclidiana tal que:

$$iS^{Mink}[A] = i \int dx_0 \vec{dx} \left(-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \right) = - \int dx_4 \vec{dx} \left(+\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \right)^E \rightarrow -S^E[A]. \quad (277)$$

O *funcional gerador* (euclidiano) da ação gluônica livre pode ser escrito como:

$$Z_{0,G} = \int \mathcal{D}A e^{-S_0^E[A]} = \int \mathcal{D}A \text{Exp} \left[- \int d^4x_E \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu A_\mu^a \right)^2 \right) \right], \quad (278)$$

onde na ação livre, $S_0^E[A] = \int d^4x_E \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \right)$, foi adicionado o termo de fixação do gauge $\frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu A_\mu^a \right)^2$. A ação livre pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} S_0[A] &= \frac{1}{2} \int d^4x_E \left[A_\mu^a(x_E) \left(-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu^a(x_E) - \frac{1}{\xi} \left(\partial_\mu A_\mu^a \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \left(\int d^4x_E e^{i(p'+p) \cdot x} \right) \tilde{A}_\mu^a(p') \left[\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu + \frac{1}{\xi} p_\mu p_\nu \right] \tilde{A}_\mu^a(p) \right]_E \\ S_0[A] &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu^a(-p_E) \left[D_{\mu\nu}^{-1}(p_E) \right] \tilde{A}_\mu^a(p_E), \end{aligned} \quad (279)$$

sendo a transformada de Fourier e o propagador perturbativo do glúon, respectivamente:

$$A_\mu^a(x_E) = \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu^a(p_E) e^{i(p \cdot x)_E} \quad \& \quad D_{\mu\nu}^{ab}(p_E) = \frac{\delta^{ab}}{p_E^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu^E p_\nu^E}{p_E^2} \right). \quad (280)$$

E.0.1.2 Parte Fermiônica

A ação fermiônica (Minkowsky) é (Peskin; Schroeder, 1995; Schwartz, 2014):

$$S^{Mink} = \int d^4x \bar{\psi}^i (i\gamma^\mu D_\mu^{ij} - m) \psi^j = \int d^4x \bar{\psi}^i (i\gamma^\mu \partial_\mu^{ij} - m) \psi^j + \bar{\psi}^i g \gamma^\mu A_\mu^a t_{ij}^a \psi^j, \quad (281)$$

sendo ψ ($\bar{\psi}$) o campo fermiônico, γ^μ uma matriz de Dirac, t^a os geradores do grupo (matrizes) e D_μ a derivada covariante, que pode ser reescrita usando a Eq. (271):

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - i g A_\mu^a t^a \quad \& \quad D^\mu = \partial^\mu - i g A_\mu^a t^a \\ D_0 &\rightarrow i\partial_4 - i g (iA_4^a) t^a = iD_4 \quad \& \quad D^0 \rightarrow i\partial_4 - i g (iA_4^a) t^a = iD_4 \\ D_j &\rightarrow \partial_j^E - i g (A_j^E) t^a = D_j^E \quad \& \quad D^j \rightarrow -\partial_j^E - i g (-A_j^E) t^a = -D_j^E, \end{aligned} \quad (282)$$

logo, o termo com a derivada covariante pode ser reescrito no espaço euclideo como:

$$\bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu) \psi \rightarrow -\bar{\psi} (\gamma_4 D_4 + \gamma_k^E D_k^E) \psi = -\bar{\psi} (\gamma_\mu^E D_\mu^E) \psi, \quad (283)$$

onde: $\gamma_4 = \gamma_0$ and $\gamma_k^E = -i\gamma^k = i\gamma_k$:

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad \& \quad \gamma_k^E = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad (284)$$

sendo σ_k as matrizes de Pauli. Das relações anteriores temos que:

$$\gamma_4^2 = \mathbb{1} \quad \& \quad (\gamma_4)^+ = \gamma_4 \quad \& \quad (\gamma_k^E)^2 = \mathbb{1} \quad \& \quad (\gamma_k^E)^+ = \gamma_k^E \rightarrow (\gamma_\mu^E)^+ = \gamma_\mu^E, \quad (285)$$

o que implica que o gerador da álgebra de Clifford que estamos usando é Hermitiano:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad \& \quad \sigma_{\mu\nu}^E = \frac{i}{2} [\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E] \quad \& \quad (\sigma_{\mu\nu}^E)^+ = \sigma_{\mu\nu}^E, \quad (286)$$

A relação de anti-comutação satisfaz:

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = \gamma_\mu^E \gamma_\nu^E + \gamma_\nu^E \gamma_\mu^E = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (287)$$

Por conveniência na transição ao espaço euclidiano em (Novikov *et al.*, 1999), o campo fermiônico se transforma como: $\bar{\psi} \rightarrow -i\bar{\psi}^E$ e $\psi \rightarrow \psi^E$, logo, a partir da ação fermiônica (Minkowsky, Eq. (281)) e lembrando das Eqs. (271), (282) e (283), temo que $iS^{Mink} \rightarrow -S^E$:

$$S^E = \int d^4x_E \left(\bar{\psi}_i^E \left(-i\gamma_\mu^E \partial_\mu^E - im \right) \delta_{ij} \psi_j^E + \bar{\psi}_i^E \left(-g \gamma_\mu^E t_{ij}^a \right) A_\mu^a \psi_j^E \right). \quad (288)$$

Da Eq. (288) podemos obter o propagador livre (S_F) onde $S_F^{-1} = (-i\gamma_\mu^E \partial_\mu^E - im)$ que satisfaz $S_F^{-1} S_F = \delta^4(x - y)$. No espaço de momentos, o propagador será:

$$\tilde{S}_F(p_E) = \frac{1}{\gamma_\mu^E p_\mu^E - im} = \frac{\not{p}^E + im}{p_E^2 + m^2}, \quad (289)$$

onde foi usado que $\gamma_\mu^E p_\mu^E = \not{p}^E$ e $(\gamma_\mu^E p_\mu^E)^2 = p_E^2$.

