



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Higor Silva Ferreira

**Determinação de integrais primeiras para sistemas dinâmicos  
em duas e três dimensões com um algoritmo linear**

Rio de Janeiro

2024

Higor Silva Ferreira

**Determinação de integrais primeiras para sistemas dinâmicos em duas e três dimensões com um algoritmo linear**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.



Orientador: Prof. Dr. Luiz Guilherme Silva Duarte  
Coorientador: Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

F383d Ferreira, Higor Silva.

Determinação de integrais primeiras para sistemas dinâmicos em duas e três dimensões com um algoritmo linear / Higor Silva Ferreira. – 2024.  
148 f. : il.

Orientador: Luiz Guilherme Silva Duarte.

Coorientador: Vitor Emanuel Rodino Lemes.

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Equações diferenciais ordinárias - Teses. 2. Integrais (Matemática) – Teses.  
3. Sistemas dinâmicos diferenciais – Teses. 4. Algoritmos – Teses. 5. Simetria (Matemática) – Teses. I. Duarte, Luiz Guilherme Silva (Orient.). II. Lemes, Vitor Emanuel Rodino (Coorient.). III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. IV. Título.

CDU 517.91

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.



Assinatura

13/03/2024

Data

Higor Silva Ferreira

**Determinação de integrais primeiras para sistemas dinâmicos em duas e três dimensões com um algoritmo linear**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de fevereiro de 2024.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Luiz Guilherme Silva Duarte (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes (Coorientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Luis Antonio Campinho Pereira da Mota  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

---

Prof. Dr. Jair Koiller  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Sérgio Eduardo Silva Duarte  
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Rio de Janeiro

2024

## DEDICATÓRIA

Dedicado ao meu conjunto  $\alpha$ -limite, Maria Aparecida e Francisco.

## AGRADECIMENTOS

Indispensavelmente, devo mencionar em nota de agradecimento a minha família em primeiro lugar, meus pais, que sempre se mostram preocupados com as minhas tarefas, prazos e planejamentos futuros, que por vezes se sentem impotentes quando relato a impossibilidade de me ajudarem de uma maneira muito direta em meus afazeres mas, apesar de talvez não lhes parecer, seu apoio moral constitui minha maior força, sou imensamente grato por sempre acreditarem em mim. Meus irmãos, que mesmo sem muito entenderem o propósito das minhas atividades, em partes devido a uma possível dificuldade minha em lhes traduzir de um linguajar técnico para coloquial, sempre enfatizam a importância de meus investimentos em formação acadêmica, seu reconhecimento me impulsiona cada vez mais. Agradeço aos demais familiares e amigos, todos, sem exceção, pois são também fundamentais para meu desenvolvimento social e pessoal, cada ser humano merece ter alguém que lhe chame de “amigo” e que assim também o permita chamar. A pandemia, o próprio transcorrer do tempo, a vida adulta, me afastou de alguns, mas carrego traços de personalidade que representam pequenas marcas que nossas experiências juntos deixaram. Aos colegas de instituto, que também amigos, muito bem me acolheram e jamais me destratarem, estes são também minha inspiração, nosso convívio me faz crer, cada vez mais, que estou no caminho certo.

Devo também enfatizar minha gratidão aos professores que tive, desde o nível escolar mais básico, pois se hoje ainda prezo tanto pelos estudos, é porque a atuação destes sempre fez em mim o efeito que mais se deseja, despertando meu interesse pelo emocionante processo de aprender, através da leitura, da conversa e da vivência. Em especial, à prof<sup>a</sup> Maria Ap<sup>a</sup> Auxiliadora da Silva Ferreira (minha mãe), que me ensinou a tabuada e ao prof. Dr Luiz Guilherme Silva Duarte, que me orientou durante o mestrado. Sem estes profissionais, eu jamais teria seguido tão adiante nesta caminhada, desejo uma dia também inspirar tantas outras pessoas assim como eles e elas me inspiraram. Por fim, agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro prestado durante os anos de mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

[...] às vezes, é a simplicidade que se esconde sob aparências complexas, às vezes, ao contrário, as aparências são simples e dissimulam realidades extremamente complicadas. A natureza, zombando das dificuldades analíticas, como dizia Fresnel, emprega apenas meios simples e, através da combinação deles, gera sabe-se lá que labirintos inextricáveis. Essa é a simplicidade oculta, aquela que nos cabe desvendar.

*Henri Poincaré*

## RESUMO

FERREIRA, H. S. *Determinação de integrais primeiras para sistemas dinâmicos em duas e três dimensões com um algoritmo linear*. 2024. 148 f. Dissertação (mestrado em Física) - Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

Este trabalho se propõe, inicialmente, à uma abordagem ampla no que diz respeito aos métodos não-classificatórios ou generalistas para tratar equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem. Mais especificamente estaremos interessados em EDO's racionais (diretamente relacionadas a sistemas diferenciais polinomiais autônomos) e, para tanto, nosso ponto de partida consiste do estudo de estruturas teóricas introduzidas em fins do século XIX, em referência aos trabalhos de S. Lie e G. Darboux. Neste sentido, apresentamos alguns detalhes em cada uma das teorias de modo a nos permitir estabelecer o procedimento misto denominado *método da função-S*, implementado muito recentemente pelo grupo de pesquisas da UERJ atuante na área. É de amplo conhecimento que tais métodos apresentam complicações para casos específicos, que ficarão evidentes ao longo da leitura. Assim, implementar e aperfeiçoar algoritmos para lidar com equações deste tipo, quando integráveis, tem sido a principal motivação do grupo. Portanto, o desenvolvimento mais ao final deste trabalho apresenta, como proposta, um método de alta eficácia que nos permite determinar polinômios de Darboux de modo linear (os autopolinômios do campo vetorial associado a estas equações são de fundamental importância para a construção de um fator integrante). Nesse aspecto, reforçamos algumas ideias introduzidas em capítulos precedentes (utilizando-nos de uma notação mais conforme com desenvolvimentos recentes do grupo) e instituímos, definitivamente, os algoritmos para nossos fins, de modo que, um destes se aplica às 1EDO's racionais que apresentam solução geral Darbouxiana e outros dois se encarregam de problemas envolvendo 2EDO's, em subcasos que se apresentam como: 2EDO's racionais com uma integral primeira elementar e outra não-Liouvillianas; 2EDO's racionais com duas integrais primeiras Liouvillianas, sendo uma delas elementar. Concluímos com uma discussão sobre o desempenho do método em termos computacionais, que de antemão podemos afirmar, seguramente, representa uma rotina de eficiência singular (devido a linearidade das equações envolvidas no procedimento) em termos de memória consumida e tempo de execução, também, acrescentamos ao final um exemplo de aplicação do método à equação de um oscilador não-linear (Duffing van-der Pol) de amplo interesse para aplicações diversas.

Palavras-chave: Integrais primeiras Liouvillianas. Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Simetrias não-locais.

## ABSTRACT

FERREIRA, H. S. *Determination of first integrals for dynamical systems in two and three dimensions with a linear algorithm*. 2024. 148 f. Dissertação (mestrado em Física) - Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

This work proposes, initially, a broad approach with regard to the non-classificatory or generalist methods to deal with first and second order ordinary differential equations. More specifically, we will be interested in rational ODE's (which are directly related to autonomous polynomial differential systems) and, to this end, our starting point consists of the study of theoretical structures introduced by the end of 19th century, in a reference to the works of S. Lie and G. Darboux. In this sense, we present some details contained in each of these theories in order to establish a mixed procedure called the *S - function method*, which was recently implemented by the UERJ research group working in the topics. It is widely known that such methods present complications when applied to some specific cases, and it will become evident throughout this reading. Thus, implementing and refining algorithms to deal with these type of equations, when integrable, has been the main motivation of the group. Therefore, the development at the very end of this work presents, as a proposal, a highly efficient method that allows us to determine the Darboux polynomials with a linear procedure (the eigenpolynomials of the vector field associated with these equations have fundamental importance for the construction of an integrating factor). In this aspect, we reinforce some ideas which are discussed in the preceding chapters (introducing a notation in conformity with the most recent developments of the group) and definitively establish the algorithms for our purposes, in such a way that, one of them applies to rational first order ODE's presenting a Darbouxian general solution, while the other two are useful to deal with problems involving second order ODE's, in subcases that arise as follows: rational second order ODE's presenting one elementary first integral and one non-Liouvillian first integral; rational second order ODE's with two Liouvillian first integrals, one of them being elementary. We conclude with a discussion on the performance of our method in computational terms, which we can surely assert, beforehand, represents a routine of singular efficiency (due to the linearity of the equations involved in the procedure) in terms of consumed memory and execution time. Additionally, we present an example as an application of our method to an equation of a non-linear oscillator (Duffing van-der Pol) which is of great interest for various applications.

Keywords: Liouvillian first integrals. Second order ordinary differential equations.

Non-local symmmtries.

## SUMÁRIO

|         |                                                                   |     |
|---------|-------------------------------------------------------------------|-----|
|         | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                 | 9   |
| 1       | <b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS</b>                           | 11  |
| 1.1     | <b>Preliminares</b>                                               | 11  |
| 1.1.1   | <u>Definições gerais</u>                                          | 11  |
| 1.1.2   | <u>EDO's exatas e Fator Integrante</u>                            | 17  |
| 2       | <b>TEORIA DE DARBOUX</b>                                          | 26  |
| 2.1     | <b>Aspectos fundamentais</b>                                      | 26  |
| 2.2     | <b>O método de Prelle e Singer</b>                                | 30  |
| 2.2.1   | <u>1EDO's racionais com solução geral elementar</u>               | 31  |
| 2.2.2   | <u>1EDO's racionais com solução geral Liouvilliana</u>            | 37  |
| 2.2.2.1 | Um semi-algoritmo e estudo de caso                                | 47  |
| 3       | <b>TEORIA DE LIE</b>                                              | 54  |
| 3.1     | <b>Grupos e Grupos de Transformações a um parâmetro</b>           | 54  |
| 3.1.1   | <u>Transformações infinitesimais</u>                              | 56  |
| 3.1.2   | <u>Funções, superfícies e curvas invariantes</u>                  | 59  |
| 3.1.3   | <u>Transformações estendidas e simetrias</u>                      | 66  |
| 3.1.4   | <u>Coordenadas canônicas</u>                                      | 73  |
| 4       | <b>O MÉTODO DA FUNÇÃO-S</b>                                       | 80  |
| 4.1     | <b>Definições e resultados básicos</b>                            | 80  |
| 4.2     | <b>Funções-S e as 1EDO's associadas</b>                           | 87  |
| 4.2.1   | <u>O algoritmo (semi) do método da função-S</u>                   | 92  |
| 5       | <b>UM MÉTODO PS LINEAR</b>                                        | 99  |
| 5.1     | <b>Discussões prévias</b>                                         | 101 |
| 5.2     | <b>A ideia central do método</b>                                  | 105 |
| 5.3     | <b>Um PS linear para 2ODEs racionais</b>                          | 110 |
| 5.3.1   | <u>Alguns resultados e definições importantes</u>                 | 110 |
| 5.3.2   | <u>Uma integral primeira elementar e outra não-Liouvilliana</u>   | 112 |
| 5.3.3   | <u>Uma integral primeira elementar e outra Liouvilliana</u>       | 117 |
| 6       | <b>DESEMPENHO</b>                                                 | 122 |
| 6.1     | <b>Duas ODEs “difíceis”</b>                                       | 122 |
| 6.2     | <b>A equação de Duffing-van der Pol</b>                           | 123 |
| 6.3     | <b>Alguns comentários adicionais</b>                              | 124 |
|         | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                                       | 126 |
|         | <b>REFERÊNCIAS</b>                                                | 128 |
|         | <b>APÊNDICE A – Corpos de Funções Elementares e Liouvillianas</b> | 133 |
|         | <b>APÊNDICE B – Campos vetoriais e formas diferenciais</b>        | 138 |

## INTRODUÇÃO

Estudos relacionados às chamadas equações diferenciais, de uma maneira geral, tiveram início no último quarto do século XVII, com a publicação de resultados obtidos por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), de maneira independente. Nos referidos trabalhos são introduzidos os elementos do Cálculo Diferencial e Integral, motivados por considerações de natureza física e geométrica (Sotomayor, 2011). Estes elementos levaram ao reconhecimento de um novo campo de estudos na Matemática, que causou interesse em alguns personagens importantes na história da disciplina, podemos citar os irmãos Bernoulli, Euler, Lagrange e Laplace (Boyce; DiPrima, 2006), contribuindo para que este novo ramo se tornasse fonte ferramental importante para o estudo de diversos problemas na Física, Química, Biologia, e até mesmo na Economia. Algumas das leis mais gerais destas áreas encontram uma expressão formal nas equações diferenciais<sup>1</sup>.

Desenvolvimentos mais recentes no campo das equações diferenciais conduziram aos métodos de aproximação numérica e aos métodos geométricos ou topológicos, impulsionando o estudo das equações não-lineares e mantendo a notoriedade da teoria como uma importante fonte de problemas ainda não resolvidos (Boyce; DiPrima, 2006). Também, sob o contexto que envolve o surgimento do computador na segunda metade do século XX, tem sido possível retomar os chamados métodos *não-classificatórios*, em referência aos métodos com maior abrangência quando comparados aos seus antecessores (apesar de mais custosos operacionalmente), no sentido de que, alguns dos métodos antigos, usualmente estudados nos cursos a nível de graduação, podem ser entendidos como casos particulares destes *generalistas/não-classificatórios*. Vale mencionar, portanto, os trabalhos de Darboux (1842-1917), a respeito da integrabilidade de sistemas polinomiais de primeira ordem autônomos em  $\mathbb{C}^n$ , além também do método de simetrias de Lie (1842 - 1899) que nos permite reduzir a ordem ( $n$ ) de uma equação diferencial à  $n - r$  se a mesma for invariante pela ação de um grupo de transformações de Lie a  $r$  parâmetros cuja álgebra associada é solúvel. Estudos envolvendo o corpo teórico presente nestes métodos, que haviam sido deixados de lado (apesar de sua magistral elegância), vêm sendo retomados graças ao desenvolvimento de computadores cada vez mais versáteis, o que suprime a necessidade de execução manual dos cálculos.

Contudo, ainda existe muito a ser feito em relação às soluções de equações diferenciais ordinárias (EDO's<sup>2</sup>) em forma fechada (em termos de funções Liouvillianas). Do

---

<sup>1</sup> Parte dos exemplos trabalhados neste texto são de motivação essencialmente prática, apresentaremos devida descrição dos problemas quando for o caso.

<sup>2</sup> É comum encontrarmos ainda a sigla ODE, do inglês *Ordinary Differential Equations*.

ponto de vista algorítmico, podemos citar, por exemplo, as EDO's racionais de primeira ordem com solução geral elementar, sobre as quais apresentaremos um estudo mais detalhado e, para as quais, o algoritmo de 1983 desenvolvido por Prelle e Singer é suficiente em teoria, pois, parte do algoritmo proposto consiste na determinação de elementos fundamentais no contexto da abordagem de Darboux, em referência aos chamados *polinômios de Darboux* e, a maneira mais óbvia para os obtermos de modo explícito é heurística<sup>3</sup>. Estudos neste cenário compõem parte fundamental do corpo teórico do presente trabalho, e, a proposta se estende ainda a uma análise criteriosa de casos envolvendo equações diferenciais ordinárias racionais de segunda ordem que apresentam soluções gerais Liouvillianas não-elementares. Como veremos, o ferramental teórico envolvido nesta adaptação do método PS (Prelle-Singer) às 2EDO's é também fundamentado em algumas considerações do método de simetrias de Lie, apresentando, portanto, um caráter misto. Ainda assim, estas ferramentas (poderosíssimas, por sinal) enfrentam, naturalmente, dificuldades para lidar com alguns casos e, muito se desenvolve em termos de aperfeiçoamento dos métodos para obtenção de soluções ou para simplificação de EDO's racionais. Podemos então dizer que apesar da idade das teorias de Lie e de Darboux, os desdobramentos a elas associados estão bastante ativos e, por conta disso, há ainda grande interesse por parte de diversos pesquisadores na implementação de novos algoritmos, ou mesmo, no aperfeiçoamento de algoritmos já existentes para fins de resolução destas equações e de sistemas diferenciais a elas associados.

Neste trabalho discutiremos inicialmente os tópicos de maior utilidade presentes nas teorias de Darboux (capítulo 2) e de Lie (capítulo 3) para estruturar o método da função-S (capítulo 4). A ideia é, não só tornar clara a utilidade destas abordagens, mas também compreender suas limitações. Assim, estes primeiros capítulos estão dispostos de uma maneira que, de certa forma, reconstrói uma sucessão cronológica em termos de tópicos de interesse do nosso grupo. Na sequência, os demais capítulos, versam sobre novos resultados, sugerindo um refinamento do método PS, de modo a obtermos um sistema de equações lineares para determinação dos polinômios de Darboux, o método é aplicável tanto à 1EDO's racionais quanto à 2EDO's racionais. Foram incluídos também conteúdos de relevância para o entendimento do texto no capítulo inicial e nos trechos em apêndice, como uma tentativa de garantir maior clareza e compreensão ao leitor.

---

<sup>3</sup> Sendo necessário construir um polinômio candidato genérico em grau  $n$  com coeficientes a determinar, o procedimento resulta em um sistema de equações algébricas para o qual, cada solução não trivial corresponde a um polinômio de Darboux.

## 1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

No campo das equações diferenciais, as chamadas ordinárias são notavelmente importantes para o desenvolvimento das ciências e suas aplicações, grande parte destas, como mencionamos na seção introdutória, são comumente associadas à problemas físicos, químicos, biológicos, entre outros. Neste sentido, diz-se que uma equação diferencial pode representar um modelo teórico para algum dos referidos problemas em termos de uma dinâmica, quer dizer, equações diferenciais podem prover resultados e/ou conclusões a respeito de um dado sistema que apresente variações de certas grandezas como funções de variáveis ditas independentes no sistema (veremos alguns exemplos de aplicações práticas em determinadas partes do texto). O próprio tempo, como variável ( $t$ ), é frequentemente tomado como independente, assim o fazemos ao definir os conceitos mais fundamentais a respeito das equações diferenciais ordinárias, apresentados neste capítulo inicial do trabalho. Este primeiro contato é importante para que tenhamos uma noção geral do nosso objeto de estudos.

### 1.1 Preliminares

A fim de caracterizar o problema central da teoria das Equações Diferenciais, podemos, por hora, fornecer uma descrição informal da situação. Denomina-se “equação diferencial” qualquer equação que estabeleça relação entre as derivadas de uma ou mais funções desconhecidas (com respeito a uma ou mais variáveis) e elas mesmas. Neste contexto, quaisquer informações a respeito das funções incógnitas representam algum progresso em direção à solução do problema.

Como sugere o título que atribuímos a este capítulo, iremos trabalhar aspectos que envolvem a classe das chamadas ED’s *ordinárias* e, em vista disto, torna-se, portanto, imprescindível atentar-nos a definições mais precisas.

#### 1.1.1 Definições gerais

**Definição 1.1.1.** Seja  $f$  uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida nos pontos  $(\mathbf{x}, t)$  do aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Dizemos que

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

é uma **equação diferencial ordinária** em  $\mathbb{R}^n$  definida através de  $f$  (Doering; Lopes, 2016). O sinal  $\dot{\phantom{x}}$  denota derivação em relação à variável escalar  $t$ . É comum também denominarmos a equação (1) como um *sistema dinâmico*, pois a mesma pode também ser representada à forma de um sistema com  $n$  equações diferenciais escalares de primeira ordem nas variáveis  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Considere  $I$  um intervalo em  $\mathbb{R}$ . Diremos que uma solução da equação (1) é uma curva definida e diferenciável  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de modo que, para cada  $t \in I$ ,  $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t)$ . A representação gráfica da solução está, portanto, inteiramente contida em  $U$ ,  $f$  determina um *campo de velocidades*<sup>4</sup> do sistema (Doering; Lopes, 2016). Em outras palavras, para cada  $t \in I$ ,

$$(\mathbf{x}(t), t) \in U \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), t).$$

Como mencionado, podemos também representar a equação (1) na forma de um sistema diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{cases}$$

A solução é, portanto, a  $n$ -upla  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  constituída por funções  $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que,

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \tag{2}$$

para cada  $t \in I$ . A variável  $t$  neste contexto é comumente denominada *variável independente* enquanto que as *variáveis dependentes*  $x_i$  são *variáveis de estado*. As funções  $f_i$  definem um campo vetorial sobre o espaço das variáveis de estado, denominado **espaço de fases**, no qual os eixos coordenados são  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Do ponto de vista que adotamos para esta abordagem, uma solução  $\mathbf{x} : t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$  define também uma *trajetória* do campo no espaço de fases, de modo que, em cada instante (para cada  $t \in I$ ) o vetor  $f = (f_1, \dots, f_n)$  é tangente à trajetória. Então,

---

<sup>4</sup> Da expressão usual para velocidade instantânea  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}$ .

pela evolução do campo a partir de condições iniciais<sup>5</sup> distintas obtemos um conjunto de diferentes trajetórias no espaço de fases, a isto convencionamos chamar *retrato de fases* (Monteiro, 2019).

Convém apresentar alguns exemplos para que o leitor possa se familiarizar melhor com estes conceitos mais fundamentais da teoria.

**Exemplo 1.1.1.** Em 1922, o físico holandês Balthasar van der Pol trabalhou a equação

$$\ddot{x} + \mu(1 - x^2)\dot{x} - x = 0 \quad (3)$$

em uma tentativa de modelar o funcionamento de um circuito elétrico presente nos primeiros aparelhos de rádio. Na equação,  $\mu$  é um parâmetro positivo e, em analogia com a equação de um oscilador harmônico amortecido<sup>6</sup>, podemos dizer que  $F(x) = \mu(x^2 - 1)$  representa um termo de “amortecimento” quando  $x^2 > 1$ , porém, se  $x^2 < 1$ , o termo atua como um “amplificador”, em outras palavras,  $F(x)$  amortece oscilações de grande amplitude e intensifica oscilações de menor amplitude, o sistema portanto atinge uma “oscilação autossustentada” (*ciclo limite*) (Monteiro, 2019).

A equação diferencial (3) (de segunda ordem) pode ser representada como um sistema diferencial com equações de primeira ordem em duas variáveis de estado<sup>7</sup>  $(x, y)$  da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x. \end{cases} \quad (4)$$

Utilizando-se de técnicas de integração numérica é possível obter soluções particulares. O processo consiste, basicamente, de iterações sucessivas segundo as equações que definem o próprio sistema, partindo, claro, de um dado ponto  $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$  (condição inicial). Grande parte do trabalho é feita computacionalmente<sup>8</sup>. Seguem, por representações nas figuras (1) e (2), exemplos do que denominamos curva-solução e espaço de fases, obtidas através de procedimento numérico considerando  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0, 1$  e  $\mu = 1$ .

---

<sup>5</sup> Tomemos uma solução  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$  e um ponto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U$ . Se  $t_0 \in I$  e  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  então a solução  $\mathbf{x}$  satisfaz à **condição inicial**  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

<sup>6</sup>  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , sendo  $\gamma$  e  $\omega_0$  duas constantes positivas referentes ao coeficiente de amortecimento e frequência natural ( $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ) do sistema respectivamente.

<sup>7</sup> Presságio do que iremos abordar brevemente após discussão de alguns exemplos para fixar os conceitos apresentados até o momento.

<sup>8</sup> É importante mencionar que por essa abordagem as soluções obtidas são aproximadas e, em geral, estas técnicas não nos permitem tirar conclusões de validade geral sobre a dinâmica do problema.

Figura 1 - Uma curva solução do sistema diferencial bidimensional (4).

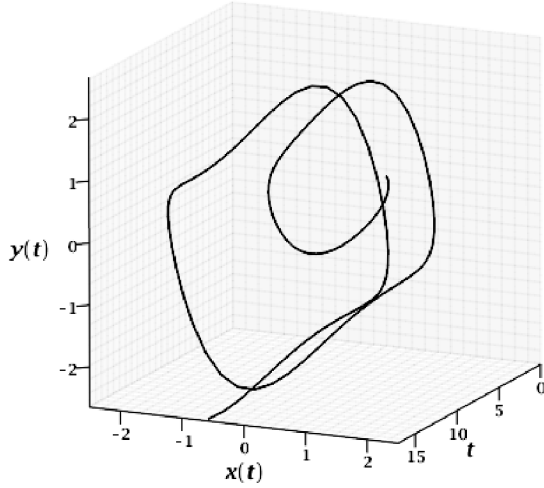
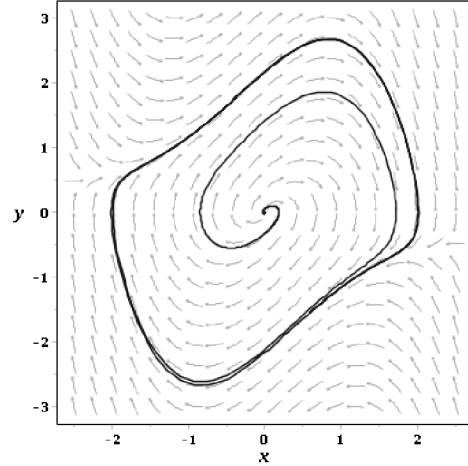


Figura 2 - Uma trajetória do campo vetorial bidimensional (4) no espaço de fase.



Legenda: Na imagem à esquerda, representamos o gráfico (em  $\mathbb{R}^3$ ) de uma solução particular  $\mathbf{x} : t \mapsto (x(t), y(t))$  para o sistema de equações que define o oscilador de van der Pol. Ao lado, incluímos a evolução do sistema para esta solução no espaço de fase, por este recurso acompanhamos, simultaneamente, as mudanças em cada uma das variáveis de estado  $x$  e  $y$ .

Fonte: O autor, 2024.

**Exemplo 1.1.2.** Considere o sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases} \quad (5)$$

Este sistema é equivalente a uma equação diferencial ordinária de primeira ordem na reta<sup>9</sup> expressa por

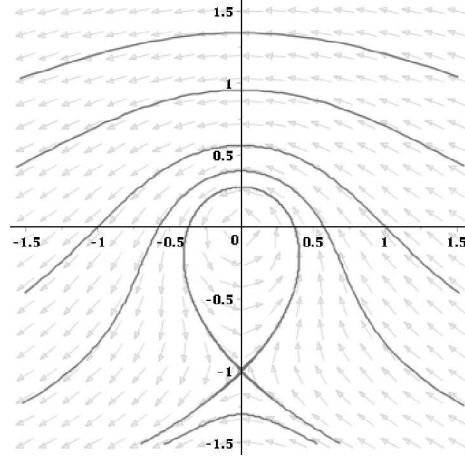
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{-x_2 - (x_1^2 + x_2^2)} = h(x_1, x_2), \quad (6)$$

pois, integrando esta equação obtém-se uma curva  $x_2 = x_2(x_1)$ , que representa uma trajetória no plano de fases obtida por evolução do sistema (5) a partir de uma dada condição inicial. Podemos associar o valor obtido através do campo escalar  $h(x_1, x_2)$  à inclinação da reta tangente à cada curva, assim,  $h(x_1, x_2)$  deve assumir valor único em

<sup>9</sup> Discutiremos, no capítulo seguinte, maiores detalhes a respeito da equivalência entre sistemas polinomiais e equações diferenciais racionais.

cada ponto  $(x_1, x_2)$ , exceto nos chamados pontos de equilíbrio, para os quais ambas as funções, numerador e denominador de (6), se anulam<sup>10</sup> (Monteiro, 2019).

Figura 3 - Retrato de fase para o sistema dado na equação (5)



Legenda: Cada solução pode ser portanto identificada no plano de fase como um conjunto de pontos  $\{(x_1(t), x_2(t)) | t \in \mathbb{R}\}$  de uma das trajetórias. A evolução do campo é definida segundo o sentido de percurso dado por  $t$  crescente.

Fonte: O autor, 2024.

O objetivo do *retrato de fase* é, portanto, nos dar alguma ideia a respeito de uma evolução qualitativa global do sistema, tratando-se de um esboço esquemático de algumas das trajetórias representadas sobre o espaço de fases<sup>11</sup> (Doering; Lopes, 2016).

Perceba que nossa abordagem inclui não somente equações de primeira ordem, vimos que, na forma (3) a equação de van der Pol é uma 2EDO (equação diferencial ordinária de segunda ordem) autônoma  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$  em  $\mathbb{R}$ . Vamos tentar generalizar as ideias de uma maneira simples e que nos será de utilidade posteriormente. Tome uma equação diferencial ordinária da forma

$$y'' = g(x, y, y') \text{ sendo } y' = \frac{dy}{dx} \text{ e } y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

A variável independente agora é  $x$ , não mais representando uma grandeza vetorial neste

<sup>10</sup> Estes pontos estão relacionados às chamadas *soluções estacionárias* para sistemas autônomos (quando  $f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})$ ), definidos como pontos  $(x_1, \dots, x_n)$  tais que  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ , sua importância é fundamental quando na intenção de se estudar noções de estabilidade das soluções, que envolvem aspectos de uma abordagem mais qualitativa.

<sup>11</sup> Técnicas de análise qualitativa das equações diferenciais constituem um ferramental muito importante para os estudos na área de sistemas dinâmicos permitindo-nos determinar soluções assintóticas, i.e., comportamentos dos sistemas com  $t \rightarrow \infty$ . Porém, podem haver casos para os quais parte do comportamento transiente (antes do regime permanente) nos passe despercebida.

contexto. Vamos considerar também que  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ . Assim, também  $y, y'$  e  $y''$  são grandezas escalares. Esta equação é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u'(x) = v(x) \\ v'(x) = g(x, u(x), v(x)), \end{cases} \quad (7)$$

pois veja que tomando uma solução  $(u(x), v(x))$  do sistema e fazendo  $y(x) = u(x)$  temos

$$y''(x) = u''(x) = v'(x) = g(x, u(x), v(x)) = g(x, y(x), y'(x)),$$

implicando que  $(u(x), v(x)) = (y(x), y'(x))$  é solução do sistema (Doering; Lopes, 2016). Esta construção é análoga e dá justificativa às que faremos mais adiante, ao considerar, para 2EDO's do tipo

$$y''(x) = \phi(x, y(x), y'(x)),$$

a forma

$$z'(x) = \phi(x, y(x), z(x)), \text{ com } z = y'.$$

É possível também verificar que o procedimento se aplica às equações de ordem superior

$$y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m} = g(y, y', \dots, y^{(m-1)}, x),$$

para qualquer  $m \geq 1$  fixo, sendo  $g$  aplicações em abertos  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ . Neste sentido, uma equação diferencial ordinária de ordem  $m$  pode ser representada por um sistema diferencial equivalente com  $m$  EDO's de primeira ordem.

Com respeito aos detalhes da construção teórica que versa sobre existência e unicidade das soluções de equações diferenciais vale somente fazer menção, a maioria dos textos básicos para uma disciplina de equações diferenciais ordinárias na graduação for-

nece uma discussão razoavelmente elaborada a respeito<sup>12</sup>. Para o desenvolvimento deste trabalho é importante apenas mencionar o fato de que garantir a existência de soluções não necessariamente significa que seja sempre possível exprimí-las em termos de funções elementares<sup>13</sup>.

Como nosso grupo se interessa por abordagens que envolvam técnicas analíticas para o estudo de sistemas dinâmicos, é conveniente trabalharmos em um aspecto mais amplo no que diz respeito às soluções, i.e., referimo-nos com frequência às *famílias de curvas-solução*, também denominadas *soluções gerais* das equações diferenciais, que, em contraponto às soluções particulares, representam soluções para quaisquer que sejam as condições iniciais definidas para o problema<sup>14</sup>.

### 1.1.2 EDO's exatas e Fator Integrante

Como pontuamos, nem sempre será possível obter soluções que possam ser escritas em termos de funções elementares. Na verdade, equações diferenciais para as quais podemos de fato fazê-lo são casos bastante especiais. Dessa forma iremos, por hora, nos restringir ao estudo das chamadas EDO's *exatas*. O desenvolvimento conceitual em torno destas equações nos permitirá introduzir ideias relevantes para o trabalho como um todo, a exemplo das *integrais primeiras* e do *fator integrante*.

Considere uma família de curvas definida através de:

$$I(x, y) = C, \tag{8}$$

onde  $C$  é constante e  $I$  é função suave ( $C^\infty$ ) nas variáveis  $x$  e  $y$ . Denominamos *família de curvas* pois a cada valor atribuído à constante  $C$  obtemos  $y$  como função implícita de  $x$ .

Suponhamos que a equação (8) represente uma expressão que possa ser tomada como *solução geral* de uma 1EDO  $y'(x) = \phi(x, y)$ . Tomando a derivada total com respeito a  $x$  por ambos os lados da igualdade escrevemos:

---

<sup>12</sup> Basicamente, a existência de soluções para equações diferenciais é garantida pela continuidade do campo  $f$ , enquanto que a unicidade é estabelecida por condições iniciais, de um modo bastante simplista, é suficiente reafirmar o fato de que  $f$ , por se tratar de um campo vetorial tangente às trajetórias no retrato de fase, deve então se constituir de um representante vetorial único em cada ponto  $(x_1, \dots, x_n)$  *regular* (que não representa ponto de equilíbrio) definido sobre cada solução particular  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

<sup>13</sup> Uma definição para a classe das funções elementares é apresentada no Apêndice A.

<sup>14</sup> Vale ressaltar que a integração analítica nem sempre é factível, como mencionado, são poucos os casos para os quais podemos utilizar-nos de funções elementares para representar tais expressões gerais.

$$\frac{dI(x, y)}{dx} = \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (9)$$

Esta representa uma condição fundamental para que tenhamos liberdade de dizer quando uma dada equação diferencial ordinária de primeira ordem pode ou não ser integrada analiticamente, basicamente, diremos que se uma equação diferencial se apresenta na forma:

$$\frac{\partial I(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \quad (10)$$

então suas soluções são dadas implicitamente através de  $I(x, y) = C$  (Rosa, 2022). Vamos considerar a forma genérica de duas funções  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  como as derivadas parciais  $\partial_x(I)$  e  $\partial_y(I)$  respectivamente, assim expressamos a equação (10) como

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (11)$$

Nesse formato, podemos então supor que a solução geral da equação diferencial (11) é representada implicitamente por uma família de curvas  $I(x, y) = C$  para a qual é possível estabelecermos as seguintes identificações:

$$P(x, y) = \frac{\partial I(x, y)}{\partial x}, \quad \text{e} \quad Q(x, y) = \frac{\partial I(x, y)}{\partial y}, \quad (12)$$

ou, simplesmente  $\nabla I(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ , reforçando o caráter de campos vetoriais no contexto de equações escalares nas variáveis de estado.

Veja então que, retomando a equação (9), diremos que uma 1EDO pode ser integrada analiticamente se houver função  $I(x, y)$  que satisfaça

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = \frac{dI}{dx}(x, y). \quad (13)$$

**Definição 1.1.2.** Seja uma 1EDO expressa no formato  $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ . Se a condição estabelecida em (13) for válida para alguma função  $I(x, y)$  infinitamente diferenciável, então dizemos que a referida equação diferencial é **exata** (Avellar; Duarte; Mota, 2020).

Funções  $I(x, y)$  de classe  $C^\infty$  em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  são tais que:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial x}.$$

Então, através das equações em (12) escrevemos que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**Teorema 1.1.1.** *Se as funções  $Q(x, y)$  e  $P(x, y)$  são de classe  $C^\infty$  em  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , então  $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$  é exata se, e somente se:*

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad (14)$$

para cada  $(x, y) \in U$ .

Nomeada frequentemente como *Condição de Euler* a equação (14) expressa condição necessária e suficiente (sob certas hipóteses) sobre as funções  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  para que possamos operar apropriadamente a fim de encontrar  $I(x, y)$  que satisfaça (12)<sup>15</sup>.

**Exemplo 1.1.3.** Consideremos a equação diferencial de primeira ordem dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2 + 2x}{2xy + y^3 - x^2}. \quad (15)$$

Ou ainda,  $2xy - y^2 + 2x + (x^2 - 2xy - y^3)y' = 0$ . Nesta forma, podemos facilmente verificar que  $\partial_y P = \partial_x Q$  fazendo

$$P(x, y) = 2xy - y^2 + 2x \quad \text{e} \quad Q(x, y) = x^2 - 2xy - y^3.$$

Portanto, esta é uma equação exata. A solução geral  $I(x, y) = C$  pode ser obtida levando-se em consideração que  $\partial_x I = P(x, y)$  e  $\partial_y I = Q(x, y)$ , como proposto na equação (12). Vejamos:

---

<sup>15</sup> As funções  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  devem ser continuamente diferenciáveis em um domínio  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  simplesmente conexo, ou seja, é possível definir curvas suaves entre quaisquer dois pontos distintos no interior de  $U$ , adicionalmente, tomando duas curvas distintas com pontos extremos em comum no interior de uma região simplesmente conexa, dizemos ser possível deformar, continuamente, uma na outra, mantendo-se os extremos fixos sem sair da região (Rosa, 2022). A condição poderia também ser obtida via  $\text{rot}(P(x, y), Q(x, y)) = 0$ .

É sabido que

$$I(x, y) = \int \frac{\partial I}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y), \quad (16)$$

logo:

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int P(x, y) dx + \varphi(y) \right) = Q(x, y).$$

Portanto

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \implies \varphi(y) = \int \left( Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right) dy.$$

Substituindo então este resultado em (16), obtemos

$$I(x, y) = \int P(x, y) dx + \int \left( Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right) dy. \quad (17)$$

Então, a fim de encontrarmos uma função  $I(x, y)$  cabível para o exemplo em consideração, basta executarmos as operações no lado direito da seguinte expressão:

$$I(x, y) = \int (2xy - y^2 + 2x) dx + \int \left( x^2 - 2xy - y^3 - \frac{\partial}{\partial y} \int (2xy - y^2 + 2x) dx \right) dy,$$

$$\implies I(x, y) = x^2 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{4}y^4.$$

Ou seja, a solução geral da equação (15) na forma implícita é dada através da família de curvas  $x^2 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{4}y^4 = C$ .

**Exemplo 1.1.4.** Consideremos a equação:

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy},$$

ou ainda  $y^2 - x^2 - (2xy)y' = 0$ . Então, verifica-se facilmente que  $\partial_y P \neq \partial_x Q$ , o que implica que esta não é uma equação exata. Porém, interessante notar que se dividirmos por  $x^2$  ambos os lados de  $y^2 - x^2 - (2xy)y' = 0$ , obtemos uma 1EDO exata (Avellar; Duarte; Mota, 2020). Diremos que o fator  $1/x^2$  é um *fator integrante*.

O fator integrante permite-nos tornar exata uma 1EDO não exata, com isto, o método para obtenção de uma solução geral por quadraturas, explicitado no primeiro exemplo, pode ser aplicado. Neste contexto somos induzidos ao questionamento em res-

peito as condições necessárias para que  $R(x, y)P(x, y) + R(x, y)Q(x, y)y' = 0$  seja uma 1EDO exata, sendo  $R(x, y)$  um fator integrante.

Perceba que, nos casos em que a 1EDO é racional, ou seja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (18)$$

sendo  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  polinômios nas variáveis  $x$  e  $y$  que não possuem fator comum (*polinômios coprimos*), podemos estabelecer  $P(x, y) = M(x, y)$ , bem como  $Q(x, y) = -N(x, y)$ , uma vez que, para (18) se escreve

$$M(x, y) - N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

e a condição (14) passa a ser

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (19)$$

Contexto no qual

$$M(x, y) = \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} \quad \text{e} \quad N(x, y) = -\frac{\partial I(x, y)}{\partial y}. \quad (20)$$

Digamos que a 1EDO racional  $R(x, y)M(x, y) - R(x, y)N(x, y)y' = 0$  seja exata, então, em referência ao teorema (1.1.1), devemos ter que

$$\frac{\partial(RM)}{\partial y} = \frac{\partial(-RN)}{\partial x}. \quad (21)$$

O que nos leva a

$$N\frac{\partial R}{\partial x} + M\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial M}{\partial y} + R\frac{\partial N}{\partial x} = 0. \quad (22)$$

Uma equação diferencial parcial (EDP) que pode não ser tão simples de resolver. Casos em que  $R = R(x)$  ou  $R = R(y)$  reduzem a equação (22) a uma 1EDO separável, portanto mais simples, porém menos geral. Ou seja, por este caminho é provável que tenhamos de lidar com problemas ainda mais complicados. Os desdobramentos que se dão no âmbito da procura por fatores integrantes para 1EDO's racionais envolvem outra contextualização teórica, que será abordada no capítulo seguinte. Tomemos, por hora, o desenvolvimento

até a equação (22) como uma contextualização parcial do problema, o mesmo será feito a seguir para 2EDO's racionais, que são também equações de interesse para os desenvolvimentos do nosso grupo. Portanto, no escopo deste trabalho estarão somente as EDO's racionais de primeira e segunda ordem.

Retomaremos a EDP que aparece em (22) no capítulo seguinte, onde enunciaremos os princípios mais básicos da abordagem generalista de Darboux. A equação estabelece uma relação de suma importância ao método de Prelle e Singer, que se baseia em um teorema a respeito da estrutura do fator integrante para 1EDO's racionais que apresentam solução geral  $I(x, y) = C$  elementar.

Vale atentar-nos também para uma discussão a respeito de fator integrante no contexto de 2EDO's racionais. Uma 2EDO racional pode ser colocada como

$$y'' = \frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{M(x, y, y')}{N(x, y, y')}, \quad (23)$$

com  $M$  e  $N$  polinômios em  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . Por uma abordagem semelhante àquela que empregamos inicialmente para as 1EDO's racionais, reescrevamos:

$$M(x, y, y') - N(x, y, y')y'' = 0, \quad (24)$$

Vamos propôr, em total analogia ao desenvolvimento anterior, que seja possível buscar uma função suave  $I(x, y, y')$  de modo que possamos escrever:

$$M(x, y, y') - N(x, y, y')y'' = \frac{d}{dx}I(x, y, y'), \quad (25)$$

Em contraponto ao caso de 1EDO's, não é possível representar a *solução geral* de uma 2EDO através de  $I(x, y, y') = C$ , devido ao fato de que a relação possui dependência explícita de  $y'$ . Podemos, no máximo, dizer que a expressão representa uma família de superfícies de nível sobre as soluções da 2EDO, ou seja, para todo par  $(x, y)$  em uma curva solução a função  $I(x, y, y')$  é constante, e, por tal motivo, a denominamos **invariante** ou **integral primeira**<sup>16</sup>, cuja importância reside no fato de que, em princípio, se conhecemos um invariante da 2EDO, resolvemos a expressão  $I(x, y, y') = C$  para  $y'$  e integramos a 1EDO resultante para encontrar, de fato, a solução  $y(x)$  da 2EDO.

Por processo similar àquele feito para 1EDO's exatas, ao derivar ambos os lados

---

<sup>16</sup> Apresentaremos, formalmente, uma definição para a integral primeira no capítulo seguinte, onde será interessante fazer breve retomada das ideias contidas no âmbito dos sistemas de equações de primeira ordem que foram apresentados na primeira subseção deste capítulo.

de  $I(x, y, y') = C$  com respeito a variável  $x$  ficamos com:

$$\frac{d}{dx}I(x, y, y') = \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial I}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} = I_x + I_y y' + I_{y'} y'' = 0 \quad \left( I_u = \frac{\partial I}{\partial u} = \partial_u I \right). \quad (26)$$

Fazendo uma correspondência direta entre as equações (25) e (26), determina-se, por comparação entre  $M(x, y, y') - N(x, y, y')y'' = 0$  (tomando  $I(x, y, y') \equiv C$  em (25)) e  $I_x + I_y y' + I_{y'} y'' = 0$  somente que  $I_{y'} = -N(x, y, y')$ , assim:

$$I(x, y, y') = - \int N(x, y, y') dy' + f(x, y), \quad (27)$$

sabendo que  $N(x, y, y')$  é polinômio. A derivada total desta relação com respeito a variável  $x$  é então representada por:

$$\frac{d}{dx}I(x, y, y') = - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y, y') dy' - y' \frac{\partial}{\partial y} \int N(x, y, y') dy' - N(x, y, y')y'' + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'.$$

Que se apresenta como uma relação no formato da equação (25), podemos então atribuir à  $M(x, y, y')$  a seguinte relação:

$$M(x, y, y') = - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y, y') dy' - y' \frac{\partial}{\partial y} \int N(x, y, y') dy' + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y',$$

ou ainda,

$$M(x, y, y') + \int (N_x + y' N_y) dy' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'.$$

Como  $M(x, y, y')$  e  $N(x, y, y')$  são conhecidos, podemos, desta última equação, extrair  $f_x$  e  $f_y$ , consequentemente  $f(x, y)$ . Logo, encontramos também  $I(x, y, y')$  por intermédio de (27).

Acontece que para a maioria expressiva das 2EDO's racionais não é possível identificar função  $I(x, y, y')$  que nos permita estabelecer a relação (25), dessa forma, podemos propôr, similarmente ao caso de 1EDO's, um fator multiplicativo correspondendo ao que chamamos de “fator integrante”  $R(x, y, y')$  para a equação, de forma que possamos estabelecer:

$$R(x, y, y')M(x, y, y') - R(x, y, y')N(x, y, y')y'' = \frac{dI}{dx}(x, y, y') = 0.$$

Mas não há meios de comparar  $RM - RNy''$  com  $I_x + I_yy' + I_{y'}y''$ , através de

$$RM - RNy'' = I_x + I_yy' + I_{y'}y''$$

só conseguimos extrair que  $-RN = I_{y'}$ . Do restante,  $I_x + I_yy' = RM$ , nada inferimos, pois não temos posse de expressões isoladas para  $I_x$  e  $I_y$  em termos de  $R$ .

Tomemos a 2EDO escrita em forma diferencial,

$$dy' = \frac{M(x, y, y')}{N(x, y, y')}dx = \phi(x, y, y')dx.$$

Se há um fator integrante, escrevemos:

$$R(\phi dx - dy') = dI(x, y, y'), \quad (28)$$

mas  $dI(x, y, y') = \partial_x I dx + \partial_y I dy + \partial_{y'} I dy'$ . Se  $y'dx = dy$ , então podemos adicionar um termo proporcional a  $(y'dx - dy)$  do lado esquerdo de (28), faremos:

$$R[\Phi dx - dy' + S(y'dx - dy)] = \frac{\partial I}{\partial x}dx + \frac{\partial I}{\partial y}dy + \frac{\partial I}{\partial y'}dy'.$$

Em que  $S = S(x, y, y')$ , por hora, é apenas uma função auxiliar. Então

$$I_x = R(\Phi + Sy'), I_y = -RS \text{ e } I_{y'} = -R. \quad (29)$$

Se  $I(x, y, y')$  é uma função “bem comportada”, então, deve satisfazer  $I_{xy} = I_{yx}$ , bem como  $I_{xy'} = I_{y'x}$  e  $I_{yy'} = I_{y'y}$ . Estas imposições geram EDP's em  $R$  e  $S$ , e novamente, não nos parece favorável, em princípio, trocar o problema de resolver uma 2EDO racional por EDP's do tipo

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y}(\phi + Sy') + R\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + y'\frac{\partial S}{\partial y}\right) + S\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \quad (\partial_y I_x - \partial_x I_y = 0), \\ \frac{\partial R}{\partial y'}(\phi + Sy') + R\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} + y'\frac{\partial S}{\partial y'} + S\right) + \frac{\partial R}{\partial x} &= 0 \quad (\partial_{y'} I_x - \partial_x I_{y'} = 0), \\ -\left(S\frac{\partial R}{\partial y'} + R\frac{\partial S}{\partial y'}\right) + \frac{\partial R}{\partial y} &= 0 \quad (\partial_{y'} I_y - \partial_y I_{y'} = 0). \end{aligned} \quad (30)$$

A partir destas relações, é possível trabalhar no que se considera uma **extensão** do chamado *método PS* (Prelle-Singer) para 2EDO's racionais, desenvolvimento proposto

no trabalho Duarte *et al.* (2001) pelo nosso grupo de pesquisas na área. Originalmente, o método PS foi proposto por M.J. Prolle e M. F. Singer no trabalho Prolle e Singer (1983). O que denominamos *método da função- $S$*  já é parte de um desenvolvimento bastante recente (Avellar *et al.*, 2019) e remonta alguns dos mais importantes trabalhos publicados pelo grupo atuante em física matemática e computacional da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), portanto, certamente iremos também nos debruçar sobre as ideias que induzem este desdobramento, para tanto, será necessário estudarmos em detalhes cada um dos métodos que nomeamos generalistas na descrição inicial deste capítulo, pois a respeito do método da função- $S$ , podemos dizer que trata-se de um procedimento misto entre as abordagens de Lie e Darboux. Desse modo, iremos ainda retomar os desenvolvimentos que seguem das equações (22) e (30) quando nos for oportuno.

## 2 TEORIA DE DARBOUX

J. Gaston Darboux (1842 - 1917) foi um matemático francês reconhecido por importantes contribuições nos campos da geometria diferencial e da análise. Dentro do que se propõe para este trabalho, iremos avaliar neste capítulo alguns poucos detalhes a respeito da abordagem generalista que Darboux inaugura no campo de estudo das equações diferenciais em Darboux (1878a) e Darboux (1878b). Uma abordagem ligada mais fortemente à estruturas matemáticas estabelecidas por sistemas com  $n$  equações diferenciais polinomiais (em caso bidimensional, nos referimos às chamadas *curvas algébricas invariantes*), na contramão do que se fazia até então, com os métodos classificatórios, estes, compõem um conjunto de métodos muito particulares, tratam-se de abordagens específicas construídas para trabalhar tipos específicos de ED's, de modo muito semelhante àquele que nos é apresentado usualmente nos cursos de graduação.

O algoritmo Darboux-Prelle-Singer (DPS) é fundamentado sobre o fato de que uma 1EDO racional que apresenta solução geral elementar deve possuir um fator integrante composto por polinômios que satisfazem uma condição específica. Os polinômios de Darboux são autofunções de um operador diferencial  $D$  associado à 1EDO em questão (o operador de Darboux), e então, em suma, se pudermos listar os “autopolinômios” do operador, por assim dizer, será possível construir o fator integrante e encontrar uma solução por quadratura para a 1EDO. Neste capítulo, vamos direcionar nossos estudos às bases do método de Darboux rumo a construção de um importante teorema que diz respeito a estrutura do fator integrante para 1EDO's racionais com solução geral elementar, o chamado teorema de Prelle e Singer. A partir deste ponto podemos, efetivamente, listar os passos do semi-algoritmo<sup>17</sup> DPS para que se possa determinar uma integral primeira da 1EDO.

### 2.1 Aspectos fundamentais

**Definição 2.1.1.** Uma **integral primeira** de um sistema diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  autônomo de primeira ordem em  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  é uma função diferenciável  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz  $(I \circ \mathbf{x})'(t) = 0$ . Em outras palavras,  $I(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é constante sobre as curvas solução  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  do sistema.

Consideremos o seguinte sistema diferencial polinomial de primeira ordem autô-

---

<sup>17</sup> Um algoritmo é constituído por um número finito de passos e, como veremos, o algoritmo DPS passa por uma condição específica que pode, eventualmente, não estabelecer um término definitivo para o procedimento.

no plano:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = N(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = M(x, y). \quad (31)$$

Sendo então  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  polinômios coprimos nas variáveis reais  $x$  e  $y$ . Vamos retomar a ideia de soluções para sistemas de equações neste formato como curvas parametrizadas  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  tais que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = N(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = M(x(t), y(t)) \end{cases},$$

então, se o problema admite integrais primeiras, estas devem corresponder a funções diferenciáveis  $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que, por definição, satisfazem  $(I \circ \varphi)'(t) = 0$ , correspondentemente

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I}{\partial y} \dot{y} = 0. \quad (32)$$

Quer dizer então que, para uma integral primeira  $I(x, y)$

$$N(x, y) \frac{\partial I}{\partial x} + M(x, y) \frac{\partial I}{\partial y} = 0. \quad (33)$$

Para a EDP (33), o que usualmente denominamos *equação característica*, corresponde a

$$\frac{dx}{N(x, y)} = \frac{dy}{M(x, y)}. \quad (34)$$

O que torna então evidente a equivalência entre um sistema como em (31) e uma 1EDO racional

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \phi(x, y). \quad (35)$$

Na verdade, se  $I(x, y)$  é integral primeira do sistema (31), então a família de curvas  $I(x, y) = C$  é solução geral da 1EDO racional (35), quer dizer que a *equação característica* da EDP para a integral primeira em (33) é dada por (35) (Avellar; Duarte; Mota, 2020).

Veja que, combinando (33) e (34) escritas nos formatos

$$\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{I_x}{I_y} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

respectivamente, escrevemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{I_x}{I_y} \implies I_x dx + I_y dy = dI(x, y) = 0,$$

que também representa uma condição importante a esse respeito, diz-se que  $dI$  é uma *1-forma* nula sobre as curvas solução.

Vamos reescrever a EDP em (33) na forma:

$$\left( N(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + M(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) [I] = 0. \quad (36)$$

Assim, definimos o **operador de Darboux** associado ao sistema (31) ou à 1EDO racional (35) como o campo vetorial  $D \equiv N(x, y)\partial x + M(x, y)\partial y$ . Com relação a este modo de nos referirmos aos operadores diferenciais parciais (campos vetoriais) sugerimos ao leitor que avalie o conteúdo apresentado no apêndice B, com breves noções de topologia, incluso variedades, espaço tangente e espaço cotangente.

Em vista da equação anterior, podemos afirmar que se  $I(x, y)$  é integral primeira de (31), então necessariamente  $D[I] = 0$ , o que, por sua vez, implica que  $I(x, y) = C$  é solução geral da 1EDO (35).

É bastante comum que encontremos um operador diferencial parcial

$$\mathfrak{X} = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

associado ao campo vetorial no espaço de fases para um sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Com efeito, verifica-se que aos  $f_i$  correspondem as componentes do campo e  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  denotam elementos de base (espaço vetorial tangente - vide apêndice B). Ocorre que o operador de Darboux no contexto avaliado corresponde exatamente a este elemento, utilizaremos desta noção em um momento posterior, por hora, será interessante considerarmos  $D \equiv N(x, y)D_x$  onde

$$D_x = \frac{d}{dx} \Big|_{y'=\phi(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x} + \phi(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

O operador de Darboux também nos permite reescrever uma relação já estabelecida anteriormente para caso de 1EDO's racionais não exatas, lembremo-nos da equação que

aparece em (22), que representa condição necessária para que exista uma função  $R(x, y)$  de modo que a 1EDO na forma  $RM - RNy' = 0$  seja exata.

$$N \frac{\partial R}{\partial x} + M \frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial M}{\partial y} + R \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \implies D[R] + R \left( \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 0.$$

Esta última relação nos permite ver que

$$\frac{D[R]}{R} = -(M_y + N_x), \quad (37)$$

portanto, a razão  $\frac{D[R]}{R}$ , sendo  $R$  fator integrante de uma 1EDO racional, é função polinomial. A presente relação é de suma importância para o contexto que se dá em sequência, renunciando o famoso resultado de Prelle e Singer.

Notemos, tendo ainda em pauta o operador de Darboux neste cenário das 1EDO's racionais, que se o fator integrante  $R(x, y)$  de uma 1EDO racional puder ser representado na forma  $R = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$  com  $p_1$  e  $p_2$  polinômios irredutíveis em  $x$  e  $y$ , então, tanto  $\frac{D[p_1]}{p_1}$  como  $\frac{D[p_2]}{p_2}$  são polinômios. Não é difícil confirmar esta afirmação utilizando-nos da anterior, que  $\frac{D[R]}{R}$  é polinômio, com isso, se  $R = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{D[R]}{R} &= \frac{D[p_1^{n_1} p_2^{n_2}]}{p_1^{n_1} p_2^{n_2}} = \frac{D[p_1^{n_1}] p_2^{n_2} + D[p_2^{n_2}] p_1^{n_1}}{p_1^{n_1} p_2^{n_2}} = \frac{D[p_1^{n_1}]}{p_1^{n_1}} + \frac{D[p_2^{n_2}]}{p_2^{n_2}} = \\ &= \frac{n_1 p_1^{n_1-1} D[p_1]}{p_1^{n_1}} + \frac{n_2 p_2^{n_2-1} D[p_2]}{p_2^{n_2}} = n_1 \frac{D[p_1]}{p_1} + n_2 \frac{D[p_2]}{p_2} = \\ &= -(N_x + M_y) \equiv \text{polinômio}. \end{aligned}$$

Sendo então

$$n_1 \frac{D[p_1]}{p_1} + n_2 \frac{D[p_2]}{p_2} = \text{polinômio} \implies n_1 D[p_1] + n_2 p_1 \frac{D[p_2]}{p_2} = \text{polinômio}.$$

Mas  $D[p_1]$  é polinômio, podemos incorporá-lo ao lado direito da equação e escrever

$$n_2 p_1 \frac{D[p_2]}{p_2} = \text{polinômio},$$

assim, se  $p_1$  e  $p_2$  são irredutíveis, não há fator comum entre os mesmos, logo, esta última relação nos permite concluir que  $D[p_2]$  deve ser divisível por  $p_2$ , resultando um polinômio, analogamente, diz-se que  $\frac{D[p_1]}{p_1}$  é polinômio.

Mais especificamente, se o fator integrante de uma 1EDO racional puder ser escrito

como,

$$R = \prod_i p_i^{n_i},$$

com  $p_i$  polinômios irredutíveis nas variáveis  $x$  e  $y$ , diremos então que  $\frac{D[p_i]}{p_i}$  são polinômios. A demonstração decorre de processo similar ao anterior. Tomemos:

$$\begin{aligned} \frac{D[R]}{R} &= \frac{D[\prod_i p_i^{n_i}]}{\prod_k p_k^{n_k}} = \frac{\sum_i p_i^{n_i-1} n_i D[p_i] \prod_{j \neq i} p_j^{n_j}}{\prod_k p_k^{n_k}} = \sum_i \frac{p_i^{n_i-1} n_i D[p_i]}{p_i^{n_i}} = \\ &= \sum_i \frac{n_i D[p_i]}{p_i} = -(N_x + M_y). \end{aligned} \quad (38)$$

Obviamente que, sendo  $M$  e  $N$  polinômios, então também  $N_x + M_y$  é polinômio. Portanto,  $p_i \mid D[p_i]$  (Duarte *et al.*, 2001), a notação  $p_i \mid D[p_i]$  quer dizer simplesmente que  $D[p_i]$  pode ser dividido por  $p_i$  e gerar um novo polinômio.

Vamos então reestruturar estas últimas observações. Consideremos que o fator integrante de uma 1EDO racional possa ser escrito na forma de um produto de polinômios irredutíveis, cada um destes elevado a algum valor  $n_i$ , dizer que  $\frac{D[p_i]}{p_i}$  é polinômio será equivalente a  $D[p_i] = q_i p_i$ , sendo  $q_i$  apenas uma maneira de representarmos o “polinômio quociente”. Nesta representação, a semelhança com equações de autovalor para matrizes é o que induz a denominarmos  $p_i$  *autopolinômios* de  $D$ , mais comumente, diz-se que os  $p_i$  são os *polinômios de Darboux*. Aos  $q_i$  nos referimos como *cofatores*.

## 2.2 O método de Prelle e Singer

Em 1983 M. J. Prelle e M. F. Singer publicaram o trabalho *Elementary First Integrals of Differential Equations* no volume 279 de *Transactions of The American Mathematical Society* (Prelle; Singer, 1983), no qual se estabelecem alguns resultados importantes que, juntamente com parte dos detalhes já apontados na primeira seção do presente capítulo, nos permitirão construir um semi-algoritmo para obtenção de soluções gerais para EDO's racionais de primeira e segunda ordem.

Reservamos o segundo capítulo para trabalhar questões referentes às EDO's de primeira ordem, o conteúdo presente nesta parte do texto será de importância para entendermos o funcionamento do método efetivamente. Já foi dito que o desenvolvimento para ampliarmos a aplicação destes conceitos às 2EDO's racionais requer também certa familiaridade com algumas ideias presentes na teoria de Lie, tais como grupos de transformações, o conceito de simetria e a ideia de invariância, estes tópicos serão ainda discutidos

no capítulo seguinte.

### 2.2.1 1EDO's racionais com solução geral elementar

O trabalho de Prelle e Singer faz menção ao que se estabelece em Mordoukhay-Boltovskoy (1907), no qual diz-se que para a equação diferencial  $y' = f(x, y)$  com  $f$  função algébrica<sup>18</sup> de  $x$  e  $y$ , se existir função elementar  $g(x, y)$  constante sobre as soluções de  $y' = f(x, y)$ , então existem funções algébricas  $w_0, \dots, w_m$  em duas variáveis bem como constantes  $c_1, \dots, c_m$ , tal que  $w_0(x, y) + \sum_{i=1}^m c_i \ln(w_i(x, y))$  é uma integral primeira da 1EDO. Prelle e Singer apresentam a seguinte ideia como um corolário em seu artigo original, mas que podemos ver como uma generalização do resultado de Mordukhai-Boltovski.

- Seja  $K$  um corpo diferencial com funções em  $n+1$  variáveis e  $L$  uma extensão elementar<sup>19</sup> de  $K$ . Considere  $f$  em  $K$  e assuma que existe um elemento não constante  $g$  de  $L$ , tal que  $g$  é constante sobre as soluções de  $y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, x)$ . Então existem funções algébricas  $w_1, w_2, \dots, w_m$  em  $K$ , bem como constantes  $c_1, \dots, c_m$ , de modo que

$$w_0(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, x) + \sum_{i=1}^m c_i \ln(w_i(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, x)) \quad (39)$$

seja constante sobre as soluções de  $y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, x)$ .

A demonstração é apresentada em sequência no artigo original (Prelle; Singer, 1983).

Em particular, nos casos de 1EDO's racionais, como enunciado originalmente em Mordoukhay-Boltovskoy (1907), teremos que, se a equação possui solução geral elementar  $F(x, y) = K$ , então existe solução geral  $I(x, y) = C$  na forma

$$I(x, y) = w_0(x, y) + \sum_{i=1}^m n_i \ln(w_i(x, y)),$$

<sup>18</sup> Uma função  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  que satisfaz uma equação  $F(y, x_1, \dots, x_n) = 0$ , onde  $F$  é polinômio irredutível com coeficientes em algum corpo de constantes  $\mathbb{K}$ , é chamada função algébrica. O polinômio  $F$  é frequentemente escrito em potências da variável  $y$ , assim, uma função algébrica  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  deve satisfazer  $P_k(x_1, \dots, x_n)y^k + P_{k-1}(x_1, \dots, x_n)y^{k-1} + \dots + P_0(x_1, \dots, x_n) = 0$ , com  $P_i(x_1, \dots, x_n)$  polinômios e  $P_k(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , o número  $k$  é dito grau da função algébrica, se  $k = 1$ , escreve-se  $y$  como função racional, em casos de  $k = 2, 3, 4$  uma função algébrica pode ser expressa como raízes quadradas ou cúbicas de funções racionais, o que já não se faz possível, em geral, para casos em que  $k > 4$  (Encyclopedia of Mathematics, 2022).

<sup>19</sup> Noções a respeito de corpos de funções e corpos diferenciais podem ser encontradas no apêndice A.

em que  $w_i$  são funções algébricas de  $x$  e  $y$  e os  $n_i$  são constantes (Avellar; Duarte; Mota, 2020).

Da mesma forma, referindo-nos às 2EDO's racionais, se  $y'' = \frac{M(x,y,y')}{N(x,y,y')}$  com  $M$  e  $N$  polinômios coprimos possui solução geral elementar  $F(x,y,y') = K$ , então haverá dois invariantes independentes (Duarte *et al.*, 2001) que podem ser escritos como

$$I(x,y,y') = w_0(x,y,y') + \sum_{i=1}^m n_i \ln(w_i(x,y,y')).$$

Um outro resultado contido também no trabalho de Prelle e Singer, de ainda maior relevância para a proposta no contexto que vem a seguir, é dado através do seguinte enunciado:

**Teorema 2.2.1.** Se um sistema polinomial autônomo, equação (31), equivalentemente, uma 1EDO racional (35), possuir uma integral primeira elementar, então haverá fator integrante  $R(x,y)$  que pode ser escrito na forma

$$R = \prod_i p_i^{n_i}, \quad (40)$$

onde  $n_i \in \mathbb{Q}$  e  $p_i$  são polinômios irredutíveis nas variáveis  $x$  e  $y$  (Prelle; Singer, 1983). Em adicional, cada  $p_i = 0$  corresponde a uma **curva algébrica invariante** (Dumortier; Llibre; Artes, 2006).

**Definição 2.2.1.** Denominamos **curva algébrica** qualquer curva dada através de uma relação do tipo  $p(x,y) = 0$  onde  $p$  é um polinômio em duas variáveis com coeficientes no corpo dos complexos (Avellar; Duarte; Mota, 2020).

**Definição 2.2.2.** Considere uma 1EDO racional, então  $D$  representa o operador de Darboux associado. O polinômio  $p(x,y)$  será dito **curva algébrica invariante** se  $D[p(x,y)] = p(x,y)q(x,y)$  (Avellar; Duarte; Mota, 2020).

Uma maneira sucinta de apresentar os resultados mais importantes desse cenário para a construção de um algoritmo que viabilize a busca por um fator integrante para 1EDO's é:

- Se a 1EDO racional (35) apresenta solução geral elementar, então existe fator integrante  $R(x,y)$  da forma  $\prod_i p_i^{n_i}$ , com  $p_i$  sendo autopolinômios do operador diferencial de Darboux  $D$  e  $n_i$  são números racionais. Como  $\frac{D[R]}{R} = -(N_x + M_y)$ , substituindo  $R = \prod_i p_i^{n_i}$  obtemos

$$\sum_i n_i \frac{D[p_i]}{p_i} = \sum_i n_i q_i = -(N_x + M_y), \quad (41)$$

com  $q_i$  sendo os cofatores dos  $p_i$ .

Então, se de alguma forma conseguirmos determinar os polinômios de Darboux e os respectivos cofatores, será possível construir um fator integrante na forma de produto de potências dos mesmos resolvendo a expressão  $\sum_i n_i q_i = -(N_x + M_y)$  para os  $n_i$ . Tendo posse de um fator integrante para a 1EDO, podemos encontrar a solução geral  $I(x, y) = C$  por quadraturas. O maior percalço aqui reside justamente sobre a determinação dos autopolinômios de  $D$ , sendo o método mais óbvio o de construir candidatos  $p_i$  e  $q_i$  com coeficientes a determinar, então, impõe-se a condição  $D[p] = qp$  para a obtenção de um sistema algébrico nos coeficientes dos polinômios que, nem sempre podem ser resolvidos com facilidade, sendo fator limitante até mesmo para sistemas de computação algébrica (CAS<sup>20</sup>), caso algum dos polinômios seja de grau maior ou igual que 4. Vejamos então um exemplo com aplicação prática (dinâmica populacional) para que se possa, de fato, constatar o “custo operacional” do método.

**Exemplo 2.2.1.** O modelo de dinâmica populacional de Lotka-Volterra surgiu com o propósito de responder por que a diminuição de atividades pesqueiras no Mar Adriático durante a Primeira Guerra Mundial foi mais favorável às espécies predadoras, como arraias e tubarões, tendo resultado em um aumento considerável na concentração destes animais. Em contrapartida, observou-se a ocorrência inversa para a população dos peixes, que lhes serviam de alimento (Monteiro, 2019).

Sejam  $x(t)$  a variável de estado associada à população de presas e  $y(t)$  a variável associada à população de predadores, o modelo proposto, em 1926, para avaliar questões referentes às variações populacionais no sistema é:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y); \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = y(\delta x - \gamma). \quad (42)$$

Como usual, consideramos  $t$  como variável temporal,  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  são parâmetros positivos. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , representam, respectivamente, as taxas de acréscimo e decréscimo na população das presas, indicando que, na ausência dos predadores, a concentração de presas aumenta exponencialmente, por conta do termo  $\alpha x$ , a predação é representada pelo termo de interação  $-\beta xy$ . Na segunda equação  $\gamma$  e  $\delta$  são, respectivamente, as taxas

---

<sup>20</sup> Da sigla para o termo correspondente em inglês “*Computer Algebra System*”. Assim nos referimos usualmente aos softwares que nos auxiliam com matemática simbólica, alguns exemplos são Maple, Mathematica, Reduce, Axiom, Maxima, etc.

de decréscimo e acréscimo na população dos predadores que, de modo análogo, diremos que, se não há presas então a população dos predadores deve diminuir exponencialmente, pela presença do termo  $-\gamma y$ , caso contrário, o número de predadores aumenta devido ao termo de interação  $\delta xy$ .

Veja então que o modelo corresponde a um sistema diferencial polinomial autônomo em duas dimensões. De maneira similar ao que foi feito no início deste capítulo para obter a equação (35) a partir do sistema (31), podemos atuar com (42) assumindo que, se existir uma integral primeira  $I(x, y) = C$  então o sistema é equivalente à seguinte equação diferencial racional de primeira ordem nas variáveis de estado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\delta x - \gamma)}{x(\alpha - \beta y)}. \quad (43)$$

Começemos por buscar algum polinômio de Darboux de primeiro grau. Seja então  $p_D(x, y) = f_1x + f_2y + f_3$  um polinômio com coeficientes constantes  $f_i$ , tal que  $D[p_D(x, y)] = p_D(x, y)\lambda(x, y)$ , de modo então que  $\lambda(x, y)$  seja o cofator de  $p_D(x, y)$ . Nesse caso:

$$D[p_D(x, y)] = x(-\beta y + \alpha)\frac{\partial}{\partial x}[p_D(x, y)] - y(-\delta x + \gamma)\frac{\partial}{\partial y}[p_D(x, y)],$$

ou ainda,

$$D[p_D(x, y)] = x(-\beta y + \alpha)f_1 - y(-\delta x + \gamma)f_2.$$

Um resultado de grau 2 (dois) nas variáveis  $x$  e  $y$ , mas, por construção, temos  $p_D$  de primeira ordem, logo, se  $D[p_D] = p_D\lambda$ , podemos constatar que  $\lambda(x, y)$  deve também ser de primeira ordem em  $(x, y)$ , consideremos:

$$\lambda(x, y) = p_1x + p_2y + p_3.$$

Assim,  $D[p_D] = p_D\lambda$  fica

$$x(-\beta y + \alpha)f_1 - y(-\delta x + \gamma)f_2 = (f_1x + f_2y + f_3)(p_1x + p_2y + p_3).$$

Utilizando da propriedade distributiva e rearranjando os termos obtemos a forma

$$(-f_1\beta + f_2\delta)xy + f_1\alpha x - f_2\gamma y = f_1p_1x^2 + (f_1p_2 + f_2p_1)xy + f_2p_2y^2 + (f_2p_3 + f_3p_2)y + (f_1p_3 + f_3p_1)x + f_3p_3.$$

Comparando os coeficientes de ambos os lados da equação obtemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} f_2\delta - f_1\beta = f_1p_2 + f_2p_1 \\ f_1\alpha = f_1p_3 + f_3p_1 \\ -f_2\gamma = f_2p_3 + f_3p_2, \end{cases} \quad (44)$$

além de  $f_i p_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Bem sabemos que os coeficientes de  $p_D$  são os três  $f_i$ , uma maneira simples de se encontrar uma solução para o problema é considerar que ao menos um deles seja não nulo, equivalentemente, vamos avaliar os casos  $f_1 \neq 0$ , com  $f_2 = f_3 = 0$  e  $f_2 \neq 0$ , com  $f_1 = f_3 = 0$ , evitando, em ambos, que o polinômio seja apenas uma constante. Pelo primeiro deles, extraímos das equações em (44) as relações

$$-f_1\beta = f_1p_2 \text{ e } f_1\alpha = f_1p_3.$$

Portanto, conclui-se trivialmente que

$$\alpha = p_3 \text{ e } \beta = -p_2.$$

Como podemos notar, no presente caso,  $f_1$  é arbitrário. Tomando  $f_1 = 1$ , teremos então determinado um autopolinômio  $p_D$  e seu cofator  $\lambda$ :

$$p_D(x, y) = f_1x + f_2y + f_3 = x \text{ e } \lambda(x, y) = p_1x + p_2y + p_3 = \alpha - \beta y.$$

Como o leitor agora deve imaginar, o segundo caso, para o qual estamos propondo  $f_2 \neq 0$  e  $f_1 = f_3 = 0$  vai gerar um polinômio  $p_D(x, y) = y$ , como implicação dessa escolha sobre o sistema (44) podemos extrair sem grandes dificuldades que  $\lambda(x, y) = \delta x - \gamma$ .

De posse das informações obtidas até então, já é possível dar um passo adiante no âmbito do método de Prelle e Singer. Sob a consideração de que a 1EDO racional em (43) apresenta uma solução geral elementar, devemos retomar uma importante relação já discutida anteriormente, equação (41), a qual, obviamente, considerando-se adaptações necessárias por conta da notação que adotamos para o presente estudo de caso, devemos

reescrever como

$$\frac{D[R]}{R} = \sum_i n_i \frac{D[p_{D_i}]}{p_{D_i}} = \sum_i n_i \lambda_i = -(N_x + M_y)$$

$$\implies n_1(-\beta y + \alpha) - n_2(-\delta x + \gamma) = -\alpha + \beta y - \delta x + \gamma.$$

Não é difícil notar que  $n_1 = n_2 = -1$  representa uma solução para esta equação, com isso, expressamos um fator integrante como

$$R(x, y) = \prod (p_{D_i})^{n_i} = \frac{1}{xy}.$$

A verificação de que  $\partial_y(RM) = -\partial_x(RN) = 0$  é direta. Quer dizer, como já mencionamos, se tivermos posse de um fator integrante, reescrevemos a equação de uma maneira alternativa, a qual satisfaz a condição de equação exata, logo, torna-se possível obter solução por técnicas de resolução analítica. Assim, a obtenção de um invariante (ou integral primeira)  $I(x, y)$  se dá, de maneira completamente análoga (levando-se em consideração os devidos ajustes) ao caso do exemplo 1.1.3 através da equação (17), pelo seguinte procedimento

$$I(x, y) = \int RM dx - \int RN dy - \int \left( \partial_y \left[ \int RM dx \right] \right) dy$$

$$\implies I(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y = C. \quad (45)$$

Obtemos assim uma solução geral elementar  $I(x, y) = C$ , na forma implícita. É possível verificar ainda que, de fato,  $I(x, y)$  é uma integral primeira elementar da 1EDO, cuja existência havíamos, até então, somente proposto por suposição. Lembremo-nos de que se  $I(x, y)$  é integral primeira, então  $D[I] = 0$ , ora:

$$D[I] = x(-\beta y + \alpha)I_x - y(\gamma - \delta x)I_y.$$

Se utilizarmos da expressão que determinamos para  $I(x, y)$  em (45) podemos constatar facilmente que

$$D[I] = (\alpha - \beta y)(x\delta - \gamma) + (x\delta - \gamma)(\beta y - \alpha) = 0.$$

### 2.2.2 1EDO's racionais com solução geral Liouvillianas

É importante enfatizar que o método de Prelle e Singer (PS) se aplica, originalmente, às 1EDO's racionais com solução geral elementar somente<sup>21</sup>, ou seja, podemos lançar mão do algoritmo descrito para o método em casos para os quais existem soluções (na forma implícita) do tipo  $G(x, y) = C$ , sendo  $G$  função elementar nas variáveis  $x$  e  $y$ . Ocorreu que, em 1992, ao questionar-se a respeito dos casos de 1EDO's racionais que apresentam soluções no corpo de funções Liouvillianas<sup>22</sup>, M. Singer pôde introduzir um novo resultado. Antes de enunciá-lo, é conveniente fazer uma breve observação.

A grosso modo, podemos dizer que as funções elementares são composições de funções algébricas, exponenciais e logarítmicas, já as chamadas funções Liouvillianas são, na verdade, funções que compõem uma extensão do corpo de funções elementares, incluindo, portanto, não somente estas composições de funções algébricas, exponenciais e logarítmicas como também integrais destas funções que, nem sempre podem ser representadas como funções elementares (Avellar; Duarte; Mota, 2020). Quer dizer que podemos caracterizar funções Liouvillianas tanto como “*Liouvillianas elementares*” quanto como “*Liouvillianas não-elementares*”, ou seja, funções elementares são também Liouvillianas, mas nem toda função Liouvillianas é elementar. Vale uma tentativa de elucidar rapidamente estas ideias com um exemplo bastante simples.

**Exemplo 2.2.2.** Qualquer função logarítmica pode ser representada como uma integral, a recíproca não é verdadeira. Tomemos, por exemplo, uma função  $\ln(f(x, y))$ . Sabemos que

$$\frac{\partial \ln(f(x, y))}{\partial x} = \frac{1}{f(x, y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

então

$$\ln(f(x, y)) = \int \frac{\partial \ln(f(x, y))}{\partial x} dx = \int \left( \frac{1}{f(x, y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) dx.$$

Desse modo, é possível dizer que

---

<sup>21</sup> Os desenvolvimentos que iremos abordar nos próximos capítulos serão fundamentais para trazer à tona uma possibilidade de formulação e adaptação do método para 2EDO's racionais. É uma referência direta a alguns dos trabalhos realizados pelo nosso grupo de pesquisas em tempos recentes, com resultados que culminam no chamado *método da função-S*, como já foi mencionado, trata-se de um procedimento misto envolvendo as abordagens de Darboux e de Lie.

<sup>22</sup> Informações detalhadas sobre corpos de funções, extensão de corpo, funções elementares, funções Liouvillianas e demais conceitos envolvidos neste contexto que poderão ser úteis para o entendimento de determinados trechos do texto se encontram no apêndice A.

$$\ln(e^{x^2y} - 1) = \int \left( \frac{2xye^{x^2y}}{e^{x^2y} - 1} \right) dx,$$

indicando uma possibilidade de se representar a função  $\ln(e^{x^2y} - 1)$  na forma de uma integral. Porém, não podemos representar, em termos de funções elementares, uma função cuja derivada parcial na variável  $x$  resulte  $(e^{x^2y} - 1)^{-1}$ , ou seja

$$h(x, y) = \int \left( \frac{1}{e^{x^2y} - 1} \right) dx$$

não pode ser escrita como uma função elementar sem o símbolo da integração (Avellar; Duarte; Mota, 2020). Assim concluímos que

$$\int \left( \frac{2xye^{x^2y}}{e^{x^2y} - 1} \right) dx$$

representa uma função Liouvillian elementar, pois possui sua expressão correspondente em termos de funções elementares  $\ln(e^{x^2y} - 1)$ , ao passo que

$$\int \left( \frac{1}{e^{x^2y} - 1} \right) dx$$

é considerada uma função Liouvillian não-elementar.

Dando então continuidade ao que vinha sendo discutido, apresentamos o resultado proposto por M. Singer como uma tentativa de aprimorar o método, de forma que o mesmo pudesse também ser aplicado às 1EDO's racionais que possuem solução geral não elementar.

**Teorema 2.2.2.** (Singer, 1992) Se uma 1EDO racional  $y' = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ , com  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  coprimos, apresenta solução geral Liouvillian, então, no formato  $M - Ny' = 0$  a 1EDO possui um fator integrante  $R$  que pode ser escrito como

$$R(x, y) = e^{\int Udx + Vdy}, \quad (46)$$

sendo  $U$  e  $V$  racionais em  $x$  e  $y$  satisfazendo  $\partial_x V = \partial_y U$ .

Veja que o argumento da função exponencial é uma integral de linha, a condição para que esta esteja bem definida é expressa no teorema por

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

condição de Euler. Deve haver portanto um caminho de integração (que não é mencionado pelo autor) definido em uma região simplesmente conexa (“sem buracos”), dito de outra maneira o integrando  $Udx + Vdy$  representa uma *diferencial exata*<sup>23</sup>, ou seja, existe uma função  $\Theta(x, y)$  tal que o diferencial  $d\Theta = Udx + Vdy$ , assim  $U = \partial_x \Theta$  e  $V = \partial_y \Theta$ . Por tais considerações, o resultado do teorema (2.2.2) pode, na verdade, ser reapresentado de uma maneira mais interessante. Isto porque Singer não se atentou ao fato de que se  $U$  e  $V$  são racionais, então a integral  $\int Udx + Vdy$  pode ser escrita em termos de funções racionais e logarítmicas, como segue:

$$\Theta = \int d\Theta = \int Udx + Vdy = Z_0 + \sum_i n_i \ln(Z_i).$$

$Z_i$  são funções racionais em  $(x, y)$  e  $n_i$  são constantes.

Assim, um fator integrante para 1EDO's com solução geral Liouvillian, segundo Singer (equação (46)), se apresenta no formato

$$R(x, y) = e^{\int Udx + Vdy} = e^{(Z_0 + \sum_i n_i \ln(Z_i))} = e^{Z_0} \prod_i (Z_i)^{n_i} \quad (47)$$

A partir desta expressão para  $R(x, y)$  construiremos um algoritmo que nos permitirá buscar, para os casos com solução geral Liouvillian, uma equação equivalente àquela obtida por substituição direta de (40) em (37), em referência à equação (41), mais especificamente

$$\sum_i n_i q_i = -(N_x + M_y).$$

Vale lembrar que esta relação é de suma importância para o algoritmo no caso de 1EDO's com solução geral elementar. Iremos, após estabelecer uma expressão análoga para o caso de equações com solução geral Liouvillian, avaliar as consequências sobre a aplicação do método (algoritmo) devido à ligeira diferença que apresenta o formato do fator integrante.

**Teorema 2.2.3.** (Duarte; Duarte; Mota, 2002b) Se uma 1EDO racional apresenta solução geral Liouvillian, então, tomando-a como  $M - Ny' = 0$ , será possível encontrarmos um fator integrante  $R(x, y)$  que se expresse através de

---

<sup>23</sup> Alguns aspectos no contexto de formas diferenciais e álgebra exterior são apresentados no apêndice B.

$$R = e^{Z_0(x,y)} \prod_i p_i^{c_i}(x,y),$$

em que  $Z_0$  é função racional,  $p_i$  são polinômios irredutíveis e  $c_i$  são constantes. Há também uma discussão a respeito em Duarte, Duarte e Mota (2002a).

Este é um resultado obtido por (Christopher, 1999) e (Duarte; Duarte; Mota, 2002b) de forma independente. Antes de apresentarmos efetivamente a demonstração do teorema 2.2.3 é necessário verificar a validade do seguinte enunciado:

**Lema 2.2.1.** Seja  $\omega(x,y)$  função tal que as derivadas  $\omega_x$  e  $\omega_y$  são racionais em  $x$  e  $y$ . Assim, podemos representar  $\omega$  na forma

$$\omega = Z_0 + \sum_i n_i \ln(Z_i),$$

sendo  $Z_i$  funções racionais e  $n_i$  constantes<sup>24</sup>.

Consideremos  $\omega(x,y)$  analítica<sup>25</sup>, assim podemos escrevê-la como

$$\omega = f(x) + g(y) + h(x,y). \quad (48)$$

Evidentemente que  $f$  depende apenas da variável  $x$  e  $g$  apenas da variável  $y$ , a função  $h(x,y)$  satisfaz a condição  $\int h_x dx = \int h_y dy = h$ . Desse modo:

$$\omega_x = h_x + \frac{df}{dx}; \quad \omega_y = h_y + \frac{dg}{dy}. \quad (49)$$

Além do fato de que:

$$\int \omega_x dx = \int h_x dx + \int \frac{df}{dx} dx = h + f; \quad \int \omega_y dy = \int h_y dy + \int \frac{dg}{dy} dy = h + g.$$

Um resultado conhecido (Davenport; Siret; Tournier, 1993) a respeito da integral de funções racionais  $\rho(u)$  estabelece

---

<sup>24</sup> Uma demonstração fundamentada nas mesmas ideias que utilizamos para demonstrar este resultado no presente texto é apresentada também em (Duarte; Duarte; Mota, 2002a) de forma mais sucinta.

<sup>25</sup> Qualquer função analítica pode ser representada na forma que estamos sugerindo na equação (48) (Avellar; Duarte; Mota, 2020).

$$\int \rho(u) du = \rho_0(u) + \sum_i \kappa_i \ln(\rho_i(u))$$

em que  $\kappa_i$  são constantes e  $\rho_i(u)$  funções racionais. Então, para uma função  $H(u)$  cuja derivada total na variável  $u$  seja função racional podemos escrever:

$$H(u) = \int \frac{dH}{du} du = H_0(u) + \sum_i c_i \ln(H_i(u)),$$

sendo  $H_i(u)$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) funções racionais em  $u$  e  $c_i$  constantes.

Agora, consideremos que as hipóteses do enunciado no lema (2.2.1) sejam satisfeitas, então  $\omega_x$  é racional, logo, de uma das relações em (49) vemos que também  $h_x$  é racional em  $(x, y)$  e  $\frac{df(x)}{dx}$  é racional em  $x$ . Portanto escrevemos

$$h(x, y) = \int h_x dx = h_0(x, y) + \sum_i c_i(y) \ln(h_i(x, y)), \quad (50)$$

bem como

$$f(x) = \int \frac{df}{dx} dx = f_0(x) + \sum_j a_j \ln(f_j(x)), \quad (51)$$

em que  $h_i(x, y)$  e  $f_j(x)$  são todas funções racionais, incluindo  $f_0$  e  $h_0$ . Os coeficientes  $a_j$  são constantes e, segundo Davenport, Siret e Tournier (1993),  $c_i(y)$  poderiam, em princípio, ser também funções algébricas, entretanto, sabendo que  $\omega_y$  é racional podemos afirmar, de (49), que  $h_y$  é racional em  $(x, y)$  e  $\frac{dg(y)}{dy}$  é função racional na variável  $y$ .