O propagador (livre) do elétron e do quark será, respectivamente:

$$\tilde{S}_e(p_E) = \frac{\not{p}^E + im_e}{p_E^2 + m_e^2} \quad \& \quad (\tilde{S}_q(p_E))_{\sigma\theta}^{ij} = \frac{(\not{p}^E + im_q)_{\sigma\theta} \delta^{ij}}{p_E^2 + m_q^2}, \quad (290)$$

sendo σ e θ índices de Dirac, e i e j índices do grupo de simetria.

Da Eq. (288) podemos obter o vértice quark-glúon (QGV) (regra de Feynman):

$$-\frac{\delta^3(\bar{\psi}_i^E (-g(\gamma_\mu^E)_{\sigma\theta} t_{ij}^a) A_\mu^{Ea} \psi_j^E)}{\delta\psi \delta\bar{\psi} \delta A} \rightarrow +g(\gamma_\mu^E)_{\sigma\theta} t_{ij}^a, \quad (291)$$

e no caso do vértice quark-fóton (QPV), temos que:

$$-\frac{\delta^3(\bar{\psi}_i^E (-eQ_q(\gamma_\mu^E)_{\sigma\theta} \delta_{ij}) A_\mu^{Ea} \psi_j^E)}{\delta\psi \delta\bar{\psi} \delta A} \rightarrow eQ_q(\gamma_\mu^E)_{\sigma\theta} \delta_{ij}, \quad (292)$$

sendo Q o fator numérico que caracteriza a carga da partícula, o quark neste caso. Para o elétron será $Q = -1$.

Na QED temos relações similares (com menos índices):

$$S^E = \int d^4x_E (\bar{\psi}^E (-i\gamma_\mu^E \partial_\mu^E - im_e) \psi^E + \bar{\psi}^E (+e\gamma_\mu^E (A_\mu^a)^E \psi^E), \quad (293)$$

sendo a derivada covariante, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ ($g \rightarrow -e$).

A regra de Feynman do vértice elétron-fóton (EPV) será:

$$-\frac{\delta^3 S_{Int}}{\delta\bar{\psi} \delta\psi \delta A} \rightarrow -e\gamma_\mu^E. \quad (294)$$

Relações espinoriais As quantidades fermiônicas $\psi(U)$ (Eq. (288)) obedecem a equação de Dirac, tal que:

$$(-i\gamma_\mu^E \partial_\mu^E - im) \psi^E(x_E) = 0 = \bar{\psi}^E(x_E) (+i\gamma_\mu^E \partial_\mu^E - im), \quad (295)$$

$$(\gamma_\mu^E p_\mu^E - im) U(p_E) = 0 = \bar{U}(p_E) (\gamma_\mu^E p_\mu^E - im), \quad (296)$$

onde usamos $\psi^E = U(p_E) e^{+i(p \cdot x)^E}$, sendo $U(p_E)$ um espinor no espaço Euclideano.

Da Eq. (288) podemos definir a corrente j_μ , que se conserva desde ψ^E satisfaz a

equação de Dirac (Eqs. (295)):

$$j_\mu = \bar{\psi}^E \gamma_\mu^E \psi^E \quad \& \quad \partial_\mu j_\mu = 0. \quad (297)$$

Lembrando das Eqs.(286), $\sigma_{\mu\nu}^E = \frac{i}{2} [\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E]$, (295) e (296) podemos escrever uma expressão euclidiana análoga à identidade de Gordon, $p'_\mu + p_\mu \equiv 2m\gamma_\mu - i\sigma_{\mu\nu} q^\nu$. Começando com $\bar{U}(p'_E) [i\sigma_{\mu\nu}^E q_\nu^E] U(p_E)$ e sendo $q_\nu^E = (p'_\nu - p_\nu)^E$, obtemos que:

$$\bar{U}(p'_E) [i\sigma_{\mu\nu}^E q_\nu^E] U(p_E) = \bar{U}(p'_E) [2im\gamma_\mu^E - (p_\mu'^E + p_\mu^E)] U(p_E). \quad (298)$$

Por uma análise semelhante, podemos escrever a amplitude para o QPV euclidiano:

$$\mathbf{M}_\mu \rightarrow e Q_q \bar{U}(q_2) \left[\gamma_\mu F_1(p^2) + \frac{\sigma_{\mu\nu} p_\nu}{2m_q} F_2(p^2) \right] U(q_1), \quad (299)$$

que em nível árvore é $e Q_q \bar{U}(q_2) \gamma_\mu U(q_1)$, em acordo com a regra de Feynman do QPV (Eq. (292), o que significa que nesta ordem, $F_1(p^2) \equiv 1$ e $F_2(p^2) \equiv 0$, análogo ao caso no espaço de Minkowsky (Schwartz, 2014; Peskin; Schroeder, 1995).

APÊNDICE F – Contribuições no vértice quark-fóton a um *loop*

Da Fig. (30b), q_1 e q_2 correspondem ao momento externo do quark de entrada e saída, respectivamente, enquanto p é o momento externo do fóton. No triângulo formado por dois quarks e um bóson (fóton ou glúon), k é o momento para o quark de entrada, $k + p$ é para o quark de saída e $k - q_1$ é para o bóson. Com esses esclarecimentos e usando as relações (regras de Feynman) das Eqs. (280), (290) e (291) calculamos as contribuições de um *loop* para o vértice quark-fóton onde as contribuições da QED e da QCD (perturbativa), respectivamente, são proporcionais às seguintes expressões:

$$(e Q_q \gamma_\nu) D_{\nu\alpha}(k - q_1) S(p + k) (e Q_q \gamma_\mu) S(k) (e Q_q \gamma_\alpha), \quad (300)$$

$$(g t^a \gamma_\nu) D_{\nu\alpha}^c(k - q_1) S(p + k) (e Q_q \gamma_\mu) S(k) (g t^a \gamma_\alpha), \quad (301)$$

onde $t^a t^a = C_F = (N^2 - 1)/2N$, sendo C_F o fator de cor, que para SU(3) é $C_F = 4/3$. Devido as semelhanças das Eqs. (300) e (301), elas podem ser expressadas numa única equação:

$$= e Q_q \mathcal{N} \bar{U}(q_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\left(\frac{\gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + im) \gamma_\mu (\not{k} + im) \gamma_\nu}{[(k - q_1)^2] [(p + k)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} \right) - (1 - \xi) \left(\frac{(\not{k} - \not{q}_1)(\not{p} + \not{k} + im) \gamma_\mu (\not{k} + im)(\not{k} - \not{q}_1)}{[(k - q_1)^2]^2 [(p + k)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} \right) \right) U(q_1), \quad (302)$$