Derivando a primeira das duas equações anteriores, equação (50), com relação à variável  $y$  temos

$$h_y = h_{0y} + \sum_i c_i \frac{h_{iy}}{h_i} + \sum_i \frac{dc_i}{dy} \ln(h_i). \quad (52)$$

Mas já sabemos que  $h_y$  é racional, assim, os termos com funções logarítmicas devem se anular e, uma forma de fazê-lo, sem perda de generalidade, seria tomando  $c_i \equiv \text{const.}$  pela condição

$$\frac{dc_i}{dy} = 0.$$

Então, integrando (em  $y$ ) a equação (52) sob a consideração supracitada ( $c_i \equiv \text{const.}$ ), ficamos com

$$h(x, y) = \int h_y dy = h_0(x, y) + \sum_i c_i \ln(h_i(x, y)), \quad (53)$$

$c_i$  constantes e  $h_i$  funções racionais em  $x$  e  $y$ .

Já havíamos mencionado que  $\frac{dg}{dy}$  é também racional em  $y$ , assim

$$g(y) = \int \frac{dg}{dy} dy = g_0(y) + \sum_k b_k \ln(g_k(y)), \quad (54)$$

em estrutura análoga aos demais casos, i.e.,  $b_k$  são constantes e  $g_k$  são funções racionais. Então, pelos resultados expressos em (54), (53) e (51), podemos reescrever  $\omega$  de (48) como

$$\omega = Z_0 + \sum_i n_i \ln(Z_i). \quad \square \quad (55)$$

A demonstração do teorema (2.2.3) segue diretamente deste último resultado.

**Demonstração (Teorema 2.2.3):** Já havíamos dado os primeiros passos desta demonstração na discussão que precede a equação (46). Vejamos, novamente, que sob as hipóteses do teorema 2.2.3, se  $\partial_y U = \partial_x V$  então<sup>26</sup> existe função escalar  $\Theta(x, y)$  com a qual escrevemos  $d\Theta = Udx + Vdy$ , portanto  $\partial_x \Theta = U$  e  $\partial_y \Theta = V$ . Com isso é imediato que, do resultado (46) de M. Singer

$$R(x, y) = e^{\int (Udx + Vdy)} = e^{\int d\Theta} = e^{\Theta}.$$

O teorema 2.2.2 nos assegura também que  $U$  e  $V$  ( $\partial_x \Theta$  e  $\partial_y \Theta$ ) são funções racionais, assim, a integral ( $\Theta$ ) no argumento da função exponencial pode ser expressa em formato semelhante àquele proposto através do lema 2.2.1, ou seja

$$\Theta(x, y) = Z_0 + \sum_i n_i \ln(Z_i).$$

Substituindo-se esta expressão diretamente em (46) obtemos, como expressa equação (47)

---

<sup>26</sup> A esse respeito, poderíamos nos estender em discussões que envolvem conceitos fundamentais do cálculo vetorial, fazendo menção, por exemplo, do fato de que  $(U(x, y), V(x, y))$  constitui campo conservativo, porém, para questões de nosso interesse, não será necessário.

$$R(x, y) = e^{Z_0} \prod_i (Z_i)^{n_i}.$$

Nesse formato, sabemos que as funções  $Z_i$  são racionais em  $(x, y)$  e  $n_i$  são constantes. Podemos escrever o produto de potências de funções racionais como um produto de potências de polinômios irredutíveis nas variáveis  $(x, y)$  (Avellar; Duarte; Mota, 2020), assim

$$R(x, y) = e^{Z_0} \prod_i p_i(x, y)^{n_i} \quad \square. \quad (56)$$

Fundamentalmente, o método PS para 1EDO's racionais com solução geral elementar utiliza-se do fato de que  $\frac{D[R]}{R}$  é polinômio, além de possuírem fator integrante no formato  $R = \prod_i p_i^{n_i}$ . Vimos, ao considerar 1EDO's com solução Liouvillian que a estrutura do fator integrante é levemente alterada, portanto, faz-se necessário avaliar as consequências do fato sob a condição expressa em (37). Agora, considerando  $R(x, y) = e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{D[R]}{R} &= \frac{D[e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i}]}{e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i}} = \frac{D[e^{Z_0}] \prod_i p_i^{n_i} + e^{Z_0} D[\prod_i p_i^{n_i}]}{e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i}} = \\ &= \frac{D[Z_0] \prod_i p_i^{n_i} + \sum_j D[p_j^{n_j}] \prod_{i \neq j} p_i^{n_i}}{\prod_i p_i^{n_i}} = \frac{D[Z_0] \prod_i p_i^{n_i} + \sum_j n_j p_j^{n_j-1} D[p_j] \prod_{i \neq j} p_i^{n_i}}{\prod_i p_i^{n_i}} \\ \therefore \frac{D[R]}{R} &= D[Z_0] + \sum_j n_j \frac{D[p_j]}{p_j} \end{aligned} \quad (57)$$

Com isto, escrevemos

$$D[Z_0] + \sum_i n_i \frac{D[p_i]}{p_i} = -(N_x + M_y). \quad (58)$$

O lado direito da equação é, certamente, um polinômio (para o propósito dos nossos trabalhos, i.e., equações diferenciais racionais) vimos ainda que para cada  $p_i$  a razão  $\frac{D[p_i]}{p_i}$  resulta em polinômio (cofator). Resta então saber sobre  $D[Z_0]$  com  $Z_0$  função racional. Prenunciando a conclusão que faremos a respeito, enunciamos o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.4.** *Para uma 1EDO racional  $M(x, y) - N(x, y)y' = 0$ , sendo  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  polinômios coprimos, possuindo fator integrante na forma  $R(x, y) = e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i}$ , de modo que  $Z_0$  seja função racional,  $p_i$  como polinômios irredutíveis e  $n_i$  valores constantes, o resultado da aplicação  $D[Z_0] \equiv N \partial_x Z_0 + M \partial_y Z_0$  é polinômio (Duarte; Duarte; Mota,*

2002b).

**Demonstração:** Começemos então por reescrever a equação (58) como

$$D \left[ \frac{A(x, y)}{B(x, y)} \right] + \sum_i n_i \frac{D[p_i]}{p_i} = -(N_x + M_y),$$

sendo  $Z_0 = A/B$ , razão entre dois polinômios coprimos nas variáveis  $x$  e  $y$ . O segundo termo no lado esquerdo da equação pode ser representado como um único quociente e, devemos recordar também de que  $D$  é um operador diferencial, assim escrevemos:

$$\frac{BD[A] - AD[B]}{B^2} + \frac{\sum_j n_j D[p_j] \prod_{i \neq j} p_i}{\prod_i p_i} = -(N_x + M_y).$$

Podemos multiplicar ambos os lados da equação por  $\prod_i p_i$ , logo

$$\prod_i p_i \frac{BD[A] - AD[B]}{B^2} + \sum_j n_j D[p_j] \prod_{i \neq j} p_i = -(N_x + M_y) \prod_i p_i. \quad (59)$$

O operador de Darboux é linear e possui coeficientes polinomiais,  $p_i$  são polinômios, então  $D[p_i]$  também serão. Com isso, nota-se que tanto  $\sum_j n_j D[p_j] \prod_{i \neq j} p_i$  como  $(N_x + M_y) \prod_i p_i$  são polinomiais, portanto  $\prod_i p_i \frac{BD[A] - AD[B]}{B^2}$  deve ser polinômio.

O termo  $BD[A] - AD[B]$  do numerador é polinômio, sabemos ainda que os  $p_i$  são irredutíveis, e portanto, a razão  $\prod_i p_i / B^2$  não pode ser um polinômio. Neste caso, resta-nos discorrer sobre duas possibilidades distintas:

- $\prod_i p_i$  e  $B$  sem fatores em comum;
- $\prod_i p_i$  e  $B$  possuindo fatores em comum.

Pelo primeiro caso é bastante simples e direto ver que  $D[Z_0] = \frac{BD[A] - AD[B]}{B^2}$  é polinômio, pois se  $\prod_i p_i^{n_i}$  não possui fator em comum com  $B$ , também não possui com  $B^2$ , logo, se  $\prod_i p_i \frac{BD[A] - AD[B]}{B^2}$  ou  $\prod_i p_i D[Z_0]$  é polinômio, então  $D[Z_0]$  é, necessariamente, polinômio.

Para avaliarmos a segunda situação, consideremos que  $\prod_i p_i$  possa ser escrito como

$$\prod_i^n p_i = \left( \prod_{i=1}^{n_{\mathcal{B}}} p_i \right) \left( \prod_{i=n_{\mathcal{B}}+1}^n p_i \right) = \mathcal{B}\pi, \quad (60)$$

na qual tomamos  $\mathcal{B}$  como o produto de polinômios irredutíveis presentes tanto em  $B$  quanto em  $\prod_i p_i$ , o fator comum, enquanto que  $\pi$  representa o produto entre os termos que não estão presentes em  $B$ .

Tomemos  $B$  na forma de um produto entre potências de polinômios irredutíveis, forma na qual dizemos que  $B$  estaria representada em sua forma irredutível, a qual, deve também conter o termo que representa o fator comum entre  $B$  e  $\prod_{i=1}^n p_i$ , de produto entre polinômios irredutíveis ( $\mathcal{B}$ ).

$$B = \left( \prod_{i=1}^{n_\theta} b_i^{m_i} \right) \left( \prod_{i=1}^{n_{\mathcal{B}}} p_i \right) = \theta \mathcal{B}, \quad (61)$$

com  $m_i \in \mathbb{Z}^+$ . Escrito dessa forma, é claro que parte dos polinômios irredutíveis  $b_i$  pode, eventualmente, ser igual à parte dos polinômios  $p_i$  em  $\mathcal{B}$ . Podemos, portanto, reescrever o termo de interesse como

$$\prod_i p_i \frac{BD[A] - AD[B]}{B^2} = \mathcal{B} \pi \frac{BD[A] - AD[B]}{B\theta \mathcal{B}} = \pi \frac{BD[A] - AD[B]}{B\theta} = \pi \frac{D[A]}{\theta} - \pi A \frac{D[B]}{B\theta}.$$

Lembremo-nos de que este deve ser um polinômio, em virtude do formato da equação (59). Se o multiplicarmos por  $\theta$ , também polinômio, obviamente iremos manter a relação, isto é:

$$\theta \left( \pi \frac{D[A]}{\theta} - \pi A \frac{D[B]}{B\theta} \right) = \text{polinômio} \quad \implies \quad \pi D[A] - \pi A \frac{D[B]}{B} = \text{polinômio}.$$

Neste formato, avaliando o segundo termo à esquerda do sinal de igualdade, fica bastante claro que  $B|D[B]$ , i.e., a razão  $\frac{D[B]}{B}$  é polinômio. Pois bem sabemos que  $A$  e  $B$  são coprimos, além do fato de que  $\pi$  é produto de polinômios irredutíveis que não aparecem em  $B$ , portanto, subtraindo  $\pi D[A]$  de ambos os lados da equação, este que também é claramente um polinômio, concluímos que  $B|D[B]$ .

Retomamos então o formato de  $B$  como produto entre potências de polinômios irredutíveis  $B = \prod_{i=1}^{n_b} B_i^{k_i} (= \theta \mathcal{B})$ , dessa forma

$$\frac{D[B]}{B} = \frac{D \left[ \prod_{i=1}^{n_b} B_i^{k_i} \right]}{\prod_{i=1}^{n_b} B_i^{k_i}} = \sum_{i=1}^{n_b} k_i \frac{D[B_i]}{B_i}.$$

Extraindo o primeiro termo do somatório e multiplicando ambos os lados da equação pelo produto  $\prod_{j=2}^{n_b} B_j$ , verificamos que:

$$\left( \prod_{j=2}^{n_b} B_j \right) \frac{D[B]}{B} = k_1 \left( \prod_{j=2}^{n_b} B_j \right) \frac{D[B_1]}{B_1} + \sum_{i=2}^{n_b} k_i \left( \prod_{j=2, j \neq i}^{n_b} B_j \right) D[B_i]. \quad (62)$$

O último termo é obtido fazendo

$$\sum_{i=2}^{n_b} k_i \frac{D[B_i]}{B_i} = \frac{\sum_{i=2}^{n_b} k_i \left( \prod_{j=2, j \neq i}^{n_b} B_j \right) D[B_i]}{\prod_{j=2}^{n_b} B_j}.$$

Na equação (62), observa-se que tanto o termo à esquerda do sinal de igualdade quanto o segundo à direita são polinomiais, portanto, conclui-se que  $k_1 \left( \prod_{j=2}^{n_b} B_j \right) \frac{D[B_1]}{B_1}$  é polinômio. Como  $B_i$  são irredutíveis independentes, o produto  $\prod_{j=2}^{n_b} B_j$  não cancela  $B_1$ , então  $B_1 | D[B_1]$ . Analogamente, é possível mostrar que  $B_i | D[B_i]$ ,  $i = 2, \dots, n_b$ .

Através da consideração de que  $B = \prod_{i=1}^{n_b} B_i^{k_i}$ , é fácil notar que o uso de  $B_i$  representa tão somente outra denominação aos  $p_i$  e  $b_i$  em  $\mathcal{B}$  e  $\theta$  da equação (61), dessa forma, fica explícito que  $b_i | D[b_i]$ ,  $i = 1, \dots, n_\theta$  e  $p_i | D[p_i]$ ,  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{B}}$  como consequência de  $B_i | D[B_i]$ . Vamos então reescrever a equação (58) como segue:

$$D[Z_0] + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{B}}} c_i \frac{D[p_i]}{p_i} + \sum_{i=n_{\mathcal{B}}+1}^n c_i \frac{D[p_i]}{p_i} = -(N_x + M_y).$$

Como foi constatado,  $p_i | D[p_i]$ ,  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{B}}$ , ou seja, do primeiro somatório na equação obtém-se um polinômio, o que nos permite então constatar que

$$D[Z_0] + \sum_{i=n_{\mathcal{B}}+1}^n c_i \frac{D[p_i]}{p_i} = \text{polinômio}.$$

Esta última igualdade pode ser colocada na forma

$$D \left[ \frac{A}{B} \right] + \frac{\sum_{i=n_{\mathcal{B}}+1}^n c_i \left( \prod_{i=n_{\mathcal{B}}+1, i \neq j}^n p_i \right) D[p_j]}{\prod_{i=n_{\mathcal{B}}+1}^n p_i} = \text{polinômio},$$

onde representamos o segundo termo à esquerda na forma de um quociente único, além da proposta de função  $Z_0$  racional, como deve ser. Podemos ainda escrever

$$\left( \prod_{i=n_{\mathcal{B}}+1}^n p_i \right) \frac{BD[A] - AD[B]}{B^2} + \sum_{i=n_{\mathcal{B}}+1}^n c_i \left( \prod_{i=n_{\mathcal{B}}+1, i \neq j}^n p_i \right) D[p_j] = \text{polinômio}.$$

Na qual, apenas expandimos o primeiro termo, colocando-o na forma comum da atuação de um operador diferencial, como se deveria esperar para atuação do operador de Darboux  $D$  sobre uma fração. Também, multiplicamos ambos os lados da equação pelo produto de polinômios  $\prod_{i=n_{\mathcal{B}}+1}^n p_i$ , e, isto claramente mantém o lado direito como um polinômio.

Agora, sabendo que  $\prod_{i=n_B+1}^n p_i$  não possui fatores em comum com  $B$ , em acordo com nossa proposta inicial da equação (60) e que o segundo termo é, evidentemente, polinomial, resta-nos afirmar que  $\frac{BD[A]-AD[B]}{B^2} = D[Z_0]$  é polinomial (Duarte; Duarte; Mota, 2002b).  $\square$

**Corolário 2.2.1.** Se o fator integrante  $R$  para uma 1EDO racional  $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{N}$  ( $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  polinômios coprimos) com solução geral Liouvilliana pode ser colocado na forma  $R = e^{Z_0} \prod_{i=1}^n p_i(x, y)^{n_i}$ , tal como fora apresentado no enunciado do teorema 2.2.3, onde  $Z_0$  é função racional em  $(x, y)$ ,  $p_i$  são polinômios irreduzíveis em  $(x, y)$  e  $n_i$  constantes, então, considerando  $Z_0 = \frac{A}{B}$ , concluímos que  $B|D[B]$  além de  $p_i|D[p_i]$  (Duarte; Duarte; Mota, 2002b).

Este último resultado se tornara evidente ao longo da prova que apresentamos para o teorema 2.2.4, especificamente, evidenciamos o fato de que  $B|D[B]$ , o que implica que o polinômio no denominador de  $Z_0$  é polinômio de Darboux. Agora, utilizando do resultado do teorema, a respeito de  $D[Z_0]$  (polinomial), não é difícil notar que  $p_i|D[p_i]$  através da equação (58), pois neste contexto, o termo  $\sum_i n_i \frac{D[p_i]}{p_i}$  deverá, necessariamente, ser um polinômio.

### 2.2.2.1 Um semi-algoritmo e estudo de caso

À luz da ideia que apresentamos para 1EDO's racionais com solução geral Liouvilliana, reconsideremos a equação (58) escrita como

$$\frac{BD[A] - AD[B]}{B^2} + \sum_i n_i \tau_i = -(N_x + M_y),$$

em que  $\tau_i$  representam os cofatores de  $p_i$ , uma vez que  $D[p_i] = p_i \tau_i$ . Multiplicando ambos os lados por  $B^2$ , ficamos com

$$BD[A] - AD[B] + B^2 \sum_i n_i \tau_i = -B^2(N_x + M_y). \quad (63)$$

Lembre-mos da importância da relação expressa na equação (37). A respeito, vale recordar que, somado ao fato de que  $\frac{D[R]}{R} = -(N_x + M_y)$ , segundo Prelle e Singer, o fator integrante  $R$  para uma 1EDO racional possuindo uma integral primeira elementar, tem a estrutura de um produto de polinômios irreduzíveis. A partir disso, é possível estabelecer uma sequência de passos que nos permita expressar a solução geral da 1EDO em questão. Similarmente, a equação (63) nos permitirá construir um algoritmo para encontrar solução geral de 1EDO's racionais que possuam um invariante Liouvilliano, onde pressupõe-se que o fator integrante possa ser expresso no formato  $R = e^{Z_0} \prod_i p_i^{n_i}$ .

Apesar de desconhecemos os polinômios  $A$  e  $B$ , sabemos que  $B$  é polinômio de Darboux, então  $B(x, y) = 0$  representa uma curva algébrica invariante e, qualquer fator de  $B$  deve também representar uma curva algébrica invariante (vide definições 2.2.1 e 2.2.2). Consideremos o polinômio  $B(x, y)$  na forma

$$B = \prod_i B_i^{m_i}(x, y),$$

com  $m_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $B_i$  são polinômios irredutíveis independentes. Nesse caso, sabemos que

$$\frac{D[B]}{B} = \sum_i m_i \frac{D[B_i]}{B_i} = \text{polinômio},$$

portanto,  $B_i | D[B_i]$ . Assim sendo, se representarmos  $D[B] = (\prod_i B_i^{m_i}) \sum_i m_i \frac{D[B_i]}{B_i}$ , em uma composição das duas equações anteriores, podemos reescrever a equação (63) como

$$\left( \prod_i B_i^{m_i} \right) \left( D[A] - A \sum_i m_i \frac{D[B_i]}{B_i} \right) = - \left( \prod_i B_i^{m_i} \right)^2 \left( \sum_i n_i \tau_i + N_x + M_y \right).$$

Simplificando, chegamos a

$$D[A] - A \sum_i m_i \lambda_i = - \prod_i B_i^{m_i} \left( \sum_i n_i \tau_i + N_x + M_y \right), \quad (64)$$

em que  $\lambda_i$  representam os cofatores dos  $B_i$ .

Como os fatores de  $B$  são polinômios de Darboux, podemos dizer que, definir um conjunto  $\{B_i\}$  de autopolinômios do operador  $D$  e um grau para  $B$  é suficiente para que possamos determinar possibilidades de valores para os  $\{m_i\}$ . Com isto, a equação (64) fornece um conjunto de sistemas lineares para  $n_i$  e para coeficientes do polinômio  $A$ , veremos como isso ocorre utilizando-nos de um exemplo.

**Exemplo 2.2.3.** Uma possibilidade de se trabalhar com os resultados discutidos na intenção de determinar explicitamente uma integral primeira (Liouvillian) de uma 1EDO racional seria (de modo heurístico) tomando graus dos polinômios  $A$  e  $B$  de  $Z_0$ , bem como, graus dos polinômios de Darboux, a equação (64) possui mesma ordem de relevância para o método quanto a equação (41) tinha para o caso com solução geral elementar, i.e., a equação (64) nos permite determinar valores  $n_i$  para cada possível conjunto de valores  $m_i$ , segue portanto a possibilidade de se determinar um fator integrante para a equação e resolvê-la pelo procedimento que uma 1EDO exata  $R(x, y)M(x, y) - R(x, y)N(x, y) = 0$  nos permitiria fazer (em referência ao procedimento realizado para encontrar integral

primeira no exemplo 1.1.3). Podemos verificar a sequência destes passos com o exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-y)}{x+1}. \quad (65)$$

A esta altura o leitor certamente já pode identificar o operador de Darboux  $D \equiv N(x, y)\partial_x + M(x, y)\partial_y$  como

$$D = (x+1)\partial_x + y(x-y)\partial_y.$$

Também não é difícil verificar que a equação (65) não é exata ( $\partial_y M \neq \partial_x N$ ), então, a fim de integrar analiticamente a equação aqui apresentada devemos partir em busca de um fator integrante. Vamos fazê-lo pelo algoritmo proposto para encontrar integrais primeiras Liouvillianas. O procedimento inicial é semelhante àquele que utilizamos para encontrar invariante elementar para a 1EDO do exemplo 2.2.1, i.e., iremos, primeiramente, determinar polinômios de Darboux.

Seja  $p(x, y) = p_1x + p_2y + p_3$  um candidato a autopolinômio de grau 1 do operador  $D$ , assim, de  $D[p(x, y)] = q(x, y)p(x, y)$  temos

$$(x+1)p_1 + y(x-y)p_2 = (p_1x + p_2y + p_3)q(x, y). \quad (66)$$

O lado esquerdo possui grau 2, implicando portanto que tomemos  $q(x, y)$  com grau 1, então vamos considerar

$$q(x, y) = q_1x + q_2y + q_3,$$

que nos permite reescrever (66) como

$$\begin{aligned} xp_1 + p_1 + yxp_2 - y^2p_2 &= p_1q_1x^2 + p_1q_2xy + p_1q_3x + p_2q_1xy + p_2q_2y^2 + p_2q_3y \\ &\quad + p_3q_1x + p_3q_2y + p_3q_3. \end{aligned}$$

A esta equação, comparando os coeficientes dos monômios de ambos os lados do sinal de igualdade, podemos associar o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_2 q_2 = -p_2 \\ p_1 q_2 + p_2 q_1 = p_2 \\ p_1 q_3 + p_3 q_1 = p_1 \\ p_3 q_3 = p_1 \\ p_1 q_1 = 0 \\ p_2 q_3 + p_3 q_2 = 0. \end{array} \right. \quad (67)$$

Vamos trabalhar com as possibilidades  $p_1 = p_3 = 0$  e  $p_2 \neq 0$  além de  $p_2 = 0$  e  $p_1 \neq 0$ ,  $p_3 \neq 0$ . Não temos uma justificativa tão específica e direta para estas duas suposições, o leitor poderia inclusive tentar encontrar outros formatos de polinômios de Darboux, o ponto é que, por intermédio de um pacote computacional<sup>27</sup> determinamos dois polinômios de Darboux de grau 1 com estas configurações especificamente e, o resultado, ao final, é satisfatório.

Da suposição  $p_2 \neq 0, p_1 = p_3 = 0$  temos

$$\left\{ \begin{array}{l} p_2 q_2 = -p_2 \\ p_1 q_2 + p_2 q_1 = p_2 \\ p_2 q_3 + p_3 q_2 = 0, \end{array} \right.$$

de onde se pode extrair facilmente que  $q_1 = 1, q_2 = -1$  e  $q_3 = 0$ . Como  $p_2$  é arbitrário, vamos então considerar os polinômios

$$p_1(x, y) = y \text{ e } q_1(x, y) = x - y$$

como um primeiro polinômio de Darboux e seu respectivo cofator. O segundo caso ( $p_1 \neq 0, p_3 \neq 0$  e  $p_2 = 0$ ) nos permite reescrever o sistema (67) como

---

<sup>27</sup> O pacote LSolver é uma implementação computacional em Maple desenvolvida pelo nosso grupo para trabalhar justamente estes casos de 1EDO's racionais que apresentam integrais primeiras Liouvillianas (Avellar *et al.*, 2007).

$$\begin{cases} p_1 q_2 + p_2 q_1 = p_2 \\ p_1 q_3 + p_3 q_1 = p_1 \\ p_3 q_3 = p_1 \\ p_1 q_1 = 0 \\ p_2 q_3 + p_3 q_2 = 0, \end{cases}$$

de onde se obtém que  $q_1 = q_2 = 0$  e  $q_3 = 1$ , assim, tomando arbitrariamente  $p_1 = p_3 = 1$  determinamos

$$p_2(x, y) = x + 1 \text{ e } q_2(x, y) = 1.$$

Agora devemos nos recordar de que o termo  $B = \prod_i B_i^{m_i}$  na equação (64) é, na verdade um produto de potências de polinômios de Darboux, se utilizarmos das informações que dispomos até o momento podemos representá-lo na forma

$$B = y^{m_1}(x + 1)^{m_2}.$$

Lembre-mo-nos também de que  $\lambda_i$ , em (64), representam os cofatores dos  $B_i$ , correspondentemente,  $q_1(x, 1)$  e  $q_2(x, y)$ . Similarmente,  $\tau_i$  são cofatores de  $p_i$ , que também polinômios de Darboux, então, por uma consideração inicial de que  $A(x, y)$  é polinômio de grau 1 nas variáveis  $x$  e  $y$  ( $A(x, y) = a_1x + a_2y + a_3$ ) escrevemos a relação (64) para o presente caso como

$$\begin{aligned} (x + 1)a_1 + y(x - y)a_2 - (a_1x + a_2y + a_3)(m_1(x - y) + m_2) = \\ - y^{m_1}(x + 1)^{m_2}(n_1(x - y) + n_2 + 1 + x - 2y). \end{aligned} \quad (68)$$

Para que possamos dar sequência em uma tentativa de determinar os valores  $n_i$  a partir desta equação é necessário que façamos menção de uma condição que ainda não havíamos explicitado em discussões prévias, vamos considerar que  $B$  deva ser um polinômio de grau menor ou igual que  $A$ , para tal, os conjuntos  $\{m_i\}$ , de possíveis valores  $m_i$  que nos asseguram a condição para este caso são

$$\{m_1 = 0, m_2 = 0\}, \{m_1 = 0, m_2 = 1\}, \{m_1 = 1, m_2 = 0\}.$$

Estaremos interessados no conjunto  $\{m_i\}$  para o qual existe maneira de se determinar tanto os coeficientes  $a_i$  quanto os valores  $n_i$  através de (68). Tomemos o caso mais simples,  $m_1 = m_2 = 0$ , então (68) passa a ser

$$xa_1 + a_1 + yxa_2 - y^2a_2 = (2 + n_1)y - (n_1 + 1)x - n_2 - 1,$$

de onde se pode escrever, comparando-se os coeficientes dos monômios, que

$$\begin{cases} n_1 + 1 = -a_1 \\ n_2 + 1 = -a_1 \\ n_1 + 2 = 0 \\ a_2 = 0. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda linha da primeira pode se estabelecer, sendo  $a_1$  constante arbitrária, que  $n_1 = n_2$ , da terceira, fica evidente que  $n_1 = -2$  e, com isso, fica então determinado

$$A(x, y) = x, \quad B(x, y) = \prod_i B_i^{m_i} = 1 \implies Z_0 = \frac{A(x, y)}{B(x, y)} = x,$$

além também de

$$R(x, y) = e^{Z_0} \prod_i p_i(x, y)^{n_i} = e^x \frac{1}{x^2(x+1)^2}. \quad (69)$$

É possível verificar, de fato, que  $R(x, y)$  faz com que  $R(x, y)M(x, y) - R(x, y)N(x, y)y' = 0$  seja uma equação diferencial exata ( $\partial_y(RM) = -\partial_x(RN)$ ), uma integral primeira da equação diferencial pode, portanto, ser extraída diretamente do processo

$$I(x, y) = \int RMdx - \int RNdy - \int \left( \partial_y \left[ \int RMdx \right] \right) dy,$$

de maneira totalmente semelhante ao caso trabalhado no exemplo 2.2.1.

$$\therefore I(x, y) = \int \frac{e^x(x-y)}{y^2(x+1)^2} dx - \int \frac{e^x}{y^2(x-1)} dy - \int \left( \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int \frac{e^x(x-y)}{y^2(x+1)^2} dx \right] \right) dy.$$

Ocorre que a integral  $\int RMdx$  não pode ser escrita como uma função elementar, sem

uso do símbolo de integração, correspondendo ao que denominamos função Liouvillian não-elementar<sup>28</sup>. Podemos, no máximo, dizer que

$$\frac{e^x}{y(x-1)} + \int \frac{e^x(x-y)}{y(x+1)^2} dx - \int \left( \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int \frac{e^x(x-y)}{y(x+1)^2} dx \right] \right) dy = C$$

é solução geral (na forma implícita) da equação diferencial (65).

Assim encerramos as discussões propostas para o contexto das 1EDO's racionais, vale recordar que havíamos nos limitado à equação (22) no capítulo inicial para que pudessemos, na sequência, discutir tópicos essenciais da abordagem Darbouxiana e do algoritmo de Prelle e Singer, que, como mostrado, pode ser ajustado de modo que possamos aplicá-lo não somente aos casos em que as EDO's apresentam integrais primeiras elementares, mas, de modo mais amplo, o procedimento torna-se útil e bastante eficaz para trabalhar, de uma maneira geral, quaisquer casos com integrais primeiras Liouvillianas. Foi dito também que os desenvolvimentos podem, inclusive, ser ajustados para que tenhamos um algoritmo que nos permita lidar com 2EDO's racionais, a discussão que fizemos a respeito no primeiro capítulo se limita às equações (30). Iremos retomar estes desenvolvimentos no capítulo 4 à luz de maiores esclarecimentos e detalhes sobre cada passagem feita inicialmente a fim de dar sequência (como fizemos para o caso das 1EDO's pós equação (22)) à maneira com a qual se pode trabalhar 2EDO's racionais pós equações (30).

Já apontamos, algumas vezes, que a ferramenta para extensão dos métodos às 2EDO's racionais é constituída também de alguns aspectos da teoria de Lie, o que envolve conceitos básicos da teoria de grupos em álgebra abstrata, bem como a ideia de grupos de transformações e transformações infinitesimais, com isto, podemos tentar entender ao que correspondem os chamados invariantes de grupo, além de verificar também como estes desenvolvimentos se relacionam com o que usualmente denominamos *simetrias de equações diferenciais*. Veremos que o *método da Função-S* escapa tanto do problema que envolve determinação dos polinômios de Darboux (resolução de sistema algébrico que pode, eventualmente, ser muito complicado) quanto do problema de se determinar os infinitésimos de um gerador de simetria (resolução de equação diferencial parcial que pode também não se apresentar em uma forma relativamente agradável).

O capítulo 3, assim como nosso capítulo inicial, traz discussões teóricas de uma forma mais expositória, vamos nos atentar às definições e tentar, da maneira mais didática possível, introduzir o leitor às ideias mais fundamentais da teoria de Lie para que possamos, posteriormente, incorporá-las aos desenvolvimentos de interesse do nosso grupo.

---

<sup>28</sup> Sugerimos que o leitor verifique este resultado fazendo uso de um CAS, aquele com o qual se tem maior familiaridade, em geral, o resultado se expressa em termos de  $\text{ExpIntegralEi}[1+x]$  (Mathematica) ou  $\text{Ei}(1,-x-1)$  (Maple).

### 3 TEORIA DE LIE

Dentre as ideias mais fundamentais em um estudo a respeito de *invariância* de equações diferenciais encontramos noções de *grupos de transformações de Lie*. O matemático norueguês Sophus Lie (1842 - 1899) suspeitava de que os métodos classificatórios utilizados para solução de equações diferenciais da época, i.e., métodos cuja eficiência se restringia aos tipos de equações diferenciais (como já indicamos), eram, na verdade casos especiais de um procedimento geral de integração fundamentado na *invariância* das equações diferenciais frente ações de *grupos de transformação*.

A priori, os grupos de Lie surgem como uma “junção” entre o conceito algébrico de grupo e a noção de variedade<sup>29</sup> da geometria diferencial, como resultante, obtém-se técnicas bastante eficazes no estudo de *simetrias* de equações diferenciais (Olver, 1986). Mais precisamente, os grupos de Lie podem ser tidos como grupos de transformações locais atuando sobre uma dada variedade. A ideia fundamental neste contexto da teoria de grupos de Lie e suas aplicações em equações diferenciais relaciona o conceito de campo vetorial ao *gerador infinitesimal* de um grupo de transformações de Lie uniparamétrico.

Este capítulo, portanto, é destinado a uma introdução à teoria de Lie. A intenção aqui é apresentar definições e conceitos básicos a respeito de sua formulação algébrica, além também de avaliar a possibilidade de integração de algumas equações diferenciais baseando-nos na invariância das mesmas frente ações de um *grupo contínuo* de simetrias a um parâmetro, o que nos permite reduzir, em uma unidade, a ordem da equação. Dessa forma, recobramos soluções da equação original pelas soluções da equação de ordem reduzida<sup>30</sup> (Duarte, 1997). Portanto, referimo-nos aqui ao método de Lie como um procedimento para obtenção de simetrias da equação diferencial, para que, de posse destas, possamos determinar soluções da equação.

#### 3.1 Grupos e Grupos de Transformações a um parâmetro

**Definição 3.1.1.** (Bluman; Kumei, 1989) Denominamos **grupo** qualquer conjunto de elementos para o qual esteja definida uma lei de composição  $\phi$  entre os mesmos satisfazendo os axiomas de

- *fechamento*: para cada par de elementos  $a, b \in G$ ,  $\phi(a, b) \in G$ ;

<sup>29</sup> As variedades são os objetos fundamentais na geometria diferencial e, a grosso modo, generalizam os conceitos de curva e superfície, bastante familiares no espaço tridimensional.

<sup>30</sup> Para uma 1EDO, o método fornece forma explícita da solução geral.

- *associatividade*: para quaisquer três elementos  $a, b$  e  $c$  distintos de  $G$  podemos escrever  $\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c)$ ;
- *elemento neutro*: para cada  $a \in G$  existe um único  $e \in G$  tal que  $\phi(a, e) = \phi(e, a) = a$ ;
- *elemento inverso*: para cada  $a \in G$  existe um único elemento  $a^{-1} \in G$  tal que  $\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e$ .

É comum denotarmos o grupo como  $\mathcal{G} = (G, \phi)$ .

**Definição 3.1.2.** Diremos que um determinado grupo  $\mathcal{G}$  é *abeliano* se para quaisquer elementos  $a, b \in G$  tivermos  $\phi(a, b) = \phi(b, a)$ .

**Exemplo 3.1.1.** O conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$ , munido da operação usual de adição forma um grupo  $(\mathbb{Z}, +)$ , pois:

- $a + b \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ ;
- $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ ;
- $\exists 0 \in \mathbb{Z} : a + 0 = a \forall a \in \mathbb{Z}$ ;
- $\exists -a \in \mathbb{Z} : a + (-a) = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 3.1.3.** (Grupo de Transformações) Seja  $\mathbf{x} = (x_1, x_1, \dots, x_n)$  um elemento de  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Tome  $\varepsilon$  um parâmetro definido em um intervalo  $S \subset \mathbb{R}$ , de modo que, para cada dois elementos  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  de  $S$  esteja definida uma lei de composição  $\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . O conjunto de transformações

$$\mathbf{x}^* = \mathbb{X}(\mathbf{x}; \varepsilon), \quad (70)$$

definido para todo  $\mathbf{x} \in D$  é um **grupo de transformações** em  $D$  se (Bluman; Kumei, 1989):

- Para cada  $\varepsilon \in S$  as transformações  $\mathbb{X}(\mathbf{x}; \varepsilon) : D \rightarrow D$  ( $\mathbb{X} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^*$ ) forem injetoras;
- $\mathcal{G} = (S, \phi)$  constituir um grupo pela operação  $\phi$  sobre elementos de  $S$ ;
- $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$  quando  $\varepsilon = e$ , onde “ $e$ ” corresponde ao elemento identidade do grupo  $\mathcal{G} = (S, \phi)$ ;
- transformações sucessivas forem resultantes de aplicações da lei de composição sobre respectivos valores nos parâmetros, em outras palavras, se dissermos que  $\mathbf{x}^* = \mathbb{X}(\mathbf{x}; \varepsilon_1)$  e  $\mathbf{x}^{**} = \mathbb{X}(\mathbf{x}^*; \varepsilon_2) \implies \mathbf{x}^{**} = \mathbb{X}(\mathbf{x}; \phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ .

**Exemplo 3.1.2.** Um grupo de translações no plano pode ser definido como

$$\begin{cases} x^* = x + \varepsilon, \\ y^* = y, \end{cases}$$

$\varepsilon$  é um valor arbitrário tomado sobre a reta real e a lei de composição das transformações aqui é  $\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Veja que  $\mathcal{G} = (\mathbb{R}, +)$  satisfaz as condições listadas na definição 3.1.1, o elemento neutro de  $\mathcal{G}$  corresponde ao valor  $\varepsilon = 0$ , para o qual se obtém, pela transformação,  $x^* = x$  e  $y^* = y$  como esperado.

**Exemplo 3.1.3.** Considere o seguinte grupo de transformações de escala no plano:

$$\begin{cases} x^* = \alpha x, \\ y^* = \alpha^2 y, \end{cases}$$

$\alpha$  são elementos do grupo  $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ , i.e.,  $\alpha$  é valor real positivo e a lei de composição é o produto entre dois elementos distintos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ,  $\phi(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \alpha_2$ . O elemento neutro é  $\alpha = 1$  e para cada valor  $\alpha$  existe um único valor  $\alpha^{-1}$  definido como  $1/\alpha$  tal que  $\phi(\alpha, \alpha^{-1}) = 1$ . Veja que,  $x^* = x$  e  $y^* = y$  quando  $\alpha = 1$ .

### 3.1.1 Transformações infinitesimais

**Definição 3.1.4.** Um grupo de transformações será dito **grupo de transformações de Lie a um parâmetro** se, em adição aos axiomas da definição (3.1.3) tivermos (Bluman; Kumei, 1989):

- $\varepsilon$  como parâmetro contínuo em  $S$ , ou seja,  $S$  é um intervalo em  $\mathbb{R}$  e, sem perda de generalidade,  $\varepsilon = 0$  corresponderá à identidade “ $e$ ”;
- $\mathbb{X}$  como função analítica de  $\varepsilon$  e infinitamente diferenciável em  $\mathbf{x}$ ;
- $\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  como função analítica de  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  em  $S$ .

Imaginemos que  $\varepsilon$  corresponda à variável temporal  $t \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}$  às coordenadas espaciais na descrição de um dado problema físico. Um grupo de transformações de Lie a um parâmetro define a evolução de  $\mathbf{x}$  sobre todos os elementos de  $\mathcal{G} = (\mathbb{R}, \phi)$ , o que pode ser interpretado como uma curva.

Tomando a equação (70) como expressão para um grupo de transformações de Lie uniparamétrico, i.e., grupo de transformações satisfazendo as condições adicionais

expressas na definição (3.1.4) e desenvolvendo as transformações na vizinhança de  $\varepsilon = 0$  por série de Taylor, temos:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbb{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbb{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left( \frac{\partial^k \mathbb{X}(\mathbf{x}^*; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon=0} \right). \quad (71)$$

Vamos considerar

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbb{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Equivalentemente, poderíamos ter representado a expansão (71) na forma

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left( \frac{\partial^k \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon=0} \right), \quad (72)$$

modo com o qual podemos identificar mais facilmente as componentes de  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$  como

$$\xi_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_i^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (73)$$

A transformação  $\mathbf{x} + \varepsilon \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$  é denominada **transformação infinitesimal** de (70), os componentes de  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$  são chamados **infinitésimos** (Bluman; Kumei, 1989).

**Definição 3.1.5.** O gerador infinitesimal de um grupo de transformações de Lie a um parâmetro é o operador

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (74)$$

em que  $\nabla$  representa o operador gradiente  $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n})$ . Para uma função diferenciável  $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\mathcal{X}F(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \cdot \nabla F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Note que  $\mathcal{X}x_j = \delta_{ij}\xi_i(\mathbf{x}) = \xi_j(\mathbf{x})$ , esta percepção será importante quando entrarmos no mérito de troca de variáveis e *forma normal* de um gerador.

**Observação 3.1.1.** Veja que a transformação representada através da expansão em (72) passa a ser

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \varepsilon \mathcal{X} \mathbf{x} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathcal{X}^2 \mathbf{x} + \dots = \left( 1 + \varepsilon \mathcal{X} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathcal{X}^2 + \dots \right) \mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathcal{X}^k \mathbf{x} = e^{\varepsilon \mathcal{X}} \mathbf{x}, \quad (75)$$

em que  $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathbf{x})$  como definido pela equação (74). Em particular, para uma função diferenciável  $F(\mathbf{x})$  o resultado de  $\mathcal{X}^k F(\mathbf{x})$  é obtido por aplicação de  $\mathcal{X}$  em  $\mathcal{X}^{k-1} F(\mathbf{x})$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), e ainda,  $\mathcal{X}^0 F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$  (Bluman; Kumei, 1989).

Para verificar a validade da expressão (75) consideremos o efeito de uma transformação infinitesimal sobre  $F(\mathbf{x})$  analítica:

$$F(\mathbf{x}^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left( \frac{\partial^k F(\mathbf{x}^*)}{\partial \varepsilon^k} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = F(\mathbf{x}) + \varepsilon \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}^*)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} + \dots$$

Mas

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \xi_i(\mathbf{x}). \quad (76)$$

Mas  $\varepsilon = 0$  corresponde ao valor do parâmetro que gera transformação de identidade  $x_i^* = x_i$ , logo, podemos escrever diretamente que

$$\therefore \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathcal{X} F(\mathbf{x}). \quad (77)$$

Portanto, segue também que, para  $F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \mathcal{X} \mathbf{x} \implies \mathcal{X} \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}).$$

De maneira análoga

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}^*)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} &= \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial \varepsilon} \right) \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial x_j^*}{\partial \varepsilon} \right] \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\implies \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}^*)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{j=1}^n \xi_j(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathcal{X} F(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \mathcal{X}(\mathcal{X} F(\mathbf{x})) \quad \left( \text{usamos } \xi_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_j^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right). \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}^*)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} = \mathcal{X}^2 F(\mathbf{x}).$$

De um modo geral, conclui-se que

$$\frac{\partial^k F(\mathbf{x}^*)}{\partial \varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon=0} = \mathcal{X}^k F(\mathbf{x}), \quad (78)$$

em consequência, também podemos escrever

$$\frac{\partial^k \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon=0} = \mathcal{X}^k \mathbf{x}.$$

$$\therefore \mathbf{x}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left( \frac{\partial^k \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon=0} \right) = \mathbf{x} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} + \dots = \mathbf{x} + \varepsilon \mathcal{X} \mathbf{x} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathcal{X}^2 \mathbf{x} + \dots,$$

$$\implies \mathbf{x}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathcal{X}^k \mathbf{x} = e^{\varepsilon \mathcal{X}} \mathbf{x}. \quad \square$$

Quer dizer que transformações finitas do grupo são geradas pelo operador definido em (74), o mesmo é denominado, como dito, *gerador infinitesimal* do grupo (Duarte, 1997). De modo geral, sendo  $F(\mathbf{x})$  função suave tomamos

$$F(\mathbf{x}^*) = e^{\varepsilon \mathcal{X}} F(\mathbf{x}). \quad (79)$$

### 3.1.2 Funções, superfícies e curvas invariantes

**Definição 3.1.6.** Seja  $F(\mathbf{x})$  função infinitamente diferenciável ( $C^\infty$ ) em  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Diremos que  $F(\mathbf{x})$  é **função invariante** do grupo de transformações de Lie a um parâmetro (70) se, e somente se,

$$F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x}). \quad (80)$$

Por simplicidade, diz-se que  $F(\mathbf{x})$  é um invariante do grupo.

**Teorema 3.1.1.**  $F(\mathbf{x})$  é invariante sob transformação  $\mathbf{x}^* = \mathbb{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)$  se, e somente se

$$\mathcal{X}F(\mathbf{x}) \equiv 0.$$

**Demonstração:** Como determinamos ao final da subseção anterior

$$F(\mathbf{x}^*) = e^{\varepsilon \mathcal{X}} F(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathcal{X}^k F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathcal{X}F(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathcal{X}^2 F(\mathbf{x}) + \dots$$

Se  $F(\mathbf{x})$  é invariante então, por definição  $F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x})$ . Disto segue, obrigatoriamente, que  $\mathcal{X}F(\mathbf{x}) \equiv 0$ , do mesmo modo  $\mathcal{X}^n F(\mathbf{x}) \equiv 0$ ,  $n = 2, 3, \dots$   $\square$

**Teorema 3.1.2.** Para um grupo de transformações de Lie (70), teremos  $F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}) + \varepsilon$  somente se  $\mathcal{X}F(\mathbf{x}) = 1$ .

**Demonstração:** A demonstração deste resultado é também muito direta pelo uso da mesma expressão. Se de fato a identidade  $F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}) + \varepsilon$  é válida, temos:

$$F(\mathbf{x}) + \varepsilon = F(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathcal{X}F(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathcal{X}^2 F(\mathbf{x}) + \dots \implies \mathcal{X}F(\mathbf{x}) \equiv 1. \quad \square$$

Este resultado será de utilidade quando apresentarmos algumas noções a respeito das chamadas *famílias de curvas invariantes*.

**Definição 3.1.7.** Uma superfície  $F(\mathbf{x}) = 0$  é denominada **superfície invariante** por um grupo de transformações de Lie a um parâmetro ( $\varepsilon$ ) se, e somente se,  $F(\mathbf{x}^*) = 0$  quando  $F(\mathbf{x}) = 0$ .

**Observação 3.1.2.** Uma superfície  $F(\mathbf{x}) = 0$  invariante frente as transformações de um grupo de Lie uniparamétrico não excede a regra da definição 3.1.6, e portanto, deve ser tal que  $\mathcal{X}F(\mathbf{x}) = 0$  quando  $F(\mathbf{x}) = 0$ .

Vamos retomar o conteúdo desta observação mais adiante, pois será também de importância quando fizermos considerações sobre invariância de equações diferenciais pela ação de grupos de transformações.

**Definição 3.1.8.** Uma curva  $F(x, y) = 0$  no plano é invariante frente as transformações definidas por

$$x^* = x + \varepsilon \xi(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$y^* = y + \varepsilon \eta(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{81}$$

com gerador

$$\mathcal{X} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

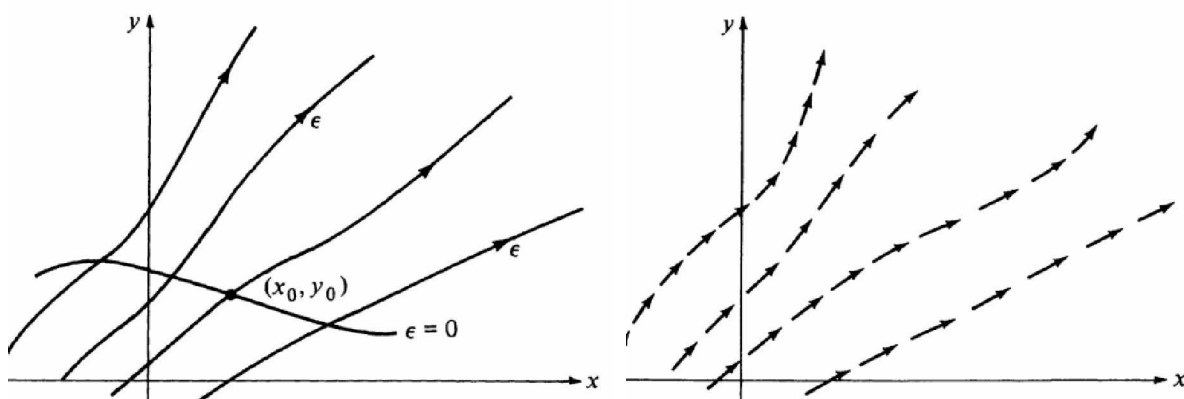
se, e somente se,  $F(x^*, y^*) = 0$  quando  $F(x, y) = 0$ . Claramente, um caso particular do que se estabelece através da observação 3.1.2, nessas condições, também  $\mathcal{X}F(x, y) = 0$ .

Como vimos, a solução geral de uma equação diferencial ordinária representa, geometricamente, uma família de curvas. Dizer que uma equação diferencial admite grupo de transformações corresponde dizer que as transformações do grupo mapeiam “curvas-solução” da equação em “curvas-solução” de uma mesma família. Em outras palavras, grupos de transformações de simetria em equações diferenciais devem, por definição, manter invariantes as famílias de curvas que representam soluções da equação diferencial (Bluman; Kumei, 1989). Então, os pontos de uma curva  $I(x, y) = C_0$  ou superfície  $I(\mathbf{x}) = C_0$  serão levados, pela transformação do grupo em outra curva (ou superfície)  $I(\mathbf{x}^*) = C_0^*$  da mesma família (o subíndice em  $C$  consta apenas para declarar que ao caso fazemos referência a uma curva específica,  $C_0$  teria sido, portanto, obtida por condições iniciais).

Para um melhor esclarecimento destas ideias vale tentarmos estabelecer uma interpretação geométrica (simples) sobre as transformações. O que nos será de utilidade para um entendimento pleno desta noção de famílias de curvas invariantes.

Veja que um gerador infinitesimal de uma transformação corresponde a um campo vetorial, em um formato tal como aquele que havíamos obtido para o operador de Darboux. Lembremo-nos, como foi mencionado logo após definição (3.1.4) que por variações no parâmetro  $\varepsilon$  a *transformação de ponto* nos leva de um ponto inicial, através de um caminho, à outro ponto. Vamos considerar um caso em  $\mathbb{R}^2$ , de modo que seja possível ilustrar a ideia através das imagens nas figuras (4) e (5).

Figura 4 - Órbitas de um grupo de transformações em  $\mathbb{R}^2$ .      Figura 5 - O campo vetorial  $\mathcal{X}$  é tangente às órbitas do grupo.



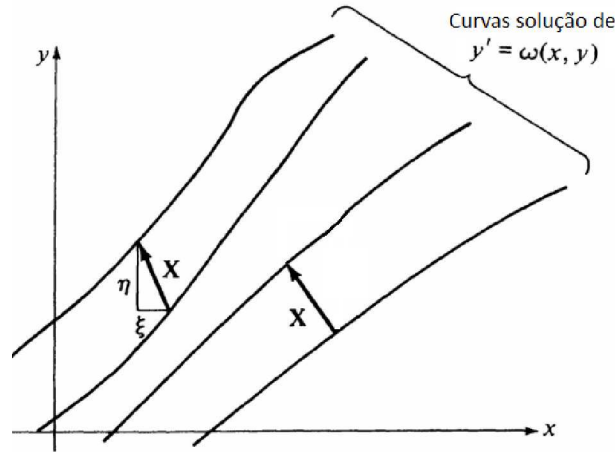
Legenda: Representação pictórica da ação de um grupo de transformações a um parâmetro contínuo  $\varepsilon$  em  $\mathbb{R}^2$ . Efeito do que denominamos *transformação de ponto*.

Fonte: Stephani, 1989, p. 6 e 7.

Para a situação que apresentamos, a respeito de um mapeamento entre soluções

de uma equação diferencial, podemos também nos restringir ao caso mais simples para efeitos de visualização. Consideremos uma 1EDO  $y' = \phi(x, y)$ , a solução geral na forma implícita  $I(x, y) = C$ , como sabemos representa uma família de curvas em  $\mathbb{R}^2$ , um grupo de transformações de simetria de ponto para a referida equação diferencial deve, por definição, mapear pontos de uma curva solução em pontos de outra curva solução na mesma família, diremos então que  $I(x, y) = C$  é uma família de curvas invariante pela ação do grupo.

Figura 6 - Efeitos de transformação de simetria sobre uma família de curvas-solução de uma 1EDO.



Legenda: Mapeamento, pelo fluxo do campo  $\mathcal{X}$ , de pontos em uma dada solução particular de  $y' = \omega(x, y)$  à outra solução particular da mesma equação, definidas por uma expressão do tipo  $I(x, y) = C$ .

Fonte: Stephani, 1989, p. 28.

**Definição 3.1.9.** A família de curvas  $I(\mathbf{x}) = \text{const} = C$  é invariante frente ação de um grupo de transformações se, e somente se,  $I(\mathbf{x}^*) = \text{const} = C^*$  quando  $I(\mathbf{x}) = C$ , sendo  $C^* = C^*(C; \varepsilon) \neq C$ .

**Teorema 3.1.3.** Uma família de superfícies (ou curvas)  $I(\mathbf{x}) = C$  será invariante frente as transformações de um grupo de Lie se, e somente se,

$$\mathcal{X}I = F(I), \quad (82)$$

sendo  $F(I)$  função infinitamente diferenciável (Bluman; Kumei, 1989), (Cohen, 1911).

**Demonstração:** Se  $I(\mathbf{x}) = C$  é invariante, então

$$I(\mathbf{x}^*) = e^{\varepsilon \mathcal{X}} I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathcal{X}I(\mathbf{x}) + \dots = C^* = C^*(C; \varepsilon)$$

quando  $I(\mathbf{x}) = C$ . Logo, devemos ter que  $\mathcal{X}I = F(I)$  ( $\mathcal{X}^2I = \mathcal{X}F(I) = F'(I)\mathcal{X}I = F'(I)F(I), \dots, \mathcal{X}^nI = f_n(I)$ , com  $n = 1, 2, \dots$ ), pois assim, reescrevemos

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}^*) &= e^{\varepsilon\mathcal{X}}I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathcal{X}I(\mathbf{x}) + \dots = I(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n f_n(I(\mathbf{x}))}{n!} = \\ &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n f_n(C)}{n!} = C^*(C; \varepsilon) = C^*(const). \quad \square \end{aligned}$$

Podemos, sem perda de generalidade, impôr  $\mathcal{X}I = F(I) = 1$ , pois se  $I(\mathbf{x}) = C$  é uma família de curvas ou superfícies invariante então  $H(I(\mathbf{x})) = H(C)$  também deve ser, para qualquer que seja a função  $H$ . Portanto,  $\mathcal{X}H(I(\mathbf{x})) = H'(I)\mathcal{X}I = H'(I)F(I)$ , de modo que, escolhendo-se  $H'(I) = 1/F(I)$ , temos  $\mathcal{X}H(I) \equiv 1$  (Duarte, 1997), (Bluman; Kumei, 1989). Para esta última observação desconsideramos, obviamente, o caso  $F(I) = 0$  pois a este corresponderia uma família de curvas (ou superfícies)  $I(\mathbf{x}) = 0$  na qual cada componente é um invariante (em conformidade com o que se expressa através da definição 3.1.8 para curvas invariantes) e portanto  $I(\mathbf{x}) = 0$  constitui também, trivialmente, família invariante (Bluman; Kumei, 1989; Cohen, 1911).

Sabemos, dos conceitos iniciais que apresentamos neste trabalho, que o conjunto de soluções de uma equação diferencial, ou mesmo de um sistema de equações diferenciais, representa uma família de curvas parametrizadas. Consideremos, novamente, o caso de famílias de curvas no plano  $I(x, y) = C$ , solução geral de uma 1EDO, veja que, a condição  $\mathcal{X}I = 1$ , que discutimos no parágrafo anterior, corresponde, segundo resultado do teorema 3.1.2, aos casos para os quais uma transformação a um parâmetro gera  $I(x^*, y^*) = I(x, y) + \varepsilon = C + \varepsilon$ . A condição representa então o mapeamento de pontos em uma solução da equação à pontos de outra solução infinitesimalmente próxima, ao modo como é ilustrado na figura (6).

**Exemplo 3.1.4.** Consideremos o grupo de transformações de escala no plano:

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\varepsilon}x = x + \varepsilon x + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ y^* &= e^{2\varepsilon}y = y + 2\varepsilon y + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{83}$$

O gerador infinitesimal nestas coordenadas é

$$\mathcal{X} = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Uma família de curvas  $\omega(x, y) = C$  invariante sob ação das transformações (83) deve

então satisfazer  $\mathcal{K}\omega = 1$ .

$$\therefore x \frac{\partial \omega}{\partial x} + 2y \frac{\partial \omega}{\partial y} = 1.$$

Pode-se verificar que

$$\omega(x, y) = \ln(x) + f\left(\frac{y}{x^2}\right) = C \quad (84)$$

é solução geral<sup>31</sup> da EDP. Diferenciando esta última equação temos

$$d\omega(x, y) = \frac{1}{x}dx + f'\left(\frac{y}{x^2}\right) \left( \frac{(-2)y}{x^3}dx + \frac{1}{x^2}dy \right) = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{x} - f'\left(\frac{y}{x^2}\right) \frac{2y}{x^3} + \frac{f'\left(\frac{y}{x^2}\right)}{x^2} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Então, resolvendo para  $y'$ , ficamos com

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} - \frac{x}{f'\left(\frac{y}{x^2}\right)}. \quad (85)$$

Soluções para equações da família (218) são, claro, da família de curvas  $\ln(x) + f(y/x^2) = C$ . Portanto, conhecer um grupo de transformações sob as quais as famílias de curvas solução de um dado grupo de EDO's como (218) se mantêm invariantes nos permite resolver qualquer equação no mesmo formato (Duarte, 1997).

Neste ponto, é interessante estabelecermos uma relação importante com algumas das discussões já apresentadas nos capítulos precedentes, a respeito das 1EDO's exatas. Vamos retomar brevemente algumas condições que determinamos para uma solução geral  $I(x, y) = C$  e fator integrante  $R(x, y)$ . Consideremos a equação diferencial

$$M(x, y)dx - N(x, y)dy = 0.$$

---

<sup>31</sup> É possível obter este resultado fazendo uso do método de equações características para EDP's de primeira ordem. Maior esclarecimento a respeito pode ser encontrado em John (1981).

Para a solução geral da 1EDO, representada pela família de curvas  $I(x, y) = C$  vimos que

$$D[I(x, y)] = N(x, y) \frac{\partial I}{\partial x} + M(x, y) \frac{\partial I}{\partial y} = 0.$$

Ora, se essa mesma família de curvas é invariante frente as transformações de um determinado grupo de Lie com gerador  $\mathcal{X} \equiv \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$ , sabemos que

$$\mathcal{X}I(x, y) = \xi(x, y) \frac{\partial I}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial I}{\partial y} = 1.$$

Utilizando-nos destas duas condições estabelecemos as seguintes relações:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{M}{M\xi - N\eta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{-N}{M\xi - N\eta}. \quad (86)$$

Lembre-mo-nos ainda do que fora estabelecido neste contexto através das equações (20), i.e.,  $I_x = M$  e  $I_y = -N$ . Sabemos que, buscar um fator integrante para uma 1EDO não exata a fim de integrá-la analiticamente corresponde a avaliar condições para que tenhamos  $R(x, y)M(x, y)dx - R(x, y)N(x, y)dy = 0$  como uma 1EDO exata, assim sendo, fica determinado que  $I_x = RM$  e  $I_y = -RN$ , resultados estes<sup>32</sup> que, ao serem combinados com as expressões da equação (86), nos permitem estabelecer que um fator integrante possa ser escrito em termos dos infinitésimos do gerador de um determinado grupo, o qual mantém invariante a família de curvas soluções da 1EDO, ou seja, tomamos:

$$R(x, y) = \frac{1}{M\xi - N\eta}. \quad (87)$$

O resultado compõe o enunciado de um teorema de Lie publicado no *Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania* em novembro de 1874 (Cohen, 1911). Sugerindo que, de posse de uma simetria da 1EDO podemos, definitivamente, construir um fator integrante para a mesma e integrá-la por quadratura.

---

<sup>32</sup> Naturalmente, pois levando-se em consideração o conteúdo enunciado na definição 1.1.2 para uma 1EDO na forma  $RM - RNy' = 0$  e, por imposição do que se expressa através da equação (13), a função  $I(x, y)$  deve ser tal que  $\partial_x I = RM$  e  $\partial_y I = -RN$ .

### 3.1.3 Transformações estendidas e simetrias

Apesar de toda a discussão que já apresentamos no âmbito da teoria de Lie, o procedimento através do qual se determina, efetivamente, uma transformação de simetria para uma EDO ainda não foi evidenciado. Dito isso, é necessário apontar ainda algumas considerações relevantes para o que segue dentro do escopo do método de simetrias para EDO's, em referência às chamadas *transformações estendidas*.

Já foi dito, ao final da subseção anterior que uma transformação de ponto é uma *transformação de simetria* ou simplesmente uma *simetria* de uma equação diferencial ordinária se a imagem obtida pela transformação de uma solução corresponder também a uma solução da ED. Isso significa, no caso de 1EDO's, por exemplo, que se  $y = y(x)$  é uma solução particular de

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$$

e, se esta admite uma transformação de simetria então obtemos, pela transformação, a expressão que define  $y^* = y^*(x^*)$ , a qual deve também ser solução particular de

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \omega(x^*, y^*). \quad (88)$$

Em termos do operador ( $D_x$ ) de derivada total na variável independente ( $x$ ) sobre as soluções da ED

$$D_x = \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial}{\partial y},$$

podemos reescrever a equação (88) na forma:

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{D_x y^*}{D_x x^*} = \frac{\partial_x y^* + y' \partial_y y^*}{\partial_x x^* + y' \partial_y x^*} = \omega(x^*, y^*).$$

Um determinado grupo de transformações será *grupo de simetria* da equação diferencial se a forma da mesma, quando em termos de coordenadas  $x^*$ ,  $y^*$  não se altera, nesse caso, podemos escrever que

$$\omega(x^*, y^*) = \frac{\partial_x y^* + \omega(x, y) \partial_y y^*}{\partial_x x^* + \omega(x, y) \partial_y x^*}. \quad (89)$$

Se vale esta última expressão, diremos então que a equação diferencial é *invariante* pela transformação (Pinto; Silva; Santos, 2019). Consideremos, inicialmente, o seguinte exemplo:

**Exemplo 3.1.5.** Uma EDO de Riccati na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3} \quad (90)$$

é invariante pelo grupo de transformações

$$\begin{cases} x^* = \frac{x}{1-\varepsilon x} \\ y^* = \frac{y}{1-\varepsilon x}. \end{cases} \quad (91)$$

Para verificar esta afirmação vamos utilizar da expressão (89) e, para tal, devemos primeiro tomar as derivadas

$$\partial_x x^* = \frac{1}{(1-\varepsilon x)^2}, \quad \partial_y x^* = 0, \quad \partial_x y^* = \frac{\varepsilon y}{(1-\varepsilon x)^2}, \quad \partial_y y^* = \frac{1}{1-\varepsilon x}$$

e substituí-las no lado direito da igualdade (89). Assim, obtemos

$$\frac{\frac{\varepsilon y}{(1-\varepsilon x)^2} + \frac{1}{1-\varepsilon x} \left( \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3} \right)}{\frac{1}{(1-\varepsilon x)^2}} = \frac{y}{x} + \frac{1-\varepsilon x}{x} + \frac{y^2}{x^3}(1-\varepsilon x).$$

O lado esquerdo se expressa como

$$\omega(x^*, y^*) = \frac{y^*+1}{x^*} + \frac{y^{*2}}{x^{*3}} = \frac{y}{x} + \frac{1-\varepsilon x}{x} + \frac{y^2}{x^3}(1-\varepsilon x),$$

confirmando a identidade, assim, a ED (90) é invariante por transformações (91).

Porém, ainda não mostramos como as expressões (91) foram obtidas. Buscar simetria de equações diferenciais diretamente por meio do que está expresso sob condição na equação (89) não é tão simples por conta da não-linearidade da expressão, essa é a razão pela qual se utiliza da expansão em série de Taylor, veremos que, em termos de transformações infinitesimais, podemos expressar a condição de simetria para equações diferenciais ordinárias como equações diferenciais parciais lineares nos infinitésimos.

Notemos, do nosso exemplo, que um grupo de transformações, tal como expressa equação (91) é definido para pontos  $(x, y)$ , enquanto que a EDO trabalhada, equação (90)

está definida em um espaço  $(x, y, y')$ , podemos então nos perguntar sobre as implicações de transformações em  $(x, y)$  na variável  $y'$ .

Reconsideremos as transformações infinitesimais em formato (72):

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left( \frac{\partial^k \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon=0} \right),$$

com  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$ , portanto  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \varepsilon \boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  e as componentes  $\xi_i(\mathbf{x})$  são então definidas por  $\frac{\partial x_i^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$ . Para uma transformação no plano, em coordenadas  $x$  e  $y$ , é claro que

$$x^* = x + \varepsilon \xi_1(x, y) + \dots,$$

$$y^* = y + \varepsilon \xi_2(x, y) + \dots \quad (92)$$

Com isso, consideremos, novamente

$$y'^* = \frac{dy^*}{dx^*} = \frac{y' + \varepsilon D_x \xi_2 + \dots}{1 + \varepsilon D_x \xi_1 + \dots}, \text{ com } D_x = \frac{d}{dx}.$$

Vamos usar o fato de que

$$\frac{1}{1 - \omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n = 1 + \omega + \omega^2 + \dots, \quad |\omega| < 1,$$

com  $\omega = -\varepsilon D_x \xi_1 - \dots$ , reescrevemos  $y'^*$  como

$$y'^* = (y' + \varepsilon D_x \xi_2 + \dots)(1 - \varepsilon D_x \xi_1 - \dots) = y' - y' \varepsilon D_x \xi_1 + \varepsilon D_x \xi_2 + \dots$$

$$\therefore y'^* = y' + \varepsilon \left( \frac{d\xi_2}{dx} - y' \frac{d\xi_1}{dx} \right) + \dots \quad (93)$$

Por procedimento semelhante, podemos utilizar da equação (93) e, considerando  $y''^* = \frac{dy'^*}{dx^*}$ , escrevemos

$$y''^* = y'' + \varepsilon \left( \frac{d^2 \xi_2}{dx^2} - y' \frac{d^2 \xi_1}{dx^2} - 2y'' \frac{d\xi_1}{dx} \right) + \dots \quad (94)$$

Denominando  $\eta^{(1)} = D_x \xi_2 - y' D_x \xi_1$  e  $\eta^{(2)} = D_x^2 \xi_2 - y' D_x^2 \xi_1 - 2y'' D_x \xi_1$ , os termos entre parênteses nas equações (93) e (94) respectivamente, verifica-se a possibilidade de estabelecermos a seguinte relação de recorrência:

$$\eta^{(i)} = \frac{d\eta^{(i-1)}}{dx} - y^{(i)} \frac{d\xi_1}{dx}, \quad (95)$$

a qual se verifica, de fato, para uma generalização em termos de coordenadas  $y'''^*, y^{(4)*}$  e as demais. Evidentemente, os elementos  $\eta^{(i)}$  em (95) são polinômios nas variáveis  $y', y'', \dots, y^{(i)}$ , lineares em  $y^{(i)}$  e os coeficientes são também lineares nas funções  $\xi_1(x, y), \xi_2(x, y)$  e em suas respectivas derivadas até  $i$ -ésima ordem. Os  $\eta^{(i)}$  são chamados **infinitésimos estendidos**<sup>33</sup>. Em analogia aos infinitésimos de uma transformação, estabelecemos, por definição, que  $\eta^{(1)} = \left( \frac{\partial y'^*}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0}, \dots, \eta^{(i)} = \left( \frac{\partial y^{(n)*}}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0}$ , assim

$$x^* = x + \varepsilon \xi_1(x, y) + \dots,$$

$$y^* = y + \varepsilon \xi_2(x, y) + \dots,$$

$$y'^* = y' + \varepsilon \eta^{(1)}(x, y, y') + \dots,$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)*} = y^{(n)} + \varepsilon \eta^{(n)}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) + \dots$$

Concluindo, se o gerador infinitesimal de uma transformação de ponto em variáveis  $x$  e  $y$ , equação (92), é dado por

$$\mathcal{X} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y},$$

então, sua extensão à  $n$ -ésima derivada  $y^{(n)}$  será o operador definido como

---

<sup>33</sup> Vale reforçar que o índice em  $\eta^{(i)}$  não corresponde a uma  $i$ -ésima derivada, diferentemente de  $y^{(i)}$ , aqui sim temos  $y^{(3)} = y'''$ , por exemplo.

$$\mathcal{X}^{(n)} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + \eta^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}}. \quad (96)$$

Consideremos uma EDO de ordem  $n$  genérica na forma  $H(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ . Vamos mostrar que um grupo de simetrias de Lie da EDO será um grupo de transformações tal que

$$\mathcal{X}^{(n)} H(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (97)$$

quando  $H(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , o operador  $\mathcal{X}^{(n)}$  corresponde à  $n$ -ésima extensão do gerador infinitesimal do grupo.

Considere uma transformação de ponto  $x^* = x^*(x, y; \varepsilon)$ ,  $y^* = y^*(x, y; \varepsilon)$ . Esta, como vimos, corresponde a uma transformação de simetria se a mesma mantém a equação invariante, ou seja, se vale

$$H(x^*, y^*, y'^*, \dots, y^{(n)*}) = 0. \quad (98)$$

Equivalentemente, tem-se que a imagem  $y^*(x^*)$  de uma solução  $y(x)$  pela transformação é também solução da equação diferencial.

Como a condição (98) deve valer para quaisquer valores de  $\varepsilon$  (Stephani, 1989), obtemos, por diferenciação, que

$$0 = \left. \frac{\partial H(x^*, y^*, \dots, y^{(n)*})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

tendo em vista que a equação deva se manter invariante frente a uma transformação infinitesimal. O resultado, portanto, induz a

$$\left( \frac{\partial H}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial y'^*} \frac{\partial y'^*}{\partial \varepsilon} \dots + \frac{\partial H}{\partial y^{(n)*}} \frac{\partial y^{(n)*}}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

ou ainda,

$$\xi_1 \frac{\partial H}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial H}{\partial y} + \eta^{(1)} \frac{\partial H}{\partial y'} + \dots + \eta^{(n)} \frac{\partial H}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

uma vez que  $\left( \frac{\partial H}{\partial x^*} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)$ , bem como  $\left( \frac{\partial H}{\partial y'^*} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \left( \frac{\partial H}{\partial y'} \right)$ , por fim, obtém-se exa-

tamente que  $\mathcal{X}^{(n)}H = 0$ , o que justifica a equação (97). Este último procedimento é exatamente o mesmo que já havíamos desenvolvido para obtenção da equação (77).

Veja que, por uma perspectiva ligeiramente distinta, podemos também dizer que uma  $n$ EDO  $H(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  poder ser interpretada como uma superfície em um espaço  $n + 2$ -dimensional, dessa forma, em analogia à observação 3.1.2 estabelecemos formalmente a condição para que uma EDO admita grupo de simetria.

**Teorema 3.1.4.** Seja

$$\mathcal{X} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

gerador infinitesimal do grupo de transformações a um parâmetro no plano

$$\Gamma_\varepsilon : (x, y) \mapsto (x^*, y^*) \quad (\text{apenas outra forma de representarmos } \mathbf{x}^* = \mathbb{X}(\mathbf{x}; \varepsilon)). \quad (99)$$

Consideremos portanto

$$\mathcal{X}^{(n)} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + \eta^{(n)}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \quad (100)$$

o gerador infinitesimal de  $n$ -ésima extensão do grupo. Assim, as transformações (99) mantém a EDO (??) invariante se

$$\mathcal{X}^{(n)}H(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (101)$$

quando  $H(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , exatamente como é proposto através da observação 3.1.2. Agora, se  $H(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  puder ser escrito como  $y^{(n)} - \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$ , temos

$$\mathcal{X}^{(n)}(y^{(n)} - \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})) = 0 \quad (\text{mod } y^{(n)} = \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})). \quad (102)$$

Percebe-se nitidamente que à condição (101), ou (102), corresponde uma EDP, o caso, por exemplo, de uma 1EDO  $y' = \phi(x, y)$ , para o qual deve se considerar que

$$\mathcal{X}^{(1)}(y' - \phi(x, y)) = 0, \quad (\text{mod } y' = \phi), \quad (103)$$

se “reduz” a

$$\xi\phi_x + \phi\xi_x + \phi^2\xi_y = \eta_x + \phi\eta_y - \eta\phi_y, \quad (104)$$

em que os sub-índices denotam derivadas parciais. Assim, o primeiro passo seria, portanto, tentar encontrar expressões para os infinitésimos resolvendo a EDP em questão.

Não é difícil verificar o resultado de (104) por meio da equação (103), veja que, tomando um gerador de transformações nas variáveis  $x$  e  $y$  em sua forma genérica  $\mathcal{X} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$  e determinando seu correspondente de primeira extensão  $\mathcal{X}^{(1)}$

$$\mathcal{X}^{(1)} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \left( \frac{d\eta(x, y)}{dx} - y'\frac{d\xi(x, y)}{dx} \right) \frac{\partial}{\partial y'},$$

onde o termo que acompanha a componente  $\partial_{y'}$  do operador é a expressão para o infinitésimo estendido  $\eta^{(1)}(x, y, y')$ , definida segundo expressão (95).

Operando explicitamente com as derivadas totais  $D_x$  em  $\eta(x, y)$  e  $\xi(x, y)$ , reescrevemos  $\eta^{(1)}(x, y, y')$  como

$$\eta^{(1)}(x, y, y') = \frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\frac{\partial\eta}{\partial y} - y' \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} \right) = \frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\frac{\partial\eta}{\partial y} - y'\frac{\partial\xi}{\partial x} - y'^2\frac{\partial\xi}{\partial y},$$

então

$$\mathcal{X}^{(1)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \left( \frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\frac{\partial\eta}{\partial y} - y'\frac{\partial\xi}{\partial x} - y'^2\frac{\partial\xi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Segue portanto de (103) que

$$-\xi\frac{\partial\phi}{\partial x} - \eta\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \phi\frac{\partial\eta}{\partial y} - \phi\frac{\partial\xi}{\partial x} - \phi^2\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0.$$

Correspondendo exatamente à equação (104) após reajustes simples. Expressões análogas podem ser também obtidas para equações diferenciais de maior ordem, o que envolve, claro, maior trabalho de desenvolvimento algébrico e maior número de termos.

Perceba que, como havíamos comentado, temos agora uma expressão linear nos infinitésimos do gerador, porém, é claro que somos induzidos a pensar que nosso problema se complica neste contexto, afinal, estamos propondo a troca do problema de se resolver uma 1EDO pelo problema de encontrar funções  $\xi(x, y)$  e  $\eta(x, y)$  através de uma EDP. Contudo, procura-se tão somente uma solução particular da EDP, tão simples quanto possível. Vale mencionar ainda que, por vezes, determinar uma simetria de uma EDO

pode ser a única coisa possível de se fazer.

Casos de simetrias de ponto podem ser trabalhados com uma técnica sugerida pelo próprio Lie, que envolve reescrever expressões como (104) na forma de um *sistema sobredeterminado de EDP's*, mas não iremos nos estender por estas ideias, por vezes, as equações que trabalhamos apresentam *simetrias dinâmicas* (quando os infinitésimos  $\xi$  e  $\eta$  possuem também dependência de derivadas  $y^{(i)}$ ) ou mesmo *simetrias não-locais*, de modo que não é possível lançar mão deste subterfúgio e a teoria não fornece um caminho alternativo para lidar com estes casos.

### 3.1.4 Coordenadas canônicas

É bastante comum, no contexto das equações diferenciais, a procura por conjuntos de variáveis que nos permitam expressar uma dada equação diferencial de maneira mais simples. O método de simetrias de Lie também nos permite tentar encontrar coordenadas que possam, eventualmente, simplificar o problema, a ideia neste caso é expressar transformações quaisquer na forma de um grupo de translações, assim, o gerador fica expresso em sua *forma normal*, a técnica permite reduzir 1EDO's à *quadraturas*, ou seja,  $y' = \phi(x)$  ou  $y' = \phi(y)$ . Vejamos, de antemão, um exemplo, que nos servirá de motivação para o estudo destes conceitos.

**Exemplo 3.1.6.** Seja a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - y - x}{xy^2 + x^3 + y - x}. \quad (105)$$

Um conjunto de curvas solução da referida equação diferencial projetado no plano  $xy$  se dá através da figura:

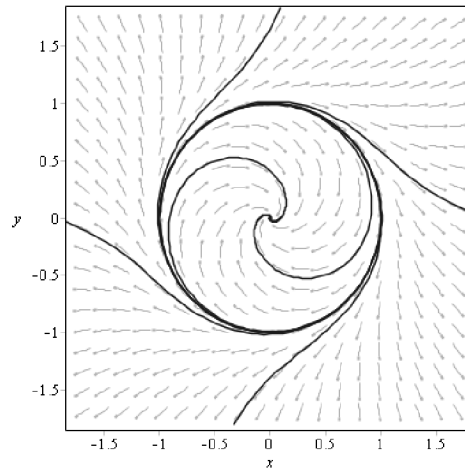
A fim de verificar que nossa equação diferencial é, de fato, invariante por transformações de rotação iremos, primeiramente, propôr uma troca de variáveis. Consideremos as coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  definidas de maneira usual, i.e.,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , assim, reescrevemos o lado direito da equação como

$$\frac{(r \sin \theta)^3 + (r \cos \theta)^2 r \sin \theta - r \cos \theta - r \sin \theta}{(r \cos \theta)^3 + r \cos \theta (r \sin \theta)^2 - r \cos \theta + r \sin \theta} = \frac{r^3 \sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - r(\sin \theta + \cos \theta)}{r^3 \cos \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + r(\sin \theta - \cos \theta)}.$$

Podemos ver facilmente que, por uso da identidade fundamental  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , o lado direito da nossa ED se expressa, em coordenadas polares, como

$$\frac{(r^2 - 1) \sin \theta - \cos \theta}{(r^2 - 1) \cos \theta + \sin \theta}.$$

Figura 7 - Conjunto de curvas solução da ED (105).



Legenda: A imagem claramente sugere que a equação admite simetria por transformações de rotação em torno da origem, uma vez que, soluções de (105) são levadas em outras soluções da mesma ED por transformações de rotação.

Fonte: O autor, 2024.

O lado esquerdo de (105), por sua vez, é obtido através das relações

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta.$$

Então, podemos estudar a equação (105) escrita na forma

$$\frac{\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta}{\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta} = \frac{(r^2 - 1) \sin \theta - \cos \theta}{(r^2 - 1) \cos \theta + \sin \theta}.$$

Para que a possamos reestruturar como algo do tipo  $\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta)$  basta que façamos uma “multiplicação cruzada” e rearranijemos os termos até que se obtenha

$$r(r^2 - 1)d\theta + dr = 0,$$

e portanto,

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2).$$

Veja que o lado direito da equação não depende da nova variável  $\theta$ , o que quer dizer que, nestas variáveis, a equação é invariante por transformações do tipo

$$(r^*, \theta^*) = (r, \theta + \varepsilon),$$

que correspondem, obviamente, a uma translação na variável angular, rotação em torno da origem do sistema de coordenadas (Pinto; Silva; Santos, 2019). O gerador de uma transformação como tal é expresso simplesmente como

$$\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Veja que para este caso mostramos que existem coordenadas com as quais podemos escrever a EDO como uma quadratura, coincidentemente (ou não) nestas coordenadas determinamos invariância da ED por transformações de translação em uma das variáveis. Vejamos então alguns detalhes mais gerais acerca deste tipo de desenvolvimento.

Fazendo referência ao que avaliamos no contexto dos grupos de transformações a um parâmetro, consideremos a forma explícita de um gerador de transformações  $\mathcal{X}$  de tipo

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (106)$$

Podemos então nos perguntar a que modo variam as componentes, ou os infinitésimos, deste gerador quando fazemos uma mudança de coordenadas. A proposta nos serve de um meio para que avaliemos as possibilidades de se trabalhar com geradores expressos de uma forma mais simples, na chamada *forma normal*, para tal, é necessário introduzirmos as ideias fundamentais sobre o conjunto de variáveis que nos convém chamar de *coordenadas canônicas*.

Consideremos uma mudança de coordenadas definida através de

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \dots, y_n(\mathbf{x})), \quad (107)$$

biunívoca e continuamente diferenciável. Como retomado na equação (106) convém res-

presentar um gerador infinitesimal de um grupo de transformações de Lie a um parâmetro através de, tipicamente, um operador diferencial parcial, equivalentemente, um campo vetorial, o qual, pela mudança de coordenadas (107) se dará como

$$\mathcal{Y} = \sum_{j=1}^n \eta^j(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y^j}, \text{ com } \eta^j(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}) \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \mathcal{X}y^j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (108)$$

Não é difícil constatar este fato se avaliarmos o efeito da aplicação  $\mathcal{X}F(\mathbf{y})$ , para  $F(\mathbf{y}) = F(y_1, \dots, y_n)$  diferenciável:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}F(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} F(y^1(\mathbf{x}), \dots, y^n(\mathbf{x})) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \eta^j(\mathbf{y}) \frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y^j} = \mathcal{Y}F(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (109)$$

O resultado (108) indica, claramente, uma maneira de se escrever os infinitésimos do gerador como funções das novas coordenadas, basta que se utilize de aplicações de um gerador  $\mathcal{X}$  conhecido sobre as expressões que definem o novo conjunto de coordenadas  $y^j(x^1, \dots, x^n)$ . Vamos exemplificar utilizando-nos de algumas transformações bastante simples.

**Exemplo 3.1.7.** Consideremos novamente as transformações de rotação

$$x^* = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, \quad y^* = x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon \quad (0 \leq \varepsilon < 2\pi).$$

É possível escrever estas equações no formato  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \varepsilon \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$  tomando expansões em série de Taylor das funções seno e cosseno, e então, determina-se facilmente a seguinte expressão para o gerador de transformações infinitesimais:

$$\mathcal{X} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

e, o leitor pode também verificar que propondo a mudança  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi(x, y) = \arctan(y/x)$ , se obtém os resultados  $\mathcal{X}r(x, y) = 0$  e  $\mathcal{X}\varphi(x, y) = 1$ , ou seja, nas novas coordenadas, se expressa o gerador infinitesimal através simplesmente de

$$\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Evidentemente, podemos nos questionar se sempre haverá possibilidade de encontrarmos expressões para novas variáveis  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  que nos permitam simplificar, de tal modo, o gerador infinitesimal da transformação. A resposta é afirmativa (Stephani, 1989), definitivamente, sempre haverá maneira de se efetuar uma mudança de coordenadas de modo que qualquer grupo de Lie possa ser representado como um grupo de translações em uma das variáveis<sup>34</sup> (Bluman; Kumei, 1989).

**Definição 3.1.10.** Uma mudança de coordenadas (biunívoca e continuamente diferenciável em um domínio apropriado)  $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \dots, y_n(\mathbf{x}))$  define um conjunto de **coordenadas canônicas** para um grupo de transformações de Lie a um parâmetro se, em função das novas coordenadas pudermos escrever o grupo (70) como um grupo de translações no  $\mathbb{R}^n$ , quer dizer:

$$\begin{aligned} y_i^* &= y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ y_n^* &= y_n + \varepsilon. \end{aligned} \tag{110}$$

**Teorema 3.1.5.** Em termos de um conjunto de coordenadas canônicas  $y_1, \dots, y_n$  o gerador infinitesimal de um grupo de transformações de Lie a um parâmetro se escreve como

$$\mathcal{Y} = \frac{\partial}{\partial y_n}. \tag{111}$$

Mesmo que a essa altura o leitor possa imaginar a validade deste teorema, seguimos com uma breve demonstração do mesmo. Utilizando-nos, particularmente, de dois resultados apresentados no início deste capítulo.

**Demonstração:** Temos  $\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i}$ . Dos resultados dos teoremas 3.1.1 e 3.1.2 podemos pontuar, em respeito às equações (110) que  $y_i^* = y_i(\mathbf{x}^*) = y_i(\mathbf{x})$  se, e somente se,  $\mathcal{X}y_i(\mathbf{x}) \equiv 0$ , bem como,  $y_n^* = y_n(\mathbf{x}^*) = y_n(\mathbf{x}) + \varepsilon$  se, e somente se,  $\mathcal{X}y_n(\mathbf{x}) \equiv 1$ .

$$\therefore \mathcal{Y} = \sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_n},$$

---

<sup>34</sup> A um grupo de translações no plano, por exemplo, associamos transformações do tipo  $x^* = x + \varepsilon$ ,  $y^* = y$ , é portanto um grupo cujo gerador se expressa na forma  $\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial x}$ . A razão pela qual se diz que sempre haverá um conjunto de novas coordenadas que nos permita associar a qualquer gerador um operador de tal tipo decorre de um fato proveniente da teoria de equações diferenciais parciais, iremos apenas mencioná-lo dentro do contexto que aqui segue, não nos cabe, dentro do que se propõe apresentar neste trabalho, detalhar tal resultado.

pois como vimos, pela equação (108),  $\eta_i(\mathbf{y}) = \mathcal{X}y_i = 0$ , com  $i = 1, 2, \dots, n-1$  e  $\eta_n(\mathbf{y}) = \mathcal{X}y_n = 1$   $\square$ .