onde m é a massa do quark, $\mathcal{N}$ é $e^2 Q_q^2$ para a contribuição da QED e $g^2 C_F$ para a contribuição da QCD (perturbativa). Na equação acima (302) o numerador do fator proporcional ao termo de gauge $(1 - \xi)$ pode ser reescrito como:

$$\bar{U}(q_2) \left((\not{k} \not{p} + im \not{k} - \not{q}_1 \not{k} + k^2 - \not{q}_1 \not{p} - im \not{q}_1) \gamma_\mu (k^2 + m^2) \right) U(q_1), \quad (303)$$

onde foi usado $\not{q}_1 U(q_1) = im U(q_1)$ (Eqs. (296)). Ademais, a Eq. (303) pode ser simplificada usando as relações espinoriais (Eq. 296) e das matrizes gamma (Eq. (287)) e as expressões na camada de massa (*on-shell*) $q_{1,2}^2 = -m^2$ e $p \cdot q_1 = -p \cdot q_2 = -p^2/2$ ($p = q_2 - q_1$), o que gera:

$$\not{k} \not{p} + im \not{k} - \not{q}_1 \not{k} = 2k \cdot p \quad \& \quad k^2 - \not{q}_1 \not{p} - im \not{q}_1 = k^2 + p^2 + m^2. \quad (304)$$

Assim, o numerador da Eq. (303) se reduz a $((k + p)^2 + m^2) (k^2 + m^2) \gamma_\mu$, logo, o

fator proporcional ao termo de gauge $(1 - \xi)$ na Eq. (302) será:

$$-(1 - \xi) \left(\frac{\gamma_\mu}{(k - q_1)^4} \right), \quad (305)$$

que, de (Schwartz, 2014), sabemos que esta expressão será zero $\int \frac{d^4 q}{q^4} = 0$.

Para extrair a divergência UV, a Eq. (305) também pode ser escrita como:

$$-(1 - \xi) \left(\frac{(k^2 + m^2) \gamma_\mu}{[(k - q_1)^2]^2 [k^2 + m^2]} \right), \quad (306)$$

onde o denominador da Eq.(306) pode ser reescrito usando os parâmetros de Feynman (Peskin; Schroeder, 1995):

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta \left(\sum x_i - 1 \right) \frac{\prod x_i^{m_i-1}}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(\sum m_i)}{\prod \Gamma(m_i)}, \quad (307)$$

onde para $n = 2, m_1 = 2, m_2 = 1$ e $x_1 = x, x_2 = y, \delta(x + y - 1)$ e $A_1 = (k - q_1)^2$ e $A_2 = k^2 + m^2$, obteremos:

$$\frac{1}{[(k - q_1)^2]^2 [k^2 + m^2]} = \int_0^1 dx \frac{2x}{[(k - xq_1)^2 - x^2 q_1^2 - xm^2 + (1 - x)m^2]^3}, \quad (308)$$

então, a Eq. (306) pode ser escrita como:

$$\frac{(k^2 + m^2) \gamma_\mu}{[(k - q_1)^2]^2 [k^2 + m^2]} = \int_0^1 dx \frac{2x(\mathcal{K}^2 + (1 - x^2)m^2)}{[\mathcal{K}^2 + \Delta_{LG}]^3} \gamma_\mu, \quad (309)$$

onde $\mathcal{K} = k - xq_1$ e $\Delta_{GT} = (1 - x)^2 m^2$. Os termos lineares em $\mathcal{K}$ foram desprezados.

Mesmo quando o fator acima tem divergências, ele só afeta a função F_1 (proporcional a γ_μ), logo o termo de gauge $(1 - \xi)$ (Eq. (309)) não contribui para a função F_2 e, portanto, nem com o momento magnético. Devido a isso, não será de nosso interesse no momento. Para calcular a função F_2 podemos apenas escrever a Eq. (302) como:

$$\mathbf{M}_\mu = e Q_q \mathcal{N} \bar{U}(q_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{\gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + im) \gamma_\mu (\not{k} + im) \gamma_\nu}{[(k - q_1)^2] [(p + k)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} \right) U(q_1). \quad (310)$$

APÊNDICE G – Função $F_2(0)$ e a expressão do vértice quark-fóton

Da Eq. (307), o denominador da integral na Eq. (310) pode ser reescrito como:

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dx dy dz \frac{2}{[xA + yB + zC]^3}, \quad (311)$$

onde A, B e C são $k^2 + m^2$, $(p + k)^2 + m^2$ e $(k - q_1)^2$, respectivamente. Também:

$$xA + yB + zC = K^2 + \Delta_E, \quad (312)$$

sendo, $K = k + yp - zq_1$ e $\Delta_E = xy p^2 + (1 - z)^2 m^2$.

O numerador da integral na Eq. (310) pode ser simplificado usando as relações dos momentos, matrizes gamma e as relações espinoriais, de tal forma que:

$$\begin{aligned} N_\mu = & -2 \left[\not{k} \gamma_\mu \not{p} + \not{k} \gamma_\mu \not{k} - 2im(p_\mu + 2k_\mu) - m^2 \gamma_\mu \right] \\ & + (4 - d) \left[\not{p} \gamma_\mu \not{k} + \not{k} \gamma_\mu \not{k} - 2im k_\mu - im \not{p} \gamma_\mu - m^2 \gamma_\mu \right], \end{aligned} \quad (313)$$

onde adicionalmente usamos as seguintes relações (obtidas usando a Eq. (287)):

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu &= (4 - d) \gamma_\mu - 2 \gamma_\mu \quad \& \quad \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\nu = 4 \delta_{\alpha\beta} - (4 - d) \gamma_\alpha \gamma_\beta \\ \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\nu &= -2 \gamma_\sigma \gamma_\beta \gamma_\alpha + (4 - d) \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\sigma. \end{aligned} \quad (314)$$