Dizemos que a representação (111) corresponde à **forma normal**<sup>35</sup> de  $\mathcal{X}$ .

**Exemplo 3.1.8.** Tomemos o grupo de transformações de escala do exemplo 3.1.4, equações (83). Vimos que, em coordenadas canônicas  $r(x, y)$  e  $s(x, y)$  as transformações do grupo, devem, necessariamente, ser dadas por

$$r^* = r \text{ e } s^* = s + \varepsilon \quad (112)$$

Porém, pelos resultados dos teoremas 3.1.1 e 3.1.2, devemos ter

$$\mathcal{X}r = 0 \implies x \frac{\partial r}{\partial x} + 2y \frac{\partial r}{\partial y} = 0, \quad (113)$$

bem como

$$\mathcal{X}s = 1 \implies x \frac{\partial s}{\partial x} + 2y \frac{\partial s}{\partial y} = 1. \quad (114)$$

Para a EDP (113) as equações características se reduzem a

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x},$$

com solução  $y = Cx^2$ . A solução geral  $s(x, y)$ , portanto, é da forma  $s(x, y) = f(C)$ , i.e.,  $s(x, y) = f\left(\frac{y}{x^2}\right)$ . O segundo caso, equação (114), possui solução particular  $\ln(x)$ . Podemos, sem perda de generalidade, estabelecer o conjunto de coordenadas canônicas da forma

$$(r, s) = \left(\frac{y}{x^2}, \ln(x)\right).$$

Utilizando-nos ainda do mesmo exemplo, podemos efetivamente perceber o funcionamento do método de Lie. Sabemos, pelo resultado na equação (84) ao final do exemplo 3.1.4 que a família de curvas

$$\omega(x, y) = \ln(x) + f\left(\frac{y}{x^2}\right) = C \quad (115)$$

é invariante sob transformações de escala da forma (83). Diferenciamos esta expressão e

---

<sup>35</sup> O argumento que fundamenta a existência de um conjunto de coordenadas canônicas para que se possa expressar todo e qualquer gerador na sua forma normal é que sempre há solução não trivial  $\{y^n(x^j), y^i(x^j)\}$  para um sistema do tipo  $\mathcal{X}y^n = \sum_{j=1}^n b^j \frac{\partial y^n}{\partial x^j} = 1, \mathcal{X}y^i = \sum_{j=1}^n b^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = 0$  com  $i = 1, \dots, n-1$ . Como já mencionamos em nota de rodapé da página anterior, não iremos nos propôr a demonstrar este resultado.

verificamos também que a equação diferencial de primeira ordem mais geral que admite as transformações (83) como transformação de simetria é dada por

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} - \frac{x}{f'\left(\frac{y}{x^2}\right)}. \quad (116)$$

Que corresponde à equação (218). Veja que a família de curvas em (115) passa a ser representada como

$$s + f(r) = C$$

em termos das coordenadas canônicas  $(r, s)$ . Expressão que, ao ser diferenciada, por processo similar ao havíamos feito para obter (218), gera a quadratura

$$\frac{ds}{dr} = -f'(r).$$

Que pode então ser resolvida por um processo de integração simples,  $s(r) = -\int f'(r)dr = -f(r) + C$ . Obviamente que, utilizando-se da transformação inversa sobre a solução  $s(r)$ , obtemos  $\ln(x) + f(y/x^2) = C$ , as famílias de curvas soluções da 1EDO (116).

Vimos, até aqui, o mais fundamental sobre a aplicação do método de simetrias de Lie em equações diferenciais para que possamos agora, definitivamente, apreciar o desenvolvimento do método da função-S, que se mostra muito eficiente tanto para casos nos quais a abordagem de Darboux apresenta complicações, por efeito de polinômios de Darboux com grau elevado na composição de um fator integrante, quanto em casos nos quais o método de simetrias de Lie enfrenta problemas devido a presença de simetrias não locais apenas, ou de simetrias dinâmicas.

## 4 O MÉTODO DA FUNÇÃO-S

Neste capítulo pretende-se retomar em maiores detalhes a discussão apresentada ao final do capítulo introdutório. Iremos avaliar consequências formais acerca da inserção da função auxiliar  $S(x, y, y')$ , que havíamos proposto ao sugerir uma busca por fator integrante às 2EDO's racionais. O método da função- $S$  é constituído de um procedimento algébrico, que deriva de uma abordagem Darbouxiana, porém, apresenta traços semelhantes aos que se utiliza em desenvolvimentos como os que envolvem simetrias não locais e  $\lambda$ -simetrias<sup>36</sup>. Vamos então retomar alguns resultados já discutidos para trazer à memória os aspectos de maior importância para os desenvolvimentos que seguem.

### 4.1 Definições e resultados básicos

Em uma referência às construções no contexto de sistemas diferenciais vale mencionar a correspondência entre sistemas polinomiais autônomos em  $n + 1$  variáveis com  $n$ EDO's racionais. A esse respeito, já havíamos estabelecido a equivalência entre as equações (31) e (35) por intermédio de uma função  $I(x, y)$  não constante sobre conjuntos abertos, porém constante ao longo de cada solução de (31), uma integral primeira. Podemos lançar mão do mesmo artifício para determinar o sistema diferencial polinomial autônomo em três variáveis ao qual se pode associar uma 2EDO racional.

Considere a 2EDO racional

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{M(x, y, y')}{N(x, y, y')} = \phi(x, y, y'), \quad (117)$$

sendo  $M(x, y, y')$  e  $N(x, y, y')$  polinômios coprimos. Iremos considerar  $y' = z$ , em referência ao que foi discutido ao final do primeiro capítulo, equação (7), assim, nos expressamos como

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \phi(x, y, z), \end{cases} \quad \left( y' = \frac{dy}{dx}, z' = \frac{dz}{dx} \right). \quad (118)$$

---

<sup>36</sup> Para um resumo das abordagens que utilizam simetrias não locais veja Abraham-Shrauner, Govinder e Leach (1995), Gandarias e Bruzón (2011) e Abraham-Shrauner (1996). Trabalhos que abordam noções de  $\lambda$ -simetria são Muriel e Romero (2014) e Muriel e Romero (2003)

À ela associamos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = N(x, y, z) \\ \dot{y} = zN(x, y, z) \\ \dot{z} = M(x, y, z), \end{cases} \quad \left( \dot{u} = \frac{du}{dt} \right), \quad (119)$$

ou ainda,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , sendo  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  um vetor de posição em um espaço tridimensional e  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  um campo vetorial cujas componentes são definidas pelas expressões de  $\dot{x}, \dot{y}$  e  $\dot{z}$ , ou seja,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (N, zN, M)$ .

À maneira como fizemos para relacionar as equações (31) e (35), podemos também fazer para elucidar a correspondência entre (117) e (119). Devemos nos recordar que uma solução do sistema é uma curva parametrizada  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  definida em um intervalo da reta ( $t$  variável real), de modo que, para cada valor de  $t$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

devemos lembrar também que uma função  $I(\mathbf{x}) = I(x, y, z)$ , integral primeira, deve satisfazer a condição  $(I \circ \mathbf{x})'(t) = 0$ , i.e., constante sobre as curvas-solução de (119). Tal condição se traduz na seguinte expressão:

$$\frac{dI}{dt} = N\partial_x I + zN\partial_y I + M\partial_z I = 0. \quad (120)$$

As equações características da EDP (120) são expressas através de

$$\frac{dx}{N(x, y, z)} = \frac{dy}{zN(x, y, z)} = \frac{dz}{M(x, y, z)},$$

o que nos permite recuperar a 2EDO representada através de (118), i.e.,

$$z = \frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{M(x, y, z)}{N(x, y, z)}. \quad (121)$$

Iremos também, neste cenário, referir-nos ao operador de Darboux como  $D \equiv ND_x$ , sendo

$$D_x = \frac{d}{dx} \Big|_{y''=\phi(x,y,y')} = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + \phi(x,y,y') \frac{\partial}{\partial y'},$$

logo  $D \equiv N\partial_x + zN\partial_y + M\partial_z$ . Com efeito, reescrevemos (120) como  $D(I) = 0$ .

Para o que nos interessa no momento, devemos retomar o contexto no qual foi introduzida a função  $S$ , correspondendo à parte exatamente ao final do primeiro capítulo deste texto, onde, numa proposta de estabelecermos considerações algébricas suficientes para um fator multiplicativo que pudesse tornar exata uma 2EDO racional não exata, mencionamos a possibilidade de recriar ou estender os resultados de Prelle e Singer para 2EDO's racionais. Em referência específica ao trecho no qual apresentamos discussão sobre equações (28) e (29). Neste ponto, se fará então necessário reavaliarmos a ideia de fator integrante, como veremos mais adiante.

Primeiramente, sob a condição à qual está sujeita (por definição) uma integral primeira  $I(x, y, z)$ , sabe-se que  $dI = I_x dx + I_y dy + I_z dz = 0$  sobre as curvas-solução da 2EDO (aqui os sub-índices denotam derivação parcial, i.e.,  $I_x = \partial_x I$ ), a isso denomina-se *1-forma nula*<sup>37</sup>. Outras duas 1-formas nulas sobre as soluções de (121) são, naturalmente:

$$\alpha = \phi(x, y, z)dx - dz = 0 \quad \text{e} \quad \beta = zdx - dy = 0. \quad (122)$$

Se  $I(x, y, z)$  é uma integral primeira da 2EDO então a 1-forma  $dI$  é um vetor no subespaço gerado por  $\alpha$  e  $\beta$  (Duarte; Mota, 2009), podendo portanto ser expressa como combinação linear destas (Avellar *et al.*, 2019), i.e.,

$$dI = r_1(x, y, z)\alpha + r_2(x, y, z)\beta. \quad (123)$$

Isso porque, se considerarmos um conjunto  $\{\alpha, \beta, \mu\}$  como base do espaço de 1-formas nas variáveis  $x, y, z$ , de tal modo que, naturalmente,  $\mu$  não pertença ao subespaço gerado por  $\alpha$  e  $\beta$ , e assim propusermos que  $dI = r_1\alpha + r_2\beta + r_3\mu$ , sendo  $r_i$  funções em  $(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , obtemos, através de  $dI = 0$ , bem como  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  sobre as soluções da 2EDO, que  $r_3\mu = 0$ . Uma vez que  $\mu$  não pertence ao subespaço gerador por  $\alpha$  e  $\beta$ , e portanto, não nulo sobre as soluções da 2EDO, devemos ter, necessariamente,  $r_3(x, y, z) = 0$  (Duarte; Mota, 2009).

Utilizando portanto de (122) e (123) estabelecemos a relação

$$I_x dx + I_y dy + I_z dz = r_1(\phi dx - dz) + r_2(z dx - dy), \quad (124)$$

---

<sup>37</sup> Para uma definição formal das formas diferenciais é necessário tomar considerações geométricas. Veja apêndice B para maiores detalhes a respeito.

de onde se extrai, por comparação direta que

$$\begin{aligned} I_x &= r_1\phi + r_2z, \\ I_y &= -r_2, \\ I_z &= -r_1. \end{aligned} \tag{125}$$

É possível, caso conheçamos funções  $r_1(x, y, z)$  e  $r_2(x, y, z)$  que satisfaçam as condições (125), encontrar  $I(x, y, z)$  explicitamente via quadraturas, pois:

$$I(x, y, z) = \int \frac{\partial I}{\partial x} + f(y, z) \implies \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int \frac{\partial I}{\partial x} dx + f(y, z) \right],$$

logo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx.$$

$$\therefore f(y, z) = \int \left( \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx \right) dy + g(z),$$

assim sendo

$$I(x, y, z) = \int \frac{\partial I}{\partial x} dx + \int \left( \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx \right) dy + g(z). \tag{126}$$

Novamente, escrevemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int \frac{\partial I}{\partial x} dx + \int \left( \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx \right) dy + g(z) \right] \\ &\implies \frac{dg}{dz} = \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx - \frac{\partial}{\partial z} \int \left( \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx \right) dy \end{aligned}$$

$$\therefore g(z) = \int \left[ \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx - \frac{\partial}{\partial z} \int \left( \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx \right) dy \right] dz.$$

Concluindo,  $I(x, y, z)$  se reescreve, através de (126), como:

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= \int \frac{\partial I}{\partial x} dx + \int \left( \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx \right) dy + \\ &\quad + \int \left[ \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx - \frac{\partial}{\partial z} \int \left( \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial I}{\partial x} dx \right) dy \right] dz. \end{aligned} \tag{127}$$

Então, utilizando-se dos resultados (125) em (127), para  $r_1(x, y, z)$  e  $r_2(x, y, z)$  conhecidos, a integral primeira  $I(x, y, z)$  pode ser determinada diretamente por meio de:

$$I(x, y, z) = \int (r_1\phi + r_2z) dx + \int \left( -r_2 - \frac{\partial}{\partial y} z \int (r_1\phi + r_2z) dx \right) dy + \\ + \int (-r_1) dz - \int \frac{\partial}{\partial z} \left( \int (r_1\phi + r_2z) dx + \int \left( -r_2 - \frac{\partial}{\partial y} \int (r_1\phi + r_2z) dx \right) dy \right) dz$$

Em vista do que se estabelece através do conjunto de equações (125), é razoável então que escrevamos

$$dI = (r_1\phi + r_2z)dx + (-r_2)dy + (-r_1)dz. \quad (128)$$

A fim de instituir, definitivamente, o que denominamos “*função-S*”, será necessária uma retomada acerca de nossas concepções sobre fator integrante, como já havíamos mencionado. No contexto inicial, o leitor pode talvez ter notado que generalizando nossas considerações a respeito de “*fator integrante*” para uma  $n$ EDO racional, o mesmo poderia, em princípio, constituir-se de função  $R(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  de modo que, para uma equação

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{M(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{N(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})} = \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

não exata, sendo  $M$  e  $N$  polinômios coprimos, tem-se que

$$RM - RNy^{(n)} = \frac{dI}{dx}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \quad (129)$$

i.e., uma equação diferencial  $RM - RNy^{(n)} = 0$  seria, em princípio, exata segundo definição 1.1.2. Mas veja que ao considerarmos a equação diferencial como

$$y^{(n)} = \frac{RM}{RN}$$

nota-se diretamente a possibilidade representá-la também por meio de

$$R \frac{d^n y}{dx^n} = R \frac{M}{N} \implies R\phi - R \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = 0.$$

Como  $R$  corresponde então à função que nos permite tornar exata a nossa EDO, então escrevemos

$$R\phi - R\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \frac{dI}{dx} \quad (130)$$

de maneira completamente equivalente à condição (13), ou ainda, no que se considera sua expressão em forma diferencial

$$R(\phi dx - dy^{(n-1)}) = dI(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

que é semelhante ao formato de equação que já havíamos proposto na expressão (28) para caso de 2EDO's racionais. Evidentemente, iríamos aqui nos deparar com situação similar àquela, ou seja, necessariamente, deveríamos “ajustar” o lado esquerdo da equação, somando termos proporcionais a 1-formas nulas do tipo  $S_i(y^{(i)}dx - dy^{(i-1)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Com efeito, poderíamos escrever equações como em (29) por comparação direta entre coeficientes de  $dx, dy, dy', \dots, dy^{(n-1)}$ . Com isto, podemos finalmente reestabelecer o que se considera um “fator integrante” no contexto das formas diferenciais.

**Definição 4.1.1.** Uma função  $R(x_1, x_2, \dots, x_k)$  é chamada **fator integrante** da 1-forma  $\gamma = \sum_{i=1}^k F_i(x_1, \dots, x_k)dx_i$  se o produto  $R\gamma$  é uma 1-forma exata<sup>38</sup>, i.e.,

$$R\gamma = dI, \quad (131)$$

$I$  é função  $I(x_1, \dots, x_k)$ , correspondentemente, uma 0-forma. Reescrevendo portanto a equação (128) na forma

$$dI = r_1 \left[ \left( \phi + \frac{r_2}{r_1} z \right) dx - \frac{r_2}{r_1} dy - dz \right], \quad (132)$$

constata-se que  $r_1$  é fator integrante da 1-forma destacada nos colchetes. Vamos denotar por  $R$  a função  $r_1$  e por  $S$  a razão  $\frac{r_2}{r_1}$ , assim

$$dI = R[(\phi + Sz)dx - Sdy - dz].$$

Retomando, novamente, o conjunto de equações (125) e, levando-se em considera-

---

<sup>38</sup> Uma  $k$ -forma diferencial  $\gamma$  será dita exata se puder ser escrita como a **derivada exterior** de uma  $k-1$  forma diferencial  $\omega$ , ou seja,  $\gamma = d\omega$ . Veja apêndice B para algumas considerações simples em álgebra exterior.

ção o formato que estabelecemos para  $S$  logo acima, fundamenta-se uma definição do que iremos considerar por função-S.

**Definição 4.1.2.** Seja  $I$  uma integral primeira de uma 2EDO racional (121). Definimos  $S \doteq I_y/I_z$  uma **função-S** associada à 2EDO através da integral primeira  $I$  (Avellar; Duarte; Mota, 2020).

**Observação 4.1.1.** Se houver um par de funções  $r_1, r_2$ , definido de modo que as equações em (125) sejam satisfeitas, para uma dada integral primeira  $I$  da 2EDO (121), então, naturalmente, a razão  $r_2/r_1$  é uma função-S associada à 2EDO em (121).

Vamos reconsiderar (125) no seguinte formato

$$\begin{aligned} I_x &= R(\phi + Sz), \\ I_y &= -RS, \\ I_z &= -R. \end{aligned} \tag{133}$$

Por condições de compatibilidade, i.e.,  $\partial_y I_x = \partial_x I_y$ ,  $\partial_z I_y = \partial_y I_z$  e  $\partial_z I_x = \partial_x I_z$  obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y}(\phi + Sz) + R \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + z \frac{\partial S}{\partial y} \right) + S \frac{\partial R}{\partial x} + R \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \quad (\partial_y I_x - \partial_x I_y = 0), \\ \frac{\partial R}{\partial z}(\phi + Sz) + R \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + z \frac{\partial S}{\partial z} + S \right) + \frac{\partial R}{\partial x} &= 0 \quad (\partial_z I_x - \partial_x I_z = 0), \\ - \left( S \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial S}{\partial z} \right) + \frac{\partial R}{\partial y} &= 0 \quad (\partial_z I_y - \partial_y I_z = 0). \end{aligned}$$

Utilizando de uma notação mais compacta escrevemos

$$R_y(\phi + Sz) + R(\phi_y + zS_y) + SR_x + RS_x = 0, \tag{134}$$

$$R_z(\phi + Sz) + R(\phi_z + zS_z + S) + R_x = 0, \tag{135}$$

$$-(SR_z + RS_z) + R_y = 0. \tag{136}$$

As expressões (134), (135) e (136) correspondem exatamente às expressões (30) do capítulo inicial, o que segue daqui é, essencialmente, parte do desenvolvimento teórico no que concerne ao chamado *método da função-S*.

## 4.2 Funções-S e as 1EDO's associadas

Recordemo-nos primeiramente de que uma família  $I(x, y, z) = C$  não pode representar solução geral de uma 2EDO por conta da dependência explícita de  $z = y'(x)$ , nestes casos, é possível dizer somente que para todo par  $(x, y)$  em uma curva solução a função  $I(x, y, z)$  é constante, à mesma atribui-se o nome de integral primeira, como sabemos. Consideremos então a forma do operador de derivada total  $\frac{d}{dx}$  sobre curvas solução da 2EDO quando aplicado a funções do tipo  $H = H(x, y, z)$ ; vamos denotá-lo como  $D_x$ , ou seja,  $D_x = \partial_x + z\partial_y + \phi\partial_z$  (lembremo-nos que sobre as curvas solução da nossa 2EDO racional (117) deve valer  $y' = z$  e  $z' = \phi$ )<sup>39</sup>, com isso, institui-se que:

$$D_x H(x, y, z) = \frac{\partial H}{\partial x} + z \frac{\partial H}{\partial y} + \phi \frac{\partial H}{\partial z}.$$

**Teorema 4.2.1.** Seja  $I(x, y, z)$  uma integral primeira da 2EDO (118). Se  $S$  é uma função-S associada à 2EDO através de  $I$  então

$$D_x[R] + R(S + \phi_z) = 0,$$

$$SD_x[R] + R(D_x[S] + \phi_y) = 0, \tag{137}$$

$$-(SR_z + RS_z) + R_y = 0.$$

**Demonstração:** A última das equações em (137) já nos é familiar, do resultado que obtivemos em (136) a partir da condição  $\partial_z I_y = \partial_y I_z$ . Para obtermos as duas outras explicitamente fazemos equação (134) menos equação (136) multiplicada por  $\phi$  e equação (136) mais equação (135) multiplicada por  $z$ , obtemos assim, respectivamente, que:

$$S(R_x + zR_y + \phi R_z) + R(S_x + zS_y + \phi S_z) + R\phi_y = 0,$$

e

$$R_x - zR_y + \phi R_z + R(S + \phi_z) = 0.$$

Ou seja, além de  $R_y - (SR_z + RS_z) = 0$ , temos tanto

---

<sup>39</sup> Evidentemente que, se  $H(x, y, z)$  for uma integral primeira da 2EDO então  $D_x[H] = 0$  pois, sobre as curvas solução da 2EDO devemos ter  $H(x, y, z) = C$ .

$$SD_x[R] + RD_x[S] + R\phi_y = 0, \quad (138)$$

quanto

$$D_x[R] + R(S + \phi_z) = 0. \quad \square \quad (139)$$

**Corolário 4.2.1.** Seja  $S$  uma função-S associada à nossa 2EDO  $z' = \phi(x, y, z)$ , então  $S$  satisfaz a seguinte condição:

$$D_x[S] = S^2 + \phi_z S - \phi_y. \quad (140)$$

Para verificar este último resultado basta resolver a equação (139) para  $\frac{D_x[R]}{R}$  e substituir em (138). Verifica-se que a equação possui dependência apenas de  $S$ , o que nos será, posteriormente, de grande importância.

Pela equivalência formal  $D_x \sim \frac{d}{dx}$ , a EDP (140) pode ser vista como uma 1EDO de Riccati

$$\frac{ds}{dx} = s^2 + \phi_z s - \phi_y. \quad (141)$$

A forma mais geral de uma 1EDO de Riccati é  $y'(x) = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$ , claramente, não linear. Porém, não é difícil verificar que pela transformação

$$y(x) = \frac{-r'(x)}{f(x)r(x)}$$

a reescrevemos como uma 2EDO linear homogênea

$$r''(x) = \frac{f'(x) + g(x)f(x)}{f(x)}r'(x) + f(x)h(x)r(x).$$

Então, por uma proposta de mudança na equação (141), definida por

$$s(x) = \frac{-\frac{d\omega(x)}{dx}}{\omega(x)}$$

obtemos

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \phi_z \frac{d\omega}{dx} + \phi_y \omega.$$

Assim, se utilizarmos de uma transformação análoga na equação (140), i.e., considerando

$$S = \frac{-D_x(\nu)}{\nu} \quad (142)$$

determinamos que

$$D_x^2(\nu) = \phi_z D_x(\nu) + \phi_y \nu. \quad (143)$$

Coincidentemente, este resultado corresponde à condição para que tenhamos um gerador de simetria na *forma evolucionária* para a 2EDO (121) (Avellar *et al.*, 2019). Um gerador de transformação infinitesimal na forma evolucionária é definido como o campo  $\mathcal{X}_e = \nu \partial_y$ , quer dizer,  $\xi(x, y) = 0$ .

**Teorema 4.2.2.** Seja  $\nu$  função nas variáveis  $x, y$  e  $z$ . Se  $\mathcal{X}_e = \nu \partial_y$  define um gerador de simetria para a 2EDO na forma evolucionária, então, a função  $S = -D_x(\nu)/\nu$  é função- $S$  associada à 2EDO através de uma integral primeira  $I(x, y, z)$ .

**Demonstração:** Tomemos a primeira extensão do gerador  $\mathcal{X}_e$ , i.e.,

$$\mathcal{X}_e^{(1)} = \nu \partial_y + D_x(\nu) \partial_z.$$

Se  $I(x, y, z)$  é invariante pela transformação, então  $\mathcal{X}_e^{(1)} I = 0$ , logo

$$\nu \partial_y I + D_x(\nu) \partial_z I = 0 \implies \frac{D_x(\nu)}{\nu} = -\frac{\partial_y I}{\partial_z I} = -S. \quad (144)$$

**Corolário 4.2.2.** Se  $S$  é uma função- $S$  associada à uma 2EDO racional (121), então a função  $\nu$  na forma

$$\nu = e^{\int_x (-S)} \quad (145)$$

define uma simetria da 2EDO na forma evolucionária. Sendo  $\int_x$  um *operador não local* definido como o inverso de  $D_x$ , i.e.,  $\int_x D_x = D_x \int_x = \mathbf{1}$ .

Para verificar o resultado do corolário basta tomarmos

$$\mathcal{X}_e^{(1)} = \nu \partial_y + D_x(\nu) \partial_z = e^{\int_x (-S)} \partial_y + e^{\int_x (-S)} D_x \left( \int_x (-S) \right) \partial_z$$

$$\therefore \mathcal{X}_e^{(1)} = e^{\int_x (-S)} (\partial_y - S \partial_z).$$

Então, a condição  $\mathcal{X}_e^{(1)}(I) = 0$  se expressa como

$$\mathcal{X}_e^{(1)}(I) = e^{\int_x (-S)} (\partial_y I - S \partial_z I) = e^{\int_x (-S)} \left( \partial_y I - \frac{\partial_y I}{\partial_z I} \partial_z I \right) = 0. \quad \square \quad (146)$$

Estes dois últimos resultados que expressamos através do teorema 4.2.2 e corolário 4.2.2 tornam clara a conexão entre as funções- $S$  e simetrias de Lie (Avellar *et al.*, 2019). Por este motivo, para aplicação do método da função- $S$ , não é necessário nos preocuparmos com os autopolinômios do operador de Darboux. A chave do método é, na verdade, a existência de uma 1EDO racional cuja solução geral é dada por uma das integrais primeiras da 2EDO original.

**Observação 4.2.1.** Considere  $I(x_1, x_2, x_3)$  uma função Liouvillianiana cujo diferencial  $dI$  possa ser representado por  $dI = A(\partial_{x_1} I dx_1 + \partial_{x_2} I dx_2 + \partial_{x_3} I dx_3)$ , em que  $A = A(x_1, x_2, x_3)$  é também função Liouvillianiana, enquanto que  $\partial_{x_1} I$ ,  $\partial_{x_2} I$  e  $\partial_{x_3} I$  são funções algébricas nas variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . Então, as 1EDO's dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dx_2} &= -\frac{\partial_{x_2} I(a, x_2, x_3)}{\partial_{x_3} I(a, x_2, x_3)} = \phi_a(a, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dx_1} &= -\frac{\partial_{x_1} I(x_1, b, x_3)}{\partial_{x_3} I(x_1, b, x_3)} = \phi_b(x_1, b, x_3), \\ \frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{\partial_{x_1} I(x_1, x_2, c)}{\partial_{x_2} I(x_1, x_2, c)} = \phi_c(x_1, x_2, c), \end{aligned} \quad (147)$$

possuem  $I(a, x_2, x_3) = C$ ,  $I(x_1, b, x_3) = C$  e  $I(x_1, x_2, c) = C$  por respectivas soluções gerais.

A validação desta observação é direta, basta verificar que a derivada total de  $I$  na variável independente se anula caso a caso, quando vale a respectiva ED, i.e., obtemos equações em um formato específico para todas as três situações, a exemplo, tomemos o primeiro caso  $D_{x_2} I(a, x_2, x_3) = \partial_{x_2} I + \phi_a(a, x_2, x_3) \partial_{x_3} I = 0$ . Perceba que esta expressão é análoga à que obtemos em destaque nos parênteses da equação (146) e que o lado direito ( $\phi_a$ ) da 1EDO corresponde à função  $S$ , que determinamos através de (144) e da definição

4.1.2. Assim reestabelecemos:

**Definição 4.2.1.** Seja  $I$  uma integral primeira da 2EDO (121) as funções  $S_k = I_{x_i}/I_{x_j}$  onde  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i < j$ ,  $k \notin \{i, j\}$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ , são denominadas funções- $S$  associadas à 2EDO<sup>40</sup> (121) através da integral primeira  $I$  (Avellar *et al.*, 2019).

**Definição 4.2.2.** Seja  $I$  uma integral primeira da 2EDO (121) e  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) as funções- $S$  associadas à (121) através de  $I$ . As 1EDO's

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -S_k, \quad (148)$$

com  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i < j$ ,  $k \notin \{i, j\}$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $x_3 = z$  tendo  $x_k$  tomado como parâmetro são as chamadas **1EDO's associadas** à 2EDO (121) através da integral primeira  $I$  (Avellar *et al.*, 2019).

**Teorema 4.2.3.** Se  $I$  é uma integral primeira da 2EDO (121) e  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) são as funções- $S$  associadas à 2EDO através de  $I$ . Então  $I(x, y, z) = C$  é uma solução geral das 1EDO's associadas à (121) através de  $I$  (Avellar *et al.*, 2019).

**Demonstração:** Considerando que as hipóteses do teorema são satisfeitas, o operador  $D_{[k]} = \partial_{x_i} - S_k \partial_{x_j}$ , onde, novamente,  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i < j$ ,  $k \notin \{i, j\}$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $x_3 = z$  é tal que, para soluções gerais  $H_{[k]}(x, y, z) = K_i$  de  $\frac{dx_j}{dx_i} = -S_k$ ,  $D_{[k]}(H_{[k]}) = 0$ . Mas

$$(\partial_{x_i} - S_k \partial_{x_j})(I) = \partial_{x_i} I - S_k \partial_{x_j} I = \partial_{x_i} I - \frac{\partial_{x_i} I}{\partial_{x_j} I} \partial_{x_j} I = 0 \implies D_{[k]}(I) = 0. \quad \square$$

**Observação 4.2.2.** Note que o teorema 4.2.3 não nos permite afirmar que, resolvendo a 1EDO associada  $\frac{dx_j}{dx_i} = -S_k$  teremos obtido  $I(x, y, z) = C$  pois, uma vez que,  $x_k$  é parâmetro na respectiva 1EDO, então, qualquer função  $F(x_k)$  é invariante do operador  $D_{[k]} = \partial_{x_i} - S_k \partial_{x_j}$ , assim, a relação entre uma solução geral  $H(x, y, z) = K$  da 1EDO associada e a integral primeira  $I(x, y, z)$  da 2EDO (121) deve ser  $I(x, y, z) = \mathcal{F}(x_k, H)$ , de modo que  $D_x(I) = 0$ , ou seja

$$D_x(I) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \frac{dx_k}{dx} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H} \left( \frac{\partial H}{\partial x} + z \frac{\partial H}{\partial y} + \phi \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0. \quad (149)$$

---

<sup>40</sup> Aqui utilizamos dos subíndices em  $I$  para denotar derivação parcial, ou seja,  $S_k = I_{x_i}/I_{x_j}$  corresponde a  $S_k = \partial_{x_i} I / \partial_{x_j} I$ .

#### 4.2.1 O algoritmo (semi) do método da função-S

Dois resultados adicionais serão ainda apresentados como teoremas para que possamos, enfim, estabelecer um algoritmo que nos possibilite determinar (para muitos casos) integrais primeiras Liouvillianas para 2EDO's racionais.

**Teorema 4.2.4.** Considere uma 2EDO racional (121). Seja  $R = \exp^{(A/B)} \prod_i p_i^{n_i}$  um fator integrante para a 1-forma  $\gamma = (\phi + zS)dx - Sdy - dz$ , sendo  $A$  e  $B$  polinômios coprimos nas variáveis  $x, y$  e  $z$ , assim como os  $p_i$  são também polinômios irredutíveis nestas mesmas variáveis e os  $n_i$  são constantes. Sob essas hipóteses, a função- $S$  ( $S_1$ ) associada à 2EDO através da integral primeira  $I = \int dI = \int R\gamma$  é racional (Avellar *et al.*, 2019).

**Demonstração:** Pelo formato da função  $R$  no enunciado do teorema obtemos

$$\begin{aligned} \frac{D_x(R)}{R} &= \frac{e^{(A/B)} D_x [\prod_i p_i^{n_i}] + e^{(A/B)} D_x \left[ \frac{A}{B} \right] \prod_i p_i^{n_i}}{e^{(A/B)} \prod_i p_i^{n_i}} = \\ &= D_x \left[ \frac{A}{B} \right] + \frac{D_x [\prod_i p_i^{n_i}]}{\prod_i p_i^{n_i}} = D_x \left[ \frac{A}{B} \right] + \sum_i n_i \frac{D_x(p_i)}{p_i}. \end{aligned}$$

Como  $D_x = \partial_x + z\partial_y + \phi\partial_z$  e  $\phi$  é racional, então verifica-se, através da primeira das equações (137) que  $S_1$  é, de fato, função racional.  $\square$

À forma da expressão que utilizamos para  $R$  denominamos *função de Darboux*, dessa forma, é bastante comum encontrarmos designações do tipo “fator integrante de Darboux” à expressão  $R = \exp^{(A/B)} \prod_i p_i^{n_i}$ .

**Teorema 4.2.5.** Seja (121) uma 2EDO racional que apresenta uma integral primeira Liouvillianas  $I(x, y, z)$ . Considere que as derivadas  $\partial_x I$ ,  $\partial_y I$  e  $\partial_z I$  possam ser representadas, respectivamente, por  $RQ$ ,  $RP$  e  $RN$ , sendo  $R$  um fator integrante da 1-forma  $\gamma = N[(\phi + zS)dx - Sdy - dz]$ , as funções  $P$  e  $Q$  são polinômios, assim como  $N$  também o é (correspondendo ao denominador de  $\phi(x, y, z)$ ),  $S$  é uma função- $S$  ( $S_1$ ) associada à 2EDO através da integral primeira  $I$ . Dessa forma,  $R$  é um fator integrante de Darboux e as funções- $S$  associadas à 2EDO através de  $I$  se dão pelas expressões  $S_1 = \frac{P}{N}$ ,  $S_2 = \frac{Q}{N}$  e  $S_3 = \frac{Q}{P}$  (Avellar *et al.*, 2019).

A demonstração deste último teorema pode ser encontrada em (Avellar *et al.*, 2019), nos absteremos de inseri-la aqui pois se apresenta como um desenvolvimento longo e relativamente complicado.

Devemos apontar que estas condições sobre o formato do fator integrante e das derivadas da integral primeira não são tão restritivas quanto parecem, vale reforçar que o algoritmo construído com base nestes resultados nos permite determinar integrais primeiras Liouvillianas para uma grande variedade de 2EDO's racionais. Em geral, utilizamos

do famoso livro de E. Kamke com soluções exatas para equações diferenciais ordinárias (Kamke, 1948) como nosso “campo de provas”, o método é capaz de lidar com um vasto grupo de 2EDO’s racionais não lineares que apresentam pelo menos uma integral primeira Liouvilliana. Seguiremos então explicitando, definitivamente, os passos do semi-algoritmo e trabalharemos um exemplo em sequência.

Considere o caso de uma 2EDO racional  $z' = \phi(x, y, z)$  que apresenta uma integral primeira  $I(x, y, z)$  Liouvilliana. Se as derivadas  $\partial_x I$ ,  $\partial_y I$  e  $\partial_z I$  são da forma  $RQ$ ,  $RP$  e  $RN$ , respectivamente, sendo  $R$  uma função de Darboux, fator integrante da 1-forma  $dI$ ,  $Q, P$  polinômios em  $(x, y, z)$  e  $N$  polinômio em  $(x, y, z)$ , denominador de  $\phi(x, y, z)$ , então substituindo  $S_1 = \frac{P}{N}$  na equação (140) do corolário 4.2.1 escrevemos

$$-P^2 - (\partial_x N + z\partial_y N + \partial_z M)P + D(P) - M\partial_y N + N\partial_y M = 0, \quad (150)$$

sendo  $D = ND_x = N\partial_x + zN\partial_y + M\partial_z$ . O procedimento segue então com a construção de polinômios candidatos  $P(x, y, z)$  com grau limitado à  $n_{max} = \max(\deg(M) - 1, \deg(N))$  tendo coeficientes indeterminados, como consequência, a equação (150) torna-se uma expressão da forma *polinômio* = 0, assim, obtém-se um sistema de equações algébricas ao considerarmos nulos os coeficientes de cada monômio que aparece do lado esquerdo da equação resultante. Se existir uma solução para algum dos sistemas obtidos ao propor  $P$ ’s de graus distintos (desde que  $1 \leq \deg(P) \leq n_{max}$ ) então teremos determinado  $S_1$ . Se o procedimento tiver obtido sucesso nesta primeira etapa então podemos construir a 1EDO associada  $\frac{dz}{dy} = -\frac{P}{N} = -S_1$  esta que, se resolvida, nos permite, em princípio, encontrar a integral primeira da 2EDO por meio da EDP (149) (no caso, como optamos por determinar  $S_1$ , a variável  $x$  é tida como parâmetro na respectiva 1EDO associada, assim  $\frac{dx_k}{dx}$  em (149) é simplesmente 1), que pode ser desenvolvida em termos de suas equações características.

É claro que somos induzidos a pensar em outras duas formas completamente análogas a esta para tratar o problema, seguindo, obviamente, pelos caminhos que determinam as funções racionais  $S_2$  e  $S_3$ , mas note que, pela maneira como foram instituídas as relações, trabalhar com  $S_1$  ou  $S_2$  é interessante pelo fato de que  $N$  é o denominador em ambos os casos ( $S_1 = P/N$  e  $S_2 = Q/N$ ), uma função conhecida, assim, basta trabalharmos para encontrar os coeficientes de um polinômio  $P$  apenas (ou  $Q$ ), o que nos leva a considerar o problema de se determinar  $S_3$  como um procedimento mais custoso, que não será levado em consideração.

O caminho para que possamos determinar uma integral primeira da 2EDO por meio de  $S_2$  é análogo, bastando apenas que façamos algumas considerações. Primeiro, tomemos novamente a expressão  $D(I) = 0$  ( $D \equiv ND_x$ ):

$$N\partial_x I + zN\partial_y I + M\partial_z I = 0,$$

equivalentemente,

$$N(\partial_x I + z\partial_y I) + M\partial_z I = 0 \implies \frac{M}{N} = \frac{-\partial_x I - z\partial_y I}{\partial_z I},$$

$$\therefore \phi = \frac{-\partial_x I - z\partial_y I}{\partial_z I}. \quad (151)$$

Mas veja que esta última equação nos permite escrever, levando-se em consideração que  $S_k = I_{x_i}/I_{x_j}$  (definição 4.2.1), a relação

$$S_1 = \frac{-\phi - S_2}{z}, \quad (152)$$

que ao ser levada em (140) resulta

$$D_x(S_2) = -\frac{1}{z}S_2^2 + \left(\partial_z \phi - \frac{\phi}{z}\right)S_2 - \partial_x \phi. \quad (153)$$

Que corresponde, novamente, a uma EDO de Riccati pela equivalência  $D_x \sim \frac{d}{dx}$ , assim, por uma mudança

$$S_2 = z \frac{D_x(\mu)}{\mu} \quad (154)$$

obtemos

$$zD_x^2(\mu) + (2\phi - z\partial_z \phi)D_x(\mu) + \mu\partial_x \phi = 0,$$

novamente, a expressão representa condição para que nossa 2EDO admita transformação de simetria com gerador  $\mathcal{X} = \mu\partial_x$  (Avellar *et al.*, 2019). Para verificar esta afirmação basta operarmos segundo  $\mathcal{X}^{(2)}(z' - \phi(x, y, z)) = 0, \mod (z' - \phi(x, y, z) = 0)$ . Da equação (154) podemos dizer, em analogia ao resultado que expressa a equação (145), que a função  $\mu$  na forma

$$\mu = e^{\int_x \left(\frac{S_2}{z}\right)} \quad (155)$$

define uma simetria ( $\mathcal{X} = \mu\partial_x$ ) da 2EDO, o que nos permite verificar o resultado geral do teorema 4.2.3 para o caso de  $S_2$  através da aplicação  $\mathcal{X}^{(1)}I$ , que resulta  $\mu D_{[2]}(I) = 0 \implies D_{[2]}(I) = 0$ .

Veja então que para uma 2EDO racional  $z' = \phi(x, y, z)$  com integral primeira  $I(x, y, z)$  Liouvillian, cujas derivadas parciais  $\partial_x I$ ,  $\partial_y I$  e  $\partial_z I$  possam ser representadas através de  $RQ$ ,  $RP$  e  $RN$ , respectivamente, sendo  $R$  (função do tipo Darboux) um fator integrante da 1-forma  $dI$ , além de,  $P, Q$  polinômios nas variáveis  $x, y$  e  $z$ ,  $N$  polinômio que ocorre como denominador em  $\phi(x, y, z)$ , temos, por substituição de  $S_2 = \frac{Q}{N}$  na equação (153) o resultado

$$Q^2 - (z^2 \partial_y N + (\partial_z M + \partial_x N)z - M)Q - (M\partial_x N - N\partial_x M - D(Q))z = 0, \quad (156)$$

que expressa condição perfeitamente análoga àquela da equação (150). O algoritmo então parte da construção de polinômios  $Q(x, y, z)$  com coeficientes a determinar, cujo grau é também limitado à  $n_{max} = \max(\deg(M) - 1, \deg(N))$ . A tarefa constitui-se portanto da busca por alguma solução do sistema nos coeficientes de  $Q$ , definido pela imposição de que cada coeficiente em cada monômio de (156) seja nulo.

Vamos elucidar estas últimas discussões apresentando o algoritmo de uma forma mais convencional, seguido de um estudo de caso.

**Algoritmo** ( $AS_{[i]}$ ): No contexto descrito pelas hipóteses dos teoremas 4.2.4 e 4.2.5, é possível determinarmos uma integral primeira Liouvillian para uma 2EDO racional (121) fazendo

1.  $n_{max} = \max(\deg(M) - 1, \deg(N))$ ;
2.  $n = 0$ ;
3.  $n = n + 1$ ;
4. se  $n > n_{max}$  o método não é suficiente.
5. Determine operador  $D_x$ ;
6. construa um polinômio genérico  $P$  (ou  $Q$ ) de grau  $n$  nas variáveis  $x, y$  e  $z$  com coeficientes a determinar  $a_i$ ;
7. substitua  $P$  (ou  $Q$ ) na equação (150) (ou (156)) obtendo a expressão polinomial nas variáveis  $x, y$  e  $z$ . Os coeficientes de cada monômio devem ser nulos, sob tal consideração obtemos um sistema de equações algébricas  $\mathcal{A}$ ;

8. encontre uma solução não trivial  $\{a_i\}$  para o sistema  $\mathcal{A}$ . Se isto não for possível, devemos retornar ao passo de número 3.
9. Com a solução determinada construímos  $P$  (ou  $Q$ ), conseqüentemente,  $S_1$  (ou  $S_2$ );
10. escreva a respectiva 1EDO associada e busque por uma solução geral na forma  $H(x, y, z) = K$ . Se não for possível resolvê-la, retorne ao passo de número 3.
11. Com a expressão de  $H(x, y, z)$  introduza  $h = H(x, y, z)$ , do resultado, tente resolver para uma das variáveis  $x, y$  ou  $z$  (ou qualquer operando de  $H$  e  $D_x(H)$ ) e substitua na equação (149) (lembre-se de que para cada  $S_k$  ( $k \in \{1, 2, 3\}$ )  $x_k$  é parâmetro na 1EDO associada e,  $x_1 = x, x_2 = y$  e  $x_3 = z$ .), levando-se em consideração que, por construção,  $D_x = \frac{d}{dx} \Big|_{y''=\phi}$ , o que significa que  $y' = z$ , bem como,  $y'' = z' = \phi$ .
12. Tente encontrar uma solução  $\mathcal{F}(x_k, h) = K$  para a equação característica da EDP. Caso não seja possível, retorne ao passo 3;
13. Construa a integral primeira  $I = \mathcal{F}(x_k, H)$  da 2EDO.

**Exemplo 4.2.1.** Considere a seguinte 2EDO racional<sup>41</sup>

$$z' = -\frac{z(x^4 - 4x^3 + y)}{x^4 + y}.$$

Vamos construir um polinômio  $P(x, y, z)$  genérico de grau 1, inicialmente (o grau máximo que definimos para seguir efetuando as nossas contas através do algoritmo é, para este caso,  $n_{max} = \max(\deg(M) - 1, \deg(N)) = \max(4, 4) = 4$ ).

$$P(x, y, z) = p_1x + p_2y + p_3z + p_4.$$

Substituindo  $P$  em (150) podemos, após certas manipulações, expressar

$$\begin{aligned} p_1x^5 + p_2x^4y + p_2x^4z + (p_4 - 7p_1)x^4 - 8p_2x^3y - (4p_3 + 4)x^3z - p_1^2x^2 + (p_1 - 2p_1p_2)xy + \\ - (2p_1p_3 + p_1)xz - (p_2^2 - p_2)y^2 - 2p_2p_3yz - (p_3^2 + p_3)z^2 - 8p_4x^3 - 2p_1p_4x(p_1 - 2p_2p_4 + p_4)y + \\ - (2p_3p_4 + p_4)z - p_4^2 = 0. \end{aligned}$$

---

<sup>41</sup> Sugerimos que o leitor tente executar comandos usuais de algum (ou mais) CAS como tentativa de obter uma solução para esta equação diferencial. Veremos que, por abordagem do método da função- $S$ , podemos considerá-la uma ED relativamente simples.

Impondo que os coeficientes de cada monômio nesta equação sejam nulos, obtemos, com facilidade que  $p_1 = p_2 = p_4 = 0$  e  $p_3 = -1$ , indicando assim que  $P(x, y, z) = -z$ . Com isso, temos uma função- $S$  ( $S_1$ ) e podemos construir uma 1EDO associada

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{x^4 + y},$$

na qual  $x$  é um parâmetro apenas, a solução geral da 1EDO associada é

$$z(y) = K(x^4 + y) \implies K = \frac{z}{x^4 + y} = H_1, \quad (K \equiv cte).$$

Já mencionamos que, não necessariamente, a função  $H_1(x, y, z)$  obtida da 1EDO associada representa uma integral primeira  $I(x, y, z)$  da 2EDO, precisamos ainda verificar que tipo de relação devemos estabelecer entre estas duas expressões através da EDP (149). Primeiro, consideremos

$$H_1 = \frac{z}{x^4 + y} = h \implies z = h(x^4 + y).$$

Agora, a equação (149) pode ser representada através de

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + D_x(H_1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h} = 0.$$

Mas  $D_x(H_1) = \partial_x H_1 + z \partial_y H_1 + \phi \partial_z H_1$ , então

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \left( \frac{-4zx^3}{(x^4 + y)^2} - \frac{z^2}{(x^4 + y)^2} - \frac{z(x^4 - 4x^3 + y)}{(x^4 + y)^2} \right) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h} = 0,$$

equação que pode ser simplificada e expressa da seguinte maneira

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{z(z + x^4 + y)}{(x^4 + y)^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h} = 0.$$

Se substituirmos  $z = h(x^4 + y)$  nesta última expressão teremos

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x, h)}{\partial x} - h(h + 1) \frac{\partial \mathcal{F}(x, h)}{\partial h} = 0,$$

que pode ser representada através de uma equação característica

$$dx = -\frac{dh}{h(h + 1)}$$

Daqui se obtém explicitamente que

$$h(x) = \frac{1}{C_1 e^x - 1} \implies C_1 = \frac{1+h}{h e^x}.$$

$$\therefore \mathcal{F}(x, h) = \frac{1+h}{h e^x}.$$

Logo,

$$I(x, y, z) = \mathcal{F}(x, H_1) = \frac{1 + \frac{z}{x^4+y}}{\frac{z e^x}{x^4+y}} = \frac{e^{-x}}{z} (x^4 + y + z).$$

Função que corresponde a uma integral primeira (de Darboux) da 2EDO, i.e.,  $D_x(I) = 0$ , uma solução geral pode ser obtida se resolvermos a expressão para  $z$  ( $\frac{dy}{dx}$ ) e integrarmos diretamente em  $x$ , para este caso, a expressão resulta em termos com função *polilogarítmica*, não elementar, em geral.

O exemplo trabalhado, como dissemos, é bastante simples quando avaliado sob o contexto que envolve o método da função- $S$ , não iremos nos estender aos detalhes de outros casos mais complicados como fizemos para este último, mas é interessante ao menos listar ocorrências de sucesso da aplicação do método<sup>42</sup> para situações em que mesmo o método de simetrias de Lie encontra dificuldades.

Tabela 1 - Algumas 2EDO's avaliadas aos critérios do método da função- $S$ .

|   | $\phi(x, y, z)$                                             | $S_1(x, y, z)$                                | $I(x, y, z)$                     |
|---|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------|
| 1 | $-\frac{z(zx+y-2z)}{xz^2+yz+y}$                             | $-\frac{z}{xz^2+yz+y}$                        | $\frac{(zx+y)e^{-z}e^{-x}}{z}$   |
| 2 | $-\frac{xy^2-y^2+yz+z^2}{y(yx+z-1)}$                        | $\frac{z}{y(yx+z-1)}$                         | $\frac{(yz+x)e^{-z}e^{-x}}{y}$   |
| 3 | $-\frac{x^2z^2-2y^2x+2xyz-z^2}{x^2y^2-x^2yz-x^2y-yz+z^2+y}$ | $\frac{z(x^2-1)}{x^2y^2-x^2yz-x^2y-yz+z^2+y}$ | $\frac{e^{-z}(z-x^2y)}{z-y}$     |
| 4 | $-\frac{z(xyz+y^2-2y+2)}{(y-1)(zx-x+y)}$                    | $\frac{xyz+y^2-y+1}{(y-1)(zx-x+y)}$           | $\frac{(zx+y)e^{-z}e^{-y}}{y-1}$ |
| 5 | $\frac{xz^2+y^2+yz-z^2}{xy^2+xyz+yx+yz+z^2-y}$              | $-\frac{z(x-1)}{xy^2+xyz+yx+yz+z^2-y}$        | $\frac{(yx+z)e^{-z}}{z+y}$       |

Legenda: Tabela contendo listagem de alguns casos que também puderam ser avaliados pela aplicação do método da função- $S$ .

Fonte: Avellar *et al.*, 2019, p. 311.

<sup>42</sup> Não é difícil perceber que, a depender do caso, a obtenção da função- $S$  pode representar um processo bastante trabalhoso, por este motivo, o grupo atuou também no desenvolvimento de um pacote computacional (em Maple 17) capaz de automatizar a sequência dos passos no procedimento descrito (pacote *InSyDE*). Os tempos de execução da rotina implementada em Maple para obtenção das integrais primeiras nos exemplos listados da tabela 1 variam de 0,05s à 0,3s, com cada processo tendo consumido aproximadamente 20MB de memória (Intel(R) Core(TM) i5-3337U @ 1.8GHz).

## 5 UM MÉTODO PS LINEAR

Utilizaremos deste capítulo para abordar a ideia central do nosso trabalho, o resultado de maior importância. Até aqui, os demais trechos do texto se constituíram de descrições técnicas e com devida atenção aos pormenores, tentamos nos fazer didáticos ao máximo a esse respeito. No entanto, uma última concepção ainda nos será necessária para o entendimento, por completo, do que iremos propôr aqui. A ocorrência de menções aos *multiplicadores de Jacobi* será mais frequente, especificamente, a partir da seção 5.3, faremos então um adendo incluindo o contexto que nos permite definir estes objetos ainda nesta parte introdutória e descritiva do capítulo.

Já vimos que, tipicamente, utiliza-se da ideia de campos vetoriais associados aos sistemas diferenciais a serem estudados, de um modo que não se faz distinção entre ambos, exemplos recorrentes correspondem a alguns casos do que conhecemos como sistemas Hamiltonianos, para os quais, a cada par de equações canônicas de Hamilton, usamos  $(\partial_{p_i} H, -\partial_{q_i} H)$  para denotar o *campo vetorial hamiltoniano*. A um sistema hamiltoniano autônomo com um grau de liberdade correspondem duas equações diferenciais de primeira ordem, e nestes casos, a própria função  $H(q, p)$  é uma *integral primeira* do sistema (Monteiro, 2019).

O conteúdo presente na teoria de Darboux permite, na verdade, estudar sistemas diferenciais polinomiais autônomos de primeira ordem, o que já havia sido mencionado de maneira muito superficial logo no primeiro parágrafo do capítulo 2. Para fins de contextualização, consideremos o seguinte sistema diferencial polinomial autônomo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = P_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = P_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (157)$$

para o qual consideramos um vetor  $\mathbf{x}$  a componentes  $x_i$  que podem ser tanto reais quanto complexas, utilizaremos  $\mathbb{F}$  para denotar um corpo que pode representar  $\mathbb{R}$ , ou mesmo,  $\mathbb{C}$ . Assim, diremos que  $\mathbf{x} \in U$  sendo  $U \subseteq \mathbb{F}^n$ . O símbolo que ocorre logo acima das variáveis  $x_i$  (ponto), como sabemos, denota derivação com respeito a uma variável independente  $t \in \mathbb{F}$ . À direita do sinal de igualdade, vamos dizer que há  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ , que pode ser visto como uma matriz coluna  $n$ -dimensional cujas componentes são polinômios em  $\mathbf{x}$  com coeficientes em  $\mathbb{F}$ , corpo de funções que iremos denotar por  $\mathbb{F}[\mathbf{x}]$ . Por vezes, também faremos uso de uma representação alternativa, em linha,  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), \dots, P_n(\mathbf{x}))$ , e diremos

que os  $P_i \in \mathbb{F}[\mathbf{x}]$ .

Associamos ao sistema (157) o campo vetorial definido através de

$$\mathfrak{X} = P_1(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_1} + P_2(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + P_n(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (158)$$

**Definição 5.0.1.** Uma função  $J$  de classe  $C^1$  definida em um aberto  $U_0$  de  $U$  é dita ser um *multiplicador de Jacobi* para o sistema (157) em  $U_0$  se satisfaz (em  $U_0$ )

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial(JP_i)}{\partial x_k} = 0, \quad (159)$$

(Berrone; Giacomini, 2003; Llibre; Valls; Zhang, 2016) equivalentemente

$$\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial J}{\partial x_i} = -J \operatorname{div} \mathfrak{X} \implies \mathfrak{X}(J) = -J \langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle. \quad (160)$$

Onde se faz a consideração usual de que o divergente de um campo vetorial<sup>43</sup> se dá através da operação

$$\langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x_i},$$

para caso específico envolvendo o formato de  $\mathfrak{X}$  na equação (158). Uma função  $V$  aos moldes de  $J$  que satisfaz<sup>44</sup>

$$\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = V \langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle \quad (161)$$

é, por sua vez, denominada *multiplicador de Jacobi inverso* do sistema. Com estas noções estabelecidas podemos, finalmente, dar início às discussões que mais nos interessam para este capítulo.

---

<sup>43</sup> Para as discussões que seguem, adotaremos  $\nabla(\bullet)$ ,  $\langle \nabla, \bullet \rangle$  e  $\nabla \wedge \bullet$  para operações usuais de **grad** $\bullet$ , **div** $\bullet$  e **rot** $\bullet$  respectivamente.

<sup>44</sup> Atente-se para o sinal que aparece (ou não) no termo à direita do sinal de igualdade como um fator de distinguibilidade entre as equações (160) e (161).

## 5.1 Discussões prévias

Ao longo do desenvolvimento do texto, procuramos estabelecer firmemente as ideias mais fundamentais que dão sustento às abordagens de Darboux e de Lie, no que concerne ao problema de se resolver/lidar/estudar equações diferenciais ordinárias racionais de primeira e segunda ordem. É de se imaginar que o leitor tenha notado o quão poderosas e eficientes são as ferramentas que estas abordagens constituem neste sentido, sendo ainda, em geral, as únicas de que dispomos quando buscamos soluções/integrais primeiras em forma fechada de EDO's que ainda não foram classificadas, nem mesmo estudadas. Contudo, mesmo estas abordagens apresentam alguns infortúnios:

- O método de Lie requer que tenhamos conhecimento de uma transformação de simetria para a EDO e, em muitos casos, determiná-las pode não ser uma tarefa simples. Para EDO's que não admitem simetria de ponto (à maneira como estudamos no capítulo 3), o método torna-se, em geral, um problema consideravelmente complicado.
- No caso da abordagem de Darboux-Prelle-Singer, os autopolinômios do operador de Darboux associado à EDO desempenham o papel de destaque, estes, como vimos, são fundamentais para construção de fatores integrantes, através dos quais podemos determinar integrais primeiras e, conseqüentemente, resolver/reduzir EDO's. O ponto é que, pelo procedimento usual, os problemas com a determinação destes polinômios surgem quando o campo (de Darboux) admite autopolinômios de grau relativamente alto, pois, o sistema utilizado para encontrarmos os coeficientes dos polinômios é formado, naturalmente, de termos não-lineares (quadráticos), pelo que resulta do produto  $qp$ , de dois polinômios com coeficientes a determinar, então, quanto maior o grau dos polinômios envolvidos, maior o número de termos quadráticos.
- O método da função- $S$  é extremamente eficaz e lida muito bem com EDO's que possuem simetrias não locais e simetrias dinâmicas, até mesmo com casos em que os polinômios de Darboux apresentam grau elevado, mas a coisa se complica se o denominador da função- $S$  não corresponde ao denominador de  $\phi(x, y, z)$ .

A proposta então para este capítulo será apresentar (como via alternativa às problemáticas mencionadas em cada caso) uma maneira linear de se determinar os polinômios de Darboux para EDO's. Vamos abordar, primeiramente, 1EDO's racionais que apresentem solução geral elementar, em seguida, discutiremos uma adaptação do procedimento às 2EDO's racionais que admitem pelo menos uma integral primeira elementar, o procedimento será, essencialmente, dividido em dois subcasos, primeiro abordamos 2EDO's racionais com uma integral primeira elementar e uma integral primeira não-Liouvilliana,

depois discutimos 2EDO's racionais com duas integrais primeiras Liouvillianas, sendo uma delas elementar.

Vamos trabalhar alguns exemplos para que tenhamos maior clareza sobre o novo procedimento que iremos propôr e, posteriormente, apresentaremos uma análise de desempenho juntamente com aplicações do método à 2EDO's que representam sistemas físicos importantes.

O método que desenvolvemos nasce da percepção de dois resultados (não relacionados) que, combinados, fornecem uma solução linear para o problema de determinar polinômios de Darboux. São eles:

- Resultado 1 - Sobre equações diferenciais parciais (EDP's) lineares de primeira ordem em duas variáveis independentes:

**Caso homogêneo:** Considere a 1EDP:

$$A(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (162)$$

É bem conhecido que a mesma é “equivalente” ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x, y) \\ \dot{y} = B(x, y), \end{cases} \quad (163)$$

o que se verifica facilmente ao reconsiderarmos a condição

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$

para uma integral primeira do sistema. Vale, portanto, sobre as curvas solução do sistema

$$A(x, y) \frac{\partial I}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial I}{\partial y} = 0.$$

**Caso não-homogêneo:** considere a 1EDP não homogênea<sup>45</sup>:

---

<sup>45</sup> Não é o caso mais geral de 1EDP não-homogênea.

$$A(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi C(x, y). \quad (164)$$

Também é bem conhecida a possibilidade de se construir uma 1EDP linear homogênea em três variáveis independentes na forma

$$A(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - zC(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (165)$$

de modo que, sendo  $\psi_1(x, y)$  solução da equação não homogênea (164), temos

$$\varphi_1(x, y, z) = z\psi_1(x, y)$$

solução da 1EDP homogênea. Vejamos:

$$A \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - zC \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = z \underbrace{\left( A \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + B \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)}_{\psi_1 C \text{ equação (164)}} - zC\psi_1 = 0.$$

Desse modo,

$$\varphi_0 = I(x, y) \text{ e } \varphi_1 = z\psi_1(x, y)$$

são duas soluções da 1EDP homogênea nas variáveis  $x, y$  e  $z$ .

- Resultado 2 - Sobre as soluções gerais de Darboux para 1EDO's racionais:

Considere a 1EDO racional

$$y' = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (166)$$

na qual  $M$  e  $N$  são polinômios coprimos. Se a mesma possui solução geral elementar na forma

$$I(x, y) = e^{Z_0(x, y)} \prod_j p_j(x, y)^{k_j},$$

em que  $Z_0$  é uma função racional  $A/B$ , os  $p_j$  são polinômios irredutíveis e os  $k_j$  são números racionais então ela possui fator integrante na forma  $\prod_i p_i^{n_i}$ , como nos é assegurado pelo teorema de Prelle-Singer. Vamos analisar a relação de  $R$  com a solução geral  $I$  e com a 1EDO racional (166). Temos:

$$\begin{aligned} \partial_x I &= \left( \partial_x \left( \frac{A}{B} \right) + \frac{\sum_k n_k \partial_x(p_k) \prod_{l, l \neq k} p_l}{\prod_j p_j} \right) e^{\frac{A}{B}} \prod_j p_j^{n_j} = \\ &= I \frac{(B \partial_x A - A \partial_x B) \prod_j p_j + B^2 \sum_k n_k \partial_x(p_k) \prod_{l, l \neq k} p_l}{B^2 \prod_j p_j} = I \frac{Pol_{[x]}}{B^2 \prod_j p_j}, \end{aligned}$$

assim como,

$$\begin{aligned} \partial_y I &= \left( \partial_y \left( \frac{A}{B} \right) + \frac{\sum_k n_k \partial_y(p_k) \prod_{l, l \neq k} p_l}{\prod_j p_j} \right) e^{\frac{A}{B}} \prod_j p_j^{n_j} = \\ &= I \frac{(B \partial_y A - A \partial_y B) \prod_j p_j + B^2 \sum_k n_k \partial_y(p_k) \prod_{l, l \neq k} p_l}{B^2 \prod_j p_j} = I \frac{Pol_{[y]}}{B^2 \prod_j p_j}, \end{aligned}$$

Bem, como mostrado na equação (20) já havíamos determinado que  $\phi(x, y) = \partial_x I / \partial_y I$ , assim

$$\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{\partial_x I}{\partial_y I} = -\frac{Pol_{[x]}}{Pol_{[y]}}.$$

Observando também a forma de  $\partial_x I$  e  $\partial_y I$  vemos que, no caso geral,

$$\frac{I}{B^2 \prod_j p_j}$$

é um fator integrante para a 1EDO racional (166). Portanto

$$V = \frac{1}{R} = \frac{B^2 \prod_j p_j}{I} \tag{167}$$

satisfaz

$$N \frac{\partial V}{\partial x} + M \frac{\partial V}{\partial y} = V(\partial_x N - \partial_y M) \quad (168)$$

e, é chamado *fator integrante inverso* para a nossa 1EDO (166).

## 5.2 A ideia central do método

Para que tenhamos alguma noção de como iremos propôr a combinação destes dois resultados vamos, primeiramente, estudar um caso específico. Para tanto, considere:

**Exemplo 5.2.1.** Seja a 1EDO racional

$$y' = \frac{3y^{10} + 18xy^6 - 9x^2y^3 + 2x^3}{y^2(-63y^{10} + 51xy^7 - 7x^2y^4 + 9x^3)}, \quad (169)$$

cujas solução geral é dada através da expressão

$$I(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{-3y^3+x}}}{y^7 + x^2}. \quad (170)$$

Este é um caso para o qual o método original PS enfrenta dificuldades, pois o fator integrante é dado por

$$R(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{-3y^3+x}}}{(-3y^3+x)^2(y^7+x^2)^2} = \frac{e^{\frac{x}{-3y^3+x}}}{(y^7+x^2)} \frac{1}{(-3y^3+x)^2(y^7+x^2)} = \frac{I}{B^2 \prod_j p_j}, \quad (171)$$

de onde se percebe que os graus dos polinômios de Darboux  $-3y^3 + x$  e  $y^7 + x^2$  possuem grau relativamente alto para o procedimento. Contudo, uma vez que para 1EDO's o fator integrante é também um multiplicador de Jacobi<sup>46</sup>,  $R/I$  também é fator integrante. Assim

---

<sup>46</sup> É fácil ver que a condição expressa na equação (22) para fator integrante  $R(x, y)$  corresponde à mesma estabelecida por (160) na definição 5.0.1 para multiplicadores de Jacobi quando aplicada ao contexto de 1EDO's racionais (campos vetoriais polinomiais  $(\dot{x}, \dot{y}) = (N(x, y), M(x, y))$  no plano).

$$\bar{R}(x, y) = \frac{R(x, y)}{I(x, y)} = \frac{1}{(-3y^3 + x)^2(y^7 + x^2)}$$

também é um fator integrante para a 1EDO (169), correspondentemente, temos um fator integrante inverso polinomial

$$V(x, y) = (-3y^3 + x)^2(y^7 + x^2).$$

Vamos comparar a 1EDP (168) para  $V(x, y)$  com a 1EDP linear não-homogênea (164). Evidentemente, podemos construir uma EDP de primeira ordem homogênea em três variáveis do tipo

$$N(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + M(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - z(\partial_x N + \partial_y M) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

com soluções

$$\varphi_0 = I(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{-3y^3+x}}}{y^7 + x^2} \text{ e } \varphi_1 = zV(x, y) = z(-3y^3 + x)^2(y^7 + x^2).$$

Podemos agora enunciar um dos resultados de maior importância deste nosso trabalho. Vejamos:

**Teorema 5.2.1.** Seja  $\mathfrak{X} \equiv N\partial_x + M\partial_y$  um campo vetorial, com  $M, N \in \mathbb{C}[x, y]$  polinômios coprimos. Considere que  $\mathfrak{X}$  admite uma integral primeira elementar  $I(x, y)$  (não constante), i.e.,  $\mathfrak{X}I = 0$ . Se  $\mathfrak{X}$  apresenta um fator integrante inverso  $V$  tal que  $V^n \in \mathbb{C}[x, y]$ , então o campo vetorial polinomial  $\tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} - z\langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle \partial_z$  admite uma integral primeira polinomial  $\mathcal{I} = z^n H(x, y)$ , onde  $H \in \mathbb{C}[x, y]$  é da forma  $\prod_j p_j^{k_j}$ , os  $p_j$  são autopolinômios de  $\mathfrak{X}$  e  $k_j, n$  são inteiros positivos.

**Demonstração:** Considere que as hipóteses do teorema sejam satisfeitas. Então existe um fator integrante inverso  $V(x, y)$  que é solução da 1EDP não-homogênea

$$N \frac{\partial V}{\partial x} + M \frac{\partial V}{\partial y} = V(\partial_x N + \partial_y M).$$

Do resultado 2, sabemos que  $\varphi_1 = zV(x, y)$  é solução para a 1EDP homogênea

$$N \frac{\partial \varphi}{\partial x} + M \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left( \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (172)$$

é claro que  $\varphi_1^n = z^n V^n$  constitui também solução para esta mesma EDP. Por hipótese do teorema  $V(x, y)$  é polinômio, assim,  $\tilde{\mathfrak{X}}(\varphi_1^n) = \tilde{\mathfrak{X}}(z^n V^n) = 0$ .  $\square$

Note que, para que não haja um fator integrante inverso polinomial, é necessário que ocorra um fator polinomial em comum nas expressões de  $Pol_{[x]}$  e  $Pol_{[y]}$  que não cancele nenhum dos fatores de  $B^2 \prod_j p_j$ , algo que poderíamos colocar como  $Pol_{[x]} = \rho pol_{[x]}$  e  $Pol_{[y]} = \rho pol_{[y]}$ , dessa forma

$$\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{\partial_x I}{\partial_y I} = -\frac{Pol_{[x]}}{Pol_{[y]}} = -\frac{\rho pol_{[x]}}{\rho pol_{[y]}} = -\frac{pol_{[x]}}{pol_{[y]}}.$$

Então  $\rho$  fará parte do fator integrante, de modo que

$$R = \frac{\rho}{B^2 \prod_j p_j} \implies V = \frac{1}{R} = \frac{B^2 \prod_j p_j}{\rho}$$

Podemos utilizar do resultado do teorema 5.2.1 para construir um algoritmo que nos possibilita encontrar fator integrante para uma 1EDO com solução geral elementar de forma bastante eficiente.

**Algoritmo  $LPS_1$ :**

1. Construa  $\mathfrak{X}$  e  $\tilde{\mathfrak{X}}$  a partir da 1EDO racional;
2. determine um grau (inicial) para o candidato à integral primeira polinomial e construa  $\mathcal{I}_c = z\mathcal{P}_c(x, y)$  polinomial com coeficientes  $a_i$  a determinar;
3. utilize de  $\mathfrak{X}(\mathcal{I}_c) = 0$  como condição a ser satisfeita, obtenha então o conjunto de equações **lineares** nos coeficientes  $a_i$ ;
4. encontre uma solução para as equações determinadas pela condição explicitada no passo anterior, substitua em  $\mathcal{I}_c$  para obter  $\mathcal{I}$  e, portanto, o fator integrante inverso  $V(x, y)$ .

Por aplicação dos passos que acabamos de listar no exemplo 5.2.1 teremos:

1.  $\mathfrak{X} = y^2(-63y^{10} + 51xy^7 - 7x^2y^4 + 9x^3)\partial_x + (3y^{10} + 18xy^6 - 9x^2y^3 + 2x^3)\partial_y,$   
 $\tilde{\mathfrak{X}} = y^2(-63y^{10} + 51xy^7 - 7x^2y^4 + 9x^3)\partial_x + (3y^{10} + 18xy^6 - 9x^2y^3 + 2x^3)\partial_y +$   
 $-zy^5(81y^4 - 14xy + 108x)\partial_z.$

2. Tomemos  $\mathcal{I}_c = z\mathcal{P}_c(x, y)$  com  $\deg(\mathcal{P}_c) = 13$ :

$$\mathcal{P}_c = a_{63}x^4y^6 + a_{64}x^4y^7 + a_{65}x^4y^8 + a_{66}x^4y^9 + a_{67}x^5y + a_{68}x^5y^2 + a_{69}x^6y^3 + a_{70}x^5y^4 + \dots + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + a_6x^5 + a_7x^6 + a_8x^7 + a_9x^8 + a_0.$$

Só explicitamos alguns termos, o número total de coeficientes  $a_i$  para uma configuração polinômial  $\mathcal{P}_c(x, y)$  genérica de grau 13 é 105.

3. As equações obtidas de  $\tilde{\mathfrak{X}}(\mathcal{I}_c) = 0$  são:

$$\{-108a_0, -81a_0, -756a_{13}, -108a_{13}, 108a_{13}, 531a_{13}, -819a_{14}, -108a_{14}, \dots, a_{88}, -18a_{93} - 54a_{102} + 126a_{44} - 7a_{41} + 22a_{31}\} = 0.$$

Novamente, apenas algumas delas, para este caso obtemos um total de 246 equações.

4. A solução do sistema é:

$$Sol = \{a_{40} = a_{40}, a_{26} = a_{35} = -\frac{3}{2}a_{40}, a_{30} = a_{40}, a_{36} = a_5 = -\frac{1}{6}a_{40}\}.$$

Os demais coeficientes são todos nulos pela imposição da condição do passo anterior. Substituindo então a solução obtida na expressão de  $\mathcal{P}_c(x, y)$  candidato, temos

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{6}a_{40}(y^7 + x^2)(-3y^3 + x)^2.$$

Portanto,  $V(x, y) = (y^7 + x^2)(-3y^3 + x)^2$  é um fator integrante inverso para a 1EDO (169), como era de se esperar.

**Observação 5.2.1.** Alguns comentários dignos de nota:

- O leitor talvez já tenha percebido que não fizemos menção de nenhum limite superior para o grau do polinômio  $\mathcal{I}$ . Assim, o procedimento  $(LPS_1)$  é, na verdade, um semi-algoritmo. No exemplo avaliado, o grau atribuído ( $\deg(\mathcal{P}_c) = 13$ ) é  $\max\{\deg_M, \deg_N\} + 1$ . Esse é (heurísticamente) um bom “chute”.
- O inteiro positivo  $n$  pode também ser intrigante a princípio. Na maioria dos casos,  $n = 1$ , contudo, quando temos uma solução geral elementar não Darbouxiana temos um fator integrante algébrico não-elementar, veja Prelle e Singer (1983). Considere, por exemplo, a seguinte 1ODE:

$$y' = -\frac{y^2(x^2y^4 + y^3x - 1)}{2x^3y^5 + x^2y^4 - 2yx + 1}. \quad (173)$$

Aplicando o procedimento com  $n = 1$ , não obtemos solução para nenhum grau de  $\mathcal{P}_c$ . Contudo fazendo  $n = 2$ , vamos obter:

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{3}a_{90} (xy^2 - 1)^3 (xy^2 + 1)^3 z^2 \Rightarrow V^2 = (xy^2 - 1)^3 (xy^2 + 1)^3,$$

e, portanto,  $V = \sqrt{(xy^2 - 1)^3 (xy^2 + 1)^3}$ .

- Uma grande vantagem do método está no fato de que, para a vasta maioria das 1ODEs racionais que possuem uma solução geral elementar, existe um fator integrante inverso polinomial (ou tal que  $V^n$  é polinomial). Deixando mais claro, ao contrário do que diz a nossa intuição, **o fator integrante inverso polinomial não é a exceção, mas sim a regra**. Além disso, dentre os casos excepcionais (isto é, que apresentam  $V$  racional) a maioria apresenta no denominador um polinômio de grau muito inferior relativamente ao grau do polinômio do numerador. Lembrando que esse denominador polinomial é (no caso mais geral possível) um produto de polinômios de Darboux ( $\prod p_l^{m_l}$ ), na maioria dos casos fica muito mais simples determiná-los (por exemplo, usando o algoritmo probabilístico de I. Deme, veja Deme (2023): Considere, por exemplo, a seguinte 1ODE:

$$y' = -\frac{y^2 (x^2 y^4 + y^3 x - 1)}{2 x^3 y^5 + x^2 y^4 - 2 y x + 1}. \quad (174)$$

Aplicando o nosso procedimento, não obtemos solução para nenhum grau de  $\mathcal{P}_c$ . Contudo, aplicando o algoritmo probabilístico descrito em Deme (2023), obtemos o polinômio de Darboux  $y + x$ . Aplicando o nosso procedimento à função racional, obtemos

$$\tilde{\mathfrak{X}}\left(\frac{\mathcal{I}_c}{y+x}\right) = 0 \Rightarrow V = \frac{(x^3 y + 2 x^2 y^2 + x y^3 - 1)^2}{y+x},$$

em tempo praticamente nulo (veja o capítulo 6, reservado às discussões sobre desempenho do algoritmo).

- Ainda em relação ao que foi observado no item anterior, podemos notar que o polinômio  $y + x$  seria facilmente encontrado também pelo procedimento ‘canônico’ (i.e., pelo método dos coeficientes indeterminados), uma vez que o polinômio tem grau 1.
- Outra característica muito vantajosa do nosso procedimento é que o seu funcionamento é, em certo sentido, completamente algébrico. Explicando melhor, seu sucesso depende das relações algébricas existentes entre integrais primeiras e fatores integrantes descobertas por Prelle e Singer. Dessa maneira, vamos ver, na próxima seção, como estender o nosso procedimento para lidar com 2ODEs racionais que admitam uma integral primeira elementar.

### 5.3 Um PS linear para 2ODEs racionais

Nesta seção vamos mostrar como estender para 2ODEs racionais o método linear que desenvolvemos para calcular fatores integrantes de 1ODEs racionais. Antes de descrever essa extensão, vamos lembrar que uma 2ODE racional (integrável) possui duas integrais primeiras funcionalmente independentes e, por esse motivo, o método estendido tem uma estrutura diferente para as duas classes de 2ODEs racionais que vamos tratar neste trabalho:

- 2ODEs racionais com uma integral primeira elementar e uma integral primeira não-Liouvilliana.
- 2ODEs racionais com duas integrais primeiras Liouvillianas, sendo uma delas elementar.

A diferença entre 1ODEs e 2ODEs racionais que impede uma extensão direta do procedimento descrito na seção anterior está ligada ao fato que, para 2ODEs, um fator integrante não é um multiplicador de Jacobi, ao passo que, para 1ODEs, esses conceitos coincidem. Por isso, nesta seção, os termos *fator integrante* e *multiplicador de Jacobi* vão estar relacionados a conceitos distintos.

#### 5.3.1 Alguns resultados e definições importantes

Vamos recapitular algumas ideias fundamentais do nosso trabalho introduzindo também uma notação mais conforme com a que se tem utilizado em desenvolvimentos mais recentes do nosso grupo. No que concerne às ideias já bem estabelecidas pelas discussões em capítulos anteriores seremos bastante breves.

Considere uma 2EDO racional

$$z' = \frac{M_0(x, y, z)}{N_0(x, y, z)} = \phi(x, y, z), \quad (z \equiv y'), \quad (175)$$

$M_0$  e  $N_0$  são polinômios coprimos em  $\mathbb{C}[x, y, z]$ . Uma integral primeira  $I$  da 2EDO (175) é função constante sobre as soluções de (175).

**Definição 5.3.1.** Seja  $L$  uma extensão Liouvilliana do corpo<sup>47</sup>  $\mathbb{C}[x, y, z]$ . Uma função  $I(x, y, z) \in L$  é considerada uma **Integral Primeira Liouvilliana** (IPL) da 2EDO raci-

---

<sup>47</sup> São apresentados alguns conceitos importantes no que diz respeito a uma extensão Liouvilliana em apêndice. Para maiores detalhes e especificações, veja também Davenport, Siret e Tournier (1993) e Davenport (2007).

onal (175) se  $\mathfrak{X}(I) = 0$ , onde  $\mathfrak{X} \equiv N_0\partial_x + zN_0\partial_y + M_0\partial_z$  é o **campo vetorial polinomial associado** (também chamado de **operador de Darboux associado**) com a 2EDO (175).

**Definição 5.3.2.** Seja  $p(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ . Diz-se que o polinômio  $p$  é um **polinômio de Darboux** (PD) do campo vetorial  $\mathfrak{X}$  se  $\mathfrak{X}(p) = qp$ , em que  $q$  é um polinômio em  $\mathbb{C}[x, y, z]$  que é chamado **cofator** de  $p$ .

**Definição 5.3.3.** Seja  $I(x, y, z)$  uma IPL da 2EDO (175) e considere que suas derivadas podem ser escritas como

$$\begin{aligned} I_x &= RQ, \\ I_y &= RP, \\ I_z &= RN, \end{aligned}$$

onde  $R$  é uma função Liouvillian de  $(x, y, z)$  e  $Q, P, N$  são polinômios coprimos em  $\mathbb{C}[x, y, z]$ . Então, dizemos que  $I$  é um membro do conjunto  $L_S$  e que  $R$  é um **fator integrante** associado a  $I$ .

Em referência agora à definição 4.1.1 convém estabelecer que:

**Definição 5.3.4.** Seja  $\gamma$  a 1-forma polinomial definida por  $\gamma \equiv Qdx + Pdy + Ndz$  onde  $Q, P, N$  são os polinômios coprimos em  $\mathbb{C}[x, y, z]$  definidos acima e seja  $\mathfrak{J}$  o campo vetorial definido por  $\mathfrak{J} \equiv Q\partial_x + P\partial_y + N\partial_z$ . Diz-se que uma função  $R$  é um **fator integrante** para a 1-forma  $\gamma$  se a 1-forma  $R\gamma$  for exata.

Alguns comentários:

**Observação 5.3.1.** Se a 2EDO (175) apresentar uma integral primeira Liouvillian  $I$  conforme descrito na definição 5.3.3 (ou seja,  $I \in L_S$ ), a função  $R$  (o fator integrante para a 2EDO (175) associado a  $I$ ) é um fator integrante para a 1-forma  $\gamma \equiv Qdx + Pdy + Ndz$  e podemos escrever o campo vetorial definido pelo gradiente de  $I$  como  $\nabla(I) = R\mathfrak{J}$ . Vamos usar a notação  $\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{J} \rangle$  significando  $\gamma(\mathfrak{J})$  (vide apêndice B).

**Observação 5.3.2.** Seja  $I \in L_S$  uma integral primeira da 2EDO racional (175) de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 5.3.3. Se o campo vetorial  $\mathfrak{J}$  for definido por  $\mathfrak{J} \equiv Q\partial_x + P\partial_y + N\partial_z$ , então a condição  $\mathfrak{X}(I) = 0$  é equivalente a  $\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{J} \rangle = N_0Q + zN_0P + M_0N = 0$ .

Não é difícil mostrar que o campo vetorial  $\mathfrak{J}$  pode ser usado para construir uma simetria para a 2EDO (175). Em analogia ao que apresentamos como corolário 4.2.2, podemos expressar, segundo consta em Deme, Duarte e Mota (2023), que:

**Teorema 5.3.1.** Seja  $I \in L_S$  uma integral primeira da 2EDO (175) de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 5.3.3. Então, a 2EDO (175) admite uma simetria dada por

$$\mathfrak{S} = e^{\int_x (-P/N)} \partial_y, \quad (176)$$

onde  $\int_x$  é o operador inverso de  $D_x$ , ou seja,  $\int_x D_x = D_x \int_x = \mathbf{1}$  ( $D_x \equiv \frac{x}{N_0}$ ).

**Demonstração:** Se  $\mathfrak{S} = e^{\int_x (-P/N)} \partial_y$  é uma simetria (na forma evolucionária) da 2EDO racional (175), então sua primeira extensão é dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{(1)} &= \nu \partial_y + D_x(\nu) \partial_z = e^{\int_x (-P/N)} \partial_y + e^{\int_x (-P/N)} D_x \left( \int_x (-P/N) \right) \partial_z = \\ &= e^{\int_x (-P/N)} (\partial_y - (P/N) \partial_z), \end{aligned}$$

e, portanto,  $\mathfrak{S}^{(1)}(I) = e^{\int_x (-P/N)} (I_y - (P/N) I_z)$ . Pela hipótese do teorema,  $I$  é uma integral primeira Liouvillianiana da 2EDO racional (175) tal que  $I_y = RP$  e  $I_z = RN$ . Então  $I_y - \frac{P}{N} I_z = RP - \frac{P}{N} RN = 0 \Rightarrow \mathfrak{S}^{(1)}(I) = 0$ .  $\square$

Portanto, a partir do campo vetorial  $\mathfrak{J}$  (ou melhor, de duas de suas componentes), podemos obter uma simetria. Em Deme, Duarte e Mota (2023), é construído um algoritmo muito eficiente para calcular uma simetria de uma 2ODE racional que admita uma integral primeira Liouvillianiana. O que vamos mostrar a seguir é que podemos usar essa simetria para encontrar um fator integrante para a 2EDO (175) (usando um procedimento linear) em um dos dois casos disjuntos que vamos tratar neste trabalho. Veremos que, no outro caso, ela (a simetria) não será necessária.

### 5.3.2 Uma integral primeira elementar e outra não-Liouvillianiana

Nesta seção vamos estender o procedimento  $LPS_1$  para 2ODEs em que apenas uma integral primeira é Liouvillianiana (elementar). Como já dito anteriormente, para 2ODEs, um fator integrante não é um multiplicador de Jacobi. No que segue, vamos estudar a relação entre o fator integrante e o multiplicador de Jacobi para mostrar como podemos aplicar a ideia contida no algoritmo  $LPS_1$ . Vamos começar apresentando alguns resultados:

**Teorema 5.3.2.** Seja  $I_1 \in L_S$  uma integral primeira da 2EDO (175) de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 5.3.3. Se (175) **não** admite outra função  $S$  racional (independente de  $S_1 \equiv I_{1y}/I_{1z}$ ), então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Qualquer outra integral primeira  $I_2$  da 2EDO (175) (funcionalmente independente) não está em  $L_S$ .
- (ii) A 2EDO (175) não admite um multiplicador de Jacobi de Darboux.

**Demonstração:** Considere que as hipóteses do teorema são satisfeitas. Então, existem duas simetrias que podem ser escritas (na forma evolucionária) como:

$$\mathfrak{S}_1 = \nu_1 \partial_y \Rightarrow \mathfrak{S}_1^{(1)} = \nu_1 \partial_y + D_x(\nu_1) \partial_z,$$

$$\mathfrak{S}_2 = \nu_2 \partial_y \Rightarrow \mathfrak{S}_2^{(1)} = \nu_2 \partial_y + D_x(\nu_2) \partial_z,$$

tais que  $D_x(I_1) = 0$ ,  $\mathfrak{S}_1^{(1)}(I_1) = 0$ ,  $\mathfrak{S}_2^{(1)}(I_1) = 1$ ,  $D_x(I_2) = 0$ ,  $\mathfrak{S}_1^{(1)}(I_2) = 1$ ,  $\mathfrak{S}_2^{(1)}(I_2) = 0$ , ou seja,

$$I_{1x} + z I_{1y} + \phi I_{1z} = 0, \quad (D_x(I_1) = 0) \quad (177)$$

$$\nu_1 I_{1y} + D_x(\nu_1) I_{1z} = 0, \quad (\mathfrak{S}_1^{(1)}(I_1) = 0) \quad (178)$$

$$\nu_2 I_{1y} + D_x(\nu_2) I_{1z} = 1, \quad (\mathfrak{S}_2^{(1)}(I_1) = 1) \quad (179)$$

$$I_{2x} + z I_{2y} + \phi I_{2z} = 0, \quad (D_x(I_2) = 0) \quad (180)$$

$$\nu_1 I_{2y} + D_x(\nu_1) I_{2z} = 1, \quad (\mathfrak{S}_1^{(1)}(I_2) = 1) \quad (181)$$

$$\nu_2 I_{2y} + D_x(\nu_2) I_{2z} = 0. \quad (\mathfrak{S}_2^{(1)}(I_2) = 0) \quad (182)$$

Além disso<sup>48</sup>,

$$S_1 = -\frac{D_x(\nu_1)}{\nu_1} \left( = \frac{I_{1y}}{I_{1z}} \right), \quad R_1 = -I_{1z}, \quad (183)$$

$$S_2 = -\frac{D_x(\nu_2)}{\nu_2} \left( = \frac{I_{2y}}{I_{2z}} \right), \quad R_2 = -I_{2z}, \quad (184)$$

portanto (em analogia à equação (139) do capítulo anterior),

$$\frac{D_x(R_1)}{R_1} = -(S_1 + \phi_z), \quad (185)$$

$$\frac{D_x(R_2)}{R_2} = -(S_2 + \phi_z). \quad (186)$$

Resolvendo as equações (178) e (179) para  $I_{1y}$  e  $I_{1z}$ , obtemos

$$I_{1y} = \frac{-D_x(\nu_1)}{\nu_1 D_x(\nu_2) - \nu_2 D_x(\nu_1)}, \quad I_{1z} = \frac{\nu_1}{\nu_1 D_x(\nu_2) - \nu_2 D_x(\nu_1)}.$$

Resolvendo as equações (181) e (182) para  $I_{2y}$  e  $I_{2z}$ , obtemos

$$I_{2y} = \frac{-\nu_2}{\nu_1 D_x(\nu_2) - \nu_2 D_x(\nu_1)}, \quad I_{2z} = \frac{D_x(\nu_2)}{\nu_1 D_x(\nu_2) - \nu_2 D_x(\nu_1)}.$$

---

<sup>48</sup> Note que  $R_1$  e  $R_2$  são fatores integrantes para o campo vetorial  $D_x$  (veja o capítulo sobre a função S).