Não consideraremos os termos com o fator $(4 - d)$ no numerador da Eq. (313) já que, como veremos mais adiante, eles não contribuirão para o cálculo de nosso interesse. Substituindo $k = K - yp + zq_1$ (da Eq. (312)) na Eq. (313), obtemos:

$$N_\mu \rightarrow -2 [I + II + III + IV]_\mu, \quad (315)$$

sendo os primeiros produtos simplificados como:

$$I \rightarrow (1 - y) \not{K} \gamma_\mu \not{p} - y \not{p} \gamma_\mu \not{K} + z \not{K} \gamma_\mu \not{q}_1 + z \not{q}_1 \gamma_\mu \not{K} \propto K_{Odd} = 0, \quad (316)$$

$$II \rightarrow -y(1 - y) \not{p} \gamma_\mu \not{p} = y(1 - y) p^2 \gamma_\mu, \quad (317)$$

$$III \rightarrow \not{K} \gamma_\mu \not{K} = -\frac{1}{2} K^2 \gamma_\mu + \left(\frac{4 - d}{2d} \right) K^2 \gamma_\mu, \quad (318)$$

onde nas Eqs. (316), (317) e (318), foi usado $f(\text{odd } K) \rightarrow 0$ e spinor $\bar{U}(q_2) \not{p} U(q_1) = 0$ (Eq. (296)) e as relações $K_\mu K_\nu = \delta_{\mu\nu} K^2/d$, respectivamente. O último termo é:

$$\begin{aligned}
IV &= +z(1-y)\not{q}_1\gamma_\mu\not{p} - yz\not{p}\gamma_\mu\not{q}_1 + z^2\not{q}_1\gamma_\mu\not{q}_1 - m^2\gamma_\mu \\
IV &= (-1+2z+z^2)m^2\gamma_\mu + z(1-y)p^2\gamma_\mu + 2(z+z^2)imq_{1\mu} + 2z(1-y)imp_\mu, \quad (319)
\end{aligned}$$

onde para os termos em IV usamos a expressão (válida para qualquer valor de d):

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\sigma = -\gamma_\sigma\gamma_\beta\gamma_\alpha + 2\gamma_\alpha\delta_{\beta\sigma} - 2\gamma_\beta\delta_{\alpha\sigma} + 2\gamma_\sigma\delta_{\alpha\beta}. \quad (320)$$

Usando as Eqs. (315), (316), (317), (318) e (319), o numerador será:

$$\begin{aligned}
N_\mu \rightarrow & -2 \left[-\frac{K^2}{2} + \left(\frac{4-d}{2d} \right) K^2 + (1-x)(1-y)p^2 - (1-2z-z^2)m^2 \right] \gamma_\mu \\
& - 4im \left[(z(1-y) + 2y - 1) p_\mu + (-z + z^2) q_{1\mu} \right]. \quad (321)
\end{aligned}$$

A fim de extrair o fator F_2 reescrevemos o termo independente de γ_μ em função de q_1 e q_2 na forma $[(q_{2\mu} + q_{1\mu})(a+b) + (q_{2\mu} - q_{1\mu})(a-b)]/2$, onde os coeficientes, a e b , são $a = z(1-y) + 2y - 1$ e $b = -z(1-y) - 2y + 1 - z + z^2$. Os fatores $a+b$ e $a-b$ são, respectivamente, $-z(1-z)$ e $(x-y)(z-2)$. Fazendo tudo isso podemos usar a relação $(q_1 + q_2)_\mu = 2im\gamma_\mu - i\sigma_{\mu\nu}p_\nu$ (Eq. (298)), obtendo:

$$\left[-2(2z - 2z^2)m^2\gamma_\mu + 2mz(1-z)\sigma_{\mu\nu}p_\nu - 2imp_\mu(x-y)(z-2) \right],$$

onde o termo proporcional a p_μ não contribuirá para $\mathbf{M}_\mu$ (Eq. (310)) devido à identidade Ward e porque sua integral é ímpar sob a mudança de $x \rightarrow y$ e $y \rightarrow x$ (Veja Eq. (312)). Finalmente, o termo independente de γ_μ (sem os termos $(4-d)$) fica:

$$N_\mu \rightarrow +2mz(1-z)\sigma_{\mu\nu}p_\nu, \quad (322)$$

que juntamente com as Eqs. (310), (311) e (312) e por comparação com a expressão do QPV (Eq. (299)) nos dá a função $F_2(p^2)$ relacionada ao momento magnético:

$$\left(\frac{eQ_q}{2m} \right) \sigma_{\mu\nu}p_\nu \left[\int_0^1 dx dy dz \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{8\mathcal{N}z(1-z)m^2}{[K^2 + \Delta_E]^3} \right], \quad (323)$$

onde a integral K pode ser resolvida usando a próxima relação (espaço euclidiano):

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta_E)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-d/2}, \quad (324)$$

que para $d=4$ e $n=3$ produz um resultado finito, $1/(32\pi^2 \Delta_E)$. Neste ponto, precisamos lembrar que a Eq. (323) teria uma contribuição da ordem ϵ ($\epsilon = 4-d$) (Eq. (313)) que desaparece para $\epsilon \rightarrow 0$ já que a integral acima (324) é finita para $d=4$ e $n=3$.

Lembrando que a função $F_2(p^2)$ foi definida como o coeficiente do operador $\sigma_{\mu\nu}p_\nu$, e usando as Eqs. (299), (323) e (324), obtemos que:

$$F_2(p^2) = \frac{\mathcal{N}}{4\pi^2} \left[\int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)m_q^2}{xy p^2 + (1-z)^2 m_q^2} \right]. \quad (325)$$

A integral acima (Eq. (325)) pode ser resolvida mudando as variáveis, tal que:

$$x = 1 - y - z \quad \wedge \quad y = (1 - z)\rho \quad \wedge \quad \theta = 1 - z \quad \wedge \quad dydz \equiv J(\rho, \theta) d\rho d\theta, \quad (326)$$