Resolvendo as equações (178) e (181) para  $\nu_1$  e as equações (179) e (182) para  $\nu_2$ , obtemos

$$\nu_1 = \frac{-I_{1z}}{I_{1y}I_{2z} - I_{1z}I_{2y}}, \quad \nu_2 = \frac{I_{2z}}{I_{1y}I_{2z} - I_{1z}I_{2y}}. \quad (187)$$

Das equações (185) e (186), temos:

$$\begin{aligned} \frac{D_x(R_1)}{R_1} &= \frac{D_x(\nu_1)}{\nu_1} + \frac{D_x(J_1)}{J_1} \Rightarrow \frac{R_1}{\nu_1} = J_1, \\ \frac{D_x(R_2)}{R_2} &= \frac{D_x(\nu_2)}{\nu_2} + \frac{D_x(J_2)}{J_2} \Rightarrow \frac{R_2}{\nu_2} = J_2. \end{aligned}$$

Estabelecidas essas relações, podemos provar o teorema. Vamos provar (i): Pelas hipóteses do teorema,  $I_1 \in L_S$  e, portanto, como sabemos<sup>49</sup>, a 2EDO (175) apresenta uma função S racional ( $S_1$ ) associada à  $I_1$ . Portanto, se a 2EDO apresentasse uma outra integral primeira (independente de  $I_1$ )  $I_2 \in L_S$  então ela forçosamente apresentaria uma outra função S racional ( $S_2$ , diferente de  $S_1$ ) associada à  $I_2$ . Contudo, isso contrariaria a hipótese do teorema que supõe que não existe outra função S racional. Isto prova (i).

Agora, vamos provar (ii): Usando a equação (187) para  $\nu_1$  e  $\nu_2$  e dividindo o numerador e o denominador por  $I_{1z}I_{2z}$  e, levando em conta as equações (183) e (184), temos

$$\nu_1 = \frac{1}{R_2(S_1 - S_2)}, \quad \nu_2 = \frac{1}{R_1(S_1 - S_2)} \quad (188)$$

Do Teorema 3.2 em (Deme; Duarte; Mota, 2023), temos que como  $I_1 \in L_S$ , existe  $R_1$  de Darboux e, além disso, como  $I_2 \notin L_S$ , não existe  $R_2$  de Darboux. Assim, da equação (188) para  $\nu_1$ , podemos concluir que não existe  $\nu_1$  de Darboux. Como  $J_1 = \frac{R_1}{\nu_1}$  temos que  $J_1$  não é de Darboux. Como qualquer outro  $J$  pode ser escrito como  $J = J_1 I$ , onde  $I$  é qualquer integral primeira da 2ODE, concluimos que não existe  $J$  de Darboux.  $\square$

**Teorema 5.3.3.** Seja  $I \in L_S$  uma integral primeira da 2EDO (175) de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 5.3.3 e seja  $\mathfrak{X}$  o campo vetorial associado. Além disso, considere que os polinômios  $N$  e  $Q + zP$  são coprimos. Então, existe um fator integrante  $R$  de Darboux tal que  $\mathfrak{X}(R) = -R(\langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle + P)$ .

**Demonstração:** Veja Deme, Duarte e Mota (2023).

**Observação 5.3.3.** A ausência de um multiplicador de Jacobi de Darboux impede a aplicação direta da ideia central por trás da construção do algoritmo  $LPS_1$  (o Teorema 5.2.1). Contudo, como o fator integrante é de Darboux, podemos construir um procedimento análogo.

<sup>49</sup> Também em vista do Teorema 2.1 enunciado em (Deme; Duarte; Mota, 2023).

**Exemplo 5.3.1.** Considere a 2EDO racional

$$y'' = -\frac{z(2xy^4z^2 + 2x^2yz^3 - y^4z^2 + 4x^2y^2z - 2xy^2z - 2y^2z^2 + 2x^3 + x^2z - x^2 - y)}{x(xy^4z^2 + 2x^2y^2z + x^3 - x^2z + y)}. \quad (189)$$

Uma integral primeira é dada por

$$I(x, y, z) = \frac{e^{\frac{z}{zy^2+x}}}{(x^2z - y)},$$

que não é tão simples de ser encontrada pois os polinômios de Darboux no fator integrante têm grau 3, o que já representa grande dificuldade operacional em caso de três variáveis (grau 2 já seria problemático),

$$R(x, y, z) = -\frac{e^{\frac{z}{zy^2+x}}}{(zy^2 + x)^2(x^2z - y)^2}.$$

Contudo,  $\bar{R} = R/I$  também é um fator integrante

$$\bar{R}(x, y, z) = -\frac{1}{(zy^2 + x)^2(x^2z - y)},$$

portanto, há um fator integrante inverso polinomial

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\bar{R}} = -(zy^2 + x)^2(x^2z - y).$$

A partir deste ponto podemos notar a diferença estrutural entre o procedimento a ser aplicado às 1EDO's racionais e o procedimento a ser aplicado às 2EDO's racionais: neste último caso, referente às 2EDO's, sabemos que  $R$  não é um multiplicador de Jacobi, assim, como já assinalamos no enunciado do teorema 5.3.3,  $\mathfrak{X}(R) = -R(\langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle + P)$ . É necessário portanto determinarmos o polinômio  $P$ , parte da simetria  $\mathfrak{S} = e^{\int_x (-P/N)} \partial_y$ , onde  $P/N$  é a função  $S$  associada à integral primeira  $I(x, yz)$ . Temos que

$$S = \frac{I_y}{I_z} = \frac{2x^2yz^3 - y^4z^2 - 2xy^2z - 2y^2z^2 - x^2}{x(xy^4z^2 + 2x^2y^2z + x^3 - x^2z + y)},$$

logo,  $P = 2x^2yz^3 - y^4z^2 - 2xy^2z - 2y^2z^2 - x^2$ . Com isso, podemos construir a seguinte 1EDP homogênea em quatro variáveis (de modo análogo ao que foi feito no exemplo 5.2.1):

$$N_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + z N_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + M_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - w(\langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle + P) \frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0, \quad (190)$$

com soluções

$$\varphi_0 = I(x, y, z) = \frac{e^{\frac{z}{zy^2+x}}}{(x^2z - y)} \quad \text{e} \quad \varphi_1 = wV(x, y, z) = -w(zy^2 + x)^2(x^2z - y).$$

Podemos então enunciar

**Teorema 5.3.4.** Seja  $I \in L_S$  uma integral primeira elementar da 2EDO (175) de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 5.3.3 e seja  $\mathfrak{X}$  o campo vetorial associado. Além disso, considere que os polinômios  $N$  e  $Q + zP$  são coprimos. Se  $\mathfrak{X}$  apresenta um fator integrante inverso  $V$  tal que  $V^n \in \mathbb{C}[x, y, z]$ , então o campo vetorial polinomial  $\tilde{\mathfrak{X}} \equiv \mathfrak{X} - w(\langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle + P)\partial_w$  admite uma integral primeira polinomial  $\mathcal{I} = w^n H(x, y, z)$ , onde  $H \in \mathbb{C}[x, y, z]$  é da forma  $\prod_j p_j^{k_j}$ , os  $p_j$  são polinômios de Darboux de  $\mathfrak{X}$  e  $k_j$ ,  $n$  são inteiros positivos.

**Demonstração:** análoga à demonstração do teorema 5.2.1.

Podemos utilizar da informação contida no teorema 5.3.4 para construir um algoritmo similar ao  $LPS_1$ :

**Procedure 2 (sketch):** ( $LPS_2$ )

1. Use o procedimento  $NLS_{2I}$  (veja Deme, Duarte e Mota (2023)) para determinar  $S = P/N$ .
2. Construa os campos vetoriais  $\mathfrak{X}$  e  $\tilde{\mathfrak{X}}$  a partir da 2ODE racional.
3. Determine um grau (initial) para o candidato à integral primeira polinomial e construa um polinômio  $\mathcal{I}_c = w \mathcal{P}_c(x, y, z)$  com coeficientes indeterminados  $a_i$ .
4. Aplique o operador  $\tilde{\mathfrak{X}}$  a  $\mathcal{I}_c$  e exija que o polinômio obtido seja nulo. Colete a equação polinomial obtida a partir de  $\tilde{\mathfrak{X}}(\mathcal{I}_c) = 0$  nas variáveis  $(x, y, z, w)$  obtendo um conjunto  $Eq_L$  de equações **lineares** para os coeficientes indeterminados  $a_i$ .
5. Resolva este conjunto de equações e substitua a solução no candidato  $\mathcal{I}_c$  para obter  $\mathcal{I}$  e, portanto, o fator integrante inverso  $V$ .

**Exemplo 5.3.2. Aplicação do algoritmo  $LPS_2$ :**

Considere a 2ODE do exemplo 5.3.1 e vamos aplicar o algoritmo  $LPS_2$  (vamos apenas mostrar o resultado de cada passo).

1. O procedimento  $NLS_{2I}$  (veja Deme, Duarte e Mota (2023)) determina  $P = 2x^2yz^3 - y^4z^2 - 2xy^2z - 2y^2z^2 - x^2$ .
2. A única parte não trivial da construção dos campos  $\mathfrak{X}$  e  $\tilde{\mathfrak{X}}$  é o termo  $(\langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle + P)$ , uma vez que o polinômio  $P$  não podia ser extraído diretamente da 2ODE. A partir do passo 1, podemos computar  $N_{0x} + zN_{0y} + M_{0z} + P$  como
$$4x^2y^3z^3 - 4xy^4z^2 + 4x^3yz^2 - 6x^2yz^3 + 2y^4z^2 - 2x^2y^2z + 2xy^2z + 4y^2z^2 + 2x^3 - 5x^2z + zx + 2y.$$
3. Construimos  $\mathcal{I}_c = w\mathcal{P}_c(x, y, z)$  com  $\deg_{\mathcal{P}_c} = 9$ .  $\mathcal{P}_c$  tem 220 coeficientes indeterminados.
4. As equações para os coeficientes indeterminados  $a_i$  são 743.
5. As soluções não nulas são:

$Sol = \{a_{159} = -a_{175}, a_{175} = a_{175}, a_{202} = -1/2 a_{175}, a_{29} = 1/2 a_{175}, a_{70} = -1/2 a_{175}, a_{91} = 1/2 a_{175}\}$ . Substituindo em  $\mathcal{I}_c$  obtemos  $-\frac{1}{2} a_{175} w (x^2z - y)(zy^2 + x)^2$ .

Logo,  $V = (x^2z - y)(zy^2 + x)^2$  é um fator integrante inverso para a 2ODE (189).

#### Observação 5.3.4. Mais alguns comentários dignos de nota:

- Assim como  $LPS_1$ , o algoritmo  $LPS_2$  é, também, um semi-algoritmo. No exemplo mostrado, o grau escolhido ( $\deg_{\mathcal{P}_c} = 9$ ) é  $\max\{\deg_{M_0}, \deg_{N_0}\} + 1$ . O ‘chute heurístico’ continua valendo para 2ODEs.
- Analogamente ao que acontece para 1ODEs, também para 2ODEs racionais com apenas uma integral primeira Liouvillian (elementar), a vasta maioria apresenta um fator integrante inverso polinomial (ou tal que  $V^n$  é polinomial). Além disso, dentre os casos excepcionais (isto é, que apresentam  $V$  racional) a grande maioria apresenta no denominador um polinômio de grau muito inferior relativamente ao grau do polinômio do numerador sendo, portanto, muito mais simples determiná-los.
- Uma outra vantagem do nosso método (além da possibilidade de generalização) é que sua implementação computacional é bem mais simples do que a que necessitamos em outros métodos.

#### 5.3.3 Uma integral primeira elementar e outra Liouvillian

Nesta seção vamos estender o procedimento  $LPS_1$  para 2ODEs com uma integral primeira elementar e outra Liouvillian. O motivo desta distinção com o caso anterior é

que, nesta situação, em geral é mais complicado obter a simetria (uma vez que  $N_0 \neq N$ ). Na verdade, se a simetria for determinada, podemos utilizar o procedimento  $LPS_2$  da mesma maneira que na seção 5.3.2. O ponto aqui é mostrar que, em um grande número de casos, existe (em geral) um multiplicador de Jacobi inverso polinomial e, nesses casos, vamos conseguir determinar a integral primeira com um algoritmo linear (e, portanto, muito eficiente) sem precisar recorrer à simetria. Vamos começar apresentando o seguinte resultado:

**Teorema 5.3.5.** Considere que a 2EDO (175) admite duas integrais primeiras (independentes) em  $L_S$ . Então existem duas integrais primeiras (independentes)  $I_1$  e  $I_2$  em  $L_S$  tais que as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Existem duas simetrias  $\mathfrak{S}_1$  e  $\mathfrak{S}_2$  na forma evolucionária dadas por

$$\mathfrak{S}_1 = \nu_1 \partial_y \Rightarrow \mathfrak{S}_1^{(1)} = \nu_1 \partial_y + D_x(\nu_1) \partial_z, \quad (191)$$

$$\mathfrak{S}_2 = \nu_2 \partial_y \Rightarrow \mathfrak{S}_2^{(1)} = \nu_2 \partial_y + D_x(\nu_2) \partial_z, \quad (192)$$

tais que  $\nu_1 \equiv e^{\int_x (-P_1/N_1)} \partial_y$  e  $\nu_2 \equiv e^{\int_x (-P_2/N_2)} \partial_y$  são de Darboux ( $P_i = I_{iy}/\mathcal{R}_i$ ,  $N_i = I_{iz}/\mathcal{R}_i$  são polinômios em  $\mathbb{C}[x, y, z]$ , os  $\mathcal{R}_i$  são fatores integrantes associados às  $I_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ).

2. Existem fatores integrantes  $R_1$  e  $R_2$  de Darboux associados às integrais primeiras  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente, tais que  $R_1/\nu_1 = R_2/\nu_2$ .
3. Considere que uma das integrais primeiras (digamos  $I_1$ ) é de Darboux. Se os fatores exponenciais de  $R_1$  e  $R_2$  coincidem então existe um multiplicador de Jacobi  $J$  algébrico tal que  $J^n$  para algum inteiro positivo  $n$  é racional.

### Demonstração:

- (1.) Segue diretamente da Definição 5.3.3 e do Teorema 5.3.1.

(2.) Se as hipóteses se verificam ( $I_1, I_2 \in L_S$ ), então existem (pelo teorema 3.2 de Deme, Duarte e Mota (2023)) dois fatores integrantes  $R_1$  e  $R_2$  de Darboux. Das equações (188) temos  $\nu_1 = \frac{1}{R_2(S_1 - S_2)}$  e  $\nu_2 = \frac{1}{R_1(S_1 - S_2)}$  e, portanto,  $R_2 \nu_1 = R_1 \nu_2$ .

(3.) Das equações (188) temos  $\nu_1 R_2 = (S_1 - S_2)$  e  $\nu_2 R_1 = (S_1 - S_2)$ . Como  $I_1, I_2 \in L_S$  então  $S_1, S_2 \in \mathbb{C}(x, y, z)$  (i.e., são funções racionais de  $(x, y, z)$ ) e, portanto os fatores exponenciais de  $\nu_1$  e  $R_2$  são inversos, assim como os de  $\nu_2$  e  $R_1$ . Podemos então, escrever:

$$R_1 = e^{Z_1} \P_1, \quad \nu_2 = e^{-Z_1} \P_3, \quad R_2 = e^{Z_2} \P_2, \quad \nu_1 = e^{-Z_2} \P_4, \quad (193)$$

onde os  $Z_i$  são funções racionais e os  $\P_i$  são funções algébricas tais que para algum inteiro positivo  $n$  temos que  $\P_i^n$  é uma função racional. Da hipótese que os fatores exponenciais de  $R_1$  e  $R_2$  coincidem,  $Z_2 = Z_1$ , levando a  $J_1 = R_1/\nu_1 = e^{2Z_1} \P_1/\P_4$ . Uma vez que  $I_1$  é de Darboux ( $I_1 = e^{Z_1} \P_1$ ) e que um multiplicador de Jacobi dividido

por qualquer função de um invariante é também um multiplicador de Jacobi, podemos escrever  $J \equiv J_1/I_1^2 = \frac{\P_1}{\P_4 \P_1}$ .  $\square$

**Corolário 5.3.1.**  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são de Darboux.

**Demonstração:** Segue diretamente da demonstração da afirmação (2.).

**Exemplo 5.3.3.** Considere a 2ODE racional

$$y'' = \frac{(z-1)^2 (x^5 z - 2x^4 y z + x^3 y^2 z - x^5 + 2x^4 y - x^3 y^2 + 3x^3 - 6x^2 y + x^2 z + 3x y^2 - x^2 + 1)}{(x-y)^2}. \quad (194)$$

Temos que

$$I_1 = \frac{(x^4 z - 2x^3 y z + x^2 y^2 z - x^4 + 2x^3 y - x^2 y^2 + 2x^2 z - 2x y z - x^2 + x z + y^2 - x + 2z - 2)}{e^{\frac{1}{x-y}} (x^2 z - x^2 + 1)},$$

$$I_2 = Ei \left( 1, \frac{1}{x-y} \right) - \frac{(x^3 z - x^2 y z - x^3 + x^2 y + x z - y)}{e^{\frac{1}{x-y}} (x^2 z - x^2 + 1)},$$

são integrais primeiras Liouvillianas da 2ODE (194). Essas integrais **não são facilmente obtidas** pois os fatores integrantes são

$$R_1 = -\frac{(2x^2 - 2xy + x + 2)}{e^{\frac{1}{x-y}} (x^2 z - x^2 + 1)^2},$$

$$R_2 = \frac{x}{e^{\frac{1}{x-y}} (x^2 z - x^2 + 1)^2},$$

e as simetrias são

$$\nu_1 = \frac{(2x^2 - 2xy + x + 2)(x^2 z - x^2 + 1)}{2e^{\frac{-1}{x-y}}},$$

$$\nu_2 = -\frac{x(x^2 z - x^2 + 1)}{2e^{\frac{-1}{x-y}}}.$$

Contudo, como vimos, temos que

$$J_1 = \frac{R_1}{\nu_1} = \frac{-2}{e^{\frac{2}{x-y}} (x^2 z - x^2 + 1)^3} \quad (195)$$

é um multiplicador de Jacobi para a 2ODE (194) e, portanto,  $J = \frac{J_1}{2I_1^2}$  também é. Assim

$V_J = 1/J$  é um multiplicador de Jacobi inverso polinomial:

$$(x^2z - x^2 + 1) \left( x^4z - 2x^3yz + x^2y^2z - x^4 + 2x^3y - x^2y^2 + 2x^2z - 2xyz - x^2 + xz + y^2 - x + 2z - 2 \right)^2. \quad (196)$$

Podemos então, enunciar:

**Teorema 5.3.6.** Sejam  $I_1, I_2 \in L_S$  duas integrais primeiras Liouvillianas da 2EDO (175) de modo que suas derivadas sejam escritas como na definição 5.3.3 e seja  $D_x$  o campo vetorial de Cartan associado. Se a 2EDO (175) apresenta um multiplicador de Jacobi inverso  $V$  tal que  $V^n \in \mathbb{C}[x, y, z]$ , então o campo vetorial  $\tilde{\mathfrak{X}} \equiv D_x - w \langle \nabla, D_x \rangle \partial_w$  admite uma integral primeira polinomial  $\mathcal{I} = w^n H(x, y, z)$ , onde  $H \in \mathbb{C}[x, y, z]$  é da forma  $\prod_j p_j^{k_j}$ , os  $p_j$  são polinômios de Darboux de  $\mathfrak{X} \equiv N_0 D_x$  e  $k_j, n$  são inteiros positivos.

**Demonstração:** É análoga à demonstração do Teorema 5.3.4.

Podemos usar a informação contida no enunciado deste último teorema para construir um algoritmo análogo ao  $LPS_2$ :

**Procedure 3 (sketch):** ( $LPS_3$ )

1. Construa os campos vetoriais  $D_x$  e  $\tilde{\mathfrak{X}} \equiv D_x - w \langle \nabla, D_x \rangle \partial_w$ .
2. Determine um grau (initial) para o candidato à integral primeira polinomial e construa um polinômio  $\mathcal{I}_c = w \mathcal{P}_c(x, y, z)$  com coeficientes indeterminados  $a_i$ .
3. Aplique o campo  $\tilde{\mathfrak{X}}$  a  $\mathcal{I}_c$  e exija que o polinômio obtido seja nulo. Colete a equação polinomial obtida a partir de  $\tilde{\mathfrak{X}}(\mathcal{I}_c) = 0$  nas variáveis  $(x, y, z, w)$  obtendo um conjunto  $Eq_L$  de equações **lineares** para os coeficientes indeterminados  $a_i$ .
4. Resolva este conjunto de equações e substitua a solução no candidato  $\mathcal{I}_c$  para obter  $\mathcal{I}$  e, portanto, o multiplicador de Jacobi inverso  $V$ .

**Exemplo 5.3.4. Aplicação do algoritmo  $LPS_3$ :** Considere a 2ODE do exemplo 5.3.3 e vamos aplicar o algoritmo  $LPS_3$  (vamos pular os itens triviais).

1. Construimos  $\mathcal{I}_c = w \mathcal{P}_c(x, y, z)$  com  $\deg_{\mathcal{P}_c} = 13$ .  $\mathcal{P}_c$  tem 560 coeficientes indeterminados.
2. As equações para os coeficientes indeterminados  $a_i$  são 1455.
3. Substituindo a solução do sistema de indeterminados em  $\mathcal{I}_c$  obtemos  $V = \frac{w}{4} a_{405} (x^2z - x^2 + 1) (x^4z - 2x^3yz + x^2y^2z - x^4 + 2x^3y - x^2y^2 + 2x^2z - 2xyz - x^2 + xz + y^2 - x + 2z - 2)^2$ .

**Observação 5.3.5. Mais alguns comentários pertinentes:**

- Assim como  $LPS_1$  e  $LPS_2$ , o algoritmo  $LPS_3$  é, também, um semi-algoritmo.
- No exemplo mostrado, o grau escolhido foi  $\deg_{\mathcal{P}_c}=13$ . Ao contrário dos exemplos anteriores, não temos uma ideia prévia do grau a ser escolhido. Esse fato não é um problema nos casos menos ‘monstruosos’, uma vez que para o exemplo 5.3.4, o algoritmo resolve o sistema de 1455 equações para os coeficientes indeterminados  $a_i$  em  $\approx 0,3$  segundos<sup>50</sup>.
- Analogamente, também neste caso (i.e., 2ODEs racionais com duas integrais primeiras Liouvillianas sendo uma de Darboux), a vasta maioria apresenta um multiplicador de Jacobi inverso polinomial (ou tal que  $V^n$  é polinomial). E também, dentre os casos excepcionais (isto é, que apresentam  $V$  racional) a grande maioria apresenta no denominador um polinômio de grau muito inferior relativamente ao grau do polinômio do numerador, sendo muito mais simples determiná-los.
- A implementação computacional deste algoritmo é ainda mais simples que a do outro subcaso.

---

<sup>50</sup> Os cálculos para obtenção dos resultados apresentados nos exemplos deste capítulo e do capítulo que segue foram realizados na versão 17 do Maple, em um notebook intel I5 processor - 4GB.

## 6 DESEMPENHO

Neste capítulo final iremos apresentar algumas discussões breves sobre a eficiência dos métodos aqui desenvolvidos. Este tipo de discussão tem como característica uma certa “monolateralidade”, ou seja, é muito difícil comparar os algoritmos que desenvolvemos aqui com outros métodos já existentes, uma vez que cada método é, em geral, estabelecido para lidar com um (ou mais) tipos de situações distintas e, além disso (em geral) a “intersecção” destes diferentes tipos de situação não é muito trivial. Em outras palavras, é muito comum encontrarmos métodos altamente eficientes para lidar com determinados tipos de 2ODE’s racionais, porém pouco úteis para outros tipos destas. Dessa forma, abordagens muito generalistas (como a que fora proposta aqui) não podem ser comparadas de uma forma relativamente justa, devido à grande abrangência dos métodos, ou seja, é muito difícil construir uma “arena de testes” honesta – uma arena que disponha de um conjunto de 2ODEs que apresente desafios “equivalentes” para métodos que sejam muito díspares. Ainda mais quando (como é o nosso caso) os construtores da arena conhecem os “pontos fortes” e as “fraquezas” dos métodos.

Assim, dividimos a nossa análise em duas partes:

- Na primeira, o que fizemos foi construir apenas dois exemplos (uma 1ODE e uma 2ODE) que, acreditamos, seriam difíceis para qualquer método existente (por apresentarem simetrias e fatores integrantes complicados) e dentro do conjunto de 2ODEs racionais que os nossos algoritmos foram desenhados para atacar<sup>51</sup>.
- Na segunda parte, aplicamos o nosso algoritmo a um oscilador não-linear muito importante, cuja 2ODE depende de parâmetros e mostramos que os nossos procedimentos podem ser usados como ferramentas de pesquisa muito úteis pois, além de determinar fatores integrantes, podem também ser usados para descobrir valores do espaço dos parâmetros para os quais a 2ODE trabalhada apresenta integrais primeiras Liouvillianas.

### 6.1 Duas ODEs “difíceis”

Considere as seguintes ODEs:

$$y' = \frac{y(x^3y^4 - 7x^2y^5 + 12xy^6 - 4y^7 - 2x + y)}{x^4y^4 - 4x^3y^5 - 6x^2y^6 + 32xy^7 - 24y^8 + x^2 - 2yx + 6y^2}, \quad (197)$$

---

<sup>51</sup> Poderíamos gerar milhares dessas 2ODEs, mas seria uma construção bastante artificial no sentido explicado acima.

$$y'' = -\frac{3x^8y^2z^3 - 6x^4y^3z^4 + 3z^5y^4 + x^8 + 4x^3y^3z^2 - z^4y^3 - 2x^4yz + 4x^4 + z^2y^2 - xz^2}{y(2x^8y^2z - 4x^4y^3z^2 + 2z^3y^4 - z^2y^3 - x)}. \quad (198)$$

Os respectivos fatores integrantes são

$$\frac{1}{(xy^2 - 2y^3 + 1)^{3/2}(xy^2 - 2y^3 - 1)^{3/2}}, \quad (199)$$

$$\frac{1}{(x^4 - yz)^2(y^3z^2 + x)}, \quad (200)$$

e colocamos o resultado da análise dos tempos de CPU e gastos de memória dos nossos algoritmos na tabela abaixo:

Tabela 2 - Dados importantes para análise de desempenho dos métodos desenvolvidos.

| ODE | Coefficientes | Equações | Memória (MB) | Tempo (seg) |
|-----|---------------|----------|--------------|-------------|
| 197 | 190           | 323      | 16           | 0,047       |
| 198 | 560           | 2237     | 19           | 0,110       |

Legenda: Listagem com número de coeficientes indeterminados, número de equações do sistema a ser resolvido, bem como, memória consumida e tempo gasto na execução dos passos estabelecidos em implementações computacionais dos algoritmos desenvolvidos (aplicadas às equações diferenciais 197 e 198).

Fonte: O autor, 2024.

## 6.2 A equação de Duffing-van der Pol

Equações que descrevem osciladores não-lineares são de grande importância em diversos contextos, incluindo modelagem de sistemas físicos, químicos ou mesmo biológicos. A chamada equação de Duffing van-der Pol possui uma forma muito semelhante à própria equação (3) de van-der Pol, que apresentamos no capítulo inicial, mas possui um termo adicional de não-linearidade cúbica. Em uma forma genérica, escrevemos

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta x^2)\dot{x} + \gamma x + \delta x^3 = f \cos(\omega t). \quad (201)$$

Uma equação diferencial não linear que descreve um comportamento de oscilador mecâ-

nico forçado. Vamos tomar uma forma particular desta, considerando-a em sua forma autônoma e homogênea, reexpressando agora  $x$  como  $y$  (atente-se para o fato de que estamos apenas denotando a variável dependente por um outro símbolo, não correspondendo aos casos em que nos utilizávamos de  $y = \dot{x}$ ).

$$y'' + \left( by^2 - \frac{b^2c - 9}{3b} \right) y' - cy + y^3 = 0. \quad (202)$$

Sendo direta a verificação de uma relação

$$\alpha = -\frac{cb^2 - 9}{3b} \quad (203)$$

entre os parâmetros, com  $b = \beta$  e  $c = -\gamma$ , além também de  $\delta = 1$  e  $f = 0$  (versão homogênea e autônoma). Para esta equação, encontramos a função  $S$

$$S = -\frac{b}{3} (-3y^2 + c) \quad (204)$$

Construindo o operador  $\tilde{\mathfrak{X}} = N_0, \partial_x + z N_0, \partial_y + M_0 \partial_z - w (\langle \nabla, \mathfrak{X} \rangle + P) \partial_w$  e procurando um invariante polinomial obtemos o fator integrante

$$R = \frac{b}{(-by^3 + bcy - 3z)}, \quad (205)$$

que contem um polinômio de Darboux de grau 3 (em  $\approx 0$  segundos).

Aqui fica evidente uma característica positiva do método, que, embora não tão “impressionante”, não é de pouca importância, sendo constituída pelo seguinte fato: podemos buscar casos integráveis quando estivermos interessados em 2EDO's que apresentam parâmetros.

### 6.3 Alguns comentários adicionais

1. Os procedimentos  $LPS_1$ ,  $LPS_2$  e  $LPS_3$  são semi-algoritmos. Apenas para lembrar, isso quer dizer que não temos como determinar, a priori, o grau máximo do polinômio  $V^n$  (onde  $V$  é um fator integrante inverso).
2. Também não podemos usar os procedimentos  $LPS_i$  (diretamente) quando  $V^n$  não for um polinômio (i.e., quando  $V^n$  for racional).
3. Os problemas levantados nos itens 1 e 2 não representam grandes dificuldades, uma vez que:

- Em relação ao item 1: os procedimentos  $LPS_i$  são lineares e, dessa maneira, podemos testar graus muito elevados antes de um impedimento prático.
  - Em relação ao item 2: como já foi mencionado anteriormente, o caso polinomial é a regra e não a exceção. Além disso, quando  $V^n$  é racional, em geral o denominador é um polinômio de grau muito menor que o numerador, sendo na maioria dos casos muito mais simples de determinar
4. Uma grande vantagem do método consiste em sua estrutura linear. Esse fato faz com que a eficiência dos procedimentos seja alta (veja o início desta seção) em comparação aos métodos tradicionais (o Maple não consegue resolver nenhum dos exemplos apresentados).
  5. Outra vantagem decorre do fato que (ao contrário do que poderíamos esperar intuitivamente), no caso geral,  $V^n$  é um polinômio. Em outras palavras, o método (além de muito eficiente) é também muito abrangente.
  6. Uma terceira vantagem consiste na simplicidade de uma possível implementação computacional.
  7. Além dessas características positivas, existem outras duas vantagens não menos importantes, uma delas, mencionada ao final do último exemplo apresentado, diz respeito às 2EDO's com parâmetros, como foi dito, existe a possibilidade de determinarmos regiões no espaço dos parâmetros para as quais a 2EDO em questão admite integrais primeiras, isto, devido à natureza algébrica do método. A segunda e última vantagem a ser mencionada é que a ideia central do método é, em um amplo sentido, independente da ordem da EDO, dessa forma, podemos pensar em outras extensões (além da que foi apresentada para 2EDOs).

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os trabalhos de Gaston Darboux ao final do século XIX deram início aos desdobramentos de uma teoria (conhecida como teoria da integrabilidade de Darboux) fundamentada na ideia de hipersuperfícies algébricas invariantes de campos vetoriais polinomiais, também chamados de polinômios de Darboux dos campos associados aos sistemas diferenciais polinomiais por ele estudados. Foi mostrado, em Darboux (1878a), que se um campo  $\mathfrak{X}$  possui pelo menos  $\binom{n+d-1}{n} + 1$  polinômios de Darboux irredutíveis (onde  $d$  é o grau do sistema e  $n$  sua dimensão), então  $\mathfrak{X}$  possui uma integral primeira que pode ser expressa através de tais polinômios. Posteriormente, Preme e Singer mostraram que é possível construir fator integrante algébrico para um campo vetorial polinomial bidimensional, em casos nos quais o campo apresenta uma integral primeira elementar (Preme; Singer, 1983), indicando a possibilidade da construção de um semi-algoritmo, permitindo determinar explicitamente a integral primeira do campo. Como vimos, a ideia era, obter os polinômios de Darboux, construir fator integrante e determinar a integral primeira do sistema<sup>52</sup>. Entretanto, o passo inicial do procedimento sempre foi, em geral, o mais custoso, via de regra, computacionalmente caro. Por tal motivo houve, nas duas últimas décadas, grandes buscas por procedimentos que sejam capazes de melhorar esta condição, com propostas que reduzem tempo de processamento e consumo de memória, exatamente à maneira como fizemos neste trabalho. Neste sentido, também contribuíram com desenvolvimentos de importância vários outros autores, por exemplo:

- Em Christopher *et al.* (2007) e Christopher *et al.* (2009) se estabeleceu um algoritmo que permite determinar campos vetoriais planares que apresentam um determinado autopolinômio. O método proposto é capaz de fornecer explicitamente uma expressão dos campos quando todos os pontos singulares (em número finito) das curvas algébricas são não degenerados.
- Ferragut e Gasull (2015) estabelecem uma maneira que melhora consideravelmente o procedimento dos coeficientes indeterminados para o cálculo dos autopolinômios de um campo vetorial polinomial.
- Ferragut, Galindo e Monserrat (2019) desenvolveram uma forma de se determinar

---

<sup>52</sup> Existem detalhes um pouco mais complicados nesse sentido pois é necessário saber, de antemão, se o campo vetorial analisado possui polinômios de Darboux e, é também necessário saber quando existe uma integral primeira Liouvillian, o que dá razão ao fato de que os algoritmos envolvidos são, na verdade, semi-algoritmos. Desse modo, além dos desenvolvimentos que buscam por aperfeiçoamentos nos métodos de obtenção dos polinômios de Darboux, ocorrem também pesquisas extensas no âmbito da integrabilidade de sistemas que apresentam integrais primeiras Liouvillianas. Veja, por exemplo Coutinho e Schechter (2009), Christopher *et al.* (2002), Chavarriga *et al.* (2003), Zhang (2016).

integrais primeiras Darbouxianas  $\prod_i p_i^{n_i}$ , sendo  $p_i$  polinômios de Darboux de uma determinada classe de campos vetoriais polinomiais planares.

Desenvolvimentos em Llibre; Valls (2007) e Llibre; Valls (2005) também evidenciam a importância dos desdobramentos no contexto da teoria de integrabilidade de Darboux para a física, propondo avaliações sob estes aspectos para as equações diferenciais de Einstein-Yang-Mills e para o sistema de equações do modelo Bianchi IX, estudos semelhantes também são apresentados em Valls (2005) para o chamado sistema de Rikitake, além também de abordagens similares feitas nos trabalhos Llibre; Zhang (2002) e Zhang (2002) para o sistema de Lorenz. Portanto, notavelmente, os avanços que se dão neste sentido, seja com respeito à integrabilidade dos sistemas, seja com respeito ao refinamento dos mais diferentes métodos de obtenção das integrais primeiras, representam também contribuições para toda uma gama de diferentes campos de estudos que se utilizam da teoria dos sistemas dinâmicos, obviamente, sempre com intuito de prover descrições e extrair informações de relevância para o sistema que lhes é de interesse. Os resultados que apresentamos aqui podem (e devem), portanto, ser incorporados a este ferramental teórico de relevância que mencionamos para as ciências exatas de um modo geral, com algoritmos que se mostram altamente eficientes e que representam um aprimoramento crucial para o que até então se enxergava como um procedimento dispendioso.

## REFERÊNCIAS

- ABRAHAM-SHRAUNER, B. Hidden symmetries and nonlocal group generators for ordinary differential equations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, [S.l.]. v. 56, n. 3, p. 235–252, 1996. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S001046550700255X>. Acesso em: 13 oct. 2023.
- ABRAHAM-SHRAUNER, B.; GOVINDER, K. S.; LEACH, P. G. L. Integration of second order ordinary differential equations not possessing Lie point symmetries. *Physics Letters A*, [S.l.]. v. 203, n. 4, p. 169–174, 1995.
- AVELLAR, J. et al. Dealing with rational second order ordinary differential equations where both darbox and lie find it difficult: the S-function method. *Computer Physics Communications*, [S.l.]. v. 234, p. 302–314, Janueary 2019.
- AVELLAR, J. et al. Determining Liouvillian first integrals for dynamical systems in the plane. *Computer Physics Communications*, [S.l.]. n. 177, p. 584–596, 2007. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S001046550700255X>. Acesso em: 7 nov. 2022.
- AVELLAR, J.; DUARTE, L. G. S.; MOTA, L. A. C. P. da. *Métodos Não-Classificatórios e Novos Algoritmos Para a Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: EdUERJ, 2020. (ALG0R1THMICA). ISBN 978-85-7511-522-0.
- BERRONE, L. R.; GIACOMINI, H. Inverse Jacobi Multipliers. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, [S.l.]. **52**(1), p. 77–130, February 2003.
- BLUMAN, G. W.; KUMEI, S. *Symmetries and Differential Equations*. New York: Springer, 1989. v. 81. (Applied Mathematical Sciences, v. 81). ISBN 978-1-4757-4307-4.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8th. ed. [S.l.]: LTC Editora, 2006. ISBN 85-216-1499-3.
- CHAVARRIGA, J. et al. Darboux integrability and the inverse integrating factor. *Journal of Differential Equations*, [S.l.]. v. 194, n. 1, p. 116–139, 2003. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0022-0396\(03\)00190-6](https://doi.org/10.1016/S0022-0396(03)00190-6). Acesso em: 10 no. 2023.
- CHRISTOPHER, C. Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, [S.l.]. n. 49, ISSN: 1072-6691, p. 1–7, 1999. Disponível em: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/1999/49/christopher.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2023.
- CHRISTOPHER, C. et al. Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, [S.l.]. v. 35, p. 2457–2476, 2002.
- CHRISTOPHER, C. et al. Inverse problems for multiple invariant curves. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, [S.l.]. v. 137, n. 6, p. 1197–1226, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/S0308210506000400>. Acesso em: 7 nov. 2023.

CHRISTOPHER, C. et al. Inverse problems for invariant algebraic curves: Explicit computations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, [S.l.]. v. 139, n. 2, p. 287–302, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/S0308210507001175>. Acesso em: 7 nov. 2023.

COHEN, A. *An Introduction to the Lie theory of one-parameter groups with applications to the solutions of differential equations*. [S.l.]: D. C. Heath & CO., Publishers, 1911. Replacement Volume from Cornell University Library.

COUTINHO, S. C.; SCHECHTER, L. M. Algebraic solutions of plane vector fields. *Journal of Pure and Applied Algebra*, [S.l.]. v. 213, n. 1, p. 144–153, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2008.06.003>. Acesso em: 10 nov. 2023.

DARBOUX, G. De l'emploi des solutions particulières algébriques dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles algébriques. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, [S.l.]. v. 86, p. 1012–1014, 1878a.

DARBOUX, G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges). *Bull. Sci. Math.*, [S.l.]. v. 2, p. 60–96, 1878b.

DAVENPORT, J. H. What might “understand a function” mean? In: KAUERS, M. et al. (Ed.). *Towards Mechanized Mathematical Assistants*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2007. p. 55–65. ISBN 978-3-540-73086-6.

DAVENPORT, J. H.; SIRET, Y.; TOURNIER, E. *Computer Algebra: Systems and Algorithms for Algebraic Computation*. Great Britain: Academic Press, 1993.

DEME, I. *Um novo uso de simetrias de Lie não-locais na obtenção de quantidades conservadas*. 2023. Tese (Doutorado) — Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

DEME, I.; DUARTE, L. G. S.; MOTA, L. A. C. P. DA. *A new use of nonlocal symmetries for computing Liouvillian first integrals of rational second order ordinary differential equations*. 2023. ArXiv:2310.04850[nlin.CD]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2310.04850>. Acesso em: 22 nov. 2023.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. (Coleção Matemática Universitária). ISBN 978-85-244-0425-2.

DUARTE, L. G. S. *Simetrias e Integrabilidade por Quadraturas de Equações Diferenciais Ordinárias*. 1997. Tese (Doutorado) — Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1997.

DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; MOTA, L. A. C. P. da. A method to tackle first-order ordinary differential equations with Liouvillian functions in the solution. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, [S.l.]. v. 35, p. 3899–3910, April 2002.

DUARTE, L. G. S.; DUARTE, S. E. S.; MOTA, L. A. C. P. da. Analysing the structure of integrating factors for first-order ordinary differential equations with Liouvillian functions in the solution. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, [S.l.]. v. 35, p. 1001–1006, January 2002.

DUARTE, L. G. S. et al. Solving second order ordinary differential equations by extending the PS method. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, [S.l.]. v. 34, n°14, p. 3015–1024, April 2001.

DUARTE, L. G. S.; MOTA, L. A. C. P. da. Finding elementary first integrals for rational second order ordinary differential equations. *Journal of Mathematical Physics*, [S.l.]. **50**, 013514, January 2009.

DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTES, J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. "Berlin; Heidelberg": Springer Science & Business Media, 2006. (Universitext). ISBN 3-540-32902-1.

ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS. *Algebraic Function*. 2022. Disponível em: [http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Algebraic\\_function&oldid=52438](http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Algebraic_function&oldid=52438). Acesso em: 01 jun. 2023, last edited on 15 June 2022.

FERRAGUT, A.; GALINDO, C.; MONSERRAT, F. On the computation of Darboux first integrals of a class of planar polynomial vector fields. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, [S.l.]. v. 478, n. 2, p. 743–763, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.05.052>. Acesso em: 4 jan. 2024.

FERRAGUT, A.; GASULL, A. Seeking Darboux polynomials. *Acta Applicandae Mathematicae*, [S.l.]. v. 139, p. 167–186, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10440-014-9974-0>. Acesso em: 4 jan. 2024.

GANDARIAS, M. L.; BRUZÓN, M. S. Reductions for some ordinary differential equations through nonlocal symmetries. *Computer Physics Communications*, [S.l.]. v. 18, p. 123–133, 2011.

JOHN, F. *Partial Differential Equations*. 4th. ed. New York: Springer-Verlag, 1981. v. 1. 9-11 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 1). ISBN 0-387-90609-6.

KAMKE, E. *Differentialgleichungen lösungsmethoden und lösungen*. New York: Chelsea Publishing Company, 1948.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. v. 1. ISBN 978-85-244-0118-3.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. (Coleção Matemática Universitária). ISBN 978-85-244-0420-7.

LLIBRE, J.; VALLS, C. Integrability of the Bianchi IX system. *Journal of Mathematical Physics*, [S.l.]. v. 46, n. 7, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1955453>. Acesso em: 16 jan. 2024.

LLIBRE, J.; VALLS, C. On the integrability of the Einstein-Yang-Mills equations. *J. Math. Anal. Appl.*, [S.l.]. v. 336, n. 2, p. 1203–1230, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.049>. Acesso em: 15 jan. 2024.

LLIBRE, J.; VALLS, C.; ZHANG, X. Liouvillian Integrability Versus Darboux Polynomials. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, [S.l.]. v. 15, p. 503–515, September 2016.

- LLIBRE, J.; ZHANG, X. Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system. *Journal of Mathematical Physics*, [S.l.]. v. 43, n. 3, p. 1622–1645, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1435078>. Acesso em: 15 jan. 2024.
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. 4. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019. ISBN 978-85-7861-597-0.
- MORDOUKHAY-BOLTOVSKOY, D. Recherches générales sur l'intégration en termes finis des équations différentielles du premier ordre. Mém i. *Communications de la Société mathématique de Kharkow*, [S.l.]. v. 2-ée série, 10, p. 34–64, 1907. Disponível em: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=khmo&paperid=140&option\\_lang=eng](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=khmo&paperid=140&option_lang=eng). Acesso em: 8 jun. 2022.
- MURIEL, C.; ROMERO, J. L.  $C^\infty$ -symmetries and reduction of equations without Lie point symmetries. *Journal of Lie Theory*, [S.l.]. v. 13, p. 167–188, 2003.
- MURIEL, C.; ROMERO, J. L. The  $\lambda$ -symmetry reduction method and Jacobi last multipliers. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, [S.l.]. n. 19, p. 807–820, 2014.
- NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. 2nd. ed. Bristol: IOP Publishing Ltd, 2003. (Graduate Student Series in Physics). ISBN 0 7503 0606 8.
- NASH, C.; SEN, S. *Topology and Geometry for Physicists*. 3rd.. ed. Orlando: Academic Press, Inc., 1987.
- OLVER, P. J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 1986. ISBN 0-387-94007-3.
- PINTO, A. d. S.; SILVA, P. N. d.; SANTOS, A. L. C. d. Grupos de lie e equações diferenciais ordinárias. *Cadernos do IME - Série Matemática*, [S.l.]. n. 13, p. 69–98, dez. 2019. Disponível em: <https://www.e-publicacoes.uerj.br/cadmat/article/view/46995>. Acesso em: 18 jun. 2023.
- PRELLE, M. J.; SINGER, M. F. Elementary First Integrals of Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, [S.l.]. v. 279, p. 215–229, September 1983.
- ROSA, R. M. S. *Notas de aula em: Equações Diferenciais (IM - UFRJ)*. 2022. Disponível em: <https://rmsrosa.github.io/assets/material/apostila-ed-ago2022.pdf>. Acesso em: 23 dez. 2023.
- SCHECK, F. *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos*. 4th. ed. [S.l.]: Springer, 2005. (Advanced Texts in Physics). ISBN 3-540-21925-0.
- SINGER, M. F. Liouvillian First Integrals of Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, [S.l.]. v. 333, n. 2, p. 673–688, October 1992. Disponível em: [https://singer.math.ncsu.edu/papers/liouvillian\\_first\\_int.pdf](https://singer.math.ncsu.edu/papers/liouvillian_first_int.pdf). Acesso em: 23 aug. 2022.
- SOTOMAYOR, J. *Equações Diferenciais Ordinárias*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2011. (Textos Universitários do IME - USP). ISBN 978-85-7861-118-7.

SPIVAK, M. *O Cálculo em Variedades*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003. ISBN 85-7393-225-2.

STEPHANI, H. *Differential equations - Their solution using symmetries*. New York: University of Cambridge, 1989. ISBN 0-521-35531-1.

TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2008. ISBN 978-85-212-0467-1.

TU, L. W. *An Introduction to Manifolds*. 2nd. ed. New York: Springer, 2011. ISBN 978-1-4419-7399-3.

VALLS, C. Rikitake system: analytic and Darbouxian integrals. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, [S.l.]. v. 135, n. 6, p. 1309–1326, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/S030821050000439X>. Acesso em: 16 jan. 2024.

ZHANG, X. Exponential factors and Darbouxian first integrals of the Lorenz system. *Journal of Mathematical Physics*, [S.l.]. v. 43, n. 10, p. 4987–5001, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1503152>. Acesso em: 16 jan. 2024.

ZHANG, X. Liouvillian Integrability of Polynomial Differential Systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, [S.l.]. v. 368, n. 1, p. 607–620, January 2016.

## APÊNDICE A – Corpos de Funções Elementares e Liouvillianas

### A.1 Corpos, subcorpos, corpos de funções e corpos diferenciais

**Definição A.1.1.** (Lima, 2009) Um **corpo** é um conjunto de elementos  $K$  sobre o qual estejam definidas duas operações binárias <sup>53</sup>,  $+$  e  $\cdot$  (adição e multiplicação), de modo que sejam satisfeitos os axiomas listados a seguir:

#### Axiomas da adição:

- *Comutatividade:*  $x + y = y + x$ , quaisquer que sejam  $x, y \in K$ ;
- *Associatividade:*  $x + (y + z) = (x + y) + z$ , para quaisquer  $x, y$  e  $z \in K$ ;
- *Elemento neutro:* existe um elemento  $0 \in K$  tal que  $x + 0 = x$ , qualquer que seja  $x \in K$ ;
- *Elemento inverso:* para cada  $x \in K$  existe um elemento  $-x \in K$  de modo que  $x + (-x) = 0$ .

#### Axiomas da multiplicação:

- *Comutatividade:*  $x \cdot y = y \cdot x$ , quaisquer que sejam  $x, y \in K$ ;
- *Associatividade:*  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ , para quaisquer  $x, y$  e  $z \in K$ ;
- *Elemento neutro:* existe um elemento  $1 \in K$  tal que  $x \cdot 1 = x$ , qualquer que seja  $x \in K$ ;
- *Elemento inverso:* todo elemento  $x \in K - \{0\}$  possui um inverso  $x^{-1}$ , tal que  $x \cdot x^{-1} = 1$ .

É importante este cuidado de mencionar que o elemento 0 não possui um inverso multiplicativo.

Um conjunto de elementos munido de apenas uma lei de composição que satisfaz os axiomas análogos aos da adição é chamado *grupo abeliano* (c.f. definição 3.1.2). Vale também destacar que o produto é distributivo em relação à adição, ou seja, dados  $x, y, z$  quaisquer em  $K$ , temos  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

---

<sup>53</sup> Quando dizemos que uma dada operação ou lei de composição entre elementos de um dado conjunto  $K$  é binária referimo-nos à propriedade de fechamento do conjunto pela operação em questão, i.e., para cada dois elementos  $u, v \in K$ , uma operação  $\phi(u, v)$  deve resultar em elemento contido em  $K$ .

**Definição A.1.2.** (Avellar; Duarte; Mota, 2020) Seja  $K$  um corpo, aos moldes da definição A.1.1. Um **subcorpo**  $P$  de  $K$  é subconjunto de  $K$ ,  $P \subseteq K$  e, frente as operações de adição e multiplicação é também um corpo, satisfazendo portanto os axiomas listados na definição anterior. Dizemos ainda que  $K$  é uma *extensão* de  $P$ .

**Exemplo A.1.1.** (Lima, 2009) O conjunto de elementos  $\mathbb{Q}(i)$  em forma de par ordenado  $z = (x, y)$ , com  $x, y$  números racionais, i.e.,  $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ , no qual estejam definidas operações de adição e multiplicação, de forma que, para quaisquer dois elementos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  em  $\mathbb{Q}(i)$  tenhamos  $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$  e  $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_2y_1 + x_1y_2)$ . O elemento neutro por operações de adição é representado por  $(0, 0)$  e o elemento neutro por operações de multiplicação é  $(1, 0)$ , se denotarmos por  $x$  quaisquer elementos do tipo  $(x, 0)$  e por  $i$  o elemento  $(0, 1)$ , percebe-se a possibilidade de representar cada elemento  $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$  como  $z = x + iy$ , de modo que considerando-se as operações de soma e multiplicação definidas acima construímos o que se denomina *corpo dos números complexos racionais*  $\mathbb{Q}(i)$ . Tendo o cuidado de se levar em conta que  $i^2 = -1$ , não é difícil verificar a validade dos axiomas que listamos para operações de corpo considerando soma e produto como definidas no contexto, a propósito, é possível também estabelecer sem grandes dificuldades que, o inverso multiplicativo  $(x', y')$  de qualquer elemento  $(x, y) \neq (0, 0)$  é tal que suas componentes se dão em termos das componentes do elemento  $(x, y)$  como

$$(x', y') = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right), \quad (206)$$

uma vez que, por definição,  $(x', y')(x, y) = (1, 0)$ .

Outro exemplo de suma importância, não só para o propósito deste trabalho, consiste do que se entende por um *corpo de funções*, vejamos:

**Exemplo A.1.2.** Dado um corpo numérico  $\mathbb{F}$ , o conjunto de funções racionais  $\mathbb{F}(t)$ , cujos elementos possuem então o formato  $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ , em que  $p(t)$  e  $q(t)$  são polinômios coprimos em  $t$  com coeficientes em  $\mathbb{F}$  ( $q(t)$  necessariamente não nulo), constitui um corpo de funções racionais por operações usuais de adição e multiplicação de funções algébricas, ou seja, se  $r_\alpha(t) = \frac{p_\alpha(t)}{q_\alpha(t)}$  e  $r_\beta(t) = \frac{p_\beta(t)}{q_\beta(t)}$  temos:

$$r_\alpha(t) \cdot r_\beta(t) = \frac{p_\alpha(t) \cdot p_\beta(t)}{q_\alpha(t) \cdot q_\beta(t)}, \quad (207)$$

além de

$$r_\alpha(t) + r_\beta(t) = \frac{p_\alpha(t) \cdot q_\beta(t) + q_\alpha(t) \cdot p_\beta(t)}{q_\alpha(t) \cdot q_\beta(t)}. \quad (208)$$

A partir deste ponto, todo o mais segue de maneira muito óbvia, o leitor pode determinar, caso queira, um elemento específico em  $\mathbb{F}(t)$  ao qual atribuirá a função de elemento neutro para operações de adição, bem como, um elemento específico de  $\mathbb{F}(t)$  com mesma funcionalidade para operações de multiplicação. Poderá também expressar uma relação entre as funções componentes (numerador e denominador) de elementos inversos multiplicativos ou aditivos em termos das componentes ( $p(t)$  e  $q(t)$ ) de uma função racional  $r(t)$  qualquer em  $\mathbb{F}(t)$ , tal qual como ocorre na equação (206) do exemplo anterior e, por fim, pode também verificar comutatividade e associatividade para operações entre os elementos do conjunto mediante o que se estabelece em (207) e (208).

Vale pontuar que, no exemplo A.1.2, o corpo de funções  $\mathbb{F}(t)$  é uma *extensão* do corpo do numérico  $\mathbb{F}$ , de onde se extrai os coeficientes das funções em  $\mathbb{F}(t)$ .

**Definição A.1.3.** (Avellar; Duarte; Mota, 2020) Denominamos **derivação** sobre um determinado corpo de funções suaves  $\mathbb{K}(t)$  a aplicação  $D_t : \mathbb{K}(t) \rightarrow \mathbb{K}(t)$  com as propriedades:

- *Linearidade:*  $D_t(a(t) + b(t)) = D_t a(t) + D_t b(t)$ ;
- *Regra de Leibniz:*  $D_t(a(t) \cdot b(t)) = a(t)D_t b(t) + b(t)D_t a(t)$ ,

sendo  $a(t)$  e  $b(t)$  funções em  $\mathbb{K}(t)$ . Assim fazemos alusão à derivação como uma abstração algébrica do conceito de derivada de funções em relação a uma variável  $t$ .

Constituímos assim, de maneira bastante natural, o cenário fundamental para descrição de propriedades algébricas de derivadas e anti-derivadas (primitivas) das funções, bem como, o cenário de base para o estudo das EDO's e suas soluções, em referência ao que denominamos *corpo diferencial*.

**Definição A.1.4.** Um **corpo diferencial** é um corpo de funções  $\mathbb{F}$  dotado de uma ou mais derivações (Avellar; Duarte; Mota, 2020).

Para elucidar a última definição e complementar as demais, que apresentamos anteriormente, seguem dois exemplos bastante simples:

- *O corpo  $\mathbb{R}(x)$  das funções racionais na variável  $x$  e coeficientes reais é dotado de derivação  $D_x$ . Notemos que,  $\mathbb{R}(x)$  é extensão do corpo de constantes  $\mathbb{R}$ , de onde extraímos os coeficientes das funções racionais em  $\mathbb{R}(x)$ .*
- *O corpo  $\mathbb{C}(x, y)$  das funções racionais nas variáveis  $x$  e  $y$  com coeficientes complexos é dotado de derivações  $D_x$  e  $D_y$ .  $\mathbb{C}(x, y)$  é uma extensão do corpo de constantes no plano complexo  $\mathbb{C}$ , que fornece os coeficientes para as funções racionais em  $\mathbb{C}(x, y)$ .*

## A.2 Funções elementares e funções Liouvillianas

As funções racionais, logarítmicas, exponenciais, hiperbólicas, hiperbólicas inversas, trigonométricas, trigonométricas inversas e quaisquer composições finitas de todas estas que mencionamos são consideradas parte de uma classe de funções usualmente conhecidas como elementares. Podemos definir a classe de funções elementares introduzindo o chamado *gerador elementar*.

**Definição A.2.1.** (Davenport, 2007), (Avellar; Duarte; Mota, 2020) Uma função  $\Omega$  é chamada um **gerador elementar** sobre um corpo diferenciável  $\mathbb{F}$  se pudermos caracterizar  $\Omega$  segundo uma das possibilidades seguintes:

- $\Omega$  é algébrico sobre  $\mathbb{F}$ , ou seja,  $\Omega$  é solução de equação polinomial com coeficientes em  $\mathbb{F}$ .
- $\Omega$  é exponencial em  $\mathbb{F}$ , quer dizer que deve haver algum  $\eta$  em  $\mathbb{F}$  tal que  $\Omega' = \eta'\Omega$ , o que implica  $\Omega = e^\eta$ .
- $\Omega$  é logarítmica em  $\mathbb{F}$ , quer dizer que existe um  $\eta$  de  $\mathbb{F}$  tal que  $\Omega' = \eta'/\eta$ , o que implica  $\Omega = \ln \eta$ .

Um objeto  $f$  é considerado elementar sobre  $\mathbb{F}$  se o mesmo puder ser representado através de um elemento da extensão de corpo  $\mathbb{F}(\theta_1, \dots, \theta_n)$  onde cada  $\theta_i$  corresponde a um gerador elementar sobre  $\mathbb{F}(\theta_1, \dots, \theta_{i-1})$ .

**Definição A.2.2.** (Davenport, 2007), (Avellar; Duarte; Mota, 2020) Uma função  $\Omega$  é chamada um **gerador Liouvilliano** sobre o corpo diferenciável  $\mathbb{F}$  se pudermos caracterizar  $\Omega$  segundo uma das possibilidades seguintes:

- $\Omega$  é algébrico sobre  $\mathbb{F}$ , ou seja,  $\Omega$  é solução de equação polinomial com coeficientes em  $\mathbb{F}$ .
- $\Omega$  é exponencial em  $\mathbb{F}$ , quer dizer que deve haver algum  $\eta$  em  $\mathbb{F}$  tal que  $\Omega' = \eta'\Omega$ , o que implica  $\Omega = e^\eta$ .
- $\Omega$  é uma integral sobre  $\mathbb{F}$ , ou seja, existe  $\eta$  em  $\mathbb{F}$  tal que  $\Omega' = \eta$ , o que implica  $\Omega = \int \eta$ .

Percebe-se, diretamente, por meio da última definição que a classe das funções elementares é, de fato, subcorpo do conjunto das funções Liouvillianas, uma vez que todo logaritmo pode ser representado através de uma integral (Avellar; Duarte; Mota, 2020).

**Definição A.2.3.** (Avellar; Duarte; Mota, 2020) Seja  $\mathbb{F}$  um corpo diferencial. Uma extensão do corpo  $\mathbb{F}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)$  é chamado **corpo de funções elementares** sobre  $\mathbb{F}$  se todo  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  for gerador elementar sobre  $\mathbb{F}$ . Uma função será então dita elementar se pertencente a um corpo de funções elementares sobre  $\mathbb{F}$ .

**Exemplo A.2.1.** (Avellar; Duarte; Mota, 2020) Seja  $\mathbb{C}(x)$  o corpo de funções racionais na variável  $x$  com coeficientes complexos. Podemos dizer que as funções trigonométricas são elementares sobre  $\mathbb{C}(x)$ . Consideremos, por exemplo, a função  $\text{sen}(x)$  escrita na forma

$$\text{sen}(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}.$$

Perceba que  $\Omega = e^{ix}$  é gerador elementar sobre  $\mathbb{C}(x)$ , pois possui a forma  $e^\eta$  com  $\eta \in \mathbb{C}(x)$ , então

$$\text{sen}(x) = \frac{\Omega^2 + 1}{2i\Omega}$$

pertence à extensão  $\mathbb{C}(\Omega)$ , um corpo de funções elementares sobre  $\mathbb{C}(x)$ .

A classe das funções ditas Liouvillianas é ainda mais geral que a classe das elementares, podemos dizer que as funções elementares formam um subcorpo do conjunto de funções Liouvillianas, vejamos:

**Definição A.2.4.** (Avellar; Duarte; Mota, 2020) Seja  $\mathbb{F}$  um corpo diferencial. A extensão  $\mathbb{F}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)$  é denominada **corpo de funções Liouvillianas** sobre  $\mathbb{F}$  se todo  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  for gerador Liouvilliano sobre  $\mathbb{F}$ . Uma função será então dita Liouvilliana se pertencente a um corpo de funções Liouvillianas sobre  $\mathbb{F}$ .

## APÊNDICE B – Campos vetoriais e formas diferenciais

Utilizaremos deste espaço em apêndice para introduzir noções básicas sobre variedades diferenciáveis, especificamente, direcionando nossos estudos aos tópicos que nos permitem entender, minimamente, o que se entende por *campos vetoriais* e *formas diferenciais*. Vamos incluir também alguma noção de álgebra exterior, definindo operações básicas entre formas diferenciais bem como operações sobre as formas diferenciais, em referência ao que se denomina produto exterior e derivada exterior, ambas as operações são interessantes para que o leitor tenha melhor acesso à definição exposta no texto referente a uma 1-forma exata, por exemplo. Também, a respeito de campos vetoriais, será apresentada uma breve discussão em um aspecto mais geométrico, que nos permite entender a motivação pela qual atribuímos caráter vetorial aos operadores diferenciais parciais lineares  $D$  e  $\mathcal{X}$ .

### B.1 Noção de espaço dual

Consideremos o espaço vetorial  $n$ -dimensional  $E$  e o espaço de funcionais lineares<sup>54</sup> de  $E$  em  $\mathbb{R}$ , o chamado *espaço dual* de  $E$ , usualmente denotado por  $E^*$ . Tomemos  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  como um conjunto de vetores de base de  $E$ , logo, cada vetor  $v \in E$  é representado através de uma combinação linear  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ ,  $v^i \in \mathbb{R}$ . O espaço dual de  $E$ , munido das operações usuais de funções, é também um espaço vetorial (Tenenblat, 2008), assim, uma função  $\alpha^i : E \rightarrow \mathbb{R}$  que retorna  $v^i$ , a  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{v}$  ( $\alpha^i(\mathbf{v}) = v^i$ ), é caracterizada por:

$$\alpha^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (209)$$

Desse modo, diremos que um conjunto de funções  $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$  representa uma base do espaço dual  $E^*$ , logo, qualquer função linear  $f$  de  $E^*$  pode ser representada na forma

$$f = \sum_{i=1}^n f_i \alpha^i. \quad (210)$$

---

<sup>54</sup> Essa noção, se desconhecida, deve ficar clara ao leitor na medida em que se dá sequência com a leitura.

A ação de  $f$  em  $\mathbf{v}$  é interpretada como um produto interno, pois

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n f_i \alpha^i (v^j e_j) = \sum_{i,j=1}^n v^j f_i \alpha^i (e_j) = \sum_{i=1}^n v^i f_i. \quad (211)$$

É comum utilizarmos  $\langle \bullet, \bullet \rangle : E^* \times E \rightarrow \mathbb{R}$  a fim de caracterizar o resultado de tal aplicação.

Ao longo do texto, os vetores com os quais trabalhamos são representados por operadores diferenciais parciais lineares

$$v = \sum_{i=1}^n v^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n). \quad (212)$$

A exemplo do gerador infinitesimal  $\mathcal{X}$  no contexto da teoria de Lie e  $d$  o operador de Darboux  $D$  (ou  $\mathfrak{X}$ ). Vamos tentar entender a motivação por trás disto. Veremos também que, por definição, o elemento denominado **forma diferencial de grau 1** (ou 1-forma) representa, na verdade uma aplicação que leva vetores a funções reais. Antes, porém, devemos estabelecer o lugar geométrico dos objetos com os quais estamos lidando.

## B.2 Variedades no $\mathbb{R}^n$

**Definição B.2.1.** Um **difeomorfismo** é uma função diferenciável  $h : U \rightarrow V$  entre dois abertos  $U$  e  $V$  do  $\mathbb{R}^n$ , cuja inversa é, também, diferenciável (Spivak, 2003).

**Definição B.2.2.** Uma **variedade**  $k$ -dimensional é o subconjunto  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  no qual pontos  $x \in M$  satisfazem o critério:

- Existe um difeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  entre os abertos  $U \supset x$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$  de modo que

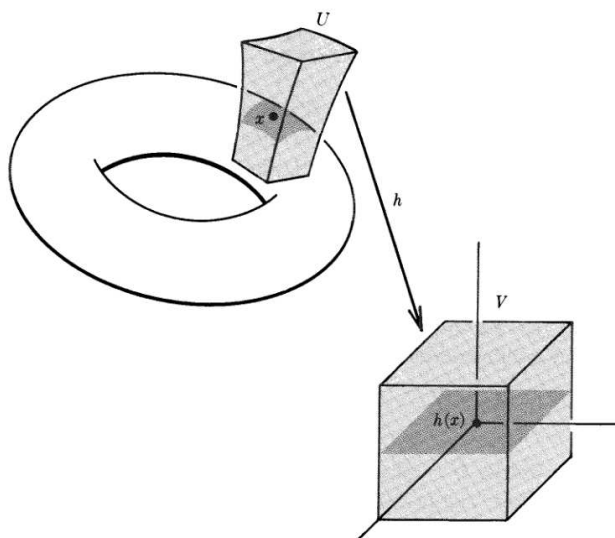
$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{y \in V : y^{k+1} = \dots = y^n = 0\} \text{ (vide figura (8)).}$$

Em outras palavras,  $U \cap M$  é simplesmente  $\mathbb{R}^k \cap \{0\}$  a menos de um difeomorfismo (Spivak, 2003). Devem ser considerados também os casos seguintes:

- Um ponto de  $\mathbb{R}^n$  é uma variedade 0-dimensional (Spivak, 2003);
- O próprio espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  constitui uma variedade e também, qualquer aberto do  $\mathbb{R}^n$  é uma variedade  $n$ -dimensional (Spivak, 2003).

**Teorema B.2.1.**  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade  $k$ -dimensional se, e somente se, para cada ponto  $x \in M$  pudermos definir uma função diferenciável biunívoca  $f : W \rightarrow U$  entre os abertos  $W \subset \mathbb{R}^k$  e  $U \ni x$  satisfazendo:

Figura 8 - Esquema representativo de uma variedade no  $\mathbb{R}^3$ .



Legenda: Variedade bidimensional no  $\mathbb{R}^3$ .

Fonte: Spivak, 2003, p. 110.

- $f(W) = M \cap U$ ;
- $f'(y)$  tem posto  $k$  para cada  $y \in W$ ;
- $f^{-1} : f(W) \rightarrow W$  é contínua.

À função  $f$  usualmente nos referimos como *sistema de coordenadas locais*<sup>55</sup>. Uma discussão mais detalhada a respeito das variedades, incluindo demonstração deste último teorema pode ser encontrada em Spivak (2003), para a proposta deste trabalho, basta que tenha ficado claro que, uma variedade  $k$ -dimensional  $M$  é localmente euclidiana e diferenciável.

### B.3 Espaço tangente

Suponha  $p(t)$  uma curva suave definida pelo deslocamento de  $p$ , um ponto genérico tomado sobre a variedade  $n$ -dimensional  $M$ . É possível, se considerarmos, localmente, um dado conjunto de coordenadas  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  diferenciáveis sobre a variedade  $M$ , caracterizarmos a curva  $p(t)$  em termos de componentes  $x^i(p(t))$ ,  $i = 1, \dots, n$  (Nash; Sen, 1987). A  $i$ -ésima componente do vetor tangente à curva é portanto obtida diretamente através de

<sup>55</sup> É bastante comum encontrarmos alguns conceitos mais fundamentais da topologia em definições de variedades, com uso frequente das chamadas *cartas* e/ou *atlas*, estas são definições equivalentes à que apresentamos aqui.

$$\frac{dx^i}{dt}(p(t)).$$

No âmbito da geometria diferencial, estaremos mais interessados no uso de objetos denominados campos vetoriais. Para que possamos estabelecê-los de fato, consideremos uma função  $f$  a valores reais definida sobre os pontos  $p$  da variedade,  $f(p)$  portanto, e assim, tal como se faz usualmente ao definir as chamadas derivadas direcionais, podemos nos perguntar sobre a taxa de variação de  $f$  à medida que  $p$  caminha ao longo da curva parametrizada  $p(t)$ . Em outras palavras, se considerarmos que uma variação no parâmetro  $t$  define um intervalo de tempo, estaremos então considerando a taxa de variação de  $f$  em relação ao tempo decorrido entre duas posições distintas de  $p$  sobre a curva, explicitamente

$$\frac{df}{dt}(p(t)).$$

Em termos de coordenadas locais,

$$\frac{df}{dt}(x^i(p(t))) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}(p(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Podemos considerar

$$\frac{df}{dt}(p(t)) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \left( a^i = \frac{dx^i}{dt}(p(t)) \right)$$

como aplicação de um operador diferencial  $\mathcal{X}$  sobre  $f$ , i.e.,  $\frac{df}{dt}(p(t)) = \mathcal{X}f$ . Esse operador é o que definimos como vetor tangente à  $M$  no ponto  $p$  com direção estabelecida pela curva  $p(t)$  (Nash; Sen, 1987). Intuitivamente, se propusermos estender a construção da ideia a todos os pontos  $p \in M$  (sendo  $M$  uma variedade compacta<sup>56</sup> e orientável), verifica-se que ao operador  $\mathcal{X}$  podemos nos referir por “*campo vetorial*”, i.e., uma função que associa um vetor a cada ponto da variedade, nesse sentido, talvez tenha ficado evidente que os operadores diferenciais parciais  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  constituem base de um espaço vetorial, o qual denomina-se *espaço tangente* (Nash; Sen, 1987). A ideia mais geral de espaço tangente é constituída a partir de uma consideração abstrata que leva em conta todas as derivadas de curvas suaves em  $M$  que passam por um ponto  $p \in M$ . Obviamente, podemos elucidar o conceito com exemplos no  $\mathbb{R}^3$ .

---

<sup>56</sup> Em poucas palavras, vamos considerar compacta uma variedade  $M$  fechada e limitada.

**Exemplo B.3.1.** Considere  $M$  a variedade correspondente a uma superfície esférica unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . O espaço tangente a  $S^2$  em um ponto  $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ , denotado por  $T_p S^2$ , como estabelecemos, constitui-se do conjunto de todas as derivadas de curvas que passam por  $p$  e estão contidas em  $S^2$ , ou seja, uma curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  é uma curva em  $S^2$  se, e somente se,  $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1$  para todo  $t$ . Além disso, se  $\gamma(0) = p$ , então  $\gamma'(0) \in T_p S^2$ . Assim, o espaço tangente  $T_p S^2$  é definido por derivadas de curvas parametrizadas  $\gamma(t)$  no  $\mathbb{R}^3$  que satisfazem a equação  $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1$  e passam pelo ponto  $p = (x_0, y_0, z_0)$ . Geometricamente,  $T_p S^2$  corresponde ao plano tangente à esfera em  $p$ .

Com isso, fica estabelecido um espaço vetorial  $T_p M$  associado a uma dada variedade  $M$  cujos elementos são, obviamente, vetores tangentes à variedade no ponto  $p \in M$ , representados em formato semelhante ao vetor  $v$  da equação (212).

## B.4 Espaço cotangente e formas diferenciais

Se retomarmos o contexto inicial, trabalhado na primeira seção deste apêndice, a fim de considerarmos um espaço vetorial dual  $T_p^* M$ , daremos um passo em direção à definição das chamadas formas diferenciais. Foi mencionado que as 1-formas levam vetores a funções reais, dessa maneira, iremos assim estabelecer que aos elementos do espaço dual de  $T_p M$  correspondem as 1-formas, algumas fontes consideram nomear tais elementos como *covetores* e, em paralelo ao que entende-se por campo de vetores (ou campo vetorial), um dito campo de covetores deve associar um covetor à cada ponto  $p$  de uma variedade suave  $M$ , um elemento de  $T_p^* M$ .

**Definição B.4.1.** A união (disjunta) dos espaços tangentes definidos em todos os pontos  $p$  de uma variedade suave  $M$  é o **fibrado tangente**,  $TM$  (Scheck, 2005).

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

**Observação B.4.1.** Se a variedade  $M$  da definição B.4.1 possui dimensão  $n$ , então  $TM$  será  $2n$ -dimensional, pois tomamos, em  $TM$  o ponto  $(p, \mathbf{v})$  representado por um ponto de base  $p \in M$  e vetor  $\mathbf{v} \in T_p M$ .

**Definição B.4.2.** O espaço dual de  $TM$  é denominado **fibrado cotangente** de  $M$ , denotado por  $T^* M$ , podemos considerá-lo, analogamente ao caso que se considera da definição B.4.1, a união (disjunta) dos espaços cotangentes sobre pontos  $p \in M$ :

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M. \quad (213)$$

**Definição B.4.3.** Um mapeamento  $\omega : M \rightarrow T^*M : p \mapsto \omega_p \in T_p^*M$  é chamado forma diferencial (Scheck, 2005).

Um elemento  $\omega_p \in T_p^*M$ , como sabemos, deve ser tal que

$$\omega_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R},$$

um elemento do chamado espaço dos covetores, portanto. A estes, atribui-se a forma geral

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) dx^i \quad (214)$$

sendo os coeficientes  $a_i(p)$  funções reais diferenciáveis definidas em um aberto  $U$  de  $M$ . A representação na equação (214) sugere considerarmos  $\{dx^i\}$  como um conjunto de base canônica do espaço  $T_p^*M$ , iremos verificar esta afirmação considerando o exemplo mais simples que se conhece de uma 1-forma. O diferencial de uma função  $g \in \mathcal{F}(M)$ , sendo  $\mathcal{F}(M)$  um conjunto de funções reais definidas localmente em uma dada variedade  $M$  ( $n$ -dim) é, de maneira usual, representado por  $dg$ , expresso como

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x^i} dx^i,$$

sugerindo, novamente, que o conjunto  $\{dx^i\}$  seja base canônica de  $T_p^*M$ .

Considere então  $g(\mathbf{x}) = x^j$ , sendo  $j$  um valor arbitrário do conjunto  $\{1, \dots, n\}$ , assim

$$dx^j = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} dx^i.$$

Veja que, se de fato  $dx^j$  for um dos elementos da base de  $T_p^*M$  então, assim como apresentamos na discussão inicial (equação (209)) devemos extrair, por aplicação de  $dx^j(\mathbf{v})$ , a componente  $v^j$  de um dado objeto  $\mathbf{v} \in T_pM$ . Vale retomar que a ação de um elemento de  $T_p^*M$  sobre um elemento de  $T_pM$  pode ser interpretada como um produto interno, como justifica equação (211), assim  $dx^j(\mathbf{v}) \equiv \langle dx^j, \mathbf{v} \rangle : T_p^*M \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ . Ora,

$$\langle dx^j, \mathbf{v} \rangle = \sum_i v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = v^i \delta_j^i = v^j,$$

como havíamos imaginado.

Duas 1-formas diferenciais  $\omega$  e  $\bar{\omega}$  definidas em um aberto  $U \subseteq M$  são ditas **linearmente independentes** se, para todo  $p \in U$ ,  $\omega(p)$  e  $\bar{\omega}(p)$  forem linearmente independentes como elementos do espaço vetorial  $T_p^*M$  (Tenenblat, 2008).

Estudar relações e estabelecer dependências entre as chamadas formas diferenciais envolve parte do que se conhece como *álgebra exterior* (álgebra de Grassmann), na qual são estabelecidas importantes operações envolvendo as formas diferenciais, a citar, o produto exterior e a derivada exterior, estudaremos ambos os casos em maiores detalhes nas próximas seções deste texto em apêndice.

Fundamentalmente, em álgebra linear, denomina-se *funcional linear* uma transformação  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  linear que associa valores numéricos a elementos de um espaço vetorial  $E$ , o conjunto  $E^*$  dos funcionais lineares é denominado espaço vetorial *dual* de  $E$ . Este ponto, pressuponho, podemos considerar familiar, já havíamos mencionado em um dos parágrafos iniciais da presente seção. Também, podemos nos referir às transformações  $\phi : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r \rightarrow \mathbb{R}$ , se lineares em cada um de seus argumentos (elementos dos espaços vetoriais  $E_k$ ,  $k = 1, \dots, r$ ), como *funcionais multilineares*. Com isso, é possível identificarmos os elementos  $\omega(p) \in T_p^*M$  à funcionais lineares em vetores de  $T_pM$ .

**Definição B.4.4.** Um funcional multilinear é **alternado** se, e somente se, é *anti-simétrico* (Lima, 2018), isto é,

$$\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -\phi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r).$$

Podemos exemplificar com alguns casos bem simples e, em parte, bastante familiares:

- O produto interno  $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional bilinear simétrico e positivo em  $E$ , pois para quaisquer  $u, u', v, v' \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle u + u', v \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle, & \langle \alpha u, v \rangle &= \alpha \langle u, v \rangle, \\ \langle u, v + v' \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle, & \langle u, \alpha v \rangle &= \alpha \langle u, v \rangle \quad (\text{Bilinearidade}); \end{aligned}$$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (\text{Comutatividade ou simetria}).$$

- O determinante de uma matriz  $n \times n$  cujas colunas são vetores  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ , indicado usualmente através de  $f(v_1, \dots, v_n) = \det[v_1, \dots, v_n]$  pode ser considerado

um funcional multilinear alternado ou anti-simétrico.

- Para  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  definidas no espaço vetorial  $E$ , a função  $f \wedge g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$(f \wedge g)(u, v) = f(u)g(v) - f(v)g(u)$$

é um funcional bilinear alternado. Este é um caso particular<sup>57</sup> do que se denomina *produto exterior* (Tu, 2011).

## B.5 Produto Exterior

Com o que foi apresentado até aqui já podemos interpretar certas operações bastante recorrentes em problemas de natureza física como aplicações dos conceitos trabalhados. Considere, por exemplo, um campo de forças  $\mathbf{K} = (K^1, K^2, K^3)$  e tomemos uma partícula movendo-se ao longo de uma curva  $\gamma$  sob ação de  $\mathbf{K}$ , em um curto intervalo de tempo  $dt$  a partícula efetua um deslocamento  $d\mathbf{r}$  a uma velocidade  $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ . O trabalho (por unidade de tempo) realizado por  $\mathbf{K}$  é dado através do produto escalar  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}$ , que podemos interpretar como o efeito da ação de uma 1-forma  $\omega_{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^3 K^i dx^i$  sobre  $\mathbf{v}$  (Scheck, 2005)

$$\omega_{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^3 K^i v^i = \langle \omega_{\mathbf{K}}, \mathbf{v} \rangle.$$

Outro exemplo interessante seria, considerando que  $\mathbf{v}$  seja um campo de velocidades em  $\mathbb{R}^3$ , podemos nos perguntar sobre o fluxo do campo  $\mathbf{v}$  através de uma área específica tomada em uma dada superfície orientada  $\Sigma$ . Considere que  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{s}$  são dois versores tangentes à superfície e definem, portanto, um paralelogramo em  $\Sigma$ . Por definição, o fluxo do campo através da área definida pelo paralelogramo na superfície (inclusive sinal) é dado através de  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{s})$

$$\Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = v^1(t^2 s^3 - t^3 s^2) + v^2(t^3 s^1 - t^1 s^3) + v^3(t^1 s^2 - t^2 s^1). \quad (215)$$

Uma quantidade escalar que pode ser interpretada como o resultado da ação de um funcional bilinear alternado sobre elementos  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{s}$  de seu domínio e, constitui ótima

---

<sup>57</sup> Particular e suficiente para o propósito deste texto.

motivação para o que iremos definir como o *produto exterior* (Scheck, 2005).

O **produto exterior** é definido como uma operação entre  $k$ -formas, se considerarmos o produto exterior entre dois elementos de base de um espaço  $T_p^*M$ , escrevemos  $dx^i \wedge dx^k$ , o resultado será uma 2-forma, definida também como uma quantidade escalar obtida por aplicação sobre dois elementos de  $T_pM$ .

$$(dx^i \wedge dx^k)(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = s^i t^k - s^k t^i.$$

Pelo modo como conseguimos expressar o fluxo de um campo vetorial na equação (215) do nosso exemplo podemos considerar que uma 2-forma se escreva como combinação linear entre elementos de base  $dx^i \wedge dx^k$  sendo  $i < k$  uma vez que, evidentemente, pela operação do produto “ $\wedge$ ”, verificamos que

$$dx^i \wedge dx^k = -dx^k \wedge dx^i$$

$$\implies dx^i \wedge dx^i = 0.$$

Não iremos apresentar aqui uma definição explícita para o produto exterior, não é de todo necessário para este trabalho que sejam estabelecidos os detalhes a respeito, aos interessados, indicamos Nakahara (2003), onde se pode encontrar um desenvolvimento devidamente rigoroso contendo definições mais gerais. Para o que se propõe neste texto em apêndice, basta apenas uma noção superficial destas ideias, é interessante somente para que o leitor esteja ciente da existência de  $k$ -formas, a fim de que possamos dar seguimento à uma brevíssima discussão sobre *derivada exterior*.

## B.6 Derivada Exterior

A representação usual das  $k$ -formas, como combinação linear entre elementos de base  $\{dx^i\}$  de um espaço vetorial, nos permitiu associar, facilmente, o diferencial de uma função real a uma 1-forma, um *vetor covariante*. Uma 2-forma, por sua vez, foi construída através do produto exterior entre duas 1-formas, é comumente associado a um *tensor* anti-simétrico covariante de ordem 2, nesse sentido, as 0-formas são funções usuais e, assim como obtivemos a 1-forma através de uma operação específica sobre a 0-forma  $g(\mathbf{x})$ , podemos também construir 2-formas se generalizarmos o procedimento utilizado para determinar  $dg$  aos demais casos e, a *derivada exterior* se encarrega deste papel.

$$d : \omega^k \rightarrow \omega^{k+1}, \quad (216)$$

Um mapa linear de  $k$ -formas à  $(k+1)$ -formas. Considere  $\omega^k$  uma  $k$ -forma representada como

$$\omega^k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

A derivada exterior  $d\omega^k$  é escrita como

$$d\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (217)$$

em que

$$d\omega_{i_1 \dots i_k} = \sum_j \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^j} dx^j. \quad (218)$$

Alguns exemplos simples serão suficientes para entendermos do que se trata a operação em questão:

**Exemplo B.6.1.** Considere as seguintes  $r$ -formas em  $\mathbb{R}^3$ :

1.  $\omega_0 = f(x, y, z),$
2.  $\omega_1 = \omega_x(x, y, z)dx + \omega_y(x, y, z)dy + \omega_z(x, y, z)dz,$
3.  $\omega_2 = \omega_{xy}(x, y, z)dx \wedge dy + \omega_{yz}(x, y, z)dy \wedge dz + \omega_{zx}(x, y, z)dz \wedge dx,$
4.  $\omega_3 = \omega_{xyz}(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz.$

Por aplicação de (217) com uso de (218) obtemos

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

$$d\omega_1 = \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx,$$

$$d\omega_2 = \left( \frac{\partial\omega_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\omega_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\omega_{xy}}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$d\omega_3 = 0.$$

Nota-se que por ação de  $d$  em  $\omega_0$  obtemos nos coeficientes as componentes do gradiente de uma função escalar  $f(x, y, z)$ . Dos coeficientes em  $d\omega_1$  temos as componentes do rotacional de uma 1-forma (vetor covariante)  $\omega_1 = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  e, de  $d\omega_2$  identificamos o divergente (Nakahara, 2003; Scheck, 2005). Considerando que a variedade em questão é tridimensional então, uma dada  $r$ -forma, com  $r > 3$  só poderia ser expressa de modo que pelo menos um dos elementos  $dx^i$  aparecesse mais de uma vez (Nash; Sen, 1987), justificando o resultado de  $d\omega_3$ .

Uma forma geral (muito útil e bastante comum) de se expressar o resultado que conhecemos do teorema de Stokes, por exemplo, utilizando-nos desta concepção das formas diferenciais seria

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

considerando  $M$  uma variedade  $n$ -dimensional compacta e orientável com bordo  $\partial M$  e  $\omega$  uma  $(n - 1)$ -forma (Nash; Sen, 1987).