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta & \rho \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\theta, \quad \wedge \quad z|_0^1 \rightarrow \theta|_1^0 \quad \wedge \quad y|_0^{1-z} \rightarrow \rho|_0^1,$$

$$\begin{aligned} I_1(p, m_q) &= \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)m_q^2}{xy p^2 + (1-z)^2 m_q^2} \\ I_1(p, m_q) &= \int_0^1 d\theta d\rho \frac{(1-\theta)m_q^2}{\rho(1-\rho)p^2 + m_q^2} = \frac{2m_q^2}{\sqrt{p^2(p^2 + 4m_q^2)}} \text{Tanh}^{-1} \left[\sqrt{\frac{p^2}{p^2 + 4m_q^2}} \right], \end{aligned} \quad (327)$$

que para momentos baixos, pode ser escrita como:

$$I_1(p \rightarrow 0, m_q) = \frac{1}{2} - \frac{p^2}{12m_q^2} + \frac{p^4}{60m_q^4} + \mathcal{O}(p^6/m^6). \quad (328)$$

Contribuição da QED no QPV: Neste caso a Eq. (325) se torna ($\mathcal{N} = e^2 Q_q^2$):

$$F_2(p^2) = Q_q^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \left[\int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)m^2}{xy p^2 + (1-z)^2 m^2} \right], \quad (329)$$

sendo $\alpha = e^2/4\pi$, o acoplamento da QED. A equação acima (329) para $p^2 = 0$ produz:

$$F_2(0) = Q_q^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = Q_q^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right), \quad (330)$$

onde, como mencionamos no texto principal, se tivéssemos $q \rightarrow e$ e $Q_e = -1$ (vértice elétron-fóton) recuperaríamos o conhecido resultado de Schwinger para a QED.

Contribuição da QCD no QPV: Neste caso a Eq. (325) se torna ($\mathcal{N} = g^2 C_F$):

$$F_2(p^2) = C_F \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)m_q^2}{xy p^2 + (1-z)^2 m_q^2}, \quad (331)$$

sendo $\alpha_s = g^2/4\pi$ o acoplamento da QCD. A equação acima (331) para $p^2 = 0$ produz:

$$F_2(0) = C_F \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right), \quad (332)$$

que é semelhante à contribuição da QED no QPV.

Para os modelos confinantes da QCD que usaremos, o resultado da Eq. (332) será alterado conforme veremos nos próximos apêndices.

APÊNDICE H – Contribuições dos modelos na função $F_2(0)$ da QCD

Até a ordem de um *loop*, a contribuição da QCD para o QPV foi escrita como a Eq. (310), gerando a Eq. (325) (331) que depende da estrutura do fator Δ_E (Eq. (312)). Uma propriedade importante segue do resultado da Eq. (312), que será usada para os modelos confinantes do propagador do glúon, a qual é que, se o propagador de glúon tiver algum fator de massa, m_g^2 , ele só contribuiria para o fator Δ_E como $z m_g^2$.

H.0.1 Contribuição da QCD a partir do fator Massivo Δ_E

O propagador massivo (nível árvore) tem um termo de massa adicional, m_g^2 :

$$\frac{1}{(k - q_1)^2 + m_g^2}, \quad (333)$$

onde se substituirmos esse propagador no QPV (Eq. (310)), obteremos:

$$xA + yB + zC = K^2 + \Delta_E^{Mass}, \quad (334)$$

onde A , B e K são os mesmos da Eq. (312), enquanto $\Delta_E^{Mass} = xy p^2 + (1 - z)^2 m_q^2 + z m_g^2$, mudou pela adição do termo de massa. Essas mudanças modificam a Eq. (331), tal que:

$$F_2^{Mass}(p^2) = C_F \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \int_{xyz} \frac{z(1 - z) m_q^2}{xy p^2 + (1 - z)^2 m_q^2 + z m_g^2}. \quad (335)$$

onde $\int_{xyz} \equiv \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1)$. Para $p^2 = 0$, a Eq. (335) torna-se:

$$F_2^{Mass}(0) = C_F \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \int_0^1 dz \frac{z(1 - z)^2 m_q^2}{(1 - z)^2 m_q^2 + z m_g^2}, \quad (336)$$

H.0.2 Contribuição da QCD a partir do fator GZ Δ_E

Para o modelo Gribov–Zwanziger teremos duas contribuições Δ_E , provenientes da decomposição do seu propagador do glúon como um par de propagadores do tipo massivo:

$$\left(\frac{(k - q_1)^2}{(k - q_1)^4 + \gamma^4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k - q_1)^2 + i \gamma^2} + \frac{1}{(k - q_1)^2 - i \gamma^2} \right), \quad (337)$$

onde, semelhante ao modelo Massivo, se substituirmos o propagador GZ no QPV (Eq. (310)) e usarmos novamente os parâmetros de Feynman para reescrever o denominador, obteremos:

$$xA + yB + zC^\pm = K^2 + \Delta_{GZ}^\pm, \quad (338)$$

onde K , A e B são os mesmos da Eq. (312) enquanto C^+ e C^- são $(k - q_1)^2 + i\gamma^2$ e $(k - q_1)^2 - i\gamma^2$, respectivamente. Os novos fatores Δ_{GZ}^+ e Δ_{GZ}^- , são:

$$\Delta_{GZ}^\pm = xy p^2 + (1 - z)^2 m_q^2 + z(\pm i \gamma^2). \quad (339)$$

Essas modificações alteram a Eq. (331), tal que:

$$\frac{\pi F_2^{GZ}(p^2)}{C_F \alpha_s} = \frac{1}{2} \int_{xyz} \left[\frac{z(1 - z) m_q^2}{xy p^2 + (1 - z)^2 m_q^2 + iz \gamma^2} + \frac{z(1 - z) m_q^2}{xy p^2 + (1 - z)^2 m_q^2 - iz \gamma^2} \right]. \quad (340)$$

Para $p^2 = 0$, a Eq. (340) torna-se:

$$\frac{\pi F_2^{GZ}(p^2)}{C_F \alpha_s} = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \left[\frac{z(1 - z)^2 m_q^2}{(1 - z)^2 m_q^2 + iz \gamma^2} + \frac{z(1 - z)^2 m_q^2}{(1 - z)^2 m_q^2 - iz \gamma^2} \right]. \quad (341)$$

H.0.3 Contribuição da QCD a partir do fator RGZ Δ_E

Para o propagador RGZ do glúon, podemos adotar uma decomposição semelhante ao propagador GZ, através da seguinte parametrização:

$$\frac{l^2 + M^2}{l^4 + (M^2 + m^2)l^2 + \lambda^4 + M^2 m^2} \equiv \frac{A_+}{l^2 + \alpha'_+} + \frac{A_-}{l^2 + \alpha'_-}, \quad (342)$$

sendo $l = k - q_1$ como nos outros modelos. Os parâmetros da equação acima são:

$$A_\pm = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{M^2 - m^2}{\sqrt{(M^2 - m^2)^2 - 4\lambda^4}} \right), \quad \alpha'_\pm = \frac{M^2 + m^2 \mp \sqrt{(M^2 - m^2)^2 - 4\lambda^4}}{2}, \quad (343)$$

onde poderíamos ter pólos reais ou complexos se $(M^2 - m^2)^2 - 4\lambda^4$ for maior ou menor que zero, respectivamente. Podemos explorar o caso de pólos reais que sempre terão que ser positivos para evitar divergências no propagador do glúon, mas como já foi mencionado no texto principal, os dados de QCD na rede mostram a existência de um par de pólos complexos e também que $m^2 < 0$.

No caso de pólos complexos redefinimos os parâmetros da Eq. (343):

$$\kappa = \frac{M^2 + \bar{m}^2}{\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 + \bar{m}^2)^2}}, \quad s = \frac{M^2 - \bar{m}^2}{2}, \quad t = \frac{\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 + \bar{m}^2)^2}}{2}. \quad (344)$$

sendo $\bar{m}^2 = -m^2 > 0$.

Assim como o propagador GZ, o propagador RGZ também gera duas contribuições Δ_E devido à sua decomposição como propagadores do tipo massivo-complexos (Eqs. (342)), sendo tais contribuições:

$$\Delta_{RGZ}^{\pm} = xy p^2 + (1-z)^2 m_q^2 + z(s \pm it). \quad (345)$$

Como nos casos anteriores, essas modificações (Eq. (345)) irão alterar a Eq. (331), onde obteremos:

$$\frac{\pi F_2^{RGZ}(p^2)}{C_F \alpha_s} = \frac{1}{2} \int_{xyz} \left[\frac{(1-i\kappa)z(1-z)m_q^2}{xy p^2 + (1-z)^2 m_q^2 + z(s-it)} + cc. \right]. \quad (346)$$

Para $p^2 = 0$, a equação acima torna-se:

$$F_2^{RGZ}(0) = C_F \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right) \int_0^1 dz \left[\frac{(1-i\kappa)z(1-z)^2 m_q^2}{(1-z)^2 m_q^2 + z(s-it)} + \frac{(1+i\kappa)z(1-z)^2 m_q^2}{(1-z)^2 m_q^2 + z(s+it)} \right]. \quad (347)$$

A solução das Eqs. (336), (341) e (347) serão detalhados no apêndice seguinte.

APÊNDICE I – Solução da integral $\bar{F}_2(0)$

No texto principal redefinimos a função $F_2(0)$ como $\bar{F}_2(0) = (\pi F_2(0))/(C_F \alpha_s)$ que é independente do acoplamento α_s . Agora vamos resolver esta integral para os diferentes modelos confinantes: Massivo, Gribov–Zwanziger e Gribov–Zwanziger Refinado.

I.0.1 Caso Massivo – Integral $\bar{F}_2^{Mass}(0, a)$

A função $\bar{F}_2^{Mass}(0, a)$, definida na Eq. (214) (também na Eq. (336)), é caracterizada por um único parâmetro, a , que é a razão entre as massas do glúon e do quark:

$$\bar{F}_2^{Mass}(0, a) = \int_0^1 dz \frac{z(1-z)^2}{(1-z)^2 + za} \rightarrow \frac{z^2}{2} - az + a \int dz \frac{((a-2)z+1)}{(1-z)^2 + za} \quad (348)$$

onde separamos a equação em partes integráveis e a integramos para um z arbitrário. O novo numerador da integral foi reescrito de tal maneira que nos permitiu obter o resultado:

$$\bar{F}_2 \rightarrow \frac{z^2}{2} - az + a \left[\frac{(a-2)}{2} \text{Log}[(1-z)^2 + za] - \frac{2+a(a-4)}{i\sqrt{a(a-4)}} \text{Tan}^{-1} \left[\frac{2z+a-2}{i\sqrt{a(a-4)}} \right] \right],$$

onde para obter a função $\bar{F}_2^{Mass}(0, a)$ (a partir da equação acima) precisamos avaliar z de 0 a 1. Usaremos também a seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{Tan}^{-1}[Z] = -\frac{i}{2} \text{Log} \left[\frac{1+iZ}{1-iZ} \right], \quad (349)$$

e assim, obtemos a expressão para a função $\bar{F}_2(0, a)$ do caso Massivo:

$$\bar{F}_2^{Mass}(0, a) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2} \left[2 - (a-2) \text{Log}[a] + \frac{(a-2)^2 - 2}{\sqrt{a(a-4)}} \text{Log} \left[\frac{\sqrt{a(a-4)} + a - 2}{2} \right] \right], \quad (350)$$

sendo $a = m_g^2/m_q^2$.

Também podemos obter os casos limites da Eq. (350) para $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$:

$$\bar{F}_2^{Mass}(0, a \rightarrow 0) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} a^{1/2} - \frac{(1+2\text{Log}[a])}{2} a + \frac{15\pi}{16} a^{3/2} + \mathcal{O}(a^2), \quad (351)$$

enquanto que no outro extremo temos que:

$$\bar{F}_2^{Mass}(0, a \rightarrow \infty) = \frac{1}{3a} - \frac{12\text{Log}[a] - 25}{12a^2} - \frac{60\text{Log}[a] - 97}{10a^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a^4}\right). \quad (352)$$

I.0.2 Caso Gribov–Zwanziger – Integral $\bar{F}_2^{GZ}(0, a)$

A função $\bar{F}_2^{GZ}(0, a)$ foi definida na Eq. (220) (também na Eq. (341)). Assim como no caso Massivo, a função GZ é caracterizada por um único parâmetro, a , que desta vez é a razão entre as massas de Gribov e do quark:

$$\bar{F}_2^{GZ}(0, a) = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \left(\frac{z(1-z)^2}{(1-z)^2 + i z a} + \frac{z(1-z)^2}{(1-z)^2 - i z a} \right), \quad (353)$$

onde podemos separar a equação acima em partes integráveis e integrá-la para um z arbitrário, como fizemos para a função massiva $\bar{F}_2(0, a)$, o que nos dá:

$$\bar{F}_2(0, a) \rightarrow \frac{z^2}{2} - \frac{a}{2} \int dz \left(\frac{(z(a+2i) - i)}{(1-z)^2 + i z a} + \frac{(z(a-2i) + i)}{(1-z)^2 - i z a} \right). \quad (354)$$

Reescrevendo os numeradores da nova integral obtemos:

$$\int dz \frac{(z(a+2i) \mp i)}{(1-z)^2 \pm i z a} \rightarrow \frac{(a \pm 2i)}{2} \text{Log} [(1-z)^2 \pm i a z] + \frac{(\mp i)}{2} \int dz \frac{[(a \pm 2i)^2 + 2]}{(1-z)^2 \pm i z a}, \quad (355)$$

o que nos permite escrever a solução da integração de $\bar{F}_2^{GZ}(0, a)$ para um z arbitrário:

$$\begin{aligned} \bar{F}_2^{GZ}(0, a) \rightarrow \frac{z^2}{2} - \frac{a}{2} \left(\frac{(a \pm 2i)}{2} \text{Log} [(1-z)^2 \pm i a z] + \right. \\ \left. (\mp i) \frac{[(a \pm 2i)^2 + 2]}{\sqrt{a(a \pm 4i)}} \left(\text{Tan}^{-1} \left[\frac{-2 \pm i a + 2z}{\sqrt{a(a \pm 4i)}} \right] \right) \right). \end{aligned} \quad (356)$$

Avaliando z de 0 a 1 na última equação e usando o valor principal de $\text{Log}[Z]$ e a identidade para $\text{Log}[Z]$ (Eq. (349)), obtemos a solução da função GZ $\bar{F}_2^{GZ}(0, a)$:

$$\begin{aligned} \bar{F}_2^{GZ}(0, a) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2} \left(a \text{Log}[a] - \pi + \frac{[(a+2i)^2 + 2]}{\sqrt{a(a+4i)}} \text{Log} \left[\frac{+i a - 2 - i \sqrt{a(a+4i)}}{2} \right] \right. \\ \left. - \frac{[(a-2i)^2 + 2]}{\sqrt{a(a-4i)}} \text{Log} \left[\frac{-i a - 2 - i \sqrt{a(a-4i)}}{2} \right] \right), \end{aligned} \quad (357)$$

sendo $a = \gamma^2/m_q^2$. Os casos limites da Eq. (357) para $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$ são:

$$\bar{F}_2^{GZ}(0, a \rightarrow 0) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) a^{1/2} + \frac{\pi}{2} a - \frac{15\pi}{16} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) a^{3/2} + \mathcal{O}(a^2), \quad (358)$$

$$\bar{F}_2^{GZ}(0, a \rightarrow \infty) = + \frac{12 \text{Log}[a] - 25}{12 a^2} + \frac{3\pi}{a^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a^4}\right). \quad (359)$$

I.0.3 Caso Gribov–Zwanziger Refinado – Integral $\bar{F}_2^{RGZ}(0)$

Ao contrário do caso Massivo e GZ, a função RGZ será caracterizada por dois parâmetros, a e b , que serão uma razão entre os termos de massa RGZ e a massa do quark conforme detalhado nas Eqs. (226) e (228):

$$\bar{F}_2^{RGZ}(0, a, b, \kappa) = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \left[\frac{(1 - i\kappa) z(1 - z)^2}{(1 - z)^2 + z(a - ib)} + \frac{(1 + i\kappa) z(1 - z)^2}{(1 - z)^2 + z(a + ib)} \right], \quad (360)$$

onde, como nos casos anteriores, separamos a equação em partes integráveis e a integramos por um z arbitrário, o que nos dará uma expressão como:

$$\bar{F}_2^{RGZ}(0, a, b, \kappa) \rightarrow \frac{z^2}{2} + z(b\kappa - a) + \frac{(1 \mp i\kappa)}{2} \left((a \mp ib) \frac{z(a \mp ib - 2) + 1}{(1 - z)^2 + z(a \mp ib)} \right) \quad (361)$$

que pode ser reescrita de uma forma mais conveniente:

$$\frac{(1 \mp i\kappa)}{2} \frac{(a \mp ib)}{2} \left(\frac{(a \mp ib - 2)[2(z - 1) + (a \mp ib)]}{(1 - z)^2 + z(a \mp ib)} - \frac{[(a \mp ib - 2)^2 - 2]}{(1 - z)^2 + z(a \mp ib)} \right) \quad (362)$$

onde o primeiro termo da equação acima gera:

$$\frac{(1 \mp i\kappa)}{2} \left(\frac{(a \mp ib)(a \mp ib - 2)}{2} \right) \text{Log} \left[(1 - z)^2 + z(a \mp ib) \right], \quad (363)$$

enquanto a segunda parte, inversamente proporcional a $(1 - z)^2 + z(a \mp ib)$, produz:

$$\int dz \left[\frac{1}{(1 - z)^2 + z(a \mp ib)} \right] = \frac{2}{i\sqrt{(a \mp ib - 2)^2 - 4}} \text{Tan}^{-1} \left[\frac{2z + (a \mp ib - 2)}{i\sqrt{(a \mp ib - 2)^2 - 4}} \right], \quad (364)$$

Juntando todos esses resultados (Eqs. (361), (363) e (364)) e usando o valor principal de $\text{Log}[Z]$, a identidade trigonométrica (Eq. (349)) e avaliando o parâmetro z de 0 a 1, obteremos a solução da função $\bar{F}_2^{RGZ}(0, a, b, \kappa)$:

$$\begin{aligned}
\overline{F}_2^{RGZ}(0, a, b, \kappa) = & \frac{1}{2} + (b\kappa - a) + \\
& \frac{(1 - i\kappa)}{2} \left(\frac{(a - ib)(a - ib - 2)}{2} \right) \left(\frac{\text{Log}[a^2 + b^2]}{2} - i \text{Tan}^{-1} \left[\frac{b}{a} \right] \right) + \\
& \frac{(1 + i\kappa)}{2} \left(\frac{(a + ib)(a + ib - 2)}{2} \right) \left(\frac{\text{Log}[a^2 + b^2]}{2} + i \text{Tan}^{-1} \left[\frac{b}{a} \right] \right) - \\
& \frac{(1 - i\kappa)}{2} \left(\frac{(a - ib)[(a - ib - 2)^2 - 2]}{2\sqrt{(a - ib - 2)^2 - 4}} \right) \left(\text{Log} \left[\frac{\sqrt{(a - ib - 2)^2 - 4} + a - ib - 2}{2} \right] \right) - \\
& \frac{(1 + i\kappa)}{2} \left(\frac{(a + ib)[(a + ib - 2)^2 - 2]}{2\sqrt{(a + ib - 2)^2 - 4}} \right) \left(\text{Log} \left[\frac{\sqrt{(a + ib - 2)^2 - 4} + a + ib - 2}{2} \right] \right), \quad (365)
\end{aligned}$$

onde para dados RGZ de QCD na rede (consulte a Tabela 8):

$$\kappa = \frac{M^2 + \overline{m}^2}{\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 + \overline{m}^2)^2}} \geq 0, \quad a = \frac{s}{m_q^2} \geq 0, \quad b = \frac{t}{m_q^2} \geq 0 \quad (366)$$

$$s = \frac{M^2 - \overline{m}^2}{2} \geq 0 \quad \& \quad t = \frac{\sqrt{4\lambda^4 - (M^2 + \overline{m}^2)^2}}{2} \geq 0. \quad (367)$$

Os casos limites de $\overline{F}_2^{RGZ}(0, a, b, \kappa)$ (Eq. (365)) para $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$, são:

$$\begin{aligned}
\overline{F}_2^{RGZ}(0, a \rightarrow 0, b \rightarrow 0, \kappa) = & \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\kappa - 1) b^{1/2} + \frac{b}{2} (\pi + \kappa(1 + 2\text{Log}[b])) + \mathcal{O}(b^{3/2}) \\
& a \left(-\frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\kappa + 1}{b^{1/2}} + \frac{\pi\kappa - 3 - 2\text{Log}[b]}{2} - \frac{45\pi}{32} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\kappa - 1) b^{1/2} \right. \\
& \left. + \frac{8\kappa - 3\pi - 6\kappa\text{Log}[b]}{6} b + \mathcal{O}(b^{3/2}) \right) + \mathcal{O}(a^2), \quad (368)
\end{aligned}$$

enquanto que no outro extremo temos que:

$$\begin{aligned}
\overline{F}_2^{RGZ}(0, a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty, \kappa) = & \frac{1}{3a} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{b\kappa}{3} - \frac{12\text{Log}[b] - 25}{12} \right) \\
& + \frac{1}{a^3} \left(-\frac{b^2}{3} - \frac{180\text{Log}[a] - 291}{30} - \frac{b\kappa}{30} (60\text{Log}[a] - 155) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{b^3}{a^4}\right). \quad (369)
\end{aligned}$$

APÊNDICE J – Equação do gap da massa de Gribov no modelo GZ

A equação no espaço euclidiano do gap a 1 *loop* é dada por:

$$1 = \frac{d-1}{d} N g^2 \int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{q_E^4 + \lambda^4}, \quad (370)$$

que podemos resolver decompondo o integrando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N g^2} &= (1 - \frac{1}{d}) \left(\frac{i}{2\lambda^2} \right) \left\{ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + i\lambda^2} - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - i\lambda^2} \right\} \\ \frac{1}{N g^2} &= (1 - \frac{1}{d}) \left(\frac{i}{2\lambda^2} \right) \left\{ \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(1)} \left[\left(\frac{1}{\Delta_1} \right)^{1-d/2} - \left(\frac{1}{\Delta_2} \right)^{1-d/2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde nos últimos passos usamos a expressão (e omitimos o índice E por simplicidade):

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-d/2}$$

e $\Delta_1 = i\lambda^2$, e $\Delta_2 = \lambda^2/i$. Fazendo a mudança, $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, para usar a regularização dimensional ($d = 4 - \epsilon, \epsilon \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \frac{(4\pi)^2}{N g^2} &= (1 - \frac{1}{d}) \left(\frac{i}{2\lambda^2} \right) \left\{ \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-d/2)}{1-d/2} \left[\Delta_1 \left(\frac{4\pi}{\Delta_1} \right)^{2-d/2} - \Delta_2 \left(\frac{4\pi}{\Delta_2} \right)^{2-d/2} \right] \right\} \\ \frac{-16\pi^2}{N g^2} &= \left(\frac{i}{2\lambda^2} \right) \left(\frac{3}{4} + \frac{5\epsilon}{16} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \left\{ \left[\Delta_1 \left(\frac{\Gamma(\epsilon/2)}{(\Delta_1/4\pi)^{\epsilon/2}} \right) - \Delta_2 \left(\frac{\Gamma(\epsilon/2)}{(\Delta_2/4\pi)^{\epsilon/2}} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde no último passo fizemos uma expansão binomial em ϵ . Usando:

$$(a + b\epsilon) \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{(\Delta/4\pi)^{\epsilon/2}} = (a + b\epsilon) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_e + \text{Ln}[4\pi] - \text{Ln}[\Delta] \right) = -a \text{Ln}\left[\frac{\Delta}{\mu^2} \right] + 2b, \quad (371)$$

podemos obter:

$$\begin{aligned} \frac{-16\pi^2}{N g^2} &= \left(\frac{i}{2\lambda^2} \right) \left\{ \left[\Delta_1 \left(-\frac{3}{4} \text{Ln}\left[\frac{\Delta_1}{\mu^2} \right] + \frac{5}{8} \right) + \Delta_2 \left(-\frac{3}{4} \text{Ln}\left[\frac{\Delta_2}{\mu^2} \right] - \frac{5}{8} \right) \right] \right\} \\ \frac{-32\pi^2}{N g^2} &= \frac{3}{4} \text{Ln}[\lambda^4/\mu^4] - \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

que finalmente nos permite expressar a massa de Gribov como:

$$\lambda^4 = \mu^4 \text{Exp}\left[\frac{5}{3} - \frac{128\pi^2}{3N g^2} \right]. \quad (372)$$